



**HAL**  
open science

# Vers un pont micro-méso de la rupture en compression des composites stratifiés

Nicolas Feld

► **To cite this version:**

Nicolas Feld. Vers un pont micro-méso de la rupture en compression des composites stratifiés. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2011. Français. NNT: . tel-00652305v2

**HAL Id: tel-00652305**

**<https://theses.hal.science/tel-00652305v2>**

Submitted on 29 Feb 2012 (v2), last revised 1 Mar 2012 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Nicolas Feld**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Vers un pont micro-méso de la rupture en compression  
des composites stratifiés**

Soutenue à Cachan le 5 décembre 2011 devant le jury composé de :

Olivier Allix	Professeur, ENS Cachan	Directeur de thèse
Emmanuel Baranger	Chargé de recherche CNRS, ENS Cachan	Co-directeur
Nicolas Carrère	Enseignant chercheur, ENSTA Bretagne	Examineur
Marc G. D. Geers	Prof. Dr. Ing., UT/Eindhoven	Rapporteur
Jean-Claude Grandidier	Professeur, ENSMA Poitiers	Rapporteur
Jean-Mathieu Guimard	Ingénieur de recherche, EADS IW	Examineur
Dominique Leguillon	Directeur de recherche CNRS, UPMC	Président

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris  
61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France



Remercier toutes les personnes qui ont contribué à l'accomplissement de ces trois années de travail en moins d'une page est un défi qui n'a rien à envier à l'écriture d'une thèse! D'avance, que ceux qui se sentent concernés par ces remerciements sans pourtant voir apparaître leur nom m'excusent et soient assurés de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier Dominique Leguillon pour avoir présidé ma soutenance, Nicolas Carrière pour ses questions ouvertes et pertinentes, et Marc Geers et Jean-Claude Grandidier qui ont accepté de rapporter mon manuscrit. Je tiens aussi à remercier Jean-Mathieu Guimard pour avoir joué le triple rôle d'encadrant industriel, d'examineur et de prédécesseur sur ce sujet.

Cette thèse doit évidemment beaucoup à Olivier Allix, qui m'a témoigné sa confiance en de nombreuses occasions et a su orienter le sujet sur des thématiques qui me tenaient à cœur. Il m'a également laissé une grande latitude dans mes recherches et mes expériences, tout en sachant me remettre sur les rails lorsque les difficultés techniques semblaient insurmontables. Emmanuel Baranger a été un co-directeur exceptionnel. Au delà du soutien moral et technique dans les moments difficiles, il est également à l'origine d'un certain nombre d'idées centrales proposées dans cette thèse. Ce fut un immense plaisir de travailler avec toi.

Le LMT est un laboratoire où de nombreuses personnalités fortes se côtoient et où pourtant les échanges sont indéniablement enrichissants, ce qui en fait un cadre exceptionnel pour le thésard que j'étais. Rares sont les permanents de qui je n'ai pas appris quelque chose, bien souvent au bar autour d'un café. Je tiens tout particulièrement à remercier Federica, François, Pierre-Alain (les deux!), Laurent, Stéphane, Pierre (les deux aussi), Christophe, René, Éric, Jean-Luc, Sylvie, Yves, Hugo... Je remercie également les copains, dont c'est avant tout l'amitié et la bonne humeur qui ont rendu cette expérience inoubliable. Une pensée particulière pour Florent, mon voisin de bureau, et Vincent, mon co-voyageur jusqu'au dit bureau, pendant ces trois années. Merci aussi à Augustin, Raül, Karin, Jorge, Alain, Anne-Charlotte, Gilles, Chloé, Julien, Thomas, Dom, Roxane, P-E, Bastou, Manue, Nicolas, Bibou, Loulou... et tant d'autres! Enfin, je tiens à remercier les participants du projet VulComp, ainsi que le personnel de l'ENS et du LMT, dont la disponibilité et la gentillesse me manqueront, en particulier Lydia, Patrick, Danielle, Christine (les deux), Frisou, Arnaud, Xavier, Raphaël, Momo, Henri...

Avant de finir, un petit mot pour ma famille, dont le soutien inconditionnel remonte bien plus loin que le début de cette thèse; et en particulier pour mes parents, qui m'ont toujours poussé à faire ce qui me plaît, à condition de le faire à fond. Je vous doit tout.

Enfin, il y a une personne exceptionnelle qui mériterait une page de remerciements à elle seule, ne serait-ce que pour sa patience et son soutien au cours de ces derniers mois. Mais on dit que l'amour est aussi grand par le bavardage que par la concision. Sylvia, tu es mon univers.



*Ce n'est pas dans la science qu'est le bonheur, mais dans l'acquisition de la science.*

– Edgar Allan Poe



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I Contexte, bibliographie et problématiques</b>	<b>7</b>
<b>Contexte industriel et scientifique</b>	<b>9</b>
1 Vulnérabilité des structures composites . . . . .	9
2 Dispositifs d'absorption d'énergie composites . . . . .	11
<b>1 Rupture par plissement dans les matériaux stratifiés</b>	<b>13</b>
1 Phénoménologie . . . . .	14
2 Les micromodèles de flambage unidirectionnels . . . . .	20
3 Les micromodèles bi- ou tri-dimensionnels . . . . .	26
4 Les critères de rupture . . . . .	29
5 Conclusion sur la prédiction du plissement . . . . .	33
<b>2 Homogénéisation du comportement non-linéaire des matériaux hétérogènes</b>	<b>35</b>
1 Motivation et principes fondamentaux . . . . .	36
2 Homogénéisation en élasticité linéaire . . . . .	38
3 Théorie de l'homogénéisation linéaire des matériaux périodiques . . . . .	39
4 Homogénéisation de matériaux non-linéaires . . . . .	41
5 Méthodes d'homogénéisation numérique . . . . .	42
6 Méthodes d'identification d'un modèle de comportement . . . . .	44
7 Conclusions sur l'homogénéisation . . . . .	49
<b>3 Modélisation des composites stratifiés à l'échelle du pli</b>	<b>51</b>
1 Motivation et principes fondamentaux . . . . .	52
2 Modélisation des plis . . . . .	55
3 Modélisation des interfaces . . . . .	57
4 Pont micro-méso et modèle amélioré . . . . .	59
5 Limites de la description continue et modèle hybride . . . . .	60
6 Simulations numériques performantes . . . . .	62
7 Conclusions sur la mésomodélisation des stratifiés . . . . .	64
<b>Bilan sur l'état de l'art et problématiques actuelles</b>	<b>65</b>



<b>II Synthèse des travaux et développements</b>	<b>67</b>
<b>4 Modélisation micromécanique du plissement dans les plis unidirectionnels</b>	<b>69</b>
1 Micromodèle de flambage unidirectionnel . . . . .	70
1.1 Principe et définition d'un VER . . . . .	70
1.2 Modélisation du comportement des constituants . . . . .	72
2 Réponse d'une microstructure statistique à des chargements mixtes . . . . .	78
2.1 Observations préliminaires . . . . .	78
2.2 Études de sensibilité . . . . .	80
2.3 Influence du défaut d'alignement des fibres . . . . .	81
2.4 Influence de la mixité du chargement . . . . .	85
3 Conclusions sur le modèle micromécanique . . . . .	89
<b>5 Homogénéisation du comportement d'un pli UD dans le sens des fibres</b>	<b>91</b>
1 Homogénéisation d'un comportement non-linéaire . . . . .	92
1.1 Réponse de la microstructure . . . . .	92
1.2 Principes et définitions . . . . .	95
1.3 Cadre et améliorations mésoscopiques . . . . .	97
1.4 Procédure d'identification . . . . .	100
2 Identification du comportement longitudinal d'un pli UD T300/BSL-914C	101
2.1 Propriétés élastiques non-linéaires . . . . .	101
2.2 Endommagement de plissement et diffus . . . . .	103
2.3 Processus d'inélasticité . . . . .	105
3 Résultats et discussion . . . . .	109
4 Conclusions sur l'homogénéisation du comportement . . . . .	112
<b>6 Perspectives : Simulation des stratifiés à l'aide d'un modèle hybride</b>	<b>113</b>
1 Enrichissement du modèle hybride . . . . .	114
1.1 Définition des nouvelles variables . . . . .	114
1.2 Mise en œuvre dans le code de calcul . . . . .	116
1.3 Calcul de la non-linéarité élastique . . . . .	117
1.4 Calcul de l'endommagement . . . . .	117
2 Simulation d'un pli UD et premiers résultats . . . . .	118
2.1 Données d'entrée et paramètres de simulation . . . . .	118
2.2 Validation de la l'implantation numérique . . . . .	119
2.3 Résultats préliminaires en compression libre . . . . .	123
2.4 Résultats préliminaires en compression encastree . . . . .	126
2.5 Limites et précautions particulières . . . . .	129
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>131</b>
<b>A Détail du modèle rhéologique</b>	<b>133</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>135</b>

# Notations

$\underline{A}$	tenseur d'ordre 1
$\underline{\underline{A}}$	tenseur d'ordre 2
$\mathbf{A}$	tenseur d'ordre 4
:	produit doublement contracté
$\otimes$	produit tensoriel
$\nabla$	opérateur gradient
div	opérateur divergence
1	direction idéale des fibres dans un pli, dite aussi axiale ou longitudinale
2	direction transverse, normale à la première dans le plan du pli
3	direction hors-plan, normale et formant un repère direct avec les précédentes
$\rho$	masse volumique
$\Psi$	énergie de déformation ou énergie libre de Helmholtz volumique
$\varphi$	énergie complémentaire ou enthalpie de Gibbs volumique
$\phi$	puissance volumique dissipée
$\underline{\underline{\Pi}}$	second tenseur de Piola-Kirchhoff
$\underline{\underline{\sigma}}$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$	tenseur des contraintes effectives
$\underline{u}$	vecteur des déplacements
$\underline{F}$	tenseur des transformations
$\underline{E}$	tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\underline{\varepsilon}$	tenseur des petites déformations
$\underline{\varepsilon}^e$	partition élastique du tenseur des déformations
$\underline{\varepsilon}^p$	partition plastique ou inélastique du tenseur des déformations
$\underline{\tilde{\varepsilon}}^p$	tenseur des déformations inélastiques effectives
$\mathbf{H}$	tenseur d'élasticité de Hooke
$A^0$	tenseur sain, initial, au repos ou encore avec un endommagement nul
$A^T$	transposée d'un tenseur
$\overline{A}$	moyenne volumique d'un tenseur
$\mathcal{H}$	fonction de Heaviside
$\langle \bullet \rangle$	fonction partie positive
$[\bullet]$	fonction saut à travers une surface



# Introduction

En raison de leurs caractéristiques performantes, les matériaux composites stratifiés à fibres continues constituent aujourd'hui une part importante des structures produites par les industries aéronautique et aérospatiale. La complexité de leur micro et méso structure rend difficile la modélisation et la simulation de leur réponse mécanique, ce qui constitue un des freins majeurs à un enjeu industriel de plus en plus important : le *virtual testing*. C'est particulièrement le cas pour des problématiques récentes, comme celle abordée dans ce travail : la conception d'absorbeurs de chocs en matériaux composites.

L'objectif à terme est de concevoir des structures porteuses qui puissent, en cas de besoin, dissiper une grande quantité d'énergie (comme les sous-planchers dans les hélicoptères [Johnson et Kohlgrüber, 2000]). Dans le cas des matériaux composites, cela revient à étudier leur comportement sous impact à haute énergie dans le plan, contrairement aux nombreuses études menées sur les petits chocs anti-plans [Greszczuk, 1982, Sjoblom *et al.*, 1988, Abrate, 1991, Choi et Chang, 1992]. Les dégradations mises en jeu sont nombreuses et complexes, ce qui a motivé plusieurs campagnes expérimentales, notamment à la DLR [Johnson et Kohlgrüber, 1997]. Il a été observé que, dans certains cas, la rupture se produit de façon franche et fragile, dissipant peu d'énergie. Dans d'autres cas, qu'on cherche à favoriser, une fragmentation progressive des plis accompagnée de délaminage se produit au fur et à mesure du chargement, dissipant une grande quantité d'énergie. Ces scénarios de rupture sont extrêmement sensibles aux conditions de chargement, d'empilement et aux "défauts" (intrinsèques ou fabriqués), qui permettent de provoquer l'un ou l'autre scénario de rupture.

Afin d'améliorer les capacités de prédiction, les travaux de recherche dans le domaine des composites se sont tournés vers des modélisations à une échelle compatible avec les mécanismes mis en jeu, délaissant ainsi les approches macroscopiques (i.e. considérant l'empilement comme homogène). Les études expérimentales menées par Guillon dans le cadre du projet VulComp ont confirmé la compétition de deux mécanismes de dégradation majeurs à haute capacité de dissipation [Guillon *et al.*, 2006] :

- le délaminage entre les plis ;
- la fragmentation des plis en compression.

Pour l'analyse du délaminage, l'approche la plus commune consiste à travailler à l'échelle des plis, dite *mésoscopique*. Le stratifié est alors décrit comme un empilement de plis distincts, orthotropes et homogènes, liés par des interfaces dégradables [Allix *et al.*, 1989, Corigliano, 1993, Schellekens et de Borst, 1994]. La modélisation de la fragmentation en compression pose une question d'échelle similaire : quelle est l'échelle supérieure compatible avec une prise en compte des principaux mécanismes conduisant à la rupture en compression des plis ?

Au vu de la littérature, il semble que celle ci soit l'échelle des fibres, qu'on qualifiera de *microscopique*. En effet, le faciès qui peut être observé *post-mortem* sur de nombreux échantillons rompus en compression indique une rupture par plissement (*kinking* en anglais). Il s'agit là d'un mode de dégradation propre aux matériaux hétérogènes orientés, comme les strates rocheuses ou les composites stratifiés. Il se caractérise par une perte apparente de raideur locale des renforts, suite à leur flambage sous chargement de compression et à la dégradation de la matrice, cisailée entre les renforts. Cette perte de raideur provoque une localisation des déformations qui se propagent dans un volume de faible épaisseur. À terme dans les stratifiés, les fibres de carbone rompent et forment une bande de plissement (*kink-band* en anglais). Ce mode de rupture est à l'origine de la fragmentation en compression dynamique. Au cours du processus, la matrice subit d'importantes déformations de cisaillement dans le volume de la *kink-band*. Ce phénomène est également à l'origine d'une différence entre la contrainte à rupture en compression et la contrainte à rupture en traction, parfois de plus de 50% [Dow et Gruntfest, 1960]. C'est par conséquent un mécanisme qui a été étudié dans le cadre du dimensionnement de structures composites, longtemps avant que son application aux absorbeurs de chocs ne soit envisagée.

Les premiers modèles théoriques de *kinking* se sont intéressés au flambage de la microstructure [Rosen, 1965]. Avec le temps, les modèles se sont affinés [Schuerch, 1965, Argon, 1972, Waas *et al.*, 1990], avant d'être complétés dans les années 2000 par des modèles éléments finis, capables de représenter avec une grande finesse la microstructure du matériau en trois dimensions [Lapusta *et al.*, 2008]. Cependant les approches micromécaniques de la littérature surestiment encore largement les contraintes ultimes en compression et compression-cisaillement. De plus, pour des raisons de temps de calcul notamment, l'usage de modèles micromécaniques est incompatible avec la réalisation de simulations structurales ( $\approx m$ ) ou même d'échantillon ( $\approx cm$ ). Ce sont donc des critères à l'échelle du pli (méso) ou de l'empilement (macro), identifiés à partir d'essais normalisés, qui sont le plus souvent utilisés pour le dimensionnement [Hashin, 1980, Hinton *et al.*, 2004a, Pinho *et al.*, 2005]. Ces critères tendent à offrir une prédiction conservative de la rupture mais ne sont pas en mesure de prédire l'état de dégradation du matériau, ni avant ni après la contrainte ultime. En particulier, ils ne sont pas adaptés pour déterminer l'énergie absorbée lors d'un choc, qui se dissipe essentiellement au-delà de la contrainte ultime.

Pour l'étude de chocs, de nombreux auteurs ont recours à des modèles écrits à l'échelle mésoscopique [Sjoblom *et al.*, 1988, Abrate, 1991, Choi et Chang, 1992]. Ce choix est motivé par la recherche du meilleur compromis entre la représentation fine des mécanismes de dégradation élémentaires et la rapidité d'exécution dans un code de calcul. Ce type d'approche a été particulièrement étudié au LMT-Cachan dans le cadre du mésomodèle d'endommagement [Ladevèze, 1986]. Cette description, qui suppose les plis homogènes dans leur épaisseur, permet une représentation de l'état de dégradation du matériau tout au long du processus de rupture. Par ailleurs, son impact sur les performances des calculs demeure limitée tant que la zone simulée reste faible ( $\approx 10 cm$ ), ce qui est suffisant pour traiter de nombreux problèmes de bord. Tou-

tefois, l'identification sur de petits chocs a révélé que, sans interaction entre dégradations inter- et intra-laminaires, ce modèle est insuffisant pour bien prédire l'étendue des zones délaminées (et l'énergie dissipée) [Guinard *et al.*, 2002].

C'est une des raisons pour lesquelles un premier "pont micro-méso" a été recherché [Ladevèze et Lubineau, 2001]. Il consiste à faire communiquer les approches micromécaniques [Nairn et Hu, 1992], proches de la physique et considérées comme fiables, avec un modèle mésoscopique, représentatif du comportement global et permettant la simulation (et donc l'identification) d'échantillons ou de structures complets. Ce premier pont a permis l'écriture d'un mésomodèle amélioré intégrant de nouvelles variables liées à la micromécanique [Ladevèze et Lubineau, 2002]. Son extension à l'interaction fissuration transverse / délaminage a été rendue possible grâce à un second pont micro-méso [Ladevèze *et al.*, 2005]. Ce second modèle amélioré offre notamment une meilleure reproduction de la réponse des stratifiés aux petits chocs [Abisset *et al.*, 2011a].

Toutefois, certaines localisations fortes engendrent des gradients susceptibles de mettre en défaut la mécanique de l'endommagement continu. Ce n'est pas le cas de la microfissuration transverse, par exemple, dont on verra plus loin qu'elle présente généralement un caractère suffisamment diffus pour être correctement capturée par le mésomodèle, dans sa version standard ou améliorée. En revanche, c'est le cas de la fissuration longitudinale (*splitting* en anglais), qui se caractérise par l'apparition d'une seule fissure dans toute la longueur de l'échantillon, et dont la représentation par la mécanique de l'endommagement est problématique. C'est ainsi qu'un mésomodèle hybride continu/discret représentant explicitement la fissuration traversante dans l'épaisseur du pli a également été établi [Ladevèze *et al.*, 2006]. Significativement plus coûteux, il permet cependant de simuler ces situations à forts gradients et de valider avec précision un scénario de dégradation.

Dans la thèse de Guimard, des résultats encourageants ont été obtenus sur l'analyse de l'énergie dissipée par *kinking* dans les stratifiés [Guimard *et al.*, 2007]. On se propose donc, d'une part, d'améliorer ce modèle micromécanique en termes de prévision de la contrainte ultime et de l'énergie dissipée. D'autre part, dans l'esprit des travaux sur les ponts micro-méso, on souhaite étudier la possibilité d'établir un pont similaire pour l'étude du *kinking* et de l'absorption d'énergie. Dans ce cadre, de nombreuses questions se posent :

- Les défauts d'alignement des fibres influent fortement sur la contrainte à rupture. Est-ce là leur seul impact ? Et quel est celui du cisaillement, qui favorise la décohésion fibres-matrice ?
- En supposant qu'il soit possible de réaliser un pont micro-méso, quelles sont les informations pertinentes à l'échelle mésoscopique ? En particulier les défauts, paramètres statistiques de la microstructure, impliquent-ils un mésomodèle probabiliste ?
- À l'échelle mésoscopique, comment coupler la réponse identifiée en compression avec les autres aspects du modèle du pli, et en particulier les autres modes de dégradation ?

Dans cet esprit, ce manuscrit est agencé de la façon suivante :

**PARTIE I :** La première partie présente le contexte de l'étude puis une bibliographie sélective en trois points.

**Chapitre 1 :** Le premier chapitre présente le phénomène de *kinking*, d'un point de vue modélisation et simulation, mais en s'appuyant sur les observations et résultats expérimentaux. Les micromodèles de *kinking* actuels se révèlent riches en informations, mais leur potentiel de prédiction peut être amélioré.

**Chapitre 2 :** Le second chapitre s'intéresse à une manière de transférer l'essentiel de ces informations à une échelle supérieure. Pour ce faire, une méthode d'homogénéisation non-linéaire de matériaux hétérogènes est utilisée. Deux grandes familles d'approches sont détaillées.

**Chapitre 3 :** Le troisième chapitre est consacré à la modélisation des composites à l'échelle mésoscopique. L'accent est volontairement mis sur les modèles développés au LMT-Cachan. Compte tenu de sa proximité avec la micromécanique, un modèle hybride est choisi comme cible de l'homogénéisation.

Une conclusion de l'état de l'art permet d'établir un bilan préalable à la thèse.

**PARTIE II :** La seconde partie détaille les travaux réalisés au cours de la thèse.

**Chapitre 4 :** Le quatrième chapitre est consacré à l'écriture d'un micromodèle unidimensionnel multi-axial intégrant la dégradation de la matrice. Les modifications apportées au modèle d'origine permettent de prédire le comportement statistique de la microstructure d'un pli unidirectionnel.

**Chapitre 5 :** Le cinquième chapitre développe une méthodologie pour intégrer la réponse microstructurelle obtenue précédemment dans un modèle écrit à l'échelle mésoscopique. Une fois la méthode présentée, elle est illustrée par l'identification du modèle pour un pli de stratifié carbone/époxy.

**Chapitre 6 :** Le sixième chapitre offre quelques perspectives pour l'utilisation de ce modèle enrichi dans le cadre d'un modèle hybride continu/discret. Son implantation dans un code de calcul existant, les difficultés qui y sont liées et les premières simulations numériques obtenues sont présentées.

Enfin, une conclusion générale discute les résultats obtenus à l'issue de la thèse.

**Première partie**

**Contexte, bibliographie et  
problématiques**





# Contexte industriel et scientifique

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet VulComp – Phase 1 (VULnérabilité des structures COMPosites), qui s'est déroulé de juin 2007 à décembre 2010. Réunissant EADS IW, leader du projet, le LMT-Cachan, l'ISAE, le LAMEFIP, HOLO3 et Airbus, son objectif était d'améliorer la compréhension et les capacités de prédiction de la dégradation des structures composites organiques, tissées ou stratifiées. Les travaux menés dans le cadre du projet ont permis le développement aussi bien de moyens de mesure de dernière génération que de nouvelles stratégies de modélisation. Dans les deux cas, l'accent a été mis sur les problématiques de crash d'engins aéronautiques. On dégagera essentiellement deux problématiques dont les objectifs sont distincts :

- *La résistance à l'impact* où l'on cherche à minimiser les dommages structurels dus à un impact, généralement hors-plan, d'un objet dur (chute d'outil) ou mou (choc à l'oiseau). L'objectif est alors de privilégier l'intégrité de la structure.
- *L'absorption de choc* où l'on cherche à absorber un maximum d'énergie, généralement afin de minimiser les dommages subis par les occupants. L'objectif est alors d'activer un maximum de mécanismes dissipatifs afin de tirer parti de l'entière capacité d'absorption du matériau.

Cette thèse est une contribution à la résolution de cette seconde problématique.

## 1 Vulnérabilité des structures composites

L'utilisation des matériaux composites comme absorbeurs de chocs n'est pas une idée entièrement nouvelle. Toutefois, elle soulève de nombreuses difficultés en raison de la complexité du matériau lui-même. Un matériau composite est avant tout une structure, un assemblage de phases aux propriétés très différentes à plusieurs échelles. Les constituants élémentaires sont les *fibres* longues, d'un diamètre à peu près égal à celui d'un cheveu (entre 5 et 10  $\mu\text{m}$ ), et la *matrice*. Cette étude va plus particulièrement s'intéresser aux fibres de carbone, qui présentent une raideur et une résistance élevées, une masse volumique assez faible, mais aussi une grande fragilité ; ainsi qu'aux matrices époxy, qui sont des résines organiques thermodures beaucoup plus souples et possédant un comportement plus ductile. On rappellera qu'une rupture qualifiée de fragile s'accompagne d'une dissipation concentrée dans une *process zone* très localisée. Une rupture ductile, en revanche, s'accompagne d'une dissipation d'énergie importante dans une zone dégradée plus étendue. L'assemblage de fibres orientées de façon unidirectionnelle et de matrice permet d'obtenir un *pli unidirectionnel* (UD) dont les propriétés matérielles sont fortement orthotropes. La direction d'orientation des fibres (1) présente alors une grande rigidité, tandis que les directions transverses (2

et 3) et de cisaillement sont beaucoup plus souples (d'un rapport 1/10 voire plus). Afin de limiter cette anisotropie, les plis, dont l'épaisseur est de l'ordre de 0.1 mm (soit 10 à 20 diamètres de fibres) sont eux aussi assemblés en *empilements*. Un empilement est une succession de plis d'orientations différentes, séparés par une zone de faible épaisseur riche en matrice. On veillera généralement à conserver l'empilement symétrique et équilibré. Selon la séquence d'empilement choisie, le stratifié final peut demeurer fortement orthotrope, avec une direction de sollicitation privilégiée, ou quasi-isotrope. Avec la faible masse volumique du matériau final, c'est là le grand avantage des composites stratifiés, qui peuvent être optimisés pour une application spécifique en concevant l'empilement idéal. Cependant, cette optimisation des propriétés élastiques ne s'étend pas aussi facilement au comportement à rupture, les matériaux composites présentant des modes de dégradation complexes, à l'image de leur constitution.

Il est rare qu'une rupture *macroscopique* (à l'échelle du stratifié) ne soit le résultat de l'activation que d'un seul mécanisme de dégradation. Au contraire, elle est souvent le résultat de la compétition de plusieurs modes de ruine, qui peuvent être caractérisés à différentes échelles d'observation. À l'échelle des constituants élémentaires, dite *microscopique*, on verra apparaître :

- La décohésion fibres/matrice, qui se produit à l'interface entre ces phases. Elle se développe tôt sous chargement transverse ou de cisaillement et est favorisée par les contraintes thermiques résiduelles dues au procédé de fabrication.
- La nucléation et la croissance de micro-vides et de microfissures dans la matrice. Elle est favorisée par la porosité du matériau, de l'ordre de quelques pourcents.

Ces deux mécanismes sont souvent considérés comme diffus à l'échelle des plis, ce qui permet d'un point de vue modélisation de les représenter grâce à la mécanique de l'endommagement continu [Ladevèze, 1986]. Toutefois, lorsque la charge augmente, les décohésions et les micro-fissures peuvent coalescer en fissures traversant toute l'épaisseur du pli. La dimension caractéristique de la dégradation a changé et il est légitime de se demander s'il est toujours raisonnable de considérer ce phénomène comme diffus. À l'échelle du pli, dite *mésoscopique*, on recense donc :

- La rupture de la matrice en sens transverse, qui se développe sous des chargements assez faibles, en raison de la coalescence des dégradations diffuses. Ces fissures dites transverses peuvent aussi brancher à l'interface entre deux plis d'orientation différente, favorisant le développement de délaminage local.
- Le délaminage, qui est un mode de rupture prépondérant dans les problématiques de résistance à l'impact et d'absorption de choc. Il se développe en raison de la forte hétérogénéité entre deux plis adjacents d'orientations différentes et est favorisé par l'apparition préalable de fissuration transverse.
- La rupture des fibres dans le sens longitudinal, qui se produit généralement en dernier dans la séquence de rupture. Elle apparaît généralement à des contraintes élevées, lorsque les plis adjacents ne peuvent plus supporter la charge et que les contraintes se concentrent dans le sens des fibres.

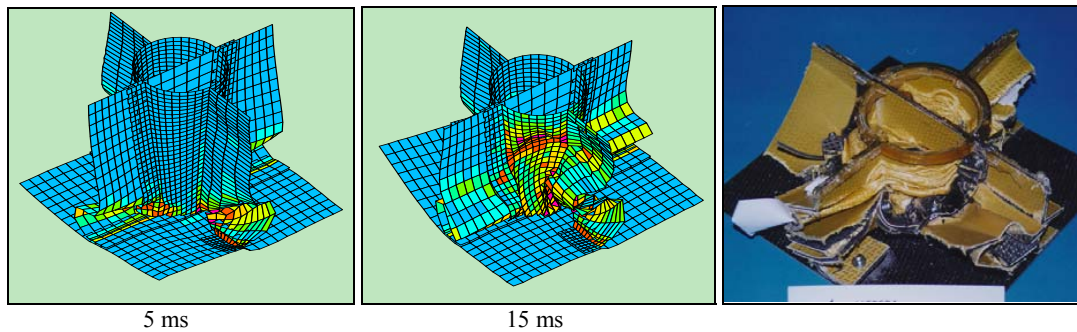
La succession de ces différents mécanismes n'est pas systématique mais, pour de nombreux empilements et types de sollicitations, la rupture finale macroscopique est due à plusieurs de ces modes de dégradation. Un cas intéressant concerne la rupture en compression dans le sens des fibres. En effet, il sera évoqué dans la suite que la rupture n'est pas uniquement due au développement de fissures ou de vides, entre ou à l'intérieur des phases. La nature structurelle du stratifié joue également un rôle, en raison de l'apparition de micro-flambage local, à l'échelle des fibres. Cette instabilité géométrique microscopique, accompagnée d'autres dégradations, mène sous charge ultime à une rupture des fibres en deux endroits, délimitant une bande de plissement (ou *kink-band*) et non une fissure. C'est le phénomène de plissement (ou *kinking*). Il s'agit d'un processus très dissipatif, absorbant une grande quantité d'énergie par rapport au développement d'un délaminage de taille équivalente ( $\approx 80 \text{ kJ.m}^{-2}$  contre  $\approx 1 \text{ kJ.m}^{-2}$  [Soutis et Curtis, 2000]).

## 2 Dispositifs d'absorption d'énergie composites

Dans le cadre de l'absorption de chocs, l'objectif est d'activer un maximum de mécanismes dissipatifs au sein du matériau employé. Toute l'énergie ainsi absorbée ne sera pas transmise aux occupants, le seuil admissible étant fixé par les organismes de certification. Historiquement, les absorbeurs de chocs ont été réalisés à partir de matériaux métalliques sous forme tubulaire et autres structures minces (nids d'abeille) afin de dissiper de l'énergie par plasticité. Dans l'industrie aéronautique cependant, la recherche toujours constante d'une masse à vide plus faible incite les concepteurs à se tourner vers l'utilisation de matériaux composites. En effet, ces derniers composent une partie toujours plus importante de la structure des avions (y compris des structures primaires, comme la poutre ventrale de l'A380) et leurs nombreux mécanismes de dégradation laissent présumer une capacité d'absorption spécifique (i.e. rapportée à leur masse) très élevée.

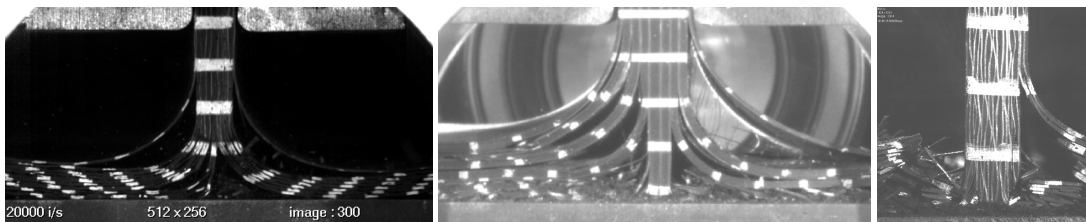
Pour favoriser les scénarios de rupture les plus dissipatifs, les concepteurs ont imaginé des structures de géométrie parfois complexe permettant de solliciter (fragmenter) le matériau jusqu'à écrasement total et donc à dissipation maximale. Des études expérimentales de sensibilité à la géométrie corrélées avec des simulations numériques à l'échelle mésoscopique ont été menées par l'équipe de Johnson à la DLR [Johnson et Kohlgrüber, 1997, Johnson et Pickett, 1999, Johnson et Pickett, 2000, Johnson et Kohlgrüber, 2000, Johnson *et al.*, 2001] qui a permis de concevoir des caissons absorbeurs maximisant l'énergie dissipée (voir Figure 1).

Une étude de sensibilité à la vitesse d'impact et aux défauts déclencheurs (ou *triggers*) a également été menée d'un point de vue expérimental et numérique par l'équipe de Rivallant [Guillon *et al.*, 2006, Guillon *et al.*, 2008, Guillon *et al.*, 2009], dans le cadre du projet VulComp. Il s'agissait ici d'analyser le comportement de plaques stratifiées (et non de structures optimisées) lâchées depuis une tour de chute. Cette seconde étude a notamment attesté de la difficulté de prédire l'activation d'un scénario en



**FIGURE 1:** Comparaison simulation/essai pour un absorbeur de choc cruciforme [Johnson et Kohlgrüber, 2000]

fonction du *trigger* utilisé. Elle a également mis en évidence trois grandes familles de scénarios de rupture susceptibles de se déclencher (voir Figure 2). Le plus intéressant est celui où la fragmentation se propage dans quasiment tous les plis ou presque, accompagnée de délaminage (à droite), car c'est le scénario qui dissipe la plus grande quantité d'énergie à masse d'échantillon équivalente. Toutefois, la prédiction de ces scénarios de rupture par la simulation numérique est difficile, en particulier en raison de la complexité des modes de ruine impliqués, et notamment du *kinking*.



**FIGURE 2:** Scénarios de rupture (de gauche à droite) : évasement quasi-pur, fragmentation et évasement, fragmentation dans tous les plis [Guillon *et al.*, 2009]

Afin de mieux comprendre ce phénomène, le Chapitre 1 propose un état de l'art de la modélisation du *kinking*, avec un focus sur les approches micromécaniques. Le problème de ces approches très précises est leur échelle de travail. Afin de pouvoir remonter les informations à une échelle supérieure, adaptée au calcul, il est nécessaire de passer par une étape d'homogénéisation. Ainsi, le Chapitre 2 propose une brève bibliographie de l'homogénéisation non-linéaire. Enfin, on souhaite inscrire ce comportement homogénéisé en compression dans un cadre existant et pertinent à l'échelle mésoscopique. C'est le sujet du Chapitre 3, qui brosse un état de l'art sur la mésomodélisation des stratifiés, avec un focus sur les travaux du LMT-Cachan. Une synthèse de la bibliographie dans son ensemble clôt cette première partie.

# Chapitre 1

## Rupture par plissement dans les matériaux stratifiés

*Ce premier chapitre est consacré à une étude bibliographique plus exhaustive que les suivants sur le phénomène de kinking, en raison du rôle central qu'il joue dans cette étude. Il est d'abord analysé d'un point de vue phénoménologique, avant d'aborder les différentes méthodes permettant de le prendre en compte à toutes échelles. Cette analyse montre que, contrairement aux critères de rupture, les micromodèles permettent de bien représenter la complexité du processus de kinking et ses couplages avec le cisaillement. Toutefois, même à l'échelle microscopique, la bonne prise en compte des phénomènes de dégradation élémentaires n'est pas triviale et nécessite l'introduction de couplages multi-axiaux.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Phénoménologie</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Les micromodèles de flambage unidirectionnels</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>Les micromodèles bi- ou tri-dimensionnels</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>Les critères de rupture</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion sur la prédiction du plissement</b> . . . . .	<b>33</b>

---

## 1 Phénoménologie

Les premières observations ayant trait au phénomène de plissement (*kinking* en anglais) datent du début du XX<sup>e</sup> siècle et sont à attribuer à la communauté des géologues [Rollier, 1903, Rich, 1934]. La croûte terrestre, matériau stratifié naturellement, présente des plissements aisément observables (car larges de plusieurs mètres) à la surface de la terre et notamment dans le massif du Jura. En géologie, ce phénomène est souvent précurseur du chevauchement de deux côtés d'une même strate et de la formation d'un massif. Par conséquent, le *kinking* était déjà largement étudié et modélisé avant même que les premières études similaires sur les composites ne soient entamées [Baer et Norris, 1968]. La communauté des géosciences est toujours très active sur le sujet, avec par exemple des travaux menés par les équipes de Leroy [Maillot et Leroy, 2003, Maillot et Leroy, 2006, Kampfer et Leroy, 2009] et Hunt [Hunt *et al.*, 2000a]. L'instabilité est généralement prédite par un critère énergétique global de Maxwell [Biot et Romain, 1965, Zeeman et Hunt, 1979, Hunt *et al.*, 2000b] :

$$P_M = \min_{\underline{u} \neq 0} \frac{W(\underline{u})}{\mathcal{E}(\underline{u})} \quad (1.1)$$

où  $P_M$  est la charge critique de Maxwell,  $\underline{u}$  le champ des déplacements,  $W$  l'énergie de déformation et  $\mathcal{E}$  l'allongement/rétrécissement de la structure. Le développement du *kink* est ensuite estimé par un modèle prenant en compte de grandes rotations et du frottement entre les phases, ce qui permet également de s'intéresser au comportement post-rupture et au chevauchement de strates. Ces modèles, comparés avec le réel par des essais sur papier [Ahmer Wadee *et al.*, 2004] ou sur du gypse [Brantut *et al.*, 2011], permettent d'obtenir une remarquable corrélation essai-calcul. Toutefois, les milieux stratifiés et les milieux fibreux présentent des différences importantes qui rendent la communication entre modèles difficile. En particulier, le nombre de fibres mis en jeu dans les composites est bien trop important pour qu'un modèle basé sur le frottement inter-phases puisse être numériquement envisageable. Inversement, les défauts d'alignement avec la direction de chargement dans les roches sont bien trop significatifs pour qu'une analyse de flambage ait un réel sens prédictif.

Concernant les composites stratifiés, les premières observations datent des années 60 [Dow et Grunfest, 1960]. Les premiers essais ont révélé une contrainte en compression dans le sens des fibres significativement plus faible qu'en traction. Aujourd'hui, avec des matériaux composites carbone-époxy tels que le T300/914C<sup>1</sup>, le ratio entre ces deux contraintes peut atteindre des valeurs proches de 1.5, voire supérieures. De nombreux auteurs ont donc tenté de mieux comprendre ce processus de ruine mais, à l'origine, essentiellement par des observations *post-mortem* [Argon, 1972, Weaver et Williams, 1975]. Les micrographies des échantillons rompus exhibent une microstructure distordue, comme si toutes les fibres avaient flambé de concert avant de rompre en deux endroits, formant ainsi une bande inclinée traversant toute la largeur du pli, une *kink-band*, telle que celle de la Figure 1.1.

1. fibres de carbone Thornel 300 et matrice époxy BSL914C

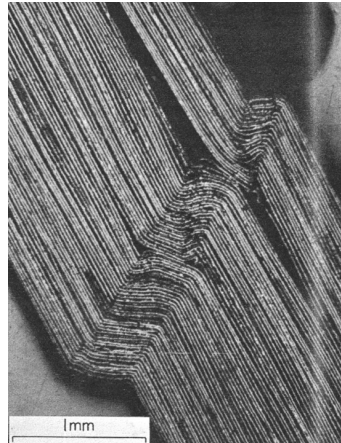


FIGURE 1.1: *Kink-band* dans un film composite de bore-polyamide-époxy par le Dr. Padawer [Argon, 1972]

Ce n'est qu'avec des montages récents et l'usage de chargements multi-axiaux tels que celui de l'équipe de Kyriakides [Vogler et Kyriakides, 2001a], ou d'échantillons spécifiques comme l'éprouvette entaillée utilisée par l'équipe de Pinho [Pimenta *et al.*, 2009, Gutkin *et al.*, 2010b], qu'a réellement pu être observé *in situ* le phénomène de formation d'une *kink-band*. En effet, sans prendre quelques précautions, la rupture est instable et la propagation ne peut être capturée, même à l'aide d'une caméra rapide. Les essais menés dans le cadre du projet VulComp ont confirmé ce phénomène d'instabilité à l'échelle de l'échantillon. Sur la micrographie de la Figure 1.2, issue d'un cas de chargement mixte compression-cisaillement, on peut observer pas à pas le scénario de rupture. Initialement, les fibres du composite sont relativement droites, mais soumises à un important champ de compression axial. Compte tenu de leur élanement, passé un certain seuil, un premier groupe de fibres flambe, qui se devine dans le coin en haut à gauche (1). Il s'agit d'une zone faible, à cause de la présence d'effets de bords et/ou de défauts. Perdant alors l'essentiel de leur rigidité, les fibres transfèrent la charge sur leurs voisines, qui se mettent à leur tour à flamber sous cette sollicitation supplémentaire. Ainsi, l'instabilité se propage à travers toute la structure (2-6). Elle résulte finalement en une bande de plissement (ou *kink-band*) qui traverse la totalité du pli et s'élargit progressivement (7-11) jusqu'à ce que les fibres rompent (12).

On notera que la bande en question présente un angle non nul avec la direction 2, transverse aux fibres. Le plus souvent, les fibres rompent le long de deux plans nets, relativement parallèles, qui délimitent l'épaisseur de la bande. Si l'on continue à charger le pli alors qu'une première *kink-band* est apparue, il peut parfois en apparaître d'autres, dites *conjuguées* [Weaver et Williams, 1975, Oguni *et al.*, 2000], comme sur la micrographie de la Figure 1.3. D'après les observations expérimentales, l'angle d'une *kink-band* est une valeur qui se retrouve de façon répétitive au sein d'une même famille matériaux [Sivashanker *et al.*, 1996, Vogler et Kyriakides, 1997]. Pour divers types de composites stratifiés, des valeurs d'angles de *kink-band* situées entre 10 et 30° ont



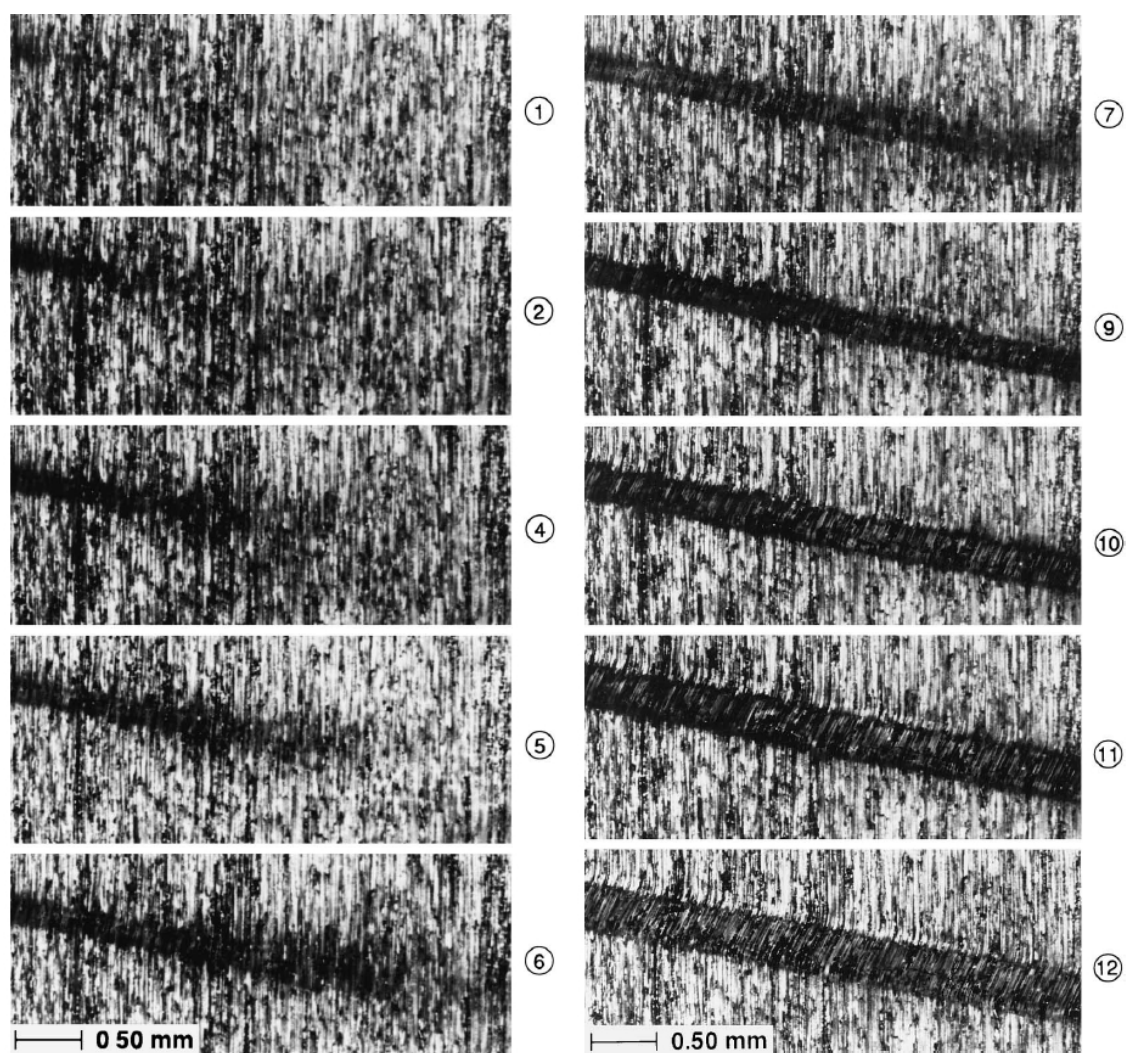
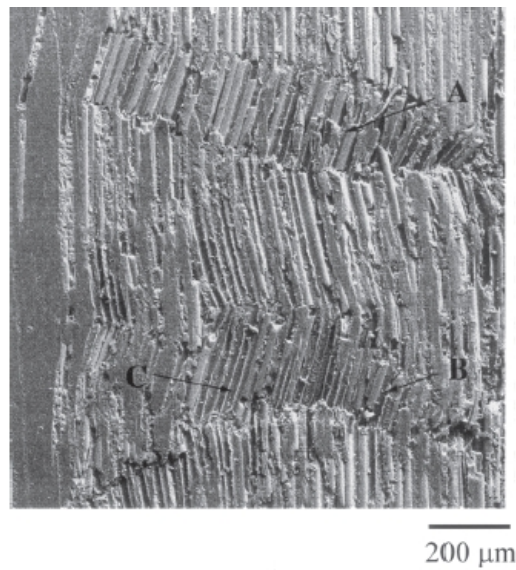


FIGURE 1.2: Formation progressive d'une kink-band dans un composite AS4/PEEK sous chargement mixte [Vogler et Kyriakides, 2001a]

été observées (par exemple, entre 22 et 26° pour un stratifié Modmur Type II/Epikote 828 [Weaver et Williams, 1975] et entre 12 et 16° avec un matériau AS4/APC-2<sup>2</sup> [Kyriakides *et al.*, 1995]). La largeur de la *kink-band* varie pour sa part d'une dizaine de diamètres de fibres à près de 4 fois cette valeur (par exemple, entre 11 et 36 diamètres de 7  $\mu\text{m}$  pour le même AS4/APC-2 [Kyriakides *et al.*, 1995]).

Néanmoins, tous les essais de compression dans le sens des fibres ne se traduisent pas nécessairement par l'apparition d'une *kink-band* [Hahn et Williams, 1986, Ha et Nairn, 1992]. En effet, un autre mode de ruine peut précéder ou se combiner avec le *kinking* sous certaines conditions de chargement : la fissuration longitudinale (*splitting* en anglais), qui se caractérise par l'apparition d'une fissure longeant les fibres, ini-

2. fibres PAN (Poly-Acrylo-Nitrile) et matrice thermoplastique PEEK (Poly-Ether-Ether-Ketone)

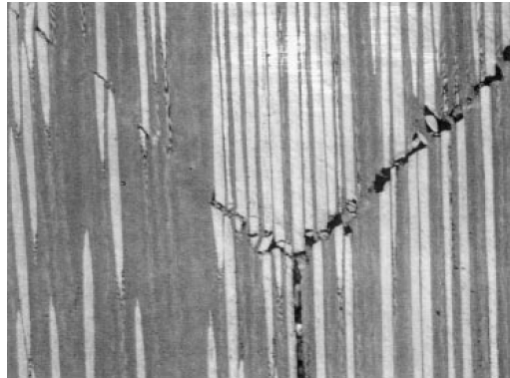


**FIGURE 1.3:** Formation de *kink-band* conjuguées dans un composite verre E/vinylester [Oguni *et al.*, 2000]

tiée par leur décohésion avec la matrice. Cette fissuration souvent instable provoque de fortes concentrations de contraintes, qui peuvent mener à l'initiation d'une *kink-band* ou à une rupture franche (voir Figure 1.4). Plusieurs auteurs ont étudié l'influence des paramètres menant à l'apparition de l'un ou l'autre de ces modes de rupture en compression [Wung et Chatterjee, 1992, Oguni *et al.*, 2000]. En particulier, ils ont observé qu'un taux de fibres élevé provoque souvent une rupture par fissuration, tandis qu'un taux très faible provoque une rupture combinant *kinking* et *splitting*. Pour des taux proches de ceux couramment utilisés dans l'aéronautique (50-60%), le *kinking* seul est le mode de rupture principal, à moins qu'une géométrie particulière favorise le *splitting*. Pour les composites carbone-époxy, ces mêmes taux de fibres permettent d'ailleurs d'optimiser la contrainte en compression maximale [Martinez *et al.*, 1981].

Une littérature abondante sur l'étude expérimentale du *kinking* a permis d'attester l'influence des divers paramètres du problème sur les principales variables d'intérêt observables : la contrainte à rupture, la raideur du pli, l'épaisseur de la *kink-band* et son angle. Ces observations ont été motivées par la volonté d'identifier les principaux paramètres influant sur la rupture en compression, y compris sur la géométrie du faciès de rupture. Par extension, elles ont aussi permis de concevoir de nouveaux modèles, discutés plus loin. Quatre influences cruciales sont analysées plus avant : la nature du chargement, les propriétés matérielles initiales des constituants, les défauts géométriques et enfin la dégradation des constituants au cours du processus.

Weaver et Williams se sont intéressés à l'influence d'une contrainte de confinement hydrostatique sur la tenue de cylindres composites Modmur Type II/Epikote 828 [Weaver et Williams, 1975]. Ils ont conclu que l'application d'une pression de confinement vient augmenter notablement la contrainte à rupture en compression du composite



**FIGURE 1.4:** Double rupture franche initiée par une fissuration transverse catastrophique dans un stratifié Toray M-40/Epon 828 [Narayanan et Schadler, 1999]

et favorise une rupture de type *kinking*. En revanche, la pression reste sans effet sur le module élastique du matériau. L'application d'une contrainte transverse *négative* n'affecte pas du tout le comportement en compression des stratifiés [Fischer, 2003]. Les équipes de Wisnom, Fleck puis Kyriakides se sont successivement intéressées à l'influence d'une contrainte de cisaillement, grâce à un cylindre sollicité en compression/torsion [Wisnom, 1991a, Jelf et Fleck, 1992, Wisnom et Atkinson, 1996, Vogler et Kyriakides, 2001a]. Ils ont montré l'importance de ce type de chargement, qui diminue de façon linéaire la contrainte maximale à rupture et peut aussi provoquer une transition d'une rupture quasi-fragile à une rupture ductile.

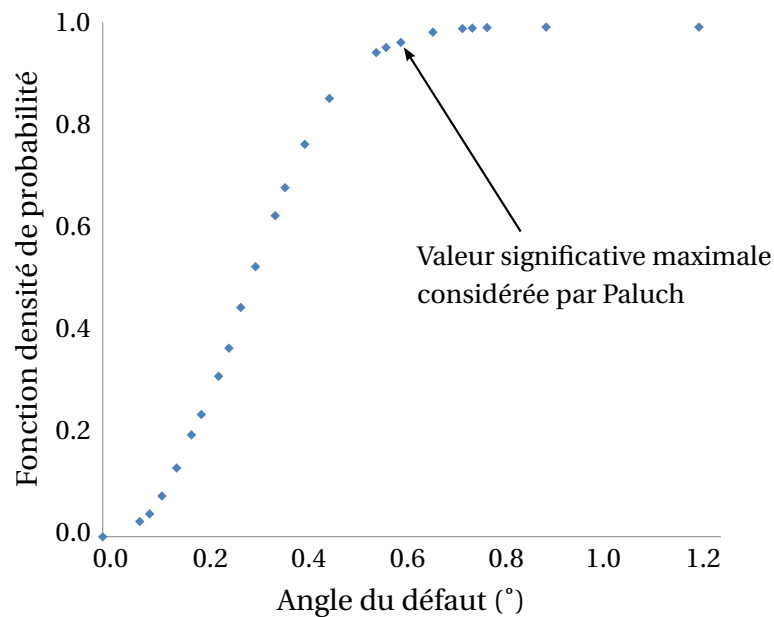
Piggott et Harris ont étudié l'influence du type de fibres et de matrice sur le comportement du composite [Piggott et Harris, 1980]. Ils ont considéré des stratifiés constitués de diverses résines polyester ou d'une résine époxy, croisées avec des fibres de verre, de carbone ou de Kevlar-49. Leur étude a fait ressortir les fibres de carbone et les matrices époxy comme les meilleurs candidats à la tenue en compression en termes de module et de contrainte à rupture. L'équipe de Sohi a mené une étude similaire pour des fibres Thornel 300 et 700 et quatre types de résines (Narmco 5208, American Cyanamic BP907, Union Carbide 4901/MDA et 4901/mPDA) [Sohi *et al.*, 1986]. Ils ont remarqué que les matrices possédant le plus haut module élastique permettent au composite d'atteindre une contrainte à rupture plus élevée, en jouant un rôle stabilisateur entre les fibres sujettes au flambage. Ils ont également conclu que l'influence du matériau des fibres est de second ordre devant celui de la matrice.

Cependant, Piggott insistera plus tard sur une caractéristique spécifique aux fibres : leur ondulation ou leur mésalignement [Piggott, 1995], qui est en fait un paramètre fondamental pour les capacités de prédiction de nombreux modèles (voir Section 2). Les premières observations quantitatives sont dues à [Yurgartis, 1987], qui a recensé des statistiques sur les amplitudes d'ondulation des fibres. Néanmoins, ces défauts ont été obtenus sur un composite à fibres de carbone APC-2 et seule leur amplitude a été mesurée. Or, les modélisateurs s'intéressent essentiellement à l'angle du défaut, car il est possible de montrer une indépendance au premier ordre des résultats en termes de

contrainte à rupture par rapport à un quelconque effet de taille [Wisnom, 1999]. Ainsi, pour un même angle d'ondulation  $\gamma_0$  donné, la contrainte à rupture ne changera pas quelle que soit la valeur de l'amplitude  $\bar{v}_0$ , ce qui est confirmé par les essais. Dans un rapport de l'ONERA, Paluch a ainsi effectué des mesures systématiques de la microstructure de quelques échantillons de stratifiés, y compris de type T300/914 [Paluch, 1994]. Bien qu'elles soient coûteuses en temps, ces observations ont permis d'évaluer l'angle maximum d'ondulation du défaut  $\gamma_0$ , ou plutôt le ratio  $\lambda_0$ , déterminé à partir de son amplitude  $\bar{v}_0$  et de sa longueur d'onde  $x_0$  :

$$\gamma_0 \equiv \lambda_0 = \frac{\bar{v}_0}{x_0} \quad (1.2)$$

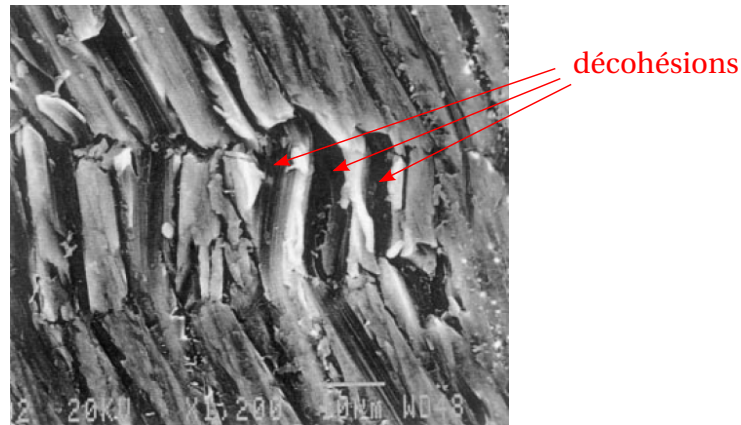
Les valeurs d'angles déterminées par Paluch suivent une loi de répartition bien approchée par une loi de Weibull [Weibull, 1951] (voir Figure 1.5). À l'heure actuelle, des techniques avancées de mesure par tomographie X et de traitement d'image deviennent accessibles aux laboratoires. Elles permettent d'envisager de telles mesures de façon beaucoup plus systématique, rapide et représentative de la statistique réelle.



**FIGURE 1.5:** Fonction de répartition des angles de défauts  $\gamma_0$  d'après [Paluch, 1994]

Enfin les équipes de Schadler et Soutis ont remarqué, sur certaines micrographies *post-mortem* telles que celle de la Figure 1.6, que d'importantes décohésions peuvent se produire entre les fibres et la matrice au cours du *kinking* [Garland *et al.*, 2001, Jumahat *et al.*, 2010]. On peut alors supposer que le rôle stabilisateur de la matrice finit par diminuer lorsqu'elle se détériore, cisailée entre les fibres adjacentes [Piggott, 1995, Gutkin *et al.*, 2008]. Cette détérioration n'étant pas directement observable au cours de l'essai, il est nécessaire d'avoir recours à des outils de simulation pour l'estimer théoriquement et/ou numériquement (voir Chapitre 4). Dans ce cadre, les deux

ingrédients nécessaires à une bonne représentation du réel sont : la description de l'instabilité structurelle et la modélisation du comportement des matériaux constitutifs. De la qualité de ces deux descriptions dépendent grandement la pertinence et l'extensibilité du modèle. Les principales méthodes théoriques et numériques de la littérature sont présentées ci-après.



**FIGURE 1.6:** Interfaces fibre-matrice fortement dégradées autour de la *kink-band* dans un stratifié Toray M-40/Epon 828 [Narayanan et Schadler, 1999]

## 2 Les micromodèles de flambage unidirectionnels

Historiquement première famille de modèles, les modèles de flambage unidirectionnels se basent sur la micro-mécanique des fibres. Leurs auteurs ont adapté les analyses d'instabilités structurelles en élasticité [Timoshenko, 1936] au cas particulier des stratifiés en compression. On peut d'ores et déjà souligner que la description de la microstructure est ici très simple, mais qu'aucune restriction ne s'applique *a priori* sur les modèles de comportement des matériaux.

Le premier de ces modèles a été imaginé par Rosen [Rosen, 1965]. Il présente un certain nombre d'hypothèses fortes : flambage linéarisé autour du premier mode, microstructure parfaite et périodique, matériaux élastiques linéaires, etc. Également établi par Hayashi [Hayashi, 1965], ce modèle très simple analyse deux scénarios de flambage, illustrés sur la Figure 1.7 : un symétrique-périodique (où la matrice est essentiellement sollicitée de façon transverse) et un antisymétrique-périodique (où la matrice est essentiellement sollicitée en cisaillement). Par une étude analytique, Rosen confirme le fait que pour les taux de fibres utilisés dans l'industrie aéronautique (supérieurs à 20%), le scénario antisymétrique de cisaillement est celui qui pilote la rupture. Dans cette configuration, le modèle prédit une contrainte à rupture  $\sigma_C$  fonction du module de cisaillement de la matrice  $G_m$  et du taux de fibres  $\eta_f$  :

$$\sigma_C = \frac{G_m}{1 - \eta_f} \quad (1.3)$$

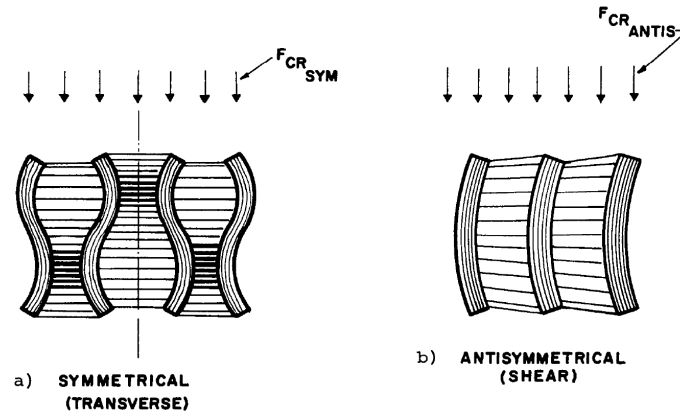


FIGURE 1.7: Schémas de scénarios de flambage périodiques symétrique (gauche) et antisymétrique (droite) [Schuerch, 1965]

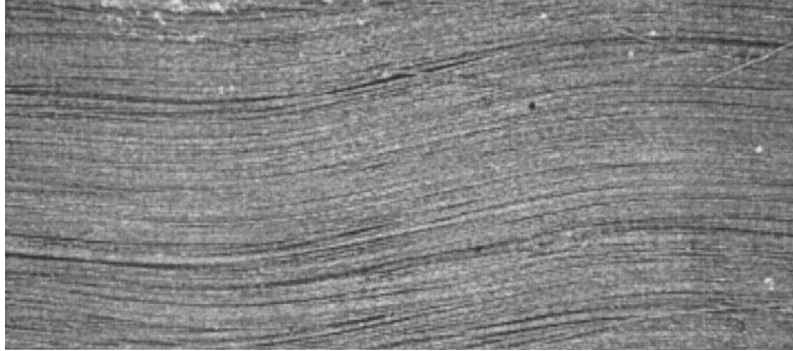
Pour un stratifié aéronautique classique, type T300/914,  $G_m$  peut atteindre les 4500-5500 MPa, une valeur excédant largement la contrainte expérimentale à rupture en compression, de l'ordre de 1000-1500 MPa. Certaines hypothèses sont donc à remettre en cause. Dès l'année suivante, Schuerch analyse plus en détail le mode antisymétrique-périodique, qu'il retrouve comme manifestation la plus probable du *kinking*. Dans cette configuration, la matrice subit d'importantes déformations de cisaillement et Schuerch en déduit que la rupture doit se produire dans le domaine inélastique de son comportement [Schuerch, 1965, Schuerch, 1966]. Il modifie donc le modèle précédent, enrichissant le comportement matériau pour obtenir la forme :

$$\sigma_C = \frac{\bar{G}_m}{1 - \eta_f} \quad (1.4)$$

où  $\bar{G}_m$  est donc le module de cisaillement *tangent* de la matrice. Ainsi, si celle-ci entre en mode inélastique avant que le flambage ne se déclenche, la contrainte à rupture en sera diminuée ; autrement, non. Mais à moins d'introduire une limite élastique  $\tau_Y$  extrêmement faible, la contrainte à rupture prévue par ce modèle demeure fortement surestimée.

Au début des années 70, Argon ajoute la question des défauts à la problématique [Argon, 1972]. Il insiste sur l'introduction de défauts raisonnables, inhérents à la microstructure, dans tout problème d'instabilité. Il détermine que l'ondulation ou l'alignement des fibres joue un rôle de premier ordre (voir Figure 1.8). Son analyse met en évidence la forte dépendance de la contrainte maximale admissible par le matériau en compression à l'angle du défaut, lequel résulte essentiellement du procédé de fabrication [Kugler et Moon, 2002, Potter et al., 2008, Ersoy et al., 2010]. En considérant la limite élastique en déformation  $\gamma_Y$  et l'angle du défaut  $\gamma_0$ , Argon enrichit ainsi la description de la microstructure dans le modèle et obtient la relation suivante :

$$\sigma_C = \frac{\tau_Y}{\gamma_Y + \gamma_0} \quad (1.5)$$



**FIGURE 1.8:** Défaut d'alignement de fibres sous forme d'ondulations dans un pli fin de T300/P1700 [Kugler et Moon, 2002]

Cette formule est en fait une approximation du résultat d'une analyse de flambage inélastique en présence de défaut, qui se révèle quasi-exacte pour  $\gamma_Y \ll \gamma_0$  [Bažant et Cedolin, 1991]. Mais ces théories prédisent toujours des contraintes à rupture trop élevées, au moins dans le cas des composites carbone/époxy [Budiansky, 1983]. Budiansky et Fleck se sont alors intéressés aux facteurs potentiels pouvant réduire les contraintes à rupture théoriques à des valeurs plus proches de celles observées expérimentalement. Au cours des années 90, ils ont proposé un cadre générique pour l'écriture des problèmes de micro-flambage sous la forme d'une théorie unifiée, la *kinking theory* [Budiansky et Fleck, 1993, Budiansky et Fleck, 1994, Fleck et al., 1995]. Le principe consiste à écrire le problème de référence dans un Élément de Volume Représentatif, représenté Figure 1.9, assorti de quelques hypothèses (détaillées dans le Chapitre 4), et de résoudre les équations d'équilibre en efforts et en moment dans le plan (1, 2). L'équation non-linéaire fondamentale de cette théorie lie le moment linéique  $m$ , la contrainte de compression axiale  $\sigma_{11}$ , la contrainte de cisaillement  $\tau_{21}$  et la contrainte transverse  $\sigma_{22}$ , via :

$$\frac{\partial m}{\partial s} + \sigma_{11}(\omega + \omega_0) = \tau_{21} + \sigma_{22} \tan \beta \quad (1.6)$$

où  $s$  est l'abscisse longitudinale de l'EVR,  $\omega$  la rotation de la fibre,  $\omega_0$  la rotation initiale due au défaut et  $\beta$  l'angle d'inclinaison de la *kink-band*, supposé connu *a priori*. La matrice obéit à un modèle élasto-plastique à écrouissage isotrope et une loi d'écoulement J2 de type Ramberg-Osgood [Ramberg et Osgood, 1943].

Cette méthode a l'avantage de proposer un cadre complet, toujours basé sur les équations du flambage inélastique et aisément extensible. En effet, de nombreuses hypothèses sont introduites pour faciliter les calculs, mais peuvent être levées au besoin. Cette théorie se distingue par une prise en compte très simple de la microstructure, capable de représenter un seul défaut uniforme dans le pli. Elle permet toutefois d'utiliser des lois matériaux non-linéaires (notamment pour la matrice). Ce modèle est incapable de prédire l'angle de la *kink-band*, qui est une donnée du problème : il permet de définir le ratio des déformations transverses/de cisaillement imposées par la cinématique de la fibre en compression pure. Cependant, l'épaisseur de la *kink-band*,

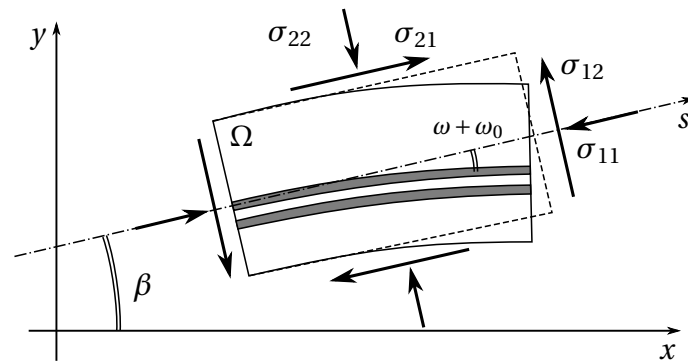


FIGURE 1.9: Élément de Volume Représentatif de la microstructure,  $\beta$  étant l'angle final de la *kink-band*

elle, peut être déterminée directement [Fleck *et al.*, 1995]. Enfin, avec ce modèle, la contrainte maximale à rupture ne dépend pas du critère de rupture des fibres [Budiansky *et al.*, 1998], contrairement à ce qu'avaient proposé d'autres auteurs [Hahn et Williams, 1986]. En revanche, l'un des paramètres critiques du modèle, non moins difficile à quantifier, est le défaut d'ondulation considéré. Guimard et Allix ont étudié l'influence de ce défaut d'ondulation sur la réponse du modèle de Budiansky & Fleck, à partir des valeurs mesurées par Paluch [Guimard *et al.*, 2007, Guimard *et al.*, 2009]. Ils en ont déduit une grande sensibilité de la contrainte à rupture à ces défauts (voir Figure 1.10), tandis que l'énergie dissipée au cours du processus était trouvée relativement constante. On peut d'ailleurs remarquer que les contraintes à rupture estimées pour les défauts considérés représentatifs par Paluch excèdent significativement les résultats d'essai.

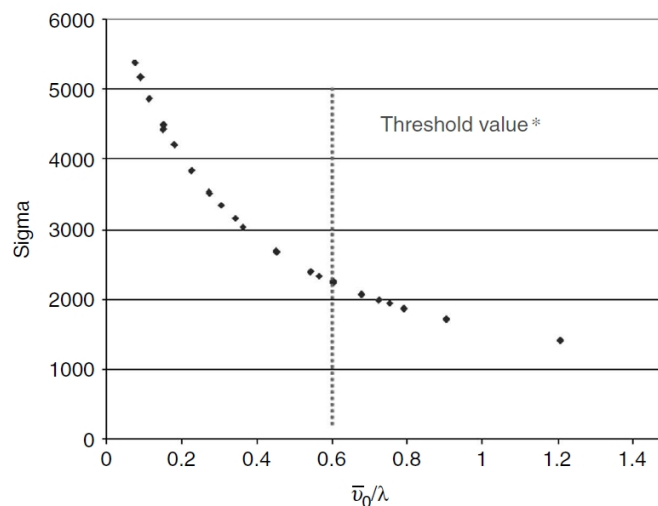
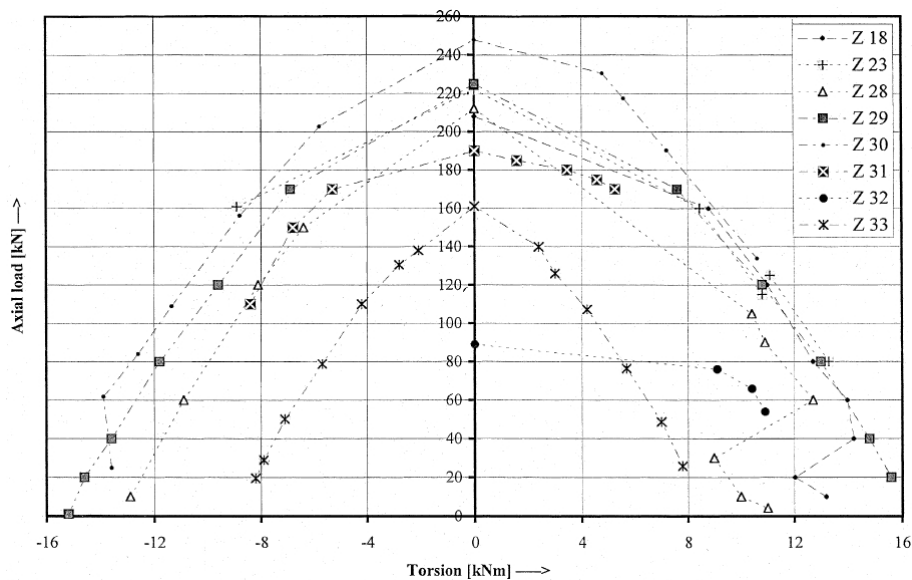


FIGURE 1.10: Influence du défaut d'alignement des fibres sur la contrainte à rupture d'un T300/914 (en MPa) [Guimard *et al.*, 2007]



De nombreux auteurs se sont intéressés à la tenue de plis sous sollicitations mixtes de compression-cisaillement (ou compression-torsion) [Moran *et al.*, 1995, Vogler *et al.*, 2000, Yerramalli et Waas, 2003]. Dans ces études basées sur la *kinking theory*, les auteurs concluent à une dépendance quasi-linéaire de la contrainte à rupture vis-à-vis de la mixité du chargement. Ces analyses sont en accord avec les observations expérimentales des équipes de Fleck et Kyriakides. Cependant, d'autres auteurs ayant effectué des études similaires obtiennent expérimentalement des résultats présentant parfois une forme tronquée [Meyer-Piening *et al.*, 2001] (voir Figure 1.11). Pour un chargement fortement mixte, la dépendance compression/cisaillement en termes de contrainte à rupture est approximativement linéaire. Mais dans certains cas de cisaillement faible, la contrainte à rupture atteint et conserve une valeur en compression quasi constante. Deux hypothèses principales ont été émises pour justifier ce plateau :



**FIGURE 1.11:** Contraintes à rupture dans un plan compression-torsion : apparition d'un plateau en cas de faible torsion pour la courbe Z31 [Meyer-Piening *et al.*, 2001]

- Historiquement, la première hypothèse est celle d'Ewins et Ham, qui ont considéré un critère supplémentaire de rupture des fibres en compression au modèle d'Argon [Ewins et Ham, 1974]. Dans le cadre de la *kinking theory*, ce critère fragile est susceptible de s'activer *avant* la charge critique de flambage pour des cas de compression dominante et de faible ondulation des fibres. Le principal défaut de cette approche est qu'elle introduit un critère supplémentaire purement phénoménologique, lequel n'est pas directement en lien avec la mécanique de la rupture au sens de Griffith [Griffith, 1921] et nécessite une identification spécifique sur des essais potentiellement très dispersifs [Hinton *et al.*, 2004a].
- D'un autre côté, plusieurs observations expérimentales [Grandidier et Potier-Ferry, 1990, Ferron *et al.*, 1992, Anthoine *et al.*, 1998] ont mis en évidence que

les essais normalisés de compression pure présentent une trop grande dispersion pour être considérés comme prédictifs. Par ailleurs, la rupture est systématiquement localisée aux talons de l'éprouvette, en raison de concentrations de contraintes parasites. C'est pourquoi les équipes de Ladevèze puis de Hochard ont préféré des essais de flexion pure pour obtenir des chargements de compression pure plus représentatifs et une rupture au cœur de l'éprouvette [Allix *et al.*, 1994, Bois *et al.*, 2009]. Toutefois lorsque ces essais impliquent un gradient de la contrainte de compression trop important, les études de Drapier et Grandier ont montré qu'ils prédisent alors une contrainte ultime nettement supérieure à celle qu'on aurait dans un cas de compression pure [Drapier *et al.*, 1997].

Dans le cadre de cette étude, aucun critère de rupture supplémentaire n'est introduit. La comparaison des résultats numériques issus de l'analyse micro avec les essais devra donc être effectuée avec une certaine prudence. La question des effets de structure sera rediscutée plus loin.

Par ailleurs, quelques auteurs se sont intéressés aux effets de taille sur la contrainte et le mode de rupture d'un pli ou d'un stratifié [Soutis *et al.*, 1993, Bažant *et al.*, 1999]. Suite aux travaux de Curtin en traction [Curtin, 2000], Lee et Soutis se sont récemment intéressés au même problème en compression. Leurs études ont porté sur des composites T800/924C [Lee et Soutis, 2005] et IM7/8552 [Lee et Soutis, 2007], potentiellement entaillés [Lee et Soutis, 2008]. De dimensions  $10 \times 10 \times 2$  mm, les échantillons ont été affectés d'un facteur d'échelle de 2 ou 4. Dans tous les cas, les auteurs ont constaté que la contrainte à rupture diminue significativement (jusqu'à un maximum de 45%) avec l'augmentation de taille de l'échantillon, tandis que le module en compression reste relativement inchangé, comme on peut le constater sur la Figure 1.12. Ils ont également noté qu'avec les essais normalisés, cette rupture s'initiait systématiquement aux talons de l'éprouvette. Cette diminution significative de la contrainte est représentative d'un mode de ruine piloté par les défauts, ce qui est en faveur d'un modèle de comportement probabiliste [Hild *et al.*, 2003, Lamon, 2007].

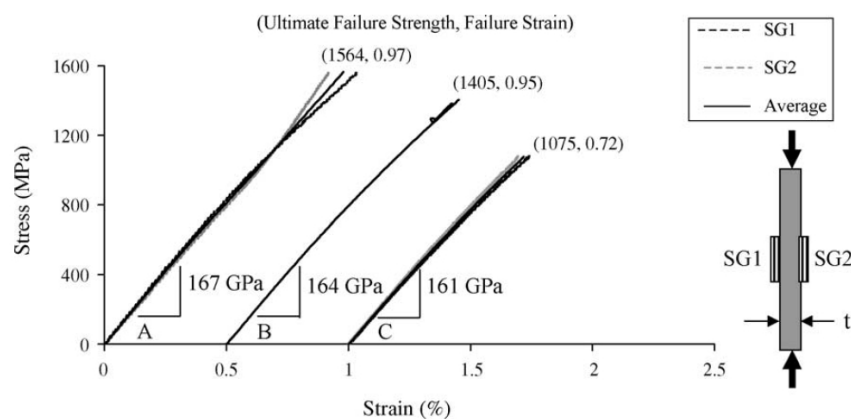
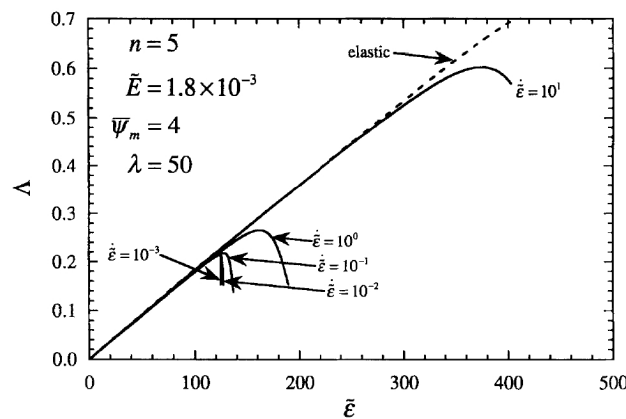


FIGURE 1.12: Courbes contrainte-déformation d'un T800/924C pour une épaisseur d'échantillon de 2, 4 et 8 mm [Lee et Soutis, 2005]

Enfin, on pourra signaler que l'étude dynamique du *kinking* a été abordée par divers auteurs [Slaughter *et al.*, 1996, Yuan *et al.*, 2001]. Notamment, une extension complète de la *kinking theory* a été proposée par Fan et Slaughter [Fan et Slaughter, 1997]. Une des principales conclusions de ces analyses est qu'un taux de chargement élevé (au-delà d'environ  $1 \text{ s}^{-1}$ ) augmente significativement la contrainte à rupture, traduisant là un effet d'inertie. En deçà de telles valeurs, les prévisions quasi-statiques se révèlent suffisantes (voir Figure 1.13). À l'inverse, Vinet et Gamby se sont intéressés à l'apparition de *kink-bands* sur de grandes échelles de temps, sous l'effet d'un fluage en compression [Vinet et Gamby, 2008]. Ils ont proposé une extension de cette théorie enrichie des équations de fluage.



**FIGURE 1.13:** Influence du taux de chargement sur la réponse,  $\Lambda$  étant la contrainte normée par  $G_{12}$  et  $\tilde{\epsilon}$  étant le raccourcissement (à  $10^{-4}$ ) [Fan et Slaughter, 1997]

Au cours des années 90, plusieurs auteurs ont proposé un bilan des modèles précédemment développés pour la prédiction des contraintes à rupture dans les stratifiés [Schultheisz et Waas, 1996, Naik et Kumar, 1999]. Le consensus général est que les modèles de Budiansky et Fleck et de Xu et Reifsnider [Xu et Reifsnider, 1993] produisent des résultats en relatif accord avec un vaste spectre d'expériences. La *kinking theory* peut donc être considérée comme une référence solide, même si certaines limites, qui seront rediscutées plus loin, ont pu être mises en évidence depuis son introduction.

### 3 Les micromodèles bi- ou tri-dimensionnels

Cette catégorie regroupe tous les modèles qui s'affranchissent de l'hypothèse de base de la plupart des modèles de flambage unidirectionnels : la microstructure n'est plus considérée comme parfaitement périodique, mais peut varier dans un espace de dimension 2 ou 3. Ces micromodèles offrent ainsi une description plus fine de la microstructure et laissent toujours le choix de la complexité des comportements matériau considérés. Toutefois, la question de la représentativité de cette microstructure plus fine n'est pas triviale.

De nombreux auteurs ayant étudié le comportement en compression jusqu'à rupture des composites carbone-époxy ont observé au cours de leurs essais que la *kink-band* s'initie systématiquement sur un bord libre de l'échantillon, et même plus généralement aux talons de l'éprouvette [Hahn et Williams, 1986, Jumahat *et al.*, 2010]. Cette observation sera reprise par Waas, qui va dériver du modèle unidirectionnel d'Argon un modèle bidimensionnel semi-infini capable de prendre en compte les effets de bord et la répartition non-uniforme de défauts [Waas *et al.*, 1990]. Ce modèle bidimensionnel, entièrement élastique et illustré Figure 1.14, a permis de souligner l'importance conjuguée des effets de bord et des défauts. Notons que, plus tard, Budiansky proposera une extension de la *kinking theory* au cas d'un bord libre, afin de répondre à cette limitation [Budiansky *et al.*, 1998]. En revanche, contrairement au modèle de Waas, la *kinking theory* demeure dans l'incapacité de simuler une répartition non-uniforme de défauts. Le modèle de Waas a été étendu par [Kyriakides *et al.*, 1995] au cas des matrices inélastiques (comportement plastique isotrope J2) soumises à de grandes déformations, pour caractériser le comportement d'un AS4/PEEK. Les auteurs ont également effectué une étude de sensibilité aux différents paramètres, tout en analysant l'influence de la localisation et de la distribution des défauts. Leur principale conclusion est qu'une répartition et une orientation de défauts aléatoires impliquent une contrainte à rupture du matériau significativement supérieure (environ 30%) au cas où le défaut serait uniforme (hypothèse considérée dans la *kinking theory*). Ces résultats ont été retrouvés par Fleck, avec une modélisation différente, afin de tracer des cartes de probabilités de rupture [Liu *et al.*, 2004]. Le modèle a par la suite été enrichi d'une étude des effets du cisaillement [Vogler et Kyriakides, 2001b].

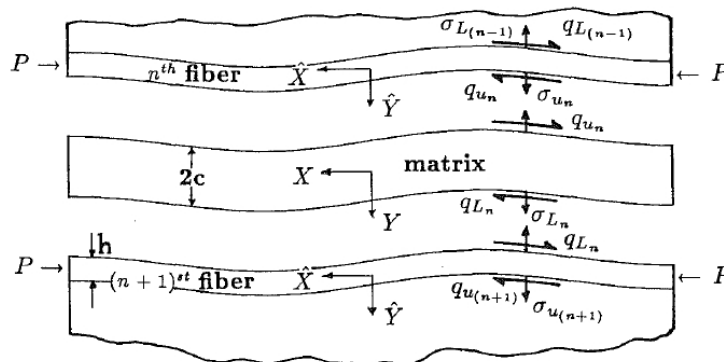
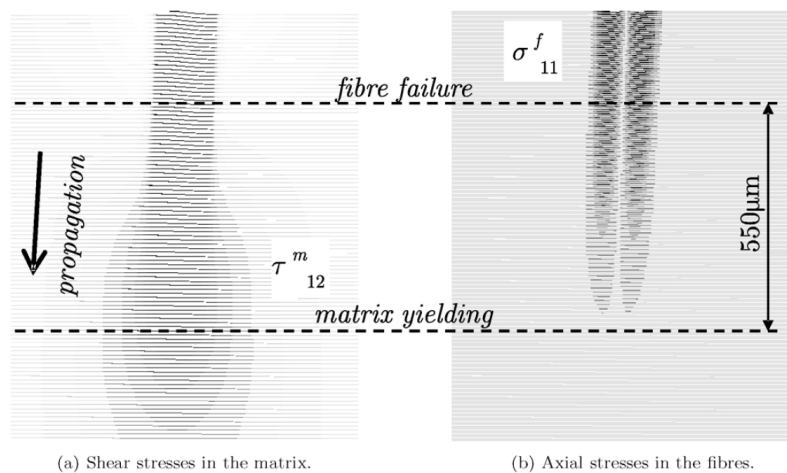


FIGURE 1.14: Portion du matériau entre les fibres  $n$  et  $n + 1$  en configuration déformée [Waas *et al.*, 1990]

Un modèle très similaire à celui de Waas a été développé par Nestorović et Triantafyllidis afin d'étudier l'influence de chargements multi-axiaux, des propriétés matériaux et du taux de fibres sur l'instabilité d'un composite carbone-époxy [Nestorović et Triantafyllidis, 2004]. Leurs conclusions sont en accord avec celles de Kyriakides, en particulier sur la forte diminution de la contrainte à rupture en compression dès qu'un cisaillement macroscopique est appliqué au problème. Les résultats sont par ailleurs

indépendants en termes de contraintes, mais légèrement dépendants en termes de déformation à rupture, du trajet de chargement. Les auteurs ont testé des chargements proportionnels et séquentiels.

Les performances des calculateurs s'étant améliorées, plusieurs études représentant explicitement la microstructure ont été proposées ces dernières années [Bai et Phoenix, 2005]. Avec ces modèles très riches exploitant la Méthode de Éléments Finis, parfois en 3D [Karami et Garnich, 2005, Lapusta *et al.*, 2008], il est nécessaire de mailler finement et séparément les divers constituants à l'échelle microscopique : la matrice, les fibres et parfois même vides et autres inclusions. En résultent des modèles coûteux, dont la représentativité de la microstructure réelle est discutable. Néanmoins, ces modèles sont capables de prévoir localement les origines et conséquences de la formation d'une *kink-band*, dont la géométrie peut être précisément reproduite. L'équipe de Pinho a notamment pu simuler la réponse d'un échantillon de taille finie, dont une extrémité est affaiblie par la présence d'un défaut d'ondulation [Pimenta *et al.*, 2009]. Il est alors possible d'accéder à des cartes de contraintes sur tout le volume de l'échantillon calculé (voir Figure 1.15), qui permettent de confirmer que la perte de raideur de la matrice en cisaillement est responsable de la formation de la *kink-band* et prend effet *avant* la rupture des fibres. Ils ont également montré que l'hypothèse de périodicité, considérée dans les modèles unidirectionnels, est suffisamment proche du comportement d'un échantillon volumique pour permettre de simuler la réponse de l'échantillon [Gutkin *et al.*, 2010a]. En termes de prédiction de la contrainte à rupture, ces approches ne se sont pourtant pas montrées plus efficaces que les modèles basés sur un flambage unidirectionnel. Sans critère supplémentaire, les mêmes surestimations sont observées en termes de contrainte à rupture.



**FIGURE 1.15:** Propagation des contraintes à travers l'échantillon précédant l'apparition d'une *kink-band* [Pimenta *et al.*, 2009]

## 4 Les critères de rupture

En raison de leurs modes de dégradation nombreux et complexes, les stratifiés sont idéalement représentés à l'aide de modèles mécaniques intégrant de l'endommagement voire de l'inélasticité continue. Cependant, l'intégration de lois de comportement non-linéaires vient significativement augmenter les coûts de calcul. Aussi, dans une optique de dimensionnement, le comportement des stratifiés est souvent considéré comme homogène élastique à l'échelle de la structure (méso voire macro) jusqu'à ce qu'un critère soit atteint. Le matériau est alors simplement considéré comme rompu, bien que la rupture en question puisse être de nature complètement différente selon le mécanisme de dégradation physique à son origine. Toute la difficulté est de définir ce critère en introduisant aussi peu de paramètres que possible, tout en prédisant avec pertinence l'enveloppe de rupture. En effet, chaque paramètre du modèle va généralement requérir un essai dédié pour être identifié, puisqu'il est relatif à la rupture de l'échantillon. Parmi les caractéristiques importantes qui définissent un bon critère, on peut noter :

- une bonne reproduction de l'enveloppe de rupture ;
- une prédiction conservatrice (ce qui n'est pas le cas des critères directement basés sur la *kinking theory* pour des valeurs de défauts réalistes) ;
- un nombre minimal de paramètres à identifier.

Un critère orthotrope très usité est le critère de Hill [Hill, 1965]. Il conserve les trois plans de symétrie du matériau dans le repère (1,2,3) et s'écrit :

$$F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{31}^2 \leq 1 \quad (1.7)$$

où F, G, H, L, M et N sont six paramètres à identifier par des essais de traction et de cisaillement. On remarquera que ce critère ne prend pas en compte l'effet de Bauschinger, qui autorise des seuils différents en traction/compression [Bauschinger, 1881]. Or, cet effet est particulièrement présent dans les composites, notamment dans le sens des fibres. C'est pourquoi on lui préfère généralement le multi-critère de Tsai-Wu [Tsai et Wu, 1971], qui permet de représenter cet effet et s'écrit :

$$F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{31}^2 + P\sigma_{11} + Q\sigma_{22} - (P + Q)\sigma_{33} \leq 1 \quad (1.8)$$

Ce critère possède à présent huit paramètres, qui doivent être identifiés sur des essais de traction, de cisaillement et de compression.

Le critère de Hashin adopte une approche différente, en définissant non pas *un* critère multi-axial, mais *plusieurs*, un par mode de rupture [Hashin, 1980]. C'est en quelque sorte un multi-critère, basé sur des considérations phénoménologiques et micromécaniques, qui considère quatre modes de rupture en tout :

- Rupture matricielle en traction (pour  $\sigma_{22} + \sigma_{33} > 0$ ) :

$$\frac{1}{T_{22}^2}(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_{23}^2}(\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_{12}^2}(\sigma_{12} + \sigma_{31})^2 \leq 1 \quad (1.9)$$

- Rupture matricielle en compression (pour  $\sigma_{22} + \sigma_{33} < 0$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{22}} \left[ \left( \frac{C_{22}}{2S_{23}} \right)^2 - 1 \right] (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{4S_{23}^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \\ + \frac{1}{S_{23}^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_{12}^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{31}^2) \leq 1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

- Rupture des fibres en traction (pour  $\sigma_{11} > 0$ ) :

$$\left( \frac{\sigma_{11}}{T_1} \right)^2 + \frac{1}{S_{12}^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{31}^2) \leq 1 \quad (1.11)$$

- Rupture des fibres en compression (pour  $\sigma_{11} < 0$ ) :

$$\left( \frac{\sigma_{11}}{C_{11}} \right)^2 \leq 1 \quad (1.12)$$

Le principal attrait de ce multi-critère par rapport aux précédents est qu'il est capable de discriminer différents modes. Il permet ainsi de prédire plus précisément chaque scénario de rupture, avec potentiellement une énergie dissipée différente. De plus, il n'introduit que six paramètres, dont l'identification commence toutefois à devenir non triviale. On pourra aussi critiquer la partie "rupture des fibres en compression", qui ne présente aucun couplage multi-axial [Christensen, 1997].

Au cours des années 90, l'organisation du *World Wide Failure Exercise* par Hinton, Soden et Kaddour, a suscité un regain d'intérêt de la communauté pour la prédiction de la rupture des composites stratifiés et donc, par extension, de la rupture en compression dans le sens des fibres [Hinton et Soden, 1998, Soden *et al.*, 1998b, Soden *et al.*, 1998a]. Les contributions à la Partie A de l'exercice de la plupart des participants peuvent être consultées dans les références suivantes : [Pück et Schürmann, 1998, Gotsis *et al.*, 1998, Hart-Smith, 1998b, Hart-Smith, 1998a, McCartney, 1998, Rotem, 1998, Sun et Tao, 1998, Wolfe et Butalia, 1998, Zinoviev *et al.*, 1998, Edge, 1998]. Plus ou moins complexes, les modèles proposés devaient d'une part reproduire des courbes de comportement sans décharge jusqu'à rupture, et d'autre part prédire une enveloppe de rupture conservative dans différents plans de contrainte. Pour la définition de cette enveloppe, la plupart de ces modèles reposent sur un multi-critère similaire à celui de Tsai-Wu. Aucun de ces critères ne prend en compte la possible dispersion des résultats (l'exercice ne le demandant pas). Par ailleurs, la prévision de l'énergie dissipée à rupture ne faisait pas non plus partie de l'exercice. Les résultats finaux détaillent les critères de sélection des auteurs [Hinton *et al.*, 2004b, Hinton *et al.*, 2004c, Soden *et al.*, 2004], lesquels accordent un large crédit au multi-critère de Pück et Schürmann. En compression dans le sens des fibres, la composante "Rupture Fibre" (FF) de ce critère s'écrit :

$$\frac{1}{\varepsilon_{1C}} \left| \varepsilon_{11} + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right| + (10\gamma_{12})^2 \leq 1 \quad (1.13)$$

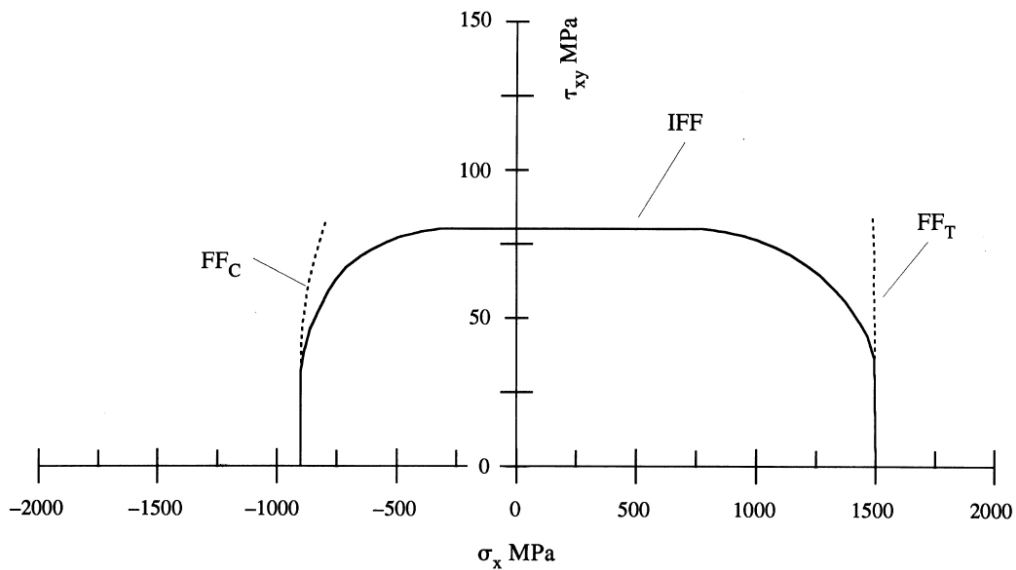
où  $\varepsilon_{1C}$  est la déformation de compression axiale à rupture, à identifier, et  $m_{\sigma f}$  un “facteur d’amplification moyenne” des contraintes transverses dans la fibre (avec  $m_{\sigma f} \approx 1.1$  pour des fibres de carbone). Lorsque le cisaillement devient trop important, comme indiqué par la Figure 1.16, c’est la composante “Rupture Inter-Fibres” (IFF) du critère qui s’active et qui s’écrit :

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{12}}{G_{12}}\right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{Y_T}{G_{12}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_{22}}{G_{12}} + \left|\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}}\right| \leq 1 \quad (1.14)$$

avec  $Y_T$  la contrainte à rupture en traction transverse,  $\sigma_{11D}$  la valeur de la contrainte de compression affectée par l’endommagement et :

$$p_{\perp\parallel}^{(+)} = -\left(\frac{d\sigma_{12}}{d\sigma_{22}}\right)_{\sigma_{22}=0} \quad (1.15)$$

Ce même critère, ainsi que celui des autres participants au World Wide Failure Exercise, a par la suite été amélioré dans la Partie B de l’exercice et appliqué notamment au cas des composites verre E/LY556 [Pück et Schürmann, 2002, Pück et Mannigel, 2007].



**FIGURE 1.16:** Critère de Pück et Schürmann dans un plan compression/cisaillement pour un T300/914 [Pück et Schürmann, 1998]

La NASA a également produit un rapport dans lequel un certain nombre de critères et de modèles de prévision de la rupture sont comparés avec un nouveau modèle/critère, appelé LaRC05 [Pinho *et al.*, 2005]. La rupture par *kinking* est essentiellement traitée comme une compétition entre deux critères, l’un en instabilité structurelle et l’autre en rupture matricielle. Le LaRC05 présente, selon les auteurs, des résultats cohérents avec les observations expérimentales issues du *World Wide Failure Exercise* et a par la suite été implanté numériquement et utilisé dans plusieurs cas



d'étude [Pinho *et al.*, 2006a, Pinho *et al.*, 2006b, Pinho *et al.*, 2006c]. Toutefois, sa validité en compression sans cisaillement a été remise en cause dans [Gutkin *et al.*, 2010a]. Un critère supplémentaire de rupture des fibres en compression, basé sur les hypothèses d'Ewins et Ham, est ajouté au modèle existant afin d'améliorer les prédictions en compression quasi-pure (voir Figure 1.17) :

$$\sigma^C = 2 \left( \eta_f \tau_f^C + (1 - \eta_f) \tau_m^C \right) \quad (1.16)$$

où  $\tau_f^C$  et  $\tau_m^C$  sont les contraintes à rupture en cisaillement des fibres et de la matrice, respectivement, et  $\eta_f$  le taux de fibres.

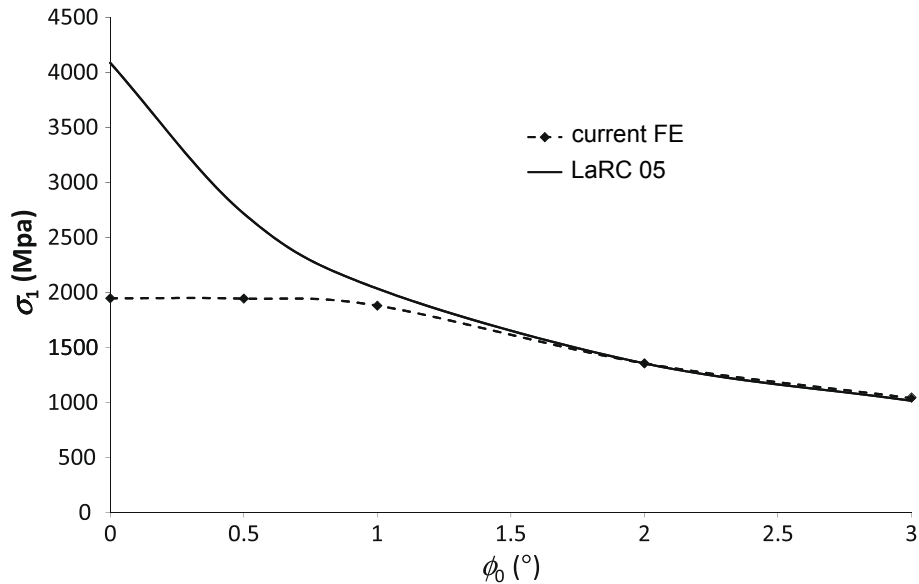


FIGURE 1.17: Contrainte à rupture en fonction du défaut d'alignement des fibres pour deux critères différents [Gutkin *et al.*, 2010a]

Ces types de critères ont été adoptés par d'autres auteurs [Hahn et Williams, 1986, Guynn *et al.*, 1992, Effendi *et al.*, 1995, Laurin *et al.*, 2007, Trovalet *et al.*, 2009]. Leurs principaux défauts sont qu'ils ne présentent pas toujours un lien direct avec la physique des dégradations ou de la rupture, qu'ils nécessitent de nombreux essais souvent délicats pour être identifiés, qu'ils ne prennent pas en compte la variabilité de la réponse dans certaines directions, qu'ils ne prédisent pas l'état de dégradation du matériau au delà de l'état sain/rompu et enfin qu'ils ne prédisent pas, sauf ajout supplémentaire, l'énergie dissipée par chaque mode de rupture. Il demeure que leur implantation aisée dans un code de calcul et leurs performances en termes de temps d'exécution peuvent justifier leur emploi dans une démarche de pré-conception, non sans une certaine prudence vis-à-vis des résultats.

## 5 Conclusion sur la prédiction du plissement

Pour prédire la rupture par *kinking* des plis unidirectionnels de composites stratifiés, on retiendra ainsi trois grandes classes de méthodes, qui peuvent parfois se recouper :

- Les *micromodèles de flambage unidirectionnels*, reposant sur une représentation simple de la microstructure, ont l'avantage d'être relativement peu coûteux. Ils présentent de nombreuses simplifications géométriques et sont régis par peu de paramètres, mais peuvent intégrer toutes sortes de comportements matériau. Ils sont capables de prédire intégralement l'état de la microstructure, mais uniquement dans un cadre unidirectionnel. Entre autres choses, ils sont donc incapables de prévoir la propagation et l'inclinaison d'une *kink-band*. Par ailleurs, pour des ordres de grandeur de défauts raisonnables, les contraintes à rupture que prédisent ces modèles surestiment systématiquement l'expérience.
- Les *micromodèles bi- ou tri-dimensionnels*, qu'ils soient basés sur une étude de flambage ou un calcul intégralement en grandes déformations, ont l'avantage de représenter finement la géométrie étudiée. Ceci leur permet d'obtenir toutes les informations fournies par les modèles unidirectionnels, mais dans un volume 2D ou 3D. Ils sont ainsi beaucoup plus prédictifs en termes de géométrie finale de la *kink-band*. En revanche, leur finesse peut engendrer des coûts de calcul prohibitifs et la représentativité de cette microstructure enrichie est discutable. De plus, les contraintes à rupture prédites par ces modèles surestiment également les observations expérimentales.
- Les *critères*, répondant aux besoins de dimensionnement de l'industrie, sont plutôt simples d'utilisation. Ils peuvent par exemple être introduits assez simplement dans un mésomodèle. Cependant, ils sont particulièrement délicats à identifier et parfois à relier à l'origine physique des dégradations. De même, l'état et le comportement après rupture de la structure restent hors de portée. Enfin, ils sont dans l'incapacité de prédire aisément une statistique de réponse ou une énergie dissipée au cours du processus de rupture.

C'est la raison pour laquelle les études micromécaniques de cette thèse se basent sur le modèle de flambage unidirectionnel de Budiansky et Fleck, assorti des données statistiques d'ondulation mesurées par Paluch, tel qu'il a été implanté par Allix et Guimard [Budiansky et Fleck, 1993, Paluch, 1994, Guimard *et al.*, 2007]. Les caractéristiques géométriques de la *kink-band* n'ayant que peu d'intérêt dans le cadre du dimensionnement d'absorbeurs de chocs stratifiés, son manque de précision dans ce domaine n'est pas rédhibitoire. Par ailleurs, son principal défaut, à savoir la mauvaise corrélation essai-calcul dans la prévision de la contrainte à rupture, peut être imputée à la non prise en compte de la dégradation de la matrice, pourtant observée sur des échantillons *post-mortem* [Narayanan et Schadler, 1999, Jumahat *et al.*, 2010].

Quelles que soient leurs performances et leur pertinence, rappelons qu'il s'agit là d'études *micromécaniques*. Or, l'objectif final est de dimensionner des absorbeurs de chocs composites complets, pour lesquels une modélisation à l'échelle du pli semble

appropriée, comme on l'évoquera plus loin. Afin de pouvoir intégrer ces résultats dans un modèle méso ou macro, il faut donc choisir une méthode permettant de réaliser un pont entre les échelles. D'autres pistes pourraient être envisagées, mais dans un esprit de cohérence avec le pont micro-méso pour la fissuration transverse établi par Ladevèze et Lubineau [[Ladevèze et Lubineau, 2003](#)], on a recours à une méthode d'homogénéisation non-linéaire.

## Chapitre 2

# Homogénéisation du comportement non-linéaire des matériaux hétérogènes

*Ce second chapitre traite des méthodes d'homogénéisation du comportement non-linéaire des matériaux hétérogènes. Dans le cadre des composites stratifiés, la théorie d'homogénéisation des matériaux périodiques offre des prédictions particulièrement précises en élasticité linéaire. Deux grandes familles pouvant utiliser les extensions de cette théorie au cadre non-linéaire sont discutées plus particulièrement : les méthodes dites d'homogénéisation numériques, basées sur la résolution incrémentale et communicante d'un problème micro et d'un problème macro, et les méthodes d'identification d'un comportement constitutif à partir de simulations à l'échelle microscopique, qui permettent d'extraire les lois d'un modèle dont les variables sont définies a priori.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Motivation et principes fondamentaux</b>	<b>36</b>
<b>2</b>	<b>Homogénéisation en élasticité linéaire</b>	<b>38</b>
<b>3</b>	<b>Théorie de l'homogénéisation linéaire des matériaux périodiques</b>	<b>39</b>
<b>4</b>	<b>Homogénéisation de matériaux non-linéaires</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>Méthodes d'homogénéisation numérique</b>	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>Méthodes d'identification d'un modèle de comportement</b>	<b>44</b>
<b>7</b>	<b>Conclusions sur l'homogénéisation</b>	<b>49</b>

---

## 1 Motivation et principes fondamentaux

Dans le cadre de la mécanique des solides, l'homogénéisation consiste à approximer le comportement du milieu hétérogène par celui d'un milieu homogène équivalent. En pratique, cela revient à déterminer un comportement *effectif*, à une échelle supérieure à celle de la dimension caractéristique des hétérogénéités, comme la taille du grain dans les métaux ou le diamètre des fibres dans les composites stratifiés. D'un point de vue mathématique, le problème consiste à déterminer la valeur d'un ou plusieurs opérateurs ou fonctionnelles (e.g. de rigidité) lorsque ce paramètre peut être considéré "petit" devant le reste du problème. Autrement dit, cela revient à déterminer leur valeur limite lorsque le paramètre en question tend vers zéro.

Considérons une structure  $\mathcal{S}$  de dimension  $L$ , dont la microstructure peut être décrite par un Volume Élémentaire Représentatif (VER)  $\Omega$  de dimension  $D$  présentant des hétérogénéités de dimension  $\delta$  (voir Figure 2.1). On la soumet aux chargements quasi-statiques suivants :

- des forces volumique  $\underline{f}_d$  sur tout son volume  $\mathcal{S}$  ;
- un effort imposé  $\underline{F}_d$  sur une partie de sa frontière  $\partial_F \mathcal{S}$  ;
- des déplacements imposés  $\underline{U}_d$  sur son complémentaire  $\partial_U \mathcal{S}$ .

On négligera les forces d'inertie et on se placera dans le cadre des petites perturbations. Soit  $\underline{M}$  les coordonnées d'un point matériel de  $\mathcal{S}$ , on cherche le couple déplacements/contraintes  $(\underline{u}, \underline{\sigma})$  qui vérifie :

$$\underline{u} = \underline{U}_d \quad \forall \underline{M} \in \partial_U \mathcal{S} \quad (2.1)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d \quad \forall \underline{M} \in \partial_F \mathcal{S} \quad (2.2)$$

$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_d = \underline{0} \quad \forall \underline{M} \in \mathcal{S} \quad (2.3)$$

$$\underline{\sigma} = \mathbf{H}(\underline{M}) : \underline{\varepsilon}^e(\underline{u}) \quad \forall \underline{M} \in \mathcal{S} \quad (2.4)$$

où  $\underline{n}$  est la normale unitaire sortante de  $\mathcal{S}$ . La résolution de ce problème par la Méthode des Éléments Finis en maillant directement les microconstituants devient prohibitive dès lors que  $\delta \ll L$ . Pour pallier cette limite, il est possible de recourir à une théorie de l'homogénéisation, laquelle repose sur deux grands principes.

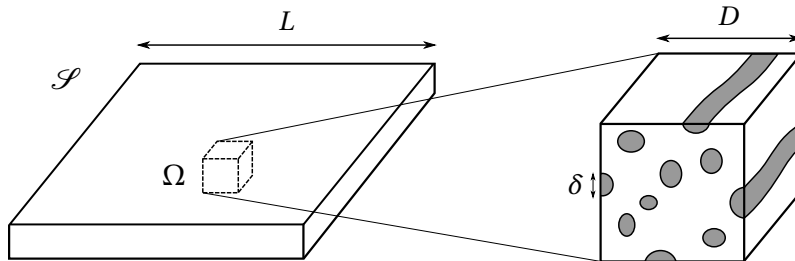


FIGURE 2.1: Extraction d'un Volume Élémentaire Représentatif  $\Omega$  d'une structure  $\mathcal{S}$

## Hypothèse de séparation des échelles

L'hypothèse fondamentale derrière toute théorie de l'homogénéisation est la séparation des échelles :

$$\delta \ll D \ll L \quad (2.5)$$

Cette hypothèse suppose donc qu'il existe une échelle intermédiaire entre celle des hétérogénéités et la dimension caractéristique de la structure. Cette double inégalité a deux implications :

1. La partie droite suppose que l'on peut dissocier les variables dites *lentes* ou à grande longueur d'onde des variables *rapides* ou à faible longueur d'onde.
2. La partie gauche permet de considérer le volume élémentaire comme *représentatif* de la microstructure.

On peut se donner une idée de la représentativité d'un VER en faisant varier légèrement sa taille et/ou la distribution de ses hétérogénéités. Si les opérateurs homogénéisés varient peu ou pas, il est représentatif. Dans certains cas toutefois, l'homogénéisation peut donner de très bons résultats alors même que  $\delta \equiv D$ .

En revanche lorsque  $D \equiv L$  l'hypothèse de séparation des échelles est invalidée. C'est notamment le cas près des bords, où les contraintes subissent d'importants gradients et varient rapidement à l'échelle de la microstructure. En élasticité linéaire, il est possible de calculer des termes correctifs (en particulier des contraintes de couche limite) que l'on peut superposer à une solution homogénéisée pour retrouver une solution de qualité sur l'ensemble de la structure étudiée [Dumontet, 1986, Devries *et al.*, 1989, Ladevèze, 2002]. En non-linéaire, il devient nécessaire de modéliser la microstructure exacte et de calculer directement sa réponse. Dans le cadre des composites, une application particulièrement importante est celle du délaminage [Daudeville et Ladevèze, 1993, Corigliano et Allix, 2000, Allix *et al.*, 2006].

## Lemme de Hill-Mandel

Soit  $\bar{\underline{A}}$  la moyenne volumique sur le VER d'un tenseur  $\underline{A}$  quelconque :

$$\bar{\underline{A}} = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} \underline{A} d\Omega \quad (2.6)$$

On peut notamment définir  $\bar{\underline{\sigma}}$  le champ de contraintes et  $\bar{\underline{\varepsilon}}$  le champ de déformation moyens. On a alors la relation [Hill, 1952] :

$$\bar{\underline{\sigma}} : \bar{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \bar{\underline{\sigma}} : \dot{\bar{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Gamma} \left( \underline{\dot{u}} - \underline{\nabla}(\underline{\dot{u}}) \cdot \underline{M} \right) \cdot ((\underline{\sigma} - \bar{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{n}) d\Gamma \quad (2.7)$$

avec  $\Gamma = \partial\Omega$  la frontière du VER et  $\underline{n}$  la normale sortante.

Si l'on impose une équivalence énergétique entre le comportement hétérogène et le comportement homogénéisé, l'annulation du terme de droite est impérative. C'est le lemme de Hill-Mandel. On peut d'ailleurs démontrer que le terme de droite s'annule dans le cas des hypothèses de Voigt, Reuss, Hill et de périodicité (voir plus loin et [Nemat-Nasser et Hori, 1993]).

## 2 Homogénéisation en élasticité linéaire

En général, l'objectif des méthodes d'homogénéisation est de déterminer (au moins) le tenseur de Hooke homogénéisé  $\mathbf{H}^*$  qui permet de relier  $\bar{\underline{\sigma}}$  à  $\bar{\underline{\varepsilon}}$ . Pour ce faire, il faut résoudre un problème aux limites sur le VER, impliquant  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\varepsilon}$ . Ce qui soulève déjà une question : quelles conditions limites imposer sur  $\Omega$ ? C'est le choix de ces conditions, c'est-à-dire des *opérateurs d'homogénéisation et de relocalisation*, qui différencient la plupart des méthodes d'homogénéisation.

Lorsque le matériau ne présente pas de propriété particulière (périodicité, etc.) et en l'absence de forces de volume, deux types de conditions limites "naturelles" ont été proposés par Hill [Hill, 1952]. Elles sont appelées hypothèses d'homogénéisation cinématique et statique, et consistent à imposer respectivement, sur les bords du VER :

$$\underline{u}(\underline{M} \in \Gamma) = \underline{\varepsilon}^0 \cdot \underline{M} \quad \text{ou} \quad \underline{\sigma}(\underline{M} \in \Gamma) \cdot \underline{n} = \underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n} \quad (2.8)$$

où  $\underline{\varepsilon}^0$  et  $\underline{\sigma}^0$  sont des opérateurs constants. On peut vérifier que ces conditions respectent le lemme de Hill (Équation 2.7) et qu'elles impliquent  $\bar{\underline{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}^0$  et  $\bar{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma}^0$ , si les fluctuations des champs aux bords restent faibles (i.e. si  $\delta \ll D$ ) [Zohdi et Wriggers, 2008]. Pour résoudre le problème aux limites sur le VER, il faut connaître ou se donner une représentation de la microstructure. À partir de six chargements élémentaires (trois en dimension 2), on peut alors déterminer successivement toutes les composantes de  $\mathbf{H}^*$ . Par superposition, on en déduit la réponse à tout type de chargement, tant que la microstructure reste en régime élastique linéaire.

### Bornes et encadrement

Si l'on n'a aucune idée de la microstructure ou s'il est impossible de la modéliser, on peut simplifier le problème en faisant porter les hypothèses de Hill sur l'intégralité du VER au lieu de ses bords (i.e.  $\forall \underline{M} \in \Omega$  au lieu de  $\forall \underline{M} \in \Gamma$ ). On retrouve alors les premières approximations historiquement proposées par Voigt [Voigt, 1889] et Reuss [Reuss, 1929], qui consistent à considérer respectivement la déformation ou la contrainte constante sur le VER. Dans ce cas, le problème peut être résolu sans plus de calcul et on trouve, respectivement :

$$\mathbf{H}^* = \bar{\mathbf{H}} \text{ (Voigt)} \quad \mathbf{H}^* = \left( \overline{\mathbf{H}^{-1}} \right)^{-1} \text{ (Reuss)} \quad (2.9)$$

Ces hypothèses supplémentaires donnent lieu à une approximation généralement médiocre du comportement moyen, mais elles permettent de définir des *bornes*, qui sont un encadrement strict des propriétés du milieu [Hill, 1963]. Surtout, elles ne nécessitent que très peu d'informations sur la microstructure (les modules des différentes phases et leur fraction volumique). Toutefois, Hashin et Shtrikman ont développé un principe variationnel pour offrir un meilleur encadrement des propriétés élastiques d'un VER quelconque [Hashin et Shtrikman, 1963]. Basées sur le filtrage des champs mécaniques entre les échelles, ces bornes constituent le meilleur encadrement possible en l'absence d'informations topologiques plus précises.

## Microstructures particulières

Dans de nombreux cas toutefois, on dispose d'une certaine connaissance de la microstructure. En particulier, la microstructure de nombreux matériaux peut être vue comme *parfaitement désordonnée* ou *quasi-périodique*. Dans chacun de ces cas, il existe des approximations très précises du comportement moyen.

Pour les matériaux parfaitement désordonnés, on a recours aux *schémas auto-cohérents*. Ils consistent à noyer le VER dans un vaste milieu homogénéisé soumis à des chargements élémentaires [Kröner, 1958, Budiansky, 1965, Hill, 1965]. Les propriétés du milieu homogène sont égales les propriétés moyennes du VER et doivent donc être déterminées par le schéma lui-même, de manière itérative. Ces approches se basent pour beaucoup sur la solution analytique du problème d'inclusion d'Eshelby [Eshelby, 1957] et ses extensions mais ne considèrent pas les hétérogénéités suffisamment diluées pour que leurs interactions soient négligées. Toutefois, elles ne respectent pas toujours les bornes de Voigt-Reuss-Hill lorsque les interactions deviennent trop importantes [Hori et Nemat-Nasser, 1999].

Pour les matériaux périodiques, les *méthodes asymptotiques* sont privilégiées. En effet, elles sont basées sur des propriétés mathématiques solides qui tirent parti de la périodicité de la microstructure [Sanchez-Palencia, 1974, Bensoussan et al., 1978]. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, elles offrent une excellente approximation du comportement. Par ailleurs, lorsque la condition  $\delta \ll D$  est respectée, de nombreuses microstructures apparemment non périodiques peuvent être considérées comme telles et conduisent ainsi à une bonne approximation [Kouznetsova et al., 2004b]. La microstructure des plis composites pouvant en première approximation être considérée comme quasi-périodique, cette méthode est présentée plus en détails ci-dessous.

## 3 Théorie de l'homogénéisation linéaire des matériaux périodiques

On suppose désormais que la microstructure peut être représentée par la répétition  $D$ -périodique du VER  $\Omega$  (dont  $D$  est la *période*). On note également la position de tout point matériel  $\underline{M} = \underline{x} + \underline{y}$  où  $\underline{x}$  est la position lente (i.e. au sein de la structure) et  $\underline{y}$  la position rapide (i.e. au sein du VER). On définit alors le *facteur d'homothétie* du VER :  $\epsilon \equiv D/L \equiv \underline{y}/\underline{x}$  (à ne pas confondre avec le tenseur des petites déformations  $\underline{\epsilon}$ ).

L'hypothèse de séparation d'échelles (Equation 2.5) implique  $\epsilon \ll 1$ . On cherche alors la solution du problème sous la forme d'un développement asymptotique de  $\epsilon$  :

$$\underline{u}(\underline{M}) = \underline{u}_0(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon \underline{u}_1(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon^2 \underline{u}_2(\underline{x}, \underline{y}) + o(\epsilon^2 \underline{u}_0) \quad (2.10)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{M}) = \frac{1}{\epsilon} \underline{\sigma}_0(\underline{x}, \underline{y}) + \underline{\sigma}_1(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon \underline{\sigma}_2(\underline{x}, \underline{y}) + o(\epsilon \underline{\sigma}_0) \quad (2.11)$$

en supposant que  $\underline{u}$  et  $\underline{\sigma}$  sont  $D$ -périodiques par rapport à  $\underline{y}$ , la variable rapide qualifiant la position dans le VER. Si l'on note  $\underline{\epsilon}_y$  et  $\underline{\epsilon}_x$  les parties symétriques du gradient



des déplacements par rapport à  $\underline{z} = \underline{y}/\epsilon = O(\underline{x})$  et  $\underline{x}$  respectivement, le tenseur des petites déformations peut s'écrire à son tour :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{\epsilon} \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_0) + (\underline{\varepsilon}_x(\underline{u}_0) + \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_1)) + \epsilon (\underline{\varepsilon}_x(\underline{u}_1) + \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_2)) + o(\epsilon \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_0)) \quad (2.12)$$

On peut alors substituer cette expression dans l'équation d'équilibre du problème (Équation 2.3), en notant  $\underline{\text{div}}_y$  et  $\underline{\text{div}}_x$  l'opérateur divergence par rapport à  $\underline{z}$  et  $\underline{x}$  respectivement. En les classant par ordre de  $\epsilon$ , on obtient les équations indépendantes :

$$\epsilon^{-2} \quad \underline{\text{div}}_y(\underline{\sigma}_0) = \underline{0} \quad \underline{\sigma}_0 = \mathbf{H} : \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_0) \quad (2.13)$$

$$\epsilon^{-1} \quad \underline{\text{div}}_y(\underline{\sigma}_1) + \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_0) = \underline{0} \quad \underline{\sigma}_1 = \mathbf{H} : (\underline{\varepsilon}_x(\underline{u}_0) + \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_1)) \quad (2.14)$$

$$\epsilon^0 \quad \underline{\text{div}}_y(\underline{\sigma}_2) + \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_1) + \underline{f}_d = \underline{0} \quad \underline{\sigma}_2 = \mathbf{H} : (\underline{\varepsilon}_x(\underline{u}_1) + \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_2)) \quad (2.15)$$

...

On peut résoudre ces problèmes par ordre croissant des puissances de  $\epsilon$  :

- **Problème 2.13** : Ce problème conduit à la solution triviale  $\underline{\sigma}_0 = \underline{0}$  et  $\underline{u}_0 = \underline{u}_0(\underline{x})$ , qui est un champ à grande longueur d'onde et qu'on peut considérer comme constant à l'intérieur de chaque VER individuel.
- **Problème 2.14** : La solution précédente renseigne  $\underline{\varepsilon}_x(\underline{u}_0) = \underline{\varepsilon}_0$ . Par substitution de la loi de Hooke dans l'équation d'équilibre, ce problème se résume donc à une équation sur  $\underline{u}_1$  qu'on peut mettre sous forme faible. Soient  $\mathcal{K}_D$  l'espace des champs Cinématiquement Admissibles  $D$ -périodiques et  $\mathcal{K}_D^0$  l'espace des champs CA-0  $D$ -périodiques.

On cherche  $\underline{u}_1 \in \mathcal{K}_D$  tel que,  $\forall \underline{u}^* \in \mathcal{K}_D^0$  :

$$\int_{\Omega} \mathbf{H} : \underline{\varepsilon}_0 : \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{H} : \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_1) : \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}^*) d\Omega = 0 \quad (2.16)$$

C'est la solution du problème aux limites sur le VER.

- **Problème 2.15** : Ce problème n'est pas résolu lorsqu'on pratique une homogénéisation du premier ordre. Toutefois, on peut montrer qu'il n'admet une solution que si et seulement si :

$$\int_{\Omega} \left[ \underline{\text{div}}_x(\mathbf{H} : \underline{\varepsilon}_0 + \mathbf{H} : \underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_1)) + \underline{\text{div}}_y(\mathbf{H} : \underline{\varepsilon}_x(\underline{u}_1)) + \underline{f}_d \right] d\Omega = \underline{0} \quad (2.17)$$

Par  $D$ -périodicité de  $\underline{u}_1$  et en notant  $\underline{\varepsilon}_y(\underline{u}_1) = \underline{\varepsilon}_1$ , la condition devient :

$$\underline{\text{div}}_x \int_{\Omega} \left[ \mathbf{H} : (\underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_1) + \underline{f}_d \right] d\Omega = \underline{0} \quad \iff \quad \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}^M) + \underline{f}_d = \underline{0} \quad (2.18)$$

où  $\underline{\sigma}^M$  est la contrainte macroscopique solution du problème aux limites global. On définit, en l'absence de micro-vides, la déformation macroscopique  $\underline{\varepsilon}^M = \overline{\underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_1}$ . On peut alors en déduire une expression de l'opérateur de Hooke homogénéisé  $\mathbf{H}^*$  qui vérifie  $\underline{\sigma}^M = \mathbf{H}^* : \underline{\varepsilon}^M$ .

Après résolution, on dispose ainsi d'un comportement macroscopique homogénéisé mais aussi des champs microscopiques au sein du VER. Pour l'instant, on s'est toutefois borné à l'étude de cas élastiques linéaires.

## 4 Homogénéisation de matériaux non-linéaires

L'homogénéisation de microstructures au comportement non-linéaire a aussi été étudiée par Hill, qui a étendu son propre modèle auto-cohérent par une linéarisation incrémentale de la loi de comportement microscopique [Hill, 1965]. D'autres techniques et applications ont été proposées par la suite, notamment par Hutchinson, qui s'est intéressé aux paramètres de fluage de matériaux monocristallins [Hutchinson, 1976]. Par ailleurs, Ponte Castañeda a utilisé un schéma auto-cohérent pour déterminer des modules tangents effectifs d'un matériau dans le cas général, offrant une bonne estimation de son comportement non-linéaire [Castañeda, 1996]

En termes d'encadrements, Hutchinson a également étendu les bornes de Voigt-Reuss-Hill pour l'étude du fluage. Willis et Talbot ont ensuite appliqué les principes variationnels de Hashin-Shtrikman aux matériaux composites [Talbot et Willis, 1985]. Puis Ponte Castañeda et Suquet ont étendu ces mêmes principes au cas général de l'homogénéisation de matériaux non-linéaires, mais sans obtenir des bornes garanties [Castañeda, 1992, Suquet, 1995]. Ponte-Castañeda a ensuite combiné ces travaux avec la méthode des modules tangents effectifs pour obtenir une homogénéisation "du second ordre" définissant des bornes strictes [Castañeda, 2002, Castañeda, 2002].

Les extensions de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques au premier ordre ont été nombreuses. La communauté française y a fortement contribué, avec par exemple les travaux de Suquet, Léné et Francfort pour la plasticité [Suquet, 1982], l'endommagement [Léné, 1984], la thermo-visco-élasticité [Francfort et Suquet, 1986] et enfin la visco-plasticité [Suquet, 1987]. Des applications au cadre non-linéaire ont par la suite été proposées pour divers cas d'études, comme les milieux non-locaux, les analyses de vibrations, etc. [Fish *et al.*, 1997, van der Sluis *et al.*, 1999, Fish et Chen, 2001]. Les extensions de cette théorie à des cas de microstructures au comportement géométriquement non-linéaire sont plus rares, à l'exception des travaux de Forest sur les milieux de Cosserat [Cosserat *et al.*, 1909, Forest *et al.*, 2000, Forest *et al.*, 2001].

Pour plus d'informations sur l'homogénéisation de microstructures hétérogènes, on peut se référer aux ouvrages de référence de Nemat-Nasser et Hori [Nemat-Nasser et Hori, 1993] et de Zohdi et Wriggers [Zohdi et Wriggers, 2008]. Par souci de synthèse, deux sous-familles de méthodes pouvant tirer parti de l'homogénéisation non-linéaire de matériaux périodiques sont analysées ci-après :

- les méthodes dites d'*homogénéisation numérique*, où l'on cherche à faire communiquer un problème microscopique et un problème mésoscopique à l'aide d'opérateurs d'homogénéisation et de relocalisation ;
- les approches qu'on qualifiera d'*identification d'un modèle de comportement* à partir de la réponse de la microstructure, qui se basent sur un modèle homogénéisé en partie connu.

## 5 Méthodes d'homogénéisation numérique

L'approche la plus naturelle permettant de traiter des problèmes mécaniques à des échelles différentes consiste à faire communiquer les deux échelles grâce à une stratégie numérique adaptée. La mise en œuvre de ces méthodes soulève toutefois de nombreux choix de modélisation et requiert une certaine puissance de calcul, d'où leur apparition relativement récente. Malgré tout, le principe a rapidement été adopté par de nombreuses équipes dès la fin des années 80. Renard et Marmonier ont notamment étudié l'apparition d'endommagement dans la matrice d'un composite [Renard et Marmonier, 1987]. Moulinec et Suquet ont pour leur part utilisé une méthode basée sur les séries de Fourier pour calculer la réponse de la microstructure [Moulinec et Suquet, 1998, Michel *et al.*, 1999].

Peu après, Chaboche et Feyel ont développé la méthode FE2, qui est l'adaptation du même principe au cas général de la Méthode des Éléments Finis avec une homogénéisation périodique au premier ordre [Feyel et Chaboche, 2000, Feyel, 2003]. Le principe général est le suivant. À chaque point d'intégration du problème macroscopique, soumis à un chargement donné, on assigne un VER de la microstructure, qui est résolu par un calcul séparé et généralement parallélisé ; la réponse de cet élément de volume est homogénéisée et renvoyée au problème macroscopique (voir Figure 2.2).

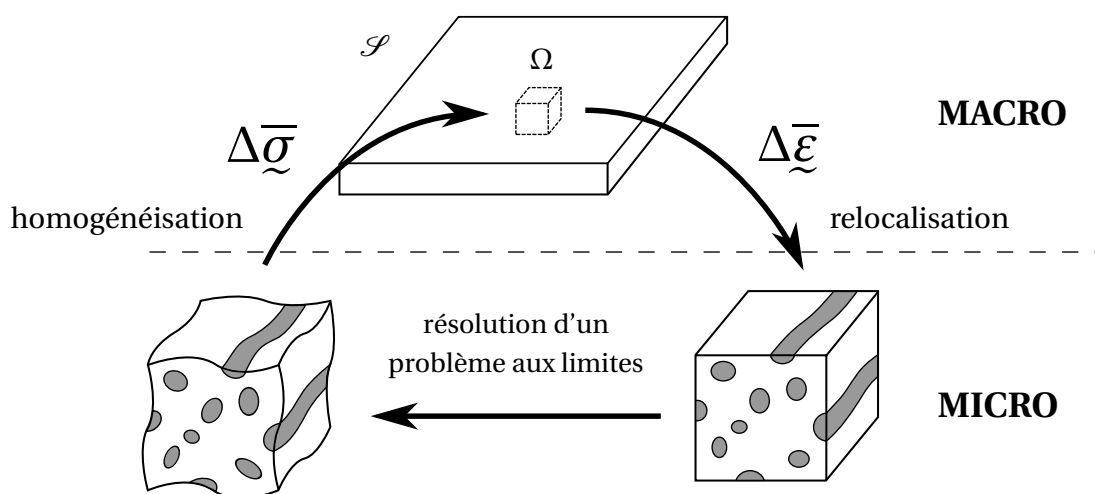


FIGURE 2.2: Illustration du principe des méthodes d'homogénéisation numériques

Il y a donc trois ingrédients fondamentaux à cette méthode, qui dépendent du principe d'homogénéisation utilisé :

- la définition d'un VER ;
- la définition d'un opérateur de relocalisation et des conditions limites du VER ;
- la définition d'un opérateur d'homogénéisation.

Traditionnellement, la FE2 est associée au principe d'homogénéisation périodique, qui prend donc tout son sens au cœur de la structure. Dans ce cadre, la définition du VER est généralement liée à la microstructure du matériau étudié. C'est un problème en

soi, qui dépend de la nature des mécanismes que l'on cherche à représenter, mais on retiendra avant tout que cette définition doit respecter le principe de séparation des échelles (Équation 2.5). Soit  $\underline{R}$  l'opérateur de relocalisation, en dimension 2, les conditions limites d'un VER tel que celui de la Figure 2.3 peuvent s'écrire :

$$\underline{u}_A = \underline{0} \quad (2.19)$$

$$\underline{u}_B = \underline{\bar{\varepsilon}} \cdot \underline{R} \quad (2.20)$$

$$\underline{u}(y \in h) = \underline{u}(y \in b) + \underline{u}_B \quad (2.21)$$

$$\underline{u}(y \in d) = \underline{u}(y \in g) + \underline{u}_B \quad (2.22)$$

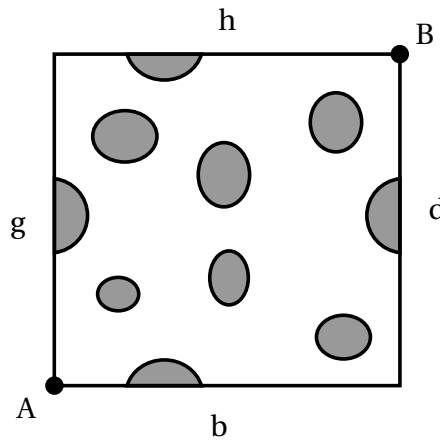


FIGURE 2.3: Volume Élémentaire Représentatif périodique en dimension 2

Comme pour les méthodes d'homogénéisation analytiques, la FE2 perd de sa précision lorsque les non-linéarités se font importantes. C'est notamment ce qu'a constaté l'équipe de Potier-Ferry, qui a combiné la FE2 à la méthode asymptotique numérique [Damil et Potier-Ferry, 1990] pour la simulation multi-échelle du *kinking* [Nezamabadi et al., 2009, Nezamabadi et al., 2010]. Une dépendance pathologique au maillage est observée lorsque la perte de raideur tangente de la réponse du VER vient provoquer une localisation des déformations.

Une solution à ce problème a été proposée par Geers et Kouznetsova, qui ont étendu la méthode d'homogénéisation numérique aux milieux d'ordre supérieur [Kouznetsova et al., 2002, Kouznetsova et al., 2004a]. En particulier, l'homogénéisation du second ordre se révèle suffisante pour traiter de nombreux problèmes non-linéaires, tant que des localisations fortes ne viennent pas violer l'unicité de la solution du problème macroscopique. Des précautions particulières, encore à l'étude, sont à prendre pour utiliser l'homogénéisation numérique dans un cadre aussi critique [Geers et al., 2010, Coenen et al., 2011].

Bien qu'elle ne soit pas une méthode d'homogénéisation à proprement parler, la méthode LaTin multi-échelle, développée par l'équipe de Ladevèze tire parti de certains principes de l'homogénéisation [Ladevèze et al., 2001, Ladevèze et Nouy, 2003]. Il

s'agit d'une stratégie de calcul qui allie une méthode de décomposition de domaines à une résolution multiéchelle. Dans ce cadre, le problème résolu à l'échelle macro résulte de l'assemblage du comportement homogénéisé à la volée des sous-structures, ce qui permet d'accélérer la convergence de la méthode. Cette stratégie est aujourd'hui développée dans des cas de plus en plus complexes, comme les problèmes d'instabilités géométriques de grandes structures [Cresta *et al.*, 2007, Hinojosa *et al.*, 2011], d'interactions flambage-délaminage [Saavedra *et al.*, 2011] ou de dégradations localisées dans les assemblages [Roulet *et al.*, 2011].

Pour conclure sur les méthodes d'homogénéisation numériques, elles se basent sur la définition de trois points : un VER, un opérateur de relocalisation et un opérateur d'homogénéisation. En cela, elles sont moins contraignantes que les approches présentées ci-après, qui nécessitent également de définir au moins en partie le problème homogénéisé. En revanche, leur coût numérique reste élevé dès lors que la microstructure est représentée explicitement, malgré la parallélisation systématique dont elles font l'objet. C'est la principale raison pour laquelle l'extraction d'un modèle de comportement mésoscopique non-linéaire à l'aide de l'homogénéisation est préférée. Pour plus d'information sur l'homogénéisation numérique, l'analyse détaillée de Kanouté et co-auteurs dresse un état de l'art exhaustif [Kanouté *et al.*, 2009]

## 6 Méthodes d'identification d'un modèle de comportement

L'idée d'identifier un comportement, par quelque théorie que ce soit, à partir d'une analyse de la microstructure est à attribuer à Taylor et Quinney. Dans leurs premières études, ils se sont intéressés au "travail à froid" des métaux, à savoir au stockage d'énergie par plasticité en considérant le milieu comme isotherme [Taylor et Quinney, 1934].

Les premières approches basées sur une théorie d'homogénéisation à proprement parler n'apparaîtront que plus tard, avec notamment les travaux d'Andrieux [Andrieux *et al.*, 1986]. Dans cette étude, les auteurs considèrent un VER (carré) d'une microstructure homogène perturbée par une fissure à contact frottant. Ils lient alors les caractéristiques microscopiques de cette fissure à un comportement homogénéisé présentant des variables internes d'endommagement et de plasticité. Ainsi, cette étude et celles qui l'ont suivie ont bénéficié du cadre théorique de la thermodynamique des milieux continus [Germain, 1974, Germain *et al.*, 1983, Lemaître, 1985, Lemaître, 1985].

Supposons que le comportement du matériau réel dérive d'un potentiel  $\Psi$ , la densité d'énergie libre de Helmholtz. On fait l'hypothèse de partition des travaux élastique et d'écrouissage plastique :

$$\Psi = \Psi^e + \Psi^p \quad (2.23)$$

En présence de dissipation  $\phi$ , celle-ci respecte l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\phi = \sigma : \dot{\underline{\epsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (2.24)$$

Afin de conserver l'énergie entre l'état hétérogène et l'état homogène (et donc le lemme de Hill), la plupart des méthodes d'identification d'un modèle de comportement vérifient la conservation de :

- la partie récupérable de la densité d'énergie libre  $\Psi^e$  ;
- la partie de la densité d'énergie libre stockée sous forme de champs de contraintes auto-équilibrés et de champs de déformations compatibles  $\Psi^p$  ;
- la puissance volumique dissipée  $\phi$ .

Dans le modèle homogénéisé, la variation de ces énergies est due à l'introduction de variables internes, généralement adaptées à la nature du phénomène microscopique qu'elles sont censées représenter. Par exemple, l'inélasticité représente les déformations irréversibles dues à des dislocations suivant des plans de glissements, à des glissements avec frottement entre phases, etc. L'endommagement représente de son côté une perte apparente de raideur due en général à la nucléation et la croissance de vides ou de micro-fissures. Ces deux phénomènes sont fortement favorisés par la présence d'hétérogénéités importantes dans la microstructure [Needleman, 1987].

Dans ce cadre, Aravas et co-auteurs ont proposé une procédure très simple pour déterminer l'énergie stockée par écrouissage dans les métaux [Aravas *et al.*, 1990]. La formulation théorique se veut générale et s'applique aussi bien aux essais expérimentaux que numériques. Le principe est expliqué ci-dessous.

Considérons un corps élasto-plastique hétérogène  $\Omega$  libre de contraintes initiales, soumis à un effort  $Q$  dont l'application est quasi-statique. On néglige les forces d'inertie et les forces volumiques. On suppose également rester dans le domaine des petites perturbations. On postule une loi de Hooke de la forme :

$$\underline{\sigma} = \mathbf{H} : \underline{\varepsilon}^e \quad (2.25)$$

où  $\underline{\varepsilon}^e$  est la composante élastique des déformations (et  $\underline{\varepsilon}^p$  la composante plastique), leur partition dérivant de l'Équation 2.23 :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p \quad (2.26)$$

Soit  $q$  le déplacement dual de  $Q$ , le travail des efforts extérieurs appliqués à  $\Omega$  est donné par  $\int_0^q Q dq$ . Le Principe des Puissances Virtuelles implique alors :

$$\int_0^q Q dq = \int_{\Omega} \int_0^{\underline{\varepsilon}} \underline{\sigma} : d\underline{\varepsilon} d\Omega \quad (2.27)$$

et de la même façon :

$$\int_0^Q q dQ = \int_{\Omega} \int_0^{\underline{\sigma}} \underline{\varepsilon} : d\underline{\sigma} d\Omega \quad (2.28)$$

On note l'énergie de déformation élastique :

$$W^e = \int_{\Omega} \int_0^{\underline{\varepsilon}^e} \underline{\sigma} : d\underline{\varepsilon}^e d\Omega = \int_{\Omega} \int_0^{\underline{\sigma}} \underline{\varepsilon}^e : d\underline{\sigma} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^e d\Omega \quad (2.29)$$

et l'énergie dissipée par plasticité :

$$W^p = \int_{\Omega} \int_0^{\varepsilon^p} \underline{\sigma} : d\underline{\varepsilon}^p d\Omega \quad (2.30)$$

En substituant l'Équation 2.26 dans le PPV, on peut écrire :

$$\int_0^q Q dq = W^e + W^p \quad (2.31)$$

et de la même façon :

$$\int_0^Q q dQ = W^e + \int_{\Omega} \int_0^{\underline{\sigma}} \underline{\varepsilon}^p : d\underline{\sigma} d\Omega \quad (2.32)$$

On suppose que la réponse force/déplacement généralisés a l'allure donnée par la Figure 2.4. Le corps hétérogène  $\Omega$  se déforme élastiquement entre O et A. Le premier écrouissage se produit après le point A et la courbe devient non-linéaire jusqu'en B. Puis la courbe redevient linéaire entre B et C pendant la décharge, à condition que celle-ci soit élastique linéaire.

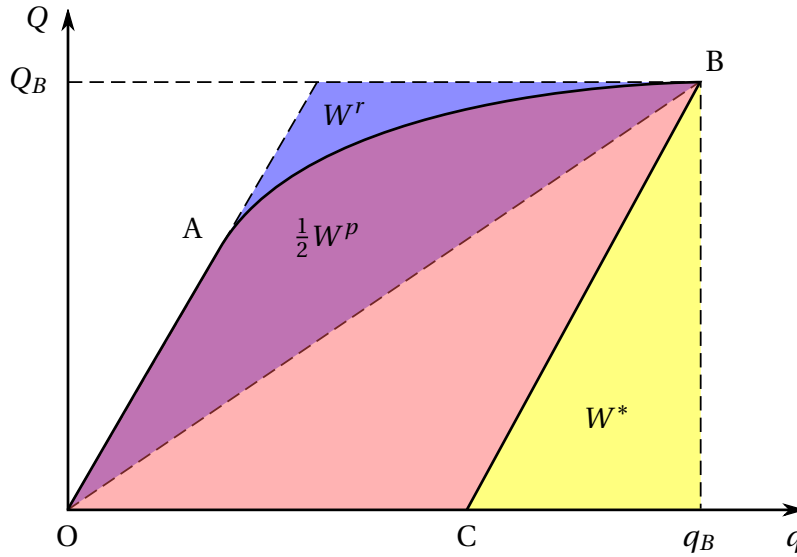


FIGURE 2.4: Courbe de réponse effort/déplacement généralisés

Au niveau de chargement maximal (i.e. le point B sur le schéma), l'Équation 2.32 s'écrit :

$$\int_0^{Q_B} q dQ = W_B^e + \int_{\Omega} \int_0^{\underline{\sigma}_B} \underline{\varepsilon}^p : d\underline{\sigma} d\Omega \quad (2.33)$$

où  $\underline{\sigma}_B$  et  $W_B^e$  sont respectivement la contrainte et l'énergie de déformation élastique au niveau de charge  $Q_B$ .

Soient  $\underline{\sigma}^*$  et  $\underline{\varepsilon}^*$  les contraintes et déformations du milieu élastique homogène équivalent au même niveau de charge  $Q_B$ . Après décharge, les contraintes résiduelles dans

le milieu plastique hétérogène sont notées  $\underline{\sigma}^r = \underline{\sigma}_B - \underline{\sigma}^*$  et les déformations résiduelles  $\underline{\varepsilon}^r = \underline{\varepsilon}_B - \underline{\varepsilon}^*$ .

On note l'énergie de déformation du milieu élastique homogène équivalent :

$$W^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}^* d\Omega = \frac{1}{2} Q_B (q_B - q_C) \quad (2.34)$$

et l'énergie stockée dans le matériau sous forme de contraintes résiduelles :

$$W^r = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^r : \mathbf{H}^{-1} : \underline{\sigma}^r d\Omega \quad (2.35)$$

En supposant que  $\underline{\sigma}^r$  est un champ auto-équilibré et  $\underline{\varepsilon}^*$  est un champ de déformations compatible (ce qui est le cas avec la théorie de l'homogénéisation d'un milieu périodique), on a trivialement :

$$W_B^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}_B : \underline{\varepsilon}_B^e d\Omega = W^* + W^r \quad (2.36)$$

Dès lors, l'Équation 2.33 peut s'écrire :

$$\int_0^{Q_B} q dQ = W^* + W^r + W^d \quad (2.37)$$

avec :

$$W^d = \int_{\Omega} \int_0^{\underline{\sigma}_B} \underline{\varepsilon}^p : d\underline{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \int_0^{\underline{\varepsilon}_B^p} (\underline{\sigma}_B - \underline{\sigma}) : d\underline{\varepsilon}^p d\Omega \quad (2.38)$$

Si le principe de la dissipation plastique maximale est respecté [Hill, 1948], alors  $W^d \geq 0$ . On peut ainsi, pour tout niveau de charge  $Q_B$ , déterminer les énergies récupérable, stockée et dissipée d'un milieu hétérogène. Grâce à elles, on peut définir les loi d'évolution d'un milieu homogène équivalent à variables internes. Ce principe peut être étendu à des cas plus complexes.

Par exemple, Hild et co-auteurs ont ainsi identifié les lois d'endommagement et d'inélasticité d'un composite SiC/SiC à partir de l'analyse de sa microstructure fissurée [Hild *et al.*, 1996, Hild *et al.*, 1997]. Cette approche a par la suite été étendue par d'autres auteurs, dans des cadres inélastiques et/ou endommageables [Halm et Dragon, 1998, Pensée *et al.*, 2002]. Notamment, Kondo et co-auteurs ont étudié l'influence de la fermeture de fissures sans frottement sur le comportement élastique non-linéaire d'un VER, à partir d'une extension de la théorie d'Eshelby [Deudé *et al.*, 2002].

Cette stratégie a rapidement été appliquée à des micromodèles numériques, utilisés comme échantillons d'essais virtuels afin d'identifier un comportement macro. Par exemple, Hild et co-auteurs ont utilisé un micromodèle simulant l'apparition de fissures frottantes dans un composite SiC/SiC [Budiansky *et al.*, 1986, Budiansky *et al.*, 1995] pour analyser l'influence des fissures sur les propriétés inélastiques d'un mésomodèle homogène équivalent [Vivier *et al.*, 2009]. Schapery a également appliqué



cette méthode à sa propre théorie de *kinking* visco-élastique en grandes transformations [Schapery, 1990]. Il en a extrait un comportement mésoscopique en compression caractérisé par une seule variable d'endommagement, toujours dans le cadre des déformations finies [Schapery, 1995, Violette et Schapery, 2002]. Par la suite, Waas a étendu cette méthode au cas des composites tissés [Song *et al.*, 2007]. Il a ainsi pu réaliser des simulations éléments finis sous Abaqus, capables de représenter le développement d'une bande de plissement et la localisation des déformations à l'échelle du fil ( $\approx 1000$  fibres) [Basu *et al.*, 2006], comme illustré sur la Figure 2.5.

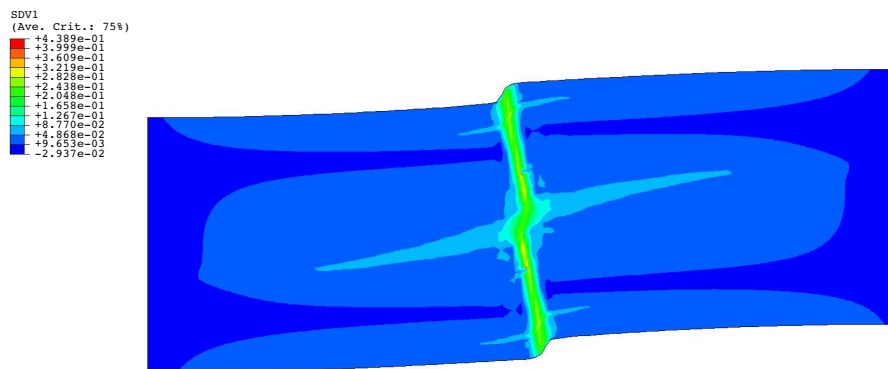


FIGURE 2.5: Angle *in situ* de rotation des fibres (en radians) dans un échantillon en compression après plissement [Basu *et al.*, 2006]

Les ponts micro-méso utilisent une approche similaire, mais qui prend aussi en compte l'environnement direct du VER [Ladevèze et Lubineau, 2001, Ladevèze et Lubineau, 2003]. Dans le cadre d'un pli de stratifié carbone-époxy, cela revient à intégrer l'influence des plis adjacents et particulièrement de leur orientation. Le problème étudié est l'impact de la micro-fissuration transverse et du micro-délaminage sur le comportement des plis et des interfaces. Le développement de ces dégradations discrètes est en pratique simulé par l'augmentation de la distance entre deux fissures, qui délimitent la microstructure [Nairn et Hu, 1992, Nairn, 2001]. Si l'on définit les quantités méso comme les moyennes des quantités micro du problème de référence, sous l'hypothèse des contraintes planes, il a notamment été montré que [Ladevèze *et al.*, 2005] : il est possible de remplacer un pli fissuré par un pli continu et endommagé au comportement équivalent, pour n'importe quel type d'empilement, à condition que les plis adjacents soient au moins aussi épais que le pli étudié ; la loi d'endommagement à l'interface est non-locale, car elle dépend de l'état de micro-fissuration des plis voisins.

Le principal avantage de ces méthodes d'identification du comportement est leur faible coût numérique : une fois un comportement homogène identifié, il permet de définir un modèle de matériau qui peut être directement implanté dans un code de calcul et intégré de façon standard. En revanche, ces approches présentent quelques limites. En particulier, comme vu précédemment, elles supposent de définir au moins en partie le potentiel mésoscopique à identifier. En somme, ce ne sont pas des méthodes de *calcul*, contrairement aux précédentes, mais des méthodes de *modélisation*.

Et comme pour l'écriture d'un modèle à partir d'observations phénoménologiques, si un mécanisme physique apparaissant à l'échelle microscopique n'est pas pris en compte par l'introduction de la variable interne appropriée dans le modèle, il sera soit ignoré soit intégré dans un autre mécanisme lors de l'étape d'homogénéisation.

## 7 Conclusions sur l'homogénéisation

Pour homogénéiser le comportement non-linéaire des plis unidirectionnels subissant une rupture par *kinking*, deux grandes classes de méthodes ont été envisagées :

- Les *méthodes d'homogénéisation numériques*, qui consistent à faire communiquer un problème mésoscopique et un problème microscopique représentant la microstructure. Elles ont pour principal avantage leur flexibilité, dans le sens où le comportement mésoscopique n'a pas à être défini. La méthode d'homogénéisation permet d'extraire directement un comportement tangent à partir de la réponse de la microstructure. Leur principal défaut est leur coût numérique élevé, même s'il peut être compensé en partie par une parallélisation des calculs.
- Les *méthodes d'identification d'un modèle de comportement*, qui consistent à établir une fois pour toutes un comportement non-linéaire homogénéisé à partir de la réponse de la microstructure à divers chargements représentatifs et une équivalence en énergie. Elles ont pour principal avantage de permettre d'extraire un modèle entièrement défini, qui s'intègre ensuite normalement dans tout code de calcul. En revanche, elles nécessitent une réflexion *a priori* sur le comportement mésoscopique, défini par un potentiel et des variables observables et internes.

Par conséquent, l'approche d'Aravas est privilégiée, à la fois pour sa simplicité d'utilisation et sa cohérence avec les ponts micro-méso déjà établis par Ladevèze et Lubineau. Par ailleurs, les résultats obtenus par Schapery et Waas en grandes transformations sont des plus encourageants, même si l'influence de la statistique de défauts et du cisaillement dans un cadre de petites perturbations restent à déterminer. Comme le détaille le Chapitre 3, à l'exception notable du *kinking*, le mésomodèle d'endommagement est capable de représenter avec robustesse quasiment toutes les autres dégradations des stratifiés, notamment sous chargement de cisaillement. Cette stratégie va donc permettre d'enrichir la description du potentiel énergétique du pli mésoscopique uniquement dans les directions concernées. Pour ce faire, il va sans doute falloir introduire de nouvelles variables internes, dont l'évolution sera déterminée par des simulations du modèle de *kinking* microscopique (voir Chapitre 1). Cela implique aussi d'établir une stratégie pour identifier les lois d'évolution de chaque variable nouvellement introduite et les potentiels couplages qui les accompagnent.



## Chapitre 3

# Modélisation des composites stratifiés à l'échelle du pli

*Ce troisième chapitre est consacré à la mésomodélisation des stratifiés. L'échelle de description mésoscopique et le recours à la mécanique de l'endommagement continu sont un compromis pertinent entre représentation des phénomènes de dégradation et rapidité des simulations numériques. Grâce à ces mésomodèles et à des stratégies de calcul performantes, des cas-tests complexes peuvent être simulés et validés. Selon les phénomènes que l'on cherche à reproduire, il existe toutefois plusieurs niveaux de complexité dans la description des mécanismes de dégradation.*

### Sommaire

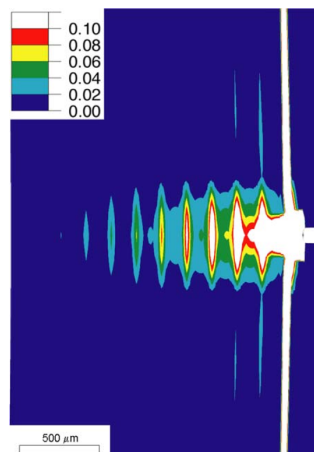
---

<b>1</b>	<b>Motivation et principes fondamentaux</b>	<b>52</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation des plis</b>	<b>55</b>
<b>3</b>	<b>Modélisation des interfaces</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Pont micro-méso et modèle amélioré</b>	<b>59</b>
<b>5</b>	<b>Limites de la description continue et modèle hybride</b>	<b>60</b>
<b>6</b>	<b>Simulations numériques performantes</b>	<b>62</b>
<b>7</b>	<b>Conclusions sur la mésomodélisation des stratifiés</b>	<b>64</b>

---

## 1 Motivation et principes fondamentaux

Les approches mésomécaniques ont pour origine la recherche d'un compromis entre représentation de la physique des dégradations et faisabilité des simulations numériques. Elles s'appuient généralement sur la mécanique de l'endommagement continu en introduisant des variables d'endommagement pour représenter l'état de dégradation homogénéisé d'une zone. En particulier, les modes de dégradation apparaissant à l'échelle des micro-constituants, à savoir la décohésion fibres/matrice et la nucléation et croissance de micro-vides et microfissures dans la matrice, sont considérés suffisamment diffus pour être homogénéisés et représentés par une ou plusieurs variables d'endommagement, selon les principes discutés précédemment. Ainsi, les mésomodèles se situent entre les approches macromécaniques, qui modélisent le matériau composite d'un seul tenant (souvent avec une cinématique enrichie [Gruttmann *et al.*, 1993]), et les approches micromécaniques, où les simulations sont directement traitées à l'échelle des fibres et de la matrice (souvent intégrées dans des approches multiéchelles pour traiter des problèmes de taille d'échantillon [González et LLorca, 2006, Totry *et al.*, 2010], voir Figure 3.1).



**FIGURE 3.1:** Plasticité cumulée dans la matrice juste avant la quatrième rupture de fibres en traction simple [González et LLorca, 2006]

Historiquement, le premier modèle mésoscopique a été proposé par Talreja et n'est doté que d'une seule variable d'endommagement isotrope affectant la raideur du pli [Talreja, 1985]. La nature fondamentalement anisotrope de l'endommagement du matériau fibres/matrice n'est donc pas reproduite. Peu après, Ladevèze proposa un modèle d'endommagement anisotrope à deux variables, une pour le cisaillement et une pour la traction transverse dans le pli (en plus d'un modèle pour le délaminage entre les plis) [Ladevèze, 1986, Ladevèze, 1989]. Ce modèle offre d'ores et déjà une meilleure reproduction des premières dégradations qui s'initient dans le pli, à savoir la décohésion fibres/matrice et la microfissuration. L'identification des lois d'évolution de l'endommagement est alors purement phénoménologique.

Allen fut le premier à proposer de créer un lien entre micromécanique et mésomécanique des stratifiés [Allen *et al.*, 1987a, Allen *et al.*, 1987b]. Dans ses travaux, il définit l'état de dégradation des plis grâce à un tenseur d'endommagement anisotrope, qu'il identifie grâce à l'homogénéisation d'un élément de volume représentatif de la microstructure dégradée. L'idée de dégradations représentées par un tenseur d'endommagement anisotrope a été reprise par de nombreux auteurs, mais leur utilisation multiplie le nombre de variables d'endommagement introduites [Voyiadjis et Deliktas, 2000, Kumar et Talreja, 2003]. De plus, la prise en compte de la refermeture des fissures en compression nécessite un traitement local pour chaque variable affectée.

Le modèle de Ladevèze gère cet aspect en introduisant une dépendance au signe des contraintes dans les directions d'endommagement [Ladevèze et Lemaître, 1984]. L'introduction de trois variables scalaires est préférée devant celle d'un tenseur d'ordre 2 ou 4. Un modèle très semblable a par la suite été développé par Lubliner, les variables d'endommagement étant pilotées par le critère de Hashin [Matzenmiller *et al.*, 1995]. Peu après, Maire et Chaboche ont prolongé ce type d'approche en y intégrant les effets visqueux de la matrice [Maire et Chaboche, 1997]. Ce modèle a été appliqué aux composites organiques et assorti d'un critère de rupture basé sur celui de Hashin par Laurin [Laurin *et al.*, 2007]. L'équipe de Camanho a développé un autre modèle similaire, avec une variable supplémentaire pour la rupture par *kinking*, piloté cette fois par le critère LaRC04 [Maimi *et al.*, 2007a, Maimi *et al.*, 2007b]. Enfin, l'équipe d'Oñate a proposé dernièrement un mésomodèle à endommagement isotrope n'affectant que la matrice, avant d'en déduire le comportement complet du pli par une loi des mélanges avec les fibres [Rastellini *et al.*, 2008, Martinez *et al.*, 2011] (voir Figure 3.2).

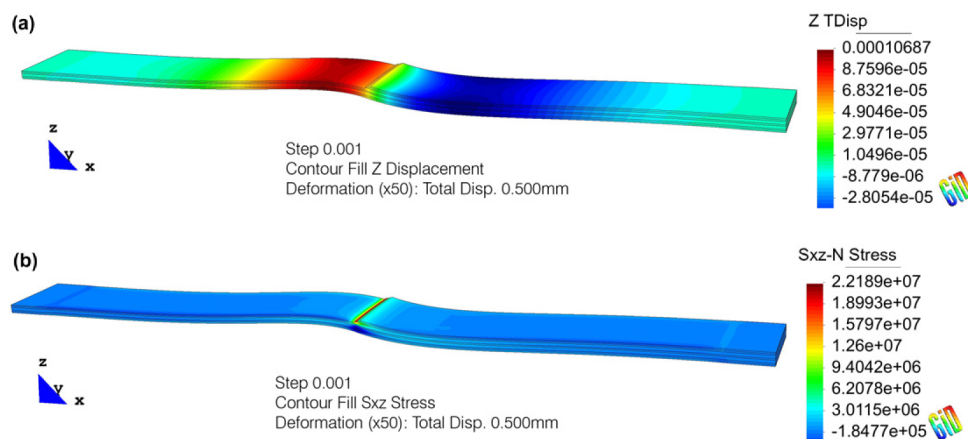


FIGURE 3.2: Déplacement vertical et contraintes de cisaillement dans un composite avec reprise de plis [Martinez *et al.*, 2011]

On situera également dans cette catégorie les travaux de Drapier et Grandidier, qui ont intégré un modèle de microflambage asymptotique bidimensionnel [Gardin et Potier-Ferry, 1992] dans un milieu homogénéisé pour le calcul de structures [Drapier *et al.*, 1999, Drapier *et al.*, 2001, Grandidier et Casari, 2009]. En effet, on a vu précédem-

ment qu'une étude purement microscopique ne peut rendre compte certains effets susceptibles d'influer fortement sur la réponse de la structure, comme les gradients de contraintes ou les effets de bord. Les auteurs ont donc utilisé un modèle à deux échelles cinématiques, une à petite longueur d'onde (propre au plissement) et une à grande longueur d'onde, pour prédire la contrainte à rupture d'un échantillon en prenant en compte ces effets de structure. Il s'agit donc d'un modèle mésoscopique, qui intègre le phénomène de plissement en introduisant l'énergie de flexion des fibres dans le potentiel des déformations et en supposant que les déplacements dans la direction des fibres ont une forme harmonique.

En ce qui concerne les interfaces, leur faible épaisseur riche en matrice ( $\equiv 5 \mu\text{m}$ ) permet de les modéliser grâce à des interfaces dégradables [Barrenblatt, 1948]. L'initiation du délaminage peut alors être prédite par une analyse asymptotique [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1987, Leguillon, 1989] ou, dans le cadre de la Méthode de Éléments Finis, par des éléments cohésifs [Allix *et al.*, 1989, Corigliano, 1993, Schellekens et de Borst, 1993, Hitchings *et al.*, 1996, Turon *et al.*, 2006].

Il existe de nombreux autres modèles de comportement pour les composites stratifiés. Toutefois, tant pour des raisons d'efficacité que de culture de laboratoire, l'accent est mis dans la suite sur le mésomodèle d'endommagement du LMT-Cachan, développé dans sa version standard par Ladevèze et Allix [Ladevèze, 1992, Allix et Ladevèze, 1992, Ladevèze et Le Dantec, 1992]. Son extension aux composites tissés, évoquée dans la première version, a effectivement été réalisée par Hochard pour la tenue quasi-statique et en fatigue [Hochard *et al.*, 2001, Thollon et Hochard, 2009]. Dans la suite, seule la version dédiée aux composites stratifiés de plis unidirectionnels à fibres longues est présentée.

Le mésomodèle standard est basé sur deux hypothèses fondamentales :

- Le comportement du composite peut être déduit du comportement de deux méso-constituants : les plis et leurs interfaces (voir Figure 3.3).
- L'endommagement est constant dans l'épaisseur d'un pli, mais peut varier d'un pli à l'autre.

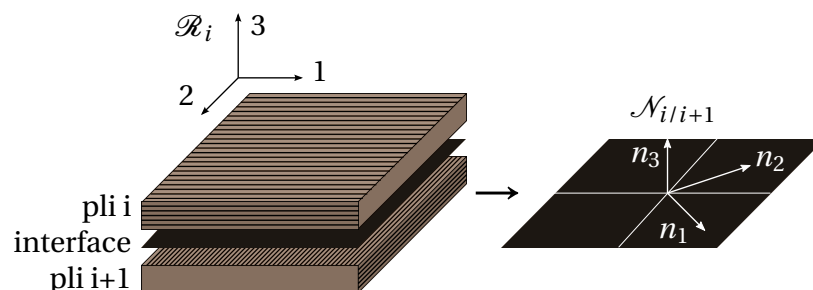


FIGURE 3.3: Méso-constituants d'un composite stratifié et repères associés

## 2 Modélisation des plis

Considérons chaque pli indépendant des autres, constitué d'un matériau homogène fibre-matrice, isotrope transverse, élasto-plastique et endommageable. On lui associe le repère  $\mathcal{R}_i$ , comme indiqué par la Figure 3.3 : 1 est la direction des fibres, 2 la direction transverse et 3 la direction hors-plan. Par souci de simplicité, on fait l'hypothèse de contraintes planes, sachant que l'extension aux contraintes tridimensionnelle ne présente pas de difficulté notable (voir par exemple [Ladevèze *et al.*, 2000]). Considérons les dégradations évoquées plus tôt. La décohésion fibres-matrice et la nucléation et croissance de micro-cavités et microfissures dans la matrice vont affecter la tenue transverse et de cisaillement du pli, mais pas nécessairement avec la même intensité. Ainsi, une variable d'endommagement  $d$  est associée à ces mécanismes et va affaiblir le module de cisaillement  $G_{12}$  sous la forme  $G_{12} = (1 - d)G_{12}^0$ . De la même façon, une variable  $d'$  va affaiblir le module d'Young transverse  $E_2 = (1 - d')E_2^0$ . On choisit également, mais ce n'est pas impératif, de modéliser la rupture des fibres par la mécanique de l'endommagement. Ainsi, une variable  $d_f$  va affaiblir le module d'Young en traction  $E_1 = (1 - d_f)E_1^0$ .

La densité d'énergie de déformation élastique du pli s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \rho \Psi^e = & \frac{\langle \sigma_{11} \rangle^2}{2E_1^0(1 - d_f)} + e_c(\langle -\sigma_{11} \rangle) - \left( \frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} + \frac{\nu_{21}^0}{E_2^0} \right) \times \sigma_{11}\sigma_{22} \\ & + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2}{2E_2^0(1 - d')} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle^2}{2E_2^0} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}^0(1 - d)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec  $\langle \bullet \rangle$  la fonction *partie positive*. Elle permet de discriminer les situations où les microfissures s'ouvrent en traction et donc impactent la raideur du matériau, des situations où ces fissures se ferment en compression et ne devraient donc pas influencer sur la raideur [Ladevèze et Lemaître, 1984]. On remarquera également la fonction  $e_c$ , qui caractérise le comportement non-linéaire en compression, dû notamment au *kinking* [Allix *et al.*, 1994], et qui sera examinée plus en détails dans le Chapitre 6.

En supposant que l'énergie de déformation dérive d'un potentiel, on peut définir les déformations élastiques comme les duales des contraintes :

$$\underline{\varepsilon}^e = \rho \left. \frac{\partial \Psi^e}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{d, d', d_f} \quad (3.2)$$

Soit, pour les variables du plan :

$$\varepsilon_{11}^e = \rho \left. \frac{\partial \Psi^e}{\partial \sigma_{11}} \right|_{d_f} = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{E_1^0(1 - d_f)} + e'_c(\langle -\sigma_{11} \rangle) \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{12}^e = \rho \left. \frac{\partial \Psi^e}{\partial \sigma_{12}} \right|_d = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}^0(1 - d)} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{22}^e = \rho \left. \frac{\partial \Psi^e}{\partial \sigma_{22}} \right|_{d'} = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{E_2^0(1 - d')} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle}{E_2^0} \quad (3.5)$$



Pour simplifier, on notera  $\mathbf{H}$  le tenseur d'élasticité de Hooke prenant en compte l'unilatéralité des dommages, et  $\mathbf{H}^0$  le même tenseur sain, sans endommagement.

De la même façon, on définit la force thermodynamique associée à chaque variable d'endommagement :

$$Y_f = -\rho \left. \frac{\partial \Psi^e}{\partial d_f} \right|_{\sigma_{11}} = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle^2}{2E_1^0(1-d_f)^2} \quad (3.6)$$

$$Y_d = -\rho \left. \frac{\partial \Psi^e}{\partial d} \right|_{\sigma_{12}} = \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}^0(1-d)^2} \quad (3.7)$$

$$Y_{d'} = -\rho \left. \frac{\partial \Psi^e}{\partial d'} \right|_{\sigma_{22}} = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2}{2E_2^0(1-d')^2} \quad (3.8)$$

Du fait que les variables  $d$  et  $d'$  représentent l'influence d'une même dégradation sur des modules d'élasticité différents, on considère qu'ils sont pilotés par une seule et même force  $Y$ , qu'on définit comme une combinaison linéaire :

$$Y = Y_d + bY_{d'} \quad (3.9)$$

où  $b$  est un paramètre de couplage. Ainsi, on peut définir l'évolution des variables d'endommagement à tout instant  $t$  :

$$d_f = 0 \quad \text{si } \sup_{\tau \leq t} (Y_f) \leq Y_f^C \quad d = d' = d_f = 1 \text{ sinon} \quad (3.10)$$

$$d = \sup_{\tau \leq t} \left( \frac{\langle \sqrt{Y} - \sqrt{Y^0} \rangle}{\sqrt{Y^C} - \sqrt{Y^0}} \right) \quad \text{si } \sup_{\tau \leq t} (d) \leq d_c \quad d = d_c \text{ sinon} \quad (3.11)$$

$$d' = b'd \quad (3.12)$$

où  $Y_f^C$  est la force thermodynamique critique en traction,  $Y^0$  la force thermodynamique d'initiation de l'endommagement diffus et  $Y^C$  la force thermodynamique critique de l'endommagement diffus. Enfin,  $d_c$  est une valeur de saturation de l'endommagement diffus due à la coalescence de fissures traversant l'épaisseur du pli (voir Section 4) et  $b'$  un paramètre de couplage.

Les glissements et frottements entre les phases au niveau des zones dégradées provoquent des déformations résiduelles au sein du pli. Une représentation par un modèle de plasticité à *écrouissage* isotrope permet de rendre compte de cet effet. Dans ces conditions, la fonction seuil s'écrit :

$$f = \sigma_{eq} - R(p) - R^0 \quad (3.13)$$

avec  $R^0$  la limite élastique,  $R(p) = Kp^m$  une fonction d'écrouissage de Prandtl-Reuss et  $\sigma_{eq}$  une contrainte équivalente, susceptible de rendre le *critère* d'écoulement anisotrope. Le couplage de l'inélasticité avec l'endommagement est introduit dans la définition de  $\sigma_{eq}$  par l'intermédiaire de contraintes dites effectives [Lemaître, 1985] :

$$\tilde{\sigma} = (\mathbf{H}^0 : \mathbf{H}^{-1}) : \underline{\sigma} = \mathbf{H}^0 : \underline{\varepsilon}^e \quad (3.14)$$

Afin de respecter l'équivalence en dissipation qui s'écrit :

$$\tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^p \quad (3.15)$$

on définit aussi les déformations inélastiques effectives [Ladevèze, 1991] :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = (\mathbf{H}^0 : \mathbf{H}^{-1})^{-1} : \dot{\underline{\varepsilon}}^p \quad (3.16)$$

Ainsi, on peut écrire la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  sous la forme anisotrope :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{12} + (a\tilde{\sigma}_{22})^2} \quad (3.17)$$

avec  $a$  est un paramètre de couplage.

Enfin, on fait les hypothèses de partition des déformations, de plasticité associée et de loi d'écoulement normale, qui impliquent respectivement :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p \quad \dot{p} = -\dot{\lambda} \left. \frac{\partial f}{\partial R} \right|_{\underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \dot{p} \left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \right|_R = \dot{p} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (3.18)$$

Compte tenu de cette loi d'écoulement, les seules composantes des déformations dans le plan à présenter une partie irréversible sont  $\varepsilon_{12}$  et  $\varepsilon_{22}$ .

On pourra remarquer que  $Y_f^C$  s'identifie grâce à un essai de traction simple sur un pli unidirectionnel à  $0^\circ$  ;  $Y^0$ ,  $Y^C$ ,  $d_c$ ,  $R^0$ ,  $K$  et  $m$  grâce à un essai de traction avec charges/décharges successives sur un composite croisé à  $\pm 45^\circ$  ; et  $b$ ,  $b'$  et  $a$  grâce à un essai similaire sur un composite croisé à  $\pm 67.5^\circ$  [Ladevèze et Le Dantec, 1992]. La fonction  $e_c$  requiert toutefois un traitement particulier [Allix *et al.*, 1994].

### 3 Modélisation des interfaces

Considérons les interfaces indépendantes les unes des autres. On associe à chacune un repère  $\mathcal{N}_{i/i+1}$ , comme indiqué par la Figure 3.3 :  $n_1$  est la bissectrice des direction des fibres des plis  $i$  et  $i+1$ ,  $n_2$  sa normale dans le plan et  $n_3$  sa normale hors-plan. Les interfaces sont le lieu de la dégradation dite de délaminage, laquelle est souvent initiée aux bords de la structure (zones de singularités ou de forts gradients) ou au point d'impact de chocs (même petits) [Wang, 1980, Devitt *et al.*, 1980, Whitney *et al.*, 1982, O'Brien, 1984]. Pour représenter cette dégradation, on introduit un modèle de zones cohésives. On note  $[\underline{U}] = [U_1] \underline{n}_1 + [U_2] \underline{n}_2 + [U_3] \underline{n}_3$  le saut de déplacement à l'interface dans le repère associé. Les raideurs élastiques  $k_1 = (1 - d_1)k_1^0$ ,  $k_2 = (1 - d_2)k_2^0$  et  $k_3 = (1 - d_3)k_3^0$  sont déterminées à partir des modules de la matrice et d'une mesure de l'épaisseur de l'interface et les variables  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  permettent de décrire l'endommagement dans chacun des trois modes de sollicitation. La fonction partie positive est à nouveau introduite pour gérer l'unilatéralité du mode d'ouverture (mode I) :

$$\rho \Psi_i^e = \frac{1}{2} \left( (1 - d_1) k_1^0 \langle [U_1] \rangle^2 + k_1^0 \langle -[U_1] \rangle^2 + (1 - d_2) k_2^0 [U_2]^2 + (1 - d_3) k_3^0 [U_3]^2 \right) \quad (3.19)$$

Les forces thermodynamiques associées à l'endommagement s'écrivent :

$$Y_1 = -\rho \left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_1} \right|_{[U_1]} = \frac{1}{2} k_1^0 \langle [U_1] \rangle^2 \quad (3.20)$$

$$Y_2 = -\rho \left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_2} \right|_{[U_2]} = \frac{1}{2} k_2^0 [U_2]^2 \quad (3.21)$$

$$Y_3 = -\rho \left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_3} \right|_{[U_3]} = \frac{1}{2} k_3^0 [U_3]^2 \quad (3.22)$$

Du fait que toutes ces variables d'endommagement représentent l'influence d'une même dégradation sur des raideurs différentes, leur évolution est couplée, de même que leurs forces thermodynamiques associées. Ainsi, on définit la force thermodynamique  $Y_i$  telle que :

$$Y_i = \left( (Y_1)^\alpha + (\gamma_2 Y_2)^\alpha + (\gamma_3 Y_3)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.23)$$

où  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  et  $\alpha$  sont des paramètres de couplage. En raison de l'épaisseur très faible de l'interface, on fait l'hypothèse que toutes les variables d'endommagement évoluent simultanément. Ainsi :

$$\dot{d}_1 = \dot{d}_2 = \dot{d}_3 = \dot{d}_i = \frac{1}{\tau_C} \left( 1 - e^{-a' \langle w(Y_i) - d_i \rangle} \right) \quad \text{avec } d_i \leq 1 \quad (3.24)$$

où  $\tau_C$  et  $a'$  sont des paramètres liés au modèle à taux limité [Ladevèze, 1995, Allix et Deü, 1997]. Il s'agit d'un modèle d'endommagement spécifiquement introduit pour les interfaces qui permet de reproduire les effets de vitesse observés expérimentalement (voir Figure 3.4).

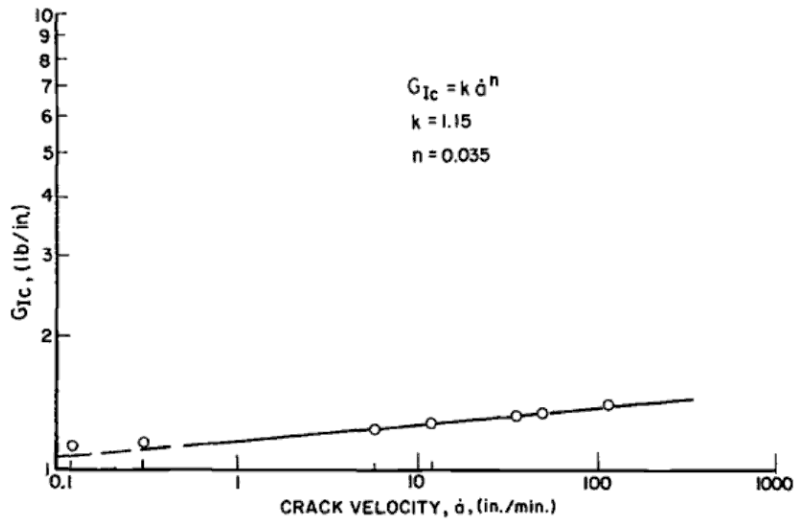


FIGURE 3.4: Taux de restitution d'énergie critique fonction de la vitesse de délaminage sur un essai DCB de composite AS4/3501-6 [Aliyu et Daniel, 1983]

La fonction  $w$  s'écrit :

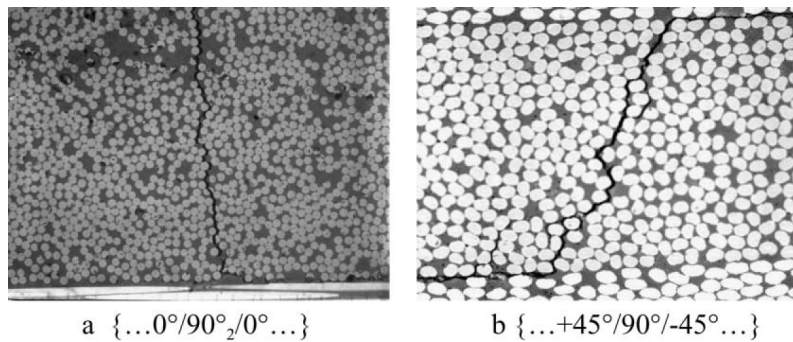
$$w = \sup_{\tau \leq t} \left( \frac{n}{n+1} \frac{\langle Y_i - Y_i^0 \rangle}{Y_i^C - Y_i^0} \right)^n \quad (3.25)$$

où  $Y_i^0$  est la force thermodynamique d'initiation et  $Y_i^C$  la force thermodynamique critique de l'endommagement à l'interface. Par ailleurs,  $n$  est un paramètre de couplage. Aucune déformation résiduelle n'est considérée à l'interface, bien qu'il puisse en exister en raison du frottement entre les plis [Allix, 1989].

On pourra remarquer que tous ces paramètres s'identifient grâce à des essais de type DCB, ELS et ENF en quasi-statique [Allix *et al.*, 1995], à l'exception de  $\tau_C$  et  $a'$  qui nécessitent un essai dynamique [Allix *et al.*, 1998, Corigliano et Allix, 2000, Guimard *et al.*, 2009].

## 4 Pont micro-méso et modèle amélioré

L'un des problèmes de cette vision entièrement mésomécanique est qu'elle ne fait pas nécessairement le lien entre une variable d'endommagement et la dégradation micromécanique sous-jacente. Par exemple, comme évoqué plus tôt, lorsqu'un pli  $\pm 45^\circ$  est sollicité en traction, on voit apparaître d'abord des décohésions fibres-matrice et de la microfissuration, puis des fissures discrètes qui traversent à travers toute l'épaisseur du pli [Nairn et Hu, 1992, Nairn, 2001] (voir Figure 3.5).



**FIGURE 3.5:** Fissures traversant l'épaisseur du pli et branchant ou se coudant à l'interface pour plusieurs empilements [Lafarie-Frenot *et al.*, 2001]

Ce phénomène restant assez diffus, la mécanique de l'endommagement permet de le représenter, mais les variables  $d$  et  $d'$  ne font pas la différence entre décohésions/microfissuration et fissures discrètes. Par conséquent, elles ne permettent pas de remonter au taux de fissuration du pli (défini par  $\tau = h_{pli}/L_f$  où  $h_{pli}$  est l'épaisseur du pli et  $L_f$  la distance moyenne entre deux fissures), valeur plus facilement mesurable par les constructeurs et organismes de certification. C'est pour redonner confiance dans cette vision mésomécanique de la modélisation des stratifiés qu'un pont micro-méso a été établi au LMT-Cachan depuis quelques années. Le principe est d'établir une

équivalence énergétique entre des modèles micromécaniques et le mésomodèle d'endommagement par l'intermédiaire d'une technique d'homogénéisation (voir Chapitre 2). Sous certaines hypothèses, notamment de chargement et de mécanismes de dégradation, cette équivalence permet d'extraire des lois de comportement méso basées sur la réponse micro.

Avant ces travaux, plusieurs auteurs s'étaient déjà intéressés à homogénéiser l'influence de la décohésion fibres/matrice seule [Wriggers *et al.*, 1998, Ju et Lee, 2001]. De plus, des approches similaires ont été utilisées pour quantifier l'effet de la fissuration sur la réponse des Composites à Matrice Céramique (CMC) [Hild *et al.*, 1996, Hild *et al.*, 1997]. De la même façon, Ladevèze et Lubineau ont établi le lien entre l'endommagement du pli et la fissuration discrète traversante, tout en intégrant l'influence des plis adjacents [Ladevèze et Lubineau, 2001, Ladevèze et Lubineau, 2002]. Cela leur a permis d'introduire de nouvelles variables d'endommagement pilotées par la micromécanique, de lier ces variables au taux de fissuration du pli et d'établir un lien direct entre la valeur de saturation de l'endommagement  $d_c$  et la saturation de la fissuration discrète. Cette étude a ensuite été étendue par Ladevèze, Lubineau et Marsal à l'étude du micro-délaminage local [Ladevèze *et al.*, 2005], dû au branchement des fissures transverses à l'interface avec les plis voisins [Leguillon *et al.*, 2000]. Ils ont ainsi pu caractériser la nature du couplage entre les variables de délaminage et celle liées à la fissuration du pli, couplage qui était jusque là identifié de manière phénoménologique [Guinard *et al.*, 2002]. Le *mésomodèle amélioré* qui en a résulté est capable de prévoir avec une plus grande précision les scénarios de dégradation jusqu'à la rupture d'empilements stratifiés. Grâce à des analyses numériques basées sur des modèles éléments finis, le mésomodèle amélioré a notamment fait ses preuves sur la simulation de plaques trouées et d'indentation hors plan [Lubineau et Ladevèze, 2008, Abisset *et al.*, 2011b]. Enfin, Rebière et Gamby ont utilisé une approche similaire pour déterminer un multi-critère d'initiation de l'endommagement anisotrope [Rebière et Gamby, 2008].

## 5 Limites de la description continue et modèle hybride

Il demeure toutefois des cas où le mésomodèle amélioré est incapable de prédire avec suffisamment de précision un scénario de dégradation. En particulier, puisqu'il repose toujours sur la seule mécanique de l'endommagement, il partage ses limites. Or, il existe plusieurs situations où se développent des dégradations localisées, discrètes, comme le *splitting* (voir Figure 3.6).

C'est la raison d'être du modèle hybride, qui propose une description plus poussée des mécanismes de dégradation en se plaçant, à chaque fois, à l'échelle la plus pertinente [Ladevèze *et al.*, 2006, Violeau *et al.*, 2009]. Il est également basé sur le pont micro-méso, mais au lieu d'enrichir la description continue comme le fait le mésomodèle amélioré, il vient ajouter au problème une description explicite des mécanismes discrets. En l'occurrence, il s'agit des fissures traversant le pli. Cependant, les dégradations diffuses situées à une échelle inférieure, comme les décohésions/microfissures,

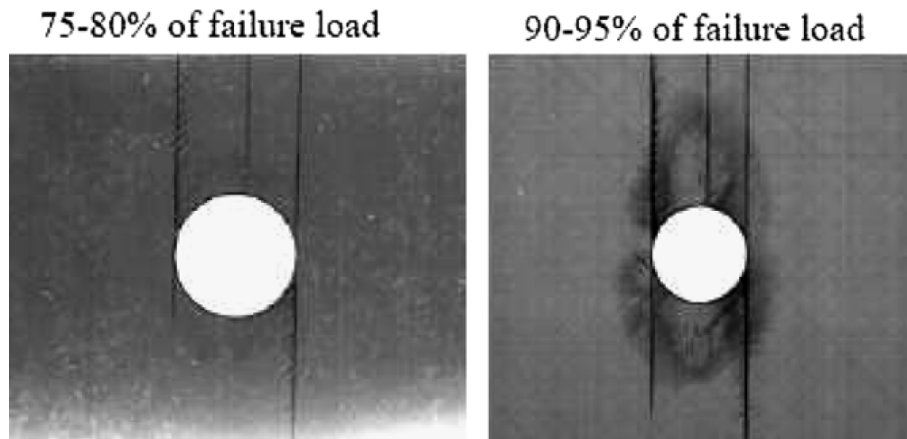


FIGURE 3.6: Développement de *splitting* sous chargement de compression dans un empilement troué [Lee et Soutis, 2008]

sont toujours représentées à l’aide de la mécanique de l’endommagement. Un pli peut ainsi être représenté par un assemblage d’éléments de volume de matériau fibre-matrice, entourés de surface minimales de rupture potentielle, comme schématisé sur la Figure 3.7. Du fait de la nature orientée d’un pli composite, les surfaces minimales de rupture suivent la direction des fibres, ce qui permet de définir *a priori* le pavage d’un pli. On remarquera que les fissures peuvent être intra- comme inter-laminaires, ce qui permet au couplage entre fissuration transverse et délaminage de se faire naturellement par le développement de concentrations de contraintes et de décharges locales. Il devient également inutile d’introduire une saturation de l’endommagement diffus  $d_c$ , comme pour le mésomodèle standard, car ces mêmes décharges vont empêcher naturellement l’endommagement de croître au-delà de cette valeur.

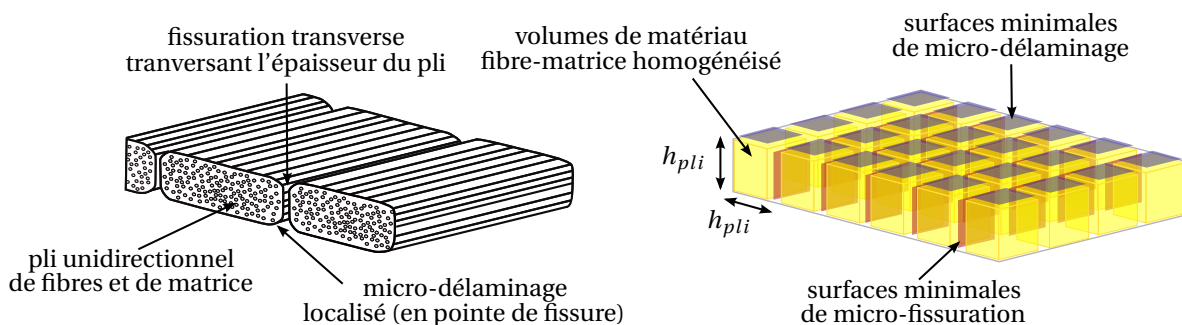


FIGURE 3.7: Représentation des dégradations du pli considérées discrètes (à gauche) ; constituants de base du modèle hybride (à droite)

Les principales hypothèses liées à la représentation hybride continue/discrète sont : le choix d’une taille représentative des éléments de volume (et donc des surfaces de rupture) et la définition d’un modèle de fissuration. En pratique, les surfaces de rupture intra-laminaires sont des carrés de côté  $h_{pli}$ , l’épaisseur du pli. La raison

de ce choix est, d'une part, que les fissures transverses ont un développement instable dans l'épaisseur du pli [Dvorak *et al.*, 1985, Dvorak et Laws, 1987]. D'autre part, leur propagation dans le sens des fibres est d'abord instable, jusqu'à atteindre une certaine longueur  $a \approx h_{pli}$ . Au-delà, la propagation peut se stabiliser pour un chargement donné [Nairn, 2000]. Le modèle de fissuration, quant à lui, est basé sur la mécanique de la fissuration discrète qui définit un critère de rupture basé sur le taux de restitution d'énergie [Griffith, 1921, Hashin, 1996]. Ce modèle intègre également l'effet d'épaisseur, qui prédit une initiation de la fissuration transverse par un critère en contrainte lorsque l'épaisseur du pli est inférieure à une épaisseur critique  $h_c$  [Garrett et Bailey, 1977, Crossman et Wang, 1982]. Ainsi, soit  $G^i$  le taux de restitution d'énergie associé au mode  $i$ , on définit le taux de restitution d'énergie modifié :

$$G_m^i = \begin{cases} G^i & \text{si } h_{pli} > h_c \\ \frac{h_c G^i}{h_{pli}} & \text{si } h_{pli} < h_c \end{cases} \quad (3.26)$$

le second terme étant équivalent à un critère en contrainte. Le critère complet d'initiation de la rupture des surfaces intra-laminaires s'écrit alors :

$$\left[ \left( \frac{G_m^I}{G_C^I} \right)^\alpha + \left( \frac{G_m^{II}}{G_C^{II}} \right)^\alpha + \left( \frac{G_m^{III}}{G_C^{III}} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 \quad (3.27)$$

où les  $G_C^i$  sont les taux de restitution d'énergie critique. Pour la propagation comme pour le délaminage,  $G_m^i = G^i$ , sachant que dans ce dernier cas les taux de restitution d'énergie critiques peuvent être différents. De plus, une légère variabilité est introduite dans la valeur des taux de restitution d'énergie critiques afin de représenter la statistique du matériau réel et d'éviter une initiation simultanée de toutes les surfaces de rupture. Enfin, la rupture des fibres est gérée, comme dans le mésomodèle standard, par une variable d'endommagement dans le sens des fibres et un critère fragile inspiré de celui de Püch [Püch et Mannigel, 2007].

## 6 Simulations numériques performantes

Ces différentes versions du mésomodèle, en particulier les plus récentes, impliquent des coûts de calcul conséquents. Chaque pli étant modélisé indépendamment, compte tenu de leur épaisseur ( $\approx 0.1$  mm), la simulation de structures de grande taille nécessite un traitement numérique adapté. C'est pourquoi de nombreux codes de calcul ont été spécifiquement développés pour l'étude des composites stratifiés. Seuls quelques-uns parmi les plus récents sont évoqués ici.

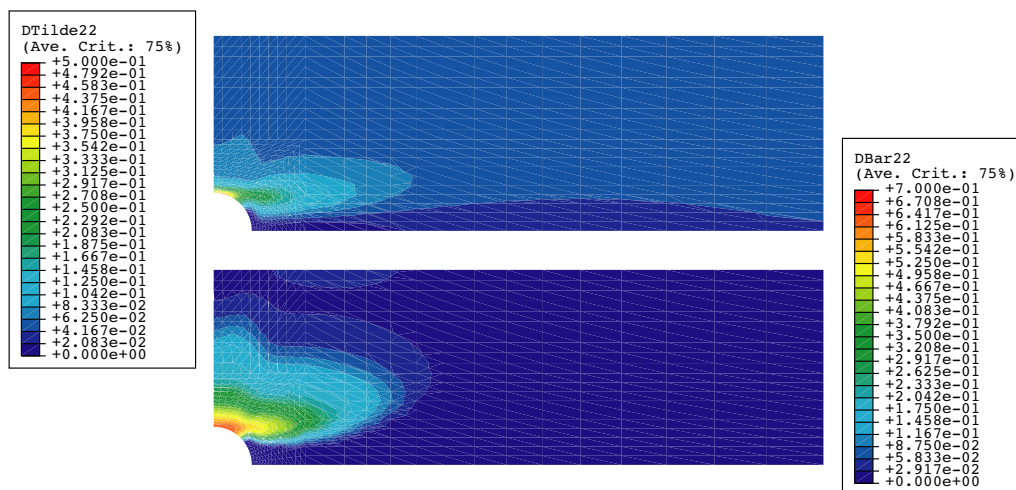
Le mésomodèle hybride a contribué à la mise en place de la plate-forme de calcul du laboratoire, par le développement d'un code dédié [Violeau *et al.*, 2009]. Ce code de calcul, intitulé Multi, utilise une méthode de décomposition de domaines mixte (la méthode LaTin multiéchelle [Ladevèze *et al.*, 2001, Ladevèze et Nouy, 2003]) dont

les interfaces entre sous-domaines coïncident avec les surfaces de rupture potentielle du modèle. Il en résulte un très grand nombre de sous-domaines, dont la résolution peut être encore accélérée par l'introduction d'une échelle dite "super-macro". Le problème aux interfaces associé à cette nouvelle échelle est résolu par un algorithme de gradient conjugué préconditionné [Trovalet *et al.*, 2009]. Une parallélisation efficace permet alors de traiter des calculs de plusieurs dizaines de millions de degrés de liberté en non-linéaire, malgré la présence de nombreuses fissures.

Une variante de Multi a été développée pour pouvoir traiter des cas de grands déplacements et d'instabilités [Saavedra *et al.*, 2011]. Elle est basée sur une formulation Lagrangienne totale et un algorithme de pilotage à longueur d'arc, qui permettent d'étudier les interactions flambage/délamination à l'échelle des plis. Ces situations étant déjà très instables, le modèle de comportement des plis est considéré hyperélastique orthotrope sans possibilité de fissuration intra-laminaire.

Le mésomodèle amélioré dispose de son propre code de calcul dans la plate-forme, baptisé COFFEE [Bordeu *et al.*, 2009]. Ce code utilise une méthode de décomposition de domaines type BDD [Mandel, 1993], dont le découpage des sous-structures est adapté au côté non-local des lois de comportement inter- et intra-laminaires. Une fois parallélisée, cette méthode permet également de traiter des problèmes à plusieurs millions de degrés de liberté.

Enfin, les mésomodèles standard et amélioré sont depuis peu implantés dans Abaqus/Standard [Lubineau et Ladevèze, 2008]. Le mésomodèle standard est également implanté dans SAMCEF. Ces introductions dans des codes de calcul développés pour l'industrie permettent de réaliser des simulations profitant des autres fonctionnalités de ces logiciels (voir Figure 3.8).



**FIGURE 3.8:** Développement d'endommagement diffus (en haut) et de microfissuration (en bas) avec le mésomodèle amélioré [Lubineau et Ladevèze, 2008]



## 7 Conclusions sur la mésomodélisation des stratifiés

Chacune des versions du mésomodèle a été appliquée avec succès à de nombreux cas d'études. Les thèses d'Allix (HDR) [Allix, 1992] et Le Dantec [Le Dantec, 1989] pour le mésomodèle standard, de Lubineau [Lubineau, 2002] et Marsal [Marsal, 2005] pour le mésomodèle amélioré, et de Violeau [Violeau, 2007] et Trovalet [Trovalet, 2010] pour le modèle hybride, proposent une analyse détaillée de chacun des modèles et de leurs capacités de prédiction. On retiendra que le mésomodèle standard est de loin la version la moins coûteuse des trois et qu'elle demeure parfaitement appropriée pour simuler l'état de zones faiblement endommagées, sans couplage fort fissuration-délaminage. Le mésomodèle amélioré, pour sa part, est un bon compromis entre performances des calculs et représentativité des mécanismes de dégradation, avec des variables spécialement introduites pour la fissuration traversante et un couplage fort avec le délaminage. Enfin, le modèle hybride n'a pas les mêmes prétentions en termes de performances de calcul. En effet, il a pour principal objectif de servir de *matériau virtuel de référence*, en offrant une description plus détaillée des dégradations discrètes qui facilite la validation, notamment dans des cas de fortes localisations.

Dans le cadre de l'étude du phénomène de plissement, il a été évoqué que le *splitting* peut parfois précéder ou accompagner le développement de la *kink-band*. Une mauvaise représentation de ce phénomène risque de dégrader la pertinence des prédictions de rupture. C'est pourquoi le modèle hybride a été choisi. De plus, son échelle de description est la plus proche du phénomène de dégradation que l'on souhaite intégrer, ce qui devrait faciliter la validation d'un certain nombre de cas-tests. Par ailleurs, elle devrait permettre d'observer l'apparition de couplages naturels entre plissement et fissuration. Enfin, elle fait office d'étape intermédiaire à l'identification d'un mésomodèle intégrant la rupture par *kinking* et ses couplages.

# Bilan sur l'état de l'art et problématiques actuelles

Après cette analyse de l'état de l'art dans les trois grands domaines qui vont être abordés dans cette thèse, un bref récapitulatif s'impose.

On souhaite modéliser la réponse en compression des stratifiés dans le sens des fibres. Compte tenu des observations phénoménologiques, on choisit de ne pas considérer son comportement comme comportement élastique-fragile, avec une rupture ultime prédite par un critère. En effet, les critères de la littérature ne permettent pas une prévision satisfaisante de l'état de dégradation, des couplages entre les mécanismes et de l'énergie dissipée. En revanche, certains micromodèles offrent de telles informations. Le modèle de Budiansky & Fleck est préféré pour deux raisons : il introduit peu de paramètres, mais au moins ceux jugés critiques pour la prévision du *kinking* par les études expérimentales ; de plus il a déjà été adapté à la simulation numérique par Éléments Finis dans la thèse de Guimard. Cependant, ses capacités de prédiction en termes de contrainte à rupture sont discutables pour les valeurs de défauts observées par Paluch. Il est donc impératif de proposer avant tout une meilleure description des mécanismes de dégradation activés pour améliorer les prédictions de ce micromodèle.

Afin d'intégrer cette réponse dans des simulations numériques à une échelle supérieure, permettant de tester virtuellement des échantillons complets, on choisit d'identifier un comportement mésoscopique prédéfini par une méthode d'homogénéisation. En effet, le coût numérique de ces approches est plus faible que celui des méthodes dites d'homogénéisation numérique. Par ailleurs, on dispose déjà d'une forme du potentiel énergétique et des variables internes que l'on souhaite enrichir (voir ci-dessous). Cependant, l'absence d'hypothèse sur l'état des dégradations implique plusieurs trajets de chargement pour identifier l'évolution et les couplages des variables internes mises en jeu. Autre difficulté, le fait que la microstructure présente une certaine variabilité et soit non-linéaire géométriquement suggère un traitement spécifique. Il faudra donc prendre des précautions toutes particulières en plus de celles connues et mentionnées dans l'état de l'art.

Enfin, l'identification de ce comportement devrait permettre d'enrichir un mésomodèle adapté à la simulation de structures composites tridimensionnelles (à terme, d'absorbeurs de chocs). Dans ce cadre, on fait le choix d'utiliser le mésomodèle d'endommagement développé au LMT-Cachan. En effet, il permet de réaliser des simulations à l'échelle de l'échantillon dans un temps raisonnable, en quasi-statique ou en dynamique, tout en intégrant des informations suffisantes sur les mécanismes de dégradation. Toutefois, pour une première validation en quasi-statique, on choisit d'utili-

ser la version hybride de ce modèle, qui permet de représenter explicitement des phénomènes discrets dont la taille caractéristique est proche de celle du *kinking*. Cela devrait permettre d'une part une validation plus aisée des résultats, et d'autre part d'observer d'éventuels couplages naturels entre *kinking* et *splitting*.

Ces questions sont adressées dans la seconde partie de ce manuscrit.

**Deuxième partie**

**Synthèse des travaux et  
développements**



# Chapitre 4

## Modélisation micromécanique du plissement dans les plis unidirectionnels

*Ce chapitre présente les travaux consacrés à la modélisation micromécanique du comportement jusqu'à rupture d'un pli unidirectionnel. Le phénomène de plissement est le mode de rupture privilégié de nombreux matériaux composites en compression dans le sens des fibres. Il se caractérise par une instabilité due à la fois au flambage localisé des fibres et au cisaillement de la matrice entre elles. Sa modélisation quantitative nécessite la prise en compte de trois éléments clefs : la statistique d'ondulation des fibres, les non-linéarités matérielles dans la matrice et le couplage avec des chargements de cisaillement locaux ou globaux. Fort de tous ces ingrédients, un modèle robuste basé sur la kinking theory est proposé et analysé.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Micromodèle de flambage unidirectionnel</b> . . . . .	<b>70</b>
1.1	Principe et définition d'un VER . . . . .	70
1.2	Modélisation du comportement des constituants . . . . .	72
<b>2</b>	<b>Réponse d'une microstructure statistique à des chargements mixtes</b> . .	<b>78</b>
2.1	Observations préliminaires . . . . .	78
2.2	Études de sensibilité . . . . .	80
2.3	Influence du défaut d'alignement des fibres . . . . .	81
2.4	Influence de la mixité du chargement . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Conclusions sur le modèle micromécanique</b> . . . . .	<b>89</b>

---

# 1 Micromodèle de flambage unidirectionnel

Il s'agit ici de définir un micromodèle de flambage aussi simple que possible, mais susceptible de reproduire de façon quantitative la réponse de la microstructure d'un pli à fibres longues à une sollicitation de compression mixte. Pour satisfaire cette exigence, il est nécessaire de prendre en compte les principaux paramètres influant significativement sur cette réponse, comme décrit dans l'état de l'art (voir Chapitre 1). Cette section ne présente que le micromodèle en lui-même, largement basé sur le modèle numérique développé pendant la thèse de Guimard [Guimard *et al.*, 2007]. Ses performances et limites sont analysées dans la section suivante.

## 1.1 Principe et définition d'un VER

Considérons le Volume Élémentaire Représentatif de la microstructure  $\Omega$  représenté sur la Figure 4.1 dans un repère  $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ . Cet élément de volume de longueur  $L$  et de section  $S$  est composé de fibres rigides (de diamètre  $\delta_f$  et avec un ratio volumique  $\eta_f$ ) entourées d'une matrice souple. Il est soumis à un chargement de compression-cisaillement défini par les contraintes macroscopiques  $\sigma_0$  et  $\tau_0$ , reliées aux déformations associées par les modules élastiques homogénéisés du composite  $E_1^0$  et  $G_{12}^0$ .

Le VER est considéré périodique suivant la direction  $\underline{e}_t$ , qui forme un angle  $\beta$  avec  $\underline{e}_2$ ,  $\beta$  étant l'angle final de la *kink-band*. Par ailleurs, on fait l'hypothèse de contraintes planes. Enfin, l'ensemble de le VER est considéré comme présentant un léger mésalignement avec la direction  $\underline{e}_1$ , d'amplitude  $\bar{v}_0$  de demi-longueur d'onde  $x_0$ . Ce défaut implique une déflexion initiale des fibres non-nulle de la forme :

$$v_0(x) = \bar{v}_0 \sin\left(\frac{\pi x}{x_0}\right) \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (4.1)$$

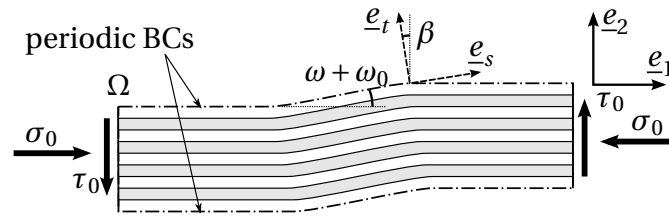


FIGURE 4.1: Volume Élémentaire unidirectionnel Représentatif de la microstructure

Considérons maintenant l'équilibre quasistatique de cet RVE. L'équilibre des efforts suivant  $\underline{e}_1$  implique :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_0 \quad (4.2)$$

Sous l'hypothèse de flambage linéarisé, l'équilibre des efforts suivant  $\underline{e}_2$  s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \sigma_{11} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Au vu de l'hypothèse de périodicité et si l'on suppose la cinématique de la faible épaisseur de matrice pilotée par celle des fibres, toutes ces variables sont constantes suivant la direction  $\underline{e}_t$  et ne dépendent que de  $s = x \cos \beta + y \sin \beta$ , d'où :

$$\sigma_{22} \tan \beta + \sigma_{12} - \sigma_{11} (\omega + \omega_0) = 0 \quad (4.4)$$

Enfin, l'équilibre des moments dans le plan implique :

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \sigma_{21} - \sigma_{12} - \tau_0 \quad (4.5)$$

En substituant les équilibres des efforts dans l'équation d'équilibre en moments :

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \sigma_{21} + \sigma_{22} \tan \beta - \sigma_0 (\omega + \omega_0) - \tau_0 \quad (4.6)$$

On suppose le moment dû à la flexion élastique des fibres via la relation :

$$m = \frac{E_1^0 \delta_f^2}{16} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (4.7)$$

où  $\delta_f$  est le diamètre des fibres.

D'où :

$$\frac{E_1^0 \delta_f^2}{16} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma_0 (\omega + \omega_0) - (\sigma_{21} + \sigma_{22} \tan \beta - \tau_0) = 0 \quad (4.8)$$

On fait l'hypothèse que les fibres obéissent à un comportement de type poutre élastique d'Euler-Bernoulli :

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.9)$$

Les déformations  $\gamma_{21}$  et  $\varepsilon_{22}$  sont alors définies par :

$$\gamma_{21} = \frac{\partial v}{\partial x} = \omega \quad \text{et} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = \omega \tan \beta \quad (4.10)$$

Dès lors, l'Équation 4.8 ne dépend que d'une inconnue cinématique  $\omega$  et on peut la mettre sous forme faible. On cherche  $\omega \in CA$  tel que  $\forall \omega^* \in CA$  à 0 :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{E_1^0 \delta_f^2}{16} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma_0 (\omega + \omega_0) - (\sigma_{21} + \sigma_{22} \tan^2 \beta - \tau_0) \right) \omega^* d\Omega = 0 \quad (4.11)$$

Si l'on considère les fibres indéformables outre leur élasticité en flexion, le problème est entièrement unidirectionnel et il vient :

$$\int_{-L}^L \left( E_1^0 I \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \eta_f S \sigma_0 (\omega + \omega_0) - (1 - \eta_f) S (\sigma_{21} + \sigma_{22} \tan^2 \beta - \tau_0) \right) \omega^* d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

Une fois mis sous cette forme, le problème peut être discrétisé par la Méthode des Éléments Finis, par exemple dans le code de calcul matriciel *QtOctave* [Eaton, 2002].



Dans la thèse de Guimard, ceci a été fait pour le cas de la compression seule grâce des éléments poutre de Hermite. De plus, en raison de la symétrie du problème, seule la moitié du VER a été simulée. Enfin, une méthode de pilotage à longueur d'arc a été implantée pour pouvoir passer d'éventuels *snap-back* [Wempner, 1971, Riks, 1972, Riks, 1978, Crisfield, 1981]. Le dernier ingrédient du modèle est la loi de comportement liant  $\sigma_{21}$  à  $\gamma_{21}$  et  $\sigma_{22}$  à  $\varepsilon_{22}$ , qui sera discutée dans la partie suivante.

## 1.2 Modélisation du comportement des constituants

Pour la simulation du kinking, le choix du comportement des constituants est crucial. Depuis les travaux de Schuerch, la nécessité de prendre en compte l'inélasticité de la matrice est un fait acquis, la loi liant  $\sigma_{21}$  à  $\gamma_{21}$  et  $\sigma_{22}$  à  $\varepsilon_{22}$  se devant de présenter une phase non-linéaire. Par exemple, la *kinking theory* définit :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{21}^2 + \frac{G_{12}^0}{E_2^0} \sigma_{22}^2} \quad \text{et} \quad \gamma_{eq} = \omega \sqrt{1 + \frac{G_{12}^0}{E_2^0} \tan^2 \beta} \quad (4.13)$$

Pour Budiansky et Fleck, ces variables obéissent à une loi de Ramberg-Osgood à trois paramètres (la limite élastique en contrainte  $\sigma_y$ , en déformation  $\gamma_y$  et l'exposant non-linéaire  $n$ ) [Ramberg et Osgood, 1943] :

$$\frac{\gamma_{eq}}{\gamma_y} = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} + \frac{3}{7} \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^n \quad (4.14)$$

Guimard et Allix ont introduit pour leur part des déformations irréversibles obéissant à une loi élasto-plastique de Prandtl-Reuss [Prandtl, 1924, Reuss, 1930] :

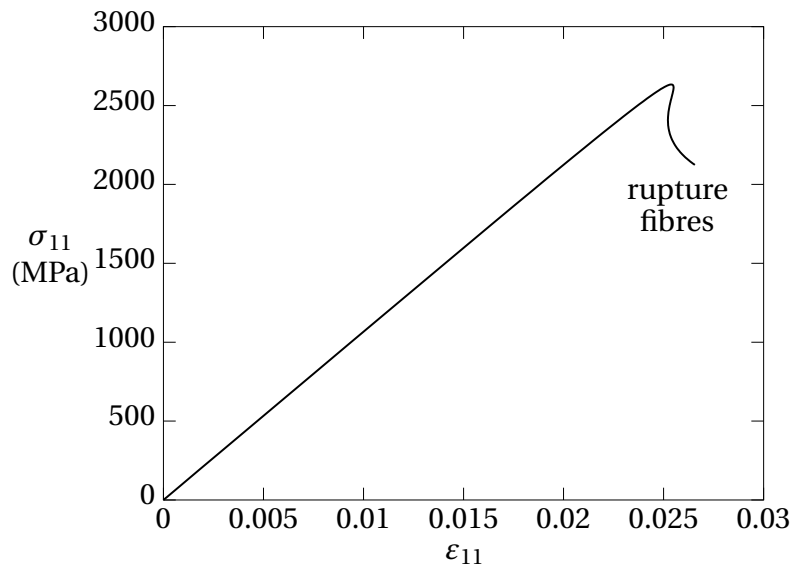
$$\gamma_{eq} = \gamma_{eq}^e + \gamma_{eq}^p \quad (4.15)$$

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_y - R(\gamma_{eq}^p) \leq 0 \quad (4.16)$$

$$R(\gamma_{eq}^p) = K \times (\gamma_{eq}^p)^m \quad (4.17)$$

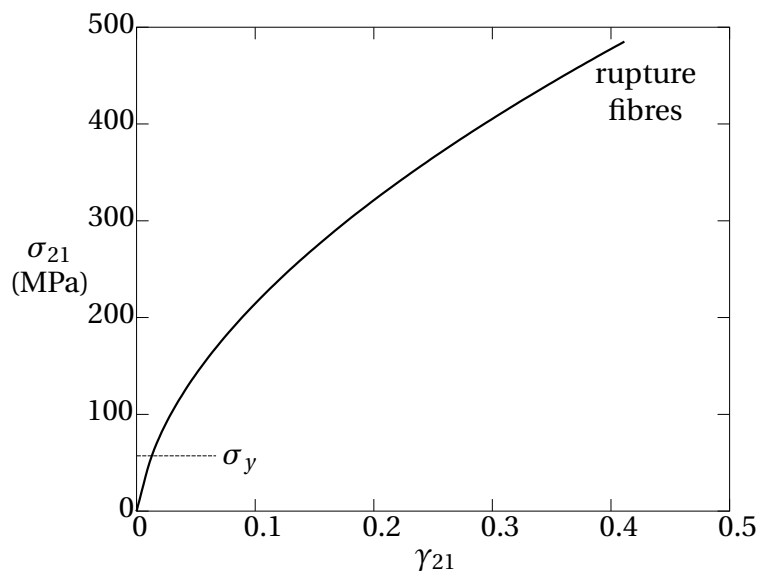
Dans l'état de l'art, plusieurs observations expérimentales ont fait état de fortes dégradations au sein de la *kink-band*, à savoir de décohésions fibres-matrice et de micro-fissures. Toutefois, elles ne sont généralement pas intégrées dans les modèles de kinking. Afin de mettre en évidence la nécessité de leur modélisation, il suffit d'étudier l'état de la microstructure simulée à l'issue d'un calcul sans leur prise en compte. Considérons un VER avec une ondulation  $\lambda_0 = 0.01$ , soumis à un chargement de compression pure ( $\tau_0 = 0$ ) jusqu'à ce que le critère de rupture des fibres  $\varepsilon_f$  (voir plus loin) soit atteint. La réponse est tracée Figure 4.2.

On s'intéresse à l'état local du matériau, au milieu de la *kink-band*. La Figure 4.3 trace l'évolution de la contrainte  $\sigma_{21}$  en fonction de la déformation  $\gamma_{21}$  au cours du calcul. On remarquera que  $\sigma_{21}$  atteint alors des valeurs absolument irréalistes, excédant près de 10 fois la limite élastique  $\sigma_y$ , et que  $\gamma_{21}$  atteint des valeurs de l'ordre de



**FIGURE 4.2:** Courbe de réponse globale en compression au cours de la simulation

50%. On pourra arguer que ces valeurs sont atteintes à la rupture des fibres, ce qui se produit après le passage du pic correspondant à la contrainte maximale de compression. Toutefois, dans une optique de prédiction de l'énergie dissipée, l'aire sous la courbe au moment de la rupture est toute aussi importante que la dite contrainte maximale. Ainsi, l'introduction de modèles de dégradations susceptibles de mieux reproduire l'état de la microstructure est indispensable.



**FIGURE 4.3:** Courbe de réponse locale en cisaillement au cours de la simulation

Si le micromodèle s'y prête, ces dégradations peuvent être représentées de façon explicite, par exemple à l'aide d'éléments cohésifs séparant les fibres et la matrice pour

la décohésion et d'un modèle de rupture ductile pour la microfissuration [Mediavilla *et al.*, 2006]. Dans le cas unidirectionnel présent, la mécanique de l'endommagement est une simplification acceptable. En effet, elle revient à considérer que ces dégradations sont elles aussi périodiques selon  $e_t$  et que le VER est suffisamment large devant la dimension caractéristique des dégradations, ce qui est en accord avec les hypothèses précédentes. L'équipe de Pinho a également introduit de l'endommagement dans leur modèle, mais qui affecte la raideur en compression des fibres [Pimenta *et al.*, 2009].

Afin de représenter les effets de ces dégradations sur le comportement en cisaillement et en traction transverse du VER, deux variables sont introduites,  $d$  et  $d'$  respectivement. De plus, le matériau va toujours être considéré comme inélastique dans ces directions, en raison du comportement non-linéaire de la matrice et des glissements entre les phases dégradées. L'évolution de ces variables internes et leurs couplages a déjà été étudié, dans le cadre du mésomodèle d'endommagement des stratifiés (voir Chapitre 3). Le comportement matériau décrit ci-après est essentiellement basé sur cette description, ce qui a également l'avantage de le rendre compatible avec le mésomodèle qui servira de cible à l'homogénéisation.

La densité d'énergie de déformation élastique en tout point  $x$  du VER s'écrit :

$$\rho \Psi^e = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{21}^2}{G_{12}^0(1-d)} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2}{E_2^0(1-d')} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle^2}{E_2^0} \right) \quad (4.18)$$

où  $\langle \bullet \rangle$  est la fonction partie positive, qui permet de différencier les chargements de traction, qui ont tendance à ouvrir les fissures et à être affectés par l'endommagement, des chargements de compression, qui ont tendance à fermer les fissures et à ne pas être affectés. Puisque l'on considère que l'endommagement ne varie pas suivant la direction  $e_t$  du VER, toutes les énergies peuvent être aisément intégrées dans la section  $S$  et ne varient que suivant  $x$ . Les forces thermodynamiques conjuguées aux variables internes  $d$  et  $d'$  s'écrivent :

$$Y_d = -\rho \left. \frac{\partial \Psi^e}{\partial d} \right|_{\sigma_{21}} = \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}^0(1-d)^2} \quad \text{et} \quad Y_{d'} = -\rho \left. \frac{\partial \Psi^e}{\partial d'} \right|_{\sigma_{22}} = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2}{2E_2^0(1-d')^2} \quad (4.19)$$

L'évolution des variables d'endommagement s'écrit alors, à l'instant  $t$  :

$$d = \sup_{\tau \leq t} \left( \frac{\langle \sqrt{Y} - \sqrt{Y^0} \rangle}{\sqrt{Y^C} - \sqrt{Y^0}} \right) \quad \text{et} \quad d' = b'd \quad (4.20)$$

avec :

$$Y = Y_d + bY_{d'} \quad (4.21)$$

Afin d'introduire un couplage entre endommagement et plasticité, on définit les contraintes effectives :

$$\tilde{\sigma}_{21} = \frac{\sigma_{21}}{1-d} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_{22} = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{1-d'} - \langle -\sigma_{22} \rangle \quad (4.22)$$

L'équivalence en énergie dissipée se réduit à :

$$\tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \sigma : \dot{\varepsilon}^p \quad (4.23)$$

Ce qui définit les déformations inélastiques effectives :

$$\dot{\tilde{\gamma}}_{21}^p = \dot{\gamma}_{21}^p (1 - d) \quad \text{et} \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{22}^p = \dot{\varepsilon}_{22}^p (1 - \mathcal{H}(\sigma_{22}) d') \quad (4.24)$$

où  $\mathcal{H}$  est la fonction Heaviside. Enfin l'hypothèse de partition des déformations implique :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p \quad (4.25)$$

La fonction seuil inélastique peut alors s'écrire en termes de contraintes effectives :

$$f(\tilde{\sigma}, p) = \sqrt{\tilde{\sigma}_{21}^2 + (a\tilde{\sigma}_{22})^2} - R(p) - \sigma_y \quad (4.26)$$

où  $\sigma_y \equiv R_0$  est la limite élastique initiale et  $R(p)$  est une loi d'érouissage isotrope de Prandtl-Reuss :

$$R(p) = K p^m \quad (4.27)$$

On remarquera qu'il ne s'agit pas là d'un *modèle* de plasticité de Prandtl-Reuss, car celui-ci suppose une isotropie matérielle et une surface de charge de von Mises. En revanche, l'hypothèse de plasticité associée et la loi d'évolution en puissance sont conservées. Par ailleurs, les paramètres d'inélasticité sont différents de ceux utilisés par Guimard et Allix, malgré la similitude de la loi (voir plus loin pour les valeurs retenues dans le cadre de l'étude). La loi d'écoulement est gouvernée par les équations de cohérence [Prager, 1949, Drücker, 1951] :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{et} \quad f \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} f = 0 \quad (4.28)$$

l'hypothèse de plasticité associée impliquant :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \right|_R = \dot{p} \left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \right|_R \quad (4.29)$$

Enfin, on a supposé que les fibres fléchissaient de façon élastique, mais seulement jusqu'à un certain point. Ainsi, un critère de rupture fragile en ouverture est introduit :

$$\frac{\delta_f}{2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right| + \frac{\sigma_0}{E_1} \leq \varepsilon_f \quad (4.30)$$

la valeur de  $\varepsilon_f$  étant directement liée à la force thermodynamique à rupture des fibres en traction du mésomodèle  $Y_f = E_1^0 \varepsilon_f^2$ .

Afin de réaliser des comparaisons quantitatives, on se donne les valeurs des paramètres introduits dans le modèle pour un pli de T300/BSL-914C. Compilés dans le Tableau 4.1, ils sont issus des identifications expérimentales de Le Dantec, Paluch et Guimard [Le Dantec, 1989, Paluch, 1994, Guimard, 2009]. La réponse contrainte-déformation de cisaillement avec décharges d'un pli  $[\pm 45]_{4S}$  (Figure 4.4) permet d'identifier la loi d'évolution de l'endommagement (Figure 4.5) et la loi d'érouissage (Figure 4.6). La loi de comportement ainsi obtenue est comparée avec celle utilisée par Guimard et Allix (Figure 4.7) en termes de  $\sigma_{eq}(\gamma_{eq})$ . Jusqu'à 1.5% de déformation, les deux réponses sont quasiment confondues.

PARAMÈTRE	NOTATION	VALEUR
Diamètre moyen des fibres	$\delta_f$	7 $\mu\text{m}$
Ratio volumique de fibres	$\eta_f$	0.6
Amplitude de mésalignement	$\bar{v}_0$	0.53 – 6.31 $\mu\text{m}$
Demi-longueur d'onde de mésalignement	$x_0$	620 – 1160 $\mu\text{m}$
Module d'Young longitudinal	$E_1^0$	130 GPa
Module d'Young transverse	$E_2^0$	8.5 GPa
Module de cisaillement plan	$G_{12}^0$	4.2 GPa
Limite élastique	$R_0$	64 MPa
Module d'écroutissage	$K$	1000 MPa
Exposant de l'écroutissage	$m$	0.54
Couplage inélastique	$a$	0.7
Force thermodynamique d'initiation	$Y^0$	0.03 MPa
Force thermodynamique critique	$Y^C$	8 MPa
Couplage des forces associées	$c$	0.5
Couplage des endommagements	$c'$	0.8
Rupture des fibres	$\varepsilon_f$	0.01

TABLE 4.1: Paramètres matériau d'un pli de T300/BSL-914C unidirectionnel

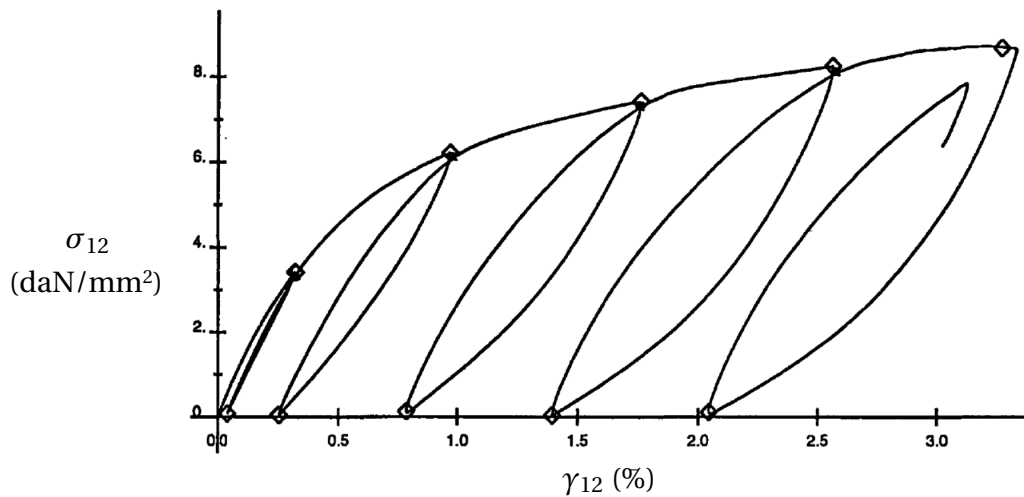


FIGURE 4.4: Courbe de réponse expérimentale d'un pli croisé  $\pm 45$  [Le Dantec, 1989]

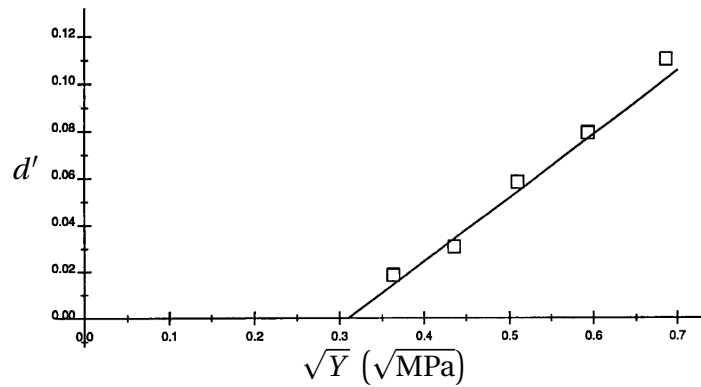


FIGURE 4.5: Loi d'évolution de l'endommagement identifiée à partir de la Courbe 4.4

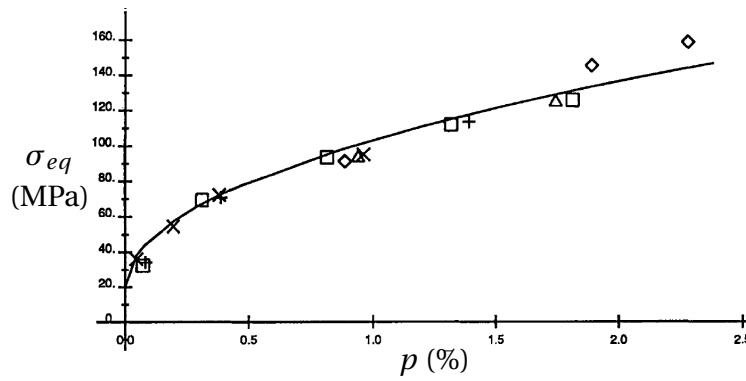


FIGURE 4.6: Loi d'écroutissement identifiée à partir de la Courbe 4.4

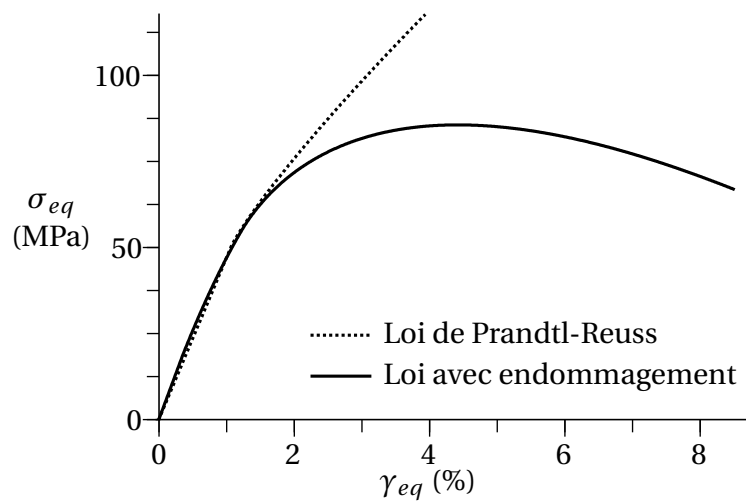


FIGURE 4.7: Comparaison de la loi utilisée avec un modèle élasto-plastique

## 2 Réponse d'une microstructure statistique à des chargements mixtes

On se propose à présent d'analyser la réponse du micromodèle et sa sensibilité aux divers paramètres de l'étude. Lorsque c'est possible, ces analyses sont faites en regard des résultats expérimentaux disponibles pour le matériau considéré. L'objectif est de valider quantitativement le modèle et ses hypothèses principales, mais aussi de quantifier l'influence des paramètres du problème d'après les observations expérimentales. Seuls les paramètres les plus pertinents seront retenus pour la suite de l'étude.

### 2.1 Observations préliminaires

Reprenons la simulation numérique simple réalisée dans la section précédente. On considère un VER avec une ondulation  $\lambda_0 = 0.01$ , soumis à un chargement de compression pure ( $\tau_0 = 0$ ) jusqu'à ce que le critère de rupture des fibres  $\varepsilon_f$  soit atteint. La réponse avec le modèle et les paramètres matériau introduits dans le chapitre précédent est tracée Figure 4.8. On remarquera deux choses : une contrainte maximale nettement plus faible, avec une réduction de l'ordre de 40% ; et un *snap-back* plus prononcé, accompagné d'une aire sous la courbe sensiblement diminuée.

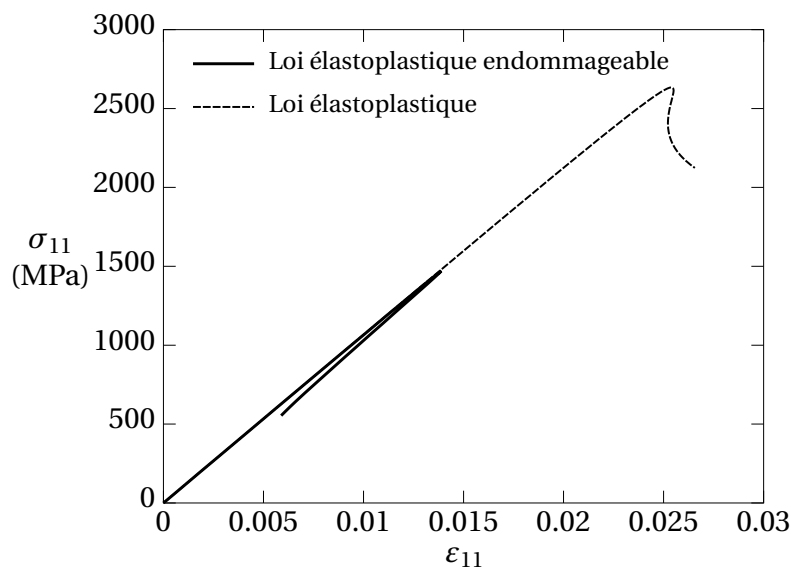
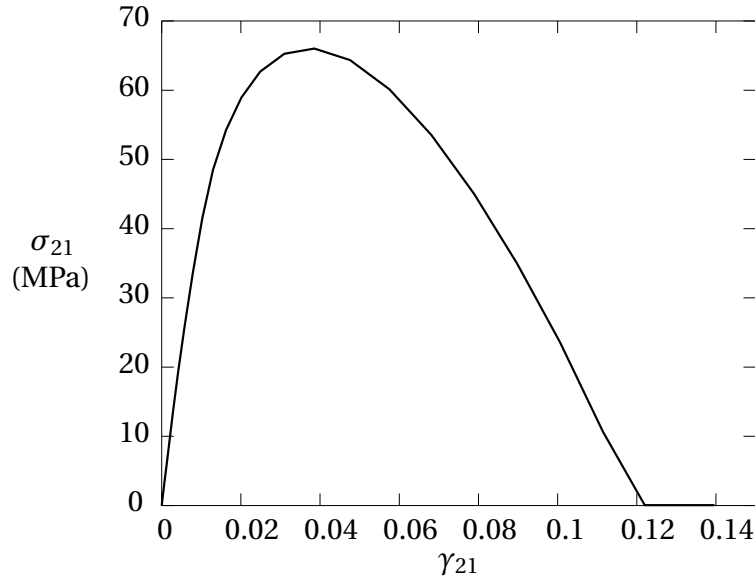


FIGURE 4.8: Courbe globale contrainte-déformation de compression au cours de la simulation

À titre de comparaison, l'évolution de la contrainte et de la déformation de cisaillement là où la matrice est la plus sollicitée est à nouveau tracée dans la Figure 4.9. On distingue un comportement présentant un maximum de contrainte d'environ 65 MPa, une valeur en accord avec les essais, et un adoucissement progressif passé ce pic. Ainsi, l'énergie dissipée (aire sous la courbe) est finie, et la contrainte atteint une valeur nulle

au-delà d'une déformation d'environ 12%. Enfin, les valeurs de  $d$  et  $d'$ , ainsi que de la plasticité cumulée dans toutes les directions, sont connues à tout instant du calcul.



**FIGURE 4.9:** Courbe locale contrainte-déformation de cisaillement au cours de la simulation

On peut donc conclure que le principal problème lié à l'utilisation d'un modèle de comportement élastoplastique est résolu. Le comportement des microconstituants est plus réaliste et l'énergie dissipée est bornée. Par ailleurs, ce choix de modélisation a deux autres effets notables.

Tout d'abord, on aura remarqué la chute drastique de la contrainte maximale en compression, d'environ 2600 à 1490 MPa (voire 1360 pour  $Y_6^C$  MPa, valeur retrouvée dans [Daghia *et al.*, 2009]). Cette chute rapproche sensiblement la valeur de contrainte à rupture à celle des observations expérimentales, même si elle fait plutôt figure de maximum. Par exemple, Vittecoq a observé des contraintes à rupture variant entre 1250 et 1370 MPa pour le même matériau. Les résultats numériques se situent donc sur la borne haute des prédictions.

Par ailleurs, à l'issue du calcul, on constate sur la Figure 4.10 que l'endommagement s'est essentiellement développé à l'intérieur de la *kink-band* ( $\approx 90\%$ ), de même que la plasticité d'ailleurs ( $\approx 100\%$ ). En plusieurs points, les variables d'endommagement ont atteint 1. Pourtant, il est intéressant de noter l'absence de localisation des déformations, problème dont l'occurrence est liée à l'utilisation de la méthode des éléments finis avec des modèles adoucissants locaux tels que celui-ci [Court, 2006]. Or, dans le cas présent, le comportement élastique de la fibre ne s'adoucit pas et permet de régulariser la solution en conservant l'ellipticité des équations d'équilibre.

Inversement, à l'extérieur de la *kink-band*, les non-linéarités matérielles sont très faibles ( $\leq 5\%$  de l'énergie totale). Ainsi, si l'énergie spécifique dissipée dans l'ensemble de l'échantillon est d'environ 1.5 kJ/kg (contre environ 12 kJ/kg pour le modèle matériau sans endommagement, voir Figure 4.11), on peut estimer l'énergie spécifique



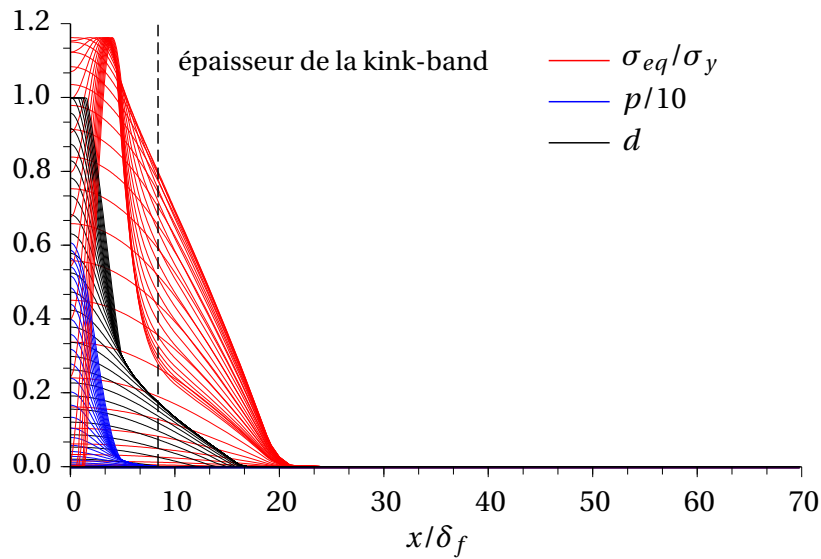


FIGURE 4.10: Évolution de l'endommagement diffus, de la plasticité cumulée et de la contrainte équivalente au cours de la simulation, pour  $x \in [0, L]$

dissipée dans la *kink-band* à environ cinq fois cette valeur. Avec 7 kJ/kg, l'énergie spécifique absorbée simulée correspond à une fraction non-négligeable (12 à 80%) de l'énergie dissipée mesurée dans les essais.

## 2.2 Études de sensibilité

On s'intéresse à présent à l'influence des paramètres du problème pour la prévision de la rupture, notamment d'un point de vue énergétique. Pour l'essentiel, cela revient à effectuer une analyse de sensibilité aux différents paramètres jugés critiques, d'après l'étude bibliographique menée dans le Chapitre 1. Si l'on considère les valeurs matérielles et géométriques "classiques" (i.e.  $\tan \beta$ ,  $\eta_f$ ,  $\delta_f$ , etc.) comme connues, les deux principaux paramètres influant sur la prédiction de la rupture par *kinking* sont :

- l'ondulation ou le mésalignement des fibres  $\lambda_0$  (le ratio de l'amplitude  $\bar{v}_0$  sur la longueur d'onde  $x_0$ ) ;
- la mixité du chargement, et notamment dans ce cas la présence de cisaillement.

Contrairement à de nombreuses études micromécaniques, les effets de ces paramètres sur la géométrie de la *kink-band* (outre son épaisseur) ne seront pas étudiés. En effet, ces considérations sont d'un ordre de grandeur microscopique : elles n'ont pas d'impact significatif sur, par exemple, la quantité d'énergie dissipée par un absorbeur de choc composite. En revanche, le comportement du VER est une préoccupation première, à savoir sa réponse globale (et notamment sa contrainte à rupture  $\sigma_C$ ) mais aussi les contributions des différents mécanismes de dégradations introduits dans le modèle. Entre autres, l'activation de ces mécanismes va affecter significativement l'énergie dissipée au cours du processus  $\phi_f$ , une donnée rarement étudiée dans la littérature. Cette énergie est calculée à l'instant où le matériau est totalement rompu,

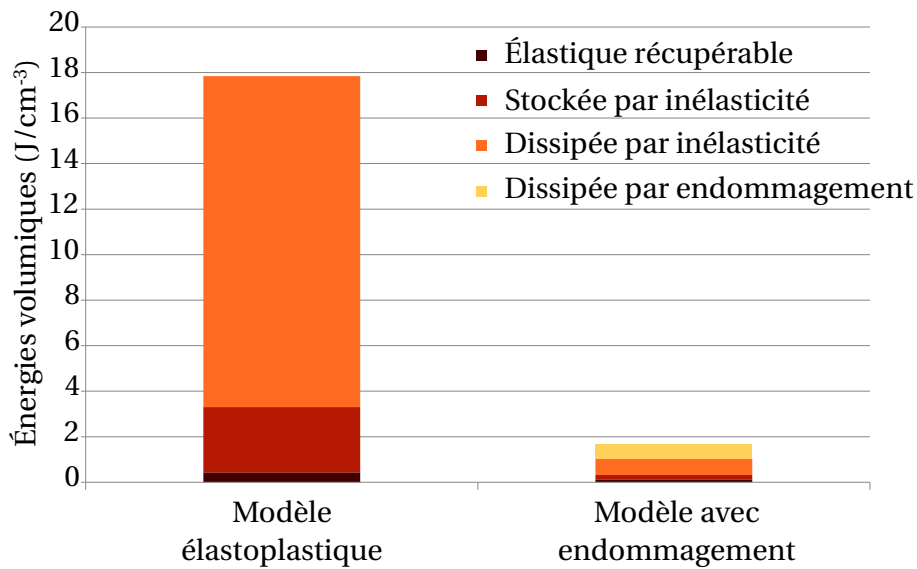


FIGURE 4.11: Énergies volumiques récupérable, stockée et dissipées selon le modèle de comportement matériau utilisé

ce qui correspond ici au critère de rupture des fibres  $\varepsilon_f$ . Dans le cas où la rupture des fibres ne serait pas toujours atteinte, on s'intéressera à l'énergie dissipée  $\phi_C$  à l'instant de la contrainte longitudinale maximale à rupture  $\sigma_C$ .

### 2.3 Influence du défaut d'alignement des fibres

L'influence critique des défauts de la microstructure est une problématique reconnue depuis les travaux d'Argon. Ces défauts ont essentiellement pour origine le procédé de fabrication, qui produit des fibres présentant une légère ondulation (souvent inférieure à  $1^\circ$  pour les fibres de carbone) difficilement contrôlable. Par ailleurs, le procédé de cuisson puis de refroidissement des carbone-époxy peut accentuer ce phénomène, parfois de façon significative [Jochum *et al.*, 2007, Jochum *et al.*, 2008].

La mesure de l'ondulation des fibres est délicate et les travaux sur le sujet sont peu nombreux. Les observations de Paluch sont toutefois très complètes et fournissent d'importantes données sur ces valeurs et leur statistique. L'auteur relève notamment que l'orientation des défauts d'alignement est parfaitement aléatoire, bien qu'il ne discute pas leur distribution spatiale. L'amplitude et la longueur d'onde des ondulations évoluent entre les valeurs extrêmes indiquées dans le Tableau 4.1. On rappelle que la fonction densité de probabilité (FDP) de l'angle du défaut d'alignement  $\gamma_0$  était représentée sur la Figure 1.5, avec une valeur maximale de l'angle d'ondulation considéré de  $0.6^\circ$  (soit un ratio  $\lambda_0 \approx 0.01$ ). On pourra remarquer que Paluch a pourtant observé des valeurs d'angle d'ondulation supérieures à  $0.6^\circ$ , mais en raison de la technique de mesure séquentielle utilisée (par découpe micrométrique d'échantillons), ces valeurs ont été considérées comme trop incertaines pour être validées. Dans cet esprit, on se bornera dans la suite à des angles d'ondulation strictement inférieurs à  $0.6^\circ$ .

Guimard et Allix ont illustré l'influence critique de la statistique de défaut sur la réponse de la structure, en particulier sa contrainte à rupture. Dans le cas du modèle utilisé ici, cette influence demeure fondamentale, comme illustré par la Figure 4.12 (à cette échelle, les *snap-back* sont si prononcés qu'ils se confondent quasiment avec la pente élastique). En pratique, un défaut infinitésimal mènerait à une contrainte à rupture proche de la contrainte critique déterminée par une simple analyse de flambage élastique (soit  $\sigma_C \simeq 7000$  MPa). En revanche, plus l'ondulation augmente, plus la contrainte critique diminue (ici jusqu'à  $\sigma_C \simeq 1500$  MPa) et il en va de même pour la déformation longitudinale à rupture.

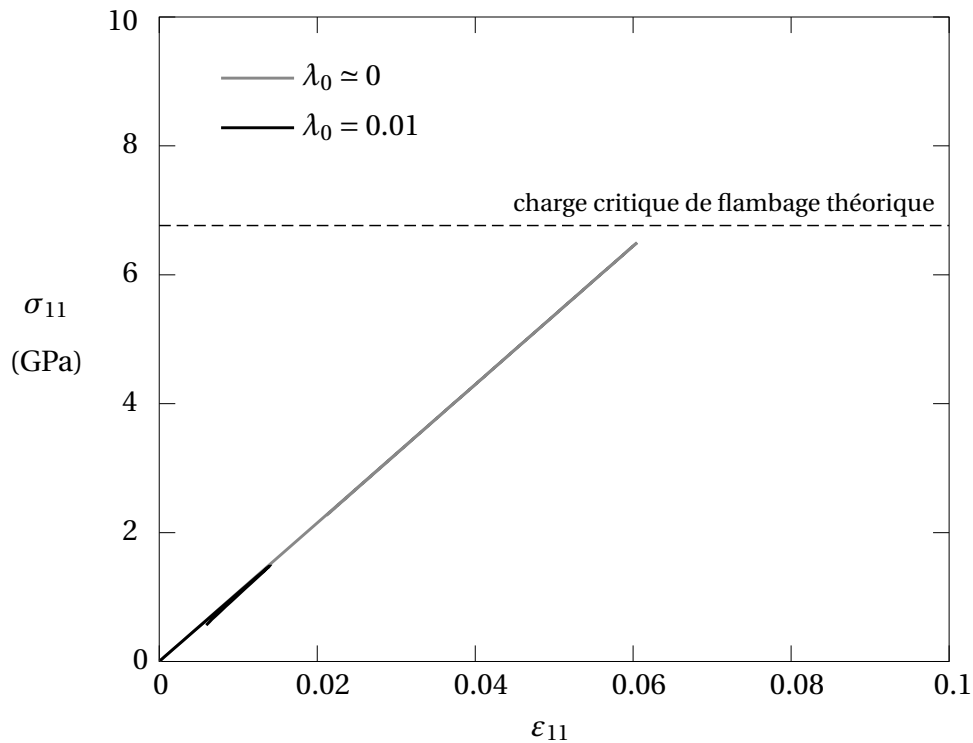


FIGURE 4.12: Courbe de réponse en compression pour  $\lambda_0 \simeq 0$  et  $\lambda_0 = 0.01$

Afin de juger quantitativement des effets des défauts, on trace l'évolution de la contrainte à rupture et de l'énergie dissipée sur un même graphe, directement en fonction de l'angle d'ondulation des fibres (voir Figure 4.13). On notera que les effets de taille ne sont pas pris en compte sur ce graphe, avec une demi-longueur d'onde  $x_0$  constante, seule l'amplitude  $\bar{v}_0$  variant. On constate ici que la contrainte à rupture dépend très fortement du défaut pour les valeurs les plus faibles. À mesure qu'on se rapproche de valeurs plus proches de  $0.6^\circ$ , la dépendance est moins prononcée.

En revanche, l'énergie absorbée à rupture, par tous les mécanismes dissipatifs ou capables de stocker de l'énergie, est nettement moins dépendante du défaut. On observe une tendance linéaire assez nette, de faible pente, qu'on peut sans doute corrélérer à l'épaississement de la kink-band avec l'angle d'ondulation (voir Figure 4.14).

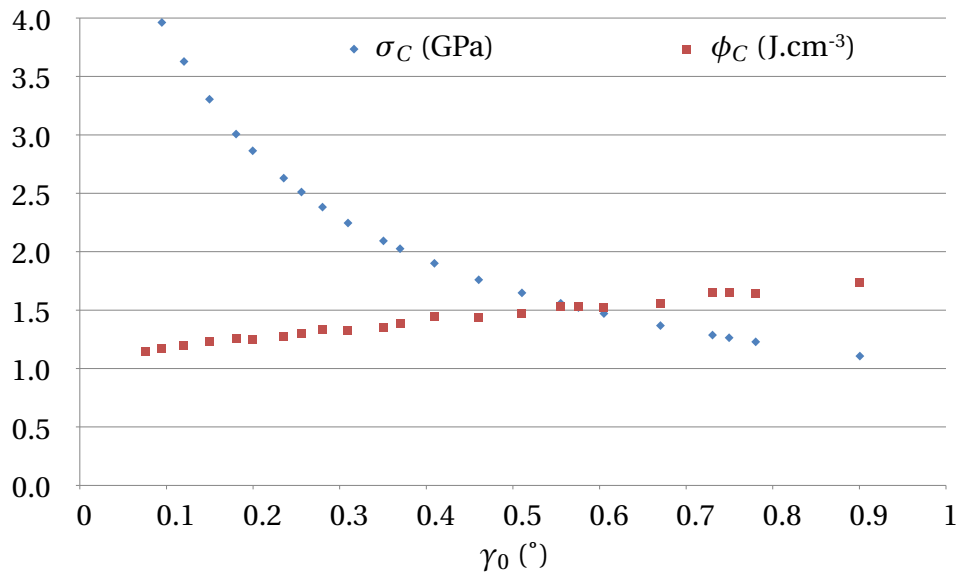


FIGURE 4.13: Influence de l'ondulation des fibres (à longueur d'onde constante) sur la contrainte et l'énergie dissipée à rupture

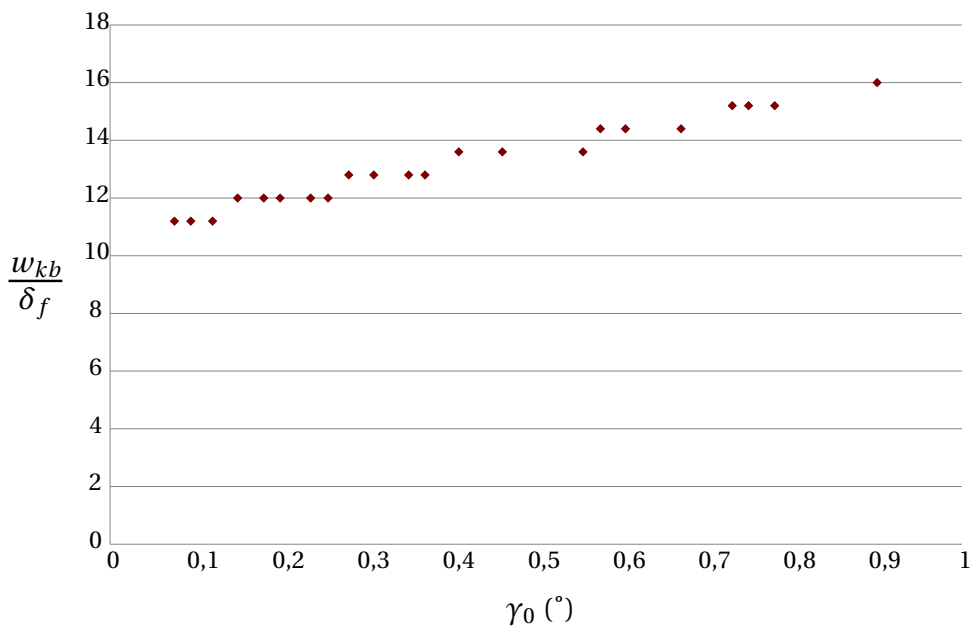


FIGURE 4.14: Épaisseur finale de la *kink-band* en fonction de  $\gamma_0$  (en diamètres de fibre)

Ajoutons à présent à la Figure 4.13 l'influence des effets de taille, en faisant varier  $x_0$  tout en gardant la taille du VER constante. Le résultat est tracé sur la Figure 4.15. On constate que la contrainte à rupture n'est quasiment pas affectée par cet effet, ce qui corrobore le choix d'un unique paramètre dimensionnant  $\lambda_0$  pour la prédiction de la contrainte à rupture. En revanche, l'énergie absorbée à rupture est affectée, comme on pouvait s'y attendre. En effet, la taille de la *process zone* augmentant avec la longueur d'onde, une plus grande quantité de matériau sera sollicitée en traction transverse-cisaillement au cours du kinking et absorbera donc de l'énergie. En pratique, cette influence est du même ordre de grandeur que celle de l'angle d'ondulation.

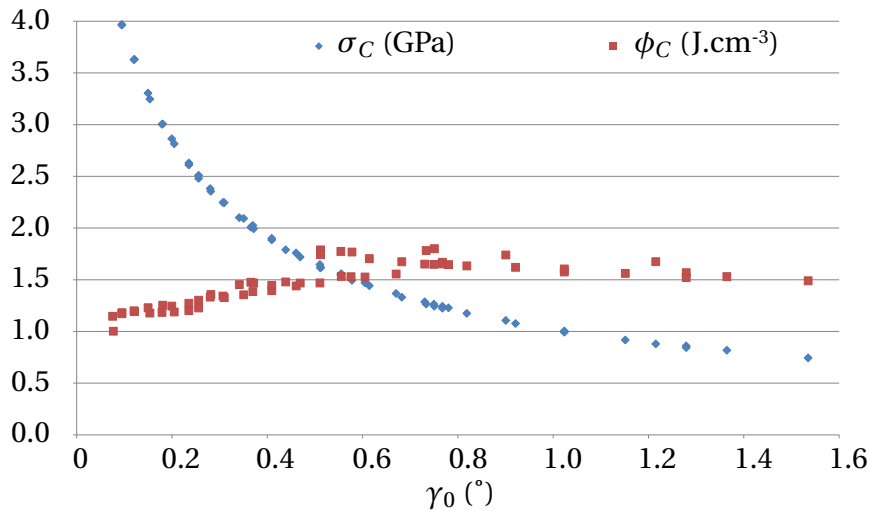


FIGURE 4.15: Influence de l'ondulation des fibres (à longueur d'onde variable) sur la contrainte et l'énergie dissipée à rupture

Pour mieux estimer la criticité de cette influence, on peut tracer la FDP de l'angle d'ondulation  $\lambda_0$ , de la contrainte à rupture  $\sigma_C$  et de l'énergie dissipée à rupture  $\phi_C$  sur la Figure 4.16. On définit alors une fonction de Weibull à trois paramètres ( $a$ ,  $b$  et  $c$ ) [Weibull, 1951] :

$$W(x; a, b, c) = 1 - e^{\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} \quad (4.31)$$

où  $x$  est l'abscisse de la variable considérée et  $c$  une mesure de la sensibilité de la fonction. Si l'on approxime chaque FDP par une fonction de Weibull, sa valeur de  $c$  permet de conclure quant à la sensibilité de chaque valeur. Ici, on obtient :

$$c_\lambda \simeq 2.3 \quad c_\sigma \simeq -4.1 \quad c_\phi \simeq 13.7 \quad (4.32)$$

La plage de variation très importante de l'angle d'ondulation se traduit par une valeur de  $c$  proche de 1. Puisque le module de Weibull de la contrainte à rupture est proche, cela indique qu'elle est très sensible à ce paramètre. On remarquera le signe opposé, qui indique la diminution de la contrainte à rupture lorsque l'angle d'ondulation augmente. Cependant, le module de Weibull de l'énergie absorbée n'est pas aussi concluant. Il est certes beaucoup plus grand que 1, mais pas suffisamment pour considérer que l'énergie absorbée ne dépend absolument pas de ce paramètre ( $c > 50$ ).

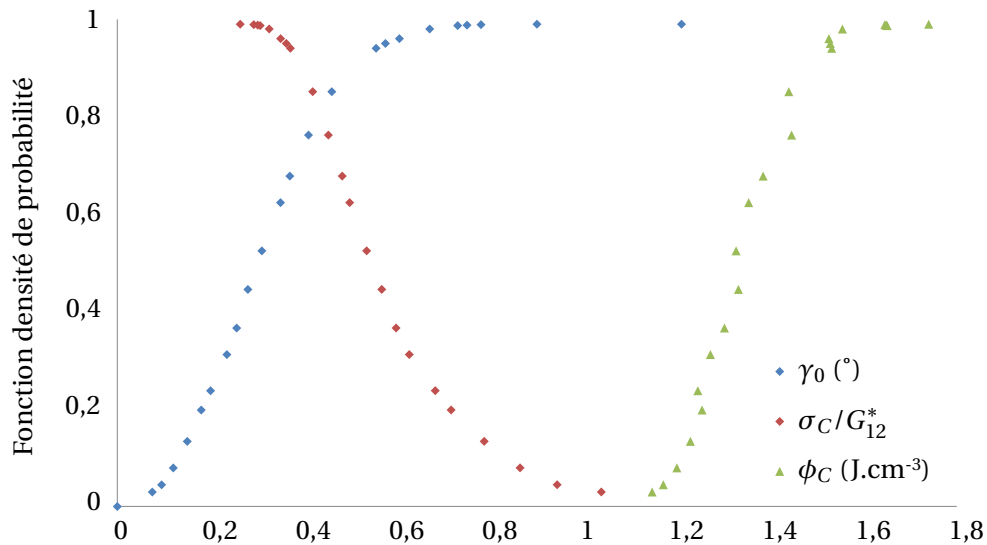


FIGURE 4.16: FDP de l'angle d'ondulation, de la contrainte et de l'énergie à rupture

## 2.4 Influence de la mixité du chargement

Au delà des paramètres intrinsèques au composite que sont le comportement matériau et les statistiques de défauts, le type de chargement imposé a également une grande importance. En particulier, comme de nombreux auteurs ont pu l'étudier, l'ajout d'une précharge de cisaillement a une très forte influence sur la tenue en compression du stratifié. C'est cette influence que l'on cherche à quantifier ici, à la manière de ce qui a déjà fait dans la littérature [Vogler et Kyriakides, 2001a, Gutkin *et al.*, 2010a]. L'effet de cette précharge sur la réponse en compression est donné par la Figure 4.17. Si l'on constate une diminution de la contrainte maximale, l'allure de la courbe reste globalement la même, avec une perte totale de rigidité après passage du pic. Contrairement au cas élasto-plastique, on note qu'il n'y a pas de reprise de raideur avant rupture des fibres. On peut alors étudier l'influence de cette précharge de cisaillement sur la contrainte et l'énergie absorbée à rupture.

En termes de contrainte tout d'abord, il est possible de tracer un critère à rupture dans un plan  $(\sigma_0, \tau_0)$ , comme sur la Figure 4.18. Comme on peut le constater, pour des ordres de grandeurs de défaut raisonnables et avec une matrice élasto-plastique, ce critère surestime significativement la tenue du composite. En revanche, avec une loi élasto-plastique endommageable, le nuage de points expérimentaux obtenu dans le cadre du premier World Wide Failure Exercise est globalement bien approximé pour des chargements mixtes (i.e.  $\tau_0 \neq 0$ ). La forte dispersion des résultats expérimentaux ne permet pas toutefois de parler de validation. L'influence du cisaillement par rapport à la compression est quasiment linéaire, comme l'avaient déjà observé plusieurs auteurs [Weaver et Williams, 1975, Jelf et Fleck, 1992, Vogler et Kyriakides, 2001a] et contrairement à ce qu'indiquent de nombreux critères à rupture macroscopiques [Hinton *et al.*, 2004a]. Pour des cisaillements importants, la contrainte à rupture en compression chute jusqu'à zéro, le matériau ayant perdu toute rigidité.

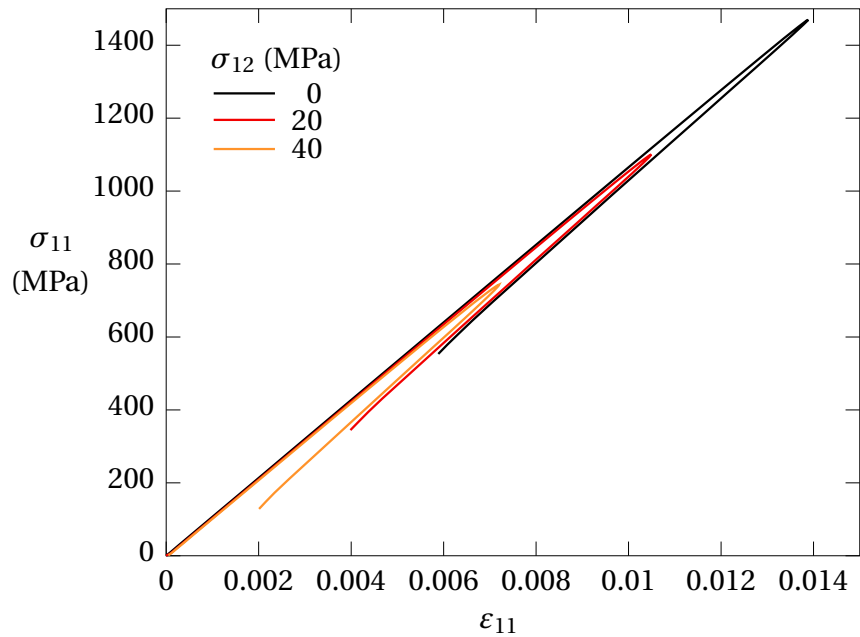


FIGURE 4.17: Courbes de réponse en compression avec précharges de cisaillement

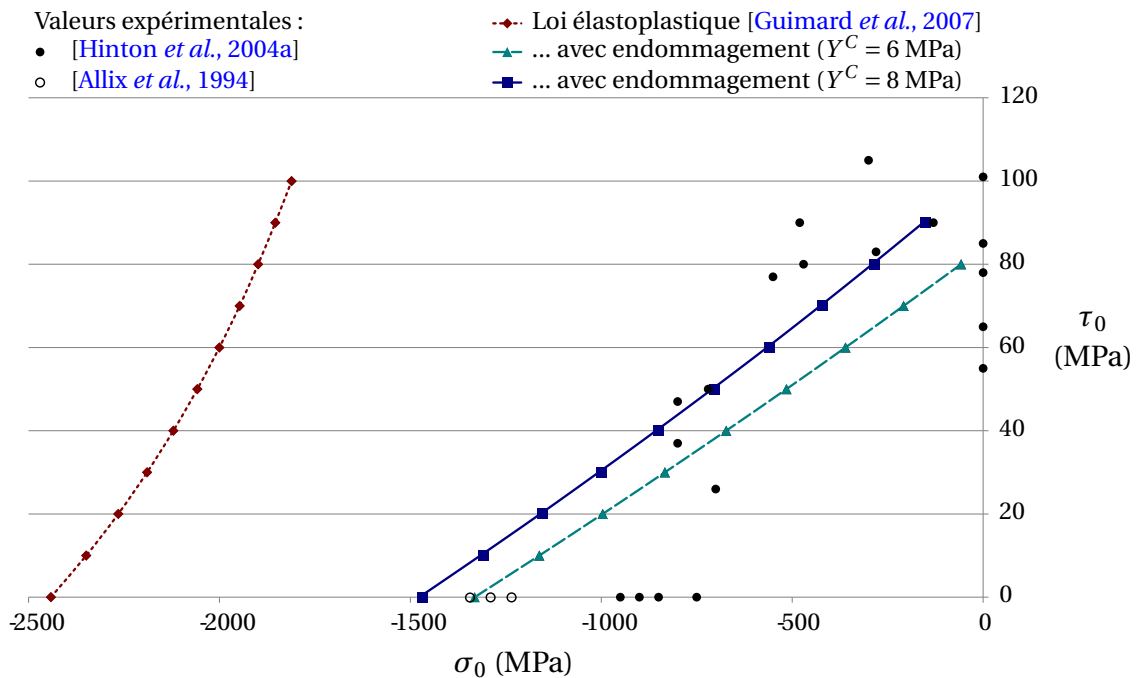
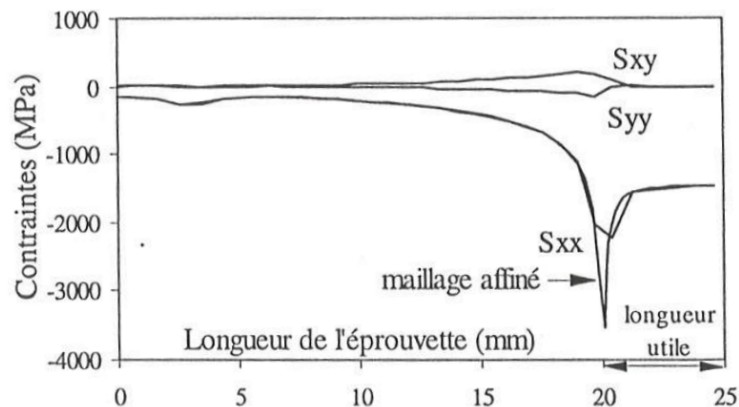


FIGURE 4.18: Contrainte à rupture dans un plan  $(\sigma_0, \tau_0)$  pour un composite T300/914

Pour des chargements en compression quasiment sans cisaillement (i.e.  $\tau_0 \approx 0$ ), on remarquera que ce critère surestime encore quelque peu les valeurs expérimentales du WWFE. La raison invoquée est que le champ de contraintes *local* auquel est soumis un Volume Élémentaire Représentatif a toutes les chances d'inclure une composante de cisaillement non négligeable. En raison de la forte anisotropie du matériau, les essais supposément de compression ont tendance à se montrer très sensibles aux défauts et effets de bord, y compris les défauts d'alignement de l'échantillon [Bois *et al.*, 2009].

Cette hypothèse est supportée par les essais expérimentaux réalisés dans le cadre du projet VulComp par le secteur Mécanique et Matériaux du LMT-Cachan. Par stéréocorrélation d'images [Hild et Roux, 2006, Besnard, 2010, Besnard *et al.*, 2010], Besnard, Hild et Aimedieu ont observé les champs de déplacement d'un pli UD de T700/M21 en compression dans le sens des fibres. Malgré de grandes précautions de montage, ils ont pu estimer d'importantes déformations de cisaillement localisées au niveau des mors, juste avant la rupture (quelques dizaines d'images pour un essai quasi-statique suivi par caméra rapide à 20000 images/seconde). Il paraît donc délicat de considérer ce type d'essai comme représentatif d'un champ de compression pure, du moins à l'échelle où se développe le *kinking*. Antoine et co-auteurs avaient observé numériquement des concentrations de contraintes similaires (voir Figure 4.19). Sur la Figure 4.18, cela revient à considérer que les valeurs du WWFE (points noirs) sur l'axe horizontal peuvent présenter des contraintes locales de cisaillement (inconnues) comprises entre 0 et 25 MPa, ce qui les amènerait à proximité des prévisions numériques.



**FIGURE 4.19:** Répartition des contraintes en peau d'une éprouvette testée en compression [Antoine *et al.*, 1998]

Dans la thèse de Vittecoq, un banc d'essai spécifique de flexion 4 points sur appuis souples a été mis au point pour s'affranchir de cette sensibilité et obtenir très localement un champ de contraintes proche de la compression pure [Vittecoq, 1991]. Pour un T300/914, ce montage a ainsi permis d'observer une contrainte de compression à rupture dispersée entre 1250 et 1370 MPa. Ces valeurs sont extrêmement proches des résultats numériques, qui les surestiment de 0 à 15% selon le choix de certains paramètres du modèle et selon le résultat d'essai considéré.



En termes d'énergies absorbées, les énergies dissipées ou stockées par chaque mécanisme (élasticité, inélasticité, endommagement) au moment du passage du pic ont été tracées dans la Figure 4.20. On a indiqué plus tôt que, pour des cisaillements élevés, le matériau perd quasiment toute rigidité avant application de la charge de compression. Dans ce cas, les fibres ne font que fléchir et la matrice se cisaille, alors même que le pic de contrainte est passé. La matrice et les interfaces concentrent les déformations et la rupture des fibres n'est jamais atteinte. C'est la raison pour laquelle on s'intéresse ici à  $\phi^C$ , les énergies absorbées lorsque la contrainte maximale de compression est atteinte,  $\phi_f$  ne pouvant être calculée dans tous les cas.

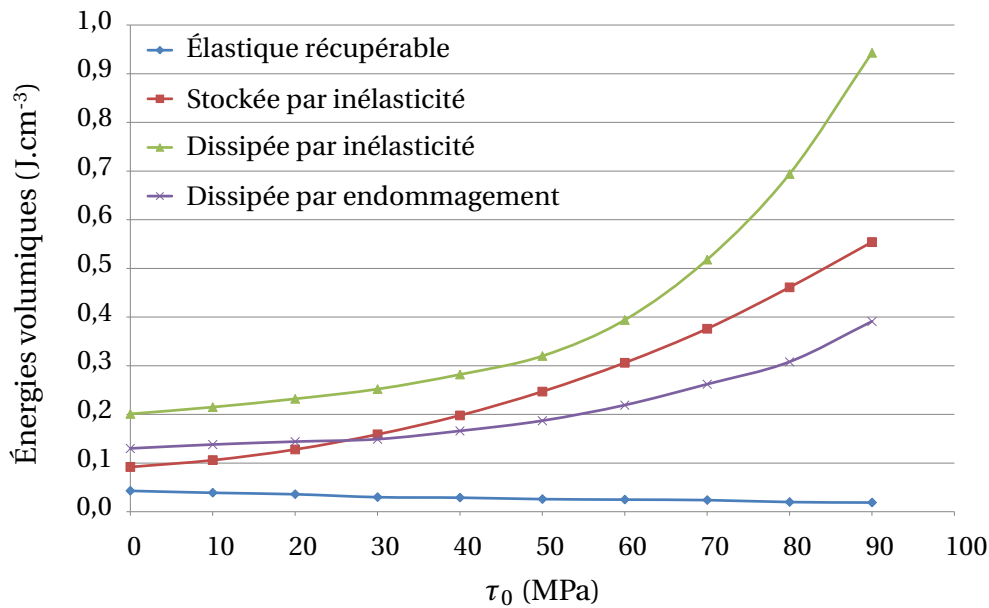


FIGURE 4.20: Énergies absorbées à  $\sigma_0 = \sigma^C$  en fonction de  $\tau_0$

Pour des cisaillements faibles, on peut constater une légère augmentation des énergies absorbées avec  $\tau_0$ . Ceci est essentiellement dû à une augmentation simultanée de la taille de la *kink-band* à rupture, comme illustré par la Figure 4.21. En revanche, pour des cisaillements élevés, l'énergie augmente très fortement. Cela s'explique cette fois par le fait que l'ensemble de l'échantillon testé va entrer dans son domaine non-linéaire matériau et dissiper de l'énergie par inélasticité et endommagement. Ainsi, les énergies absorbées ne sont plus uniquement concentrées dans la *kink-band*, comme précédemment. En conséquence, pour estimer l'énergie liée à la création d'une *kink-band* en mode mixte, il conviendra de limiter davantage le domaine d'étude. Contrairement à ce qui a été fait jusqu'ici, le VER pourra par exemple être choisi aussi épais ou un peu plus épais que la *kink-band*.

Pour finir cette étude de sensibilité, on s'intéresse à nouveau aux modules de Weibull des contraintes à rupture et de l'énergie absorbée à rupture des fibres ( $c_\phi$ ) en présence de cisaillement faible. Les résultats sont récapitulés dans le Tableau 4.2, toujours pour un module de Weibull des ondulations de 2.3.

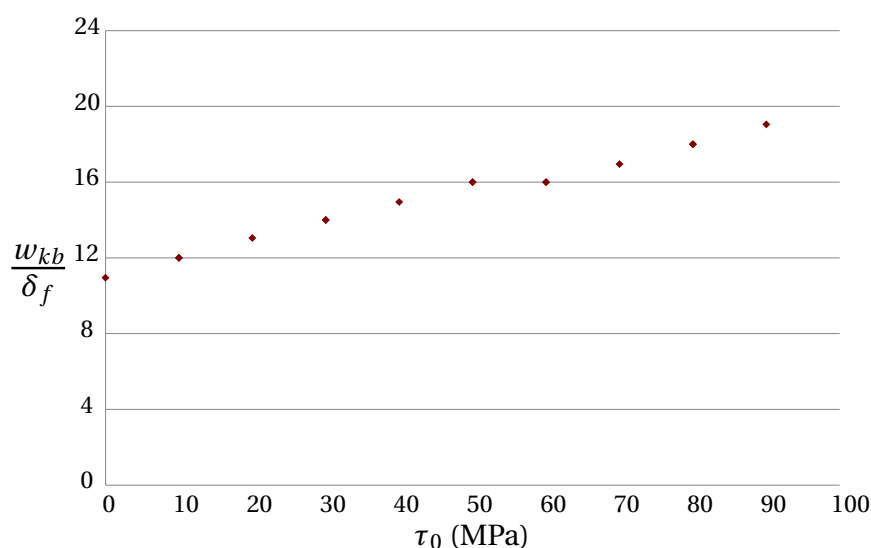


FIGURE 4.21: Épaisseur finale de la *kink-band* en fonction de  $\tau_0$  (en diamètres de fibre)

Au-delà de 30 MPa, le module de Weibull des énergies dissipées devient si élevé que la simple disparité des résultats numériques ne permet pas de l'estimer de façon fiable. En revanche, celui des contraintes à rupture est moins fortement affecté, bien qu'il augmente légèrement avec le cisaillement. Si l'on considère le problème comme une analyse de flambage, on peut alors conclure que le défaut dû à la présence de cisaillement finit par prendre le pas sur le défaut géométrique d'ondulation. En termes d'énergie absorbée, le VER devient quasiment insensible à la statistique d'ondulation, ce qui est cohérent avec le fait qu'on se rapproche d'un problème de cisaillement ou de flexion simple.

$\tau_0$ (MPa)	$c_\sigma$	$c_\phi$
0	-4.1	13.7
10	-4.2	11.9
20	-4.4	20.5
30	-4.8	39.0

TABLE 4.2: Modules de Weibull des contraintes et des énergies

### 3 Conclusions sur le modèle micromécanique

Ce chapitre était consacré au développement d'un modèle micromécanique de simulation du *kinking* sous chargement multi-axial.

On a tout d'abord mis en évidence la nécessité de représenter avec précision le comportement des matériaux du problème (et tout particulièrement de la matrice), sans quoi la contrainte de compression maximale  $\sigma^C$  et l'énergie absorbée à rupture par les différents mécanismes  $\phi_f$  sont significativement surestimées.

On a également retrouvé l'influence significative de deux paramètres du problème qui ne peuvent pas toujours être aisément déterminés *a priori* : la statistique d'ondulation des fibres et la multi-axialité du chargement. En effet, la présence de cisaillement, même en petite quantité, mène à une contrainte à rupture significativement plus faible. Compte tenu des ordres de grandeur observés, cet effet peut parfaitement être à l'origine de la sous-estimation de la contrainte de compression à rupture observée à l'aide d'essais standards. Par exemple, un cisaillement "parasite" de 20 MPa en un point faible de l'échantillon peut faire chuter la contrainte à rupture à environ 1000 MPa, ce qui se rapproche des valeurs observées dans le WWFE. La statistique de défauts, quant à elle, influence fortement la contrainte à rupture mais bien moins les énergies absorbées, en accord avec les observations de la thèse de Guimard.

Toutefois, le modèle utilisé peut être critiqué sur plusieurs points. Tout d'abord, il utilise un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qu'on peut remettre en cause, notamment celles inhérentes au modèle de Budiansky et Fleck (voir Chapitre 1). Par ailleurs, il est basé sur des hypothèses d'homogénéisation périodique et souffre donc de ses limites classiques (voir Chapitre 2). Enfin, pour comparer le modèle aux résultats expérimentaux, on a fait l'hypothèse préliminaire de rupture par le maillon le plus faible. Il serait intéressant de réaliser des simulations à l'échelle des essais comparatifs afin de vérifier cette hypothèse. C'est pourquoi la suite de cette étude s'attache à réaliser dans un premier temps un pont entre les échelles micro et méso, puis dans un second temps à mener des calculs comparatifs, dont on espère qu'ils prendront naturellement en compte les effets de structure évoqués plus tôt.

## Chapitre 5

# Homogénéisation du comportement d'un pli UD dans le sens des fibres

*Ce chapitre détaille une stratégie d'identification d'un modèle de comportement mésoscopique paramétré par un défaut à partir de résultats microscopiques. La méthode, basée sur un principe d'homogénéisation non-linéaire, consiste à construire un comportement constitutif de la microstructure à partir de chargements de compression-cisaillement. Son principe repose sur la conservation des énergies récupérable, stockée et dissipée. Grâce à des simulations avec charges et décharges sur plusieurs réalisations du VER, un comportement moyen est extrait et permet de reconstruire des lois d'évolution déterministes pour chaque variable interne.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Homogénéisation d'un comportement non-linéaire</b> . . . . .	<b>92</b>
1.1	Réponse de la microstructure . . . . .	92
1.2	Principes et définitions . . . . .	95
1.3	Cadre et améliorations mésoscopiques . . . . .	97
1.4	Procédure d'identification . . . . .	100
<b>2</b>	<b>Identification du comportement longitudinal d'un pli UD T300/BSL-914C</b>	<b>101</b>
2.1	Propriétés élastiques non-linéaires . . . . .	101
2.2	Endommagement de plissement et diffus . . . . .	103
2.3	Processus d'inélasticité . . . . .	105
<b>3</b>	<b>Résultats et discussion</b> . . . . .	<b>109</b>
<b>4</b>	<b>Conclusions sur l'homogénéisation du comportement</b> . . . . .	<b>112</b>

---

Le problème d'homogénéisation considéré ici est proche de ceux traités dans les références suivantes [Andrieux *et al.*, 1986, Aravas *et al.*, 1990, Hild *et al.*, 1996, Hild *et al.*, 1997, Halm et Dragon, 1998, Pensée *et al.*, 2002]. On cherche à établir une équivalence énergétique entre une microstructure complexe et un modèle de comportement homogénéisé dont l'expression, les variables (observables et internes) et leurs relations de couplage doivent être identifiées. Dans le cas présent, on se propose d'enrichir le mésomodèle d'endommagement des stratifiés développé au LMT-Cachan par les résultats issus de la théorie microscopique développée dans le chapitre précédent (voir aussi [Feld *et al.*, 2010, Feld *et al.*, 2011]). L'idée d'établir une équivalence énergétique est en accord avec les préoccupations liées au contexte de cette étude. En effet, les énergies absorbées par les composites sont un critère déterminant pour la conception d'absorbeurs de chocs et l'analyse de structures pour lesquelles le *kinking* n'est pas le mode de rupture ultime (par exemple, les cas d'indentation quasi-statiques).

## 1 Homogénéisation d'un comportement non-linéaire

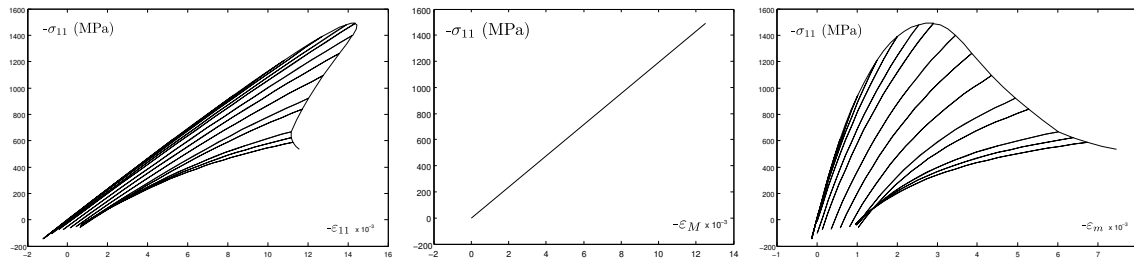
La construction de la méthode est quasiment séquentielle. Elle passe par une nouvelle étape d'observation de la réponse de la microstructure. Il s'agit là de définir quel comportement et quelles caractéristiques on souhaite conserver à travers l'étape d'homogénéisation. Ensuite, au vu de ces résultats, les principes généraux de la méthode sont exposés. En particulier, une séparation des non-linéarités géométriques et matérielles est proposée et de nouvelles variables internes sont définies. Enfin, à partir d'un rappel de ce qu'on veut conserver et de ce qu'on s'autorise à modifier dans le mésomodèle "cible", les nouvelles variables internes sont introduites dans le mésomodèle et des couplages sont définis.

### 1.1 Réponse de la microstructure

Une des principales caractéristiques de la microstructure considérée est la présence de non-linéarités matérielles et géométriques. En raison de la concentration quasi-totale de toutes ces non-linéarités dans l'épaisseur de la *kink-band*, on réduit la taille moyenne du VER à cette dimension (soit  $w_{kb} \simeq h_{pli}$ ). Ainsi, après formation d'une première bande de plissement, il est possible que des bandes conjuguées se forment dans les VER voisins. Cette combinaison de fortes non-linéarités engendre toutefois une réponse très instable de la *kink-band* même à ses bords et donne naissance à un *snap-back* (voir Figure 5.1.a). On définit une partition des déformations :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_M + \varepsilon_m \quad (5.1)$$

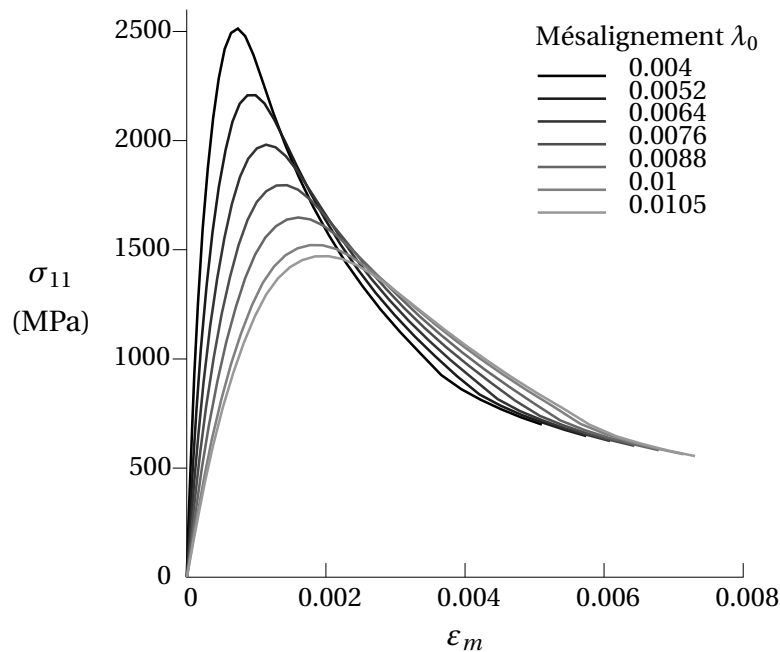
où  $\varepsilon_M$  est la composante linéaire due à la compression élastique (Figure 5.1.b) et  $\varepsilon_m$  est la composante de *kinking* due aux non-linéarités géométriques et matérielles qui présente un *snap-through* (Figure 5.1.c).



**FIGURE 5.1:**  $-\sigma_{11}$  fonction de  $-\varepsilon_{11}$  aux bornes d'une kink-band de  $105 \mu\text{m}$ , avec un mésalignement  $\lambda_0 = 0.01$  et un cisaillement  $\sigma_{12} = 0 \text{ MPa}$  (gauche) ; composante élastique linéaire (centre) ; composante de *kinking* (droite)

À partir de cet instant, seule la composante de *kinking* est étudiée. Par ailleurs, puisqu'on ne s'intéresse plus aux composantes microscopiques à l'intérieur du VER, les contraintes pilotes du chapitre précédent ne sont plus appelées  $\sigma_0$  et  $\tau_0$  mais simplement  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$ .

Les observations du chapitre précédent peuvent être examinées sous ce nouvel angle. En effet, le fait que les énergies absorbées à rupture dépendent peu de la statistique d'ondulation peut être retrouvé à partir des réponses tracées dans la Figure 5.2. Lorsque le mésalignement augmente, la contrainte maximale diminue et on observe un adoucissement post-pic moins prononcé. On pourra aussi remarquer que la statistique d'alignement affecte notablement la réponse tangente initiale de cette composante, ce qui est moins évident si l'on considère la déformation totale (voir Table 5.1).



**FIGURE 5.2:** Réponse de la microstructure pour  $\sigma_{12} = 0 \text{ MPa}$  et  $\lambda_0 = 0.004 - 0.01$

$\lambda_0$	0.01	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001
$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_m}$	1390	1670	2110	2760	3760	5410	8460	15030	33820	135280
$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}}$	119	121	123	124	126	127	128	129	129.5	129.9

**TABLE 5.1:** Module tangent initial de la microstructure (en GPa) sans et avec la composante linéaire, pour  $\lambda_0 = 0.001 - 0.01$  et  $E_1 = 130$  GPa

Cette influence soulève la question : le défaut d'alignement des fibres doit-il être un paramètre (probabiliste) du modèle mésoscopique ? Pour y répondre, on s'intéresse à la statistique de réponse de simples structures poutres (numériques). Chaque poutre est discrétisée par des Éléments Finis 1D de la taille d'une *kink-band*. Ils sont gouvernés par une loi de comportement en compression simplifiée, dépendant directement de la statistique d'ondulation (à partir des données de Paluch). Enfin, on fait varier la longueur des poutres d'environ 1 à 100 mm (10 à 1000 EF) et on réalise plusieurs dizaines de simulations pour chaque réalisation. Les résultats en termes de contrainte maximale sont compilés dans le Tableau 5.2. Pour des échantillons longs de quelques centimètres, on constate que la réponse est toujours sensible au mésalignement des fibres, avec un écart-type de la réponse située entre 20 et 100 MPa. Puisque l'on souhaite effectuer des comparaisons avec des échantillons d'essai d'environ 10 mm (écart-type de 150 MPa soit  $\pm 10\%$ ), on décide d'intégrer le mésalignement des fibres comme paramètre statistique du modèle.

LONGUEUR DU SPÉCIMEN (MM)	1.05	2.1	5.25	10.5	21	52.5	105
MOYENNE (MPa)	2150	1750	1650	1600	1570	1540	1500
ÉCART-TYPE (MPa)	243	221	182	151	105	54	18

**TABLE 5.2:** Moyenne et écart-type de la contrainte maximale en fonction de la longueur de la structure

De la même façon, on peut analyser l'influence d'une précharge de cisaillement sur le comportement en compression dans la Figure 5.3. En effet, lorsque le cisaillement augmente, on observe une contrainte maximale plus faible et un adoucissement post-pic moins prononcé (au point dans certains cas de transformer le *snap-back* de la réponse totale en *snap-through*). Par ailleurs, on remarquera là aussi une légère diminution du module tangent initial.

On souhaite prendre en compte toutes ces observations à l'échelle mésoscopique, ce qui implique d'écrire un modèle paramétré par la statistique d'ondulation des fibres et présentant un comportement en compression non-linéaire couplé avec le cisaillement. Par ailleurs, la Figure 5.1.c renseigne sur la nature de cette non-linéarité de compression, qui prend la forme de pertes de raideur, de déformations irréversibles et de décharges élastiques non-linéaires, qu'on s'attachera à représenter. Il va donc falloir définir des variables internes capables de représenter ces phénomènes.

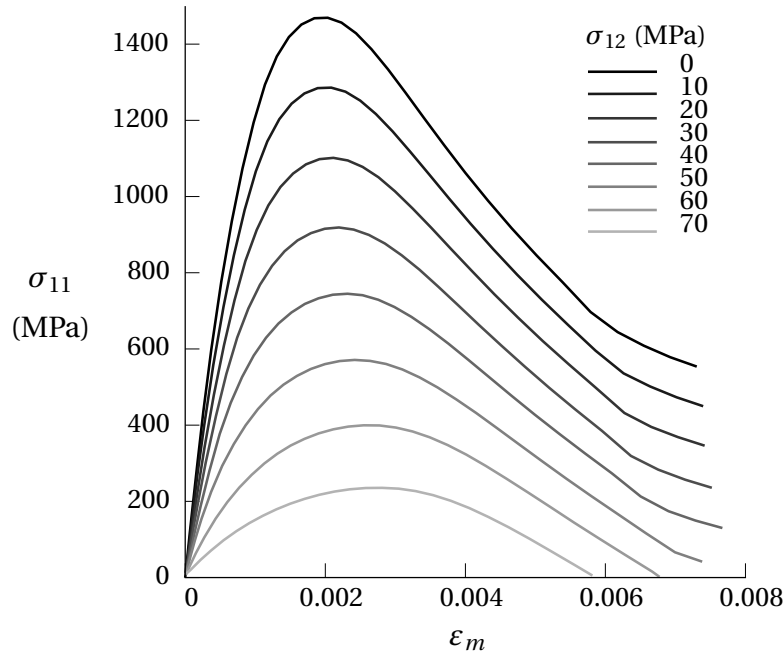


FIGURE 5.3: Réponse de la microstructure pour  $\sigma_{12} = 0 - 70$  MPa et  $\lambda_0 = 0.0105$

## 1.2 Principes et définitions

On souhaite réaliser l'homogénéisation du comportement d'un Volume Élémentaire Représentatif d'une *kink-band*. Ce choix a été justifié par la localisation de la quasi-totalité des déformations et non-linéarités dans cette bande sous chargement de compression. Par ailleurs, les dimensions d'un tel VER sont compatibles avec celles des VER utilisés pour réaliser le pont micro-méso de la fissuration transverse et du micro-délaminage local [Ladevèze *et al.*, 2005].

On considère le matériau mésoscopique homogénéisé comme obéissant à la thermodynamique des milieux continus sous transformations infinitésimales isothermes et sans contraintes initiales [Germain *et al.*, 1983]. Afin de lier sa thermodynamique à celle de la microstructure, on définit des équivalences énergétiques similaires à celles postulées par Aravas et Leckie :

Les parties récupérable  $\Psi^e$  et stockée  $\Psi^p$  de l'énergie élastique et la puissance dissipée  $\phi$  sont respectées :

$$\Psi^e = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \Psi_{\mu}^e d\Omega \quad (5.2)$$

$$\Psi^p = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \Psi_{\mu}^p d\Omega \quad (5.3)$$

$$\phi = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \phi_{\mu} d\Omega \quad (5.4)$$

L'indice  $\bullet_{\mu}$  indique une variable microscopique, sachant que  $\Psi_{\mu}^e$ ,  $\Psi_{\mu}^p$  et  $\phi_{\mu}$  sont calculées dans le VER  $\Omega$  à l'aide du micromodèle à chaque instant de chargement.



Puisqu'on ne s'intéresse au comportement du VER que suivant la direction des fibres sous l'hypothèse de contraintes planes, les deux seules directions de chargement considérées seront la compression axiale et le cisaillement dans le plan. Les variables observables sont les contraintes mésoscopiques de compression  $\sigma_{11}$  et de cisaillement  $\sigma_{12}$ . Afin de définir les variables internes qu'il faudrait ajouter, on applique un chargement de compression cyclique au micromodèle. Les résultats sont tracés dans les Figures 5.1 et la dernière courbe, en particulier, présente plusieurs types de non-linéarités :

- une perte de raideur qu'on attribuera à une variable d'endommagement  $d_k$  ;
- des déformations résiduelles, représentées par la variable  $\varepsilon_r^p$  ;
- des décharges élastiques non-linéaires.

Chacune de ces non-linéarités requiert une prise en compte et une identification dédiées dans le modèle. Cependant, toutes ne passent pas nécessairement par l'introduction d'une nouvelle variable interne. Par exemple, une analyse énergétique du micromodèle pendant les phases de décharges indique que ces dernières sont belles et bien élastiques non-linéaires, et sont donc uniquement dues aux non-linéarités géométriques. Ainsi, on peut écrire par exemple l'énergie libre de Helmholtz du modèle matériau mésoscopique sous sa forme générale :

$$\Psi = \Psi(\underline{\varepsilon}, V_i, d_k, \varepsilon_r^p) \quad (5.5)$$

où les  $V_i$  sont les autres variables internes du modèle. Le Chapitre 3 détaille davantage le modèle mésoscopique, mais on retiendra que son état d'endommagement peut être défini par les variables scalaires  $d$ ,  $d'$  et  $d_f$  (duales des forces thermodynamiques  $Y_d$ ,  $Y_{d'}$  et  $Y_f$ ) et qu'il présente des déformations irréversibles gouvernées par un modèle de plasticité à écrouissage isotrope piloté par la plasticité cumulée  $p$  (duale de l'écrouissage  $R$ ). Dans un premier temps, on considère que  $\varepsilon_r^p$  obéit au même processus d'inélasticité que le reste du modèle.

Sous l'hypothèse de découplage des effets d'élasticité associés à l'endommagement avec les effets d'écrouissage et autres [Lemaître et Chaboche, 1993], on peut donc réécrire l'équation précédente :

$$\Psi = \Psi^e(\underline{\varepsilon}^e, d, d', d_f, d_k) + \Psi^p(p) \quad (5.6)$$

Par ailleurs, d'après le lemme de Clausius-Duhem, la puissance dissipée s'écrit :

$$\phi = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (5.7)$$

Soit dans le cas présent, si  $Y_k$  est le dual de  $d_k$  :

$$\phi = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - R\dot{p} - Y_d\dot{d} - Y_{d'}\dot{d}' - Y_f\dot{d}_f - Y_k\dot{d}_k \geq 0 \quad (5.8)$$

Le potentiel énergétique dépend de plusieurs variables observables et internes qui, bien que partiellement séparées, évoluent de concert avec le paramètre de charge  $\underline{\sigma}$ . Il n'est donc pas toujours possible de calculer ses dérivées partielles ou la puissance

dissipée. C'est pourquoi, comme dans le cas d'une identification à partir d'essais, on se repose sur les décharges élastiques [Vivier *et al.*, 2009], où l'on peut écrire :

$$\frac{d\Psi}{d\bar{\sigma}} = \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{\sigma}} \quad (5.9)$$

et où les énergies stockées et dissipée peuvent être directement mesurées lorsque  $\Psi^e = 0$ .

### 1.3 Cadre et améliorations mésoscopiques

Au vu du Chapitre 3, sous l'hypothèse de contraintes planes, la densité d'énergie élastique du pli peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \rho\Psi = & \overbrace{\frac{\langle\sigma_{11}\rangle^2}{2E_1^0(1-d_f)} + e_c(\langle-\sigma_{11}\rangle)}^{\rho\Psi_{11}^e} - \left(\frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} + \frac{\nu_{21}^0}{E_2^0}\right) \times \sigma_{11}\sigma_{22} \\ & + \frac{\langle\sigma_{22}\rangle^2}{2E_2^0(1-d')} + \frac{\langle-\sigma_{22}\rangle^2}{2E_2^0} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}^0(1-d)} + \rho\Psi^p(p) \end{aligned} \quad (5.10)$$

La fonction  $e_c$  caractérise le comportement non-linéaire en compression, dû notamment au *kinking*. D'un point de vue mésoscopique, et en particulier lorsque le chargement inclut peu ou pas de cisaillement, celui-ci peut être vu comme non-linéaire élastique fragile. C'est le parti qui a été pris dans la thèse de Vittecoq, qui lie contraintes et déformations par la forme :

$$\sigma_{11} = E_1^c(1 + \alpha_V \varepsilon_{11})\varepsilon_{11} \quad (5.11)$$

avec un module d'Young en compression  $E_1^c$  légèrement inférieur à son équivalent en traction et des valeurs de  $\alpha_V$  situées en 20 et 30 GPa/%.

Cette modélisation offre une bonne corrélation avec les essais pourvu qu'il n'y ait pas de couplage fort avec le cisaillement [Allix *et al.*, 1994]. De plus, les résultats montrent une certaine dispersion, qu'on sait liée à la statistique d'ondulation des fibres mais qu'on ne sait quantifier. Enfin, cette forme ne permet pas de prédire l'énergie dissipée au cours de la rupture ni l'état de dégradation après celle-ci. On va donc remplacer cette fonction, ainsi que l'évolution de plusieurs variables internes ( $d$ ,  $p$ , etc.) afin de pouvoir mieux reproduire la variété de comportements différents observés à l'aide du micromodèle.

La principale question est donc de savoir par quoi l'on va remplacer la fonction  $e_c$  et même toute la composante  $\Psi_{11}^e$  de l'énergie élastique. La solution adoptée ici est de postuler une forme simplifier de la microstructure fibreuse, très proche des premiers modèles analytiques de *kink-band* pour l'étude des roches [Baer et Norris, 1968]. Ce modèle qu'on qualifiera de rhéologique introduit une non-linéarité géométrique similaire à celle de la microstructure, à travers un angle  $\alpha$ , tout en demeurant un système

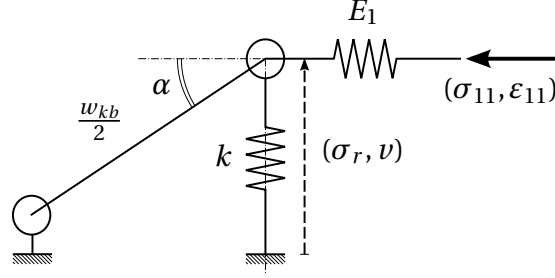


FIGURE 5.4: Schéma rhéologique illustrant la non-linéarité entre  $\sigma_{11}$  et  $\epsilon_{11}$

très simple à 1 seul degré de liberté (voir Figure 5.4). Cela revient essentiellement à projeter et intégrer la composante de flambage de la réponse sur son premier mode.

Les variables observables de ce modèle sont  $\sigma_{11}$  et  $\epsilon_{11}$ . On peut définir le potentiel d'énergie associé à ce modèle rhéologique à partir de celui de ses composants (ressorts) élémentaires. Ainsi, la partie récupérable de l'énergie élastique s'écrit :

$$\rho \Psi_{11}^e = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1^0(1-d_f)} + \frac{\sigma_r^2}{2k} \quad (5.12)$$

où  $k$  est un module de raideur et  $\sigma_r$  la contrainte de rappel dans ce ressort. L'équilibre des moments implique :

$$\sigma_r = -\sigma_{11} \tan \alpha \quad (5.13)$$

où  $\alpha$  est l'angle de rotation du modèle rhéologique par rapport à la direction de la contrainte  $\sigma_{11}$ . On signalera que lorsque  $\sigma_{11} = 0$ , on a  $\alpha = \alpha_0 \neq 0$ . L'Annexe A montre que, pour un état donné de variables internes (i.e. pendant une décharge élastique),  $\alpha$  peut être écrit comme une fonction non-linéaire ne dépendant que de  $\sigma_{11}$  :

$$\tan \alpha = \xi(\sigma_{11}) \quad (5.14)$$

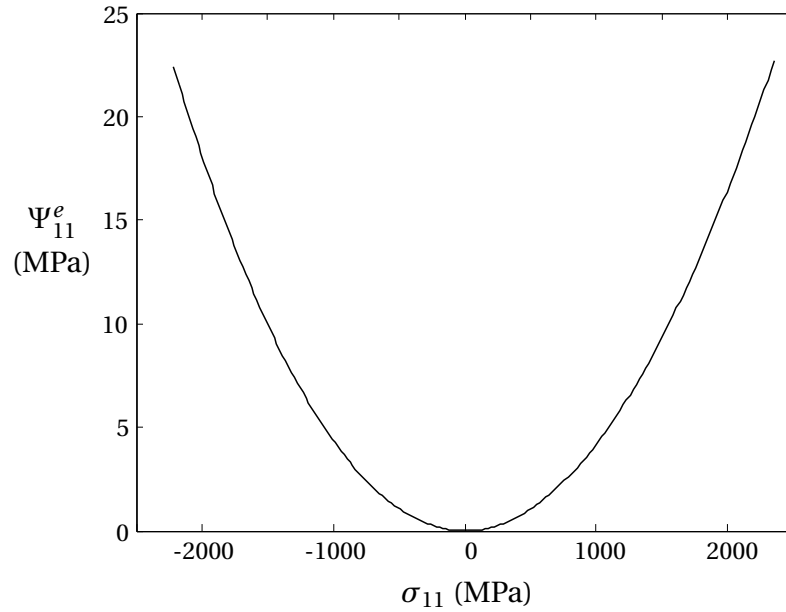
Ainsi, sur chaque décharge, l'énergie élastique du modèle s'écrit :

$$\rho \Psi_{11}^e = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1^0(1-d_f)} + \frac{\sigma_{11}^2 \xi^2(\sigma_{11})}{2k} \quad (5.15)$$

Ce potentiel élastique non-linéaire, tracé dans la Figure 5.5, est convexe par rapport à  $\sigma_{11}$ . Il permet d'écrire, toujours sur chaque décharge :

$$\rho \frac{\partial \bar{\Psi}^e}{\partial \sigma_{11}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{11}} \left( \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1^0(1-d_f)} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma_{11}} \left( \frac{\sigma_{11}^2 \xi^2(\sigma_{11})}{2k} \right) \quad (5.16)$$

$$\epsilon_{11}^e = \underbrace{\frac{\sigma_{11}}{E_1^0(1-d_f)}}_{\epsilon_M^e} + \underbrace{\frac{\sigma_{11} \xi(\sigma_{11})}{k} (\sigma_{11} \xi'(\sigma_{11}) + \xi(\sigma_{11}))}_{\epsilon_m^e} = \epsilon_M^e + \epsilon_m^e \quad (5.17)$$



**FIGURE 5.5:** Potentiel élastique  $\Psi_{11}^e$  en fonction de la contrainte longitudinale  $\sigma_{11}$

où l'on retrouve les partitions des déformations linéaire  $\varepsilon_M$  et non-linéaire  $\varepsilon_m$  (mais ici élastique) observées avec le micromodèle.

Tel qu'il a été défini dans le modèle rhéologique, le ressort  $k$  représente l'effet de la matrice dans le micromodèle. C'est pourquoi toutes les non-linéarités matérielles sont imputées à  $k$ . La conséquence de ce choix, même si elle n'est pas encore évidente, est que l'évolution de ces non-linéarités va demeurer indépendante de l'ondulation des fibres  $\lambda_0$ , qu'on souhaite utiliser comme un paramètre probabiliste du modèle. Cette indépendance n'est pas possible si les non-linéarités sont imputées à  $E_1$ . Ainsi, on définit l'endommagement de *kinking* de façon classique :

$$k = k^0(1 - d_k) \quad (5.18)$$

De même, les déformations totale  $\varepsilon_r$  et inélastique  $\varepsilon_r^p$  sont définies par :

$$\sigma_r = k(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p - \varepsilon_r^0) \quad (5.19)$$

Ainsi, l'Équation 5.12 peut aussi s'écrire :

$$\rho\Psi_{11}^e = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1^0(1 - d_f)} + \frac{\sigma_r^2}{2k^0(1 - d_k)} \quad (5.20)$$

Cette forme peut alors être substituée dans l'expression de l'énergie de déformation du pli :

$$\begin{aligned} \rho\Psi = & \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1^0(1-d_f)} + \frac{\sigma_r^2}{2k^0(1-d_k)} - \left( \frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} + \frac{\nu_{21}^0}{E_2^0} \right) \times \sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle^2}{2E_2^0} \\ & + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2}{2E_2^0(1-d')} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}^0(1-d)} + \rho\Psi_p(p) \end{aligned} \quad (5.21)$$

On peut alors définir la force thermodynamique associée à l'endommagement de *kinking*  $d_k$  :

$$Y_r = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial d_k} = \frac{1}{2(1-d_k)^2} \frac{\sigma_r^2}{k^0} \quad (5.22)$$

Ce nouveau mécanisme de dégradation est intrinsèquement lié à l'endommagement diffus, puisque c'est ce dernier qui se développe dans le micromodèle au cours du *kinking*. Ainsi, l'évolution de l'endommagement de *kinking* est pilotée par une force  $Y_k$  qui est une combinaison de  $Y_r$  et  $Y_d$  à identifier. De même, la force  $Y$  pilotant l'endommagement diffus (voir Équation 3.9) doit être modifiée pour prendre en compte l'influence d'une éventuelle compression. Puisque le comportement post-rupture des fibres n'a pas été étudié dans cette thèse, aucune interaction entre  $d_k$  et  $d_f$  n'est considérée.

Pareillement, on suppose que  $\varepsilon_r^p$  est pilotée par le même processus d'inélasticité que le reste du mésomodèle. C'est une hypothèse forte qu'il conviendra de vérifier. Mais dans ce cas, la seule modification qui puisse être apportée consiste à modifier l'expression de la contrainte équivalente  $\tilde{\sigma}_{eq}$  (voir Équation 3.17).

## 1.4 Procédure d'identification

Compte tenu du nombre de paramètres à identifier, la procédure d'identification consiste en deux étapes :

1. Tout d'abord, les non-linéarités élastiques sont identifiées sur de petits charge-ments mixtes grâce à une technique de minimisation entre la réponse du micro-modèle et celle de la forme choisie ci-dessus. Les paramètres  $k^0$  et  $\alpha_0$  sont alors identifiés. Cette étape est répétée pour plusieurs réalisations de la microstruc-ture (valeurs de  $\lambda_0$ ) dont on considère qu'elles n'affectent que  $\alpha_0$ .
2. Ensuite, les variables matérielles non-linéaires sont identifiées sur des charge-ments mixtes présentant plusieurs décharges. L'énergie récupérable est calculée sur chaque décharge tandis que les énergies stockée et dissipée sont obtenues lorsque la charge retombe à zéro. La loi d'évolution de  $d_k$  en fonction de  $Y_k$  et les expressions parfois actualisées de  $Y_k$ ,  $Y$  et  $\tilde{\sigma}_{eq}$  sont identifiées ici. Il n'est pas nécessaire de répéter cette étape pour plusieurs réalisations de la microstructure car cet effet a déjà été pris en compte, mais on le fera malgré tout pour justifier cette hypothèse.

On peut d'ores et déjà définir les limites de cette procédure. En raison du flambage de tout le VER, un chargement mésoscopique de compression provoque des déformations de cisaillement *mésoscopiques* (et pas seulement des déformations microscopiques compatibles). Toutefois, cette distorsion n'a pas été prise en compte en première approximation, car on ne s'intéresse qu'à l'état de dégradation de la microstructure. Par ailleurs, la validité de la méthode peut être remise en cause en présence d'importants gradients de transformation (par exemple, près des bords) [Kouznetsova *et al.*, 2002]. Enfin, une longueur caractéristique (l'épaisseur de la bande de plissement) a été introduite dans un modèle en présentant déjà une autre (l'épaisseur du pli) du même ordre de grandeur ( $w_{kb} \simeq 0.105$  mm et  $h_{pli} \simeq 0.125$  mm). Par conséquent, le modèle obtenu ne capturera aucune des potentielles et probables interactions entre *kinking* et effets d'épaisseur, comme le flambage hors-plan, les effets de bord ou le développement de la kink-band dans l'épaisseur [Drapier *et al.*, 1999].

## 2 Identification du comportement longitudinal d'un pli UD T300/BSL-914C

Les capacités de la méthode présentée ci-dessous sont illustrées pour un pli unidirectionnel spécifique. Il s'agit d'un composite à fibres de carbone et matrice époxy de type T300/BSL-914C. Pour ce matériau, les simulations numériques du micromodèle ont permis de déterminer une taille de *kink-band* entre 10 et 15 diamètres de fibre environ. On fixera donc  $w_{kb} = 105$   $\mu\text{m}$  à partir de maintenant. Les autres paramètres sont identifiées dans la suite.

### 2.1 Propriétés élastiques non-linéaires

On considère que  $k^0$  est une propriété matérielle et  $\alpha_0$  un paramètre géométrique (la combinaison de l'ondulation initiale des fibres et d'un éventuel mésalignement dû à la rotation du VER sous chargement de cisaillement). Par conséquent, toutes les variations dues tant à la statistique des réalisations qu'à la mixité du chargement affecteront  $\alpha_0$ . Après minimisation de la différence entre les réponses du micromodèle et du modèle rhéologique pour  $\lambda_0 \in [0.0025, 0.01]$  et  $\sigma_{12} \in [0, 40]$  MPa, on obtient :

$$k^0 = 18360 \text{ MPa} \quad (5.23)$$

Par ailleurs, la surface de réponse projetée dans la Figure 5.6 permet de quantifier l'influence de l'ondulation initiale et du cisaillement.

Une combinaison linéaire semble capturer avec suffisamment de précision la valeur de  $\alpha_0$ , qu'on peut alors écrire :

$$\alpha_0 = c_\alpha \lambda_0 + c_\gamma \gamma_{12} \quad (5.24)$$

avec  $c_\alpha = 12.2$  rd et  $c_\gamma = 0.8$  rd. Les projections de la surface de réponse dans les plans  $(\lambda_0, \alpha_0)$  et  $(\sigma_{12}, \alpha_0)$  sont tracées dans les Figures 5.7 et 5.8, respectivement.

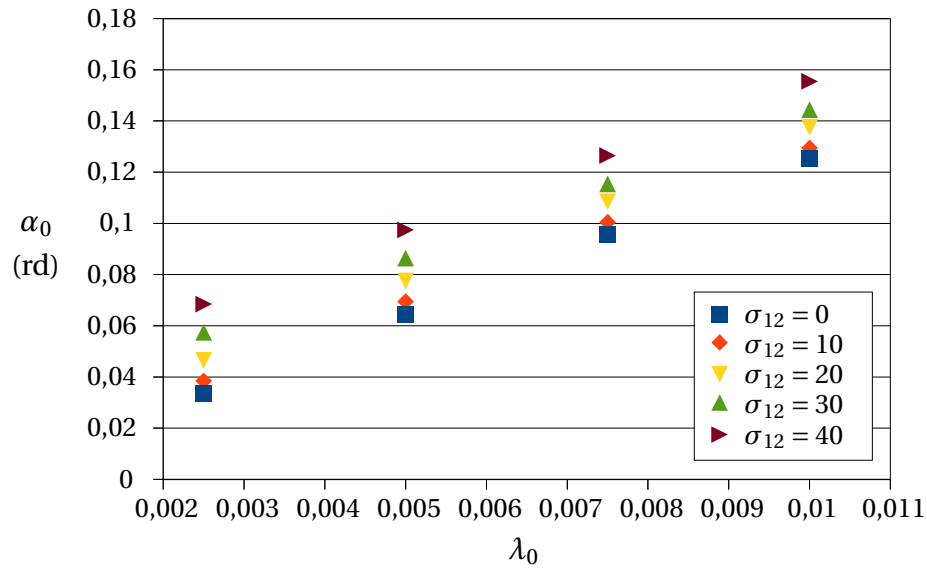


FIGURE 5.6:  $\alpha_0$  en fonction de  $\lambda_0$  et  $\sigma_{12}$

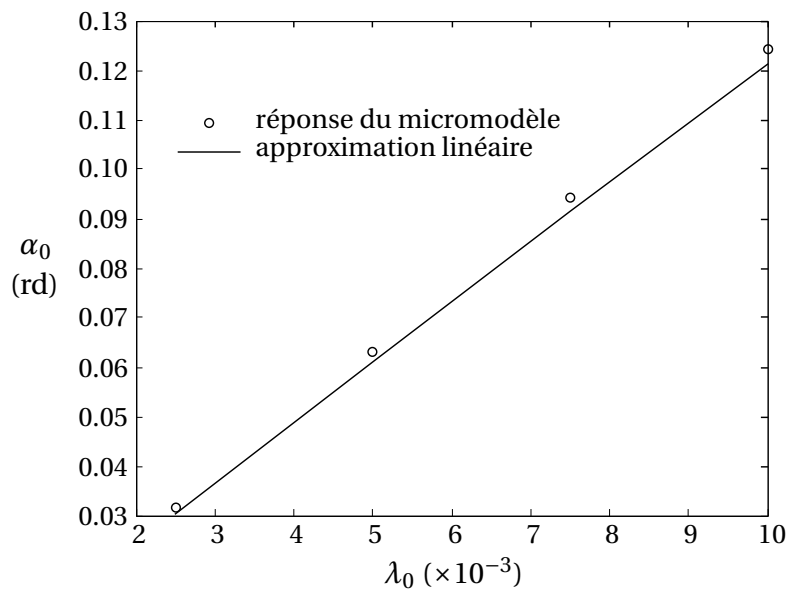


FIGURE 5.7:  $\alpha_0$  en fonction de  $\lambda_0$  pour  $\sigma_{12} = 0$

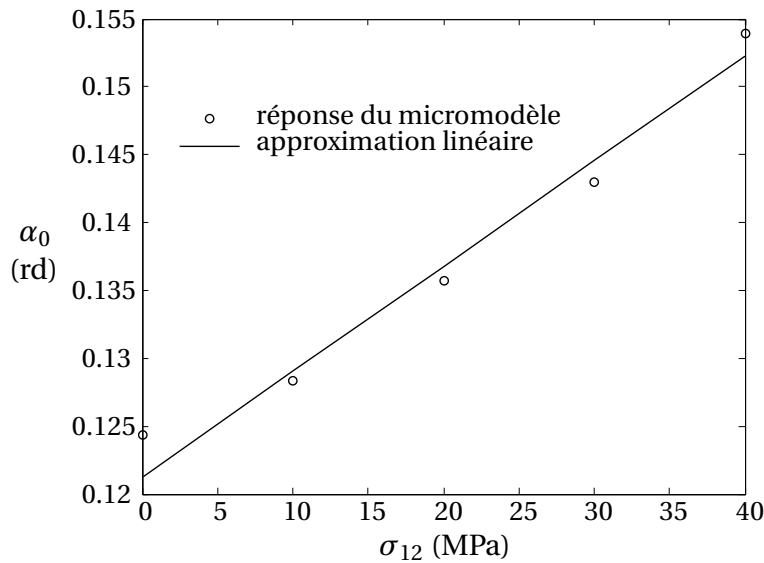


FIGURE 5.8:  $\alpha_0$  en fonction de  $\sigma_{12}$  pour  $\lambda_0 = 0.01$

La qualité de l'approximation des non-linéarités élastiques peut être estimée grâce à la Figure 5.9, qui présente trois réponses pour différentes réalisations de la microstructure. Leur allure indique que l'approximation est particulièrement précise pour de petits chargements, qui correspondent au régime élastique de la structure. Lorsque les chargements augmentent, la qualité de l'approximation diminue, mais les non-linéarités matérielles auront déjà altéré significativement l'allure de la réponse. Par ailleurs, l'approximation demeure toujours précise pour une ondulation de fibres importante, ce qui correspond aux cas pour lesquels on s'attend à observer une localisation et donc les déformations les plus importantes.

## 2.2 Endommagement de plissement et diffus

L'identification de la loi d'évolution de l'endommagement est effectuée sur un chargement de compression pure. Compte tenu du modèle choisi, on a alors  $Y_k = Y_r$ . Grâce à un chargement incrémental de la microstructure avec décharges, les dérivées partielles de l'énergie de déformation peuvent être calculées sur chaque décharge et la valeur de l'endommagement en est déduite. Les résultats de cette procédure sont tracés dans la Figure 5.10 en termes de variable d'endommagement en fonction de la force thermodynamique associée.

L'identification de cette loi est ensuite répétée pour plusieurs réalisations de la microstructure et l'on peut constater que le résultat est relativement insensible à la valeur de  $\lambda_0$  considérée. On peut alors choisir une forme relativement simple jusqu'à  $d_k \simeq 0.3$  et qui s'écrit :

$$d_k = \sup_{\tau \leq t} \left( \frac{Y_k}{Y_\kappa} \right) \quad (5.25)$$

avec  $Y_\kappa = 11.8$  MPa



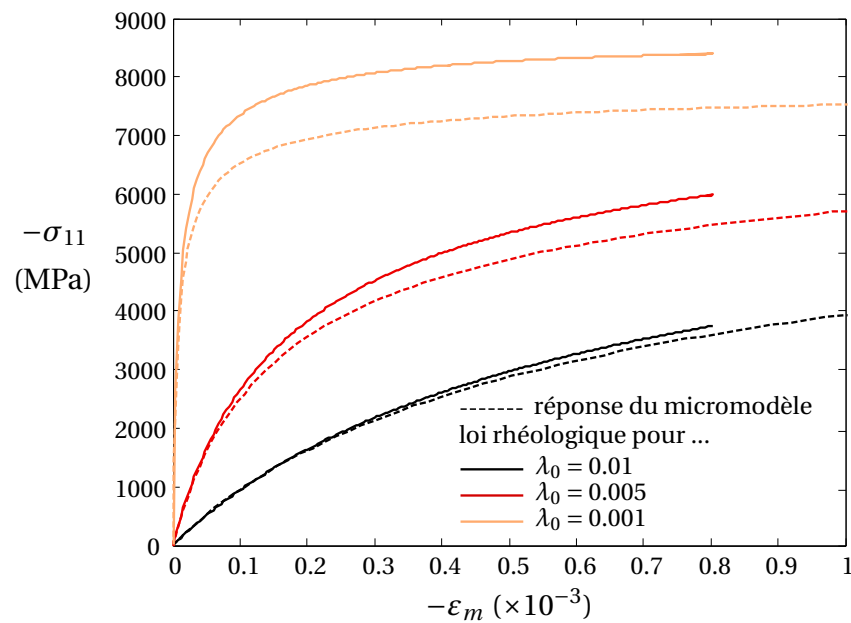


FIGURE 5.9: Réponses élastiques de la microstructure et de la loi approchée pour  $\lambda_0 \in [0.001, 0.01]$

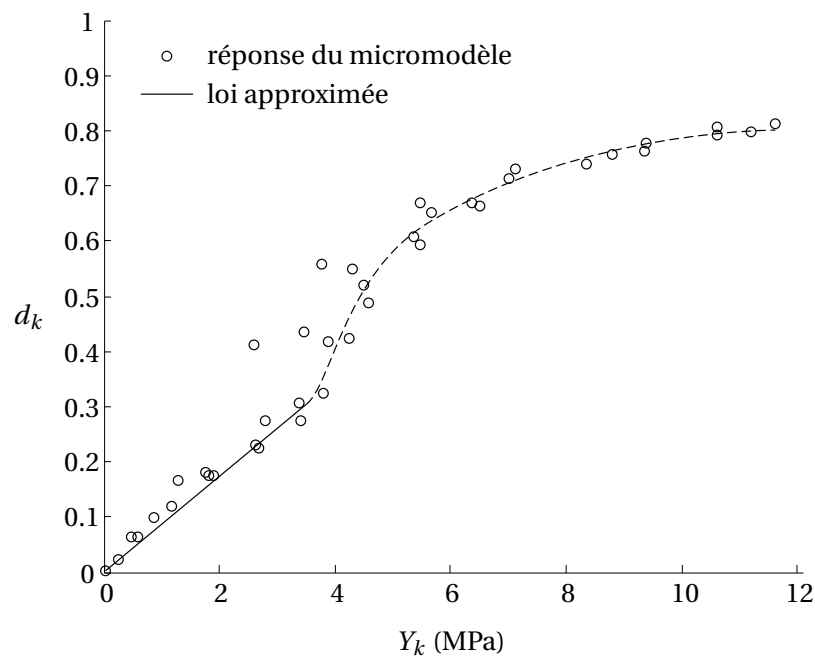


FIGURE 5.10:  $d_k$  en fonction de  $Y_k = Y_r$  pour  $\lambda_0 \in [0.0025, 0.01]$

Après identification de la loi, l'expression de  $Y_k$  sous chargement mixte reste à être déterminée. La Figure 5.11 indique qu'une combinaison linéaire telle que ci-dessous offre une bonne reproduction du couplage :

$$Y_k = Y_r + b_k Y_d \quad (5.26)$$

avec  $b_k = 8$ .

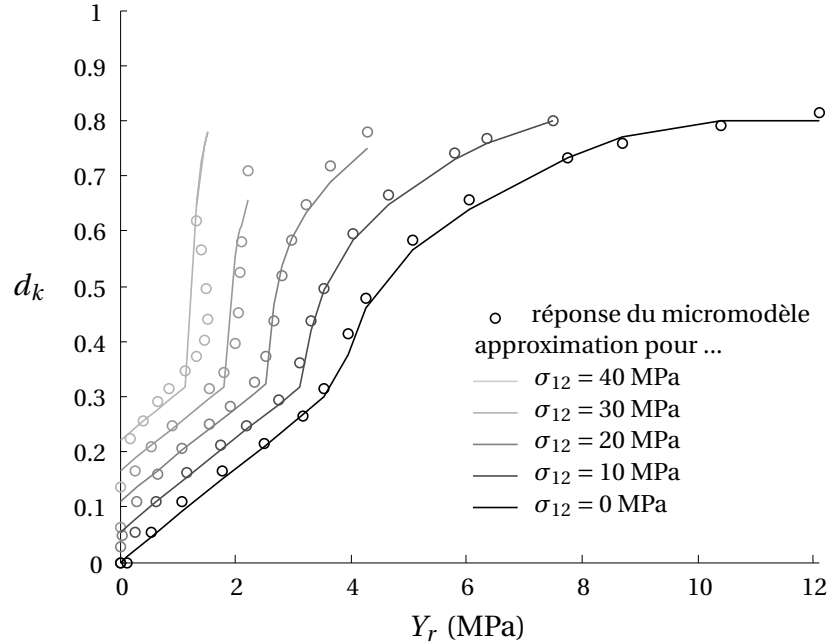


FIGURE 5.11:  $d_k$  en fonction de  $Y_r$  pour  $\sigma_{12} \in [0, 40]$  MPa

Dans le même temps, une analyse similaire pour  $d$ . Sans précharge de compression, on peut vérifier que la loi mésoscopique reliant  $d$  et  $Y_d$  est exactement celle définie pour les matériaux constituant du micromodèle en cisaillement pur (voir Figure 5.12). De plus, cette loi a été choisie volontairement compatible avec celle du *mésomodèle*, afin de ne pas perturber son bon fonctionnement dans les directions où il est déjà connu et identifié. Sous chargement mixte, la Figure 5.13 suggère la combinaison non-linéaire suivante pour  $Y$  :

$$Y = \left( \sqrt{Y_d + b Y_d'} + \sqrt{b_r Y_r} \right)^2 \quad (5.27)$$

avec  $b_r = 0.12$ .

### 2.3 Processus d'inélasticité

Une fois les composantes élastiques et endommageables connues, les énergies stockées et dissipées du modèle peuvent être directement identifiées à partir des relations

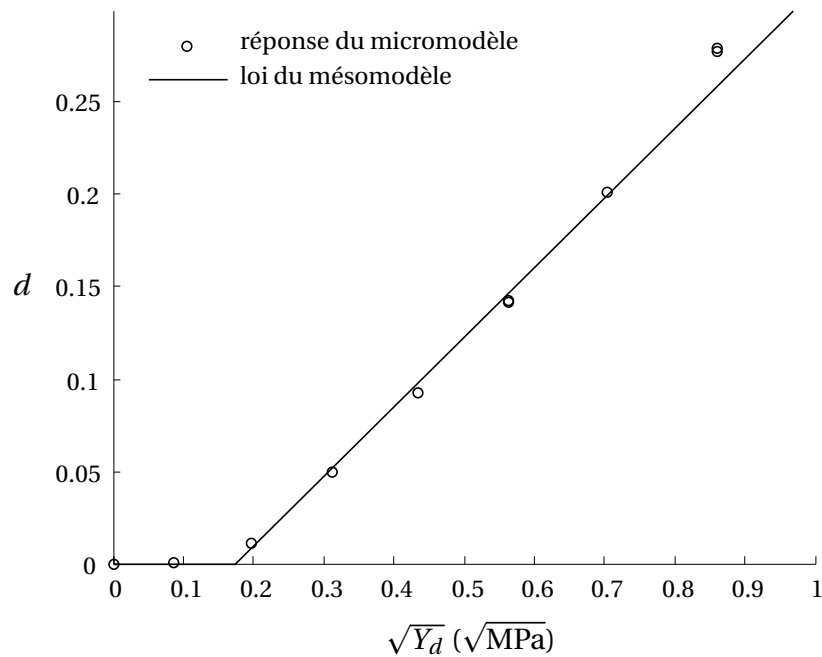


FIGURE 5.12:  $d$  en fonction de  $Y_d$  pour  $\lambda_0 \in [0.0025, 0.01]$

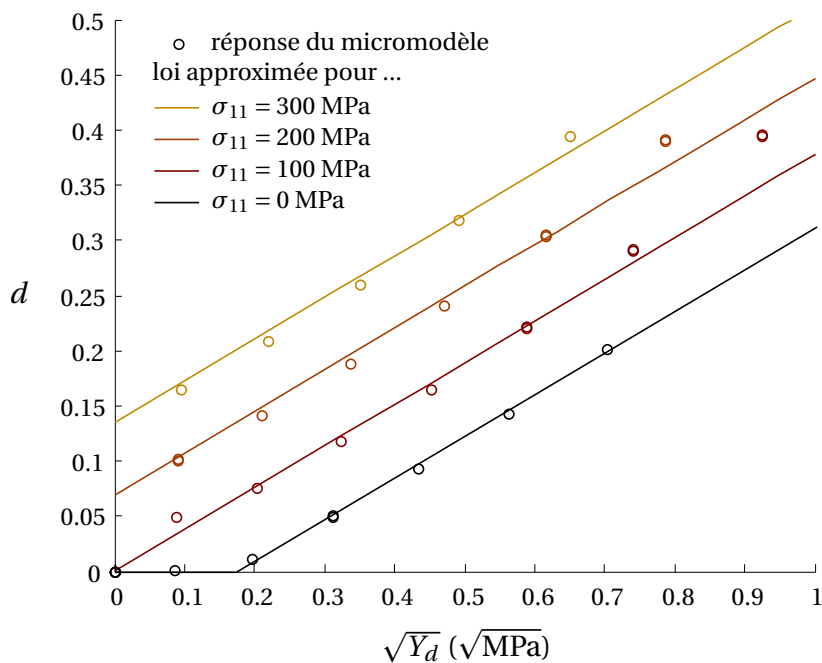


FIGURE 5.13:  $d$  en fonction de  $Y_d$  pour  $\sigma_{11} \in [0, -300]$  MPa

5.3 et 5.4. Toutefois, le choix d'une forme homogénéisée est limité par les hypothèses faites plus tôt (même processus d'inélasticité pour tout le mésomodèle). Les résultats en termes de contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  sont tracés dans la Figure 5.14 pour plusieurs réalisations de la microstructure. Comme prévu, les résultats sont relativement indépendants de l'ondulation des fibres  $\lambda_0$ . Quant à la loi d'évolution, elle présente une tendance qui se reproduit avec la contrainte équivalente suivante :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{12}^2 + a^2 \tilde{\sigma}_{22}^2} + \sqrt{a_r^2 \tilde{\sigma}_r^2} \quad (5.28)$$

avec  $a_r = 0.25$ .

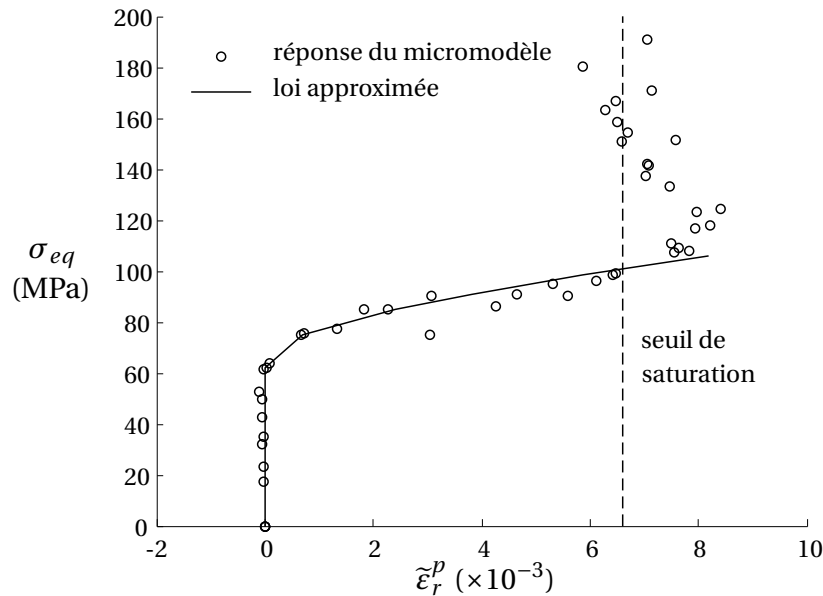


FIGURE 5.14:  $\sigma_{eq}$  en fonction de  $\tilde{\epsilon}_r^p$  pour  $\lambda_0 \in [0.0025, 0.01]$

Toutefois, on remarque en fin de courbe l'apparition d'une sorte de seuil de saturation de l'inélasticité. On choisit de ne le faire porter que sur les composantes de compression, afin qu'il ne perturbe pas la réponse en cisaillement pur par exemple :

$$\dot{p} = 0 \quad \text{si } a_r \tilde{\sigma}_r > \sigma_T \quad (5.29)$$

avec  $\sigma_T = 95$  MPa. Une telle forme permet de bien reproduire les chargements mixtes où la compression est dominante. On pourra remarquer dans la Figure 5.15 que le seuil est atteint pour des valeurs de  $\sigma_{eq}$  plus importantes, puisqu'il ne dépend que de  $\tilde{\sigma}_r$ .

La Figure 5.16 révèle également une bonne reproduction des chargements mixtes où le cisaillement est prédominant. Dans ce cas, le seuil de saturation n'est jamais atteint.

On peut donc considérer que l'hypothèse que l'inélasticité "de *kinking*" est pilotée par le même processus que le reste du mésomodèle est vérifiée. Le seul ajout inattendu est ce seuil d'inélasticité, mais puisque son critère ne dépend que des variables liées à la compression, il ne modifie pas le comportement dans les autres directions tant que la compression reste faible.

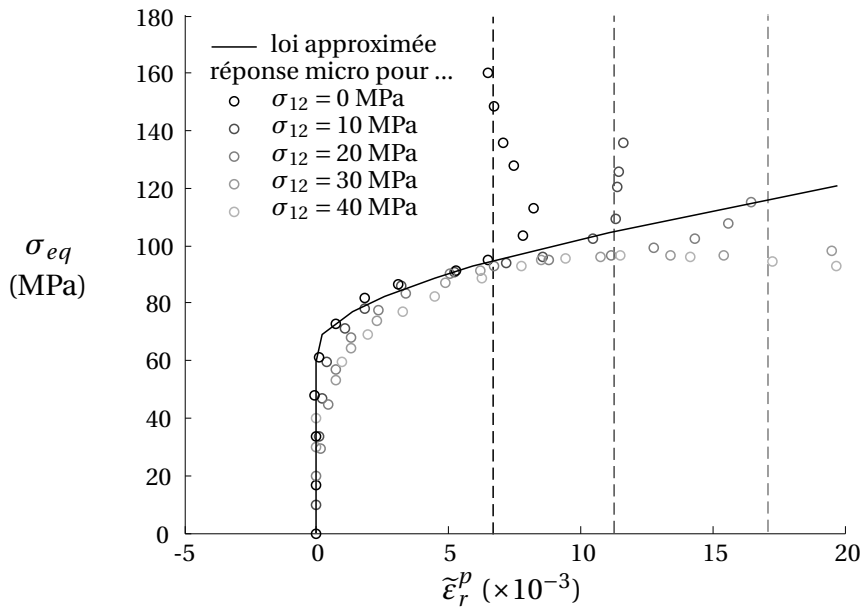


FIGURE 5.15:  $\sigma_{eq}$  en fonction de  $\tilde{\epsilon}_r^p$  pour  $\sigma_{12} \in [0, 40]$

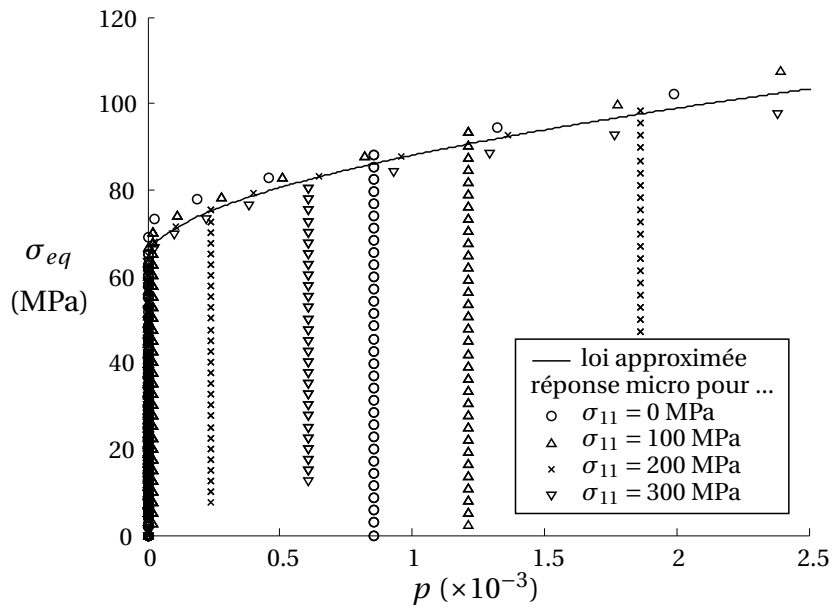


FIGURE 5.16:  $\sigma_{eq}$  en fonction de  $p$  pour  $\sigma_{11} \in [0, -300]$  MPa

### 3 Résultats et discussion

Après avoir identifié tous les paramètres et lois nécessaires pour ce modèle de comportement, cette méthode permet de reproduire avec précision le comportement d'une microstructure subissant un plissement jusqu'à rupture des fibres. Il est important de signaler que *tous* les paramètres introduits et rappelés dans le Tableau 5.3 sont identifiés grâce à des simulations numériques très simples, décrites précédemment. Aucun essai expérimental supplémentaire n'est donc nécessaire. Par ailleurs, un certain nombre de ces paramètres, en particulier  $c_\alpha$  et  $c_\gamma$  et les coefficients de couplage, risquent fort d'être valables pour plusieurs familles de matériaux, bien qu'il soit un peu tôt pour l'affirmer avec certitude. Ainsi, la seule information nécessitant une quelconque mesure est la statistique d'ondulation des fibres.

PARAMÈTRE MATÉRIAU	SYMBOLE	VALEUR	UNITÉ
Module élastique rhéologique	$k^0$	18,360	MPa
Coefficient d'ondulation	$c_\alpha$	12.4	rd
Coefficient de rotation	$c_\gamma$	1.07	rd
Force critique de plissement	$Y_\kappa$	11.8	MPa
Couplage cisaillement/plissement	$b_k$	8	
Couplage plissement/cisaillement	$b_r$	0.12	
Couplage inélastique du plissement	$a_r$	0.25	
Seuil de saturation inélastique	$\sigma_T$	95	MPa

TABLE 5.3: Rappel des paramètres identifiés grâce à la procédure

Comme illustré par la Figure 5.17, le modèle de comportement permet de reproduire avec fidélité les non-linéarités du micromodèle. L'erreur en termes d'énergies stockées et dissipées est de l'ordre du pour-cent. Par ailleurs, le comportement du mésomodèle dans les autres directions n'est pas altéré par les changements, à moins bien sûr qu'il y ait présence de compression.

Avec l'ajout de la partition élastique linéaire des déformations, on peut alors tracer la réponse finale du VER et la comparer avec les réponses monotones obtenues avec un modèle élastique non-linéaire par Allix et Vittecoq (voir Équation 5.11). Comme l'illustre la Figure 5.18, une bonne corrélation des réponses est obtenue pour un module de compression  $E_1^c = 120$  GPa et un coefficient de non-linéarité  $\alpha_V = 16$  GPa/% (ou un module de compression égal à celui de traction  $E_1 = 130$  GPa et  $\alpha_V = 14$  GPa/%). Ces valeurs sont assez proches mais inférieures aux mesures d'Allix et Vittecoq, qui ont trouvé  $\alpha_V$  compris entre 20 et 30 GPa/%.

Sous chargements mixtes, la reproduction de la réponse perd en précision mais les résultats restent tout à fait acceptables, comme l'illustrent les Figures 5.19 et 5.20. On remarque toutefois que de légères variations entre les lois approximées et le comportement réel de la microstructure entraînent, dans des cas difficiles tels que ceux-ci, des différences de significatives sur l'enveloppe de la réponse (voir aussi [Feld *et al.*, 2012]).

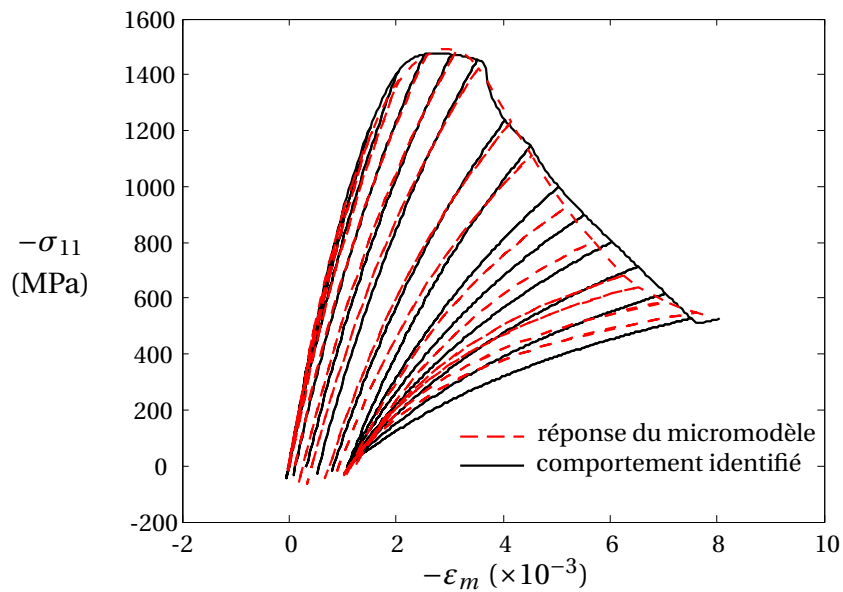


FIGURE 5.17: Courbe contrainte-déformation en compression simple pour  $\lambda_0 = 0.01$

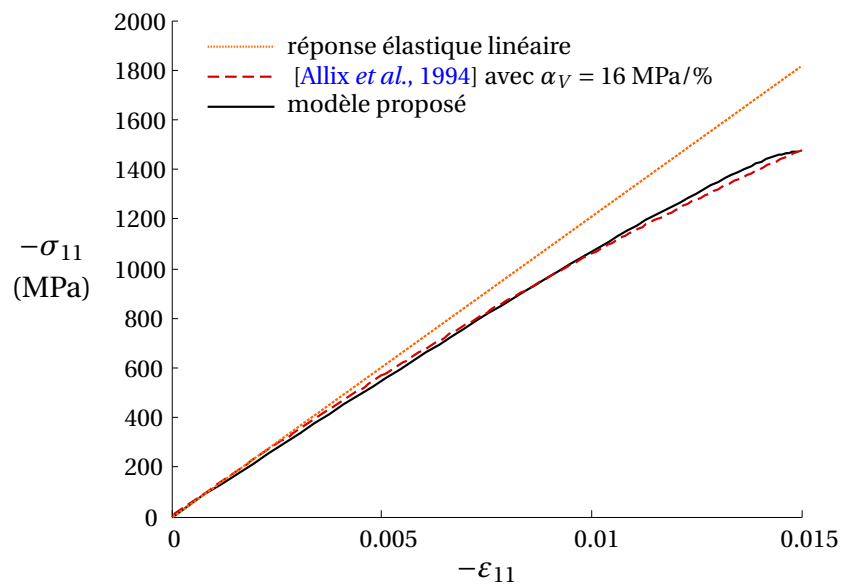


FIGURE 5.18: Comparaison de la réponse monotone globale avec un modèle élastique non-linéaire

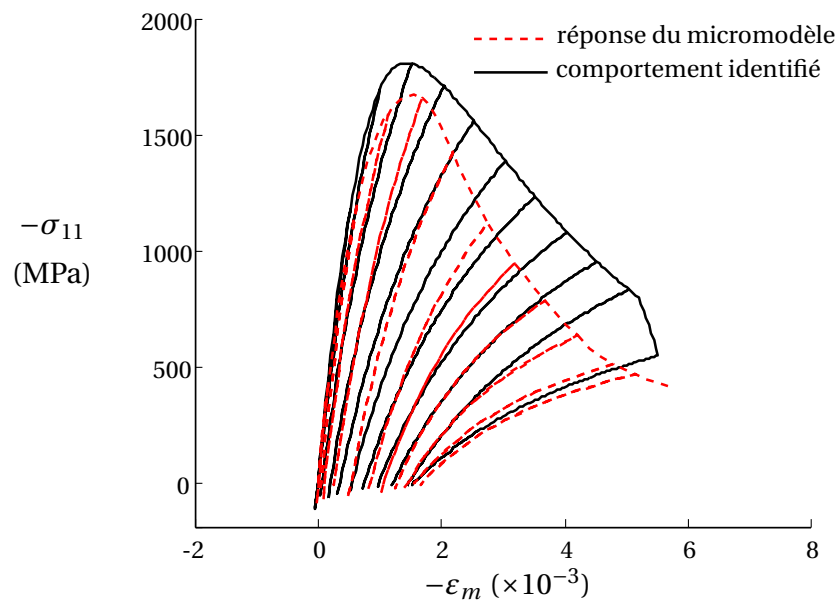


FIGURE 5.19: Courbe contrainte-déformation en compression pour  $\lambda_0 = 0.005$  et  $\sigma_{12} = 20$  MPa

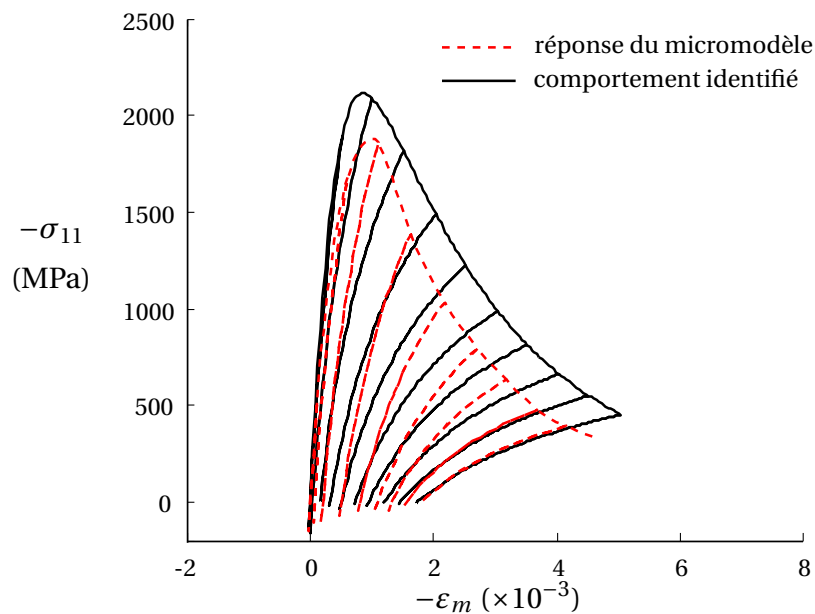


FIGURE 5.20: Courbe contrainte-déformation en compression pour  $\lambda_0 = 0.0025$  et  $\sigma_{12} = 30$  MPa



## 4 Conclusions sur l'homogénéisation du comportement

Cette étude a permis de faire remonter les informations pertinentes de la micro-mécanique à une échelle supérieure. On a ainsi enrichi un modèle de comportement matériau existant avec de nouvelles variables, définies par la réponse de la microstructure. Le comportement en compression et compression-cisaillement a été amélioré, sans que les autres directions de chargement (comme la compression pure) ne soient perturbées par ces ajouts. Enfin, une stratégie d'identification en deux étapes, basée sur la conservation des énergies, a permis d'identifier simplement chacun des nouveaux paramètres introduits dans le modèle.

Les lois identifiées par cette procédure peuvent à présent être implantées dans n'importe quelle version du mésomodèle, à quelques subtilités près. En effet, le Chapitre 6 va mettre en évidence les difficultés d'implantation liées tant au modèle de comportement qu'au modèle "hôte". En particulier, l'ajout de la partition linéaire élastique des déformations (Figure 5.1) fait apparaître un point de rebroussement dans la loi de comportement, dont l'intégration devient délicate. Le passage aux contraintes tridimensionnelles n'implique en revanche aucune difficulté supplémentaire. On profite ainsi d'un modèle matériau qui complète sans perturber le comportement déjà identifié du mésomodèle, tout en intégrant un paramètre scalaire caractérisant le mésalignement statistique des fibres. Dans le prochain et dernier chapitre, les capacités et limites de ce modèle sont illustrées dans le cadre du modèle hybride.

# Chapitre 6

## Perspectives : Simulation des stratifiés à l'aide d'un modèle hybride

*Dans ce dernier chapitre prospectif, l'intégration dans un modèle hybride du comportement identifié est discutée. Le principe de ce modèle repose sur la représentation des dégradations volumiques (diffuses) par la mécanique de l'endommagement continu et des dégradations surfaciques par la mécanique de la rupture discrète. Le plissement est un phénomène de rupture certes localisé, mais ayant une dimension caractéristique. Ceci permet de le considérer comme une dégradation volumique, dont la taille caractéristique est définie par la dimension des cellules élémentaires, choisie égale à celle de la bande de plissement. Les difficultés liées à l'implantation de ce modèle sont discutées au vu de quelques cas tests simples.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Enrichissement du modèle hybride</b>	<b>114</b>
1.1	Définition des nouvelles variables	114
1.2	Mise en œuvre dans le code de calcul	116
1.3	Calcul de la non-linéarité élastique	117
1.4	Calcul de l'endommagement	117
<b>2</b>	<b>Simulation d'un pli UD et premiers résultats</b>	<b>118</b>
2.1	Données d'entrée et paramètres de simulation	118
2.2	Validation de la l'implantation numérique	119
2.3	Résultats préliminaires en compression libre	123
2.4	Résultats préliminaires en compression encastree	126
2.5	Limites et précautions particulières	129

---

## 1 Enrichissement du modèle hybride

L'implantation numérique du modèle de comportement est ici effectuée dans le cadre du modèle d'endommagement dit hybride [Ladevèze *et al.*, 2006, Violeau *et al.*, 2009]. Ce modèle, qui mêle descriptions continues et discrètes des dégradations, fait office de matériau virtuel de référence en restant proche de la physique des divers mécanismes élémentaires (ce qui revient d'une certaine façon à le situer entre les échelles micro et méso). Ainsi, les dégradations prenant place à la même échelle que le *kinking*, comme la fissuration discrète, sont représentées explicitement. Ce choix devrait permettre, à terme, d'observer les couplages naturels prenant effet entre plissement et autres mécanismes de dégradation, y compris le délaminage local.

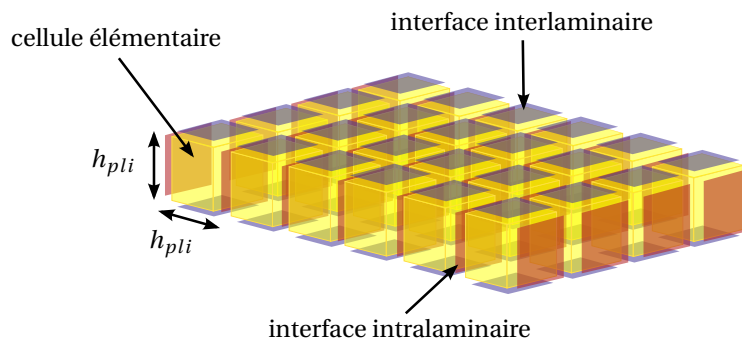


FIGURE 6.1: Décomposition d'un pli stratifié en cellules élémentaires et interfaces

Le modèle hybride définit une structure composite comme un assemblage de cellules élémentaires et d'interfaces (voir Figure 6.1). Chaque cellule est composée d'un matériau fibres-matrice élasto-plastique endommageable, dont les variables internes sont homogènes dans la cellule et représentent les dégradations volumiques (notamment décohésions fibres-matrice, micro-fissuration et rupture des fibres). Les équations de l'endommagement et de la plasticité sont essentiellement les mêmes que celles du mésomodèle standard (voir Chapitre 3). Parmi les quelques changements, l'endommagement diffus ne sature pas à la valeur  $d_c$  : on considère plutôt, passé ce seuil, que les décohésions et micro-fissures percolent et créent une fissure discrète.

On introduit des surfaces potentielles de rupture inter- et intra-laminaires, qui représentent la fissuration discrète, respectivement dans l'épaisseur du pli (fissuration transverse, *splitting*) et à l'interface (délaminage local). Seules les surfaces intralaminaires parallèles aux fibres sont susceptibles de rompre, de façon fragile, par percolation de l'endommagement diffus ou suivant un critère mixte en contrainte et en énergie, intégrant les effets d'épaisseur (voir Chapitre 3). Afin d'accélérer les calculs, la rupture d'une interface est déterminée grâce à un algorithme explicite.

### 1.1 Définition des nouvelles variables

La rupture dans le sens des fibres est volumique et pilotée par la variable  $d_f$  [Trovalet *et al.*, 2009]. Elle a donc une longueur caractéristique : la taille de la cellule élé-

mentaire, qui est proche de l'épaisseur du pli  $h_{pli}$  (voir Figure 6.1). La taille moyenne d'une *kink-band* est de ce même ordre de grandeur. On décide de profiter de cette modélisation pour ne pas introduire de longueur interne supplémentaire dans le modèle. Cela revient à assimiler chaque cellule à un Volume Élémentaire Représentatif, dont le comportement est déterminé par l'identification menée dans le chapitre précédent.

L'enrichissement du comportement en compression dans le sens des fibres nécessite l'ajout de deux nouvelles variables, homogènes dans chaque cellule élémentaire :

- $\alpha$  : le mésalignement des fibres (par rapport à  $\underline{e}_1$ ), qui n'est pas une variable interne mais permet un calcul incrémental de la non-linéarité géométrique ;
- $d_k$  : l'endommagement de *kinking*, influant sur le calcul de  $\alpha$ , qui est la seule véritable nouvelle variable interne.

Bien qu'il y ait présence de déformations irréversibles dans le sens des fibres, celles-ci sont gérées par le même processus d'inélasticité isotrope que le reste du modèle. Seule l'expression de la contrainte équivalente est donc modifiée (voir plus loin). Les paramètres et lois d'évolution qui régissent ces variables sont décrits dans les chapitres précédents, mais toutes les valeurs numériques utilisées dans ce Chapitre sont récapitulées dans le Tableau 6.1.

PARAMÈTRE	NOTATION	VALEUR
Statistique d'ondulation	$\lambda_0$	0.0001 – 0.01
Coefficient d'ondulation	$c_\alpha$	12.4 rd
Coefficient de rotation	$c_\gamma$	1.07 rd
Module d'Young longitudinal	$E_1^0$	130 GPa
Modules d'Young transverses	$E_2^0 = E_3^0$	8.5 GPa
Modules de cisaillement longitudinaux	$G_{12}^0 = G_{13}^0$	4.2 GPa
Module de cisaillement transverse	$G_{23}^0$	3 GPa
Module de plissement	$k_r^0$	18 GPa
Limite élastique	$R_0$	64 MPa
Module d'écroutissage	$K$	1000 MPa
Exposant de l'écroutissage	$m$	0.54
Couplage inélastique	$a$	0.7
Couplage inélastique de plissement	$a_r$	0.25
Force thermodynamique d'initiation diffuse	$Y^0$	0.03 MPa
Force critique diffuse	$Y^C$	8 MPa
Force critique fragile	$Y_f^C$	15 MPa
Force critique de plissement	$Y_\kappa$	12 MPa
Couplage des forces diffuses associées	$c$	0.5
Couplage des endommagements diffus	$c'$	0.8
Couplage cisaillement/plissement	$b_k$	8
Couplage plissement/cisaillement	$b_r$	0.12

TABLE 6.1: Paramètres matériau des plis de T300/BSL-914C

## 1.2 Mise en œuvre dans le code de calcul

On décide de respecter l'approche de type "point fixe" du modèle hybride dans l'introduction et le calcul des nouvelles variables.

Au début de chaque instant de chargement  $t$ , on commence par résoudre un problème linéaire global aux interfaces. Puis on corrige cette prédiction en résolvant des problèmes locaux par sous-structure (voir Algorithme 1). On commence par  $\alpha_0$  et  $\alpha$ , qui lient  $\sigma_{11}$  à  $\varepsilon_{11}$ . Puis, grâce à un algorithme de retour radial, on met à jour la plasticité cumulée  $p$  et l'érouissage  $R$ . On passe ensuite au calcul de l'endommagement, la variable  $d_k$  étant déterminée en même temps que  $d$  et  $d'$ . Le calcul de la rupture des fibres et des interfaces est effectué dans la même étape.

Une fois les problèmes locaux résolus, on vérifie la stagnation des variables internes par rapport à l'itération globale précédente. Si elle est insuffisante ou si une interface a atteint son critère de rupture, on effectue une nouvelle itération en cassant une seule interface et en commençant par la résolution du problème linéaire global réactualisé. Si en revanche on a convergé sans qu'aucune nouvelle interface n'ait atteint son critère de rupture, on passe au pas de temps suivant avec un nouvel état de chargement.

### Algorithme 1

**Initialisation** :  $i = 1, \eta = 1$ , toutes les variables internes  $V_i^k(t) = V^k(t - 1)$

**Boucle** : tant que  $\eta > \eta_c, i++$

1. Calcul de l'élasticité non-linéaire ( $\alpha_i$  et  $\alpha_0$ ), autres variables internes fixées.
2. Calcul de la (visco-)plasticité ( $p_i$ ), autres variables internes fixées.
3. Calcul de l'endommagement ( $d_i, d'_i$  et  $d_{k,i}$ ), autres variables internes fixées.
4. Calcul de la rupture sens fibres ( $d_{f,i}$ ), autres variables internes fixées.
5. Erreur en stagnation des variables internes :  $\eta = \sum_k \frac{\|V_i^k - V_{i-1}^k\|}{\|V_{i-1}^k\|}$

Par rapport à l'algorithme présenté dans la thèse de Trovalet [Trovalet, 2010], les modifications apportées sont :

- Ajout de l'Étape 1 de non-linéarité élastique.
- Correction de la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  de l'algorithme de plasticité.
- Ajout du calcul d'une variable d'endommagement et correction de la force thermodynamique  $Y$  (voir Chapitre 5).
- Correction du critère de rupture dans le sens des fibres.

Seuls les quelques changements apportés aux Étapes 2 et 4 sont indiqués ci-dessous. En revanche, les Étapes 1 et 3 sont entièrement détaillées.

### Correction de la plasticité

L'algorithme de plasticité n'est quasiment pas modifié. On introduit une nouvelle forme pour la fonction  $\sigma_{eq}$ , identifiée dans le chapitre précédent et qui s'écrit :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + a^2(\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)} + \sqrt{a_r^2 \sigma_r^2} \quad (6.1)$$

Compte tenu de l'hypothèse de normalité, on en déduit l'évolution des déformations irréversibles,  $\tilde{\varepsilon}_r^p$  étant celles liées au plissement :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^p = \dot{p} \frac{|\sigma_{ij}|}{\sigma_{eq}} \quad \forall (i, j) \neq (1, 1) \quad \text{et} \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_r^p = \dot{p} a_r \quad (6.2)$$

### Correction de la rupture des fibres

Le critère de rupture fragile dans le sens des fibres devient, en traction comme en compression :

$$\sup_{\tau \leq t} (Y_f) = \sup_{\tau \leq t} \left( \frac{\sigma_{11}^2}{E_1^0 (1 - d_f)^2} \right) \leq Y_f^C \quad (6.3)$$

Lorsque ce critère est atteint, l'endommagement des fibres  $d_f$  et toutes les autres variables d'endommagement passent à 0.95. En pratique, elles devraient passer à 1 ou presque. Mais pour des valeurs plus importantes, la convergence du gradient conjugué utilisé dans l'étape globale est souvent compromise. Dans la suite, on se contentera donc d'observer le comportement jusqu'à rupture, mais pas au-delà. L'effet de la courbure des fibres n'a pas non plus été pris en compte dans ce critère. Pour l'étude du comportement post-rupture, il faudrait lui préférer celui de l'Équation 4.30.

## 1.3 Calcul de la non-linéarité élastique

L'algorithme de calcul de la non-linéarité élastique est basé sur la résolution d'un système non-linéaire de deux équations à deux inconnues. L'angle initial (i.e. sans chargement de traction/compression)  $\alpha_0$  est estimé par un calcul direct. C'est une fonction bilinéaire de  $\lambda_0$  et de  $\gamma_{12}$ , qui n'est pas affectée par le reste des calculs. L'angle sous charge,  $\alpha$ , est déterminé en fonction de  $\alpha_0$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $d_k$  et  $\varepsilon_r^p$  à l'aide de l'Algorithme 2.

Cet algorithme sur des grandeurs scalaires permet d'atteindre une erreur relative  $\eta_c = 10^{-7}$  en 4 à 6 itérations environ, pourvu que l'incrément de déformation axiale totale  $\Delta \varepsilon_{11}$  ne soit pas trop important. En pratique, on peut le décomposer en sous-incréments de taille fixe ( $\equiv 10^{-4}$ ), afin de ne pas passer trop tôt le pic (notamment lorsque  $\alpha_0$  est faible).

## 1.4 Calcul de l'endommagement

La boucle locale d'endommagement est modifiée selon l'Algorithme 3.

**Algorithme 2****Initialisation** :  $i = 1, \eta = 1, \alpha_i = \alpha(t-1), \Delta\varepsilon_{m,i} = \Delta\varepsilon_{11}$ Calcul de l'angle initial :  $\alpha_0 = c_\alpha \lambda_0 + c_\gamma \sqrt{\gamma_{12}^2(t) + \gamma_{13}^2(t)}$ Calcul de la déformation géométrique :  $\varepsilon_{m,i} = (\cos(\alpha_0) - \cos(\alpha_i)) + \Delta\varepsilon_{m,i}$ **Boucle** : tant que  $\eta > \eta_c, i++$ 1. Calcul de l'angle courant :  $\alpha_i = \arccos(\cos(\alpha_0) - \varepsilon_{m,i-1})$ 

2. Actualisation des raideurs tangentés :

- Calcul de la déflexion :  $\varepsilon_r = \sin(\alpha_i) - \sin(\alpha_0)$
- Calcul de la contrainte axiale :  $\sigma_{11} = -\frac{(1-d_k(t))k(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p(t))}{\tan(\alpha_i)}$
- Calcul de la raideur géométrique tangente :  $D_r = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{11}(t-1)}{\Delta\varepsilon_{m,i-1}}$

3. Actualisation de la déformation géométrique :

$$\Delta\varepsilon_{m,i} = \Delta\varepsilon_{11} \frac{E_1}{D_r + E_1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{m,i} = (\cos(\alpha_0) - \cos(\alpha_i)) + \Delta\varepsilon_{m,i}$$

4. Calcul de l'erreur en contrainte :  $\eta = \frac{|\sigma_{11} - E_1(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{m,i})|}{|\sigma_{11}|}$ **Fin** :  $\alpha(t) = \alpha_i$ 

## 2 Simulation d'un pli UD et premiers résultats

L'enrichissement du modèle hybride a permis de réaliser quelques simulations démontrant les possibilités et limites de la stratégie. Toutefois, ces résultats restent préliminaires et toutes les observations faites ci-après sont à prendre avec une certaine prudence. En particulier, le comportement post-pic doit être significativement amélioré. Aussi, seul le cas d'un simple pli unidirectionnel en compression, avec des conditions limites libres ou encastées, sera étudié. Compte tenu du nombre de mécanismes élémentaires impliqués, il s'agira essentiellement de vérifier la bonne implantation du modèle développé dans cette thèse, jusqu'à un certain point, et l'influence des conditions limites.

### 2.1 Données d'entrée et paramètres de simulation

Le test utilisé pour valider l'implantation du modèle est une poutre constituée d'un seul pli unidirectionnel en compression. Son épaisseur  $h_{pli}$  est de  $2 \times 0.1$  mm, sa largeur  $l_{pli}$  de 1 mm et sa longueur  $L_{pli}$  de 5 mm. Avec un seul plan de symétrie dans l'épaisseur, on peut simuler un demi-pli. Compte tenu de la variabilité de l'ondulation initiale (voir plus bas), on n'introduira pas de plan de symétrie supplémentaire dans la largeur ni dans la longueur du pli.

**Algorithme 3****Initialisation** :  $i = 1, \eta = 1, d_i = d(t-1), d'_i = d'(t-1), d_{k,i} = d_k(t-1)$ **Boucle** : tant que  $\eta > \eta_c, i++$ 

1. Calcul des forces d'endommagement :

- Calcul des contraintes :

$$\underline{\sigma} = \mathbf{H}(d_{i-1}, d'_{i-1}) : (\underline{\varepsilon}(t) - \underline{\varepsilon}^p(t)) \quad ; \quad \sigma_r = (1 - d_{k,i-1})k(\varepsilon_r(t) - \varepsilon_r^p(t))$$

- Calcul des forces thermodynamiques moyennes associées :

$$Y_d = \frac{\bar{\sigma}_{mn}^2}{2G_{mn}^0(1 - d_{i-1})^2} \quad ; \quad Y_{d'} = \frac{\langle \bar{\sigma}_{nn} \rangle^2}{2E_n^0(1 - d'_{i-1})^2} \quad ; \quad Y_r = \frac{\bar{\sigma}_r^2}{2k^0(1 - d_{k,i-1})^2}$$

- Calcul des forces d'endommagement couplées :

$$Y = \left( \sqrt{Y_d + cY_{d'}} + \sqrt{b_r Y_r} \right)^2 \quad ; \quad Y_k = Y_r + b_k Y_d$$

2. Calcul des variables d'endommagement :

$$d_i = \sup_{\tau \leq t} \left( \frac{\langle \sqrt{Y} - \sqrt{Y^0} \rangle}{\sqrt{Y^C} - \sqrt{Y^0}} \right) \quad ; \quad d'_i = c' d_i \quad ; \quad d_{k,i} = \sup_{\tau \leq t} \left( \frac{Y_k}{Y_k} \right)$$

3. Calcul de l'erreur en stagnation :  $\eta = \frac{d_i - d_{i-1}}{d_i} + \frac{d_{k,i} - d_{k,i-1}}{d_{k,i}}$ **Fin** :  $d(t) = d_i, d'(t) = d'_i, d_k(t) = d_{k,i}$ 

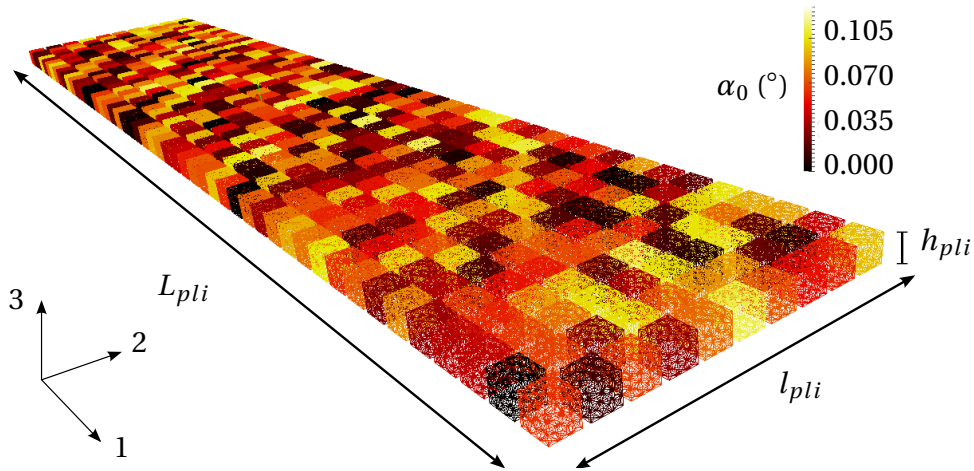
Le pli est isotrope transverse et constitué de matériau T300/914, dont les caractéristiques sont rappelées dans le Tableau 6.1. Puisqu'on ne l'a pas étudiée dans l'analyse microscopique, le calcul est effectué sans viscosité. Une répartition de défauts d'alignement des fibres est distribuée, constante par sous-structure, à partir d'une fonction de Weibull identifiée sur les résultats de Paluch (voir Figure 6.2). Cette répartition est irréaliste au possible, puisqu'aucune corrélation spatiale n'est considérée (en particulier dans le sens des fibres). Toutefois, en l'absence de données de mesure, l'influence de cette répartition ne sera pas étudiée.

Le pli compte 500 sous-structures et 260 000 degrés de liberté (ddl). Pour ce calcul, il a été parallélisé en 12 processus, lancés sur un seul nœud de 12 cœurs avec 24 Go de mémoire allouée sur le *cluster* du laboratoire. Le problème macroscopique, écrit sur les interfaces avec une base de 9 modes, totalise 19 000 degrés de liberté et est également parallélisé en 8 processus. Son critère de convergence impose une erreur relative en énergie inférieure à  $10^{-6}$ .

## 2.2 Validation de la l'implantation numérique

On souhaite avant tout de valider la bonne implantation du modèle, en étudiant la réponse d'une cellule où les déformations se localisent. La cellule en question présente une ondulation initiale importante ( $\lambda_0 \simeq 0.01$ ) et subit des contraintes de cisaillement





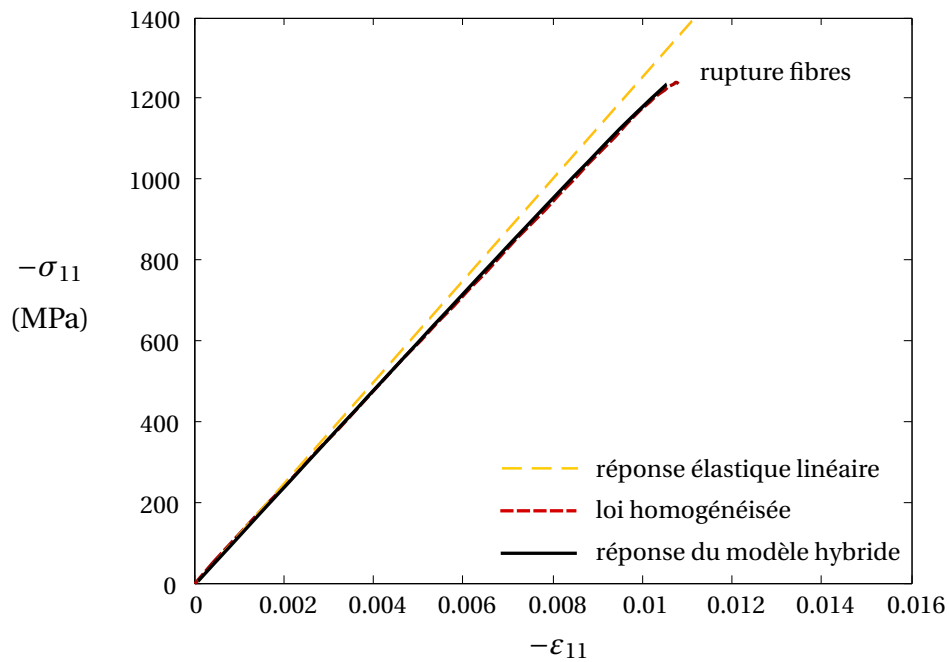
**FIGURE 6.2:** Division en sous-structures, maillage et distribution de défauts ( $\alpha_0$  en rd) sur la structure simulée

croissantes au cours du temps (quasi-linéairement de 0 à 15 MPa au moment du saut d'efforts). La réponse en termes de contrainte et déformation axiales jusqu'à rupture est tracée Figure 6.3.

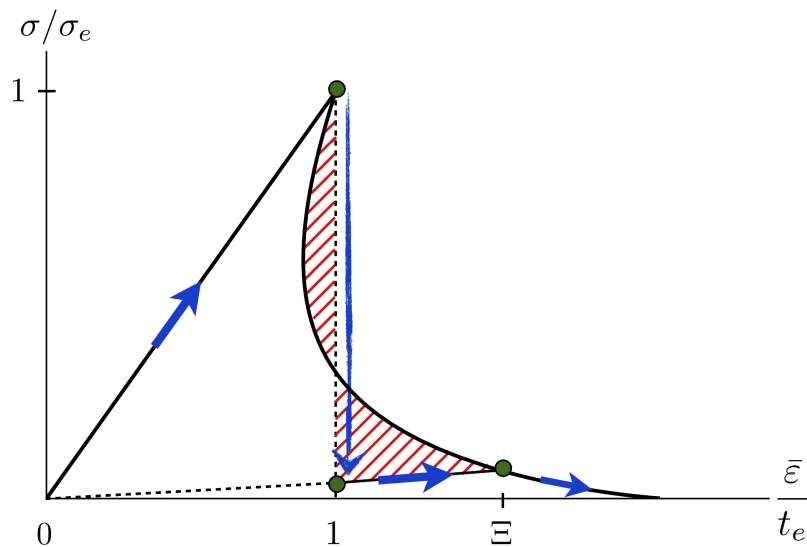
On observe un comportement légèrement non-linéaire, suivi d'une rupture fragile. La réponse est superposée à la courbe obtenue sous *QtOctave* pour la loi de comportement homogénéisée dans les mêmes conditions (défaut, chargement). La reproduction jusqu'à rupture est satisfaisante, mais il faut admettre que les non-linéarités restent faibles. Par contre, le comportement post-pic est mal intégré, ce à quoi on pouvait s'attendre en présence d'un point de rebroussement dans la réponse de la microstructure (voir Figure 5.1). Entre autres conséquences, l'énergie dissipée par le processus est significativement surestimée.

C'est là un aspect très limitant de ce modèle et la régularisation de cette instabilité va faire l'objet de travaux futurs. Par exemple, on peut supposer qu'une cellule ayant dépassé le pic de contraintes va être le lieu d'importantes concentrations de déformations. Aussi, on choisit de remplacer le comportement post-pic instable par une branche verticale, un "saut contrôlé" amenant à un niveau d'énergie bien défini (voir Figure 6.4). Lorsque les déformations augmentent, on suit alors une nouvelle branche, qui permet de "relaxer" l'énergie sur-emmagasinée au cours du saut, jusqu'à un point de raccord. Passé ce point, le comportement redevient standard.

Cette méthode a été utilisée par Pham pour l'étude d'une poutre élastique endommageable pilotée en déplacement [Pham, 2010]. Il a notamment démontré une équivalence en énergie (dans ce cas précis) entre la réponse suivant le chemin de rebroussement (à l'aide d'un algorithme de continuation) et cette stratégie. Toutefois, son adoption dans le cadre de l'étude du plissement nécessiterait au préalable de définir un comportement pour la bande *après* la rupture des fibres, ce qui n'a pas été traité dans cette thèse.



**FIGURE 6.3:** Réponse axiale d'une cellule du modèle hybride (continue) comparée à la loi homogénéisée équivalente (pointillés)



**FIGURE 6.4:** Réponse réelle de la poutre présentant un point de rebroussement (trait continu) et chemin régularisé suivi avec égalisation des aires hachurées (flèches)

Pour se placer dans un cadre de simulation plus classique, on se propose pour le moment de déterminer quels cas seraient susceptibles de présenter un comportement univoque en déformations, c'est-à-dire avec un *snap-through* et non un *snap-back*, et de ne mener des simulations au-delà de la contrainte ultime que dans ce cadre. Si l'on considère les propriétés matérielles comme des données, le défaut initial est le seul paramètre que l'on peut faire varier. La Figure 6.5 suggère qu'à partir d'un défaut  $\lambda_0 > 0.03$ , le modèle de comportement redevient univoque.

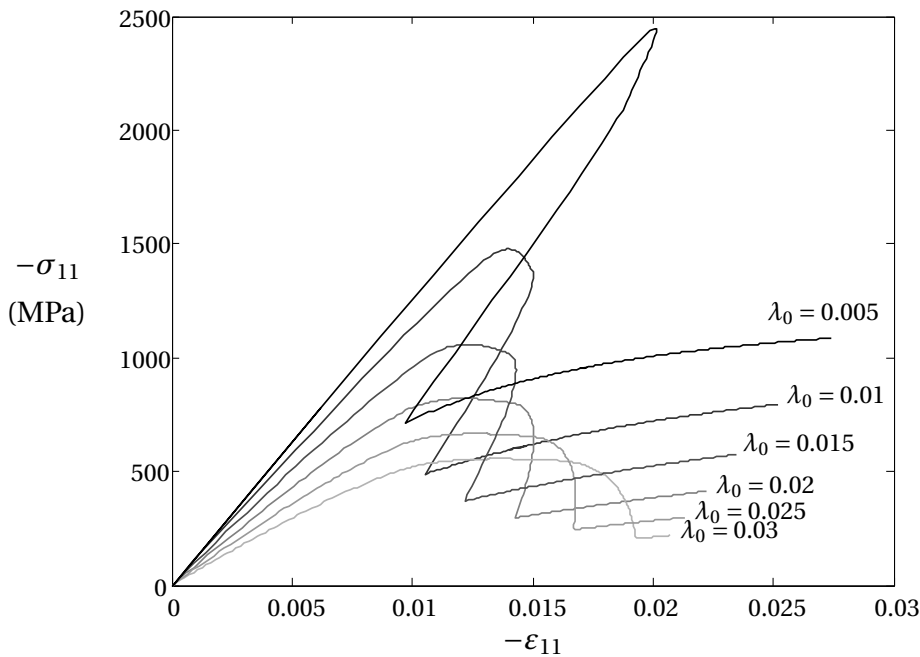


FIGURE 6.5: Réponse axiale de la loi homogénéisée pour  $\lambda_0 \in [0.005, 0.03]$

On refait une simulation avec le modèle hybride, sur un cas simplifié de  $5 \times 5$  cellules en compression simple. La réponse d'une seule cellule où se localisent les déformations, qui présente un défaut initial  $\lambda_0 \simeq 0.07$  (largement supérieur aux valeurs considérées comme raisonnables) est tracée dans la Figure 6.6. Ceci permet d'analyser la réponse au-delà de la contrainte ultime. Jusqu'au pic, on constate que la réponse de la cellule élémentaire celle identifiée sous *QtOctave* sont quasiment confondues. Au-delà, on observe un "décrochage" de la première, peut-être en raison d'effets multi-axiaux ou des cellules voisines.

Sachant que l'intégration du comportement dans des cas de défauts plus faibles, présentant alors un *snap-back*, est encore plus discutable, les résultats présentés dans la suite doivent être considérés avec une grande précaution. En effet, un certain nombre de développements restent encore à faire pour simuler proprement la réponse virtuelle d'un échantillon *après* la contrainte ultime.

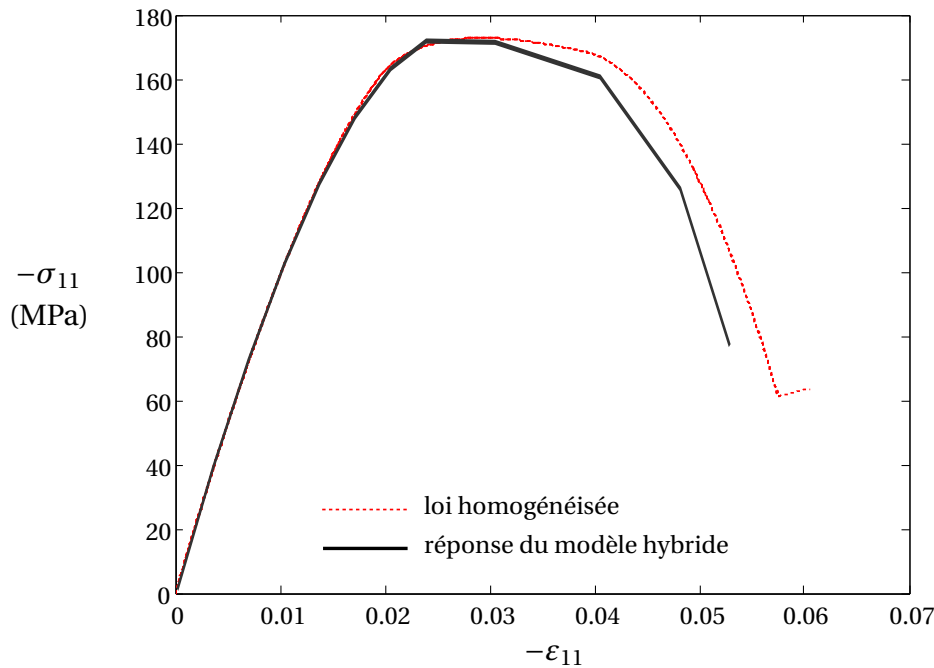


FIGURE 6.6: Réponse axiale d'une cellule du modèle hybride (continue) comparée à la loi homogénéisée équivalente (pointillés)

### 2.3 Résultats préliminaires en compression libre

On impose à l'échantillon un déplacement axial  $U_d$  variant de 0 à  $-150 \mu\text{m}$  de façon monotone, par incréments de  $-1.5 \mu\text{m}$ . Les déplacements dans les directions  $e_2$  et  $e_3$  sont laissés libres partout. Le calcul complet nécessite un peu moins d'une heure. La courbe de réponse force/déplacement est tracée dans la Figure 6.8.

Le premier saut d'effort se produit lorsque  $U_d/L_{pli} = 1.47 \%$ , ce qui correspond à l'apparition d'une première bande de localisation. On arrête alors le calcul, le comportement post-rupture nécessitant encore quelques améliorations. L'apparition de cette bande de localisation est brutale, ce qui est en accord avec les observations expérimentales : en compression pure, la rupture est généralement fragile. On peut toutefois observer virtuellement la redistribution des contraintes au cours d'un même pas de temps, itération globale après itération globale (voir Figure 6.7).

On remarque que la bande s'initie en un point faible (ici au cœur de l'échantillon) puis se propage dans toute sa largeur. Compte tenu des conditions limites imposées, la *kink-band* ne s'est pas initiée aux talons (virtuels) de l'éprouvette, ce qui est tout à fait normal. Par contre, on remarque sur la dernière image qu'il existe une discontinuité dans la bande. La raison est qu'il est énergétiquement moins coûteux, compte tenu de la répartition des défauts dans le cas étudié, de rompre en compression un peu en amont de la bande, là où le défaut est plus prononcé (ce qu'on devine sur l'avant-dernière image) et de rejoindre les deux fractions de bande par une fissure discrète.

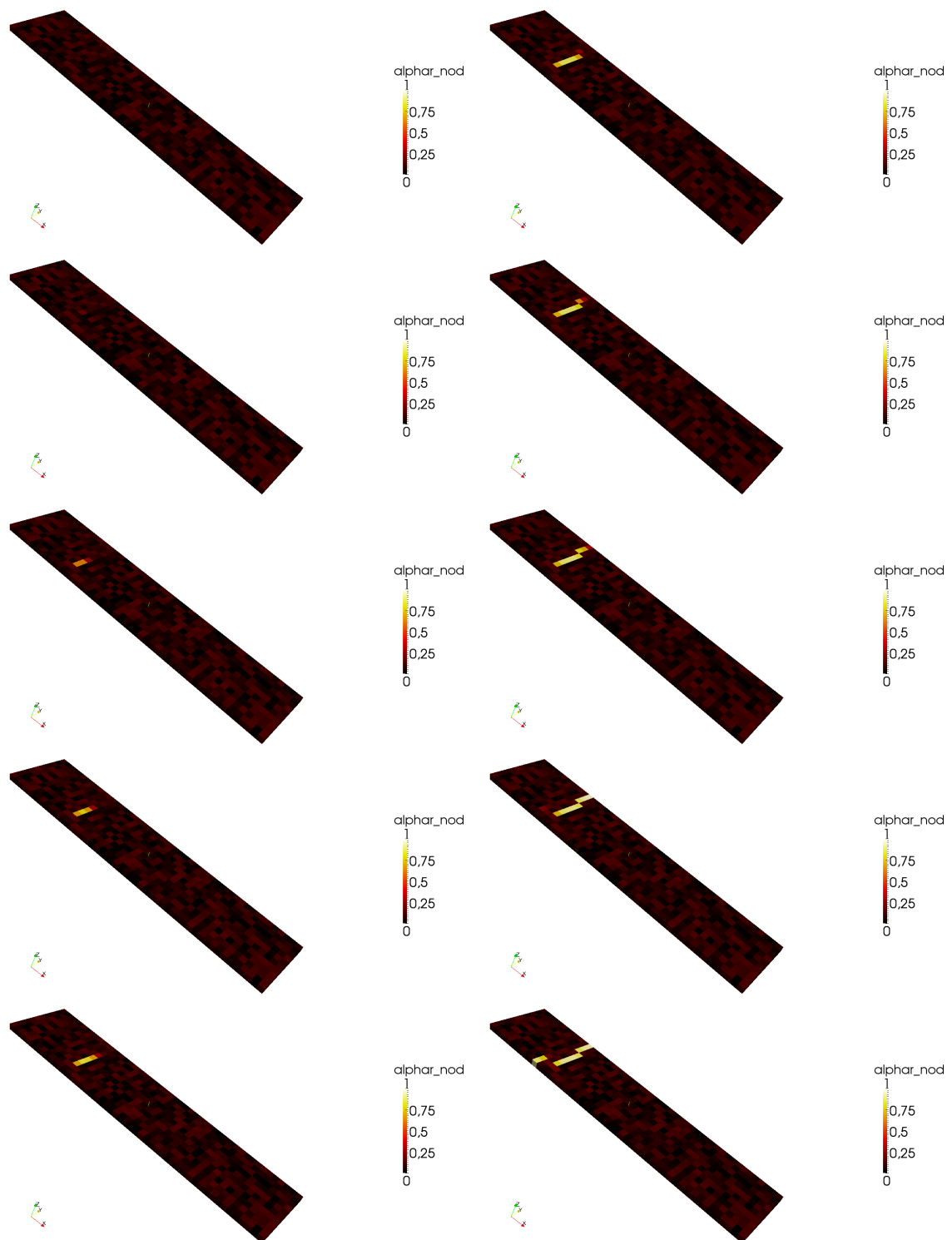


FIGURE 6.7: Pli en compression libre : de haut en bas puis de gauche à droite, initiation et propagation de la première *kink-band* au cours du pas de temps 49

*Vers un pont micro-méso de la rupture en compression des composites stratifiés*

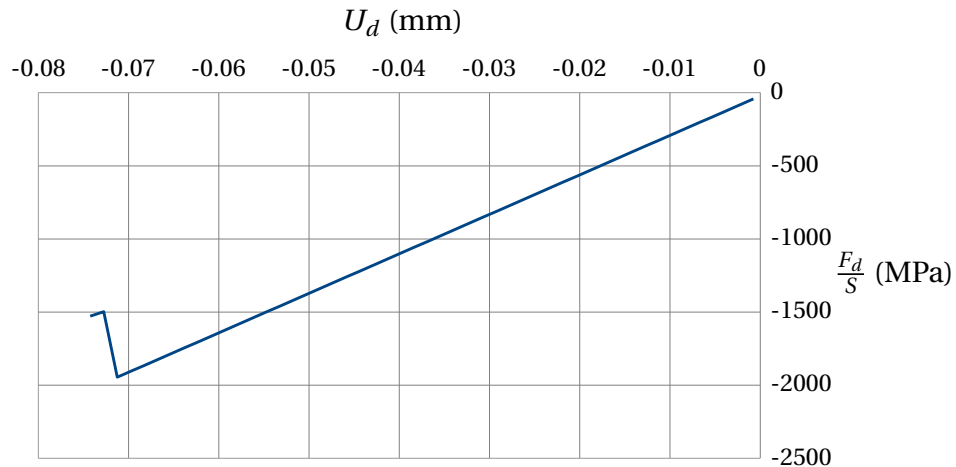


FIGURE 6.8: Courbe de réponse force/déplacement de la microstructure

Enfin, à titre d'observation uniquement, la Figure 6.9 trace le réseau de fissures discrètes qui se sont initiées et propagées dans la structure en même temps que cette première *kink-band*. On constate qu'elles sont essentiellement concentrées au lieu de son apparition, ce qui est cohérent avec les observations expérimentales [Narayanan et Schadler, 1999] et les couplages qu'on a souhaité mettre en évidence. Comme mentionné plus tôt, on pourra constater que la plus longue de ces fissures, assimilable à du *splitting*, relie les deux fractions de *kink-band* discontinues. La séquence d'enchaînement de ces dégradations est toutefois à considérer avec une extrême prudence et demande une analyse plus poussée.

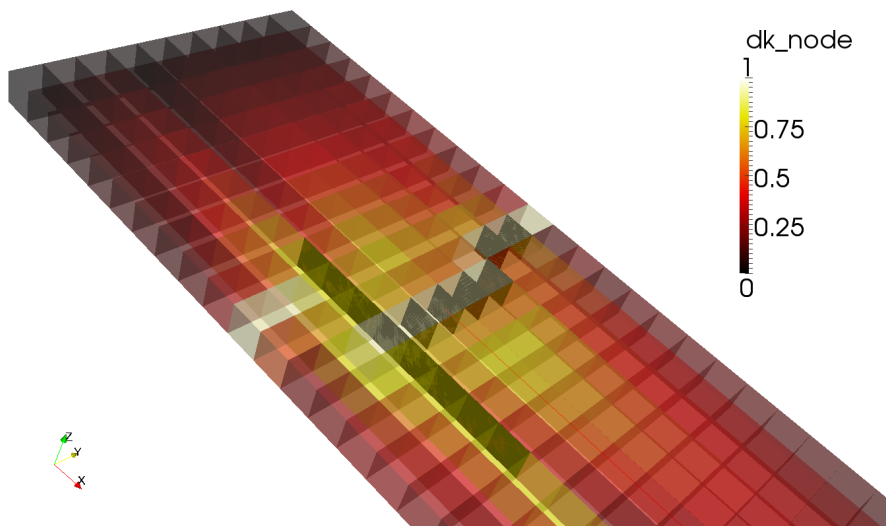


FIGURE 6.9: Détail : état d'endommagement  $d_k$  et fissures discrètes à convergence

## 2.4 Résultats préliminaires en compression encastrée

On impose toujours à l'échantillon un déplacement axial  $U_d$  variant de 0 à  $-150 \mu\text{m}$  de façon monotone, par incréments de  $-1.5 \mu\text{m}$ . Cette fois, les déplacements dans les directions  $e_2$  et  $e_3$  sont bloqués aux extrémités.

La courbe de réponse force/déplacement est tracée dans la Figure 6.10. On observe cette fois le premier saut d'effort lorsque  $U_d/L_{pli} = 1.09 \%$ , ce qui met fin au calcul. La rupture est toujours fragile, mais le niveau d'effort atteint a significativement diminué. On passe d'une rupture à une charge  $F_d/S \approx 1950 \text{ MPa}$ , supérieure à la contrainte de compression maximale du "maillon faible" ( $\sigma_{11} \approx 1450 \text{ MPa}$ ), à une rupture à seulement  $F_d/S \approx 1350 \text{ MPa}$ .

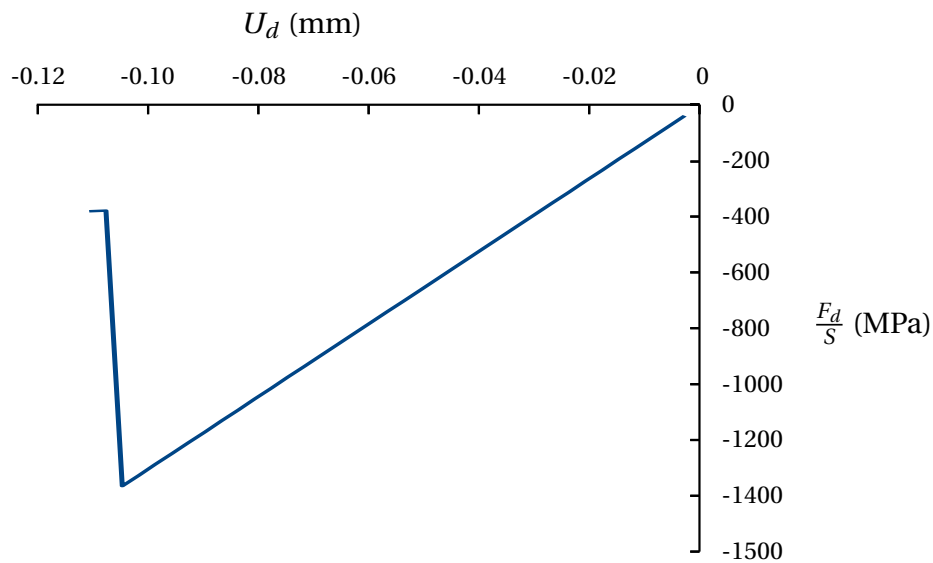
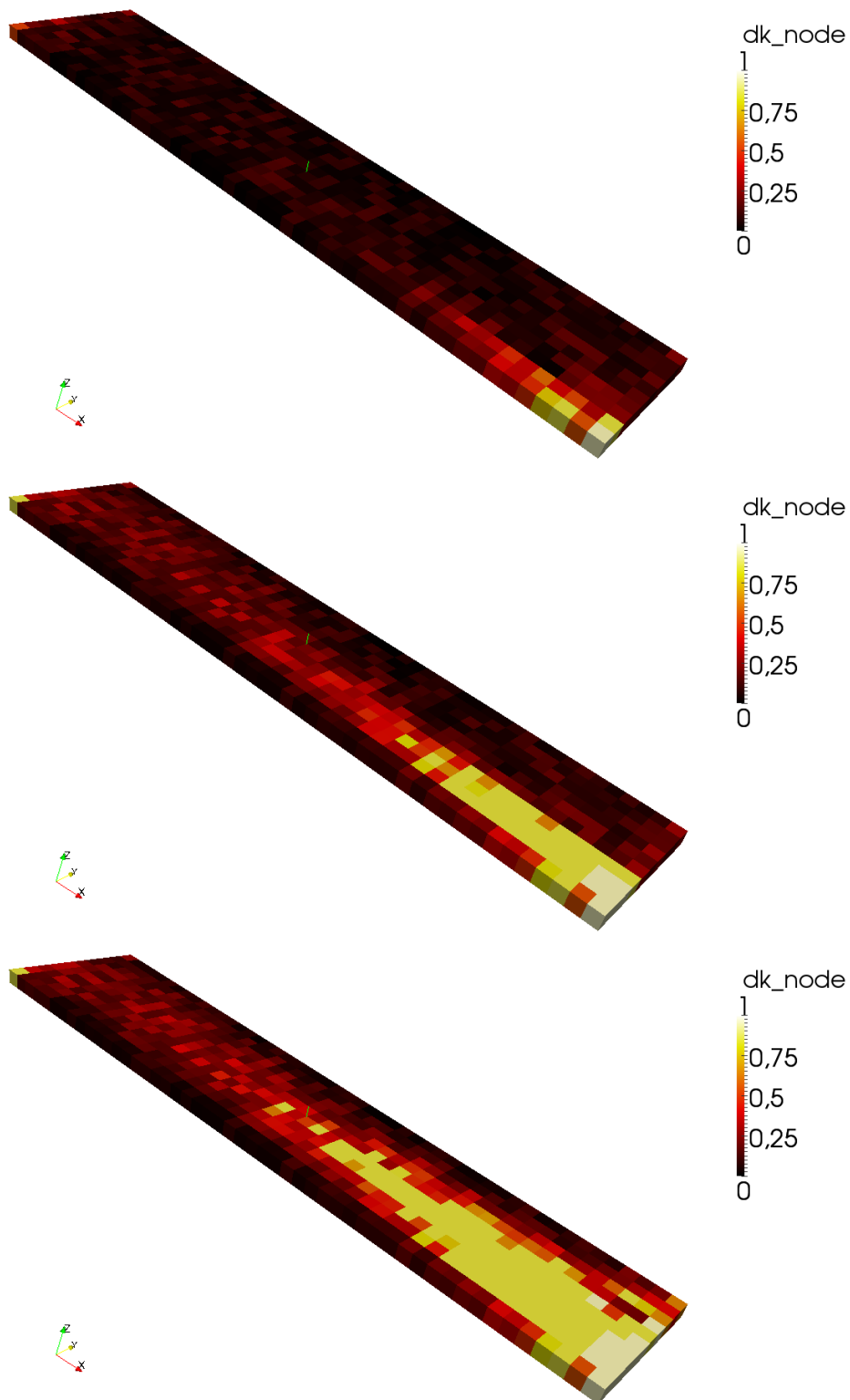


FIGURE 6.10: Courbe de réponse force/déplacement de la microstructure

Dans le premier cas, la surestimation s'explique par le fait que les voisins du maillon faible supportent une partie de sa charge et retardent l'instabilité, mais c'est toujours le défaut qui pilote la rupture. Dans le second cas, ce sont les conditions limites qui aident au déclenchement des instabilités. En effet, l'endommagement  $d_k$  est initié au niveau d'un des talons de l'éprouvette, à cause des concentrations de contraintes (voir Figure 6.11). Au fur et à mesure des itérations, il se propage à l'intérieur de l'éprouvette. À convergence, une importante zone est dégradée.

Cette observation est là encore en accord avec celles d'Anthoine et co-auteurs [Anthoine *et al.*, 1998] et les mesures effectuées dans le cadre du projet VulComp (voir Figure 6.12). Sur ces images obtenues par caméra rapide (21000 images/seconde), on peut distinguer une importante localisation des déformations aux talons juste avant la rupture.



**FIGURE 6.11:** Pli encastré : de haut en bas, développement de l'endommagement  $d_k$  au cours des premières itérations (1, 5 et 10 sur 114) du pas de temps 36



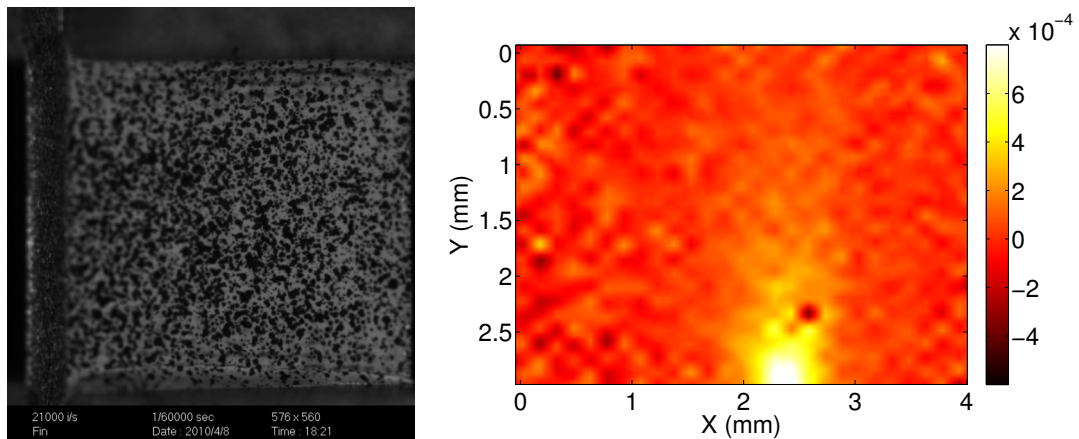


FIGURE 6.12: Photographie du mouchetis (gauche) et déplacement transverse en mm mesuré par stéréo-corrélation d'images (droite) juste avant la rupture

Enfin, toujours à titre d'observation, la Figure 6.13 donne une idée de l'état d'endommagement et de fissuration après rupture. Les dégradations sont beaucoup plus importantes que dans le cas précédent, ce qu'on peut imputer à un développement fragile de la fissuration en pied d'éprouvette. En effet, le *splitting* facilite la dégradation de la cellule par *kinking*, car elle n'est alors plus supportée en cisaillement. Le tout s'accompagne d'une importante dilatation transverse de l'échantillon (non représentée sur la figure) grâce à l'ouverture des fissures. L'enchaînement exact des mécanismes et leur rôle dans la rupture finale requiert une étude plus approfondie, mais ce faciès de rupture peut évoquer notamment le "*brooming*" qui a été observé expérimentalement par l'équipe de Waas (voir Figure 6.14).

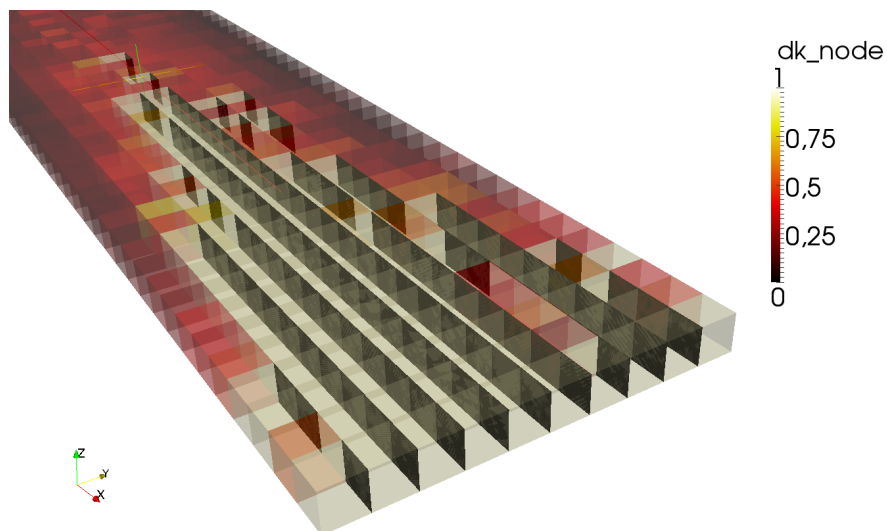


FIGURE 6.13: Détail : état d'endommagement  $d_k$  et fissures discrètes à convergence

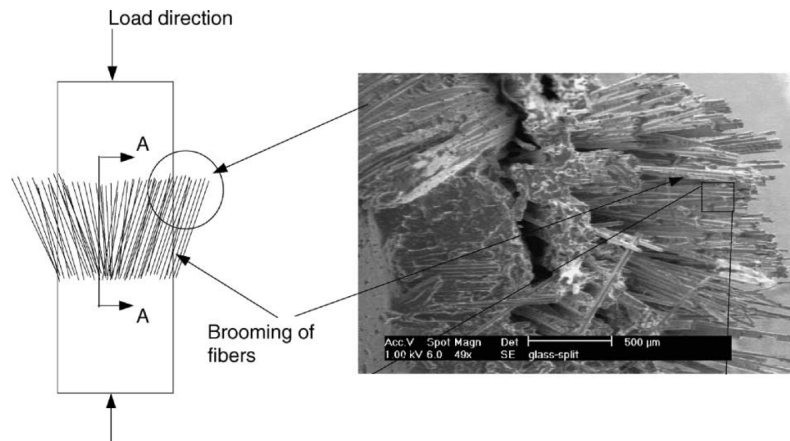


FIGURE 6.14: Micrographie d'un faciès de rupture en compression mettant en évidence le *brooming* [Yerramalli et Waas, 2003]

On s'attendait à ce que les conditions limites jouent un rôle, mais on remarque ici à quel point ce rôle est critique lorsque de multiples instabilités sont impliquées. On se gardera de tirer toute conclusion hâtive de ces simulations, mais cela souligne :

- d'une part, que les concentrations de contrainte favorisent énormément la rupture par *kinking*, ce qui ne fait que confirmer l'importance de bien choisir et modéliser les conditions limites de l'essai qu'on cherche à reproduire ;
- d'autre part, que les interactions entre *kinking* et fissuration discrète jouent un rôle majeur sur la tenue du matériau et que les paramètres régissant ces deux phénomènes, y compris le seuil de percolation de l'endommagement diffus, méritent d'être étudiés avec une attention toute particulière.

## 2.5 Limites et précautions particulières

Par certains aspects, comme l'introduction naturelle d'une longueur interne ou la gestion explicite de la fissuration discrète, le modèle hybride facilite la simulation numérique du plissement. En raison des nombreux mécanismes de dégradation activés, même des cas-tests apparemment simples peuvent présenter une certaine complexité, comme l'illustrent les quelques simulations présentées ici. Par ailleurs, on a déjà évoqué les problèmes liés à l'enrichissement qui a été apporté au comportement en compression. Mais le modèle hybride en lui-même présente aussi quelques limites.

En particulier, sa décomposition en cellules élémentaires dont la taille est de l'ordre de l'épaisseur du pli amène à résoudre des problèmes à grand nombre de ddl. Afin de réduire le nombre d'itérations LaTin globales tout en minimisant les inversions de matrices de rigidité, on a recours à une interpolation de l'endommagement. Le principe consiste, pour chaque type de sous-structure considéré (i.e. à géométrie et propriétés matérielles identiques), à calculer *a priori* l'inversion de leur matrice de raideur pour des valeurs d'endommagement bien choisies. Ces matrices pré-inversées sont sto-

ckées. Par la suite, à chaque fois que l'on résout le problème global, la matrice de souplesse est déterminée en interpolant les valeurs des matrices de raideur pré-inversées. Cette approche est très efficace dès lors que de nombreuses cellules sont initialement identiques. Toutefois, les modifications apportées ici introduisent une statistique initiale différente pour chaque sous-structure (le mésalignement moyen des fibres) qui impacte directement leur matrice de raideur (même si elle sont autrement géométriquement et matériellement identiques). La résolution incrémentale du problème macro est donc plus laborieuse dans le cas présent, surtout après localisation par *kinking*. Le nombre d'itérations LaTIn globales passe en moyenne de 20 à 200.

Par ailleurs, la décomposition des plis en cellules élémentaires et le fait que  $w_{kb} \simeq h_{pli}$  ont permis de localiser les déformations dans une rangée de cellules représentant les VER dégradés. Pour traiter des cas où  $w_{kb}$  serait égale à deux, trois, voire quatre fois l'épaisseur du pli, il faudrait permettre une localisation des déformations à rupture dans un volume de quelques cellules élémentaires, au lieu d'une seule. Compte tenu de la parallélisation du code, cela peut poser des problèmes de découpage de la structure par processus. Pareillement, si l'on envisage l'extension à un modèle purement mésoscopique, il faudra introduire cette longueur interne d'une autre façon (par un comportement élastique non-local en compression, par exemple).

# Conclusion et perspectives

Cette thèse s'est inscrite dans le cadre du projet ANR VulComp (Vulnérabilité des structures composites) et s'est concentrée sur une étude assez amont dans la thématique de l'absorption de choc. Il s'agit en l'occurrence de l'influence du plissement sur le comportement à rupture et post-rupture de plis composites unidirectionnels sous sollicitation de compression-cisaillement dans le plan.

Un premier pari sur lequel repose cette thèse est qu'une analyse micromécanique permettrait de déterminer de façon prédictive les principales caractéristiques de la rupture en compression, en particulier la contrainte maximale et l'énergie dissipée, en fonction des principaux paramètres influents, c'est-à-dire des défauts et de la multi-axialité. Afin d'estimer la qualité de cette prédiction, les essais de compression-cisaillement de la littérature ont été choisis comme principal juge de paix. Or, les résultats des approches micromécaniques de la littérature présentent une surestimation de la contrainte à rupture. Par ailleurs, l'estimation de l'énergie dissipée, qui est une question fondamentale de cette étude, a jusqu'ici été peu étudiée.

Un modèle simplifié du comportement de la microstructure a donc été établi, intégrant non seulement le comportement inélastique de la matrice, mais aussi son endommagement. Cela a permis d'obtenir des résultats compatibles avec l'expérience, offrant une prédiction quantitative des énergies absorbées par les différents mécanismes et tenant compte des fortes incertitudes que présentent les résultats d'essais impliquant de la compression dans le sens des fibres. Ce travail reste à compléter pour traiter des sollicitations tridimensionnelles intégrant la pression de confinement, afin de prendre en compte l'influence des plis adjacents dans les empilements stratifiés. Enfin et surtout, l'analyse est à prolonger dans le cadre de la dynamique, afin de l'appliquer au cas des absorbeurs de chocs composites.

Un second pari est qu'il serait possible d'homogénéiser les résultats obtenus par l'approche micromécanique à l'échelle du pli. Pour cela, le modèle micromécanique a été utilisé comme un échantillon d'essai virtuel, dont le comportement constitutif a été approximé de façon relativement simple et identifié comme pour un essai expérimental. Afin d'obtenir un modèle de comportement se prêtant bien à un couplage avec les autres mécanismes non-linéaires caractérisant le comportement du pli, les aspects non-linéaires géométriques ont été distingués des aspects liés au comportement matériau grâce à une seule variable géométrique.

Après identification, deux bénéfices sont retirés de cette distinction : d'une part la variable géométrique présente un lien simple avec la statistique de mésalignement des fibres et facilite sa prise en compte, d'autre part les lois d'évolution identifiées pour les autres variables internes (endommagement, inélasticité) se trouvent approximativement indépendantes de cette statistique. Les couplages naturels entre les mécanismes

non-linéaires liés au plissement et ceux liés au cisaillement sont également déterministes. Enfin, le modèle obtenu est naturellement à longueur interne, longueur caractérisée par la taille de la bande de plissement.

Ces résultats ont été intégrés dans une approche continue/discrète. La taille des cellules élémentaires est alors définie par la taille de la *kink-band*, le modèle étant non-local (les variables internes sont uniformes sur chaque cellule). Le traitement numérique de cette modélisation pose des problèmes spécifiques qui ont pour l'instant été à peine abordés. Les premiers résultats obtenus dans ce domaine sont donc sujets à caution.

Une fois ces problèmes résolus, la question de la validation du modèle à l'échelle de la structure pourra être abordée. En particulier se pose la question des interactions avec les autres modes de dégradation, notamment discrets (*splitting*, délaminage). Le modèle en l'état est-il suffisant pour rendre compte des effets complexes constatés expérimentalement [Gutkin *et al.*, 2010b, Koerber *et al.*, 2010]? Une autre question concerne les effets de structure, notamment les influences de l'épaisseur du pli, de l'empilement ou d'un gradient des contraintes axiales, qu'il serait intéressant de comparer à d'autres études [Wisnom, 1991b, Drapier *et al.*, 2001].

Un aspect important qui n'a pas été abordé dans cette thèse est celui de la corrélation spatiale des défauts à l'échelle du pli. En effet, les travaux de Paluch ne permettent pas d'estimer une éventuelle longueur de corrélation entre mésalignements de fibres. Des mesures à l'aide d'un microtomographe à rayons X, outil dont sera bientôt doté le LMT, devraient permettre de répondre à cette question, dans la lignée des premiers travaux menés dans le domaine à l'IMDEA [Hernandez *et al.*, 2011].

Le but de ces travaux étant l'analyse virtuelle d'absorbeurs de chocs et en particulier la définition de *triggers* efficaces [Feld *et al.*, 2010], les prochains travaux porteront aussi sur l'étude du modèle en dynamique et son intégration dans un code explicite.

## Annexe A

### Détail du modèle rhéologique

La forme du modèle "rhéologique" à 1 degré de liberté considéré ici est rappelé dans la Figure A.1.

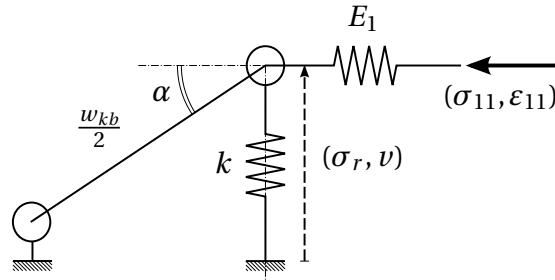


FIGURE A.1: Schéma du modèle rhéologique

On souhaite exprimer  $\alpha$  en fonction de la seule variable  $\sigma_{11}$ , sachant que cet angle présente une valeur  $\alpha_0$  non nulle lorsque  $\sigma_{11} = 0$ . Cet angle initial provoque une déflexion  $v_0$  :

$$v_0 = \frac{w_{kb}}{2} \sin \alpha_0 \quad (\text{A.1})$$

Une fois un chargement appliqué, la déflexion s'écrit :

$$v = \frac{w_{kb}}{2} \sin \alpha \quad (\text{A.2})$$

On définit alors :

$$\varepsilon_r = \frac{2v}{w_{kb}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_r^0 = \frac{2v_0}{w_{kb}} \quad (\text{A.3})$$

Soit :

$$\varepsilon_r = \sin \alpha \quad (\text{A.4})$$

Notons  $\sigma_r$  la contrainte de rappel dans le ressort, définie par :

$$\sigma_r = k\varepsilon_r^e = k(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p - \varepsilon_r^0) \quad (\text{A.5})$$

L'équilibre des moments du modèle implique :

$$\sigma_r = -\sigma_{11} \tan \alpha \quad (\text{A.6})$$

Et en combinant les expressions précédentes :

$$k(\sin \alpha - \varepsilon_r^p - \varepsilon_r^0) = -\sigma_{11} \tan \alpha \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, pour un état donné des variables internes ( $\varepsilon_r^p$  et l'endommagement  $d_k$  affectant  $k$ ),  $\alpha$  peut s'exprimer implicitement en fonction de  $\sigma_{11}$  et l'on notera :

$$\tan \alpha = \xi(\sigma_{11}) \quad (\text{A.8})$$

On remarquera que si la présence de cisaillement influe sur la valeur de  $\alpha$  (ce que l'on va vérifier dans l'étape d'identification), l'assertion précédente n'est également valable que pour un état de déformation de cisaillement  $\gamma_{12}$  donné.

# Bibliographie

- [Abisset *et al.*, 2011a] ABISSET, E., DAGHIA, F. et LADEVÈZE, P. (2011a). Low velocity impact on laminated composites : damage modelling and validation. *In Dynamic failure of composite and sandwich structures*, Toulouse, France.
- [Abisset *et al.*, 2011b] ABISSET, E., DAGHIA, F. et LADEVÈZE, P. (2011b). On the validation of a damage mesomodel for laminated composites by means of open-hole tensile tests on quasi-isotropic laminates. *Composites : Part A*.
- [Abrate, 1991] ABRATE, S. (1991). Impact on laminated composite materials. *Applied Mechanics Review*, 44:155–190.
- [Ahmer Wadee *et al.*, 2004] AHMER WADEE, M., HUNT, G. W. et PELETIER, M. A. (2004). Kink band instability in layered structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52:1071–1091.
- [Aliyu et Daniel, 1983] ALIYU, A. A. et DANIEL, I. M. (1983). Effects of strain rate on delamination fracture toughness of graphite/epoxy. *In* JOHNSON, W. S., éditeur : *Delamination and debonding of materials*, pages 336–348, Pittsburgh, Pa. ASTM.
- [Allen *et al.*, 1987a] ALLEN, D. H., HARRIS, C. E. et GROVES, S. E. (1987a). A thermo-mechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage–i. theoretical development. *International Journal of Solids and Structures*, 23(9):1301–1318.
- [Allen *et al.*, 1987b] ALLEN, D. H., HARRIS, C. E. et GROVES, S. E. (1987b). A thermo-mechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage–ii. application to matrix cracking in laminated composites. *International Journal of Solids and Structures*, 23(9):1319–1338.
- [Allix, 1989] ALLIX, O. (1989). *Modélisation du comportement des composites stratifiés*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [Allix, 1992] ALLIX, O. (1992). Une nouvelle méthode d’analyse du délaminage. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [Allix *et al.*, 2006] ALLIX, O., BARANGER, E. et BLANCHARD, L. (2006). An efficient strategy for the calculation of end effects on composite pipes : the thermoelastic case. *Composite structures*, 76(4):291–302.
- [Allix *et al.*, 1989] ALLIX, O., DAUDEVILLE, L. et LADEVÈZE, P. (1989). Delamination and damage mechanics. *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-Materials*, pages 143–157.
- [Allix et Deü, 1997] ALLIX, O. et DEÛ, J.-F. (1997). Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45(1):29–46.



- [Allix et Ladevèze, 1992] ALLIX, O. et LADEVÈZE, P. (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, 22(4):235–242.
- [Allix *et al.*, 1995] ALLIX, O., LADEVÈZE, P. et CORIGLIANO, A. (1995). Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 31(1):61–74.
- [Allix *et al.*, 1994] ALLIX, O., LADEVÈZE, P. et VITTECOQ, É. (1994). Modelling and identification of the mechanical behaviour of composite laminates in compression. *Composites Science and Technology*, 51(1):35–42.
- [Allix *et al.*, 1998] ALLIX, O., LÉVÊQUE, D. et PERRET, L. (1998). Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composites Science and Technology*, 58:671–678.
- [Andrieux *et al.*, 1986] ANDRIEUX, S., BAMBERGER, Y. et MARIGO, J.-J. (1986). Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 5(3):471–513.
- [Anthoine *et al.*, 1998] ANTHOINE, O., GRANDIDIER, J.-C. et DARIDON, L. (1998). Pure compression testing of advanced fibre composites. *Composites Science and Technology*, 58:735–740.
- [Aravas *et al.*, 1990] ARAVAS, N., KIM, K.-S. et LECKIE, F. A. (1990). On the calculations of the stored energy of cold work. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 112:465–470.
- [Argon, 1972] ARGON, A. S. (1972). Fracture of composites. *Treatise on Materials Science and Technology*, 1:79–114.
- [Baer et Norris, 1968] BAER, A. J. et NORRIS, D. K., éditeurs (1968). *Research in Tectonics : Kink Bands and Brittle Deformation*, Ottawa. Geological Survey of Canada. GSC Paper 68-52.
- [Bai et Phoenix, 2005] BAI, J. et PHOENIX, S. L. (2005). Compressive failure model for fiber composites by kink band initiation from obliquely aligned, shear-dislocated fiber breaks. *International Journal of Solids and Structures*, 42:2089–2128.
- [Barrenblatt, 1948] BARRENBLOTT, G. I. (1948). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advanced Applied Mechanics*, 7:55–129.
- [Basu *et al.*, 2006] BASU, S., WAAS, A. M. et AMBUR, D. R. (2006). A macroscopic model for kink banding instabilities in fiber composites. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1(6):979–1000.
- [Bauschinger, 1881] BAUSCHINGER, J. (1881). Über die veränderung der elastizitätsgrenze und des elastizitätsmoduls verschiedener metalle. *Der Civilingenieur-Organ des Sächsischen Ingenieur-und Architekten-Vereins*, 27:289–348.
- [Bažant et Cedolin, 1991] BAŽANT, Z. P. et CEDOLIN, L. (1991). *Stability of Structures : Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, New-York, dover édition.

- [Bažant *et al.*, 1999] BAŽANT, Z. P., KIM, J.-J. H., DANIEL, I. M., BECQ-GIRAUDON, E. et ZI, G. (1999). Size effect on compression strength of fiber composites failing by kink band propagation. *International Journal of Fracture*, 95:103–141.
- [Bensoussan *et al.*, 1978] BENSOUSSAN, A., LIONS, J. et PAPANICOLAOU, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland.
- [Bersnard *et al.*, 2010] BERSNARD, G., AIMEDIEU, P., JAMINION, S. et HILD, F. (2010). Suivi d'un essai de compression sur une éprouvette en composite par deux techniques de stéréocorrélation. Rapport d'activité, ANR VulComp – Work Package 2.2.
- [Besnard, 2010] BESNARD, G. (2010). *Caractérisation et quantification de surfaces par stéréocorrélation pour des essais mécaniques du quasi statique à la dynamique ultra-rapide*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 61, avenue du président Wilson, 94230 CACHAN.
- [Biot et Romain, 1965] BIOT, M. A. et ROMAIN, J. E. (1965). Mechanics of incremental deformations : Theory of elasticity and viscoelasticity of initially stressed solids and fluids. *Physics Today*, 18:68.
- [Bois *et al.*, 2009] BOIS, C., MONTAGNIER, O. et HOCHARD, C. (2009). Characterisation of compression behaviour of composite materials using a pure bending test. In OLIVIER, P. et LAMON, J., éditeurs : *Comptes-Rendus des Journées Nationales des Composites 16*, page 8. HAL.
- [Bordeu *et al.*, 2009] BORDEU, F., BOUCARD, P.-A. et GOSSELET, P. (2009). Stratégie de calcul haute performance pour les structures composites. In *Neuvième colloque national en calcul de structures*, Giens, Var, France.
- [Brantut *et al.*, 2011] BRANTUT, N., SCHUBNEL, A. et GUÉGUEN, Y. (2011). Damage and rupture dynamics at the brittle-ductile transition : The case of gypsum. *Journal of Geophysical Research*, 116(B01404):19.
- [Budiansky, 1965] BUDIANSKY, B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):223–227.
- [Budiansky, 1983] BUDIANSKY, B. (1983). Micromechanics. *Computers and Structures*, 16(1-4):3–12.
- [Budiansky *et al.*, 1995] BUDIANSKY, B., EVANS, A. G. et HUTCHISON, J. W. (1995). Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 32(3/4):315–328.
- [Budiansky et Fleck, 1993] BUDIANSKY, B. et FLECK, N. A. (1993). Compressive failure of fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(1):183–211.
- [Budiansky et Fleck, 1994] BUDIANSKY, B. et FLECK, N. A. (1994). Compressive kinking of fiber composites : A topical review. *Applied Mechanics Review*, 47(6, Part 2):-246. Part of Mechanics USA 1994.
- [Budiansky *et al.*, 1998] BUDIANSKY, B., FLECK, N. A. et AMAZIGO, J. C. (1998). On kink-band propagation in fiber composites. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 46(9):1637–1653.

- [Budiansky *et al.*, 1986] BUDIANSKY, B., HUTCHINSON, J. W. et EVANS, A. G. (1986). Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34(2):167–189.
- [Castañeda, 1992] CASTAÑEDA, P. P. (1992). New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(8):1757–1788.
- [Castañeda, 2002] CASTAÑEDA, P. P. (2002). Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I–theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(4):737–757.
- [Castañeda, 2002] CASTAÑEDA, P. P. (2002). Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : II-applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(4):759–782.
- [Castañeda, 1996] CASTAÑEDA, P. P. (1996). Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(6):827–862.
- [Choi et Chang, 1992] CHOI, H. Y. et CHANG, F. K. (1992). A model for predicting damage in graphite/epoxy laminated composites resulting from low-velocity point impact. *Journal of Composite Materials*, 26(14):2134–2169.
- [Christensen, 1997] CHRISTENSEN, R. M. (1997). Stress based yield/failure criteria for fiber composites. *International Journal of Solids and Structures*, 34(5):529–543.
- [Coenen *et al.*, 2011] COENEN, E. W. C., KOUZNETSOVA, V. et GEERS, M. G. D. (2011). A multi-scale continuous-discontinuous framework for computational homogenization-localization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, page submitted.
- [Corigliano, 1993] CORIGLIANO, A. (1993). Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination. *International Journal of Solids and Structures*, 30(20):2779–2811.
- [Corigliano et Allix, 2000] CORIGLIANO, A. et ALLIX, O. (2000). Some aspects of interlaminar degradation in composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185(2-4):203–224.
- [Cosserat *et al.*, 1909] COSSERAT, E., COSSERAT, F., BROCATO, M. et CHATZIS, K. (1909). *Théorie des corps déformables*. A. Hermann.
- [Court, 2006] COURT, G. (2006). *Prévision objective de la rupture ductile en grandes déformations sous sollicitation dynamique : modèle d'épuisement plastique à taux limités*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Cresta *et al.*, 2007] CRESTA, P., ALLIX, O., REY, C. et GUINARD, S. (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : application to post-buckling analyses. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(8): 1436–1446.

- [Crisfield, 1981] CRISFIELD, M. A. (1981). A fast incremental / iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computers and Structures*, 13:55–62.
- [Crossman et Wang, 1982] CROSSMAN, F. W. et WANG, A. S. D. (1982). *Damage in composite materials*, chapitre The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates, pages 118–139. ASTM International.
- [Curtin, 2000] CURTIN, W. A. (2000). Dimensionality and size effects on the strength of fiber-reinforced composites. *Composites Science and Technology*, 60(4):543–551.
- [Daghia *et al.*, 2009] DAGHIA, F., LADEVÈZE, P., BORDEU, F. et PETIOT, C. (2009). On the validation of a micromechanics-based mesomodel for the simulation until failure of laminated composites. *In Journées Nationales des Composites 16*, Toulouse, France.
- [Damil et Potier-Ferry, 1990] DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (1990). A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science*, 28(9):943–957.
- [Daudeville et Ladevèze, 1993] DAUDEVILLE, L. et LADEVÈZE, P. (1993). A damage mechanics tool for laminate delamination. *Composite Structures*, 25(1-4):547–555.
- [Deudé *et al.*, 2002] DEUDÉ, V., DORMIEUX, L., KONDO, D. et PENSÉE, V. (2002). Propriétés élastiques non linéaires d’un milieu mésosfissuré. *Compte-rendus de Mécanique*, 330(8):587–592.
- [Devitt *et al.*, 1980] DEVITT, D. F., SCHAPERY, R. A. et BRADLEY, W. L. (1980). A method for determining the mode I delamination fracture toughness of elastic and viscoelastic composite materials. *Journal of Composite Materials*, 14:270–285.
- [Devries *et al.*, 1989] DEVRIES, F., DUMONTET, H., DUVAUT, G. et LENE, F. (1989). Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27(2):285–298.
- [Dow et Gruntfest, 1960] DOW, N. F. et GRUNTFEST, I. J. (1960). Determination of most needed, potentially possible improvements in materials for ballistic and space vehicles. Technical Report TIS R60SD389, General Electric Co.
- [Drapier *et al.*, 1997] DRAPIER, S., GRANDIDIER, J.-C. et POTIER-FERRY, M. (1997). Theoretical study of structural effects on the compressive failure of laminate composites. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 324(4):219–227.
- [Drapier *et al.*, 1999] DRAPIER, S., GRANDIDIER, J.-C. et POTIER-FERRY, M. (1999). Towards a numerical model of the compressive strength for long fibre composites. *European Journal of Mechanics A. Solids*, 18(1):69–92.
- [Drapier *et al.*, 2001] DRAPIER, S., GRANDIDIER, J.-C. et POTIER-FERRY, M. (2001). A structural approach of plastic microbuckling in long fibre composites : comparison with theoretical and experimental results. *International Journal of Solids and Structures*, 38(22-23):3877–3904.
- [Drücker, 1951] DRÜCKER, D. C. (1951). *A more fundamental approach to plastic stress-strain relations*. Mathematics. Division of Applied Mathematics, Brown University, Brown University, Division of Applied and Research, United States.

- [Dumontet, 1986] DUMONTET, H. (1986). Study of a boundary layer problem in elastic composite materials. *RAIRO Modélisation mathématique et analyse numérique*, 20(2):265–286.
- [Dvorak et Laws, 1987] DVORAK, G. J. et LAWS, N. (1987). Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates ii. first ply failure. *Journal of Composite Materials*, 21(4):309.
- [Dvorak et al., 1985] DVORAK, G. J., LAWS, N. et HEJAZI, M. (1985). Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates i. thermoelastic properties of a ply with cracks. *Journal of Composite Materials*, 19(3):216.
- [Eaton, 2002] EATON, J. W. (2002). *GNU Octave manual*. Network Theory Ltd.
- [Edge, 1998] EDGE, E. C. (1998). Stress-based grant-sanders method for predicting failure of composite laminates. *Composites Science and Technology*, 58(7):1033–1041.
- [Effendi et al., 1995] EFFENDI, R. R., BARRAU, J.-J. et GUEDRA-DESGEORGES, D. (1995). Failure mechanism analysis under compression loading of unidirectional carbon/epoxy composites using micromechanical modelling. *Composite Structures*, 31:87–98.
- [Ersoy et al., 2010] ERSOY, N., GARSTKA, T., POTTER, K., WISNOM, M. R., PORTER, D., CLEGG, M. et STRINGER, G. (2010). Development of the properties of a carbon fibre reinforced thermosetting composite through cure. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*.
- [Eshelby, 1957] ESHELBY, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London - Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226):376–396.
- [Ewins et Ham, 1974] EWINS, P. D. et HAM, A. C. (1974). The nature of compressive failure in unidirectional carbon fibre reinforced plastics. *In 5th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Las Vegas, Nevada.
- [Fan et Slaughter, 1997] FAN, J. et SLAUGHTER, W. S. (1997). High strain rate compression of fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(5):731–751.
- [Feld et al., 2010] FELD, N., ALLIX, O. et BARANGER, E. (2010). Techniques de modélisation de la fragmentation. Rapport d’activité, ANR VulComp – Work Package 3.2.
- [Feld et al., 2011] FELD, N., ALLIX, O., BARANGER, E. et GUIMARD, J.-M. (2011). Micro-mechanical prediction of ud laminates behaviour under combined compression up to failure : influence of matrix degradation. *Journal of Composite Materials*, 45(22): 2317–2333.
- [Feld et al., 2012] FELD, N., ALLIX, O., BARANGER, E. et GUIMARD, J.-M. (2012). A micromechanics-based mesomodel for unidirectional laminates in compression up to failure. *Journal of Composite Materials*, accepté.

- [Ferron *et al.*, 1992] FERRON, G., GARDIN, C., GRANDIDIER, J.-C. et POTIER-FERRY, M. (1992). Microflambage et rigidité des composites à fibres longues : théorie et expériences. *In La construction navale en composites*, pages 261–269, Paris. IFREMER. Actes de colloque No. 15, communication No. 25.
- [Feyel, 2003] FEYEL, F. (2003). A multilevel finite element method (fe2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3233–3244.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183:309–330.
- [Fischer, 2003] FISCHER, O. (2003). *Fibre fracture behaviour on carbon fibre reinforced plastics*. Thèse de doctorat, Technical University of Aachen.
- [Fish et Chen, 2001] FISH, J. et CHEN, W. (2001). Higher-order homogenization of initial/boundary-value problem. *Journal of engineering mechanics*, 127(12):1223–1230.
- [Fish *et al.*, 1997] FISH, J., SHEK, K., PANDHEERADI, M. et SHEPHARD, M. S. (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148:53–73.
- [Fleck *et al.*, 1995] FLECK, N. A., DENG, L. et BUDIANSKY, B. (1995). Prediction of kink width in compressed fibre composites. *Journal of Applied Mechanics*, 62:329–337.
- [Forest *et al.*, 2000] FOREST, S., BARBE, F. et CAILLETAUD, G. (2000). Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials. *International Journal of Solids and Structures*, 37:7105–7126.
- [Forest *et al.*, 2001] FOREST, S., PRADEL, F. et SAB, K. (2001). Asymptotic analysis of heterogeneous cosserat media. *International Journal of Solids and Structures*, 38(26-27):4585–4608.
- [Francfort et Suquet, 1986] FRANCFORT, G. A. et SUQUET, P. M. (1986). Homogenization and mechanical dissipation in thermoviscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 96(3):265–293.
- [Gardin et Potier-Ferry, 1992] GARDIN, C. et POTIER-FERRY, M. (1992). Microflambage des fibres dans un matériau composite à fibres longues : analyse asymptotique 2-d. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre*, 315(10):1159–1164.
- [Garland *et al.*, 2001] GARLAND, B. D., BEYERLEIN, I. J. et SCHADLER, L. S. (2001). The development of compression damage zones in fibrous composites. *Composites Science and Technology*, 61(16):2461–2480.
- [Garrett et Bailey, 1977] GARRETT, K. W. et BAILEY, J. E. (1977). Multiple transverse fracture in 90 cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester. *Journal of Materials Science*, 12(1):157–168.

- [Geers *et al.*, 2010] GEERS, M. G. D., KOUZNETSOVA, V. G. et BREKELMANS, W. A. M. (2010). Multi-scale computational homogenization : Trends and challenges. *Journal of computational and applied mathematics*, 234(7):2175–2182.
- [Germain, 1974] GERMAIN, P. (1974). Thermodynamique des milieux continus. *Entropie*, 55:7–14.
- [Germain *et al.*, 1983] GERMAIN, P., NGUYEN, Q. S. et SUQUET, P. (1983). Continuum thermodynamics. *Journal of applied mechanics*, 50(4 B):1010–1020.
- [González et LLorca, 2006] GONZÁLEZ, C. et LLORCA, J. (2006). Multiscale modeling of fracture in fiber-reinforced composites. *Acta Materialia*, 54(16):4171–4181.
- [Gotsis *et al.*, 1998] GOTSIS, P. K., CHAMIS, C. C. et MINNETYAN, L. (1998). Prediction of composite laminate fracture : micromechanics and progressive fracture. *Composites Science and Technology*, 58(7):1137–1149.
- [Grandidier et Casari, 2009] GRANDIDIER, J.-C. et CASARI, P. (2009). Critère de rupture en compression dans le sens des fibres du pli unidirectionnel intégrant l’effet de structure. In OLIVIER, P. et LAMON, J., éditeurs : *Recueil des résumés et comptes rendus des 16èmes Journées Nationales sur les Composites JNC 16*, page 10, Toulouse France. AMAC. 210.
- [Grandidier et Potier-Ferry, 1990] GRANDIDIER, J.-C. et POTIER-FERRY, M. (1990). Microflambage des fibres dans un matériau composite à fibres longues. *Comptes rendus de l’Académie des sciences*, 310(1):1–6.
- [Greszczuk, 1982] GRESZCZUK, L. B. (1982). *Impact Dynamics*, chapitre Damage in composite materials due to low velocity impact, pages 55–94. Krieger Publishing.
- [Griffith, 1921] GRIFFITH, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221:163–198.
- [Gruttmann *et al.*, 1993] GRUTTMANN, E., WAGNER, W., MEYER, L. et WRIGGERS, P. (1993). A nonlinear composite shell element with continuous interlaminar shear stresses. *Computational Mechanics*, 13:175–188.
- [Guillon *et al.*, 2009] GUILLON, D., RIVALLANT, S., BARRAU, J.-J., PETIOT, C., THÉVENET, P. et MALHERBE, B. (2009). Développement d’un modèle de l’écrasement progressif des composites stratifiés en dynamique. In OLIVIER, P. et LAMON, J., éditeurs : *Comptes Rendus des JNC 16*, page 9, Toulouse, France.
- [Guillon *et al.*, 2006] GUILLON, D., RIVALLANT, S., BARRAU, J.-J., PETIOT, C., THÉVENET, P. et PECHNIK, N. (2006). Étude des mécanismes d’absorption d’énergie dans les structures carbone-époxyde. In *Journées Nationales sur les Composites 15*, page 8, Paris. Pluralis.
- [Guillon *et al.*, 2008] GUILLON, D., RIVALLANT, S., BARRAU, J.-J., PETIOT, C., THÉVENET, P. et PECHNIK, N. (2008). Initiation and propagation mechanisms of progressive crushing in carbon-epoxy laminated plates.

- [Guimard, 2009] GUIMARD, J.-M. (2009). *Étude de la fragmentation des plis et du délaminage des composites stratifiés jusqu'à rupture en dynamique rapide*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Guimard *et al.*, 2007] GUIMARD, J.-M., ALLIX, O., PECHNIK, N. et THÉVENET, P. (2007). Statistical energy and failure analysis of cfrp compression behavior using a uniaxial microbuckling model. *Journal of Composite Materials*, 41(23):2807–2828.
- [Guimard *et al.*, 2009] GUIMARD, J.-M., ALLIX, O., PECHNIK, N. et THÉVENET, P. (2009). Energetic analysis of fragmentation mechanisms and dynamic delamination modelling in cfrp composites. *Computers and Structures*, 87(15-16):1022–1032.
- [Guinard *et al.*, 2002] GUINARD, S., ALLIX, O., GUEDRA-DESGEORGES, D. et VINET, A. (2002). A 3d damage analysis of low-velocity impacts on laminated composites. *Composites Science and Technology*, 62(4):585–589.
- [Gutkin *et al.*, 2008] GUTKIN, R., PINHO, S. T., ROBINSON, P. et CURTIS, P. T. (2008). Physical mechanisms associated with initiation and propagation of kink-bands. In *Proceedings of the 13th European conference on composite materials (ECCM13)*, Stockholm, Sweden.
- [Gutkin *et al.*, 2010a] GUTKIN, R., PINHO, S. T., ROBINSON, P. et CURTIS, P. T. (2010a). Micro-mechanical modelling of shear-driven fibre compressive failure and of fibre kinking for failure envelope generation in cfrp laminates. *Composites Science and Technology*, 70(8):1214.
- [Gutkin *et al.*, 2010b] GUTKIN, R., PINHO, S. T., ROBINSON, P. et CURTIS, P. T. (2010b). On the transition from shear-driven fibre compressive failure to fibre kinking in notched cfrp laminates under longitudinal compression. *Composites Science and Technology*, 70(8):1223.
- [Guynn *et al.*, 1992] GUYNN, E. G., OCHOA, O. O. et BRADLEY, W. L. (1992). A parametric study of variables that affect fiber microbuckling initiation in composite laminates : Part 1 - analyses. *Journal of Composite Materials*, 26(11):1594.
- [Ha et Nairn, 1992] HA, J.-B. et NAIRN, J. A. (1992). Compression failure mechanisms of single-ply, unidirectional, carbon-fiber composites. *SAMPE Quarterly*, 23(3):29–36.
- [Hahn et Williams, 1986] HAHN, H. T. et WILLIAMS, J. G. (1986). Compression failure mechanisms in unidirectional composites. In *Composite materials : testing and design (seventh conference) : 2-4 April 1984*, page 115, Philadelphia, PA. ASTM International.
- [Halm et Dragon, 1998] HALM, D. et DRAGON, A. (1998). An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17(3):439–460.
- [Hart-Smith, 1998a] HART-SMITH, L. J. (1998a). Predictions of a generalized maximum-shear-stress failure criterion for certain fibrous composite laminates. *Composites Science and Technology*, 58(7):1179–1208.



- [Hart-Smith, 1998b] HART-SMITH, L. J. (1998b). Predictions of the original and truncated maximum-strain failure models for certain fibrous composite laminates. *Composites Science and Technology*, 58(7):1151–1178.
- [Hashin, 1980] HASHIN, Z. (1980). Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of applied mechanics*, 47:329.
- [Hashin, 1996] HASHIN, Z. (1996). Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(7):1129–1145.
- [Hashin et Shtrikman, 1963] HASHIN, Z. et SHTRIKMAN, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2):127–140.
- [Hayashi, 1965] HAYASHI, T. (1965). On the shear instability of structures caused by compressive load. *In Aircraft Design Technical Meeting*, pages 566–580, Los Angeles, CA.
- [Hernandez et al., 2011] HERNANDEZ, S., SKET, F., GONZALEZ, C., MOLINA, J. et LLORCA, J. (2011). Experimental assessment of processing defects on the mechanical properties of a composite material by x-ray tomography. *In ROLFES, R. et JANSEN, E. L., éditeurs : Proceedings of the 3rd ECCOMAS Thematic Conference on the Mechanical Response of Composites*, pages 43–49. Leibniz Universität Hannover.
- [Hild et al., 1996] HILD, F., BURR, A. et LECKIE, F. A. (1996). Matrix cracking and debonding of ceramic-matrix composites. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8):1209–1220.
- [Hild et al., 1997] HILD, F., BURR, A. et LECKIE, F. A. (1997). Continuum description of damage in ceramic-matrix composites. *European Journal of Mechanics A/ Solids*, 16(1):53–78.
- [Hild et al., 2003] HILD, F., DENOVAL, C., FORQUIN, P. et BRAJER, X. (2003). On the probabilistic–deterministic transition involved in a fragmentation process of brittle materials. *Computers & Structures*, 81(12):1241.
- [Hild et Roux, 2006] HILD, F. et ROUX, S. (2006). Digital image correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties—a review. *Strain*, 42(2):69–80.
- [Hill, 1948] HILL, R. (1948). A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1(1):18.
- [Hill, 1952] HILL, R. (1952). The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 65:349.
- [Hill, 1963] HILL, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5):357–372.
- [Hill, 1965] HILL, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):213–222.

- [Hinojosa *et al.*, 2011] HINOJOSA, J., ALLIX, O., GUIDAULT, P.-A. et CRESTA, P. (2011). On the robustness of a mixed domain decomposition method with nonlinear relocation for handling geometrical instabilities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, soumis.
- [Hinton *et al.*, 2004a] HINTON, M. J., KADDOUR, A. S. et SODEN, P. D., éditeurs (2004a). *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites : The World-Wide Failure Exercise*. Elsevier Science.
- [Hinton et Soden, 1998] HINTON, M. J. et SODEN, P. D. (1998). Predicting failure in composite laminates : the background to the exercise. *Composites Science and Technology*, 58(7):1001–1010.
- [Hinton *et al.*, 2004b] HINTON, M. J., SODEN, P. D. et KADDOUR, A. S. (2004b). Evaluation of failure prediction in composite laminates : background to “part c” of the exercise. *Composites Science and Technology*, 64(3-4):321–327.
- [Hinton *et al.*, 2004c] HINTON, M. J., SODEN, P. D. et KADDOUR, A. S. (2004c). A further assessment of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates : comparison with experimental evidence. *Composites Science and Technology*, 64(3-4):549–588.
- [Hitchings *et al.*, 1996] HITCHINGS, D., ROBINSON, P. et JAVIDRAD, F. (1996). A finite element model for delamination propagation in composites. *Computers & Structures*, 60(6):1093–1104.
- [Hochard *et al.*, 2001] HOCHARD, C., AUBOURG, P.-A. et CHARLES, J.-P. (2001). Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61(2):221–230.
- [Hori et Nemat-Nasser, 1999] HORI, M. et NEMAT-NASSER, S. (1999). On two micro-mechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids. *Mechanics of Materials*, 31(10):667–682.
- [Hunt *et al.*, 2000a] HUNT, G. W., PELETIER, M. A. et AHMER WADEE, M. (2000a). The maxwell stability criterion in pseudo-energy models of kink banding. *Journal of Structural Geology*, 22(5):669–681.
- [Hunt *et al.*, 2000b] HUNT, G. W., PELETIER, M. A., CHAMPNEYS, A. R., WOODS, P. D., AHMER WADEE, M., BUDD, C. J. et LORD, G. J. (2000b). Cellular buckling in long structures. *Nonlinear Dynamics*, 21(1):3–29.
- [Hutchinson, 1976] HUTCHINSON, J. W. (1976). Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 348(1652):101–127.
- [Jelf et Fleck, 1992] JELF, P. M. et FLECK, N. A. (1992). Compression failure mechanisms in unidirectional composites. *Journal of Composite Materials*, 26(18):2706.
- [Jochum *et al.*, 2007] JOCHUM, C., GRANDIDIER, J.-C. et SMAALI, M. A. (2007). Experimental study of long t300 carbon fibre undulations during the curing of ly556 epoxy resin. *Composites Science and Technology*, 67(11-12):2633.

- [Jochum *et al.*, 2008] JOCHUM, C., GRANDIDIER, J.-C. et SMAALI, M. A. (2008). Proposal for a long-fibre microbuckling scenario during the cure of a thermosetting matrix. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(1):19.
- [Johnson et Kohlgrüber, 1997] JOHNSON, A. F. et KOHLGRÜBER, D. (1997). Modelling the crash response of composite structures. *In DYMAT 97*, Toledo, Spain. edpsciences.org.
- [Johnson et Kohlgrüber, 2000] JOHNSON, A. F. et KOHLGRÜBER, D. (2000). Design and performance of energy absorbing subfloor structures in aerospace applications. *In IMechE Seminar S672 : Materials and Structures for Energy Absorption*, London.
- [Johnson et Pickett, 1999] JOHNSON, A. F. et PICKETT, A. K. (1999). Impact and crash modelling of composite structures : A challenge for damage mechanics. *In ECCM 99*, Munich.
- [Johnson et Pickett, 2000] JOHNSON, A. F. et PICKETT, A. K. (2000). Numerical modelling of composite structures under impact loads. *Le Journal de Physique IV*, 10(PR9).
- [Johnson *et al.*, 2001] JOHNSON, A. F., PICKETT, A. K. et ROZYCKI, P. (2001). Computational methods for predicting impact damage in composite structures. *Composites Science and Technology*, 61:2183–2192.
- [Ju et Lee, 2001] JU, J. W. et LEE, H. K. (2001). A micromechanical damage model for effective elastoplastic behavior of partially debonded ductile matrix composites. *International Journal of Solids and Structures*, 38:6307–6332.
- [Jumahat *et al.*, 2010] JUMAHAT, A., SOUTIS, C., JONES, F. R. et HODZIC, A. (2010). Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading. *Composite Structures*, 92(2):295.
- [Kampfer et Leroy, 2009] KAMPFER, G. et LEROY, Y. M. (2009). Imperfection and burial-depth sensitivity of the initiation and development of kink folds in laminated rocks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57:1314–1339.
- [Kanouté *et al.*, 2009] KANOUTÉ, P., BOSO, D. P., CHABOCHE, J.-L. et SCHREFLER, B. A. (2009). Multiscale methods for composites : a review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(1):31–75.
- [Karami et Garnich, 2005] KARAMI, G. et GARNICH, M. (2005). Micromechanical study of thermoelastic behavior of composites with periodic fiber waviness. *Composites : Part B*, 36:241–248.
- [Koerber *et al.*, 2010] KOERBER, H., XAVIER, J. et CAMANHO, P. P. (2010). High strain rate characterisation of unidirectional carbon-epoxy im7-8552 in transverse compression and in-plane shear using digital image correlation. *Mechanics of Materials*, 42:1004–1019.
- [Kouznetsova *et al.*, 2002] KOUZNETSOVA, V., GEERS, M. G. D. et BREKELMANS, W. A. M. (2002). Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:1235–1260.

- [Kouznetsova *et al.*, 2004a] KOUZNETSOVA, V., GEERS, M. W. D. et BREKELMANS, W. A. M. (2004a). Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(48-51):5525–5550.
- [Kouznetsova *et al.*, 2004b] KOUZNETSOVA, V. G., GEERS, M. G. D. et BREKELMANS, W. A. M. (2004b). Size of a representative volume element in a second-order computational homogenization framework. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2(4).
- [Kröner, 1958] KRÖNER, E. (1958). Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 151(4):504–518.
- [Kugler et Moon, 2002] KUGLER, D. et MOON, T. J. (2002). Identification of the most significant processing parameters on the development of fiber waviness in thin laminates. *Journal of Composite Materials*, 36(12):1451.
- [Kumar et Talreja, 2003] KUMAR, R. S. et TALREJA, R. (2003). A continuum damage model for linear viscoelastic composite materials. *Mechanics of Materials*, 35:463–480.
- [Kyriakides *et al.*, 1995] KYRIAKIDES, S., ARSECULERATNE, R., PERRY, E. J. et LIECHTI, K. M. (1995). On the compressive failure of fiber reinforced composites. *International Journal of Solids Structures*, 32(6/7):689–738.
- [Ladevèze, 1986] LADEVÈZE, P. (1986). Sur la mécanique de l'endommagement des composites. In *Comptes-rendus des Journées Nationales sur les Composites 5*, pages 667–683, Paris. Pluralis.
- [Ladevèze, 1989] LADEVÈZE, P. (1989). On a damage mechanics approach. *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-Materials*, pages 119–141.
- [Ladevèze, 1991] LADEVÈZE, P. (1991). About a damage mechanics approach. Rapport Interne 34, LMT-Cachan, Cachan, France.
- [Ladevèze, 1992] LADEVÈZE, P. (1992). A damage computational method for composite structures. *Computers & Structures*, 44(1-2):79–87.
- [Ladevèze, 1995] LADEVÈZE, P. (1995). A damage computational approach for composites : Basic aspects and micromechanical relations. *Computational Mechanics* 17, 17:142–150.
- [Ladevèze, 2002] LADEVÈZE, P. (2002). The exact theory of plate bending. *Journal of elasticity*, 68(1):37–71.
- [Ladevèze *et al.*, 2000] LADEVÈZE, P., ALLIX, O., DEÛ, J.-F. et LÉVÊQUE, D. (2000). A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(1-2):105–122.
- [Ladevèze et Le Dantec, 1992] LADEVÈZE, P. et LE DANTEC, É. (1992). Damage modeling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3):257–267.

- [Ladevèze et Lemaître, 1984] LADEVÈZE, P. et LEMAÎTRE, J. (1984). Damage effective stress in quasi unilateral conditions. *In 16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Lyngby, Denmark.
- [Ladevèze *et al.*, 2001] LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:121–138.
- [Ladevèze et Lubineau, 2001] LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2001). On a damage mesomodel for laminates micro-meso relationships, possibilities and limits. *Composites Science and Technology*, 61(15):2149–2158.
- [Ladevèze et Lubineau, 2002] LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2002). An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics. *Composites Science and Technology*, 62(4):533–541.
- [Ladevèze et Lubineau, 2003] LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2003). Pont entre les “micro” et “méso” mécaniques des composites stratifiés. *Comptes-Rendus de la Mécanique*, 331:537–544.
- [Ladevèze *et al.*, 2005] LADEVÈZE, P., LUBINEAU, G. et MARSAL, D. (2005). Towards a bridge between the micro- and mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 66(6):698–712.
- [Ladevèze *et al.*, 2006] LADEVÈZE, P., LUBINEAU, G. et VIOLEAU, D. (2006). A computational damage micromodel of laminated composites. *International Journal of Fracture*, 137:139–150.
- [Ladevèze et Nouy, 2003] LADEVÈZE, P. et NOUY, A. (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3061–3087.
- [Lafarie-Frenot *et al.*, 2001] LAFARIE-FRENOT, M.-C., HÉNAFF-GARDIN, C. et GAMBY, D. (2001). Matrix cracking induced by cyclic ply stresses in composite laminates. *Composites Science and Technology*, 61:2327–2336.
- [Lamon, 2007] LAMON, J. (2007). *Mécanique de la rupture fragile et de l'endommagement : approches statistiques et probabilistes*. Études en mécanique des matériaux et des structures. Hermès-Lavoisier.
- [Lapusta *et al.*, 2008] LAPUSTA, Y. N., HARICH, J. et WAGNER, W. (2008). Three-dimensional fe model for fiber interaction effects during microbuckling in composites with isotropic and anisotropic fibers. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(12):2206–2215.
- [Laurin *et al.*, 2007] LAURIN, F., CARRÈRE, N. et MAIRE, J.-F. (2007). A multiscale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(1):198–209.
- [Le Dantec, 1989] LE DANTEC, E. (1989). *Contribution à la modélisation du comportement mécanique des composites stratifiés*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.

- [Lee et Soutis, 2005] LEE, J. et SOUTIS, C. (2005). Thickness effect on the compressive strength of t800/924c carbon fibre-epoxy laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(2):213–227.
- [Lee et Soutis, 2007] LEE, J. et SOUTIS, C. (2007). A study on the compressive strength of thick carbon fibre-epoxy laminates. *Composites Science and Technology*, 67(10):2015.
- [Lee et Soutis, 2008] LEE, J. et SOUTIS, C. (2008). Measuring the notched compressive strength of composite laminates : Specimen size effects. *Composites Science and Technology*, 68(12):2359.
- [Leguillon, 1989] LEGUILLON, D. (1989). Calcul du taux de restitution de l'énergie au voisinage d'une singularité. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre*, 309(10):945–950.
- [Leguillon et al., 2000] LEGUILLON, D., LACROIX, C. et MARTIN, E. (2000). Interface debonding ahead of a primary crack. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:2137–2161.
- [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1987] LEGUILLON, D. et SANCHEZ-PALENCIA, E. (1987). *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. Wiley, Paris.
- [Lemaître, 1985] LEMAÎTRE, J. (1985). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107:83.
- [Lemaître, 1985] LEMAÎTRE, J. (1985). Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51(1-3):31–49.
- [Lemaître et Chaboche, 1993] LEMAÎTRE, J. et CHABOCHE, J.-L. (1993). *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod, 2nd édition.
- [Léné, 1984] LÉNÉ, F. (1984). *Contribution à l'étude des milieux composites et de leur endommagement*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- [Liu et al., 2004] LIU, D., FLECK, N. A. et SUTCLIFFE, M. P. F. (2004). Compressive strength of fibre composites with random fibre waviness. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(7):1481–1505.
- [Lubineau, 2002] LUBINEAU, G. (2002). *Sur un mésomodèle d'endommagement des composites stratifiés : relations micro-méso, possibilités et limites*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France.
- [Lubineau et Ladevèze, 2008] LUBINEAU, G. et LADEVÈZE, P. (2008). Construction of a micromechanics-based intralaminar mesomodel, and illustrations in abaqus/standard. *Computational Materials Science*, 43(1):137–145.
- [Maillot et Leroy, 2003] MAILLOT, B. et LEROY, Y. M. (2003). Optimal dip based on dissipation of back thrusts and hinges in fold-and-thrust belts. *Journal of Geophysical Research*, 108(B6):2320–2336.

- [Maillot et Leroy, 2006] MAILLOT, B. et LEROY, Y. M. (2006). Kink-fold onset and development based on the maximum strength theorem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(10):2030.
- [Maimi *et al.*, 2007a] MAIMI, P., CAMANHO, P., MAYUGO, J. et DAVILA, C. (2007a). A continuum damage model for composite laminates : Part i – constitutive model. *Mechanics of Materials*, 39(10):897–908.
- [Maimi *et al.*, 2007b] MAIMI, P., CAMANHO, P., MAYUGO, J. et DAVILA, C. (2007b). A continuum damage model for composite laminates : Part ii – computational implementation and validation. *Mechanics of Materials*, 39(10):909.
- [Maire et Chaboche, 1997] MAIRE, J.-F. et CHABOCHE, J.-L. (1997). A new formulation of continuum damage mechanics (cdm) for composite materials. *Aerospace Science and Technology*, 4:247–257.
- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications on Numerical Methods in Engineering*, 9:233–241.
- [Marsal, 2005] MARSAL, D. (2005). *Modélisation multi-échelle de l'endommagement des stratifiés sous sollicitations hors-plan*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France.
- [Martinez *et al.*, 1981] MARTINEZ, G. M., PIGGOTT, M. R., BAINBRIDGE, D. M. R. et HARRIS, B. (1981). The compression strength of composites with kinked, misaligned and poorly adhering fibres. *Journal of Materials Science*, 16(10):2831–2836.
- [Martinez *et al.*, 2011] MARTINEZ, X., RASTELLINI, E., OLLER, S., FLORES, F. et OÑATE, E. (2011). Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures. *Composites Part B*, 42:134–144.
- [Matzenmiller *et al.*, 1995] MATZENMILLER, A., LUBLINER, J. et TAYLOR, R. L. (1995). A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. *Mechanics of Materials*, 20:125–152.
- [McCartney, 1998] MCCARTNEY, L. N. (1998). Predicting transverse crack formation in cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 58(7):1069–1081.
- [Mediavilla *et al.*, 2006] MEDIAVILLA, J., PEERLINGS, R. H. J. et GEERS, M. G. D. (2006). An integrated continuous-discontinuous approach towards damage engineering in sheet metal forming processes. *Engineering fracture mechanics*, 73(7):895–916.
- [Meyer-Piening *et al.*, 2001] MEYER-PIENING, H.-R., FARSHAD, M., GEIER, B. et ZIMMERMANN, R. (2001). Buckling loads of cfrp composite cylinders under combined axial and torsion loading - experiments and computations. *Composite Structures*, 53:427–435.
- [Michel *et al.*, 1999] MICHEL, J.-C., MOULINEC, H. et SUQUET, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172:109–143.

- [Moran *et al.*, 1995] MORAN, P., LIU, X. et SHIH, C. (1995). Kink band formation and band broadening in fiber composites under compressive loading. *Acta Metallurgica et Materialia*, 43(8):2943–2958.
- [Moulinec et Suquet, 1998] MOULINEC, H. et SUQUET, P. (1998). A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157(1-2):69–94.
- [Naik et Kumar, 1999] NAIK, N. K. et KUMAR, R. S. (1999). Compressive strength of unidirectional composites : evaluation and comparison of prediction models. *Composite structures*, 46(3):299–308.
- [Nairn, 2000] NAIRN, J. A. (2000). *Polymer Matrix Composites*, volume 2 de *Comprehensive Composite Materials*, chapitre 13 : Matrix Microcracking in Composites. Elsevier Science.
- [Nairn, 2001] NAIRN, J. A. (2001). Fracture mechanics of composites with residual stresses, imperfect interfaces, and traction-loaded cracks. *Composites Science and Technology*, 61:2159–2167.
- [Nairn et Hu, 1992] NAIRN, J. A. et HU, S. (1992). The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites. *International Journal of Fracture*, 57:1–24.
- [Narayanan et Schadler, 1999] NARAYANAN, S. et SCHADLER, L. S. (1999). Mechanisms of kink-band formation in graphite/epoxy composites : a micromechanical study. *Composites Science and Technology*, 59(15):2201–2213.
- [Needleman, 1987] NEEDLEMAN, A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54:525.
- [Nemat-Nasser et Hori, 1993] NEMAT-NASSER, S. et HORI, M. (1993). *Micromechanics : overall properties of heterogeneous solids*. Applied Mathematics and Mechanics. Elsevier, Amsterdam.
- [Nestorović et Triantafyllidis, 2004] NESTOROVIĆ, M. D. et TRIANTAFYLIDIS, N. (2004). Onset of failure in finitely strained layered composites subjected to combined normal and shear loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(4):941–974.
- [Nezamabadi *et al.*, 2009] NEZAMABADI, S., YVONNET, J., ZAHROUNI, H. et POTIER-FERRY, M. (2009). A multilevel computational strategy for handling microscopic and macroscopic instabilities. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:2099–2110.
- [Nezamabadi *et al.*, 2010] NEZAMABADI, S., ZAHROUNI, H., YVONNET, J. et POTIER-FERRY, M. (2010). A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 8(3):287–301.
- [O’Brien, 1984] O’BRIEN, T. K. (1984). Mixed-mode strain-energy-release rate effects on edge delamination of composites. In *Composite Materials : Effects of Defects*, page 125, San Francisco, Calif., 13-14 Dec. 1982.



- [Oguni *et al.*, 2000] OGUNI, K., TAN, C. Y. et RAVICHANDRAN, G. (2000). Failure mode transition in unidirectional e-glass/vinylester composites under multiaxial compression. *Journal of Composite Materials*, 34(24):2081–2097.
- [Paluch, 1994] PALUCH, B. (1994). Analysis of geometric imperfections in fibres for unidirectional fibre-reinforced composites. *La Recherche Aéronautique*, 6:431–448.
- [Pensée *et al.*, 2002] PENSÉE, V., KONDO, D. et DORMIEUX, L. (2002). Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(8):889–897.
- [Pham, 2010] PHAM, K. (2010). *Construction et analyse de modèles d'endommagement à gradient*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- [Piggott, 1995] PIGGOTT, M. R. (1995). The effect of fibre waviness on the mechanical properties of unidirectional fibre composites : a review. *Composites science and technology*, 53(2):201–205.
- [Piggott et Harris, 1980] PIGGOTT, M. R. et HARRIS, B. (1980). Compression strength of carbon, glass and kevlar-49 fibre-reinforced polyester resins. *Journal of Materials Science*, 15(10):2523–2538.
- [Pimenta *et al.*, 2009] PIMENTA, S., GUTKIN, R., PINHO, S. T. et ROBINSON, P. (2009). A micromechanical model for kink-band formation : Part i — experimental study and numerical modelling. *Composites Science and Technology*, 69(7-8):948.
- [Pinho *et al.*, 2005] PINHO, S. T., DÁVILA, C. G., CAMANHO, P. P., IANNUCCI, L. et ROBINSON, P. (2005). Failure models and criteria for frp under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity. Technical Memorandum 214530, NASA.
- [Pinho *et al.*, 2006a] PINHO, S. T., IANNUCCI, L. et ROBINSON, P. (2006a). Physically-based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking. part i : Development. *Composites Part A*, 37(1):63–73.
- [Pinho *et al.*, 2006b] PINHO, S. T., IANNUCCI, L. et ROBINSON, P. (2006b). Physically based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking. part ii : Fe implementation. *Composites Part A*, 37(5):766–777.
- [Pinho *et al.*, 2006c] PINHO, S. T., ROBINSON, P. et IANNUCCI, L. (2006c). Fracture toughness of the tensile and compressive fibre failure modes in laminated composites. *Composites Science and Technology*, 66(13):2069–2079.
- [Potter *et al.*, 2008] POTTER, K., KHAN, B., WISNOM, M., BELL, T. et STEVENS, J. (2008). Variability, fibre waviness and misalignment in the determination of the properties of composite materials and structures. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(9):1343.
- [Prager, 1949] PRAGER, W. (1949). Recent developments in the mathematical theory of plasticity. *Journal of Applied Physics*, 20(3):235–241.

- [Prandtl, 1924] PRANDTL, L. (1924). Spannungsverteilung in plastischen körnern. *In Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics*, pages 43–54, Delft.
- [Pück et Mannigel, 2007] PÜCK, A. et MANNIGEL, M. (2007). Physically based non-linear stress-strain relations for the inter-fibre fracture analysis of frp laminates. *Composites Science and Technology*, 67(9):1955–1964.
- [Pück et Schürmann, 1998] PÜCK, A. et SCHÜRMAN, H. (1998). Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 58:1045–1067.
- [Pück et Schürmann, 2002] PÜCK, A. et SCHÜRMAN, H. (2002). Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 62(12-13):1633–1662.
- [Ramberg et Osgood, 1943] RAMBERG, W. et OSGOOD, W. R. (1943). Description of stress-strain curves by three parameters. Technical Note 902, NACA, Washington DC.
- [Rastellini *et al.*, 2008] RASTELLINI, F., OLLER, S., SALOMÓN, O. et OÑATE, E. (2008). Composite materials non-linear modelling for long-fibre-reinforced laminates : Continuum basis, computational aspects and validations. *Computers and Structures*, 86:879–896.
- [Rebière et Gamby, 2008] REBIÈRE, J.-L. et GAMBY, D. (2008). A decomposition of the strain energy release rate associated with the initiation of transverse cracking, longitudinal cracking and delamination in cross-ply laminates. *Composite Structures*, 84(2):186–197.
- [Renard et Marmonier, 1987] RENARD, J. et MARMONIER, M.-F. (1987). Study of damage initiation in the matrix of a composite material by an homogenization method. *La Recherche Aérospatiale*, (6):43–51.
- [Reuss, 1929] REUSS, A. (1929). Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 9(1):49–58.
- [Reuss, 1930] REUSS, A. (1930). Berücksichtigung der elastischen formänderung in der plastizitätstheorie. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 10(3): 266–274.
- [Rich, 1934] RICH, J. L. (1934). Mechanics of low-angle overthrust faulting as illustrated by cumberland thrust block, virginia, kentucky, and tennessee. *Bulletin of the American Association of Petroleum Geologists*, 18(12):1584–1596.
- [Riks, 1972] RIKS, E. (1972). The application of newton's method to the problem of elastic stability. *ASME, Transactions, Series E- Journal of Applied Mechanics*, 39:1060–1065.
- [Riks, 1978] RIKS, E. (1978). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15:529–551.

- [Rollier, 1903] ROLLIER, L. (1903). Le plissement de la chaîne du jura. *Annales de Géographie*, 12(66):403–410.
- [Rosen, 1965] ROSEN, B. W. (1965). Mechanics of composite strengthening. In *Fiber Composite Materials : Papers Presented at a Seminar of the American Society for Metals, October 17 and 18, 1964*, pages 37–75.
- [Rotem, 1998] ROTEM, A. (1998). Prediction of laminate failure with the rotem failure criterion. *Composites Science and Technology*, 58(7):1083–1094.
- [Roulet et al., 2011] ROULET, V., BOUCARD, P.-A. et CHAMPANEY, L. (2011). Approche multiéchelle haute performance pour l'endommagement de structures composites. In CSMA, éditeur : *10ème Colloque National en Calcul des Structures*, Giens.
- [Saavedra et al., 2011] SAAVEDRA, K., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2011). On a multiscale strategy and its optimization for combined delamination and buckling simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, à paraître.
- [Sanchez-Palencia, 1974] SANCHEZ-PALENCIA, E. (1974). Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques heterogenes. *International Journal of Engineering Science*, 12(4):331–351.
- [Schapery, 1990] SCHAPERY, R. A. (1990). A theory of mechanical behavior of elastic media with growing damage and other changes in structure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(2):215–253.
- [Schapery, 1995] SCHAPERY, R. A. (1995). Prediction of compressive strength and kink bands in composites using a work potential. *International Journal of Solids and Structures*, 32(6-7):739–765.
- [Schellekens et de Borst, 1993] SCHELLEKENS, J. C. J. et de BORST, R. (1993). A non-linear finite element approach for the analysis of mode-i free edge delamination in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 30:1239–1239.
- [Schellekens et de Borst, 1994] SCHELLEKENS, J. C. J. et de BORST, R. (1994). Free edge delamination in carbon-epoxy laminates : a novel numerical/experimental approach. *Composite Structures*, 28(4):357–374.
- [Schuerch, 1965] SCHUERCH, H. U. (1965). Compressive strength of boron-metal composites. Contractor Report 202, NASA, Washington, D. C.
- [Schuerch, 1966] SCHUERCH, H. U. (1966). Prediction of compression strength in uniaxial boron fiber-metal matrix composite materials. *AIAA Journal*, 4(1):102–106.
- [Schultheisz et Waas, 1996] SCHULTHEISZ, C. R. et WAAS, A. M. (1996). Compressive failure of composites, part i : Testing and micromechanical theories. *Progresses in Aerospace Sciences*, 32:1–42.
- [Sivashanker et al., 1996] SIVASHANKER, S., FLECK, N. A. et SUTCLIFFE, M. P. F. (1996). Microbuckle propagation in a unidirectional carbon fibre-epoxy matrix composite. *Acta Materialia*, 44(7):2581–2590.

- [Sjoblom *et al.*, 1988] SJOBLUM, P. O., HARTNESS, J. T. et CORDELL, T. M. (1988). On low-velocity impact testing of composite materials. *Journal of Composite Materials*, 22(1):30–52.
- [Slaughter *et al.*, 1996] SLAUGHTER, W. S., FAN, J. et FLECK, N. A. (1996). Dynamic compressive failure of fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(11):1867–1890.
- [Soden *et al.*, 1998a] SODEN, P. D., HINTON, M. J. et KADDOUR, A. S. (1998a). A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates. *Composites Science and Technology*, 58(7):1225–1254.
- [Soden *et al.*, 1998b] SODEN, P. D., HINTON, M. J. et KADDOUR, A. S. (1998b). Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Composites Science and Technology*, 58(7):1011–1022.
- [Soden *et al.*, 2004] SODEN, P. D., KADDOUR, A. S. et HINTON, M. J. (2004). Recommendations for designers and researchers resulting from the world-wide failure exercise. *Composites Science and Technology*, 64(3-4):589–604.
- [Sohi *et al.*, 1986] SOHI, M. M., HAHN, H. T. et WILLIAMS, J. G. (1986). The effect of resin toughness and modulus on compressive failure modes of quasi-isotropic graphite/epoxy laminates. Technical Memorandum 22647, NASA.
- [Song *et al.*, 2007] SONG, S., WAAS, A. M., SHAHWAN, K. W., XIAO, X. et FARUQUE, O. (2007). Braided textile composites under compressive loads : Modeling the response, strength and degradation. *Composites Science and Technology*, 67(15-16): 3059–3070.
- [Soutis et Curtis, 2000] SOUTIS, C. et CURTIS, P. T. (2000). A method for predicting the fracture toughness of cfrp laminates failing by fibre microbuckling\* 1. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(7):733–740.
- [Soutis *et al.*, 1993] SOUTIS, C., CURTIS, P. T. et FLECK, N. A. (1993). Compressive failure of notched carbon fibre composites. *Proceedings : Mathematical and Physical Sciences*, 440(1909):241–256.
- [Sun et Tao, 1998] SUN, C. T. et TAO, J. (1998). Prediction of failure envelopes and stress/strain behaviour of composite laminates. *Composites Science and technology*, 58(7):1125–1136.
- [Suquet, 1982] SUQUET, P. (1982). *Plasticité et homogénéisation*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- [Suquet, 1995] SUQUET, P. (1995). Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with ponte castañeda's nonlinear variational procedure. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie*, 320(11):563–571.
- [Suquet, 1987] SUQUET, P. M. (1987). Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. *Homogenization techniques for composite media*, 272:194–278.

- [Talbot et Willis, 1985] TALBOT, D. R. S. et WILLIS, J. R. (1985). Variational principles for inhomogeneous non-linear media. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 35:39–54.
- [Talreja, 1985] TALREJA, R. (1985). Transverse cracking and stiffness reduction in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 19(4):355.
- [Taylor et Quinney, 1934] TAYLOR, G. I. et QUINNEY, H. (1934). The latent energy remaining in a metal after cold working. *Proceedings of the Royal Society of London - Series A*, 143(849):307–326.
- [Thollon et Hochard, 2009] THOLLON, Y. et HOCHARD, C. (2009). A general damage model for woven fabric composite laminates up to first failure. *Mechanics of Materials*, 41(7):820–827.
- [Timoshenko, 1936] TIMOSHENKO, S. P. (1936). *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, New York.
- [Totry *et al.*, 2010] TOTRY, E., MOLINA-ALDAREGUIA, J. M., GONZALEZ, C. et LLORCA, J. (2010). Effect of fiber, matrix and interface properties on the in-plane shear deformation of carbon-fiber reinforced composites. *Composites Science and Technology*, 70:970–980.
- [Trovalet, 2010] TROVALET, M. (2010). *Sur un modèle micro pour le calcul de structures en composites stratifiés*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France.
- [Trovalet *et al.*, 2009] TROVALET, M., LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2009). A micro model for analysis of laminated composites, improvement and illustrations. In OLIVIER, P. et LAMON, J., éditeurs : *Comptes Rendus des JNC 16*, Toulouse, France.
- [Tsai et Wu, 1971] TSAI, S. W. et WU, E. M. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 5(1):58.
- [Turon *et al.*, 2006] TURON, A., CAMANHO, P., COSTA, J. et DÁVILA, C. (2006). A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading. *Mechanics of Materials*, 38(11):1072–1089.
- [van der Sluis *et al.*, 1999] van der SLUIS, O., SCHREURS, P. J. G. et MEIJER, H. E. H. (1999). Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenisation. *Mechanics of Materials*, 31:743–759.
- [Vinet et Gamby, 2008] VINET, A. et GAMBY, D. (2008). Prediction of long-term mechanical behaviour of fibre composites from the observation of micro-buckling appearing during creep compression tests. *Composites Science and Technology*, 68(2):526.
- [Violeau, 2007] VIOLEAU, D. (2007). *Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Violeau *et al.*, 2009] VIOLEAU, D., LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2009). Micromodel-based simulations for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 69(9):1364–1371.

- [Violette et Schapery, 2002] VIOLETTE, M. G. et SCHAPERY, R. A. (2002). Time-dependent compressive strength of unidirectional viscoelastic composite materials. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 6(2):133–145.
- [Vittecq, 1991] VITTECOQ, É. (1991). *Sur le comportement en compression des composites stratifiés carbone-époxy*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6.
- [Vivier et al., 2009] VIVIER, G., TRUMEL, H. et HILD, F. (2009). On the stored and dissipated energies in heterogeneous rate-independent systems : theory and simple examples. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 20(7):411–427.
- [Vogler et al., 2000] VOGLER, T. J., HSU, S.-Y. et KYRIAKIDES, S. (2000). Composite failure under combined compression and shear. *International Journal of Solids and Structures*, 37(12):1765–1791.
- [Vogler et Kyriakides, 1997] VOGLER, T. J. et KYRIAKIDES, S. (1997). Initiation and axial propagation of kink bands in fiber composites. *Acta Materialia*, 45(6):2443–2454.
- [Vogler et Kyriakides, 2001a] VOGLER, T. J. et KYRIAKIDES, S. (2001a). On the initiation and growth of kink bands in fiber composites : Part i. experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 38(15):2639–2682.
- [Vogler et Kyriakides, 2001b] VOGLER, T. J. et KYRIAKIDES, S. (2001b). On the initiation and growth of kink bands in fiber composites : Part ii. analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 38:2653–2682.
- [Voigt, 1889] VOIGT, W. (1889). Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper. *Annalen der Physik*, 274(12):573–587.
- [Voyiadjis et Deliktas, 2000] VOYIADJIS, G. Z. et DELIKTAS, B. (2000). A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183:159–199.
- [Waas et al., 1990] WAAS, A. M., BABCOCK, C. D. J. et KNAUSS, W. G. (1990). A mechanical model for elastic fiber microbuckling. *Journal of Applied Mechanics*, 57:138–149.
- [Wang, 1980] WANG, S. S. (1980). An analysis of delamination in angle-ply fiber-reinforced composites. *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics*, 47:64–70.
- [Weaver et Williams, 1975] WEAVER, C. W. et WILLIAMS, J. G. (1975). Deformation of a carbon-epoxy composite under hydrostatic pressure. *Journal of Materials Science*, 10(8):1323–1333.
- [Weibull, 1951] WEIBULL, E. H. W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18(3):293–297.
- [Wempner, 1971] WEMPNER, G. A. (1971). Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7:1581–1599.
- [Whitney et al., 1982] WHITNEY, J. M., BROWNING, C. E. et HOOGSTEDEN, W. (1982). A double cantilever beam test for characterizing mode i delamination of composite materials. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 1(4):297.
- [Wisnom, 1999] WISNOM, M. (1999). Size effects in the testing of fibre-composite materials. *Composites Science and Technology*, 59:1937–1957.

- [Wisnom, 1991a] WISNOM, M. R. (1991a). Effect of shear stresses in indirect compression tests of unidirectional carbon fiber/epoxy. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 29(10):1692–1697.
- [Wisnom, 1991b] WISNOM, M. R. (1991b). The effect of specimen size on the bending strength of unidirectional carbon fibre-epoxy. *Composite Structures*, 18(1):47–63.
- [Wisnom et Atkinson, 1996] WISNOM, M. R. et ATKINSON, J. W. (1996). Compressive failure due to shear instability : Experimental investigation of waviness and correlation with analysis. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 15(April):420–439.
- [Wolfe et Butalia, 1998] WOLFE, W. E. et BUTALIA, T. S. (1998). A strain-energy based failure criterion for non-linear analysis of composite laminates subjected to biaxial loading. *Composites Science and Technology*, 58(7):1107–1124.
- [Wriggers *et al.*, 1998] WRIGGERS, P., ZAVARISE, G. et ZOHDI, T. I. (1998). A computational study of interfacial debonding damage in fibrous composite materials. *Computational Materials Science*, 12:39–56.
- [Wung et Chatterjee, 1992] WUNG, E. C. J. et CHATTERJEE, S. N. (1992). On the failure mechanisms in laminate compression specimens and the measurement of strengths. *Journal of Composite Materials*, 26(13):1885.
- [Xu et Reifsnider, 1993] XU, Y. L. I. et REIFSNIDER, K. L. (1993). Micromechanical modeling of composite compressive strength. *Journal of Composite Materials*, 27(6):572.
- [Yerramalli et Waas, 2003] YERRAMALLI, C. S. et WAAS, A. M. (2003). A failure criterion for fiber reinforced polymer composites under combined compression–torsion loading. *International Journal of Solids and Structures*, 40:1139–1164.
- [Yuan *et al.*, 2001] YUAN, J., TAKEDA, N. et WAAS, A. M. (2001). Compressive failure mechanism and impact behavior of unidirectional carbon-fiber/vinyl ester composites. *Journal of Composite Materials*, 35(16):1470–1490.
- [Yurgartis, 1987] YURGARTIS, S. W. (1987). Measurement of small angle fiber misalignments in continuous fiber composites. *Composites Science and Technology*, 30(4):279–293.
- [Zeeman et Hunt, 1979] ZEEMAN, E. C. et HUNT, G. W. (1979). Catastrophe theory : Selected papers 1972–77. *Journal of Applied Mechanics*, 46:237.
- [Zinoviev *et al.*, 1998] ZINOVIEV, P. A., GRIGORIEV, S. V., LEBEDEVA, O. V. et TAIROVA, L. P. (1998). The strength of multilayered composites under a plane-stress state. *Composites Science and Technology*, 58(7):1209–1223.
- [Zohdi et Wriggers, 2008] ZOHDI, T. I. et WRIGGERS, P. (2008). *An introduction to computational micromechanics*, volume 20 de *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag.

## Résumé

Les absorbeurs de chocs en matériaux composites sont capables de dissiper une grande quantité d'énergie, grâce à la compétition de deux mécanismes que sont le délaminage et la fragmentation des plis en compression. Ce second mode de dégradation a pour origine le plissement, qui s'initie de façon intrinsèque à l'échelle des fibres. Cette thèse est une contribution à la modélisation de ce phénomène pour la simulation de structures composites.

À cette fin, on propose une stratégie en trois étapes. La première consiste à construire un modèle microscopique capable de représenter la physique du plissement. La difficulté est d'intégrer les influences pertinentes en termes de contrainte ultime et d'énergie absorbée, en particulier celles des défauts et du cisaillement. La seconde étape consiste à homogénéiser la réponse de ce micromodèle pour une variété de chargements représentatifs. Un modèle de comportement original et paramétré par les défauts de la microstructure est proposé. Il intègre des lois de comportement déterministes, identifiées par des simulations du micromodèle numérique. Enfin, la troisième étape a pour objet d'intégrer ce comportement basé sur la micromécanique dans un modèle à l'échelle du pli, existant et validé. L'implantation est réalisée dans un code de calcul hybride continu/discret, pour mener des simulations à l'échelle d'échantillons et observer les interactions entre le plissement et les autres modes de dégradation.

**Mots clefs** : composites à matrice organique, rupture, plissement, défauts, modélisation, homogénéisation non-linéaire

## Abstract

Composite shock-absorbing devices can dissipate a large amount of energy, thanks to the combined action of delamination and fragmentation of the plies in compression. The latter failure mode is due to kinking, which naturally arises at the scale of the fibers. This Ph.D. is a contribution to the multiscale modeling of this phenomenon for the simulation of composite structures.

Therefore, three-step-strategy is adopted. The first step deals with the design of a microscopic model able to represent the kinematics and kinetics of kinking. The difficulty is to include all relevant parameters in terms of ultimate stress and dissipated energy, particularly defects and shear. The second step deals with the nonlinear homogenization of the micromodel response for several load paths. This is done by postulating an original constitutive model with a parametric influence of defects. It includes deterministic constitutive laws which are identified through numerical tests on the microstructure. Finally, the third step deals with the introduction of this micromechanics-based behavior in an existing and validated model at the scale of the plies. It is implemented in the framework of a hybrid continuous/discrete computation code, in order to perform sample-scale simulations and observe interactions between kinking and other failure mechanisms.

**Keywords** : organic matrix composites, failure, kinking, defects, modeling, nonlinear homogenization