

Dynamique et combinatoire du flot de Teichmüller

Vincent Delecroix

Institut de Mathématiques de Luminy

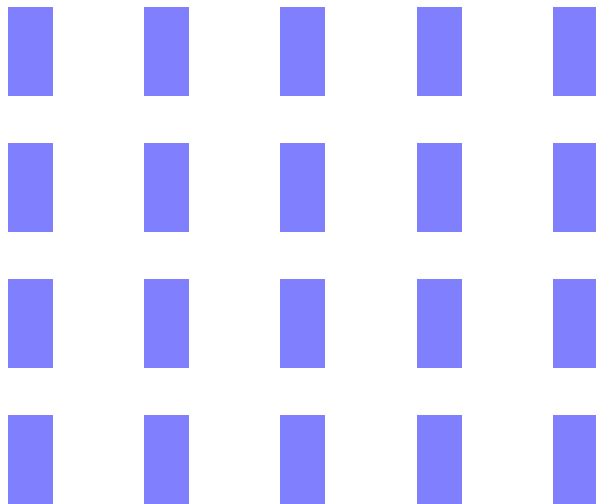
Thèse, Marseille, 16 novembre 2011

Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$.

Un billard rationnel infini

(Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



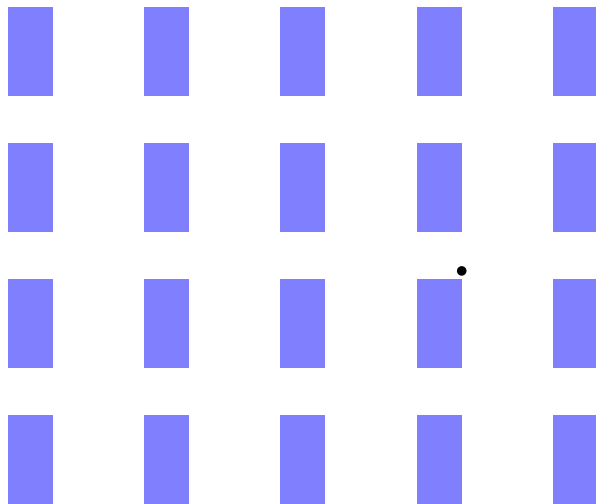
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$.

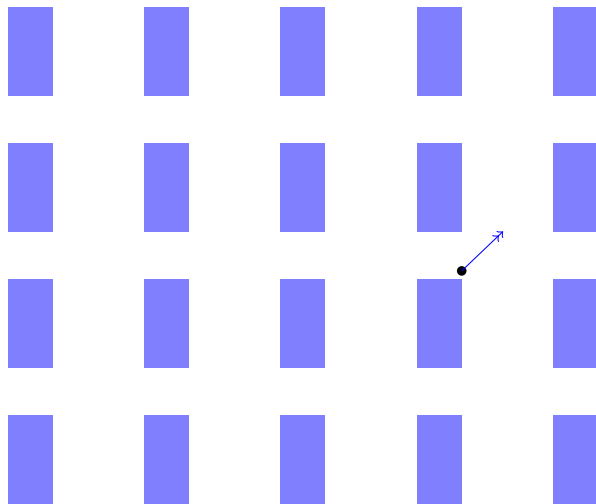
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$. Une particule se déplace en ligne droite (*le vent*) et rebondit sur les obstacles (*les arbres*) suivant la loi de l'optique géométrique.

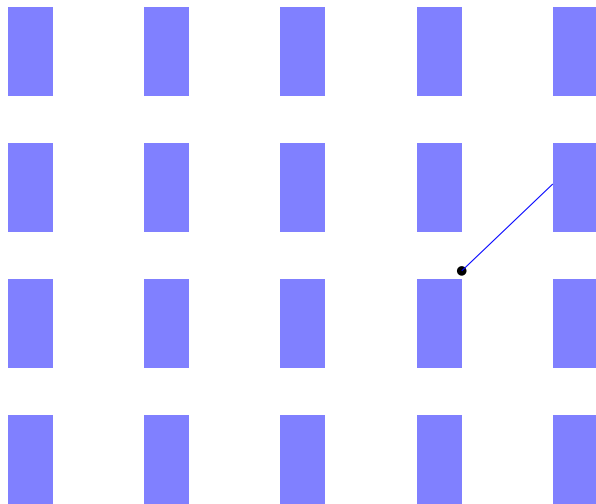
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



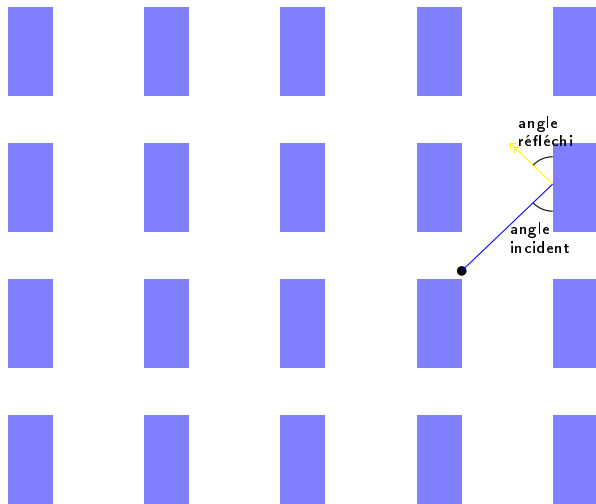
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



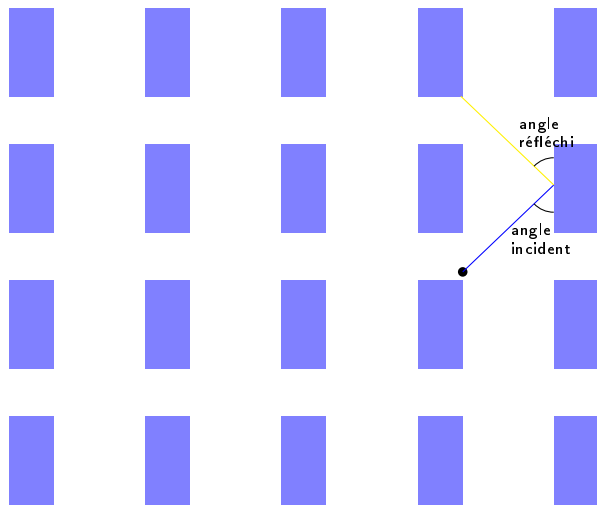
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



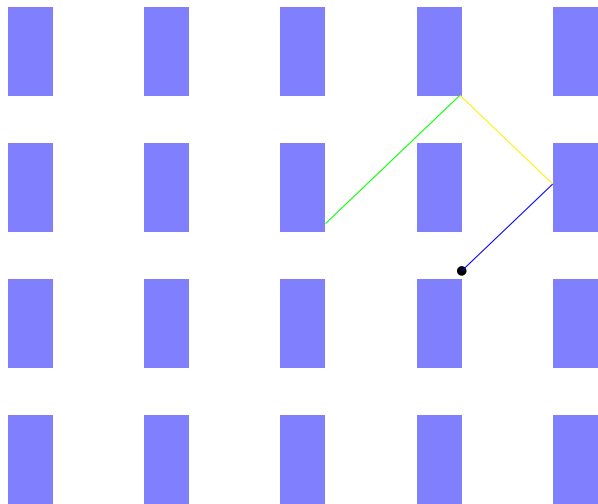
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



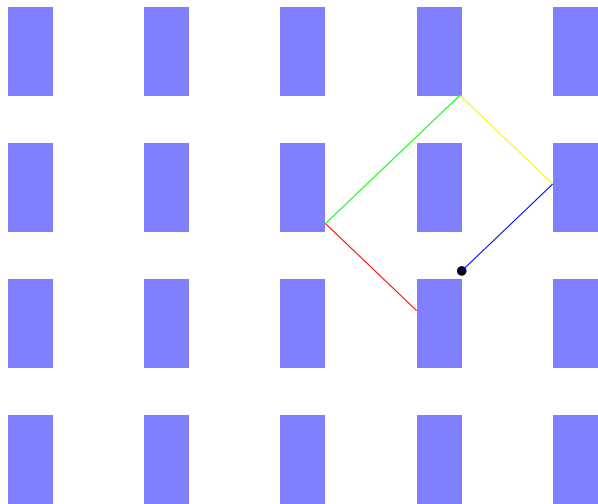
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



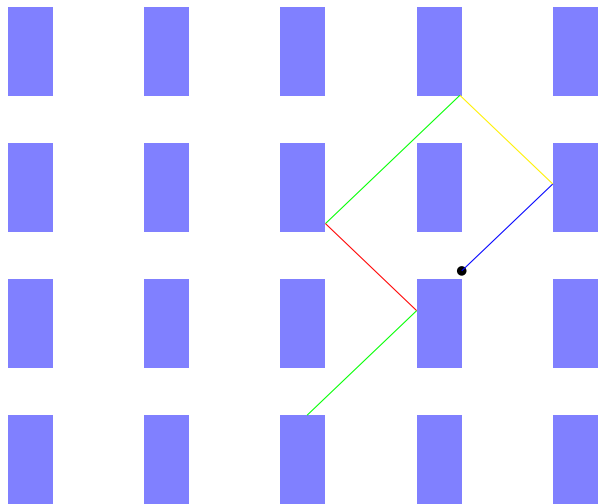
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



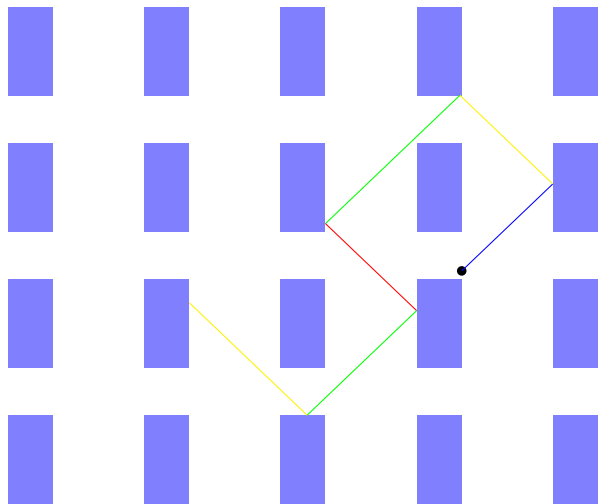
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



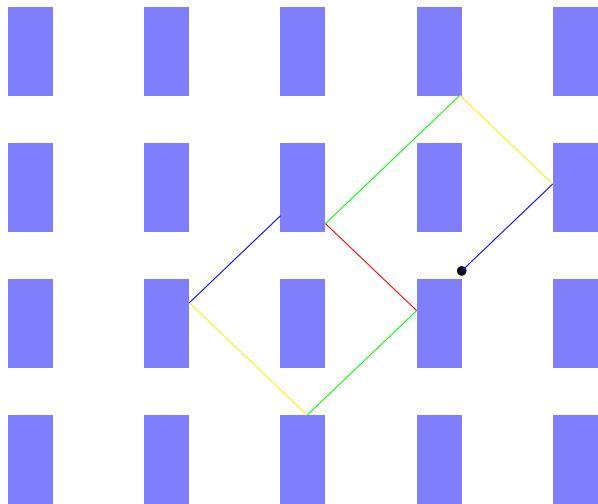
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



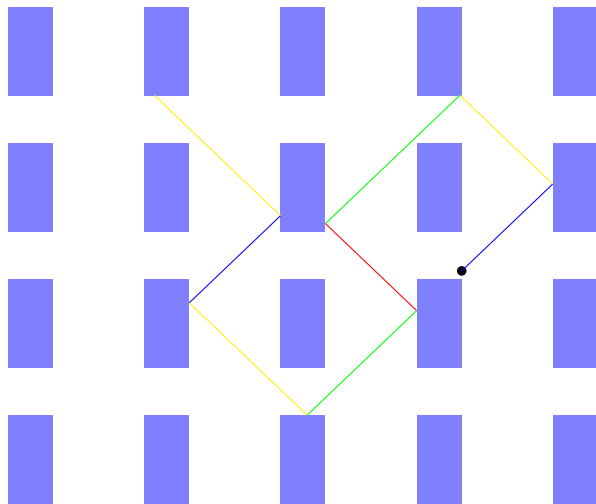
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



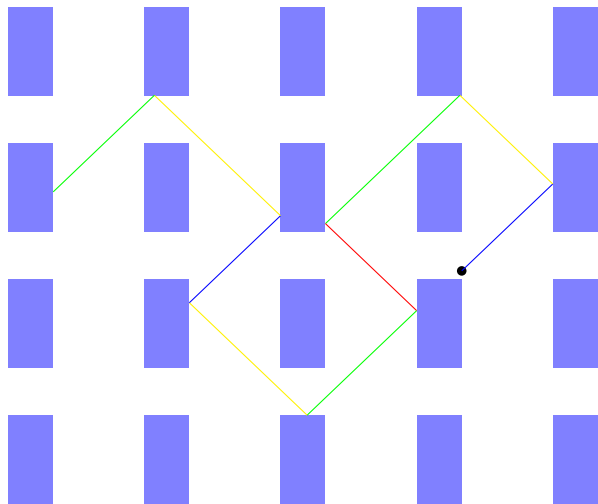
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



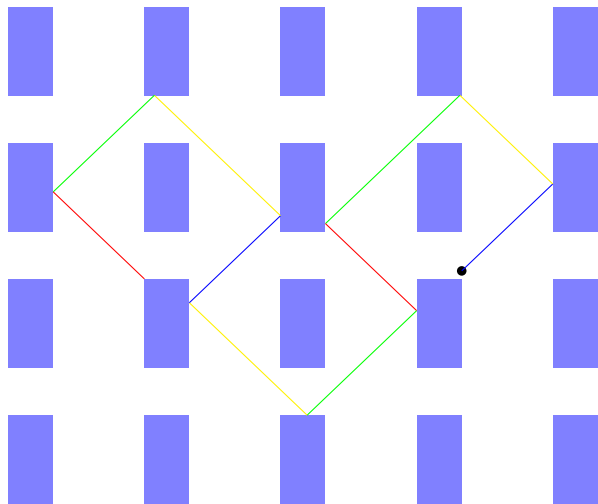
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



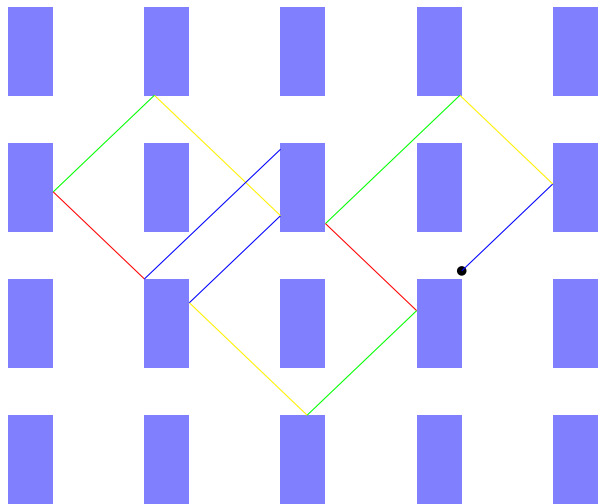
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



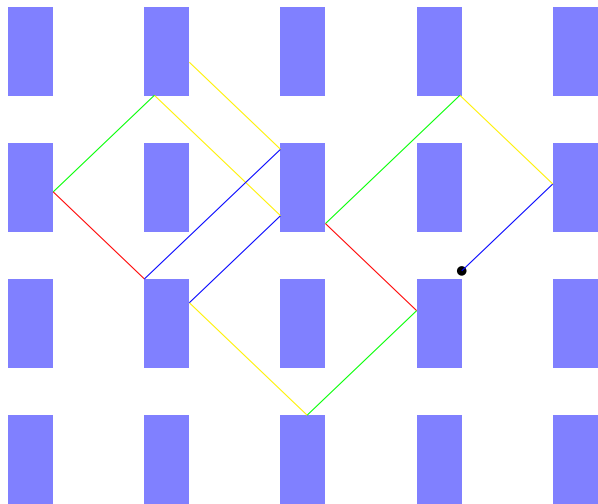
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



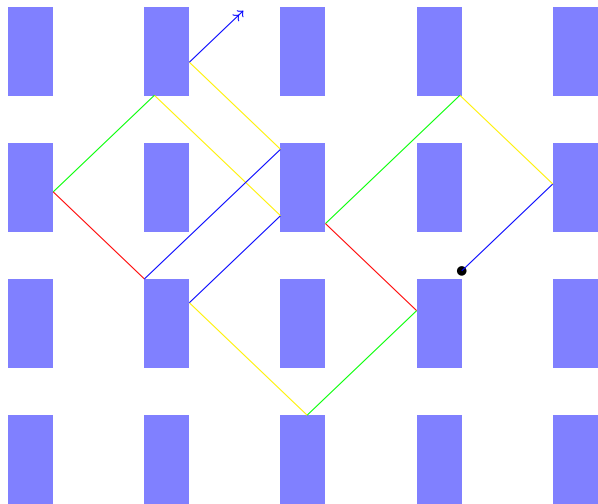
Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)



Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$. Une particule se déplace en ligne droite (*le vent*) et rebondit sur les obstacles (*les arbres*) suivant la loi de l'optique géométrique.

Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$. Une particule se déplace en ligne droite (*le vent*) et rebondit sur les obstacles (*les arbres*) suivant la loi de l'optique géométrique.

- 1 La particule revient-elle vers son point de départ infiniment souvent ou s'en va t-elle à l'infini ?

Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$. Une particule se déplace en ligne droite (*le vent*) et rebondit sur les obstacles (*les arbres*) suivant la loi de l'optique géométrique.

- 1 La particule revient-elle vers son point de départ infiniment souvent ou s'en va t-elle à l'infini ?
- 2 Quelle est la vitesse d'exploration de la bille ?

Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$. Une particule se déplace en ligne droite (*le vent*) et rebondit sur les obstacles (*les arbres*) suivant la loi de l'optique géométrique.

- 1 La particule revient-elle vers son point de départ infiniment souvent ou s'en va t-elle à l'infini ?
- 2 Quelle est la vitesse d'exploration de la bille ?
- 3 La trajectoire passe t-elle partout ?

Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$. Une particule se déplace en ligne droite (*le vent*) et rebondit sur les obstacles (*les arbres*) suivant la loi de l'optique géométrique.

- 1 La particule revient-elle vers son point de départ infiniment souvent ou s'en va t-elle à l'infini ?
- 2 Quelle est la vitesse d'exploration de la bille ?
- 3 La trajectoire passe t-elle partout ?
- 4 Comment ces propriétés dépendent du point de départ ?

Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$. Une particule se déplace en ligne droite (*le vent*) et rebondit sur les obstacles (*les arbres*) suivant la loi de l'optique géométrique.

- 1 La particule revient-elle vers son point de départ infiniment souvent ou s'en va t-elle à l'infini ?
- 2 Quelle est la vitesse d'exploration de la bille ?
- 3 La trajectoire passe t-elle partout ?
- 4 Comment ces propriétés dépendent du point de départ ? de la direction de départ ?

Un billard rationnel infini (Ehrenfest-Ehrenfest 1912, Hardy-Weber 1980)

Le vent dans les arbres est un billard dans le plan dans lequel on a disposé périodiquement des rectangles de $[0, a] \times [0, b]$. Une particule se déplace en ligne droite (*le vent*) et rebondit sur les obstacles (*les arbres*) suivant la loi de l'optique géométrique.

- 1 La particule revient-elle vers son point de départ infiniment souvent ou s'en va t-elle à l'infini ?
- 2 Quelle est la vitesse d'exploration de la bille ?
- 3 La trajectoire passe t-elle partout ?
- 4 Comment ces propriétés dépendent du point de départ ? de la direction de départ ? de la taille des obstacles ?

Retour ou fuite ?

Retour ou fuite ?

Définition

Une trajectoire est *récurrente* si elle revient arbitrairement proche de son point de départ.

Retour ou fuite ?

Définition

Une trajectoire est *récurrente* si elle revient arbitrairement proche de son point de départ. Une trajectoire est *divergente* si elle s'en va à l'infini.

Retour ou fuite ?

Définition

Une trajectoire est *récurrente* si elle revient arbitrairement proche de son point de départ. Une trajectoire est *divergente* si elle s'en va à l'infini.

Théorème (Hubert-Lelièvre-Troubetzkoy, Avila-Hubert)

Pour tous les paramètres a et b , pour une direction de départ générique et un point de départ générique la trajectoire est récurrente.

Retour ou fuite ?

Définition

Une trajectoire est *récurrente* si elle revient arbitrairement proche de son point de départ. Une trajectoire est *divergente* si elle s'en va à l'infini.

Théorème (Hubert-Lelièvre-Troubetzkoy, Avila-Hubert)

Pour tous les paramètres a et b , pour une direction de départ générique et un point de départ générique la trajectoire est récurrente.

Théorème (Delecroix)

Pour certains paramètres a et b , il existe un ensemble de direction de départ $\Lambda \subset S^1$ de dimension de Hausdorff strictement supérieur à $1/2$ tel que pour tout θ dans Λ pour tout point x la trajectoire associée s'en aille à l'infini.

Diffusion

La récurrence concernait le retour de la bille à son point de départ.

Diffusion

La récurrence concernait le retour de la bille à son point de départ. On considère maintenant la distance maximale à laquelle la bille s'est rendu jusqu'à un temps T .

Diffusion

La récurrence concernait le retour de la bille à son point de départ. On considère maintenant la distance maximale à laquelle la bille s'est rendu jusqu'à un temps T .

Théorème (Delecroix-Hubert-Lelièvre)

Pour des paramètres a et b génériques, un angle générique et un point générique on a

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, \phi_T^\theta(x))}{\log T} = 2/3.$$

Diffusion

La récurrence concernait le retour de la bille à son point de départ. On considère maintenant la distance maximale à laquelle la bille s'est rendu jusqu'à un temps T .

Théorème (Delecroix-Hubert-Lelièvre)

Pour des paramètres a et b génériques, un angle générique et un point générique on a

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, \phi_T^\theta(x))}{\log T} = 2/3.$$

Autrement dit la bille explore le plan avec une vitesse de l'ordre de $T^{2/3}$.

Ergodicité

Théorème (Frączek-Ulcigrai)

Pour des paramètres a, b génériques et un angle générique le flot n'est pas ergodique.

Théorème (Frączek-Ulcigrai)

Pour des paramètres a, b génériques et un angle générique le flot n'est pas ergodique.

Conséquence : on ne visite pas tout l'espace de manière uniforme.

Théorème (Frączek-Ulcigrai)

Pour des paramètres a, b génériques et un angle générique le flot n'est pas ergodique.

Conséquence : on ne visite pas tout l'espace de manière uniforme. Mais on ne sait encore rien sur le fait que les trajectoires visitent ou non tout l'espace.

Boite à outils

Nous allons introduire deux outils pour étudier le billard du vent dans les arbres.

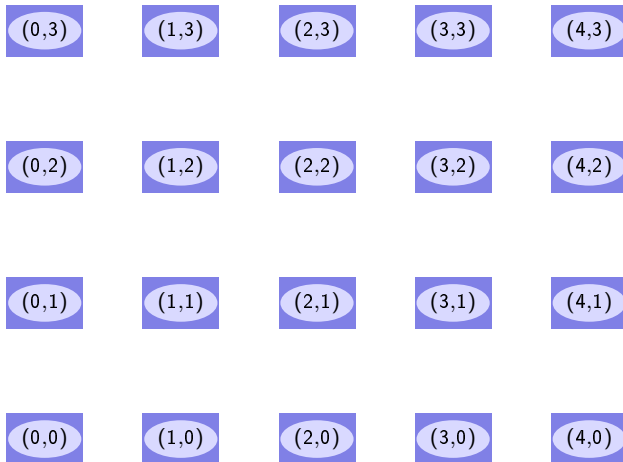
Nous allons introduire deux outils pour étudier le billard du vent dans les arbres.

- ① *Produit croisé (ou cocycle)* : la périodicité du billard permet de décomposer la dynamique en un billard quotient (qu'on appelle *la base*) et un élément de \mathbb{Z}^2 (qu'on appelle *la fibre*).

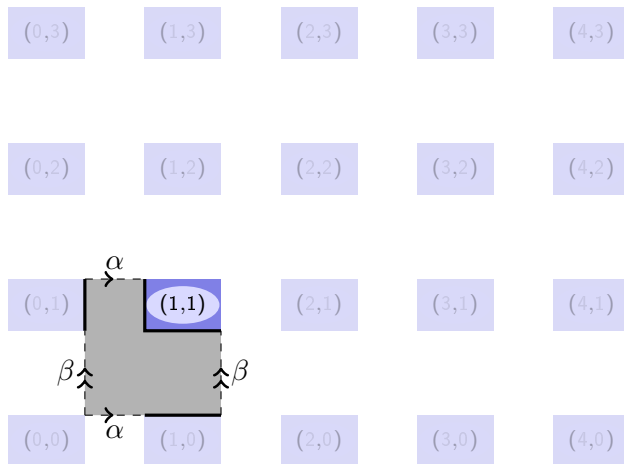
Nous allons introduire deux outils pour étudier le billard du vent dans les arbres.

- ① *Produit croisé (ou cocycle)* : la périodicité du billard permet de décomposer la dynamique en un billard quotient (qu'on appelle *la base*) et un élément de \mathbb{Z}^2 (qu'on appelle *la fibre*).
- ② *Surface de translation* : Afin de décrire la dynamique dans la base on construit une surface de translation sur laquelle on va appliquer le flot de Teichmüller.

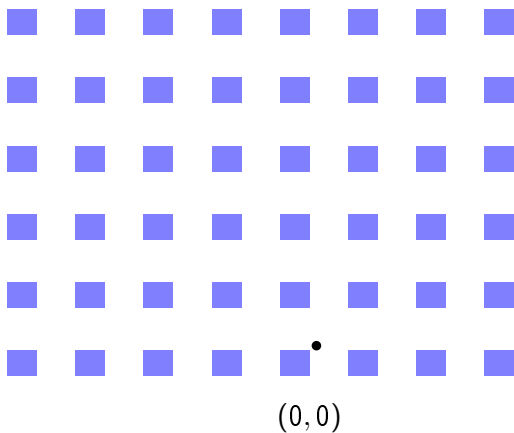
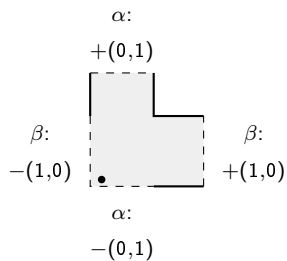
Un produit croisé



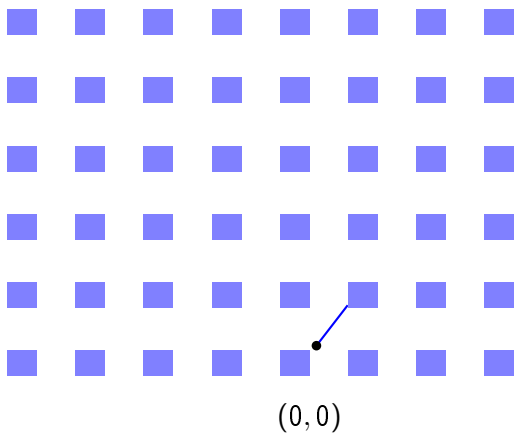
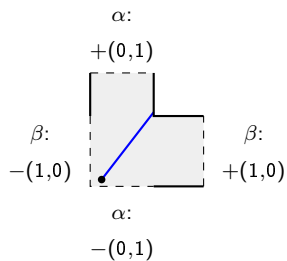
Un produit croisé



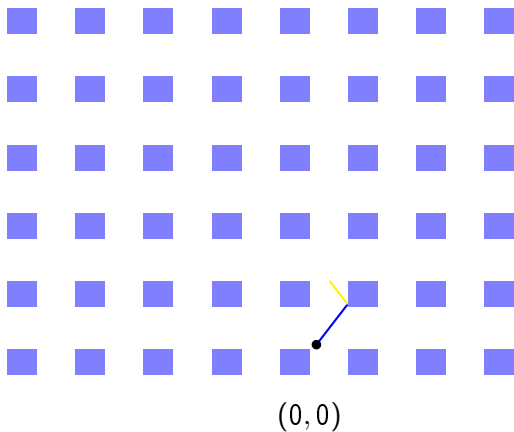
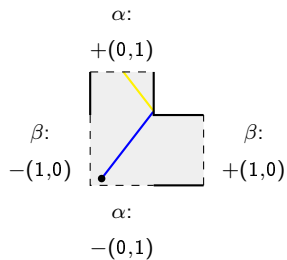
Un produit croisé



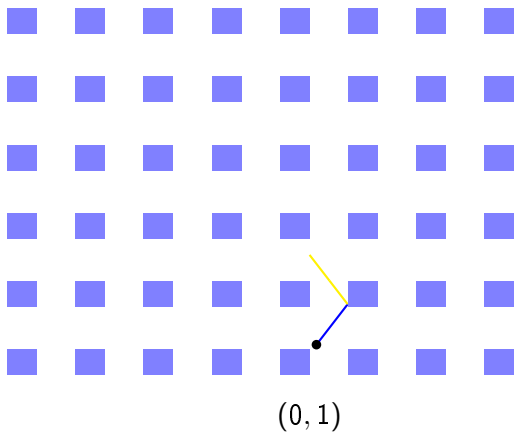
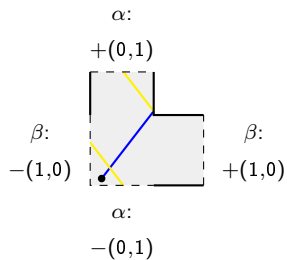
Un produit croisé



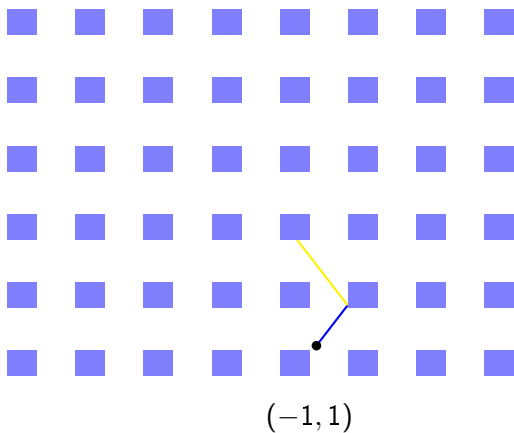
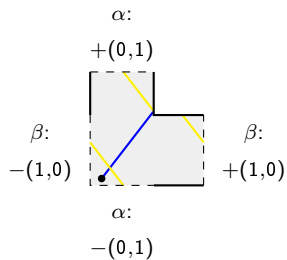
Un produit croisé



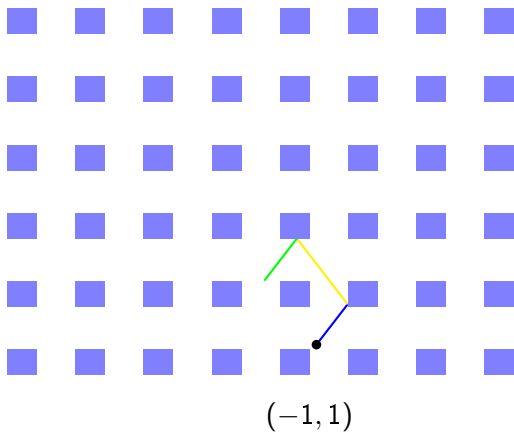
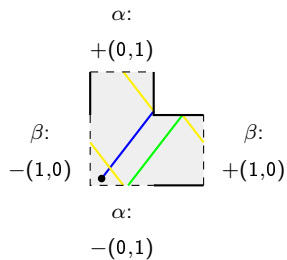
Un produit croisé



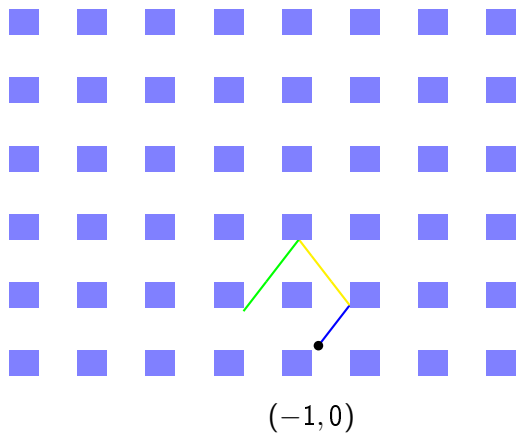
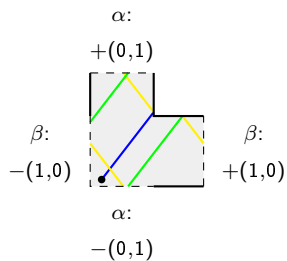
Un produit croisé



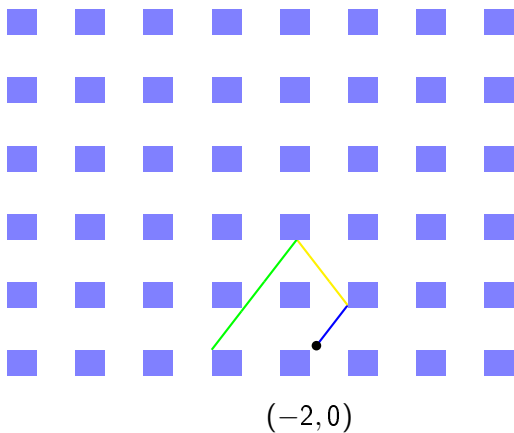
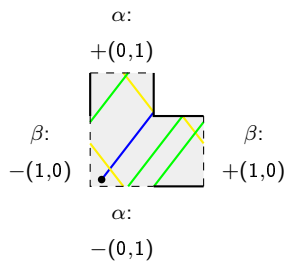
Un produit croisé



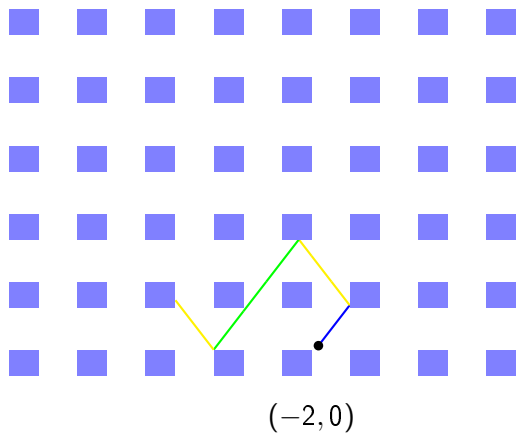
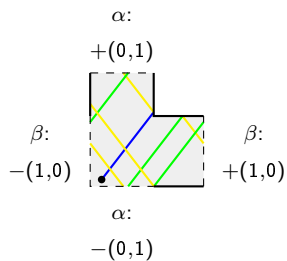
Un produit croisé



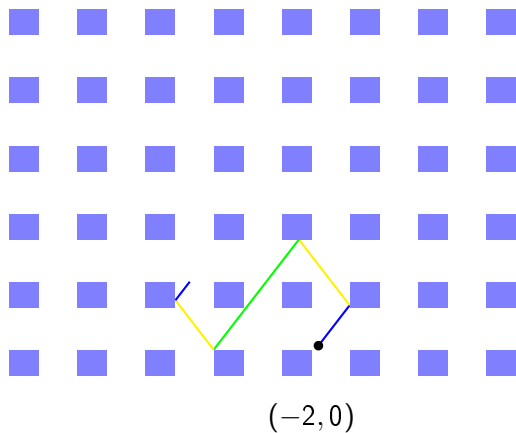
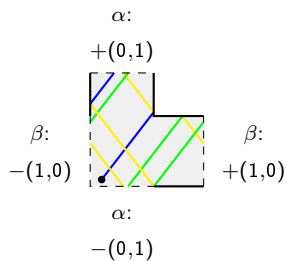
Un produit croisé



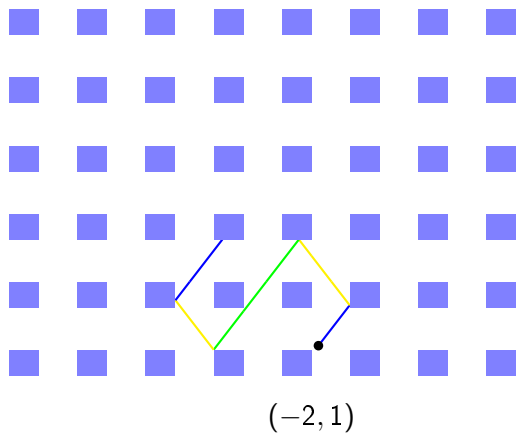
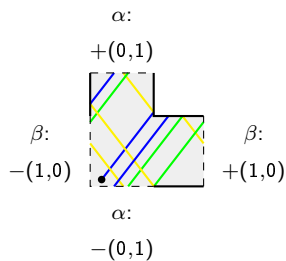
Un produit croisé



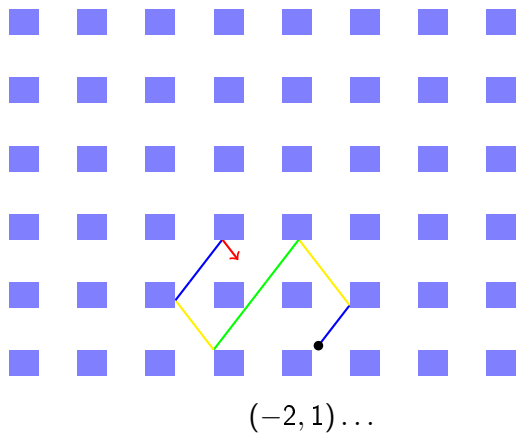
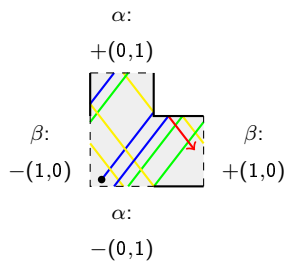
Un produit croisé



Un produit croisé



Un produit croisé



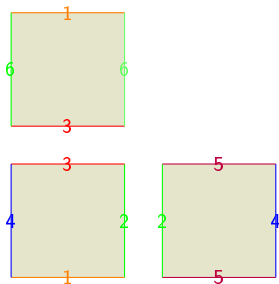
Surfaces de translation

Surfaces de translation

Un nombre fini de polygones dont on recolle deux à deux les arêtes . . .

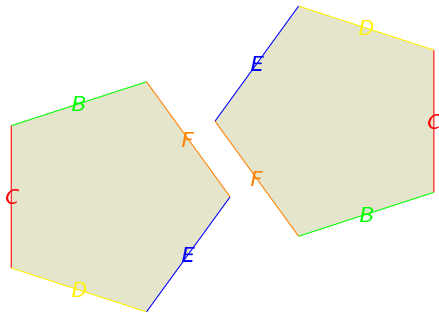
Surfaces de translation

Un nombre fini de polygones dont on recolle deux à deux les arêtes ...



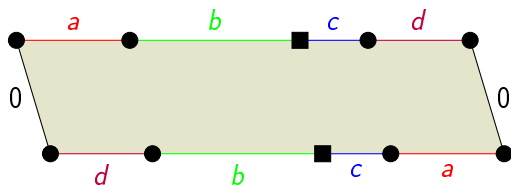
Surfaces de translation

Un nombre fini de polygones dont on recolle deux à deux les arêtes ...



Surfaces de translation

Un nombre fini de polygones dont on recolle deux à deux les arêtes ...

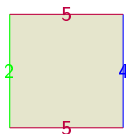
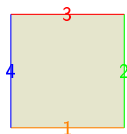
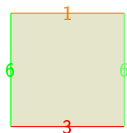


Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).

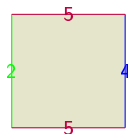
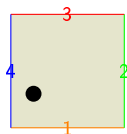
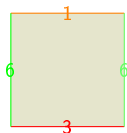
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



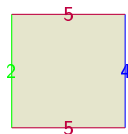
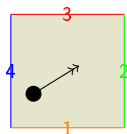
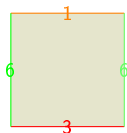
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



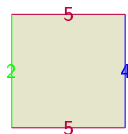
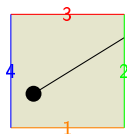
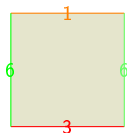
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



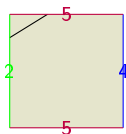
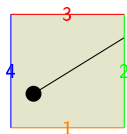
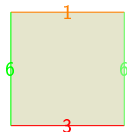
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



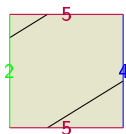
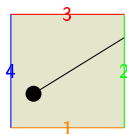
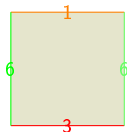
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



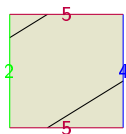
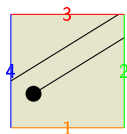
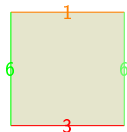
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



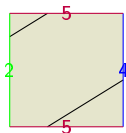
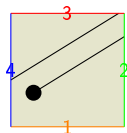
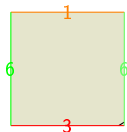
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



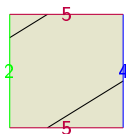
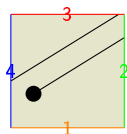
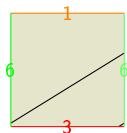
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



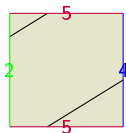
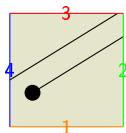
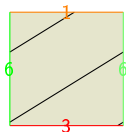
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



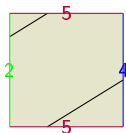
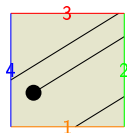
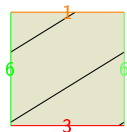
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



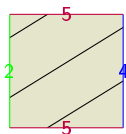
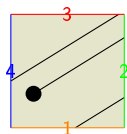
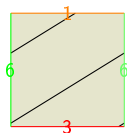
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



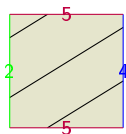
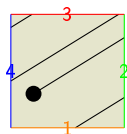
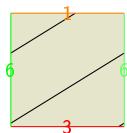
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



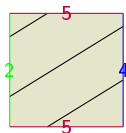
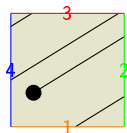
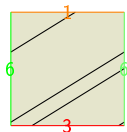
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



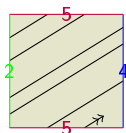
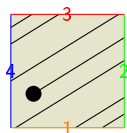
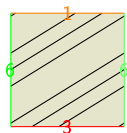
Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



Surfaces de translation : flot linéaire

Dans une surface de translation, on peut se déplacer en ligne droite (on suit une *géodésique*).



Surface de translation et billards

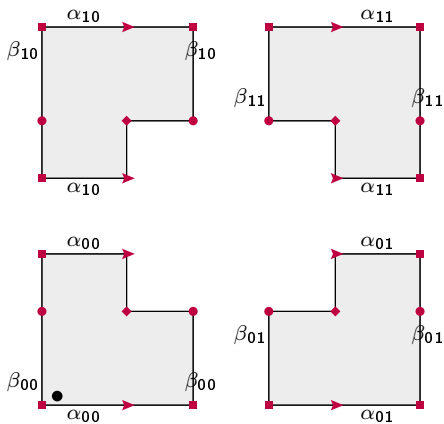
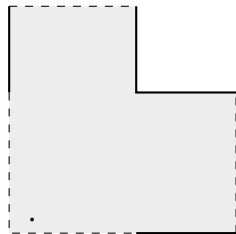
Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation.

Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.

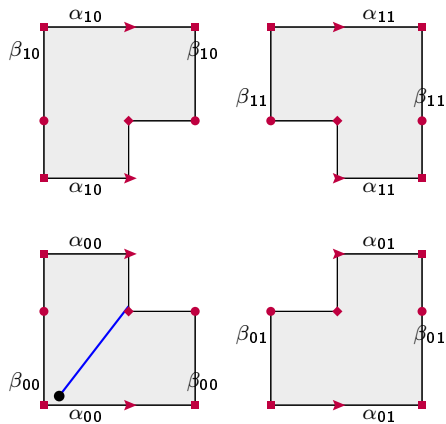
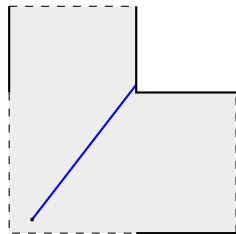
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



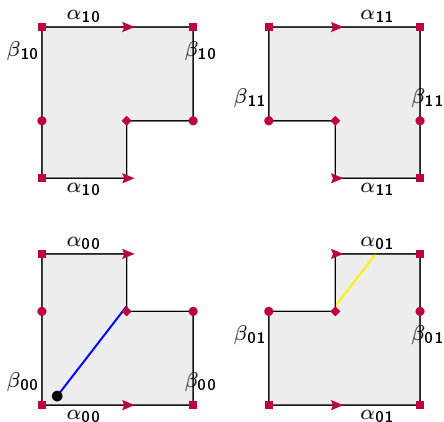
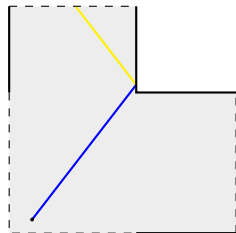
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



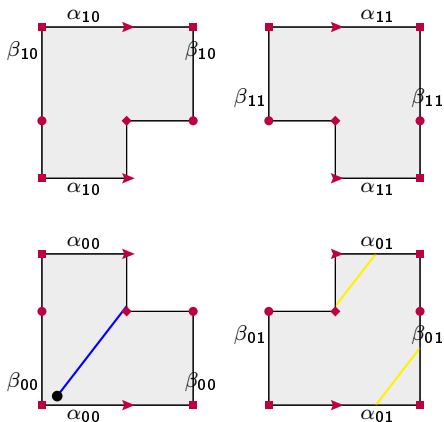
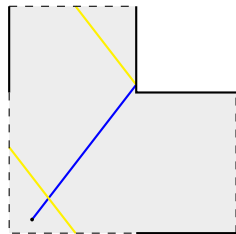
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le "déplier" pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



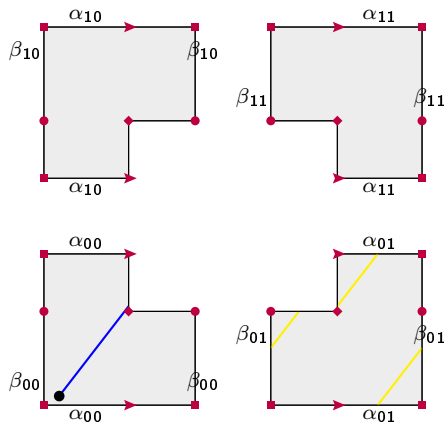
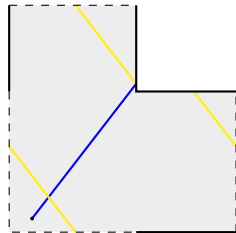
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



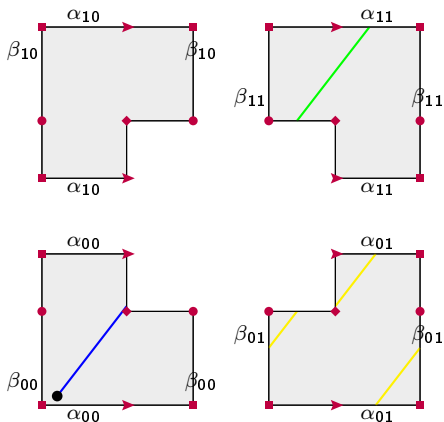
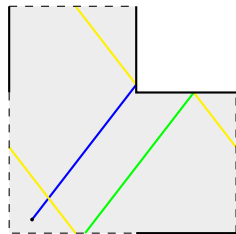
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



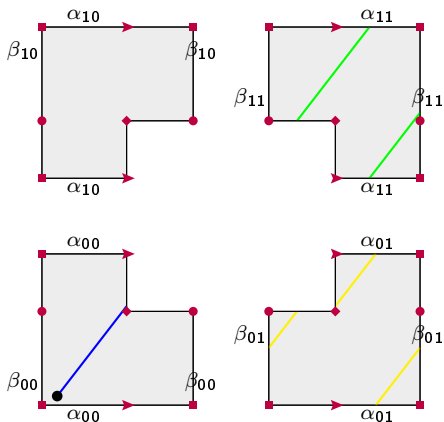
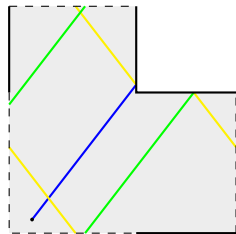
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le "déplier" pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



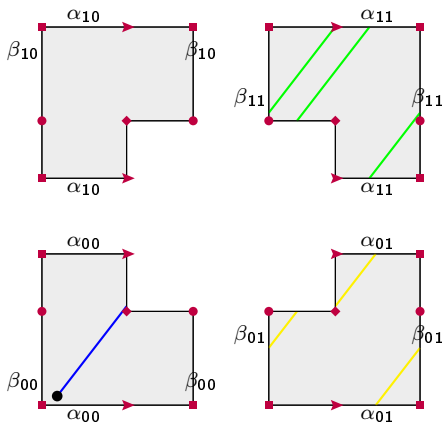
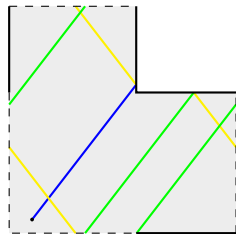
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le "déplier" pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



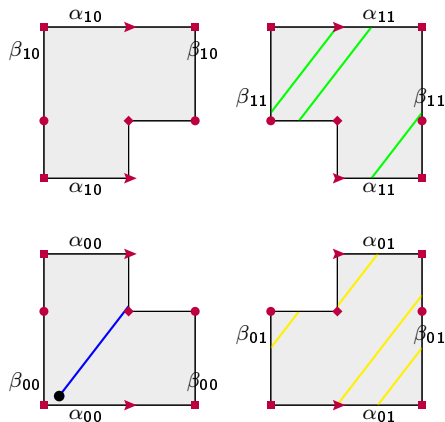
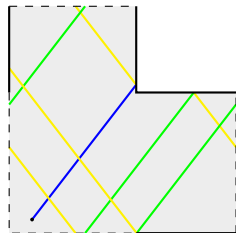
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



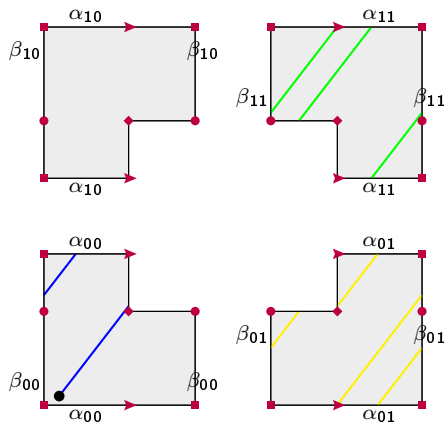
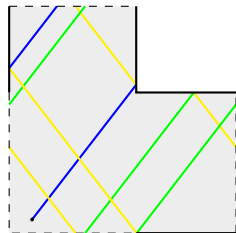
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



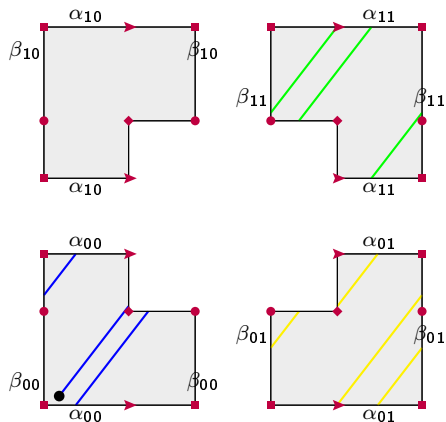
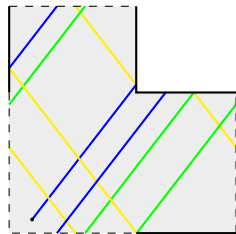
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



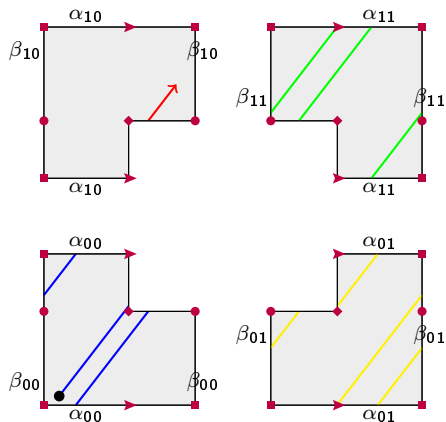
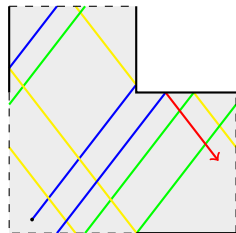
Surface de translation et billards

Etant donné un billard rationnel, on peut le "déplier" pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.

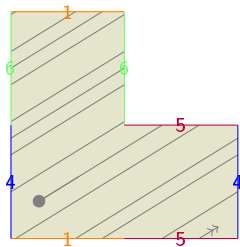


Surface de translation et billards

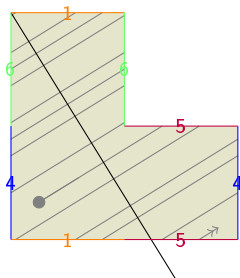
Etant donné un billard rationnel, on peut le “déplier” pour en faire une surface de translation. Pour le vent dans les arbres on obtient une surface formée de 4 polygones en L.



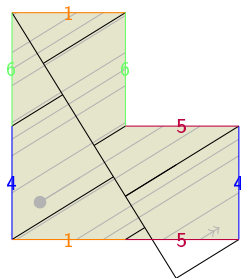
Induction de Rauzy : application de premier retour



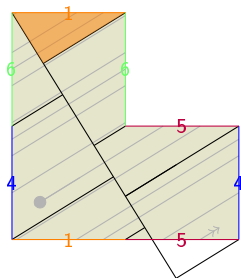
Induction de Rauzy : application de premier retour



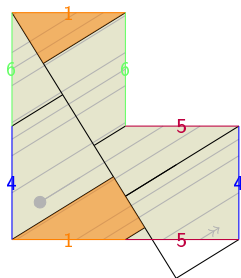
Induction de Rauzy : application de premier retour



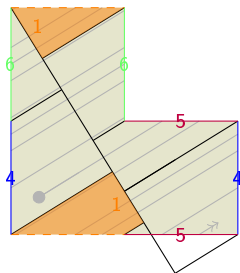
Induction de Rauzy : application de premier retour



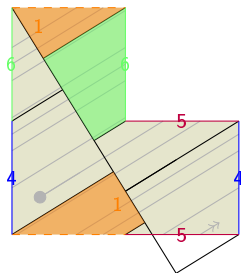
Induction de Rauzy : application de premier retour



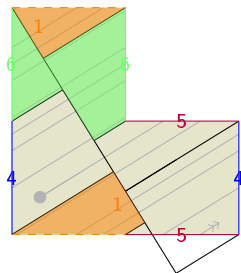
Induction de Rauzy : application de premier retour



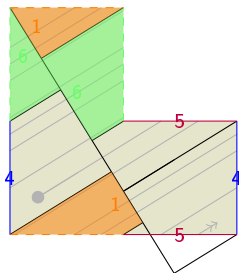
Induction de Rauzy : application de premier retour



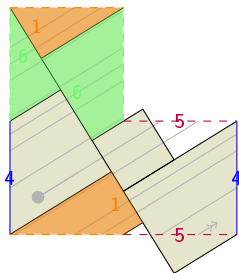
Induction de Rauzy : application de premier retour



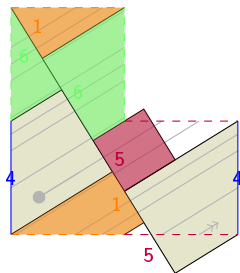
Induction de Rauzy : application de premier retour



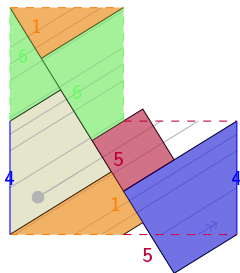
Induction de Rauzy : application de premier retour



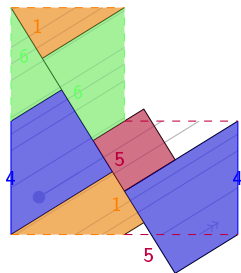
Induction de Rauzy : application de premier retour



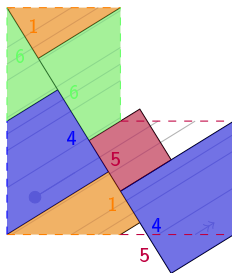
Induction de Rauzy : application de premier retour



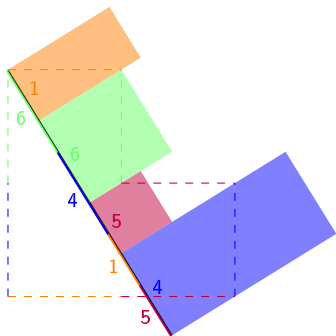
Induction de Rauzy : application de premier retour



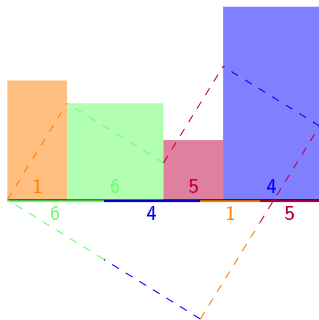
Induction de Rauzy : application de premier retour



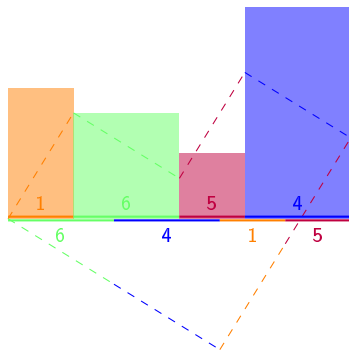
Induction de Rauzy : application de premier retour



Induction de Rauzy : application de premier retour



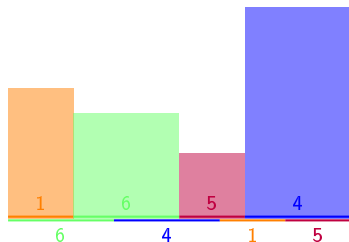
Induction de Rauzy : découpage-collage



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 5 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

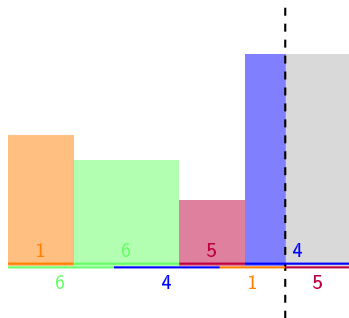
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 5 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

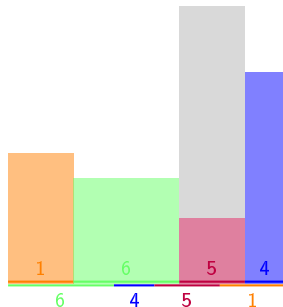
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

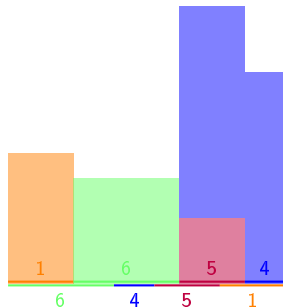
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

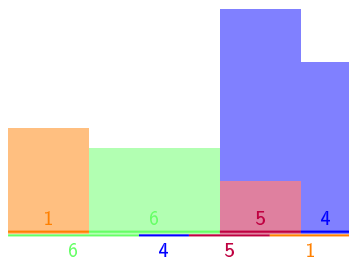
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

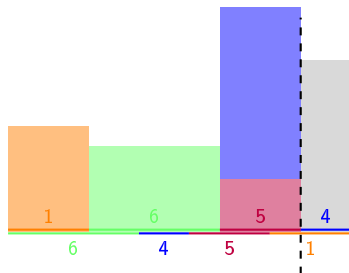
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

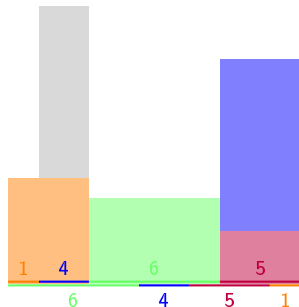
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

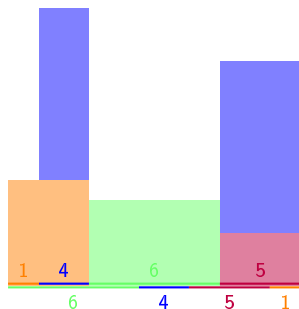
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

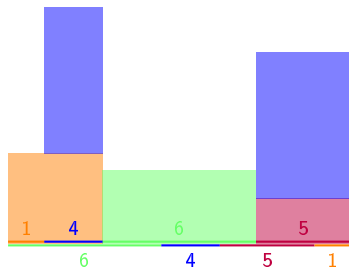
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

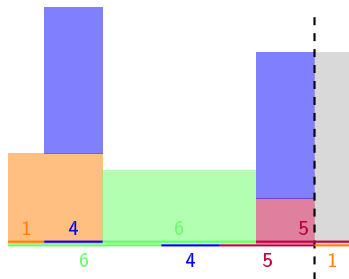
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

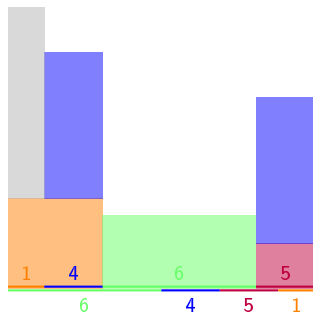
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 154 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

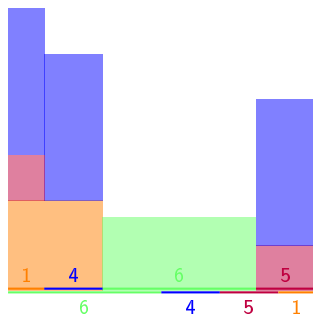
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 154 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

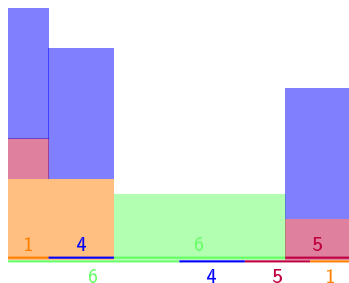
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 154 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

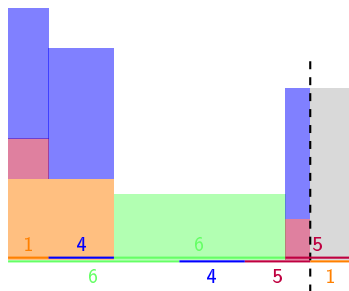
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 154 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

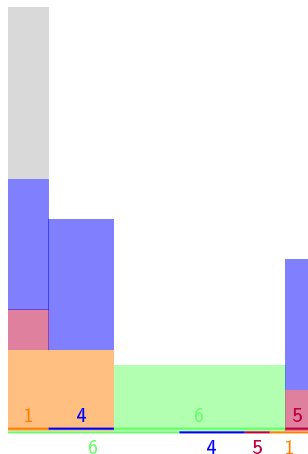
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 15454 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

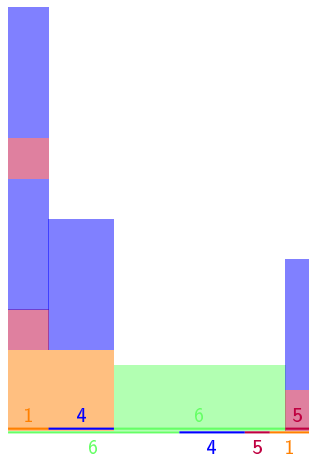
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 15454 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

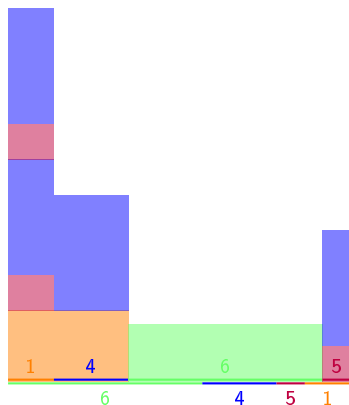
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



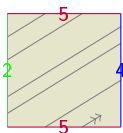
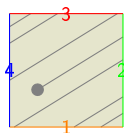
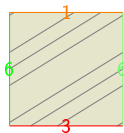
Induction de Rauzy : découpage-collage

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 15454 \\ 4 \mapsto 14 \\ 5 \mapsto 54 \\ 6 \mapsto 6 \end{array} \right.$$

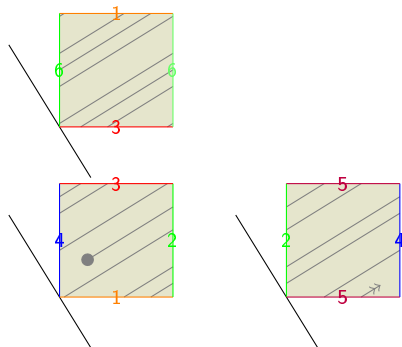
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



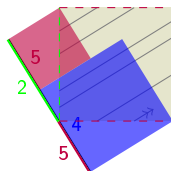
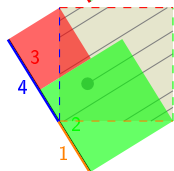
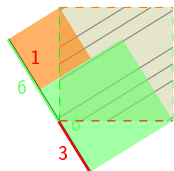
Induction de Ferenczi-Zamboni : application de premier retour



Induction de Ferenczi-Zamboni : application de premier retour



Induction de Ferenczi-Zamboni : application de premier retour



Induction de Ferenczi-Zamboni : découpage-collage

