



**HAL**  
open science

# Modèles et asymptotiques des interfaces fines et périodiques en électromagnétisme

Bérangère Delourme

► **To cite this version:**

Bérangère Delourme. Modèles et asymptotiques des interfaces fines et périodiques en électromagnétisme. Analyse numérique [math.NA]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. NNT: . tel-00650354

**HAL Id: tel-00650354**

**<https://theses.hal.science/tel-00650354>**

Submitted on 10 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

spécialité **Mathématiques appliquées**

(Ecole Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre)

présentée le 17 décembre 2010 par

**Bérangère DELOURME**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie**

Titre :

**Modèles et asymptotiques des interfaces fines et  
périodiques en électromagnétisme**

composition du jury :

*Directeurs* : Patrick Joly  
Houssein Haddar  
*Rapporteurs* : Abderrahmane Bendali  
Eric Bonnetier  
*Examineurs* : Grégoire Allaire  
Guy Bouchitté  
Jean-Jacques Chaillout  
Bruno Després  
Gregory Vial



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Etude d'un cas bi-dimensionnel</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Présentation du cas bi-dimensionnel</b>	<b>9</b>
2.1	Présentation du problème . . . . .	10
2.2	Objectifs . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Développement asymptotique</b>	<b>13</b>
3.1	"Ansatz" du développement asymptotique . . . . .	14
3.2	Termes de champs lointains . . . . .	15
3.2.1	Equations satisfaites par les champs lointains . . . . .	15
3.2.2	Développement des champs lointains au voisinage de l'interface $\Gamma$ . . . . .	15
3.3	Termes de champs proches . . . . .	18
3.3.1	Equations satisfaites par les champs proches . . . . .	18
3.3.2	Comportement des champs proches à l'infini . . . . .	19
3.4	Conditions de raccord . . . . .	22
3.5	Cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champs proches . . . . .	23
3.5.1	Cadre variationnel pour la résolution des problème de champs proches . . . . .	23
3.5.2	Caractérisation du noyau des problèmes de champs proches . . . . .	26
3.5.3	Un résultat général d'existence et d'unicité . . . . .	27
3.6	Cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champs lointains . . . . .	30
3.7	Construction des termes du développement asymptotique : existence et unicité . . . . .	30
3.7.1	Réécriture des problèmes récurrents . . . . .	31
3.7.2	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	32
3.8	Une forme semi-explicite du développement asymptotique . . . . .	34
3.8.1	Construction des termes $U_0, U_1$ et $U_2$ . . . . .	35
3.8.2	Construction des termes $u_0$ et $u_1$ . . . . .	37
3.8.3	Conditions de transmission à tout ordre . . . . .	38
3.9	Justification du développement asymptotique . . . . .	40
3.9.1	Résultat principal . . . . .	40
3.9.2	Erreur de raccord . . . . .	42
3.9.3	Erreur de champ proche . . . . .	43
3.9.4	Estimations d'erreurs optimales . . . . .	49
3.10	Annexes . . . . .	50
3.10.1	Preuve de la proposition 3.5.4 . . . . .	50
3.10.2	Quelques propriétés des fonctions "profils" . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Construction et analyse de conditions de transmission équivalentes</b>	<b>59</b>
4.1	Construction détaillée du modèle approché d'ordre 1 dans le cas symétrique . . . . .	61
4.1.1	Problème d'ordre 1 intuitif . . . . .	61
4.1.2	Décalage géométrique . . . . .	62
4.1.3	Construction d'un modèle décentré . . . . .	65
4.2	Construction de modèles approchés d'ordre 1 et 2 dans le cas général . . . . .	69
4.2.1	Une famille "naturelle" d'ATC . . . . .	69
4.2.2	Décalage géométrique . . . . .	69
4.2.3	Une famille d'atc décentrées . . . . .	70
4.3	Analyse d'un problème modèle décentré d'ATC . . . . .	72

4.4	Convergence des modèles approchés . . . . .	76
4.5	Etude des problèmes centrés . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>81</b>
5.1	Description de la méthode numérique . . . . .	82
5.1.1	Rappel des principales étapes de l'algorithme . . . . .	82
5.1.2	Description de l'expérience . . . . .	83
5.1.3	Quelques remarques sur la résolution des problèmes de cellule . . . . .	84
5.2	Modèle d'ordre 1 décentré . . . . .	86
5.2.1	Une condition inf-sup discrète . . . . .	86
5.2.2	Résultats qualitatifs . . . . .	87
5.2.3	Taux de convergence . . . . .	90
5.2.4	Impact du paramètre $\alpha$ . . . . .	91
5.3	Modèles d'ordre 2 . . . . .	92
<b>II</b>	<b>Etude d'un cas tridimensionnel</b>	<b>95</b>
<b>6</b>	<b>Un problème tridimensionnel simplifié</b>	<b>97</b>
6.1	Description du problème . . . . .	98
6.2	Analyse mathématique du problème modèle . . . . .	99
6.3	Démarche et objectifs . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Développement asymptotique</b>	<b>105</b>
7.1	Ansatz pour le développement asymptotique . . . . .	106
7.2	Termes de champ lointain . . . . .	106
7.2.1	Equations pour les champs lointains . . . . .	106
7.2.2	Développement de Taylor des champs lointains au voisinage de l'interface $\Gamma$ . . . . .	107
7.3	Termes de champs proches . . . . .	108
7.3.1	Equations satisfaites par les champs proches . . . . .	108
7.3.2	Comportements des champs proches à l'infini . . . . .	109
7.4	Conditions de raccord . . . . .	113
7.5	Cadre variationnel pour la résolution des problèmes de champs proches . . . . .	114
7.5.1	Caractérisation du noyau $\mathcal{N}_a(\mathcal{P})$ . . . . .	116
7.5.2	Une inégalité de Friedrichs . . . . .	118
7.5.3	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	120
7.6	Cadre variationnel pour la résolution des problèmes de champs lointains . . . . .	122
7.7	Construction des termes du développement asymptotique . . . . .	124
7.7.1	Construction explicite des termes $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathcal{E}_0$ et $\mathcal{H}_0$ . . . . .	125
7.7.2	Résultat général d'existence et d'unicité du développement asymptotique . . . . .	125
7.7.3	Vers la construction explicite du développement asymptotique : construction des termes $\mathbf{E}_1, H_1, \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{H}_1$ . . . . .	127
7.7.4	Expressions explicites des termes du développement asymptotique . . . . .	135
7.8	Justification du développement asymptotique . . . . .	137
7.8.1	Résultat principal . . . . .	137
7.8.2	Estimation de l'erreur de Raccord . . . . .	138
7.8.3	Estimation de l'erreur de consistance pour le champ proche . . . . .	141
7.8.4	Estimation d'erreur optimale pour le champs lointain . . . . .	146
7.9	Annexes . . . . .	147
7.9.1	Construction du développement asymptotique : développements formels . . . . .	147
7.9.2	Problèmes de champs proches . . . . .	148
7.9.3	Existence : une étape préliminaire . . . . .	150
7.9.4	Construction du développement asymptotique . . . . .	152

<b>8</b>	<b>Construction de la condition approchée d'ordre 1 dans le cas symétrique</b>	<b>159</b>
8.1	Introduction . . . . .	160
8.2	Réécriture du problème sous forme variationnelle . . . . .	162
8.2.1	Introduction de l'opérateur $\mathcal{G}$ . . . . .	162
8.2.2	Formulation variationnelle . . . . .	163
8.3	Décomposition de Helmholtz de l'espace $X^\delta$ . . . . .	164
8.3.1	Propriétés de l'espace $S^\delta$ et étude de la forme bilinéaire $b_\delta$ . . . . .	165
8.3.2	Démonstration de la décomposition de Helmholtz . . . . .	169
8.4	Propriétés de l'espace $X_0^\delta$ . . . . .	169
8.5	Existence et unicité de la solution . . . . .	172
8.6	Justification du modèle approché . . . . .	176
8.6.1	Développement asymptotique du problème approché . . . . .	177
8.6.2	Convergence du développement asymptotique . . . . .	178
8.6.3	Convergence du modèle approché . . . . .	178
8.7	Lemmes et preuves techniques . . . . .	179
8.7.1	Quelques résultats préliminaires . . . . .	179
8.7.2	Majoration de $-\mathcal{R} \left( \int_\Gamma \overline{\operatorname{div}_\Gamma D_2 u_T} \operatorname{div}_\Gamma u_T \right)$ . . . . .	181
<b>9</b>	<b>Condition approchée dans le cas symétrique en géométrie cylindrique</b>	<b>185</b>
9.1	Description du problème . . . . .	186
9.2	Construction du développement asymptotique . . . . .	187
9.2.1	Ansatz du développement asymptotique . . . . .	187
9.2.2	Equations pour les champs proches et les champs lointains . . . . .	188
9.2.3	Expression des deux premiers termes du développement en champ lointain . . . . .	189
9.3	Construction d'une condition de transmission approchée du premier ordre . . . . .	192
<b>10</b>	<b>Résultats numériques 3D</b>	<b>195</b>
10.1	Méthode de calcul de la solution exacte . . . . .	197
10.2	Résultats en géométrie cartésienne . . . . .	198
10.2.1	Description du test . . . . .	198
10.2.2	Résultats . . . . .	198
10.2.3	Taux de convergence . . . . .	200
10.3	Résultats en géométrie cylindrique . . . . .	201
10.3.1	Présentation du test . . . . .	201
10.3.2	Résultats . . . . .	202
10.3.3	Taux de convergence . . . . .	205
<b>11</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>207</b>
<b>A</b>	<b>Cas des obstacles parfaitement conducteurs</b>	<b>209</b>
A.1	Développement asymptotique . . . . .	211
A.1.1	Cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champs proches . . . . .	211
A.2	Condition de transmission approchée . . . . .	213
<b>B</b>	<b>Développement formel pour le traitement de l'extrémité des fils</b>	<b>217</b>
B.1	Introduction . . . . .	218
B.2	Résultats préliminaires . . . . .	219
B.3	Construction des profils pour la résolution des problèmes intérieurs . . . . .	223
B.3.1	Description du problème . . . . .	224
B.3.2	Développement asymptotique sur-variationnel . . . . .	225
B.3.3	Développement sous-variationnel . . . . .	228
B.3.4	Bilan . . . . .	235
B.4	Développement asymptotique . . . . .	236

---

B.4.1	Ansatz du développement asymptotique . . . . .	236
B.4.2	Conditions de raccord . . . . .	238
B.4.3	Constructions des premiers termes du développement asymptotique . . . . .	240
B.5	Condition Approchée . . . . .	244
B.5.1	Validation partielle de la condition approchée d'ordre 1 . . . . .	244
B.5.2	Ajout d'un terme correcteur . . . . .	245
B.6	Annexe : construction de l'opérateur Neumann To Dirichlet en champ proche . . . . .	246
<b>Bibliographie</b>		<b>249</b>

# Introduction générale

## Présentation du problème

Le laboratoire LETI du CEA-Grenoble s'intéresse à la simulation numérique de la diffraction d'une onde électromagnétique par la structure complexe présentée sur la figure 1.1. Cette structure est constituée d'un anneau fin de diélectrique d'épaisseur  $\delta$ , de rayon moyen  $r_*$  et de hauteur  $L_z$ , à l'intérieur duquel s'enroulent hélicoïdalement deux nappes de fils (dans deux sens différents). Chaque nappe de fils contient  $N$  fils régulièrement espacés suivant la variable angulaire  $\theta$  :  $N$  est compris entre 300 et 600. La distance entre deux fils consécutifs (donnée par  $2\pi r_*/N$ ) est du même ordre de grandeur que l'épaisseur  $\delta$  de l'anneau et est bien inférieure au rayon  $r_*$  ainsi qu'à la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde incidente.

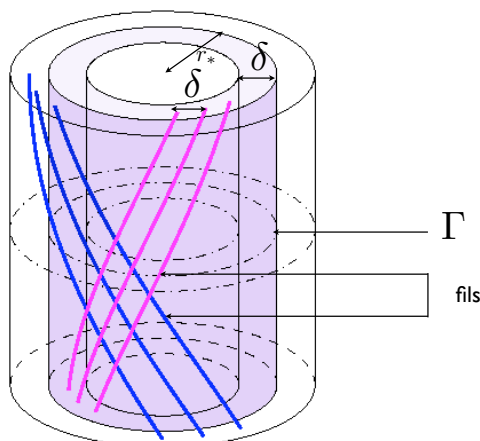


FIGURE 1.1 – Structure périodique

La présence de deux échelles bien distinctes (échelle microscopique  $\delta$  et échelle macroscopique  $\lambda$ ) rend les simulations numériques difficiles. En effet, si on veut utiliser la méthode des éléments finis pour réaliser cette simulation, il faut utiliser un maillage très fin qui suit la géométrie des fils si bien que la taille du système linéaire à résoudre explose.

## Objectif

L'objectif de cette thèse est de construire une méthode numérique adaptée à la simulation numérique de la diffraction par cette structure complexe. Plus précisément, on va chercher à remplacer les deux nappes de fils par une condition de transmission approchée posée sur l'interface médiane  $\Gamma$ . Ce modèle approché, posé sur un domaine homogène, permet de calculer précisément la solution loin des deux nappes de fils. La simulation numérique du modèle approché par une méthode d'éléments finis est bien moins coûteuse que la simulation du problème exact puisqu'il n'est plus nécessaire de mailler l'anneau périodique à l'échelle des fils.

D'un point de vue technique, nous construisons notre condition approchée à l'aide d'un développement asymptotique du champ électrique en fonction du paramètre  $\delta$ . Ce développement mixte la théorie de l'homogénéisation périodique et la technique des développements asymptotiques raccordés. Nous obtenons



ensuite une condition de transmission approchée en tronquant le développement asymptotique à un ordre donné.

### Choix de modélisation

Pour comprendre la diffraction par la structure périodique de la figure 1.1, nous étudions les solutions  $\mathbf{E}^\delta$  et  $\mathbf{H}^\delta$  des équations de Maxwell dans  $\mathbb{R}^3$  : le champ électrique  $\mathbf{E}^\delta$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}^\delta$  satisfont

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta - i\omega\mu^\delta \mathbf{H}^\delta = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ -\operatorname{curl} \mathbf{H}^\delta - i\omega\epsilon^\delta \mathbf{E}^\delta = -\frac{1}{i\omega} f & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.0.1)$$

La complexité géométrique de la structure présentée sur la figure 1.1 est prise en compte au travers de la perméabilité magnétique  $\mu^\delta$  et la permittivité électrique  $\epsilon^\delta$ . Ces fonctions prennent des valeurs différentes à l'intérieur des fils, dans l'anneau de diélectrique et à l'extérieur de l'anneau.

### Précisions et hypothèses sur la géométrie

Nous rappelons d'abord que l'équation d'une hélice circulaire de rayon  $r_*$  est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} r = r_*, \\ \theta(t) = \theta_0 + \frac{at}{r_*}, \\ z = t, \end{cases}$$

où  $a$  et  $\theta_0$  sont des constantes données. Nous faisons l'hypothèse que la section des fils reste constante sur chaque plan  $z = C$  et plus précisément nous supposons que nous pouvons exprimer  $\epsilon^\delta$  à l'aide d'une fonction  $\epsilon_0^\delta$  qui ne dépend que de deux variables (cf. figure 1.2) :

$$\epsilon^\delta(r, \theta, z) := \begin{cases} \epsilon_0^\delta(r, \theta - \frac{a}{r_*}z) & \forall r \leq r_*, \\ \epsilon_0^\delta(r, \theta + \frac{a}{r_*}z) & \forall r > r_*. \end{cases}$$

En fait, les valeurs de la fonction  $\epsilon^\delta$  à une hauteur  $z$  fixée se déduisent de manière explicite de la fonction  $\epsilon_0^\delta$

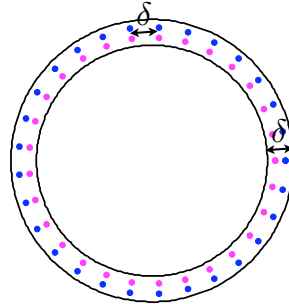


FIGURE 1.2 – exemple de fonction  $\epsilon_0^\delta$

(correspondant à  $\epsilon^\delta(r, \theta, 0)$ ) à l'aide d'une rotation. Nous avons séparé le cas  $r \leq r_*$  et  $r > r_*$  pour prendre en compte le fait que les deux nappes de fils s'enroulent dans des sens opposés. Remarquons que le cas  $a = 0$  correspond au cas des fils droits. Par ailleurs, comme les fils sont également régulièrement espacés dans la direction angulaire, il est clair que  $\epsilon_0^\delta$  est périodique dans la variable angulaire  $\theta$ , si bien qu'en fait on va étudier les cas où

$$\epsilon_0^\delta(r, \theta) = \epsilon_0\left(\frac{r - r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta}\right), \quad (1.0.2)$$

avec

$$\epsilon_0(\nu, s) = \epsilon_0(\nu, s + 1) \quad \text{et} \quad \epsilon_0(\nu, s) = 1 \quad \text{quand} \quad |\nu| \geq \frac{1}{2}. \quad (1.0.3)$$

Finalement

$$\epsilon^\delta(r, \theta, z) := \begin{cases} \epsilon_0\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta} - \frac{az}{\delta}\right) & \forall r \leq r_*, \\ \epsilon_0\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta} + \frac{az}{\delta}\right) & \forall r > r_*. \end{cases} \quad (1.0.4)$$

Ainsi  $\epsilon^\delta$  est non seulement périodique dans la variable angulaire  $\theta$  de période  $\delta$  mais également dans la variable  $z$  de période  $\tau_z = \frac{\delta z}{a}$ . La même remarque s'applique bien entendu à  $\mu^\delta$  :

$$\mu^\delta(r, \theta, z) := \begin{cases} \mu_0\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta} - \frac{az}{\delta}\right) & \forall r \leq r_*, \\ \mu_0\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta} + \frac{az}{\delta}\right) & \forall r > r_*. \end{cases} \quad (1.0.5)$$

où

$$\mu_0(\nu, s) = \mu_0(\nu, s + 1) \quad \text{et} \quad \mu_0(\nu, s) = 1 \quad \text{quand} \quad |\nu| \geq \frac{1}{2}. \quad (1.0.6)$$

### Remarque 1.0.1.

- Il faut remarquer que le choix de modélisation (1.0.2-1.0.6) est important pour la suite du travail. En effet, nous allons donc nous intéresser à différents problèmes modèles aux difficultés croissantes, dans lesquels le milieu étudié est périodique dans une direction en 2 dimensions et dans deux directions en 3 dimensions. Nous allons davantage utiliser la périodicité du milieu plutôt que l'hélicité des fils. Pour des travaux sur les fils hélicoïdaux, nous renvoyons le lecteur aux travaux de R.A. Waldron ([Wal58]) et de F. Treyssède ([Tre08] et [Tre07]).
- Nous pouvons également remarquer qu'un anneau périodique constitué d'une nappe de fils hélicoïdaux torsadés (de section droite) ne satisfait pas exactement l'hypothèse (1.0.2) : en effet, dans ce cas, il n'y a pas de fonction  $\epsilon_0(\nu, s)$  vérifiant (1.0.3) telle que  $\epsilon_0^\delta(r, \theta) = \epsilon_0\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta}\right)$ .
- Par ailleurs, on rappelle que l'objectif de notre travail est d'obtenir une condition de transmission pour un nombre  $N$  de fils donné ( $N$  compris entre 300 et 600). Pourtant, pour obtenir ce modèle approché, nous allons construire un développement asymptotique de la solution  $E^\delta$  en fonction de  $\delta = \frac{2\pi r_*}{N}$ ,  $\delta$  tendant vers 0. Nous insistons donc sur le fait que le choix de modélisation (1.0.2-1.0.6) et donc l'asymptotique choisie a une influence sur la condition de transmission obtenue. C'est seulement a posteriori que nous pouvons vérifier que l'asymptotique choisie correspond bien à la configuration physique que l'on souhaite simuler numériquement.

## Repères bibliographiques

Il existe de nombreux travaux relatifs à la construction de modèles approchés pour simuler des problèmes contenant plusieurs échelles. Sans être exhaustif, voici une liste de travaux présentant des similitudes avec le notre.

- **Conditions limites approchées pour la diffraction par un obstacle fortement conducteur** : en 1948, M.A. Leontovich ([Leo48]) a établi une condition d'impédance de surface qui lie le champ électrique et le champ magnétique par un coefficient de type impédance. Des conditions d'ordres élevés sont aussi proposées par T.B.A. Senior et J.L. Volakis ([SV95]). Dans les travaux précédents, les conditions limites équivalentes sont dérivées sans la construction préalable d'un développement asymptotique. Plus récemment, H. Haddar and P. Joly et H.M. Nguyen ([HJN08],[HJN05],[DHJ06]) ont obtenu, à partir d'un développement asymptotique, des conditions limites d'ordres élevés pour la diffraction par un obstacle régulier fortement conducteur. La construction du développement asymptotique a été étendue au cas d'un obstacle polyédrique par V.Peron [Per09].

- **Conditions limites approchées pour la diffraction par un obstacle parfaitement conducteur recouvert d'une couche mince diélectrique** : en 1975, R.F.Harrington et J.R.Mautz [HM75] ont écrit une condition limite équivalente à l'aide d'une représentation intégrale et en faisant des hypothèses sur la forme des courants, le domaine de validité de leur condition approchée devenant alors assez limité. Puis, en 1993, B.Engquist et J.C.Nedelec ont construit et justifié une condition limite équivalente à l'aide d'une approximation polynomiale de la solution à l'intérieur de la couche mince ([EN93]). Par une méthode différente, consistant à écrire un développement asymptotique de la solution en fonction de l'épaisseur de la couche mince, A.Bendali et K.Lemrabet ([BL96]) ont retrouvé ces conditions (dans le cas d'un domaine régulier). Ils ont aussi dérivé une condition d'ordre 3 mais celle-ci s'avère instable. Cette instabilité a été corrigée par N.Bartoli et A.Bendali ([BB02]) grâce à l'utilisation d'approximations de Padé. Par ailleurs, G.Caloz, M.Costabel, M.Dauge et G.Vial ([CCDV06]) ont étendu la construction du développement asymptotique de la solution au cas d'un obstacle polyédrique. Dans ce cas cependant, il semble difficile d'obtenir des conditions limites d'ordres élevés.
  
- **Conditions limites approchées pour la diffraction par un obstacle rugueux ou un obstacle parfaitement conducteur recouvert d'une couche mince périodique** : les conditions limites équivalentes modélisant la diffraction par un conducteur recouvert d'une couche mince contenant des conducteurs parfaits disposés périodiquement ont été introduites en électromagnétisme par M.Artola et M.Cessenat ([AC91a]-[AC91b]) et Y.Achdou ([Ach89]). Ce dernier a obtenu une condition limite approchée d'ordre 1 en écrivant un développement asymptotique basé sur les techniques d'homogénéisation développées par A.Bensoussan, J.L.Lions, G.Papanicolaou et E.Sanchez-Palencia ([BLP78], [SP85] et [SP80]). La méthode a ensuite été étendue aux géométries cylindriques pour l'équation de Helmholtz par A.Zebic ([Zeb94]) puis aux géométries quelconques par T.Abboud et H.Ammari ([AA96b]). Cette méthode a également été généralisée au cas d'une couche mince périodique diélectrique par H.Ammari et C.Latiri-Grouz ([ALG99]) et M. Tlemcani ([Tle09]). Des conditions d'ordres élevés pour les surfaces périodiques fortement oscillantes ont été développées par A.L.Madureira et F.Valentin ([MV07]) dans le cas de l'équation de Laplace et par J.R.Poirier, A.Bendali, P.Borderies et S.Tournier ([PBB06], [PBBT09]) pour l'équation de Helmholtz.
  
- **Conditions de transmission approchées pour la diffraction par des couches minces** : le cas de couches minces homogènes fortement conductrices a été étudié par K.Schmidt ([Sch08]) : il a obtenu un développement asymptotique à tout ordre ainsi que des conditions de transmission d'ordres élevés. Dans le cas des couches minces diélectriques, S.Chun, H.Haddar et J.S.Hesthaven ([CHH]) ont construit des conditions de transmission approchées d'ordres élevés pour les équations de Maxwell en régime temporel. En ce qui concerne les couches minces périodiques, D.Drissi ([Dri03]), E.Rohan et V.Lukes ([RL10]), D.Bresch et V.Milicic ([BM06]) et, plus récemment, I.Ciuperca, M.Jai et C.Poignard ([CJP10],[CJP09a],[CJP09b]) ont élaboré des conditions de transmission approchées d'ordre 1 et 2 pour les couches minces périodiques. J.B.Bellet ([Bel10]) a quant-à lui écrit une condition de transmission approchée pour la simulation d'une couche mince périodique séparant un milieu homogène d'un milieu périodique.

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes peu étendus sur les techniques utilisées. Nous y reviendrons en détails au cours des différents chapitres de la thèse.

## Plan de la thèse et résultats

Cette thèse comporte deux parties principales. Dans une première partie, nous étudions un problème modèle bi-dimensionnel, qui peut être vu comme une coupe suivant un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre du problème complet. Nous nous intéressons à la résolution de l'équation de Helmholtz dans un domaine constitué d'un anneau diélectrique fin et périodique placé de le vide. Nous commençons par décrire le problème étudié (chapitre 2) puis nous construisons et justifions un développement asymptotique complet de la solution de ce problème (chapitre 3). Nous en déduisons des conditions de transmission approchées (chapitre 4). Nous prêtons particulièrement attention à la stabilité de ces conditions. Enfin, nous montrons des résultats numériques qui

confirment la précision et la stabilité de nos modèles (chapitre 5).

Dans une seconde partie, nous nous intéressons au problème tri-dimensionnel complet. Pour des questions techniques, nous présentons d'abord un problème posé en géométrie cartésienne (on peut imaginer qu'on déplie l'anneau périodique) avec des conditions périodiques sur le bord du domaine (chapitre 6). Tout comme en dimension 2, nous écrivons d'abord un développement asymptotique de la solution (chapitre 7) puis nous en déduisons un modèle approché stable (chapitre 8). Même si la démarche globale reste similaire au cas bi-dimensionnel, les équations de Maxwell rendent les calculs plus techniques et l'analyse plus délicate. Nous expliquons ensuite formellement comment obtenir un modèle approché dans le cas d'une géométrie cylindrique (chapitre 9) et nous terminons cette partie par des résultats numériques qui là aussi confirment l'efficacité de notre modèle (chapitre 10).



Première partie

Etude d'un cas bi-dimensionnel



# Présentation du cas bi-dimensionnel

---

## Sommaire

---

2.1	Présentation du problème . . . . .	10
2.2	Objectifs . . . . .	12

---



## 2.1 Présentation du problème

Soit  $\Omega$ , le disque de centre 0 et de rayon  $r_e$ .

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{x}| < r_e\}.$$

Nous nous intéressons à la résolution du problème : chercher  $u^\delta \in H^1(\Omega)$  satisfaisant

$$\nabla \cdot (\epsilon_\delta^{-1} \nabla u^\delta) + \omega^2 \mu_\delta u^\delta = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1.1)$$

et la condition limite

$$\partial_r u^\delta + i\omega u^\delta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.1.2)$$

$\epsilon_\delta^{-1}$  et  $\mu_\delta$  sont les permittivité et perméabilité du milieu,  $\omega$  est la fréquence et  $f$  est un terme source donné.

Soit  $r_*$  un réel positif strictement inférieur à  $r_e$ . On appelle  $\Gamma$  le cercle de centre 0 et de rayon  $r_*$ .

$$\Gamma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{x}| = r_*\}. \quad (2.1.3)$$

Le domaine  $\Omega$  est constitué d'un anneau de diélectrique périodique  $\{|r - r_*| \leq \delta/2\}$  placé dans un milieu homogène (cf. figure 2.1). L'anneau est périodique au sens où il contient de nombreuses hétérogénéités disposées périodiquement suivant la variable angulaire  $\theta$ . Cela signifie en particulier que les fonctions caractéristiques du milieu  $\epsilon_\delta^{-1}$  et  $\mu_\delta$  sont périodiques dans la direction angulaire  $\theta$ .

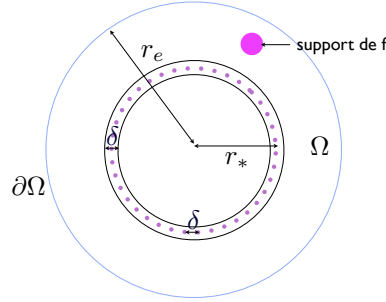


FIGURE 2.1 – Domaine  $\Omega$

Pour définir plus précisément cette périodicité, nous introduisons les variables tangentielle et normale dilatées  $s \in \mathbb{R}^+$  et  $\nu \in \mathbb{R}$

$$s = \theta \frac{r_*}{\delta} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{r - r_*}{\delta}. \quad (2.1.4)$$

Nous supposons alors qu'il existe deux fonctions  $\epsilon$  et  $\mu$  dépendant uniquement des variables dilatées  $\nu$  et  $s$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon(\nu, s + 1) = \epsilon(\nu, s), \\ \mu(\nu, s + 1) = \mu(\nu, s), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \epsilon(\nu, s) = \epsilon_\infty & \text{si } |\nu| > \frac{1}{2}, \\ \mu(\nu, s) = \mu_\infty & \text{si } |\nu| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

telles que

$$\epsilon_\delta(r, \theta) = \epsilon\left(\frac{r - r_*}{\delta}, \theta \frac{r_*}{\delta}\right) \quad \text{et} \quad \mu_\delta(r, \theta) = \mu\left(\frac{r - r_*}{\delta}, \theta \frac{r_*}{\delta}\right) \quad \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]. \quad (2.1.6)$$

Les fonctions  $\epsilon$  et  $\mu$  sont bornées inférieurement et supérieurement, c'est à dire qu'il existe une constante strictement positive  $\alpha$  telle que  $\alpha < \epsilon < 1/\alpha$  et  $\alpha < \mu < 1/\alpha$ .

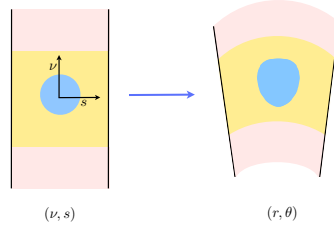


FIGURE 2.2 – Changement de variables

**Remarque 2.1.1.** Nous pouvons remarquer que le changement de variables  $s = \theta r_*/\delta$ ,  $\nu = r - r_*/\delta$  n'est pas cartésien. Cela signifie par exemple que si les hétérogénéités sont circulaires à l'échelle microscopique, elles ne le seront pas à l'échelle macroscopique (cf. figure 2.2).

Nous nous intéressons aux situations dans lesquelles le paramètre  $\delta$  est bien inférieur à la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$  de l'onde incidente. Enfin, nous faisons l'hypothèse que  $\text{supp} f \cap \Gamma = \emptyset$ .

Nous rappelons par ailleurs que le problème variationnel associé au problème (2.1.1) et (2.1.2) est donné par

$$\begin{aligned} \text{chercher } u^\delta \in H^1(\Omega) \text{ telle que } a^\delta(u^\delta, v) &= \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \\ \text{où } a^\delta(u, v) &= \int_{\Omega} (\epsilon_\delta^{-1} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \mu_\delta u \bar{v}) \, d\mathbf{x} + i\omega \epsilon_\infty^{-1} \int_{\partial\Omega} u \bar{v} \, d\sigma. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Il est bien connu que ce problème est bien posé (voir par exemple [CK98]). Par ailleurs, on peut également montrer une condition de type inf-sup, uniforme par rapport au paramètre  $\delta$ .

**Proposition 2.1.2.** Il existe une constante  $C$  strictement positive et indépendante de  $\delta$  telle que

$$\|u^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \sup_{v \in H^1(\Omega), v \neq 0} \frac{|a^\delta(u^\delta, v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \quad \forall u^\delta \in H^1(\Omega). \quad (2.1.8)$$

*Démonstration.* Nous démontrons ce résultat par l'absurde (voir par exemple le théorème 2.1 de [HJN05], le lemme 12.14 de [Tor04] ou le théorème 1.2.1 de [Cla08] pour des preuves similaires).

Supposons que l'inégalité (2.1.8) soit fautive. Alors il existe une suite  $\delta_n$  qui tend vers 0 et une suite de fonctions  $u_n$  telle que

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad (a) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{v \in H^1(\Omega), v \neq 0} \frac{|a^{\delta_n}(u_n, v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = 0 \quad (b).$$

Comme  $u_n$  est bornée dans  $H_1(\Omega)$ , il existe une fonction  $u \in H_1(\Omega)$  et une sous suite (que l'on note aussi  $u_n$ ) telles que,  $u_n$  converge faiblement vers  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  quand  $n$  tend vers l'infini. De plus, comme  $\Omega$  est borné alors  $u_n$  converge fortement vers  $u$  dans  $L^2(\Omega)$ . Remarquons par ailleurs que, pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(\epsilon_{\delta_n}^{-1} - \epsilon_\infty^{-1}) \nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(\mu_{\delta_n} - \mu_\infty) v\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

En effet  $\epsilon_{\delta_n}$  et  $\mu_{\delta_n}$  tendent presque partout vers  $\epsilon_\infty$  et  $\mu_\infty$  dans  $\Omega$ . On peut donc montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\delta_n}(u_n, v) = a_0(u, v), \quad (2.1.9)$$

où

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega} (\epsilon_\infty^{-1} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \mu_\infty u \bar{v}) + \int_{s_R} \mu_\infty i\omega u \bar{v}.$$

En combinant (2.1.9) et l'hypothèse (b), on obtient

$$a_0(u, v) = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

ce qui signifie exactement que  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz homogène dans  $\Omega$  et satisfait la condition d'impédance  $\partial_r u + i\omega u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Donc  $u = 0$  (voir par exemple [CK98] ou [Néd01]) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$ .

De plus, comme  $u_n$  est solution de l'équation de Helmholtz,

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( |a^{\delta_n}(u_n, u_n)| + \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

En prenant la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

ce qui contredit l'hypothèse (a). □

**Remarque 2.1.3.** *Le cas bidimensionnel étudié correspond au cas 3D dans le cas où le cylindre est de hauteur infinie et où les fils sont droits et parallèles à l'axe du cylindre.*

## 2.2 Objectifs

Nous souhaitons construire un modèle approché dans lequel l'anneau périodique est remplacé par une condition de transmission posée sur l'interface  $\Gamma$ . La simulation numérique du modèle approché par une méthode d'éléments finis sera bien moins coûteuse que la simulation du problème exact puisqu'il ne sera plus nécessaire de mailler l'anneau périodique à l'échelle  $\delta$ . Pour cela nous écrivons d'abord un développement asymptotique de la solution en fonction du petit paramètre  $\delta$  (chapitre 3). Nous en déduisons des problèmes approchés stables et bien posés (chapitre 4). Enfin nous présentons des résultats numériques dans le chapitre (chapitre 5). Pour compléter cette première partie, on pourra lire l'annexe A dans laquelle on étudie le cas où les hétérogénéités sont remplacées par des obstacles conducteurs.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la construction de conditions de transmission ou de conditions limites approchées pour simuler une couche mince périodique a fait l'objet de nombreux travaux, citons par exemple [Ach89],[AA96b],[PBB06] et [CJP10]. Notre objectif est de compléter les précédents travaux dans deux directions principales. Tout d'abord nous construisons et justifions un développement de la solution  $u^\delta$  à tout ordre. D'autre part nous construisons des conditions de transmission équivalentes d'ordres 2 et 3 et nous montrons que les problèmes approchés associés sont bien posés et stables.

# Développement asymptotique

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>"Ansatz" du développement asymptotique</b>	<b>14</b>
<b>3.2</b>	<b>Termes de champs lointains</b>	<b>15</b>
3.2.1	Equations satisfaites par les champs lointains	15
3.2.2	Développement des champs lointains au voisinage de l'interface $\Gamma$	15
<b>3.3</b>	<b>Termes de champs proches</b>	<b>18</b>
3.3.1	Equations satisfaites par les champs proches	18
3.3.2	Comportement des champs proches à l'infini	19
<b>3.4</b>	<b>Conditions de raccord</b>	<b>22</b>
<b>3.5</b>	<b>Cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champs proches</b>	<b>23</b>
3.5.1	Cadre variationnel pour la résolution des problème de champs proches	23
3.5.2	Caractérisation du noyau des problèmes de champs proches	26
3.5.3	Un résultat général d'existence et d'unicité	27
<b>3.6</b>	<b>Cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champs lointains</b>	<b>30</b>
<b>3.7</b>	<b>Construction des termes du développement asymptotique : existence et unicité</b>	<b>30</b>
3.7.1	Réécriture des problèmes récurrents	31
3.7.2	Résultat d'existence et d'unicité	32
<b>3.8</b>	<b>Une forme semi-explicite du développement asymptotique</b>	<b>34</b>
3.8.1	Construction des termes $U_0, U_1$ et $U_2$	35
3.8.2	Construction des termes $u_0$ et $u_1$	37
3.8.3	Conditions de transmission à tout ordre	38
<b>3.9</b>	<b>Justification du développement asymptotique</b>	<b>40</b>
3.9.1	Résultat principal	40
3.9.2	Erreur de raccord	42
3.9.3	Erreur de champ proche	43
3.9.4	Estimations d'erreurs optimales	49
<b>3.10</b>	<b>Annexes</b>	<b>50</b>
3.10.1	Preuve de la proposition 3.5.4	50
3.10.2	Quelques propriétés des fonctions "profils"	52

### 3.1 "Ansatz" du développement asymptotique

Il n'est pas possible d'écrire un développement asymptotique de  $u^\delta$  solution du problème (2.1.1-2.1.2) en fonction de  $\delta$  uniforme sur tout le domaine  $\Omega$  : en effet, la solution varie rapidement dans le voisinage de l'anneau périodique. Il y a en fait un phénomène de couche limite au niveau de l'anneau périodique. Pour prendre en compte ce phénomène nous allons utiliser un développement asymptotique qui mixte des techniques issues de l'homogénéisation périodique et des développements asymptotiques raccordés.

La technique des développements raccordés consiste à considérer deux zones différentes (une zone de champ lointain et une zone de champ proche) et à écrire le développement de la solution dans chaque zone (les développements pouvant être différents), les deux développements coïncidant dans une zone intermédiaire dite zone de raccord. Cette technique a été développée par Van Dyke ([VD64]) pour étudier des problèmes de perturbations singulières en mécanique. Elle a été formalisée et analysée par l'école russe, citons par exemple [Il'92], [Gad03], [IDZ03] et [MNP00]. Plus récemment, cette méthode a été appliquée aux problèmes de propagation d'onde [JT06],[JT08],[Cla08], [JS08] [BHT<sup>+</sup>09].

Dans notre cas, nous supposons l'existence du développement suivant :

- Loin de l'anneau périodique nous cherchons un développement de la solution  $u^\delta$  de la forme suivante :

$$u^\delta(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n u_n^+(r, \theta) & r \gg r_*, \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n u_n^-(r, \theta) & r \ll r_*. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où les champs lointains  $u_n^\pm$ , indépendants de  $\delta$ , sont définis dans  $\Omega^\pm$  (fig. 3.1(a)) :

$$\Omega^- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{x}| < r_*\}, \quad \Omega^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, r_* < |\mathbf{x}| < r_e\}.$$

On appelle  $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  le champ dont la restriction aux domaines  $\Omega^\pm$  est  $u_n^\pm$ .

- Au niveau de l'anneau périodique, on doit tenir compte du fait que  $\mu$  et  $\rho$  sont périodiques. C'est pourquoi nous supposons que

$$u^\delta(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n U_n\left(\frac{r - r_*}{\delta}, \frac{r_* \theta}{\delta}; \theta\right), \quad (3.1.2)$$

$$U_n(s, \nu; \theta) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ périodique de période 1 en } s,$$

Comme les termes de champs proches  $U_n$  sont périodiques, on peut les identifier à leur restriction au domaine  $B^*$

$$B^* := B \times [0, 2\pi] \quad \text{où } B := ] - 1/2, 1/2[ \times \mathbb{R} \quad (3.1.3)$$

La cellule de périodicité  $B$  est présentée sur la figure 3.1(b).

Ce type de développement est classique dans la théorie de l'homogénéisation ([All02],[BLP78]). On le retrouve également lors de l'étude de frontières rugueuses par exemple dans [Ach89], [AA96b], [Zeb94], [CJP09a] et [PBBT09].

- Les deux développements coïncident dans deux zones de raccord  $\Omega_{M,\delta}^+$  et  $\Omega_{M,\delta}^-$  (fig. 3.1(c)) définies par :

$$\Omega_{M,\delta}^+ := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, \eta^-(\delta) \leq r - r_* \leq \eta^+(\delta)\},$$

$$\Omega_{M,\delta}^- := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, \eta^-(\delta) \leq -(r - r_*) \leq \eta^+(\delta)\},$$

où,  $\eta^\pm$  vérifient,

$$0 < \eta^- < \eta^+, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \eta^\pm = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\eta^\pm(\delta)}{\delta} = \pm \infty. \quad (3.1.4)$$

Par exemple, on peut prendre  $\eta^-(\delta) = \sqrt{\delta}$  et  $\eta^+(\delta) = 2\sqrt{\delta}$ .

Pour les champs lointains (échelle macroscopique  $(r, \theta)$ ), les zones de raccord correspondent à des zones où  $r$  est proche de  $r_*$ . Ces mêmes zones correspondent par contre à des zones où  $\nu$  est grand ( $\nu$  tend vers  $\pm\infty$ ) pour les champs proches (échelle microscopique  $(\nu, s)$ ). Les conditions de raccord vont donc lier les comportements de champs proches à l'infini aux comportements des champs lointains au voisinage de  $\Gamma$ .

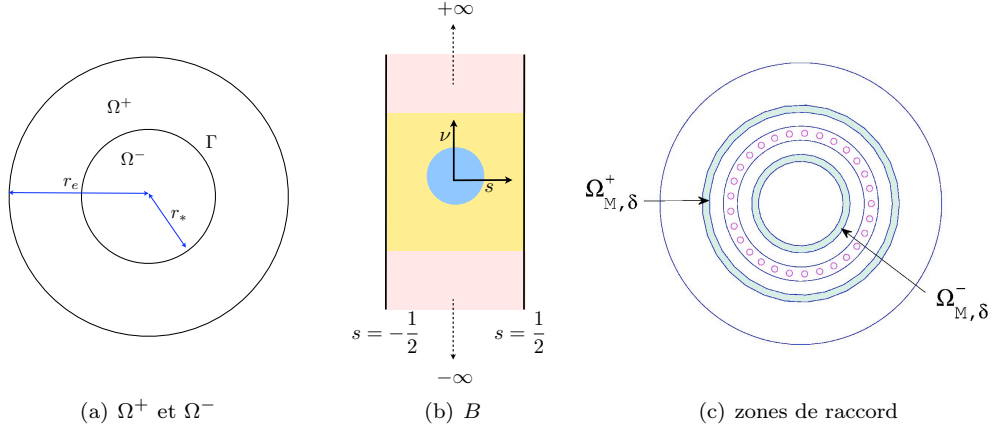


FIGURE 3.1 – Domaine de définition des champs lointains et des champs proches

**Remarque 3.1.1.** *Il existe une alternative à la méthode des développements raccordés, la méthode des développements multi-échelles. En fait, ces deux méthodes sont "équivalentes". Dans l'article [TVD06], les deux méthodes sont comparées.*

On va maintenant étudier les problèmes satisfaits par les termes de champs lointains (section 3.2) et les termes de champs proches (section 3.3). Puis nous en déduisons les conditions de raccord (section 3.4).

## 3.2 Termes de champs lointains

### 3.2.1 Equations satisfaites par les champs lointains

Pour obtenir les équations satisfaites par les champs lointains, il suffit de substituer  $u^\delta$  dans (2.1.1) et (2.1.2) par son développement en champ lointain (3.1.1), puis de séparer formellement les différentes puissances de  $\delta$ . On obtient :

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_n^\pm + \omega^2 \mu_\infty u_n^\pm = f \delta_n^0 & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \partial_r u_n^+ + i\omega u_n^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où  $\delta_n^0$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_0^0 = 1$  et  $\delta_n^0 = 0$  pour tout entier  $n \neq 0$ ). Le système (3.2.1) ne permet pas de définir  $u_n^\pm$  entièrement : il manque des conditions de transmission entre  $u_n^+$  et  $u_n^-$  au niveau de l'interface  $\Gamma$ . Ces informations vont nous être fournies par les conditions de raccord.

### 3.2.2 Développement des champs lointains au voisinage de l'interface $\Gamma$

Nous rappelons que les conditions de raccord font intervenir le comportement des champs lointains au voisinage de l'interface  $\Gamma$ . Aussi, il est intéressant de connaître et de préciser ce dernier.

Soit

$$\rho := r - r_*. \quad (3.2.2)$$

En plus d'être solution du système (3.2.1) nous supposons que les termes de champ lointain  $u_n^+$  et  $u_n^-$  sont très réguliers dans un voisinage de  $\Gamma$  (hypothèse qui sera vérifiée dans la suite), ce qui nous permet de les exprimer à l'aide de leur développement de Taylor :

$$u_n^\pm(r_* + \rho, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho^k u_{n,k}^\pm(\theta) \quad \text{où} \quad u_{n,k}^\pm(\theta) = \frac{1}{k!} \partial_\rho^k u_n^\pm(r_*, \theta). \quad (3.2.3)$$

Comme  $u_n^\pm$  satisfait aussi l'équation de Helmholtz homogène près de la frontière  $\Gamma$ , nous allons montrer que le développement de Taylor de  $u_n^\pm$  ne dépend en fait que des données de Cauchy  $u_n^\pm(r_*, \theta)$  et  $\partial_\rho u_n^\pm(r_*, \theta)$ . Nous allons aussi donner une expression explicite du développement (3.2.3) ne dépendant que de ces deux données. La preuve de ce résultat est basée sur une décomposition de l'opérateur  $r^2(\epsilon_\infty^{-1} \Delta + \omega^2 \mu_\infty)$  en fonction de  $\rho$ .

### 3.2.2.1 Décomposition de l'opérateur $r^2(\epsilon_\infty^{-1} \Delta + \omega^2 \mu_\infty)$

A l'aide de l'expression du Laplacien en coordonnées polaires on montre que

$$\mathcal{A}u := r^2(\epsilon_\infty^{-1} \Delta + \omega^2 \mu_\infty)u = \frac{1}{\rho^2} \sum_{j=0}^4 \rho^j \mathcal{A}_j(\rho \partial_\rho, \partial_\theta)u, \quad (3.2.4)$$

où les opérateurs  $\mathcal{A}_j(\rho \partial_\rho, \partial_\theta)$ , ( $j = 0 \dots 4$ ), sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(\rho \partial_\rho, \partial_\theta)u &= r_*^2 \epsilon_\infty^{-1} \left[ (\rho \partial_\rho)^2 - \rho \partial_\rho \right] u, \\ \mathcal{A}_1(\rho \partial_\rho, \partial_\theta)u &= r_* \epsilon_\infty^{-1} \left[ 2(\rho \partial_\rho)^2 - \rho \partial_\rho \right] u, \\ \mathcal{A}_2(\rho \partial_\rho, \partial_\theta)u &= \left[ \epsilon_\infty^{-1} (\rho \partial_\rho)^2 + \epsilon_\infty^{-1} \partial_\theta^2 + \mu_\infty \omega^2 r_*^2 \right] u, \\ \mathcal{A}_3(\rho \partial_\rho, \partial_\theta)u &= 2\omega^2 \mu_\infty r_* u, \\ \mathcal{A}_4(\rho \partial_\rho, \partial_\theta)u &= \omega^2 \mu_\infty u. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Les opérateurs  $\mathcal{A}_j(\rho \partial_\rho, \partial_\theta)$  sont invariants par le changement de variable  $\nu = \frac{\rho}{r_*}$ . De plus ils sont homogènes au sens où si  $u(\rho, \theta) = \rho^k u_k(\theta)$ , alors il existe une fonction  $\tilde{u}_k(\theta)$  ne dépendant que de  $\theta$  telle que  $\mathcal{A}_j u = \rho^k \tilde{u}_k(\theta)$ . Cette dernière remarque nous incite à introduire les opérateurs  $\mathcal{A}_j(k, \partial_\theta)$  :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_\#^\infty(]0, 2\pi[) \rightarrow \mathcal{C}_\#^\infty(]0, 2\pi[), \\ v \mapsto \mathcal{A}_j(k, \partial_\theta) \cdot v := \rho^{-k} \mathcal{A}_j(\rho \partial_\rho, \partial_\theta) \{ \rho^k v \}. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Ces opérateurs sont des opérateurs différentiels en  $\theta$ . Nous remarquons par ailleurs que  $\mathcal{A}_0(k, \partial_\theta) = \mathcal{A}_0(k) = r_*^2 \epsilon_\infty^{-1} (k^2 - k)$ .  $\mathcal{A}_0(k)$  est donc inversible sauf pour  $k = 0$  ou  $1$ , d'inverse  $\mathcal{A}_0(k)^{-1} v(\theta) = v(\theta) / [r_*^2 \epsilon_\infty^{-1} (k^2 - k)]$ .

### 3.2.2.2 Comportement des champs lointains au voisinage de l'interface $\Gamma$

Les opérateurs  $\mathcal{A}_j(k)$  vont nous permettre d'écrire un développement de Taylor des champs lointains (3.2.3) qui tient compte du fait que ceux-ci sont solutions de l'équation de Helmholtz homogène dans un voisinage de  $\Gamma$ . Nous allons expliquer notre démarche dans le cas où  $r > r_*$  mais le développement pour  $r < r_*$  s'obtient de manière analogue.

Commençons par définir la notion de série asymptotique : pour toute fonction  $v \in \mathbf{H}^2(\Omega^+)$  et toute suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dont les termes  $v_k$  appartiennent à  $\mathcal{C}_\#^\infty(]0, 2\pi[)$ , on dit que la série  $\sum_{k \geq 0} \rho^k v_k(\theta)$ , converge au sens des séries asymptotiques vers  $v$  si

$$\forall n \geq 0, \exists C_n > 0 \text{ telle que } \int_0^{2\pi} \left| v(\rho, \theta) - \sum_{k=0}^n \rho^k v_k(\theta) \right|^2 d\theta \leq C_n \rho^n \quad \forall n \geq 0. \quad (3.2.7)$$

On dira alors que  $v$  admet une série asymptotique et on écrira :

$$v = \sum_{k=0}^n \rho^k v_k + O(\rho^n).$$

Considérons maintenant une fonction  $v \in H^1(\Omega^+)$  vérifiant  $\epsilon_\infty^{-1} \Delta v + \omega^2 \mu_\infty v = 0$  dans un voisinage de l'interface  $\Gamma$ . En utilisant les résultats de régularité elliptique (cf [Bre99]), nous savons que  $v(\rho, \theta)$  admet un développement de Taylor à tout ordre si bien qu'elle admet une série asymptotique,  $v = \sum_{k \geq 0} \rho^k v_k(\theta)$ . Comme  $v$  vérifie l'équation de Helmholtz homogène, les fonctions  $v_k$  ne sont pas indépendantes : en effet, en insérant la série asymptotique de  $v$  dans l'équation de Helmholtz décomposée à l'aide des opérateurs  $\mathcal{A}_j$  (3.2.4), on obtient

$$\sum_{j=0}^4 \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho^j \mathcal{A}_j(\rho^k v_k) = 0,$$

qui devient, après réarrangement des termes de la somme

$$\sum_{k \geq 0} \rho^k \left\{ \sum_{j=0}^4 \mathcal{A}_j(k-j, \partial_\theta) \cdot v_{k-j}(\theta) \right\} = 0 \implies \sum_{j=0}^4 \mathcal{A}_j(k-j, \partial_\theta) \cdot v_{k-j}(\theta) = 0 \quad \forall k \geq 0.$$

Par convention  $v_j = 0$  pour  $j < 0$ . Remarquons que si les fonctions  $v_0(\theta)$  et  $v_1(\theta)$  sont connues, les équations précédentes nous permettent de construire de manière itérative toutes les fonctions  $v_k(\theta)$ . En effet, pour  $k$  supérieur à 2, l'opérateur  $\mathcal{A}_0$  est inversible si bien que

$$v_k = -\mathcal{A}_0(k)^{-1} \sum_{j=1}^4 \mathcal{A}_j(k-j, \partial_\theta) \cdot v_{k-j}, \quad \forall k \geq 2. \quad (3.2.8)$$

Dans ce processus de construction, les deux premiers termes de la série asymptotique  $v_0(\theta), v_1(\theta)$  jouent le rôle de conditions initiales. Noter que ces deux données sont en fait les trace et trace normale de  $v$  sur l'interface  $\Gamma$  :

$$v_0(\theta) = v|_\Gamma^+ \quad \text{and} \quad v_1(\theta) = \partial_r v|_\Gamma^+. \quad (3.2.9)$$

La construction des termes  $v_k$  peut être formalisée en introduisant  $(s_k^0)$  et  $(s_k^1)$ , deux familles d'opérateurs différentiels en  $\theta$ . Ces opérateurs sont construits par une procédure itérative qui mime la formule (3.2.8).

$$\begin{aligned} s_k^0(\partial_\theta) &= 0 \quad \forall k < 0, & s_0^0(\partial_\theta) &= \text{Id}, & s_1^0 &= 0, \\ s_k^0(\partial_\theta) &= -\mathcal{A}_0(k)^{-1} \sum_{j=1}^4 \mathcal{A}_j(k-j, \partial_\theta) \cdot s_{k-j}^0(\partial_\theta) & k &\geq 2 \\ s_k^1(\partial_\theta) &= 0 \quad \forall k < 0, & s_0^1(\partial_\theta) &= 0, & s_1^1(\partial_\theta) &= \text{Id}, \\ s_k^1(\partial_\theta) &= -\mathcal{A}_0(k)^{-1} \sum_{j=1}^4 \mathcal{A}_j(k-j, \partial_\theta) \cdot s_{k-j}^1(\partial_\theta) & k &\geq 2 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

**Proposition 3.2.1.**

Soit  $v \in H^2(\Omega^+)$  une fonction satisfaisant  $\epsilon_\infty^{-1} \Delta v + \omega^2 \mu_\infty v = 0$  dans un voisinage de  $\Gamma$ . La série asymptotique de  $v$  (au sens (3.2.7)) est donnée par

$$v(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^n \rho^k \left( s_k^0(\partial_\theta) v|_\Gamma^+ + s_k^1(\partial_\theta) \partial_r v|_\Gamma^+ \right) + O(\rho^n) \quad \forall n \geq 0. \quad (3.2.11)$$

*Démonstration.* Puisque  $v$  est très régulière au voisinage de  $\Gamma$ ,  $v$  admet une série asymptotique : plus précisément,  $v(\rho, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho^k v_k(\theta)$  où  $v_k(\theta) = (k!)^{-1} \partial_\rho^k v|_\Gamma^+$ . Pour prouver la formule (3.2.11), il suffit de montrer par récurrence que  $v_k(\partial_\theta) = s_k^0(\partial_\theta) v_0 + s_k^1(\partial_\theta) v_1$ . L'initialisation pour  $k = 0$  et  $k = 1$  est immédiate. Supposons maintenant que  $v_k(\theta) = s_j^0(\partial_\theta) v_0 + s_j^1(\partial_\theta) v_1$  pour tout  $j \leq k$ . En utilisant (3.2.8) on a

$$v_{k+1}(\theta) = -\mathcal{A}_0(k+1)^{-1} \sum_{j=k-3}^k \mathcal{A}_{k+1-j}(j, \partial_\theta) \cdot \left( s_j^0(\partial_\theta) v_0(\theta) + s_j^1(\partial_\theta) v_1(\theta) \right)$$



ce qui prouve exactement (3.2.11), par définition des opérateurs  $s_j^0(\partial_\theta)$  et  $s_j^1(\partial_\theta)$ .  $\square$

Bien sur, la proposition 3.2.1 reste vraie pour des fonctions définies dans  $\Omega^-$ . En appliquant directement cette dernière aux termes de champ lointain  $u_n$  on obtient une forme explicite du développement de Taylor des champs lointains

$$u_n^\pm(r, \theta) = \sum_{k=0}^n (r - r_*)^k \left( s_k^0(\partial_\theta) u_n|_\Gamma^\pm + s_k^1(\partial_\theta) \partial_r u_n|_\Gamma^\pm \right) + O((r - r_*)^n), \quad \forall n \geq 0 \quad (3.2.12)$$

**Notation 3.2.2.** On notera désormais  $s_j^0\{v\}$  and  $s_j^1\{v\}$  à la place de  $s_j^0(\partial_\theta)v$  et  $s_j^1(\partial_\theta)v$ . Par ailleurs, pour toute fonction  $v \in H^1(\Omega^\pm)$  telle que  $\Delta v \in L^2(\Omega^\pm)$ , nous définissons ses saut et moyenne ainsi que les saut et moyenne de sa trace normale par

$$[v]_\Gamma = v|_\Gamma^+ - v|_\Gamma^-, \quad \langle v \rangle_\Gamma = \frac{v|_\Gamma^+ + v|_\Gamma^-}{2}, \quad [\partial_r v]_\Gamma = \partial_r v|_\Gamma^+ - \partial_r v|_\Gamma^- \quad \text{and} \quad \langle \partial_r v \rangle_\Gamma = \frac{\partial_r v|_\Gamma^+ + \partial_r v|_\Gamma^-}{2}. \quad (3.2.13)$$

### 3.3 Termes de champs proches

#### 3.3.1 Equations satisfaites par les champs proches

Ce paragraphe est consacré à la dérivation *formelle* des équations satisfaites par termes du développement en champ proche (3.1.2).

Commençons par introduire une notation utile pour passer des variables microscopiques  $(\nu, s)$  aux variables macroscopiques  $(r, \theta)$  : pour toute fonction  $U(\nu, s, \theta)$  dépendant de trois variables, nous définissons la fonction  $(U)^\delta(r, \theta)$  (dépendant de deux variables) par

$$(U)^\delta(r, \theta) := U\left(\frac{r - r_*}{\delta}, \frac{r_* \theta}{\delta}, \theta\right). \quad (3.3.1)$$

On voit immédiatement que

$$\frac{\partial(U)^\delta}{\partial r} = \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial U}{\partial \nu} \right)^\delta \quad \text{et} \quad \frac{\partial(U)^\delta}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{r_*}{\delta} \frac{\partial U}{\partial s} \right)^\delta. \quad (3.3.2)$$

Posons  $U_n^\delta = (U_n)^\delta$  et  $r^2 \Delta_\delta := r^2 (\nabla \cdot (\epsilon_\delta^{-1} \nabla) + \mu_\delta \omega^2)$ . En utilisant les règles de dérivation (3.3.2), on a

$$\begin{aligned} r^2 \Delta_\delta U_n^\delta &= \frac{1}{\delta^2} \left( r_*^2 (\partial_\nu (\epsilon^{-1} \partial_\nu U_n) + \partial_s (\epsilon^{-1} \partial_s U_n)) \right)^\delta \\ &+ \frac{1}{\delta} \left( r_* (2\nu \partial_\nu (\epsilon^{-1} \partial_\nu U_n) + \epsilon^{-1} \partial_\nu U_n + \partial_s (\epsilon^{-1} \partial_\theta U_n) + \epsilon^{-1} \partial_s \partial_\theta U_n) \right)^\delta \\ &+ \left( \epsilon^{-1} \nu \partial_\nu U_n + \nu^2 \partial_\nu (\epsilon^{-1} \partial_\nu U_n) + \epsilon^{-1} \partial_\theta^2 U_n + r_*^2 \mu \omega^2 U_n \right)^\delta \\ &+ \delta \left( 2\nu r_* \mu \omega^2 U_n \right)^\delta \\ &+ \delta^2 \left( \nu^2 \mu \omega^2 U_n \right)^\delta. \end{aligned}$$

Par ailleurs  $u^\delta$  satisfait l'équation de Helmholtz homogène au voisinage de  $\Gamma$ , si bien qu'en substituant  $u^\delta$  par son développement en champ proche (3.1.2), on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n r^2 \Delta_\delta U_n^\delta = 0,$$

qui devient, en utilisant la formule précédente et en séparant formellement les différentes puissances de  $\delta$ ,

$$\nu^{-2} A_0(\partial_\nu, \partial_s) U_n = -\nu^{-2} \sum_{j=1}^4 \nu^j A_j U_{n-j} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi]. \quad (3.3.3)$$

Par convention,  $U_n = 0$  si  $n \leq 0$ . L'opérateur différentiel  $A_0 = A_0(\partial_\nu, \partial_s)$  est défini par

$$A_0(\partial_\nu, \partial_s)U := r_*^2 \nu^2 \left( \partial_\nu(\epsilon^{-1} \partial_\nu U) + \partial_s(\epsilon^{-1} \partial_s U) \right). \quad (3.3.4)$$

Noter que l'opérateur  $A_0$  est indépendant de  $\theta$ . Cette propriété jouera un rôle important lors de la construction des termes de champ proche. Les autres opérateurs  $A_j$ ,  $1 \leq j \leq 4$  sont également des opérateurs différentiels en  $(\nu, s, \theta)$  et sont définis par

$$\begin{aligned} A_1 U &:= A_1^{[0]} U + A_1^{[1]}(\partial_\theta U) \quad \text{with} \quad \begin{cases} A_1^{[0]} U := 2r_* \nu \partial_\nu(\epsilon^{-1} \nu \partial_\nu U) - r_* \epsilon^{-1} \nu \partial_\nu U \\ A_1^{[1]} U := \nu r_* \partial_s(\epsilon^{-1} U) + \epsilon^{-1} \nu r_* \partial_s U, \end{cases} \\ A_2 U &:= A_2^{[0]} U + A_2^{[2]}(\partial_\theta^2 U) \quad \text{with} \quad \begin{cases} A_2^{[0]} U := \nu \partial_\nu(\epsilon^{-1} \nu \partial_\nu U) + \omega^2 \mu r_*^2 U, \\ A_2^{[2]} U := \epsilon^{-1} U, \end{cases} \\ A_3 U &:= 2\omega^2 \mu r_* U, \\ A_4 U &:= \omega^2 \mu U. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

**Remarque.** Il est intéressant de remarquer que, pour toute fonction  $U(\nu, s, \theta) = U(\nu, \theta)$  indépendante de  $S$   $A_k(\partial_\nu, \partial_s, \partial_\theta)U = A_k(\partial_\nu, \partial_\theta)U$  pour  $k = 0, \dots, 4$  et  $|\nu| > 1/2$ .

L'équation (3.3.3) est complétée par des conditions limites périodiques

$$U_n(\nu, s+1; \theta) = U_n(\nu, s; \theta). \quad (3.3.6)$$

Tout comme pour les champs lointains les équations (3.3.3) et (3.3.6) ne permettent pas de définir entièrement les champs proches. Par exemple, la fonction constante est périodique et satisfait (3.3.3) pour  $n = 0$ . Tout comme dans le cas des champs lointains, les informations manquantes proviendront des conditions de raccord.

### 3.3.2 Comportement des champs proches à l'infini

Comme nous l'avons déjà mentionné, les conditions de raccord font intervenir les comportements à l'infini des champs proches. Nous allons voir que les équations (3.3.3) nous donnent déjà des informations sur ces comportements.

#### 3.3.2.1 Définitions et notations

Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse standard que les champs proches  $U_n$  ne sont pas exponentiellement croissants quand  $\nu$  tend vers  $\pm\infty$ . Cela nous incite à chercher  $U_n(\cdot, \cdot; \theta)$  dans l'espace  $\mathbb{V}_+^1(B)$

$$\mathbb{V}_+^1(B) = \left\{ U \in H_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^2) \mid \|U\|_{\mathbb{V}_+^k}^2 = \sum_{\alpha+\beta \leq 1} \int_B |\partial_\nu^\alpha \partial_s^\beta U(\nu, s)|^2 e^{-|\nu|} d\nu ds < +\infty \right. \\ \left. \text{et } U(\nu, -1/2) = U(\nu, 1/2) \right\}. \quad (3.3.7)$$

On introduit également  $\mathbb{V}_-^1(B)$ ,

$$\mathbb{V}_-^1(B) = \left\{ U \in H_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^2) \mid \|U\|_{\mathbb{V}_-^k}^2 = \sum_{\alpha+\beta \leq 1} \int_B |\partial_\nu^\alpha \partial_s^\beta U(\nu, s)|^2 e^{|\nu|} d\nu ds < +\infty \right. \\ \left. \text{et } U(\nu, -1/2) = U(\nu, 1/2) \right\}. \quad (3.3.8)$$

Les espaces  $\mathbb{V}_+^1(B)$  et  $\mathbb{V}_-^1(B)$  munis de la norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{V}_\pm^k}$  sont des espaces de Banach et on a  $\mathbb{V}_-^1(B) \subset \mathbb{V}_+^1(B)$ . Les fonctions de  $\mathbb{V}_-^1(B)$  sont évanescents quand  $\nu$  tend vers  $+\infty$ .

Par ailleurs, on définit la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  :

**Définition 3.3.1.** Soit  $U$  une fonction de  $\mathbb{V}_+^1(B)$ . On dit que  $U$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ , s'il existe deux suites de polynômes  $((p_\ell(\nu)^\pm)_{\ell \in \mathbb{Z}})$  telles que

$$\mathcal{P}^\infty \quad \begin{cases} U = p_0^+(\nu) + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} p_\ell^+(\nu) e^{-2\pi|\ell|\nu} e^{2i\pi\ell s} & \forall \nu > 2, \\ U = p_0^-(\nu) + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} p_\ell^-(\nu) e^{2\pi|\ell|\nu} e^{2i\pi\ell s} & \forall \nu < -2. \end{cases}$$

Pour tout  $U$  satisfaisant  $\mathcal{P}^\infty$  on définit  $\ell_{\mathbb{D}}^\pm(U)$  et  $\ell_{\mathbb{N}}^\pm(U)$

$$\ell_{\mathbb{D}}^\pm(U) := p_0^\pm(0), \quad \ell_{\mathbb{N}}^\pm(U) := (p_0^\pm)'(0),$$

ainsi que les moyennes et sauts de  $\ell_{\mathbb{D}}(U)$  et  $\ell_{\mathbb{N}}(U)$  :

$$\begin{aligned} \langle \ell_{\mathbb{D}}(U) \rangle &= \frac{1}{2} (\ell_{\mathbb{D}}^+(U) + \ell_{\mathbb{D}}^-(U)), & [\ell_{\mathbb{D}}(U)] &= \ell_{\mathbb{D}}^+(U) - \ell_{\mathbb{D}}^-(U), \\ \langle \ell_{\mathbb{N}}(U) \rangle &= \frac{1}{2} (\ell_{\mathbb{N}}^+(U) + \ell_{\mathbb{N}}^-(U)), & [\ell_{\mathbb{N}}(U)] &= \ell_{\mathbb{N}}^+(U) - \ell_{\mathbb{N}}^-(U). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

**Remarque.** Si  $U(\cdot, \cdot; \theta)$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on définit  $\ell_{\mathbb{D}}^\pm(U)(\theta)$  et  $\ell_{\mathbb{N}}^\pm(U)(\theta)$  par

$$\ell_{\mathbb{D}}^\pm(U)(\theta) := \ell_{\mathbb{D}}^\pm(U(\cdot, \cdot; \theta)), \quad \ell_{\mathbb{N}}^\pm(U)(\theta) := \ell_{\mathbb{N}}^\pm(U(\cdot, \cdot; \theta)).$$

De même

$$[\ell_{\mathbb{D}}(U)](\theta) = [\ell_{\mathbb{D}}(U(\cdot, \cdot; \theta))], \quad [\ell_{\mathbb{N}}(U)](\theta) = [\ell_{\mathbb{N}}(U(\cdot, \cdot; \theta))].$$

Enfin, on pose

$$B^+ := \{(\nu, s) \in ]2, +\infty[ \times ]-1/2, 1/2[ \}, B^- := \{(\nu, s) \in ]-\infty, -2[ \times ]-1/2, 1/2[ \}. \quad (3.3.10)$$

### 3.3.2.2 Développement en séries de Fourier des champs proches

Pour comprendre le comportement des champs proches  $U_n$  pour  $\nu$  grand, nous allons les décomposer en série de Fourier.

$$U_n(\nu, s; \theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} U_{n,\ell}(\nu; \theta) e^{2i\pi\ell s}. \quad (3.3.11)$$

Nous allons exprimer  $U_{n,\ell}$  uniquement dans les zones où  $\rho$  et  $\mu$  sont constants, c'est à dire quand  $|\nu| > 1/2$ . Quand on substitue  $U_n$  par son développement en série de Fourier (3.3.11) dans les équations (3.3.3), on obtient

$$A_{0,\ell} U_{n,\ell} = -\nu A_{1,\ell} U_{n-1,\ell} - \nu^2 A_{2,\ell} U_{n-2,\ell} - \nu^3 A_{3,\ell} U_{n-3,\ell} - \nu^4 A_{4,\ell} U_{n-4,\ell}, \quad \forall |\nu| \geq \frac{1}{2}, \forall \ell \in \mathbb{Z}, \quad (3.3.12)$$

où

$$A_{0,\ell} U := r_*^2 \nu^2 \epsilon_\infty^{-1} \left( \partial_{\nu\nu}^2 U - (2\pi\ell)^2 U \right). \quad (3.3.13)$$

et,

$$\begin{aligned} A_{1,\ell} U &:= A_{1,\ell}^{[0]} U + A_{1,\ell}^{[1]} (\partial_\theta U) & \text{with} & \begin{cases} A_{1,\ell}^{[0]} U := r_* \epsilon_\infty^{-1} ((\nu\partial_\nu)^2 U - \nu\partial_\nu U) \\ A_{1,\ell}^{[1]} U := 2\nu r_* \epsilon_\infty^{-1} (2i\pi\ell) U, \end{cases} \\ A_{2,\ell} U &:= A_{2,\ell}^{[0]} U + A_{2,\ell}^{[2]} (\partial_\theta^2 U) & \text{with} & \begin{cases} A_{2,\ell}^{[0]} U := \epsilon_\infty^{-1} (\nu\partial_\nu)^2 U + \omega^2 \mu_\infty r_*^2 U, \\ A_{2,\ell}^{[2]} U := \epsilon_\infty^{-1} U, \end{cases} \\ A_{3,\ell} U &:= 2\omega^2 \mu_\infty r_* U, \\ A_{4,\ell} U &:= \omega^2 \mu_\infty U. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

**Remarque 3.3.2.** Remarquons que pour  $0 \leq j \leq 4$   $A_{j,0} = \mathcal{A}_j$ , où les opérateurs  $\mathcal{A}_j$  définis par (3.2.4) sont les opérateurs intervenant dans le développement de Taylor des champs lointains.

Comme nous le verrons dans la suite, pour  $\ell \neq 0$ , l'expression explicite des opérateurs n'est pas très importante. Nous allons plutôt nous intéresser à leur action sur certains espaces de fonctions. En particulier nous introduisons  $\mathbb{P}_k$  l'espace des polynômes de la variable  $\nu$  dont les coefficients appartiennent à  $\mathcal{C}_{\#}^{\infty}([0, 2\pi[)$  :

$$p \in \mathbb{P}_k \iff p(\nu, \theta) = \sum_{j=0}^k p_j(\theta) \nu^j, \quad p_j \in \mathcal{C}_{\#}^{\infty}([0, 2\pi[). \quad (3.3.15)$$

De même on appelle  $e^{\pm\alpha\nu} \mathbb{P}_k$  l'espace des fonctions de  $\mathbb{P}_k$  multipliées par  $e^{\pm\alpha\nu}$ . On peut alors montrer facilement les trois propriétés suivantes qui nous seront utiles pour établir le principale résultat de ce paragraphe, à savoir la proposition 3.3.3 :

- $P_1$ - Pour tout  $\ell \neq 0$ , l'image de l'espace  $e^{\mp 2\pi\ell\nu} \mathbb{P}_k$  par l'opérateur  $\mathcal{A}_{j,\ell}$  est incluse dans l'espace  $e^{\mp 2\pi\ell\nu} \mathbb{P}_{k+j}$ .
- $P_2$ - Soit  $U(\nu, s) \in \mathbb{V}_+^1(B)$ . Pour tout  $\ell \neq 0$ , si  $A_{0,\ell} U$  appartient à  $e^{\mp 2\pi\ell\nu} \mathbb{P}_k$  alors  $U$  appartient à  $e^{\mp 2\pi\ell\nu} \mathbb{P}_{k+1}$
- $P_3$ -  $\ker(A_{0,0}) = \{1, \nu\}$ .

On peut maintenant déduire le comportement des champs proches pour  $\nu$  grand :

**Proposition 3.3.3.** *Il existe  $p_n^{\pm}(\nu; \theta) \in \mathbb{P}_{n+1}$  et, pour tout  $\ell \neq 0$   $p_{n,\ell}^{\pm}(\nu; \theta) \in \mathbb{P}_{2n}$ , tels que*

$$U_n(\nu, s; \theta) = p_n^{\pm}(\nu; \theta) + \sum_{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} p_{n,\ell}^{\pm}(\nu; \theta) e^{\mp 2\pi|\ell|\nu} e^{2i\pi\ell s} \quad \forall |\nu| > 1/2 \quad (3.3.16)$$

si bien que les champs proches  $U_n$  satisfont la propriété  $\mathcal{P}^{\infty}$ . De plus,

$$p_n^{\pm}(\nu; \theta) = \sum_{k=0}^{n+1} \nu^k \left( s_k^0 \left\{ \ell_{\mathbb{D}}^{\pm}(U_{n-k}) \right\} + s_k^1 \left\{ \ell_{\mathbb{N}}^{\pm}(U_{n+1-k}) \right\} \right). \quad (3.3.17)$$

On rappelle que les opérateurs  $s_k^0, s_k^1$  sont définis par 3.2.10, et que la propriété  $\mathcal{P}^{\infty}$  et les formes linéaires  $\ell_{\mathbb{N}}^{\pm}$  et  $\ell_{\mathbb{D}}^{\pm}$  sont définies dans la définition 3.3.1.

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence. On distingue le cas  $\ell \neq 0$  du cas  $\ell = 0$ .

•  $\ell \neq 0$  :

- Initialisation pour  $n = 0$ . Quand  $n = 0$ , l'équation (3.3.12) devient

$$\frac{\partial^2 U_{0,\ell}}{\partial \nu^2} - 4\ell^2 \pi^2 U_{0,\ell} = 0 \quad \forall \pm\nu > 1/2.$$

Comme  $U_0$  n'est pas exponentiellement croissante ( $U_0 \in \mathcal{C}^{\infty}([0, 2\pi[, \mathbb{V}_+^1(B))$ ), on a

$$\forall \pm\nu > 1/2, \quad U_{0,\ell} = p_{0,\ell}^{\pm}(\theta) e^{\mp 2\pi|\ell|\nu} \in e^{\mp 2\pi|\ell|\nu} \mathbb{P}_0.$$

- Supposons que pour tout  $k < n$ ,  $U_{k,\ell}$  appartienne à  $\mathbb{P}_{2k} e^{-2\pi|\ell||\nu|}$  quand  $|\nu| > 1/2$ . Alors, en utilisant la propriété  $P_1$ ,

$$\forall \pm\nu > 1/2, \quad A_{1,\ell} U_{n-1,\ell} + A_{2,\ell} U_{n-2,\ell} + A_{3,\ell} U_{n-3,\ell} + A_{4,\ell} U_{n-4,\ell} \in e^{\mp 2\pi|\ell|\nu} \mathbb{P}_{2n-1}$$

si bien que d'après la propriété  $P_2$ ,  $U_{n,\ell}$  appartient à  $e^{\mp 2\pi|\ell|\nu} \mathbb{P}_{2n}$  quand  $|\nu| > 1/2$ .

•  $\ell = 0$  :

- Initialisation pour  $n = 0$ . Pour  $n = 0$  et  $l = 0$ , l'équation (3.3.12) devient

$$\forall \pm\nu > 1/2, \quad \frac{\partial^2 U_{0,0}}{\partial \nu^2} = 0,$$

si bien que  $U_{0,0}^{\pm} = U_{0,0} = p_0(\nu, \theta) \in \mathbb{P}_1$ . Les formules (3.3.16) et (3.3.17) sont donc vérifiées pour  $n = 0$ .

- Supposons maintenant que la formule (3.3.17) soit vraie pour tout  $k < n$ . Pour alléger les notations, posons  $c_{q,0}^\pm = \ell_D^\pm(U_q)$  and  $c_{q,1}^\pm = \ell_N^\pm(U_q)$ ,  $q = 0 \dots n-1$ . En utilisant l'hypothèse de récurrence et la remarque 3.3.2, on a

$$\sum_{k=1}^4 \nu^k A_{k,0} U_{n-k} = \sum_{k=1}^4 \nu^k A_{k,0} p_{n-k} \sum_{k=1}^4 \nu^k \mathcal{A}_k p_{n-k}^\pm \quad (3.3.18)$$

Puis, on réarrange les termes de la somme en utilisant les définitions des opérateurs  $\mathcal{A}_k$  et  $s_k$  (3.2.4-3.2.5-3.2.10) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \nu^k A_{k,0} U_{n-k}^\pm &= \sum_{k=1}^4 \sum_{q=0}^{n+1-k} \nu^k \mathcal{A}_k \nu^q \left( s_q^0 \{c_{n-k-q,0}^\pm\} + s_q^1 \{c_{n+1-k-q,1}^\pm\} \right), \\ &= \sum_{k=1}^4 \sum_{q=k}^{n+1} \nu^q \mathcal{A}_k(q-k, \partial_\theta) \left( s_{q-k}^0 \{c_{n-q,0}^\pm\} + s_{q-k}^1 \{c_{n+1-q,1}^\pm\} \right), \quad (q+k \rightarrow q) \\ &= \sum_{q=1}^{n+1} \sum_{k=1}^4 \nu^q \mathcal{A}_k(q-k, \partial_\theta) \left( s_{q-k}^0 \{c_{n-q,0}^\pm\} + s_{q-k}^1 \{c_{n+1-q,1}^\pm\} \right), \\ &= \sum_{q=2}^{n+1} \nu^q \mathcal{A}_0(q) \left( s_q^0 \{c_{n-q,0}^\pm\} + s_q^1 \{c_{n+1-q,1}^\pm\} \right), \quad (3.3.19) \end{aligned}$$

$$= A_{0,0} \tilde{p}_n^\pm(\nu, \theta) \quad \text{où} \quad \tilde{p}_n^\pm(\nu, \theta) = \sum_{q=2}^{n+1} \nu^q \left( s_q^0 \{c_{n-q,0}^\pm\} + s_q^1 \{c_{n+1-q,1}^\pm\} \right), \quad (3.3.20)$$

$\tilde{p}_n^\pm$  satisfait bien l'équation 3.3.12 :  $A_{0,0} \tilde{p}_n^\pm(\nu, \theta) = \sum_{k=1}^4 \nu^k A_{k,0} U_{n-k}^\pm$ . D'après la propriété  $P_3$ ,  $U_{n,0}$  sera de la forme

$$U_{n,0} = p_n^{pm}(\nu, \theta) + c_{n,0}^\pm + c_{n,1}^\pm \nu,$$

ce qui termine la preuve. □

### 3.4 Conditions de raccord

Une nouvelle fois, nous insistons sur le caractère formel de cette étape. Cette dernière sera justifiée a posteriori par l'analyse d'erreur (section 3.9). Les conditions de raccord traduisent de manière condensée le fait que les développements de champ proche et de champ lointain coïncident dans les zones de raccord. Plus précisément, le développement du champ proche (3.1.2) quand  $\nu$  tend vers  $\pm\infty$  doit coïncider avec le développement du champ lointain (3.1.2) au voisinage de  $\Gamma$ . Or en utilisant la proposition 3.3.3, et en ne prenant en compte que le comportement polynomial des champs proches, on a d'une part

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n U_n(\nu, s, \theta) &\simeq \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n \sum_{k=0}^{n+1} \nu^k \left( s_k^0 \{ \ell_D^+(U_{n-k}) \} + s_k^1 \{ \ell_N^+(U_{n+1-k}) \} \right) \\ &\simeq \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n \sum_{k=0}^{n+1} \left( \frac{\rho}{\delta} \right)^k \left( s_k^0 \{ \ell_D^+(U_{n-k}) \} + s_k^1 \{ \ell_N^+(U_{n+1-k}) \} \right) \\ &\simeq \sum_{n=-1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^n \rho^k \left( s_k^0 \{ \ell_D^+(U_n) \} + s_k^1 \{ \ell_N^+(U_{n+1}) \} \right). \quad (3.4.1) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n u_n(\rho, \theta) \simeq \sum_{n=-1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^n \rho^k \left( s_k^0 \{u_n|_{\Gamma}^{\pm}\} + s_k^1 \{\partial_r u_n|_{\Gamma}^{\pm}\} \right). \quad (3.4.2)$$

Par convention  $u_{-1} = 0$ . Il est facile de voir que les développements (3.4.1) et (3.4.2) coïncident si  $\ell_D^{\pm}(U_n) = u_n|_{\Gamma}^{\pm}$  and  $\ell_N^{\pm}(U_n) = \partial_r u_{n-1}|_{\Gamma}^{\pm} \forall n \geq 0$ . On obtient bien sur les mêmes conditions pour  $\nu \rightarrow -\infty$  et  $\rho \rightarrow 0_-$ , Finalement les conditions de raccord sont données par

$$\ell_D^{\pm}(U_n) = u_n|_{\Gamma}^{\pm} \quad \text{et} \quad \ell_N^{\pm}(U_n) = \partial_r u_{n-1}|_{\Gamma}^{\pm} \quad \forall n \geq 0. \quad (3.4.3)$$

On peut aussi écrire les conditions de raccord uniquement en fonction des moyennes et de sauts des champs proches et champs lointains :

$$\forall n \geq 0, \quad \begin{cases} [u_n]_{\Gamma} = [\ell_D(U_n)], & [\partial_r u_{n-1}]_{\Gamma} = [\ell_N(U_n)] \\ \langle \ell_D(U_n) \rangle = \langle u_n \rangle_{\Gamma}, & \langle \ell_N(U_n) \rangle = \langle \partial_r u_{n-1} \rangle_{\Gamma}. \end{cases} \quad (3.4.4)$$

C'est sous cette dernière forme que nous utiliserons les conditions de raccord dans la suite de notre analyse. Noter que ces conditions prennent la forme de conditions de transmission.

**Remarque 3.4.1.** *Les conditions de raccord sont équivalentes aux conditions suivantes : le comportement polynomial des champs proches (3.3.17) est donné par*

$$p_n^{\pm}(\nu; \theta) = \sum_{k=0}^n \frac{\nu^k}{k!} \frac{\partial^k u_{n-k}^{\pm}(r_*, \theta)}{\partial r}. \quad (3.4.5)$$

## 3.5 Cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champs proches

### 3.5.1 Cadre variationnel pour la résolution des problème de champs proches

A  $\theta$  fixé, les problèmes de champs proches sont du type, chercher  $U \in \mathbb{V}_-^1(B)$  vérifiant

$$\operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla U) = \mathcal{F} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \quad (3.5.1)$$

où

$$\mathcal{F} = \nabla \cdot \mathbf{g} - f, \quad (f, \mathbf{g}) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \times L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)^2, \quad (f, \mathbf{g}) \text{ 1-périodiques en } s. \quad (3.5.2)$$

Dans un premier temps, on cherche un cadre variationnel adapté à la résolution du problème (3.5.1). On introduit l'espace à poids  $W^1(B)$

$$W^1(B) := \left\{ U \in H_{loc}^1(B), \frac{U}{(1+\nu^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(B), U(\nu, \frac{1}{2}) = U(\nu, -\frac{1}{2}) \right\}, \quad (3.5.3)$$

muni du produit scalaire

$$(U, V)_{W^1} := \int_B \nabla U \cdot \nabla \bar{V} \, ds \, d\nu + \int_B \frac{U \bar{V}}{1+\nu^2} \, ds \, d\nu. \quad (3.5.4)$$

On remarque que la fonction constante appartient à  $W^1(B)$ . On définit aussi le sous espace fermé de  $W^1(B)$

$$W_0^1(B) := \left\{ U \in W^1(B), \int_{\Gamma^+} U + \int_{\Gamma^-} U = 0 \right\} \quad \text{avec } \Gamma_{\pm} := \{\pm\{2\} \times \} - 1/2, 1/2\}. \quad (3.5.5)$$

Par l'inégalité de Hardy ([HLP88], [Bre99]), la semi-norme

$$|U|_{W_0^1} := \left( \int_B |\nabla U|^2 \, ds \, d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5.6)$$

est une norme sur  $W_0^1(B)$ , équivalente à la norme  $W^1(B)$ . Nous allons chercher la solution  $U$  telle que sa restriction à la cellule périodique  $B$  appartienne à l'espace  $W_0^1(B)$ . Pour espérer obtenir l'existence d'une solution, il faut faire une hypothèse supplémentaire sur le second membre :

$$\left( (1 + \nu^2)^{\frac{1}{2}} f, \mathbf{g} \right) \in L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)^2, \quad (3.5.7)$$

On peut alors montrer le résultat d'existence et d'unicité suivant :

**Proposition 3.5.1.** *Supposons que  $f$  et  $\mathbf{g}$  satisfont l'hypothèse (3.5.7). Alors, le problème (3.5.1) admet une unique solution dans  $W_0^1(B)$  si et seulement si la condition de compatibilité suivante est satisfaite :*

$$\langle \mathcal{F}, 1 \rangle_B := - \int_B f \, ds \, d\nu = 0. \quad (3.5.8)$$

*Démonstration.* On note  $H_1^c(\mathbb{R}^2)$ , l'ensemble des fonctions de  $H^1(\mathbb{R}^2)$  à support compact. On définit aussi  $H_{per}^{1,loc}(B) := \{ V \in H_{loc}^1(B) / V(\nu, 1/2) = V(\nu, -1/2) \}$ ,  $H_{per}^1(B) := H_{per}^{1,loc}(B) \cap H^1(B)$  et enfin  $H_{c,per}^1(B)$  le sous espace de  $H_{per}^1(B)$  constitué des fonctions à support compact dans  $\bar{B}$ .

Soit  $U \in \mathbb{V}_+^1(B) \cap W_0^1(B)$  satisfaisant le problème (3.5.1). Il est clair que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla U \cdot \overline{\nabla \varphi} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{g} \cdot \overline{\nabla \varphi} + \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \overline{\varphi}, \quad \forall \varphi \in H_c^1(\mathbb{R}^2) \quad (3.5.9)$$

On introduit l'opérateur  $\mathcal{S}$

$$\begin{cases} H_c^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_{c,per}^1(B), \\ \varphi \mapsto \mathcal{S}(\varphi) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi(\nu, s + i). \end{cases} \quad (3.5.10)$$

On peut réécrire (3.5.9) (de manière équivalente) à l'aide de l'opérateur  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S}$  commute avec l'opérateur  $\nabla$ ) :

$$\int_B \nabla U \cdot \overline{\nabla \mathcal{S}(\varphi)} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{g} \cdot \overline{\nabla \mathcal{S}(\varphi)} + \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \overline{\mathcal{S}(\varphi)}, \quad \forall \varphi \in H_c^1(\mathbb{R}^2). \quad (3.5.11)$$

Or, l'opérateur  $\mathcal{S}$  est surjectif. Donc,

$$\int_B \nabla U \cdot \overline{\nabla \varphi} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{g} \cdot \overline{\nabla \varphi} + \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \overline{\varphi}, \quad \forall \varphi \in H_{c,per}^1(B). \quad (3.5.12)$$

Comme de plus  $H_{c,per}^1(B)$  est dense dans  $W^1(B)$  ([Ben07]),

$$\int_B \nabla U \cdot \overline{\nabla \varphi} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{g} \cdot \overline{\nabla \varphi} + \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \overline{\varphi}, \quad \forall \varphi \in W^1(B). \quad (3.5.13)$$

En particulier,

$$\int_B \nabla U \cdot \overline{\nabla \varphi} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{g} \cdot \overline{\nabla \varphi} + \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \overline{\varphi}, \quad \forall \varphi \in W_0^1(B). \quad (3.5.14)$$

Toute solution  $U \in W_0^1(B)$  du problème (3.5.1) est solution du problème (3.5.14). Or ce problème admet une unique solution (Lax-Milgram).

Réciproquement, soit  $U$  l'unique fonction de  $W_0^1(B)$  satisfaisant (3.5.14). Nous allons montrer que  $U$  satisfait (3.5.1). Tout d'abord, d'après la condition de compatibilité (3.5.8), l'équation (3.5.14) reste vraie pour toute fonction  $\varphi \in W^1(B)$  : en effet, toute fonction  $\varphi \in W^1(B)$  peut s'écrire sous la forme

$$\varphi = \tilde{\varphi} + c, \quad \text{avec } c = \int_{\Gamma^+} \varphi + \int_{\Gamma^-} \varphi, \quad \text{et } \tilde{\varphi} \in W_0^1(B).$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Alors, comme  $\mathcal{S}(\varphi)$  appartient à  $W^1(B)$ , on a

$$\int_B \nabla U \cdot \overline{\nabla \mathcal{S}(\varphi)} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{g} \cdot \overline{\nabla \mathcal{S}(\varphi)} + \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \overline{\mathcal{S}(\varphi)}, \quad \forall \varphi \in H_c^1(\mathbb{R}^2).$$

Or on a vu que l'équation précédente est en fait équivalente à

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla U \cdot \nabla \bar{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{g} \cdot \nabla \bar{\varphi} + \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \bar{\varphi}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Cela signifie exactement que  $\operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla U) = \operatorname{div} \mathbf{g} - f$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  et donc que  $U$  est solution du problème (3.5.1).  $\square$

**Remarque 3.5.2.** On déduit de la proposition 3.5.1 que le noyau du problème 3.5.1 réduit à l'espace  $W^1(B)$  est un espace de dimension 1, constitué des fonctions constantes.

On peut préciser la proposition 3.5.1 quand  $\mathbf{g}$  et  $f$  satisfont la propriété  $\mathcal{P}_\infty$  :

**Proposition 3.5.3.** Plaçons nous sous les hypothèses de la proposition 3.5.1 et supposons que  $f$  et  $\mathbf{g}$  appartiennent à  $\mathcal{C}^\infty(B^\pm)$ , satisfont la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  et vérifient

$$\int_B |f|^2 e^{|\nu|} < +\infty, \quad \int_B |\mathbf{g}|^2 e^{|\nu|} < +\infty,$$

Alors,  $U$  satisfait  $\mathcal{P}^\infty$  et de plus il existe une constante  $a \in \mathbb{C}$  et deux fonctions  $w^\pm \in \mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  telles que

$$U = \pm a + w^\pm.$$

La preuve de cette proposition repose sur le résultat classique (voir par exemple [Fli09]), démontré en annexe 3.10.1.

**Proposition 3.5.4.** Posons  $\mathcal{B}^+ = \{(\nu, s) \in \mathbb{R}^+ \times ]-1/2, 1/2[ \}$ . Soit  $f \in L^2(\mathcal{B}^+) \cap \mathbb{V}_-^+(\mathcal{B}^+) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B}^+)$  satisfaisant la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ , et soit  $u$  une fonction de  $W^1(\mathcal{B}^+) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B}^+)$  vérifiant

$$\begin{cases} \Delta U = f & \text{dans } \mathcal{B}^+ \\ \frac{\partial U}{\partial \nu}(0, s) = 0 \end{cases} \quad (3.5.15)$$

Alors  $U$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  et il existe une constante  $a$  et une fonction  $w \in \mathbb{V}_-^+(\mathcal{B}^+)$  telles que

$$U = a + w \quad \text{dans } \mathcal{B}^+ \quad (\text{i.e pour } \nu > 2) \quad (3.5.16)$$

De plus, pour tout  $\nu > 2$ ,  $\int_{-1/2}^{1/2} w(\nu, s) ds = 0$ .

*Démonstration.* (Proposition 3.5.3) Soit  $\chi^+$  une fonction de troncature définie sur  $\mathbb{R}^+$  et à valeur dans  $[0, 1]$  telle que

$$\chi^+(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu > 2, \\ 0 & \text{si } \nu < 1. \end{cases} \quad (3.5.17)$$

Posons  $\tilde{U}^+ = \chi^+(\nu)U$ .  $\Delta \tilde{U}^+$  appartient à  $L^2(\mathcal{B}^+) \cap \mathbb{V}_-^1(\mathcal{B}^+) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B}^+)$  et vérifie  $\partial_\nu \tilde{U}(0, s) = 0$ . D'après la proposition 3.5.4  $\tilde{U}$  (et donc  $U$ ) satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ . De plus il existe une constante  $a^+$  et une fonction  $w^+ \in \mathbb{V}_-^1(\mathcal{B}^+)$  qui vérifie  $\int_{-1/2}^{1/2} w^+(\nu, s) ds = 0$  pour tout  $\nu > 2$  telles que

$$U = \tilde{U} = a^+ + w^+ \quad \text{dans } \mathcal{B}^+.$$

$a^+$  et  $w^+$  sont indépendants de la fonction  $\chi$ . De même, il existe une constante  $a^-$  et une fonction  $w^- \in \mathbb{V}_-^1(\mathcal{B}^-)$  qui vérifie  $\int_{-1/2}^{1/2} w^-(\nu, s) ds = 0$  pour tout  $\nu < -2$  telles que

$$U = a^- + w^- \quad \text{dans } \mathcal{B}^-.$$

Comme  $U \in W_0^1(B)$ , alors  $\int_{\Gamma^+} U + \int_{\Gamma^-} U = 0$ . Donc  $a^- = -a^+$  ce qui termine la preuve. Remarquons que si  $U$  appartient à  $W^1(B)$  et satisfait  $\mathcal{P}^\infty$ , alors  $2\langle \ell_D(U) \rangle = \int_{\Gamma^+} U + \int_{\Gamma^-} U$ .  $\square$



### 3.5.2 Caractérisation du noyau des problèmes de champs proches

On a trouvé un cadre variationnel pour lequel le problème (3.5.1) est bien posé. Par contre, ce même problème est mal posé dans  $\mathbb{V}_+^1(B)$  : en effet la fonction constante 1 appartient à  $\mathbb{V}_+^1(B)$  et est solution de (3.5.1). De même quand  $\epsilon^{-1} = 1$ , la fonction  $\nu$  appartient à  $\mathbb{V}_+^1(B)$  et est solution de (3.5.1). L'objectif de cette partie est de caractériser le noyau  $N$  du problème (3.5.1) :

$$N := \{U \in \mathcal{H}_{loc}^1(\mathbb{R}^2), U|_B \in \mathbb{V}_+^1(B), \operatorname{div}(\epsilon^{-1}\nabla U) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)\}. \quad (3.5.18)$$

**Proposition 3.5.5.** *Il existe une unique fonction  $\mathcal{N} \in N$  telle que*

$$|\mathcal{N}(\nu, s) - \nu| \text{ est bornée dans } B, \quad (3.5.19)$$

$$\int_{\Gamma_+} \mathcal{N} ds + \int_{\Gamma_-} \mathcal{N} ds = 0. \quad (3.5.20)$$

De plus  $\mathcal{N}$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  et il existe une constante  $\mathcal{N}_\infty$  et deux fonctions  $w^\pm \in \mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  telles que

$$\mathcal{N} = \pm \mathcal{N}_\infty + w^\pm \quad \forall \pm \nu > 2.$$

Enfin

$$N = \operatorname{span}\{1, \mathcal{N}\}. \quad (3.5.21)$$

*Démonstration.*

**Existence et unicité de  $\mathcal{N}$**

- Unicité : soient  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  deux fonctions de  $N$  vérifiant (3.5.19) et (3.5.20). Posons  $\mathcal{D} = \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2$ . Remarquons d'abord que  $\mathcal{D}$  est bornée :

$$|\mathcal{D}| = |\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2| \leq |\mathcal{N}_1 - \nu| + |\nu - \mathcal{N}_2| \leq C \quad (3.5.22)$$

Donc, comme par hypothèse  $\mathcal{D} \in \mathbb{V}_+^1(B)$ ,  $\mathcal{D}$  appartient à  $W^1(B)$ . Comme de plus

$$\int_{\Gamma_+} \mathcal{D} + \int_{\Gamma_-} \mathcal{D} = 0,$$

Alors  $\mathcal{D} \in W_0^1(B)$  et  $\mathcal{D} \in N$ . La proposition 3.5.1 montre que  $\mathcal{D} = 0$ .

- Existence : soit  $\tilde{\mathcal{N}}$  l'unique solution appartenant à  $W_0^1(B)$  du problème

$$\operatorname{div}(\epsilon^{-1}\nabla \tilde{\mathcal{N}}) = -\frac{\partial(\epsilon^{-1} - (\epsilon_\infty)^{-1})}{\partial \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

(Ce problème entre dans le cadre d'application de la proposition 3.5.1 : il suffit de prendre  $f = 0$  et  $\mathbf{g} = (\epsilon^{-1} - (\epsilon_\infty)^{-1}, 0)$ ). Il est clair que  $\nu + \tilde{\mathcal{N}}$  appartient à  $N$  et vérifie les conditions (3.5.19) et (3.5.20) si bien que l'unicité donne

$$\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}} + \nu.$$

**Comportement à l'infini de  $\mathcal{N}$**

D'après la proposition 3.5.3, il existe une constante  $\mathcal{N}_\infty$  et deux fonctions  $w^\pm \in \mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  telles que

$$\tilde{\mathcal{N}} = \pm \mathcal{N}_\infty + w^\pm \text{ avec } \int_{-1/2}^{1/2} w^\pm(\nu, s) ds = 0 \quad \forall \pm \nu > 2,$$

si bien que

$$\mathcal{N} = \pm \mathcal{N}_\infty + \nu + w^\pm \text{ avec } \int_{-1/2}^{1/2} w^\pm(\nu, s) ds = 0 \quad \forall \pm \nu > 2.$$

**Caractérisation du noyau  $N$**

Soit  $U$  une fonction du noyau  $N$ . En écrivant la décomposition de  $U$  en série de Fourier, on obtient le comportement de  $U$  pour  $\nu > 1/2$

$$\forall \pm \nu > \frac{1}{2}, \quad U = a^\pm + b^\pm \nu + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} a_\ell^\pm e^{-2\pi|\ell|\nu} e^{2i\pi\ell s}. \quad (3.5.23)$$

De plus, comme  $\operatorname{div}(\epsilon^{-1}\nabla U) = 0$ , alors  $b^+ = b^-$  : en effet, pour tout  $\nu > 1/2$ ,

$$b^+ - b^- = \int_{-1/2}^{1/2} \partial_\nu U(\nu, s) - \partial_\nu U(\nu, s) ds = \int_{-\nu}^{\nu} \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{div}(\epsilon^{-1}\nabla U) = 0.$$

Soit  $\tilde{U} = U - b\mathcal{N}$ . Nous allons montrer que  $\tilde{U} \in W^1(B)$  : posons  $V(\nu, s) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} a_\ell^\pm e^{-2\pi|\ell|\nu} e^{2i\pi\ell s}$ . Soit  $\nu_0 > 1/2$ . Comme  $U \in \mathbb{V}_+^1(B)$ ,

$$\int_{-1/2}^{1/2} |V(\nu_0, s)|^2 ds = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} |a_\ell^\pm|^2 e^{-4\pi|\ell|\nu_0} < +\infty.$$

Par ailleurs, pour tout  $\nu > \nu_0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} |V(\nu, s)|^2 ds &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} |a_\ell^\pm|^2 e^{-4\pi|\ell|\nu}, \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} |a_\ell^\pm|^2 e^{-4\pi|\ell|\nu_0} e^{-4\pi|\ell|(\nu-\nu_0)}, \\ &\leq C e^{-4\pi(\nu-\nu_0)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} |a_\ell^\pm|^2 e^{-4\pi|\ell|\nu_0}, \\ &\leq C e^{-4\pi(\nu-\nu_0)} \int_{-1/2}^{1/2} |V(\nu_0, s)|^2 ds, \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $V$  est exponentiellement décroissante et donc que  $\tilde{U}$  est bornée. Comme de plus  $\tilde{U}$  appartient à  $\mathbb{V}_+^1(B)$  alors  $\tilde{U} \in W^1(B)$ . Donc  $\tilde{U}$  est dans le noyau du problème (3.5.1) réduit à  $W^1(B)$ , si bien qu'en utilisant la remarque 3.5.2  $\tilde{U}$  est constante. On a donc montré que pour tout  $U \in N$ , il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $U = a + b\mathcal{N}$ .  $\square$

**Remarque 3.5.6.** *Il est intéressant de remarquer que*

$$\begin{aligned} \langle \ell_N(1) \rangle &= 0, & [\ell_N(1)] &= 0, & \langle \ell_D(1) \rangle &= 1 & \text{et} & [\ell_D(1)] &= 0 \\ \langle \ell_N(\mathcal{N}) \rangle &= 1, & [\ell_N(\mathcal{N})] &= 0, & \langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle &= 0 & \text{et} & [\ell_D(\mathcal{N})] &\neq 0 \text{ (a priori)}. \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

### 3.5.3 Un résultat général d'existence et d'unicité

Si le problème (3.5.1) admet des solutions, elles sont définies aux deux fonctions du noyau près. Pour obtenir l'unicité, il faut donc fixer les deux fonctions du noyau. En fait, si le second membre vérifie la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ , on va voir qu'il est possible de fixer ces deux fonctions en imposant  $\langle \ell_D(U) \rangle$  et  $\langle \ell_N(U) \rangle$  (cf. (3.5.24)).

**Proposition 3.5.7.** *Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ , et  $(f, \mathbf{g}) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \times (L_{loc}^2(\mathbb{R}^2))^2$  deux fonctions 1-périodiques en  $s$  telles que*

*-  $f \in \mathcal{C}^\infty(B \cap \{|\nu| > 1/2\})$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  et il existe deux polynômes  $p_f^\pm$  et deux fonctions  $w_f^\pm \in \mathbb{V}_\pm^1(B^\pm)$  tels que*

$$f = p_f^\pm + w_f^\pm \text{ dans } B^\pm \text{ avec } \int_{-1/2}^{1/2} w_f^\pm(\nu, s) ds = 0 \text{ pour tout } \pm \nu > 2.$$

–  $\mathbf{g} \in (C^\infty(B \cap \{|\nu| > 1/2\}))^2$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  et il existe deux polynômes  $\mathbf{p}_g^\pm$  et deux fonctions  $\mathbf{w}_g^\pm \in \mathbb{V}_-^1(B^\pm)^2$  tels que

$$\mathbf{g} = \mathbf{p}_g^\pm + \mathbf{w}_g^\pm \text{ dans } B^\pm \text{ avec } \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{w}_g^\pm(\nu, s) ds = 0 \text{ pour tout } \pm \nu > 2.$$

Alors le problème, chercher  $U \in \mathbb{V}_+^1(B)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla U) = \operatorname{div} \mathbf{g} - f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), & (a) \\ \langle \ell_D(U) \rangle = \alpha, & (b) \\ \langle \ell_N(U) \rangle = \beta. & (c) \end{cases} \quad (3.5.25)$$

admet une unique solution qui dépend continûment des données :

$$\|U\|_{\mathbb{V}_+^1(B)} \leq C(\|f\|_{\mathbb{V}_+^1(B)} + |\alpha| + |\beta|). \quad (3.5.26)$$

De plus  $U$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  et il existe deux polynômes  $p_U^\pm$  et deux fonctions  $w_U^\pm \in \mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  tels que

$$U = p_U^\pm + w_U^\pm \text{ dans } B^\pm, \text{ avec } \int_{-1/2}^{1/2} w_U^\pm(\nu, s) ds = 0 \quad \forall \pm \nu > 2. \quad (3.5.27)$$

*Démonstration.*

### Unicité

Soit  $U$  solution du problème (3.5.25) avec  $\alpha = \beta = 0$ ,  $f = 0$ ,  $\mathbf{g} = 0$ . Alors,  $U \in N$  si bien que d'après la proposition 3.5.5,  $U = a + bN$ . Or,

$$\langle \ell_D(U) \rangle = a + b \underbrace{\langle \ell_D(N) \rangle}_{=0}.$$

Donc  $a = 0$ . De même,

$$\langle \ell_N(U) \rangle = b \underbrace{\langle \ell_N(N) \rangle}_{=1}$$

si bien  $b = 0$  et donc  $U = 0$ .

### Existence

On va maintenant construire une solution du problème (3.5.25). L'idée principale de la preuve consiste à construire  $U$  comme la somme d'une fonction  $\tilde{U}$  appartenant à  $W_0^1(B)$ , d'une fonction  $\mathcal{P}$  polynomiale quand  $\nu > 2$  (qui prendra en compte le comportement 'extra-variationnel' de  $U$ ) et enfin d'une combinaison linéaire des deux fonctions du noyau  $N$ . Remarquons d'abord qu'il existe deux polynômes  $p_{\mathcal{F}}^\pm$  et deux fonctions exponentiellement décroissantes  $w_{\mathcal{F}}^\pm \in \mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  tels que

$$\operatorname{div} \mathbf{g} - f = p_{\mathcal{F}}^\pm + w_{\mathcal{F}}^\pm \text{ avec } \int_{-1/2}^{1/2} w_{\mathcal{F}}^\pm(\nu, s) ds = 0 \quad \forall \pm \nu > 2.$$

Soient  $P^+$  et  $P^-$  les uniques polynômes satisfaisant

$$(P^\pm)'' = p_{\mathcal{F}}^\pm, \quad P^\pm(0) = (P^\pm)'(0) = 0. \quad (3.5.28)$$

On définit la fonction  $\mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_1 = \chi^+(\nu)P^+ + \chi^-(\nu)P^-$$

où  $\chi^+$  est la fonction de troncature introduite en (3.5.17) et  $\chi^-(\nu) = \chi^+(-\nu)$ . Remarquons que  $\ell_D^\pm(\mathcal{P}_1) = \ell_N^\pm(\mathcal{P}_1) = 0$ .

Posons  $\mathcal{F}_1 = \operatorname{div} \mathbf{g} - f - \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{P}_1)$ .  $\mathcal{F}_1 = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{g}} + \tilde{f}$  avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} &= (1 - \chi^+) \mathbf{g} + (1 - \chi^-) \mathbf{g}, \\ \tilde{f} &= \chi^+(\operatorname{div} \mathbf{g} - f) + \chi^-(\operatorname{div} \mathbf{g} - f) - \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{P}_1) + \mathbf{g} \cdot \nabla \chi^+ + \mathbf{g} \cdot \nabla \chi^- \\ &\quad + (1 - \chi^+)f + (1 - \chi^-)f. \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{g}}$  appartient à  $L^2(B)$  et est à support compact si bien que  $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  et satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ . De même, par construction  $\tilde{f}$  appartient à  $\mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  et satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ . Cependant, en général,

$$\langle \mathcal{F}_1, 1 \rangle \neq 0,$$

ce qui ne nous permet pas de construire directement  $\tilde{U}$  comme l'unique solution appartenant à  $W_0^1(B)$  du problème  $\operatorname{div}(\epsilon^{-1}\tilde{U}) = \mathcal{F}_1$ . C'est à ce niveau qu'intervient le comportement polynomial de degré 1. Posons  $\chi = \chi^+ + \chi^-$ . Remarquons que la fonction  $\chi|\nu|$  appartient à  $\mathcal{C}_{per}^\infty(B)$  et est polynomiale pour  $\nu > 2$  (et donc satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ ). De plus,

$$\langle \ell_D(\chi|\nu) \rangle = [\ell_D(\chi|\nu)] = \langle \ell_N(\chi|\nu) \rangle = 0, \quad [\ell_N(\chi|\nu)] = 2 \quad \text{et} \quad \int_B \operatorname{div}(\epsilon^{-1}\nabla(\chi|\nu)) = 2\epsilon_\infty^{-1}.$$

De plus  $\operatorname{div}(\epsilon^{-1}\nabla(\chi|\nu))$  appartient à  $L^2(B)$  est à support compact. Puisque  $\langle \mathcal{F}_1 - \frac{\epsilon_\infty}{2}\langle \mathcal{F}_1, 1 \rangle(\chi|\nu), 1 \rangle = 0$ , on peut par contre maintenant définir  $\tilde{U}$  comme l'unique solution appartenant à  $W_0^1(B)$  du problème

$$\operatorname{div}(\epsilon^{-1}\tilde{U}) = \mathcal{F}_1 - \frac{\epsilon_\infty}{2}\langle \mathcal{F}_1, 1 \rangle \operatorname{div}(\epsilon^{-1}\nabla(\chi|\nu)). \quad (3.5.29)$$

D'après la proposition 3.5.3, il est facile de voir que  $\tilde{U}$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ , et qu'il existe deux polynômes  $p_{\tilde{U}}^\pm$  et deux fonctions  $w_{\tilde{U}} \in \mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  tels que

$$\tilde{U} = p_{\tilde{U}}^\pm + w_{\tilde{U}} \quad \text{dans } B^\pm, \quad \text{avec} \quad \int_{-1/2}^{1/2} w_{\tilde{U}}^\pm(\nu, s) ds = 0 \quad \forall \pm \nu > 2. \quad (3.5.30)$$

De plus (puisque  $\tilde{U} \in W_0^1(B)$ )

$$\langle \ell_D(\tilde{U}) \rangle = \langle \ell_N(\tilde{U}) \rangle = [\ell_N(\tilde{U})] = 0. \quad (3.5.31)$$

Remarquons également qu'a priori  $[\ell_D(\tilde{U})]$  n'est pas nul.

Maintenant nous allons construire une solution  $U$  du problème (3.5.25) sous la forme

$$U = \tilde{U} + \underbrace{\left( \mathcal{P}_1 + \frac{1}{2}\langle \mathcal{F}_1, 1 \rangle \chi|\nu \right)}_{\mathcal{P}} + b\mathcal{N} + a. \quad (3.5.32)$$

Par construction  $U$  ainsi définie satisfait (3.5.25-a). Nous allons déterminer les constantes  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $U$  vérifie aussi (3.5.25-b) et (3.5.25-c) :

$$\alpha = a + \langle \ell_D(U) \rangle = \underbrace{\langle \ell_D(\tilde{U}) \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \ell_D(\mathcal{P}_1) \rangle}_{=0} + \frac{1}{2}\langle \mathcal{F}_1, 1 \rangle \underbrace{\langle \ell_D(\chi|\nu) \rangle}_{=0} + b \underbrace{\langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle}_{=0}.$$

Donc  $a = \alpha$ . De même,

$$\beta = \langle \ell_N(U) \rangle = \underbrace{\langle \ell_N(\tilde{U}) \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \ell_N(\mathcal{P}_1) \rangle}_{=0} + \frac{1}{2}\langle \mathcal{F}_1, 1 \rangle \underbrace{\langle \ell_N(\chi|\nu) \rangle}_{=0} + b \underbrace{\langle \ell_N(\mathcal{N}) \rangle}_{=1}$$

si bien que  $\beta = b$ , ce qui termine la preuve d'existence. La formule (3.5.27) peut être déduite aisément à partir de l'équation (3.5.32) et du comportement de  $\tilde{U}$  pour  $|\nu| > 2$  (3.5.30). Enfin la continuité par rapport aux données  $f$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  est une conséquence directe de la construction précédente et de l'unicité.  $\square$

Au vu de la proposition précédente, les problèmes de type champ proche (3.3.3) seront bien posés si on spécifie les moyennes  $\langle \ell_D(U_n) \rangle$  et  $\langle \ell_N(U_n) \rangle$ . Ces quantités sont d'ailleurs données par les conditions de raccord :

$$\langle \ell_D(U_n) \rangle = \langle u_n \rangle_\Gamma, \quad \langle \ell_N(U_n) \rangle = \langle \partial_r u_{n-1} \rangle_\Gamma.$$

### 3.6 Cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champs lointains

Le cadre fonctionnel adapté à la résolution des problèmes de champs lointains est beaucoup plus classique : en effet ces problèmes, définis par (3.2.1, 3.4.4) sont du type : chercher  $u \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-)$  telle que

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \nabla u - \omega^2 \mu_\infty u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^\pm), \\ [u]_\Gamma = g, \\ [\partial_r u]_\Gamma = h, \\ \partial_r u + i\omega u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6.1)$$

**Proposition 3.6.1.** *Supposons que  $f$  appartienne à  $L^2(\Omega^\pm)$  et soit à support compact dans  $\Omega^\pm$ , que  $g$  soit  $H^{1/2}(\Gamma)$  et que  $h$  appartienne à  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Alors le problème (3.6.1) admet une solution unique qui dépend continûment des données :*

$$\|u\|_{H^1(\Omega^+)} + \|u\|_{H^1(\Omega^-)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega^+)} + \|f\|_{L^2(\Omega^-)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right).$$

*Démonstration.* Tout d'abord il est clair que le problème (3.6.1) admet au plus une solution. Nous allons maintenant construire une solution en utilisant un relèvement de la fonction  $g$  : soit  $\chi$  une fonction de troncature appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R}^+)$  telle que

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{r_e - r_*}{4}, \\ 0 & \text{si } r \geq \frac{r_e - r_*}{2}. \end{cases}$$

et on définit alors le relèvement  $\mathcal{R}$  de  $g$

$$\mathcal{R} := \begin{cases} \chi(r - r_*)g & \text{si } r \geq r_*, \\ 0 & \text{si } r < r_*. \end{cases}$$

Il est clair que  $\|\mathcal{R}\|_{H^1(\Omega^+)} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ . De plus,  $[\mathcal{R}]_\Gamma = g$  et, comme  $\mathcal{R}$  est constant au voisinage de  $\Gamma$ ,  $[r\partial_r \mathcal{R}]_\Gamma = 0$ . On cherche maintenant  $u$  sous la forme  $u = \tilde{u} + \mathcal{R}$ . Par construction  $[\tilde{u}]_\Gamma = 0$  si bien que  $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ . De plus,  $\tilde{u}$  satisfait le problème variationnel suivant :

$$- \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \epsilon_\infty^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla \varphi} + \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \omega^2 \mu_\infty \tilde{u} \cdot \overline{\varphi} - i\omega \int_{\partial\Omega} \tilde{u} \overline{\varphi} ds = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad (3.6.2)$$

avec

$$L(\varphi) := \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} f \cdot \overline{\varphi} + \int_{\Omega^+} \epsilon_\infty^{-1} \nabla \mathcal{R} \cdot \overline{\nabla \varphi} - \int_{\Omega^+} \omega^2 \mu_\infty \mathcal{R} \overline{\varphi} + {}_{H^{-1/2}(\Gamma)} \langle \epsilon_\infty^{-1} h, \langle \varphi \rangle_\Gamma \rangle_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

La forme linéaire  $L$  est continue :  $|L(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$ . Le problème (3.6.2) admet donc une solution  $\tilde{u}$ . Par suite le problème (3.6.1) est bien posé.  $\square$

### 3.7 Construction des termes du développement asymptotique : existence et unicité

En rassemblant les équations (3.2.1), (3.3.3) et (3.4.4) obtenues formellement dans les parties précédentes, pour tout  $n \geq 0$ , il est logique de construire les termes du développement asymptotique  $u_n^\pm(\rho, \theta), U_n(\nu, s, \theta)$  comme les solutions du système couplé suivant :

Trouver  $u_n \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-)$ , et  $U_n \in \mathcal{C}_{\#}^{\infty}([0, 2\pi], \mathbb{V}_+^1(B))$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_{\infty}^{-1} \Delta u_n + \omega^2 \mu_{\infty} u_n = f \delta_n^0 & \text{dans } \Omega^{\pm}, \\ \partial_r u_n^{\text{D}} + i\omega u_n^{\text{D}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_n]_{\Gamma} = [\ell_{\text{D}}(U_n)] & \text{et } [\partial_r u_n]_{\Gamma} = [\ell_{\text{N}}(U_{n+1})], \end{cases} \quad (3.7.1)$$

$$\begin{cases} A_0(\partial_{\nu}, \partial_s) U_n = - \sum_{j=1}^4 \nu^j A_j U_{n-j} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \quad \forall \theta \in (0, 2\pi) \\ \langle \ell_{\text{D}}(U_n) \rangle = \langle u_n \rangle_{\Gamma} & \text{et } \langle \ell_{\text{N}}(U_n) \rangle = \langle \partial_r u_{n-1} \rangle_{\Gamma}. \end{cases}$$

On rappelle que l'espace  $\mathbb{V}_+^1(B)$  a été défini par (3.3.7) et que les opérateurs différentiels  $A_j$  sont définis par (3.3.4)-(3.3.5). Les définitions des sauts et moyennes sont données par (3.2.13) et (3.3.9).

### 3.7.1 Réécriture des problèmes récurrents

Supposons que les termes  $u_k$  et  $U_k$  soient définis pour  $k = 0 \dots n-1$ . On aimerait montrer que le problème (3.7.1) est bien posé. Malheureusement, ce résultat semble difficile à montrer directement parce que la condition  $[\partial_r u_n]_{\Gamma} = [\ell_{\text{N}}(U_{n+1})]$  fait intervenir le terme de champ proche d'ordre  $n+1$ . On retrouve ce type de difficulté lors de la construction du développement asymptotique d'une couche mince homogène (cf. partie 3 de [ST10]). Pour contourner ce problème, on va séparer les champs lointains  $u_n$  et les champs proches  $U_n$  en deux parties : posons

$$U_n^{\text{D}} := \langle \ell_{\text{D}}(U_n) \rangle, \quad U_n^{\text{N}} := U_n - \langle \ell_{\text{N}}(U_n) \rangle \quad (3.7.2)$$

Alors,

$$U_n = U_n^{\text{D}} + U_n^{\text{N}} \quad \text{avec} \quad \langle \ell_{\text{D}}(U_n^{\text{N}}) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad U_n^{\text{D}} = U_n^{\text{D}}(\theta). \quad (3.7.3)$$

De même,  $u_n = u_n^{\text{D}} + u_n^{\text{N}}$  où  $u_n^{\text{D}}$  et  $u_n^{\text{N}}$  sont les solutions des deux problèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{Trouver } u_n^{\text{D}} \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-) \text{ telle que} & \text{Trouver } u_n^{\text{N}} \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-) \text{ telle que} \\ \begin{cases} \epsilon_{\infty}^{-1} \Delta u_n^{\text{D}} + \omega^2 \mu_{\infty} u_n^{\text{D}} = f \cdot \delta_n^0, & \text{dans } \Omega^{\pm}, \\ \partial_r u_n^{\text{D}} + i\omega u_n^{\text{D}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ [u_n^{\text{D}}]_{\Gamma} = [u_n]_{\Gamma}, \quad [\partial_r u_n^{\text{D}}]_{\Gamma} = 0, \end{cases} & \begin{cases} \epsilon_{\infty}^{-1} \Delta u_n^{\text{N}} + \omega^2 \mu_{\infty} u_n^{\text{N}} = 0 & \text{dans } \Omega^{\pm}, \\ \partial_r u_n^{\text{N}} + i\omega u_n^{\text{N}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_n^{\text{N}}]_{\Gamma} = 0, \quad [\partial_r u_n^{\text{D}}]_{\Gamma} = [\partial_r u_n]_{\Gamma}. \end{cases} \end{array} \quad (3.7.4)$$

Plutôt que de chercher directement  $u_n$ , et  $U_n$  comme les solutions du problème (3.7.1), on va utiliser le changement d'inconnues précédent et chercher à chaque étape les termes  $U_n^N$ ,  $U_{n-1}^D$ ,  $u_n^D$  et  $u_{n-1}^N$  et résoudre le problème

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u_n^D \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-), \quad u_{n-1}^N \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-) \\ & \text{et } U_{n-1}^D \in \mathcal{C}_\#^\infty([0, 2\pi]), \quad U_n^N \in \mathcal{C}_\#^\infty([0, 2\pi], \mathbb{V}_+^1(B)) \text{ satisfaisant} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_n^D + \omega^2 \mu_\infty u_n^D = f \delta_n^0 & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \partial_r u_n^D + i\omega u_n^D = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ [u_n^D]_\Gamma - [\ell_D(U_n^N)] = 0 & \text{et } [\partial_r u_n^D]_\Gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_{n-1}^N + \omega^2 \mu_\infty u_{n-1}^N = 0 & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \partial_r u_{n-1}^N + i\omega u_{n-1}^N = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ [u_{n-1}^N]_\Gamma = 0 & \text{et } [\partial_r u_{n-1}^N]_\Gamma - [\ell_N(U_n^N)] = 0 \end{cases} \quad (3.7.5)$$

$$\begin{cases} A_0(\partial_\nu, \partial_s) U_n^N + \nu A_1 \cdot U_{n-1}^D \\ \quad \quad \quad = -\nu A_1 U_{n-1}^N - \sum_{j=2}^4 \nu^j A_j U_{n-j} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \\ \langle \ell_D(U_n^N) \rangle = 0 & \text{and } \langle \ell_N(U_n^N) \rangle - \langle \partial_r u_{n-1}^N \rangle_\Gamma = \langle \partial_r u_{n-1}^D \rangle_\Gamma \end{cases}$$

$$\{ U_{n-1}^D - \langle u_{n-1}^N \rangle_\Gamma = \langle u_{n-1}^D \rangle_\Gamma$$

**Remarque 3.7.1.** Les suites de problèmes (3.7.1) et (3.7.5) sont équivalentes : si  $(U_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est solution de la suite de problèmes (3.7.1), on peut pour tout  $n$  définir  $U_n^D$ ,  $U_n^N$ ,  $u_n^D$  et  $u_n^N$  par les formules (3.7.3) et (3.7.4) (d'après la proposition 3.6.1 les problèmes définissant  $u_n^D$  et  $u_n^N$  sont bien posés). Inversement si la suite  $(U_n^N, U_{n-1}^D, u_n^D, u_{n-1}^N)_{n \in \mathbb{N}}$  est solution de la suite de problèmes (3.7.5), alors la suite  $(u_n = u_n^D + u_n^N, U_n = U_n^D + U_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$  est solution de la suite de problèmes (3.7.1).

### 3.7.2 Résultat d'existence et d'unicité

L'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant

**Proposition 3.7.2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le problème (3.7.5) admet une solution unique.

La démonstration est décomposée en trois parties. Nous montrons d'abord successivement l'unicité puis l'existence d'une solution du problème (3.7.5) pour  $n$  donné en supposant  $u_k^D, u_{k-1}^N, U_k^N$  et  $U_{k-1}^D$  connues pour  $k = 0 \dots n-1$ . Enfin, nous initialisons le processus récurrent en construisant une solution du problème (3.7.5) pour  $n = 0$ .

#### 3.7.2.1 Unicité

**Proposition 3.7.3.**

Supposons que pour tout  $k = 0 \dots n-1$ ,  $u_k^D, u_{k-1}^N, U_k^N$  et  $U_{k-1}^D$  sont des données connues. Alors le problème (3.7.5) admet au plus une solution.

*Démonstration.* Soit  $v^D, v^N \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-)$ ,  $V^N \in \mathcal{C}_\#^\infty([0, 2\pi], \mathbb{V}_+^1(B))$  et  $V^D \in \mathcal{C}_\#^\infty(0, 2\pi)$  une solution du problème (3.7.5) avec second membre nul. On doit montrer que  $v^D = v^N = 0$ ,  $V^N = 0$  et  $V^D = 0$ .

Dans une première étape, on montre que  $[\ell_N(V^N)] = 0$ . Puisque  $V^D$  est indépendant de  $\nu$  et  $s$ ,  $-\nu^{-1} A_1 \cdot V^D = r_*(\partial_\theta V^D) \partial_s(\epsilon^{-1})$  (cf. (3.3.5) pour la définition de  $A_1$ ). Or,  $\partial_s(\epsilon^{-1}) = \operatorname{div} \mathbf{g}$  où  $\mathbf{g} = (0, \epsilon^{-1} - \epsilon_\infty^{-1})$ .  $\mathbf{g}$  appartient à  $L^2(B)$  et est à support compact. Soit  $(\chi) \in \mathcal{C}^\infty(|R|)$  une fonction de troncature qui satisfait

$$\chi(\nu) = \chi(-\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \chi(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| \leq 3, \\ 0 & \text{si } |\nu| \geq 4. \end{cases}$$

Comme  $\chi$  ne dépend pas de  $s$ ,

$$\int_B \mathbf{g} \cdot \nabla \chi = 0 \tag{3.7.6}$$

Donc,

$$\int_B \nabla V^N \cdot \nabla \chi = r_*(\partial_\theta V^D) \int_B \mathbf{g} \cdot \nabla \chi = 0. \tag{3.7.7}$$

Par ailleurs, le développement en série de Fourier de  $V^N$  donne

$$V^N = \ell_D^\pm(V^N) + \ell_N^\pm(V^N)\nu + w^\pm \quad \text{dans } B^\pm, \quad \text{avec} \quad \int_{-1/2}^{1/2} w^\pm ds = 0 \quad \forall \pm \nu > 2.$$

si bien que

$$\int_B \nabla V^N \cdot \nabla \chi = \ell_N^+(V^N) \int_3^4 \chi' d\nu + \ell_N^-(V^N) \int_{-4}^{-3} \chi' d\nu = [\ell_N^+(V^N)].$$

Donc  $[\ell_N^+(V^N)] = 0$ .

On en déduit que  $[\partial_r v^N] = 0$  si bien que  $v^N$  appartient à  $H^1(\Omega)$  et est la solution de l'équation de Helmholtz homogène dans le domaine entier  $\Omega$ . Donc,  $v^N$  est elle aussi nulle. On en déduit que  $V^D = 0$  puis que  $\langle \ell_N(V^N) \rangle = 0$ . La proposition 3.5.7 donne alors  $V^N = 0$ . Enfin,  $v^D$  appartient à  $H^1(\Omega)$  et satisfait elle aussi l'équation de Helmholtz homogène dans si bien que  $v^D = 0$ .  $\square$

### 3.7.2.2 Existence

#### Proposition 3.7.4 (Existence).

Supposons que, pour tout  $k = 0 \dots n-1$ ,  $u_k^D, u_{k-1}^N, U_k^N$  et  $U_{k-1}^D$  soient connues. Alors le problème (3.7.5) admet au moins une solution.

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que, par hypothèse de récurrence  $-\nu A_1 U_{n-1}^N - \sum_{j=2}^4 \nu^j A_j U_{n-j}$  satisfait les hypothèses de la proposition 3.5.7 si bien qu'on peut construire  $V_n \in \mathcal{C}_\#^\infty([0, 2\pi], \mathbb{V}_+^1(B))$  comme l'unique solution du problème

$$\begin{cases} A_0(\partial_\nu, \partial_s)V_n = -\nu A_1 U_{n-1}^N - \sum_{j=2}^4 \nu^j A_j U_{n-j} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \\ \langle \ell_D(V_n) \rangle = 0, \\ \langle \ell_N(V_n) \rangle = 0. \end{cases}$$

Notons qu'a priori  $[\ell_D(V_n)] \neq 0$  et  $[\ell_N(V_n)] \neq 0$ . Maintenant définissons  $u_{n-1}^N \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-)$  comme l'unique solution appartenant à  $H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-)$  du problème

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_{n-1}^N + \omega^2 \mu_\infty u_{n-1}^N = 0 \quad \text{dans } \Omega^\pm, \\ \partial_r u_{n-1}^N + i\omega u_{n-1}^N = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ [u_{n-1}^N]_\Gamma = 0 \quad \text{and} \quad [\partial_r u_{n-1}^N]_\Gamma = [\ell_N(V_n)] \end{cases} \tag{3.7.8}$$

On verra a posteriori que  $u_{n-1}^N$  satisfait aussi  $[\partial_r u_{n-1}^N]_\Gamma = [\ell_N(U_n^N)]$ . On pose ensuite  $U_{n-1}^D := \langle u_{n-1}^N \rangle_\Gamma + \langle u_{n-1}^D \rangle_\Gamma$ . Nous pouvons à présent construire  $U_n^N$ . Pour cela on introduit  $W_n$ , solution du problème intermédiaire bien posé



(d'après la proposition 3.5.7)

$$\begin{cases} W_n \in \mathcal{C}_{\#}^{\infty}([0, 2\pi], \mathbb{V}_+^1(B)) \\ \nu^{-2} A_0(\partial_{\nu}, \partial_s) W_n = -\nu^{-1} A_1 U_{n-1}^D \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \\ \langle \ell_D(W_n) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \ell_N(W_n) \rangle = \langle \partial_r u_{n-1}^N \rangle_{\Gamma} + \langle \partial_r u_{n-1}^D \rangle_{\Gamma} \end{cases} \quad (3.7.9)$$

Comme  $U_{n-1}^D$  est indépendante des variables  $s$  et  $\nu$ , on peut reproduire la première partie de la preuve de la proposition 3.7.3 et montrer que  $[\ell_N(W_n)] = 0$ . Si nous définissons

$$U_n^N := V_n + W_n,$$

alors  $U_n^N$  vérifie bien le troisième système d'équations de (3.7.5). Par ailleurs,  $[\partial_r u_{n-1}^N] = [\ell_N(V_n)] = [\ell_N(U_n)]$  si bien que  $u_{n-1}^N$  défini par (3.7.8) satisfait en fait aussi le second système d'équation de (3.7.5). Une fois les fonctions  $U_n^N$ ,  $U_{n-1}^D$  et  $u_{n-1}^N$  entièrement définies,  $u_n^D$  est complètement déterminée par le premier système de (3.7.5).  $\square$

### 3.7.2.3 Initialisation

Pour terminer la preuve de la proposition 3.7.2, il suffit de montrer que l'on peut construire  $U_0^N$ ,  $U_{-1}^D$ ,  $u_{-1}^N$  et  $u_0^D$  (initialisation de la procédure récurrente). Or, en reproduisant pas à pas les différentes étapes de la preuve de la proposition 3.7.4, on peut construire une solution (qui est aussi l'unique solution) du problème 3.7.5 pour  $n = 0$ . Ainsi, on montre d'abord que  $U_0^N$ ,  $U_{-1}^D$  et  $u_{-1}^N$  sont nulles.  $u_0^D$  est alors définie comme la solution du problème limite

$$\begin{cases} \epsilon_{\infty}^{-1} \Delta u_0^N + \omega^2 \mu_{\infty} u_0^N = f \quad \text{dans } \Omega^{\pm}, \\ \partial_r u_0^D + i\omega u_0^D = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_0^D]_{\Gamma} = 0 \quad \text{et} \quad [\partial_r u_0^D]_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.7.10)$$

## 3.8 Une forme semi-explicite du développement asymptotique

Dans la partie précédente, nous avons montré l'existence et l'unicité du développement asymptotique mais nous n'avons pas obtenu d'expression explicite de chacun de ses termes. C'est l'objet du paragraphe qui suit dont le résultat principal est donné par la proposition 3.8.3. En particulier, nous allons montrer que les champs proches  $U_n$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$U_n = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k \langle u_{n-j} \rangle_{\Gamma}}{\partial \theta^k} V_j^k + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \left\langle \frac{\partial u_{n-1-j}}{\partial r} \right\rangle_{\Gamma} W_j^k, \quad (3.8.1)$$

où les fonctions  $V_j^k$  et  $W_j^k$ , aussi appelées fonctions profils, ne dépendent que des variables lentes  $s$  et  $\nu$ . Dans la formule précédente, la variable  $\theta$  est séparée des variables  $\nu$  et  $s$ . Elle n'apparaît en fait qu'au travers des dérivées tangentielles des moyennes des traces et des traces normales des champs lointains sur  $\Gamma$ . Remarquons que les fonctions  $V_j^k$  sont associées aux dérivées tangentielles des moyennes des traces des champs lointains alors que les fonctions  $W_j^k$  sont associées aux dérivées tangentielles des moyennes des traces normales des champs lointains. L'exposant  $k$  est quant-à lui associé à la dérivée  $k$ -ième par rapport à  $\theta$  des moyennes des traces ou traces normales des champs lointains.

Pour comprendre la construction que nous allons mettre en place, nous avons jugé utile d'expliquer au préalable la construction des premiers termes du développement. En vertu de la remarque 3.7.1, dans les parties 3.8.1 et 3.8.2 nous allons travailler directement sur les problèmes récurrents (3.7.1) dont nous savons désormais qu'ils sont bien posés.

### 3.8.1 Construction des termes $U_0$ , $U_1$ et $U_2$

#### Construction de $U_0$

$U_0$  est la solution du problème

Trouver  $U_0 \in \mathcal{C}_{\#}^{\infty}([0, 2\pi], \mathbb{V}_+^1(B))$  satisfaisant

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla U_0) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), & \forall \theta \in ]0, 2\pi[, \\ \langle \ell_{\mathbb{D}}(U_0) \rangle = \langle u_0 \rangle_{\Gamma}, \\ \langle \ell_{\mathbb{N}}(U_0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Remarquons que la variable  $\theta$  intervient comme un paramètre. Comme  $U_0(\cdot, \cdot; \theta) \in N$ ,  $U_0 = a(\theta) + b(\theta)\mathcal{N}$  (proposition 3.5.5). Les conditions  $\langle \ell_{\mathbb{D}}(U_0) \rangle = \langle u_0 \rangle_{\Gamma}$  et  $\langle \ell_{\mathbb{N}}(U_0) \rangle = 0$  donnent  $a = \langle u_0 \rangle_{\Gamma}$  et  $b = 0$ . Finalement

$$U_0 = \langle u_0 \rangle_{\Gamma}. \quad (3.8.2)$$

$U_0$  est indépendante des variables microscopiques  $\nu$  et  $s$ .

Si on pose  $V_0^0 = 1$ , alors  $U_0 = \langle u_0 \rangle_{\Gamma} V_0^0$  et est bien de la forme (3.8.1) souhaitée. On en déduit par ailleurs que

$$[u_0]_{\Gamma} = [\ell_{\mathbb{D}}(U_0)] = 0. \quad (3.8.3)$$

#### Construction de $U_1$

$U_1$  est la solution du problème

Trouver  $U_1 \in \mathcal{C}_{\#}^{\infty}([0, 2\pi], \mathbb{V}_+^1(B))$  satisfaisant

$$\begin{cases} r_*^2 \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla U_1) = -\langle \partial_{\theta} u_0 \rangle_{\Gamma} r_* \frac{\partial(\epsilon^{-1})}{\partial s} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), & \forall \theta \in ]0, 2\pi[, & (a) \\ \langle \ell_{\mathbb{D}}(U_1) \rangle = \langle u_1 \rangle_{\Gamma}, & & (b) \\ \langle \ell_{\mathbb{N}}(U_1) \rangle = \langle \partial_r u_0 \rangle_{\Gamma}. & & (c) \end{cases} \quad (3.8.4)$$

Nous allons maintenant utiliser la linéarité des équations (3.8.4-(a)-(b)-(c)) pour obtenir une expression semi-explicite de  $U_1$  de la forme (3.8.1) dans laquelle la variable  $\theta$  est séparée des variables  $\nu$  et  $s$ . Pour cela on introduit la fonction "profil"  $V_1^1$ , indépendante de  $\theta$ , solution du problème

Trouver  $V_1^1 \in \mathbb{V}_+^1(B)$  satisfaisant

$$\begin{cases} r_*^2 \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla V_1^1) = -r_* \frac{\partial(\epsilon^{-1})}{\partial s} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_{\mathbb{D}}(V_1^1) \rangle = \langle \ell_{\mathbb{N}}(V_1^1) \rangle = 0. \end{cases}$$

La proposition 3.5.7 donne l'existence et l'unicité de la fonction  $V_1^1$ . De plus, on peut montrer que  $[\ell_{\mathbb{N}}(V_1^1)] = 0$  (cf. section 3.10.2).

On cherche alors  $U_1$  sous la forme

$$U_1 = a(\theta) + b(\theta)\mathcal{N} + \langle \partial_{\theta} u_0 \rangle_{\Gamma} V_1^1.$$

Il est clair que la fonction  $U_1$  ainsi définie vérifie (3.8.4-(a)). On va déterminer  $a(\theta)$  et  $b(\theta)$  pour qu'elle vérifie également (3.8.4-(b)-(c)) :

$$\langle \partial_r u_0 \rangle_{\Gamma} = b(\theta) \underbrace{\langle \ell_{\mathbb{N}}(\mathcal{N}) \rangle}_{=1} + \langle \partial_r u_0 \rangle_{\Gamma} \underbrace{\langle \ell_{\mathbb{N}}(V_1^1) \rangle}_{=0}.$$

Donc  $b = \langle \partial_r u_0 \rangle_{\Gamma}$ . De même,  $a = \langle u_1 \rangle_{\Gamma}$  puisque

$$\langle u_1 \rangle_{\Gamma} = a(\theta) + b(\theta) \underbrace{\langle \ell_{\mathbb{D}}(\mathcal{N}) \rangle}_{=0} + \langle \partial_r u_0 \rangle_{\Gamma} \underbrace{\langle \ell_{\mathbb{D}}(V_1^1) \rangle}_{=0}.$$

Finalement,

$$U_1 = \langle u_1 \rangle_\Gamma + \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma \mathcal{N} + \langle \partial_\theta u_0 \rangle_\Gamma V_1^1. \quad (3.8.5)$$

De nouveau, si on pose  $W_0^0 = \mathcal{N}$  et  $V_1^0 = 0$ ,  $U_1$  est bien de la forme (3.8.1). On obtient aussi une expression explicite de  $[u_1]_\Gamma$  et de  $[\partial_r u_0]_\Gamma$  :

$$[u_1]_\Gamma = [\ell_D(\mathcal{N})] \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma + [\ell_D(V_1^1)] \langle \partial_\theta u_0 \rangle_\Gamma \quad \text{et} \quad [\partial_r u_0]_\Gamma = 0. \quad (3.8.6)$$

### Construction de $U_2$

Afin de comprendre et d'anticiper la construction à tout ordre, on rappelle qu'on a défini artificiellement  $V_0^0 := 1$ ,  $V_1^0 := 0$  et  $W_0^0 := \mathcal{N}$ .  $U_2$  est alors solution du problème

Trouver  $U_2 \in \mathcal{C}_\#^\infty([0, 2\pi], \mathbb{V}_+^1(B))$  satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} r_*^2 \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla U_2) = - \langle u_1 \rangle_\Gamma \left( \nu A_1^{[0]}(V_0^0) \right) - \langle \partial_\theta u_1 \rangle_\Gamma \left( \nu A_1^{[1]}(V_0^0) \right) \\ \quad - \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma \left( \nu A_1^{[0]}(W_0^0) \right) - \left\langle \partial_{r,\theta}^2 u_0 \right\rangle_\Gamma \left( \nu A_1^{[1]}(W_0^0) \right) \\ \quad - \langle u_0 \rangle_\Gamma \left( \nu^2 A_2^{[0]}(V_0^0) + \nu A_1^{[1]}(V_1^0) \right) - \langle \partial_\theta u_0 \rangle_\Gamma \left( \nu A_1^{[0]}(V_1^1) + \nu A_1^{[1]}(V_1^0) \right) \\ \quad - \left\langle \partial_{\theta,\theta}^2 u_0 \right\rangle_\Gamma \left( \nu^2 A_2^{[2]}(V_0^0) + \nu A_1^{[1]}(V_1^1) \right) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \quad \forall \theta \in ]0, 2\pi[, \quad (a) \\ \langle \ell_D(U_2) \rangle = \langle u_2 \rangle_\Gamma \quad (b) \\ \langle \ell_N(U_2) \rangle = \langle \partial_r u_1 \rangle_\Gamma. \quad (c) \end{array} \right. \quad (3.8.7)$$

On souhaite écrire  $U_2$  sous la forme (3.8.1) dans laquelle la variable  $\theta$  est séparée des variables  $s$  et  $\nu$ . Pour cela, on va de nouveau utiliser la linéarité de l'équation (3.8.7) et définir deux nouvelles séries de fonctions "profils" :

$\forall k \in \{0, 1, 2\}$ , Trouver  $V_2^k \in \mathbb{V}_+^1(B)$  satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} r_*^2 \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla V_2^k) = -\nu A_1^{[0]} V_1^k - \nu A_1^{[1]} V_1^{k-1} - \nu^2 A_2^{[0]} V_0^k - \nu^2 A_2^{[2]} V_0^{k-2} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(V_2^k) \rangle = \langle \ell_N(V_2^k) \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (3.8.8)$$

et

$\forall k \in \{0, 1\}$ , Trouver  $W_1^k \in \mathbb{V}_+^1(B)$  satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} r_*^2 \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla W_1^k) = -\nu A_1^{[0]} W_0^k - \nu A_1^{[1]} W_0^{k-1} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(W_1^k) \rangle = \langle \ell_N(W_1^k) \rangle = 0, \end{array} \right. \quad (3.8.9)$$

où par convention  $V_2^k = W_1^k = 0$  si  $k \leq 0$ . L'existence et l'unicité des fonctions  $V_2^k$  et  $W_1^k$  proviennent directement de l'application de la proposition 3.5.7. Ces fonctions sont détaillées dans la partie 3.10.2. On construit alors  $U_2$  sous la forme

$$U_2 = a(\theta) + b(\theta) \mathcal{N} + \langle u_1 \rangle_\Gamma V_1^0 + \langle \partial_\theta u_1 \rangle_\Gamma V_1^1 + \sum_{k=0}^1 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma W_1^k + \sum_{k=0}^2 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle u_0 \rangle_\Gamma V_2^k.$$

On vérifie que  $U_2$  ainsi construite satisfait (3.8.7-(a)). Tout comme pour  $U_1$ , on va déterminer  $a(\theta)$  et  $b(\theta)$  pour qu'elle vérifie aussi (3.8.7-(b)-(c)) :

$$\begin{aligned} \langle u_2 \rangle_\Gamma = \langle \ell_D(U_2) \rangle &= a(\theta) + b(\theta) \underbrace{\langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle}_{=0} + \langle u_1 \rangle_\Gamma \underbrace{\langle \ell_D(V_1^0) \rangle}_{=0} + \langle \partial_\theta u_1 \rangle_\Gamma \underbrace{\langle \ell_D(V_1^1) \rangle}_{=0} \\ &\quad + \sum_{k=0}^1 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma \underbrace{\langle \ell_D(W_1^k) \rangle}_{=0} + \sum_{k=0}^2 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle u_0 \rangle_\Gamma \underbrace{\langle \ell_D(V_2^k) \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Donc  $a(\theta) = \langle u_2 \rangle_\Gamma$ . De même,

$$\begin{aligned} \langle \partial_r u_1 \rangle_\Gamma = \langle \ell_N(U_2) \rangle &= b(\theta) \underbrace{\langle \ell_N(\mathcal{N}) \rangle}_{=1} + \langle u_1 \rangle_\Gamma \underbrace{\langle \ell_N(V_1^0) \rangle}_{=0} + \langle \partial_\theta u_1 \rangle_\Gamma \underbrace{\langle \ell_N(V_1^1) \rangle}_{=0} \\ &+ \sum_{k=0}^1 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma \underbrace{\langle \ell_N(W_1^k) \rangle}_{=0} + \sum_{k=0}^2 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle u_0 \rangle_\Gamma \underbrace{\langle \ell_N(V_2^k) \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Donc  $b(\theta) = \langle \partial_r u_1 \rangle_\Gamma$ . Finalement,  $U_2$  est bien de la forme (3.8.1) puisque

$$U_2 = \langle u_2 \rangle_\Gamma + \langle \partial_r u_1 \rangle_\Gamma \mathcal{N} + \langle \partial_\theta u_1 \rangle_\Gamma V_1^1 + \sum_{k=0}^1 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma W_1^k + \sum_{k=0}^2 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle u_0 \rangle_\Gamma V_2^k. \quad (3.8.10)$$

On obtient aussi une expression explicite des sauts  $[u_2]_\Gamma$  et  $[\partial_r u_1]_\Gamma$  :

$$\begin{aligned} [u_2]_\Gamma &= \langle \partial_r u_1 \rangle_\Gamma [\ell_D(\mathcal{N})] + \langle u_1 \rangle_\Gamma \underbrace{[\ell_D(V_1^1)]}_{=0} + \langle \partial_\theta u_1 \rangle_\Gamma [\ell_D(V_1^1)] \\ &+ \sum_{k=0}^1 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma [\ell_D(W_1^k)] + \sum_{k=0}^2 \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle u_0 \rangle_\Gamma [\ell_D(V_2^k)], \quad (3.8.11) \end{aligned}$$

et, puisque  $[\ell_N(\mathcal{N})] = [\ell_N(V_1^0)] = [\ell_N(V_1^1)] = [\ell_N(W_1^0)] = [\ell_N(V_2^1)] = 0$  et que  $[\ell_N(W_1^1)] = [\ell_D(V_1^1)]$  (voir les tableaux 3.2-3.3-3.4 dans la partie annexe 3.10.2)

$$[\partial_r u_1]_\Gamma = \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma [\ell_D(V_1^1)] + \langle u_0 \rangle_\Gamma [\ell_N(V_2^0)] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \langle u_0 \rangle_\Gamma [\ell_N(V_2^2)]. \quad (3.8.12)$$

### 3.8.2 Construction des termes $u_0$ et $u_1$

#### Construction de $u_0$

En combinant les équations de champs lointains de (3.7.1) et les conditions de sauts (3.8.3-3.8.6),  $u_0$  est solution du problème limite (bien posé)

Trouver  $u_0 \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_0 + \omega^2 \mu_\infty u_0 = f & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \partial_r u_0 + i\omega u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ [u_0]_\Gamma = [\partial_r u_0]_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (3.8.13)$$

qui est équivalent au problème

Trouver  $u_0 \in H^1(\Omega)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_0 + \omega^2 \mu_\infty u_0 = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_r u_0 + i\omega u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La solution  $u_0$  est donc la solution d'un problème de Helmholtz en milieu homogène sans anneau périodique.

### Construction de $u_1$

En combinant les équations des champs lointains (3.7.1) et les conditions de sauts (3.8.12-3.8.6),  $u_1$  est solution du problème bien posé (proposition 3.6.1)

Trouver  $u_1 \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1 + \omega^2 \mu_\infty u_1 = 0 & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \partial_r u_1 + i\omega u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_1]_\Gamma = [\ell_D(\mathcal{N})] \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma + [\ell_D(V_1^1)] \langle \partial_\theta u_0 \rangle_\Gamma, \\ [\partial_r u_1]_\Gamma = [\ell_D(V_1^1)] \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma + [\ell_N(V_2^0)] \langle u_0 \rangle_\Gamma + [\ell_N(V_2^2)] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \langle u_0 \rangle_\Gamma. \end{cases} \quad (3.8.14)$$

De plus,  $[\ell_D(V_1^1)] = 0$  quand  $\epsilon$  et  $\mu$  sont symétriques en  $\nu$  ou en  $s$  (voir l'annexe 3.10.2, tables 3.1-3.2), c'est à dire quand

$$\begin{cases} \epsilon(-\nu, s) = \epsilon(\nu, s), \\ \mu(-\nu, s) = \mu(\nu, s), \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \epsilon(\nu, -s) = \epsilon(\nu, s), \\ \mu(\nu, -s) = \mu(\nu, s). \end{cases} \quad (3.8.15)$$

Dans ce cas,  $u_1$  est solution du problème simplifié

Trouver  $u_1 \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1 + \omega^2 \mu_\infty u_1 = 0 & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \partial_r u_1 + i\omega u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_1]_\Gamma = [\ell_D(\mathcal{N})] \langle \partial_r u_0 \rangle_\Gamma, \\ [\partial_r u_1]_\Gamma = [\ell_N(V_2^0)] \langle u_0 \rangle_\Gamma + [\ell_N(V_2^2)] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \langle u_0 \rangle_\Gamma. \end{cases} \quad (3.8.16)$$

### 3.8.3 Conditions de transmission à tout ordre

#### Les fonctions profils

Nous aimerions généraliser la technique de construction de  $U_0$ ,  $U_1$  et  $U_2$  à tous les termes de champs lointains et écrire  $U_n$  sous la forme

$$U_n = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k \langle u_{n-j} \rangle_\Gamma}{\partial \theta^k} V_j^k + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \frac{\partial u_{n-1-j}}{\partial r} \rangle_\Gamma W_j^k, \quad (3.8.1)$$

Cela nous conduit à définir les deux familles de fonctions :

**Définition 3.8.1.** On définit de manière récurrente  $(V_n^k)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2, k \leq n}$  et  $(W_n^k)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2, k \leq n}$  par

$$\begin{aligned} -V_0^0 &= 1, \\ -\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n, V_n^k &\in \mathbb{V}_1^+(B) \text{ et satisfait,} \\ \begin{cases} \nabla \cdot (\epsilon^{-1} \nabla V_n^k) = -\frac{1}{r_*^2} (\nu(A_1^{[0]} V_{n-1}^k + A_1^{[1]} V_{n-1}^{k-1}) + \nu^2 (A_2^{[0]} V_{n-2}^k + A_2^{[2]} V_{n-2}^{k-2}) \\ \quad + (\nu^3 A_3 V_{n-3}^k + \nu^4 A_4 V_{n-4}^k)) & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(V_n^k) \rangle = 0, \\ \langle \ell_N(V_n^k) \rangle = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

$$- W_0^0 = \mathcal{N},$$

$$- \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n, W_n^k \in \mathbb{V}_1^+(B) \text{ et satisfait,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\epsilon^{-1} \nabla W_n^k) = -\frac{1}{r_*^2} (\nu(A_1^{[0]} W_{n-1}^k + A_1^{[1]} W_{n-1}^{k-1}) + \nu^2(A_2^{[0]} W_{n-2}^k + A_2^{[2]} W_{n-2}^{k-2}) \\ \quad + (\nu^3 A_3 W_{n-3}^k + \nu^4 A_4 W_{n-4}^k)) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(W_n^k) \rangle = 0, \\ \langle \ell_N(W_n^k) \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (3.8.18)$$

où, par convention,  $W_n^k = V_n^k = 0$  if  $n < 0$  or  $k < 0$ .

L'application (récurrente) de la proposition 3.5.7 donne immédiatement le résultat suivant :

**Proposition 3.8.2.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $k \leq n$ , les fonctions  $W_n^k$  et  $V_n^k$  existent et sont définies de manière unique. De plus elles vérifient la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ . Plus précisément, Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $k \leq n$ , il existe deux polynômes  $(p_n^k)^\pm$  appartenant à  $\mathbb{P}_n$ , deux polynômes  $(q_n^k)^\pm$  appartenant à  $\mathbb{P}_{n+1}$  ainsi que des fonctions  $w_{V_n^k}^\pm$  et  $w_{W_n^k}^\pm$  appartenant à  $\mathbb{V}_-^1(B)$  telles que*

$$V_n^k = (p_n^k)^\pm + w_{V_n^k}^\pm \quad \text{dans } B^\pm, \quad \text{avec } \int_{-1/2}^{1/2} w_{V_n^k}^\pm(\nu, s) ds = 0 \quad \forall \pm \nu > 2.$$

$$W_n^k = (q_n^k)^\pm + w_{W_n^k}^\pm \quad \text{dans } B^\pm, \quad \text{avec } \int_{-1/2}^{1/2} w_{W_n^k}^\pm(\nu, s) ds = 0 \quad \forall \pm \nu > 2$$

Pour comprendre la définition de ces fonctions, il faut, pour tout  $n$ , insérer les expressions des champs proches (3.8.1) dans les équations de champ proche (3.3.3) puis séparer les différents ordres de dérivations en  $\theta$  en utilisant la linéarité de ces équations (comme nous l'avons fait pour  $U_1$  et  $U_2$ ). Cette partie est relativement technique. Par ailleurs, le processus de construction des familles  $W_n^k$  et  $V_n^k$  mime en fait la propagation des fonctions du noyau  $\mathcal{N}$  et 1 au travers des équations de Helmholtz emboîtées (3.3.3). La distinction entre  $A_1^{[0]}$  et  $A_0^{[1]}$  d'une part et entre  $A_2^{[0]}$  et  $A_2^{[2]}$  d'autre part permet de séparer les différents ordres de dérivation par rapport à la variable  $\theta$ .

On peut alors donner le résultat principal de cette section :

**Proposition 3.8.3.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le champ lointain  $u_n$  est l'unique solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_n \in \mathbb{H}^1(\Omega^+) \times \mathbb{H}^1(\Omega^-) \text{ satisfaisant} \\ \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_n + \omega^2 \mu_\infty u_n = \delta_n^0 f \quad \text{in } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ \partial_r u_{n-1} + i\omega u_{n-1} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \\ [u_n]_\Gamma = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^j [\ell_D(V_j^k)] \frac{\partial^k \langle u_{n-j} \rangle_\Gamma}{\partial \theta^k} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^j [\ell_D(W_j^k)] \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \frac{\partial u_{n-1-j}}{\partial r} \rangle_\Gamma \quad (a), \\ \left[ \frac{\partial u_n}{\partial r} \right]_\Gamma = \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{k=0}^j [\ell_N(V_j^k)] \frac{\partial^k \langle u_{n+1-j} \rangle_\Gamma}{\partial \theta^k} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^j [\ell_N(W_j^k)] \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \frac{\partial u_{n-j}}{\partial r} \rangle_\Gamma \quad (b), \end{array} \right. \quad (3.8.19)$$

De plus les termes de champ proche  $U_n$  sont donnés par

$$U_n = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k \langle u_{n-j} \rangle_\Gamma}{\partial \theta^k} V_j^k + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \frac{\partial u_{n-1-j}}{\partial r} \rangle_\Gamma W_j^k. \quad (3.8.20)$$

Sous la forme (3.8.19), les problèmes de champ lointain sont découplés des problèmes de champ proche. Plus exactement, on peut calculer les termes de champ lointain  $u_n$  à tout ordre sans jamais calculer les champs proches associés : l'effet de l'anneau périodique sur le champ lointain est pris en compte par l'intermédiaire des fonctions  $V_n^k$  et  $W_n^k$ . On peut aussi remarquer que la forme (3.8.19) des problèmes de champs lointains permet de construire formellement des conditions de transmission approchées à tout ordre.

*Démonstration.* On va montrer que la suite  $(u_n, U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la suite de problème (3.7.1). Tout d'abord, il est clair que les champs  $(u_n, U_n)$  satisfont bien les conditions de transmission

$$[u_n]_\Gamma = [\ell_D(\tilde{u}_n)] = 0, \quad [\partial_r u_n]_\Gamma = [\ell_N(U_{n+1})], \quad \langle \ell_D(U_n) \rangle = \langle u_n \rangle_\Gamma, \langle \ell_N(U_n) \rangle = \langle \partial_r u_n \rangle_\Gamma.$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_0 U_n = - \sum_{k=1}^4 \nu^j A_j U_{n-j} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

L'égalité a déjà d'ailleurs été vérifiée dans les parties 3.8.1 et 3.8.2 pour  $n = 0, 1$  et  $2$ . Pour  $n$  quelconque, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 \nu^j A_j U_{n-j} = \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k \langle u_{n-j} \rangle_\Gamma}{\partial \theta^k} \left( \nu(A_1^{[0]} V_{j-1}^k + A_1^{[1]} V_{j-1}^{k-1}) + \nu^2(A_2^{[0]} V_{j-2}^k + A_2^{[2]} V_{j-2}^{k-2}) + \nu^3 A_3 V_{j-3}^k + \nu^4 A_4 V_{j-4}^k \right) + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \partial_r u_{n-1-j} \rangle_\Gamma \left( \nu(A_1^{[0]} W_{j-1}^k + A_1^{[1]} W_{j-1}^{k-1}) + \nu^2(A_2^{[0]} W_{j-2}^k + A_2^{[2]} W_{j-2}^{k-2}) + \nu^3 A_3 W_{j-3}^k + \nu^4 A_4 W_{j-4}^k \right), \end{aligned}$$

si bien qu'en utilisant les définitions (3.8.17) et (3.8.18) des fonctions  $V_j^k$  et  $W_j^k$ , on a

$$\sum_{j=1}^4 \nu^j A_j U_{n-j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k \langle u_{n-j} \rangle_\Gamma}{\partial \theta^k} A_0(V_j^k) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \frac{\partial u_{n-1-j}}{\partial r} \rangle_\Gamma A_0(W_j^k)$$

Comme de plus  $A_0(W_0^0) = A_0(V_0^0) = 0$ , la somme sur les indices  $j$  peut commencer à 0 au lieu de 1 de sorte que

$$\sum_{j=1}^4 \nu^j A_j U_{n-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k \langle u_{n-j} \rangle_\Gamma}{\partial \theta^k} A_0(V_j^k) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle \frac{\partial u_{n-1-j}}{\partial r} \rangle_\Gamma A_0(W_j^k) = A_0 U_n.$$

□

## 3.9 Justification du développement asymptotique

### 3.9.1 Résultat principal

L'existence de tous les termes du développement asymptotique étant prouvée, on peut maintenant montrer que celui-ci tend vers la solution exacte. Nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 3.9.1.** *Soient  $0 < \gamma < r_*$  et  $\Omega_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sqrt{x^2 + y^2} - R| > \gamma\}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_n > 0$  et, pour tout  $0 < \gamma < r_*$ , une constante  $\delta_\gamma > 0$  telle que*

$$\forall \delta < \delta_\gamma, \quad \|u^\delta - \sum_{k=0}^n \delta^k u_k\|_{H^1(\Omega_\gamma^\dagger)} \leq C_n \delta^{n+1}. \quad (3.9.1)$$

- L'idée principale de la preuve consiste à construire d'abord une approximation globale du développement tronqué à l'ordre  $n$ . Cette approximation globale coïncide avec les  $n$  premiers termes du développement en champ lointain loin de la couronne périodique

$$u_{e,\delta}^k = \sum_{k=0}^n \delta^k u_k,$$

et avec les  $n$  premiers termes du développement en champ proche dans le voisinage de la couronne périodique

$$(U_{i,\delta}^n) = \sum_{k=0}^n \delta^k U_k.$$

Cette approximation est construite à l'aide d'une fonction de troncature  $\chi$  satisfaisant

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |s| \geq 2, \end{cases} \quad (3.9.2)$$

et d'une fonction distance  $\eta(\delta)$  strictement positive telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\delta} = +\infty. \quad (3.9.3)$$

En introduisant  $\chi_\eta(r) := \chi\left(\frac{r - r^*}{\eta}\right)$ , nous définissons alors notre approximation globale par,

$$u_{\eta,\delta}^n := (1 - \chi_\eta) u_{e,\delta}^n + \chi_\eta (U_{i,\delta}^n)^\delta, \quad (3.9.4)$$

où la notation  $(\cdot)^\delta$  est définie par (3.3.1). La fonction  $\eta$  apparaît comme un paramètre que nous fixerons par la suite.

- Dans une deuxième étape nous estimons  $|a^\delta(u^\delta - u_{\eta,\delta}^n, v)|$ , ce qui nous permet, via le résultat de stabilité (2.1.8) (Proposition 2.1.2), d'obtenir une estimation de l'erreur  $\|u^\delta - u_{\eta,\delta}^n\|_{H^1(\Omega)}$  : en effet,

$$\|u^\delta - u_{\eta,\delta}^n\|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|a^\delta(u^\delta - u_{\eta,\delta}^n, v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

De plus,

$$a^\delta(u^\delta - u_{\eta,\delta}^n, v) := \mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r + \mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c,$$

où  $\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r$  représente l'erreur de raccord,

$$\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r = \int_{\Omega} \mu^\delta (u_{e,\delta}^n - (U_{i,\delta}^n)^\delta) \nabla \chi_\eta \cdot \nabla \bar{v} - \int_{\Omega} \mu^\delta (\nabla (u_{e,\delta}^n - (U_{i,\delta}^n)^\delta) \cdot \nabla \chi_\eta) \bar{v}, \quad (3.9.5)$$

et  $\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c$  représente l'erreur de consistance, ou erreur de champ proche,

$$\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c = a^\delta((U_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta \varphi). \quad (3.9.6)$$

L'erreur de consistance est due au fait que le développement de champ proche tronqué ne satisfait pas exactement l'équation de Helmholtz. En majorant successivement les deux termes d'erreurs (parties 3.9.2 et 3.9.3) on obtient une estimation d'erreur globale : il existe une constante  $C_n > 0$  telle que

$$\|u^\delta - u_{\eta,\delta}^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \eta^{n-1} + \frac{1}{\delta} e^{-\frac{\eta}{2s}} \right)$$

- Enfin, en utilisant un processus de localisation (pour ne s'intéresser qu'à l'erreur sur le champ lointain), nous obtenons la proposition 3.9.1 (voir partie 3.9.4). C'est lors de cette étape que nous fixons le paramètre  $\eta$ .



### 3.9.2 Erreur de raccord

**Lemme 3.9.2.**

$$\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r \leq C \left( \eta^n + e^{-\eta/2\delta} \sum_{k=1}^n (\delta^k \eta^{-1/2} + \delta^{k-1}) \right). \quad (3.9.7)$$

*Démonstration.* On appelle  $C_\eta$  le support de  $\nabla \chi_\eta$ ,

$$C_\eta := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \text{ telle que } \eta \leq |r - R| \leq 2\eta\}.$$

En utilisant la régularité des champs proches et des champs lointains dans  $C_\eta$  (Comme  $C_\eta$  est disjoint du support de  $f$  et comme  $\eta > \delta$ , les champs lointains  $u_n$  et les champs proches  $(U_n)^\delta$  appartiennent à  $\mathcal{C}^\infty(C_\eta)$ ), il est possible de majorer  $u_{e,\delta}^n$  and  $(U_{i,\delta}^n)^\delta$  ainsi que leurs dérivées par leurs normes  $L^\infty$ . Par l'inégalité de Hölder, nous obtenons ainsi

$$\varepsilon_{\eta,\delta}^m(v) \leq \frac{C}{\eta} \left( \|u_{e,\delta}^n - (U_{i,\delta}^n)^\delta\|_{L^\infty(C_\eta^\delta)} \|\nabla v\|_{L^1(C_\eta^\delta)} + \left\| \frac{\partial}{\partial r} (u_{e,\delta}^n - (U_{i,\delta}^n)^\delta) \right\|_{L^\infty(C_\eta^\delta)} \|v\|_{L^1(C_\eta^\delta)} \right), \quad (3.9.8)$$

où  $C$  est une constante positive générique dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Ensuite, nous utilisons le fait que  $C_\eta$  est petit ( $\text{mes}(C_\eta) \sim \eta$ ) pour majorer les termes en  $v$  :

$$\|\nabla v\|_{L^1(C_\eta)} \leq C \eta^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \|v\|_{L^1(C_\eta)} \leq C \eta \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.9)$$

La première inégalité résulte simplement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La seconde, plus astucieuse, est en fait une conséquence de l'identité suivante (déjà utilisée dans [Tor04], Lemme 3.10 par exemple)

$$\|v\|_{L^2(C_\eta)} \leq C \eta^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.10)$$

dont la preuve est laissée au lecteur. Il faut remarquer que dans le membre de droite de l'inégalité précédente on utilise la norme  $H^1$  de  $v$  sur  $\Omega$ , domaine indépendant de  $\eta$ . Par ailleurs, cette majoration est optimale (on peut le vérifier en prenant  $v$  constant). La seconde inégalité de (3.9.9) provient alors de l'utilisation successive de la majoration (3.9.10) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour passer de la norme  $L^1$  à la norme  $L^2$  (ce qui permet de "gagner" un facteur  $\eta^{1/2}$ ).

Pour majorer  $\|u_{e,\delta}^n - (U_{i,\delta}^n)^\delta\|_{L^\infty(C_\eta)}$ , on utilise d'abord la formule de Taylor avec reste intégral pour les  $u_n^\pm$  :

$$u_{e,\delta}^{n,\pm}(r, \theta) = \sum_{k=0}^n \delta^k \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(r - r_*)^i}{i!} \frac{\partial^i u_k^\pm(r_*, \theta)}{\partial r^i} + \sum_{k=0}^n \delta^k \int_{r_*}^r \frac{\partial^{n+1-k} u_k^\pm(t, \theta)}{\partial r^{n+1-k}} \frac{(t - r_*)^{n-k}}{(n-k)!} dt, \quad (3.9.11)$$

où nous estimons les restes intégraux en utilisant le fait que les champs lointains et leurs dérivées sont bornés dans le voisinage de  $\Gamma$

$$\left| \int_{r_*}^r \frac{\partial^{n+1-k} u_k^\pm(t, \theta)}{\partial r^{n+1-k}} \frac{(t - r_*)^{n-k}}{(n-k)!} dt \right| \leq C \eta^{n+1-k}, \quad \forall (r, \theta) \in C_\eta, \quad k \leq n. \quad (3.9.12)$$

Ensuite nous utilisons le développement modal des champs proches (3.3.16), que nous combinons avec les conditions de raccord ((3.4.4) et remarque 3.4.1) pour écrire (dans les variable macroscopiques  $(r, \theta)$  d'où le recours à la notation(3.3.1))

$$\begin{aligned} (U_k^\pm)^\delta(r, \theta) &= \sum_{i=0}^k \frac{(r - r_*)^i}{\delta^i i!} \frac{\partial^i u_{k-i}^\pm(r_*, \theta)}{\partial r^i} + (R_k^\pm)^\delta(r, \theta), \\ (R_k^\pm)^\delta(r, \theta) &= \sum_{l \in X_3^*} p_{k,l}^\pm \left( \frac{r - r_*}{\delta}, \theta \right) e^{2i\pi l \frac{r_* \theta}{\delta}} e^{-2\pi |l| \frac{|r - r_*|}{\delta}}. \end{aligned} \quad (3.9.13)$$

où  $p_{k,l}^\pm \in \mathbb{P}^{2k}$ . En fait,  $R_0^\pm = 0$  (puisque  $U_0$  de dépend pas de  $\nu$  et  $s$ , cf. (3.8.2)). Les fonctions  $R_k^\pm$  appartiennent à  $\mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  si bien qu'on peut montrer que

$$|(R_k^\pm)^\delta(r, \theta)| \leq C e^{-\eta/2\delta}, \quad \forall (r, \theta) \in C_\eta, \quad k \leq n. \quad (3.9.14)$$

On peut donc écrire  $(U_{i,\delta}^{n,\pm})^\delta$  sous la forme

$$(U_{i,\delta}^{n,\pm})^\delta = \sum_{k=0}^n \delta^k \left( \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(r-r_*)^i}{i!} \frac{\partial^i u_k^\pm}{\partial r^i}(r_*, \theta) \right) + \sum_{k=1}^n \delta^k (R_k^\pm)^\delta(r, \theta), \quad (3.9.15)$$

En faisant la différence entre (3.9.11) et (3.9.15), on obtient

$$u_{e,\delta}^{n,\pm} - (U_{i,\delta}^{n,\pm})^\delta = \sum_{k=0}^n \delta^k \int_{r_*}^r \frac{\partial^{n+1-k} u_k^\pm(t, \theta)}{\partial r^{n+1-k}} \frac{(t-r_*)^{n+1-k}}{(n+1-k)!} dt + \sum_{k=1}^n \delta^k (R_k^\pm)^\delta(r, \theta), \quad (3.9.16)$$

si bien qu'en utilisant les majorations (3.9.12) et (3.9.14), on a

$$\|u_{e,\delta}^n - (U_{i,\delta}^n)^\delta\|_{L^\infty(C_\eta)} \leq C \left( \sum_{k=0}^n \eta^{n+1-k} \delta^k + \sum_{k=1}^n \delta^k e^{-\eta/2\delta} \right). \quad (3.9.17)$$

On va maintenant majorer  $\|\partial_r(u_{e,\delta}^n) - \partial_r(U_{i,\delta}^n)^\delta\|_{L^\infty(C_\eta)}$  en utilisant les mêmes techniques :

$$\partial_r(u_{e,\delta}^n) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k \sum_{i=0}^{n-1-k} \frac{(r-r_*)^i}{i!} \frac{\partial^{i+1} u_k^\pm}{\partial r^{i+1}}(r_*, \theta) + \delta^n \frac{\partial u_n(r, \theta)}{\partial r} + \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k \int_{r_*}^r \frac{(t-r_*)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \frac{\partial^{n+1-k} u_k^\pm(t, \theta)}{\partial r^{n+1-k}} dt,$$

où

$$\left| \delta^n \frac{\partial u_n(r, \theta)}{\partial r} + \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k \int_{r_*}^r \frac{(t-r_*)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \frac{\partial^{n+1-k} u_k^\pm(t, \theta)}{\partial r^{n+1-k}} dt \right| \leq C \sum_{k=0}^n \delta^k \eta^{n-k}.$$

De même,

$$\partial_r(U_{i,\delta}^{n,\pm})^\delta = \sum_{k=0}^n \delta^k \left( \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{(r-r_*)^i}{i!} \frac{\partial^{i+1} u_k^\pm}{\partial r^{i+1}}(r_*, \theta) \right) + \sum_{k=1}^n \delta^k \partial_r (R_k^\pm)^\delta(r, \theta),$$

où

$$\left| \sum_{k=1}^n \delta^k \partial_r (R_k^\pm)^\delta(r, \theta) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \delta^{k-1} (\partial_\nu R_k^\pm)^\delta(r, \theta) \right| \leq C \sum_{k=1}^n \delta^{k-1} e^{-\eta/2\delta}. \quad (3.9.18)$$

On obtient ainsi une majoration de  $\|\partial_r(u_{e,\delta}^n) - \partial_r(U_{i,\delta}^n)^\delta\|_{C_\eta}$ . Celle-ci est moins bonne que (3.9.17) :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r} (u_{e,\delta}^n - (U_{i,\delta}^n)^\delta) \right\|_{L^\infty(C_\eta)} \leq C \left( \sum_{k=0}^n \eta^{n-k} \delta^k + \sum_{k=1}^n \delta^{k-1} e^{-\eta/2\delta} \right). \quad (3.9.19)$$

En combinant (3.9.8), (3.9.9), (3.9.17) et (3.9.19), nous obtenons l'estimation attendue :

$$\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r \leq C \left( \sum_{k=0}^n \eta^{n+1/2-k} \delta^k + \eta^{n-k} \delta^k + e^{-\eta/2\delta} \sum_{k=1}^n (\delta^k \eta^{-1/2} + \delta^{k-1}) \right) \leq C \eta^n + e^{-\eta/2\delta} \sum_{k=1}^n (\delta^k \eta^{-1/2} + \delta^{k-1}).$$

□

### 3.9.3 Erreur de champ proche

L'erreur de champ proche  $\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c$  est donnée par

$$\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c = a^\delta ((U_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta v).$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, cette erreur est due au fait que le développement en champ proche ne satisfait pas exactement l'équation de Helmholtz. Plus précisément, pour toute fonction  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} a^\delta((U_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta v) &= - \sum_{k=0}^n \delta^k \langle r^2 (\operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla U_k^\delta) - \omega^2 \mu U_k^\delta), \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle, \\ &= - \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^4 \delta^{k+j} \langle (\nu^{j-2} A_j(U_k))^\delta, \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle, \\ &= - \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \delta^k \langle \sum_{j=0}^4 (\nu^{j-2} A_j(U_{k-j}))^\delta, \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle - \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=n+1}^{n+4} \delta^k \sum_{j=k+2-n}^4 \langle (\nu^{j-2} A_j(U_{k-j}))^\delta, \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle, \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la dualité entre  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$ . D'après (3.3.3), nous savons que les champs proches satisfont  $\sum_{j=0}^4 (\nu^{j-2} A_j(U_{k-j})) = 0$  si bien que

$$a^\delta((U_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta v) = - \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=n+1}^{n+4} \delta^k \sum_{j=k+2-n}^4 \langle (\nu^{j-2} A_j(U_{k-j}))^\delta, \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle.$$

Nous allons majorer successivement tous les termes de la somme. Dans un premier temps nous démontrons le résultat suivant :

**Proposition 3.9.3.** *Pour tout  $k$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ , pour tout  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$\left| \langle \nu^{j-2} A_j(U_{k-j}), \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle \right| \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k}. \quad (3.9.20)$$

La preuve de la proposition 3.9.3 est longue et technique. La démonstration est expliquée en détails dans les parties 3.9.3.1, 3.9.3.2 et 3.9.3.3. La principale difficulté vient du fait que les champs proches  $(U_k)^\delta$  n'appartiennent pas à  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  parce que  $\epsilon$  et  $\mu$  appartiennent simplement à  $L^\infty(B)$ . On rappelle que dans les cas qui nous intéressent  $\epsilon$  et  $\mu$  sont constants par morceaux si bien que dans les parties où les fonctions  $\mu$  et  $\epsilon$  varient ( $|\nu| < 1/2$ ), les champs  $(U_k)$  n'appartiennent qu'à  $H_{loc}^1(B)$  et en particulier  $\nabla U_k$  n'appartient pas à  $L^\infty$ .

On déduit aisément de la proposition 3.9.3 une estimation de l'erreur de champ proche :

**Lemme 3.9.4.** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c \leq C \eta^{k-1}. \quad (3.9.21)$$

*Démonstration.* Pour tout  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a

$$|a^\delta((U_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta v)| \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=n+1}^{n+4} \delta^k \sum_{j=k+2-n}^4 \left| \langle (\nu^{j-2} A_j(U_{k-j}))^\delta, \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle \right|$$

si bien qu'en utilisant la proposition 3.9.3, on a

$$|a^\delta((U_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta v)| \leq C \eta^{n-1}$$

Par densité des fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  (on remarque que, du fait de la fonction  $\chi_\eta$ , on n'a pas besoin de prendre toutes les fonctions de  $H^1(\Omega)$ , les fonctions de  $H_0^1(\Omega)$  suffisent), on obtient le résultat souhaité.  $\square$

### 3.9.3.1 Estimation de $\langle \nu^{j-2} A_1(U_{k-1}), \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle$

Dans cette partie nous allons remplacer abusivement les crochets de dualités par des intégrales.

$$\int_{\Omega_\eta} \left( \nu^{-1} A_1(U_k - 1) \right)^\delta (\chi_\eta \bar{v} / r^2) = \int_{\Omega_\eta} \left( \nu^{-1} A_1^{[0]}(U_{k-1}) \right)^\delta (\chi_\eta \bar{v} / r^2) + \int_{\Omega_\eta} \left( \nu^{-1} A_1^{[1]}(\partial_\theta U_{k-1}) \right)^\delta (\chi_\eta \bar{v} / r^2). \quad (3.9.22)$$

où  $\Omega_\eta$  est le support de  $\chi_\eta$  :

$$\Omega_\eta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } r_* - 2\eta < \sqrt{x^2 + y^2} < r_* + 2\eta \right\}.$$

**Etape 1** : on montre que  $\left| \int_{\Omega_\eta} \left( \nu^{-1} A_1^{[0]}(U_{k-1}) \right)^\delta (\chi_\eta \bar{v}/r^2) \right| \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ .

Il est pratique de travailler dans les variables  $(s, \nu)$  plutôt que dans les variables  $(r, \theta)$ . Pour cela, nous introduisons une nouvelle notation, équivalente à la notation (3.3.1) dans les variables  $(\nu, s)$ . Pour toute fonction  $U(\nu, s; \theta)$  de trois variables  $\nu$ ,  $s$  et  $\theta$ , nous définissons

$$\{U\}^\delta(\nu, s) := U\left(\nu, s; \frac{\delta s}{r_*}\right). \quad (3.9.23)$$

De façon similaire, pour toute fonction  $v(r, \theta)$ , on définit  $\{v\}^\delta(\nu, s) := v(r_* + \delta\nu, \frac{\delta s}{r_*})$ .

Par le changement de variables  $s = r_*\theta/\delta$ ,  $\nu = (r - r_*)/\delta$ , nous obtenons, après intégration par parties

$$\int_{\Omega_\eta} \left( \nu^{-1} A_1^{[0]}(U_{k-1}) \right)^\delta (\chi_\eta \bar{v}/r^2) = -\delta^2 \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left[ \left\{ 2\nu\mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \nu} \right\}^\delta \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta + \left\{ \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \nu} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right] d\nu ds. \quad (3.9.24)$$

où, en posant  $N_\delta = 2\pi r_*/\delta$

$$\Omega_{\eta,\delta} := \bigcup_{j=0}^{N_\delta} \left\{ B_{\eta,\delta} + \begin{pmatrix} j + 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_{\eta,\delta} = ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ] -\frac{2\eta}{\delta}, \frac{2\eta}{\delta}[. \quad (3.9.25)$$

A cette étape, on va utiliser le lemme technique suivant :

**Lemme 3.9.5.** Soit  $a(\theta) \in L^\infty(0, 2\pi)$ ,  $f(\nu, s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ , 1-périodique en  $s$  et  $g \in L^2(\Omega_{\eta,\delta})$ , on a :

$$\int_{\Omega_{\eta,\delta}} a\left(\frac{\delta s}{r_*}\right) f(\nu, s) g(\nu, s) ds d\nu \leq \sqrt{\frac{2\pi r_*}{\delta}} \|a\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2(B_{\eta,\delta})} \|g\|_{L^2(\Omega_{\eta,\delta})} \quad (3.9.26)$$

Or, d'après la formule (3.8.20) de la proposition 3.8.3, on a

$$\left\{ 2\nu\mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \nu} \right\}^\delta(s, \nu) = \sum_{\ell=1}^{N_{k-1}} a_\ell\left(\frac{\delta s}{r_*}\right) f_\ell(\nu, s) \quad (3.9.27)$$

où les fonctions  $a_\ell$  sont des moyennes des traces des champs lointains et les fonctions  $f_\ell$  peuvent s'écrire à partir des fonctions profils. Il n'est pas important de connaître explicitement ces fonctions par contre on va utiliser le fait que :

$$a_\ell(\theta) \in L^\infty(0, 2\pi), \quad f_\ell(\nu, s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2), \quad f_\ell(\nu, s+1) = f_\ell(\nu, s),$$

et que

$$\exists C_\ell > 0 / \forall \nu > 1/2, \quad \forall s \in ]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ , \quad |f_\ell(\nu, s)| \leq C_\ell \nu^{k-1}. \quad (3.9.28)$$

On peut alors appliquer le lemme 3.9.5 en prenant  $(a, f, g) = (a_\ell, f_\ell, \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta)$  pour obtenir

$$\left| \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ 2\nu\mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \nu} \right\}^\delta \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\delta}} \sum_{\ell=1}^7 \|a_\ell\|_{L^\infty} \|f_\ell\|_{L^2(B_{\eta,\delta})} \left\| \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta,\delta})}. \quad (3.9.29)$$

A partir de l'estimation (3.9.28), on déduit facilement que

$$\|f_\ell\|_{L^2(B_{\eta,\delta})} \leq C_\ell \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{k-\frac{1}{2}}. \quad (3.9.30)$$

Par ailleurs, comme  $\frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta = \delta \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right) \right\}^\delta$  et comme la fonction  $1/r$  est bornée dans  $\Omega_{\eta, \delta}$ , nous obtenons

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta, \delta})} \leq C \delta \left( \left\| \left\{ \chi_\eta v \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta, \delta})} + \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\chi_\eta v) \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta, \delta})} \right). \quad (3.9.31)$$

Nous avons alors besoin du résultat suivant que l'on montre facilement à l'aide du changement de variables  $(s, \nu) \rightarrow (r, \theta) = (r_* + \delta \nu, \delta s / r_*)$

**Lemme 3.9.6.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $f \in L^2(\Omega_\eta)$ ,*

$$\left\| \{f\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta, \delta})} \leq \frac{C}{\delta} \|f\|_{L^2(\Omega_\eta)} \quad (3.9.32)$$

En appliquant le lemme 3.9.6 et l'inégalité suivante (qui est similaire à l'inégalité (3.9.10))

$$\|v\|_{L^2(\Omega_\eta)} \leq C \eta^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.9.33)$$

nous obtenons (on rappelle que  $\eta$  est bornée)

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta, \delta})} \leq \frac{C}{\eta^{\frac{1}{2}}} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.34)$$

En regroupant (3.9.29), (3.9.30), et (3.9.34), on obtient le résultat attendu, à savoir

$$\left| \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ 2\nu \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \nu} \right\}^\delta \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right| \leq C \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.9.35)$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\left| \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \nu} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right| \leq C \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.36)$$

Sans entrer dans les détails, pour prouver (3.9.36), on remarque qu'on peut aussi écrire

$$\left\{ \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \nu} \right\}^\delta$$

sous la forme (3.9.27), où, cette fois les fonctions  $f_\ell$  croissent comme  $\nu^{k-2}$ . Pour prouver le résultat de l'étape 1, il suffit de regrouper (3.9.24), (3.9.35) and (3.9.36).

**Etape 2 :** On prouve que  $\left| \int_{\Omega_\eta} \left( \nu^{-1} A_1^{[1]} (\partial_\theta U_{k-1}) \right)^\delta \left( \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} \right) \right| \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ .

Par le changement de variables  $s = \frac{r_* \theta}{\delta}$ ,  $\nu = r - r_* / \delta$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\eta} \frac{1}{r^2} \left( A_1^{[1]} \left( \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \theta} \right) \right)^\delta \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} &= \delta^2 \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \theta} \right) \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \\ &+ \delta^2 \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ \mu \frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial \theta \partial s} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds. \end{aligned} \quad (3.9.37)$$

Le deuxième terme de l'équation (3.9.37) peut être traité de la même façon qu'à l'étape 1. Comme  $\left\{ \mu \frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial \theta \partial s} \right\}^\delta$  est bornée quand  $|\nu| > 1/2$ , on obtient

$$\left| \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ \mu \frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial \theta \partial s} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \right| \leq C \frac{\eta^{1/2}}{\delta^{3/2}} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Or, quand  $k \geq 2$ ,  $\frac{\eta^{1/2}}{\delta^{3/2}} \leq \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k}$  et quand  $k = 1$ ,  $\int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \mu \frac{\partial^2 U_0}{\partial \theta \partial s} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds = 0$  si bien que finalement, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \mu \frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial \theta \partial s} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \right| \leq C \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Le premier terme doit être traité un peu différemment car  $\{\partial_s(\mu \partial_\theta U_{k-1})\}^\delta$  n'est pas dans  $L^2(\Omega_{\eta,\delta})$ . Nous devons en fait transformer ce terme à l'aide de la formule

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \theta} \right) \right\}^\delta = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \theta} \right\}^\delta - \frac{\delta}{r_*} \left\{ \mu \frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial \theta^2} \right\}^\delta. \quad (3.9.38)$$

En utilisant par ailleurs la formule  $\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta = \frac{\delta}{r_*} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right) \right\}^\delta$ , nous obtenons après intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \theta} \right) \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds &= -\delta \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \frac{1}{r_*} \left\{ \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \theta} \right\}^\delta \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right) \right\}^\delta \\ &\quad - \delta \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \frac{1}{r_*} \left\{ \mu \frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial \theta^2} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds, \end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser les mêmes techniques qu'à l'étape 1 pour obtenir

$$\left| \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \mu \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \theta} \right) \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \right| \leq C \frac{\eta^k}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.9.39)$$

Puis nous concluons en utilisant (3.9.36), (3.9.38) and (3.9.39).

**Etape 3 :** Finalement, en regroupant les résultats des étapes 1 et 2 on obtient

$$\delta \left| \left\langle \left( \nu A_1(U_{k-1}) \right)^\delta, \frac{\chi_\eta v}{r^2} \right\rangle \right| \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.9.40)$$

### 3.9.3.2 Estimation de $\langle A_2(U_{k-2}), \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle$

$$\int_{\Omega_\eta} A_2(U_{k-2}) \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} = \int_{\Omega_\eta} A_2^{[0]}(U_{k-2}) \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} + \int_{\Omega_\eta} A_2^{[2]} \left( \frac{\partial^2 U_{k-2}}{\partial \theta^2} \right) \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} \quad (3.9.41)$$

On utilise encore de manière abusive le signe intégral pour désigner des produits de dualité.

**Etape 1 :** On montre que  $\int_{\Omega_\eta} A_2^{[0]}(U_{k-2}) \frac{\chi_\eta v}{r^2} \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\eta} A_2^{[0]}(U_{k-2}) \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} &= \frac{\delta^2}{r_*} \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \nu \partial_\nu (\epsilon^{-1} \nu \partial_\nu U_{k-2}) + \omega^2 \mu r_*^2 U_{k-2} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds, \\ &= -\frac{\delta^2}{r_*} \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \epsilon^{-1} \nu \partial_\nu U_{k-2} \right\}^\delta \partial_\nu \left( \nu \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right) d\nu ds + \omega^2 r_* \delta^2 \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \mu U \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds, \\ &= -\frac{\delta^2}{r_*} \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \epsilon^{-1} \nu \partial_\nu U_{k-2} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds - \frac{\delta^2}{r_*} \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \epsilon^{-1} \nu^2 \partial_\nu U_{k-2} \right\}^\delta \partial_\nu \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \\ &\quad + \omega^2 r_* \delta^2 \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \left\{ \mu U \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds. \end{aligned}$$

En utilisant les lemmes techniques 3.9.5 et 3.9.5, on va majorer successivement les trois termes précédents. D'après la formule (3.8.20) de la proposition 3.8.3, on a

$$\left\{ U_{k-2} \right\}^\delta (s, \nu) = \sum_{\ell=1}^{N_{k-2}} a_\ell \left( \frac{\delta s}{r_*} \right) f_\ell(\nu, s), \quad (3.9.42)$$

où les fonctions  $a_\ell$  sont des moyennes des traces des champs lointains et les fonctions  $f_\ell$  peuvent s'écrire à partir des fonctions profils. On sait de plus que :

$$a_\ell(\theta) \in L^\infty(0, 2\pi), \quad f_\ell(\nu, s) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2), \quad f_\ell(\nu, s+1) = f_\ell(\nu, s),$$

et que

$$\exists C_\ell > 0 / \forall \nu > 1/2, \quad \forall s \in ]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ , \quad |f_\ell(\nu, s)| \leq C_\ell \nu^{k-2}. \quad (3.9.43)$$

En utilisant le lemme technique 3.9.5, et le comportement de  $U_{k-2}$  quand  $\nu$  est grand,

$$\left| \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ \epsilon^{-1} \nu \partial_\nu U_{k-2} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \right| \leq C \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{k-3/2} \left\| \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta, \delta})} \quad (3.9.44)$$

Or, en utilisant le lemme technique 3.9.6 et l'inégalité (3.9.33), on montre que

$$\left\| \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta, \delta})} \leq C \frac{\eta^{1/2}}{\delta} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.45)$$

En combinant (3.9.44) et (3.9.45), on obtient

$$\delta^2 \left| \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ \epsilon^{-1} \nu \partial_\nu U_{k-2} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \right| \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.46)$$

De même,

$$\left| \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ \epsilon^{-1} \nu^2 \partial_\nu U_{k-2} \right\}^\delta \partial_\nu \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \right| \leq C \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{k-1/2} \left\| \partial_\nu \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta, \delta})}.$$

Mais, en utilisant l'inégalité (3.9.34), on a

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta, \delta})} \leq \frac{C}{\eta^{1/2}} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

si bien que

$$\left| \frac{\delta^2}{r_*} \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ \epsilon^{-1} \nu^2 \partial_\nu U_{k-2} \right\}^\delta \partial_\nu \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \right| \leq C \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.47)$$

Enfin, par des techniques similaires,

$$\left| \omega^2 r_* \delta^2 \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \left\{ \mu U \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \right| \leq C \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.9.48)$$

En combinant (3.9.45), (3.9.46), 3.9.48, on obtient finalement l'estimation attendue

$$\int_{\Omega_\eta} \left( A_2^{[0]}(U_{k-2}) \right)^\delta \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.49)$$

**Etape 2 :** On montre que  $\int_{\Omega_\eta} \left( A_2^{[2]} \left( \frac{\partial^2 U_{k-2}}{\partial \theta^2} \right) \right)^\delta \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}$  On rappelle que

$$\int_{\Omega_\eta} \left( A_2^{[2]} \left( \frac{\partial^2 U_{k-2}}{\partial \theta^2} \right) \right)^\delta \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} ds d\nu = \frac{\delta^2}{r_*} \int_{\Omega_{\eta, \delta}} \epsilon^{-1} \left\{ U_{k-2} \right\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds. \quad (3.9.50)$$

Connaissant la forme de  $U_{k-2}$  et son comportement pour  $\nu$  grand (cf. (3.9.43)), on peut appliquer le lemme technique 3.9.5 pour obtenir

$$\left| \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \epsilon^{-1} \{U_{k-2}\}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta d\nu ds \right| \leq C \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{k-3/2} \left\| \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r} \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_{\eta,\delta})} \quad (3.9.51)$$

Puis, de nouveau, en utilisant (3.9.45), on a

$$\int_{\Omega_\eta} \left( A_2^{[2]} \left( \frac{\partial^2 U_{k-2}}{\partial \theta^2} \right) \right)^\delta \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} \leq C \delta^2 \frac{\eta^k}{\delta^{k-1}} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.52)$$

**Etape 3 :** En combinant (3.9.49) et (3.9.52), on obtient

$$\langle A_2(U_{k-2}), \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.9.53)$$

**3.9.3.3 Estimation de  $\langle (\nu A_3(U_{k-3}))^\delta, \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle$  et de  $\langle \nu^2 A_4(U_{k-4}), \frac{\chi_\eta v}{r^2} \rangle$**

$$\int_{\Omega_\eta} \nu A_3(U_{k-3}) \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} = \delta^2 \int_{\Omega_{\eta,\delta}} \omega^2 \mu \{ \nu U_{k-3} \}^\delta \left\{ \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} \right\}^\delta d\nu ds. \quad (3.9.54)$$

D'après la formule (3.8.20) de la proposition 3.8.3, on a

$$\left\{ \nu U_{k-3} \right\}^\delta (s, \nu) = \sum_{\ell=1}^{N_{k-3}} a_\ell \left( \frac{\delta s}{r_*} \right) f_\ell(\nu, s) \quad (3.9.55)$$

où les fonctions  $a_\ell$  sont des moyennes des traces des champs lointains et les fonctions  $f_\ell$  peuvent s'écrire à partir des fonctions profils. On sait de plus que :

$$a_\ell(\theta) \in L^\infty(0, 2\pi), \quad f_\ell(\nu, s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2), \quad f_\ell(\nu, s+1) = f_\ell(\nu, s),$$

et que

$$\exists C_\ell > 0 \quad / \quad \forall \nu > 1/2, \quad \forall s \in ]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ , \quad |f_\ell(\nu, s)| \leq C_\ell \nu^{k-2}. \quad (3.9.56)$$

En utilisant le lemme 3.9.5, et (3.9.56) on montre que

$$\int_{\Omega_\eta} (\nu A_3(U_{k-3}))^\delta \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} \leq C \delta^2 \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{k-3/2} \frac{1}{\delta} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.57)$$

Enfin, par des méthodes similaires, on montre que

$$\int_{\Omega_\eta} (\nu^2 A_4(U_{k-4}))^\delta \frac{\chi_\eta \bar{v}}{r^2} \leq C \delta^2 \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{k-3/2} \frac{1}{\delta} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \delta^2 \frac{\eta^{k-1}}{\delta^k} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.9.58)$$

Les estimations (3.9.40), (3.9.53), (3.9.57) et (3.9.58) montrent la proposition 3.9.3.

### 3.9.4 Estimations d'erreurs optimales

En regroupant les résultats des propositions 3.9.3 et 3.9.2, on obtient le résultat suivant

$$\|u^\delta - (u)_{\eta,\delta}^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \eta^{n-1} + e^{-\eta/2\delta} \right). \quad (3.9.59)$$

Choisissons  $\eta = \delta^{n-2/n-1}$ . Comme  $\eta^{-\delta/2} \leq \delta^{n+1}$ , on a

$$\|u^\delta - (u)_{\eta,\delta}^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \delta^{(n-2)}. \quad (3.9.60)$$

On peut maintenant déduire aisément la proposition 3.9.1 que l'on rappelle ici :



**Proposition.** (rappel de la proposition 3.9.1) Soient  $0 < \gamma < r_*$  et  $\Omega_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sqrt{x^2 + y^2} - R| > \gamma\}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_n > 0$  et, pour tout  $0 < \gamma < r_*$ , une constante  $\delta_\gamma > 0$  telle que

$$\forall \delta < \delta_\gamma, \quad \|u^\delta - \sum_{k=0}^n \delta^k u_k\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C_n \delta^{n+1}. \quad (3.9.1)$$

*Démonstration.* Soient  $\gamma > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Choisissons  $\delta$  suffisamment petit pour que  $(u)_{\eta, \delta}^{n+3}$  coïncide avec les  $n+3$  premiers termes du développement en champ lointain  $\sum_{k=0}^{n+3} \delta^k u_k$  dans  $\Omega_\gamma$ . On peut par exemple prendre  $\delta < \gamma^{n+2/n+1}$ . Alors,

$$\|u^\delta - \sum_{k=0}^n \delta^k u_k\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq \|u^\delta - \sum_{k=0}^{n+3} \delta^k u_k\|_{H^1(\Omega_\gamma)} + \delta^{n+1} \|u_{n+1}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} + \delta^{n+2} \|u_{n+2}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} + \delta^{n+3} \|u_{n+3}\|_{H^1(\Omega_\gamma)}$$

$$\text{Comme } u^\delta - \sum_{k=0}^{n+3} \delta^k u_k = u^\delta - (u)_{\eta, \delta}^{n+3},$$

$$\|u^\delta - \sum_{k=0}^n \delta^k u_k\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq \|u^\delta - (u)_{\eta, \delta}^{n+3}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} + \delta^{n+1} \|u_{n+1}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} + \delta^{n+2} \|u_{n+2}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} + \delta^{n+3} \|u_{n+3}\|_{H^1(\Omega_\gamma)}.$$

Mais, d'après (3.9.60),

$$\|u^\delta - (u)_{\eta, \delta}^{n+3}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C \delta^{n+1},$$

et de plus  $u_{n+1}$ ,  $u_{n+2}$  et  $u_{n+3}$  sont bornées dans  $H^1(\Omega_\gamma)$  si bien que

$$\|u^\delta - \sum_{k=0}^n \delta^k u_k\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C (\delta^{n+1} + \delta^{n+2} + \delta^{n+3}) \leq C \delta^{n+1}.$$

□

## 3.10 Annexes

### 3.10.1 Preuve de la proposition 3.5.4

**Proposition** (Rappel de la proposition 3.5.4). Posons  $\mathcal{B}^+ = \{(\nu, s) \in \mathbb{R}^+ \times ]-1/2, 1/2[ \}$ . Soit  $f \in L^2(\mathcal{B}^+) \cap \mathbb{V}_-^1(\mathcal{B}^+) \cap C^\infty(\mathcal{B}^+)$  satisfaisant la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ , et soit  $u$  une fonction de  $W^1(\mathcal{B}^+) \cap C^\infty(\mathcal{B}^+)$  vérifiant

$$\begin{cases} \Delta U = f & \text{dans } \mathcal{B}^+ \\ \frac{\partial U}{\partial \nu}(0, s) = 0 \end{cases} \quad (3.5.15)$$

Alors  $U$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  et il existe une constante  $a$  et une fonction  $w \in \mathbb{V}_-^+(B^+)$  telles que

$$U = a + w \quad \text{dans } B^+ \quad (\text{i.e pour } \nu > 2)$$

De plus, pour tout  $\nu > 2$ ,  $\int_{-1/2}^{1/2} w(\nu, s) ds = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\bar{u}(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} u(\nu, s) ds$ . On va étudier  $\bar{u}$  d'une part, puis  $u - \bar{u}$  d'autre part.

• Etude de  $\bar{u}$  :

Il est clair que

$$\left\| \frac{\bar{u}}{\sqrt{1 + \nu^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty \quad \text{et} \quad \|\bar{u}'\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} < +\infty.$$

En effet,

$$\left\| \frac{\bar{u}}{\sqrt{1+\nu^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\nu^2} \left( \int_{-1/2}^{1/2} u(\nu, s) \right)^2 d\nu \leq \int_0^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|u|^2}{1+\nu^2} ds d\nu.$$

Par ailleurs, comme  $f$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  et  $f \in \mathbb{V}_-^1(B^+)$  alors, pour tout  $\nu > 2$

$$\bar{f}(\nu) := \int_{-1/2}^{1/2} f(\nu, s) ds = 0.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2} = 0 \quad \forall \nu > 2,$$

si bien que  $\bar{u} = a + \nu b$  quand  $\nu > 2$ . Comme  $\left\| \frac{\bar{u}}{\sqrt{1+\nu^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty$ ,  $b = 0$ . Donc

$$\bar{u} = a \quad \text{dans } B^+. \quad (3.10.1)$$

• Etude de  $w = u - \bar{u}$  :

Nous allons montrer que  $w$  appartient à  $\mathbb{V}_-(B)$ . Tout d'abord comme  $w$  appartient à  $W^1(B^+)$  et que  $\bar{w} = 0$ ,  $w$  appartient à  $L^2(B^+)$ . De plus, il existe une constante  $C_p \geq 1$  telle que

$$\|\nabla w\|_{L^2(B^+)} \geq C_p \|w\|_{L^2(B^+)}. \quad (3.10.2)$$

Posons  $\mathcal{B}_{\nu_0}^+ := B^+ \cap \{\nu < \nu_0\}$ . Soit  $\tau > 0$ ; on a d'une part

$$\int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} \nabla w \cdot \overline{\nabla w e^{\tau\nu}} + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial w(\nu_0, s)}{\partial \nu} \overline{w(\nu_0, s)} e^{\tau\nu_0} ds = \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} (f - \bar{f}) \bar{w} e^{\tau\nu},$$

et d'autre part,

$$\int_{B^+ \setminus \mathcal{B}_{\nu_0}^+} \nabla w \cdot \overline{\nabla w e^{\tau\nu_0}} - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial w(\nu_0, s)}{\partial \nu} \overline{w(\nu_0, s)} e^{\tau\nu_0} ds = \int_{B^+ \setminus \mathcal{B}_{\nu_0}^+} f \bar{w} e^{\tau\nu_0}.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} \nabla w \cdot \overline{\nabla w e^{\tau\nu}} e^{\tau\nu} \leq \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} (f - \bar{f}) \bar{w} e^{\tau\nu} + \int_{B^+ \setminus \mathcal{B}_{\nu_0}^+} f \bar{w} e^{\tau\nu_0}.$$

De même,

$$\int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} \overline{\nabla w} \cdot \nabla (w e^{\tau\nu}) \leq \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} \overline{(f - \bar{f}) w} e^{\tau\nu} + \int_{B^+ \setminus \mathcal{B}_{\nu_0}^+} f \bar{w} e^{\tau\nu_0}.$$

Donc, si  $\tau \leq 1/2$

$$\int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} |\nabla w|^2 e^{\tau\nu} + \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} \tau \left( \frac{\partial w}{\partial \nu} \bar{w} + \overline{\frac{\partial w}{\partial \nu} w} \right) e^{\tau\nu} \leq C \|f e^{\tau\nu}\|_{L^2(B^+)} \|w\|_{L^2(B^+)}. \quad (3.10.3)$$

Mais, si  $\tau \leq 1/2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} |\nabla w|^2 e^{\tau\nu} + \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} \tau \left( \frac{\partial w}{\partial \nu} \bar{w} + \overline{\frac{\partial w}{\partial \nu} w} \right) e^{\tau\nu} &= \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} |\nabla w|^2 e^{\tau\nu} - \frac{\tau^2}{2} \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} |w|^2 e^{\tau\nu} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} |\nabla w|^2 e^{\tau\nu} + \frac{1}{2} \underbrace{(C_p - \tau^2)}_{\geq 0} \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} |w|^2 e^{\tau\nu} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} |\nabla w|^2 e^{\tau\nu}. \end{aligned}$$

Donc,  $\forall \nu_0 > 0, \forall \tau \leq 1/2$ ,

$$\int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} |\nabla w|^2 e^{\tau\nu} \leq C \|f e^{\tau\nu}\|_{L^2(\mathcal{B}^+)} \|w\|_{L^2(\mathcal{B}^+)}.$$

En passant à la limite sur  $\nu_0$ , pour tout  $\tau \leq 1/2$ ,

$$\int_{\mathcal{B}^+} |\nabla w|^2 e^{\tau\nu} \leq C,$$

puis, par l'inégalité de Poincaré, pour tout  $\tau \leq 1/2$ ,

$$\int_{\mathcal{B}^+} |w|^2 e^{\tau\nu} \leq C.$$

A l'aide de l'inégalité précédente, on peut améliorer la borne maximale pour  $\tau$  : en effet, on a peut maintenant écrire, pour tout  $\tau < 1$  :

$$\int_{\mathcal{B}_{\nu_0}^+} |\nabla w|^2 e^{\tau\nu} \leq C \left\| f e^{\tau\nu/2} \right\|_{L^2(\mathcal{B}^+)} \left\| w e^{\tau\nu/2} \right\|_{L^2(\mathcal{B}^+)} \leq C$$

si bien qu'on obtient finalement, pour tout  $\tau < 1$ ,

$$\int_{\mathcal{B}^+} |\nabla w|^2 e^{\tau\nu} \leq C \left\| f e^{\tau\nu/2} \right\|_{L^2(\mathcal{B}^+)}.$$

et, de même, pour tout  $\tau < 1$ ,

$$\int_{\mathcal{B}^+} |w|^2 e^{\tau\nu} \leq C \left\| f e^{\tau\nu/2} \right\|_{L^2(\mathcal{B}^+)}.$$

Donc  $w$  est exponentiellement décroissant et appartient à  $\mathbb{V}_-^1(B)$ .

On a donc montré qu'il existe une constante  $a \in \mathbb{C}$  et une fonction  $w \in \mathbb{V}_-^1(B)$  telles que

$$u = w + a \text{ dans } B^+, \text{ avec } \int_{-1/2}^{1/2} w(\nu, s) ds = 0 \quad \forall \nu > 0.$$

Par une décomposition en série de Fourier, on montre alors que  $u$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ . □

### 3.10.2 Quelques propriétés des fonctions "profils"

Enonçons d'abord un résultat technique préliminaire :

**Proposition 3.10.1.** *Soit  $U \in \mathbb{V}_+^1(B)$  satisfaisant  $\operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla U) = \operatorname{div} \mathbf{g} - f$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ , où*

- $f$  appartient à  $L^2(B) \cap \mathcal{C}^\infty(B^\pm) \cap \mathbb{V}_-^1(B^\pm)$ , est 1 périodique en  $s$  et satisfait  $\mathcal{P}^\infty$ ,
- $g$  appartient à  $L^2(B)^2 \cap \mathcal{C}^\infty(B^\pm)^2 \cap \mathbb{V}_-^1(B^\pm)^2$ , est 1 périodique en  $s$  et satisfait  $\mathcal{P}^\infty$ .

Alors,

$$[\ell_N(U)] = -\epsilon_\infty \int_B f \quad \text{et} \quad \epsilon_\infty^{-1}[\ell_D(U)] = \epsilon_\infty^{-1} \langle \ell_N(U) \rangle [\ell_D(\mathcal{N})] + \int_B \mathbf{g} \cdot \nabla \mathcal{N} + \int_B f \mathcal{N}. \quad (3.10.4)$$

*Démonstration.* Soit  $\chi^+ \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , une fonction de troncature satisfaisant

$$\chi^+(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \geq 4, \\ 0 & \text{si } \nu \leq 3. \end{cases} \quad (3.10.5)$$

On pose

$$\chi^-(\nu) := \chi^+(-\nu) \quad \text{et} \quad \chi := \chi^+ + \chi^-. \quad (3.10.6)$$

Comme  $f$  appartient à  $\mathbb{V}_-^1(B^\pm)$  et satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$ ,

$$\forall |\nu| > 2, \quad \int_{-1/2}^{1/2} f(\nu, s) ds = 0.$$

De même,

$$\forall |\nu| > 2, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{g}(\nu, s) ds = 0.$$

On en déduit en particulier que  $\int_B f \chi = \int_B \mathbf{g} \cdot \nabla(1 - \chi) = 0$  si bien que

$$\epsilon_\infty^{-1}[\ell_N(U)] = - \int_B \epsilon^{-1} \nabla U \cdot \nabla(1 - \chi) = - \int_B (1 - \chi) f = - \int_B f.$$

Pour obtenir la seconde égalité, nous introduisons  $\tilde{U} := U - \ell_N^+(U) \chi^+ \nu - \ell_N^-(U) \chi^- \nu$  et  $\tilde{\mathcal{N}} := \mathcal{N} - \nu$ .  $\tilde{U}$  et  $\tilde{\mathcal{N}}$  appartiennent à  $W^1(B)$  et vérifient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla \tilde{U}) &= \operatorname{div} \mathbf{g} - f - \epsilon_\infty^{-1} \ell_N^+(U) (2(\chi^+)' + (\chi^+)'' \nu) - \epsilon_\infty^{-1} \ell_N^-(U) (2(\chi^-)' + (\chi^-)'' \nu), \\ \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla \tilde{\mathcal{N}}) &= - \frac{\partial(\epsilon^{-1} - \epsilon_\infty^{-1})}{\partial \nu}. \end{aligned}$$

Remarquons que  $\int_B (2(\chi^+)' + (\chi^+)'' \nu) = \int_B (2(\chi^-)' + (\chi^-)'' \nu) = 1$ . On a d'une part

$$\begin{aligned} - \int_B \epsilon^{-1} \nabla \tilde{U} \cdot \nabla \tilde{\mathcal{N}} &= -\epsilon_\infty^{-1} (\ell_N^+(U) \ell_D^+(\mathcal{N}) + \ell_N^-(U) \ell_D^-(\mathcal{N})) - \int_B \mathbf{g} \cdot \nabla \tilde{\mathcal{N}} - \int_B f \tilde{\mathcal{N}}, \\ &= -\epsilon_\infty^{-1} \langle \ell_N^+(U) \rangle [\ell_D(\mathcal{N})] - \int_B \mathbf{g} \cdot \nabla \tilde{\mathcal{N}} - \int_B f \tilde{\mathcal{N}}, \quad (\langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle = 0) \end{aligned} \quad (3.10.7)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} - \int_B \epsilon^{-1} \nabla \tilde{U} \cdot \nabla \tilde{\mathcal{N}} &= \int_B (\epsilon^{-1} - \epsilon_\infty^{-1}) \partial_\nu \tilde{U}, \\ &= -(\epsilon_\infty^{-1}) [\ell_D(U)] + \int_B \epsilon^{-1} \nabla \tilde{U} \cdot \nabla \nu, \\ &= -(\epsilon_\infty^{-1}) [\ell_D(U)] + \int_B f \cdot \nu + \int_B \mathbf{g} \cdot \nabla \nu. \end{aligned} \quad (3.10.8)$$

En combinant les égalités (3.10.7) et (3.10.8), on obtient

$$\epsilon_\infty^{-1} [\ell_D(U)] = \epsilon_\infty^{-1} \langle \ell_N^+(U) \rangle [\ell_D(\mathcal{N})] + \int_B \mathbf{g} \cdot \nabla \mathcal{N} + \int_B f \mathcal{N}.$$

□

### 3.10.2.1 Propriétés des fonctions $V_n^k$ et calcul de $[\ell_D(V_n^k)]$ et $[\ell_N(V_n^k)]$ pour $n \leq 2$

**Le cas  $n = 1$   $k = 1$  :**

La fonction  $V_1^1$  appartient à  $\mathbb{V}_+^1(B)$  et est solution du problème

$$\begin{cases} r_*^2 \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla V_1^1) = -r_* \frac{\partial(\epsilon^{-1})}{\partial s} = -r_* \frac{\partial(\epsilon^{-1} - \epsilon_\infty^{-1})}{\partial s} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(V_1^1) \rangle = \langle \ell_N(V_1^1) \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.10.9)$$

En appliquant la proposition 3.10.1 avec  $f = 0$  et  $\mathbf{g} = (0, (\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1})/r_*)$ , on a de plus

$$[\ell_D(V_1^1)] = \frac{\epsilon_\infty}{r_*} \int_B (\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}) \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial s}, \quad [\ell_N(V_1^1)] = 0. \quad (3.10.10)$$

Symétries :

- Symétrie en  $s$  ( $\epsilon(\nu, -s) = \epsilon(\nu, s)$ ) :  $V_1^1$  impaire en  $s$  et

$$[\ell_D(V_1^1)] = 0.$$

- Symétrie en  $\nu$  ( $\epsilon(-\nu, s) = \epsilon(\nu, s)$ ) :  $V_1^1$  paire en  $\nu$  et

$$[\ell_D(V_1^1)] = 0.$$

**Le cas  $n = 2$   $k = 0$  :**

La fonction  $V_2^0$  appartient à  $\mathbb{V}_+^1(B)$  et est solution du problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla V_2^0) = -\omega^2 \mu \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(V_2^0) \rangle = \langle \ell_N(V_2^0) \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.10.11)$$

Soit  $\tilde{V}_2^0 = V_2^0 + \mu_\infty \omega^2 \frac{\nu^2}{2} \chi(\nu)$  où  $\chi$  est la fonction de troncature définie par (3.10.5-3.10.6). Alors,

$$[\ell_D(\tilde{V}_2^0)] = [\ell_D(V_2^0)], \quad [\ell_N(\tilde{V}_2^0)] = [\ell_N(V_2^0)], \quad \langle \ell_D(\tilde{V}_2^0) \rangle = \langle \ell_D(V_2^0) \rangle = 0, \quad \langle \ell_N(\tilde{V}_2^0) \rangle = \langle \ell_N(V_2^0) \rangle = 0.$$

De plus,

$$\operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla \tilde{V}_2^0) = -\omega^2 \left( \mu(1 - \chi) - 2\mu_\infty \chi' \nu - \mu_\infty \chi'' \frac{\nu^2}{2} \right) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \int_B \chi' \nu &= \int_B (1 - \chi), & \int_B (\chi^+)' \nu^{2k+1} &= \int_B (\chi^-)' \nu^{2k+1}, & \int_B (\chi)' \nu^{2k} &= 0, \\ \int_B (\chi^+)'' \nu^{2k} &= \int_B (\chi^-)'' \nu^{2k}, & \int_B (\chi)'' \nu^{2k+1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.10.12)$$

si bien qu'en appliquant la proposition 3.10.1 avec  $f = +\omega^2 \left( \mu(1 - \chi) - 2\mu_\infty \chi' \nu - \mu_\infty \chi'' \frac{\nu^2}{2} \right)$  et  $\mathbf{g} = 0$ , on a

$$[\ell_D(V_2^0)] = \omega^2 \epsilon_\infty \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \mu \mathcal{N} dv ds, \quad [\ell_N(V_2^0)] = \epsilon_\infty \omega^2 \int_B \mu_\infty - \mu. \quad (3.10.13)$$

• Symétries :

- Symétrie en  $s$  ( $\epsilon(\nu, -s) = \epsilon(\nu, s), \mu(\nu, -s) = \mu(\nu, s)$ ) :  $V_2^0$  paire en  $s$
- Symétrie en  $\nu$  ( $\epsilon(-\nu, s) = \epsilon(\nu, s), \mu(-\nu, s) = \mu(\nu, s)$ ) :  $V_2^0$  paire en  $\nu$  et

$$[\ell_D(V_2^0)] = 0.$$

**Le cas  $n = 2$   $k = 1$  :**

$V_2^1$  appartient à  $\mathbb{V}_+^1(B)$  et satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{T} V_2^1) = -\frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( 2\nu \epsilon^{-1} \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu} \right) + \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(V_2^1) \rangle = \langle \ell_N(V_2^1) \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.10.14)$$

On peut appliquer la proposition 3.10.1 avec  $f = -\frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu}$  et  $\mathbf{g} = \left( -\frac{1}{r_*} 2\nu \epsilon^{-1} \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu}, 0 \right)$  on a

$$[\ell_D(V_2^1)] = \frac{\epsilon_\infty}{r_*} \int_B -2\nu \epsilon^{-1} \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} - \epsilon^{-1} \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu} \mathcal{N}, \quad [\ell_N(V_2^1)] = -\epsilon_\infty \int_B \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu} = 0. \quad (3.10.15)$$

• Symétries :

- Symétrie en  $s$  :  $V_2^1$  impaire en  $s$  et

$$[\ell_D(V_2^1)] = [\ell_N(V_2^1)] = 0.$$

- Symétrie en  $\nu$  :  $V_2^1$  impaire en  $\nu$  et

$$[\ell_N(V_2^1)] = 0.$$

**Le cas  $n = 2$   $k = 2$  :**

$V_2^2$  appartient à  $\mathbb{V}_+^1(B)$  et satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{T} V_2^2) = -\frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial s} (\epsilon^{-1} V_1^1) - \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial V_1^1}{\partial s} - \frac{\epsilon^{-1}}{r_*^2} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(V_2^2) \rangle = \langle \ell_N(V_2^2) \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.10.16)$$

En posant  $\tilde{V}_2^2 = V_2^2 + \frac{1}{r_*^2} \frac{\nu^2}{2} \chi(\nu)$ , on a

$$\operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla \tilde{V}_2^2) = \operatorname{div} \mathbf{g} - f$$

où

$$\begin{aligned} f &= \frac{\epsilon_\infty^{-1}}{r_*} \chi \frac{\partial V_1^1}{\partial s} + \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial V_1^1}{\partial s} + \frac{\epsilon^{-1}}{r_*^2} (1 - \chi) - 2 \frac{\epsilon_\infty^{-1}}{r_*^2} \chi' \nu - \frac{\epsilon_\infty^{-1}}{r_*^2} \chi'' \frac{\nu^2}{2}, \\ \mathbf{g} &= -\frac{1}{r_*} \epsilon^{-1} V_1^1 (1 - \chi), \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} [\ell_D(V_2^2)] &= \epsilon_\infty \left( \int_B \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial V_1^1}{\partial s} \mathcal{N} - \int_B \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial s} V_1^1 + \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\epsilon^{-1}}{r_*^2} \mathcal{N} d\nu ds \right), \\ [\ell_N(V_2^2)] &= \epsilon_\infty \left( \int_B \frac{\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}}{r_*^2} + \frac{(\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1})}{r_*} \frac{\partial V_1^1}{\partial s} \right). \end{aligned} \quad (3.10.17)$$

• Symétries :

- Symétrie en  $s$  :  $V_2^2$  paire en  $s$ .
- Symétrie en  $\nu$  :  $V_2^2$  paire en  $\nu$  et

$$[\ell_D(V_2^2)] = 0.$$

### 3.10.2.2 Propriétés des fonctions $W_n^k$ et calcul de $[\ell_D(W_n^k)]$ et $[\ell_N(W_n^k)]$ pour $k \leq 1$

**Le cas  $n = 0$   $k = 0$  :**

On rappelle que  $W_0^0 = \mathcal{N}$  que  $\mathcal{N}$  satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{N}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle = 0, \\ \langle \ell_N(\mathcal{N}) \rangle = 1. \end{cases} \quad (3.10.18)$$

On a

$$[\ell_N(\mathcal{N})] = 0, \quad [\ell_D(\mathcal{N})] = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{N}(\nu, s) - \mathcal{N}(-\nu, s) ds - 2\nu \quad \forall \nu > \frac{1}{2}. \quad (3.10.19)$$

• Symétries :

- Symétrie en  $s$  :  $\mathcal{N}$  paire en  $s$ .
- Symétrie en  $\nu$  :  $\mathcal{N}$  impaire en  $\nu$ .

**Le cas  $n = 1$   $k = 0$  :**

$W_1^0$  appartient à  $\mathbb{V}_+^1(B)$  et satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla W_1^0) = -\frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( 2\nu \epsilon^{-1} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} \right) + \frac{\epsilon^1}{r_*} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(W_1^0) \rangle = \langle \ell_N(W_1^0) \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.10.20)$$

On pose  $\tilde{W}_1^0 = W_1^0 + \frac{1}{r_*} \chi \frac{\nu^2}{2}$ . On a

$$\operatorname{div} \left( \epsilon^{-1} \nabla \mathcal{T} \tilde{W}_1^0 \right) = \operatorname{div} \mathbf{g} - f,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &:= \left( -\frac{1}{r_*} \epsilon^{-1} (1 - \chi) 2\nu \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu}, 0 \right), \\ f &:= \frac{2\epsilon_\infty^{-1}}{r_*} \nu \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} \chi' + \frac{2\epsilon_\infty^{-1}}{r_*} \chi \nu \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \nu^2} + \frac{\epsilon_\infty^{-1}}{r_*} \chi \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} - 1 \right) - (1 - \chi) \epsilon^{-1} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} - \frac{2\epsilon_\infty^{-1}}{r_*} \nu \chi' - \frac{\epsilon_\infty^{-1}}{r_*} \chi'' \frac{\nu^2}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} [\ell_{\mathbb{D}}(W_1^0)] &= \epsilon_\infty \int_{-1/2}^{1/2} W_1^0(\nu, s) - W_1^0(-\nu, s) ds \quad \forall \nu > 1/2, \\ [\ell_{\mathbb{N}}(W_1^0)] &= \frac{\epsilon_\infty}{r_*} \int_B (1 - \chi) \left( \epsilon^{-1} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} - \epsilon_\infty^{-1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.10.21)$$

• Symétries :

- Symétrie en  $s$  :  $W_1^0$  paire en  $s$ .
- Symétrie en  $\nu$  :  $W_1^0$  paire en  $\nu$  et

$$[\ell_{\mathbb{D}}(W_1^0)] = 0.$$

**Le cas  $n = 1$   $k = 1$  :**

$W_1^1$  appartient à  $\mathbb{V}_+^1(B)$  et satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \epsilon^{-1} \nabla \mathcal{T} W_1^1 \right) = -\frac{1}{r_*} \frac{\partial (\epsilon^{-1} \mathcal{N})}{\partial s} - \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial s} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_{\mathbb{D}}(W_1^1) \rangle = \langle \ell_{\mathbb{N}}(W_1^1) \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.10.22)$$

On déduit directement de la proposition 3.10.1

$$[\ell_{\mathbb{D}}(W_1^1)] = 0 \quad \forall \nu > 1/2, \quad [\ell_{\mathbb{N}}(W_1^1)] = \epsilon^\infty \int_B \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial s} = [\ell_{\mathbb{D}}(V_1^1)]. \quad (3.10.23)$$

• Symétries :

- Symétrie en  $s$  :  $W_1^1$  impaire en  $s$  et

$$[\ell_{\mathbb{D}}(W_1^1)] = [\ell_{\mathbb{N}}(W_1^1)] = 0.$$

- Symétrie en  $\nu$  :  $W_1^1$  impaire en  $\nu$ .

$$[\ell_{\mathbb{N}}(W_1^1)] = 0.$$

**Autres**

On peut par ailleurs montrer que

$$[\ell_{\mathbb{N}}(V_3^3)] = 0, \quad (3.10.24)$$

$$[\ell_{\mathbb{D}}(V_2^0)] = -[\ell_{\mathbb{N}}(W_2^0)], \quad [\ell_{\mathbb{D}}(V_2^1)] = [\ell_{\mathbb{N}}(W_2^1)], \quad [\ell_{\mathbb{D}}(V_2^2)] = -[\ell_{\mathbb{N}}(W_2^2)]. \quad (3.10.25)$$

Certaines constantes se simplifient lorsque que  $\epsilon$  et  $\mu$  sont symétriques :

- Symétrie en  $s$  :

$$[\ell_{\mathbb{N}}(W_2^1)] = 0$$

- Symétrie en  $\nu$  :  $W_1^1$  impaire en  $\nu$ .

$$[\ell_{\mathbb{N}}(V_3^0)] = [\ell_{\mathbb{N}}(V_3^2)] = [\ell_{\mathbb{N}}(W_2^0)] = [\ell_{\mathbb{N}}(W_2^2)] = 0.$$

### 3.10.2.3 Tableaux récapitulatifs

	$\epsilon$ et $\mu$ paires en $s$	$\epsilon$ et $\mu$ paires en $\nu$
$V_1^1$	impaire	paire
$\mathcal{N}$	paire	impaire
$V_2^0$	paire	paire
$V_2^1$	impaire	impaire
$V_2^2$	paire	paire
$W_1^0$	paire	paire
$W_1^1$	impaire	impaire

TABLE 3.1 – Parité des fonctions profils

	formule	sym. en $s$	sym. en $\nu$	sym. en $\nu, s$
$[\ell_D(V_1^1)]$	$\frac{\epsilon_\infty}{r_*} \int_B (\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}) \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial s}$	0	0	0
$[\ell_D(V_2^0)]$	$\omega^2 \epsilon_\infty \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \mu \mathcal{N} d\nu ds.$	.	0	0
$[\ell_D(V_2^1)]$	$\frac{\epsilon_\infty}{r_*} \int_B -2\nu \epsilon^{-1} \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} - \epsilon^{-1} \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu} \mathcal{N}$	0	.	0
$[\ell_D(V_2^2)]$	$\epsilon_\infty \left( \int_B \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial V_1^1}{\partial s} \mathcal{N} - \frac{\epsilon^{-1}}{r_*} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial s} V_1^1 + \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\epsilon^{-1}}{r_*^2} \mathcal{N} d\nu ds \right)$	.	0	0
$[\ell_D(\mathcal{N})]$	$\epsilon_\infty \left( \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{N}(1/2, s) - \mathcal{N}(-1/2, s) ds - 1 \right)$	.	.	.
$[\ell_D(W_1^0)]$	$\epsilon_\infty \left( \int_{-1/2}^{1/2} W_1^0(1/2, s) - W_1^0(-1/2, s) ds \right)$	.	0	0
$[\ell_D(W_1^1)]$	0	0	.	0

TABLE 3.2 – Constantes  $[\ell_D(V_j^k)]$  et  $[\ell_D(W_j^k)]$ 

	formule	sym. en $s$	sym. en $\nu$	sym. en $\nu, s$
$[\ell_N(V_1^1)]$	0	0	0	0
$[\ell_N(V_2^0)]$	$\epsilon_\infty \omega^2 \int_B (\mu_\infty - \mu)$	.	.	.
$[\ell_N(V_2^1)]$	0	0	0	0
$[\ell_N(V_2^2)]$	$\epsilon_\infty \left( \int_B \frac{\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}}{r_*^2} + \frac{(\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1})}{r_*} \frac{\partial V_1^1}{\partial s} \right)$	.	.	.
$[\ell_N(V_3^0)]$	$-\frac{\epsilon_\infty}{r_*} \int_B \omega^2 (\mu - \mu_\infty) \nu$	.	0	0
$[\ell_N(V_3^1)]$	0	0	0	0
$[\ell_N(V_3^2)]$	$\frac{\epsilon_\infty}{r_*^2} \left( \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} r_* \epsilon^{-1} \frac{\partial V_1^2}{\partial \nu} ds d\nu + \int_B (\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}) \frac{\partial V_1^1}{\partial s} \right)$	0	.	0
$[\ell_N(V_3^3)]$	0	0	0	0

TABLE 3.3 – Constantes  $[\ell_N(V_j^k)]$



	formule	sym. en $s$	sym. en $\nu$	sym. en $\nu, s$
$[\ell_N(W_1^0)]$	0	0	0	0
$[\ell_N(W_1^1)]$	$[\ell_D(V_1^1)]$	0	0	0
$[\ell_N(W_2^0)]$	$-[\ell_D(V_2^0)]$	$\cdot$	0	0
$[\ell_N(W_2^1)]$	$[\ell_D(V_2^1)]$	0	$\cdot$	0
$[\ell_N(W_2^2)]$	$-[\ell_D(V_2^2)]$	$\cdot$	0	0

TABLE 3.4 – Constantes  $[\ell_N(W_j^k)]$

# Construction et analyse de conditions de transmission équivalentes

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Construction détaillée du modèle approché d'ordre 1 dans le cas symétrique . . . . .</b>	<b>61</b>
4.1.1	Problème d'ordre 1 intuitif . . . . .	61
4.1.2	Décalage géométrique . . . . .	62
4.1.3	Construction d'un modèle décentré . . . . .	65
<b>4.2</b>	<b>Construction de modèles approchés d'ordre 1 et 2 dans le cas général . . . . .</b>	<b>69</b>
4.2.1	Une famille "naturelle" d'ATC . . . . .	69
4.2.2	Décalage géométrique . . . . .	69
4.2.3	Une famille d'atc décentrées . . . . .	70
<b>4.3</b>	<b>Analyse d'un problème modèle décentré d'ATC . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>4.4</b>	<b>Convergence des modèles approchés . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>4.5</b>	<b>Etude des problèmes centrés . . . . .</b>	<b>79</b>

---

Nous allons maintenant pouvoir écrire des conditions de transmission approchées (appelées aussi ATC) en utilisant les expressions des problèmes satisfaits par  $u_0$  (3.8.13),  $u_1$  (3.8.14) et  $u_2$  que l'on rappelle ci-dessous :

Trouver  $u_0 \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_0 + \omega^2 \mu_\infty u_0 = f & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u_0 + i\omega u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ [u_0]_\Gamma = [\partial_r u_0]_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (4.0.1)$$

Trouver  $u_1 \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1 + \omega^2 \mu_\infty u_1 = 0 & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u_1 + i\omega u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_1]_\Gamma = A_0 \langle r \partial_r u_0 \rangle_\Gamma + [\ell_D(V_1^1)] \langle \partial_\theta u_0 \rangle_\Gamma, \\ [r \partial_r u_1]_\Gamma = [\ell_D(V_1^1)] \frac{\partial}{\partial \theta} \langle r \partial_r u_0 \rangle_\Gamma - \omega^2 B_0 \langle u_0 \rangle_\Gamma - B_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \langle u_0 \rangle_\Gamma. \end{cases} \quad (4.0.2)$$

Trouver  $u_2 \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_2 + \omega^2 \mu_\infty u_2 = 0 & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u_2 + i\omega u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_2]_\Gamma = A_0 \langle r \partial_r u_1 \rangle_\Gamma + [\ell_D(V_1^1)] \langle \partial_\theta u_1 \rangle_\Gamma + \sum_{k=0}^2 [\ell_D(V_2^k)] \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle u_0 \rangle_\Gamma + \sum_{k=0}^1 \frac{[\ell_D(W_1^k)]}{r_*} \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle r \partial_r u_0 \rangle_\Gamma, \\ [r \partial_r u_2]_\Gamma = [\ell_D(V_1^1)] \frac{\partial}{\partial \theta} \langle r \partial_r u_1 \rangle_\Gamma - \omega^2 B_0 \langle u_1 \rangle_\Gamma - B_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \langle u_1 \rangle_\Gamma \\ \quad + \sum_{k=0}^2 r_* [\ell_N(V_3^k)] \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle u_0 \rangle_\Gamma + \sum_{k=0}^2 (-1)^{k+1} [\ell_D(V_2^k)] \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \langle r \partial_r u_0 \rangle_\Gamma. \end{cases} \quad (4.0.3)$$

avec,

$$A_0 := \frac{[\ell_D(\mathcal{N})]}{r_*} = \frac{\epsilon_\infty}{r_*} \left( \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{N}(1/2, s) - \mathcal{N}(-1/2, s) ds - 1 \right), \quad (4.0.4)$$

$$B_0 := -\frac{[\ell_N(V_2^0)] r_*}{\omega^2} = \epsilon_\infty r_* \int_B (\mu_\infty - \mu), \quad (4.0.5)$$

$$B_2 := -r_* [\ell_N(V_2^2)] = -\epsilon_\infty \left( \int_B \frac{\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}}{r_*} + (\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}) \frac{\partial V_1^1}{\partial s} \right).$$

Des expressions explicites des constantes  $[\ell_N(V_3^k)]$ ,  $[\ell_D(V_2^k)]$  et  $[\ell_D(W_1^k)]$  sont données dans les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4. En particulier,  $[\ell_N(V_3^1)] = [\ell_D(V_2^1)] = 0$ . Dans le cas symétrique ( $\mu$  et  $\epsilon$  pairs en  $s$  et  $\nu$ ),  $[\ell_D(V_1^1)] = 0$  et  $[\ell_D(V_2^k)] = [\ell_D(W_1^k)] = [\ell_N(V_3^k)] = 0$ .

Pour obtenir une condition de transmission approchée d'ordre  $k$ , nous allons construire un problème dont la solution sera proche des  $k$  premiers termes du développement en champ lointain  $\sum_{j=0}^k \delta^j u_j$ . Pour cela, nous proposons des modèles approchés que le développement tronqué  $\sum_{j=0}^k \delta^j u_j$  satisfait si nous négligeons des termes en  $O(\delta^{k+1})$ . Cette première étape nous assure la consistance des modèles approchés. Pour garantir la convergence des modèles ainsi construits, il faut vérifier que les problèmes approchés auxquels on aboutit sont stables uniformément par rapport au paramètre  $\delta$ . Pour cela, nous devons modifier de façon consistante les

modèles obtenus dans la première étape.

Dans un premier temps (section 4.1), nous expliquons en détails la démarche pour construire des conditions de transmission approchées d'ordre 1 stables dans le cas symétrique ( $\epsilon$  et  $\mu$  symétriques en  $\nu$  et en  $s$ ). Nous généralisons ensuite cette démarche pour construire des conditions de transmission d'ordres 1 et 2 dans le cas général (section 4.2). Nous analysons ces conditions dans la section 4.3. Enfin nous montrons que les solutions des modèles approchés convergent vers la solution exacte quand  $\delta$  tend vers 0 (section 4.4).

## 4.1 Construction détaillée du modèle approché d'ordre 1 dans le cas symétrique

### 4.1.1 Problème d'ordre 1 intuitif

#### 4.1.1.1 Construction d'une première condition approchée

Dans le cas symétrique  $[\ell_D(V_1^1)] = 0$  si bien que les problèmes de champs lointains d'ordre 0 et 1 sont donnés par :

$$u_0 \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-) \text{ satisfait} \quad u_1 \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-) \text{ satisfait}$$

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_0 + \omega^2 \mu_\infty u_0 = f & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u_0 + i\omega u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_0]_\Gamma = 0, \\ [r\partial_r u_0]_\Gamma = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1 + \omega^2 \mu_\infty u_1 = 0 & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u_1 + i\omega u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_1]_\Gamma = A_0 \langle r\partial_r u_0 \rangle_\Gamma, \\ [r\partial_r u_1]_\Gamma = -\omega^2 B_0 \langle u_0 \rangle_\Gamma - B_2 \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \langle u_0 \rangle_\Gamma. \end{cases}$$

**Remarque 4.1.1.** Dans le cas d'une couche mince homogène où

$$\epsilon^\delta := \begin{cases} \epsilon_0 & \text{si } |\nu| \leq 1/2, \\ \epsilon_\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu^\delta := \begin{cases} \mu_0 & \text{si } |\nu| \leq 1/2, \\ \mu_\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

les constantes  $A_0$ ,  $B_0$  et  $B_2$  sont données par

$$A_0 = \frac{\epsilon_0(\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon_0^{-1})}{r_*}, \quad B_0 = r_* \epsilon_\infty (\mu_0 - \mu_\infty) \quad \text{et} \quad B_2 = \frac{\epsilon_\infty(\epsilon_0^{-1} - \epsilon_\infty^{-1})}{r_*}. \quad (4.1.1)$$

Posons  $\tilde{u}_1^\delta = u_0 + \delta u_1$ . Alors  $\tilde{u}_1^\delta$  satisfait

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta \tilde{u}_1^\delta + \omega^2 \mu_\infty \tilde{u}_1^\delta = f & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r \tilde{u}_1^\delta + i\omega \tilde{u}_1^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [\tilde{u}_1^\delta]_\Gamma = \delta A_0 \langle r\partial_r \tilde{u}_1^\delta \rangle_\Gamma + O(\delta^2), \\ [r\partial_r \tilde{u}_1^\delta]_\Gamma = \delta \left( -\omega^2 B_0 \langle \tilde{u}_1^\delta \rangle_\Gamma - B_2 \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \langle \tilde{u}_1^\delta \rangle_\Gamma \right) + O(\delta^2). \end{cases}$$

si bien qu'il est naturel de chercher  $u_1^\delta$  comme la solution du problème

$$\text{chercher } u_1^\delta \in V \text{ satisfaisant}$$

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_1^\delta = f & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u_1^\delta + i\omega u_1^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_1^\delta]_\Gamma = \delta A_0 \langle r\partial_r u_1^\delta \rangle_\Gamma, \\ [r\partial_r u_1^\delta]_\Gamma = \delta \left( -\omega^2 B_0 \langle u_1^\delta \rangle_\Gamma - B_2 \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \langle u_1^\delta \rangle_\Gamma \right). \end{cases} \quad (4.1.2)$$

où  $V$  est l'espace fonctionnel défini par

$$V := \{v \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-), \text{ tels que } \langle v \rangle_\Gamma \in H^1([0, 2\pi]) \text{ et } \langle v(0) \rangle_\Gamma = \langle v(2\pi) \rangle_\Gamma\}. \quad (4.1.3)$$

### 4.1.1.2 Difficultés

La formulation variationnelle classique associée au problème (4.1.2) est la suivante :

$$\forall v \in V, \quad a^\delta(u_1^\delta, v) = \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \epsilon^\infty f \bar{v},$$

avec

$$\begin{aligned} a^\delta(u_1^\delta, v) = & \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \mu_\infty \epsilon_\infty u \bar{v} + i\omega \int_{\partial\Omega} u \bar{v} + \frac{1}{\delta A_0} \int_0^{2\pi} [u]_\Gamma [\bar{v}]_\Gamma \\ & - \delta \omega^2 B_0 \int_0^{2\pi} \langle u \rangle_\Gamma \langle \bar{v} \rangle_\Gamma + \delta B_2 \int_0^{2\pi} \partial_\theta \langle u \rangle_\Gamma \partial_\theta \langle \bar{v} \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

On aimerait montrer que le problème approché (4.1.2), tout comme le problème exact, relève de l'alternative de Fredholm. Malheureusement, cela semble difficile à prouver car le terme  $\delta B_2 \int_0^{2\pi} \partial_\theta \langle u \rangle_\Gamma \partial_\theta \langle \bar{v} \rangle_\Gamma$  n'est pas coercif (ni compact) quand la constante  $B_2$  est strictement négative. Or, il existe des cas pour lesquels  $B_2$  n'a pas le bon signe : dans le cas d'une couche mince homogène par exemple (remarque 4.1.1), si  $\epsilon_0 > \epsilon_\infty$  alors  $B_2 < 0$ . Par ailleurs pour des questions de stabilité, il semble aussi utile d'avoir  $A_0$  positive.

Cette difficulté ne semble pas être simplement un problème d'ordre technique : en effet, on peut écrire le problème temporel associé au problème (4.1.2) en remplaçant formellement  $-i\omega$  par  $\partial_t$  :

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1^\delta - \mu_\infty \frac{\partial^2 u_1^\delta}{\partial t^2} = f \text{ dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u_1^\delta - \partial_t u_1^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ [u_1^\delta]_\Gamma = \delta A_0 \langle r \partial_r u_1^\delta \rangle_\Gamma, \\ [r \partial_r u_1^\delta]_\Gamma = \delta \left( B_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle u_1^\delta \rangle_\Gamma - B_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \langle u_1^\delta \rangle_\Gamma \right). \end{cases}$$

Supposons que  $f = 0$ . Quand on multiplie l'équation précédente par  $\partial_t u_1^\delta$  et que l'on intègre par parties on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} (|\nabla u|^2 + \epsilon_\infty \mu_\infty |\partial_t u|^2) + \frac{1}{\delta A_0} \int_0^{2\pi} |[u]_\Gamma|^2 + \delta B_0 \int_0^{2\pi} |\partial_t \langle u \rangle_\Gamma|^2 + \delta B_2 \int_0^{2\pi} |\partial_t \langle u \rangle_\Gamma|^2 \right) = 0 \quad (4.1.4)$$

L'identité précédente est une identité d'énergie si les constantes  $A_0$ ,  $B_0$  et  $B_2$  sont positives. Donc, si les constantes  $A_0$ ,  $B_0$  et  $B_2$  n'ont pas les bons signes, le problème temporel associé au problème (4.1.2) ne sera pas stable. On peut observer numériquement ce type d'instabilité dans le chapitre 4 de [Sem10].

## 4.1.2 Décalage géométrique

Pour contourner ces difficultés, nous n'allons plus poser le problème approché dans le domaine  $\Omega^- \cup \Omega^+$  mais dans le domaine  $\Omega_{\alpha\delta} := \Omega_{\alpha\delta}^- \cup \Omega_{\alpha\delta}^+$  où  $\alpha$  est une constante positive ou nulle et

$$\Omega_{\alpha\delta}^+ := \{r_* + \alpha\delta \leq r \leq r_e\} \quad \text{et} \quad \Omega_{\alpha\delta}^- := \{0 \leq r \leq r_* - \alpha\delta\}. \quad (4.1.5)$$

Nous supposons que  $\delta$  est assez petit pour que le support de  $f$  soit contenu dans  $\Omega_{\alpha\delta}$ . Dans ce cas, nous n'allons plus écrire les conditions de transmission directement sur l'interface  $\Gamma$  mais entre deux interfaces différentes  $\Gamma_{\alpha\delta}^\pm := \{(r_* \pm \alpha\delta, \theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$ . Pour toute fonction  $u$  définie dans  $\Omega_{\alpha\delta}$ , on définit

$$u_\alpha^\pm := u|_{r=r_* \pm \alpha\delta}, \quad \langle u \rangle_\alpha := \frac{1}{2} (u_\alpha^+ + u_\alpha^-) \quad \text{and} \quad [u]_\alpha := u_\alpha^+ - u_\alpha^-.$$

Pour construire la condition de transmission approchée, on remarque d'abord que  $u = u_0 + \delta u_1$  satisfait

$$[u] = O(\delta), \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right] = O(\delta),$$

ainsi que l'équation de Helmholtz homogène sur  $\Gamma_{\alpha\delta}^\pm$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \omega^2 \mu_\infty \epsilon_\infty u \quad \text{quand } r = r_* \pm \alpha\delta.$$

Donc, en utilisant des développements de Taylor, on a

$$\begin{aligned} [u]_\Gamma &= [u]_\alpha - \frac{2\alpha\delta}{r_*} \left\langle r \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle_\alpha + O(\delta^3), \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_\Gamma &= \frac{1}{r_*} \left[ r \frac{\partial u}{\partial r} \right]_\alpha + 2\alpha\delta \left( \frac{1}{r_*^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \omega^2 \mu_\infty \epsilon_\infty \right) \langle u \rangle_\alpha + O(\delta^3), \\ \langle u \rangle_\Gamma &= \langle u \rangle_\alpha + O(\delta^2) \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle_\Gamma = \frac{1}{r_*} \left\langle r \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle_\alpha + O(\delta^2). \end{aligned}$$

si bien qu'on va finalement chercher  $u_1^\delta$  comme la solution du problème

$$\begin{aligned} &\text{chercher } u_1^\delta \in V_{\alpha\delta} \text{ satisfaisant} \\ &\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_1^\delta = f & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^\pm, \\ \partial_r u_1^\delta + i\omega u_1^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_1^\delta]_\alpha = \delta A_0^\alpha \left\langle r \partial_r u_1^\delta \right\rangle_\alpha, & (a) \\ [r \partial_r u_1^\delta]_\alpha = \delta \left( -\omega^2 B_0^\alpha \langle u_1^\delta \rangle_\alpha - B_2^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \langle u_1^\delta \rangle_\alpha \right). & (b) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

où

$$V_{\alpha\delta} := \{v \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-), \text{ tels que } \langle v \rangle_\alpha \in H^1(]0, 2\pi[) \text{ et } \langle v(0) \rangle_\alpha = \langle v(2\pi) \rangle_\alpha\}, \quad (4.1.7)$$

et

$$A_0^\alpha = A_0 + \frac{2\alpha}{r_*}, \quad B_0^\alpha = B_0 + 2\alpha\mu_\infty\epsilon_\infty r_*, \quad B_2^\alpha = B_2 + \frac{2\alpha}{r_*}. \quad (4.1.8)$$

Par construction, le problème précédent a les mêmes propriétés de consistance que le problème (4.1.2). Il faut par ailleurs remarquer qu'il existe une valeur critique  $\alpha_* \geq 0$  à partir de laquelle, pour tout  $\alpha \geq \alpha_*$ , les constantes  $A_0^\alpha$ ,  $B_0^\alpha$  et  $B_2^\alpha$  sont strictement positives. Cette propriété va simplifier considérablement l'analyse, les problèmes de signes rencontrés pour le problème (4.1.2) ayant disparu avec cette nouvelle formulation.

Pour  $\alpha > \alpha_*$ , nous munissons  $V_{\alpha\delta}$  de la norme

$$\|v\|_{V_{\alpha\delta}} = \|v\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 + \frac{1}{\delta A_0} \int_0^{2\pi} |[v]_\alpha|^2 d\theta + \delta B_2^\alpha \int_0^{2\pi} \left( |\langle v \rangle_\alpha|^2 + \left| \frac{\partial \langle v \rangle_\alpha}{\partial \theta} \right|^2 \right) d\theta.$$

Le problème (4.1.6) est équivalent au problème variationnel suivant : chercher  $u_1^\delta \in V_{\alpha\delta}$  telle que

$$a^\delta(w^\delta, v) = - \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} \epsilon_\infty f \bar{v} \quad \forall v \in V_{\alpha\delta}, \quad (4.1.9)$$

avec

$$\begin{aligned} a^\delta(u, v) &= \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \mu_\infty \epsilon_\infty u \bar{v}) + i\omega \int_{\partial\Omega} u \bar{v} \\ &\quad + \frac{1}{A_0^\alpha \delta} \int_0^{2\pi} [u]_\alpha [\bar{v}]_\alpha - \delta B_0^\alpha \int_0^{2\pi} \langle u \rangle_\alpha \langle \bar{v} \rangle_\alpha d\theta + \delta B_2^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \langle u \rangle_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \bar{v} \rangle_\alpha d\theta. \end{aligned}$$

La forme sesquilinéaire  $a^\delta$  peut être séparée en une partie coercive et une partie compacte : ainsi, le problème (4.1.6) relève de l'alternative de Fredholm. On peut en fait montrer l'existence, l'unicité et la stabilité uniformément par rapport à  $\delta$  à l'aide d'une condition inf-sup :

**Proposition 4.1.2.** *Soit  $\alpha$  telle que  $A_0^\alpha > 0$  et  $B_2^\alpha > 0$ . Alors, il existe une constante  $C_\omega > 0$  et une constante  $\delta_0 > 0$  telles que, pour tout  $\delta < \delta_0$ , et pour tout  $u \in V_{\alpha\delta}$ .*

$$\|u\|_{V_{\alpha\delta}} \leq C_\omega \sup_{v \in V_{\alpha\delta}, v \neq 0} \frac{a^\delta(u, v)}{\|v\|_{V_{\alpha\delta}}}. \quad (4.1.10)$$

*Démonstration.* Nous montrons ce résultat par l'absurde. Soit  $\delta_n$  une suite qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Supposons qu'il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\|u_n\|_{\tilde{V}_{\alpha\delta_n}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in V_{\alpha\delta_n}, v \neq 0} \frac{a^{\delta_n}(u_n, v)}{\|v\|_{\tilde{V}_{\alpha\delta_n}}} = 0. \quad (4.1.11)$$

Pour travailler dans le domaine  $\Omega^+ \cap \Omega^-$  qui est indépendant de  $\delta$ , nous définissons les transformations  $F^{\delta-}$  and  $F^{\delta+}$  :

$$F^{\delta-} := \begin{cases} [0, r_*] \rightarrow [0, r_* - \alpha\delta], \\ \hat{x} \mapsto \frac{r_* - \alpha\delta}{r_*} \hat{x}, \end{cases} \quad F^{\delta+} := \begin{cases} [r_*, r_e] \rightarrow [r_* + \alpha\delta, r_e], \\ \hat{x} \mapsto \left( \frac{r_e - r_* - \alpha\delta}{r_e - r_*} |\hat{x}| + \frac{\alpha\delta r_e}{r_e - r_*} \right) \frac{\hat{x}}{|\hat{x}|}. \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Puisque  $DF^{\delta+}(\hat{x}) = \frac{r_e - r_* - \alpha\delta}{r_e - r} I$  et  $DF^{\delta-}(\hat{x}) = \frac{r_* - \alpha\delta}{r_*} I$ ,  $DF^\pm$  tend uniformément vers la matrice identité quand  $\delta$  tend vers 0. De même,  $|\det(DF^{\delta\pm})|$  tend vers 1. De plus il existe quatre constantes  $C_1^\pm$  and  $C_2^\pm$  indépendantes de  $\delta$  telles que

$$\begin{aligned} C_1^\pm |\hat{h}| &< |DF^{\delta\pm} \hat{h}| < C_2^\pm |\hat{h}| \quad \forall \hat{h} \in \mathbb{R}^2, \\ C_1^\pm &< |\det(DF^{\delta\pm})| < C_2^\pm. \end{aligned}$$

Nous munissons l'espace  $V := \{v \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-), \langle v \rangle \in H^1(\Gamma)\}$  de la norme

$$\|v\|_{\tilde{V}_\delta}^2 = \|v\|_{H^1(\Omega^+)}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega^-)}^2 + \frac{1}{\delta A_0^\alpha} \int_0^{2\pi} |[v]|^2 d\theta + \delta B_2^\alpha \mu_\infty \int_0^{2\pi} \left( |\langle v \rangle|^2 + \left| \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial \theta} \right|^2 \right) d\theta. \quad (4.1.13)$$

Nous définissons alors  $\hat{u}_n \in V$

$$\hat{u}_n(\hat{x}) := \begin{cases} u_n \circ F^{\delta+}(\hat{x}) & \text{if } |\hat{x}| < r_*, \\ u_n \circ F^{\delta-}(\hat{x}) & \text{if } |\hat{x}| > r_*, \end{cases}$$

et la forme sesquilinéaire  $\hat{a}^{\delta_n}$

$$\begin{aligned} \hat{a}^{\delta_n}(\hat{u}_n, \hat{v}) &:= a^{\delta_n}(u_n, v), \\ &:= \int_{\Omega^+} (DF^{\delta+}(\hat{x})^{-1})(DF^{\delta+}(\hat{x})^{-1*}) \hat{\nabla} \hat{u}_n \cdot \overline{\hat{\nabla} \hat{v}} |\det(DF^{\delta+})| + \int_{\partial\Omega} i\omega \hat{u}_n \bar{v} d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega^-} (DF^{\delta-}(\hat{x})^{-1})(DF^{\delta-}(\hat{x})^{-1*}) \hat{\nabla} \hat{u}_n \cdot \overline{\hat{\nabla} \hat{v}} |\det(DF^{\delta-})| \\ &\quad - \int_{\Omega^+} \mu_\infty \epsilon_\infty \omega^2 \hat{u}_n \bar{v} |\det(DF^{\delta+})| - \int_{\Omega^-} \mu_\infty \epsilon_\infty \omega^2 \hat{u}_n \bar{v} |\det(DF^{\delta-})| \\ &\quad + \delta_n B_2^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial \langle \hat{u}_n \rangle}{\partial \theta} \frac{\partial \langle \bar{\hat{v}} \rangle}{\partial \theta} d\theta - \delta_n \omega^2 B_0^\alpha \int_0^{2\pi} \langle \hat{u}_n \rangle \langle \bar{\hat{v}} \rangle d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\delta_n A_0^\alpha} \int_0^{2\pi} [\hat{u}_n][\bar{\hat{v}}] d\theta \quad \forall \hat{v} \in \tilde{V}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

En utilisant les propriétés de  $F^{\delta\pm}$  et l'hypothèse (4.1.11), on peut montrer qu'il existe deux constantes  $A$  and  $B$  indépendantes de  $\delta$  telles que

$$\bullet \quad 0 < A \leq \|\hat{u}_n\|_{V_{\delta_n}} \leq B, \quad (4.1.15)$$

$$\bullet \quad \sup_{\hat{v} \in V, \hat{v} \neq 0} \frac{\hat{a}^{\delta_n}(\hat{u}_n, \hat{v})}{\|\hat{v}\|_{V_{\delta_n}}} = 0. \quad (4.1.16)$$

Par conséquent, il existe une sous suite (encore appelée  $(\hat{u}_n)$ ) et une fonction  $\hat{u}_0 \in H^1(\Omega^+) \cup H^1(\Omega^-)$  telles que

$$\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u}_0^+ \text{ faiblement dans } H^1(\Omega^+),$$

$$\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u}_0^- \text{ faiblement dans } H^1(\Omega^-),$$

$$\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u}_0^\pm \text{ faiblement dans } H^{1/2}(\Gamma^\pm).$$

D'après (4.1.15)  $\frac{1}{\delta_n A_0^\alpha} \int_0^{2\pi} |[\hat{u}_n]|^2 d\theta$  est bornée, et donc par unicité de la limite faible

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |[\hat{u}_n]|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |[\hat{u}_0]|^2 d\theta = 0.$$

Donc  $[\hat{u}_0] = 0$  et donc  $\hat{u}_0$  appartient à  $H^1(\Omega)$ . De plus, comme par hypothèse  $\|\sqrt{\delta_n} \langle \hat{u}_n \rangle\|_{H^1(\Gamma)}$  est bornée, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\delta_n B_2^\alpha \mu_\infty \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial \theta} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right\rangle d\theta + \delta_n B_1^\alpha \mu_\infty \int_0^{2\pi} \langle \hat{u}_n \rangle \langle \bar{v} \rangle d\theta \right) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Par conséquent, en passant à la limite dans la forme bilinéaire (4.1.14) en utilisant des fonctions tests appartenant à  $H^1(\Omega) \cap V$ , on obtient

$$0 = \int_\Omega \nabla \hat{u}_0 \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \mu_\infty \epsilon_\infty \hat{u}_0 \bar{v} + \int_{\partial\Omega} i\omega \hat{u}_0 \bar{v} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \cap V.$$

Comme  $H^1(\Omega) \cap V$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ , l'inégalité précédente reste valide pour tout fonction de  $H^1(\Omega)$  : on obtient

$$0 = \int_\Omega \nabla \hat{u}_0 \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \mu_\infty \epsilon_\infty \hat{u}_0 \bar{v} + \int_{\partial\Omega} i\omega \hat{u}_0 \bar{v} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

L'équation précédente n'est autre que la formulation variationnelle associée à la résolution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega$  avec une condition de radiation d'ordre 1 sur  $\partial\Omega$ . Or ce problème est bien posé. Donc  $\hat{u}_0 = 0$ . Par conséquent  $\hat{u}_n$  tend fortement vers 0 dans  $L^2(\Omega^\pm)$  et  $\sqrt{\delta_n} \langle \hat{u}_n \rangle$  tend fortement vers 0 dans  $L^2(\Gamma)$ . Pour terminer la preuve et obtenir une contradiction on montre que  $\|\hat{u}_n\|_{V_{\delta_n}}^2$  tend également vers 0. En effet,

$$\|\hat{u}_n\|_{V_{\delta_n}}^2 \leq C \left( |\hat{a}^\delta(\hat{u}_n, \hat{u}_n)| + \|\hat{u}_n\|_{L^2(\Omega^+)}^2 + \|\hat{u}_n\|_{L^2(\Omega^-)}^2 + \|\sqrt{\delta_n} \langle \hat{u}_n \rangle\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right),$$

Comme le membre de droite tend vers 0, on en déduit que  $\|\hat{u}_n\|_{V_{\delta_n}}^2$  tend vers 0 ce qui contredit l'hypothèse (4.1.15).  $\square$

### 4.1.3 Construction d'un modèle décentré

On a montré que pour tout  $\omega$ , il existe une constante  $\delta_0$  telle que pour tout  $\delta < \delta_0$  le modèle 4.1.6 est bien posé. Malheureusement nous ne savons pas montrer que la constante  $\delta_0$  est indépendante de  $\omega$ . On peut même montrer que dans certaines situations le problème est mal posé :

#### Proposition 4.1.3.



– Pour tout  $\alpha \geq \alpha_*$ , l'ensemble des fréquences pour lesquelles le problème (4.1.6) est mal posé est inclus dans l'ensemble  $\left\{ k^2 \frac{B_2^\alpha}{B_0^\alpha} - \frac{4}{\delta^2 A_0 B_0^\alpha}, \quad k \in \mathbb{N} \right\}$ .

– De plus, on peut montrer qu'il existe des configurations pour lesquelles (4.1.6) a des solutions non triviales.

*Démonstration.* Supposons que  $u$  satisfait le problème (4.1.6) avec  $f = 0$ . En prenant la partie imaginaire de la formulation variationnelle (4.1.9), il est facile de voir que  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . De plus la condition limite sur  $\partial\Omega$  donne  $\partial_r u = 0$  sur  $\partial\Omega$  si bien que par le théorème de prolongement unique (cf. lemme 8.5 de [CK98])  $u = 0$  dans  $\Omega_{\alpha\delta}^+$ . Donc  $u_\alpha^+ = (r\partial_r u)_\alpha^+ = 0$ . On peut par ailleurs décomposer  $u$  en série de Fourier dans  $\Omega_{\alpha\delta}^-$  :

$$u := \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(r) e^{in\theta}. \quad (4.1.17)$$

Les conditions de transmission ((4.1.6)(a)-(b)) donnent alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta A_0^\alpha}{2} \\ \frac{\delta}{2}(n^2 B_2^\alpha - B_0^\alpha \omega^2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_n)_\alpha^- \\ \left( r \frac{\partial u_n}{\partial r} \right)_\alpha^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent les traces  $(u_n)_\alpha^-$  et  $\left( r \frac{\partial u_n}{\partial r} \right)_\alpha^-$  ne peuvent être non nulles que si le système précédent est dégénéré, c'est à dire que

$$\omega^2 = n^2 \frac{B_2^\alpha}{B_0^\alpha} - \frac{4}{\delta^2 A_0 B_0^\alpha}.$$

On va maintenant présenter une configuration particulière pour laquelle le problème admet des solutions non triviales. On se place dans le cas d'une couche mince et on prend  $\alpha = 1/2$ ,  $r_* = 1$  et  $\epsilon_\infty = \mu_\infty = 1$ . Les constantes  $A_0^\alpha$ ,  $B_0^\alpha$  et  $B_2^\alpha$  sont alors données par

$$A_0^\alpha = \epsilon_0, \quad B_0^\alpha = \mu_0, \quad B_2^\alpha = \frac{1}{\epsilon_0}.$$

Comme  $u$  appartient à  $H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-)$  et satisfait l'équation de Helmholtz, on peut décomposer  $u$  sur la base de fonctions de Bessel  $J_n$  :

$$u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n J_n(\omega r) e^{in\theta}.$$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Par définition  $\delta = 2\pi/N$ .  $u$  est une solution non triviale s'il existe  $n \in \mathbb{Z}$ , telle que

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \left( n^2 - \frac{N^2}{\pi^2} \right), \\ \epsilon_0 \omega \frac{\delta}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) J_n' \left( \omega \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) \right) + J_n \left( \omega \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) \right) = 0, \end{cases} \quad (4.1.18)$$

Posons,  $g_n(\mu) = \epsilon_0 \omega \frac{\delta}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) J_n' \left( \omega \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) \right) + J_n \left( \omega \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) \right)$ . On va tracer la fonction  $g_n$  pour trois valeurs de  $N$  :  $N = 30$ ,  $N = 60$  et  $N = 90$ . On choisit  $\epsilon_0 = 0.01$ , et pour chaque  $N$ , on définit  $n$  comme l'unique entier tel que  $\frac{N}{\pi} \leq n < \frac{N}{\pi} + 1$ . Dans ces trois cas, on peut vérifier que  $\delta/\lambda < 0.1$  à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\pi \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{N} = \frac{1}{N} \sqrt{n^2 - \frac{N^2}{\pi^2}}.$$

On fait d'abord varier  $\mu_0$  entre 1 et 6 (fig. 4.1(a)). On remarque que  $g_n$  admet plusieurs 0 ce qui prouve qu'il existe des configurations et des fréquences particulières pour lesquelles le problème centré (4.1.6) est mal posé. Par contre, quand on fixe  $\epsilon_0$ , il semble que plus  $N$  est grand plus les points pour lesquels  $g_n$  s'annule se concentrent autour de 0 (cf fig.4.1(b)) :  $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  doit rester petit. Ainsi, dans le cas particulier étudié, les problèmes d'unicité interviennent quand il y a un fort contraste ( $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \ll \sqrt{\epsilon_\infty \mu_\infty}$ ), zone dans laquelle notre développement asymptotique n'est pas approprié. □

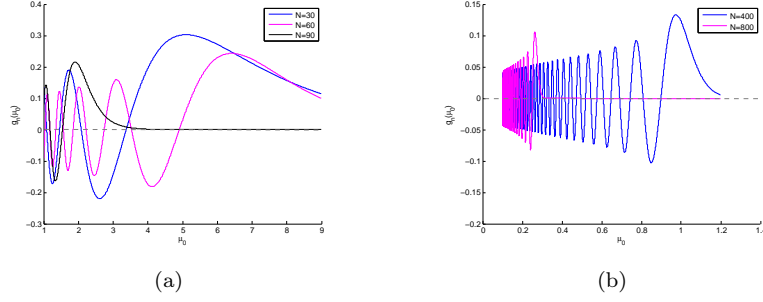


FIGURE 4.1 – courbes représentatives de  $g_n$  en fonction de  $\mu_0$  pour  $N = 30$ ,  $N = 60$ ,  $N = 90$ ,  $N = 400$  et  $N = 800$ .

On peut cependant "forcer" l'unicité en utilisant des conditions de transmission décentrées. On remarque en fait que  $u = u_0 + \delta u_1$  satisfait

$$(u)_\alpha^\pm = \langle u \rangle_\alpha \pm \frac{1}{2}[u]_\alpha = \langle u \rangle_\alpha + O(\delta) \quad \text{et} \quad (r\partial_r u)_\alpha^\pm = \langle r\partial_r u \rangle_\alpha + O(\delta)$$

si bien qu'on peut modifier le problème 4.1.6 de manière consistante en remplaçant  $\langle u \rangle_\alpha$  par  $u_\alpha^\pm$  dans (4.1.6-(b)) et  $\langle r\partial_r u \rangle_\alpha$  par  $(r\partial_r u)_\alpha^\pm$  dans (4.1.6-(a)). Nous proposons alors le modèle suivant :

chercher  $u_1^\delta \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_1^\delta = f & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^\pm, \\ \partial_r u_1^\delta + i\omega u_1^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_1^\delta]_\Gamma = \delta A_0^\alpha (r\partial_r u_1^\delta)_\Gamma^+, & (a) \\ [r\partial_r u_1^\delta]_\Gamma = \delta \left( -\omega^2 B_0^\alpha (u_1^\delta)_\alpha^- - B_2^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_1^\delta)_\alpha^- \right). & (b) \end{cases} \quad (4.1.19)$$

où l'espace  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}$  est défini par

$$\mathbf{V}_{\alpha\delta} := \{v \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-), \text{ tels que } v_\alpha^- \in H^1(]0, 2\pi[) \text{ et } v(0)_\alpha^- = v(2\pi)_\alpha^-\}, \quad (4.1.20)$$

Le problème 4.1.19 est équivalent au problème variationnel, chercher  $u_1^\delta \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}$  telle que

$$\mathbf{a}^\delta(w^\delta, v) = - \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} \epsilon_\infty f \bar{v} \quad \forall v \in \mathbf{V}^{\alpha\delta}, \quad (4.1.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\delta(u, v) &= \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \mu_\infty \epsilon_\infty u \bar{v}) + i\omega \int_{\partial\Omega} u \bar{v} \\ &+ \frac{1}{A_0^\alpha \delta} \int_0^{2\pi} [u]_\alpha [\bar{v}]_\alpha - \delta B_0^\alpha \int_0^{2\pi} \langle u \rangle_\alpha \langle \bar{v} \rangle_\alpha d\theta + \delta B_2^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \langle u \rangle_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \bar{v} \rangle_\alpha d\theta. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

**Proposition 4.1.4.** *Pour tout  $\delta > 0$ , le problème (4.1.19) admet au plus une solution.*

*Démonstration.* Supposons que  $u$  satisfait le problème (4.1.19) avec  $f = 0$ . En prenant la partie imaginaire de la formulation variationnelle (4.1.9), il est facile de voir que  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . De plus la condition limite sur  $\partial\Omega$  donne  $\partial_r u = 0$  sur  $\partial\Omega$  si bien que, par le théorème de prolongement unique (lemme 8.5 de [CK98])  $u = 0$  dans  $\Omega_{\alpha\delta}^+$ . Donc  $u_\alpha^+ = (r\partial_r u)_\alpha^+ = 0$ . En utilisant (4.1.9)-(a), on voit immédiatement que  $u_\alpha^- = 0$  :

$$\underbrace{u_\Gamma^+}_{=0} - u_\Gamma^- = \delta A_0^\alpha \underbrace{(r\partial_r u)_\Gamma^+}_{=0}.$$

Puis en utilisant la seconde condition de transmission (4.1.9)-(b), on a  $(r\partial_r u)_\alpha^- = 0$  ce qui termine la preuve.  $\square$

On en déduit alors le résultat d'existence, d'unicité et de stabilité suivant :

**Proposition 4.1.5.** *Choisissons  $\alpha$  tel que  $A_0^\alpha$  et  $B_2^\alpha$  soient positives. Alors, pour tout  $\delta > 0$ , pour tout  $\omega > 0$ , le problème (4.1.19) est bien posé. De plus*

$$\forall \delta_0 > 0, \forall \omega > 0, \exists C_\omega^{\delta_0} \text{ telle que } \forall u \in \mathbf{V}_{\alpha\delta} \leq C_\omega^{\delta_0} \sup_{v \in \mathbf{V}_{\alpha\delta} \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{a}^\delta(u, v)}{\|v\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}}}. \quad (4.1.23)$$

*Démonstration.*

- Soit  $\delta > 0$  et  $\omega > 0$ . Comme le problème (4.1.19) relève de l'alternative de Fredholm et qu'on a de plus montré l'unicité dans la proposition 4.1.4, le problème (4.1.19) est bien posé ce qui signifie que

$$\forall \delta > 0, \forall \omega > 0, \exists C_\omega^\delta > 0 \text{ telle que } \|u\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}} \leq C_\omega^\delta \sup_{v \in \mathbf{V}_{\alpha\delta} \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{a}^\delta(u, v)}{\|v\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}}} \quad (4.1.24)$$

- De plus, de la même manière que pour le problème centré (4.1.6) (Proposition 4.1.2) on peut montrer une estimation de stabilité indépendante de  $\delta$  :

$$\forall \omega > 0, \exists C_\omega > 0, \exists \delta_0(\omega) > 0, \forall \delta < \delta_0(\omega), \|u\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}} \leq C_\omega \sup_{v \in \mathbf{V}_{\alpha\delta} \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{a}^\delta(u, v)}{\|v\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}}}. \quad (4.1.25)$$

- Pour terminer la démonstration, nous allons montrer par l'absurde que  $\delta_0$  est indépendante de  $\omega$  ( $\inf_{\omega \in \mathbb{R}_+^*} \delta_0(\omega) > 0$ ) : si (4.1.23) est fautive, alors il existe  $\delta_0 > 0$  et  $\omega > 0$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vérifiant } 0 < \delta_n < \delta_0, \text{ et il existe } u_{\delta_n} \quad \|u_{\delta_n}\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta_n}} > n \sup_{v \in \mathbf{V}_{\alpha\delta_n} \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{a}^{\delta_n}(u_{\delta_n}, v)}{\|v\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta_n}}}.$$

D'après (4.1.24),  $\forall n \in \mathbb{N}, C_\omega^{\delta_n} > n$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_\omega^{\delta_n} = +\infty$ .

Mais, par (4.1.25),  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \delta_0(\omega) < \delta_n < \delta_0$ . Donc  $\delta_n$  est bornée, et admet une sous suite toujours notée  $\delta_n$  qui tend vers  $\delta_*$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ceci implique que  $C_\omega^{\delta_*} \geq +\infty$  ce qui contredit (4.1.24). □

**Remarque 4.1.6.** *A la place du problème décentré (4.1.19), on aurait pu étudier le problème*

$$\begin{aligned} & \text{chercher } u_1^\delta \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^+ \text{ satisfaisant} \\ & \begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_1^\delta = f \text{ dans } \Omega_{\alpha\delta}^\pm, \\ \partial_r u_1^\delta + i\omega u_1^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ [u_1^\delta]_\Gamma = \delta A_0^\alpha (r \partial_r u_1^\delta)_\Gamma^-, \\ [r \partial_r u_1^\delta]_\Gamma = \delta \left( -\omega^2 B_0^\alpha (u_1^\delta)_\alpha^- - B_2^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_1^\delta)_\alpha^+ \right). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

où l'espace  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}^+$  est défini par

$$\mathbf{V}_{\alpha\delta}^+ := \{v \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-), \text{ telles que } v_\alpha^+ \in H^1(]0, 2\pi[) \text{ et } v(0)_\alpha^+ = v(2\pi)_\alpha^+\}. \quad (4.1.27)$$

Ce dernier problème correspond au problème (4.1.19) dans lequel on a inversé le sens du décentrage dans les conditions de transmission. Bien sur, ce problème est bien posé et a les mêmes propriétés de stabilité que (4.1.19).

Par ailleurs, quand  $\alpha \geq \alpha_*$  ( $A_0^\alpha > 0, B_0^\alpha > 0$  et  $B_2^\alpha > 0$ ), tout comme pour le problème centré, le problème temporel associé au problème décentré (4.1.19) satisfait l'identité d'énergie

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cap \Omega_{\alpha\delta}^-} (|\nabla u|^2 + \epsilon_\infty \mu_\infty |\partial_t u|^2) + \frac{1}{\delta A_0^\alpha} \int_0^{2\pi} |[u]_\Gamma|^2 + \delta B_0^\alpha \int_0^{2\pi} |\partial_t u_\alpha^-|^2 + \delta B_2^\alpha \int_0^{2\pi} |\partial_t u_\alpha^-|^2 \right) = 0$$

## 4.2 Construction de modèles approchés d'ordre 1 et 2 dans le cas général

Nous souhaitons maintenant étendre la démarche expliquée dans la partie précédente pour construire des modèles approchés d'ordre 1 et 2 dans le cas général ( $\mu$  et  $\epsilon$  ne sont plus forcément symétriques). Nous écrivons d'abord les modèles approchés "naturels" que l'on obtient directement à partir du développement asymptotique tronqué. Puis nous en déduisons une autre série de problèmes centrés posés dans  $\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-$ . Enfin, pour assurer l'unicité nous proposons aussi une série de modèles décentrés.

### 4.2.1 Une famille "naturelle" d'ATC

En utilisant les problèmes vérifiés par (4.0.1), (4.0.2) et (4.0.3), on peut écrire les problèmes approchés naturels sous la forme suivante

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_{\infty}^{-1} \Delta u_k^{\delta} + \omega^2 \rho_{\infty} u_k^{\delta} &= f, & \text{dans } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ [u_k^{\delta}] &= \mathcal{S}^{\delta,k} \left\langle r \frac{\partial u_k^{\delta}}{\partial r} \right\rangle + \mathcal{K}^{\delta,k} \langle u_k^{\delta} \rangle & \text{sur } \Gamma, \\ \left[ r \frac{\partial u_k^{\delta}}{\partial r} \right] &= \mathcal{D}^{\delta,k} \langle u_k^{\delta} \rangle - {}^* \mathcal{K}^{\delta,k} \left\langle r \frac{\partial u_k^{\delta}}{\partial r} \right\rangle & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u_k^{\delta}}{\partial r} + i\omega u_k^{\delta} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}} \quad (4.2.1)$$

où  $\mathcal{S}^{\delta,k}$ ,  $\mathcal{K}^{\delta,k}$ ,  $\mathcal{D}^{\delta,k}$  sont des opérateurs surfaciques locaux sur  $\Gamma$  définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\delta,0} &= \mathcal{K}^{\delta,0} = \mathcal{D}^{\delta,0} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}^{\delta,1} = \delta A_0, & \mathcal{S}^{\delta,2} = \mathcal{S}^{\delta,1} + \delta^2 \frac{[\ell_D(W_1^0)]}{r_*}, \\ \mathcal{K}^{\delta,1} = \delta [\ell_D(V_1^1)] \frac{\partial}{\partial \theta}, & \mathcal{K}^{\delta,2} = \mathcal{K}^{\delta,1} + \delta^2 \sum_{\ell=0}^2 [\ell_D(V_2^{\ell})] \frac{\partial^{\ell}}{\partial \theta^{\ell}}, \\ \mathcal{D}^{\delta,1} = \delta \left( -B_0 \omega^2 - B_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), & \mathcal{D}^{\delta,2} = \mathcal{D}^{\delta,1} + \delta^2 \sum_{\ell=0}^2 r_* [\ell_N(V_3^{\ell})] \frac{\partial^{\ell}}{\partial \theta^{\ell}}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

${}^* \mathcal{K}$  est l'adjoint de  $\mathcal{K}$ , i.e

$$\int_{\Gamma} \bar{\psi} {}^* \mathcal{K} \phi \, d\theta = \int_{\Gamma} \phi \bar{\mathcal{K}} \psi \, d\theta$$

pour toutes fonctions  $\phi$  et  $\psi$  définies sur  $\Gamma$ .

**Remarque 4.2.1.** Dans le cas symétrique, les ATC d'ordres 1 et 2 sont les mêmes (voir les tableaux 3.2 et 3.3)

Tout comme pour le problème d'ordre 1, on aimerait montrer que les problèmes (4.2.1) sont bien posés. Pour que ces problèmes relèvent de l'alternative de Fredholm, on aimerait que  $B_2$  soit strictement positive ce qui n'est pas garanti en général.

### 4.2.2 Décalage géométrique

C'est pourquoi nous proposons une seconde famille d'ATC, posée cette fois sur le domaine  $\Omega_{\alpha\delta} = \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-$  où  $\alpha \geq 0$  est un paramètre ( $\Omega_{\alpha\delta}^{\pm}$  sont définis par 4.1.5). On suppose que le support de  $f$  est inclus dans  $\Omega_{\alpha\delta}$ . On construit la nouvelle famille d'ATC en observant que la fonction  $u = \sum_{j=0}^k \delta^j u_j$  définie pour  $k = 0, 1$  ou 2 satisfait

$$[u] = O(\delta); \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right] = O(\delta);$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \omega^2 \rho_\infty \epsilon_\infty u \quad \text{quand } r = r_* \pm \alpha \delta.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} [u] &= [u]_\alpha - \frac{2\alpha\delta}{r_*} \left\langle r \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle_\alpha + O(\delta^3), \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right] &= \frac{1}{r_*} \left[ r \frac{\partial u}{\partial r} \right]_\alpha + 2\alpha\delta \left( \frac{1}{r_*^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\omega^2 \rho_\infty}{\mu_\infty} \right) \langle u \rangle_\alpha + O(\delta^3), \\ \langle u \rangle &= \langle u \rangle_\alpha + O(\delta^2) \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{r_*} \left\langle r \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle_\alpha + O(\delta^2), \end{aligned}$$

et en négligeant les termes en  $O(\delta^2)$  ou  $O(\delta^3)$ , on obtient alors les problèmes suivants :

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_k^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_k^\delta &= f, & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ [u_k^\delta]_\alpha &= \mathcal{S}_\alpha^{\delta,k} \left\langle r \frac{\partial u_k^\delta}{\partial r} \right\rangle_\alpha + \mathcal{K}_\alpha^{\delta,k} \langle u_k^\delta \rangle_\alpha, \\ \left[ r \frac{\partial u_k^\delta}{\partial r} \right]_\alpha &= \mathcal{D}_\alpha^{\delta,k} \langle u_k^\delta \rangle_\alpha - \star \mathcal{K}_\alpha^{\delta,k} \left\langle r \frac{\partial u_k^\delta}{\partial r} \right\rangle_\alpha, \\ \frac{\partial u_k^\delta}{\partial r} + i\omega u_k^\delta &= 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}} \quad (4.2.2)$$

où

$$\mathcal{S}_\alpha^{\delta,0} = \mathcal{K}_\alpha^{\delta,0} = \mathcal{D}_\alpha^{\delta,0} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{S}^{\delta,1} &= \delta \left( A_0 + 2 \frac{\alpha}{r_*} \right), & \mathcal{S}^{\delta,2} &= \mathcal{S}^{\delta,1} + \delta^2 \frac{[\ell_D(W_1^0)]}{r_*}, \\ \mathcal{K}^{\delta,1} &= \delta [\ell_D(V_1^1)] \frac{\partial}{\partial \theta}, & \mathcal{K}^{\delta,2} &= \mathcal{K}^{\delta,1} + \delta^2 \sum_{\ell=0}^2 [\ell_D(V_2^\ell)] \frac{\partial^\ell}{\partial \theta^\ell}, \\ \mathcal{D}^{\delta,1} &= \delta \left( -(B_0 + 2\alpha\epsilon_\infty\mu_\infty r_*)\omega^2 - (B_2 + \frac{2\alpha}{r_*}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), & \mathcal{D}^{\delta,2} &= \mathcal{D}^{\delta,1} + \delta^2 \sum_{\ell=0}^2 r_* [\ell_N(V_3^\ell)] \frac{\partial^\ell}{\partial \theta^\ell}. \end{aligned} \right.$$

Pour  $\alpha = 0$  on retrouve bien sur les problèmes (4.2.1). Par construction les modèles (4.2.1) ont les mêmes propriétés de consistance que les problèmes (4.2.1).

### 4.2.3 Une famille d'atc décentrées

Enfin, nous donnons une troisième famille d'ATC dans laquelle les conditions de transmission sont décentrées. Tout comme pour l'ordre 1 symétrique, le décentrage permet de prouver l'unicité de manière directe. Nous distinguons l'ordre 1 et l'ordre 2, ce dernier présentant une difficulté supplémentaire.

#### 4.2.3.1 Condition de transmission décentrée du premier ordre

On rappelle que pour toute fonction  $u$

$$\langle u \rangle_\alpha = (u)_\alpha^+ - \frac{1}{2} [u]_\alpha \quad \text{et} \quad \langle u \rangle_\alpha = (u)_\alpha^- + \frac{1}{2} [u]_\alpha. \quad (4.2.3)$$

si bien que l'on peut définir le problème décentré d'ordre 1 comme

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_1^\delta = f, & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ [u_1^\delta]_\alpha = \mathcal{S}_\alpha^{\delta,1} \left( r \frac{\partial u_1^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+ + \mathcal{K}_\alpha^{\delta,1} (u_1^\delta)_\alpha^-, \\ \left[ r \frac{\partial u_1^\delta}{\partial r} \right]_\alpha = \mathcal{D}_\alpha^{\delta,1} (u_1^\delta)_\alpha^- - \star \mathcal{K}_\alpha^{\delta,1} \left( r \frac{\partial u_1^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+, \\ \frac{\partial u_1^\delta}{\partial r} + i\omega u_1^\delta = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (4.2.4)
\end{aligned}$$

qui constitue a priori aussi une approximation en  $O(\delta^2)$  du problème exact. On peut aussi obtenir un autre problème décentré en interchangeant les signes + et - dans les conditions de transmission.

#### 4.2.3.2 Condition de transmission décentrée du second ordre

La dérivation de la condition de transmission d'ordre 2 décentrée est plus technique. Elle se fait en deux étapes. Dans un premier on remarque que  $u = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2$  satisfait

$$\begin{aligned}
[u]_\alpha &= \mathcal{S}_\alpha^{\delta,2} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_\alpha^+ + (\mathcal{K}_\alpha^{\delta,2} + \delta^2 \mathcal{M}) (u_2^\delta)_\alpha^- + O(\delta^3) \\
\left[ r \frac{\partial u}{\partial r} \right]_\alpha &= \mathcal{D}_\alpha^{\delta,2} (u)_\alpha^- - (\star \mathcal{K}_\alpha^{\delta,2} + \delta^2 \mathcal{M}) \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_\alpha^+ + O(\delta^3),
\end{aligned}$$

où l'opérateur  $\mathcal{M}$  est donné par

$$\mathcal{M} := \omega^2 \frac{A_0^\alpha B_0^\alpha}{2} + \left( \frac{A_0^\alpha B_2^\alpha}{2} + \frac{[\ell_D(V_1^1)]^2}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (4.2.5)$$

Si on néglige les termes en  $O(\delta^3)$  la précédente ATC a la même structure que (4.2.4). Cependant, pour que notre problème se prête bien à une formulation variationnelle on aimerait que l'opérateur  $\mathcal{K}_\alpha^{\delta,2} + \delta^2 \mathcal{M}$  soit à valeur dans  $L^2(\Gamma)$ , ce qui n'est pour le moment pas le cas car  $\mathcal{K}_\alpha^{\delta,2} + \delta^2 \mathcal{M}$  contient des dérivées secondes en  $\theta$ . On va donc modifier les conditions de transmission de manière consistante en remplaçant l'opérateur  $\mathcal{K}_\alpha^{\delta,2} + \delta^2 \mathcal{M}$  par un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1. Nous adoptons une démarche classique basée sur l'utilisation d'approximations de Padé (cf [HJN05, HJ02]).

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\alpha^{\delta,2} + \delta^2 \mathcal{M} &= -1 + (\delta[\ell_D(V_1^1)] + \delta^2[\ell_D(V_2^1)]) \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta^2 \omega^2 \frac{A_0^\alpha B_0^\alpha}{2} \\
&\quad + \left( 1 + \delta^2 \left[ \frac{A_0^\alpha B_2^\alpha}{2} + \frac{[\ell_D(V_1^1)]^2}{2} + [\ell_D(V_2^2)] \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \delta^2[\ell_D(V_2^0)] \right) \quad (4.2.6)
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
& \left( 1 + \delta^2 \left( \frac{A_0^\alpha B_2^\alpha}{2} + \frac{[\ell_D(V_1^1)]^2}{2} + [\ell_D(V_2^2)] \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \delta^2[\ell_D(V_2^0)] \right) \\
&= \left( 1 - \delta^2 \left[ \left( \frac{A_0^\alpha B_2^\alpha}{2} + \frac{[\ell_D(V_1^1)]^2}{2} + [\ell_D(V_2^2)] \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + [\ell_D(V_2^0)] \right] \right)^{-1} + O(\delta^4). \quad (4.2.7)
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{K}}_\alpha^{\delta,2} &:= -1 + (\delta[\ell_D(V_1^1)] + \delta^2[\ell_D(V_2^1)]) \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta^2 \omega^2 \frac{A_0^\alpha B_0^\alpha}{2} \\
&\quad + \left( 1 - \delta^2 \left[ \left( \frac{A_0^\alpha B_2^\alpha}{2} + \frac{[\ell_D(V_1^1)]^2}{2} + [\ell_D(V_2^2)] \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + [\ell_D(V_2^0)] \right] \right)^{-1} \quad (4.2.8)
\end{aligned}$$

On observe que

$$\mathcal{K}_\alpha^{\delta,2} + \delta^2 \mathcal{M} = \tilde{\mathcal{K}}_\alpha^{\delta,2} + O(\delta^4) \quad \text{et} \quad \star \mathcal{K}_\alpha^{\delta,2} + \delta^2 \mathcal{M} = \star \tilde{\mathcal{K}}_\alpha^{\delta,2} + O(\delta^4)$$

si bien que le système d'équations

$$\begin{aligned} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_2^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_2^\delta &= f, & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ [u_2^\delta]_\alpha &= \mathcal{S}_\alpha^{\delta,2} \left( r \frac{\partial u_2^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+ + \tilde{\mathcal{K}}_\alpha^{\delta,2} (u_2^\delta)_\alpha^-, \\ \left[ r \frac{\partial u_2^\delta}{\partial r} \right]_\alpha &= \mathcal{D}_\alpha^{\delta,2} (u_2^\delta)_\alpha^- - \star \tilde{\mathcal{K}}_\alpha^{\delta,2} \left( r \frac{\partial u_2^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+, \\ \frac{\partial u_2^\delta}{\partial r} + i\omega u_2^\delta &= 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

sera consistant d'ordre  $O(\delta^3)$ . C'est cette famille de problèmes décentrés d'ordre 2 que l'on étudiera dans la suite.

### 4.3 Analyse d'un problème modèle décentré d'ATC

Dans cette partie, nous allons montrer que les problèmes approchés décentrés (4.2.4) et (4.2.9) sont bien posés et nous allons prouver des estimations de stabilité uniformes en  $\delta$ . En fait, nous allons ici traiter un problème plus général qui permet de traiter en une fois les ATC d'ordre 1 et 2 décentrés. Nous considérons les problèmes de la forme

$$\begin{aligned} \epsilon_\infty^{-1} \Delta w^\delta + \omega^2 \mu_\infty w^\delta &= f, & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ [w^\delta]_\alpha &= \mathcal{S}^\delta \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+ + \mathcal{K}^\delta (w^\delta)_\alpha^- + h, \\ \left[ r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right]_\alpha &= \mathcal{D}^\delta (w^\delta)_\alpha^- - \star \mathcal{K}^\delta \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+ + g, \\ \frac{\partial w^\delta}{\partial r} + i\omega w^\delta &= 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

où  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des données et où les opérateurs  $\mathcal{S}^\delta$ ,  $\mathcal{K}^\delta$  et  $\mathcal{D}^\delta$  ont les propriétés suivantes :

#### Hypothèse 4.3.1.

1.  $\mathcal{S}^\delta : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  est un opérateur autoadjoint défini positif.
2.  $\mathcal{D}^\delta : H^1(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$  est un opérateur autoadjoint continu.
3.  $I + \mathcal{K}^\delta : H^1(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  est un opérateur continu et injectif.

Ecrivons d'abord la formulation variationnelle associée au problème (4.3.1). On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit de dualité entre deux espaces définis sur  $\Gamma$  avec pour pivot  $L^2(\Gamma)$  : quand les fonctions sont suffisamment régulières, on peut remplacer ce produit de dualité par une intégrale sur  $\Gamma$ . En multipliant la première équation de (4.3.1) par une fonction test  $v$  et en intégrant par parties sur  $\Omega_{\alpha\delta} := \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-$  on a (On utilise aussi la condition limite sur le bord extérieur  $\partial\Omega$ )

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\alpha\delta}} \nabla w^\delta \nabla \bar{v} - w^\delta \epsilon_\infty \mu_\infty w^\delta \bar{v} \, dx + i\omega \int_{\partial\Omega} w^\delta \bar{v} \, ds + \left\langle \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+, (v)_\alpha^+ \right\rangle - \left\langle \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^-, (v)_\alpha^- \right\rangle = \\ - \int_{\Omega_{\alpha\delta}} (f \epsilon_\infty) \bar{v} \, dx \end{aligned}$$

En utilisant des transformations algébriques, on voit que

$$\begin{aligned} \left\langle \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+, (v)_\alpha^+ \right\rangle - \left\langle \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^-, (v)_\alpha^- \right\rangle &= \left\langle (I + \star \mathcal{K}^\delta) \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+ - \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^-, (v)_\alpha^- \right\rangle \\ &+ \left\langle \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+, (v)_\alpha^+ - (I + \mathcal{K}^\delta) (v)_\alpha^- \right\rangle \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\mathbf{V}_{\alpha\delta} := \{v \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-) \text{ telles que } (v)_\alpha^- \in H^1(\Gamma)\}.$$

La formulation variationnelle associée au problème (4.3.1) est donnée par : chercher  $w^\delta \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}$  satisfaisant

$$a_{\alpha\delta}(w^\delta, v) + b_\delta \left( \left( (w^\delta)_\alpha^+, (w^\delta)_\alpha^- \right), \left( (v)_\alpha^+, (v)_\alpha^- \right) \right) = \ell_{\alpha\delta}(v) \quad (4.3.2)$$

pour tout  $v \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}$ , où

$$a_{\alpha\delta}(w, v) := \int_{\Omega_{\alpha\delta}} \nabla w \nabla \bar{v} - w^2 \epsilon_\infty \mu_\infty w \bar{v} \, dx + i\omega \int_{\partial\Omega} w \bar{v} \, ds$$

pour tous  $w$  et  $v$  in  $H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)$ ,

$$b_\delta((\phi^+, \phi^-), (\psi^+, \psi^-)) := \langle \mathcal{D}^\delta \phi^-, \psi^- \rangle + \langle (\mathcal{S}^\delta)^{-1}(\phi^+ - (I + \mathcal{K}^\delta)\phi^-), \psi^+ - (I + \mathcal{K}^\delta)\psi^- \rangle$$

pour tous  $(\phi^+, \phi^-)$  et  $(\psi^+, \psi^-)$  dans  $L^2(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ , et

$$\ell_{\alpha\delta}(v) := - \int_{\Omega_{\alpha\delta}} (f \epsilon_\infty) \bar{v} \, dx - \left\langle g, (v)_\alpha^- \right\rangle - \left\langle (\mathcal{S}^\delta)^{-1} h, (v)_\alpha^+ - (I + \mathcal{K}^\delta) (v)_\alpha^- \right\rangle$$

pour tout  $v \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}$ .

**Proposition 4.3.2.** Soit  $f \in L^2(\Omega_{\alpha\delta})$ ,  $g \in H^{-1}(\Gamma)$  et  $h \in L^2(\Gamma)$ . Sous l'hypothèse 4.3.1, on a

- $w^\delta \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}$  satisfait (4.3.2) si et seulement si  $w^\delta \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}$  satisfait (4.3.1) au sens des distributions dans  $\Omega_{\alpha\delta}$  et au sens des traces pour les conditions limites et les conditions de transmission. La première condition de transmission est une égalité entre fonctions de  $L^2(\Gamma)$  alors que la seconde est une égalité entre deux fonctions  $H^{-1}(\Gamma)$ .
- La problème (4.3.1) a au plus une solution  $w^\delta$  dans  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}$ .

*Démonstration.* Le premier point de la proposition est évident. Il suffit d'interpréter la formulation variationnelle (4.3.2) en terme de distributions.

Pour montrer l'unicité, supposons que  $\ell_{\alpha\delta} = 0$ . Dans la formulation variationnelle (4.3.2), prenons  $v = w^\delta$  comme fonction test. En n'étudiant que la partie imaginaire, on en déduit que  $w^\delta = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Mais en utilisant la condition d'impédance sur  $\partial\Omega$  on en déduit que  $\partial_r u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Par conséquent, par le principe de prolongement unique,  $w^\delta = 0$  dans  $\Omega_{\alpha\delta}^+$ . La première condition d'interface donne alors  $(I + \mathcal{K}^\delta) (w^\delta)_\alpha^- = 0$  si bien que par l'injectivité de  $(I + \mathcal{K}^\delta)$ ,  $(w^\delta)_\alpha^- = 0$ . Puis, la seconde condition d'interface donne  $(\partial w^\delta / \partial r)_\alpha^- = 0$ . De nouveau, par le principe de prolongement unique on en déduit que  $w^\delta = 0$  dans  $\Omega_{\alpha\delta}^-$ .  $\square$

Pour montrer l'existence et la stabilité, on doit ajouter quelques hypothèses sur les opérateurs  $\mathcal{S}^\delta$ ,  $\mathcal{K}^\delta$  et  $\mathcal{D}^\delta$ .

**Hypothèse 4.3.3.**

1. Les opérateurs  $\mathcal{S}^\delta : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ ,  $\mathcal{D}^\delta : H^1(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$ ,  $\mathcal{K}^\delta : H^1(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  dépendent continûment de  $\delta > 0$ .
2. Il existe des constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 \geq 0$  indépendantes de  $\delta$  telles que

$$c_1 \delta \|\phi\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \langle \mathcal{S}^\delta \phi, \phi \rangle \quad \text{and} \quad \|\mathcal{S}^\delta \phi\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_2 \delta \|\phi\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{pour tout } \phi \in L^2(\Gamma).$$

3. Il existe trois constantes  $c_1 > 0$ ,  $c_2 \geq 0$  et  $c_3 \geq 0$  indépendantes de  $\delta$  telles que

$$\langle \mathcal{D}^\delta \phi, \phi \rangle \geq \delta (c_1 \|\phi\|_{H^1(\Gamma)}^2 - c_2 \|\phi\|_{L^2(\Gamma)}^2) \quad \text{et} \quad \|\mathcal{D}^\delta \phi\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq c_3 \delta \|\phi\|_{H^1(\Gamma)}$$

pour tout  $\phi \in H^1(\Gamma)$ .



4. Il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$\|\mathcal{K}^\delta \phi\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\delta \|\phi\|_{H^1(\Gamma)} \quad \text{pour tout } \phi \in H^1(\Gamma).$$

**Proposition 4.3.4.** *Sous les hypothèses de la proposition 4.3.2, et en supposant que les hypothèses 4.3.3 sont vérifiées, le problème (4.3.2) a une unique solution  $w^\delta \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}$ . De plus, pour tout  $\delta_0 > 0$  il existe une constante  $c$  indépendante de  $\delta$  telle que*

$$\|w^\delta\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta})} \leq c \left( \|f\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta})} + \delta^{-1/2} \|g\|_{H^{-1}(\Gamma)} + \delta^{-1/2} \|h\|_{L^2(\Gamma)} \right). \quad (4.3.3)$$

pour tout  $\delta \in ]0, \delta_0]$ .

*Démonstration.* L'espace  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}$  muni de la norme  $\|w^\delta\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}}^2 := \|w^\delta\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta})}^2 + \|(w^\delta)_\alpha^-\|_{H^1(\Gamma)}^2$  est un espace de Hilbert. En utilisant l'hypothèse 4.3.3 on voit que pour tout  $\delta > 0$ , le problème (4.3.2) relève de l'alternative de Fredholm. Ainsi, l'existence d'une solution provient directement du résultat d'unicité de la proposition 4.3.2.

Nous allons démontrer l'estimation de stabilité dans le cas où  $\alpha = 0$ . La preuve dans le cas  $\alpha \neq 0$  est exactement la même que  $\alpha = 0$  sauf qu'il faut au préalable faire le changement de variable (4.1.12) qui transforme  $\Omega_{\alpha\delta}^+$  and  $\Omega_{\alpha\delta}^-$  en  $\Omega_0^+$  et  $\Omega_0^-$ . On peut ainsi travailler dans le domaine fixe  $\tilde{\Omega} := \Omega_0^+ \cup \Omega_0^-$ .

Soit  $\delta_0 > 0$  fixé. On appelle  $\mathcal{T}_\delta : V^0 \rightarrow V^0$  l'opérateur associé à la forme bilinéaire (4.3.2). D'après le premier point de l'hypothèse 4.3.3, il est clair que  $\mathcal{T}_\delta$  dépend continûment de  $\delta \in [\delta_1, \delta_0]$  pour tout  $\delta_1 > 0$ . Comme de plus cet opérateur est inversible pour tout  $\delta \in [\delta_1, \delta_0]$ , l'opérateur  $\mathcal{T}_\delta^{-1}$  est uniformément borné par rapport à  $\delta \in [\delta_1, \delta_0]$ . L'inégalité (4.3.3) est alors  $\delta \in [\delta_1, \delta_0]$  mais la constante  $c$  peut dépendre de  $\delta_1$ . On va montrer par l'absurde que cette constante  $c$  reste bornée quand  $\delta_1$  tend vers 0. Remarquons d'abord un point important, que l'on déduit directement de (4.3.2) en prenant comme fonction test  $v = w^\delta$  :

Soient

$$\mathcal{N}^\delta(w) := \|w\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 + \delta \|(w)^-\|_{H^1(\Gamma)}^2 + \delta^{-1} \|(w)^+ - (I + \mathcal{K}^\delta)(w)^-\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

et

$$\ell^\delta := \|f\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta})} + \delta^{-1/2} \|g\|_{H^{-1}(\Gamma)} + \delta^{-1/2} \|h\|_{L^2(\Gamma)}$$

alors il existe deux constantes  $C_1$  and  $C_2$  indépendantes de  $\delta$  telles que,

$$\mathcal{N}^\delta(w^\delta) \leq C_1 \left( \|w^\delta\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + \delta \|(w^\delta)^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) + C_2 \ell^\delta \sqrt{\mathcal{N}^\delta(w^\delta)}. \quad (4.3.4)$$

Supposons maintenant qu'il existe une suite  $\delta_n$  qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et deux suites  $w^{\delta_n}$  et  $\ell^{\delta_n}$  telles que :

$$\left( \|w^{\delta_n}\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \delta_n^{1/2} \|(w^{\delta_n})_\alpha^-\|_{L^2(\Gamma)} \right) / \ell^{\delta_n} \rightarrow \infty.$$

Si on pose,

$$w_n = w^{\delta_n} / \left( \|w^{\delta_n}\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \delta_n^{1/2} \|(w^{\delta_n})_\alpha^-\|_{L^2(\Gamma)} \right)$$

et

$$\ell_n = \frac{\ell^{\delta_n}}{\left( \|w^{\delta_n}\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \delta_n^{1/2} \|(w^{\delta_n})_\alpha^-\|_{L^2(\Gamma)} \right)}$$

Il est clair que  $\frac{\|w_n\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \delta_n^{1/2} \|(w_n)_\alpha^-\|_{L^2(\Gamma)}}{\ell_n}$  tend vers  $\pm\infty$  si bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = 0.$$

On déduit alors de l'estimation (4.3.4) que  $(w_n)$  est bornée dans  $H^1(\tilde{\Omega})$ . Donc  $(w_n)$  admet une sous suite qui converge faiblement dans  $H^1(\tilde{\Omega})$  et fortement dans  $L^2(\tilde{\Omega})$  vers une fonction  $w \in H^1(\tilde{\Omega})$ . On peut aussi supposer que  $(w_n)^-$  et  $(w_n)^+$  convergent fortement vers  $(w)^-$  et  $(w)^+$  dans  $L^2(\Gamma)$ . De plus,  $w_n$  satisfait le problème (4.3.1) pour des données  $f = f_n$ ,  $h = h_n$  and  $g = g_n$  qui tendent fortement vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , respectivement dans  $L^2(\tilde{\Omega})$ ,  $L^2(\Gamma)$  et  $H^{-1}(\Gamma)$ . De plus, la première équation dans (4.3.1) montre en particulier que  $(\Delta w_n)$  est

bornée dans  $L^2(\tilde{\Omega})$  si bien que les traces normales  $(\partial w_n / \partial r)^+$  et  $(\partial w_n / \partial r)^-$  sont bornées dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . On peut donc supposer qu'elles convergent faiblement vers  $(\partial w / \partial r)^+$  et que  $(\partial w / \partial r)^-$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . En passant à la limite dans les première et dernière équations de (4.3.1) on observe que

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta w + \omega^2 \mu_\infty w = 0, & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial w}{\partial r} + i\omega w = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Mais l'estimation (4.3.4) implique aussi que  $((w_n)^+ - (I + \mathcal{K}^{\delta_n})(w_n)^-)$  tend vers 0 dans  $L^2(\Gamma)$  quand  $n \rightarrow \infty$  si bien qu'en utilisant la dernière propriété de l'hypothèse 4.3.3 on voit facilement que

$$[w] = 0 \quad \text{on } \Gamma. \quad (4.3.6)$$

Par ailleurs, en utilisant toujours l'estimation (4.3.4) on voit que  $\delta_n^{1/2} (w_n)^-$  est bornée dans  $H^1(\Gamma)$ . Donc  $\mathcal{D}^{\delta_n} (w_n)^- \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(\Gamma)$ . La dernière propriété de l'hypothèse 4.3.3 implique que  ${}^* \mathcal{K}^\delta (r \frac{\partial w_n}{\partial r})^+ \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(\Gamma)$ . Par conséquent, en prenant la limite dans la seconde condition d'interface du problème (4.3.1), on voit que

$$\left[ r \frac{\partial w}{\partial r} \right] = 0 \quad \text{on } \Gamma. \quad (4.3.7)$$

Mais nous savons que le problème (4.3.5)-(4.3.7) admet une unique solution dans  $H^1(\tilde{\Omega})$  si bien que  $w = 0$  ce qui contredit le fait que  $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . On en déduit aisément qu'il existe  $\delta_1 > 0$  et  $c > 0$  telles que

$$\left( \|w^\delta\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \delta^{1/2} \| (w^\delta)^- \|_{L^2(\Gamma)} \right) \leq c\ell^\delta$$

pour tout  $0 < \delta < \delta_1$ . L'inégalité (4.3.3) devenant alors une simple conséquence de l'estimation (4.3.4) :

$$\sqrt{\mathcal{N}^\delta(w^\delta)} \leq C_1 \ell^\delta + C_2 \ell^\delta.$$

□

On peut maintenant appliquer le problème précédent pour montrer que les problèmes décentrés d'ordre 1 et 2 sont bien posés pour  $\alpha$  assez grand :

**Proposition 4.3.5.**

– Choisissons  $\alpha$  telle que

$$B_2^\alpha = B_2 + \frac{2\alpha}{r_*} > 0 \quad \text{et} \quad A_0^\alpha = A_0 + \frac{2\alpha}{r_*} > 0,$$

Alors  $\mathcal{S}^\delta = \mathcal{S}_\alpha^{\delta,1}$ ,  $\mathcal{K}^\delta = \mathcal{K}_\alpha^{\delta,1}$  et  $\mathcal{D}^\delta = \mathcal{D}_\alpha^{\delta,1}$  satisfont les hypothèses 4.3.1 et 4.3.3 pour tout  $\delta > 0$ .

– Supposons que  $\alpha$  satisfait aussi

$$\frac{A_0^\alpha B_0^\alpha}{2} + \frac{[\ell_D(V_1^1)]^2}{2} + [\ell_D(V_2^2)] > 0,$$

alors  $\mathcal{S}^\delta = \mathcal{S}_\alpha^{\delta,2}$ ,  $\mathcal{K}^\delta = \tilde{\mathcal{K}}_\alpha^{\delta,2}$  et  $\mathcal{D}^\delta = \mathcal{D}_\alpha^{\delta,2}$  satisfont les hypothèses 4.3.1 et 4.3.3 pour tout  $0 < \delta < \delta_0$  où

$$\delta_0 := \min(1/\sqrt{[\ell_D(V_2^0)]}, B_2^\alpha/[\ell_N(V_3^2)], A_0^\alpha/[\ell_D(W_1^0)])$$

*Démonstration.* Nous séparons l'étude de l'ordre 1 et 2.

– Ordre 1 :

$$\mathcal{S}_\alpha^{\delta,1} \phi = \delta A_0^\alpha \phi, \quad \mathcal{D}_\alpha^{\delta,1} \phi = -\delta \omega^2 B_0^\alpha \phi - \delta B_2^\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad \mathcal{K}_\alpha^{\delta,1} \phi = \delta [\ell_D(V_1^1)] \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Il est clair que les opérateurs  $\mathcal{S}_\alpha^{\delta,1}$ ,  $\mathcal{D}_\alpha^{\delta,1}$  et  $\mathcal{K}_\alpha^{\delta,1}$  sont continus et dépendent continûment de  $\delta$  (hypothèse 4.3.3-1). De plus l'opérateur  $I + \mathcal{K}_\alpha^{\delta,1}$  est un opérateur injectif de  $H^1(\Gamma)$  dans  $L^2(\Gamma)$ . Par ailleurs, l'opérateur  $\mathcal{S}_\alpha^{\delta,1}$  est un opérateur autoadjoint positif si et seulement si  $A_0^\alpha > 0$ . Sous cette condition l'hypothèse 4.3.3 est satisfaite. De même, il est facile de voir que  $\mathcal{S}_\alpha^{\delta,1}$  vérifie l'hypothèse 4.3.3-2 si  $A_0^\alpha > 0$  et que l'hypothèse 4.3.3-4 est toujours vérifiée. Enfin,

$$\langle \mathcal{D}_\alpha^{\delta,1} \phi, \phi \rangle = -\delta \omega^2 B_0^\alpha \int_\Gamma |\phi|^2 + \delta B_2^\alpha \int_\Gamma |\partial_\theta \phi|^2,$$

si bien que l'hypothèse 4.3.3-3 est vérifiée si  $B_2^\alpha > 0$

– Ordre 2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\alpha^{\delta,2}\phi &= \delta A_0^\alpha \phi + \delta^2 \frac{[\ell_D(W_1^0)]}{r_*} \phi, \\ \mathcal{D}_\alpha^{\delta,2}\phi &= -\delta\omega^2 B_0^\alpha \phi - \delta B_2^\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \delta^2 r_* [\ell_N(V_3^0)] \varphi + \delta^2 r_* [\ell_N(V_3^2)] \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \\ \mathcal{K}_\alpha^{\delta,2}\phi &= \tilde{\mathcal{K}}_\alpha^{\delta,2} := -1 + (\delta[\ell_D(V_1^1)] + \delta^2[\ell_D(V_2^1)]) \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta^2 \omega^2 \frac{A_0^\alpha B_0^\alpha}{2} \\ &\quad + \left( 1 - \delta^2 \left[ \left( \frac{A_0^\alpha B_2^\alpha}{2} + \frac{[\ell_D(V_1^1)]^2}{2} + [\ell_D(V_2^2)] \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + [\ell_D(V_2^0)] \right] \right)^{-1}\end{aligned}$$

Tout d'abord, il faut s'assurer que  $\mathcal{K}_\alpha^{\delta,2}\phi$  est bien définie. C'est le cas si  $A_0^\alpha B_0^\alpha / 2 + [\ell_D(V_1^1)]^2 / 2 + [\ell_D(V_2^2)] > 0$  et  $\delta < 1/\sqrt{[\ell_D(V_2^0)]}$ . Sous ces conditions, il est alors clair que  $(I + \mathcal{K}_\alpha^{\delta,2}\phi)$  est injectif, continu et dépend continûment de  $\delta$ .

Par ailleurs  $\mathcal{S}_\alpha^{\delta,2}$  et  $\mathcal{D}_\alpha^{\delta,2}$  sont continus et dépendent continûment de  $\delta$ . Une condition suffisante pour avoir la positivité de  $\mathcal{S}_\alpha^{\delta,2}$  est que  $A_0^\alpha$  soit positif et que  $\delta < A_0^\alpha / [\ell_D(W_1^0)]$ .

Enfin, pour vérifier 4.3.3-3, il faut que  $B_2^\alpha - \delta r_* [\ell_N(V_3^2)]$  soit positif ce qui est le cas si on choisit  $B_2^\alpha > 0$  et  $\delta < B_2^\alpha / r_* [\ell_N(V_3^2)]$ . □

## 4.4 Convergence des modèles approchés

On va maintenant montrer que les solutions des problèmes (4.2.4) et (4.2.9) tendent vers la solution exacte  $u^\delta$  du problème initial (2.1.1-2.1.2). Posons

$$\Omega_\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sqrt{x^2 + y^2} - r_*| > \gamma\}.$$

Le résultat principal de cette section est le suivant :

### Proposition 4.4.1.

- Supposons que les conditions d'application de la première partie de la proposition 4.3.5 sont vérifiées. Alors le problème (4.2.4) a une unique solution  $u_1^\delta$  pour tout  $\delta > 0$ . De plus, il existe  $C > 0$  et, pour tout  $0 < \gamma < r_e$ , une constante  $\delta_\gamma > 0$  telles que

$$\forall \delta < \delta_\gamma, \quad \|u^\delta - u_1^\delta\|_{H^1(\Omega_\gamma^\pm)} \leq C \delta^2. \quad (4.4.1)$$

- Supposons que les conditions d'application de la seconde partie de la proposition 4.3.5 sont vérifiées. Alors le problème (4.2.9) a une unique solution  $u_2^\delta$  pour tout  $0 < \delta < \delta_0$ . De plus, il existe une constante  $C > 0$  et, pour tout  $0 < \gamma < r_e$ , une constante  $\delta_\gamma > 0$  et  $\delta_\gamma < \delta_0$  telles que

$$\forall \delta < \delta_\gamma, \quad \|u^\delta - u_2^\delta\|_{H^1(\Omega_\gamma^\pm)} \leq C \delta^3. \quad (4.4.2)$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord que

$$\|u^\delta - u_i^\delta\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq \left\| u^\delta - \sum_{k=0}^i \delta^k u_k \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} + \left\| \sum_{k=0}^i \delta^k u_k - u_i^\delta \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)}$$

En vertu de la proposition 3.9.1 (convergence du développement asymptotique), nous savons que pour  $\delta$  assez petit,

$$\left\| u^\delta - \sum_{k=0}^i \delta^k u_k \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C \delta^{i+1}.$$

Il reste à montrer que

$$\left\| \sum_{k=0}^i \delta^k u_k - u_i^\delta \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C \delta^{i+1}. \quad (4.4.3)$$

L'idée la plus naturelle serait de majorer directement  $d_i = \sum_{k=0}^i \delta^k u_i - u_i^\delta$  à l'aide de la proposition 4.3.4. En effet, on peut remarquer que  $d_i$  satisfait

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta d_i + \omega^2 \mu_\infty d_i = 0, & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ [d_i]_\alpha = \mathcal{S}^\delta \left( r \frac{\partial d_i}{\partial r} \right)_\alpha^+ + \mathcal{K}^\delta (d_i)_\alpha^- + h_i, \\ \left[ r \frac{\partial d_i}{\partial r} \right]_\alpha = \mathcal{D}^\delta (d_i)_\alpha^- - {}^* \mathcal{K}^\delta \left( r \frac{\partial d_i}{\partial r} \right)_\alpha^+ + g_i, \\ \frac{\partial d_i}{\partial r} + i\omega d_i = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $h_i \in L^2(\Gamma)$  et  $g_i \in H^{-1}(\Gamma)$ . De plus, il existe une constante  $C$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$\|h_i\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\delta^{k+1}, \quad \|g_i\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq C\delta^{k+1}.$$

En utilisant la proposition 4.3.4, on obtient

$$\left\| \sum_{k=0}^i \delta^k u_i - u_i^\delta \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C\delta^{i+1/2}.$$

Malheureusement l'estimation précédente n'est pas optimale. Pour obtenir l'estimation optimale, (4.4.3) on doit en fait écrire un développement asymptotique de  $u_i^\delta$  en fonction de  $\delta$ . C'est l'objet de la partie suivante dont le résultat principal (qui n'est autre que l'estimation (4.4.3)) est donné dans la proposition 4.4.4.  $\square$

### Développement asymptotique de $u_i^\delta$

L'objectif de cette partie est de montrer la proposition 4.4.4. Pour cela, on construit un développement asymptotique de  $u_i^\delta$  sous la forme

$$u_i^\delta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \tilde{u}_i^n,$$

où les fonctions  $\tilde{u}_i^n$  sont indépendantes de  $\delta$  et sont définies dans  $\Omega^+ \cup \Omega^-$ .

Afin d'étudier de manière simultanée le cas  $i = 1$  et le cas  $i = 2$ , on remarque que l'on peut écrire  $\mathcal{S}_\alpha^{\delta,i}$ ,  $\mathcal{K}_\alpha^{\delta,i}$ ,  $\mathcal{K}_\alpha^{\delta,i}$  et  ${}^* \mathcal{K}_\alpha^{\delta,i}$  sous la forme

$$\begin{cases} \mathcal{S}_\alpha^{\delta,i} = \delta \mathcal{S}_\alpha^1 + \delta^2 \mathcal{S}_\alpha^{2,i}, \\ \mathcal{K}_\alpha^{\delta,i} = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \delta^j \mathcal{K}_\alpha^{j,i}, \\ {}^* \mathcal{K}_\alpha^{\delta,i} = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \delta^j {}^* \mathcal{K}_\alpha^{j,i}, \\ \mathcal{D}_\alpha^{\delta,i} = \delta \mathcal{D}_\alpha^1 + \delta^2 \mathcal{D}_\alpha^{2,i} \end{cases} \quad (4.4.4)$$

avec,

$$\begin{cases} \mathcal{S}_\alpha^1 = A_0^\alpha I, & \mathcal{S}_\alpha^{2,1} = 0, \\ \mathcal{K}_\alpha^{1,1} = [\ell_D(V_1^1)] \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \mathcal{D}_\alpha^1 = -\omega^2 B_0^\alpha I - B_1^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, & \mathcal{D}_\alpha^{2,1} = 0, \end{cases} \quad (4.4.5)$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_\alpha^{2,2} = \frac{[\ell_D(W_1^0)]}{r_*}, \\ \mathcal{D}_\alpha^{2,2} = \sum_{l=0}^2 r_* [\ell_N(V_3^l)] \frac{\partial^l}{\partial \theta^l}, \quad \mathcal{K}_\alpha^{1,2} = [\ell_D(V_1^1)] \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \mathcal{K}_\alpha^{2,2} = [\ell_D(V_2^1)] \frac{\partial}{\partial \theta} + \omega^2 \frac{A_0^\alpha B_0^\alpha}{2} + \left[ \left( \frac{A_0^\alpha B_2^\alpha}{2} + \frac{[\ell_D(V_1^1)]^2}{2} + [\ell_D(V_2^2)] \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + [\ell_D(V_2^0)] \right], \\ \mathcal{K}_\alpha^{2k+1,2} = 0 \quad \forall k \geq 1, \\ \mathcal{K}_\alpha^{2k,2} = \left[ \left( \frac{A_0^\alpha B_2^\alpha}{2} + \frac{[\ell_D(V_1^1)]^2}{2} + [\ell_D(V_2^2)] \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + [\ell_D(V_2^0)] \right]^k \quad \forall k \geq 1.. \end{cases} \quad (4.4.6)$$

Les fonctions  $\tilde{u}_i^n$  sont alors solutions des problèmes bien posés suivants :

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta \tilde{u}_i^n + \omega^2 \mu_\infty \tilde{u}_i^n = f \delta_n^0 & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r \tilde{u}_i^n + i\omega \tilde{u}_i^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [\tilde{u}_i^n]_\Gamma = g_n, \\ [r \partial_r \tilde{u}_i^n]_\Gamma = h_n. \end{cases} \quad (4.4.7)$$

avec,

$$\begin{aligned} g_n &= - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{k!} \left( \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{n-k}}{\partial r^k} \right)_0^+ - (-1)^k \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{n-k}}{\partial r^k} \right)_0^- \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k \mathcal{S}_\alpha^1 \left( \frac{r_*}{k!} \left( \frac{\partial^{k+1} \tilde{u}_i^{n-k-1}}{\partial r^{k+1}} \right)_0^+ + \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{n-k-1}}{\partial r^k} \right)_0^+ \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k \mathcal{S}_\alpha^{2,i} \left( \frac{r_*}{k!} \left( \frac{\partial^{k+1} \tilde{u}_i^{n-k-2}}{\partial r^{k+1}} \right)_0^+ + \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{n-k-2}}{\partial r^k} \right)_0^+ \right) \\ &\quad + r_* \mathcal{S}_\alpha^1 \left( \frac{\partial \tilde{u}_i^{n-1}}{\partial r} \right)_0^+ + r_* \mathcal{S}_\alpha^{2,i} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i^{n-2}}{\partial r} \right)_0^+ \\ &\quad + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k \alpha^k}{k!} \mathcal{K}_\alpha^{n-l,i} \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{l-k}}{\partial r^k} \right)_0^- \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_n &= - \sum_{k=1}^n \alpha^k \left[ \left( \frac{r_*}{k!} \left( \frac{\partial^{k+1} \tilde{u}_i^{n-k}}{\partial r^{k+1}} \right)_0^+ + \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{n-k}}{\partial r^k} \right)_0^+ \right) - (-1)^k \left( \frac{r_*}{k!} \left( \frac{\partial^{k+1} \tilde{u}_i^{n-k}}{\partial r^{k+1}} \right)_0^- + \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{n-k}}{\partial r^k} \right)_0^- \right) \right] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (-1)^k \mathcal{D}_\alpha^1 \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{n-1-k}}{\partial r^k} \right)_0^- + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\alpha^k}{k!} (-1)^k \mathcal{D}_\alpha^{2,i} \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{n-2-k}}{\partial r^k} \right)_0^- \\ &\quad - \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^l \alpha^k \left( \frac{r_*}{k!} \mathcal{K}_\alpha^{n-l,i} \left( \frac{\partial^{k+1} \tilde{u}_i^{l-k}}{\partial r^{k+1}} \right)_0^+ + \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{K}_\alpha^{n-l,i} \left( \frac{\partial^k \tilde{u}_i^{l-k}}{\partial r^k} \right)_0^+ \right) \\ &\quad - \sum_{l=0}^{n-1} r_* \mathcal{K}_\alpha^{n-l,i} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i^l}{\partial r} \right)_0^+ \end{aligned}$$

**Remarque 4.4.2.** Il faut remarquer que  $\tilde{u}_i^k = u_k$  quand  $k \leq i$ .

### Convergence du développement asymptotique

Soit

$$d_i^k = u_i^\delta - \sum_{l=0}^k \delta^l \tilde{u}_i^k.$$

Il est facile de voir que  $d_i^k$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_\infty^{-1} \Delta d_i^k + \omega^2 \mu_\infty d_i^k = 0, & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ [d_i^k]_\alpha = \mathcal{S}^\delta \left( r \frac{\partial d_i^k}{\partial r} \right)_\alpha^+ + \mathcal{K}^\delta (d_i^k)_\alpha^- + h_i^k, \\ \left[ r \frac{\partial d_i^k}{\partial r} \right]_\alpha = \mathcal{D}^\delta (d_i^k)_\alpha^- - {}^* \mathcal{K}^\delta \left( r \frac{\partial d_i^k}{\partial r} \right)_\alpha^+ + g_i^k, \\ \frac{\partial d_i^k}{\partial r} + i\omega d_i^k = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

où  $h_i^k \in L^2(\gamma)$  et  $g_i^k \in H^{-1}(\gamma)$ . De plus, il existe une constante  $C$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$\|h_i^k\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\delta^{k+1} \|g_i^k\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq C\delta^{k+1}.$$

On peut donc appliquer la proposition 4.3.4 et montrer que pour  $\delta$  assez petit

$$\|d_i^k\|_{H^1(\tilde{\Omega}_{\alpha\delta})} \leq C\delta^{k+1/2}. \quad (4.4.8)$$

L'estimation précédente n'est pas optimale. Par l'inégalité triangulaire on montre la proposition suivante :

**Proposition 4.4.3.** *Supposons que les hypothèses du théorème 4.3.5 sont vérifiées. Pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ , il existe  $\delta_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $\delta < \delta_0$ ,*

$$\left\| u_i^\delta - \sum_{l=0}^k \delta^l \tilde{u}_i^l \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C\delta^{k+1}. \quad (4.4.9)$$

*Démonstration.*

$$\left\| u_i^\delta - \sum_{l=0}^k \delta^l \tilde{u}_i^l \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq \left\| u_i^\delta - \sum_{l=0}^{k+1} \delta^l \tilde{u}_i^l \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} + \delta^{k+1} \|u_i^{k+1}\|_{H^1(\Omega_\gamma)}.$$

D'après (4.4.8),  $\left\| u_i^\delta - \sum_{l=0}^{k+1} \delta^l \tilde{u}_i^l \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C\delta^{k+3/2}$  si bien que comme  $\|\tilde{u}_i^l\|_{H^1(\Omega_\gamma)}$  est bornée, on a

$$\left\| u_i^\delta - \sum_{l=0}^k \delta^l \tilde{u}_i^l \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C\delta^{k+1}.$$

□

Finalement, en combinant la remarque 4.4.2 et la proposition 4.4.3, on obtient une estimation optimale de l'erreur de modèle :

**Proposition 4.4.4.** *Supposons que les hypothèses du théorème 4.3.5 sont vérifiées. Pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ , il existe  $\delta_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $\delta < \delta_0$ ,*

$$\left\| u_i^\delta - \sum_{l=0}^i \delta^l u_l \right\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C\delta^{i+1}. \quad (4.4.10)$$

## 4.5 Etude des problèmes centrés

Intéressons nous maintenant aux ATC centrées, c'est à dire aux conditions de la forme

$$\begin{array}{l}
\epsilon_\infty^{-1} \Delta w^\delta + \omega^2 \mu_\infty w^\delta = f, \quad \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\
[w^\delta]_\alpha = \mathcal{S}^\delta \left\langle r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right\rangle + \mathcal{K}^\delta \langle w^\delta \rangle + h, \\
\left[ r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right]_\alpha = \mathcal{D}^\delta \langle w^\delta \rangle - \star \mathcal{K}^\delta \left\langle r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right\rangle + g, \\
\frac{\partial w^\delta}{\partial r} + i\omega w^\delta = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega,
\end{array} \tag{4.5.1}$$

où les opérateurs  $\mathcal{S}^\delta$ ,  $\mathcal{K}^\delta$  et  $\mathcal{D}^\delta$  satisfont les hypothèses 4.3.1 et 4.3.3. Nous allons voir qu'il est possible de faire une analyse proche de celle utilisée pour les problèmes décentrés. En effet, comme

$$\begin{aligned}
\left\langle \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^+, (v)_\alpha^+ \right\rangle - \left\langle \left( r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right)_\alpha^-, (v)_\alpha^- \right\rangle &= \left\langle \left\langle r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right\rangle_\alpha, [v] - \mathcal{K}^\delta (v)_\alpha^- \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \left[ r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right]_\alpha + \star \mathcal{K}^\delta \left\langle r \frac{\partial w^\delta}{\partial r} \right\rangle, (v)_\alpha^+ \right\rangle
\end{aligned}$$

la formulation variationnelle associée au problème (4.5.1) est donnée par : chercher  $w^\delta \in V_{\alpha\delta}$  satisfaisant

$$a_{\alpha\delta}(w^\delta, v) + b_\delta \left( \left( (w^\delta)_\alpha^+, (w^\delta)_\alpha^- \right), \left( (v)_\alpha^+, (v)_\alpha^- \right) \right) = \ell_{\alpha\delta}(v) \tag{4.5.2}$$

pour tout  $v \in V_{\alpha\delta}$ , où

$$\begin{aligned}
V_{\alpha\delta} &:= \{v \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-) \text{ telle } \langle v \rangle_\alpha \in H^1(\Gamma)\}, \\
a_{\alpha\delta}(w, v) &:= \int_{\Omega_{\alpha\delta}} \nabla w \nabla \bar{v} - w^2 \epsilon_\infty \mu_\infty w \bar{v} \, dx + i\omega \int_{\partial\Omega} w \bar{v} \, ds
\end{aligned}$$

pour tous  $w$  et  $v$  in  $H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)$ ,

$$b_\delta((\phi^+, \phi^-), (\psi^+, \psi^-)) := \langle \mathcal{D}^\delta \langle \phi \rangle_\alpha, \langle \psi \rangle_\alpha \rangle + \langle (\mathcal{S}^\delta)^{-1}([\phi]_\alpha - \mathcal{K}^\delta \langle \phi \rangle_\alpha), [\psi]_\alpha - \mathcal{K}^\delta \langle \psi \rangle_\alpha \rangle$$

pour tous  $(\phi^+, \phi^-)$  et  $(\psi^+, \psi^-)$  dans  $L^2(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ , et

$$\ell_{\alpha\delta}(v) := - \int_{\Omega_{\alpha\delta}} (f \epsilon_\infty) \bar{v} \, dx - \langle g, \langle v \rangle_\alpha \rangle - \langle (\mathcal{S}^\delta)^{-1} h, [v]_\alpha - \mathcal{K}^\delta \langle v \rangle_\alpha \rangle$$

pour tout  $v \in V_{\alpha\delta}$ . Il est clair que les problèmes centrés relèvent de l'alternative de Fredholm. En revanche, contrairement aux problèmes décentrés on ne sait pas montrer l'unicité directement. On peut quand même obtenir un résultat d'unicité (et donc d'existence) en montrant par l'absurde l'estimation de stabilité suivant :

**Proposition 4.5.1.** *Supposons que les hypothèses 4.3.1 et 4.3.3 sont vérifiées. Pour tout  $\omega$ , il existe  $\delta_0 > 0$  et une constante  $c$  indépendante de  $\delta$  telle que*

$$\|w^\delta\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta})} \leq c \left( \|f\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta})} + \delta^{-1/2} \|g\|_{H^{-1}(\Gamma)} + \delta^{-1/2} \|h\|_{L^2(\Gamma)} \right). \tag{4.5.3}$$

pour tout  $\delta \in ]0, \delta_0]$ .

La preuve est similaire à la preuve de la proposition 4.3.4.

**Remarque 4.5.2.** *L'hypothèse 4.3.1-3, n'est pas indispensable (elle ne servait que pour montrer l'unicité dans le cas décentré).*

A l'aide de cette proposition, on peut facilement montrer que le problème centré d'ordre 1 est bien posé dès lors que  $A_0^\alpha > 0$  et  $B_2^\alpha > 0$ . De même si  $[\ell_b(V_2^2)]$  est positive ou nulle, une technique similaire à celle utilisée dans la partie 4.2.3.2 peut être utilisée pour se ramener au cadre d'application de la proposition propositions 4.5.1. Par ailleurs, de la même manière que pour le problème décentré on peut montrer que ces modèles convergent vers la solution exacte  $u^\delta$  avec des taux de convergence en  $O(\delta^2)$  et  $O(\delta^3)$ .

# Résultats numériques

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Description de la méthode numérique . . . . .</b>	<b>82</b>
5.1.1	Rappel des principales étapes de l'algorithme . . . . .	82
5.1.2	Description de l'expérience . . . . .	83
5.1.3	Quelques remarques sur la résolution des problèmes de cellule . . . . .	84
<b>5.2</b>	<b>Modèle d'ordre 1 décentré . . . . .</b>	<b>86</b>
5.2.1	Une condition inf-sup discrète . . . . .	86
5.2.2	Résultats qualitatifs . . . . .	87
5.2.3	Taux de convergence . . . . .	90
5.2.4	Impact du paramètre $\alpha$ . . . . .	91
<b>5.3</b>	<b>Modèles d'ordre 2 . . . . .</b>	<b>92</b>

---



## 5.1 Description de la méthode numérique

Nous pouvons maintenant tester numériquement nos modèles. Nous nous restreignons aux cas où la cellule périodique  $B$  est symétrique c'est à dire quand

$$\begin{cases} \epsilon(-\nu, s) = \epsilon(\nu, s), & \begin{cases} \mu(-\nu, s) = \mu(\nu, s), \\ \mu(\nu, -s) = \mu(\nu, s). \end{cases} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Nous testons les 3 modèles différents :

- le modèle décentré d'ordre 1 (4.1.19),
- le modèle décentré d'ordre 2 (4.2.9),
- le modèle centré (4.1.6) (d'ordre 2).

Les simulations sont réalisées à l'aide du code éléments finis Montjoie. Ce logiciel, développé par M. Duruffe ([Dur06]), est un outil performant pour la résolution numérique des problèmes de propagation d'ondes en régime temporel et en régime harmonique. Spécialisé dans les méthodes d'éléments finis d'ordres élevés, il a la particularité de fonctionner avec des maillages hexaédriques ou des maillages hybrides.

### 5.1.1 Rappel des principales étapes de l'algorithme

L'algorithme de résolution du problème se décompose en trois grandes étapes :

1. La première partie consiste à calculer par une méthode d'éléments finis les fonctions profils  $V_1^1$  et  $\mathcal{N} = W_0^0$  solutions des problèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{Trouver } V_1^1 \in \mathbb{V}_+^1(B) \text{ satisfaisant} & \text{Trouver } \mathcal{N} \in \mathbb{V}_+^1(B) \text{ satisfaisant} \\ \begin{cases} r_*^2 \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla V_1^1) = -r_* \frac{\partial(\epsilon^{-1})}{\partial s} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(U_1) \rangle = 0 \\ \langle \ell_N(U_1) \rangle = 0. \end{cases} & \begin{cases} r_*^2 \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{N}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \langle \ell_D(\mathcal{N}) \rangle = 0 \\ \langle \ell_N(\mathcal{N}) \rangle = 1. \end{cases} \end{array}$$

On peut alors en déduire les constantes  $A_0$ ,  $B_0$  et  $B_2$ .

$$A_0 := \frac{\epsilon_\infty}{r_*} \left( \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{N}(1/2, s) - \mathcal{N}(-1/2, s) ds - 1 \right),$$

$$B_0 := \epsilon_\infty r_* \int_B (\mu_\infty - \mu), \quad B_2 := -\epsilon_\infty \left( \int_B \frac{\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}}{r_*} + (\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}) \frac{\partial V_1^1}{\partial s} \right).$$

Puis, on choisit  $\alpha$  pour que les constantes  $A_0^\alpha$ ,  $B_0^\alpha$  et  $B_2^\alpha$  soient positives :

$$A_0^\alpha = A_0 + \frac{2\alpha}{r_*}, \quad B_0^\alpha = B_0 + 2\alpha\mu_\infty\epsilon_\infty r_*, \quad B_2^\alpha = B_2 + \frac{2\alpha}{r_*}.$$

2. On résout un des trois problèmes approchés suivants en utilisant un maillage grossier :

- Le problème d'ordre 1 décentré :

$$\begin{array}{l} \text{chercher } u_1^\delta \in \mathbb{V}_{\alpha\delta} \text{ satisfaisant} \\ \begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_1^\delta = f \text{ dans } \Omega_{\alpha\delta}^\pm, \\ \partial_r u_1^\delta + i\omega u_1^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ [u_1^\delta]_\Gamma = \delta A_0^\alpha (r \partial_r u_1^\delta)_\Gamma^+, \\ [r \partial_r u_1^\delta]_\Gamma = \delta \left( -\omega^2 B_0^\alpha (u_1^\delta)_\alpha^- - B_2^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_1^\delta)_\alpha^- \right). \end{cases} \end{array} \quad (4.1.19)$$

– Le problème d'ordre 2 décentré (4.2.9) qui dans le cas symétrique devient :

chercher  $u_2^\delta \in V_{\alpha\delta}$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_2^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_2^\delta = f & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^\pm, \\ \partial_r u_2^\delta + i\omega u_2^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ (u_2^\delta)_\alpha^+ - (I + \mathcal{K}(u_2^\delta)_\alpha^-) = \delta A_0^\alpha (r \partial_r u_2^\delta)_\Gamma^+, & (a) \\ (I + {}^* \mathcal{K})(r \frac{\partial u_2^\delta}{\partial r})_\alpha^+ - (r \frac{\partial u_2^\delta}{\partial r})_\alpha^- = \delta \left( -\omega^2 B_0^\alpha (u_2^\delta)_\alpha^- - B_2^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_2^\delta)_\alpha^- \right), & (b) \end{cases} \quad (5.1.2)$$

où l'opérateur  $\mathcal{K}$  est donné par

$$\mathcal{K} : \begin{cases} L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma), \\ u \mapsto \left( -1 + \delta^2 \omega^2 \frac{A_0^\alpha B_0^\alpha}{2} + \left( 1 - \delta^2 \frac{A_0^\alpha B_2^\alpha}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \right) u \end{cases}$$

– Le problème centré (d'ordre 2) :

chercher  $u_1^\delta \in V_{\alpha\delta}$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_1^\delta + \omega^2 \mu_\infty u_1^\delta = f & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^\pm, \\ \partial_r u_1^\delta + i\omega u_1^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_1^\delta]_\alpha = \delta A_0^\alpha \langle r \partial_r u_1^\delta \rangle_\alpha, & (a) \\ [r \partial_r u_1^\delta]_\alpha = \delta \left( -\omega^2 B_0^\alpha \langle u_1^\delta \rangle_\alpha - B_2^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \langle u_1^\delta \rangle_\alpha \right). & (b) \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Les espaces  $V_{\alpha\delta}$  et  $V_{\alpha\delta}$  sont définis par (4.1.20) et (4.1.7)

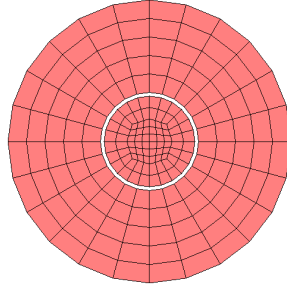


FIGURE 5.1 – Exemple de maillage pour la résolution du problème approché

3. On reconstruit la solution à l'intérieur de l'anneau périodique à l'aide des fonctions profils et de la solution du problème approché : en effet,

$$(U_0)^\delta + \delta(U_1)^\delta \approx \langle u^\delta \rangle_\alpha + \delta \langle \partial_r u^\delta \rangle_\alpha (\mathcal{N})^\delta + \langle \partial_\theta u^\delta \rangle_\alpha (V_1^1)^\delta.$$

### 5.1.2 Description de l'expérience

Dans les expériences qui suivent,  $\epsilon$  et  $\mu$  sont choisis constants par morceaux. Plus précisément (cf. Figure 5.2),

$$\epsilon(\nu, s) = \begin{cases} \epsilon_\infty & |\nu| > \frac{1}{2}, \\ \epsilon_1 & \text{si } -\frac{1}{4} < \nu < \frac{1}{4} \text{ et } -\frac{1}{6} < s < \frac{1}{6}, \\ \epsilon_2 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.1.3)$$

et

$$\mu(\nu, s) = \begin{cases} \mu_\infty & |\nu| > \frac{1}{2}, \\ \mu_1 & \text{si } -\frac{1}{4} < \nu < \frac{1}{4} \text{ et } -\frac{1}{6} < s < \frac{1}{6}, \\ \mu_2 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Dans la suite nous prendrons  $\epsilon_\infty = \mu_\infty = 1$ ,  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 4$ ,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 4$ . Nous choisissons la fréquence égale

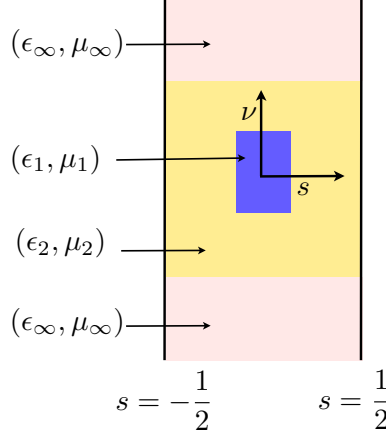


FIGURE 5.2 – Géométrie de la cellule périodique

à 1 si bien que  $\omega = 2\pi$ . Nous prenons  $r_* = 1$   $r_e = 3$ . Enfin, nous nous intéressons à la diffraction par une onde plane :

$$u_i(x, y) := e^{2i\pi x}.$$

Enfin, on appelle  $N$  le nombre de cellules périodiques dans l'anneau périodique ( $\delta = 2\pi r_*/N$ ).

### 5.1.3 Quelques remarques sur la résolution des problèmes de cellule

#### 5.1.3.1 Utilisation des symétries

Soit  $B_+^{1/2}$  la demi-cellule supérieure :

$$B_+^{1/2} := \{(\nu, s) \in \mathbb{R}_*^+ \times ]1/2, 1/2[\} \quad (5.1.5)$$

Dans le cas d'une cellule périodique symétrique on a vu que  $V_1^1$  était paire en  $\nu$  et impaire en  $s$  (voir Table 3.1), si bien que (on rappelle que  $V_1^1$  est périodique)

$$\partial_\nu V_1^1(0, s) = 0 \quad \text{et} \quad V_1^1(\nu, -1/2) = V_1^1(\nu, 1/2) = 0.$$

$V_1^1$  est donc solution du problème (bien posé) suivant :

$$\begin{cases} r_*^2 \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla V_1^1) = -r_* \frac{\partial(\epsilon^{-1})}{\partial s} \text{ dans } \mathcal{D}'(B_+^{1/2}), \\ V_1^1(\nu, -1/2) = V_1^1(\nu, 1/2) = 0, \\ \epsilon^{-1} \partial_\nu V_1^1(0, s) = 0. \end{cases} \quad (5.1.6)$$

De même,  $\mathcal{N}$  est impaire en  $\nu$  si bien que  $\mathcal{N}(0, s) = 0$ . Comme  $\mathcal{N}$  est également paire en  $s$ ,  $\mathcal{N}$  est donc aussi solution du problème bien posé suivant

$$\begin{cases} r_*^2 \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{N}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(B_+^{1/2}), \\ \epsilon^{-1} \partial_s \mathcal{N}(\nu, -1/2) = \epsilon^{-1} \partial_s \mathcal{N}(\nu, 1/2) = 0, \\ \mathcal{N}(0, s) = 0 \end{cases} \quad (5.1.7)$$

### 5.1.3.2 Réduction à un domaine borné : opérateur de Dirichlet-To-Neumann

Pour pouvoir calculer  $V_1^1$  et  $\mathcal{N}$  par une méthode classique d'éléments finis, il faut pouvoir travailler en domaine borné. Pour cela, nous allons tronquer le domaine à l'aide d'un opérateur de Dirichlet-To-Neumann : par une décomposition en série de Fourier de  $V_1^1$  et  $\mathcal{N}$  on peut montrer que pour tout  $\nu > \frac{1}{2}$  (i.e dans le domaine où  $\epsilon$  et  $\mu$  sont constants),

$$\frac{\partial V_1^1}{\partial \nu}(\nu, s) + T(V_1^1(\nu, s)) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu}(\nu, s) + T(\mathcal{N}(\nu, s)) = 1. \quad (5.1.8)$$

où  $T$ , l'opérateur de Dirichlet-To-Neumann est donné par

$$T : \begin{cases} H^{\frac{1}{2}}(\] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]), \\ U \mapsto T(U) := \sum_{l \in X_3} 2\pi |l| \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U(\nu, s) e^{-2i\pi l s} ds \right) e^{2i\pi l s}. \end{cases}$$

Un calcul classique montre de plus que l'opérateur  $T$  est positif :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [T(U)](s) \bar{U}(s) ds \geq 0,$$

Soient  $\nu_0 > 1/2$  et  $B_+^{1/2, \nu_0}$ , la demi cellule supérieure tronquée en  $\nu_0$  :

$$B_+^{1/2, \nu_0} := \{(\nu, s) \in ]0, \nu_0[ \times ] - 1/2, 1/2[ \}$$

Finalement, on va résoudre les problèmes suivants :

$$\begin{cases} r_*^2 \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla V_1^1) = -r_* \frac{\partial(\epsilon^{-1})}{\partial s} \text{ dans } \mathcal{D}'(B_+^{1/2, \nu_0}), \\ V_1^1(\nu, -1/2) = V_1^1(\nu, 1/2) = 0, \\ \epsilon^{-1} \partial_\nu V_1^1(0, s) = 0, \\ \frac{\partial V_1^1}{\partial \nu}(\nu_0, s) + T(V_1^1(\nu_0, s)) = 0. \end{cases} \quad (5.1.9)$$

et

$$\begin{cases} r_*^2 \operatorname{div} (\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{N}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(B_+^{1/2, \nu_0}), \\ \epsilon^{-1} \partial_s \mathcal{N}(\nu, -1/2) = \epsilon^{-1} \partial_s \mathcal{N}(\nu, 1/2) = 0, \\ \mathcal{N}(0, s) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu}(\nu_0, s) + T(\mathcal{N}(\nu_0, s)) = 1. \end{cases} \quad (5.1.10)$$

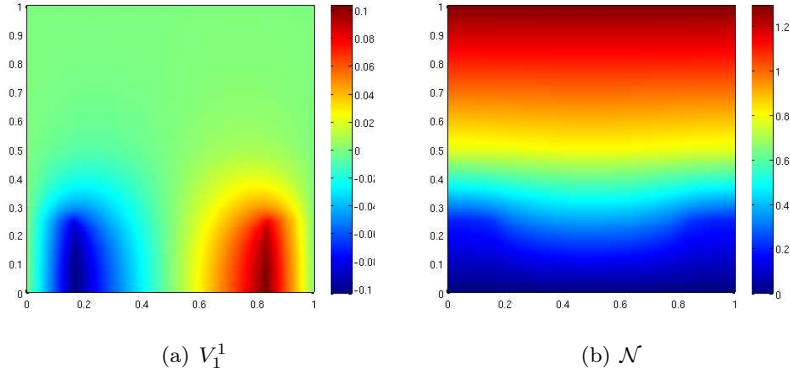
Bien sur, lors d'un calcul numérique, l'opérateur  $T$  doit être tronqué. On appelle  $T_L$  l'opérateur  $T$  tronqué à l'ordre  $L$  :

$$T_L : \begin{cases} H^{\frac{1}{2}}(\] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]), \\ U \mapsto T_L(U) := \sum_{l=-L}^L 2\pi |l| \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U(\nu, s) e^{-2i\pi l s} ds \right) e^{2i\pi l s}. \end{cases}$$

L'opérateur  $T_L$  est lui aussi positif.

Sur la figure 5.3 nous avons représenté les fonctions profils  $V_1^1$  et  $\mathcal{N}$  sur le domaine  $]0, 1[$  dans le cas où

$$\epsilon(\nu, s) = \begin{cases} \epsilon_\infty = 1, \\ \epsilon_1 = 0.5, \\ \epsilon_2 = 2, \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu(\nu, s) = \begin{cases} \mu_\infty = 1, \\ \mu_1 = 4, \\ \mu_2 = 2. \end{cases}$$

FIGURE 5.3 – Fonctions profils sur le domaine  $]0, 1[²$ 

## 5.2 Modèle d'ordre 1 décentré

### 5.2.1 Une condition inf-sup discrète

Tout d'abord il est intéressant de montrer un résultat de stabilité uniforme en  $\delta$  pour le problème discret associé au problème (4.1.19). Soit  $(\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h)$ , ( $h > 0$ ) un sous espace de  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}$  (défini par (4.1.20)) de dimension finie tel que :

**-H1**  $\forall v \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}$  il existe une suite de fonctions  $(v_h)_{h>0}$  appartenant à  $(\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h)$  satisfaisant

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \|v - v_h\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+)} + \|v - v_h\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-)} + \|v - v_h\|_{H^1(]0, 2\pi])} \right) = 0.$$

**-H2**  $\forall v \in H^1(\Omega)$  il existe une suite de fonctions  $(v_h)_{h>0}$  appartenant à  $(\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h) \cap H^1(\Omega)$  telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \|v - v_h\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+)} + \|v - v_h\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-)} + \|v - v_h\|_{H^1(]0, 2\pi])} \right) = 0.$$

**-H3** La fonction  $F^\delta$  (définie par (4.1.12)) est une bijection de  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h$  dans  $\mathbf{V}_0^h$ .

On veut résoudre le problème approché discret suivant : trouver  $u_h^\delta$  appartenant  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h$  telle que

$$\forall v_h \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^h, \quad \mathbf{a}^\delta(u_h^\delta, v_h) = \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} f v_h \, dx, \quad (5.2.1)$$

où  $\mathbf{a}^\delta$  est définie par (4.1.22).

Sous les trois hypothèses précédentes, il est alors possible de prouver la condition inf-sup discrète suivante :

**Proposition 5.2.1.** *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), il existe  $\delta_0 > 0$ ,  $h_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  telles que*

$$\forall \delta < \delta_0, \forall h < h_0, \quad \inf_{u_h \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^h} \sup_{v_h \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^h} \frac{|\mathbf{a}^\delta(u_h, v_h)|}{\|u_h\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}} \|v_h\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}}} \geq C. \quad (5.2.2)$$

La preuve est une conséquence directe de la stabilité du problème non discrétisé (proposition 4.1.2).

En utilisant la proposition précédente, on obtient aisément un résultat d'approximation uniforme en  $\delta$  :

**Proposition 5.2.2.** *si  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h$  est un sous espace de  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}$  de dimension finie satisfaisant (H1), (H2) et (H3), alors il existe  $\delta_0 > 0$  et  $h_0 > 0$  ainsi qu'une constante  $C > 1$  telles que*

$$\forall \delta < \delta_0, \forall h < h_0 \quad \|u_1^\delta - u_h^\delta\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h} \leq C \inf_{v_h \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^h} \|u_1^\delta - v_h\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h}, \quad (5.2.3)$$

où  $u_1^\delta$  est la solution du problème approché continu (4.1.19) et  $u_h^\delta$  est la solution du problème discret (5.2.1).

*Démonstration.* Par l'inégalité triangulaire,

$$\|u - u_h^\delta\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h} \leq \|u - v_h\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h} + \|u_h^\delta - v_h\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h} \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^h. \quad (5.2.4)$$

De plus, comme  $\mathbf{a}^\delta(u - u_h^\delta, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^h$ ,

$$\mathbf{a}^\delta(v_h - u_h^\delta, w_h) = \mathbf{a}^\delta(v_h - u, w_h) \quad \forall w_h \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^h, \forall v_h \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^h.$$

En choisissant  $w_h = v_h - u_h^\delta$  et en combinant la continuité (uniforme en  $\delta$ ) de  $\mathbf{a}^\delta$  pour la norme  $\mathbf{V}_{\alpha\delta}$  et la condition inf-sup discrète (5.2.2) on obtient

$$\|v_h - u_h^\delta\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}^h} \leq C \|v_h - u\|_{\mathbf{V}_{\alpha\delta}} \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_{\alpha\delta}^h. \quad (5.2.5)$$

En combinant (5.2.4) et (5.2.5) on obtient le résultat attendu.  $\square$

### 5.2.2 Résultats qualitatifs

Comme nous l'avons déjà mentionné nous présentons les résultats de notre modèle dans le cas où  $\epsilon_\infty = \mu_\infty = 1$ ,  $\epsilon_1 = 0.5$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ,  $\mu_1 = 4$ ,  $\mu_2 = 2$  (cf. figure 5.2). Dans un premier temps, nous choisissons  $\alpha = 1/2$ , cas pour lequel nous avons vérifié que les constantes  $A_0^\alpha > 0$ ,  $B_0^\alpha > 0$  et  $B_2^\alpha > 0$  sont strictement positives.

D'un point de vue qualitatif les résultats sont encourageants : en champ lointain comme en champ proche, les solutions approchée et "exacte" (nous appelons solution "exacte" une solution de référence calculée avec un maillage très raffiné) sont très proches.

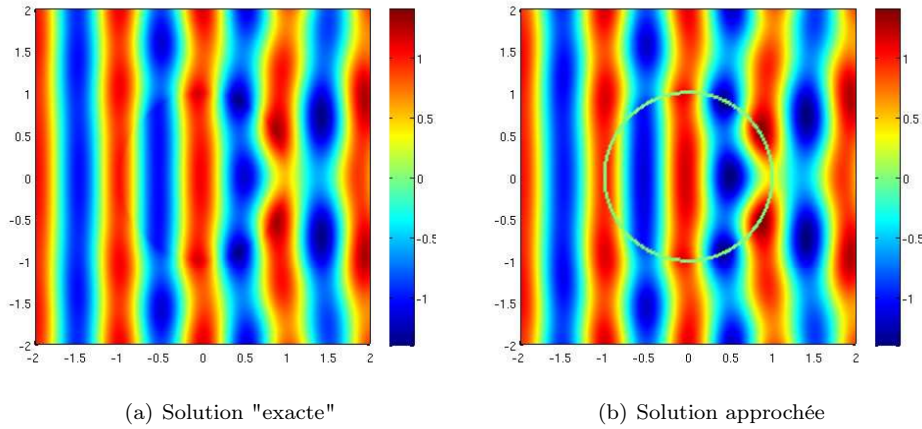
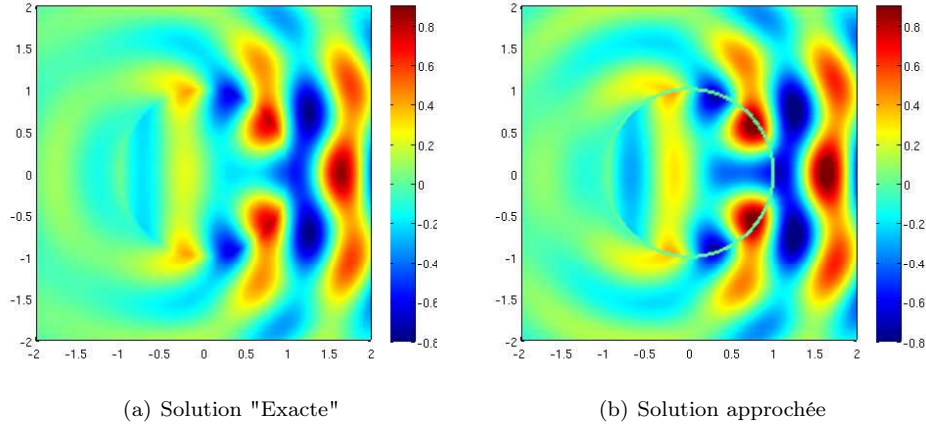


FIGURE 5.4 – Solution "exacte" et la solution approchée pour  $N = 160$  (champ total)

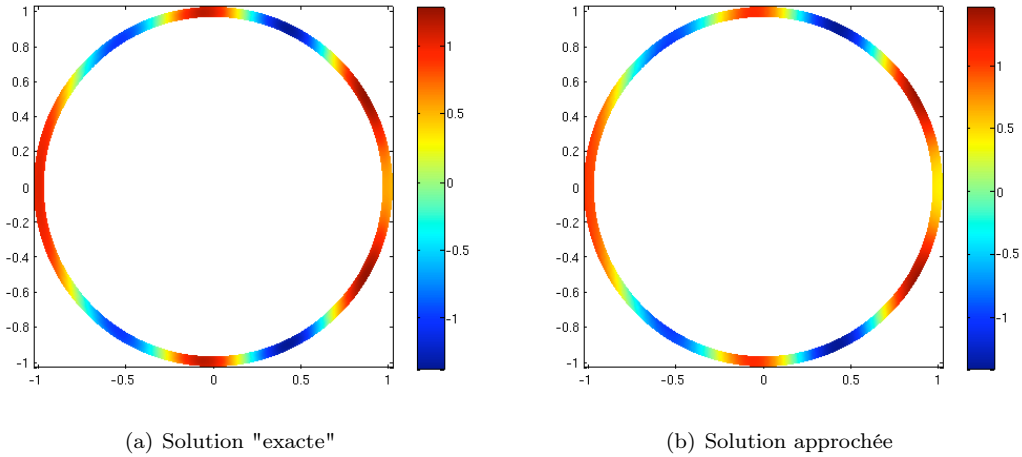
Sur la figure 5.4, nous avons représenté les parties réelles des solutions "exacte" et approchée en champ total dans le cas d'un anneau contenant 160 cellules périodiques ( $\delta \approx 0.04$ ). On remarque que la solution approchée est calculée sur le domaine  $\Omega_{\alpha\delta}$  et non sur le domaine  $\Omega$  tout entier. Nous obtenons une erreur relative  $H^1(\Omega)$  de 8%. Nous pouvons aussi comparer les champs diffractés (figure 5.5).

FIGURE 5.5 – Solution "exacte" et la solution approchée pour  $N = 160$  (champ diffracté)

Nous pouvons aussi reconstruire le champ proche à l'aide de la formule (cf. figure 5.6)

$$(U_0)^\delta + \delta(U_1)^\delta \approx \langle u^\delta \rangle_\alpha + \delta \langle \partial_r u^\delta \rangle_\alpha (\mathcal{N})^\delta + \langle \partial_\theta u^\delta \rangle_\alpha (V_1^1)^\delta.$$

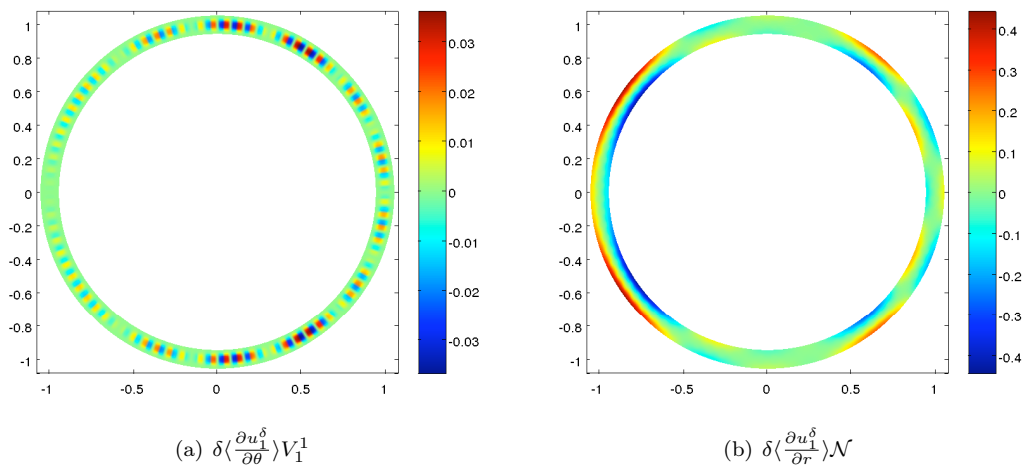
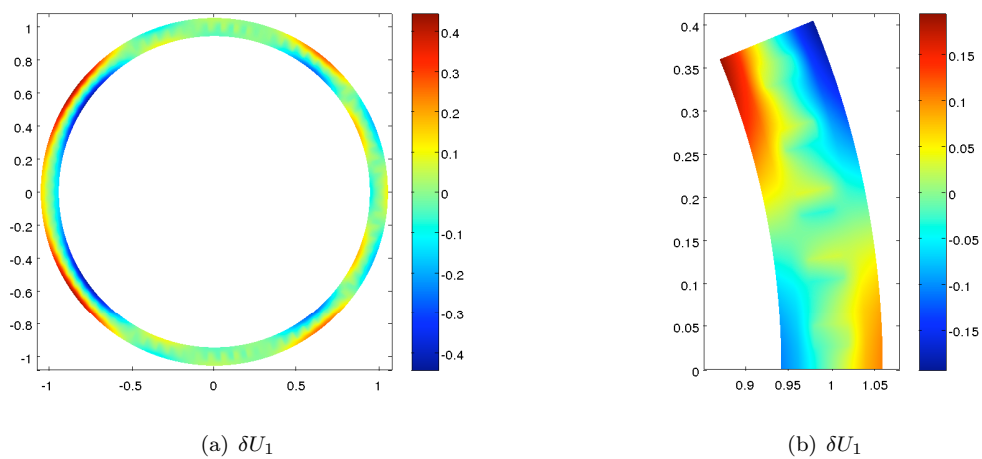
Comme on pouvait s'y attendre le champ proche d'ordre  $n$  oscille par clairement puisque  $U_0 = \langle u_0 \rangle$  ne dépend pas de  $s$ .

FIGURE 5.6 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $N=160$  en champ proche

Cependant, pour voir les oscillations, on peut tracer  $\delta(U_1 - \langle u_1 \rangle_\Gamma)$  puisque

$$\delta(U_1 - \langle u_1 \rangle_\Gamma) \approx \delta \left( \left\langle \frac{\partial u_1^\delta}{\partial \theta} \right\rangle V_1^1 + \left\langle \frac{\partial u_1^\delta}{\partial r} \right\rangle W_0^0 \right).$$

Sur la figure 5.2.2, on a représenté les parties réelles de  $\delta \langle \frac{\partial u_1^\delta}{\partial \theta} \rangle V_1^1$  et de  $\delta \langle \frac{\partial u_1^\delta}{\partial r} \rangle W_0^0$ . On peut ensuite additionner ces deux fonctions pour obtenir une approximation de  $\delta U_1$  (Figure 5.8). On voit alors bien les oscillations.

FIGURE 5.7 – Reconstruction du champ proche  $\delta(U_1 - \langle u_1 \rangle_\Gamma)$ FIGURE 5.8 –  $\delta(U_1 - \langle u_1 \rangle_\Gamma)$



### 5.2.3 Taux de convergence

Posons,

$$\Omega_T := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0.75 \text{ ou } 1,25 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3 \right\}$$

On appelle  $u_h^\delta$ , la solution du modèle approché discrétisé (5.2.1). On rappelle que

$$\|u^\delta - u_h^\delta\|_{H^1(\Omega_T)} \leq \|u^\delta - u_1^\delta\|_{H^1(\Omega_T)} + \|u_1^\delta - u_h^\delta\|_{H^1(\Omega_T)}.$$

où  $u_1^\delta$  est la solution du problème approché continu (4.1.19). L'erreur est décomposée en deux parties :

- L'erreur de modèle  $\|u^\delta - u_1^\delta\|_{H^1(\Omega_T)}$  qui domine quand  $h \ll \delta$ . Cette erreur doit être proportionnelle à  $\delta^2$ .
- L'erreur d'approximation  $\|u_1^\delta - u_h^\delta\|_{H^1(\Omega_T)}$  qui domine quand  $h \gg \delta$ .

En utilisant un maillage très raffiné, on peut estimer l'erreur de modèle. Sur la figure 5.9, on a tracé le logarithme des erreurs relatives  $L^2(\Omega_T)$  et  $H^1(\Omega_T)$  en fonction du logarithme du paramètre  $\delta$ ,  $\delta$  variant entre 0.078 ( $N = 80$ ) et 0.008 ( $N = 720$ ). Nous étudions l'erreur sur le domaine tronqué  $\Omega_T$  et non sur tout le domaine de calcul car  $u_1^\delta$  n'approche que les deux premiers termes du développement asymptotique en champ lointain ( $u_1^\delta$  n'a aucune raison d'être proche des premiers termes du développement en champ proche près de l'anneau périodique). On obtient une droite de pente 2.02 ce qui confirme le fait que notre modèle est d'ordre 1 (on attendait un taux de convergence de 2).

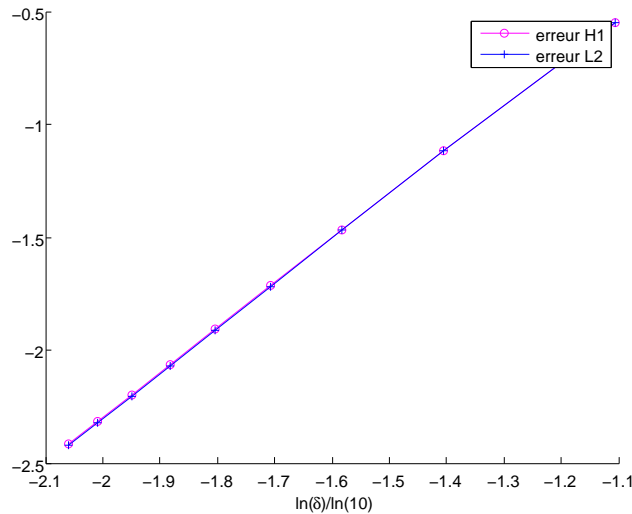


FIGURE 5.9 – erreurs relatives  $L^2(\Omega_T)$  et  $H^1(\Omega_T)$  en fonction de  $\delta$  (échelle logarithmique)

Inversement, on peut étudier l'erreur d'approximation en utilisant un maillage grossier. Supposons que nous utilisons des éléments finis  $Q_k$ . Nous savons qu'il existe une constante  $C > 0$  (qui dépend de  $k$ ) telle que

$$\|u_1^\delta - u_h^\delta\|_{H^1(\Omega_T)} \leq Ch^k.$$

Nous voulons savoir si la constante  $C$  dépend de  $\delta$  et en particulier si elle reste bornée quand  $\delta$  devient petit. Pour cela, nous étudions, pour différentes valeurs de  $\delta$ , l'évolution de l'erreur relative  $L_2(\Omega_T)$  entre la solution "exacte" du problème approché (calculée en utilisant un maillage très fin) et la solution  $u_h^\delta$  du modèle approché discrétisé (5.2.1) en fonction de longueur caractéristique  $h$  (cf. figure 5.10). On obtient des courbes quasiment indépendantes de  $\delta$  ce qui signifie que la constante d'erreur ne se détériore a priori pas quand  $\delta$  devient petit.

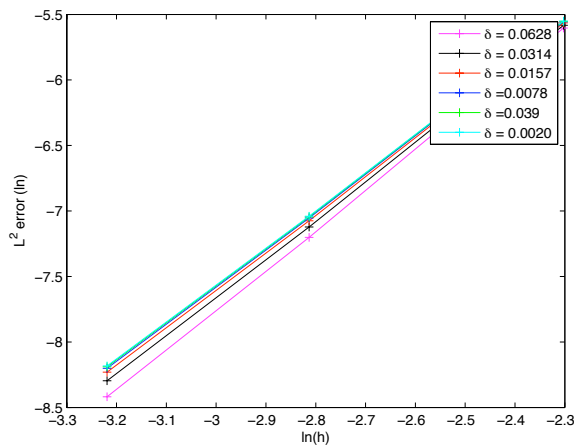


FIGURE 5.10 – erreur relative  $L^2$  en fonction de  $h$  pour différentes valeurs de  $\delta$  (échelle logarithmique)

Ceci nous laisse penser qu'il n'y a pas de phénomène de verrouillage numérique si bien que notre modèle restera précis même sur des maillages grossiers.

#### 5.2.4 Impact du paramètre $\alpha$

Il est intéressant de regarder l'erreur du modèle pour différentes valeurs de  $\alpha$ , c'est à dire quand on utilise un décalage géométrique plus ou moins grand.

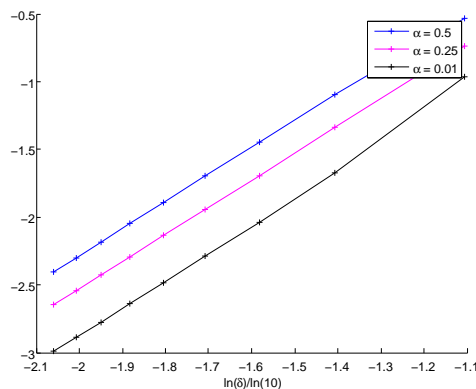


FIGURE 5.11 – Erreur relative en norme  $L^2$  en fonction de  $\delta$  pour  $\alpha = 0.5$ (bleu),  $\alpha = 0.25$ (rose) et  $\alpha = 0.01$ (noir)

Tout d'abord, on n'observe pas d'instabilités même quand les constantes  $A_0^\alpha$  et  $B_2^\alpha$  ne sont pas positives (c'est à dire dans le cas, où l'on ne sait pas montrer la stabilité du modèle). En fait, on peut penser que les instabilités se verront davantage en régime temporel. Par ailleurs, comme on pouvait s'y attendre, plus  $\alpha$  est proche de 0, plus le modèle est précis, l'ordre du schéma restant le même. En résumé, l'introduction du paramètre  $\alpha$  permet de gagner en stabilité (au moins théoriquement) mais rend le modèle moins précis.

### 5.3 Modèles d'ordre 2

On peut maintenant étudier le modèle centré (4.1.6) et le modèle décentré d'ordre 2 (5.1.2). Nous obtenons aussi des bons résultats, comme on peut le voir sur les figures 5.12 et 5.13.

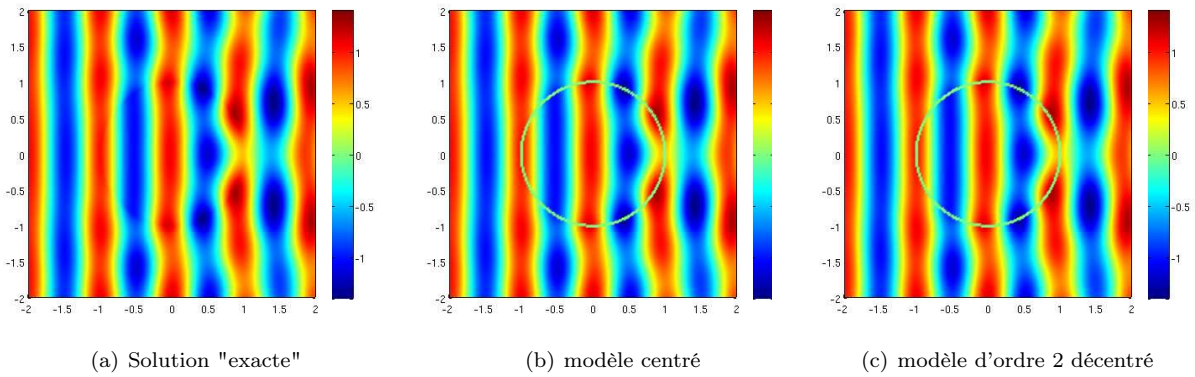


FIGURE 5.12 – Solution "exacte" et solutions approchées obtenues avec les modèles d'ordre 2 centré et décentré pour  $N = 160$  (champ total)

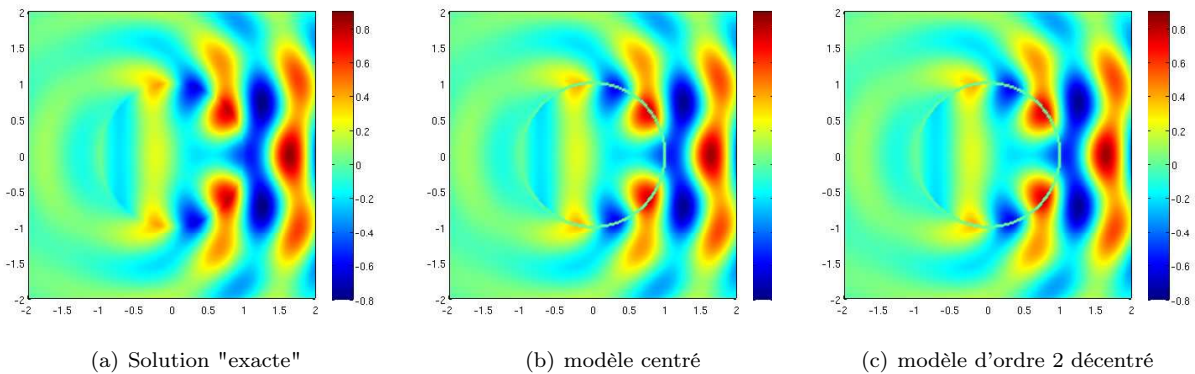


FIGURE 5.13 – Solution "exacte" et solutions approchées obtenues avec les modèles d'ordre 2 centré et décentré pour  $N = 160$  (champ diffracté)

Tout comme pour le problème d'ordre 1 on vérifie que ces deux modèles sont d'ordre 2 en étudiant l'évolution du logarithme de l'erreur relative  $L^2(\Omega_T)$  en fonction du logarithme de  $\delta$ . On vérifie que l'on obtient des droites de pente 3 (3.05 pour le modèle décentré et 2.9 pour le modèle centré). Cette remarque reste valable pour  $\alpha = 0.25$  et  $\alpha = 0.01$ . Tout comme pour le modèle d'ordre 1, nous n'observons pas d'instabilités quand  $\alpha$  est petit et que les constantes  $A_0^\alpha$  et  $B_0^\alpha$  n'ont pas le bon signe. Par ailleurs, l'erreur diminue quand  $\alpha$  diminue. On peut enfin remarquer que dans le cas du modèle centré pour  $\alpha = 0.01$  (courbe noire de la figure 5.14(a)), la pente de la droite diminue quand  $\delta$  devient petit. C'est tout simplement parce qu'on a atteint la précision numérique du calcul de la solution exacte ( $10^{-5}$ ). Enfin, au vu de la figure 5.15, il semble que le modèle centré soit toujours plus précis.

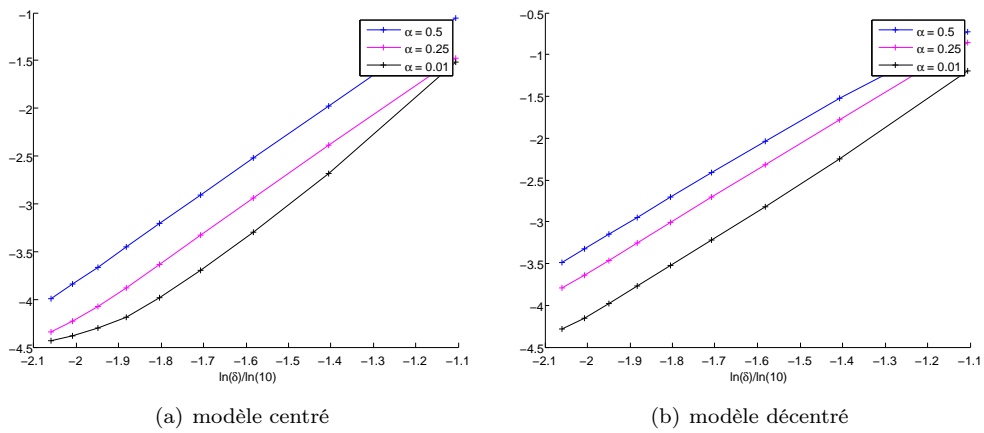


FIGURE 5.14 – Evolution de l'erreur relative  $L^2(\Omega)$  en fonction de  $\delta$  pour  $N$  compris entre 80 et 720

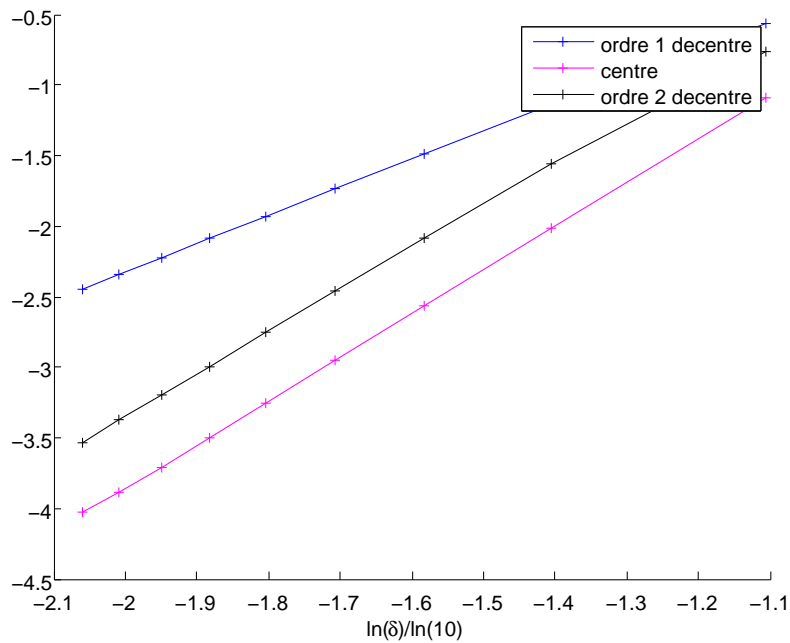


FIGURE 5.15 – Erreur relative en norme  $L^2(\Omega_T)$  en fonction de  $\delta$  pour le modèle décentré d'ordre 1 (bleu), le modèle centré (rose) et le modèle décentré d'ordre 2 (noir) ( $\alpha = 1/2$ ,  $N$  compris entre 80 et 720)



Deuxième partie

Etude d'un cas tridimensionnel



# Un problème tridimensionnel simplifié

---

## Sommaire

---

6.1	Description du problème . . . . .	98
6.2	Analyse mathématique du problème modèle . . . . .	99
6.3	Démarche et objectifs . . . . .	103

---



## 6.1 Description du problème

Nous nous intéressons à la résolution des équations de Maxwell harmoniques dans une boîte  $\Omega$

$$\Omega := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -\frac{L_1}{2} < x_1 < \frac{L_1}{2}, -\frac{L_2}{2} < x_2 < \frac{L_2}{2}, -\frac{L_3}{2} < x_3 < \frac{L_3}{2} \right\}, \quad (6.1.1)$$

de faces  $\Sigma_{x_1}^\pm$ ,  $\Sigma_{x_2}^\pm$  et  $\Sigma_{x_3}^\pm$  :

$$\begin{aligned} \Sigma_{x_1}^\pm &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \pm x_1 = \frac{L_1}{2}, -\frac{L_2}{2} < x_2 < \frac{L_2}{2}, -\frac{L_3}{2} < x_3 < \frac{L_3}{2} \right\}, \\ \Sigma_{x_2}^\pm &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \pm x_2 = \frac{L_2}{2}, -\frac{L_1}{2} < x_1 < \frac{L_1}{2}, -\frac{L_3}{2} < x_3 < \frac{L_3}{2} \right\}, \\ \Sigma_{x_3}^\pm &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \pm x_3 = \frac{L_3}{2}, -\frac{L_1}{2} < x_1 < \frac{L_1}{2}, -\frac{L_2}{2} < x_2 < \frac{L_2}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

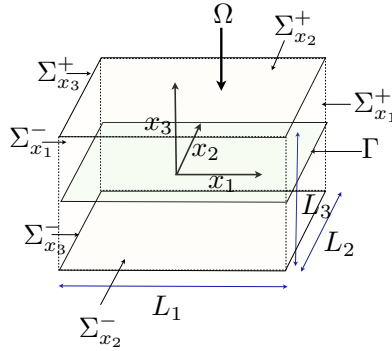


FIGURE 6.1 – Domaine  $\Omega$

Le champ électrique  $\mathbf{E}^\delta$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}^\delta$  satisfont les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta - i\omega\mu^\delta \mathbf{H}^\delta = 0, & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ -\operatorname{curl} \mathbf{H}^\delta - i\omega\epsilon^\delta \mathbf{E}^\delta = -\frac{1}{i\omega} f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \quad (6.1.3)$$

Les indices du milieu  $\mu^\delta$  et  $\epsilon^\delta$  sont deux fonctions périodiques satisfaisant

$$\mu^\delta(x_1, x_2, x_3) = \mu\left(\frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{\delta}\right), \quad \epsilon^\delta(x_1, x_2, x_3) = \epsilon\left(\frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{\delta}\right), \quad (6.1.4)$$

où les fonctions  $\mu$  et  $\epsilon$  vérifient

$$\begin{cases} \mu(X_1 + 1, X_2, X_3) = \mu(X_1, X_2, X_3), \\ \mu(X_1, X_2 + \tau, X_3) = \mu(X_1, X_2, X_3), \\ \mu(X_1, X_2, X_3) = 1 \text{ si } |X_3| > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon(X_1 + 1, X_2, X_3) = \epsilon(X_1, X_2, X_3), \\ \epsilon(X_1, X_2 + \tau, X_3) = \epsilon(X_1, X_2, X_3), \\ \epsilon(X_1, X_2, X_3) = 1 \text{ si } |X_3| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (6.1.5)$$

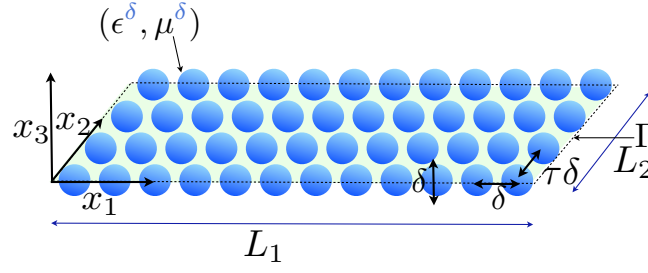
Le domaine  $\Omega$  est donc constitué d'une bande périodique  $\Omega_B^\delta$  et de deux domaines homogènes  $\Omega_\pm^\delta$  :

$$\Omega_B^\delta := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -\frac{L_1}{2} < x_1 < \frac{L_1}{2}, -\frac{L_2}{2} < x_2 < \frac{L_2}{2}, -\frac{\delta}{2} < x_3 < \frac{\delta}{2} \right\}, \quad (6.1.6)$$

$$\Omega_\pm^\delta := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -\frac{L_1}{2} < x_1 < \frac{L_1}{2}, -\frac{L_2}{2} < x_2 < \frac{L_2}{2}, \pm x_3 > \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (6.1.7)$$

Nous supposons également qu'il existe quatre réels strictement positifs  $\mu^\pm$  et  $\rho^\pm$  tels que

$$0 < \epsilon^- < \epsilon < \epsilon^+, \quad \text{et} \quad 0 < \mu^- < \mu < \mu^+,$$

FIGURE 6.2 – Domaine  $\Omega$ 

si bien que  $\mu^\delta$  et  $\epsilon^\delta$  sont uniformément bornées supérieurement et inférieurement.

Par ailleurs, nous supposons que le terme source  $f$  appartient à  $L^2(\Omega)$  et que le support de  $f$  n'intersecte pas la bande périodique  $\Omega_B^\delta$ .

Enfin, nous imposons les conditions limites périodiques sur les bords latéraux  $\Sigma_{x_1}^\pm$  et  $\Sigma_{x_2}^\pm$  (le choix de ces conditions est expliqué dans la remarque 6.1.1),

$$\begin{cases} \mathbf{H}^\delta \times e_{1|\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{H}^\delta \times e_{1|\Sigma_{x_1}^+}, & \mathbf{H}^\delta \times e_{2|\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{H}^\delta \times e_{2|\Sigma_{x_2}^+} \\ \mathbf{E}^\delta \times e_{1|\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{E}^\delta \times e_{1|\Sigma_{x_1}^+}, & \mathbf{E}^\delta \times e_{2|\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{E}^\delta \times e_{2|\Sigma_{x_2}^+} \end{cases} \quad (6.1.8)$$

ainsi qu'une condition d'impédance sur les bords inférieur et supérieur  $\Sigma_{x_3}^\pm$  :

$$\mathbf{H}^\delta \times n - \mathbf{E}_T^\delta = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{x_3}^\pm. \quad (6.1.9)$$

où  $n$  est la normale sortante et  $(\mathbf{E}^\delta)_T$  désigne la composante tangentielle de  $\mathbf{E}^\delta$  (Pour toute surface  $\Sigma$  régulière de normale sortante  $n$ ,  $\varphi_T := (n \times \varphi) \times n$ ).

Bien sur, les conditions périodiques ne sont raisonnables que si  $L_2$  est un multiple de  $\tau L_1$ .

**Remarque 6.1.1.** *Le choix des conditions limites périodiques (6.1.8) n'est pas anodin. En effet, ces conditions limites permettent de construire un développement asymptotique relativement simple qui ne nécessite pas d'introduire des correcteurs sur la frontière du domaine : il n'y a pas de phénomène de couche limite au niveau des bords  $\Sigma_{x_1}^\pm$  et  $\Sigma_{x_2}^\pm$ . Une autre solution pour éviter ce problème de couche limite serait de travailler dans un domaine infini en  $x_1$  et  $x_2$  mais cela compliquerait largement l'analyse. Dans l'annexe B, nous avons étudié un problème modèle simplifié dans lequel apparaît ce phénomène de couche limite.*

*Par ailleurs, nous avons décidé d'étudier la diffraction par une couche périodique plane plutôt que par la structure initiale cylindrique parce que cela rend les calculs moins techniques et l'analyse plus aisée. Nous montrons quand même des résultats numériques dans le chapitre 10.*

## 6.2 Analyse mathématique du problème modèle

Pour analyser le problème précédent, il est plus pratique d'éliminer une des inconnues, par exemple l'inconnue  $\mathbf{H}^\delta$ . Le champ  $\mathbf{E}^\delta$  satisfait alors

$$\text{curl} \frac{1}{\mu^\delta} \text{curl} \mathbf{E}^\delta - \omega^2 \epsilon^\delta \mathbf{E}^\delta = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad (6.2.1)$$

des conditions limites périodiques sur les bords latéraux

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu^\delta} \text{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_{1|\Sigma_{x_1}^+} = \frac{1}{\mu^\delta} \text{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_{1|\Sigma_{x_1}^-}, & \mathbf{E}^\delta \times e_{1|\Sigma_{x_1}^+} = \mathbf{E}^\delta \times e_{1|\Sigma_{x_1}^-}, \\ \frac{1}{\mu^\delta} \text{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_{2|\Sigma_{x_2}^+} = \frac{1}{\mu^\delta} \text{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_{2|\Sigma_{x_2}^-}, & \mathbf{E}^\delta \times e_{2|\Sigma_{x_2}^+} = \mathbf{E}^\delta \times e_{2|\Sigma_{x_2}^-}, \end{cases} \quad (6.2.2)$$

et une condition d'impédance sur les bords inférieur et supérieur

$$\operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta \times n - i\omega(\mathbf{E}^\delta)_T = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{x_3}^\pm. \quad (6.2.3)$$

On retrouve facilement le champ magnétique à partir de la formule  $\mathbf{H}^\delta := \frac{1}{i\omega\mu^\delta} \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta$ .

Nous cherchons  $\mathbf{E}^\delta$  dans l'espace

$$V := \left\{ \varphi \in H(\operatorname{curl}, \Omega), (\varphi_T \times e_1)_{|\Sigma_{x_1}^+} = (\varphi_T \times e_1)_{|\Sigma_{x_1}^-}, \right. \\ \left. (\varphi_T \times e_2)_{|\Sigma_{x_2}^+} = (\varphi_T \times e_2)_{|\Sigma_{x_2}^-}, \varphi_T \in L^2(\Sigma_{x_3}^\pm) \right\}. \quad (6.2.4)$$

Nous munissons  $V$  de la norme  $V_{\epsilon^\delta}$  :

$$\|\varphi\|_{V_{\epsilon^\delta}}^2 := \int_{\Omega} |\operatorname{curl} \varphi|^2 + \epsilon^\delta \varphi \cdot \overline{\varphi} + \int_{\Sigma_{x_3}^\pm} |\varphi_T|^2. \quad (6.2.5)$$

Comme  $\epsilon^\delta$  est bornée, on remarque que la norme  $V_{\epsilon^\delta}$  est équivalente à la norme  $V_1$  ( $\epsilon^\delta = 1$ ).

Le problème (6.2.1)-(6.2.2)-(6.2.3) est équivalent au problème variationnel suivant : chercher  $\mathbf{E}^\delta \in V$  telle que

$$\forall \varphi \in V, \quad a^\delta(\mathbf{E}^\delta, \varphi) = \int_{\Omega} f \overline{\varphi}, \quad (6.2.6)$$

où

$$a^\delta(\psi, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu^\delta} \operatorname{curl} \psi \cdot \overline{\operatorname{curl} \varphi} - \omega^2 \epsilon^\delta \psi \cdot \overline{\varphi} - i\omega \int_{\Sigma_{x_3}^\pm} \psi_T \cdot \overline{\varphi_T}. \quad (6.2.7)$$

On peut montrer que ce problème est bien posé :

**Proposition 6.2.1.** *Le problème (6.2.6) est bien posé. De plus, il existe un réel  $\delta_0 > 0$  et une constante  $C$  strictement positive, telle que pour tout  $\delta < \delta_0$  et pour toute fonction  $\psi \in V$ ,*

$$\|\psi\|_{V_{\epsilon^\delta}} \leq C \sup_{\varphi \in V} \frac{a^\delta(\psi, \varphi)}{\|\varphi\|_{V_{\epsilon^\delta}}} \quad (6.2.8)$$

La démonstration d'existence et d'unicité à  $\delta$  fixé est classique (cf. théorèmes 4.7 et 4.12 de [Mon03]). Nous nous contentons de donner les éléments principaux permettant de prouver le résultat de stabilité indépendant de  $\delta$  (6.2.8). Commençons par écrire une décomposition de Helmholtz de  $V$  : on définit pour cela l'espace  $S$

$$S := \left\{ p \in H^1(\Omega), p = c \text{ sur } \Sigma_{x_3}^+, p = 0 \text{ sur } \Sigma_{x_3}^- \right. \\ \left. \nabla p \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^+} = \nabla p \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^-}, \quad \nabla p \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^+} = \nabla p \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^-} \right\}. \quad (6.2.9)$$

Comme  $\nabla S$  est un sous espace fermé de  $V$ , alors,

$$V = \nabla S \oplus V_0^{\epsilon^\delta}, \quad (6.2.10)$$

où

$$V_0^{\epsilon^\delta} := \nabla S^\perp = \left\{ u \in V, \int_{\Omega} \epsilon^\delta u \cdot \overline{\nabla p} = 0, \quad \forall p \in S \right\}, \quad (6.2.11) \\ = \left\{ u \in V, \operatorname{div}(\epsilon^\delta u) = 0 \text{ dans } \Omega, \epsilon^\delta u \cdot e_1|_{\Sigma_{x_1}^+} = \epsilon^\delta u \cdot e_1|_{\Sigma_{x_1}^-}, \epsilon^\delta u \cdot e_2|_{\Sigma_{x_2}^+} = \epsilon^\delta u \cdot e_2|_{\Sigma_{x_2}^-} \right\}.$$

La démonstration de stabilité repose alors essentiellement sur le résultat de compacité suivant :

**Proposition 6.2.2.** Soit  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui tend vers 0 et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de fonctions de  $V_0^{\delta_n}$ . Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous suite convergeant fortement dans  $L^2(\Omega)$ .

Le résultat précédent est bien connu quand  $\epsilon$  et  $\mu$  ne dépendent pas de  $\delta$ . La difficulté vient du fait que  $\epsilon^\delta$  et  $\mu^\delta$  dépendent de  $\delta$  (voir [CDP10] pour des difficultés du même type).

*Démonstration.* La preuve de cette proposition est une adaptation de la preuve du théorème 4.7 de [Mon03]. Elle repose sur deux arguments clés :

- $V_0^1(\Omega)$  s'injecte de façon compacte dans  $L^2(\Omega)$  (Théorème 3.47 de [Mon03]).
- La suite  $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\epsilon^{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément bornée supérieurement et inférieurement et tend vers  $\epsilon_0 = 1$  presque partout dans  $\Omega$ .

En utilisant la décomposition de Helmholtz (6.2.10) avec  $\epsilon^{\delta_n} = 1$ , il existe  $p_n \in S$  et  $w_n \in V_0^1(\Omega)$  telles que

$$u_n = w_n + \nabla p_n.$$

Comme  $\|\nabla p_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} w_n \cdot \nabla p_n$  alors

$$\|\nabla p_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

De plus,

$$\|w_n\|_{V_1(\Omega)} \leq \|u_n\|_{V_1(\Omega)} + \|\nabla p_n\|_{V_1(\Omega)} \leq C.$$

Puisque  $V_0^1(\Omega)$  s'injecte de façon compacte dans  $L^2(\Omega)$ ,  $w_n$  admet une sous suite (encore notée  $(w_n)$ ) qui converge presque partout et fortement dans  $L^2(\Omega)$  vers  $w$ . Nous allons montrer que  $\|\epsilon_n u_n - w\|_{L^2(\Omega)}$  tend vers 0. Remarquons d'abord que

$$(0 \leq) \int_{\Omega} \left(u_n - \frac{w}{\epsilon_n}\right) \cdot \overline{(\epsilon_n u_n - w)} = \int_{\Omega} \left(u_n - \frac{w}{\epsilon_n}\right) \cdot \overline{(\epsilon_n (w_n + \nabla p_n) - w)},$$

Mais comme  $\int_{\Omega} \left(u_n - \frac{w}{\epsilon_n}\right) \cdot \epsilon_n \nabla p_n = 0$ , alors

$$\int_{\Omega} \left(u_n - \frac{w}{\epsilon_n}\right) \cdot \overline{(\epsilon_n u_n - w)} = \int_{\Omega} \left(u_n - \frac{w}{\epsilon_n}\right) \cdot \overline{(\epsilon_n w_n - w)}.$$

Or  $u_n - \frac{w}{\epsilon_n}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ . De plus, comme  $\epsilon_n$  tend vers 1 presque partout,  $\epsilon_n w_n$  tend vers  $w$  presque partout. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\epsilon_n w_n - w\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left(u_n - \frac{w}{\epsilon_n}\right) \cdot \overline{(\epsilon_n u_n - w)} = 0.$$

Enfin, puisque  $\frac{1}{\epsilon_n} \|\epsilon_n u_n - w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \left(u_n - \frac{w}{\epsilon_n}\right) \cdot \overline{(\epsilon_n u_n - w)}$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\epsilon_n u_n - w\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Pour conclure il suffit alors d'utiliser l'inégalité triangulaire,

$$\|u_n - w\|_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{\|1/\epsilon_n\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\leq C} \left( \underbrace{\|(\epsilon_n - 1)w\|_{L^2(\Omega)}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|\epsilon_n u_n - w\|_{L^2(\Omega)}}_{\rightarrow 0} \right).$$

□

On peut alors montrer de façon classique par l'absurde le résultat de stabilité 6.2.6 :

*Démonstration.* (Proposition 6.2.1) La démonstration fait intervenir le résultat de compacité de la proposition 6.2.2 et le fait que le problème limite (avec  $\epsilon^\delta = 1$  et  $\mu^\delta = 1$ ) est bien posé.

Supposons qu'il existe une suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0 et une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\begin{cases} \|u_n\|_{V_{\epsilon_n}} = 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{v \in V_{\epsilon_n} \setminus \{0\}} \frac{|a^{\delta_n}(u_n, v)|}{\|v\|_{V_{\epsilon_n}}} = 0, \end{cases} \quad (6.2.12)$$

où  $\epsilon_n := \epsilon^{\delta_n}$ . En utilisant la décomposition de Helmholtz (6.2.10), il existe deux suites  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_0^{\delta_n}$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$  telles que

$$u_n = w_n + \nabla p_n.$$

Comme  $\int_{\Omega} \nabla p_n \cdot \epsilon_n \overline{\nabla p_n} = \int_{\Omega} u_n \cdot \epsilon_n \overline{\nabla p_n}$  alors,

$$\|p_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \quad \text{et} \quad \|w_n\|_{V_{\epsilon_n}} \leq C.$$

Si nous choisissons  $v = \nabla p_n$ , nous avons,

$$a^\delta(u_n, \nabla p_n) = -\omega^2 \int_{\Omega} \epsilon_n (\nabla p_n) \cdot \overline{\nabla p_n}, \quad (6.2.13)$$

si bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|p_n\|_{H^1(\Omega)} = 0. \quad (6.2.14)$$

Par ailleurs, comme  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $V_0^{\epsilon_n}$  alors en utilisant la proposition 6.2.2,  $w_n$  admet une sous suite (encore notée  $w_n$ ) fortement convergente dans  $L^2(\Omega)$ . Nous appelons  $w$  sa limite. Nous allons montrer que  $w = 0$ . Remarquons d'abord que, comme  $\text{curl } w_n$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$  et  $(w_n)_T$  est bornée dans  $L^2(\Sigma_{x_3}^\pm)$

$$\begin{cases} \text{curl } u_n = \text{curl } w_n \rightharpoonup \text{curl } w \text{ dans } L^2(\Omega), \\ (u_n)_T|_{\Sigma_{x_3}^\pm} = (w_n)_T|_{\Sigma_{x_3}^\pm} \rightharpoonup (w_T)|_{\Sigma_{x_3}^\pm} \text{ dans } L^2(\Sigma_{x_3}^\pm). \end{cases}$$

Par ailleurs, comme  $\mu_n$  tend presque partout vers 1, pour tout  $v \in V$ ,  $v_n := \frac{1}{\mu_n} \text{curl } v$  tend fortement vers  $\text{curl } v$  dans  $L^2(\Omega)$ . De même  $\epsilon_n v$  tend fortement vers  $v$  dans  $L^2(\Omega)$ . Comme par hypothèse  $\frac{1}{\|v\|_{V_{\epsilon_n}}} a^{\delta_n}(u_n, v)$  tend vers 0, alors

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \text{curl } w \cdot \text{curl } v - \int_{\Omega} \omega^2 w \cdot \bar{v} - i\omega \int_{\Sigma_{x_3}^\pm} w_T \cdot \bar{v}_T = 0.$$

Or nous savons que ce problème est bien posé, il admet donc comme unique solution  $w = 0$ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega \int_{\Omega} |(u_n)_T|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\text{Im } a^{\delta_n}(u_n, u_n)| = 0.$$

Et de même,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\text{curl } u_n|^2 \leq C \lim_{n \in \mathbb{N}} \left( \|u_n\|_{L^2(\Omega)} + |\text{Re } a^{\delta_n}(u_n, u_n)| \right).$$

En combinant les trois égalités précédentes et (6.2.14), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{V_{\epsilon_n}} = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse  $\|u_n\|_{V_{\epsilon_n}} = 1$ . □

### 6.3 Démarche et objectifs

Notre objectif est de remplacer la couche mince périodique  $\Omega_B^\delta$  par une condition de transmission approchée posée sur l'interface médiane  $\Gamma$ ,

$$\Gamma := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 = 0, \quad -\frac{L_1}{2} < x_1 < \frac{L_1}{2}, \quad -\frac{L_2}{2} < x_2 < \frac{L_2}{2} \right\}. \quad (6.3.1)$$

La construction de cette condition approchée est basée sur un développement asymptotique complet de la solution en fonction du petit paramètre  $\delta$ . Dans le chapitre 7, nous construisons et justifions le développement asymptotique. Nous en déduisons dans le chapitre 8 une condition approchée d'ordre 1. Nous montrons que cette condition est stable pour  $\delta$  assez petit.

Pour construire le développement, il est pratique d'introduire les variables dilatées (ou variables rapides)  $X_1, X_2$  et  $X_3$  définies par

$$X_1 := \frac{x_1}{\delta}, \quad X_2 := \frac{x_2}{\delta}, \quad X_3 := \frac{x_3}{\delta}, \quad (6.3.2)$$

ainsi que les opérateurs de dérivations surfaciques sur la surface  $\Gamma$  : soient  $\varphi \in \mathcal{D}'(\Gamma)^3$  et  $p \in \mathcal{D}'(\Gamma)$

$$\operatorname{div}_\Gamma \varphi_T := \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \quad \operatorname{curl}_\Gamma \varphi_T := \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \quad \overleftarrow{\operatorname{curl}}_\Gamma p := \frac{\partial p}{\partial x_2} e_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} e_2. \quad (6.3.3)$$

Enfin, pour toute fonction  $u$  suffisamment régulière, nous définissons alors les saut et moyenne de  $u$  de part et d'autre de ces deux interfaces :

$$u^\pm = u(x_1, x_2, 0^\pm), \quad [u]_\Gamma = u^+ - u^-, \quad \langle u \rangle_\Gamma = \frac{1}{2} (u^+ + u^-).$$



# Développement asymptotique

## Sommaire

<b>7.1</b>	<b>Ansatz pour le développement asymptotique</b>	<b>106</b>
<b>7.2</b>	<b>Termes de champ lointain</b>	<b>106</b>
7.2.1	Equations pour les champs lointains	106
7.2.2	Développement de Taylor des champs lointains au voisinage de l'interface $\Gamma$	107
<b>7.3</b>	<b>Termes de champs proches</b>	<b>108</b>
7.3.1	Equations satisfaites par les champs proches	108
7.3.2	Comportements des champs proches à l'infini	109
<b>7.4</b>	<b>Conditions de raccord</b>	<b>113</b>
<b>7.5</b>	<b>Cadre variationnel pour la résolution des problèmes de champs proches</b>	<b>114</b>
7.5.1	Caractérisation du noyau $\mathcal{N}_a(\mathcal{P})$	116
7.5.2	Une inégalité de Friedrichs	118
7.5.3	Résultat d'existence et d'unicité	120
<b>7.6</b>	<b>Cadre variationnel pour la résolution des problèmes de champs lointains</b>	<b>122</b>
<b>7.7</b>	<b>Construction des termes du développement asymptotique</b>	<b>124</b>
7.7.1	Construction explicite des termes $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathcal{E}_0$ et $\mathcal{H}_0$	125
7.7.2	Résultat général d'existence et d'unicité du développement asymptotique	125
7.7.3	Vers la construction explicite du développement asymptotique : construction des termes $\mathbf{E}_1, H_1, \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{H}_1$	127
7.7.4	Expressions explicites des termes du développement asymptotique	135
<b>7.8</b>	<b>Justification du développement asymptotique</b>	<b>137</b>
7.8.1	Résultat principal	137
7.8.2	Estimation de l'erreur de Raccord	138
7.8.3	Estimation de l'erreur de consistance pour le champ proche	141
7.8.4	Estimation d'erreur optimale pour le champs lointain	146
<b>7.9</b>	<b>Annexes</b>	<b>147</b>
7.9.1	Construction du développement asymptotique : développements formels	147
7.9.2	Problèmes de champs proches	148
7.9.3	Existence : une étape préliminaire	150
7.9.4	Construction du développement asymptotique	152



## 7.1 Ansatz pour le développement asymptotique

Nous souhaitons construire un développement formel de  $\mathbf{E}^\delta$  et  $\mathbf{H}^\delta$  (solutions du problème (6.1.3-6.1.8-6.1.9) à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Plus précisément, comme dans le cas scalaire, nous cherchons  $\mathbf{E}^\delta$  et  $\mathbf{H}^\delta$  sous la forme suivante

$$\mathbf{E}^\delta = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathbf{E}_n(x_1, x_2, x_3) & \text{loin de la couche périodique} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathcal{E}_n\left(\frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{\delta}; x_1, x_2\right) & \text{au voisinage de la couche périodique,} \end{cases} \quad (7.1.1)$$

et,

$$\mathbf{H}^\delta = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathbf{H}_n(x_1, x_2, x_3) & \text{loin de la couche périodique périodique,} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathcal{H}_n\left(\frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{\delta}; x_1, x_2\right) & \text{au voisinage de la couche périodique,} \end{cases} \quad (7.1.2)$$

Les champs proches  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$  sont définis de  $\mathbb{R}^3 \times ] -L_1/2, L_1/2[ \times ] -L_2/2, L_2/2[$  et sont à valeur dans  $\mathbb{C}^3$ . Ils sont 1-périodiques dans la première variable  $X_1$  et  $\tau$ -périodiques dans la seconde variable  $X_2$  (on rappelle que  $X_1, X_2$  et  $X_3$  sont définies par 6.3.2) si bien qu'on pourra identifier ces fonctions à leur restriction au domaine  $B^*$  :

$$B^* = B \times ] -\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}[ \times ] -\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}[, \quad B := \left\{ (X_1, X_2, X_3) \in ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ] -\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}[ \times \mathbb{R} \right\} \quad (7.1.3)$$

Nous supposons de plus que les deux développements coïncident dans les zones de raccords  $\Omega_{M, \delta^\pm}$  :

$$\begin{aligned} \Omega_{M, \delta^+} &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in ] -\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}[ \times ] -\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}[ \times ] \eta^-(\delta), \eta^+(\delta)[ \right\}, \\ \Omega_{M, \delta^-} &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in ] -\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}[ \times ] -\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}[ \times ] -\eta^+(\delta), -\eta^-(\delta)[ \right\}, \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

où  $\eta^\pm$  sont des fonctions telles que  $0 < \eta^- < \eta^+$  et,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta^\pm = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\eta^\pm}{\delta} = \pm \infty.$$

Du fait de la définition de  $\eta$ , les zones de raccords correspondent à un voisinage de  $\Gamma$  ( $x_3$  proche de 0) pour les champs lointains et à  $X_3$  grand pour les champs proches. Nous allons maintenant écrire les équations satisfaites par les champs lointains et les champs proches puis écrire des conditions de raccords qui lient le comportement des champs proches à l'infini au comportement des champs lointains dans le voisinage de  $\Gamma$ . Nous allons maintenant écrire les équations satisfaites par les champs lointains et les champs proches puis écrire des conditions de raccords qui lient le comportement des champs proches à l'infini au comportement des champs lointains dans le voisinage de  $\Gamma$ .

## 7.2 Termes de champ lointain

### 7.2.1 Equations pour les champs lointains

Les champs lointains sont définis dans  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ ,

$$\begin{aligned} \Omega^+ &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in ] -\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}[ \times ] -\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}[ \times ] 0, \frac{L_3}{2}[ \right\}, \\ \Omega^- &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in ] -\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}[ \times ] -\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}[ \times ] -\frac{L_3}{2}, 0[ \right\}, \end{aligned}$$

Il vérifient les équations suivantes

$$\begin{cases} -i\omega\mathbf{H}_n + \operatorname{curl}\mathbf{E}_n = 0 & \text{dans } \Omega^\pm, \\ -i\omega\mathbf{E}_n - \operatorname{curl}\mathbf{H}_n = -\frac{\delta_0}{i\omega}F & \text{dans } \Omega^\pm, \end{cases} \quad (7.2.1)$$

ainsi que la condition limite

$$\mathbf{H}_n \times n - (\mathbf{E}_n)_T = 0 \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm. \quad (7.2.2)$$

Les équations (7.2.1) et (7.2.2) ne permettent pas de définir  $\mathbf{E}_n$  et  $\mathbf{H}_n$  de manière unique. Il manque (par exemple) des informations sur les sauts  $[\mathbf{E}_n \times e_3]_\Gamma$  et  $[\mathbf{H}_n \times e_3]_\Gamma$ . Ces informations proviendront des conditions de raccord.

### 7.2.2 Développement de Taylor des champs lointains au voisinage de l'interface $\Gamma$

Pour écrire les conditions de raccord, il est intéressant de connaître le comportement des champs lointains au voisinage de  $\Gamma$ . Soit  $h > 0$ , définissons  $\mathcal{V}^\pm(\Gamma)$  par

$$\mathcal{V}^+(\Gamma) := \{(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma \times ]0, h[ \}, \quad \mathcal{V}^-(\Gamma) := \{(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma \times ]-h, 0[ \}.$$

**Proposition 7.2.1.** *Soient  $E^\pm$  et  $H^\pm$  des fonctions très régulières satisfaisant*

$$\begin{cases} \operatorname{curl}\mathbf{E} - i\omega\mathbf{H} = 0 & \text{dans } \mathcal{V}^\pm(\Gamma), \\ -\operatorname{curl}\mathbf{H} - i\omega\mathbf{E} = 0 & \text{dans } \mathcal{V}^\pm(\Gamma). \end{cases}$$

Alors, leur développement de Taylor est donné par

$$\mathbf{E}^\pm(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_3^k (\mathbf{E}^k)^\pm(x_1, x_2), \quad \mathbf{H}^\pm(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_3^k (\mathbf{H}^k)^\pm(x_1, x_2),$$

avec,

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^0)_T^\pm(x_1, x_2) &= \mathbf{E}_T^\pm(x_1, x_2, 0) \text{ indéterminé,} \\ (\mathbf{H}^0)_T^\pm(x_1, x_2) &= \mathbf{H}_T^\pm(x_1, x_2, 0) \text{ indéterminé,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^0)_N^\pm(x_1, x_2) &= \mathbf{E}_N^\pm(x_1, x_2, 0) = \frac{-1}{i\omega} \operatorname{curl}_\Gamma((\mathbf{H}^0)_T^\pm)(x_1, x_2), \\ (\mathbf{H}^0)_N^\pm(x_1, x_2) &= \mathbf{H}_N^\pm(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{i\omega} \operatorname{curl}_\Gamma((\mathbf{E}^0)_T^\pm)(x_1, x_2), \end{aligned}$$

et, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^k)_T^\pm(x_1, x_2) &= \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{E}_T(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3^k} = \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma(\mathbf{E}^{k-1})_N^\pm + i\omega(\mathbf{H}^{k-1})_T^\pm \times e_3)(x_1, x_2), \\ (\mathbf{H}^k)_T^\pm(x_1, x_2) &= \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{H}_T(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3^k} = \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma(\mathbf{H}^{k-1})_N^\pm - i\omega(\mathbf{E}^{k-1})_T^\pm \times e_3)(x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$(\mathbf{E}^k)_N^\pm(x_1, x_2) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{E}_N(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3^k} = -\frac{1}{k} \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{E}^{k-1})_T^\pm(x_1, x_2),$$

$$(\mathbf{H}^k)_N^\pm(x_1, x_2) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{H}_N(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3^k} = \frac{1}{k} \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H}^{k-1})_T^\pm(x_1, x_2).$$

*Démonstration.* La preuve se fait par simple identification.  $\square$

Comme dans le cas scalaire, nous faisons l'hypothèse (qui sera vérifiée a posteriori) que les champs lointains appartiennent à  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}^\pm(\Gamma))$ , ce qui signifie en particulier qu'ils sont très réguliers dans les zones de raccord. On peut développer les champs lointains  $\mathbf{E}_n$  et  $\mathbf{H}_n$  en utilisant la proposition précédente :

$$\mathbf{E}_n^\pm(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_3^k (\mathbf{E}_n^k)^\pm(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_n^\pm(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_3^k (\mathbf{H}_n^k)^\pm(x_1, x_2). \quad (7.2.3)$$

## 7.3 Termes de champs proches

### 7.3.1 Equations satisfaites par les champs proches

Les changements d'échelle rendent la dérivation des équations de champs proches un peu plus délicate que celle des champs lointains. Commençons par re-définir  $\text{div}_\Gamma$ ,  $\vec{\text{curl}}_\Gamma$ ,  $\text{curl}_\Gamma$  de manière un peu détournée. Pour toute fonction vectorielle

$$U(X_1, X_2, X_3; x_1, x_2) = U^1(X_1, X_2, X_3; x_1, x_2)e_1 + U^2(X_1, X_2, X_3; x_1, x_2)e_2 + U^3(X_1, X_2, X_3; x_1, x_2)e_3,$$

on définit

$$\text{div}_\Gamma U = \partial_{x_1} U^1 + \partial_{x_2} U^2, \quad \text{curl}_\Gamma U = \partial_{x_1} U^2 - \partial_{x_2} U^1.$$

De même, pour toute fonction  $p(X_1, X_2, X_3; x_1, x_2)$ , on définit

$$\vec{\text{curl}}_\Gamma p = \partial_{x_2} p e_1 - \partial_{x_1} p e_2.$$

Les opérateurs ainsi définis s'appliquent ici à des fonctions définies dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$  alors qu'ils sont habituellement appliqués à des traces de fonctions (dans 6.3.3, ils sont par exemple définies sur  $\Gamma$ ).

Pour tout vecteur  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , on définit  $U_N$  et  $U_T$ , les parties "normale" et "tangentielle" de  $U$  :

$$U_T = (e_3 \times U) \times e_3, \quad U_N = U \cdot e_3. \quad (7.3.1)$$

Enfin on introduit les opérateurs volumiques  $\text{Div}$  et  $\text{Curl}$  :

$$\text{Div} U = \partial_{X_1} U^1 + \partial_{X_2} U^2 + \partial_{X_3} U^3, \quad \text{Curl} U = \begin{cases} \partial_{X_2} U^3 - \partial_{X_3} U^2 \\ \partial_{X_3} U^1 - \partial_{X_1} U^3 \\ \partial_{X_1} U^2 - \partial_{X_2} U^1 \end{cases} \quad (7.3.2)$$

Les champs proches  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$  sont définis sur  $\mathbb{R}^3 \times ]-L_1/2, L_1/2[ \times ]-L_2/2, L_2/2[$ . Pour toute fonction  $\mathcal{E}(X_1, X_2, X_3, x_1, x_2)$  dépendant de 5 variables, nous définissons  $(\mathcal{E})^\delta(x_1, x_2)$  par

$$(\mathcal{E})^\delta(x_1, x_2) := \mathcal{E}\left(\frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{\delta}, x_1, x_2\right). \quad (7.3.3)$$

On remarque alors que

$$\text{curl}(\mathcal{E})^\delta = \left( \frac{1}{\delta} \text{Curl} \mathcal{E} + \mathcal{A}_0 \mathcal{E} \right)^\delta, \quad (7.3.4)$$

avec,

$$\mathcal{A}_0 \mathcal{E} = \vec{\text{curl}}_\Gamma(\mathcal{E}_N) + \text{curl}_\Gamma(\mathcal{E}_T) e_3.$$

En introduisant le développement asymptotique dans les équations de Maxwell et en séparant formellement les différentes puissances de  $\delta$ , on voit que les champs proches sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Curl} \mathcal{E}_n = -\mathcal{A}_0 \mathcal{E}_{n-1} + i\omega\mu \mathcal{H}_{n-1}, \\ -\text{Curl} \mathcal{H}_n = +\mathcal{A}_0 \mathcal{H}_{n-1} + i\omega\epsilon \mathcal{E}_{n-1}, \end{cases} \quad (7.3.5)$$

Pour espérer trouver une solution aux équations précédentes, il faut que les second-membres soient compatibles (puisque  $\text{Div Curl } \mathcal{E}_n = \text{Div Curl } \mathcal{H}_n = 0$ ), c'est à dire que

$$\text{Div} (-\mathcal{A}_0 \mathcal{E}_{n-1} + i\omega \mu \mathcal{H}_{n-1}) = 0 \text{ et } \text{Div} (\mathcal{A}_0 \mathcal{H}_{n-1} + i\omega \epsilon \mathcal{E}_{n-1}) = 0.$$

Or, en utilisant l'expression de  $\mathcal{A}_0$  et en interchangeant les dérivées par rapports aux variables lentes et rapides, on observe que

$$-\text{Div} (\mathcal{A}_0 \mathcal{E}_{n-1}) = \text{div}_\Gamma ((\text{Curl } \mathcal{E}_{n-1})_T) = i\omega \mu \text{div}_\Gamma (\mathcal{H}_{n-2})_T,$$

Mais, en utilisant (7.3.5) et le fait que  $\text{div}_\Gamma \text{curl}_\Gamma = 0$ , on a également  $\text{div}_\Gamma ((\text{Curl } \mathcal{E}_{n-1})_T) = i\omega \mu \text{div}_\Gamma (\mathcal{H}_{n-2})_T$ . D'où

$$-\text{Div} (\mathcal{A}_0 \mathcal{E}_{n-1}) = i\omega \mu \text{div}_\Gamma (\mathcal{H}_{n-2})_T.$$

De même,

$$\text{Div} (\mathcal{A}_0 \mathcal{H}_{n-1}) = i\omega \epsilon \text{div}_\Gamma (\mathcal{E}_{n-2})_T.$$

On en déduit

$$\text{Div} (\epsilon \mathcal{E}_n) = -\epsilon \text{div}_\Gamma (\mathcal{E}_{n-1})_T \text{ et } \text{Div} (\mu \mathcal{H}_n) = -\mu \text{div}_\Gamma (\mathcal{H}_{n-1})_T.$$

On va ajouter aux équations (7.3.5) ces deux équations sur la divergence. Remarquez que l'on aurait obtenu ces mêmes équations si l'on avait introduit le développement formel de champ proche dans les équations  $\text{div} (\epsilon^\delta \mathbf{E}^\delta) = 0$  et  $\text{div} (\mu^\delta \mathbf{H}^\delta) = 0$ . Finalement les champs proches sont solutions des systèmes d'équations

$$\begin{cases} \text{Curl } \mathcal{E}_n = -\mathcal{A}_0 \mathcal{E}_{n-1} + i\omega \mu \mathcal{H}_{n-1}, \\ \text{Div} (\epsilon \mathcal{E}_n) = -\epsilon \text{div}_\Gamma (\mathcal{E}_{n-1})_T. \end{cases} \quad (7.3.6)$$

et,

$$\begin{cases} -\text{Curl } \mathcal{H}_n = +\mathcal{A}_0 \mathcal{H}_{n-1} + i\omega \epsilon \mathcal{E}_{n-1}, \\ \text{Div} (\mu \mathcal{H}_n) = -\mu \text{div}_\Gamma (\mathcal{H}_{n-1})_T. \end{cases} \quad (7.3.7)$$

Remarquons que les problèmes (7.3.6) et (7.3.7) sont découplés.

Tout comme pour les champs proches, les équations (7.3.6) et (7.3.7) ne permettent pas de définir  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$  de manière unique. En effet, nous allons voir que ces équations admettent un noyau de dimension 3 (Proposition 7.5.3). A titre d'exemple, dans le cas où  $\epsilon = \mu = 1$ , tout vecteur constant de  $\mathbb{C}^3$  est solution des équations (7.3.6) et (7.3.7). En fait les informations manquantes vont nous être données par les conditions de raccord.

## 7.3.2 Comportements des champs proches à l'infini

### 7.3.2.1 Définitions et notations

Tout comme pour le cas bidimensionnel, nous faisons l'hypothèse que les champs proches  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$  ne sont pas exponentiellement croissants quand  $X_3$  tend vers  $\pm\infty$ . C'est pourquoi nous allons chercher  $\mathcal{E}_n(\cdot, \cdot, \cdot; x_1, x_2)$  dans l'espace  $V_\epsilon^+(B)$  :

$$V_\epsilon^+(B) = \left\{ \mathcal{E} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3), \mathcal{E} \text{ 1-périodique en } X_1 \text{ et } \tau\text{-périodique en } X_2 \text{ tel que} \right.$$

$$\left. \text{curl } \mathcal{E} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3), \text{div } \epsilon \mathcal{E} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \int_B (|\mathcal{E}|^2 + |\text{curl } \mathcal{E}|^2 + |\text{div } \epsilon \mathcal{E}|^2) e^{-|X_3|/2} < +\infty \right\}, \quad (7.3.8)$$

De même nous cherchons  $\mathcal{H}_n(\cdot, \cdot, \cdot; x_1, x_2)$  dans l'espace  $V_\mu^+(B)$  :

$$V_\mu^+(B) = \left\{ \mathcal{H} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3), \mathcal{H} \text{ 1-périodique en } X_1 \text{ et } \tau\text{-périodique en } X_2 \text{ tel que} \right.$$

$$\left. \text{curl } \mathcal{H} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3), \text{div } \mu \mathcal{H} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \int_B (|\mathcal{H}|^2 + |\text{curl } \mathcal{H}|^2 + |\text{div } \mu \mathcal{H}|^2) e^{-|X_3|/2} < +\infty \right\}. \quad (7.3.9)$$

Nous introduisons également deux définitions qui seront utiles pour caractériser le comportement des champs proches dans les zones de raccord :

**Définition 7.3.1.** Soit  $u$  une fonction se développant en série de Fourier suivant  $X_1$  et  $X_2$ . Pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ , on note  $\{u\}_{p,q}$  le coefficient de Fourier de  $u$  associé à la fonction  $e^{2i\pi(pX_1 + \frac{q}{\tau}X_2)}$  :

$$u(X_1, X_2, X_3) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \{u\}_{p,q}(X_3) e^{2i\pi(pX_1 + \frac{q}{\tau}X_2)}.$$

avec,

$$\{u\}_{p,q}(X_3) = \frac{1}{\tau} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(X_1, X_2, X_3) e^{-2i\pi(pX_1 + \frac{q}{\tau}X_2)} dX_1 dX_2.$$

**Définition 7.3.2.** Soit  $\mathcal{U}$  appartenant à  $L_{loc}^2(B)$ . On dit que  $\mathcal{U}$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  s'il existe deux suites de polynômes  $(p_{l,k}(\nu)^\pm)_{(l,k) \in \mathbb{Z}^2}$  telles que

$$\mathcal{U} = p_{0,0}^\pm(X_3) + \sum_{(l,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} p_{l,k}^\pm(\nu) e^{2i\pi(lX_1 + k\frac{X_2}{\tau})} e^{-2\pi\sqrt{l^2X_1^2 + \frac{k^2}{\tau^2}X_2^2}|X_3|} \quad \text{quand } \pm X_3 > \frac{1}{2}, \quad (7.3.10)$$

On définit alors  $\ell_T^\pm(\mathcal{U})$  et  $\ell_N^\pm(\mathcal{U})$  par

$$\ell_T^\pm(\mathcal{U}) := e_3 \times (p^\pm(0) \times e_3) \quad \ell_N^\pm(\mathcal{U}) := e_3 \cdot p^\pm(0). \quad (7.3.11)$$

et les sauts et moyennes de  $\mathcal{U}$  par

$$\begin{aligned} [\ell_T(\mathcal{U})] &:= \ell_T^+(\mathcal{U}) - \ell_T^-(\mathcal{U}), & \langle \ell_T(\mathcal{U}) \rangle &= \frac{1}{2} (\ell_T^+(\mathcal{U}) + \ell_T^-(\mathcal{U})), \\ [\ell_N(\mathcal{U})] &:= \ell_N^+(\mathcal{U}) - \ell_N^-(\mathcal{U}), & \langle \ell_N(\mathcal{U}) \rangle &= \frac{1}{2} (\ell_N^+(\mathcal{U}) + \ell_N^-(\mathcal{U})). \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

**Remarque.** Si  $\mathcal{U}(\cdot, \cdot, \cdot; x_1, x_2)$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  pour tout  $(x_1, x_2) \in ]-L_1/2, L_1/2[ \times ]-L_2/2, L_2/2[$ , on définit  $\ell_T^\pm(\mathcal{U})(x_1, x_2)$  et  $\ell_N^\pm(\mathcal{U})(x_1, x_2)$  par

$$\ell_T^\pm(\mathcal{U})(x_1, x_2) := \ell_T^\pm(\mathcal{U}(\cdot, \cdot, \cdot; x_1, x_2)), \quad \ell_N^\pm(\mathcal{U})(x_1, x_2) := \ell_N^\pm(\mathcal{U}(\cdot, \cdot, \cdot; x_1, x_2)).$$

De même

$$[\ell_T(\mathcal{U})](x_1, x_2) = [\ell_T(\mathcal{U}(\cdot, \cdot, \cdot; x_1, x_2))], \quad [\ell_N(\mathcal{U})](x_1, x_2) = [\ell_N(\mathcal{U}(\cdot, \cdot, \cdot; x_1, x_2))].$$

### 7.3.2.2 Développement en série de Fourier des champs proches

En décomposant les champs proches en série de Fourier dans les zones où  $\epsilon$  et  $\mu$  sont constants et en utilisant les équations de champs proches (7.3.6) et (7.3.7), on obtient le résultat suivant :

**Proposition 7.3.3.** Soient  $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de champs appartenant respectivement à  $V_\epsilon^+(B)$  et  $V_\mu^+(B)$  satisfaisant le système d'équations (7.3.6) et (7.3.7). Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$  satisfont la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  : plus précisément, il existe des fonctions  $C_{n,k}(x_1, x_2) (\in \mathbb{C}^3)$  et  $D_{n,k}(x_1, x_2)$ , et quatre suites de polynômes  $(p_{n,l,k}^\pm(\nu; x_1, x_2))_{(l,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)}$ ,  $(q_{n,l,k}^\pm(x_3; x_1, x_2))_{(l,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)}$  tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &= \sum_{k=0}^n C_{n,k}^\pm(x_1, x_2) X_3^k + \sum_{(l,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} p_{n,l,k}^\pm(\nu; x_1, x_2) e^{2i\pi(lX_1 + k\frac{X_2}{\tau})} e^{-2\pi\sqrt{l^2X_1^2 + \frac{k^2}{\tau^2}X_2^2}|X_3|} \quad \text{quand } \pm Z > \frac{1}{2}, \\ \mathcal{H}_n &= \sum_{k=0}^n D_{n,k}^\pm(x_1, x_2) Z^k + \sum_{(l,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} q_{n,l,k}^\pm(\nu; x_1, x_2) e^{2i\pi(lX_1 + k\frac{X_2}{\tau})} e^{-2\pi\sqrt{l^2X_1^2 + \frac{k^2}{\tau^2}X_2^2}|Z|} \quad \text{quand } \pm Z > \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

De plus,  $\forall k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} (C_{n,k})_T^\pm &= \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma(C_{n-1,k-1})_N^\pm + i\omega(D_{n-1,k-1})_T^\pm \times e_3), \\ (C_{n,k})_N^\pm &= \frac{-1}{k} \operatorname{div}_\Gamma(C_{n-1,k-1})_T^\pm, \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

et

$$\begin{aligned} (D_{n,k})_T^\pm &= \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma(D_{n-1,k-1})_N^\pm - i\omega(C_{n-1,k-1})_T^\pm \times e_3), \\ (D_{n,k})_N^\pm &= \frac{-1}{k} \operatorname{div}_\Gamma(D_{n-1,k-1})_T. \end{aligned} \quad (7.3.15)$$

*Démonstration.* La démonstration est classique. Elle se fait par récurrence. Nous faisons la démonstration dans le cas  $X_3 > \frac{1}{2}$ , la démonstration pour  $X_3 < -\frac{1}{2}$  est similaire.

1. Initialisation pour  $n = 0$ . Ecrivons d'abord  $\mathcal{E}_0$  sous forme d'une série de Fourier :

$$\mathcal{E}_0(X_1, X_2, X_3, x_1, x_2) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \{\mathcal{E}_0\}_{p,q} (X_3, x_1, x_2) e^{2i\pi(pX_1 + \frac{q}{\tau}X_2)}.$$

Par ailleurs, pour  $X_3 > \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{E}_0$  vérifie  $\operatorname{div} \mathcal{E}_0 = \operatorname{curl} \mathcal{E}_0 = 0$ . Donc ses coefficients de Fourier vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \left( \{\mathcal{E}_0\}_{p,q}^2 \right)' = \frac{2i\pi q}{\tau} \{\mathcal{E}_0\}_{p,q}^3, \\ \left( \{\mathcal{E}_0\}_{p,q}^1 \right)' = 2i\pi p \{\mathcal{E}_0\}_{p,q}^3, \\ p \{\mathcal{E}_0\}_{p,q}^2 - \frac{q}{\tau} \{\mathcal{E}_0\}_{p,q}^1 = 0, \\ \left( \{\mathcal{E}_0\}_{p,q}^3 \right)' = -2i\pi \left( p \{\mathcal{E}_0\}_{p,q}^1 + \frac{q}{\tau} \{\mathcal{E}_0\}_{p,q}^2 \right). \end{cases}$$

On en déduit facilement  $\{\mathcal{E}_0\}_{p,q}$ .

-  $p \neq 0$  et  $q \neq 0$  :

$$\{\mathcal{E}_0\}_{p,q} = \begin{cases} c_{0,p,q} e^{-2\pi \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{\tau^2}} X_3}, \\ c_{0,p,q} \frac{q}{\tau p} e^{-2\pi \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{\tau^2}} X_3}, \\ c_{0,p,q} \frac{-\sqrt{p^2 + \frac{q^2}{\tau^2}}}{ip} e^{-2\pi \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{\tau^2}} X_3}, \end{cases}$$

avec  $c_{0,p,q} \in \mathbb{C}$  indéterminé.

-  $p \neq 0$  et  $q = 0$  :

$$\{\mathcal{E}_0\}_{p,q} = \begin{cases} c_{0,p,0} e^{-2\pi |p| X_3}, \\ 0, \\ c_{0,p,0} \frac{-|p|}{ip} e^{-2\pi \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{\tau^2}} X_3}, \end{cases}$$

avec  $c_{0,p,0} \in \mathbb{C}$  indéterminé.

-  $p = 0$  et  $q \neq 0$  :

$$\{\mathcal{E}_0\}_{0,q} = \begin{cases} 0, \\ c_{0,0,q} e^{-2\pi \frac{|q|}{\tau} X_3}, \\ c_{0,0,q} \frac{-|q|}{iq} e^{-2\pi \frac{|q|}{\tau} X_3}, \end{cases}$$

avec  $c_{0,0,q} \in \mathbb{C}$  indéterminé.

-  $p = q = 0$  :

$$\{\mathcal{E}_0\}_{0,0} = C_{0,0},$$

avec  $C_{0,0} \in \mathbb{C}^3$ .

Evidemment, nous avons un développement similaire pour  $\mathcal{H}_0$ .

2. Hérédité : Le résultat se déduit facilement par des calculs explicites. Nous expliquons simplement les termes  $\{\mathcal{E}_n\}_{0,0}$  et  $\{\mathcal{H}_n\}_{0,0}$ . Leurs expressions nous seront utiles lors de la construction des conditions de raccord. Par hypothèse, on sait que

$$\{\mathcal{E}_{n-1}\}_{0,0} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1,k}(x_1, x_2) X_3^k \quad \text{et} \quad \{\mathcal{H}_{n-1}\}_{0,0} = \sum_{k=0}^{n-1} D_{n-1,k}(x_1, x_2) X_3^k. \quad (7.3.16)$$

On cherche  $\{\mathcal{E}_n\}_{0,0}$  et  $\{\mathcal{H}_n\}_{0,0}$  sous la forme

$$\{\mathcal{E}_n\}_{0,0} = \sum_{k=0}^n C_{n,k}(x_1, x_2) X_3^k, \quad \{\mathcal{H}_n\}_{0,0} = \sum_{k=0}^n D_{n,k}(x_1, x_2) X_3^k. \quad (7.3.17)$$

Alors,

$$\{(\text{curl } \mathcal{E}_n)_T\}_{0,0} = -\{(\mathcal{A}_0 \mathcal{E}_{n-1})_T\}_{0,0} + i\omega \{(\mathcal{H}_{n-1})_T\}_{0,0}.$$

Or,

$$\{(\text{curl } \mathcal{E}_n)_T\}_{0,0} = e_3 \times \frac{\partial}{\partial X_3} \{\mathcal{E}_n\}_{0,0},$$

et

$$-\{(\mathcal{A}_0 \mathcal{E}_{n-1})_T\}_{0,0} = -\vec{\text{curl}}_\Gamma \{(\mathcal{E}_{n-1})_N\}_{0,0}.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial X_3} \{(\mathcal{E}_n)_T\}_{0,0} = -\vec{\text{curl}}_\Gamma \{(\mathcal{E}_{n-1})_N\}_{0,0} \times e_3 + i\omega \{(\mathcal{H}_{n-1})_T\}_{0,0} \times e_3.$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial X_3} \{(\mathcal{E}_n)_T\}_{0,0} = \nabla_\Gamma \{(\mathcal{E}_{n-1})_N\}_{0,0} + i\omega \{(\mathcal{H}_{n-1})_T\}_{0,0} \times e_3.$$

En insérant les développements (7.3.16) et (7.3.17) dans l'égalité précédente et en identifiant les différentes puissances de  $X_3$ , on obtient

$$\begin{cases} (C_{n,0})_T \text{ indéterminé,} \\ (C_{n,k})_T = \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma (C_{n-1,k-1})_N + i\omega (D_{n-1,k-1})_T \times e_3) \quad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_3} \{(\mathcal{E}_n)_N\}_{0,0} &= -\text{div}_\Gamma \{(\mathcal{E}_{n-1})_T\}, \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \{(\mathcal{H}_n)_T\}_{0,0} &= \nabla_\Gamma \{(\mathcal{H}_{n-1})_N\}_{0,0} - i\omega \{(\mathcal{E}_{n-1})_T\}_{0,0} \times e_3, \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \{(\mathcal{H}_n)_N\}_{0,0} &= -\text{div}_\Gamma \{(\mathcal{H}_{n-1})_T\}, \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases} (C_{n,0})_N \text{ indéterminé,} \\ (C_{n,k})_N = \frac{-1}{k} \text{div}_\Gamma (C_{n-1,k-1})_T \quad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

En appliquant un raisonnement analogue pour  $\mathcal{H}_n$ , nous obtenons

$$\begin{cases} (D_{n,0})_T \text{ indéterminé,} \\ (D_{n,k})_T = \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma(D_{n-1,k-1})_N - i\omega(C_{n-1,k-1})_T \times e_3) \quad \forall k \geq 1, \\ (D_{n,0})_N \text{ indéterminé,} \\ (D_{n,k})_N = \frac{-1}{k} \operatorname{div}_\Gamma(D_{n-1,k-1})_T \quad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

□

Remarquons que  $\ell_T^\pm(\mathcal{U})$  et  $\ell_N^\pm(\mathcal{U})$  correspondent aux composantes tangentielles et normales du terme de degré 0 du polynôme  $p^\pm$ . Par ailleurs, il est clair que les champs proches  $\mathcal{E}_n$  satisfont la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  si bien que les notions de moyennes et de sauts  $[\ell_T(\mathcal{E}_n)]$ ,  $\langle \ell_T(\mathcal{E}_n) \rangle$ ,  $[\ell_N(\mathcal{E}_n)]$ ,  $\langle \ell_N(\mathcal{E}_n) \rangle$  ont un sens.

## 7.4 Conditions de raccord

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les conditions de raccord. Tout comme dans le cas scalaire, nous insistons sur le caractère formel de cette étape. Nous obtenons une première forme des conditions de raccord en faisant coïncider la partie polynomiale du développement modal des champs proches (7.3.13) (on ne tient pas compte des termes exponentiellement décroissants) avec le développement de Taylor des champs lointains (7.2.3) dans les zones de raccord,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \leq n$ ,

$$\begin{cases} C_{n,k}^\pm = \frac{\partial^k \mathbf{E}_n}{\partial z^k}(x_1, x_2, 0^\pm), \\ D_{n,k}^\pm = \frac{\partial^k \mathbf{H}_n}{\partial z^k}(x_1, x_2, 0^\pm). \end{cases} \quad (7.4.1)$$

Néanmoins, cette écriture des conditions de raccord n'est pas optimale. Certaines conditions sont redondantes. La proposition suivante, démontrée en annexe 7.9.1.1, donne une version plus condensée de ces conditions (on rappelle que la définition des sauts et moyennes des champs proches est donnée par (7.3.12)) :

**Proposition 7.4.1.** *Les conditions de raccord (7.4.1) sont équivalentes aux conditions de raccords suivantes :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{cases} [(\mathbf{E}_n)_T]_\Gamma = [\ell_T^\pm(\mathcal{E}_n)], & [(\mathbf{H}_n)_T]_\Gamma = [\ell_T(\mathcal{H}_n)], \\ \langle \ell_T^\pm(\mathcal{E}_n) \rangle = \langle (\mathbf{E}_n)_T \rangle_\Gamma, & \langle \ell_T^\pm(\mathcal{H}_n) \rangle = \langle (\mathbf{H}_n)_T \rangle_\Gamma, \\ \langle \ell_N^\pm(\mathcal{E}_n) \rangle = \langle (\mathbf{E}_n)_N \rangle_\Gamma, & \langle \ell_N^\pm(\mathcal{H}_n) \rangle = \langle (\mathbf{H}_n)_T \rangle_\Gamma. \end{cases} \quad (7.4.2)$$

La proposition précédente signifie, qu'à chaque étape  $n$ , si les conditions (7.4.2) sont satisfaites pour tout  $k \leq n$ , alors les séries de conditions suivantes sont automatiquement satisfaites :  $\forall k \geq 1$ ,

$$C_{n,k}^\pm = \frac{\partial^k \mathbf{E}_{n-k}}{\partial z^k}(x_1, x_2, 0^\pm), \quad D_{n,k}^\pm = \frac{\partial^k \mathbf{H}_{n-k}}{\partial z^k}(x_1, x_2, 0^\pm). \quad (7.4.3)$$

Autrement dit, à chaque étape  $n$ , il suffit de construire des champs  $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n, \mathcal{E}_n, \mathcal{H}_n$  satisfaisant (7.4.2).

En utilisant les conditions de raccord (7.4.2), nous pouvons aussi rendre un peu plus explicites les conditions de sauts pour  $[\mathbf{E}_n^1]_\Gamma, [\mathbf{E}_n^2]_\Gamma, [\mathbf{H}_n^1]_\Gamma$  et  $[\mathbf{H}_n^2]_\Gamma$  : fixons  $n \in \mathbb{N}$  et supposons par ailleurs connues  $\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k, \mathcal{E}_k$  et  $\mathcal{H}_k$  pour tout  $k \leq n$ . Définissons également la cellule tronquée  $B_{h_0}$  ainsi que ses faces supérieures et inférieures  $\Gamma_{h_0}^\pm$  :

$$\begin{aligned} B_{h_0} &:= \{(X_1, X_2, X_3) \in B_0 \text{ tels que } -h_0 < X_3 < h_0\}, \\ \Gamma_{h_0}^\pm &:= \{(X_1, X_2, X_3) \in B_0 \text{ tels que } X_3 = \pm h_0\}. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$



Alors, en intégrant par partie l'équation (7.3.4) sur le rotationnel de  $\mathbf{E}_n$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{B_{h_0}} \operatorname{curl} \mathcal{E}_n \cdot e_2 &= \int_{\Gamma_{h_0}^+} (e_3 \times \mathcal{E}_n) \cdot e_2 - \int_{\Gamma_{h_0}^-} (e_3 \times \mathcal{E}_n) \cdot e_2, \\ &= [(C_n^0)^1] + \sum_{k=1}^n (C_{n,k}^+)^1 h_0^k - \sum_{k=1}^n (C_{n,k}^-)^1 (-h_0)^k, \\ &= [\mathbf{E}_n^1]_\Gamma + \sum_{k=1}^n (C_{n,k}^+)^1 h_0^k - \sum_{k=1}^n (C_{n,k}^-)^1 (-h_0)^k. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_n^1]_\Gamma &= \int_{B_{h_0}} \operatorname{curl} \mathcal{E}_n \cdot e_2 + \sum_{k=1}^n (C_{n,k}^-)^1 (-h_0)^k - \sum_{k=1}^n (C_{n,k}^+)^1 h_0^k, \\ &= - \int_{B_{h_0}} \mathcal{A}_0(\mathcal{E}_{n-1}) \cdot e_2 + \int_{B_{h_0}} i\omega\mu\mathcal{H}_{n-1} \cdot e_2 + \sum_{k=1}^n (C_{n,k}^-)^1 (-h_0)^k - \sum_{k=1}^n (C_{n,k}^+)^1 h_0^k. \end{aligned}$$

Comme tous les termes du membre de droite sont connus, nous avons une expressions du saut  $[\mathbf{E}_n^1]_\Gamma$  qui ne dépend que des termes déjà définis  $\mathbf{E}_k$ ,  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathcal{E}_k$  et  $\mathcal{H}_k$ ,  $k < n$ . En faisant la même manipulation, nous obtenons finalement

$$[e_3 \times \mathbf{E}_n]_\Gamma = g_n \quad \text{et} \quad [e_3 \times \mathbf{H}_n]_\Gamma = h_n, \quad (7.4.5)$$

avec

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{\tau} \left( \int_{B_{h_0}} (-\mathcal{A}_0(\mathcal{E}_{n-1}) + i\omega\mu\mathcal{H}_{n-1})_T \right) - \left( \sum_{k=1}^n (e_3 \times C_{n,k}^+) h_0^k - \sum_{k=1}^n (e_3 \times C_{n,k}^-) (-h_0)^k \right), \\ h_n &= \frac{1}{\tau} \left( \int_{B_{h_0}} (-\mathcal{A}_0(\mathcal{E}_{n-1}) - i\omega\mu\mathcal{H}_{n-1})_T \right) - \left( \sum_{k=1}^n (e_3 \times D_{n,k}^+) h_0^k - \sum_{k=1}^n (e_3 \times D_{n,k}^-) (-h_0)^k \right). \end{aligned}$$

#### Remarque 7.4.2.

- Nous avons ainsi découplé les problèmes de champs lointains des problèmes de champs proches du même ordre.
- En intégrant l'équation de divergence, nous aurions pu obtenir des conditions de sauts sur  $[\mathbf{E}_n^3]_\Gamma$  et  $[\mathbf{H}_n^3]_\Gamma$ . Mais ces conditions sont redondantes puisqu'il suffit de connaître les sauts tangentiels pour déterminer  $\mathbf{E}_n$  et  $\mathbf{H}_n$ .

Nous allons montrer que les équations de champs proches (7.3.6-7.3.7), les équations de champs lointains (7.2.1) et les conditions de raccord (7.4.2) permettent de définir à tout ordre les champs  $\mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{H}_n$ ,  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$ . Au préalable, nous avons besoin de définir un cadre variationnel pour la résolution des problèmes de champs proches et de champs lointains.

## 7.5 Cadre variationnel pour la résolution des problèmes de champs proches

Dans cette partie, nous définissons un cadre fonctionnel adapté à la résolution des problèmes de champs proches (7.3.6-7.3.7). Pour ne pas alourdir les notations, nous dirons qu'une fonction (ou distribution)  $\mathcal{U}$  est périodique si elle est 1-périodique en  $X_1$  et  $\tau$ -périodique en  $X_2$ .

Les problèmes de champs proches sont de la forme suivante : chercher  $\mathcal{U}$  périodique telle que

$$\begin{cases} \operatorname{Curl} \mathcal{U} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \operatorname{Div} (a\mathcal{U}) = g \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

où

- $f \in (L^2_{per}(\mathbb{R}^3))^3_{loc}$  et  $g \in (L^2_{per}(\mathbb{R}^3))_{loc}$  ( $f$  et  $g$  peuvent avoir une croissance polynomiale) où  $L^2_{per}(\mathbb{R}^3)$  est défini par

$$L^2_{per}(\mathbb{R}^3) := \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), f \text{ périodique et } \int_B f^2 < +\infty \right\}. \quad (7.5.1)$$

- $\text{Div } f = 0$ .
- $a$  appartient à  $L^\infty_{per}(\mathbb{R}^3) := \{a \in L^\infty(\mathbb{R}^3), a \text{ est périodique}\}$ .
- $a = 1$  quand  $|X_3| > \frac{1}{2}$ .

**Remarque.** Dans les cas qui nous intéressent  $a = \epsilon$  ou  $a = \mu$ .

Dans un premier temps nous allons nous concentrer sur le cas où

$$f \in (L^2_{per}(\mathbb{R}^3))^3 \text{ et } g \in (L^2_{per}(\mathbb{R}^3)), \quad (7.5.2)$$

cas qui se prête bien à une résolution variationnelle.

Nous allons pour le moment travailler avec des fonctions qui ne dépendent que des variables rapides  $X_1, X_2$  et  $X_3$ , c'est pourquoi on notera abusivement  $\text{div}$  à la place de  $\text{Div}$  et  $\text{curl}$  à la place de  $\text{Curl}$ .

Ces problèmes sont des problèmes de type électrostatique. En domaine borné, ils ont par exemple été étudiés dans [Pic81], [FG97], [Cia05] [KN85].

Nous cherchons  $\mathcal{U}$  dans l'espace à poids  $X_a(\mathbb{R}^3)$

$$X_a(\mathbb{R}^3) := \left\{ \mathcal{U} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3, \mathcal{U} \text{ périodique, } \text{curl } \mathcal{U} \in L^2(B)^3, \text{div } (a\mathcal{U}) \in L^2(B), \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{1+(X_3)^2}} \in L^2(B)^3 \right\}, \quad (7.5.3)$$

muni de la norme

$$\|\mathcal{U}\|_{X_a}^2 = \left\| \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{1+(X_3)^2}} \right\|_{L^2(B)}^2 + \|\text{curl } \mathcal{U}\|_{L^2(B)}^2 + \|\text{div } (a\mathcal{U})\|_{L^2(B)}^2. \quad (7.5.4)$$

Nous introduisons également  $X_a(B)$

$$X_a(B) := \left\{ \mathcal{U} \in \mathcal{D}'(B)^3, \begin{aligned} \mathcal{U} \times e_1|_{\Gamma_{x_1}^-} &= \mathcal{U} \times e_1|_{\Gamma_{x_1}^+}, \quad a\mathcal{U} \cdot e_1|_{\Gamma_{x_1}^-} = a\mathcal{U} \cdot e_1|_{\Gamma_{x_1}^+}, \\ \mathcal{U} \times e_2|_{\Gamma_{x_2}^-} &= \mathcal{U} \times e_2|_{\Gamma_{x_2}^+}, \quad a\mathcal{U} \cdot e_2|_{\Gamma_{x_2}^-} = a\mathcal{U} \cdot e_2|_{\Gamma_{x_2}^+}, \\ \text{curl } \mathcal{U} &\in L^2(B)^3, \quad \text{div } (a\mathcal{U}) \in L^2(B), \quad \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{1+(X_3)^2}} \in L^2(B)^3 \end{aligned} \right\},$$

où  $\Gamma_{x_1}^\pm$  (resp.  $\Gamma_{x_2}^\pm$ ) sont les bords de  $\Gamma$  de normale  $\pm e_1$  (resp.  $\pm e_2$ ). Nous munissons  $X_a(B)$  de la norme (7.5.4).  $X_a(B)$  muni de cette norme est un espace de Hilbert.

**Remarque 7.5.1.**

- Si  $\mathcal{U}$  appartient à  $X_a(\mathbb{R}^3)$  alors  $\mathcal{U}|_B$  appartient à  $X_a(B)$ . Inversement, si  $\mathcal{U}$  appartient  $X_a(B)$  alors  $\tilde{\mathcal{U}}$ , la fonction périodisée de  $\mathcal{U}$ , appartient à  $X_a(\mathbb{R}^3)$ .
- On rappelle la définition des espaces  $W_1(\mathbb{R}^3)$  et  $W_1(B)$  :

$$W_1(\mathbb{R}^3) = \left\{ p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), p \text{ périodique } \nabla p \in L^2(B)^3, \frac{p}{\sqrt{1+(X_3)^2}} \in L^2(B) \right\},$$

$$W_1(B) = \left\{ p \in \mathcal{D}'(B), p_{\Gamma_{x_1}^-} = p_{\Gamma_{x_1}^+}, p_{\Gamma_{x_2}^-} = p_{\Gamma_{x_2}^+}, \nabla p \in L^2(B)^3, \frac{p}{\sqrt{1+(X_3)^2}} \in L^2(B) \right\}.$$

On a l'égalité suivante (voir [Ach89]) :

$$X_1(\mathbb{R}^3) = W_1(\mathbb{R}^3)^3 \text{ et } X_1(B) = W_1(B)^3. \quad (7.5.5)$$

Nous nous intéressons donc au problème : chercher  $\mathcal{U} \in X_a(\mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \text{curl } \mathcal{U} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \text{div } (a\mathcal{U}) = g \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (7.5.6)$$

Notons que ce problème est équivalent au problème suivant, posé sur  $B$  : chercher  $\mathcal{U} \in X_a(B)$  vérifiant

$$\mathcal{P}_B : \begin{cases} \text{curl } \mathcal{U} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(B), \\ \text{div } (a\mathcal{U}) = g \text{ dans } \mathcal{D}'(B). \end{cases} \quad (7.5.7)$$

Dans un premier temps nous allons caractériser le noyau  $\mathcal{N}_a(\mathcal{P})$  du problème  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{N}_a(\mathcal{P}) := \{ \mathcal{U} \in X_a(\mathbb{R}^3), \text{ telles que } \text{curl } \mathcal{U} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \text{ et } \text{div } (a\mathcal{U}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \}. \quad (7.5.8)$$

Puis, nous pourrions montrer que le problème  $(\mathcal{P})$  est bien posé dans l'espace  $X_a^0 := \mathcal{N}_a(\mathcal{P})^\perp$  (orthogonalité par rapport au produit scalaire induit par la norme (7.5.4)).

Avant d'entreprendre ces deux étapes, nous rappelons un résultat classique que nous allons utiliser plusieurs fois dans la suite du travail (ce résultat est une généralisation de la proposition 3.5.1 au cas tri-dimensionnel) :

**Proposition 7.5.2.** *Soit  $f \in L^2_{per}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\sqrt{1 + (X_3)^2} f \in L^2(B)$  et  $\int_B f = 0$  et soit  $g \in L^2_{per}(\mathbb{R}^3)^3$ . Il existe une unique fonction  $p \in W_1(\mathbb{R}^3)|\mathbb{C}$  telle que*

$$\text{div}(a\nabla p) = f + \text{div } g \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

### 7.5.1 Caractérisation du noyau $\mathcal{N}_a(\mathcal{P})$

**Proposition 7.5.3.**

$$\mathcal{N}_a(\mathcal{P}) := \{ b\nabla p_1^a + c\nabla p_2^a + d\nabla p_3^a, \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \} \quad (7.5.9)$$

où  $p_1^a, p_2^a$  et  $p_3^a$  sont définies à une constante près par

-  $p_1^a := \tilde{p}_1^a + X_1$  où  $\tilde{p}_1^a$  est périodique en  $X_1$  et  $X_2$  et est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \tilde{p}_1^a \in W_1(\mathbb{R}^3)|\mathbb{R}, \\ \text{div } (a\nabla \tilde{p}_1^a) = -\frac{\partial a}{\partial X_1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

-  $p_2^a := \tilde{p}_2^a + X_2$  où  $\tilde{p}_2^a$  est périodique et est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \tilde{p}_2^a \in W_1(\mathbb{R}^3)|\mathbb{R}, \\ \text{div } (a\nabla \tilde{p}_2^a) = -\frac{\partial a}{\partial X_2} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

-  $p_3^a := \tilde{p}_3^a + X_3$  où  $\tilde{p}_3^a$  est périodique et est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \tilde{p}_3^a \in W_1(\mathbb{R}^3)|\mathbb{R}, \\ \text{div } (a\nabla \tilde{p}_3^a) = -\frac{\partial a}{\partial X_3} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

**Remarque 7.5.4.**

- Quand  $a = 1$ ,  $\mathcal{N}_1(\mathcal{P}) = \mathbb{C}^3$ .
- $\nabla p_1^a$ ,  $\nabla p_2^a$  et  $\nabla p_3^a$  satisfont la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  : pour  $|X_3| > \frac{1}{2}$ , ils se décomposent en un polynôme de degré 0 et une fonction exponentiellement décroissante. De plus,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$[\ell_T(\nabla p_i^a)] = 0, \quad [\ell_N(\nabla p_i^a)] = 0 \quad (7.5.10)$$

et

$$\begin{cases} \langle \ell_T(\nabla p_1^a) \rangle \cdot e_1 = 1, & \langle \ell_T(\nabla p_1^a) \rangle \cdot e_2 = 0, & \langle \ell_N(\nabla p_1^a) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T(\nabla p_2^a) \rangle \cdot e_1 = 0, & \langle \ell_T(\nabla p_2^a) \rangle \cdot e_2 = 1, & \langle \ell_N(\nabla p_2^a) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T(\nabla p_3^a) \rangle \cdot e_1 = 0, & \langle \ell_T(\nabla p_3^a) \rangle \cdot e_2 = 0, & \langle \ell_N(\nabla p_3^a) \rangle = 1. \end{cases} \quad (7.5.11)$$

- Dans le cas d'une couche mince, c'est à dire que

$$a = \begin{cases} a_0 & \text{si } |X_3| \leq 1/2, \\ 1 & \text{si } |X_3| \geq 1/2, \end{cases}$$

les fonctions  $p_1^a$ ,  $p_2^a$  et  $p_3^a$  sont données par

$$p_1^a = X_1, \quad p_2^a = X_2, \quad p_3^a = \begin{cases} \frac{1}{a_0} X_3 & \text{si } |X_3| \leq 1/2, \\ X_3 + \frac{1}{2a_0}(1 - a_0) & \text{si } |X_3| \geq 1/2. \end{cases} \quad (7.5.12)$$

*Démonstration.* On vérifie d'abord immédiatement que les fonctions de la forme (7.5.9) appartiennent à  $\mathcal{N}_a(\mathcal{P})$ . Il suffit donc de montrer que si  $\mathcal{U}$  appartient à  $\mathcal{N}_a(\mathcal{P})$ , elle s'écrit sous la forme (7.5.9). La démarche est la suivante : nous écrivons d'abord le développement en série de Fourier de  $\mathcal{U}$  pour  $|X_3| > \frac{1}{2}$  (c'est à dire dans la partie de  $B$  dans laquelle  $a = 1$ ). Puis nous utilisons le fait que  $\text{curl} \mathcal{U} = 0$  pour écrire  $\mathcal{U}$  sous la forme d'un gradient :  $\mathcal{U} = \nabla p$ . Connaissant le développement modal de  $p$  dans la partie où  $a$  est constant, nous déduisons  $p$  de manière explicite en appliquant la proposition 7.5.2.

En utilisant la proposition 7.3.3, nous savons que  $\mathcal{U}$  admet le développement suivant

$$\mathcal{U}(X_1, X_2, X_3) = U^\pm + \sum_{(p,q) \in (\mathbb{Z}^*)^2} U_{p,q}^\pm e^{-2\pi \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{\tau^2}} |X_3|} e^{2i\pi(pX_1 + \frac{q}{\tau} X_2)} \quad \text{quand } \pm X_3 > \frac{1}{2}.$$

où  $U^\pm$  et  $U_{p,q}^\pm$  sont des constantes de  $\mathbb{C}^3$ . Les constantes  $U^+$  et  $U^-$  ne sont pas indépendantes : en intégrant les équations  $\text{curl} \mathcal{U} = 0$  et  $\text{div}(a\mathcal{U}) = 0$  sur la cellule tronquée  $B_{h_0}$  (définie par 7.4.4), on montre que  $[U] = 0$  si bien que  $U^\pm = U$ .

Par ailleurs, d'après [GR86], comme  $\text{curl} \mathcal{U} = 0$ , il existe  $p \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ , définie à une constante près, telle que  $\mathcal{U} = \nabla p$ . Nous allons trouver une expression explicite de  $p$ . En utilisant le développement modal de  $\mathcal{U}$ , nous connaissons le comportement de  $p$  quand  $|X_3| > \frac{1}{2}$  :

$$p(X_1, X_2, X_3) = C^\pm + U^1 X_1 + U^2 X_2 + U^3 X_3 + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} p_{m,n}^\pm e^{-2\pi \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{\tau^2}} |X_3|} e^{2i\pi(mX_1 + \frac{n}{\tau} X_2)}$$

Pour déterminer  $p$  de manière unique nous imposons  $C^+ = -C^-$  (ce choix est complètement arbitraire). Définissons  $\tilde{p} := p - U^1 X_1 - U^2 X_2 - U^3 X_3$ . La proposition 7.9.2 nous assure que  $\tilde{p}$  est périodique. Donc  $\tilde{p}$  appartient à  $W_1^0(B)$  et satisfait

$$\text{div}(a\nabla \tilde{p}) = -U^1 \frac{\partial a}{\partial X_1} - U^2 \frac{\partial a}{\partial X_2} - U^3 \frac{\partial a}{\partial X_3} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Or, par la proposition 7.5.2, nous savons que ce problème admet une solution unique qui est donnée par  $\tilde{p} = U^1 \nabla \tilde{p}_1^a + U^2 \nabla \tilde{p}_2^a + U^3 \nabla \tilde{p}_3^a$  avec  $\tilde{p}_1^a$ ,  $\tilde{p}_2^a$  et  $\tilde{p}_3^a$  sont définies dans l'énoncé de la proposition. Donc

$$p = U^1(\tilde{p}_1^a + X_1) + U^2(\tilde{p}_2^a + X_2) + U^3(\tilde{p}_3^a + X_3).$$

□

**Remarque 7.5.5.** *Il est intéressant de remarquer que le noyau du problème  $\mathcal{P}$  dans  $V_\epsilon^+(B)$  est égal à  $\mathcal{N}_\epsilon(\mathcal{P})$ . De même, le noyau du problème  $\mathcal{P}$  dans  $V_\mu^+(B)$  est égal à  $\mathcal{N}_\mu(\mathcal{P})$ .*

### 7.5.2 Une inégalité de Friedrichs

On comprend bien maintenant que le problème  $\mathcal{P}$  n'a pas une unique solution dans  $X_a(\mathbb{R}^3)$ . Par contre, il paraît logique d'obtenir une solution unique dans l'orthogonal  $X_a^0(\mathbb{R}^3)$  du noyau de  $\mathcal{N}_a(\mathcal{P})$  :

$$X_a^0(\mathbb{R}^3) := \left\{ \mathcal{U} \in X_a(\mathbb{R}^3) \text{ telles que } \int_B \frac{\mathcal{U}}{1 + (X_3)^2} \cdot \nabla p_i^a = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \right\}. \quad (7.5.13)$$

On introduit aussi

$$X_a^0(B) := \left\{ \mathcal{U} \in X_a(B) \text{ telles que } \int_B \frac{\mathcal{U}}{1 + (X_3)^2} \cdot \nabla p_i^a = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \right\}. \quad (7.5.14)$$

Pour cela on peut montrer l'inégalité de Friedrichs suivante :

**Proposition 7.5.6.** *il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\mathcal{U} \in X_a^0(B)$*

$$\left\| \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{1 + (X_3)^2}} \right\|_{L^2(B)^3} \leq C \left( \|\operatorname{div}(a\mathcal{U})\|_{L^2(B)} + \|\operatorname{curl}\mathcal{U}\|_{L^2(B)} \right) \quad (7.5.15)$$

*Démonstration.* Ce type de résultat est classique en domaine borné ([Web80],[Sar82], [Kri84], [KN85]). Dans notre preuve nous utiliserons d'ailleurs sans le démontrer le résultat ci-dessous :

**Proposition 7.5.7.** *Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine borné simplement connexe et  $\epsilon$  une matrice définie positive continue par morceaux dans  $\Omega$ . Soit  $u$  appartenant à  $H(\operatorname{curl}, \Omega)$  telle que  $\operatorname{div}(\epsilon u)$  appartienne à  $L^2(\Omega)$  et  $n \times u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Alors, il existe une constante  $C$  qui dépend uniquement de  $\Omega$  et de  $\epsilon$  telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \|\operatorname{curl}u\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}(\epsilon u)\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Nous pouvons à présent démontrer la proposition 7.5.6 par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$(a) : \left\| \frac{\mathcal{U}_n}{\sqrt{1 + (X_3)^2}} \right\|_{L^2(B)} = 1,$$

$$(b) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\operatorname{div}(a\mathcal{U}_n)\|_{L^2(B)} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\operatorname{curl}\mathcal{U}_n\|_{L^2(B)} = 0.$$

Comme  $\mathcal{U}_n/\sqrt{1 + (X_3)^2}$  est bornée dans  $L^2(B)^3$  alors  $\mathcal{U}_n/\sqrt{1 + (X_3)^2}$  converge faiblement vers  $\mathcal{V}$  dans  $L^2(B)$ . On appelle  $\mathcal{U} = \sqrt{1 + (X_3)^2}\mathcal{V}$ .  $\mathcal{U}$  appartient à  $X_0$ . Par ailleurs, en utilisant l'hypothèse (b),  $\operatorname{curl}\mathcal{U} = 0$  et  $\operatorname{div}(a\mathcal{U}) = 0$ . Donc  $\mathcal{U} \in X_a(B) \cap \mathcal{N}_a(\mathcal{P})$  et par suite  $\mathcal{U} = 0$ .

Définissons deux fonctions de troncature  $\chi_1$  et  $\chi_2$  (Fig.7.1(b)) à valeur dans  $[0, 1]$  satisfaisant :

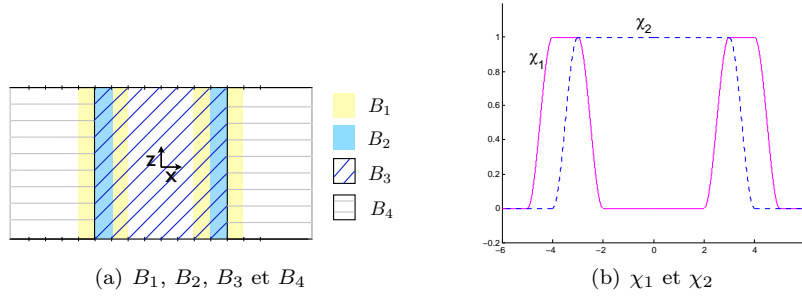
$$\chi_1(X_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } 3 \leq |X_3| \leq 4, \\ 0 & \text{si } |X_3| \leq 2 \text{ ou } |X_3| \geq 5. \end{cases} \quad \chi_2(X_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } |X_3| \leq 3, \\ 0 & \text{si } |X_3| \geq 4, \end{cases} \quad (7.5.16)$$

Remarquons que les supports de  $\nabla\chi_1$  et de  $\nabla\chi_2$  sont inclus dans la zone où  $a = 1$ . On introduit aussi les domaines  $B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$  ainsi que les bords  $\Gamma_1^\pm$  (cf. Fig. 7.1(a)) :

$$B_1 := \{(X_1, X_2, X_3) \in B \text{ tels que } 2 \leq |X_3| \leq 5\}, \quad B_2 := \{(X_1, X_2, X_3) \in B \text{ tels que } 3 \leq |X_3| \leq 4\},$$

$$B_3 := \{(X_1, X_2, X_3) \in B \text{ tels que } |X_3| \leq 4\}, \quad B_4 := \{(X_1, X_2, X_3) \in B \text{ tels que } |X_3| \geq 3\},$$

$$\Gamma_1^\pm := \{(X_1, X_2, X_3) \in B \text{ tels que } \pm X_3 = 2 \text{ ou } \pm X_3 = 5\}.$$

FIGURE 7.1 – Fonctions de troncature et sous domaines de  $B$ 

Soient  $\mathcal{W}_n = (1 - \chi_2)\mathcal{U}_n$  et  $\mathcal{Z}_n = \chi_2\mathcal{U}_n$ . On va montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\mathcal{W}_n}{\sqrt{1 + (X_3)^2}} \right\|_{L^2(B)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\mathcal{Z}_n}{\sqrt{1 + (X_3)^2}} \right\|_{L^2(B)} = 0. \quad (7.5.17)$$

On obtiendra alors immédiatement une contradiction car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\mathcal{U}_n}{\sqrt{1 + (X_3)^2}} \right\|_{L^2(B)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\mathcal{W}_n}{\sqrt{1 + (X_3)^2}} \right\|_{L^2(B)} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\mathcal{Z}_n}{\sqrt{1 + (X_3)^2}} \right\|_{L^2(B)}.$$

Tout d'abord, on introduit l'espace

$$W_0^1(B_4) := \left\{ w \in H_{loc}^1(B_4) \text{ périodiques telles que } w(X_1, X_2, \pm 3) = 0, \int_{B_4} \frac{|w|^2}{1 + (X_3)^2} + |\nabla w|^2 < +\infty \right\}$$

On munit  $W_1^0(B_4)$  de la norme  $\|w\|_{W_1^0(B_4)} = \|\nabla w\|_{W_1^0(B_4)}$ . Par intégration par parties (cf. lemme 5.4.2 de [Néd01]) et en utilisant la densité des fonctions de  $C_{per}^\infty(B_4)$  dans  $W_0^1(B_4)$  (cf. [Ben07]), on peut montrer que toute fonction  $w \in W_1^0(B_4)$  satisfait

$$\|\nabla w\|_{L^2(B_4)}^2 = \|\operatorname{curl} w\|_{L^2(B_4)}^2 + \|\operatorname{div} w\|_{L^2(B_4)}^2.$$

Comme il est clair que  $\mathcal{W}_n \in W_1^0(B_4)$ , alors

$$\|\nabla \mathcal{W}_n\|_{L^2(B)}^2 = \|\nabla \mathcal{W}_n\|_{L^2(B_4)}^2 = \|\operatorname{curl} \mathcal{W}_n\|_{L^2(B_4)}^2 + \|\operatorname{div} \mathcal{W}_n\|_{L^2(B_4)}^2,$$

Mais,

$$\operatorname{div} \mathcal{W}_n = (1 - \chi_2)\operatorname{div} \mathcal{U}_n + \nabla \chi_2 \cdot \mathcal{U}_n$$

Or  $\nabla \chi_2 \cdot \mathcal{U}_n$  est à support dans  $B_2$  et  $(1 - \chi_2)\operatorname{div} \mathcal{U}_n = (1 - \chi_2)\operatorname{div} (a\mathcal{U}_n)$  puisque le support de  $(1 - \chi_2)$  est inclus dans la zone où  $a = 1$ . Donc,

$$\|\operatorname{div} \mathcal{W}_n\|_{L^2(B_4)}^2 \leq \|\operatorname{div} (a\mathcal{U}_n)\|_{L^2(B)}^2 + \|\chi_2'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\mathcal{U}_n\|_{L^2(B_2)}^2$$

De même,

$$\|\operatorname{curl} \mathcal{W}_n\|_{L^2(B_4)}^2 \leq \|\operatorname{curl} \mathcal{U}_n\|_{L^2(B)}^2 + \|\chi_2'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\mathcal{U}_n\|_{L^2(B_2)}^2$$

si bien que

$$\|\nabla \mathcal{W}_n\|_{L^2(B)}^2 \leq \|\operatorname{curl} \mathcal{U}_n\|_{L^2(B)}^2 + \|\operatorname{div} (a\mathcal{U}_n)\|_{L^2(B)}^2 + 2\|\chi_2'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\mathcal{U}_n\|_{L^2(B_2)}^2.$$

Puis en utilisant l'inégalité de Hardy (voir [Bre99]),

$$\left\| \frac{\mathcal{W}_n}{\sqrt{1 + (X_3)^2}} \right\|_{L^2(B)}^2 \leq C \left( \|\operatorname{curl} \mathcal{U}_n\|_{L^2(B)}^2 + \|\operatorname{div} (a\mathcal{U}_n)\|_{L^2(B)}^2 + 2\|\chi_2'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\mathcal{U}_n\|_{L^2(B_2)}^2 \right). \quad (7.5.18)$$

Par ailleurs  $\mathcal{Z}_n = \chi_2 \mathcal{U}_n$  est à support dans  $B_3$  et satisfait  $\mathcal{Z}_n \times e_3 = 0$  sur les bords inférieur et supérieur de  $B_4$ . Alors, la proposition 7.5.7 (que l'on peut facilement généraliser aux fonctions périodiques) donne

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_n\|_{L^2(B)}^2 &= \|\mathcal{Z}_n\|_{L^2(B_3)}^2 \leq C \left( \|\operatorname{curl} \mathcal{Z}_n\|_{L^2(B_3)}^2 + \|\operatorname{div}(a\mathcal{Z}_n)\|_{L^2(B_3)}^2 \right), \\ &\leq C \left( \|\operatorname{curl} \mathcal{U}_n\|_{L^2(B)}^2 + \|\operatorname{div}(a\mathcal{U}_n)\|_{L^2(B)}^2 + \|\chi_2'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\mathcal{U}_n\|_{L^2(B_2)}^2 \right). \end{aligned} \quad (7.5.19)$$

Pour terminer la preuve et montrer (7.5.17), il suffit de montrer que  $\|\mathcal{U}_n\|_{L^2(B_2)}^2$  tend vers 0. En effet, si  $\|\mathcal{U}_n\|_{L^2(B_2)}^2$  tend vers 0, alors les membres de droite des inégalités (7.5.19) et (7.5.19) tendent vers 0 (par l'hypothèse (b)  $\|\operatorname{div}(a\mathcal{U}_n)\|_{L^2(B)}$  et  $\|\operatorname{curl} \mathcal{U}_n\|_{L^2(B)}$  tendent vers 0).

Posons  $\mathcal{V}_n = \chi_1 \mathcal{U}_n$ . Comme la norme  $L_2$  à poids de  $\mathcal{U}_n$  est bornée dans  $B$ , alors dans tout domaine borné, la norme  $L^2$  de  $\mathcal{U}_n$  est bornée. Donc,

$$\|\mathcal{V}_n\|_{L^2(B_1)} + \|\operatorname{div} \mathcal{V}_n\|_{L^2(B_1)} + \|\operatorname{curl} \mathcal{V}_n\|_{L^2(B_1)} \leq C, \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_n \times n = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\pm.$$

Par conséquent,  $\mathcal{V}_n$  est bornée dans  $H^1(B^1)$  (on applique la proposition 7.5.7 en remarquant que  $B_1$  est l'union de deux polyèdres convexes). Donc  $\mathcal{V}_n$  tend fortement vers une fonction  $\mathcal{W}$  dans  $L^2(B_1^\pm)$ . Mais comme on sait que  $\mathcal{U}_n$  tend faiblement vers 0 dans tout sous ensemble borné de  $B$ , alors  $\mathcal{V}_n$  tend fortement vers 0 et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U}_n\|_{L^2(B_2)} = 0. \quad (7.5.20)$$

ce qui termine la preuve. □

En utilisant l'inégalité de Friedrichs (7.5.15), on déduit immédiatement par le théorème de Lax-Milgram un premier résultat d'existence et d'unicité :

**Proposition 7.5.8.** *Soient trois fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  telles que*

- $f \in L^2(B)$ ,  $g \in L^2(B)$ ,
- $\sqrt{1 + (X_3)^2} h \in L^2(B)$ .

*Alors, le problème variationnel, chercher  $\mathcal{U} \in X_a^0$  telle que,  $\forall \mathcal{V} \in X_a^0$ ,*

$$\int_B \operatorname{curl} \mathcal{U} \cdot \overline{\operatorname{curl} \mathcal{V}} + \int_B \operatorname{div}(a\mathcal{U}) \cdot \overline{\operatorname{div}(a\mathcal{V})} = \int_B f \cdot \overline{\operatorname{curl} \mathcal{V}} + \int_B g \cdot \overline{\operatorname{div}(a\mathcal{V})} + \int_B h \cdot \overline{\mathcal{V}}$$

*admet une solution unique.*

### 7.5.3 Résultat d'existence et d'unicité

**Proposition 7.5.9.** *Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions vérifiant*

- $f \in L_{per}^2(\mathbb{R}^3)$ ,
- $\operatorname{div} f = 0$ ,
- $g \in L_{per}^2(\mathbb{R}^3)$ .

*Le problème, chercher  $\mathcal{U} \in X_a^0(B)$  telle que*

$$\begin{cases} \operatorname{div} a\mathcal{U} = g \text{ dans } \mathcal{D}'(B), \\ \operatorname{curl} \mathcal{U} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(B). \end{cases} \quad (7.5.21)$$

*admet une solution unique.*

*Démonstration.* La preuve est une adaptation de la preuve du théorème 5 de [Cia05] au domaine non borné  $B$ .

1. Passage à un problème variationnel : soit  $\mathcal{U}$  une solution de (7.5.21) et  $\varphi \in X_a^0(B)$ . Alors

$$\forall \varphi \in X_a^0(B) \quad \int_B \operatorname{curl} \mathcal{U} \cdot \operatorname{curl} \varphi + \int_B \operatorname{div}(a\mathcal{U}) \cdot \operatorname{div}(a\varphi) = \int_B f \cdot \operatorname{curl} \varphi + \int_B g \operatorname{div}(a\varphi) \quad (7.5.22)$$

2. Résolution du problème variationnel : d'après la proposition précédente 7.5.8, (7.5.22) admet une solution unique.
3. Retour à l'équation aux dérivées partielles initiale :

– Equation sur la divergence : soit  $\mathcal{U}$  la solution du problème variationnel (7.5.22). Nous montrons que  $\mathcal{U}$  est solution de (7.5.21). Remarquons d'abord que l'équation (7.5.22) reste vraie pour toute fonction test  $\varphi$  appartenant à  $X_a(B)$  : en effet, pour  $i = 1, 2$  ou  $3$ ,  $\operatorname{div} a \nabla p_i^a = \operatorname{curl} \nabla p_i^a = 0$ . Soit  $h$  une fonction de  $\mathcal{D}(B)$  telle que  $\int_B h = 0$ . Alors il existe  $p \in W^1(B)$  telle que  $\operatorname{div}(a \nabla p) = h$ . Dans l'égalité (7.5.22), on peut donc prendre  $\varphi = \nabla p$ . Donc,

$$\int_B (\operatorname{div}(a \mathcal{U}) - g) h = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(B) \text{ telle que } \int_B h = 0$$

Mais, dans l'annexe 8.7.1, on démontre le lemme 7.9.3 que l'on rappelle ici :

**Lemme.** *Soit  $h$  une fonction  $L^2(B)$  à support compact. Alors il existe une suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que*

- $\int_B h_n = 0$ ,
- $h_n$  est à support compact (le support varie avec  $n$ ),
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n - h\|_{L^2(B)} = 0$ .

En utilisant le lemme précédent et le fait que  $\operatorname{div}(a \mathcal{U}) - g \in L^2(B)$ , l'égalité précédente est vraie pour toute fonction de  $\mathcal{D}(B)$ . Cela signifie exactement que

$$\operatorname{div}(a \mathcal{U}) = g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(B)$$

– Equation sur le rotationnel : On rappelle d'abord le lemme 7.9.5 démontré en annexe 8.7.1 :

**Lemme.** *Soit  $f \in L^2_{per}(\mathbb{R}^3)^3$  vérifiant  $\operatorname{div} f = 0$ . Alors il existe  $w_a \in X_a(\mathbb{R}^3)$  telle que*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a w_a) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \operatorname{curl}(w_a) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3. \end{cases}$$

Comme  $\operatorname{div} f = 0$ , le lemme précédent nous garantit l'existence d'une fonction  $\mathcal{W} \in X_a(B)$  telle que

$$\operatorname{curl} \mathcal{W} = f \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(a \mathcal{W}) = 0.$$

Donc  $\mathcal{W} - \mathcal{U}_1 \in X_a(B)$  et

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{curl} \mathcal{W} \cdot \overline{\operatorname{curl} \varphi} &= \int_B f \cdot \overline{\operatorname{curl} \varphi} \quad \forall \varphi \in X_a, \\ \int_B \operatorname{curl} \mathcal{U}_1 \cdot \overline{\operatorname{curl} \varphi} &= \int_B f \cdot \overline{\operatorname{curl} \varphi} \quad \forall \varphi \in X_a. \end{aligned}$$

En faisant la différence entre les deux équations et en prenant  $\varphi = \mathcal{W} - \mathcal{U}_1$ , on obtient

$$\int_B |\operatorname{curl}(\mathcal{W} - \mathcal{U}_1)|^2 = 0.$$

Et donc

$$\operatorname{curl} \mathcal{U}_1 = \operatorname{curl} w = f \text{ dans } \mathcal{D}'(B).$$

□

On déduit immédiatement la propriété suivante :

**Proposition 7.5.10.** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions vérifiant*



- $f \in L^2_{per}(\mathbb{R}^3)$ ,
- $\operatorname{div} f = 0$ ,
- $g \in L^2_{per}(\mathbb{R}^3)$ ,
- $f$  et  $g$  satisfont la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  (définie en 7.3.10),

et deux constantes  $a_T = (a^1, a^2) \in \mathbb{C}^2$  et  $a_N \in \mathbb{C}$ . Le problème, chercher  $\mathcal{U} \in X_a(B)$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{div} a \mathcal{U} = g \text{ dans } \mathcal{D}'(B), \\ \operatorname{curl} \mathcal{U} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(B), \\ \langle \ell_T(\mathcal{U}) \rangle = a_T, \\ \langle \ell_N(\mathcal{U}) \rangle = a_N, \end{cases} \quad (7.5.23)$$

admet une solution unique qui vérifie

$$\|\mathcal{U}\|_{X_a} \leq C \left( |a_N| + |a_T| + \|g\|_{L^2(B)} + \|f\|_{L^2(B)} \right) \quad (7.5.24)$$

Ainsi, les problèmes de champs proches (7.3.6) et (7.3.7) vont être bien définis aux trois fonctions du noyau près. En imposant de plus les quantités  $\langle \ell_T(\mathcal{E}_n) \rangle$ ,  $\langle \ell_N(\mathcal{E}) \rangle$ ,  $\langle \ell_T(\mathcal{H}_n) \rangle$ ,  $\langle \ell_N(\mathcal{H}) \rangle$ , on détermine par contre complètement la solution. Ces données sont d'ailleurs fournies par les conditions de raccord (7.4.2).

Noter par ailleurs que les sauts  $[\ell_T(\mathcal{E}_n)]$  et  $[\ell_N(\mathcal{E}_n)]$  (contrairement aux moyennes) ne peuvent pas être imposées, les fonctions du noyau  $\mathcal{N}_a(\mathcal{P})$  n'ayant pas de saut (cf. (7.5.11)). En fait ces données découlent de la résolution des problèmes de champs proches. Elle seront utilisées pour la construction des champs lointains.

## 7.6 Cadre variationnel pour la résolution des problèmes de champs lointains

Les problèmes de champs lointains sont de la forme suivante (une fois réécrits sous la forme d'une équation d'ordre 2) : Chercher  $\mathbf{E}$  vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{E} = f \text{ dans } \Omega^\pm, \\ [(\mathbf{E})_T]_\Gamma = g_1 \text{ sur } \Gamma, \\ [\operatorname{curl} \mathbf{E} \times n]_\Gamma = g_2 \text{ sur } \Gamma, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} \times n = i\omega(\mathbf{E})_T \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm. \end{cases} \quad (7.6.1)$$

ainsi que les conditions périodiques

$$\begin{cases} \mathbf{E} \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{E} \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^+}, & \operatorname{curl} \mathbf{E} \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^-} = \operatorname{curl} \mathbf{E} \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^+}, \\ \mathbf{E} \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{E} \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^+}, & \operatorname{curl} \mathbf{E} \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^-} = \operatorname{curl} \mathbf{E} \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^+}, \end{cases} \quad (7.6.2)$$

Par convention  $n$  est la normale sortant sur  $\Sigma_{x_3}^\pm$  et  $n := e_3$  sur  $\Gamma$ .

Il est naturel de chercher  $\mathbf{E}$  dans l'espace variationnel  $H(\Omega)$  défini par

$$H(\Omega) := \left\{ \mathbf{E} \in H(\operatorname{curl}, \Omega^+) \cap H(\operatorname{curl}, \Omega^-) \text{ telles que } (\mathbf{E})_T \in L^2_t(\Sigma_{x_3}^\pm), \right. \\ \left. \mathbf{E} \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{E} \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^+} \text{ et } \mathbf{E} \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{E} \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^+} \right\}. \quad (7.6.3)$$

**Proposition 7.6.1.** *Si  $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $g_2 \in H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $f \in L^2(\Omega^\pm)$  est à support compact dans  $\Omega^\pm$ , alors le problème 7.6.1 admet une unique solution appartenant à  $H(\Omega)$ .*

*Démonstration.* Commençons par introduire l'espace  $\mathcal{H}(\Omega)$  :

$$\mathcal{H}(\Omega) := \left\{ \mathbf{E} \in H(\operatorname{curl}, \Omega), \text{ telles que } \mathbf{E}_T \in L_t^2(\Sigma_{x_3}^\pm), \right. \\ \left. \mathbf{E} \times e_{1|\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{E} \times e_{1|\Sigma_{x_1}^+} \text{ et } \mathbf{E} \times e_{2|\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{E} \times e_{2|\Sigma_{x_2}^+} \right\}. \quad (7.6.4)$$

Nous munissons l'espace  $\mathcal{H}(\Omega)$  de la norme

$$\|\mathbf{E}\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 = \|\mathbf{E}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{curl} \mathbf{E}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{E}_T\|_{L^2(\Sigma)}^2.$$

Pour nous ramener à cet espace variationnel, nous relevons le saut  $g_1$ . Nous définissons d'abord  $\tilde{g}_1 := (g_1^1, g_1^2, 0)^T$  puis le relèvement  $\mathcal{R}(g_1) \in H_{per}^1(\Omega^\pm)$

$$\mathcal{R}(g_1) := \begin{cases} \tilde{g}_1 \chi(z) & \text{dans } \Omega^+, \\ 0 & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

où  $\chi$  est une fonction de troncature très régulière valant 1 dans un voisinage de  $\Gamma$  et s'annulant dans un voisinage de  $\Sigma$ . Le relèvement ainsi construit vérifie

$$\|\mathcal{R}(g_1)\|_{H^1(\Omega^\pm)} \leq C \|g_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

et

$$[\operatorname{curl} \mathcal{R}(g_1) \times n]_\Gamma = \operatorname{curl}_\Gamma(g_1) e_3 \times e_3 = 0.$$

Nous cherchons  $\mathbf{E}$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathcal{R}(g_1). \quad (7.6.5)$$

Il est clair que  $[\tilde{\mathbf{E}}_T]_\Gamma = 0$  et donc que si  $\mathbf{E} \in H(\Omega)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathcal{H}(\Omega)$ . De plus  $\tilde{\mathbf{E}}$  vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{E}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{f} & \text{dans } \Omega^\pm, \\ [\operatorname{curl} \tilde{\mathbf{E}} \times n]_\Gamma = g_2 & \text{sur } \Gamma, \\ \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{E}} \times n = ik(\tilde{\mathbf{E}})_T & \text{sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \\ \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{E}} \times e_{1|\Sigma_{x_1}^-} = \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{E}} \times e_{1|\Sigma_{x_1}^+}, \quad \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{E}} \times e_{2|\Sigma_{x_2}^-} = \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{E}} \times e_{2|\Sigma_{x_2}^+}. \end{cases} \quad (7.6.6)$$

où,  $\tilde{f} := f - (\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathcal{R}(g_1) - \omega^2 \mathcal{R}(g_1))$  appartient à  $L^2(\Omega)$ .

Alors,  $\forall \varphi \in \mathcal{H}$

$$a(\tilde{\mathbf{E}}, \varphi) = L(\varphi), \quad (7.6.7)$$

où  $a$  et  $L$  sont définies par,

$$a(\tilde{\mathbf{E}}, \varphi) := \int_\Omega \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \overline{\operatorname{curl} \varphi} - \omega^2 \int_\Omega \tilde{\mathbf{E}} \cdot \overline{\varphi} - ik \int_\Sigma \tilde{\mathbf{E}}_T \cdot \overline{\varphi_T}$$

et,

$$L(\varphi) := \int_\Omega \tilde{f} \cdot \overline{\varphi} + \langle \tilde{g}_2, \varphi_T \rangle_\Gamma,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  désigne le produit de dualité entre  $H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $H^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ . Or nous savons (en utilisant le chapitre 4 de [Mon03]) que le problème 7.6.7 a une solution unique. Il est ensuite possible de retrouver l'EDP 7.6.6 facilement en utilisant des fonctions tests bien choisies. On a donc réussi à construire une solution au problème 7.6.1 sous la forme  $\mathbf{E} := \tilde{\mathbf{E}} + \mathcal{R}(g_1)$ . Par ailleurs, comme on peut montrer que ce problème admet au plus une solution dans  $H(\Omega)$ , 7.6.1 est bien posé.  $\square$

## 7.7 Construction des termes du développement asymptotique

Nous pouvons maintenant construire les différents termes du développement asymptotique. Nous commençons par construire les termes d'ordre 0 puis nous donnons un résultat général d'existence et d'unicité. Enfin, nous obtenons une expression semi-explicite de tous les termes du développement.

Nous cherchons les termes de champ lointain  $\mathbf{E}_n$  et  $\mathbf{H}_n$  dans l'espace  $\mathcal{H}(\Omega)$  défini par (7.6.3). Les champs proches  $\mathcal{E}_n$  sont dans l'espace  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma, V_\epsilon^+(B))$  et les champs  $\mathcal{H}_n$  sont dans l'espace  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma, V_\mu^+(B))$ , où  $V_\mu^+(B)$  et  $V_\epsilon^+(B)$  sont définis par (7.3.9-7.3.8).

### Une nouvelle écriture des problèmes récurrents

Nous souhaitons construire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le système d'équations constituées des équations de champs lointains (7.2.1), des équations de champs proches (7.3.6-7.3.7) et des conditions de raccord (7.4.2). On va en fait réécrire ce système (7.2.1-7.3.6-7.3.7-7.4.2) en tenant compte de l'analyse faite dans les parties 7.6 et 7.5 et en particulier du fait qu'il faut spécifier les sauts tangentiels pour les champs lointains et les moyennes tangentielles et normales pour les champs proches. On va alors résoudre le système récurrent suivant :

$\forall n \in \mathbb{N}$ , chercher  $\mathbf{E}_n \in H(\Omega)$ ,  $\mathbf{H}_n \in H(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}_n \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma, V_\epsilon^+(B))$ ,  $\mathcal{H}_n \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma, V_\mu^+(B))$  tels que

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E}_n - \omega^2 \mathbf{E}_n = \delta_0^n F, \\ [(\mathbf{E}_n)_T]_\Gamma = g_n \times e_3, \\ [\operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_3]_\Gamma = i\omega h_n, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^+} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^-}, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^+} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^-}, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times n - i\omega (\mathbf{E}_n^T) = 0 \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_n := \frac{1}{i\omega} \operatorname{curl} \mathbf{E}_n$$

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathcal{E}_n = -\mathcal{A}_0 \mathcal{E}_{n-1} + i\omega \mu \mathcal{H}_{n-1}, \\ \operatorname{div} (\epsilon \mathcal{E}_n) = -\epsilon \operatorname{div}_\Gamma (\mathcal{E}_{n-1})_T. \end{cases} \quad (7.7.1)$$

$$\begin{cases} -\operatorname{curl} \mathcal{H}_n = +\mathcal{A}_0 \mathcal{H}_{n-1} + i\omega \epsilon \mathcal{E}_{n-1}, \\ \operatorname{div} (\mu \mathcal{H}_n) = -\mu \operatorname{div}_\Gamma (\mathcal{H}_{n-1})_T. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \ell_T^\pm(\mathcal{E}_n) \rangle = \langle (\mathbf{E}_n)_T \rangle_\Gamma \\ \langle \ell_T^\pm(\mathcal{H}_n) \rangle = \langle (\mathbf{H}_n)_T \rangle_\Gamma \\ \langle \ell_N^\pm(\mathcal{E}_n) \rangle = -\frac{1}{i\omega} \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_n)_T \rangle_\Gamma \\ \langle \ell_N^\pm(\mathcal{H}_n) \rangle = \frac{1}{i\omega} \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_n)_T \rangle_\Gamma \end{cases}$$

avec,

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{\tau} \left( \int_{B_{h_0}} (-\mathcal{A}_0(\mathcal{E}_{n-1}) + i\omega \mu \mathcal{H}_{n-1})_T \right) - \left( \sum_{k=1}^n (e_3 \times C_{n,k}^+) h_0^k - \sum_{k=1}^n (e_3 \times C_{n,k}^-) (-h_0)^k \right), \\ h_n &= \frac{1}{\tau} \left( \int_{B_{h_0}} (-\mathcal{A}_0(\mathcal{E}_{n-1}) - i\omega \mu \mathcal{H}_{n-1})_T \right) - \left( \sum_{k=1}^n (e_3 \times D_{n,k}^+) h_0^k - \sum_{k=1}^n (e_3 \times D_{n,k}^-) (-h_0)^k \right). \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

### 7.7.1 Construction explicite des termes $\mathbf{E}_0$ , $\mathbf{H}_0$ , $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{H}_0$

#### 7.7.1.1 Construction de $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{H}_0$

D'après (7.7.1),  $\mathbf{E}_0$  satisfait les conditions de sauts suivantes,

$$[n \times \mathbf{E}_0]_\Gamma = [n \times \text{curl } \mathbf{E}_0]_\Gamma = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$\mathbf{E}_0$  est donc l'unique solution du problème : chercher  $\mathbf{E}_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \text{curl curl } \mathbf{E}_0 - \omega^2 \mathbf{E}_0 = F \text{ dans } \Omega^\pm, \\ \text{curl } \mathbf{E}_0 \times n - i\omega \mathbf{E}_0 = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (7.7.3)$$

Le problème limite est donc comme prévu le problème sans couche mince périodique. On en déduit alors  $\mathbf{H}_0$

$$\mathbf{H}_0 := \frac{1}{i\omega} \text{curl } \mathbf{E}_0. \quad (7.7.4)$$

#### 7.7.1.2 Construction de $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{H}_0$

$\mathcal{E}_0$  vérifie le système d'équations : chercher  $\mathcal{E}_0 \in V_\epsilon^+(B)$

$$\begin{cases} \text{curl } \mathcal{E}_0 = 0 \text{ dans } B, \\ \text{div}(\epsilon \mathcal{E}_0) = 0 \text{ dans } B, \end{cases}$$

et les conditions de raccords

$$\langle \ell_T(\mathcal{E}_0) \rangle = \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma, \quad \langle \ell_N^\pm(\mathcal{E}_0) \rangle = -\frac{1}{i\omega} \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma$$

On remarque que les variables macroscopiques  $x_1$  et  $x_2$  interviennent maintenant comme des paramètres. La proposition 7.5.3 et la remarque 7.5.5 donnent

$$\mathcal{E}_0 = \langle \mathbf{E}_0^1 \rangle_\Gamma \nabla p_1^\epsilon + \langle \mathbf{E}_0^2 \rangle_\Gamma \nabla p_2^\epsilon - \frac{1}{i\omega} \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \nabla p_3^\epsilon. \quad (7.7.5)$$

Dans l'expression précédente, nous avons séparé les variables rapides des variables lentes. Par ailleurs, cette expression ne fait intervenir que les dérivées tangentielles des composantes tangentielles de  $\langle \mathbf{E}_0 \rangle_\Gamma$  et  $\langle \mathbf{H}_0 \rangle_\Gamma$  sur l'interface  $\Gamma$ .

Le champ  $\mathcal{H}_0 \in V_\mu^+(B)$  vérifie quant-à lui

$$\begin{cases} \text{curl } \mathcal{H}_0 = 0 \text{ dans } B, \\ \text{div}(\mu \mathcal{H}_0) = 0 \text{ dans } B. \end{cases}$$

et les conditions de raccords

$$\ell_T(\mathcal{H}_0) = \langle \mathbf{H}_0 \rangle_\Gamma, \quad \langle \ell_N^\pm(\mathcal{E}_0) \rangle = \frac{1}{i\omega} \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma,$$

si bien qu'en utilisant de nouveau la proposition 7.5.3 et la remarque 7.5.5,

$$\mathcal{H}_0 = \langle \mathbf{H}_0^1 \rangle_\Gamma \nabla p_1^\mu + \langle \mathbf{H}_0^2 \rangle_\Gamma \nabla p_2^\mu + \frac{1}{i\omega} \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \nabla p_3^\mu. \quad (7.7.6)$$

### 7.7.2 Résultat général d'existence et d'unicité du développement asymptotique

**Proposition 7.7.1.** *Pour tout entier naturel  $n$ , le problème (7.7.1) est bien posé.*

*Démonstration.* Il est clair que si le problème (7.7.1) admet une solution alors cette solution est unique. Il reste à montrer l'existence par récurrence. La démonstration se fait par récurrence. La proposition a déjà été vérifiée pour  $n = 0$  au paragraphe précédent. Supposons que pour tout  $k < n$  le système (7.7.1) admette une solution.

Dans une première étape, nous construisons  $\mathbf{E}_n$  : par hypothèse, les seconds membres  $g_n$  et  $h_n$  sont complètement définis par les formules (7.7.2). De plus ils appartiennent à  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$  et donc  $g_n \times e_3$  appartient à  $H^{1/2}(\Gamma)$  et  $h_n$  appartient à  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Donc le problème, chercher  $\mathbf{E}_n \in H(\Omega)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E}_n - \omega^2 \mathbf{E}_n = \delta_0^n F, \\ [(\mathbf{E}_n)_T]_\Gamma = g_n \times e_3, \\ [\operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_3]_\Gamma = i\omega h_n, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_{1\Sigma_{x_1}^+} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_{1\Sigma_{x_1}^-}, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_{2\Sigma_{x_2}^+} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times e_{2\Sigma_{x_2}^-}, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E}_n \times n - i\omega(E_n^T) = 0 \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \end{cases}$$

admet une unique solution  $\mathbf{E}_n$ . Cette solution est très régulière dans un voisinage de l'interface  $\Gamma$ . On en déduit immédiatement le champ  $\mathbf{H}_n$  par la formule  $\mathbf{H}_n = \frac{1}{i\omega} \operatorname{curl} \mathbf{E}_n$ . Il reste à construire  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$ . Nous rappelons que le comportement de  $\mathcal{E}_n$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}^\infty$  : pour  $X_3$  grand, il est donné par

$$\mathcal{E}_n = \sum_{k=0}^n C_{n,k}^\pm(x_1, x_2) X_3^k + g^\pm,$$

où les fonctions  $C_{n,k}^\pm$  sont connues pour  $k \geq 1$  et  $g^\pm$  sont des fonctions exponentiellement décroissantes. Soit  $\chi$  une fonction de troncature appartenant à  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  qui satisfait

$$\chi(X_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_3 > 2, \\ 0 & \text{si } X_3 < 1. \end{cases}$$

Nous définissons la fonctions  $\mathcal{P}_n$  par

$$\mathcal{P}_n = \chi(X_3) \sum_{k=1}^n C_{n,k}^+(x_1, x_2) X_3^k + \chi(-X_3) \sum_{k=1}^n C_{n,k}^-(x_1, x_2) X_3^k.$$

Il est clair que  $\ell_T^\pm(\mathcal{P}_n) = 0$  et  $\ell_N^\pm(\mathcal{P}_n) = 0$ . Par ailleurs, en utilisant les formules (7.3.14) et (7.3.15), on peut montrer facilement que les seconds membres  $-\mathcal{A}_0(\mathcal{E}_{n-1}) + i\omega\mu\mathcal{H}_{n-1} - \operatorname{curl} \mathcal{P}_n$  et  $-\epsilon \operatorname{div}_\Gamma(\mathcal{E}_{n-1}) - \epsilon_\infty \operatorname{div} \mathcal{P}_n$  sont exponentiellement décroissants quand  $X_3$  tend vers l'infini si bien que, d'après la proposition 7.5.10, on peut construire  $\mathcal{V}_n$ , unique solution appartenant à  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma, X_a(B))$  satisfaisant

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathcal{V}_n = -\mathcal{A}_0(\mathcal{E}_{n-1}) + i\omega\mu\mathcal{H}_{n-1} - \operatorname{curl} \mathcal{P}_n, \\ \operatorname{div}(\epsilon \mathcal{V}_n) = -\epsilon \operatorname{div}_\Gamma(\mathcal{E}_{n-1}) - \epsilon_\infty \operatorname{div} \mathcal{P}_n, \\ \langle \ell_T(\mathcal{V}_n) \rangle = 0, \\ \langle \ell_N(\mathcal{V}_n) \rangle = 0. \end{cases}$$

On construit alors  $\mathcal{E}_n$  sous la forme

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{V}_n + \mathcal{P}_n + a \nabla p_1^\epsilon + b \nabla p_2^\epsilon + c \nabla p_3^\epsilon.$$

Les conditions de raccords  $\langle \ell_N(\mathcal{E}_n) \rangle = \langle (\mathbf{E}_n)_N \rangle_\Gamma$  et  $\langle \ell_T(\mathcal{E}_n)_T \rangle = \langle (\mathbf{E}_n)_T \rangle_\Gamma$  donnent  $a = \langle \mathbf{E}_n \cdot e_1 \rangle_\Gamma$ ,  $b = \langle \mathbf{E}_n \cdot e_2 \rangle_\Gamma$  et  $c = \langle \mathbf{E}_n \cdot e_3 \rangle_\Gamma$  ce qui termine la construction de  $\mathcal{E}_n$ . La constructions de  $\mathcal{H}_n$  est similaire.  $\square$

L'objectif des paragraphes qui suivent est de donner une expression plus explicite des champs  $\mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{H}_n$ ,  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$ . Ces expressions sont par exemple utiles pour la construction de conditions de transmission approchées à tout ordre. Les parties 7.7.3 et 7.7.4 expliquent la démarche pour obtenir ces expressions explicites. Plutôt techniques, elles ne sont pas nécessaires à la compréhension de la suite du document.

### 7.7.3 Vers la construction explicite du développement asymptotique : construction des termes $\mathbf{E}_1$ , $H_1$ , $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{H}_1$

Pour commencer nous introduisons la notation suivante :

**Notation 7.7.2.** Soit  $V(x_1, x_2, z)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .  $\forall i \in \{0, 1\}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}$ , nous définissons  $(V^i)^{p,q}$  par

$$(V^i)^{p,q}(x_1, x_2, z) := \begin{cases} \frac{\partial^{p+q} V^1(x_1, x_2, z)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} & \text{si } i = 0, \\ \frac{\partial^{p+q} V^2(x_1, x_2, z)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

Nous introduisons aussi les opérateurs  $\mathcal{A}_0^{1,0}$ ,  $\mathcal{A}_0^{0,1}$ ,  $\mathcal{B}_0^{1,0}$  et  $\mathcal{B}_0^{0,1}$  qui vont nous permettre de séparer les dérivées en  $x_1$  et  $x_2$  :

$$\mathcal{A}_0^{10} \mathcal{E} := e_1 \times \mathcal{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\mathcal{E}^3 \\ \mathcal{E}^2 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_0^{01} \mathcal{E} := e_2 \times \mathcal{E} = \begin{vmatrix} \mathcal{E}^3 \\ 0 \\ -\mathcal{E}^1 \end{vmatrix}. \quad (7.7.7)$$

$$\mathcal{B}_0^{10} \mathcal{E} = \mathcal{E} \cdot e_1, \quad \mathcal{B}_0^{01} \mathcal{E} = \mathcal{E} \cdot e_2. \quad (7.7.8)$$

On remarque que

$$\text{Div} \left( \mathcal{A}_0^{1,0} \mathcal{E} \right) = -(\text{Curl} \mathcal{E} \cdot e_1) \quad \text{Div} \left( \mathcal{A}_0^{0,1} \mathcal{E} \right) = -(\text{Curl} \mathcal{E} \cdot e_2) \quad (7.7.9)$$

On peut alors réécrire les équations (7.3.6-7.3.7) de champs proches à l'aide de ces opérateurs :

$$\begin{cases} \text{curl} \mathcal{E}_n = -\mathcal{A}_0^{1,0} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_1} \right) - \mathcal{A}_0^{0,1} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_2} \right) + i\omega \mu \mathcal{H}_{n-1}, \\ \text{div} (\epsilon \mathcal{E}_n) = -\epsilon \left( \mathcal{B}_0^{1,0} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_1} \right) + \mathcal{B}_0^{0,1} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_2} \right) \right). \end{cases} \quad (7.7.10)$$

et,

$$\begin{cases} -\text{curl} \mathcal{H}_n = +\mathcal{A}_0^{1,0} \left( \frac{\partial \mathcal{H}_{n-1}}{\partial x_1} \right) + \mathcal{A}_0^{0,1} \left( \frac{\partial \mathcal{H}_{n-1}}{\partial x_2} \right) + i\omega \epsilon \mathcal{E}_{n-1}, \\ \text{div} (\mu \mathcal{H}_n) = -\mu \left( \mathcal{B}_0^{1,0} \left( \frac{\partial \mathcal{H}_{n-1}}{\partial x_1} \right) + \mathcal{B}_0^{0,1} \left( \frac{\partial \mathcal{H}_{n-1}}{\partial x_2} \right) \right), \end{cases} \quad (7.7.11)$$

**Remarque 7.7.3.** La distinction entre les dérivations en  $x_1$  et en  $x_2$  est très artificielle. Il aurait été préférable de continuer à travailler avec les opérateurs de dérivation surfacique  $\text{div}_\Gamma$ ,  $\text{curl}_\Gamma$  et  $\vec{\text{curl}}_\Gamma$  mais nous n'y sommes pas parvenus.

#### 7.7.3.1 Réécriture de $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{H}_0$

Pour comprendre la construction à tout ordre, on va écrire  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{H}_0$  à l'aide de quatre séries de fonctions profiles :

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}_0)_0^{0,0} &= \nabla p_1^\epsilon, \\ (\mathcal{V}_1)_0^{0,0} &= \nabla p_2^\epsilon, \\ (\tilde{\mathcal{V}}_0)_0^{0,0} &= 0, \quad (\tilde{\mathcal{V}}_0)_0^{0,1} = \frac{1}{i\omega} \nabla p_3^\epsilon, \quad (\tilde{\mathcal{V}}_0)_0^{1,0} = 0 \\ (\tilde{\mathcal{V}}_1)_0^{0,0} &= 0, \quad (\tilde{\mathcal{V}}_1)_0^{0,1} = 0, \quad (\tilde{\mathcal{V}}_1)_0^{1,0} = -\frac{1}{i\omega} \nabla p_3^\epsilon. \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_0)_0^{0,0} &= \nabla p_1^\mu, \\ (\mathcal{W}_1)_0^{0,0} &= \nabla p_2^\mu, \\ (\tilde{\mathcal{W}}_0)_0^{0,0} &= 0, \quad (\tilde{\mathcal{W}}_0)_0^{1,0} = 0 \text{ et } (\tilde{\mathcal{W}}_0)_0^{0,1} = -\frac{1}{i\omega} \nabla p_3^\mu, \\ (\tilde{\mathcal{W}}_1)_0^{0,0} &= 0, \quad (\tilde{\mathcal{W}}_1)_0^{1,0} = \frac{1}{i\omega} \nabla p_3^\mu \text{ et } (\tilde{\mathcal{W}}_1)_0^{0,1} = 0. \end{aligned}$$

On peut alors exprimer  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{H}_0$  à l'aide de ces fonctions profiles et des dérivées tangentielles de  $\langle(\mathbf{E}_0)_T\rangle_\Gamma$  et  $\langle(\mathbf{H}_0)_T\rangle_\Gamma$ .

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_\Gamma^{0,0} (\mathcal{V}_i)_0^{0,0} + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q}, \quad (7.7.12)$$

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_\Gamma^{0,0} (\mathcal{W}_i)_0^{0,0} + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q}, \quad (7.7.13)$$

**Remarque 7.7.4.** L'introduction des fonctions  $(\mathcal{V}_i)_0^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q}$  est artificielle. On peut tout de même essayer de préciser la signification des indices : on peut d'abord remarquer que ces fonctions sont toujours associées aux moyennes des champs lointains  $\langle F_0(x_1, x_2) \rangle_\Gamma$  ( $F = \mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$ ) et de leurs dérivées tangentielles. Ces fonctions ne dépendent ni de  $z$  ni des variables rapides  $X_1, X_2, X_3$ .

- L'indice  $i$  représente la composante de  $F_0$  à laquelle la fonction  $(\mathcal{V}_i)_0^{p,q}$  (ou  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q}$ ) est associée :  $i = 0$  correspond à la composante suivant  $e_1$  et  $i = 1$  correspond à la composante suivant  $e_2$ .
- L'indice  $p$  correspond à l'ordre de dérivation en  $x_1$  de la fonction  $F_0$  alors que l'indice  $q$  correspond à l'ordre de dérivation en  $x_2$ .
- Les fonctions  $(\mathcal{V}_i)_0^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q}$  interviennent dans la construction de  $\mathcal{E}_0$  alors que les fonctions  $(\mathcal{W}_i)_0^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q}$ .
- Les fonctions  $(\mathcal{V}_i)_0^{p,q}$  sont associées aux moyennes du champ électrique et de ses dérivées  $\langle \mathbf{E} \rangle_\Gamma^{p,q}$  alors que les fonctions  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q}$  sont associées aux moyennes du champ magnétique et de ses dérivées  $\langle \mathbf{H} \rangle_\Gamma^{p,q}$ .
- De même, les fonctions  $(\mathcal{W}_i)_0^{p,q}$  sont associées au champ magnétique  $\mathbf{H}$  alors que les fonctions  $(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q}$  sont associées au champ électrique  $\mathbf{E}$ .

### 7.7.3.2 Construction de $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{H}_1$

Nous construisons  $\mathbf{E}_1$  comme l'unique solution du problème : chercher  $\mathbf{E}_1 \in H(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E}_1 - \omega^2 \mathbf{E}_1 = 0 \text{ dans } \Omega^\pm \\ [(\mathbf{E}_1)_T]_\Gamma = g_1 \times e_3, \\ [e_3 \times \operatorname{curl} \mathbf{E}_0]_\Gamma = i\omega h_1, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E}_0 \times n - i\omega (\mathbf{E}_0)_T = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (7.7.14)$$

où les termes sources  $g_1$  et  $h_1$  sont définis par (7.7.1) : plus précisément,

Noter que puisque  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{H}_0$  sont dérivables à n'importe quel ordre par rapport aux variables macroscopiques  $x_1$  et en  $x_2$ , il en est de même pour  $g_1$  et  $h_1$ . Puis, nous définissons  $\mathbf{H}_1$  par

$$\mathbf{H}_1 := \frac{1}{i\omega} \mathbf{E}_1. \quad (7.7.15)$$

**Remarque 7.7.5.** Pour la construction de conditions de transmission approchée, nous donnons la formule

explicite de  $g_1$  et  $h_1$  :

$$\begin{aligned}
g_1^1 &= \left( \frac{-1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_3} \right) \langle \frac{\partial \mathbf{E}_0^1}{\partial x_2} \rangle_\Gamma + \left( \frac{-1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_3} \right) \langle \frac{\partial \mathbf{E}_0^2}{\partial x_2} \rangle_\Gamma \\
&\quad + \left( \frac{i\omega}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_2^\mu}{\partial X_1} \right) \langle \mathbf{H}_0^1 \rangle_\Gamma + \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_1} \right) \langle \text{curl}_\Gamma(\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \\
&\quad + i\omega \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_1^\mu}{\partial X_1} \right) - 1 \right) \langle \mathbf{H}_0^1 \rangle_\Gamma + \frac{1}{i\omega} \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_3} \right) - 1 \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_1, \\
g_1^2 &= \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_3} \right) \langle \frac{\partial \mathbf{E}_0^1}{\partial x_1} \rangle_\Gamma + \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_3} \right) \langle \frac{\partial \mathbf{E}_0^2}{\partial x_1} \rangle_\Gamma \\
&\quad + \left( \frac{i\omega}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_1^\mu}{\partial X_2} \right) \langle \mathbf{H}_0^1 \rangle_\Gamma + \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_2} \right) \langle \text{curl}_\Gamma(\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \\
&\quad + i\omega \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_2^\mu}{\partial X_2} \right) - 1 \right) \langle \mathbf{H}_0^2 \rangle_\Gamma + \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_3} \right) - 1 \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_2,
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
h_1^1 &= \left( \frac{-1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_1^\mu}{\partial X_3} \right) \langle \frac{\partial \mathbf{H}_0^1}{\partial x_2} \rangle_\Gamma + \left( \frac{-1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_2^\mu}{\partial X_3} \right) \langle \frac{\partial \mathbf{H}_0^2}{\partial x_2} \rangle_\Gamma \\
&\quad - i\omega \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_1} \right) \langle \mathbf{E}_0^2 \rangle_\Gamma + \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_1} \right) \langle \text{curl}_\Gamma(\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \\
&\quad - i\omega \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_1} \right) - 1 \right) \langle \mathbf{E}_0^1 \rangle_\Gamma - \frac{1}{i\omega} \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3} \right) - 1 \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_1, \\
h_1^2 &= \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_1^\mu}{\partial X_3} \right) \langle \frac{\partial \mathbf{H}_0^1}{\partial x_1} \rangle_\Gamma + \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_2^\mu}{\partial X_3} \right) \langle \frac{\partial \mathbf{H}_0^2}{\partial x_1} \rangle_\Gamma \\
&\quad - i\omega \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_2} \right) \langle \mathbf{E}_0^1 \rangle_\Gamma + \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_2} \right) \langle \text{curl}_\Gamma(\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \\
&\quad - i\omega \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_2} \right) - 1 \right) \langle \mathbf{E}_0^1 \rangle_\Gamma - \frac{1}{i\omega} \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3} \right) - 1 \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_2.
\end{aligned}$$

Quand  $\mu$  et  $\epsilon$  sont symétriques, c'est à dire que

$$\begin{cases} \mu(-X_1, X_2, X_3) = \mu(X_1, X_2, X_3), & \mu(X_1, -X_2, X_3) = \mu(X_1, X_2, X_3), & \mu(X_1, -X_2, X_3) = \mu(X_1, X_2, -X_3), \\ \epsilon(-X_1, X_2, X_3) = \epsilon(X_1, X_2, X_3), & \epsilon(X_1, -X_2, X_3) = \epsilon(X_1, X_2, X_3), & \epsilon(X_1, -X_2, X_3) = \epsilon(X_1, X_2, -X_3) \end{cases} \quad (7.7.16)$$

les expressions précédentes sont considérablement simplifiées : on a en fait

$$\begin{aligned}
g_1^1 &= i\omega \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_1^\mu}{\partial X_1} \right) - 1 \right) \langle \mathbf{H}_0^1 \rangle_\Gamma + \frac{1}{i\omega} \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_3} \right) - 1 \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_1, \\
g_1^2 &= i\omega \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_2^\mu}{\partial X_2} \right) - 1 \right) \langle \mathbf{H}_0^2 \rangle_\Gamma + \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_3} \right) - 1 \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_2, \quad (7.7.17)
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
h_1^1 &= -i\omega \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_1} \right) - 1 \right) \langle \mathbf{E}_0^1 \rangle_\Gamma - \frac{1}{i\omega} \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3} \right) - 1 \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_1, \\
h_1^2 &= -i\omega \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_2} \right) - 1 \right) \langle \mathbf{E}_0^1 \rangle_\Gamma - \frac{1}{i\omega} \left( \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3} \right) - 1 \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_2. \quad (7.7.18)
\end{aligned}$$



### 7.7.3.3 Construction de $\mathcal{E}_1$

En utilisant les expressions explicites de  $\mathbf{E}_0$  et de  $\mathbf{H}_0$  ((7.7.12) et (7.7.13)) ainsi que la première équation de (7.7.10), nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathcal{E}_1 &= - \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_{\Gamma} \mathcal{A}_0^{1,0} (\mathcal{V}_i)_0^{0,0} - \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_{\Gamma} \mathcal{A}_0^{0,1} (\mathcal{V}_i)_0^{0,0} \\ &\quad - \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_{\Gamma} \mathcal{A}_0^{1,0} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q} - \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_{\Gamma} \mathcal{A}_0^{0,1} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q} \\ &\quad + \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_{\Gamma} \left( i\omega\mu(\mathcal{W}_i)_0^{0,0} \right) + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_{\Gamma} \left( i\omega\mu(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q} \right). \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes et en définissant par convention  $(\mathcal{V}_i)_0^{p,q} = (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q} = (\mathcal{W}_i)_0^{p,q} = (\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q} = 0$  quand  $p < 0$  ou  $q < 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathcal{E}_1 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_{\Gamma} \left( -\mathcal{A}_0^{1,0} (\mathcal{V}_i)_0^{p-1,q} - \mathcal{A}_0^{0,1} (\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1} + i\omega\mu(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q} \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_{\Gamma} \left( -\mathcal{A}_0^{1,0} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p-1,q} - \mathcal{A}_0^{0,1} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q-1} + i\omega\mu(\mathcal{W}_i)_0^{p,q} \right). \end{aligned} \quad (7.7.19)$$

De même, en utilisant cette fois la seconde équation de (7.7.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\epsilon \mathcal{E}_1) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_{\Gamma} \left( -\epsilon \left( \mathcal{B}^{1,0} (\mathcal{V}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{B}^{0,1} (\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_{\Gamma} \left( -\epsilon \left( \mathcal{B}^{1,0} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{B}^{0,1} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (7.7.20)$$

Enfin,  $\mathcal{E}_1$  vérifie les conditions de raccord

$$\langle \ell_T(\mathcal{E}_1) \rangle = \langle (\mathbf{E}_1)_T \rangle_{\Gamma} \quad \langle \ell_N(\mathcal{E}_1) \rangle = \langle (\mathbf{E}_1)_N \rangle = -\frac{1}{i\omega} \operatorname{curl}_{\Gamma} \langle (\mathbf{H}_1)_T \rangle_{\Gamma}. \quad (7.7.21)$$

Nous allons maintenant utiliser la linéarité des équations (7.7.19) et (7.7.20) par rapport aux termes  $\langle \mathbf{H}_0^i \rangle_{\Gamma}^{p,q}$  et  $\langle \mathbf{E}_0^i \rangle_{\Gamma}^{p,q}$  pour construire de façon semi-explicite une fonction qui satisfait les équations (7.7.19) et (7.7.20). Puis, les conditions de raccord (7.7.21) nous permettront de définir complètement  $\mathcal{E}_1$ .

Pour réaliser cette construction, nous définissons les fonctions profils  $(\mathcal{V}_i)_1^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}$  (Ces fonctions, qui ne dépendent que des variables rapides, vont nous permettre de séparer la dépendance de  $\mathcal{E}_1$  par rapport aux variables lentes  $(x_1, x_2)$  des dépendances par rapport aux variables rapides  $(X_1, X_2, X_3)$ ) :

-  $\forall i \in \{0, 1\}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + q \leq 1$ , chercher  $(\mathcal{V}_i)_1^{p,q} \in V_{\epsilon}^+(B)$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{curl} (\mathcal{V}_i)_1^{p,q} = -\mathcal{A}_0^{1,0} (\mathcal{V}_i)_0^{p-1,q} - \mathcal{A}_0^{0,1} (\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1} + i\omega\mu(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q} \text{ dans } B, \\ \operatorname{div} (\epsilon (\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) = -\epsilon \left( \mathcal{B}^{1,0} (\mathcal{V}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{B}^{0,1} (\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1} \right) \text{ dans } B, \\ \langle \ell_N((\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T((\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.7.22)$$

–  $\forall i \in \{0, 1\}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + q \leq 2$ , chercher  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q} \in X_{1\epsilon}^P$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{curl}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q} = -\mathcal{A}_0^{1,0}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p-1,q} - \mathcal{A}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q-1} + i\omega\mu(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q} \text{ dans } B, \\ \operatorname{div}(\epsilon(\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}) = -\epsilon(\mathcal{B}^{1,0}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{B}^{0,1}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q-1}) \text{ dans } B, \\ \langle \ell_N((\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T((\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.7.23)$$

**Propriété 7.7.6.**  $(\mathcal{V}_i)_1^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}$  existent et sont définies de manière unique par (7.7.22) et (7.7.23). De plus,

$$(\mathcal{V}_i)_1^{0,0} = (\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{1,0} = (\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{0,1} = 0.$$

*Démonstration.* L'idée globale de la preuve est de retrancher à  $(\mathcal{V}_i)_1^{p,q}$  (resp.  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}$ ) son comportement non variationnel à l'infini pour pouvoir appliquer le résultat d'existence et d'unicité de la proposition 7.5.9. On vérifie au préalable que les seconds membres sont compatibles.

1. **Conditions de compatibilité :** on définit

$$f(\mathcal{V}_i)_1^{p,q} := -\mathcal{A}_0^{1,0}(\mathcal{V}_i)_0^{p-1,q} - \mathcal{A}_0^{0,1}(\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1} + i\omega\mu(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q}.$$

Pour que ce second membre soit compatible, il doit vérifier les 2 conditions de compatibilité suivantes :

- a-  $\operatorname{div} f((\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) = 0$ ,
- b-  $\int_{\Gamma_{h_0}} f(\mathcal{V}_i)_1^{p,q} \cdot e_3 \, dX_1 dX_2 = 0$  pour  $|h_0| > \frac{1}{2}$  : cette condition signifie simplement que  $f((\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) \cdot e_3$  est dans  $L^2(B)$  ou encore que le coefficient de Fourier associé à  $m = n = 0$  est nul.
- Vérification de la condition a :  $\operatorname{div}(f(\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) = 0$  :

$$\operatorname{div} f(\mathcal{V}_i)_1^{p,q} = -\operatorname{div}(\mathcal{A}_0^{1,0}((\mathcal{V}_i)_0^{p-1,q})) - \operatorname{div}(\mathcal{A}_0^{0,1}((\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1})) + i\omega \operatorname{div}(\mu(\mathcal{V}_i)_1^{p,q})$$

Or, par définition (voir 7.7.3, 7.7.4)

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}_0^{1,0}((\mathcal{V}_i)_0^{p-1,q})) = -\operatorname{curl}(\mathcal{V}_i)_0^{p-1,q} \cdot e_1 = 0,$$

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}_0^{0,1}((\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1})) = -\operatorname{curl}(\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1} \cdot e_1 = 0,$$

$$\operatorname{div}(\mu(\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q}) = 0.$$

Donc,  $\operatorname{div}(f(\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) = 0$ .

- Vérification de la condition b :  $\int_{\Gamma_{h_0}} (f(\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) \cdot e_3 \, dX_1 dX_2 = 0$  pour  $|X_3| > \frac{1}{2}$ . La vérification est un peu technique. Nous résumons le calcul de cette intégrale par le tableau suivant :

$(\mathcal{V}_i)_1^{p,q}$	$-\left\{\mathcal{A}_0^{1,0}(\mathcal{V}_i)_0^{p-1,q}\right\}_{0,0} \cdot e_3$	$-\left\{\mathcal{A}_0^{0,1}(\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1}\right\}_{0,0} \cdot e_3$	$i\omega\mu\left\{(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q}\right\}_{0,0} \cdot e_3$	total
$(\mathcal{V}_0)_1^{0,0}$	0	0	0	0
$(\mathcal{V}_0)_1^{1,0}$	$\left\{-\frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_2}\right\}_{0,0} = 0$	0	0	0
$(\mathcal{V}_0)_1^{0,1}$	0	$\left\{\frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_1}\right\}_{0,0} = 1$	$-\frac{i\omega}{i\omega}\left\{\frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3}\right\}_{0,0} = -1$	0
$(\mathcal{V}_1)_1^{0,0}$	0	0	0	0
$(\mathcal{V}_1)_1^{1,0}$	$\left\{-\frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_2}\right\}_{0,0} = -1$	0	$\frac{i\omega}{i\omega}\left\{\frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3}\right\}_{0,0} = 1$	0
$(\mathcal{V}_1)_1^{0,1}$	0	$\left\{\frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_1}\right\}_{0,0} = 0$	0	0

On obtient donc bien  $\int_{\Gamma_{h_0}} (f(\mathcal{V}_i^{p,q}) \cdot e_3) dX_1 dX_2 = 0$ . De même,

$$\int_{\Gamma_{h_0}} (f(\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q}) \cdot e_3) dX_1 dX_2 = 0.$$

En effet,

$(\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_1$	$-\left\{ \mathcal{A}_0^{1,0} (\tilde{\mathcal{V}}_i^{p-1,q}) \right\}_{0,0} \cdot e_3$	$-\left\{ \mathcal{A}_0^{0,1} (\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q-1}) \right\}_{0,0} \cdot e_3$	$i\omega \mu \left\{ (\mathcal{W}_i^{p,q}) \right\}_{0,0} \cdot e_3$	total
$(\tilde{\mathcal{V}}_0^{0,0})_1$	0	0	$\left\{ \frac{\partial p_1^u}{\partial X_3} \right\}_{0,0} = 0$	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_0^{1,0})_1$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_0^{0,1})_1$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_0^{2,0})_1$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_0^{1,1})_1$	$-\frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_2} \right\}_{0,0} = 0$	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_0^{0,2})_1$	0	$\frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_1} \right\}_{0,0} = 0$	0	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_1^{0,0})_1$	0	0	$\left\{ \frac{\partial p_2^u}{\partial X_3} \right\}_{0,0} = 0$	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_1^{1,0})_1$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_1^{0,1})_1$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_1^{2,0})_1$	$\frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_2} \right\}_{0,0} = 0$	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_1^{1,1})_1$	0	$-\frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_1} \right\}_{0,0} = 0$	0	0
$(\tilde{\mathcal{V}}_1^{0,2})_1$	0	0	0	0

2. **Existence des fonctions  $(\mathcal{V}_i^{p,q})_1$  et  $(\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_1$**  : tout d'abord il est clair que si les fonctions  $(\mathcal{V}_i^{p,q})_1$  et  $(\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_1$  sont définies, elles le sont de manière unique. Nous allons seulement construire  $(\mathcal{V}_i^{p,q})_1$  mais la même démarche s'applique pour  $(\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_1$ . Définissons les vecteurs constants  $A_1^\pm$  par

$$A_1^\pm ((\mathcal{V}_i^{p,q})_1) \cdot e_1 = \{f((\mathcal{V}_i^{p,q})_1)\}_{0,0}^\pm \cdot e_2, \quad A_1^\pm ((\mathcal{V}_i^{p,q})_1) \cdot e_2 = -\{f((\mathcal{V}_i^{p,q})_1)\}_{0,0}^\pm \cdot e_1,$$

$$A_1^\pm ((\mathcal{V}_i^{p,q})_1) \cdot e_3 = \{g((\mathcal{V}_i^{p,q})_1)\}_{0,0}^\pm,$$

avec  $g((\mathcal{V}_i^{p,q})_1) := -\epsilon \left( \mathcal{B}^{1,0} \left( (\mathcal{V}_i^{p-1,q})_1 \right) + \mathcal{B}^{0,1} \left( (\mathcal{V}_i^{p,q-1})_1 \right) \right)$ .

Définissons alors

$$\mathcal{P}_i^{p,q} := \chi^+(X_3) A_1^+ ((\mathcal{V}_i^{p,q})_1) X_3 + \chi^-(X_3) A_1^- ((\mathcal{V}_i^{p,q})_1) X_3,$$

où les fonctions  $\chi^\pm$  sont des fonctions de troncature très régulières définies pour tout  $X_3 \in \mathbb{R}$  vérifiant

$$\chi^+(X_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_3 > 2, \\ 0 & \text{si } X_3 < 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi^-(X_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_3 < -2, \\ 0 & \text{si } X_3 > -1. \end{cases}$$

On cherche alors  $(\mathcal{U}_i^{p,q})_1 \in X_a(B)$  solution du problème

$$\begin{cases} \operatorname{curl}(\mathcal{U}_i^{p,q})_1 = f((\mathcal{U}_i^{p,q})_1) \text{ dans } B, \\ \operatorname{div}(\epsilon(\mathcal{U}_i^{p,q})_1) = g((\mathcal{U}_i^{p,q})_1) \text{ dans } B, \\ \langle \ell_N((\mathcal{U}_i^{p,q})_1) \rangle = 0 \\ \langle \ell_T((\mathcal{U}_i^{p,q})_1) \rangle = 0 \end{cases}$$

avec,

$$\begin{aligned} f((\mathcal{U}_i)^{p,q}) &:= f((\mathcal{V}_i)_p^q) - \operatorname{curl} \mathcal{P}_i^{p,q}, \\ g((\mathcal{U}_i)^{p,q}) &:= g((\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) - \epsilon_\infty \operatorname{div} \mathcal{P}_i^{p,q}. \end{aligned}$$

On remarque  $f((\mathcal{U}_i)^{p,q})$  est dans  $L^2(B)$ . En effet, en utilisant l'hypothèse  $b f((V_i)_1^{p,q}) \cdot e_3$  est dans  $L^2(B)$  puisque  $(\operatorname{curl} (A_1^+ ((\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) \chi^+(X_3) X_3)) \cdot e_3 = 0$ . Par ailleurs, par construction  $f((V_i)_1^{p,q}) \cdot e_1$  et  $f((V_i)_1^{p,q}) \cdot e_2$  sont exponentiellement décroissantes quand  $X_3$  tend vers  $\pm\infty$ . De même,  $\operatorname{div} f((\mathcal{U}_i)^{p,q}) = 0$ . Par des arguments similaires on montre que  $g((V_i)_1^{p,q})$  est également dans  $L^2(B)$ .

Donc en utilisant la propriété 7.5.10,  $(\mathcal{U}_i)^{p,q}$  existe et est définie de manière unique. De plus  $(\mathcal{U}_i)^{p,q} + \mathcal{P}_i^{p,q}$  satisfait (7.7.22) ce qui termine la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant construire  $\mathcal{E}_1$  à l'aide des fonctions  $(\mathcal{V}_i)_1^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}$ . Nous cherchons alors  $\mathcal{E}_1$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(X_1, X_2, X_3, x_1, x_2) &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_0^i \rangle^{p,q} (\mathcal{V}_i)_1^{p,q}(X_1, X_2, X_3) \\ &+ \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_0^i \rangle^{p,q} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}(X_1, X_2, X_3) \\ &+ a(x_1, x_2) \nabla p_1^\epsilon(X_1, X_2, X_3) + b(x_1, x_2) \nabla p_2^\epsilon(X_1, X_2, X_3) + c(x_1, x_2) \nabla p_3^\epsilon(X_1, X_2, X_3). \end{aligned}$$

Par construction, la fonction ci-dessus satisfait les équations (7.7.19) et (7.7.20). Nous allons déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que les conditions de raccords (7.7.21) soient également satisfaites : ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \ell_T(\mathcal{E}_1) \rangle = \langle (\mathbf{E}_1)_T \rangle &= a e_1 + b e_2 + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q} \langle \ell_T((\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) \rangle \\ &+ \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q} \langle \ell_T((\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}) \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle \ell_N(\mathcal{E}_1) \rangle = \langle (\mathbf{E}_1)_T \rangle = c + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q} \langle \ell_N((\mathcal{V}_i)_1^{p,q}) \rangle + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q} \langle \ell_N((\tilde{\mathcal{V}}_i)_1^{p,q}) \rangle$$

Donc  $a = \langle \mathbf{E}_1 \rangle_\Gamma \cdot e_1$ ,  $b = \langle \mathbf{E}_1 \rangle_\Gamma \cdot e_2$  et  $c = \langle \mathbf{E}_1 \rangle_\Gamma \cdot e_3 = \frac{1}{i\omega} \left( \langle H_1^0 \rangle_\Gamma^{0,1} - \langle H_1^1 \rangle_\Gamma^{1,0} \right)$ . Finalement,

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{k=0}^1 \sum_{p=0}^{1-k} \sum_{q=0}^{1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\mathcal{V}_i)_{1-k}^{p,q} + \sum_{k=0}^1 \sum_{p=0}^{2-k} \sum_{q=0}^{2-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{1-k}^{p,q}. \quad (7.7.24)$$

Nous obtenons également une expression explicite du saut  $[\mathbf{E}_1]$  :

$$[(\mathbf{E}_1)_T]_\Gamma = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \sum_{i=0}^1 [\ell_T((\mathcal{V}_i)_1^{p,q})] \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \sum_{i=0}^1 [\ell_T((\tilde{\mathcal{V}}_i)_{1-k}^{p,q})] \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q}. \quad (7.7.25)$$

### 7.7.3.4 Construction de $\mathcal{H}_1$

La construction de  $\mathcal{H}_1$  est similaire à celle de  $\mathcal{E}_1$  : en utilisant les expressions explicites de  $\mathbf{E}_0$  et de  $\mathbf{H}_0$  ((7.7.12) et (7.7.13)),  $\mathcal{H}_1$  satisfait les équations

$$\begin{aligned} -\operatorname{curl} \mathcal{H}_1 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} \left( \mathcal{A}_0^{1,0}(\mathcal{W}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{A}_0^{0,1}(\mathcal{V}_i)_0^{p,q-1} + i\omega \epsilon (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q} \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} \left( \mathcal{A}_0^{1,0}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{A}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q-1} + i\omega \epsilon (\mathcal{V}_i)_0^{p,q} \right), \end{aligned} \quad (7.7.26)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu \mathcal{E}_1) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} \left( -\mu \left( \mathcal{B}_0^{1,0}(\mathcal{W}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{B}_0^{0,1}(\mathcal{W}_i)_0^{p,q-1} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} \left( -\mu \left( \mathcal{B}_0^{1,0}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{B}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q-1} \right) \right), \end{aligned} \quad (7.7.27)$$

et les conditions de raccords

$$\langle \ell_T(\mathcal{H}_1) \rangle = \langle (\mathbf{H}_1)_T \rangle_{\Gamma} \quad \langle \ell_N(\mathcal{H}_1) \rangle_{\Gamma} = \langle (\mathbf{H}_1)_N \rangle = \frac{1}{i\omega} \operatorname{curl}_{\Gamma} \langle (\mathbf{E}_1)_T \rangle_{\Gamma}. \quad (7.7.28)$$

Tout comme pour  $\mathcal{E}_1$ , nous allons définir les fonctions profils  $(\mathcal{W}_i)_1^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q}$  :

–  $\forall i \in \{0, 1\}$ ,  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + q \leq 1$ , chercher  $(\mathcal{V}_i)_1^{p,q} \in V_{\mu}^+(B)$  telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{curl}(\mathcal{W}_i)_1^{p,q} = \mathcal{A}_0^{1,0}(\mathcal{W}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{A}_0^{0,1}(\mathcal{W}_i)_0^{p,q-1} + i\omega \epsilon (\tilde{\mathcal{V}}_i)_0^{p,q} \text{ dans } B, \\ \operatorname{div}(\epsilon (\mathcal{W}_i)_1^{p,q}) = -\mu \left( \mathcal{B}_0^{1,0}(\mathcal{W}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{B}_0^{0,1}(\mathcal{W}_i)_0^{p,q-1} \right) \text{ dans } B, \\ \langle \ell_N((\mathcal{W}_i)_1^{p,q}) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T((\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q}) \rangle = 0, \end{cases} \quad (7.7.29)$$

–  $\forall i \in \{0, 1\}$ ,  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + q \leq 2$ , chercher  $(\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q} \in X_{\mu}^P$  telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{curl}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q} = \mathcal{A}_0^{1,0}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{A}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q-1} + i\omega \epsilon (\mathcal{V}_i)_0^{p,q} \text{ dans } B, \\ \operatorname{div}(\epsilon (\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q}) = -\mu \left( \mathcal{B}_0^{1,0}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p-1,q} + \mathcal{B}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q-1} \right) \text{ dans } B, \\ \langle \ell_N((\mathcal{W}_i)_1^{p,q}) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T((\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q}) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.7.30)$$

**Propriété 7.7.7.** *Les fonctions  $(\mathcal{W}_i)_1^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q}$  existent et sont définies de manière unique par (7.7.29) et (7.7.30). De plus,*

$$(\mathcal{W}_i)_1^{0,0} = (\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{1,0} = (\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{0,1} = 0.$$

La preuve de cette propriété est donnée dans l'annexe 7.9.4.1. Nous pouvons maintenant construire  $\mathcal{H}_1$  à l'aide des fonctions  $(\mathcal{W}_i)_1^{p,q}$ ,  $(\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q}$ . Nous cherchons  $\mathcal{H}_1$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(X_1, X_2, X_3, x_1, x_2) &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} (\mathcal{W}_i)_1^{p,q}(X_1, X_2, X_3) \\ &\quad + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} (\tilde{\mathcal{W}}_i)_1^{p,q}(X_1, X_2, X_3) \\ &\quad + a(x_1, x_2) \nabla p_1^{\mu}(X_1, X_2, X_3) + b(x_1, x_2) \nabla p_2^{\mu}(X_1, X_2, X_3) + c(x_1, x_2) \nabla p_3^{\mu}(X_1, X_2, X_3). \end{aligned}$$

Par construction, la fonction ci-dessus satisfait les équations (7.7.26) et (7.7.27). Tout comme pour  $\mathcal{E}_1$ , nous allons déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que les conditions de raccords (7.7.28) soient satisfaites. Nous obtenons,

$$a = \langle \mathbf{H}_1 \rangle_\Gamma \cdot e_1, \quad b = \langle \mathbf{H}_1 \rangle_\Gamma \cdot e_2, \quad c = \langle \mathbf{H}_1 \rangle_\Gamma \cdot e_3 = \frac{1}{i\omega} \left( -\langle \mathbf{E}_1^0 \rangle_\Gamma^{0,1} + \langle \mathbf{E}_1^1 \rangle_\Gamma^{1,0} \right).$$

Finalement,

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{k=0}^1 \sum_{p=0}^{1-k} \sum_{q=0}^{1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\mathcal{W}_i)_{1-k}^{p,q} + \sum_{k=0}^1 \sum_{p=0}^{2-k} \sum_{q=0}^{2-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{1-k}^{p,q}. \quad (7.7.31)$$

Nous obtenons également une expression du saut  $[\mathbf{H}_1]$  :

$$[(\mathbf{H}_1)_T]_\Gamma = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^{1-p} \sum_{i=0}^1 [\ell_T((\mathcal{W}_i)_{1-k}^{p,q})] \langle \mathbf{H}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} \sum_{i=0}^1 [\ell_T((\tilde{\mathcal{W}}_i)_{1-k}^{p,q})] \langle \mathbf{E}_0^i \rangle_\Gamma^{p,q} \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{1-k}^{p,q} \right). \quad (7.7.32)$$

## 7.7.4 Expressions explicites des termes du développement asymptotique

### 7.7.4.1 Les fonctions profils

En nous inspirant des expressions de  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  (7.7.12, 7.7.24, 7.7.13, 7.7.31), nous aimerions pouvoir construire  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\mathcal{W}_i)_{n-k}^{p,q} + \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{n-k}^{p,q}, \\ \mathcal{E}_n &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\mathcal{V}_i)_{n-k}^{p,q} + \sum_{k=0}^1 \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle_\Gamma^{p,q} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-k}^{p,q}. \end{aligned}$$

dans lesquelles les fonctions  $(\mathcal{V}_i)_k^{p,q}$ ,  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q}$ ,  $(\mathcal{W}_i)_k^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q}$  ne dépendraient que des variables microscopiques  $X_1, X_2, X_3$ . C'est pourquoi nous définissons les 4 familles de fonctions  $(\mathcal{V}_i)_k^{p,q}$ ,  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q}$ ,  $(\mathcal{W}_i)_k^{p,q}$  et  $(\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q}$  comme suit :

- $(\mathcal{V}_i)_k^{p,q}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + q \leq k$  : on définit cette famille par récurrence sur  $k$ .

$$- k = 0 : (\mathcal{V}_0)_0^{0,0} = \nabla p_1^\epsilon, \quad (\mathcal{V}_1)_0^{0,0} = \nabla p_2^\epsilon.$$

-  $k \geq 1$  : chercher  $(\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \in V_\epsilon^+(B)$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{curl} (\mathcal{V}_i)_k^{p,q} = -\mathcal{A}_0^{1,0} (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p-1,q} - \mathcal{A}_0^{0,1} (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p,q-1} + i\omega\mu (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q} \text{ dans } B, \\ \operatorname{div} (\epsilon (\mathcal{V}_i)_k^{p,q}) = -\epsilon \left( \mathcal{B}_0^{1,0} (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p-1,q} + \mathcal{B}_0^{0,1} (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) \text{ dans } B, \\ \langle \ell_N((\mathcal{V}_i)_k^{p,q}) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T((\mathcal{V}_i)_k^{p,q}) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.7.33)$$

- $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + q \leq k + 1$  :

$$\begin{aligned} - k = 0 : (\tilde{\mathcal{V}}_0)_0^{0,0} &= 0, \quad (\tilde{\mathcal{V}}_0)_0^{1,0} = 0, \quad (\tilde{\mathcal{V}}_0)_0^{0,1} = \frac{1}{i\omega} \nabla p_3^\epsilon, \\ (\mathcal{V}_1)_0^{0,0} &= 0, \quad (\tilde{\mathcal{V}}_1)_0^{1,0} = -\frac{1}{i\omega} \nabla p_3^\epsilon, \quad +(\tilde{\mathcal{V}}_0)_0^{0,1} = 0. \end{aligned}$$

–  $k \geq 1$  : chercher  $(\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \in V_\epsilon^+(B)$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{curl}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q} = -\mathcal{A}_0^{1,0}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p-1,q} - \mathcal{A}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p,q-1} + i\omega\mu(\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p,q} \text{ dans } B, \\ \operatorname{div}(\epsilon(\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q}) = -\epsilon\left(\mathcal{B}_0^{1,0}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p-1,q} + \mathcal{B}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p,q-1}\right) \text{ dans } B, \\ \langle \ell_N((\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q}) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T((\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q}) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.7.34)$$

•  $(\mathcal{W}_i)_k^{p,q}, i \in \{1, 2\}, k \in \mathbb{N}, (p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + q \leq k$  :

–  $k = 0$  :  $(\mathcal{W}_0)_0^{0,0} = \nabla p_1^\mu, \quad (\mathcal{V}_1)_0^{0,0} = \nabla p_2^\mu.$

–  $k \geq 1$  : chercher  $(\mathcal{W}_i)_k^{p,q} \in V_\mu^+(B)$  telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{curl}(\mathcal{W}_i)_k^{p,q} = \mathcal{A}_0^{1,0}(\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p-1,q} + \mathcal{A}_0^{0,1}(\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p,q-1} + i\omega\epsilon(\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p,q} \text{ dans } B_0, \\ \operatorname{div}(\mu(\mathcal{W}_i)_k^{p,q}) = -\mu\left(\mathcal{B}_0^{1,0}(\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p-1,q} + \mathcal{B}_0^{0,1}(\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p,q-1}\right) \text{ dans } B_0, \\ \langle \ell_N((\mathcal{W}_i)_k^{p,q}) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T((\mathcal{W}_i)_k^{p,q}) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.7.35)$$

•  $(\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q}, i \in \{1, 2\}, k \in \mathbb{N}, (p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + q \leq k + 1$  :

–  $k = 0$  :  $(\tilde{\mathcal{W}}_0)_0^{0,0} = 0, \quad (\tilde{\mathcal{W}}_0)_0^{1,0} = 0, \quad (\tilde{\mathcal{W}}_0)_0^{0,1} = -\frac{1}{i\omega}\nabla p_3^\mu,$   
 $(\tilde{\mathcal{W}}_1)_0^{0,0} = 0, \quad (\tilde{\mathcal{W}}_1)_0^{1,0} = \frac{1}{i\omega}\nabla p_3^\mu, \quad +(\tilde{\mathcal{W}}_0)_0^{0,1} = 0.$

–  $k \geq 1$  : chercher  $(\mathcal{W}_i)_k^{p,q} \in V_\mu^+(B)$  telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{curl}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q} = \mathcal{A}_0^{1,0}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p-1,q} + \mathcal{A}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q-1} + i\omega\epsilon(\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p,q} \text{ dans } B_0, \\ \operatorname{div}(\mu(\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q}) = -\mu\left(\mathcal{B}_0^{1,0}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p-1,q} + \mathcal{B}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q-1}\right) \text{ dans } B_0, \\ \langle \ell_N((\mathcal{W}_i)_k^{p,q}) \rangle = 0, \\ \langle \ell_T((\mathcal{W}_i)_k^{p,q}) \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.7.36)$$

**Proposition 7.7.8.** *Les fonctions  $(\mathcal{V}_i)_k^{p,q}, (\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q}, (\mathcal{W}_i)_k^{p,q}, (\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q}$  existent et sont définies de manière unique. De plus,  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$ , si  $p + q$  et  $k$  sont de même parité alors*

$$(\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q} = (\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q} = 0.$$

de même,  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$ , si  $p + q$  et  $k$  sont de parité différente alors,

$$(\mathcal{V}_i)_k^{p,q} = (\mathcal{W}_i)_k^{p,q} = 0.$$

La preuve de cette proposition est donnée en annexe 7.9.4.2.

## 7.7.4.2 Existence de tous les termes du développement asymptotique

**Proposition 7.7.9.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  les champs lointains  $\mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{H}_n$  et les champs proches  $\mathcal{E}_n$ ,  $\mathcal{H}_n$  existent et sont définis de manière unique par les formules suivantes :*

$$\mathcal{H}_n := \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} (\mathcal{W}_i)_{n-k}^{p,q} + \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{n-k}^{p,q}, \quad (7.7.37)$$

$$\mathcal{E}_n := \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} (\mathcal{V}_i)_{n-k}^{p,q} + \sum_{k=0}^1 \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle_{\Gamma}^{p,q} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-k}^{p,q}. \quad (7.7.38)$$

$\mathbf{E}_n \in H(\Omega)$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{curl curl } \mathbf{E}_n - \omega^2 \mathbf{E}_n = \delta_0 F \text{ dans } \Omega^{\pm} \\ [(E_n)_T]_{\Gamma} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 [\ell_T((\mathcal{V}_i)_{n-k}^{p,q})] \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} \\ \quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 [\ell_T((\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-k}^{p,q})] \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q}, \\ [\text{curl } \mathbf{E}_n \times e_3]_{\Gamma} = \frac{1}{i\omega} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 [\ell_T((\mathcal{W}_i)_{n-k}^{p,q})] \times e_3 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} \right. \\ \quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 [\ell_T((\tilde{\mathcal{W}}_i)_{n-k}^{p,q})] \times e_3 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} \right), \\ \text{curl } \mathbf{E}_0 \times n - i\omega(\mathbf{E}_0)_T = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (7.7.39)$$

et

$$H_n := \frac{1}{i\omega} E_n. \quad (7.7.40)$$

La preuve de cette proposition est donnée en annexe 7.9.4.3.

## 7.8 Justification du développement asymptotique

## 7.8.1 Résultat principal

Les termes du développement asymptotique étant construits, on peut maintenant montrer que le développement converge vers la solution exacte  $\mathbf{E}^{\delta}$ . Comme nous souhaitons approcher en priorité le champ lointain, notre résultat principal donne une estimation de l'erreur commise sur le champ lointain quand nous remplaçons la

solution exacte par la série tronquée  $\sum_{k=0}^n \delta^k \mathbf{E}_k$ .

**Proposition 7.8.1.** *Soit  $0 < \gamma < \frac{L_3}{2}$  et soit  $\Omega_{\gamma} := \{(x_1, x_2, z) \in \Omega, |z| > \gamma\}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_n > 0$  et une constante  $\delta_{\gamma} > 0$  telles que,*

$$\forall \delta < \delta_{\gamma}, \quad \left\| \mathbf{E}^{\delta} - \sum_{k=0}^n \delta^k \mathbf{E}_k \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_{\gamma})} \leq C_n \delta^{n+1}.$$

Cette estimation est obtenue en trois étapes :

- Dans une premier temps, pour tout  $n$ , nous construisons une approximation globale de la solution qui coïncide avec les  $n$  premiers termes du développement en champ lointain loin de la couche mince périodique,

$$\mathbf{E}_{e,\delta}^n := \sum_{k=0}^n \delta^k \mathbf{E}_k, \quad (7.8.1)$$



et avec les  $n$  premiers termes du champ proche dans un voisinage de la couche périodique

$$\mathcal{E}_{i,\delta}^n := \sum_{k=0}^n \delta^k \mathcal{E}_k. \quad (7.8.2)$$

Cette approximation est construite à l'aide d'une fonction de troncature  $\chi$  satisfaisant

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |s| \geq 2, \end{cases} \quad (7.8.3)$$

et d'une fonction distance  $\eta(\delta)$  strictement positive telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\delta} = +\infty. \quad (7.8.4)$$

En introduisant  $\chi_\eta(z) := \chi(\frac{z}{\eta})$ , nous définissons alors notre approximation globale par,

$$\mathbf{E}_{\eta,\delta}^n := (1 - \chi_\eta) \mathbf{E}_{e,\delta}^n + \chi_\eta (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta, \quad (7.8.5)$$

où la notation  $(\cdot)^\delta$  est définie par (7.3.3). La fonction  $\eta$  apparaît comme un paramètre que nous fixerons par la suite.

- Dans une deuxième étape nous estimons  $|a^\delta(\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta,\delta}^n, \varphi)|$ , ce qui nous permet, via le résultat de stabilité (6.2.8) (Proposition 6.2.1), d'obtenir une estimation de l'erreur  $\|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta,\delta}^n\|_{H(\text{curl}, \Omega)}$  : en effet,

$$\|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta,\delta}^n\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq \sup_{\varphi \in V \setminus \{0\}} \frac{|a^\delta(\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta,\delta}^n, \varphi)|}{\|\varphi\|_{V_\varepsilon^\delta}}.$$

De plus,

$$a^\delta(\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta,\delta}^n, \varphi) := \mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r + \mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c,$$

où  $\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r$  représente l'erreur de raccord,

$$\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r := \int_{\Omega} \frac{1}{\mu^\delta} (\nabla \chi_\eta \times (\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta)) \cdot \overline{\text{curl} \varphi} - \int_{\Omega} \frac{1}{\mu^\delta} \text{curl} (\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta) \cdot \overline{\nabla \chi_\eta \times \varphi}, \quad (7.8.6)$$

et  $\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c$  représente l'erreur de consistance, ou erreur de champ proche,

$$\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c = a^\delta((\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta \varphi). \quad (7.8.7)$$

L'erreur de consistance est due au fait que le développement de champ proche tronqué ne satisfait pas exactement les équations de Maxwell. En majorant successivement les deux termes d'erreurs (parties 7.8.2 et 7.8.3) on obtient une estimation d'erreur globale : il existe deux constantes  $C_n > 0$  et  $\tau_n > 0$  telles que

$$\|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta,\delta}^n\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq C \left( \eta^{n-1/2} + \frac{1}{\delta} e^{-\tau_n \frac{\eta}{\delta}} \right) \|\varphi\|_{V_\varepsilon^\delta}$$

- Enfin, en utilisant un processus de localisation (pour ne s'intéresser qu'à l'erreur sur le champ lointain), nous obtenons la proposition 7.8.1 (voir partie 7.8.4). C'est lors de cette étape que nous fixons le paramètre  $\eta$ .

## 7.8.2 Estimation de l'erreur de Raccord

L'estimation de l'erreur de raccord fait logiquement intervenir les conditions de raccord (7.4.1), les développements de champs proches et de champs lointains tronqués 'coïncidant' jusqu'à un certain ordre dans les zones de raccord.

**Proposition 7.8.2.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe deux constantes strictement positives  $C_n$  et  $\tau_n$  telles que*

$$|\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r| \leq C_n \left( \eta^{n-1/2} + \sum_{k=0}^n \delta^{k-1} e^{\mp \tau_n \frac{\eta}{\delta}} \right) \quad (7.8.8)$$

Si on appelle  $C_\eta$  le support de la fonction  $\nabla \chi_\eta$  ( $C_\eta := \{(x_1, y, z) \in \Omega, \eta < |z| < 2\eta\}$ ), on peut écrire  $\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r$  comme, (on rappelle que  $\mu^\delta = 1$  dans  $C_\eta$ )

$$\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r := \int_{C_\eta} (\nabla \chi_\eta \times (\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta)) \cdot \overline{\text{curl} \varphi} - \int_{C_\eta} \text{curl} (\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta) \cdot \overline{\nabla \chi_\eta \times \varphi}.$$

Comme les champs proches et les champs lointains appartiennent à  $\mathcal{C}^\infty(C_\eta)$ , et comme le domaine  $C_\eta$  est petit ( $\text{mes}(C_\eta) \sim \eta$ ) on peut majorer le précédent terme par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r &\leq \frac{C}{\eta} \left( \|\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta\|_{L^\infty(C_\eta)} \|\text{curl} \varphi\|_{L^1(C_\eta)} + \|\text{curl} (\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta)\|_{L^\infty(C_\eta)} \|\varphi\|_{L^1(C_\eta)} \right), \\ &\leq \frac{C}{\eta^{1/2}} \left( \|\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta\|_{L^\infty(C_\eta)} + \|\text{curl} (\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta)\|_{L^\infty(C_\eta)} \right) \|\varphi\|_{H(\text{curl}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (7.8.9)$$

Il reste donc à estimer  $\|\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta\|_{L^\infty(C_\eta)}$  et  $\|\text{curl} (\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta)\|_{L^\infty(C_\eta)}$ .

### 7.8.2.1 Estimation de $\|\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta\|_{L^\infty(C_\eta)}$

La formule de Taylor avec reste intégral nous donne un développement de  $\mathbf{E}_{e,\delta}^n$  dans le domaine  $C_\eta$  :

$$(\mathbf{E}_{e,\delta}^n)^\pm(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \delta^k \frac{z^j}{j!} \frac{\partial^j \mathbf{E}_k^\pm}{\partial z^j}(x_1, x_2, 0) + \sum_{k=0}^n \delta^k \int_0^{x_3} \frac{\partial^{n+1-k} \mathbf{E}_k(x_1, x_2, t)}{\partial z^{n+1-k}} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} dt. \quad (7.8.10)$$

où, en utilisant de nouveau la régularité des champs lointains,

$$\left| \sum_{k=0}^n \delta^k \int_0^{x_3} \frac{\partial^{n+1-k} \mathbf{E}_k(x_1, x_2, t)}{\partial z^{n+1-k}} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} dt \right| \leq C \sum_{k=0}^n \delta^k \eta^{n-k+1}. \quad (7.8.11)$$

Par ailleurs, puisque les conditions de raccord (7.4.1) sont satisfaites, les champs proches admettent le développement suivant (cf. (7.3.13)) :

$$(\mathcal{E}_k^\pm)^\delta = \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j! \delta^j} \frac{\partial^j \mathbf{E}_{k-j}^\pm(x_1, x_2, 0)}{\partial z^j} + (R_k^\pm)^\delta(x_1, x_2, z),$$

où

$$(R_k^\pm)(X_1, X_2, X_3, x_1, x_2) = \sum_{(l,q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} p_{k,l,q}^\pm(X_3, x_1, x_2) e^{2i\pi(pX_1 + \frac{q}{T}X_2)} e^{\mp 2\pi \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{T^2}} X_3},$$

est un terme exponentiellement décroissant satisfaisant

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists t_{m,k} > 0, \exists C > 0 \text{ telles que } \forall X_3 \geq \frac{1}{2}, |\nabla^m R_k^\pm(X_1, X_2, X_3, x_1, x_2)| \leq C e^{-t_{m,k} X_3}. \quad (7.8.12)$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^n \delta^k (\mathcal{E}_k^\pm)^\delta = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \frac{z^j}{j!} \frac{\partial^j \mathbf{E}_k^\pm}{\partial z^j}(x_1, x_2, 0) + \sum_{k=0}^n \delta^k (R_k^\pm)^\delta, \quad (7.8.13)$$

avec, si on pose  $t_n = \min_{k \leq n} (t_{0,k})$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^n \delta^k (R_k)^\delta \right| \leq C \sum_{k=0}^n C \delta^k e^{\mp t_n \frac{\eta}{\delta}}. \quad (7.8.14)$$

Finalement, en combinant les équations (7.8.10) et (7.8.13), on a

$$\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta = \sum_{k=0}^n \delta^k \int_0^{x_3} \frac{\partial^{n+1-k} \mathbf{E}_k(x_1, x_2, t)}{\partial z^{n+1-k}} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} dt - \sum_{k=0}^n \delta^k (R_k^\pm)^\delta,$$

si bien qu'en utilisant les estimations (7.8.11) et (7.8.14) on obtient

$$\|\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_n \left( \eta^{n+1} + \sum_{k=0}^n \delta^k e^{\mp t_n \frac{\eta}{\delta}} \right) \quad (7.8.15)$$

### 7.8.2.2 Estimation de $\|\operatorname{curl}(\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta)\|_{L^\infty(C_\eta)}$

Puisque  $\operatorname{curl} \mathbf{E}_k = i\omega \mathbf{H}_k$ , et que  $\mathbf{H}_k$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty(C_\eta)$ , on a

$$\sum_{k=0}^n \delta^k \operatorname{curl} \mathbf{E}_k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-1-k} (i\omega) \frac{\delta^k z^j}{j!} \frac{\partial^j \mathbf{H}_k^\pm(x_1, x_2, 0)}{\partial z^j} + \sum_{k=0}^n \delta^k (i\omega) \int_0^{x_3} \frac{\partial^{n-k} \mathbf{H}_k(x_1, x_2, t)}{\partial z^{n-k}} \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} dt, \quad (7.8.16)$$

avec

$$\left| \sum_{k=0}^n \delta^k (i\omega) \int_0^{x_3} \frac{\partial^{n-k} \mathbf{H}_k(x_1, x_2, t)}{\partial z^{n-k}} \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} dt \right| \leq C \eta^n. \quad (7.8.17)$$

Par ailleurs, en prenant le rotationnel de l'équation (7.8.13), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \delta^k (\mathbf{E}_k)^\delta &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-1-k} \frac{\delta^k z^j}{j!} \left( e_3 \times \frac{\partial^{j+1} \mathbf{E}_k^\pm}{\partial z^{j+1}} + \operatorname{curl}_\Gamma \left( \frac{\partial^j \mathbf{E}_k^\pm}{\partial z^j} \right)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \left( \frac{\partial^j \mathbf{E}_k^\pm}{\partial z^j} \right)_N \right) \\ &+ \sum_{k=0}^n \delta^k \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \left( \operatorname{curl}_\Gamma \left( \frac{\partial^{n-k} \mathbf{E}_k^\pm(x_1, x_2, 0)}{\partial z^{n-k}} \right)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \left( \frac{\partial^{n-k} \mathbf{E}_k^\pm(x_1, x_2, 0)}{\partial z^{n-k}} \right)_N \right) \\ &+ \sum_{k=0}^n \delta^k \operatorname{curl} (R_k^\pm)^\delta. \end{aligned}$$

Or, en utilisant la proposition 7.2.1, on voit immédiatement que

$$\left( e_3 \times \frac{\partial^{j+1} \mathbf{E}_k^\pm}{\partial z^{j+1}} + \operatorname{curl}_\Gamma \left( \frac{\partial^j \mathbf{E}_k^\pm}{\partial z^j} \right)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \left( \frac{\partial^j \mathbf{E}_k^\pm}{\partial z^j} \right)_N \right) = i\omega \frac{\partial^j \mathbf{H}_k^\pm(x_1, x_2, 0)}{\partial z^j},$$

Par ailleurs, en utilisant la régularité des champs lointains,

$$\left| \sum_{k=0}^n \delta^k \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \left( \operatorname{curl}_\Gamma \left( \frac{\partial^{n-k} \mathbf{E}_k^\pm(x_1, x_2, 0)}{\partial z^{n-k}} \right)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \left( \frac{\partial^{n-k} \mathbf{E}_k^\pm(x_1, x_2, 0)}{\partial z^{n-k}} \right)_N \right) \right| \leq C_n \eta^k \quad (7.8.18)$$

et, en posant  $t_n^1 = \min_{k \leq n, m \leq 1} (t_{m,k})$  la décroissance exponentielle (7.8.12) des  $(R_k^\pm)^\delta$  donne

$$\left| \sum_{k=0}^n \delta^k \operatorname{curl} (R_k^\pm)^\delta \right| \leq C \sum_{k \in N} \delta^{k-1} e^{\mp t_n^1 \cdot \frac{\eta}{\delta}}. \quad (7.8.19)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}(\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta) &= \sum_{k=0}^n \delta^k (i\omega) \int_0^{x_3} \frac{\partial^{n-k} \mathbf{H}_k(x_1, x_2, t)}{\partial z^{n-k}} \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} dt \\ &- \sum_{k=0}^n \delta^k \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \left( \operatorname{curl}_\Gamma \left( \frac{\partial^{n-k} \mathbf{E}_k^\pm(x_1, x_2, 0)}{\partial z^{n-k}} \right)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \left( \frac{\partial^{n-k} \mathbf{E}_k^\pm(x_1, x_2, 0)}{\partial z^{n-k}} \right)_N \right) \\ &- \sum_{k=0}^n \delta^k \operatorname{curl} (R_k^\pm)^\delta, \end{aligned}$$

que l'on majore en utilisant (7.8.17), (7.8.18) et (7.8.19) :

$$\|\operatorname{curl}(\mathbf{E}_{e,\delta}^n - (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_n \left( \eta^n + \sum_{k=0}^n \delta^{k-1} e^{\mp t_n \frac{\eta}{\delta}} \right). \quad (7.8.20)$$

Noter que la précédente estimation est moins bonne que l'estimation (7.8.15).

En combinant (7.8.15), (7.8.20) et (7.8.9) et en posant  $\tau_n = \min(t_n, t_n^1)$  on obtient

$$|\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^r| \leq C_n \left( \eta^{n-1/2} + \sum_{k=0}^n \delta^{k-1} e^{\mp \tau_n \frac{\eta}{\delta}} \right),$$

ce qui termine la preuve de la proposition 7.8.2.

### 7.8.3 Estimation de l'erreur de consistance pour le champ proche

Comme nous l'avons déjà mentionné l'erreur de consistance  $\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c$  est due au fait que le développement tronqué de champ proche ne satisfait pas exactement les équations de Maxwell : en effet,

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \left( \frac{1}{\mu^\delta} \operatorname{curl}(\mathbf{E}_{i,n}^\delta) \right) - \omega^2 \epsilon^\delta (\mathbf{E}_{i,n}^\delta) &= \delta^{n-1} \left( \tilde{\mathcal{A}}_1(\mathcal{E}_n) + \tilde{\mathcal{A}}_2(\mathcal{E}_{n-1}) - \omega^2 \epsilon^\delta(\mathcal{E}_{n-1}) \right)^\delta \\ &\quad + \delta^n \left( \tilde{\mathcal{A}}_2(\mathcal{E}_n) - \omega^2 \epsilon^\delta(\mathcal{E}_n) \right)^\delta. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_1(\mathcal{E}) &= \operatorname{Curl} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{curl}_\Gamma(\mathcal{E}_T) e_3 \right) + \operatorname{Curl} \left( \frac{1}{\mu} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\mathcal{E}_N) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \operatorname{curl}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E})_T e_3 + \frac{1}{\mu} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E})_N, \end{aligned} \quad (7.8.21)$$

et

$$\tilde{\mathcal{A}}_2(\mathcal{E}) = \frac{1}{\mu} \operatorname{curl}_\Gamma \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\mathcal{E})_N e_3 + \frac{1}{\mu} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma(\mathcal{E})_T. \quad (7.8.22)$$

Estimer l'erreur de consistance, c'est estimer

$$\delta^{n-1} \int_\Omega \left( \tilde{\mathcal{A}}_1(\mathcal{E}_n) + \tilde{\mathcal{A}}_2(\mathcal{E}_{n-1}) - \omega^2 \epsilon^\delta(\mathcal{E}_{n-1}) \right)^\delta \cdot \overline{\chi_\eta \varphi} + \delta^n \int_\Omega \left( \tilde{\mathcal{A}}_2(\mathcal{E}_n) - \omega^2 \epsilon^\delta(\mathcal{E}_n) \right)^\delta \cdot \overline{\chi_\eta \varphi}. \quad (7.8.23)$$

**Proposition 7.8.3.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante positive  $C_n$  telle que*

$$|\mathcal{D}_{\eta,\delta,n}^c| \leq C_n \eta^{n-1/2} \quad (7.8.24)$$

#### 7.8.3.1 Notations préliminaires

Nous introduisons d'abord les domaines  $\Omega_\eta$ ,  $\Omega_\eta^\delta$  et  $B_\eta^\delta$  :

$$\begin{aligned} \Omega_\eta &:= \{(x_1, x_2, z) \in \Omega, |z| \leq 2\eta\}, \\ \Omega_\eta^\delta &:= \left\{ (X_1, X_2, X_3) \in \left[ -\frac{L_1}{\delta}, \frac{L_1}{\delta} \right] \times \left[ -\frac{L_2}{\delta}, \frac{L_2}{\delta} \right] \times \left\{ |X_3| < \frac{2\eta}{\delta} \right\} \right\}, \\ B_\eta^\delta &:= B \cap \left\{ |X_3| < \frac{2\eta}{\delta} \right\}. \end{aligned} \quad (7.8.25)$$

Le domaine  $\Omega_\eta$  correspond au support de la fonction de troncature  $\chi_\eta$ , le domaine  $\Omega_\eta^\delta$  est l'image du domaine  $\Omega_\eta$  par le changement de variables  $X_1 = \frac{x_1}{\delta}$ ,  $X_2 = \frac{x_2}{\delta}$  et  $X_3 = \frac{z}{\delta}$ .  $B_\eta^\delta$  est quant-à lui l'intersection entre la

cellule périodique infinie  $B$  et  $\Omega_\eta^\delta$ .

Pour toute fonction  $\varphi(x_1, x_2)$ , on introduit  $\{\varphi\}^\delta(X_1, X_2, X_3)$

$$\{\varphi\}^\delta(X_1, X_2, X_3) := \varphi(\delta X_1, \delta X_2, \delta X_3). \quad (7.8.26)$$

Remarquons que

$$\{\operatorname{curl} v\}^\delta = \frac{1}{\delta} \operatorname{curl}_{X_1, X_2, X_3} \{v\}^\delta.$$

De même, pour toute fonction  $\mathcal{E}(X_1, X_2, X_3, x_1, x_2)$ , on définit  $\{\mathcal{E}\}^\delta(X_1, X_2, X_3)$

$$\{\mathcal{E}\}^\delta(X_1, X_2, X_3) := \mathcal{E}(X_1, X_2, X_3, \delta X_1, \delta X_2), \quad (7.8.27)$$

et on rappelle que

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}(\mathcal{E})^\delta &= \frac{1}{\delta} (\operatorname{Curl} \mathcal{E})^\delta + \left( \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{E}_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \mathcal{E}_N \right)^\delta \\ \operatorname{Curl} \{\mathcal{E}\}^\delta &= \{\operatorname{Curl} \mathcal{E}\}^\delta + \delta \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{E}_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \mathcal{E}_N \right\}^\delta \end{aligned} \quad (7.8.28)$$

où la notation  $(\cdot)^\delta$  est définie par (7.3.3). Ces différentes notations vont nous permettre de passer aisément des variables  $x_1, x_2, z$  aux variables  $X_1, X_2$  et  $X_3$ . On a de plus la propriété suivante

#### Propriété 7.8.4.

1. Soit  $v \in H(\operatorname{curl}, \Omega_\eta)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega_\eta^\delta} |\{v\}^\delta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\delta^{3/2}} \|v\|_{L^2(\Omega_\eta)}, \\ \left( \int_{\Omega_\eta^\delta} |\{\operatorname{Curl} v\}^\delta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\delta^{1/2}} \|\operatorname{curl} v\|_{L^2(\Omega_\eta)}. \end{aligned}$$

2. Soit  $\mathcal{U}(X_1, X_2, X_3, x_1, x_2) = \mathcal{V}(X_1, X_2, X_3)g(x_1, x_2)$ . Si  $g(x_1, x_2)$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$  et satisfait  $|g| \leq C$  et si  $\mathcal{V}$  est périodique. Alors, il existe une constante positive  $C > 0$  telle que

$$\left( \int_{\Omega_\eta^\delta} |\{\mathcal{U}\}^\delta| dX_1 dX_2 dX_3 \right)^{1/2} \leq \frac{C}{\delta} \|\mathcal{V}\|_{L^2(B_\eta^\delta)}.$$

#### 7.8.3.2 Problème de champs proches d'ordre 2

Pour ne travailler qu'avec les champs  $\mathcal{E}_k$  et éviter d'utiliser les champs  $\mathcal{H}_k$ , on va travailler avec les problèmes de champs proches d'ordre 2. Pour obtenir ces problèmes, il suffit de prendre le rotationnel de l'équation (7.3.6). Ces problèmes font intervenir les opérateurs  $\tilde{\mathcal{A}}_1$  et  $\tilde{\mathcal{A}}_2$  définis par (7.8.21) et (7.8.22) :

$$\begin{cases} \operatorname{Curl} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{Curl} \mathcal{E}_k \right) = -\tilde{\mathcal{A}}_1(\mathcal{E}_{k-1}) - \tilde{\mathcal{A}}_2(\mathcal{E}_{k-1}) + \omega^2 \epsilon \mathcal{E}_{k-2} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), & (7.8.29a) \\ \operatorname{div}(\epsilon \mathcal{E}_k) = -\epsilon \operatorname{div}_\Gamma(\mathcal{E}_{k-1})_T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). & (7.8.29b) \end{cases}$$

Remarquons que l'on aurait obtenu directement ce problème si on avait cherché directement le développement asymptotique de l'équation du second ordre (6.2.1).

En multipliant l'équation (7.8.29a) par la fonction test  $\overline{\{\chi_\eta \varphi\}^\delta}$ , en utilisant les formules (7.8.28) et en intégrant sur le domaine  $\Omega_\eta^\delta$ , on obtient la formule suivante (qui sera utile dans la suite) :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\eta^\delta} \left\{ \frac{1}{\mu} \text{Curl } \mathcal{E}_k \right\}^\delta \cdot \overline{\text{Curl } \{\chi_\eta \varphi\}^\delta} = \\
& + \delta \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \text{curl}_\Gamma (\text{Curl } \mathcal{E}_k)_T e_3 + \vec{\text{curl}}_\Gamma (\text{Curl } \mathcal{E}_k)_N \right\}^\delta \cdot \overline{\{\chi_\eta \varphi\}^\delta} \\
& - \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \text{curl}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-1})_T e_3 + \vec{\text{curl}}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-1})_N \right\}^\delta \cdot \overline{\text{Curl } \{\chi_\eta \varphi\}^\delta} \\
& + \delta \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-1})_T + \text{curl}_\Gamma \vec{\text{curl}}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-1})_N e_3 \right\}^\delta \cdot \overline{\{\chi_\eta \varphi\}^\delta} \\
& - \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \text{curl}_\Gamma (\text{Curl } \mathcal{E}_{k-1})_T e_3 + \vec{\text{curl}}_\Gamma (\text{Curl } \mathcal{E}_{k-1})_N \right\}^\delta \cdot \overline{\{\chi_\eta \varphi\}^\delta} \\
& - \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-2})_T + \text{curl}_\Gamma \vec{\text{curl}}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-2})_N e_3 \right\}^\delta \cdot \overline{\{\chi_\eta \varphi\}^\delta} \\
& + \int_{\Omega_\eta^\delta} \omega^2 \epsilon \{\mathcal{E}_{k-2}\}^\delta \cdot \overline{\{\chi_\eta v\}^\delta}
\end{aligned} \tag{7.8.30}$$

### 7.8.3.3 Calcul de $a^\delta((\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta \varphi)$

Dans un souci de généralité (adaptation à des géométries courbes par exemple) nous n'allons pas estimer directement 7.8.23 mais sa forme intégrée par parties définie par 7.8.7 :

$$a^\delta((\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta \varphi) := \int_{\Omega_\eta} \frac{1}{\mu_\delta} \text{curl } (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta \cdot \overline{\text{curl } (\chi_\eta \varphi)} - \omega^2 \int_{\Omega_\eta} \epsilon^\delta (\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta \cdot \overline{\chi_\eta v}.$$

En effectuant le changement de variables  $X_1 = \frac{x_1}{\delta}$ ,  $X_2 = \frac{x_2}{\delta}$  et  $X_3 = \frac{z}{\delta}$ , il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \delta^k \int_{\Omega_\eta} \frac{1}{\mu^\delta} \text{curl } (\mathcal{E}_k)^\delta \cdot \overline{\text{curl } (\chi_\eta \varphi)} = \\
& \delta \left( \sum_{k=0}^n \delta^k \int_{\Omega_\eta^n} \frac{1}{\mu} \{\text{Curl } \mathcal{E}_k\}^\delta \cdot \overline{\text{Curl } \{\chi_\eta \varphi\}^\delta} \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{n+1} \delta^k \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \text{curl}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-1})_T e_3 + \vec{\text{curl}}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-1})_N \right\}^\delta \cdot \overline{\{\text{Curl } \chi_\eta v\}^\delta} \right),
\end{aligned}$$

et que

$$-\omega^2 \sum_{k=0}^n \int_{\Omega_\eta} \epsilon^\delta (\mathcal{E}_k)^\delta \cdot \overline{\chi_\eta \varphi} = \delta \left( \sum_{k=2}^{n+2} \delta^k \int_{\Omega_\eta^\delta} -\omega^2 \epsilon \{\mathcal{E}_{k-2}\}^\delta \cdot \overline{\{\chi_\eta \varphi\}^\delta} \right),$$

Ainsi, en posant

$$\begin{aligned}
D_k & := \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \{\text{Curl } (\mathcal{E}_k)\}^\delta \cdot \overline{\text{Curl } \{\chi_\eta v\}^\delta} \\
& + \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \text{curl}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-1})_T e_3 + \vec{\text{curl}}_\Gamma (\mathcal{E}_{k-1})_N \right\}^\delta \cdot \overline{\{\text{Curl } \chi_\eta v\}^\delta} \\
& - \int_{\Omega_\eta^\delta} \omega^2 \epsilon \{\mathcal{E}_{k-2}\}^\delta \cdot \overline{\{\chi_\eta \varphi\}^\delta},
\end{aligned} \tag{7.8.31}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
a^\delta((\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta \varphi) &:= \sum_{k=0}^n \delta^{k+1} D_k \\
&+ \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma(\mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \cdot \overline{\operatorname{Curl} \{ \chi_\eta \varphi \}^\delta} \\
&- \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \omega^2 \epsilon \{ \mathcal{E}_{n-1} \}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta} - \delta^{n+3} \int_{\Omega_\eta^\delta} \omega^2 \epsilon \{ \mathcal{E}_n \}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta}.
\end{aligned} \tag{7.8.32}$$

Mais, en utilisant la formule (7.8.30), l'expression de  $D_k$  peut être simplifiée : en effet,

$$D_k = A_k + B_k, \tag{7.8.33}$$

avec,

$$\begin{aligned}
A_k &= \delta \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E}_k)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E}_k)_N \right\}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta} \\
&- \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E}_{k-1})_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E}_{k-1})_N \right\}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta},
\end{aligned} \tag{7.8.34}$$

et

$$\begin{aligned}
B_k &= \delta \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma(\mathcal{E}_{k-1})_T + \operatorname{curl}_\Gamma \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\mathcal{E}_{k-1})_N e_3 \right\}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta} \\
&- \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma(\mathcal{E}_{k-2})_T + \operatorname{curl}_\Gamma \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\mathcal{E}_{k-2})_N e_3 \right\}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta}.
\end{aligned} \tag{7.8.35}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^n \delta^{k+1} A_k = \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta}$$

et de même,

$$\sum_{k=0}^n \delta^{k+1} B_k = \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma(\mathcal{E}_{n-1})_T + \operatorname{curl}_\Gamma \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\mathcal{E}_{n-1})_N e_3 \right\}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta}$$

si bien que l'expression (7.8.32) devient

$$\begin{aligned}
a^\delta((\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta \varphi) &:= \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta} \\
&+ \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma(\mathcal{E}_{n-1})_T + \operatorname{curl}_\Gamma \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\mathcal{E}_{n-1})_N e_3 \right\}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta}
\end{aligned} \tag{7.8.36}$$

$$\begin{aligned}
&+ \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma(\mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma(\mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \cdot \overline{\operatorname{Curl} \{ \chi_\eta \varphi \}^\delta} \\
&- \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \omega^2 \epsilon \{ \mathcal{E}_{n-1} \}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta} - \delta^{n+3} \int_{\Omega_\eta^\delta} \omega^2 \epsilon \{ \mathcal{E}_n \}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta}.
\end{aligned} \tag{7.8.37}$$

Il reste à estimer chaque terme indépendamment : pour cela, nous majorons chaque terme à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour séparer les termes faisant intervenir les fonctions test des termes faisant intervenir les champs proches  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{E}_{n-1}$  ainsi que leurs dérivées. La connaissance du comportement des champs proches à l'infini nous permet alors de majorer ces derniers.

- $a := \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma (\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma (\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \cdot \overline{\{\chi_\eta \varphi\}^\delta}$ .

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$a \leq C \delta^{n+2} \left\| \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma (\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma (\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_\eta^\delta)} \left\| \{\chi_\eta \varphi\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_\eta^\delta)}.$$

Contrairement à l'estimation de l'erreur de raccord, on se sert ici de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et non l'inégalité de Hölder. En effet, comme  $\mu$  et  $\epsilon$  peuvent être discontinues quand  $X_3 \leq 1$ , les dérivées des champs proches  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{E}_{n-1}$  n'appartiennent pas nécessairement à  $L^\infty(\Omega_\eta^\delta)$ .

D'après (7.7.38) on connaît la forme semi-explicite de  $\mathcal{E}_n$ ,

$$\mathcal{E}_n = \sum_{k=0}^{N(n)} g_k(x_1, x_2) \mathcal{U}_k(X_1, X_2, X_3),$$

avec  $\partial_{x_1}^\alpha \partial_{x_2}^\beta |g_k| \leq C$  pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$  et  $\|\operatorname{Curl} \mathcal{U}_k\|_{L^2(B_\eta^\delta)} \leq C \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{n-1/2}$  (la partie exponentiellement décroissante est bornée en norme  $L^2(B_\eta^\delta)$ ), si bien qu'en utilisant la propriété 7.8.4 on a d'une part

$$\left\| \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma (\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma (\operatorname{Curl} \mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_\eta^\delta)} \leq C \frac{1}{\delta} \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{n-1/2},$$

et d'autre part,

$$\left\| \{\chi_\eta \varphi\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_\eta^\delta)} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} a &\leq C \delta^{n+2} \left( \frac{1}{\delta} \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{n-1/2} \right) \left( \frac{1}{\delta^{3/2}} \|\varphi\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} \right), \\ &\leq C \eta^{n-1/2} \|\varphi\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (7.8.38)$$

- $b := \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma (\mathcal{E}_{n-1})_T + \operatorname{curl}_\Gamma \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma (\mathcal{E}_{n-1})_N e_3 \right\} \cdot \overline{\{\chi_\eta \varphi\}^\delta}$

Par un raisonnement analogue on montre que

$$\begin{aligned} b &\leq C \delta^{n+2} \left( \frac{1}{\delta} \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{n-1/2} \right) \left( \frac{1}{\delta^{3/2}} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right), \\ &\leq C \eta^{n-1/2} \|\varphi\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (7.8.39)$$

- $c := \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \frac{1}{\mu} \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma (\mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma (\mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \cdot \overline{\operatorname{Curl} \{\chi_\eta \varphi\}^\delta}$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis la propriété 7.8.4, on a

$$c \leq \delta^{n+2} \left\| \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma (\mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma (\mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_\eta^\delta)} \frac{1}{\delta^{1/2}} \|\operatorname{curl} (\chi_\eta \varphi)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or,

$$\|\operatorname{curl} (\chi_\eta \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\eta} \|\varphi\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)},$$

et

$$\left\| \left\{ \operatorname{curl}_\Gamma (\mathcal{E}_n)_T e_3 + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma (\mathcal{E}_n)_N \right\}^\delta \right\|_{L^2(\Omega_\eta^\delta)} \leq \frac{C}{\delta} \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{n+1/2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} c &\leq C \delta^{n+2} \left( \frac{1}{\delta} \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{n+1/2} \right) \left( \frac{1}{\delta^{1/2}} \frac{1}{\eta} \|\varphi\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} \right), \\ &\leq C \eta^{n-1/2} \|\varphi\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (7.8.40)$$



$$\bullet d := \delta^{n+2} \int_{\Omega_\eta^\delta} \omega^2 \epsilon \{ \mathcal{E}_{n-1} \}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta}$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment,

$$\begin{aligned} d &\leq C \delta^{n+2} \left( \frac{1}{\delta} \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{n-1/2} \right) \left( \frac{1}{\delta^{3/2}} \|\varphi\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \right), \\ &\leq C \eta^{n-1/2} \|\varphi\|_{H(\text{curl}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (7.8.41)$$

$$\bullet e := \delta^{n+3} \int_{\Omega_\eta^\delta} \omega^2 \epsilon \{ \mathcal{E}_n \}^\delta \cdot \overline{\{ \chi_\eta \varphi \}^\delta}$$

$$\begin{aligned} e &\leq C \delta^{n+3} \left( \frac{1}{\delta} \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{n+1/2} \right) \left( \frac{1}{\delta^{3/2}} \|\varphi\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \right), \\ &\leq C \eta^{n+1/2} \|\varphi\|_{H(\text{curl}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (7.8.42)$$

En combinant les estimations (7.8.38-7.8.42), on obtient une estimation de l'erreur de consistance,

$$|a^\delta((\mathcal{E}_{i,\delta}^n)^\delta, \chi_\eta \varphi)| \leq C \eta^{n-1/2} \|\varphi\|_{H(\text{curl}, \Omega)}, \quad (7.8.43)$$

et la proposition 7.8.3 est démontrée.

On peut remarquer que, si on néglige le terme  $\sum_{k=0}^n \delta^k e^{-\tau_n \frac{\eta}{\delta}}$  (qui s'avère être aussi petit que l'on veut) les erreurs de raccords (7.8.8) et de consistance (7.8.24) sont du même ordre.

## 7.8.4 Estimation d'erreur optimale pour le champs lointain

### 7.8.4.1 Deux estimations globales

Les propositions 7.8.2 et 7.8.3 ainsi que la proposition de stabilité 6.2.1 nous permettent d'obtenir un premier résultat de convergence :

**Proposition 7.8.5.** *Soit  $\delta_0$  défini par la proposition 6.2.1. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_n > 0$  et  $\tau_n > 0$  telles que*

$$\forall \delta < \delta_0, \quad \|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta,\delta}^n\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq C_n \left( \eta^{n-1/2} + \frac{1}{\delta} e^{-\tau_n \frac{\eta}{\delta}} \right). \quad (7.8.44)$$

En choisissant  $\eta$  convenablement ( $\eta := \frac{n+1}{\tau_n} \delta \ln \delta$ ), on obtient une seconde estimation globale qui est cette fois indépendante de la fonction  $\eta$  :

**Proposition 7.8.6.** *Soit  $\delta_0 > 0$  défini par la proposition 6.2.1. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_n > 0$  telle que*

$$\forall \delta < \delta_0, \quad \|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta,\delta}^n\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq C_n \delta^{n-1/2} (\ln \delta)^{n-1/2}. \quad (7.8.45)$$

*Démonstration.* Choisissons  $\eta := \frac{n+1}{\tau_n} \delta \ln \delta$ . Alors, pour  $\delta < \delta_0$ , il existe  $C_n$  telle que,

$$\frac{1}{\delta} e^{-\tau_n \frac{\eta}{\delta}} \leq C_n \delta^{n-1/2}.$$

L'estimation (7.8.44) donne alors directement l'estimation (7.8.45).  $\square$

### 7.8.4.2 Estimation locale optimale

Nous pouvons maintenant montrer la proposition 7.8.1, c'est à dire montrer une estimation optimale de l'erreur entre le développement en champ lointain tronqué et la solution exacte : soit  $0 < \gamma < \frac{L_3}{2}$  et

$$\Omega_\gamma := \{(x_1, x_2, z) \in \Omega, |z| > \gamma\}.$$

$\Omega_\gamma$  correspond à  $\Omega$  privé d'une bande d'épaisseur  $\gamma$  autour de la couche périodique.

A partir de maintenant, nous fixons  $\eta(\delta) = \frac{n+2}{\tau_{n+2}} \delta \ln \delta$ . Puisque pour  $\delta$  assez petit,  $\mathbf{E}_{\eta, \delta}^n = \sum_{k=0}^n \delta^k \mathbf{E}_k$  dans  $\Omega_\gamma$ , il existe  $\delta_{\gamma,0} > 0$ , tel que pour tout  $\delta < \delta_{\gamma,0}$ ,

$$\left\| \mathbf{E}^\delta - \sum_{k=0}^n \delta^k \mathbf{E}_k \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} = \left\| \mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta, \delta}^n \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)}.$$

Donc, pour  $\delta < \delta_\gamma := \min(\delta_0, \delta_{\gamma,0})$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{E}^\delta - \sum_{k=0}^n \delta^k \mathbf{E}_k \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} &\leq \left\| \mathbf{E}^\delta - \sum_{k=0}^{n+2} \delta^k \mathbf{E}_k \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} + \sum_{k=k+1}^{n+2} \delta^k \|\mathbf{E}_k\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} \\ &\leq \left\| \mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta, \delta}^{n+2} \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} + \sum_{k=k+1}^{n+2} \delta^k \|\mathbf{E}_k\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} \end{aligned}$$

Or, la proposition 7.8.6 donne

$$\left\| \mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_{\eta, \delta}^{n+2} \right\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq C_{n+2} \delta^{n+2-1/2} (\ln \delta)^{n+2-1/2} \leq C \delta^{n+1}.$$

Comme de plus,

$$\sum_{k=k+1}^{n+2} \delta^k \|\mathbf{E}_k\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} \leq C \delta^{n+1},$$

nous avons montré l'estimation d'erreur en champ lointain attendue :

$$\left\| \mathbf{E}^\delta - \sum_{k=0}^n \delta^k \mathbf{E}_k \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} \leq C \delta^{n+1}.$$

## 7.9 Annexes

### 7.9.1 Construction du développement asymptotique : développements formels

#### 7.9.1.1 Preuve de la proposition 7.4.1

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence. L'initialisation est évidente puisque pour  $n = 0$ , les conditions (7.4.1) et (7.4.2) sont strictement équivalentes. Supposons maintenant que les conditions de raccords (7.4.1) et (7.4.2) soient équivalentes pour tout  $k \leq n - 1$ . Nous allons montrer que les conditions (7.4.3) sont alors automatiquement satisfaites en utilisant les propositions 7.3.3 et 7.2.1 : soit  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} (C_{n,k})_T^\pm &= \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma (C_{n-1,k-1})_N^\pm + i\omega (D_{n-1,k-1})_T^\pm \times e_3), \quad (\text{prop. 7.3.3}) \\ &= \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma (\mathbf{E}_{n-k}^{k-1})_N^\pm + i\omega (\mathbf{H}_{n-k}^{k-1})_T^\pm \times e_3), \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= (\mathbf{E}_{n-k}^k)_N^\pm, \quad (\text{prop. 7.2.1}) \\ &= \frac{\partial^k (\mathbf{E}_{n-k})_T}{\partial z^k} (x_1, x_2, 0^\pm). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} (C_{n,k})_N^\pm &= -\frac{1}{k} \operatorname{div}_\Gamma(C_{n-1,k-1})_T^\pm = -\frac{1}{k} \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{E}_{n-k}^{k-1})_N^\pm = (\mathbf{E}_{n-k}^k)_N^\pm \\ &= \frac{\partial^k(\mathbf{E}_{n-k})_N}{\partial z^k}(x_1, x_2, 0^\pm), \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} (D_{n,k})_T^\pm &= \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma(D_{n-1,k-1})_N^\pm - i\omega(C_{n-1,k-1})_T^\pm \times e_3), \\ &= \frac{1}{k} (\nabla_\Gamma(\mathbf{H}_{n-k}^{k-1})_N^\pm - i\omega(\mathbf{E}_{n-k}^{k-1})_T^\pm \times e_3), \\ &= (\mathbf{H}_{n-k}^k)_N^\pm, \\ &= \frac{\partial^k(\mathbf{H}_{n-k})_T}{\partial z^k}(x_1, x_2, 0^\pm), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_{n,k})_N^\pm &= -\frac{1}{k} \operatorname{div}_\Gamma(D_{n-1,k-1})_T^\pm = -\frac{1}{k} \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H}_{n-k}^{k-1})_N^\pm = (\mathbf{H}_{n-k}^k)_N^\pm \\ &= \frac{\partial^k(\mathbf{H}_{n-k})_N}{\partial z^k}(x_1, x_2, 0^\pm). \end{aligned}$$

□

## 7.9.2 Problèmes de champs proches

### 7.9.2.1 Un résultat sur les fonctions périodiques

**Proposition 7.9.1.** *Soit  $f \in C^\infty(B)$  telle que  $\nabla f$  soit 1-périodique en  $X_1$  et  $\tau$ -périodique en  $X_2$  et  $\nabla f \in L^2(B)$ . Alors, il existe deux constantes  $c^1$  et  $c^2$  telles que*

$$g(X_1, X_2, X_3) := f(X_1, X_2, X_3) - c^1 X_1 - c^2 X_2$$

soit 1-périodique en  $X_1$  et  $\tau$ -périodique en  $X_2$ . De plus, les constantes  $c^1$  et  $c^2$  sont données par

$$\begin{aligned} c^1 &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial f(t, X_2, X_3)}{\partial X_1} dt, \forall X_2 \in ]-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}[ , \forall X_3 \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial f(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1} dX_1 dX_2 \forall X_3 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (7.9.1)$$

et,

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{\partial f(X_1, t, X_3)}{\partial X_2} dt, \forall X_1 \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ , \forall X_3 \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial f(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2} dX_1 dX_2 \forall X_3 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (7.9.2)$$

Ainsi,

$$|c^1| + |c^2| \leq C \|\nabla f\|_{L^2(B)} \quad (7.9.3)$$

*Démonstration.*

- On montre d'abord que  $c^1$  est bien indépendant de  $X_2$  et  $X_3$ . Il suffit de dériver l'expression de  $c^1$  par rapport à  $X_2$  et  $X_3$  :

$$\frac{\partial c^1}{\partial X_2} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 f(t, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial X_2} dt = \frac{\partial f(\frac{1}{2}, X_2, X_3)}{\partial X_2} - \frac{\partial f(\frac{-1}{2}, X_2, X_3)}{\partial X_2} = 0 \quad (\nabla f \text{ périodique}),$$

$$\frac{\partial c^1}{\partial X_3} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 f(t, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial X_3} dt = \frac{\partial f(\frac{1}{2}, X_2, X_3)}{\partial X_3} - \frac{\partial f(\frac{-1}{2}, X_2, X_3)}{\partial X_3} = 0.$$

Ainsi,  $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial f(t, X_2, X_3)}{\partial X_1} dt$  est constante en  $X_2$ . On peut donc aussi intégrer en  $X_2$  sur une période  $\tau$  et diviser par cette même période et obtenir l'expression (7.9.1). Un raisonnement analogue s'applique pour montrer que  $c^2$  est indépendante de  $X_1$  et de  $X_3$ .

- On montre l'estimation (7.9.3) : soit une fonction  $\phi_0$  périodique en  $X_1$  et en  $X_2$  très régulière définie dans  $B_{h_0}$  qui vaut 1 quand  $X_3 = h_0$  (sur  $\Gamma_{h_0}$ ) et qui s'annule quand  $X_3 \leq h_0 - 1$ . Alors  $\forall h_0 > 0$ ,

$$\begin{aligned} c^1 &= \int_{\partial B_0} \nabla f \cdot \phi_0 e_1 \\ &= \int_{B_{h_0}} \operatorname{curl}(\nabla f) \cdot \phi_0 e_1 dX_1 - \int_{B_{h_0}} \nabla f \cdot \operatorname{curl}(\phi_0 e_1). \end{aligned}$$

Donc

$$|c^1| \leq C \|\phi_0\|_{H_1(B)} \|\nabla p\|_{L^2(B)}.$$

- On montre que  $g$  est périodique : remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} f(X_1 + 1, X_2 + \tau, X_3) &= f(X_1, X_2 + \tau, X_3) + \int_{X_1}^{X_1+1} \frac{\partial f}{\partial X_1}(t, X_2 + \tau, X_3) dt, \\ &= f(X_1, X_2 + \tau, X_3) + c^1, \\ &= f(X_1, X_2, X_3) + c^1 + \int_{X_2}^{X_2+\tau} \frac{\partial f}{\partial X_2}(X_1, t, X_3) dt, \\ &= f(X_1, X_2, X_3) + c^1 + \tau c^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} g(X_1 + 1, X_2 + \tau, X_3) &= f(X_1 + 1, X_2 + \tau, X_3) - c^1(X_1 + 1) - c^2(X_2 + \tau), \\ &= f(X_1, X_2, X_3) - c^1 X_1 - c^2 X_2, \\ &= g(X_1, X_2, X_3). \end{aligned}$$

□

Par densité on en déduit le résultat suivant :

**Proposition 7.9.2.** *Soit  $p \in H_{loc}^2(B)$  telle que  $\nabla p \in L^2(B)$ ,  $p$  très régulière quand  $|X_3| \geq 1$  et  $\nabla p$  périodique. Alors, il existe deux constantes  $c^1$  et  $c^2$  telles que*

$$\tilde{p} := p - c^1 X_1 - c^2 X_2.$$

*soit périodique. De plus, les constantes  $c^1$  et  $c^2$  sont données par*

$$\begin{aligned} c^1 &:= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial p(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1} dX_1 dX_2 \quad \forall |X_3| > 1 \\ c^2 &:= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial p(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2} dX_1 dX_2 \quad \forall |X_3| > 1. \end{aligned}$$

### 7.9.3 Existence : une étape préliminaire

**Lemme 7.9.3.** Soit  $h$  une fonction  $L^2(B)$  à support compact. Alors il existe une suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

- $\int_B h_n = 0$ ,
- $h_n$  est à support compact (le support varie avec  $n$ ),
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n - h\|_{L^2(B)} = 0$ .

*Démonstration.* Comme  $h \in L^2(B)$  et  $h$  est à support compact  $h$  appartient à  $L^1(B)$ .

Soit  $\alpha = \int_B h dx_1$ . On définit la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$h_n = h - 1_{(]0, n[)} \frac{\alpha}{\tau n}.$$

Il est clair que  $h_n$  est à support compact. De plus,  $\int_B h_n = 0$  (l'aire d'une section de  $B$  où  $X_3$  est constante est égale à  $\tau$ ). Enfin,

$$\|h - h_n\|_{L^2}^2 = \int_B 1_{(]0, n[)} \frac{\alpha^2}{(\tau n)^2} = \frac{\alpha^2}{\tau n}.$$

si bien que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n - h\|_{L^2(B)} = 0$ . □

**Proposition 7.9.4.** Soient  $f \in L^2_{per}(\mathbb{R}^3)^3$  et  $g \in L^2_{per}(\mathbb{R}^3)$ . Il existe une unique fonction  $w \in X_1(\mathbb{R}^3) | \mathbb{R}^3$  satisfaisant

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w = \operatorname{curl} f & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3, \\ \operatorname{div} w = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (7.9.4)$$

*Démonstration.* Introduisons d'abord l'espace  $X_{1,c}(\mathbb{R}^3)$  :

$$\begin{aligned} X_{1,c}(\mathbb{R}^3) &:= \left\{ \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \text{ telles que } \frac{\varphi}{\sqrt{1 + (X_3)^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3), \operatorname{curl} \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3), \operatorname{div} \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3), \right. \\ &\quad \left. \exists K = [a, b] \times [c, d] \times \mathbb{R} \text{ tel que } \operatorname{supp} \varphi \subset K \right\}. \end{aligned} \quad (7.9.5)$$

Soit  $w$  satisfaisant (7.9.4). Alors,

$$\forall \varphi \in X_{1,c}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} w \cdot \operatorname{curl} \varphi + \operatorname{div} w \operatorname{div} \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} g \operatorname{div} \varphi + f \cdot \operatorname{curl} \varphi. \quad (7.9.6)$$

Soit l'opérateur  $\mathcal{S}$  :

$$\begin{cases} X_{1,c}(\mathbb{R}^3) \rightarrow X_1(B), \\ \varphi \mapsto \mathcal{S}(\varphi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi(X_1 + i, X_2 + \tau j, X_3). \end{cases} \quad (7.9.7)$$

On remarque que les sommes sur  $i$  et  $j$  précédentes sont des sommes finies puisque  $\varphi \in X_{1,c}(\mathbb{R}^3)$ .

En utilisant la remarque 7.5.1, l'équation (7.9.6) s'écrit alors de manière équivalente à l'aide de l'opérateur  $\mathcal{S}$  :

$$\forall \varphi \in X_{1,c}(\mathbb{R}^3), \quad \int_B \operatorname{curl} w \cdot \operatorname{curl} \mathcal{S}(\varphi) + \operatorname{div} w \operatorname{div} \mathcal{S}(\varphi) = \int_B g \operatorname{div} \mathcal{S}(\varphi) + f \cdot \operatorname{curl} \mathcal{S}(\varphi), \quad (7.9.8)$$

Or, on peut montrer que  $\mathcal{S}$  est un opérateur surjectif ce qui implique que

$$\forall \varphi \in X_1(B), \quad \int_B \operatorname{curl} w \cdot \operatorname{curl} \varphi + \operatorname{div} w \operatorname{div} \varphi = \int_B g \operatorname{div} \varphi + f \cdot \operatorname{curl} \varphi, \quad (7.9.9)$$

et en particulier,

$$\forall \varphi \in X_1(B)|\mathbb{R}^3, \quad \int_B \operatorname{curl} w \cdot \operatorname{curl} \varphi + \operatorname{div} w \operatorname{div} \varphi = \int_B g \operatorname{div} \varphi + f \cdot \operatorname{curl} \varphi. \quad (7.9.10)$$

Or ce problème admet une solution unique  $w_1$  dans  $X_1(B)|\mathbb{R}^3$  (voir proposition 7.5.8).

Réciproquement, nous allons maintenant montrer que  $w_1$  satisfait (7.9.4). Tout d'abord, remarquons que la formulation (7.9.10) reste vraie si on prend les fonctions  $\varphi$  dans  $X_1(B)$  plutôt que dans  $X_1(B)|\mathbb{R}^3$  si bien que

$$\forall \varphi \in X_1(B), \quad \int_B \operatorname{curl} w_1 \cdot \operatorname{curl} \varphi + \operatorname{div} w_1 \operatorname{div} \varphi = \int_B g \operatorname{div} \varphi + f \cdot \operatorname{curl} \varphi. \quad (7.9.11)$$

En prenant  $\varphi = \nabla p$ , on a Donc,

$$\int_B (\operatorname{div}(w_1) - g)h = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(B) \text{ telle que } \int_B h = 0$$

En utilisant le lemme 7.9.3 et le fait que  $\operatorname{div}(w_1) - g \in L^2(B)$ , l'égalité précédente est vraie pour toute fonction de  $\mathcal{D}(B)$ . Cela signifie exactement que

$$\operatorname{div}(w_1) = g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(B)$$

et donc, comme  $g \in L^2_{per}(\mathbb{R}^3)$ , dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .

Maintenant il reste à montrer que  $\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_1 = \operatorname{curl} f$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3$ . Pour cela, soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ . Alors, comme  $\mathcal{S}(\varphi) \in X_1(B)$  on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3, \quad \int_B \operatorname{curl} w_1 \cdot \operatorname{curl} \mathcal{S}(\varphi) = \int_B f \cdot \operatorname{curl} \mathcal{S}(\varphi).$$

Or la ligne précédente est équivalente à l'équation suivante, posée cette fois sur  $\mathbb{R}^3$  tout entier

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} w_1 \cdot \operatorname{curl} \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot \operatorname{curl} \varphi.$$

Ainsi,

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} w_1 = \operatorname{curl} f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3.$$

On a donc montré l'existence et l'unicité de  $w \in X_1(\mathbb{R}^3)|\mathbb{R}^3$  satisfaisant (7.9.4). □

On en déduit le lemme ci dessous :

**Lemme 7.9.5.** *Soit  $f \in L^2_{per}(\mathbb{R}^3)^3$  vérifiant  $\operatorname{div} f = 0$ . Alors il existe  $w_a \in X_a(\mathbb{R}^3)$  telle que*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(aw_a) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \operatorname{curl}(w_a) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3. \end{cases}$$

En utilisant la proposition 7.9.4, nous savons qu'il existe  $w \in X_1(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} w = \operatorname{curl} f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3, \\ \operatorname{div} w = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

En intégrant l'équation  $\operatorname{div} w = 0$  sur un domaine borné, on remarque que

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} w(X_1, X_2, h_0) \cdot e_3 - w(X_1, X_2, -h_0) \cdot e_3 dX_1 dX_2 = 0 \quad \forall h_0 > 0. \quad (7.9.12)$$

Soit  $d = f - \operatorname{curl} w$ .  $z$  appartient à  $L^2_{per}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs,

$$\begin{cases} \operatorname{curl} d = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3, \\ \operatorname{div} d = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Donc, en utilisant la proposition 7.5.3,  $d$  est une constante de  $\mathbb{R}^3$ . Mais, comme  $d \in L_{per}^2(\mathbb{R}^3)$ , alors  $d = 0$ . On a donc trouvé  $w \in X_1(\mathbb{R}^3)$  vérifiant  $\text{curl } w = f$ . Malheureusement  $\text{div}(aw) \neq 0$ . Pour trouver  $w_a$  on va donc corriger  $w$  en lui ajoutant une fonction à rotationnel nul. Plus précisément on va construire  $w_a$  sous la forme

$$w_a = w + \nabla p,$$

où  $p$  est une fonction appartenant à  $W_1(\mathbb{R}^3)$ . Il faut montrer que  $p$  existe. Si  $p$  existe, elle vérifie

$$\text{div}(a\nabla p) = -\text{div}(aw) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (7.9.13)$$

Or, cette équation admet une solution (définie à une constante près) dans  $W_1(\mathbb{R}^3)$ . En effet, soit  $\chi$  une fonction de troncature satisfaisant

$$\chi(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| > 2, \\ 0 & \text{si } |z| < 1. \end{cases} \quad (7.9.14)$$

Alors,

$$\text{div}(aw) = \underbrace{\text{div}(a(1-\chi)w)}_{g_0} + \underbrace{\nabla\chi \cdot w}_{f_0},$$

où

–  $f_0 \in L_{per}^2(\mathbb{R}^3)$  est à support compact et satisfait (en utilisant (7.9.12)),

$$\int_B f_0 = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} w(X_1, X_2, h_0) \cdot e_3 - w(X_1, X_2, -h_0) \cdot e_3 = 0.$$

–  $g_0 \in L_{per}^2(\mathbb{R}^3)$  est à support compact.

L'application de la proposition 7.5.2 nous donne l'existence d'une fonction  $p \in W^1(\mathbb{R}^3)$  et termine la construction de la fonction  $w_a$ .

## 7.9.4 Construction du développement asymptotique

### 7.9.4.1 Preuve de la proposition 7.7.7

La preuve de cette démonstration est similaire à celle de la proposition 7.7.6. Il nous faut juste vérifier la seconde condition de compatibilité à savoir,

$$\{f((\mathcal{W}_i)_k^{p,q})^{x_3}\}_{0,0} = \{f((\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q})^{x_3}\}_{0,0} = 0.$$

La démonstration est résumée à l'aide des deux tableaux ci-dessous :

$(\mathcal{W}_i)_1^{p,q}$	$\mathcal{A}_0^{1,0} \left\{ (\mathcal{W}_i)_0^{p-1,q} \right\}_{0,0} \cdot e_3$	$\mathcal{A}_0^{0,1} \left\{ (\mathcal{W}_i)_0^{p,q-1} \right\}_{0,0} \cdot e_3$	$i\omega \epsilon \left\{ (\tilde{\mathcal{W}}_i)_0^{p,q} \right\}_{0,0} \cdot e_3$	total
$(\mathcal{W}_0)_1^{0,0}$	0	0	0	0
$(\mathcal{W}_0)_1^{1,0}$	$\left\{ \frac{\partial q_1}{\partial X_2} \right\}_{0,0} = 0$	0	0	0
$(\mathcal{W}_0)_1^{0,1}$	0	$-\left\{ \frac{\partial q_1}{\partial X_1} \right\}_{0,0} = -1$	$+\frac{i\omega}{i\omega} \left\{ \frac{\partial p_3}{\partial X_3} \right\}_{0,0} = 1$	0
$(\mathcal{W}_1)_1^{0,0}$	0	0	0	0
$(\mathcal{W}_1)_1^{1,0}$	$\left\{ \frac{\partial q_2}{\partial X_2} \right\}_{0,0} = 1$	0	$-\frac{i\omega}{i\omega} \left\{ \frac{\partial p_3}{\partial X_3} \right\}_{0,0} = -1$	0
$(\mathcal{W}_1)_1^{0,1}$	0	$\left\{ -\frac{\partial q_2}{\partial X_1} \right\}_{0,0} = 0$	0	0

$(\tilde{\mathcal{W}}_1)^{p,q}$	$\mathcal{A}_0^{1,0} \left\{ (\tilde{\mathcal{W}}_0)^{p-1,q} \right\}_{0,0} \cdot e_3$	$\mathcal{A}_0^{0,1} \left\{ (\tilde{\mathcal{W}}_0)^{p,q-1} \right\}_{0,0} \cdot e_3$	$i\omega \epsilon \left\{ (\mathcal{V}'_i)^{p,q} \right\}_{0,0} \cdot e_3$	total
$(\tilde{\mathcal{W}}_0)_1^{0,0}$	0	0	$\left\{ \frac{\partial p_1}{\partial X_3} \right\}_{0,0} = 0$	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_0)_1^{1,0}$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_0)_1^{0,1}$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_0)_1^{2,0}$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_0)_1^{1,1}$	$-\frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{\partial q_3}{\partial X_2} \right\}_{0,0} = 0$	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_0)_1^{0,2}$	0	$\frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{\partial q_3}{\partial X_1} \right\}_{0,0} = 0$	0	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_1)_1^{0,0}$	0	0	$\left\{ \frac{\partial p_2}{\partial X_3} \right\}_{0,0} = 0$	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_1)_1^{1,0}$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_1)_1^{0,1}$	0	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_1)_1^{2,0}$	$\frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{\partial q_3}{\partial X_2} \right\}_{0,0} = 0$	0	0	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_1)_1^{1,1}$	0	$-\frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{\partial p_3}{\partial X_1} \right\}_{0,0} = 0$	0	0
$(\tilde{\mathcal{W}}_1)_1^{0,2}$	0	0	0	0

#### 7.9.4.2 Preuve de la proposition 7.7.8

Nous montrons cette proposition par récurrence. L'initialisation a déjà été prouvée pour  $n = 0$  et pour  $n = 1$ . La preuve pour  $n = 1$  était sensiblement différente de la preuve pour  $n > 1$  quelconque, c'est pourquoi il fallait traiter ce cas séparément. On définit

$$\begin{aligned}
f((\mathcal{V}'_i)_k^{p,q}) &:= -\mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\mathcal{V}'_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) - \mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\mathcal{V}'_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) + i\omega \mu \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q} \right), \\
f((\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q}) &:= -\mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) - \mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) + i\omega \mu \left( (\mathcal{W}_i)_k^{p,q} \right), \\
f((\mathcal{W}_i)_k^{p,q}) &:= \mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) + \mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) + i\omega \epsilon \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p,q} \right), \\
f((\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q}) &:= \mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) + \mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) + i\omega \epsilon \left( (\mathcal{V}'_i)_{k-1}^{p,q} \right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g((\mathcal{V}'_i)_k^{p,q}) &:= -\epsilon \left( \mathcal{B}_0^{1,0} \left( (\mathcal{V}'_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) + \mathcal{B}_0^{0,1} \left( (\mathcal{V}'_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) \right), \\
g((\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q}) &:= -\epsilon \left( \mathcal{B}_0^{1,0} \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) + \mathcal{B}_0^{0,1} \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) \right), \\
g((\mathcal{W}_i)_k^{p,q}) &:= -\mu \left( \mathcal{B}_0^{1,0} \left( (\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) + \mathcal{B}_0^{0,1} \left( (\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) \right), \\
g((\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q}) &:= -\mu \left( \mathcal{B}_0^{1,0} \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) + \mathcal{B}_0^{0,1} \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) \right).
\end{aligned}$$

1. Conditions de compatibilité :

$$-\operatorname{div} f((\mathcal{V}'_i)_k^{p,q}) = 0 :$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left( -\mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\mathcal{V}'_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) \right) &= \operatorname{curl} \left( (\mathcal{V}'_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) \cdot e_1 \\
&= - \left( (\mathcal{V}'_i)_{k-2}^{p-1,q-1} \right)^3 + i\omega \mu \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^1.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( -\mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) \right) &= \operatorname{curl} \left( (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) \cdot e_2 \\ &= + \left( (\mathcal{V}_i)_{k-2}^{p-1,q-1} \right)^3 + i\omega\mu \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^2. \end{aligned}$$

$$i\omega \operatorname{div} \left( \mu (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q} \right) = -i\omega\mu \left( \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^1 + \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^2 \right).$$

En additionnant les trois équations, on obtient

$$\operatorname{div} f \left( (\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \right) = 0$$

$$- \operatorname{div} f \left( (\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \right) = 0 :$$

$$\operatorname{div} \left( -\mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) \right) = - \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-2}^{p-1,q-1} \right)^3 + i\omega\mu \left( (\mathcal{W}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^1,$$

$$\operatorname{div} \left( -\mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) \right) = + \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-2}^{p-1,q-1} \right)^3 + i\omega\mu \left( (\mathcal{W}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^2,$$

$$i\omega \operatorname{div} \left( \mu (\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p,q} \right) = -i\omega\mu \left( \left( (\mathcal{W}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^1 + \left( (\mathcal{W}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^2 \right).$$

$$\text{et donc } \operatorname{div} f \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_k^{p,q} \right) = 0.$$

$$- \operatorname{div} f \left( (\mathcal{W}_i)_k^{p,q} \right) = 0 :$$

$$\operatorname{div} \left( \mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) \right) = \left( (\mathcal{W}_i)_{k-2}^{p-1,q-1} \right)^3 + i\omega\epsilon \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^1,$$

$$\operatorname{div} \left( \mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\mathcal{W}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) \right) = - \left( (\mathcal{W}_i)_{k-2}^{p-1,q-1} \right)^3 + i\omega\epsilon \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^2,$$

$$i\omega \operatorname{div} \left( \epsilon (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-1}^{p,q} \right) = -i\omega\epsilon \left( \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^1 + \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^2 \right).$$

$$\text{et donc } \operatorname{div} f \left( (\mathcal{W}_i)_k^{p,q} \right) = 0.$$

$$- \operatorname{div} f \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q} \right) = 0 :$$

$$\operatorname{div} \left( \mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) \right) = \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-2}^{p-1,q-1} \right)^3 + i\omega\epsilon \left( (\mathcal{V}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^1,$$

$$\operatorname{div} \left( \mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) \right) = - \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-2}^{p-1,q-1} \right)^3 + i\omega\epsilon \left( (\mathcal{V}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^2,$$

$$i\omega \operatorname{div} \left( \epsilon (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p,q} \right) = -i\omega\epsilon \left( \left( (\mathcal{V}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^1 + \left( (\mathcal{V}_i)_{k-2}^{p-1,q} \right)^2 \right).$$

$$\text{et donc } \operatorname{div} f \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_k^{p,q} \right) = 0.$$

- Seconde condition de compatibilité :  $\left\{ f \left( (\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \right)^3 \right\}_{0,0}^{\pm} = 0$  pour  $|X_3| > \frac{1}{2}$ . Comme  $\operatorname{div} f \left( (\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \right) = 0$ , on a

$$\left\{ f \left( (\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \right)^3 \right\}_{0,0}^{\pm} = \ell_N^{\pm} \left( f \left( (\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \right) \right).$$

Or, puisque  $k > 1$  (important),

$$\begin{aligned} \ell_N^+ \left( f \left( (\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \right) \right) &= -\ell_{x_2}^+ \left( (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right) + \ell_{x_1}^+ \left( (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right) + i\omega\ell_N^+ \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q} \right)^3, \\ &= +\ell_{x_2}^- \left( (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p-1,q} \right)^2 - \ell_{x_1}^- \left( (\mathcal{V}_i)_{k-1}^{p,q-1} \right)^1 - i\omega\ell_N^- \left( (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{k-1}^{p,q} \right)^3, \\ &= -\ell_N^- \left( f \left( (\mathcal{V}_i)_k^{p,q} \right) \right)^3. \end{aligned}$$

Et par ailleurs, comme  $f((\mathcal{V}_k^{p,q})^3)$  est périodique,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_{h_0}} \operatorname{div} f((\mathcal{V}_k^{p,q})^3), \\ &= \ell_N^+(f((\mathcal{V}_k^{p,q})^3)) - \ell_N^-(f((\mathcal{V}_k^{p,q})^3)) \end{aligned}$$

Donc,  $\ell_N^+(f((\mathcal{V}_k^{p,q})^3)) = \ell_N^-(f((\mathcal{V}_k^{p,q})^3)) = 0$ .

2. Existence : La démonstration d'existence est similaire à la démonstration de l'existence quand  $k = 1$ .

### 7.9.4.3 Preuve de la proposition 7.7.9

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence. L'initialisation a déjà été démontrée dans le paragraphe 7.7.1. Nous supposons que pour tout  $k \leq n-1$  les champs lointains  $\mathbf{E}_k$  et  $\mathbf{H}_k$  et les champs proches  $\mathcal{E}_k$ ,  $\mathcal{H}_k$  sont définis par (7.7.39, 7.7.40, 7.7.38, 7.7.37). Définissons d'abord  $\mathbf{E}_n$  et  $\mathbf{H}_n$  par

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E}_n - \omega^2 \mathbf{E}_n = 0 \text{ dans } \Omega^\pm \\ [n \times \mathbf{E}_n] = g_n \\ [n \times \operatorname{curl} \mathbf{E}_0] = i\omega h_n, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E}_0 \times n - i\omega(\mathbf{E}_0)_T = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

où les termes sources  $g_n$  et  $h_n$  sont définis par (7.4.5). Noter que puisque, d'après les formules (7.7.38), 7.7.37),  $\mathcal{E}_k$  et  $\mathcal{H}_k$ ,  $k \leq n-1$  sont dérivables à n'importe quel ordre par rapport aux variables macroscopiques  $x_1$  et en  $x_2$ , il en est de même pour  $g_n$  et  $h_n$ . Puis, nous définissons  $H_1$  par

$$\mathbf{H}_n := \frac{1}{i\omega} \mathbf{E}_n.$$

En utilisant les formules (7.7.38) et 7.7.37), on peut avoir une expression explicite de  $\mathcal{A}_0^{1,0} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_1} \right)$ ,  $\mathcal{A}_0^{0,1} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_2} \right)$  et de  $i\omega\mu\mathcal{H}_{n-1}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^{1,0} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_1} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1-k} \sum_{q=0}^{n-1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p+1,q} \mathcal{A}_0^{1,0} (\mathcal{V}_i^{p,q})_{n-1-k} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p+1,q} \mathcal{A}_0^{1,0} (\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_{n-1-k}, \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} \mathcal{A}_0^{1,0} (\mathcal{V}_i^{p-1,q})_{n-1-k} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} \mathcal{A}_0^{1,0} (\tilde{\mathcal{V}}_i^{p-1,q})_{n-1-k}, \end{aligned}$$

car,

- si  $p = 0$ , alors  $(\mathcal{V}_i)_{n-1-k}^{-1,q} = 0$  et  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-1-k}^{-1,q} = 0$ ,
- si  $q = n - k - p$ ,  $p + q = n - k > n - 1 - k$ , donc  $(\mathcal{V}_i)_{n-1-k}^{p,q} = 0$ ,
- si  $q = n + 1 - k - p$ ,  $p + q = n - k + 1 > (n - 1 - k) + 1$ , donc  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-1-k}^{p,q} = 0$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0^{0,1} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_2} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1-k} \sum_{q=0}^{n-1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q+1} \mathcal{A}_0^{0,1} (\mathcal{V}_i)_{n-1-k}^{p,q} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q+1} \mathcal{A}_0^{0,1} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-1-k}^{p,q}, \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} \mathcal{A}_0^{0,1} (\mathcal{V}_i)_{n-1-k}^{p,q-1} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} \mathcal{A}_0^{1,0} (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-1-k}^{p,q-1},
\end{aligned}$$

car,

- si  $q = 0$ , alors  $(\mathcal{V}_i)_{n-1-k}^{p,-1} = (\mathcal{V}_i)_{n-1-k}^{p,-1} = 0$ ,
- si  $p = n - k$  dans la première somme, alors  $q = 0$ , et donc  $(\mathcal{V}_i)_{n-1-k}^{n-k,-1} = 0$ ,
- si  $p = n + 1 - k$  dans la seconde somme, alors  $q = 0$ , donc  $(\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-1-k}^{n+1-k,-1} = 0$ .

$$\begin{aligned}
i\omega\mu\mathcal{H}_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{n-1-k}^{p,q} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1-k} \sum_{q=0}^{n-1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} (\mathcal{W}_i)_{n-1-k}^{p,q}, \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{n-1-k}^{p,q} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} (\mathcal{W}_i)_{n-1-k}^{p,q},
\end{aligned}$$

- si  $q \leq n - k - p$  dans la seconde somme, alors  $p + q \leq n - k$  ( $\mathcal{W}_i)_{n-1-k}^{p,q} = 0$ ,
- si  $p \geq n - k$  dans la seconde somme, alors  $p + q \leq n - k$ , et donc  $(\mathcal{W}_i)_{n-1-k}^{p,q} = 0$ .

En additionnant les équations,

$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}_0^{1,0} \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_1} - \mathcal{A}_0^{0,1} \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_2} + i\omega\mu\mathcal{H}_{n-1} &= \\
&\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} \left( -\mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\mathcal{V}_i)_{n-1-k}^{p-1,q} \right) - \mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\mathcal{V}_i)_{n-1-k}^{p,q-1} \right) + i\omega\mu (\tilde{\mathcal{W}}_i)_{n-1-k}^{p,q-1} \right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} \left( -\mathcal{A}_0^{1,0} \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-1-k}^{p-1,q} \right) - \mathcal{A}_0^{0,1} \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-1-k}^{p,q-1} \right) + i\omega\mu (\mathcal{W}_i)_{n-1-k}^{p,q-1} \right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}_0^{1,0} \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_1} - \mathcal{A}_0^{0,1} \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_2} + i\omega\mu\mathcal{H}_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} \operatorname{curl} \left( (\mathcal{V}_i)_{n-k}^{p,q} \right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} \operatorname{curl} \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i)_{n-k}^{p,q} \right). \tag{7.9.15}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
-\epsilon \left( \mathcal{B}_0^{1,0} \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial x_1} - \mathcal{B}_0^{0,1} \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial y} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} \operatorname{div} \left( \epsilon (\mathcal{V}_i^{p,q})_{n-k} \right) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} \operatorname{div} \left( \epsilon (\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_{n-k} \right).
\end{aligned} \tag{7.9.16}$$

Les équations (7.9.15-7.9.16) nous incitent à chercher  $\mathcal{E}_n$  sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n &= a \nabla p_1^\epsilon + b \nabla p_2^\epsilon + c \nabla p_3^\epsilon + \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} (\mathcal{V}_i^{p,q})_{n-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} (\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_{n-k}.
\end{aligned}$$

Nous allons déterminer  $C = (a, b, c)^T$  pour que les conditions de raccords (7.4.2) soient satisfaites : d'après la proposition 7.4.1, il suffit de raccorder les termes constants du développement modal de  $\mathbf{E}_n$  : nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_n^+ &= C + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} A_0^+ \left( (\mathcal{V}_i^{p,q})_{n-k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} A_0^+ \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_{n-k} \right) \\
\mathbf{E}_n^- &= C - \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} A_0^+ \left( (\mathcal{V}_i^{p,q})_{n-k} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} A_0^+ \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_{n-k} \right)
\end{aligned}$$

Donc  $C = \langle E_n \rangle$  et on retrouve  $\mathcal{E}_n$  s'écrit bien sous la forme (7.7.38). De plus, le saut  $\langle \mathbf{E}_n \rangle$  est bien donné par

$$[E_n] = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{q=0}^{n-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{E}_k^i \rangle^{p,q} \left( 2A_0^+ \left( (\mathcal{V}_i^{p,q})_{n-k} \right) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n+1-k} \sum_{q=0}^{n+1-k-p} \sum_{i=0}^1 \langle \mathbf{H}_k^i \rangle^{p,q} \left( 2A_0^+ \left( (\tilde{\mathcal{V}}_i^{p,q})_{n-k} \right) \right)$$

Nous obtenons  $\mathcal{H}_n$  ainsi que le saut  $\langle \mathcal{H}_n \rangle$  de manière similaire.  $\square$



# Construction de la condition approchée d'ordre 1 dans le cas symétrique

---

## Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>160</b>
<b>8.2</b>	<b>Réécriture du problème sous forme variationnelle</b>	<b>162</b>
8.2.1	Introduction de l'opérateur $\mathcal{G}$	162
8.2.2	Formulation variationnelle	163
<b>8.3</b>	<b>Décomposition de Helmholtz de l'espace <math>X^\delta</math></b>	<b>164</b>
8.3.1	Propriétés de l'espace $S^\delta$ et étude de la forme bilinéaire $b_\delta$	165
8.3.2	Démonstration de la décomposition de Helmholtz	169
<b>8.4</b>	<b>Propriétés de l'espace <math>X_0^\delta</math></b>	<b>169</b>
<b>8.5</b>	<b>Existence et unicité de la solution</b>	<b>172</b>
<b>8.6</b>	<b>Justification du modèle approché</b>	<b>176</b>
8.6.1	Développement asymptotique du problème approché	177
8.6.2	Convergence du développement asymptotique	178
8.6.3	Convergence du modèle approché	178
<b>8.7</b>	<b>Lemmes et preuves techniques</b>	<b>179</b>
8.7.1	Quelques résultats préliminaires	179
8.7.2	Majoration de $-\mathcal{R} \left( \int_{\Gamma} \overline{\operatorname{div}_{\Gamma} D_2 u_T} \operatorname{div}_{\Gamma} u_T \right)$	181

---

## 8.1 Introduction

Nous cherchons maintenant à construire un problème approché dont la solution  $\mathbf{E}_1^\delta$  est proche des deux premiers termes du développement asymptotique :  $\mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}_1$ . Nous adoptons la démarche classique (cf. [HJN08], [CHH], [Sch08]) qui consiste à étudier le problème vérifié par  $\hat{\mathbf{E}} := \mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}_1$  : D'après (7.7.3), (7.7.14), (7.7.17) et (7.7.18) nous observons que  $\hat{\mathbf{E}}$  satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} - \omega^2 \hat{\mathbf{E}} = f \text{ dans } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ -[e_3 \times \hat{\mathbf{E}}] = \delta \left( \frac{\mathcal{A}}{\omega^2} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} \rangle_T - \mathcal{D}_1 \langle \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} \rangle_T \right) + O(\delta^2), \\ -[e_3 \times \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}}] = \delta \left( \mathcal{B} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle \hat{\mathbf{E}}_T \rangle - \omega^2 \mathcal{D}_2 \langle \hat{\mathbf{E}}_T \rangle \right) + O(\delta^2), \\ n \times \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} = -i\omega \hat{\mathbf{E}}_T \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \\ \hat{\mathbf{E}} \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \hat{\mathbf{E}} \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \quad \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \\ \hat{\mathbf{E}} \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \hat{\mathbf{E}} \times n_{\Sigma_{x_2}^+}, \quad \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} \times n_{\Sigma_{x_2}^+}, \end{cases} \quad (8.1.1)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_3} - 1, & \mathcal{B} &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3} - 1, \\ \mathcal{D}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_1^\mu}{\partial X_1} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_2^\mu}{\partial X_2} - 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_1} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_2} - 1. \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Les fonctions  $p_i^\epsilon$  et  $p_i^\mu$  sont définies par (7.5.9) et  $B_0$  est la cellule de périodicité tronquée :

$$B_0 = \left\{ (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3, -1/2 < X_1 < 1/2, -\frac{\tau}{2} < X_2 < \frac{\tau}{2} \right\}. \quad (8.1.3)$$

Nous rappelons que  $f$  est à support compact dans  $\Omega^\pm$  et satisfait

$$\operatorname{div} f = 0 \text{ dans } \Omega^\pm. \quad (8.1.4)$$

L'idée, tout comme dans le cas bi-dimensionnel, est de négliger les termes en  $O(\delta^2)$  dans le système d'équations 8.1.1. Cependant, dans notre cas, les constantes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  ainsi que les matrices  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  n'ont pas un signe constant, ce qui ne permet pas d'analyser facilement le problème. Comme dans le cas bi-dimensionnel, afin de travailler avec des constantes positives, on va décaler les sauts et les moyennes : nous n'allons plus exprimer les sauts et moyennes de  $\hat{\mathbf{E}}$  directement sur l'interface  $\Gamma$  mais entre deux interfaces différentes  $\Gamma_{\alpha\delta}^\pm$  :

$$\forall \alpha > 0, \quad \Gamma_{\alpha\delta}^\pm = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in ] -\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}[\times ] -\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}[\times \{\pm\alpha\delta\} \right\}.$$

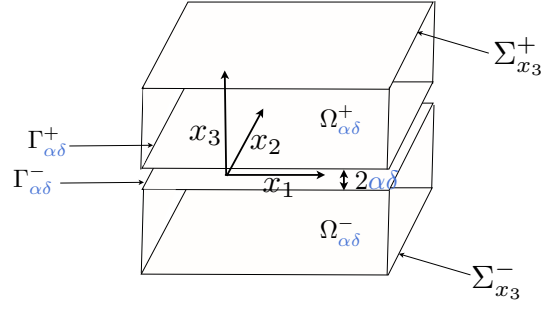
Pour toute fonction  $u$  suffisamment régulière, nous définissons alors le saut et la moyenne de  $u$  de part et d'autre de ces deux interfaces :

$$[u]_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-, \quad \langle u \rangle_\alpha = \frac{1}{2} (u_\alpha^+ + u_\alpha^-), \quad \text{avec } u_\alpha^\pm = u(x_1, x_2, \pm\alpha\delta).$$

On introduit enfin les domaines  $\Omega_{\alpha\delta}^\pm$  :

$$\Omega_{\alpha\delta}^\pm := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in ] -\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}[\times ] -\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}[\times ] \pm \alpha\delta, \pm \frac{L_3}{2}[ \right\}. \quad (8.1.5)$$

Pour éviter d'alourdir les notations nous continuons d'appeler  $\Sigma_{x_1}^\pm$  et  $\Sigma_{x_2}^\pm$  les bords latéraux de  $\Omega_{\alpha\delta}^\pm$ .

FIGURE 8.1 – Le domaine  $\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-$ 

En remplaçant dans le problème (8.1.1) les sauts et moyennes de part et d'autre de l'interface  $\Gamma$  par leurs équivalents entre les interfaces  $\Gamma_{\alpha\delta}^\pm$  (en utilisant des développements de Taylor comme dans la partie 4.1.2 du chapitre 4), et en négligeant les termes en  $O(\delta^2)$ , on obtient le problème approché du premier ordre que nous allons étudier :

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta - \omega^2 \mathbf{E}_1^\delta = f \text{ dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ -[e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha = \delta \left( \frac{A}{\omega^2} \operatorname{curl}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma (\langle \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \rangle_\alpha)_T - D_1 (\langle \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \rangle_\alpha)_T \right), (a) \\ -[e_3 \times \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha = \delta \left( B \operatorname{curl}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle \mathbf{E}_1^\delta \rangle_\alpha - \omega^2 D_2 \langle \mathbf{E}_1^\delta \rangle_\alpha \right), (b) \\ n \times \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta = -i\omega \mathbf{E}_1^\delta \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \\ \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \\ \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^+}. \end{cases} \quad (8.1.6)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_3} - 1 + 2\alpha, \\ B &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3} - 1 + 2\alpha, \\ D_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_1^\mu}{\partial X_1} - 1 + 2\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_2^\mu}{\partial X_2} - 1 + 2\alpha \end{pmatrix}, \\ D_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_1} - 1 + 2\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_2} - 1 + 2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

Il existe une valeur critique  $\alpha_0 \geq 0$  telle que pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$  les constantes  $A$ ,  $B$  et les matrices  $D_1$  et  $D_2$  sont strictement positives. Nous nous plaçons à présent et pour toute la suite du chapitre sous l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 8.1.1.**  $\alpha \geq 0$  est tel que  $A$ ,  $B$  et  $D_1$ ,  $D_2$  soient strictement positives.

**Remarque 8.1.2.** Dans le cas d'une couche mince où

$$\epsilon(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} \epsilon_0 & \text{si } |X_3| \leq 1/2, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } |X_3| \leq 1/2, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (8.1.8)$$

les constantes  $A$ ,  $B$  et les matrices  $D_1$  et  $D_2$  sont données par

$$A = \frac{1}{\epsilon_0} + (2\alpha - 1), \quad B = \frac{1}{\mu_0} + (2\alpha - 1), \quad D_1 = (\mu_0 + (2\alpha - 1))I_2, \quad D_2 = (\epsilon_0 + (2\alpha - 1))I_2, \quad (8.1.9)$$



où  $I_2$  est la matrice identité (cf. 7.5.12). Ces constantes sont donc positives quand  $\alpha \geq 1/2$ .

Dans la suite de ce chapitre nous allons analyser le problème (8.1.6) et montrer qu'il est bien posé dans un espace fonctionnel adapté. Nous montrons aussi un résultat de stabilité indépendant de  $\delta$  (Propositions 8.5.1 et 8.5.2). Puis nous montrons que la solution  $\mathbf{E}_1^\delta$  du problème approché (8.1.6) tend vers la solution  $\mathbf{E}^\delta$  du problème initial (6.2.6) (Proposition 8.6.2).

La méthode consiste à écrire d'abord une formulation variationnelle du problème (8.1.6) puis de montrer que cette formulation relève de l'alternative de Fredholm et enfin de montrer l'unicité. La démonstration est plus délicate que dans les problèmes de Helmholtz parce que les propriétés de compacité sont bien moins évidentes à montrer (voir [Web80], [CD00], [CDN99], [BS87] pour des explications générales et détaillées sur ces difficultés).

## 8.2 Réécriture du problème sous forme variationnelle

### 8.2.1 Introduction de l'opérateur $\mathcal{G}$

La condition de saut (8.1.6-a) portant sur  $[e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha$  ne se prête pas bien à une formulation variationnelle ne comportant qu'une seule inconnue  $\mathbf{E}_1^\delta$  (on ne veut pas introduire de multiplicateur de Lagrange). En effet, quand on intègre sur  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  l'équation  $\text{curl curl } \mathbf{E}_1^\delta - \omega^2 \mathbf{E}_1^\delta = f$  testée contre une fonction  $\varphi$ , le terme de bord intervenant dans la formulation variationnelle est donné par

$$+ \int_{-L_1/2}^{L_1/2} \int_{-L_2/2}^{L_2/2} \langle (\text{curl } \mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_T \cdot \overline{[e_3 \times \varphi]_\alpha} - \int_{-L_1/2}^{L_1/2} \int_{-L_2/2}^{L_2/2} [e_3 \times \text{curl } \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha \cdot \overline{\langle \varphi_T \rangle_\alpha}.$$

Si le deuxième terme s'avère bien adapté à la condition de transmission (8.1.6-b), le premier terme, lui, n'est pas adapté à la condition de transmission (8.1.6-a). En fait, il est pratique d'inverser la condition (8.1.6-a), ce qui nous permet d'exprimer  $\langle (\text{curl } \mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha$  en fonction de  $[e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha$ . C'est pourquoi on introduit l'opérateur  $\mathcal{G}$ . Cette inversion nécessite par contre d'introduire une hypothèse sur la fréquence  $\omega$  (hypothèse 8.2.2) et d'écarter de notre étude un nombre dénombrable de fréquences interdites.

Au préalable, nous définissons  $TH_{per}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$ ,

$$TH_{per}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma) := \left\{ u \in TH(\text{curl}_\Gamma, \Gamma), (u^1)_{|\Gamma_{x_2}^+} = (u^1)_{|\Gamma_{x_2}^-}, (u^2)_{|\Gamma_{x_1}^+} = (u^2)_{|\Gamma_{x_1}^-} \right\}. \quad (8.2.1)$$

où  $\Gamma_{x_1}^\pm$  (resp.  $\Gamma_{x_2}^\pm$ ) sont les bords de  $\Gamma$  de normale  $\pm e_1$  (resp.  $\pm e_2$ ). Soit  $g \in TH^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ . Nous souhaitons trouver  $\lambda \in TH_{per}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$  solution du problème

$$-g = A \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \lambda - D_1 \omega^2 \lambda, \quad (8.2.2)$$

**Proposition 8.2.1.** *Si  $g \in TH^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  alors le problème (8.2.2) admet une solution unique sauf pour une suite de fréquences  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui admet  $+\infty$  comme seul point d'accumulation.*

La preuve de cette proposition est classique. Elle est basée sur une décomposition de Helmholtz de  $TH_{per}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$  (cf. théorème 4.18 de [Mon03]). A partir de maintenant, on se place sous l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 8.2.2.**  $\omega$  n'est pas une fréquence propre du problème (8.2.2).

Soit  $\omega$  satisfaisant l'hypothèse 8.2.2. On définit alors l'opérateur  $\mathcal{G}$  par

$$\mathcal{G} : \begin{cases} TH_{per}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow TH_{per}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma) \\ g \mapsto \lambda = \mathcal{G}(g) \text{ unique solution appartenant à } TH_{per}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma) \text{ du problème} \\ -g = A \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \lambda - D_1 \omega^2 \lambda \end{cases}$$

On peut alors montrer le résultat suivant :

**Proposition 8.2.3.** *Sous l'hypothèse 8.2.2 l'opérateur  $\mathcal{G}$  est bien défini. De plus, pour tout  $g \in TH^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ ,  $\mathcal{G}(g)$  appartient à  $TH^{1/2}(\Gamma)$  et satisfait*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(f)\|_{TH(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)} &\leq C\|f\|_{TH^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}, \\ \|\text{div}_\Gamma(D_1\mathcal{G}(f))\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &\leq C\|f\|_{TH^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}, \\ \|\mathcal{G}(f)\|_{TH^{1/2}(\Gamma)} &\leq C\|f\|_{TH^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

La preuve des deux premiers points de la proposition est immédiate. Ils découlent directement de l'inversion du problème (8.2.2). Pour montrer que  $\mathcal{G}(g)$  appartient à  $TH^{1/2}(\Gamma)$ , on utilise le fait que si  $\lambda \in TH(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$  et  $\text{div}_\Gamma(D_1\lambda) \in H^{-1/2}(\Gamma)$  alors  $\lambda \in TH^{1/2}(\Gamma)$ . La preuve détaillée est donnée en annexe 8.7.1 (Ce résultat est classique quand  $D_1 = I$ ).

## 8.2.2 Formulation variationnelle

En travaillant toujours sous l'hypothèse 8.2.2, on peut maintenant réécrire le problème (8.1.6) à l'aide de l'opérateur  $\mathcal{G}$  :

$$\begin{cases} \text{curl curl } \mathbf{E}_1^\delta - \omega^2 \mathbf{E}_1^\delta = f \text{ dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ \langle (\text{curl } \mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha = \frac{\omega^2}{\delta} \mathcal{G}([n \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha), \\ -[e_3 \times \text{curl } \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha = \delta \left( B \vec{\text{curl}}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha - \omega^2 D_2 \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \right), \\ n \times \text{curl } \mathbf{E}_1^\delta = -i\omega (\mathbf{E}_1^\delta)_T \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \\ \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \quad \text{curl } \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \text{curl } \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \\ \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^+}, \quad \text{curl } \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \text{curl } \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^+}. \end{cases} \quad (8.2.4)$$

Il semble alors naturel de chercher la solution dans l'espace  $X^\delta$

$$X^\delta := \left\{ u \in H_{\text{per}}(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H_{\text{per}}(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^-), \langle u_T \rangle_\alpha \in TH_{\text{per}}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma), (u_T)|_{\Sigma_{x_3}^\pm} \in TL^2(\Sigma_{x_3}^\pm) \right\}, \quad (8.2.5)$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}\|_{X^\delta}^2 &= \|\mathbf{E}\|_{H(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^\pm)}^2 + \delta B \|\langle \mathbf{E}_T \rangle_\alpha\|_{H(\text{curl}, \Gamma)}^2 + \omega \int_{\Sigma^\pm} |\mathbf{E}_T|^2 ds \\ &\quad + \frac{\omega^4}{\delta} \int_\Gamma D_1 \mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}]_\alpha) \cdot \overline{\mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}]_\alpha)} ds + \frac{A\omega^2}{\delta} \|\text{curl}_\Gamma \mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}]_\alpha)\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

A  $\delta$  fixé, la norme (8.2.6) est équivalente à la norme  $\|u\|_{H(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^\pm)} + \|\langle u \rangle_\alpha\|_{H(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)} + \|u_T\|_{L^2(\Sigma^\pm)}$ .

On obtient alors sans mal la formulation variationnelle satisfaite par  $\mathbf{E}_1^\delta$  en intégrant sur  $\Omega_{\alpha\delta}^+$  et  $\Omega_{\alpha\delta}^-$  l'équation  $\text{curl curl } \mathbf{E}_1^\delta - \omega^2 \mathbf{E}_1^\delta = f$  testée contre une fonction  $\varphi$  :

$$\forall \varphi \in X^\delta, \quad a_\delta(\mathbf{E}_1^\delta, \varphi) = \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} f \cdot \overline{\varphi}, \quad (8.2.7)$$

où,

$$a_\delta(\mathbf{E}_1^\delta, \varphi) := a_\delta^+(\mathbf{E}_1^\delta, \varphi) + b_\delta(\mathbf{E}_1^\delta, \varphi),$$

avec,

$$\begin{aligned} a_\delta^+(\mathbf{E}_1^\delta, \varphi) &:= \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} \text{curl } \mathbf{E}_1^\delta \cdot \overline{\text{curl } \varphi} dx_1 - i\omega \int_{\Sigma^\pm} (\mathbf{E}_1^\delta)_T \cdot \overline{\varphi} ds \\ &\quad + \delta B \int_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \cdot \overline{\text{curl}_\Gamma \langle \varphi_T \rangle_\alpha} ds, \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

et

$$b_\delta(\mathbf{E}_1^\delta, \varphi) := - \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} \omega^2 \mathbf{E}_1^\delta \cdot \overline{\varphi} \, dx_1 - \delta \int_{\Gamma} \omega^2 D_2 \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \cdot \overline{\langle \varphi \rangle_\alpha} \, ds + \frac{\omega^2}{\delta} \langle \mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha), \overline{[e_3 \times \varphi]_\alpha} \rangle. \quad (8.2.9)$$

où on note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit de dualité entre deux espaces définis sur  $\Gamma$  avec pour pivot  $L^2(\Gamma)$  : quand les fonctions sont suffisamment régulières, on peut remplacer ce produit de dualité par une intégrale sur  $\Gamma$ . Cette notation est valable pour toute la suite du chapitre.

Le choix de l'espace  $X^\delta$  donne un sens à tous les termes de (8.2.8) et (8.2.9) puisque, si  $\varphi \in H(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^\pm)$ ,  $[e_3 \times \varphi]_\alpha$  et  $\text{div}_\Gamma[e_3 \times \varphi]_\alpha$  appartiennent à  $TH^{-1/2}(\Gamma)$  (voir [AV96] et [BCS02] pour la caractérisation de l'espace des traces des fonctions  $H(\text{curl}, \Omega)$ ). Enfin, il est intéressant de remarquer que

$$\begin{aligned} a_\delta(\mathbf{E}_1^\delta, \mathbf{E}_1^\delta) &= \|\text{curl} \mathbf{E}_1^\delta\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 - \omega^2 \|\mathbf{E}_1^\delta\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 + B\delta \|\text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad - \delta\omega^2 \int_{\Gamma} D_2 \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \cdot \overline{\langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha} \, ds + \frac{\omega^4}{\delta} \int_{\Gamma} D_1 \mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha) \cdot \overline{\mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha)} \, ds \\ &\quad - \frac{A\omega^2}{\delta} \|\text{curl}_\Gamma \mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - i\omega \int_{\Sigma^\pm} |(\mathbf{E}_1^\delta)_T|^2 \, ds, \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

On souhaite montrer que le problème (8.2.7) est bien posé en utilisant l'alternative de Fredholm. Malheureusement comme l'espace  $X^\delta$  ne s'injecte pas de façon compacte dans  $L^2(\Omega_{\alpha\delta}^\pm)$ , l'opérateur associé à la forme bilinéaire  $b_\delta$  n'est pas compact dans  $X^\delta$ . Le problème (8.2.7) ne relève donc pas de l'alternative de Fredholm. On peut par contre s'y ramener en faisant une décomposition de Helmholtz ([GR86]) de l'espace  $X^\delta$ . Plus précisément on va décomposer  $X^\delta$  sous la forme  $X_0^\delta \oplus \nabla S^\delta$  et on va montrer que la forme bilinéaire  $b_\delta$  est compacte sur  $X_0^\delta$ . Notre démarche suit la démarche proposée par [Mon03] dans les chapitres 4 et 9 (cf. [KM95][KM98]). On retrouve aussi ce type de démarche dans [Poi94]-[JPRT96]. L'originalité de la démarche consiste à utiliser une décomposition de Helmholtz qui suit la structure du problème (8.2.7).

Enfin, il est intéressant de remarquer que le problème temporel associé au problème (8.2.7) (que l'on obtient formellement en remplaçant  $-i\omega$  par  $\partial_t$ ) est bien posé (voir [CHH]).

### 8.3 Décomposition de Helmholtz de l'espace $X^\delta$

Nous définissons l'espace  $S^\delta$  par

$$S^\delta := \left\{ p \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-), \langle p \rangle_\alpha \in H^1(\Gamma), p = 0 \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \right. \\ \left. \nabla p \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^+} = \nabla p \times e_1|_{\Sigma_{x_1}^-}, \quad \nabla p \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^+} = \nabla p \times e_2|_{\Sigma_{x_2}^-} \right\}, \quad (8.3.1)$$

duquel nous déduisons l'espace  $X_0^\delta$

$$X_0^\delta := \{ u \in X^\delta, b_\delta(u, \nabla p) = 0, \forall p \in S^\delta \}. \quad (8.3.2)$$

**Remarque 8.3.1.** *On peut montrer que*

$$X_0^\delta = \left\{ u \in X^\delta, \text{div} u = 0 \in \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, u \cdot n_{\Sigma_{x_1}^+} = u \cdot n_{\Sigma_{x_1}^-}, u \cdot n_{\Sigma_{x_2}^+} = u \cdot n_{\Sigma_{x_2}^-} \right. \\ \left. \langle u \cdot e_3 \rangle_\alpha = \frac{1}{\delta} \text{curl}_\Gamma \mathcal{G}([e_3 \times u]_\alpha), \quad -[u \cdot e_3]_\alpha = \delta \text{div}_\Gamma D_2 \langle u_T \rangle_\alpha \right\}, \quad (8.3.3)$$

si bien que l'espace  $X_0^\delta$  est inclus dans  $H(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^\pm) \cap H(\text{div}, \Omega_{\alpha\delta}^\pm)$  : cette condition est une condition importante pour espérer obtenir la compacité de  $X_0^\delta$  dans  $L^2(\Omega_{\alpha\delta}^\pm)$  mais cette condition n'est pas suffisante (cf. Proposition

2.7 de [ABDG98]). Pour montrer la compacité de  $b_\delta$  sur  $X_0^\delta$  l'utilisation des conditions de transmission  $[u \cdot n]_\alpha = \delta \operatorname{div}_\Gamma D_2 \langle u_T \rangle_\alpha$  et  $\langle u \cdot n \rangle_\alpha = -\frac{1}{\delta} \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G}([n \times u]_\alpha)$  est nécessaire. C'est la régularité de  $u$  sur le bord des domaines  $\Omega_{\alpha\delta}^\pm$  (et en particulier au niveau de l'interface  $\Gamma$ ) qui va nous permettre de déduire les propriétés de compacité de la forme bilinéaire  $b_\delta$  sur  $X_0^\delta$ .

On peut alors montrer le résultat suivant :

**Proposition 8.3.2.** (décomposition orthogonale de  $X^\delta$ )

a-  $X_0^\delta$  et  $\nabla S^\delta$  sont des sous-espaces fermés de  $X^\delta$ ,

b-  $X^\delta = X_0^\delta \oplus \nabla S^\delta$ .

**Remarque 8.3.3.** Comme  $f$  est à divergence nulle et à support compact dans  $\Omega_{\alpha\delta}^\pm$ ,  $\mathbf{E}_1^\delta$  appartient à  $X_0^\delta$ . La décomposition de Helmholtz précédente montre alors l'équivalence entre les deux problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \mathbf{E} \in X_0^\delta \text{ telle que,} \\ a_\delta(\mathbf{E}, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in X^\delta \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \mathbf{E} \in X_0^\delta \text{ telle que,} \\ a_\delta(\mathbf{E}, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in X_0^\delta \end{array} \right.$$

L'objectif des deux parties qui suivent est de démontrer la proposition 8.3.2.

### 8.3.1 Propriétés de l'espace $S^\delta$ et étude de la forme bilinéaire $b_\delta$

Remarquons d'abord que si  $X^\delta = X_0^\delta \oplus \nabla S^\delta$ , alors, pour tout  $u \in X^\delta$ ,  $u = \nabla p + u_0$  où  $p$  appartient à  $S^\delta$  et  $u_0$  appartient à  $X_0^\delta$ .  $p$  est donc solution du problème

$$b_\delta(\nabla p, \nabla q) = b_\delta(u, \nabla q) \quad \forall q \in S^\delta. \quad (8.3.4)$$

Nous allons montrer que le problème précédent admet une unique solution appartenant à  $S^\delta$ . Cette étape est importante car la résolution du problème (8.3.4) permet de caractériser  $p$  et donc de construire la décomposition de Helmholtz.

On remarque d'abord que la semi-norme  $\|\nabla p\|_{X^\delta}$  donnée par

$$\begin{aligned} \|\nabla p\|_{X^\delta}^2 &= \|\nabla p\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+)}^2 + \|\nabla p\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 + \delta B \|\nabla_\Gamma \langle p \rangle\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \frac{A\omega^2}{\delta} \|\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G}(\operatorname{curl}_\Gamma [p])\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\omega^4}{\delta} \int_\Gamma D_1 \mathcal{G}(\operatorname{curl}_\Gamma [p]) \cdot \overline{\mathcal{G}(\operatorname{curl}_\Gamma [p])} \end{aligned}$$

est en faite une norme qui est équivalente à  $\delta$  fixé à la norme plus classique  $\|p\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^\pm)} + \|\langle p \rangle_\alpha\|_{H^1(\Gamma)}$ .

Nous nous intéressons donc à la résolution du problème variationnel suivant : chercher  $p \in S^\delta$  satisfaisant

$$b_\delta(\nabla p, \nabla q) = \mathcal{L}(q), \quad \forall q \in S^\delta \quad (8.3.5)$$

où  $\mathcal{L}$  est une forme linéaire continue sur  $S^\delta$ . Pour cette forme particulière de fonctions test,  $b_\delta(\nabla p, \nabla q)$  est donnée par

$$\begin{aligned} b_\delta(\nabla p, \nabla q) &= -\omega^2 \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} \nabla p \cdot \overline{\nabla q} - \omega^2 \delta \int_\Gamma D_2 \langle \nabla_\Gamma p \rangle_\alpha \cdot \overline{\langle \nabla_\Gamma q \rangle_\alpha} ds \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\delta} \langle \mathcal{G}([\operatorname{curl}_\Gamma p]_\alpha), [\operatorname{curl}_\Gamma q]_\alpha \rangle, \\ &= -\omega^2 \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} \nabla p \cdot \nabla q - \omega^2 \delta \int_\Gamma D_2 \langle \nabla_\Gamma p \rangle_\alpha \cdot \langle \nabla_\Gamma q \rangle_\alpha ds \\ &\quad - \frac{A\omega^2}{\delta} \int_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G}([\operatorname{curl}_\Gamma p]_\alpha) \overline{\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G}([\operatorname{curl}_\Gamma q]_\alpha)} \\ &\quad + \frac{\omega^4}{\delta} \int_\Gamma D_1 \mathcal{G}([\operatorname{curl}_\Gamma p]_\alpha) \cdot \overline{\mathcal{G}([\operatorname{curl}_\Gamma q]_\alpha)} \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que le problème (8.3.5) est bien posé pour  $\delta$  assez petit en montrant une condition inf-sup.

**Proposition 8.3.4.** (Stabilité de  $b_\delta$ ) *Il existe  $\delta_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  telles que, pour tout  $\delta < \delta_0$ ,*

$$\|\nabla p\|_{X^\delta} \leq C \sup_{q \in S^\delta \setminus \{0\}} \frac{b_\delta(\nabla p, \nabla q)}{\|\nabla q\|_{X^\delta}}.$$

*Démonstration.* Nous montrons cette propriété par l'absurde : soit  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui tend vers 0. Nous supposons qu'il existe une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\|\nabla p_n\|_{X^{\delta_n}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{q \in S^{\delta_n} \setminus \{0\}} \frac{b_{\delta_n}(\nabla p_n, \nabla q)}{\|\nabla q\|_{X^{\delta_n}}} = 0. \quad (8.3.6)$$

Pour pouvoir utiliser les propriétés d'injections compactes, nous souhaitons travailler dans le domaine fixe  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ . C'est pourquoi nous introduisons les fonctions  $F^{\delta^\pm}$  :

$$F^{\delta^+} := \begin{cases} \Omega^+ \rightarrow \Omega_{\alpha\delta}^+, \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, (1 - \frac{2\alpha\delta}{L_3})z + \alpha\delta), \end{cases} \quad F^{\delta^-} := \begin{cases} \Omega^- \rightarrow \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, (1 - \frac{2\alpha\delta}{L_3})x_3 - \alpha\delta). \end{cases} \quad (8.3.7)$$

Il est clair que  $DF^{\delta^\pm}$  tend uniformément vers l'identité quand  $\delta$  tend vers 0. De même,  $|\det DF^{\delta^\pm}|$  tend uniformément vers 1. De plus, il existe des constantes  $C_1^\pm$  et  $C_2^\pm$  strictement positives telles que

$$0 < C_1^\pm |x_1| < |DF^{\delta^\pm} x_1| < C_2^\pm |x_1| \quad \forall x_1 \in \Omega^\pm, \\ 0 < C_1^\pm < |\det(DF^{\delta^\pm})| < C_2^\pm.$$

Nous introduisons également l'espace  $S_0$

$$S_0 = \left\{ q \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-), \langle q \rangle \in H^1(\Gamma), q = 0 \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \right. \\ \left. \nabla q \times n_{|\Sigma_{x_1}^+} = \nabla q \times n_{|\Sigma_{x_1}^-}, \nabla q \times n_{|\Sigma_{x_2}^+} = \nabla q \times n_{|\Sigma_{x_2}^-} \right\} \quad (8.3.8)$$

et la semi-norme  $X_{S_0}^\delta$  (qui est une norme sur  $S_0$ ) :

$$\|\nabla p\|_{X_{S_0}^\delta}^2 = \|\nabla p\|_{L^2(\Omega^+)}^2 + \|\nabla p\|_{L^2(\Omega^-)}^2 + \delta B \|\nabla_\Gamma \langle p \rangle\|_{L^2(\Gamma)} \\ + \frac{A\omega^2}{\delta} \|\text{curl}_\Gamma \mathcal{G}(\text{curl}_\Gamma [p])\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\omega^4}{\delta} \int_\Gamma D_1 \mathcal{G}(\text{curl}_\Gamma [p]) \cdot \overline{\mathcal{G}(\text{curl}_\Gamma [p])}. \quad (8.3.9)$$

Nous définissons alors, pour tout  $q \in S^\delta$ ,  $\hat{q} \in S_0$  par

$$\hat{q}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} q \circ F^{\delta^+}(x_1, x_2, x_3) \text{ pour } x_3 > 0, \\ q \circ F^{\delta^-}(x_1, x_2, x_3) \text{ pour } x_3 < 0. \end{cases} \quad (8.3.10)$$

et la forme bilinéaire  $\hat{b}_{\delta_n}(\hat{p}_n, \hat{q})$  par

$$\hat{b}_{\delta_n}(\hat{p}_n, \hat{q}) := b_{\delta_n}(\nabla p_n, \nabla q) \quad (8.3.11)$$

$$= -\omega^2 \int_{\Omega^+} (DF^{\delta_n^+})^{-1} (DF^{\delta_n^+})^{-1*} \nabla \hat{p}_n \cdot \nabla \hat{q} |\det(DF)^{\delta_n^+}| \\ -\omega^2 \int_{\Omega^-} (DF^{\delta_n^-})^{-1} (DF^{\delta_n^-})^{-1*} \nabla \hat{p}_n \cdot \nabla \hat{q} |\det(DF)^{\delta_n^-}| \\ -\omega^2 \delta_n \int_\Gamma D_2 \langle \nabla_\Gamma \hat{p}_n \rangle \cdot \overline{\langle \nabla_\Gamma \hat{q} \rangle} ds + \frac{\omega^2}{\delta_n} \langle \mathcal{G}([\text{curl}_\Gamma \hat{p}_n]), [\text{curl}_\Gamma \hat{q}] \rangle. \quad (8.3.12)$$

En utilisant les propriétés de  $F^{\delta^\pm}$ , il est clair qu'il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que

$$0 < A \leq \|\nabla \hat{p}_n\|_{X_{S_0}^{\delta_n}} \leq B, \quad (8.3.13)$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{q \in S_0 \setminus \{0\}} \frac{\hat{b}_{\delta_n}(\hat{p}_n, q)}{\|\nabla q\|_{X_{S_0}^{\delta_n}}} = 0. \quad (8.3.14)$$

Dans l'égalité précédente, on a remplacé  $\hat{q}$  par  $q$  ce qui est possible car  $F^\delta$  est inversible.

Comme  $A \leq \|\nabla \hat{p}_n\|_{X_{S_0}^{\delta_n}} \leq B$ , il existe une fonction  $p \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-)$  telle que

- $\hat{p}_n \rightharpoonup p$  dans  $H^1(\Omega^\pm)$  faible.
- $\hat{p}_n \rightarrow p$  dans  $L^2(\Omega^\pm)$  fort.

• *Etape 1* : nous montrons que  $\vec{\text{curl}}_\Gamma[p] = 0$ . Nous savons que  $\vec{\text{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]$  tend faiblement vers  $\vec{\text{curl}}_\Gamma[p]$  dans  $TH^{-1/2}(\Gamma)$  puisque  $\hat{p}_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega^\pm)$ . Mais, comme  $\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \left\| \mathcal{G}(\vec{\text{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \right\|_{TH(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)}$  est bornée alors  $\left\| \mathcal{G}(\vec{\text{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \right\|_{TH(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)}$  tend vers 0. Donc,  $\forall q \in \mathcal{D}(\Gamma)$ ,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \vec{\text{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n], q \rangle \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} A \int_\Gamma \text{curl}_\Gamma \left( \mathcal{G}(\vec{\text{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \right) \overline{\text{curl}_\Gamma q} \, ds - \omega^2 \int_\Gamma D_1 \mathcal{G}(\vec{\text{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \cdot \bar{q} \, ds, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par unicité de la limite,  $\vec{\text{curl}}_\Gamma[p] = 0$ .

• *Etape 2* : nous montrons que  $p = 0$ . Choisissons une fonction test  $q$  périodique, appartenant à  $H^1(\Omega^\pm)$  dont la moyenne  $\langle q \rangle$  appartient à  $H^1(\Gamma)$  et telle que  $\vec{\text{curl}}_\Gamma[q] = 0$ . Il est clair que  $q \in S_0$ . En utilisant l'hypothèse (8.3.13), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega^2 \delta_n \int_\Gamma D_2 \nabla_\Gamma \langle (\hat{p}_n)_T \rangle \cdot \overline{\nabla_\Gamma \langle q \rangle} = 0.$$

En utilisant le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{b}_{\delta_n}(\hat{p}_n, q) = 0$  (on remarque que  $\|\nabla q\|_{X_{S_0}^{\delta_n}} \leq C$ ), on obtient

$$\int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \nabla p \cdot \nabla q = 0.$$

Par densité, la formule reste vraie pour  $q = p$  (on montre facilement par l'absurde que l'ensemble des fonctions  $q$  appartenant  $S_0$  dont la moyenne  $\langle q \rangle$  appartient à  $H^1(\Gamma)$  et telle que  $\vec{\text{curl}}_\Gamma[q] = 0$  est dense dans l'ensemble des fonctions  $p$  appartenant à  $H^1(\Omega^\pm)$ , s'annulant sur  $\Sigma_z^\pm$  et vérifiant  $\vec{\text{curl}}_\Gamma[p] = 0$ ),

$$\int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} |\nabla p|^2 = 0,$$

si bien que comme  $p$  s'annule sur  $\Sigma_{x_3}^\pm$ ,  $p = 0$ .

• *Etape 3* : nous montrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \left\| \mathcal{G}(\vec{\text{curl}}_\Gamma \hat{p}_n) \right\|_{L^2(\Gamma)} = 0$  et nous obtenons une contradiction. C'est l'étape la plus délicate.

Tout d'abord, d'après l'hypothèse (8.3.13),  $\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G}(\vec{\text{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n])$  est bornée dans  $H_{per}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$  et donc  $\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G}(\vec{\text{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n])$  tend faiblement vers une fonction  $v$  dans  $H_{per}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$ . De plus

$$\text{div}_\Gamma(D_1 \frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G}(\vec{\text{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n])) = 0,$$

car  $\operatorname{div}_\Gamma \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n] = 0$ . La proposition 8.7.1-b donne alors

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C \left\| \frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \right\|_{H(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)} \leq C. \quad (8.3.15)$$

Donc  $\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n])$  converge en fait fortement vers  $v$  dans  $L^2(\Gamma)$ .

Nous allons montrer que  $v = 0$ . Soit  $q$  appartenant à  $\mathcal{D}(\Gamma)$ . Nous construisons un relèvement  $\mathcal{T}(q)$  de  $q$  dans  $\Omega^+$  tel que  $\mathcal{T}(q) = 0$  sur  $\Sigma_{x_3}^+$  et que  $\|\nabla \mathcal{T}(q)\|_{L^2(\Omega^+)} \leq C \|q\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ . Puis nous définissons  $\mathcal{R}(q) \in S_0$  par

$$\mathcal{R}(q) := \begin{cases} \mathcal{T}(q) & \text{dans } \Omega^+, \\ 0 & \text{dans } \Omega^-. \end{cases} \quad (8.3.16)$$

Par hypothèse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\hat{b}_n(\hat{p}_n, \mathcal{R}(q))}{\|\nabla \mathcal{R}(q)\|_{X_{S_0}^{\delta_n}}} = 0$ . Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\hat{b}_n(\hat{p}_n, \mathcal{R}(q))}{\|\nabla \mathcal{R}(q)\|_{X_{S_0}^{\delta_n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\hat{b}_n(\hat{p}_n, \mathcal{R}(q))}{(A\omega^2 \|\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G}(\operatorname{curl}_\Gamma q)\|_{L^2(\Gamma)} + \omega^4 \int_\Gamma D_1 \mathcal{G}(\operatorname{curl}_\Gamma q) \cdot \overline{\mathcal{G}(\operatorname{curl}_\Gamma q)})^{1/2}}, \quad (8.3.17)$$

si bien que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\delta_n} \hat{b}_n(\hat{p}_n, \mathcal{R}(q)) = 0$ . On en déduit que, pour tout  $q \in \mathcal{D}(\Gamma)$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{\delta_n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{b}_n(\hat{p}_n, \mathcal{R}(q)), \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^2}{\sqrt{\delta_n}} \langle \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]), \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[q] \rangle, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^2}{\sqrt{\delta_n}} \langle \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]), [q] \rangle. \end{aligned}$$

Donc  $\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n])$  tend vers 0 dans  $\mathcal{D}'(\Gamma)$ . On a donc  $\operatorname{curl}_\Gamma v = 0$  si bien qu'on sait qu'il existe  $p \in H^1(\Gamma)$  telle que  $v = \nabla_\Gamma p$ . On sait de plus que  $p = \tilde{p} + ax_1 + bx_2$  où  $\tilde{p}$  est périodique. Or  $\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n])$  est à moyenne nulle : en effet,

$$-\omega^2 \int_\Gamma D_1 \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \cdot 1 = \langle -\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n], 1 \rangle = 0.$$

Donc  $v$  est à moyenne nulle. On en déduit que  $a = b = 0$  et que  $p$  est périodique. Par ailleurs comme  $\operatorname{div}_\Gamma(D_1 \frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n])) = 0$ ,

$$\operatorname{div}_\Gamma D_1 \nabla p = 0.$$

Donc  $p$  est constante ce qui montre que  $v = 0$ . On a donc montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \right\|_{L^2(\Gamma)} = 0$$

Pour conclure,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{p}_n\|_{X_{S_0}^{\delta_n}} &\leq C \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \hat{b}_n(\hat{p}_n, \hat{p}_n) + \frac{2\omega^4}{\delta_n} \int_\Gamma D_1 \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \overline{\mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n])} \right), \\ &\leq C \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \hat{b}_n(\hat{p}_n, \hat{p}_n) + \frac{1}{\delta_n} \left\| \mathcal{G}(\vec{\operatorname{curl}}_\Gamma[\hat{p}_n]) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cette dernière ligne contredit l'hypothèse (8.3.13). □

### 8.3.2 Démonstration de la décomposition de Helmholtz

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 8.3.2. Notre démonstration reprend la démonstration du lemme 10.3 de [Mon03]. Soit  $u \in X^\delta$ . Nous définissons  $p$  comme la solution du problème suivant : chercher  $p \in S^\delta$  telle que

$$b_\delta(\nabla p, \nabla q) = b_\delta(u, \nabla q) \quad \forall q \in S^\delta.$$

Comme  $b_\delta(u, \nabla q)$  est une forme linéaire continue sur  $S^\delta$ , nous savons que, pour  $\delta$  assez petit, il existe une unique solution au problème ci dessus (proposition 8.3.4). On introduit maintenant  $w = u - \nabla p$ . Il est clair que  $w \in X_0^\delta$ . En effet,

$$b_\delta(w, \nabla q) = b_\delta(u, \nabla q) - b_\delta(p, \nabla q) = 0.$$

Donc pour tout  $u \in X^\delta$  il existe  $p \in S^\delta$  et  $w \in X_0^\delta$  tels que  $u = \nabla p + w$ . Il reste à montrer que le couple  $(w, p)$  est unique. Pour cela il suffit de démontrer que si  $u \in X_0^\delta \cap \nabla S^\delta$  alors  $u = 0$ . Supposons qu'il existe  $u \in X_0^\delta$  et  $p \in S^\delta$  tels que  $u = \nabla p$ . Alors par définition,

$$b_\delta(u, \nabla q) = 0 \quad \forall q \in S^\delta.$$

Mais, comme  $b_\delta(u, \nabla q) = b_\delta(\nabla p, \nabla q)$  alors  $b_\delta(\nabla p, \nabla q) = 0$ . En utilisant la proposition 8.3.4,  $p = 0$ .

**Remarque 8.3.5.** Soit  $u \in X^\delta$  et  $p_u$  la solution du problème, chercher  $p_u \in S^\delta$  telle que

$$b_\delta(\nabla p_u, \nabla q) = b_\delta(u, \nabla q) \quad \forall q \in S^\delta.$$

Or,

$$\begin{aligned} b_\delta(u, \nabla q) = & - \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} \omega^2 u \cdot \overline{\nabla q} - \delta \omega^2 \int_{\Gamma} D_2 \langle u_T \rangle_\alpha \cdot \overline{\langle \nabla_{\Gamma} q \rangle_\alpha} \\ & - \frac{\omega^2 A}{\delta} \int_{\Gamma} \text{curl}_{\Gamma} \mathcal{G}([e_3 \times u]_\alpha) \overline{\text{curl}_{\Gamma} \mathcal{G}([e_3 \times \nabla_{\Gamma} p]_\alpha)} + \frac{\omega^4}{\delta} \int_{\Gamma} D_1 \mathcal{G}([e_3 \times u]_\alpha) \cdot \overline{\mathcal{G}([e_3 \times \nabla_{\Gamma} p]_\alpha)}, \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

si bien qu'il existe une constant  $C$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$\forall q \in S^\delta, \quad |b_\delta(u, \nabla q)| \leq C \|u\|_{X^\delta} \|\nabla q\|_{X^\delta}. \quad (8.3.19)$$

En combinant la précédente inégalité et le résultat de stabilité de la proposition 8.3.4, on peut montrer l'existence d'une constante  $\delta_0 > 0$  et d'une constante  $C$  indépendante de  $\delta$  telle que, pour tout  $\delta < \delta_0$

$$\|\nabla p_u\|_{X^\delta} \leq C \|u\|_{X^\delta}. \quad (8.3.20)$$

## 8.4 Propriétés de l'espace $X_0^\delta$

**Proposition 8.4.1.** Propriétés de  $X_0^\delta$  à  $\delta$  fixé :

a- Si  $u \in X_0^\delta$  alors  $u \in H^{1/2}(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^{1/2}(\Omega_{\alpha\delta}^-)$ . Ainsi  $X_0^\delta$  s'injecte de manière compacte dans  $L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap L^2(\Omega_{\alpha\delta}^-)$ .

b- L'opérateur associé à la forme bilinéaire  $b_\delta$  est compact dans  $X_0^\delta$ .

Avant de démontrer la proposition 8.4.1, nous montrons le résultat suivant :

**Lemme 8.4.2.** Soit  $u \in H_{per}(\text{div}, \Omega_{\alpha\delta}^\pm) \cap H_{per}(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^\pm)$  satisfaisant  $u \times n = 0$  sur  $\Sigma_{x_3}^\pm$  et telle que

$$\langle u_T \rangle_\alpha \in H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \langle u \cdot e_3 \rangle_\alpha \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (8.4.1)$$

Alors  $u$  appartient à  $H^1(\Omega^-) \cap H^1(\Omega^+)$ .



*Démonstration.* Soit  $u \in H_{per}(\text{div}, \Omega_{\alpha\delta}^{\pm}) \cap H_{per}(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^{\pm})$  satisfaisant  $u \times n = 0$  sur  $\Sigma_{x_3}^{\pm}$  et les conditions (8.4.1). Nous posons  $u^+ = u|_{\Omega^+}$  et  $u^- = u|_{\Omega^-}$  et nous construisons  $v$  défini sur  $\Omega_{\alpha\delta}^-$

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_{\alpha\delta}^-, v(x_1, x_2, x_3) = (u^1)^+(x_1, x_2, -x_3)e_1 + (u^2)^+(x_1, x_2, -x_3)e_2 - u_z(x_1, x_2, -x_3)e_3. \quad (8.4.2)$$

Il est clair que  $v$  appartient à  $H_{per}(\text{div}, \Omega_{\alpha\delta}^-) \cap H_{per}(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^-)$ . Nous définissons alors  $u_1$  sur  $\Omega_{\alpha\delta}^-$  par

$$u_1 := u^- - v.$$

Par construction  $u_1$  appartient à  $H_{per}(\text{div}, \Omega_{\alpha\delta}^-) \cap H_{per}(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^-)$ . De plus,  $u_1 \times n = 0$  sur  $\Sigma_{x_3}^-$ . Par ailleurs,

$$(u_1 \cdot e_3)|_{\Gamma_{\alpha\delta}^-} = 2\langle u \cdot e_3 \rangle_{\alpha},$$

si bien que  $(u_1 \cdot e_3)|_{\Gamma_{\alpha\delta}^-}$  appartient à  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Donc, par le théorème 5.4.3 de [Néd01],  $u_1$  appartient à  $H^1_{per}(\Omega)^3$ . On en déduit que  $[u_T]_{\alpha} = (u_1)_T|_{\Gamma_{\alpha\delta}^-}$  appartient à  $H^1(\Omega)$ . Comme  $\langle u_T \rangle_{\alpha}$  appartient également à  $H^{1/2}(\Omega)$ , on en déduit que  $u_T|_{\Gamma_{\alpha\delta}^{\pm}}$  appartient à  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Donc (d'après la remarque 2.14 de [ABDG98])  $u$  appartient à  $H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+)} + \|u\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-)} &\leq C \left( \|\text{div } u\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+)} + \|\text{div } u\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-)} + \|\text{curl } u\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-)} + \|\text{curl } u\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+)} \right. \\ &\quad \left. + \|u\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^-)} + \|u\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+)} + \|\langle u_T \rangle_{\alpha}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\langle u \cdot e_3 \rangle_{\alpha}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 8.4.1. Nous démontrons successivement les deux propriétés, la seconde étant une conséquence directe de la première.

*Démonstration.*

**a-** Soit  $u \in X_0^{\delta}$  et  $\chi$  une fonction  $C^{\infty}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  telle que

$$\chi(x_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x_3| \leq \frac{L_3}{4}, \\ 0 & \text{si } |x_3| \geq \frac{L_3}{2}. \end{cases} \quad (8.4.4)$$

Comme  $u = \chi u + (1 - \chi)u$ , nous allons successivement montrer que  $u_1 = \chi u \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^{\pm})$  et  $u_2 = (1 - \chi)u \in H^{1/2}(\Omega_{\alpha\delta}^{\pm})$ .

- Estimation de la norme du gradient de  $u_1$  :  $u_1$  appartient à l'espace  $W$  défini par

$$\begin{aligned} W := \left\{ u \in H(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^{\pm}) \cap H(\text{div}, \Omega_{\alpha\delta}^{\pm}) \text{ telles que } u \times n = 0 \text{ sur } \Sigma_{x_3}^{\pm}, \right. \\ \left. \langle u \cdot e_3 \rangle_{\alpha} = \frac{1}{\delta} \text{curl}_{\Gamma} \mathcal{G}([e_3 \times u_T]_{\alpha}) \text{ et } -[u \cdot e_3]_{\alpha} = \delta \text{div}_{\Gamma}(D_2 \langle u_T \rangle_{\alpha}) \right\}, \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_W^2 = \|u\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 + \|\text{div } u\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 + \|\text{curl } u\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 + \|\langle v_T \rangle_{\alpha}\|_{TH(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma)}^2.$$

Nous allons montrer que  $W$  est inclus dans  $H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-)$ . Soit  $v \in W$ . Les conditions de transmission

$$\langle v \cdot e_3 \rangle_{\alpha} = \frac{1}{\delta} \text{curl}_{\Gamma} \mathcal{G}([e_3 \times v_T]_{\alpha}) \text{ et } -[v \cdot e_3]_{\alpha} = \delta \text{div}_{\Gamma}(D_2 \langle v_T \rangle_{\alpha})$$

donnent des informations sur la régularité de  $u$  sur  $\Gamma$ . En effet, par définition de l'opérateur  $\mathcal{G}$ , nous savons que  $\text{curl}_{\Gamma} \mathcal{G}([e_3 \times v_T]_{\alpha})$  appartient à  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Donc, comme  $\langle v \cdot e_3 \rangle_{\alpha}$  appartient à  $H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $\text{curl}_{\Gamma} \langle v \cdot e_3 \rangle_{\alpha} = \frac{1}{\delta} \text{curl}_{\Gamma} \text{curl}_{\Gamma} \mathcal{G}([e_3 \times v_T]_{\alpha})$ , alors

$$\langle v \cdot e_3 \rangle_{\alpha} \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Par ailleurs, comme  $-[v \cdot e_3]_\alpha = \delta \operatorname{div}_\Gamma(D_2 \langle v_T \rangle_\alpha)$ ,  $\operatorname{div}_\Gamma(D_2 \langle v_T \rangle_\alpha)$  appartient à  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Mais on sait aussi que  $\langle v_T \rangle_\alpha$  appartient à  $H_{per}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$  si bien que la proposition 8.7.1 donne

$$\langle v_T \rangle_\alpha \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Donc, en appliquant le lemme 8.4.2,  $v$  appartient à  $H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-)$  (à  $\delta$  fixé).

On peut évaluer plus précisément la norme du gradient de  $v$  en utilisant la formule page 211 de [Néd01] :

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+)}^2 &= \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+} (|\operatorname{curl} v|^2 + |\operatorname{div} v|^2) dx + 2\mathcal{R}(\langle \operatorname{div}_\Gamma(v_T^+)_\alpha, (v_\alpha^+ \cdot e_3) \rangle), \\ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 &= \int_{\Omega_{\alpha\delta}^-} (|\operatorname{curl} v|^2 + |\operatorname{div} v|^2) dx - 2\mathcal{R}(\langle \operatorname{div}_\Gamma(v_T^-)_\alpha, (v_\alpha^- \cdot e_3) \rangle). \end{aligned}$$

où  $\mathcal{R}(v)$  désigne la partie réelle de  $v$ . En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 &= \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+} (|\operatorname{curl} v|^2 + |\operatorname{div} v|^2) dx + \int_{\Omega_{\alpha\delta}^-} (|\operatorname{curl} v|^2 + |\operatorname{div} v|^2) dx \\ &\quad + 2\mathcal{R}(\langle \operatorname{div}_\Gamma[v_T]_\alpha, \langle v \cdot e_3 \rangle_\alpha \rangle) + 2\mathcal{R}(\langle \operatorname{div}_\Gamma \langle v_T \rangle_\alpha, [v \cdot e_3]_\alpha \rangle). \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

Or, d'après la propriété 8.7.3

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\langle \operatorname{div}_\Gamma \langle v_T \rangle_\alpha, [v \cdot e_3]_\alpha \rangle) &= -\delta \mathcal{R}(\langle \operatorname{div}_\Gamma \langle v_T \rangle_\alpha, \operatorname{div}_\Gamma D_2 \langle v_T \rangle_\alpha \rangle) \\ &\leq C \left\| \sqrt{\delta} \operatorname{curl}_\Gamma \langle v_T \rangle_\alpha \right\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

Par ailleurs,

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma [v_T]_\alpha, \langle v \cdot e_3 \rangle_\alpha \rangle = \frac{1}{\delta} \langle \operatorname{curl}_\Gamma [e_3 \times v]_\alpha, \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G}([e_3 \times v]_\alpha) \rangle.$$

Or,

$$\begin{aligned} A \langle \operatorname{curl}_\Gamma [e_3 \times v]_\alpha, \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G}([e_3 \times v]_\alpha) \rangle &= - \underbrace{\int_\Gamma (|e_3 \times v|^2 + \omega^2 D_1 \overline{\mathcal{G}([e_3 \times v]_\alpha)} \cdot [e_3 \times v]) ds}_{\leq 0}, \\ &\leq C |\langle \mathcal{G}([e_3 \times v]_\alpha), [e_3 \times v]_\alpha \rangle|, \end{aligned}$$

si bien que

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma [v_T]_\alpha, \langle v \cdot e_3 \rangle_\alpha \rangle \leq \frac{C}{\delta} |\langle \mathcal{G}([e_3 \times v]_\alpha), [e_3 \times v]_\alpha \rangle|.$$

Donc, pour tout  $v \in W$ ,

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 &\leq C \left( \|v\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 + \|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 + \left\| \sqrt{\delta} \operatorname{curl}_\Gamma \langle v_T \rangle_\alpha \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta} |\langle \mathcal{G}([e_3 \times v_T]_\alpha), [e_3 \times v_T]_\alpha \rangle| \right), \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $u_1 = \chi u$  et que  $\operatorname{div}(u_1) = \nabla \chi \cdot u$ ,

$$\|\operatorname{div} u_1\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^\pm)} \leq C \|u\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^\pm)}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \|\nabla(\chi u)\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 &\leq C \left( \|u\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-)}^2 + \left\| \sqrt{\delta} \langle u_T \rangle_\alpha \right\|_{TH(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta} |\langle \mathcal{G}([e_3 \times u]_\alpha), [e_3 \times u]_\alpha \rangle| \right), \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

- Estimation de  $u_2 = (1 - \chi)u$  en norme  $H^{1/2}(\Omega_{\alpha\delta}^{\pm})$ . Comme  $u \times n$  appartient seulement à  $TL^2(\Sigma_{x_3}^{\pm})$  et non à  $TH^{1/2}(\Sigma_{x_3}^{\pm})$ ,  $u_2$  ne peut appartenir à  $H^1(\Omega_{\alpha\delta}^{\pm})$ . En revanche, on peut montrer que  $u_2$  appartient à  $H^{1/2}(\Omega_{\alpha\delta}^{\pm})$  en appliquant le théorème 2 de [Cos90] : nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u_2\|_{H^{1/2}(\Omega^{\pm})} &= C \left( \|u_2\|_{H(\text{curl}, \Omega^{\pm})} + \|u_2\|_{H(\text{div}, \Omega^{\pm})} + \|u_2 \times n\|_{L^2(\Sigma_{x_3}^{\pm})} \right), \\ &\leq C \left( \|u\|_{H(\text{curl}, \Omega^{\pm})} + \|u \times n\|_{L^2(\Sigma_{x_3}^{\pm})} \right). \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

La constante  $C$  est indépendante de  $\delta$ .

**b-** À partir du résultat précédent on peut montrer que la forme bilinéaire  $b_\delta$  est compacte (on dit qu'une forme bilinéaire est compacte sur un espace de Hilbert  $H$  si l'opérateur linéaire qui lui est associé par le théorème de Riez est compact) dans  $X_0^\delta$  à  $\delta$  fixé :

$$\begin{aligned} b_\delta(\mathbf{E}_1^\delta, \varphi) &:= - \int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} \omega^2 \mathbf{E}_1^\delta \cdot \overline{\varphi} \, dx - \delta \int_{\Gamma} \omega^2 D_2 \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \cdot \overline{\langle \varphi \rangle_\alpha} ds \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\delta} \langle \mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha), \overline{[e_3 \times \varphi]_\alpha} \rangle. \end{aligned}$$

- Montrons d'abord que le terme  $\int_{\Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-} \omega^2 \mathbf{E}_1^\delta \cdot \overline{\varphi} \, dx + \delta \int_{\Gamma} \omega^2 D_2 \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \cdot \overline{\langle \varphi \rangle_\alpha} ds$  est compact. Comme  $\mathbf{E}_1^\delta \in H^{1/2}(\Omega_{\alpha\delta}^{\pm})$  il est clair que le terme  $\int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \omega^2 \mathbf{E}_1^\delta \cdot \overline{\varphi} \, dx$  est compact. Par ailleurs puisque  $\langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \in TH^{1/2}(\Gamma)$  et que l'injection de  $TH^{1/2}(\Gamma)$  dans  $TL^2(\Gamma)$  est compacte, alors le terme

$$\delta \int_{\Gamma} \omega^2 D_2 \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \cdot \overline{\langle \varphi \rangle_\alpha} ds$$

est compact.

- Il reste à montrer que le terme  $\frac{\omega^2}{\delta} \langle \mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha), \overline{[e_3 \times \varphi]_\alpha} \rangle$  est compact. On rappelle que  $\mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha)$  appartient à  $TH^{1/2}(\Gamma) \cap TH(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$  si bien que la proposition (8.7.2) donne l'existence de  $q$  appartenant à  $H^2(\Gamma)$  et de  $p$  dans  $H^{3/2}(\Gamma)$  telles que

$$\mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha) = \overline{\text{curl}}_\Gamma q + \nabla_\Gamma p.$$

Ainsi,

$$\langle \mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha), [e_3 \times \varphi]_\alpha \rangle = \underbrace{\langle \overline{\text{curl}}_\Gamma q, [e_3 \times \varphi]_\alpha \rangle}_{\in H^1(\Gamma)} - \underbrace{\langle p, \text{div}_\Gamma [e_3 \times \varphi]_\alpha \rangle}_{H^1(\Gamma)}$$

Comme  $H^1(\Gamma)$  s'injecte de façon compacte dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ , alors le terme  $\frac{\omega^2}{\delta} \langle \mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha), [e_3 \times \varphi]_\alpha \rangle$  est compact dans  $X_0^\delta$  à  $\delta$  fixé. □

## 8.5 Existence et unicité de la solution

Nous avons donc montré qu'à  $\delta$  fixé le problème, chercher  $\mathbf{E} \in X_0^\delta$  telle que

$$a_\delta(\mathbf{E}, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in X_0^\delta$$

relève de l'alternative de Fredholm. Il faut maintenant montrer l'unicité. Nous allons montrer l'existence et l'unicité dans l'espace  $X^\delta$  tout entier (ce qui est possible d'après la remarque 8.3.3) en montrant une condition de type inf-sup. Bien entendu la preuve fait intervenir des résultats de compacité.

**Proposition 8.5.1.** *Sous les hypothèses 8.1.1 et 8.2.2, il existe  $\delta_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  telles que, pour tout  $\delta < \delta_0$ ,*

$$\forall \mathbf{E}^\delta \in X_0^\delta, \quad \|\mathbf{E}^\delta\|_{X^\delta} \leq \sup_{\varphi \in X^\delta, \varphi \neq 0} \frac{a_\delta(\mathbf{E}^\delta, \varphi)}{\|\varphi\|_{X^\delta}}. \quad (8.5.1)$$

*Démonstration.* Nous raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathbf{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ ,
- $\mathbf{E}_n \in X_0^{\delta_n}$  et  $\|\mathbf{E}_n\|_{X^{\delta_n}} = 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\varphi \in X^{\delta_n} \setminus \{0\}} \frac{a_{\delta_n}(\mathbf{E}_n, \varphi)}{\|\varphi\|_{X^{\delta_n}}} = 0$ ,

• *Etape 1* : nous montrons que  $\mathbf{E}_n$  est bornée dans  $H^{1/2}(\Omega_{\alpha\delta_n}^{\pm})$  :

Remarquons d'abord que,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega^2}{\delta_n} \langle G([e_3 \times \mathbf{E}_n]_{\alpha}), [e_3 \times \mathbf{E}_n]_{\alpha} \rangle \right| \\ \leq a_{\delta_n}(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) + C \left( \|\mathbf{E}_n\|_{H(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta_n}^{\pm})}^2 + \delta_n B \|\langle (\mathbf{E}_n)_T \rangle_{\alpha}\|_{H(\text{curl}, \Gamma)}^2 \right) \leq C. \end{aligned}$$

Nous pouvons ici remplacer les crochets de dualité par des intégrales surfaciques car, pour tout  $\delta_n$ ,  $[e_3 \times \mathbf{E}_n]_{\alpha}$  et  $\mathcal{G}([e_3 \times \mathbf{E}_n]_{\alpha})$  appartient à  $L^2(\Gamma)$ .

Grâce à la précédente inégalité, nous allons montrer que  $\chi \mathbf{E}_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega_{\alpha\delta_n}^{\pm})$  où  $\chi$  est la fonction de troncature introduite en (8.4.4). Or, d'après l'inégalité (8.4.8), nous avons

$$\begin{aligned} \|\nabla(\chi \mathbf{E}_n)\|_{L^2(\Omega_{\alpha\delta_n}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta_n}^-)}^2 &\leq \left| \frac{1}{\delta_n} \int_{\Gamma} G([n \times \mathbf{E}_n]_{\alpha}) \cdot \overline{[e_3 \times \mathbf{E}_n]_{\alpha}} ds \right| + \|\mathbf{E}_n\|_{H(\text{curl}, \Omega_{\alpha\delta_n}^+ \cap \Omega_{\alpha\delta_n}^-)}^2 \\ &\quad + \delta_n \|\langle (\mathbf{E}_n)_T \rangle_{\alpha}\|_{H(\text{curl}, \Gamma)}^2, \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Donc  $\chi \mathbf{E}_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega_{\alpha\delta_n}^{\pm})$ . De même, en utilisant (8.4.9), on a

$$\|(1 - \chi) \mathbf{E}_n\|_{H^{1/2}(\Omega_{\alpha\delta_n}^{\pm})} \leq C.$$

Donc

$$\|\mathbf{E}_n\|_{H^{1/2}(\Omega_{\alpha\delta_n}^{\pm})} \leq C. \quad (8.5.2)$$

• *Etape 2* : passage au domaine fixe  $\Omega^+ \cup \Omega^-$ . Pour pouvoir utiliser les propriétés d'injections compactes, nous souhaitons travailler dans un domaine fixe. Nous allons, tout comme dans l'étude de la stabilité de  $b_{\delta}$  nous servir des fonctions très régulières  $F^{\delta, \pm}$  introduites en (8.3.7) : ces fonctions transforment  $\Omega^{\pm}$  en  $\Omega_{\alpha\delta}^{\pm}$ . Pour tout  $\varphi \in X^{\delta}$ , nous définissons  $\hat{\varphi}$  par

$$\hat{\varphi} := \begin{cases} (dF^+) \varphi \circ F^{\delta+} & \text{si } x_3 > 0, \\ (dF^-) \varphi \circ F^{\delta-} & \text{si } x_3 < 0. \end{cases}$$

Cette transformation permet de conserver le rotationnel puisque

$$(\text{curl } \varphi) \circ F^{\pm} = \frac{1}{\det(dF^{\pm})} dF^{\pm, \delta} \hat{\text{curl}} \hat{\varphi} \quad (8.5.3)$$

Pour plus d'explications sur cette transformation, on peut se référer à [Mon03], [Dub00] ou [Coh02]. Si  $\varphi$  appartient à  $X_{\delta}$  alors  $\hat{\varphi}$  appartient à  $\mathcal{X} := \{u \in H(\text{curl}, \Omega^{\pm}), (u)_T \in TL^2(\Sigma_{x_3}^{\pm}), \langle (u)_T \rangle \in H(\text{curl}, \Gamma)\}$  que nous munissons de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}^{\delta}}$  définie par

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{X}^{\delta}}^2 &= \|u\|_{H(\text{curl}, \Omega^{\pm})}^2 + \delta B \|\langle u_T \rangle\|_{H(\text{curl}, \Gamma)}^2 + \omega \int_{\Sigma^{\pm}} |u_T|^2 ds \\ &\quad + \frac{\omega^4}{\delta} \int_{\Gamma} D_1 \mathcal{G}([e_3 \times u]) \cdot \overline{\mathcal{G}([e_3 \times u])} ds. + \frac{A\omega^2}{\delta} \|\text{curl}_{\Gamma} \mathcal{G}([e_3 \times u])\|_{L^2(\Gamma)} \quad (8.5.4) \end{aligned}$$

On introduit alors

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{\delta_n}(\hat{\mathbf{E}}_n, \hat{\varphi}) &:= a_{\delta_n}(\mathbf{E}_n, \varphi), \\
&= \int_{\Omega^\pm} (dF^{\delta_n, \pm}) \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}}_n \cdot \overline{(dF^{\delta_n, \pm}) \operatorname{curl} \hat{\varphi}} \frac{1}{|\det(dF^{\delta_n, \pm})|} - i\omega \int_{\Sigma_{x_3}^\pm} (\hat{\mathbf{E}}_n)_T \cdot \overline{\hat{\varphi}_T} \\
&\quad - \int_{\Omega^\pm} (dF^{\delta_n, \pm})^{-1} \hat{\mathbf{E}}_n \cdot \overline{(dF^{\delta_n, \pm})^{-1} \hat{\varphi}} |\det(dF^{\delta_n, \pm})| \\
&\quad + \delta_n B \int_{\Gamma} \operatorname{curl}_{\Gamma} \langle (\hat{\mathbf{E}}_n)_T \rangle \cdot \overline{\operatorname{curl}_{\Gamma} \langle (\hat{\varphi})_T \rangle} - \delta_n \omega^2 \int_{\Gamma} D_2 \langle (\hat{\mathbf{E}}_n)_T \rangle \cdot \overline{\langle \hat{\varphi}_T \rangle} \\
&\quad + \frac{\omega^2}{\delta_n} \langle \mathcal{G}([e_3 \times \hat{\mathbf{E}}_n]_{\alpha}), \overline{[e_3 \times \hat{\varphi}]_{\alpha}} \rangle.
\end{aligned} \tag{8.5.5}$$

Comme  $\mathbf{E}_n$  est bornée dans  $X^{\delta_n}$ , alors il existe deux constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$C_1 < \left\| \hat{\mathbf{E}}_n \right\|_{\mathcal{X}^{\delta_n}} < C_2, \tag{8.5.6}$$

De même, en utilisant (8.5.2)

$$\left\| \hat{\mathbf{E}}_n \right\|_{H^{1/2}(\Omega^\pm)} < C, \tag{8.5.7}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{v \in \mathcal{X} \setminus \{0\}} \frac{\hat{a}(\hat{\mathbf{E}}_n, \varphi)}{\|\varphi\|_{\mathcal{X}^{\delta_n}}} = 0 \tag{8.5.8}$$

D'après (8.5.7) et les injections de Sobolev ([Ada75]), il existe une sous suite de  $\hat{\mathbf{E}}_n$  encore notée  $\hat{\mathbf{E}}_n$  et une fonction  $\mathbf{E} \in H^{1/2}(\Omega^\pm)$  telles que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}}_n &\rightharpoonup \mathbf{E}^\pm \text{ faible dans } H^{1/2}(\Omega^\pm), \\
\hat{\mathbf{E}}_n &\rightarrow \mathbf{E}^\pm \text{ fort dans } L^2(\Omega^\pm),
\end{aligned}$$

• *Etape 3* : nous allons maintenant montrer que  $\mathbf{E}$  appartient à  $H(\operatorname{curl}, \Omega)$ .

Par hypothèse,  $\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathcal{G} \left( [e_3 \times \hat{\mathbf{E}}_n] \right)$  est bornée dans  $H(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ . Donc  $\mathcal{G} \left( [e_3 \times \hat{\mathbf{E}}_n] \right)$  tend fortement vers 0 dans  $TH(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ . Ainsi,  $\forall \varphi \in TD(\bar{\Gamma})$ ,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} [e_3 \times \hat{\mathbf{E}}_n] \cdot \overline{\varphi} ds \\
= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ -A \int_{\Gamma} \operatorname{curl}_{\Gamma} \mathcal{G}([e_3 \times \hat{\mathbf{E}}_n]) \overline{\operatorname{curl} \varphi} ds + \int_{\Gamma} D_1 \mathcal{G}([e_3 \times \hat{\mathbf{E}}_n]) \cdot \overline{\varphi} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Donc  $[e_3 \times \mathbf{E}_n]$  tend faiblement vers 0 et par unicité de la limite  $[e_3 \times \mathbf{E}] = 0$ .

• *Etape 4* : nous allons maintenant montrer que  $\mathbf{E} = 0$ . Nous définissons

$$H_{\operatorname{imp}}(\operatorname{curl}, \Omega) = \{u \in H(\operatorname{curl}, \Omega), u_T \in TL^2(\Sigma_{x_3}^\pm)\}.$$

que nous munissons de la norme  $\|u\|_{H_{\operatorname{imp}}(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 = \|u\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 + \|u_T\|_{TL^2(\Sigma_{x_3}^\pm)}^2$ .  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H_{\operatorname{imp}}(\operatorname{curl}, \Omega)$  pour cette même norme (cf [BBBCD97]). Choisissons  $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ . Remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n \left( B \int_{\Gamma} \operatorname{curl}_{\Gamma} \langle (\hat{\mathbf{E}}_n)_T \rangle \operatorname{curl}_{\Gamma} \overline{\langle \varphi_T \rangle} - \omega^2 \int_{\Gamma} D_2 \langle (\hat{\mathbf{E}}_n)_T \rangle \cdot \overline{\langle \varphi_T \rangle} \right) = 0.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\hat{a}_{\delta_n}(\hat{\mathbf{E}}_n, \varphi)}{\|\varphi\|_{\mathcal{X}^{\delta_n}}} = 0$  et que  $\|\varphi\|_{\mathcal{X}^{\delta_n}}$  est bornée (indépendamment de  $n$ ), on obtient

$$\int_{\Omega^+ \cap \Omega^-} \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot \overline{\operatorname{curl} \varphi} dx - \int_{\Omega^+ \cap \Omega^-} \omega^2 \mathbf{E} \cdot \overline{\varphi} dx - i\omega \int_{\Sigma_{x_3}^\pm} \mathbf{E}_T \cdot \overline{\varphi_T} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Comme  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H_{\text{imp}}(\operatorname{curl}, \Omega)$ , l'égalité a aussi lieu pour toute fonction test  $\varphi$  dans  $H_{\text{imp}}(\operatorname{curl}, \Omega)$ . En utilisant le théorème 4.17 de [Mon03], on en déduit que  $\mathbf{E} = 0$ .

• *Etape 5* : pour terminer la démonstration, on va montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{\mathbf{E}}_n\|_{\mathcal{X}^{\delta_n}} = 0$ . Il est d'abord clair que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{\mathbf{E}}_n\|_{L^2(\Omega^\pm)} = 0$ . De plus, on remarque que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sqrt{\delta_n} \langle (\hat{\mathbf{E}}_n)_T \rangle\|_{L^2(\Gamma)} = 0$ . En effet,  $\langle (\hat{\mathbf{E}}_n)_T \rangle$  est bornée dans  $L^2(\Gamma)$  ( $\chi(\hat{\mathbf{E}}_n)$  appartient à  $H^1(\Omega^\pm)$ ), donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sqrt{\delta_n} \langle (\hat{\mathbf{E}}_n)_T \rangle\|_{L^2(\Gamma)} = 0.$$

Par ailleurs, comme  $\mathbf{E}_n \in X_0^{\delta_n}$ ,

$$\frac{1}{2} \left( (dF^{\delta_n, +})^{-1} \hat{\mathbf{E}}_n^+ + (dF^{\delta_n, -})^{-1} \hat{\mathbf{E}}_n^- \right) \cdot e_3 = \frac{1}{\delta} \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G} \left( e_3 \times \hat{\mathbf{E}}_n \right).$$

Or  $\left( (dF^{\delta_n, +})^{-1} \hat{\mathbf{E}}_n^+ - (dF^{\delta_n, -})^{-1} \hat{\mathbf{E}}_n^- \right) \cdot e_3$  est borné dans  $L^2(\Gamma)$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G} \left( e_3 \times \hat{\mathbf{E}}_n \right) \right\|_{L^2(\Gamma)} = 0.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{E}}_n\|_{\mathcal{X}^{\delta_n}}^2 &\leq C \left( \underbrace{\hat{a}_{\delta_n}(\hat{\mathbf{E}}_n, \hat{\mathbf{E}}_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left( \|\hat{\mathbf{E}}_n\|_{L^2(\Omega^+)} + \|\hat{\mathbf{E}}_n\|_{L^2(\Omega^-)} \right)}_{\rightarrow 0} \right) \\ &\quad + \underbrace{\delta_n \|\langle (\hat{\mathbf{E}}_n)_T \rangle\|_{TL^2(\Gamma)}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \|\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{G} \left( e_3 \times \hat{\mathbf{E}}_n \right)\|_{L^2(\Gamma)}^2}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Nous obtenons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{\mathbf{E}}_n\|_{\mathcal{X}^{\delta_n}} = 0$  ce qui contredit l'hypothèse (8.5.6).  $\square$

Maintenant, en combinant les propositions 8.3.4 et 8.5.1 on peut montrer le résultat plus général suivant :

**Proposition 8.5.2.** *Sous les hypothèses 8.1.1 et 8.2.2, il existe  $\delta_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $\delta < \delta_0$*

$$\forall \mathbf{E}^\delta \in X^\delta, \quad \|\mathbf{E}^\delta\|_{X^\delta} \leq \sup_{\varphi \in X^\delta, \varphi \neq 0} \frac{a_\delta(\mathbf{E}^\delta, \varphi)}{\|\varphi\|_{X^\delta}}. \quad (8.5.9)$$

*Démonstration.* Nous proposons également une preuve par l'absurde. Supposons qu'il existe  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathbf{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ ,
- $\mathbf{E}_n \in X^{\delta_n}$  et  $\|\mathbf{E}_n\|_{X^{\delta_n}} = 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\varphi \in X^{\delta_n} \setminus \{0\}} \frac{a_{\delta_n}(\mathbf{E}_n, \varphi)}{\|\varphi\|_{X^{\delta_n}}} = 0$ ,

Nous utilisons d'abord la décomposition de Helmholtz de  $X^\delta$  :

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n^0 + \nabla p_n$$

où  $p_n$  appartient à  $S^{\delta_n}$  et  $\mathbf{E}_n^0$  appartient à  $X_0^{\delta_n}$ . En utilisant l'inégalité (8.3.19) de la remarque 8.3.5 on sait que

$$\|\nabla p_n\|_{X^{\delta_n}} \leq C \|\mathbf{E}_n\|_{X^{\delta_n}} \leq C.$$

On en déduit que

$$\|\mathbf{E}_n^0\|_{X^{\delta_n}} \leq C. \quad (8.5.10)$$

Soit  $q \in S^{\delta_n}$ . Comme  $a_{\delta_n}(\mathbf{E}_n, \nabla q) = a_{\delta_n}(\nabla p_n, \nabla q) = b_{\delta_n}(\nabla p_n, \nabla q)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{q \in S^{\delta_n}} \frac{b_{\delta_n}(\nabla p_n, \nabla q)}{\|\nabla q\|_{X^{\delta_n}}} = 0.$$

En utilisant la proposition 8.3.4, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla p_n\|_{X^{\delta_n}} = 0. \quad (8.5.11)$$

Par ailleurs, pour tout  $\varphi \in X^\delta$ ,

$$|a_{\delta_n}(\mathbf{E}_n^0, \varphi)| \leq |a_{\delta_n}(\mathbf{E}_n, \varphi)| + |a_{\delta_n}(\nabla p_n, \varphi)|, \quad (8.5.12)$$

Définissons,  $q_n^\varphi$  comme l'unique solution appartenant à  $S^{\delta_n}$  du problème

$$b_{\delta_n}(\nabla q_n^\varphi, \nabla p) = b_{\delta_n}(\varphi, \nabla p).$$

En utilisant de nouveau la remarque (8.3.19), on sait de plus qu'il existe  $C$  indépendante de  $\delta_n$  telle que

$$\|\nabla q_n^\varphi\|_{X^{\delta_n}} \leq C \|\nabla q_n^\varphi\|_{X^{\delta_n}}.$$

Comme  $a_{\delta_n}(\nabla p_n, \varphi) = b_{\delta_n}(\nabla q_n, \nabla q_n^\varphi)$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{\delta_n}(\nabla p_n, \varphi)|}{\|\varphi\|_{X^{\delta_n}}} \leq C \sup_{\varphi \in X^{\delta_n} \setminus \{0\}} \frac{|b_{\delta_n}(\nabla q_n, \nabla q_n^\varphi)|}{\|q_n^\varphi\|_{X^{\delta_n}}} \leq 0.$$

On déduit alors de l'inégalité (8.5.12) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\varphi \in X^{\delta_n} \setminus \{0\}} \frac{a_{\delta_n}(\mathbf{E}_n^0, \varphi)}{\|\varphi\|_{X^{\delta_n}}} = 0.$$

En reproduisant exactement le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 8.5.1, on obtient alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{E}_n^0\|_{X^{\delta_n}} = 0 \quad (8.5.13)$$

En combinant (8.5.11), (8.5.13) et l'inégalité triangulaire, on a

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|E_n\|_{X^{\delta_n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|E_n^0\|_{X^{\delta_n}} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla p_n\|_{X^{\delta_n}} = 0.$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale.  $\square$

## 8.6 Justification du modèle approché

L'objectif de cette partie est de montrer que  $\mathbf{E}_1^\delta$  tend vers la solution  $\mathbf{E}^\delta$  du problème exact. Nous adoptons une démarche classique que l'on trouve par exemple dans [JS08], [Sch08], [HJN08]. En fait, la première étape consiste à majorer  $\|\mathbf{E}_1^\delta - \mathbf{E}_0 - \delta \mathbf{E}_1\|_{X^\delta}$  en utilisant le résultat de stabilité 8.5.2 (proposition 8.6.1). Malheureusement, nous ne savons pas montrer directement une estimation d'erreur optimale. Pour contourner ce problème, nous construisons au préalable un développement asymptotique de  $\mathbf{E}_1^\delta$  en fonction du paramètre  $\delta$ . Il suffit ensuite de combiner l'estimation d'erreur optimale entre la solution exacte  $\mathbf{E}^\delta$  et les deux premiers termes de son développement  $\mathbf{E}_0 + \delta \mathbf{E}_1$  (proposition 7.8.1) et l'estimation d'erreur optimale obtenue sur  $\|\mathbf{E}_1^\delta - \mathbf{E}_0 - \delta \mathbf{E}_1\|_{X^\delta}$  pour obtenir un résultat de convergence optimal entre la solution  $\mathbf{E}_1^\delta$  du modèle approché et la solution exacte  $\mathbf{E}$  (proposition 8.6.2).

## 8.6.1 Développement asymptotique du problème approché

Ecrivons le développement asymptotique de  $\mathbf{E}_1^\delta$  en fonction du paramètre  $\delta$ . Tout comme pour le développement asymptotique du problème exact, il est plus facile d'introduire  $\mathbf{H}_1^\delta := \frac{1}{i\omega} \mathbf{E}_1^\delta$  de travailler avec le système d'ordre 1 : chercher  $(\mathbf{E}_1^\delta, \mathbf{H}_1^\delta) \in (X^\delta)^2$  tel que

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta - i\omega \mathbf{H}_1^\delta = 0 & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^\pm \\ -\operatorname{curl} \mathbf{H}_1^\delta - i\omega \mathbf{E}_1^\delta = -\frac{1}{i\omega} f & \text{dans } \Omega_{\alpha\delta}^\pm \\ -[e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha = \delta \left( \frac{A_i}{\omega} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_1^\delta)_T \rangle_\alpha - i\omega D_1 \langle (\mathbf{H}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \right) \\ -i\omega [e_3 \times \mathbf{H}_1^\delta]_\alpha = \delta \left( B \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha - i\omega D_2 \langle (\mathbf{E}_1^\delta)_T \rangle_\alpha \right) \\ \mathbf{H}_1^\delta \times n - \mathbf{E}_1^\delta = 0 \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \mathbf{H}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{H}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \\ \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{E}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^+}, \mathbf{H}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{H}_1^\delta \times n_{\Sigma_{x_2}^+}. \end{cases} \quad (8.6.1)$$

Le développement asymptotique de  $\mathbf{E}_1^\delta$  et  $\mathbf{H}_1^\delta$  est alors donné par

$$\mathbf{E}_1^\delta = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta^k \tilde{\mathbf{E}}_k, \quad \mathbf{H}_1^\delta = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta^k \tilde{\mathbf{H}}_k, \quad (8.6.2)$$

où  $(\tilde{\mathbf{E}}_n, \tilde{\mathbf{H}}_n) \in H(\Omega)^2$  sont les solutions du système

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{E}}_k - i\omega \tilde{\mathbf{H}}_k = 0 & \text{dans } \Omega^\pm, \\ -\operatorname{curl} \tilde{\mathbf{H}}_k - i\omega \tilde{\mathbf{E}}_k = -\frac{f}{i\omega} \delta_0^k & \text{dans } \Omega^\pm, \\ -[e_3 \times \tilde{\mathbf{E}}_k] = \tilde{g}_k, \\ -i\omega [e_3 \times \tilde{\mathbf{H}}_k] = \tilde{h}_k, \\ \tilde{\mathbf{H}}_k \times n - \tilde{\mathbf{E}}_k = 0 \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm. \\ \tilde{\mathbf{E}}_k \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \tilde{\mathbf{E}}_k \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \tilde{\mathbf{H}}_k \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \tilde{\mathbf{H}}_k \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \\ \tilde{\mathbf{E}}_k \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \tilde{\mathbf{E}}_k \times n_{\Sigma_{x_2}^+}, \tilde{\mathbf{H}}_k \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \tilde{\mathbf{H}}_k \times n_{\Sigma_{x_2}^+}. \end{cases} \quad (8.6.3)$$

avec,

$$\begin{aligned} \tilde{h}_k &= \sum_{m=1}^k \frac{i\omega \alpha^m}{m!} e_3 \times \left( \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{H}}_{k-m}}{\partial x_3^m} \right)^+ - \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m \alpha^m i\omega}{m!} e_3 \times \left( \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{H}}_{k-m}}{\partial x_3^m} \right)^- \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\alpha^m}{m!} \left( B \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma - \omega^2 D_2 \right) \left( \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{E}}_{k-m}}{\partial x_3^m} \right)_T^+ \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \alpha^m}{m!} \left( B \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma - \omega^2 D_2 \right) \left( \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{E}}_{k-m}}{\partial x_3^m} \right)_T^-, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{g}_k &= -\sum_{m=1}^k \frac{\alpha^m}{m!} e_3 \times \left( \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{E}}_{k-m}}{\partial x_3^m} \right)^+ + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m \alpha^m}{m!} e_3 \times \left( \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{E}}_{k-m}}{\partial x_3^m} \right)^- \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\alpha^m}{m!} \left( \frac{A_i}{\omega} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma - i\omega D_1 \right) \left( \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{H}}_{k-m}}{\partial x_3^m} \right)_T^+ \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \alpha^m}{m!} \left( \frac{A_i}{\omega} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma - i\omega D_1 \right) \left( \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{H}}_{k-m}}{\partial x_3^m} \right)_T^-. \end{aligned}$$



En utilisant la proposition 7.6.1, il est facile de montrer que le problème (8.6.3) est bien posé. De plus, on vérifie rapidement que

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0, \quad \tilde{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{H}_0, \quad \tilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{E}_1, \quad \tilde{\mathbf{H}}_1 = \mathbf{H}_1. \quad (8.6.4)$$

### 8.6.2 Convergence du développement asymptotique

Nous nous intéressons maintenant à l'erreur  $\mathcal{D}_n$  entre le champ  $\mathbf{E}_1^\delta$  et son développement asymptotique tronqué à l'ordre  $n$  :

$$\mathcal{D}_n = \mathbf{E}_1^\delta - \sum_{k=0}^n \delta^k \tilde{\mathbf{E}}_k.$$

Par des calculs explicites, on voit facilement qu'il existe deux fonctions  $g_n$  et  $h_n$  appartenant à  $(C^\infty(\Gamma))^2$  telles que

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathcal{D}_n - \omega^2 \mathcal{D}_n = f \text{ dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ -[e_3 \times \mathcal{D}_n]_\alpha = \delta \left( \frac{A}{\omega^2} \operatorname{curl}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma (\langle \operatorname{curl} \mathcal{D}_n \rangle_\alpha)_T - D_1 (\langle \operatorname{curl} \mathcal{D}_n \rangle_\alpha)_T \right) + \delta^{n+1} g_n, \\ -[e_3 \times \operatorname{curl} \mathcal{D}_n]_\alpha = \delta \left( B \operatorname{curl}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathcal{D}_n)_T \rangle_\alpha - \omega^2 D_2 \langle (\mathcal{D}_n)_T \rangle_\alpha \right) + \delta^{n+1} h_n, \\ n \times \operatorname{curl} \mathcal{D}_n = -i\omega (\mathcal{D}_n)_{TT} \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \\ \mathcal{D}_n \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \mathcal{D}_n \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathcal{D}_n \times n_{\Sigma_{x_1}^-} = \operatorname{curl} \mathcal{D}_n \times n_{\Sigma_{x_1}^+}, \\ \mathcal{D}_n \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \mathcal{D}_n \times n_{\Sigma_{x_2}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathcal{D}_n \times n_{\Sigma_{x_2}^-} = \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} \times n_{\Sigma_{x_2}^+}. \end{cases}$$

$\mathcal{D}_n$  appartient à  $X^\delta$  (par contre il n'appartient pas à  $X_0^\delta$ ). En écrivant le problème précédent sous forme variationnelle, on obtient

$$\forall \varphi \in X^\delta, \quad a_\delta(\mathcal{D}_n, \varphi) = \delta^n \omega^2 \langle \mathcal{G}(g_n), [e_3 \times \varphi]_\alpha \rangle + \delta^{n+1} \int_\Gamma h_n \cdot \overline{\langle \varphi \rangle_\alpha} \quad (8.6.5)$$

Comme

$$\delta^n \omega^2 \langle \mathcal{G}(g_n), [e_3 \times \varphi]_\alpha \rangle \leq C(g_n) \delta^{n+1/2} \left\| \frac{1}{\sqrt{\delta}} \mathcal{G}([e_3 \times \varphi]) \right\|_{H(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)},$$

on obtient l'estimation suivante

$$\sup_{\varphi \in X^{\delta_n} \setminus \{0\}} \frac{|a_\delta(\mathcal{D}_n, \varphi)|}{\|\varphi\|_{X^\delta}} \leq C \delta^{n-1/2}. \quad (8.6.6)$$

La constante  $C$  ne dépend que de  $n$  (et du second membre  $f$ ). En utilisant la proposition 8.5.2, on obtient, pour  $\delta$  assez petit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists C > 0, \quad \|\mathcal{D}_n\|_{X^\delta} \leq C \delta^{n+1/2}.$$

Ce résultat n'est pas optimal. Par l'inégalité triangulaire, on obtient l'estimation d'erreur optimale suivante :

**Proposition 8.6.1.** *Sous les hypothèses 8.1.1 et 8.2.2, il existe  $\delta_0 > 0$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_n > 0$  telle que, pour tout  $\delta < \delta_0$*

$$\left\| \mathbf{E}_1^\delta - \sum_{k=0}^n \tilde{\mathbf{E}}_k \right\|_{X^\delta} \leq C \delta^{n+1}. \quad (8.6.7)$$

### 8.6.3 Convergence du modèle approché

On peut maintenant montrer que la solution du modèle approché  $\mathbf{E}_1^\delta$  converge vers la solution du problème exacte  $\mathbf{E}^\delta$  :

**Proposition 8.6.2.** *Soit  $0 < \gamma < \frac{L_3}{2}$  et soit  $\Omega_\gamma := \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega, |x_3| > \gamma\}$ . Il existe une constante  $\delta_\gamma > 0$  telles que,*

$$\forall \delta < \delta_\gamma, \quad \|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_1^\delta\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega_\gamma)} \leq C \delta^2.$$

*Démonstration.* La preuve est basée sur les propositions 7.8.1 et 8.6.1 :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_1^\delta\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} &\leq \|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_0 + \delta \mathbf{E}_1\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} \\ &\quad + \left\| (\mathbf{E}_0 + \delta \mathbf{E}_1) - (\tilde{\mathbf{E}}_0 + \delta \tilde{\mathbf{E}}_1) \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} + \left\| \mathbf{E}^\delta - \tilde{\mathbf{E}}_0 + \delta \tilde{\mathbf{E}}_1 \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)}. \end{aligned}$$

On rappelle que  $(\mathbf{E}_0 + \delta \mathbf{E}_1) - (\tilde{\mathbf{E}}_0 + \delta \tilde{\mathbf{E}}_1) = 0$  (cf. 8.6.4). De plus, la proposition 7.8.1 donne l'existence d'une constante  $\delta_1$  et d'une constante  $C_1 > 0$  telles que,

$$\forall \delta < \delta_1, \quad \|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_0 + \delta \mathbf{E}_1\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} \leq C_1 \delta^2.$$

De même, la proposition 8.6.1 donne l'existence d'une constante  $\delta_2$  et d'une constante  $C_2 > 0$  telles que

$$\forall \delta < \delta_2, \quad \left\| \mathbf{E}^\delta - \tilde{\mathbf{E}}_0 + \delta \tilde{\mathbf{E}}_1 \right\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} \leq \left\| \mathbf{E}^\delta - \tilde{\mathbf{E}}_0 + \delta \tilde{\mathbf{E}}_1 \right\|_{X^\delta} \leq C_2 \delta^2.$$

Finalement,

$$\forall \delta \leq \min(\delta_1, \delta_2), \quad \|\mathbf{E}^\delta - \mathbf{E}_1^\delta\|_{H(\text{curl}, \Omega_\gamma)} \leq \max(C_1, C_2) \delta^{n+1}.$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

## 8.7 Lemmes et preuves techniques

### 8.7.1 Quelques résultats préliminaires

Nous donnons ici quelques résultats standards qui sont utiles à plusieurs reprises dans ce document :

#### Proposition 8.7.1.

a- Soit  $u \in TH^{-1/2}(\Gamma)$  telle que  $\text{div}_\Gamma u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $\text{curl}_\Gamma u \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Alors  $u \in TH^{1/2}(\Gamma)$  et

$$\|u\|_{TH^{1/2}(\Gamma)} \leq C \left( \|\text{div}_\Gamma u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|\text{curl}_\Gamma u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right).$$

b- Soit  $D$  une matrice constante diagonale strictement positive et soit  $u \in TL^2(\Gamma)$  telle que  $\text{div}_\Gamma(Du) \in H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $\text{curl}_\Gamma u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ . Alors  $u \in TH^{1/2}(\Gamma)$  et

$$\|u\|_{TH^{1/2}(\Gamma)} \leq C \left( \|\text{div}_\Gamma(Du)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|\text{curl}_\Gamma u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right).$$

c- Soit  $u \in TL_2(\Gamma)$  telle que  $\text{div}_\Gamma(Du) = 0$ ,  $\text{curl}_\Gamma u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $\int_\Gamma u \, ds = 0$ . Alors,

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|\text{curl}_\Gamma u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

*Démonstration.* Nous utilisons la base  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  des fonctions propres de l'opérateur Laplacien-Beltrami (cf. [Néd01] pages 205-211).

a- Nous savons que  $u = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( \alpha_i \nabla_\Gamma Y_i + \beta_i \vec{\text{curl}}_\Gamma Y_i \right)$ . Donc,

$$\text{curl}_\Gamma u = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \lambda_i \beta_i Y_i \quad \text{et} \quad \text{div}_\Gamma u = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} -\lambda_i \alpha_i Y_i \quad (\text{car } \lambda_0 = 0).$$

Comme  $\text{curl}_\Gamma u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $\text{div}_\Gamma u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  alors,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{\lambda_i^2}{(1 + \lambda_i)^{1/2}} |\beta_i|^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{\lambda_i^2}{(1 + \lambda_i)^{1/2}} |\alpha_i|^2 < +\infty.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i^{3/2} (|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2), \\
&= (|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\lambda_i^2}{(1 + \lambda_i)^{1/2}} \underbrace{\frac{(1 + \lambda_i)^{1/2}}{\lambda_i^{1/2}}}_{\leq \sqrt{\frac{1 + \lambda_i}{\lambda_i}}} (|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2), \\
&\leq C \left( \|\operatorname{div}_\Gamma u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\operatorname{curl}_\Gamma u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \right).
\end{aligned}$$

b- On sait que  $u = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\alpha_i \nabla_\Gamma Y_i + \beta_i \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma Y_i)$ . On définit  $w$  par

$$w = \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma Y_i.$$

Par construction  $\operatorname{div}_\Gamma w = 0$  et donc  $w \in H^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) \cap H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ . Donc  $w \in H^{1/2}(\Gamma)$  et

$$\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C \|u\|_{H^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)},$$

De plus

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{div}_\Gamma(Dw)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= |D_{22} - D_{11}| \left\| \frac{\partial w^2}{\partial x_2} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \\
&\leq C \|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \\
&\leq C \|u\|_{H^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)}.
\end{aligned}$$

On introduit maintenant  $z = w - u$ . Comme  $u$  appartient à  $L^2(\Gamma)$ ,  $z$  appartient à  $L_2(\Gamma)$ . Comme  $\operatorname{curl}_\Gamma z = 0$ ,  $z = \nabla_\Gamma q$ , où  $q$  est une fonction appartenant à  $H^1(\Gamma)$  déterminée à une constante près. Nous choisissons  $q$  tel que  $\int_\Gamma q = 0$ . Il faut ici faire attention car  $q$  n'est pas périodique. Par contre, d'après la proposition 7.9.1,  $q = \tilde{q} + c_1 x_1 + c_2 x_2$  où  $\tilde{q}$  est périodique et

$$|c_1| + |c_2| \leq C \|\nabla q\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|z\|_{L^2(\Gamma)}.$$

On remarque que  $\int_\Gamma \tilde{q} = 0$  et que de plus,

$$\operatorname{div}_\Gamma(D\nabla \tilde{q}) = \underbrace{\operatorname{div}_\Gamma(Dw) - \operatorname{div}_\Gamma Du}_{\in H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Donc,  $\tilde{q} \in H^{3/2}(\Gamma)$ . Donc  $q \in H^{3/2}(\Gamma)$  et

$$\begin{aligned}
\|q\|_{H^{3/2}} &\leq \|\tilde{q}\|_{H^{3/2}(\Gamma)} + \|c_1 x_1 + c_2 x_2\|_{H^{3/2}(\Gamma)} \\
&\leq C (\|u\|_{H^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)} + \|\operatorname{div}_\Gamma Du\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}).
\end{aligned}$$

Finalement,  $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ .

c- Nous démontrons ce résultat par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite  $u_n$  telle que

- $u_n \in TH^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ ,
- $\|u_n\|_{L^2(\Gamma)} = 1$ ,
- $\operatorname{div}_\Gamma Du_n = 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\operatorname{curl}_\Gamma u_n\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = 0$ .

En utilisant la propriété b, nous savons que  $u_n$  est bornée dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Donc  $u_n$  tend faiblement vers  $u$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  (et donc fortement dans  $L^2(\Gamma)$ ). Par conséquent :

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\Gamma)} &= 1, \\ \operatorname{curl}_\Gamma u &= 0.\end{aligned}$$

Comme  $\operatorname{curl}_\Gamma u = 0$ , alors  $u = \nabla_\Gamma q$ . Comme dans la démonstration du point précédent, on sait a priori que  $q = \tilde{q} + ax_1 + bx_2$  avec  $\tilde{q}$  périodique. Mais comme  $\int_\Gamma u \, ds = 0$  alors  $a = b = 0$ . Donc  $q$  est périodique et vérifie

$$\operatorname{div}_\Gamma D \nabla_\Gamma q = 0.$$

Donc  $q$  est constante et  $u = 0$ , ce qui contredit le fait que  $\|u\|_{L^2(\Gamma)} = 1$ . □

Nous introduisons maintenant une décomposition de Helmholtz intéressante des fonctions de  $TH_{per}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) \cap TH^{1/2}(\Gamma)$ .

**Proposition 8.7.2.** *Soit  $\lambda \in TH_{per}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) \cap TH^{1/2}(\Gamma)$  alors il existe  $q \in H^2(\Gamma)$  et  $p \in TH^{3/2}(\Gamma)$  telles que  $\lambda = \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma q + \nabla_\Gamma p$ .*

*Démonstration.* Définissons  $q$  comme l'unique solution du problème suivant : chercher  $q \in H^1_{per}(\Gamma)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta q = -\operatorname{curl}_\Gamma \lambda & \text{sur } \Gamma, \\ \int_\Gamma q \, ds = 0. \end{cases}$$

Comme  $\operatorname{curl}_\Gamma \lambda \in L^2(\Gamma)$ , alors  $q \in H^2(\Gamma)$ . Soit  $w = \lambda - \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma q$ .

$$\operatorname{curl}_\Gamma w = \operatorname{curl}_\Gamma \lambda - \operatorname{curl}_\Gamma \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma q = \operatorname{curl}_\Gamma \lambda + \Delta q = 0.$$

Donc il existe  $p \in H^1(\Gamma)$  définie à une constante près telle que  $w = \nabla_\Gamma p$ . On sait que  $p = \tilde{p} + ax_1 + bx_2$  avec  $\tilde{p}$  périodique. Mais

$$\operatorname{div}_\Gamma w = \Delta \tilde{p} = \underbrace{\operatorname{div}_\Gamma \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma q}_{=0} + \operatorname{div}_\Gamma \lambda.$$

Or  $\operatorname{div}_\Gamma \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$ . Donc  $p \in H^{3/2}(\Gamma)$ . □

### 8.7.2 Majoration de $-\mathcal{R} \left( \int_\Gamma \overline{\operatorname{div}_\Gamma D_2 u_T} \operatorname{div}_\Gamma u_T \right)$

**Proposition 8.7.3.** *Soit  $u_T \in TH_{per}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ . Alors, il existe une constante  $C$  telle que*

$$-\mathcal{R} \left( \int_\Gamma \overline{\operatorname{div}_\Gamma (D_2 \langle u_T \rangle)} \operatorname{div}_\Gamma u_T \right) \leq \|\operatorname{curl}_\Gamma \langle u_T \rangle\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

( $\mathcal{R}(u)$  désigne la partie réelle de  $u$ ).

*Démonstration.* La démonstration est faite uniquement dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire dans le cas cartésien quand  $\Gamma$  est le plan  $] -L_1/2, L_1/2[ \times ] -L_2/2, L_2/2[$  : dans ce cas, on connaît explicitement les valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur Laplacien-Beltrami. Soit  $u \in TH_{per}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ . On sait que  $u = \nabla_\Gamma \varphi + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \psi$  avec,

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} b_{nk} e^{2i\pi(\frac{n}{L_1}x_1 + \frac{k}{L_2}x_2)} + dx_1 + \tilde{d}x_2, \\ \psi &= \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} c_{nk} e^{2i\pi(\frac{n}{L_1}x_1 + \frac{k}{L_2}x_2)} + \tilde{f}x_1 + fx_2.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} u^1 &= \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} 2i\pi \left( \frac{n}{L_1} b_{nk} + \frac{k}{L_2} c_{nk} \right) e^{2i\pi \left( \frac{n}{L_1} x_1 + \frac{k}{L_2} x_2 \right)} + d + f, \\ u^2 &= \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} 2i\pi \left( \frac{k}{L_2} b_{nk} - \frac{n}{L_1} c_{nk} \right) e^{2i\pi \left( \frac{n}{L_1} x_1 + \frac{k}{L_2} x_2 \right)} + \tilde{d} - \tilde{f}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Gamma u &= \operatorname{div}_\Gamma \nabla \varphi, \\ &= - \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^2 \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right) b_{nk} e^{2i\pi \left( \frac{n}{L_1} x_1 + \frac{k}{L_2} x_2 \right)}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Gamma (D_2 u) &= \operatorname{div}_\Gamma (D_2 \nabla \varphi) + \operatorname{div}_\Gamma (D_2 \operatorname{curl}_\Gamma \psi), \\ &= - \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^2 \left( d_1 \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + d_2 \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right) b_{nk} e^{2i\pi \left( \frac{n}{L_1} x_1 + \frac{k}{L_2} x_2 \right)} \\ &\quad + \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^2 (d_2 - d_1) \frac{kn}{L_1 L_2} c_{nk} e^{2i\pi \left( \frac{n}{L_1} x_1 + \frac{k}{L_2} x_2 \right)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} -\mathcal{R} \left( \int_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma u \overline{\operatorname{div}_\Gamma (D_2 u)} ds \right) &= - \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^4 \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 d_1 + \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 d_2 \right) \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right) |b_{nk}|^2 \\ &\quad + \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^4 \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right) (d_2 - d_1) \frac{kn}{L_1 L_2} \mathcal{R}(\overline{c_{nk}} b_{nk}) \end{aligned}$$

Or,

$$\forall \eta > 0, \quad \mathcal{R}(\overline{c_{nk}} b_{nk}) \leq |\overline{c_{nk}} b_{nk}| \leq \frac{1}{2\eta} |c_{nk}|^2 + \frac{\eta}{2} |b_{nk}|^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^4 \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + \frac{k}{L_2} \right)^2 (d_2 - d_1) \frac{kn}{L_2 L_1} \mathcal{R}(\overline{c_{nk}} b_{nk}) \right| \\ &\leq \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} \left( (2\pi)^4 \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right) |(d_2 - d_1)| \frac{|kn|}{L_1 L_2} \right) \frac{\eta}{2} |b_{nk}|^2 \\ &\quad + \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} \left( (2\pi)^4 \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right) |(d_2 - d_1)| \frac{|kn|}{L_2 L_1} \right) \frac{1}{2\eta} |c_{nk}|^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& -\mathcal{R} \left( \int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} u \overline{\operatorname{div}_{\Gamma}(Du)} ds \right) \leq \\
& \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^4 \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right) |b_{nk}|^2 \left( \frac{\eta}{2} |d_2 - d_1| \frac{|kn|}{L_2 L_1} - \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 d_1 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 d_2 \right) \right) \\
& + \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^4 \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right) |d_2 - d_1| \frac{|kn|}{L_1 L_2} \frac{1}{2\eta} |c_{nk}|^2. \tag{8.7.1}
\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\eta}{2} |d_2 - d_1| \frac{|kn|}{L_1 L_2} \leq \eta \underbrace{\frac{|d_2 - d_1|}{4 \min(d_1, d_2)}}_C \left( d_1 \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + d_2 \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right),$$

il existe donc  $\eta$  assez petit ( $\eta \leq \frac{4 \min(d_1, d_2)}{|d_2 - d_1|}$ ) tel que

$$\frac{\eta}{2} |d_2 - d_1| \frac{|kn|}{L_2 L_1} - \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 d_1 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 d_2 \right) \leq (\eta C - 1) \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 d_1 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 d_2 \right), \leq 0.$$

Donc, pour  $\eta < \frac{1}{C}$ ,

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^4 \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 \right) |b_{nk}|^2 \left( \frac{\eta}{2} |d_2 - d_1| \frac{|kn|}{L_2 L_1} - \left( \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 d_1 + \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 d_2 \right) \right) \leq 0.$$

A présent nous fixons  $\eta < \frac{1}{C}$ . Il reste à estimer la seconde partie de l'inégalité (8.7.1) en fonction de  $\|\operatorname{curl}_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma)}$ . Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{curl}_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \left\| \operatorname{curl}_{\Gamma} \overline{\operatorname{curl}_{\Gamma} \psi} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \|\Delta \psi\|_{L^2(\Gamma)}^2, \\
&= \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} \left( \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 \right) |c_{nk}|^2.
\end{aligned}$$

puis, comme  $\frac{|kn|}{L_2 L_1} \leq \frac{1}{2} \left( \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 \right)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^4 \left( \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 \right) |d_2 - d_1| \frac{|kn|}{L_1 L_2} \frac{1}{2\eta} |c_{nk}|^2 \\
& \leq (2\pi)^4 \frac{|d_2 - d_1|}{4\eta} \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} \left( \left( \frac{k}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_1} \right)^2 \right) |c_{nk}|^2 \leq C \|\operatorname{curl}_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma)}^2.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$-\mathcal{R} \left( \int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} u \overline{\operatorname{div}_{\Gamma}(Du)} ds \right) \leq C \|\operatorname{curl}_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

□



# Condition approchée dans le cas symétrique en géométrie cylindrique

---

## Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Description du problème . . . . .</b>	<b>186</b>
<b>9.2</b>	<b>Construction du développement asymptotique . . . . .</b>	<b>187</b>
9.2.1	Ansatz du développement asymptotique . . . . .	187
9.2.2	Equations pour les champs proches et les champs lointains . . . . .	188
9.2.3	Expression des deux premiers termes du développement en champ lointain . . . . .	189
<b>9.3</b>	<b>Construction d'une condition de transmission approchée du premier ordre . . . . .</b>	<b>192</b>

---



## 9.1 Description du problème

Nous souhaitons maintenant étudier la diffraction d'une onde électromagnétique par la structure tridimensionnelle complète représentée sur la figure 9.1. Cette structure est constituée d'un anneau fin de diélectrique d'épaisseur  $\delta$ , de rayon moyen  $r_*$  et de hauteur  $L_z$ , à l'intérieur duquel s'enroulent hélicoïdalement deux nappes de fils (dans deux sens différents). Chaque nappe de fils contient  $N$  fils régulièrement espacés suivant la variable angulaire  $\theta$ . La distance entre deux fils consécutifs (donnée par  $2\pi r_*/N$ ) est égale à l'épaisseur  $\delta$  de l'anneau. La structure périodique est placée dans un domaine cylindrique  $\Omega$ ,

$$\Omega := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |z| < \frac{L_z}{2}, \sqrt{x^2 + y^2} < R_e \right\},$$

où  $R_e$ , le rayon extérieur est supérieur au rayon moyen  $r_*$ .

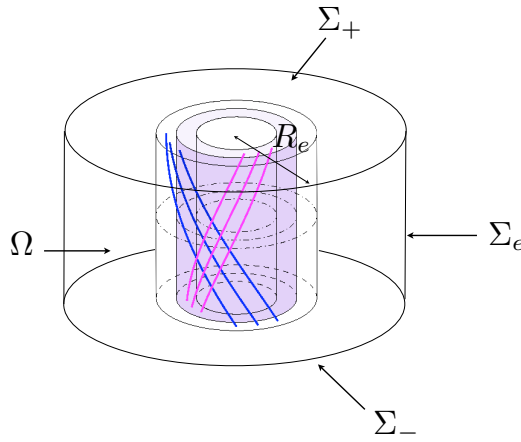


FIGURE 9.1 – Structure périodique et domaine de calcul  $\Omega$

Nous nous intéressons à la résolution des équations de Maxwell dans ce domaine. Le champ électrique  $\mathbf{E}^\delta$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}^\delta$  satisfont alors

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta - i\omega \mu^\delta \mathbf{H}^\delta = 0, & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ -\operatorname{curl} \mathbf{H}^\delta - i\omega \epsilon^\delta \mathbf{E}^\delta = -\frac{1}{i\omega} f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \quad (9.1.1)$$

La complexité géométrique de la structure présentée figure 9.1 est prise en compte au travers de la perméabilité magnétique  $\mu^\delta$  et la permittivité électrique  $\epsilon^\delta$ . Ces fonctions prennent des valeurs différentes, à l'intérieur des fils, dans l'anneau de diélectrique et à l'extérieur de l'anneau.

### Rappel des choix de modélisation

Nous faisons l'hypothèse que la section des fils reste constante sur chaque plan  $Z = C$ . Cela signifie que nous ne prenons pas en compte la torsion des fils. Ainsi, nous pouvons exprimer  $\epsilon^\delta$  et  $\mu^\delta$  à l'aide des fonctions  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$

$$\epsilon^\delta(r, \theta, z) := \begin{cases} \epsilon_0\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta} - \frac{az}{\delta}\right) & \forall r \leq r_*, \\ \epsilon_0\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta} + \frac{az}{\delta}\right) & \forall r > r_*. \end{cases} \quad \mu^\delta(r, \theta, z) := \begin{cases} \mu_0\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta} - \frac{az}{\delta}\right) & \forall r \leq r_*, \\ \mu_0\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta} + \frac{az}{\delta}\right) & \forall r > r_*. \end{cases} \quad (9.1.2)$$

où  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  sont 1 périodiques dans la variable  $s$  et sont constantes quand  $|\nu| \geq \frac{1}{2}$ . Ainsi  $\epsilon^\delta$  et  $\mu^\delta$  sont périodiques dans la variable angulaire  $\theta$  (de période  $\delta$ ) et dans la variable  $z$  (de période  $T_z = \frac{\delta z}{a}$ ).

### Conditions limites

Pour compléter l'équation (9.1.1), nous souhaitons imposer des conditions de périodicité sur les bords inférieurs et supérieurs  $\Sigma_{\pm}$  de  $\Omega$  (cf. figure 9.1)

$$\mathbf{H}^{\delta} \times e_z|_{\Sigma_+} = \mathbf{H}^{\delta} \times e_z|_{\Sigma_-}, \quad \mathbf{E}^{\delta} \times e_z|_{\Sigma_+} = \mathbf{E}^{\delta} \times e_z|_{\Sigma_-}, \quad (9.1.3)$$

Cela nous donne une contrainte sur la hauteur  $L_z$  du cylindre puisque ces conditions ne paraissent appropriées que si  $\epsilon_{\delta}(r, \theta, -\frac{L_z}{2}) = \epsilon_{\delta}(r, \theta, \frac{L_z}{2})$  et  $\mu_{\delta}(r, \theta, -\frac{L_z}{2}) = \mu_{\delta}(r, \theta, \frac{L_z}{2})$  : autrement dit, quelque soit le nombre  $N$  de fils de chaque nappe, il faut en fait que  $L_z$  soit un multiple de  $T_z$  : cela impose à  $L_z$  d'être un multiple de  $2\pi r_*/a$ . Enfin, nous imposons une condition d'impédance sur le bord latéral  $\Sigma_e$  (le cylindre de rayon  $R_e$ ) du domaine :

$$\mathbf{H}^{\delta} \times n - (n \times \mathbf{E}^{\delta}) \times n = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_e^{\pm}. \quad (9.1.4)$$

avec  $n$  la normale sortante.

### Objectifs

Tout comme dans le cas cartésien, notre objectif est de remplacer l'anneau périodique par une condition de transmission approchée posée sur l'interface médiane  $\Gamma$

$$\Gamma := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \sqrt{x^2 + y^2} = r_*, \quad |z| \leq \frac{L_z}{2} \right\}.$$

Pour cela nous cherchons un développement asymptotique de la solution en fonction du paramètre  $\delta$  puis nous en déduisons une condition approchée.

**Remarque 9.1.1.** *Nous insistons sur le caractère formel des résultats de ce chapitre. Nous ne démontrons ni l'existence des termes du développement asymptotique, ni la stabilité de la condition de transmission approchée proposée.*

## 9.2 Construction du développement asymptotique

### 9.2.1 Ansatz du développement asymptotique

Nous souhaitons construire un développement formel de  $\mathbf{E}^{\delta}$  et  $\mathbf{H}^{\delta}$  (solutions du problème (6.1.3-6.1.8-6.1.9) à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Plus précisément, comme dans le cas cartésien (chapitre 7), nous cherchons  $\mathbf{E}^{\delta}$  et  $\mathbf{H}^{\delta}$  sous la forme suivante

$$\mathbf{E}^{\delta} = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathbf{E}_n(r, \theta, z) & \text{loin de la couche périodique,} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathcal{E}_n\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r\theta}{\delta}, \frac{z}{\delta}; \theta, z\right) & \text{au voisinage de l'anneau périodique,} \end{cases} \quad (9.2.1)$$

et,

$$\mathbf{H}^{\delta} = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathbf{H}_n(r, \theta, z) & \text{loin de la couche périodique périodique,} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathcal{H}_n\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta}, \frac{z}{\delta}; \theta, z\right) & \text{au voisinage de l'anneau périodique.} \end{cases} \quad (9.2.2)$$

On pose

$$\mathcal{V} = \frac{r-r_*}{\delta}, \quad S = \frac{r_*\theta}{\delta} \quad \text{et} \quad Z = \frac{z}{\delta}.$$

Les champs proches  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{H}_n$  sont définis de  $\mathbb{R}^3 \times ]0, 2\pi[ \times ]-L_z/2, L_z/2[$  et sont à valeur dans  $\mathbb{C}^3$ . Pour prendre en compte la périodicité du milieu dans les variables  $S$  et  $Z$ , nous leurs imposons d'être 1-périodiques dans la

seconde variable  $S$  et  $\tau$ -périodiques dans la troisième variable  $Z$  si bien qu'on pourra identifier ces fonctions à leur restriction au domaine  $B^*$  :

$$B^* = B \times ]0, 2\pi[ \times ] - \frac{L_z}{2}, \frac{L_x}{2}[, \quad B := \left\{ (\mathcal{V}, S, Z) \in \mathbb{R} \times ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ] - \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \right\} \quad (9.2.3)$$

Nous supposons de plus que les deux développements coïncident dans les zones de raccords  $\Omega_{M, \delta^\pm}$  :

$$\begin{aligned} \Omega_{M, \delta^+} &:= \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } (r, \theta, z) \in ]r_* + \eta^-(\delta), r_* + \eta^+(\delta)[ \times ]0, 2\pi[ \times ] - \frac{L_z}{2}, \frac{L_x}{2}[ \right\}, \\ \Omega_{M, \delta^-} &:= \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } (r, \theta, z) \in ]r_* - \eta^-(\delta), r_* - \eta^+(\delta)[ \times ]0, 2\pi[ \times ] - \frac{L_z}{2}, \frac{L_x}{2}[ \right\}, \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

où  $\eta^\pm$  sont des fonctions telles que  $0 < \eta^- < \eta^+$  et,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta^\pm = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\eta^\pm}{\delta} = \pm \infty.$$

Du fait de la définition de  $\eta$ , les zones de raccord correspondent à un voisinage de  $\Gamma$  ( $r$  proche de  $r_*$ ) pour les champs lointains et à  $\nu$  grand pour les champs proches.

## 9.2.2 Equations pour les champs proches et les champs lointains

### 9.2.2.1 Champs lointains

Les champs lointains sont définis dans  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ ,

$$\begin{aligned} \Omega^+ &:= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad |z| \leq \frac{L_z}{2}, \quad r_* < \sqrt{x^2 + y^2} < R_e \right\}, \\ \Omega^- &:= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad |z| \leq \frac{L_z}{2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} < r_* \right\}, \end{aligned}$$

Il vérifient les équations de Maxwell

$$\begin{cases} -i\omega \mathbf{H}_n + \text{curl } \mathbf{E}_n = 0 & \text{dans } \Omega^\pm, \\ -i\omega \mathbf{E}_n - \text{curl } \mathbf{H}_n = -\frac{\delta_0}{i\omega} F & \text{dans } \Omega^\pm, \end{cases} \quad (9.2.5)$$

la condition limite

$$\mathbf{H}_n \times n - (n \times \mathbf{E}_n) \times n = 0 \text{ sur } \Sigma_e, \quad (9.2.6)$$

et les conditions limites périodiques

$$\mathbf{H}_n \times e_z|_{\Sigma_+} = \mathbf{H}_n \times e_z|_{\Sigma_-}, \quad \mathbf{E}_n \times e_z|_{\Sigma_+} = \mathbf{E}_n \times e_z|_{\Sigma_-}. \quad (9.2.7)$$

Les équations (7.2.1) et (7.2.2) ne permettent pas de définir  $\mathbf{E}_n$  et  $\mathbf{H}_n$  de manière unique. Il manque (par exemple) des informations sur les sauts  $[\mathbf{E}_n \times e_r]_\Gamma$  et  $[\mathbf{H}_n \times e_r]_\Gamma$ . Ces informations proviendront des conditions de raccord.

### 9.2.2.2 Champs proches

En introduisant le développement asymptotique dans les équations de Maxwell et en séparant formellement les différentes puissances de  $\delta$ , on voit que les champs proches sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} r_* \text{Rot } \mathcal{E}_n = -\mathcal{A}_1 \mathcal{E}_{n-1} + i\omega \mu \mathcal{H}_{n-1} - \mathcal{A}_2 \mathcal{E}_{n-2} + i\omega \mu \nu \mathcal{H}_{n-2} & \text{dans } B_*, \\ r_* \text{Div } \epsilon \mathcal{E}_n = -\mathcal{B}_1^\epsilon \mathcal{E}_{n-1} - \mathcal{B}_2^\epsilon \mathcal{E}_{n-2} & \text{dans } B_*, \end{cases} \quad (9.2.8)$$

et

$$\begin{cases} -r_* \text{Rot } \mathcal{H}_n = +\mathcal{A}_1 \mathcal{H}_{n-1} + i\omega \epsilon \mathcal{E}_{n-1} + \mathcal{A}_2 \mathcal{H}_{n-2} + i\omega \mu \nu \mathcal{E}_{n-2}, \\ r_* \text{Div } \mu \mathcal{H}_n = -\mathcal{B}_1^\mu \mathcal{H}_{n-1} - \mathcal{B}_2^\mu \mathcal{H}_{n-2} \end{cases} \quad (9.2.9)$$

avec, pour tout vecteur  $\mathcal{E}(\mathcal{V}, S, Z; \theta, z) = \mathcal{E}^r e_r + \mathcal{E}^\theta e_\theta + \mathcal{E}^z e_z$ , noté  $\begin{vmatrix} \mathcal{E}^r \\ \mathcal{E}^\theta \\ \mathcal{E}^z \end{vmatrix}$

$$\text{Rot } \mathcal{E} = \begin{vmatrix} \partial_S \mathcal{E}^z - \partial_Z \mathcal{E}^\theta \\ \partial_Z \mathcal{E}^r - \partial_V \mathcal{E}^z \\ \partial_V \mathcal{E}^\theta - \partial_S \mathcal{E}^r \end{vmatrix} \quad \text{Div } \mathcal{E} = \partial_V \mathcal{E}^r + \partial_S \mathcal{E}^\theta + \partial_Z \mathcal{E}^z. \quad (9.2.10)$$

et,

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{E} = \begin{vmatrix} \partial_\theta \mathcal{E}^z - r_* \partial_z \mathcal{E}^\theta - \mathcal{V} \partial_Z \mathcal{E}^\theta \\ r_* \partial_z \mathcal{E}^r \\ \mathcal{V} \partial_V \mathcal{E}^\theta + \mathcal{E}^\theta - \partial_\theta \mathcal{E}^r \end{vmatrix} \quad \mathcal{A}_1 \mathcal{E} = \begin{vmatrix} -\mathcal{V} \partial_z \mathcal{E}^\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (9.2.11)$$

$$\mathcal{B}_1^\epsilon \mathcal{E} = \epsilon (\partial_\theta \mathcal{E}^\theta + r_* \partial_z \mathcal{E}^z) + \mathcal{V} \partial_V (\epsilon \mathcal{E}^r) + \epsilon \mathcal{E}^r + \mathcal{V} \partial_Z (\epsilon \mathcal{E}^z) \quad \mathcal{B}_2^\epsilon \mathcal{E} = \mathcal{V} \epsilon \partial_z \mathcal{E}^z \quad (9.2.12)$$

$$\mathcal{B}_1^\mu \mathcal{H} = \mu (\partial_\theta \mathcal{H}^\theta + r_* \partial_z \mathcal{H}^z) + \mathcal{V} \partial_V (\mu \mathcal{E}^r) + \mu \mathcal{H}^r + \mathcal{V} \partial_Z (\mu \mathcal{H}^z) \quad \mathcal{B}_2^\mu \mathcal{H} = \mathcal{V} \mu \partial_z \mathcal{H}^z \quad (9.2.13)$$

**Remarque 9.2.1.** *Il faut remarquer que si  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi[\times] - \frac{L_z}{2}, \frac{L_z}{2}[, L_{loc}^2(B))$ , alors  $\mathcal{A}_1 \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{A}_2 \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}_1^\epsilon \mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}_1^\mu \mathcal{E}$  n'appartiennent pas à  $\mathcal{C}^\infty([0, 2\pi[\times] - \frac{L_z}{2}, \frac{L_z}{2}[, L_{loc}^2(B))$  si bien qu'on ne peut pas montrer l'existence des termes du développement asymptotique de la même façon que dans le cas cartésien (cf. section 7.5).*

### 9.2.2.3 Conditions de raccord

Par une décomposition en série de Fourier, on voit que les champs proches ont un comportement polynomial quand  $\mathcal{V}$  est grand : formellement,

$$\mathcal{E}_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k}^\pm(\theta, z) \mathcal{V}^k + O(e^{-|\mathcal{V}|}), \quad \mathcal{H}_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k}^\pm(\theta, z) \mathcal{V}^k + O(e^{-|\mathcal{V}|}) \quad (9.2.14)$$

Comme de plus, on fait l'hypothèse habituelle que les champs lointains sont réguliers au voisinage de l'interface  $\Gamma$ , on a

$$\mathbf{E}_n^\pm(r, \theta, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(r - r_*)^k}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{E}_n^\pm(r_*, \theta, z)}{\partial r^k} \quad \mathbf{H}_n^\pm(r, \theta, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(r - r_*)^k}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{H}_n^\pm(r_*, \theta, z)}{\partial r^k} \quad (9.2.15)$$

En identifiant formellement les deux séries (voir sections 3.4 et 7.4)

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathbf{E}_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathbf{H}_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathcal{H}_n,$$

on obtient les conditions des raccord :

$$a_{n,k}^\pm(\theta, z) = \frac{\partial^k \mathbf{E}_{n-k}^\pm(r_*, \theta, z)}{\partial r^k}, \quad b_{n,k}^\pm(\theta, z) = \frac{\partial^k \mathbf{H}_{n-k}^\pm(r_*, \theta, z)}{\partial r^k}. \quad (9.2.16)$$

### 9.2.3 Expression des deux premiers termes du développement en champ lointain

Les champ  $\mathcal{E}_0$  est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Rot } \mathcal{E}_0 = 0 \text{ dans } B_*, \\ \text{Div } \epsilon \mathcal{E}_0 = 0 \text{ dans } B_*, \end{cases}$$

si bien que d'après la proposition 7.5.3,

$$\mathcal{E}_0 = a(\theta, z) \nabla p_1^\epsilon + b(\theta, z) \nabla p_2^\epsilon + c(\theta, z) \nabla p_3^\epsilon \quad (9.2.17)$$

où  $p_1^\epsilon$ ,  $p_2^\epsilon$  et  $p_3^\epsilon$  sont définies par :

–  $p_1^\epsilon := \tilde{p}_1^\epsilon + \mathcal{V}$  où  $\tilde{p}_1^\epsilon$  est périodique et satisfait

$$\begin{cases} \tilde{p}_1^\epsilon \in W_1(\mathbb{R}^3)|_{\mathbb{R}}, \\ \operatorname{div}(\epsilon \nabla \tilde{p}_1^\epsilon) = -\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathcal{V}} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

–  $p_2^\epsilon := \tilde{p}_2^\epsilon + S$  où  $\tilde{p}_2^\epsilon$  est périodique et satisfait

$$\begin{cases} \tilde{p}_2^\epsilon \in W_1(\mathbb{R}^3)|_{\mathbb{R}}, \\ \operatorname{div}(\epsilon \nabla \tilde{p}_2^\epsilon) = -\frac{\partial \epsilon}{\partial S} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

–  $p_3^\epsilon := \tilde{p}_3^\epsilon + Z$  où  $\tilde{p}_3^\epsilon$  est périodique et vérifie

$$\begin{cases} \tilde{p}_3^\epsilon \in W_1(\mathbb{R}^3)|_{\mathbb{R}}, \\ \operatorname{div}(\epsilon \nabla \tilde{p}_3^\epsilon) = -\frac{\partial \epsilon}{\partial Z} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

On détermine  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que les conditions de raccord (9.2.16) soient satisfaites. On trouve

$$a = \langle \mathbf{E}_0^r \rangle_\Gamma, \quad b = \langle \mathbf{E}_0^\theta \rangle_\Gamma, \quad c = \langle \mathbf{E}_0^\theta \rangle_\Gamma$$

si bien que

$$\mathcal{E}_0 = \langle \mathbf{E}_0^r \rangle_\Gamma \nabla p_1^\epsilon + \langle \mathbf{E}_0^\theta \rangle_\Gamma \nabla p_2^\epsilon + \langle \mathbf{E}_0^\theta \rangle_\Gamma \nabla p_3^\epsilon. \quad (9.2.18)$$

De même, on peut montrer que

$$\mathcal{H}_0 = \langle \mathbf{H}_0^r \rangle_\Gamma \nabla p_1^\mu + \langle \mathbf{H}_0^\theta \rangle_\Gamma \nabla p_2^\mu + \langle \mathbf{H}_0^\theta \rangle_\Gamma \nabla p_3^\mu. \quad (9.2.19)$$

où

–  $p_1^\mu := \tilde{p}_1^\mu + \mathcal{V}$  où  $\tilde{p}_1^\mu$  est périodique et satisfait

$$\begin{cases} \tilde{p}_1^\mu \in W_1(\mathbb{R}^3)|_{\mathbb{R}}, \\ \operatorname{div}(\mu \nabla \tilde{p}_1^\mu) = -\frac{\partial \mu}{\partial \mathcal{V}} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

–  $p_2^\mu := \tilde{p}_2^\mu + S$  où  $\tilde{p}_2^\mu$  est périodique et satisfait

$$\begin{cases} \tilde{p}_2^\mu \in W_1(\mathbb{R}^3)|_{\mathbb{R}}, \\ \operatorname{div}(\mu \nabla \tilde{p}_2^\mu) = -\frac{\partial \mu}{\partial S} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

–  $p_3^\mu := \tilde{p}_3^\mu + Z$  où  $\tilde{p}_3^\mu$  est périodique et vérifie

$$\begin{cases} \tilde{p}_3^\mu \in W_1(\mathbb{R}^3)|_{\mathbb{R}}, \\ \operatorname{div}(\mu \nabla \tilde{p}_3^\mu) = -\frac{\partial \mu}{\partial Z} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

On en déduit que

$$[e_r \times \mathbf{E}_0]_\Gamma = 0 \quad \text{et que} \quad [e_r \times \mathbf{H}_0]_\Gamma = 0.$$

si bien que les champs lointains  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  satisfont le problème limite (sans couche périodique)

$$\begin{cases} -i\omega \mathbf{H}_0 + \operatorname{curl} \mathbf{E}_0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -i\omega \mathbf{E}_0 - \operatorname{curl} \mathbf{H}_0 = -\frac{\delta_0}{i\omega} F & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{H}_0 \times n - (n \times \mathbf{E}_0) \times n = 0 & \text{sur } \Sigma_e, \\ \mathbf{H}_0 \times e_z|_{\Sigma_+} = \mathbf{H}_0 \times e_z|_{\Sigma_-}, \quad \mathbf{E}_0 \times e_z|_{\Sigma_+} = \mathbf{E}_0 \times e_z|_{\Sigma_-} \end{cases} \quad (9.2.20)$$

On montre ensuite que

$$\begin{cases} -i\omega \mathbf{H}_1 + \operatorname{curl} \mathbf{E}_1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -i\omega \mathbf{E}_1 - \operatorname{curl} \mathbf{H}_1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{H}_1 \times n - (n \times \mathbf{E}_1) \times n = 0 & \text{sur } \Sigma_e. \\ [(\mathbf{H}_1)_T]_\Gamma = h_1, \\ [(\mathbf{E}_1)_T]_\Gamma = g_1, \\ \mathbf{H}_1 \times e_z|_{\Sigma_+} = \mathbf{H}_1 \times e_z|_{\Sigma_-}, \quad \mathbf{E}_1 \times e_z|_{\Sigma_+} = \mathbf{E}_1 \times e_z|_{\Sigma_-} \end{cases} \quad (9.2.21)$$

où

$$\begin{aligned} h_1^\theta &= -\frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_1^\mu - 1 \right) \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_z + \langle \mathbf{E}_0^z \rangle_\Gamma \left( i\omega \left( 1 - \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \partial_Z p_3^\epsilon \right) \right) \\ &\quad - \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \langle \mathbf{H}_0^\theta \rangle_\Gamma \cdot e_z \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_2^\mu \right) - \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \langle \mathbf{H}_0^z \rangle_\Gamma \cdot e_z \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_3^\mu \right) \\ &\quad - \langle \mathbf{E}_0^\theta \rangle_\Gamma \left( i\omega \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \partial_Z p_2^\epsilon \right) + \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \partial_Z p_1^\epsilon \right) \\ h_1^z &= \frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_1^\mu - 1 \right) \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_z + \langle \mathbf{E}_0^\theta \rangle_\Gamma \left( i\omega \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \partial_S p_2^\epsilon \right) \right) \\ &\quad + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \langle \mathbf{H}_0^\theta \rangle_\Gamma \cdot e_\theta \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_2^\mu \right) + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \langle \mathbf{H}_0^z \rangle_\Gamma \cdot e_\theta \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_3^\mu \right) \\ &\quad + i\omega \langle \mathbf{E}_0^z \rangle_\Gamma \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \partial_S p_3^\epsilon \right) - \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \partial_S p_1^\epsilon \right) \\ g_1^\theta &= \frac{1}{i\omega} \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_1^\epsilon \right) \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_z + \langle \mathbf{H}_0^z \rangle_\Gamma \left( i\omega \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \partial_Z p_2^\mu \right) \right) \\ &\quad - \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \langle \mathbf{E}_0^\theta \rangle_\Gamma \cdot e_z \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_2^\epsilon \right) - \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \langle \mathbf{E}_0^z \rangle_\Gamma \cdot e_z \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_3^\epsilon \right) \\ &\quad + \langle \mathbf{H}_0^\theta \rangle_\Gamma \left( i\omega \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \partial_Z p_2^\mu \right) + \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \partial_Z p_1^\mu \right) \\ g_1^z &= -\frac{1}{i\omega} \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_1^\epsilon \right) \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_\theta - \langle \mathbf{H}_0^\theta \rangle_\Gamma \left( i\omega \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \partial_S p_2^\mu \right) \right) \\ &\quad + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \langle \mathbf{E}_0^\theta \rangle_\Gamma \cdot e_\theta \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_2^\epsilon \right) + \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \langle \mathbf{E}_0^z \rangle_\Gamma \cdot e_\theta \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_3^\epsilon \right) \\ &\quad - \langle \mathbf{H}_0^z \rangle_\Gamma \left( i\omega \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \partial_S p_3^\mu \right) - \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \partial_Z p_1^\mu \right) \end{aligned}$$

où  $B_0$  est la cellule de périodicité tronquée :

$$B_0 := \{(\mathcal{V}, S, Z) \in ]-1/2, 1/2[ \times ]-1/2, 1/2[ \times ]-1/\tau, 1/\tau[\}$$

**Remarque 9.2.2.** Dans la configuration qui nous intéresse (voir figure 9.1), le problème présente des symétries et l'expression des fonctions  $h_1$  et  $g_1$  est simplifiée : on a

$$h_1^\theta = -\frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_\nu p_1^\mu - 1 \right) \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_z + \langle \mathbf{E}_0^z \rangle_\Gamma \left( i\omega \left( 1 - \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \partial_Z p_3^\epsilon \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
h_1^z &= \frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_{\mathcal{V}} p_1^\mu - 1 \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_z + \langle \mathbf{E}_0^\theta \rangle_\Gamma \left( i\omega \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \partial_S p_2^\epsilon \right) \right) \\
g_1^\theta &= \frac{1}{i\omega} \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_{\mathcal{V}} p_1^\epsilon \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_z + \langle \mathbf{H}_0^z \rangle_\Gamma \left( i\omega \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \partial_Z p_3^\mu \right) \right) \\
g_1^z &= -\frac{1}{i\omega} \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \partial_{\mathcal{V}} p_1^\epsilon \right) \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{H}_0)_T \rangle_\Gamma \cdot e_\theta - \langle \mathbf{H}_0^\theta \rangle_\Gamma \left( i\omega \left( -1 + \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \partial_S p_2^\mu \right) \right)
\end{aligned}$$

Le problème 9.2.21 une fois réécrit sous la forme d'un problème d'ordre 2 devient :

$$\begin{cases}
\text{curl curl } \mathbf{E}_1 - \omega^2 \mathbf{E}_1 = F \text{ dans } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\
-[e_r \times \mathbf{E}_1]_\Gamma = \left( \frac{\mathcal{A}}{\omega^2} \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\text{curl } \mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma - \mathcal{D}_1 \langle (\text{curl } \mathbf{E}_0)_T \rangle_\Gamma \right), \\
-[e_r \times \text{curl } \mathbf{E}_1]_\Gamma = \left( \mathcal{B} \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}_1)_T \rangle_\Gamma - \omega^2 \mathcal{D}_2 \langle (\mathbf{E}_1)_T \rangle_\Gamma \right), \\
n \times \text{curl } \mathbf{E}_1 = -i\omega (\mathbf{E}_1)_T \text{ sur } \Sigma_e, \\
\mathbf{E}_1 \times e_z|_{\Sigma_-} = \mathbf{E}_1 \times e_z|_{\Sigma_+}, \quad \text{curl } \mathbf{E}_1 \times e_z|_{\Sigma_-} = \text{curl } \mathbf{E}_1 \times e_z|_{\Sigma_+},
\end{cases} \quad (9.2.22)$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial \mathcal{V}} - 1, & \mathcal{B} &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_1^\mu}{\partial \mathcal{V}} - 1, \\
\mathcal{D}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_2^\mu}{\partial S} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_3^\mu}{\partial Z} - 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial S} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial Z} - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### 9.3 Construction d'une condition de transmission approchée du premier ordre

A partir des problème satisfaits par  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{E}_1$  ((9.2.20)-(9.2.22)), on propose le problème approché suivant :

$$\begin{cases}
\text{curl curl } \mathbf{E}^\delta - \omega^2 \mathbf{E}^\delta = F \text{ dans } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\
-[e_r \times \mathbf{E}^\delta]_\Gamma = \delta \left( \frac{\mathcal{A}}{\omega^2} \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\text{curl } \mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\Gamma - \mathcal{D}_1 \langle (\text{curl } \mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\Gamma \right), \\
-[e_r \times \text{curl } \mathbf{E}^\delta]_\Gamma = \delta \left( \mathcal{B} \vec{\text{curl}}_\Gamma \text{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\Gamma - \omega^2 \mathcal{D}_2 \langle (\mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\Gamma \right), \\
n \times \text{curl } \mathbf{E}^\delta = -i\omega (\mathbf{E}^\delta)_T \text{ sur } \Sigma_e, \\
\mathbf{E}^\delta \times e_z|_{\Sigma_-} = \mathbf{E}^\delta \times e_z|_{\Sigma_+}, \quad \text{curl } \mathbf{E}^\delta \times e_z|_{\Sigma_-} = \text{curl } \mathbf{E}_1 \times n|_{\Sigma_+},
\end{cases} \quad (9.3.1)$$

Comme dans les chapitres 4 et 8, pour des questions de stabilité, on propose aussi une autre version du problème approché dans laquelle les conditions de transmission sont exprimées entre deux interfaces différentes : pour toute fonction  $u$ , on pose

$$u_\alpha^\pm := u(r_* \pm \alpha\delta, \theta, z), \quad [u]_\alpha := u_\alpha^+ - u_\alpha^-, \quad \langle u \rangle_\alpha := \frac{1}{2} (u_\alpha^+ + u_\alpha^-).$$

On définit aussi les domaine  $\Omega_{\alpha\delta}^\pm$  :

$$\begin{aligned}
\Omega_{\alpha\delta}^+ &:= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } r_* + \alpha\delta < \sqrt{x^2 + y^2} < R_e \text{ et } |z| \leq \frac{L_z}{2} \right\}, \\
\Omega_{\alpha\delta}^- &:= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } \sqrt{x^2 + y^2} < r_* - \alpha\delta \text{ et } |z| \leq \frac{L_z}{2} \right\}.
\end{aligned} \quad (9.3.2)$$

En utilisant des développements de Taylor, on obtient alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta - \omega^2 \mathbf{E}^\delta = F \text{ dans } \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \\ -[e_r \times \mathbf{E}^\delta]_\alpha = \delta \left( \frac{A^\alpha}{\omega^2} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\alpha - D_1^\alpha \langle (\operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\alpha + 2\alpha e_r \times \mathcal{C} \langle (\mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\alpha \right), \\ -[e_r \times \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta]_\alpha = \delta \left( B^\alpha \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\alpha - \omega^2 D_2^\alpha \langle (\mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\alpha + 2\alpha e_r \times \mathcal{C} \langle (\operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\alpha \right), \\ n \times \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta = -i\omega (\mathbf{E}^\delta)_T \text{ sur } \Sigma_e, \\ \mathbf{E}^\delta \times e_z|_{\Sigma_-} = \mathbf{E}^\delta \times e_z|_{\Sigma_+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_z|_{\Sigma_-} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_1 \times n|_{\Sigma_+}, \end{array} \right. \quad (9.3.3)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{A} + 2\alpha & B &= \mathcal{B} + 2\alpha \\ D_1 &= \mathcal{D}_1 + 2\alpha I & D_2 &= \mathcal{D}_2 + 2\alpha I \\ \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.3.4)$$





# Résultats numériques 3D

---

## Sommaire

---

<b>10.1</b>	<b>Méthode de calcul de la solution exacte . . . . .</b>	<b>197</b>
<b>10.2</b>	<b>Résultats en géométrie cartésienne . . . . .</b>	<b>198</b>
10.2.1	Description du test . . . . .	198
10.2.2	Résultats . . . . .	198
10.2.3	Taux de convergence . . . . .	200
<b>10.3</b>	<b>Résultats en géométrie cylindrique . . . . .</b>	<b>201</b>
10.3.1	Présentation du test . . . . .	201
10.3.2	Résultats . . . . .	202
10.3.3	Taux de convergence . . . . .	205

---

Nous pouvons maintenant montrer quelques résultats numériques en 3 dimensions. Commençons par rappeler les principales étapes de l'algorithme (ici écrit dans le cas cartésien) :

1. On calcule les fonctions profiles  $p_i^\epsilon$  et  $p_i^\mu$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , définies dans la proposition 7.5.9 et on en déduit les constantes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et les matrices  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_3} - 1, & \mathcal{B} &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3} - 1, \\ \mathcal{D}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_1^\mu}{\partial X_1} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_2^\mu}{\partial X_2} - 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_1} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_2} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $B_0$  est la cellule tronquée

$$B_0 := \{(X, Y, Z) \in ]-1/2, 1/2[ \times ]-\tau/2, \tau/2[ \times ]-1/2, 1/2[\}.$$

2. On détermine ensuite  $\alpha$  pour que les constantes  $A$ ,  $B$  et les matrices  $D_1$  et  $D_2$  soient positives :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\epsilon}{\partial X_3} - 1 + 2\alpha, \\ B &= \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \frac{\partial p_3^\mu}{\partial X_3} - 1 + 2\alpha, \\ D_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_1^\mu}{\partial X_1} - 1 + 2\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \mu \frac{\partial p_2^\mu}{\partial X_2} - 1 + 2\alpha \end{pmatrix}, \\ D_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial X_1} - 1 + 2\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} \int_{B_0} \epsilon \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial X_2} - 1 + 2\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{10.0.1}$$

3. On résout le problème approché (8.1.6) en utilisant un maillage peu raffiné :

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta - \omega^2 \mathbf{E}_1^\delta = f \text{ dans } \Omega_{\alpha\delta}, \\ -[e_3 \times \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha = \delta \left( \frac{A}{\omega^2} \operatorname{curl}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma (\langle \langle \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \rangle \rangle_\alpha)_T - D_1 (\langle \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \rangle_\alpha)_T \right), (a) \\ -[e_3 \times \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta]_\alpha = \delta \left( B \operatorname{curl}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle \mathbf{E}_{1T}^\delta \rangle_\alpha - \omega^2 D_2 \langle \mathbf{E}_{1T}^\delta \rangle_\alpha \right), (b) \\ n \times \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta = -i\omega (\mathbf{E}_1^\delta)_T \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \\ \mathbf{E}_1^\delta \times e_{1\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{E}_1^\delta \times e_{1\Sigma_{x_1}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \times e_{1\Sigma_{x_1}^-} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \times e_{1\Sigma_{x_1}^+}, \\ \mathbf{E}_1^\delta \times e_{2\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{E}_1^\delta \times e_{2\Sigma_{x_2}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \times e_{2\Sigma_{x_2}^-} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_1^\delta \times e_{2\Sigma_{x_2}^+}. \end{cases} \tag{8.1.6}$$

où

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\delta}^\pm &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in ]-\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}[ \times ]-\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}[ \times ]\pm\alpha\delta, \pm\frac{L_3}{2}[ \right\}, \\ \Omega_{\alpha\delta} &:= \Omega_{\alpha\delta}^+ \cup \Omega_{\alpha\delta}^-, \end{aligned}$$

et  $\Sigma_{x_1}^\pm$  sont les bords latéraux de  $\Omega_{\alpha\delta}$  de normale sortante  $\pm e_1$ ,  $\Sigma_{x_2}^\pm$  sont les bords latéraux de  $\Omega_{\alpha\delta}$  de normale sortante  $\pm e_2$  et  $\Sigma_{x_3}^\pm$  sont les bords inférieurs et supérieurs du domaine  $\Omega_{\alpha\delta}$  (cf. Figure 8.1).

Ce calcul est fait à l'aide du code éléments finis "montjoie". Nous utilisons des éléments finis d'arêtes d'ordres élevés avec condensation de masse (cf. [CM98]).

## 10.1 Méthode de calcul de la solution exacte

Nous souhaitons pouvoir comparer la solution de notre modèle à une solution "exacte" calculée en utilisant un maillage très raffiné, c'est à dire trouver une solution approchée du problème

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \frac{1}{\mu^\delta} \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta - \omega^2 \epsilon^\delta \mathbf{E}^\delta = f \text{ dans } \Omega, \\ n \times \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta = -i\omega \mathbf{E}_T \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm, \\ \mathbf{E}^\delta \times e_{1\Sigma_{x_1}^-} = \mathbf{E}^\delta \times e_{1\Sigma_{x_1}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_{1\Sigma_{x_1}^-} = \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_{1\Sigma_{x_1}^+}, \\ \mathbf{E}^\delta \times e_{2\Sigma_{x_2}^-} = \mathbf{E}^\delta \times e_{2\Sigma_{x_2}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_{2\Sigma_{x_2}^-} = \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_{2\Sigma_{x_2}^+}. \end{cases} \quad (10.1.1)$$

où ,

$$\Omega := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| < \frac{L_1}{2}, \quad |x_2| < \frac{L_2}{2}, \quad |x_3| < \frac{L_3}{2} \right\},$$

et où  $\mu^\delta$  et  $\epsilon^\delta$  sont des fonctions  $\delta$  périodiques en  $x_1$  et  $\tau\delta$  périodiques en  $x_2$ . Plus précisément, il existe deux fonctions  $\epsilon(X_1, X_2, X_3)$  et  $\mu(X_1, X_2, X_3)$  1-périodiques en  $X_1$  et  $\tau$  périodiques en  $X_2$  telles que

$$\mu^\delta(x_1, x_2, x_3) = \mu\left(\frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{\delta}\right), \quad \epsilon^\delta(x_1, x_2, x_3) = \epsilon\left(\frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{\delta}\right).$$

On appelle  $N = L_1/\delta$  et  $Q = L_2/(\tau\delta)$  le nombre de périodes dans les directions  $x_1$  et  $x_2$  ( $L_1$  et  $L_2$  sont choisies pour que  $N$  et  $Q$  soient des nombres entiers).

Comme nous nous intéressons aux cas où  $\delta \ll \lambda$ , le calcul direct de  $\mathbf{E}^\delta$  par une méthode d'éléments finis est très difficile à mettre en oeuvre, le maillage devant être extrêmement fin afin de tenir compte de la périodicité du milieu : le nombre de degrés de liberté explose. Pour contourner ce problème, on va utiliser une technique classique (voir [AA96a]) qui tient compte de la périodicité du milieu : au lieu de calculer la solution directement sur tout le domaine  $\Omega$ , on va résoudre  $N \times Q$  problèmes posés sur la cellule de périodicité  $C$  donnée par

$$C := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad |x_3| \leq \frac{L_3}{2}, \quad 0 < x_1 < \frac{1}{N}, \quad 0 < x_2 < \frac{\tau}{Q} \right\} \quad (10.1.2)$$

On appelle  $\partial C_{x_1}^\pm$  les bords latéraux de  $C$  de normale sortante  $e_1$  et  $\partial C_{x_2}^\pm$  aussi les bords latéraux de  $C$  de normale sortante  $e_2$ .

Pour tout entier  $0 \leq l < N$  et tout entier  $0 \leq k < Q$ , on définit la fonctions  $\mathbf{E}_{l,k}$  sur la cellule  $C$  par

$$\mathbf{E}_{l,k}(x_1, x_2, x_3) := \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{Q-1} \mathbf{E}^\delta\left(x_1 + \frac{n}{N}, x_2 + \frac{m\tau}{Q}, x_3\right) e^{-2i\pi\left(\frac{ln}{N} + \frac{km}{Q}\right)}. \quad (10.1.3)$$

De même, nous définissons,

$$f_{l,k}(x_1, x_2, x_3) := \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{Q-1} f\left(x_1 + \frac{n}{N}, x_2 + \frac{m\tau}{Q}, x_3\right) e^{-2i\pi\left(\frac{ln}{N} + \frac{km}{Q}\right)}.$$

Les fonctions  $E_{l,k}$  ainsi définies vérifient

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \frac{1}{\mu^\delta} \operatorname{curl} \mathbf{E}_{l,k} - \omega^2 \rho^\delta \mathbf{E}_{l,k} = f_{l,k} \text{ dans } C, \\ n \times \operatorname{curl} \mathbf{E}_{l,k} = -i\omega \mathbf{E}_{l,kT} \text{ sur } \Sigma_{x_3}^\pm \cap \partial C, \end{cases} \quad (10.1.4)$$

ainsi que des conditions de quasi-périodicité sur les bords latéraux de la  $C$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{l,k} \times e_{1|\partial C_{x_1}^-} = e^{2i\pi\frac{l}{N}} \mathbf{E}_{l,k} \times e_{1|\partial C_{x_1}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}_{l,k} \times e_{1|\partial C_{x_1}^-} = e^{2i\pi\frac{l}{N}} \operatorname{curl} \mathbf{E}_{l,k} \times e_{1|\partial C_{x_1}^+}, \\ \mathbf{E}_{l,k} \times e_{2|\partial C_{x_2}^-} = e^{2i\pi\frac{k}{Q}} \mathbf{E}_{l,k} \times e_{2|\partial C_{x_2}^+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}_{l,k} \times e_{2|\partial C_{x_2}^-} = e^{2i\pi\frac{k}{Q}} \operatorname{curl} \mathbf{E}_{l,k} \times e_{2|\partial C_{x_2}^+}. \end{cases} \quad (10.1.5)$$

Au lieu de résoudre directement le problème (10.1.1), on va plutôt résoudre les  $N \times Q$  problèmes découplés (10.1.4-10.1.5). Comme ces problèmes sont découplés on peut les résoudre indépendamment les uns des autres (et donc simultanément sur des machines différentes). De plus, ils sont de bien plus petite taille que le problème initial.

Il est alors possible de reconstruire la solution  $\mathbf{E}^\delta$  à l'aide de la formule de reconstruction suivante : pour tout  $(x_1, x_2, x_3) \in C$ , pour tout couple d'entiers  $(n, m)_{0 \leq n < N, 0 \leq m < Q}$ ,

$$\mathbf{E}^\delta(x_1 + \frac{n}{N}, x_2 + \frac{\tau m}{Q}, x_3) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{Q-1} \mathbf{E}_{l,k}(x_1, x_2, x_3) e^{2i\pi(\frac{ln}{N} + \frac{mk}{Q})}. \quad (10.1.6)$$

## 10.2 Résultats en géométrie cartésienne

### 10.2.1 Description du test

Dans l'expérience qui suit,  $\epsilon$  et  $\mu$  sont choisis constants par morceaux et 1-périodiques en  $X_1$  et  $X_2$  (cf. figure 10.1) :

$$\mu(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \leq 0.35, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \epsilon(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \leq 0.35, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

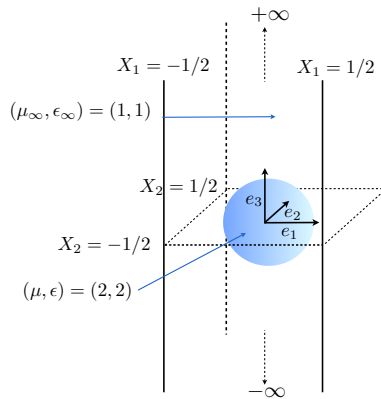


FIGURE 10.1 – Cellule périodique  $B$

Nous choisissons  $L_1 = 4$ ,  $L_2 = 4$  et  $L_3 = 4$  si bien que  $\Omega = ] - 2, 2[^3$ . Nous prenons la fréquence  $f$  égale à 0.8 comme terme source une onde incidente plane :

$$u_{inc}(x_1, x_2, x_3) = e^{-2if\pi x_3} e_1.$$

### 10.2.2 Résultats

Nous comparons d'abord qualitativement les composantes suivant  $e_1$  des solutions "exactes" et approchées pour  $N = 16$  ( $\delta = 0.125$ ) et  $N = 32$  ( $\delta = 0.0625$ ) en champ total et en champ diffracté (figures 10.2, 10.3, 10.4 et 10.5). Les solutions approchées présentées sur ces dessins sont calculées sans utiliser de décalage ( $\alpha = 0$ ). En champ diffracté, comme en champ total, les solutions obtenues sont très proches les unes des autres. Sur les figures représentant les solutions exactes, on voit bien apparaître des oscillations au niveau de la couche périodique.

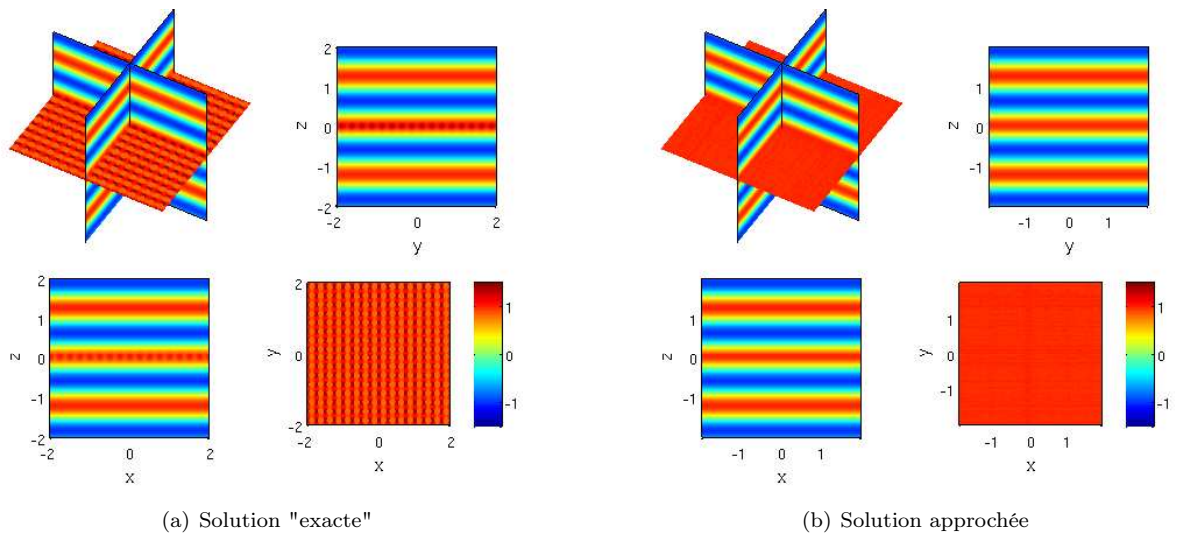


FIGURE 10.2 – Solutions "exacte" et approchée en champ total pour  $N = 16$  (composante suivant  $e_1$ )

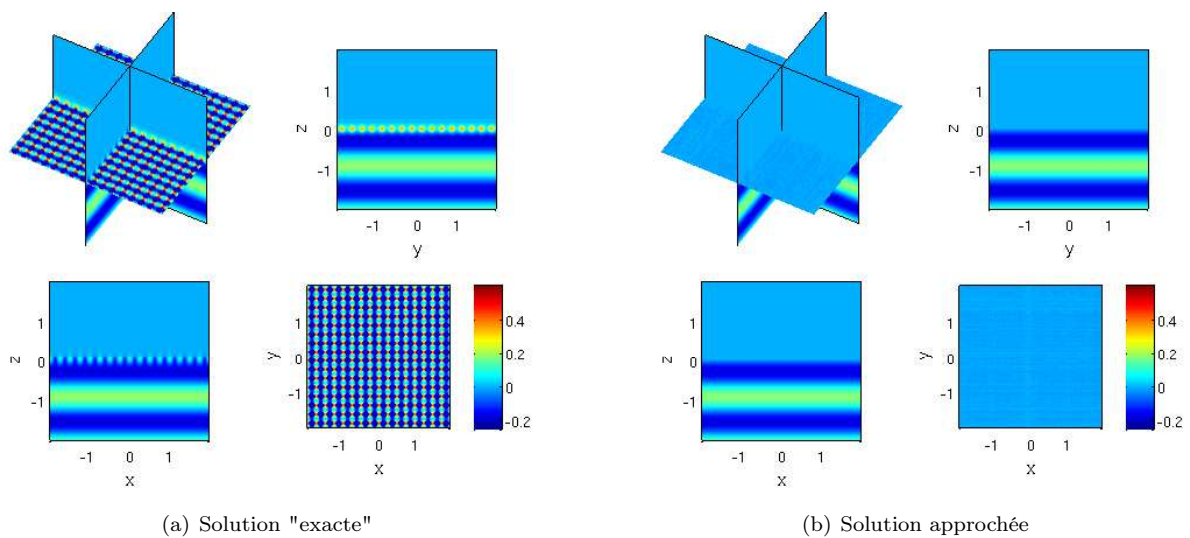


FIGURE 10.3 – Solutions "exacte" et approchée en champ diffracté pour  $N = 16$  (composante suivant  $e_1$ )

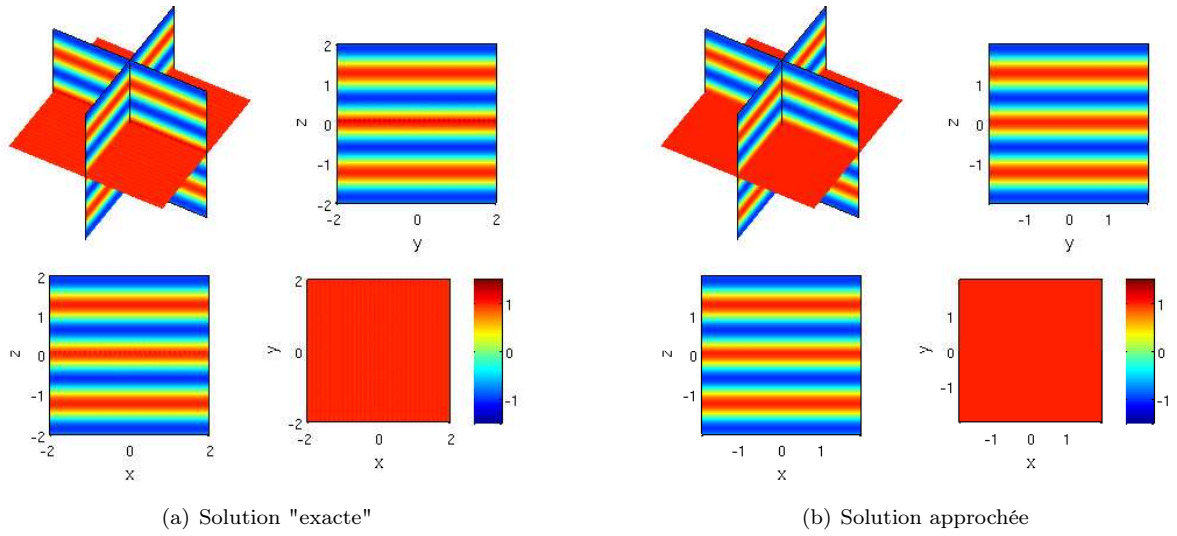


FIGURE 10.4 – Solutions "exacte" et approchée en champ total pour  $N = 32$  (composante suivant  $e_1$ )

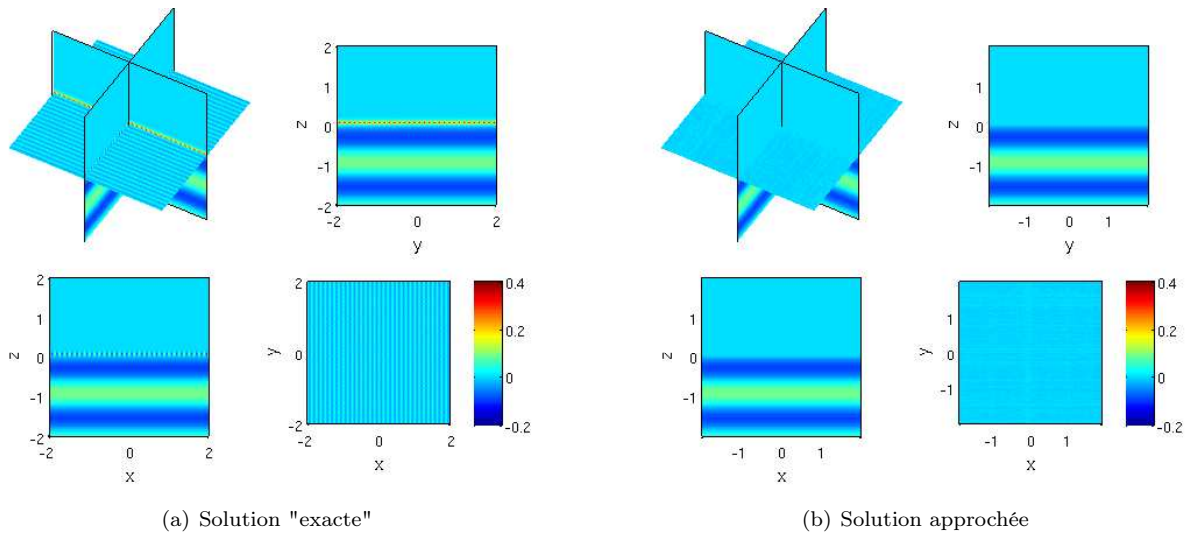


FIGURE 10.5 – Solutions "exacte" et approchée en champ diffracté pour  $N = 32$  (composante suivant  $e_1$ )

### 10.2.3 Taux de convergence

Soit  $\Omega_\gamma := \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega, |x_3| \geq 0.1\}$ . Nous étudions maintenant l'erreur relative  $L^2(\Omega_\gamma)$  entre la solution exacte et la solution approchée pour différentes valeurs de  $\delta$  comprises entre 0.0625 et 0.25 ( $N$  compris entre 16 et 64). Sur la figure 10.6, nous avons tracé les courbes d'erreur pour deux valeurs du paramètre  $\alpha$  (décalage géométrique) :  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 0.5$ . Dans les deux cas, nous obtenons des droites de pente 3, ce qui confirme que notre modèle est au moins un modèle d'ordre 1 comme nous l'avons démontré dans la proposition 8.6.1. En fait, quand la cellule périodique est symétrique, le modèle est peut-être d'ordre 3. Tout comme dans le cas  $2D$ , nous n'observons pas d'instabilité quand  $\alpha = 0$ , alors que les coefficients  $D_1, D_2, A$  et  $B$  ne sont pas tous positifs. Par ailleurs, le modèle est plus précis quand  $\alpha$  est pris égal à 0.

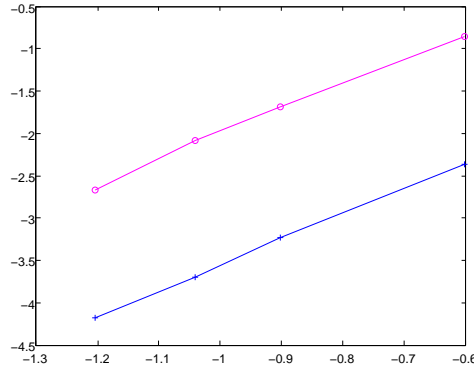


FIGURE 10.6 – Evolution du logarithme décimal de l’erreur relative en norme  $L^2(\Omega_\gamma)$  en fonction du logarithme décimal de  $\delta$  pour  $\alpha = 0.5$  (rose, pente moyenne 2.89) et  $\alpha = 0$  (bleu, pente moyenne 3.05) ( $N$  compris entre 16 et 64).

### 10.3 Résultats en géométrie cylindrique

#### 10.3.1 Présentation du test

Nous nous intéressons maintenant à la diffraction d’une onde plane  $u_{inc} = e^{2i\pi x_2}$  (fréquence  $f = 1$ ) par la structure présentée sur la figure 10.7 constituée d’un cylindre conducteur parfait de rayon  $r_i = 0.25$  entouré d’une couche périodique mince cylindrique de rayon moyen  $r_* = 1$ . Cela signifie que dans le domaine de calcul  $\Omega := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |z| < 1, r_i < \sqrt{x^2 + y^2} < R_e \right\}$ ,  $\mu^\delta$  et  $\epsilon^\delta$  satisfont

$$\mu^\delta(r, \theta, z) = \mu\left(\frac{r - r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta}, \frac{z}{\delta}\right), \quad \epsilon^\delta(r, \theta, z) = \epsilon\left(\frac{r - r_*}{\delta}, \frac{r_*\theta}{\delta}, \frac{z}{\delta}\right), \quad (10.3.1)$$

où

$$\mu(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \leq 0.35, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \epsilon(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \leq 0.35 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

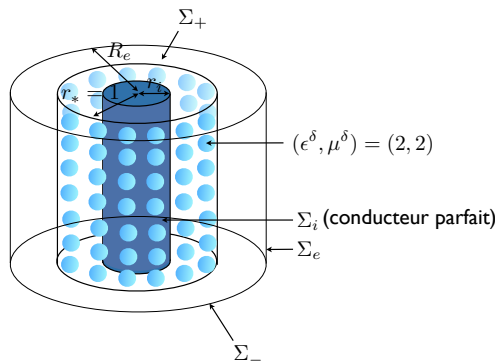


FIGURE 10.7 – Configuration cylindrique étudiée

**Remarque 10.3.1.** Nous pouvons remarquer que si, dans la cellule périodique (échelle microscopique) les hétérogénéités sont des boules (cf. figure 10.1), ce n’est plus le cas pour les hétérogénéités de l’anneau périodique (échelle macroscopique). Celles-ci ont une forme qui évolue quand  $\delta$  change du fait du changement de variables non cartésien  $\mathcal{V} = \frac{r - r_*}{\delta}$ ,  $S = \frac{r_*\theta}{\delta}$ ,  $Z = \frac{z}{\delta}$ .



Nous résolvons alors le problème suivant (très proche du problème (9.3.1))

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta - \omega^2 \mathbf{E}^\delta = F \text{ dans } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ -[e_r \times \mathbf{E}^\delta]_\Gamma = \delta \left( \frac{\mathcal{A}}{\omega^2} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\Gamma - \mathcal{D}_1 \langle (\operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\Gamma \right), \\ -[e_r \times \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta]_\Gamma = \delta \left( \mathcal{B} \vec{\operatorname{curl}}_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma \langle (\mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\Gamma - \omega^2 \mathcal{D}_2 \langle (\mathbf{E}^\delta)_T \rangle_\Gamma \right), \\ n \times \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta = -i\omega (\mathbf{E}^\delta)_T \text{ sur } \Sigma_e, \\ \mathbf{E}^\delta \times e_z|_{\Sigma_-} = \mathbf{E}^\delta \times e_z|_{\Sigma_+}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}^\delta \times e_z|_{\Sigma_-} = \operatorname{curl} \mathbf{E}_1 \times n|_{\Sigma_+}, \\ n \times \mathbf{E}^\delta = 0 \text{ sur } \Sigma_i. \end{cases} \quad (10.3.2)$$

Remarquons que dans ce cas, pour des raisons pratiques, nous écrivons directement les conditions de transmissions sur l'interface médiane  $\Gamma$  (et non entre deux interfaces différentes distantes de  $2\alpha\delta$ ). On espère, que comme dans le cas cartésien, nous n'observerons pas d'instabilité.

### 10.3.2 Résultats

Sur la figure 10.8, nous présentons d'abord la solution du problème limite (problème dans lequel il n'y a pas de couche mince périodique). Nous montrons ensuite sur les figures 10.9, 10.10, 10.11 et 10.12, la composante suivant  $e_2$  des solutions "exactes" et approchées pour  $N = 32$  ( $\delta \approx 0.19$ ) et  $N = 64$  ( $\delta \approx 0.09$ ) en champ total et en champ diffracté. Les solutions sont très proches les unes des autres. Sur la solution exacte, on devine les variations rapides de la solution au niveau de l'anneau périodique.

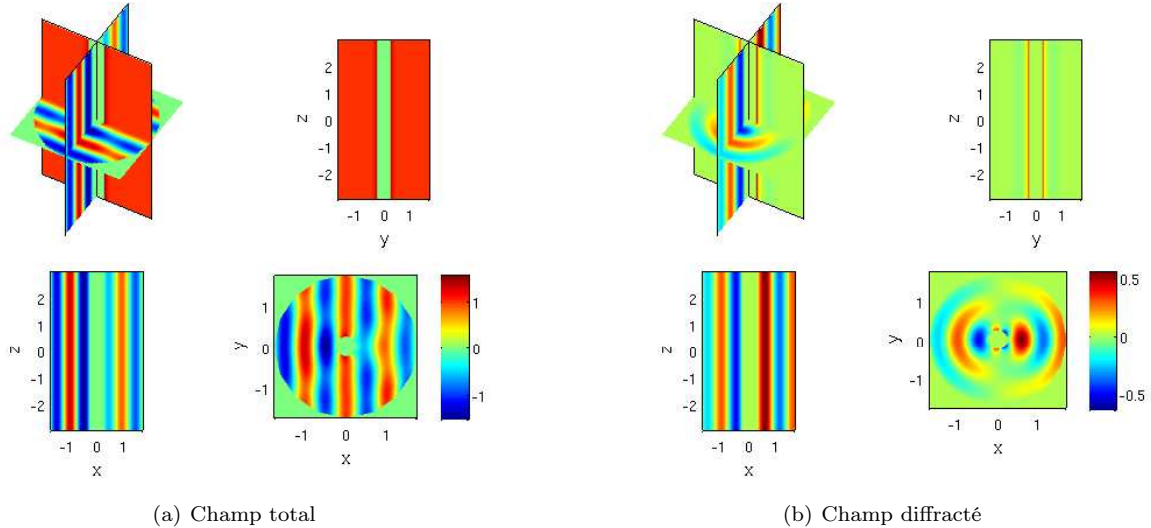


FIGURE 10.8 – Solution du problème limite (composante suivant  $e_2$ )

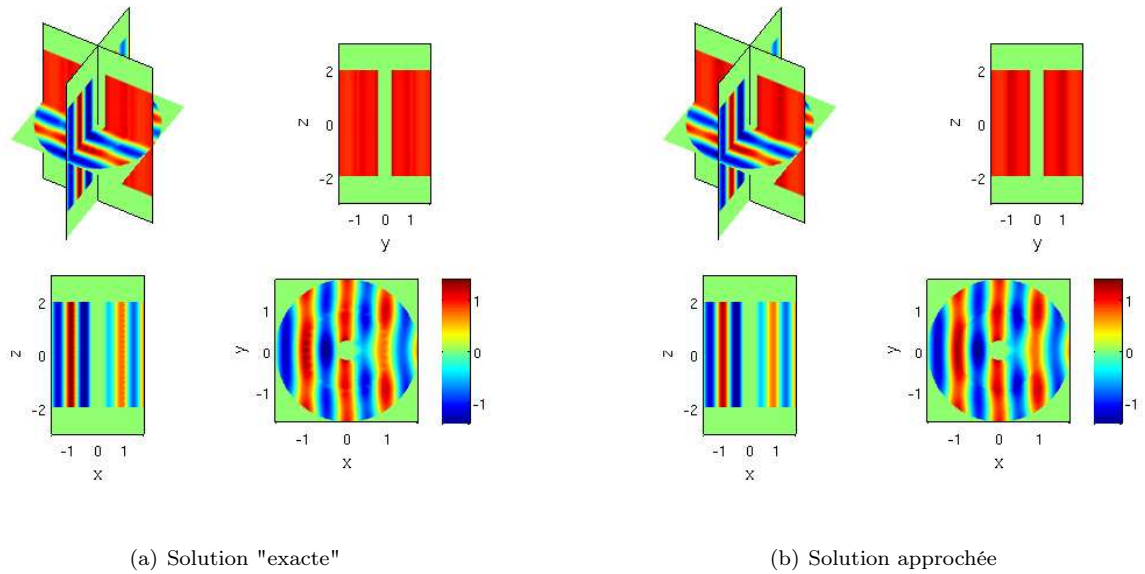


FIGURE 10.9 – Solutions "exacte" et approchée en champ total pour  $N = 32$  (composante suivant  $e_2$ )

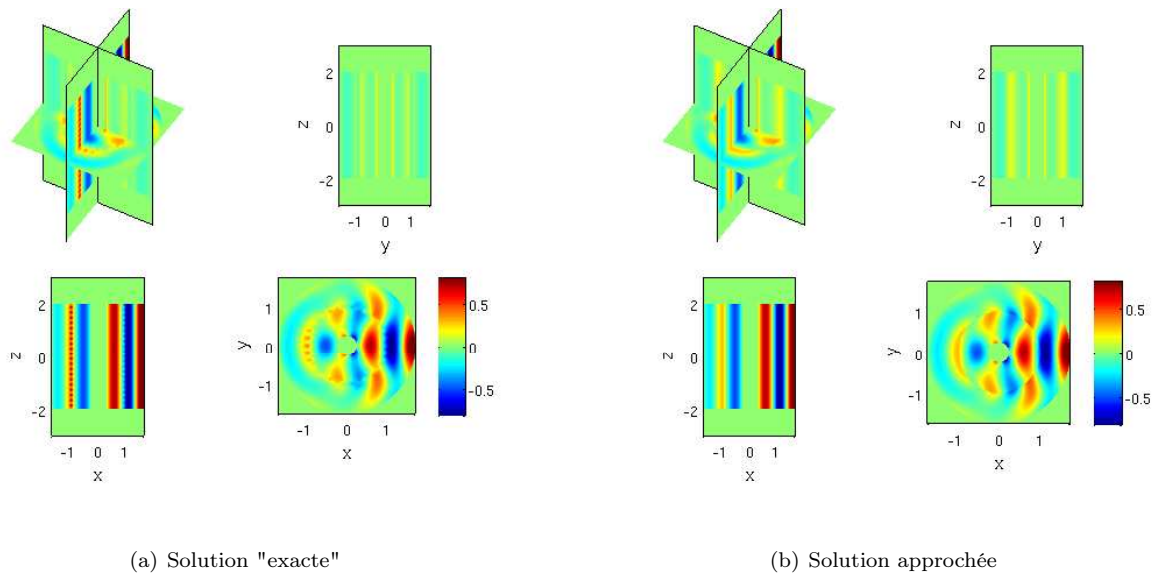


FIGURE 10.10 – Solutions "exacte" et approchée en champ diffracté pour  $N = 32$  (composante suivant  $e_2$ )



### 10.3.3 Taux de convergence

Soit  $\Omega_\gamma$  est le domaine  $\Omega$  privé d'un anneau mince centré en  $r = r_*$  :

$$\Omega_\gamma := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } |z| \leq 2, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_* - 0.2, \quad 1.2 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1.75 \right\}.$$

Nous traçons (figure 10.13) l'évolution de l'erreur relative  $L^2(\Omega_\gamma)$  entre la solution "exacte" et la solution approchée en fonction du paramètre  $\delta$  ( $N$  varie entre 16 et 92). Nous obtenons une droite de pente environ égale à 3 (pente moyenne 3.11), ce qui tend à confirmer le fait que notre modèle est au moins d'ordre 1. Par, ailleurs, nous voyons que notre modèle approché est bien plus précis que le modèle d'ordre 0 qui consiste à prendre la solution limite (droite bleue sur la figure 10.6).

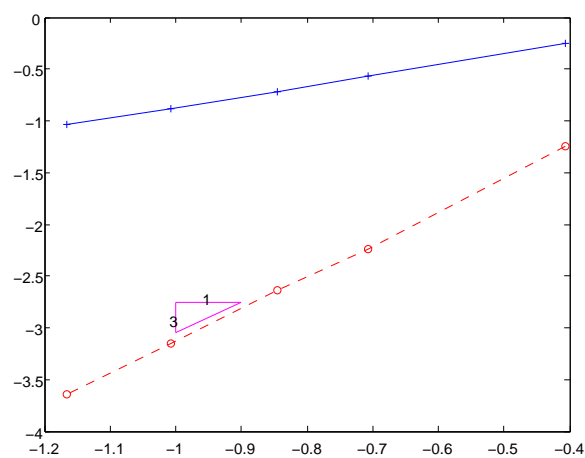


FIGURE 10.13 – Logarithme décimal de l'erreur relative en norme  $L^2(\Omega_T)$  en fonction du logarithme décimal de  $\delta$  pour les modèles d'ordre 0 (bleu) et d'ordre 1 (rouge) ( $\alpha = 0$ ,  $N$  compris entre 16 et 92)



# Conclusion et perspectives

---

A l'issue de cette thèse, il est intéressant de faire le point sur le travail réalisé. En deux comme en trois dimensions, nous avons réussi à construire et à justifier des conditions de transmission approchées d'ordre 1. Les modèles obtenus sont précis, assez simples à implémenter et bien moins coûteux à simuler que le problème exact. D'un point de vue technique, nous avons complété les nombreux travaux déjà existants en construisant d'une part un développement asymptotique semi-explicite à tous les ordres (ce qui permet d'envisager la construction formelle de conditions de transmission équivalentes à n'importe quel ordre) et d'autre part des conditions de transmission approchées uniformément stables par rapport au paramètre petit paramètre  $\delta$ .

Pour terminer, nous nous contentons de lister les points qu'il reste à étudier ainsi que les difficultés que nous n'avons pas réussi à surmonter.

- Il serait tout d'abord important de justifier le développement asymptotique ainsi que la condition de transmission approchée dans le cas cylindrique. Dans le chapitre 9, nous nous sommes pour le moment contentés de faire des calculs formels. La justification du développement asymptotique semble plus délicate que dans le cas cartésien notamment quand les fonctions  $\epsilon$  et  $\mu$  ne sont pas régulières.
- Dans un deuxième temps, on pourrait étendre notre méthode aux cas de géométries courbes quelconques et aux cas de couches minces périodiques séparant deux milieux homogènes différents. Ceci semble plutôt aisé à mettre en oeuvre en deux dimensions, il suffirait d'adapter légèrement la méthode actuelle. En trois dimensions, les calculs deviendraient bien plus techniques et on rencontrerait les mêmes difficultés de justification que ceux évoqués dans le point précédent.
- En trois dimensions, il serait intéressant d'étudier le problème dans lequel les hétérogénéités sont remplacées par des conducteurs parfaits. Nous pourrions alors certainement observer le phénomène de cage de Faraday (phénomène déjà obtenu en deux dimensions dans l'annexe A). On pourrait aussi s'intéresser à des cas intermédiaires dans lesquels par exemple la conductivité à l'intérieur des hétérogénéités est de l'ordre de  $1/\delta^\alpha$ .
- Toujours en trois dimensions, il serait également utile de construire des conditions de transmission équivalentes plus précises. En plus de la technicité des calculs, il est probable qu'on se retrouve face à des problèmes de stabilité, que l'on peut espérer surmonter à l'aide des remèdes usuels (approximations de Padé, décalage géométrique...).
- Enfin, nous aimerions pouvoir construire des conditions de transmission approchées dans le cas d'un cylindre de hauteur finie placé dans le vide. Dans ce cas, on observe un phénomène de couche limite au niveau des extrémités des fils si bien que le développement asymptotique classique n'est plus valide. C'est peut-être le problème le plus intéressant mais c'est certainement aussi le plus délicat. S'il est peut-être envisageable d'écrire un développement asymptotique dans ce cas en utilisant par exemple les méthodes développées par [CCDV06], on ne sait pas, pour le moment, en déduire une condition approchée équivalente.



# Cas des obstacles parfaitement conducteurs

---

## Sommaire

---

<b>A.1 Développement asymptotique . . . . .</b>	<b>211</b>
A.1.1 Cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champs proches . . . . .	211
<b>A.2 Condition de transmission approchée . . . . .</b>	<b>213</b>

---



Il est intéressant d'étudier un problème très proche du problème (2.1.1-2.1.2) mais dans lequel les hétérogénéités diélectriques sont remplacées par des obstacles parfaitement conducteurs. On définit  $B := \{(\nu, s) \in \mathbb{R} \times ]-1/2, 1/2[ \}$  et  $\mathcal{B}$  un ouvert connexe borné dans  $B$  de frontière  $\partial\mathcal{B}$ . Pour simplifier, on considère le cas où  $\mathcal{B}$  est contenue dans  $] -1/2, 1/2[^2$ . On définit alors  $B_0$  par

$$B_0 = B \setminus \mathcal{B}. \quad (\text{A.0.1})$$

Par ailleurs, soient  $N \in \mathbb{N}$  (dans les applications qui nous intéressent  $N$  est grand) et  $r_* > 0$ . On pose  $\delta = \frac{2\pi r_*}{N}$ . On appelle  $B_N$  l'espace

$$B_N^\delta = \bigcup_{j=0}^{N-1} \left( B_0 + \begin{pmatrix} j - 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

et on définit la transformation  $\phi^\delta$  comme

$$\phi^\delta : (\nu, s) \in B_N^\delta \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } \begin{cases} r = r_* + \delta\nu, \\ \theta = \frac{\delta s}{r_*}. \end{cases}$$

Alors, le domaine dans lequel on va poser le problème est  $\Omega^\delta$  défini par

$$\Omega^\delta := \phi^\delta(B_N^\delta) \cap \Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_e \right\}. \quad (\text{A.0.2})$$

Plus simplement, le domaine  $\Omega^\delta$  est le domaine  $\Omega$  privé de  $N$  obstacles  $\partial\mathcal{B}^\delta = \partial\Omega^\delta \setminus \partial\Omega$  disposés de manière périodique selon la direction angulaire  $\theta$  (voir figure A.1(a)) autour du cercle  $\Gamma$  de rayon  $r_*$ . On appelle  $\Sigma = \partial\Omega$ , le cercle de rayon  $r_e$ .

On s'intéresse à la solution  $u^\delta$  de l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet homogène sur  $\partial\mathcal{B}^\delta$  :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\epsilon_\delta^{-1} \nabla u^\delta) + \omega^2 \rho_\delta^{-1} u^\delta = f & \text{dans } \Omega^\delta, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{B}^\delta \\ \frac{\partial u^\delta}{\partial r} + i\omega u^\delta = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (\text{A.0.3})$$

Les fonctions  $\epsilon_\delta$  et  $\mu_\delta$  sont périodiques dans la variable  $\theta$ . Plus précisément, nous supposons qu'il existe deux

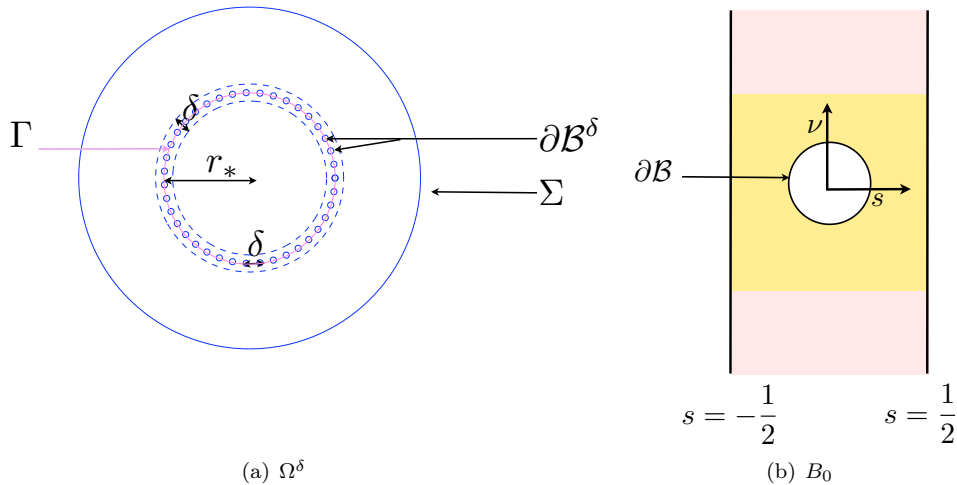


FIGURE A.1 – Domaine de définition  $\Omega^\delta$  et cellule périodique

fonctions  $\epsilon$  et  $\mu$  dépendant uniquement des variables dilatées  $\nu$  et  $s$  satisfaisant

$$\begin{cases} \epsilon(\nu, s+1) = \epsilon(\nu, s), \\ \mu(\nu, s+1) = \mu(\nu, s), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \epsilon(\nu, s) = \epsilon_\infty & \text{si } |\nu| > \frac{1}{2}, \\ \mu(\nu, s) = \mu_\infty & \text{si } |\nu| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{A.0.4})$$

telles que

$$\epsilon_\delta(r, \theta) = \epsilon\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \theta \frac{r_*}{\delta}\right) \quad \text{et} \quad \mu_\delta(r, \theta) = \mu\left(\frac{r-r_*}{\delta}, \theta \frac{r_*}{\delta}\right) \quad \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]. \quad (\text{A.0.5})$$

Les fonctions  $\epsilon$  et  $\mu$  sont bornées inférieurement et supérieurement. Enfin, nous supposons que pour  $\delta$  assez petit, le support de  $f$  et cet anneau périodique sont disjoints.

Tout comme pour le problème (2.1.1-2.1.2), nous voulons construire une condition de transmission approchée équivalente. Nous appliquons la même démarche que dans la première partie de la thèse (Étude d'un cas bidimensionnel). Nous en déduisons ensuite une condition de transmission approchée dans le cas symétrique.

**Remarque A.0.2.** *On pourrait remplacer la condition de Dirichlet homogène sur les obstacles  $\partial\mathcal{B}^\delta$  par une condition de Neumann homogène. En fait ce cas n'est pas très intéressant car il se traite exactement de la même façon que le cas des hétérogénéités diélectriques étudié en première partie. Les conditions approchées proposées dans le chapitre 4 restent valables.*

## A.1 Développement asymptotique

On part de l'Ansatz classique

$$u^\delta(R, \theta) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n u_n^\pm & \text{loin de l'anneau périodique,} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathcal{U}_n^\pm & \text{dans un voisinage de l'anneau périodique.} \end{cases}$$

Les champs lointains  $u_n$  et les champs proches  $\mathcal{U}_n$  satisfont les équations suivantes :

$$\epsilon_\infty^{-1} \Delta u_n^\pm + \omega^2 \mu_\infty u_n^\pm = \delta_n(0)f \quad \text{dans } \Omega^\pm \quad \begin{cases} \nu^{-2} A_0 \mathcal{U}_n = - \sum_{k=1}^4 \nu^{k-2} A_k \mathcal{U}_{n-k} & \text{dans } B_0 \\ \mathcal{U}_n = 0 & \text{sur } \partial B \end{cases}$$

où les opérateurs  $A_k$  sont définis par (3.3.4-3.3.5). On rappelle que  $A_0 = r_*^2 \operatorname{div} \epsilon^{-1} \nabla$ .

De plus, les conditions de raccord ne changent pas, elles sont encore données par (3.4.4) :

$$\ell_D^\pm(\mathcal{U}_n) = u_n^\pm(r_*, \theta), \quad \ell_N^\pm(\mathcal{U}_n) = \partial_r u_n^\pm(r_*, \theta).$$

où  $\ell_D$  et  $\ell_N$  sont définies dans la définition 3.3.1.

### A.1.1 Cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champs proches

Nous cherchons les champs proches dans l'espace

$$\mathbb{V}(B_0) = \left\{ \mathcal{V} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{V} \text{ 1-périodique en } s, V|_{\partial B} = 0, \int_{B_0} \mathcal{V}^2 e^{-\nu} ds d\nu < +\infty \right\}.$$

**Proposition A.1.1.** *Le noyau de  $A_0$  dans  $\mathbb{V}(B_0)$  est donné par*

$$\operatorname{Ker}(A_0) = \{\mathcal{V}_0^0, \mathcal{W}_0^0\}. \quad (\text{A.1.1})$$

où les fonctions  $\mathcal{V}_0^0$  et  $\mathcal{W}_0^0$  satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{V}_0^0) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \mathcal{V}_0^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}, \\ \ell_{\mathbb{N}}^+(\mathcal{V}_0^0) = 1, \\ \ell_{\mathbb{N}}^-(\mathcal{V}_0^0) = 1. \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{W}_0^0) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ \mathcal{W}_0^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}, \\ \ell_{\mathbb{N}}^+(\mathcal{W}_0^0) = 1/2, \\ \ell_{\mathbb{N}}^-(\mathcal{W}_0^0) = -1/2. \end{array} \right.$$

**Remarque A.1.2.** Quand  $\nu$  est grand,  $\mathcal{V}_0^0$  se comporte comme  $\ell_{\mathbb{D}}^{\pm}(V_0^0) + \nu$  alors que  $\mathcal{W}_0^0$  se comporte comme  $\ell_{\mathbb{D}}^{\pm}(V_0^0) \pm \nu$ . Les constantes  $\ell_{\mathbb{D}}^{\pm}(\mathcal{V}_0^0)$  et  $\ell_{\mathbb{D}}^{\pm}(\mathcal{W}_0^0)$  ne dépendent que de la géométrie de la cellule  $B_0$ .

La démonstration de ce problème est basée sur le résultat suivant :

**Proposition A.1.3.**

Soit  $\mathcal{V} := \left\{ \mathcal{V} \in \mathcal{D}'(B_0), \mathcal{V} \text{ 1-s-périodique, } \mathcal{V}|_{\partial\mathcal{B}} = 0, \nabla \mathcal{V} \in L^2(B_0), \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{1+\nu^2}} \in L^2(B_0) \right\}$  espace que l'on munit de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{V}}^2 = \|\nabla v\|_{L^2(B_0)}^2 + \left\| \frac{v}{\sqrt{1+\nu^2}} \right\|_{L^2(B_0)}^2$$

- $\mathcal{V}$  est un espace de Hilbert sur lequel la semi-norme  $\|\nabla v\|_{L^2(B_0)}^2$  est une norme.
- Si  $\sqrt{1+\nu^2}f \in L^2(B_0)$ , le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \mathcal{U} \in \mathcal{V} \\ \int_{B_0} \epsilon^{-1} \nabla \mathcal{U} \cdot \nabla \bar{\mathcal{V}} = \int_{B_0} F \bar{\mathcal{V}} \quad \forall \mathcal{V} \in \mathbb{V} \end{array} \right. \quad (\text{A.1.2})$$

est bien posé . La solution  $\mathcal{U}$  est solution du système d'edp suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\epsilon^{-1} \nabla \mathcal{U}) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(B_0), \\ \mathcal{U} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}. \end{array} \right. \quad (\text{A.1.3})$$

De plus, si  $f$  est à support compact, il existe 2 constantes  $C^+$  et  $C^-$  telles que

$$\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} \mathcal{U} = C^{\pm}.$$

**Remarque A.1.4.** La principale différence avec le cas étudié dans le chapitre 3 (proposition 3.5.5) vient du fait qu'il n'y a pas de condition de compatibilité sur le second membre. L'équation A.1.3 ne donne pas de contraintes sur  $[\ell_{\mathbb{D}}(\mathcal{U})]$  et  $[\ell_{\mathbb{N}}(\mathcal{U})]$ . Dans le cas présent, on impose  $\ell_{\mathbb{N}}^{\pm}(U)$  et l'EDP nous donne  $\ell_{\mathbb{D}}^{\pm}(U)$ .

A l'aide de la proposition précédente on peut montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les champs  $(u_n^{\pm}, \mathcal{U}_n)$  sont bien définis :

**Proposition A.1.5.**

- Supposons que  $\omega^2$  n'est pas une fréquence propre du problème de Dirichlet intérieur (posé dans  $\Omega^-$ ). Alors,

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $u_n^\pm$  et  $\mathcal{U}_n$  existent et sont définies de manière unique par

$$\mathcal{U}_0 = 0, \quad \begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_0 + \omega^2 \mu_\infty u_0 = f & \text{dans } \Omega^\pm, \\ u_0^+ = u_0^- = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_0}{\partial r} + i\omega u_0 = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (\text{A.1.4})$$

$$\mathcal{U}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^j \left( \left\langle \frac{\partial^{k+1} u_{n-j-1}}{\partial r \partial \theta^k} \right\rangle \mathcal{V}_j^k + \left[ \frac{\partial^{k+1} u_{n-j-1}}{\partial r \partial \theta^k} \right] \mathcal{W}_j^k \right) \quad (\text{A.1.5})$$

$$\begin{cases} \epsilon_\infty^{-1} \Delta u_n + \omega^2 \mu_\infty u_n = 0 & \text{dans } \Omega^\pm, \\ (u_n)^\pm = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^j \left( \left\langle \frac{\partial^{k+1} u_{n-j-1}}{\partial r \partial \theta^k} \right\rangle A_{\mathcal{V}_j^\pm} + \left[ \frac{\partial^{k+1} u_{n-j-1}}{\partial r \partial \theta^k} \right] A_{\mathcal{W}_j^\pm} \right) & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_n}{\partial r} + i\omega u_n = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

où les fonctions profiles  $\mathcal{V}_j^k$  et  $\mathcal{W}_j^k$  sont des fonctions qui dépendent uniquement de  $\nu$  et de  $s$ . Elles sont solutions des problèmes récurrents suivants :  $\forall j \geq 1$ , et  $0 \leq k \leq j$ ,

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathcal{V}_j^k) = f_{\mathcal{V}_j^k} & \text{dans } B_0, \\ \mathcal{V}_j^k = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{B}, \\ \ell_N^\pm(\mathcal{V}_j^k) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathcal{W}_j^k) = f_{\mathcal{W}_j^k} & \text{dans } B_0, \\ \mathcal{W}_j^k = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{B}, \\ \ell_N^\pm(\mathcal{W}_j^k) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.7})$$

où les fonctions  $f_{\mathcal{V}_j^k}$  et  $f_{\mathcal{W}_j^k}$  sont données par

$$f_{\mathcal{V}_j^k} = -\frac{1}{r_*^2} \left( \nu^{-1} (A_1^{[0]} \mathcal{V}_{j-1}^k + A_1^{[1]} \mathcal{V}_{j-1}^{k-1}) + (A_2^{[0]} \mathcal{V}_{j-2}^k + A_2^{[1]} \mathcal{V}_{j-2}^{k-2}) + \nu A_3 \mathcal{V}_{j-3}^k + \nu^2 A_4 \mathcal{V}_{j-4}^k \right),$$

$$f_{\mathcal{W}_j^k} = -\frac{1}{r_*^2} \left( \nu^{-1} (A_1^{[0]} \mathcal{W}_{j-1}^k + A_1^{[1]} \mathcal{W}_{j-1}^{k-1}) + (A_2^{[0]} \mathcal{W}_{j-2}^k + A_2^{[1]} \mathcal{W}_{j-2}^{k-2}) + \nu A_3 \mathcal{W}_{j-3}^k + \nu^2 A_4 \mathcal{W}_{j-4}^k \right).$$

– De plus, pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $\gamma > 0$ , il existe une constante  $C$  indépendante de  $\delta$  et une constante  $\delta_0 > 0$  telles que pour tout  $\delta < \delta_0$ ,

$$\|u^\delta - \sum_{l=0}^n \delta^l u_l^-\|_{H^1(\Omega_\gamma^-)} + \|u^\delta - \sum_{l=0}^n \delta^l u_l^+\|_{H^1(\Omega_\gamma^+)} \leq C \delta^{n+1} \quad (\text{A.1.8})$$

**Remarque A.1.6.** Il faut remarquer que la solution  $u_0$  du problème limite n'est pas solution du problème sans anneau périodique (comme c'était le cas dans le chapitre 3, voir en particulier la proposition 3.8.3), mais d'un problème avec conditions de Dirichlet sur  $\Gamma$ . Plus généralement, les problèmes définissant  $u_n^+$  et  $u_n^-$  sont découplés. Cependant,  $u_n^+$  et  $u_n^-$  dépendent de  $u_k^+$  et de  $u_k^-$  pour  $k \leq n-1$ .

## A.2 Condition de transmission approchée

Nous allons maintenant construire une condition approchée dans le cas symétrique, c'est à dire le cas où  $\epsilon$ ,  $\mu$  et  $\partial \mathcal{B}$  sont symétriques en  $\nu$  et en  $s$ . En combinant (A.1.4), (A.1.6) et (A.1.5), on a

$$\begin{cases} [u_0]_\Gamma = \langle u_0 \rangle_\Gamma = 0, \\ [u_1]_\Gamma = A_0 \left\langle r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right\rangle_\Gamma + A_1 \left[ r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right]_\Gamma, \\ \langle u_1 \rangle_\Gamma = B_0 \left[ r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right]_\Gamma + B_1 \left\langle r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right\rangle_\Gamma, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{r_*} [\ell_D(\mathcal{W}_0^0)], & B_0 &= \frac{1}{r_*} \langle \ell_D(\mathcal{W}_0^0) \rangle, \\ A_1 &= \frac{1}{r_*} [\ell_D(\mathcal{W}_0^0)], & B_1 &= \frac{1}{r_*} \langle \ell_D(\mathcal{W}_0^0) \rangle. \end{aligned}$$

On peut montrer, par le principe de réciprocité que  $B_1 = A_1$ . En fait dans le cas symétrique,  $A_1 = B_1 = 0$ .

Supposons maintenant que  $B_0 A_0 \neq 0$ . Nous proposons alors le problème approché d'ordre 1 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \tilde{v}_1^\delta \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-) \text{ telle que} \\ \Delta \tilde{v}_1^\delta + \frac{\omega^2 \rho^\infty}{\mu_\infty} \tilde{v}_1^\delta = f \quad \text{dans } \Omega^+ \cup \Omega^- \\ \langle r \frac{\partial \tilde{v}_1^\delta}{\partial r} \rangle_\Gamma = \frac{1}{\delta A_0} [\tilde{v}_1^\delta]_\Gamma \\ \left[ r \frac{\partial \tilde{v}_1^\delta}{\partial r} \right]_\Gamma = \frac{1}{\delta B_0} \langle \tilde{v}_1^\delta \rangle_\Gamma \\ \frac{\partial \tilde{v}_1^\delta}{\partial r} + i\omega \tilde{v}_1^\delta = 0 \quad \text{on } \Sigma \end{array} \right. \quad (\text{A.2.1})$$

dont la formulation variationnelle associée est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \tilde{v}_1^\delta \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-) \text{ telle que} \\ a^\delta(\tilde{v}_1^\delta, \tilde{v}) = \frac{-1}{\mu_\infty} \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} f \tilde{v} \quad \forall \tilde{v} \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-) \end{array} \right.$$

où :

$$\tilde{a}^\delta(u, \tilde{v}) = \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \left( \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} - \frac{\omega^2 \rho^\infty}{\mu_\infty} \tilde{u} \tilde{v} \right) + i\omega \int_\Sigma \tilde{u} \tilde{v} + \frac{1}{\delta A_0} \int_0^{2\pi} [u][\tilde{v}] + \frac{1}{\delta B_0} \int_0^{2\pi} \langle \tilde{u} \rangle \langle \tilde{v} \rangle$$

Ce problème relève de l'alternative de Fredholm. De plus, pour  $\delta > 0$ , on peut montrer l'unicité si bien que le précédent problème est bien posé. Néanmoins, pour montrer facilement la stabilité du problème (cf.(4.1.10)), il est préférable d'avoir  $A_0$  et  $B_0$  positives ce qui n'est pas toujours le cas.

De nouveau, comme dans le chapitre 4 nous allons écrire des conditions de transmission entre deux interfaces différentes séparées d'une distance  $2\alpha\delta$  ( $\alpha > 0$ ). On pose :

$$u_\alpha^\pm = u^\pm(r \pm \alpha\delta), \quad [u]_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-, \quad \langle u \rangle_\alpha = \frac{1}{2}(u_\alpha^+ + u_\alpha^-).$$

En utilisant des formules de Taylor, on obtient le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } v_1^\delta \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-) \text{ telle que} \\ \Delta v_1^\delta + \frac{\omega^2 \rho^\infty}{\mu_\infty} v_1^\delta = f \quad \text{in } \Omega^+ \cup \Omega^- \\ \langle r \frac{\partial v_1^\delta}{\partial r} \rangle_\alpha = \frac{1}{\delta A_0^\alpha} [v_1^\delta]_\alpha \\ \left[ r \frac{\partial v_1^\delta}{\partial r} \right]_\alpha = \frac{1}{\delta B_0^\beta} \langle v_1^\delta \rangle_\alpha \\ \frac{\partial v_1^\delta}{\partial r} + i\omega v_1^\delta = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (\text{A.2.2})$$

où :

$$A_0^\alpha = A_0 + 2\alpha$$

$$B_0^\alpha = B_0 + 2\alpha$$

et sa formulation variationnelle associée

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } v_1^\delta \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-) \text{ telle que} \\ a^\delta(v_1^\delta, v) = \frac{-1}{\mu_\infty} \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-), \end{array} \right.$$

où

$$a^\delta(u, v) = \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \left( \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \frac{\omega^2 \rho_\infty}{\mu_\infty} u \bar{v} \right) + i\omega \int_\Sigma u \bar{v} + \frac{1}{\delta A_0} \int_0^{2\pi} [u]_\alpha [\bar{v}]_\alpha + \frac{1}{\delta B_0} \int_0^{2\pi} \langle u \rangle_\alpha \langle \bar{v} \rangle_\alpha.$$

Pour montrer la stabilité, on définit aussi une norme

$$\|u\|_{\nu_{\alpha\delta}} = \|u\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+)} + \|u\|_{H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-)} + \frac{1}{\delta A_0^\alpha} \int_0^{2\pi} |[u]_\alpha|^2 + \frac{1}{\delta B_0^\alpha} \int_0^{2\pi} |\langle u \rangle_\alpha|^2$$

On peut alors montrer la proposition suivante :

**Proposition A.2.1.**

– Pour tout  $\delta > 0$ , pour tout  $\omega > 0$ , (A.2.2) est bien posé : De plus

$$\forall \delta_0 > 0, \forall \omega > 0, \exists C_\omega^{\delta_0} > 0, \forall \delta < \delta_0, \forall u \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-),$$

$$\|u\|_{\nu_{-\alpha\delta}} \leq C_\omega^{\delta_0} \sup_{v \in H^1(\Omega_{\alpha\delta}^+) \cap H^1(\Omega_{\alpha\delta}^-), v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|_{\nu_{\alpha\delta}}} \quad (\text{A.2.3})$$

– De plus, pour tout  $\gamma > 0$ , il existe  $\delta_0$  telle que, pour tout  $\delta < \delta_0$

$$\|u^\delta - u_1^\delta\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C\delta^2 \quad (\text{A.2.4})$$



# Développement formel pour le traitement de l'extrémité des fils

---

## Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>218</b>
<b>B.2</b>	<b>Résultats préliminaires</b> . . . . .	<b>219</b>
<b>B.3</b>	<b>Construction des profils pour la résolution des problèmes intérieurs</b> . . . . .	<b>223</b>
	B.3.1 Description du problème . . . . .	224
	B.3.2 Développement asymptotique sur-variationnel . . . . .	225
	B.3.3 Développement sous-variationnel . . . . .	228
	B.3.4 Bilan . . . . .	235
<b>B.4</b>	<b>Développement asymptotique</b> . . . . .	<b>236</b>
	B.4.1 Ansatz du développement asymptotique . . . . .	236
	B.4.2 Conditions de raccord . . . . .	238
	B.4.3 Constructions des premiers termes du développement asymptotique . . . . .	240
<b>B.5</b>	<b>Condition Approchée</b> . . . . .	<b>244</b>
	B.5.1 Validation partielle de la condition approchée d'ordre 1 . . . . .	244
	B.5.2 Ajout d'un terme correcteur . . . . .	245
<b>B.6</b>	<b>Annexe : construction de l'opérateur Neumann To Dirichlet en champ proche</b> . . .	<b>246</b>

---



## B.1 Introduction

Dans les chapitres 6, 7 et 8 de cette thèse, nous avons étudié la diffraction par une structure périodique dans deux directions et nous avons imposé des conditions limites périodiques sur les bords latéraux (cf. équation 6.1.8). Ceci nous permettait de construire un développement asymptotique relativement simple. Il n'y avait pas phénomène de couche limite sur les bords latéraux (cf. [BBM10]).

En fait, dans l'application industrielle visée, la structure est de hauteur finie, et donc il y a un terme de couche limite au niveau de l'extrémité du cylindre périodique (cf. figure 1.1). Nous avons voulu connaître la forme du terme de couche limite qui apparaît aux extrémités du cylindre.

Ce problème étant très compliqué, on étudie d'abord un problème modèle bi-dimensionnel très simplifié. On s'intéresse à la résolution d'un problème de Laplace dans un demi-espace bordé d'une couche mince inhomogène (cf. figure (B.1)). Plus précisément le domaine que l'on considère est composé d'un milieu homogène d'indice  $\mu = 1$  auquel est accolée une fine bande d'épaisseur  $\delta$  ayant un indice  $\mu$  discontinu en  $x = 0$  :

$$\mu := \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0, \\ \mu_+ & \text{si } y < 0 \text{ et } x > 0, \\ \mu_- & \text{si } y < 0 \text{ et } x < 0. \end{cases}$$

L'épaisseur  $\delta$  est petite.

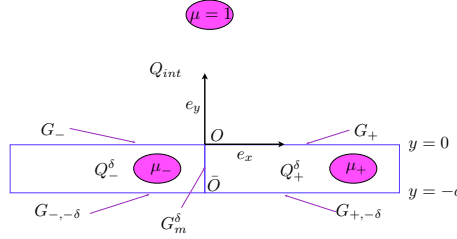


FIGURE B.1 – Configuration étudiée

On définit les domaines suivant :

$$\begin{aligned} Q_{int} &:= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & Q_-^\delta &:= \mathbb{R}^- \times ]-\delta, 0[ & Q_+^\delta &:= \mathbb{R}^+ \times ]-\delta, 0[ \\ G_- &:= \mathbb{R}^- \times \{0\} & G_+ &:= \mathbb{R}^+ \times \{0\} & G &:= G_- \cup G_+ \\ G_{-,-\delta} &:= \mathbb{R}^- \times \{-\delta\} & G_{+,-\delta} &:= \mathbb{R}^+ \times \{-\delta\} & G_{-\delta} &:= G_{-,-\delta} \cup G_{+,-\delta} \\ G_m^\delta &:= \{0\} \times ]-\delta, 0[ & Q^\delta &:= Q_{int} \cup Q_-^\delta \cup Q_+^\delta \cup G \end{aligned}$$

On définit également les coordonnées polaires décalées  $(\bar{r}, \bar{\theta})$ , coordonnées polaires centrées en  $\bar{0}$  de coordonnées  $(0, -\delta)$  (cf. figure B.1). On étudie le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u^\delta \in \mathcal{V}^\delta, \\ \nabla \cdot (\mu \nabla u^\delta) = f \quad f \in (\mathcal{V}^\delta)', \end{cases} \quad (\text{B.1.1})$$

où

$$\mathcal{V}^\delta = \{v \text{ tels que } \nabla v \in L^2(Q^\delta), \quad \frac{v}{1+\bar{r}} \in L^2(Q^\delta), \quad v(x, -\delta) = 0\} \quad (\text{B.1.2})$$

On peut y associer une formulation variationnelle en introduisant la forme bilinéaire  $a^\delta$  :

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{V}^\delta)^2, \quad a^\delta(u, v) = \int_{\Omega_-^\delta} \mu^- \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega_+^\delta} \mu^+ \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad (\text{B.1.3})$$

Le problème (B.1.1) est équivalent au problème variationnel bien posé (thèse G.Vial [Via03]) suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u^\delta \in \mathcal{V}^\delta, \\ \forall v \in \mathcal{V}^\delta, \quad a^\delta(u^\delta, v) = \langle f, v \rangle. \end{cases} \quad (\text{B.1.4})$$

L'objectif de cette partie est de remplacer la couche mince inhomogène par une condition limite approchée posée sur l'interface  $y = 0$ . Pour cela, on construit un développement asymptotique en fonction de  $\delta$  en utilisant la technique des développements raccordés (On est amené à distinguer une zone de champ proche située autour de  $G_m$  et une zone de champ lointain (cf. figure B.2)) :

$$u^\delta = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n u_n(r, \theta) \text{ loin du point } (0, 0), \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n U_n(\frac{r}{\delta}, \theta) \text{ autour du point } (0, 0). \end{cases}$$

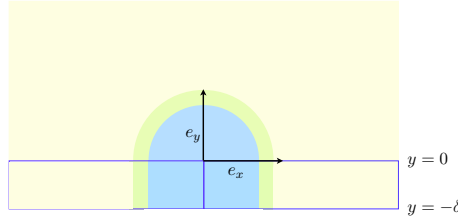


FIGURE B.2 – Zones de champ proche (bleu), de champ lointain (jaune) et de raccord (vert)

Cette annexe est organisée comme suit : dans la section B.2, on rappelle des résultats techniques préliminaires. Puis, dans la section B.3 nous détaillons un cadre fonctionnel pour la résolution des problèmes de champ proche. Dans la partie B.4, nous construisons les premiers termes du développement asymptotique. Enfin dans la section B.5, nous essayons de construire une condition limite approchée. Malheureusement, on verra que la condition approchée obtenue n'est pas pleinement satisfaisante et que l'on est face à des difficultés que l'on n'a pas été capable de surmonter.

**Remarque B.1.1.** *Cette annexe est incomplète, très souvent imprécise et certains résultats ne sont pas démontrés. Pour des justifications précises et une présentation plus didactique de ce travail, nous encourageons le lecteur à lire la thèse de G. Vial [Via03]. Notre travail s'avère en fait être un exercice technique qui consiste à faire l'analyse asymptotique du problème (B.1.1) par la méthode des développements asymptotiques raccordés plutôt que par la méthode des développements multi-échelles utilisée par G. Vial.*

## B.2 Résultats préliminaires

Cette partie est issue de la thèse de A.Makhlouf [Mak08]

**Proposition B.2.1.** *Soient  $\lambda, a, b$  trois nombres complexes et  $f$  une fonction  $C^\infty([0, \pi])$ . Soit le problème (B.2.1)*

$$\begin{cases} \lambda^2 u(\lambda, \theta) + \frac{\partial^2 u(\lambda, \theta)}{\partial \theta^2} = f(\lambda, \theta), \\ u(\lambda, 0) = a(\lambda), \\ u(\lambda, \pi) = b(\lambda), \end{cases} \tag{B.2.1}$$

On définit également l'opérateur  $R_{int}$  :

$$R_{int} : (f, a, b) \rightarrow u$$

Les solutions de (B.2.1) sont les suivantes :

1. Si  $\lambda \notin \mathbb{Z}$  et  $a, b$ , et  $f$  définies en  $\lambda$ , le problème (B.2.1) admet une solution unique donnée par

$$\begin{aligned} u(\lambda, \theta) &= a \cos(\theta\lambda) + \frac{\sin(\theta\lambda)}{\sin(\pi\lambda)} (b - a \cos(\pi\lambda)) - \int_0^\pi \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\pi - s)) f(s) ds \\ &+ \int_0^\theta \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\theta - s)) f(s) ds. \end{aligned} \tag{B.2.2}$$

2. Si  $\lambda = 0$  et  $a, b$ , et  $f$  définies en 0, le problème (B.2.1) admet également une solution unique qui est donnée par

$$u(\lambda, \theta) = a + \frac{\theta}{\pi} \left( b - a - \int_0^\pi f(t)(\pi - t) dt \right) + \int_0^\theta f(t)(\theta - t) dt. \quad (\text{B.2.3})$$

3. Si  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  et  $a, b$ , et  $f$  définies en  $\lambda$ , le problème admet une solution (non unique) si la condition de compatibilité suivante est vérifiée

$$b - a \cos(\pi\lambda) - \int_0^\pi \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\pi - s)) f(s) ds = 0. \quad (\text{B.2.4})$$

Les solutions sont alors données par

$$u(\lambda, \theta) = C \frac{\sin(\theta\lambda)}{\lambda} + a \cos(\lambda\theta) + \int_0^\theta \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\theta - s)) f(s) ds. \quad (\text{B.2.5})$$

De plus, si  $\lambda \mapsto (f(\lambda), a(\lambda), b(\lambda))$  est méromorphe dans un plan  $\Pi \subset \mathbb{C}$ , alors  $\lambda \mapsto u(\lambda, \cdot)$  est méromorphe dans  $\Pi$ , les pôles étant ceux du second membre et  $\mathbb{Z}^*$ .

*Démonstration.*

- **Premier cas :**  $\lambda = 0$ . L'équation différentielle (B.2.1) devient

$$\partial_\theta^2 u(\lambda, \theta) = f(\theta).$$

On peut résoudre explicitement cette équation :

$$\begin{aligned} \partial_\theta u(\lambda, \theta) &= C + \int_0^\theta f(t) dt, \\ u(\lambda, \theta) &= a + C\theta + \int_0^\theta \int_0^s f(t) dt ds, \\ &= a + C\theta + \int_0^\theta f(t)(\theta - t) dt. \end{aligned}$$

Comme  $u_\lambda(\pi) = b$ , on peut déterminer la constante  $C$  et on obtient le résultat (B.2.3) :

$$C = \frac{1}{\pi} \left( b - a - \int_0^\pi (\pi - t) f(t) dt \right).$$

- **Second cas :**  $\lambda \neq 0$ . Etudions le problème intermédiaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda^2 u_c(\theta) + \frac{\partial^2 u_c(\theta)}{\partial \theta^2} = f(\theta), \\ u(0) = a, \\ u'(0) = c. \end{cases} \quad (\text{B.2.6})$$

Introduisons les nouvelles inconnues vectorielles  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$  définies par

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} u_c \\ u'_c \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}' = \begin{bmatrix} u'_c \\ u''_c \end{bmatrix}.$$

Le problème (B.2.6) est équivalent au système du premier ordre suivant

$$\begin{cases} \mathcal{U}' - A\mathcal{U} = F, \\ \mathcal{U}(0) = V, \end{cases}$$

$$\text{Avec } F = \begin{bmatrix} 0 \\ f(\theta) \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

On cherche la solution sous la forme  $\mathcal{U} = e^{\theta A} \mathcal{G}(\theta)$  (variation de la constante). On a alors

$$\mathcal{U}' - A\mathcal{U} = e^{\theta A} \mathcal{G}'(\theta) = F(\theta).$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(\theta) &= e^{-\theta A} F(\theta), \\ \Rightarrow \mathcal{G}(\theta) &= \mathcal{G}(0) + \int_0^\theta e^{-sA} F(s) ds, \\ \Rightarrow \mathcal{U}(\theta) &= V e^{\theta A} + \int_0^\theta e^{(\theta-s)A} F(s) ds, \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} e^{(\theta-s)A} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\theta-s)^n A^n}{n!}, \\ \text{avec } A^{2n} &= \begin{bmatrix} (-1)^n (\lambda^2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n (\lambda^2)^n \end{bmatrix}, \\ \text{et } A^{2n+1} &= \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n (\lambda^2)^n \\ (-1)^{n+1} (\lambda^2)^{n+1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient alors une expression plus simple de  $e^{(\theta-s)A}$  et  $e^{\theta A}$  :

$$\begin{aligned} e^{(\theta-s)A} &= \begin{bmatrix} \cos(\lambda(\theta-s)) & \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\theta-s)) \\ -\lambda \sin(\lambda(\theta-s)) & \cos(\lambda(\theta-s)) \end{bmatrix}, \\ e^{\theta A} &= \begin{bmatrix} \cos(\lambda\theta) & \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda\theta) \\ -\lambda \sin(\lambda\theta) & \cos(\lambda\theta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$u_c(\lambda, \theta) = a \cos(\theta\lambda) + \frac{c}{\lambda} \sin(\lambda\theta) - \int_0^\theta \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\theta-s)) f(s) ds.$$

Pour obtenir une solution de (B.2.1), on doit avoir de plus  $u_c(\pi) = b$  c'est à dire

$$\frac{c}{\lambda} \sin(\pi\lambda) = b - a \cos(\pi\lambda) - \int_0^\pi \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\pi-s)) f(s) ds. \quad (\text{B.2.7})$$

On doit maintenant distinguer deux nouveaux cas :

– Si  $\lambda \notin \mathbb{Z}^*$ , alors  $\sin(\pi\lambda) \neq 0$ . On obtient alors la valeur de la constante  $c$

$$c = \frac{\lambda}{\sin(\pi\lambda)} \left( b - a \cos(\pi\lambda) - \int_0^\pi \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\pi-s)) f(s) ds \right).$$

On retrouve bien le résultat (B.2.2).

– Si  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , alors  $\sin(\pi\lambda) = 0$ . Le problème admet des solutions si la condition de compatibilité suivante est vérifiée :

$$0 = b - a \cos(\pi\lambda) - \int_0^\pi \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\pi-s)) f(s) ds.$$

Le problème (B.2.1) admet alors des solutions s'écrivant sous la forme :

$$\begin{aligned} u(\lambda) &= a \cos(\theta\lambda) + \frac{c}{\lambda} \sin(\lambda\theta) - \int_0^\theta \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\theta-s)) f(s) ds, \\ &c \text{ quelconque.} \end{aligned}$$

On retrouve bien (B.2.4) et (B.2.5).

□

On définit maintenant  $\check{Q}_{int}$  et  $\mathcal{G}^\mu(\check{Q}_{int})$  par

$$\check{Q}_{int} := \mathbb{R}^+ \times ]0, \pi[ \quad (Q_{int} \text{ repéré en coordonnées polaires}) \quad (\text{B.2.8})$$

$$\check{G} := \{\mathbb{R}^+ \times 0\} \cup \{\mathbb{R}^+ \times \{\pi\}\} \quad (G \text{ repérée en coordonnées polaires}) \quad (\text{B.2.9})$$

$$\mathcal{G}^\mu(\check{Q}_{int}) := \left\{ s(r, \theta) = r^\mu \sum_{m=0}^M (p_m(\theta) \ln^m(r)), \quad p_m \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi]) \right\} \quad (\text{B.2.10})$$

$$\mathcal{G}^\mu(\check{G}) := \left\{ s(r) = r^\mu \sum_{m=0}^M (p_m \ln^m(r)), \quad p_m \in \mathbb{C} \right\} \quad (\text{B.2.11})$$

**Proposition B.2.2.**

$$\Delta_D : \begin{cases} \mathcal{G}^\mu(K_\pi) \rightarrow (\mathcal{G}^{\mu-2}(K_\pi) \times \mathcal{G}^\mu(\Gamma_0) \times \mathcal{G}^\mu(\Gamma_\pi)) \\ f \mapsto (\Delta f, f(r, 0), f(r, \pi)) \end{cases}$$

est surjective pour tout nombre complexe  $\mu$  et bijective pour tout nombre complexe  $\mu \notin \mathbb{Z}^*$ .

preuve : on définit  $P, Q, g_0$  et  $g_\pi$  par

$$\begin{aligned} Q(\ln r, \theta) &= \sum_{j=0}^l \frac{q_j(\theta)}{j!} \ln^j r, & P(\ln r, \theta) &= \sum_{j=0}^s \frac{p_j(\theta)}{j!} \ln^j r, \\ g_0(\ln r) &= \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{j!} \ln^j r, & g_\pi(\ln r) &= \sum_{j=0}^n \frac{b_j}{j!} \ln^j r. \end{aligned} \quad (\text{B.2.12})$$

Pour simplifier les calculs, on adopte la convention suivante :

$$\begin{aligned} q_j &= 0 \quad \forall j > l & p_j &= 0 \quad \forall j > s, \\ a_j &= 0 \quad \forall j > m & b_j &= 0 \quad \forall j > n. \end{aligned}$$

On cherche  $u$  sous la forme  $u(r, \theta) = r^\mu P(\ln r, \theta)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u = r^{\mu-2} Q, \\ u(0) = r^\mu g_0, \\ u(\pi) = r^\mu g_\pi. \end{cases}$$

On souhaite donc déterminer les différentes fonctions  $p_i$ . En remplaçant  $U, Q, g_0$  et  $g_\pi$  par leurs développements en puissance de  $\ln r$ , on obtient :

$$\begin{cases} (\mu^2 + \partial_\theta^2) p_j = q_j - 2\mu p_{j+1} - p_{j+2}, \\ p_j(0) = a_j, \\ p_j(\pi) = b_j. \end{cases} \quad (\text{B.2.13})$$

On note  $K = \max(l, m, n)$ . D'après l'équation précédente, il est sur que  $s \geq K$ . Il faut maintenant distinguer trois cas :

1.  $\mu \notin \mathbb{Z}$  : dans ce cas,  $s = K$  convient. En effet, d'après la proposition B.2.1, pour tout  $j \in [0 : s]$ , le problème (B.2.13) admet une solution unique. Donc les coefficients  $p_j$  sont définis de manière unique. On peut les déterminer par une formule de récurrence inverse (on commence par déterminer  $p_s$ ) par :

$$\begin{aligned} p_j &= a_j \cos(\theta\lambda) + \frac{\sin(\theta\lambda)}{\lambda} (b_j - a_j \cos(\pi\lambda)) - \int_0^\pi \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\pi - s)) f_j(s) ds \\ &\quad + \int_0^\theta \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(\theta - s)) f_j(s) ds, \\ f_j &= q_j - 2\mu p_{j+1} - p_{j+2}. \end{aligned}$$

$\Delta_D$  est donc bijectif de  $\mathcal{G}^\mu(\check{Q})$  dans  $(\mathcal{G}^{\mu-2}(\check{Q}) \times \mathcal{G}^\mu(\check{G}_-) \times \mathcal{G}^\mu(\check{G}_+))$ .

2.  $\mu = 0 : s = K$  convient également. En effet, d'après la proposition B.2.1, pour tout  $j \in [0 : s]$ , le problème (B.2.13) admet une solution unique. Les coefficients  $p_j$  sont aussi définis de manière unique et sont déterminés pas récurrence inverse à l'aide de la formule suivante :

$$p_j(\theta) = a_j + \frac{\theta}{\pi}(b_j - a_j - \int_0^\pi (q_j(t) - p_{j+2}(t))(p_i - t) dt + \int_0^\theta (q_j(\theta) - p_{j+2}(\theta))(\theta - t) dt.$$

$\Delta_D$  est donc bijectif de  $S^0(K_\pi)$  dans  $(S^{-2}(K_\pi) \times S^0(\Gamma_0) \times S^0(\Gamma_\pi))$ .

3.  $\mu \in \mathbb{Z}^*$  : on doit séparer deux sous-cas :

(a) La condition de compatibilité suivante est vérifiée :

$$b_K - a_K(-1)^\mu - \int_0^\pi \frac{1}{\mu} \sin(\mu(\pi - s))f(s)ds = 0.$$

Dans ce cas, on prend  $s = K$ . D'après la proposition B.2.1,  $p_K$  existe et

$$p_K = \tilde{p}_K + c_K \sin(\mu\theta),$$

$c_K$  est déterminée par la condition de compatibilité sur le problème  $K - 1$ . Comme

$$-2 \int_0^\pi (\sin(\mu(\pi - s)) \sin(\mu s)) ds = \pi(-1)^{\mu+1},$$

$c_K$  est déterminée par :

$$c_K = \frac{(-1)^{\mu+1}}{\pi} \left( b_{K-1} - a_K(-1)^\mu - \int_0^\pi \frac{1}{\mu} \sin(\mu(\pi - s))(q_{K-1}(s) - 2\mu\tilde{p}_K) ds \right)$$

Par récurrence inverse, on détermine les différentes fonctions  $p_j$  pour tout  $j \in [0, K]$  par :

$$\begin{cases} p_j = \tilde{p}_j + c_j \sin(\mu\theta), \\ c_j = \frac{(-1)^{\mu+1}}{\pi} \left( b_{j-1} - a_{j-1}(-1)^\mu - \int_0^\pi \frac{1}{\mu} \sin(\mu(\pi - s))(q_{j-1} - 2\mu\tilde{p}_j - 2p_{j+1}) ds \right), \\ \tilde{p}_j = a_j \cos(\mu\theta) + \int_0^\theta \frac{1}{\mu} \sin(\mu(\theta - s))(q_j - 2\mu p_{j+1} + p_{j+2})(s) ds, \\ c_0 \text{ indéterminée.} \end{cases}$$

4. Si la condition (B.2.14) n'est pas vérifiée, on pose  $s = K + 1$  (apparition d'un terme logarithmique d'ordre supérieur). On définit alors :

$$p_{K+1} = c_{K+1} \sin(\theta\mu) \quad (\tilde{p}_{K+1} = 0).$$

Puis, par récurrence inverse, pour tout  $j \in [0, K]$ , on a :

$$\begin{cases} p_j = \tilde{p}_j + c_j \sin(\mu\theta), \\ c_j = \frac{(-1)^{\mu+1}}{\pi} \left( b_{j-1} - a_{j-1}(-1)^\mu - \int_0^\pi \frac{1}{\mu} \sin(\mu(\pi - s))(q_{j-1} - 2\mu\tilde{p}_j - 2p_{j+1}) ds \right), \\ \tilde{p}_j = a_j \cos(\mu\theta) + \int_0^\theta \frac{1}{\mu} \sin(\mu(\theta - s))(q_j - 2\mu p_{j+1} + p_{j+2})(s) ds \\ c_0 \text{ indéterminée.} \end{cases}$$

## B.3 Construction des profils pour la résolution des problèmes intérieurs

Cette partie est extraite de la thèse de G.Vial [Via03].

### B.3.1 Description du problème

Nous nous intéressons maintenant aux problèmes de champs proches. Ces problèmes sont posés dans le domaine normalisé  $Q$  constitué du demi-plan supérieur  $y > 0$  bordé d'une bande d'épaisseur 1 :

$$\begin{cases} Q_{int} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} & G := \mathbb{R} \times \{0\} \\ Q_+ := \mathbb{R}^{+*} \times ]-1, 0[ & G_{\pm} := \mathbb{R}^{\pm*} \times \{0\} \\ Q_- := \mathbb{R}^{+*} \times ]-1, 0[ & G_m := \{0\} \times ]-1, 0[ \\ G_{-1} := \mathbb{R} \times \{-1\} & G_{\pm, -1} := \mathbb{R}^{\pm 0} \times \{-1\} \\ Q := Q_{int} \cup Q_+ \cup Q_- \cup G \cup G_m \end{cases}$$

Les problèmes de champ proche ont la forme suivante : chercher  $u \in H_{loc}^1(Q)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } Q_{int} \cup Q_+ \cup Q_-, \\ [\mu \frac{\partial u}{\partial n}] = 0 & \text{sur } G \cup G_m, \\ [u] = 0 & \text{sur } G \cup G_m, \\ u = 0 & \text{sur } G_{-1}, \\ u \text{ se comporte comme } r^n \sin(\theta n) & (n \in \mathbb{N}^*) \text{ dans } Q_{int} \text{ quand } r \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (\text{B.3.1})$$

où

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{dans } Q, \\ \mu_+ & \text{dans } Q_+, \\ \mu_- & \text{dans } Q_-. \end{cases}$$

On note  $\bar{r}$  la distance entre un point  $x$  et le point  $(0, -1)$ . On introduit l'espace variationnel  $\mathcal{V}$  défini par

$$\mathcal{V} = \{v, \nabla v \in L^2(Q), \frac{v}{1 + \bar{r}} \in L^2(Q), v|_{G_{-1}} = 0\} \quad (\text{B.3.2})$$

On définit le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \mu \Delta u = f & \text{dans } Q_{int} \cup Q_+ \cup Q_-, \\ [\mu \frac{\partial u}{\partial n}] = g & \text{sur } G, \\ [\mu \frac{\partial u}{\partial n}] = g_m & \text{sur } G_m, \\ [u] = 0 & \text{sur } G \cup G_m, \\ u = 0 & \text{sur } G_{-1}, \end{cases} \quad (\text{B.3.3})$$

$$f = \begin{cases} f_{int} & \text{dans } Q_{int}, \\ f_{\pm} & \text{dans } Q_{\pm}, \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} g_+ & \text{dans } G_+, \\ g_- & \text{dans } G_-. \end{cases}$$

La forme bilinéaire associée est :

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

avec,

$$a(u, v) = \int_Q \mu \nabla u \nabla v,$$

$$\langle F, v \rangle = - \int_Q f v + \int_G g v + \int_{G_m} g_m v.$$

On a le résultat suivant :

**Théorème B.3.1.** *Si  $F \in \mathcal{V}'$ , il existe une unique solution  $u \in \mathcal{V}$ , vérifiant*

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

*De plus, si  $(1 + \bar{r})f \in L^2Q$ ,  $(1 + \bar{r})^{1/2}g \in L^2Q$ ,  $g_m \in L^2G_m$  alors  $F \in \mathcal{V}'$  et on a le résultat suivant : il existe une constante  $C > 0$ , telle que*

$$\|F\|_{\mathcal{V}'} \leq C(\|(1 + \bar{r})f\|_{0,Q} + \|(1 + \bar{r})^{1/2}g\|_{0,G} + \|g_m\|_{0,G_m}).$$

**Remarques :**

- On va construire une solution de (B.3.1) sous la forme d'une somme de termes non variationnels (résultant du comportement non variationnel imposé quand  $r$  tend vers  $+\infty$ ) et d'un terme variationnel.
- On ne peut pas imposer un comportement variationnel à l'infini, puisque dans ce cas l'unique solution du problème homogène est la solution nulle.
- On ne peut imposer un comportement à l'infini en  $r^\lambda \sin(\lambda\theta)$  avec  $\lambda \notin \mathbb{Z}^*$ .

### B.3.2 Développement asymptotique sur-variationnel

L'objectif de cette partie est de montrer qu'il existe une solution au problème (B.3.1) se décomposant sous la forme d'une somme finie de termes n'appartenant pas à  $\mathcal{V}$  définis par récurrence et d'un terme variationnel.

#### B.3.2.1 Transformation géométrique du domaine $Q$

On introduit le changement de variables  $\mathcal{F}$  suivant :

$$(x, y) \mapsto \mathcal{F}(x, y) = (r, \theta) \tag{B.3.4}$$

avec  $\begin{cases} (r, \theta) \text{ sont les coordonnées polaires si } \theta \in [0, \pi], \\ r = x \quad \theta = y \text{ si } \theta \in [-1, 0], \\ r = -x \quad \theta = \pi - y \text{ si } \theta \in [\pi, \pi + 1]. \end{cases}$

Le changement de variables  $\mathcal{F}$  transforme le domaine  $Q$  en  $\check{Q}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \check{Q}_{int} &:= \mathcal{F}(Q_{int}) = ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[ & \check{Q}_+ &:= \mathcal{F}(Q_+) = ]0, +\infty[ \times ]-1, 0[ & \check{Q}_- &:= ]0, +\infty[ \times ]\pi, \pi + 1[ \\ \check{G}_- &:= \mathcal{F}(G_-) = ]0, +\infty[ \times \{\pi\} & \check{G}_+ &:= ]0, +\infty[ \times \{0\} & \check{G} &:= \check{G}_+ \cup \check{G}_- \\ \check{G}_{-1,+} &:= ]0, +\infty[ \times \{-1\} & \check{G}_{-1,-} &:= ]0, +\infty[ \times \{\pi + 1\} & \check{G}_{-1} &:= \check{G}_{-1,+} \cup \check{G}_{-1,-} \end{aligned}$$

On définit  $\check{u}(r, \theta) = u(x, y)$ . Par ailleurs, on définit  $\chi$ , une fonction de troncature  $\mathcal{C}^\infty$  qui vaut 0 quand  $r < r_0$  et 1 si  $r > r_1$ . On définit alors la transformation  $\mathcal{F}^*$  qui correspond à la transformation réciproque de  $\mathcal{F}$  tronquée par  $\chi$  :

$$(\mathcal{F}^* \check{v})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ \chi(\check{v}(\mathcal{F}(x))) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\check{u}$  la transformation de  $u$  dans le nouveau repère.  $\check{u}$  vérifie :

$$\begin{cases} \Delta \check{u} = 0 & \text{dans } \check{Q}^+ \cup \check{Q}^-, \\ \check{\Delta} \check{u} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{int}, \\ \check{u} = 0 & \text{sur } \check{G}_{-1}, \\ \mu \frac{\partial \check{u}(x, 0^-)}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \check{u}(x, 0^+)}{\partial \theta}, \\ [\check{u}] = 0 & \text{sur } \check{G}. \end{cases} \tag{B.3.5}$$

**Remarques :**

- $\check{\Delta} = \frac{1}{r^2}((r\partial_r)^2 + (\partial_\theta^2))$  est l'opérateur laplacien en coordonnées polaires.
- On n'ajoute pas les équations de transmission en  $r = 0$  et  $\theta = 0$  ou  $\pi$  car on souhaite déterminer le comportement pour  $r$  grand. Les phénomènes se passant près de  $G_m$  seront pris en compte par la résolution variationnelle.
- La présence de l'opérateur laplacien en coordonnées cartésiennes dans  $\check{Q}_\pm$  et le décalage d'une puissance négative de  $r$  dans les conditions des transmissions de la dérivée normale sur  $\check{G}$  vont nous permettre de séparer la résolution de (B.3.5) en une série de problèmes posés dans  $\check{Q}_{int}$  ou  $\check{Q}_\pm$ .



### B.3.2.2 Construction du développement sur-variationnel

On définit

$$\mathcal{G}^\lambda(\check{Q}) = \left\{ \check{u} \text{ telles que } \check{u}_{int} \in \mathcal{G}^\lambda(\check{Q}_{int}), \check{u}_\pm \in \mathcal{G}^\lambda(\check{Q}_\pm), \check{u}_{int}(\pi) = \check{u}_-(\pi), \check{u}_{int}(0) = \check{u}_+(0) \right\}. \quad (\text{B.3.6})$$

On cherche  $\check{u}$  sous la forme d'une série formelle

$$\check{u} = \sum_{k=0}^{+\infty} \check{u}^{n-k} \text{ avec } \check{u}^{n-k} \in \mathcal{G}^{n-k}(\check{Q}) \quad (\check{u}^{n-k} = r^{n-k} P_{n-k}(\theta, \ln r)). \quad (\text{B.3.7})$$

Soit  $\check{v}_\pm \in \mathcal{G}^\lambda(\check{Q}_\pm)$ , alors  $\check{v}_\pm = r^\lambda P(\theta, \ln r)$  où  $P$  est un polynôme en  $\ln r$  dans lequel les coefficients sont des fonctions de  $\theta$ . Alors,

$$\begin{aligned} \partial_r \check{v}_\pm &= r^{\lambda-1} (\lambda P + P'), \\ \partial_r^2 \check{v}_\pm &= r^{\lambda-2} (\lambda^2 P + (2\lambda - 1)P' + P''). \end{aligned}$$

Donc,

$$\partial_r^2 \check{u}_\pm = \sum_{k \in \mathbb{N}} r^{n-k-2} ((n-k)^2 P_{n-k} + (2(n-k) - 1)P'_{n-k} + P''_{n-k}).$$

Donc, en introduisant la série formelle (B.3.7) dans les équations (B.3.5), on a :

$$\begin{aligned} \partial_r^2 \check{u}_\pm + \partial_\theta^2 \check{u}_\pm &= r^{n-k} (((n-k)^2 P_{n-k+2} + (2(n-k) - 1)P'_{n-k+2} + P''_{n-k+2}) + \partial_\theta^2 P_{n-k}) \\ \Rightarrow \partial_\theta^2 \check{u}_\pm^{n-k} &= -\partial_\theta^2 \check{u}_\pm^{n-k+2}. \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on trouve les équations vérifiées par  $\check{u}^{n-k}$  :

$$\begin{cases} \Delta \check{u}_{int}^{n-k} = 0 \text{ dans } \check{Q}_{int}, \\ \check{u}_{int}^{n-k} = \check{u}_\pm^{n-k} \text{ sur } \check{G}, \end{cases} \quad (\text{B.3.8})$$

$$\begin{cases} \partial_\theta^2 \check{u}_\pm^{n-k} = -\partial_r^2 \check{u}_\pm^{n-k+2} \text{ dans } \check{Q}_\pm, \\ \mu_\pm \frac{\partial \check{u}_\pm^{n-k}}{\partial \theta} = \frac{\partial \check{u}_{int}^{n-k+1}}{\partial \theta} \text{ sur } \check{G}_\pm, \\ \check{u}_\pm^{n-k} = 0 \text{ sur } \check{G}_{-1,\pm}. \end{cases} \quad (\text{B.3.9})$$

Si les problèmes (B.3.8) et (B.3.9) aient une solution, on va pouvoir déterminer les fonctions  $\check{u}^{n-k}$  par récurrence. La proposition suivante montre que les problèmes extérieurs admettent une solution unique.

**Proposition B.3.2.** *Si  $\check{f}_\pm \in G^\mu(\check{Q}_\pm)$ ,  $\check{g}_\pm \in G^\mu(\check{G}_\pm)$ , le problème  $\mathcal{P}_\pm$  ci-dessous admet une solution unique appartenant à  $G^\mu(\check{Q}_\pm)$ .*

$$\mathcal{P}_\pm : \begin{cases} \partial_\theta^2 \check{u}_\pm = \check{f}_\pm(\lambda) \text{ dans } \check{Q}_\pm, \\ \partial_\theta \check{u}_\pm = \check{g}_\pm(\lambda) \text{ sur } \check{G}_\pm, \\ \check{u} = 0 \text{ sur } \check{G}_{-1,\pm}. \end{cases}$$

De plus, si  $\lambda \mapsto (\check{g}_\pm(\lambda), \check{f}_\pm(\lambda))$  sont méromorphes dans un plan  $\Pi \subset \mathbb{C}$ , alors  $\check{u}_\pm$  est méromorphe dans  $\Pi$  et les pôles de  $\check{u}_\pm$  sont les pôles de  $\check{f}_\pm$  et  $\check{g}_\pm$

**Théorème B.3.3.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $p$  un entier tel que  $p - n - 1 \geq 0$ , il existe  $u^{n,p} \in \mathcal{V}$ ,  $p+1$  fonctions  $\check{k}^{n,n-j}$ ,  $j = 0 \cdot p$  appartenant à l'espace  $\mathcal{G}^{n-j}(\check{Q})$ , telles que*

$$k^n = u^{n,p} + \sum_{j=0}^p \mathcal{F}^*(\check{k}^{n,n-p}) \quad (\text{B.3.10})$$

soit solution du problème (B.3.1). Les fonctions  $\check{k}^{n,n-q}$  peuvent être choisies indépendamment de l'entier  $p$ . Elles sont construites par récurrence à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{cases} \check{\Delta} \check{k}_{int}^{n,n-q} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{int}, \\ \check{k}_{int}^{n,n-q} = \check{k}_{\pm}^{n,n-q} & \text{sur } \check{G}_{\pm}, \end{cases} \quad (\text{B.3.11})$$

$$\begin{cases} \partial_{\theta}^2 \check{k}_{\pm}^{n,n-q} = -\partial_r^2 \check{k}_{\pm}^{n,n-q+2} & \text{dans } \check{Q}_{\pm}, \\ \mu_{\pm} \frac{\partial \check{k}_{\pm}^{n,n-q}}{\partial \theta} = \frac{\partial \check{k}_{int}^{n,n-k+1}}{\partial \theta} & \text{sur } \check{G}_{\pm}, \\ \check{k}_{\pm}^{n,n-k} = 0 & \text{sur } \check{G}_{-1,\pm}. \end{cases} \quad (\text{B.3.12})$$

**Preuve :** La démonstration se fait par récurrence.

- $q = 0$  : on résout d'abord les problèmes (B.3.12) avec second membre nul dont on sait que l'unique solution est nulle. On résout ensuite le problème intérieur avec donnée de Dirichlet nulle sur le bord en imposant le comportement à l'infini en  $r^n \sin(n\theta)$ . D'après la proposition (B.2.2), l'unique solution appartenant à  $\mathcal{G}^n(\check{Q}_{int})$  et vérifiant ce comportement à l'infini est  $\check{k}_{int}^{n,n} = r^n \sin(n\theta)$ . Le premier terme du développement est :

$$\check{k}^{n,n} = \begin{cases} 0 & \text{dans } \check{Q}_- \cup \check{Q}_+, \\ r^n \sin(n\theta) & \text{dans } \check{Q}_{int}. \end{cases}$$

- $q = 1$  : on résout les problèmes  $(\mathcal{P}_{\pm})$  avec comme second membre  $\check{f}_{\pm} = 0$  et  $\check{g} = \frac{1}{\mu_{\pm}} \partial k_{int}^{n,n}$ . On obtient alors  $\check{k}_{\pm}^{n,n-1} \in \mathcal{G}(\check{Q}_{\pm})$  puis on résout le problème intérieur :

$$\begin{cases} \check{\Delta} \check{k}_{int}^{n,n-1} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{int}, \\ \check{k}_{int}^{n,n-1} = \check{k}_{\pm}^{n,n-1} & \text{sur } \check{G}. \end{cases}$$

D'après la proposition B.2.2, ce problème admet une solution (non unique si  $n-1 \neq 0$ ) dans  $\mathcal{G}^{n-1}(\check{Q}_{int})$ .

**Remarque :** Dans le cas où  $n-1 \neq 0$ ,  $\check{k}_{\pm}^{n,n-1} = r^n P_{\pm}^{n-1}(\theta, \ln r)$  avec  $P_{\pm}^{n-1}$  de degré 0. Par contre si  $\mu_+ \neq \mu_-$ ,  $\check{k}_{int}^{n,n-1} = r^{n-1} P_{int}^{n-1}(\theta, \ln r)$  avec  $\deg(P_{int}^{n-1}) = 1$ . On a l'apparition d'un terme logarithmique.

- $q$  quelconque : on résout les problèmes  $(\mathcal{P}_{\pm})$  avec comme second membre  $\check{f}_{\pm} = -\partial_r^2 \check{k}_{\pm}^{n,n-q+2}$  et  $\check{g} = \frac{1}{\mu_{\pm}} \partial k_{int}^{n,n-q+1}$ . On obtient alors  $\check{k}_{\pm}^{n,n-q} \in \mathcal{G}(\check{Q}_{\pm})$  puis on résout le problème intérieur (qui a une solution non unique pour  $n-q \neq 0$  et unique pour  $n-q = 0$ ) :

$$\begin{cases} \check{\Delta} \check{k}_{int}^{n,n-q} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{int}, \\ \check{k}_{int}^{n,n-q} = \check{k}_{\pm}^{n,n-q} & \text{sur } \check{G}, \end{cases}$$

A priori, on pense qu'à chaque étape, si  $\check{k}_{int}^{n,n-q} = r^{n-q} P_{int}^{n-q}(\theta, \ln r)$  alors  $\deg(P_{int}^{n-q}) = q$ .

- Traitement du terme variationnel : il s'agit de montrer que pour  $p$  suffisamment grand  $u^{n,p} = u - \sum_{i=0}^p \mathcal{F}^*(\check{k}^{n,n-i})$  appartient à l'espace variationnel  $\mathcal{V}$ . Or  $u^{n,p}$  vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_{int}^{n,p} = \varphi_{int}^p & \text{dans } Q_{int}, \\ \mu_{\pm} \Delta u_{\pm}^{n,p} = \varphi_{\pm}^p + \phi_{\pm}^p & \text{dans } Q_{\pm}, \\ [u^{n,p}] = [\mu \frac{\partial u^{n,p}}{\partial n}] = 0 & \text{sur } G_m, \\ [u^{n,p}] = 0 & \text{sur } G, \\ \mu_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}^{n,p}}{\partial n} = \frac{\partial u_{int}^{n,p}}{\partial n} + \Psi_{\pm}^p & \text{sur } G, \\ u_{\pm}^{n,p} = 0 & \text{sur } G_{-1}, \end{cases} \quad (\text{B.3.13})$$

avec  $(\text{B.3.14})$

$$\begin{cases} \varphi_{\pm}^p, \varphi_{int}^p & \text{fonctions à support compact dans la bande, } [r_0, r_1] \\ \phi_{\pm}^p = \mathcal{F}^*(\partial_r^2(\check{k}_{\pm}^{n,n-p} + \check{k}_{\pm}^{n,n-p+1})) & \in \mathcal{F}^*(\mathcal{G}^{n-p-2}(\check{Q}_{\pm}) + \mathcal{G}^{n-p-1}(\check{Q}_{\pm})), \\ \Psi_{\pm}^p = \mathcal{F}^*(\frac{1}{r} \partial_{\theta} \check{k}_{int}^{n,n-p}) & \in \mathcal{F}^*(\mathcal{G}^{n-p-1}(\check{G})). \end{cases} \quad (\text{B.3.15})$$

On souhaite savoir à quelle condition sur  $p$  le second membre du problème (B.3.13) appartient à  $\mathcal{V}'$ . Pour cela, il suffit que  $r\varphi_{int}^p \in L^2(Q_{int}), r(\varphi_{\pm}^p + \phi_{\pm}^p) \in L^2(Q_{\pm})$  et  $r^{1/2}(\psi_{\pm}^p) \in L^2(S_{\pm})$ . Comme  $\varphi_{int}^p$  et  $\varphi_{\pm}^p$  sont à support compact, pour tout  $p$ ,  $r\varphi_{int}^p \in L^2(Q_{int})$  et  $r\varphi_{\pm}^p \in L^2(Q_{\pm})$ . De plus

$$\begin{aligned} r\phi_{\pm}^p \in L^2(Q_{\pm}) &\Leftrightarrow \int_{r_0}^{\infty} r^{(2-2n-2p-2)} dr < +\infty \Leftrightarrow n-p < -\frac{1}{2}, \\ r^{1/2}(\psi_{\pm}^p) \in L^2(S_{\pm}) &\Leftrightarrow 2n-2p < 0. \end{aligned}$$

Donc si on choisit  $p \geq n+1$ , alors  $u^{n,p} \in \mathcal{V}$ .

**Remarque** : si on continue le développement pour  $p > n+1$ , on ne va pas obtenir d'information supplémentaire sur le comportement de  $u$  en  $+\infty$ . En effet, comme nous allons voir, quelle que soit la valeur de  $p$ , le développement de  $u^{n,p}$  contiendra des termes appartenant à  $\mathcal{G}^{-q}(\check{Q})$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

### B.3.3 Développement sous-variationnel

Dans cette partie, on cherche à connaître le développement de  $u^{n,p}$  pour  $r$  grand sous la forme :

$$\chi u^{n,p} = \sum_{i=0}^N u_{-i}^{n,p} + O(r^{-(N+1)}).$$

Pour cela, on introduit un nouveau changement de variable  $t = \ln r$  (qui simplifie l'opérateur laplacien en coordonnées polaires), des espaces à poids et la transformée de Mellin.

#### B.3.3.1 Espaces à poids et transformée de Mellin

**Proposition B.3.4.**

$$\mathcal{F}^*(G^\lambda(Q)) \subset \mathcal{V} \Leftrightarrow \lambda < -1/2.$$

**preuve :**

$$\begin{aligned} \frac{v_{int}}{r} \in L^2(Q_{int}) &\Leftrightarrow \int_C^{+\infty} r^{2\lambda-2} r dr < +\infty \Leftrightarrow \lambda < 0, \\ \nabla v_{int} \in L^2(Q_{int}) &\Leftrightarrow \int_C^{+\infty} r^{2(\lambda-1)} r dr < +\infty \Leftrightarrow \lambda < 0, \\ \frac{v_{\pm}}{r} \in L^2(Q_{\pm}) &\Leftrightarrow \int_C^{+\infty} r^{2\lambda-2} dr < +\infty \Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{2}, \\ \nabla v_{\pm} \in L^2(Q_{\pm}) &\Leftrightarrow \lambda < \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

On introduit le changement de variables  $\mathcal{T}(r, \theta) \mapsto (t = \ln r, \theta)$ . On introduit à nouveau les domaines transformés par ce nouveau changement variables :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{int} &:= \mathbb{R} \times ]0, \pi[ & \tilde{Q}_+ &:= \mathbb{R} \times ]-1, 0[ & \tilde{Q}_- &:= \mathbb{R} \times ]\pi, \pi+1[ \\ \tilde{G}_+ &:= \mathbb{R} \times 0 & \tilde{G}_- &:= \mathbb{R} \times \pi & \tilde{G} &= \tilde{G}_+ \cup \tilde{G}_- \\ \tilde{G}_{-1,+} &:= \mathbb{R} \times -1 & \tilde{G}_{-1,-} &:= \mathbb{R} \times \pi+1 & \tilde{G}_{-1} &= \tilde{G}_{-1,+} \cup \tilde{G}_{-1,-} \end{aligned}$$

Ce changement de variables n'est pas bijectif, mais nous nous intéressons uniquement au comportement quand  $r > r_0$ , c'est à dire  $t > t_0$ . On pose  $\tilde{u}(t, \theta) = \check{u}(r, \theta)$ . Après changement de variable, le problème variationnel (B.3.3) devient :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \partial_\theta^2) \tilde{u}_{int} = e^{2t} \tilde{f}_{int} \text{ dans } \tilde{Q}_{int}, \\ \mu(\partial_\theta^2 \tilde{u}_{\pm} + e^{-2t}((\partial_t^2 - \partial_t) \tilde{u}_{\pm})) = \tilde{f}_{\pm} \text{ dans } \tilde{Q}_{\pm}, \\ e^{-t} \partial_\theta \tilde{u}_{int} - \mu_{\pm} \partial_\theta \tilde{u}_{\pm} = \tilde{g} \text{ sur } \tilde{G}, \\ [\tilde{u}] = 0 \text{ sur } \tilde{G}, \\ \tilde{u}_{\pm} = 0 \text{ sur } \tilde{G}_{-1}. \end{cases} \quad (\text{B.3.16})$$

On introduit maintenant les espaces à poids suivants :

**Définition B.3.5.** • Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ . On définit :

$$\begin{aligned} K_\gamma^m(\tilde{Q}_{int}) &= \left\{ \tilde{v} \in L_{loc}^2(\tilde{Q}_{int}), \forall |\beta| \leq m e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{v} \in L^2(\tilde{Q}_{int}) \right\}, \\ K_\gamma^m(\tilde{Q}_\pm) &= \left\{ \tilde{v} \in L_{loc}^2(\tilde{Q}_\pm), \forall |\beta| \leq m e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{v} \in L^2(\tilde{Q}_\pm) \right\}, \\ K_{\gamma-1/2}^{m-1/2}(\tilde{G}) &= \left\{ \tilde{g} \in L_{loc}^2(\tilde{G}), \exists \tilde{q} \in K_\gamma^m(\tilde{Q}_{int}) \tilde{q}|_{\tilde{G}} = \tilde{g} \right\}. \end{aligned}$$

On munit ces espaces des normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{K_\gamma^m(\tilde{Q}_{int})}^2 &= \sum_{|\beta| \leq m} \left\| e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{v} \right\|_{0, \tilde{Q}_{int}}^2 \approx \left\| e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{v} \right\|_{m, \tilde{Q}_{int}}^2, \\ \|\tilde{v}\|_{K_\gamma^m(\tilde{Q}_\pm)}^2 &= \sum_{|\beta| \leq m} \left\| e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{v} \right\|_{0, \tilde{Q}_\pm}^2 \approx \left\| e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{v} \right\|_{m, \tilde{Q}_\pm}^2, \\ \|\tilde{g}\|_{K_{\gamma-1/2}^{m-1/2}(\tilde{G})}^2 &= \inf \left\{ \|\tilde{q}\|_{K_\gamma^m(\tilde{Q}_{int})}^2, \tilde{q} \in K_\gamma^m(\tilde{Q}_{int}) \text{ et } \tilde{q}|_{\tilde{G}} = \tilde{g} \right\}. \end{aligned}$$

• On note alors :

$$K_\gamma^m(\tilde{Q}) = \left\{ \tilde{v}, \tilde{v}_{int} \in K_\gamma^m(\tilde{Q}_{int}), \tilde{v}_\pm \in K_{\gamma-1/2}^m(\tilde{Q}_\pm) \text{ et } \tilde{v}_{int} = \tilde{v}_\pm \text{ sur } \tilde{G} \right\}.$$

**Remarques diverses :**

– Comparaison de  $L^2(\tilde{Q}_{int})$  et  $K_\gamma^0(\tilde{Q}_{int})$  : Soit  $\tilde{v}$  à support dans  $[c_0, +\infty[$ ,

$$\begin{cases} L^2(\tilde{Q}_{int}) = K_0^0(\tilde{Q}_{int}), \\ K_\gamma^0(\tilde{Q}_{int}) \subset L^2(\tilde{Q}_{int}) & \text{si } \gamma > 0, \\ L^2(\tilde{Q}_{int}) \subset K_\gamma^0(\tilde{Q}_{int}) & \text{si } \gamma < 0, \end{cases}$$

Plus  $\gamma$  est grand, plus le comportement en  $+\infty$  est contraint. Cette remarque est valable pour  $K_\gamma^0(\tilde{Q}_\pm)$ .

– Explication de l'apparition du terme  $e^{-mt}$  dans la définition de  $K_\gamma^m(Q_{int})$  : pour comprendre ce terme il faut revenir aux coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \nabla v &= \frac{1}{r} ((r \partial_r \tilde{v} \vec{e}_r + \partial_\theta \tilde{v} \vec{e}_\theta) \\ &= e^{-t} (\partial_t \tilde{v} \vec{e}_r + \partial_\theta \tilde{v} \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

En dérivant une fois, le terme  $e^{-t}$  apparaît. Si on dérivait  $m$  fois, le terme  $e^{-mt}$  apparaîtrait.

– Explication peu convaincante de l'apparition du terme  $e^{-mt}$  dans la définition de  $K_\gamma^m(Q_\pm)$  :

$$\begin{aligned} \nabla v &= \frac{1}{r} (r \partial_r \tilde{v}) + \partial_\theta \tilde{v}, \\ &= e^{-t} \partial_t \tilde{v} + \partial_\theta \tilde{v}. \end{aligned}$$

On peut penser qu'il faut juste mettre un poids en  $e^{-m_t t}$  où  $m_t$  et le nombre le dérivées en  $t$ . On peut aussi se dire que dans la suite du travail les dérivées en  $\theta$  ne sont pas créatrices de singularités en  $t$ . Donc si  $e^{\gamma t} \tilde{v} \in L^2(\tilde{Q}_\pm)$ , alors  $e^{\gamma t} \partial_\theta \tilde{v} \in L^2(\tilde{Q}_\pm)$  et donc  $e^{(\gamma-m)t} \partial_\theta \tilde{v} \in L^2(\tilde{Q}_\pm)$ .

– Explications de normes. On se demande pourquoi  $\sum_{|\beta| \leq m} \left\| e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{v} \right\|_{0, \tilde{Q}_{int}}^2 \approx \left\| e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{v} \right\|_{m, \tilde{Q}_{int}}^2$ . Il faut

remarquer que si  $\left\| e^{(\gamma-j)t} \partial^j \tilde{v} \right\|_{0, \tilde{Q}_{int}} < +\infty$  pour tout  $j \leq m$ , alors  $\left\| \partial^j (e^{(\gamma-j)t} \tilde{v}) \right\|_{0, \tilde{Q}_{int}} < +\infty$  pour tout  $j \leq m$ .

– Explication de l'espace  $K_\gamma^m(\tilde{Q})$ . On souhaite comprendre pourquoi on prend  $\tilde{v}_\pm \in K_{\gamma-1/2}^m(\tilde{Q}_\pm)$  alors que  $\tilde{v}_{int} \in K_\gamma^m(\tilde{Q}_{int})$ . Ici encore il faut revenir aux coordonnées  $(r, \theta)$  pour comprendre ce choix. Soit  $v$ , un

fonction nulle dans un voisinage de  $G_m$ .

$$\begin{aligned}\int_{Q_{int}} v^2 dx &= \int_0^\pi \int_{C_0}^{+\infty} \check{v}^2 r dr d\theta = \int_0^\pi \int_{\ln(C_0)}^{+\infty} \tilde{v}^2 e^{2t} dt d\theta, \\ \int_{Q_+} v^2 dx &= \int_{-1}^0 \int_{C_0}^{+\infty} \check{v}^2 dr d\theta = \int_{-1}^0 \int_{\ln(C_0)}^{+\infty} \tilde{v}^2 e^t dt d\theta.\end{aligned}$$

Pour  $\tilde{Q}_{int}$  la pondération est de  $e^{2t}$  alors que cette pondération est uniquement de  $e^t$  dans  $\tilde{Q}_\pm$ . C'est pourquoi on prend l'espace  $K_{\gamma-1/2}^m(\tilde{Q}_\pm)$  et non  $K_\gamma^m(\tilde{Q}_\pm)$ .

On définit  $\tilde{u}^0 = \tilde{\chi} \tilde{u}^{n,p}$ , solution variationnelle tronquée au coin exprimée dans les coordonnées  $(t, \theta)$ .  $\tilde{u}^0$  vérifie :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \partial_\theta^2) \tilde{u}_{int}^0 = \tilde{f}_{int} & \text{dans } \tilde{Q}_{int}, \\ (e^{-2t}(\partial_t^2 - \partial_t) \tilde{u}_\pm^0 + \partial_\theta^2 \tilde{u}_\pm^0) = \tilde{f}_\pm & \text{dans } \tilde{Q}_\pm, \\ e^{-t} \partial_\theta \tilde{u}_{int}^0 = \mu_\pm \partial_\theta \tilde{u}_\pm^0 + \tilde{g}_\pm & \text{sur } \tilde{G}_\pm, \\ [\tilde{u}] = 0 & \text{sur } \tilde{G}, \\ \tilde{u}_\pm = 0 & \text{sur } \tilde{G}_{-1,\pm}. \end{cases}$$

avec,

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{int} & \text{ fonction à support dans } [\ln r_0, \ln r_1], \\ \tilde{f}_\pm &= \tilde{\varphi}_\pm + \tilde{\phi}_\pm \mathbb{I}_{[t > \ln r_1]}, \\ \tilde{\varphi}_\pm & \text{ fonction à support dans } [\ln r_0, \ln r_1], \\ \tilde{\phi}_\pm &= e^{t(n-p-1)} \sum_0^{N_1} (p_\pm^{j,1}(\theta) t^j) + e^{t(n-p-2)} \sum_0^{N_1} (p_\pm^{j,2}(\theta) t^j) \\ \tilde{g}_\pm &= \tilde{\varphi}_{\pm,g} + \tilde{\phi}_{\pm,g} \mathbb{I}_{[t > \ln r_1]}, \\ \tilde{\varphi}_\pm & \text{ fonction à support dans } [\ln r_0, \ln r_1], \\ \tilde{\phi}_\pm &= e^{t(n-p-1)} \sum_0^{N_3} (c_\pm^j(\theta) t^j)\end{aligned}$$

Dans la suite on utilisera les trois résultats suivants (thèse Vial page 65-66)

**Lemme B.3.6.** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $\gamma, \gamma', \lambda \in \mathbb{R}$ ,

- $K_\gamma^m(\tilde{Q}) \subset K_{\gamma-m}^0(\tilde{Q})$ ,
- $\gamma > \gamma' \Rightarrow K_{\gamma-m}^0(\tilde{Q}) \subset K_{\gamma'-m}^0(\tilde{Q})$ ,
- Soit  $\check{v} \in \mathcal{G}^\lambda(\check{Q})$  non nul. On définit  $\tilde{v}(t, \theta) = \check{v}(r, \theta)$ . Alors,

$$\chi \tilde{v} \in K_\gamma^m(\tilde{Q}) \Leftrightarrow \lambda < -\gamma.$$

On a également, dans ce cas,  $\chi \tilde{v} \in K_{\gamma+m}^m(\tilde{Q})$

- Si  $v \in \mathcal{V}$  et  $\chi \tilde{v}(t, \theta) = \chi v(x, y)$ , alors  $\chi \tilde{v} \in K_0^0(\tilde{Q})$ .

On a aussi un résultat de régularité (celui-ci est complètement admis) :

**Théorème B.3.7.** Soit  $\tilde{u}$  solution de (B.3.16). Si les données vérifient, pour  $m \geq 2$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,

$$\tilde{f}_{int} \in K_\gamma^{m-2}(\tilde{Q} \cap [t > -1]) \quad \tilde{f}_\pm \in K_{\gamma+m-2}^{m-2}(\tilde{Q} \cap [t > -1]) \quad \tilde{g} \in K_{\gamma-1/2}^{m-3/2}(\tilde{G} \cap [t > -1]),$$

et si de plus

$$\tilde{u} \in K_{\gamma-m}^0(\tilde{Q} \cap [t > -1]),$$

alors

$$\tilde{u} \in K_\gamma^m(\tilde{Q} \cap [t > 0]).$$

On déduit des deux résultats précédents un résultat de régularité sur  $\tilde{u}^0$  :

**Proposition B.3.8.** *Pour tout  $m \geq 0$ ,  $\tilde{u}^0 \in K_m^m(\tilde{Q})$ .*

On définit maintenant la transformée de Mellin d'une fonction  $\tilde{v}$ .

**Définition B.3.9.** Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et

$$\tilde{v} = \begin{cases} \tilde{v}_\pm & \text{dans } \tilde{Q}_\pm, \\ \tilde{v}_{int} & \text{dans } \tilde{Q}_{int}, \end{cases}$$

$$\hat{v} = \begin{cases} \hat{v}_\pm & \text{si } \theta \in [-1, 0] \cup ]\pi, \pi + 1[, \\ \hat{u}_{int} & \text{si } \theta \in [0, \pi], \end{cases}$$

$$\hat{u}_{int} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t} \tilde{u}_{int}(t, \theta) dt, \tag{B.3.17}$$

$$\hat{u}_\pm = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t} \tilde{u}_\pm(t, \theta) dt. \tag{B.3.18}$$

$$\tag{B.3.19}$$

On pose

$$\Theta = ]-1, 0[ \cup ]0, \pi[ \cup ]\pi, \pi + 1[.$$

On admet la proposition suivante qui donnent les propriétés fondamentales de la transformée de Mellin dans des espaces à poids.

**Proposition B.3.10.** *Soit  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$ . On pose  $\xi = m - \gamma + \frac{1}{2}$ .*

- Si  $\tilde{u} \in K_\gamma^m(\tilde{Q})$ , alors la transformée de Mellin  $\hat{u}$  de  $\tilde{u}$  est bien définie pour  $Re(\lambda) = \xi$  comme fonction de  $L^2$  de  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $H^m(\Theta)$  :

$$\eta \mapsto \hat{u}(\xi + i\eta, \cdot) \text{ est dans } L^2(\mathbb{R}, H^m(\Theta)).$$

De plus, on a :

$$\|\tilde{u}\|_{K_\gamma^m(\tilde{Q})} = \left( \int_{\mathbb{R}} \|\hat{u}(\xi + i\nu)\|_{H^m(\theta, |\eta|)}^2 d\eta \right)^{1/2},$$

où pour  $\rho > 0$ , la norme  $\|\hat{v}\|_{H^m(\theta, \rho)}$  est définie par :

$$\|\hat{v}\|_{H^m(\theta, \rho)} = \sum_{|\beta| < m} \|\rho^{\beta_1} \partial^{\beta_2} \hat{v}\|_{L^2(\Theta)}, \text{ avec } \beta = (\beta_1, \beta_2).$$

- Réciproquement, si  $U(\lambda)$  est défini pour  $Re(\lambda) = \xi$  et que l'application  $(\nu, \lambda) \mapsto U(\xi + i\nu, \theta)$  est dans  $L^2(\mathbb{R}, H^m(\Theta))$  avec de plus

$$\int_{\mathbb{R}} \|U(\xi + i\eta)\|_{H^m(\theta, |\eta|)}^2 d\eta < +\infty,$$

alors, pour tout  $\lambda$  tel que  $Re(\lambda) = \xi$ ,  $U(\lambda)$  est la transformée de Mellin  $\hat{u}(\lambda)$  d'une fonction  $u \in K_\gamma^m(\tilde{Q})$ .  $\tilde{u}$  peut être reconstruite à l'aide de la formule de Mellin inverse

$$\tilde{u}(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{(\xi+i\eta)t} U(\xi + i\eta, \theta) d\eta.$$

### B.3.3.2 Détermination du développement sous-variationnel

On pose  $\kappa = \hat{u}_0$ ,  $\hat{f} = \hat{f}$  et  $hg = \hat{g}$ . Alors  $\kappa$  vérifie :

$$\begin{cases} (\lambda^2 + \partial_\theta^2) \kappa_{int} = \hat{f}_{int}(\lambda - 2) & \theta \in ]0, \pi[, \\ \kappa_{int} = \kappa_\pm & \text{en } \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi, \\ \partial_\theta^2 \kappa_\pm = \hat{f}_\pm(\lambda) - (\lambda + 2)(\lambda + 1)\kappa(\lambda + 2, \theta) & \theta \in ]-1, 0[ \cup ]0, \pi[, \\ \mu_\pm \partial_\theta \kappa_\pm = \partial_\theta \kappa_{int}(\lambda + 1) - \hat{g}_\pm(\lambda) & \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi, \\ \kappa_\pm = 0 & \theta = -1 \text{ et } \theta = \pi + 1. \end{cases} \tag{B.3.20}$$

On note, pour  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\Pi_a = \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda) > a\}$$

On va montrer que  $\kappa$  se prolonge de façon méromorphe à l'ensemble du plan complexe. Pour cela, on montre d'abord que  $\kappa$  est holomorphe sur  $\Pi_{\frac{1}{2}}$ . Puis, on montre que  $\hat{f}_{int}, \hat{f}_{\pm}$  et  $\hat{g}_{\pm}$  admettent un prolongement méromorphe sur  $\mathbb{C}$ . A l'aide du problème (B.3.20), on pourra déterminer un prolongement méromorphe de  $\kappa$  à tout le plan complexe : ceci est possible car, grâce à la transformée de Mellin, on peut séparer la résolution dans le domaine intérieur  $]0, \pi[$  de la résolution dans les domaines extérieurs  $] - 1, 0[ \cup ] \pi, \pi + 1[$ .

### Détermination d'un prolongement méromorphe de $\kappa$

**Lemme B.3.11.**  $\kappa$  est holomorphe dans  $\Pi_{\frac{1}{2}}$ .

**preuve :** on a vu que  $\tilde{\chi}\tilde{u}_0 \in K_0^0(\tilde{Q})$ . Donc, en utilisant la proposition B.3.10  $\kappa$  est définie pour  $\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}$ . Mais, comme  $\tilde{\chi}\tilde{u}_0$  a son support dans  $] \ln r_0, +\infty[$ ,  $\kappa$  est également bien définie pour  $\operatorname{Re}(\lambda) > \frac{1}{2}$ . Le caractère holomorphe provient directement des formules (B.3.17) et (B.3.18).

**Proposition B.3.12.** Les fonctions  $\hat{f}_{int}, \hat{f}_{\pm}$  et  $\hat{g}_{\pm}$  admettent un prolongement méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{n - p - 1, n - p - 2\}$ .

**preuve :**

- $\tilde{f}_{int}$  est à support dans  $] \ln r_1, \ln r_2[$ , donc  $\hat{f}_{int}$  est holomorphe.
- $\hat{f}_{\pm} = \tilde{\varphi}_{\pm} + \tilde{\phi}_{\pm} \mathbb{I}_{[t > \ln r_1]}$  : comme  $\tilde{\varphi}_{\pm}$  est à support dans  $] \ln r_1, \ln r_2[$ , alors  $\hat{\varphi}_{\pm}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . Par ailleurs, on peut calculer explicitement la transformée de Mellin de  $\tilde{\phi}_{\pm} \mathbb{I}_{[t > \ln r_1]}$ . En effet, soit une fonction  $\tilde{v} = e^{\mu t} (t - \ln r_1)^j \mathbb{I}_{[t > \ln r_1]} p(\theta)$ . Alors  $\hat{v} = p(\theta) \int_{\ln r_1}^{+\infty} e^{(\mu - \lambda)t} (t - \ln r_1)^j dt$ . Or, on peut montrer par récurrence que si  $\operatorname{Re}(\mu) < \operatorname{Re}(\lambda)$ ,

$$\int_{r_1}^{+\infty} e^{(\mu - \lambda)t} t^j dt = \frac{(-1)^{l+1} j!}{(\mu - \lambda)^{l+1}} r_1^{(\mu - \lambda)}.$$

Donc, en posant  $\lambda_1 = n - p - 1$  et  $\lambda_2 = n - p - 2$ , pour  $\operatorname{Re}(\lambda) > \operatorname{Re}(\lambda_i)$

$$\hat{f}_{\pm} = \hat{\varphi}_{\pm} + \sum_{j=0}^{N_1} \frac{(-1)^{j+1} j!}{(\lambda_1 - \lambda)^{j+1}} p_{j,1}(\theta) r_1^{\mu - \lambda} + \sum_{j=0}^{N_2} \frac{(-1)^{j+1} j!}{(\lambda_2 - \lambda)^{j+1}} p_{j,2}(\theta) (-1)^{j+1} j! r_1^{\mu - \lambda}.$$

Cette fonction se prolonge de manière méromorphe à l'ensemble du plan complexe par  $\forall \lambda \notin \{0, 1\}$ ,

$$\hat{f}_{\pm} = \hat{\varphi}_{\pm} + \sum_{j=0}^{N_1} \frac{(-1)^{j+1} j!}{(\lambda_1 - \lambda)^{j+1}} p_{j,1}(\theta) r_1^{\mu - \lambda} + \sum_{j=0}^{N_2} \frac{(-1)^{j+1} j!}{(\lambda_2 - \lambda)^{j+1}} p_{j,2}(\theta) (-1)^{j+1} j! r_1^{\mu - \lambda}.$$

**Proposition B.3.13.**  $\kappa$  se prolonge de façon méromorphe à l'ensemble du plan complexe, holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus V$  où  $V = \{-n, n \in \mathbb{N}^*\}$ .

**preuve :**

Etape 0 : on résout les problèmes extérieurs : on cherche  $\kappa^*$  tel que

$$\begin{cases} \partial_{\theta}^2 \kappa_{\pm}^* = \hat{f}_{\pm}(\lambda) - (\lambda + 2)(\lambda + 1)\kappa(\lambda + 2, \theta) & \theta \in ] - 1, 0[ \cup ] 0, \pi[, \\ \mu_{\pm} \partial_{\theta} \kappa_{\pm}^* = \partial_{\theta} \kappa_{int}(\lambda + 1) - \hat{g}_{\pm}(\lambda) & \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi, \\ \kappa_{\pm}^* = 0 & \theta = -1 \text{ et } \theta = \pi + 1. \end{cases}$$

-  $\hat{f}_{\pm}(\lambda) - (\lambda + 2)(\lambda + 1)\kappa(\lambda + 2, \theta)$  holomorphe dans  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ ,

-  $\partial_{\theta} \kappa_{int}(\lambda + 1) - \hat{g}_{\pm}(\lambda)$  holomorphe dans  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ .

Donc il existe  $\kappa_{\pm}^*$  holomorphes dans  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ . On résout maintenant le problème intérieur :

$$\begin{cases} (\lambda^2 + \partial_{\theta}^2) \kappa_{int}^* = \hat{f}_{int}(\lambda - 2) & \theta \in ] 0, \pi[, \\ \kappa_{int}^* = \kappa_{\pm}^* & \text{en } \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi. \end{cases}$$

- $\hat{f}_{int}(\lambda - 2)$  holomorphe sur  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ ,
- $\kappa_{\pm}^*$  holomorphe sur  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$

Il existe  $\kappa_{int}^*$  méromorphe sur  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ . Cette fonction n'a pas de pôle sur  $\frac{1}{2} \leq Re(\lambda) \leq +\frac{1}{2}$  car 0 n'appartient pas au noyau de  $R_{int}$ .

$\kappa^*$  vérifie les mêmes équations que  $\kappa$  dans  $\Pi_{\frac{1}{2}}$ . Donc,  $\kappa = \kappa^*$  sur  $\Pi_{\frac{1}{2}}$  (les pôles éventuellement apparus sont artificiels). Donc  $\kappa^*$  est un prolongement holomorphe de  $\kappa$  à  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ . Pour simplifier les notations, on appelle maintenant  $\kappa^* = \kappa$ .

Etape1 : on résout les problèmes extérieurs : de nouveau, on cherche  $\kappa^*$  tel que

$$\begin{cases} \partial_{\theta}^2 \kappa_{\pm}^* = \hat{f}_{\pm}(\lambda) - (\lambda + 2)(\lambda + 1)\kappa(\lambda + 2, \theta) & \theta \in ]-1, 0[ \cup ]0, \pi[ \\ \mu_{\pm} \partial_{\theta} \kappa_{\pm} = \partial_{\theta} \kappa_{int}(\lambda + 1) - \hat{g}_{\pm}(\lambda) & \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi \\ \kappa_{\pm} = 0 & \theta = -1 \text{ et } \theta = \pi + 1 \end{cases}$$

- $\hat{f}_{\pm}(\lambda) - (\lambda + 2)(\lambda + 1)\kappa(\lambda + 2, \theta)$  méromorphe dans  $\Pi_{-\frac{3}{2}}$  (pôle éventuel provenant de  $\hat{f}_{\pm}(\lambda)$  en  $-1$ )
  - $\partial_{\theta} \kappa_{int}(\lambda + 1) - \hat{g}_{\pm}(\lambda)$  méromorphe dans  $\Pi_{-\frac{3}{2}}$  (pôle éventuel venant de  $\hat{g}_{\pm}(\lambda)$  en  $-1$ )
- Donc il existe  $\kappa_{\pm}^*$  méromorphe dans  $\Pi_{-\frac{3}{2}}$ . On résout maintenant le problème intérieur :

$$\begin{cases} (\lambda^2 + \partial_{\theta}^2) \kappa_{int}^* = \hat{f}_{int}(\lambda - 2) & \theta \in ]0, \pi[ \\ \kappa_{int}^* = \kappa_{\pm}^* & \text{en } \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi \end{cases}$$

- $\hat{f}_{int}(\lambda - 2)$  holomorphe sur  $\Pi_{-\frac{3}{2}}$ ,
- $\kappa_{\pm}^*$  méromorphe sur  $\Pi_{-\frac{3}{2}}$ .

Il existe  $\kappa_{int}^*$  méromorphe sur  $\Pi_{-\frac{3}{2}}$ . Le pôle  $-1$  a été introduit : on peut éventuellement le trouver dans le second membre  $\kappa_{\pm}^*$  mais surtout il est introduit par l'opérateur  $R_{int}$ . On a trouvé un prolongement méromorphe de  $\kappa$  sur  $\Pi_{-3/2}$ .

Etape k : l'algorithme peut être poursuivi par récurrence en résolvant successivement les problèmes extérieurs puis intérieur. Les pôles apparaissent soit par un décalage des pôles déjà existants dus aux termes  $((\lambda + 2)(\lambda + 1)\kappa(\lambda + 2), \partial_{\theta} \kappa_{int}(\lambda + 1))$  soit avec l'opérateur  $R_{int}$ . Cependant tous ces pôles appartiennent toujours à l'espace  $V$ .

Remarque : une fois qu'un pôle est créé, il est transporté. Si par exemple, on a un pôle purement variationnel en  $-1$ , on va avoir un pôle variationnel en  $-2$  de multiplicité  $2 = (1 + 1)$ , puis de multiplicité  $3$  en  $-3$  et ainsi de suite.

### Détermination du développement sous variationnel par transformée de Mellin inverse :

A partir des informations obtenues sur  $\kappa$  on va pouvoir déterminer un développement de  $\chi \tilde{u}^0$

On admet le lemme (dont je n'ai pas compris la démonstration) suivant

**Lemme B.3.14.** *Soit  $a \in \mathbb{R}^+$ , il existe  $\tilde{u}^a$  telle que :*

- $\tilde{u}^a \in K_{m+a}^m(\tilde{Q})$  pour tout entier  $m$ ,
- $\kappa$  est la transformée de Mellin de  $\tilde{u}^a$  pour tout  $\lambda$  tel que  $Re(\lambda) > -a$ .

**Proposition B.3.15.** :

- Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Il existe des fonctions  $\check{k}_{var}^{n,k}$  et  $\check{k}_{rec}^{n,k} \in \mathcal{G}^k(\tilde{Q})$  telles que

$$\chi u^{n,p} = \sum_{k \in -\mathbb{N}^*, -j \leq k} \mathcal{F}^*(\check{k}_{var}^{n,k}) + \sum_{k \in -\mathbb{N}^*, -j \leq k < n-p} \mathcal{F}^*(\check{k}_{rec}^{n,k}) + q_j,$$

avec  $\tilde{q}_j \in K_{m+j+\delta}^m(\tilde{Q})$ .

- les termes  $\check{k}_{rec}^{n,k}$  peuvent être choisis indépendamment de  $p$  et sont construits par récurrence :

$$\begin{cases} \check{\Delta} \check{k}_{rec,int}^{n,k} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{int}, \\ \check{k}_{rec,int}^{n,k} = \check{k}_{\pm}^{n,k} & \text{sur } \check{G}, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_{\theta}^2 \check{k}_{rec,\pm}^{n,k} = -\partial_r^2 \check{k}_{rec,\pm}^{n,k+2} & \text{dans } \check{Q}_{\pm}, \\ \mu_{\pm} \frac{\partial \check{k}_{rec,\pm}^{n,k}}{\partial \theta} = \frac{\partial \check{k}_{rec,int}^{n,k+1}}{\partial \theta} & \text{sur } \check{G}_{\pm}, \\ \check{k}_{rec,\pm}^{n,k} = 0 & \text{sur } \check{G}_{-1,\pm}. \end{cases}$$



preuve :

- Soient  $a$  et  $b$  tels que  $a < b \leq 0$  et  $\eta > 0$ . On définit  $G_\eta$  le contour orienté dans le sens trigonométrique du rectangle du plan complexe défini par

$$a < \operatorname{Re}(\lambda) < b \text{ et } |\operatorname{Im}(\lambda)| < \eta$$

On définit également  $C_k$ , contour de Cauchy autour de  $k$  (ne contenant que le pôle  $k$ ) orienté dans le sens trigonométrique. L'application du théorème des résidus donne :

$$\begin{aligned} \int_{G_\eta} e^{\lambda t} \kappa(\lambda, \theta) d\lambda &= \sum_{-k \in \mathbb{N}^*, a \leq -k \leq b} \int_{C_k} e^{\lambda t} \kappa(\lambda, \theta) d\lambda, \\ \int_{G_\eta} e^{\lambda t} \kappa(\lambda, \theta) d\lambda &= - \int_{-\eta}^{\eta} e^{(a+is)t} \kappa(a+is, \theta) ids + \int_{-\eta}^{\eta} e^{(b-is)t} \kappa(b-is, \theta) ids, \\ &+ \int_a^b e^{(s-i\eta)t} \kappa(s-i\eta, \theta) ds - \int_a^b e^{(s+i\eta)t} \kappa(s+i\eta, \theta) ds. \end{aligned}$$

On fait tendre  $\eta$  vers  $+\infty$ . Comme  $\eta \mapsto \kappa(s+i\eta) \in L^2(\mathbb{R}, H^m(\Theta))$ , les cotés horizontaux ne comptent pas :

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{(s-i\eta)t} \kappa(s-i\eta, \theta) ds = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{(s+i\eta)t} \kappa(s+i\eta, \theta) ds = 0.$$

De plus, sur les cotés verticaux, les transformées de Mellin inverses apparaissent :

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left( - \int_{-\eta}^{\eta} e^{(a+is)t} \kappa(a+is, \theta) ids + \int_{-\eta}^{\eta} e^{(b-is)t} \kappa(b-is, \theta) ids \right) = 2i\pi(-\mathcal{M}_a^{-1}(\kappa) + \mathcal{M}_b^{-1}(\kappa)).$$

Finalement,

$$2i\pi(-\mathcal{M}_a^{-1}(\kappa) + \mathcal{M}_b^{-1}(\kappa)) = \sum_{-k \in \mathbb{N}^*, a \leq -k \leq b} \int_{C_k} e^{\lambda t} \kappa(\lambda, \theta) d\lambda.$$

On choisit un contour de Cauchy  $C_k$  circulaire centré autour de  $k$  de rayon  $r < 1$  : on a la paramétrisation suivante  $\lambda = k + re^{is}$ ,  $s \in [0, 2\pi[$ . Dans un voisinage de  $k$  (par exemple la boule de centre  $k$  et de rayon  $r < 1$ ), on a :

$$\kappa(\lambda, \theta) = H_k(\lambda, \theta) + \sum_{j=1}^{N_k} \frac{c_j(\theta)}{(\lambda - k)^j} \text{ avec } H_k \text{ holomorphe.}$$

Donc,

$$\int_{C_k} e^{\lambda t} \kappa(\lambda, \theta) d\lambda = \sum_{j=1}^{N_k} c_j(\theta) \int_{C_k} \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - k)^j} d\lambda.$$

Or,

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= e^{(\lambda-k)t} e^{kt}, \\ &= e^{kt} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\lambda - k)^n t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Comme on peut intervertir l'intégrale et le signe somme, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{C_k} e^{\lambda t} \kappa(\lambda, \theta) d\lambda &= e^{kt} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} \int_0^{2\pi} \frac{r e^{ins}}{r^j e^{ijs}} r i e^{is} ds, \\ &= e^{kt} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{i r^{n+1-j} t^n}{n!} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1-j)s} ds, \\ &= 2i\pi e^{kt} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_{\mathcal{C}_k} e^{\lambda t} \kappa(\lambda, \theta) d\lambda = 2\pi i \underbrace{e^{kt} \left( \sum_{j=0}^{N_k-1} \frac{c_{k,j+1}(\theta)}{j!} t^j \right)}_{\in \mathcal{G}(\check{Q}) \text{ en repassant aux variables } (r, \theta)} .$$

$$-\mathcal{M}_a^{-1}(\kappa) + \mathcal{M}_b^{-1}(\kappa) = e^{kt} \left( \sum_{j=0}^{N_k-1} \frac{c_{k,j+1}(\theta)}{j!} t^j \right) .$$

On choisit maintenant  $a = -j - \delta$  et  $b = 0$ . On a  $\mathcal{M}_0^{-1}(\kappa) = \tilde{u}_0$ . D'après le lemme B.3.14,  $q_j = \mathcal{M}_{-j-\delta}^{-1}(\kappa) \in K_{m+j+\delta}^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ . Finalement, en repassant aux coordonnées  $(r, \theta)$ , on a le résultat souhaité.

– Pour démontrer la seconde partie de la preuve, il faut remarquer que  $u^{n,p+1} = .u^{n,p} - \mathcal{F}^*(\check{k}_{rec}^{n,n-p-1})$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} bk_p^{n,n-p-1} &= \underbrace{\check{k}_{p+1}^{n,n-p-1}}_{\text{noyau de Mellin}} + \check{k}_{rec}^{n,n-p-1}, \\ &= \check{k}_{var}^{n,n-p-1} + \check{k}_{rec}^{n,n-p-1}. \end{aligned}$$

### B.3.4 Bilan

#### B.3.4.1 Développement asymptotique des profils intérieurs pour $r$ grand

**Proposition B.3.16.** *Le problème*

$$\mathcal{P} \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } Q_{int} \cup Q_+ \cup Q_-, \\ [\mu \frac{\partial u}{\partial n}] = 0 & \text{sur } G \cup G_m, \\ [u] = 0 & \text{sur } G \cup G_m, \\ u = 0 & \text{sur } G_{-1}, \\ u \text{ se comporte comme } r^n \sin(\theta n) & (n \in \mathbb{N}^*) \text{ dans } Q_{int} \text{ quand } r \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

admet une solution dont le développement est le suivant :

$$\chi u = \sum_{k \in \mathbb{N}, n-k \geq -P} \mathcal{F}^*(\check{k}_{rec}^{n,n-k}) + \sum_{k \in -\mathbb{N}^*, k \geq -P} \mathcal{F}^*(\check{k}_{var}^{n,n-k}) + o\left(\frac{1}{r^p}\right). \quad (\text{B.3.21})$$

Les termes  $\check{k}_{rec}^{n,n-k}$  sont indépendants de  $p$  et sont construits par récurrence

$$\begin{cases} \Delta \check{k}_{rec,int}^{n,n-q} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{int}, \\ \check{k}_{int}^{n,n-q} = \check{k}_{rec,\pm}^{n,n-q} & \text{sur } \check{G}, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_\theta^2 \check{k}_{rec,\pm}^{n,n-q} = -\partial_r^2 \check{k}_{rec,\pm}^{n,n-q+2} & \text{dans } \check{Q}_\pm, \\ \mu_\pm \frac{\partial \check{k}_{rec,\pm}^{n,n-q}}{\partial \theta} = \frac{\partial \check{k}_{rec,int}^{n,n-k+1}}{\partial \theta} & \text{sur } \check{G}_\pm, \\ \check{k}_{rec,\pm}^{n,n-k} = 0 & \text{sur } \check{G}_{-1,\pm}. \end{cases}$$

#### B.3.4.2 Détermination des fonctions $\check{k}_{rec}^{1,1-p}$ et $\check{k}_{rec}^{2,2-p}$

On pose

$$C = \frac{1}{\mu_-} - \frac{1}{\mu_+} \quad (\text{B.3.22})$$

- $n = 1$  :

$$\begin{cases} \check{k}_{rec,int}^{1,1} = r \sin(\theta), \\ \check{k}_{rec,\pm}^{1,1} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \check{k}_{rec,int}^{1,0} = \frac{1}{\mu_+} + C \frac{\theta}{\pi}, \\ \check{k}_{rec,+}^{1,0} = \frac{1}{\mu_+} (\theta + 1) = \frac{1}{\mu_+} (Y + 1), \\ \check{k}_{rec,-}^{1,0} = \frac{1}{\mu_-} (\pi + 1 - \theta) = \frac{1}{\mu_-} (Y + 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \check{k}_{rec,int}^{1,-1} = \frac{1}{r} (-c_{1,-1,1}^{cp} \sin(\theta) \ln r + c_{1,-1,0}^{cp}(\theta)), \\ \text{avec } \begin{cases} c_{1,-1,1}^{cp} = \frac{-C^2}{\pi^2}, \\ c_{1,-1,0}^{cp} = \frac{C}{\mu_+ \pi} \cos(\theta) - 2c_{1,-1,1}^{cp} \int_0^\theta \sin(\theta - s) \sin(s) ds, \end{cases} \\ \check{k}_{rec,+}^{1,-1} = \frac{C}{\mu_+ \pi} \frac{(\theta+1)}{r} = \frac{C}{\mu_+ \pi} \frac{(Y+1)}{r}, \\ \check{k}_{rec,-}^{1,-1} = -\frac{C}{\mu_- \pi} \frac{(\pi+1-\theta)}{r} = -\frac{C}{\mu_- \pi} \frac{(Y+1)}{r}. \end{cases}$$

- $n = 2$  :

$$\begin{cases} \check{k}_{rec,int}^{2,2} = r^2 \sin(2\theta), \\ \check{k}_{rec,\pm}^{2,2} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \check{k}_{rec,int}^{2,1} = r(c_{2,1,1}^{cp} \sin(\theta) \ln r + c_{2,1,0}^{cp}(\theta)), \\ \text{avec } \begin{cases} c_{2,1,1}^{cp} = \frac{-2C}{\Pi}, \\ c_{2,1,0}^{cp}(\theta) = \frac{2}{\mu_+} \cos(\theta) - 2c_{2,1,1}^{cp} \int_0^\theta \sin(\theta - s) \sin(s) ds, \end{cases} \\ \check{k}_{rec,+}^{2,1} = \frac{2r}{\mu_+} (\theta + 1) = \frac{2r}{\mu_+} (Y + 1), \\ \check{k}_{rec,-}^{2,1} = \frac{-2r}{\mu_-} (\pi + 1 - \theta) = \frac{-2r}{\mu_-} (Y + 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \check{k}_{rec,int}^{2,0} = p_{2,0,0}(\theta) + \ln(r)p_{2,0,1}(\theta), \\ \text{avec } \begin{cases} p_{2,0,0}(\theta) = \frac{(c_{2,1,0}^{cp})'(0)}{\mu_+} + \frac{\theta}{\pi} \left( \frac{(c_{2,1,0}^{cp})'(\pi)}{\mu_-} - \frac{(c_{2,1,0}^{cp})'(0)}{\mu_+} \right), \\ p_{2,0,1}(\theta) = \frac{c_{2,1,1}^{cp}}{\mu_+} - \theta c_{2,1,1}^{cp} \left( \frac{1}{\mu_-} + \frac{1}{\mu_+} \right), \end{cases} \\ \check{k}_{rec,+}^{2,0} = \frac{\theta+1}{\mu_+} (c_{2,1,1}^{cp} \ln r + (c_{2,1,0}^{cp})'(0)) = \frac{Y+1}{\mu_+} (c_{2,1,1}^{cp} \ln r + (c_{2,1,0}^{cp})'(0)), \\ \check{k}_{rec,-}^{2,0} = \frac{\theta-\pi-1}{\mu_-} (-c_{2,1,1}^{cp} \ln r + (c_{2,1,0}^{cp})'(0)) = \frac{-(Y+1)}{\mu_-} (-c_{2,1,1}^{cp} \ln r + (c_{2,1,0}^{cp})'(0)). \end{cases}$$

## B.4 Développement asymptotique

### B.4.1 Ansatz du développement asymptotique

On pense qu'il n'est pas possible de trouver un développement de  $u^\delta$  valable dans tout l'espace. C'est pourquoi on va distinguer deux zones différentes dans lesquelles on pourra expliciter la forme du développement.

- Zone extérieure : champ lointain

$$u^\delta(x, y) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n u_{int,n}(\ln \delta, r, \theta) & y > 0, \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n \mathcal{U}_n^\pm(\ln \delta, x, \frac{y}{\delta}) & y < 0. \end{cases} \quad (\text{B.4.1})$$

- Zone intérieure : champ proche

$$u^\delta(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n u_n(\ln \delta, \frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}). \quad (\text{B.4.2})$$

## B.4.1.1 Développement asymptotique extérieur

Déterminons les équations vérifiées par le développement asymptotique extérieur (dans la suite, on ne mentionne plus la dépendance en  $\ln \delta$ ).

– Hors couches minces ( $y > 0$ )

$$\Delta u_{int,n} = \begin{cases} f & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.4.3})$$

– Dans les couches minces ( $y < 0$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_n^\pm}{\partial Y^2} = -\frac{\partial^2 \mathcal{U}_{int,n-2}^\pm}{\partial x^2}, \\ \mathcal{U}_n^\pm(x, -1) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.4.4})$$

– Raccord en  $y = 0$ .

$$\begin{cases} u_{int,n}(x, 0) = \mathcal{U}_n^\pm(x, 0), \\ \mu^\pm \frac{\partial \mathcal{U}_n^\pm(x, 0)}{\partial Y} = \frac{\partial u_{int,n-1}(x, 0)}{\partial y}. \end{cases} \quad (\text{B.4.5})$$

On a la proposition suivante qui permet d'exprimer de façon explicite les termes  $\mathcal{U}_n^\pm$

**Proposition B.4.1.**

1.

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0 \quad \mathcal{U}_n^\pm(x, Y) &= (Y+1) \frac{1}{\mu^\pm} \frac{\partial u_{int,n-1}(x, 0)}{\partial y} + (Y+1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^0 \mathcal{U}_{n-2}^\pm(x, t) dt \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^Y (Y-t) \mathcal{U}_{n-2}^\pm(x, t) dt. \end{aligned} \quad (\text{B.4.6})$$

2.

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0 \quad u_{int,n}(x, 0) &= \frac{1}{\mu^\pm} \frac{\partial u_{int,n-1}(x, 0)}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^0 \mathcal{U}_{n-2}^\pm(x, t) dt \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^0 t \mathcal{U}_{n-2}^\pm(x, t) dt. \end{aligned} \quad (\text{B.4.7})$$

*Preuve* : il suffit d'intégrer deux fois les équations B.4.4 et d'utiliser les équations de raccords en  $y = 0$  (B.4.5).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}_n^\pm}{\partial Y}(x, Y) &= \frac{\partial \mathcal{U}_n^\pm}{\partial Y}(x, 0) - \int_Y^0 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_n^\pm}{\partial Y^2}(x, t) dt, \\ &= \frac{\partial \mathcal{U}_n^\pm}{\partial Y}(x, 0) + \int_Y^0 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{n-2}^\pm}{\partial x^2}(x, t) dt. \end{aligned}$$

On intègre une nouvelle fois en utilisant cette fois la condition de Dirichlet homogène en  $Y = -1$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n^\pm(x, Y) &= \mathcal{U}_n^\pm(x, -1) + \int_{-1}^Y \frac{\partial \mathcal{U}_n^\pm}{\partial Y}(x, s) ds, \\ &= (Y+1) \frac{\partial \mathcal{U}_n^\pm}{\partial Y}(x, 0) + \int_{-1}^Y \int_s^0 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{n-2}^\pm}{\partial x^2}(x, t) dt ds. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^Y \int_s^0 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{n-2}^\pm}{\partial x^2}(x, t) dt ds &= \int_{-1}^Y \int_{-1}^0 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{n-2}^\pm}{\partial x^2}(x, t) dt ds - \int_{-1}^Y \int_{-1}^s \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{n-2}^\pm}{\partial x^2}(x, t) dt ds, \\ &= (Y+1) \int_{-1}^0 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{n-2}^\pm}{\partial x^2}(x, t) dt - \int_{-1}^Y (Y-t) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{n-2}^\pm}{\partial x^2}(x, t) dt. \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième équation de B.4.5, on obtient alors le résultat souhaité :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n^\pm(x, Y) &= (Y+1) \frac{1}{\mu^\pm} \frac{\partial u_{n-1}(x, 0)}{\partial y} + (Y+1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^0 \mathcal{U}_{n-2}^\pm(x, t) dt \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^Y (Y-t) \mathcal{U}_{n-2}^\pm(x, t) dt. \end{aligned}$$

Pour obtenir la seconde partie de la proposition, il suffit d'utiliser le fait que  $u_n(x, 0) = \mathcal{U}_n(x, 0)$  et de calculer  $\mathcal{U}_n(x, 0)$  à l'aide de (B.4.6).

#### B.4.1.2 Développement asymptotique intérieur

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U_n = 0, \\ U_n(X, 0^+) = U_n(X, 0^-), \\ \mu^\pm \frac{\partial U_n}{\partial Y}(X, 0^-) = \frac{\partial U_n}{\partial Y}(X, 0^+), \\ U_n(0^+, Y) = U_n(0^-, Y), \\ \mu^+ \frac{\partial U_n(0^+, Y)}{\partial X} = \mu^- \frac{\partial U_n(0^-, Y)}{\partial X} \\ U_n(X, -1) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{B.4.8})$$

#### B.4.2 Conditions de raccord

Du fait de la géométrie du problème, le développement des termes  $U_n$  et  $u_n$  va faire apparaître des puissances entières de  $r$  ou  $R$  ( $r$  et  $R$  sont les coordonnées polaires). Formellement, on a :

$$U_n(R, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{n_n} R^k U_{n,k}, \quad u_n(r, \theta) = \sum_{k=m_n}^{\infty} r^k u_{n,k}. \quad (\text{B.4.9})$$

On peut représenter sous forme de graphique les puissances  $k$  admissibles (cf. figures B.3).

A l'aide de la figure B.3, on peut voir que les conditions de raccord sont données par

$$U_{n+k,k}\left(\frac{r}{\delta}, \theta\right) = u_{n,k}(r, \theta), \quad (\text{B.4.10})$$

$$U_{m,k}(R, \theta) = u_{m-k,k}(R\delta, \theta). \quad (\text{B.4.11})$$

On pourrait également représenter schématiquement le raccord des développements dans le plan  $(R^k, \delta^m)$  mais on n'obtiendrait pas d'information supplémentaire. Voici les différentes étapes de la construction du développement asymptotique :

- Etape 0 : on doit obtenir ( $u_{0,0} = U_{0,0}$ )

- Etape 1 :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet u_{1,-1} = U_{0,-1} \\ \bullet U_{1,1} = u_{0,1} \end{array} \right\} (\Rightarrow U_{1,0} = u_{1,0})$$

- Etape 2 :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet u_{2,-2} = U_{0,-2} \quad u_{2,-1} = U_{1,-1} \\ \bullet U_{2,2} = u_{0,2} \quad U_{2,1} = u_{1,1} \end{array} \right\} (\Rightarrow U_{2,0} = u_{2,0})$$

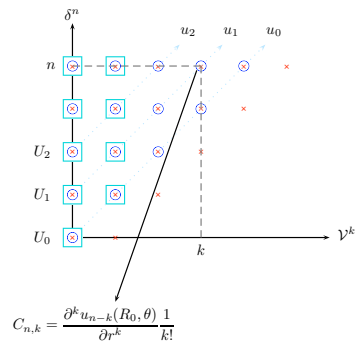


FIGURE B.3 – plan  $(r^k, \delta^m)$

### B.4.3 Constructions des premiers termes du développement asymptotique

#### B.4.3.1 Quelques Remarques sur les champs proches

Tout comme dans la partie 2, on introduit le changement de variable  $\mathcal{F}_{cl}$  qui transforment les coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires (un peu modifiées) :

$$(x, y) \mapsto \mathcal{F}_{cl}(x, y) = (r, \theta), \quad (\text{B.4.12})$$

avec  $\begin{cases} (r, \theta) \text{ sont les coordonnées polaires si } \theta \in [0, \pi], \\ r = x \quad \theta = Y \text{ si } \theta \in [-1, 0], \\ r = -x \quad \theta = \pi - Y \text{ si } \theta \in [\pi, \pi + 1]. \end{cases}$

On définit  $\check{v}(r, \theta) = v(x, y)$ . Par ailleurs, on définit  $\chi$ , une fonction de troncature  $\mathcal{C}^\infty$  qui vaut 1 quand  $r < r_0$  et 0 si  $r > r_1$ . On définit alors la transformation  $\mathcal{F}_{cl}^*$  qui correspond à la transformation réciproque de  $\mathcal{F}_{cl}$  tronquée par  $\chi$  :

$$(\mathcal{F}_{cl}^* \check{v})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq r_1, \\ \chi(\check{v}(\mathcal{F}_{cl}(x))) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espace variationnel associé aux termes de champ lointain intérieurs est

$$\mathcal{V}^0 = \{v \text{ tels que } \nabla v \in L^2(Q_{int}), \quad \frac{v}{1+r} \in L^2(Q_{int}), \quad v(x, 0) = 0\}.$$

On introduit également l'espace  $\mathcal{V}^{0,*}$  :

$$\mathcal{V}^{0,*} = \{v \text{ tels que } \chi(r)v \in \mathcal{V}, \quad \forall \chi\}, \quad (\chi \in \mathcal{C}^\infty \text{ s'annulant dans un voisinage du point } (0, 0))$$

Soit  $f \in \mathcal{F}_{cl}^*(\mathcal{G}^\lambda(\check{Q}))$  et  $g \in \mathcal{F}_{cl}^*(\mathcal{G}^\mu(\check{G}))$ . On souhaite savoir quand le problème  $\mathcal{P}_{int}^{ch}$  suivant admet une solution appartenant à l'espace variationnel  $\mathcal{V}^0$ .

$$\mathcal{P}_{int}^{ch} \begin{cases} \Delta u = f \text{ dans } Q_{int}, \\ u(x, 0) = g \text{ sur } G. \end{cases}$$

Pour avoir une solution variationnelle, il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- $f \in L^2 Q_{int} \Leftrightarrow 2\lambda + 1 > -1 \Leftrightarrow \lambda > -1$ .
- $g \in H^{\frac{1}{2}}(G)$  : on ne peut en particulier pas avoir de discontinuité en 0. C'est pourquoi  $\mu > 0$ .

Dans le cas de puissances  $\mu$  et  $\lambda$  entière,  $u$  sera dans l'espace variationnel si  $\mu \geq 1$  et  $\lambda \geq 0$ .

#### B.4.3.2 Termes d'ordre 0

On appelle  $\mathcal{V}^* = \{v \text{ tels que } \chi(r)v \in \mathcal{V}, \quad \forall \chi\}$ ,  $\chi$  fonction  $\mathcal{C}^\infty$  s'annulant dans un voisinage du point  $(0, 0)$ .

- **Champ proche** :  $U_0$  vérifie :

$$\begin{cases} \Delta U_0 = 0, \\ U_0(X, 0^+) = U_0(X, 0^-), \\ \mu^\pm \frac{\partial U_0}{\partial Y}(X, 0^\pm) = \frac{\partial U_0}{\partial Y}(X, 0^\pm), \\ U_0(0^+, Y) = U_0(0^-, Y), \\ \mu^+ \frac{\partial U_0(0^+, Y)}{\partial X} = \mu^- \frac{\partial U_0(0^-, Y)}{\partial X}, \\ U_0(X, -1) = 0, \\ U_0 \text{ se comporte comme } C(\theta, \ln R) \text{ quand } R \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (\text{B.4.13})$$

D'après la partie 2, le comportement en  $R^0$  n'est pas possible. Donc l'unique solution est

$$U_0 = 0.$$

**Remarque** : On en déduit immédiatement que  $u_{n,-n} = 0$  est nulle pour tout  $n$

- **Champ lointain** :  $(u_0, \mathcal{U}_0^+, \mathcal{U}_0^-)$

D'après la proposition (B.4.6), on a  $\mathcal{U}_0^\pm = 0$ . De plus  $u_0$  vérifie

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_0 \in \mathcal{V}^{0,*} \\ \Delta u_0 = f, \\ u_0(x, 0) = 0 \quad \forall x \neq 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} u_0(r, \theta) = 0. \end{cases}$$

L'unique solution à ce problème est la solution du problème variationnel suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_0 \in \mathcal{V}^0, \\ \Delta u_0 = f, \\ u_0(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainsi le développement de  $u_0$  au voisinage du coin est donné par :

$$\begin{aligned} \chi \check{u}_0(r, \theta) &= \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_{0,n} \sin(n\theta) r^n \text{ dans } \check{Q}_{int}, \\ 0 \text{ dans } \check{Q}_\pm, \end{cases} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_{0,n} \check{k}_{rec}^{n,n}, \end{aligned} \tag{B.4.14}$$

$$\check{u}_{0,n} = c_{0,n} \frac{\check{k}_{rec}^{n,n}}{r^n}. \tag{B.4.15}$$

### B.4.3.3 Termes d'ordre 1

- **Champ lointain** :  $(u_1, \mathcal{U}_1^+, \mathcal{U}_1^-)$

– Dans les bandes  $Q_\pm$  : en utilisant la proposition B.4.6, on a

$$\mathcal{U}_1^\pm = \frac{(Y+1)}{\mu_\pm} \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, 0) \quad \forall x \neq 0.$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient le développement en  $\mathcal{U}_1^\pm$  pour  $r$  petit :

$$\begin{cases} \chi \check{\mathcal{U}}_1^+ = (\theta + 1) \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{0,n+1} \frac{n+1}{\mu_+} r^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{0,n+1} \check{k}_{rec,+}^{n+1,n}, \\ \chi \check{\mathcal{U}}_1^- = (\pi + 1 - \theta) \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{0,n+1} \frac{(-1)^n (n+1)}{\mu_-} r^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{0,n+1} \check{k}_{rec,-}^{n+1,n}. \end{cases} \tag{B.4.16}$$

**Remarque** : les termes s'expriment uniquement en fonction de  $(u_0, \mathcal{U}_0^+, \mathcal{U}_0^-)$ . Il n'y a pas de raccord avec le champ proche, puisque le seul terme à raccorder est  $\mathcal{U}_{-1,1}^\pm$  et il est nul.

– Dans le domaine intérieur  $Q_{int}$ . En utilisant la proposition B.4.6, Le terme  $u_1$  vérifie :

$$\begin{cases} \Delta u_{1,int} = 0 \text{ Dans } Q_{int}, \\ u_{1,int}(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_+} \frac{\partial u_{0,int}}{\partial y}(x, 0) & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{\mu_-} \frac{\partial u_{0,int}}{\partial y}(x, 0) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Le seul terme non variationnel de  $u_1$  est un terme d'ordre 0. En effet d'après (B.4.16), les termes  $\frac{1}{\mu_+} \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, 0)$  et  $\frac{1}{\mu_-} \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, 0)$  ont un terme d'ordre 0, qui est discontinu au voisinage de  $(0, 0)$  puisque  $\mu_+ \neq \mu_-$ .

Si on passe formellement aux coordonnées polaires, on a

$$\begin{cases} \Delta \check{u}_{1,int} = 0, \\ \check{u}_{1,int} = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{0,n+1} \check{k}_{rec,\pm}^{n+1,n} \text{ sur } \check{G}. \end{cases}$$



c'est pourquoi on cherche  $u_1$  sous la forme

$$u_{1,int} = u_{1,int,var,p} + \sum_{k=0}^p c_{0,k+1} \mathcal{F}_{cl}^*(\check{k}_{rec,int}^{n+1,n}).$$

Pour  $p > 0$ ,  $u_{1,int,var,p}$  existe puisqu'il vérifie le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_{1,int,var,p} = \underbrace{\sum_{k=0}^p c_{0,k+1} \Delta(\mathcal{F}_{cl}^*(\check{k}_{rec,int}^{n+1,n}))}_{\text{à support dans } ]0,\pi[\times]r_0,r_1[} \\ u_{1,var,p} = \frac{1}{\mu_+} \left( (1-\chi) \frac{\partial u_0}{\partial y} - \chi \sum_{k=p+1}^{+\infty} (k+1) c_{0,k+1} r^k \right) \text{ sur } G_+, \\ u_{1,var,p} = \frac{1}{\mu_-} \left( (1-\chi) \frac{\partial u_0}{\partial y} - \sum_{k=p+1}^{+\infty} \mathcal{F}_{cl}^*((k+1)(-1)^k c_{0,k+1} r^k) \right) \text{ sur } G_-, \end{array} \right.$$

Comme  $\Delta u_{1,int,var,p}$  et  $u_{1,int,var,p}$  s'annulent près du coin  $(0,0)$ , on a

$$\chi \check{u}_{1,var,p} = \sum_1^p c_{1,v,p,n}^{cl} \sin(n\theta) r^n + o(r^p).$$

Finalement, le développement de  $u_1$  pour  $r$  petit et pour tout  $p > 0$  est

$$\chi \check{u}_1 = \sum_{n=1}^p \check{k}_{1,v,p,n}^{cl} + \sum_{n=0}^p c_{0,n+1} \check{k}_{rec}^{n+1,n} + o(r^p), \quad (\text{B.4.17})$$

avec

$$\check{k}_{1,v,p,n}^{cl} = \begin{cases} c_{1,v,p,n}^{cl} \sin(n\theta) r^n & \text{dans } \check{Q}_{int}, \\ 0 & \text{dans } \check{Q}_{\pm}, \end{cases}$$

$$\chi \check{u}_1 = \sum_{n=1}^p c_{1,v,p,n}^{cl} \check{k}_{rec}^{n,n} + \sum_{n=0}^p c_{0,n+1} \check{k}_{rec}^{n+1,n} + o(r^p), \quad (\text{B.4.18})$$

$$\check{u}_{1,n} = \frac{(c_{0,n+1} \check{k}_{rec}^{n+1,n} + \check{k}_{1,v,p,n}^{cl})}{r^n}. \quad (\text{B.4.19})$$

Les termes  $c_{1,v,p,n}$  sont les termes purement variationnels et ils dépendent de  $p$ . En revanche, les termes  $(c_{1,n,1}^{cl} \sin(n\theta) \ln(r) + c_{1,n,0}^{cl}(\theta))$  sont des termes récurrents (qui proviennent de  $u_0$ ) et il sont choisis indépendamment de  $p$ .

- **Détermination du champ proche d'ordre 1  $U_1$**

Les conditions de raccord imposent  $U_{1,1} = u_{0,1}$ , c'est à dire  $U_{1,1} = c_{0,1} R \sin(\theta)$ . On peut appliquer directement le résultat de la partie 2 pour  $n = 1$ . Comme on souhaite faire un développement à l'ordre 2, on ne s'intéresse qu'aux termes de  $U_1$  en  $R^\alpha$  avec  $\alpha \geq -1$ . On obtient donc le développement de  $U_1$  à l'ordre 1 pour  $R$  grand :

$$\xi U_1(R, \theta) = c_{0,1} (\check{k}_{rec}^{1,1} + \check{k}_{rec}^{1,0} + \check{k}_{rec}^{1,-1} + \check{k}_{var}^{1,-1}) + o\left(\frac{1}{R}\right). \quad (\text{B.4.20})$$

$\check{k}_{rec}^{1,1}$ ,  $\check{k}_{rec}^{1,0}$  et  $\check{k}_{rec}^{1,-1}$  sont indépendants de  $p$ . Par contre  $\check{k}_{var}^{1,-1}$  est un terme purement variationnel dépendant de  $p$  (que l'on a pris égal à 1). Il ne contient pas de terme logarithmique. Plus précisément, il est de la forme :

$$\check{k}_{var}^{1,-1} = \begin{cases} \frac{c_{1,-1,var}^{CP}}{R} \sin(\theta) & \text{dans } Q_{int} \\ 0 & \text{dans } Q_{\pm} \end{cases} = -c_{1,-1,var}^{cp} \check{k}_{rec}^{-1,-1}.$$

On a

$$U_{1,-1} = R(\check{k}_{var}^{1,-1} + \check{k}_{rec}^{1,-1}).$$

## B.4.3.4 Termes d'ordre 2

- Champ lointain : les conditions de raccord imposent

$$\check{u}_{2,-1}(r, \theta, \ln \delta) = \frac{r}{\delta} (\check{k}_{var}^{1,-1}(\frac{r}{\delta}, \theta) + \check{k}_{rec}^{1,-1}(\frac{r}{\delta}, \theta)).$$

On va voir que le terme de  $\check{k}_{rec}^{1,-1}$  est presque automatiquement 'inclus' dans le développement asymptotique extérieur. Par contre, on va devoir prendre en compte le terme issu de la résolution variationnel de  $U_1$  à savoir  $\check{k}_{var}^{1,-1}$ .

- Champs proches extérieurs : écrivons les équations vérifiées par  $\check{U}_2^\pm$  en coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\theta^2 \check{U}_2^\pm = 0 \text{ dans } \check{Q}_\pm, \\ \partial_\theta \check{U}_2^\pm = \frac{1}{\mu_\pm} \partial_\theta u_{1,int} \text{ sur } \check{G}_\pm, \\ \check{U}_2^\pm = 0 \text{ sur } \check{G}_{-1,\pm}, \\ \check{U}_{2,\pm} \text{ se comporte comme } \frac{1}{r} \underbrace{(\frac{r}{\delta} (h_{var,\pm}^{1,-1}(\frac{r}{\delta}, \theta) + h_{rec,\pm}^{1,-1}(\frac{r}{\delta}, \theta)))}_{=0}. \end{array} \right.$$

Comme,

$$\begin{aligned} \chi \frac{1}{r\mu_+} \partial_\theta \check{u}_{1,int} &= \sum_{n=0}^{p-1} c_{1,v,p,n+1} \frac{(n+1)}{\mu_+} + \sum_{n=-1}^{p-1} c_{0,n+2} \frac{1}{\mu_+} \partial_\theta \check{k}_{rec,int}^{n+2,n+1}(r, 0), \\ \chi \frac{1}{r\mu_-} \partial_\theta \check{u}_{1,int} &= \sum_{n=0}^{p-1} c_{1,v,p,n+1} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\mu_-} + \sum_{n=-1}^{p-1} c_{0,n+2} \frac{1}{\mu_-} \partial_\theta \check{k}_{rec,int}^{n+2,n+1}(r, \pi), \end{aligned}$$

on en déduit le développement de  $\check{U}_{2,\pm}$  pour  $r$  petit et  $p$  donné :

$$\chi \check{U}_{2,\pm} = \sum_{n=0}^{p-1} c_{1,v,p,n+1}^{cl} \check{k}_{rec,\pm}^{n+1,n} + \sum_{n=-1}^{p-1} c_{0,n+2} \check{k}_{rec,+}^{n+2,n} + o(r^{p-1}).$$

- Le champ intérieur vérifie alors le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \check{u}_{2,int} = 0 \text{ dans } Q_{int}, \\ u_{2,int} = \frac{1}{\mu_\pm} \frac{\partial u_{1,int}}{\partial y} = \sum_{n=0}^{p-1} c_{1,v,p,n+1}^{cl} \check{k}_{rec,\pm}^{n+1,n} + \sum_{n=-1}^{p-1} c_{0,n+2} \check{k}_{rec,+}^{n+2,n} + o(r^{p-1}), \\ \check{u}_{2,int} \text{ se comporte comme } \frac{1}{r} (\frac{r}{\delta} (\check{k}_{var,int}^{1,-1}(\frac{r}{\delta}, \theta) + \check{k}_{rec,int}^{1,-1}(\frac{r}{\delta}, \theta))). \end{array} \right.$$

Mais

$$\frac{1}{r} \check{k}_{rec,int}^{1,-1}(\frac{r}{\delta}, \theta) = \check{k}_{rec,int}^{1,-1}(r, \theta) - \frac{1}{r} \ln \delta \frac{C^2}{\pi^2} \sin(\theta).$$

Ce terme fait partie du noyau du problème extérieur. On peut donc chercher  $u_{2,int}$  sous la forme d'une somme d'un terme variationnel et d'une somme de termes récurrents :

$$\begin{aligned} u_{2,int} &= u_{2,int,var,p} + c_{0,-1} (\mathcal{F}_{cl}^* (\frac{\ln \delta C^2}{r\pi^2} \sin \theta) + \mathcal{F}_{cl}^* (\frac{c_{1,-1,var}^{cp}}{r} \sin \theta)) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{p-1} c_{1,v,p,n+1}^{cl} \mathcal{F}_{cl}^* (\check{k}_{rec,int}^{n+1,n}) + \sum_{n=-1}^{p-1} c_{0,n+2} \mathcal{F}_{cl}^* (\check{k}_{rec,int}^{n+2,n}). \end{aligned}$$

On trouve le développement de  $\check{u}_{2,int}$  pour  $r$  grand et  $p$  donné :

$$\begin{aligned} \chi \check{u}_{2,int} &= c_{0,1} ((\frac{\ln \delta C^2}{r\pi^2} \sin \theta) + \frac{c_{1,-1,var}^{cp}}{r} \sin \theta) + \check{k}_{rec,int}^{1,1}(r, \theta) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{p-1} c_{1,v,p,n+1}^{cl} \check{k}_{rec,int}^{n+1,n} + \sum_{n=0}^{p-1} c_{0,n+2} \check{k}_{rec,int}^{n+2,n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{p-1} c_{2,v,p,n}^{cl} \sin(n\theta) r^n + o(r^{p-1}). \end{aligned}$$

Voici finalement le développement de  $u_2$  près de  $G^m$  :

$$bu_2 = c_{0,1} \left( \check{k}_{rec}^{1,-1} - \check{k}_{rec}^{-1,-1} \left( \frac{\ln \delta C^2}{\pi^2} + c_{1,-1, var}^{cp} \right) \right) \quad (\text{B.4.21})$$

$$+ \sum_{n=0}^{p-1} c_{1,v,p,n+1}^{cl} \check{k}_{rec}^{n+1,n} + \sum_{n=0}^{p-1} c_{0,n+2} \check{k}_{rec}^{n+2,n} + \sum_{n=1}^{p-1} c_{2,v,p,n}^{cl} \check{k}_{rec}^{n,n} + o(r^{p-1}). \quad (\text{B.4.22})$$

- Champ proche : les équations vérifiées par le champ proche sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U_2 = 0, \\ U_2(X, 0^+) = U_2(X, 0^-), \\ \mu^\pm \frac{\partial U_2}{\partial Y}(X, 0^-) = \frac{\partial U_2}{\partial Y^2}(X, 0^+), \\ U_2(0^+, Y) = U_2(0^-, Y), \\ \mu^+ \frac{\partial U_2(0^+, Y)}{\partial X} = \mu^- \frac{\partial U_2(0^-, Y)}{\partial X}, \\ U_2(X, -1) = 0, \\ \check{U}_2 \text{ se comporte comme } R^2 \check{U}_{2,2} + R \check{U}_{2,1} \text{ quand } R \text{ tend vers } +\infty. \end{array} \right. \quad (\text{B.4.23})$$

De plus, les conditions de raccord imposent

$$\check{U}_{2,2}(R, \theta) = \check{u}_{0,2}(R\delta, \theta) = c_{0,2} \frac{\check{k}_{rec}^{2,2}}{(\delta R^2)}(R\delta, \theta),$$

$$\check{U}_{2,1}(R, \theta) = \check{u}_{1,1}(R\delta, \theta) = \frac{c_{0,2} \check{k}_{rec}^{2,1} + \check{k}_{1,v,p,1}^{cl}}{\delta R}(R\delta, \theta).$$

Or

$$R^2 \frac{\check{k}_{rec,int}^{2,2}}{(\delta R)^2}(R\delta, \theta) = \check{k}_{rec,int}^{2,2}(R, \theta),$$

$$R^2 \frac{\check{k}_{rec,\pm}^{2,2}}{(\delta R)^2}(R\delta, \theta) = 0 = \check{k}_{rec,\pm}^{2,2}(R, \theta),$$

$$R \left( \frac{\check{k}_{rec,\pm}^{2,1}}{\delta R}(R\delta, \theta) \right) = \check{k}_{rec,pm}^{2,1}(R, \theta) + \ln \delta R c_{2,2,1}^{CP} \sin(\theta),$$

$$R \left( \frac{\check{k}_{rec,int}^{2,1}}{\delta R}(R\delta, \theta) \right) = \check{k}_{rec,int}^{2,1}(R, \theta) + \ln \delta R c_{2,2,1}^{CP} \sin(\theta).$$

On obtient alors le comportement de  $\check{U}_2$  pour  $R$  grand :

$$\check{U}_2 = c_{0,2}(\check{k}_{rec}^{2,2} + \check{k}_{rec}^{2,1} + \check{k}_{rec}^{2,0}) + c_{1,v,p,1}(\check{k}_{rec}^{1,1} + \check{k}_{rec}^{1,0}) + c_{0,2}(c_{2,1,1}^{CP} \ln \delta \check{k}_{rec}^{1,1}) + o(R^0). \quad (\text{B.4.24})$$

## B.5 Condition Approchée

### B.5.1 Validation partielle de la condition approchée d'ordre 1

Soit  $v_\delta$  la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v^\delta = f \text{ dans } \Omega, \\ v^\delta(x, 0) + \frac{\delta}{\mu^\pm} \frac{\partial v^\delta}{\partial n} = 0 \text{ sur } G. \end{array} \right. \quad (\text{B.5.1})$$

Ce problème approché ne prend pas en compte les singularités qui apparaissent au niveau de  $(0,0)$  du fait de la discontinuité de  $\mu$ .

On cherche le développement raccordé de  $v^\delta$  :

$$v^\delta = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n v_n(r, \theta) \text{ loin du point } (0,0), \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^n V_n\left(\frac{r}{\delta}, \theta\right) \text{ autour du point } (0,0). \end{cases}$$

On souhaite comparer  $v_n$  avec  $u_n$  (champ lointain du problème exact) ainsi que  $V_n$  et  $U_n$  (champ proche du problème exact). On obtient :

- $v_0 = u_0$  et  $v_1 = u_1$  mais  $v_2 \neq u_2$ .
- $V_0 = U_0 = 0$  mais  $V_1 \neq U_1$

On sait qu'au voisinage de  $(0,0)$ , le champ  $u_0$  peut être décomposé en série de Fourier :

$$u_0(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_{0,n} r^n \sin(n\theta)$$

On sait également que  $U_1 = c_{0,1} \mathcal{U}_1$ , dans lequel  $\mathcal{U}_1$  est le profil exact :  $\mathcal{U}_1$  vérifie le problème suivant posé dans la géométrie normalisée ( $Q_+^1 \cup Q_-^1$  est la bande normalisée) :

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathcal{U}_1 = 0 & \text{dans } Q_{int} \cup Q_+^1 \cup Q_-^1, \\ [\mu \partial_n \mathcal{U}_1] = [\mathcal{U}_1] = 0 & \text{sur } G_m^1 \cup G, \\ \mathcal{U}_1 \sim R \sin(\theta) & \text{quand } R \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

On peut montrer que  $V_1 = c_{0,1} \mathcal{V}_1$  où  $\mathcal{V}_1$  est appelé profil approché :

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{V}_1 = 0, \\ \mathcal{V}_1 + \frac{1}{\mu^\pm} \partial_n \mathcal{V}_1 = 0 & \text{sur } G, \\ \mathcal{V}_1 \sim R \sin(\theta) & \text{quand } R \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (\text{B.5.2})$$

On peut montrer le résultat suivant :

**Proposition B.5.1.**

$$\mathcal{U}_1 - \mathcal{V}_1 \sim \frac{1}{R} (\mathcal{L}_{-1}(\mathcal{U}_1) - \mathcal{L}_{-1}(\mathcal{V}_1)) \quad \text{quand } R \rightarrow \infty, \quad (\text{B.5.3})$$

où  $\mathcal{L}_{-1}(\mathcal{U}_1) = c_{-1}^e \sin(\theta)$  et  $\mathcal{L}_{-1}(\mathcal{V}_1) = c_{-1}^a \sin(\theta)$ .

De plus on a les estimations d'erreurs suivantes :

$$\|\nabla(u^\delta - v^\delta)\|_{L^2(Q_{int})} \leq C\delta, \quad (\text{B.5.4})$$

$$\|u^\delta - v^\delta\|_{L^2(Q_{int})} \leq C\delta^2, \quad (\text{B.5.5})$$

$$\forall R_0 > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall \delta < \delta_0, \|u^\delta - v^\delta\|_{H^1(Q_{int} \setminus B_{R_0})} \leq C\delta^2. \quad (\text{B.5.6})$$

où  $B_{R_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_0\}$  et  $C$  est une constante indépendante de  $\delta$ .

## B.5.2 Ajout d'un terme correcteur

Pour obtenir une condition approchée plus précise, l'idée est de corriger  $v^\delta$  par un correcteur  $\Pi^\delta(v^\delta)$  pour que le comportement de  $\tilde{v}^\delta = v^\delta + \Pi^\delta$  loin du point  $(0,0)$  soit proche de celui de  $u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2$ .

Comme  $v^\delta = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 v_2$ , il suffit de supprimer  $v_2$  et de le remplacer par  $u_2$  : on sait que  $u_2 - v_2$  vérifie :

$$\begin{cases} \Delta(u_2 - v_2) = 0 \text{ dans } Q_{int}, \\ u_2 - v_2 = 0 \text{ sur } G, \\ u_2 - v_2 \sim \frac{1}{R} c_{0,1} (\mathcal{L}_{-1}(\mathcal{U}_1) - \mathcal{L}_{-1}(\mathcal{V}_1)). \end{cases}$$

On introduit donc  $d_2$  unique solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta d_2 = 0 \text{ dans } Q_{int}, \\ d_2 = 0 \text{ sur } G, \\ d_2 \sim \frac{1}{R} (\mathcal{L}_{-1}(\mathcal{U}_1) - \mathcal{L}_{-1}(\mathcal{V}_1)). \end{cases}$$

Ainsi,  $v^\delta + \delta^2 c_{0,1} d_2$  se comporte comme  $u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2$ .

Il faut maintenant estimer  $c_{0,1}$  en fonction de  $v^\delta$ . On remarque que, pour  $r \leq R_0$  donné (il faut se placer en dehors du support de  $f$  pour que la décomposition en série de Fourier soit valide),

$$r c_{0,1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_0(r, \theta) \sin(r\theta) d\theta$$

Or, pour  $\delta$  assez petit, il existe  $r^* \leq R_0$  tel que  $v^\delta(r, \theta) = u_0(r, \theta) + O(\delta)$ .

Ainsi,

$$c_{0,1} = \frac{1}{\pi r^*} \int_0^\pi v^\delta(r, \theta) \sin(r\theta) d\theta + O(\delta).$$

Finalement on choisit donc

$$\Pi^\delta(v^\delta) = \delta^2 d_2 \left( \frac{1}{\pi r^*} \int_0^\pi v^\delta(r, \theta) \sin(r\theta) d\theta \right).$$

La fonction  $\tilde{v}^\delta$  approche donc bien les trois premiers termes du champs lointain du développement asymptotique de  $u^\delta$ .

$$\tilde{v}^\delta = v^\delta + \delta^2 d_2 \left( \frac{1}{\pi r^*} \int_0^\pi v^\delta(r, \theta) \sin(r\theta) d\theta \right).$$

On a donc bien obtenue la précision souhaitée :

$$\forall R_0 > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall \delta < \delta_0, \|u^\delta - \tilde{v}^\delta\|_{H^1(Q_{int} \setminus B_{R_0})} \leq C\delta^3. \quad (\text{B.5.7})$$

**Remarque B.5.2.** Cette condition approchée n'est pas vraiment satisfaisante puisqu'elle n'est pas calculée en une fois : on calcule d'abord  $v^\delta$  que l'on corrige par la suite à l'aide de  $d$ . La construction de conditions approchées d'ordre supérieur reste un problème que l'on ne sait pas traiter.

## B.6 Annexe : construction de l'opérateur Neumann To Dirichlet en champ proche

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta U = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial Y} = g, \\ U(X, -1) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.6.1})$$

L'objectif est d'exprimer  $U(X, 0)$  en fonction de  $\frac{\partial U}{\partial Y}$  quand  $U$  et  $g$  sont des séries formelles.

On suppose que  $g = R^n g_n(\ln R)$  et on cherche  $U$  sous la forme

$$U(R, Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} R^{n-k} U_{n-k}(\ln R, Y).$$

On a alors,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_{n-k}}{\partial Y^2} = -(n-k+2)(n-k+1)U_{n-k+2} - (2n-2k+5)\partial_R U_{n-k+2} - \partial_{R^2}^2 U_{n-k+1}, \\ U_{n-k}(\ln R, -1) = 0, \\ \frac{\partial U_{n-k}}{\partial \theta} = \delta_0^k g_n(\ln R). \end{cases} \quad (\text{B.6.2})$$

**Famille  $d_i$**

On définit la famille  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} = 0, \\ v_0'(0) = 1, \\ v_0(-1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta^2} = -v_{i-1}, \\ v_i'(0) = 0, \\ v_i(-1) = 0. \end{cases}$$

**Expression de  $U_{n-k}$**

Soit  $g$  appartenant à  $\mathbb{P}_{\log}$ , on définit l'opérateur  $T_{n-2k}$  par

$$T_{n-2k} : \begin{cases} \mathbb{P}_{\log} \rightarrow \mathbb{P}_{\log}, \\ g \mapsto T_{n-2k}(g) = \begin{cases} (n-k+2)(n-k+1)g + (2n-2k+5)\partial_R g + \partial_{R^2}^2 g & \forall k \geq 1, \\ g & \text{si } k = 0, \end{cases} \end{cases}$$

On montre par récurrence que la solution du problème B.6.2 est à variables séparées et est donnée par

$$\begin{cases} u_n(\ln R, Y) = g_n(\ln R)v_0(Y), \\ u_{n-2k}(\ln R, Y) = ((T_{n-2k})(T_{n-2k+2}) \cdots (T_{n-2}))g_n(\ln R)v_k(Y), \end{cases}$$

Finalement,

$$U(R, Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{r^{2k}} (R^n T_{n-2k}(T_{n-2k+2} \cdots T_{n-2} T_n(g_n))) v_k(Y).$$

On peut ensuite montrer (par récurrence) le résultat suivant :

$$R^n (T_{n-2k}(T_{n-2k+2} \cdots T_{n-2} g_n)) = R^{2k} \frac{\partial^{2k} g}{\partial R^{2k}} \quad (\text{B.6.3})$$

Finalement,

$$\begin{aligned} U(R, 0) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{r^{2k}} P_{2k} g \\ P_{2k}(g) &= R^{2k} \frac{\partial^{2k} g}{\partial R^{2k}} v_k(0) \text{ (opérateur homogène)} \end{aligned} \quad (\text{B.6.4})$$

**Opérateur Neumann to Dirichlet**

On utilise maintenant les conditions de sauts suivantes :

$$\begin{aligned} U_{int}(X, 0) - U_+(X, 0) &= 0, \\ \frac{\partial U_{int}(X, 0)}{\partial Y} - \mu^\pm \frac{\partial U_\pm(X, 0)}{\partial Y} &= 0. \end{aligned}$$

On passe maintenant aux coordonnées polaires et on obtient les relations suivantes :

$$U_{int}(R, 0) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{R^k} P_k^+ \left( \frac{1}{R} \frac{\partial U_{int}(R, 0)}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{B.6.5})$$

$$P_k^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair,} \\ -\frac{1}{\mu_+} P_k & \text{si } k \text{ pair,} \end{cases}$$

$$U_{int}(R, \pi) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{R^k} P_k^- \left( \frac{1}{R} \frac{\partial U_{int}(R, \pi)}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (\text{B.6.6})$$

$$P_k^- = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair,} \\ \frac{1}{\mu_-} P_k & \text{si } k \text{ pair.} \end{cases}$$



# Bibliographie

- [AA96a] T. Abboud and H. Ammari. Diffraction at a curved grating : approximation by an infinite plane grating. *J. Math. Anal. Appl.*, 202(3) :1076–1100, 1996.
- [AA96b] T. Abboud and H. Ammari. Diffraction at a curved grating : TM and TE cases, homogenization. *J. Math. Anal. Appl.*, 202(3) :995–1026, 1996.
- [ABDG98] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 21(9) :823–864, 1998.
- [AC91a] M. Artola and M. Cessenat. Diffraction d’une onde électromagnétique par une couche composite mince accolée à un corps conducteur épais. I. Cas des inclusions fortement conductrices. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(5) :231–236, 1991.
- [AC91b] M. Artola and M. Cessenat. Scattering of an electromagnetic wave by a slender composite slab in contact with a thick perfect conductor. II. Inclusions (or coated material) with high conductivity and high permeability. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 313(6) :381–385, 1991.
- [Ach89] Y. Achdou. Etude de la réflexion d’une onde électromagnétique par un métal recouvert d’un revêtement métallisé. Technical report, INRIA, 1989.
- [Ada75] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [ALG99] H. Ammari and C. Latiri-Grouz. Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(4) :673–693, 1999.
- [All02] G. Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [AV96] A. Alonso and A. Valli. Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of  $H(\text{rot}; \Omega)$  and the construction of an extension operator. *Manuscripta Math.*, 89(2) :159–178, 1996.
- [BB02] Nathalie Bartoli and Abderrahmane Bendali. Robust and high-order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer. *IMA J. Appl. Math.*, 67(5) :479–508, 2002.
- [BBBCD97] F. Ben Belgacem, C. Bernardi, M. Costabel, and M. Dauge. Un résultat de densité pour les équations de Maxwell. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(6) :731–736, 1997.
- [BBM10] E. Bonnetier, D. Bresch, and V. Milisic. A priori convergence estimates for a rough Poisson-Dirichlet problem with natural vertical boundary conditions. *Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, pages 105–134, 2010.
- [BCS02] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen. On traces for  $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$  in Lipschitz domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 276(2) :845–867, 2002.
- [Bel10] J.B. Bellet. Diffusion d’ondes électromagnétiques par la peau. In *canum*, 2010.
- [Ben07] A. Bendali. Développement asymptotiques singuliers, 2007.
- [BHT<sup>+</sup>09] A. Bendali, A. Huard, A. Tizaoui, S. Tordeux, and J.P. Vila. Asymptotic expansions of the eigenvalues of a 2-D boundary-value problem relative to two cavities linked by a hole of small size. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(19-20) :1147–1152, 2009.
- [BL96] A. Bendali and K. Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(6) :1664–1693, 1996.
- [BLP78] A. Bensoussan, J.L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [BM06] D. Bresch and V. Milisic. High order multi-scale wall-laws, part I : The periodic case. *Arxiv preprint math/0611083*, 2006.



- [Bre99] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [BS87] M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak.  $L_2$ -theory of the Maxwell operator in arbitrary domains. *Uspekhi Mat. Nauk*, 42(6(258)) :61–76, 247, 1987.
- [CCDV06] G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge, and G. Vial. Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. *Asymptot. Anal.*, 50(1-2) :121–173, 2006.
- [CD00] M. Costabel and M. Dauge. Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 151(3) :221–276, 2000.
- [CDN99] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of Maxwell interface problems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(3) :627–649, 1999.
- [CDP10] G. Caloz, M. Dauge, and V. Péron. Uniform estimates for transmission problems with high contrast in heat conduction and electromagnetism. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pages 555–572, 2010.
- [CHH] S. Chun, H. Haddar, and J.S. Hesthaven. High-order accurate thin layer approximations for time-domain electromagnetics. part ii : Transmission layers.
- [Cia05] P. Ciarlet, Jr. Augmented formulations for solving Maxwell equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(2-5) :559–586, 2005.
- [CJP09a] I. Ciuperca, M. Jai, and C. Poinard. Approximate transmission conditions through a rough thin layer. the case of the periodic roughness. Technical report, INRIA, 2009.
- [CJP09b] I. Ciuperca, M. Jai, and C. Poinard. Two-scale analysis for very rough thin layers. an explicit characterization of the polarization tensor. Technical report, INRIA, 2009.
- [CJP10] I. S. Ciuperca, M. Jai, and C. Poinard. Approximate transmission conditions through a rough thin layer : the case of periodic roughness. *European J. Appl. Math.*, 21(1) :51–75, 2010.
- [CK98] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [Cla08] X. Claeys. *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d’ondes par des fils minces*. PhD thesis, Université Versailles St Quentin, 2008.
- [CM98] G. Cohen and P. Monk. Gauss point mass lumping schemes for Maxwell’s equations. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 14(1) :63–88, 1998.
- [Coh02] G. Cohen. *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Scientific Computation. Springer-Verlag, Berlin, 2002. With a foreword by R. Glowinski.
- [Cos90] M. Costabel. A remark on the regularity of solutions of Maxwell’s equations on Lipschitz domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 12(4) :365–368, 1990.
- [DHJ06] M. Durufle, H. Haddar, and P. Joly. Higher order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems. *Comptes Rendus Physique*, 7(5) :533–542, 2006.
- [Dri03] D. Drissi. *Simulation des silencieux d’échappement par une méthode d’éléments finis homogénéisés*. PhD thesis, Université de Tunis, 2003.
- [Dub00] F. Dubois. Du tourbillon au champ de vitesse, lectures notes. Technical report, 2000.
- [Dur06] M. Duruflé. Montjoie’s user guide, septembre 2006.
- [EN93] B. Engquist and J.C. Nédélec. Effective boundary conditions for acoustic and electro-magnetic scattering in thin layers. Technical report, Ecole polytechnique, 1993.
- [FG97] P. Fernandes and G. Gilardi. Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 7(7) :957–991, 1997.
- [Fli09] S. Fliss. *Etude mathématique et numérique de la propagation des ondes dans des milieux périodiques localement perturbés*. PhD thesis, Ecole polytechnique, 2009.
- [Gad03] R. R. Gadyl’shin. The method of matching asymptotic expansions in a singularly perturbed boundary value problem for the Laplace operator. *Sovrem. Mat. Prilozh.*, (5, Asimptot. Metody Funkts. Anal.) :3–32, 2003.

- [GR86] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [HJ02] H. Haddar and P. Joly. Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and nonlinear coatings. *J. Comput. Appl. Math.*, 143(2) :201–236, 2002.
- [HJN05] H. Haddar, P. Joly, and H.M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : the scalar case. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(8) :1273–1300, 2005.
- [HJN08] H. Haddar, P. Joly, and H.M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles : the case of Maxwell’s equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(10) :1787–1827, 2008.
- [HLP88] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1952 edition.
- [HM75] R. Harrington and J. Mautz. An impedance sheet approximation for thin dielectric shells. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 23(4) :531–534, 1975.
- [IDZ03] A. M. Il’in, A. R. Danilin, and S. V. Zakharov. Application of the method of matching asymptotic expansions to the solution of boundary value problems. *Sovrem. Mat. Prilozh.*, (5, Asimptot. Metody Funkts. Anal.) :33–78, 2003.
- [Il’92] A. M. Il’in. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, volume 102 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. Translated from the Russian by V. Minachin [V. V. Minakhin].
- [JPRT96] P. Joly, C. Poirier, J. E. Roberts, and P. Trounev. A new nonconforming finite element method for the computation of electromagnetic guided waves. I. Mathematical analysis. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(4) :1494–1525, 1996.
- [JS08] P. Joly and A. Semin. Construction and analysis of improved Kirchoff conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots. In *Paris-Sud Working Group on Modelling and Scientific Computing 2007–2008*, volume 25 of *ESAIM Proc.*, pages 44–67. EDP Sci., Les Ulis, 2008.
- [JT06] P. Joly and S. Tordeux. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots. I. The asymptotic expansion. *Multiscale Model. Simul.*, 5(1) :304–336 (electronic), 2006.
- [JT08] P. Joly and S. Tordeux. Matching of asymptotic expansions for waves propagation in media with thin slots. II. The error estimates. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 42(2) :193–221, 2008.
- [KM95] A. Kirsch and P. Monk. A finite element/spectral method for approximating the time-harmonic Maxwell system in  $\mathbf{R}^3$ . *SIAM J. Appl. Math.*, 55(5) :1324–1344, 1995.
- [KM98] A. Kirsch and P. Monk. Corrigendum : “A finite element/spectral method for approximating the time-harmonic Maxwell system in  $\mathbf{R}^3$ ” [*SIAM J. Appl. Math.* **55** (1995), no. 5, 1324–1344; MR1349312 (96j :65124)]. *SIAM J. Appl. Math.*, 58(6) :2024–2028 (electronic), 1998.
- [KN85] M. Krizek and P. Neittaanmaki. Solvability of a first order system in three-dimensional nonsmooth domains. *Apl. Mat.*, 30(4) :307–315, 1985.
- [Kri84] M. Krizek. On the validity of Friedrichs’ inequalities. *Math. Scand.*, 54(1) :17–26, 1984.
- [Leo48] M.A. Leontovitch. *Approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of good conductor*. V.A. Fock ed. N.A. Logan, 1948.
- [Mak08] A. Makhlof. *Justification et amélioration de modèles d’antenne patch par la méthode des développements asymptotiques raccordés*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2008.
- [MNP00] V. Maz’ya, S. Nazarov, and B. Plamenevskij. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. I*, volume 111 of *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. Translated from the German by Georg Heinig and Christian Posthoff.

- [Mon03] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2003.
- [MV07] A.L. Madureira and F. Valentin. Asymptotics of the Poisson problem in domains with curved rough boundaries. *SIAM J. Math. Anal.*, 38(5) :1450–1473 (electronic), 2006/07.
- [Néd01] J.C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*, volume 144 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2001. Integral representations for harmonic problems.
- [PBB06] J.R. Poirier, A. Bendali, and P. Borderies. Impedance boundary conditions for the scattering of time-harmonic waves by rapidly varying surfaces. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 54(3) :995–1005, 2006.
- [PBBT09] J.-R. Poirier, A. Bendali, P. Borderies, and S. Tournier. High order asymptotic expansion for the scattering of fast oscillating periodic surfaces. In *proceedings of waves 2009*, 2009.
- [Per09] V. Peron. *Modélisation mathématique des phénomènes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2009.
- [Pic81] R. Picard. On the boundary value problems of electro-magnetostatics. *SFB 72, preprint 442*, 1981.
- [Poi94] C. Poirier. *Guides d'ondes électromagnétiques : analyse mathématique et numérique*. PhD thesis, Université de Nantes, 1994.
- [RL10] E. Rohan and V. Lukes. Homogenization of the acoustic transmission through a perforated layer. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(6) :1876–1885, 2010.
- [Sar82] J. Saranen. On an inequality of Friedrichs. *Math. Scand.*, 51(2) :310–322 (1983), 1982.
- [Sch08] K. Schmidt. *High-order numerical modelling of highly conductive thin sheets*. PhD thesis, ETH Zurich, 2008.
- [Sem10] A. Semin. *Propagation d'ondes dans des jonctions de fentes minces*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2010.
- [SP80] E. Sánchez-Palencia. *Nonhomogeneous media and vibration theory*, volume 127 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [SP85] E. Sánchez-Palencia. Un problème d'écoulement lent d'une fluide visqueux incompressible au travers d'une paroi finement perforée. Technical report, Electricité de France, 1985.
- [ST10] K. Schmidt and S. Tordeux. Asymptotic modelling of conductive thin sheets. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 61(4) :603–626, 2010.
- [SV95] T.B.A. Senior and J.L. Volakis. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. The Institution of Electrical Engineers, 1995.
- [Tle09] M. Tlemcani. A Two-Scale Asymptotic Analysis of a Time-Harmonic Scattering Problem with a Multi Layered Thin Periodic Domain. *Communications in Computational Physics*, 6 :758–776, 2009.
- [Tor04] S. Tordeux. *Méthode asymptotiques pour la propagation des ondes dans des milieux comportant des fentes*. PhD thesis, Université Versailles St Quentin, 2004.
- [Tre07] F. Treysède. Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 121 :3398, 2007.
- [Tre08] F. Treysède. Elastic waves in helical waveguides. *Wave motion*, 45(4) :457–470, 2008.
- [TVD06] S. Tordeux, G. Vial, and M. Dauge. Matching and multiscale expansions for a model singular perturbation problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(10) :637–642, 2006.
- [VD64] M. Van Dyke. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 8. Academic Press, New York, 1964.
- [Via03] G. Vial. *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, Paris, 2003.
- [Wal58] R.A. Waldron. A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 11(4) :438, 1958.

- 
- [Web80] Ch. Weber. A local compactness theorem for Maxwell's equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2(1) :12-25, 1980.
- [Zeb94] A. Zebic. *Conditions de frontière équivalentes en électromagnétisme*. PhD thesis, Université Paris 6, 1994.



---

**Résumé :** dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution des équations de Maxwell dans une structure périodique constituée d'un anneau mince de matériau diélectrique de rayon moyen  $r_*$  à l'intérieur duquel s'enroulent deux nappes de fils hélicoïdaux. L'épaisseur de l'anneau et la distance entre deux fils consécutifs sont du même ordre de grandeur  $\delta$  et nous supposons que  $\delta$  est bien inférieur à la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde incidente ainsi qu'au rayon moyen  $r_*$ . La présence des deux échelles  $\delta$  et  $\lambda$  rend les simulations numériques directes difficiles (il est alors nécessaire de mailler la structure à l'échelle du fil). C'est pourquoi nous construisons des modèles approchés dans lesquels l'anneau périodique est remplacé par une condition de transmission posée sur l'interface médiane  $\Gamma$ . La résolution du modèle approché par une méthode d'éléments finis est bien moins coûteuse que celle du problème exact car il n'y a plus besoin de mailler les fils. La construction des modèles approchés repose sur un développement asymptotique de la solution en fonction du petit paramètre  $\delta$ . Nous utilisons une méthode couplant les techniques d'homogénéisation et des développements asymptotiques raccordés. Les conditions de transmission approchées se construisent alors à l'aide du développement asymptotique tronqué. Nous accordons une attention particulière à la stabilisation des modèles approchés ainsi qu'à leur justification théorique. Enfin, nous validons nos modèles par des simulations numériques.

**Mots clés :** développements asymptotiques raccordés, homogénéisation périodique, conditions de transmission approchées, équations de Maxwell, équation de Helmholtz.

---

---

**Abstract :** This work is dedicated to the study of asymptotic models associated with electromagnetic waves scattering from a complex periodic ring. This structure is made of a dielectric ring which contains two layers of wires winding around it. We are interested in situations where both the thickness of the ring and the distance between two consecutive wires are very small compared to the wavelength  $\lambda$  of the incident wave and the diameter of the ring. One easily understands that in these cases, numerical computation of the solution would become prohibitive as the small scale parameter (denoted by  $\delta$ ) goes to 0, since the mesh used needs to accurately follow the geometry of the heterogeneities. In order to overcome this difficulty, we shall derive approximate models where the periodic ring is replaced by effective transmission conditions on the interface  $\Gamma$ . The numerical discretization of approximate problems is expected to be much less expensive than the exact one, since the mesh no longer needs to be constrained by the small scale. From a technical point of view, these approximate models are derived from the asymptotic expansion of the solution with respect to the small parameter  $\delta$ . Our method mixes matched asymptotic expansions and homogenization. We build the approximate transmission conditions from the truncated expansion. We pay particular attention to the stabilization of the effective transmission conditions. Error estimates and numerical simulations are carried out to validate the accuracy of the models.

**Keywords :** matched asymptotic expansions, periodic homogenization, approximate transmission conditions, Maxwell equations, Helmholtz equation.

---