



**HAL**  
open science

## Résultant déterminantiel et applications

Elimane Ba

► **To cite this version:**

Elimane Ba. Résultant déterminantiel et applications. Algèbre commutative [math.AC]. Université Nice Sophia Antipolis, 2011. Français. NNT: . tel-00651722

**HAL Id: tel-00651722**

**<https://theses.hal.science/tel-00651722v1>**

Submitted on 14 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS – UFR Sciences

École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

# THÈSE

pour obtenir le titre de

**Docteur en Sciences**

de l'Université de Nice Sophia Antipolis

Spécialité :

MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue par

**Elimane BA**

## Résultant déterminantiel et Applications

Thèse dirigée par **Mohamed ELKADI**

soutenue le 12 décembre 2011

devant le jury composé de :

Mme	Mariemi ALONSO	Université Complutense de Madrid	Examineur
M.	Laurent BUSÉ	INRIA Sophia-Antipolis	Examineur
M.	Laureano GONZALEZ VEGA	Université de Cantabria	Rapporteur
M.	Mohamed ELKADI	Université Nice	Directeur de thèse
M.	Alain YGER	Université de Bordeaux 1	Rapporteur

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné  
Université de Nice Sophia Antipolis  
Parc Valrose-06108 NICE Cedex 2-France

Elimane Ba

---

# RÉSULTANT DÉTERMINANTIEL ET APPLICATIONS

---

# Remerciements

Ce travail doit beaucoup aux personnes qui m'ont entouré et soutenu durant ces années. Je tiens ici à leur exprimer ma profonde gratitude.

Tout d'abord à Mohamed Elkadi mon directeur de thèse, pour son écoute, pour son soutien, pour la confiance dont il a fait preuve envers moi. Ses idées, ses conseils et le dévouement avec lequel il a encadré ma thèse ont grandement contribué à la réussite de ce travail. Je lui adresse un merci sincère pour tout ce qu'il m'a apporté.

A Laurent Busé qui a grandement inspiré ce travail en me faisant découvrir la théorie de l'élimination lors d'un cours qu'il a dispensé pendant mon année de master. Il a toujours été disponible pour d'enrichissantes discussions et j'ai pu bénéficier de ses précieux conseils pendant toutes ses années.

A André Galligo qui a supervisé ce travail et m'a fait profiter de ses idées, son expérience, sa gentillesse et son enthousiasme.

A Alain Yger et Laureano Gonzalez Vega qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de cette thèse. Ils ont consacré beaucoup de temps à la relecture de ce manuscrit et m'ont donné plusieurs indications et suggestions précieuses. Je remercie aussi Mariemi Alonso d'avoir accepté de participer au jury.

A tous mes collègues et amis doctorants du laboratoire avec qui j'ai passé de très bons moments : les anciens Michel, Thomas (Dr Mig), Pierre, Nico, Cédric, Damien Martin Leming, Thang, Soliman, Ansarollah, Hugues et les nouveaux Brice, Gael, Giovanni... pour leur aide quotidienne et leur amitié. J'ai une pensée particulière pour mon frère en Syrie Sami qui m'a encouragé toutes ces années.

A tout le personnel du laboratoire chercheurs, enseignants, informaticiens et secrétaires qui nous permettent de travailler dans d'excellentes conditions et rendent l'ambiance vraiment agréable.

A tous mes professeurs que j'ai rencontrés pendant mon parcours universitaire qui m'ont fait découvrir et aimer les mathématiques.

Enfin, à ma famille en France et au Sénégal. Je pense à ma mère, mon frère, et Edwige qui m'ont soutenu depuis toujours. A mon oncle Demba Assane à Podor qui m'a toujours encouragé à faire des études et à mon regretté homonyme Elimane Kane. Je n'oublie pas Baba qui a toujours été un modèle pour moi, cette thèse lui est dédiée.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Le résultant déterminantiel</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>13</b>
1.1	Algèbre symétrique et algèbre extérieure . . . . .	13
1.1.1	Cas gradué . . . . .	15
1.2	Complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim . . . . .	16
1.2.1	Complexe de Koszul . . . . .	16
1.2.2	En partant du complexe de Koszul . . . . .	18
1.2.3	Complexe d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim . . . . .	19
1.2.4	Complexe d'Eagon-Northcott et profondeur . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Résultant bihomogène</b>	<b>23</b>
2.1	Idéal des formes d'inertie . . . . .	24
2.1.1	Nature des anneaux gradués $B_{\sigma_q}$ . . . . .	25
2.2	Cohomologie locale associée à des polynômes bihomogènes . . . . .	26
2.2.1	Cas principal . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Existence du résultant déterminantiel</b>	<b>33</b>
3.1	Idéal des formes d'inertie et résultant déterminantiel . . . . .	33
3.1.1	Notations et définitions . . . . .	33
3.1.2	Nature des anneaux gradués $B_{X_i}$ . . . . .	35
3.1.3	Cas où $f - g + 1 < n$ . . . . .	36
3.1.4	Cas principal . . . . .	39
3.2	Quelques propriétés du résultant . . . . .	42
3.2.1	Covariance à droite . . . . .	43
3.2.2	Covariance à gauche . . . . .	44
3.2.3	Changement de base . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Calcul du résultant déterminantiel</b>	<b>47</b>
4.1	Idéal résultant et annulateur . . . . .	47
4.2	Idéaux de Fitting et invariants de MacRae . . . . .	48
4.2.1	Invariants de Fitting . . . . .	49
4.2.2	Caractéristique d'Euler . . . . .	50
4.2.3	Invariant de MacRae . . . . .	51

4.2.4	Une approche constructive . . . . .	53
4.3	Régularité . . . . .	56
4.3.1	Sur la cohomologie locale . . . . .	56
4.3.2	Régularité de Castelnuovo-Mumford . . . . .	57
4.3.3	Application aux complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim . . . . .	58
4.4	Calcul du résultant déterminantiel . . . . .	61
4.4.1	Le résultant déterminantiel comme invariant de MacRae . . . . .	61
4.4.2	Degré du résultant déterminantiel . . . . .	65
4.5	Cas des formes linéaires . . . . .	68
4.6	Un cas pratique . . . . .	70
4.6.1	La matrice déterminantielle de Sylvester . . . . .	74

## **II Résultant et surfaces de Bézier 77**

<b>5</b>	<b>Résultants de Bernstein et applications 79</b>
5.1	Bases de Bernstein . . . . . 79
5.1.1	Cas univarié . . . . . 80
5.1.2	Algorithme de Casteljou . . . . . 81
5.1.3	Opérations classiques . . . . . 81
5.1.4	Cas de deux variables . . . . . 82
5.2	Matrice de Sylvester généralisée . . . . . 83
5.3	Problèmes d'intersection entre courbes et surfaces de Bézier . . . . . 86
5.3.1	Intersection courbe-surface . . . . . 87
5.3.2	Intersection surface-surface . . . . . 87
5.4	Matrice bézoutienne de Bernstein et résultant de Bernstein . . . . . 89
5.4.1	Matrice bézoutienne de Bernstein . . . . . 89
5.4.2	Construction de la matrice bézoutienne de Bernstein . . . . . 91
5.4.3	Définition du résultant en Bernstein . . . . . 94
5.5	Application aux problèmes d'intersection . . . . . 96
5.5.1	Intersection courbe-surface . . . . . 96
5.5.2	Intersection surface-surface . . . . . 97
5.5.3	Résoudre le système linéaire (5.25) . . . . . 98
5.5.4	Exemples . . . . . 100

# Introduction

Cette thèse s'inscrit dans la branche mathématique de la théorie de l'élimination, et plus précisément celle des résultants. Avec le développement de l'informatique et de l'algorithmique, la théorie de l'élimination s'est réveillée de près d'un demi-siècle d'agonie. En effet, pourtant sujette de l'attention particulière des géomètres algébristes du dix-neuvième siècle, elle succomba sous l'opprobre d'André Weil "Il faut éliminer l'élimination" vers la fin des années 1940. Situé au coeur de cette théorie, le résultant lui aussi banni de la recherche pendant près de quarante ans, est de nos jours devenu un domaine de recherche très actif, pour ses implications dans de nombreux domaines d'application notamment en CGAO (Conception Géométrique Assisté par Ordinateur).

La formulation la plus usuelle du résultant est celle dite de Sylvester, qui donne une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients pour que deux polynômes d'une variable aient une racine commune. En 1902, Macaulay généralise le résultant de Sylvester à  $n$  polynômes homogènes  $f_1, \dots, f_n$  en  $n$  variables,  $n \geq 2$ . Le résultant de Macaulay est un polynôme en les coefficients des  $f_i$  dont l'image par spécialisation dans un corps  $k$  est nulle si, et seulement si, les polynômes spécialisés dans  $k$  ont une racine commune dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_k^{n-1}$ .

Au début des années 1990, Jouanolou s'est intéressé au résultant de Macaulay [51, 52] en y apportant un formalisme faisant le parallèle entre l'aspect algébrique et l'aspect géométrique. Il a donné deux définitions de ce résultant, l'une géométrique (comme l'équation d'une hypersurface obtenue par la projection d'une variété d'incidence) et l'autre algébrique (comme le générateur d'un idéal principal). Le résultant de Macaulay s'est avéré être un outil très utile en géométrie algébrique effective [43, 34, 1, 45, 7, 44, 21, 36, 37], mais il est mis en défaut par des situations fréquemment rencontrées en pratique notamment lorsque les  $f_i$  ont des solutions communes qui s'expriment génériquement en leurs coefficients. Pour répondre à ce genre de questions de nouvelles formulations ont été introduites comme le résultant anisotrope, le résultant creux, le résultant résiduel [51, 54, 41, 19].

Le fait que le résultant de Macaulay soit nul est donc une condition nécessaire et suffisante pour que  $n$  polynômes homogènes admettent une racine commune non triviale, ou autrement dit pour que la matrice à une seule ligne et  $n$  colonnes  $(f_1 \dots f_n)$  ne soit pas de rang maximal en au moins un point après spécialisation des coefficients. Il est naturel de penser à la généraliser cette notion à une matrice de taille supérieure. Plus précisément, étant donnée une matrice  $M = (\varphi_{i,j})_{i,j}$  de polynômes homogènes de type  $g \times f$ , avec  $g < f$ , nous cherchons s'il existe une condition nécessaire et suffisante (si oui, la calculer explicitement) portant sur les coefficients des entrées de  $M$  pour que le rang de celle-ci ne



soit pas maximal en au moins un point après spécialisation dans un corps  $k$ . Autrement dit, nous nous intéressons à une condition nécessaire et suffisante pour que les mineurs  $P_1, \dots, P_{\binom{f}{g}}$  de  $M$  admettent une racine commune non triviale. Lorsqu'une telle condition existe, nous l'appellerons le résultant déterminantiel de la matrice  $M$ .

Dans une petite note non publiée, Lombardi s'est intéressé au résultant déterminantiel dans un cas particulier. Il suppose essentiellement que les polynômes  $\varphi_{i,j}$  de chaque colonne ont le même degré. Le cas général (i.e. lorsque les degrés des  $\varphi_{i,j}$  sont arbitraires) du résultant déterminantiel a été introduit récemment par Busé en adoptant un point de vue géométrique [20].

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude du résultant déterminantiel, et la seconde partie est motivée par des problèmes d'intersection des courbes et des surfaces de Bézier, et elle conduit à la construction des résultants dans les bases de Bernstein.

Le chapitre 1 de la thèse présente les outils d'algèbre commutative nécessaires à la définition du résultant déterminantiel. Nous rappelons la définition des algèbres symétriques et des algèbres extérieures à l'aide du produit tensoriel des modules, puis nous construisons les complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim que nous obtiendrons comme les deux premiers éléments d'une même famille de complexes définie à partir du complexe de Koszul.

Dans le chapitre 2, nous montrerons que le cas particulier du résultant déterminantiel considéré par Lombardi n'est autre que le résultant bihomogène d'un système de polynômes déduit de la matrice  $M$ . Le résultant plurihomogène fournit une condition nécessaire et suffisante pour que des polynômes plurihomogènes admettent une racine commune non triviale [57, 62, 4, 27, 63]. Nous le définirons de manière purement algébrique en suivant l'approche développée dans le chapitre suivant pour établir l'existence du résultant déterminantiel dans le cas général.

Dans le chapitre 3, nous généraliserons le travail de Busé à des anneaux factoriels, en suivant une approche algébrique inspirée par les travaux d'Hurwitz, Mc Coy, Van der Wearden, Jouanolou [49, 57, 64, 51]. Ce point de vue algébrique plus propice au calcul effectif permet de s'affranchir des hypothèses imposées par la géométrie sur le corps base et d'étudier le comportement du résultant par rapport aux coefficients des entrées de la matrice  $M$ . Cette approche consiste à étudier l'ensemble des formes d'inertie  $\mathcal{I}$  de l'idéal  $I = (P_1, \dots, P_{\binom{f}{g}})$  des mineurs maximaux de la matrice  $M$ , qui sont des conditions (seulement) nécessaires pour que  $M$  ne soit pas de rang maximal. L'idéal  $I$  est toujours contenu dans  $\mathcal{I}$ . Nous montrerons que si  $f - g + 1 < n$ , alors  $I = \mathcal{I}$ , c-à-d qu'il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante pourtant seulement sur les coefficients des entrées de  $M$  pour que son rang ne soit pas maximal. Puis, nous établirons dans le cas  $n = f - g + 1$  que l'idéal des formes d'inertie  $\mathcal{I}$  est non nul, premier et principal, et un générateur (convenablement choisi) de cet idéal sera le résultat déterminantiel. Nous établirons quelques unes des propriétés de ce résultant.

Le chapitre 4 est consacré au calcul explicite du résultant déterminantiel dans le cas principal ( $n = f + g - 1$ ). Nous exposerons d'abord les techniques homologiques dont nous aurons besoin, puis nous montrerons que ce résultant est en fait non seulement le

déterminant du complexe d'Eagon-Northcott mais aussi le déterminant du complexe de Buchsbaum-Rim. Cette approche nous permettra d'obtenir le résultant déterminantiel en calculant les mineurs de certaines matrices. L'utilisation du complexe de Buchsbaum-Rim permet d'obtenir le résultant déterminantiel sans avoir à calculer les mineurs maximaux de la matrice  $M$  et dans le "cas  $f = g + 1$ ", cas le plus fréquemment rencontré en pratique, comme le déterminant d'une matrice carrée qui est la généralisation de la matrice de Sylvester. Nous obtenons aussi des formules pour le degré du résultant résiduel qui généralise celles de Macaulay.

Dans la seconde partie de la thèse, nous étudierons des problèmes d'intersection des courbes et surfaces de Bézier qui sont fondamentaux en CGAO (Conception Géométrique Assistée par Ordinateur). Dans ce domaine d'application, les représentations des objets sont souvent données dans les bases de Bernstein. Pour effectuer des opérations sur ces objets, qui peuvent être réalisées en ayant recours à la théorie de l'élimination, on peut convertir ou reparamétriser ces représentations dans les bases monomiales et utiliser les formulations des résultants développées dans ces dernières bases. D'une part, cette approche crée de l'instabilité numérique, et d'autre part, il est bien connu que les bases de Bernstein sont plus stables numériquement [38, 39]. C'est pour cela qu'il est souhaitable de développer des outils d'élimination pour des données exprimées dans les bases de Bernstein qui permettent d'effectuer tous les calculs intermédiaires sans perte de stabilité. Dans le cas d'une variable, tout récemment Goldman et Winkler définissent le résultant de Sylvester, Bini et Gemignani le résultant de Bézout dans les bases de Bernstein [68, 70, 69, 9]. A notre connaissance, il n'existe pas de constructions de tels outils à plusieurs variables. Nous généraliserons le résultant du Sylvester (dans les bases de Bernstein) proposé dans [70] pour une matrice du type  $1 \times 2$  à une matrice de taille  $n \times (n + 1)$ , en construisant une matrice dont le déterminant sera le résultant déterminantiel de Bernstein. Puis, nous construirons des résultants adaptés aux problèmes d'intersection. Nous commençons par montrer que ces problèmes jouissent d'une structure particulière qui est dégénérée pour le résultant de Macaulay, et nous prouverons l'existence d'un résultant de Bernstein pour ces systèmes dégénérés. Ce résultant est une spécialisation d'un résultant anisotope que nous exprimerons dans des bases de Bernstein. Puis, nous montrerons comment calculer ce résultant de Bernstein en utilisant des matrices bézoutiennes structurées exprimées dans les bases de Bernstein. Enfin, nous appliquerons ces constructions aux problèmes d'intersection que nous ramènerons à la résolution de systèmes linéaires structurés. L'intersection d'une courbe et d'une surface de Bézier est ramenée à l'étude d'un système linéaire et celle de deux surfaces de Bézier à la résolution de plusieurs systèmes structurés associés seulement à deux matrices différentes mais similaires.

L'intérêt de ces constructions réside dans le fait que lorsque les données sont exprimées sous forme de Bernstein, nous pouvons appliquer la théorie de l'élimination à partir des coefficients de Bernstein sans avoir recours à des procédés de conversion ou de reparamétrisation afin d'éviter la croissance des coefficients des polynômes dans des bases monomiales.



# Première partie

## Le résultant déterminantiel



# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre préliminaire, nous rappelons la construction des complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim. Ces deux complexes seront utiles dans la définition et le calcul du résultant déterminantiel que nous étudierons dans les chapitres suivants. Nous les présentons comme les deux premiers éléments d'une famille de complexes obtenue à partir du complexe de Koszul. Ces deux complexes peuvent donc être considérés comme des généralisations du complexe de Koszul, c'est d'ailleurs ainsi que le complexe de Buchsbaum-Rim a été présenté dans [14]. Ce point de vue souligne le fait que le résultant déterminantiel que nous calculerons à l'aide des complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim est en fait une généralisation du résultant de Macaulay calculé à l'aide du complexe de Koszul.

Dans tout ce chapitre  $R$  désigne un anneau commutatif.

### 1.1 Algèbre symétrique et algèbre extérieure

Pour un morphisme de  $R$ -module  $M \rightarrow N$  donné, les complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim sont définis à l'aide des algèbres symétriques et extérieures des modules  $M$  et  $N$ . Dans cette section nous en rappelons la définition de ces algèbres ainsi que leurs principales propriétés.

**Definition 1** *Soient  $M$  et  $N$  deux  $R$ -modules. Le produit tensoriel de  $M$  et  $N$  sur  $R$ , noté  $M \otimes_R N$ , est le  $R$ -module engendré par les symboles  $m \otimes n$  pour  $m \in M$  et  $n \in N$  tel que l'application naturelle  $b$*

$$\begin{aligned} b : M \times N &\longrightarrow M \otimes_R N \\ (m, n) &\longmapsto m \otimes n \end{aligned}$$

*est bilinéaire.*

Le produit tensoriel est donc caractérisé par la propriété universelle suivante : Pour tout module  $P$  les applications bilinéaires  $M \times N \longrightarrow P$  sont en correspondance avec

les homomorphismes de modules  $M \otimes_R N \longrightarrow P$  en composant par  $b$ , c'est à dire qu'on a la bijection

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(M \otimes_R N, P) &\cong \{\text{Applications bilinéaires de } M \times N \text{ dans } P\} \\ \varphi &\longmapsto \varphi b \end{aligned}$$

**Proposition 1** ([30, Proposition A2.1])

Soient  $M, N, P$ , et  $Q$  des  $R$ -modules, alors

(i) (Associativité et commutativité) :  $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$  et  $M \otimes_R (N \otimes_R P) \cong (M \otimes_R N) \otimes_R P$ .

(ii) (Sommes directes) :  $(M \oplus N) \otimes_R P \cong (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$ .

(iii) (Suites exactes) : Si  $M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$  est une suite exacte alors

$$Q \otimes_R M \rightarrow Q \otimes_R N \rightarrow Q \otimes_R P \rightarrow 0$$

est une suite exacte.

(iv) (changement de base) : Si  $R'$  est une  $R$ -algèbre et  $U$  est un  $R'$ -module, alors  $\text{Hom}_{R'}(R' \otimes_R M, U) \cong \text{Hom}_R(M, U)$  et

$$U \otimes_R M \cong U \otimes_{R'} (R' \otimes_R M).$$

**Définition 2** L'algèbre tensorielle du  $R$ -module  $M$  est la  $R$ -algèbre non commutative

$$T_R(M) := R \oplus M \oplus (M \otimes_R M) \oplus \dots,$$

où le produit entre  $x_1 \otimes \dots \otimes x_m$  et  $y_1 \otimes \dots \otimes y_n$  est défini comme  $x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_n$ .

**Remarque 1** Dans le cas qui nous intéresse, où  $M$  est un  $R$ -module libre en les  $x_i$ , c'est simplement l'algèbre libre (non commutative) en les  $x_i$ .

**Définition 3** L'algèbre symétrique de  $M$  est l'algèbre notée  $S_R(M)$  obtenue en quotientant  $T_R(M)$  par l'idéal engendré par les éléments de la forme  $x \otimes y - y \otimes x$  pour tout  $x, y \in M$ .

**Définition 4** L'algèbre extérieure de  $M$  est l'algèbre notée  $\bigwedge_R(M)$  obtenue en quotientant  $T_R(M)$  par l'idéal engendré par les éléments de la forme  $x^2 = x \otimes x$  pour tout  $x \in M$ . (De  $(x + y)^2 = 0$  on déduit aisément que  $x \otimes y + y \otimes x = 0$  dans  $\bigwedge_R(M)$ , et donc que l'algèbre extérieure est anticommutative).

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible nous noterons  $T(M), S(M)$  et  $\bigwedge(M)$  pour  $T_R(M), S_R(M)$  et  $\bigwedge_R(M)$  respectivement.

### 1.1.1 Cas gradué

Soient  $R$  un anneau gradué concentré en degré 0 (i.e  $R = R_0$ ), et  $M$  un  $R$ -module  $\mathbb{Z}$ -gradué,  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ . L'algèbre tensoriel  $T_R(M)$  devient alors un module  $\mathbb{Z}$ -gradué dont la  $i^{\text{ème}}$  composante est

$$T_R(M)_i = \bigoplus_{j_1 + \dots + j_n = i} M_{j_1} \otimes \dots \otimes M_{j_n}.$$

Avec ces conventions, nous définissons l'algèbre symétrique graduée, notée  $\mathcal{S}_R(M)$  ou  $\mathcal{S}(M)$ , comme la  $R$ -algèbre graduée  $T_R(M)/I$ , où  $I$  est l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$a \otimes b - (-1)^{\deg(a)\deg(b)} b \otimes a \text{ et } a^2 \text{ si } \deg(a) \text{ est impair}$$

pour des éléments homogènes  $a, b$  de  $M$ .

Si  $M$  est concentré en degrés pairs (i.e  $M_i = 0$  pour tout  $i$  impair), alors  $\mathcal{S}(M) = S(M)$ , l'algèbre symétrique définie précédemment est commutative. Si au contraire  $M$  est concentré en degrés impairs (i.e  $M_i = 0$  pour tout  $i$  pair), alors  $\mathcal{S}(M) = \bigwedge(M)$ , l'algèbre extérieure de  $M$ . Dans les identifications  $\mathcal{S}(M) = S(M)$  et  $\mathcal{S}(M) = \bigwedge(M)$  nous regardons  $M$  comme un module non gradué de degré donné 2 ou 1 respectivement.

Nous définissons  $\mathcal{S}_d(M)$  comme l'image de  $T_d(M) := M \otimes \dots \otimes M \subset T(M)$  (avec  $d$  facteurs) dans  $\mathcal{S}(M)$ . Si  $M$  est concentré en degrés pairs ou impairs nous avons  $\mathcal{S}_d(M) = S_d(M)$  ou  $\mathcal{S}_d(M) = \bigwedge_d(M)$  respectivement. Nous avons aussi  $\mathcal{S}(M) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d(M)$ . Notons

que chaque  $\mathcal{S}_d(M)$  est un module gradué.

Dans le cas qui nous intéresse c'est-à-dire où  $M$  est un module libre de base  $\{x_1, \dots, x_r\}$ , la proposition suivante nous donne un moyen simple de trouver des bases de  $S(M)$  et  $\bigwedge(M)$  :

**Proposition 2** ([30, Proposition A2.2])

$$\begin{aligned} S(M \oplus N) &= S(M) \otimes S(N), \\ \bigwedge(M \oplus N) &= \bigwedge(M) \otimes \bigwedge(N). \end{aligned}$$

**Corollaire 1** ([30, Corollaire A2.3]) Soit  $M$  un module libre de base  $\{x_1, \dots, x_r\}$ . Alors  
(i)  $S(M)$  est l'anneau des polynômes en les "variables"  $x_i$ , et  $S_d(M)$  est le  $R$ -module libre de rang  $\binom{r+d-1}{r-1}$ , admettant pour base l'ensemble des monômes de degré  $d$  en les  $x_i$ .

(ii)  $\bigwedge^d(M)$  est le  $R$ -module libre de rang  $\binom{r}{d}$  de base

$$\{x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_d}, 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq r\}.$$

(iii) Si  $N$  est un autre module libre, de base  $\{y_1, \dots, y_s\}$  et  $\varphi : M \rightarrow N$  est un homomorphisme de matrice  $A$  dans ces bases, alors le morphisme induit  $\bigwedge^d \varphi : \bigwedge^d M \rightarrow \bigwedge^d N$  a une matrice dont l'entrée correspondante aux éléments de base  $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_d}$  et  $y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_d}$  est le mineur de  $A$  faisant intervenir les colonnes  $i_1, \dots, i_d$  et les lignes  $j_1, \dots, j_d$ .



## 1.2 Complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim

Soit  $\varphi : F \longrightarrow G$  un morphisme de modules libres sur un anneau  $R$ . On suppose que les rangs de  $F$  et  $G$  vérifient l'inégalité  $rg(F) = f \geq g = rg(G)$  (on peut voir  $\varphi$  comme une présentation du  $R$ -module  $M := \text{coker}(\varphi)$ ). A partir du complexe de Koszul, on va construire une famille de complexes  $\mathbb{C}^i$  et s'intéresser au complexe  $\mathbb{C}^0$  et  $\mathbb{C}^1$  dits d'Eagon-Northcott ( $E-N$ ), et de Buchsbaum-Rim ( $B-R$ ). Ces complexes donnent respectivement dans le cas générique, (c'est-à-dire lorsque  $\varphi$  est représentée par une matrice d'indéterminées  $r_{i,j}$  d'un anneau de polynômes  $\mathbb{Z}[\{r_{i,j}\}_{i=1\dots g, j=1\dots f}]$ ) une résolution de  $R/I_g(\varphi)$  et du conoyau de  $\varphi$  respectivement. On rappelle que  $I_g(\varphi)$  désigne l'idéal engendré par les mineurs de taille  $g$  de  $\varphi$ . Nous commençons par quelques rappels sur le complexe de Koszul.

### 1.2.1 Complexe de Koszul

Soit  $N$  un  $R$ -module et  $x \in N$ , le complexe de Koszul associé à l'élément  $x \in N$  est le complexe

$$K(x) : 0 \longrightarrow R \longrightarrow N \longrightarrow \bigwedge^2 N \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^i N \xrightarrow{d_x} \bigwedge^{i+1} N \longrightarrow \cdots$$

où  $d_x$  envoie l'élément  $a$  sur  $x \wedge a$ . Si  $N$  est libre de rang  $n$  et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \cong N$  nous écrirons parfois  $K(x_1, \dots, x_n)$  à la place de  $K(x)$ .

Le complexe de Koszul est fonctoriel au sens où si  $f : N \rightarrow M$  est un morphisme de module tel que  $f(x) = y$  alors le morphisme d'algèbre  $\wedge f : \wedge N \rightarrow \wedge M$  définit un morphisme de complexe de  $K(x)$  vers  $K(y)$ .

#### Proposition 3

$$H^n(K(x_1, \dots, x_n)) = R/(x_1, \dots, x_n).$$

*Démonstration :*

Soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $N = R^n$ . Nous avons  $\bigwedge^n N \cong R$  par un isomorphisme envoyant  $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  sur 1. De même  $\bigwedge^{n-1} N \cong R^n$  avec la base est formé des éléments  $e_1 \wedge \dots \wedge \tilde{e}_i \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_n$ , pour  $i = 1 \dots n$ , où le symbole  $\tilde{e}_i$  signifie que  $e_i$  a été supprimé. L'image de  $e_1 \wedge \dots \wedge \tilde{e}_i \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_n$  par la différentielle du complexe de Koszul est

$$\left( \sum x_i e_i \right) \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \tilde{e}_i \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_n = \pm e_1 \wedge \dots \wedge e_n,$$

donc le conoyau de  $\bigwedge^{n-1} N \longrightarrow \bigwedge^n N$  est isomorphe à  $R/(x_1, \dots, x_n)$ .  $\square$

Il y'a une version duale du complexe de Koszul, associée à un  $R$ -module  $N$  et à une forme linéaire  $\varphi : N \rightarrow R$ . C'est le complexe

$$K'(\varphi) : \cdots \longrightarrow \bigwedge^i N \xrightarrow{\delta_\varphi} \bigwedge^{i-1} N \longrightarrow \cdots \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} R \rightarrow 0.$$

Pour décrire la différentielle  $\delta_\varphi : \bigwedge^i N \longrightarrow \bigwedge^{i-1} N$  nous utilisons le “morphisme diagonal”  $\Delta : \bigwedge N \rightarrow \bigwedge N \otimes \bigwedge N$ , qui est l'unique morphisme d'algèbre envoyant chaque  $m \in N = \bigwedge^1 N$  sur

$$m \otimes 1 - 1 \otimes m \in \bigwedge^1 N \otimes \bigwedge^0 N \oplus \bigwedge^0 N \otimes \bigwedge^1 N \subset \bigwedge N \otimes \bigwedge N.$$

Notons  $\Delta'$  la composante de  $\Delta$  qui envoie  $\bigwedge^i N$  sur  $N \otimes (\bigwedge^{i-1} N)$ . En terme de générateurs nous avons

$$\Delta'(m_1 \wedge \dots \wedge m_i) = \sum_{j=1}^i (-1)^{j-1} m_j \otimes m_1 \wedge \dots \wedge \tilde{m}_j \wedge \dots \wedge m_i,$$

où  $\tilde{m}_j$  signifie que  $m_j$  a été supprimé du produit.

Nous définissons  $\delta_\varphi$  comme la composante

$$\bigwedge^i N \xrightarrow{\Delta'} N \otimes (\bigwedge^{i-1} N) \xrightarrow{\varphi \otimes 1} R \otimes \bigwedge^{i-1} N = \bigwedge^{i-1} N.$$

Pour montrer que nous avons bien défini un complexe, nous devons montrer que  $\delta_\varphi^2 = 0$ . Le calcul montre que  $\delta_\varphi^2(n_1 \wedge \dots \wedge n_i)$  est une combinaison linéaire d'éléments de la forme  $n_1 \wedge \dots \wedge \tilde{n}_j \wedge \dots \wedge \tilde{n}_{j'} \wedge \dots \wedge n_i$ , où nous avons supprimé  $n_j$  et  $n_{j'}$ . En supposant que  $j < j'$  nous avons que le coefficient de cet élément dans le développement de  $\delta_\varphi^2(n_1 \wedge \dots \wedge n_i)$  est

$$(-1)^j (-1)^{j'-1} \varphi(n_j) \varphi(n_{j'}) + (-1)^j (-1)^{j'} \varphi(n_j) \varphi(n_{j'}) = 0,$$

donc  $\delta_\varphi^2 = 0$ .

Si  $M$  est un  $R$ -module et  $x \in M$  alors correspond à la fonction  $x^* : M^* \rightarrow R$  définie par  $x^*(\varphi) = \varphi(x)$ . Ainsi nous pouvons définir les complexes de Koszul  $K(x)$  et  $K'(x^*)$ . Si  $M$  est libre de type fini ces deux complexes sont le dual l'un de l'autre, c'est-à-dire que le complexe de Koszul est auto-dual.

**Proposition 4** ([30, Proposition 17.15])

Pour  $x \in R^n$  nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} K(x) & : \dots \rightarrow & \bigwedge^i(R^n) & \xrightarrow{d_x} & \bigwedge^{i+1}(R^n) & \rightarrow \dots \\ & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & \\ K(x)^* & : \dots \rightarrow & (\bigwedge^{n-i} R^n)^* & \xrightarrow{d_x^*} & (\bigwedge^{n-i-1} R^n)^* & \rightarrow \dots \\ & & \beta \uparrow & & \beta \uparrow & \\ K(x^*) & : \dots \rightarrow & \bigwedge^{n-i}(R^{n^*}) & \xrightarrow{\delta_{x^*}} & \bigwedge^{n-i-1}(R^{n^*}) & \rightarrow \dots \end{array}$$

où les morphismes verticaux  $\alpha$  et  $\beta$  sont les isomorphismes décrits précédemment.

### 1.2.2 En partant du complexe de Koszul

Dans toute la suite pour un  $R$ -module gradué  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$  et  $d \in \mathbb{Z}$ , nous noterons  $M(d)$  le  $R$ -module gradué  $M(d) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M'_i$  avec  $M'_i = M_{i+d}$ .

Soit  $S = S(G)$  l'algèbre symétrique de  $G$  (i.e l'anneau gradué des polynômes sur une base de  $G$ , dont les éléments sont vus comme des éléments de degré 1). Si  $\{x_1, \dots, x_g\}$  est une base de  $G$ , alors  $S = R[x_1, \dots, x_g]$ . On pose  $F' = S \otimes F(-1)$ . Il existe un unique morphisme de  $S$ -modules  $\varphi' : F' \longrightarrow S$  qui envoie  $F = R \otimes F = F'_1 \subset F'$  sur  $G = S_1 G$  par  $\varphi$ . En terme de bases, soit  $\{e_1, \dots, e_f\}$  une base de  $F$  telle que  $\varphi(e_i) = \sum r_{i,j} x_j$  avec  $r_{i,j} \in R$ ; la famille  $\{e'_1, \dots, e'_g\}$ , où  $e'_i = 1 \otimes e_i \in F'$ , engendre le  $S$ -module  $F'$ ; on définit  $\varphi'(e'_i) = \sum r_{i,j} x_j$  vu comme un élément de  $S = R[x_1, \dots, x_g]$ .

Soit

$$K(\varphi') : 0 \longrightarrow \bigwedge^f F' \longrightarrow \bigwedge^{f-1} F' \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigwedge^2 F' \longrightarrow F' \xrightarrow{\varphi'} S$$

le complexe de Koszul déterminé par  $\varphi'$ . Comme les morphismes de  $K(\varphi')$  sont de degré 0 ( au sens de la  $S$ -gradation), on déduit en se restreignant à chaque degré  $d$  un complexe

$$K(\varphi')_d : \dots \xrightarrow{\partial} S_{d-i} G \otimes \bigwedge^i F \xrightarrow{\partial} S_{d-i+1} G \otimes \bigwedge^{i-1} F \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} S_{d-1} G \otimes F \xrightarrow{\partial} S_d G,$$

où pour simplifier, on a appelé toutes les différentielles  $\partial$ .

Soit  $\{x_i^*\}$  la base de  $G^*$  duale de la base  $\{x_i\}$  de  $G$ , alors  $\varphi^*(x_i^*) \in F^*$  agit sur  $\bigwedge F$  en envoyant  $a_1 \wedge \dots \wedge a_i \in \bigwedge^i F$  sur  $\varphi^*(x_i^*)(a_1) a_2 \wedge \dots \wedge a_i \in \bigwedge^{i-1} F$ . La différentielle  $\partial$  envoie l'élément  $m \otimes f \in S_{d-i} G \otimes \bigwedge^i F$  sur l'élément  $\sum x_i m \otimes \varphi^*(x_i^*)(f) \in S_{d-i+1} G \otimes \bigwedge^{i-1} F$ .

L'élément  $c = \sum x_i \otimes x_i^* \in G \otimes G^*$  est appelé trace et il est indépendant du choix de la base  $x_i$ ; c'est l'image de l'identité par le morphisme  $R \longrightarrow G \otimes G^*$  dual du morphisme évaluation  $G^* \otimes G \longrightarrow R$ .

La différentielle  $\partial$  est donnée par la multiplication par  $c$  vu comme un élément de  $S(G) \otimes \bigwedge G^*$  (où l'action de  $\bigwedge G^*$  sur  $\bigwedge F$  se fait via le morphisme  $\bigwedge \varphi^* : \bigwedge G^* \longrightarrow \bigwedge F^*$ ). En particulier, comme  $S(G) \otimes \bigwedge G^*$  est l'algèbre extérieure sur  $S(G)$  du  $S(G)$ -module  $S(G) \otimes G^*$ , et  $c$  est un élément de degré 1 (où pour  $x \otimes y^* \in S(G) \otimes \bigwedge G^*$   $deg(x \otimes y^*) = deg(x)$ ) de cette algèbre extérieure, on a  $c^2 = 0$ , ce qui prouve que  $\partial^2 = 0$  et donc  $K(\varphi')$  est bien un complexe.

En dualisant le complexe  $K(\varphi')_d$  (en prenant  $Hom(-, R)$ ), il vient un complexe :

$$K(\varphi')_d^* : \dots \longrightarrow (S_{d-i+1} G)^* \otimes \bigwedge^{i-1} F^* \longrightarrow (S_{d-i} G)^* \otimes \bigwedge^i F^* \longrightarrow \dots$$

On fixe un élément  $\alpha \in \bigwedge^f F$  afin d'identifier  $\bigwedge^i F^*$  à  $\bigwedge^{f-i} F$  de la même manière qu'à la fin de la proposition 4 Ce complexe dual se réécrit :

$$K(\varphi')_d^* : 0 \longrightarrow (S_d G)^* \otimes \bigwedge^f F \xrightarrow{\delta} (S_{d-1} G)^* \otimes \bigwedge^{f-1} F \xrightarrow{\delta} \dots$$

$$\xrightarrow{\delta} (S_{d-i}G)^* \otimes \bigwedge^{f-i} F \xrightarrow{\delta} (S_{d-i-1}G)^* \otimes \bigwedge^{f-i-1} F \xrightarrow{\delta} \dots$$

L'application  $\delta$  peut là aussi être vu comme la multiplication par  $c \in G \otimes G^* \subset SG \otimes \bigwedge G^*$ . On remarque que les entrées d'une matrice de  $\delta$  ou  $\partial$  sont des formes  $R$ -linéaires en les entrées de la matrice de  $\varphi$ .

### 1.2.3 Complexe d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim

On s'intéresse aux complexes  $K(\varphi)_d$  et  $K(\varphi)_d^*$ , plus précisément aux complexes obtenus en connectant  $K(\varphi)_d^*$  avec  $K(\varphi)_{f-g-d}$ , lorsque  $d \leq f - g$ . Dans ce cas, le dernier terme de  $K(\varphi)_d^*$  est  $(S_0G)^* \otimes \bigwedge^{f-d} F$ , qui s'identifie à  $\bigwedge^{f-d} F$  car  $(S_0G)^* = R$ . Le problème est de définir un morphisme connectant  $\epsilon$  entre  $\bigwedge^{f-d} F$  et le premier terme de  $K(\varphi)_{f-g-d}$  qui est  $\bigwedge^{f-g-d} F$ . Nous noterons  $\mathfrak{C}^i$  le complexe obtenu en connectant  $K(\varphi)_{f-g-i}^*$  avec  $K(\varphi)_i$ .

Soit  $\gamma \in \bigwedge^g G^* \cong R$  un générateur de  $\bigwedge^g G^*$ , le choix d'un tel  $\gamma$  est possible car  $G$  est libre. Pour tout  $k \geq g$ , on définit le morphisme

$$\epsilon : \bigwedge^k F \longrightarrow \bigwedge^{k-g} F$$

comme l'action de  $\bigwedge^g \varphi^* \gamma$  sur  $F$ . En terme de bases, si on écrit  $I$  pour un sous-ensemble  $i_1 < \dots < i_k$  de  $\{1, \dots, f\}$ , et  $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  pour le produit libre correspondant, alors on a

$$\epsilon(e_I) = \sum_{J \subset I, |J|=g} \text{sgn}(J \subset I) (\det \varphi_J) e_{I \setminus J},$$

où  $\varphi_J$  est la sous matrice de taille  $g \times g$  de  $\varphi$  dont les colonnes correspondent aux éléments de  $J$ ,  $\text{sgn}(J \subset I)$  est la signature de la permutation de  $I$  qui envoie les éléments de  $J$  sur les  $g$  premiers éléments de  $I$ , et  $e_{I \setminus J}$  est le produit libre des éléments de la base indexés par l'ensemble  $I \setminus J$  écrits dans l'ordre croissant. Les entrées de la matrice de l'application  $\epsilon$  sont des mineurs  $g \times g$  de  $\varphi$ , c'est donc des formes de degré  $g$  en les entrées de la matrice de  $\varphi$ . Par exemple dans le cas  $k = g$ ,

$$\epsilon : \bigwedge^g F \longrightarrow \bigwedge^0 F = R$$

peut être identifié au morphisme

$$\bigwedge^g F \xrightarrow{\wedge^g \varphi} \bigwedge^g G \xrightarrow{\cong} R,$$

dont l'image est l'idéal engendré par les mineurs  $g \times g$  de  $\varphi$ .

On est prêt maintenant à écrire les complexes  $\mathfrak{C}^i$ . Pour simplifier les notations

$S_d$  (resp.  $S_d^*$ ,  $\bigwedge^d$ ) désigne  $S_d(G)$  (resp.  $(S_d G)^*$ ,  $\bigwedge^d F$ ).

On a  $S_0^* = S_0 = \bigwedge^0 = R$ , on écrira donc  $R$  quand on parlera de ces modules. En particulier, on regarde  $\epsilon : \bigwedge^k F \longrightarrow \bigwedge^{k-g} F$  comme une application de  $(S_0 G)^* \otimes \bigwedge^k F$  dans  $\bigwedge^{k-g} F$ .

De plus on écrira  $G$  (resp.  $G^*$ ,  $F$ ) à la place de  $S_1^* = (S_1G)^*$  (resp.  $S_1 = S_1G$ ,  $\bigwedge^1 = \bigwedge^1 F$ ). Le complexe d'Eagon-Northcott est le complexe

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^0 : 0 \longrightarrow (S_{f-g}G)^* \otimes \bigwedge^f F \xrightarrow{\delta} (S_{f-g-1}G)^* \otimes \bigwedge^{f-1} F \xrightarrow{\delta} \dots \\ \xrightarrow{\delta} (S_1G)^* \otimes \bigwedge^{g+1} F \xrightarrow{\delta} (S_0G)^* \otimes \bigwedge^g F = \bigwedge^g F \xrightarrow{\epsilon} \bigwedge^0 F \end{aligned}$$

qui avec les notations convenues s'écrit

$$\mathbb{C}^0 : 0 \longrightarrow S_{f-g}^* \otimes \bigwedge^f \xrightarrow{\delta} S_{f-g-1}^* \otimes \bigwedge^{f-1} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} G^* \otimes \bigwedge^{g+1} \xrightarrow{\delta} \bigwedge^g \xrightarrow{\epsilon} R.$$

Nous avons vu que l'application  $\epsilon$  peut être identifiée à  $\bigwedge^g \varphi : \bigwedge^g F \longrightarrow \bigwedge^g G = R$ , la dernière identification  $\bigwedge^g G = R$  se faisant en envoyant  $x_1 \wedge \dots \wedge x_g$  sur 1. L'image du morphisme  $\epsilon$  est donc l'idéal  $I_g(\varphi)$  et on peut voir le complexe d'Eagon-Northcott comme une approximation d'une résolution de  $R/I_g(\varphi)$ ; on montre que c'est effectivement une résolution si et seulement si  $I_g(\varphi)$  contient une suite régulière de longueur  $f - g + 1$  (voir section 1.3.3 théorème 1).

Dans le complexe d'Eagon-Northcott, le morphisme connectant est le dernier morphisme du complexe c'est pourquoi il n'est pas clair que deux complexes ont été collés. En fait le complexe de gauche est  $K(\varphi')_{f-g}^*$  tandis que celui de droite est  $K(\varphi')_0$  autrement dit le complexe  $0 \rightarrow R \rightarrow 0$ . Le complexe de Buchsbaum-Rim est le complexe

$$\mathbb{C}^1 : 0 \longrightarrow S_{f-g-1}^* \otimes \bigwedge^f \xrightarrow{\delta} S_{f-g-2}^* \otimes \bigwedge^{f-1} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \bigwedge^{g+1} \xrightarrow{\epsilon} F \xrightarrow{\partial} G,$$

ici le morphisme connectant joint les complexes  $K(\varphi')_{f-g-1}^*$  et  $K(\varphi')_1 : 0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ . Le complexe de Buchsbaum-Rim peut être vu comme une approximation d'une résolution du conoyau du morphisme  $\varphi : F \rightarrow G$ . C'est effectivement une résolution si et seulement si  $I_g(\varphi)$  contient une suite régulière de longueur  $f - g + 1$  (voir section 1.3.4 théorème 1).

### 1.2.4 Complexe d'Eagon-Northcott et profondeur

On commence par rappeler une définition fondamentale qui généralise la notion de non-diviseur de zéro :

**Definition 5** Soit  $R$  un anneau et  $M$  un  $R$ -module. On appelle suite  $M$ -régulière une suite d'éléments  $x_1, \dots, x_n \in R$  telle que

(i)  $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$ , et

(ii) Pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_i$  est un non-diviseur de zéro dans  $M/(x_1, \dots, x_{i-1})$ .

On montre que pour un idéal  $I$ , toutes les suites régulières maximales (i.e. de cardinal maximal) ont en fait la même longueur (i.e. même cardinal) (cf [30]) ce qui nous permet de maintenant donner la définition de la profondeur d'un idéal.

**Definition 6** Soit  $I$  un idéal d'un anneau  $R$ , et  $M$  un  $R$ -module de type fini tel que  $IM \neq M$ . La profondeur de  $I$  sur  $M$ , noté  $\text{prof}(I, M)$  (ou  $\text{prof}(I)$  s'il n'a pas d'ambiguïté) est la longueur d'une suite  $M$ -régulière maximale d'éléments de  $I$ . Lorsque  $M = R$ , on parlera simplement de profondeur de  $I$ .

Nous n'entrerons pas dans les détails (pour plus d'approfondissements cf [30]) mais nous signalons que l'on utilise le complexe de Koszul pour établir les principales propriétés inhérentes à la notion de profondeur d'un idéal, qui est en fait le pendant algébrique de la notion géométrique de la codimension d'un idéal que nous allons voir dans la suite. On caractérise même  $\text{prof}(I, M)$  en termes d'annulation de l'homologie du complexe de Koszul.

**Definition 7** (i) La dimension de Krull (ou simplement dimension) d'un anneau  $R$ , notée  $\text{dim}(R)$ , est la longueur de la plus grande chaîne d'idéaux premiers de  $R$ , strictement croissante. Nous dirons que la chaîne  $P_r \supsetneq P_{r-1} \supsetneq \dots \supsetneq P_0$  est de longueur  $r$ .  
(ii) La dimension d'un idéal  $I \subset R$  noté  $\text{dim}(I)$  est la dimension de Krull,  $\text{dim}(R/I)$ , de l'anneau  $R/I$ .  
(iii) Si  $I$  est un idéal premier la codimension de  $I$  noté  $\text{codim}(I)$  est la dimension de l'anneau local  $R_I$  ou de manière équivalente la longueur de la plus grande chaîne d'idéaux premiers partant de  $I$ . Si  $I$  n'est pas premier alors la codimension de  $I$  est le minimum des codimensions des idéaux premiers contenant  $I$ .

Profondeur et codimension d'un idéal  $I$  sont deux outils permettant de mesurer sa "taille". L'étude du lien entre ces deux notions est un champ important de l'algèbre commutative. Les anneaux de Cohen Macaulay sont les anneaux où ces deux notions coïncident pour tous les idéaux maximaux i.e  $\text{prof}(P) = \text{codim}(P)$  pour tout idéal  $P$  maximal. Dans sa thèse J.Eagon a prouvé que dans le cas générique (les entrées de  $\text{mat}(\varphi)$  sont des indéterminées) l'anneau déterminantiel  $R/I_g(\varphi)$  était de Cohen Macaulay avant d'étendre ce résultat aux anneaux  $R/I_m(\varphi)$  avec  $m \leq g$  dans [29]. Il est facile de voir qu'on a toujours une inégalité c'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 5** Pour tout idéal  $I$  d'un anneau  $R$ , on a  $\text{prof}(I) \leq \text{codim}(I)$ .

*Démonstration :*

Soit  $x_1, \dots, x_n$  une suite régulière maximale d'éléments de  $I$ . Comme  $x_1$  ne divise pas 0 il n'est dans aucun idéal premier minimal de  $R$  donc la codimension de  $I/(x_1)$  (en tant qu'idéal de  $R/(x_1)$ ) est strictement inférieur à la codimension de  $I$ . Or  $I/(x_1)$  (en tant qu'idéal de  $R/(x_1)$ ) est de profondeur  $n - 1$ , donc par une récurrence immédiate on a  $n - 1 \leq \text{codim}(I/(x_1)) \leq \text{codim}(I)$ . □

Enfin, nous terminons cette présentation des complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim en donnant une proposition qui a été démontrée dans [28] permettant de majorer la profondeur des idéaux  $I_g(\varphi)$  engendrés par les mineurs  $g \times g$  de  $\text{mat}(\varphi)$ .

**Theorème 1** ([28, Théorème 1])

Soit  $R$  un anneau noethérien et  $E-N(\varphi)$  le complexe d'Eagon-Northcott associé à  $\varphi : F \rightarrow G$ , où  $F$  et  $G$  sont deux modules libres de types finis de rang  $f$  et  $g$  respectivement. Si  $q$  est le maximum des entiers  $m$  vérifiant  $H_m(E-N(\varphi)) \neq 0$  alors

$$\text{prof}(I_g(\varphi)) + q = f - g + 1$$

et en particulier  $\text{prof}(I_g(\varphi)) \leq f - g + 1$ .

**Corollaire 2** Soit  $R$  un anneau noethérien et  $E-N(\varphi)$  le complexe d'Eagon-Northcott associé à  $\varphi : F \rightarrow G$ , où  $F$  et  $G$  sont deux modules libres de types finis de rang  $f$  et  $g$  respectivement. Si  $\text{prof}(I_g(\varphi)) = f - g + 1$ , alors  $E-N(\varphi)$  est acyclique.

*Démonstration :*

Dans les notations du théorème, on a  $q = 0$  et donc  $H_k(E-N(\varphi)) \neq 0$  pour tout  $k > 0$ .  $\square$

Notons que le complexe de Buchsbaum-Rim  $B-R(\varphi)$  associé à  $\varphi : F \rightarrow G$ , où  $F$  et  $G$  sont deux modules libres de types finis de rang  $f$  et  $g$  respectivement vérifie la même propriété :

**Proposition 6** ([14, Théorème 1 et 2])

Soit  $R$  un anneau noethérien et  $B-R(\varphi)$  le complexe de Buchsbaum-Rim associé à  $\varphi : F \rightarrow G$ , où  $F$  et  $G$  sont deux modules libres de types finis de rang  $f$  et  $g$  respectivement. Si  $\text{prof}(I_g(\varphi)) = f - g + 1$ , alors  $B-R(\varphi)$  est acyclique.

**Theorème 2** ([13, théorème 2.5])

Soit  $X = X_{i,j}$  une matrice de taille  $g \times f$  d'indéterminées sur l'anneau noetherien  $R$  alors

$$\text{prof}(I_t(X)) = (f - t + 1)(g - t + 1)$$

où  $1 \leq t \leq g$ .

Enfin signalons que les complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim sont apparus respectivement dans [28] et [14]. On trouve une réalisation de ces complexes dans plusieurs papiers, citons par exemple [2] pour un point de vue plus analytique.

# Chapitre 2

## Résultant bihomogène

Dans ce chapitre, nous rappelons la notion du résultant plurihomogène qui est un cas particulier du résultant déterminantiel que nous étudierons dans les chapitres suivants.

Soient  $A$  un anneau commutatif,  $r > m$  et  $n$  des entiers naturels et  $M$  la matrice

$$M := \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m,1} & \cdots & \varphi_{m,r} \end{pmatrix},$$

de taille  $m \times r$  où les polynômes  $\varphi_{i,j} \in A[X_1, \dots, X_n]$  sont des polynômes homogènes de degré  $d_j - k_i$ . Le rang de la matrice  $M$  est  $< m$  en un point  $x \neq 0$  si, et seulement si, les lignes de la matrice  $M$  en ce point forment une famille liée; c'est-à-dire qu'il existe  $(y_1, \dots, y_m) \neq 0$  tel que

$$\begin{cases} y_1 \varphi_{1,1} + \cdots + y_m \varphi_{m,1} = 0 \\ \vdots \\ y_1 \varphi_{1,r} + \cdots + y_m \varphi_{m,r} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Supposons que pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k_i = 0$  (en fait, ce que nous développerons dans la suite reste valable si  $k_1 = \dots = k_m$ ) et introduisons les indéterminées  $Y_1, \dots, Y_m$ . D'après (2.1), le rang de  $M$  est  $< m$  en un point si, et seulement si, les polynômes bihomogènes  $f_j$  en  $X, Y$  de bidegrés  $(d_j, 1)$  définis de la manière suivante

$$\begin{cases} f_1 = Y_1 (\varphi_{1,1}(X_1, \dots, X_n)) + \cdots + Y_m (\varphi_{m,1}(X_1, \dots, X_n)) \\ \vdots \\ f_r = Y_1 (\varphi_{1,r}(X_1, \dots, X_n)) + \cdots + Y_m (\varphi_{m,r}(X_1, \dots, X_n)) \end{cases}$$

admettent une racine commune  $(x, y)$  non triviale. Ceci conduit à la notion du résultant plurihomogène (bihomogène dans notre cadre) qui apparait dans [57] et qui a été étudié dans les thèses de Abdelouahab Chkiriba et Abdelhak Chaichaa en 1988 en adoptant le point de vue de Jouanolou développé dans [51, 4].



Dans ce chapitre, nous donnons une présentation du résultant bihomogène, d'un point de vue algébrique, qui est un cas particulier du résultant déterminantiel qui nous intéressera dans les chapitres suivants. Cependant les résultats et les preuves que nous exposons se transportent facilement au cas plurihomogène.

## 2.1 Idéal des formes d'inertie

Soient  $k$  un anneau commutatif,  $n, m, r$  des entiers naturels,  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$  deux paquets de variables et  $d_{i,1}, d_{i,2}$  ( $1 \leq i \leq r$ ) des entiers naturels non nuls. Pour tout  $i \in \{1 \dots r\}$ , notons  $\wedge_i = \{(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m : |\underline{\alpha}| = d_{i,1}, \text{ et } |\underline{\beta}| = d_{i,2}\}$ .

On considère  $r$  polynômes génériques homogènes par rapport à chaque paquet de variables  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  définis de la manière suivante

$$f_i = \sum_{(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \wedge_i} U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} \underline{X}^{\underline{\alpha}} \underline{Y}^{\underline{\beta}}.$$

Soit  $A = k[U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} : (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \wedge_i, i = 1 \dots r]$  l'anneau des coefficients universels. On pose  $R_1 = A[\underline{X}]$  avec  $\deg(X_j) = 1$  et  $\deg(a) = 0$  si  $a \in A$ , et  $R_2 = A[\underline{Y}]$  avec  $\deg(Y_j) = 1$  et  $\deg(a) = 0$  si  $a \in A$  qui sont des algèbres  $\mathbb{N}$ -graduées.

Posons  $R := R_1 \otimes_A R_2 = A[\underline{X}, \underline{Y}]$ , la  $A$ -algèbre avec la  $\mathbb{N}^2$ -graduation produit tensoriel de celle de  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \deg(X_j) = (1, 0), \quad \deg(Y_j) = (0, 1) \\ \deg(a) = 0 \text{ si } a \in A. \end{array} \right.$$

Dans la suite, on parlera de bihomogénéité quand on utilisera cette graduation. Par exemple, les polynômes  $f_1, \dots, f_r$  sont bihomogènes de degré  $\deg(f_i) = (d_{i,1}, d_{i,2})$ .

Notons  $\mathfrak{M}_1 := (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\mathfrak{M}_2 := (Y_1, \dots, Y_m) \subset R$ , l'idéal  $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$  est engendré par les monômes  $\{X_k Y_l : (k, l) \in [1, n] \times [1, m]\}$ , que l'on ordonne par ordre lexicographique :

$$\sigma_1 = X_1 Y_1 < \sigma_2 = X_1 Y_2 < \dots < X_1 Y_m < X_2 Y_1 < \dots < \sigma_q = X_n Y_m, \quad q = mn.$$

**Definition 8** On dit que  $h \in R$  est une forme d'inertie d'un idéal  $I$  si il existe  $\nu \geq 0$  tel que  $\mathfrak{M}^\nu h \subset I$ .

On note  $TF_{\mathfrak{M}}(I)$  l'ensemble des formes d'inertie de l'idéal  $I$ , qui est un idéal de  $R$ .

Posons  $I = (f_1, \dots, f_r)$  et  $B = R/(f_1, \dots, f_r) = A[\underline{X}, \underline{Y}]/(f_1, \dots, f_r)$  qui est  $\mathbb{N}^2$ -graduée. L'idéal des formes d'inertie  $\mathfrak{T} := TF_{\mathfrak{M}}(I)$  est l'image réciproque par la projection canonique  $R \rightarrow B$  du 0<sup>ème</sup> groupe de cohomologie à support dans  $\mathfrak{M}$

$$H_{\mathfrak{M}}^0(B) = \{b \in B, \exists \nu \in \mathbb{N}, \mathfrak{M}^\nu b = 0\}.$$

De plus, comme  $I \subset \mathfrak{T}$ ,  $H_{\mathfrak{M}}^0(B)$  est un idéal de  $B$ . Ces deux idéaux sont  $\mathbb{N}^2$ -gradués, et

$$\mathfrak{T}/(f_1, \dots, f_r) \xrightarrow{\sim} H_{\mathfrak{M}}^0(B).$$

On a une suite exacte  $0 \longrightarrow R \longrightarrow \prod_{l=1}^q B_{\sigma_l}$ .

En considérant la partie de degré 0, nous définissons l'idéal  $\mathfrak{A}$  :

**Definition 9** On appelle idéal résultant bihomogène de  $I$  l'idéal  $\mathfrak{A} := \mathfrak{T}_0 = H_{\mathfrak{M}}^0(B)_0 \subset A$ .

Soit  $\psi$  le morphisme

$$\begin{aligned} \psi : R &\longrightarrow \prod_{l=1}^q B_{\sigma_l} \\ h &\longmapsto (b_1, \dots, b_q) \end{aligned}$$

où  $b_l$  est le localisé en  $\sigma_l$  de l'image  $b$  de  $h$  par la projection canonique  $R \rightarrow B$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \ker(\psi) &= \{h \in R \text{ tel que } (b_1, \dots, b_q) = 0\} \\ &= \{h \in R : \exists (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m / \underline{X}^{\underline{\alpha}} \underline{Y}^{\underline{\beta}} h \in I\} \\ &= \mathfrak{T}, \end{aligned}$$

donc  $\mathfrak{T} = \bigcap_{l=1}^q \ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{\sigma_l})$ .

### 2.1.1 Nature des anneaux gradués $B_{\sigma_q}$

Nous allons montrer que l'idéal  $\mathfrak{A}$  est premier, en étudiant la structure des anneaux gradués  $B_{\sigma_q}$ . Pour cela, notons  $\varepsilon_i$  le coefficient de  $X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}}$  dans  $f_i$  et écrivons les polynômes

$$f_i = \varepsilon_i X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}} + \tilde{f}_i$$

où le polynôme  $\tilde{f}_i = f_i - \varepsilon_i X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}}$  ne dépend pas du coefficient  $\varepsilon_i$ .

**Proposition 7** On a un isomorphisme

$$B_{\sigma_q} \xrightarrow{\sim} A'[\underline{X}, \underline{Y}]_{\sigma_q}$$

où  $A' = k[U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} : (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \wedge_i U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} \neq \varepsilon_i, i = 1 \dots r]$ .

*Démonstration :*

On a  $f_i = X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}} \left( \varepsilon_i + \frac{\tilde{f}_i}{X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}}} \right)$ . Considérons le morphisme de  $A$ -algèbres  $\varphi$

$$\begin{aligned} \varphi : R_{\sigma_q} &\longrightarrow A'[\underline{X}, \underline{Y}]_{\sigma_q} \\ X_i &\longmapsto X_i \\ Y_i &\longmapsto Y_i \\ \varepsilon_i &\longmapsto -\frac{\tilde{f}_i}{X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}}} \\ U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} &\longmapsto U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}, \text{ si } U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} \neq \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Comme  $\ker(\varphi) = (f_1, \dots, f_r)$ , en passant au quotient

$$\pi : B_{\sigma_q} \xrightarrow{\sim} A'[\underline{X}, \underline{Y}]_{\sigma_q}.$$

□

**Proposition 8** *Si  $k$  est intègre, alors l'idéal  $\mathfrak{A}$  est un idéal premier.*

*Démonstration :*

Lorsque  $k$  est intègre,  $A'[\underline{X}, \underline{Y}]_{\sigma_q} = k[U_i^{\alpha, \beta} : (\alpha, \beta) \in \wedge_i, U_i^{\alpha, \beta} \neq \varepsilon_i, i = 1 \dots r][\underline{X}, \underline{Y}]_{\sigma_q}$  est intègre, donc pour tout  $l \in \{1, \dots, q-1\}$ ,  $\sigma_l$  ne divise pas  $\sigma_q$ . En considérant les diagrammes commutatifs ( $l \in \{1, \dots, q-1\}$ ),

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & B_{\sigma_l} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{\sigma_q} & \longrightarrow & B_{\sigma_l \sigma_q} \end{array}$$

on s'aperçoit que  $\ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{\sigma_q}) = \ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{\sigma_l})$  et donc que  $\mathfrak{T} = \ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{\sigma_q})$ . Ainsi, si  $k$  est intègre, en utilisant la proposition 7,  $\mathfrak{T}$  est un idéal premier. Il s'en suit que  $H_{\mathfrak{m}}^0(B) = \mathfrak{T}/I$  est aussi premier. En regardant en degré 0, on en déduit que  $\mathfrak{A}$  est un idéal premier.

□

**Remarque 2** Dans ce qui précède nous avons prouvé que  $\mathfrak{T} = \ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{\sigma_l})$  pour tout  $l \in \{1, \dots, q\}$ . Ceci montre que  $h$  est une forme d'inertie si, et seulement si, il existe  $\nu \in \mathbb{N}$  et  $l \in \{1, \dots, q\}$  tels que  $\sigma_l^\nu h \in I$ .

## 2.2 Cohomologie locale associée à des polynômes bihomogènes

Dans la suite du chapitre,  $N = n + m - 1$ .

Commençons par fixer des notations. On écrit  $f_i = \varepsilon_i X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}} + \tilde{f}_i$ .

Pour  $i = 1, \dots, r$ , on considère les morphismes de  $A$ -algèbres

$$\begin{array}{ccc} \psi_i : R_{\sigma_q} & \longrightarrow & R_{\sigma_q} \\ \underline{X}, \underline{Y} & \longmapsto & \underline{X}, \underline{Y} \\ U_i^{\alpha, \beta} & \longmapsto & U_i^{\alpha, \beta} \text{ si } U_i^{\alpha, \beta} \neq \varepsilon_i \\ \varepsilon_i & \longmapsto & \varepsilon_i - \frac{f_i}{X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}}}. \end{array}$$

Nous avons  $\psi_i(f_i) = 0$ .

On pose  $\phi_j = \psi_1 \dots \circ \psi_{j-1} \circ \psi_{j+1} \circ \psi_r$ , ainsi pour tout  $f(\underline{X}, \underline{Y}) \in R_{\sigma_q}$ ,

$$\phi_1(f(\underline{X}, \underline{Y})) \equiv f(\underline{X}, \underline{Y}) \text{ mod}(f_2, \dots, f_r). \quad (2.2)$$

**Proposition 9** Si  $f(\underline{X}, \underline{Y}) \in R$  tel que  $f(\underline{X}, \underline{Y}) \equiv 0 \text{ mod}(f_1, \dots, f_l)$ , avec  $l < r$ , alors soit  $f$  contient tous les coefficients du polynôme  $f_1$ , soit  $f(\underline{X}, \underline{Y}) \equiv 0 \text{ mod}(f_2, \dots, f_l)$ .

*Démonstration :*

Soit  $U_1^{\alpha_0, \beta_0}$  un coefficient de  $f_1$  n'apparaissant pas dans  $f$ , alors il n'apparaît pas dans  $\phi_1(f(\underline{X}, \underline{Y}))$  car  $\phi_1(f(\underline{X}, \underline{Y})) \equiv f(\underline{X}, \underline{Y}) \text{ mod}(f_2, \dots, f_l)$ .

Comme  $f(\underline{X}, \underline{Y}) = h_1 f_1 + \dots + h_l f_l$ ,  $\phi_1(f(\underline{X}, \underline{Y})) = \phi_1(h_1) f_1$ . On en déduit que  $\phi_1(h_1) = 0$ , sinon  $\phi_1(f(\underline{X}, \underline{Y}))$ , et par conséquent  $f(\underline{X}, \underline{Y})$ , dépendrait de  $U_1^{\alpha_0, \beta_0}$ . Il s'en suit par (2.2) que  $f(\underline{X}, \underline{Y}) \equiv 0 \text{ mod}(f_2, \dots, f_l)$ . □

**Remarque 3** Dans la proposition 9 on a privilégié  $f_1$ , mais on montre de la même manière que si  $f(\underline{X}, \underline{Y}) \equiv 0 \text{ mod}(f_1, \dots, f_l)$  avec  $l \leq r$ , alors pour tout  $i = 1 \dots r$  soit  $f$  contient tous les coefficients du polynôme  $f_i$ , soit  $f(\underline{X}, \underline{Y}) \equiv 0 \text{ mod}(f_1, \dots, f_i, f_{i-1}, \dots, f_l)$ .

**Proposition 10** Si  $r < N$ , alors  $\mathfrak{A} = 0$ .

*Démonstration :*

On raisonne par récurrence sur  $N = n + m - 1$  (où  $m + n$  est le nombre total de variables)

$(P_N) : \mathfrak{A} = 0$  lorsque  $r < N$ .

-Pour  $N = 1$  on a  $(P_1) = \emptyset$ .

-On suppose  $(P_N)$  vraie, et montrons  $(P_{N+1})$ . On considère des polynômes  $f_1, \dots, f_{N+1}$  en  $N + 2$  variables  $X_1, \dots, X_{n'}, Y_1, \dots, Y_{m'}$ .

Soient  $r < N + 1$  et  $h \in \mathfrak{A}(f_1, \dots, f_r)$ . Nous allons montrer que  $h = 0$ .

Par définition il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma_q^d h = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$ . Par récurrence on se ramène à

$$\sigma_q h = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r. \quad (2.3)$$

On a donc  $\sigma_q h \equiv 0 \text{ mod}(f_1, \dots, f_r)$ . Par la proposition 9, si  $h \neq 0$  alors  $h$  contient le coefficient  $\zeta$  du monôme  $X_1^{d_1,1} Y_m^{d_1,2}$  de  $f_1$ , sinon  $\sigma_q h \equiv 0 \text{ mod}(f_2, \dots, f_r)$ , mais dans ce cas on aurait

$$\sigma_q h = g_2 f_2 + \dots + g_r f_r = \tilde{g}_2 \tilde{f}_2 + \dots + \tilde{g}_r \tilde{f}_r$$

où  $\tilde{f}$  désigne le polynôme  $f(0, X_2, \dots, X_{n'}, Y_1, \dots, Y_{m'})$  en  $N + 1$  variables. Par l'hypothèse de récurrence, on a  $\mathfrak{A}(\tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_r) = 0$  et donc  $h = 0$ .

Supposons que  $h \neq 0$ ,  $h$  contient le coefficient  $\zeta$  et soit  $h_s$  le coefficient de  $\zeta^s$  ( $s > 0$ ), la plus grande puissance de  $\zeta$  intervenant dans  $h$ .  $h_s \neq 0$ .

On a  $\sigma_q h = \sum_{i=1}^r g_i f_i$ , en écrivant  $f_1 = (\dots + \zeta X_1^{d_{1,1}} Y_m^{d_{2,2}} + \dots)$ ,

$$\sigma_q h = g_1 \times (\dots + \zeta X_1^{d_{1,1}} Y_m^{d_{2,2}} + \dots) + \sum_{i=2}^r g_i f_i. \quad (2.4)$$

En identifiant les coefficients de  $\zeta^s$  des deux membres de (2.4), il vient

$$\sigma_q h_s = l_1 X_1^{d_{1,1}} Y_m^{d_{2,2}} + l_2 f_2 + \dots + l_r f_r \quad (2.5)$$

où  $l_1 = 0$  si  $g_1$  est de degré  $< s - 1$  en  $\zeta$ . En évaluant (2.5) en  $X_1 = 0$ ,

$$\sigma_q h_s = \tilde{l}_2 \tilde{f}_2 + \dots + \tilde{l}_r \tilde{f}_r$$

Par hypothèse de récurrence  $\mathfrak{A}(\tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_r) = 0$ , on en déduit comme précédemment que  $h_s = 0$  ce qui contredit le fait que  $h_s \neq 0$  et donc  $h = 0$ . □

Cette proposition montre qu'il n'existe pas de forme d'inertie non nulle lorsque  $r < N$ . Dorénavant  $r = N$ .

### 2.2.1 Cas principal

**Proposition 11** *Lorsque le nombre de polynômes  $r = N = n + m - 1$ , les éléments de  $\mathfrak{A}$  dépendent de tous les coefficients des polynômes  $f_1, \dots, f_N$ .*

*Démonstration :*

Supposons qu'il existe  $a \neq 0$  dans  $\mathfrak{A}$  ne dépendant pas d'un coefficient  $U_i^{\alpha_0, \beta_0}$  du monôme  $\underline{X}^{\alpha_0} \underline{Y}^{\beta_0}$  d'un polynôme  $f_i$ . Par définition, il existe  $(\underline{\gamma}, \underline{\delta}) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$  et des polynômes  $g_l \in A[\underline{X}, \underline{Y}]$ ,  $l = 1 \dots N$ , tels que

$$\underline{X}^{\underline{\gamma}} \underline{Y}^{\underline{\delta}} a = g_1 f_1 + \dots + g_N f_N. \quad (2.6)$$

On a donc  $\underline{X}^{\underline{\gamma}} \underline{Y}^{\underline{\delta}} a \equiv 0 \pmod{(f_1, \dots, f_N)}$ , comme l'élément  $a$  ne dépend pas de  $U_i^{\alpha_0, \beta_0}$ , d'après la remarque 3 on a

$$\underline{X}^{\underline{\gamma}} \underline{Y}^{\underline{\delta}} a \equiv 0 \pmod{(f_1, \dots, f_i, f_{i-1}, \dots, f_N)}.$$

Donc  $a \in \mathfrak{A}(f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_N) = 0$ , par la proposition 10. □

Avant d'énoncer la proposition suivante, introduisons certaines notations.

Rappelons que les  $U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}$  sont les coefficients des  $\underline{X}^{\underline{\alpha}} \underline{Y}^{\underline{\beta}}$ ,  $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \Lambda_i$  dans les polynômes  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Notons pour  $1 \leq i \leq r$ ,  $V_{i,1,l}$  et  $V_{i,2,l}$  les coefficients des monômes

$$\tau_{i,1,l} = X_l X_n^{d_{i,1}-1} Y_m^{d_{i,2}} \text{ et } \tau_{i,2,l} = X_n^{d_{i,1}} Y_l Y_m^{d_{i,2}-1}.$$

Pour tout  $f \in R = k[U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} : (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \Lambda_i][\underline{X}, \underline{Y}]$ , nous désignons par  $\frac{\partial f}{\partial z}$  la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la variable  $z$ , où  $z$  appartient à l'ensemble  $\{U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} : 1 \leq i \leq r \text{ et } (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \Lambda_i\}$ .

Enfin nous posons

$$\frac{\partial f}{\partial V_{i,1}} = \left( \frac{\partial f}{\partial V_{i,1,1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial V_{i,1,n-1}}, \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial V_{i,2}} = \left( \frac{\partial f}{\partial V_{i,2,1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial V_{i,2,m-1}}, \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \right),$$

où  $\varepsilon_i$  est le coefficient du monôme  $\tau_i = X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}}$ .

**Proposition 12** Soient  $a \in \mathfrak{A}$  et  $g \in R$  un polynôme bihomogène de degré  $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N}^2$ , alors pour tout  $1 \leq i \leq r$

(i) Pour tout  $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}), (\underline{\gamma}, \underline{\delta}) \in \Lambda_i$ ,

$$\underline{X}^{\underline{\alpha}} \underline{Y}^{\underline{\beta}} \frac{\partial a}{\partial U_i^{\underline{\gamma}, \underline{\delta}}} - \underline{X}^{\underline{\gamma}} \underline{Y}^{\underline{\delta}} \frac{\partial a}{\partial U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}} \in \mathfrak{T}.$$

(ii)

$$G(\underline{X}, \underline{Y}) := \left( \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^\nu g(\underline{X}, \underline{Y}) - X_n^{\nu_1} Y_m^{\nu_2} g \left( \frac{\partial a}{\partial V_{i,1}}, \frac{\partial a}{\partial V_{i,2}} \right) \in \mathfrak{T},$$

où  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ .

*Démonstration :*

Comme  $a \in \mathfrak{A}$  il existe  $d \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq l \leq q$  tels que  $\sigma_l^d a = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$ , avec  $g_i \in R$ .

Par dérivation par rapport à  $U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}$  et  $U_i^{\underline{\gamma}, \underline{\delta}}$  il vient

$$\begin{aligned} \sigma_l^d \frac{\partial a}{\partial U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}} &= g_i \underline{X}^{\underline{\alpha}} \underline{Y}^{\underline{\beta}} + \sum_{k=1}^r f_k \frac{\partial g_k}{\partial U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}} \\ \sigma_l^d \frac{\partial a}{\partial U_i^{\underline{\gamma}, \underline{\delta}}} &= g_i \underline{X}^{\underline{\gamma}} \underline{Y}^{\underline{\delta}} + \sum_{k=1}^r f_k \frac{\partial g_k}{\partial U_i^{\underline{\gamma}, \underline{\delta}}}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\sigma_l^d \left( \underline{X}^{\underline{\alpha}} \underline{Y}^{\underline{\beta}} \frac{\partial a}{\partial U_i^{\underline{\gamma}, \underline{\delta}}} - \underline{X}^{\underline{\gamma}} \underline{Y}^{\underline{\delta}} \frac{\partial a}{\partial U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}} \right) \in (f_1, \dots, f_r)$ , et donc

$$\underline{X}^{\underline{\alpha}} \underline{Y}^{\underline{\beta}} \frac{\partial a}{\partial U_i^{\underline{\gamma}, \underline{\delta}}} - \underline{X}^{\underline{\gamma}} \underline{Y}^{\underline{\delta}} \frac{\partial a}{\partial U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}} \in \mathfrak{T}.$$

Pour la démonstration du point (ii) de cette proposition nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 1** Soient  $n$  un entier naturel,  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  des éléments d'un anneau unitaire commutatif. Alors pour tout  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ , l'élément  $\prod_{i=1}^n a_i^{v_i} - \prod_{i=1}^n b_i^{v_i}$  appartient à l'idéal engendré par les éléments  $a_i - b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

*Démonstration :*

Puisque

$$\prod_{i=1}^n a_i^{v_i} - \prod_{i=1}^n b_i^{v_i} = (a_1^{v_1} - b_1^{v_1}) \prod_{i=2}^n a_i^{v_i} + \left( \prod_{i=2}^n a_i^{v_i} - \prod_{i=2}^n b_i^{v_i} \right) b_1^{v_1},$$

le lemme s'obtient par récurrence sur  $n$ .  $\square$

Revenons à la démonstration de la proposition 12. Il est clair que  $G(\underline{X}, \underline{Y})$  est bihomogène de degré  $(\nu_1, \nu_2)$ .

Puisque  $g$  est bihomogène de degré  $(\nu_1, \nu_2)$ , il suffit de prouver le résultat pour tout monôme  $\underline{X}^\alpha \underline{Y}^\beta$ , avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$  tel que  $|\alpha| = \nu_1$  et  $|\beta| = \nu_2$ .

Posons pour tout  $1 \leq i \leq r$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial a}{\partial V_{i,1}} \right)^\alpha = \left( \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\alpha_n} \prod_{l=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a}{\partial V_{i,1,l}} \right)^{\alpha_l}, \quad \left( \frac{\partial a}{\partial V_{i,2}} \right)^\beta = \left( \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\beta_m} \prod_{l=1}^{m-1} \left( \frac{\partial a}{\partial V_{i,2,l}} \right)^{\beta_l}, \\ \left( \underline{X} \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^\alpha = \prod_{l=1}^n \left( X_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\alpha_l}, \quad \left( \underline{Y} \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^\beta = \prod_{l=1}^m \left( Y_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\beta_l}, \\ \left( X_n \frac{\partial a}{\partial V_{i,1}} \right)^\alpha = \left( X_n \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\alpha_n} \prod_{l=1}^{n-1} \left( X_n \frac{\partial a}{\partial V_{i,1,l}} \right)^{\alpha_l}, \quad \left( Y_m \frac{\partial a}{\partial V_{i,2}} \right)^\beta = \left( Y_m \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\beta_m} \prod_{l=1}^{m-1} \left( Y_m \frac{\partial a}{\partial V_{i,2,l}} \right)^{\beta_l}. \end{array} \right.$$

Comme  $|\alpha| = \nu_1$  et  $|\beta| = \nu_2$  nous avons

$$\left( \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^\nu \underline{X}^\alpha \underline{Y}^\beta - X_n^{\nu_1} Y_m^{\nu_2} \left( \frac{\partial a}{\partial V_{i,1}} \right)^\alpha \left( \frac{\partial a}{\partial V_{i,2}} \right)^\beta = \left( \underline{X} \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^\alpha \left( \underline{Y} \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^\beta - \left( X_n \frac{\partial a}{\partial V_{i,1}} \right)^\alpha \left( Y_m \frac{\partial a}{\partial V_{i,2}} \right)^\beta$$

Le deuxième membre de cette égalité appartient à l'idéal de  $R$  engendré par les éléments

$\left( \underline{X} \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^\alpha - \left( X_n \frac{\partial a}{\partial V_{i,1}} \right)^\alpha$  et  $\left( \underline{Y} \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^\beta - \left( Y_m \frac{\partial a}{\partial V_{i,2}} \right)^\beta$  qui s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} & \left( X_n \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\alpha_n} \left[ \prod_{l=1}^{n-1} \left( X_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\alpha_l} - \prod_{l=1}^{n-1} \left( X_n \frac{\partial a}{\partial V_{i,1,l}} \right)^{\alpha_l} \right], \\ & \left( Y_m \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\beta_m} \left[ \prod_{l=1}^{m-1} \left( Y_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} \right)^{\beta_l} - \prod_{l=1}^{m-1} \left( Y_m \frac{\partial a}{\partial V_{i,2,l}} \right)^{\beta_l} \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par le lemme 1, les éléments de (2.7) sont dans l'idéal de  $R$  engendré par les éléments

$$X_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - X_n \frac{\partial a}{\partial V_{i,1,l}} \quad 1 \leq l \leq n, \quad Y_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - Y_m \frac{\partial a}{\partial V_{i,2,l}} \quad 1 \leq l \leq m.$$

Pour terminer montrons que

$$X_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - X_n \frac{\partial a}{\partial V_{i,1,l}} \text{ et } Y_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - Y_m \frac{\partial a}{\partial V_{i,2,l}} \in \mathfrak{I}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (X_n^{d_{i,1}-1} Y_m^{d_{i,2}}) (X_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - X_n \frac{\partial a}{\partial V_{i,1,l}}) &= \tau_{i,1,l} \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - \tau_i \frac{\partial a}{\partial V_{i,1,l}} \in \mathfrak{I} \text{ et} \\ (X_n^{d_{i,1}} Y_m^{d_{i,2}-1}) (Y_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - Y_m \frac{\partial a}{\partial V_{i,2,l}}) &= \tau_{i,2,l} \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - \tau_i \frac{\partial a}{\partial V_{i,2,l}} \in \mathfrak{I}, \end{aligned}$$

par le point (i). On a donc bien  $X_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - X_n \frac{\partial a}{\partial V_{i,1,l}}$  et  $Y_l \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_i} - Y_m \frac{\partial a}{\partial V_{i,2,l}} \in \mathfrak{I}$ , et la proposition est démontrée.  $\square$

On suppose que l'anneau  $k$  est factoriel, et on se place dans le cas où  $r = N$ .

**Theorème 3** *L'idéal  $\mathfrak{A} = \mathfrak{I} \cap A$  est non nul, premier et principal.*

*Démonstration :*

Commençons par montrer que  $\mathfrak{A} \neq 0$  en procédant par récurrence sur  $N = n + m - 1$

Le cas  $N = 1$  correspond à la situation d'un polynôme  $f_1 = U_1 X_1^{d_{1,1}} Y_1^{d_{1,2}}$  en deux variables  $X_1, Y_1$  et dans ce cas  $\mathfrak{A} = (U_1) \neq 0$ .

Supposons que dans le cas de  $N \geq 1$  polynômes  $f_1, \dots, f_N$  en  $N+1$  variables  $\mathfrak{A}(f_1, \dots, f_N) \neq 0$ , et considérons  $N+1$  polynômes  $f_1, \dots, f_{N+1}$  en  $N+2$  variables  $X_1, \dots, X_{n'}, Y_1, \dots, Y_{m'}$ , où  $n', m' \in \mathbb{N}$  sont tels que  $n' + m' - 1 = N + 1$ . Nous allons exhiber un élément non nul de  $\mathfrak{A}$ .

Comme  $N + 1 > 1$  on peut supposer  $n' > 1$ .

Les polynômes  $f_i = \sum U_i^{\alpha, \beta} X_1^{\alpha_1} \dots X_{n'}^{\alpha_{n'}} Y_1^{\beta_1} \dots Y_{m'}^{\beta_{m'}}$  s'écrivent

$$f_i = \sum B_i^{\alpha, \beta} X_2^{\alpha_2} \dots X_{n'}^{\alpha_{n'}} Y_1^{\beta_1} \dots Y_{m'}^{\beta_{m'}} \quad (2.8)$$

où  $B_i^{\alpha, \beta}$  est un polynôme en  $X_1$  de degré  $\alpha_1 = d_{i,1} - \sum_{k=2}^{n'} \alpha_k$ . On peut donc regarder ces polynômes comme des polynômes en  $N + 1 = n' + m' - 1$  variables. Par hypothèse de récurrence il existe au moins une forme d'inertie  $\Gamma_{N+1}(U_i^{\alpha, \beta}, X_1) \neq 0$  pour  $f_1, \dots, f_N$  écrits sous la forme (2.8). Notons  $\varepsilon_i$  le coefficient de  $X_{n'}^{d_{i,1}} Y_{m'}^{d_{i,2}}$ , il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sigma_q^d \Gamma_{N+1}(U_i^{\alpha, \beta}, X_1) \in (f_1, \dots, f_N). \quad (2.9)$$

Par la proposition (12) on a

$$\left( \frac{\partial \Gamma_{N+1}}{\partial \varepsilon_i} \right)^p f_{N+1}(\underline{X}, \underline{Y}) - X_{n'}^{d_{N+1,1}} Y_{m'}^{d_{N+1,2}} f_{N+1} \left( \frac{\partial \Gamma_{N+1}}{\partial V_{i,1}}, \frac{\partial \Gamma_{N+1}}{\partial V_{i,2}} \right) \in \mathfrak{I}, \quad (2.10)$$



où  $p = d_{N+1,1} + d_{N+1,2}$ .

Notons  $h(U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}, X_1) = f_{N+1} \left( \frac{\partial \Gamma_{N+1}}{\partial V_{i,1}}, \frac{\partial \Gamma_{N+1}}{\partial V_{i,2}} \right) \neq 0$ , et supposons qu'il ne dépende pas de  $X_1$ . D'après (2.10),  $X_n'^{d_{N+1,1}} Y_{m'}^{d_{N+1,2}} h(U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}, 0) \in (f_1, \dots, f_{N+1})$ , i.e. que  $h(U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}, 0) \in k[U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}] \cap \mathfrak{T}$  est une forme d'inertie non nulle et donc  $\mathfrak{A}(f_1, \dots, f_{N+1}) \neq 0$ .

Maintenant, si  $h(U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}, X_1)$  dépend effectivement de  $X_1$ , alors le résultant de Sylvester des deux polynômes  $h(U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}, X_1)$  et  $\Gamma_{N+1}(U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}, X_1)$  est  $S_{N+1}(U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}) \neq 0$ , et donc  $S_{N+1}(U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}) \in \mathfrak{T}(h, \Gamma_{N+1})$ , il s'en suit par (2.9) et (2.10) que  $S_{N+1}(U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}) \in \mathfrak{A}$ .

Soit  $\varepsilon$  l'un des coefficients de l'un des polynômes  $f_j$ , fixé dans la suite. D'après la proposition (11), tout élément non nul de  $\mathfrak{A}$  dépend effectivement de  $\varepsilon$ . Soit  $s \geq 1$  le minimum des degrés par rapport à  $\varepsilon$  des éléments non nuls de  $\mathfrak{A}$ . Il existe dans  $\mathfrak{A}$  un élément  $\Delta$  tel que  $\deg_\varepsilon(\Delta) = s$ . Quitte à remplacer  $\Delta$  par l'un de ses diviseurs premiers dans l'anneau factoriel  $A$ , on peut supposer  $\Delta$  premier.

Nous allons alors montrer que  $\mathfrak{A}$  est engendré par  $\Delta$ . Soit  $a \in \mathfrak{A}$  rappelons que  $A = k[U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} : (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \wedge_i, i = 1 \dots N]$ , et notons  $A' = k[U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} / (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \wedge_i, 1 \leq l \leq N, U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} \neq \varepsilon]$ . La division euclidienne de  $a$  par  $\Delta$  dans l'anneau  $\text{Frac}(A')[\varepsilon]$  s'écrit  $a = \Delta q + \rho$  avec  $q, \rho \in \text{Frac}(A')$  et  $\deg_\varepsilon(\rho) < \deg_\varepsilon(\Delta) = s$ . Il existe alors un élément  $c \neq 0$  dans  $A'$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$ , tel que  $q' = cq$ ,  $\rho' = c\rho \in A'$ . On a donc  $ca = \Delta q' + \rho'$  avec  $\deg_\varepsilon(\rho') = \deg_\varepsilon(\rho) < s$  (convention  $\deg(0) = -\infty$ ). Comme  $\rho' = ca - \Delta q' \in \mathfrak{A}$ , la définition de  $s$  montre que  $\rho' = 0$ , ainsi  $ca = \Delta q'$ . Or  $\Delta$  est premier et ne divise pas  $c$ , qui est indépendant de  $\varepsilon$  donc  $\Delta$  divise  $a$ .

□

**Definition 10** *On appellera résultant bihomogène des polynômes  $f_i$  noté  $\text{Res}(f_1, \dots, f_N)$ , défini à un inversible près, tout générateur de  $\mathfrak{A}$ . Il est unique à un inversible près.*

Nous avons donc défini le résultant bihomogène des polynômes  $f_i$  dans le cas où l'anneau  $k$  est factoriel en particulier dans le cas  $k = \mathbb{Z}$ , on peut étendre cette définition à un anneau commutatif quelconque par spécialisation.

**Definition 11** *Soit  $\lambda$  l'homomorphisme canonique*

$$\lambda : \mathbb{Z}[U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} / (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \wedge_i] \longrightarrow k[U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} / (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \wedge_i]$$

$$U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} \longmapsto U_i^{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}$$

où  $\wedge_i = \{(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m / |\alpha| = d_{i,1}, \text{ et } |\beta| = d_{i,2}\}$ .

*On pose  $\text{Res}_k(f_1, \dots, f_N) = \lambda(\text{Res}_{\mathbb{Z}}(f_1, \dots, f_N))$  (Dans la suite sauf risque d'erreur on oubliera la mention de l'anneau de base  $k$  dans l'écriture du résultant).*

Pour finir ce chapitre, signalons que le calcul effectif du résultant plurihomogène a été étudié par plusieurs auteurs [57, 62, 67, 27].

# Chapitre 3

## Existence du résultant déterminantiel

Dans ce chapitre, nous montrons l'existence du résultant déterminantiel d'une matrice polynomiale  $M$  en adoptant un point de vue algébrique. Ce résultant fournit une condition nécessaire et suffisante pour que le rang de  $M$  ne soit pas maximal en au moins un point. C'est un polynôme en les coefficients des entrées de  $M$ .

Plus précisément, nous montrons que l'idéal des formes d'inertie de l'idéal des mineurs maximaux de  $M$  est principal et qu'un de ses générateurs convenablement choisi est le résultant déterminantiel. Nous utilisons le complexe d'Eagon-Northcott et des résultats sur sa profondeur. Enfin, nous établirons quelques propriétés de ce résultant.

### 3.1 Idéal des formes d'inertie et résultant déterminantiel

#### 3.1.1 Notations et définitions

Soient  $k$  un anneau commutatif,  $f \geq g$  deux entiers naturels,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  des indéterminées, et  $d_1, \dots, d_f, k_1, \dots, k_g$  des entiers positifs non nuls.

On considère  $fg$  polynômes  $\varphi_{i,j} = \sum_{|\alpha|=d_j-k_i} U_{i,j}^\alpha X^\alpha$  génériques et homogènes de degré  $d_j - k_i \geq 1$  avec  $1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f$ ,  $A = k[U_{i,j}^\alpha : |\alpha| = d_j - k_i, 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f]$  l'anneau des coefficients universels,  $R := A[X_1, \dots, X_n]$  et  $\mathfrak{M} := (X_1, \dots, X_n) \subset R$ , et  $\varphi$  le morphisme de  $R$ -modules libres

$$\varphi : \bigoplus_{i=1}^f R(-d_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i)$$

de matrice  $\text{mat}(\varphi) = (\varphi_{i,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}$ .

L'idéal des mineurs  $g \times g$  de  $\varphi$  est  $I_g(\varphi) = (P_1, \dots, P_{\binom{f}{g}})$ .

**Definition 12** On dit que  $h \in R$  est une forme d'inertie d'un idéal  $I \subset A[X_1, \dots, X_n]$  s'il existe  $\nu \geq 0$  tel que  $\mathfrak{M}^\nu h \subset I$ .

On note  $TF_{\mathfrak{M}}(I)$  l'ensemble des formes d'inerties de  $I$ . C'est un idéal de  $A[X_1, \dots, X_n]$ .

**Exemple 1** Nous donnons quelques exemples de formes d'inertie d'un idéal  $I = (Q_1, \dots, Q_r)$  de  $A[X_1, \dots, X_n]$ , lorsque  $r \geq n$  et les polynômes  $Q_i$  sont homogènes.

1. Dans le cas où  $r = n$ , le résultant de Macaulay des polynômes  $Q_1, \dots, Q_n$  est une forme d'inertie de degré 0 en  $X$  [51, 25].
2. Tous les mineurs maximaux  $\Delta$  de la matrice jacobienne

$$Jac(Q) := \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial Q_r}{\partial X_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial Q_r}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

sont des formes d'inertie. On s'en aperçoit en utilisant les relations d'Euler et en développant par rapport à la première ligne les mineurs

$$\begin{aligned} X_1 \Delta &= X_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{i_n}}{\partial X_1} \\ \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Q_{i_n}}{\partial X_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial Q_{i_n}}{\partial X_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial X_1} + \cdots + X_n \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial X_n} & \cdots & X_1 \frac{\partial Q_{i_n}}{\partial X_1} + \cdots + X_n \frac{\partial Q_{i_n}}{\partial X_n} \\ \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Q_{i_n}}{\partial X_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial Q_{i_n}}{\partial X_n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} d_{i_1} Q_{i_1} & \cdots & d_{i_n} Q_{i_n} \\ \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Q_{i_n}}{\partial X_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial Q_{i_n}}{\partial X_n} \end{vmatrix} \in (Q_1, \dots, Q_n). \end{aligned}$$

De même pour tout  $i = 2 \dots n$ ,  $X_i \Delta \in (Q_1, \dots, Q_n)$ , donc  $\Delta$  est bien une forme d'inertie.

3. S'il existe des polynômes  $q_{i,j}$  tels que  $Q_i = \sum_{j=1}^n q_{i,j} X_j$ , un raisonnement similaire montre que tous les mineurs maximaux de la matrice  $(q_{i,j})$  sont des formes d'inertie de  $I$ .

**Remarque 4** On pose  $B = R/I_g(\varphi)$  et on désigne par  $B_{X_i}$  le localisé de l'anneau  $B$  en  $X_i$ .

Comme

$$TF_{\mathfrak{M}}(I_g(\varphi)) = \{h \in R : \exists \nu \in \mathbb{N}, \mathfrak{M}^\nu h \subset I_g(\varphi)\},$$

l'idéal des formes d'inertie  $\mathfrak{I} = TF_{\mathfrak{M}}(I_g(\varphi))$  est l'image réciproque par la projection canonique  $R \rightarrow B$  du 0<sup>ème</sup> groupe de cohomologie à support dans  $\mathfrak{M}$

$$H_{\mathfrak{M}}^0(B) = \{b \in B : \exists \nu \in \mathbb{N}, \mathfrak{M}^\nu b = 0\}.$$

De plus, puisque  $I_g(\varphi) \subset \mathfrak{I}$ ,  $H_{\mathfrak{M}}^0(B)$  est un idéal de  $B$ . Ces deux idéaux sont  $\mathbb{N}$ -gradués, et

$$\mathfrak{I}/I_g(\varphi) \xrightarrow{\sim} H_{\mathfrak{M}}^0(B).$$

En considérant la partie de degré 0, on définit l'idéal

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{T}_0 = H_{\mathfrak{M}}^0(B)_0 \subset A. \quad (3.1)$$

Soit  $\psi$  le morphisme

$$\begin{aligned} \psi : R &\longrightarrow \prod_{i=1}^n B_{X_i} \\ h &\longmapsto (b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

où  $b_i$  est le localisé en  $X_i$  de l'image  $b$  de  $h$  par la projection canonique  $R \rightarrow B$ . Alors

$$\ker(\psi) = \{h \in R : (b_1, \dots, b_n) = 0\} = \{h \in R : \exists \alpha \in \mathbb{N}^*, X_i^\alpha h \in I_g(\varphi), i = 1 \dots n\} = \mathfrak{T}.$$

Finalement,  $\mathfrak{T} = \bigcap_{i=1}^n \ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{X_i})$ .

### 3.1.2 Nature des anneaux gradués $B_{X_i}$

Nous allons montrer que l'idéal  $\mathfrak{A}$  est premier en étudiant la structure des anneaux gradués  $B_{X_i}$ . Pour cela, notons  $\varepsilon_{i,j}$  le coefficient de  $X_n^{d_j - k_i}$  dans  $\varphi_{i,j}$  et  $\varepsilon = (\varepsilon_{i,j})_{i,j}$  la matrice définie par ces coefficients et écrivons les polynômes

$$\varphi_{i,j} = \varepsilon_{i,j} X_n^{d_j - k_i} + \tilde{\varphi}_{i,j}$$

où le polynôme  $\tilde{\varphi}_{i,j} = \sum_{|\alpha| \neq (0, \dots, 0, d_j - k_i)} U_{i,j}^\alpha X^\alpha$  ne dépend pas du coefficient  $\varepsilon_{i,j}$  de  $X_n^{d_j - k_i}$ .

Considérons le morphisme de  $A$ -algèbres

$$\begin{aligned} \pi : A[X_1, \dots, X_n][X_n^{-1}] &\longrightarrow A[X_1, \dots, X_n][X_n^{-1}]/I_g(\varepsilon) \\ X_i &\longmapsto X_i \\ \varepsilon_{i,j} &\longmapsto -\frac{\varphi_{i,j}}{X_n^{d_j - k_i}} \\ U_{i,j}^\alpha &\longmapsto U_{i,j}^\alpha \text{ si } U_{i,j}^\alpha \neq \varepsilon_{i,j}. \end{aligned}$$

**Lemme 2** *Le morphisme  $\pi$  est surjectif, et  $\ker \pi = I_g(\varphi).R_{X_n}$ .*

*Démonstration :*

Nous avons  $\pi(\varphi_{i,j}) = -\varphi_{i,j} + \tilde{\varphi}_{i,j} = -\varepsilon_{i,j} X_n^{d_j - k_i}$ , et donc  $I_g(\varphi).R_{X_n} \subset \ker(\pi)$ . Réciproquement, si  $Q(\varepsilon_{i,j}, U_{i,j}^\alpha, X) \in \ker(\pi)$ ,  $Q(-\frac{\varphi_{i,j}}{X_n^{d_j - k_i}}, U_{i,j}^\alpha, X) \in I_g(\varepsilon)$  dans  $R_{X_n}$ .

Notons  $\Delta_{j_1, \dots, j_g}(\varepsilon_{i,j})$  les mineurs maximaux de la matrice  $(\varepsilon_{i,j})_{i,j}$  de sorte que  $I_g(\varepsilon) = (\Delta_{j_1, \dots, j_g}(\varepsilon_{i,j}), 1 \leq j_1 < \dots < j_g \leq f)$ . On a dans  $R_{X_n}$  :

$$Q\left(-\frac{\varphi_{i,j}}{X_n^{d_j - k_i}}, U_{i,j}^\alpha, X\right) = \sum h_{j_1, \dots, j_g}(\varepsilon_{i,j}, U_{i,j}^\alpha, X) \Delta_{j_1, \dots, j_g}(\varepsilon_{i,j}). \quad (3.2)$$

Comme  $\pi\left(-\frac{\varphi_{i,j}}{X_n^{d_j-k_i}}\right) = \varepsilon_{i,j}$ , en appliquant  $\pi$  à l'égalité (3.2), il vient

$$Q(\varepsilon_{i,j}, U_{i,j}^\alpha, X) = \sum h_{j_1, \dots, j_g} \left( -\frac{\varphi_{i,j}}{X_n^{d_j-k_i}}, U_{i,j}^\alpha, X \right) \Delta_{j_1, \dots, j_g} \left( -\frac{\varphi_{i,j}}{X_n^{d_j-k_i}} \right).$$

Nous en déduisons que  $Q \in I_g(\varphi).R_{X_n}$  et donc  $I_g(\varphi).R_{X_n} = \ker(\pi)$ . □

**Corollaire 3** *Les  $A$ -algèbres  $B_{X_n}$  et  $A[X_1, \dots, X_n][X_n^{-1}]/I_g(\varepsilon)$  sont isomorphes.*

Puisque l'idéal  $I_g(\varepsilon)$  est premier [13], si  $k$  est intègre, l'anneau  $A[X_1, \dots, X_n][X_n^{-1}]/I_g(\varepsilon)$  est aussi intègre. Ainsi, les anneaux  $B_{X_n}$  et  $[B_{X_n}]_0$  sont intègres. De la même manière, les anneaux  $B_{X_i}$  et  $[B_{X_i}]_0$  sont intègres. Donc, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , l'élément  $X_n$  ne divise pas 0 dans  $B_{X_i}$ .

En considérant des diagrammes commutatifs ( $i \in \{1, \dots, n\}$ )

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & B_{X_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{X_n} & \longrightarrow & B_{X_i X_n} \end{array}$$

on s'aperçoit que  $\ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{X_n}) = \ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{X_i})$ , et donc

$$\mathfrak{T} = \bigcap_{i=1}^n \ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{X_i}) = \ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{X_n}).$$

Ainsi, si  $k$  est intègre,  $\mathfrak{T}$  est un idéal premier. Il s'en suit que  $H_{\mathfrak{M}}^0(B) = \mathfrak{T}/I_g(\varphi)$  est aussi premier. En regardant en degré 0, on en déduit par (3.1) que  $\mathfrak{A} = A \cap (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_{(f)})$  (où  $\tilde{P}_i$  désigne le polynôme  $P_i(X_1, \dots, X_{n-1}, 1) \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ ) dans  $A[X_1, \dots, X_{n-1}]$  est un idéal premier.

**Remarque 5** Dans ce qui précède, nous avons prouvé que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathfrak{T} = \ker(R \xrightarrow{\text{can}} B_{X_i})$ . Cette assertion montre qu'il suffit de saturer l'idéal  $I_g(\varphi)$  par une seule variable c'est-à-dire que  $h$  est une forme d'inertie si, et seulement si, il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq i \leq n$  tels que  $X_i^N h \in I_g(\varphi)$ .

### 3.1.3 Cas où $f - g + 1 < n$

**Proposition 13** *Si  $f - g + 1 < n$ , alors  $H_{\mathfrak{M}}^0(B) = 0$ .*

*Démonstration :*

La preuve repose sur le lemme suivant dont on donnera la preuve après celle de la proposition 13.

**Lemme 3** *Si  $f - g + 1 \leq n$ , alors  $\text{prof}(I_g(\varphi)) \geq f - g + 1$ .*

Soit  $h$  une forme d'inertie de  $I_g(\varphi) = (P_1, \dots, P_{(f)}) \subset A[X_1, \dots, X_n]$  et supposons que  $f - g + 1 < n$ . Par définition, il existe  $N > 0$  tel que  $X_n^N h \in (P_1, \dots, P_{(f)})$  et il s'agit de montrer que  $h \in (P_1, \dots, P_{(f)})$ . Par une récurrence immédiate sur  $N$ , on se ramène à :

$$X_n h = Q_1 P_1 + \dots + Q_{(f)} P_{(f)}, \quad (3.3)$$

avec  $Q_1, \dots, Q_{(f)} \in A[X_1, \dots, X_n]$ . En réduisant modulo  $X_n$  cette égalité :

$$\tilde{Q}_1 \tilde{P}_1 + \dots + \tilde{Q}_{(f)} \tilde{P}_{(f)} = 0,$$

où  $\tilde{P}_i(X_1, \dots, X_{n-1})$  (resp.  $\tilde{Q}_i(X_1, \dots, X_{n-1})$ ) désigne  $P_i(X_1, \dots, X_{n-1}, 0)$  (resp.  $Q_i(X_1, \dots, X_{n-1}, 0)$ ).

Notons  $\tilde{\varphi}$  le morphisme dont la matrice a en entrée les polynômes  $\tilde{\varphi}_{i,j}$ . La fin du complexe d'Eagon-Northcott associé au morphisme  $\tilde{\varphi}$ ,  $E-N(\tilde{\varphi})$  s'écrit

$$\begin{array}{ccc} G^* \otimes \bigwedge^{g+1} F & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & \bigwedge^g F \xrightarrow{\tilde{\epsilon}} R \\ & & (P_1, \dots, P_{(f)}) \\ x_i^* \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{g+1}} & \longmapsto & \sum_{1 \leq k \leq g+1} (-1)^{k+1} \tilde{\varphi}^*(x_i^*)(e_{i_k}) e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \dots \wedge e_{i_{g+1}} \end{array}$$

où la matrice de  $\delta$  s'écrit :

$$\text{mat}(\tilde{\delta}) := \begin{pmatrix} \pm \tilde{\varphi}_{i_1, j_1} & \cdots & \pm \tilde{\varphi}_{i_M, j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \pm \tilde{\varphi}_{i_1, j_{(f)}} & \cdots & \pm \tilde{\varphi}_{i_M, j_{(f)}} \end{pmatrix}.$$

avec  $M = g_{(f)}$  et les  $\tilde{\varphi}_{i_k, j_l}$  sont des entrées de la matrice de  $\tilde{\varphi}$  ou 0 (il y a  $g$  coefficients non nuls par colonne).

Par le lemme 3,  $\text{prof}(I_g(\tilde{\varphi})) \geq f - g + 1$ , ce qui implique que le complexe d'Eagon-Northcott est acyclique d'après Corollaire 2 (i.e :  $H_1(E-N)(\tilde{\varphi}) = 0$ ).

Dans notre situation, il existe donc des polynômes  $L_i \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ ,  $i = 1 \dots M$  tels que

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_{(f)} \end{pmatrix} = \text{mat}(\tilde{\delta}) \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_M \end{pmatrix},$$

où

$$\text{mat}(\tilde{\delta}) := \begin{pmatrix} \pm\tilde{\varphi}_{i_1, j_1} & \cdots & \pm\tilde{\varphi}_{i_M, j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \pm\tilde{\varphi}_{i_1, j_{(f)}} & \cdots & \pm\tilde{\varphi}_{i_M, j_{(f)}} \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{(f)} \end{pmatrix} = \text{mat}(\delta) \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_M \end{pmatrix}.$$

Comme  $(H_1, \dots, H_{(f)}) \in \text{Im}(\delta) \subset \ker(\epsilon)$ ,  $\sum_{i=1}^{(f)} H_i P_i = 0$ . Par construction,  $Q_i = H_i + X_n h_i$  avec  $h_i \in A[X_1, \dots, X_n]$ ,  $1 \leq i \leq (f)$ . En portant ces expressions dans (3.3), on obtient  $X_n h = X_n(h_1 P_1 + \dots + h_{(f)} P_{(f)})$  dans  $A[X_1, \dots, X_n]$ . Comme  $X_n$  ne divise pas 0 dans  $A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ , on en déduit que  $h = h_1 P_1 + \dots + h_{(f)} P_{(f)} \in I_g(\varphi)$ .  $\square$

*Démonstration :*

Pour démontrer le lemme 3, nous allons exhiber une suite régulière de  $A[X] = k[U_{i,j}^\alpha : 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f, |\alpha| = d_j - k_i]$  de longueur  $f - g + 1$  dans l'idéal  $I_g(\varphi)$ .

Pour  $f - g + i \geq j \geq i \geq 1$ , notons  $\varepsilon = (\varepsilon_{i,j})$  les coefficients des  $X_{j-i+1}^{d_j - k_i}$  dans les  $\varphi_{i,j}$  et  $V$  les autres coefficients des  $\varphi_{i,j}$ . Dans l'anneau  $A[X]/(V) = k[\varepsilon][X]$ , la matrice  $(\varphi_{i,j})$  se spécialise en

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,1} X_1^{d_1 - k_1} & \cdots & \varepsilon_{1, f-g+1} X_{f-g+1}^{d_{f-g+1} - k_1} \\ \ddots & & \ddots \\ \varepsilon_{g,g} X_1^{d_g - k_g} & \cdots & \varepsilon_{g, f} X_{f-g+1}^{d_f - k_g} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que  $(V, \varepsilon_{i,j} - X_{j-i+1}, 1 \leq i \leq j \leq f - g + i)$  est une suite régulière de  $A[X]$ , et que le radical de l'idéal  $I_g(\bar{\varphi})$  des mineurs maximaux de la matrice  $(\varphi_{i,j})$  dans l'anneau  $A[X]/(V, \varepsilon_{i,j} - X_{j-i+1}, 1 \leq i \leq j \leq f - g + i) = k[X]$  est  $(X_1, \dots, X_{f-g+1})$ . Donc la profondeur de  $I_g(\bar{\varphi})$  est au moins  $f - g + 1$ . Il existe alors  $(F_1, \dots, F_{f-g+1})$  une suite régulière de  $k[X]$  dans  $I_g(\bar{\varphi})$ . Ainsi, pour tout  $i = 1 \dots f - g + 1$ ,  $F_i = \sum_j q_{i,j} \Delta_j(\bar{\varphi})$ , où  $\Delta_j(\bar{\varphi})$  désigne un mineur maximal de la matrice  $(\bar{\varphi}_{i,j})$  à coefficients dans  $k[X]$ . Maintenant, nous posons  $G_i = \sum_j q_{i,j} \Delta_j(\varphi)$ , avec  $\Delta_j(\varphi)$  est le mineur maximal de la matrice  $(\varphi_{i,j})$  correspondant à  $\Delta_j(\bar{\varphi})$ . Par construction,  $(V, \varepsilon_{i,j} - X_{j-i+1}, 1 \leq i \leq j \leq f - g + i, G_1, \dots, G_{f-g+1})$  est une suite (formée d'éléments homogènes) régulière de  $A[X]$ . Comme toute permutation

des éléments de cette suite est aussi régulière ([30, Corollaire 17.2]), nous en déduisons que  $(G_1, \dots, G_{f-g+1})$  est une suite régulière de  $A[X]$  contenue dans  $I_g(\varphi)$ .  $\square$

**Remarque 6** D'après le Théorème 1, ce lemme montre que  $(\text{prof}(I_g(\varphi))) = f - g + 1$ . Donc,  $I_g(\varphi)$  est un idéal parfait et  $\text{codim}(I_g(\varphi)) = f - g + 1$ , pour plus de détails [13, Théorème 2.7].

Ainsi, dans le cas où le nombre de variables  $n$  est strictement inférieur à  $f - g + 1$ , l'idéal des formes d'inertie est trivial. Dans la suite, on va s'intéresser au cas  $n = f - g + 1$ .

### 3.1.4 Cas principal

Dorénavant,  $n = f - g + 1$ . Nous allons montrer que dans ce cas, l'idéal des formes d'inertie est principal.

**Théorème 4** Soit  $\Delta$  une forme d'inertie de degré zéro de  $I_g(\varphi)$ . Alors  $\Delta$  dépend de tous les coefficients de tous les polynômes  $\varphi_{i,j}$ .

*Démonstration :*

Si  $1 \leq i_1 < \dots < i_g \leq f$ , nous notons le mineur de  $\text{mat}(\varphi)$  de taille  $g$  défini à partir des colonnes  $i_1, \dots, i_g$  par  $\Delta_{i_1, \dots, i_g}$ .

Supposons qu'il existe une forme d'inertie  $a$  qui ne dépend pas d'un coefficient  $\varepsilon$  d'un polynôme (par exemple  $\varphi_{1,1} = \varepsilon X^{\alpha_0} + \widehat{\varphi_{1,1}}$ ) de  $\text{mat}(\varphi)$ .

Soient  $\delta_1, \dots, \delta_g$  les mineurs de taille  $g - 1$  de  $\text{mat}(\varphi)$  définis par l'identité

$$\det \begin{pmatrix} T_1 & \varphi_{1,f-g+2} & \cdots & \varphi_{1,f} \\ \vdots & & & \\ T_g & \varphi_{g,f-g+2} & \cdots & \varphi_{g,f} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^g \delta_i T_i = P(T_1, \dots, T_g).$$

Nous avons

$$(\delta_1 \dots \delta_g) \text{mat}(\varphi) = (P(\varphi_{1,j}, \dots, \varphi_{g,j}))_{j=1 \dots f} = (\Delta_{1,f-g+2, \dots, f}, \dots, \Delta_{f-g+1, \dots, f}, 0, \dots, 0). \quad (3.4)$$

Comme pour tout  $1 \leq i_1 < \dots < i_g \leq f$ , si  $M_{i_1, \dots, i_g}$  désigne la sous-matrice carrée de taille  $g$  de  $\text{mat}(\varphi)$  définie à partir des colonnes  $i_1, \dots, i_g$ , nous avons en ajoutant à la première ligne une combinaison linéaire des autres

$$\delta_1 \det M_{i_1, \dots, i_g} = \det \begin{pmatrix} \delta_1 \varphi_{1,i_1} & \cdots & \delta_1 \varphi_{1,i_g} \\ \varphi_{2,i_1} & \cdots & \varphi_{2,i_g} \\ \vdots & & \\ \varphi_{g,i_1} & \cdots & \varphi_{g,i_g} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \Delta_{i_1, f-g+2, \dots, f} & \cdots & \Delta_{i_g, f-g+2, \dots, f} \\ \varphi_{2,i_1} & \cdots & \varphi_{2,i_g} \\ \vdots & & \\ \varphi_{g,i_1} & \cdots & \varphi_{g,i_g} \end{pmatrix}.$$



Nous en déduisons que

$$\delta_1 \Delta_{i_1, \dots, i_g} \in (\Delta_{i_1, f-g+2, \dots, f}, \dots, \Delta_{i_g, f-g+2, \dots, f}). \quad (3.5)$$

Puisque  $a$  est une forme d'inertie, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $X_1^N a \in (\Delta_{i_1, \dots, i_g})_{1 \leq i_1 < \dots < i_g \leq f}$ . D'après (3.5),

$$X_1^N \delta_1 a \in (\Delta_{1, f-g+2, \dots, f}, \Delta_{2, f-g+2, \dots, f}, \dots, \Delta_{f-g+1, \dots, f}). \quad (3.6)$$

Considérons l'homomorphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} R = k[U_{i,j}^\alpha, X_1, \dots, X_n] &\rightarrow R_{X_1, \dots, X_n} \\ X_i &\mapsto X_i \\ \varepsilon &\mapsto \frac{\widehat{\varphi_{1,1}} \delta_1 + \varphi_{2,1} \delta_2 + \varphi_{g,1} \delta_g}{\delta_1 X^{\alpha_0}} \\ U_{i,j}^\alpha &\mapsto U_{i,j}^\alpha \text{ si } U_{i,j}^\alpha \neq \varepsilon \end{aligned}$$

de sorte que l'image de  $\Delta_{1, f-g+2, \dots, f}$  soit nulle. En appliquant cet homomorphisme à l'identité (3.6), nous en déduisons qu'il existe un entier  $M$  et un multi-indice  $\beta$  tels que  $\delta_1^M X^\beta a \in (\Delta_{2, f-g+2, \dots, f}, \dots, \Delta_{f-g+1, \dots, f})$ . Donc  $\delta_1 a$  est une forme d'inertie de la matrice  $g \times (f-1)$  obtenue à partir de  $\text{mat}(\varphi)$  en supprimant la première colonne. Comme l'idéal des formes d'inertie est premier,  $\delta_1$  (qui ne dépend pas de la première ligne de  $\text{mat}(\varphi)$ ) n'est pas une forme d'inertie de cette matrice, car en spécialisant la première ligne à 0, on obtiendrait  $\delta_1 = 0$ , nous en déduisons que  $a$  est une forme d'inertie d'une matrice  $g \times (f-1)$ . D'après la Proposition 13, la forme d'inertie  $a$  qui ne dépend pas du coefficient  $\varepsilon$  est en fait nulle.  $\square$

**Theorème 5** *Supposons que l'anneau  $k$  factoriel et  $n = f - g + 1$ . Alors, l'idéal  $\mathfrak{A} = \mathfrak{T} \cap A$  est non nul, premier et principal.*

*Démonstration :*

Nous avons déjà vu que  $\mathfrak{A}$  est un idéal premier. Pour montrer que  $\mathfrak{A} \neq 0$ , nous exhibons une spécialisation pour laquelle l'image de  $\mathfrak{A}$  est non nulle. On considère la spécialisation qui envoie tous les  $U_{i,j}^\alpha$  sur 0 sauf les  $U_{i,j}^{\alpha_{i,j}}$  avec  $f - g \geq j - i \geq 0$  et  $\alpha_{i,j} = (0, \dots, d_j - k_i, \dots, 0)$  (où la seule composante non nulle de  $\alpha_{i,j}$  est à la  $(j - i + 1)^{\text{ème}}$  place) que l'on envoie sur 1. De sorte que  $\text{mat}(\varphi) = (\varphi_{i,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}$  se spécialise en

$$\text{mat}(\xi) := \begin{pmatrix} X_1^{d_1 - k_1} & \dots & \dots & X_n^{d_{f-g+1} - k_1} & 0 & 0 \\ 0 & X_1^{d_2 - k_2} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X_1^{d_g - k_g} & \dots & \dots & X_n^{d_f - k_g} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Comme l'image  $\mathfrak{A}' \subset k$  de l'idéal  $\mathfrak{A}$  par cette spécialisation est non nulle,  $\mathfrak{A} \neq 0$ .

Soit  $\varepsilon$  un des coefficients d'un des polynômes  $\varphi_{i,j}$ , fixé dans la suite. La proposition 4 affirme que tout élément non nul de  $\mathfrak{A}$  dépend effectivement de  $\varepsilon$ . Soit  $s \geq 1$  le minimum des degrés en  $\varepsilon$  des éléments non nuls de  $\mathfrak{A}$ . Il existe donc dans  $\mathfrak{A}$  un élément  $\Delta$  tel que  $\deg_\varepsilon(\Delta) = s$ . Comme  $\mathfrak{A}$  est premier, quitte à remplacer  $\Delta$  par l'un de ses diviseurs irréductibles (dans l'anneau factoriel  $A$ ), on peut supposer que  $\Delta$  est irréductible.

Nous allons montrer que  $\mathfrak{A}$  est engendré par  $\Delta$ . Soit  $a \in \mathfrak{A} \subset A = k[U_{i,j}^\alpha, |\alpha| = d_j - k_i, 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f]$ . Notons  $A' = k[U_{i,j}^\alpha, |\alpha| = d_j - k_i, 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f, U_{i,j}^\alpha \neq \varepsilon]$ . La division euclidienne de  $a$  par  $\Delta$  dans l'anneau  $(\text{Frac}(A'))[\varepsilon]$  s'écrit  $a = \Delta q + \rho$ , avec  $q, \rho \in (\text{Frac}(A'))[\varepsilon]$  et  $\deg_\varepsilon(\rho) < \deg_\varepsilon(\Delta) = s$ . Il existe alors  $c \in A'$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$  tel que  $q' = cq, \rho' = c\rho \in A'$ , et  $ca = \Delta q' + \rho'$  avec  $\deg_\varepsilon(\rho') = \deg_\varepsilon(\rho) < s$ . Comme  $\rho' = ca - \Delta q' \in \mathfrak{A}$ , la définition de  $s$  montre que  $\rho' = 0$ , donc  $ca = \Delta q'$ . Or  $\Delta$  est irréductible et ne divise pas  $c$  (qui est indépendant de  $\varepsilon$ ), donc  $\Delta$  divise  $a$ . □

**Definition 13** *Le résultant déterminantiel de  $\varphi$  est l'unique générateur de  $\mathfrak{A}$  qui est égal à 1 pour la spécialisation (3.7). Ce résultant sera noté  $\text{Res}(\varphi)$ .*

Nous avons défini le résultant déterminantiel de  $\varphi$  lorsque l'anneau  $k$  est factoriel, et en particulier si  $k = \mathbb{Z}$ . Cette définition peut être étendue à un anneau commutatif quelconque.

**Definition 14** *Soit  $\lambda$  l'homomorphisme canonique*

$$\lambda : \mathbb{Z}[U_{i,j}^\alpha : |\alpha| = d_j - k_i] \longrightarrow k[U_{i,j}^\alpha : |\alpha| = d_j - k_i]$$

$$U_{i,j}^\alpha \longmapsto U_{i,j}^\alpha$$

*On définit le résultant de  $\varphi$  par  $\text{Res}_k(\varphi) = \lambda(\text{Res}_{\mathbb{Z}}(\varphi))$ .*

Dans la suite, nous ne mentionnerons pas l'anneau de base  $k$  dans l'écriture du résultant déterminantiel.

**Remarque 7** Nous verrons dans le chapitre suivant que le résultant déterminantiel est homogène par rapport aux coefficients des polynômes de chaque colonne, et il est multi-homogène par rapport aux coefficients des polynômes de chaque ligne, et nous donnerons son degré.

## 3.2 Quelques propriétés du résultant

Dans cette section, nous donnons quelques propriétés du résultant déterminantiel.

**Proposition 14** (*Divisibilité*) Soient  $k$  un anneau commutatif,  $X_1, \dots, X_n$  des indéterminées,  $\text{mat}(\varphi) = (\varphi_{i,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}$  et  $\text{mat}(\psi) = (\psi_{i,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}$  deux matrices de polynômes homogènes de  $k[X_1, \dots, X_n]$ , et  $I_g(\varphi) = (P_1, \dots, P_{\binom{f}{g}})$   $I_g(\psi) = (Q_1, \dots, Q_{\binom{f}{g}})$  leurs idéaux des mineurs  $g \times g$ . Si  $I_g(\varphi) \subset I_g(\psi)$ , alors  $\text{Res}(\varphi)$  divise  $\text{Res}(\psi)$  dans  $k$ .

*Démonstration :*

Par hypothèse,  $Q_k = \sum_{l=1}^{\binom{f}{g}} h_{k,l} P_l$  avec  $h_{i,j} \in k[X_1, \dots, X_n]$  homogène. Par spécialisation, on se ramène au cas où les coefficients  $U_{i,j}^\alpha$  des  $\varphi_{i,j}$  et  $V_{k,l}^\beta$  des  $h_{k,l}$  sont des indéterminées,  $k = k'[U_{i,j}^\alpha]$  avec  $k' = \mathbb{Z}[V_{k,l}^\beta]$ . Dans ce cas, on sait qu'il existe un entier  $N \geq 0$  tel que

$$\mathfrak{M}^N \text{Res}(\psi) \subset (Q_1, \dots, Q_{\binom{f}{g}}) \subset (P_1, \dots, P_{\binom{f}{g}}).$$

Donc,  $\text{Res}(\psi) \in k \cap TF_{\mathfrak{M}}(I_g(\varphi))_{k'}$ , et par conséquent  $\text{Res}_{k'}(\varphi) = \text{Res}(\varphi)$  divise  $\text{Res}(\psi)$ .  $\square$

**Corollaire 4** Soient  $h_1, \dots, h_f$  des polynômes homogènes de  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Si  $\psi_{i,j} = h_j \varphi_{i,j}$ , alors  $\text{Res}(\varphi)$  divise  $\text{Res}(\psi)$ .

*Démonstration :*

Les mineurs  $g \times g$  de  $\text{mat}(\psi)$  sont des multiples de ceux de  $\text{mat}(\varphi)$ .  $\square$

**Proposition 15** Le résultant déterminantiel ne change pas lorsque l'on ajoute à une colonne une combinaison des autres colonnes.

*Démonstration :*

Par multilinéarité du déterminant, les mineurs  $g \times g$  sont inchangés après une telle transformation.  $\square$

**Proposition 16** Soient  $k$  un anneau commutatif et  $\varphi_{i,j}$  des polynômes homogènes de degrés  $d_j - k_i \geq 1$ . Alors, pour toute permutation  $\sigma \in \Sigma_f$ ,

$$\text{Res}(\varphi_\sigma) = \pm \text{Res}(\varphi) \quad \text{dans } k,$$

où  $\text{mat}(\varphi_\sigma) = (\varphi_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}$ .

*Démonstration :*

Par spécialisation, on se ramène au cas où les  $\varphi_{i,j}$  sont génériques sur  $\mathbb{Z}$ ,

$$\varphi_{i,j} = \sum_{|\alpha|=d_j-k_i} U_{i,j}^\alpha X^\alpha \in A[X_1, \dots, X_n],$$

avec  $A = \mathbb{Z}[U_{i,j}^\alpha : |\alpha| = d_j - k_i, 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f]$ . Dans ce cas,  $I_g(\varphi) = I_g(\varphi_\sigma)$  et d'après la proposition 14,  $Res(\varphi_\sigma) = \pm Res(\varphi)$ . □

**Remarque 8** Les propositions 15 et 16 restent vraies si les transformations sont faites sur les lignes au lieu des colonnes de  $mat(\varphi)$ .

### 3.2.1 Covariance à droite

Si  $d_1, \dots, d_f$  est une suite d'entiers positifs, pour  $d \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_d := \{j \in \{1, \dots, f\} : d_j = d\}$ . Puis, soit  $L := \{d \in \mathbb{N} : I_d \neq \emptyset\}$  de sorte que  $\{1, \dots, f\} = \bigcup_{d \in L} I_d$ .

On dit que la matrice  $u = (u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq f}$  à coefficients dans un anneau commutatif est adaptée à droite à la suite  $(d_1, \dots, d_f)$  si

$$u_{l,j} \neq 0 \implies d_j = d_l.$$

Une telle matrice se décompose en sous matrices dont les supports sont  $I_d, d \in L$ . En posant  $u_d = (u_{i,j})_{(i,j) \in I_d \times I_d}$ , on montre facilement qu'il existe une permutation  $\sigma \in \sum_f$  telle que  $(u_{\sigma(i), \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq f}$  soit une matrice diagonale par blocs et dont les blocs diagonaux sont les  $u_d$ . Ainsi,  $\det(u) = \prod_{d \in L} \det(u_d)$ .

Nous rappelons que  $k$  désigne un anneau commutatif,  $f \geq g$  deux entiers naturels,  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  des indéterminées et  $d_1, \dots, d_f, k_1, \dots, k_g \geq 1$  des entiers, les  $\varphi_{i,j} = \sum_{|\alpha|=d_j-k_i} U_{i,j}^\alpha X^\alpha$  des polynômes homogènes de  $k[X_1, \dots, X_n]$  de degrés  $d_j - k_i \geq 1$ ,  $R := k[X_1, \dots, X_n]$  et  $\varphi$  le morphisme de modules libres

$$\varphi : \bigoplus_{i=1}^f R(-d_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i)$$

de matrice  $mat(\varphi) = (\varphi_{i,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}$ .

**Proposition 17** Soit  $u = (u_{i,j})_{i,j=1 \dots f}$  une matrice adaptée à droite à  $(d_1, \dots, d_f)$ , et notons

$$\varphi u : \bigoplus_{i=1}^f R(-d_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i)$$

le morphisme de matrice  $mat(\varphi u) = \left( \sum_{l=1}^f \varphi_{i,l} u_{l,j} \right)_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}$ .

Si  $\deg_{c_j}$  désigne le degré par rapport aux coefficients des polynômes de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $mat(\varphi)$ , alors

$$Res(\varphi u) = \pm \left( \prod_{d \in L} \det(u_d)^{m_d} \right) Res(\varphi) \quad \text{dans } k,$$

avec  $m_d = \frac{1}{|I_d|} \sum_{j \in I_d} \deg_{c_j} Res(\varphi)$ .

*Démonstration :*

Par spécialisation, on se ramène au cas où les coefficients non nuls  $u_{l,j}$  de la matrice  $u$  et les coefficients  $U_{i,j}^\alpha$  des  $\varphi_{i,j}$  sont des indéterminées, et  $k = \mathbb{Z}[u_{l,j}, U_{i,j}^\alpha]$ .

Si  $\Delta = \det(u)$ ,  $I_g(\varphi) = I_g(\varphi u)$  dans  $k_\Delta[X_1, \dots, X_n]$ , et d'après la Proposition 14, il existe un élément inversible  $c$  de  $k_\Delta$  tel que

$$Res(\varphi u) = c Res(\varphi). \quad (3.8)$$

Comme les polynômes  $\det(u_d)$  ne dépendent pas des mêmes variables,  $c$  s'écrit sous la forme

$$c = \pm \prod_{d \in L} \det(u_d)^{m_d} \quad (3.9)$$

avec  $m_d \in \mathbb{Z}$ .

En introduisant des indéterminées  $(t_d)_{d \in L}$ , et la spécialisation  $u_d \mapsto t_d \mathcal{I}_d$ , où  $\mathcal{I}_d$  désigne la matrice identité de taille  $|I_d|$  les identités (3.8) et (3.9) fournissent

$$Res((t_{d_j} \varphi_{l,j})_{1 \leq l \leq g, 1 \leq j \leq f}) = \left( \pm \prod_{d \in L} t_d^{m_d |I_d|} \right) Res(\varphi). \quad (3.10)$$

Compte tenu des propriétés d'homogénéité du résultant,

$$Res((t_{d_j} \varphi_{l,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}) = \left( \prod_{d \in L} t_d^{\sum_{j \in I_d} \deg_{c_j} (Res(\varphi))} \right) Res(\varphi). \quad (3.11)$$

Comme  $Res(\varphi) \neq 0$ , on déduit de (3.10) et (3.11) que  $m_d = \frac{1}{|I_d|} \sum_{j \in I_d} \deg_{c_j} Res(\varphi)$ . □

### 3.2.2 Covariance à gauche

Si  $k_1, \dots, k_g$  est une suite d'entiers, pour  $d \in \mathbb{N}$ , on pose  $J_d := \{i \in \{1, \dots, g\} : k_i = d\}$  et  $H := \{d \in \mathbb{N} : J_d \neq \emptyset\}$  de sorte que  $\{1, \dots, g\} = \bigcup_{d \in H} J_d$ .

On dit que la matrice  $v = (v_{i,j})_{1 \leq i,j \leq g}$  à coefficients dans un anneau commutatif est adaptée à gauche à la suite  $(k_1, \dots, k_f)$  si  $v_{i,l} \neq 0 \implies k_i = k_l$ .

Une telle matrice  $v$  se décompose en sous matrices supportées par  $J_d, d \in H$ . En posant  $v_d = (v_{i,j})_{(i,j) \in J_d \times J_d}$ , on voit qu'il existe une permutation  $\sigma \in \sum_g$  telle que  $(v_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq g}$  soit une matrice diagonale par blocs, et dont les blocs diagonaux sont les  $v_d$ .

De la même manière que la Proposition 17, on peut montrer le résultat suivant.

**Proposition 18** *Soient  $v$  une matrice adaptée à gauche à la suite  $(k_1, \dots, k_g)$  et*

$$v\varphi : \bigoplus_{i=1}^f R(-d_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i)$$

le morphisme de matrice  $mat(v\varphi) = (\sum_{l=1}^f v_{i,l} \varphi_{l,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}$ .

Si  $\deg_{l_i}$  est le degré par rapport aux coefficients des polynômes de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $mat(\varphi)$ , alors

$$Res(v\varphi) = \pm \left( \prod_{d \in H} \det(v_d)^{m'_d} \right) Res(\varphi) \text{ dans } k ,$$

avec  $m'_d = \frac{1}{|J_d|} \sum_{i \in J_d} \deg_{l_i} Res(\varphi)$ .

### 3.2.3 Changement de base

**Proposition 19** *Etant donnés  $d \in \mathbb{N}^*$  et une suite  $h = (h_1, \dots, h_n)$  de polynômes homogènes de  $k[X_1, \dots, X_n]$  de même degré  $d$ . Alors, le polynôme*

$$\varphi_{i,j} \circ h := \varphi_{i,j}(h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, h_n(X_1, \dots, X_n))$$

est homogène de degré  $d(d_j - k_i)$ , et

$$Res(\varphi \circ h) = \pm Res(h_1, \dots, h_n)^\mu Res(\varphi)^\lambda \text{ dans } k ,$$

où  $Res(h_1, \dots, h_n)$  désigne le résultant de Macaulay de  $h_1, \dots, h_n$ , et  $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration :*

Par spécialisation, on peut supposer que les coefficients  $U_{i,j}^\alpha$  des  $\varphi_{i,j}$  et les  $V_j^\beta$  des  $h_j$  sont des indéterminées et que  $k = \mathbb{Z}[U_{i,j}^\alpha, V_j^\beta]$ .

Comme  $Res(\varphi)$  est une forme d'inertie pour l'idéal  $I_g(\varphi) = (P_1, \dots, P_{\binom{f}{g}})$ , il existe un entier  $N \geq 1$  tel que  $X_i^N Res(\varphi) \in (P_1, \dots, P_{\binom{f}{g}})$  dans  $\mathbb{Z}[U_{i,j}^\alpha : |\alpha| = d_j - k_i]$ . En utilisant la spécialisation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[U_{i,j}^\alpha][X_1, \dots, X_n] &\longrightarrow \mathbb{Z}[U_{i,j}^\alpha, V_j^\beta][X_1, \dots, X_n] \\ X_i &\longmapsto h_i \end{aligned}$$

on déduit que pour tout  $i = 1 \dots n$ ,  $h_i^N Res(\varphi) \in I_g(\varphi \circ h)$  dans  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Comme  $Res(\varphi \circ h)$  divise  $Res(h_1^N Res(\varphi), \dots, h_n^N Res(\varphi))$ , par multiplicativité et homogénéité du résultant de Macaulay (cf [51]), il existe des entiers positifs  $L$  et  $M$  tels que

$$Res(h_1^N Res(\varphi), \dots, h_n^N Res(\varphi)) = Res(\varphi)^L Res(h_1, \dots, h_n)^M.$$

Puisque  $k$  est intègre,  $Res(\varphi)$  et  $Res(h_1, \dots, h_n)$  sont premiers non associés (ils ne dépendent pas des mêmes variables) et les seuls éléments inversibles de  $k$  sont  $+1$  et  $-1$ , on déduit que

$$Res(\varphi \circ h) = \pm Res(h_1, \dots, h_n)^\mu Res(\varphi)^\lambda,$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ .

□

# Chapitre 4

## Calcul du résultant déterminantiel

Dans le chapitre précédent, nous avons montré l'existence du résultant déterminantiel d'une matrice polynomiale  $M$ , et nous avons établi quelques unes de ses propriétés. Maintenant, nous allons nous intéresser au problème de son calcul effectif. Nous commençons par une description de l'idéal des formes d'inertie en terme d'annulateurs. Puis, nous rappelons les invariants de Fitting et de MacRae et nous développerons une approche constructive pour calculer cet invariant de MacRae. Nous rappelons aussi la notion de régularité de Castelnuovo-Mumford qui est fondamentale pour le calcul explicite du résultant.

Pour calculer le résultant déterminantiel, nous utiliserons les complexes d'Eagon-Northcott et de Buchsbaum-Rim. Comme dans le cas classique de Macaulay, nous obtiendrons le résultant déterminantiel comme invariant de MacRae. Nous montrerons que ce résultant peut être obtenu comme le déterminant d'une partie graduée d'Eagon-Northcott ou de Buchsbaum-Rim. Il peut aussi être calculé comme le pgcd des mineurs maximaux de la première application d'Eagon-Northcott. Nous établirons la multi-homogénéité de ce résultant et nous donnerons son degré qui est souvent très utile pour le calcul effectif. Puis, nous finirons par quelques exemples dont celui dit de Sylvester généralisé, qui correspond à  $f = g + 1$ ,  $g$  (resp.  $f$ ) étant le nombre de lignes (resp. colonnes) de la matrice polynomiale  $M$ .

On rappelle que  $n = f - g + 1$ ,  $R = A[X_1, \dots, X_n]$ ,  $B = R/I_g(\varphi)$  et  $H_{\mathfrak{M}}^0(B) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (0 :_B \mathfrak{M}^k) = \{b \in B : \exists \nu \in \mathbb{N}, \mathfrak{M}^\nu b = 0\}$  et  $\mathfrak{A} := \mathfrak{Z}_0 = H_{\mathfrak{M}}^0(B)_0 \subset A$ .

### 4.1 Idéal résultant et annulateur

Nous allons donner une description de l'idéal  $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z} \cap A$ , en termes d'annulateur. Pour cela, on définit pour tout couple  $(\nu, t) \in \mathbb{N}^2$  l'application  $A$ -linéaire

$$\begin{aligned} \Theta_{\nu, t} : B_\nu &\longrightarrow \text{Hom}_A(B_t, B_{t+\nu}) \\ b &\longmapsto (c \longmapsto b.c). \end{aligned}$$



Pour tout  $\nu \in \mathbb{N}$ ,

$$H_{\mathfrak{M}}^0(B)_\nu = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \ker(\Theta_{\nu,t}). \quad (4.1)$$

De plus, pour tout  $(\nu, t) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\ker(\Theta_{\nu,t}) \subset \ker(\Theta_{\nu,t+1})$ . En effet, par surjectivité de la multiplication  $B_1 \otimes B_t \rightarrow B_{t+1}$ , si  $b \in \ker(\Theta_{\nu,t})$  alors  $b.c = 0$  pour tout  $c \in B_{t+1}$ , car  $c = \sum c_1 \otimes c_t$  avec  $c_t \in B_t$ ,  $c_1 \in B_1$  et  $b.c_t = 0$ .

Comme  $B_0 = A$ ,  $\text{ann}_A(B_t) = \ker(\Theta_{0,t})$  pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathfrak{A} = H_{\mathfrak{M}}^0(B)_0 = \bigcup_{t \geq 0} \text{ann}_A(B_t). \quad (4.2)$$

Puisque  $\text{ann}_A(B_t) \subset \text{ann}_A(B_{t+1})$  pour tout  $t \in \mathbb{N}$ , il est donc intéressant de savoir si cette suite croissante d'annulateurs stationne (ce qui est le cas si  $A$  est noethérien), et si oui à partir de quel indice elle stationne. La proposition suivante donne une condition suffisante.

**Proposition 20** *Soit  $\eta \in \mathbb{N}^*$  tel que  $H_{\mathfrak{M}}^0(B)_\eta = 0$ . Alors pour tout entier  $t \geq 0$ ,*

$$\text{ann}_A(B_\eta) = \text{ann}_A(B_{\eta+t}) = H_{\mathfrak{M}}^0(B)_0 = \mathfrak{A}.$$

*Démonstration :*

On a vu que  $\text{ann}_A(B_\eta) \subset \text{ann}_A(B_{\eta+t})$ . Si  $a \in \text{ann}_A(B_{\eta+t})$ , alors  $aB_\eta \subset \ker(\Theta_{\eta,t})$ . Comme  $H_{\mathfrak{M}}^0(B)_\eta = 0$ , d'après (4.1) pour  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\ker(\Theta_{\eta,t}) = 0$ . D'où  $aB_\eta = 0$  et  $a \in \text{ann}_A(B_\eta) = \text{ann}_A(B_{\eta+t})$ . Le reste de la proposition découle de (4.2).  $\square$

Cette proposition montre que lorsque le plus petit  $\eta \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $H_{\mathfrak{M}}^0(B)_\eta = 0$  (appelé l'indice de saturation de  $B$ ) est connu, l'idéal d'élimination  $\mathfrak{A}$  n'est autre que  $\text{ann}_A(B_\eta)$ . Dans le cas où cet idéal est principal, on peut obtenir  $\eta$  et  $\text{ann}_A(B_\eta)$  à partir d'une résolution libre de type fini de  $B$ .

Nous allons présenter les outils nécessaires pour construire de telles résolutions.

## 4.2 Idéaux de Fitting et invariants de MacRae

Dans cette section, nous rappelons dans un premier temps les invariants de Fitting d'un  $A$ -module  $M$ . C'est une suite croissante d'idéaux déterminantiel de  $A$ . Le plus petit de ces idéaux est appelé l'invariant de Fitting initial et il est étroitement lié à l'annulateur de  $M$ . Dans un deuxième temps, on introduit l'invariant de MacRae de  $M$ , et on établira son lien avec l'invariant de Fitting initial.

Notre présentation est rapide et la plupart des résultats sont donnés sans preuve. Pour plus de détails, voir [30] et [59].

### 4.2.1 Invariants de Fitting

Si  $\phi : F \longrightarrow G$  est un homomorphisme de  $A$ -modules, l'idéal  $\det_\nu(\phi)$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}$ , est l'image du morphisme  $\bigwedge^\nu F \otimes \bigwedge^\nu G^* \longrightarrow A$  induit par  $\bigwedge^\nu \phi$ . En choisissant des bases pour les modules  $F$  et  $G$ ,  $\phi$  est représenté par une matrice et  $\det_\nu(\phi)$  est l'idéal engendré par ses mineurs  $\nu \times \nu$ , c'est en fait le  $\nu^{\text{ième}}$  idéal déterminantiel. On pose  $\det_\nu(\phi) = A$  pour tout  $\nu \leq 0$ .

**Proposition 21** ([30, §3.1] et [59, §20.2]) *Soient  $M$  un  $A$ -module de présentation finie,  $\phi : F \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0$  et  $\phi' : F' \longrightarrow G' \longrightarrow M \longrightarrow 0$  deux présentations finies de  $M$ . Alors pour tout  $\nu \in \mathbb{N}$ ,*

$$\det_{rg(G)-\nu}(\phi) = \det_{rg(G')-\nu}(\phi').$$

**Definition 15** *Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini. Si  $\phi : F \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0$  est une présentation de  $M$ , pour tout  $\nu \in \mathbb{N}$ , le  $\nu^{\text{ième}}$  invariant de Fitting de  $M$  est l'idéal*

$$\mathfrak{F}_\nu(M) := \det_{rg(G)-\nu}(\phi).$$

L'invariant de Fitting  $\mathfrak{F}_0(M)$  sera noté  $\mathfrak{F}(M)$  et appelé l'invariant de Fitting initial de  $M$ .

Nous allons donner quelques propriétés essentielles de ces invariants.

**Proposition 22** ([30, §3.1] et [59, §20.2])

*Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini.*

(i) *Les invariants de Fitting forment une suite croissante d'idéaux de  $A$*

$$\mathfrak{F}(M) := \mathfrak{F}_0(M) \subseteq \mathfrak{F}_1(M) \subseteq \mathfrak{F}_2(M) \subseteq \dots$$

*De plus, si  $M$  peut être engendré par  $q$  éléments, alors  $\mathfrak{F}_q(M) = A$ .*

(ii) *Si  $A \longrightarrow R$  est un morphisme d'anneaux, alors pour tout  $\nu \in \mathbb{N}$ ,*

$$\mathfrak{F}_\nu(M \otimes_A R) = (\mathfrak{F}_\nu(M))R.$$

(iii) *Pour tout  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{ann}(M)\mathfrak{F}_\nu(M) \subseteq \mathfrak{F}_{\nu-1}(M)$ . De plus, si  $M$  peut être engendré par  $q$  éléments, alors*

$$\text{ann}(M)^q \subseteq \mathfrak{F}(M) \subseteq \text{ann}(M).$$

(iv) *Si  $M$  est de présentation finie, alors tous ses idéaux de Fitting sont des idéaux de type fini.*

Nous terminons ce paragraphe par le lemme dit de McCoy :

**Lemme 4** ([30, Théorème 6 et 8], [66, Théorème A.6.3]) *Soit  $\phi : M \longrightarrow N$  un morphisme entre deux  $A$ -modules libres de type fini de rang  $m$  et  $n$  respectivement. Alors  $\phi$  est injective si, et seulement si,  $(0 :_A \det_m(\phi)) = 0$ . De plus, lorsque c'est le cas,  $m \leq n$ .*

### 4.2.2 Caractéristique d'Euler

On présente ici un invariant dont une des propriétés caractérise les  $A$ -modules qui ont des annulateurs triviaux.

**Proposition 23** ([30, chapitre 2, Théorème 19 et 20]) *Soit  $M$  un  $A$ -module. On considère deux résolutions de type fini de  $M$*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F'_m \longrightarrow F'_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F'_1 \longrightarrow F'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \operatorname{rg}(F_i) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \operatorname{rg}(F'_j).$$

En particulier, si  $0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow 0$  est une suite exacte de modules libres de type fini, alors  $\sum_{i=0}^n (-1)^i \operatorname{rg}(F_i) = 0$ .

**Définition 16** *Soit  $M$  un  $A$ -module admettant une résolution libre de type fini*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

La caractéristique d'Euler de  $M$  est

$$\operatorname{Car}(M) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \operatorname{rg}(F_i).$$

La caractéristique d'Euler de  $M$  est un entier positif ou nul [59, §4.3].

Le théorème suivant dû à Vasconcelos caractérise les modules ayant une caractéristique d'Euler nulle (ces modules seront particulièrement intéressants par la suite).

**Théorème 6** ([65], [59, chapitre 4, Théorème 12]) *Soit  $M$  un  $A$ -module admettant une résolution libre de type fini et de longueur finie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i)  $\operatorname{Car}(M) = 0$
- (ii)  $\operatorname{ann}_A(M) \neq 0$ .

Si  $A$  est noethérien, (ii) est équivalent à  $\operatorname{ann}_A(M)$  contient un élément qui n'est pas un diviseur de zéro.

### 4.2.3 Invariant de MacRae

Maintenant, nous allons définir l'invariant de MacRae d'un  $A$ -module  $M$ . Nous commençons par le cas particulier et fondamental d'un module  $M$  élémentaire (i.e. ayant une résolution libre de type fini de longueur 1 et  $\text{Car}M = 0$ ).

**Lemme 5** *Soit  $M$  un  $A$ -module élémentaire. Alors l'idéal de Fitting initial  $\mathfrak{F}(M)$  est un idéal principal engendré par un élément non diviseur de zéro, c'est à dire  $(0 :_A \mathfrak{F}(M)) = 0$ .*

*Démonstration :*

Si  $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$  est une résolution libre de  $M$ ,  $r := \text{rg}(F_1) = \text{rg}(F_0)$  et  $\mathfrak{F}(M)$  est un idéal principal : si on choisit des bases pour  $F_1$  et  $F_0$  respectivement,  $\mathfrak{F}(M)$  est engendré par le déterminant de la matrice du morphisme  $F_1 \longrightarrow F_0$  dans ces bases. La suite est une conséquence du lemme de McCoy (lemme 4).  $\square$

**Definition 17** *Soient  $S$  le sous-ensemble multiplicatif de l'anneau  $A$  constitué des éléments non-diviseurs de zéro et  $Q = A_S$  (si  $A$  est intègre,  $A_S$  est le corps de fractions de  $A$ ).*

*Un idéal fractionnaire de  $A$  est un sous  $A$ -module  $I$  de  $Q$  pour lequel il existe un non-diviseur de zéro  $a \in A$  tel que  $aI \subset A$ .*

*Un idéal fractionnaire de  $A$  est dit inversible s'il existe un idéal fractionnaire  $J$  tel que  $IJ = JI = A$ .*

**Remarque 9** Un idéal de  $A$  est un idéal fractionnaire, avec  $a = 1_A$ .

Si  $I$  est un idéal fractionnaire inversible, il existe un unique idéal fractionnaire  $J$  vérifiant  $IJ = JI = A$ , que l'on notera  $I^{-1}$ .

On peut multiplier 2 idéaux fractionnaires de  $A$  de la même manière que les idéaux de  $A$ . Ainsi, l'ensemble des idéaux fractionnaires de  $A$  est un semi-groupe dont l'unité est  $A$ .

L'idéal de Fitting initial d'un module élémentaire est donc monogène (engendré par un non-diviseur de zéro) et il est inversible. On l'appellera l'invariant de MacRae de  $M$  et on le note  $\mathfrak{S}(M)$ .

Si  $A$  est un anneau gradué,  $M$  est un  $A$ -module gradué et  $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  une résolution libre graduée, alors  $\mathfrak{S}(M)$  est un idéal homogène, et on a un isomorphisme gradué (de degré zéro) :

$$\mathfrak{S}(M) \simeq \bigwedge^{max} F_0^* \otimes \bigwedge^{max} F_1 \simeq A(-d),$$

où  $d$  désigne le degré du déterminant du morphisme  $F_1 \rightarrow F_0$  et  $\bigwedge^{max} (-)$  l'algèbre extérieure non nulle de puissance maximale.

Supposons maintenant que  $M$  est un  $A$ -module telle qu'il existe une suite exacte de  $M$

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où les  $A$ -modules  $K_i$  sont élémentaires. Une telle suite est dite une résolution élémentaire de longueur finie de  $M$ . L'idéal fractionnaire inversible

$$\mathfrak{S}(M) := \prod_{i=0}^n \mathfrak{F}(K_i)^{(-1)^i} = \mathfrak{F}(K_0)\mathfrak{F}(K_1)^{-1}\mathfrak{F}(K_2)\mathfrak{F}(K_3)^{-1} \dots \mathfrak{F}(K_n)^{(-1)^n}$$

est appelé invariant de MacRae de  $M$ .

**Remarque 10** Lorsque  $M$  est un module élémentaire, cette définition coïncide avec la précédente, car  $0 \rightarrow M = M \rightarrow 0$  est une résolution élémentaire de  $M$ .

$\mathfrak{S}(M)$  ne dépend pas du choix de la résolution élémentaire considérée pour le définir.

**Proposition 24** ([59, §3.6 et §6.2]) Soit  $M$  un module possédant une résolution élémentaire de longueur finie.

(i) Soit deux résolutions élémentaires de longueurs finies de  $M$  :

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow L_m \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Alors

$$\prod_{i=0}^n \mathfrak{F}(K_i)^{(-1)^i} = \prod_{j=0}^m \mathfrak{F}(L_j)^{(-1)^j}.$$

(ii) Si  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $A$ -module, où  $M'$  et  $M''$  ont des résolutions élémentaires de longueurs finies, alors  $\mathfrak{S}(M) = \mathfrak{S}(M')\mathfrak{S}(M'')$ .

(iii) Soit  $S$  un partie multiplicative de  $A$ . Alors le  $A_S$ -module  $M_S$  a une résolution élémentaire de longueur finie et  $\mathfrak{S}(M)A_S = \mathfrak{S}(M_S)$ .

(iv) Si  $A$  est noethérien, l'idéal fractionnaire  $\mathfrak{S}(M)$  est un idéal intégral de  $A$ . Il est aussi principal engendré par un non-diviseur de zéro,  $\mathfrak{F}(M) \subseteq \mathfrak{S}(M)$  et c'est le petit idéal ayant cette propriété (i.e si  $I$  est un idéal principal de  $A$  tel que  $\mathfrak{F}(M) \subseteq I$ , alors  $\mathfrak{S}(M) \subseteq I$ ).

**Remarque 11** La propriété (iv) implique que tout générateur de l'invariant de MacRae de  $M$  peut être vu comme le *pgcd* d'un ensemble de générateurs de l'idéal de Fitting initial de  $M$ . En particulier, lorsque  $A$  est un anneau factoriel,  $\mathfrak{S}(M)$  est engendré par le *pgcd* d'un ensemble de générateurs de  $\mathfrak{F}(M)$ .

Nous avons vu que  $\mathfrak{S}(M)$  est le plus petit idéal principal contenant l'idéal de Fitting initial  $\mathfrak{F}(M)$ , autrement dit,  $\mathfrak{S}(M)$  est la part de codimension 1 de  $\mathfrak{F}(M)$ . Il s'en suit par le point (iii) de la Proposition 22 que les idéaux premiers associés à  $\mathfrak{F}(M)$  sont exactement les idéaux premiers associés à  $\text{ann}_A(M)$ . Plus précisément, si l'anneau  $A$  est factoriel et  $P_1, \dots, P_r$  sont les facteurs irréductibles du *pgcd* d'un système de générateurs de  $\mathfrak{F}(M)$ , alors  $P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_r^{e_r}$  est un générateur de  $\mathfrak{S}(M)$  où  $e_i$  désigne la "multiplicité" de  $\mathfrak{S}(M)$  sur  $A/P_i$ . Nous renvoyons à [47, chapitre I, proposition 7.4] ou [55, chapitre V, §2] pour le concept de multiplicité des modules.

Le fait d'admettre ou non une résolution élémentaire de longueur finie semble être une propriété peu intuitive et assez complexe. La proposition suivante lie cette propriété avec l'existence d'une résolution libre de type fini.

**Proposition 25** ([59, chapitre 3, théorème 23]) *Soit  $M$  un  $A$ -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i)  $M$  admet une résolution élémentaire de longueur finie.

(ii)  $M$  admet une résolution libre de type fini et  $\text{Car}(M) = 0$ .

Dans le cas où  $A$  est noethérien on a aussi

(iii)  $M$  admet une résolution libre de type fini et de longueur finie, et  $\text{ann}(M)$  contient un non diviseur de zéro.

L'équivalence entre (ii) et (iii) est donnée par le Théorème 6.

Dans la prochaine section, nous allons montrer de manière constructive que (ii) implique (i), c'est essentiellement le seul résultat que nous utiliserons dans la suite.

L'invariant de MacRae est défini à partir d'une résolution élémentaire. Nous allons voir comment calculer effectivement cet invariant à l'aide de cette résolution.

#### 4.2.4 Une approche constructive

A partir de maintenant, l'anneau  $A$  est intègre et nous considérons un  $A$ -module  $M$  admettant une résolution libre de type fini de longueur  $n \geq 1$

$$F_{\bullet} : 0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\phi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

et  $\text{Car}(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i r_i = 0$ , où  $r_i = \text{rg}(F_i)$  pour tout  $i = 0, \dots, n$ .

Décomposons le complexe  $F_{\bullet}$  de gauche à droite comme suit. Posons  $F_n^{(0)} = 0$  et  $F_n^{(1)} = F_n$ . Comme l'homomorphisme  $\phi_n : F_n \rightarrow F_{n-1}$  est injectif, nous déduisons du lemme de McCoy que

- $F_{n-1}$  s'écrit comme une somme directe  $F_{n-1}^{(0)} \oplus F_{n-1}^{(1)}$  où ces deux modules libres sont de rang  $r_n$  et  $r_{n-1} - r_n$  respectivement,
- la matrice de  $\phi_n$  est de la forme  $\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$  avec  $\det(c_n) \neq 0$ .

Maintenant, comme la restriction de l'homomorphisme de matrice  $(c_n)$  est bijectif sur  $\text{Frac}(A)$  et que  $\text{Im}(\phi_n) = \ker(\phi_{n-1})$ , nous déduisons que

- $F_{n-2}$  s'écrit comme une somme directe  $F_{n-2}^{(0)} \oplus F_{n-2}^{(1)}$  où ces deux modules libres sont de rang  $r_{n-1} - r_n$  et  $r_{n-2} - r_{n-1} + r_n$  respectivement,
- la matrice de  $\phi_{n-1}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}$  avec  $\det(c_{n-1}) \neq 0$ .

En continuant ainsi, nous obtenons pour tout  $i = 0, \dots, n$ ,

- $F_i$  est une somme directe  $F_i^{(0)} \oplus F_i^{(1)}$  de deux modules libres de rangs  $\sum_{j=0}^{n-i-1} (-1)^j r_{i+1+j}$  et  $\sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j r_{i+j}$  respectivement,

– la matrice de  $\phi_{i+1}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a_{i+1} & c_{i+1} \\ b_{i+1} & d_{i+1} \end{pmatrix}$  avec  $\det(c_{i+1}) \neq 0$ .

Puisque  $\text{Car}(M) = \sum_{j=0}^n (-1)^j r_j = 0$ , cette décomposition doit finir avec une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \end{pmatrix}$ , avec  $\det(c_1) \neq 0$ , alors que nous avons commencé avec une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix}^t$ .

Il est bien sûr possible de décomposer  $F_\bullet$  de façon similaire de la droite vers la gauche.

**Proposition 26** *Avec les notations précédentes,*

$$\mathfrak{S}(M) = \frac{\det(c_1) \det(c_3) \dots}{\det(c_2) \det(c_4) \dots} \cdot A = \left( \prod_{i=1}^n \det(c_i)^{(-1)^{i-1}} \right) \cdot A$$

*De plus, si  $A$  est gradué,  $M$  est un  $A$ -module gradué et (4.3) est une résolution libre graduée, on a l'isomorphisme gradué*

$$\mathfrak{S}(M) \simeq \bigotimes_{i=0}^n \left( \bigwedge^{r_i} F_i \right)^{\otimes (-1)^{i+1}} \simeq A(-d)$$

où  $(-)^{\otimes (-1)} := (-)^*$  est le module dual et  $d$  est le degré de  $\prod_{i=1}^n \det(c_i)^{(-1)^{i-1}} \in A$ .

*Démonstration :*

Nous commençons par construire un nouveau complexe de modules libres de type fini

$$0 \rightarrow F_n^{(1)} \xrightarrow{\psi_n} F_n^{(1)} \oplus F_{n-1}^{(1)} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \dots \rightarrow F_2^{(1)} \oplus F_1^{(1)} \xrightarrow{\psi_1} F_1^{(1)} \oplus F_0^{(1)} \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

où, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , l'homomorphisme  $\psi_i$  est défini par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & Id \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

où  $Id$  désigne la matrice identité de taille appropriée. Ce complexe est clairement exact. Maintenant, nous construisons un morphisme de complexes  $\delta_\bullet$  partant du complexe (4.4) vers la résolution (4.3) de  $M$  comme suit :

- $\delta_n := Id$  est l'identité de  $F_n^{(1)} = F_n$ ,
- pour  $i = 0, \dots, n-1$ , l'homomorphisme  $\delta_i : F_{i+1}^{(1)} \oplus F_i^{(1)} \rightarrow F_i = F_i^{(0)} \oplus F_i^{(1)}$  est explicitement défini par la matrice carrée  $\begin{pmatrix} c_{i+1} & 0 \\ d_{i+1} & Id \end{pmatrix}$ .

Pour s'assurer que  $\delta_\bullet$  est un morphisme de complexes, nous devons vérifier que pour tout  $i = 0, \dots, n$ ,  $\phi_i \circ \delta_i = \delta_{i-1} \circ \psi_i$ . En effet, on a bien

$$\begin{pmatrix} a_i & c_i \\ b_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i+1} & 0 \\ d_{i+1} & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_i & 0 \\ d_i & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puisque  $\phi_i \circ \phi_{i+1} = 0$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ .

Maintenant, comme  $\det(c_i) \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ , le Lemme de McCoy donne l'injectivité des morphismes  $\delta_i$ . D'une part, pour  $i = 0, \dots, n$ , nous pouvons définir le  $A$ -module  $K_i := \text{Coker}(\delta_i)$  qui est un module élémentaire, et d'autre part, pour  $i = 1, \dots, n$ , l'homomorphisme  $\phi_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$  induit un homomorphisme  $\partial_i : K_i \rightarrow K_{i-1}$ . Nous obtenons ainsi un troisième complexe  $(K_\bullet, \partial_\bullet)$ . De plus, l'application surjective  $\phi_0 : K_0 \rightarrow M$  induit un homomorphisme surjectif  $\partial_0 : K_0 \rightarrow M$ .

Résumons la situation dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & F_n^{(1)} & \xrightarrow{\psi_n} & F_n^{(1)} \oplus F_{n-1}^{(1)} & \xrightarrow{\psi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\psi_2} & F_2^{(1)} \oplus F_1^{(1)} & \xrightarrow{\psi_1} & F_1^{(1)} \oplus F_0^{(1)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \delta_n \downarrow & & \delta_{n-1} \downarrow & & \delta_1 \downarrow & & \delta_0 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F_n & \xrightarrow{\phi_n} & F_{n-1} & \xrightarrow{\phi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\phi_2} & F_1 & \xrightarrow{\phi_1} & F_0 & \xrightarrow{\phi_0} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{\partial_n=0} & K_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} & K_1 & \xrightarrow{\partial_1} & K_0 & \xrightarrow{\partial_0} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Par construction, nous savons que toutes les colonnes sont exactes, de même que les deux premières lignes. Ceci implique que la troisième ligne est aussi exacte en utilisant par exemple une suite exacte longue d'homologie, c'est pour cela que le complexe  $(K_\bullet, \partial_\bullet)$  est une résolution élémentaire finie de  $M$ . Par définition des invariants de MacRae de  $M$ , nous en tirons que (observons que  $\mathfrak{F}(K_n) = \mathfrak{F}(0) = A$ ),

$$\mathfrak{S}(M) = \mathfrak{F}(K_0) \mathfrak{F}(K_1)^{-1} \mathfrak{F}(K_2) \dots \mathfrak{F}(K_{n-1})^{(-1)^{n-1}} = \prod_{i=0}^{n-1} \mathfrak{F}(K_i)^{(-1)^i}.$$

Toujours par construction, nous avons aussi pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ , une suite exacte

$$0 \rightarrow F_{i+1}^{(1)} \oplus F_i^{(1)} \xrightarrow{\delta_i} F_i = F_i^{(0)} \oplus F_i^{(1)} \rightarrow K_i \rightarrow 0, \quad (4.5)$$

où  $\delta_i$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} c_{i+1} & 0 \\ d_{i+1} & Id \end{pmatrix}$  et donc  $\mathfrak{F}(K_i) = \det(c_{i+1})A$ , ce qui achève la preuve de la première assertion.

Supposons maintenant que (4.3) est gradué. Alors le complexe (4.4) l'est aussi, de même que le diagramme commutatif précédent. Il s'en suit pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ , un



isomorphisme gradué

$$\mathfrak{F}(K_i) \simeq \bigwedge^{\max} (F_{i+1}^{(1)} \oplus F_i^{(1)}) \otimes \bigwedge^{\max} (F_i)^{\otimes (-1)}.$$

Nous en déduisons les isomorphismes gradués suivants

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(M) &\simeq \bigotimes_{i=0}^{n-1} \left( \bigwedge^{\max} (F_{i+1}^{(1)} \oplus F_i^{(1)}) \otimes \bigwedge^{\max} (F_i)^{\otimes (-1)} \right)^{\otimes (-1)^i} \\ &\simeq \bigotimes_{i=0}^{n-1} \left( \bigwedge^{\max} (F_{i+1}^{(1)} \oplus F_i^{(1)}) \right)^{\otimes (-1)^i} \bigotimes_{i=0}^{n-1} \left( \bigwedge^{r_i} F_i \right)^{\otimes (-1)^{i+1}} \\ &\simeq \bigotimes_{i=0}^{n-1} \left( \bigwedge^{\max} (F_{i+1}^{(1)} \oplus F_i^{(1)}) \right)^{\otimes (-1)^i} \bigotimes \left( \bigwedge^{\max} F_n^{(1)} \right)^{\otimes (-1)^n} \bigotimes_{i=0}^{n-1} \left( \bigwedge^{r_i} F_i \right)^{\otimes (-1)^{i+1}} \\ &\simeq \bigotimes_{i=0}^{n-1} \left( \bigwedge^{\max} F_{i+1}^{(1)} \right)^{\otimes (-1)^i} \bigotimes_{i=0}^n \left( \bigwedge^{\max} F_i^{(1)} \right)^{\otimes (-1)^n} \bigotimes_{i=0}^{n-1} \left( \bigwedge^{r_i} F_i \right)^{\otimes (-1)^{i+1}} \\ &\simeq \bigotimes_{i=0}^n \left( \bigwedge^{r_i} F_i \right)^{\otimes (-1)^{i+1}} \end{aligned}$$

( $F_0^{(1)} = 0$  par construction de la décomposition du complexe (4.3)).

□

## 4.3 Régularité

### 4.3.1 Sur la cohomologie locale

Nous rappelons dans cette section quelques notions de la cohomologie locale que nous utiliserons dans la suite pour traiter la régularité du complexe d'Eagon-Northcott. Pour plus de détails sur la cohomologie locale, on peut consulter [32].

Soit  $R$  un anneau,  $I$  un idéal de  $R$ , et  $M$  un  $R$ -module, on définit le 0<sup>ème</sup> module de cohomologie locale de  $M$  à support dans  $I$  comme l'ensemble de tous les éléments de  $M$  annihilés par une puissance de  $I$  :

$$H_I^0(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 :_M I^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Hom}(R/I^n, M).$$

On définit les autres groupes de cohomologie locale comme foncteurs dérivés à droite de  $H_I^0-$ , c'est-à-dire que  $H_I^i(M)$  est le  $i^{\text{ème}}$  module de cohomologie du complexe obtenu en appliquant  $H_I^0$  à une résolution injective de  $M$ .

Géométriquement, si on regarde les éléments de  $M$  comme des sections globales du faisceau sur  $\text{Spec } R$  associé à  $M$ , alors les éléments de  $H_I^0(M)$  sont les sections dont le support est dans le sous-schéma fermé  $\text{Spec } R/I \subset \text{Spec } R$ . Il est clair qu'une définition similaire peut s'étendre à tout sous-schéma fermé d'un schéma et c'est pourquoi cette théorie est naturellement plus développée dans ce cadre.

### 4.3.2 Régularité de Castelnuovo-Mumford

Dans cette section,  $R = A[X_1, \dots, X_r]$  et  $M$  est un  $R$ -module gradué de type fini.

Si  $I \subset R$  est un idéal homogène engendré par des formes  $f_1, \dots, f_n$  formant une famille génératrice minimale, alors le maximum des degrés des  $f_i$  est un invariant de  $I$  et même un invariant de l'anneau gradué  $R/I$ . Malheureusement, il est difficile de le connaître en pratique et souvent il est plus commode d'étudier les degrés des éléments requis pour engendrer toutes les relations de  $I$ .

Considérons  $M$  un  $R$ -module gradué de type fini et soit

$$\dots \rightarrow F_j \xrightarrow{\varphi_j} \dots F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

une résolution minimale graduée de  $M$  et  $b_j$  le maximum des degrés des générateurs de  $F_j$ . Dans la plupart des cas et dans celui qui nous intéresse, on a  $b_j > b_{j-1} > \dots > b_0$ , il est donc naturel de travailler avec la suite  $b_j - j$ .

**Definition 18** Soit  $m$  un entier. On dit que  $M$  est  $m$ -régulier si  $b_j - j \leq m$  pour tout  $j$ . La régularité de  $M$ , notée  $\text{reg } M$ , est le plus petit entier  $m$  pour lequel  $M$  est  $m$ -régulier.

**Remarque 12** La définition est telle que si  $M$  est  $m$ -régulier, alors  $M$  est engendré par des éléments de degrés  $\leq m$ .

La régularité de  $M$  peut être définie de manière équivalente comme le plus petit entier  $m$  tel que pour tout  $j$  la  $j^{\text{ème}}$  syzygy de  $M$  (image de  $\varphi_j$ ) est engendré par des éléments de degrés  $\leq m + j$ . Si  $M$  est  $m$ -régulier, alors  $F_j$  n'a pas de générateurs de degrés  $\geq m + j + 1$ , ainsi  $F_j^* = \text{Hom}_R(F_j, R)$  est nul en degré zéro.

Nous finissons ces rappels par la proposition suivante (qui est une définition dans [5])

**Proposition 27** ([32]) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le module  $M$  est  $m$ -régulier.
- (ii) Il existe une résolution libre de  $M$

$$0 \rightarrow \bigoplus_j R(-e_{rj}) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_j R(-e_{1j}) \rightarrow \bigoplus_j R(-e_{0j}) \rightarrow M \rightarrow 0$$

tel que  $e_{ij} - i \leq m$ .

- (iii)  $H_{\mathfrak{M}}^i(M)_d = 0$  pour tout  $i$  et  $d \geq m - i + 1$ .

### 4.3.3 Application aux complexes d'Eagon-Northcott et Buchsbaum-Rim

Nous rappelons la résolution suivante obtenue dans le chapitre 1.

$$0 \rightarrow S_{f-g}^* \otimes \bigwedge^f \xrightarrow{\delta} S_{f-g-1}^* \otimes \bigwedge^{f-1} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} G^* \otimes \bigwedge^{g+1} \xrightarrow{\delta} \bigwedge^g \xrightarrow{\epsilon} R \rightarrow R/I_g(\varphi) \rightarrow 0.$$

En notant  $B = R/I_g(\varphi)$  et comme

$$S_{f-g-s}^* \cong \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{f-g-s} \leq g} R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g-s}}),$$

et

$$\bigwedge^{f-s} F \cong \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_{f-s} \leq f} R(\sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{f-s}}),$$

on a

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & \left[ \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{f-g} \leq g} R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g}}) \right] \otimes \left[ R(\sum_{i=1}^g k_i - d_1 - \dots - d_f) \right] \longrightarrow \\ & \left[ \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{f-g-1} \leq g} R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g-1}}) \right] \otimes \left[ \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_{f-1} \leq f} R(\sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{f-1}}) \right] \longrightarrow \\ & \dots \longrightarrow \left[ \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 \leq g} R(k_{i_1} + k_{i_2}) \right] \otimes \left[ \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_{g+2} \leq f} R(\sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{g+2}}) \right] \longrightarrow \\ & \left[ \bigoplus_{i=1}^g R(k_i) \right] \otimes \left[ \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_{g+1} \leq f} R(\sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{g+1}}) \right] \longrightarrow \\ & \left[ \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_g \leq f} R(\sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_g}) \right] \longrightarrow R \longrightarrow B \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Finalement, ce complexe est isomorphe à la résolution graduée suivante

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow & \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{f-g} \leq g} R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g}} + \sum_{i=1}^g k_i - d_1 - \dots - d_f) \xrightarrow{\delta_{f-g+1}} \\
& \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{f-g-1} \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{f-1} \leq f}} R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g-1}} + \sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{f-1}}) \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta_4} \\
& \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{g+2} \leq f}} R(k_{i_1} + k_{i_2} + \sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{g+2}}) \xrightarrow{\delta_3} \\
& \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{g+1} \leq f}} R(k_i + \sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{g+1}}) \xrightarrow{\delta_2} \\
& \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_g \leq f} R(\sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_g}) \xrightarrow{\delta_1 = \wedge^g \varphi} R \xrightarrow{\delta_0} B \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Comme  $d_j - k_i \geq 1$  pour tout  $(i, j)$ ,

$$\begin{aligned}
d_1 + \dots + d_f - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g}} &> d_{j_1} + \dots + d_{j_{f-1}} - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g-1}} > \\
&\dots > d_{j_1} + \dots + d_{j_{g+1}} - k_i > d_{j_1} + \dots + d_{j_g}.
\end{aligned}$$

En choisissant  $i_1, \dots, i_{f-g}$  de sorte que  $k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g}}$  soit minimale, chaque membre des inégalités précédentes est le maximum des degrés des générateurs des syzygies de  $B$ .

**Lemme 6** Soit  $1 \leq i_1, \dots, i_{f-g} \leq g$  de sorte que  $k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g}}$  soit minimale. Alors pour tout  $\nu \geq \eta := d_1 + \dots + d_f - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g}} - \sum_{i=1}^g k_i - f + g$ ,  $H_{\text{SN}}^0(B)_\nu = 0$ .

*Démonstration :*

La preuve de ce lemme consiste à montrer que le complexe d'Eagon-Northcott est  $(\eta - 1)$ -régulier.

Puisque pour tout  $(i, j)$  tel que  $1 \leq i \leq g$  et  $1 \leq j \leq f$ ,  $d_j - k_i \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
d_1 + \dots + d_f - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g}} - (f - g + 1) &\geq d_{j_1} + \dots + d_{j_{f-1}} - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g-1}} - (f - g) \\
d_{j_1} + \dots + d_{j_{f-1}} - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g-1}} - (f - g) &\geq d_{j_1} + \dots + d_{j_{f-2}} - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g-2}} - (f - g - 1) \\
&\vdots \\
d_{j_1} + \dots + d_{j_{g+1}} - k_i - 2 &\geq d_{j_1} + \dots + d_{j_g} - 1.
\end{aligned}$$

Maintenant, (ii) de la Proposition 27 assure que le complexe d'Eagon-Northcott est  $(\eta - 1)$ -régulier et le point (iii) donne le lemme.  $\square$

**Remarque 13** L'entier  $\eta$  est "homogène" en les  $k_i$  et  $d_j$  (i.e. pour tout entier  $\lambda$ ,  $\eta(k_i, d_j) = \eta(k_i + \lambda, d_j + \lambda)$ ).

De la même manière, en partant de la résolution donnée par le complexe de Buchsbaum-Rim rappelée dans le chapitre 1,

$$S_{f-g-1}^* \otimes \bigwedge^f \xrightarrow{\delta} S_{f-g-2}^* \otimes \bigwedge^{f-1} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \bigwedge^{g+1} \xrightarrow{\epsilon} F \xrightarrow{\varphi} G,$$

où le morphisme connectant

$$\begin{aligned} \epsilon : \bigwedge^{g+1} F &\longrightarrow F \\ e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{g+1}} &\longmapsto \sum_{k=1}^{g+1} (-1)^k \det(\varphi_{\{\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_{g+1}\}}) e_{j_k} \end{aligned}$$

avec  $\det(\varphi_{\{\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_{g+1}\}})$  est le mineur  $g \times g$  de la matrice de  $\varphi$  faisant intervenir les colonnes  $\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_{k-1}, \hat{j}_{k+1}, \dots, \hat{j}_{g+1}$ , et en notant  $Q = G/Im(\varphi)$  le conoyau de  $\varphi$ , nous obtenons la résolution graduée

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow & \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{f-g-1} \leq g} R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g-1}} + \sum_{i=1}^g k_i - d_1 - \dots - d_f) \xrightarrow{\delta_{f-g+1}} \\ & \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{f-g-1} \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{f-1} \leq f}} R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g-1}} + \sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{f-1}}) \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta_4} \\ & \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{g+2} \leq f}} R(k_i + \sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{g+2}}) \xrightarrow{\delta_3} \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{g+1} \leq f \\ i=1}} R(\sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{g+1}}) \\ & \xrightarrow{\delta_2 = \epsilon} \bigoplus_{j=1}^f R(-d_j) \xrightarrow{\delta_1 = \varphi} \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i) \xrightarrow{\delta_0} Q \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

**Lemme 7** Si  $1 \leq i_1, \dots, i_{f-g-1} \leq g$  est tel que la somme  $k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g-1}}$  soit minimale, alors pour tout  $\nu \geq \mu := d_1 + \dots + d_f - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g-1}} - \sum_{i=1}^g k_i - f + g$ ,  $H_{\mathfrak{M}}^0(Q)_\nu = 0$ .

*Démonstration :*

Similaire au lemme 6. □

## 4.4 Calcul du résultant déterminantiel

### 4.4.1 Le résultant déterminantiel comme invariant de MacRae

Dans toute cette section,  $\nu$  et  $\mu$  sont les entiers définis dans les lemmes 6 et 7.

On commence par une proposition qui lie les idéaux de Fitting de  $B_\nu$  à  $\mathfrak{A}$ .

**Proposition 28** *Si  $l \in \mathbb{N}$  vérifie  $H_{\mathfrak{M}}^0(B)_l = 0$ , alors pour tout entier  $m \geq l$ , il existe  $q_m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathfrak{A}^{q_m} \subset \mathfrak{F}(B_m) \subset \mathfrak{A}$ .*

*Démonstration :*

Ce résultat est une conséquence de la Proposition 20 et la Proposition 22.  $\square$

Donc les idéaux  $\mathfrak{F}(B_\nu)$  et  $\mathfrak{A} = (\text{Res}(\varphi))$  de  $A$  ont le même radical. Plus précisément,  $\mathfrak{A}$  est l'unique "idéal premier minimal" contenant  $\mathfrak{F}(B_\nu)$ . De plus, il s'avère qu'il le contient avec "multiplicité 1" au sens que :

$$\text{length}_{A/\mathfrak{A}}(B_\nu) = \text{length}_{A_{\mathfrak{A}}/\mathfrak{A}_{A_{\mathfrak{A}}}}((B_\nu)_{\mathfrak{A}}) = 1.$$

C'est essentiellement ce que dit le prochain théorème, on a d'abord besoin du lemme suivant.

**Lemme 8** *Pour tout  $(i, j)$ ,  $1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f$  et tout  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^n)^2$  tels que  $|\alpha| = |\beta| = d_j - k_i$ , si  $R = \text{Res}(\varphi)$ , alors*

$$X^\alpha \frac{\partial R}{\partial U_{i,j}^\beta} - X^\beta \frac{\partial R}{\partial U_{i,j}^\alpha} \in TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi)).$$

*Démonstration :*

Par définition, il existe un monôme  $X^\gamma$  et des polynômes  $c_i$ ,  $i = 1 \dots \binom{f}{g}$ , dans  $A[X_1, \dots, X_n]$

tels que  $X^\gamma R = \sum_{i=1}^{\binom{f}{g}} c_i P_i$ . En calculant les dérivées partielles par rapport à  $U_{i,j}^\alpha$  et  $U_{i,j}^\beta$ ,

on obtient  $X^\gamma \frac{\partial R}{\partial U_{i,j}^\alpha} = P(x)X^\alpha + \sum_{l=1}^{\binom{f}{g}} \frac{\partial c_l}{\partial U_{i,j}^\alpha} P_l$  et  $X^\gamma \frac{\partial R}{\partial U_{i,j}^\beta} = P(x)X^\beta + \sum_{l=1}^{\binom{f}{g}} \frac{\partial c_l}{\partial U_{i,j}^\beta} P_l$ , où  $P(X)$  est une somme de mineurs  $(g-1) \times (g-1)$  de  $\text{mat}(\varphi)$ . On en déduit facilement que  $X^\gamma (X^\alpha \frac{\partial R}{\partial U_{i,j}^\beta} - X^\beta \frac{\partial R}{\partial U_{i,j}^\alpha}) \in I_g(\varphi)$ .  $\square$

**Théorème 7** *Soit  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $H_{\mathfrak{M}}^0(B)_l = 0$ . Alors pour tout entier  $\nu \geq l$ ,*

$$\mathfrak{S}(B_\nu) = \mathfrak{A} = (\text{Res}(\varphi)) \subset A$$

*Démonstration :*

On remarque d'abord que le comportement des invariants de MacRae et des formes d'inertie

ne varie pas selon la base. Il est donc suffisant de démontrer le théorème dans le cas où  $k = \mathbb{Z}$ .

On sait que  $\mathfrak{S}(B_\nu)$  est le plus petit idéal premier (de manière équivalente principal) contenant  $\mathfrak{F}(B_\nu)$ . C'est pourquoi, les idéaux de Fitting étant stables par localisation, le théorème sera démontré si et seulement si on prouve que  $\mathfrak{F}(B_\nu)_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}A_{\mathfrak{A}}$ .

On pose  $R := \text{Res}(\varphi)$  et on note  $\varepsilon_{i,j}^l$  le coefficient du monôme  $X_l X_n^{d_j - k_i - 1}$  dans  $\varphi_{i,j}$  pour tout  $(i, j)$ ,  $1 \leq i \leq g$ ,  $1 \leq j \leq f$ ,  $1 \leq l \leq n = f - g + 1$ , c'est-à-dire

$$\varphi_{i,j}(X_1, \dots, X_n) := \dots + \varepsilon_{i,j}^1 X_1 X_n^{d_j - k_i - 1} + \varepsilon_{i,j}^2 X_2 X_n^{d_j - k_i - 1} + \dots + \varepsilon_{i,j}^n X_n^{d_j - k_i}.$$

On fixe  $(i, j)$ , et on considère l'idéal de l'anneau quotient  $A/\mathfrak{A}$

$$J := \left( \overline{\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1}}, \overline{\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^2}}, \dots, \overline{\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}} \right) \subset A/\mathfrak{A}.$$

On définit un morphisme gradué (de degré 0) de  $A$ -algèbres par

$$\begin{aligned} \Theta : C = A[X] &\longrightarrow \mathfrak{R} := A/\mathfrak{A} \bigoplus J \bigoplus J^2 \bigoplus \dots \\ X_l &\longmapsto 0 \oplus \overline{\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^l}} \oplus 0 \oplus \dots \end{aligned}$$

qui est clairement surjectif.

Il existe  $(i, j)$  tel que  $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n} \neq 0$ . En effet, d'après le Lemme 8 on sait que pour tout  $(i, j)$  et tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tels que  $|\alpha| = d_j - k_i$ ,

$$X^\alpha \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n} - X_n^{d_j - k_i} \frac{\partial R}{\partial U_{i,j}^\alpha} \in TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi)).$$

Ainsi, si  $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n} = 0$  pour tout  $(i, j)$ , alors  $\frac{\partial R}{\partial U_{i,j}^\alpha}$  est nul pour tout  $(i, j)$  et tout multi-indice  $\alpha$ , ce qui est impossible, car  $R$  dépend d'au moins un des coefficients  $U_{i,j}^\alpha$  (on est en caractéristique 0).

Maintenant, on choisit  $(i, j)$  vérifiant  $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n} \neq 0$ . Alors  $\Theta$  induit un isomorphisme gradué  $A[X]/TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi)) \simeq \mathfrak{R}$  (notons que  $A[X]/TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi)) = B/H_{\mathfrak{m}}^0(B)$ ). En effet, si  $F(X)$  un polynôme homogène de  $A[X]$  de degré  $d \geq 0$  tel que  $F \in \ker(\Theta)$ , i.e.

$$F\left(\overline{\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1}}, \dots, \overline{\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}}\right) \in \mathfrak{A}.$$

D'après le Lemme 8, pour tout  $(i, j)$  et tout entier  $1 \leq l \leq n$ ,

$$X_n^{d_j - k_i} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^l} - X_n^{d_j - k_i - 1} X_l \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n} \in TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi)).$$

On en déduit que  $X_n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^l} - X_l \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n} \in TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi))$ .

Comme  $F$  est un polynôme homogène de degré  $d$ ,

$$F\left(X_n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1}, \dots, X_n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}\right) - F\left(X_1 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1}, \dots, X_n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}\right) \in \left(X_n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1} - X_1 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1}, \dots, X_n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^{n-1}} - X_{n-1} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^{n-1}}\right),$$

qui est dans  $TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi))$ , d'où

$$X_n^d F\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1}, \dots, \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}\right) - \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}\right)^d F(X_1, \dots, X_n) \in TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi)).$$

Donc

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}\right)^d F(X_1, \dots, X_n) \in TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi)).$$

Mais par l'hypothèse,  $0 \neq \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n} \in A/\mathfrak{A} \hookrightarrow B/H_{\mathfrak{m}}^0(B)$ . Comme  $B/H_{\mathfrak{m}}^0(B)$  est intègre, on déduit que  $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}$  n'est pas un diviseur de 0 dans  $A[X]/TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi))$ , et donc  $F(X_1, \dots, X_n) \in TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi))$ .

Réciproquement, si  $F(X)$  est un polynôme homogène de  $A[X]$  de degré  $d \geq 0$  tel que  $F \in TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi))$ , alors le fait que  $X_n^d F\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1}, \dots, \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}\right) - \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}\right)^d F(X_1, \dots, X_n) \in TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi))$  implique que  $X_n^d F\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1}, \dots, \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}\right) \in \mathfrak{A}$ , et donc  $F\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^1}, \dots, \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{i,j}^n}\right) \in \mathfrak{A}$ , d'où  $\ker(\Theta) = TF_{\mathfrak{m}}(I_g(\varphi))$ .

Finalement, comme  $B/H_{\mathfrak{m}}^0(B) \simeq \mathfrak{R}$  (isomorphisme gradué), il s'en suit par localisation que

$$(B/H_{\mathfrak{m}}^0(B))_{\mathfrak{A}} \simeq \bigoplus_{\mathbb{N}} A_{\mathfrak{A}}/\mathfrak{A}A_{\mathfrak{A}}$$

(isomorphisme gradué), car  $J_{\mathfrak{A}} = A_{\mathfrak{A}}/\mathfrak{A}A_{\mathfrak{A}}$  puisque  $J \cap (A \setminus \mathfrak{A}) \neq \emptyset$ . Ainsi, pour tout  $\nu \geq \eta$ ,  $H_{\mathfrak{m}}^0(B)_0$  est égal à 0, et on obtient que  $(B_{\nu})_{\mathfrak{A}} \simeq A_{\mathfrak{A}}/\mathfrak{A}A_{\mathfrak{A}}$ . De plus,  $\mathfrak{A}$  est principal, il vient  $\mathfrak{F}(B_{\nu})_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}A_{\mathfrak{A}}$ .

□

**Remarque 14** Ce théorème implique que le résultant déterminantiel peut être calculé d'une part comme le déterminant d'une certaine partie graduée du complexe d'Eagon-Northcott  $E-N(\varphi)$ , mais d'autre part comme étant le *pgcd* des mineurs maximaux de sa première application, dans la cas où l'anneau  $A$  est factoriel.

Une autre conséquence est la multihomogénéité du résultant par rapport à chaque colonne. Ainsi, nous déterminerons dans la prochaine section le multi-degré du résultant déterminantiel de l'homomorphisme  $\varphi : \bigoplus_{j=1}^f R(-d_j) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i)$ . La connaissance explicite du degré du résultant déterminantiel en les coefficients des entrées de la matrice de  $\varphi$  est très utile pour appréhender son calcul.



**Lemme 9** Si  $E, E', E''$  sont des  $R$ -modules tels que  $E = E' \oplus E''$ , alors  $\mathfrak{F}(E) = \mathfrak{F}(E')\mathfrak{F}(E'')$ .

*Démonstration :*

Nous avons la suite exacte  $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E'' \longrightarrow 0$ , où  $i$  est l'inclusion de  $E'$  dans  $E$  et  $\pi$  la projection de  $E$  sur  $E''$ .

Soient  $\{\omega_1, \dots, \omega_q\}$  une famille génératrice de  $E'$ ,  $e_1, \dots, e_p \in E$ . Posons pour  $i = 1 \dots p$ ,  $e''_i = \pi(e_i)$ . Nous choisissons  $e_1, \dots, e_p$  tels que

$$E'' = Re''_1 + Re''_2 + \dots + Re''_p,$$

ce qui assure le fait que  $e_1, \dots, e_p, \omega_1, \dots, \omega_q$  est un système de générateurs de  $E$ .

Remarquons que si  $\alpha_1 e''_1 + \dots + \alpha_p e''_p = 0$ , alors  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p \in E'$  et

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \beta_1 \omega_1 + \dots + \beta_q \omega_q = 0$$

pour certains éléments  $\beta_1, \dots, \beta_q \in R$ .

Soit  $A$  une matrice à  $p$  colonnes dont les lignes sont des relations entre  $e''_1, e''_2, \dots, e''_p$  et  $C$  une matrice à  $q$  colonnes dont les lignes sont des relations entre  $\omega_1, \dots, \omega_q$ . La remarque précédente montre que l'on peut trouver une matrice  $B$  à  $q$  colonnes et le même nombre de lignes que  $A$  telle que les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

soient des relations entre  $e_1, \dots, e_p, \omega_1, \dots, \omega_q$ .

Maintenant, si  $D$  est un mineur  $p \times p$  de  $A$  et  $\Delta$  un mineur  $q \times q$  de  $C$ , alors  $D\Delta$  est un mineur  $(p+q) \times (p+q)$  de la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que  $D\Delta \in \mathfrak{F}(E)$ , or  $\mathfrak{F}(E'')$  est engendré par l'ensemble des mineurs  $p \times p$  de  $A$  tel  $D$ , et  $\mathfrak{F}(E')$  est engendré par l'ensemble des mineurs  $q \times q$  de  $C$  tel  $\Delta$ , d'où  $\mathfrak{F}(E'')\mathfrak{F}(E') \subseteq \mathfrak{F}(E)$ . □

**Proposition 29** Pour tout entier  $l \geq \mu$ ,

$$\mathfrak{S}(Q_l) \subset \mathfrak{A} = (\text{Res}(\varphi)) \subset A.$$

où  $Q_l = (R/\text{Im}(\varphi))_l$

*Démonstration :*

D'après la présentation  $F \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow Q = G/\text{Im}\varphi \longrightarrow 0$ ,  $I_g(\varphi) = \mathfrak{F}(Q)$ , et le Lemme 9 conduit à  $\mathfrak{F}(Q) = \mathfrak{F}(Q_\nu)\mathfrak{F}(\bigoplus_{n \neq \nu} Q_n)$ , donc  $I_g(\varphi) \subset \mathfrak{F}(Q_\nu)$ .

Maintenant,  $I_g(\varphi)$  est trivialement inclus dans l'idéal d'élimination  $\mathfrak{A}$  (regardé en tant qu'idéal de  $R = A[X]$ ) qui est principal, et nous savons d'autre part que  $\mathfrak{S}(Q_\nu)$  est le plus petit idéal principal contenant  $\mathfrak{F}(Q_\nu)$  donc  $I_g(\varphi) \subset \mathfrak{S}(Q_\nu)$ . Or  $\mathfrak{S}(Q_\nu) \subset A$  mais  $\mathfrak{A}$  est le plus petit idéal principal de  $A$  contenant  $I_g(\varphi)$  donc  $\mathfrak{S}(Q_\nu) \subset \mathfrak{A}$ . □

**Remarque 15** Cette proposition implique que l'on peut obtenir un multiple du résultant en calculant une certaine partie graduée du complexe de Buchsbaum-Rim. Dans certains cas, même si l'on obtient qu'un multiple (donc une condition nécessaire et pas forcément suffisante à une chute de rang de la matrice  $(\varphi_{i,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f}$ ), il peut être plus simple d'étudier le résultant déterminantiel en passant par le complexe de Buchsbaum-Rim. Moralement, en passant par ce complexe on devra calculer le déterminant de matrices plus grosses mais dont les entrées seront plus simples car linéaires en les coefficients des polynômes  $\varphi_{i,j}$ .

#### 4.4.2 Degré du résultant déterminantiel

Dans cette optique, observons que le complexe d'Eagon-Northcott  $E-N(\varphi)$  est  $\mathbb{N}^{f+1}$ -gradué : il est gradué par rapport aux coefficients  $U_{i,j}^\alpha$  des polynômes  $\varphi_{i,j}$  de chaque colonne de la matrice  $mat(\varphi)$  et par rapport aux variables  $X_1, \dots, X_n$ .

Afin de faciliter la lecture, nous rappelons que  $n = f - g + 1$ ,  $R = A[X_1, \dots, X_n]$  et posons

$$E_{n-s} = S_{f-g-s}^* \otimes \bigwedge^{f-s} = \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{f-g-s} \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{f-s} \leq f}} R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g-s}} + \sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{f-s}})$$

pour  $s = 0, \dots, n-1$  et  $E_0 = R$ .

Ainsi, le complexe d'Eagon-Northcott s'écrit :

$$0 \rightarrow E_n \xrightarrow{\delta_n} E_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots \rightarrow E_1 \xrightarrow{\delta_1} E_0 \xrightarrow{\delta_0} B = R/I_g(\varphi) \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

D'après le Lemme 6 et le Théorème 7, pour tout entier

$$\nu \geq \eta := d_1 + \dots + d_f - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g}} - \sum_{i=1}^g k_i - f + g,$$

avec  $1 \leq i_1, \dots, i_{f-g} \leq g$  de sorte que  $k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g}}$  soit minimale, la  $\nu^{\text{ième}}$  composante graduée de  $E-N(\varphi)$ , regardé comme une résolution  $\mathbb{N}$ -graduée en les variables  $X_1, \dots, X_n$  a un déterminant  $\mathfrak{S}(B_\nu) = \mathfrak{A}$  qui est un idéal principal engendré par  $Res(\varphi)$ .

Pour tout  $1 \geq s \geq n$  posons

$$F_s = [E_s]_\nu = \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{s-1} \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{g+s-1} \leq f}} [R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{s-1}} + \sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{g+s-1}})]_\nu.$$

et  $F_0 = R_\nu$ .

En notant  $\Phi_i$  la partie de degré  $\nu$  des morphismes  $\delta_i$ , on obtient la résolution  $\mathbb{N}^f$ -graduée suivante

$$0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\phi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} B_\nu \rightarrow 0$$

C'est pourquoi par la proposition 26 on a un isomorphisme gradué

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S}(B_\nu) = \bigotimes_{s=0}^n \left( \bigwedge^{r_s} F_s \right)^{\otimes (-1)^{s+1}} = \left( \prod_{s=1}^n \det(c_s)^{(-1)^{s-1}} \right) . A \subset A.$$

où  $r_s = \text{rg}(F_s)$ , et  $(-)^{\otimes(-1)} := (-)^*$ , le module dual, et  $c_s : F_s^{(1)} \rightarrow F_{s-1}^{(1)}$  est l'isomorphisme de rang  $\sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j r_{i+j}$  construit dans la proposition 26.  $c_s$  est donc une matrice de taille

$\sum_{j=0}^{n-s} (-1)^j r_{s+j}$  dont les entrées sont les coefficients des polynômes  $\varphi_{i,j}$ .

On a

$$\begin{aligned} r_s &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{s-1} \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{g+s-1} \leq f}} \text{rg} \left( [R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{s-1}} + \sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{g+s-1}})]_\nu \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{s-1} \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{g+s-2} \leq f}} \binom{\nu - d_{j_1} - \dots - d_{j_{g+s-1}} + k_{i_1} + \dots + k_{i_{s-1}} + \sum_{i=1}^g k_i + n - 1}{n - 1}. \end{aligned}$$

Le degré total de  $\prod_{s=1}^n (\det(c_s))^{(-1)^{s-1}}$  est donné par

$$\begin{aligned} \text{deg} \left( \prod_{s=1}^n (\det(c_s))^{(-1)^{s-1}} \right) &= \frac{\det(c_1) \det(c_3) \dots}{\det(c_2) \det(c_4) \dots} = \sum_{j=0}^n (-1)^j r_{n-j} \\ &= \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, f\} \\ I \subset \{1, \dots, g\}}} (-1)^{|I|} \binom{\nu - \sum_{j \in J} d_j + \sum_{i \in I} k_i + \sum_{i=1}^g k_i + n - 1}{n-1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour avoir le degré en les coefficients des polynômes de la  $t^{\text{ème}}$  colonne dans le calcul des déterminants on ne tient compte que du produit des coefficients des polynômes de la  $t^{\text{ème}}$  colonne.

Ainsi,  $\mathfrak{A} \simeq A(-\lambda_1, \dots, -\lambda_f)$ , où en notant  $\text{deg}_t$  le degré par rapport aux coefficients de la  $t^{\text{ème}}$  colonne de  $\text{mat}(\varphi)$ , pour  $t = 1, \dots, f$ ,  $\lambda_t$  est donné par

$$\lambda_t = \text{deg}_t \left( \prod_{s=1}^n (\det(c_s))^{(-1)^{s-1}} \right).$$

On en déduit

$$\lambda_t = \sum_{\substack{|J|-|I|=g-1 \\ J \subset \{1, \dots, f\} \setminus \{t\} \\ I \subset \{1, \dots, g\}}} (-1)^{|I|} \binom{\nu - d_t - \sum_{j \in J} d_j + \sum_{i \in I} k_i + \sum_{i=1}^g k_i + n - 1}{n - 1} \in \mathbb{N}.$$

Remarquons que dans le cas  $g = 1$  on a  $\lambda_t = \sum_{J \subset \{1, \dots, f\} \setminus \{t\}} (-1)^{|J|} \binom{\nu - d_t - \sum_{j \in J} d_j + n - 1}{n - 1}$ . Cette expression du degré du résultant de Macaulay des  $f$  polynômes à  $f$  variables, par rapport aux coefficients du  $t^{\text{ème}}$  polynôme est donnée dans [52].

Nous savons d'après la Proposition 29 que le résultant déterminantiel divise tout générateur de l'idéal principal  $\mathfrak{S}(Q_\nu)$  pour  $\nu \geq \mu := d_1 + \dots + d_f - k_{i_1} - \dots - k_{i_{f-g-1}} - \sum_{i=1}^g k_i - f + g$  avec  $1 \leq i_1, \dots, i_{f-g-1} \leq g$  de sorte que  $k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g-1}}$  soit minimale. Afin de connaître le degré du terme parasite, nous allons calculer le degré d'un générateur de  $\mathfrak{S}(Q_\nu)$ .

Comme le complexe d'Eagon-Northcott, le complexe de Buchsbaum-Rim  $B\text{-}R(\varphi)$  est aussi  $\mathbb{N}^{f+1}$ -gradués. De même, nous posons  $F_0 = \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i)$  et  $F_1 = \bigoplus_{j=1}^f R(-d_j)$ , et pour  $s = 0, \dots, n - 2$

$$F_{n-s} = S_{f-g-1-s}^* \otimes \bigwedge^{f-s} = \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{f-g-1-s} \leq g \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{f-s} \leq f}} R(k_{i_1} + \dots + k_{i_{f-g-1-s}} + \sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_{f-s}}).$$

Le complexe de Buchsbaum-Rim s'écrit donc ( $R = A[X_1, \dots, X_n]$ )

$$0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\delta_n} F_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} Q = R/Im(\varphi) \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

Un calcul similaire à celui fait pour le complexe d'Eagon-Northcott fournit un isomorphisme gradué  $\mathfrak{A} \simeq A(-\alpha_1, \dots, -\alpha_f)$ , où

$$\alpha_t := \sum_{\substack{|J|-|I|=g \\ J \subset \{1, \dots, f\} \setminus \{t\} \\ I \subset \{1, \dots, g\}}} (-1)^{|I|+1} \binom{\nu - d_t - \sum_{j \in J} d_j + \sum_{i \in I} k_i + \sum_{i=1}^g k_i + n - 1}{n - 1} + \binom{\nu - d_t + n - 1}{n - 1}.$$

Si  $g = 1$ , on a  $\alpha_t = \lambda_t$  et on retombe sur le degré du résultant de Macaulay. Dans la suite on verra un autre cas d'égalité mais il est dur de comparer ces deux sommes en toute généralité.

**Exemple 2** Calculons ce degré dans le cas où  $f = g + 1$ . La partie de degré  $\nu$  du complexe d'Eagon-Northcott se réduit à

$$\bigoplus_{i=1}^g R(k_i + \sum_{i=1}^g k_i - d_1 - \dots - d_{g+1}) \xrightarrow{\delta_2} \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_g \leq g+1} R(\sum_{i=1}^g k_i - d_{j_1} - \dots - d_{j_g}) \xrightarrow{\delta_1} R \xrightarrow{\delta_0 = \wedge^g \varphi} B \rightarrow 0$$

En prenant  $\nu = \eta = d_1 + \dots + d_{g+1} - k_{i_0} - \sum_{i=1}^g k_i - 1$ , avec  $k_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq g} (k_i)$ , le degré par rapport aux coefficients de la  $t^{\text{ième}}$  colonne est

$$\lambda_t = \sum_{i=1}^g (-1)^1 \binom{k_i - k_{i_0}}{1} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq t}}^{g+1} (-1)^0 \binom{d_j - k_{i_0}}{1} = d_1 + \dots + \overset{\lambda}{d_t} + \dots + d_{g+1} - k_1 - \dots - k_g.$$

## 4.5 Cas des formes linéaires

On se place dans le cas  $n = f - g + 1$ . Soient  $A = \mathbb{Z}[U_{i,j}^{(\mu)}, 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq f, 1 \leq \mu \leq n]$  et  $l_{i,j} \in A[X_1, \dots, X_n]$  des formes linéaires génériques :

$$l_{i,j} = \sum_{\mu=1}^n U_{i,j}^{(\mu)} X_\mu$$

(donc  $\varphi_{i,j} = l_{i,j}$ , avec  $d_j = 1$  et  $k_i = 0$ ). Les mineurs  $g \times g$ ,  $P_1, \dots, P_{\binom{f}{g}}$  de  $\text{mat}(l) = (l_{i,j})_{i,j}$  s'écrivent :

$$P_\lambda = \sum_{s \in \mathbb{N}^n, |s|=g} \Delta_\lambda^s(U_{i,j}^{(\mu)}) X^s \quad (4.9)$$

Dans la somme (4.9), les  $\Delta_\lambda^s(U_{i,j}^{(\mu)})$  sont des polynômes homogènes de degré  $g$  en les  $U_{i,j}^{(\mu)}$  dont les monômes sont les produits de  $g$  variables distinctes  $U_{i,j}^{(\mu)}$ . On a noté  $X^s$  le monôme  $X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}$  où  $s = (s_1, \dots, s_n)$ . On rappelle que l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $g$  en  $n$  variables est de dimension  $\binom{n+g-1}{g}$ , et on en déduit que la somme (4.9) est constituée de  $\binom{f}{g}$  termes.

On muni  $\mathbb{N}^n$  de la relation d'ordre :  $s > s'$  s'il existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ ,  $s_i = s'_i$  et  $s_{i_0+1} > s'_{i_0+1}$ .

**Proposition 30** Soit  $(\Delta_\lambda^s)_{\lambda,s}$  la matrice  $\binom{f}{g} \times \binom{f}{g}$  dont la  $\lambda^{\text{ième}}$  ligne est constituée des polynômes  $\Delta_\lambda^s(U_{i,j}^{(\mu)})$  ordonnés de manière décroissante par rapport au paramètre  $s \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\text{Res}(l) = \det(\Delta_\lambda^s) \quad \text{dans } k.$$

*Démonstration :*

Si  $r \in \mathbb{N}^n$ ,

$$X^r \det(\Delta_\lambda^s) := \begin{pmatrix} \Delta_1^{(g,0,\dots,0)}(U_{i,j}^{(\mu)}) & P_1 & \Delta_1^{(0,\dots,0,g)}(U_{i,j}^{(\mu)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{\binom{f}{g}}^{(g,0,\dots,0)}(U_{i,j}^{(\mu)}) & P_{\binom{f}{g}} & \Delta_{\binom{f}{g}}^{(0,\dots,0,g)}(U_{i,j}^{(\mu)}) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

(la  $r^{\text{ième}}$  colonne de  $(\Delta_\lambda^s)$  a été remplacée par  ${}^t[P_1, \dots, P_{(f)}]$ ). En développant le déterminant (4.10) selon la  $r^{\text{ième}}$  colonne, on déduit que  $\det(\Delta_\lambda^s) \in \mathfrak{A}$ . Donc  $\det(\Delta_\lambda^s) = c \text{Res}(l)$ , avec  $c \in A$ .

Come il y a exactement  $\binom{f-1}{g-1}$  mineurs  $g \times g$  de  $\text{mat}(l)$ , parmi  $P_1, \dots, P_{(f)}$  faisant intervenir la  $t^{\text{ième}}$  colonne pour  $1 \leq t \leq f$ . Il s'en suit que la forme d'inertie  $\det(\Delta_\lambda^s)$  est de degré  $\binom{f-1}{g-1}$  par rapport aux coefficients des formes linéaires de la  $t^{\text{ième}}$  colonne.

Puisque le degré de  $\text{Res}(l)$  par rapport à la  $t^{\text{ième}}$  colonne est

$$\lambda_t = \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, f\} \setminus \{t\} \\ I \subset \{1, \dots, g\}}}^{|J|-|I|=g-1} (-1)^{|I|} \binom{f-1-|J|}{f-g} = \sum_{J \subset \{1, \dots, f\} \setminus \{t\}}^{|J|=g-1} (-1)^0 \binom{f-g}{f-g} = \binom{f-1}{g-1}.$$

Ainsi,  $\text{Res}(l)$  et  $\det(\Delta_\lambda^s)$  sont de même degré à la  $t^{\text{ième}}$  colonne, et on déduit par spécialisation que  $c = 1$ .  $\square$

**Exemple 3** Pour  $f = 4$  et  $g = 2$ , on a  $n = 4 - 2 + 1 = 3$  et

$$M := \begin{pmatrix} a_1X + a_2Y + a_3Z & b_1X + b_2Y + b_3Z & c_1X + c_2Y + c_3Z & d_1X + d_2Y + d_3Z \\ a_4X + a_5Y + a_6Z & b_4X + b_5Y + b_6Z & c_4X + c_5Y + c_6Z & d_4X + d_5Y + d_6Z \end{pmatrix}.$$

Les mineurs maximaux de  $M$  sont

$$\begin{aligned} P_1 &= (a_1b_4 - a_4b_1)X^2 + (a_1b_5 + a_2b_4 - a_4b_2 - a_5b_1)XY + (a_1b_6 + a_3b_4 - a_4b_3 - a_6b_1)XZ \\ &\quad + (a_2b_5 - a_5b_2)Y^2 + (a_2b_6 + a_3b_5 - a_6b_2 - a_5b_3)YZ + (a_3b_6 - a_6b_3)Z^2 \\ P_2 &= (a_1c_4 - a_4c_1)X^2 + (a_1c_5 + a_2c_4 - a_4c_2 - a_5c_1)XY + (a_1c_6 + a_3c_4 - a_4c_3 - a_6c_1)XZ \\ &\quad + (a_2c_5 - a_5c_2)Y^2 + (a_2c_6 + a_3c_5 - a_6c_2 - a_3c_3)YZ + (a_3c_6 - a_6c_3)Z^2 \\ P_3 &= (a_1d_4 - a_4d_1)X^2 + (a_1d_5 + a_2d_4 - a_4d_2 - a_5d_1)XY + (a_1d_6 + a_3d_4 - a_4d_3 - a_6d_1)XZ \\ &\quad + (a_2d_5 - a_5d_2)Y^2 + (a_2d_6 + a_3d_5 - a_6d_2 - a_5d_3)YZ + (a_3d_6 - a_6d_3)Z^2 \\ P_4 &= (b_1c_4 - b_4c_1)X^2 + (b_1c_5 + b_2c_4 - b_4c_2 - b_5c_1)XY + (b_1c_6 + b_3c_4 - b_4c_3 - b_6c_1)XZ \\ &\quad + (b_2c_5 - b_5c_2)Y^2 + (b_2c_6 + b_3c_5 - b_6c_2 - b_5c_3)YZ + (b_3c_6 - b_6c_3)Z^2 \\ P_5 &= (b_1d_4 - b_4d_1)X^2 + (b_1d_5 + b_2d_4 - b_4d_2 - b_5d_1)XY + (b_1d_6 + b_3d_4 - b_4d_3 - b_6d_1)XZ \\ &\quad + (b_2d_5 - b_5d_2)Y^2 + (b_2d_6 + b_3d_5 - b_6d_2 - b_5d_3)YZ + (b_3d_6 - b_6d_3)Z^2 \\ P_6 &= (c_1d_4 - c_4d_1)X^2 + (c_1d_5 + c_2d_4 - c_4d_2 - c_5d_1)XY + (c_1d_6 + c_3d_4 - c_4d_3 - c_6d_1)XZ \\ &\quad + (c_2d_5 - c_5d_2)Y^2 + (c_2d_6 + c_3d_5 - c_6d_2 - c_5d_3)YZ + (c_3d_6 - c_6d_3)Z^2. \end{aligned}$$

En réécrivant ces mineurs sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^2 \\ XY \\ XZ \\ Y^2 \\ YZ \\ Z^2 \end{pmatrix},$$

où les coefficients de cette matrice  $\Delta$  sont des polynômes homogènes de degré 2 en les  $a_j, b_j, c_j, d_j$ . Donc le résultant déterminantiel de la matrice  $M$  est donné par le déterminant de  $\Delta$ .

Ainsi, pour des formes linéaires, le résultant déterminantiel est donné par le déterminant d'une matrice carrée de taille  $\binom{f}{g}$  dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré  $g$  en les coefficients des formes linéaires. Il est donc légitime de se demander, si l'on peut comme pour le résultant de Macaulay trouver une formule de multiplicativité pour obtenir le résultant déterminantiel de matrices faisant intervenir des polynômes de degrés quelconques. Malheureusement, il est difficile de généraliser cette notion de multiplicativité au cas déterminantiel vu la structure du produit matriciel. Dans la prochaine section, nous allons voir que dans le cas le plus fréquemment rencontré dans les applications, le résultant déterminantiel, peut être calculé comme le déterminant d'une matrice carrée dans l'esprit de ce que nous venons de faire pour les formes linéaires.

## 4.6 Un cas pratique

Si l'on suppose que  $f = g + 1, n = 2$ . Ainsi,  $M$  est une matrice  $g \times (g + 1)$  dont les coefficients sont des polynômes  $\varphi_{i,j} = \sum_{\alpha+\beta=d_j-k_i} U_{i,j}^{\alpha,\beta} X^\alpha Y^\beta \in R := A[X, Y]$  génériques et homogènes de degré  $d_j - k_i \geq 1$ , où  $A = k[U_{i,j}^{\alpha,\beta}]$ . Nous rappelons que l'anneau  $k$  est supposé factoriel.

Nous avons le morphisme de modules libres

$$\varphi : \bigoplus_{i=1}^{g+1} R(-d_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i)$$

de matrice

$$M := \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,g+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{g,1} & \cdots & \varphi_{g,g+1} \end{pmatrix}.$$

L'idéal de Fitting des mineurs  $g \times g$  de  $\varphi$  est  $I = I_g(\varphi) = (f_1, \dots, f_{g+1})$  où les  $f_j$  sont les mineurs  $g \times g$  de  $M$ .

**Proposition 31** *Si  $k_1 = k_2 = \dots = k_g$ , alors le résultant déterminantiel est donné par le déterminant de la matrice de l'application*

$$\bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_g \leq g+1} R(-d_{j_1} - \dots - d_{j_g} + \sum_{i=1}^g k_i)_\eta \xrightarrow{\delta_1} R_\eta$$

*Démonstration :*

La partie de degré  $\nu$  du complexe d'Eagon-Northcott associé à  $\varphi$  se réduit à

$$\left[ \bigoplus_{i=1}^g R(-d_1 - \dots - d_{g+1} + k_i + \sum_{i=1}^g k_i) \xrightarrow{\delta_2} \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_g \leq g+1} R(-d_{j_1} - \dots - d_{j_g} + \sum_{i=1}^g k_i) \xrightarrow{\delta_1} R \xrightarrow{\delta_0 = \wedge^g \varphi} B \rightarrow 0 \right]_{\nu}.$$

En prenant  $\nu = \eta = d_1 + \dots + d_{g+1} - \min(k_i) + \sum_{i=1}^g k_i - 1$ , nous avons que le premier module

du complexe  $\left[ \bigoplus_{i=1}^g R(-d_1 - \dots - d_{g+1} + k_i + \sum_{i=1}^g k_i) \right]_{\nu}$  est nul si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^g k_i + \max(k_i) - \sum_{j=1}^{g+1} d_j + \eta &< 0 \\ \sum_{i=1}^g k_i + \max(k_i) - \sum_{j=1}^{g+1} d_j + \sum_{j=1}^{g+1} d_j - \sum_{i=1}^g k_i + \max(k_i) - \min(k_j) - 1 &< 0 \end{aligned}$$

$$\max(k_i) < \min(k_j) + 1$$

La dernière inégalité est équivalente à  $k_1 = k_2 = \dots = k_g$  et donc dans ce cas le complexe s'écrit

$$0 \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_g \leq g+1} R(-d_{j_1} - \dots - d_{j_g} + \sum_{i=1}^g k_i) \xrightarrow{\delta_1} R \xrightarrow{\delta_0 = \wedge^g \varphi} B \rightarrow 0]_{\nu}.$$

et le déterminant de ce complexe autrement dit le résultant déterminantiel est le déterminant de l'application

$$\bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_g \leq g+1} R(-d_{j_1} - \dots - d_{j_g} + \sum_{i=1}^g k_i)_{\eta} \xrightarrow{\delta_1} R_{\eta}$$

□

**Exemple 4** Dans le cas  $f = 3$ ,  $g = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$ ,  $d_3 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = 0$ , et

$$M := \begin{pmatrix} a_1 X^2 + a_2 XY + a_3 Y^2 & b_1 X^2 + b_2 XY + b_3 Y^2 & c_1 X + c_2 Y \\ a_4 X^2 + a_5 XY + a_6 Y^2 & b_4 X^2 + b_5 XY + b_6 Y^2 & c_3 X + c_4 Y \end{pmatrix}.$$

qui est la matrice du morphisme

$$\varphi : R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-1) \longrightarrow R \oplus R.$$

Les mineurs maximaux  $f_1, f_2, f_3$  de  $M$  s'écrivent

$$\begin{aligned} f_1 &= (a_1 b_4 - a_4 b_1) X^4 + (a_1 b_5 + a_2 b_4 - a_4 b_2 - a_5 b_1) X^3 Y + (a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 - a_4 b_3 - \\ &\quad a_5 b_2 - a_6 b_1) X^2 Y^2 + (a_2 b_6 + a_3 b_5 - a_5 b_3 - a_6 b_2) X Y^3 + (a_3 b_6 - a_6 b_3) Y^4 \\ f_2 &= (a_1 c_3 - a_4 c_1) X^3 + (a_1 c_4 + a_2 c_3 - a_4 c_2 - a_5 c_1) X^2 Y + (a_2 c_4 + a_3 c_3 - a_5 c_2 - \\ &\quad a_6 c_1) X Y^2 + (a_3 c_4 - a_6 c_2) Y^3 \\ f_3 &= (b_1 c_3 - b_4 c_1) X^3 + (b_1 c_4 + b_2 c_3 - b_4 c_2 - b_5 c_1) X^2 Y + (b_2 c_4 + b_3 c_3 - b_5 c_2 - \\ &\quad b_6 c_1) X Y^2 + (b_3 c_4 - b_6 c_2) Y^3, \end{aligned}$$



que l'on note

$$\begin{cases} f_1 = A_1X^4 + A_2X^3Y + A_3X^2Y^2 + A_4XY^3 + A_5Y^4 \\ f_2 = B_1X^3 + B_2X^2Y + B_3XY^2 + B_4Y^3 \\ f_3 = C_1X^3 + C_2X^2Y + C_3XY^2 + C_4Y^3. \end{cases}$$

Nous avons  $\eta = 2 + 2 + 1 - 1 = 4$ . D'après cette proposition, le résultant déterminantiel est le déterminant de la matrice du morphisme

$$R(0) \oplus R(1) \oplus R(1) \longrightarrow R(4)$$

obtenue en écrivant  $f_1, Xf_2, Yf_2, Xf_3, Yf_3$  dans la base  $\{X^4, X^3Y, X^2Y^2, XY^3, Y^4\}$ . Ainsi, le résultant déterminantiel du morphisme  $\varphi$  est donné par le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & C_1 & 0 \\ A_2 & B_2 & B_1 & C_2 & C_1 \\ A_3 & B_3 & B_2 & C_3 & C_2 \\ A_4 & B_4 & B_3 & C_4 & C_3 \\ A_5 & 0 & B_4 & 0 & C_4 \end{pmatrix}.$$

Nous allons annoncer maintenant le théorème principal de ce chapitre :

**Théorème 8** Pour tout entier  $\nu \geq \mu = \sum_{j=1}^{g+1} d_j - \sum_{i=1}^g k_i - 1$ ,

$$\mathfrak{S}(Q_\nu) = \mathfrak{A} = (\text{Res}(\varphi)) \subset A$$

*Démonstration :*

La proposition 24 nous donne déjà l'inclusion  $\mathfrak{S}(Q_\nu) \subset \mathfrak{A}$ .

Calculons le degré d'un générateur de  $\mathfrak{S}(Q_\nu)$  sachant que la partie de degré  $\nu$  du complexe de Buchsbaum-Rim se réduit à

$$[R(\sum_{i=1}^g k_i - d_1 - \dots - d_{g+1}) \xrightarrow{\delta_2} \bigoplus_{j=1}^{g+1} R(-d_j) \xrightarrow{\delta_1} \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i) \xrightarrow{\delta_0} Q \longrightarrow 0]_\nu$$

et prenons  $\nu = \mu = d_1 + \dots + d_{g+1} - \sum_{i=1}^g k_i - 1$ . Dans cette situation le degré par rapport aux coefficients de la  $t^{\text{ème}}$  colonne s'écrit

$$\begin{aligned} \alpha_t &= - \binom{\mu - \sum_{j=1}^{g+1} d_j + \sum_{i=1}^g k_i + 1}{1} + \binom{\mu - d_t + 1}{1} \\ &= \binom{0}{1} + \binom{d_1 + \dots + \hat{d}_t + \dots + d_{g+1} - \sum_{i=1}^g k_i}{1} \\ &= d_1 + \dots + \hat{d}_t + \dots + d_{g+1} - k_1 - \dots - k_g \\ &= \lambda_t \end{aligned}$$

où  $\lambda_t$  est le degré de  $Res(\varphi)$  calculé dans le dernier exemple du chapitre précédent ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 5** Dans le cas  $f = g+1$ , le résultant déterminantiel est donné par le déterminant de l'application

$$\left[ \bigoplus_{j=1}^{g+1} R(-d_j) \right]_{\mu} \longrightarrow \left[ \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i) \right]_{\mu}$$

*Démonstration :*

Rappelons que la partie de degré  $\mu$  du complexe de Buchsbaum-Rim se réduit à

$$\left[ R\left(\sum_{i=1}^g k_i - d_1 - \dots - d_{g+1}\right) \xrightarrow{\delta_2} \bigoplus_{j=1}^{g+1} R(-d_j) \xrightarrow{\delta_1} \bigoplus_{i=1}^g R(-k_i) \xrightarrow{\delta_0} Q \longrightarrow 0 \right]_{\mu}$$

il suffit de remarquer que comme  $\mu = \sum_{j=1}^{g+1} d_j - \sum_{i=1}^g k_i - 1$  le premier module de ce complexe est

$$\left[ R\left(\sum_{i=1}^g k_i - d_1 - \dots - d_{g+1}\right) \right]_{\mu} = R\left(\sum_{i=1}^g k_i - d_1 - \dots - d_{g+1} + \mu\right) = R(-1) = 0$$

$\square$

**Remarque 16** Ce corollaire donne un moyen explicite pour calculer le résultant déterminantiel comme déterminant d'une matrice carrée dont les entrées sont les coefficients des polynômes  $\varphi_{i,j}$ . L'isomorphisme du corollaire s'écrit plus précisément

$$\bigoplus_{j=1}^{g+1} R(d_1 + \dots + \overset{\wedge}{d}_j + \dots + d_{g+1} - \sum_{i=1}^g k_i - 1) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^g R\left(\sum_{j=1}^{g+1} d_j - k_1 - \dots - k_{i-1} - 2k_i - k_{i+1} - \dots - k_g - 1\right).$$

Nous obtiendrons donc  $Res(\varphi)$  comme le déterminant d'une matrice de taille  $\delta \times \delta$  où

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{j=1}^{g+1} \binom{d_1 + \dots + \overset{\wedge}{d}_j + \dots + d_{g+1} - \sum_{i=1}^g k_i}{d_1 + \dots + \overset{\wedge}{d}_j + \dots + d_{g+1} - \sum_{i=1}^g k_i - 1} \\ &= \sum_{j=1}^{g+1} (d_1 + \dots + \overset{\wedge}{d}_j + \dots + d_{g+1} - k_1 - \dots - k_g) \\ &= g \sum_{j=1}^{g+1} d_j - (g+1) \sum_{i=1}^g k_i \end{aligned}$$

Nous appellerons cette matrice la matrice de Sylvester déterminantielle et la noterons  $Sylvd(\varphi)$ . Nous allons montrer maintenant comment construire explicitement cette matrice.

Le degré total du résultant est donc égal à  $\delta$ .

#### 4.6.1 La matrice déterminantielle de Sylvester

On est toujours (comme dans toute la section 4.6) dans le cadre bi-dimensionnel. Notons  $d = \sum_{j=1}^{g+1} d_j - \sum_{i=1}^g k_i$  et  $\delta = g \sum_{j=1}^{g+1} d_j - (g+1) \sum_{i=1}^g k_i$ .

Pour  $j = 1, \dots, g+1$  posons  $d'_j = d - d_j - 1$  et pour  $i = 1, \dots, g$ ,  $k'_i = d - k_i - 1$ , et considérons la liste d'entiers  $\Delta := [k'_1, \dots, k'_g]$ .

Soient  $e_1, \dots, e_g$  la base canonique de  $A^g$  et  $\mathfrak{B}_\Delta$  la base formée des vecteurs

$$X^{k'_1} e_1, X^{k'_1-1} Y e_1, \dots, Y^{k'_1} e_1, X^{k'_2} e_2, X^{k'_2-1} Y e_2, \dots, Y^{k'_2} e_2, \dots, X^{k'_g} e_g, \dots, Y^{k'_g} e_g.$$

Soit  $A[X, Y]_\Delta$  le  $A$ -module libre engendré par  $\mathfrak{B}_\Delta$ .

Notons  $V_1, \dots, V_{g+1}$  les vecteurs colonnes de la matrice  $M = (\varphi_{i,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq g+1}$  et  $Sylvd(\varphi)$  la matrice à coefficients dans  $A = k[U_{i,j}^{\alpha,\beta}]$  ayant pour vecteurs colonnes les vecteurs

$$X^{d'_1} V_1, X^{d'_2} V_2, \dots, X^{d'_{g+1}} V_{g+1}, X^{d'_1-1} Y V_1, \dots, X^{d'_{g+1}-1} Y V_{g+1}, \dots, \\ XY^{d'_{g+1}-1} V_{g+1}, Y^{d'_1} V_1, \dots, Y^{d'_{g+1}} V_{g+1},$$

écrits dans la base  $\mathfrak{B}_\Delta$ . En regardant  $M$  comme la matrice du morphisme  $R = A[X, Y]$ -linéaire du module  $\bigoplus_{j=1}^{g+1} R(-d_j)$  muni de la base canonique  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{g+1}$  vers le module

$\bigoplus_{i=1}^g R(-k_i)$  avec pour base  $e_1, \dots, e_g$ , nous avons que l'image du  $A$ -module libre  $\bigoplus_{j=1}^{g+1} R(d'_j)$

engendré par les  $\{X^\alpha Y^{d'_j-\alpha} \varepsilon_j, 0 \leq \alpha \leq d'_j\}$  est contenue dans  $\bigoplus_{i=1}^g R(k'_i)$ , et que la matrice du morphisme de  $A$ -modules libres de type fini ainsi définie dans des bases convenables est exactement  $Sylvd(\varphi)$ .

La matrice  $Sylvd(\varphi)$  est carrée de taille  $\delta \times \delta$ , et comme nous l'avons montré dans la section précédente, nous avons

$$Res(\varphi) = \det(Sylvd(\varphi)).$$

En résumé  $Sylvd(\varphi)$  peut être construite en trois étapes suivant l'algorithme suivant.

**Exemple 5** Si  $f = 3, g = 2, d_1 = 3, d_2 = 4, d_3 = 3, k_1 = 1$  et  $k_2 = 2$ , nous avons  $\delta = 11$ . Si la matrice générique est donnée par

$$M := \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{1,3} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \varphi_{2,3} \end{pmatrix},$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{1,1}(X, Y) = a_{1,1}X^2 + b_{1,1}XY + c_{1,1}Y^2 \\ \varphi_{1,2}(X, Y) = a_{1,2}X^3 + b_{1,2}X^2Y + c_{1,2}XY^2 + d_{1,2}Y^3 \\ \varphi_{1,3}(X, Y) = a_{1,3}X^2 + b_{1,3}XY + c_{1,3}Y^2 \\ \varphi_{2,1}(X, Y) = a_{2,1}X + b_{2,1}Y \\ \varphi_{2,2}(X, Y) = a_{2,2}X^2 + b_{2,2}XY + c_{2,2}Y^2 \\ \varphi_{2,3}(X, Y) = a_{2,3}X + b_{2,3}Y \end{array} \right.$$

Nous obtenons  $Sylv(\varphi)$  en écrivant les vecteurs

$$X^3V_1, X^2YV_1, XY^2V_1, Y^3V_1, X^2V_2, XYV_2, Y^2V_2, X^3V_3, X^2YV_3, XY^2V_3, Y^3V_3$$

(où les  $V_j$  sont les colonnes de  $M$ ) dans la base

$$\mathfrak{B}_\Delta = \{X^5e_1, X^4Ye_1, X^3Y^2e_1, X^2Y^3e_1, XY^4e_1, Y^5e_1, X^4e_2, X^3Ye_2, X^2Y^2e_2, XY^3e_2, Y^4e_2\}$$

où  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

la matrice  $Sylvd(\varphi)$  est de taille  $11 \times 11$ ,

$$Sylvd(\varphi) := \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & a_{1,2} & 0 & 0 & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ b_{1,1} & a_{1,1} & 0 & 0 & b_{1,2} & a_{1,2} & 0 & b_{1,3} & a_{1,3} & 0 & 0 \\ c_{1,1} & b_{1,1} & a_{1,1} & 0 & c_{1,2} & b_{1,2} & a_{1,2} & c_{1,3} & b_{1,3} & a_{1,3} & 0 \\ 0 & c_{1,1} & b_{1,1} & a_{1,1} & d_{1,2} & c_{1,2} & b_{1,2} & 0 & c_{1,3} & b_{1,3} & c_{1,3} \\ 0 & 0 & c_{1,1} & b_{1,1} & 0 & d_{1,2} & c_{1,2} & 0 & 0 & c_{1,3} & b_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & c_{1,1} & 0 & 0 & d_{1,2} & 0 & 0 & 0 & c_{1,3} \\ a_{2,1} & 0 & 0 & 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & a_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & a_{2,1} & 0 & 0 & b_{2,2} & a_{2,2} & 0 & b_{2,3} & a_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,1} & a_{2,1} & 0 & c_{2,2} & b_{2,2} & a_{2,2} & 0 & b_{2,3} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,1} & a_{2,1} & 0 & c_{2,2} & b_{2,2} & 0 & 0 & b_{2,3} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & b_{2,1} & 0 & 0 & c_{2,2} & 0 & 0 & 0 & b_{2,3} \end{pmatrix}$$

**Remarque 17** Dans le cas où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux polynômes homogènes génériques de degré  $d_1$  et  $d_2$  respectivement,

$$\begin{aligned} \varphi_1(X, Y) &= a_0X^{d_1} + a_1X^{d_1-1}Y + \dots + a_{d_1-1}XY^{d_1-1} + a_{d_1}Y^{d_1} \\ \varphi_2(X, Y) &= b_0X^{d_2} + b_1X^{d_2-1}Y + \dots + b_{d_2-1}XY^{d_2-1} + b_{d_2}Y^{d_2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que nous sommes dans la situation déterminantielle avec  $f = 2$ ,  $g = 1$  et  $M = (\varphi_1, \varphi_2)$  est une matrice de taille  $2 \times 1$ . En reprenant les notations précédentes, nous avons  $d = \delta = d_1 + d_2$ . Ainsi, nous obtenons la matrice  $Sylvd(\varphi)$  en écrivant les vecteurs

$$\{X^{d_2-1}\varphi_1, X^{d_2-2}Y\varphi_1, \dots, XY^{d_2-2}\varphi_1, Y^{d_2-1}\varphi_1, X^{d_1-1}\varphi_2, X^{d_1-2}Y\varphi_2, \dots, Y^{d_1-1}\varphi_2\}$$

dans la base bases formée des monômes

$$\{X^{d_1+d_2-1}, X^{d_1+d_2-2}Y, \dots, XY^{d_1+d_2-2}, Y^{d_1+d_2-1}\}.$$

La matrice obtenue est de taille  $d_1 + d_2$  et n'est autre que la matrice de Sylvester classique des deux polynômes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ ,

$$\text{Sylvd}(\varphi) := \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{d_1} & & \ddots & a_0 & b_{d_2} & & \ddots & b_0 \\ 0 & \ddots & & a_1 & 0 & \ddots & & b_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{d_1} & 0 & \dots & 0 & b_{d_2} \end{pmatrix}.$$

L'intérêt des outils de résolution basés sur le résultant est de fournir, dans le cas générique, des formulations matricielles qui permettent de transformer la résolution d'un problème de chute de rang d'une matrice polynomiale (non linéaire) en un problème d'algèbre linéaire. Les expressions algébriques impliquées dans de telles formulations dépendent de manière continue des coefficients figurant en entrée de la matrice  $\varphi$ , elles peuvent donc s'appliquer avec des coefficients approchés. Ainsi, après analyse de la géométrie du problème, on peut générer une matrice dont il suffit d'initialiser les coefficients qui sont les paramètres pour résoudre le problème. Cette approche est particulièrement intéressante lorsque le système doit être résolu pour un grand nombre de paramètres, la première étape étant effectuée une fois pour toutes. Dans le prochain chapitre, nous verrons comment utiliser nos résultats dans l'étude des courbes et surfaces dans l'espace.

**Deuxième partie**

**Résultant et surfaces de Bézier**



# Chapitre 5

## Résultants de Bernstein et applications

Le résultant d'un système d'équations polynomiales est un polynôme en les coefficients de ces dernières, qui fournit une condition nécessaire et suffisante pour que ce système ait une racine dans une variété algébrique. De nombreuses formulations du résultant sont disponibles dans la littérature pour les cas d'une seule et plusieurs variables lorsque les polynômes sont exprimés dans les base monomiales [36].

Pour les applications en CAO, les représentations des objets sont souvent données dans les bases de Bernstein. Pour effectuer des opérations sur ces objets, qui peuvent être réalisées en ayant recours à la théorie de l'élimination, on peut convertir ces représentations dans les bases monomiales et utiliser les formulations des résultants développées dans ces dernières bases. D'une part, cette approche crée de l'instabilité numérique, et d'autre part il est bien connu que les bases de Bernstein sont plus stables numériquement que les bases monomiales [38, 39]. C'est pour cela qu'il est souhaitable de développer des outils d'élimination pour des données exprimées dans les bases de Bernstein. Dans le cas d'une variable, des travaux récents existent dans la littérature [68, 70, 69, 9], mais à plusieurs variables, il n'existe pas de constructions de tels outils, à notre connaissance.

Dans ce chapitre, nous construirons des résultants dans les bases de Bernstein privilégiées en CAO, que nous utiliserons par la suite pour étudier des problèmes d'intersection.

Nous commencerons par le résultant de Sylvester généralisé. Puis, nous expliciterons la structure particulière de l'élimination dans les problèmes d'intersection. Ceci, nous conduira à la preuve de l'existence d'un résultant pour des systèmes dégénérés (exprimés dans les bases de Bernstein) qui apparaissent dans ces problèmes. Nous montrerons aussi comment calculer ce résultant en utilisant des matrices bézoutiennes exprimées dans les bases de Bernstein.

### 5.1 Bases de Bernstein

Nous commençons par rappeler les principales propriétés des bases de Bernstein, puis nous définissons un résultant déterminantiel qui généralise la construction de Sylvester



dans les bases de Bernstein établie dans [70].

### 5.1.1 Cas univarié

La base de Bernstein de l'espace vectoriel des polynômes en la variable  $t$  de degré au plus  $n$  est constitué des  $n + 1$  polynômes

$$\beta_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, i = 0, \dots, n.$$

Un polynôme  $P$  de degré  $n$  est dit de Bernstein s'il est exprimé dans cette base :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n a_i \beta_i^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n a_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}. \quad (5.1)$$

Les  $a_i$  sont appelés les coefficients de Bernstein de  $P(t)$ .

Cette écriture de  $P$  est particulièrement intéressante quand le domaine considéré est  $[0, 1]$ . Cette hypothèse n'est pas si restrictive puisque, en CAO, tous les objets manipulés sont définis sur des supports bornés. Dans cet intervalle les fonctions  $\beta_i^{(n)}(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$ .

Comme leur somme est toujours égale à 1,

$$\sum_{i=0}^n \beta_i^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = ((1-t) + t)^n = 1,$$

$P(t)$  apparait comme le barycentre de ses coefficients.

Nous avons la proposition suivante dite de l'enveloppe convexe.

**Proposition 32** *Si  $(a_i)_{i=0\dots n}$  est la liste des coefficients de Bernstein de  $P$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $P(t) \in [\min_{i=0\dots n} a_i, \max_{i=0\dots n} a_i]$ .*

Ici les coefficients sont réels, leur enveloppe est donc un intervalle.

En exprimant  $t$  et  $P(t)$  sous leurs formes de Bernstein, cette propriété s'écrit pour le graphe  $G(t) = \binom{t}{P(t)}$  de  $P$  :

$$G(t) = \binom{t}{P(t)} = \sum_{i=0}^n \binom{i/n}{a_i} \beta_i^{(n)}(t).$$

Les  $\binom{i/n}{a_i}, i = 0 \dots n$ , sont appelés les points de contrôle, et la ligne brisée qui les joint est appelée le polygone de contrôle.

Pour les raisons évoquées précédemment (positivité et somme des éléments de la base), le graphe de  $P$  est inclus dans l'enveloppe convexe de son polygone de contrôle.

Ce graphe définit une *courbe de Bézier* de degré  $n$ , c'est à dire une courbe définie par deux polynômes de Bernstein (ici  $t$  et  $P(t)$ ) ou plus exprimés dans la base de Bernstein.

**Theorème 9** *Une courbe de Bézier est contenue dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle.*

### 5.1.2 Algorithme de Casteljau

La détermination d'un polynôme de Bernstein  $P(t)$  peut bien sûr être réalisée via (5.1), cependant la plupart du temps on utilise l'algorithme de Casteljau qui fournit à la fois un algorithme d'évaluation et de subdivision d'une courbe de Bézier. En partant d'un polygone de contrôle initial  $P^0 = (P_i^0)_{i=0\dots n}$ , il est défini par

$$P_i^j = (1-t)P_i^{j-1} + tP_{i+1}^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-j.$$

$P^j$  est défini par une succession d'interpolations linéaires sur le polygone de contrôle  $P^{j-1}$  (voir Figure 5.1.2). Nous avons alors  $P_0^n = P(t)$ .

C'est un algorithme de subdivision fournissant deux formes de Bernstein de  $P(x)$  pour  $x \leq t$  et  $x \geq t$ , données par  $(P_0^i)_{i=0\dots n}$  et  $(P_i^{n-i})_{i=0\dots n}$ . Son coût est  $\sum_{i=1}^n 2i = (n+1)n$  opérations ( $2n$  multiplications pour calculer  $P^1$  à partir de  $P^0$ ,  $2(n-1)$  pour calculer  $P^2$ , ...).

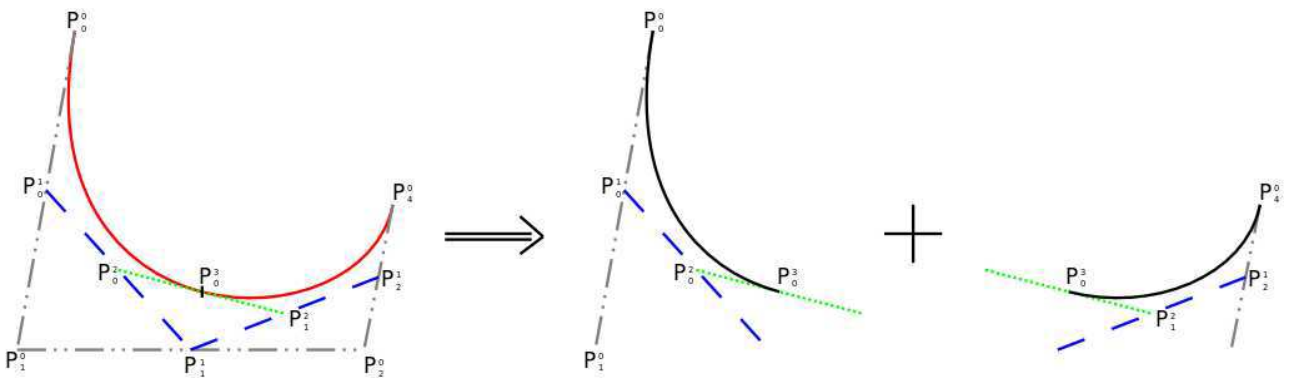


FIGURE 5.1 – Principe de l'algorithme de Casteljau

**Remarque 18** Cette définition montre que le polygone de contrôle peut être vu comme une approximation de la courbe de Bézier. Il existe d'ailleurs bon nombre d'études concernant les majorations de l'erreur entre la courbe et son polygone de contrôle. Ce lien géométrique entre une courbe de Bézier et son polygone de contrôle est une des raisons de la popularité de la représentation de Bernstein. Elle est plus intuitive que celle qui lie la courbe et les coefficients monomiaux. Les logiciels CAO permettent l'édition de courbes via la suppression, l'insertion et le déplacement de ses points de contrôle.

### 5.1.3 Opérations classiques

Nous donnons quelques opérations de base pour la manipulation des polynômes de Bernstein, qui nous seront utiles par la suite.

**Multiplication :** Considérons deux représentations de Bernstein  $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i \beta_i^{(n)}(t)$  de degré  $n$  et  $Q(t) = \sum_{j=0}^m b_j \beta_j^{(m)}(t)$  de degré  $m$ .

Le produit  $R(t) = P(t)Q(t) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k \beta_k^{(n+m)}(t)$ , où

$$c_k = \sum_{i+j=k} \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{k}} a_i b_j.$$

*Démonstration :*

On a

$$\begin{aligned} P(t)Q(t) &= \left( \sum_{i=0}^n a_i \beta_i^{(n)}(t) \right) \left( \sum_{j=0}^m b_j \beta_j^{(m)}(t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} (1-t)^{m+n-(i+j)} t^{i+j} a_i b_j \binom{n}{i} \binom{m}{j} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} \beta_k^{(n+m)} \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{k}} a_i b_j. \end{aligned}$$

□

**Élévation de degré :** L'élévation de la représentation de  $P(t)$  de degré  $n$  consiste à représenter  $P(t)$  dans une base de Bernstein de degré  $m > n$ . Cette opération correspond à la multiplication de la représentation de  $P(t)$  de degré  $n$  par la représentation du polynôme constant 1 dans la base de degré  $m - n$ .

La formule précédente donne

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{i+j=k} \frac{\binom{m-n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{m}{k}} a_i \right) \beta_i^{(m)}(t).$$

#### 5.1.4 Cas de deux variables

La base de Bernstein de l'espace des polynômes en deux variables  $(x, y)$  de bidegré  $(m, n)$  (son degré en  $x$  est  $m$  et son degré en  $y$  est  $n$ ) est donnée par

$$\beta_{i,j}^{(m,n)}(x, y) = \beta_i^{(m)}(x) \beta_j^{(n)}(y), \quad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n.$$

Sauf mention du contraire, dans la suite lorsque nous parlons de degré ou bidegré, nous entendons au sens monomial, c'est-à-dire que nous supposons que le polynôme de Bernstein est exprimé dans la base de Bernstein de degré minimal.

## 5.2 Matrice de Sylvester généralisée

Nous allons définir un résultant déterminantiel qui généralise la construction de Sylvester dans les bases de Bernstein [70], pour des polynômes en deux variables.

Soit  $M$  une matrice de taille  $(g+1) \times g$  dont les entrées sont des polynômes de Bernstein. Le but de cette section est de définir une matrice dont le déterminant est le résultant déterminantiel, sans avoir recours à des conversions entre les bases de Bernstein et monomials. Ces conversions introduisent de l'instabilité numériques [38]. La matrice de Sylvester pour deux polynômes de Bernstein a été introduite dans [70]. Nous allons généraliser cette construction au cas déterminantiel en suivant la démarche développée dans la section 4.6.1.

**Lemme 10** *Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $A$  un anneau intègre. Alors la famille  $\{B_i^{(n)}(x, y) = \binom{n}{i} x^i (y-x)^{n-i}, i = 0 \dots n\}$  forment une base de l'ensemble  $A[x, y]_n^h$  des polynômes homogènes de degré  $n$  en  $x, y$ .*

Nous reprenons les notations de la section 4.6.1 :  $d = \sum_{j=1}^{g+1} d_j - \sum_{i=1}^g k_i$  et  $\delta = g \sum_{j=1}^{g+1} d_j - (g+1) \sum_{i=1}^g k_i$ . Pour  $j = 1, \dots, g+1$ ,  $d'_j = d - d_j - 1$ , pour  $i = 1, \dots, g$ ,  $k'_i = d - k_i - 1$  et considérons la liste d'entiers  $\Delta := [k'_1, \dots, k'_g]$ .

Soit  $M = (\varphi_{i,j})_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq g+1}$ , où  $\varphi_{i,j} = \sum_{\alpha=0}^{d_j - k_i} U_{i,j}^\alpha B_{\alpha, d_j - k_i - \alpha}^{(d_j - k_i)}(x, y) \in A[x, y]$  avec  $A = \mathbb{Z}[U_{i,j}^\alpha]$ .

Soient  $(e_1, \dots, e_g)$  la base canonique de  $A^g$  et

$$\mathfrak{C}_\Delta = (B_{k'_1}^{(k'_1)}(x, y)e_1, \dots, B_0^{(k'_1)}(x, y)e_1, \dots, B_{k'_g}^{(k'_g)}(x, y)e_g, \dots, B_0^{(k'_g)}(x, y)e_g).$$

$$\mathfrak{B}_\Delta = (X^{k'_1}e_1, X^{k'_1-1}Ye_1, \dots, Y^{k'_1}e_1, X^{k'_2}e_2, X^{k'_2-1}Ye_2, \dots, Y^{k'_2}e_2, \dots, X^{k'_g}e_g, \dots, Y^{k'_g}e_g).$$

Le lemme 10 montre que  $\mathfrak{B}_\Delta$  et  $\mathfrak{C}_\Delta$  engendrent le même  $A$ -module libre  $A[X, Y]_{k'_1}^h \times \dots \times A[X, Y]_{k'_g}^h$ .

Notons  $V_1, \dots, V_{g+1}$  les vecteurs colonnes de la matrice  $M$  et  $SylvdB(\varphi)$  la matrice (à coefficients dans  $A$ ) dont les colonnes sont

$$B_{d'_1}^{(d'_1)}(x, y)V_1, \dots, B_0^{(d'_1)}(x, y)V_1, \dots, B_{d'_{g+1}}^{(d'_{g+1})}(x, y)V_{g+1}, \dots, B_0^{(d'_{g+1})}(x, y)V_{g+1},$$

exprimés dans la base  $\mathfrak{C}_\Delta$ .

En regardant la matrice  $M$  comme la matrice du morphisme  $R = A[X, Y]$ -linéaire du module  $\bigoplus_{j=1}^{g+1} R(-d_j)$  muni de la base canonique  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{g+1}$  vers le module  $\bigoplus_{i=1}^g R(-k_i)$  avec

pour base  $e_1, \dots, e_g$ , l'image du  $A$ -module libre  $\bigoplus_{j=1}^{g+1} R(d'_j)$  engendré par  $\{B_s^{(d'_j)}(x, y)\varepsilon_j, 0 \leq s \leq d'_j, 1 \leq j \leq g+1\}$  est contenue dans  $\bigoplus_{i=1}^g R(k'_i)$ , et que la matrice du morphisme

de  $A$ -modules libres de type fini ainsi définie dans des bases convenables est exactement  $SylvdB(\varphi)$ .

La matrice  $SylvdB(\varphi)$  est carrée de taille  $\delta \times \delta$ , et on a

$$SylvdB(\varphi) = Q^{-1}Sylvd(\varphi)P,$$

où  $Sylvd(\varphi)$  désigne la matrice déterminantielle de Sylvester classique de  $M$  (c'est-à-dire construite avec les  $\varphi_{i,j}$  exprimés dans la base monomiale),  $P$  (resp.  $Q$ ) est la matrice de passage de  $\{X^\alpha Y^{d'_j - \alpha} \varepsilon_j, 0 \leq \alpha \leq d'_j, 0 \leq j \leq g+1\}$  (resp.  $\mathfrak{B}_\Delta$ ) à  $\{B_s^{(d'_j)}(x,y) \varepsilon_j, 0 \leq s \leq d'_j, 0 \leq j \leq g+1\}$  (resp.  $\mathfrak{C}_\Delta$ ). Il s'en suit qu'il existe  $a = \det Q \det P^{-1} \in \mathbb{Q}$  tel que

$$a \det(SylvdB(\varphi)) = \det(Sylvd(\varphi)).$$

**Remarque 19** L'intérêt de cette égalité réside dans le fait que pour une matrice  $M$  dont les entrées sont des polynômes de Bernstein, on peut construire à partir des coefficients de Bernstein une matrice dont le déterminant est le résultant déterminantiel à un entier relatif près. Ce déterminant (que nous appellerons le résultant de Bernstein déterminantiel de la matrice  $M$ ) fournit donc une condition nécessaire et suffisante pour que le rang de la matrice "de Bernstein"  $M$  chute, sans exprimer ses entrées dans la base monomiale.

En développant les polynômes  $B_s^{(d'_j)}(x,y)$  dans les bases de monômes, on voit que  $P$  (qui est de taille  $\delta$ ) est une matrice diagonale par bloc :

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & P_{g+1,g+1} \end{pmatrix},$$

où  $P_{j,j}$  désigne la sous matrice taille  $(d'_j + 1) \times (d'_j + 1)$

$$P_{j,j} = \begin{pmatrix} \binom{d'_j}{d'_j} (-1)^0 \binom{0}{0} & \binom{d'_j}{d'_j-1} (-1)^1 \binom{1}{0} & \cdots & \binom{d'_j}{0} (-1)^{d'_j} \binom{d'_j}{0} \\ 0 & \binom{d'_j}{d'_j-1} (-1)^0 \binom{1}{1} & \cdots & \binom{d'_j}{0} (-1)^{d'_j-1} \binom{d'_j}{d'_j-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{d'_j}{0} (-1)^0 \binom{d'_j}{d'_j} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $Q$  a exactement la même structure que  $P$ . Elle est de taille  $\delta \times \delta$  et diagonale par bloc :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & Q_{g,g} \end{pmatrix},$$

où  $Q_{i,i}$  désigne la sous matrice de taille  $(k'_i + 1) \times (k'_i + 1)$  obtenue à partir de  $P_{i,i}$  en remplaçant  $d'_i$  par  $k'_i$ .

La taille et les coefficients de ces matrices montrent la difficulté liée à l'instabilité numérique qui apparaît lors des conversions entre les bases de Bernstein et monomiales.

**Exemple 6** Reprenons l'exemple de la section 4.6.1 :  $f = 3, g = 2$  pour  $d_1 = 3, d_2 = 4, d_3 = 3, k_1 = 1, k_2 = 2$  et  $\delta = 11$ . Si la matrice générique est donnée par

$$M := \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{1,3} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \varphi_{2,3} \end{pmatrix},$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{1,1}(x, y) = a'_{1,1}B_2^{(2)}(x, y) + b'_{1,1}B_1^{(2)}(x, y) + c'_{1,1}B_0^{(2)}(x, y) \\ \varphi_{1,2}(X, Y) = a'_{1,2}B_3^{(3)}(x, y) + b'_{1,2}B_2^{(3)}(x, y) + c'_{1,2}B_1^{(3)}(x, y) + d'_{1,2}B_0^{(3)}(x, y) \\ \varphi_{1,3}(X, Y) = a'_{1,3}B_2^{(2)}(x, y) + b'_{1,3}B_1^{(2)}(x, y) + c'_{1,3}B_0^{(2)}(x, y) \\ \varphi_{2,1}(X, Y) = a'_{2,1}B_1^{(1)}(x, y) + b'_{2,1}B_0^{(1)}(x, y) \\ \varphi_{2,2}(X, Y) = a'_{2,2}B_2^{(2)}(x, y) + b'_{2,2}B_1^{(2)}(x, y) + c'_{2,2}B_0^{(2)}(x, y) \\ \varphi_{2,3}(X, Y) = a'_{2,3}B_1^{(1)}(x, y) + b'_{2,3}B_0^{(1)}(x, y). \end{array} \right.$$

Si  $V_1, V_2, V_3$  sont les colonnes de  $M$ , nous obtenons la matrice  $\text{Sylvd}B(\varphi)$  en exprimant les vecteurs

$$B_3^{(3)}V_1, B_2^{(3)}V_1, B_1^{(3)}V_1, B_0^{(3)}V_1, B_2^{(2)}V_2, B_1^{(2)}V_2, B_0^{(2)}V_2, B_3^{(3)}V_3, B_2^{(3)}V_3, B_1^{(3)}V_3, B_0^{(3)}V_3,$$

dans la base

$$\mathfrak{E}_\Delta = \{B_5^{(5)}e_1, B_4^{(5)}e_1, B_3^{(5)}e_1, B_2^{(5)}e_1, B_1^{(5)}e_1, B_0^{(5)}e_1, B_4^{(4)}e_2, B_3^{(4)}e_2, B_2^{(5)}(x, y)e_2, B_1^{(4)}e_2, B_0^{(4)}e_2\},$$

$$\text{où } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

la matrice  $\text{Sylvd}(\varphi)$  est de taille  $11 \times 11$  :

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc} a'_{1,1} & 0 & 0 & 0 & a'_{1,2} & 0 & 0 & a'_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{2}{1}b'_{1,1} & \binom{3}{5}a'_{1,1} & 0 & 0 & \binom{3}{5}b'_{1,2} & a'_{1,2} & 0 & \binom{2}{1}b'_{1,3} & \frac{1}{\binom{5}{4}}a'_{1,3} & 0 & 0 \\ \binom{2}{5}c'_{1,1} & \binom{2}{5}\binom{2}{1}b'_{1,1} & \binom{3}{5}a'_{1,1} & 0 & \binom{3}{5}c'_{1,2} & \binom{2}{5}\binom{3}{2}b'_{1,2} & \frac{1}{\binom{5}{3}}a'_{1,2} & \frac{1}{\binom{5}{3}}c'_{1,3} & \binom{2}{5}\binom{2}{1}b'_{1,3} & \binom{3}{5}a'_{1,3} & 0 \\ 0 & \binom{3}{2}\binom{2}{5}c'_{1,1} & \binom{3}{5}\binom{2}{1}b'_{1,1} & \frac{1}{\binom{5}{2}}a'_{1,1} & d'_{1,2} & \binom{2}{1}\binom{3}{5}c'_{1,2} & \binom{3}{5}b'_{1,2} & 0 & \binom{3}{5}c'_{1,3} & \binom{3}{5}b'_{1,3} & \frac{1}{\binom{5}{2}}c'_{1,3} \\ 0 & 0 & \binom{3}{5}\binom{2}{1}c'_{1,1} & \binom{2}{5}b'_{1,1} & 0 & \binom{2}{5}d'_{1,2} & \binom{3}{5}c'_{1,2} & 0 & 0 & \binom{3}{5}c'_{1,3} & \frac{1}{\binom{5}{1}}b'_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & c'_{1,1} & 0 & 0 & d'_{1,2} & 0 & 0 & 0 & c'_{1,3} \\ a'_{2,1} & 0 & 0 & 0 & a'_{2,2} & 0 & 0 & a'_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{4}b'_{2,1} & \binom{3}{4}a'_{2,1} & 0 & 0 & \binom{2}{4}b'_{2,2} & \binom{2}{4}a'_{2,2} & 0 & \frac{1}{\binom{4}{3}}b'_{2,3} & \binom{3}{4}a'_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & \binom{2}{4}b'_{2,1} & \binom{3}{4}a'_{2,1} & 0 & c'_{2,2} & \binom{2}{4}\binom{2}{1}b'_{2,2} & \frac{1}{\binom{4}{2}}a'_{2,2} & 0 & \frac{1}{\binom{4}{2}}b'_{2,3} & \binom{3}{4}a'_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & \binom{3}{4}\binom{2}{1}b'_{2,1} & \frac{1}{\binom{4}{1}}a'_{2,1} & 0 & \binom{3}{4}c'_{2,2} & \frac{1}{\binom{4}{1}}b'_{2,2} & 0 & 0 & \binom{3}{4}b'_{2,3} & \frac{1}{\binom{4}{1}}a'_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & b'_{2,1} & 0 & 0 & c'_{2,2} & 0 & 0 & 0 & b'_{2,3} \end{array} \right)$$



### 5.3.1 Intersection courbe-surface

Soient  $C_1$  et  $S_2$  une courbe de Bézier et une surface de Bézier dans  $\mathbb{R}^3$  définies respectivement par les paramétrisations suivantes

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\longmapsto (\phi_1(u), \phi_2(u), \phi_3(u)), \end{aligned} \quad (5.2)$$

et

$$\begin{aligned} \psi : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\longmapsto (\psi_1(s, t), \psi_2(s, t), \psi_3(s, t)), \end{aligned} \quad (5.3)$$

où  $\phi_k$  (resp.  $\psi_k$ ),  $k = 1 \dots 3$ , sont des polynômes de Bernstein univariés (resp. bivariés) de degré (resp. bidegré)  $m$  (resp.  $(n, n')$ ). Il existe donc des scalaires  $a_i^{(k)}$  et  $b_{i,j}^{(k)}$  tels que

$$\phi_k(u) = \sum_{i=0}^m a_i^{(k)} \beta_i^{(m)}(u) \quad \text{et} \quad \psi_k(s, t) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n'}} b_{i,j}^{(k)} \beta_i^{(n)}(s) \beta_j^{(n')}(t).$$

Génériquement, l'intersection  $C_1 \cap S_2$  est l'ensemble fini de points  $\{(u, s, t) \in [0, 1]^3 : \phi(u) = \psi(s, t)\}$ , et sa projection sur la droite définie par le paramètre  $s$  est

$$\Pi := \{s \in [0, 1] : \exists (u, t) \in [0, 1]^2, \phi(u) - \psi(s, t) = 0\}. \quad (5.4)$$

Notre but est de déterminer l'équation implicite de cette projection dans la base de Bernstein (i.e le polynôme définissant  $\Pi$ ). Ceci revient à éliminer les variables  $u$  et  $t$  dans le système polynomial

$$\begin{cases} P_1(s; u, t) = \phi_1(u) - \psi_1(s, t) = 0 \\ P_2(s; u, t) = \phi_2(u) - \psi_2(s, t) = 0 \\ P_3(s; u, t) = \phi_3(u) - \psi_3(s, t) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Ici les  $\psi_i(s; t)$  sont considérés comme des polynômes univariés en  $t$  et à coefficients en  $s$ .

### 5.3.2 Intersection surface-surface

Soit  $S_1$  une autre surface de Bézier dans  $\mathbb{R}^3$  définie par la paramétrisation

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)), \end{aligned} \quad (5.6)$$



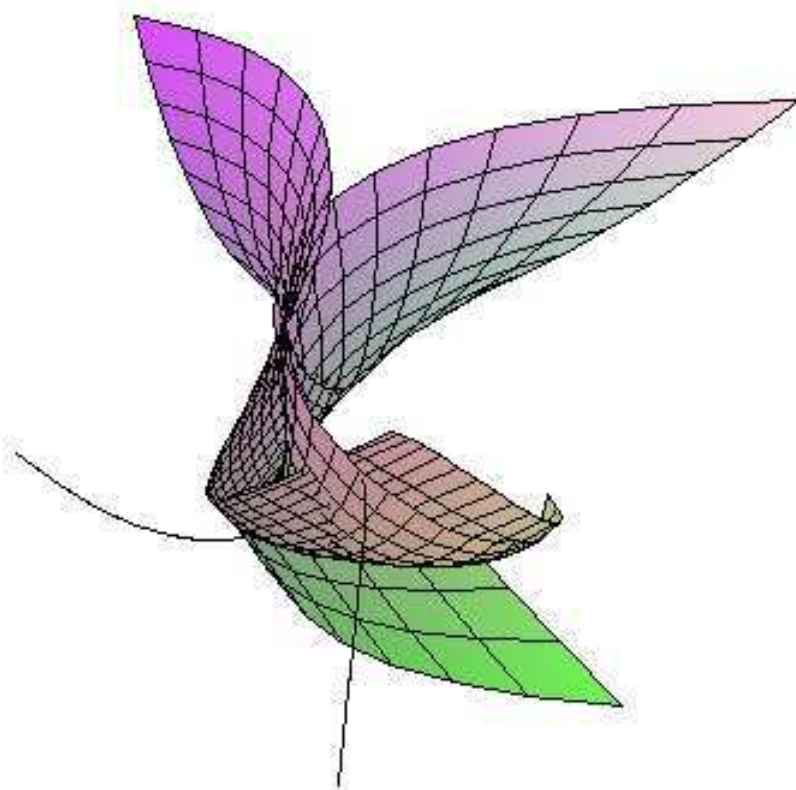


FIGURE 5.2 – L'intersection d'une courbe et une surface de Bézier dans  $\mathbb{R}^3$

où les  $\varphi_k$  sont des polynôme de Bernstein bivariés de degré  $(m, m')$ . Il existe donc des scalaires  $a_{i,j}^{(k)}$  tels que

$$\varphi_k(s, t) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m'}} a_{i,j}^{(k)} \beta_i^{(m)}(u) \beta_j^{(m')}(v).$$

Génériquement,  $S_1 \cap S_2$  est la courbe

$$C := \{(u, v, s, t) \in [0, 1]^4 : \varphi(u, v) = \psi(s, t)\}, \quad (5.7)$$

et sa projection sur le plan défini par les paramètres  $(u, s)$  est

$$\Pi := \{(u, s) \in [0, 1]^2 : \exists (v, t) \in [0, 1]^2, \varphi(u, v) = \psi(s, t)\}. \quad (5.8)$$

Notre but est de déterminer l'équation implicite de la courbe  $\Pi$  dans la base de Bernstein (i.e le polynôme définissant  $\Pi$ ). Le calcul de la projection de la courbe  $C \subset \mathbb{R}^4$  sur le plan défini par les paramètres  $(u, s)$  est équivalent au procédé d'élimination des variables  $v$  et  $t$  dans le système

$$\begin{cases} P_1(s, u; v, t) = \varphi_1(u, v) - \psi_1(s, t) = 0 \\ P_2(s, u; v, t) = \varphi_2(u, v) - \psi_2(s, t) = 0 \\ P_3(s, u; v, t) = \varphi_3(u, v) - \psi_3(s, t) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Nous regardons ici les  $\varphi_i(u; v)$  (resp.  $\psi_i(s; t)$ ) comme des polynômes univariés en  $v$  (resp.  $t$ ) à coefficients en  $u$  (resp.  $s$ ).

Les systèmes (5.5) et (5.9) sont dits séparés, car les polynômes  $P_i$  sont la différence de deux polynômes dont les variables du premier sont distinctes de celles du second. Ils ont été étudiés dans le cadre monomial dans [18].

## 5.4 Matrice bézoutienne de Bernstein et résultant de Bernstein

Dans cette section, nous allons construire un outil d'élimination adapté pour les systèmes polynomiaux (5.5) et (5.9), qui sont dégénérés pour la formulation classique du résultant. Cette construction utilise la notion classique de matrice bézoutienne mais exprimée dans la base de Bernstein. Nous allons généraliser au cas à deux variables l'approche développée dans [9] à une variable.

### 5.4.1 Matrice bézoutienne de Bernstein

Nous considérons donc le système de 3 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} P_1(x, y) = \varphi_1(x) - \psi_1(y) \\ P_2(x, y) = \varphi_2(x) - \psi_2(y) \\ P_3(x, y) = \varphi_3(x) - \psi_3(y) \end{cases} \quad (5.10)$$

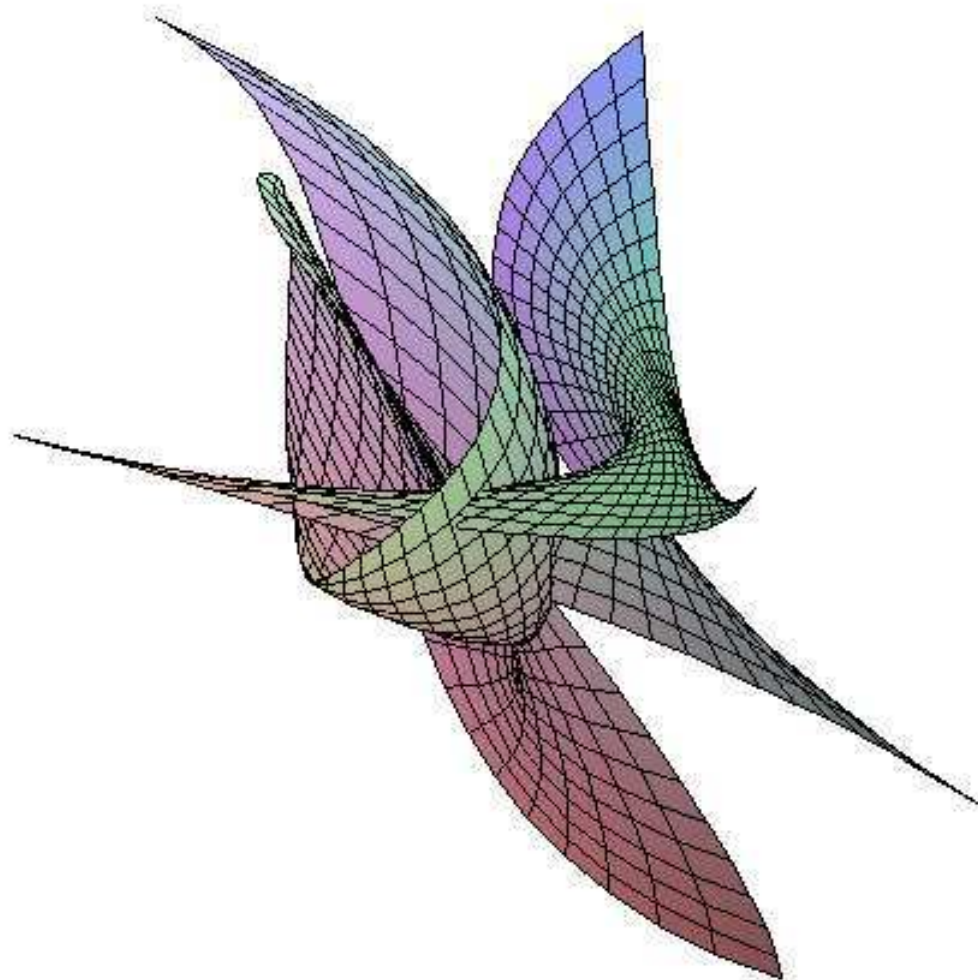


FIGURE 5.3 – L'intersection de deux surfaces de Bézier dans  $\mathbb{R}^3$

où  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  (resp.  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ ) sont des polynômes univariés en  $x$  (resp.  $y$ ) de degré  $m \geq 1$  (resp.  $n \geq 1$ ) avec des coefficients indéterminés. Plus précisément, nous avons

$$\varphi_k(x) = \sum_{0 \leq i \leq m} a_{k,i} \beta_i^{(m)}(x) \quad \text{et} \quad \psi_k(x) = \sum_{0 \leq i \leq n} b_{k,i} \beta_i^{(n)}(x), \quad \text{pour } k = 1 \dots 3. \quad (5.11)$$

Dorénavant et sans perte de généralité, nous supposons que  $n \geq m$ .

**Definition 19** *Le bézoutien des polynômes  $P_1, P_2, P_3$  est le déterminant :*

$$\begin{aligned} \text{Bez}(x, y; x', y') &= \begin{vmatrix} P_1(x, y) & \frac{P_1(x, y) - P_1(x', y)}{x - x'} & \frac{P_1(x', y) - P_1(x', y')}{y - y'} \\ P_2(x, y) & \frac{P_2(x, y) - P_2(x', y)}{x - x'} & \frac{P_2(x', y) - P_2(x', y')}{y - y'} \\ P_3(x, y) & \frac{P_3(x, y) - P_3(x', y)}{x - x'} & \frac{P_3(x', y) - P_3(x', y')}{y - y'} \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} \varphi_1(x) - \psi_1(y) & \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(x')}{x - x'} & \frac{\psi_1(y) - \psi_1(y')}{y - y'} \\ \varphi_2(x) - \psi_2(y) & \frac{\varphi_2(x) - \varphi_2(x')}{x - x'} & \frac{\psi_2(y) - \psi_2(y')}{y - y'} \\ \varphi_3(x) - \psi_3(y) & \frac{\varphi_3(x) - \varphi_3(x')}{x - x'} & \frac{\psi_3(y) - \psi_3(y')}{y - y'} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Il est clair que  $\text{Bez}(x, y; x', y')$  est un polynôme de bidegré au plus  $(m - 1, n - 1)$  en  $(x', y')$ .

En multipliant la deuxième colonne de  $\text{Bez}(x, y; x', y')$  par  $x' - x$ , la troisième par  $y - y'$ , et en ajoutant ces deux résultats à la première, nous obtenons que  $\text{Bez}(x, y; x', y') = \text{Bez}(x', y'; x, y)$ . Ainsi, nous en déduisons que  $\text{Bez}(x, y; x', y')$  est aussi un polynôme de bidegré au plus  $(m - 1, n - 1)$  en  $(x, y)$ . Il existe donc des réels  $c_{\alpha, \gamma}$  tels que

$$\text{Bez}(x, y; x', y') = \sum_{(\alpha, \gamma) = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2)} c_{\alpha, \gamma} \beta_{\alpha_1}^{(m-1)}(x) \beta_{\alpha_2}^{(n-1)}(y) \beta_{\gamma_1}^{(m-1)}(x') \beta_{\gamma_2}^{(n-1)}(y'),$$

c'est-à-dire  $\text{Bez}(x, y; x', y') = {}^tV(x, y) \mathbb{B}V(x', y')$ , où  $\mathbb{B}$  est la matrice carrée  $(c_{\alpha, \gamma})$  de taille  $mn$  et

$${}^tV(x, y) = (\beta_0^{(m-1)}(x) \beta_0^{(n-1)}(y), \beta_0^{(m-1)}(x) \beta_1^{(n-1)}(y), \dots, \beta_{m-1}^{(m-1)}(x) \beta_{n-2}^{(n-1)}(y), \beta_{m-1}^{(m-1)}(x) \beta_{n-1}^{(n-1)}(y)).$$

**Definition 20** *La matrice  $\mathbb{B}$  est appelée la matrice bézoutienne de Bernstein des polynômes  $P_1, P_2, P_3$  donnés par (5.10), et son déterminant est le bézoutien de Bernstein du système.*

## 5.4.2 Construction de la matrice bézoutienne de Bernstein

Maintenant nous allons décrire la construction explicite de la matrice bézoutienne de Bernstein  $\mathbb{B}$  définie précédemment, à partir des coefficients de Bernstein des polynômes  $P_1, P_2, P_3$ .

**Theorème 10** *La matrice bézoutienne  $\mathbb{B} = C_1 \otimes D_1 + \dots + C_6 \otimes D_6$ , où  $C_1, C_2, C_3, D_4, D_5, D_6$  (resp  $D_1, D_2, D_3, C_4, C_5, C_6$ ) sont des matrices symétriques réelles de taille  $m \times m$  (resp  $n \times n$ ). De plus, les coefficients de ces matrices peuvent être calculés en  $\mathcal{O}(n^2)$  opérations selon les règles (5.19) et (5.22).*

*Démonstration :*

Après développement et simplification du déterminant (5.12), nous obtenons

$$\text{Bez}(x, y; x', y') = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(x')}{x - x'} \frac{\begin{vmatrix} \psi_{j_i}(y) & \psi_{j_i}(y') \\ \psi_{k_i}(y) & \psi_{k_i}(y') \end{vmatrix}}{y - y'} + \frac{\psi_i(y) - \psi_i(y')}{y - y'} \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{j_i}(x) & \varphi_{j_i}(x') \\ \varphi_{k_i}(x) & \varphi_{k_i}(x') \end{vmatrix}}{x - x'} \right),$$

où  $(i, j_i, k_i)$  décrit l'ensemble des cycles de  $(1, 2, 3)$ . Ce bézoutien est la somme de six termes similaires  $\text{Bez}_i(x, y; x', y')$ ,  $i = 1 \dots 6$ , symétriques en  $(x, y; x', y')$ . Nous allons montrer comment les calculer explicitement dans la base de Bernstein. Par exemple,

$$\text{Bez}_1(x, y; x', y') = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(x')}{x - x'} \times \frac{\psi_2(y)\psi_3(y') - \psi_2(y')\psi_3(y)}{y - y'}. \quad (5.13)$$

En utilisant les égalités  $1 = \sum_{0 \leq i \leq m} \beta_i^{(m)}(x) = \sum_{0 \leq i \leq m} \beta_i^{(m)}(x')$ ,

$$\varphi_1(x) - \varphi_1(x') = \sum_{i,j=0}^m (a_{i,1} - a_{j,1}) \beta_i^{(m)}(x) \beta_j^{(m)}(x'). \quad (5.14)$$

Comme  $\varphi_1(x) - \varphi_1(x')$  est multiple de  $x - x'$ , il existe une matrice symétrique réelle  $(c_{i,j})_{i,j=1 \dots m}$  telle que

$$\varphi_1(x) - \varphi_1(x') = (x - x') \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} \beta_{i-1}^{(m-1)}(x) \beta_{j-1}^{(m-1)}(x'). \quad (5.15)$$

Puisque  $x = xx' + (1 - x')x$ ,

$$\begin{aligned} x \left( \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} \beta_{i-1}^{(m-1)}(x) \beta_{j-1}^{(m-1)}(x') \right) &= \\ xx' \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} \beta_{i-1}^{(m-1)}(x) \beta_{j-1}^{(m-1)}(x') &+ \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} x \beta_{i-1}^{(m-1)}(x) (1 - x') \beta_{j-1}^{(m-1)}(x'). \end{aligned} \quad (5.16)$$

De même

$$\begin{aligned} x' \left( \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} \beta_{i-1}^{(m-1)}(x) \beta_{j-1}^{(m-1)}(x') \right) &= \\ xx' \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} \beta_{i-1}^{(m-1)}(x) \beta_{j-1}^{(m-1)}(x') &+ \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} (1 - x) \beta_{i-1}^{(m-1)}(x) x' \beta_{j-1}^{(m-1)}(x'). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Nous déduisons de (5.15), (5.16) et (5.17) que

$$\varphi_1(x) - \varphi_1(x') = \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} \frac{i}{m} \beta_i^{(m)}(x) \frac{m-j+1}{m} \beta_{j-1}^{(m)}(x') - \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} \frac{m-i+1}{m} \beta_{i-1}^{(m)}(x) \frac{j}{m} \beta_j^{(m)}(x'). \quad (5.18)$$

En identifiant les coefficients de  $\beta_j^{(m)}(x')$ ,  $j = 0 \dots m$  dans (5.14) et (5.18), nous obtenons

$$\text{pour } j = 0 : \sum_{i=0}^m (a_{i,1} - a_{0,1}) \beta_i^{(m)}(x) = \sum_{i=1}^m c_{i,1} \frac{i}{m} \beta_i^{(m)}(x),$$

$$\text{pour } j = 1 \dots m-1 : \sum_{i=0}^m (a_{i,1} - a_{j,1}) \beta_i^{(m)}(x) = \frac{m-j}{m} \sum_{i=1}^m c_{i,j+1} \frac{i}{m} \beta_i^{(m)}(x) - \frac{j}{m} \sum_{i=1}^m c_{i,j} \frac{m-i+1}{m} \beta_{i-1}^{(m)}(x),$$

$$\text{pour } j = m : \sum_{i=0}^m (a_{i,1} - a_{m,1}) \beta_i^{(m)}(x) = - \sum_{i=1}^m c_{i,m} \frac{m-i+1}{m} \beta_{i-1}^{(m)}(x).$$

Donc les coefficients  $c_{i,j}$  du polynôme  $\frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(x')}{x - x'}$  dans (5.15) dans la base de Bernstein peuvent être calculés en  $\mathcal{O}(n^2)$  opérations comme suit :

$$c_{i,j+1} = \frac{m^2}{i(m-j)} (a_{i,1} - a_{j,1}) + \frac{j(m-i)}{i(m-j)} c_{i+1,j}, \quad i = 1 \dots m, j = 0 \dots m-1. \quad (5.19)$$

De la même manière, nous calculons le second facteur du membre de droite de l'égalité (5.13). En utilisant (5.11), le numérateur de ce facteur est égal à

$$\sum_{i,j=0}^n (b_{i,2} b_{j,3} - b_{j,2} b_{i,3}) \beta_i^{(n)}(y) \beta_j^{(n)}(y') = (y - y') \sum_{i,j=1}^n d_{i,j} \beta_{i-1}^{(n-1)}(y) \beta_{j-1}^{(n-1)}(y'). \quad (5.20)$$

Le même argument que précédemment montre que le membre de droite de l'identité précédente est égal à

$$\sum_{i,j=1}^n d_{i,j} \frac{i}{n} \beta_i^{(n)}(y) \frac{n-j+1}{n} \beta_{j-1}^{(n)}(y') - \sum_{i,j=1}^n d_{i,j} \frac{n-i+1}{n} \beta_{i-1}^{(n)}(y) \frac{j}{n} \beta_j^{(n)}(y'). \quad (5.21)$$

En égalisant les coefficients de  $\beta_j^{(n)}(y')$ ,  $j = 0 \dots n$  dans (5.20) et (5.21), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (b_{i,2} b_{0,3} - b_{0,2} b_{i,3}) \beta_i^{(n)}(y) &= \sum_{i=1}^n d_{i,1} \frac{i}{n} \beta_i^{(n)}(y) \\ \sum_{i=0}^n (b_{i,2} b_{j,3} - b_{j,2} b_{i,3}) \beta_i^{(n)}(y) &= \frac{n-j}{n} \sum_{i=1}^n d_{i,j+1} \frac{i}{n} \beta_i^{(n)}(y) - \frac{j}{n} \sum_{i=1}^n d_{i,j} \frac{n-i+1}{n} \beta_{i-1}^{(n)}(y) \\ \sum_{i=0}^n (b_{i,2} b_{n,3} - b_{n,2} b_{i,3}) \beta_i^{(n)}(y) &= - \sum_{i=1}^n d_{i,n} \frac{n-i+1}{n} \beta_{i-1}^{(n)}(y). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que les coefficients  $d_{i,j}$  du polynôme  $\frac{\psi_2(y)\psi_3(y') - \psi_2(y')\psi_3(y)}{y - y'}$  dans (5.20) dans la base de Bernstein peuvent être calculés en  $\mathcal{O}(n^2)$  opérations à l'aide des formules suivantes :

$$d_{i,j+1} = \frac{n^2}{i(n-j)} (b_{i,2} b_{j,3} - b_{j,2} b_{i,3}) + \frac{j(n-i)}{i(n-j)} d_{i+1,j}, \quad i = 1 \dots n, j = 0 \dots n-1. \quad (5.22)$$

Par conséquent,

$$\text{Bez}_1(x, y; x', y') = \sum_{i,j=1}^m \sum_{k,l=1}^n c_{i,j} d_{k,l} \beta_{i-1}^{(m-1)}(x) \beta_{k-1}^{(n-1)}(y) \beta_{j-1}^{(m-1)}(x') \beta_{l-1}^{(n-1)}(y'), \quad (5.23)$$

où  $c_{i,j}$  et  $d_{i,j}$  sont donnés par (5.19) et (5.22), respectivement.

Nous définissons la matrice réelle  $B_i$  par  $\text{Bez}_i(x, y; x', y') = {}^tV(x, y)B_iV(x', y')$ ,  $i = 1 \dots 6$ , où  $V(x, y)$  est donné dans la sous-section 5.4.1. La matrice  $B_1$  est le produit tensoriel  $C \otimes D$  où  $C = (c_{i,j})_{i,j=1\dots m}$  et  $D = (d_{k,l})_{k,l=1\dots n}$ . Comme  $C$  et  $D$  sont symétriques,  $C \otimes D$  l'est aussi.

Il s'en suit que la matrice bézoutienne de Bernstein  $\mathbb{B}$  du système à variables séparés (5.10) est  $\mathbb{B} = B_1 + \dots + B_6$ . Les formules (5.19) et (5.22) montrent comment construire cette matrice bézoutienne de Bernstein. Finalement, la matrice  $\mathbb{B}$  est bien de la forme

$$\mathbb{B} = C_1 \otimes D_1 + \dots + C_6 \otimes D_6, \quad (5.24)$$

où  $C_1, C_2, C_3, D_4, D_5, D_6$  (resp.  $D_1, D_2, D_3, C_4, C_5, C_6$ ) sont des matrices symétriques de taille  $m \times m$  (resp.  $n \times n$ ). □

### 5.4.3 Définition du résultant en Bernstein

Dans cette sous-section, nous prouvons l'existence d'un résultant pour le système (5.10) exprimé dans la base de Bernstein et nous montrons aussi comment le calculer en utilisant la matrice bézoutienne de Bernstein du système.

Il est clair que le résultant de Macaulay de (5.10) est identiquement nul, car les polynômes homogénéisés

$${}^hP_i(x, y, z) = z^{n-m} \sum_{j=0}^m a_{j,i} \binom{m}{j} x^j (z-x)^{m-j} - \sum_{j=0}^n b_{j,i} \binom{n}{j} y^j (z-y)^{n-j}, \quad i = 1, 2, 3$$

ont des points bases (c'est-à-dire des racines communes dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  qui sont indépendantes des coefficients du système), par exemple lorsque  $m < n$ ,  $(x : y : z) = (1 : 0 : 0)$  est un tel point. Une autre formulation du résultant qui tient compte de la présence de ces points bases est donnée par le résultant anisotrope (i.e c'est un résultant correspondant à une graduation différente de l'anneau de polynômes, obtenue en donnant des poids aux variables). Le lecteur intéressé peut consulter [51] ou [54] pour plus de détails.

Dans notre cas, le résultant anisotrope est la partie sans facteurs carré du résultant de Macaulay de  ${}^hP_1(x^n, y^m, z^{nm}), {}^hP_2(x^n, y^m, z^{nm}), {}^hP_3(x^n, y^m, z^{nm})$ , où  ${}^hP_i(x, y, z)$  est l'homogénéisation (classique) de  $P_i(x, y)$ .

**Theorème 11** *Le déterminant de la matrice bézoutienne de Bernstein  $\mathbb{B}$  de  $P_1, P_2, P_3$  est un polynôme en les coefficients de Bernstein des  $P_i$ . Il est irréductible et égal, à une constante près, au résultant anisotrope (où  $x$  a le poids  $n$  et  $y$  a le poids  $m$ ) de ces équations. Son degré par rapport aux coefficients de chaque  $P_i$  est  $mn$ .*

*Démonstration :*

Il est clair que  $\text{Bez}(x, y; x', y')$  est linéaire en les coefficients de Bernstein de chaque  $P_i$ . Ainsi le degré du déterminant de la matrice  $\mathbb{B}$  en les coefficients de chaque  $P_i$  est  $mn$ .

Le bézoutien  $\text{Bez}(x, y; x', y') = {}^tV(x, y)\mathbb{B}V(x', y')$  peut être développé dans la base monomiale :

$$\text{Bez}(x, y; x', y') = {}^tW(x, y)\mathbb{M}W(x', y'),$$

avec  ${}^tW(x, y) = (1, y, \dots, y^{n-1}, \dots, x^{m-1}, x^{m-1}y, \dots, x^{m-1}y^{n-1})$ . Si les polynômes  $P_1, P_2, P_3$  sont génériques dans la base monomiale, le déterminant de la matrice  $\mathbb{M}$  est exactement le résultant anisotrope de  $P_1, P_2, P_3$  [18].

En développant  $(1-x)^{m-i}$  et  $(1-y)^{n-j}$  dans les bases monomiales, il vient

$$\sum_{l=i}^{m-1} \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^{l-i+k-j} \binom{m-1}{l} \binom{l}{i} \binom{n-1}{k} \binom{k}{j} x^l y^k.$$

Ainsi,  $V(x, y) = TW(x, y)$ , où  $T$  est une matrice triangulaire supérieure par blocs. Plus précisément,

$$T := \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & B_{mm} \end{pmatrix},$$

où le bloc  $B_{ii}$  désigne la matrice de taille  $n \times n$

$$B_{ii} = \binom{m-1}{i-1} \begin{pmatrix} (-1)^0 \binom{n-1}{0} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots m.$$

Nous avons donc  $\mathbb{M} = {}^tT\mathbb{B}T$ , et

$$\det \mathbb{M} = (\det T)^2 \det \mathbb{B} = \left( \prod_{i=1}^m \det B_{ii} \right)^2 \det \mathbb{B} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}m} \prod_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \prod_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j}^n \det \mathbb{B}.$$

Si les  $P_i$  sont génériques dans la base monomiale, à une constante près  $\det \mathbb{B}$  est exactement le résultant anisotrope (=  $\det \mathbb{M}$ ), il est irréductible [18]. Maintenant, si  $P_1, P_2, P_3$  sont génériques dans la base de Bernstein,  $\det \mathbb{M}$  et  $\det \mathbb{B}$  sont différents de 0 et irréductibles aussi.  $\square$

**Definition 21** *Le résultant de Bernstein du système dégénéré (5.10) est le déterminant de la matrice bézoutienne de Bernstein  $\mathbb{B}$ , et il sera noté  $\text{Res}(P_1, P_2, P_3)$ .*



**Remarque 21** Le nombre de coefficients dans le système à variable séparées (5.10) est  $3(n + m + 2)$ . La taille de la matrice  $\mathbb{B}$  est  $nm$  et ses entrées sont de degré 3. Le résultant de Bernstein  $\det \mathbb{B}$  est donc un polynôme en  $3(m + n + 2)$  variables de degré  $3mn$ .

Si  $m = n = 1$  (resp.  $m = 1, n = 2$  et  $m = 2, n = 2$ ), le nombre de termes dans  $\text{Res}(P_1, P_2, P_3)$  est 24 (resp. 729, 1040921).

Bien-entendu, comme souvent ce résultant dans le cas générique est un objet dont le calcul n'est pas une tâche facile. Nous allons voir que dans notre cas d'étude, nous n'avons besoin que d'une spécialisation de ce résultant et nous verrons aussi comment calculer efficacement cette spécialisation.

## 5.5 Application aux problèmes d'intersection

Nous revenons aux problèmes d'intersections décrits dans la section 5.3. Nous avons vu que ces problèmes se ramènent au calcul du résultant défini dans Définition 21. Maintenant, nous allons montrer comment les résoudre en utilisant des techniques d'interpolation et en exploitant la structure spécifique de l'intersection.

### 5.5.1 Intersection courbe-surface

Soit  $C_1$  une courbe de Bézier dans  $\mathbb{R}^3$  définie par la paramétrisation (5.2) et  $S_2$  une surface de Bézier dans  $\mathbb{R}^3$  définie par la paramétrisation (5.3). Nous nous intéressons à la projection  $\Pi$  sur l'axe des  $s$  du lieu d'intersection de  $C_1$  et  $S_2$

$$\Pi := \{s \in \mathbb{R} : \exists (u, t) \in \mathbb{R}^2, \phi(u) - \psi(s, t) = 0\}.$$

Cette projection est décrite par le résultant de Bernstein  $R(s)$  du système  $\phi(u) - \psi(s, t) = 0$  défini dans la sous-section 6.2.3. Ici, nous considérons  $\phi(u) - \psi(s, t) = 0$  comme un système en les variables  $(u, t)$  avec des coefficients dans  $\mathbb{R}[s]$ . Ainsi  $\Pi = \{s \in \mathbb{R} : R(s) = 0\}$ , où le polynôme à une variable  $R(s)$  est le déterminant d'une matrice de la forme (5.24). Comme le développement de ce déterminant est coûteux en temps et en espace, nous allons le calculer par interpolation dans la base de Bernstein.

Tout d'abord, nous remarquons que  $R(s)$  est le déterminant d'une matrice  $T(s)$  de taille  $mn'$  dont les entrées sont des polynômes univariés de degrés au plus  $2n$  en la variable  $s$ , donc le degré de  $R(s)$  est borné par  $d = 2mn'n$ .

Nous écrivons  $R(s) = \sum_{i=0}^d c_i \beta_i^{(d)}(s)$ , où les  $c_i$  sont des inconnues à déterminer. En choisissant  $d + 1$  nombres réels  $s_0 < \dots < s_d$  dans  $[0, 1]$  et en évaluant  $\det(T(s))$  en ces nombres, nous obtenons  $r_0, \dots, r_d$ . Les évaluations  $r_i = R(s_i)$  sont faciles à obtenir, car elles correspondent à des déterminants de matrices numériques. Le problème de trouver  $R(s)$  se réduit donc à la résolution du système linéaire

$$Mc = r, \text{ avec } M = (\beta_i^{(d)}(s))_{i,j=0\dots d}, c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} \text{ et } r = \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

### 5.5.2 Intersection surface-surface

Nous avons mentionné dans la sous-section 6.1.2 que l'intersection de deux surfaces  $S_1$  de bidegré  $(n, n')$  et  $S_2$  de bidegré  $(m, m')$  représentées dans les bases de Bernstein par les paramétrisations (5.3) et (5.6) est définie par la courbe  $C$  (5.7). La projection  $\Pi$  de cette courbe sur le plan des  $(u, s)$  est décrite par le résultant bivarié  $R(u, s)$  de  $\varphi(u, v) - \psi(s, t) = 0$ , vu comme un système en les variables  $(v, t)$  dont les coefficients appartiennent à  $\mathbb{R}[u, s]$ .

Comme pour l'intersection courbe-surface,  $R(u, s)$  peut être calculé par interpolation dans la base de Bernstein. Ce polynôme est le déterminant d'une matrice de taille  $n'm'$  dont les entrées sont des polynômes bivariés de bidegrés au plus  $(2n, 2m)$ . Puisque le bidegré de  $R(u, s)$  est borné par  $(d_1, d_2) = (2mm'n', 2nm'n')$ ,

$$R(u, s) = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} c_{i,j} \beta_i^{(d_1)}(u) \beta_j^{(d_2)}(s), \quad (5.26)$$

où  $c = (c_{i,j})$  sont des inconnues à déterminer.

Soient  $(u_i, s_j)$ ,  $i = 0 \dots d_1, j = 0 \dots d_2$  des points d'interpolation dans  $[0, 1] \times [0, 1]$  et  $r_{i,j}$  les évaluations  $R(u_i, s_j)$  calculées en utilisant la matrice bézoutienne  $\mathbb{B}$  du théorème 8. Ainsi, le problème de l'intersection de  $S_1$  et  $S_2$  est équivalent à la résolution du système linéaire

$$(M_1 \otimes M_2)c = r$$

où  $M_1 = (\beta_i^{(d_1)}(u_j))_{i,j=0 \dots d_1}$ ,  $M_2 = (\beta_j^{(d_2)}(s_j))_{i,j=0 \dots d_2}$ ,  $c = (c_{i,j})$ , et  $r = (r_{i,j})$ .

Ce système peut être décomposé de la manière suivante : Pour  $i = 0 \dots d_1$ , notons  $x_i = (x_{i,0}, \dots, x_{i,d_2})$  le vecteur  $M_2 \begin{pmatrix} r_{i,0} \\ \vdots \\ r_{i,d_2} \end{pmatrix}$ . Alors, le système linéaire  $(M_1 \otimes M_2)c = r$  est équivalent aux  $d_2 + 1$  systèmes linéaires

$$M_1 \begin{pmatrix} x_{0,i} \\ \vdots \\ x_{d_1,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{0,i} \\ \vdots \\ r_{d_1,i} \end{pmatrix}.$$

Ces  $d_2 + 1$  systèmes linéaires ont la même matrice  $M_1$  et sont similaires au système linéaire qui apparaît dans le cas de l'intersection courbe-surface étudié précédemment.

Après résolution de ces systèmes, et afin de trouver les coefficients de Bernstein de  $R(u, s)$ , nous pouvons résoudre  $d_1 + 1$  autres systèmes du même type  $M_2 \begin{pmatrix} c_{i,0} \\ \vdots \\ c_{i,d_2} \end{pmatrix} = x_i$ .

Par conséquent, la résolution de  $(M_1 \otimes M_2)c = r$  se ramène à celle de  $d_1 + d_2 + 2$  systèmes linéaires de même type ne faisant intervenir que deux matrices distinctes mais ayant la même structure.

**Remarque 22** Nous avons réduit le problème de l'intersection d'une courbe et d'une surface de Bézier à l'étude d'un système linéaire structuré, et celui de deux surfaces de Bézier à la résolution de  $d_1 + d_2 + 2$  tels systèmes (avec seulement deux matrices différentes mais similaires). Dans la prochaine sous-section nous discutons de stratégies pour le résoudre.

### 5.5.3 Résoudre le système linéaire (5.25)

On déduit des formules  $s^j = \sum_{k=j}^d \frac{\binom{k}{j}}{\binom{k}{j}} \beta_k^{(d)}(s)$ ,  $j = 0 \dots d$ , que

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ s_0 & \dots & s_d \\ \vdots & & \vdots \\ s_0^d & \dots & s_d^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & * \\ & \ddots & \\ & & \binom{d}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0^{(d)}(s_0) & \dots & \beta_0^{(d)}(s_d) \\ \beta_1^{(d)}(s_0) & \dots & \beta_1^{(d)}(s_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_d^{(d)}(s_0) & \dots & \beta_d^{(d)}(s_d) \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Notons  $T$  la matrice triangulaire du membre de droite de (5.27), et rappelons que

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{d}{0} \binom{0}{0} & & \dots & & (-1)^d \binom{d}{d} \binom{d}{0} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \binom{d}{i} \binom{i}{i} & \dots & (-1)^{d-i} \binom{d}{d} \binom{d}{i} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \binom{d}{d} \binom{d}{d} \end{pmatrix}$$

**Lemme 11** *Nous avons*

$$\det M = \prod_{i=0}^d \binom{d}{i} \prod_{0 \leq k < l \leq d} (s_l - s_k), \quad (5.28)$$

et pour  $i = 0 \dots d$ ,

$$c_i = \frac{(-1)^i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^d (s_i - s_j)} \sum_{j=0}^d r_j \left( \sum_{k=0}^d \frac{j!(d-k)!}{d!} (-1)^k \sigma_{d-k}(s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_d) \right),$$

où  $\sigma_l$  désigne le  $l^{\text{ème}}$  polynôme symétrique élémentaire en  $d$  variables.

*Démonstration :*

En calculant le déterminant de Vandermonde, nous obtenons de (5.27),  $\prod_{0 \leq k < l \leq d} (s_l - s_k) =$

$$\frac{\det M}{\prod_{i=0}^d \binom{d}{i}}.$$

Comme  $M$  est inversible, d'après les règles de Cramer  $c_i = \frac{\det(M_i)}{\det(M)}$ , pour  $i = 0 \dots d$ , où  $M_i$  désigne la matrice obtenue à partir de  $M$  en substituant la  $(i+1)$ ème colonne par le vecteur  $r$ .

Soit  $M_{j,i}$  la sous-matrice de  $M$  obtenue par élimination de la  $(i+1)$ ème colonne et de la  $(j+1)$ ème ligne, alors

$$c_i = \frac{1}{\det M} \sum_{j=0}^d (-1)^{i+j} r_j \det M_{j,i}. \quad (5.29)$$

Les formules de Binet-Cauchy donnent  $\det(M_{i,j}) = \sum_{k=0}^d \det(T^{-1})_{i,k} \det(V_{k,j}(s_0, \dots, s_d))$ , où  $(T^{-1})_{p,q}$  (resp.  $V_{p,q}(s_0, \dots, s_d)$ ) désigne la sous-matrice de  $T^{-1}$  (resp. la matrice de Vandermonde  $V(s_0, \dots, s_d)$  correspondante à  $s_0, \dots, s_d$ ) qui apparaît dans le membre de gauche de (5.27), obtenu en éliminant la  $(p+1)$ ème ligne et la  $(q+1)$ ème colonne.

Nous avons

$$\begin{aligned} \det V(s_0, \dots, s_d) &= \prod_{0 \leq p < q \leq d} (s_q - s_p) = (-1)^{d-k} \prod_{0 \leq p < q \leq d, p \neq k, q \neq k} (s_q - s_p) \prod_{j=0, j \neq k}^d (s_k - s_j) \\ &= (-1)^d \sum_{l=0}^d (-1)^l \sigma_{d-l}(s_0, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_d) s_k^l \prod_{0 \leq p < q \leq d, p \neq k, q \neq k} (s_q - s_p). \end{aligned}$$

En identifiant la dernière identité et le développement du déterminant  $V(s_0, \dots, s_d)$  suivant sa  $(k+1)$ ème colonne, nous obtenons

$$\det V_{l,k}(s_0, \dots, s_d) = (-1)^{d+k} \sigma_{d-l}(s_0, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_d) \prod_{0 \leq p < q \leq d, p \neq k, q \neq k} (s_q - s_p) \quad (5.30)$$

Maintenant, en substituant  $\det(M)$  et  $\det(M_{i,j})$  dans (5.29) et en simplifiant l'expression obtenue, nous déduisons la valeur de  $c_i$  énoncée dans le lemme.  $\square$

**Remarque 23** Soit  $\zeta_i = \frac{s_i}{1-s_i}$ ,  $i = 0 \dots d$ . Le système linéaire  $Mc = r$  est équivalent au système structuré de Vandermonde duale

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta_0 & \dots & \zeta_0^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta_d & \dots & \zeta_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{d}{0} c_0 \\ \vdots \\ \binom{d}{d} c_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_0}{(1-s_0)^d} \\ \vdots \\ \frac{r_d}{(1-s_d)^d} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

qui peut être résolu à l'aide des méthodes développées dans [48, 42, 10].

### 5.5.4 Exemples

Nous finissons ce chapitre par des illustrations des algorithmes présentés pour les problèmes d'intersection. Pour les calculs suivants nous avons utilisé le logiciel de calcul formel Maple. On pourrait obtenir une implémentation plus efficace de notre approche en utilisant un solveur pour les polynômes de Bernstein univarié, voir [58].

**Exemple 7** Soit  $S_1$  la surface bi-cubique paramétrée par les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -15 & 13 \\ 1 & 17 & -16 & 6 \\ 11 & -4 & 19 & 16 \\ 5 & 13 & -3 & -2 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 8 \\ -7 & -13 & -12 & -8 \\ -5 & -20 & -15 & -8 \\ 18 & 7 & -14 & -18 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} -7 & -9 & -2 & 19 \\ 5 & -18 & -18 & 16 \\ 16 & -11 & 5 & -11 \\ 6 & 13 & -13 & -19 \end{pmatrix}.$$

Chaque matrice  $M_k$  représente les coefficients  $(b_{i,j}^k)_{0 \leq i,j \leq 3}$  définissant ainsi la composante  $\psi_k$  de la paramétrisation en Bernstein de  $S_1$ . Soit  $C$  la courbe de degré 3 donnée par

$$N = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 20 & 18 \\ -17 & -8 & -2 & -11 \\ -6 & -12 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les lignes de  $N$  définissent la paramétrisation en Bernstein de  $C$ .

Le lieu d'intersection  $S_1 \cap C$  est donné par la matrice  $\mathbb{B}(s)$  de taille  $54 \times 54$ . Nous choisissons dans  $[0, 1]$  les points d'interpolation afin de déterminer  $R(s) = \det(\mathbb{B}(s))$  qui est l'équation de la projection de  $S_1 \cap C$ . Par le biais de la fonction *fsolve* de Maple nous résolvons  $R(s) = 0$  et obtenons les quatre points 0.182, 0.463, 0.641, 0.767 dans  $[0, 1]$  en 45,90 secondes.

Des calculs faits sur une famille d'exemples (d'intersection de cubiques et bicubiques) conduisent à des résultats similaires. Ils montrent que cette approche est prometteuse car la taille des coefficients, dans les calculs dans les bases de Bernstein, est inférieure à celle des coefficients dans les bases monomiales (après convention entre ces bases).

**Remarque 24** Après la détermination de la projection sur une droite du lieu d'intersection  $C \cap S_1 \subset \mathbb{R}^3$ , on peut trouver les points  $(u, s, t)$  de  $C \cap S_1$  en résolvant un problème de vecteurs propres. Si  $s_0$  est une racine de  $R(s)$ , la matrice  $\mathbb{B}(s_0)$  n'est pas inversible. Maintenant, si  $(u_0, s_0, t_0) \in C \cap S_1$ ,  $\text{Bez}_{s_0}(u_0, s_0; x', y') = 0$  pour tout  $(x', y')$ , ainsi  ${}^tV(u_0, t_0)\mathbb{B}(s_0) = 0$ , et  ${}^tV(u_0, t_0)$  est un vecteur propre de  $\mathbb{B}(s_0)$ .

Génériquement, si  $V$  est un vecteur propre de la matrice numérique  $\mathbb{B}(s_0)$ ,  $V$  et  ${}^tV(u_0, t_0)$  sont linéairement dépendants. Donc le point  $(u_0, t_0)$  peut être obtenu comme le quotient de certaines coordonnées du vecteur propre  $V$ .

Si on s'intéresse seulement à la projection de  $C \cap S_1$ , il n'est pas nécessaire d'écrire  $R(s)$  dans la base de Bernstein. On peut alors exprimer  $R(s)$  dans la base monomiale, et le problème d'interpolation se résume à la résolution d'un système linéaire de Vandermonde dual qui peut être résolu par des méthodes spécifiques développées dans [48, 42, 10, 26, 60].

**Exemple 8** Nous avons étudié plusieurs exemples d'intersection de surfaces de Bézier de bidegré  $(2, 2)$  avec des surfaces de Bézier de bidegré  $(3, 3)$  en utilisant l'approche algébrique que nous avons développée. Ces surfaces ont été générées de manière aléatoire.

La projection du lieu d'intersection sur le plan des  $(u, s)$  est donnée par le déterminant  $R(u, s)$  d'une matrice  $\mathbb{B}(u, s)$  de taille  $6 \times 6$ . Les coefficients de  $\mathbb{B}(u, s)$  sont des polynômes de bidegré  $(4, 12)$ . Donc, le bidegré du polynôme bivarié  $R(u, s)$  est  $(36, 24)$ . L'expression de ce polynôme dans la base de Bernstein se ramène à la résolution de 62 systèmes linéaires structurés de type (5.25) faisant intervenir seulement deux matrices différentes mais similaires. Le résultat de notre programme Maple est une matrice  $37 \times 25$  représentant  $R(u, s)$  dans la base de Bernstein. En moyenne, le calcul de cette matrice prend 99 secondes.



# Bibliographie

- [1] M.-E. Alonso, E. Becker, M.-F. Roy, and T. Wörmann. Zeros, multiplicities, and idempotents for zero-dimensional systems. In *Algorithms in algebraic geometry and applications (Santander, 1994)*, volume 143 of *Progr. Math.*, pages 1–15. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [2] Mats Andersson. Residue currents of holomorphic morphisms. *J. Reine Angew. Math.*, 596 :215–234, 2006.
- [3] Luchezar L. Avramov. Complete intersections and symmetric algebras. *J. Algebra*, 73(1) :248–263, 1981.
- [4] Azzouz Awane, Abdelouahab Chkiriba, and Michel Goze. Formes d’inertie et complexe de Koszul associés à des polynômes plurihomogènes. *Rev. Mat. Complut.*, 18(1) :243–260, 2005.
- [5] David Bayer and Michael Stillman. A criterion for detecting  $m$ -regularity. *Invent. Math.*, 87(1) :1–11, 1987.
- [6] Carlos A. Berenstein, Roger Gay, Alekos Vidras, and Alain Yger. *Residue currents and Bezout identities*, volume 114 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [7] Carlos A. Berenstein and Alain Yger. Residue calculus and effective Nullstellensatz. *Amer. J. Math.*, 121(4) :723–796, 1999.
- [8] D. A. Bini and L. Gemignani. Bernstein-Bezoutian matrices. *Theoret. Comput. Sci.*, 315(2-3) :319–333, 2004.
- [9] D. A. Bini and L. Gemignani. Bernstein-Bezoutian matrices. *Theoret. Comput. Sci.*, 315(2-3) :319–333, 2004.
- [10] Dario Bini and Victor Y. Pan. *Polynomial and matrix computations. Vol. 1*. Progress in Theoretical Computer Science. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994. Fundamental algorithms.
- [11] Dario A. Bini, Luca Gemignani, and Joab R. Winkler. Structured matrix methods for CAGD : an application to computing the resultant of polynomials in the Bernstein basis. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 12(8) :685–698, 2005.
- [12] Dario A. Bini, Luca Gemignani, and Joab R. Winkler. Structured matrix methods for CAGD : an application to computing the resultant of polynomials in the Bernstein basis. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 12(8) :685–698, 2005.



- 
- [13] Winfried Bruns and Udo Vetter. *Determinantal rings*, volume 45 of *Monografías de Matemática [Mathematical Monographs]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1988.
- [14] David Buchsbaum and Dock S. Rim. A generalized Koszul complex. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 :382–385, 1963.
- [15] David A. Buchsbaum. A generalized Koszul complex. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 111 :183–196, 1964.
- [16] David A. Buchsbaum and Dock S. Rim. A generalized Koszul complex. II. Depth and multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 111 :197–224, 1964.
- [17] David A. Buchsbaum and Dock Sang Rim. A generalized Koszul complex. III. A remark on generic acyclicity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 :555–558, 1965.
- [18] L. Busé, M. Elkadi, and A. Galligo. Intersection and self-intersection of surfaces by means of Bezoutian matrices. *Comput. Aided Geom. Design*, 25(2) :53–68, 2008.
- [19] L. Busé, M. Elkadi, and B. Mourrain. Resultant over the residual of a complete intersection. *J. Pure Appl. Algebra*, 164(1-2) :35–57, 2001. Effective methods in algebraic geometry (Bath, 2000).
- [20] Laurent Busé. Resultants of determinantal varieties. *J. Pure Appl. Algebra*, 193(1-3) :71–97, 2004.
- [21] Laurent Busé, Mohamed Elkadi, and Bernard Mourrain. Using projection operators in computer aided geometric design. In *Topics in algebraic geometry and geometric modeling*, volume 334 of *Contemp. Math.*, pages 321–342. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [22] Laurent Busé and André Galligo. Semi-implicit representations of surfaces in  $\mathbb{P}^3$ , resultants and applications. *J. Symbolic Comput.*, 39(3-4) :317–329, 2005.
- [23] Laurent Busé and Jean-Pierre Jouanolou. On the closed image of a rational map and the implicitization problem. *J. Algebra*, 265(1) :312–357, 2003.
- [24] David Cox, John Little, and Donal O’Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2007. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.
- [25] David A. Cox, John Little, and Donal O’Shea. *Using algebraic geometry*, volume 185 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2005.
- [26] Cédric J. Demeure. Fast  $QR$  factorization of Vandermonde matrices. *Linear Algebra Appl.*, 122/123/124 :165–194, 1989.
- [27] Alicia Dickenstein and Ioannis Z. Emiris. Multihomogeneous resultant formulae by means of complexes. *J. Symbolic Comput.*, 36(3-4) :317–342, 2003. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC’2002) (Lille).
- [28] J. A. Eagon and D. G. Northcott. Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 269 :188–204, 1962.

- 
- [29] John A. Eagon and M. Hochster.  $R$ -sequences and indeterminates. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 25 :61–71, 1974.
- [30] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [31] David Eisenbud. *The geometry of syzygies*, volume 229 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005. A second course in commutative algebra and algebraic geometry.
- [32] David Eisenbud and Shiro Goto. Linear free resolutions and minimal multiplicity. *J. Algebra*, 88(1) :89–133, 1984.
- [33] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [34] M. Elkadi. Résidu de Grothendieck et forme de Chow. *Publ. Mat.*, 38(2) :381–393, 1994.
- [35] Mohamed Elkadi and André Galligo. Systems of three polynomials with two separated variables. In *ISSAC 2007*, pages 159–166. ACM, New York, 2007.
- [36] Mohamed Elkadi and Bernard Mourrain. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*, volume 59 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2007.
- [37] Mohamed Elkadi and Alain Yger. Residue calculus and applications. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 43(1) :55–73, 2007.
- [38] R. T. Farouki. On the stability of transformations between power and Bernstein polynomial forms. *Comput. Aided Geom. Design*, 8(1) :29–36, 1991.
- [39] R. T. Farouki and T. N. T. Goodman. On the optimal stability of the Bernstein basis. *Math. Comp.*, 65(216) :1553–1566, 1996.
- [40] Hans-Björn Foxby. The MacRae invariant. In *Commutative algebra : Durham 1981 (Durham, 1981)*, volume 72 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 121–128. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
- [41] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [42] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, third edition, 1996.
- [43] Laureano González-Vega. Determinantal formulae for the solution set of zero-dimensional ideals. *J. Pure Appl. Algebra*, 76(1) :57–80, 1991.
- [44] Laureano Gonzalez-Vega and Neila Gonzalez-Campos. Simultaneous elimination by using several tools from real algebraic geometry. *J. Symbolic Comput.*, 28(1-2) :89–103, 1999. Polynomial elimination—algorithms and applications.

- [45] Laureano González-Vega and Guadalupe Trujillo. Using symmetric functions to describe the solution set of a zero-dimensional ideal. In *Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (Paris, 1995)*, volume 948 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 232–247. Springer, Berlin, 1995.
- [46] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. A first course.
- [47] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [48] Nicholas J. Higham. *Accuracy and stability of numerical algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996.
- [49] A. Hurwitz. über die trägheitsformen eines algebraischen moduls. 1913.
- [50] J. P. Jouanolou. Idéaux résultants. *Adv. in Math.*, 37(3) :212–238, 1980.
- [51] J.-P. Jouanolou. Le formalisme du résultant. *Adv. Math.*, 90(2) :117–263, 1991.
- [52] J. P. Jouanolou. Formes d’inertie et résultant : un formulaire. *Adv. Math.*, 126(2) :119–250, 1997.
- [53] Jean-Pierre Jouanolou. Aspects invariants de l’élimination. *Adv. Math.*, 114(1) :1–174, 1995.
- [54] Jean-Pierre Jouanolou. Résultant anisotrope, compléments et applications. *Electron. J. Combin.*, 3(2) :Research Paper 2, approx. 91 pp. (electronic), 1996. The Foata Festschrift.
- [55] Ernst Kunz. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the German by Michael Ackerman, With a preface by David Mumford.
- [56] Alain Lascoux. Syzygies des variétés déterminantales. *Adv. in Math.*, 30(3) :202–237, 1978.
- [57] Neal H. McCoy. On the resultant of a system of forms homogeneous in each of several sets of variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35(1) :215–233, 1933.
- [58] B. Mourrain and J. P. Pavone. Subdivision methods for solving polynomial equations. *J. Symbolic Comput.*, 44(3) :292–306, 2009.
- [59] D. G. Northcott. *Finite free resolutions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976. Cambridge Tracts in Mathematics, No. 71.
- [60] Halil Oruç and George M. Phillips. Explicit factorization of the Vandermonde matrix. *Linear Algebra Appl.*, 315(1-3) :113–123, 2000.
- [61] Günter Scheja and Uwe Storch. *Regular sequences and resultants*, volume 8 of *Research Notes in Mathematics*. A K Peters Ltd., Natick, MA, 2001.
- [62] Bernd Sturmfels and Andrei Zelevinsky. Multigraded resultants of Sylvester type. *J. Algebra*, 163(1) :115–127, 1994.
- [63] Bernd Sturmfels and Andrei Zelevinsky. Multigraded resultants of Sylvester type. *J. Algebra*, 163(1) :115–127, 1994.

- 
- [64] B. L. van der Waerden. *Modern Algebra. Vol. I*. Frederick Ungar Publishing Co., New York, N. Y., 1949. Translated from the second revised German edition by Fred Blum, With revisions and additions by the author.
- [65] Wolmer V. Vasconcelos. Annihilators of modules with a finite free resolution. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29 :440–442, 1971.
- [66] Wolmer V. Vasconcelos. *Computational methods in commutative algebra and algebraic geometry*, volume 2 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. With chapters by David Eisenbud, Daniel R. Grayson, Jürgen Herzog and Michael Stillman.
- [67] Jerzy Weyman and Andrei Zelevinsky. Determinantal formulas for multigraded resultants. *J. Algebraic Geom.*, 3(4) :569–597, 1994.
- [68] Joab R. Winkler. A companion matrix resultant for Bernstein polynomials. *Linear Algebra Appl.*, 362 :153–175, 2003.
- [69] Joab R. Winkler. A unified approach to resultant matrices for Bernstein basis polynomials. *Comput. Aided Geom. Design*, 25(7) :529–541, 2008.
- [70] Joab R. Winkler and Ronald N. Goldman. The Sylvester resultant matrix for Bernstein polynomials. In *Curve and surface design (Saint-Malo, 2002)*, Mod. Methods Math., pages 407–416. Nashboro Press, Brentwood, TN, 2003.

**Résumé :**

Dans cette thèse, nous définissons algébriquement le résultant déterminantiel d'un morphisme de modules libres de type fini  $\varphi$  dont la matrice a en entrée des polynômes homogènes  $\varphi_{i,j}$ . A l'aide des complexes d'Eagon-Northcott et de Buchsbaum-Rim associés au morphisme  $\varphi$ , nous proposons des méthodes effectives pour calculer ce résultant déterminantiel ainsi que son degré. Dans le cas où les polynômes  $\varphi_{i,j}$  sont à deux variables, nous montrons que ce résultant déterminantiel est donné par le déterminant d'une matrice en les coefficients des  $\varphi_{i,j}$ , qui est une généralisation de la matrice de Sylvester de deux polynômes.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous étudions des problèmes d'intersection de courbes et surfaces de Bézier en évitant la fameuse conversion instable entre la base de Bernstein et la base monomiale. Ces problèmes jouissent d'une structure particulière qui est dégénérée pour le résultant de Macaulay. Nous prouvons l'existence d'un résultant anisotrope adapté à ces systèmes dégénérés et proposons un algorithme pour le calculer.

**Mots clés :** Théorie de l'élimination, déterminants de complexes, résultant, résolutions de systèmes polynomiaux, surfaces de Bézier.

**Abstract :** In the first part, we define algebraically the determinantal resultant of a morphism of finite free modules  $\varphi$  which input matrix of polynomials homogeneous  $\varphi_{i,j}$ . Using the Eagon-Northcott and Buchsbaum-Rim complexes associated with the morphism  $\varphi$ , we provide effective methods to calculate the determinantal resultant as its degree. In the case where the polynomial  $\varphi_{i,j}$  are in two variables, we show that the the determinantal resultant is given by the determinant of a matrix of coefficients  $\varphi_{i,j}$ , which is a generalization of the Sylvester matrix of two polynomials.

In the second part of the thesis, we study the Bezier curves and surfaces intersection problems avoiding the well-known unstable conversion between Bernstein basis and power basis. These problems have a special shape which is degenerate for the Macaulay resultant. We prove the existence of an anisotropic resultant for these degenerate systems and propose an algorithm to calculate it.

**Keywords :** Elimination theory, determinants of complexes, resultant, resolution of algebraic polynomial systems, Bezier surfaces.

