

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

Délivrée par

L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

Pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

soutenue publiquement le 7 décembre 2009

par

Thomas BARRIER

Spécialité : Didactique de Mathématiques

ANNEXES

**UNE PERSPECTIVE SEMANTIQUE ET DIALOGIQUE
SUR L'ACTIVITE DE VALIDATION EN MATHEMATIQUES**

Jury :	Nicolas BALACHEFF	Rapporteur
	Viviane DURAND-GUERRIER	Directrice
	Bertrand REMY	Président
	Gérard SENSEVY	Examineur
	Denis VERNANT	Rapporteur
	Carl WINSLOW	Rapporteur
	Gilbert ARSAC	Invité

Table des Annexes

ANNEXE 1 : Extrait de cahier n°1 (issu de Pontille, Feurly-Reynaud & Tisseron, 1996, p.15)	1
ANNEXE 2 : Fiche présentant la situation d’inventaire (issu de Mathé, 2006)	3
ANNEXE 3 : Tableau de correspondance des emballages et des solides exposés et dessinés (issu de Mathé, 2006)	5
ANNEXE 4 : Dessin des solides en perspective cavalière et tableau décrivant le nombre et la nature des faces (issu de Mathé, 2006)	7
ANNEXE 5 : Extrait de transcription de la première séance du dispositif d’« Atelier » de géométrie en cycle 3 (issu de Mathé, 2006)	9
ANNEXE 6 : Extrait de transcription de la deuxième séance du dispositif d’« Atelier » de géométrie en cycle 3 (issu de Mathé, 2006)	18
ANNEXE 7 : Extrait de transcription de la troisième séance du dispositif d’« Atelier » de géométrie en cycle 3 (issu de Mathé, 2006)	33
ANNEXE 8 : Sujet complet de la pré-expérimentation	41
ANNEXE 9 : Transcription du travail du groupe d’étudiants <i>K, B, T</i> concernant l’exercice d’algèbre linéaire	43
ANNEXE 10 : Transcription du travail du groupe d’étudiants <i>R, G, P, A</i> concernant l’exercice d’algèbre linéaire	48
ANNEXE 11 : Transcription du travail du premier groupe <i>R, G, P, A</i> lors de la pré-expérimentation... ..	57
ANNEXE 12 : Transcription du travail du deuxième groupe <i>K, T, B</i> lors de la pré-expérimentation	70
ANNEXE 13 : Version originale de la preuve de Liouville	94
ANNEXE 14 : Une preuve de Bertrand (1864) qui reprend les arguments de la preuve de Liouville	97
ANNEXE 15 : Preuve du principe de substitution par Bertrand (1864)	99
ANNEXE 16 : Article de Liouville (1840) sur la preuve de $(1 + 1/m)^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} e$	102
ANNEXE 17 : Transcription des débats du groupe d’étudiants de L1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville	104
ANNEXE 18 : Transcription de l’exposé du groupe d’étudiants de L1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville	132
ANNEXE 19 : Transcription des débats du groupe d’étudiants de M1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville	150
ANNEXE 20 : Transcription de l’exposé du groupe d’étudiants de M1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville	168
ANNEXE 21 : Transcription des débats du premier groupe d’étudiants de l’INSA travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville	177
ANNEXE 22 : Transcription des débats du deuxième groupe d’étudiants de l’INSA travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville	227
ANNEXE 23 : Transcription de l’exposé des étudiants de l’INSA travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville	257
ANNEXE 24 : Transcription des débats du groupe d’étudiants de L1 travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy	267

ANNEXE 25 : Transcription de l'exposé du groupe d'étudiants de L1 travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy	303
ANNEXE 26 : Transcription des débats du groupe d'étudiants de M1 travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy	331
ANNEXE 27 : Transcription de l'exposé du groupe d'étudiants de M1 travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy	372
ANNEXE 28 : Transcription des débats du premier groupe d'étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy.....	480
ANNEXE 29 : Transcription des débats du deuxième groupe d'étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy.....	415
ANNEXE 30 : Transcription des débats de l'exposé des étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy.....	449

**Annexe 1 : Extrait de cahier n°1 (issu
de Pontille, Feurly-Reynaud &
Tisseron, 1996, p.15)**

Extrait de cahier n° 1

montrer La formulation de l'énoncé :

que n'importe quelle fonction f correspondant aux conditions de l'énoncé possède au moins un point fixe.

on va essayer de montrer l'inverse, c'est à dire qu'il n'existe pas d'application f n'ayant pas de pt invariant avec les conditions données par l'énoncé

En fait, on essaye de trouver f sans point fixe:

$$f(1) \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

Or on ne veut pas de point fixe donc

$$f(1) \notin \{1, \dots, n\}$$

Dans ce cas

$$f(2) \notin \{2, \dots, n\}$$

Mais, comme précédemment, on rejette 2 comme image de $f(2)$. On a donc

$$f(2) \notin \{3, \dots, n\}$$

Plus généralement, on dira que

$$f(k) \notin \{k+1, \dots, n\} \quad (\text{avec } k \in [1, n])$$

A ce moment là, soit on a $f(n) \in \{1, \dots, n\}$

soit $f(n) \notin \{1, \dots, n\}$ ce qui n'est pas possible

→ donc il n'existe pas de fonction f répondant aux conditions de l'énoncé qui n'admette aucun point invariant.

→ donc toutes les fonctions répondant aux conditions de l'énoncé admettent au moins 1 point fixe (?)

**Annexe 2 : Fiche présentant la
situation d'inventaire (issu de Mathé,
2006)**

découverte.....

MISE EN BOÎTES !

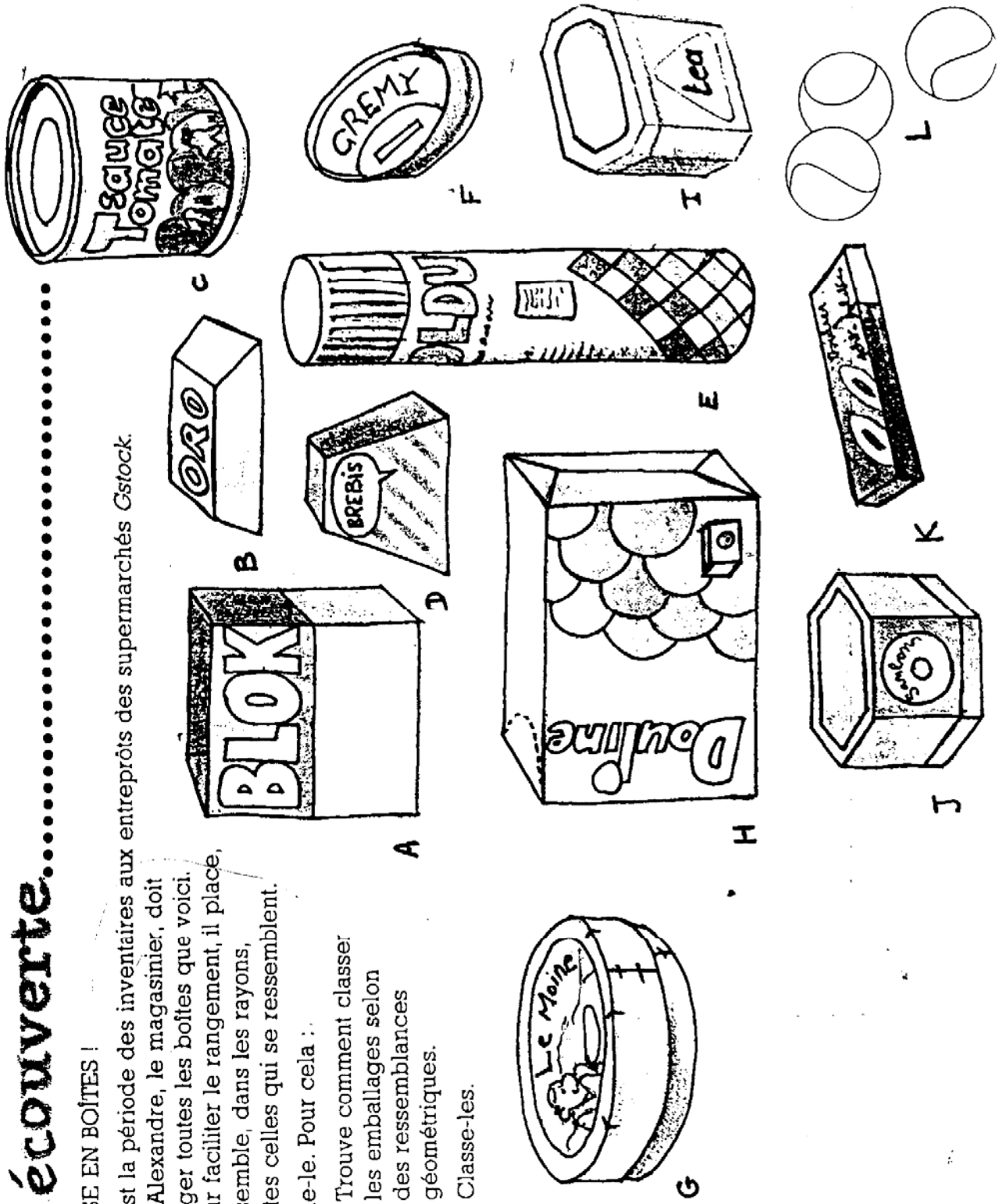
C'est la période des inventaires aux entrepôts des supermarchés Gstock.

M. Alexandre, le magasinier, doit ranger toutes les boîtes que voici. Pour faciliter le rangement, il place, ensemble, dans les rayons, toutes celles qui se ressemblent.

Aide-le. Pour cela :

1. Trouve comment classer les emballages selon des ressemblances géométriques.

Classe-les.



**Annexe 3 : Tableau de
correspondance des emballages et
des solides exposés et dessinés (issu
de Mathé, 2006)**

ANNEXE 3

Associe les solides qui peuvent avoir des ressemblances :

- les solides (emballages), repérés par des lettres majuscules.
- Les solides exposés dans la classe, repérés par des numéros.
- Les solides dessinés, repérés par des lettres minuscules.

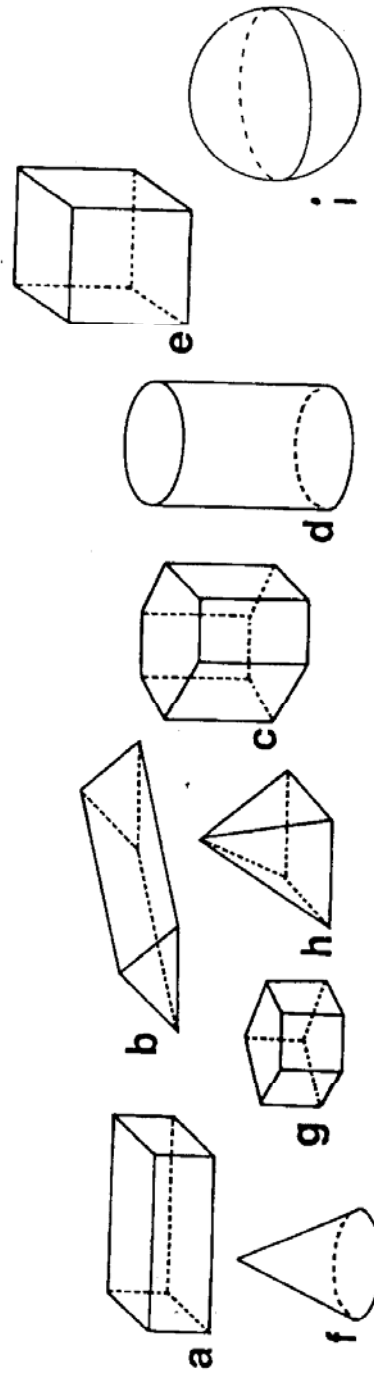
Il peut y avoir plusieurs numéros, ou plusieurs lettres par colonne.

<u>SOLIDES DESSINES</u>	<u>SOLIDES EMBALLAGES</u>	<u>SOLIDES EXPOSES</u>
<u>a</u>		
<u>b</u>		
<u>c</u>		
<u>d</u>		
<u>e</u>		
<u>f</u>		
<u>g</u>		
<u>h</u>		
<u>i</u>		
<u>k</u>		

Annexe 4 : Dessin des solides en perspective cavalière et tableau décrivant le nombre et la nature des faces (issu de Mathé, 2006)

ANNEXE 4

	il y a des faces qui sont des polygones				il y a des faces qui ne sont pas des polygones	
	nombre de faces	carrés	rectangles	triangles	autres polygones	disques
a	6		x			
b						
c						
d						
e						
f						
g						
h						
i						



**Annexe 5 : Extrait de transcription de
la première séance du dispositif
d'« Atelier » de géométrie en cycle 3
(issu de Mathé, 2006)**

ANNEXE 5 : EXTRAIT DE LA TRANSCRIPTION DE LA SEANCE 1

Les tables sont en cercle. P est assis à l'une des tables. Une table au milieu.

1. P : On part sur un travail de 6 à 7 séances sur la géométrie.
 2. E : C'est pour ça que les tables ont été déplacées !
 3. P : Voilà, il y a une volonté précise de ma part d'avoir disposé les tables comme cela. Je vais vous donner un document. Vous allez prendre une minute pour le lire.
- P se lève et distribue les feuilles : 1 document (dessins d'emballages). Silence : tout le monde lit.
4. P : Bien. C'est lu ? Thomas, à toi, tu lis la consigne à voix haute, s'il te plaît.
 5. Thomas : C'est la période des inventaires aux entrepôts des supermarchés Gstock. M. Alexandre le magasinier doit ranger toutes les boîtes que voici. Pour faciliter le rangements, il place ensemble, dans les rayons, toutes les boîtes qui se ressemblent..
 6. P : Merci. Est-ce qu'il y a besoin d'informations complémentaires ? Est-ce qu'il y a certains mots que vous ne comprenez pas ?

Trois élèves lèvent la main.

7. E : Gstock
8. P: Gstock ?
9. E: Un magasin.
10. Damien : Gstock, c'est Stock mais on n'a pas le droit de faire de la pub.
11. P : Voilà, c'est la marque du magasin.
12. E : Pourquoi on n'a pas le droit de faire de la pub ?
13. P : Pourquoi on n'a pas le droit de faire de la publicité ? C'est pour ne pas vous influencer à aller dans certains magasins. D'autres mots que vous ne comprenez pas ou qui vous sont étrangers ?

Damien lève la main mais P ne la voit pas.

- P : Vous avez tout compris ?... Qu'est ce que c'est qu'un inventaire ?
14. Justine : ... On connaît quelqu'un.
 15. P : Personne n'a un papa qui a une épicerie ou un magasin, ou qui travaille dans un magasin...
 16. E : Si, ma maman en fait des inventaires.
 17. P : D'accord. Tu peux expliquer alors ?

18. E : Ben, en fait, il y a des palettes avec des produits dessus. Ils doivent les ranger dans l'ordre... enfin... par exemple
19. P : Où est-ce qu'elle travaille ta maman ?
20. E : A Carrefour.
21. P : A Carrefour. Et elle s'occupe d'un rayon particulier ?
22. E : Oui, le rayon des bonbons.
23. P : Est-ce qu'elle fait l'inventaire par exemple des lessives ou des légumes ?
24. E : Non !
25. P : Non, elle va s'occuper de son rayon, c'est ça ? Et l'inventaire ce serait quoi alors ? J'ai entendu classer, ranger...
26. E : Trier.
27. Thomas : En fait, un inventaire c'est quand on note tout ce qu'on a en rayon.
28. P : On note tout ce qu'on a en rayon... Alors, un inventaire, ça se fait tous les jours, toutes les semaines, tous les mois, tous les ans ?
29. E : Ça dépend.
30. Laure : Tous les ans.
31. P : Ça serait pour vérifier quoi ?
32. Laure : Si on a tout.
33. E : Si c'est périmé, euh...
34. E : Y'a peut-être des trucs spéciaux, où c'est une fois par semaine.
35. P : En fait, Laure a raison, dans la distribution, c'est-à-dire pour les produits de consommation, c'est une fois par an.
L'inventaire, ça sert à comparer ce qui a été commandé et ce qui reste en magasin.
36. E : Mais monsieur, en fait, ils rajoutent ce qui manque ?
37. P : Non, c'est pour savoir ce qu'il reste par rapport à ce qui a été commandé.
38. E : Ah ouais ! D'accord.
39. P : Voilà. Donc ici, il y a un inventaire qui est fait. Tu nous relis la consigne, par exemple, Magali.
40. Magali : Trouve comment classer les emballages selon les ressemblances géométriques.
41. P : Donc, qu'est-ce qu'on a sur cette fiche ?

Les élèves lèvent la main.

42. Loïc : On a des boîtes, des produits, et des produits qui vont sur un même rayon et en fait on doit, selon des ressemblances géométriques, les rassembler.
43. P : D'accord. (A l'élève d'à côté) Par rapport à ce qu'il a dit...
44. Quentin : Moi, je mettrais tout ce qui est alimentation d'un côté et tout ce qui est chimique de l'autre, parce que si...

Quelques élèves lèvent la main.

45. P : Tu veux réagir par rapport à ça ?
46. E : Je suis un peu d'accord avec lui pour mettre les aliments d'un côté et puis les objets... Mais les aliments d'un côté, on pourrait aussi les classer comme par exemple les fromages. (Damien lève la main et est interrogé.)
47. Damien : Mais moi, Quentin, je trouve que c'est pas bien parce que la consigne c'est : les classer avec la forme de l'emballage.
48. Ensemble : Oui.
49. P : « La forme de l'emballage ».
50. Damien : « en géométrie ».
51. P : Ça ne correspond pas à ce qu'il dit alors ?

Des élèves lèvent la main.

52. Quentin : Je sais, monsieur, mais alors ça va pas très bien parce que si on met du fromage avec du ... beuh ...
53. P : D'accord. Toi, ton idée de départ c'était de regrouper par produit.

E lève la main.

- P : Oui.
54. E : Ben, moi, j'suis d'accord avec Damien parce que mettre le fromage avec le fromage, c'est pas les mêmes formes géométriques. Par exemple, « Le moine » est en rond, c'est en cercle et par exemple, la « crème » c'est ovale, alors si on met le fromage avec le fromage ça va pas aller parce que c'est pas les mêmes formes géométriques.
55. Quentin : Oui mais là, on pense à aider une entreprise.
56. P : Alexis ?
57. Alexis : Est-ce qu'on peut faire plusieurs groupes... que deux ?
58. P : Je ne sais pas, c'est comment « classer » ?
59. Alexis : Ah, alors moi, je mettrais toutes les formes rondes d'un côté, toutes les formes carrées de l'autre
60. P : Y'en a qui ne sont pas d'accord avec ce que vient de dire Alexis ?

61. Ensemble : Non.
62. E : Ben, c'est la consigne qu'Alexis vient de dire... c'est la consigne.
63. P : Alexis, toi tu ferais 2 groupes, c'est ça ?
64. Alexis : Non, plusieurs.
65. P : Plusieurs.
66. P : Toi, tu ferais plusieurs groupes ou 2 groupes ?
- Quentin lève la main. P se déplace et va au tableau.
67. Quentin : Moi je défends encore mon idée.
68. P : Tu as raison.
69. Quentin : Ce qu'il faudrait, ce serait les classer d'abord par forme géométrique, comme ça on peut les empiler, et puis après par produit : alimentation, vaisselle,...
70. P : D'accord, pour toi, par forme géométrique c'est pour les empiler...
71. E : Monsieur !
72. P : Oui ?
73. E : Vous avez dit aussi « plusieurs groupes ou 2 groupes » mais 2 groupes ça peut être plusieurs.
74. P : Oui, dans 2 on est déjà plusieurs, effectivement. Quand je disais « plusieurs » j'entendais plus que 2. Je pense que tu avais compris.
75. E : Oui.
76. E : Monsieur, on doit le faire tout seul ou à 2 ?
77. P : On va le faire collectivement.
78. Ensemble : Oh non !
79. P : J'aimerais avoir des informations pour faire ce classement. Justine !
80. Justine : Ben y'a des lettres alors on peut faire par...
81. P : Ce que je veux, ce sont les critères de classement, c'est-à-dire qu'est-ce qui va nous permettre de classer.
82. Justine : Ah ben, les formes
83. P : Oui
84. Justine : Par exemple il y a les formes rondes, « Le moine » par exemple, et puis la sauce Tomate

85. P : Avant de ... Donc qu'est que vous verriez dans les formes rondes... Bastien ?
86. Bastien : Ben déjà « Le moine ».
87. P : Donc, euh, est ce qu'on pourrait les appeler autrement que par leur...
88. Ensemble : « cercles », « les lettres », « formes fromages »
89. P : Oui, y'a des lettres.
90. Ensemble : G – L
91. P : Où sont les L ? Ce sont des balles. Qui est d'accord pour mettre les balles dans les formes rondes et qui ne l'est pas ?
92. Ensemble : Moi, j'suis d'accord !
Pas d'accord !
93. E : Dans les formes rondes. C'est quand même des formes rondes !
94. E : On pourrait mettre les ronds et les ovales dans un même groupe... en fait tous ceux qui n'ont pas de sommet, de face, non de côté.
95. P : Donc là, je mettrai formes rondes et ici...
96. E : Formes rondes et ovales ensemble.
97. P : Formes rondes et ovales et, tu as dit, ceux qui n'ont pas de sommet.
98. E : Ben, les formes ronds ou ovales elles ont pas de sommet.
99. P : C'est pour préciser.
- P écrit au tableau, 1^{ère} colonne à gauche, formes rondes (toutes les formes qui n'ont pas de sommet).
100. E : Monsieur, on y marque aussi ?
101. P : Je marque les informations simplement. Donc, toutes les formes qui n'ont pas de sommet. Tu veux rajouter une autre question, Quentin ?
102. Quentin : Non... ceux qui n'ont aucun côté plat.
103. P : Ceux qui n'ont pas de sommet et de côté plat ?
104. E : Mais c'est pas possible de ne pas avoir de côté plat !
105. E : Ben si, le rond il n'a pas de côté plat [la balle].
106. E : Ben si, « Le moine » tu peux bien le poser, il a un côté plat.
107. E : Oui, mais en regardant par dessus.
108. P : On va voir si la dernière information est valable pour nous. (Il ajoute « sans côté plat au tableau) Donc, on met ... après, l'autre colonne, ça sera quoi ? (Il trace un trait vertical.)

109. E : Formes carrées (et des trapèzes).
110. P : Comment ça s'appelle, cette catégorie ? J'entends les carrés, les rectangles, les trapèzes...
111. Ensemble : Les angles, les polygones, les quadrilatères.
112. P : Donc, tu as parlé de polygones, oui...les formes poly...
113. E : polygonales.
114. P : Les formes polygonales, oui. (Il l'écrit dans la 2^{ème} colonne.) Est-ce que quelqu'un n'est pas d'accord avec ça ? C'est possible qu'on ne soit pas d'accord.
115. E : Oui, y'a un truc, c'est plutôt sur l'autre que je ne suis pas d'accord.... Côté plat.
116. E : Oui, moi aussi.
117. Loïc : J'suis pas d'accord parce que « Le moine » on a considéré que ça avait un côté plat, donc ça ne pourrait pas aller ni avec les formes rondes, ni avec les formes polygonales.
118. E : Même chose pour le « crémy ».
119. P : Oui, Damien ?
120. Damien : La seule chose qui pourrait aller dans les formes rondes, ben c'est les balles.
121. Ensemble : Oui.
122. P : Ici, si y'a pas de côtés plats... alors est-ce qu'il y a des informations à enlever ?
123. Ensemble : Oui, côtés plats.
124. P : Tout le monde est d'accord ou pas ?
125. Ensemble : Oui
- P raye « et de côtés plats ».
126. Quentin : Comment ça s'appelle aussi les ronds ?
127. P : Les cercles ?
128. Quentin : Non, ceux qui sont arrondis...
129. P : Pour l'instant, ça sera « formes arrondies. Qu'est ce qu'on met comme lettre ici ? (1^{ère} colonne).
130. Ensemble : G – F – C – E (P écrit.)
131. P : On récapitule. Laure !
132. E. : Y'a L aussi, monsieur.
133. E. : Non, pas L.

134. P : Alors G, ça correspond à quoi ?
135. Ensemble : Camembert !
136. P : C
137. Ensemble : Sauce tomate !
138. P : F
139. E : Crémy
140. P : Soit une laque, soit une bombe aérosol.
141. Ensemble : Et L, monsieur !
142. P : Alors L, c'est quoi ?
143. Pauline : Non, moi L je le mettrais.. enfin, je le mettrais pas parce qu'il a pas de côté plat alors faudrait plutôt le mettre dans une autre...
144. E : Mais on l'a barré !
145. Pauline : Oui, mais L y'a pas de côté plat et y'a pas de sommet, alors faudrait mieux le mettre dans une autre colonne.
146. E : Mais « Le moine » non plus il a pas de sommet.
147. E : Si, « Le moine » il en a, c'est comme une boîte de camembert.
148. E : Non, « Le moine » il en a pas !
149. E : Si...
150. P : Alors, je sens une divergence de points de vue sur « sommet », « arête » et « côté plat ». Vous n'êtes pas tous d'accord sur ce que veulent dire « arête », « sommet » et « côté plat ». Alors, on va se le mettre dans un coin. (P écrit dans un coin du tableau Sommet, Côté plat, Arête). Bien, je vous propose sur votre feuille, il reste un petit espace, d'écrire le classement ... et de finir de compléter avec les lettres. On continue avec les lettres ici (colonne « formes polygonales ») (Il écrit, sous la dictée de la classe) : A – D – H –K – I – J – B). On les a toutes. (Les élèves recopient sur leurs feuilles).
151. Quentin : Ça va pas, monsieur, formes polygonales ... puisque « polygonale » c'est différentes formes ... enfin, des formes qui ont plusieurs...
152. P : Qu'est ce que ça veut dire « polygonale » ?
153. Loïc : C'est des formes qui ont six côtés.
154. Quentin : Pas forcément six, ça peut être huit aussi. C'est tous ceux qui ont des côtés, y'a pas de nombre limite.
155. P : Vous entendez quoi, par « polygone » ?

156. E : Ça a des formes plates.
157. P : Plates ou planes ?
158. E : Planes. Et puis que tous les côtés soient carrés ... enfin pas carrés mais arrondis.
159. P : D'accord, Loïc ?
160. L : Polygone, c'est des formes à six côtés.
161. P : Vous ne savez plus ce que c'est qu'un polygone alors ... (Silence – les élèves copient).

**Annexe 6 : Extrait de transcription de
la deuxième séance du dispositif
d'« Atelier » de géométrie en cycle 3
(issu de Mathé, 2006)**

ANNEXE 6 : EXTRAIT DE LA TRANSCRIPTION DE LA SEANCE 2

25. E. : Oui
26. P. : Est-ce que la forme change ? Hein, c'était un petit problème qui avait été posé.
27. E. : Non.
28. P. : Alors, certains étaient d'accord, d'autres n'étaient pas d'accord, et on avait fini par voir qu'en fait... C'était quoi la réponse ?
29. Damien : C'est pareil !
30. P. : Si on a une forme carrée, si on agrandit ses dimensions de la même mesure, la forme reste la même.
31. Loïc : Oui mais enfin, si on n'agrandit qu'un seul côté, ça va pas...
32. P. : Évidemment, si on agrandit un seul côté, là ça change. Bien alors, dans ces critères de classement, on avait retenu quoi ? Bastien, tu avais donné un nom qui était ... en forme plane.
33. E. : Polygone.
34. P. : Oui, il y avait polygone, c'est exact.
35. E. : Polygonale.
36. P. : Qui est-ce qui se rappelle de la définition d'un polygone ?
(Loïc lève la main, d'autres cherchent dans leur cahier)
37. P. : Alexis.
38. Alexis : Non, non.
39. E. : Déjà, c'est une forme qui a des côtés plats.
40. P. : C'est quoi un côté ?
41. E. : Ben, c'est qui ne peut pas rouler.
42. P. : Qui ne peut pas rouler. Est-ce qu'on peut avoir plus de précision ? Donc, c'est une forme qui a des côtés plats, qui ne peut pas rouler.
43. E. : Monsieur, c'est un objet où il y a des sommets.
44. P. : C'est un objet où il y a des sommets. On parle de sommets ou de polygone ?
45. E. : Y'a pas de cercle.
46. E. : Oh ! on avait parlé de sommets et d'arêtes là-bas !
47. P. : Alors on avait parlé de sommets et d'arêtes, mais là on en est à « polygone ».
48. Loïc : C'est une forme qui a 6 côtés qui.. euh... voilà.
49. P. : Pour toi, c'est une forme qui a 6 côtés.
50. Loïc : Non ! sans cercle.
51. P. : Alors, sans ligne courbe. Justine ?
52. Justine : Un polygone, c'est une forme avec des arêtes.
53. E. : C'est ce qui a des sommets, des arêtes et puis un autre nom.
54. P. : Dans nos critères de classement des solides, qu'est-ce que vous aviez repéré ? On avait parlé de formes polygonales mais apparemment...

55. Quentin : Poly c'est plusieurs ?
56. P. : Poly c'est plusieurs, oui.
57. Manon : Ben, peut-être que les formes polygonales, c'est
58. E. : Où il y a plusieurs formes.
59. Manon : C'est les formes qui ont des sommets.
60. P. : Les formes qui ont des sommets.
61. Justine : C'est des lignes brisées.
62. P. : Ah ! alors, tu as regardé dans ton cahier de définition. Tu me relis alors la définition.
63. Justine : Polygone - C'est une figure géométrique délimitée par une ligne polygonale entre parenthèses brisée, fermée. Il y a 3 types de polygones : les polygones quelconques, réguliers ou croisés.
64. P. : Bien, pour en revenir à la définition, un polygone, c'est quoi alors ?
65. E. : C'est une ligne qui est brisée et fermée.
66. P. : La première chose qui vous vient, c'est quoi ? c'est une ligne brisée ? C'est une ligne brisée, fermée...
67. Damien : Non, Monsieur, c'est pas une ligne, c'est une forme.
68. P. : Oui... C'est une forme comment ?
69. E. : Une droite.
70. Justine : Circulaire, Monsieur, elle est circulaire parce qu'elle est fermée. Ça fait comme un circuit d'électricité.
71. E. : Monsieur, c'est une figure plane.
72. P. : Oui, d'accord. Qu'est-ce que ça veut dire figure plane ? Est-ce que c'est la même chose que les solides ?
73. E. : Non, plat ça veut dire que c'est à deux dimensions.
74. Loïc : Les solides, c'est ça par exemple (*il montre une boîte en carton*).
75. P. : Je ne sais pas. Justine, tu dis que c'est une forme circulaire. En même temps, elle dit que c'est une forme circulaire et avant elle dit que c'est une forme avec des lignes brisées. Est-ce que c'est la même chose pour toi ?
76. Justine : Ben.. un peu tant qu'elle est fermée. Brisée c'est quand elle a des sommets c'est ce qu'on a appelé en fait la ligne courbe et la ligne brisée.
77. P. : Et toi Loïc, par rapport à ce qu'elle dit là ?
78. Loïc : En fait, je pense que par rapport à tout à l'heure pour les solides et les figures planes, à mon avis les solides c'est ce qui est comme ça (*il montre sa trousse*) en 3D et les figures planes c'est comme ça (*il montre un dessin sur son cahier*).
79. P. : D'accord. Est-ce que Quentin là manipule des solides ou des figures planes ?
80. Ensemble : Des solides.
81. P. : Vous en êtes sûrs ? Je ne sais pas, c'est une question.
82. E. : Ah non, des figures planes.
83. E. : Non, des solides.
84. P. : Vous en pensez quoi ?

85. E. : C'est un solide !
86. P. : Bien. Il faut qu'on arrive à définir cette notion de polygone puisque le prochain travail ça va être un classement à partir des polygones, des formes polygonales qui ne sont pas... Alors, pour l'instant, je la sens encore un peu floue cette notion de forme polygonale.
87. Quentin : Monsieur, les polygones ils peuvent pas rouler parce que poly ça veut dire plusieurs et s'il y a plusieurs formes il y aura du mal à rouler... à part si c'est un rond avec des angles... euh non, pas des angles !
88. P. : Précise.
89. Quentin : Non, mais polygone ça veut dire... Enfin poly – plusieurs mais si y a des ovales et des ronds, ils sont ensemble et ben ça roule un peu.
90. P. : On a vu tout à l'heure, enfin on a entendu dans ce qu nous a dit Justine, « figure géométrique composée de lignes brisées ». Est-ce qu'une ligne brisée c'est la même chose qu'une courbe ?
91. Justine. : Non, une ligne brisée ça fait comme des montagnes qu'on voit à l'horizon et une ligne courbe c'est arrondi.
92. P. : D'accord. En plus, elle nous a dit que la figure, elle était fermée.
93. Loïc : Il y a aussi les lignes brisées fermées et les lignes courbes fermées.
94. P. : Oui, c'est vrai.
Alors, la définition du polygone c'est quand même une figure fermée. Poly plusieurs, gone côté ; D'accord ? Est-ce que rentre ici la notion de ligne courbe ?
95. Ensemble : Non.
96. P. : Sûr ?
97. Loïc : Non, puisque les côtés c'est dans les droites et les lignes courbes, c'est un petit peu le contraire, donc, enfin, parce qu'y a des ...
98. Justine : Y'a pas de sommet, y'a pas d'arête.
99. P. : D'accord, alors l'arête c'est le nom qui vient pour le solide, d'accord ?
100. Loïc : Ouais, c'est par exemple ça, c'est une arête (*il montre une arête sur sa trousse en forme de pavé*)
101. P. : D'accord. Tu peux montrer à tout le monde ce que tu entends par arête ?
102. Damien : Et le sommet c'est le bout pointu : (*Loïc montre les sommets*).
103. Damien : Le bout qui pique.
104. P. : Bien. Est-ce que quelqu'un n'a pas compris ce que c'était que cette notion de polygone ?
105. Toi, Donovan, t'en penses quoi des polygones ?
106. E. : Je peux ré-expliquer ?
107. Damien : Ben t'en penses que c'est beau !
108. P. : Est-ce que tu as compris ce que c'était qu'un polygone ?
109. Donovan : Non.
110. P. : Non, alors comment tu pourrais le définir toi avec tes mots ? Est-ce qu'en faisant un dessin par exemple tu comprendrais mieux ce que c'est ?
111. Donovan : Non.
112. P. : Non – Bon.
Loïc, est-ce que tu veux en dessiner un au tableau par exemple ?
Qui n'a pas compris ce que c'était qu'un polygone ?

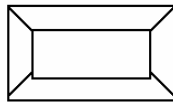
113. Damien : Tu fais comme tu veux du moment que c'est un polygone.
(il s'adresse à Loïc) *(Loïc trace un segment horizontal au tableau avec une règle).*
114. P. : Attends 2 minutes. Donovan, il vient de tracer quoi Loïc au tableau ?
115. Donovan : Une arête de 50 cm.
116. P. : Non, sans mesure. Toi, tu penses que c'est une arête. Y'en a qui ont d'autres idées ? Toi, Justine.
117. Ensemble : Une droite.
118. Damien : C'est peut-être des os, hein... si c'est pas une arête, ça peut être des os, hein.
119. E. : *(Loïc continue, il trace un 2^{ème} côté, perpendiculaire au 1^{er}, plus court que celui-ci).*
Monsieur, plusieurs lignes droites à côté d'un polygone ça veut dire plusieurs lignes droites à côtés, heu, à longueurs différentes.
120. P. : Euh, dans polygone on ne donne pas de notion de longueur.
(Loïc complète son dessin en traçant un rectangle).
121. Manon : Monsieur, ça c'est une figure plane.
122. P. : Alors, toi, Manon, tu dis que c'est une figure plane. Toi, tu dis que c'est un polygone. Est-ce qu'il y en a parmi vous qui pensent que ce n'est pas un polygone ?
123. *(Quelques élèves lèvent la main, dont Manon).*
124. P. : Alors, est-ce que vous pouvez nous expliquer pourquoi ce n'est pas un polygone ?
125. Manon : Ben, déjà c'est une figure plane mais ... ça peut être un polygone mais en tout cas, c'est une figure plane.
126. P. : Attends. La question, c'était qui pense que ce n'est pas un polygone ?
(Justine lève la main.)
127. P. : Alors, Justine...
Tu peux aller t'asseoir, Loïc.
128. Loïc : Mais j'ai pas fini, Monsieur.
129. P. : Qu'est-ce que tu voulais ajouter ?
130. Loïc : Je voulais ajouter ici le sommet.
131. P. : Tu voulais marquer le nom de sommet ?
132. Loïc : Non, non. Mais... faire le côté.
133. Ensemble : En 3D!
En relief !
En volume!
134. P.: Tu voulais dessiner un solide ?
(Loïc dit oui de la tête.)
135. E. : Monsieur, tous les objets en 3D c'est des polygones.
136. Manon : Si, ça c'est un polygone.
137. P. : Attendez. Qu'est-ce que je t'avais demandé de dessiner, Loïc ?
138. Loïc : Un polygone.
139. P. : Et pour toi, tu as dessiné un polygone ?
(Loïc, perplexe, regarde le rectangle dessiné.)

140. Loïc : Euh si ,parce que ça a plusieurs côtés.
141. P. : Donc, tu as dessiné un polygone oui ou non ?
142. Loïc : Oui, il y a des arêtes et des sommets.
143. P. : Est-ce que tu as dessiné un polygone, c'est-à-dire avec la définition que Justine a donnée tout à l'heure ?
144. Loïc : Ah ben non, parce que là il n'y a pas de côtés.
145. P. : Il n'y a pas de côtés là ?
(Loïc prend une boîte cubique et revient au tableau.)
146. Loïc : Par exemple, les côtés c'est ça par exemple (il montre les faces du cube).
147. P. : Attends. Tu peux expliquer ce que tu entends par côté ?
148. Damien : Oui, mais il n'y a pas d'arêtes !
149. Loïc : Mais si, ça c'est les arêtes (il montre les côtés du rectangle).
150. Manon : Mais là c'est des faces, c'est pas des côtés.
151. Loïc : Mais si, les côtés c'est bien ça (il montre les faces).et dans la figure (au tableau) il y a pas de côté.
(les élèves parlent en même temps).
152. Damien : Non, il n'y a qu'une face.
153. Justine : Les côtés c'est la largeur.
154. E. : En 3D, c'est des polygones mais là c'est une figure plane.
155. P. : Ici, on a une figure plane. Est-ce que tout le monde est d'accord sur le fait qu'au tableau on a une figure plane ?
156. Ensemble : Oui.
157. P : Donovan ?
158. Donovan : Oui.
159. P. : Alexis, tu ne penses pas que c'est une figure plane ?
160. Alexis: Si, si.
161. P. : Pourquoi ? Qu'est-ce que ça veut dire déjà une figure plane ?
162. Ensemble : -Ben, une figure plane, c'est une figure vue de face ...
-qui est le contraire des figures en relief en fait...
163. P. : Oui . On voit deux dimensions.
Là, on en était aussi à notre souci de savoir si c'était un polygone ou pas.
Tu penses que c'en est un, toi (Loïc) ? Non ? Bon- Donovan ?
Comment tu nous prouves que ce n'est pas un polygone ?
164. Loïc : Bon, d'habitude sur les formes ici, c'est les côtés (il montre les faces) et polygone, ça veut dire plusieurs côtés et sur la figure au tableau y'en a pas.
165. P. : D'accord. Est-ce que vous êtes d'accord ? Vous pouvez réagir par rapport à ce qu'il vient de dire ?
166. Manon : Ça c'est une face, c'est pas un côté !
167. Sophie : Moi je suis un peu d'accord avec Loïc. Pour moi, si c'était en 3D, ce serait un polygone. Parce que là, il n'y a pas de faces, enfin si il y en a 1 mais dans un polygone, il y en a 2 – non, il y en a

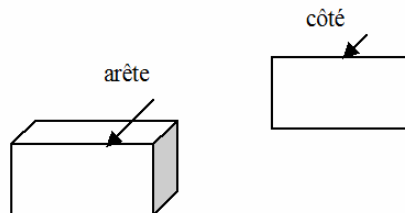
- même pas 2, il y en a plusieurs.
168. Loïc : Un polygone, pour moi, c'est ça (*il montre sa trousse*).
169. Sophie : C'est ce qui est en 3D en fait.
170. E. : Il a raison.
171. P. : Sur quelle notion vous n'êtes pas d'accord ?
Sur côté et sur face.
172. Loïc : Si ça c'est une face, ça c'est une face et ça aussi. C'est quoi des côtés ?
173. (*Manon montre une arête sur la trousse de Loïc*).
174. Loïc : Non, ça c'est des arêtes.
175. E. : Moi, j'suis d'accord avec Manon.
176. Loïc : Mais, Monsieur, arête et côté c'est pas du tout pareil !
177. P. : Qui a quelque chose à dire par rapport à ça ?
178. Julie : Moi, c'est un peu entre parce qu'il y a la face, l'arête et le dessous. Il y a le côté.
179. Loïc : Mais Manon elle dit que les arêtes c'est pareil que les côtés et c'est pas du tout pareil.
180. Damien : Les arêtes c'est ce qui forme les côtés.
181. Alexis : Un côté c'est entre 2 arêtes.
(*il montre la tranche de la table*).
Là, il y a un côté, c'est entre 2 arêtes (*il montre la tranche de la table*).
Damien, t'as dit que les arêtes ça formait des côtés. C'est grâce à eux qu'on distingue les côtés.
182. P. : C'est grâce à quoi qu'on distingue les côtés ?
183. E. : Grâce aux arêtes.
184. P. : Et toi, Justine ?
185. Justine : Moi ça a presque rien à voir mais je me rappelle qu'en CE2 on avait travaillé es polygones. Il y avait toujours la fiche en bas et il y avait peints en relief les polygones.
186. Loïc : Oui, j'ai le souvenir de cette photo et à chaque fois Claudette nous disait ça c'est les polygones. A chaque fois qu'on faisait des maths presque.
187. P. : Très bien, donc vous avez en référence une photo ou un dessin de polygones, c'est ça – en relief, tu dis ?
188. Justine : Oui
189. Loïc : Euh, en 3D.
190. P.: En 3 dimensions?
191. E.: Il y avait des objets exposés.
192. Damien.: Mais en relief et en 3D c'est la même chose !
193. P.: Mais alors, vous avez cette référence, alors comment se fait-il que quand c'est dessiné, on a ce problème, on n'arrive pas à savoir si c'est un polygone ou pas.
194. Justine : Ben, un polygone, c'est quelque chose où il y a des sommets,, là y en a, où y a des arêtes... et y a toujours un côté ou une face dans un polygone. Puisque là c'est vu de face, quand c'était pris en photo c'était vu de face, ou vu de côté.
195. P. : On dit vu de côté quand c'est une photo ?

196. Ensemble : De profil !
197. P. : D'accord.
Alors on parle de face, de la différence entre face et côté.
198. Justine : Ben, un côté ça a une plus petite épaisseur que la face.
199. P. : Qu'est ce que tu entends par épaisseur ?
200. E. : Ça dépend.
201. Damien : C'est pas vrai, Monsieur.
C'est exactement pareil les côtés et les faces.
202. P. : Pardon ?
203. Damien : Si c'est un carré, et ben les côtés et les faces y sont exactement pareils.
204. Loïc : Non, un carré c'est une figure plane – un cube, c'est ...
205. Damien : Oui, un cube !
206. P. : Un cube, c'est quoi ?
207. Loïc : Un cube, c'est ...
208. Damien : Un solide !
209. P. : Un solide, c'est quoi ?
210. Loïc : Un solide, c'est un polygone. Mais un polygone, ça peut être dessiné, par exemple ça aussi c'est un polygone (*rectangle dessiné au tableau*).
211. P. : D'accord. (*Il se lève*).
212. Damien : Monsieur, moi j'aimerais bien prouver mon truc...
213. P. : Eh bien, vas-y !
(*Il va au tableau. Damien se lève aussi.*)
214. Damien : Sans côtés, sans arêtes il n'y aurait pas de faces ou de...
215. P. : Comment différencier côtés/arêtes, faces/côtés ?
216. Damien : Par exemple, bon (*il dessine un autre rectangle au tableau*).
Si j'enlève les arêtes *il prend un tampon et efface les arêtes une à une, il ne reste plus rien.*
217. P. : Si t'enlèves tout (*rires*).
Attends, si tu enlèves arêtes et côtés, tu enlèves tout !
218. Damien : Non.
219. Manon : Non, il reste les sommets !
220. P. : Comment...
221. E. : Alors, explique-moi ... (*rires*).
222. Manon : Le sommet, c'est un mélange de 2 arêtes.
223. P. : Ah ! si le sommet c'est un point - il reste le point.
224. E. : Non parce que...
225. Damien : C'est un croisement entre 2 arêtes ... ou plus.
(*Loïc va au tableau.*)

226. Loïc : Je construis une route (*il dessine 2 droites parallèles*). et on construit une autre route (*il dessine une seconde route perpendiculaire à la première*), ça va faire ici un croisement, un sommet ; Donc, si on enlève les routes, on enlève ça (le croisement) aussi.
227. P. : Mais Justine n'est pas d'accord.
228. Manon : Ce sont les arêtes qui font le sommet.
229. P. : Les arêtes qui font le sommet... Tu peux expliquer ?
230. E. : Faut laisser un point.
231. Loïc : Un point, si tu le regardes au microscope, ça fait une arête.
232. E. : Euh, oui.
233. E. : Moi, j'aimerais bien montrer mon schéma... comment moi je pense que c'est un polygone.
234. P. : D'accord, et par rapport à ce qu'on vient de dire ? le sommet c'est un point. Si on enlève l'arête ou le côté, il reste le sommet...
235. Damien : On enlève l'arête dans le poisson, m'sieur.
236. Loïc : C'est vrai, c'est pareil si on enlève les arêtes du poisson il peut plus, euh...
(*il « mime » un poisson et désigne sa colonne vertébrale*)
237. Ensemble : *Oui*
(*Julie va au tableau et complète le tableau de Loïc :*)



238. P. : Ça c'est ce que tu voulais compléter, Loïc ?
239. Loïc : Oui, enfin pas tout à fait.
240. E. : C'est l'intérieur d'une télé : (discussions parallèles).
241. Julie : Pour moi, c'est l'intérieur d'un polygone.
242. P. : Ah ! l'intérieur d'un polygone.
Je vous pose un autre problème.
243. E. : Vous êtes pénible avec vos problèmes !
244. P. *dessine au tableau*



245. E. : Alors là, il y a un problème.
246. P. : Je vous ai dessiné 2 figures géométriques avec les mots que vous avez employés.
247. Justine : En fait, vous ce que vous avez compris, c'est arrêter, quand on arrête.
248. P. : (*Mise au point sur l'orthographe du mot arête et des verbes arrêter, s'arrêter*).
249. Laura : Vous vous êtes trompé, Monsieur, là où y a l'arête, en fait, il faut inverser.
250. P. : J'accepte complètement de m'être trompé. Vas nous montrer ce que tu veux inverser et pourquoi.
(*Laura se lève et va au tableau*).

251. Laura : Là... la flèche (*flèche portant le mot arête*).
252. P. : Est-ce que vous comprenez que je montre la ligne qui est là (*il désigne du doigt une arête du cube*).
253. E. : En fait, ce que vous avez dessiné en haut, c'est un côté, c'est toute la forme, Monsieur.
254. Justine : En fait, l'arête, c'est une ligne, c'est une droite.
255. (*Après une minute de silence, Philippe repasse en couleur un côté du rectangle et une arête du cube dessinés au tableau.*)
256. Damien : J'ai aucune chose de carré en relief, moi.
257. P. : Je repasse d'une autre couleur. Donc, qui est-ce qui a parlé de ligne ?
258. Justine : ...
259. P. : Est-ce que ça peut vous faire réagir maintenant ? Donovan, toi qui avais des difficultés tout à l'heure avec les polygone, est-ce que t'es mieux éclairé ou pas maintenant ?
260. Donovan : ... (*non de la tête*)
261. P. : Non.
262. Justine : Je sais pourquoi on l'appelle l'arête :
263. P. : Alors – Pourquoi tu veux qu'on l'appelle l'arête ?
264. Justine : C'est parce que par exemple les arêtes du poisson c'est souvent dur et un eu droit... enfin, ça dépend des fois mais... pis c'est dur aussi.
265. P. : Alors, arête de poisson c'est comme toute à l'heure avec arrête avec 2 « r » - On n'est plus dans un terme géométrique. Bastien ?
266. Bastien : Parce qu'il fallait bien lui donner un nom !
267. P. : Oui, peut-être. Ça correspond à quelque chose ce nom.
268. E. : Ah, c'est grec ?
269. Justine : Au début, j'avais pas compris, mais il a raison Loïc en fait.
270. P. : Il a raison pour quoi ?
271. Justine : Ben, au début on disait qu'il restait des points mais il a raison.
272. P. : Ah, toi tu parles des sommets (oui).
Toi, c'est ce que tu défends : quand on amène 2 j'sais pas quoi... 2 droites et qu'elles se rencontrent à un point donné. Quand on efface les droites, il reste le point... c'est possible.
273. Justine : Déjà je veux dire que je m'étais trompée en fait. Parce que quand il l'a mis au tableau, c'est vrai ne reste pas juste un sommet comme ça, quand on efface toutes les arêtes.
274. P. : D'accord.
275. Justine : Donc, on peut dire que les sommets c'est fait de plusieurs arêtes.
276. P. : Donc, est-ce que ça veut dire que tu acceptes aussi de changer ton idée sur la définition d'arête et de sommet ? Est-ce que tu accepterais de changer ?
277. Justine : Euh...
278. P. : David ?
279. David : Là, le côté, faudrait le mettre en bas et à droite sur le... (*David va au tableau*).

280. Clément : C'est bizarre parce que là... en fait ils sont pareils (le pavé et le rectangle dessinés au tableau).
281. P. : Attends, David.
Oui (*à Clément.*) viens voir.
(*Clément va au tableau et dessine un pavé comme celui déjà dessiné.*)
282. E. : Si on effaçait ça (*il efface les faces du pavé sauf celle qui se présente à nous de front.*)
Et ben, il resterait la même chose que ça (*il désigne le rectangle déjà dessiné au tableau*)
283. P. : D'accord.
284. Loïc : Oui, mais s'il efface les arêtes et doit toutes les effacer...
285. E. : Oui, mais c'est les autres arêtes.
286. Damien : Donc, si t'effaces les arêtes, il reste quoi là ?
287. Ensemble : Rien.
288. Ensemble : Si !
289. P. : Il reste pas un côté là ?
290. Damien : Il reste une figure plane.
291. P. : Il reste une figure plane, hein,... on est d'accord. Tu as effacé quoi alors, autour ?
292. E. : Les arêtes et des côtés.
293. P. :- Je suis complètement d'accord avec toi. Tu as effacé et des arêtes, et des côtés.
294. (*Clément, perplexe, va se rasseoir. David va au tableau.*)
295. David : Alors le côté il est là (*il montre une face du pavé perpendiculaire au plan du tableau*) et les arêtes c'est ça (*il désigne une arête*). Sur une même figure, c'est là, là, là...
(*Philippe montre le rectangle dessiné plus haut*)
296. P. : Pourquoi je n'ai pas mis « arête » là ?
297. David : Parce que c'est une figure plane
298. E. : Parce que vous vous êtes trompé
299. Damien : Parce ce que vous êtes pas allé à l'école longtemps (*rires*).
300. P. : David, tu peux répéter s'il te plaît ?
301. David : Pourquoi vous avez pas mis arête là ? Parce que ce qu'est une figure plane.
302. P. : D'accord. Et l'autre, si c'est pas une figure plane, c'est quoi ?
303. David : Un polygone !
... Ben, j'suis pas sûr.
304. P. : Christelle, tu as une idée sur tout ça ?
Merci, David.
(*David va se rasseoir.*)
Qu'est-ce que tu as compris ?
305. Christelle : On a fait un méli-mélo avec les côtés et les faces et maintenant je m'y retrouve plus...
306. P. : Exact. On a fait un méli-mélo avec côté-face, mais c'est pour une bonne raison. C'est que c'était pas clair. Loïc ?
307. Loïc : Alors moi, tout à l'heure, je m'étais trompé aussi. C'est que ici là (*il va au tableau*) sur la figure plane, il n'y a pas d'arête, c'est des droites

309. P. : Comment tu peux le prouver, ça ?
310. Loïc : Vous l'avez dit, M'sieur !
Ben, euh...
311. P. : C'est vrai que je l'ai dit ? Bon...
312. Loïc : Ben les arêtes, c'est...
Je crois qu'on avait appris quelque chose encore en CE2. C'est que dans les figures planes, y'a pas d'arêtes, c'est des droites, mais ici (*le solide*) c'est différent...
313. E. : Monsieur, vous pouvez nous donner la solution s'il vous plaît ?
314. P. : Sûrement pas...
315. Loïc : Je pense que la face c'est toujours le côté qu'il y a devant nous...
316. E. : On se regarde de face.
317. Loïc : Oui...
Par exemple, si on a un cube (*il en prend un*) ça ça va être la face (*il montre la face qui se présente devant lui*). Ça dépend comment je regarde aussi...
318. P. : D'accord (*Loïc va se rasseoir*).
Manon ?
319. Manon : Comme là il y a une figure plane et un solide. Ben là, je pense que dans le solide, on appelle les arêtes les bords et sur la figure plane, on appelle ça les côtés.
320. P. : Vous avez entendu ce qu'a dit Manon ?

(*Manon répète.*)
321. Christelle : Ce que j'ai compris, moi, c'est qu'une arête sépare les côtés.. et les côtés, c'est... je sais pas.
322. P. : Attends. C'est ce que tu as compris de ce qu'a dit Manon ou ce que tu penses avoir compris des arêtes et des polygones ? Et par rapport à ce qu'a dit Manon, s'il te plaît ?

(*Manon répète.*)
323. P. : C'est pas pareil mais, c'est la même ligne.
324. Alexis : En fait, la figure (*le rectangle*), c'est... c'est un carré, et celle d'en bas ça fait aussi un carré, oui un rectangle.
325. Laura : Un cube !
(*Loïc va au tableau*).
326. Loïc : Dans le carré y a des perpendiculaires et ces droites qui sont des perpendiculaires, ... c'est des droites.
327. P. : On appelle ça côté ou droite ?
328. Loïc : On les appelle droite.
329. P. : Et les côtés et faces ?
330. Loïc : La face c'est ça (*il montre le côté qui se présente de front*).
331. P. : C'est forcément ce que tu vois de face ?
332. Loïc : Oui. (*Manon va au tableau*).
333. Manon : Oui, mais là c'est pas la même chose.
334. Loïc : Ben, si.

335. Manon : Ben, non.
336. Ensemble : Si.
337. Manon : Ce ne sont que des faces.
338. Loïc : *Loïc prend le cube en carton et montre tous les côtés du cube sauf celui qui est devant lui.*
Ça c'est pas des faces
339. Manon : Et ça change de nom quand on la tourne !?
340. Loïc : Ben, oui.
341. P. : Pour résumer – Pour Manon (*ils vont se rasseoir*), Manon dit que n'importe quelle forme de ce solide devient une face à partir du moment où ce solide peut tourner et nous en peut tourner autour. Donc, finalement, elle garde le même nom pour chaque forme parce qu'elle trouve que ce n'est pas logique de changer de nom. Pour prouver ça, tu dis que si je fais tourner le solide, j'ai toujours une face devant moi.
342. Loïc : Ben, alors, c'est quoi les côtés ?
343. Manon : Y'en a pas dans un solide mais yen a dans les figures planes.
344. Loïc : Alors ça (*le solide*) c'est pas un polygone.
345. Manon : Ben, si.
346. Loïc : Polygone ça veut dire plusieurs côtés et là si t'as des faces, t'as pas de côtés.
347. Manon : Moi, je pense que les côtés c'est comme les arêtes en fait.
348. P. : Tout à l'heure, tu as dit que les côtés c'était sur les polygones et les figures planes, alors que lui, il pense que c'est sur les solides et...
349. Loïc : Et que sur les polygones.
350. P. : D'accord. Donc, on va être obligé de trancher un moment ou à un autre. C'est quelque chose de très intéressant qui vient d'être soulevé. C'est-à-dire qu'en fonction de l'endroit où on se place, est-ce que les choses changent de nom ou pas ?
351. On entend : Ben, oui !
(*Manon et Loïc discutent à leur place*).
352. Manon : Sur le solide, ça ne change pas de nom !
353. (*Discussions parallèles*)
354. Damien : Ah si c'est ça j'ai compris ! (*il désigne le mur de la classe devant lui*). Tout ce mur là c'est comme une figure plane et là-bas (*il désigne le coin du mur*) c'est bien un côté.
355. P. : Si on prend le mur, effectivement, tu as une figure plane. Là, on est d'accord.
356. Ensemble : Ouais.
357. P. : Le concept de figure plane est établie.
(*Damien se lève.*)
358. Damien : Là, c'est un côté.
359. On entend : C'est une arête !
360. Damien : Vous vous dites que y'a que ça, et ben là, c'est le côté droit de la figure plane.
361. Loïc : Ça veut dire que ça (*le rectangle dessiné au tableau*) c'est un polygone, ça !?
362. P. : Qui pense que cette figure est un polygone ? (*Manon, Donovan et Justine lèvent la main*).
Qui pense que ce solide est un polygone (*les autres et Manon lèvent la main*).

363. Ensemble : Manon !
364. Manon : C'est deux polygones.
365. Loïc : Ben pourtant, c'est pas pareil !
Je comprends pas, elle dit que là y'a pas de côtés.
366. On entend : Elle a peut-être raison aussi, hein...
367. Manon : Je dis que l'arête ça a la même fonction qu'un côté
(discussions éparses).
368. P. : Attendez *(il prend un cube en carton, auquel il manque une face).*
Regardez, quand je regarde de ce côté... non, pas de ce côté, oh le vocabulaire !
369. Alexis : La boîte, y'a une face là, une face là *(il montre les faces).*
370. On entend : Dessus c'est la face et là c'est les côtés.
371. P. : Et si tu le tournes ?
Quand vous regardez de ce côté *(il met la face manquante vers la classe et désigne un bord)* là c'est un côté *(puis il tourne le cube et désigne une arête)* et là c'est une arête.
372. Julie : C'est comme si c'était fermé ! Le maître veut qu'on fasse comme si c'était fermé !
- Damien : Pour qu'il y ait une arête il faut qu'il y ait 2... Là, c'est coupé, y'en a pas...
373. P. : Si je regarde cette face... cette figure plane en faisant abstraction de ce qui a derrière, y'a 4 côtés *(on entend : c'est un polygone !)* c'est un polygone. Damien dit que quand il assemble les 2 figures planes, les côtés deviennent une arête.
374. Christelle : Pourquoi un côté ne pourrait pas être une face ?
375. Loïc : Non, regarde, je te regarde comme ça, t'es de face ; si tu tournes, t'es pas de profil, t'es de côté.
376. Julie : Moi, j'suis pas d'accord avec Damien parce que c'est des arêtes même si y'a pas de côtés. Lui, il dit que c'est ouvert la boîte alors que c'est pas des arêtes mais un côté.
- 377.
378. Damien : Ben, oui !
379. Julie : La boîte a un sommet, des arêtes, ça fait rien si c'est ouvert, c'est pareil.
380. P. : Si virtuellement on pense que c'est fermé.
381. Damien : Ben, y'a que des arêtes alors
382. P. : Je veux entendre Christelle.
383. Christelle : Ben si on prend une boîte blanche, on peut pas savoir si c'est des côtés ou des faces.
384. On entend : Oui, elle a raison !
385. P. : Il est vrai que, dans le langage courant, on confond côté et face mais géométriquement, ce n'est pas la même chose.
(...) En fait, chaque fois que je regarde un côté du solide, c'est une figure plane, on est d'accord ?
386. Loïc : Dans une figure plane, les arêtes c'est des côtés.
387. Damien : Ah oui, par exemple une feuille c'est une figure plane.
388. Manon : Moi, je pense qu'un solide, c'est fait de 6 figures planes, par exemple et si on les attache toutes, ça fait des arêtes. Et si on les détache, ça devient des côtés.
389. Loïc : Non, c'est un côté *(une face)*. Y'a toujours plus de côtés que de faces.
390. *(Damien va au tableau et prend la boîte.)*
391. Damien : Y'a 6 côtés et quand on détache tous les côtés ça devient ça *(il dessine un carré).*

(Il va se rasseoir et Philippe dessine un patron de cube au tableau.)

392. P. : D'après certains, quand je regarde ce cube, on a des figures planes à 4 côtés assemblés. D'après ce que j'ai compris, quand on assemble des figures planes, les côtés qui vont se superposer deviennent des arêtes, c'est ça ? Donc ici, je déplie ma boîte, j'ai des arêtes ou des côtés ?
393. Ensemble : Des arêtes !
Des côtés !
394. P. : Là, j'ai dessiné une figure plane ou un solide ?
395. Ensemble : Une figure plane.
396. Loïc : Ce sera plat mais dessiné !
397. P. : On va devoir arrêter.
Je n'avais pas du tout prévu ça aujourd'hui. On le fera le prochain cours.
On reviendra là-dessus pour élucider ce problème. Vous allez voir que vous avez tous raison sur une partie. On fait une synthèse de tout ce que vous avez dit.
On est reparti de la figure plane. Le problème, c'était la définition du polygone. Certains m'ont donné la définition selon laquelle c'est une figure délimitée par une ligne brisée fermée. Je vérifie sur mon dessin (le rectangle) c'est bien une figure fermée – différence avec une figure ouverte (*il dessine une figure ouverte*).
Une figure plane qui est différente d'une figure fermée avec des lignes courbes.
J'ai plusieurs côtés. Comme disait Quentin Poly = plusieurs, gone = côté.
398. On entend : C'est pas des arêtes, hein !
399. P. : On a encore un petit souci à régler avec ça.
400. Loïc : Moi, la discussion ça m'a permis de comprendre ce que c'était.
401. Manon : Ouais, moi aussi.
402. P. : Je pense que c'est pas encore tout à fait clair.
Je vais vous expliquer pourquoi. Tout d'abord, David dit « j'ai une face au-dessus et j'ai 4 côtés ». On a donc encore une distinction à faire entre les notions géométriques et le vocabulaire qu'on emploie tous les jours. Donc, on a des figures planes et en 3 dimensions comme vous le dites, il y a des solides et effectivement, il y a des lignes qui changent de noms parce qu'on ne les voit pas pareil et en plus, elles sont reliées à d'autres figures planes.
Donc,, ce que l'on peut retenir aujourd'hui, c'est que dans un solide... qui est composé de quoi alors, Loïc ?
403. Loïc : D'arêtes, de côtés, de figures planes.
404. P. : Oui, c'est ce que j'attendais : de figures planes.
Les côtés des figures planes quand elles sont assemblées deviennent ...
405. Ensemble : Des arêtes.
406. P. : Alors, les notions côtés et faces, on y reviendra la semaine prochaine...
407. Tout ça, c'est pour vous montrer que, des fois, on a des croyances....
En mathématiques, il faut toujours prouver ce qu'on dit.

**Annexe 7 : Extrait de transcription de
la troisième séance du dispositif
d'« Atelier » de géométrie en cycle 3
(issu de Mathé, 2006)**

ANNEXE 7 : EXTRAIT DE LA TRANSCRIPTION DE LA SEANCE 3

Les tables sont rassemblées deux par deux dans la classe, formant des groupes de quatre élèves qui se font face.

1. P : Qu'est-ce que l'on avait fait lors du dernier atelier ? Oui, vas-y ...
2. E : Ben, on essayait de chercher la différence entre les côtés et les faces.
3. P : Oui, et puis ?
4. Alexis : On faisait des débats ...
5. P : Manon, ...
6. Manon : On faisait des figures planes aussi pour voir si c'était des polygones ou pas.
7. P : D'accord, Loïc ?
8. Loïc : On avait vu que, dans les figures planes, il y avait des côtés mais on n'a toujours pas de preuve. On avait fait un débat sur les figures, les solides et les deux.
9. P : Qu'est-ce qui te manque à toi ?
10. Loïc : Ben, les preuves.
11. P : Les preuves. Bastien ?
12. Bastien : Non.
13. P : Bon. (*P dessine un rectangle au milieu du tableau.*)
Qu'est-ce que c'est que ça ?

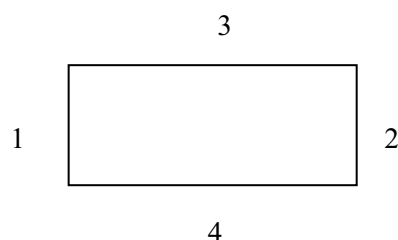
[Les élèves lèvent la main.]

14. E : C'est un rectangle.
15. P : Oui. Comment on peut l'appeler encore ?
16. E : Une figure plane.
17. P : Une figure plane. Pauline ?
18. Pauline : Un solide.
19. P : Est-ce que c'est un solide ?
20. Loïc : Non, c'est une figure plane ... Y'a des côtés.
21. P : Y'a des côtés. Est-ce que Gwendoline, tu peux me montrer les côtés s'il te plaît ? Tu peux même les repasser en une autre couleur.

[Gwendoline se lève, va au tableau et prend une craie.]

22. P : Montre-nous déjà un côté.

[Gwendoline repasse un côté du rectangle avec la craie de couleur.]



[Les n° ne figurent pas au tableau]

23. P : Oui. Je peux repasser ?

[P prend la craie et repasse sur ce côté en appuyant davantage.]

24. P : Et dis-moi, celui-là (il désigne le côté 2), c'est un côté aussi ?

25. Gwendoline : Oui.

26. P : Donc, en fait, j'ai combien de côtés ?

27. Gwendoline : 4.

28. P : D'accord. [Gwendoline retourne à sa place.] Et, Christelle, est-ce que c'est un polygone ?

29. Christelle : Non.

30. P : Qui est-ce qui n'est pas d'accord avec elle ? [Seul Loïc et Manon lèvent la main.]
Donc, tout le monde est d'accord sauf Loïc et Manon. Quentin, t'en penses quoi ?
On se réveille. C'était quoi la question ?

31. Quentin : Si, j'étais d'accord.

32. P : Par rapport à quoi ? Utilise des termes précis. Thomas, c'était quoi la question ?

33. Thomas : Si c'était une forme polygonale.

34. P : D'accord. Sandrine, tu penses quoi

35. Sandrine : Ça peut être un polygone.

36. P : « Ça peut être » ou est-ce que tu es sûre que c'est un polygone ?

37. Sandrine : Ça peut être, je pense.

38. P : Qui se rappelle de la définition du polygone ?

[Quelques élèves lèvent la main.]

39. Justine : C'est ... un polygone, c'est une forme qui a des sommets, des côtés ... et puis ça peut être plat ... enfin, ça peut être de face ou en relief.

40. P : Quentin, tu continues ?

41. Quentin : Ben, ça a plusieurs côtés.

42. P : Oui, pourquoi ça vient de « plusieurs côtés » ?

43. Quentin : Poly.

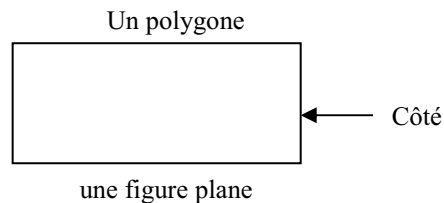
44. P : Poly – plusieurs, oui. Alexis, tu veux dire quelque chose !

45. Alexis : Là, y'a plusieurs côtés !

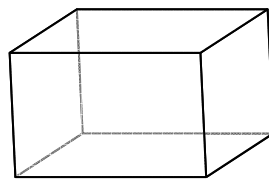
46. P : Oui. Damien ?

47. Damien : Ben, si Justine elle a dit qu'il devait y avoir des sommets. Ben, là [*il désigne le rectangle au tableau*], je crois pas que ç'en est un parce que pour qu'il y ait des sommets, il faut trois arêtes qui se rencontrent.
48. P : Toi, tu crois qu'il faut trois arêtes pour faire un sommet. Bastien, à ton avis ?
49. Bastien : Moi, je pense que c'est une figure qui a plusieurs côtés et sommets et ... euh ...
50. P : Est-ce qu'est un polygone ou pas ?
51. Bastien : Ça ? [Il montre le rectangle au tableau.]
52. P : Oui.
53. Bastien : Ouais, parce qu'il y a plusieurs côtés.
54. P : Je rappelle la définition du polygone : un polygone, c'est une figure géométrique plane, donc à deux dimensions : longueur et largeur (il montre sur le rectangle au tableau), qui est composée d'une ligne brisée et fermée. D'accord ? (il suit le contour du rectangle), donc la figure est fermée. Ce sont des lignes brisées.
55. Loïc : Monsieur ?
56. P : Oui ...
57. Loïc : Vous avez dit la réponse.
58. P : Oui, c'est fait exprès. J'ai dit que je disais ce que c'était.
59. Loïc : Oui, mais vous avez dit qu'un polygone, c'était une figure plane.
60. P : Oui.
61. Loïc : Donc, la figure en 3 dimensions, c'est pas un polygone.
62. P : Non.
63. Damien : C'est ce qu'on avait dit à l'autre séance.
- 64a. P : Donc, ici on a une figure plane, avec 4 côtés pour celle-ci. Cette figure plane est fermée, donc c'est un polygone. D'accord ? Je vous dessine autre chose. [*P dessine sous le premier rectangle deux rectangles identiques.*] Alexis, qu'est-ce que j'ai là ? Normalement, elles devraient être de même grosseur.
65. Alexis : Ben, ce sont deux figures planes.
66. P : Deux figures planes. D'accord. Tout le monde est d'accord ?
67. Ensemble : Oui.
68. P : Est-ce que ce sont deux polygones ? [*On entend des « oui » et des « non »*] Donovan ?
69. Donovan : (Silence.)
70. P : Est-ce que tu penses que j'ai ici un polygone et ici un polygone ?
71. Donovan : (Silence.) ... Oui.
72. P : Est-ce que c'est confus encore pour toi le polygone, la définition du polygone ?
73. Donovan : Non, mais c'en est un.

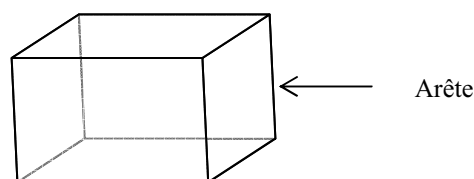
74. P : C'en est. Tu en es sûr ?
75. Donovan : Oui.
76. P : Maintenant, je veux assembler ces 2 polygones pour former un solide. Loïc ?
77. Loïc : Il faut ... en fait, c'est comme si on voyait au travers ...
78. P : Je vais vous faire le dessin [*Il efface les rectangles et dessine*].



79. P : Voilà, on sait qu'il y a 4 côtes. On sait qu'on peut appeler rectangle, comment nous a dit Donovan, et on sait qu'il y a beaucoup d'autres noms, comme un quadrilatère ... Oui ?
80. Loïc : Pour la figure des solides, il faut faire comme si on regardait en haut et qu'on voyait à travers.
81. Damien : Comme sur le cahier de math ...
82. Loïc : Non, comme si on voyait à travers ...
83. P : D'accord, je vais le dessiner (*il dessine au tableau un pavé en perspective cavalière*)



84. P : Donc, voici un solide, par rapport à tout à l'heure, j'ai assemblé deux figures planes ... et puis d'autres aussi. Et bien, dans un solide, les figures planes vont changer de nom, elles vont s'appeler ...
85. E : Des faces !
86. P : Oui, très bien, des faces. Il y a une autre partie qui va aussi changer de nom. Dans les figures planes, j'ai des côtés (il montre les côtés du rectangle dessiné au tableau). Dès que j'assemble les figures planes et que les côtés vont se confondre, se superposer, ils vont devenir ...
87. Ensemble : des arêtes ! [*P complète son dessin.*]

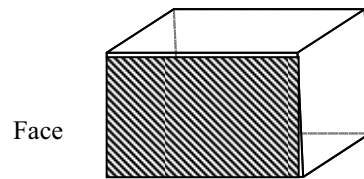


88. P : Dans un solide, tous les côtés des figures planes changent de nom et deviennent des arêtes. (*Silence.*)

89. P : J'avais une petite boîte la semaine dernière ... (*il saisit un cube en carton*).
90. Alexis : Oui, mais il y a aussi des côtés !
91. P : Oui, vas-y. [*L'élève se lève et saisit le cube.*]
92. Alexis : Y'a aussi ces côtés là ! (*Il désigne les faces du cube.*)
93. P : C'est-à-dire ?
94. Alexis : Là, il y a les côtés (*il montre les faces latérales*) et là, il y a les faces (*il désigne les faces situées au-dessus et en dessous*).
95. P : D'accord, alors pour Alexis – et pour la majorité d'entre vous, je pense – si vous regardez le solide et que je cache tout ce qu'il y a autour et derrière, vous voyez quoi ? (*Il manipule le cube simultanément.*)
96. Ensemble : Une face !
97. P : Une face, d'accord. Et si je l'enlève du solide et que je vous le montre comme ça, ça deviendra ...
98. Ensemble : Une figure plane !
99. P : Une figure plane, on est d'accord. Alors, dans le solide, elle devient une face. Mais on ne parle pas de côté pour ne pas faire de confusion.
100. Damien : Ce sont toutes des faces
101. P : Ce sont toutes des faces. A partir du moment où on tourne le solide, qu'on le regarde de dessus, de dessous, ce sont toutes des faces. D'accord ? Le côté n'est utilisé, en géométrie – je précise – que pour les figures planes. Dès que c'est un solide, ça devient des arêtes.
102. Damien : Alors, quand on dit que ça [le mur de la classe] c'est une figure plane, alors ça [l'angle du mur] c'est un côté.
103. P : C'est un côté si on ne le prend ... comment dire ... que sur 2 dimensions. Dès qu'on ajoute une troisième dimension – il y en a la semaine dernière qui parlaient de vision en 3D ou en relief – dès qu'on ajoute une 3^{ème} dimension – la profondeur – on a affaire à un solide et certaines parties changent de nom.
104. Damien : Alors, il faut pas dire d'aller au coin, il faut dire d'aller au côté !
- 105a. P : (Rires.) Le mot « face », le mot « côté » sont des mots qui peuvent changer de signification en fonction de la matière dans laquelle on les emploie. Donc, à retenir : dès qu'on a un solide, on a plusieurs faces. Les arêtes retiennent les faces entre elles. Un autre terme aussi. Lorsqu'un solide est posé sur quelque chose, la face que l'on ne voit pas (il pose le cube en carton sur une table) s'appelle la base. (Silence.) Voilà, la discipline c'est les mathématiques, la géométrie. Si on utilise face ou côté en production d'écrit par exemple, on pourra l'utiliser pour autre chose : montre-moi ta face, ne perds pas la face, mets-toi de côté, passe de l'autre côté. D'ailleurs, on verra un travail de production d'écrit justement par rapport à ces mots qui sont utilisés dans plusieurs contextes, dans plusieurs disciplines. [*Loïc lève la main.*]
106. P : Oui ?

107. Loïc : Y'a un truc qui est différent aussi, si on regarde, si on emploie les termes géométriques, là c'est de face et puis là c'est de côté.
108. P : De profil !
Est-ce que tu peux employer les termes géométriques pour une personne ?
109. Damien : Euh ... ta tête c'est un cube ...
110. P : Sophie, tu peux récapituler un peu ce que l'on a dit ? Viens au tableau, si tu veux, pour expliquer.
[Sophie se lève et va au tableau.]
111. Sophie : Alors, quand on a une figure plane, on a des côtés.
112. P : Tu peux montrer précisément, s'il te plaît ? *[Sophie repasse les côtés avec une craie de couleur.]*
113. P : Oui. J'ai marqué le polygone en haut, tu peux repréciser ?
114. Sophie : Alors, quand on a une figure plane, enfin un polygone (hésitation).
115. P : Qu'est-ce que c'est qu'un polygone ?
116. Sophie : Ben, un polygone, c'est quand on a plusieurs côtés. Pour moi, c'est ça.
117. P : Donc, un polygone, c'est une figure à plusieurs côtés. Il faut rajouter quelque chose quand même. Oui ?
118. E : On a une ligne fermée.
119. P : Pour que ça soit un polygone, on a une figure fermée.
120. Sophie : Et quand on passe en 3D, ça change de nom. C'est plus des côtés, c'est des arêtes.
121. Damien : Monsieur, c'est pas des lignes fermées, c'est des lignes brisées.
122. P : Brisées et fermées, oui. Donc ... Comment ça s'appelle, tout ça ? *[Il désigne le pavé]*
123. E : Un cube.
124. P : Non, ce n'est pas un cube.
125. E : Une forme en 3 dimensions.
126. E : Un solide.
127. P : Oui, un solide. (Il écrit solide au-dessus du pavé.)
Bien, je te laisse continuer.
128. Sophie : Quand ça change de forme, c'est un solide, ça change souvent de nom. Quand c'est un solide, ça s'appelle les arêtes ; quand c'est un polygone, ça s'appelle les côtés.
129. Damien : Monsieur !
130. P : Oui ?
131. Damien : Ça ressemble à un fromage qui s'appelle le Chaumier !

132. P : (Rires.) Pauline, tu viens nous hachurer une face, s'il te plaît ! *[Pauline va au tableau – Sophie retourne à sa place]* avec des hachures... *[Pauline hachure une des faces du pavé. P complète la légende.]*



133. P : Vous avez bien enregistré ?

134. Ensemble : Oui.

135. P : Parfait. *[Il efface le tableau.]*

Annexe 8 : Sujet complet de la pré-expérimentation

Exercice 1 :

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant au mieux votre réponse et décrire un monde imaginaire dans lequel elle aurait une valeur de vérité différente.

1. Pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile autour de laquelle elle tourne
2. Tous les animaux iront dans un paradis
3. Tous les poèmes de la Grèce médiévale décrivent une guerre légendaire
4. Un caporal peut devenir général si et seulement si un caporal peut devenir général

Exercice 2 :

Soit a, b deux réels tels que $a \geq b > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a + b \text{ et } u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n} \text{ si } u_n \neq 0 \text{ et } u_{n+1} = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$.

Exercice 3 :

Soit $b \in \mathbb{R}$. $\{f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(1) = b\}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 4 :

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} et $f \in L(E)$ telle que $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ est lié.

Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$.

Exercice 5 :

Soit F et G des espaces vectoriels.

Montrer que $F + G = F \cup G$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Annexe 9 : Transcription du travail du groupe d'étudiants K, B, T concernant l'exercice d'algèbre linéaire

Groupe d'étudiants K, B, T travaillant sur l'exercice d'algèbre linéaire :

1. B : Lequel ? Le quatre ?
2. K : Ouais le quatre, le cinq on l'a déjà fait une fois et j'ai pas envie de le refaire.
3. B : [Rires] En interro, tu mets cf. cours.
4. K : Question de cours. Vous le savez ça...
5. B : Vous le savez hein. Ouah, on est obliger de tout vous dire et même faut faire le cours...
6. K : Ben tu as $(x, f(x))$ qui est lié, ça veut dire que $x + \lambda x = 0$ donc $x = -\lambda x$.
7. B : Mais c'est « est lié ».
8. T : Oui, c'est qu'il existe $\lambda \in E$ tel que...
9. B : c'est quoi $L(E)$?
10. T : Les applications linéaires de E , c'est des endomorphismes.
11. B : On le mettait pas en crochet ? Comment on le mettait ?
12. T : Non, c'est ça.
13. B : Ah mais c'est pareil.
14. K : Mais, c'est nul ce truc là... Mais c'est tout nul ! Mais c'est évident ! Si la famille, elle est liée, ça veut dire que $x + \lambda f(x) = 0$ et que λ est non nul. Ben c'est bon, tu as fini !
15. T : C'est lié bon d'accord. Lié ça veut dire que...
16. B : Lié ça veut dire que quand/
17. K : Il existe λ tel que $x + \lambda f(x) = 0$.
18. B : Non, ça veut dire que ça... Ouais, c'est vrai, avec λ et euh... Différent de zéro.
19. T : Ouais ben si, c'est facile.
20. B : Ben ouais, c'est faisable.
21. K : Ouais, mais faut montrer que c'est le même pour tout les x .
22. T : Merde.
23. B : Ben on le vérifie deux fois.
24. K : C'est un endomorphisme donc c'est une application linéaire... Ça peut peut-être servir.
25. T : Mais si tu prends, tu pars de/
26. B : C'est pas mal ça.
27. T : Mais si tu prends, tu prends, de toutes façons, c'est pour tout x .
28. B : Attends, attends, attends, attends. On dit que f appartenait à $L(E)$ donc c'est un endomorphisme.
29. T : Oui.
30. B : Bon si c'est un endomorphisme...

31. T : C'est un endomorphisme.
32. B : Je retire ! Si c'est un endomorphisme, c'est un endomorphisme...
33. T : C'est pas faux.
34. K : Non mais, si c'est ça en plus, je suis d'accord avec toi K .
35. B : J'ai toujours pensé que les trucs bien, c'était des linéaires.
36. T : Exercice quatre...
37. B : Bon y a pas des trucs simple là-dedans. C'est assez chiant.
38. T : Alors...
39. K : Ouais c'est bon, j'ai démontré.
40. B : C'est vrai, c'est vrai. Fais voir, fais voir.
41. K : Attends, faut que je peaufine le truc.
42. B : Eh faut que j'écrive... Ah non ... J'ai déjà écrit le numéro trois et c'est parti en sucette alors [Rires] celui-là est peut-être mieux à écrire mais...
43. B : Attends, attends, attends, attends.
44. K : Voilà, j'ai démontré. Tu prends f plus x , $f(x + y)$, ça fait $f(x)$ plus $f(y)$, ça fait kx plus $k'y$ égal $k''(x + y)$... Vu que c'est égaux, tu as pas le choix $k = k'$ égal k plus y ...
45. T : D'où tu sors $f(x)$ euh...
46. K : Ben c'est un endomorphisme donc c'est un truc linéaire.
47. T : Ah ouais, d'accord.
48. K : Voilà, c'est trop fort.
49. B : Tu fais quoi là ? C'est où que tu écris ?
50. K : C'est un endomorphisme donc c'est linéaire donc $f(x + y)$ c'est égal à $f(x) + f(y)$.
51. B : Ouais, c'est ce que je disais.
52. K : C'est égal à kx plus $k'y$, tu sais pas que c'est le même, c'est aussi égal à $k''(x + y)$.
53. B : Quoi, quoi, quoi ? Pourquoi, pourquoi, pourquoi ?
54. K : Vu que ça, c'est lié avec ça, ça c'est lié avec ça ... Ça, c'est lié avec ça, et ça c'est lié avec ça.
55. T : D'accord, ouais.
56. K : Et vu que... Donc ça veut dire que $kx + k'y$ égal $k''(x + y)$.
57. B : On développe, ouais.
58. K : Ça veut dire que $k = k' = k''$... Tu as pas le choix.
59. T : Ouais mais ça sert à rien.
60. K : Si, ça montre que le k il est unique.
61. B : Est unique, ouais.

62. K : Pour tout x , vu que j'en ai pris deux différents.
63. B : Mouais, c'est vrai.
64. K : Parce que là, on montre qu'il en existe un, mais pas forcément le même pour tous. Là, c'est marquer il existe λ tel que pour tout x [Inaudible]... Remarque, pas sûr, il mettrait un unique. Nous on a montré que c'était le même, on est trop fort.
65. B : Donc faut mettre λ_1 , tu remplaces les k par des λ .
66. B : Houla, dur, dur. Parler de λ_1, λ_2 .
- [...]
67. B : Ça marche pour zéro ?
68. K : Pour zéro ?
69. K : Ben oui, parce que k fois zéro plus zéro, ça fait zéro... ou λ égal zéro ?
70. B : Ouais.
71. K : Ben oui, regarde, ça fait zéro plus zéro égal zéro fois zéro plus zéro. Ben c'est génial.
72. B : Ouais.
73. T : $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
74. K : Mais...
75. B : Arrête de dessiner... Donc ça, on suppose.
76. T : λx .
77. K : ou λ_1 .
78. T : $\lambda_1 x$.
79. B : Ça, c'est vrai égal ... D'accord.
80. T : Plus $\lambda_2 y$.
81. B : Ensuite.
82. K : Egal λ_3 ... Faut préciser car $f(x + y)$ et $x + y$ sont liés parce que c'est pas à côté, on voit pas forcément.
83. B : Ça c'est vrai.
84. K : Tu mets entre parenthèses.
85. T : Ouais.
86. K : Car f de x machin.
87. B : Donc là, ça fait $k' = k'' = k$ donc c'est un unique k', k'' . Ouais, ça m'a l'air de marcher.
88. K : Tu as mis que c'était différent de zéro ? Non \mathbb{R} trois étoile il faut mettre.
89. B : C'est génial ça, en fait. En fait, c'est les ensembles... Faut montrer que c'est plus que évident quoi.
90. K : Là, faut mettre que c'est \mathbb{R} trois étoile. Parenthèse entre... Dans le \mathbb{R} et tu mets une étoile dans la parenthèse pour dire que c'est trois fois.

91. T : Et là, non là, c'est bon.
92. K : Non là, c'est bon.
93. K : Donc $\lambda_1 x + \lambda_2 y = \lambda(x + y)$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \dots$ C'est tout simplement la distributivité...
94. K : Ben tu vois on a peut être le temps de refaire le dernier finalement, même si voilà.
95. B : Le temps est écoulé.
96. K : Parce qu'il est quelle heure ?
97. B : Il est vingt... Dix sept.
98. K : C'est pas grave, on a déjà eu la réflexion... Sinon on peut revenir sur le premier.
99. T : Qu'est ce que je mets après, je mets un truc ?
100. M : Qu'est-ce que vous avez démontré pour le quatrième ?
101. T : Euh...
102. M : Vous avez fini la démonstration pour le quatrième ?
103. B : On va en prendre plein la gueule là !
104. T : Non c'est vachement [Inaudible]
105. M : Pardon ?
106. T : Faut encore que je dise que, en fait, il est unique, qu'ils sont uniques les lambda.
107. K : Ben si t'as marqué ça... Voilà.
108. B : L'unicité n'est pas à vérifier mais... Bon.
109. T : Donc il existe un unique.
110. K : Non, il existe tout court.
111. B : [Rires].
112. T : Ouais.
113. K : Tu as oublié le « appartient ».
114. T : Tel que pour tout x appartient à $E \dots$ Là, en fait, c'est E, E^2 [Il corrige sur sa feuille].
115. B : [il écoute les discussions de l'autre groupe] Ils ont fait des « vect ».

**Annexe 10 : Transcription du travail
du groupe d'étudiants R, G, P, A
concernant l'exercice d'algèbre
linéaire**

Groupe d'étudiants R, G, P, A travaillant sur l'exercice d'algèbre linéaire :

1. R : Oh non... C'est quoi « L » ? C'est les applications linéaires c'est ça ?
2. G : Ouais.
3. R : Ah oui les... Merde... Oh j'arrive pas à retrouver.
4. [...]
5. R : Comment ça s'appelle déjà les applications qui vont dans le même ensemble.
6. A, G : Endomorphisme.
7. P : Tu sais toujours pas ça ?
8. R : Si mais je sais pas le nom.
9. P : Si je sais mais [Il imite R].
10. G : [G lit l'énoncé à voix haute] Ça veut dire que $x = \lambda f(x)$, $f(x) = \lambda x$ quoi... Ça veut dire que c'est des applications linéaires.
11. P : Oui cette fois, tu peux te lâcher.
12. G : Oui mais c'est des applications linéaires telles que $f(x) = \lambda x$... C'est donc les applications linéaires.
13. R : Pour tout x ... Est lié.
14. P : Ben oui, il est lié... Ça veut dire qu'on peut exprimer $f(x)$ en fonction de x et inversement d'ailleurs.
15. G : $f(x) = \lambda x$ par exemple et donc ça veut dire c'est les application linéaires.
16. P : Hein ?
17. G : Ben oui.
18. P : Non l'histoire de l'application linéaire là, c'est juste pour dire... Enfin, on s'en fout de l'application linéaire, c'est pas tellement important.
19. A : Ben est-ce qu'on est sûr que ça en est une, c'est marqué ?
20. G : Ben c'est les applications linéaires telles que...
21. P : Oui d'accord. Ok d'accord, d'accord.
22. R : Putain, moi j'ai même pas le temps de finir de lire l'énoncé.
23. G : Une application linéaire, c'est un truc qui peut s'écrire $f(x) = \lambda x$.
24. R : Si je te jure, j'ai lu le début, j'ai lu le temps d'arriver à fonction... Ils m'ont pris la feuille.
25. P : Ben c'est une application linéaire particulière ça, tu peux pas toutes les écrire comme ça, les applications...
26. G : Si on peut. Enfin x appartient à \mathbb{R} c'est ça ?
27. P : Oui sur \mathbb{R} .
28. A, R : [A et R récupèrent la feuille de l'énoncé] Bon merci !
29. R : Vous êtes chiants.
30. G : Non, pour tout x appartenant à E . J'ai rien dit, c'est pas forcément vrai.
31. R : Ben oui, tu prends $\ln(x)$ et ben voilà, tu as $f(x) = \ln(x)$.

32. A : pourquoi $\ln(x)$?
33. P : Pourquoi ?
34. G : De quoi il parle ? Mais non, parce que ça, c'est vrai si x était dans \mathbb{R} . En fait, c'est une application linéaire oui, particulière.
35. A : Non mais attend \mathbb{R} , mais E il est dans \mathbb{R} .
36. P : Non mais alors x c'est un chiffre... Non alors x c'est un vecteur ici.
37. G : Non là, c'est un vecteur parce qu'il dit x appartenant à E .
38. P : D'accord parce que... Ça, c'est une famille de vecteur ça, $x, f(x)$.
39. A : Ouais.
40. P : Et f si c'est une application linéaire, ça fait... Ouais, mais c'est tordu aussi, si tu fais correspondre une famille de vecteur à une autre famille de vecteur... Mais ce sera pas libre, si tu peux exprimer la première famille de vecteur en fonction de la première.
41. R : Non, eh, eh, eh. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Ça veut dire que E il est de dimension un.
42. [...]
43. R : Non, en fait non, j'ai rien dit.
44. G : C'est bien ça, la définition d'une application linéaire ?
45. P : Quoi ? Hum pas vraiment...
46. A : Fais voir.
47. G : Tu veux me montrer une application linéaire qui vérifie pas ça ?
48. P : Ben ouais.
49. G : Vas-y.
50. A : C'est quoi ta définition d'une application linéaire ?
51. R : C'est que $f(x)$ /
52. A : Non je sais pas, mais il a fait un truc bizarre, là. Fais voir.
53. P : Bon j'en sais rien, en fait. Vas-y, tu me fais douter mais non, mais c'était juste pour t'embêter que j'avais mis ça. C'est pas juste multiplier tous les vecteurs par un λ .
54. G : C'est la définition d'une application linéaire, non ?
55. A : C'est pas ça.
56. P : C'est pas juste multiplier tous les vecteurs par un λ .
57. G : C'est pas la définition d'une application linéaire, non ? Je suis pas sûr.
58. A : Non, pas trop.
59. P : Non, c'est trop pas ça.
60. G : C'est quoi ?
61. A : C'est euh... Pfff.
62. R : $\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$...
63. P : Voilà.
64. A : Ouais, c'est ça.
65. P : Mais oui, mais il va dire que ça revient au même.

66. G : Oui d'accord, mais une application linéaire c'est une application qui au vecteur (a_0, a_1, \dots, a_n) envoie une constante dans le K qui ici est \mathbb{R} fois le vecteur.
67. A : Pourquoi il faut toujours que tu inventes les définitions ?
68. R : C'est pas que... C'est pas forcément ça.
69. P : C'est pas forcément ça.
70. R : Pas du tout.
71. G : Mais cite moi un exemple, parce que je vois pas.
72. R : Ben tu prends l'application qui à l'ensemble, qui enlève a_n , ça envoie le même ensemble, la même famille, enfin le même ensemble de vecteur en enlevant a_n .
73. G : Et c'est linéaire ça ?
74. R : Pourquoi pas ?
75. G : Oui, c'est linéaire. Oui, donc en fait, j'ai rien dit... D'accord.
76. R : Enfin, je sais pas, c'est un exemple peut-être, c'est pas linéaire mais en tout cas, il en existe beaucoup des exemples.
77. G : Ouais donc en fait, tu as raison, c'est $\lambda a_0, \mu a_1$ etc... μa_n ... Ouais, c'est ce que tu disais tout à l'heure.
78. A : J'ai pas compris, ton espace... Enfin la discussion de tout à l'heure, là. Comme quoi c'était lié donc... Enfin c'était libre, houla !
79. G : C'est lié.
80. A : C'est lié oui, donc il faut exprimer $f(x)$ en fonction de x .
81. G : Ça, c'est ce que tu viens de me dire.
82. P : Oui, mais je les ai vu...
83. A : Après, il a sorti une histoire comme quoi c'était dans E , pas dans \mathbb{R} , donc j'ai pas compris pourquoi.
84. G : Non parce que je disais que c'était tout le temps vrai que pour x appartenant à \mathbb{R} ... Parce que dans ma tête, x c'était un élément de \mathbb{R} .
85. R : Pourquoi, pourquoi on cherche... Si la famille est liée, ça veut dire tout simplement que tu as λ , tu as $\alpha x + \beta f(x) = 0$ et α et β sont pas égaux à zéro. Donc ça veut dire que $f(x) = -(\alpha / \beta)x$.
86. G : Oui, donc on peut exprimer $f(x) = \lambda x$.
87. A, R : Ben oui, oui.
88. G : C'est ce que je disais depuis le début.
89. R : C'est tout ce qu'on peut dire, c'est tout ce qu'il y a à dire.
90. P : Non mais voilà, arrêter de vous engueuler, un peu de calme [Rires].
91. R : Mais on s'engueule pas.
92. G : C'est ce que j'ai dit au début... Tu me dis c'est pas ça !
93. A : Non mais moi, je suis d'accord avec ça. Mais pourquoi tu as dit que c'était faux ?
94. G : Mais j'ai pas dit que c'était faux !!!
95. P : Houla !
96. R : G !

97. A : Mais pourquoi ça alors ?
98. G : Mais parce que c'est ce que je vous ai dit tout à l'heure, j'ai dit ça s'exprime comme ça, tu m'as dit non, c'est pas du tout ça, c'est pas du tout ça !
99. A : Mais ça s'exprime comme ça si c'est lié ?
100. G : Ben ils disent c'est lié.
101. A : Mais tu disais, c'est la définition d'une application linéaire, je te dis non.
102. P : Ah, ah ! Fight !
103. R : Oh tu t'es fait cassé !
104. P : Fight, fight, fight, fight, fight...
105. G : Mouais bordel... Montrer que il existe un λ dans \mathbb{R} ... C'est marrant parce que c'est exactement ce que je viens de dire ce qu'il faut montrer.
106. R : Mais non, mais tu vois, si elle est liée.
107. G : Oui dans ce cas là, ça veut dire que...
108. R : Tu as $\alpha x + \beta f(x) = 0$ et α et β sont non nuls.
109. G : [Il écrit ce qu'il dit] $\alpha x + \beta f(x) = 0 \dots$
110. A : Ouais.
111. R : Donc $f(x) = \frac{\beta}{\alpha} x$ ou $\frac{\alpha}{\beta} x$.
112. A : Et $\frac{\alpha}{\beta}$ c'est λ .
113. R : Ben ouais.
114. A : Hum.
115. R : Et voilà !
116. P : Mais c'est ce qu'on disait au début, après on s'est embrouillé sur ce que c'est qu'une application linéaire...
117. R : Hum... Ouais ben ouais, c'est ça.
118. R : On écrit ça, c'est bon alors ?
119. G : Ouais, ça marche.
120. A : Tu as besoin de papier ou pas
121. R : On est trop fort... Tiens, commence. Attends, je copie l'exercice... Holala, la faute d'orthographe !
122. R : Ah ça y est, il recommence ! Non attends, c'est bon, tu vas le lire après, comme ça vous aurez la feuille pour vous d'abord.
123. P : Je veux voir la faute d'orthographe.
124. A : Y a marquer « Soit F et G », s-o-i-t.
125. P : D'accord, d'accord, ok !!!
126. R : Tu as vu, hein holala ! On peut plus comprendre l'exercice avec cette affaire, c'est bête.
127. A : Ça ressemble beaucoup à ce que l'on faisait en début d'année ça.
128. R : Hum... C'est bon ?
129. A : Ouais.
130. T : Vous avez rédigé l'exercice quatre ?

131. R : Ouais, on l'a presque fait.
132. G : Je suis en cours.
133. P : Je suis dans le coup ! [Rires]
134. G : Je suis en cours, j'ai dit...
135. P : Je suis crevé...
136. N : Vous pouvez rester combien de temps, parce que là, je sais pas exactement, ça doit pas être loin de quinze heures ?
137. P : Ouais, ça doit même être quinze heures passé, je pense.
138. R : Ouais.
139. N : Vous êtes pressés ou pas ?
140. P : Ouais, on peut regarder l'exercice cinq et marquer la réponse sur les babouins qui vont au paradis.
141. R : Ouais, on peut continuer...
142. N : Oui, oui. Ben pour la réponse pour l'exercice un, c'est pas très grave si vous répondez pas, l'essentiel c'est la discussion que vous avez eu... Si vous voulez faire une réponse, c'est bien hein, je serais content !
143. P, A : Ouais, ouais. [Rires]
144. N : Mais je préférerais que vous regardiez l'exercice cinq plutôt que vous répondiez à l'exercice un.
145. P : Ouais, ouais, d'accord.
146. N : Juste une/
147. P : Moi, ça va me turlupiner pendant longtemps, les animaux qui vont aux paradis !
148. N : Comment ?
149. P : Je vais y penser très pendant longtemps.
150. R : Non mais on fait la correction après, c'est ça ?
151. N : Si vous avez le temps oui, je ferais pas vraiment une correction mais je pourrais vous expliquer pourquoi j'ai donné ça.
152. P : Je vais écrire une thèse sur...
153. P : Ah non, moi je reste rien que pour savoir ça !
154. N : Euh donc, juste par rapport à ça... Je voudrais vous demander si ce que vous avez démontré, c'est bien ce qu'il y a écrit ici ?
155. P : Oui.
156. A : Ça, ça veut dire non, hein ?
157. R : [Rires].
158. P : Ah non, il existe λ ...
159. G : Ben, il existe λ et ce λ est égal à $-\alpha/\beta$.
160. R : Ben oui, il existe. λ appartient à \mathbb{R} ... Ouais, il existe parce que α et β , ils sont différents de zéro.
161. P : Hum... x appartenant à E .
162. A : Moi, je trouve ça logique aussi, mais trop en fait.

163. P : Attends, y a une subtilité, là...
164. A : Ben oui, y a une subtilité.
165. G : E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ... Donc α , β appartiennent à \mathbb{R} .
166. P : Réfléchis dans ta tête...
167. R : Ben il est où le problème ?
168. G : Application linéaire de E dans E donc $f(x)$ et x appartiennent tous les deux à E ... Est liée, ça veut dire qu'on peut exprimer un en fonction de l'autre...
169. P : La famille est liée, ça veut dire euh...
170. G, A : Ça veut dire que $\alpha x + \beta f(x) = 0$ et que α , β différents de zéro, zéro.
171. P : Enfin ouais, ouais...
172. G : Si tu veux, je l'ai marqué là, aussi.
173. P : Non mais deux secondes, j'essaye de réfléchir comme un grand.
174. G : Et donc il existe un λ sur \mathbb{R} puisque c'est un \mathbb{R} -espace vectoriel donc $-\alpha/\beta$ appartient à \mathbb{R} ... Tel que pour tout x dans E ...
175. P : Ça, c'est un truc pour nous faire douter devant la caméra.
176. R : Non, c'est peut-être par rapport à l'espace vectoriel justement, tu fais λ fois un couple... Tu prends un couple (a, b) qui appartient à E , imagine E c'est \mathbb{R}^2 , tu prends un couple (a, b) , d'accord ? Euh... On l'a vu au tout début des espaces vectoriels avec des... Tu sais la lce et la lci qui faisaient des trucs bizarres.
177. G : Mais justement, soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} donc E est un espace vectoriel, c'est bon.
178. P : Ouais, c'est un espace vectoriel.
179. R : Ah ouais, donc ça veut dire qu'on fait des opérations sur \mathbb{R} ... Ouais non, en fait, c'est pas ça.
180. P : Ouais, ça marche...
181. N : Posez-vous la question du choix des α et des β que vous avez pris... Quand est-ce que vous faites ce choix ?
182. P : Le problème c'est le choix qui... [Rires]
183. A : [Rires].
184. G : Quand est-ce qu'on fait ce choix ?
185. P : Et si on montre qu'il faut qu'ils existent, enfin il faut que... Qu'il y ait des α et des β qui soient différents de zéro...
186. R : Enfin, c'est des constantes réelles.
187. P : Ouais, c'est de constantes de \mathbb{R} .
188. N : Ouais, mais ils viennent d'où, pourquoi ils existent ?
189. A : Ben c'est nous qui les posons.
190. R : Parce que la famille est liée.
191. P : Parce qu'elle est liée, ouais.
192. N : Donc vous les choisissez après avoir choisi les x quoi ?
193. P : Ben...

194. R : Ah ouais...
195. P : x , il est quelconque donc euh...
196. R : C'est pour un x fixé qu'on a α et β , c'est pas forcément pour tout x ... Parce que après c'est marqué pour tout x .
197. G : Ah ouais, ouais, ouais...
198. R : Ah ouais... Parce que c'est pour chaque x fixé, tu as la famille qui est liée...
199. G : Qui est liée, mais elle est pas liée pareil pour tous les x .
200. R : C'est vrai, c'est pas forcément ça... Est-ce qu'elle est continue la...
201. A : Euh...
202. R : Il donne pas grand-chose dessus.
203. R : Ben, tu poses deux x différents et tu montres qu'on n'a pas le même λ .
204. P : Je...
205. R : Non, je sais pas ?
206. P : Qu'est-ce que ça pourrait être d'autre à part λx ?
207. G : Je vois pas trop comment le démontrer.
208. R : Ouais, moi non plus, je sais pas. Mais ça pourrait être ça qu'il faudrait démontrer.
209. P : Ouais, imagine λx plus un, est-ce que ça marche... Non ça marche pas parce que c'est pas lié... Ouais, c'est pas lié. Si tu prends, au lieu de $f(x) = \lambda x$, tu prends $f(x) = \lambda(x + 1)$.
210. R : Non, c'est pas comme ça qu'il faut travailler... Non, non, non, non. C'est dire que tu peux trouver deux λ différents, avec la formule qu'on a trouvée juste avant, avec α et β non nul. Que moins α ... C'est ça, c'est moins $-\frac{\alpha}{\beta}$ que tu avais ?
211. R : Voilà que $-\frac{\alpha}{\beta}$ soit autre chose.
212. P : Mais non, mais c'est parce que c'est présenté, c'est présenté regarde.
213. R : Par exemple, tu prends dans \mathbb{R} , tu prends $1/x$, tu prends deux, alors tu montres que c'est différent.
214. P : Mais non, le truc c'est dans quel ordre ils mettent le il existe λ . Tu vois, si ils avaient mis, hein R , tu vois si ils avaient mis quelque soit x appartenant à E , il existe λ tel que $f(x)$ égal x là, ce serait, il n'y aurait pas de problème. Mais maintenant, ils ont mis il existe λ tel que pour tout x , enfin quelque soit x . Tu vois si ils avaient mis ça dans l'autre...
215. A : Sens.
216. P : Dans l'autre sens, ben ça aurait été beaucoup plus facile.
217. A : [Inaudible].
218. R : Oui mais c'est l'inverse là, il existe un λ pour tout x .
219. P : Ouais mais...
220. R : Ça veut dire que tu fixes ton λ d'abord et ensuite pour tout x ton λ , il marche.
221. A : Nous c'est l'inverse qu'on cherche, nous c'est pour tout x .
222. P : Eh ben ça marche, pour tous les λ différents de zéro.
223. R : Non. On a dit que pour tout x il existait un λ tel que α .
224. P : Non, non, c'est pas...
225. A : Non...

226. R : Non il existait un α et un β tels que $\alpha x + \beta f(x) = 0$. D'accord ? Le seul problème c'est que pour chaque x ça peut être...
227. A : Les α et les β vont varier.
228. R : Voilà. Et est-ce que on peut avoir des α et des β qui varient mais le rapport, il varie pas ou alors que... Ou alors qu'il varie aussi et alors ça.
229. A : On n'a aucune... On n'a rien sur x et $f(x)$...
230. R : Ah mais, il faut « montrer que », donc ça veut dire que c'est juste. Donc ça veut dire que les α et β vont varier mais peut être que le rapport justement, il varie pas... Ça, ça doit aller avec le fait que c'est une application linéaire.
231. G : Si, mais justement, j'étais en train de regarder ça, j'ai voulu mettre un contre exemple, mais en voulant mettre un contre exemple je me suis rendu compte que ce que j'ai mis, c'était pas linéaire. Donc justement, je pense qu'il faut utiliser le fait que c'est linéaire maintenant.
232. P : t'as mis $\lambda(x+1)$? Tu as mis un truc comme ça ?
233. R : Qu'est-ce qu'il ressort... Il l'a ressorti plusieurs fois, il dit... A quoi ça sert ?
234. P : Mais j'en sais rien !
235. R : Qu'est-ce que tu nous sors là ?

Annexe 11 : Transcription du travail du premier groupe (*R*, *G*, *P* et *A*) lors de la pré-expérimentation

1^{er} Groupe travaillant sur les énoncés isolés

1. P : Décrire un monde imaginaire.
 2. R : Dans lequel elle... Attend c'est quoi ce truc ?
 3. P : Imagine, y a un lion qui peut parler !!
 4. R : Dans lequel elle aurait une valeur de vérité différente... Oula...
 5. P : Pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile autour de laquelle elle tourne.
 6. R : Ben oui pourquoi pas ?
 7. P : Tous les animaux iront dans un paradis...
 8. R : Pourquoi y aurait pas de planètes qui tournent autour d'une étoile ?
 9. A : Tu permets ?
 10. G : Non pas les orangs-outans... Ils vont pas au paradis les orangs-outans.
 11. G : Parce qu'y a pas de paradis des orangs-outans. C'est connu.
 12. R : C'est uniquement dans le système solaire !
 13. P : Ah. Ouf.
 14. R : Ben c'est bête parce qu'elles tournent toute autour du soleil !
 15. G : Ben oui.
 16. R : Elles vont pas tourner chacune autour d'une étoile. C'est plus un système solaire sinon.
 17. P : Mais non, mais t'es d'accord que pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile...
 18. R : Ah ben ouais. Mais c'est le soleil !
 19. G : Ben oui alors.
 20. P : Ouais ben donc, c'est vrai !!
 21. P : Décrire un monde imaginaire.
 22. R : Hum, hum. Mais qu'est-ce qu'une planète ?
- [Rires]
23. R : Non je rigole.
 24. R : Il existe une étoile... Ah ouais, ça peut être une étoile différente... C'est louche.
 25. A : Ouais, c'est louche.
 26. P : Non mais comment tu peux avoir un monde où ça a une valeur de vérité différente !
 27. P : Une valeur de vérité différente... Les valeurs de vérité, c'est juste vrai ou faux ?
 28. T : Oui c'est ça...
- [Les autres rient]
29. P : Non mais je sais pas... Peut-être que ce serait une autre définition !
 30. T : Non mais c'est une bonne question.

31. P : C'est toujours vrai, mais c'est différent.
32. A : Ca dépend du référentiel.
33. T : Si vous pensez que cette phrase est fausse, tu vas essayer de décrire un monde qui ferait que cette phrase est vrai. Et réciproquement, si vous pensez que cette phrase est fausse, vous pouvez essayer de décrire un monde dans lequel elle serait... Je sais plus ce que j'ai dit.
34. G : Ben c'est la logique.
35. P : C'est l'imagination.
36. R : Ben c'est faux déjà.
37. P : Non, c'est vrai ça.
38. G : Mais oui, c'est vrai.
39. A : Moi, je suis plutôt d'accord avec R.
40. G : Ben les planètes, elles tournent autour d'une étoile et cette étoile c'est le soleil.
41. R : D'accord.
42. P : Donc elle existe.
43. R : Ok ben d'accord, c'est bon ok, c'est bon.
44. G : Ben faudrait inventer des univers où y a des planètes qui se baladent...
45. P : Un gros soleil au milieu, plein de petits soleils et toutes les lunettes... Les lunettes... Toutes les planètes, elles tournent autour d'un petit soleil qui tourne autour du gros soleil.
46. G : Mais ça change rien ça.
47. R : Ben non. Il faut trouver une planète qui tournerait pas autour d'une étoile dans le système solaire.
48. G : Ben oui.
49. G : Faudrait lancer une planète dans l'univers, comme ça...
50. R : Ben non une planète plus petite qu'une grosse planète qui tourne autour d'une grosse planète... Comme un satellite mais sauf que c'est une planète.
51. P : ben...
52. R : Tu verrais la Terre tourner autour d'Uranus par exemple ?
53. P : Pluton et Charon quand ils... Vu qu'ils tournent pas vraiment ...
54. G : Ouais, mais ils ont été déclassés.
55. A : Ils tournent l'un par rapport à l'autre.
56. R : Le problème, c'est que ni l'une, ni l'autre c'est une planète...
57. A : C'est pas faux.
58. A : Ca dépend parce que avant c'était une planète... Donc pour le monde d'avant ça marche.
59. G : ouais.
60. P : Ben ouais, c'est un monde imaginaire, le monde d'avant.
61. G : Ouais sauf Pluton tournait autour du soleil.

62. P : Ouais bon... Passons.
63. R : Ben non, on passe pas.
64. A : Non, on passe pas.
65. G : Non mais, c'est vrai, tu dis qu'on peut balancer des planètes comme ça dans l'espace, sans avoir d'orbite fixe... C'est des mondes imaginaires...
66. R : C'est pas mal ça.
67. G : Quand c'est nous qui les imagine...
68. R : Déjà la première chose, tu dis que c'est vrai déjà.
69. P : Ouais mais ce serait... C'est un monde où y a pas de logique ou tout va...
70. G : Non mais oui, c'est un monde imaginaire que t'imagines !
71. R : Ouais mais si une planète elle tourne pas autour du soleil, elle est pas dans le système solaire !
72. P : Ah ouais ben.
73. R : Ben je sais pas.
74. P : Ben elle tourne autour du soleil.
75. R : Ou alors le soleil n'est pas une étoile et hop !
76. A : Ouais, c'est pas une étoile et c'est réglé !
77. R : [Rires] Ben ouais.
78. G : Ouais, c'est vrai.
79. A : Ou alors y a pas de soleil. Carrément.
80. G : Y a pas de système solaire si y a pas de soleil.
81. R : Imaginons le soleil à sa mort. Paf c'est une super nova !
82. A : Aï, aï, aï.
83. R : Ben si/
84. A : [à G] Non, t'as gagné.
85. R : Ca s'appellerait le soleil, mais c'est pas une étoile.
86. G : Oui ben, c'est ce qu'on est...
87. R : Ben c'est le système solaire.
88. R : Donc c'est bon.
89. P : D'accord donc on met ça ? On met le soleil n'est pas une étoile.
90. P : Dans ce monde imaginaire/
91. R : Le soleil n'est pas une étoile.
92. A : Non mais tu as marqué que c'était vrai à la base.
93. R : Ouais d'abord... Tiens, je t'offre du blanc si tu veux.
94. A : La proposition à la base, elle est vraie après...

95. P : Non mais c'est bon. Je barre proprement.
96. R : Non, non, non. Faut mettre du blanc.
97. P : Allez arrête !
98. R : Bon. Faut qu'on avance.
99. A : Ah, ils sont trop bien ces blancs.
100. R : Ben oui, ils sont bien. Tiens, essaye tu verras tu vas être converti.
- [...]
101. A : Bon, c'est quoi après la question ?
102. P : Attend, attend. « Cette proposition est vrai... »...
- [Rires]
103. G : Quoi ?
104. A : Faut demander à Brian ou à Kenza !
105. R : Tous les animaux iront dans un paradis... Oulala...
106. G : Mais non. J'ai dit y a pas de paradis pour les babouins !
107. A : Pourquoi ?
108. G : C'est connu quand même !
109. G : Parce que les babouins, ils vont pas au paradis. T'as déjà entendu parler d'un paradis pour les babouins ?
110. R : Oulala, c'est carrément de la philosophie là !
111. A : Ben ouais.
112. P : « Dans un monde imaginaire, le soleil ne serait pas une étoile. »
113. A : J'ai pas compris l'histoire où tous les animaux iront au paradis, là.
114. R : Eh ben imaginons ils vont aux enfers et paf nickel ! Y a pas de paradis !
115. G : C'est vraiment subjectif comme question...
116. R : Après, y a l'air d'avoir des trucs plus marrants !
117. A : Mais ça, c'est vrai ou c'est faux !
118. P : Mais n'importe quoi, c'est vrai ou c'est faux ! Est-ce que... Déjà, qu'est-ce que c'est un paradis ?
- [Rires]
119. P : Non c'est vrai ! Est-ce que la jungle amazonienne, c'est un paradis pour les grenouilles ? Voilà !
120. A : Ah c'est carrément de la philo après...
121. P : Pas avec les animaux, tu fais pas de la philo avec des animaux.
122. R : Bon ben déjà, on dit faux. On sait pas... On dit faux parce qu'on sait pas.
123. G : Oui mais il faut trouver un contre-exemple pour dire que c'est faux.

124. R : Un exemple où c'est vrai... Un monde où il y a des animaux et quand ils meurent, ils vont au paradis.

[Rires]

125. R : Ça, ça fait le contre exemple. Ça fait le vrai, le monde imaginaire où c'est vrai.

126. A : Tiens pourquoi c'est pas tous les animaux iront au paradis. « Dans un paradis », c'est bizarre comme formulation de phrase.

127. R : Ah oui.

128. G : C'est pas forcément le même paradis.

129. R : Voilà c'est ça.

130. P : Dans le paradis.

131. G : Eh oui, les lions et les gazelles, ils vont pas au même paradis sinon ils bouffent les gazelles, les lions.

132. P : Peut-être qu'au paradis des lions y a plein de gazelles ! Comme ça, les lions, ils sont au paradis. Mais c'est pas des vrais gazelles qui auraient été dans le monde réel.

133. G : Parce que sinon les gazelles elles sont re-tuées !!

134. P : Peut-être qu'elles vont au paradis des gazelles qui ont été au paradis des lions.

135. R : Au paradis tu es peut être immortel ? Au paradis des nains, tu peux taper les elfes, c'est dans le donjon de...

136. G : Ah d'accord.

[...]

137. R : Bon, qu'est-ce qu'on en dit.

138. G : On a qu'à dire faux/

139. A : Entre les deux...

140. G : Si ça se trouve, il y a des méchants animaux qui iront pas au paradis.

141. R : Voilà.

142. G : Parce qu'ils sont trop méchants.

143. R : Et si ils sont méchants, ils vont en enfer.

144. G : Faudrait faire un monde dans lequel tous les animaux ils seraient gentils, ils se feraient plein de bisous.

145. P : Oui ben c'est pas mal ça.

146. G : C'est le pays des Bisnounsours. Par exemple, au pays des Bisnounsours/

147. P : Mais non, ils sont immortels, ils ont pas besoin d'aller quelque part après la mort. Voilà c'est tout.

148. A : Mais non tu peux être au paradis quand tu vis !

149. P : Mais c'est ce que je disais tout à l'heure.

150. R : Le paradis, c'est le bonheur. Non ?

151. P : Euh... C'est le nirvana ?

152. R : Un monde où tous les animaux, ils sont contents.
153. P : Mais les animaux, ils ont pas la notion du bien et du mal, de la tristesse et de la contentitude !!
154. R : Et si ils sont pas contents, ils vont voir un monsieur qui les rend contents.
155. P : Non mais franchement.
156. R : Non mais je sais pas.
157. P : Ça vous dit pas, on met qu'ils sont immortels comme ça...
158. R : Mais non, parce que c'est détourner la question.
159. P : Mais non, c'est un monde.
160. A : C'est un monde imaginaire, la vie est... Je sais plus comment on dit.
161. R : Et ce serait un paradis ? Tu es immortel, tu es au paradis ? Imagine tu es triste et tu es immortel. Ben tu es pas au paradis hein.
162. A : De toutes façons, quand tu es immortel, tu es pas au paradis. C'est triste d'être immortel.
163. R : Oui voilà. Donc on peut pas dire qu'ils sont immortels. On est d'accord.
164. G : C'est très compliqué comme question...
- [...]
165. G : Non mais sinon, on dit que c'est faux et on dit que si les animaux, ils sont tous gentils et qu'ils sont tous croyant, ils vont tous au paradis.
166. R : Voilà croyants.
- [Rires]
167. R : Si ils ont tous foi en dieux et ben c'est bon ! ils iront au paradis.
168. P : Oui mais regarde, si il y a plusieurs religions.
169. A : Les animaux, ça pense pas, ça peut pas avoir la foi !
170. R : Mais c'est dans un paradis, pas dans le paradis donc il peut y avoir plusieurs paradis.
171. P : Tu as jamais lu le truc où il dit que... Tu as vu que toutes les religions, ils disent que si tu crois pas en moi, tu vas aller en enfer. Ça veut dire que tout le monde va en enfer.
172. R : Par rapport à une religion, tu vas aller en enfer.
173. P : Faut pas qu'il y ait deux religion.
174. G : Il faut une religion unique.
175. P : C'est vrai.
176. R : Faudrait qu'il y ait une religion universelle et que ceux qui sont méchants, ils deviennent immortels.
177. P : Qu'est-ce qu'on met pour justifier si elle est vraie ou elle est fausse.
178. A : C'est faux parce que les animaux, ils pensent pas donc si ils pensent pas, ils peuvent pas avoir de religion. Donc pas de religion, ils vont pas au paradis.
179. P : Mais si les animaux, ils peuvent penser... Mais moi je pense que les animaux, ils... Mais si, ils peuvent penser. Ils réfléchissent !

180. R : Mais attend, on fait de la philosophie là, on va passer à la suite rapidement.
181. P : Non mais tu vois, les animaux, ils peuvent pas être tristes. Un animal, ça peut pas être triste.
182. R : Ben pourquoi ça serait pas triste. Quand tu l'enfermes un chien, il jappe.
183. P : Ouais, c'est parce que.../
184. R : Parce qu'il est pas content !
185. P : Pour que sa survie, ça serait mieux que ce soit dehors.
186. R : Bon on dit quoi... Faux, on dit que c'est faux.
187. G : Ouais, on dit que c'est faux.
188. P : C'est faux pourquoi ?
189. R : C'est pas marqué... Ah si, en justifiant !
190. A : De toutes façons, l'animal, il a pas conscience de la mort donc à partir du moment où il a pas conscience de la mort, il a pas conscience de l'après-mort.
191. P : Oui mais la question, c'est pas savoir si il a conscience de la mort.
192. G : C'est la conscience du paradis, c'est est-ce qu'il va être dedans.
193. R : Faudrait demander à quelqu'un qui...
194. A : Si il y croit pas, il peut pas y aller.
195. P : On bloque. C'est faux parce qu'on bloque.
- [J'interviens pour leur dire de passer]
196. P : Tous les poèmes de la Grèce médiévale décrivent une guerre légendaire.
197. R : Ouh...
198. A : Je connais pas les poèmes de la Grèce médiévale.
199. P : Mais non, mais en gros, il parle de la guerre de Troie et euh... Parce que y a pas d'autre guerre vraiment légendaire.
200. G : Pas la Grèce médiévale.
201. P : Quoi ?
202. G : La Grèce médiévale.
203. P : Mais la Grèce médiévale, ça veut dire qu'ils étaient dans le système médiéval pour eux c'était dans la... Je sais pas en fait.
204. A : Tu es en train de t'enfoncer là. [Rires]
205. R : Une guerre légendaire, c'est une guerre qu'ils auraient pas vu en fait. Légendaire, ça veut dire qu'ils inventent en quelque sorte.
206. P : Tu en connais beaucoup des guerres comme ça, à part celle de l'Iliade ?
207. R : Pfff. Moi, je connais pas la Grèce alors...
208. P : Non mais d'accord, tu connais pas la ... Ulysse et compagnie là...
209. R : Non mais je sais pas/

210. G : Non mais c'est faux. Y a forcément des gars qui ont écrit des poèmes qui ne parlent pas de guerre.
211. R : Voilà c'est vrai.
212. G : Je sais pas, ils étaient pas obnubilés par la guerre quand même.
213. P : Ouais, ouais. Bien sûr.
214. R : C'est pour tout habitant de la Grèce, il existe un poème.
215. G : J'ai pas fait spécialité Grèce médiévale...
216. P : Est-ce que la Grèce tourne autour du soleil ?
217. R : Non ouais voilà... Déjà c'est faux parce qu'il pourrait exister un poème qui ne parle pas de...
218. A : Il pourrait mais...
219. R : Ben imagine, il ont fait une traduction du lièvre et la tortue. Ca parle pas d'une guerre légendaire, le lièvre et la tortue.
220. A : Ah, tu sais pas. Métaphoriquement...Non je plaisante.
221. R : Bon alors il faudrait inventer un monde imaginaire aussi.
222. G : Ben où il y aurait que des guerres et où on parlerait que de ça tellement y a des guerres.
223. R : Ça peut être bien ça.
224. G : Et que de guerres légendaires.
225. P : « Il est très improbable que ».
226. R : Non, tu dis car il doit exister un poème qui ne parle pas de guerre légendaire.
227. P : Oui. « Car il est très improbable qu'il n'existe pas de poèmes qui parlent d'autre chose »
- [...]
228. R : Bon le monde imaginaire.
229. A : Tu lis la dernière.
230. G : Un caporal peut devenir général si et seulement si un caporal peut devenir général.
- [Rires]
231. G : Tu as trouvé un monde imaginaire où c'est faux ?
232. P : Les autres, ils ont bien fait de pas être venus !
- [Rires]
233. P : Non attendez, on a pas fait de contre exemple là.
234. R : Monsieur, vous le gardez le sujet après ?
- [...]
235. P : Non mais on a pas fini la Grèce là ! Il faut imaginer un monde imaginaire.
236. R : Un monde où y a que des guerres, on avait dit !
237. A : Où y a que des guerres.

238. G : Un monde où y a que des guerres qu'ils pensent tellement à la guerre, qu'ils peuvent... Ça leur vient jamais à l'esprit de faire des poèmes sur autre chose.
239. R : Ils peuvent pas penser à autre chose. Même pas ils penseraient à dormir.
240. P : Ben peut être qu'ils pensent à des poèmes tu vois !!!
241. R : Ben non, ils pensent à la guerre.
242. P : Ils pensent à des poèmes.
243. G : Ils pensent à des poèmes mais quand ils pensent à des poèmes, c'est la guerre.
244. P : Moi je dirais plutôt un monde où une guerre, ça veut dire une histoire... Tu vois le mot guerre veut dire histoire. Tu vois, y a forcément une histoire et paf !
245. A : Non, c'est bien ce qu'il a dit P.
246. P : Ouais !!
247. G : Le mot guerre est synonyme de poème.
248. P, A : Non, histoire.
249. G : Ouais mais un poème, ça raconte pas forcément une histoire.
250. P : Ben forcément un peu pfff.
251. G : Ben par exemple : « Nil, Nil, ..., Nil, fleuve impétueux et tumultueux... ».
252. P : « Tu es comme notre reine : la source de la vie ».
253. G : Tu vois ça raconte pas une histoire.
254. P : Ben si un peu !
255. P : Guerre ça veut dire chose !!
256. R : Pourquoi ?
257. R : Bon après, on est bien pour la quatrième tiens.
258. P : Ah mais non, un monde imaginaire dans lequel tous les poèmes de la Grèce médiévale décrivent une guerre légendaire c'est un monde où il y a pas de Grèce... Tu vois où la Grèce n'existe pas. Comme ça tous les poèmes, il peuvent décrire ce qu'ils veulent parce qu'il n'y en a pas.
- [Rires]
259. R : C'est vrai ça peut être pas mal.
260. P : Ok je mets ça. Je mets ça ?
261. R : Ben oui !
262. A : Oui, oui.
263. R : C'est une bonne solution, c'est pas bête ça... Pas de Grèce hop là !
264. A : Bon la quatre, vous êtes sûrs que c'est vrai parce que ça me paraît trop simple.
265. G, R : Ben ouais, c'est vrai mais ce qui est difficile c'est de trouver un monde où ça n'existe pas.
266. G : Un monde où « si et seulement si » veut dire non c'est pas vrai !
267. R : C'est comme a égal b si et seulement si a égal b . Comment tu fais ?

268. R : Euh... Vas-y... « Un caporal peut devenir général si et seulement si un caporal peut devenir général »... Y a pas une faute d'orthographe, peut-être que c'est ça la clef ?
269. G : Un monde dans lequel « Un » en majuscule ne voudrait pas dire la même chose que « un » en minuscule.
270. R : Ah ouais...
271. P : Ah, c'est pas bête ça.
272. A : Non, tu peux définir deux sens de général, deux sens de caporal...
273. G : Oui, mais ça reste quand même vrai.
274. R : Ouais mais si en trottant/
275. A : Euh...
276. R : Si quand t'es en train de dire « si et seulement si » le caporal, il se casse une jambe. Il peut plus devenir général. Tu sais, tu dis un caporal peut devenir général/
277. A : C'est très imaginaire ça.
278. R : Tu vois, ton caporal, tu dis « oh tu peux devenir général » et tu dis « si et seulement si » et paf il se casse un jambe... Eh ben, il peut plus être général.
- [Rires]
279. R : Pourquoi pas... Non mais franchement, tu veux faire comment ?
- [...]
280. R : Putain, je vois pas la logique pour... Enfin peut-être faut pas de logique pour y arriver.
281. R : Parce qu'on peut pas dire, ouais le poste de général il existe pas ? Ouais, c'est bizarre.
282. P : Je commence à être dyslexique là.
283. G : Non mais, tu fais un monde dans lequel « si et seulement si » ne veut pas « si et seulement si ».
284. R : Ah ouais ! Pas bien, euh pas bête.
- [...]
285. R : Ah ouais.
286. A : Je te sens perplexe P.
287. R : Ah ouais, on pourrait dire « si et seulement si » voudrait dire « c'est complètement l'opposé de ».
288. R : « si et seulement si », euh...
289. P : Non parce que pour devenir général il faut que... Qu'il ait du mérite. Donc il « peut » devenir par la loi... C'est permis, mais euh peut-être qu'il le mérite pas.
290. G : Ouais mais si il « peut » alors il « peut ».
291. R : [à P] Ouais mais tu supposes d'abord qu'il peut.
292. A : Non, il peut pouvoir par la loi et pas pouvoir par son/
293. P : Mais non mais voilà. Il peut pouvoir par la loi et pas pouvoir par sa... Euh être dans un contexte où...

294. A : Pas légitimement.
295. P : Ouais voilà, pas légitimement.
296. R : Ouais mais tu supposes !
297. G : Mais ça veut dire qu'il change de signification en cours de route.
298. P : Il peut par la loi mais pas légitimement.
299. A : Légalement mais pas légitimement.
300. R : Eh, « si et seulement si » ça veut dire que ça, ça implique ça, et que ça, ça implique ça. Si il peut devenir général alors il peut devenir général et si il peut devenir général alors il peut devenir général.
301. P : Ouais mais « il peut », ça peut vouloir dire plusieurs choses. « peut », ça peut vouloir dire plusieurs choses.
302. P : Non c'est vrai.
303. G : On va pas en chier là.
304. A : Non mais c'est pas mal parce que...
305. R : Non mais le monde où « si et seulement si » n'existe pas c'est pas mal.
306. P : [à A] Tu es d'accord avec moi ?
307. A : Je suis entièrement d'accord avec toi parce que tu peux le mériter et pas l'avoir par la loi et...
308. G : Ouais mais quand tu dis une phrase...
309. P : Pourquoi y a que la fille qui est d'accord avec moi !
310. A : C'est quoi cette discrimination ?
311. G : Quand tu dis une phrase, tu changes pas de sens au milieu de la phrase.
312. R : Ouais c'est vrai.
313. A : pourquoi pas ?
314. P : Ben non, parce que là, si c'est une phrase avec des trucs genre « si et seulement si », tu dois avoir décrit ce que c'est « pouvoir » ce que c'est « devenir »... Je sais pas tu peux changer de sens vu que tu as rien défini au début.
315. R : Moi, je suis pas sûr, moi je suis d'accord avec G.
316. G : Moi aussi.
317. R : C'est bête ça. Deux contre deux, c'est pas drôle.
318. G : On fait quoi ?
319. A : On se bat.
320. R : Ben c'est vrai ça ! Je vois pas... Y a pas besoin de magouiller, c'est vrai.
321. G : Ben oui, c'est vrai.
322. R : Si tu prends une proposition, tu dis que « si et seulement si » et exactement pareil.
323. A : Ben on marque les deux solutions et puis...

324. R : Ce stylo, il est orange si et seulement si ce stylo, il est orange. Ben c'est vrai. Y a pas de peut-être que... Avec un peu de chance, il est un peu noir...
325. G : Celui-là aussi il est orange si et seulement si il est orange.
326. R : Ben voilà... Ben oui, mais c'est tout le temps vrai.
327. A : Non, ça marche pas votre truc. Dans ce cas là, « si et seulement si » c'est vrai, dans ce cas là, « si et seulement si » c'est faux.
328. P : Ben non, c'est toujours vrai.
329. R : Ben si !
- [...]
330. R : Mais le problème, c'est dans le « si et seulement si ». Ca veut dire que la première implique la deuxième et la deuxième implique la première. Si il peut être général alors il peut être général. Y a pas de...
331. P : Ben c'est facile de répéter un truc comme ça mais tu peux pas, t'es d'accord que le verbe « pouvoir », il peut avoir deux sens ?
332. G : Oui mais si il a un sens dans la première, faut qu'il ait le même sens dans la deuxième partie de la phrase.
333. A : Ben non !
334. R : Mais si !
335. A : Non.
336. G : Tu t'amuses pas à faire des phrases où [Inaudible].
337. P : Pas forcément.
338. R : Ben sinon, ça aurait été marqué « un général peut légalement devenir général si et seulement si un caporal peut moralement devenir général ». Ils l'auraient dit. Là, ils l'ont pas dit.
339. A : Parce que sinon, c'est trop facile. Justement c'est à nous de le trouver.
340. R : Bon c'est vrai ou pas alors ?
341. G : C'est vrai ça, c'est sûr mais après vous faites ce que vous voulez... Pour trouver un monde imaginaire.

Annexe 12 : Transcription du travail du deuxième groupe (*K, T, B*) lors de la pré-expérimentation

2^{ème} Groupe travaillant sur les énoncés isolés

1. K : « dites si elle est vraie ou fausse ».
2. B : C'est vachement ludique.
3. ? : Comment ?
4. B : C'est vachement ludique.
5. B : Ça, c'est un peu comme en maths on avait fait avec le circuit, tu sais dans le poly de A [un de leurs enseignants de mathématiques].
6. K : Hein ? le poly de A ? Je l'ai jamais ouvert.
7. B : [Inaudible].
8. K : Si je l'ai ouvert...
9. T : Alors qu'est-ce qu'il y a ?
10. K : Un monde imaginaire ! Hein, c'est des maths ça ?
11. B : La question, faut la comprendre déjà ! C'est de la logique quoi.
12. B : Qui a compris la question, l'énoncé ?
13. K : C'est des conneries ça, non ?
14. T : Décrire un monde imaginaire dans lequel elle aurait une valeur de vérité différente...
15. T : « Pour chaque planète du système solaire il existe une étoile autour de laquelle elle tourne ».
16. B : Le problème/
17. T : Le soleil.
18. B : A mon avis, à mon avis le problème il porte sur « chacun ».
19. T : Ouais mais est-ce que...
20. B : Parce que pour chaque planète, il existe une étoile... C'est pas vrai, ça c'est vachement pas vrai !
21. K : Ben non !
22. B : Ca veut dire que dans notre système solaire, qui est à je sais plus combien/
23. T : Y aurait huit étoiles.
24. B : Y aurait neuf étoiles ou huit étoiles ouais.
25. K : Ben non.
26. B : Donc c'est pas, ça, c'est sur y a comme un souci déjà.
27. T : Ouais.
28. K : C'est pas marqué « il existe une unique étoile ».
29. B : Pour chaque, il existe, moi je comprends/
30. K : Ben oui !
31. T : Ouais. Je comprends qu'il en existe neuf.

32. K : Moi, je pense que c'est un petit problème de français.
33. B : De linguistique.
34. K : Non mais c'est rien.
35. T : On est en mathématiques là.
36. K : C'est un problème de français ce truc là... Il existe une étoile pour chaque. Mais est-ce que c'est une étoile différente pour chaque planète ou pas ?
37. T : Exactement !
38. B : Bonne question, excellente remarque.
39. T : Bonne remarque K.
40. K : Hein.
41. B : Bonne remarque.
42. K : Merci.
43. B : Pour Chaque planète...
44. K : Moi je propose qu'on demande à un prof de français ce qu'il en pense.
45. B : Attends. Faut bien réfléchir. Et si on retournait la phrase : il existe une étoile autour de laquelle/
46. K : Tous les animaux iront dans un paradis.
47. T : Si on fait la contraposé !
48. B : Whahou.
49. T : Il n'existe aucune planète, non aucune étoile/
50. B : Tu va faire quoi avec ta, ta contraposée ?
51. T : Je sais pas.
52. B : D'accord. Faut juste se rappeler de ce qu'on a vu en maths en fait.
53. K : Moi je propose de se mettre dans le bain et de revenir à la première après.
54. B : Oui c'est pas mal.
55. K : Genre tous les animaux iront dans un paradis, c'est faux. Si tu es athée, tu y crois pas donc y a pas de paradis.
56. B : Ca dépend c'est quoi le paradis.
57. K : Chez moi le paradis, c'est un truc que tu bois après les vendanges.
58. B : Exactement...
59. K : Et ils iront pas dedans. On met pas de chiens dans le paradis, quand même.
60. B : Je pense que si on met ça comme réponse, c'est pas le sens du paradis qu'ils entendent. Mais on peut mettre ça.
61. ? : La Grèce médiévale ! Pfff... Qui connaît la Grèce médiévale ? Moi je connais la Grèce antique.
62. T : Moi ! Non je déconne.

63. B : Moi je connais la Grèce antique mais médiévale... A l'époque c'était pas eux qui/
64. K : Moi je connais pas de poèmes de la Grèce médiévale, ni la Grèce médiévale d'ailleurs.
65. B : C'est n'importe quoi ces questions !
66. ? : « Si et seulement si un caporal peut »... Hein ?
- [Rires]
67. B : Ha, c'est génial !
- [Rires]
68. B : On peut tromper mille fois une personne mais...
69. T : Non, on peut pas.
70. B : Si, on peut !
71. T : Non, mais c'est quoi ce truc/
72. T : Oui mais si un caporal peut devenir général alors un caporal peut devenir général et un caporal peut devenir général si... Enfin, je veux dire, ça marche dans les deux sens, d'accord. Mais c'est la même chose en fait.
73. B : C'est génial, ben c'est exactement vrai... Ça c'est vrai !
74. K : Ça dépend si c'est un caporal de l'armée de où et un général de l'armée de où ?
75. T : Mais ça, ça a une valeur absolue.
76. K : Un caporal de la marine peut pas être général de...
77. B : La vraie question, c'est est-ce que l'équivalence peut impliquer l'égalité ?
- [rires]
78. K : Là, je comprends la marche des machines à sous.
79. T : Je suis perplexe devant cette...
80. K : J'ai l'impression de me retrouver devant le concours général, c'est-à-dire tu lis des questions, tu comprends pas ce qu'elles veulent te dire.
81. B : Non moi je suis... J'avais réussi à faire un exo, je crois.
82. K : Moi le deuxième, je dis que c'est faux parce que chez nous, on met pas d'animaux dans le paradis.
83. B : Allez sérieux.
84. K : Pour la deuxième, on répond ça.
85. B : Non, non, non. On commence par la première. « Pour chaque planète du système solaire »...
86. K : Moi, je pense que c'est des questions philosophiques en fait. Ça doit être ça.
87. B : « Pour chaque planète du système solaire ».
88. T : Non, moi en fait, je dirais que la un c'est juste.
89. B : Mais ça dépend, je suis désolé ça dépend.
90. K : Non, ce serait plutôt « il existe une étoile pour chaque planète ». Dans l'autre sens, ça serait plus français.

91. B : Mais tu as le droit de...
92. K : Oui, mais y aurait moins d'ambiguïtés au niveau du français.
93. B : Attends, « Il existe une étoile autour de laquelle elle tourne... pour chaque planète ». Faut voir, faut modifier/
94. K : Non mais « il existe une étoile autour de laquelle tourne chaque planète du système solaire ».
95. T : « Tourne chaque planète du système solaire ». Voilà, dans ce sens là, c'est vrai.
96. B : Moi, on dit ambigu ça.
97. K : Ca sent l'ambiguïté !
98. B : Tu as ça en interro, tu fais un scandale.
99. K : Tu mets question piège.
100. T : Non mais on est en maths c'est quoi cette/
101. K : Non mais moi, je dis c'est une question piège, c'est un problème d'éthique et de morale.
102. B : Arrête.
103. K : C'est un truc qui pose débat depuis des millions d'années.
104. B : Arrête, arrête.
105. T : Ouais, si on revenait au système géocentrique ?
106. K : Non mais/
107. B : Non mais arrêtez vos conneries ! Mais vous êtes pas sérieux c'est incroyable ça !
108. K : Non mais, on va passer une heure sur les trois, quatre premières questions
109. B : Et si on commençait par le reste ? IR-EV [espace vectoriel réel], c'est pas mal ça ?
110. K : Non, c'est pas rigolo, faut réfléchir.
111. T : Non.
112. B : Bon d'accord, d'accord. On revient sur la première. « Pour chaque planète du système solaire »/
113. T : « Il existe une étoile autour de laquelle elle tourne ».
- [Rires]
114. K : « Pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile autour de laquelle elle tourne ».
115. B : Bon là je crois que, il faut, c'est un peu du hasard.
116. K : Eh non. Parce que c'est peut être l'étoile qui tourne autour de la planète vu que c'est écrit comme ça.
117. B : Peu importe.
118. K : parce que « il existe une étoile autour de laquelle elle tourne ». C'est qui, qui tourne autour de qui ?
119. B : Qui tourne autour de qui.../
120. K : C'est comme César, il prend le cheval de qui ? Et ben là, c'est pareil. Non c'est vrai, c'est pas si... Que ça.

121. T : Non. « Il existe une étoile autour de laquelle elle tourne ».
122. B : C'est la planète qui tourne autour d'une étoile.
123. T : je pense que c'est quand même clair ça.
124. B : Bon, ça c'est clair. Le truc c'est, pour chaque planète, il existe un unique ou pas ? « Une », c'est indéfini donc ça peut être deux fois la même.
125. K : Ça dépend ce que tu appelles une planète de toute façon.
126. B : Non, mais arrête de me casser les...
127. T : Non mais les huit planètes du système solaire. Neuf depuis, euh huit depuis quelque temps, neuf précédemment.
128. K : Ouais, on parle des planètes quoi [Inaudible].
129. B : Moi je dis, pour moi, c'est faux. Pour moi, c'est faux. Parce que le fait/
130. K : Parce que c'est pas précisé que c'est la même ni que c'est une différente.
131. T : Mais oui c'est/
132. B : Pour moi, moi je comprends que c'est faux.
133. T : Y a une ambiguïté sur le « une », là. Y a une ambiguïté sur le « une », là.
134. B : Non, pour moi, l'ambiguïté est sur le « chacun ». Enfin, « chaque » et « une », en fait, ça va ensemble.
135. K : Ben oui.
136. B : Non, mais c'est nul, comment on peut pas répondre à ça ?
137. K : Ben non, justement, c'est ça le piège.
138. B : Y a pas de réponse possible, non mais attends faut...
139. K : Ben tu, non faut mettre ça. On peut proposer que/
140. B : « Ça dépend », comme en philo, comme en français, « ça dépend »...
141. T : Oui, non, merde.
- [Rires]
142. T : Moi, je propose un plan.
143. B : C'est oui, non, bon on passe à la suivante.
- [Rires]
144. K : Non mais c'est trop ça. Tu peux pas répondre parce que le français n'est pas assez précis. Il faudrait traduire en latin par exemple.
145. B : Ecrit ça, écrit ça si tu veux.
146. K : Moi je propose, c'est ça la réponse.
147. B : Mais c'est sûr.
148. K : C'est trop compliqué et y a trop d'ambiguïtés sur l'interprétation.
149. B : Au niveau du français ouais. Y a des problèmes de traduction, de transposition plutôt, au niveau du langage mathématique.

150. K : Faudrait revenir au latin, au moins y aurait pas d'ambiguïté.
151. B : Enfin là, je vois pas pourquoi on pourrait, c'est con, on ne répond pas tout à fait à la question mais/
152. K : Ben non, on justifie qu'on, que pour nous, on peut pas répondre parce que c'est trop ambigu.
153. B : Je suis d'accord. Par contre la deuxième, on peut.
154. K : Oui, la deuxième c'est bon.
155. T : Donc je mets que c'est vrai dans le cas où/
156. B : Non tu dis juste que y a des difficultés de transposition. Tu veux dire à « chaque » et « une unique », enfin c'est ça qui est ambigu.
157. K : Non mais même si y a qu'une unique, ça veut dire... Y a quand même un problème. Tu sais bien qu'y en a qu'une d'étoile, ça change pas le problème.
158. B : Ouais c'est vrai. Tout à fait.
159. K : Ce serait plutôt il existe une étoile pour chaque planète. Là, c'est plus le bordel.
160. B : Pour moi c'est faux, ça, quand même. Bref.
161. ? : Quoi ?
162. K : Pour la deuxième, on met que c'est faux parce qu'on met pas d'animaux dans le paradis. On met que du raisin et du sucre.
163. B : Arrête tes conneries.
164. K : Mais c'est pas des conneries, y a que du raisin et du sucre dans le paradis.
165. T : Non mais c'est bon, on sait très bien qu'ils parlent pas de ça...
166. K : Qu'est-ce que tu en sais ? C'est pas précisé. D'abord c'est faux pare ce que si tu es athée, tu as pas de paradis, donc tu vas pas au paradis.
167. B : Arrête tes conneries.
168. K : Mais c'est vrai... Et est-ce que c'est marqué « vous êtes chrétien » dans la question ?
169. B : Non c'est vrai. Bon en fait...
170. K : Eh ben alors, y a pas de paradis si t'es athée. Moi je pense pas qu'il y a un paradis, donc y a personne qui va au paradis.
171. B : Dans la question, il y a un présupposée en fait. Je t'ai fait un spitch pendant je sais pas combien de temps pour te parler du paradis/
172. K : C'est le problème de chaque question quoi !
173. B : Et tu me sors chrétien. Tu peux au moins sortir monothéiste, religion monothéiste.
174. K : Bref tu vois, moi je suis pas d'accord parce que pour moi, y a personne qui va au paradis, ni en enfer, ni nulle part d'ailleurs. Tu es mort, tu es mort.
175. B : Si elles sont toutes comme ça, c'est une horreur quoi. C'est une prise de tête absolue. C'est plus dur que ce qu'on fait en cours quoi ! les petits EV, là euh...
176. T : Les petits EV de paques.
177. B : Tu les transposes, tu hésites, tu hésites...
178. T : Une fois que tu as répondu, tu es tranquille.

179. B : Et tu es content quoi. Alors que là, une fois que tu réponds, tu fais hein... Est-ce que je peux revenir dessus !
180. K : Dans cinq jours, tu retournes dessus, tu réponds autre chose.
181. B : Exactement.
182. K, B, T : Bonjour...
183. V : Bonjour.
184. B : Bon question suivante.
- [Inaudible puis discussion non transcrite pour décider de celui qui va rédiger]
185. K : Non mais le fait que si tu crois pas au paradis donc...
186. T : Oui.
187. B : En fait, y a un problème de présupposés.
188. ? : ben ouais, c'est ça.
189. K : Même si t'es chrétien, est-ce que les animaux ils vont au paradis quoi ?
190. B : Ouais, ouais. C'est vrai.
191. B : C'est n'importe quoi, cette question.
192. T : Moi je dis y a 45%...
193. B : Mais arrête tes conneries.
194. T : Non y a 75% de chances pour qu'ils y aillent pas quand même.
195. T : Parce que si tu es pas chrétien/
196. B : Mais arrête ! le type !
197. T : Mais si t'es chrétien, y ont une chance sur deux.
198. B : On peut pas répondre à ça ! Pour les animaux déjà, il faut savoir/
199. T : Faut faire des statistiques.
200. B : Déjà, il faut savoir si les animaux, ils peuvent aller au paradis. Ensuite, il faut savoir ce que c'est que le paradis, faut savoir si on peut y aller. Y a plein de trucs, on peut pas savoir. Et si tous les animaux... Enfin c'est... Impossible à répondre.
201. K : Après y a encore le problème des champignons qui sont ni animaux, ni végétaux. Et les éponges.
202. B : Eh, les éponges, les coraux.
- [Rires]
203. B : Bon d'accord.
204. K : Mais là, y a pas de problèmes. Pourquoi tu irais au paradis si y en a pas ?
205. B : Mais tu me casses les... Bon ? Mais après c'est pareil tout le problème.. Qu'est-ce qu'on en sait ? Est-ce que j'ai fait une thèse sur euh/
206. K : Le paradis.
207. B : Sur la Grèce.

208. K : La Grèce ou le Paradis.
209. B : Médiévale.
210. K : Ben j'en sais rien. Je connais pas la Grèce médiévale.
211. B : Moi non plus !
212. K : j'y ai pas vécu, j'y suis jamais allé.
213. B : Une connaissance. En fait, je vois le truc.
214. T : Vas-y.
215. B : En fait, c'est pas la question. C'est un truc pervers.
216. K : Pourquoi la guerre, elle serait légendaire si ils l'ont vécu ?
217. B : La vraie réponse aux premières, c'est qu'il y a un problème de transposition en français... Du français à maths. Après y a un problème de présupposés...
218. ? : Voilà exactement.
219. B : Ensuite pour le troisième, y a un problème de connaissances et pour le quatrième y a un problème de définir [Inaudible]/
220. K : Non, y a un problème sur le fait que c'est légendaire. Même si ils racontent des guerres, si ils les ont vraiment faites, elles sont pas légendaires. Parce que le principe des légendes c'est que ça existe pas.
221. B : Remarque très pertinente.
222. T : On recommence.
223. B : Oui, c'est vrai.
224. K : Le principe des légendes, c'est que ça existe pas. Donc si une guerre est légendaire, elle a pas existé.
225. B : Mais on s'en fout « tous les poèmes de la Grèce médiévale ».
226. T : En plus, ils les décrivent pas, ils les racontent.
227. K : Donc ils décrivent pas une guerre légendaire.
228. T : Oui, voilà.
229. B : Ben si tu peux décrire une guerre légendaire. Je vois pas le problème.
230. K : Les poèmes sur la guerre de Troie, c'est pas légendaire.
231. B : Ben si...
232. K : Vu que elle a existé la guerre, elle est pas légendaire.
233. B : Tu peux faire une guerre légendaire, y a pas que la guerre de Troie.
234. T : Y peuvent avoir inventé une autre guerre...
235. K : Ou alors légendaire dans le sens ou tellement connue que...
236. B : Légendaire, ça peut être... Inventée ou... On en sait rien, ça.
237. T : A mon avis, ça, c'est fait pour se rendre compte à quel point c'est compliqué de faire un énoncé où on comprenne quelque chose.
238. B : Exactement ! Être prof, c'est pas facile.

[Rires]

239. T : Tu m'étonnes.

240. B : Bon, ben on arrête là.

[...]

241. B : Vas-y écrit pour la deuxième. Moi je pourrais te répondre à ça.

242. T : De quoi que/

243. B : La deuxième.

244. T : Que c'est un problème de présupposés.

245. B : Tous les animaux... Pour le deuxième, y a un problème de...

246. T : Oui déjà/

247. B : Y a un problème de présupposés, de présupposition.

248. T : Ok.

249. K : Deux. On peut pas répondre non plus, c'est ça.

250. B : Mais on peut répondre.

251. K : Y a ambiguïté sur...

252. B : On peut répondre en fait à aucune. C'est ça la vraie ruse. [B s'adresse maintenant à une personne de l'autre groupe] Je te promet qu'on a pas de réponses.

253. B : Tous les animaux iront au paradis... Pour l'instant, j'ai encore rien écrit sur ma feuille.

254. K : Je mets « à cause du présupposé de l'existence du paradis ».

255. B : Ben déjà/

256. K : A cause de l'existence présupposée du paradis.

257. B : Ben ouais, déjà, si le paradis existe, ensuite si les animaux auraient le droit d'aller au paradis. Ensuite tout : est-ce que un homme est un animal ? Enfin y a des questions sans fin quoi. Tu peux pas en finir.

258. B : Y a pas de point, gros problème, gros gros problème, y a pas de point sur les énoncés.

259. K : Présupposé du paradis qui n'existe pas pour tout le monde. C'est ça.

260. T : Et puis même pour les gens pour qui il existe, ça a pas forcément la même signification.

261. T : On avance, là je le sens, on avance...

[Inaudible]

262. K : Ouais, par exemple, pour moi...

263. B : Tu dis quoi ?

264. K : Le paradis...

265. T : Oui c'est bon on a compris !

266. B : On a compris quoi. Y faut du raisin et un peu de sucre. Ok.

267. K : Si vous voulez, pour moi, y a le primeur/

268. B : Moi, c'est que le sucre... Tu met quoi dedans ?

269. T : Le petit gris. J'en ai encore d'ailleurs.
270. K : J'ai encore pas goûté celui-là.
271. B : Oh. Ouvert ou pas ?
272. T : Hein ?
273. B : Il est ouvert ?
274. T : Dans un bouteille comme ça...
275. K : Dans une bouteille en plastique.
276. B : Ah oui, celui que j'ai vu chez [inaudible].
277. T : Trop valorisant dans une bouteille en plastique.
278. K : Ouais tu t'en fous quand tu sais ce que c'est.
279. B : C'est bon vous avez fini ?
280. K : Non attends. Pour toutes les personnes prenant...
281. T : Non t'as dit que tu as pas goûté encore.
282. B : D'accord.
- [Inaudible]
283. B : Troisième. Ca vous va d'écrire ?
284. K : Troisième, tu mets le fait que ça peut pas être légendaire si ça a été vécu.
285. B : Mais c'est pas ma remarque, ça. Moi je dis que/
286. K : Non mais faut qu'on soit d'accord. C'est écrit au tableau.
287. B : Oui, c'est vrai.
288. K : Moi je vote, je suis pas d'accord.
289. B : Et t'as pas précisé que je dis « est-ce que l'homme est un animal ? ».
290. K : Ouais mais, vas-y, écrit le. Moi, je suis d'accord. Je suis d'accord avec ça mais j'avais oublié.
291. T : Ben vas-y rajoute le alors.
292. B : Non, c'est vous qui écrivez.
293. T : Non, c'est pour montrer que tu as contribué.
294. B : C'est mon crayon et c'est toi qui écris.
295. K : D'accord. Donc j'écris quoi en plus... [Inaudible]
296. B : Non : « est-ce que tous les animaux/
297. K : le méritent ».
298. B : Entre guillemets.
299. K : Genre, le termite que tu vas croiser comme l'aigle royal.
300. B : Exactement, et comme l'homme. D'où la problématique : l'homme est-il un/
301. T : Mais oui, mais l'homme, on sait bien que tout le monde ne va pas au paradis.

302. K : Voilà donc. C'est vite fait/
303. T : Du coup... Contre exemple.
304. K : Contre exemple, Satan, ah non c'est un ange, merde.
305. B : C'est pas con ça.
306. T : Non mais ouais.
307. B : L'homme, attends, l'homme est un animal.
308. T : Ça c'est sûr. Ca c'est sûr.
309. B : Ça dépend.
310. T : On peut considérer ça quand même. Je pense.
311. B : Ça dépend, c'est plus que variable.
312. T : C'est plus... Mais non !
313. B : Ça dépend à quelle sauce tu.../
314. T : L'homme est un mammifère. Les mammifères sont des animaux.
315. B : D'accord, d'accord.
316. T : Donc l'homme est un animal.
317. B : L'homme est un animal, d'accord. Mais bon enfin, ça dépend de la façon dont tu le classes.
318. T : Ah ouais, je crois franchement, je suis d'accord pour dire que c'est faux.
319. B : Attends. Si on considère que l'homme est un animal !
320. K : Mais bien sûr, tu veux que ce soit quoi ? Un être supérieur doté de supers pouvoirs ?
321. B : Ça dépend si...
322. T : Un être supérieur aux animaux.
323. B : Y a pas de, y a pas de...
324. K : Bien sûr que si.
325. B : Il faut supposer que l'homme est un animal.
326. K : Ben oui, mais c'est, tu veux que ce soit quoi d'autre ?
327. B : Eh moi, j'en sais rien.
328. T : Bon d'accord, vas-y. Suppose que l'homme est un animal, cependant, ...
329. B : Raye tout ça.
330. ? : Non mais.
331. B : On a changé d'avis entre temps.
332. K : Moi jamais, cependant, et on change après.
333. B : Et au fait, on a pas fait le monde imaginaire !
334. T : Ah ouais.
335. B : D'un côté, si on a pas fait... Il est chiant cet exo 1.
336. K : Et décrire un monde dans lequel elle aurait une valeur de vérité différente.

337. B : Pffou, c'est nul.
338. K : Mais là, y a pas besoin d'inventer le monde, il existe déjà.
- [Rires]
339. K : Ben c'est vrai.
340. T : Un monde où tout le monde irait au paradis.
341. B : Ah c'est génial.
342. K : Le monde des petits anges. Ils y sont déjà tous.
343. T : Un monde sans animaux ?
344. T : C'est vrai, si y a pas d'animaux, tous les animaux vont au paradis.
345. K : Sur la lune personne va au paradis hein.
346. T : Ouais mais tout le monde va au paradis aussi, tu peux le dire.
347. K : Ben non parce que y a personne.
348. T : Oui mais tous les animaux qui sont sur la lune vont au paradis.
349. K : Mais y a pas d'animaux sur la lune.
350. B : Mais arrêtez, arrêtez...Dépêchez-vous, faut qu'on le finisse celui-là.
351. T : Ouais, c'est clair.
352. B : Il est vraiment insupportable.
353. K : Je mets que si on suppose que l'homme est un animal alors c'est faux parce que certains hommes vont en enfer.
354. B : Exactement.
355. T : Pour ça, il faut supposer que l'homme est un animal et que... Euh...
356. B : Le paradis existe.
357. T : Le paradis existe et que y a des hommes qui vont en enfer.
358. K : Et que l'enfer existe aussi.
359. B : Et que exactement et que l'enfer existe.
360. T : Du coup, voilà, ça fait un contre exemple mais c'est limite quand même.
361. B : Mouais, c'est un peu limite.
362. B : C'est assez spé comme exo.
363. K : Et là c'est pareil ? Y a des trucs qu'on connaît pas.
- [Inaudible]
364. T : Par contre, la trois, je trouve ça bidon.
365. B : Mais tu réponds qu'on a pas les connaissances. Qu'est-ce qu'on en sait ?
366. B : Il est possible, c'est vrai que ça paraît improbable que tous les poètes aient écrit sur... Mais dans un monde parfait...
367. T : Mais tous les poèmes de la Grèce médiévale... Mais non, ça c'est faux !!

368. B : Mais pourquoi ??
369. T : Parce que c'est tout les poèmes !!
370. B : Oui, c'est bien ce que je dis, c'est improbable.
371. T : Oui euh, non.
372. K : Non mais t'as pas de preuve.
373. B : C'est improbable, mais ça pourrait très bien exister.
374. T : Hey. Tu connais pas un poème de la Grèce médiévale ? Qui parle de je sais pas...
375. B : Mouais... Grèce médiévale, mais ça existait même plus à cette époque.
376. T : Mais la Grèce existe encore, hein.
377. B : Mais c'est n'importe quoi...
378. K : Moi j'en sais rien c'est quand la Grèce médiévale.
379. B : C'est une civilisation déchue, devait y avoir trois pigeons là-dedans.
380. K : On peut mettre qu'on peut pas répondre à cause de/
381. B : L'âge d'or de la Grèce c'est...
382. T : Mais il est probable que, il est fortement probable que...
383. K : C'est faux.
384. T : Avec un contre exemple que...
385. K : On peut l'inventer hein.
386. B : Et tu connais la Grèce médiévale ?
387. K : Non mais je connais pas.
388. B : Comment tu veux faire un contre exemple ?
389. K : je sais pas. C'est comme si tu disais qu'il y a un poème chinois qui raconte autre chose que/
390. T : Que ce qu'il se passe en Chine.
391. K : Que une guerre légendaire.
392. B : Hey. On sait pas hein. Rigoureusement je te rappelle qu'on fait de maths.
393. T : Oui mais rigoureusement/
394. B : Rigoureusement, on en sait rien.
395. T : C'est pour ça que je dis il est probable, il est très probable...
396. B : Là, tu fais de la probabilité.
397. T : Ouais. Sachant qu'il y a eu un certain nombre/
398. B : Je suis d'accord ! Je suis d'accord ! Que par rapport à notre culture...
399. K : Mais ça, on l'a fait en cours ça.
400. B : Quoi ça ?
401. K : C'est ce qu'on avait démontré en cours ça.
402. B : Quand ça.

403. K : que $F + G$, ça faisait $F \cup G$.
404. T : Oui.
405. B : Ah mais oui.
406. K : Ça on va le montrer en trois minutes. Trois minutes top chrono, ça.
407. B : Vous l'avez montré en trois minutes, moi je devais faire autre chose.
408. T : Vas-y on fait la trois, là. B, c'est à toi d'écrire.
409. B : Quoi la trois ?
410. T : Celle-là, là.
411. B : Le coup de la Grèce !
412. K : Ecris qu'on ne peut pas répondre à cause de nos connaissances limitées en grecque anc/
413. T : En grecque médiéval.
414. B : En grecque ancien [Ironique].
415. K : Nous on connaît pas, on peut pas répondre.
416. B : Attends, je mets quoi ?
417. B : Nous n'avons pas de réponses...
418. K : On connaît pas notre cours sur la Grèce médiévale donc on peut pas répondre.
419. B : Exactement.
420. T : Mais que toutefois il est probable que/
421. K : Tu peux marquer que T suppose que c'est faux.
422. B : Non c'est vrai qu'au niveau des probabilités...C'est nul quoi, on est en maths c'est pas, pas acceptable comme raisonnement.
423. T : Je te l'accorde.
424. B : Tous les poèmes de la Grèce ... Donc on dit quoi ?
425. K : Tu mets qu'on peut pas répondre, on en connaît aucun. On va pas dire un truc comme ça alors qu'on connaît pas.
426. B : [Il écrit ce qu'il dit] On ne peut pas répondre par manque de connaissances. C'est quoi après ?
427. K : Limitées ou très restreintes.
428. T : Tu peux mettre toutefois euh.
429. K : Un instinct nous porte à croire que c'est vrai mais on n'en sait rien.
430. T : Sur les poèmes de la Grèce médiévale. C'est pas grave, ils ont l'énoncé.
431. K : T'as juste à rajouter « poèmes ».
432. B : Sur les poèmes de...
433. K : Tu crois que si on mets « cf. cours », on mets « cf. TD ».
434. T : On s'est tous mis d'accord, on met « cf. TD ».
435. B : D'accord donc ça, c'est bon. Qu'est-ce qu'on a dit, y avait une autre remarque.

436. T : Oui. Toutefois, il est probable...
437. B : Toutefois.
438. T : Certains poèmes de la Grèce médiévale...
439. K : Non que la plupart, faut mettre, parce que sinon pas tous.
440. T : Non mais que certains poèmes, non mais contre exemple.
441. K : Il est à qui ce stylo ?
442. T : Il était sur la table quand on est arrivé.
443. B : Il est probable que tous les poètes n'aient pas écrit sur...
444. T : Que tous les poèmes ne parlent pas de/ Non, c'est poèmes
445. B : Ouah, ok.
446. T : Que tous les poèmes ne parlent pas de, d'une guerre légendaire.
447. B : Ne décrivent [*B* insiste] pas une guerre légendaire.
448. T : Mais en plus, c'est une guerre légendaire donc euh... C'est toujours le même problème. Est-ce qu'elle est unique ou pas ?
449. B : Ne décrivent pas une guerre imaginaire légendaire. C'est fou ça, ça m'énerve, le truc ça m'énerve.
450. B : Un caporal peut...
451. T : Moi je dirais...
452. B : Moi je dis c'est vrai.
453. T : Oui, c'est vrai
454. K : Moi, je pense que c'est faux.
455. T : moi je dis que c'est vrai.
456. B : Pourquoi tu dis que c'est faux ?
457. K : Parce que c'est un caporal d'où et un général de quoi ?
458. B : Ah si c'est pas le même. Tu crois que le « un caporal », ça n'a pas la même référence que « un caporal » ?
459. K : Ben non, il peut être caporal aux Etats-Unis et général en France. Ben là, il peut pas.
460. T : Mais oui, mais avec les informations qu'on a, on peut pas...
461. B : Mais non eh eh... C'est « peut », « peut »...
462. K : Ben ouais, mais il peut pas. Comment tu veux que le gars qui soit caporal aux Etats-Unis, il devienne général en France.
463. B : Mais c'est toujours pareil.
464. K : Ou alors, qui soit dans marine, il devienne dans un truc de terre perpette je sais pas trop où ? Tu en sais rien.
465. T : Mais oui, mais avec les informations qu'on a, on peut pas supposer que...
466. B : Non mais au niveau, si on le prend au niveau linguistique, on prend cette proposition là hop, celle là.

467. T : Tu peux pas nier que c'est pas équivalent.
468. B : Elles sont vraiment pareilles.
469. K : Tu en sais rien.
470. B : Même au niveau des lettres, c'est équivalent.
471. T : C'est équivalent
472. K : Tu en sais rien.
473. B : Ça dit la même/
474. K : Y a pas assez d'informations.
475. B : Oui, je suis d'accord.
476. K : Qui te dit que là, il parle du même caporal que ici ?
477. B : Si tu... Ouais, ouais.
478. K : Peut être qu'il parle d'un gars et là, un autre.
479. B : Mais regarde, mais non, non, non. Regarde, non, non, non. C'est exactement comme si tu faisais euh, a inférieur ou égal à b si et seulement si a inférieur ou égal à b .
480. K : Ben non.
481. B : Ben si.
482. K : Ben non.
483. T : Si, c'est exactement pareil.
484. B : C'est exactement pareil parce que le a , c'est pas forcément le même enfin.
485. K : Ben voilà !
486. B : Mais si, c'est exactement pareil.
487. B : Ouais mais communément en maths tu dis ouais d'accord, en maths tu fais d'accord a c'est a , a c'est a , ben là, a c'est a et a c'est a .
488. T : Là, je suis d'accord avec B .
489. B : Moi je pense que ça, c'est pas mal comme euh...
490. K : Ben je pense que c'est faux parce que y a aucun endroit où on dit que ça c'est pareil que ça et que ça c'est pareil que ça.
491. B : Ouais mais là, c'est pareil, y a aucun endroit où on dit que a est égal à a .
492. K : Ben ouais ! Et ben ça peut très dire a là, et changer après !
493. B : Mais attends, arrête de nous prendre la tête. En maths, tu écris ça, tu comprends que a est égal à a quoi.
494. K : Ben non.
495. B : Je sais pas moi hein.
496. K : Tu pousses un peu plus loin, tu as aucune chance que ce soit la même chose.
497. B : A toi de voir.
498. T : Franchement, je suis d'accord avec B .

499. K : Moi, je suis pas d'accord avec vous.
500. T : Moi, je suis d'accord avec B.
501. K : Au niveau, là encore ça va, mais là, c'est du français. Le français, c'est un peu bizarre quoi.
502. T : Je te l'accorde.
503. B : Moi je dis même au niveau des lettres enfin des... [Inaudible]
504. K : Moi, je pense que c'est faux.
505. B : Faux, je sais pas. Moi je dis/
506. K : On a pas assez d'information pour préciser si le caporal général, c'est même place, même endroit, même personne, machin.
507. B : Ouais, c'est vrai. Non en fait, y a plusieurs réponses possibles.
508. K : Imagine que tu le connais le caporal... Le caporal je sais pas qui/
509. B : Non c'est pas « le », c'est « un » caporal.
510. K : Ouais ben alors... Même, c'est pareil.
511. T : Imagine tu connais un caporal.
512. B : Donc, tu ne le connais pas. Non, tu ne le connais pas. C'est un caporal anglais...
513. K : Un caporal, et ça, ça peut être un autre caporal/
514. B : Français.
515. K : Mais pas le même tu vois. Ça voudrait dire que les deux, ils doivent devenir général en même temps sinon ils peuvent pas. Ça a aucun sens, ça veut rien dire.
516. B : Bon c'est pareil, on va pas se prendre la tête dix jours sur ça. Y a pas de réponses.
517. T : Un caporal ça enfin/
518. B : Arrête T, c'est pas la peine, y a pas de réponses... Faut juste soulever le truc qui pose problème pour trancher.
519. K : C'est la précision de l'énoncé, à tous les coups.
520. K : Ben oui, c'est comme les trois autres, mais c'est fait exprès, c'est fait exprès c'est obligé.
521. B : On a jamais suivi l'énoncé ne serait-ce qu'une seule fois.
522. K : On a répondu à aucune question pour l'instant.
523. B : On a répondu à aucune question.
524. K : Moi j'avais une proposition mais vous l'avez pas acceptée.
525. B : Mais non.
526. T : C'est bon ça.
527. B : Mais n'importe quoi !!
528. K : Mais en plus c'est vrai, c'est pas des bêtises.
529. T : En plus ça aurait pas été un paradis, mais du paradis.
- [Rires]
530. B : Du paradis en bouteille... Du paradis en bouteille, c'est pas possible.

531. K : Mais non, tu peux dire un paradis comme tu peut dire une [Inaudible].
532. B : On s'en fout.
533. K : Moi je dis on en sait rien.
534. B : Ben d'un niveau.
535. T : Qu'est ce que t'écris mal B.
536. B : Merci, je sais.
537. K : Tu peux écrire que si on suppose que les deux caporaux et les deux généraux sont les mêmes alors ça marche. Mais si on sait pas...
538. B : Mais regarde, typiquement là en maths, quand tu fais a inférieur ou égal à/
539. K : Mais c'est pas écrit la même chose.
540. T : Mais si, c'est exactement pareil.
541. K : Ben non.
542. B : Arrête de faire de la provoc.
543. K : Faut voir plus loin que le texte, tu vois.
544. B : Arrête de faire de la provoc.
545. T : Mais toi, tu vas un peu trop loin, toi.
546. B : Non parce qu'en fait, on suppose que dans un même énoncé, un même élément désigne/
547. T : La même chose.
548. B : Un même alias qui désigne le même élément.
549. K : Ben ouais, mais là c'est pas un énoncé, c'est une phrase...
550. B : Mais on suppose que ce qu'il y a derrière un caporal/
551. T : Si tu dis un chien est bleu un chien est noir [Inaudible]
552. B : Exactement, on suppose que ce qu'il y a derrière un caporal/
553. T : C'est la variable « un caporal ».
554. B : Ça reste le même durant tout l'énoncé.
555. K : T'es pas sûr, tu le supposes mais c'est pas forcément vrai.
556. T : Kevin t'es chiant là.
557. K : Non attends, je suis en train de philosopher.
558. T : Le truc c'est qu'on est pas venu pour/
559. K : Ben oui, moi je propose un truc, on arrête pas de s'engueuler.
560. T : Faut dire « on suppose que un caporal égal un caporal et un général égal un général » ?
561. K : Non, tu dis que c'est le même tout le long de la phrase. Tu dis que la personne caporal est la même et que la personne général est la même.
562. B : Et que a est égal à a !
563. K : Non mais c'est pas forcément la même chose, t'en sais rien.

564. B : Même dans les EV on ne peut pas démontrer que a est égal à a .
565. T : Si c'était une personne précise ce serait marqué le caporal.
566. B : Non mais là, oui, oui, c'est vrai.
567. K : Là, c'est pas une personne précise.
568. B : En fait, tout se joue sur c'est « un caporal », « chaque », « une étoile », « tout », tous les enfin c'est...
569. K : Ben oui !
570. B : C'est, c'est de la... C'est de la logique quoi.
571. K : C'est un problème de français.
572. B : Bonne chance pour la rédaction hein ! On est avec toi, on est avec toi...
573. K : C'est quoi les questions d'après ?
574. T : Que un caporal égal...
575. B : Un caporal.
576. K : Non faut mettre « le » caporal et ... C'est tous les mêmes.
577. B : Un caporal y, un caporal, ouais, ouais.
578. T : Non mais c'est général aussi/
579. B : Quoi ?
580. T : Egal général, égal un caporal, égal général.
581. K : Ben non.
582. B : Mais n'importe quoi, on dit un caporal égal un caporal et un général égal un général.
583. T : Ouais.
584. K : Un caporal petit un.
585. B : Un caporal indice un.
586. K : Peut devenir pareil/
587. T : Général
588. K : Petit deux.
589. T : Petit un.
590. K : Y a deux personnes qui sont les mêmes alors qu'on en sait rien.
591. B : Allez suite et [Inaudible].
592. B : [Rires, B écoute l'autre groupe] Ça a l'air sympa encore après.
593. B : [à T qui rédige] Mais n'importe quoi.
594. T : Alors...
595. B : Mais t'es con ou quoi ? c'est un général un égal un général deux.
596. T : Ben oui.
597. K : Mais non !

598. B : Mais si, bien sur que si.
599. K : C'est lui qui devient lui.
600. B : Ha.
601. T : Il permute.
602. K : Et lui qui devient lui.
603. B : Mais c'est pas ce qu'on disait là.
604. T : Du coup si un caporal/
605. B : Mais n'importe quoi ! Mais n'importe quoi : peut devenir ça veut toujours pas dire que un caporal est un général.
606. T : Mais oui, mais s'il devient, c'est la même personne t'es d'accord ?
607. B : Ben non, il est plus caporal.
- [Rires]
608. T : Alors à ce moment là, il faut considérer que c'est quatre fois la même personne.
609. B : Mais n'importe quoi.
610. B : Moi je te dis le plus simple, c'est de considérer les propositions proposition 1 « un caporal peut devenir un », proposition 2/
611. T : Mais oui, mais c'est pas forcément le même, ça peut être un certain caporal *a* et/
612. B : On en revient toujours à la même question, on en revient toujours à la même question.
613. K : Tu leur donnes un petit nom, tu l'appelle Bob et Jojo tu vois.
614. T : Ok.
615. K : Jojo le caporal peut devenir général si bob il peut devenir général... C'est pas vrai.
616. B : Faut trouver le problème. Qu'est-ce qui nous pose problème pour trancher... C'est ça qu'il faut voir.
617. T : Ouais non, en fait t'as raison en fait, c'est comme là *a* et *a*.
618. B : Mais oui, ça c'est exactement ça.
619. T : Et *b* et *b*... Du coup.
620. K : Non, c'est pas la même chose. Parce que là c'est un truc plutôt math tu vois et là, tu as une règle présupposée qui dit que celui-là il change pas le long de ta phrase alors que là, tu as aucun truc qui dit... Ça peut très bien changer dans une phrase française. Un chien, ça peut être un chien au début puis il peut changer à la fin. Alors que dans un truc, tu mets une transition, comme ça tu sais très bien que ta lettre elle changera pas comme ça à moins que tu le précises. Alors que là, tu sais pas.
621. T : Bon.
622. B : Joker. On change d'exo.
623. T : Bon alors, je mets un caporal un égal un caporal deux. C'est ça ?
624. B : Pfff.
625. T : C'est merdique.

626. K : Tu mets un contre exemple avec Bob et Jojo aussi... Ça marche très bien en plus.
627. T : Mais si parce que t'es d'accord que si Bob, il peut devenir général alors Jojo aussi, c'est exactement équivalent
628. K : Mais c'est pas équivalent, tu en as un qui peut très bien mourir et l'autre devenir général quand même.
629. T : Oui, mais il aurait pu.
630. K : Ouais, mais c'est pas équivalent.
631. T : Non mais s'il est vivant. Non parce que si tu prends un caporal mort...
632. B : Vous êtes pénibles, ça va mal finir.
633. K : Tu en as très bien un qui peut avoir une promotion mais pas l'autre, l'autre il est mauvais il deviendra pas général.

[Inaudible]

634. T : C'est complètement infaisable.
635. B : Exactement, ouais.
636. K : Tu peux mettre après moult tergiversations, nous avons trouvé un contre exemple.
637. T : Quel est ce contre exemple ?
638. B : C'est quoi ton... ?
639. T : C'est avec bob mort, c'est ça !
640. K : Ben non pas forcément.
641. B : Bob est un caporal, George est aussi un caporal.
642. K : Voilà.
643. T : Ah ouais.
644. K : George, il est pas obligé d'être caporal en même temps que l'autre.
645. B : non je dis c'est un problème de linguistique ça encore.
646. K : Ben oui.
647. T : Non mais c'est vrai, s'il a une promotion.
648. K : En plus, c'est pas des conneries hein. Tu en as un qui a une promotion, qui devient général. L'autre pourquoi il deviendrait général aussi ? S'il est mauvais il changera pas de grade.
649. B : Non mais peut devenir c'est pas devient !! C'est une éventualité.
650. K : Ben même.
651. B : Mais c'est vrai que quand tu es caporal, tu peux devenir général.
652. K : Mais c'est pas parce que l'autre, il peut devenir aussi que l'autre/
653. B : Mais ça ne veut pas dire nécessairement que tu vas devenir.
654. T : Oui mais c'est pareil, si t'as un promotion, tu peux devenir général.
655. B : Oui, c'est bien ce qu'on dit.
656. K : Et puis, s'il y en a un qui est floué/

657. T : Alors que si tu as pas de promotion/
658. B : Avec des « peut », tout est possible.
659. T : Moi je dis, on fait une réponse en deux parties. 1) Mathématiquement parlant c'est équivalent parce que c'est les mêmes termes et 2) En français, c'est pas équivalent.
660. T : Voilà, on met ça.
661. K : En français parce que c'est trop compliqué, ça relève de la philosophie, en fait, ou de la traduction ça peut être aussi.
662. B : Une rédaction propre.
663. K : Si on a l'esprit un peu tordu, ça marche plus.
664. T : Je parle de variable ou...
665. K : Non, non, non.
666. T : je mets que les deux propositions sont identiques donc elles sont équivalentes. T'es d'accord ?
667. K : Ouais moi je suis d'accord.
668. B : Au début, je t'avais dit « est-ce que l'égalité implique nécessairement l'équivalence » !
669. K : Ouais mais non, j'en sais rien.
670. B : Mais je pense que c'est faux ! Parce que l'équivalence c'est avec, c'est pas forcément enfin... Comment dire...
671. B : Bon je me comprends, c'est un peut compliqué à expliquer mais...
672. T : Mais si, si tu as a égal b , ça équivalait forcément à a égal b .
673. K : Mais ça dépend !
674. B : Mais tu diras jamais que a est équivalent à un. Tu diras qu'il est égal à un.
675. K : Ben oui, parce que ça veut rien dire.
676. B : C'est pas la même nature.
677. K : Déjà le mot équivalence, ça veut rien dire.
678. T : Mais si tu as des propositions qui sont identiques...
679. B : Bon tu écris n'importe quoi, on passe à l'exo suivant.
680. K : Mais on a dit ça, ça, c'est le égal des propositions... Tu dis pas qu'elles sont égales.
681. T : Oui voilà, c'est pas le égal des réels.
682. K : Tu dis qu'elles sont équivalentes mais elles sont égales.
683. B : Egal en français...
684. T : Non, sont identiques donc elles sont équivalentes.
685. B : Bon je passe au suivant parce que... Ça me saoule un peu.
686. T : Après y a une logique à suivre, c'est déjà mieux.
687. K : Quoi que c'est pas sûr.
688. T : Y a un piège quelque part.

689. B : Oh y a un point qui est mal placé là !
690. T : Y a un espace avant le point, c'est pas normal, c'est louche.
691. T : Après je mets « cependant en français les » ...
692. B : Attends tu me caches l'exo là.
693. T : Non, non, non. Tu commences pas l'exo qu'on va faire après !!
694. K : [il dicte pour T] Cependant, la traduction du français pose d'énormes problèmes.
695. B : A propos des autres, putain ils sont vachement loin.
696. K : Ouais mais ils ont moins réfléchi.
697. B : Et on est que trois !
698. T : T'inquiète, le cerveau il tourne...

Annexe 13 : Version originale de la preuve de Liouville

6.

annule, cela est la même chose que de dire que $f'(x) = 0$.

On dit qu'une fonction est constante si elle a la même valeur en tout point de son domaine. On écrit $f(x) = c$.

Si $f(x) = c$, alors $f'(x) = 0$ et $f''(x) = 0$ et ainsi de suite.

Soit $f(x)$ une fonction dérivable. On a $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Par conséquent $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \epsilon$

On dit qu'une fonction est croissante quand sa dérivée est positive. On écrit $f'(x) > 0$.

Supposons que $f'(x) > 0$ dans un intervalle (a, b) . Alors $f(x)$ est croissante dans cet intervalle.

Si $f'(x) < 0$ dans un intervalle (a, b) , alors $f(x)$ est décroissante dans cet intervalle.

Si $f'(x) = 0$ dans un intervalle (a, b) , alors $f(x)$ est constante dans cet intervalle.

Quand la dérivée est constante nulle, pour...

7.

On dit qu'une fonction est continue en un point x_0 si elle vérifie les conditions de continuité.

Si $f(x)$ est continue en x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

On dit qu'une fonction est dérivable en un point x_0 si elle admet une tangente unique en ce point.

Si $f(x)$ est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0)$ est la pente de la tangente.

On dit qu'une fonction est convexe si sa dérivée est croissante.

Si $f'(x)$ est croissante, alors $f(x)$ est convexe.

Si $f'(x)$ est décroissante, alors $f(x)$ est concave.

On dit qu'une fonction est bornée si elle est comprise entre deux bornes.

Annexe 14 : Une preuve de Bertrand (1864) qui reprend les arguments de la preuve de Liouville

à l'infiniment petit principal tend vers une limite finie lorsqu'ils s'approchent tous deux indéfiniment de zéro.

On nomme *infiniment petit du second ordre* tout infiniment petit dont le rapport au carré de l'infiniment petit principal tend vers une limite finie.

On nomme en général *infiniment petit de l'ordre n* un infiniment petit dont le rapport à la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'infiniment petit principal a une limite finie.

Il ne faut pas croire que tout infiniment petit soit nécessairement d'un ordre déterminé; nous rencontrerons en effet des infiniment petits tels, qu'aucune puissance de l'un d'eux ne soit du même ordre que l'autre. Soient α et β de tels infiniment petits: le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ ne peut pas avoir une limite finie, car sans cela ils seraient de même ordre. Lorsque cette limite est nulle, on dit que l'ordre de α est supérieur à celui de β , et c'est le contraire si la limite est infinie.

Il résulte évidemment des définitions précédentes que si deux infiniment petits α et β sont l'un de l'ordre n et l'autre de l'ordre n' , leur produit $\alpha\beta$ est de l'ordre $n + n'$.

2. Soit $\varphi(x)$ une fonction quelconque d'une variable x ; si l'on donne à x un accroissement infiniment petit h , que nous regardons comme infiniment petit principal, l'accroissement infiniment petit correspondant de la fonction, $\varphi(x+h) - \varphi(x)$, est un infiniment petit de premier ordre, et il ne peut y avoir exception que pour des valeurs particulières de la variable x .

Si, en effet, il en était autrement, le rapport $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ aurait, pour chaque valeur de x , une limite nulle ou infinie. Je dis que ces deux hypothèses sont inadmissibles.

Supposons d'abord que le rapport considéré ait constamment pour limite zéro, lorsque x reste compris entre certaines limites. Soient a et b deux valeurs de x choisies arbitrairement entre ces limites; partageons l'intervalle $b - a$ en n parties égales et nommons h la valeur $\frac{b-a}{n}$ de chacune de ces parties; posons:

$$(1) \quad \begin{aligned} & \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = E_1, \\ & \frac{\varphi(a+2h) - \varphi(a+h)}{h} = E_2, \\ & \dots\dots\dots \\ & \frac{\varphi(a+nh) - \varphi[a+(n-1)h]}{h} = E_n. \end{aligned}$$

Si n augmente indéfiniment, h tend vers zéro, et d'après notre hypothèse il en est de même de E_1, E_2, \dots, E_n . Cela posé, ajoutons membre à membre toutes les équations (1) après avoir multiplié par h les deux membres de chacune d'elles; nous aurons

$$\varphi(a + nh) - \varphi(a) = \varphi(b) - \varphi(a) = h(E_1 + E_2 + \dots + E_n).$$

Soit η la plus grande en valeur absolue des quantités E_1, E_2, \dots, E_n (η est infiniment petit), nous pouvons conclure de l'égalité précédente que $\varphi(b) - \varphi(a)$ est plus petit en valeur absolue que le produit $h \cdot n\eta$, c'est-à-dire (à cause de $nh = b - a$), que cette différence $\varphi(b) - \varphi(a)$ est moindre en valeur absolue que le produit $\eta(b - a)$ et comme η est infiniment petit, il est impossible que la différence $\varphi(b) - \varphi(a)$, qui ne dépend nullement de h , ait une valeur finie quelconque; cette différence est donc nulle, deux valeurs de la fonction φ , choisies arbitrairement, sont donc égales entre elles, par conséquent cette fonction est constante.

Il est démontré par là que les accroissements d'une fonction qui ne se réduit pas à une constante ne peuvent pas être des infiniment petits d'un ordre supérieur aux accroissements correspondants de la variable, si ce n'est toutefois pour des valeurs exceptionnelles de cette variable. On peut en conclure immédiatement que le rapport

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h}$$

ne peut pas non plus croître indéfiniment lorsque h tend vers zéro, ou, en d'autres termes, que l'accroissement h de la variable ne peut pas être un infiniment petit d'ordre supérieur à l'accroissement de la fonction.

Un peu de réflexion fait apercevoir l'identité de cet énoncé avec le précédent. Quand on considère, en effet, à la fois une fonction $\varphi(x)$ et la variable x dont elle dépend, rien n'empêche de désigner cette fonction par une lettre y et de regarder y comme une variable dont x est une fonction $\psi(y)$. Cette vérité acquiert une complète évidence si l'on regarde $\varphi(x)$ comme l'ordonnée d'une courbe ayant pour équation $y = \varphi(x)$: cette courbe étant construite, il est clair que l'on peut regarder l'abscisse de l'un de ses points comme fonction de l'ordonnée, tout aussi bien que l'ordonnée comme fonction de l'abscisse; et du moment qu'il est prouvé, d'une manière générale, que l'accroissement infiniment petit de l'une de ces quantités ne peut être d'un ordre supérieur à celui de l'autre, la proposition s'applique nécessairement à l'un et à l'autre, et l'on doit en conclure que les deux accroissements sont de même ordre.

3. Quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, le rapport $\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h}$ a, d'après ce qui précède, une limite finie lorsque h tend vers zéro; cette limite est une nouvelle

1.

Annexe 15 : Preuve du principe de substitution par Bertrand (1864)

être constamment nulle, peut tendre vers zéro pour une valeur particulière de la variable.

Substitution des infiniment petits.

11. Lorsqu'on emploie les infiniment petits, c'est presque toujours comme intermédiaires, et ils figurent dans les raisonnements, soit par leurs rapports qui ont des limites finies, soit par la somme d'un nombre indéfiniment croissant d'entre eux. Lorsque l'on a ainsi en vue la recherche de la limite d'un rapport ou de celle d'une somme, on peut souvent simplifier la question à l'aide du principe suivant :

Dans la recherche de la limite d'un rapport ou de la limite d'une somme, on peut remplacer un infiniment petit par un autre dont le rapport au premier ait pour limite l'unité.

Soient, en effet, α et β deux infiniment petits, et α' , β' deux autres, tels que

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1, \quad \lim \frac{\beta}{\beta'} = 1,$$

on a identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta},$$

et en passant à la limite, puisque $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta'}{\beta}$ ont pour limite l'unité,

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Soit maintenant

$$(A) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

une somme d'infiniment petits dont le nombre n augmente indéfiniment, à mesure qu'ils tendent vers zéro, de telle sorte que la somme converge vers une limite finie. Soient $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ d'autres infiniment petits, tels que

$$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1, \quad \lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1, \dots, \quad \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

Je dis que la somme (A) aura même limite que la somme

$$(B) \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n.$$

Soient, en effet,

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2, \dots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 + \varepsilon_n,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, étant par hypothèse des infiniment petits. On déduit de ces équations

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n.$$

Soit η la plus grande en valeur absolue des quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ (η est infiniment petit), il est clair que la différence

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

est moindre que

$$\eta (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

Or η tend vers zéro, et le second facteur a par hypothèse une limite finie, en sorte que les deux sommes (A) et (B) ont même limite.

12. Pour que deux infiniment petits α et β puissent être substitués l'un à l'autre, il suffit, d'après ce qui précède, que la limite du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ soit l'unité, en d'autres termes, il suffit que l'on ait

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit, ou, ce qui revient au même,

$$\beta - \alpha = \alpha \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la différence $\beta - \alpha$ soit infiniment petite par rapport à α . Le théorème (11) peut donc être énoncé comme il suit :

Deux infiniment petits α et β peuvent être substitués l'un à l'autre, et l'on peut négliger leur différence, soit dans la recherche d'une limite de rapport, soit dans celle d'une limite de somme, pourvu que cette différence soit infiniment petite par rapport à l'un d'eux.

Ce théorème, quelle que soit la forme que l'on donne à son énoncé, est d'un grand usage dans le calcul infinitésimal.

Emploi des infiniment petits dans la solution de quelques problèmes.

Détermination de la tangente à quelques courbes.

13. Nous montrerons immédiatement l'utilité des infiniment petits dans la solution de plusieurs problèmes de géométrie, et nous déterminerons d'abord la tangente à quelques courbes.

Pour déterminer en un point la tangente à une courbe, il faut, comme on sait, joindre le point de contact donné à un point voisin situé sur la même courbe, et chercher la limite de la direction ainsi définie lorsque le second point se rapproche indéfiniment du premier : en d'autres termes, et plus brièvement, il faut joindre le point de contact donné au point *infiniment voisin* de la courbe, l'expression *infiniment voisin* exprimant suffisamment le rapprochement indéfini de deux points considérés.

Le théorème suivant est souvent fort utile pour la détermination des tangentes.

I.

2

**Annexe 16 : Article de Liouville (1840)
sur la preuve de $(1 + 1/m)^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} e$**

Sur la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, m étant un entier positif qui croît indéfiniment;

PAR J. LIOUVILLE.

La démonstration dont on fait ordinairement usage pour prouver que cette limite a pour valeur le nombre $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots$ n'est pas suffisamment rigoureuse; elle suppose en effet que pour $m = \infty$, le produit $\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)$ se réduit à l'unité, ce qui est vrai quand n est un nombre déterminé indépendant de m , mais ne l'est plus quand on a par exemple $n = m$ ou $n = m - 1$, etc. On corrigera ce défaut à l'aide des considérations suivantes qui peuvent être souvent utiles, et que M. Lejeune-Dirichlet a heureusement employées dans un de ses Mémoires. En représentant par n un nombre entier aussi grand qu'on voudra, mais indépendant de m , et par θ , η des nombres positifs < 1 , on a

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n} \left(1 + \frac{\theta}{n}\right),$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)}{1.2 \dots n} \left(1 + \frac{\eta}{n}\right).$$

De cette dernière formule on conclut que

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n} \left(1 + \frac{\zeta}{n}\right) + \varepsilon,$$

ζ étant, comme η , compris entre 0 et 1, tandis que ε désigne un nombre qui, pour toute valeur déterminée de n , converge vers 0 quand m augmente indéfiniment. La différence entre e et $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ est donc exprimée par $\frac{1}{1.2 \dots n} \cdot \frac{\theta - \zeta}{n} - \varepsilon$, et l'on voit qu'elle peut être rendue plus petite que tout nombre donné en prenant d'abord n très grand, puis faisant croître m au-delà de toute limite. Donc, etc. Il est aisé de prouver que le même théorème a lieu quand m est négatif, fractionnaire ou irrationnel. Voyez sur ce point les ouvrages de M. Cauchy.

**Annexe 17 : Transcription des débats
du groupe d'étudiants de L1
travaillant sur la preuve adaptée du
texte de Liouville**

Groupe d'étudiants de L1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville :

1. M : Ca, c'est la même chose là.
2. T1 : Oui ça c'est le texte correspondant au..., à ce qu'il y avait, la preuve exacte donnée par Liouville. Ca a été un peu modifié mais c'est pratiquement la même chose.
3. N : Après on verra la 2^{ième} preuve ou ?
4. T1 : Comment ?
5. N : Après nous on verra la 2^{ième} preuve ou...
6. T1 : Oui après on en discutera. Donc là au début vous commencez par regarder un petit peu...
7. M : D'accord. Alors, en fait, il faut d'abord lire tout ça [la biographie de Liouville] et...
8. T1 : Oui. Vous pouvez lire rapidement. C'est simplement pour que vous ayez une idée de à quelle époque ça se situe etc.
9. M : D'accord.
10. T1 : Et après, ce qui est intéressant c'est de discuter de l'énoncé, qu'est-ce que vous en pensez...
11. M : D'accord.
12. T1 : Pour pas que vous tourniez sans arrêt les pages, je vous remets les consignes là.
13. M : D'accord. Merci.
14. [Un temps passe]
15. T1 : Vous échanger un peu vos lectures, ce que vous avez...
16. M : Ouais
17. N : Moi, j'ai pas encore lu la première.
18. T1 : Non, mais par rapport déjà à Liouville. Qu'est-ce que vous avez...
19. M : T'as lu ce qui...
20. N : Ouais j'ai lu.
21. M : Bon donc... Qu'est-ce qu'il y avait... Il faut présenter un peu le mathématicien. XIX^{ième} siècle.
22. N : Mais c'est un... Qu'est-ce qu'il faut dire en fait dessus ?
23. M : Hum ?
24. N : Qu'est-ce qu'il faut dire en fait dessus ?
25. M : Ben je sais pas. Qu'il est du XIX^{ième} siècle, contemporain avec ces mathématiciens là.
[Pause] Y a quelques théorèmes, quelques preuves, je sais pas quoi...
26. N : On en connaît pas beaucoup des théorèmes pff...
27. T2 : [au autre groupe Y, A1, A2] Est-ce qu'il est connu, est-ce que vous l'avez déjà rencontré...
28. M : [M et N ont entendu T2] Non, moi je connaissais pas.
29. N : Enfin, je connaissais de nom je veux dire. Je crois qu'il a fait un truc sur les nombres premiers, un truc comme ça.

30. M : D'accord. Moi je connaissais pas du tout.
31. T1 : Le but c'est aussi de préparer aussi un peu votre exposé. Vous aller faire un petit exposé, donc vous pouvez dire rapidement ce qu'a fait Liouville, qu'est-ce qu'il... [Inaudible]
32. M : Hum, d'accord. Donc, allez, c'est toi qui va présenter d'accord ?
33. N : Ouais !
34. M : Bon et...
35. N : [N entend l'autre groupe parler du théorème de Cauchy-Schwarz] Nous on a jamais vu un théorème de Liouville ?
36. T1 : Nous il est moins connu que l'autre auteur.
37. N : Il a pas fait un truc sur les complexes euh... La fonction $\pi(x)$ ou je ne sais pas quoi là...
38. M : Donc on fait 2-3 trucs pour présenter le mathématicien.
39. N : Ouais, donc on peut dire...
40. M : Donc on dit quand il est né, enfin les années de sa vie...
41. N : Ouais, aussi, on peut dire l'école qu'il a fait... Comme il a fait polytechnique. J'entends... [l'autre groupe] Ils parlent de Cauchy et il a fait polytechnique aussi...
42. M : Ouais...
43. N : Cauchy je crois.
44. M : T'as besoin de noter ou c'est bon ?
45. T1 : Là, vous avez d'autres indications sur Liouville. Par contre, je sais pas si c'est explicite.
46. N : [Inaudible]
47. T1 : Il y a un théorème qu'on lui attribue, c'est que une fonction holomorphe... Alors je sais pas si vous savez ce que ça veut dire une fonction holomorphe...
48. N : Oui, une qui prend des valeurs complexes.
49. T1 : Oui. Qui est dérivable et bornée... Et bornée dans tout le plan complexe est constante. De cela on en déduit le fait que le corps \mathbb{C} est algébriquement clos.
50. N : Oui.
51. T1 : Le théorème de d'Alembert. Je ne sais pas si vous le connaissez.
52. N : Ouais, ouais... On l'a vu euh...
53. T1 : Qui est antérieur mais qu'on peut déduire de ce théorème.
54. M : D'accord.
55. N : Ah les nombres de Liouville... C'est pas avec ça qu'on... Avec ça, on fait pas une construction des nombres réels ou un truc comme ça là ? Enfin...
56. T1 : C'est les suites de Cauchy ... ?
57. N : Il existe une suite je sais pas quoi...
58. T1 : Les nombres réels oui.
59. N : Non je crois que c'était avec les nombres réels... Ouais, enfin je sais plus. Je vois pas comment ça s'appelle... Partie entière de... De je sais plus trop quoi.

60. T1 : Vous savez ce que ça veut dire un nombre transcendant ?
61. N : Ouais. Il est solution d'aucun polynôme à coefficients réels.
62. M : Ouais.
63. T1 : Coefficients réels... Non...
64. N : Euh coefficients entiers. Je voulais dire coefficients entiers.
65. T1 : Vous connaissez des nombres transcendants ?
66. N : e et π .
67. M : Ouais j'ai entendu... Enfin pas très bien. Mais je savais qu'est-ce que c'est.
68. T1 : Non mais vous en connaissez des exemples ? Vous avez...
69. M : Ben π et je sais pas quoi... Oui.
70. T1 : Ouais. Et donc ce que l'on appelle les nombres de Liouville, là, c'est des nombres transcendants qu'a exhibé Liouville.
71. M : Hum.
72. T1 : Parce que la démonstration du fait que e et π soient transcendants, c'est postérieur à Liouville.
73. M : D'accord.
74. T1 : Le fait que π soit transcendant ça a été lié à un grand problème mathématique...
75. N : Ouais si... C'est la quadrature du cercle. C'est pas celui là ?
76. T1 : c'est le problème de la quadrature du cercle.
77. N : Faire un carré avec un cercle c'est ça ?
78. T1 : Ben qu'on puisse mettre le périmètre d'un cercle sur un carré.
79. N : Sur un carré.
80. M : Hum, hum.
81. T1 : C'est-à-dire en le construisant...
82. N : Le construire avec la règle et le compas, c'est ça ?
83. T1 : Hum.
84. N : Ca veut dire quoi quand ils disent que ça conserve les sphères là ? Ca veut dire que... Elles sont égales à elles-mêmes quoi en gros les sphères ? Vous parliez...
85. T1 : Ca veut dire que ça transforme une sphère en une sphère.
86. N : Ah d'accord.
87. M : Fait voir celui-là.
88. N : Tiens. Si tu veux lire.
89. M : Je comprends pas. Tu marques quoi ? Les dates tout ça...
90. N : Ben j'ai mis [inaudible] au XIX siècle.
91. M : Ouais.
92. N : Le XIX c'est un siècle des grandes découvertes en maths je crois.

93. M : Ouais, si tu le dis.
94. N : Non, mais comme ils disent... On prend l'exemple de Gallois, c'est celui qui a trouvé la théorie des groupes.
95. M : D'accord.
96. N : La théorie des groupes c'est... Je crois que c'était un... Enfin il paraît que ça a... Ce qu'on m'en a dit quoi ça a révolutionné les maths.
97. M : Hum, hum.
98. N : Alors, j'ai noté les dates.
99. M : Et puis Polytechnique.
100. N : j'ai noté Polytechnique. Ouais.
101. M : Où il a enseigné et puis membre de l'académie des sciences en 1870.
102. M : Bon.
103. N : On attaque la preuve ?
104. M : Ouais. Puis ça, on verra un peu...
105. N : Ouais.
106. M : Pourquoi il est célèbre. On regarde là.
107. N : C'est pas évident à comprendre pour nous « pourquoi ».
108. M : Hum ?
109. N : C'est ça, c'est dur à comprendre hein ? On sait pas trop.
110. M : Ouais.
111. M : Donc là, c'est la dérivée.
112. N : Ouais. Mais nous on l'a vu dans l'autre sens je crois.
113. M : Hum ?
114. N : On l'avait vu dans l'autre sens. On avait vu que si f était, si la dérivée de f était nulle alors f était constante. On l'avait pas vu dans ce sens là je crois.
115. M : Euh...
116. T1 : Y a un terme peut-être qui vous gêne, c'est pas... Là, la dérivée de f est nulle hein ? D'accord ?
117. N : Oui.
118. T1 : Si la dérivée de f est nulle...
119. N : Ah parce que ce que je disais, nous on l'a vu dans l'autre sens je crois, le théorème. Enfin, on l'a plutôt vu...
120. T1 : Dans quel sens ?
121. N : C'est-à-dire que si f est nulle... Non, non, enfin, si c'est dans ce sens là. Oui.
122. M : Nous on a vu que y avait un truc, que si c'est un point d'extrême...
123. N : Un extremum.

124. M : La dérivé est nulle. Quelque chose comme ça non ? Sur l'intervalle.
125. N : Ok. Avec les extremums, ouais c'est ça.
126. M : Mais, c'est pas vraiment la même chose.
127. T1 : Vous pouvez retraduire l'énoncé comme vous l'avez peut-être rencontré, je sais pas ?
128. N : Nous, on a rencontré : « si la dérivé de f est nulle alors f est constante ».
129. T1 : C'est pas ça qui est écrit ?
130. N : Si, si, si, si... C'est parce que c'était dans l'autre sens que j'avais mal lu. Enfin j'avais mal...
131. M : Donc c'est la même chose.
132. N : Ben enfin, moi ce que j'ai vu au second semestre, C'est la même chose.
133. M : C'était quoi ?
134. N : C'est si la dérivé de f est nulle...
135. M : Ouais.
136. N : Alors f est constante.
137. M : Ouais. D'accord.
138. M : Ben alors, il est apparemment vrai l'énoncé.
139. T1 : Comment ?
140. M : Alors l'énoncé il est vrai.
141. N : Enfin pour nous, l'énoncé est vrai quoi.
142. M : A notre avis.
143. T1 : Pourquoi ? Quel est votre argument ?
144. N : Ben on a vu pas mal de preuve pour démontrer la, la... Qu'une fonction était constante, on la dérivait quoi. Donc euh...
145. T1 : Donc c'est vous l'avez vu en cours ?
146. N : Oui, Oui.
147. T1 : Vous vous rappelez un peu comment vous avez fait ?
148. M : Hum...
149. N : Je suis pas sûr. Mais je sais pas si on était pas revenu avec...
150. M : La définition peut-être non ?
151. N : Voilà avec la définition, le taux de variation... [Inaudible]
152. T1 : [T1 leur conseille de regarder dans leur cours]
153. N : Ah non c'était avec les... Je l'ai ici ça c'est sûr [il feuillette des pages].
154. T1 : Donc là, vous êtes tous les deux d'accord. L'énoncé pour vous il est...
155. M : Vrai.
156. N : Vrai, il est vrai. Ouais. Vu ce qu'on a vu...

157. M : Ouais. Mais si on voit la dérivé comme la tangente... Ben si dans tout point c'est nul, ça veut dire que le graphe c'est parallèle à l'axe x ... Quelque chose comme ça.
158. T1 : C'est votre argument ça. Vous avez cette idée là.
159. M : Ouais.
160. T1 : Si le graphe d'une fonction a une tangente tout le temps nulle...
161. N : Ouais, je trouve plus la preuve mais...
162. T1 : Une tangente horizontale.
163. N : Ah, ça doit être là.
164. T2 : [à T1] On passe dans 2 ou 3 minutes ?
165. T1 : Ouais. Vous vous rappelez plus comment vous avez fait au premier semestre. Comment il est arrivé ce résultat.
166. M : Non.
167. T1 : Vous le connaissiez avant ce résultat ?
168. N : Ouais, on le connaissait avant.
169. M : Ouais.
170. N : Ben je sais pas si on a pas utilisé le théorème de Rolle en fait pour le démontrer, parce que... Enfin, maintenant que je vois ça, ça me... Voilà c'est là [dans son cours].
171. M : T'as trouvé ?
172. N : Ca doit être juste après.
- [Pause]
173. N : Ah non. Je sais pas. Non mais c'est avec le théorème de Rolle je me rappelle. On l'a peut-être pas fait en cours, on l'a fait en TD alors.
174. M : Je sais pas.
175. T1 : C'est après le théorème de Rolle. Qu'est-ce que vous avez vu après le théorème de Rolle ?
176. N : On a vu « théorème des accroissements finis ».
177. T1 : Oui. Et avec le théorème des accroissements finis ?
178. N : Après le théorème des accroissements finis. Là y a un problème je crois, non [...]. Les « accroissements finis généralisés ».
179. T1 : Reprenez le théorème des accroissements finis généralisés. Est-ce que... Qu'est-ce qu'on peut dire si la dérivée est nulle ?
180. M : Alors $f(b)=f(a)$, pour tout a , tout a, b en fait. Alors c'est constant, c'est ça ?
181. N : Ouais c'est ça.
182. T1 : Ca veut dire que le résultat là ça peut se déduire de...
183. M : Du théorème accroissements finis.
184. N : Du théorème des accroissements finis.
185. M : Ouais.

186. T1 : Bon, ben vous pouvez passer à la suite.
187. M : La seconde activité ?
188. T1 : Oui.
189. M : L'analyse de la preuve.
190. T1 : Donc la seconde activité, prenez un peu plus de temps. Donc le but c'est que vous analysiez la preuve, d'accord ?
191. M : D'accord.
192. T1 : Donc tout d'abord vous allez essayer de la décomposer en étape à votre façon... Vous essayez de déterminer les différentes étapes de la preuve et ensuite vous regardez dans chaque étape quels sont les arguments qui... Si vous pensez qu'il faut les compléter, ...
193. M : D'accord.
194. T1 : Donc là l'énoncé est vraiment basé sur la preuve de Liouville donné au milieu du dix-neuvième à l'école Polytechnique. C'est ce qu'il a donné à des étudiants, voilà.
195. M : D'accord.
196. T1 : Puis à la fin, il faudra conclure pour vous est-ce que la preuve est juste ou fausse.
197. M : D'accord.
- [Pause]
198. M : Il fait quoi là « rappelons l'équation générale ».
199. N : L'« équation générale » ouais... En fait c'est pas la même que... cette équation on l'a pas vu.
200. M : Hum.
201. N : C'est un peu les accroissements... C'est un peu les... C'est un peu les comment ça s'appelle tu sais les... C'est un peu les... Merde. Les développements limités tu sais.
202. M : D'accord.
203. N : Ben ouais, ça te fait pas penser aux développements limités ?
204. M : Hum, de quoi ? T'as dit quoi ?
205. N : Ca fait penser aux développements limités.
206. M : Mouais. [Il ne semble pas convaincu]
207. N : Si parce que ça fait...
208. M : Donc tu dis que c'est quelque chose que l'on a pas vu ?
209. N : Ben si c'est le développement limité.
210. M : D'accord.
211. N : Puisqu'ils disent qu'epsilon tend vers zéro quand h tend vers zéro donc epsilon c'est égal à...
212. T1 : M, tu penses que t'avais jamais vu ça ? Cette formule là ?
213. M : Euh...
214. T1 : Ca te dit rien ?

215. M : Non, pour le moment ça ne me dit rien mais...
216. N : Moi, je l'ai vu en première, c'était l'approximation affine ça mais euh...
217. M : Mais, je sais pas peut-être je l'ai vu sous une autre forme et je le reconnais pas.
218. T1 : Vous pouvez essayer de la retrouver sous une forme que vous auriez... ?
219. M : C'est quelque chose...
220. T1 : Est-ce que ça ressemble pas à un développement limité ? Vous avez fait les développements de Taylor aussi récemment ?
221. N : Ouais si. Ben ça c'est pas mal...
222. T1 : Ben essayez de l'écrire sous la forme d'un développement de Taylor.
223. M : Donc il faut [il cherchent].
224. T1 : Et le $o(h)$, ça s'écrit comment ?
225. N : Le $o(h)$ c'est euh... C'est la formule ... Ca s'écrit $h^2 f''(c)$.
226. T1 : Oui mais ça, c'est si elle est dérivable deux fois. Mais sinon, ça veut dire quoi être un $o(h)$?
227. N : Ah, ça veut dire qu'elle tend plus vite vers zéro que h , que $o(h)/h$ tend vers zéro quand h tend vers zéro.
228. T1 : Faut l'écrire autrement, vous l'avez jamais écrit autrement le $o(h)$?
229. M : Euh, non...
230. N : Euh...
231. T1 : Si vous essayez de l'écrire d'une autre façon. Essayez à partir de ça [la formule du texte distribué] d'avoir à peu près la même formule.
- [Ils travaillent silencieusement]
232. N : Parce que en première je l'avais vu à peu près comme ça. Mais c'était $\mathcal{E}(h)$ que j'avais vu... Enfin bon, une fonction de h .
233. T1 : Oui c'est epsilon et vous vous l'avez vu avec un $\mathcal{E}(h)$, oui pourquoi pas, ça veut dire que... Qu'est-ce qu'on a comme condition sur $\mathcal{E}(h)$.
234. N : qu'il tende vers zéro avec h .
235. T1 : C'est à peu près ce qui est écrit non... ?
236. N : Hum, hum.
237. T1 : Même si c'est écrit dans un langage un peu plus approximatif, mais ça veut dire ça.
238. M : Ouais. Ouais c'est marqué $h\mathcal{E}$, c'est ça ?
239. T1 : Est-ce que vous êtes convaincu maintenant avec ça ?
240. N : Ouais/
241. M : C'est marqué $h\mathcal{E}$?
242. N : Ouais $h\mathcal{E}$, tu sais j'ai développé là.
243. M : Ah ouais d'accord.
244. T1 : Est-ce que vous êtes convaincu maintenant avec ça ?

245. M : T'as mis au lieu de $o(h)$ t'as mis $h\varepsilon$ c'est ça ?
246. N : En fait, c'est la...
247. M : D'accord.
248. N : En fait, c'est la différence entre la dérivé et le taux de variation. Ah donc h tend vers zéro en fait non ?
249. T1 : Hum.
250. M : Bon de toute façon, ça on le considère comme connu.
251. T1 : Oui.
252. N : Ouais.
253. M : C'est pas le point de la preuve.
254. N : Après, ça se complique un peu.
- [Ils cherchent]
255. M : Ouais, d'accord.
256. N : D'accord.
257. M : Ben comme étape on peut...
258. N : Ben, ce que l'on peut faire « Déterminer... ».
259. M : « Déterminer les étapes ».
260. N : Moi, je dirais 3 étapes.
261. M : La première étape il fait...
262. N : jusqu'à...
263. M : Ben y a d'abord il fait la, le partage de l'intervalle.
264. N : Ouais. Le partage de l'intervalle et le rappel de l'équation.
265. M : Ouais.
266. N : Jusqu'à ici.
267. M : Il fait la somme là.
268. N : Ensuite, y a la somme.
269. M : Non, mais c'est pas un étape le rappel.
270. N : Non mais jusqu'à... les deux, tu sais.
271. M : Oui mais le rappel ça va avec ça puisqu'on l'utilise là.
272. N : Ouais...
273. M : Non ? Je sais pas, je pense.
274. N : Ouais, ouais, c'est pareil.
275. M : Parce que, il fait le rappel et puis il l'utilise... Je sais pas.
276. N : Ensuite, il distingue la plus grande des quantités.
277. M : Jusqu'à qu'il fait la somme, qu'il obtient ça. Ouais jusqu'à qu'il fait la somme.

278. N : Qu'il parvient à $f(b)-f(a)$.
279. M : Après, il choisit la plus grande des quantités et il fait son...
280. N : Et puis la troisième partie, c'est ça, c'est la conclusion.
281. M : Moi, je dirais quatre parties.
282. N : Ouais la conclusion...
283. M : Ouais ça ferait un... Pour moi, ça ferait ça.
284. M : ça ferait un, deux, trois, quatre, ça ferait quatre parties.
285. N : Hum... Ouais. Mais ça, je sais pas si c'est une partie différente...
286. M : Ben si parce que regarde.
287. N : Pourquoi ?
288. M : Après il a ça et il établit une inégalité donc c'est quand même différent. C'est important dans la preuve, c'est indispensable.
289. N : Ah oui. D'accord.
290. M : Après il conclut, il établit son inégalité et après... Moi je dirais comme ça...
291. N : Ouais d'accord, je suis d'accord. Donc dès que on a établi l'inégalité c'est une quatrième partie.
292. M : Moi je le ferais comme... Mais après...
293. T1 : Là vous l'avez décomposé en combien de parties ?
294. M : Quatre parties.
295. T1 : Vous êtes tous les deux d'accord à peu près ?
296. N : Ouais, on s'est mis d'accord. [Inaudible]
297. T1 : Alors maintenant il faut rentrer plus dans les détails de chaque étape. Que vous disiez si vous êtes convaincus par les arguments, si ils vous paraissent complets ou non.
298. N : D'accord. Ben on va voir la première partie.
299. M : La première partie...
300. T1 : Vous pouvez reformuler aussi par exemple là tout à l'heure par rapport à la formule de l'équation générale vous étiez pas convaincu au départ. Vous la reformulez puis vous la reconnaissez. Ensuite vous utilisez que vous la connaissez...
301. N : Ouais.
302. M : Parce qu'en fait \mathcal{E} c'est une fonction. Elle est pas fixée, c'est ça qui est un peu... Enfin quand il écrit, tu vois il écrit \mathcal{E} , en fait c'est une fonction.
303. T1 : Donc oui il faudrait peut être aussi que vous précisiez un peu comment vous avez décomposé les étapes. Que vous l'expliquiez aux... Vous vous l'êtes expliqué là [au micro] ? Qu'on puisse un peu savoir ce que vous avez fait.
304. N, M : Ouais.
305. M : Ouais, on l'a expliqué.
306. N : On a dit la première partie il fait le partage de l'intervalle, la deuxième partie il fait le rappel de cette formule et il l'utilise pour chaque point.

307. M : Il l'utilise.
308. N : Troisième partie à partir de ce qu'il obtient, il démontre ça, il établit une inégalité.
309. T1 : Hum.
310. N : La quatrième partie, à partir de cette inégalité il fait la...
311. M : Il conclut à la fin.
312. N : Il fait la conclusion.
313. T1 : D'accord.
314. N : Donc la première partie, c'est assez claire je crois non ?
315. M : Ah ouais la première partie, elle est claire.
316. N : Je sais pas il partage en m points c'est assez clair... Oui, la longueur c'est ça.
317. M : La deuxième partie...
318. N : Oui et puis les points répartis, oui c'est ça.
319. M : En fait euh... [Inaudible]
320. N : Hum ?
321. M : Attend je veux juste...
322. N : En fait, il y a le point a le point $a+h$, le point $a+2h$
323. M : Non et puis normalement en fait, tu as aussi les points a et b , enfin tu les considères.
324. N : Oui, il faut les rajouter.
325. M : La différence entre n'importe lesquelles c'est...
326. N : h .
327. M : C'est h et h c'est tout l'intervalle divisé par m ... Ben ça paraît bon.
328. N : Hum.
329. N : Ensuite, il établit sa formule.
330. M : Ouais. Ben ça. Attend, on peut faire développement limité. C'est ça d'accord ?
331. N : Oui.
332. M : En fait, il a mis ε au lieu de $o(h)$ c'est ça ?
333. N : Ouais.
334. M : Il a mis $h\varepsilon$ au lieu de ça.
335. N : Ouais, en fait c'est $h\varepsilon$.
336. M : Parce que $o(h)$ c'est...
337. N : Ca tend vers zéro.
338. M : Ca veut dire que h sur...
339. N : non ça veut dire $o(h)/h$...
340. M : Hum ?
341. N : $o(h)/h$ tend vers zéro.

342. M : $o(h)/h$... Donc on peut faire égal à ε qui tend vers zéro, c'est ça ?
343. N : Voilà ouais, voilà exactement.
344. M : D'accord.
345. N : En fait, t'as vu c'est un peu... Parce que eux, ils écrivent ça avec ε alors que c'est une fonction.
346. M : D'accord. Qui tend vers zéro alors. Oui là l'équation générale, ça a l'air... Donc oui, on obtient $a+h$...
347. T2 : Ca va ?
348. N : Ouais ça va, pour l'instant.
349. M : Ca marche oui.
350. T2 : N'hésitez pas hein, si vous avez des questions.
351. N : Après on la verra l'autre preuve, qu'ils font ?
352. T2 : Quel autre prof ?
353. N : Ben celle qu'ils ont.
354. T2 : Ah l'autre preuve ! J'avais compris l'autre prof...
355. N : Ouais, ouais, ouais. L'autre preuve.
356. T2 : Oui alors l'objectif c'est que...
357. M : Qu'ils nous expliquent non ?
358. T2 : Que quand vous finissez ça, quand vous avez fini ça, vous faites un petit exposé en fait sur euh, pas forcément dans le détail, mais par exemple si vous avez travaillé plus une partie ben vous racontez un peu ce que vous avez fait et les parties calculatoires on laisse tomber. Vous elle est un peu plus courte, eux elle est un peu plus longue, il y a des calculs. Je pense qu'ils n'auront pas le temps de présenter tous les calculs parce...
359. N : Y en a trop.
360. T2 : Que sinon, il faudrait beaucoup trop de temps...
361. M : D'accord.
362. T2 : Mais l'idée aussi est que vous présentiez les choses... On pourra vous donner, on pourra vous le donner en papier si vous voulez.
363. N : Ah ben moi je veux bien.
364. M : C'est dans combien de temps à peu près parce que moi je dois partir un peu plus tôt, vers trois heures et demi.
365. T2 : Quelle heure ?
366. M : Vers trois heures et demi.
367. T2 : Trois heure et demi et ben... Ca va être un peu juste pour l'exposé.
368. M : Bon ben c'est pas grave je vais...
369. T2 : Ouais... On essaiera, donc là, on vous laisse encore un quart d'heure pour avoir le temps de bien aller jusqu'au bout de la preuve et puis on essaiera d'aller un peu plus vite.
370. M : Ouais c'est pas grave sinon.

371. N : Parce que nous... Ouais enfin je pense qu'on a presque fini d'étudier...
372. T2 : Vous avez bien avancé ? Ben essayer de bien formaliser tout ce que vous voulez dire et puis je reviens dans deux minutes et puis vous me racontez ça.
373. N : D'accord.
374. M : On a pas encore fini on est...
375. N : Hein ?
376. M : A la deuxième étape seulement.
377. N : La deuxième étape, c'est bon.
378. M : Ouais mais il faut faire plusieurs trucs, on doit essayer de compléter, de reformuler, voir si elles sont rigoureuses par exemple. Faut y penser un peu, parce que comme ça, ça a l'air bien mais je sais pas.
379. N : Ben ouais moi ça m'a l'air... Parce qu'en fait il applique à chaque fois... Ben en fait ça vient du 1, de ce que tu as dit que vu qu'après il incrémente à chaque fois entre euh... Et qu'il va faire son rapport, son rapport... Il va faire euh... la différence entre les deux est toujours h .
380. M : Ouais.
381. N : C'est pour ça qu'il y a un...
382. M : Ouais
383. N : Oui c'est bien ce qu'il obtient là, c'est bien $f(b)-f(a)$. Je crois pas qu'il y a des... Ca m'a l'air assez rigoureux non ?
384. M : Hein ?
385. N : Ca a l'air assez rigoureux ?
386. M : Ben ouais. A la limite peut-être, je pense pour moi tu sais... Si ici, par exemple, pour le premier tu marquais, tu réécrivais... Non pour le deuxième $f(a+2h) - f(a)$ si tu réécrivais, enfin moi je trouve que ce serait plus clair si tu réécrivais c'est $a+h$... Non attend, c'est quoi...
387. N : Ben c'est ça, non ?
388. M : c'est $a + 2h - a - h$, si ils écrivaient ça comme ça parce que ça, c'est vraiment tu appliques la formule.
389. N : Cette formule là ?
390. M : Ouais.
391. N : $f(a+2h) - \dots$
392. M : Parce que, là, t'écris en fait...
393. N : Tu as pas ça.
394. M : Non je veux dire, si tu l'écris comme ça... Si tu l'écris comme ça, tu vois ce que je veux dire ?
395. N : Ouais. Ben tu obtiens ici avec la formule ben tu obtiens $h(0 + \varepsilon)$.
396. M : Ecris comme ça, ça ressemble plus à la formule. Tu vois ce que je veux dire ?
397. N : Oui, oui mais c'est la même chose.
398. M : Ben après, c'est juste pour être plus clair.

399. N : Oui, oui c'est vrai pour les étudiants un peu bêtes.
400. M : Hein ?
401. N : Pour les étudiants un peu bêtes !
402. M : Si tu veux vraiment pas avoir tu, si tu veux vraiment pas avoir d'ambiguïté, hein.
403. N : Hum, Hum.
404. M : Et vu que tu as à chaque fois... [Inaudible]
405. N : Bon et puis la troisième étape, on passe.
406. M : La troisième étape euh...
407. N : Moi ça va, comme ça, en regardant très grand.
408. M : Enfin on a pas fini déjà la deuxième étape, tu sais il faut d'abord faire... Il faut d'abord dire qu'il fait la somme. Et que ça se simplifie.
409. N : Oui, c'est clair ça non ?
410. M : Oui, oui, moi je trouve que c'est clair. Enfin, en plus vu comment il l'écrit, ça fait penser, ça fait tout de suite penser à l'affaire quoi.
411. N : Oui. Oui, c'est un procédé assez classique.
412. M : Après la troisième étape, c'est classique aussi, prendre le plus grand de deux...
413. N : Oui, mais moi, je sais pas la troisième étape je suis pas... Enfin...
414. T2 : Qu'est-ce qui t'embête dans la troisième ?
415. N : Non, je ne sais pas comme ça, en regardant, comme ça je dis que la troisième étape c'est la plus susceptible d'avoir...
416. M : De poser problème ?
417. N : Oui de poser problèmes. Parce que je sais pas comme ça en regardant, une somme de... de...
418. T2 : Oui ?
419. N : En fait non. C'est, oui, c'est des quantités qui tendent vers zéro.
420. T2 : Oui.
421. N : Non en fait... Je sais pas.
422. T2 : Alors si ça vous paraît, moi ce que je fais quand il y a des choses qui me paraissent pas clair ben j'essaie de les reprendre avec mes mots et de refaire la démonstration dans les détails. Vous pouvez essayer de faire ça peut-être ?
423. M : Non moi ça va. Enfin, c'est assez classique avec les suites en fait, on le voit souvent des trucs comme ça.
424. N : Moi, je regarde un peu...
425. T2 : Ouais et qu'est-ce qu'on fait avec les suites alors ?
426. M : Ben souvent, quand on a des sommes, des sommes disons comme $1/(n+1)$ par exemple, $1/(n+2)$, on va prendre le...
427. N : Le plus grand.

428. M : Le plus petit.
429. N : Le plus petit, oui.
430. M : On va multiplier par n .
431. T2 : D'accord comme ça, parce que il y a n termes.
432. M : Voilà et ça fera, ça va minorer puis après on va prendre le plus grand, on multiplie par n et ça va majorer aussi.
433. T2 : Ouais d'accord. Donc faire une minoration sur chacun des termes et puis effectivement/
434. M : Pour se ramener au...
435. N : Ouais.
436. T2 : Comme ça, on a quelque chose d'uniforme.
437. M : Théorème des gendarmes en fait.
438. T2 : D'accord. Donc c'est à ça que tu penses.
439. M : Voilà ouais. Enfin là, j'y aurais peut-être pas pensé mais je veux dire...
440. T2 : Non, non, je vois bien l'idée...
441. M : [Inaudible] Enfin, j'ai déjà vu des raisonnements... On a déjà vu en cours des raisonnements similaires en fait.
442. T2 : Et donc là, qu'est-ce qu'il faut qu'il démontre ?
443. N : Il doit démontrer que $f(b)=f(a)$.
444. T2 : Oui...
445. N : Pour n'importe quels a et b .
446. T2 : Et donc que...
447. M : Et donc là, quand il a trouvé ça.
448. T2 : Là-dessus.
449. M : Que ça tend vers zéro.
450. N : Que la somme tend vers zéro.
451. M : Que cette somme tend vers zéro.
452. M : Ca veut dire ε tend vers zéro, ça revient à faire tendre h vers zéro.
453. T2 : Donc est-ce que vous pouvez essayer d'écrire cette troisième là, cette troisième étape, par exemple pour voir si c'est bon ou pas ?
454. T1 : La première et la deuxième c'est bon, vous avez...
455. N, M : Ouais.
456. M : C'est vrai que la troisième, elle est un peu plus compliquée hein...
457. N : Ouais c'est, ouais c'est vrai que c'est un peu. Ca, c'est des classiques mais je sais pas.
458. M : Pour la reformuler, je sais pas trop comment la reformuler parce que je trouve que...
Enfin, tu vois une reformulation toi ?
459. N : Hum... Non.

[Temps de réflexion]

460. N : Non c'est bon, la troisième ça va.
461. T1 : Est-ce que vous êtes convaincus par la troisième étape ?
462. N : Ben justement, c'est ce qu'on disait c'est... Moi personnellement, je suis assez convaincu. Comme ça, en regardant en très grand les étapes, j'ai dit que la troisième étape c'est la plus susceptible de avoir des trucs qui sont pas vrais toujours quelque chose comme ça. Mais...
463. T1 : Bon donc mais si vous avez un doute, faut essayer, faut que vous essayiez de montrer à votre façon le résultat. Cette troisième étape elle part des étapes précédentes et puis il faut arriver à la conclusion qui est écrite. Essayer de voir si vous êtes convaincus ou pas.
464. N : Non mais maintenant je suis convaincu puisque... Ouais ça va. Toi tu es convaincu ?
465. M : Ouais, ouais, c'est plutôt après que...
466. N : Hum ?
467. M : C'est celle d'après qui est un peu plus, je crois un peu plus euh... Parce que quand tu regardes tout de suite, pourquoi tu va faire tendre m indéfiniment en fait ? C'est ça qui me... En fait peut-être je comprends mais euh... Si tu fais croître m indéfiniment ça revient à...
468. T1 : Donc jusqu'à présent, le m a été fixé.
469. M : Ouais, ouais.
470. T1 : On a pris un m , c'est ensuite pour la dernière étape qu'on va faire croître...
471. N : Hum, hum.
472. M : A priori [Inaudible] pourquoi ils font croître m ... Enfin...
473. N : Ben pourquoi on fait...
474. M : En fait, ça revient à...
475. N : Tu as compris pourquoi il fait croître m indéfiniment ?
476. M : Euh... Si on croit m indéfiniment, h tend vers zéro donc ça revient à... Ben ça revient à faire la dérivée en fait. Parce que tu vois regarde h c'est $(b-a)/m$.
477. N : Ouais.
478. M : Et quand tu fais croître m indéfiniment, m tend vers l'infini.
479. N : Ouais.
480. M : h tend vers zéro et ça revient à faire la dérivée quoi.
481. N : Ca revient à diviser l'intervalle en beaucoup, beaucoup de...
482. M : Ouais et puis quand tu tends vers l'infini, ça revient, ça fait tendre h vers zéro, ça revient...
483. N : Ouais.
484. M : c'est la dérivée c'est $(f(a+h) - f(a)) / h$... C'est le taux de variation c'est ça.
485. N : Ouais.
486. M : La limite quand h tend vers zéro, la limite ça fait... Tu sais ça fait f' , ça fait $f'(x)$. Enfin ça fait $f'(a)$.
487. N : Oui mais, oui mais je vois ce que tu dis mais...

488. T1 : Alors peut-être que m ... pourquoi il fait tendre m vers l'infini ?
489. M : Ben moi je pense que c'est parce que... En fait, quand on regarde l'expression de m , ça fait tendre h vers zéro.
490. T1 : Oui.
491. M : Et ça revient à faire le taux de variation en fait de...
492. T1 : Hum.
493. M : De la fonction quoi... En fait là, ça revient en gros à faire un accroissement fini... En fait moi, ça me fait penser à ça.
494. N : En fait euh...
495. T1 : Donc quand m tend vers l'infini, qu'est-ce qu'il se passe pour h ?
496. M : Il tend vers zéro... Donc $f(b)-f(a)$...
497. N : ... Prendre des points de plus en plus proches, c'est ça ? Il va...
498. T1 : Donc l'idée c'est d'utiliser l'étape trois. D'accord ? Enfin la conclusion de l'étape trois. L'étape trois, on a une majoration de la différence $f(b)-f(a)$...
499. N : Ouais.
500. M : Hum.
501. T1 : Le but est de montrer que $f(b)=f(a)$.
502. M : On sait qu'elle est vraie pour tout m aussi.
503. T1 : Ouais.
504. M : C'est pour ça qu'on a le droit de la faire tendre vers l'infini.
505. T1 : Hum.
506. M : Enfin moi, je le vois comme ça, on peut...
507. N : Non parce qu'après ça fait tendre h vers zéro, ça fait aussi tendre \mathcal{E} vers zéro.
508. M : Ouais, d'accord.
509. N : Enfin, d'après la...
510. M : Ouais.
511. N : D'après la formule qu'il nous donne. La dernière partie elle est... La dernière partie, elle est plus subtile encore hein ?
512. M : Hum ?
513. N : Elle est plus subtile, je trouve, la dernière partie.
514. M : Ouais.
515. T1 : Qu'est-ce que vous trouvez plus subtile ?
516. N : Enfin je trouve c'est la dernière partie, c'est de faire tendre le m vers zéro, le m vers l'infini pour faire tendre le h vers zéro, pour faire tendre le \mathcal{E} vers zéro en fait. Je trouve c'est le plus...
517. M : Hum, hum... [Pause] Ouais d'accord. Par contre là je sais pas... donc le m on le fait tendre vers l'infini...

518. N : Parce que l'égalité est vrai pour tout m .
519. M : Ouais d'accord, mais je sais pas si ici, avant...
520. T1 : Comment ? Qu'est-ce que vous pensez ?
521. M : Donc on a ça qu'on a prouvé à partir de ça.
522. T1 : Oui.
523. M : Et si on fait, on fait tendre m vers l'infini...
524. T1 : Hum.
525. M : Pour cette formule d'accord, on obtient ça.
526. T1 : Non, non. On a cette formule là avant de faire tendre m vers l'infini. On a cette formule là.
527. M : D'accord oui.
528. T1 : Du fait que h et m c'est...
529. M : Oui d'accord. C'est celle là. Et on dit quand m tend vers l'infini ε tend vers zéro donc tout ça, ça marche très bien. Mais par contre, ça revient à dire euh... Ici donc, on suppose pas que ça doit pas être vrai aussi pour quand m tend vers l'infini ce qu'on a fait là-bas.
530. N : Ben...
531. M : Quand m ...
532. N : C'est vrai pour tout m en fait, enfin...
533. M : parce que je dis par exemple ici, comme il y a une, une somme de valeurs qui tend vers zéro si m tend vers l'infini on... c'est pas sur que ça tend vers zéro, si ?
534. T1 : Non. Mais par contre, il a utilisé un autre argument aussi. La ligne que vous avez mis juste en dessous de l'étape trois.
535. M : Ca ?
536. T1 : Justement, il a transformé...
537. M : D'accord... Et donc ça marche, ça marche vraiment pour n'importe quel m , c'est ça.
538. T1 : Oui, il s'est arrangé pour supprimer le fait qu'il y ait m ε en prenant ε le maximum.
539. M : D'accord.
540. N : Parce qu'en fait là, il... Enfin, après au début il le fixe m et après il le fait tendre.
541. M : Ouais.
542. N : Il a le droit, enfin moi je pense que... Je raisonne comme ça, enfin moi je veux dire il a le droit parce que l'égalité avant est vrai pour tout m quoi.
543. M : Ouais.
544. N : T'as le droit de le faire pour tout m donc tu peux conclure en faisant tendre vers l'infini.
545. M : Oui d'accord... Bon alors, c'est bon ?
546. T1 : Vous êtes convaincu alors par le...
547. N : Ouais, moi je suis convaincu.
548. M : Ouais.

549. N : Ben faut bien, ben quand on regarde trop vite... Moi je pense que, voilà quand on regarde trop vite on... Enfin pour moi, la dernière partie quand on regarde trop vite elle est plus... Elle est plus vaseuse, quoi elle est plus brumeuse, on a plus de mal à...
550. T1 : Ben essayez de l'explicitier alors... Pour vous convaincre vraiment.
551. N : Non mais là c'est bon, enfin... Je vois pas comment mieux explicitier que ça en fait. En lisant vite comme ça on... On a un peu de mal à comprendre.
552. T1 : Alors pour la dernière partie qui est un peu plus compliquée, est-ce que vous pouvez la détailler, la détailler en disant à quelle partie de chaque étape elle utilise vous voyez ?
553. M, N : Hum.
554. T1 : Vous avez dit au départ que m tend vers l'infini, ça implique que h tend vers zéro qui implique que etc, etc. Donc ça, c'est à un niveau dans la preuve [Inaudible], si h tend vers zéro alors epsilon tend vers zéro... Vous voyez il y a...
555. N : Hum, hum, hum...
556. T1 : Y a différents types, de façons à... [T2 demande aux étudiants de l'autre groupe si ils sont convaincus par la preuve qu'ils regardent] Et vous, vous êtes convaincus par l'ensemble de la preuve ? Vous pensez que...
557. N : Ouais. Ben oui, avec mais connaissances, je vois pas de... On a pas trouvé quelque chose qui ne marche pas quoi.
558. M : Ca c'est sûr de toutes façons mais...
559. N : Oui je suis convaincu oui, bon y avait ça mais là...
560. T1 : Le bémol que vous aviez, c'est de dire que la somme... c'est ça ? Ici, c'est pas parce que vous avez $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ Chaque ϵ_i qui tend vers zéro c'est ça, que m fois ces ϵ , non que comme il y en a m , que la somme tend vers zéro. C'est ça que vous aviez souligné tout à l'heure.
561. N : Oui... Mais oui, je suis convaincu maintenant parce que là en fait il utilise ça et ça c'est vrai pour tout m même si m tend vers l'infini hm ça fait bien ça.
562. T1 : Hum.
563. N : Donc oui, c'est vrai. Donc voilà, ouais, je suis convaincu quoi.
564. M : Attend là bas il disent d'autres trucs [Il écoute l'autre groupe en débat].
565. T1 : Du coup, le ϵ il tend bien vers zéro ?
566. M : Ouais, ouais. C'est ça parce que c'est, si on le réécrit en fait si on le réécrit avec nos connaissances ça fait euh...
567. N : Oui, il tend vers zéro si on suppose que ça c'est vrai là... L'équation générale.
568. M : Si y a $o(h)/h$... Enfin pour nous, d'après ce qu'on a vu, c'est $o(h)/h$ et donc par définition, ça tend vers zéro.
569. N : Non mais puis quand h tend vers zéro.
570. T1 : Non mais là, j'ai simplement résumé mais c'est exactement la même chose [T1 parle du texte original de Liouville qui leur a aussi été donné]. Il dit que ça c'est constant, que ça c'est constant, il dit que ϵ tend vers zéro... Donc là, vous votre problème c'est simplement de voir que ça, ça tend bien vers zéro. [inaudible]
571. M : Ouais, ouais.

572. N : Hum, hum.
573. T1 : C'est plus à titre d'information que je vous ai donné puisque là, il y a vraiment les phrases, la façon dont il s'exprimait Liouville à l'époque.
574. N : Hum.
575. T1 : Vous pourrez le regarder plus tard.
576. M : Et là, c'est quoi qu'il a écrit en fait c'est dx en fait ?
577. T1 : De x [il est écrit $d'x$ dans le texte manuscrit], $d'x$. « d » « apostrophe » « x ».
578. M : Ah « $d'x$ » !
579. T1 : Oui au lieu d'écrire de x , il a écrit $d'x$.
580. M : Ah ok. Ah oui, ok.
581. M : En fait, à la fin c'est un... C'est une sorte de théorème des gendarmes.
582. N : Ouais mais... Ouais, on a vu dans le cours...
583. M : Non même pas, c'est pas le théorème des gendarmes.
584. N : Mais si c'est un genre de... Ouais c'est quelque chose comme ça. Parce que $f(b)-f(a)$, c'est positif et c'est plus petit que quelque chose qui tend vers zéro donc ça tend vers zéro.
585. M : Attends là, il y a un problème là.
586. N : Pourquoi ?
587. M : Ben finalement je crois que j'ai un problème à moins que j'ai mal lu. Y a peut-être un truc que j'ai mal lu mais... Là on sait pas, on dit que la limite c'est plus petit que zéro, en fait, en fait, si la fonction est pas, si la fonction, si $f(b)-f(a)$, si la fonction est pas croissante par exemple...
588. T1 : Hum...
589. M : Parce que bon on ne sait pas...
590. N : Oui si $f(b)$ c'est...
591. T1 : Est-ce qu'on peut résoudre ce problème facilement ? Ca se peut que ce soit simplement une négligence de l'auteur... Qu'est-ce que vous pensez là, il a simplement montré que $f(b)-f(a)$ était plus petit que zéro, c'est ça ?
592. M : Plus petit que zéro, ouais.
593. T1 : Il a pas montré que c'était égal à zéro. Oui c'est vrai, comme il a rédigé c'est vrai.
594. M : Ouais, il a montré que c'était plus petit que zéro.
595. T1 : Et comment on peut faire...
596. M : Ben après on peut dire que, que la fonction n'est pas décroissante euh... comme sa dérivée n'est pas...
597. T1 : Ouais mais ça c'est... ça c'est un autre théorème, qu'on ne connaît pas là.
598. M : Ouais qu'on connaît pas.
599. T1 : On veut montrer déjà ce résultat là... Y a pas une façon de résoudre ce problème donc ?
600. M : Ben faudra mettre euh... Pareil mettre le plus petit ε non ? Si on dit on fait pareil mais avec le plus petit ε ... On dit soit ε la plus grande de toutes quantité présente, on refait mais avec le plus petit ε .

601. T1 : Hum.
602. M : On aura un encadrement...
603. T1 : Est-ce que déjà... Est-ce que vous avez vu le problème.
604. N : Ben c'est que...
605. T1 : Le problème de l'inégalité qui fait que l'on montre simplement que $f(b)-f(a)$ est plus petit que zéro.
606. M : faudrait prendre une valeur absolue sinon ?
607. T1 : [à T2] On va passer à la préparation de l'exposé.
608. T2 : Ouais c'est ce que je leur ai dit, je venais voir si vous en étiez... Parce que comme ça, si c'est eux qui commencent on a le temps au moins de voir le... la preuve.
609. N : D'accord.
610. T2 : On fait comme ça, c'est plutôt eux qui commencent, toi [N] tu peux peut-être faire l'exposé plutôt qu'écouter les autres ?
611. N : Non écouter plutôt.
612. T2 : Non plutôt écouter, et toi [M] tu pourrais le faire tout seul ?
613. T1 : Non on pourrait, on le fait à deux.
614. T2 : T1 te filera un coup de main. On dit dans cinq minutes ? Dix minutes ? Combien de temps pour préparer... Sachant que vu qu'on a les transparents, il y a déjà les transparents de moins à faire.
615. T1 : Non mais tu les donnes à préparer ou tu voulais dire dans cinq minutes on commence à préparer ?
616. T2 : Ouais, non, non, on commence.
617. T1 : Non, on commence à préparer.
618. T2 : Ouais on commence à préparer à peu près maintenant et euh... A moins que vous vouliez encore plutôt réfléchir, je veux dire... Si vous voulez pas faire d'exposé ou bâcler un peu et plus réfléchir...
619. M : Non mais juste là parce que, en fait on a trouvé un...
620. T1 : Ils ont trouvé un souci dans la preuve.
621. M : On a trouvé un souci dans la preuve, en fait.
622. T2 : Peut-être que dans ce cas là il faut peut-être mieux bâcler leur exposé quitte à ce qu'on le fasse tous les trois pour que tu vois... Si tu as moins de temps pour le préparer et que vous réfléchissez plus. Je sais pas c'est comme vous avez envie.
623. M : [à N] Ben toi, tu veux le faire l'exposé ?
624. N : Pas forcément je sais pas... Par contre, j'aimerais savoir si c'est en fait, c'était valide la preuve ou non.
625. M : Ouais, il suffit de prendre une valeur absolue.
626. T1 : Hum, et avec une valeur absolue...
627. M : Si on prend/

628. T1 : Qu'est-ce que ça change avec une valeur absolue ?
629. M : Ben là, ce sera supérieur à zéro. Enfin là... On prend valeur absolue.
630. T1 : Hum, oui, oui. Comment il faut faire pour que ça marche avec une valeur absolue ?
Essayez de le transformer un tout petit peu, y a pas grand-chose à transformer dans la preuve.
631. T1 : [à N] Vous êtes d'accord ?
632. M : Il faut faire une inégalité triangulaire.
633. T1 : [à N] Est-ce que vous suivez le problème ?
634. N : Oui, oui je pense oui.
635. T1 : Là a priori, il suppose plus ou moins implicitement que $f(b)$ est plus grand que $f(a)$...
636. M : Ouais.
637. T1 : ... Mais on en sait rien. Donc une solution serait oui, de prendre, de majorer avec une valeur absolue, c'est ça que, c'est ça que... ?
638. N : Ben c'est de prendre l'inégalité là, puis après la majorer [Ils travaillent silencieusement].
639. T1 : Alors pourquoi, c'est à peu près la même chose... Pour ε , c'est pas... Ca veut dire quoi votre ε ?
640. N : Non, non, mais je veux dire soit ε égal le plus grand, la plus grande des valeurs absolues des ε .
641. M : Ouais.
642. N : Après je sais pas si quand il a fait sa preuve il avait... Il a peut-être d'autres arguments mais euh... Enfin je sais pas. Parce que là, c'est vrai que si on suppose que les fonctions sont croissantes, sont pas décroissantes quoi en fait.
643. T1 : Non mais ça marche votre technique là de passer à la valeur absolue parce que...
644. N : Ouais, ouais, c'est bon d'accord.
645. T1 : Donc modulo cette modification qu'est-ce que vous pensez de la preuve ?
646. M : Donc avec la modification elle est... Moi elle me convainc en fait.
647. N : Oui, ça a l'air valide maintenant.
648. T1 : Bon, vous essayez de la présenter, de préparer l'exposé ? Même si vous êtes parti [N], vous êtes parti, vous essayez de la préparer ensemble. Donc pour ça il faut [Inaudible], j'ai fait une photocopie sur transparent. Vous pourrez expliquer si vous voulez décomposer les étapes, vous pouvez éventuellement compléter en la présentant, par exemple, cette histoire de valeur absolue vous pouvez compléter dessus...
649. N : Hum, hum.
650. T1 : Vous pouvez expliquer les étapes, comment ça fonctionne, expliquer là ce que vous avez trouvé qu'il manquait quelque chose au moins dans la preuve.
651. N : Ouais, d'accord.
652. T1 : Donc là, vous avez des stylos qui sont non effaçables donc une fois que vous aurez écrit vous ne pourrez plus effacer... Puis, vous présentez aussi rapidement l'auteur.
653. M : D'accord.

654. T1 : Puis ce sera ouvert, l'exposé sera ouvert à une discussion. Donc, il faut que vous trouviez des arguments pour convaincre... Vous, vous pensez que la preuve est valide donc vous...
655. N : Ok.
656. T1 : Il faut que vous ayez des arguments pour convaincre qu'elle est bien valide.
657. M : Oui.
658. N : Ouais.
659. T1 : D'accord ?
660. N : Donc. Par contre, tu veux bien écrire parce que moi j'écris vraiment très mal...
661. M : D'accord, mais tu vas me dire quoi écrire !
662. N : Ouais, ouais, je vais t'aider. On discute on va...
663. M : Qu'est-ce que tu penses, qu'il faut écrire les étapes d'abord ou...
664. N : Oui, oui on peut les délimiter si tu veux.
665. M : D'accord.
666. N : Donc on met un jusqu'à là. Oui ?
667. M : Euh... C'est jusqu'à quoi ?
668. N : Jusqu'à ici « rappelons ».
669. M : Ouais, ouais, ouais.
670. N : Puis tu as jusqu'à ce qu'il fait la somme c'est ça ?
671. M : Hum.
672. N : Puis tu va voir « mais ».
673. M : Ouais.
674. N : Et voilà, tu mets un, deux, trois, quatre. Voilà.
675. N : Bon, la première partie c'est assez clair, je crois qu'il ne faut rien...
676. M : Non pour la première partie pas besoin de...
677. N : C'est clair hein, on explique vite.
678. M : Ouais il sépare en m ... Ca marque ?
679. N : Je sais pas je regarde. Qu'est-ce que ça marque là ? Oui ça marche... Puis la deuxième étape, peut-être qu'il faut montrer un peu ça, comme on l'a vu non ? non ?
680. M : Ouais, ouais tu peux dire que...
681. N : J'écris ici ?
682. M : Ouais, ouais, tu peux dire...
683. N : Euh j'écris...
684. M : [Inaudible] C'est ça non ? C'est ça ?
685. N : Ouais. Et tu mets que ah ouais, ouais, ouais. Tu mets que ε c'est $ho(h)$.
686. M : Ouais.

687. N : Euh ε c'est $o(h)/h$, je veux dire.
688. M : On écrit ça ? La forme qu'on connaît puis...
689. N : Après tu mets que ε c'est $o(h)/h$ en fait je pense enfin...
690. M : une étoile pour le (1).
691. N : « En posant $\varepsilon = o(h)/h$, on obtient la formule euh... »
- [Pause]
692. M : C'était comment ? $o(h)/h$ tend vers zéro ?
693. N : En fait si tu veux, il faut que tu mettes, tu marques en posant $\varepsilon = o(h)/h$... Tu marques en posant ça, tu mets qu'on obtient sa formule en fait.
694. M : Ouais.
695. N : Enfin, je sais pas tu es d'accord ou pas parce que moi c'est comme ça que je l'écrirais.
696. M : Ouais.
697. N : Le [inaudible].
698. M : Son équation.
699. N : Tu as la... [Inaudible] clairement.
700. M : Je vais le marquer.
701. N : Moi je mettrais (*), tu sais comme ils font... On obtient... (*) appelle la.
702. M : Ouais, j'ai même mis (*).
703. N : Ah ok, pardon... Ouais, ouais.
704. M : D'accord.
705. N : C'est bon, puis il fait la somme. Pareil, ça, c'est clair.
706. M : Ca c'est clair, ouais.
707. N : Puis en troisième partie. « ε la plus grande quantité représentée par les $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ etc. ».
708. M : Attends je peux... Non rien. Moi, je pense à un truc qu'il faudra préciser à la fin. C'est le fait que, c'est le fait qu'elle soit au début jusqu'à la troisième étape on fixe m , puis après on fait grandir m pour faire diminuer ε . Je pense qu'il faut le préciser après.
709. N : Ouais.
710. M : Mais ça je pense c'est plutôt à la fin de la troisième étape, enfin tout à la fin quoi je veux dire.
711. N : On le précise oralement, je crois pas qu'il faut l'écrire.
712. M : Ouais, ouais, mais juste je te le dis oralement.
713. N : Ouais, ouais, je suis d'accord. Bon...
714. M : Après, on modifie la preuve comme on a dit ou pas ?
715. N : Oui... Alors ça, il faudra marquer peut-être non ?
716. M : Ben ouais alors je pense qu'il faudrait... Je le dirais comme ça, en ajoutant membre à membre on obtient ça. En passant à la valeur absolue, on obtient valeur absolue de $f(b)-f(a)$ égal h fois valeur absolue de ça.

717. N : Ouais, qui est plus petit que...
718. M : Qui est plus petit que...
719. N : h fois valeur absolue de chacun.
720. M : Voilà.
721. N : Tu dis...
722. M : Et comme ε ...
723. N : ε égal max de, toujours en valeur absolue...
724. M : La valeur absolue, ouais.
725. N : De toute les valeurs absolues, après tu dis que, refait ça mais avec les deux barres ici quoi.
726. M : Oui. Donc euh, j'écris tout ça ?
727. N : Ouais.
728. M : J'écris ici ? D'accord.
729. N : Mais je sais pas si tu auras la place.
730. M : Hum ? Ouais si ça... Non je peux pas ?
731. N : Ouais, ouais, mais sinon au pire tu peux... Si, si, si, tu auras la place j'ai rien dit.
732. M : Donc pour la trois, pour la quatrième partie... Non, pour la deuxième.
733. N : non c'est pour la deuxième... Par exemple tu peux appeler [inaudible], moi je le rédigerai comme ça mais après tu fais comme tu veux. Je dirais si tu appelle E, tu appelle mettons E cette équation, enfin cette « truc ».
734. M : Ouais
735. N : Tu dis E implique valeur absolue de $f(a)-f(b)$ égal h fois valeur absolue de... Enfin moi je dirais comme ça.
736. M : Ouais. Mais peut-être on marque deux étoiles par exemple.
737. N : Ouais, ouais. Deux étoiles ou comme tu veux hein, juste pour dire celle-là.
738. M : Donc « deux étoiles » implique ... $f(b)-f(a)$...
739. N : le h tu peux le sortir, y a pas besoin de valeur absolue puisque c'est positif.
740. M : Ouais, ouais, on met d'abord comme ça... Qui est plus petit... C'est ça ?
741. N : Après tu mets, « d'après l'inégalité triangulaire » enfin « par inégalité », « par inégalité triangulaire » je pense tu peux dire.
742. T2 : Bon, donc dans cinq minutes, hein ?
743. M : D'accord.
744. N : Ouais, ouais je pense. Moi je dirais on pose epsilon égal max de... de tous ces trucs là...
745. M : Mais comment ?
746. N : Tu mets virgule...
747. M : Parenthèse...
748. N : Parenthèse, ouais tu mets parenthèse, tu mets voilà et euh...

749. M : Comme ça.

750. N : Voilà comme ça et euh... après tu mets trois petits points jusqu'à *m*.

751. M : Et voilà après c'est tout pareil.

752. N : Après tu dis euh... Et après tu mets juste de valeurs absolues euh... Ici par exemple.

[Ils terminent la préparation de l'exposé]

**Annexe 18 : Transcription de l'exposé
du groupe d'étudiants de L1
travaillant sur la preuve adaptée du
texte de Liouville**

Exposé des étudiants de L1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville

1. T2 : ok vas-y.
2. N : Ben en fait l'énoncé c'est un énoncé qu'on avait déjà vu en... Qu'on a déjà souvent utilisé en maths, mais surtout en physique. « Quand la dérivée est nulle, la fonction est constante ». Puis là, il propose une démonstration avec euh... Qu'on avait séparée en quatre parties. Alors la première partie, il fait un... Il prend l'intervalle $[a; b]$, il le sépare en m sous intervalles, enfin en m , en m petits intervalles de longueur h . Ensuite, il fait... En fait, il fait juste un rappel d'une formule qui était... Bon, il l'écrit comme ça, mais en fait, nous on l'avait réécrite avec ce qu'on a vu. On avait écrit comme ça, en fait, c'était la même formule qu'on a vu mais avec $\varepsilon = o(h)/h$. On l'a vu avec les développements limités. Euh... donc euh ensuite, il applique la formule. Il applique la formule qu'on a vue et euh, après, il en fait la somme et euh il fait un... Ensuite, comme troisième partie, on avait vu qu'il faisait un, une inégalité et après cette inégalité, il conclut, ce qui fait la quatrième partie. Voilà, donc on a séparé en quatre parties... donc, alors maintenant peut-être une explication de comment on a compris la preuve. Donc alors, pour nous, on l'a dit au début, il sépare l'intervalle en m parties, en m petits intervalles et m est fixé, m il bouge pas, un nombre choisi comme ça. Après donc, il donne cette formule, puis il la fait dans chaque sous intervalles. Ben il la fait la formule en fait, il la réécrit dans chaque sous intervalle avec un ε différent pour chaque, pour chaque euh, ouais pour chaque intervalle et euh à la fin il en fait la somme. Puis il trouve que ça, fait ça... Alors nous, on a trouvé que c'était pas... que pour conclure, il fallait mieux, fallait mieux faire... prendre maintenant, quand on était à cette endroit, là, fallait prendre la valeur absolue de cette expression. Donc ça nous donnait ça, après, on faisait une inégalité triangulaire ce qui donnait, ce qui donnait euh une majoration et on prenait ε le maximum des ε en valeur absolue avec cette majoration et on se ramenait à la majoration qu'il donne ensuite et euh...
3. T2 : Tiens.
4. N : Donc ensuite là, il aurait fallu mettre, il aurait fallu mettre une valeur absolue du coup, ici, et euh, ce qui nous donnait le résultat ici, en valeur absolue. On aurait pu mettre plus petit ou euh... Supérieur ou égal à zéro, ce qui nous faisait avec le théorème des gendarmes que ça c'était, que $f(b) = f(a)$ parce que là, comme il l'a dit, comme il était ici, on peut supposer que $f(b) - f(a)$ plus petit que zéro, ça peut être un nombre négatif par exemple.
5. A2 : Qu'est-ce qui peut-être négatif ?
6. N : Ben $f(b) - f(a)$. Là, quand tu l'écris comme ça...
7. A2 : Ah, ok. D'accord, ok.
8. N : Tu fais tendre ε vers zéro, là, tu vois que c'est que ça fait $f(b) - f(a)$ plus petit que zéro, un nombre négatif.
9. Y : Mais dans ce que tu fais là, tu montres que valeur absolue de $f(b) - f(a)$, c'est inférieur à $hm\varepsilon$.
10. N : ouais. C'est supérieur à zéro.
11. Y : Et... ça, ça implique pas que $f(b) - f(a)$ est inférieur ou égal à $hm\varepsilon$. Si la valeur absolue alors forcément, le truc, il est aussi inférieur.

12. N : Ouais mais euh... Là, par exemple, enfin quand on voit, quand on voit le truc là comme ça, on trouve que c'est pas nécessaire parce que ça peut être plus petit que zéro. Concrètement tu dis, si tu dis ça, ça peut être plus petit que zéro.
13. Y : Ouais mais moi c'est pas, c'est pas cette étape là, c'est l'étape euh... Euh au dessus quoi, c'est le...
14. N : Ca ?
15. Y : Non, c'est quand tu dis euh... Ouais enfin l'étape que tu dis, lui il aboutit à $f(b) - f(a)$ inférieur ou égal à $hm\epsilon$.
16. N : Et ben, ouais...
17. Y : Et toi tu aboutis à valeur absolue de $f(b) - f(a)$ est inférieure à $hm\epsilon$.
18. N : Ouais, mais ϵ c'est pas le même en fait.
19. Y : Ah ok, d'accord...
20. N : C'est un... ϵ , là c'est un, là c'est... ce ϵ là.
21. Y : Ok, ok...
22. N : C'est max de ces ϵ là et...
23. Y : Ok.
24. N : Le notre, enfin, celui qu'on a pris ici...
25. Y : Ouais c'est le max des...
26. N : C'est le max des valeurs absolues.
27. Y : Des valeurs absolues, ouais.
28. N : Donc après on, après il remplace, il remplace h par la valeur qu'on lui a donnée, comment on l'a défini. On obtient ça et donc là, comme on l'a noté en valeur absolue et on fait tendre ϵ vers zéro. En fait, on veut faire tendre ϵ vers zéro pour se ramener à [Inaudible], faut faire tendre m vers zéro, si on fait tendre m , euh vers plus l'infini je veux dire, si on fait tendre m vers plus l'infini, ça fera tendre h vers zéro. D'après ce qui est dit ici, ϵ tendra vers zéro. Par ce que de toute façon, si ϵ c'est $o(h)/h$, quand tu fera tendre ϵ vers, quand tu fera tendre h vers zéro, $o(h)/h$ va tendre vers zéro par définition. Donc après on obtiendra que valeur absolue de $f(b) - f(a)$ est euh, à la limite, est plus petit que zéro et supérieur à zéro donc $f(b) = f(a)$. C'est voilà, c'est comment on conclut... Avec la valeur absolue...
29. N : Je sais pas, il y a des endroits où vous avez pas trop compris ou ?
30. A2 : Tu pourrais juste nous ré-expliquer le moment où tu mets valeur absolue de $f(b) - f(a)$...
31. N : Ici là ?
32. A2 : Voilà, voilà, en fait, qu'est-ce que vous avez changé ?
33. N : En fait, en fait, quand tu es ici, tu fais la somme puis tu obtiens ça.
34. A2 : Ouais.
35. N : D'accord ?
36. A2 : Ok, ouais.
37. N : Après si tu fais, si tu mets pas valeur absolue.

38. A2 : Oui.
39. N : Tu continues comme il a fait, tu prends le même max de toutes les quantités ε , tu obtiens ça.
40. A2 : Donc le ε ici c'est le max de tout de l'ensemble de la somme...
41. N : Ca, c'est max de...
42. A2 : Ok, ok.
43. N : de un à n machin.
44. A2 : Hum.
45. N : Donc tu obtiens ça. Parce que tu remplaces, tu dis que chaque euh... Pour tout euh...
46. A2 : Ouais, ouais, mais ça...
47. N : Pour tout ε , ça c'est plus petit.
48. A2 : Mouais.
49. N : Que... Tu obtiens ça, puis tu obtiens ça. Après, quand tu fais tendre m vers plus l'infini, ça fait tendre h vers zéro, qui fait tendre ε vers zéro, ça te donnera $f(b) - f(a)$ plus petit que zéro... A la limite. Donc $f(b) - f(a)$ plus petit que zéro, ça te dis que... c'est $f(b) - f(a)$ soit négatif. Enfin est soit négatif, soit égal à zéro. Ca dit pas qu'ils sont forcément égal à zéro. Puisque si tu fais ça, avec une fonction décroissante...
50. Y : Pourquoi, mais $hm = b - a$?
51. N : Parce que ça, c'est euh, c'est la définition en fait...
52. Y : Ah ouais.
53. N : On a définit h comme $(b - a)/m$.
54. Y : Ok...
55. N : On a séparé l'intervalle en...
56. Y : C'est pour ça qu'on a fait h ...
57. N : Parce que si tu prends juste, si tu prends juste, tu l'écris comme ça là, tu fais tendre ε vers zéro, t'obtiens $f(b) - f(a)$ plus petit que zéro. Ca donne $f(b)$ plus petit que $f(a)$. Ca voudrait dire que la fonction est décroissante, décroissante ou nulle.
58. Y : Ouais.
59. N : Ca voudrait pas forcément dire qu'elle, que $f(b) = f(a)$, t'es d'accord ?
60. Y : Ok. Et si tu l'écris avec les valeurs absolues ?
61. N : Si tu l'écris avec les valeurs absolues, là tu peux mettre, là tu mets ta valeur absolue, t'obtiens ta... là, ça reste pareil, et ton ε qui tend vers zéro, mais là, tu peux mettre que c'est plus petit ou égal à zéro. Et comme la valeur absolue est toujours supérieure à zéro et donc euh... valeur absolue de $f(b)$ moins $f(a)$ égal zéro en fait à la limite, ben ça veut dire $f(b) = f(a)$.
62. Y : Hum, hum, ok.
63. N : Parce que sans... Sinon, on pouvait le faire dans l'autre sens, on pouvait le faire autrement, sans prendre la valeur absolue, là aussi, on pouvait prendre le min, le min de tous les ε et on minorait, là on aurait eu deux... ça fait plus petit que min des ε .

64. Y : Ah, ok.
65. N : Si on avait voulu le faire sans valeur absolue. Enfin voilà, comment on a...
66. Y : Ok...
67. A1 : Moi c'est bon.
68. A2 : Ce que vous aviez déduit, c'est qu'elle était fausse au départ ?
69. N : Enfin, qu'elle était euh...
70. A2 : Enfin qu'elle était pas rigoureux, enfin elle était pas..
71. N : Enfin, pour nous il manquait un argument.
72. A2 : Un argument, ouais.
73. N : Enfin il manquait un... Enfin au début, au départ, on avait rien vu en fait, puis c'est après en reprenant on se dit...
74. Y : Comment ça se fait...
75. A2 : D'accord, ok.
76. T2 : Ok, on va mettre un truc en suite [T2 projette un nouveau transparent sur lequel il y a une preuve d'un énoncé faux. Cette preuve utilise également l'argument selon lequel le maximum d'un ensemble de suites qui convergent vers zéro converge également vers zéro. Voir annexe ???]. Voilà, on va prendre quelques minutes pour regarder cette preuve.
77. T1 : [à T2] C'est peut-être pas la peine de continuer à filmer ?
78. T2 : Non, non, laisse tomber.
- [Aparté avec quelqu'un qui est rentré dans la salle pour savoir quand elle sera libre]
79. Y : C'est la même chose qu'on a plusieurs fois discuté en fait...
80. A2 : Oui, voilà.
81. Y : Je suis pas d'accord...
- [Rires]
82. A1 : Ca vous paraît juste ?
83. Y : Ben non, c'est la même chose que ce dont on discutait.
- [Petit passage confus non transcrit]
84. T1 : Essayez de voir rapidement, de donner rapidement votre avis sur la validité de l'énoncé. Si il vous paraît juste, faux...
85. A1 : Moi, il me paraît juste.
86. N : Non moi, il me paraît faux.
87. Y : Il te paraît faux celui-là ? Et pourquoi celui de tout à l'heure il te paraît vrai ?
88. N : Parce que... ben je suis pas sûr, par exemple, si tu prends, mettons, tu remplaces u_m par euh, m^2 mettons, enfin tu sais $1^2 + 2^2 + 3^2$, tu vois ce que je veux dire ?
89. Y : Hum, hum.
90. N : Le plus grand des u_m , ça va être m^2 , le plus grand ça va être... Si tu prends ε ... Le plus grand des ε ça va être m .

91. Y : Pour moi, je suis d'accord avec toi, mais pour moi, c'est la même chose que la preuve qu'on a fait tout à l'heure.
92. A2 : Qu'on a fait tout à l'heure.
93. Y : Et qu'on disait...
94. N : Attends je vais juste reprendre un...
95. Y : Ah ouais, ouais, complètement... Et t'as le contre exemple, en plus... ouais, ouais...
96. N : Mais là, comment dire...
97. Y : Si tu trouve un terme à chaque fois qui augmente aussi vite que le sur m^2 .
98. A1 : Ben tu prends, tu prends le contre exemple, tu prends une suite ou le terme ça fait m , tu fais m, m, m, m, \dots Ca fait...
99. Y : Non, non, parce que ça va pas marcher ça... m, m, m, m, \dots Ca va pas marcher, ça fait m/m^2 . Puis t'as pas de suite, tu peux pas créer une suite qui change au fur et à mesure.
100. N : La différence c'est que là euh... le ε ...
101. Y : Non mais regarde, la suite elle marche bien, tu fais un, deux, quatre, huit...
102. A1 : Oui, donc la suite elle fait un, la suite elle fait un, donc c'est faux.
103. Y : Non, non parce que tu peux pas prendre ta suite qui fait m, m, m, \dots
104. A1 : Pourquoi pas ?
105. Y : Parce que, parce que la suite elle peut pas changer au fur et à mesure du temps...
106. A1 : Oui, mais...
107. Y : La suite ben... posons $m = 1000$. Et ben, m^2 il va tendre vers plus l'infini mais la suite elle va pas pouvoir faire plus l'infini plus plus l'infini parce qu'elle est posée la suite.
108. N : Non mais, de toute façon...
109. A1 : Mais, mais, non mais moi je, moi je prends hein ?
110. N : De toute façon tu fais m, m de toute façon m ça tend vers, ça tend vers zéro, S_m ça va être égal à m . Ca va être m , euh...
111. Y : [à A1] Tu prends S_m égal quoi ?
112. A1 : Quoi ?
113. Y : Tu pose S_m ... Oui, oui... C'est bon t'as raison.
114. A1 : Je pose S_m égal la somme de un euh... de un à m de m .
115. Y : Hum, hum.
116. A1 : Donc ça fait m^2 .
117. N : Ouais si ça fait m^2 .
118. A1 : Donc ça fait un, donc c'est faux...
119. N : Ouais mais là, là, là, le truc c'est qu'ils disent regardent quand ils disent : « notons ε_k ... », là, ε_k , il ne bouge pas.
120. Y : Hum ?

121. N : Alors que là, il peut, quand tu vas prendre le, quand il va prendre ε tend vers zéro, il va bouger en fait.
122. Y : Ouais, c'est ce que... Ouais mais normalement, il n'est pas censé bouger parce que la suite euh... Tu, ils ne sont pas censés changer, en fait.
123. N : Ouais mais, ouais mais regarde, quand tu prends, quand tu prends, il va changer là, quand tu vas faire tendre...
124. Y : Ouais, ouais,... Ouais mais nous, sur le contre exemple, il changerait et...
125. N : Mais ε il va tendre vers zéro, ε il va changer tout le long...
126. Y : Oui. Et il tendra pas vers zéro.
127. N : Parce que ça va faire, ouais ça va faire.
128. Y : Parce que si tu poses $u_k = m$.
129. A1 : Ben ouais, pourquoi pas ?
130. Y : Ouais.
131. T2 : Vous proposez u_k égal quoi ?
132. A1 : m .
133. T2 : Et alors ? $u_k = m$!
134. A1 : Non euh...
135. Y : S_m son idée c'était quoi... S_m égal la somme...
136. A1 : Egale la somme de...
137. Y : la somme de un à m ...
138. A2 : m, m, m, m, \dots
139. A1 : Enfin chaque terme vaut m , une suite constante.
140. T2 : Ah d'accord vous avez $u_k = k$?
141. A1 : Ouais !
142. Y : Ouais, ouais tout à fait...
- [Rires]
143. Y : $u_k = k$ plutôt.
144. A1 : $u_k = k$ et euh...
145. T2 : Et alors ?
146. A1 : Non, $u_k = k$, ça marche pas.
147. T1 : Qu'est-ce qu'il ne marche pas.
148. T2 : C'est pas ça que tu voulais dire ?
149. A1 : Moi, je voulais une suite constante où tous les termes soit m .
150. Y : Ah mais sinon sur quoi tu...
151. T2 : Ah mais, c'est différent alors... Dans ce cas c'est bien $u_k = m$.
152. Y : Oui.

153. T2 : C'est pas ce que tu disais tout à l'heure ?
154. Y : Oui, oui, oui... c'est u_k ...
155. A1 : Donc euh... La somme euh, la somme de tous les m ...
156. T2 : Ouais...
157. A1 : de un à m , ça fait m^2 ou m^2-1 , m facteur de $(m-1)$.
158. N : Non ça fait m^2 .
159. Y : Non mais ça marche pas, faudrait poser m^2 .
160. N : Non, si on prend, si on prend que c'est la somme de...
161. Y : Son truc, ça marchait bien.
162. N : U... Par exemple u_k ça pourrait être égal à k^2 .
163. T2 : Oui.
164. Y : Ouais, voilà.
165. N : Et si on fait la somme, le plus grand élément enfin, par exemple si on prend comme ça, si on écrit comme ça, le plus grand élément ça va être euh, ça va être m^2 .
166. T2 : Ouais.
167. N : Et donc, quand on va faire tendre vers l'infini, ça va tendre vers... ça va tendre vers zéro en fait. Ca va tendre...
168. Y : vers un.
169. N : Ca va tendre vers plus l'infini en fait, ε va tendre vers plus l'infini. Non, parce que quand tu fais le rapport...
170. Y : ah oui sur m , ouais sur m ça va tendre...
171. T1 : Pourquoi ça va...
172. T2 : Tu veux l'écrire au tableau ?
173. N : Si on prenait u_k / m , si on prend le maximum en m ça va faire m^2/m , ça va faire m , le maximum.
174. Y : ouais parce que le u_k il est variable en fonction de m donc il...
175. T2 : Pourquoi tu parles de maximum ?
176. N : Parce que après, ils nous parlent de maximum, soit ε le maximum de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$
177. T2 : D'accord...
178. A1 : Moi je trouve...
179. T2 : Tu cherches un contre exemple dans la preuve.
180. A1 : Je pense qu'une suite constante... Pour moi un contre exemple c'est $u_k = m$, c'est faux.
181. T2 : C'est faux, qu'est-ce qui est faux, la preuve ou l'énoncé ?
182. A1 : La pre... Euh, l'énoncé.
183. T1 : Et $u_k = m$, ça signifie quoi, $u_k = m$.
184. A1 : Ben moi...

185. Y : u_k égal somme de $k = 0$ à $k = m$...
186. A1 : Enfin ? ça fait une suite constante euh... Une suite constante.
187. T1 : Donc y a un m fixé mais...
188. Y : C'est pas une suite constante.
189. N : Ouais mais elle est pas constante, parce que après... Faut que tu changes de m alors.
190. Y : Ouais, mais c'est pas une suite constante !
191. N : Faut que tu changes de m , faut que tu changes de lettre.
192. T1 : Là, y a un problème non ?
193. T2 : C'est quoi, t'as u_1 ... Si u_k c'est m , u_1 c'est quoi ?
194. A1 : C'est m ...
195. T2 : ... m il est déjà pris ici.
196. N : Faut que tu dises que c'est une autre valeur.
197. Y : Ben alors ça marche plus.
198. A1 : Argh.
199. A2 : Comment ça, il est déjà pris ici ?
200. Y : On peut pas poser S_m .
201. T2 : Dans ce cas, je change ma notation à moi, je mets un l ici et un m ici.
202. Y : Ouais.
203. T2 : D'accord ?
204. N : Ouais mais là ça va marcher parce que...
205. T2 : Dans ce cas là, qu'est-ce qu'il faut faire ici S_l , ça serait quoi ?
206. N : lm , ce serait l fois m .
207. T2 : Ouais.
208. N : Enfin selon, selon la...
209. Y : Non mais m , m c'est bien ça, c'est... On a le droit de poser soit une suite S_m , enfin la S_m égal la somme de $l = 0$ à m euh... Qu'est-ce que je disais... Je sais plus ce que je dis.
210. N : Non, si on reprend avec les...
211. A1 : Ah on reprend avec les m .
212. N : Si on prend avec les carrés plutôt, si on prenait par exemple $u_1 = 1^2$ plus $u_2 = 2^2$, enfin...
213. Y : Ouais, celle-là aussi elle marche.
214. N : Oui, $u_k = k^2$.
215. T2 : Ouais ?
216. N : Après quand on va, si on applique la preuve, on prend euh... On prend soit ε euh... ε_m , soit ε le maximum de ceux là, ça va faire m le maximum ? Non ? D'accord !
217. Y : Non, mais moi, je suis d'accord avec toi.

218. A1 : J'ai pas compris pourquoi tu pars dans la preuve alors que... Enfin moi, je suis pas dans la preuve encore hein ?
219. T2 : Ok, tu répètes ce que tu dis ? Donc ça c'est les ε de la preuve, ce que j'ai noté ici, c'est ça ?
220. N : Non, ça c'est la suite.
221. Y, A2 : non, ça c'est la suite.
222. T2 : D'accord.
223. N : Après il nous disent ε_k c'est u_k / m .
224. T2 : ε_k c'est u_k sur...
225. A2 : u_k / m .
226. N : m . Voilà, donc euh, après ils disent soit ε le maximum de... des ε_k .
227. T2 : [T2 transcrit au tableau] Ouais.
228. N : Donc si on prend la, si on prend la, euh, si on fixe m et qu'on prend le, d'après la suite qu'on a mis en dessus, ça ferait...
229. Y : m^2 .
230. N : Le maximum ça serait m^2 , m^2/m !
231. T2 : Donc le max ce serait m^2/m .
232. N : Ouais ce serait ça.
233. T2 : Egal m . Vous êtes d'accord ou pas ?
234. Y : Ouais.
235. A2 : C'est ça oui, enfin le raisonnement est bon.
236. N : Si on fixe m .
237. Y : Ouais, parce que c'est S de m .
238. N : Et après, quand on fait tendre m vers plus l'infini, ça tend pas vers zéro quoi.
239. T2 : Le max, je le prends sur quelles valeurs de k ici ?
240. T1 : Y a m qui est fixé avant k en fait
241. Y : Ben pour $k = m$.
242. T2 : m est fixé avant k et donc là k il va aller se balader où ?
243. N : entre un et m .
244. T2 : Donc c'est le max de quoi en fait ?
245. N : max des k^2/m .
246. A1 : k^2/m .
247. T2 : k^2/m , donc du coup j'ai quoi, j'ai $1/m$, $2/m$ enfin $2^2/m$,
248. A2 : Ainsi de suite jusqu'à k^2/m .
249. Y : jusqu'à m direct.
250. T2 : jusqu'à m^2 ... Ouais euh j'ai pas mis le k^2/m . Ca va ou pas ?

251. A2 : Oui, c'est bon, ouais.
252. T2 : Donc le max c'est m^2 , bon. Et alors ?
253. N : Ben ils nous disent euh... Mais ε tend vers ε alors que ε il tend pas, enfin ouais...
254. Y : ε , il tend pas vers zéro.
255. N : Il tend pas vers zéro, alors que la suite elle respecte, c'est une suite de réels positifs, elle respecte les conditions de l'énoncé.
256. Y : si, c'est bon ça marche.
257. T1 : Ca montre quoi ?
258. N : Ben ça montre que... ben déjà, pour la preuve on a trouvé un contre exemple.
259. T1 : La preuve est ?
260. N : La preuve est fausse.
261. Y : Ben ouais, ça montre qu'elle est fausse.
262. T1 : Est-ce que l'énoncé est juste ?
263. A1 : Ben...
264. Y : Ben non.
265. A2 : Moi je le trouve faux.
266. Y : Justement, puisqu'on a déjà un terme qui tend vers euh, qui tend vers un, sachant que tous les termes sont positifs, elle pourra pas tendre vers zéro... S_m / m^2 . Donc on a l'énoncé faux puisqu'on a déjà une suite où ça marche pas.
267. T1 : Laquelle ? La suite là ?
268. Y : Ouais, on a S_m , soit S_m la suite de la somme de $k = 0$ à m , somme de $k = 0$ à m des $m...$ des k^2 .
269. N : Ca tend vers un à la limite.
270. Y : La limite ouais, elle va tendre vers...
271. N : un.
272. Y : Je sais pas si elle va tendre vers un.
273. N : Si parce que ça te fait un polynôme en fait
274. A2 : Moi, je dis un aussi.
275. N : En haut t'aura du m^2 , ça te fait un polynôme en m^2 .
276. Y : Y aurait u_m enfin...
277. T2 : u_k égal...
278. Y : Non mais carrément la suite $S_m = \dots$
279. N : Somme des...
280. Y : De $k = 0$ à m .
281. N : De $k = 0$ à m de k^2 .
282. Y : Des k^2 voilà.

283. T2 : Donc ça vous connaissez par cœur ?
284. N : C'est...
285. T1 : Non, y en a pas besoin.
286. Y : Non, y a pas besoin, je dis que cette suite elle est minorée par le dernier terme parce que tous les termes sont positifs, donc elle est minorée par m^2 . Et m^2/m^2 ça tend vers un donc euh...
287. T2 : S_m / m^2 va être plus grand que un.
288. N : Elle tend vers un parce que ça fait un polynôme en... Non ?
289. Y : Moi je dirais pas qu'elle tend vers un mais euh...
290. A1 : Non plus grand que un, ça suffit.
291. Y : Et ce terme d'à côté, il va tendre vers... Je dirais même qu'elle va tendre vers plus l'infini. Parce que les termes ils vont être quasiment les mêmes, t'aura $(m-1)/m^2$, t'aura $(m-1)^2/m^2$...
292. N : Ah ouais non, si ça tend vers plus l'infini... Ca fait des sommes des [Inaudible].
293. Y : Du coup, pour moi, c'est à peu près la même chose que je voyais dans l'autre preuve quoi.
294. T2 : Et sinon, par rapport à la preuve euh... celle d'avant avec les ε tout ça. Est-ce que vous voyez que ce genre d'argument a été utilisé là ?
295. A1 : Euh... C'est sur le max.
296. Y : Euh, moi j'ai pas bien...
297. N : Ah ouais, enfin, ce genre [Inaudible]. Mais ε il tendait vers zéro par définition, en fait.
298. T2 : Ouais.
299. N : Enfin, quelque soit ε , il tendait vers zéro.
300. T2 : Ouais.
301. N : Enfin, il était défini comme ça en fait... On a dit que c'était $o(h)/h$.
302. T2 : Ouais.
303. N : Donc par rapport à notre écriture qu'on a vu euh...
304. T2 : Chacun de tes ε ?
305. N : Chacun des ε enfin c'est un $o(h)/h$ après c'est différent...
306. T2 : Ouais.
307. N : C'est différent $o(h)$ en fait. Chacun des ε c'était un $o(h)/h$, quoiqu'il arrive il devait tendre forcément vers, vers zéro.
308. T2 : le ε que tu avais à la fin dans ton raisonnement, on pourrait le remettre, mais euh...
309. N : C'était euh...
310. T2 : C'était quoi ?
311. N : max des valeurs absolues des, c'est valeur absolue de $o(h)/h$ en fait.
312. T2 : C'était un max.
313. T1 : Donc la différence que vous voyez, c'est par rapport à votre contre exemple... c'est par rapport à quoi ?

314. N : C'est par rapport au ε en fait.
 [Aparté non transcrit entre A1, A2 et Y]
315. A2 : Celle-là là ?
316. Y : Je sais pas du coup, y a des trucs que j'ai pas trop capté...
317. A2 : Ouais mais du coup, on a pas analysé autant que, que, que lui il l'a fait.
 [Fin de l'aparté]
318. T1 : Dans ce contre exemple, il y a un ε , un des ε qui ne tend pas vers zéro, c'est ça ? C'est ça que vous êtes en train de dire.
319. N : Hum.
320. T1 : Tout ε , le début de la preuve est juste, pour chaque k , ε_k tend bien vers zéro.
321. N : Parce que k est fixé y a que m qui bouge en fait.
322. A2 : Vous pouvez répéter ce que vous venez de dire s'il vous plait ? J'ai pas compris ce que vous venez de dire.
323. T1 : Quelle est la différence.
324. Y : Non mais la preuve là, c'est carrément l'énoncé, qu'on, qu'on...
325. A2 : Qu'on infirme.
326. Y : ouais, ouais ça, c'est vrai ça... Mais on peut pas y démontrer comme ça.
327. N : Mais là, ça marche pas, c'est parce qu'il bouge pas le u_k en fait.
328. Y : Ouais, mais ça c'est vrai, pour tout u_k ça va marcher mais euh... C'est pas ça enfin... On peut pas le démontrer comme ça quoi.
329. T1 : D'accord, mais quelle est la différence avec le contenu de la preuve précédente, l'endroit où...
330. Y : Ah ben... Effectivement, c'est en train de me...
331. N : Ben c'est que le, là quand on prend...
332. Y : Il est borné.
333. N : ... En fait, là, il va, quand on va faire augmenter m , le maximum il va changer euh, enfin le max il va tout le temps changer en fait.
334. T2 : Et dans l'autre cas, il ne change pas ?
335. T1 : Dans l'autre cas, le m il ne bouge pas ?
336. N : Si dans l'autre cas il bouge, mais euh...
337. Y : Ah ouais, ouais, ouais, c'est ok...
338. T1 : Je vais réécrire les deux lignes qui correspondent.
339. Y : Ouais les trucs... Elle est continue...
340. T1 : Vous avez à la fois cette ligne là, c'est ça non, $S_m / m^2 = 1/m$ c'est ça ?
341. Y : Ouais.
342. T1 : Et dans l'autre, vous avez en gros, c'est comment ?

343. Y : Mais dans le euh...
344. T1 : Vous avez $f(b) - f(a)$ inférieur ou égal à...
345. Y : Ouais, mais les ε_m , ils sont, ils sont, ils bougent pas quoi. Enfin, ils vont bouger mais comme la fonction est continue, euh, y aura un maximum. On peut, on peut dire que tout ε_m , est déjà inférieur, inférieur à, à ben le maximum de la courbe moins le minimum. Que là le m , il peut aller jusqu'à l'infini... enfin je sais pas.
346. T1 : Et là, quand vous dites ça, vous le voyez dans la preuve de Liouville ou est-ce que vous qui le mettrait comme argument supplémentaire...
347. Y : Ben...
348. T1 : Ca, c'est un argument supplémentaire de votre part.
349. Y : Ouais, il le dit... Je sais pas... Si ce qu'il dit soit e la plus grande de toutes les quantités, et il montre pas que... Que e pourrait être infini. Parce que là, ils disent soit e le maximum, mais le maximum il évolue parce que, enfin, il évolue et il peut partir à l'infini parce que m dans notre contre exemple m à chaque fois il va monter et on peut pas majorer m , enfin m^2 .
350. T2 : D'accord, et dans l'autre cas on prend le maximum aussi...
351. Y : Dans l'autre cas, on prend le maximum. Mais il est forcément majoré parce que c'est une courbe continue, donc elle admet un maximum et un minimum...
352. T2 : mais ε c'est pas le maximum ou le minimum de la courbe...
353. Y : C'est pas la différence entre le $f(a+2h) - f(a+h)$...
354. N : Ben c'est la différence entre la dérivée... Le ε c'est la différence entre... La dérivée et la, le taux de variation en fait.
355. Y : Ah, je croyais que c'était le... autant pour moi... j'avais pas vu le h en fait devant.
356. T2 : En tout cas, est-ce que, pour qu'on passe peut-être, est-ce que c'est clair que a priori dans la preuve de Liouville, le maximum là, il faudrait un argument pour dire que le maximum, il tend vers zéro ?
357. A1 : Hum, hum.
358. Y : Ouais, ouais, faudrait ouais...
359. A1 : Ouais donc euh...
360. N : Ben non parce que le maximum, il est défini comme euh, il est défini euh... Comme tendant vers zéro quel que soit, si on l'écrit ε c'est $o(h)/h$, par définition il va tendre vers zéro.
361. T1 : C'est pas ça qui est $o(h)/h$.
362. A2 : quand h tend vers zéro.
363. Y : ε c'est quoi ?
364. N : Si on le réécrit avec ce qu'on a vu ?
365. T2 : Oui mais chacun des ε c'est un $o(h)/h$. Enfin, un truc qui va tendre vers zéro.
366. N : Ouais.
367. T2 : Mais est-ce que le maximum, quand j'ai des trucs qui tendent vers zéro, et que je prends leur maximum, est-ce que le maximum doit nécessairement tendre vers zéro. C'est ça un peu, la question.

368. A1 : Ben, ouais.
369. N : Ben oui, parce qu'il en fait parti
370. T2 : Quel ε ?
371. A1 : Il fait parti d'un ensemble qui tend vers zéro...
372. Y : C'est la même chose... Ouais, on peut pas comme il y a une infinité...
373. T2 : Ah oui. Peut être ce qui serait intéressant c'est de compter le nombre de ε qu'il y a chez Liouville, qu'est-ce que tu en penses ?
374. Y : Parce que plus il y a d' ε et plus, enfin plus les ε deviennent petits et plus il y en a... Parce que j'ai pas... Enfin.
375. T2 : [Inaudible] Défini comment ε ?
376. T1 : Peut-être qu'on va faire un petit...
377. Y : Ben justement je le... Enfin, j'ai pas réussi à...
378. A1 : ε c'est u_k / m .
379. Y : A voir vraiment, enfin, à tout comprendre dans le truc.
380. T1 : Qu'est-ce qu'il fait Liouville, il découpe l'intervalle d'accord ?
381. Y : Ouais.
382. T1 : En m parties etc.
383. Y : Ouais, voilà.
384. T1 : [T1 dessine] Peut être pour voir quelque chose sur un dessin, on peut...
385. Y : Oui, oui, il le découpe ok, ouais.
386. T1 : Découper en deux, ensuite en quatre ...
387. Y : Et ε , ça représente quoi la dessus ?
388. T1 : Alors ε ça représente quoi, ben c'est... vous avez $f(a+h)$...
389. Y : Ouais.
390. T1 : Ca représente... L'erreur liée à la pente, en gros la pente, donc.
391. Y : Ah, ça représente la pente
392. T2 : Ouais... entre $f(a)$ et... Mais pas $f(a)$ en a ouais, bref...
393. T1 : $f(a+h)$ ici... et $f(a)$... On sait simplement que la dérivée est nulle.
394. Y : Ouais, donc quand il tend... Ok...
395. T1 : Donc la cette pente, là normalement ça tend vers...
396. Y : Si ε ça tend vers zéro... Enfin.
397. T1 : Ca c'est ε ...
398. Y : Ouais, ouais voilà... Oui le truc, c'est qu'on sait pas le nombre d' ε qu'il y a. Enfin...
399. T1 : Ben quand $m = 2$, il y en a deux, quand $m = 3$, il y en a trois, quand $m = 4$, y en a quatre...
400. Y : Ouais mais là, du coup...

401. N : Ouais, mais comme ça tend vers plus l'infini, ε tend vers zéro donc euh... Donc je veux dire, euh...
402. T1 : Pourquoi ε tend vers zéro quand m tend vers l'infini.
403. N : Ben, parce que h tend vers zéro, quand m tend vers plus l'infini et euh, quand h tend vers zéro, ε tend vers zéro... Par définition en fait.
404. T2 : Lequel de ε ?
405. T1 : Quel ε ?
406. Y : Chaque ε .
407. N : Ah euh... chaque ε , ouais.
408. T2 : Et y en a combien ?
409. A1 : Y en a m .
410. N : Au début y en a m . Puis après, on fait tendre m .
411. Y : C'est ça le truc, c'est que comme...
412. T2 : Si tu fais tendre h vers l'infini, ça revient à faire quoi sur m ?
413. Y : Ben à l'augmenter.
414. N : Non h vers l'infini, m c'est...
415. T2 : Non pardon, c'est tendre h vers zéro.
416. N : ça revient à augmenter m .
417. T2 : Ouais.
418. N : Ca fait qu'il y aura une infinité d' ε .
419. Y : C'est la même chose que tout à l'heure, où on est pas d'accord hein. Y a une infinité de termes, il tendent tous vers zéro mais comme il y en a une infinité, le fait de les faire tendre vers zéro, ça en rajoute, on peut pas savoir si ça tend vers euh... Vers zéro.
420. N : Ouais mais là, tu n'as pas d'ajout enfin je veux dire.
421. Y : Et si parce que pour le faire tendre vers zéro, l' ε ...
422. T1 : Ce qui pourrait se produire, c'est qu'à chaque fois qu'on découpe un peu plus l'intervalle, il y a encore un petit ε qui se rajoute et que cet ε qui se rajoute soit plus grand que un... A ce moment là. Qu'à chaque fois le max soit plus grand que un sans interdire que les ε tendent chacun vers zéro. Ca, il a pas donné d'arguments par rapport à ça. Il écrit simplement que en prenant le max des $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, sachant que chacun, chaque ε_i tend vers zéro alors le max tend vers zéro mais c'est pas un max fixe, c'est un max qui varie avec m .
423. A1 : Ouais.
424. Y : Hum...
425. A1 : Donc euh, donc euh.
426. T2 : J'essaye de trouver un exemple qui aille bien.
427. T1 : Le problème formellement, c'est que quand on fait un max, pour i entre un et m , de ε_i ...
428. Y : Ouais, voilà.

429. T1 : Ca c'est des ε_i de m et qu'on fait tendre m vers l'infini. On sait pas trop ce qu'il se passe. Donc ε_m , je l'écris avec m si vous voulez, c'est ça en fait.
430. A1 : Ouais donc là, pour trouver vraiment le maximum...
431. T1 : Chaque étape, il y a un nouvel ε qui apparaît.
432. A1 : Hum, hum.
433. Y : hum.
434. T1 : Et le ε à cette étape là, il peut être trop grand, même si à l'infini, il tend vers zéro. Dans le second énoncé, dans la preuve du second énoncé c'est bien ça qui se passe...
435. A1 : Ouais.
436. Y : Ouais, ouais, ouais, ...
437. T1 : Là, vous avez le contre exemple. Mais dans votre contre exemple, même si on regarde chaque ε_k , ça tend bien vers zéro quand k tend vers plus l'infini.
438. A1 : Ouais... Euh quoique, non.
439. T1 : [Inaudible] Quand m tend vers l'infini.
440. Y : Ouais, ouais, ouais, ok.
441. A1 : Ouais, ils tendent bien vers zéro.
442. Y : Ok... On commence à avoir la pression là. [Il est prévu de revenir ensuite sur le travail de A1, A2 et Y].
443. T2 : Parce que simplement, on termine peut-être là-dessus... Euh, ce qu'il se passe ici... On a bien tous les ε_k qui vont tendre vers zéro quand m tend vers plus l'infini. Ici, chacun de ces trucs là tend vers zéro quand m tend vers plus l'infini... Mais si je rajoute celui-ci... On va pas prendre les carrés, on va prendre ces trucs là. Tous ces termes là, ils tendent vers zéro quand m tend vers plus l'infini parce que ce m là, il est fixe, mais celui là il bouge si je prend que m éléments. Le problème, c'est que, je pense, la notation ici, on a un problème m il bouge avec.
444. A1 : Hum.
445. Y : Ouais.
446. T2 : [T2 est au tableau] Et si je fais tendre m vers plus l'infini, ici, tous ces trucs là tendent vers zéro et pourtant si je rajoute à chaque fois, comment dire si je fais, quand je fais grandir m ... Ici j'ai $1/(m+1)$, $1/(m+2)$ et ça continue... $m/(m+1)$, $m/(m+2)$... et ici je rajoute $(m+1)/(m+1)$... $(m+2)/(m+2)$...
447. T : Ouais du coup...
448. T2 : Etc, chacun de ces termes là, si je les regarde dans ce sens là, il vont tendre vers zéro, avec m ... D'accord, ces nombres là, ils vont tendre vers zéro parce que le dénominateur il tend bien vers l'infini. Et pourtant, quand on regarde le max de tous ces trucs là, à chaque fois si je regarde le max comme ça, c'est toujours un.
449. ? : hum.
450. T2 : On essaiera peut-être de faire un récapitulatif un peu plus clair parce que là, c'est un peu difficile et euh...
451. Y : Et est-ce que c'est le même argument pour euh, pour notre truc... Enfin, pour euh...
452. T2 : Ca ressemble un peu, on va regarder vos... Quelque chose de nouveau...

453. Y : Ah ouais.

454. T2 : ... Si vous avez encore un peu d'énergie... Qui j'espère sera un peu plus clair. A mon avis ça l'est.

[Transition entre les deux groupes, $T1$ et $T2$ distribuent un nouvel énoncé adapté à l'analyse de la preuve inspirée par le texte de Cauchy. Cet énoncé est faux et la preuve contient une déduction similaire à celle analysée par le groupe Y , $A1$ et $A2$, c'est-à-dire une déduction utilisant un passage à la limite sur les termes d'une série que l'on cherche à calculer. Voir Annexe ???]

**Annexe 19 : Transcription des débats
du groupe d'étudiants de M1
travaillant sur la preuve adaptée du
texte de Liouville**

Groupe d'étudiant de M1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville :

[T1 demande à D et E de chercher comment elles feraient cette preuve indépendamment de celle donnée par Liouville]

1. D : Ben le taux de variation est constamment nul. [Inaudible] Enfin voilà, je le montrerais comme ça. Le taux de... la dérivée c'est la, la dérivée c'est la... En chaque point, la dérivée c'est la limite du taux de variation. Et là, le taux de variation est nul partout.
2. E : C'est ce qu'ils font, point par point.
3. D : Ouais, mais... Ouais.

[Pause]

4. T1 : Alors cette preuve, cet énoncé, il est juste ?
5. D : Ben oui.
6. E : Oui.
7. T1 : D'accord. Vous vous rappelez quand vous avez vu ça ?
8. D : Ben, je vois pas quand est-ce que on l'a vu mais euh...
9. T1 : Vous l'avez vu plusieurs fois dans euh...
10. D : Ouais.
11. T1 : Vous avez déjà du le voir au lycée, j'imagine sans démonstration.
12. E : Ouais sans preuve.
13. D : Hum. On l'a peut-être vu... Enfin en première année après la bac, je pense.
14. T1 : Hum.
15. D : Ben la définition de la dérivée, on a vu que c'était le taux de variation...
16. T1 : Ouais.
17. D : Donc là, si le taux de variation est nul partout euh... il est nul en limite.

[Discussions non transcrites sur l'apparition du théorème dans l'enseignement universitaire d'aujourd'hui et sur Liouville]

18. D : Non c'est égal. Justement les ε il les a rajoutés là pour dire que ça tend vers zéro mais...
19. E : Ouais, ok.
20. T1 : Cette première ligne, oui, vous êtes... Enfin pas cette première ligne mais cette équation là, vous voyez ce que ça veut dire ?
21. D : Ben oui.
22. T1 : Vous êtes convaincues par ça ?
23. D : Enfin oui, c'est la différentielle en fait. Enfin c'est l'application ouais, qui à h associe $f'(x)$ fois h et on rajoute un petit truc quoi.
24. T1 : Oui.
25. E : Oui. Ok, ok.

26. D : Tu viens de lire toute la preuve ?
27. E : Ouais.
28. D : Alors le truc, le truc qui me paraît, qui me paraît, je sais pas, un peu bizarre c'est que enfin... C'est que tu as à chaque fois des trucs finis, enfin t'as n trucs à chaque fois et après tu obtiens ton résultat en faisant tendre vers l'infini.
29. E : [Inaudible] Ca reste constant parce que h tend vers zéro.
30. D : Ouais.
31. E : hm c'est euh...
32. D : m c'est $1/h$, un truc comme ça ouais.
33. E : Hum, c'est ça.
34. D : Ouais. Et voilà, le truc c'est que, à chaque fois tu... Tu prends un pas fini m et tu arrives à des résultats sur ça et après tu le fais tendre ce pas vers l'infini. Enfin ça, c'est vrai, c'est ça le truc dur.
35. E : Hum, hum. Faut faire quoi avec cette preuve ?
36. D : Il faut faire les questions de la fin. Attend.
37. E : Ah mais y a des trucs ici...
38. D : Ok, ok. « Déterminer et mettre en évidence chaque étape de la preuve »... « La preuve est-elle valide ? ». Si ça se trouve, la preuve est pas valide. C'est ça le truc ha, ha, ha, la blague.
39. D, E : [Inaudible, D et E parlent à voix très basse]
40. E : Le seul endroit où ça pourrait euh...
41. D : Merder c'est quand ça passe à l'infini.
42. E : C'est ça, c'est quand... Mais même pas parce que hm c'est toujours égal à $(b - a)$ donc euh, ça pose pas de problème.
43. D : Non.
44. E : De passer à la limite, on pourrait avoir une forme indéterminée ou quoi...
45. D : Mais là, là regarde, on prend la plus grande de toutes ces quantités, c'est ça qui est marrant, c'est la plus grande mais c'est cool parce que c'est un max, mais si ça tend vers l'infini...
46. E : Mais ils tendent tous vers zéro.
47. D : Ouais.
48. E : Donc la plus grande tend forcément vers zéro.
49. D : Ouais, ouais je suis d'accord. Enfin, la somme tend vers zéro, ouais.
50. D : Mais y a pas de problème de signe ?
51. E : Ouais ?
52. D : Y a pas des problèmes de signe ? Genre euh, enfin tu vois ce que je veux dire ? Ouais parce que la somme... C'est quoi qui tend vers zéro ?
53. E : ε et h .
54. D : Donc, chaque ε tend vers zéro en fait.

55. E : Hum.
56. D : Donc la somme finie elle tend vers zéro. Maintenant, si tu en as une infinité d' ε ...
57. E : Ouais mais c'est ça je te disais, ils prennent ε le plus grand, il le multiplie par m parce qu'il y en a m quoi.
58. D : Ouais, mais si m tend vers l'infini ?
59. E : Oui mais, il y a h dedans et hm c'est euh... c'est $(b - a)$.
60. D : Ouais... Ouais, mais enfin...
61. E : Mais, je suis d'accord si il y avait un problème, ce serait là.
62. D : Hum...
63. E : On va faire les questions.
64. D : On fait les étapes ?

[Discussions non transcrites sur l'organisation, sur le théorème des accroissements finis]

65. T1 : Bon, qu'est-ce qui vous paraît clair dans les étapes de la preuve là ?
66. D : Ben d'abord, il divise l'axe des abscisses pour travailler sur un ensemble fini de points et ensuite il fait tendre son pas vers zéro et le truc qui me pose un peu problème, enfin je sais pas trop, c'est que là il fait tendre, il fait tendre une somme vers zéro mais euh... Après, enfin le nombre de terme de la somme est infini et... Voilà donc il travaille à chaque fois sur un nombre fini puis il fait tendre chaque truc vers zéro, mais en prendre un nombre infini peut être problématique. Voilà.
67. T1 : En fait, c'est bien de faire un petit graphique pour voir comment se fait la preuve, c'est-à-dire les ε ça correspond à des petites erreurs...
68. D : Hum.
69. T1 : Vous pouvez voir si déjà c'est convaincant la manière dont il le fait puis ensuite, voir si vous êtes convaincues par la formalisation.
70. D : D'accord.
71. T1 : Vous pouvez essayer de compléter si vous n'êtes pas convaincues tout à fait hein, essayer de voir si vous pouvez compléter jusqu'à être convaincu, voir si pour vous l'argument est faux ou non. Au début ça vous paraît clair ?
72. E : Oui, oui.
73. D : Ouais le début ouais. Ben jusque là en fait. On en est là.
74. T1 : Parce que là il y a aussi, il utilise un... quelque chose quand même un... Ca, ce passage là, là. Il remplace hm par $(b - a)/$
75. D : Ouais.
76. T1 : Ca lui permet de se débarrasser/
77. D : Du m ouais.
78. T1 : Du fait qu'il y a $m \varepsilon$.
79. E : Ca tend vers l'infini, ouais.
80. D : Ouais.

81. T1 : Ouais.
82. D : Ouais, alors que sinon, si ça se trouve, c'est pas défini, enfin...
83. E : Ouais si, si, c'est toujours égal à $(b - a)$.
84. D : Ouais mais bon, enfin.
85. E : Ca te perturbe. [Rires]
86. D : Voilà. Bon, on fait le super graphique ?
87. E : On fait quoi comme graphique ?
88. D : Je sais pas moi.
- [Rires]
89. D : Non, mais si il doit y avoir...
90. E : Une fonction constante ?
91. D : Ben non, justement pas constante parce que sinon, enfin une fonction pas constante.
92. E : Un contre exemple alors...
93. D : Ben pas un contre exemple, une fonction pas constante et/
94. E : Et montrer/
95. D : Enfin presque constante quoi.
96. E : En fait, on fait une autre preuve.
- [Rires]
97. E : On fait une fonction pas constante et puis on va montrer que la dérivée est non nulle.
98. D : Voilà. [Rires] On va voir ce que représentent les ε en fait, tu vois ?
- [Elles font un dessin]
99. D : Et donc du coup, cette valeur là, ça s'appelle quoi, ε , attend, εh , c'est ça ? C'est ça en fait le ε à chaque fois.
100. E : Hum.
101. D : Ouais, bon. Il divise l'intervalle en trucs, il fait ça à chaque fois. ε tend vers zéro quand h tend vers zéro. Ouais, d'accord. Et donc $h \varepsilon$ tend vers zéro quand h tend vers zéro. Et il fait ça sur chaque truc. Et du coup, il arrive à $f(b)-f(a)$ mais attend, $f(b)-f(a)$, il montre juste que $f(a)=f(b)$.
- [Discussions sur le dessin et les étapes. Arrivée de F]
102. D : Et ensuite, il somme cette infinité de différences petites, c'est ça hein ?
103. E : Y en a pas une infinité.
104. D : Non...
105. F : C'est bizarre comme truc a priori quoi.
106. D : Ouais, c'est quoi qui te...
107. F : Euh ouais, enfin je sais pas, mais peut-être même que le maximum des ε , on n'est pas sûr qu'il tende vraiment vers zéro.

108. D : Ouais c'est ça, à chaque fois/
109. E : Pourtant ils tendent tous vers zéro donc euh...
110. D : on a un nombre fini en fait, c'est ça le truc.
111. F : Ouais.
112. D : Donc, il y a un nombre fini de truc qui tendent vers zéro...
113. F : Ben oui mais justement, quand tu tends vers l'infini, il y en a une infinité de ε .
114. D : Ouais mais... C'est peut-être l'ordre dans lequel il fait le truc aussi. Enfin, il commence d'abord par euh...
115. E : Par diviser.
116. D : Enfin, par diviser quoi ?
117. E : Ben le segment $[a, b]$ en...
118. D : Ouais. Ouais, c'est vrai que c'est bizarre. Enfin, il prend le max sur un nombre fini de trucs et puis après il fait tendre les trucs vers l'infini.
119. E : Hum.
120. D : Moi, je vais le refaire le truc.
121. E : Quoi ?
122. D : Je vais le refaire.
123. E : Refaire la preuve ?
124. D : Ouais, ça me plaît pas ce passage. Enfin, je sais pas mais bon. Non, mais ça va être juste si c'est Liouville qui l'a fait mais je sais pas. Si tu veux il prend le max, le max, c'est ça quoi. ε , il l'appelle, max de tout.
125. E : Hum. En fait, c'est $\mathcal{E}(m)$ quoi [E prononce « epsilon m » et pas « epsilon de m » mais cette notation permet de distinguer de ε_m].
126. D : Euh... Pourquoi $\mathcal{E}(m)$?
127. E : C'est pas ce ε_m mais ça dépend de m quoi.
128. D : Voilà ouais, d'accord ok. Ouais, voilà c'est un $\mathcal{E}(m)$, c'est ça. Et le truc, c'est que, est-ce que $\mathcal{E}(m)$ tend vers zéro ?
129. E : Non, prime, parce que...
130. D : Prime.
- [Rires]
131. D : Donc il dit que $f(b)-f(a)$ c'est la somme de machin, machin. Voilà... Qu'est-ce que tu dirais toi pour les étapes ?
132. F : Comment ça pour les étapes ?
133. E : Y a des questions derrière la feuille.
134. F : Ouais.
135. T1 : Est-ce qu'il y a quelque chose qui vous posait problème ?
136. D, E : Oui.

137. T1 : C'est vraiment quelle étape a priori ?
138. D : Euh...
139. E : Celle-là.
140. F : Celle-là, là. Enfin quand il dit euh...
141. E : C'est une somme finie d'abord.
142. F : Que \mathcal{E} a pour limite zéro euh...
143. T1 : En fait donc, c'est juste la fin.
144. E : Ouais.
145. T1 : Ce que on a pas, c'est que \mathcal{E} ait pour limite zéro, c'est ça ?
146. F : Ouais.
147. E : [Inaudible]
148. T1 : C'est que \mathcal{E} a pour limite zéro, cet argument là vous...
149. E : A la fin, ouais, \mathcal{E} ouais.
150. T1 : \mathcal{E} , « Comme \mathcal{E} a pour limite zéro... »
151. E : Parce qu'en fait euh, il y en a une infinité donc si quand m tend vers plus l'infini, c'est pas sûr, vu que le dernier \mathcal{E} c'est pas un \mathcal{E} , c'est un $\mathcal{E}(m)$.
152. T1 : Est-ce qu'il y a une façon d'essayer de formaliser ça un peu plus pour qu'on voit ce que va représenter cet \mathcal{E} . Déjà peut-être, comment on peut, est-ce que vous avez des techniques, est-ce que vous avez vu des techniques des fois où... Qu'est-ce que vous faites quand on a un \mathcal{E} qui tend vers zéro. Quand quelque chose tend vers zéro, qu'est-ce [inaudible]. Est-ce que vous l'écrivez systématiquement comme ça, par exemple dans cette formule là ?
153. E : Non, avec des « petit o » et tout.
154. T1 : Soit avec un « petit o » mais...
155. F : Non mais on écrirait en plus que c'est un \mathcal{E} qui dépend de h quoi, que $\mathcal{E}(h)$ tend vers zéro.
156. E : Hum, hum.
157. T1 : Ca, il a l'air de le dire clairement que \mathcal{E} dépend de h .
158. E : Hum, hum. Ouais le dernier par contre...
159. T1 : Mais est-ce qu'il dépend vraiment que de h ? C'est ça peut-être qu'il faut que vous posiez comme question.
160. E : Ben de m aussi forcément.
161. T1 : Bien sûr mais comment ? Il est basé à partir des \mathcal{E}_i et les \mathcal{E}_i dépendent de quoi ?
162. D : Ben...
163. T1 : En gros, son argument c'est quoi, on peut le résumer même si vous êtes pas convaincus par cet argument. Pourquoi il dit le maximum des \mathcal{E}_i tend vers zéro ?
164. E : Parce qu'ils tendent tous vers zéro donc euh...
165. D : Ouais.
166. T1 : Est-ce qu'il sont vraiment bien définis ces \mathcal{E}_i quand...

167. D : Quand il y en a une infinité ?
168. T1 : Quand h tend vers zéro justement.
169. D : Ah.
170. E : Oui, ils tendent vers zéro.
171. D : Oui, quand h tend vers zéro parce que c'est la dérivée quoi.
172. T1 : Le ε dans l'équation général il dépend de h mais il dépend que de h ?
173. F : Non, enfin...
174. E : Il dépend de a aussi, non ?
175. F : Il dépend du point de départ ouais.
176. D : Oui.
177. T1 : Qu'est ce qu'il se passe pour les ε ?
178. F : Oui, parce que en fait tous les trucs ils vont tendre vers euh... vers $f'(a)$ si on fait juste tendre h vers zéro, par rapport à...
179. T1 : Oui, parce qu'il y en a de plus en plus des h donc par exemple le $(m-1)h$, même si h tend vers zéro, m devient de plus en plus grand...
180. E : Non mais, elle est juste cette preuve ?
181. T1 : Ben c'est à vous de dire ce que vous en pensez. Si vous avez, là vous êtes pas convaincus par le dernier argument alors une méthode des fois quand on est pas convaincu par un truc c'est soit on essaye de, en utilisant, de voir si par exemple un même type d'argument dans un autre cadre pourrait arriver à quelque chose qui est contradictoire d'accord, un contre exemple. Là, vous pouvez pas trouver un contre exemple avec une fonction qui vérifie cette propriété là parce que l'énoncé vous savez que c'est juste. D'accord ?
182. D : Hum.
183. T1 : Soit vous arrivez [Inaudible] peut-être quand, on peut peut-être un petit peu le corriger...
184. D : Genre si on avait ε qui valait $1/n$ et qu'on en a n , la somme ça fait n fois $1/n$ ça fait 1 à chaque fois.
185. T1 : Oui, ben ça c'est une autre façon...
186. D : Ici, ben euh ouais.
187. F : Oui, mais le truc qu'il dit c'est qu'on a quand même h fois m qui vaut $b - a$ donc euh, enfin...
188. T1 : Oui mais l'astuce [inaudible] $1/n$. Si chaque ε valait $1/n$.
189. D : Hum.
190. T1 : Avec son astuce, il aurait bien ε égal $1/n$, c'est le max hein, c'est pas la somme.
191. D : Hum.
192. T1 : Ca marcherait là.
193. D : Ca marcherait. Ben maintenant si on a $1/(mh)$... un truc comme ça. Ouais si ε vaut $1/(mh)$, c'est possible ou pas ?
194. E : On peut peut-être utiliser le sup non ? En prendre une infinité, si il y a une infinité de ε qui tend vers euh... vers zéro est-ce que le sup des ε tend vers zéro ? Hum ?

195. D : Euh, ben... Ouais, je pense.
196. E : Immédiatement, prendre le pire des cas où il y en a une infinité.
197. D : Ouais mais attend euh... Ouais. Ouais, je pense. Non, mais en fait je dis n'importe quoi, ça peut pas être $1/(mh)$, parce que $1/(mh)$ c'est justement 1 sur le... Non, moi je pense, il faut regarder ε ce qu'il vaut... Enfin peut-être pas avec des « petits o » mais en fonction de m et h , tu vois ce que je veux dire ? Enfin l'exprimer puis après...
198. E : L'exprimer...
199. T1 : ε_1 , est-ce que c'est clair ce que c'est ε_1 ?
200. D : Oui.
201. E : Ouais.
202. T1 : ε_1 , c'est simplement à l'origine
203. D : C'est la différence, ouais c'est ça.
204. T1 : Ce qu'il se passe... Vous avez $a, a + h$ [T1 dessine au tableau]...
205. E : C'est la différence entre la différentielle...
206. T1 : C'est la différence entre la pente [Inaudible]...
207. D : Ouais, et puis la fonction.
208. T1 : Et puis la dérivée [Inaudible].
[Inaudible, T1 est au tableau]
209. D : Ben c'est pareil.
210. E : Ben c'est pareil sauf que c'est en $a + h$.
211. D : D'accord, ε_2 , il dépend du pas en fait enfin c'est pas toujours le même, ah ouais d'accord. En fait, après c'est des ε_m , comme tu dis, enfin, ils dépendent.
[T1 est toujours au tableau, partie assez inaudible – du fait de la distance avec le microphone – et non transcrite]
212. D : Non, c'est juste la valeur à $a + 2h$. Tu vois ce que je veux dire ? ε_1 c'est en $a + h$ et ε_2 c'est en $a + 2h$ c'est tout.
- [Pause]
213. E : C'est quoi alors la question ?
214. D : Euh... Quand h tend vers zéro, est-ce que le max tend vers zéro ? Et est-ce que ça passe à la limite en fait. Enfin... En fait moi, je sais pas. C'est vraiment bizarre. C'est quoi ces trucs que ça dépend ou que ça dépend pas. [Inaudible]
215. E : Axiome du choix ?
216. F : Déjà, ce qu'on pourrait peut-être essayer, enfin je sais pas si ça aide mais on pourrait poser h ce serait en fait $1/2^n$ et comme ça à chaque fois, quand on a déjà des ε ... [Inaudible] Comme à chaque fois, on découpe en deux on a juste trois trucs et on en rajoute deux entre du coup euh...
217. D : Ah, ouais, ouais pas bête.
218. F : Et du coup euh...
219. D : Comme ça les ε ils bougent pas.

220. E : Ah, ouais, hum, hum.
221. F : Ouais, y en a qui bougent pas.
222. D : Ouais, puis enfin [Inaudible].
223. E : Tu en rajoutes quand même.
224. F : On rajoute quand même, ouais.
225. D : Ouais, on rajoutes ouais [inaudible]... On change de numéros.
226. E : Peu importe.
227. D : Ah, ça peut être bien. Et euh...
- [Pause]
228. D : Ouais, sachant qu'il y en a $1/h$ qu'on observe. Sachant qu'après il y a des ε c'est, y a pas de h quoi.
229. E : Hum, hum.
230. D : C'est quoi [Inaudible] de théorème euh...
231. E : [Inaudible].
232. D : Je sais pas c'est des théorèmes euh... De limites ou... C'est quoi déjà ?
- [Pause]
233. D : Avec cette idée tu arrives à [Inaudible] ?
234. T1 : Alors, qu'est-ce que vous en pensez ? En conclusion, est-ce que vous pensez que l'argument... Il vous paraît juste, pas juste ?
235. E : Juste mais euh... [Inaudible] Pourquoi εh tend vers zéro.
236. T1 : Il est vrai que εh va tendre vers zéro parce que...
237. E : Même si il y en a une infinité.
238. T1 : Parce que là, c'est le résultat en fait qui dit ça.
239. T1, D : [Inaudible]
240. E : Ouais, mais on peut faire une preuve fausse d'un théorème juste.
241. T1 : C'est même pas tout à fait vrai ce qu'il dit, il y a rien qui prouve que $h\varepsilon$ tende vers zéro parce qu'on prend le max plutôt que la somme hein. Il prend m fois le max c'est plus grand que la somme. Ce qui est sûr c'est que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m$ va tendre vers zéro, puisque c'est $f(b) - f(a) = 0$.
242. D : Ah, ouais.
243. T1 : C'est même plutôt h fois ça qui tend vers zéro. Pas sûr du tout que...
244. D : Ouais, c'est bizarre qu'il dise avec ε qui tend vers zéro quand h tend vers zéro. Parce qu'en plus c'est h fois ε .
245. T1 : Non, mais c'est vrai que le ε là il tend vers zéro.
246. D : D'accord.
247. T1 : Ca c'est le [Inaudible].
248. D : Mais c'est sûr que c'est h fois quelque chose qui tend vers zéro ?

249. T1 : Non, non, le ε ici, il tend bien vers zéro.
250. D : Ouais.
251. T1 : Mais y a rien qui garantit que le $\varepsilon(h)$ il tend vers zéro.
252. D : Ben euh, ben je sais/
253. T1 : Est-ce que vous avez une idée de comment on fait en sorte d'être sûr que ça tend vers zéro.
254. E : On en prend une infinité, non ?
255. T1 : On prend une infinité de quoi ?
256. E : Ben de ε_i . Même si on en a une infinité, même si ils tendent tous vers zéro alors le sup il va tendre vers zéro.
257. T1 : Ca, c'est une bonne question, est-ce que vous êtes convaincus par son argument là.
258. D : Ah non, parce qu'en plus [inaudible].
259. T1 : ε i tend vers zéro, quand je prends le sup des $\varepsilon(h)$.
260. D : Mais là, sachant que le sup, le cardinal de l'ensemble du sup dépend aussi de h .
261. T1 : Admettons qu'on en prenne une infinité au départ.
262. E : Ouais, on passe directement à une infinité.
263. D : Ah ok.
264. T1 : [Inaudible].
265. D : Ouais pour le coup, ouais parce que c'est...
266. T1 : Vous avez une infinité de fonctions qui tendent vers zéro, est-ce que le sup tend vers zéro ?
267. D : Ben... La fonction limite elle est euh... continue un truc comme ça, enfin c'est pas ça ?
268. T1 : [Inaudible] repose la question.
269. D : Est-ce que la fonction limite elle est continue, sur quoi, sur quoi ? Non attend, attend...
270. E : Faut faire de l'algèbre.
271. D : Ouais, grave... Toi aussi. [Inaudible] Ben non, parce que c'est une question de convergence simple, c'est ça quand on a des...
272. T1 : [Inaudible] Même si c'est non, il faut donner un contre exemple.
273. D : Ouais.
274. T1 : [Inaudible] Pour dire que vous êtes pas convaincu par la preuve, il faut, il faut la compléter. Admettons que quelqu'un soumet une preuve comme ça, vous pouvez dire il y a un [Inaudible] dans tel argument parce que si je prends tel exemple ça marche pas [inaudible].
275. D : Ouais, mais c'est ça ouais [Inaudible]. Vous pensez que c'est vrai vous ? Enfin...
276. E : Quoi ?
277. D : Vous pensez que c'est vrai ? Si il y a un sup ? Non, je sais pas.
278. F : Ouais, plutôt ouais.
279. E : Plutôt.
280. D : Plutôt ouais.

[Inaudible]

281. D : Donc ils tendent simplement vers zéro... On prend le max...

282. E : Et chacun tend vers zéro.

283. D : Ouais, tend vers zéro en zéro.

284. D : Genre... Je sais pas moi, qu'est-ce qu'on a comme fonction qui tend vers zéro en zéro.

285. E : En zéro, ben x .

286. D : Ouais merci. Enfin qui tend vers zéro, ouais d'accord...

287. E : Il faut que ça tende et que ça soit pas égal...

288. D : Et qu'on en ait une suite.

289. E : Parce qu'ils sont pas forcément continue en h hein les \mathcal{E} .

290. D : Ah... Ouais. Hum... Attend y a quoi comme truc qui tend vers zéro autre que ce que tu as dit. Une fonction qui tend vers zéro mais [Inaudible] en plus l'infini quand même, enfin comment dire...

291. E : En zéro faut qu'elle tende vers zéro hein...

292. D : Une fonction qui tend vers zéro en zéro [Inaudible].

293. F : J'ai trouvé un contre exemple.

294. D : Fait voir.

295. F : Avec l'exponentielle. Si tu prends chaque, enfin tu prends $\mathcal{E}(h)$ c'est maximum de $k = 0$ à m des euh... des $h^k / k!$ [je suppose qu'il prend la somme de $k = 0$ à m de ces choses-là comme fonction]

296. D : Ah oui, c'est [Inaudible].

297. F : Et en fait le sup, ben le sup justement c'est exponentielle de h qui va tendre vers un.

298. D : Ah... Ouais, ouais. Est-ce que c'est le sup ?

299. E : Non, mais ça... Ca tend pas vers zéro.

300. D : Si chaque truc tend vers zéro parce que/

301. E : Ben sauf le premier.

302. D : Ah, ha.

[Rires]

303. D : Ah, ha, ha, ha. Mais y avait des trucs comme ça avec l'exponentielle. A tu sais euh... Comment ça s'appelle...

304. E : [Inaudible]

[Rires]

305. E : En fait tu rajoutes un donc forcément, ça va pas tendre vers zéro.

306. D : Ca tend vers un.

307. E : Oui, mais ça tend vers 1.

[Rires]

308. E : Bon. Y a pas de contre exemple parce que c'est vrai.
309. T1 : Y a pas de contre exemple ?
310. E : Non.
311. T1 : le ε comme ça, on oublie la preuve elle-même.
- [Passage inaudible]
312. T1 : Il dit, on prend le max des ε_i , chaque ε_i tend vers zéro/
313. E : Donc le max tend vers zéro.
314. T1 : [Inaudible] Et vous étiez pas tous convaincus par cet argument. C'est que en plus des ε_i , il y en a de plus en plus.
315. D : Genre si on prend une fonction qui vaut un partout et zéro à partir de, enfin, [Inaudible]. Bon alors un partout et zéro à partir de $1/n$. Un truc comme ça quoi, enfin...
316. F : Parce que si on prend euh... que les ε ...
- [Inaudible]
317. F : Si je prends $\varepsilon(h)$ c'est h fois la somme des $1/k$ pour k allant de zéro à m . Alors là, je peux dire que tous les ε_m tendent vers zéro.
318. T1 : C'est quoi votre ε , est-ce que vous avez un ε ?
319. F : $\varepsilon(h)$ c'est ça.
320. T1 : hum, d'accord.
321. F : Et donc le sup, il est même pas défini.
322. D : Hum, ouais. Il est où le h ?
323. F : C'est l'infini. Et du coup, le sup...
324. D : $\varepsilon(h)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro ? Ouais parce que c'est un nombre fini fois h . Ouais, mais euh...
325. T1 : Hum, hum, vous pouvez faire ça. Et maintenant si on prend exactement son exemple, au lieu de prendre le sup, vous prenez le max qui dépend en même temps de h .
326. F : Ah ouais.
327. T1 : Le max, on va dire h mettons que ce soit $1/m$.
328. E : C'est la limite du max.
329. T1 : Quand $h = 1/m$, ça va donner comme $\varepsilon(h)$, $\varepsilon(1/m)$, c'est le max des $\varepsilon_1(h)$ jusqu'à $\varepsilon_m(h)$. C'est exactement ça son argument. Lui, lui, il prend pas le sup...
- [Inaudible]
330. D : Ca veut dire que à chaque fois son sup, ça va être h fois la somme des $1/k$ pour k égal un à m .
331. F : Hum.
332. D : Et cette suite là, elle tend pas vers zéro, c'est ça ? Enfin...
- [Inaudible]
333. D : Comment ?
334. [Inaudible et non transcrit]

335. D : Mais là, le truc il est constant ? Le $\varepsilon(h)$ il est constant ? C'est ça que tu veux dire ? Chaque fois $\varepsilon_1(h) = \varepsilon_2(h) = \varepsilon_3(h) = \dots$
336. F : Non, non.
337. E : C'est égal à zéro tout le temps alors non ? Euh limite elle tend vers zéro tout le temps.
338. F : Ouais, mais pas le sup.
339. E : Pas le sup...
340. F : Mais justement, ouais c'est pas exactement.
341. D : J'ai pas compris ce qu'elle a dit mais c'est quoi alors ton exemple euh, la suite. C'est quoi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$?
342. F : Ben, ce serait ça quoi.
343. D : Ca, c'est ε_m quand m qui varie, du coup le sup c'est bien, c'est bien ça non ? Enfin, je sais pas, ça croit ce truc ? Le max pardon, le max de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$?
344. [Inaudible]
345. F : Ben là le truc c'est que/
346. E : Ils tendent pas vers zéro là.
347. F : Le m et le h , ils sont liés quoi.
348. E : Dans tous les cas, ça c'est ε_i aussi ? ε_i c'est bien ça ?
349. F : Ouais.
350. E : Mais ils tendent pas vers zéro en...
351. F : Si ils tendent vers zéro.
352. D : A la place de h tu mets $1/m$ c'est ça ?
353. F : Ouais, ouais, c'est ça.
354. D : $\varepsilon(h)$ ça veut dire que c'est $1/m$... La question, c'est est-ce que cette suite elle tend vers zéro ou pas, sachant que ça, c'est une forme indéterminée.
- [Inaudible]
355. D : Bon attend $1/m$ fois la somme allant de zéro à m des $1/k$
356. E : Tend vers zéro.
357. D : Ca tend pas vers zéro
358. E : Ca tend pas vers zéro.
359. D : Ouais.
360. T1 : Si vous voulez chercher encore un peu sur le contre exemple [Inaudible].
361. D : Et ça, ça, on peut pas montrer que ça tend pas vers zéro [Inaudible].
362. T1 : Alors c'est quoi ? Oui, ça correspond à $\varepsilon(h)$ ça ?
363. E : Mais ça tend vers zéro.
364. D : Ouais, c'est $\varepsilon(h)$ enfin $\varepsilon(m)$, c'est $1/m$...

365. T1 : $1/m$ somme pour k de zéro à m de $1/k$. Bon alors euh, le $1/k$ c'est en $\log(m)$, d'accord la somme des $1/k$ c'est en $\log(m)$... Donc là, ça va tendre vers zéro.
366. E : Ca tend vers zéro ; ouais.
367. D : Voilà. Euh, pfff... Un sur ... Euh, ben...
368. E : $1/\log(k)$.
369. D : [Inaudible]
370. T1 : Et comment vous l'avez trouvé ? D'une certaine manière est-ce que vous pouvez pas faire en sorte que le maximum soit au moins tant ou tant.
371. D : Soit ?
372. T1 : Soit, à chaque maximum quelque chose. Vous voyez ce que je veux dire ?
373. D : Ouais, qu'il soit constant et pas égal à zéro ?
374. T1 : Tout en ayant un maximum de quantités qui chacune tende vers zéro. C'est ça hein ?
375. E : Avec un maximum ?
376. D : Avec des nombres négatifs - positifs ?
377. T1 : Non, qu'avec des nombres positifs. Vous vous déplacer en l'infini en quelque sorte, vous voyez ? Il faut trouver un ε_1 qui tende bien vers zéro quand h tend vers zéro.
378. D : Hum.
379. T1 : A la première étape ε_1 , ça peut valoir quoi ?
380. D : Ben, n'importe quoi.
381. E : $1/h$.
382. T1 : Peut-être que votre h il vous embête donc vous remplacer par le m , vous voyez ?
383. D : Oui.
384. T1 : Hein, le h qui tend vers zéro, ça correspond au m qui tend vers l'infini. Vous pouvez raisonner avec un m qui tend vers l'infini. Il faut que quand le m tend vers l'infini, ε_i tende vers zéro, d'accord ? C'est ça, hein.
385. D : Mais là m c'est... ah, non. Moi je vois pas comment la somme peut tendre vers zéro si ils sont tous positifs et qu'il y en a un qui tend pas vers zéro.
386. E : La somme tend pas vers zéro, c'est ça ?
387. D : C'est impossible la somme tend vers zéro de toute façon puisque/
388. E : Non, c'est h fois la somme qui tend vers zéro.
389. D : Oui si la somme... Ah oui pardon.
390. T1 : Non mais [inaudible], quand vous cherchez un contre exemple, vous vous intéressez qu'au point d'argument qui vous choque. Vous avez pas à essayer de recoller à ça. Il y a plusieurs étapes hein. Après dans d'autres étapes vous pouvez chercher aussi un contre exemple si vous êtes pas convaincus. Après c'est intéressant de regarder/
391. E : Y en a des contre exemples ?
392. T1 : C'est intéressant de regarder ailleurs pour voir si ça pourrait se corriger l'argument parce que vous avez une hypothèse supplémentaire qui n'aurait pas été utilisée, qui est trop implicite.

393. F : Ce qu'on peut dire c'est que si on prend euh... Si on veut qu'à chaque fois, notre truc il est divisé en m , on met m en dessous à chaque étape, on les note \mathcal{E} enfin [inaudible] \mathcal{E}_k pour k allant de zéro à m et à ce moment là, on peut dire que \mathcal{E}_k c'est $1/2^{m-k}$. Comme ça, on a bien quand m tend vers l'infini euh, ça va bien tendre vers zéro et le sup c'est un, le sup enfin le max quoi parce qu'en fait on déplace le truc quoi.
394. D : Pourquoi, pourquoi le max c'est un ?
- [Inaudible]
- [Discussions non transcrites autour de la présentation]
395. T1 : vous passez encore 5 minutes sur le contre exemple ?
396. F : Parce qu'en fait, pour le dernier, on peut toujours le choisir avec une valeur fixée [Inaudible]. On a bien qu'un nombre fini, donc l'idée c'est de dire que, essayer de faire tendre après vers zéro. Chaque fois, on rajoute un truc mais le dernier on le touche pas.
397. D : Ah mais... Le dernier ?
398. F : Le dernier en fait dans mon exemple en fait c'est...
399. E : C'est un.
400. F : C'est un.
401. D : Ouais, et les autres ? [Inaudible]
402. F : Ben déjà [Inaudible].
403. E : Max, ouais.
404. F : Le max de ce truc là égal un. C'est ce qui nous intéresse quoi parce qu'on a un [Inaudible].
405. E : Mais là, le max il tend vers zéro.
406. D : Mais je sais pas, pour moi le max il tend vers zéro aussi, enfin...
407. E : Oui, oui le max, il tend vers zéro
408. F : Ben non justement.
409. D : Et la somme tend vers zéro ?
410. E : Oui mais ça, ils tendent pas tous vers zéro les \mathcal{E} donc forcément.
411. F : Si...
412. E : Non, le dernier, il tend pas vers zéro.
413. F : Si justement l'idée c'est de, enfin à chaque fois [Inaudible] \mathcal{E} là, enfin le truc si on voulait bien les noter, on noterait un truc euh... En fait h , on l'écrirait genre $1/m$ et du coup là, en fait, c'est des \mathcal{E} qui dépendent pas seulement, enfin c'est des \mathcal{E} qui dépendent aussi de ces m là. On pourrait les noter $\mathcal{E}_1(m), \dots$
414. D : Oui.
415. F : $\mathcal{E}_2(m), \dots, \mathcal{E}_m(m)$. Et euh, si tu, là voilà, j'ai donné des $\mathcal{E}_k(m)/$
416. D : Alors, $\mathcal{E}_k(m) \dots$
417. F : C'est exactement le...
418. D : Le tac... Alors donc tu as $\mathcal{E}_1(m), \mathcal{E}_2(m), \dots$ Ouais mais le truc, c'est que là/

419. F : Donc par exemple euh... $\varepsilon_1(m)$, dire que h tend vers zéro ça veut dire que m tend vers plus l'infini, donc $\varepsilon_1(m)$ par exemple, il tend bien vers zéro.
420. D : Ouais mais $\varepsilon_m(m)$?
421. F : $\varepsilon_m(m)$... le problème c'est pas de savoir si $\varepsilon_m(m)$ tend vers zéro, le problème c'est de savoir si $\varepsilon_k(m)$ à k fixé tend vers zéro.
422. E : Oui donc $k = m$ ça ne marche pas.
423. D : Et euh...
424. F : Mais k il faut qu'il soit fixé...
425. E : ah...
426. F : Là, dans son argument euh... Il dit je prends la plus grande des quantités représentées par les ε_1 ...
427. D : Ah ouais...
428. F : On a ça, bon d'accord, moi quand, donc quand je prends le max, effectivement bon c'est un. Voilà, ça y a pas de problème.
429. D : Hum.
430. F : Mais après ce qu'il fait lui, c'est il dit « Je fais tendre m vers l'infini ». ε tend vers zéro quand m croît indéfiniment, ça veut dire exactement... Enfin, c'est pas clair dans ce qu'il dit. Il dit que « ε a pour limite zéro ». Et sa raison, ce serait que chacun, parce que chacun des $\varepsilon_k(m)$ tend vers zéro. Il peut pas le... Enfin... Enfin, $\varepsilon_k(m)$ tend vers zéro, c'est pas $\varepsilon_m(m)$ tend vers zéro.
431. D : C'est pas $\varepsilon_m(m)$ parce que le truc, c'est qu'il y en a m des ε , il y en a autant que de, que de $1/h$... c'est pas grave ça ?
432. F : Non, là le contre exemple, c'est, le contre exemple c'est de trouver... Justement, ben là on a trouvé une famille qui tend vers zéro, chacun tend vers zéro mais le max ne tend pas vers zéro.
433. D : Tu veux dire que... ah ! Ok.
434. E : Pas du tout... Mais, moi, je suis restée bloquée sur, au fait que le dernier il...
435. D : En fait...
436. E : Il tend vers zéro donc euh...
437. D : Il tend vers zéro quand m tend vers plus l'infini.
438. F : Ce ε_1 là, par exemple dire que ε_1 tend vers zéro, il a le droit de le dire parce que il dit ça quand h tend vers zéro, donc si je retranscrit ça, ça veut dire que le $\varepsilon_1/$
439. E : Ah oui, il tend vers zéro quand m ok, ok c'est bon, c'est bon.
440. D : Alors le truc, c'est que maintenant, il faut ce truc là aussi, il faut que ce soit les mêmes, les ε .
441. F : Non, enfin/
442. D : Parce que si...
443. F : Non mais le but, enfin là on oublie un peu...
444. D : Ouais d'accord, je suis d'accord mais euh...

[Préparation de l'exposé non transcrite]

**Annexe 20 : Transcription de l'exposé
du groupe d'étudiants de M1
travaillant sur la preuve adaptée du
texte de Liouville**

Exposé des étudiants de M1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville

1. E : Donc nous, on va vous présenter un énoncé de Liouville, qui a été présenté à Polytechnique en 1947. Et voilà, un théorème assez simple. Or maintenant, on nous le démontre facilement. C'est un corollaire du théorème des accroissements finis. Donc on utilise ça. Et là, il le démontre en utilisant aucun autre théorème, directement.
2. D : Alors donc, la preuve elle est assez courte. Donc euh, donc il prend deux réels pour démontrer que la fonction coïncide en ces deux réels. Alors pour ça, il partage le segment, il divise le segment en plusieurs intervalles [inaudible], voilà. Et sur chaque, sur chaque petit intervalle en fait, il majore la différence entre le taux d'accroissement et euh, et euh... Ce que l'on attend, ce que vaut vraiment la fonction. Ce qu'il appelle ε_h ici, et il le majore sur chaque petit intervalle. Donc ça, c'est euh... Comme ça, là. Donc on a des petits ε et ensuite pour euh, pour obtenir euh, $f(b) - f(a)$, il somme tout et euh, donc il somme tous les ε . Comme il y en a un nombre fini, il dit que chaque petit ε tend vers zéro [Inaudible], ben le maximum de tous les ε tend vers zéro. $f(b) - f(a)$ du coup, c'est majoré par h fois le nombre des ε_k , c'est-à-dire m fois le maximum des ε . hm , c'est constant et donc il dit que $f(b) - f(a)$ est majoré par une quantité qui tend vers zéro. Et donc euh, est égal à zéro. Le problème qu'on avait, c'est qu'il peut y avoir un nombre infini de ε [Inaudible]. Chaque terme tend vers zéro, mais y en a un nombre infini.
3. F : Ouais donc euh, la question qu'on s'est posée c'est que [Inaudible]. C'est que, effectivement, chaque ε_1 , enfin chaque ε_i pris individuellement, tend bien vers zéro mais euh, le max qu'on prend d'eux, ben il est pris sur de plus en plus de termes. Donc on peut se demander si il y a pas un problème. Donc déjà, donc [Inaudible] contre exemple, donc euh, donc l'idée c'est de trouver une suite vérifiant toutes ces propriétés et qui, et dont le max enfin... Et donc, chaque suite tendra vers zéro mais le max tendra pas vers zéro. Donc, euh... Pour reprendre les notations de la preuve, on peut en fait le ε_1 , bon on va prendre $h = 1/m$, le ε_1 en fait, on aurait pu le noter $\varepsilon_{1,m}$ en fait. Comme il l'a écrit c'est pas clair, mais les ε il dépend aussi de h . Donc voilà, donc en fait là, on aurait $\varepsilon_{1,m}$ jusqu'à $\varepsilon_{m,m}$. Lui, ce qu'il dit, c'est que euh, pour tout k , euh, $\varepsilon_{k,m}$ tend vers zéro quand m tend vers l'infini et donc l'exemple qu'on a trouvé, c'est un exemple où on a le max par contre qui tend pas vers zéro. Donc en fait l'idée est très simple, l'idée c'est de, en fait, de repousser vers l'infini un terme constant. Euh donc, ben si on pose $\varepsilon_{k,m}$, donc on a toujours k entre zéro et m , $\varepsilon_{k,m}$ qui va valoir $1/2^{m-k}$. Ben on s'aperçoit que ça marche. C'est-à-dire que, à k fixé ça, ça tend vers zéro et par contre quand on prend le max, le max c'est un en $k = m$. Et donc, en fait, le max on le déplace vers l'infini mais là, le ε de la preuve du coup, ben sa limite c'est un, donc sa preuve, elle marche pas. Donc en fait, on s'aperçoit que dans cette preuve, c'est quasiment tout bon quoi, la seule ligne qui pose problème c'est ça « comme ε a pour limite zéro quand m croît indéfiniment », ça on s'aperçoit que c'est faux.
4. T1 : Y a des questions ?
5. B : Le max c'est un, c'est pour $m = k$, c'est ça ?
6. F : Ouais c'est ça.
7. B : Puis quand m tend vers l'infini ça reste un.
8. T1 : Tu peux peut-être l'écrire ε , c'est ε de m hein. Il dépend de m . C'est le max de $\varepsilon_{1,m}$, $\varepsilon_{2,m}$, ...
9. A : Ouais, euh, ça a rien à voir en fait, je suis toujours à côté de la plaque moi. Est-ce que à ton avis, enfin, à votre avis... Bon si on a une idée, une proposition en tête et que... une preuve qui

est fausse, est-ce qu'on a intérêt [Inaudible]. Est-ce qu'on a intérêt à l'exposer, en disant on va voir les réactions ou alors au contraire euh... [Inaudible]. Et ben voilà, c'est qu'il y avait un problème dans cette preuve enfin, ou alors est-ce qu'il vaut mieux faire attention et ne pas présenter quelque chose qu'on [Inaudible].

10. F : Ben si... Ben ça dépend ce que tu entends par faux quoi, si faux c'est/
11. A : Enfin, on, on, on... Tu sens vraiment que le théorème, il est bon...
12. F : Hum.
13. A : On est à peu près sûr de sa preuve et on préfère l'exposer en se disant ben ça va faire avancer le truc, mais en pensant vraiment...
14. F : Ben oui, si tu vois pas d'erreur dans ta preuve.
15. A : Sachant que le théorème est faux.
16. D : Ah, le théorème est faux !
17. A : Ouais, le théorème est bon
18. D : Ah.
19. A : Euh, le théorème est faux pardon/
20. E : Mais la preuve est juste.
21. A : Oui, le théorème est faux par exemple l'interversion de limite et somme, on pense qu'on peut toujours intervertir limite et somme. Enseigner [Inaudible] on peut tout le temps intervertir limite et somme. Voici la preuve [Inaudible].
22. F : Ouais, mais au moment où tu dis ça tu...
23. D : [Inaudible].
24. A : Voilà ce qu'on pense.
25. F : Donc le théorème tu sais pas encore qu'il est faux, enfin...
26. D : Tu sais qu'il est faux ?
27. A : Non, tu crois qu'il est bon.
28. D : Ouais, mais dans ce cas [Inaudible].
29. A : Non, mais c'est normal, je suis pas clair. Bon, on va passer...
[Rires]
30. A : Bon, ok. T'établis un théorème, tu penses qu'il est bon, tu fais une preuve, tu penses qu'elle est bonne. Et en fait, en fait, il te manque quelque chose, y a un truc qui est pas clair et tu l'exposes devant tes étudiants en disant, voilà [Inaudible]. Sachant que tu n'es pas sûr à cent pour cent de ta preuve.
31. D : Quelle différence tu as entre le gars qui a fait un théorème juste et une preuve juste et qui n'en est pas non plus tout à fait tout à fait sûr...
32. F : Ouais, c'est la même chose.
33. D : Ben ouais.
34. F : [Inaudible].
35. A : Non mais, ouais mais, je veux dire [Inaudible].

36. T1 : Pour rester dans ce contexte, est-ce que vous pensez que Liouville était convaincu de sa preuve.

[Inaudible]

37. T1 : Avec les outils qu'il avait à l'époque, il était vraisemblablement convaincu de sa preuve.

38. A : Ouais mais...

39. D : Moi je pense que si tu es pas convaincu de ta preuve, tu ne penses pas que tu as une preuve, enfin...

40. A : Non mais, il y a des trucs vagues, enfin je sais pas j'imagine [Inaudible].

41. T1 : [Inaudible] J'en sais rien, mais je pense qu'il avait quand même trouvé une superbe astuce qui est pas évidente, hein. C'est d'avoir plein d' ε et de les virer avec le hm , y a quand même une astuce pour faire ça, quoi. Alors après, il est allé un peu vite, je pense pas qu'il ai voulu tricher [Inaudible] pas sur que la fin de son argument était juste. Bon après, c'est une bonne question à de se poser, plutôt, de savoir si on se pose ça comme un apprentissage, est-ce que pour un apprentissage, on présente éventuellement et volontairement une preuve qui n'est pas tout à fait, qui est pas claire [Inaudible], mais c'est autre chose que...

42. T2 : Sur le plan des maths, ça paraît aussi intéressant de voir que les théorèmes, les résultats, l'idée de ce que c'est qu'une fonction, une fonction réelle tout ça, ils arrive avant, là c'est 1848, avant la construction technique qui permettrait de faire cette preuve. C'est-à-dire que là, vous pourriez le construire à partir du théorème des accroissements finis par exemple, ça repose sur quoi ça ? Vous avez une idée de ? Comment on prouve ça, un souvenir de [Inaudible].

43. F : C'est pas le théorème de Rolle, non ?

44. T2 : Ouais, le théorème de Rolle, le théorème de Rolle qui vient de... ?

45. F : Ben, du fait que une fonction qui est continue a un sup ou un... Enfin... [Inaudible]

46. T2 : Ouais, c'est-à-dire ? Comment on l'appelle cette propriété là ?

47. B : Le théorème des valeurs intermédiaires ?

48. F : Ouais, oui, la propriété de la borne sup.

49. T2 : Borne supérieure ? C'est la même, c'est un peu la même chose que...

50. B : Ah oui.

51. T2 : C'est des résultats a priori très intuitifs... Je veux dire... deux lignes avant dans son cours, Liouville fait un théorème sur un résultat complètement [Inaudible] « si une fonction a une dérivée positive alors elle est croissante » [inaudible] du coup, c'est tous des résultats qu'ils ne sont de toute façon pas en état de prouver.

[Inaudible]

52. T2 : Est-ce que ça, est-ce que ça vous paraît cohérent par rapport à, à la manière dont c'est présenté au début de l'université [Inaudible], ce genre de chose.

53. F : Moi je pense qu'il m'aurait convaincu direct, sans problème...

54. T2 : Est-ce que tu as dit par l'ordre dans lequel c'est présenté d'habitude ? Et c'est présenté partout dans les bouquins que j'ai lus comme ça quoi. Ou on démarre par le fait que les suites de Cauchy convergent, ou de l'axiome de la borne supérieure, puis on déroule jusqu'à ce genre de propriétés quoi. C'est évidemment pas le processus historique.

55. T1 : Dans le processus historique, il y a aussi des preuves qui sont justes. Une fois qu'on a mis les axiomes sur les réels, on s'aperçoit qu'il y a des preuves qui sont bonnes.
- [Inaudible]
56. T1 : Il y a des preuves d'énoncés faux.
57. A : Mais ça c'est très bon d'ailleurs parce que ça permet de voir à quel endroit ça pose problème et de progresser.
58. T1 : Peut-être un/
59. B : Je suppose que, je sais pas si les problèmes sont peut-être pas aussi, y en a qui sont peut-être plus fins, je sais pas...
60. T1 : [Inaudible] Dans vos cours des fois, vous avez du utiliser l'axiome du choix. Vous l'avez utilisé des fois sans le dire.
61. ? : Ouais.
62. T1 : Bon ben cet axiome, ça paraît relativement naturel. Disons on se pose pas la question, on choisit, on dit, soit f une fonction...
63. D : [Inaudible].
64. T1 : Or, il se trouve qu'après, à un moment donné, il y a des gens qui se sont posé la question. Est-ce que c'est naturel ou pas, est-ce qu'on peut le supposer ou pas ? Finalement, ça pose pas de problème de supposer que toute ces preuves là sont valides, on suppose l'axiome du choix. Si ça avait posé un problème [Inaudible].
65. ? : Y en a qui travaille sans.
66. T1 : Ah oui, je ne dis pas, il y a des gens qui travaille sans, des gens qui essayent de réécrire les preuves, d'essayer de voir si telles preuves, y a pas besoin de l'utiliser/
67. A : J'imagine les acharnés [Inaudible].
68. T2 : N'empêche que les fondements mathématiques... On fait des maths sans être complètement sûr des fondements sur lesquels on les fait. On le fait avec des, ça dépend de l'avancé de, de l'état [inaudible], c'est comment on fait des maths. Quand on développe des théories après c'est pareil, on retombe sur des choses comme ça [inaudible], on a beaucoup de recul maintenant sur les réels.
69. B : Parce que là, je vois là, il a pointé un problème, il a trouvé un contre exemple. Alors que sur l'axiome du choix, trouver un contre exemple...
70. F : Non mais sur l'axiome du choix, quand tu vois genre le paradoxe de Banach-Tarski, c'est quand même super dérangeant quoi. Donc euh, ben c'est pas forcément des contre exemples, mais c'est un truc que tu trouves contre-intuitif.
71. A : Ouais mais à partir du moment où c'est vrai quoi.
72. T1 : [inaudible] Où tu trouves pas justement de contre exemples sans construction. Vous connaissez l'exemple, à cette époque là, on montre, on montre par exemple qu'une fonction qui est, qui est continue c'est ça ?
73. T2 : [inaudible].
74. T1 : N'importe quelle fonction continue a forcément un point où elle est dérivable. Ils démontrent ça dans des bouquins [inaudible]. Pour montrer que ce résultat est faux, ça se fait pas, ça se construit pas comme ça sur le dessin.

75. F : C'est la fonction de Weierstrass.
76. B : Zéro sur les [inaudible].
77. T1 : De toute façon, tant qu'on a pas vraiment formalisé les réels.

[Inaudible]

78. T1 : Même le théorème de Rolle là, concrètement même sans avoir construit \mathbb{R} , on peut imaginer que eux, ont, en fait, la notion de borne, de suite croissante majorée, de borne sup... Même si c'est pas bien formalisé, c'est un objet qui existe, c'est un réel. Bon, je pense que de manière intuitive, ils faisaient des preuves... Bon après, si ils faisaient des preuves où ils utilisaient explicitement ça, c'est des preuves qui se retrouvent valides après avoir construit \mathbb{R} . Il y a aucun problèmes.
79. T2 : Pour la construction des réels en fait, il y a une preuve qu'on voulait vous donner puis finalement on a décidé de ne pas vous la donner mais... C'était une preuve de Bolzano dans un mémoire de 1817, encore avant tout ça [Inaudible]. Il se pose la question de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires. Et donc euh, sur quoi ça repose le théorème des valeurs intermédiaires... Bon ben il gratte, il gratte... Et donc lui, il a la démarche philosophique qui est celle de détailler et d'explicitier euh... Ce qu'on appelle l'arithmétisation de l'analyse ou d'aller chercher des fondements objectifs pour les mathématiques, de refuser le recours à l'intuition, visuelle, géométrique... [Inaudible] Le temps, quelque chose comme ça et se baser sur une construction analytique des mathématiques et de l'analyse. C'est une démarche un petit peu particulière pour le XIX. Et donc il se pose cette question là, puis finalement ben, ça le force à définir ce que c'est qu'une fonction continue, alors que jusqu'à présent la définition n'était quasiment pas donnée, ça le force à séparer les étapes etc, à définir, presque définir ce que c'est que la notion de limite. Il n'utilise pas le mot etc, mais il commence à avoir une appréhension assez précise et puis ça le force au bout d'un moment à poser le problème de l'axiome de la borne supérieure. Il veut le démontrer, donc il se ramène à démontrer que les suites de Cauchy sont convergentes. Et donc finalement, il démontre ce qui va être nécessaire ensuite pour la construction des réels. Et finalement, il démontre dans une preuve que les suites de Cauchy convergent en faisant un espèce d'argument, évidemment qui est pas satisfaisant de notre point de vue mais euh... Mais du coup donc, il fait cette preuve là et c'est vraiment la volonté à un certain moment de reprendre disons ce genre de preuve ou quoi qui lui paraissait pas suffisamment... Donc lui le fait avancer, il fait avancer les maths et je pense, c'est un peu caricatural ce que je dis, c'est certainement pas comme ça que ça fonctionne tout le temps, mais en tout cas ce que ça montre c'est que historiquement c'est pas un déroulement à partir d'axiomes qu'on se serait donnés et on déroule la théorie.
80. D : [Inaudible] On démarre de ce que l'on voit, de ce que l'on sait. On peut pas partir d'axiomes comme ça qu'on invente, enfin... On voit plein de trucs, on fait une synthèse et ça s'intègre. [Inaudible]
81. T2 : Ca vous paraît évident ça ?
82. D : Qu'on part de ce que l'on voit ?
83. T2 : Oui, que faire des maths c'est ça ?
84. D : Ben [inaudible] je n'imagine pas [inaudible] un axiome avant d'avoir observé, avant de savoir de quoi on va parler. Quand on connaît pas un sujet [inaudible], une phase d'observation, on regarde comment ça fonctionne [inaudible]...
85. T2 : Tu penses qu'il y a un décalage entre la manière dont les cours sont faits et ce que c'est qu'une réelle activité mathématique de recherche ?

86. D : Oui, par exemple [inaudible], on voit la définition tout ça, ça me paraît pas très, enfin c'est pas...
87. A : Quoi, quoi, quoi ! T'es en train de dire qu'il faut pas/
[Inaudible]
88. A : Non mais c'est pas l'histoire du plan, c'est de définir après proposition, remarque...
[Inaudible]
89. D : C'est pas comme ça que tu vas réfléchir devant un problème. Tu vas pas te dire/
90. A : Non mais d'accord, intuitivement ça ressemble à ça et puis [inaudible].
[Inaudible]
91. T1 : Comment vous pensez que les chercheurs, ils font des maths ?
92. D : Je crois que ça dépend des maths quoi...
93. F : Ben en fait le truc que je me demandais, c'est si c'est vraiment, si c'est vraiment possible, enfin si chaque chercheur a vraiment une intuition géométrique de ce qu'il fait ou si il n'y a pas une partie des maths qui serait plus, enfin proche de l'algèbre ou justement on est plus dans des calculs plus à... Et justement, pas forcément pouvoir visualiser ce que l'on fait. Enfin, je fais un peu de théorie des modèles là et c'est des trucs où on a pas vraiment une vision de l'ensemble concret quoi. Puisque justement, on construit des trucs avec l'axiome du choix, donc on sait pas du tout la tête que ça a quoi... C'est pas, enfin pareil quand on, je sais pas quand on construit des ensembles paradoxaux ou... On voit pas tout quoi.
94. T2 : Tu fais une différence entre visualiser et avoir une intuition ?
95. F : Ben non justement, enfin... Non justement...
96. T2 : Parce que là, effectivement, on est en analyse donc c'est un peu particulier, on peut faire des dessins tout ça. Il y a plein d'autres domaines des maths où on ferait moins des dessins ou des dessins moins précis mais bon, est-ce c'est pas, est-ce que c'est un changement ? Je sais pas c'est une question.
97. F : Non moi justement, ce que je demande, c'est si vraiment l'intuition est toujours vraiment géométrique ou...
98. T1 : [inaudible] Je pense que c'est variable de toute façon. Ça dépend de la culture de chacun. On peut aussi bidouiller simplement des phrases.
[Rires]
99. T1 : Comment dire... Des fois on peut faire de la combinatoire pour faire de la recherche. C'est-à-dire on combine tout, on écrit un peu bêtement des choses qui ont des fois pas trop de sens au bout d'un moment ça prend du sens. [inaudible] Ça peut être très formel aussi... C'est ambigu hein, un formalisme un peu bizarre, on se permet des fois d'écrire des choses, justement qu'on ne permet pas aux étudiants/
100. B : Pour provoquer quelque chose.
101. T1 : Qu'on permet pas d'écrire aux étudiants en disant ça a pas de sens. En recherche on est parfois obligé d'écrire des choses qui ont pas vraiment encore de sens. Justement c'est un peu ce que l'on expliquait là. A un certain niveau, quand on commence, on introduit des notions comme elles sont pas encore formalisées ben ça a pas un sens bien, bien précis. Ça a quand même un certain nombre [inaudible]. Mais bon, la formalisation, ça dépend ce que vous avez

- hein... Bon et puis y a différents types de maths. Je connais pas grand chose en histoire, par exemple les mathématiques chinoise, c'était pas du tout le même type de maths que les mathématiques grecques.
102. B : Ils faisaient pas de preuves...
103. T1 : Ben y a des preuves, mais c'est de l'algorithmique. Bon ça, c'est un point de vue de dire que c'est pas une preuve.
104. B : Oui, oui.
105. T1 : Vous voyez par exemple, vous avez vu une preuve qui est très algorithmique c'est, c'est, c'est l'identité de Bezout. Montrer l'égalité de Bezout par l'algorithme d'euclide c'est une preuve algorithmique. C'est un algorithme qui donne l'identité de Bezout.
106. B : Hum. Effectivement, oui. D'accord.
107. T1 : C'est pas vraiment une preuve par argument axiomatique. On a une construction de l'identité, ça se met dans un ordinateur. Mais en fait, il y a plein de preuves qui peuvent se transformer en algorithme... C'est pas pour ça que c'est dissocié mais les démarches peuvent être dissociées. La démarche de dire on pose, on a telle type de déduction et c'est ça faire une preuve et faire une construction, c'est un peu différent.
108. T1 : Vous avez une idée là, de preuve concrète, qui évite le théorème des accroissements finis parce que là, ça ne me satisfait pas...
109. B : Les accroissements finis.
110. T1 : De faire Rolle, théorèmes des accroissements finis en déduire ça en fait. D'un point de vue pratique, c'est quand même clair que le fait qu'une fonction dont la, d'une manière géométrique, c'est quand même assez clair, c'est comme le théorème des valeurs intermédiaires, il est quand même assez clair. Avant Bolzano [Inaudible], avant de faire une preuve, il dit quand même que le résultat pour lui il est évidemment clair.
111. ? : [inaudible]
112. T1 : Je sais pas quand ça a été énoncé le fait que une fonction qui est continue passe forcément/
113. [inaudible]
114. B : Quelque chose de mieux, vous voulez quelque chose de mieux ?
115. T1 : Ben la première idée c'est de se dire on part de/
116. F : Sinon on peut juste dire que c'est un résultat d'intégration puisque quand on dit par exemple, euh, quand on part euh... Qu'on dit justement qu'un truc à vitesse nulle ne peut pas bouger, c'est justement qu'on a déjà justement plus ou moins une notion d'intégration, puisqu'on se dit qu'on peut reconstruire à partir de la vitesse la trajectoire d'un objet.
117. T2 : Vous voulez qu'on essaye de terminer la preuve, d'en faire une ?
- [Rires]
118. T2 : Non mais je sais pas. Vous avez envie de la faire la preuve ? Celle-ci mais en le faisant proprement.
119. E : Sur la même base ?
120. T2 : Pas forcément de la même base. La même base euh... Je suis pas sûr qu'on y arrive. Je sais pas.
121. B : Ah oui, ça va être dur.

[T1 et T2 guident les étudiants pour construire une preuve du théorème par un processus de dichotomie. Je ne transcris pas.]

**Annexe 21 : Transcription des débats
du premier groupe d'étudiants de
l'INSA travaillant sur la preuve
adaptée du texte de Liouville**

1^{er} Groupe d'étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville

1. B : C'était un prof à polytechnique à priori.
2. Ni : Ca va, ça envoie.
3. B : « Point compris entre a et b partageant l'intervalle »... « Soit f ... définie et dérivable sur \mathbb{R} »... « école polytechnique en 1848 »...

[Bruits de chaise, puis ils continuent une lecture de l'énoncé et de la preuve]

4. Ni : Donc, ça, c'est le truc qu'on démontre ?
5. V : Je sais pas trop, non. Je sais pas si c'est le truc qu'il annonce ou/
6. Ni : On dit ça... Et en fait, c'est Liouville qui prouve ça, en fait.
7. B : voilà. Bon en fait, je pense que tu démontres ce qu'il y a dans le cadre grâce à toute la démonstration qu'il y a en dessous.
8. V : Il veut montrer ça et il montre ça.
9. T2 : Vous avez repéré que [Inaudible] c'est écrit derrière.
10. Ni : Ah non [Rires], ok d'accord.
11. B : D'accord.
12. T2 : Non mais c'est vrai que c'est un peu fourbe.
13. Ni : Non mais c'est pas grave.
14. T2 : Donc dans un premier temps, ce que l'on vous demande, c'est juste de situer historiquement, j'ai vu que vous aviez repéré que c'est Liouville/
15. Ni : Oui.
16. T2 : Que c'était une preuve de Liouville. Donc regarder un peu qui c'est Liouville. C'est un cours à l'école polytechnique donc vous pouvez regarder un peu ce que c'est que l'école polytechnique si vous savez pas ce que c'est tout ça. Et dans un deuxième point, de ce premier temps, c'est regarder l'énoncé, est-ce que vous le connaissez, est-ce qu'il vous paraît vrai ou pas.
17. Ni : Ouais, ok.
18. B : Comment ça, vrai ?
19. Ni : Ben tu le lis, tu regardes si il est probable.
20. T2 : Ben, tu regardes si c'est vrai/
21. B : Que Liouville a énoncé ça, quoi ?
22. T2 : Non que l'énoncé là, sans regarder la preuve pour le moment/
23. Ni : Ah d'accord.
24. T2 : Est-ce que cet énoncé tu le connais, est-ce que tu penses qu'il est valable ?
25. Ni : D'accord. C'est bizarre.
26. Bj : Ben, ouais.
27. T2 : Est-ce que vous connaissez d'où ça vient ça, vous pouvez aussi chercher des choses sur Internet si vous voulez, hein.

28. Ni : D'accord.
29. B : Moi, je trouve ça bizarre.
30. Bj : Graphiquement, ça se voit très bien.
31. B : Ouais, mais y a plein de choses qu'on voit graphiquement et qui sont totalement fausses.
32. [Rires]
33. Ni : Ca c'est aussi, si le truc il est constant.
34. Bj : C'était quoi la preuve alors ?
35. Ni : Bref. « constamment nulle »... Ouais mais là t'as vu, ils disent constamment nulle, c'est-à-dire que, que la dérivée elle est égale à zéro.
36. V : Ouais.
37. Ni : Quand t'as la dérivée qui est égale à zéro, ça veut dire que tu as un maximum.
38. V : Non, non, non c'est...
39. Ni : Ca veut dire que tu as une tangente horizontale.
40. V : Voilà. Donc, si elle est constamment égale à zéro, ça veut dire qu'elle est constamment horizontale, ça veut dire que ta courbe elle est constante...
41. Bj : T'as tout le temps une tangente horizontale, donc ta courbe elle...
42. Ni : Ouais, mais imagine... On dit qu'elle est dérivable, on dit pas qu'elle est continue.
43. V : Ah oui, c'est vrai.
44. Ni : Donc imagine, c'est juste des points et ben chaque tangente a un point...
45. V : Ouais, mais c'est pas une tangente à un point...
46. Ni : Ouais, c'est vrai...
47. V : Je crois.
48. Bj : Puis dans ce cas-là... Il parle de la dérivée mais elle est dérivable, si elle est dérivable c'est qu'elle est euh...
49. Ni : Non.
50. Bj : ... C'est qu'elle est constante.
51. Ni : Elle est constante ?
52. V : Elle est continue.
53. Bj : Euh continue, pardon, excuse-moi. Si elle est dérivable, c'est qu'elle est continue.
54. Ni : Non, c'est continue implique dérivable.
55. Bj : Non.
56. Ni : Hein ?
57. Bj : Non parce \ln de, valeur absolue de x /
58. V : Non, valeur absolue /
59. Bj : Elle est, elle est continue mais pas dérivable. Non, non c'est continue, c'est dérivable qui implique continue.

60. Ni : Ouais, si.
61. Bj : Donc elle est continue la..., la fonction f . Putain ça date de il y a longtemps ça pfff.
62. V : Tu fais un coup de Wiki là, c'est ça ? L'éternel Wikipédia.
63. B : Ben oui. On ira chercher après mais...
64. Bj : On travaille bien avec Mme C [leur enseignante de documentation].
65. Ni : [Inaudible] On va pas vérifier.
66. Bj : Putain mais la preuve, je te raconte même pas quoi. Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué.
67. [Rires]
68. Bj : Il suffit de faire un bon vieux graphique au tableau.
69. Ni : Ouais mais, si ça se trouve t'as des... Le graphique on sait pas.
70. Bj : Si tu arrives à me prouver que l'énoncé un est faux, je te dis balèze.
71. V : Est-ce que c'est ce « Sturm Liouville » ou pas ?
72. Ni : Li-ou-ville.
73. Bj : Il a pas de prénom. 1847-18...
74. Ni : T'as ses dates ?
75. V : Vas-y c'est « Sturm » son prénom ou pas ?
76. Ni : c'est Joseph Liouville.
77. Bj : A mon avis, c'est ces dates à Polytechnique parce que sinon...
78. V : Ben tu cherches, tu vas sur le site de polytech.
79. B : Tu veux quoi, tu veux ses dates ?
80. Bj : Là, il y a la date de quand est-ce qu'il a fait son cours à polytech.
81. B : C'est...

[La recherche sur Liouville continu encore un moment, puis sur les nombres transcendants, je ne transcris pas]

82. Bj : Le type s'est fait chier à faire, à faire quinze lignes alors que c'est...
83. V : T'es enregistré dis pas « chier ».
84. Bj : Pfff.
85. T2 : Vous avez vu ça euh/
86. Ni : Pardon ?
87. T2 : Le papier euh/
88. Ni : Non.
89. T2 : Original ?
90. Ni : Non, c'est joli.
91. T2 : Alors ça c'est une... Comment on appelle ça... C'est les prise de notes d'un étudiant je suppose, de quelqu'un qui a suivi son cours.

92. Ni : Putain, mais ils écrivent super bien hein.
93. P : C'est ce qu'on appelle un cours lithographié.
94. T2 : Lithographié.
95. Ni : C'est super joli hein.
96. B : C'est-à-dire.
97. P : C'est-à-dire ben c'était écrit sur de la pierre quoi.
98. Ni : C'est vrai ?
99. P : Oui, oui et ensuite/
100. Ni : Ah oui, ok.
101. P : [Inaudible] Sur des imprimantes quoi.
102. Ni : Sur des presses hum, hum.
103. T2 : Et qui c'est qui faisait ces pierres ?
104. P : Et ben c'était un... comment dire, un scribe ou c'était le prof lui-même ou un élève, mais c'était/
105. Ni : Hum, hum.
106. T2 : D'accord.
107. P : C'était pas les notes que prenait un élève comme ça quoi, c'était...
108. T2 : Ok.
109. Ni : Gravé dans la pierre je trouve que c'est magnifique.
110. Bj : C'est pour ça que c'est bien écrit alors.
111. P : Ouais.
112. T2 : Donc en fait, c'est juste la même chose que vous avez sur euh/
113. Ni : Ouais, ouais ok.
114. T2 : On a juste recopié le texte/
115. B : D'accord.
116. T2 : Parce que c'est plus lisible, enfin je trouve.
117. B : Sur l'ordinateur, ouais.
118. V : Hum, mais c'est pas dit pareil.
119. Bj : Comment ?
120. V : Quand la dérivée est constamment nulle pour toute les valeur « d rond » $x...$
121. B : Tu m'as dit qu'il avait été élu à l'académie des sciences en quelle année V ?
122. V : dx .
123. V : 39.
124. B : J'ai 70 là.
125. Bj : 1870 ?

126. Ni : Y a personne qui est d'accord.
127. Bj : C'est pas possible parce que 70 c'est après qu'il ait fait son...
128. B : Ben oui et alors ? A l'académie des sciences pas à...
129. V : L'académie des sciences.
130. B : [Inaudible].
131. Ni : [Inaudible] Voir un truc sur...
132. P : Alors comment vous feriez pour savoir si c'est 39 ou 70 ?
133. B : Et ben...
134. Ni : Moi je pense qu'il faut aller sur un truc de doc INSA.
135. Bj : Là, il a... il appelle des « a » et là il appelle des « x ».
136. B : Vas sur...
137. Bj : Ici, il l'a fait avec des « x » et là-bas, il l'a fait avec « a ».
138. Ni : Ou sur Encarta.
139. B : Ouais.
140. T2 : Vous le connaissez l'énoncé ?
141. Ni : Euh... Non.
142. Bj : Si on l'a fait.
143. V : Si on l'a fait, si, si, si, si.
144. Ni : Ca me dit quelque chose, mais...
145. T2 : Ouais.
146. Bj : On a dit que c'était logique et donc on s'est pas attardé sur euh...
147. T2 : On l'a démontré ou pas en mathématiques ?
148. Ni : Euh non.
149. Bj : Non, je crois pas.
150. T2 : Non ?
151. Ni : Mais la suite du truc moi, ça me dit quelque chose.
152. V : [inaudible] en DM , moi...
153. T2 : Ouais, ça vous dit/
154. Ni : Moi, ça me dit quelque chose.
155. V : En DM , une fonction périodique, on disait qu'elle était constante.
156. Ni : Non, moi ça, ça me dit pas... L'énoncé me dit pas mais/
157. Bj : Ah oui.
158. Ni : Ca oui.
159. V : Une fonction périodique on disait que si la dérivée était constante, euh était continuellement nulle, enfin constamment nulle...

160. T2 : Une fonction périodique ?
161. V : Ouais, on disait que la fonction était constante.
162. Bj : Si, si, il y avait une fonction sinusoïdale qui au fur et à mesure s'atténuait et on arrivait à une fonction/
163. V : Me semble-t-il.
164. Bj : Un truc constant à la fin.
165. Ni : C'était hum...
166. Bj : Fallait dire, quand la dérivée tendait vers l'infini elle était égal à zéro. Du coup, la fonction était constante quand elle tendait à l'infini.
167. Ni : On prenait la formule générale de la dérivée et euh, euh, on avait euh, et on comparait deux formules générales. Et on devait la couper en deux. Et on devait montrer que l'un côté du membre était égal à l'autre côté du membre.
168. T2 : Quand est-ce que, quand est-ce qu'on l'a travaillé ce genre de choses ? Quand vous faites un tableau de variation, comment vous faites ?
169. Ni : Et ben on cherche là où la dérivée s'annule et ça fait une tangente horizontale et ça nous fait un maximum, enfin ça nous fait un extremum...
170. T2 : Ouais... Et on a déjà fait, je sais pas si vous vous souvenez un exercice sur arctangente. Il fallait regarder euh... Comment est-ce qu'on peut montrer que $\arctan(x) + \arctan(1/x)$, ça fait $\pi/2$. On a fait cet exercice déjà ensemble.
171. V : Ah ouais.
172. Bj : Ah oui, il fallait que la dérivée soit... Comme c'était une constante il fallait que la dérivée soit constante.
173. T2 : C'est quoi la dérivée d'une constante ?
174. Bj : Ouais, non fallait que...
175. Ni : égal à zéro.
176. Bj : Egal à zéro ouais, pardon.
177. V : Tout le monde a dérivé alors fallait pas dériver je crois.
178. Bj : Ah tout le monde avait fait ça, fallait pas faire ça ?
179. T2 : Ca c'était un autre exercice, c'était un autre exercice.
180. Bj : Ouais fallait prouver que, comme $\pi/2$ c'était une constante, fallait prouver que ce qui était à gauche quand on le dérivait ça devait être égal à zéro.
181. T2 : Ok. Et sinon intuitivement vous en pensez quoi ?
182. Bj : Que c'est juste.
183. Ni : C'est probable.
184. Bj : Je vois pas pourquoi il se casse la tête à faire un truc comme ça quoi.
185. Ni : Ben parce que c'est un mathématicien.
186. T2 : Donc d'accord, donc vous, vous pensez, il y avait deux choses là, parce qu'on va essayer d'aller vite sur cette partie là. Y avait regarder un peu qui c'était...

187. V : Hum.
188. Ni : Hum.
189. T2 : Vous l'avez fait ?
190. Ni : Ouais.
191. V : Ouais mais on était pas d'accord sur un truc.
192. B : Si mais là c'est bon en fait [Depuis un moment *B* et *P* chuchotent à part]. Il a été élu en 39 et il est président en 70.
193. T2 : Ok.
194. B : Donc c'est un...
195. T2 : Et par rapport à l'énoncé vous êtes plutôt, vous pensez qu'il est plutôt, plutôt vrai.
196. Ni : Ouais.
197. V : Ben, il a l'air compétent en plus donc...
- [Rires]
198. T2 : D'accord. Je vais voir où ils en sont à côté puis...
199. V : Ben allez hein, question. Ah, on a déjà répondu aux deux premières questions...
- [Ils lisent les questions et font des digressions]
200. B : C'est quoi l'équation générale là ? Hein ?
201. V : C'est quoi...
202. B : C'est l'équation générale de quoi ça ?
203. Ni : Où ça ? $h + \varepsilon$... C'est pas le, $f(x+h) - f(x)$ sur h quand h tend vers zéro c'est égal à la dérivée, c'est l'équation de la dérivée.
204. B : C'est la dérivée ouais.
205. V : Donc au début il annonce ce qu'il veut, ensuite il fait des hypothèses... enfin il met en place...
206. B : C'est même pas une hypothèse c'est une...
207. V : Ben « considérons ».
208. B : Oui ben justement.
209. V : Ben, je veux dire il met en place son...
210. B : Sa preuve quoi.
211. V : Comment on peut dire...
212. P : Donc là, il demande de décomposer un petit peu la preuve hein.
213. Ni : Ouais.
214. B : Oui, oui.
215. P : Donc c'est quoi les étapes pour vous ?
216. V : Ben c'est... Il énonce ce qu'il veut démontrer.
217. P : Hum.

218. V : Ensuite, il dit, il se base sur euh... Enfin... Il considère des points donc il... Enfin c'est pas une hypothèse mais c'est, c'est comme quand on fait soit x, y appartient à je sais pas quoi enfin il pose ses constantes ou enfin... Je sais pas trop comment dire.
219. B : Il pose le système sur lequel il va travailler en fait.
220. V : Ouais, voilà.
221. B : Enfin, je sais pas si on peut dire un système.
222. V : Il définit, il définit son...
223. B : Son système.
224. V : Tout de suite après il se base sur, sur quelque chose de connu.
225. P : C'est quoi ce quelque chose de connu ?
226. V : Ben, l'équation générale/
227. Ni : L'équation de la dérivée.
228. V : De la dérivée.
229. P : Donc, ça c'est quoi pour vous cette, cette équation ? Vous êtes d'accord avec ce qu'il a dit ?
230. Bj : Ca, c'est l'équation générale de...
231. V : Ben a priori oui parce que/
232. Bj : C'est pas l'équation de la dérivée ça.
233. B : Là, si t'as le h ...
234. V : Le truc c'est que/
235. Ni : Non, non c'est...
236. V : Le truc, c'est que y a déjà $f''(x)$ [Inaudible].
237. Ni : Non mais normalement la dérivée c'est... Enfin c'est la limite de...
238. B : sur h ... $f''(x)$.
239. Ni : Hein ?
240. Bj : C'est la formule de la dérivée ça ?
241. B : Ben je sais pas. En tout cas, si tu la décomposes, ça donne ça quoi.
242. Ni : Mais la dérivée c'est quand c'est, c'est quand la limite...
243. Bj : C'est quoi la formule de la dérivée [Rires] ?
244. B : Non mais attend, là il y a une limite aussi parce qu'on te dit avec ε qui tend vers zéro quand h tend vers zéro.
245. Ni : Ouais, c'est la limite de $f(x)$ quand h tend vers zéro.
246. V : Ouais mais ε dépend de h . Parce que ε tend vers zéro quand h tend vers zéro.
247. B : C'est pas la dérivée, ça c'est la tangente [Inaudible].
248. Ni : La dérivé partielle.
249. Bj : C'est pas faux.
250. Ni : Attend, on a vu que de toute façon, on peut faire ça aussi graphiquement...

251. Bj : Ah mais ça ressemble à ça.
252. Ni : On a vu que c'était...
253. Bj : là, t'as un f' .
254. Ni : Ce petit espace qui est là.
255. Bj : T'as un $x-1$ qui est là-bas aussi.
256. Ni : [Inaudible] petit espace qui est là.
257. V : Quoi.
258. Ni : Non, ça c'était par rapport aux limites... Je confonds tout. Ca c'est le petit ε qui tend vers zéro.
259. P : Alors on revient à... La question qui vous est posé là. Mettre en évidence chacune des étapes de la preuve. En gros, il y en a quoi ? Y en a deux ? Y en a trois ?
260. V : Y en a quatre.
261. P : Et elles sont où ?
262. V : Enfin moi, je dis il y a quatre étapes.
263. P : Ben vas-y.
264. V : Alors je disais, lui il dit ce qu'il veut démontrer, ensuite il énonce sur quoi il va se baser pour démontrer, enfin pour démontrer. Je sais pas comment, c'est ce que je disait tout à l'heure là...
265. Bj : Quoi, quoi, quoi.
266. V : Enfin voilà. Ensuite en trois, il part d'une équation connue vu que même si on sait pas pour l'instant exactement ce que c'est, il part, il dit rappelons l'équation générale donc ça veut dire que ça c'est déjà démontré, donc il n'y a plus besoin d'y démontrer. Et après euh, de cette équation il en découle ceci, enfin tout le reste avec ce qu'il avait déterminé dans le deux. Donc euh là il y a la quatre et après la cinq il, ben il conclut.
267. B : Oui, il conclut.
268. Ni : Ouais, c'est ce que je pense aussi, il prend 5 étapes.
269. V : A priori.
270. Ni : Parce que il pose quelque chose de connu, de général, et il travaille dessus pour arriver à ce qu'il veut. En, en gardant...
271. Bj : Y a pas deux étapes dans la quatre ?
272. Ni : C'est les grandes étapes ça.
273. B : Enfin les sous étapes, c'est les étapes de calcul après. Après, après, il fait du calcul.
274. Bj : Tu vois par exemple puisqu'il y a « en ajoutant membre à membre ».
275. Ni : Parce que là, il fait un peu comme si c'était une récurrence, un truc par... Un, Deux, Trois et après il met trois petits points et après il arrive au cas général je veux dire, il généralise.
276. Bj : Tu vois celui-là, là. Cette partie là, elle a l'air plus, plus... Enfin différente.
277. P : Alors pour vous une démonstration c'est quoi ça ? Comment dire, il y a une hiérarchie dans les arguments... ?
278. B : Ouais.

279. P : Il y a choses qui sont plus importantes que d'autres, plus difficiles que d'autres on sait pas/
280. B : Ouais, si.
281. P : Ou c'est plein de trucs comme ça qui font... n'importe comment. Ben y a une hiérarchie au début. Mais dans l'étape euh, dans l'étape, enfin moi je pense que, par exemple, dans l'étape quatre où c'est beaucoup de calcul, c'est chaque sous étape qui va découler l'une de l'autre quoi. Mais au début voilà, il faut vraiment poser ce qu'on veut faire, à partir de quoi on le fait/
282. V : C'est comme un programme informatique quoi.
283. Bj : C'est pas faux, ouais.
284. V : Au début, on met les, les constantes, les variables et...
285. Ni : Ouais et il y a une structure qui est à respecter enfin qui est mise en évidence là. Après, je pense que dans ce que l'on a dit, ce qui était la partie quatre, il y a quand même quelque chose euh. Enfin, ça peut pas sortir de n'importe qui, quoi. Il utilise quelque chose, il la transforme à sa façon quoi, il...
286. V : Ah, c'est des bases de... C'est des techniques de calcul euh, je pense connu déjà, enfin c'est pas lui à mon avis qui les a, qui les a inventées en voulant démontrer ça quoi.
287. P : Vous n'avez pas l'impression que dans une démonstration, il y a des trucs/
288. B : Qui se rabâche ouais.
289. P : Qui se font tout seul puis y en a d'autres ou on se dit ben peut-être ça, j'y aurais pas pensé quoi, hein.
290. B : Si.
291. P : Alors, c'est un peu ça/
292. B : D'accord.
293. P : Quand il dit euh, hein mettre en évidence chacune des étapes.
294. B : Ben enfin, la première elle, la première étape là, quand il, quand il dit donc « considérons les points compris entre a et b partageant l'intervalle $[a, b]$ » et euh, enfin il met qu'il faut la partager en m segments de longueur h donc bon, donc tout partager c'est quand même euh, c'est intuitif quoi, il faut vraiment au début si on nous demande comment démontrer ça, il faut déjà avoir l'idée de comment le démontrer quoi.
295. Ni : Donc déjà, il faut avoir l'idée de couper le segment en m parties quoi.
296. B : Ouais voilà.
297. Ni : Enfin moi, je n'y aurais jamais pensé.
- [Rires]
298. B : Pareil. Donc euh, au début c'est quand même, il faut, il faut beaucoup d'intuition et après les preuves par elles-mêmes sont euh... en découlent mais euh... pour, pour savoir comment partir c'est...
299. Ni : Il l'a peut-être pas montré en une fois aussi/
300. Bj : Ouais, je crois aussi.
301. Ni : Il est peut-être parti sur un chemin, après il a raté. Il a peut-être réessayé sur autre chose.
302. B : C'est possible aussi.

303. P : Donc si j'ai bien compris, première étape un peu délicate pour vous. Il faut avoir l'idée de découper le segment en morceaux.
304. B : Hum.
305. P : Ensuite là, vous aviez commencer une discussion sur euh, l'équation générale là. Alors, c'est quoi l'équation générale ? Est-ce que vous pouvez vous mettre d'accord là-dessus.
306. Ni : Ouais, faudrait peut-être...
307. B : A priori, c'est un théorème...
308. P : Toi, comment tu t'appelles ?
309. Bj : *Bj*.
310. P : Puisque tu parles moins, tu as le droit de relancer ce débat.
311. Bj : Merde. Je connais pas du tout cette équation.
312. P : [Inaudible].
313. B : Non... C'est...
314. P : D'après la discussion qu'il y a eu entre vous. Tu t'appelles comment toi ?
315. B : *B*.
316. P : *B*.
317. Ni : *Ni*.
318. P : Et *Ni*.
319. P : La discussion qu'il y a eu entre *B* et *Ni* au moment où tu as écrit cette formule là. Reprend ce que tu as dit *Ni*.
320. Ni : Ben je disais que l'équation générale d'une dérivée/
321. P : Oui.
322. Ni : C'était ce qu'on voyait... Enfin $f(x+h)-f(x)$ sur h , enfin la limite de ça quand h tend vers zéro.
323. P : Ouais. Bon quelle est la relation entre euh... Ce qu'il appelle équation générale et ce que tu viens de dire.
324. Ni : Ben, c'est l'équation générale, comme il l'appelle, c'est une, c'est ce que je viens de dire mais déjà transformé. Donc euh, interprété.
325. P : Ouais/
326. Bj : C'est quoi ce h ?
327. P : Et toi *Bj* qu'est-ce que tu en penses ?
328. Bj : Il sort d'où ce h ? En fait il part de l'équation et il considère que tout le monde la connaît et, et il pose pas, il explique pas ce que c'est le...
329. P : Je suis même sûr que toi tu la connais ?
330. Bj : Celle-là, là ?
331. P : Oui, simplement tu la vois pas par ce côté-là mais c'est comme si tu la voyais par derrière au lieu de la voir par devant...

332. B : Faut retourner la feuille.
333. Bj : Quelqu'un me la retourne s'il vous plaît ?
334. B : Ben regarde, ça fait ça, en fait. Ben, ce qu'il y a en plus par rapport à ce que Ni a dit c'est que y a un ε déjà qui intervient et y a pas de limite.
335. Ni : Ouais mais ε c'est pas justement limite ?
336. B : Ben oui, ben enfin, oui, on sait que ε tend vers zéro quand h tend vers zéro. Mais euh...
337. Ni : Ouais quand, oui mais quand ? On nous dit quand ça tend vers zéro, ça tend vers zéro. Oui enfin, j'aurais du m'exprimer [Inaudible].
338. Bj : Ah si... $x+h$...
339. B : Ouais mais, si à ce moment là il, enfin le, le...
340. P : Par rapport à ce que tu as écrit là, tu peux lire ce que tu as écrit là ?
341. Bj : Non, c'est une bêtise.
342. Ni : Non, non, c'est bon ça c'est juste.
343. P : Non, non.
344. Bj : Ca, c'est l'équation de la tangente.
345. Ni : Bon oui et alors ?
346. P : Et alors/
347. Ni : La tangente égal zéro.
348. P : Mais lis ce que tu as écrit que le micro l'entende.
349. Bj : Euh... $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
350. P : Oui. Quel est le rapport ça a avec l'équation ?
351. Bj : Aucun.
352. Ni : Ben si.
353. P : Si.
354. Ni : Regarde ça remplace/
355. Bj : J'ai réussi à trouver ?
356. Ni : Regarde tu as remplacé, t'as remplacé h par a . Euh non.
357. Bj : Non.
358. Ni : x par a . C'est ça non ?
359. Bj : Non, non, non.
360. Ni : Je me plante.
361. Bj : C'est $f(h+x) - f(x)$ en fait ça va être le, ça va être déplacement entre les, entre deux points sur, sur l'axe des y . Et c'est égal à h fois $f'(x)$ plus ε h ...
362. V : Graphiquement, je dirais que c'est juste...
363. Bj : $f'(x)$...
364. P : Alors justement/

365. V : Mais pour après...
366. P : Donne moi ton nom déjà ?
367. V : V .
368. P : $V/$
369. V : Ben/
370. P : Graphiquement/
371. V : Quand on prend $f(x+h)$ déjà on, quand on place x et $x+h$ sur un graphique, et donc on fait $f(x+h) - f(x)$ donc ça veut dire que c'est ça moins ça. Donc euh, en gros on est, enfin bref et après on a $f'(x)$ plus ε donc on les place aussi. Et ben, quand on voit que ε tend vers zéro donc quand ça, ça va être tout près de... Quand ça va être égal et quand h tend vers zéro, ça veut dire là aussi et ben on a bien ça égal à ça, enfin je sais pas enfin/
372. Bj : Mais f' c'est la dérivée.
373. Ni : Y a pas mal de points qui sont au même endroit.
374. V : Enfin je veux dire, ils sont liés quoi.
375. Bj : Pourquoi y a la dérivée dans l'histoire là ?
- [Pause]
376. P : Alors toi, tu n'as pas fait de dessin.
377. B : Moi, j'ai pas fait de dessin.
378. P : Mais c'est quoi pour vous un dessin ?
379. V : C'est un moyen de s'aider, enfin de s'appuyer dessus.
380. B : De visualiser.
381. V : Sans, enfin ça démontre rien mais ça permet de s'appuyer dessus pour je pense enfin des gens moins matheux, c'est plus, euh, concret. Ça permet de visualiser quelque chose d'abstrait.
382. Ni : Moi, j'ai fait un dessin mais j'ai pas réussi à le faire.
383. P : Mais alors pourquoi les/
384. Ni : Donc ça m'aide pas. Non, c'est vrai.
385. P : Pourquoi vous avez pas commencé à faire un dessin dès le début ?
386. V : Enfin, moi j'y avais pensé mais...
387. Bj : Si, si j'y avais pensé. C'est le premier truc que je fais parce que j'aime pas les maths, je préfère faire des graphiques.
388. V : Mais pas sur la... Ben pas ça.
389. P : Oui mais.
390. V : Il parle d'un segment non ?
391. Bj : Non sur euh...
392. P : Bj c'est le premier qui trace une espèce de courbe. Elle est censé représenter quoi cette courbe ?
393. Bj : Ben, ça c'est la fonction.

394. P : C'est la fonction f .
395. B : Hum, hum...
396. Bj : $f(x+h)$...
397. P : Vous avez pas l'habitude quand on vous [Inaudible] un truc comme ça et puis d'essayer de marquer les différents points... Non ?
398. B : Non. Ben non parce que si on fait un dessin, euh, enfin surtout cette année en fait à moins que je n'ai pas bien compris, c'est que souvent quelque chose qui nous paraît logique comme un dessin, on va le voir comme nous on veut et en fait ça sera un cas particulier donc il y aura des dizaine d'autres cas où il sera faux notre dessin. Enfin où il y aura d'autres possibilités donc ça démontrera rien.
399. P : Mais bon ce que dit Ni, c'était que le dessin c'était pas une preuve, c'était quelque chose pour aider.
400. B : Hum.
401. P : Pourquoi tu ferais pas deux trois dessins différents...
402. Ni : Ouais, à ce moment là...
403. P : Hein, pour voir...
404. Bj : Il manque plus que la dérivée [Sur son dessin].
405. Ni : La dérivée, c'est une tangente.
406. P : Alors oui, la dérivée...
407. Ni : C'est une tangente au point, par exemple la dérivée de ce point là c'est la tangente à la courbe au point là.
408. Bj : Ouais, mais ce qu'il nous faut c'est sur toute la longueur h .
409. Ni : Ben ouais mais sur toute la longueur h , tu rapportes ça au point ici plus tu fais ça tendre vers zéro, ça veut dire que quand ça, tu vois ici entre les deux là, t'as une, t'as une droite qui passe enfin t'imagines, t'imagines une droite qui passe entre ces deux points.
410. Bj : Hum...
411. Ni : Et après tu rapproches ce point là au maximum de ce point là et donc euh. Une droite c'est toujours entre deux points et après tu vas te retrouver avec une droite entre deux points mais extrêmement rapprochés. Donc en fait tu vas te retrouver avec la tangente en un point en fait. Tu fais tendre h vers zéro, ça veut dire tu rapproches ça à l'infini. Donc tu vas te retrouver en un point tu vois, donc tu auras la tangente à la courbe. C'est pour ça la dérivée, c'est ça en fait.
412. P : Qu'est-ce que tu as fait comme dessin V ?
413. V : Je suis en train de faire ça. $a, a+h, a+2h, \dots$
414. P : Oui.
415. V : Voilà.
416. P : Pourquoi le, pourquoi vous trois vous faites pas un dessin comme...
417. Ni : Moi j'arrive pas à le faire le dessin. En lisant, en lisant la chose, j'arrive pas à faire le dessin.
418. P : Regarde, lui il l'a fait là.

419. Ni : Ben oui mais le problème, c'est qu'on nous dit $f(a) = f(b)$. Ca veut dire qu'il y a deux points qui sont égaux. Et ici on a/
420. B : Ca c'est ce qu'on veut montrer donc on le sait pas encore.
421. Ni : Ben je sais pas, on peut faire n'importe quoi.
422. B : Là, on dit que a plus grand que b .
423. T2 : Vous en êtes où ?
424. V : On essaye de savoir ce que c'est que cette équation.
425. T2 : Vous avez repéré les étapes déjà ?
426. V : Ouais, à peu près.
427. B : [Inaudible].
428. V : Non, ok ! Apparemment non.
429. T2 : Ben peut-être, moi je sais pas. Dites moi ce que vous avez fait ?
430. Ni : Ben si pour nous on a repéré les étapes.
431. B : On en a cinq a priori.
432. T2 : Ouais.
433. B : Et donc il y en aurait une où en fait il énonce ce qu'il veut démontrer. La première donc là, « soit a inférieur à b deux réels, montrons que $f(a)=f(b)$ ». Ensuite euh...
434. T2 : Oui.
435. B : Il pose ce sur lequel il va travailler. Donc euh... « Considérons les points compris entre a et b etc. ».
436. T2 : Ouais.
437. B : Il, il, il expose ce qu'il va utiliser en fait donc là c'est l'équation générale, que $f(x+h)-f(x)$...
438. T2 : C'est l'équation générale de quoi ça ?
439. V : Justement, on sait pas.
440. B_j : On essaye de trouver, de savoir ce que c'est.
441. T2 : D'accord.
442. B : On se demande si c'est pas la dérivée, mais c'est pas sûr.
443. Ni : Ca ressemble un peu à la dérivée, puis avec le ε , ça ressemble un peu à la limite.
444. B_j : Ouais, ça ressemble un peu à tout.
445. Ni : On est un peu paumé du coup.
446. T2 : Bon ensuite, juste donnez moi les étapes, on discutera après du contenu.
447. B : Et ben ensuite, il fait les étapes du calcul en fait.
448. V : Une grosse étape quatre. On sait pas trop si on peut la... Enfin, on peut la rediviser ou pas mais...
449. T2 : Une grosse étape où il fait des choses...
450. Ni : Calculatoire.

451. V : Farfelue.
452. Ni : Bon après moi si, je repère quand même un espèce de récurrence parce qu'il commence à un machin, deux, trois puis après il met des petits points puis après il passe à un cas général.
453. T2 : Ouais.
454. Ni : Enfin, il généralise, non ?
455. T2 : Il généralise ?
456. Ni : Ouais parce qu'il dit $h\mathcal{E}_1$, $h\mathcal{E}_2$, $h\mathcal{E}_3$... Il met trois petits points, après il arrive à $h\mathcal{E}_m$. Et m c'est en nombre de fois qu'il a coupé le segment. Il a coupé le segment en m fois.
457. T2 : Oui.
458. Ni : Donc euh, il généralise pour toutes les coupures de segment en fait. Donc euh...
459. T2 : Ok. Et après ça, qu'est-ce qu'il se passe ?
460. Ni : Ben après il, il invente quand même, il est innovant quoi. Ben il se dit si, si... Pourquoi est-ce que j'ajouterais pas membre à membre ? Donc là...
461. T2 : Ouais, ensuite il y a une étape/
462. Ni : Je sais pas il...
T2 : Qui est on ajoute membre à membre, un truc comme ça.
463. Ni : Ouais. Ouais non, je pense ça c'est une sous étape plutôt enfin...
464. T2 : D'accord. Le fait d'ajouter membre à membre, c'est une sous étape.
465. Ni : Ouais, parce que il a travaillé sur quelque chose et il se dit... Et sur tout ce qu'il a trouvé.
466. V : Ben, tout en découle en fait.
467. Ni : C'est toujours calculatoire quoi.
468. B : Moi je trouve pas que ça en découle vraiment...
469. V : Ben...
470. T2 : Non mais effectivement, il écrit des égalités/
471. V : Ouais.
472. Ni : Hum.
473. T2 : Et ensuite, il fait des opérations sur ces égalités.
474. V : Voilà ouais.
475. T2 : On peut dire que c'est une seule étape, dire que c'est deux étapes...
476. Ni : Ouais, ouais, d'accord.
477. T2 : Et ensuite.
478. B : Et à la fin, il va conclure en fait. Il dit...
479. T2 : Ensuite, c'est l'étape de conclusion. Bon, donc vous avez fait cinq morceaux quoi.
480. B : Ouais.
481. T2 : Et ben allons-y.
482. P : Tu verras, j'ai rien dit.

[Rires]

483. T2 : Je le verrai de toute façon si tu as dit, t'es enregistré hein.
484. P : J'ai du déjà trop en dire...
485. B : Non, non, ça va. Enfin...
486. P : Je leur ai posé la question suivante, qu'est-ce que c'est que ce, puisque B a écrit ça.
487. T2 : Ouais.
488. P : Qu'est-ce que c'est que ce machin. Qu'on le voit, parle au micro.
489. B : Voilà, $f(x+h)-f(x)$ sur h , le tout moins ε est égal à $f'(x)$.
490. P : Alors, est-ce que vous êtes d'accord avec ça ? Et/
491. Bj : Ben de ça, oui.
492. P : Et quel rapport avec les mots que vous avez prononcés qui sont « dérivé » et « tangente » quoi ?
493. Bj : Ton truc, c'est vrai parce que tu t'appuies sur un truc qui est donné dans, dans l'énoncé après euh...
494. V : Mais le ε , il représente quoi ?
495. Bj : Ouais.
496. V : Parce que ça, ok on connaît mais... Graphiquement ça fait quoi ?
497. B : Ben le ε ...
498. V : « moins ε » ?
499. B : Il doit permettre de remplacer la limite.
500. T2 : Moi je poserais une question, c'est quoi ce, est-ce que c'est tout le temps vrai cette égalité là ?
501. V : Ben quand euh/
502. Bj : C'est pas précisé.
503. V : Quand h , ε tend vers zéro oui.
504. T2 : Quand h et ε tendent vers zéro ?
505. V : Ben c'est marqué « avec ε tend vers zéro quand h tend vers zéro ». Donc euh...
506. T2 : Mais c'est quoi qui/
507. P : Mais toi, dans ce que tu as l'habitude toi de connaître...
508. B : Ouais donc non, si on a h euh...
509. P : Pour toi, ça c'est vrai ou pas ?
510. B : Si on a un h grand même un h de un ou quelque chose comme ça enfin c'est faux.
511. Bj : En fait, quand il énonce son équation générale, il précise pas c'est quoi ε c'est quoi h , et il doit être euh, parce que h doit être différent de zéro, ça tend vers quoi...
512. P : Il écrit « avec ε qui tend vers zéro quand h tend vers zéro ».
513. Bj : Ou ça ?

514. P : Ah...
515. B : A priori, cette équation elle est vraie seulement quand h tend vers zéro quoi.
516. T2 : Ca a été rajouté peut-être justement.
517. P : Alors...
518. Bj : Ah ouais, ça a été rajouté [Entre la version originale et la version qui leur a été distribuée]. Parce que sur l'original ça n'y est pas.
519. P : Alors pourquoi ?
520. Bj : Qui est-ce qui a recopié ?
521. T2 : C'est pas moi. Non, mais c'est pour vous aider. On voit déjà ce qui...
522. V : Ouais, mais c'est pour ça je disais quand on regardait ε et h qui tendait vers zéro, parce qu'on avait fait graphiquement ce que ça pouvait représenter ça, cette équation, et on avait dit que euh... c'était égal.
523. Ni : Quand tu fais tout tendre vers zéro, ça fait un... Tu fais la limite enfin...
524. T2 : Qu'est-ce qu'il dit précisément l'énoncé ? C'est h et ε qui tendent vers zéro ?
525. B : Non, c'est/
526. V : Non, c'est h il dépend de ε enfin...
527. B : Non, c'est ε qui dépend de h .
528. V : Oui, c'est ε qui dépend de h .
529. Ni : Ouais, on fait tendre h vers zéro et on remarque que...
530. T2 : Ouais. C'est quoi la limite de ce quotient là ?
531. Ni : Et ben, on est embêté là...
532. T2 : Vous connaissez pas la limite de $f(x+h)-f(x)$ sur h ?
533. V : Si, si, si, si.
534. P : Quand h tend vers zéro ?
535. T2 : Quand h tend vers zéro ?
536. Bj : ça fait un.
537. B : Ca ferait plutôt zéro.
538. P : En plus tout à l'heure tu as essayé de lui expliquer ça !
539. B : Qu'est-ce que/
540. Ni : Avec la, avec la dérivée ? Ouais c'est quand on rapproche les deux points et qu'on... Ouais si, si.
541. P : Ouais, quel rapport avec ça ?
- [Pause]
542. Bj : C'est pas de bol parce que si h tend vers zéro, là ça fait fonction indéterminée.
543. B : Non, pas forcément.
544. Bj : $f(x)$ moins $f(x)$ sur zéro ?

545. V : Mais ça, on l'avait, on l'avait pas dém... Enfin, c'était pas un truc de cours ça ? Quand h tend vers zéro euh...
546. B : Alors qu'est-ce qu'on pourrait dire pour faire la limite... l'Hôpital...
547. Bj : Ça fait zéro, ça fait zéro sur un à la fin.
548. B : Hein ?
549. Bj : Tu as $f'(x)$ moins $f'(x)$ sur un.
550. B : Ca fait...
551. Ni : Pourquoi sur un ?
552. Bj : h, h tu dérites.
553. Ni : Hein, hein ? Tu peux pas dériver h .
554. B : Si, ben si. Tu utilises la règle de l'Hôpital.
555. Bj : Tu fais l'Hôpital.
556. Ni : Ah oui d'accord ok. Ah, ça fait zéro.
557. T2 : Il faut quoi pour utiliser la règle de l'Hôpital ?
558. Bj : Ah oui, pffff...
559. Ni : Il faut que ce soit zéro sur zéro. Il faut que la fonction soit continue, dérivable et de la forme et que $f'(x)$ non et que le quotient soit, que la dérivée du quotient soit différente de zéro.
560. Bj : Ouhahooo...
561. T2 : Que la dérivée du quotient soit différente de zéro ?
562. Ni : Ben enfin, ben si on a $f(x)$ et $h(x)$...
563. T2 : Ouais.
564. Ni : Et il faut que ça quand on le dérive, $f'(x)$ soit différent de zéro quoi.
565. B : Non, puisque tu peux faire la règle de l'Hôpital autant de fois que tu veux. Si t'as besoin de le faire plusieurs fois pour que ça fonctionne...
566. Bj : C'est quoi les conditions initiales de l'Hôpital ?
567. T2 : Ben, il l'a dit.
568. Ni : Hum.
569. T2 : Dérivable/
570. Ni : Et faut que ce soit continu en...
571. T2 : De la forme zéro sur zéro, il faut pas que ce soit nul sur un intervalle autour du point mais vous êtes dans les conditions. Euh... Bon. C'est quoi pour vous la définition de la dérivée ?
572. V : Ben c'est ce qu'il y a marqué, enfin...
573. Bj : C'est la tête qu'a la courbe.
574. T2 : La tête qu'a la courbe.
575. B : Ben c'est...
576. T2 : Et en terme de calcul ?

577. Bj : Aucune idée.
578. T2 : Quand est-ce que, on a quand même travaillé plusieurs mois là-dessus, la dérivée, qu'est-ce qu'on fait comme genre de calcul quand on cherche si une fonction est dérivable ?
579. B : On regarde si elle est continue et si elle est pas, si elle a pas de saut ou de trucs comme ça enfin de, d'angles.
580. T2 : D'angles.
581. Bj : Qu'est-ce qu'on faisait...
582. Ni : On regardait... Ben si on était pas sûr, si il y avait des points où on était pas sûr...
583. T2 : Ouais.
584. Ni : On regardait si elle était prolongeable par continuité...
585. T2 : Oui, ça c'est pour la continuité.
586. Ni : On faisait les limites à gauche et à droite.
587. V : On faisait un tableau de variation quoi.
588. T2 : Et la dérivabilité, une fois qu'on avait fait ça par exemple, qu'on avait prouvé qu'une fonction était prolongeable par continuité des fois on s'intéressait à la dérivabilité du prolongement en fait.
589. Ni : Ouais c'est vrai.
590. B : Hum.
591. T2 : Qu'est-ce qu'on regardait comme..., qu'est-ce qu'on faisait comme calcul ?
592. Ni : Ben on faisait la limite de...
593. T2 : La limite de quoi ?
594. V : Ben la limite de la fonction. Quand euh...
595. Ni : Y avait deux façons de le poser.
596. V : La limite de l'équation de la fonction euh, au point, au point en plus ou en moins enfin suivant le sens ou le prolonge.
597. B : Non, pour moi c'est la limite de la dérivée en un point qui est égal à la fonction en ce point là, non ?
598. T2 : Alors ce qu'on va, on va vous débloquent par ce que sinon on va passer beaucoup de temps là, ce qu'on fait comme calcul pour regarder si une fonction est dérivable, c'est justement ce calcul là. Ici, là : $f(x+h)-f(x)$ sur h si ça, ça tend vers, ça a une limite quand h tend vers zéro.
599. Ni : Une limite finie oui.
600. T2 : Une limite, une limite finie quand h tend vers zéro, alors on dit que la fonction est dérivable. C'est ça la définition.
601. Ni : D'accord.
602. P : Mais géométriquement, c'est quoi pour vous ?
603. B : C'est la tangente.
604. V : L'équation de la tangente à la courbe.
605. Bj : Hein ? Non !

606. Ni : Non, c'est pas, c'est juste c'est juste une tangente à un point de la courbe.
607. P : Oui mais...
608. B : C'est le coefficient directeur de la courbe.
609. P : Ah, ah.
610. B : Le coefficient directeur de la tangente. Non de la, de la tangente en chaque point en fait. Donc c'est le coefficient directeur de la courbe. Si par exemple t'as $f(a)$ et $f'(a) = b$ alors b c'est le coefficient directeur de la tangente au point a .
611. Ni : [Inaudible].
612. B : Oui, au point a .
613. Bj : Oui mais généralement/
614. B : En chaque point de la courbe, en fait, tu vas obtenir le coefficient directeur/
615. Bj : Quand la dérivée est négative t'as la courbe qui descend, quand la dérivée est positive t'as la courbe qui monte.
616. B : Hum.
617. P : Donc c'est la pente de la tangente en chaque point. La dérivée en un point c'est la pente de la tangente en ce point.
618. B : Hum, d'accord.
619. P : Pour reprendre ce que disait Ni à Bj tout à l'heure hein, quand tu fais tendre ce point là vers l'autre, la pente de la sécante, de la droite qui joint les, les, ces deux points là elle devient la tangente. Elle devient la pente de la tangente.
620. Bj : Ouais mais si je rapproche mais deux points, la tangente elle va être comme ça après.
621. B : Non comme ça, au contraire, elle va être horizontale.
622. Bj : Ben j'ai deux points l'un sur l'autre.
623. P : Pourquoi l'un sur l'autre ?
624. V : Non, non, non, tu les fais tendre, parce que là t'as, t'as plus h aussi donc tu les fais comme ça/
625. Bj : Ah tu les rapproches ok, il faut les rapprocher...
626. Ni : Tu prends sur ton dessin comme ça/
627. Bj : C'est bon.
628. Ni : Et après, tu les rapproches de plus en plus donc tu vas te retrouver en un point.
629. P : Donc finalement, ce qu'il appelle l'équation générale...
630. B : C'est l'équation générale de la dérivée ?
631. P : C'est ce que nous on appellerait la définition de la dérivée.
632. V : Mais c'est quoi ce ε alors ?
633. B : ε je pense c'est que, on est au niveau de, en fait/
634. P : C'est parce que la dérivée c'est la limite/
635. B : $x+h$ /

636. P : de $f(x+h) - f(x)$ sur h .
637. Ni : Oui, donc ε c'est la variation de, enfin c'est ce qu'il appelle euh, c'est le petit, c'est le petit élément qui varie sur, enfin on dit que dans l'intervalle $[x, x+h]$ euh la, la dérivée ne varie pas...
638. P : [Inaudible].
639. Ni : Le ε , il est là.
640. P : $f(x+h) - f(x)$ sur h , c'est quoi sur ton dessin là ?
641. Bj : $f(x+h) - f(x)$ c'est ça...
642. P : Sur h .
643. Bj : Sur h ...
644. Ni : h c'est la longueur.
645. Bj : Ben, c'est ça divisé par la longueur qu'il y a là.
646. P : Ben oui, mais ça représente quoi géométriquement ?
647. V : Ca représente [Inaudible].
648. Bj : Le h c'est ça.
649. P : $f(x+h) - f(x)$ sur h , c'est la pente de la sécante.
650. B : Ouais.
651. P : De la droite qui est là/
652. B : C'est le coefficient directeur tout simplement.
653. P : C'est le coefficient directeur de cette droite qui joint ces deux points.
654. Ni : Oui parce que le coefficient directeur c'est/
655. B : $y_b - y_a /$
656. Ni : $y_b - y_a$ sur, sur...
657. B : $x_b - x_a$.
658. P : Voilà. h c'est $x+h-x$.
659. Bj : Ca sur ça, c'est le coefficient...
660. P : C'est la pente disons, de la sécante.
661. Ni : Ah oui, c'est ce que j'ai expliqué donc c'est la pente et donc quand on la fait tendre vers zéro, ben on rapproche les deux points en fait que la longueur.
662. B : C'est pour ça que le ε en fait, le ε , il va nous permettre de passer à la limite parce que quand le h est grand et ben le ε aussi il est grand et donc euh...
663. P : Quand le h est grand, ε tu sais pas trop ce que c'est, mais quand le h , il tend vers zéro/
664. B : Hum.
665. P : Le ε /
666. B : Il tend vers zéro.
667. P : Tend vers zéro.
668. B : D'accord.

669. P : Donc ça, c'est la définition de la dérivée tout simplement, d'accord ?
670. B : D'accord.
671. P : C'est-à-dire, ce qu'il dit là, la seule chose qui n'est pas tout à fait juste, c'est « égal ».
672. B : Hum, hum, on sait pas.
673. P : $f'(x)$ c'est égal à $f(x+h)-f(x)$ sur h /
674. B : Quand h tend vers zéro.
675. P : Moins ε , hein ?
676. B : Hum, hum.
677. P : Euh, à peu près, quand h tend vers zéro, ε tend vers zéro.
678. Ni : En fait ça, c'est comme si c'était une ordonné à l'origine. Parce que ça fait à peu près ça enfin... Si ça c'est le coefficient directeur, ça fait un peu $ax + b$ quoi. Non ?
- [Pause]
679. Ni : Je sais pas tout à l'heure on a dit que ça, c'était le coefficient directeur ?
680. P : C'est le coefficient directeur de la sécante et ça c'est le coefficient directeur de la tangente, c'est-à-dire quand la sécante, quand les deux points se rapprochent.
681. Ni : Hum, hum.
682. P : Ca ben c'est ce qui permet l'approximation.
683. B : Bon d'accord.
684. V : En gros, on a répondu aussi à la deuxième question parce que on vient de montrer que c'était pas rigoureux ça, enfin parce que c'est pas égal, enfin... C'est égal seulement, enfin c'est égal « si »...
685. P : Il a pas dit que c'était égal, c'est euh...
686. B : Si.
687. V : Ah si, si.
688. P : Si il a marqué que c'était égal ?
689. B : Là il a marqué que c'était égal, moi j'ai juste...
690. P : Il a mis « avec... ».
691. B : Non mais ici, là. Il est là mon égal, ce que j'ai fait c'est que j'ai juste passé le h ici et le ε ici.
692. P : Oui mais regardez, il faut voir le phrase toute entière.
693. V : Ah ouais mais il l'avait pas mis lui.
694. B : Ben oui !
695. P : Sur l'original d'accord.
- [Rires]
696. T1 : J'ai modifié légèrement l'original.
697. Bj : Hum, on s'en est rendu compte.

698. B : D'accord.
699. P : Alors V , dans ton dessin là-bas...
700. V : Ouais.
701. P : f de toutes ces choses là, parce que là-dedans il y a f de...
702. V : $f(a), f(a+h), f(a+2h)$...
703. P : Ouais. Tu les dessines pas ceux-là ?
704. V : Ben si, je pourrais.
705. P : Tu veux pas en dessiner quelques uns ?
- [Ni cherche la définition de la dérivée sur Internet]
706. P : Alors, c'est quoi qu'elle a dans le ventre cette équation, le gros passage quoi ? Qu'est-ce qu'il essaye de faire ?
707. B : Ben déjà il...
708. V : C'est les accroissements entre les points, enfin... Ben f de, enfin il fait $f(a+h) - f(a)$ donc ça veut dire que cette distance là, il dit que, il l'appelle $h\mathcal{E}_1$. Ensuite il fait $f(a+2h) - f(a+h)$, il dit que c'est $h\mathcal{E}_2$...
709. B : En fait, c'est la distance entre chacune des/
710. V : La distance, ouais.
711. B : Des abscisses, non des...
712. V : Des ordonnées.
713. B : Ouais, des ordonnées.
714. P : Est-ce que vous avez pas remarqué que quelque fois quand on fait une démonstration, on est au milieu de la démonstration/
715. Ni : On sait pas où on va.
716. P : On perd le fil, on se souvient plus de pourquoi on était là et quel était le but final.
717. Ni : Ouais si.
718. P : Donc la difficulté d'une démonstration/
719. B : C'est de garder en vue le, le but final enfin...
720. P : C'est d'avoir à la fois la vision locale de l'endroit où tu es et puis le but final.
721. B : Ben, le truc c'est/
722. P : C'est comme si tu à la Part Dieu par exemple, à la fois tu avances, tu regardes les pas que tu fais etc pour ne pas te casser la gueule, mais en même temps tu te souviens que tu allais à la Part Dieu, que t'aller pas à Perrache.
723. V : Ben là, ce qu'on aimerait, vu qu'on veut montrer que c'est continu, on voudrait montrer que $h\mathcal{E}_1, h\mathcal{E}_2$ c'est égal à zéro.
724. P : Vous voulez montrer que c'est continu ?
725. V : Ben oui, enfin ah non, ah si constante, non constante pardon. Donc, il faudrait montrer que $h\mathcal{E}_1, h\mathcal{E}_2, h\mathcal{E}_3$ égal à zéro. Par ce que comme ça, la courbe on va entre a et b et y a donc

$f(a+h)-f(a)$ ça donnera $h\varepsilon_1$, donc ça nous donnera une ordonnée, et après si $h\varepsilon_1$ égal $h\varepsilon_2$, ça voudrait dire que pour $a+h$ on aura la même ordonnée/

726. B : Oui, mais bon...

727. Ni : La même ordonnée ouais...

728. V : Et du coup, on aura une fonction constante. Enfin, c'est droit quoi.

729. Ni : Non, mais il a pas mis tout en égalité lui, il a tout sommé lui.

[Pause]

730. P : Comment vous faites pour démontrer qu'un truc est nul ? Qu'est-ce que vous avez comme méthode ?

731. B : Oui, si tu factorises et qu'il y a un des membres qui tend vers zéro...

732. P : Plus exactement quelle est la méthode qu'il utilise là pour démontrer que quelque chose est nul, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) = 0$ hein... Hein c'est bien ça ici/

733. V : Il fait la limite.

734. P : Il veut montrer que $f(a) = f(b)$.

735. V : Il fait la limite quand m tend vers plus l'infini.

736. P : Et il arrive à $f(b) - f(a)$ hein, égal zéro.

737. Ni : Ah ben si, oui, il fait ça.

738. P : Donc ça c'est un truc qui est vachement courant dans les démonstrations, pour démontrer que $f(b) - f(a)$ égal zéro, il démontre que $f(b) - f(a)$ est plus petit que n'importe quel nombre fixé à l'avance.

739. V : Ouais, ouais, c'est ce qu'il fait là alors.

740. P : Est-ce que ça vous convainc ça comme méthode ?

741. Ni : Non.

742. B : Moi non.

743. P : Alors, pourquoi ça te convainc pas ?

744. V : Ben c'est un nombre fixé, ben là ça irait mais parce que c'est un nombre fixé à l'avance euh...

745. B : Ben là il met est plus petit enfin... inférieur ou égal donc si limite $hm\varepsilon$ est égal à zéro. Il peut être inférieur à zéro ou égal à zéro donc déjà là on sait que...

746. V : Ah mais on veut pas qu'il soit inférieur, a priori.

747. Ni : Enfin nous de toute façon si on pose $f(b) = f(a)$ on sait que $f(b) - f(a) = 0$ après montrer qu'il est plus petit ou inférieur ou égal à un nombre fixé, si on montre que ce nombre quand quelque chose tend vers zéro et qu'on fait la limite de l'autre côté peut-être aussi... Là on peut montrer quelque chose je pense.

748. P : Prenez $\varepsilon = 1/100$.

749. B : Oui.

750. P : Je suppose que $f(b) - f(a)$ ça reste positif. Enfin c'est positif ou nul hein, ça peut pas être négatif.

751. B : Ouais.
752. P : Si je suis sûr que $f(b)-f(a)$ c'est plus petit que $1/100$...
753. B : Hum, hum.
754. P : Maintenant on dit ε , je prends n'importe quoi, aussi petit que je peux l'imaginer.
755. Ni : Entre 0 et $1/100$.
756. P : Ouais. $1/1000$, $1/1000000$, $1/000000000$...
757. B : Ce sera forcément égal à zéro.
758. P : Si $f(b) - f(a)$ plus petit que $1/1000$, $1/1000000$, $1/000000000$, n'importe quoi, aussi petit qu'on veut, qu'on peut l'imaginer, est-ce que ça te démontre que/
759. B : Tend vers zéro.
760. P : Que $f(b) - f(a)$ est égal à zéro.
761. B : Ben non.
762. P : Pourquoi ?
763. B : Parce qu'il peut être toujours sans être égal à zéro.
764. Ni : Il peut tendre vers zéro.
765. B : Il peut aussi tendre vers zéro.
766. P : Bon alors toi Bj, puisque tu causes pas, hein, voilà la question hein $f(b) - f(a)$ c'est plus petit que n'importe quel nombre que je peux imaginer/
767. V : Aussi petit qu'on veut.
768. P : Aussi petit qu'on veut.
769. Bj : Ouais, si c'est plus petit c'est...
770. P : Est-ce que ça entraîne que $f(b) - f(a)$ c'est « égal » à zéro.
771. B : Regarde la fonction euh...
772. Bj : Ben ça tend vers zéro ou... Si c'est plus petit que n'importe quel nombre ouais ça, c'est égal à zéro. Enfin, c'est presque égal à zéro.
773. P : Toi tu dis, V il dit non.
774. V : Moi je suis pas convaincu, non.
775. P : Il est pas convaincu.
776. V : Non.
777. P : Alors essaye de le convaincre.
778. B : Mais pourtant il existe plein de...
779. V : Il y a une infinité de nombre donc euh, a priori euh, on peut aller, on peut ne pas s'arrêter quoi. Enfin je veux dire...
780. Bj : Ouais mais si on dit qu'il est plus petit que n'importe quoi, que n'importe lequel, c'est comme si c'était égal à zéro.
781. B : Ouais, non t'as raison.

782. Bj : Tu prendra n'importe lequel il sera encore plus petit.
783. V : Ouais, mais c'est intuitif...
784. Bj : Ben...
785. V : Non mais je veux dire intuitif, moi j'aurais dit ça aussi mais...
786. P : Quel est l'ingrédient qui fait que c'est vrai, ce que je viens de dire ?
787. B : Ben c'est « n'importe lequel ».
788. P : [Inaudible] L'autre ingrédient.
789. Bj : Plus petit que n'importe lequel.
790. V : Aussi petit qu'on veut.
791. P : Pourquoi il doute lui, il a raison de douter, mais parce qu'il y a un truc qui te manque...
792. V : Ben il me manque que... Y a autant de nombre, enfin, il y a un nombre indéterminé de...
793. P : Ce qu'il te manque c'est que, tu n'a pas en tête que $f(b) - f(a)$ est fixé. C'est un nombre fixé.
794. V : Hum.
795. B : Ah ouais...
796. P : La raison pour laquelle tu doutes, c'est parce que tu penses à un $f(b)$ moins $f(a)$ /
797. B : Qui varie aussi ah oui, ok.
798. P : Variable, qui peut descendre en même temps que l'autre.
799. B : Je suis convaincu alors.
800. P : Alors que là a et b , c'est deux réels fixés au départ, point.
801. B : Ouais c'est vrai.
802. P : Si tu as un nombre fixé qui est plus petit que tout ce que tu peux imaginer c'est zéro. Mais si tu as un nombre non fixé, variable /
803. B : Ouais c'est vrai. Mais ils peuvent varier aussi...
804. P : Qui est plus petit que tout ce que tu peux imaginer ben il peut être seulement la moitié de ce que tu imagines, au fur et à mesure que tu imagines, il devient toujours la moitié mais il est jamais zéro. Hein ?
805. B : D'accord.
806. P : Donc c'est ça qui est bien important et qui est très difficile finalement, hein. C'est qu'est-ce que c'est qu'une quantité vraiment constante et qu'est-ce que c'est qu'une quantité variable dans quelque chose comme ça hein et comment on les utilise.
807. V : D'accord.
808. P : Donc en résumé si vous voulez, disons ce qui est un peu la trame de la démonstration du début à la fin hein, c'est qu'il veut démontrer que $f(b) = f(a)$ /
809. V : Et il fixe $f(b), f(a)$.
810. P : a et b ils ont été fixé par hypothèse.
811. V : Ouais, d'accord.

812. P : Il veut démontrer que $f(b) - f(a) = 0$ et pour ça il va démontrer que $f(b) - f(a)$ c'est plus petit que n'importe quoi qu'on peut imaginer.
813. B : Hum, hum. Donc c'est égal à zéro.
814. P : On peut utiliser ce qu'on veut. Et comme a et b sont fixés, $f(b)$ et $f(a)$ sont fixés, constants, un nombre donné si il est plus petit que tout ce qu'on peut imaginer il est nul.
815. Bj : On se casse vraiment la tête pour rien.
816. P : Hein ? Alors vas-y explique nous un petit peu pourquoi tu dis ça. [Inaudible] C'est pas tout, il faut expliquer.
817. Bj : Parce que en 1800, ils avaient que ça à faire que démontrer ça, alors que il suffisait de faire un graphique pour montrer quoi !
- [Inaudible]
818. P : Et ben vas-y montre nous le avec un graphique.
819. Bj : Voilà, ça y est. Faudrait plus qu'un graphique, faudrait que j'explique à l'oral mais...
820. P : Non, non, non. Explique-nous...
821. Ni : Explique nous. [Inaudible]
822. Bj : Ben, si on sait que la dérivée, elle est négative, la courbe elle descend. Quand la dérivée est positive la courbe augmente. Donc si la, si la dérivée est égale à zéro, ben du coup la courbe n'augmente pas, ne diminue pas, donc elle est constante.
823. V : Ben moi j'aurais plutôt fait ça. Comme j'avais fait quoi...
824. P : Alors, vas-y.
825. Ni : T'avais utiliser des éléments déjà toi. Des éléments qu'on t'a filé.
826. V : Ben je dis ça, je dis, j'ai utilisé ça quoi.
827. Ni : Lui il a fait juste par rapport à l'énoncé. Toi le truc, ça tu as fait quand t'as vu l'énoncé...
828. Bj : [Inaudible].
829. B : Ca date de quand l'équation de la dérivée ?
830. P : 1700.
831. B : 1700. Donc ça fait quand même quelque temps qu'elle était connue quoi, à cette époque là.
832. P : Oui.
833. B : D'accord.
834. P : Alors est-ce que ?
835. V : Non mais c'est vrai, moi je me base pas par rapport à l'énoncé, je me base déjà par rapport à ça. Et avec ce qu'on vient de dire que ε tend, enfin aussi petit qu'on veut donc tend vers zéro, ça veut dire que, donc là on a $f(b)$, et donc du coup graphiquement si, vu qu'on a en tête qu'on veut quelque chose de constant, on voit le bout du tunnel mais que on est encore dans le tunnel quoi... Et ben, si on veut que $f(b) - f(a)$, on veut que ce soit égal à zéro pour qu'on ait toujours une ordonnée la même ben il faut que $h\varepsilon_1, h\varepsilon_2, \dots, h\varepsilon_m$ soient égal à zéro. Et comme ε tend vers zéro [Inaudible].
836. P : Ouais mais alors, quelle est la conclusion par rapport à la question de la démonstration là. Elle est bonne sa démonstration ou... ?

837. V : Ben oui. Parce qu'il arrive à $f(b) = f(a)$.
838. P : Ouais, mais les étapes intermédiaires là ?
839. V : Ah. Ben $f(b) - f(a)$... oui. Donc ça c'est $h\epsilon_m$, ok.
840. P : Alors qu'est-ce que c'est que ce truc ? Tu as parlé de récurrence là.
841. V : Ben c'est les intervalles entre chaque image de points. Entre chaque image c'est la...
842. P : Pourquoi est-ce qu'il fait ça ?
843. B : Il découpe, il les prend tous.
844. P : Oui.
845. B : Il les prend tous pour montrer que c'est n'importe quel point...
846. P : Oui, mais quel rapport ça a avec $f(b) - f(a)$?
- [Pause]
847. P : C'est sur ton dessin V .
848. V : Quel rapport il y a entre $f(b)$ et $f(a)$?
849. P : Entre $f(b)$ et $f(a)$ et tout ce bordel qu'il y a ici là.
850. B : Il fait varier euh, il fait varier a et b . Enfin...
851. P : Non.
852. V : Non mais c'est...
853. B : Il regarde tous les points qu'il y a entre a et b .
854. P : Oui, et alors ?
855. V : Ben il leur associe une image, il leur associe une image et il regarde la, la distance, enfin je sais pas si c'est une distance, qu'il y a entre le point associé à a et associé à b , $f(a)$ et $f(b)$...
856. P : Ouais.
857. V : Donc euh... Il a autant de points, de segments en ordonnée que en abscisse. Il les décompose en fonction des..., des, enfin des, des a , $a + h$, $a + 2h$ et donc il appelle ces longueurs $h\epsilon_1$, $h\epsilon_2$, etc. Après $f(b) - f(a)$ il dit que, ben il met h en facteur, il dit h facteur de la somme de tous les ϵ de 1 à m .
858. P : La question c'est $f(b) - f(a)$, quel rapport ça a avec ces trucs, $f(a+h) - f(a)$ etc ? C'est sur ton dessin, tu l'a presque dit.
859. V : Ben...
860. P : $f(b)$ il est où ?
861. V : Là.
862. Ni : A la fin.
863. P : Et $f(a)$?
864. V : Là.
865. P : Bon, et alors $f(b) - f(a)$, c'est quoi ?
866. V : Ben $f(b) - f(a)$ c'est $f(a) + f(a+h) + f(a+2h)$...

867. Ni : C'est la distance, c'est $f(h)$.
868. P : Donc c'est la distance sur l'axe des y , l'axe des ordonnées, entre ça et ça.
869. V : Ouais.
870. P : Hein ?
871. V : Ouais.
872. P : Voilà. Et $f(a+h) - f(a)$, $f(a+h)$
873. V : Ben c'est décomposé, c'est un segment décomposé.
874. P : Hum, hein, donc c'est comme une échelle avec des barreaux. $f(b)-f(a)$ c'est la différence entre le haut et le bas.
875. V : Ouais.
876. P : Hein ? Et $f(a+h)-f(a)$ ou $f(a+2h)-f(a+h)$ etc c'est la distance entre chaque barreau.
877. Bj : Hum !
878. Ni : Ah oui.
879. P : Donc la distance de haut en bas, c'est la somme des distances entre chacun des barreaux.
880. Ni : [Inaudible].
881. P : Voilà.
882. V : Ouais, ok.
883. P : Donc la question, c'est pourquoi, pourquoi il décompose en barreaux ? Qu'est-ce que ça lui donne de plus à l'argument de Bj de départ qui dit c'est évident, pourquoi il va s'emmerder à faire tout ça.
884. B : Parce que si il montre que la distance entre chaque barreau est nulle, ben il a montré que la distance entre euh, le début et la fin elle aussi.
885. P : Oui.
886. B : Donc forcément que la fonction est constante.
887. P : Alors est-ce qu'il démontre que la distance entre chaque barreau est nulle ?
888. V : Oui puisqu'il fait intervenir ε qui tend vers zéro quand h tend vers zéro.
889. P : Alors tout à l'heure tu disais que t'étais pas convaincu par ce genre de choses, parce que c'est pas nulle, là c'est petit.
890. Bj : Mais sa preuve elle est foireuse en plus.
891. P : Alors vas-y.
892. Bj : Parce que si jamais la courbe elle est constante sur euh, de a à b et qu'après elle part en live c'est-à-dire que $[a, b]$ elle sera constante mais elle est pas constante tout le temps.
893. V : J'ai pas compris ce que t'as dit Bj là.
894. Bj : Là, il démontre que la courbe elle est constante entre a et b , ok ?
895. V : Ouais.
896. Bj : Mais si il faut a et b c'est de zéro à un. Mais qui nous dit que de deux à trois la courbe elle part pas en cacahuète ?

897. V : Ah ben ça on s'en fout. Ben je veux dire l'objet d'étude c'est euh... « Soit a inférieur à b deux réels.. ».
898. Ni : Non, non. Au début [Inaudible].
899. Bj : Non, non. « si la dérivée de f ... alors f est constante ».
900. B : Mais c'est sur le segment que tu veux quoi.
901. V : Ben oui « Une fonction réelle définie et dérivable sur \mathbb{R} , si la dérivée de f est constamment nulle... »
902. Ni : Ouais mais constamment, on dit pas que c'est juste entre a et b .
[Inaudible]
903. Bj : Là, la démonstration, il la fait que entre a et b .
904. V : Et alors ?
905. B : Après t'as juste qu'à la généraliser entre euh, entre n'importe quels nombres.
906. Ni : Entre zéro et plus l'infini.
907. V : Elle est constamment nulle.
[Inaudible]
908. P : Est-ce que vous êtes d'accord avec ce que dit B là ?
909. V : Oui.
910. B : Ce serait trop compliqué en fait de la, de la faire directement entre moins l'infini et plus l'infini, je pense.
911. Bj : Ouais, mais si il la fait entre a et b , il l'a prouvé que pour euh...
912. B : Oui mais en fait, il dit que... En disant que a et b sont deux réels, il les prend n'importe où. Donc en fait, il les nomme juste mais ça peut être un a infiniment grand dans le négatif et un b infiniment grand dans le positif et donc euh, c'est-à-dire on va balayer tout l'espace \mathbb{R} .
913. Ni : Ouais tu peux faire a qui tend vers moins l'infini et b qui tend vers plus l'infini, parce qu'il définit quand même que a est plus petit que b quoi. Donc y a quand même un notion d'échelle bon après peu importe si b ça tend aussi loin que tu veux et a il tend aussi loin que tu veux quoi.
914. Bj : Ouais mais dans sa preuve, il rappelle pas que f , que la dérivée est constamment, constamment nulle. A aucun moment il en parle ?
915. Ni : Ouais mais vu qu'il utilise la formule qui dit que de toute façon on va enfin, il utilise la formule...
916. P : Attends, y a deux choses là hein. Y a d'abord la discussion sur $[a, b]$ et sur moins l'infini, plus l'infini. C'est un peu le même genre de trucs, les mêmes discussions qu'on avait tout à l'heure. Donc B , hein, a dit à peu près ce qu'il fallait, c'est-à-dire que là, il énonce sur tout \mathbb{R} , pour le montrer sur tout \mathbb{R} , il le démontre sur n'importe quel segment $[a, b]$, a et b étant arbitraires mais fixés.
917. B : Hum.
918. P : Donc si tu veux, mettons que a se soit moins cent et b c'est plus cent. Alors toi tu venais de dire oui mais, si c'était plus cent cinquante, est-ce que c'est vrai encore ?
919. Bj : Oui.

920. P : Hein. L'argument de B c'est comme a et b , il les a pris arbitraires, au lieu de prendre moins cent et plus cent, on peut aussi bien prendre moins deux cents, plus deux cents et son raisonnement reste valable. Donc ton argument tombe. C'est ça que tu lui réponds ? Hein ?
921. B : Oui.
922. P : Est-ce que maintenant ça te convainc ?
923. Bj : Hum.
924. P : Alors ensuite, il y a la question que posait V je crois ?
925. V : Non, c'était Bj sur [Inaudible]. On dit pas que la dérivée est constamment nulle.
926. Bj : Ouais, dans la preuve, il le rappelle pas.
927. V : Ouais, mais il utilise la fon...
928. P : C'est-à-dire quand même, son énoncé c'est dire si une fonction a une dérivée qui est constamment nulle alors quelque chose. Euh, il faudrait quand même que cette hypothèse elle soit utilisée dans la démonstration/
929. V : Ouais, mais il, elle est utilisée.
930. P : Alors elle est utilisée où ?
931. V : Ben, elle est utilisée dans le sens où on fait intervenir, enfin image/antécédent donc euh, enfin...
932. P : Alors où est-ce qu'elle est utilisée ?
933. Ni : Elle est utilisée ici. En fait il utilise l'équation générale de la dérivée et il travaille avec. Ça veut dire que même si elle est pas totalement sous la forme de la dérivée, quand il développe les étapes, il veut montrer que pour chaque $h \in \mathcal{E}$ euh... Sur le barreau de l'échelle et ben la dérivée est, est nulle. Donc en fait, si il montre que toutes les dérivées sont nulles et ben il va pouvoir soit faire une égalité ou soit sommer quelque chose de nul donc la somme va être quelque chose de nul, on va arriver à quelque chose de nul.
934. P : Ouais...
935. V : Si on fait une identification par rapport à la formule de départ, si on prend le x en fait c'est le a .
936. P : Hum.
937. V : Donc euh là, on incrémente enfin, on fait pour arriver jusqu'à, jusqu'à $f(b)$. Donc ici, jusqu'au bout on arrive à $f(b)$. Après on fait $f(b) - f(a)$, donc en fait on fait ça, on fait cette partie de l'équation.
938. P : Ouais.
939. V : Quand on fait $f(b) - f(a)$ et qu'on dit que c'est égal à ça, en fait, on fait ça. Avec $x = a$ et $f(x+h)$, c'est déjà $f(b)$...
940. P : Oui.
941. V : Donc euh, on réutilise la formule euh, de la dérivée...
942. P : L'hypothèse $f'(x)$ égal zéro partout, c'est ça l'hypothèse.
943. V : Hum.
944. P : Hein. Elle est utilisée où exactement, montre moi sur le...

945. V : Euh...
946. P : Montre moi l'endroit avec ton crayon où elle est utilisée.
947. V : Ah non, mais je sais pas.
948. Ni : Moi, je pense c'est utilisé à la fin.
949. B : A la fin oui.
950. V : C'est utilisé là.
951. Ni : Non, moi je dis que c'est avant. Moi je dis que c'est après. Moi je dis que c'est « comme ε a pour limite zéro quand m croît indéfiniment ». Quand m croît indéfiniment, ça veut dire que ici, il découpe en infiniment de fois/
952. V : Ah si, si, si, si, c'est là.
953. Ni : En infiniment de fois le segment et quand on découpe indéfiniment/
954. V : Non.
955. Ni : On commence à s'approcher de zéro, on fait tendre h vers zéro. Et comme il nous dit ici comme information que quand h tend vers zéro, ε tend vers zéro, il réutilise cette euh, cette propriété générale ici pour montrer que comme ε a pour limite zéro et euh, et bien quand on a un facteur, quand on a des facteurs, il y en a forcément un des deux comme c'est égal à zéro, il y en a forcément un des deux qui doit être égal à zéro.
956. P : Oui, mais ça je crois que c'est autre chose. La question c'était où est-ce que $f'(x)$, « $f'(x)$ égal zéro partout » est utilisé ? Toi B , qu'est-ce que tu en penses ?
957. B : Il l'utilise pas vraiment parce que c'est ce qu'il veut démontrer.
958. P : Ah non. f , la dérivée est constamment nulle/
959. V : Ici, là.
960. P : C'est l'hypothèse.
961. V : Là, non ?
962. P : Alors toi tu dis que c'est trois lignes avant la fin.
963. V : Parce que si on dit que c'est $f'(x)$ égal à zéro, ça veut dire qu'on a h plus ε , et quand on a h qui tend vers zéro, ε tend vers zéro.
964. P : Bon, Bj . C'est utilisé où à ton avis ? $f'(x)=0$.
965. Bj : Je sais pas.
966. P : Mais c'est, c'est plus facile que ce que... Que ce que vous avez compris jusqu'ici.
- [Rires]
967. P : Non, mais il suffit de regarder.
968. B : Mais oui c'est là. Puisque « $f'(x)$ est constamment nulle ».
969. P : Bon alors c'est où ?
970. B : C'est au tout début en fait, de l'étape de calcul, en fait.
971. P : C'est ici, mais où ça apparaît dans les formules ?
972. B : Et ben ici.

973. P : Voilà, tout simplement, là.
974. V : On a plus, on a plus de ce côté.
975. P : Regarde, tu as $f(a+h)-f(a)$ égal, ça devrait être $h/$
976. B : Plus $f'(a)$.
977. P : $f'(a)$ plus ε .
978. B : Hum. Ah oui, $f'(a)$ c'est zéro.
979. P : Et $f'(a)$, hop il est tombé.
980. Ni : Mais pourquoi il l'utilise dès le début, vu que c'est quelque chose qu'il veut démontrer ?
981. B : Ben parce que c'est une hypothèse justement donc euh, l'hypothèse il est obligé d'utiliser dès, tout le temps. Enfin, il est pas obligé mais...
982. Ni : Ah mais donc en fait il généralise pour [Inaudible].
983. P : Il l'a utilisé là aussi, la ligne d'après aussi...
984. Ni : Ouais, pour toutes les étapes.
985. P : Toutes les étapes.
986. Ni : Ah, ok.
987. P : Le f' il l'a remplacé par zéro.
988. Ni : Hum, hum.
989. P : Donc ici, ça c'est un truc important dans une démonstration, c'est que quand on a une hypothèse, que tu as fait une démonstration, il faut chercher à quelle endroit de la démonstration tu as utilisé l'hypothèse. Parce que si le résultat est vrai sans avoir utilisé l'hypothèse.
990. Bj : C'est qu'il y a un problème.
991. Ni : Donc l'hypothèse, elle sert à rien donc ça veut dire que...
992. P : Ou bien elle servait à rien ou alors tu t'es planté. Bon, ben qu'est-ce que ça veut dire concrètement sur le dessin ?
993. V : On l'a déjà dit ça.
994. P : Oui mais dans le dessin, qui est là ?
995. V : Ben oui. Comment ça que...
996. P : L'utilisation de $f'(x)=0$ sur le dessin.
997. Ni : [Inaudible].
998. B : Ca veut dire que en chaque point de sa courbe, la tangente est égal à zéro.
999. P : Et qu'est-ce que ça veut dire sur les barreaux qu'on ajoute là ?
1000. Ni : Ben que les barreaux sont tous égaux.
1001. B : Non, ils sont plutôt tous à $f(a)$.
1002. P : C'est $h\varepsilon$ hein, c'est pas...
1003. B : C'est pas zéro.
1004. P : Les barreaux tous égaux ce serait $f(a+h)-f(a)$ égal zéro. Là, c'est $f(a+h)-f(a)/$

1005. Ni : Ben égal à $f(a)$.
1006. P : Tout petit. Donc, ce qu'il utilise là, dans cette démonstration, c'est que chacun des barreaux est très près/
1007. B : De l'autre.
1008. P : Du précédent.
1009. B : Ah, d'accord.
1010. P : Et ensuite, il fait la somme hein, parce que ça, $f(b) - f(a)$ égal $h\epsilon_1 + h\epsilon_2 + \dots + h\epsilon_m$, d'accord ? Vous êtes d'accord que c'est la somme de toutes les lignes qu'il y a au dessus ?
1011. V : Ouais, ouais.
1012. B : Ouais, parce qu'en fait, ça, ça s'annule, ça, ça s'annule... Et on se retrouve avec $f(a)$ et $f(b)$.
1013. P : Voilà, c'est ça. C'est ce qu'on appelle une somme télescopique.
1014. B : Ouais, on a vu ça avec les récurrences.
1015. P : Voilà, hein, c'est-à-dire...
1016. B : On additionne tout puis on garde le premier et le dernier.
1017. P : Tu mets treize moins douze puis douze moins onze plus onze moins dix etc, etc. Ben tu vois bien qu'à chaque fois, ils s'en vont deux à deux/
1018. B : Comme pour les suites.
1019. P : Le premier, au début et le dernier à la fin. Plus le premier, moins le dernier.
1020. B : Ouais, ok.
1021. P : Mais alors là, il n'y a pas un, y a pas un petit problème ? Hein ? *V* je suis sûr qu'il est pas convaincu pas ça, par rapport à l'argument de tout à l'heure ?
- [Rires]
1022. P : Tu te souviens quand on discutait est-ce que c'est égal à zéro ou bien...
1023. B : Oui, c'est fixé.
1024. P : Ouais, alors là quand même/
1025. B : Il le réutilise...
1026. P : C'est quand même un peu merdique parce que... On a plein de barreaux/
1027. B : Oui.
1028. P : Chacun est tout petit...
1029. V : Ouais, mais quand on va faire tendre h vers zéro, il va encore, enfin ça...
1030. P : Ca va être encore plus petit mais/
1031. V : Ca va être zéro.
1032. P : Mais quand même ensuite, le nombre de barreaux/
1033. B : Il est très grand...
1034. P : Il est grand.
1035. B : Ouais.

1036. P : Si tu fais tendre h vers zéro/
1037. Ni : Et ben il va être tout petit.
1038. P : Plus h est petit, plus le nombre de barreaux est grand/
1039. V : Ouais...
1040. P : Donc quand tu fais la somme/
1041. Ni : On va avoir une somme infinie.
1042. P : C'est un peu zéro fois l'infini.
1043. Ni : Ouais, c'est une forme indéterminée/
1044. P : C'est pas zéro fois l'infini.
1045. Ni : Non, non, mais c'est quelque chose qui tend vers zéro...
1046. P : Mais c'est plein de petits trucs... Un grand nombre de fois.
1047. V : Un grand nombre, ouais.
1048. Ni : Hum.
1049. P : Donc il y a doute, hein ? Alors pourquoi ça marche, pourquoi ça marche pas ? Alors B_j , toi qui n'aime pas/
1050. B : Parce qu'après il y a plus le h qui entre en compte en fait/
1051. P : Est-ce que tu peux, tu nous, redire la trame générale du truc.
1052. B_j : Je comprends pas pourquoi il fait ça, enfin c'est...
1053. P : Non mais ça dès le début, mais ça tu te...
1054. B_j : Oui mais, c'est ça qui m'énerve déjà.
1055. Ni : Là, tu te bloques !
1056. P : T'as un mec d'autorité, t'as commencé à dire ce mec là, il était de polytechnique etc. Il était fort donc il doit avoir raison hein ? En plus il se prend la tête parce que...
1057. B_j : Mais ouais...
1058. P : ... Il faut faire « style ».
1059. B_j : Ouais, c'est ça en plus.
1060. P : Voilà hein. Mais là, la question, bon... Mets-toi dans son jeu.
1061. B_j : Ben en gros il part de son... Il prend la première propriété. Après, il l'adapte à son cas particulier, c'est-à-dire que $f'(x) = 0$, il s'arrange pour découper de $[a, b]$, en petits segments toute sa fonction et après il réadditionne le tout.
1062. P : Donc, il veut démontrer que $f(b) - f(a)$ est égal à zéro. Pour ça, il va démontrer que $f(b) - f(a)$ est plus petit que n'importe quoi.
1063. V : Ouais.
1064. P : Et pour démontrer ça, c'est-à-dire le, la longueur de l'échelle est plus petite que n'importe quoi. Il découpe l'échelle en barreaux et il veut démontrer que chacun des petits barreaux est très petit... Mais comme il y en a beaucoup, il faut qu'il ait un autre argument.
1065. V : Après, après/

1066. B : C'est celui-là, là.
1067. V : Il fait plus intervenir h .
1068. B : Hum, hum. Après il dit ça, il dit euh...
1069. V : $hm = b - a$.
1070. B : Il fait intervenir son ε surtout. Juste après là il dit, « soit ε la plus grande quantité de toutes les quantités représentées par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, etc. jusqu'à ε_m ». Et de là, il en déduit $f(b) - f(a)$ est inférieur ou égal à $hm\varepsilon$. Puisque vu qu'on a m fois, enfin vu que, donc qu'on a de ε_1 à ε_m , on a une quantité qui est forcément plus petite que h fois m fois ε_m . Enfin, son égalité, son inégalité elle est justifiée et...
1071. P : Et hm c'est quoi hm ?
1072. B : Ben c'est, c'est, la distance entre chaque image...
1073. P : Non, c'est pas les images là.
1074. V : Les ordonnées euh, les, les abscisses.
1075. P : Oui, tu es sur les abscisses.
1076. B : Ah oui, les abscisses d'accord.
1077. P : Donc hm c'est quoi ? C'est $b - a$ tout simplement.
1078. V : Hum. Ouais et donc justement, c'est ce qu'il dit après, justement on a plus de h . Enfin après il dit $f(b) - f(a)$ c'est là que en fait l'ambiguïté sur le h quand on disait qu'il était tout petit, elle disparaît.
1079. P : Tu es sûr qu'elle disparaît ?
1080. V : Ben...
1081. P : Tu vois parce que quand tu as $f(b) - f(a)$ plus petit que $hm\varepsilon$...
1082. B : Hum...
1083. P : Tu suis ?
1084. V : Hum.
1085. P : Hein, hm , c'est $b - a$, donc c'est fixé/
1086. V : Ouais.
1087. P : Donc ça veut dire $f(b) - f(a)$ est plus petit que n'importe quel ε et ε est aussi petit qu'on veut... Donc c'est gagné d'après lui.
1088. B : Hum.
1089. P : Hein, mais y a pas quelque chose qui, comment dire qui n'est pas totalement, totalement clair ?
1090. V : Là ce que vous voulez dire c'est que il y a quelque chose qui manque dans sa démonstration ? C'est ça ?
1091. P : C'est la question que je pose.
1092. V : Ah, ok.
1093. P : [à Bj] Tu, tu... Tu aimes bien douter.
1094. Bj : Il veut nous amener à dire ça parce que c'est la question qui suit !

1095. B : Ben...

1096. Bj : Il doit manquer quelque chose.

1097. V : Je vois pas du tout.

1098. Ni : En posant ça...

1099. V : Mais pour l'instant, il a jamais dit que c'était plus l'infini sur zéro... Non, on disait tout à l'heure il y avait plus l'infini fois zéro.

1100. P : zéro fois l'infini.

1101. V : zéro fois l'infini.

1102. Bj : Il a carrément retiré... Il a retiré une phrase dans cet énoncé là.

1103. Ni : Il a retiré quoi ?

1104. Bj : Le premier entre... Entre « Mais hm » et « Comme ε », il manque « Le premier membre est une quantité constante qui ne varie pas quand m augmente, il en est de même de $x_1 - x$ » et là ça reprend « Comme ε »... $x_1 - x$ c'est ce qu'il appelle euh, $b - a$, x_1 c'est b et x c'est a . « Le premier membre est une quantité constante qui ne varie pas quand m augmente, il en est de même de $b - a$ ».

1105. B : Ben oui, ça c'est ce qu'il nous dit là.

1106. Ni : En fait, c'est ce qui nous permettait de dire que ici si c'est infiniment petit, ici c'est zéro en fait. C'est l'explication.

1107. B : [Inaudible].

1108. Ni : Ben, c'est ce qui nous explique que ça quand c'est infiniment petit ben ça, ça fait zéro.

1109. B : D'accord.

1110. Ni : Mais en fait, il utilise un truc qu'il ne dit jamais en fait.

[Rires]

1111. Ni : Mais non, mais c'est vrai. Il dit « est constamment nulle » et là il, bon il met c'est constamment nulle en disant que ça fait euh, enfin ici on imagine en fait c'est h , en réutilisant la forme générale h facteur de zéro plus ε .

1112. P : Hum.

1113. Ni : Donc ça fait h fois zéro plus h fois ε , tout le monde sait faire ça quoi. Donc il développe et il pose que c'est ε_1 , ε_2 , ε_3 et puis après bon il fait son, sa somme télescopique et il voit que ça marche plutôt bien, mais le problème c'est que après il dit que enfin ε , il redit, il dit plus que ε tend vers zéro. Au début bon, au début c'est peut être une phrase rajoutée mais euh, on dit que « ε tend vers zéro quand h tend vers zéro » et après il dit que ε c'est une, c'est plus grand que tout ce qu'on peut calculer avant. Donc c'est un peu contradictoire parce qu'au début euh, on nous dit que ça va tendre vers zéro et que là c'est une grande quantité.

1114. P : Alors qu'est-ce que...

1115. Ni : Enfin, je sais pas.

1116. P : V , qu'est-ce que tu en penses ?

[Pause]

1117. P : Donc je reformule un peu différemment hein. Donc $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \dots$ C'est, ça dépend de quelque chose ?
1118. Ni : Ca dépend de h .
1119. V : Ben oui, mais il est dedans.
1120. P : Oui, ça... Ca dépend que de h ?
1121. V : Ca dépend des abscisses.
1122. P : Comment ?
1123. V : Ca dépend des abscisses.
1124. P : Ca dépend des abscisses. Ca dépend de h mais ça dépend de quel barreau on en est.
1125. Ni : Ouais, ouais.
1126. P : Et alors juste au début tu disais, y a des cas où quand on fait le dessin ça a l'air très clair et puis en fait bon/
1127. Ni : C'est totalement faux.
1128. B : Ouais.
1129. P : Alors, est-ce qu'on serait dans un de ces cas là ?
1130. Ni : Ah peut-être bien, oui. Enfin c'est probable, après tout est probable.
1131. P : Parce que au bout du compte hein, on a voulu montré que la, la hauteur de l'échelle totale était plus petite que ε n'importe lequel.
1132. B : Hum.
1133. P : Pour ça, on démontre que chaque, chaque barreau, c'est très petit/
1134. V : Ouais, mais ça on l'a encore jamais dit.
1135. P : Si chaque barreau est très petit, ça c'est là « $f(a+3h) - f(a+2h) \dots$ »...
1136. V : Ouais mais où est-ce qu'on a dit ?
1137. P : « ε_3 ».
1138. V : Ouais, mais on a jamais dit que h était petit.
1139. B : Oui mais après on a que...
1140. Bj : Si quand h tend vers zéro.
1141. P : Si $h \dots$ Il a $[a, b]$ comme ça qui est fixé et il découpe en m hein, en m morceaux.
1142. V : Ouais.
1143. P : Donc si $[a, b]$ fixé et qu'il découpe en m morceaux quand m est grand, moralement ça veut dire que/
1144. V : Ouais mais justement...
1145. P : Que h est petit.
1146. Bj : Mais en fait là, il est en train de montrer que la somme de plein de trucs tout petits ça fait un truc tout petit.
1147. P : Voilà. Oui mais alors, le problème est que c'est une somme de beaucoup/

1148. Bj : Ben ouais.
1149. P : Si c'était une somme de trois trucs tout petits ça...
1150. Bj : C'est là que ça paraît bizarre, parce que la somme de plein de trucs tout petits, il faudrait que ce soit égal à zéro... Enfin que ça tend vers, que ce soit le plus près possible de zéro.
1151. P : Est-ce qu'on peut pas être dans le cas que tu disais tout à l'heure ? C'est-à-dire où on a une espèce de paradoxe hein...
1152. V : Ouais, mais c'est la somme de plein de trucs tout petits, je suis d'accord mais... la somme elle apparaît que là.
1153. P : Oui.
1154. V : Et donc, on somme des choses toutes petites donc ça fait, donc ça fait zéro. Enfin, si c'est tout petit ça fait/
- [Inaudible]
1155. Ni : Non, ça fait des choses un peu plus grande que des choses plus petites.
1156. V : Non mais d'accord... Mais dans ces cas là, on a pas h ...
1157. P : Bon alors est-ce qu'on pourrait pas être dans ce cas là ?
1158. V : Oui, mais dans ce cas, on a pas h qui tend vers plus l'infini puisque on a, vu qu'on vient, tout là, on vient de nous dire qu'on s'est basé sur \mathcal{E} tend vers zéro quand h tend vers zéro. Donc ça veut dire que là on aurait zéro fois zéro, pas plus l'infini fois zéro.
1159. P : Non h c'est pas...
1160. T2 : Je vous ai fait un dessin là, d'accord.
1161. V : Ouais.
1162. T2 : $[a, b]$ Là, là h c'est la distance entre deux trucs puis m c'est le nombre de petits traits. Je vous interromps encore une seconde pour dire que dans à peu près un quart d'heure, un gros quart d'heure ce serait bien de passer, d'arriver à faire un petit exposé.
1163. Ni : D'accord.
1164. B : D'accord.
1165. T2 : Alors si c'est pas tout clair etc c'est pas non plus le problème hein. Il s'agit d'essayer d'arriver à dire ben, de dire qu'est-ce qui vous a posé problème, là où vous avez avancé éventuellement, montrer les étapes, essayer d'expliquer, raconter un peu la preuve aux autres, raconter ce que vous pouvez en dire, d'accord ? Ca parle de ça, ça, ça et puis à tel moment le raisonnement il est précis, il dit ça... A des moments le raisonnement, on ne sait pas trop ce qu'il fait, d'accord ?
1166. B : D'accord.
1167. Ni : Hum, hum.
1168. T2 : Et dans dix-quinze minutes, on va vous mettre avec l'autre groupe qui a travaillé sur la même preuve pour que vous échangiez un peu, que vous prépariez l'exposé en commun même si vous êtes pas obligés d'avoir exactement le même discours. D'accord ?
1169. Ni : Hum, hum.
1170. T2 : On va pas faire deux exposés sur la même preuve parce que ça va être long...

1171. Bj : Y a deux preuves ? Y a nous et une autre preuve ?
1172. T2 : Oui. Voilà c'est ça. Y a deux groupes qui travaillent sur une même preuve à chaque fois.
1173. Bj : D'accord.
1174. T2 : Donc on vous mettra [T2 continue l'explication sur la préparation de l'exposé, en même temps deux étudiants, V et Ni , discutent de la preuve. Seul ce dernier dialogue est transcrit].
1175. V : Mais h comment...
1176. Ni : h comment ? Mais h il tend vers zéro.
1177. V : On dit que h il tend vers zéro. Donc, ça veut dire que là on a, vu qu'on a plein de petits, c'est tout petit, enfin les ε c'est des petits trucs... Moi pour moi, ce serait zéro fois zéro. D'après moi il y a pas de problème de...
1178. Ni : Attend, attend...
1179. V : Plus l'infini fois zéro.
1180. Ni : Moi je dis que c'est zéro fois...
1181. V : zéro.
1182. Ni : Non pas zéro.
1183. B : Non parce qu'il y a le m quand même. Le m , il est conséquent quand même le m .
1184. V : Pourquoi ?
1185. B : Parce que/
1186. V : Ouais, non mais d'accord...
1187. B : On sait que hm est égal à, à $(b - a)$.
1188. V : Oui mais m il est très grand mais même t'as beau, t'as beau additionner un infinité de...
1189. B : Ben, c'est ce qu'il se passe parce que, vu que tu as hm , donc $h/$
1190. V : Ouais mais pareil, c'est fixé.
1191. B : h c'est tout petit et m et ben il faut que une quantité tout petite fois une autre quantité soit égal à quelque chose de constant donc forcément que y en a une qui compense donc euh, le m faut forcément qu'il compense le fait que h soit tout petit. Donc c'est, plus h est petit plus h devrait être grand.
1192. P : le m .
1193. B : Plus m devrait être grand !
1194. V : Ouais, c'est clair.
1195. P : Mais ça bon, ça c'est vrai ce que tu dis mais c'est pas ton problème puisque hm c'est $b - a$.
1196. B : Hum.
1197. P : Donc on voit bien que à chaque fois que tu diminues h , tu augmentes m ...
1198. B : Voilà.
1199. P : Tu es dans la même proportion quoi, en gros hein, puisque le produit est constant.
1200. B : D'accord.
1201. P : Mais là, hein, ces $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_m$, c'est pas un peu mystérieux ça ?

1202. B : Si. Moi y a un truc que je comprend pas c'est/
1203. V : Moi ce que je comprends pas c'est, où est-ce que vous voulez en venir en fait, ben vous voulez nous montrer que ce qu'il a dit c'est faux ou... Oui enfin, il faut montrer si il y a des ambiguïté ou des trucs comme ça mais...
1204. B : « La preuve est-elle valide ? »
1205. V : Si c'est complet rigoureux, valide tout ça.
1206. Bj : Mais y a forcément, sinon ils nous auraient pas donné la preuve.
1207. P : « Sont-elles complètes, rigoureuses, valides ? »
1208. Bj : Y a forcément, sinon ils nous auraient pas donné la preuve.
1209. V : [Inaudible] On connaît ce théorème, on se baserait pas sur un théorème qui soit faux.
1210. B : C'est vrai que ces ε_1 , ε_2 et tout, on sait pas trop d'où ils sortent quand même.
1211. V : On se baserait pas sur un théorème dont la démonstration n'a pas été rigoureuse... Enfin dont/
1212. P : Tu pourrais avoir le théorème qui est vrai et quelqu'un qui donne une démonstration qui est fausse alors que le théorème est vrai.
1213. V : Mais c'est lui qui l'a fait. [Rires] Ok.
1214. Bj : Mais c'est pas lui, lui il a pas fait le théorème. Il a seulement essayé de prouver qu'il était vrai.
1215. P : Peut-être que, enfin je sais pas hein, peut-être que, peut-être que c'est un autre qui l'a démontré autrement après... Ou avant, ça c'est un cours, hein.
1216. Ni : C'est la somme, moi c'est la somme qui me pose un problème.
1217. P : Voilà, c'est la somme qui te pose un problème. Alors quel problème ça te pose ?
1218. Ni : Le moins $f(a)$ je suis d'accord. Le $f(b)$, ça veut dire qu'on a additionné tous les m , ça veut dire qu'on est arrivé à b et euh... le $m - 1$, ça veut dire qu'il manque une valeur.
1219. P : Je... T'es où là ?
1220. Ni: On dit $f(b) - f(a+(m-1)h)$ égal ε , euh $h\varepsilon_m \dots$
1221. P : $f(a+(m-1)h)$ c'est quoi ça ?
1222. Ni : Ouais. Ben justement, j'arrive pas à visualiser sur le graphique. Ca veut dire qu'il manque une valeur sur le m .
1223. P : Non...
1224. B : Ben non puisque après c'est le $f(b)$.
1225. P : C'est l'avant dernier. Regarde le dessin de V .
1226. Ni : Tu veux dire que c'est...
1227. B : $(m-1)h$ c'est la distance entre l'origine et le point $m-1$.
1228. P : Le dernier barreau en haut.
1229. Ni : En fait, c'est ça c'est le dernier truc qu'il y a ici ?
1230. P : $f(b) - f(a+(m-1)h)$ /

1231. V : Ouais c'est-à-dire euh...
1232. P : C'est le dernier barreau, en haut.
1233. V : C'est le dernier intervalle.
1234. P : C'est le dernier intervalle.
1235. Ni : Ouais mais du coup, du coup la somme, ah non, la somme c'est pas le dernier intervalle. Ah non euh...
1236. P : La somme, c'est bon.
1237. Ni : Non, oui, parce que ici juste avant, il y avait le $f(a+m-1)$... C'est ça en fait.
1238. P : Voilà.
1239. Ni : D'accord. Ouais, mais ça me pose quand même un problème.
1240. V : Ouais, mais moi ça m'avance pas sur le plus l'infini et zéro. Parce que je suis d'accord mais...
1241. B : Ouais, mais moi elle me paraît rigoureuse, pour le moment ça a l'air bien.
1242. P : Donc toi tu votes pour.
1243. B : Ah ouais, moi je suis complètement pour.
1244. Bj : Pour moi, ça sert à rien.
1245. V : Il est têtue, hein.
1246. Bj : Ben, je vais dire contre alors parce que pour moi ça...
1247. P : Non, non c'est pas la question. Est-ce que la preuve est valide ou est-ce qu'il y a des trous ?
1248. Bj : Moi je dis oui, il manque des trucs. Ca, ça...
1249. P : Il manque des trucs ? Qu'est-ce qu'il manque ?
1250. Bj : Je sais pas, mais ça a pas l'air...
1251. P : Vous êtes d'accord sur la trame générale hein ?
1252. V : Moi ça me paraît fort logique, mais je comprend pas pourquoi on s'entête sur un point sur lequel moi, je me serais pas entêté. Enfin, qui m'aurait pas posé de problème.
1253. P : C'est quoi ?
1254. V : Ben le plus l'infini fois zéro, enfin je sais pas.
1255. B : Plus l'infini fois zéro.
1256. V : Ben si c'est justement ce qu'on disait.
1257. B : Non mais moi, il y a un truc que je comprends pas c'est/
1258. V : Enfin, si c'est ce qu'on disait !
1259. P : Alors, vas-y.
1260. V : Mais non mais justement, moi mon point de vue, c'est que ça va quoi.
1261. Ni : Moi mon point de vue, c'est je comprends pas la phrase « Soit ε la plus grande des quantités représentées par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \text{ etc.}$ »...
1262. B : Ben, il majore en fait.

1263. V : Vu qu'elles sont égales.
1264. P : Bon.
1265. B : Non, elles sont pas égales justement.
1266. Ni : Non, je comprends pas parce que tout à l'heure, il disait...
1267. V : Ah non mais non. Ben enfin oui, si elle est constante/
1268. P : Alors voilà, discutons sur cette phrase.
1269. Ni : Tout à l'heure, il disait enfin lui, il l'a pas dit mais on nous a donné comme indice que \mathcal{E} tend vers zéro quand h tend vers zéro. Après il nous dit ici \mathcal{E} « la plus grande de toutes les quantités »... Enfin je vois pas ce que c'est que ces « quantités représentées ».
1270. B : En fait euh \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 et jusqu'à \mathcal{E}_m c'est des valeurs variables, en fait, qui vont dépendre de a et de b puis de m et de h aussi, enfin qui vont dépendre un peu de tout mais elles vont pas être égales les unes aux autres et lui ce qu'il fait c'est il majore en fait. Lui, plutôt que d'avoir en fait une somme de toutes ces quantités dont on ne connaît rien puisqu'elles dépendent de tout et ben il pose \mathcal{E} qui va être plus grand que n'importe laquelle de toutes ces quantités. Donc ça, il a quand même le droit puisque après ça devient une inégalité.
1271. P : Donc ça, c'est clair ce que tu viens de dire, hein.
1272. Ni : Donc en fait, il dit, enfin il remplace \mathcal{E} par, il remplace \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 tout ça par \mathcal{E} .
1273. P : Il majore, il majore.
1274. Ni : Oui, d'accord.
1275. V : Il majore $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \dots$
1276. P : Non, il majore chacun d'entre eux par \mathcal{E} .
1277. Bj : Mais ce qu'il fait c'est la somme d'une infinité de \mathcal{E} doit tendre vers zéro. C'est un peu contradictoire quoi. La somme d'une « infinité » doit tendre vers zéro.
1278. P : Alors ?
1279. Ni : Ben ça veut dire qu'ils sont super petits.
1280. Bj : Ben, même un truc super petit, si t'en mets une infinité, ça fera/
1281. Ni : Ca veut dire que/
1282. B : Ils sont infiniment petits.
1283. Ni : Non ça veut dire que chaque truc, il est égal à zéro. Ca veut dire que si tu les sommes tous/
1284. Bj : Mais \mathcal{E} peut pas être égal, peut pas être égal à zéro.
1285. Ni : Ben oui mais si tu les sommes tous et que ça fait zéro et ben... Si tu sommes, enfin même si tu sommes des milliardièmes ça te fera plusieurs milliardièmes. Donc là, il faut absolument qu'il soit égal à zéro.
1286. Bj : Si t'en sommes une infinité de milliardièmes, ça te fera forcément plus que zéro.
1287. Ni : C'est ça, faut qu'ils soient égal à zéro.
1288. Bj : Ben...
1289. Ni : J'en sais rien.
1290. P : Alors V ?

1291. V : Non mais j'ai l'impression qu'on tourne en rond.

[Rires]

1292. Bj : C'est ça.

1293. P : Bon alors, reprenons la discussion entre B et Bj . B il dit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ /

1294. V : est majoré par ε .

1295. P : Ils dépendent de plein de choses /

1296. V : Ouais.

1297. P : Dont de h , de m , etc mais il est majoré par un ε .

1298. B : Hum.

1299. P : Bien. Et euh... Bj doute. Il doute qu'il ait le droit, en gros.

1300. Bj : Hum.

1301. P : Tu dis, parce que comme il y en a beaucoup $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m$ /

1302. Bj : Ouais mais /

1303. P : Moralement, il y en a une infinité puisque h va tendre vers zéro /

1304. Bj : Ben ouais.

1305. P : Donc on a beau les ajouter comme ça, euh...

1306. Bj : C'est l'argument de Ni après qui dit que dans ce cas là pour pouvoir dire que c'est égal à zéro, il faut absolument que $f(b)$ soit égal à $f(a)$.

1307. B : Non mais là, pour l'instant, enfin.

1308. Bj : Le fait que $f(b)$ soit égal à $f(a)$, ça entraîne que tous les ε sont égal à zéro et donc du coup, du coup... En fait c'est lié.

1309. P : $f(b) = f(a)$, c'est ce qu'on veut démontrer.

1310. Bj : Ouais mais que $f(b) = f(a)$, ça implique que les ε soient égal à zéro.

1311. P : Oui mais, c'est dans l'autre sens que l'on cherche.

1312. B : Oui, là tu te focalises un peu sur la fin alors qu'en fait, pour l'instant, on est dans la preuve. Donc on est pas encore arrivé quoi.

1313. P : Si tu supposes que le théorème il est démontré, donc euh, les étapes elles sont pas trop dures quoi. Si la fonction est nulle et ben tous les ε sont zéro et puis voilà tout.

[Rires]

1314. Ni : Moi, il y a un autre truc que je comprends pas.

1315. P : Non mais il faudrait répondre à la question, c'est est-ce qu'il a le droit de majorer par ce ε , hein ? Et ce ε alors, il va dépendre de quoi ?

1316. B : Ben, il est fixé au début. C'est le ε qu'on fixe au début dans l'équation générale de tout à l'heure.

1317. V : Il va dépendre de l'allure de la courbe.

1318. P : Alors c'est le ε qu'on fixe au début dans l'équation générale ?

1319. Ni : Je suis pas sûr, non je suis pas sûr.

1320. P : Est-ce que tu es sûr [Inaudible] équation générale ?
1321. Ni : Non, moi je crois pas. Non parce que tu sais pas ce que ça va valoir ε_1 , ε_2 ... au début.
1322. V : Ca va dépendre de la courbe.
1323. Ni : Même là, on sait pas ce que ça vaut, c'est quelque chose d'abstrait.
1324. B : Tu peux le fixer sans forcément lui donner une valeur.
1325. Ni : Ben ouais, mais regarde si tu le fixes, si tu le fixes quand tu démarres euh, ici t'es pas sûr que tout ça soit plus petit que celui que tu as fixé au début.
1326. V : Il va dépendre de...
1327. B : Ben si...
1328. Ni : Ben non... Parce que tu sais pas en combien de trucs tu vas pouvoir couper le, tu sais pas en combien de morceaux, tu sais pas ce que va valoir m .
1329. B : Mais là le fixer, ça veut pas forcément dire que tu donnes une valeur propre. Ca veut juste dire que tu le fixes mais...
1330. Ni : Ouais mais si tu le fixes, ça veut dire qu'il ne bouge plus et si jamais la somme de tous les ε est plus grand que ça ben tu pourras jamais majorer à ce moment là.
1331. V : ε il va dépendre du coefficient directeur de, de la, de la fonction, de la courbe entre 2 points, enfin entre 2 points... Ca va être au moment où le coefficient directeur va être le plus grand. Vu qu'il majore. C'est juste ce que je dis ou pas ?
1332. P : Euh, je sais... Pas mal, ouais. Je suis pas absolument sûr que ce soit juste, mais je trouve que c'est intéressant.
1333. V : Si on prend une courbe, vu que, enfin si on prend sur notre axe des abscisses on a toujours enfin il est coupé de la même façon puisqu'on a plus h , plus $2h$, plus $3h$, plus $4h$...
1334. B : Ouais.
1335. V : Donc les intervalles sont les mêmes. On est d'accord ?
1336. B : Hum, hum.
1337. V : Donc en ordonné, on aura le plus grand intervalle quand la courbe sera proche d'être verticale. Enfin je veux dire quand le coefficient directeur... non ?
1338. Bj : Si, si, si. Ouais.
1339. V : En fait, si on a la courbe qui est comme ça, la distance entre euh, enfin la distance qu'on a là est la même, et là elle sera petite. D'accord ? Après si la courbe elle fait ça, la distance là elle a beau rester la même mais là la distance entre les deux ici/
1340. B : Elle va être plus grande.
1341. V : Elle va augmenter.
1342. Ni : Ah, ok.
1343. V : Donc ce sera comme ça, plus là [Inaudible].
1344. Ni : Donc du coup ici, pour que les barreaux soit extrêmement rapprochés il faut que la courbe soit plutôt plate.
1345. V : Ouais.

1346. Ni : Donc euh...
1347. B : C'est de l'absurdité justement les ε_1 , les ε_2 et tout...
1348. P : Le ε qui est là dans la définition, parce que ça, c'est la définition de la dérivée.
1349. V : Oui.
1350. P : Le ε qui est déjà mis là, il dépend de x .
1351. B : Hum... non.
1352. P : Ben, si tu as écrit égal ?
1353. B : D'accord.
1354. P : D'accord, il dépend de x .
1355. B : Hum.
1356. V : Ouais.
1357. P : C'est-à-dire qu'il dépend de l'endroit où on le trouve, entre a et b .
1358. B : Oui.
1359. P : Hein ? Alors euh, ici, le ε par lequel il a majoré $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, il dépend de quelque chose ou pas ?
1360. Ni : il dépend de m , du nombre de fois qu'on a coupé l'échelle. Euh... On nous dit au début qu'il dépend de h aussi.
1361. P : Alors, est-ce qu'il dépend de quelque chose, est-ce qu'il dépend pas de quelque chose ? Parce que ce qu'on avait dit $f(b) - f(a)$ c'est plus petit que ε fois une constante.
1362. B : Hum, hum.
1363. Ni : Hum, hum.
1364. P : Et ε on avait dit quelconque, pour pouvoir dire que c'était zéro... Alors c'est vraiment quelconque ou c'est pas quelconque ? Ca dépend de quelque chose ou pas ? C'est fixé c'est... ?
1365. T2 : On passe, on va passer à la mise en commun ?
1366. P : Hum.
1367. T2 : Vous avez... Si vous voulez, il y a encore quelques minutes.
1368. P : Bon.
1369. Ni : Moi je pense que le ε , il dépend de quelque chose parce que... Si on prend pas la même échelle, si on découpe pas en le même nombre de m , ben le ε il va pas valoir la même chose.
1370. P : Et si la fonction f c'est une droite.
1371. Ni : Hum.
1372. B : Hum, hum.
1373. P : Une droite qui monte comme ça, un petit peu.
1374. V : Ben tous les ε seront les mêmes.
1375. P : Tous les ε seront les mêmes.
1376. V : Ouais.

1377. P : Donc qu'est-ce qu'il pourrait faire que ça... Parce que souvent dans une démonstration, on vous dit pas ça. En général dans les cours, peut-être $T2$ un petit peu [Inaudible], souvent ce qui est intéressant dans une démonstration, c'est d'essayer de voir ce qui ferait qu'elle ne marcherait pas. Plus que la démonstration elle-même. Comprendre pourquoi ça pourrait ne pas marcher. Donc là, ce que tu as dit tout de suite c'est que si la fonction, si on supposait que la fonction f , elle est vachement régulière hein, qu'elle est quasiment une droite...
1378. V : Hum.
1379. P : A ce moment là, tous les \mathcal{E} seraient égaux, ça marcherait impeccable.
1380. V : Ouais.
1381. P : Qu'est-ce qui pourrait que ça foire ce truc là, ce serait qu'elle ait des petites irrégularités quoi.
1382. B : Hum, hum.
1383. P : Hein ? Bon. Donc est-ce que c'est possible ? Est-ce qu'une fonction avec une dérivée constamment nulle peut avoir des petites irrégularités ? On voit pas trop, hein.
1384. B : Non parce qu'une fonction avec une dérivée constamment nulle, elle a un coefficient directeur de zéro. Enfin bon, c'est ce qu'on veut montrer.
1385. P : Bon donc là, comment dire, vous vous organisez entre vous pour savoir comment vous allez exposer bientôt, l'ensemble de la...
1386. V : Faut pas faire d'abord avec les autres ?
1387. B : Si faut...
1388. V : Faut déjà qu'on/
1389. B : Faut qu'on se réunisse.
1390. V : Avec les quatre autres. Je sais pas ils vont venir là ou on va là-bas.
1391. T2 : Ils vont venir là, ouais.
1392. Ni : Ok.
1393. Bj : Mais si entre, entre, au milieu d'un pas, la courbe, je sais pas, elle fait un petit truc comme ça.
1394. Ni : On le verra pas.
1395. Bj : Du coup... D'un on le verra pas et pourtant le reste sera, ce sera comme si c'est constant.
1396. B : Non mais c'est vrai, on a déjà vu des trucs comme ça.
1397. Bj : Mais comme il est au milieu du pas, on le verra pas donc il faut que les pas soient aussi tout... le plus petit possible.
1398. B : Ils tendent vers l'infini.
1399. P : Parce que tu vois Bj ... Comment dire, par rapport à ton souci au départ, si on fait des démonstration, c'est moins pour les trucs qui marchent que pour mieux comprendre les cas où ça pourrait ne pas marcher et qui pourrait être intéressant. Donc là il y a un truc, que j'ai pas le droit de dire mais je vais quand même le dire au micro, quand on fait des maths un peu plus poussées comme ça, on a la notion de ce qu'on appelle presque partout, c'est-à-dire quelque chose qui est vrai à peu près dans tous les coins, sauf dans des coins exceptionnels. Et on arrive à avoir des mesures telles que la dérivée soit presque partout nulle et que malgré ça, ça monte.

1400. V : Ah ouais.
1401. Bj : Parce que la dérivée est presque partout nulle...
1402. P : Est-ce que vous imaginez une fonction qui soit continue sur tout un plan comme ça et qui soit dérivable en aucun point.
1403. Bj, V : Ben...
1404. Ni : Ben que des points.
1405. V : Elle fait que des angles.
1406. P : Ouais.
1407. Ni : Ah ouais, j'y pensais tout à l'heure.
1408. V : Enfin, elle fait plein de...
1409. Ni : J'ai dessiné ça tout à l'heure.
1410. B : Y a le truc des irrationnels, là.
1411. Ni : J'ai dessiné que des vagues comme ça mais microscopiques quoi.
1412. P : La fonction indicatrice des irrationnels, elle est pas continu.
1413. B : Non.
1414. Ni : Une fonction en escalier ?
1415. P : Une fonction qui soit continue/
1416. V : Ouais.
1417. P : Sur tout un intervalle et dérivable en aucun point.
1418. Ni : Que des points.
1419. B : Ben non, parce que c'est pas continue.
1420. B : Non, parce que si c'est continu pour que ce soit pas dérivable il faut qu'il y ait des angles. Entre chaque angle forcément, enfin logiquement/
1421. V : Elle est dérivable.
1422. B : il doit y avoir un petit moment où il n'y a pas d'angle quoi.
- [Rires]
1423. V : Ah moins que ce soit une fractale remarque.
1424. B : Oui, une fractale...

**Annexe 22 : Transcription des débats
du deuxième groupe d'étudiants de
l'INSA travaillant sur la preuve
adaptée du texte de Liouville**

2^{ème} Groupe d'étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville

1. C : Alors... "Situer historiquement le mathématicien".
2. T1 : En gros, pendant dix à quinze minutes, vous situez historiquement l'auteur de l'énoncé, de la preuve en question...
3. C : Liouville.
4. T1 : Vous pouvez utiliser l'ordinateur...
5. M : D'accord.
6. C : « Lors de son cours à Polytechnique ».
7. T1 : [Inaudible] Hein, au départ c'est pas de lire la preuve que je suis en train de, vous avez la lecture de l'énoncé, et vous faites une petite recherche sur Liouville... D'accord ?
8. M : Ok.
9. T1 : On rentrera dans les détails de la preuve ensuite, il faut d'abord que vous échangiez sur si vous pensez que l'énoncé, il est vrai ou pas...
10. M : Ok.

[On entend le bruit des touches de l'ordinateur]

11. C : « ... dérivable sur IR . Si la dérivée de f est constamment nulle alors f est constante. »
12. Be : Why not ?
13. C : Euh... Ouais. Ben je dirais moi, je l'ai appris comme ça hein... [Inaudible]
14. Be : Bravo.
15. N : Peut-être juste vos prénoms pour que l'on se connaisse ?
16. M : Ouais... *M*.
17. N : Je note parce que...
18. Be : *Be*.
19. N : *Be*.
20. C : Moi c'est *C* [Puis il épelle son prénom].
21. N : Moi c'est *N*.
22. N : Et Liouville, ça vous dit quelque chose déjà, vous connaissez ?
23. Be : Euh, non.
24. M : Je connaissais pas.
25. C : Je connais polytechnique, moi.

[Rires]

26. C : Ben, il était au début de Polytechnique quoi... Apparemment.
27. C : Vas-y, tape Liouville, Liouville. On va trouver.
28. Be : Ah ouais, on peut acheter les livres, effectivement...

29. C : Moi je suis pas d'accord, je suis sûr on doit pouvoir trouver un cas où ça marche pas... Si la dérivée elle est nulle... Elle est constamment nulle, ouais ben...
30. Be : [Inaudible] On peut utiliser plusieurs PC.
- [Ils utilisent les ordinateurs]
31. M : Alors t'as des infos sur Liouville ?
32. Be : Je peux acheter ces livres, cool mais après, je sais pas... Après je tombe que sur « Calcul différentiel » ou...
33. N : Là, la première question c'est juste de situer Liouville. Quel siècle ? Qu'est-ce qu'il a fait un peu et puis c'est tout hein ?
34. Be : Ben, il a fait deux bouquins. « Calcul Différentiel » et « Calcul Intégral ».
35. C : C'était un mec intelligent.
36. Be : Bien vu.
37. C : Il a enseigné à Centrale, au Collège de France...
38. N : Après le théorème de Liouville, il dit quoi alors ?
39. C : « Toute fonction entière bornée et constante ». Alors moi les fonctions entières [inaudible].
40. N : Non, t'as pas les fonctions entières... C'est pas vraiment au programme.
41. C : J'ai jamais vu. C'est dans le théorème en fait, il parle des fonctions entières. J'essaye de comprendre, ce que c'est quoi. C'est pas très clair ce qu'ils disent.
42. N : Non, non, non. Mais, il n'y a pas besoin d'aller aussi loin. C'est juste voir un peu qu'est-ce qu'il a fait dans sa vie, quelle époque et puis... Toi, t'as des infos bibliographiques sur, en plus, sur Liouville.
43. Be : Ouais, en 1844, il découvre le nombre transcendant.
44. N : Les nombres transcendant, vous, tu sais c'est quoi ?
45. Be : Non.
46. N : De quoi, les nombres transcendants ?
47. C : Un nombre transcendant, c'est un nombre qui n'est solution d'aucune équation polynomiale. C'est chaud à trouver quand même [inaudible].
48. N : Tu penses que tu en connais quelques uns ? Que tu en connais un de nombre transcendant ?
49. C : Enfin... Je sais pas. Comme ça je pense à [Inaudible].
50. N : Hum.
51. C : C'est des nombres bizarres à mon avis. Les nombres entiers, les nombres premiers.
52. N : Bon, on peut peut-être revenir à l'énoncé du coup.
53. C : Bon, est-ce qu'il paraît vrai l'énoncé...
54. N : Donc... Qu'est-ce que vous en pensez de cet énoncé ?
55. C : Ben disons que...
56. Be : C'est pas faux.

57. C : Dans l'autre sens, dans l'autre sens, c'est vrai et c'est prouvé quoi. Si f est constante, sa dérivée est nulle, enfin constamment nulle. Dans ce sens là, je sais pas. Pour le montrer, faudrait voir si y a un contre exemple ou non.
58. N : Et toi M ?
59. M : Et ben pour moi euh... Ouais, c'est vrai. Ouais. Enfin je veux dire, euh, y a pas... Je vois pas comment on peut le prouver alors que, enfin, ça me paraît évident quoi.
60. Be : Enfin ça paraît évident dans l'autre sens, dans ce sens euh... Enfin, nous ça nous paraît évident mais les mathématiciens...
61. N : Pour vous, pour vous, qui est-ce qui, pour vous, ça vous paraît évident ?
62. Be : Hum.
63. C : Moi ça me paraît vrai, mais avec une petite réserve, je sais pas. Pourquoi on trouverait pas un contre exemple, je sais pas. Enfin, ça peut peut-être exister un contre exemple, il faudrait le chercher.
64. N : Et vous, toi, tu as des réserves M ?
65. M : A quel niveau, des réserves ?
66. N : Je sais pas... C il dit qu'il mettrait peut-être quelques réserves sur sa validité. Toi, il te paraît peut-être tout le temps vrai ou...
67. M : Euh ben... Ouais ben pour moi, si la dérivée de la fonction est nulle ben la primitive, c'est une constante quoi.
68. C : Ouais, je sais pas.
69. N : Mettez vous d'accord, est-ce que c'est vrai ?
70. C : Ouais non, ça paraît vrai comme ça. Si allez, on vote vrai. On vote à main levée ?
71. N : Si tu penses que c'est vrai tape un, faux tape deux...
- [Rires]
72. N : Si tu émettes des doutes, tape trois. Toi Be ?
73. Be : En même temps, c'est ce qu'on a appris, enfin...
74. C : Hum.
75. Be : Quand on fait une primitive de zéro, ça fait toujours une constante.
76. C : En fait le truc là, enfin je sais pas c'est, c'est il faut qu'elle soit constamment nulle la dérivée. C'est ça enfin je pense qui est important. Parce qu'une dérivée nulle toute seule, on peut trouver autre chose qu'une fonction constante, je pense. Juste en un point quoi.
77. Be : Ouais c'est sûr, si c'est en un point. Mais si elle est tout le temps nulle ?
78. C : Constamment nulle effectivement...
79. Be : Quand tu auras ta fonction, ce sera une droite quoi, horizontale.
80. C : Ouais, si, si c'est ça. Bon d'accord, c'est vrai. Non, c'est vrai.
81. N : Donc que maintenant que vous vous êtes prononcés sur la validité, on peut peut-être valider. L'objectif là, c'est de regarder la preuve donnée par Liouville. [à $T2$] Hein, une fois qu'ils se sont prononcés sur la validité, non ?

82. T2 : Oui, en fait je passais juste voir là où vous en étiez, en fait.
83. N : D'accord.
84. T2 : Donc ça va, vous avez trouvé des infos un peu sur Internet, oui.
85. C : Ouais.
86. M : Ouais ça, ouais.
87. T2 : Le théorème, vous vous souvenez si on l'a fait en cours ou pas ?
88. C : Le théorème, celui-ci ?
89. T2 : Ouais.
90. M : Ouais, ouais. On l'a fait ouais.
91. T2 : Ouais.
92. C : Ouais moi ça me rappelle quelque chose justement...
93. T2 : Vous vous souvenez de l'avoir utilisé ?
94. Be : Oui, enfin...
95. C : L'avoir utilisé dans ce sens là...
96. Be : Peut-être pas mais... Qu'on l'ait vu.
97. M : Moi je me rappelle qu'il y avait un élève qui avait dit que si elle était nulle avant qu'elle soit dérivable...
98. T2 : Ouais...
99. M : Ben c'était/
100. T2 : Avant qu'elle soit dérivable ?
101. M : Ouais, enfin avant qu'elle soit dérivée. Elle est nulle euh...
102. T2 : Que la fonction était nulle ?
103. M : Avant ouais.
104. T2 : Ouais.
105. M : Ben je me rappelle qu'il y avait un élève qui avait dit que c'était faux. On avait dit que la fonction était constante. Enfin, je me rappelle de cette remarque là.
106. T2 : Ouais, bon. Et vous vous souvenez d'un exercice où on démontrait que $\arctan(x) + \arctan(1/x)$ était égal à $\pi / 2$?
107. C : Ouais.
108. M : Hum.
109. T2 : Comment on avait fait ?
110. C : On avait fait, on avait fait avec ça justement, avec...
111. T2 : On avait dérivé, on a fait ce genre de, de... Ca tournait autour de ça. Bon très bien, vous pouvez passer c'était juste le...
112. N : Donc ouais, donc là, ils se sont prononcés en faveur de la validité de ce théorème. Ils se sont mis d'accord donc il est vrai. Tu peux confirmer ?

113. T2 : Oui, je confirme, je pense qu'il n'y a pas beaucoup de doutes. Bon, peut-être que ça fait un peu des doutes. C'est pas si évident que ça...
114. C : Ouais non mais moi... Moi je disais que...
115. N : Enfin ce que disait C, c'est qu'il le sentait plus dans l'autre sens. C'est-à-dire que « si elle est constante alors... ».
116. C : Ouais, ouais ben ouais, ça c'est sûr mais dans ce sens là...
117. T2 : Ouais.
118. C : Disons que c'est pas, pour moi c'est pas un théorème qu'on a appris dans ce sens là quoi. Justement, on a appris sa réciproque.
119. T2 : Ouais.
120. C : Voilà.
121. T2 : Bon, ok. [Inaudible] C'est juste des idées, se souvenir si on a vu ça en cours ou pas, c'est pas évident qu'on l'ai vu sous cette forme là, on l'a peut-être pas vu, peut-être qu'on a vu quelque chose de proche mais que ça c'est faux... Il faut rester assez prudent, hein ?
122. N : Après M a dit que la primitive était une constante donc du coup, c'est ça un peu qui t'as convaincu/
123. C : Ouais, ben ouais.
124. N : Du coup, ça devait être vrai tout le temps.
125. T2 : Une primitive de zéro, vous savez faire ?
126. C : Une primitive ? Ben comme on l'a appris la primitive de zéro, c'est une constante !
127. T2 : Ca ressemble, c'est un peu la même chose de dire que la primitive de zéro c'est m et ce théorème là ? De dire que la primitive de zéro c'est une constante et de dire que...
128. C : Ben non parce que la primitive de zéro si on la fait, c'est à l'intérieur de bornes, non ? Enfin entre des bornes.
129. T2 : Ouais.
130. C : Alors que là, on a pas mis de...
131. M : Si y a des bornes.
132. C : Y a pas de conditions d'intervalle spécial, quoi.
133. T2 : Ben on dit que c'est sur \mathbb{R} . Bon, vous pouvez avancer sur la preuve.
- [Pause, ils lisent la preuve]
134. C : Là enfin, il montre, il démontre une fonction constante, c'est ça ?
135. N : Là il démontre, il démontre, c'est la preuve de l'énoncé un, quoi. Donc là, l'idée c'est d'étudier à fond la preuve, ce que vous en pensez, les différentes étapes etc. Et puis, pour au final le présenter à l'autre groupe, quoi.
- [Pause]
136. N : Donc toutes les remarques que vous avez à faire, vous pouvez en discuter quoi ou comprendre ensemble les étapes, etc quoi. Après, c'est un travail de groupe.

137. C : Le ε , il vient d'où en fait dans l'équation générale dont il parle ? Enfin moi je sais pas, je connaissais, j'aurais dit que ça faisait h fois $f'(x)$...
138. M : ε c'est une petite valeur je pense. Non ?
139. Be : Ouais, ben oui.
140. M : Non ? C'est une valeur infiniment petite.
141. C : Qui tend vers zéro quand h tend vers zéro.
142. N : Alors moi, sur la première partie en fait, je vous laisse discuter plus entre vous... Ouais justement n'hésitez pas à discuter entre vous sur ce qu'est ε ...
143. M : A ton avis le h c'est une fonction. Il est défini comme une fonction...
144. C : Non, le h , le h ...
145. M : C'est un multiplier là ?
146. C : Non, c'est un nombre. Il vient parce que quand tu fais ça la formule de la dérivée $f(x+h) - f(x)$ sur h moins ça, $x + h - x$... Donc ça fait sur h quoi.
147. M : Ouais, ouais. Je vois.
148. C : C'est le ε qui... Je me demande un peu d'où il vient quoi.
- [Pause. Quelqu'un lit la preuve à voix très basse, puis très long silence]
149. C : Alors, vous en pensez quoi ?
- [Pause]
150. C : Vous en pensez pas. Moi, je trouve plusieurs trucs un peu bizarre. Déjà, je comprends pas d'où viennent les ε et ensuite, tout à la fin pourquoi on passe d'une inégalité à une égalité en fait.
151. Be : Mais, parce qu'on te dit que ε , à la fin, on te dit que ε tend vers zéro.
152. C : Ouais donc ça fait $f(b) - f(a)$ est inférieur ou égal à zéro non ? J'aurais fait ça.
153. M : Si il pose cette condition ε qui tend vers zéro moi j'en conclue que b est pratiquement égal à a . Ca, c'est la condition qu'il pose au début. Je pense qu'il faut en tenir compte jusqu'à la fin...
154. C : [Inaudible] ε , je sais pas il apparaît...
155. M : Au début, je pense qu'il veut dire à une constante près, ou quelque chose comme ça...
156. C : Ouais mais, comment tu peux savoir que, enfin que ε tend vers zéro quand h tend vers zéro, c'est quoi la relation entre ε et h ?
157. Be : En même temps h tend vers zéro, ça fait $b - a$ tend vers zéro.
158. C : h tend vers zéro... Non, ça fait m tend vers l'infini.
159. Be : Pas faux.
160. C : [Inaudible].
- [Pause]
161. M : La vraie formule de ça c'est pas $f(b) - f(a)$ sur $b - a$ est égal à f' c'est ça ?
162. C : Ouais.

163. M : $f'(c)$. Non rien.
164. C : Non, c'est $f(x) \dots f(x+h)$ non mais c'est ça $f(x+h) - f(x)$ sur $x + h - x$ est égal à $f'(x)$ ou quelque chose comme ça.
165. M : C'est le théorème des accroissements finis. Il se sert de ça pour démontrer.
166. C : Apparemment c'est égal à $f'(x)$ plus ε .
167. Be : En fait là, on utilise les fonctions en escalier.
168. C : Non...
169. Be : Ben si. m est un segment de même longueur.
170. C : Oui. Mais c'est parce que tu prends une fonction constante comme ça et tu le sépares...
171. M : Ouais voilà, tu le sectionnes. Parce qu'on sait que c'est constamment nulle, donc on prend plusieurs points où la fonction est définie est on regarde si elle est toujours nulle. Et c'est ça, en fait sa preuve c'est que... Il montre que à chaque point qu'on a déterminé ben, il montre que c'est nul. Mais, il pose plusieurs conditions.
172. C : Déjà... Déjà, il prend un intervalle réel entre a et b et dans son énoncé c'est sur \mathbb{R} , enfin c'est défini sur \mathbb{R} .
173. M : Non, non.
174. C : Oui, c'est défini sur \mathbb{R} .
175. M : C'est une fonction réelle ça veut dire que/
176. C : Oui mais elle est défini sur \mathbb{R} , « sur \mathbb{R} ».
177. M : Ah oui.
178. C : Là, il rentre entre a et b .
179. M : Ouais, non mais je pense que elle est définie, enfin je sais pas si elle est définie sur \mathbb{R} . Parce que là il définit un intervalle $[a, b]$.
180. C : Comme je, comme je lis son énoncé moi, il est valable sur tout l'ensemble des réels quoi.
181. M : Hum.
182. C : Et quand je lis sa preuve/
183. Be : Elle est valable que sur un intervalle, oui.
184. C : Est-ce qu'après c'est... Sur la droite numérique achevée peut être [ton ironique]. Ouais, si plus et moins l'infini on peut les mettre dans l'intervalle. On s'en est jamais servi de ça. Ensuite, je crois qu'il faudrait surligner les questions.
- [Pause]
185. Be : Hum, je sais pourquoi on passe de inférieur ou égal à zéro à égal à zéro : parce qu'on a b supérieur à a .
186. C : Hum, hum.
187. Be : Et si tu... ah ouais mais non, c'est $f(b)-f(a)$. Ouais non, j'ai rien dit.
188. C : En fait, c'est tout à la fin dans sa dernière phrase il dit : « On en déduit que le premier membre de l'inégalité est nécessairement nul ». Y a d'autre problèmes, je suis en train d'en trouver d'autres sur ma feuille, des problèmes.

189. T1 : Pour vous aider, n'hésitez pas à faire des dessins, hein.
190. Be : Ouais.
191. T1 : Dans ces preuves/
192. C : C'est un peu bizarre [Inaudible]. « ... les points compris entre a et b partageant l'intervalle $[a, b]$... »...
193. T1 : Vous pouvez prendre $m = 5$ ou $m = 4$ et essayer.
194. C : Si on prend $m = 4$... Voilà...
195. N : Ouais, ils ont des trucs...
196. T1 : Ils ont des trucs.
197. N : Ils ont des difficultés qu'ils ont dans leur preuve, soit des trucs un peu bizarres, soit des trucs qu'ils ne comprennent pas.
- [Pause]
198. C : Vous voulez pas nous dire c'est quoi le ε ?
- [Pause]
199. C : C'est quand même pas le ε de la formule des dérivées avec les limites... La formule des limites plutôt avec les dérivées. Alors si on prend $m = 4$... Alors, on a ça... « Rappelons l'équation générale... $f(x+h)$... ». On prend $x = -2$, h c'est $b - a$. On prend $a = -2$... Voilà, on va faire ça. $a = -2$ et $b = 3$. Y a $h = (b - a)/m$. Ça fait $3 - \dots 5/m \dots 4 \dots 5/4$. $h = 5/4$. Donc ça/
200. Be : T'as pris quoi pour m ?
201. C : m j'ai pris 5. Ben ça fait un, $h = 1$. Donc, on a les points, -2, -1, 0, 1, 2, 3. Ensuite $f(x+h)$ si on a x égal genre -1, $f(x+h)$... plus un ça fait zéro moins $f(-1)$. $f(0) - f(-1)$ sur $-1+1 \dots -1-1 \dots$ égal à $f'(-1)$ ben plus ε . Je sais pas on a pas le choix, d'où qu'il vienne il faut bien le mettre. Et notre hypothèse de départ, c'est que le f' il est nul. C'est ça ?
202. Be : Oui ben, c'est ce qu'il y a dans le...
203. C : Donc, c'est égal à ε .
204. Be : Ben, c'est égal à h à chaque fois, c'est $h\varepsilon$...
205. C : Ouais, dans notre cas c'est égal à ε , $f(0) - f(-1) = \varepsilon$. On a un h qui fait un.
206. Be : Si on continue avec ton exemple...
207. C : Hum, hum ?
208. Be : On va avoir euh...
209. C : Si on passe direct à la formule, mais tu vois les ε on va les déterminer comment ?
210. Be : Ouais mais, en même temps, regarde si tu fais $f(a) - f(b)$ sachant que c'est constant, forcément tu auras des trucs à zéro.
211. C : Non, parce qu'on parle pas d'une fonction constante là en fait on parle que... C'est ça qui... Y a f qui se pointe mais on sait pas trop qui c'est f en fait. C'est la fonction quoi.
212. Be : Ah ouais...

213. C : Mais l'hypo... Enfin le support de départ quoi c'est [Inaudible], c'est tout. Si on continue, ça ferait $f(3) - f(2) = h_1 \varepsilon_1$ ouais après il faut pfff. Mais le truc, tu vois, tu peux pas connaître les valeurs de ça. Les valeurs de f quelque chose, on peut pas le savoir... Ouais.
214. [silence]
215. C : Bon, on va résoudre nos problèmes... Disons que le ε il vient de quelque part, pouf, il arrive, salut c'est moi. Normalement, il est censé tendre vers zéro quand h tend vers zéro. Déjà, ils essayent de le faire, d'accord dans un intervalle fermé, mais le plus précis possible quoi.
216. Be : Hein ?
217. C : Le plus précis possible, si h tend vers zéro, ça veut dire que tu as une infinité de points, enfin ils essayent de mettre une infinité de points entre a et b , ils essayent de faire avec la précision donc en fait le ε effectivement, enfin le ε je pense qu'il vient de l'incertitude/
218. Be : Hum.
219. C : Enfin de l'imprécision de...
220. Be : C'est un truc comme ça.
221. C : Du truc.
222. Be : En fait, le truc que nous on a appris, c'est euh... La même sans le ε .
223. C : Oui.
224. Be : Avec h qui est égal à $b - a$.
225. C : Non, nous h c'était pas $b - a$, h c'était autre chose je sais plus.
226. Be : Oui, c'était euh...
227. C : Là, dans ce cas là, donc... Après, il transforme tous les $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots$ en $m\varepsilon$.
228. Be : Ouais bon ça, ça va, c'est pas très, très... T'additionnes tout, il y a tout qui s'en va...
229. C : Mais tu les additionnes tous, tous $h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \dots)$ ça fait... « ε la plus grande de toutes les quantités représentées... »...
230. Be : Ouais de tous les ε représentés. Ils en prennent le plus grand et ils disent que chaque ε est égal au plus grand.
231. C : Hum. Et qu'il y est m fois.
232. Be : Ouais.
233. C : Bon si ça tend vers zéro, on s'en fout ça fait la même chose.
234. Be : Oui voilà. Je vois pas comment le inférieur ou égal, il devient égal.
235. C : Justement c'est ça qu'il reste $f(b) - f(a)$ inférieur ou égal à zéro. En fait, ça va faire $f(b) - f(a)$ inférieur ou égal à zéro et... Ah, on sait pas que c'est une fonction constante et a inférieur ou égal à b , c'est tout ce que l'on a.
236. Be : Non en fait on aura aucune précision, aucune précision sur f .
237. C : Ah je sais, parce que si tu as a supérieur ou égal à b , normalement il y a un truc, je veux dire, si tu utilises les bonnes conditions quoi, tu peux mettre que $f(a)$ inférieur à $f(b)$. Si tu utilises les bonnes conditions. Pas sur qu'on puisse les trouver celles-là. Mais si tu fais/
238. M : Je crois que j'ai trouvé.

239. C : $f(b)$ inférieur à $f(a)$ et $f(a)$ inférieur à $f(b)$ ça veut dire qu'ils sont égal, égaux. Tu as trouvé ?
240. M : Ben en fait, regarde. Donc, j'ai nommé les équations un, deux, trois, ... Là.
241. C : Hum, hum.
242. M : Et j'en ai déduit à chaque fois ben des, des trucs quoi. Par exemple, d'après la un, j'en ai déduit que ε est inférieur ou égal à zéro.
243. C : Supérieur ou égal à zéro.
244. M : Non, inférieur.
245. C : T'as marqué supérieur.
246. M : non ça, c'est comme ça.
247. Be : Attend...
248. M : Non ouais, tu as raison, ouais. Donc attend, ça change tout en fait.
- [Rires]
249. M : Ouais non, mais c'est logique en plus. On avait ça donc...
250. Be : Ouais, mais t'as marqué ε supérieur ou égal à zéro.
251. M : Après... Ouais je sais. Après la trois, j'en déduit ça et j'en déduit que la dérivée elle est égale à ε_m / m .
252. C : Hum, attend, attend la trois c'est laquelle. C'est celle là ? Ouais. Et il vient d'où ton f' ?
253. M : Quoi ? J'ai pris le f' du théorème des accroissements finis.
254. Be : Non mais attend là, on a cette équation puisqu'on a supposé que f' était égal à zéro.
255. M : Ouais ben.
256. Be : Alors tu vas pas dire que ça c'est égal à f' ?
257. C : Ouais bon ben tu tombes sur f' ...
258. Be : On a dit que f' était égal à zéro.
259. M : Non mais en fait, là, je me suis resservi du théorème des accroissements finis pour dire ça.
260. C : Ben ça fait sur $b - (a + (m-1)h)$, c'est pas logique...
261. M : D'après la deux, ben j'en déduit que euh, $f(b) - f(a)$ sur $b - a$ est inférieur enfin ε supérieur à ça, ou égal. Et comme j'avais vu ça avant, enfin, j'en avais démontré ça, ben j'en déduit que $f(b) = f(a)$.
- [Pause]
262. M : Ben pour que ça, ça soit nul, il faut obligatoirement que le numérateur soit nul.
263. N : Là, vous avez essayé de, j'ai pas tout suivi, vous avez essayé de refaire votre preuve, c'est ça ?
264. M : En fait, de toutes les équations, on essaye de savoir ce que l'on peut en déduire.
265. C : On essaye d'éclaircir un peu.
266. N : C'est où que vous bloquez alors ?

267. M : En fait, j'arrive que enfin, je vois que tout est logique, que tout ce qu'il a marqué est logique parce que d'après toutes les équations, on peut en tirer quelque chose et à chaque fois ben euh, de toutes les équations et ben on voit que ça se tient le, le raisonnement se tient.
268. N : Toi, ce que tu fais, c'est qu'un résumé de ce qui est...
269. M : Ben en fait, j'ai nommé des, des équations qui m'ont paru, enfin les principales/
270. N : Ouais.
271. M : Et j'en ai déduit à chaque fois ce que je pouvais en déduire, par exemple là, je remplace le h par ce qu'on connaît/
272. N : Ouais.
273. M : Par ça. Et je vois que, que ε_m / m , ça me donne ça. Ca, je sais que c'est le théorème des accroissements finis et que c'est égal à la dérivée.
274. C : Je comprends pas trop.
275. N : Ca c'est ce que tu dis, ou c'est ce qui est dit dans le...
276. M : Non, ça c'est ce que j'en conclu, par rapport à ce que je connais.
277. N : D'accord.
278. C : Ouais, mais je comprends pas trop là. Pourquoi c'est que sur $b - a$ alors que normalement c'est les/
279. Be : Parce qu'en fait il a remplacé le h qu'on a là, par euh...
280. M : Par ça.
281. Be : Par $(b-a)/m$.
282. C : il remplace $h\varepsilon$ par $(b-a)/m$?
283. Be : Non, juste h .
284. C : h , oui par $(b-a)/m$.
285. M : Ca, j'en déduit que ça devrait être nul aussi. Pour que ça soit nul, [Inaudible] enfin peu importe. Après la deux, euh... J'en déduit ça, et comme par rapport à la un, j'en ai déduit que ε est supérieur ou égal à zéro parce que...
286. C : C'est forcément nul ça, de toute façon. Parce que si on prend les hypothèses qu'il donne m il tend vers l'infini, pour que h tende vers zéro et que ε tende vers zéro.
287. M : Ouais.
288. C : Donc c'est un peu... Je sais pas on en tire pas grand-chose de plus, je crois.
289. N : Donc vous, dans la démonstration, il y a des points qui vous paraissent flous, obscurs ?
290. C : Ouais. Pourquoi, comment est-ce qu'il passe de, enfin, je sais pas moi, j'ai peut-être une idée, mais comment il passe de l'inégalité à l'égalité. Est-ce que par exemple, si on a « a inférieur à b » on peut appliquer la fonction au deux membres ou pas. Il y a une règle pour ça non ?
291. N : Alors toi tu, toi tu voudrais, alors redis moi.
292. C : Parce que là, il parle de, enfin il dit que ε tend vers zéro et que nécessairement ce membre là tend vers zéro et donc que $f(b) - f(a)$, pour moi, si on continue c'est inférieur ou égal à zéro. Et il passe, il dit que c'est nécessairement nul. Euh que... Que donc que $f(b) - f(a)$ est

- nécessairement nul. Mais moi c'est inférieur ou égal à zéro, si on suit l'équation qu'il a donnée, je comprends pas comment il passe au égal directement.
293. N : Toi, du coup, tu en déduirais seulement $f(b)$ inférieur ou égal à $f(a)$.
294. C : Ouais voilà. Et on sait que a est inférieur à b , après il faudrait que... Quelque chose quoi, un autre élément.
295. N : Ok. Donc ça c'est un des points un peu bizarres.
296. C : Ensuite euh, ben je sais pas le ε , on en a peut-être conclu que c'est dû à, enfin c'est un peu un coefficient de précision quoi, de, du calcul. Puisque il dépend directement du nombre, du nombre de points qu'on prend entre a et b . Plus il y a de points et plus ε est petit, enfin tend vers zéro... Je sais pas, je pense que c'est un peu un coefficient de précision ou un truc comme ça... Ou d'imprécision je pense.
297. N : Et vous, vous en pensez quoi de ε ?
298. C : Ben nous, on connaissait pas la formule avec ε en fait. On l'a vu sans ε .
299. N : Sans ε tu dis, c'était quoi la formule ? Justement c'est quoi, celle que vous connaissez vous ?
300. C : Ben c'est $f(x+h) - f(x)$ sur $x + h - x$ égal à $f'(x)$. C'est ça la formule ?
301. M : Non.
302. C : Non ?
303. M : Moi, je connais celle là. Ben si on passe le $b - a$ en dessous là, ça fait le théorème des accroissements finis et ça devrait être égal à $f'(c)$.
304. N : Ouais.
305. M : Avec un c appartenant à l'intervalle.
306. N : Donc ça, c'est la preuve que toi tu donnerais pour prouver ce théorème.
307. M : Hum. Mais là, ça veut dire que les ε ils sont égal au $f'(c)$. Enfin, inférieur ou égal à $f'(c)$.
308. C : donc $f'(c)$ tendrait vers zéro.
309. M : Euh.
310. C : Non, mais non mais c'est pas logique. Ça veut dire que tu prends...
311. N : [à T2] [Inaudible] Dans combien de temps.
312. T2 : Oh, il y a le temps encore, ouais, ouais.
313. C : Ça veut dire que si tu prends un... un m petit/
314. T2 : Le groupe d'à côté, ils ont une preuve un peu plus longue donc...
315. C : Tu prends un m petit, ça veut dire que ton ε , il est pas forcément très proche de zéro, ça veut dire que ton $f'(c)$ il est pas proche de zéro non plus.
316. M : On a dit qu'il tendait vers l'infini aussi le m .
317. C : Ouais mais dans l'hypothèse où tu prends pas un m qui tend vers l'infini.
318. M : Ben si on prend un, on retrouve quand même tout, enfin tout est bon aussi. Parce que là, ça fait zéro. Celle-là, je la déduite de l'équation deux/
319. C : Ouais, mais si tu prends pas un ? Si tu prends deux ?

320. M : Ce serait encore zéro, enfin c'est bon.
321. C : Si tu prends deux, c'est cool.
322. M : Ah ben là, ouais.
323. C : Après voilà...
324. T2 : Est-ce que... Vous avez fait les étapes là ? Vous avez réussi à sortir des étapes de la preuve ?
325. C : De la preuve ?
326. T2 : Ouais.
327. C : Ben disons qu'au début, il pose ses...
328. T2 : Parce que c'était, vous avez vu que l'énoncé était derrière ?
329. C : On était en train de lire la preuve.
330. T2 : On vous demandait précisément de, d'arriver à faire des étapes.
331. C : « ... chacune des étapes ». Ouais ben, y a la première étape où il pose les conditions, il rappelle l'équation générale.
332. T2 : Alors justement cette équation générale, elle vient d'où, c'est quoi ?
333. C : C'est celui-là, le théorème des accroissements finis non ?
334. Be : Hum... En différent mais ouais.
335. C : En différent...
336. Be : Ben, c'est toujours le problème de l' ε quoi.
337. C : Hum. C'est le ε qui nous pose problème en fait.
338. T2 : Ce ε là ?
339. C : On sait pas d'où il vient. Enfin c'est un peu une hypothèse quoi, mais...
340. T2 : Est-ce que vous pouvez pas... En fait récapitulez moi d'abord les étapes et puis ensuite on essaiera peut-être de revenir, revenir sur le contenu. Donc tu as dit, d'abord il rappelle les hypothèses, un truc comme ça/
341. C : Ouais.
342. T2 : Ou en tout cas, il met en place les lettres et tout.
343. Be : Après il développe ça/
344. C : Du calcul.
345. Be : Il fait l'hypothèse que f'' est constamment nulle/
346. T2 : Ouais.
347. Be : Il développe sa formule pour chaque euh... Pour chaque segment qu'il a pris.
348. T2 : Oui.
349. Be : Il les additionne tous.
350. T2 : Oui.
351. Be : Après, il fait une autre approximation en majorant tous les ε .

352. T2 : Oui.
353. Be : En prenant un seul ε pour arriver à $hm\varepsilon$.
354. T2 : Oui.
355. Be : Et après, c'est là où on, ouais il remplace m par sa, par son...
356. T2 : Par son expression c'est ?
357. Be : Euh, h par son expression je veux dire.
358. T2 : Oui.
359. Be : Mais après, là où on ne comprend pas, c'est comment il passe d'une égalité à une inégalité.
360. T2 : Oui/
361. Be : Et ben, c'est là où...
362. T2 : C'est peut-être quand vous arriverez justement le... Vous comprenez pas le passage de cette inégalité là $f(b) - f(a)$ plus petit que ça/
363. C, Be : Ouais.
364. T2 : Au fait que c'est égal $f(b)$ et $f(a)$.
365. Be : Ouais.
366. C : Ouais voilà.
367. T2 : Ben peut-être qu'il faut justement travailler sur qu'est-ce que c'est que ce ε .
368. N : Eux ils ont en fait, là-dessus, ils disent qu'on peut en déduire que $f(b) - f(a)$ est inférieur ou égal à zéro.
369. C : Mais c'est l'égalité qui...
370. Be : C'est l'égalité.
371. C : Ouais, faut trouver l'inégalité dans l'autre sens et euh, on en conclurait enfin, je pense que c'est ce qu'il a voulu dire, peut-être implicitement, dans sa phrase.
372. T2 : Ca, il faudra regarder si elle est vraie aussi dans l'autre sens alors. D'accord.
373. C : Hum.
374. T2 : Ca vous fait plusieurs choses à regarder.
375. C : Ouais. C'est ça.
376. T2 : Mais... Et cette formule générale, y a quand même, c'est le fondement hein ?
377. C : Ouais, ben oui.
378. T2 : Vous avez vu, il part de ça et ensuite, il décline. Donc ce serait bien d'arriver à comprendre si elle est valable, si elle est valable d'où ça vient... Est-ce que c'est un théorème, est-ce que c'est quelque chose d'évident ? Est-ce que vous avez déjà vu ça ? Il faut peut-être l'écrire à part et essayer de travailler dessus.
379. T2 : [à N] Pour le groupe d'à côté, on leur a rappelé la définition de la dérivée.
380. N : On était dessus au moment où tu es arrivé.
381. T2 : Si jamais tu veux, tu peux... Pour pas passer trop de temps sur ça, si jamais ils trouvent pas du tout.

382. N : Ouais, ouais.
383. C : C'est la définition formelle de la dérivée.
384. T2 : C'est quoi ?
385. C : L'équation, c'est la définition formelle de la dérivée. On avait déjà vu ça en cours.
386. T2 : Oui.
387. C : Cette équation/
388. T2 : Ouais.
389. C : C'était un moyen de calculer la dérivée.
390. T2 : Oui.
391. C : Voilà. Avec les limites...
392. Be : Y a le ε ?
393. T2 : Est-ce que tu peux dire ce qu'il se passe, ce que c'est que la formule de la dérivée et essayer de voir le rapport avec...
394. C : En fait ouais, c'est un taux d'accroissement, on calcule la pente de la tangente.
395. T2 : Ecris le peut-être ici, écrivez cette formule là et la formule générale...
396. Be : Ouais mais y a pas le ε dans celle là.
397. C : Ben Voilà.
398. T2 : Y a pas de ε . Alors justement, il s'agirait de comprendre quel est le rapport entre cette formule là qui dit que $f'(x)$ est égal à la limite quand h tend vers zéro de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sur h , d'accord ça c'est la formule de la dérivée/
399. C : Hum.
400. T2 : On a une dérivée si cette limite existe. Et dans ce cas là, on dit que la dérivée c'est égal à la limite et cette formule là.
401. C : En fait, c'est le ε qui va remplacer euh... la limite.
402. T2 : Et cette formule là, d'ailleurs, vous remarquez qu'elle n'est pas donnée comme ça, il y a une phrase derrière.
403. C : « Avec ε qui tend vers zéro quand h tend vers zéro ».
404. T2 : Ouais.
405. C : Ouais. Moi enfin, j'allais dire je pense que, ce que j'avais dit tout à l'heure que ε c'est un peu un coefficient d'imprécision ou de précision quoi en fonction du nombre de, enfin de la taille des segments qu'on prend entre tous les points. Du nombre de points qu'on prend entre a et b quoi. Plus ce nombre est grand et plus ε est petit. Je pense que c'est peut-être un truc comme ça.
406. T2 : Et quand ce nombre est grand, h il est comment ? C'est quoi h ?
407. C : h il tend vers zéro. Ben h c'est...
408. Be : Ben h c'est $b-a/m$.
409. C : C'est la taille des segments, c'est la taille d'un segment quoi.

410. T2 : [T2 dessine au tableau] Là on a a et là on a b . Est-ce que vous pouvez dire qu'est-ce que c'est que m et qu'est-ce que c'est que h ?
411. C : m c'est...
412. Be : C'est le nombre de segments. m c'est le nombre de segments qu'on fait sur $[a, b]$ et h c'est la longueur de chaque segment.
413. T2 : D'accord. Donc quand m augmente...
414. Be : h diminue.
415. C : h diminue et ε aussi. Voilà je pense que c'est comme, voilà quoi ε c'est un truc qui est lié... Ben justement à la précision dans son calcul quoi.
416. T2 : Je vais vous donner une petite indication technique. La formule, c'est quoi $f(b) - f(a)$ est égal à h multiplié par/
417. C : C'est $f(x+h) - f(x)$ égal à $h(f'(x) + \varepsilon)$...
418. Be : En même temps, si h tend vers zéro, ça tend vers zéro.
419. T2 : Si h tend vers zéro, quoi tend vers zéro ?
420. Be : Ben $f(x+h) - f(x)$... Ah mais non ça fait, non j'ai rien dit, non j'ai rien dit.
421. T2 : Est-ce que vous pourriez pas passer ça de ce côté-là, comme ça. Donc là, vous avez une égalité qui est la même. Et quel est le rapport entre cette égalité qui est donc le quotient là, dont on regarde la limite pour savoir si c'est dérivable ou pas, et là. C'est quoi, c'est quoi $f'(x)$?
422. C : C'est la dérivée au point.
423. T2 : hum, c'est la dérivée donc c'est quoi sa définition ?
424. C : Sa définition, laquelle ?
425. T2 : Celle que tu viens de regarder sur Internet ou celle...
426. Be : Que la limite de...
427. T2 : Oui.
428. Be : La limite de $f(x) - f(x_0)$ divisé par $x - x_0$...
429. T2 : Ici c'est x hein... ?
430. C : Ouais donc c'est $f(x+h) - f(x)$ sur h .
431. T2 : Alors est-ce que vous voyez mieux ce que c'est que ce ε justement.
432. M : C'est la différence entre la valeur qu'on trouve à gauche et la limite.
433. T2 : Allez je vous laisse un peu discuter de ça, je voudrais que vous arriviez à bien comprendre ce que c'est cette égalité hein. D'accord, parce que vous voyez qu'à partir de ça...
434. C : Hum.
435. T2 : Il décline tout le reste hein. Essayez de bien comprendre ce que c'est que ce ε .
436. T2 : [à M] Je les ai un peu... J'ai donné un peu des indications pour avancer.
437. C : C'est ça c'est la différence entre/
438. T2 : [à M] Il est dix heures, on se donne jusqu'à dix heures et demi.
439. N : Hum.

440. Be : En fait ε , c'est la différence entre euh...
441. C : La valeur du quotient et sa limite.
442. Be : Quand h tend vers zéro.
443. N : Et ça, vous vous rappeliez ça, de cette définition de la dérivée ?
444. C : Ben ouais, ε c'est la différence entre la valeur et la limite quoi. Par exemple, si ça tend vers zéro ça veut dire que le quotient et la limite du quotient c'est la même chose... si ε tend vers zéro.
445. Be : si ε ouais...
446. C : Si ε tend vers zéro, ça veut dire que la limite du quotient, c'est le quotient lui-même, c'est bizarre.
447. N : Là, c'est la définition qui vous paraît bizarre ?
448. C : Ouais ben... même de réfléchir un peu là-dessus pour qu'on comprenne bien ce que c'est le ε .
- [Pause]
449. C : On essaye toujours de comprendre le ε , ce que c'est dans la formule générale. L'équation générale de la dérivée.
450. T1 : Vous avez vu les développements limités en cours ?
451. C : Ouais. Hum.
452. T1 : Vous les avez vu sous quelle forme.
453. C : C'est-à-dire sous quelle forme ?
454. M : développement.
455. C : Ben je sais pas, on les a appris, enfin je sais pas. On les a appris ou alors on faisait...
456. T1 : Pour une fonction générale, vous avez vu que c'était $f(x+h)$...
457. C : Pfff... C'était...
458. T1 : Egal $f(x)$ plus ?
459. C : Plus $f(h)$? plus $f(h)$?
460. T1 : [Inaudible, T1 est au tableau] $f'(x)$ fois h ...
461. C : Hum...
462. T1 : Plus ε fois h . Ca, ça ressemble pas à peu près à la formule que vous avez ?
463. Be : Quoi la formule ?
464. C : Vas-y met justement c'est cette formule là, on essaye de comprendre d'où vient le ε . Enfin, qu'est-ce que c'est. Disons qu'on connaissait la formule de la dérivée mais sans le ε .
465. T1 : C'est quoi la formule de la dérivée, ça veut dire quoi ?
466. C : Enfin c'est la limite.
467. T1 : Si il n'y a pas le ε , c'est la limite, c'est pas une égalité.
468. C : Ouais, ouais.

469. T1 : C'est ça quand h tend vers zéro ça tend vers... Tendre vers zéro, ça veut dire quoi ? Tendre vers $f'(x)$, bon ici c'est tendre vers zéro puisqu'elle a une dérivée nulle.
470. C : Tendre vers zéro ? Ben ça veut dire que, ben que la fonction est constante. Que $f(x+h) = f(x)$... Tendre vers zéro...
471. T1 : Une suite, une fonction, ça tend vers zéro seulement si la fonction est constante ?
472. C : Non mais...
473. N : Ce que je peux faire, c'est vous rappelez la définition formelle de...
474. T1 : De la limite ouais.
475. N : De la limite parce qu'en fait T2 m'avez dit que vous l'avez vu mais pas beaucoup, en fait.
476. C : Ouais, on s'en rappelle pas très bien. C'est bien ça, si c'est le même ε c'est...
477. N : Tendre vers en fait, si ça, ça tend vers [Inaudible, N est au tableau]. Quand on fixe ε , le ε je vous le donne avec le quantificateur, à chaque fois quand on fixe un ε , aussi petit que l'on veut on va pouvoir trouver, on va pouvoir trouver [Inaudible]... un petit intervalle autour duquel [Inaudible].
478. Be : Moi, ça me dit quelque chose ça.
479. C : La formule c'était...
480. N : [Inaudible, il commente ce qu'il écrit au tableau]. Donc ça veut dire que ça en fait, on va pouvoir le faire tendre, le fait qu'il tende vers cette valeur ici, ça veut dire qu'on peut rapprocher cette valeur là de $f'(x)$, autant qu'on veut à condition qu'on soit proche, qu'on se ressert sur...
481. C : Ouais donc c'est le même ε que dans ça... C'est le seul ε que je connaisse. Je vais acheter le tee-shirt d' ε je crois. Ouais donc, il vient de là, en fait.
482. N : [Inaudible] cette fois-ci, si c'est h qui tend vers l'infini, ça veut dire qu'on va pouvoir trouver h , tel que [inaudible].
483. Be : Ouais mais nous, il tend pas vers l'infini, il tend vers zéro alors...
484. C : h tend vers zéro, nous.
485. N : Hein ?
486. Be : h tend vers zéro.
487. N : Voilà, ça veut dire qu'il va exister h suffisamment petit... [Inaudible, N est au tableau, assez loin du micro] Une fois qu'on a fixé ε , on fixe le h suffisamment petit/
488. C : Ouais.
489. N : Pour que ce [Inaudible] là, soit proche de zéro, à ε près.
490. C : D'accord...
491. Be : C'est ça, ε , c'est l'incertitude.
492. C : Quoi ?
493. Be : ε , c'est l'incertitude.
494. C : Ouais donc...
495. N : Le ε c'est. Le ε est fixé et on trouve le h .

496. C : Ouais c'est, en fait ouais, c'est l'imprécision de... C'est bien l'imprécision de notre calcul ε , parce qu'on a en fait, l'approximation, on peut la faire dans la formule/

497. N : On peut faire une approximation à ε , à condition d'être proche. A condition de fixer h suffisamment petit.

[Pause]

498. N : Si on revient à la preuve, est-ce qu'on voit bien les h et les ε ?

499. C : Bon, ben là, ça va alors.

[Pause]

500. C : Elle est vachement amplifiée la majoration en fait, celle-là. Elle est vachement imprécise.

501. Be : Pas forcément.

502. C : Ben si tes ε , ils sont tout petits. On prend quand même le plus grand de tous et on multiplie m fois.

503. Be : Ouais mais si le plus grand de tous c'est zéro euh... Ca fera quand même zéro. Le plus grand, c'est pas ce qui me dérange le plus.

504. N : Donc là, ce qu'on peut faire c'est euh... C'est essayer de préparer l'explication de la démonstration aux autres et puis présenter les points les plus, les points qui vous ont bloqué ou qui vous bloquent encore. Et après, on peut aussi revenir sur la fin pour voir, parce que justement, la preuve, pour vous, ce que ça montrait c'était que $f(b) - f(a)$ c'était plus petit que zéro. Est-ce qu'on peut aussi faire dans l'autre sens après tout ?

505. C : Hum.

506. N : Parce que soit il est allé rapidement, et on peut faire, et il suppose implicitement qu'on peut le faire dans l'autre sens, soit y a...

[Longue Pause]

507. C : Ah, je crois avoir trouvé pourquoi. C'est un peu farfelu, je pense ma démonstration mais...

508. N : Ouais.

509. C : Donc en fait, si on prend que ε tend vers zéro, on peut faire ça quoi, en passant le $b - a$ en dessous sans changer le signe parce que $b - a$ reste positif. Donc ensuite, pour ça, là on a deux choix. Soit le quotient est négatif, soit il est nul. Donc pour qu'il soit négatif, enfin pour qu'il soit nul, il faut que $f(b) = f(a)$, c'est le seul moyen quoi. Soit pour qu'il soit négatif, il faut donc que $f(b)$ soit plus petit que $f(a)$ et alors après, je suis remonté vachement loin. Donc, si il faut que $f(b)$ soit plus petit que $f(a)$, ça, ça fait négatif. Donc si on prend cette équation, ça fait que ça c'est négatif et c'est pas possible parce que le h il est forcément positif et le ε aussi. Si on suit la définition que vous avez marquée au tableau quoi de, de la limite et le h on le prend positif, je crois. Enfin le h il est positif, juste parce que $b - a$ c'est positif, sur m positif, donc en fait, c'est pas possible que ce soit négatif enfin... c'est un peu farfelu comme démonstration quoi mais...

510. N : Dans le cas où ε est positif, effectivement.

511. C : Ben si, c'est le même ε que dans la définition de la limite ?

512. N : Hum, si c'est le même. Sinon, effectivement.

513. C : A ce moment là, c'est pas possible que ce soit négatif donc c'est forcément...

514. N : Et si le ε n'est pas, n'est pas positif.

515. C : Ben à ce moment là, on peut pas appliquer la définition de la limite quoi, on peut pas appliquer la même équation générale, c'est plus valable.

516. N : Si on prend, gardons ε général, en fait. C'est vrai que, quoique...

517. C : Mais ouais, mais le ε il vient de l'équation générale donc euh... Voilà, c'est ma démonstration générale.

518. N : Non, c'est pas...

519. C : Moi, je me suis compris, moi !

[Rires]

520. N : Toi, tu as compris le truc.

521. Be : Oui, j'ai compris le truc.

522. N : Non mais effectivement, c'est ça, de toute façon si... On voit que là il fait rapidement les choses en disant que $f(b)$ est plus petit que $f(a)$ et on peut faire exactement le contraire avec euh... puisqu'ici on, disons que ici le ε est plus grand que zéro, est-ce qu'on travaille en valeur absolue ? Mais ici vous voyez que donc, que vous pourriez travailler avec les valeurs absolues. Ici, on pourrait passer en valeur absolue.

523. C : Hum, hum.

524. N : Et si on passe en valeur absolue, on a $f(b) - f(a)$ qui est plus petit que, qui reste plus petit que $b - a$ valeur absolue de ε .

525. C : Hum.

526. N : En fait, on peut faire le raisonnement a priori dans, dans...

527. C : Y a peut-être d'autres trucs qui vous bloquent ?

528. M : Non, c'est bon.

529. C : Ben moi, c'est bon.

530. N : Bon ben, je crois que vous vous préparez juste un peu à l'exposé et voilà.

[Pause]

531. N : Pour préparer l'exposé, vous pouvez répondre aux questions en fait, je pense. Reparlez des étapes de la preuve puis ensuite, expliquez justement les points sur lesquels vous avez creusé en fait.

532. C : Ouais. Non, ça va on a compris.

533. T2 : C'est vrai ?

534. C : Ouais. Bon je peux aller à polytechnique, c'est quand qu'on signe ?

[Rires]

535. Be : polytechnique de dix huit cents...

536. N : Tu as signé à l'INSA, c'est trop tard.

537. C : Ah non, je crois qu'on a le droit de passer le concours, on a le droit.

538. T2 : Vous en êtes où en fait dans le, dans l'analyse ?

539. C : Là ben on a, on un peu tout regardé.

540. T2 : Ouais.

541. C : Les différentes étapes et on a discuté de chaque étape, quoi.
542. T2 : Ok. Vous pensez que vous pouvez être prêt à envisager un exposé dans combien de temps.
543. C : Euh, je sais pas ça dépend... Je sais pas, pas trop, trop longtemps, je pense.
544. T2 : [Explications méthodologiques pour l'exposé. Je ne transcris pas.]
545. C : Ouais bon, pour l'exposé voilà, on peut dire vite fait ce qu'il a fait Liouville. Genre en introduction.
546. Be : Déjà, il va falloir expliquer le ε .
547. C : Ben on l'explique pareil, ce sera bien, non ?
- [Pause]
548. C : Bon, d'accord. Donc, pour tout ε , il existe un h tel que $|x+h|$ est inférieur à... ah non, c'est valeur absolue de $x+h$ inférieur à quelque chose ? A quoi, à un mu...
549. N : Ici ?
550. C : Ouais là, dans la première euh...
551. N : Donc quelque soit ε , il existe h /
552. C : Ouais tel que /
553. N : Tel que ouais.
554. C : Valeur absolue de $x+h$ inférieur à mu implique que /
555. N : Ouais, h strictement supérieur à zéro.
556. C : Valeur absolue de $f(x+h) - f(x)$ sur $h \dots f'(x) \dots$ est inférieur à ε . Voilà. Ca, c'était limite de... limite de je vais mettre, en fait, ça, c'est la limite du quotient en fait limite de $f(x+h) \dots$ Quand h tend vers zéro, ouais c'est ça.
557. N : Et là, tu penses que Liouville il utilise ça implicitement ou...
558. C : Je pense qu'il avait tellement tous les théorèmes gravés dans la tête, qu'à mon avis il avait pas besoin de marquer lui. Ouais, je pense qu'il s'en sert. Sauf que lui, il en fait une égalité déjà.
559. N : Ben une fois qu'on a mis ce « il existe », on peut écrire, on peut...
560. Be : Là, c'est un strictement inférieur à ε ou euh, inférieur ou égal ?
561. N : C'est inférieur ou inférieur ou égal, les deux c'est juste en fait.
562. Be : Les deux ?
563. N : Puisque comme c'est quelque soit $\varepsilon \dots$
564. Be : Ouais d'accord. Parce que sinon, si c'était strictement inférieur, on aurait eu un souci parce que là on a un égal.
565. C : Ouais là, c'est pas pour tout ε supérieur à zéro enfin... Il faudrait changer de formule.
566. Be : c'est un « il existe », c'est ça ?
567. C : Faut mettre « il existe » un ε supérieur à zéro et à ce moment là, on peut mettre un égal à l'inéquation, à l'inégalité. Ouais ben, je vais dire ça moi, je vais dire qu'on, enfin que, il a pris un ε , un ε tel que ça soit égal. C'est possible ça ? Comme ça je vais mettre inférieur ou égal comme ça... Ca peut être pas mal.

[Pause]

568. C : ε qui tend vers zéro quand h tend vers zéro.
569. N : De toute façon l'idée, l'idée ici, c'est de toute façon puisque $f(x), f(x+h) - f(x)$ sur h est proche de, se rapproche de $f'(x)$, on peut, on peut, on peut faire l'égalité à un moment quoi.
570. C : En fait, c'est ça quoi, on prend un ε qui permet l'égalité, qui est suffisamment petit pour permettre l'égalité... Enfin suffisamment proche de...
571. N : Là, vous pouvez utiliser l'expression donnée par TI qui justifie ce...
- [Pause]
572. N : Ce qu'il dit justement, c'est que $f(x+h) - f(x)$ sur h se rapproche de $f'(x)$. Bon on dit que c'est $f'(x)$ avec un ε , à ε près.
573. C : Ouais ben ça au final... On fait ça, ça, c'est la première étape. A la deuxième étape, il calcule à la troisième étape, il conclue. J'aurais fait ces trois étapes là, moi.
574. Be : Oui, ça je suis tout à fait d'accord.
575. C : Voilà après...
576. Be : Ah, j'aurais plus arrêté la deuxième là.
577. C : Ben euh... Non, pas trop parce que... Donc là, il en tire des choses, il en déduit des choses qu'il a faites avant. Or que là, il le pose le ε quoi. J'aurais plutôt fait ça quoi. Là, c'est lui qui pose le ε qui est la plus grande des quantités représentées machin, alors que là $hm = b - a$ donc $f(b) - f(a)$ machin, en fait, il en déduit des étapes précédentes. C'est une étape de déduction. Bon voilà. On se sépare les tâches ? Moi je veux bien essayer d'expliquer ça si personne veut.
578. Be : Moi je veux bien expliquer ça, ça va j'ai compris ça, le calcul.
579. C : Si tu veux expliquer la fin.
580. M : Ouais.
581. C : Faut que tu expliques comment on passe de l'inégalité à l'égalité. Faut peut-être trouver un raisonnement plus simple que le mien je pense, moins farfelu. Ben voilà, c'est pas mal là ?
- [Pause]
582. C : Bon et à la fin, il faut parler de ce qu'on en pense quoi. En conclusion, on peut dire ce qu'on en pense.
583. Be : De toute façon, il faudra voir avec l'autre groupe.
584. C : Quoi ?
585. Be : Il faut voir avec l'autre groupe.
586. C : On peut déjà commencer tout seul. A mon avis, ils vont penser à la même chose pour l'exposé je pense. Donc je sais pas, qu'est-ce qu'on en pense ?
- [Pause]
587. C : Je sais pas. Déjà, je dis que sa preuve, elle reste sur une intervalle alors que son énoncé il en parle pas quoi.
588. N : Justement, c'est vrai qu'on en a pas, on en a pas parlé. Ce qu'il montre pour vous est-ce que c'est l'énoncé ou c'est pas l'énoncé ?
589. C : Ce qu'il ment ?
590. N : Ce qu'il montre ?

591. Be : Ben pas entièrement, parce que déjà l'intervalle de départ c'est pas le même. Puisque, au départ on a... Enfin l'énoncé c'est sur \mathbb{R} alors que sa démonstration c'est sur un intervalle.
592. C : Moi, je pense que, je pense qu'il est incomplet l'énoncé enfin... En fait, à mon avis dans un, si c'était un théorème comme un autre quoi, il y aurait des conditions avant. Justement ces conditions là, elles auraient été mises au dessus.
593. N : Là, les conditions est-ce qu'elles sont pas, elles sont pas déterminées ?
594. C : Ben, une fonction réelle définie, dérivable sur \mathbb{R} , voilà.
595. N : C'est la démonstration qui a l'air...
596. C : Donc euh la démonstration, elle restreint le...
597. N : Elle restreint donc, est-ce qu'elle permet de conclure sur l'énoncé un ? Parce que lui, ce qu'il donne c'est la preuve de l'énoncé un. Si il l'explique pas, ça veut dire encore que c'est implicite.
598. C : Hum.
599. N : Ou que c'est incomplet, ou que c'est pas rigoureux.
600. C : On peut supposer que a et b sont suffisamment éloignés pour que...
601. Be : Là, il...
602. C : Si c'est valable sur a et b , c'est valable sur \mathbb{R} , enfin je sais pas. J'ai rarement vu une fonction qui est constante presque partout sauf... Je sais pas, c'est peut-être trouvable.
603. N : En tout cas, la dérivée de f est constamment nulle. Mais comment justement... Là, il prend a et b , il montre que $f(a) = f(b)$. Est-ce que ça, ça permet de conclure sur la valeur de l'énoncé un ?
604. M : Ben oui. Le fait de dire $f(a) = f(b)$, on en déduit que c'est une fonction n'importe laquelle, elle peut être constante ou prendre n'importe quelle direction tant qu'elle arrivera à $f(b)$. Donc si il démontre que sur n'importe quel intervalle, on a, enfin, et que la fonction elle fait n'importe quelle variation entre deux points et qu'on prouve que la dérivée est nulle, ben moi je pense que ça suffit.
- [Pause]
605. C : Moi, je pense que l'intervalle doit être suffisamment grand pour être sûr, quoi.
606. N : Mais, parce que entre a et b , la valeur vaut quoi ?
607. C : Entre a et b ?
608. N : Oui.
609. C : Ben il pense que, il dit que la dérivée est nulle entre a et b et que après il segmente et machin, machin.
610. N : Est-ce qu'on sait des choses sur le segment ? Sur la valeur de f prise sur ces points, entre a et b .
611. Be : Ben oui, on sait qu'elle est constante, enfin que...
612. C : Ah, ben non.
613. Be : Ben avec cette étape, il a montré que sur tout le segment c'était égal à $h\varepsilon$, après il a majoré les ε . Donc c'est pas... En fait là, il a montré qu'entre a et b c'est tout le temps la même valeur.
614. C : Mais personne nous dit qu' ε_1 égal ε_2 . C'est lui qui fait l'approximation de ça mais.
615. Be : Oui mais on s'en fout, puisque ε tend vers zéro.

616. C : Ah oui mais enfin, je sais pas. Je suis un peu chiant mais tend vers c'est pas zéro pour moi. Je sais pas ça pourrait être un dix puissance moins vingt mille et deux dix puissance moins vingt mille. Ce serait pas la même valeur qui tend vers zéro. Enfin, je sais pas. Déjà je pense que y a, y a un peu... Moi l'approximation dans la majoration par ε elle me paraît un peu, un peu louche quoi.
617. N : Et toi *Be* ?
618. C : C'est *M*.
619. N : Toi c'est *M*.
620. Be : Moi c'est *Be*.
621. N : Je dis ça parce que je t'ai vu hausser les sourcils.
622. Be : Je sais pas pour moi ε c'est une valeur vraiment petite donc euh... Et là, on dit qu'elle tend vers zéro donc euh, pour moi ça revient au même quoi.
623. N : Donc sur, sur la conclusion toi la façon de conclure, toi *C*, tu trouves que c'est un peu bizarre.
624. C : Je sais pas je mettrais un peu...
625. N : Tu mettrais un peu des réserves ?
626. C : Ouais, voilà.
627. N : Vous pouvez mettre des réserves.
628. C : Moi toujours, je suis un sceptique.
629. N : Soit, soit, vous pouvez dire que là, là à votre avis, c'est pas suffisamment expliqué ou que c'est raccourci ou qu'il fait des implicites que, que vous avez pas ou... En tout cas comment on utilise, comment on permet de conclure que c'est vrai sur euh, qu'elle est constante, sur tout l'intervalle. Ca par contre, vous avez pas de...
630. C : Ca la façon de conclure à la fin ?
631. N : Il dit que... Admettons que, que ce soit bon et qu'il arrive à $f(b) = f(a)$. Pourquoi ça veut dire que la fonction est constante sur tout l'intervalle.
632. C : Ben non, justement, ça montre qu'elle est constante sur...
633. N : Est-ce que ça montre qu'elle est constante sur $[a, b]$?
634. Be : Non ça veut dire que au début et à la fin elle a la même valeur mais ça montre pas qu'elle est constante sur tout...
635. C : Au début et à la fin elle a la même valeur et au milieu la dérivée est nulle. C'est, c'est deux...
636. Be : Oui mais là, dans la conclusion qu'il a faite là juste ça, il dit juste que $f(a) = f(b)$.
637. C : Ca veut rien dire.
638. N : Comment à partir de ça, on pourrait conclure directement ?
639. C : Ben faut rajouter, je pense qu'il faut rajouter l'hypothèse que la dérivée est constamment nulle. Parce que c'est une hypothèse de départ.

640. N : A priori c'est ce qu'il... J'ai envie de dire c'est ce qu'il utilise pour démontrer que $f(a) = f(b)$. Donc là, il n'y a personne qui a une idée sur... Est-ce qu'à votre avis, c'est évident pour vous ? Ou il manque quelque chose ? ou...

[Pause]

641. N : a et b sont comment ?

642. C : Ben ils sont... a plus petit que b .

[Pause]

643. T2 : De quoi ?

644. N : Petite question sur le fait de généraliser. a et b sont réels, on arrive sur la démonstration que $f(b) = f(a)$ et là, il y a un peu un questionnement sur justement, pour eux, ça permet pas de montrer que f est constamment euh est constante sur tout...

645. C : Sur tout \mathbb{R} .

646. N : Bon au début, il pensait que peut-être, elle est constante entre a et b et encore c'est partagé...

647. C : Ouais.

648. N : C dit que, C c'est constant entre a et b et comme la dérivée est nulle, elle est constante entre a et b . Be dit que, enfin tu dis que on dit pas plus que seulement $f(a) = f(b)$.

649. Be : Juste $f(a)$... Après oui...

650. N : Donc, la généralisation sur...

651. T2 : En fait c'est... Si je reformule c'est « vous ne voyez pas le rapport entre montrer que $f(a) = f(b)$ et montrer que la fonction est constante » ? C'est ça ou ?

652. C : Ben c'est un peu ça/

653. Be : Oui.

654. C : Ben je sais pas dans la fonction x^2 y a $f(-2) = f(2)$ par exemple enfin...

655. T2 : D'accord. Mais est-ce que c'est vrai pour tous les nombres ? Est-ce que c'est vrai pour n'importe quels a, b ? Que $a^2 = b^2$?

656. Be : Non, il faut qu'ils soient symétriques.

657. T2 : Ouais. Et ici, il sont choisis comment ces nombres ?

658. Be : Ben c'est au hasard.

659. C : C'est au hasard, ouais, c'est au hasard.

660. T2 : Alors, est-ce que vous pouvez essayer de le faire dans l'autre sens peut-être, qu'est-ce que ça voudrait dire qu'une fonction n'est pas constante ?

661. C : Ben que si on prend $f(x)$ et $f(x+h)$, y a un ordre quoi enfin y en a un qui est plus grand que l'autre, qu'ils sont pas égaux.

662. T2 : C'est quoi que tu appelles x et $x+h$? Qui c'est qui les choisit ?

663. C : Ben justement au hasard, dans \mathbb{R} .

664. T2 : Dire que c'est pas constante, parce que si tu choisis au hasard, il y a des chances que tu tombes mal. Par exemple x^2 , elle est pas constante si je choisis x égal, si je choisis -2 et $-2 + 4$, c'est-à-dire -2 et 2 ...

665. C : Hum, hum.
666. T2 : ... Ben je tombe sur des nombres qui sont égaux, enfin dont l'image est la même.
667. C : Ouais.
668. T2 : Donc en fait, ce que tu peux encore...
669. C : Ben il faut juste montrer que la dérivée est pas nulle.
670. T2 : Oui, mais en terme de valeur de la fonction ça veut dire quoi qu'une fonction est n'est pas constante.
671. C : Ben ça veut dire que il existe un, un je sais pas un y , tel que $f(x)$ différent de $f(y)$... par exemple.
672. T2 : Donc là, tu as dit « il existe un y » et ce x ?
673. C : Ben je sais pas, « il existe » euh... et pour tout x . Non par exemple, enfin...
674. T2 : Pour tout x .
675. C : Je sais pas en gros, on peut prendre deux abscisses différentes/
676. T2 : Oui.
677. C : Donc ok, on peut avoir de la malchance et tomber sur les deux mêmes quoi.
678. T2 : Mais si tu dit on peut...
679. C : Mais il existe un y . Je dis il existe un y donc on peut trouver un y quoi dans la fonction tel que ce $f(y)$ il est différent du $f(x)$ d'un autre $f(x)$ quoi.
680. T2 : D'accord.
681. C : On peut trouver deux ordonnées différentes pour la fonction.
682. T2 : Bon, est-ce que vous pouvez essayer de clarifier, ça a pas l'air...
683. C : Je vais faire un schéma. En gros, tu prends un x quelconque là, t'as ton $f(x)$ disons c'est/
684. T2 : Vous avez à peu près tout regarder ou...
685. C : Ouais. Et tu peux trouver un y dans ta fonction, tu vois que si tu le prends, ton f de, tu prends y ici et ton $f(y)$ il sera différent. Si c'est une fonction constante, c'est pas possible ça.
686. Be : Hum.
687. C : Voilà. Je pense que c'est juste trouver deux ordonnées différentes quoi.
688. M : Ben, une fonction variable elle peut avoir deux, deux ordonnées non ? Si tu prends deux enfin.
689. C : Justement, c'est ce que je te dis.
690. M : Si t'as pas de bol, tu prends un y qui est égal à $f(x)$.
691. C : C'est pour ça que je dis, il existe un y .
692. M : Ouais...
693. C : C'est-à-dire que tu peux, pour une fonction qui n'est pas constante, tu peux trouver au moins un y ... Voilà.
694. M : Ok, ouais c'est sûr.

695. N : Bon et le lien... Le fait de dire ça, ça, ça donne une indication sur le fait de, de cette démonstration ?
696. C : Alors... Ah c'est vrai que là, on les a pris au hasard quoi, enfin... On les a pas placés, on a pas de conditions sur la relation entre a et b à part que a est plus petit que b quoi. Y a pas de symétrie par rapport à zéro ni rien.
697. N : Et donc, ça clarifie le fait que, l'énoncé un ou pas ?
698. C : Ben, pour moi ça le clarifie mais sur l'intervalle $[a, b]$ quoi.
699. Be : Oui, c'est sur $[a, b]$, c'est pas sur \mathbb{R} .
700. M : Et si on fait l'infini [inaudible] là [inaudible].
701. C : Après est-ce que c'est possible d'avoir une fonction qui fait ça puis qui se retrouve constante un moment et qui fait ça ? C'est pas... que ça existe quoi.
702. N : Si je te dis, si je traduis l'énoncé, si je te dis, en fait si on traduit l'énoncé/
703. C : Ah mais même, même/
704. N : Qu'est-ce que ça voudrait dire, on a quelque soit, je le traduis hein ?
705. C : Ouais.
706. N : Parce que le truc c'est qu'on prend au hasard, on a quelque soit a, b avec a plus petit que b , $f(a) = f(b)$.
707. C : Ouais, ouais, en fait, enfin, ouais, ouais.
708. N : C'est ça qu'il dit Liouville, c'est ça qu'il démontre.
709. Be : Oui. Mais donc, entre a et b , il démontre pas que la fonction est constante.
710. C : Tu peux le déplacer sur $[a, b]$ après. Tu peux le déplacer autre part ton a et b .
711. Be : Oui mais là, si il a démontré que ça euh Liouville, euh, il dit pas que euh... que c'est constant enfin... Entre a et b , ça peut varier, si il a montré que ça.
712. N : Donc là, là il a montré que ça. Si on regarde littéralement ce qu'il se passe, il part de a, b deux réels au hasard, donc c'est toujours quels que soient, avec a plus petit que b et il démontre, il arrive à $f(a) = f(b)$. Donc là, est-ce que vous pensez que c'est complet, enfin que cette preuve elle permet de conclure sur le fait que c'est constant, ou pas ?
713. Be : Mais le truc c'est que, euh... La conclusion non, mais la façon dont il est arrivé à, à la conclusion euh...
714. C : Ouais, limite son raisonnement est plus explicite que sa conclusion.
715. Be : Ouais. Si on regarde que la conclusion, il dit juste que $f(a) = f(b)$...
716. N : Hum.
717. Be : Si on prend les valeurs qui sont entre a et b , si on regarde que la conclusion, elles peuvent être différentes de $f(a)$ et de $f(b)$.
718. N : Mais alors dans sa démonstration, puisque tu dis/
719. Be : Après dans sa démonstration, il se sert du fait que... que ça reste constant donc euh... Donc si on regarde les deux, il a fait le, enfin si on regarde les deux il a fait la... la preuve mais...
720. N : Où est-ce que tu vois... Est-ce que tu es d'accord, est-ce que vous êtes d'accord que il utilise le fait que f reste constante entre a et b ?

721. C : Ah non, on utilise juste que f' est constamment nulle. Mais il utilise pas le fait que $f(b) = f(a)$.
722. Be : Oui mais si f' est constamment nulle, regarde là ça... ça te fait euh $h\varepsilon$, sachant que ε va tendre vers zéro.
723. M : Il a montré que $f(a) = f(b)$ /
724. N : Dis leur plutôt à eux parce que nous...
725. C : C'est un $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots$. Enfin je sais pas. Et après, il majore par un ε le total quoi.
726. Be : Ouais, mais si il tend, si le... si le truc qui majore tend vers zéro, ce que tu a majoré, ça tend vers zéro aussi.
727. C : Oui ben, peut-être qu'il aurait pu s'arrêter avant, enfin...Voilà.
728. N : Qu'est-ce que, M voulait dire un truc aussi.
729. M : Ben il a montré que $f(a)$ égal $f(b)$ mais aussi que la dérivée était nulle.
730. Be : Ben non, il l'a pas montré, il l'a supposé.
731. C : Non, il est parti de cette hypothèse.
732. Be : c'est son hypothèse.
733. N : Bon ben ça, vous pouvez en parler.
734. C : Enfin, moi je pense Be , effectivement, il aurait pu s'arrêter avant mais ça aurait été un peu, enfin il aurait dit $f(a+h)=f(a)$. Enfin là, il aurait du mettre à ce moment là des inégalités quoi. Alors que là, il a généralisé en fait. Il a généralisé sur tout l'intervalle.
735. Be : Ouais non, mais c'est pas ça que j'ai dit.
736. C : Ben t'as dit que si ε tend vers zéro, à ce moment là $f(a+h)=f(a)$.
737. Be : Ouais mais si/
738. C : Ben oui.
739. Be : Il a montré à chaque fois, que sur chaque euh...
740. C : Oui, ben voilà. Il le montre à chaque fois.
741. Be : Oui.
742. C : Il le montre à chaque fois et il généralise après.
743. Be : Je suis d'accord, mais j'ai dit que si on regarde que sa conclusion, on peut pas dire que f est constante. Si on regarde la démonstration et la conclusion là, je suis d'accord mais si on regarde que la conclusion euh, si on prend que la conclusion il dit juste que $f(b) = f(a)$, rien de plus.
744. C : Je sais pas moi, ça peut être pareil là, enfin... C'est pas parce que entre $a+h$ et a que ça change quelque chose quoi.
745. Be : Ben sachant que... qu'on fait tendre h vers zéro, ça veut dire que l'intervalle, il devient de plus en plus petit.
746. C : Tu fais tendre h vers zéro, ouais mais il n'empêche, enfin je sais pas. Après on est en maths hein, c'est abstrait/
747. Be : Non, mais bien sûr.
748. C : Y a des infinité de points au milieu et on peut zoomer autant qu'on veut... Enfin tu vois ?
749. Be : Ah oui, oui. Oui, non bien sûr.

750. N : On va reprendre avec l'autre groupe, pour finaliser la présentation.

751. C : Ouais.

**Annexe 23 : Transcription de l'exposé
des étudiants de l'INSA travaillant sur
la preuve adaptée du texte de
Liouville**

Exposé des étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville

1. C : Donc nous on avait un énoncé, donc de Liouville, donc euh Liouville c'était un, c'était aussi un professeur à Polytechnique mais qui a fait d'autres choses avant, entre autres, il était prof à Central, au Collège de France et compagnie et il a créé un journal « le petit journal de sciences je sais pas trop quoi », enfin apparemment qui est encore vachement connu maintenant.

[Rires]

2. T2 : « Le journal de Liouville », « Journal de Mathématiques Pures et Appliquées ».

[Rires]

3. C : Voilà, c'est un truc comme ça. Donc euh, lui entre 1847 et 1848, donc ce qu'il a proposé pendant qu'il était à Polytechnique donc, c'était que si on a une, la dérivée d'une fonction qui est constamment nulle alors, ça implique que la fonction elle est constante, voilà. Donc nous, on a travaillé sur euh, sur la preuve. Donc euh, on l'a séparée en plusieurs étapes. Donc trois grandes étapes, donc dans la première on a séparé en plusieurs sous étapes on va dire, parce qu'on a voulu les distinguer un peu séparément, voilà. Tu commences B ?
4. B : Donc en fait, ouais, les étapes qu'on a distinguées donc euh, en fait dans les deux groupes, il n'y a pas eu les mêmes distinctions, donc dans le groupe qui était ici, il y avait juste trois grandes parties. Donc en gros, c'était il expose le problème et c'est vraiment une partie où on expose ce qu'on va faire, une partie calculatoire et une partie conclusion. Alors que nous, on a distingué quand même trois sous parties. C'est-à-dire que d'abord euh, il exposait ce qu'il voulait faire donc là, « soit a inférieur à b deux réels, montrons que $f(a) = f(b)$ ». Ensuite, c'était comment le faire en deuxième partie, qu'est-ce qu'on va utiliser pour démontrer ça ? Et la troisième partie, enfin quel chemin on va suivre et la troisième partie en fait, c'est quel théorème. Donc là, c'était la, l'équation générale, c'est l'équation de la dérivée/
5. C : De la limite, non c'est la définition de la limite de la dérivée.
6. B : Voilà.
7. P : La définition de la dérivée qui elle-même est une limite.
8. C : Voilà, la limite du quotient qui définit la dérivée, voilà... Pfff, j'y suis arrivé.
9. B : Donc en suite, on était d'accord sur les deux dernières parties quoi. Donc une partie euh, uniquement calculatoire et une partie, enfin uniquement... Et une partie conclusion, quoi. Voilà. Vas-y Ni .
10. Ni : Donc euh pour la première partie, donc c'est-à-dire qu'il pose ses hypothèses, c'est-à-dire que il pense donc euh, premièrement, dans le groupe, il y en a qui ont direct écrit des choses et il y en a d'autres qui ont essayé de faire des petits dessins. Donc on a vu que les petits dessins, c'est pas toujours forcément la bonne solution et écrire des choses non plus. Donc fallait mixer un peu les deux. Et donc, lui, il dit que pour n'importe quel a , enfin un a et un b arbitraire, et avec a inférieur à b , donc euh sur l'axe des abscisses par exemple ici, on a $f(a) = f(b)$. C'est-à-dire que pour un a donné et pour un b donné, ils ont la même image. Donc euh, ensuite, il considère ces points comme il le dit et il définit que entre a et b il y a, donc il y a une longueur et cette longueur, il la découpe en m petits morceaux. C'est-à-dire que bon il donne ici, donc euh, la longueur qui est $b - a$ ici, sur m . C'est-à-dire que il y a plein de petits intervalles, m , qu'il découpe sur l'axe des abscisses. Et ensuite il pose, donc là, il définit chaque point, chaque point. Il va définir chaque point, donc c'est-à-dire il va démarrer de a , il va faire, il va incrémenter sur l'axe des abscisses et euh... Donc ici après, il rappelle la dernière étape qu'il va utiliser pour

démarrer le calcul, donc euh, ce que C a dit là, là, l'équation générale de la dérivée et donc euh, il l'écrit et donc il l'écrit ainsi $f(x+h) - f(x) = h(f'(x) + \varepsilon)$. Et ici donc, c'était pas sur l'original, enfin sur la version original ça n'y était pas, donc on nous a indiqué que ε tendait vers zéro lorsque h tendait vers zéro. Et donc, à partir de ces hypothèses là, il démarre le calcul et voilà. Donc je vais laisser la place à quelqu'un.

11. C : Quelqu'un explique le calcul ?
12. Be : Donc euh, en fait, le calcul il prend, il applique cette formule à chaque point qu'il a, il applique cette formule pour chaque petit segment qu'il a pris. Donc euh on a $f(a+h) - f(a) = h\varepsilon_1$. Il fait ça pour chaque petit segment et vu qu'il veut toute la fonction, il les additionne à la fin. Et euh, on voit que tous les membres là s'annulent et en fait, à la fin, on se retrouve avec $f(b) - f(a)$ qui est égal à h facteur de la somme de tous les ε . Donc euh, il fait une approximation, il majore euh, tous les ε , par euh, ε et à la fin on arrive à $f(b) - f(a)$ qui est inférieur ou égal à hm puisqu'il y a m ε , euh, $hm\varepsilon$. Et après... Quelqu'un d'autre ?
13. M : Ouais. Donc euh, pour trouver cette équation là, il la déduit de, de la première équation de h , qui, enfin, c'était les conditions quoi. Et il a remplacé le hm par la valeur de cette équation et il l'a remplacé dans l'inégalité et il en déduit que $f(b) = f(a)$.
14. C : Ouais nous, ben en gros, ce qui nous a posé quelques petits problèmes, ben au début enfin, pour ma part en tout cas, j'ai eu du mal à comprendre d'où venait le ε . Bon à la fin j'ai compris, si vous voulez je vous montrerai, mais c'est pas compliqué en fait. Et ce qui nous pose problème à la fin c'est... Déjà, comment est-ce qu'il passe de cette inégalité, bon il fait tendre, enfin ε tend vers zéro donc $f(b) - f(a)$ inférieur ou égal à zéro et lui il dit « le premier membre de l'inégalité est nécessairement nul donc $f(b) = f(a)$ ». Nous, on a un peu du mal de comprendre comment on passe de l'un à l'autre. Voilà, donc on essaye d'y réfléchir et l'autre problème qui s'est posé, plutôt dans l'autre groupe enfin... C'est est-ce qu'il a le droit de majorer avec un ε comme ça. C'était ça votre truc ?
15. B : Ben en fait, ce qu'on s'est demandé, c'était surtout que au début on a un ε donc a priori dans l'équation générale, c'est un ε qui va varier en fait en fonction de plusieurs paramètres, en fonction de x etc.
16. T2 : Tu peux préciser ?
17. B : Comment ?
18. T2 : « En fonction de x etc », tu peux préciser le « etc » ?
19. B : Ben x , a priori ce serait à partir de tout, de x et de h ...
20. C : Le ε ?
21. B : Le ε ouais, le ε de la formule de départ, il est fonction de x et de h .
22. T2 : D'accord.
23. B : Et ensuite, et donc ensuite là, il nous dit que ε c'est la valeur, c'est la plus grande de toutes les quantités représentées par ε_1 , ε_2 , ε_3 etc. Donc c'est plus grand que n'importe lequel de tous ces ε_i donc ça veut dire qu'on prend un ε fixé. Et donc euh, on savait pas si on pouvait euh, enfin non a priori on peut pas, au début avoir ε qui est variable puisqu'il va être fonction d'autres, d'autres euh variables et là prendre un ε fixé. Donc en fait, c'est ça qui nous a posé problème sur la fin quoi.
24. C : On a pas trop trouvé la réponse d'ailleurs.
25. B : Voilà.

26. P : Alors avant peut-être V , tu pourrais peut-être faire le dessin que tu avais fait sur ton papier pour leur faire comprendre ce que c'est que les barreaux de l'échelle et tout ça de façon qui...
27. T2 : Ben moi, je vais en profiter pour poser une question pendant qu'il fait le dessin. Tu dis que le dernier ε il ne varie plus ?
28. C : Ben a priori non.
29. T2 : Comment est-ce qu'il est défini ?
30. C : Ben, il est défini par rapport à...
31. B : A tous ces ε là en fait. On dit qu'il est plus grand.
32. T2 : C'est plus précis, c'est quoi ?
33. C : C'est le plus grand de tous.
34. B : Voilà, c'est le plus grand de tous.
35. T2 : C'est le max.
36. C : Le plus grand de tous les ε là, avec un indice, les ε_i , on prend le plus grand.
37. B : De n'importe lequel.
38. T2 : Pourquoi est-ce qu'il ne varierait plus ?
39. C : Ben parce que enfin, parce que pour majorer, il faut bien majorer par rapport à quelque chose de fixe non ? Enfin majorer...
40. B : Ben on nous dit « soit ε ». Donc ça veut dire qu'on en prend un fixé quoi.
41. T2 : D'accord. Et dernière étape, pourquoi euh si $f(b) - f(a)$ plus petit que $(b - a)$ fois ε , pourquoi ça voudrait dire que $f(b) - f(a)$ est plus petit que zéro par exemple ? Si ça vous pose problème de dire zéro, mais déjà pourquoi plus petit que zéro ?
42. C : Bonne question... Ouais, pfff. En fait c'est pas vraiment, ouais, il faut faire la limite.
43. B : Ouais ben, ils peuvent être plus petit que zéro.
44. C : Faut faire la limite des deux côtés en fait.
45. T2 : La limite en fonction de ?
46. C : Parce que si on fait tendre, si on fait la limite de, de ce produit quand... ε tend vers zéro, ça fait zéro. Et la limite de ça, quand ε tend vers zéro et ben ça fait la limite de ça.
47. T2 : Ouais.
48. C : Parce qu'il n'y a pas de ε . Donc si on fait/
49. T2 : Mais est-ce que tu peux prendre la limite quand ε tend vers zéro ? Vous m'avez dit à un moment que ε , c'était une constante/
50. B : Ben au départ justement, c'est pas une constante. Au départ, il est fonction de h quand même puisqu'on nous dit « ε qui tend vers zéro quand h tend vers zéro ».
51. T2 : D'accord. Donc c'est plutôt h qu'on fait tendre vers zéro.
52. B : Euh, ouais.
53. C : On fait tendre h donc ε donc ça fait un peu de pertes dans ce qu'il dit là, mais... Si il y en a un qui tend vers zéro l'autre aussi quoi.
54. T1 : Le ε en bas, c'est le même ε que celui d'en haut ?

55. C : Parce qu'ils mettent que ε tend vers zéro quand h tend vers zéro.
56. B : Ben oui.
57. C : Donc si on fait tendre h vers zéro, ε va tendre vers zéro quoi.
58. T1 : ε dans l'inéquation du bas là $f(b)-f(a)$ inférieur ou égal $(b-a)\varepsilon$. Quel est le rapport entre ce ε et celui du haut ?
59. B : Ben on se sert. Ah non, euh non.
60. C : Celui-là, là ?
61. B : Ouais ben si, c'est celui-là quoi. C'est le même.
62. T1 : Pourquoi c'est le même ?
63. C : En fait c'est ça qui pose problème enfin, enfin...
64. B : Ben...
65. C : C'est que/
66. B : Si ils ont le même nom.
67. C : Apparemment, ce serait le plus grand de tous ces ε là. Ce serait le même ε que cet ε là et pourtant celui-là, on l'a pas fixé avant quoi. Donc euh, enfin, c'est un peu bizarre quoi.
68. T1 : Le ε du haut, il dépend de quoi ?
69. B : De h et de x . Alors que celui du bas, il dépend de euh, de celui qui fait la preuve quoi, il est fixé.
70. C : En fait, je sais pas, c'est un peu bizarre. C'est comme si on le laissait flottant pendant toute la démonstration et puis au final on lui trouve une valeur qui marche bien quand même, c'est un peu ça.
71. V : Puis à un moment, on arrive quand même au même problème que l'autre groupe [qui a travaillé sur l'autre preuve et qui est passé en premier] quand on arrive à plus l'infini fois zéro...
72. Ni : Explique ton dessin.
73. P : Alors attend, avant ça, le dessin qu'a fait V ici hein, pour que vous compreniez la trame de la démonstration, hein. On a l'hypothèse que la dérivée est constamment nulle, hein. Alors pour démontrer que f est constante, il suffit de démontrer que si on prend deux points arbitraires n'importe, deux valeurs arbitraires de x , hein, c'est toujours la même chose. Donc euh, si on prend deux a et b , $f(a) = f(b)$. Donc ça, on a dit tout à l'heure que c'est la même chose, peut-être que certains doutent, que dire que $f(b) - f(a)$ est plus petit que n'importe quoi de fixé à l'avance. Hein, que n'importe quel ε fixé à l'avance auquel on peut penser, $1/1000000000$, $1/1000000$ etc, hein bon. Alors pour calculer $f(b) - f(a)$, $f(b) - f(a)$, c'est ça moins ça. Donc ce qu'il fait, il fait un découpage de $[a, b]$. Voilà. Et puis $f(b) - f(a)$, le haut, c'est la longueur totale de l'échelle, hein, c'est la longueur totale de l'échelle et $f(b) - f(a)$ et ben c'est la somme des intervalles entre les barreaux. D'accord ? $f(a+h) - f(a)$, c'est l'intervalle entre les deux premiers barreaux $f(a+2h) - f(a+h)$ entre les barreaux suivants etc. Donc, pour démontrer que $f(b) - f(a)$ est tout petit, il suffit qu'il ait démontré que la somme des f , des intervalles entre les barreaux, soit toute petite hein. Alors c'est ça qu'il fait ici, $f(b) - f(a)$, c'est la somme de tous les barreaux là. Et c'est $h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m)$. Alors à partir de là, arrive comment dire, arrive l'objection de, ce que tu disais ?
74. V : Ouais alors l'objection, c'est quand on fait, on fait, c'était où déjà ?

75. B : C'est là.
76. V : Ouais c'était là. En fait ici, on aura un h qui tendra vers zéro et là on fait la somme de plein de petits éléments mais de petits éléments qu'on peut avoir infiniment, enfin je sais pas si vous voyez ce que je veux dire. C'est euh, on a m qui est aussi grand qu'on veut donc on aura autant de petits éléments qu'on veut. Donc a priori, la somme de plein de petits éléments va faire quelque chose de grand. Vu que on en a tant qu'on veut. Donc, on se retrouve dans le même problème de faire le zéro fois plus l'infini.
77. T2 : Les petits éléments dont tu parles, tu peux les situer sur le dessin ?
78. C : C'est les ε ?
79. V : Ouais, c'est les ε .
80. P : C'est ce qu'il a mis en bleu. $f(a+h) - f(a)$ c'est égal à h fois ε_1 . Donc il a mis en bleu, sur l'axe des ordonnées. Voilà $h\varepsilon_1$ ou $f(a+h) - f(a)$ et pareil pour les autres.
81. T1 : Liouville, il a pas une astuce pour régler ce problème ? En mettant ces petits éléments, en mettant m ?
82. B : Ben, c'est pour ça qu'il majore en fait.
83. C : En fait, moi je pensais que pour les ε du début là, on dit qu'il est, enfin, on dit qu'il est pas fixé. Mais pourquoi dans sa définition au lieu de dire pour tout ε , il en prend pas un. Il existe un ε et il modifie un peu la définition de, de la dérivée en générale quoi. Et à ce moment là, ça lui permet de le fixer ici et on le retrouve en bas fixé quoi. Peut-être qu'il a fait ça parce qu'en fait, il explique pas vraiment d'où vient ce ε , ce qu'il en est au début, à la fin, est-ce qu'il est fixé, pas fixé etc. Donc euh, on sait juste qu'il tend vers zéro en fait. Il aurait peut-être pu expliquer plus parce que ça peut poser problème.
84. P : Est-ce que tu pourrais dire la discussion qu'on a eue à la fin. Quand on a dit, si au lieu de la courbe, l'espèce de serpent là, si c'était une droite, à ce moment là qu'est-ce qu'il se passe ?
85. V : Ben si il y avait une droite ben dans ce cas là...
86. P : Non, non n'efface pas.
87. V : Ouais mais enfin. Si on avait une droite, en fait, tous les ε seraient les mêmes.
88. P : Tous les ε seraient les mêmes.
89. V : Là, on aurait pas de problème.
90. P : Donc à ce moment, on serait peinarde.
91. V : Ouais.
92. C : Ce serait bien.
93. P : Majorer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ par un ε , si c'est tous les mêmes, a priori, c'est bon. Alors, qu'est-ce qui pourrait faire que ça ne marche pas.
94. B : Y a la remarque à Bj de tout à l'heure.
95. P : Ouais.
96. B : Que ici, on a m divisions, et euh, on sais jamais mais euh. Là, on définit, enfin m il est défini comme tel et peut-être que ici, donc tout à l'heure, on s'était dit on avait repris comme si l'énoncé était vrai, enfin était vrai quoi. Donc on disait qu'on avait ça, mais peut-être que ici, on a une valeur qui fait ça par exemple. Et on...

97. T2 : Mais c'est plus dérivable, si tu fais ça.
98. B : Ouais, mais on était pas sûr que entre, que entre/
99. C : Arrondis le.
100. Bj : Arrondis le, ton truc.
101. B : Voilà. On était pas sûr que entre, que entre une division de m , il n'y ait pas une irrégularité.
102. C : Oui mais alors ça veut dire que son, ça veut dire que son théorème est pas bon.
103. V : Ca veut dire qu'il y a des limites à son théorème.
104. C : Parce que a, b [Inaudible]. Enfin ça veut dire que c'est pas pour tout a et b quoi. A ce moment là, il faut mettre des...
105. B : Faut mettre des conditions/
106. Bj : Non mais ça, ça peut pas marcher parce que ça voudrait dire que la dérivée est [Inaudible].
107. V : Oui, ça oui. Y a un problème qui se pose quoi.
108. B : Elle peut être nulle, là, elle peut être nulle là et ici, pourtant, on l'étudie pas parce qu'on saute euh, un cran en arrière/
109. Bj : Non, mais la définition c'était...
110. C : Non mais, on le saute pas le cran parce qu'on fait tendre m vers l'infini.
111. T2 : Alors justement, pour éviter, parce que c'est l'heure de conclure, pour éviter qu'il y ait des sauts comme ça, qu'on prenne pas en compte, effectivement, il divise son intervalle euh, une infinité de fois.
112. C : Une infinité, ouais.
113. T2 : Pour accéder justement à toute la longueur de la courbe. Mais le problème qui se pose après justement, c'est de savoir si ce max des ε ... On sait que, individuellement, les ε ils vont tendre vers zéro quand h va tendre vers zéro. C'est-à-dire quand le pas se rapproche... Mais qu'est-ce qu'il se passe si j'en prends une infinité. Je prends le plus grand d'une infinité.
114. C : Hum.
115. T2 : Est-ce que si chacun tend vers zéro, est-ce que le plus grand va aussi tendre vers zéro.
116. C : Ben justement, c'est la question du jour. Appeler 36 35.
117. T2 : Est-ce que ça vous paraît ça, si j'ai que des choses qui tendent vers zéro, alors le plus grand de ces choses là va tendre vers zéro. Sachant que le plus grand va bouger, peut bouger ?
118. B : Ben oui, si tous ils tendent vers zéro, forcément euh...
119. Be : Ben non parce que si il est pas fixé, il peut aller ou il veut.
120. C : Ca revient à ce problème là. Ben ça revient toujours au problème d'une infinité d'éléments quoi.
121. T2 : Du coup c'était simplement pour vous faire sentir un peu ces choses là. L'année prochaine, il y aura un peu des théorèmes qui traiteront de ce genre de problèmes là. C'est-à-dire qu'est-ce qu'il se passe quand on prend deux limites, une fois dans un sens, une fois dans l'autre... Ces problèmes...
122. P : C'est des questions un peu d'uniformité hein/

123. B : Hum.
124. P : C'est-à-dire si vous avez beaucoup de trucs qui sont petits mais que vous ne savez pas exactement comment ils sont petits, les un par rapport aux autres etc/
125. C : Ouais c'est ça, on a pas d'ordre entre eux...
126. P : Ben en fonction du petit, et en fonction du beaucoup, ça peut vous donner n'importe quoi hein. C'est un peu comme le zéro fois l'infini.
127. B : Hum.
128. C : Non mais, c'est ça enfin...
129. P : Il faut arriver à contrôler. Donc, si il y a quelque chose qui vous dit, et si ensuite on fait la démonstration proprement, on ajoute les ingrédients qu'il faut effectivement on arrivera, comment dire, à majorer tous ces trucs là mais euh, c'est pas justifié là.
130. C : Ouais, c'est toujours le problème de l'infini en fait.
131. P : Alors ça, ce que je voudrais vous dire pour vous donner quand même le moral par rapport à ce genre de choses/

[Rires]

132. P : D'abord bon... Le, l'école polytechnique au XIX siècle, c'est le centre de la vie scientifique en France, hein. L'académie des sciences, c'est une reconnaissance et tout ça mais il y avait... En 1870 à votre avis, à la faculté des sciences de Lyon, il y a eu combien de Licence de sciences qui ont été passées ?
133. V : Euh, dix.
134. C : Pas des masses.
135. P : Tout compris, bio, physiques etc.
136. C : Moi je dirais trois ou quatre, allez.
137. P : trois.
138. C : Voilà bingo.

[Rires]

139. P : Bon voilà, alors que à l'école polytechnique, il y avait 200, 300 élèves par année, qui avaient été sélectionnés, qui étaient des gens qui étaient bon et tout ça. Donc les grands, les savants principaux en mathématiques, ils enseignaient à l'école polytechnique. Donc, il y a eu Cauchy dans les années 1810-1820-1830, Liouville un peu plus tard, etc. Bon, c'était vraiment les savants qui étaient au top sur ce genre de trucs et ils ont donné des démonstrations dans lesquels il y avait des conneries. Hein, bon. Une autre chose, qu'on pourrait voir aussi et qui est assez classique hein, si vous avez une fonction qui est continue sur tout un intervalle, est-ce qu'il est possible qu'elle soit dérivable en aucun point. Hein ? Donc toi tu as dit tout à l'heure ?
140. B : Ouais moi je dis que a priori, non. Enfin moi, je pensais que non.
141. P : Sauf si c'était une ? Tu avais prononcé le mot ?
142. B : Euh...
143. P : Un mot qui commence par « *f* » !
144. B : Une fractale, oui.

145. P : Une fractale. On arrive pas à s'imaginer une fonction qui soit continue sur un intervalle mais qui soit dérivable en aucun point, parce que pas dérivable en un point, c'est des pics quoi, des trucs comme ça. Mais comment elle pourrait être dérivable en aucun point ?

146. C : Comment est-ce qu'il pourrait y avoir que des pics ?

147. P : Voilà, c'est-à-dire un truc, alors vous connaissez la maladie de Parkinson, hein la maladie de Parkinson ?

[Rires]

148. P : Et ben la maladie de Parkinson jusqu'à l'infini, hein. Vous avez des trucs c'est continu, c'est bien obligé, la main elle ne se détache pas hein ?

149. C : Hum, hum.

[Rires]

150. P : Donc elle est là et ça tremble tellement que si vous prenez un microscope, un microscope électronique encore et ça continuera toujours à trembler. C'est continu, mais c'est dérivable en aucun point. Bon les trajectoires du mouvement Brownien, c'est des choses qui sont vachement importantes dans les maths maintenant, y compris même dans la sainte finance etc. Bon et ben les trajectoires du mouvement Brownien, c'est typiquement ça. C'est des, des fonctions qui sont continues mais qui sont dérivables nulle part ?

151. C : L'horreur.

152. B : C'est-à-dire, ça tremble toujours comme ça et si vous regarder de plus près et ben ça tremble encore et encore de plus près, ça tremble encore. Donc ça, c'est devenu des choses qui sont extrêmement importantes dans les mathématiques et qui sont inimaginables a priori tant qu'on a pas fait ce genre de raisonnements. Et ben, on a eu pendant cinquante ans, cent ans au XIX dans les cours qui étaient fait par les plus grands mathématiciens des démonstrations comme quoi si une fonction était continue, elle était toujours dérivable au moins en un point, ce qui est un résultat faux, hein ? Donc là, ça c'est autre chose, ça c'est un résultat qui est juste avec une démonstration qui est incomplète hein, mais il y avait même des résultats qui étaient faux et qu'on démontrait dans les cours par les plus grands mathématiciens. Donc ça, ça doit vous donner le moral au sens de, si il y a des trucs que vous ne comprenez pas/

153. C : Dans dix ans, il y aura des trucs qui seront remis en question.

154. P : Non mais au moins, que vous n'êtes pas les premiers quoi. Il y a eu des gens prestigieux et il y a même eu toute une époque, alors c'était cent ans avant, et notamment Berkeley, qui était un grand philosophe anglais, qui a dit que le calcul différentiel, donc tous ces machins là, les dérivées, les intégrales, etc venant de Newton peu de temps avant, hein de Newton et Leibniz, que tout ça, non seulement c'est, c'était inconsistant du point de vue philosophique, mais que c'était même incohérent du point de vue mathématique. A cause de ces histoire d'infini et qui sont un peu les choses qu'on vient de voir là.

155. C : Hum.

156. Bj : Pfff.

157. P : A savoir que c'est toujours un peu du zéro / l'infini, c'est des choses c'est des... Parce que l'infini, ça existe pas vraiment quoi hein, c'est pas clair, c'est des trucs très grands, des trucs très petits mais quand on les combine un peu ensemble et qu'on arrive pas vraiment à les contrôler les uns, les autres, à les majorer etc... Bon ben, on sait plus trop ce qu'il en sort quoi. Donc dans l'enseignement, on vous montre en général les choses de façon assez dogmatiques, assez carrées

etc et tout... Euh, en les disant de façon juste quoi, hein. Mais on saute souvent à pied joint sur les difficultés de façon à ce que vous ne soyez pas, que vous ne vous foutez pas hein/

[Rires]

158. P : Un coup de pétard dans la tempe quoi ! Mais bon effectivement, il y a des difficultés comme ça et qui peuvent avoir un intérêt mathématique. Après donc, c'est un peu pour répondre à la question de Bj au départ... Quand tu dis, hein parce que tu as dit « pourquoi il se prend la tête alors que c'est évident, y a qu'à faire un dessin. » Bon alors, oui, par certains côtés mais par d'autres, tu vois que sur la question de fonction continue et dérivable nulle part, voilà, un truc mathématiquement intéressant et si tu avais voulu faire un dessin comme ça, ben tu n'aurais pas réussi quoi. Donc quelque fois, c'est nécessaire de faire des démonstrations un peu compliquées, un peu rigoureuses etc, parce que, il y a des choses qui pourraient échapper.

159. Bj : Mais c'est vous qui avez dit que dans les maths, il y avait la notion du presque partout.

160. P : Oui. Enfin ensuite, dans la théorie de la mesure, « presque partout », comment expliquer ça un peu avec les mains. C'est-à-dire une propriété qui est pas vraie, qui est pas vraie partout mais moralement elle est vraie.

161. T2 : Si il y en a qui ont des choses [inaudible]...

[Rires]

162. P : Voilà.

163. L : Non c'était intéressant.

164. T2 : C'était pas pour t'arrêter, c'était juste vu qu'il y en a qui fermaient leur sac...

165. P : Non mais...

166. V : Non mais, c'était intéressant d'entendre parler des maths avec des « trucs » et des « pleins »...

167. P : Les probabilités, par exemple, hein. Vous jouez simplement bêtement à pile ou face. La probabilité pour que ça tombe toujours sur pile éternellement/

168. B : Est nulle.

169. P : La probabilité elle est nulle. Ceci dit/

170. V : C'est possible.

171. P : L'événement pile, pile, pile, pile, à l'infini/

172. V : Est faisable.

173. P : Ca existe.

174. V : Ouais.

175. C : Ben oui.

176. P : C'est pas impossible mais la probabilité est nulle, donc on va dire que presque sûrement/

177. B : « presque sûrement »...

178. P : Hein, il y aura un jour ou l'autre face. Ca, quand on fait du calcul des probabilités qui n'est pas seulement pour le plaisir de jouer à pile ou face mais sur les questions de la vie courante, la physique quantique, les cours de bourse enfin tout ça... Tout un tas de choses comme ça/

[La discussion continue une dizaine de minutes. Je ne transcrits pas]

**Annexe 24 : Transcription des débats
du groupe d'étudiants de L1
travaillant sur la preuve inspirée par
le texte de Liouville**

Groupe d'étudiants de L1 travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy (G-L1-C) :

1. T2 : Est-ce que vous avez tous eu deux pages ?
2. Y : Situer historiquement le mathématicien...
3. Y : Tiens c'est la suite dont...
4. Y : Ah mais c'est Cauchy qui a fait ça !
5. A1 : C'est la suite dont on parlait la dernière fois, non ?
6. A2 : Cauchy, Cauchy, c'est pas convergence des suites...
7. A1 : Si dans le rappel dont parlait [Inaudible]...
8. Y : Je savais pas de quoi tu parlais, si, si, non mais c'est ça.
9. T1 : Tu as branché les deux micros
10. T2 : Ouais, c'est branché.
11. A2 : Ah ça enregistre là. Il va falloir qu'on dise pas d'idioties.
12. [...]
13. T2 : Vous avez repéré la consigne dans le texte ? Ce que l'on vous demande d'abord, la première partie c'est de regarder, situer un peu le mathématicien, donc pour vous Cauchy et puis regarder l'énoncé 1 puis essayer de vous positionner un peu sur cet énoncé : qu'est-ce que vous en pensez, est-ce que vous pensez qu'il est pas vrai est-ce que vous le connaissez, ce genre de choses.
14. Y : Ouais, mais on le connaît.
15. A1 : Moi, Cauchy je le connais pas tout seul. Je connais que Cauchy-Schwarz, moi.
16. T2 : Je peux vous donner [Inaudible].
17. Y : [Rires] 1820.
18. A2 : Alors e c'est un nombre quelconque ?
19. T2 : Non, e c'est e .
20. A1 : Non, e c'est le nombre que tu connais.
21. A2 : Ah oui, oui, exponentielle, pardon
22. T2 : Oui.
23. Y : Ouais ben celui là, moi je sais qu'on en avait fait un truc en terminal, un exo où justement on montrait que ça convergeait vers e . Donc euh, ça me paraît logique [Rires]. Enfin vu qu'on a déjà fait.
24. A1 : voilà, quatre vingt treize. [Il s'agit du numéro de la première page sur Cauchy dans Dugac (2003)]
25. Y : C'est combien dix-neuvième ça, mille huit cents, ouais c'est dix-neuvième. C'est de l'histoire des maths. Qu'est-ce que tu en dis, toi, sur l'histoire de Cauchy ?
26. A1 : Je suis en train de lire.
27. Y : Ils en disent de celui-là alors ?

28. T2 : Vous voyez à peu près quoi faire ?
29. A1 : Je me rappelle plus comment on situe historiquement le mathématicien ?
30. T2 : Tu l'as su ? Si tu te rappelles... Non, non, mais je sais pas par exemple, de quel siècle il est, est-ce qu'il est connu ? Est-ce que vous l'avez déjà rencontré, ce genre de chose là. Je vous demande pas forcément une réponse par écrit sauf pour tout à l'heure si vous faites un présentation, dire en gros, il a vécu à telle période...
31. A2 : Enfin alors rencontré peut-être pas, mais vu oui sûrement.
32. T2 : Comment ?
33. A2 : Rencontré peut-être pas, je disais. Vu, oui.
34. T2 : Rencontré quoi ?
35. A2 : Cauchy, Cauchy.
36. T2 : Ah vu.
37. A2 : La vache, c'était une blague...
38. A1 : Moi je l'ai vu associé avec Schwarz seulement.
39. T2 : Ouais pour quoi ?
40. A1 : Pour le théorème de Cauchy-Schwartz.
41. Y : Ah, mais c'est Cauchy-Schwartz.
42. T2 : D'accord, c'est le même à ton avis ?
43. A2 : Non, c'est le théorème de Cauchy pour la convergence.
44. T2 : Ouais, alors vous l'avez entendu pour quoi le théorème de Cauchy pour la convergence ?
45. A2 : En maths-analyse.
46. T2 : En quoi ?
47. A2 : En maths-analyse, c'était comme quoi, Cauchy, toute suite de Cauchy est convergente.
48. T2 : Toute suite de Cauchy est convergente.
49. A2 : Et que toute suite de Cauchy, c'est quoi... C'est valable dans un espace complet.
50. T2 : Oui c'est ça, dans un espace complet. Tu connais quoi comme espace complet ?
51. A2 : Ben y avait \mathbb{R} , y a \mathbb{R} qui est complet.
52. T2 : Voilà, donc c'est un peu ça l'idée. Et à votre avis, du coup, si vous avez entendu plusieurs fois son nom en cours de maths-etc, c'est un mathématicien important ?
53. Y : Ben ouais, sans doute.
54. T2 : Ouais ?
55. ? : Oui, si, si.
56. T2 : On peut regarder dans « histoire de l'analyse ». Y a combien de pages sur Cauchy par exemple ?
57. A1 : Y en a une dizaine.
58. T2 : Une dizaine. Et ils en ont choisi combien pour parler de l'histoire de l'analyse ?

59. A1 : Ouais y en a neuf.
60. T2 : neuf auteurs, neuf mathématiciens ?
61. A1 : Non, neuf pages.
62. T2 : Et ils disent quoi ? Très rapidement ?
63. A1 : Le cours d'analyse, la continuité et la convergence, l'intégrale de Cauchy et la formule de Taylor [Il s'agit du titre des paragraphes sur Cauchy dans Dugac (2003)].
64. T2 : Cauchy le fondateur [Le titre du chapitre].
65. A2 : C'est quoi formule de quoi, de Taylor ?
66. A1 : Oui de Taylor.
67. T2 : Vous les connaissez les formules de Taylor ? Vous avez déjà entendu parlé de ça ?
68. A2 : Oui, on en a déjà entendu parlé.
69. A1, Y : Oui.
70. T2 : Donc, il doit avoir quelque chose à voir avec ça. Donc c'est important, tu as parlé de la complétude, des suites de Cauchy, formules de Taylor vous connaissez, vous avez entendu parlé de Cauchy-Schwarz, je suppose que c'est le même Cauchy [...]. Le cours d'analyse je vous ferais juste remarquer que c'est lié avec l'énoncé que je vous ai donné ici, d'accord ?
71. A, Y : Hum hum.
72. T2 : Cet énoncé là, il provient du cours d'analyse. Alors, Cours d'analyse, si vous regarder page quatre vingt treize... Enfin il provient, j'ai mis inspiré, c'est-à-dire que je l'ai quand même adapté pour que ce soit lisible. Donc si vous arrivez à situer un peu ce que c'est que le cours d'analyse, ça vous permet d'avoir déjà des éléments. Vous en avez déjà entendu parlé en maths, c'est à telle époque, ça vient de tel bouquin et c'est déjà bien.
73. A1 : C'était donné pour l' X .
74. T2 : vous savez ce que c'est que l' X ou pas ?
75. Y : Oui.
76. ? : C'est là où on ira jamais.
77. Y : Il avait quand même vingt deux ans.
78. A1 : Ben, c'est plus que Galois déjà, hein.
79. T2 : A vingt deux ans, il rentre à l'école... Il fait son cours à l'école polytechnique ?
80. Y : Ouais, enfin il fait une conférence, je sais pas si ouais si c'est à polytechnique.
81. T2 : c'est mille huit cents combien le cours à l'école polytechnique, ça doit être écrit quelque part ça ?
82. ? : euh, mille huit cent vingt et un.
83. T2 : Mille huit cent vingt et un et Cauchy c'est quoi ses dates...
84. ? : Euh...
85. T2 : Bon.
86. A1 : Cauchy...
87. Y : Est-ce qu'ils les donnent ?

88. A1 : C'est peut-être à la fin je sais pas, je lis vite hein...
89. T2 : Bon, si ça y est pas c'est pas grave hein.
90. ? : Peut-être à la fin.
91. Y : Ca doit être mille huit cent. Ah non, il a peut être pas vingt et un ans.
92. T2 : Quelque chose... En tout cas en mille huit cent vingt et un, il n'a plus huit ans et certainement pas non plus soixante dix.
93. A2 : Ben ouais.
94. A1 : Mille sept cent quatre vingt dix, je dirais. Ouh, y a tellement de pages avec écrit Cauchy marqué dedans.
95. T2 : Bon ce qui... C'est pas forcément la peine de passer trop de temps, je pense que vous avez vu un petit peu le personnage.
96. ? : ouais.
97. T2 : Ce qui serait intéressant maintenant, c'est que vous vous prononciez sur cet énoncé 1, là. Est-ce que vous pensez qu'il est vrai ou pas, pourquoi et tout ça.
98. Y : Ouais.
99. T2 : Vous pouvez chercher ensemble aussi.
100. ? : Oui.
101. Y : Ca vaudrait dire que ça, ça, ça tend vers un.
102. T2 : Ouais.
103. ? : Hum, hum.
104. Y : Ouais, pourquoi pas, quoi. D'un côté on multiplie par un nombre de plus en plus grand, celui-là il se rapproche de plus en plus de un, donc ça de zéro mais celui-là il se rapproche de l'infini et ouais pourquoi pas quoi.
105. T2 : C'est quoi ça, c'est une forme indéterminée.
106. Y : Ouais, c'est une forme indéterminée.
107. T2 : Je le dis pour le micro. Tu es passé à l'exponentielle et tu dis que la suite elle est égale à exponentielle de $n \ln(1+1/n)$.
108. Y : Non c'est bon, c'est bien ça, on peut passer.
109. ? : Ouais, ouais.
110. T2 : Ca me choque pas en tout cas mais c'est peut-être pas bon.
111. A1 : Si ça doit être vrai.
112. T2 : C'est quoi vos prénoms déjà. C'est comment vos prénoms déjà pour que je...
113. A2 : A2.
114. Y : Y.
115. A1 : A1.
116. T2 : Donc A2, qu'est-ce que tu as fais toi ?

117. A2 : Ah non, non, j'ai fait un truc vite fait, j'ai fait u_1 , u_2 et hop tac, je vois que c'est décroissant enfin c'est pas...
118. T2 : u_1 , u_2 c'est combien ? Quatre ?
119. A2 : Quatre et deux, deux et quatre, enfin.
120. T2 : Et les termes d'après, tu as regardé ou pas ?
121. A2 : Euh non, du tout, non, non. Enfin, je sais pas on me dit $\lim u_n$ quand n tend vers l'infini égal e , enfin je sais pas, vite fait je regarde, je vois ben $1/n$ ça va tendre vers 0, le n à l'infini donc je sais pas ça va...
122. T2 : Vous savez combien c'est à peu près e ?
123. A1 : e c'est 2,7 peut être un trois derrière
124. A2 : 2,7... 2,7 je sais pas quoi.
125. T2 : Ouais bon.
126. A2 : La valeur exacte, je sais pas.
127. T2 : Et je sais pas, si on essaye de calculer u_{10} par exemple ? Pour avoir une idée, ou u_{100} ?
128. A2 : Ça fait du 1,1 puissance dix.
129. T2 : Un plus un sur...
130. A2 : Non, enfin ça fait 1,1 puissance dix.
131. A1 : 1,1 puissance dix.
132. T2 : 1,1 puissance dix vous pensez que ça va être...
133. A2 : Ben, c'est ça qui me paraît bizarre. Du coup, du coup, c'est même pas vraiment décroissant alors. C'est pas décroissant alors...
134. Y : Mettre des puissances et...
135. T2 : On peut faire le calcul, 1,1 puissance dix ça fait quoi ? 1,1 fois 1,1 fois 1,1 ... ok ?
136. Y : Ouais, mais tu t'es planté là, deux puissance un, ça fait deux. Non parce que u_1 /
137. A2 : Non, non, mais là u_1 .
138. Y : Un plus un, ça fait deux, deux puissance un... Elle est croissante cette suite, elle est pas décroissante.
139. A2 : Non, non, pardon, elle est croissante. Ouais, excuse moi... [Inaudible].
140. T2 : Donc elle a l'air croissante et puis... Est-ce que c'est possible, là, je veux dire, il m'en manque quelques uns mais ça à votre avis ça grandit là, est-ce que ça va être plus grand que 1,1.
141. A2 : Non, non, non, c'est inférieur.
142. Y : Non, ça grandit.
143. A1 : Non, c'est plus grand. 1 fois 1,1 attend
144. Y : Tu fait a plus b au carré, 1 plus 0,1 au carré.
145. A2 : Ça fait plus 0,11 donc ça grandit de peu mais ça grandit.
146. ? : Donc ça monte.

147. Y : Ouais, donc ça paraîtrait logique, enfin logique euh, que à chaque fois on diminue le terme, enfin on diminue la valeur du terme mais comme on en rajoute un, ça la fait grandir quoi.
148. ? : C'est pas le truc d'approximation ou je sais pas quoi.
149. ? : Tu vois ça monte.
150. ? : Ca monte doucement.
151. T2 : Ca monte doucement, mais si je fais dix fois est-ce que ça peut arriver à 2,7.
152. ? : C'est une bonne question
153. A1 : Peut-être pas 2,7 mais...
154. Y : Ca doit s'en approcher.
155. A1 : Argh, on n'a pas le droit à la calculette dans ces cours là.
156. T2 : Mais si vous avez le droit à la calculette.
157. A2 : Ah c'est magnifique.
158. A1 : Ben le jour où j'en ai besoin, je l'ai pas.
159. T2 : Bon, je vous laisse chercher encore deux minutes entre vous et l'objectif, vous êtes pas obligé d'avoir un argument définitif mais d'avoir une idée.
160. A1 : Ouais enfin c'est « paraît-elle vrai » donc c'est...
161. T2 : Vous paraît-elle vrai, ça veut dire que c'est vrai ?
162. A1 : Non ! Mais ils nous demandent pas une justification.
163. Y : Ouais, pour moi, c'est...
164. T2 : Ah celui-là, tu l'as fait en terminale ?
165. Y : Ouais, je l'ai fait en terminale donc euh...
166. T2 : D'accord.
167. A2 : Ah ben, j'ai un petit problème.
168. T2 : [à Y] On reviendra peut-être plus tard sur ton argument.
169. A2 : Bon 1,1 puissance onze ça fait 2,8.
170. Y : C'est 2,8... Putain c'est quoi cette calculette de merde [il la tape contre la table].
171. A2 : Attend euh...
172. Y : Si on a pas de matos là, aussi. Attend je vais le calculer avec le portable.
173. A2 : Ah non, à mon tour, il veut pas hein... [Inaudible]... Je sais pas ça marche pas.
174. ? : Ok, ben c'est pas grave.
175. A2 : C'est pas normal, une calculette comme ça.
176. Y : Tu divises par 1,1, le puissance onze...
177. A2 : Non mais [Inaudible] quoi vas-y.
178. Y : Ben fait 1,1... 1,1.
179. A2 : Ouha, qu'est-ce qu'il se passe !!

180. T2 : Alors ça donne quoi, ce calcul ?
181. Y : [Inaudible].
182. A2 : Non mais elle marche plus, là.
183. T2 : vous avez 2 calculatrices mais pas une qui marche, c'est ça ?
184. A1 : Non, j'en ai pas une moi, c'est ça le problème.
185. A2 : Je comprends pas du tout là.
186. ? : Bon ben tant pis, hein.
187. A2 : Ben non, je comprends pas, ça me fait un peu peur, là.
188. ? : T'as des partiels bientôt ?
189. A2 : Ouais, non puis même.
190. ? : Bon, elle sert à rien.
191. A2 : Ouais, ben elle sert à rien du coup. C'est pas normal. Bon 1,1 puissance onze, ça fait 2,8.
192. Y : Ben tu fais 2,8 divisé par 1,1.
193. A2 : ouais, voilà.
194. T2 : T'as eu le temps de le calculer ?
195. ? : [Inaudible].
196. T2 : Oui ben 2,8, c'est pas si loin de 2,7.
197. A1 : 2,8, ouais c'est pas loin.
198. A2 : Ouais donc si on divise par 1,1.
199. T2 : Pourquoi vous voulez diviser par 1,1 ?
200. ? : Parce que c'était puissance onze !
201. T2 : Ah ok donc ça va faire combien ?
202. ? : Ca va faire 2,68.
203. A2 : Je comprends pas bien, là.
204. Y : Non de toute façon, je sais pas comment on fait.
205. T2 : Ok, bon on essaye d'avancer ? Vous en pensez quoi de cet énoncé ?
206. A1 : Moi je pense qu'il est vrai.
207. T2 : Ouais vous êtes... A2 ?
208. A2 : Moi, je suis sûr à 95% qu'il est vrai.
209. A1 : Ouais, moi elle m'a l'air vraie ouais.
210. T2 : Et donc vos arguments c'est quoi ?
211. A2 : [Inaudible]... Une suite...
212. A1 : Ca marche pas, ça.
213. ? : Pourquoi ?

214. A1 : Parce que zéro, ça, ça tend vers zéro donc, et ça, ça tend vers plus l'infini donc zéro fois l'infini, c'est une forme indéterminée.
215. Y : Mais c'est une forme indéterminée qu'on a déjà vu...
216. A1 : Que moi, j'ai jamais vu.
217. Y : Si on l'a déjà vu ça. Je sais plus ce que c'est.
218. T2 : Ok, ok. Toi, y a ton souvenir de terminal, qui semblerait dire que si tu l'as déjà vu en terminale, c'est que, a priori, le prof vous a pas menti.
219. Y : Ouais, enfin on avait fait tout un exo là-dessus et donc je sais plus exactement ce qu'on avait fait mais euh...
220. T2 : Ok puis sinon si on regarde un peu, pour $n = 10$, ça a l'air de marcher à peu près.
221. A2 : Ouais.
222. ? : Hum.
223. T2 : On va passer à la deux. Justement, maintenant on va essayer de regarder la preuve qui est donnée. Donc la première chose c'est de lire la preuve, puis essayer de la, de relever les arguments d'accord ? Les étapes, si c'est possible. J'ai mis, on a mis en premier encadré là, si tu regardes le premier/
224. ? : Ah, pardon.
225. T2 : C'est quelque chose qu'il se sert à la fin de la preuve, qui est de dire donc celle-ci vous pouvez considérer, vous pouvez le lire aussi, c'est une indication qui sert pour comprendre la preuve qui est écrite ensuite, qui est de dire que la somme des...
226. ? : des $1/k!$
227. T2 : Tend vers e . Vous avez déjà vu ça ou pas ?
228. ? : Ouais
229. ? : Ca, ça me dit quelque chose aussi, ouais.
230. T2 : Vous pouvez regarder la preuve puis lire ça et essayer de vous mettre d'accord sur des étapes.
231. ? : Ok.
232. Y : En quoi ça démontre que ...
233. ? : Ca, ça ressemble à un truc ça.
234. Y : En quoi ça démontre que c'est e ça ?
235. ? : Pourquoi ?
236. Y : Il dit juste qu'elle est croissante et majorée. Il dit pas qu'elle tend vers e .
237. ? : Hein ?
238. A2 : Bon elle est majorée, ok.
239. A1 : Ouais, mais croissante et majorée, ça prouve qu'elle a une limite.
240. Y : Ca prouve qu'elle a une limite, mais en quoi ça prouve que cette limite c'est e ? Je vois pas la preuve... C'est pas une preuve ça !

241. A2 : Ben en fait le truc, c'est pas ça c'est que... Tu vois ça, là, ça, ça ressemble à ça, là, ici. Enfin t'as [Inaudible].
242. Y : Non mais là, c'est juste pour montrer qu'elle est majorée.
243. A2 : Non je sais pas, il dit qu'il faut se servir de ça pour...
244. Y : Non mais ça, ça doit être un rappel. Ils doivent bien nous montrer la preuve.
245. A2 : Non, je sais pas. Il y a quelque chose à chercher je pense.
246. Y : Monsieur ? Le rappel il est pas censé y avoir la preuve de ça ?
247. T2 : Si.
248. Y : Mais là on dit juste que v_n est croissante et majorée.
249. T2 : Et alors ?
250. A1 : Ca veut dire qu'elle a une limite.
251. Y : Ca veut dire qu'elle converge, mais en quoi ça nous prouve qu'elle converge vers e ?
252. T2 : D'accord. $A1$ et $A2$ vous en pensez quoi de ça ?
253. A1 : Ben moi, je suis d'accord après, enfin...
254. A2 : Ben, c'est ce qu'on vient de dire en fait, mais ouais ben, en fait, il avait raison hein.
255. T2 : Alors en fait, comment vous le définissez e ?
256. A2 : Le nombre e ?
257. T2 : Oui.
258. Y : Je sais pas.
259. A2 : Comment on peut le définir...
260. ? : Ouais c'est vrai quoi...
261. T2 : Bon, y a un peu un coup de force là, c'est-à-dire effectivement, j'ai pas pensé que ça vous embêterait mais e on le définit comme ça.
262. ? : Ok alors.
263. T2 : e c'est la limite de cette suite là. Donc si on montre que... En fait, j'aurais du le dire comme ça « on montre que la suite converge, et cette limite là on l'appelle e ». D'accord ?
264. Y : Ok, ouais, ouais, d'accord.
265. A1 : C'est pas un calcul, calcul, c'est juste...
266. ? : Ouais, ouais, ok.
267. T2 : Et effectivement, c'est pareil que exponentielle de un. Ca faudrait le démontrer d'accord ?
268. ? : Ouais, ouais, ok.
269. T2 : Mais bon, pour cette après-midi, vous pouvez oublier l'exponentielle et vous contenter de dire que e c'est la limite de cette suite là.
270. ? : D'accord.
271. T2 : Mais l'argument, c'est effectivement suite croissante majorée donc convergente. Et on appelle e ce nombre là.

272. ? : Ok, hum, hum.
273. A1 : Et ça monsieur les C_m^k c'est des...
274. A2 : C'est parmi...
275. A1 : Je sais plus si c'est k parmi m ou m parmi k .
276. A2 : m parmi k .
277. T2 : Parce que vous vous utilisez plutôt la notation entre parenthèse.
278. ? : Ouais, ouais, voilà.
279. T2 : Ok donc C comme ça, ça veut dire k parmi n , k parmi m .
280. Y : Elle a été écrite comme ça, en mille huit cent vingt et un ou elle a été... Ils avaient les mêmes notations ou...
281. T2 : Euh...
282. A2 : Moi je sais que sur ma calculette, on la note comme ça.
283. T2 : Est-ce qu'elle date de mille huit cent vingt et un ta calculette ?
284. A2 : Non peut-être pas... Pas temps ! Ah le zéro re-marche et le point marche ! C'est magnifique.
285. T2 : Honnêtement, je ne me souviens plus si il passe par ça...
286. Y : Ok.
287. T2 : Je ne suis même pas sûr qu'il écrive cette ligne là... Dans mon souvenir je crois qu'il passe directement de là à là.
288. A2 : Donc c'est quoi déjà, là... Ici y a un truc qui fait qu'on va comprendre celle-là, là. Non ? Ou c'est l'inverse ?
289. Y : Non...
290. A2 : Je sais plus non...
291. T2 : Non là, c'est juste pour vous rappeler ce que c'est que e .
292. Y : Là, ça rappelle ce que c'est que e .
293. A2 : D'accord.
294. T2 : C'est juste un rappel comme ça.
295. A2 : D'accord.
296. T2 : Vous allez lire la preuve, vous allez voir, on s'en sert à la fin.
297. A2 : Ici faut qu'on détaille les étapes en gros.
298. T2 : Voilà que vous arriviez à... Ben là, par exemple, vous l'avez bien montré l'étape, c'est quoi l'étape ? Disons la structure de cette preuve là... En dehors des calculs.
299. Y : Ben c'est...
300. A1 : Ben c'est montrer qu'elle est croissante et ensuite majorée.
301. T2 : Un, on montre qu'elle est croissante, deux, qu'elle est majorée.
302. A1 : Pour montrer qu'elle a une limite.

303. T2 : Et ensuite, on utilise le théorème que vous avez dit tout à l'heure.
304. ? : Convergence.
305. T2 : C'est ce genre de choses que je veux. A la limite le détail des calculs, c'est pas grave, il faut que vous arriviez à avoir la structure de l'argument. D'accord, pour bien voir ce qu'il a voulu dire. Donc en fait, dans un premier temps, si vous arrivez déjà à dégager la structure c'est la première étape. L'étape 2 ce serait d'essayer de voir si les arguments qu'il y a dans cette structure, ils sont bons ou pas.
306. ? : Ok.
307. T2 : D'accord. Si quand il dit qu'elle est croissante, elle est effectivement croissante. D'accord ? C'est un peu ça que... Mais vous pouvez faire un peu les deux ensemble. Mais l'idée c'est de, l'idée de cette deuxième activité, c'est ça.
308. Y : Cauchy, il aurait fait une erreur ?
309. ? : Ouais.
310. ? : Oui.
311. ? : Sans doute.
312. A2 : J'ai vu pire comme preuve, hein. Y a des preuves encore, tu comprends pas, tu comprends pas, enfin je sais pas. Qu'est-ce que t'en penses toi A1 ? Y a pire comme preuve, non ?
313. A1 : Oui.
314. A2 : Là, on sait pas si elle est vraie, mais...
315. A1 : Ben personnellement, pour moi, je pense qu'elle est vraie... Je sais pas.
316. Y : Ben déjà, la structure, c'est il montre que... C'est que... Il prend la suite elle-même/
317. ? : Tu parles de la structure là ?
318. Y : La structure de la preuve.
319. ? : Ici, là ?
320. Y : Ben ouais, la structure de toute la preuve.
321. A2 : D'abord c'est l'existence d'une limite quoi...
322. ? : Alors ça marche ça ?
323. Y : Ok.
324. A2 : Quoi ?
325. Y : Ben la structure, c'est il montre qu'elle est majorée... Non au début il montre qu'elle est croissante.
326. ? : Hum, hum.
327. Y : Ensuite, il montre qu'elle est majorée. Donc forcément, y a une limite.
328. A2 : Ouais, donc elle converge.
329. Y : Et après, il montre que tous les termes qui tendent vers chaque terme...
330. A1 : Ouais, le seul point que je comprends pas...
331. Y : Et c'est un peu une magouille ça quand même, non ?

332. ? : Ben non ?
333. Y : Puisque, ouais, si remarque tu as le droit... Je pense.
334. A1 : Le seul point que je comprends pas, c'est la première étape.
335. ? : Laquelle ?
336. A1 : La première égalité.
337. Y : Ah, mais c'est la règle...
338. A2 : Avec les...
339. Y : a plus b puissance n est égal à la somme... Enfin, essaye de le faire avec a plus b au carré. Tu sais, c'est avec le binôme de Newton.
340. A2 : Ouais, c'est ça.
341. A1 : Ouais, mais je me rappelle plus... Je me rappelais plus de ce que c'était, c'est pour ça.
342. Y : Eh ben, c'est a plus b puissance m , c'est somme...
343. A2 : C'est k parmi m , c'est k puissance...
344. Y : Des k parmi m des a puissances k , b puissance m moins k .
345. A2 : Voilà.
346. A1 : a puissance k , b puissance b moins k , c'est ça.
347. Y : Non, b puissance m moins k .
348. A2 : m moins k .
349. Y : Ouais, ou l'inverse, a puissance m moins k et b puissance k .
350. A2 : Ouais.
351. A1 : Attends.
352. Y : Ben essaye le, avec puissance... Parce que démontrer, je crois que c'est un peu chaud. Y a beaucoup de calcul.
353. A1 : Redonne la puissance.
354. A2 : m moins k .
355. Y : Puissance k et m moins k .
356. ? : Ouais, c'est ça.
357. Y : Tu t'en souviens de ce truc ou pas ?
358. A1 : Ben maintenant ça me dit plus quelque chose mais... Ca ne me disait rien du tout. Parce qu'en fait le un disparaît.
359. Y : Ouais parce que là, il se trouve que c'est un quoi.
360. T2 : Vous en êtes à l'évaluation des étapes, vous avez déjà...
361. A2 : Enfin, on a essayé de voir les étapes possibles.
362. Y : On a fait la structure, quoi.
363. A2 : Voilà donc convergence, majorée...

364. Y : Ben, on a dit qu'il a d'abord montré que sa suite euh... Il a pris la suite elle-même, quoi... Qu'elle était croissante, puis il montre qu'elle est majorée et après il montre que... Donc elle a forcément une limite et il s'intéresse à la limite. Il montre que c'est la même limite que celle qui définit e . Donc...
365. T2 : C'est clair pour tout le monde ça ?
366. ? : Ouais.
367. T2 : Vous êtes d'accord avec ça ?
368. A1, A2 : Ouais.
369. A1 : Alors, après la première étape, c'est du calcul.
370. Y : Après, il développe quoi... Voilà, normal
371. T2 : Hum, hum.
372. Y : Euh, il simplifie.
373. T2 : Je vous laisse regarder un peu toutes les étapes, si vous avez des questions...
374. Y : Pour les premières c'est bon, jusque là c'est bon...
375. A1 : La première, c'est du calcul.
376. Y : Après c'est pareil c'est... Il simplifie juste. T'es d'accord hein ?
377. A2 : Oui, il magouille enfin quoi, oui...
378. Y : Oui, oui.
379. A2 : Tu vois, il s'arrange entre autres pour retrouver, enfin... Une forme particulière.
380. Y : Oui, mais c'est pas une magouille.
- [Rires]
381. Y : C'est les physiciens qui... Les physiciens, ils font « bon allez on va négliger ce terme, allez il sert à rien ».
382. A2 : Oui c'est rigoureux, enfin je veux dire c'est rigoureux...
383. Y : C'est rigoureux la formule, c'est de la magouille !!!
384. A2 : C'est une magouille rigoureuse, quoi si tu veux.
- [Rires]
385. Y : Faudra l'enlever, ça aussi.
386. A1 : Après tu prends le $(n + 1)$ ième terme de la somme.
387. Y : Oui donc ça, on est tous d'accord que la première étape elle est bonne quoi... Puisque c'est là que ça devient chaud.
388. A1 : Oui... Enfin moi, je m'amuserais pas à faire le calcul, hein, c'est sûr.
389. Y : un sur n factorielle oui... Ca c'est le $n + 1$ terme... Ok.
390. A1 : Et euh...
391. Y : Oui, c'est vrai qu'il augmente.
392. A1 : Oui, ça augmente parce que le/

393. Y : Oui, mais...
394. A1 : Le m devient plus grand, donc le terme [Inaudible].
395. Y : Oui mais, en même temps, c'est plus le $(n+1)$ ième terme après...
396. A1 : si ! Bien sûr que si.
397. A2 : Ben si.
398. Y : Attend.
399. A1 : Ben c'est là, c'est là, qu'il augmente.
400. A1 : regarde un, deux trois, non zéro, un, deux...
401. Y : Non parce qu'après, il augmente, ouais, il augmente attend... Il augmente avec quoi ils disent...
402. A1 : Confonds pas, fais gaffe... Ca c'est zéro ou un.
403. Y : Oui, ça c'est le premier terme, deuxième terme, troisième terme...
404. A1 : Un, deux, trois, quatre, $n + 1$...
405. A1 : Jusqu'à m .
406. Y : En fait, si m il augmente de un, ça change quoi ? Y a un truc en plus qui se met ?
407. A1 : Ben le truc, c'est que m augmente.
408. Y : C'est quoi le terme qui s'ajoute quand m augmente ?
409. A1 : Non, non il s'ajoute pas, tu regardes que ce terme là.
410. Y : Ben si y a un terme de plus. Y a un terme de plus qui va augmenter forcément. Parce que m ...
411. A1 : C'est pas ça qu'il te demande.
412. Y : Ben non, attend, mais si.
413. A1 : Non.
414. Y : Oui, mais il te demande, oui mais tu comprends c'est... Oui, oui, je suis d'accord qu'il augmente avec m mais si le $(n + 1)$ ième terme c'est plus le même, ça fait magouille là non ?
415. A1 : Hein ?
416. Y : Je sais pas.
417. A1 : Mais non, tu prends m quelconque, m c'est un nombre entier, il bouge pas hein.
418. Y : Oui, mais tu prends une suite.
419. A1 : Il bouge pas.
420. Y : Oui, mais tu... Oui d'accord, mais d'accord ok.
421. A2 : En gros, tu veux voir, tu veux voir si les deux constantes elles varient quoi... Les deux en même temps. Du coup, par exemple si... Je dis n'importe quoi, si par exemple t'avais m_1 t'aurais des n , enfin un truc avec n et m_2 par exemple, donc du coup le $(n + 1)$ ième terme...
422. A1 : Là, tu prends que $(n + 1)$ ième.

423. Y : Moi je dis qu'il y a magouille quoi. Parce qu'il dit regarde, après il dit... Je suis d'accord avec ça, je suis d'accord avec cette étape, mais après, il dit en effet chacun des facteurs du produit augmente puisque les termes en k machin... Ceci montre que la suite est croissante.
424. A1 : Ben oui.
425. Y : Ben oui [Rire]. Attends, attends, attends. Pourquoi ils augmentent.
426. A1 : Ils augmentent, t'es d'accord.
427. Y : Ouais, ouais, ok. Ok, ouais. Moi je me... Ouais.
428. T2 : Alors, vous en êtes où ?
429. A2 : Le n ne change pas, le n c'est juste pour donner un dernier terme.
430. A1 : C'est juste une notation.
431. A2 : Ouais, voilà.
432. A1 : Euh, localisation pardon.
433. Y : Ouais attend il faut que je le fasse avec trois et quatre parce que...
434. T2 : Donc vous en êtes où ? La troisième égalité là c'est ça ?
435. A1 : On en est là.
436. T2 : Ah, donc la croissance de cette affaire.
437. A2 : On essaye de voir euh comment, comment on arrive à montrer que c'est croissant, en fait, finalement.
438. T2 : Ouais et alors...
439. A1 : Après, vu qu'on est d'accord que ça augmente, on prend deux m différents, un m et puis le suivant.
440. T2 : D'accord.
441. A1 : Et euh...
442. T2 : Et qu'est-ce qu'il se passe ?
443. A1 : Vu qu'on aura au moins un terme qui augmente,
444. T2 : Oui.
445. A1 : Celui du suivant, enfin euh, on aura un nombre positif, normalement.
446. T2 : Quel nombre ?
447. A1 : Si on fait u_m par exemple, u_{m+1} moins u_m .
448. T2 : D'accord. Il en faut au moins un ?
449. ? : Comment ça ?
450. T2 : Au moins un ça suffit ? Au moins un terme qui...
451. ? : Non, non, il en faut...
452. ? : C'est-à-dire.
453. T2 : Vous comparez quoi en fait, quand tu dis qu'il y en a un qui est plus grand que l'autre ?
454. A1 : Ben on compare un terme avec le précédent...

455. T2 : Un terme de quoi ?
456. A1 : Un terme de la suite avec le précédent.
457. T2 : Un terme de la suite donc pas un terme de la somme.
458. A1 : Non, non, de la suite.
459. A2 : Non de la suite, ouais.
460. T2 : D'accord. Donc vous essayez de montrer, c'est pour ça j'avais pas compris... Ok, donc un terme de la suite. Comment est-ce que vous comparez les termes de la suite ?
461. A1 : Bon, ils disent si on... Ils se focalisent sur le $(n + 1)$ ième.
462. T2 : Ouais.
463. A1 : Ouais bon... Normalement, si on prend le $(n + 1)$ ième, ça doit être vrai avec le n ième et le $(n + 2)$ ième... Sinon...
464. T2 : D'accord, si t'en prends un quelconque, ça va être vrai pour tous c'est ça ?
465. A1 : Normalement, ça devrait.
466. T2 : D'accord.
467. Y : Ouais, ok. Ouais, ça marche, ouais.
468. A1 : Donc euh... Bon un, c'est pas possible, un sur un non plus et à partir du troisième c'est vrai.
469. T2 : D'accord. Qu'est-ce qui est vrai ?
470. A1 : Que à chaque fois que... Que quand m augmente...
471. T2 : Oui.
472. A1 : Attend... Que quand m augmente, les termes de la somme sont... augmentent aussi.
473. T2 : D'accord.
474. Y : Ouais, ouais, ok... Parce que celui là, il diminue moins, ils diminuent tous moins donc euh...
475. T2 : D'accord... Et A2 qui a pas encore parlé, tu es convaincu ?
476. A2 : Ouais, ouais ben oui, j'ai déjà... Enfin, c'est exactement ça quoi. De toute façon enfin, dans ce qui est dit... Comment expliquer...
477. Y : Ouais, il dit pas aussi qu'il y a un terme en plus.
478. A1 : Parce que là, on peut factoriser chaque terme de cette manière en plus.
479. T2 : Hum, hum.
480. Y : Ouais, ok.
481. T2 : La factorisation, elle sert à quoi ?
482. Y : Elle sert à montrer que tous les termes...
483. A1 : Pour moi, c'est plus facile de le voir avec cette forme là.
484. Y : Ouais, là, j'aurais jamais vu.
485. T2 : Un à la fois parce que sinon je...

486. Y : Vas-y *A1*.
487. A1 : Ben euh, la factorisation des termes de la somme, elle sert à voir que, effectivement, chaque terme de la somme augmente quand m augmente.
488. T2 : Oui.
489. A1 : Parce que enfin avec la première forme, c'est pas trop visible.
490. T2 : D'accord, on voit mieux ça, ok. Et sinon tu disais autre chose... j'ai oublié ton prénom...
491. Y : J'avais utilisé autre chose...
492. T2 : C'est comment ton prénom déjà ?
493. Y : *Y*.
494. T2 : *Y* ! Pardon ouais. Donc *Y* tu disais quelque chose, qu'il y avait un terme de plus et que c'était pas dit.
495. Y : Oui c'est parce que quand m augmente, il y a aussi un terme qui se rajoute.
496. A1 : Non.
497. Y : Non ?
498. T2 : Hum, hum.
499. A1 : Bon oui.
500. Y : Oui, y a un terme qui se rajoute.
501. A2 : Attends, j'ai pas compris ce que tu veux dire là, en fait.
502. T2 : Donc, essayez d'éclaircir ça par exemple.
503. Y : Ben u_{m+1} , y a des $m + 1$ partout. Du coup, y a un terme qui se rajoute à la fin quoi.
504. A1 : Oui, mais ça reviendra au même.
505. Y : Oui, oui... Mais je suis d'accord que son truc est bon. Mais il dit pas en plus que... Il montre que tous les termes augmentent, donc la suite augmente mais il dit pas en plus, il y a un terme qui se rajoute... Bon ben, c'est bon il se rajoute, il est positif le terme donc ça marche quand même.
506. A1 : Mais il est positif.
507. Y : Oui mais ça marche quand même, mais il le dit pas. Je sais pas moi, je l'aurais dit quoi ! T'as une suite qui, qui...
508. A2 : Tu veux dire la logique que t'aurais eu, c'était de te dire voilà, on a le nombre de termes, enfin, $n + 1$ du coup à la fin, on a un terme positif en plus, donc du coup, c'est pour ça que c'est croissant.
509. Y : Non c'est pas pour ça. Mais c'est une des choses. C'est un des trucs parce que si ce terme qui se rajoutait, il était décroissant et ben ça marcherait pas son raisonnement.
510. A1 : Négatif tu veux dire ?
511. Y : Là ça marche parce que, ouais voilà négatif ouais, là ça marche parce qu'ils augmentent tous et qu'en plus on en rajoute un qui est croissant... Donc nickel quoi, y a tout qui marche.
512. A2 : Ouais.
513. A1 : Hum, hum.

514. Y : Mais euh, ouais, ouais, donc ça marche.
515. A1 : De toute façon, on doit compléter et reformuler donc...
516. Y : Ben pour moi, ben voilà, pour moi, y a ça à compléter puis c'est tout.
517. A1 : Voilà, tu veux le noter ?
518. Y : Ouais, tu le notes, ouais.
519. A1 : Je note quoi ?
520. A2 : La démonstration [Inaudible].
521. Y : De plus euh, de plus euh, un... Pour euh...Attends... On a déjà la majoration, attend... Quand m augmente... Pour un m , pour un m_1 supérieur à m , pour m_1 supérieur à m , on a u_{m_1} supérieur à u_m , ça il nous le démontre.
522. A1 : Strictement.
523. Y : Et donc, $m + 1$ est supérieur à m , enfin je mettrais un truc comme ça. Euh... u_{m+1} ...
524. A2 : Attend, attend, tu dis quoi $m + 1$ est plus grand que m .
525. A1 : C'est ce qu'il vient de me dire.
526. A2 : Non mais d'accord, mais t'es passé de m_1 à $m + 1$.
527. A1 : Ouais non, ouais, c'est ça le problème.
528. Y : Non mais ça marche pas, c'est pas ça que je voulais dire.
529. A2 : Tu prends un m_1 quelconque.
530. A1 : Ben je sais pas ce que tu voulais.
531. Y : Je sais pas comment le formuler mathématiquement bien, quoi. Mais tu vois, ce que je veux dire de toute façon. J'arrive pas à le formuler.
532. A2 : Oui, oui, de côté du terme en plus qui est positif.
533. Y : Ben on arrive pas à formuler le...
534. T2 : Qu'est-ce qui vous embête alors ?
535. Y : Ben en fait, on a vu que là, il montre que tous les termes augmentent.
536. T2 : Ouais.
537. Y : Mais il dit pas que y a un terme qui se rajoute.
538. T2 : Mais est-ce que ça pose un problème ?
539. Y : Ben non, mais je sais pas.
540. A1 : Non, parce qu'il est positif enfin, il est positif aussi.
541. Y : Ouais, il est positif mais...
542. T2 : Donc qu'est-ce qu'il se passe ?
543. Y : C'est toujours croissant quand même.
544. A2 : En fait, on aurait voulu compléter, en fait, en expliquant que ça aurait pu être une raison de plus.
545. T2 : Ca ce sera... C'est la question deux hein ?

546. Y : Ben c'est ce qu'on fait.
547. T2 : Reformuler, sont-elles complètes, rigoureuses...
548. A2 : Ben voilà.
549. T2 : Ben pas tout à fait complètes, donc vous rajouterez ça. D'accord ? non ?
550. Y : Ouais.
551. A2 : Ouais voilà, oui par exemple.
552. A1 : Ben on en est à la question deux, justement.
553. T2 : Ouais, mais vous êtes là, d'accord alors... Ce que vous dites, c'est que il y a quelque chose qui n'est pas dit quoi.
554. Y : Ouais je sais pas, ils sont super rigoureux donc...
555. A2 : Alors par contre le problème qui peut se poser, le problème qui peut se poser, qu'on a, c'est que on pense pouvoir compléter, seulement on sait pas si c'est vraiment rigoureux.
556. Y : On arrive pas à le compléter rigoureusement.
557. A2 : Voilà c'est... C'est ça la chose.
558. T2 : D'accord.
559. A2 : Parce que, est-ce que dans ce qu'on dit, est-ce qu'il n'y a pas une erreur, même peut-être bête, qui fait que notre démonstration qui aurait pu être possible avec cette histoire d'ajouter un terme positif qui augmenterait la suite... Est-ce que c'est vraiment rigoureux, c'est ça. Est-ce que c'est possible, est-ce qu'il n'y a pas un seul contre-exemple qui fait que ça pourrait démontrer que c'est... Que c'est faux quoi.
560. Y : Je pense que c'est bon, mais euh... Mais pour le dire en termes mathématiques euh...
561. A1 : En fait, en fait, là t'as ton u_m , disons qu'il y a euh...
562. Y : Ben il a m termes... ou attend...
563. A2 : $m + 1$... Non m termes et on lui met...
564. A1 : Non, non, non.
565. A2 : Non ? Qu'est-ce qui y a ?
566. Y : Attend.
567. A1 : u_m , u_m , il a combien de... ? La somme a combien de termes ?
568. Y : Ben il a m termes ! Non $m + 1$ termes.
569. A1 : $m + 1$.
570. A2 : Ouais, $m + 1$ termes.
571. T2 : Quand on va de zéro à m ça fait $m + 1$ termes, c'est ça.
572. A1 : Et tu prends ton $m + 1$, il en a $m + 2$ mais le euh...
573. Y : les $m + 1$ premiers, ils sont déjà plus grands que les $m + 1$...
574. A1 : Ils sont positifs mais le $(m + 2)$ ième. Quand tu lui retranches le $(m + 2)$ ième de celui d'avant c'est positif enfin c'est zéro, donc c'est positif.
575. Y : Oui.

576. A1 : Si le dernier terme est positif, ce qui est vrai.
577. Y : Ouais.
578. T2 : Bon.
579. A1 : Faudra qu'on reformule ça quand même.
580. A2 : Ouais un petit peu, je suis d'accord.
581. Y : Mais, monsieur...
582. Y : Mais c'est pas reformulable, c'est trop dur.
583. T2 : Est-ce que ça vous irez de laisser ça de côté pour l'instant.
584. A1 : Ouais.
585. Y : ouais, ouais, ouais.
586. T2 : Je vous répéterai ce que vous avez dit tout à l'heure si vous voulez, et d'avancer jusqu'à la haut parce que j'aimerais que vous ayez le temps de voir l'ensemble de la preuve. Parce que dans l'autre groupe, y en a un qui est pressé donc euh...
587. Y : Ok.
588. A2 : Donc il faut qu'on fasse quoi là ?
589. A1 : Donc là, on en est à...
590. A2 : La preuve est-elle valide ?
591. T2 : Non, vous avez pas terminé là, non ?
592. Y : Non, non.
593. A1 : Là, on en est à la majoration.
594. A2 : Ah non, non, pardon.
595. Y : Ouais, la majoration...
596. T2 : Disons de toute façon, ça gêne pas si vous avez vu que, vous pensez que c'est bon même si il faudra compléter.
597. ? : oui, ça c'est bon, oui.
598. T2 : Faites comme si c'était bon, puis vous passez à la suite.
599. Y : Ok, ben la majoration...
600. A2 : Ouais bon, on peut mettre ok, là...
601. Y : La majoration y a rien a redire quoi.
602. A1 : Ben la majoration c'est/
603. A2 : Ben la majoration, ouais, elle utilise ce qu'on a vu en rappel non ?
604. Y : Elle est bien croissante la suite, là.
605. A2 : C'est ça hein, ouais
606. Y : Ouais, elle est croissante.
607. A1 : Euh... Majoration, oui.
608. A2 : Hum mais c'est ça, c'est le rappel.

609. Y : Ouais ben la majoration, je vois pas ce qu'il y a. Ok. Donc après, « converge ». C'est là que ça se passe, c'est là que ça magouille.

[Rires]

610. A1 : Hein, comment ça ?

611. A2 : Pour montrer que ça converge.

612. A1 : Ben elle est croissante et majorée non ?

613. Y : Oui donc elle converge, mais alors après...

614. A1 : Ah, converge vers e . Il est là le problème

615. A2 : Qu'elle converge vers e .

616. Y : Si, ben si, moi ça me va.

617. A1 : Regarde le $(m + 1)$ ième terme qu'on a exprimé autrement.

618. Y : Si, si, moi ça me va comme truc.

619. A2 : D'où on l'a exprimé autrement ?

620. Y : Non, on l'a pas exprimé autrement. On l'exprime comme on l'exprimait avant.

621. A1 : Regarde. Comme ça.

622. A2 : On l'exprime pareil.

623. A1 : On donne le $(m + 1)$ ième terme donc/

624. Y : Oui, oui, ben ceux, ils tendent tous vers un.

625. A1 : Il tend vers zéro, un, un, un, un sur n factorielle.

626. Y : Ceux-là, ils tendent tous vers zéro.

627. A1 : n factorielle... Donc ça marche.

628. Y : Mais j'ai envie de dire, est-ce qu'ils tendent en même temps que le truc tend vers l'infini.

629. A1 : Hein ?

630. Y : Moi, je suis pas... La dernière étape, elle est un peu bizarre quand même.

631. A1 : Mais on est à l'infini là, quand même.

632. Y : Oui.

[Rires]

633. A2 : On est à l'infini, c'est bon

634. Y : Mais je suis d'accord, mais je sais pas, elle me paraît bizarre, quand même.

635. A1 : Ben non. Tu prends... Toujours c'est un exemple, ils prennent le $(n + 1)$ ième, mais c'est vrai pour le n ième, sauf qu'après ce terme-là...

636. Y : Non mais ça j'ai compris. Oui, cela ils vont tous tendre vers un. Du coup ça marche, mais pendant que, en même temps que celui-là il tend vers plus l'infini, donc il va y avoir une infinité de termes, est-ce que cette infinité de termes ils tendent enfin ils tendent en même temps.

637. A1 : Mais oui, on prend le $(m + 1)$ ième terme au hasard parce qu'il va bien. Mais tu peux prendre, tu peux prendre celui que tu veux.

638. Y : Ouais, ben si tu veux, ça marche.
639. A1 : Tu peux prendre le $(m + 2)$ ième, si ça t'arrange.
640. Y : Non, mais le $m + 1$ d'accord. Mais celui que tu viens juste de rajouter...
641. A1 : Lequel ???
642. Y : Il va mettre plus de temps à tendre vers l'infini.
643. A1 : Mais lequel tu viens d'ajouter ?
644. Y : Ben quand tu le fais tendre, quand tu fais tendre tu vois, le temps que tu fasses tendre ton, ton... Celui-là là, celui-là, tu dis qu'en faisant tendre m vers plus l'infini, celui-là il va tendre vers un, on est d'accord ?
645. A1 : Oui.
646. Y : Mais pendant que tu le fais tendre vers un et ben tu en as rajouté taquet.
647. A1 : Ouais, mais celui d'après [Inaudible].
648. Y : Eh ben, ce taquet-là, il va mettre combien de... Il va falloir le faire tendre vers l'infini.
649. A1 : Ouais, mais il va tendre vers...
650. Y : Donc il va retendre vers l'infini, mais ça va en rajouter et ceux que t'as rajoutés, ils retendent vers... Ca doit marcher mais enfin... Ca doit marcher mais euh...
651. A1 : Oui mais c'est une somme de $1/n!$ de toute façon.
652. Y : Oui ben, ça doit marcher. Si il le dit, c'est que ça doit marcher.
653. A1 : Euh jusqu'à m , jusqu'à m factorielle.
654. Y : Ouais.
655. A1 : Si tu veux ton...
656. T2 : Bon est-ce que vous expliquez ça à A2 qui a l'air...
657. A2 : Non, non, non, non, non, c'est que je suis ailleurs. Enfin je voudrais voir en fait, en gros, qu'on l'explique correctement, rigoureusement pas que ce soit... Parce que là, c'est... On parle quoi.
658. Y : Ouais.
659. T2 : Ouais. Vous voulez l'écrire ?
660. A2 : Non en gros, ce qu'il faudrait qu'on explique, c'est qu'on a une suite qui est croissante, qui est majorée/
661. Y : Donc elle converge.
662. A2 : En gros il faut qu'on explique qu'à chaque fois qu'il y a un intervalle de plus en plus petit qui fait que on va vers e ... Alors, je sais pas si on l'atteint vraiment.
663. Y : Pour moi, c'est pas rigoureux ça comme... Enfin.
664. A1 : Hum. [il doute].
665. A2 : Je veux dire là, il faut l'écrire.
666. Y : On nous a pas appris à, enfin il me semble...
667. T2 : Enfin, il y a deux choses... Excuse moi vas-y termine.

668. Y : De quoi ? Ouais ben je sais pas, ben l'exemple qui me rappelle mais qui est pas du tout, pas pareil, mais un exemple qui me rappelle c'est... Je sais pas un plus... Ben d'ailleurs c'est oui, cet exemple-là [Rires]. On dit bon ben ce terme là tend vers un.
669. T2 : Oui.
670. Y : Celui-là, il tend vers plus l'infini, mais un sur plus l'infini ça fait un, donc c'est bon. un puissance plus l'infini, ça fait un.
671. T2 : C'est vrai ça ?
672. Y : Ben non c'est pas vrai !
673. ? : Non, ça marche pas.
674. T2 : Ouais.
675. Y : Et ça me fait penser à la même chose, ça.
676. T2 : T'as l'impression que c'est le même genre d'arguments ?
677. Y : Enfin pas pareil mais euh, enfin...
678. T2 : Mais pas loin.
679. Y : Mais ouais, non, non, pas pareil mais pour moi c'est, c'est... Mais si ça se trouve, ça marche quoi. Et euh... Pour moi, je pense que ça marche mais il doit y avoir un moyen plus rigoureux de le dire... Ouais je sais pas, je pense.
680. T2 : Tu trouves que c'est pas très rigoureux alors ?
681. Y : Ouais c'est rigoureux, mais euh... Ou alors...
682. A1 : Moi en tant que physicien, la dernière partie me semble suffisante quand même.
683. T2 : Et pour toi ?
684. A2 : Non moi je sais pas. Je trouve ça un peu trop... « plum ».
685. T2 : « plum » ?
686. A2 : Ouais « plum », ça tombe un peu du...
687. T2 : Du chapeau ?
688. A2 : Je sais pas, y a un truc, ouais, du chapeau.
689. T2 : C'est le miracle ?
690. A2 : Ouais, ouais, non c'est pas le miracle. Mais je sais pas, j'ai pas l'impression que ce soit...
691. Y : Ou alors, c'est qu'on a jamais vu un truc comme ça et...
692. T2 : Vous avez l'impression de... Tu parlais tout à l'heure de préciser une partie. C'est là où j'intervenais sur le fait que c'était majorant, que c'était majoré, croissant et que tu voudrais montrer que du coup ça converge ?
693. ? : Hum, hum, ouais.
694. A1 : Ca c'est, ça tu réfères à un autre théorème.
695. Y : Ca, c'est le théorème.
696. T2 : Ouais.
697. Y : On l'avait fait, c'est quoi déjà le nom du théorème.

698. T2 : Bon, c'est le théorème, c'était ce qui a été utilisé ici aussi ?
699. Y : Ouais, ouais.
700. A1 : Ca, pour moi, c'est un théorème.
701. Y : Ca se démontre, ça se démontre ça...
702. T2 : Vous connaissez ça ? Toi tu l'as vu comme théorème.
703. ? : Moi aussi.
704. T2 : Toi aussi. Donc on pourrait le démontrer c'est un peu...
- [Inaudible]
705. T2 : Pour vous, à votre avis, est-ce qu'il le considère comme acquis ou...
706. A1 : Ouais, il le considère comme acquis.
707. Y : Ah oui, oui, oui.
708. T2 : Il le considère comme acquis.
709. Y : Il le considère comme acquis, sinon euh...
710. T2 : Donc si il le considère comme acquis. Ben faites de même, d'accord ?
711. Y : Ah ouais, non mais c'est pas...
712. T2 : C'est pas la peine de le redémontrer on va dire.
713. A2 : D'accord, ok d'accord, non mais, ouais, ouais.
714. Y : Non mais elle est une peu longue à démontrer [Rires].
715. T2 : Non mais effectivement, si on voulait, pour être complet...
716. Y : Ouais, mais bon.
717. T2 : Y aurait peut être fallu le dire, énoncer le théorème, au moins le dire.
718. Y : Ouais, c'est vrai que il...
719. A2 : Ouais, voilà parce que du coup, je sais pas si...
720. Y : Il dit même pas « j'utilise... ».
721. T2 : Hum, hum, c'est pas écrit. Et vous dans vos copies vous le mettez ? Quand vous faites des maths ?
722. A2 : Ben enfin, en général, faut...
723. A1 : Moi, j'ai pas eu trop l'occasion cette année.
724. Y : Cette suite est croissante et majorée, donc elle converge.
725. A2 : Voilà bon ben.
726. T2 : Vous écrivez un truc comme ça.
727. Y : Ouais. Ah ben non. Ben il est écrit en fait, ben si il est écrit !
728. A1 : Est décroissante et minorée donc euh... Enfin, c'est la même chose.
729. A2 : Ouais voilà... D'après le théorème de la convergence.
730. Y : Ouais voilà, il est aussi rigoureux que nous.

731. T2 : Disons qu'on... Mettons ça de côté et puis...
732. A1 : Non ça, ça c'est bon ça, ça suffit. Pour moi c'est suffisant. Pour montrer qu'elle converge, c'est suffisant.
733. T2 : Où est-ce qu'il y avait des éventuels points de désaccord ou des choses à régler avant de faire un petit exposé.
734. Y : C'est juste la dernière... Euh la dernière...
735. A2 : Moi la dernière, je suis sceptique un peu, je sais pas.
736. A1 : Moi ça me suffit moi, la dernière.
737. T2 : Alors est-ce que vous pouvez essayer de préciser le désaccord ou l'accord ?
738. A2 : Moi, je sais même pas si pfff. Je dis je suis pas d'accord parce que ça me paraît, ça me paraît suspect. Mais euh, je sais pas si j'ai la capacité de pouvoir dire si c'est vraiment suffisant ou pas. Toi tu dis que ça suffit, enfin moi je sais pas. Pour moi perso, je suis en première année, mais je sais si, voilà. Je peux pas vraiment dire si ça suffit.
739. Y : Voilà, moi c'est pareil.
740. A2 : Est-ce que ça suffit vraiment ? Est-ce que j'ai la capacité de dire que avec ça, ben voilà c'est sur...
741. T2 : Est-ce que vous pouvez préciser à quel moment du raisonnement, il y a quelque chose pour lequel vous êtes pas vraiment convaincus. En tout cas, si vous avez pas l'impression d'être, que ça vous convainc. Ça vous pouvez toujours dire je suis pas convaincu, hein.
742. Y : Ben on est...
743. T2 : Bon après, peut-être que c'est, pour d'autre ce sera convaincant. Mais si pour vous c'est pas convaincant, à quel moment précisément, à quelle déduction, vous êtes pas convaincus ?
744. Y : Ben en fait, euh... C'est...
745. A2 : C'est la convergence, non ?
746. Y : C'est euh, moi je suis, ça me paraît, je dirais qu'il y a une partie qui me convainc mais c'est le fait de dire on fait tendre vers plus l'infini et on fait tendre vers plus l'infini, on s'occupe de n'importe quel terme, de ce terme là par exemple. Et celui-là, je suis très bien convaincu que quand m tend vers plus l'infini, celui-là il va tendre vers ça. Donc, ça marche. Mais pendant qu'on a fait tendre m vers plus l'infini y en a plein de termes qui se sont rajoutés.
747. A1 : Ouais, eh ben ?
748. Y : Et ces plein de termes qui se sont rajoutés, eh en on refait même démarche. On dit ben oui, mais m tend vers plus l'infini, donc ces plein de termes ils vont retendre vers... Mais euh... Mais ? Mais voilà.
749. T2 : Est-ce que tu peux...
750. Y : Mais je pense que ça marche, mais euh, c'est...
751. T2 : A2, c'est le même genre de problème que tu as ou ?
752. A2 : Ouais non, voilà, ben c'est ce qu'il dit quoi, c'est exactement pareil.
753. T2 : Est-ce que tu peux reformuler ?
754. A1 : Ouais mais, mettons...

755. Y : Moi je me demande juste si y a pas un truc plus rigoureux de le dire.
756. A1 : Mettons que tu démarres à m ... Euh, ta suite... Ah mais, il faut déjà que ça tende vers plus l'infini.
757. Y : Non mais je suis d'accord que de si on... On essaye pas de chercher la petite bête, normalement ça paraît logique. Les termes, ils tendent vers chaque terme de l'autre donc pourquoi pas.
758. A1 : Ben mettons que tu démarres à m , qui tend déjà vers l'infini, t'as ce nombre là, jusqu'à m factorielle justement, de un, la somme de un jusqu'à m factorielle. Ensuite tu prends $m + 1$, ça fait un terme en plus et ça te fera un sur $m + 1$ factorielle.
759. A2 : $m + 1$ factorielle.
760. Y : Est-ce que justement le fait que quand il tend vers plus l'infini...
761. A1 : Qui sera minuscule donc... Qui sera à peu près le même que celui-là.
762. Y : Mais est-ce que le fait qu'il tende vers plus l'infini, ça rajoute pas plus de termes et euh les termes, ils mettent plus de temps à tendre vers ce que l'on attends... Et en trottant, il y a plus de termes qui se rajoutent. Mais faudrait, enfin, vraiment voir... C'est quoi m .
763. A2 : Tu veux dire quoi, tu veux dire pour arriver enfin, pour converger vers e c'est ça ?
764. Y : Ouais pour conv... En fait, tous les termes, ils convergent à une vitesse...
765. A2 : Tu veux dire en gros, par exemple, ces trois termes là, ils convergent à une certaine vitesse.
766. Y : Et cette vitesse, elle est moins grande que le nombre de termes qui se rajoutent à chaque fois. Du coup, ils convergeront tous au bout d'un moment mais y en a tellement d'autres qui se rajoutent et que eux ont pas encore convergé puisqu'ils vont converger après, tu vois ?
767. A1 : Mais non.
768. A2 : Mais si, mais ça converge tout le temps en fait, à chaque terme, c'est juste que ça met plus de temps à tendre... Ça converge pas forcément comme tu dis avec le terme d'après, ça converge directement.
769. Y : Oui mais après, ça doit se montrer, ça doit se montrer assez facilement que... Faudrait regarder ça en détail.
770. A2 : Enfin je sais pas, enfin moi je sais, c'est ce qu'on a fait en maths. C'est que la limite c'est u_n moins la limite en valeur absolue qui est inférieur strict à epsilon. Enfin, c'est vraiment...
771. T2 : Ouais.
772. A2 : La démonstration mathématique, c'était pour tout epsilon positif.
773. T2 : Je vois bien de quoi tu parles.
774. A2 : Ouais voilà et donc du coup...
775. T2 : Et sinon, vous avez pas un autre théorème qui dit si quelque chose tend une certaine limite... Si u_n tend vers l , v_n tend vers l' , alors u_n plus v_n tend vers l plus l' ?
776. A2 : Ouais voilà, c'est ça.
777. T2 : Vous êtes d'accord avec ça ?
778. A2 : Ouais.
779. Y : Ouais mais ça, ça peut pas s'appliquer ça !

780. T2 : Alors est-ce que ça peut s'appliquer ou pas ?
781. Y : Ah non, parce que là...
782. A2 : Moi je... Alors là, non... Attendez, attendez.
783. Y : Pour moi, ça peut pas s'appliquer parce que u_n , enfin tous les termes que l'on ajoute, ils... Y en a d'autres qui se rajoutent donc on peut pas enfin le, le... Cette puissance, elle agit non seulement sur le, sur chaque terme, chaque terme va tendre vers quelque chose, mais aussi sur le nombre de termes et ça c'est comme je disais tout à l'heure, on peut pas...
784. A1 : Ce que tu comprends pas, c'est qu'un, un, un m factorielle c'est... Enfin le m factorielle devient vite très grand donc un sur m factorielle devient vite très petit donc euh...
785. Y : Ouais [pas convaincu].
786. A1 : C'est vite négligeable après.
787. Y : Ben non parce que, c'est pas, ouais, ouais.
788. T2 : Il est quelle heure là ?
789. A1 : il est 15 h 08.
790. T2 : 15 h 08. Y a d'autres questions ou pas ?
791. A2 : Non du tout, non, enfin.
792. T2 : Après, il y aura à préparer un exposé. Ce que j'aimerais que vous fassiez pour préparer l'exposé tout ça, là je trouve que vous avez eu une discussion très intéressante, à mon avis il se poseront un peu le même genre de questions. Ils seront pas forcément d'accord. Il serait intéressant de bien mettre par écrit... Essayer de pointer ce sur quoi vous êtes pas d'accord. D'accord ? Effectivement, si... C'est certainement une déduction que vous considérez comme pas assez rigoureuse, vrai, pas vrai... Parce qu'il y a deux choses, vous pouvez dire est-ce qu'elle est valide, dans le sens est-ce que c'est rigoureux/
793. Y : Dans ce cas elle doit être valide, pour moi
794. T2 : Ouais.
795. A2 : ... Mais elle est pas rigoureuse.
796. Y : Mais elle est pas rigoureuse.
797. T2 : Elle est pas suffisamment expliquée.
798. Y : Ca paraît euh, enfin faudrait, faudrait vraiment s'intéresser à chaque terme pour euh...
799. T2 : Ok. Alors est-ce que vous pouvez par exemple faire une case comme ça hypothèses de départ, conclusion, flèche c'est le pas de déduction et de voir... D'accord vous voyez ce que je veux dire ?
800. ? : Hum, hum.
801. T2 : Quelle déduction vous gêne.
802. Y : Ok, ouais, ouais.
803. T2 : En essayant de dire exactement ce qu'il y a avant la déduction, ce qui permet de la faire, et la conclusion. Et dire ce truc là, je suis pas convaincu ou je pense qu'on peut la faire mais il faudrait l'expliquer tu vois ?
804. Y : Mais là, vous comprenez ce que je voulais dire ou...

805. T2 : Ouais, ouais.
806. Y : Ouais.
807. T2 : Enfin, je crois.
808. Y : Ouais.
- [Rires]
809. Y : Ouais c'est bon toi, [à A2] tu comprends...
810. A2 : Ouais j'ai compris... On comprends entre « pas rigoureux », ouais.
811. A1 : Donc l'exposé c'est sur, c'est sur à peu près toute notre...
812. Y : Ouais bon, on dit ça, mais si on était capable de faire ça... On serait fier de notre truc.
813. T2 : Et si jamais vous êtes pas d'accord, c'est pas grave vous pouvez faire deux... Choses...
814. A2 : Ben moi perso, j'ai compris ce que Y voulait dire. Ben après, je sais pas si t'es d'accord avec nous par rapport à ce qu'on a dit, non ?
815. Y : Non lui, il semble bien... [Rires] Il reste sur ces positions.
816. A1 : Je crois pas, moi ça me semble, moi ça me semble suffisant que même si tu ajoutes de plus en plus de termes... Même si il y a une infinité de termes, à partir d'un moment, à partir d'un moment ce sera tellement petit que... Ce sera pas important.
817. Y : Ouais, je sais pas comment le dire.
818. A2 : Ouais, mais vu qu'on tend vers l'infini quand même tu vois ?
819. A1 : Oui.
820. A2 : Donc même si c'est petit... Je sais pas, même au bout d'un moment, ça continue, continue quand même à augmenter, même si c'est très petit.
821. Y : Ouais nous sommes tiraillés [Rires]. Faut qu'ils rigolent un peu.
822. A2 : Enfin bon.
823. Y : Ouais, ouais.
824. A2 : C'est ça que... Bon après, si toi ça te semble suffisant, ben pourquoi pas.
825. A1 : Non, mais notre problème il est où, la transition de là à là ou...
826. Y : Oui, en fait, mais...
827. A2 : Ouais, voilà.
828. Y : Le problème, il est qu'on s'intéresse à un terme.
829. A1 : Oui.
830. Y : On prend un terme de la suite et on dit pour chaque terme de cette suite, ce terme, il tend vers un sur factorielle n .
831. A1 : Non.
832. Y : Donc ça marche.
833. A2 : Non attend. Tu dis quoi ?
834. A1 : Non n plus un.

835. Y : Oui enfin [Inaudible]. Tu as compris tu vas pas chercher...
836. A1 : Oui enfin, oui.
837. Y : Le $(n + 1)$ ième terme, il tend vers un sur factoriel n . Mais le fait de faire tendre m vers plus l'infini, ça fait pas que ça, ça aussi rajoute des termes en même temps.
838. A1 : Oui, t'as une, Ben tu fixes un m , fixe un m , tu fixe un m t'as $m+1$ termes.
839. Y : Attend, je vais te trouver un contre exemple et puis ça va pas faire long feu [Rires].
840. A1 : Si tu trouves un contre exemple, c'est que ça c'est faux.
841. A2 : Si t'arrives à trouver un seul contre exemple ça veut dire que Cauchy, il a faux [Rires].
842. Y : C'est pas faux mais... Il est d'accord avec moi.
843. A2 : De quoi ?
844. Y : Que ça manque un peu de rigueur quoi...
845. A2 : Oui, mais par contre, je suis pas d'accord, il n'y a pas de contre exemple.
846. Y : Oui, oui. Non mais pas de contre exemple, mais un autre exemple du même esprit.
847. A2 : Ah pour expliquer que c'est pas rigoureux.
848. Y : Du même esprit...
849. T2 : Ce que vous chercher c'est un contre exemple ou un truc comme ça.
850. Y : Pas un contre exemple de ça, mais un truc qui lui explique parce qu'il arrive pas à comprendre.
851. T2 : Le problème.
852. Y : Ce que nous on [Inaudible].
853. A1 : Je comprends pas là où ils butent, en fait.
854. Y : Mais je sais pas si... Ouais, mais si...
855. T2 : Ok, donc on... Peut-être qu'on verra plus tard.
856. Y : Ok.
857. A1 : Là, on essaye de préparer l'exposé.
858. T2 : Ce que je voudrais, c'est que voilà... On a préparé des trucs comme ça, des transparents avec exactement la même chose que vous avez. Donc vous avez le droit d'écrire dessus, de faire ce que vous voulez.
859. A1 : Mais, ah j'ai pas de feutres à transparents.
860. T2 : On en a amener. Je vais vous en passer et l'objectif est que vous arriviez à leur faire voir un peu la démarche que vous avez fait. Mais en juste dix minutes quoi. D'accord... Même pas, cinq minutes d'exposé.
861. ? : D'accord.
862. ? : Ok.
863. T2 : Vous avez la, vous allez pouvoir projeter la preuve au tableau. Donc essayer de séparer les étapes, par exemple là-dedans, de dire à tel endroit il a fait ça, à tel endroit il a fait ça...
864. Y : Ok.

865. T2 : Sans forcément rentrer dans les détails du calcul. Vous dites, ben là c'est un calcul, faites lui confiance ou faites nous confiance, on a vérifié.
866. A2 : En gros, en gros, l'avis qu'on a eu par rapport à la démonstration, on l'écrit là-dessus par exemple on dit, ici on a vu que c'était ça...
867. Y : T'arrives, tu dis ouais non, je crois que c'est faux du début à la fin je sais pas qui c'est ce mauvais [Inaudible].
868. A2 : La démarche que nous on a eu, par rapport à la... A la preuve.
869. T2 : Ouais.
870. A2 : Ok, bon ben très bien.
871. T2 : Ca va ?
872. A2 : Ouais, ouais, c'est bon ça va.
873. T2 : Je vous laisse ça et oui bon l'objectif si vous avez fini dans cinq / dix minutes, ce serait bien.
874. A1 : Bon.
875. A2 : On écrit directement dessus alors, non ?
876. T2 : Vous pouvez écrire directement dessus. Faites attention, réfléchissez bien parce qu'il n'y a pas de... Ils ne sont pas effaçables.
877. A1 : Ouais, parce que...
878. A2 : Ah ouais, d'accord.
879. T2 : C'est pas pour notre papier parce qu'on pourra le jeter, moi ça ne me fera pas mal au cœur, c'est pour vous si jamais vous écrivez un truc, vous pourrez pas effacer.
880. A2 : Ah ouais, ouais, ok.
881. T2 : Peut-être d'abord, faites le là-dessus. Si vous voulez, là-dessus par exemple et puis...
882. ? : Ouais.
883. A2 : Ouais d'accord, c'est pas plus mal aussi.
884. A1 : Ouais, j'ai aussi un dernier... J'ai effacer nos transparents d'ADS.
[Inaudible]
885. A2 : Ben donc, si je peux enlever ça, comme ça... Pardon, excuse moi, ok ben donc je sais pas.
886. A1 : Donc attend, on part de la preuve. Donc la première euh..., la première étape...
887. Y : Mouais donc euh, montrer que...
888. A1 : Calcul.
889. Y : C'est quoi la... Ah oui, ton truc.
890. A1 : Donc euh, avec.
891. Y : [Inaudible] C'est une règle ça.
892. A2 : De quoi ?
893. Y : Je sais pas, on l'utilise tout le temps, ça ce...
894. A2 : Ah euh, c'est Newton.

895. A1 : Vous l'utilisez, moi ça fait longtemps que je l'ai pas vue.
896. Y : Ouais mais toi, t'es un magouilleur [Rires]. Parce que toi, tu vois, ce truc là, tu utilises les deux premiers termes et après tu fais...
897. A2 : C'est bon.
898. Y : Non tu fais l'approximation $1 + ax \dots$ Tu vois
899. A2 : Ah. La formule de l'approximation.
900. Y : Plus n fois, ouais n plus... Tu prends les deux premiers termes, puis après tu négliges les autres puisque ça fait des puissances de deux et les puissances de deux ça devient tout petit par rapport au reste, c'est pour ça que [Rires].
901. A2 : C'est pour ça que c'est faux, ce que tu fais.
902. Y : C'est comme tu fais les formules de Taylor à l'ordre 10000, tu fais à l'ordre deux et puis c'est bon.
903. A1 : Bon sur le calcul, c'est bon on lui fait confiance ?
904. Y : Ouais.
905. A2 : Hum, ouais.
906. Y : J'ai la dalle [Rires].
907. A2 : Ca enregistre hein... Fait gaffe [Rires].
908. Y : Pourquoi ils sont pas tous comme ça, les cours...
909. A2 : Les quoi ?
910. Y : Les cours c'est mieux comme ça que...
911. A1 : Bon, seconde étape.
912. A2 : C'est vrai que mon prof d'analyse de cette année, il est pas top top.
913. Y : C'est qui ?
914. Y : T'as qui en analyse ?
915. A2 : Euh j'ai un jeune... Enfin, c'est au deuxième semestre, parce que j'ai refait maths1-analyse, en fait.
916. Y : De quoi, t'as refait quoi ?
917. A2 : Je refais maths1-analyse.
918. Y : Ah, ok.
919. A2 : C'est la deuxième fois que je le fais quoi.
920. Y : Ah ouais, c'est chaud quand même.
921. A2 : J'ai pas bossé le premier. En plus, c'est dommage, le premier j'avais un bon prof quoi.
922. A1 : Donc euh, bon deuxième étape, moi je dirais reformulation deuxième étape.
923. Y : Mais tu fais quoi d'autre comme maths toi, diff 3... C'est diff 2 que tu fais toi ?
924. A2 : Je refais le [Inaudible].
925. A2 : Parce que j'ai pas bossé, j'ai dit autant...

926. Y : Ah, t'as maths1-algèbre aussi...
927. A2 : Ah mais ouais, je refais les deux, c'est mieux.
928. Y : Ok.
929. A2 : Puis de passer à huit euh...
930. Y : Et t'en fait des deux ou pas. Tu fais maths2-analyse ou maths2-algèbre ?
931. A2 : Non, non, non, non, je fais juste maths1-algèbre, maths1-analyse.
932. Y : Ok.
933. A1 : J'adore l'odeur de ces feutres.
934. A2 : diff3 et après je fais les bases d'électricité.
935. Y : Ah, tu fais les bases de l'élec, compris.
936. A2 : Hum, hum, c'est moche... Enfin c'est moche.
937. Y : Ouais, j'aime pas. Ce connard là, il a eu vingt aux bases de l'élec.
938. A2 : Non ?
939. A1 : Si.
940. Y : Si.
941. A2 : T'as eu vingt aux bases de l'élec ?
942. A1 : Ouais. Je sais pas si ils ont remonté les notes.
943. Y : Ce semestre, ce semestre, il commence à avoir de très bonnes notes, il faut que je me méfie [Rires].
944. A1 : C'est ta faute.
945. Y : Je le tiens [Inaudible].
946. A2 : Mais c'est pas possible, il va en [Inaudible].
947. Y : Ouais, y en a au moins sept ou huit quand même.
948. A2 : Non.
949. Y : Si, si.
950. A1 : Ben on ira voir.
951. A2 : Sérieux... Eh moi, j'ai eu dix, mais alors moi, je boycott, je crois que je me suis bien fait...
952. A1 : T'es le mercredi ou le lundi ?
953. A2 : Lundi.
954. A1 : [Inaudible].
955. A2 : T'as le court avec X un truc comme ça ?
956. A1 : Ouais.
957. A2 : Elle était pas dur l'interro ?
958. A1 : Quoi ?
959. A2 : Elle était pas dur l'interro ?

960. A1 : Non.
961. A2 : Je sais pas, ben du coup, j'ai pas compris même un autre il a eu douze, il comprend pas... Enfin bon.
962. Y : Tu fais quoi là, c'est quoi ?
963. A1 : Je délimite les étapes sur ma feuille.
964. Y : C'est quoi cette étape, euh...
965. A2 : Fais le au stylo, pas au marqueur.
966. Y : Etape un, c'est ré-exprimer u_n d'une façon...
967. A1 : Ouais.
968. Y : Etape 2, c'est montrer, ouais, que...
969. A1 : Moi j'aime bien ces feutres, ça sent bon.
970. Y : Ouais j'adore, huum...
971. A2 : C'est quoi l'étape un, t'as dit ?
972. Y : Ok, y a quatre étapes.
973. A1 : Etape un, c'est le calcul.
974. Y : Y a l'étape quatre prime, c'est magouille.
975. A2 : Pourquoi tu parles de reformulation.
976. Y : Magouille [Rires]. Y a l'étape quatre prime « magouille ».
977. A1 : Là, c'est reformulation et croissance.
978. Y : Ca c'est magouille... Non, c'est pas celui-là... Elle est où la magouille ?
979. A2 : Là, elle est là, la magouille.
980. Y : Voilà, ça là : «on constate », « on constate que ».
981. A2 : On constate que dalle, ouais.
- [Rires]
982. A1 : T'avais un problème sur l'étape deux, Y toi, non ? Enfin on avait un problème...
983. Y : Non, mais c'est résolu ce problème.
984. A2 : De quoi, quand m tend vers l'infini.
985. Y : Ah oui, oui, je disais qu'il aurait pu rajouter qu'il y avait un terme qui se rajoutait à chaque fois.
986. A2 : Ah, pour la croissance.
987. Y : Ouais.
988. A2 : Ah oui, oui, pour la croissance, on avait dit qu'on aurait pu utiliser une euh... Une euh... Pour démontrer que c'était croissant, on aurait pu dire qu'à chaque fois on ajoutait un terme positif, donc du coup, vu qu'on avait déjà une suite... Enfin, à chaque fois...
989. A1 : Attends j'écris... répète mais tout doucement.
990. A2 : Vas-y mais il a vingt en [Inaudible], il commence à mal me parler [Inaudible].

991. A1 : Sérieusement, je fais le scribe alors...
- [Inaudible]
992. A1 : J'essaye d'écrire [Inaudible].
993. A2 : T'es sûr que tu essayes, parce qu'on dirait pas... Je rigole.
994. Y : ... En fait, c'est bizarre.
995. A1 : Non... Tu peux répéter ce qu'on disait.
996. A2 : Alors je disais que, en fait, pour démontrer que c'était croissant, on aurait pu montrer que on ajoute un terme positif... Un terme positif, à chaque fois, donc du coup...
997. Y : Pour chaque m .
998. A2 : Vu qu'on ajoute un terme positif.
999. Y : Vu que tous les autres termes, ils sont... Ouais, si on fait u_{m+1} moins u_m .
1000. A2 : En fait, en fait, c'est un peu récursif. Si, si on partait du début.
1001. Y : Non mais on revient, on pourrait pas le dire mathématiquement... Donc ça aussi, c'est un peu une magouille, parce que c'est facile de dire ouais ben... Il le dit facilement, moi je trouve.
1002. A2 : Ouais, mais en fait, il était peut être plus intelligent que nous donc du coup, toute cette démarche...
1003. Y : ouais mais bon, si t'es intelligent, je veux dire, là, il y a des étapes, tu les mets pas.
1004. A1 : Il faisait aussi peut-être des cours à des gens de l' X donc il faisait, donc il faisait « Ah j'ai compris c'est bon ». Ou alors « Ah je ne cherche pas à comprendre ».
- [Rires]
1005. Y : Pour des gens de l' X , pour des gens de l' X même à l'époque, euh tu leur montres ça, t'as pas besoin de leur montrer qu'elle est croissante et majorée, ils peuvent le faire tout seul. Tu leur dis ça se voit, peut-être qu'elle est croissante et majorée. Je vais vous montrer quelque chose...
1006. A2 : je vous fais la courbe de tête [Rires].
1007. Y : Quand tu démontres, tu démontres rigoureusement, tu fais pas une démonstration euh... Je peux pas dire ça au micro, mais voilà quoi.
1008. A2 : De merde ?
- [Rires]
1009. T2 : Ca avance ?
1010. Y : Ouais, ouais on a fini euh...
1011. A2 : Ouais, ouais. Enfin, on écrit d'abord sur la feuille avant d'écrire sur le transparent, quoi. On va le présenter après, non je sais pas...
1012. T2 : Ouais, alors après, vous êtes pas obligés d'écrire sur le transparent.
1013. Y : Ouais non, on va pas écrire...
1014. T2 : Vous avez le droit aux craies, au tableau...
1015. Y : On montrera avec les doigts, enfin avec les doigts euh...
1016. A2 : Ouais, on va vous le laisser.

1017. T2 : Prévoyez une règle plutôt que les doigts... Plus pointue.
1018. Y : Ouais, ou un crayon ou un stylo...
1019. T2 : Ou vous soulignez si vous voulez... Enfin bon, même, je pense que ça devrait aller.
1020. Y : Ils ont le même truc que nous donc euh... Ah non, c'est pas le même.
1021. T2 : Ils ont un autre problème.
1022. Y : Ah ouais.
1023. A1 : Ah.
1024. A2 : Ah, d'accord.
1025. T2 : c'est pour ça qu'on fait un exposé sinon à la limite euh.
1026. Y : Ok.
1027. A2 : Ah oui d'accord. Ah c'est bien ça, c'est rigoureux par contre.
1028. T2 : Donc eux, ils font le même genre de choses mais ils ont eu une autre preuve et c'est ce qu'il se passe quand euh...
1029. Y : Ah, c'est pas mal ça.

**Annexe 25 : Transcription de l'exposé
du groupe d'étudiants de L1
travaillant sur la preuve inspirée par
le texte de Liouville**

Exposé des étudiants de L1 travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy (E-L1-C) :

1. A2 : Ben vas-y commence, si tu veux expliquer... Qu'est-ce qu'on fait, on explique l'énoncé alors ? Voilà donc euh, vous avez la preuve, l'énoncé 1, inspirée par le cours d'analyse de 1821 par Cauchy, voilà donc, ça c'est la preuve. L'énoncé est là-haut : « On considère la suite définie par » euh, « pour tout entier naturel non nul n , $u_n = (1 + 1/n)^n$. On a alors une limite de u_n , quand n tend vers l'infini qui est égal à e ». Voilà. Donc ça, c'est l'énoncé.
2. Y : e c'est, e c'est défini... Puisqu'au début, on savait pas trop comment, ce que c'était e , et ben e c'est la définition de la suite, de la limite de cette suite là, de la suite v_n .
3. A2 : Qui est ici.
4. Y : Qui est là.
5. A2 : Là.
6. Y : Et là, on montre juste que cette suite a bien une limite. Donc, en montrant qu'elle est croissante et majorée. Et donc, on appelle sa limite e par convention.
7. A1 : Donc dans la preuve, quatre étapes, euh... Bref.
8. Y : Ben, on attaque.
9. A2 : [Inaudible] D'abord, le début.

[Aparté non traduit sur la répartition des transparents sur le rétroprojecteur]

10. A1 : Donc on a défini quatre étapes, la première, c'est celle-ci. Donc euh, c'est du calcul. La seconde, elle va de là à/
11. Y : Tu dis juste ce qu'elle fait quoi l'étape.
12. A1 : Ouais donc euh, là, on reformule les termes, termes et on...
13. Y : On montre juste qu'elle est croissante.
14. A1 : Et on montre que la suite est croissante. La troisième étape, c'est sur la feuille suivante, c'est celle-ci. On, voilà on montre que la suite est majorée. Donc le théorème, on connaît bien le théorème qui dit que « si une suite est croissante et majorée, elle converge ». Et là, on prouve la convergence vers e quand m tend vers l'infini. Donc euh, on revient à l'étape un.
15. Y : Euh l'étape un, il n'y a pas besoin de vous, en y regardant deux / trois minutes, c'est simplement du calcul. Donc, euh...
16. A1 : Binôme de Newton.
17. Y : Ouais donc on fait juste le binôme et puis euh, après on développe puis on simplifie, donc voilà. Euh, l'étape...
18. A2 : L'étape deux. Voilà, on commence par montrer que u_n a une limite quand n tend vers l'infini [Inaudible]. Je sais pas comment on peut leur expliquer.
19. Y : Non, non, ça, c'est la croissance.
20. A1 : Ben là, on sélectionne un terme. Donc par défaut, le $(n + 1)$ ième, parce que ça nous arrange.

21. A2 : celui-là, quoi.
22. Y : On prend un terme quelconque de la suite.
23. A1 : Euh, et donc on le reformule pour qu'il ait cette forme là et qu'on voit bien que euh... On voit bien que quand, euh...
24. Y : Quand n augmente.
25. A1 : Quand n augmente, ce terme là devient plus petit. Idem pour celui-ci et celui-là et ainsi de suite. Et euh, et que euh, globalement tout terme ici, $n + 1$ augmente, euh, le $(n + 1)$ ième terme augmente, ce qui fait que à chaque fois que l'on augmente m , toute la somme augmente et aussi quand m augmente, ça c'est, Cauchy a oublié de le dire quand m , on ajoute un... Encore un terme par rapport aux précédents, il sera positif et euh...
26. Y : Ouais voilà.
27. A1 : Et euh, donc euh, si on fait la différence entre u_{m+1} et u_m , on verra que c'est bien positif, donc la suite est croissante.
28. Y : Je sais pas si... C'est bon ? En fait il s'intéresse à un terme. Il montre que, donc il s'intéresse à un terme quelconque, il montre que tous ces termes et ben ils augmentent. Donc si tous les termes du truc augmentent ben forcément ça augmente... Mais nous on se disait quand on a u_m égal quelque chose, il y a $m + 1$ termes et u_{m+1} , il y a $m + 2$ termes et donc, on se disait pourquoi il a pas dit on ajoute un terme positif ? Donc euh, soit il devait le considérer acquis quoi enfin, ça paraît logique on rajoute un terme positif donc ça augmentera aussi.
29. A2 : On sait qu'on aurait pu compléter la démonstration que lui il avait fait. Enfin de ce que il a utilisé avant... Enfin, nous c'est ce qui nous paraissait le plus logique, d'ajouter un terme positif.
30. Y : Ouais.
31. A2 : Forcément, ça va augmenter.
32. Y : Et puis, sachant que tous les autres termes...
33. A2 : Que c'était une preuve du fait que ça augmente.
34. Y : Sachant que tous les autres termes augmentent, en plus on en rajoute un positif, ça peut faire qu'augmenter quoi...
35. A2 : On comprenait pas trop sur ce cas là, pourquoi il l'avait pas utilisé. Donc, c'est là peut-être que, est-ce que c'est peut-être pas rigoureux ou est-ce que...
36. Y : Ouais...
37. A2 : Pour nous ça semblait rigoureux, hein...
38. Y : Ouais...
39. A1 : A part ça, à part ça, c'est bon.
40. Y : C'est après où...
41. A2 : Enfin sur ce point là, ouais c'est bon.
42. A1 : Donc euh, point trois.
43. A2 : Ouais, c'est la suite euh. Donc là, c'est quoi la majoration. Donc en fait, c'est ce qu'on avait dans la partie un aussi, [Inaudible] partie un, euh, donc euh. Enfin, il n'y a pas grand-chose à dire là, euh...
44. A1 : Ben, en fait, euh.

45. A2 : Enfin, je sais pas si c'est...
46. A1 : En fait, si on reprend...
47. A2 : C'est l'interprétation, c'est dans le un en fait. C'est dans le un qu'on avait vu ça...
48. Y : Non, même pas...
49. A2 : Ben si, c'est ce qu'on avait vu là aussi, on l'utilise.
50. Y : Non, on dit juste que, que...
51. A1 : En fait, voilà, on a la majoration, on reprend, on reprend simplement euh, on reprend simplement ça et on voit que, que ici tout ce terme-là, on peut le majorer par un et euh...
52. Y : Ca revient à ça, ça revient à ça. Et celui-là est majoré par e parce que la suite est croissante. Elle est croissante donc tous ces termes ils sont en dessous de sa limite puisqu'elle est croissante et qu'elle converge. Donc euh, forcément, ça majore euh...
53. A2 : Donc, elle est croissante et majorée.
- [Inaudible]
54. A1 : Donc euh, la majoration, enfin oui. C'est euh, c'est assez clair, donc euh, il n'y a rien à redire dessus et maintenant petit quatre. Là, c'est plus controversé.
55. Y : Ca va, vous ? La majoration c'est bon ? Ouais, ok.
56. A2 : Enfin, il faut bien se mettre dessus pour bien comprendre mais...
57. Y : Ouais mais...
58. A2 : C'est assez compréhensible.
59. Y : La majoration, ouais c'est, il y a juste une étape, juste ça, ils font ça, ils montrent que c'est entre un et puis...
60. A1 : Et donc la partie quatre, donc euh, alors euh, la partie quatre. Oui comme je l'ai dit, elle est, elle est un peu plus controversée. Enfin, on a des avis qui diffèrent. Moi, je pense que c'est assez clair et eux ils pensent qu'il manque quelque chose. Donc euh, on va vous présenter les différents points de vue. Je vous laisse commencer ?
61. Y : Euh...
62. A1 : D'abord ? Ou moi d'abord ?
63. Y : Je fais juste le topo quoi.
64. A2 : Ouais.
65. Y : En fait, il a une suite et donc il y a plein, plein de termes. Et il se dit, ben tient ce terme-là, ça comme on le disait, ça va tendre vers un quand m tend vers plus l'infini. Donc ce terme-là va tendre vers, le $(n + 1)$ ième terme, va tendre vers $1/n!$. Du coup, tous les termes de la suite quand m tend vers plus l'infini, ils vont tendre vers, vers $1/n!$ et ça c'est la définition de e . Et donc là, il y a son point de vue maintenant... Enfin son point de vue, là, j'ai pas dit mon point de vue j'ai juste expliqué...
66. A2 : Expliqué ce que lui, il montre.
67. Y : Voilà.
68. A1 : Alors, mon point de vue, c'est que oui, le passage de là à là, il... Et même la limite, c'est complètement clair puisque euh... Là, on s'intéresse au $(n + 1)$ ième terme, on voit qu'il tend

vers $1 \dots 1/n!$. Donc on sait que quand euh, quand m va commencer à devenir grand le $n!$, le $1/n!$ il va commencer à devenir très petit. Donc euh, leur point de vue à eux, c'était que au fur et à mesure que m augmente, on ajoute des termes au bout...

69. Y : On va le dire parce que... Parce qu'il va nous magouiller ça, tu vas les mettre dans ta poche.
70. A1 : Non, et justement, euh justement, ça importe pas beaucoup, vu que plus on enfin...
71. Y : Attend, attend...
72. A1 : Enfin, ils sont de plus en plus petits.
73. Y : Nous, notre point de vue, c'est que...
74. A1 : Donc pour moi, ça c'est suffisant.
75. Y : Notre point de vue c'est que bon, on est tous d'accord pour dire que ça marche, enfin...
76. A2 : Ouais, on pense que [Inaudible].
77. Y : On voit pas, on pourrait pas le contredire parce que ça semble tellement bien marcher. Mais on se dit, il s'intéresse à un terme et hop, il fait tendre vers plus l'infini, donc ce terme il tend bien vers ça, mais pendant qu'il fait tendre vers plus l'infini, il y a des milliers de termes qui se rajoutent puisque, plus m augmente, à chaque fois qu'on augmente m de un, il y a un terme qui se rajoute. Du coup, il peut se ré-intéresser à ces termes et faire tendre vers plus l'infini pour que ces termes là tendent bien vers $1/n!$ et ainsi de suite... Mais à chaque fois qu'il fait tendre de plus en plus, enfin, vers l'infini euh... Enfin bon, c'est un point de vue.
78. A2 : Voilà en fait, c'est ce manque de terme, on pensait que c'était pas rigoureux parce que on pensait, ben à chaque fois, ça augmente, on ajoute quand même un terme positif et donc au bout d'un moment... On pense que c'est pas rigoureux parce qu'on sait pas vraiment, exactement vers quoi, vers où ça tend. Donc nous, on sait pas non plus mais euh...
79. Y : Ouais.
80. A2 : On pense que c'est pas rigoureux dans le sens où cette partie là, elle est un peu, elle est un peu, elle est un peu passé rapidement. Du coup, ben voilà, il y a une partie qu'on pense démontrée, on pense que ça tend vers $1/n!$ mais le reste, ben on a pas vraiment d'idée de ce qu'il se passe. Et du coup, ben on est un peu sceptique sur le côté de la démonstration... La rigueur.
81. M : Ben peut-être... Ce qu'il fallait démontrer c'est que la limite de $(1 + 1/m)^m$ ça tend vers $e \dots$
82. Y : Non, non, non, ça c'est la définition de e ça.
83. A2 : Ouais, qu'on a vu dans la première partie.
84. N : Si, c'est ça qu'il fallait démontrer, si c'est ça.
85. Y : Ce qu'il faut montrer c'est/
86. A1 : Non, ce qu'on veut c'est ça [Inaudible] égal ça.
87. M : Et alors, il faut démontrer quoi, il faut démontrer que...
88. A1 : Hein...
89. Y : [Rires] Fallait nous arrêter là parce que...
90. M : Vous pouvez remettre la première feuille ?
91. Y : Ouais.
92. A1 : Ouais, bien sûr.

93. M : Donc, vous avez cette suite u_n , d'accord ?
94. Y : Hum, hum...
95. A1 : Euh c'est celle-ci pour euh...
96. A2 : Ouais.
97. M : Donc, vous avez dit que vous devez démontrer que/
98. Y : Qu'elle tend vers e .
99. A1 : Ce qu'on devait démontrer c'est...
100. M : Qu'elle converge, ouais ?
101. Y : Ouais.
102. M : Et vous avez dit que vous allez appeler cette limite si elle existe e , c'est ça ?
103. A1 : Non, e , c'est un nombre qu'on connaît. e , c'est euh... Quand tu fais exponentielle x ...
104. Y : e , c'est défini par la somme euh.
105. M : Alors je vois pas pourquoi vous posez le problème pour la dernière partie, si c'est ça la définition de e .
106. A2 : Enfin, si tu veux, enfin moi, je me permets ?
107. Y : Ouais, ouais vas-y.
108. A2 : D'expliquer, bon voilà, du coup, on a une somme de... Si tu veux, on a la somme là, tu vois jusqu'à $1/n!$.
109. M : Mais ça, c'est...
110. Y : Ouais, mais en fait...
111. A2 : Mais après, du coup, c'est ça, cette... La dernière partie, on le fait tendre, on fait tendre euh... m vers l'infini et du coup, ben on sait pas... On a l'impression que c'était négligé et du coup, c'est sur la rigueur de la démonstration quoi, que nous on était sceptique. On dit pas qu'elle est pas valide, mais on se posait...
112. M : Dans la définition, c'était avec un nombre fini c'est ça ?
113. A2 : Comment ?
114. M : Dans la définition de [Inaudible].
115. Y : Non, non c'est la limite, la limite de, la limite de tous ces termes là jusqu'à... Ca tend vers e . Donc là, ce passage là, c'est clair quoi c'est...
116. N : En fait euh, le truc qui est en bas, c'est encore une autre limite en fait, parce qu'ils ont écrit la somme infinie, c'est une autre limite ?
117. Y : Ca ? Ca ?
118. A2 : Tu parles de quoi ?
119. N : Ouais. Ça.
120. A1 : Là, c'est...
121. N : Ouais mais ça, c'est une autre limite en fait.
122. A1 : Faut se dire que ça va jusqu'à $1/n!$.

123. Y : Ca, c'est la limite de ça.
124. N : Ouais mais ça, c'est encore une autre limite parce que si tu dis euh, parce que, en réalité, tu as, tu as une infinité de termes donc euh... Je veux dire, euh... Enfin, comment expliquer...
125. T1 : Essayer d'expliquer la définition de e sur cette ligne là.
126. Y : Euh ben e , en fait, c'est euh, ben e c'est ça.
127. M : D'accord.
128. Y : C'est ça, bien avec les trois petits points tu vois...
129. A1 : Jusqu'à l'infini.
130. N : En gros ils disent, là, quand ils disent, quand ils passent d'une ligne à l'autre enfin je pense qu'on pourrait le reformuler en disant que c'est, c'est égal à la limite de cette suite en fait. Si tu mets, tu remplaces m par n , tu dis que c'est limite et ainsi de suite.
131. Y : Ouais, ben oui... Enfin, ouais ça...
132. A1 : En fait là, je pense que le problème, au final, je viens d'y réfléchir, le problème c'est l'écriture.
133. Y : Ouais, c'est vrai que... Ouais c'est vrai que l'écriture, mais ça nous explique pas... C'est pas là-dessus qu'on s'arrête.
134. N : C'est les trucs de séries ou je sais pas quoi ça, non ?
135. A1 : [Inaudible] On pourrait l'écrire comme ça [Il écrit quelque chose au tableau].
136. A2 : En fait, on s'était plus arrêté sur l'idée...
137. Y : Ben, non pour nous trois petits... Ouais, c'est vrai que c'est... Ouais... Faudrait mettre limite. Ouais, enfin, nous on a jamais vu un truc comme ça.
138. A1 : C'est zéro ou c'est un.
139. A2 : Un.
140. N : Ah mais ça, c'est les trucs euh...
141. T2 : Zéro en fait c'est zéro...
142. A2 : Zéro pardon, ouais.
143. N : C'est une nouvelle limite en fait. Quand tu mets... C'est limite quand euh...
144. Y : Ouais, mais non, mais ça, c'est la limite, enfin ça, c'est il dit ça euh...
145. T1 : Les petits points, c'est comme une limite.
146. Y : Ouais voilà enfin, nous, on s'est pas arrêté là-dessus, on a... Vu qu'on était pris dedans, on s'est dit bon ben, c'est la limite. Mais c'est justement...
147. N : Ouais, c'est limite quand m tend vers plus l'infini alors.
148. A2 : Voilà.
149. Y : Voilà, ouais.
150. A1 : Ouais là, c'est m .
151. N : Ouais, mais faut que tu fasses une autre limite, que tu mettes une autre limite encore...
152. A1 : Pourquoi ?

153. Y : Non, parce que/
154. N : [Inaudible].
155. A1 : Là, c'est un m .
156. N : Ouais, mais à gauche sur ton écriture, il tend pas vers euh... Comment dire...
157. T2 : Tu peux dans ton écriture bien nous dire ce que c'est que n et m ?
158. A1 : n en fait, n si vous voulez c'est un terme au hasard qu'on choisit au milieu...
159. T2 : Ce que je demande, c'est euh là, y a que des m ou il y a aussi des n ?
160. A1 : Non y a que des m .
161. T2 : D'accord.
162. A2 : C'est des m ?
163. A1 : Ouais, je sais pas écrire mais...
164. T1 : Est-ce que vous êtes d'accord avec cette écriture là ?
165. A2 : c'est des m ?
166. T1 : Non mais, est-ce que vous êtes d'accord que ce qu'il y a écrit sur le transparent, ça correspond à ce qu'il y a écrit au tableau ?
167. A2 : Ouais c'est ça, ouais.
168. Y : Ben non.
169. A2 : Ben non, mais attend...
170. N : Mais là, c'est finit ou pas ce qu'il a marqué, non ?
171. Y : c'est un m ou un n ?
172. A2 : Non parce que du coup, c'est pas la même.
173. T1 : Non, c'est que des m partout, c'est que des m partout.
174. Y : Là, il y a un m et là, il y a des m .
175. A2 : [Inaudible] L'égalité avant [Inaudible].
176. N : La somme de droite, elle est finit là ?
177. Y : Ouais, mais ça a rien à voir, ça.
178. T2 : S'il vous plaît, on fait un par un, il y a une question, parce que sinon...
179. N : La somme, elle est finie là parce que tu auras m termes. Il faut que tu mettes que c'est la limite de ça.
180. A1 : C'est une limite. Oui, c'est la limite de ça, t'as raison. Il y a une erreur. Voilà, exact.
181. Y : Voilà. Mais toi, t'as mis des n partout ?
182. N : Non c'est des m .
183. A1 : c'est des m .
- [Rires]
184. A1 : Je crois que je vais retourner au CP en fait. Non ça va ? Convaincus ou pas ?

185. A2 : Enfin nous, c'était notre avis quoi, c'est là où on a un peu divergé.
186. T1 : Convaincus par l'argument de Cauchy ?
187. N : Y a juste un truc que j'ai pas très bien compris c'est le..., le...
188. M : Moi, je suis convaincu mais je comprenais pas trop le problème parce que si la somme... C'est pas ça le point...
189. Y : Ouais mais attend, attend on va te le ré-expliquer.
190. Y : Non, c'était pas ça.
191. T1 : Expliquez votre problème.
192. T2 : Est-ce que vous pouvez montrer l'égalité qui pose problème ?
193. A2 : Pour nous ? Ben c'est là, c'est...
194. Y : Ce passage là.
195. T2 : Laquelle d'égalité parce qu'il y en a deux, là [Au niveau de la dernière ligne de la preuve].
196. A2 : La dernière.
197. Y : C'est de dire on constate machin, chaque terme... Du coup, on passe de là à là.
198. T2 : Quelle égalité, du coup, vous pose problème ?
199. Y : Ben... Le passage de là à là.
200. T1 : Dans la dernière ligne il y a deux égalités écrites, il y a deux symboles « égal ». Lequel symbole vous pose problème ?
201. A1 : Ben, celui-là.
202. T2 : D'accord.
203. M : Ouais, d'accord. J'avais compris dans l'autre sens.
204. Y : L'autre c'est... Ah ouais, ok. L'autre c'est la définition de e donc euh...
205. T2 : Ouais, mais c'était pas clair, visiblement, pour nous.
206. Y : Ok.
207. A2 : D'accord.
208. N : Il y a un truc que j'ai pas bien compris, c'est à un moment, il y avait une somme, un produit je veux dire, un produit avec euh... Sur l'autre page, à la fin en bas.
209. A1 : Ouais là ?
210. N : En fait, ça, vous démontrez que ça tend vers euh vers $1/n!$ quand n tend vers l'infini. C'est ça ?
211. Y : Oui, c'est... Enfin c'est pas nous qui le démontrons.
212. A2 : Oui enfin, c'est ce qu'il dit. Mais on était d'accord.
213. Y : Justement c'est là que ça commence, ça nous...
214. N : Parce que je sais pas moi, ça me fait penser à...
215. Y : Oui ben nous, c'est là-dessus qu'on a un...

216. N : Ah c'est bon, non, non j'ai rien dit. Parce qu'il y a n termes, y a $n - 1$ termes et n il est fixe. Ah ouais d'accord.
217. Y : Mais justement, c'est là c'est, t'as la même réaction que nous à peu près. C'est que bon là d'accord il est fixe, mais on fait tendre m , m , vers plus l'infini du coup celui-là il tend vers un.
218. N : Ouais.
219. Y : On est d'accord. Mais pendant que celui-là tend vers un, il y en a dix mille qui sont créés des termes. Et ces termes là, ils sont encore plus grand. Et justement, on se dit mais pourquoi ces termes là, ils doivent tendre vers un quoi ?
220. N : Mais tu parles des autre termes, $1/(n + 1)!$ et tout ou tu parles de... Toujours dans cette...
221. Y : Toujours le même terme, mais ils sont de plus en plus gros ces termes et, enfin, le temps, le temps que, enfin nous on se disait le temps qu'il met à faire tendre ce terme vers un, il en crée d'autres parce que, à chaque fois qu'on rajoute un m , ça rajoute un terme.
222. N : Ouais, mais là...
223. A1 : Pas ici, en fait.
224. N : Mais si tu considères juste cette expression, sans t'intéresser à l'autre, tu prends juste cette expression.
225. Y : Oui mais le problème, c'est qu'on peut pas s'intéresser juste à cette expression parce que justement, quand m tend vers plus l'infini, il en met d'autres des expressions.
226. T1 : Vous pouvez essayez d'être assez précis sur où est-ce que l'on ajoute des termes ? A quel endroit ?
227. Y : He ben... A u_m , en fait... Enfin, je...
228. A1 : Là, si vous voulez, on a pris celui-là, on a pris celui-là pour s'y intéresser... Et pour généraliser en fait.
229. Y : Par exemple u_{10} , on aurait onze termes. Donc tac, tac, tac, tac... On en prend un sur les onze, on dit hop celui là il tend vers $n!$ vers oui, $n!$. Enfin...
230. A2 : C'est pas $1/n$... $1/n!$.
231. T1 : $1/n!$.
232. Y : Oui, $1/n!$ fois deux... Ou enfin... C'est quoi le...
233. T2 : C'est un, c'est un, c'est bon.
234. A2 : C'est un.
235. Y : Et l'autre du coup, il tend vers deux sur euh...
236. A1 : Non, non...
237. T1 : Non.
238. A2 : Non...
239. Y : Je m'embrouille... Enfin n'importe quelle terme tend vers le bon truc qu'on cherche, mais pendant ce temps, le fait de le faire tendre vers là, et ben ça fait d'autres termes puisque c'est plus u_{10} après parce que ça devient pour faire tendre m vers...
240. N : Ah oui, d'accord.

241. Y : Tu vois ce que... Et du coup, ces autres termes, on peut pas dire, on s'y intéresse pareil puisqu'ils n'existaient pas encore. Ils n'étaient même pas là quand on s'intéressait à ce terme là. On s'intéressait au terme de rang n , alors que maintenant il y a plus de terme. Et pour refaire la même démarche, on refait la même démarche mais on en recrée d'autres. Et c'est là-dessus qu'on...
242. A1 : Je pense que le souci là, c'est que...
243. N : [Inaudible] Milieu de la feuille pour voir ce qu'il y a à voir.
244. Y : L'autre feuille ?
245. N : Ouais, voilà.
246. A1 : Je pense que le souci, c'est que tu t'arrêtes au $1/n$ en fait. Parce que nous on...
247. Y : Non, mais je disais un, mais ça aurait pu être deux...
248. A1 : Oui mais en fait, ce que l'on fait, c'est qu'on regarde un terme parmi d'autres, n'importe lequel pour généraliser aux autres et euh, et euh, nous arranger. Parce que sinon c'est, sinon on peut plus avancer.
249. Y : Ouais, mais... Mais euh, moi je disais que, on peut pas en regarder un parce que le fait de faire tendre vers plus l'infini et ben ça change tout le truc et l'exemple que je prenais, je sais plus ben, c'est à peu près ça. Je sais pas. C'est pas tout à fait pareil mais... Ben si $(1 + 1/n)^n$, je dirais ben, c'est quoi c'est $(1 + 1/n)(1 + 1/n)$... On met, on met toc je sais pas combien de fois. On fait tac, bon ben il y est 10000 fois, il y est à l'infini fois. Hop, on prend un terme, ah ben il tend vers un. Hop, celui-là, il tend vers un... Bon ben le tout, ça tend vers un.
250. N : Ouais, mais ça tend vers un puissance l'infini et c'est une forme indéterminée.
251. Y : Ouais mais pour moi, c'est à peu près la même chose. On en prend un, on le tend vers un, enfin c'est...
252. N : [Inaudible] Tu le fais pas tendre vers un truc fini, de toute façon donc euh... Enfin tu vois, il tend vers $1/n!$, il tend pas vers un truc fini.
253. Y : Ca veut dire quoi ? Ouais, oui ?
254. N : Enfin, comment dire...
255. Y : Ouais, mais de toute façon...
256. T1 : Tu penses qu'il y a une différence si ça tend vers un truc fini que si ça tend vers... vers zéro que si ça tend vers quelque chose de non nul.
257. N : Enfin si ça tend vers... Voilà, voilà, enfin là, quand on fait tendre vers... Non ben je sais pas trop comment dire, en fait.
258. Y : Ouais, enfin, nous on pensait que c'était pas... Qu'il devait avoir un truc plus rigoureux pour le dire.
259. T1 : Si vous pensez que c'est pas rigoureux, est-ce que vous avez une idée de comment le transformer en un argument.
260. A2 : Euh... Pfff... Concrètement, pour être vraiment rigoureux, euh non. Enfin c'était, on pensait... Enfin moi, moi je pensais que il y avait peu être une démonstration plus mathématique qui aurait pu être utilisée pour le démontrer et que là, ça nous paraissait un peu trop simple quoi de, de... Enfin personnellement, moi je ne vois pas vraiment le côté démonstratif où c'est

vraiment clair et euh on le voit tout de suite, quoi. Et euh, ça me gênait, ça nous gênait tous les deux.

261. N : [Inaudible].

262. A1 : Et en revanche pour moi, c'est plutôt suffisant ça, justement...

263. Y : Pour nous ouais, c'est, on est convaincu que ça fait ça. Mais euh c'est, enfin, je sais... Ça paraît trop facile quoi, c'est hop on prend un terme, hop ça marche bon ben allez.

264. N : En fait, là on fait tendre vers une infinité de termes, c'est ça la différence avec euh...

265. Y : Ouais, ben ouais.

266. N : Enfin je veux dire, ton expression, tu la fais tendre vers une autre expression, c'est ça la différence entre...

267. Y : Ouais ben, c'est ça...

268. T2 : On reviendra dessus ?

269. A1 : Hum, hum.

270. Y : Ouais.

[Je passe l'exposé de N concernant le travail du groupe N et M sur la preuve issue du texte de Liouville et les discussions afférentes. Cet exposé et les débats qui suivent sont transcrits à part dans la partie de l'annexe intitulée «*Exposé des étudiants de L1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville*».]

[$T1$ et $T2$ distribuent un nouvel énoncé. Cet énoncé est faux et la preuve contient une déduction similaire à celle analysée par le groupe Y , $A1$ et $A2$, c'est-à-dire une déduction utilisant un passage à la limite sur les termes d'une série que l'on cherche à calculer. Voir Annexe ???].

271. Y : C'est pareil...

272. A2 : De quoi ?

273. Y : Parce que ça ajoute des termes. C'est la même chose, ouais.

274. N : Ah ouais. Mais là, c'est la, c'est la...

275. Y : Bon l'énoncé 2, il est juste.

276. A1 : Ben oui.

277. A2 : ... Juste.

278. Y : Mais la preuve, elle doit être fausse...

279. N : Il tend pas vers l'infini ce truc là ?

280. A1 : hein ?

281. Y : Je dirais que la preuve est fausse mais que l'énoncé est juste.

282. N : Mais ce truc là, ce truc là, il tend pas vers zéro quand n il tend vers zéro.

283. A1 : Ouais, mais pourquoi pas ?

284. Y : quand n tend vers plus l'infini ?

285. N : Parce que, quand n tend vers plus l'infini, parce que regarde...

286. Y : Pourquoi ?

287. N : Tu ajoutes toujours des trucs donc euh...
288. Y : mais oui, mais...
289. N : Tu en retires jamais.
290. Y : Tout à l'heure, je te disais pareil et tu me disais le contraire.
291. N : Non mais tu ajoutes toujours des trucs, tu en retires jamais [Inaudible]...
292. Y : Oui, mais quand tu ajoutes tous les termes, ils tendent vers zéro.
293. N : Mais regarde, tout à l'heure pour ton e , c'était pareil...
294. Y : Mais tout à l'heure, c'était bien, enfin, c'était exactement la même chose tout à l'heure, non ? C'était pas... ?
295. N : Ben, tu peux majorer par euh...
296. Y : Tu vois c'est... Tu restes, tu rajoutes un terme, mais en même temps, tu diminues tous les autres. Et le total il diminue, la preuve, elle est décroissante.
297. N : Mais là, regarde, tu peux dire que c'est plus petit que...
298. Y : Essaye de calculer w ... tu fais w_1 .
299. N : C'est plus petit que un à chaque fois, à chaque...
300. A1 : w_1 , ça fait...
301. Y : ça fait $1/2$... Ca fait $3/2$.
302. N : Ouais, mais c'est supérieur à $1/2$ à chaque fois, enfin...
303. Y : Pourquoi ?
304. N : A la limite, je veux dire à la limite si tu prends...
305. Y : Tu fais $1/2000$... Ouais t'as raison... Ouais t'as raison, tu les majores tous par...
306. N : Regarde, si tu prends $1/(n+k)$.
307. Y : Ouais, ouais... Tu les majores tous.
308. N : C'est plus petit que $1/n$.
309. Y : Tu les majores tous par un demi m ... Ouais donc ça tend pas, ouais, donc il est faux...
310. N : Non, mais c'est comme là.
311. Y : L'énoncé est faux.
312. N : C'est comme, c'est comme la somme des $1/n$.
313. Y : Ouais, ouais, moi je suis d'accord avec toi, j'essaie juste de... Ok.
314. N : C'est comme somme des $1/n$, par exemple...
315. Y : Oui, non mais, de toute façon...
316. N : Ca, ça tend vers plus l'infini. Ça, ça tend vers plus l'infini somme des $1/n$.
317. Y : Donc c'est, ça tend vers $1/2$, le truc... Ouais le truc, il tend vers $1/2$.
318. N : Je sais pas si il tend vers $1/2$ mais il/
319. Y : Si moi je suis sûr, parce que regarde, si tu augmentes de 1000, ça va faire 4000 et 2000/4000... Ca tend vers $1/2$.

320. N : ... Théorème des gendarmes. Si tu prends...
321. Y : Ouais, ça tend vers... Si tu les majores tous par $1/2000$...
322. N : Ca tend vers un truc entre $1/2$ et 1 , je pense.
323. A1 : De quoi ?
324. N : Ca tend vers un truc entre $1/2$ et 1 , je pense.
325. Y : Ben euh, ça devient $1/2$ parce que un sur euh... Attend... Un sur... Ah non, ouais t'as raison. Parce que tu vois, si tu mets un milliard, t'auras un sur euh... De un milliard à un milliard... Ouais non, on sait pas vers quoi ça tend.
326. A1 : Est-ce que le binôme de Newton, il marche avec n inférieur à zéro.
327. Y : Ouais, on peut pas savoir...
328. A1 : Non, ce serait trop bien.
329. N : Ca tend vers un truc entre $1/2$ et 1 .
330. Y : Et ça, en plus, on est, on l'avait fait dans un exo, on avait dû minorer, si je me souviens bien.
331. A1 : minorer par ?
332. Y : ben tu sais, tu mines ce terme, euh tu les mines tous par $1/2000$, celui-là il se mine par $1/2000$, celui-là il se mine par $1/2000$, celui-là par $1/2000$.
333. A1 : Ouais, ça j'ai...
334. Y : Et 1000 fois $1/2000$ ça fait $1000/2000$ ça fait $1/2$, le tout est minoré par $1/2$.
335. N : Mais il est majoré par un aussi.
336. Y : Ouais, il est aussi majoré par un.
337. T2 : Ouais.
338. Y : Du coup, il peut, enfin de toute façon, si il est minoré par $1/2$ il peut pas tendre vers zéro.
339. T2 : Vous avez suivi... L'argument ?
340. A2 : Ouais, ouais.
341. A1 : C'est bon, c'est...
342. T2 : Donc a priori, le théorème est, est faux.
343. A2 : Est faux.
344. A1 : Hum, hum.
345. N : Donc la preuve est fausse.
346. T2 : Donc il faudrait repérer où la preuve est fausse, alors.
347. N : ben, c'est quand on dit que la somme euh, non chaque membre tend vers zéro, mais à l'infini ça veut pas dire que...
348. A2 : Ca veut pas dire/
349. N : Quand on va mettre à l'infini, sommer les termes qui tendent vers zéro, ça tend pas vers zéro.
350. Y : Ouais parce que enfin, c'est un peu la même chose.

351. A1 : Ouais, voilà le problème, il est là c'est, il généralise euh, il généralise. Enfin il prend un des termes et il généralise euh... Ah non.
352. Y : non mais tu sais, cette phrase elle est bonne, mais euh... C'est comme tout à l'heure, de faire tendre vers plus l'infini, on rajoute des autres termes et cela on les a pas choisis puisque ils sont en dehors de..., de..., de ça quoi. Enfin, comme tout à l'heure on rajoutait des ε et euh on pouvait pas savoir si ces ε qu'on avait rajoutés, ils tendaient, ils étaient, ils tendaient vers zéro ou je sais plus ce que c'était. Ouais c'était ça.
353. A1, A2, Y : [Inaudible].
354. Y : Non, non le truc qu'on vient de faire, là.
355. T1 : Les ε que vous rajoutez, enfin les termes que vous rajoutez, ils tendent vers quoi ?
356. A1 : Ils tendent vers zéro.
357. Y : Ouais mais ils sont, oui ils tendent vers zéro, mais...
358. A1 : Mais c'est une somme de quelque chose.
359. N : C'est une somme infinie enfin...
360. Y : Tout à l'heure, c'était pareil, tout à l'heure c'était pareil les ε ils tendaient bien vers zéro mais, mais euh... Mais c'est pas là-dessus qu'on...
361. A2 : Mais quand on l'a expliqué, ça marchait pas quoi.
362. Y : Quand on pose euh, quand on pose euh, quand on pose ces termes, il y a en qui ne sont pas encore créés. On étudie, on dit euh « ce terme ayant été choisi au hasard » mais on choisit au hasard pour un m posé. Et après, on fait tendre m vers plus l'infini et là il y a des autres termes qui se créent.
363. A1 : Ouais là, on, ouais...
364. Y : Et c'est pareil que tout à l'heure quoi.
365. A1 : Ils font des sommes de, de, ils font des sommes de quelque chose qui tend vers zéro et euh...
366. N : Vu qu'il y en a une infinité...
367. A1 : Et vu qu'il y en a une infinité, ça marche pas.
368. T2 : Hum, hum. Et dans la preuve du début euh, l'énoncé 1, est-ce qu'on fait ce genre de truc ou pas ?
369. Y : Ben ouais, moi j'aurais dit ça.
370. A1 : Mais...
371. A2 : Ah, ah ben du coup, ben du coup, on revient sur ce qu'on avait fait nous, à la fin.
372. Y : Ouais, ouais c'est là quoi... On fait tendre tous les termes vers $1/n!$, et on en rajoute d'autres et ceux-là, on s'en est pas occupé.
373. A1 : Ouais, mais notre somme, on essayait pas de la faire tendre vers euh, vers zéro.
374. A2 : Vers zéro ouais, c'est ça, le truc.
375. T2 : Et alors ?
376. Y : C'est la même chose parce que elle tend...

377. A2 : Je sais pas c'est...
378. Y : On est d'accord que on pose la somme là, ça. On s'occupe pas des plus trois petits point là.
379. T2 : Ouais.
380. Y : On va dire ben tous ces termes, enfin là, c'est pas les bons termes mais, mais tous ces termes, ils vont bien tendre vers ça. Mais pour les faire tendre vers ça, on en crée d'autres. Et ces autres qu'on a créés, on est pas capable de dire si ils tendent vers...
381. A2 : Vers e .
382. Y : Vers un sur ça quoi, vers $1/(n + 1)$, $1/(n + 2)$, ...
383. A1 : Si parce que là, là le premier terme déjà, il... Il donne une espèce de base, je me rappelle plus combien ça fait $1/3!$...
384. A2 : $1/6$.
385. A1 : $1/6$, ouais, il donne une espèce de base qui fait que c'est à peu près 2,67 et le reste ajoute des tout petits éléments de... De correction un peu.
386. Y : Ouais mais d'un point de vue, d'un point de vue mathématique.
387. A1 : Quoi ?
388. Y : Pas d'un point de vue « je rajoute... ».
389. T1 : Qu'est-ce que vous voulez dire par point de vue mathématique ?
390. Y : Ben je sais pas, parce que enfin... Ouais. Ben moi, c'est, pour moi c'est la même chose que, que là... Mais bon je me trompe peut-être.
391. T1 : Oui mais quand, ça fait plusieurs fois je crois, que vous employez ce terme. Ca veut dire quoi ?
392. Y : Ben lui, il voudrait dire ben « à chaque fois on rajoute des termes, vu que $n!$ il diminue bien, ils tendent tous à peu près, ça doit marcher ».
393. A1 : De quoi, tu veux dire quoi ?
394. Y : Et euh... Ben je sais pas, c'est ce que tu dis, non ?
395. A1 : Ben non, parce que chaque terme que tu ajoutes, après c'est une correction, mais t'as déjà à la base euh...
396. T1 : Mais en revenant sur les questions qu'on vous a demandées au départ. C'était de juger de la, de l'exactitude ou non des arguments... Dans la preuve.
397. Y : Ouais ben moi, je dirais que l'argument, ben.
398. T1 : La question, quand tu parles du point de vue mathématique, c'est lié à ça ?
399. Y : Ouais c'est ça en fait ? Le point de vue que je dis mathématique, c'est que l'argument est faux. Mais l'énoncé est vrai donc... Euh, donc c'est sur qu'en mettant un autre point de vue on va dire, ça ajoute une correction, ça semble tendre vers 2,7. Alors pourquoi ça, ce serait faux parce que y a une preuve, le truc est vrai... Enfin on peut pas le, on peut pas le démontrer euh, on peut pas démontrer que c'est pas vrai en trouvant un contre exemple parce que justement c'est vrai. Mais pour moi, cet argument... Euh, enfin, il est...
400. A1 : Ouais cet argument, il vient quand même d'un, d'une proposition quoi, bien connue.
401. Y : Cet argument là ?

402. A1 : Ouais, que ça tend vers e .
403. Y : Non, non mais je te parle pas de ça moi. Je te parle de...
404. A2 : Tout ce qu'il reste...
405. Y : Tu vois, tu poses, t'as euh... Disons que t'as mille termes, tu vois ta suite, elle a mille termes et tes milles termes ils tendent, ils tendent tous vers $1/n!$ quand n tend vers plus l'infini. Mais le fait de faire tendre n vers plus l'infini, ça t'en crée deux mille derrière. Et ces deux mille derrière, tu peux pas dire si il tendent vers euh, vers plus l'infini puisque tu peux pas t'en occuper, puisque au début ils étaient pas là.
406. T2 : Est-ce que tu peux...
407. Y : J'arrive pas à le dire mais...
408. T2 : Est-ce que tu peux écrire...
409. T1 : Est-ce que tu peux écrire oui l'argument que tu juges, le formaliser cet argument qui te semble inexact.
410. Y : Euh non j'arrive, enfin j'ai du mal à...
411. T2 : On peut t'aider un peu, sur le début.
412. Y : Ouais attendez, ça ?
413. T2 : Là, il dit quoi ? Il dit que la limite de ça, c'est égal à ça, donc essayez de retraduire cette égalité là. C'est la limite de quoi, en fait ?
414. Y : C'est la limite de, ben de tous ces termes.
415. T2 : La limite de quelle, la limite de quelle partie ? Ca, c'est un terme hein ?
416. A1 : Ca, c'est un terme.
417. Y : Oui, oui ben...
418. T2 : De la somme de ces termes.
419. Y : De la somme, voilà.
420. T2 : Donc la limite de ça, si on veut.
421. Y : Voilà.
422. T2 : D'accord.
423. A2 : Oui.
424. T2 : C'est que la limite de ça, tu peux l'écrire sous forme de, à la limite sous cette forme...
425. Y : Ouais, ouais. C'est la somme des...
426. T2 : T'as qu'à dire que ça c'est, que ces termes-là ils s'appellent... Comment tu veux les appeler ? Je sais pas.
427. Y : Bon, on s'en fout... u , euh.
428. T2 : u quelque chose.
429. Y : Non, parce que u , c'est déjà le nom... v quelque chose.
430. T2 : Alors v , v quoi alors ?
431. Y : v_0 , v_1 , v_2 ...

432. T2 : Ouais, donc v_k .
433. A1 : v_k de zéro à...
434. Y : C'est la somme des v_k de $k = 0$ à $k = m$. $m + 1$. Non.
435. A2 : n .
436. T2 : m .
437. Y : m, m . C'est bien m ?
438. T2 : Tes v_k , ils dépendent seulement de k , de quoi est-ce qu'ils dépendent ?
439. Y : Ben, ils dépendent de...
440. A2 : Ils dépendent de m et de...
441. Y : de m aussi.
442. T2 : Ouais. Tu veux le reprendre T1 ?
443. T1 : C'est la somme pour k allant de zéro à m , de $v_{k,m}$. On met le m quelque part.
444. Y : Hum.
445. A1 : v_k de m .
446. T1 : $v_k(m)$, vous préférez ?
447. Y : Ouais, ouais.
448. T1 : Et qu'est-ce que, quel est l'argument en fait, expliquez moi... La preuve ?
449. Y : Ah ben oui, là en écrivant comme ça, là c'est... Et ben on prend les termes, on dit, on pose chaque terme/
450. T1 : Donc ça veut dire, pour chaque quoi ?
451. Y : Ben v_k , hum.
452. T1 : Un terme pour un k . Pour un k [inaudible].
453. Y : Ouais, on a $v_k(m)$ sur m . Non, on a $v_k(m)$ qui tend vers euh.
454. T2 : Qui tend vers ?
455. Y : Vers euh, non c'est pas zéro, vers euh factoriel...
456. T1 : $1/n!$.
457. A2 : Ouais, c'est ce qu'on avait dit.
458. Y : Non c'est sur $k!$... sur k .
459. T1 : Ah, c'est k qui est fixé.
460. Y : Ouais, c'est m qui tend vers plus l'infini.
461. T1 : Voilà, merci. Parfait. Et on en conclut ? Il en conclut ?
462. Y : Il en conclut que, que tous les termes euh, ça marche.
463. T1 : Il en conclut ça en fait, $v(m)$ tend vers une somme...
464. Y : Vers la somme, voilà.
465. T1 : Ca fait quoi, en terme formel, cette somme ?

466. Y : Ca fait, ça fait la somme des v_k de k égal zéro à k égal plus l'infini.
467. T2 : Ce que tu appelle v_k , c'est la limite des $v_k(m)$?
468. Y : Oui, oui, oui, plutôt. Ouais, voilà.
469. N : C'est la limite.
470. T1 : La somme des v_k , la limite.
471. Y : Ouais, la somme de/
472. A2 : Vous pouvez répéter là, parce que là, j'ai pas capté la dernière phrase, c'est quoi ? Donc là, c'est quoi, c'est la somme des limites, non c'est pas ça ?
473. Y : Ouais, parce que les...
474. A2 : Vous venez de dire quoi, en fait parce que j'ai...
475. T2 : Alors vas-y essaye, essaye de le retrouver.
476. A2 : Non, c'est la somme, merde. C'est la somme des limites.
477. N : C'est la limite de la somme des...
478. Y : Non c'est la somme...
479. N : Non, c'est la limite de la somme.
480. Y : C'est la somme de chaque limite !
481. T1 : Alors ce que vous écririez bientôt en... Ce sera la somme pour $k = 0$ à l'infini.
482. A2 : Regarde, ah qui... Voilà.
483. Y : Oui voilà, de $k = 0$...
484. T1 : C'est ça, en fait.
485. Y : Hum.
486. N : C'est la limite de la somme.
487. T1 : Vous avez déjà vu ça ?
488. N : Avec les polynômes.
489. Y : Ouais enfin...
490. A2 : Non pas encore... Ouais voilà, c'est la limite de la somme de $k = 0$ jusqu'à m . Voilà, $v_k(m)$.
491. T1 : Voilà, c'est ça qui est écrit, en fait.
492. T2 : Et c'est m là qui bouge, c'est k pardon.
493. Y : Ouais.
494. T2 : C'est m qui tend vers l'infini, pardon.
495. T1 : Donc en gros, on répète... Attend là, c'est k ...
496. Y : Non c'est m qui tend vers plus l'infini.
497. T2 : Et c'est v_k qui est la limite.
498. Y : Et en fait, la limite des sommes est la somme des limites, c'est la même chose ? Non, ben non, justement.

499. T1 : Bon là, je vais... Faudrait que je change de lettres.
500. A1 : Si !
501. N : Ah non, sinon la somme des limites ça ferait zéro... Pour l'autre truc alors.
502. Y : Ouais, ouais.
503. T1 : C'est la limite quand m tend vers l'infini, c'est la somme pour k allant de zéro à m des $v_k(m)$.
504. A1 : Ben non.
505. Y : Ouais la somme, euh.
506. A2 : Mais c'est pas ce qu'on a marqué ?
507. T1 : C'est la même chose sauf que, c'est pas le même m .
508. A1 : Si la limite de la somme, c'est la somme des limites.
509. N : Ouais mais à l'infini, je sais pas si, à l'infini, ça reste pas vrai quoi.
510. Y : C'est là qu'il y a le problème parce que...
511. N : Parce qu'à l'infini sinon, ça ferait zéro.
512. T1 : C'est cette limite là, que vous cherchiez ?
513. Y : Ouais.
514. A2 : Euh oui. Plus l'infini, ouais, ouais, c'est en plus l'infini.
515. Y : Et donc là, ça fait $1/1!$ plus...
516. T1 : Il affirme que c'est égal à la limite...
517. T2 : Que la série de la...
518. Y : Que la limite des u_k .
519. T2 : A la série des limites.
520. T1 : C'est-à-dire la limite quand m tend vers l'infini de la somme de k allant de zéro à m , d'accord ?
521. Y : Des u_k .
522. T1 : Des v_k .
523. Y : Ouais, v_k plutôt.
524. T1 : Des limites des $v_k(m)$, si vous voulez.
525. T2 : Quelle va être la limite de...
526. ? : Voilà.
527. Y : Ouais.
528. T1 : C'est cela qu'il affirme.
529. Y : Et enfin, moi je pense/
530. T1 : Euh, si on veut être clair même, ici on devrait remplacer u_m par la valeur.
531. T2 : somme de $k = 0$ à m ...

532. N : Mais après, ça fait un...
533. T2 : Ouais, tu peux laisser... Bon. Ouais à droite, j'aurais volontiers mis des m aussi, ouais ben je sais pas, c'est peut-être pas plus clair.
534. Y : Donc moi enfin...
535. N : Mais dans l'autre, ça, dans l'autre euh, dans l'autre preuve, ça fait, il écrit pareil en gros mais en fait, il dit que c'est... C'est m fois zéro quand m tend vers plus l'infini, donc ça fait l'infini fois zéro en gros. Ca fait une forme indéterminée. Enfin moi, je vois ça comme ça.
536. T2 : Ouais c'est un peu ça.
537. Y : Mais là, c'est...
538. T2 : Il dit que quand tu... Dans l'autre preuve, t'as un certain nombre de ε , chacun tend vers zéro. Mais quand on regarde un paquet dont tu sais pas définir la taille par avance, ben tu peux pas dire que ça tend vers zéro.
539. N : Ouais, ça fait...
540. T2 : Si tu veux, c'est une sorte de forme indéterminée, c'est un peu cette idée là. C'est pas tout à fait une forme indéterminée, je sais pas si on peut dire que c'est une forme indéterminée.
541. Y : Donc là, y a pas, y a un souci là non ? C'est que on a, on a posé euh, de $k = 0$ à m . Et après, on a $k = 0$ à infini. Euh donc euh, alors ce qui sont au dessus de m , on peut pas dire si ils tendent vers le factoriel, vers $1/n!$ et du coup voilà, enfin...
542. A2 : On en revient au même problème.
543. Y : On en revient au problème de la/
544. A2 : Du début !
545. Y : De la dixième minute.
546. T2 : Du coup, du coup, ce qu'il faudrait peut-être essayer de voir c'est si cette égalité là, est-ce qu'on est d'accord qu'il l'utilise ?
547. Y : Ouais il l'utilise. Il l'utilise.
548. A2 : Il l'utilise ouais, ouais.
549. T2 : Il l'utilise et est-ce que ça c'est vrai cette égalité là ou pas ? Est-ce qu'on peut l'utiliser ?
550. A1 : Hum...
551. Y : Pour moi, c'est faux, moi je dirais.
552. T2 : Et alors, est-ce que vous avez un...
553. T1 : Si c'est faux, il faudrait trouver un contre exemple.
554. Y : On va dire que c'est vrai hein ?
- [Rires]
555. N : Si mais c'est vrai, enfin...
556. T1 : Est-ce qu'on vous l'a pas donné, le contre exemple ?
557. Y : Ah mais c'est le truc.
558. A1 : Si c'est, c'est notre fonction.
559. Y : un sur, un sur n plus k .

560. T2 : Si on remplace $v_k(m)$ par $1/(k+m)$...
561. Y : Ouais, voilà...
562. A2 : Ouais.
563. T2 : Est-ce que vous pouvez regarder ce que ça fait des deux côtés ?
564. A2 : Ben ça va faire alors...
565. Y : Ben limite...
566. N : Ben ça fait somme de $k = 0$ à m de, de... De zéro.
567. A2 : [Inaudible] Ouais, y en a une qui fait zéro.
568. Y : A droite, ça fait zéro.
569. T2 : Ca, ça fait zéro ?
570. N : Ca, ça fait zéro, ouais.
571. T2 : Somme de zéro.
572. Y : Ouais il font tous, ouais voilà.
573. A2 : L'autre va peut-être pas faire zéro, quoi.
574. T2 : Et ici ?
575. A1 : Ici, ça fait quelque chose qui est...
576. Y : Ca fait supérieur à $1/2$.
577. T2 : Alors c'est un m pardon hein, et c'est $k+m$.
578. N : Ah ouais, c'est ça.
579. T2 : Et on dit que c'est toujours plus grand que...
580. A1 : Toujours plus grand que $1/2$.
581. T2 : D'accord, vous êtes sûrs de ça ?
582. Y : Ouais, ouais, on est...
583. N : Ouais.
584. A2 : Enfin, c'est ce qu'on a dit tout à l'heure quoi.
585. T2 : Oui.
586. Y : En même temps...
587. A2 : En minorant par $1/2$, en majorant par un, quoi.
588. T2 : Si on dit que $1/(k+m)$ c'est plus grand que $1/(2m)$.
589. Y : Ouais, voilà.
590. T2 : Et y a m termes en $1/(2m)$ donc euh...
591. Y : Donc, ça fait $1/2$.
592. T2 : Donc euh y a m termes en $1/(2m)$, ça va être plus grand que $1/2$. Donc est-ce qu'on peut avoir quelque chose de plus grand que $1/2$ qui est égal à zéro ?
593. A1 : Ben a priori, non.

594. Y : Hum.
595. T2 : A priori, non.
596. A2 : Donc, c'est bien faux.
597. Y : Donc, on avait raison !
598. T2 : Donc si on a pas d'hypothèses particulières sur v_k , ou en tout cas...
599. A2 : Donc concrètement, c'est ce qu'on dit, on avait raison tout à l'heure.
600. Y : Concrètement ça fait trois heures qu'on se dit...
601. A2 : Ouais qu'on voudrait savoir quoi, ce qu'il se passe !
602. T2 : Ben tout à l'heure, est-ce que vous avez utilisé ça, est-ce que vous supposez qu'il utilise ça ?
603. A1 : Ben non ! Parce que...
604. Y : Ben si. Depuis tout à l'heure, on dit que enfin...
605. T2 : C'est là-dessus qu'il faut que vous vous régliez, est-ce que c'est ça l'argument...
606. Y : Ouais.
607. T2 : Qui était utilisé par Cauchy ?
608. Y : Ouah, on va jamais trouver l'argument !
609. A1 : Non, c'est...
610. T2 : Mais peut-être, quand on fait ce travail là, de se dire est-ce que c'est cet argument là, qu'il a utilisé, on est en train de faire des hypothèses, hein ? Evidemment on sait pas ce qu'il a voulu dire, d'accord ?
611. Y : Ouais.
612. T1 : Qu'est-ce qui est écrit ?
613. N : Mais la différence, c'est si on l'écrit comme ça, on sait pas ce que... Somme de, enfin limite quand n tend vers plus l'infini de... De zéro, on sait pas ce que ça fait, en fait, enfin. Une somme infini de zéro, on sait pas ce que ça fait alors que...
614. T2 : Attention, la somme elle est pas infini, c'est la limite d'une somme finie.
615. N : Ouais, mais je veux dire... Enfin, quand on passe à la limite, ça fait une somme infinie en gros.
616. Y : Ouais, c'est bien ça qu'il dit.
617. T2 : Somme de $k = 0$ à m de zéro ça fait quoi ?
618. N : Ben, ça fait zéro.
619. T2 : c'est zéro, zéro, zéro, zéro, m fois, donc la somme c'est bien zéro. Et la limite de zéro quand m tend vers plus l'infini ?
620. A2 : C'est zéro.
621. T2 : C'est bien zéro. C'est pas une somme infinie de zéro, enfin de limites qui tendent vers zéro, d'accord ?
622. N : Ah, ouais.

623. Y : Ouais, du coup, il utilise ça quoi. Il utilise bien ça, puisqu'il dit « on constate que le $(n + 1)$ ième terme tend vers $1/n!$ » [Inaudible].
624. T1 : En gros, il dit que ça, ça tend vers $1/k!$.
625. Y : Voilà, et après, il dit « on a donc » et il reprend l'égalité à gauche.
626. T1 : Il dit, en gros, que la limite ici est égale...
627. Y : Voilà.
628. T1 : C'est-à-dire que ce qu'il écrit $1 + 1/2! + \dots$
629. A2 : Ouais c'est...
630. T1 : C'est exactement la limite de la somme $1/k!$, c'est exactement ça.
631. A2 : Ouais.
632. N : Alors c'est faux, non ?
633. Y : Oui.
634. T1 : Son argument est faux.
635. A2 : Voilà.
636. Y : Mais l'énoncé il est quand même, il est quand même juste.
637. T2 : L'énoncé est juste.
638. A2 : Ouais il est juste. Donc ça, c'était bien faux alors.
639. T1 : Vous pouvez essayer de réfléchir pour le corriger.
640. T2 : Comment ?
641. T1 : Vous pouvez essayer de réfléchir pour essayer de compléter l'argument.
642. T2 : Parce que effectivement, ce qu'il y a de, disons d'un petit peu difficile, c'est que le... L'énoncé est vrai, chaque étape, ce qu'il dit on sait que c'est vrai donc peut-être qu'il a pas simplement voulu dire ça, peut-être qu'il faudrait, qu'il a simplement...
643. Y : Ouais, enfin bon... Ouais c'est vrai, c'est vrai...
644. T2 : Et ça, on sait pas. Mais écrit comme ça, en tout cas...
645. A1 : Hum, hum.
646. Y : Enfin nous, ça nous a tout de suite...
647. T2 : Ecrit comme ça, ça pose problème. Après, ce qui est un travail intéressant effectivement, c'est de l'adapter.
648. A2 : En gros, il faudrait s'y mettre bien dessus pour savoir parce que du coup, euh... Parce que c'est ce qu'on disait, on sent que c'est pas bien rigoureux, qu'il y a un problème mais on sait pas ce que c'est quoi.
649. Y : Depuis le début on avait eu cette idée, euh, il prend des termes et en les faisant tendre, ça en ajoute d'autres quoi.
650. T2 : Ouais.
651. Y : Et enfin, c'est ce qu'on disait, je pense ça doit être filmé d'ailleurs...

[Rires]

652. Y : On a des preuves !
653. A2 : Ben non, ben du coup, moi je vais chercher à trouver quoi...
654. T1 : Oui euh, l'erreur qu'il fait principalement c'est, l'erreur qu'il fait pas forcément mais qu'on voit, c'est de faire à la fois, on a une limite où m porte à la fois à l'intérieur de la somme ici, et il décompose justement en disant que c'est pareil, que la limite quand m tend vers l'infini [Inaudible].
655. Y : Quand ils sont dans les deux, on peut enfin, on peut pas...
656. T1 : C'est comme si vous aviez une fonction $f(m,m)$, d'accord ? La limite quand m tend vers l'infini de ça, a priori, c'est différent de, il n'y a aucune raison que ce soit égal à la limite quand m tend vers l'infini de la limite quand n tend vers l'infini de $f(m,n)$. Formellement, c'est ce qui est fait. Enfin, c'est ce qu'il annonce. Et pour les ε c'est exactement la même chose. Est-ce que vous comprenez que $f(m,n)$...
657. A2 : Là, j'ai un peu de mal, hein !
- [Rires]
658. Y : Le problème, c'est que les m et les n , ils sont pareils en fait.
659. T1 : J'ai mis que des m là, hein ?
660. A2 : Là, que des m .
661. Y : Ah oui, ok.
662. A2 : Ouais, mais même, j'ai un peu de mal à comprendre.
663. A1 : Mais c'est quoi, c'est une fonction à deux variables ou...
664. T1 : $f(m,n)$, oui ce sera une fonction à deux variables, là. Vous pouvez dire que c'est la somme pour k allant de zéro à n , de $v_k(m)$. Reste à définir $v_k(m)$. Votre u , ce que l'on a écrit u_m , c'est la somme pour k allant de zéro à m des $v_k(m)$, d'accord ? C'est la somme, k va de zéro à m , le m il apparaît à la fois là et là.
665. Y : Hum, hum.
666. A2 : Hum, hum.
667. T1 : Quand on fait la limite quand m tend vers l'infini de u_m , ça fait varier en même temps, vous l'avez dit souvent, le m là et le m qui rajoute des termes. Rajouter des termes, c'est la somme qui grandit.
668. Y : Ouais, ben ouais.
669. A2 : Oui, ben c'est ce qu'on disait tout à l'heure.
670. T1 : De manière complètement formelle, c'est comme si on faisait la limite de... Une fonction en deux quantités là, deux choses qui varient, mais en les faisant varier avec un lien, c'est toujours le même m . Et ce qu'il annonce, ce qu'on a l'impression de lire dans la preuve, c'est que c'est pareil que de faire d'abord la limite quand on fixe ce k là, on fixe quelque chose, d'accord ? Enfin j'ai mal écrit si vous voulez, il faudrait changer le n , comme si je fixais n ...
671. Y : Ouais.
672. T1 : Je fais la limite là et ensuite je fais tendre m vers l'infini.
673. A1 : Ouais, c'est faux ça.
674. A2 : Ben alors à gauche, c'est quoi là, je comprends pas. Il est où le n .

675. Y : Ben en fait, il a posé $m = n$.
676. A2 : Ah d'accord.
677. T1 : Il n'y a aucune raison que la limite de $f(n,m)$ ce soit pareil que... Et quand on fait avec les ε , on a exactement la même chose. Parce que la maximum là, on fait tendre, vous voyez, il y a le m , le maximum il porte aussi sur le m , à la place... C'est comme si on remplaçait max, c'est comme si on remplaçait la somme par un maximum.
678. A2 : Hum, hum...
679. T2 : Parce que la somme jusqu'à m et le maximum jusqu'à m .
680. ? : Ok.
681. T1 : Et le m , il porte aussi à l'intérieur. En gros, le truc qui est dit, c'est que la limite de ça, c'est pareil que de regarder en fait le maximum de la limite de chacun. Il y a un échange, il y a un échange de limites.
682. A1 : Ouais.
683. N : Ben alors quand on a $1/2$, c'est un peu ce que l'on a fait quand même, pour montrer qu'elle est majorée par $1/2$, qu'elle est minorée par $1/2$, on a fait...
684. T1 : Non parce que là, ce qui a été montré, c'est que pour chaque m fixé, c'est plus grand que $1/2$.
685. N : Ouais...
686. T1 : Donc, quand on fait tendre m vers l'infini, c'est toujours plus grand que $1/2$. C'est quelque chose que vous allez rencontrer souvent maintenant, ce problème... Non, mais parce que vous allez voir des théorèmes qui vous permettent d'inverser, ce qu'on appelle inverser les limites. Là, il y a un problème de faire une limite avec deux variables qui sont la même et de dire on fait d'abord tendre une variable et ensuite l'autre.
687. A2 : J'ai mal au crâne.
688. T1 : Vous verrez des théorèmes qui, des fois, vous permettent de le faire.
689. T2 : Non, mais je pense que c'est compliqué hein, ça se...
690. T1 : Oui.
691. A2 : Ouais, ouais.
692. T2 : On voulait vous en parler quand même parce que, c'est pas juste pour vous le dire, mais c'est on vous a fait travailler sur un truc difficile puis...
693. A2 : Ah mais c'est intéressant, je dis pas mais...
694. T2 : On se rend compte qu'il y a des difficultés, puis que c'est pas évident.
695. Y : Oui mais ça va, voilà.
696. A2 : C'était cool.
697. T2 : C'est des difficultés mathématiques que vous bosserez vraiment en L2 voire en L3.
698. Y : Ouais là, c'est vrai que...
699. T2 : Je sais pas si c'est au programme de L2 ou de L3.
700. Y : [à A1, qui est dans un cursus de Physique] Tu le verras jamais, toi...

701. A1 : J'espère que je le verrai quand même, sinon c'est un peu ballot.
702. T2 : [à T1] A priori, plutôt en L2, non ?
703. T1 : Vous allez le voir aussi en L3, quand vous allez commencez à voir des intégrales multiples par exemple, vous allez voir ça.
704. A1 : Ah, ça on a déjà vu.
705. N : Ouais en physique, on...
706. T2 : En physique, vous avez déjà travaillé ça ?
707. A1 : Ouais, ouais, enfin c'est principalement ce que l'on fait en maths.
708. N : On se ramène à des intégrales simples, je crois, enfin voilà en physique, ce qu'on fait.
709. A1 : Hein ?
710. N : On se ramène à des intégrales simples.
711. T1 : En fait, la question, c'est est-ce qu'on a le droit d'intégrer d'abord par rapport à une variable et ensuite par rapport à l'autre, c'est ça.
712. A1 : Ben ouais, ça dépend des bornes en fait... Ben pour nous, ça dépend des bornes. Puis il y a des théorèmes etc.
713. T2 : Bon. Il reste des questions ? Vous avez encore un peu d'énergie ?
714. A2 : Y a encore quelque chose ?
- [Rires]
715. A2 : Non, parce que moi, je suis un peu... J'ai une retombée, là.
716. N : Mais en fait, il n'y a aucune preuve qui était juste aujourd'hui ?
717. Y : Ouais ils ont magouillés...
718. T1 : En fait, si vous réfléchissez beaucoup aux deux preuves, il y en a une à mon avis où c'est moins clair de dire qu'elle est fausse que l'autre.
719. Y : Moi, je dirais que c'est la notre.
720. A2 : Moi aussi je dirais que c'est la notre !
721. A1 : C'est la nôtre.
722. Y : Non, je sais pas.
723. T1 : Celle-ci normalement, si vous voulez la compléter et on pourrait dire que Cauchy, il y a un argument implicite non dit.
724. Y : Ouais là, c'est encore la limite...
725. T1 : On peut pas affirmer qu'il n'y a pas un argument implicite.
726. T2 : On peut pas affirmer qu'il n'y a pas un argument implicite par contre dans l'histoire, cette preuve là par exemple, on trouve euh [Inaudible].
727. Y : Vous pensez [Inaudible].
728. T2 : Donc l'auteur de l'autre preuve.
729. A2 : Ouais.
730. T2 : Qui discute de cette preuve là, en disant qu'elle est pas satisfaisante.

731. Y : Ouais.
732. T2 : Et qui en propose une correction. Donc c'est des trucs qui euh...
733. A2 : Il a proposé une correction ?
734. T2 : Ouais. On vous l'a pas donné parce qu'elle est vraiment illisible mais euh...
- [Rires]
735. Y : Ah, ouais.
736. A2 : Elle est moche...
737. T2 : Non parce que c'est encore un gros, gros effort d'arriver à la lire quoi.
738. Y, A2 : Ouais, ouais.
739. T2 : Ca fait une page mais c'est dense quand même, c'est beaucoup d'ellipse donc c'est pas lisible. Mais bon, donc ce truc là, ça a posé problème. Ils se sont dit, bon ben normalement, il faut être capable de préciser les choses. Donc ça se corrige. Et celle de Liouville par contre, je sais pas trop si...
740. T1 : Moi j'ai essayé d'y réfléchir, j'arrive pas à la corriger...
741. Y : Bon on va essayer alors [Rires].
742. T1 : J'arrive pas à utiliser ces arguments et à les compléter pour y arriver.
743. Y : D'accord.
744. T2 : C'est pas comme ça, parce que je sais pas si vous avez fait les preuves du théorème qui dit que si la dérivée est nulle sur un intervalle alors la fonction est constante sur cet intervalle.
745. N : On l'avait fait avec euh... Comment, euh...
746. T2 : Le théorème des valeurs intermédiaires.
747. N : Voilà, ouais.
748. T2 : Généralement, c'est plutôt fait comme ça.
749. T1 : Il peut nous arriver, nous, quand on corrige un exercice ou même en cours, de donner une preuve fausse, comme il arrive à Cauchy ou à Liouville hein... Il ne faut pas non plus être persuader que...
750. Y : Mais, il a pas perdu de la crédibilité euh, avec ça...
751. A2 : Je sais pas, ça c'est vu tout de suite ou... On s'en est rendu compte plus tard ? Liouville c'est quelle année ?
752. A1 : C'était dix huit cent...
753. A2 : Quarante huit ou un truc comme ça. Quarante sept / quarante huit.
- [Discussion informelle non transcrite sur l'activité qui leur a été proposée]

**Annexe 26 : Transcription des débats
du groupe d'étudiants de M1
travaillant sur la preuve inspirée par
le texte de Liouville**

Groupe d'étudiants de M1 travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy (G-M1-C) :

1. A : Alors v_n est croissante, bon. Là, je suis d'accord. « Et majorée par exemple » [A lit le texte de la preuve]. Bon d'accord et alors... Oui pourquoi... Je comprends pas pourquoi...
2. B : Ca prouve rien [Rires].
3. A : Ca prouve rien...
4. C : Ben ça prouve qu'il y a une limite mais...
5. B : Ca prouve que ouais, il y a une limite.
6. A : Bon. « preuve de l'énoncé... ».
7. C : C'est marrant, c'est pas l'énoncé qu'on avait. C'est une preuve qu'on aurait nous, je pense.
8. A : De quoi ?
9. C : C'est pas la preuve qu'on avait fait nous, enfin remarque si...
10. B : « Preuve de l'énoncé 1... ».
11. A : Moi, j'ai jamais fait cette preuve...
12. C : La preuve de ça ?
13. A : De quoi ? ah de ça si !
14. C : Ben, quand même.
15. A : Non mais, non mais ça, là... C'est la définition de toute façon, c'est la définition.
16. C : Ben en fait, tu définis, c'est à ça que tu [Inaudible] dérivée nième...
17. A : Ouais d'accord, c'est bon, t'énerves pas.
18. C : Je suis pas énervé, ça va.
19. A : Ok. « Preuve de l'énoncé 1 ». Je comprends pas pourquoi il fait des trucs comme ça, là.
20. C : Ben, il veut montrer que la limite de u_n , c'est égal à machin.
21. A : Mais le développement limité.
22. C : Ben, il fait un développement, un développement binomial.
23. A : Binomial. C'est quoi ça, je connais pas...
24. C : Le développement binomial ? Ben $(a + b)^n$ [Rires].
25. A : $(a + b)^n$, ah oui, d'accord.
26. B : Tu vas pas commencer à...
27. A : Non, non, mais c'est la notation, c'est la notation qui me gêne. C'est C_m^k d'accord, ok. C'est k parmi m , d'accord. Ok, ça m'a bouleversé. Bon, d'accord.
28. T2 : Vous avez, ah mais, vous avez vu qu'il y a un énoncé derrière ?
29. A : Euh, oui.
30. C : Oui.
31. T2 : Ouais, donc vous en êtes où ? Vous avez situé historiquement...

32. C : Ouais rapidement après, euh...
33. T2 : Ouais, l'énoncé 1 vous paraît vrai, vous l'avez vu...
34. C : Oui.
35. A : Ouais.
36. T2 : Vous l'avez vu cet énoncé en ...
37. C : Ah oui, oui, ça on l'a...
38. T2 : A la fac ? Un certain nombre de fois.
39. C : On a pas fait la même démonstration mais...
40. T2 : Comment vous l'avez démontré ?
41. C : Ben on utilisait les équivalences. Exponentielle de $n \log$ de...
42. B : Ouais, nous on, on l'exprime en terme d'exponentiel et de log, ouais.
43. A : Ouais.
44. T2 : Ouais, d'accord.
45. B : Et ensuite on...
46. C : Et après, ça marche.
47. T2 : Et ensuite on prend des équivalents quoi... Ouais.
48. B : Ensuite en équivalent, ouais.
49. C : Par contre dans le rappel, il y a un énoncé et une preuve de l'énoncé et la preuve de l'énoncé elle ressemble pas [Inaudible] à l'énoncé.
50. T2 : La preuve de l'énoncé ressemble pas vraiment à l'énoncé ?
51. C : Non, la preuve de l'énoncé, elle prouve juste que v_n est convergente mais elle prouve pas que limite de v_n égal e .
52. A : Non, mais elle prouve la convergence.
53. T2 : Oui, effectivement, alors euh... D'accord simplement, il faut admettre que e c'est défini comme étant la limite de la suite qui converge effectivement.
54. C : Oui, d'accord.
55. B : Ouais.
56. T2 : Mais d'accord, mais ça, effectivement, c'est pas très précis et il y a une autre imprécision c'est que ici, il y a une faute de frappe, ça c'est... Cette preuve là, c'est pas exactement la preuve telle que Cauchy l'a écrite...
57. ? : Hum.
58. T2 : Parce que disons que c'était au milieu d'un espèce de, de plein de choses etc. Donc j'ai extrait, un peu arbitrairement, en mettant des trucs c'est pour ça que... Ce truc là, je crois que ça n'y était pas j'ai pas fait gaffe vraiment, mais ça pose pas beaucoup de problèmes et le k ici devient n dans...
59. C : Ah... Exact.
60. T2 : Donc si vous voulez enlever l'erreur de notation, il faut mettre un n à la place du k .

61. A : D'accord, ouais... Enfin ça, c'est pas...
62. C : Oui, c'est un peu...
63. T2 : C'est pas dramatique, mais bon.
- [Lecture de l'énoncé]
64. C : Déjà, on met u_n sous la forme d'une somme. On explicite u_n sous la forme d'une somme, d'une série.
65. A : Pourquoi d'une série ? Ouais d'une somme, d'une somme alors.
66. C : D'une somme. Comme on prend la limite, ça va faire une série.
67. A : D'accord, après il y a le développement binomial. C'est la deuxième étape. Bon d'accord. Ensuite il y a une simplification.
68. C : Simplification.
69. A : Enfin, une simplification. « On commence par montrer que u_m a une limite quand m tend vers l'infini ».
70. C : Quand m augmente, ça, ça augmente...
71. A : Alors « si on regarde le $(n + 1)$ ième terme de cette somme ... On constate que ce terme augmente... ». D'accord. Ca veut dire quoi avec l'augmentation de m .
72. C : Quand m augmente.
73. A : Oui, quand m ... D'accord. Alors...
74. C : [Inaudible].
75. A : Non, non, mais ça, c'est bon.
76. C : Ben ça aurait pu être le m ième je veux dire...
77. A : Non, c'est le $(n + 1)$ ième... Ouais enfin...
78. C : Ah ouais, c'est pour faciliter, écrire comme ça.
79. A : Ouais, ouais.
80. C : En gros, chaque terme augmente.
81. A : Ouais, c'est pour avoir $n m$ en bas... « on constate que ce terme augmente ».
82. C : Chacun des termes augmente, enfin [inaudible] comme chacun des termes augmente... La suite, elle est croissante. Puisqu'il y a à chaque fois des termes qui augmentent et éventuellement...
83. B : Donc, ça se rapproche de un donc ?
84. A : Attend, quoi, quoi, quoi, quoi ? Plus tu augmentes le m , plus tu augmentes la suite... C'est bon ça va. « En effet, chacun des facteurs... », ok. « Ceci montre que la suite $(1+1/m)^m$ est croissante » euh... Ben, oui. Ouais... « En plus, on a... $1 + 1/1$... ».
85. B : Attend, attend, euh...
86. A : Qu'est-ce qu'il y a [inaudible] ?
87. B : En quoi, en quoi...
88. A : Vas-y, dis-moi !

89. B : En quoi de montrer que le $(n + 1)$ ième terme de la suite augmente... quand m augmente.
90. A : Ca montre qu'elle est croissante.
91. C : Quel que soit n .
92. A : Quel que soit n .
93. C : Quel que soit n , le $(n + 1)$ ième terme augmente, donc en gros tous les termes augmentent.
94. B : Hum, hum...
95. C : Donc en gros, quand tu passes de u_m à u_{m+1} , chacun des termes augmente et il y a un terme en plus.
96. B : Ouais, effectivement, c'est majoré.
97. C : Donc, c'est très croissant. Enfin très croissant, ça veut rien dire ce que je dis.
- [Inaudible]
98. A : Alors un plus... Oui ben ça, c'est la même preuve que... Attend non, qu'est-ce que c'est que ça ? Ca, c'est inférieur ou égal à $1 + 1/1 + 1/2 + \dots + 1/m$... Oui, ça c'est vrai. Oui, enfin il faut pas dire, il faut vérifier que c'est vrai, ok... $+ 1/m!$
99. C : Oui, on considère le fait que... Exact, exact.
100. A : Oui, d'accord, ça c'est inférieur. D'accord, en effet, $m(m-1)$... Est inférieur à... Euh, Cauchy écrivait tout ça, il détaillait tout ça !
101. B : Ca, c'est inférieur à...
102. A : Je l'imaginai plutôt comme quelqu'un qui écrivait trois fois rien.
103. B : La suite est donc croissante et majorée.
104. C : Oui c'est vrai que là, les « en effet » machin...
105. A : Oui. Comment.
106. B : ... Elle converge. D'accord, c'est bon ça marche.
107. A : « La suite est donc croissante et majorée, elle converge ».
108. B : « On montre que u_n converge vers e , en effet, si on regarde attentivement l'égalité ». Alors effectivement, il écrit l'égalité « ... que le $(n + 1)$ ième terme tend vers $1/n!$ quand m tend vers l'infini ».
109. A : Quand m tend vers l'infini...
110. B : Donc la limite...
111. A : Ouais mais alors là, c'est un peu bizarre parce que il va utiliser un équivalent, en fait... On a donc limite quand m tend vers l'infini...
112. C : Oula...
113. A : Attend, qu'est-ce que c'est que ça ?
114. B : Il fait tendre m vers l'infini dans la somme en fait... Il fait tendre m vers l'infini dans $1 + 1/\dots$ Si c'est... Il a le droit de le faire, non ?
115. C : Ce qu'il fait, ça a l'air très, très, très, très, louche.
116. A : Attend, ça me paraît un peu bizarre, je me demande si il n'arnaque pas, là.

117. B : Ah oui, parce que la somme devient infini et en même temps il... C'est ça, la somme devient infinie.
118. C : Cauchy, arnaqueur !
119. A : Attends, mais c'est un théorème de convergence dominée, là.
120. C : Attends le $(n + 1)$ ième terme tend vers $1/n!$.
121. A : C'est le, c'est l'interversion de la limite et de la somme...
122. C : quand m tend vers l'infini.
123. B : Chaque terme va converger vers $1/n!$.
124. A : T'es d'accord, c'est le théorème de convergence dominée. Ca, c'est le...
125. C : Non, non, il écrit...
126. A : Si, si c'est la limite de la somme infinie.
127. C : Il écrit tout depuis le début et là, il balance comme un bourrin quand même.
128. A : Oui, mais la... Bon c'est la limite...
129. C : [Inaudible].
130. A : Attends t'es d'accord, laisse moi t'expliquer la limite de la somme infini égal la somme infini de la limite.
131. C : En gros, il dit quand on fait tendre m vers l'infini, chaque terme tend vers ça et que en plus on en a une infinité.
132. A : Ouais, mais... Ben, c'est le théorème de convergence dominée.
133. C : Euh...
134. A : Tu intervertis la limite et la somme infinie.
135. C : Tu veux dire que la limite de la somme infinie, c'est une somme de limite.
136. A : C'est la somme des limites, ouais.
137. C : C'est la somme infinie des limites, ouais... Mais il aurait pu le préciser quand même.
138. A : Mais il aurait pu le préciser.
139. B : Attends, attends...
140. C : C'est le théorème le plus important du truc...
141. B : Vous pouvez me redire clairement alors la limite, alors attendez parce que...
142. A : Donc là, déjà...
143. B : Là, c'est la limite à l'infini de ce machin.
144. A : On applique le théorème de convergence dominée, la limite quand m tend vers plus l'infini de ça...
145. B : Hum, hum.
146. A : C'est la limite quand m tend vers l'infini de la somme infinie qui est euh... pff, pff, pff... Ah oui, ben non, non, non, non, c'est une somme infinie.
147. B : La limite quand m tend vers l'infini de ce truc là...

148. A : Attend oui, qu'est-ce qu'il fait.
149. B : Attend, il faut l'écrire là, il faut l'écrire.
150. C : Ca m'a l'air d'être un grand arnaqueur.
151. A : Ouais [Rires].
152. B : Disons que la fin du raisonnement euh...
153. A : Elle est un peu louche quand même, hein.
[Rires]
154. T2 : Est-ce que [Inaudible] ?
155. A : Il s'attarde sur des trucs faciles et puis après il fait un truc euh...
156. C : C'est comme si il faisait... Là, je fais bien, là je fais bien, là je fais bien et là, un moment, je glisse mon truc.
157. A : Et puis ça, c'est mon jocker.
158. T2 : Bon vous avez repéré les étapes.
159. C : Ben au début, ils commencent par euh, mettre une euh, ils remettent une euh... Le terme u_n , il me met sous forme de série.
160. A : Ouais.
161. T2 : Ouais.
162. C : [Inaudible] Bon ça, c'est la première étape... Bon, il développe... Ca, c'est le développement binomial.
163. A : Un développement binomial.
164. C : Ensuite, il va montrer que c'est, qu'il y a une limite. D'abord, montrer que c'est croissant et ensuite, montrer que c'est majoré. Bon ça, c'est habituel.
165. T2 : Ouais.
166. C : Bon montrer que c'est croissant, c'est....
167. A : Ca va.
168. C : Il se contente de montrer que chaque terme est croissant, comme en plus il y en a en plus, c'est croissant de partout en gros. Donc, c'est toujours croissant. Et pour la majoration...
169. A : Pareil.
170. C : Ben, c'est pas trop compliqué, il le détaille bien.
171. T2 : Ouais.
172. C : On peut majorer par e et donc euh... Croissante, majorée, converge. Alors par contre, la convergence vers e euh... On est un petit peu euh, surpris par la façon dont il le montre parce que là, il a une somme finie et après quand il prend la limite, il fait simultanément tendre chacun des termes et tendre le nombre de termes vers l'infini.
173. T2 : Hum, hum.
174. C : Et, euh, ça paraît louche. Il doit y avoir quelque chose [Inaudible]...
175. T2 : Donc vous avez les étapes, euh... Maintenant il faut arriver à, les étapes qui sont claires et ben c'est bon, celle qui sont moins claires essayez de les éclaircir...

176. C : Ben ouais, la dernière.
177. T2 : Voir comment, déjà vous vous positionnez dessus, est-ce que c'est valable ou pas, ce genre d'étape.
178. A : Ben ouais, tout à fait, ouais.
179. T2 : Si vous pouvez, je veux dire. Je veux pas nécessairement que vous arriviez à dire oui, non, ça...
180. C : Oui, oui, oui, oui... Enfin ça dépend de celle d'avant je suis d'accord.
181. A : Enfin, oui...
182. T2 : Mais qu'est-ce qui vous gêne là-dedans.
183. A : On justifie l'existence d'une convergence et puis après on détermine la limite. Jusque là, c'est tout à fait normal.
184. C : Non mais effectivement, jusque là ça va, mais ça, c'est la partie... Est-ce qu'il ne triche pas quoi.
185. A : Ben, je crois qu'il arnaque, ouais.
186. C : C'est pas parce qu'il trouve le bon résultat que...
187. T2 : Si vous pensez qu'il arnaque ou euh... Bref, que c'est pas assez développé tout ça et ben c'est éventuellement à vous de le compléter.
188. C : Ben disons que on croyait que...
189. T2 : Si c'est complétable... Ou trouver un contre exemple etc.
190. C : Ben a priori, on se dit c'est Cauchy, il va pas arnaquer. Mais il a tellement détaillé la phase d'avant que là, le fait qu'il ne détaille pas, ça paraît très, très étrange.
191. A : Tu peux me passer une feuille s'il te plait ?
192. C : Ouais, ouais, c'est la face cachée de Cauchy, ça.
193. B : Alors une feuille... De toute façon, j'en ai.
194. A : Sinon, je te dois pas un truc, genre un héritage tout ça, non ? Merci.
195. A : Et un stylo, s'il te plait.
196. C : Ben dit donc, c'est vraiment un parasite.
197. B : Ah non mais là c'est...
198. C : Non, mais un parasite je te dis.
199. B : Qu'est-ce qu'il s'est passé ?
200. A : Non, je suis pas un parasite parce que [Inaudible].
201. B : Bon alors, limite de machin.
- [Discussion sur leur partiel d'arithmétique combinatoire]
202. C : Alors, première étape.
203. A : Non mais là, il... Je n'ai jamais vu ce genre de truc.
204. C : [Inaudible].
205. A : Non, non, mais ici, là.

206. C : Oui, oui [il baille].

[Discussion sur leur partiel de théorie de Gallois]

207. A : Alors.

208. B : Ah, la vache, comment il fait ça ?

[Rires]

209. A : Ah, la vache [il imite B].

210. A : Bon alors, attend. Déjà on peut répondre aux questions quand même, hein. « Déterminer » c'est bon. « Analyser chacune des étapes de la preuve en cherchant si possible à les compléter et/ou les reformuler », donc il y a ça à faire. « Sont-elles complètes, rigoureuses, valides ? », bon ça non.

211. C : Non attend, ça dépend...

212. A : Et après, « la preuve est-elle valide ? ».

213. C : ... Faut les faire étape par étape. Première étape, « mise sous la forme d'une série », moi ça me paraît assez valide quand même.

214. A : Oui, oui ça...

215. C : Valide, rigoureux, complet.

216. A : Ouais, ouais, il n'y a rien à dire.

217. C : Il a bien développé, il a bien écrit chaque terme. Bon, il s'est trompé en passant de k à n .

218. A : Bon d'accord, m'enfin...

219. C : C'est quoi la différence entre ça et ça. Il voulait juste [Inaudible].

220. A : Il a interverti les multiplications là. Il a écrit...

221. C : Il a mis...

222. A : Le factoriel devant, voilà.

223. C : Mais sinon, c'est pareil.

224. A : Sinon c'est, ça c'est... Mais.

225. C : Il met en facteur là. Non mais, pour l'instant, c'est bien, c'est clair. Première étape, normale.

226. A : Oui mais c'est peut-être un peu trop détaillé même.

227. C : Ouais mais, si c'est trop détaillé... Je veux dire si il passait de là... Il pourrait passer de là à là. Mais ça a pas non plus... Non il euh... Il semble développer.

228. A : Bon d'accord si tu veux.

229. C : C'est une ligne de plus, c'est pas non plus...

230. A : Ouais.

231. C : Seconde étape. Alors « montrer que u_n admet une limite ». En plus, il précise bien son étape alors ça, c'est bien. « On commence par montrer que u_m a une limite quand m tend vers l'infini ». Bon, donc il va montrer qu'elle est croissante... Mais il le dit pas. Mais je vois pas ce qu'il pourrait faire de plus pour montrer qu'elle est croissante.

232. A : Ca, c'est peut-être un peu le... Enfin, il aurait pu faire directement u_{m+1} sur u_m , ça aurait été plus rapide.

233. C : Euh...
234. A : Plutôt que de s'embêter tu vois... Parce que là, il est obligé de dire ça, après de...
235. C : u_{m+1}/u_m ? C'est pas marrant hein ?
236. A : Mais si, t'as des tas de multiplications... Ah non merde, y a des sommes. Fait voir.
237. C : Si tu fais ça, tu dois faire une division, une somme, une soustraction, tu vas pas [Inaudible].
238. B : Mais non, u_{m+1}/u_m c'est pas mal.
239. C : Mais u_{m+1}/u_m , tu peux peut-être le faire avec ça.
240. B : Ouais direct avec ça, ouais.
241. C : Après c'est pas des... C'est pas exactement les mêmes...
242. A : Non, non, c'est pas terrible.
243. C : Ah si, ça peut être bien.
244. B : Montrer que c'est croissant ?
245. A : C'est la différence plutôt qui...
246. C : Non. Ca peut marcher ça.
247. B : Ah non, mais non, ça ne se simplifie pas de toute façon.
248. A : Putain, t'es un vrai parasite C.
249. C : Ouais. T'as vu ça. u_{m+1}/u_m ...
250. A : Ah non...
251. B : Ca va pas se simplifier... Ah si, peut-être.
252. C : Je suis pas sûr, on va regarder.
253. A : Ouais, non...
254. C : Et si ça donne pas, c'est que c'est pas...
255. B : Mais son truc là, peut être que son truc là, c'est histoire de montrer... Enfin, il montre que la suite est croissante, c'est assez intuitif quand même, c'est pas vraiment démontré. Il dit que les termes, alors c'est vrai, les termes diminuent quand m augmente, effectivement.
256. A : Oui, mais chacun des termes est positif, bon tous les termes sont positifs et chacun augmente quand m grandit, donc c'est bon.
257. B : Ouais donc le $(n + 1)$ ième terme augmente.
258. A : Si tu veux u_m plus, u_m , c'est égal à un plus euh... plus $a_{1,m}$ plus $a_{2,m}$ plus...
259. B : u_{m+1} qui est plus grand que u_m , voilà. Quand m augmente, le, les...Oui, mais...
260. A : Quoi ?
261. B : Ah oui, voilà puisque u_{m+1} , attends comment tu fais ça...
262. A : u_m , c'est égal à...
263. B : Puisque pour montrer que la suite est croissante c'est bien u_{m+1} est plus grand que u_m qu'il faut montrer. Il faut montrer ça.
264. A : Ouais.

265. C : Ca, c'est ça ce que l'on obtient lorsqu'on fait la division.
266. A : Ben c'est excellent, non ?
267. C : C'est pas mal, ouais. En fait, il faut savoir que $(m + 2)m$ est plus grand que $(m + 1)^2$.
268. A : C'est positif, c'est supérieur à 1.
269. C : Ca, on le sait a priori... Est-ce qu'on le sait, ça ?
270. A : Ben, tu développes là. Ça, ça vaut $m^2 + 2m$, ça, ça vaut $m^2 + 2m + 1$ alors ça marche pas ! Ca c'est plus petit que un, pardon.
271. C : $m + 1$ ouais, $(m + 2)/(m + 1)$...
272. A : De toute manière, c'est plus petit que un.
273. C : ça ?
274. A : Ouais, c'est $m^2 + 2m$ et ça, ça vaut $m^2 + 2m + 1$.
275. C : Hum, bon allez tant pis... Et donc, donc c'est chiant par ce que c'est plus petit que un mais de très peu et la puissance de m ça fait que ça se rapproche de un et là, le $(m+2)/(m+1)$ suffit à remonter. Mais euh..., c'est trop chiant à faire, mais c'est pas grave.
276. B : Mais même son truc, c'est pas évident hein...
277. A : Quoi ?
278. B : Son truc là que, que m diminue, donc le m ème terme augmente, donc euh, avec l'augmentation de m , euh... Alors effectivement avec l'augmentation de m ce terme là augmente mais il faut voir que ça, ça c'est le terme de la suite u_m . Or quand m augmente, la suite u_m change, tu vois ce que je veux dire ?
279. C : Ouais, mais tu ajoutes un terme positif et chacun... En gros, si le dernier terme que tu ajoutes, il est positif et chacun avant ça correspond à une augmentation du terme précédent quoi. En gros tu regardes u_m , tu regardes u_{m+1} ...
280. B : Ouais.
281. C : u_{m+1} , tu regardes un truc qui est fixe. Soit il est égal à zéro et il est resté à zéro, soit il va aller de zéro...
282. B : [Inaudible] Attend, attend, je préfère l'écrire.
283. A : Tu écris u_m comme étant $a_{1,m} + a_{2,m} + \dots + a_{m,m}$, d'accord ? Et puis $a_{m,m}$ va être, $a_{m+1,m}$ va être supérieur à... Attend non, c'est un peu bizarre fait voir... Il a euh...
284. C : Non, moi, ça me semble bon. Déterminer [Inaudible], ça c'est la première étape. Pas de problèmes. Reformuler, je vois pas comment on pourrait le reformuler ça... On peut peut-être reformuler celle-là par contre, parce que c'est vrai que c'est, c'est...
285. A : Laquelle ?
286. C : Celle-là.
287. A : Celle ici ?
288. C : Ouais.
289. A : Ben, on écrit u_m ...
290. C : Je pense que le mieux c'est d'écrire u_m égal... Une somme.

291. A : C, ça vaut $a_{1,1} \dots$
292. C : Mais non, non, non, non...
293. A : Quoi ?
294. C : Une somme/
295. A : Quoi ?
296. C : Ecris une somme, comme il l'a fait là. Ecris en forme de somme, mais écris ce qu'il a fait là.
297. A : C'est la somme des $m \dots$
298. C : C'est très chiant à écrire, hein...
299. A : $m - 1$, oh, mais euh...
300. C : Non, non, mais écrit, en fait, c'est k, m, k , enfin k parmi $m, 1/m^k$. En fait oui, c'est peut-être un peu...
301. A : Non, mais c'est, ça, ça sert à rien alors... Je comprends pas.
302. C : Ouais, c'est ce que je me demandais... Ca peut servir pour la suite...
303. B : Ouais non, mais c'est bon, c'est bon, moi j'ai...
304. C : Est-ce que c'est pas plus facile avec ça...
305. B : Regardez, ça marche parce que, ça marche parce qu'en fait, on fait une correspondance entre/
306. A : Correspondance de Gallois ?
307. B : Chaque terme [Rires]. Tu fais une correspondance, ça c'est le $(n + 1)$ ième terme de u_m .
308. C : Oui.
309. A : Ouais. Tu le fais correspondre au $(n + 2)$ ième terme de u_{m+1} .
310. B : $(n + 1)$ ième terme... Non, non, non, le $(n + 1)$ ième terme de $u_{m+1} \dots$
311. A : D'accord.
312. B : Et donc, ça va faire $m + 1$, là.
313. A : Hum...
314. B : Donc effectivement, celui-ci va être euh... Euh...
315. A : Plus grand que le m /
316. B : Plus petit, plus petit/
317. A : Non, plus grand, plus grand !
318. B : Si je mets $m + 1$, celui-ci va être plus petit... Celui que tu prends après.
319. A : Non mais l'opposé, enfin tu prends là, le truc négatif...
320. B : Ah, non, non, non, c'est tout des signes plus.
321. A : Ah non, non mais là, tu as un moins.
322. B : Oui, mais $m + 1$ puisque/
323. A : Attends B, B excuse moi...

324. B : J'obtiens un truc plus gros après quand je mets $m + 1$. Mais si !
- [Rires]
325. A : $1/m \dots -1/(m + 1)$, c'est plus grand que $-1/m \dots$ B...
326. B : $-1/m$, oui c'est plus petit, oui enfin c'est plus, oui.
327. A : C'est plus petit que $-1/(m + 1)$.
328. B : Oui, donc quand je fais un moins...
329. A : Oui, ça sera toujours plus grand, ouais...
330. B : Non, mais non...
331. A : C'est pas possible !
332. B : Si j'ajoute un, je retranche un truc plus petit à un.
333. A : Mais, non mais attend, qu'est-ce qu'il me fait ?
334. B : Donc du coup, le truc est plus gros !
335. A : Non mais tu rajoutes un, là ça fait un... $1-1/(m+1)$ c'est supérieur à $1-1/m \dots$
336. C : C'est quoi que vous faites votre truc, là ?
337. B : Oui, oui, ça c'est bon, oui. D'accord, je suis d'accord avec toi.
338. A : Bon ben, alors.
339. B : Donc le terme d'après, donc ce sera bien plus gros. Et ensuite, le dernier terme en fait, il y a un... Comme on va jusqu'à $m + 1$.
340. A : Attends mais attends, il n'y a pas le même nombre de termes...
341. B : Et oui, on va jusqu'à $m + 1$, la correspondance s'arrête en fait jusqu'à celui-là.
342. A : Ouais...
343. B : Et donc le dernier terme compte en plus, tu vois ce que je veux dire. Dans u_{m+1} , le dernier terme...
344. A : Ben justement, donc ça fait...
345. B : Agit en plus, donc ça fait toujours quelque chose de plus gros de l'autre côté.
346. A : Non de plus petit.
347. B : Non, c'est toujours... La correspondance marche puisqu'on a le $u_{m+1} \dots$ Si tu veux on peut tout écrire...
348. A : Comment on peut se dire une chose pareille !
349. B : Tu fais correspondre, tu as u_{m+1} là, là j'ai écrit les premiers termes et ça s'arrête à $1/(m + 1)^{m+1}$ et là, tu as ton, et là, le $(n + 1)$ ième terme de u_m . Je le fais correspondre $1/n!(1-1/(m+1)) \dots$ Voilà. Et à chaque fois les termes-là de u_{m+1} vont être plus gros que ceux qui correspondent sur u_m . Celui-ci va être encore plus gros que celui-ci etc, etc. Et là, on a, et là, on a celui d'avant un sur... Celui d'avant c'est quoi... Faut écrire celui d'avant, tu sais celui d'avant toi ?
350. A : Comment ?
351. B : Celui d'avant en fait c'est euh, $m + 1$ parce que c'est...
352. C : Je m'excuse alors de t'avoir piqué ton truc.

353. A : Ben, bien sur.
354. B : C'est $m + 1$ sur...
355. A : Non mais attend, qu'est-ce que tu veux montrer là ?
356. B : $m + 1$ à la puissance m . C'est ça ?
357. A : Non mais attend, donne, donne moi ça.
358. B : Non mais c'est bon, c'est ça, ça marche.
359. C : En fait, sa démonstration, je pense que c'est la meilleure, hein...
360. A : Moi, ça me va pas, là...
361. C : Sauf que elle est pas tout à fait correcte...
362. B : Non mais c'est bon, c'est ce qu'il a fait, ça marche.
363. A : Quoi ?
364. C : Ouais, c'est vrai, c'est un peu euh...
365. B : Ah non, non, non, pour moi, c'est bon. Vous faites correspondre, vous avez u_m qui a...
366. A : Bon attend.
367. B : $m + 1$ termes.
368. A : u_{m+1} s'écrit... Non mais attend, non, non, non, non, ça il en a peut-être [Inaudible].
369. B : Tu as u_m qui a $m + 1$ termes... Ouais c'est ça, $m + 1$ termes. u_{m+1} il en aura $m + 2$. Si tu considères terme à terme/
370. A : Non, u_m a $m + 1$ termes, hein.
371. B : Ouais, u_m a $m + 1$ termes, si tu corresponds/
372. C : On voit le n ième terme comme une fonction de m et on montre que cette fonction est décroissante, elle est croissante, en gros. C'est tout simplement ça.
373. B : Voilà, on montre que cette fonction est croissante avec m .
374. C : oui.
375. B : Que chaque terme est croissant avec m .
376. C : Oui c'est ça, on voit chaque euh... Ah non, non.
377. B : Non mais regarde, je disais...
378. A : Oui, non mais on a compris.
379. B : u_m C'est égal à un premier terme, plus un deuxième terme, plus...
380. C : En gros...
381. A : C'est ce que je te dis, tu écris sous la forme $a_{1,m}$, $a_{2,m}$, $a_{3,m}$ etc et chaque terme est croissant, ça c'est ce que je viens de dire.
382. B : ... Donc là, c'en est un autre plus gnagna plus gnagna...
383. A : Tu as celui-ci qui est plus grand que celui-là.
384. B : Et voilà, ça s'arrête là, c'est toujours comme ça.

385. C : On voit u_m comme une somme de k allant de zéro à m de fonction de k dans \mathbb{N} , de fonction indice k dans \mathbb{N} ... [Inaudible] est croissante.
386. A : B, B, \dots C'est bien ce que je disais, chaque... Donc tu le décomposes comme ça, mais chaque terme est négatif, donc est inférieur, donc tu le considères comme une somme d'éléments qui vont être croissants.
387. B : Comme une somme d'éléments qui ?
388. A : Qui sont croissants.
389. B : Avec m , ouais c'est ça.
390. A : Donc $a_{1,m} + \dots + a_{m,m}$, voilà.
391. A, C : [Inaudible].
392. B : Mais c'est bien, c'est bien l'esprit de ce qu'il disait.
393. C : Non, non, non, c'est pas l'esprit de...
394. A : Je suis pas d'accord.
395. B : Ben si c'est [Rires].
396. C : Bon [Inaudible].
397. A : Cela dit, la dernière étape me paraît intéressante.
398. C : Attends, on va avancer tranquillement, on se garde le meilleur pour la fin, ok.
399. B : Pour la majoration, il n'y a pas de problème, y a pas de problème pour la ... ?
400. A : Comment ?
401. C : Donc...
402. B : Pour la majoration, y a pas de problème.
403. C : ... Non mais son étape. Alors est-ce qu'elle est claire, rigoureuse, valide ?
404. A : Alors la majoration elle était claire ? Mais attends non, non, d'abord la majoration. Oui, la majoration est claire.
405. C : Non. Laisse-nous finir avec ça déjà.
406. A : Oui, la majoration après...
407. C : Est-ce que c'est complet, rigoureux et valide ?
408. B : Euh...
409. C : Oui, valide, oui. Ça marche.
410. A : Vous êtes, c'est quoi valide ?
411. C : Vrai.
412. B : Valide, c'est vrai donc euh, oui.
413. C : Complet et rigoureux ?
414. A : Complet oui.
415. B : Non.
416. C : Pas tout à fait complet.

417. B : Ni complet, ni rigou... Ni complètement complet ni...
418. C : C'est assez rigoureux quand même, il précise bien le terme machin mais il aurait quand même pu préciser que...
419. A : Quoi ?
420. C : Il faut considérer qu'il y a un terme qui apparaît.
421. B : il y a un terme supplémentaire.
422. C : Qui est positif, donc c'est pas très grave, mais c'est pas non plus machin... A moins qu'il n'y ait pas pensé mais c'est pas tout à fait complet. Bon après, c'est pas non plus...
423. B : Non, parce que c'est, parce que effectivement...
424. A : Oui, en effet.
425. B : ... Il faudrait considérer qu'il n'y a pas exactement le même nombre de termes.
426. C : Donc là, là, on mets non, non...
427. A : [inaudible] Pour le dernier terme. Rigoureux, enfin c'est non complet, je vois pas c'est quoi la différence ?
428. B : Donc Cauchy, finalement c'est pas...
429. C : Donc complet, rigoureux, ben on... On vient de dire que c'est rigoureux mais c'est pas, ben, ce qu'il fait c'est rigoureux. Ce qu'il démontre c'est rigoureux...
430. A : Ah rigoureux, c'est la démarche, c'est la façon dont...
431. C : Ouais, c'est quelque chose comme ça, ouais.
432. A : D'accord.
433. C : Bon là, par exemple, c'est ni complet, ni rigoureux. Par exemple.
- [Brouhaha]
434. C : Moi, je crois que ça manque beaucoup plus de rigueur que de complétude.
435. B : Que c'est rigoureux, mais que c'est pas complet, c'est ça que tu viens de dire ?
436. A : Moi, je pense qu'une bonne preuve/
437. C : Là, là, oui c'est...
438. B : Rigoureux mais pas complet, hum.
439. C : [Inaudible].
440. A : Bon à mon goût, c'est une preuve qui commence par établir un plan, qui dit, on va montrer ça, puis ça, puis ça.
441. C : En fait, il l'a pas fait ça.
442. A : Donc ok.
443. C : Ouais, si, il l'a fait rapidement.
444. A : Alors, rigoureux non donc... Pas d'annonce du plan !
445. C : Si, si, arrête, il l'a fait.

[Brouhaha]

446. A : Non, je suis pas d'accord, une bonne preuve, c'est une preuve où on annonce le plan de la preuve.
447. C : Il l'a annoncé le plan de la preuve !
448. A : Mais non, il l'a pas annoncé !
449. B : Tu fais ça toi, dans tes devoirs ?
- [Rires]
450. A : Mais carrément, franchement, je dis on va montrer ça, puis ça, puis ça. Alors en général je le fais pas mais/
- [Rires]
451. C : Je le fais mais en fait, je le fais pas.
452. A : Mais si ! Mais si parce que, au moins, on sait où on va.
453. C : Il prend m un nombre entier.
454. T2 : Je sais pas ce que c'est qu'une bonne preuve, moi.
455. C : Voilà, voilà en plus... Déjà, c'est une preuve juste.
456. A : Bon, alors une meilleure preuve.
457. C : Oui d'accord, mais en tout cas, on commence par montrer et il a écrit : « On commence par montrer que u_m a une limite quand m tend vers l'infini ». Après, il a fait un petit encart, il a pas précisé ce qu'il faisait avec m mais bon. Moi, il vaut mieux que ce soit défini au fur et à mesure que tout au début parce...
458. A : Ouais, ouais, j'ai sauté cette phrase, d'accord, bon.
459. C : Bon d'accord.
- [Inaudible]
460. A : « Montrer que u_m a une limite quand m tend vers l'infini » et normalement il devrait y avoir un deuxième...
461. C : Il devrait y avoir, on monte que c'est croissant.
462. A : « On montre maintenant que u_m converge vers e ». Ouais d'accord.
463. B : Il a simplement montré que voila, que chacun des termes augmentait avec m .
464. A : Ouais, ça me va.
465. B : Il manque quand même une petite phrase pour dire que u_{m+1} ...
466. A : D'accord donc il y a deux étapes.
467. C : Il y a un terme de plus, mais bon... Qu'il est positif...
468. B : Y a un terme de plus.
469. A : Donc bon, c'est pas complet, d'accord.
470. C : C'est pas non plus ce qu'il manque, on peut pas trop dire que ça manque de rigueur quoi...
471. A : Y a toujours un problème de complétude avec Cauchy.
- [Rires]

472. C : En plus, on a $1 + 1/1 \dots$. On, bon ça, c'est la somme des termes plus petit que un... Ouais bon, il les fait terme à terme, je crois qu'on peut dire que c'est bon.
473. B : Attend, attend.
474. A : Ca va.
475. B : Il sont tous vraiment plus petit ?
476. C : Euh, où ça ?
477. B : Ouais, si c'est vrai. Par ce que $m - 1$ est plus petit que m .
478. C : Là aussi, je crois qu'on peut pas l'accuser de ne pas être rigoureux, parce que bon...
479. B : Quand on divise par m^3 , y a pas de problèmes.
480. C : En fait, il est rigoureux tout, tout, c'est pour ça qu'il pipote, parce qu'il est rigoureux toute la phase de début puis à la fin, il ne l'est plus du tout.
481. B : La suite est donc croissante, majorée. Et une suite croissante, majorée, converge, il l'a pas démontré ça mais bon, à la limite euh...
482. C : Je pense qu'on eut l'accepter là.
- [Rires]
483. A : Ouais non là, c'est...
484. C : Si tu veux, je te le redémontre.
485. A : Ouais, moi aussi.
486. T2 : Tu fais comment pour montrer qu'une suite croissante et majorée converge ?
487. C : On montre que...
488. A : C'est la lim-sup là.
489. C : Elle est bornée, on peut extraire une euh... A ben non, qu'est-ce qu'on fait d'ailleurs ?
490. A : Ben non, on prend le sup, on appelle la limite le sup des u_n et puis voilà.
491. C : Ouais, c'est le sup, ouais.
492. T2 : Puis tu montres que/
493. A : On montre que ça tend vers, voilà, ben avec les epsilon, tout ça.
494. C : Ah moi, j'allais faire un truc avec les suites bornée [Inaudible]... Suite croissante en fait.
495. A : Non mais t'es bizarre, maintenant, de toute façon.
496. B : Croissante et majorée...
497. T2 : Et c'est quoi le sup ? Vous vous basez sur quel euh, sur quoi pour dire qu'il existe un sup ?
498. C : Euh ben...
499. B : Ah oui parce que c'est la majoration, parce que l'ensemble des valeurs de la suite est majoré, donc c'est l'axiome de la borne supérieure de \mathbb{R} qui dit que cet ensemble possède une borne supérieure.
500. T2 : Ouais. Peut-être, je, je suis en train de... Ca fait longtemps...
501. B : C'est ça, c'est ça, c'est l'axiome de \mathbb{R} .

502. C : Ouais non, c'est ça.
503. A : Ouais, je me suis pas posé la question.
- [Rires]
504. C : C'est dans la définition comme quoi il y a toujours une borne supérieure ou une borne inférieure dans \mathbb{R} .
505. B : Ca, c'est l'axiome de la borne supérieure.
506. T2 : Oui.
507. B : Qui est équivalent à, au théorème des segments emboîtés mais bon...
508. C : Donc à partir du moment où elle est bornée, on peut montrer que la borne supérieure est réelle et euh...
509. T2 : De toute façon si tu dis que c'est dans \mathbb{R} , elle va forcément être réelle cette borne supérieure.
510. C : [Inaudible].
511. B : Il faut savoir ce que c'est une borne supérieure.
512. T2 : D'accord.
513. B : Une borne supérieure, c'est le, c'est le...
514. A : Ah, non mais non c'est le plus petit majorant, c'est ça.
515. B : Le plus petit des majorants.
516. A : Ouais, ça marche, ça marche.
517. C : Ouais.
518. B : Ca veut dire que...
519. C : Et là, il se trouve que le plus petit, que il y a un majorant qui marche donc déjà c'est forcément plus petit que ça, déjà on sait que c'est plus petit. Et après, on doit pouvoir se débrouiller.
520. T2 : Donc du coup, ce théorème là, il est quand même pas si... pas si trivial que ça quoi ? C'est quand même, enfin bon.
521. B : Ah, ça suppose des trucs connus quand même.
522. T2 : Oui, ça suppose la construction des réels quand même.
523. B : Ah oui, ça suppose quand même...
524. C : Ah oui, ben oui.
525. A : Ouais, mais tout.
526. T2 : Vous savez de quand ça date la construction des réels ?
527. B : A mon avis, c'était...
528. A : C'est Dedekind, c'est Dedekind non ? qui l'a... Et Cauchy aussi qui... Enfin à partir des suites de Cauchy.
529. T2 : Cantor.
530. A : Cantor.

531. C : Ca dépend, il y a eu deux constructions mais...
532. A : Ah comme, comme le, le complété de Q.
533. C : Les coupures, je crois que c'est Cant... Non c'est pas Cantor les coupures...
534. A : Mais Dedekind, il me semblait que c'était...
535. C : Mais Dedekind, ça doit être les coupures...
536. A : C'est les coupures...
537. T2 : Hum, hum.
538. A : Mais il me semble que c'est au XVII non ? C'est quand Dedekind ?
539. C : C'est peut-être plus vieux que ça quand même. Non, je sais pas.
540. A : Ah, je crois que c'est assez récent.
541. C : C'est assez, oui, c'est pas très... Non, non, non, j'ai dit plus vieux que ça, je voulais dire plus récent.
542. A : Attend Cantor, non Cantor c'est le XIX.
543. B : Enfin Cauchy, il utilisait peut-être ce résultat de façon peut-être un peu intuitive. Il avait peut-être pas d'arguments euh...
544. C : Ah, on connaît Cauchy, hein.
545. B : En fait, donc peut-être pour l'époque, on pourrait dire que c'était un argument un peu euh...
546. C : Pipoté.
547. B : Un petit peu volé quoi.
- [Rires]
548. A : Ca dépend, Dedekind c'était quand ? C'était le XIX.
549. B : Il pouvait pas le justifier.
550. T2 : C'est 1870-1871, je sais pas, quelque chose comme ça.
551. A : Ah oui, c'est après... Et Cantor c'est après aussi ?
552. T2 : C'est à peu près la même époque à un ou deux ans près. C'est 1870-71-72.
553. B : Il pouvait pas le justifier à l'époque.
554. A : Ouais.
555. B : Rigoureusement, il ne pouvait pas le justifier.
556. C : Alors attend.
557. B : Intuitivement, oui.
558. A : Mais alors comment est-ce qu'il ont fait pour...
559. C : Non attend. C'est... Ouais, c'est pas [Inaudible].
560. A : [Inaudible].
561. B : Faut, obligé... Dans la démonstration, il faut l'existence de la borne supérieure, hein.
562. A : Ha, c'est pas mal le truc caché derrière.

[Rires]

563. T2 : Bon je voulais pas vous... Je voulais, c'est important de se poser cette question aussi, c'est important de terminer ce que vous êtes en train de faire, je vous ai coupé en route... Sur les étapes tout ça et euh... Est-ce que c'est complet rigoureux tout ça. C'est bien si vous arrivez à faire une petite, un petit truc comme ça pour présenter aux autres. La preuve qu'ils font là-bas est, est peut-être un peu plus difficile...

564. A : Hum, hum...

565. T2 : Je sais pas... Ca dépend peut-être aussi de/

566. B : Quoi, leur preuve ?

567. T2 : Ouais.

568. B : Leur preuve est plus chaud.

[Rires]

569. T2 : Je sais pas si elle est plus difficile, c'est sur...

570. B : C'est sur quoi ?

571. T2 : C'est sur les fonctions, c'est le théorème qui dit que si une dérivée, si la dérivée d'une fonction est nulle sur un intervalle alors cette fonction est constante.

572. A : Sur un convexe, un convexe.

573. B : Ah, ouais c'est truc merdique, j'angoisse.

574. A : Sur un convexe, un convexe. Comment ? Un intervalle.

575. B : Non mais là, c'est les trucs dans IR , je pense.

576. T2 : C'est sur IR hein, c'est, c'est sur IR . Donc, bon, bref, quand... C'est possible que ce soit aussi intéressant de réfléchir tous ensemble à celle-ci quand vous aurez terminé celle-ci. Donc je vous laisse encore un moment pour aller au bout de celle-ci, vous posez toutes les questions que vous pensez nécessaires.

577. A : D'accord.

578. T2 : Notamment, si vous pensez que c'est valide ou pas, sur quoi ça repose, que, effectivement, c'est une bonne question de se poser...

579. ? : Ca, c'est pas mal, ouais.

580. T2 : Est-ce que eux, ils étaient allés suffisamment, est-ce que leurs constructions théoriques étaient suffisamment abouties pour justifier de ça ? De toutes les étapes ? C'est pas évident. Et aller jusqu'au bout de la preuve. Et voir avec ce que vous disiez tout à l'heure, est-ce que c'est convaincant ou pas.

581. A : La limite en fait, j'ai pas compris d'où il sort ça.

582. B : non mais c'est vrai là, on commence de sentir que déjà au niveau de croissante, majorée converge, on sent déjà que Cauchy, il est déjà un peu... tu vois. Donc à mon avis [Rires]...

583. A : A ton avis, plus il vieillit [Inaudible].

584. C : Il a pas vieilli de beaucoup pendant sa démonstration [rires].

585. B : Donc à mon avis, sur la fin, il y aurait un peu de l'arnaque que ça m'étonnerait pas.

586. C : Oui, il en a eu marre... Il s'est dit : « Putain, puis de toute façon ils sont nuls ! ».

[Rires]

587. B : Attend, attend mais non, non, non...
588. A : Voilà, il l'a vachement détaillé puis il a dit : « c'est bon vous avez compris ? », « Non », « Non, vous n'avez pas compris, bon ben alors de toute façon c'est foutu alors ».
589. B : C'est pas grave.
590. A : Alors, on va plus vite.
591. C : « Il est clair que pour parler de la limite de nombres rationnels, il est nécessaire qu'au préalable l'ensemble IR soit défini, ce dont Cauchy, comme d'ailleurs tous les mathématiciens de son temps, n'avait pas pris conscience. » [Il lit Dugac (2003, p. 95)]
592. B : C'est bien tu lis les documents qu'on met à ta disposition.
593. C : Ben surtout, quand je [Inaudible], j'essaie de voir...
594. A : Non, mais il est bien ce livre à lire. Fais voir, j'aime bien.
595. B : File moi ça.
596. A : Vas-y tu peux me... Donc c'est « Une histoire de l'analyse » et comment, c'est de qui ?
597. C : Pierre Dugac.
598. A : Comment ça s'écrit ?
599. C : « d », « u », « g », « a », « c ».
600. A : « d », « u », « g », « a », « c » ?
601. B : Bon, on en est où là ? Faut qu'on prépare un exposé non, comment on fait ?
602. A : Attend, mais on a pas fini le dernier truc, là.
603. C : On fera comme ça au feeling.
604. A : Oui, on fera au feeling.
605. B : Bon, on est d'accord, nous on sait comment il faut faire pour conc... pour euh... Mais est-ce que c'est certain que Cauchy avait pas les éléments pour conclure, c'est certain ?
606. C : Ben, je sais pas. J'ai... Apparemment, lui, il semble [Inaudible] à son truc.
607. B : Oui, oui, oui.
608. C : C'est après.
609. B : Et donc pour qu'il puisse conclure, il faut qu'il y ait la, que la construction de IR soit faite.
610. A : Oui, oui. Donc ça marche pas.
611. B : Donc, donc, donc, c'est pas bon.
612. A : Non. Donc non. Donc elle n'est pas rigoureuse. Et, elle est valide euh...
613. B : Et elle est valide...
614. C : [Inaudible] Convergence de Cauchy. Non je vais regarder dans Cantor, dans Dedekind plutôt, ça doit être plutôt dans Dedekind. « Un homme nouveau », ouais [Dugac (2003, p. 156)].
615. B : Bon...

[Rires]

616. C : 1870, qu'est-ce qu'il a fait ?
617. B : On s'attaque au/
618. A : Attend.
619. C : « Continuité et nombre irrationnels » [Dugac (2003, p. 160)].
620. B : Non, mais on va attendre C.
621. C : J'essaie de voir en fait, si, si, c'est sûr qu'il l'avait pas le truc.
[Digression non transcrite]
622. B : C'est bon ? On en est où là ? On en est à oui, on en est au point, au point difficile.
623. A : « On constate que »... La topologie de toute façon, c'est arrivé quand ?
624. B : T'as vu/
625. A : Attend, attend, non, non, non, non, hey, au niveau de la limite, ça date de quand ? La définition d'une limite ? Hein ?
626. B : Ben c'est tout la même chose.
627. A : Les espaces métriques... Non, les espaces métriques, ça date du début du XX.
628. B : C'est clair que... Attend, attend, attend...
629. A : Je crois que la limite, c'est pas défini.
630. B : Pour montrer que c'est croissante, majorée converge, il n'y a pas besoin de la notion de limite.
631. A : Non, mais ici, il y en a besoin. Donc, qu'est-ce qu'il appelle limite quand m tend vers l'infini, est-ce que c'est bien défini la limite. Est-ce que c'est pas un truc vague. Ah oui, tu sais, tu peux regarder la définition de la limite s'il te plaît ?
632. C : Non mais, c'est juste des noms là. Si tu veux c'est Richard Dedekind, machin, machin...
633. A : [Inaudible].
634. B : Ouais, ça peut être juste une notation...
635. A : Ouais mais si c'est pas, la définition de la limite est apparue quand, c'est au XX, non ?
636. T2 : Formalisée comment ?
637. A : Formalisée avec les espaces topologiques...
638. C : Ca c'est au XX.
639. T2 : Oulala, tu veux dire quel genre de définitions de la limite ?
640. A : Pour tout voisinage de, il existe un voisinage...
641. C : Mais, t'es pas obligé d'utiliser les voisinages.
642. T2 : Le vocabulaire de voisinage, je sais pas, mais à mon avis c'est XX, oui.
643. C : Mais on se place dans IR, t'as pas besoin de ça.
644. T2 : Début du XX.
645. A : Ouais, d'accord.
646. C : C'est vrai qu'on l'utilise comme ça, maintenant [Inaudible].

647. B: Avec des ε .
648. C : C'est pas parce qu'il utilise des trucs moins puissants que c'est forcément faux.
649. B : Qu'il existe un N à partir duquel euh...
650. A : Est-ce que c'était apparu au XIX ?
651. T2 : Disons... Chez les réels ?
652. A : Est-ce que c'était bien défini ?
653. T2 : Chez les réels ?
654. A : Oui.
655. T2 : [Inaudible] pour une limite réelle. Euh... La définition, tu veux dire qui est donnée en $\varepsilon - \eta$ quoi.
656. A : Hum, hum.
657. T2 : Celle-ci, a priori, on l'attribue à Weierstrass.
658. C : Je pense qu'elle est assez vieille hein ?
659. T2 : Euh... Fin XIX.
660. A : Ah ben c'est pareil, ça ne marche pas.
661. C : Ah, quand même ! Fin XIX !
662. A : Ca marche pas, donc ça marche pas.
663. T2 : En tout cas, en 1821, certainement pas.
664. A : D'accord.
665. T1 : A l'époque, il l'avait pas formalisé mais il l'exprime quasiment pareil... Ils disent qu'on peut s'approcher de manière infiniment proche...
666. C : Ouais, mais ils l'ont pas formalisé hein.
667. A : Comment est-ce qu'ils le...
668. T2 : Ils le disent...
669. B : Ils notent limite...
670. A : Donc c'est pas bien défini ? Formellement.
671. T1 : Ce qui n'est pas clair, c'est le... Ce qui n'est pas clair pour eux, c'est l'ordre des quantificateurs.
672. C : Hum, d'accord. Ouais, c'est comme le sup dans ce cas là, c'est pas vraiment défini.
673. T1 : Que ce soit quelque soit, il existe.
674. A : Donc euh, le sup aussi, formellement c'est pas bon.
675. C : Si la limite l'est pas, le sup ne risque pas de l'être.
676. T1 : Mais, c'est quand même, c'est implicite, il existe quand même, en gros... On peut s'approcher aussi près que l'on veut à partir du moment...
677. T2 : Oui, ce qu'il y a... Il y a le problème d'uniformité, c'est-à-dire que la quantification sur l'endroit où l'on regarde la limite...

678. T1 : Voilà, ce qui est pas...
679. T2 : [Inaudible] Est pas clair entre continuité uniforme et continuité. Mais ce qui est sûr, c'est que, d'ailleurs normalement j'en ai pas mis dans la manière dont j'ai repris la preuve, à aucun moment on fait des preuves avec des ε et des η .
680. C : Non.
681. T1 : Oui... On peut le dire simplement.
682. C : Disons que c'est pas rigoureux mais c'est vrai, c'est valide pour l'instant.
683. B : C'est valide voilà, mais c'est pas... Rigoureux.
684. C : C'est valide, mais ils ont de la chance... D'ailleurs, à la fin, ils n'en ont plu parce que...
685. A : Oui, ils ont de la chance parce qu'on est tolérant, mais sinon, euh...
- [Rires]
686. A : Ca passerait pas.
687. C : [Inaudible] Il se trouve que ça passe...
688. T2 : C'est ce que l'on vous demande de...
689. A : Bon, on met combien ?
690. C : Cinq sur vingt, là.
691. B : Vous imaginez, on note Cauchy, vous imaginez ?
692. A : On va noter Cauchy !
- [Rires]
693. C : Ben, il est pas si bon que moi hein ?
- [Rires]
694. T2 : Sauf que lui, il faut penser justement, c'est là où ça devient intéressant, ça peut donner des éléments...
695. C : Ben oui, il a trouvé des truc que...
696. T2 : Sauf que lui on lui a jamais appris, une limite c'est ça.
697. C : Oui, oui, oui, non, mais je sais...
698. A : Ouais.
699. T2 : Enfin c'est ça, quand je dis « c'est ça », ça veut dire pour tout ε , il existe η ...
700. C : Parce que c'est vrai quand on nous a dit, une limite c'est défini comme ça, on a fait « Ah oui, c'est vrai que ça marche ».
701. A : De toute façon, je crois...
702. B : Mais dans sa tête, il fait comment...
703. T2 : [Inaudible] Pris un certain temps à...
704. C : Bien maîtriser tout ça.
705. T2 : A comprendre, ce que ça veut dire.
706. B : Dans sa tête, c'était limite comme la limite en langue française quoi, ce que ça veut dire.

707. A : [Inaudible] L'infini, oui.
708. B : Quelque chose qui se rapproche.
709. T2 : Je peux pas répondre... C'est ce genre de chose. C'est dur de répondre à ça de manière catégorique, tu vois. J'ai un peu, il y a certainement des gens qui ont travaillé dessus, des historiens des maths/
710. A : Mais alors du coup, la première fois/
711. T2 : C'était plutôt des périphrases pour dire quand on se rapproche de, il se passe ça... D'accord ?
712. A : Peut-être, enfin j'ai l'impression qu'on nous apprend des trucs, on nous dit voilà euh, ça représente globalement ça sans nous donner une définition formelle et puis que c'est plus tard qu'elle arrive. Par exemple, la notion de limite, je crois qu'on l'a étudiée en première et on doit nous dire c'est quelque chose qui euh...
713. B : Ouais c'est vrai, on l'étudie en première.
714. A : Qui tend vers l'infini... Enfin, c'est pas... Vous remplacez ça par l'infini, en fait.
715. B : C'est ça qu'on nous dit et après en terminale/
716. A : Et après euh, en terminale, j'en suis même pas sûr.
717. T2 : Du coup, du point de vue des étudiants de Cauchy, à l'époque ?
718. A : Ca passe très bien... Normalement.
719. T2 : Comment vous pensez qu'ils peuvent recevoir ça par exemple ?
720. C : Tout ce qu'il y a avant ?
721. T2 : Ouais.
722. C : A mon avis, à mon avis/
723. A : Ca passe. Ben aux yeux d'élèves de terminales...
724. C : Ben disons ils se disent, c'est logique, donc c'est vrai.
725. A : Ouais, voilà.
726. C : La dernière partie... Nous, ça nous choque un petit peu mais/
727. A : La dernière/
728. C : Mais à mon avis, ça les choque pas plus que ça, quoi...
729. B : Non, non, je pense qu'ils sont sceptiques hein, parce qu'il sont rigoureux aussi, donc euh...
730. C : Ben oui, mais là, si tu veux les...
731. B : Je pense qu'ils ont pas, ils se disent majorée convergent d'accord, mais est-ce qu'on pourrait pas...
732. C : Ah peut-être, peut-être, mais...
733. B : ... être plus précis.
734. A : Ouais, le bon étudiant, c'est celui qui remet en cause ce que le prof lui dit, ça c'est bien connu. Non mais, enfin, d'accord.
735. T2 : Bon, on essaye de, là il est trois heures... Si au bout d'un quart d'heure, vous arrivez à, à peu près avoir terminé ça, je vous passerai un transparent, un transparent de la preuve.

736. A : Oui.
737. T2 : Et vous le présenterez aux autres, ça vous va ?
738. B : Hum. On essaye le dernier truc là ?
739. T2 : Vous expliquez ce que vous avez fait, ce que vous en pensez...
740. A : Hum.
741. B : On essaye déjà de le démontrer nous.
742. A : Mais de toute façon, je suis même pas sûr, à mon avis ce qu'il se passe c'est que comme la notion de limite était pas bien définie, il a fait tendre ça un peu n'importe comment.
743. C : Il s'est pas rendu compte que...
744. A : Il s'est pas rendu compte qu'il arnaquait.
745. C : Il dit, on fait passer à l'infini puis hop, pas de problèmes quoi. On passe à l'infini, on fait tout à la fois.
746. B : C'est vrai que, étant donné que, comment dire euh... La suite converge donc il sait que, en faisant tendre n'importe comment, en gros, il fera pas de bêtises quoi.
747. C : Bah... Non, moi je pense qu'il s'est juste dit quand on va à l'infini, chaque termes ça tend vers ça et alors...
748. A : Mais ça me rappelle euh, tu sais à propos des séries...
749. C : Est-ce qu'on a un exemple de trucs.
750. A : Ouais mais attend, je crois que c'est là où il arnaque... Attend !
751. B : Non mais, oh...
752. A : Attend, attend, attend, attend, attend....
753. B : On peut pas se concentrer sur la preuve ?
754. A : Si, si, si.
755. C : Est-ce qu'on a un truc pour dire que c'est pas égal à la somme des limites ?
756. A : Non mais là, oui mais pas quand t'as un m ici. Et puis à mon avis, c'est faux de toute façon... Je crois qu'on peut trouver un contre exemple. Y a pas un endroit où Cauchy avait euh... définit une somme enfin je sais plus, il avait dit elle converge...
757. T2 : Ouais.
758. A : Riemann lui avait écrit en disant non, non y a un problème...
759. T2 : Ouais.
760. A : Ca converge pas et puis après Cauchy lui a répondu, enfin, il lui a pas répondu d'abord, il l'a même pas lu et puis après il a dit, ouais j'avais raison, c'était en fait une série de... Une série entière voilà...
761. T2 : Ouais...
762. C : Ouais, mais là, c'est pareil/
763. A : Je me demande si il a pas fait le même genre de trucs ici/
764. C : Attention là, pour l'instant, c'est bon.

765. A : Dire ça converge.
766. T2 : Je peux pas te répondre par rapport à ce que tu dis, je connais pas le...
767. A : Non.
768. T2 : Je suis pas spécialiste de Cauchy ou quoi...
769. C : A mon avis, à mon avis, c'est pas qu'il a triché mais...
770. T2 : Par contre la manipulation de séries divergentes, ça a été longtemps classique quoi. On manipulait les choses de manières formelles puis on faisait le calcul puis si à la fin ça tombait sur quelque chose qui va bien... Très bien.
771. A : D'accord.
772. T2 : Mais là, je sais pas. De toute façon, je pense qu'on peut pas savoir, on peut juste faire des hypothèses sur ce qu'il a voulu dire. Mais surtout est-ce que c'est valable ?
773. A : Ca non, franchement, je crois que j'ai trouvé un contre exemple.
774. T2 : Parce qu'au-delà du sentiment...
775. A : Enfin j'avais trouvé un contre exemple, il y a un an donc euh... Ca, il me semble que c'est pas bon.
776. C : Ca, cette démonstration, en plus, c'est dommage parce qu'il aurait pu faire, enfin avec des ε , il aurait pu faire beaucoup plus facilement...
777. B : Oui, mais comment le faire rigoureusement ?
778. A : Oui mais, comme c'était pas...
779. C : Alors rigoureusement, regarde comment tu fais.
780. A : Non mais, attend, de toute façon ça va pas. Ecoute, écoute moi bien, ça, on va s'en occuper...
781. C : Non, ça c'est vrai hein, c'est à la base. On peut pas trop parce que ça, on sait que c'est égal à ça, et que ça, c'est égal à ça. Donc ça c'est vrai.
782. A : Non mais...
783. C : Mais c'est faux, après le raisonnement lui-même.
784. A : C'est la preuve.
785. B : On peut pas inverser somme de toute façon c'est pas possible, la somme dépend de m .
786. C : Le plus simple, c'est d'en prendre un nombre fini. Parce que, tu sais que la limite, en gros le mieux c'est de faire un encadrement. Tu sais que la limite elle est plus petite que e , on l'a montré avec ça. On sait que c'est plus petit que e , donc la limite sera plus petite que e .
787. B : Ouais.
788. C : On va montrer qu'elle est plus grande que e moins ε avec quel que soit ε . Ca, il peut pas le faire parce qu'il ne les connaît pas les ε . Mais nous on va dire, on va prendre un nombre fini de n , quelque soit ε , il y a un machin tel que somme jusqu'à $1/n$ machin, c'est plus grand que $(e - \varepsilon)/2$. Jusque là, c'est rien. En gros, on se [Inaudible] pas trop. Donc on va prendre ces n premiers termes. Pour chacun d'entre eux, on sait que effectivement le $(n + 1)$ ième terme tend vers $1/n!$. Donc on va dire que pour chacun d'entre eux on peut s'en rapprocher jusqu'à $\varepsilon/(2n)$. n , il varie plus à ce moment là, donc on peut.

789. A : Attend, attend.
790. C : On s'en rapproche [Inaudible]. On va continuer plus ou moins longtemps...
791. A : Ca y est.
792. C : Jusqu'à [Inaudible] c'est $\varepsilon/(2p)$ plutôt, où p c'est le nombre de termes.
793. A : Attend, attend, C ! C s'il te plait !
794. C : Et quand on est arrivé à $\varepsilon/(2p)$...
795. A : Vas-y C !
796. C : On prend le maximum de tous les trucs qui vérifient ça, de tous les termes qui disent en gros, à partir de là, on est plus petit, plus proche que $\varepsilon/(2p)$ de $1/n$.
797. B : Parce que moi [Inaudible].
798. A : Est-ce que vous pouvez m'écouter, s'il vous plait ?
799. C : Non, parce que ce que tu dis, c'est pas intéressant.
- [Rires]
800. A : Si, si ! c'est pour te dire que sa justification va pas. Ecoute moi bien, attend...
801. C : Ah, mais si c'est pour me dire que... je suis d'accord. T'as trouvé le contre exemple ?
802. A : Oui, j'ai trouvé un contre exemple. Tu prends $u_n = 1/n + 1/n + \dots + 1/n$. Ca vaut un. Tu es d'accord... Oui.
- [Rires]
803. A : Donc, la limite vaut un. Avec son raisonnement, ça, ça tend vers zéro, ça tend vers zéro, ... Donc le tout tend vers zéro. Voilà, allez ça va, « non valide ».
- [Rires]
804. C : Euh... Ouais, en plus c'est ça. Parfait.
805. A : Alors c'est bon, on est ...
806. C : Alors le truc, c'est que là où c'est/
807. A : On prend $1/n$ etc, etc, plus $1/n$, la somme n fois. La somme vaut un, donc la limite vaut un.
808. C : Oui.
809. A : Et puis, avec son raisonnement, $1/n$ tend vers zéro, $1/n$ aussi, et donc la somme tend vers zéro.
810. C : Et donc, il faudrait voir... Est-ce qu'on pourrait faire ça, parce que là on fait des trucs avec des trucs qui tendent vers zéro. Mais là, il fait tendre vers des trucs qui finissent/
811. A : Donc ça c'est faux, je veux dire...
812. C : Non mais c'est vrai, non mais je suis d'accord, c'est vrai que c'est faux mais...
813. A : Tu vois, tu voulais pas m'écouter mais/
814. C : Moi, je parlais pas du tout de ça, si tu veux. Moi, je suis en train de refaire cette démonstration.
815. A : Oui alors, montre nous.
816. C : Ben en fait, la démonstration, elle est toute simple, c'est avec des ε .

817. A : Hum.
818. C : Tu dis en gros/
819. A : Mais, ça n'existait pas !
820. C : Je sais que ça n'existait pas ! C'est pour ça que nous on le fait !
821. A : Ben alors le développement limité, tu fais les équivalents !
822. C : Mais non, mais non...
823. B : Tu peux l'écrire ? Ecris-le, écris-le, ouais.
824. T2 : Non mais bon, il y a plusieurs questions que l'on pourrait se poser. Effectivement, on pourrait se dire la preuve [inaudible]/
825. C : Avec les ε , on peut la faire. Est-ce qu'on pourrait la faire sans les ε ?
826. T2 : Non mais... Refaire juste l'argument là.
827. C : Ben de toute façon...
828. A : Il est faux.
829. T2 : Est-ce que cet argument là, il a l'air d'être faux. Mais est-ce qu'il est faux parce que il est complètement faux, ou est-ce qu'il est faux parce qu'il est incomplet ?
830. A : Il est faux parce qu'il est incomplet. Il y a quelque chose qui se cache derrière et qu'il n'a pas euh... Mis en valeur.
831. T2 : Est-ce que vous pouvez le trouver ce quelque chose. [Inaudible] il y a 2 choses. On pourrait dire, ou il fait un pas de raisonnement qui est invalide.
832. A : Hum.
833. T2 : Vous avez un contre exemple à ce pas de raisonnement invalide et il dit... Vous pourriez formaliser le théorème qu'il utilise pour passer de là à là. De cette ligne là à cette ligne là, c'est, ce serait intéressant d'ailleurs pour les autres que vous le formalisiez, c'est quel théorème qu'il est en train d'appliquer et est-ce que ce théorème il est invalide ou est-ce qu'il faut... Enfin là, il est invalide, vous avez un contre exemple. Il est invalide, mais dans ce cas là, qu'est-ce qu'il faut ajouter comme hypothèses ?
834. C : Qu'est-ce qu'il faudrait pour qu'il soit valide ?
835. T2 : Ou alors quel pas de, quel théorème il devrait utiliser, pour euh... ?
836. C : Et alors là...
837. T2 : Vous voyez le ?
838. A, C : Oui.
839. C : Et en gros ce qu'il fait c'est qu'il passe à l'infini ici, chacun des termes tout en faisant passer à l'infini la somme donc en gros, il utilise/
840. B : Ton exemple, on voit bien avec ton contre exemple, on voit bien le problème, quoi.
841. C : Si on fait avec les sommes des $f_{k,m}$... En gros, on peut considérer ça comme une somme infinie, avec une infinité de termes égal à zéro, les derniers termes égal à zéro, si tu veux... En gros/
842. A : Avec le dernier terme, je comprends pas.

843. B : Faut se méfier, faut se méfier même chez toi parce que/
844. C : Je dis, on peut écrire u_m égal somme de k égal zéro à m de $f_{k,m}$. On peut l'écrire comme ça.
845. A : Hum, hum.
846. C : Où $f_{k,m}$ c'est [Inaudible]. Bon ben on a qu'à étendre $f_{k,m}$, en disant que tant que l'on a pas pour les $f_{k,m}$...
847. B : Tu sais, même chez toi tu as un problème A , dans tes $1/n$...
848. A : Pourquoi ?
849. B : Parce que en fait tu sais que tu peux pas sommer une infinité de zéro, ou ça fait pas zéro. Tu vois, il y a toujours ce problème que une infinité de trucs qui sont très, très petits...
850. C : Oui mais, euh...
851. B : Ca donne pas forcément quelque chose qui est, qui est, ça peut donner, ça peut donner un.
852. C : Mais c'est un peu ce qu'il a fait là aussi, c'est un peu ce qu'il a fait aussi, là.
853. A : Ouais mais, attend, attend, attend, regarde.
854. B : Pareil pour factorielle, hein...
855. C : Euh... Enfin ouais, avec des...
856. B : Tu vois le problème finalement, là, ton truc, c'est le même problème que lui. Sauf que lui bon ben, ça tombe bien. Sauf que toi, ça, ça avec des zéro, zéro, zéro, zéro... Tu ne peux pas conclure. Tu peux pas dire que ça fait un.
857. C : Non mais regarde, tu fais, non mais même.
858. A : Oui, je comprends.
859. C : C'est pareil parce qu'il dit en gros chaque terme... Ben, si il mettait comme terme, au lieu de mettre un, il mettait $1 + 1/n$, il pourrait très bien dire « chacun tend vers un », machin, donc il tend vers la somme.
860. A : Non mais ça, on est d'accord...
861. C : Sauf que les $1 + 1/n$, il devrait s'ajouter aussi, sauf que ça ferait crasher le truc quoi. Donc le problème, c'est que il dit, en gros, chacun tend et donc on peut prendre la somme. Donc ça [Inaudible], il reste euh...
862. A : Voilà [Inaudible] n'est pas bonne mais euh... Voilà, il y a quelque chose qui marche chez lui qui ne marche pas chez nous.
863. C : Et alors, pourquoi c'est faux... Ce que je propose d'écrire somme pour k allant de zéro à m de $f_{k,m}$, on peut l'écrire ça comme, ça.
864. A : Oui.
865. C : $f_{k,m}$ [Inaudible]. On va étendre $f_{k,m}$ en disant que $f_{k,p}$ c'est égal à zéro si p est plus petit que k . En gros, c'est les coefficients, pour dire qu'on a une somme infinie mais on annule tous ceux qui sont après m pour avoir toujours la même formule. Bon, ça te va ?
866. B : Oui, tu veux, tu vas jusqu'à l'infini et puis après, tu fais zéro, quoi.
867. C : Voilà, comme ça, j'aurais une somme infinie.
868. A : Et après, tu appliques le théorème de convergence dominée.

869. C : Et là oui, parce que, dans ce cas là.
870. A : Théorème de convergence dominée.
871. C : Voilà, et là, tu as une somme infinie...
872. B : Ouais, vas-y.
873. C : Et donc la limite de la somme infinie, ce qu'il utilise c'est que c'est égal à la somme infinie des limites.
874. A : Hum.
875. C : C'est ça qu'il utilise.
876. A : Oui, c'est ce que j'ai dit, oui.
877. C : Et euh... Et pourquoi c'est vrai ?
878. A : Théorème de convergence dominée.
879. C : Hum.
880. B : Alors attend. Pourquoi c'est vrai là, pourquoi c'est vrai ?
881. A : Mais il est apparu, Lebesgue c'est ? C'est le début du XX, Lebesgue, puisque c'est au moment de sa thèse qu'il a fait ce truc.
882. C : C'est à ce moment là qu'il a fait la convergence dominée ?
883. A : 1905, je crois, ouais. Théorème de convergence dominée.
884. B : Attend, c'est pas la convergence dominée là. C'est pas la convergence monotone là ?
885. A : Enfin, peu importe, c'est un théorème de convergence. De toute façon, on s'en fout c'est/
886. C : Non, non, non, on s'en fout pas.
887. A : Mais si. A mon avis, c'est dominée parce que là, tu domines là. Il y avait une inégalité à un endroit.
888. C : Pourquoi convergence monotone ? Tu veux dire que ça croit tout le temps donc, euh.
889. B : Parce que tous les termes sont positifs...
890. C : Hum.
891. B : Donc là, on applique le théorème de convergence monotone, quand on fait la version limite intégrale quoi. On... C'est ça ?
892. C : Ouais, ouais. Enfin, en gros, oui. C'est avec des sommes mais c'est pareil. Euh...
893. B : Donc là, c'est monotone.
894. C : Oui, c'est convergence monotone plutôt.
895. B : Monotone.
896. A : Ouais c'est monotone, enfin...
897. C : Je vois pas l'intérêt de faire dominée.
898. A : Peu importe...
- [Rires]
899. C : Mais les deux marchent, dominée ça doit marcher aussi, je pense.

[Inaudible]

900. A : Bon alors fait voir, on va voir parce que pour moi, ça marchait alors... Et $1/n$, de toute façon ça...
901. B : Ouais parce que pour que monotone, il y a une condition, il faut que chacun des termes tende vers euh...
902. A : Monotone ?
903. C : Un terme.
904. B : Que chacun des termes tende vers, euh...
905. A : Attends, à chaque fois que tu prends, c'est quoi le monotone, c'est tu prends un m , attends...
906. C : Ouais ben, il faudrait retrouver, euh...
907. A : Ah oui, $f_m(x)$. Voilà, tu fixes x et $f_m(x)$ est croissant en m . Croissant en m . Donc x fixé, si pour tout x , $f_m(x)$ est croissant en m .
908. C : $f_m(x)$ doit être croissante.
909. A : Et positive hein. Bon là, ça marche bien.
910. C : Non mais, c'est vrai qu'il faut que ce soit croissant en m ?
911. B : C'est la suite, c'est une série donc c'est bon.
912. A : ... Que $f_m(x)$ soit croissante en m .
913. C : En m ?
914. A : En m .
915. C : Parce que là, pour l'instant, je suis pas sûr que ce soit le cas.
916. A : Comment ?
917. B : Elle converge pour tout m , donc pas de problème, puisque par construction, elle est finie, donc euh... Ça marche.
918. A : Donc euh, ici, donc ici tu prends m , c'est égal à x , donc c'est m fixé, est-ce que c'est croissant en k c'est ça ? Est-ce que ça, c'est croissant en k ?
919. C : Ben je suis pas sûr, justement je pense pas.
920. B : Mais non, mais non, mais non, parce que...
921. A : Si, ça marchait bien son truc.
922. C : Mais je suis pas sûr que ce soit croissant.
923. A : Mais c'est pas vrai puisque, si tu prends m , si tu prends k plus grand que m , ça vaut zéro. Comme tu l'as dit.
924. C : Ouais, mais si tu prends k plus grand que m , ça peut être pas croissant. Parce que c'est au début que c'est croissant.
925. A : Ouais mais alors, non mais alors, ça vaut toujours zéro.
926. C : Zéro, zéro, zéro, ... Et après, ça commence à, quand tu as un truc non nul, ça restera non nul tout le temps.
927. A : Attends on est bien d'accord que. Ce que tu appelles $f_{k,m}$ c'est quoi ? C'est $f_{1,m}$, $f_{2,m}$, ..., $f_{m,m}$ égal à ça, à ce terme là. C'est ça ? Et ce que tu appelles $f_{m+1,m}$, c'est zéro.

928. C : Oui.
929. A : D'accord. Ben donc, si tu prends euh, k supérieur à m , $f_{k,m}$, ça va valoir zéro, normalement.
930. C : Oui, je sais.
931. A : Tu vas pas avoir la croissance.
932. C : Ben, qu'est-ce que ça empêche ? C'est pas forcément une croissance stricte, mais on s'en fout.
933. A : Non mais tu vas même décroître... Ca c'est positif.
934. C : Oui, c'est positif. Ca décroît tu veux dire...
935. T2 : Vous essayez de le faire avec un théorème de convergence ?
936. A : Ouais.
937. T2 : Ils passent aux préparations de l'exposé de l'autre côté donc je pense que c'est ce que vous allez faire aussi.
- [Rires]
938. T2 : Si ça vous va, hein ?
939. A : On va devoir improviser !
940. T2 : Non, mais c'est pas grave.
941. C : On va les bluffer par notre talent.
942. T2 : C'est juste histoire que, que...
943. A : Qu'on mette en relief.
944. T2 : Que vous puissiez profiter de leur, de leur, de ce que vous avez trouvé. Puis vous verrez qu'il y a peut-être des problèmes, que ça peut faire écho avec ce qu'ils raconteront...
945. C : Je suis sûr qu'il y a plus de problèmes que [Inaudible].
946. A : Ah c'est sûr... Eux, ils sont dans la merde [Les groupes peuvent s'entendre les uns, les autres].
947. T2 : Eux, je crois pas qu'ils présenteront de contre exemple, je ne crois pas que ça les embête. Ca pourrait être intéressant de le chercher ensemble.
948. A : Ouais. D'accord.
949. C : Ah moins qu'ils ont pas assez réfléchi à leur problème ?
950. A : Mais c'est sympa de nous avoir réuni comme ça.
951. C : C'est rigolo.
952. A : Ouais, franchement c'est sympa.
953. C : On se sent plus malin que Cauchy.
954. A : Comment ?
955. C : On se sent plus malin que Cauchy.
956. A : Parce que voilà, on peut l'insulter et tout c'est...
957. C : Il est vraiment nul !

958. A : Ouais.

[Discussion sur la présentation non transcrite]

959. C : Est-ce que tu es sûr que c'est ça, le théorème de convergence monotone ?

960. A : J'en suis certain. Il y a qu'un seul théorème que je connais, c'est celui-ci.

[Rires]

961. C : C'est pas vrai, c'est pas le seul que tu connais.

962. A : Quoi, c'est pas le seul que je connais.

963. C : [Inaudible].

964. A : Ah, je connais le théorème de Pythagore aussi.

965. C : Et [Inaudible] tu connais aussi.

966. A : Oui.

967. C : Et ben voilà. Mais c'est pas pour autant que je te fais confiance. Tu me dis que $f_m(x)$ doit être croissant en m ?

968. B : Ouais c'est ça, positif croissant et converge vers m alors l'intégrale des $f_m \dots$

969. A : Donc ça marche pas.

970. C : Attend. Euh ouais.

971. B : Tend vers l'intégrale de f , ok. Donc la somme des f_m tend vers la série des f .

972. C : C'est pour les séries ça ? Mais non, c'est quand... D'accord, ouais.

[Discussion sur un stylo]

973. C : Oui, non, c'est quand $f_n(x)$ qui croit, quand $f_m(x) \dots$

974. A : Croit.

975. C : Croit, voilà.

976. A : L'intégrale de $f_m(x)$.

977. C : Intégrale de $f_m(x) \dots$

978. A : $f_m(x)$, oui.

979. C : Egal à...

980. A : Enfin la limite de l'intégrale.

981. C : La limite...

982. A : Egal l'intégrale de la limite. Voilà, c'est ça.

983. C : Mais là, là, c'est des sommes.

984. A : Ben ouais, des sommes. Une intégrale, c'est une somme. Une somme, c'est une intégrale.

985. C : Ouais, comment dire.

986. A : C'est la mesure de comptage.

987. C : Comment dire ça de façon raisonnée et simple ??

988. A : Quoi ! Alors vas-y, dis moi ce qui ne va pas. Pour toi, une somme n'est pas une intégrale ?

989. C : Si, si [Inaudible]. Sauf que, est-ce que on tendrait... [Inaudible] Croissante pour que la limite de la somme soit égale à la somme des limites... Oui, en fait, on a pas réussi la convergence monotone.
990. A : Non, alors théorème de convergence dominée peut-être que ça marche.
991. C : Non, ça marche pas.
992. A : Mais si ça marche.
993. C : Comment ça marche si tu peux donner [inaudible].
994. A : Ah, le théorème de convergence dominé, ce que c'est ?
995. C : Hum.
996. A : Laisse. Alors, je sais plus, euh... Si pour tout x , $f_m(x)$ est inférieur ou égal à $g(x)$ qui est une fonction intégrable alors...
997. C : Ah, oui et ben c'est bon.
998. A : On a la même.
999. C : Et il se trouve que quel que soit x , $f_m(x)$ est plus petit que...
1000. A : Voilà. Absolument.
1001. C : Un sur machin. Et ça, c'est une fonction intégrable.
1002. A : Ca, c'est une fonction intégrable ça ?
1003. C : Ben non, c'est une somme attend.
1004. A : Somme infinie de un, ça ne marche pas.
1005. C : Non, non.
1006. A : Ah non, attend je pense... à partir d'un moment ça vaut zéro. Le, le g . Ah oui, attention, le g ...
1007. C : Mais non, il faut que ce soit plus petit que, plus petit que, non mais surtout que $f_m(x)$ a priori, c'est toujours plus petit que un sur machin factorielle, plus petit que ça, en gros. D'après ce que l'on avait fait là. Plus petit que un sur...
1008. A : Ah oui, voilà c'est plus petit que ça en effet, qui est intégrable en somme infinie. Quand tu prends la somme infinie de ça. Donc c'est plus petit que e , donc c'est le théorème de convergence dominée. D'accord.
1009. C : Et oui, en fait, quand on voit ça, c'est exactement ce que tu dis.
1010. A : Ben écoute, oui, ça va alors, c'est très bien.
1011. B : Vous pouvez me réexpliquer, je comprends pas le raisonnement.
1012. C : Et exponentielle, est-ce que c'est intégrable... Est-ce que c'est intégrable, ben oui, c'est sommable donc c'est intégrable.
1013. A : Ben oui, c'est enfin...
1014. B : Est-ce que vous pouvez m'expliquer là.
1015. C : Attend non [Inaudible].
1016. A : Vas-y B , explique.

1017. B : Ah, non, non ben non, c'est vous qui m'expliquez, là. Votre théorème de convergence dominée, de manière claire.
1018. A : Alors, on est d'accord que ce que tu appelles $f_{k,m}$, enfin ce que C appelle $f_{k,m}$.
1019. C : Ce que ce drôle d'oiseau.
1020. A : Ce que cette personne.
1021. A : $f_{k,m}(x)$ c'est... Il est où ?
1022. B : C'est un sur... C'est $C_m^k 1/m^k$.
1023. C : C'est ça, c'est ça, c'est exactement ça.
1024. A : C'est quoi ? Pardon ?
1025. C : En fait c'est le k ème terme, c'est le k ème terme de la somme.
1026. A : C'est le k ème terme de la somme.
1027. C : De la somme des éléments, enfin quand le binôme est écrit sous forme de somme.
1028. B : D'accord.
1029. A : Terme de u_m . Voilà.
1030. C : Il vaut mieux l'écrire comme ça.
1031. A : Et ce qu'il appelle f ... Alors pour tout k qui appartient à $[0, m]$ et puis quand k est supérieur à m , ce qu'il appelle $f_{k,m}$ c'est égal à zéro.
1032. B : D'accord.
1033. A : Il peut donc parler de la somme de k égal zéro à l'infini des $f_{k,m}$ puisque c'est une somme infinie.
1034. B : Ouais.
1035. A : Et ce qu'il dit, c'est que la limite quand m tend vers l'infini de cette somme, c'est la somme/
1036. C : Des limites.
1037. A : Des limites quand m tend vers l'infini. Et ça, il a le droit de l'utiliser parce que c'est le théorème de convergence dominée...
1038. B : Oui.
1039. C : Que Cauchy n'a jamais dit qu'il utilisait.
1040. A : Que Cauchy n'a jamais...
1041. C : Qu'il ne connaît pas forcément, moi je suis pas sûr qu'il l'utilisait.
1042. A : Voilà, absolument.
1043. B : Oui.
1044. A : Donc là, il y a encore pas mal le théorème de convergence/
1045. C : Il triche tout le temps.
1046. A : Il triche tout le temps donc, donc c'est un arnaqueur.
1047. C : Non mais là il, là, il triche, ça se voit, alors que là, je pense qu'il pensait que c'était bon.
1048. A : [Inaudible] Et là, qu'est-ce que je voulais dire...

1049. B : Tu étais en train de justifier...
1050. A : Ah, théorème de convergence dominée, théorème de convergence dominée. Donc, si tu prends, euh, si tu prends euh... Donc, ben oui, $f_{k,m}$ /
1051. B : Hum, hum.
1052. A : Ca va être inférieur ou égal à g_m , g qui est la fonction intégrable, égale à euh...
1053. C : Intégrable ici, en fait, ça veut dire sommable.
1054. A : A e , à e . Sommable ouais. C'est pareil.
1055. B : Ah oui, c'est e .
1056. A : C'est égal à e .
1057. C : g_m c'est $1/m!$.
1058. A : Enfin, non, non, c'est pas égal à e , c'est égal à un sur...
1059. C : L'intégrale ? Mais si, c'est la somme des $m!$, des $1/m!$.
1060. A : C'est l'intégrale des g_m , non c'est l'intégrale de g_m qui vaut e .
1061. C : Et alors ?
1062. A : Donc $g(x)$.
1063. B : Non, non, $f_{k,m}$.
1064. C : $g(x)$ c'est $1/x!$.
1065. A : g_m c'est $1/m!$.
1066. C : Oui.
1067. A : Voilà, et ça c'est intégrable, enfin sommable.
1068. B : Ah oui, c'est $1/m!$.
1069. C : En gros, on prend une intégrale spéciale.
1070. B : Et c'est sommable au sens de... D'accord.
1071. A : Voilà, et donc... Alors donc, on peut récapituler ce qui ne va pas. Alors, il y a ça qui ne va pas, il a pas défini les réels.
1072. C : [Rires] Le pauvre quoi.
1073. A : Bon, on est pas gentil mais enfin, il a pas défini les réels. Ensuite, il pas défini la limite, donc va pas.
1074. C : Ouha, limite ouais. Non mais, en même temps, si tu veux...
1075. A : Non, alors là, il y a une grosse arnaque.
1076. B : Ce qui me trouble, c'est que d'habitude, c'est vrai que convergence dominée, je suis habitué avec les intégrales. Alors là, d'y voir avec des sommes et des...
1077. A : Et ben, tu remplaces somme par intégrale.
1078. B : Je remplace une somme par une intégrale.
1079. A : La limite quand k tend vers plus l'infini de la somme pour $m = 0$ à l'infini des u_m /
1080. C : La somme, c'est juste une intégrale bizarre.

1081. A : u_m c'est égal à u_m .

1082. B : Hum, hum.

1083. A : u_k , enfin $u_k(m)$. Disons que on va mettre $u_k(m)$ en indice, voilà. C'est $u_k(m)$, ça c'est la somme pour $m = 0$ à l'infini de la limite quand k tend vers l'infini de $u_k(m)$, la limite euh, simple, enfin la convergence simple.

1084. C : Bon, il va peut-être falloir commencer la préparation de l'exposé.

[Discussions autour de la présentation]

1085. B : Bon la dernière, nous, on a trouvé une preuve rigoureuse, d'accord. Alors qu'est-ce qu'il manque à sa preuve à lui ?

1086. C : Ben il lui manque le théorème de convergence dominée

1087. A : Il manque le théorème de convergence dominée.

1088. C : Qu'il n'avait pas, donc c'est pas facile à faire pour lui.

[Discussions autour de la présentation]

1089. T2 : Et... J'allais dire une bêtise. Je la dis quand même tiens.

1090. A : Ouais.

1091. C : Allez-y.

1092. T2 : Euh... Il y a un nombre fini de terme, mais en fait, il y en a combien [T2 parle du nombre de termes dans le produit du $(n + 1)$ ième terme de la somme u_m . Les étudiants se demandaient si l'affirmation par Cauchy de la convergence du $(n + 1)$ ième terme vers $1/n!$ était critiquable.]

1093. A : Y en a n , non ?

1094. C : Y en a n .

1095. T2 : Ouais, mais justement du coup si il fait tendre n vers l'infini.

1096. A : C'est m qu'il fait tendre vers l'infini pas petit n /

1097. C : C'est m .

1098. T2 : Ouais mais n c'est quoi ?

1099. C : Comment ça, n c'est quoi ?

1100. B : m ?

1101. A : Ah, oui c'est un des...

1102. T2 : C'est quoi /

1103. A : C'est compris entre zéro et m .

1104. T2 : Le statut de n , ouais.

1105. A : C'est un entier compris entre zéro et m et quand tu fais tendre m vers l'infini, le n tu peux le choisir arbitrairement grand.

1106. C : Oui.

1107. T2 : Ouais.

1108. A : D'accord donc, euh...

1109. C : Ben c'est le $(n + 1)$ ième terme quoi. C'est tout ce qu'on... Là, ça correspond au $(n + 1)$ ième terme.
1110. A : Et tu, tu, on se le fixe quand même ce... Ouais.
1111. C : Ben quelque soit n que l'on choisit, on peut faire tendre m vers l'infini, m , vers l'infini. On prend déjà m plus grand que n /
1112. A : T'as un produit en fait infini, au bout d'un moment. Tu approches/
1113. C : Ben non, jamais.
1114. A : Oui, non mais, évidemment, si on prend $m(m + 1)(m + 2) \dots m$ fois...
1115. C : Non, non, là je suis formel. Tu peux pas...
1116. A : Y a toujours un nombre fini mais...
1117. C : Oui. Il y aura toujours un nombre fini, t'auras jamais de problèmes.
1118. B : Y a toujours le même problème, c'est que quand/
1119. C : Là justement, tu tombera jamais sur le problème avec ça. T'auras jamais un produit infini, à chaque fois, justement, ce sera un produit fini.
1120. A : Oui.
1121. C : Qui pour un m assez grand sera/
1122. A : Donc la réponse, c'est un produit fini, ça va pas.
1123. C : Donc, ça tend vers $1/n!$
1124. B : Attendez, le problème c'était ça, c'est quand on, quand on fait varier m , ça fait varier la suite de départ. C'est ça en gros.
1125. C : Comment ça, ça fait varier la suite de départ ?
1126. B : On peut pas toucher, quand on touche à m on touche à u_m , tu vois. Donc ce terme euh... Non, c'est pas ça ?
1127. C : Non, si, si. Non, ça c'est le terme de u_m .
1128. B : C'est le $(n + 1)$ ième terme de u_m .
1129. C : Voilà. Ça dépend pas de u_m .
1130. B : Si je fais tendre m vers l'infini, je fais varier u_m aussi.
1131. C : J'espère.
1132. B : Donc c'est plus le $(n+1)$ ième terme, euh... Non mais.
1133. C : Ou alors, tu sais ce qu'on a fait. On a pas fait gaffe et c'est faux.
1134. A : Bon, c'est quoi le problème ?
1135. T2 : Plus on réfléchit, plus on se pose de questions.
- [Rires]
1136. A : On sait plus ce que l'on veut là. C'est quoi ? Il faut avoir les idées claires et distinctes.
1137. T2 : Euh... Est-ce que ça reste le m ième terme quand m grandit.
1138. A : Est-ce que le produit...

1139. C : Oui.

1140. B : Non, non. Parce que ça va changer.

1141. C : Ben pourquoi ?

1142. B : Ben déjà ça va être les C_{m+1} , rien que le $m + 1$, $C_{m+1}^k \dots m + 1$, déjà ça change, $m+2\dots$

1143. C : Alors ça quand m grandit, ça reste pas le n ième terme tu dis ? Ca devient quoi, le premier, le troisième ? Non, ça reste le n ième terme.

1144. B : Ouais, ouais, ouais, attend. Si je remplace par $m + 1$, ouais, ouais ça reste, ouais c'est bon. Ca reste le n ième terme.

1145. C : Quel que soit m , ça c'est le n ième terme, quoi le $m+1$, mais tu vois ce que je veux dire.

1146. B : Ouais.

1147. A : Ah, c'est de Jean-Pierre Kahane. Ah non, la préface est de Jean-Pierre Kahane.

1148. T2 : C'était juste pour m'amuser à vous poser la question.

[Rires]

1149. A : Ouais, les questions pièges.

[Divagations non transcrites]

**Annexe 27 : Transcription de l'exposé
du groupe d'étudiants de M1
travaillant sur la preuve inspirée par
le texte de Liouville**

Exposé des étudiants de MI travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy (E-MI-C) :

1. B : Nous allons vous présenter une preuve rédigée par Cauchy en mille huit cent vingt et un. L'énoncé du problème est le suivant : « on considère la suite euh des un sur.., la série des $1/k!$ ».
2. C : Non c'est/

[Rires]

3. B : On considère la suite $(1+1/m)^m$ et on veut démontrer que la limite c'est e . Alors là, la preuve euh... Alors, je vais d'abord vous énoncer le plan de la preuve. Cauchy, dans un premier temps, Cauchy, dans un premier temps, dans un premier temps, va montrer que cette suite est convergente. Pour cela, il va montrer qu'elle est croissante et majorée. Ensuite, dans un deuxième temps, il, il va euh... Voilà, il conclut ici qu'elle est, qu'elle converge et dans un deuxième temps, il va déterminer la limite au moyen d'une méthode un petit peu... Que l'on analysera après. Voilà, je laisse l'analyse de la preuve à A.
4. A : Ah oui, oui, donc vas-y, vas-y C, les points positifs.
5. C : [Inaudible].
6. A : Ah oui, l'analyse... Non, non, d'abord tu dis ce qui va bien.
7. C : Bon, déjà, dans cette preuve, ce qu'il a fait de bien, au début, il commence par montrer euh... Ecrire u_m sous forme de série. Bon, il définit bien, il fait étape par étape, il fait clairement, c'est pas le problème. Après, il veut montrer qu'il finit bien le plan. Il dit déjà « on va montrer qu'il y a une limite quand m tend vers l'infini. Il commence donc par montrer qu'elle est croissante. Alors ce qu'il fait, c'est que en gros, il regarde le $(n + 1)$ ième terme de la suite et il dit que c'est une... Il l'écrit sous cette forme et il dit que c'est une fonction croissante de m ce qu'il justifie par le fait que chacun des termes du produit diminue quand m augmente... Euh non, chacun des termes du produit augmente parce que le terme négatif diminue. Donc en gros c'est un produit de facteurs qui sont chacun croissant, donc le total sera croissant. Bon après, on aurait pu... On peut considérer qu'il a, qu'il a oublié de parler du dernier terme parce qu'il y a un terme qui est venu, qui apparaît quand, quand on prend le terme en $m + 1$. Mais c'est pas important puisque, en fait, on... C'est un terme qui apparaît donc ça reste positif, donc ça reste... Ça montre toujours que la suite est croissante. Euh...
8. A : Bon alors, euh, point négatifs...
9. B, C : [Inaudible].
10. A : Euh, il y avait deux points positifs
11. T1 : Est-ce que vous trouvez ça [Inaudible].
12. A : [Inaudible].
13. D : Je n'ai pas lu la preuve, ni [Inaudible], enfin, je sais pas si c'est très grave pour euh...
14. A : B, tu vas la représenter.

[Inaudible]

15. C : En gros, c'est, il écrit le $(n + 1)$ ième terme, c'est égal à ça, donc c'est égal à ça, ça, c'est une fonction de m . Et il dit que quand m augmente, chacun des $-1/m$ va être une fonction

décroissante, donc $1 - 1/m$ est croissant et donc le premier va croître. Donc c'est bien une fonction croissante.

[Inaudible]

16. C : Enfin, le dernier terme de ta somme il est croissant et euh, enfin/

17. A : Non, tous les termes ils sont croissants.

[Inaudible]

18. T1 : Essayez de bien expliquer parce que, quand on a pas lu...

[Inaudible]

19. T1 : Est-ce que vous pouvez expliquer rapidement comment il passe de u_m à cette somme. Très vite, hein, mais...

20. C : Ben là, en fait il, alors il commence par faire un développement binomial. On obtient ça. Après il, là en fait, tout ce qu'il fait, c'est juste il réécrit en remplaçant quoi, c'est... Il continue juste le développement du binôme. Et après, il passe à la ligne là, en mettant d'un côté les facteurs constants et de l'autre tout ceux qui dépendent de m . Enfin, constants... Là, c'est ce qui est indépendant de m et là c'est ce qui...

[Passage d'explication du calcul non transcrit]

21. B : A partir de là, vous avez compris jusque où ? Vous avez compris... ?

22. D, F : [Inaudible].

23. B : Parce qu'en fait, il écrit le $(n + 1)$ ième terme sous cette forme là, pour dire que, en suite, lorsque m va croître effectivement, chacun de ces termes va croître aussi donc euh... Il va pouvoir en déduire que u_m est une suite croissante de m . C'est comme ça qu'il montre que la suite est croissante.

24. C : Le seul petit défaut, c'est pas vraiment un défaut, le point qui manque un peu de [Inaudible], c'est que U_m , c'est une somme jusqu'à m et u_{m+1} , ce serait une somme jusqu'à $m + 1$.

25. B : Donc là, on peut se dire quand m croît/

26. C : Mais comme on rajoute un terme qui est positif, ça reste croissant. Mais bon, ça aurait pu...

27. B : Et c'est là que, alors là après, il démontre que... Que la suite converge. Alors, pour montrer qu'elle converge, croissant on l'a déjà fait, faut montrer qu'elle est majorée. Et pour la majoration, il réutilise le développement binomial qu'on avait auparavant. Il majore chacun des termes par un sur, en particulier le $(n + 1)$ ième par $1/n!$. Parce qu'on remarque que $m(m - 1)/m^2$ est plus petit que un. Effectivement $m - 1$ est plus petit que m . Et $m(m - 1)(m - 2)/m^3$ plus petit que un pareil. Le $(n + 1)$ ième terme on remarque aussi qu'il est plus petit que un. Donc ça fait majorer par un tous les numérateurs qui sont là. Et euh... $1/n$, euh... Non, ça fait majorer tous les termes, toutes les fractions qui sont là par un et donc euh... Et donc, on a facilement cette majoration là et on reconnaît que c'est plus petit que e puisque [Inaudible].

28. A : Alors après, d'ailleurs on peut faire la remarque [Inaudible]. Oui mais, il savait que c'était plus petit que e . Alors après, chacun des termes tend vers euh... $1/n!$ quand m tend vers l'infini et il en déduit que la somme va tendre vers $1 + 1/1 + 1/2! + \dots + 1/n! + \dots$ Jusqu'à l'infini, qui vaut e , et donc que cette limite vaut e . Alors, ben il y a quand même des points négatifs...

29. C : Quelques uns [Rires].

30. A : D'abord oui...

31. B : On va commencer par ça, le fait qu'il ait mentionné ça : « une suite croissante majorée converge », c'est vrai que pour nous c'est évident, on l'a vu en sup, on nous l'a démontré c'était clair. Mais c'est vrai quand on se remet en mille huit cent vingt et un, qu'on se remet à la place de Cauchy, est-ce que pour lui, c'était aussi évident qu'une suite croissante majorée convergerait... En fait, on pense pas que c'était très évident pour lui parce que/
32. C : Ben, ça devait être évident/
33. B : Evident/
34. A : Evident si, non évident si, mais c'était pas [Inaudible].
35. B : C'était relativement clair dans son esprit, mais il y avait pas la théorie derrière qui permettait de le démontrer quoi.
36. C : Parce que ça suppose euh...
37. F : En fait, la construction des réels, il l'a fait quand ?
- [Inaudible]
38. B : Après mille huit cent vingt et un. Or cet énoncé suppose notamment la connaissance de l'axiome de la borne supérieure, c'est-à-dire que toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} possède une borne sup. Et ça, il l'a pas.
39. C : Ca, il l'a pas donc il...
- [Rires]
40. C : Faut savoir aussi qu'à l'époque, apparemment les limites n'étaient pas définies [Inaudible]/
41. A : Voilà.
42. C : Et donc même la borne supérieure, même si il y avait eu le problème de la construction des réels, il y a aussi le problème de comment définir une borne supérieure parce que quand on ne connaît pas trop les limites, c'est un petit peu difficile euh...
43. A : Alors il y a aussi le problème, alors cette définition de la limite qui n'était pas écrite formellement, qui fait que il a fait une euh... Une erreur, ou du moins qu'il a caché quelque chose dans la dernière étape, en disant que euh, puisque ce terme en n , tendait vers $1/n!$ quand m tendait vers l'infini et bien la somme tendrait vers $1 + 1/1 + 1/2! + \dots + 1/n!$. A savoir pourquoi c'est faux, parce qu'il y a un contre exemple. Si on prend la suite, ouais... Si on prend la suite $u_n = 1/n + \dots + 1/n$ où il y a n termes, donc ça c'est égal à un, évidemment. Avec son raisonnement, ça, ça tend vers zéro, ça tend vers zéro. Donc le tout tend vers zéro.
44. F : Ouais mais enfin, il avait quand même une suite qui était majorée quoi, parce que [Inaudible].
45. A : Alors en effet, alors ça c'était, ok...
46. C : Non mais, il a le droit mais il s'en/
47. A : Il a le droit, mais je veux dire/
48. C : Il le sait pas qu'il a le droit.
49. A : [Inaudible] Une étape, parce que, ça il l'a pas justifié ce passage. Ce passage est vrai parce que ça découle du théorème de convergence dominée. En écrivant... Donc euh...
50. F : Il l'écrit pas, mais je sais pas par exemple, tu prends, tu fixes n , tu fais tendre m vers l'infini et du coup tu as prouvé que ton truc il est toujours plus grand que tous les termes v_n là, que vous avez défini comme la somme des $1/k!$.

51. A : Tu peux répéter ?
52. F : Ben tu fixes n /
53. A : Ouais.
54. F : Et tu montres que euh... Et ben que donc, en considérant juste les n premiers termes, ça, ça tend vers euh, vers la somme des $1/k!$ /
55. C : Oui.
56. F : Et donc, ça minore /
57. C : Oui en faisant une minoration à partir de... En fait, on peut faire une démonstration [Inaudible]. Je pense que [Inaudible], donc c'est un petit peu. Enfin je veux dire, si il l'avait bien posé avec des ε , on aurait pu faire la démonstration. Mais là, on a quand même l'impression qu'il dit euh « bon ben ça a l'air de marcher donc... ». Parce qu'il passerait à l'infini, à la fois dans la somme et chacun des termes. Alors que si il avait vraiment voulu faire ça bien, il aurait pu dire en gros euh... Quelque soit n , chacun des n , il va être plus grand que, en gros chacun des termes va aller à peu près jusqu'à $1/n!$. Après, il y aura un nombre de termes qui ne comptent pas vraiment. Et donc ce sera plus grand que toute somme jusqu'à $1/n$, $1/n!$ et donc, il sera plus grand que la limite qui serait e . Et euh... Il aurait pu faire un encadrement. Mais là, il fait, enfin, il met clairement que c'est directement une somme infinie. Ca, c'est un petit peu euh... Voilà, ça c'est...
58. T1 : Et si par exemple au lieu de égal, il avait écrit supérieur ou égal.
59. C : Où ça ? Ici ?
60. T1 : Non.
61. C : Ou ici ? Et ben... Avec un nombre fini de termes ?
62. T1 : Avec un nombre fini qui varie.
63. C : Ouais, enfin ou, oui d'accord... Enfin en gros, c'est l'idée qu'il y en a un nombre fini. Ben après, bon ben déjà ça c'est, il faudrait, ça serait pas trop mal et après il faudrait montrer que chacun des termes... Ben a priori, c'est leur limite donc c'est... Il faudrait avoir le fait que [Inaudible]. La limite d'une somme finie, c'est la somme finie des limites. Donc c'est, ben ce serait [Inaudible], enfin, la limite par encadrement.
64. T1 : Tu peux préciser ton argument ?
65. C : Que si a_n est plus petit b_n , alors limite de a_n est plus petit ou égal que limite de b_n . Donc avec un nombre fini, ce serait, ça passerait même sans utiliser les quantificateurs en fait, mais euh... Là, avec un nombre infini, il y a besoin, il faut avoir la convergence dominée.
66. A : Ouais.
67. T1 : Alors, vous êtes pas convaincu par son argument ?
68. C : Ah si !
69. A : Si, si.
70. C : J'ai l'impression que...
71. A : Si, mais enfin, mais il a mis quand même entre parenthèse ici, c'était pas euh...
72. C : Ce que je veux dire c'est que Cauchy, lui, il a mis un trois petits points pour montrer qu'il y a un [Inaudible].

73. A : Je pense que ce qu'il faut retenir c'est que euh... Cette preuve, elle est sans doute très bien passée devant, pour les polytechniciens parce que eux-mêmes avaient une intuition de la limite qui était... Une intuition de croissance majorée, on se doute bien que au bout d'un moment ça... Ca va tendre vers une certaine limite, donc que en fait, euh... Il y a un enseignement qui se fait, qui fait que en général les étudiants acceptent comme vrai ce qui est enseigné sans remettre en question ce qui est dit parce qu'il y a une intuition mauvaise. Je sais pas je prends l'exemple, même pour nous enfin, je veux dire on nous raconte un peu n'importe quoi dans certain cours euh...

[Rires]

74. A : C'est vrai, non mais c'est vrai... C'est pas ça, non mais c'est pas ça, je pense que quand on part d'un truc, on a/

75. B : Non, mais je pense pas/

76. A : Non mais attend/

77. B : Même à l'époque ils devaient être assez, dès fois, devaient sûrement...

78. A : D'accord B, qu'on remette en question ce que l'on nous dit c'est vrai. Il y en a beaucoup qui le font mais euh, il faut voir de quoi on part et ce qu'il faut, c'est contester dès le début. Des choses que l'on nous appris éventuellement en sixième. Je sais pas je pense à la notion d'angle par exemple, où on nous dit, voilà, l'angle c'est ce qu'il y a entre ça et ça. Il y a une mesure, on sait pas trop ce que c'est, on a une intuition de l'angle. Après on nous dit « ah ouais on peut parler du cosinus de l'angle et tout ». Et on croit qu'on a une vraie définition. On nous apprend des choses quand on est jeune, on les admet. Plus tard, on considère que ça a été bien démontré mais on se rend pas compte qu'en fait on nous avait refilé des choses, euh pas claires.

79. C : Moi c'est juste/

80. B : En même temps, il était peut-être, il avait pas de raisonnement formel comme nous.

81. A : Ah mais ça, c'est normal, oui d'accord, bien sûr.

82. T1 : Et à votre avis, est-ce que c'est possible de [Inaudible] des fondements clairs et bien rangés ?

[Inaudible]

83. A : Non, mais à mon avis, je pense que c'est une bonne idée de nous apprendre des choses qui sont partiellement fausses. Genre, par exemple, un nombre qui est au carré est toujours positif parce que si on nous parle des nombres complexes dès la quatrième ou la cinquième et tout on comprendra plus rien.

84. C : Puis en plus, comme ça, quand on voit les nombres complexes, c'est magique.

85. A : Ouais non, en plus [Inaudible], donc dire des choses qui sont fausses intuitives pour que petit à petit on comprenne enfin ce qu'il se passe. Je pense aux espaces vectoriels normés, on a intérêt à étudier d'abord les espaces vectoriels normés et ensuite les espaces topologiques pour voir que c'est généralisé, plutôt que donner tout de suite la définition des espaces topologiques et d'être perdu.

86. C : Ben sinon moi, ce qui m'a le plus marqué dans cette preuve, c'est que, enfin, de la première ligne quasiment à la toute fin, presque tout... Enfin, c'est quand même très bien détaillé, il précise bien « chacun des termes augmente puisque les termes en k/m diminuent quand m augmente. Ceci montre que la suite, elle est croissante ». Là, il fait bien les inégalités pour chacun, donc en gros, il est super détaillé et bien précis et à la fin, ben... C'est pour ça que j'ai

- l'impression qu'il arnaque, en fait, mais volontairement parce qu'il dit : « On constate que le $(n + 1)$ ème terme » et en une ligne il conclut « On a donc la limite égal à ça », ça marche c'est bon. Vous avez vu, tout est bien qui finit bien quoi. Alors que quand on y réfléchit un peu, le fait qu'il ait un truc qui passe d'un nombre fini à un terme infini... Déjà, ça doit paraître bizarre, enfin moi, j'ai l'impression que volontairement, il a...
87. T2 : Pour préciser ça, parce que j'ai bien mis sur la page précédente « inspiré par le cours » à l'école polytechnique de Cauchy. En fait, Cauchy ce qu'il fait c'est que grosso modo, au passage d'un argument, il fait une interversion de limite et de somme et puis pouf, voilà. Par contre, euh... Tout le bla bla avant, c'est moi qui l'ai reconstruit et donc évidemment, ça clashe vis-à-vis du style, par rapport à, évidemment dans un livre c'est beaucoup plus épuré, ce qu'il y a de marqué. Donc ce que tu dis, c'est pas tellement [Inaudible], c'est plutôt à la reconstruction que j'en fais.
88. C : D'accord.
89. T2 : Sachant que on a fait une seule version pour tous les étudiants et donc euh j'aurais peut-être pas détaillé comme ça, si j'avais fait un texte spécial pour vous.
90. C : Oui, oui.
91. T2 : J'avais une question sinon, c'est euh... Ca vous paraît raisonnable de montrer dans la preuve qu'elle est croissante, majorée donc elle converge et ensuite de montrer qu'elle converge vers e ?
92. A : Oui. Prouver l'existence de la limite, puis après la déterminer.
93. C : En même temps... Je me demande si on est vraiment forcé, si on utilise la croissance en fait. Non, c'est pas forcément, parce que a priori, on aurait pu montrer euh, enfin le principe c'est que/
94. B : Pourquoi, c'est quoi la question ?
95. A : Mais tu peux pas parler de la limite si elle n'existe pas...
96. C : [Inaudible] Même si c'est même pas, enfin dans la tête [inaudible], économiser on va dire, on essaierait de faire différemment, mais ça permet de bien poser les choses et de savoir qu'on a une limite. Déjà, c'est clair.
97. T2 : Je reformule la question. Si j'enlève tout de cette preuve jusqu'à « On montre maintenant que u_m converge vers e »/
98. B : On fait direct...
99. T2 : Est-ce qu'elle est pas valable, ou est-ce qu'elle a exactement le même statut ?
100. A : Intuitivement, elle est toujours valable.
101. B : Avec le théorème de convergence dominée que tu faisais, c'est bon.
102. C : Non, parce qu'elle tend vers $1/n!$, mais elle peut descendre jusqu'à n , on en sait rien.
103. T1 : Est-ce que le théorème de convergence dominée ça utilise justement pas la phrase du dessus. Le fait qu'elle est majorée ? Parce que, c'est quoi le théorème de convergence dominée, c'est quoi ?
104. A : C'est x fixé, $f_k(x)$ inférieur à $g(x)$ /
105. C : Si elle était pas croissante, il pourrait y avoir un facteur qui serait plus grand avant et on sait rien. Donc, on a au moins besoin de la croissance. Après de la majoration, pas forcément.

106. T2 : Non mais... Dans ce cas-là, ce que vous pensez c'est que les arguments qu'il y a avant, ce n'est pas tellement pour dire que ça converge, mais c'est pour déjà constater qu'elle est majorée par disons quelque chose disons de sommable, d'accord ? C'est ça que... Et que du coup, ça donne les idées nécessaires à l'application du théorème de convergence dominée ou quelque part une adaptation de ça, même si c'est pas dit. Parce que si on considère que c'est une erreur, qu'il a pas fait le théorème de convergence dominée et qu'il ne s'est pas posé de question ou qu'il a simplement dit, il passe à la limite comme ça. Chacun des termes tend vers quelque chose, on fait la somme et puis voilà. Et ben dans ce cas-là, tout ce qui est au-dessus est inutile. D'accord avec ça ?

107. B : Ben oui, c'est vrai.

108. T2 : Pas besoin de montrer que quelque chose converge pour chercher la limite.

109. A : Ouais. Oui mais en fait, c'est une notation qui est mal définie. Enfin, il y a quelque chose qui ne sera pas.

110. T2 : ϵ est définie dans le rappel.

[Passage non transcrit]

111. B : Moi, ce que je voyais plutôt c'était que, ça, ça l'assure après que son raisonnement ne va pas le mener n'importe où. Un raisonnement qui est un peu bancal va pas le mener n'importe où dans la limite. Il a commis des, disons... Mais c'est vrai que, c'est vrai que, il pouvait se passer de ça, il en avait pas besoin. Mais je pense qu'il en avait quand même besoin, pour être sûr que quand il faisait tendre ces termes vers l'infini, ils ne partent pas n'importe où.

112. T2 : Là-dessus, je devrais peut-être pas faire comme si c'était Cauchy qui avait écrit tout ça, hein. Il faudrait que je re-regarde exactement ce qu'il raconte, pour qu'on parle précisément de ce qu'il écrit. Mais c'est intéressant quand même... Parce que ces choses là peuvent très bien se... Ces questions elles peuvent très bien se poser quoi.

113. C : Ben disons que j'ai l'impression que dans la convergence vers ϵ , il utilise le fait quand même que chacun des facteurs est croissant, quitte à avoir le fait que chacun des facteurs est croissant, autant en profiter pour dire que la suite est croissante. Enfin c'est, disons qu'il a pas forcément besoin de montrer qu'elle converge pour montrer qu'elle converge vers ϵ mais chacun des éléments il va en avoir besoin quoi. Il a besoin de montrer qu'elle est croissante, enfin que chacun des termes est croissant dans sa démonstration, il a besoin de montrer qu'elle est majorée bah... Oui hein [Inaudible]. Donc, il a croissante plus majorée donc il se dit, au passage, on sait déjà qu'elle converge, ça au moins c'est réglé.

[Changement de groupe]

**Annexe 28 : Transcription des débats
du premier groupe d'étudiants de
l'INSA travaillant sur la preuve
inspirée par le texte de Liouville**

1^{er} Groupe d'étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy

[Je ne transcris pas les discussions de la recherche Internet sur Cauchy]

1. Y : Est-ce qu'elle te semble vrai ?
 2. L : Ben logiquement, ça devrait être évident quand on réfléchit [inaudible].
 3. Y : Il me paraît vrai...
 4. J : Non, moi, je dis que c'est faux. Moi, il me paraît faux moi.
 5. Y : Attend, attend, attend. Forcément, il me paraît juste parce que...
 6. L : Moi, pour moi, ça tend vers un.
 7. T2 : Comment est-ce que vous pouvez vérifier ça ?
 8. J : On fait l'infini.
 9. L : On remplace n par l'infini.
 10. J : Non mais si ça tend, c'est pareil.
 11. L : En l'infini ça vers zéro, ça fait zéro, ça fait un. une puissance n'importe quoi, ça fait un.
 12. T2 : Comment est-ce que vous pouvez vérifier ça ?
 13. J : Ben après, savoir d'où est-ce qu'il l'a découlé, enfin où est-ce qu'il a trouvé ça...
 14. L : A partir de la puissance trois, tu vas devoir utiliser le triangle de Pascal.
 15. Y : [Inaudible].
 16. L : On peut le tracer, on peut le faire sur...
 17. Y : Allez.
 18. L : Maple.
 19. T2 : Ca c'est une bonne idée. Le tracer ou faire le calcul hein.
 20. L : Faire le calcul.
 21. J : [Inaudible].
 22. L : Limite euh...
 23. J : n .
 24. L : n .
 25. J : Quand ça tend vers...
 26. L : L'infini il est où ?
 27. J : Je suis pas sûr qu'il va capter l'infini.
 28. L : Mais si, il capte.
 29. Y : Si, il capte.
- [Inaudible]
30. J : Alors ?

31. L : Ben ça tend vers exponentielle, il avait raison le mec. Je t'avais dit, tout ça c'est lié au développement...
32. J : Ah ben oui, mais je te l'ai dit, si c'est au carré ça fait quoi ? a^2+2ab /
33. L : a^2+2ab /
34. J : plus b^2 .
35. L : Voilà. Et là, il te reste a^2 c'est un et b^2 ...
36. J : Non, $2ab$.
37. L : Ben $2ab$, ils s'en vont. Parce que b il saute.
38. J : $2ab$, ils s'en vont, tu t'en...
39. L : Par contre, quand tu commences à attaquer l'ordre trois ou l'ordre quatre, ça te donne plus du tout la même chose. Si tu veux on se donne une image réduite du truc. Bon, allez...
40. J : Question suivante.

[Ils lisent l'énoncé et la preuve puis font des digressions. Je ne transcris pas.]

41. Y : Donc en traçant à la calculatrice, on a remarqué que ça marchait bien. Ouais, hein ?
42. J : Ouais.
43. T2 : Ca va, vous avez fait votre calcul ?
44. J : Oui, ça tend vers l'exponentielle.
45. T2 : Ah. Vous avez vérifié avec Maple en fait ?
46. Y : [Inaudible] Calculette.
47. T2 : Oui. Tu as tracé cette fonction là, tu regardes et ça a l'air d'être euh...
48. Y : Ouais.
49. L : Sinon, on a compris aussi de nous même avec le développement à l'ordre cinq ou... Quand on développe avec $n=5$. Là, par exemple $(1+1/n)$ [Il tape sur le clavier de l'ordinateur.]...
50. J : Non c'est cinq.
51. L : Non, j'ai envie de mettre. Bon allez, cinq plutôt.
52. T2 : Ok. Puis, tu regardes combien ça fait.
53. L : Voilà. On voit que ça nous donne déjà...
54. J : Ouais, ça nous donne à peu près e quoi.
55. L : Un chiffre plus grand que un, donc ça va faire qu'augmenter.

[Digressions sur le fait que e est un nombre, sur la suite de Fibonacci et le nombre d'or, sur le chien d'un ami de L qui s'appelle Cauchy, sur l'enregistrement de l'expérimentation, etc. Je ne transcris pas.]

56. J : Bon les jeunes là... Bon.
57. L : Bon là, regarde là, t'es d'accord avec moi, on a un développement du binôme de Newton.
58. J : Hein ?
59. L : Binôme de Newton.

60. J : Ou là ?
61. L : Ben [Inaudible]. Dès que t'as quelque chose à la puissance n , y a un coefficient m, k qui vient se mettre et après...
62. Y : [Inaudible].
63. J : C'est pas le binôme de Newton ça.
64. L : Ouais, non. Ouais non, mais c'est une application.
65. J : Non.
66. L : Ben de toute façon, dès que t'as quelque chose à la puissance quelque chose, c'est le binôme de Newton.
67. J : Ouais, mais c'est pas ça. Ben à mon avis, c'est autre chose là. Ils se sont peut-être aidé du binôme de Newton mais ils ont pas été jusqu'à...
68. L : C'est une application. Ah non, ils ont pas marqué la formule du binôme, ça n'a rien à voir. Là, c'est une suite.
69. J : Ah mais, le binôme de Newton, si ça se trouve c'est Cauchy ?
70. Y : Non parce que/
71. L : Mais non, n'importe quoi. C'est le binôme de Newton, il travaillait avec Newton.
72. J : C'est son pote, bref...

[Digressions]

73. T2 : Vous en êtes au rappel c'est ça ?
74. J : Oui.
75. Y : On essaye de voir... « Déterminer et mettre en évidence chacune des étapes de la preuve ».
76. T2 : Oui, donc dans le rappel, il y a quoi comme étape ? Même sans, sans, sans forcément comprendre ce qui est fait précisément/
77. Y : Ouais.
78. T2 : Est-ce que vous arrivez à voir les étapes, ce qui...
79. Y : Dans le rappel ?
80. L : Alors les étapes/
81. T2 : Dans le rappel.
82. L : Ben d'abord il pose sa suite, après comme il a dit que la limite de sa suite en l'infini, elle tendait vers e , il prend une autre suite qui tend vers e également et il marque une égalité entre les deux.
83. T2 : Là, le rappel, il est délimité par le cadre, hein ?
84. Y : Oui.
85. T2 : D'accord. Juste dans le rappel, est-ce que vous, à l'intérieur du rappel, pouvez séparer les étapes ?
86. Y : D'abord, il pose sa suite v_n /
87. T2 : Ouais.

88. Y : Donc il...
89. T2 : Il parle de quelle suite dans le rappel ?
90. Y : Ben il parle de la suite, la suite v_n ?
91. T2 : Oui, il parle de v_n .
92. Y : Ben ouais.
93. T2 : Donc à la limite, on s'en fiche de ce qu'il y a avant ?
94. Y : Il parle de v_n et ensuite il dit que $v_{n+1} - v_n$ c'est égal à ça...
95. T2 : Qu'est-ce qu'il essaye de démontrer ? Comment il structure ça ?
96. Y : Euh... Il montre que c'est toujours supérieur à zéro. Enfin, je sais pas il calcule... Quand il, quand on prend $k=1$, ça fera $1/1$...
97. T2 : Ouais.
98. Y : Et ensuite quand $k=2$, c'est $1/2!$...
99. T2 : Attention c'est pas k c'est n hein ? v_n c'est une somme jusqu'à n .
100. Y : Ah oui. D'accord, donc euh...
101. T2 : Si tu prends $n=2$, ça va faire le terme $k=0$, qui te fait 1 , $1/0!$, ça fait $1/1$ donc ça fait 1 .
102. Y : Ouais.
103. T2 : Le terme $k=1$, ensuite $k=1$, ça fait $1/1!$, c'est à nouveau $1/1$.
104. Y : $1/1$, ouais.
105. T2 : Puis ensuite, si on va jusqu'à deux, ben ça va aller jusqu'à $1/2!$.
106. Y : Ouais, ouais...
107. T2 : Donc v_2 ce sera, ce sera ça $1+1/1+1/2!$, d'accord ?
108. Y : D'accord.
109. T2 : Donc, qu'est-ce qu'il fait dans ce rappel ? Qu'est-ce qu'il prétend faire ? Qu'est-ce qu'on fait.
110. Y : Ben, il montre qu'il y a une limite finie.
111. T2 : Et comment il montre qu'il y a une limite finie ?
112. Y : Et ben...
113. L : Et ben on la majore... Là il dit que ça dépassera jamais la valeur trois.
114. T2 : Ca, ça s'appelle comment en maths ?
115. L : Majorer...
116. T2 : Oui, il majore la suite d'accord. Qu'est-ce qu'il fait d'autre ?
117. Y : Et ben...
118. T2 : Ca suffit de dire qu'une suite est majorée pour dire qu'elle est... qu'elle a une limite ?
119. Y : Qu'elle converge.
120. L : [Inaudible] L'infini.

121. T2 : Mais qu'est-ce qu'il dit ?
122. Y : Ben là, il la majore et il dit que...
123. L : Et déjà, il dit qu'elle est croissante et il dit [Inaudible].
124. Y : Ah oui/
125. T2 : Il dit qu'elle est croissante, d'accord ?
126. Y : Il dit que $n+1$, euh v_{n+1} ...
127. T2 : Un, il dit qu'elle est croissante.
128. Y : $v_{n+1} - v_n$, c'est positif.
129. T2 : Oui, donc c'est/
130. Y : Elle est croissante.
131. T2 : Donc elle est croissante.
132. Y : Ouais.
133. T2 : Donc un, il dit qu'elle est croissante. Ensuite, il dit quoi ?
134. L : Qu'elle est majorée.
135. T2 : Deux, elle est majorée.
136. L : Ce sera la limite de la suite. La limite, elle sera inférieure à la majoration.
137. T2 : Qu'est-ce que, qu'est-ce que... Est-ce que c'est automatique que suite qui est majorée et croissante, elle ait une limite ?
138. L : Si elle est continue en tout point... Il faut qu'elle soit continue non ?
139. T2 : Ca veut dire quelque chose « continue » pour une suite ?
140. L : Apparemment non ?
141. T2 : Ca veut dire quoi continue ?
142. L, Y : [Inaudible].
143. T2 : Ouais, on regarde la continuité pour des fonctions pas pour des suites.
144. Y : Bon là, il a dit qu'elle était croissante, il l'a majorée...
145. T2 : Ouais...
146. Y : Et puis il a...
147. L : Ca suffirait, ça ?
148. T2 : C'est pas quelque chose qu'on a travaillé ça, sur les suites, ce genre d'arguments ?
149. L : Ca, si on l'a fait... On l'a fait, on l'a fait.
150. T2 : On l'a fait ou pas ?
151. L : Je crois oui.
152. T2 : Les autres, vous en pensez quoi ?
153. L : Ben pour moi, c'est... Je ne me prononcerais pas. Tu sais, ce qu'on avait fait avec les carrés là. On avait fait un grand carré, puis on montré qu'à chaque fois, c'était égal à un petit bout du carré, puis on voyait que ça convergeait.

154. Y : C'était pour les intégrales qu'on avait fait ça...
155. L : [Inaudible] suite... pour montrer qu'elle tendait vers un nombre fini. On montrait que à chaque fois que on progressait d'un terme, le carré il se rétrécissait et à force ça devenait infiniment petit et ça tendait vers un chiffre rond.
156. T2 : En tout cas, euh... Est-ce que vous pouvez récapituler ce qu'il dit et le genre d'arguments.
157. Y : Donc, il a... il a, il a, il pose sa suite v_n /
158. T2 : Ouais.
159. Y : Et là, il dit que, enfin il dit directement que la limite quand n tend vers l'infini c'est e ... Ah non, d'accord. C'est la preuve de ça.
160. T2 : Oui.
161. Y : Donc pour montrer ça, il dit que, il veut montrer qu'elle est, il veut montrer que sa limite est finie donc...
162. T2 : Oui...
163. Y : Il montre qu'elle est croissante/
164. T2 : Oui.
165. Y : Il la majore par... par ça, en fait.
166. T2 : Oui.
167. Y : Et puis il calcule et il trouve la limite, une valeur limite [Inaudible].
168. L : [Inaudible] Entre cette ligne là et cette ligne là.
169. T2 : Ah mais attention je, là, là, on est dans le rappel. Je veux que vous trouviez les étapes de la preuve du rappel, c'est-à-dire ces trois lignes là. Est-ce que vous pouvez parler de quel raisonnement il fait ?
170. L : Ah on fait que ça, ah d'accord.
171. T2 : Après on regardera la suite mais déjà il faut arriver... J'ai l'impression que c'est pas clair pour vous là, ce qu'il fait comme, ce qui est fait ici. Donc vous m'avez dit, il commence par montrer qu'elle est croissante.
172. Y : Ouais.
173. T2 : Est-ce que ça vous va l'argument qu'il utilise pour montrer qu'elle, pour dire qu'elle est croissante ?
174. Y : Ben oui.
175. L : [inaudible] Si ça marche en tous points.
176. T2 : Alors, est-ce que ça marche en tous points ?
177. Y : Ben est-ce que n il est [Inaudible].
178. T2 : C'est une suite.
179. Y : Ouais. C'est forcément supérieur à zéro.
180. T2 : Est-ce que vous êtes d'accord que $v_{n+1} - v_n$, ça fait $1/(n+1)!$?
181. J : Ben, faut le démontrer ça.
182. Y : Ben... Oui, oui.

183. T2 : Qu'est-ce que c'est la différence entre v_n et v_{n+1} ?
184. Y : Non mais si...
185. L : Entre v_n et v_{n+1} ... Ben v_{n+1} ça sera un cran après.
186. T2 : Ca sera un cran après. Et ce cran, c'est quoi ?
187. Y : De zéro à $n+1$.
188. T2 : Oui.
189. Y : On fait la somme jusqu'à $n+1$.
190. J : Ah ben oui, je suis bête.
191. Y : Alors après on a $1/n!$ en plus.
192. T2 : Ca va J ?
193. J : Ouais, ouais, c'est bon, d'accord.
194. T2 : Le terme qui est après, le terme qu'il y a en plus entre les deux, c'est ça.
195. Y : Ouais.
196. T2 : Donc est-ce que c'est clair que c'est croissant ?
197. Y : Ah ben ouais, c'est sûr.
198. J : Ben ouais.
199. T2 : Oui.
200. Y : Ca, y a pas de problème.
201. T2 : Bon, ensuite, la 2^{ème} chose, c'est il dit quoi ? Est-ce que vous pouvez lire ce qu'il dit ?
202. Y : « croissante et majorée par exemple ».
203. T2 : « et majorée », d'accord...
204. Y : Croissante et majorée.
205. T2 : Il dit qu'elle est majorée. Et de là, qu'est-ce qu'il dit ? On regardera si c'est vrai, que c'est majoré plus tard.
206. Y : « Et majorée » et là c'est, ce qu'il écrit...
207. L : Ben il minore.
208. Y : Là, il a pas majoré, là, il a plus développé.
209. T2 : Il écrit ce que c'est oui.
210. Y : Et ensuite là, il a majoré.
211. T2 : Oui, d'accord.
212. Y : Avec une limite de deux puissance.
- [Inaudible]
213. T2 : Et on va voir... Si vous voulez on le voit tout de suite... Ce, est-ce que vous êtes d'accord... Donc $1/1$, il le change pas, $1/2!$ il le change pas et il dit que/
214. Y : C'est $1/3$.

215. T2 : Et $1/3!$, il semble le majorer par ?
216. Y : $1/2^2$.
217. T2 : $1/2^2$, est-ce que c'est vrai ou pas ?
218. L : Ben trois fois deux ça fait six et deux/
219. Y : [Inaudible].
220. L : Ben factorielle trois.
221. Y : C'est pas trois fois deux.
222. J : Ben ce qu'il y a, c'est plus le dénominateur est grand, plus le dénominateur est grand et plus le résultat de l'inverse du dénominateur à ce moment là, il est plus petit. [Sa voix recouvre celle de L et Y]
223. T2 : Oui.
224. J : Donc ça veut dire que comme là, justement, c'est plus petit, enfin 2^2 enfin 2^2 c'est justement inférieur à 6 donc ça voudrait dire que $1/6$ est beaucoup plus petit que $1/4$.
225. T2 : Donc d'accord, ça a l'air de marcher pour celui-là en tout cas hein ?
226. J : Ouais pour celui là, ouais.
227. T2 : Et ensuite ? Qu'est-ce que vous en pensez ? Est-ce que ça va marcher pour ceux d'après ?
228. L : Ah ouais, parce que c'est divisé.
229. Y : Ben oui, ça va marcher.
230. T2 : Parce qu'on divise, ouais ?
231. Y : Parce qu'on divise toujours par quelque chose de plus petit.
232. L : $n!$ ça croit plus vite que/
233. J : Ah oui, carrément.
234. L : Que une fonction...
235. Y : Puissance.
236. L : Puissance de deux.
237. T2 : Que deux puissance quelque chose.
238. L : Ouais.
239. J : Voilà.
240. T2 : Vous êtes d'accord avec ça ?
241. Y : Hum, hum.
242. Y : Ah ouais.
243. T2 : Parce que à partir de deux, quand on multiplie, on va multiplier par un nombre plus grand que deux donc ça va aller plus vite. Ok. Donc ça semble être bon.
244. Y : Donc là, apparemment c'est majoré là.
245. T2 : Et la dernière étape, on peut passer, c'est juste un point technique. Mais ça, c'est une somme d'une suite comment ?

246. L : Ca, c'est une suite...
247. T2 : De termes d'une suite...
248. L : Une suite de puissance, c'est une suite géométrique.
249. T2 : Géométrique. Et on a une formule pour ça. Ok ? Donc ça vous pouvez faire confiance à la formule, c'est vous vous souvenez euh, bref c'est plus grand que ça et effectivement ça dit que c'est majoré, ok ?
250. Y : D'accord et on trouve e .
251. T2 : Et on trouve trois comme majorant pour la suite.
252. Y : Ouais d'accord. Donc on sait que la suite elle va tendre vers quelque chose d'inférieur à trois.
253. T2 : Voilà. Ben ce que dit, ça c'était pas forcément très clair dans l'énoncé, ce que dit cet énoncé, c'est que la limite de cette suite là, on l'appelle e .
254. Y : Ah d'accord, ok.
255. T2 : D'accord ?
256. Y : Ca a rien à voir avec [inaudible].
257. T2 : On ne montre pas que ça tend vers e , on dit simplement que ça tend vers e , euh que, que, on sait que cette suite a une limite parce que il y a un théorème qui dit qu'une suite croissante et majorée admet une limite/
258. Y : Ouais.
259. T2 : Et ben cette limite là, on l'appelle e .
260. J : Ben, e c'est un nombre ou c'est... Enfin ça correspond à 2,71 ?
261. T2 : e ça correspond à l'exponentielle.
262. J : A l'exponentielle, donc ça voudrait dire que comme on voit que la majoration 3, donc on voit bien que c'est complètement prouvé que, enfin que c'est vrai ce qu'il dit quoi. Ce qu'il dit c'est vrai.
263. L : [Inaudible] C'est lui qui a délimité l'exponentielle à partir de ça.
264. T2 : Voilà en fait, l'exponentielle elle est construite là-dessus. C'est pas si, si...
265. Y : Parce que avant, avant [inaudible]...
266. L : C'est comme le truc des nombres d'or quoi.
267. Y : ... Avant Cauchy, on connaissait pas l'exponentielle ?
268. T2 : Ca c'était connu ce truc là, je suppose, je pense. Donc en fait, disons qu'on définit l'exponentielle comme ça, comme étant la limite de cette suite là. D'accord ? C'est juste pour vous... Ce rappel là, c'était pour vous expliquer qu'est-ce ce que c'est que e , ben c'est la limite de cette suite là.
269. Y : Ok.
270. T2 : Ok ? Donc montrer que ça, ça tend vers e ça pourrait être pareil que montrer que ça, ça a la même limite que ça.
271. Y : [inaudible].

272. T2 : Donc essayez de faire la même chose pour la suite, pour la suite de la preuve, d'accord, essayez de séparer les étapes de cette, toujours dans la première partie, séparer les étapes de la preuve.

[Inaudible]

273. T2 : Non mais, on a pas terminer mettre en évidence chacune des étapes de la preuve. Là, on a fait que le rappel.

274. Y : Ah ok, d'accord.

275. T2 : Maintenant, il reste toute la preuve.

276. Y : D'accord.

277. T2 : Ok ?

278. Y : Ouais.

279. T2 : Si jamais vous avez des problèmes, disons de calculs de choses comme ça, vous pouvez nous demander, je vous dépannerais sur ces... Disons que ce qui m'intéresse plus c'est que vous arriviez à, à trouver la démarche qui est mise en œuvre plutôt que...

280. L : Le calcul/

281. T2 : ... Que les points de calcul. D'accord ?

282. L : D'accord.

283. Y : D'accord.

[Pause et digressions non transcrites]

284. J : Bon allez, on voit quoi là ?

285. L : Alors moi, je vois que au début il a montré que... Déjà il a dit que son truc, ça tendait vers la limite/

286. J : Déjà, ça ressemble à la suite qu'on a vue là-haut.

287. L : Déjà, il faut se mettre dans un contexte historique avant tout. Donc tu vois dans l'histoire, il y avait déjà la suite v_n qui était définie. Et on a montré que la limite de cette suite, elle tendait vers e . Maintenant, il apporte une nouvelle suite et il dit qu'elle tend également vers e en même temps euh, vers la même limite en l'infini. Donc forcément, il y a un rapprochement, il dit qu'elles sont égales.

288. Y : Enfin égales...

289. L : C'est-à-dire/

290. Y : C'est pas qu'elles sont égales, si elles ont même limite. C'est pas parce qu'elles ont même limite qu'elles sont égales.

291. L : Ca dépend.

292. Y : Regarde, c'est quand même pas pareil que...

293. L : Si, elles sont égales en plus l'infini.

294. J : Non, elles sont majorées de toute façon. Ils disent que, si elles sont majorées toutes les deux elles doivent être égales à... La majoration doit être... Les deux suites doivent être majorées de trois. Donc euh, si je vois bien...

295. L : Tu prends la fonction x , la fonction x^2 , elles vont être majorées par x^5 les deux. C'est pas pour ça qu'elles seront égales. Si le majorant il est beaucoup plus gros.

296. J : Arrête de te foutre de ma gueule.

297. L : Tu essayes de m'embrouiller.

298. J : Tu essayes de m'embrouiller espèce d'enfoiré [ils s'amuse en prenant un accent].

299. J : Non, u_m c'est $(1+1/m)^m$ est égale à la somme de $k=0$ à m ...

[Beaucoup de digressions, les étudiants s'amuse avec le micro, ils travaillent sur la première égalité, i.e. le développement du binôme. Je ne transcris pas.]

300. Y : Et là, on comprend pas trop comment il dit que ça, c'est égale à ça, il a appliqué...

301. T2 : Le binôme de Newton.

302. Y : Ouais, c'est ça hein ? [Inaudible] C'est ce qu'on se disait.

303. T2 : Taper sur Internet « binôme de Newton ».

304. L : C'est ce qu'on a fait.

305. T2 : Non vous avez/

306. Y : Non là, c'est pas... Qu'est-ce que tu fais ? Et après, puisqu'on sait que c'est ça maintenant, et après il a juste développé. Donc euh...

307. T2 : Donc en fait cette égalité là, vous pouvez l'admettre. Mais c'est exactement le binôme de Newton.

308. Y : C'est ce qu'on...

309. T2 : D'accord, c'est la somme des C_m^k , je sais plus dans quel sens on le dit, ce terme-là, à la puissance, ce terme là, à la puissance k , ce terme là, à la puissance $m - k$. Mais 1^{m-k} /

310. Y : Ouais, ça fait toujours...

311. T2 : Ca fait toujours un, donc c'est pour ça qu'il n'y a pas le terme/

312. Y : D'accord, ok.

313. T2 : D'accord, donc ça, c'est juste le binôme de Newton.

314. J : Ah, c'est pour ça !!!

315. Y : Après, il a juste développer, ensuite il a juste développer, donc ça c'est [inaudible]. Puis après il a... Ouais là, il apporte le deux...

316. L : [Inaudible].

317. T2 : Donc la deuxième égalité, la deuxième égalité c'est simplement un développement.

318. Y : Ouais.

319. T2 : D'accord, ça exprime quoi ?

320. Y : Ouais là, c'est pareil. Il a exprimé les coefficients binomiaux.

321. T2 : Voilà, les coefficients binomiaux.

322. Y : C'est tout oui.

323. T2 : Et la troisième égalité ?

324. Y : Il a juste simplifier, enfin, il a juste euh mis comme il faut [Inaudible].

325. L : Ouais pour montrer que le m^2 , le m^3 , le m^n et puis à chaque fois/
326. Y : Il a mis le 1/2 devant.
327. T2 : Ouais.
328. Y : [Inaudible].
329. L : En fait, c'est un terme, un chiffre réel plus après un m^2 , c'est le factoriel d'un nombre qui croit de un jusqu'à m déjà et à chaque fois entre les deux il y a un, y a un m^2 qui [Inaudible].
330. Y : [Inaudible].
331. L : Quoi ?
332. Y : Il a juste arrangé.
333. T2 : Il a juste réorganisé les termes.
334. Y : « On commence par montrer que u_m a une limite quand m tend vers l'infini ».
335. T2 : Donc vous avez déjà, c'est une étape... Vous avez séparé les étapes avant de vous lancer dans le... Vous pouvez faire les deux choses en même temps mais j'aimerais que vous arriviez à dire, par exemple, qu'est-ce qui a été fait ici, ben on a une première étape de calcul. Bon là, c'est une grande étape de calcul mais vous avez séparé à l'intérieur des étapes de calcul. La première vous avez dit quoi. C'est...
336. Y : [Inaudible].
337. T2 : Le binôme de Newton. La deuxième égalité c'est ?
338. Y : Les coefficients binomiaux.
339. T2 : Les coefficients binomiaux, la troisième égalité c'est ?
340. Y : C'est... Enfin il a tout réorganisé.
341. T2 : Réorganisation ?
342. Y : Ouais, voilà.
- [Discussion sur la présentation, T1 passe pour demander où en est le groupe puis quelques digressions. Je ne transcris pas.]
343. Y : Il s'est trompé là !
344. L : On nous demande de redémontrer que [Inaudible] de Cauchy est une théorie fausse... C'est des choses qui arrivent, hein. Y a des gens brillants, qui font des trucs brillants, et puis y a des gens brillants qui reviennent derrière qui voient qu'il y a des erreurs. Merci Y.
- [Rires]
345. J : C'est quoi [Inaudible]. Là, il manque une majuscule.
346. L : Ouais.
347. Y : Mais non. Pourquoi ici... A mon avis, c'est juste mais c'est ici que c'est faux. Ce terme là, c'est pas ça. Ce serait euh...
348. J : Là, y a trois petits points, là.
349. Y : Oui non, mais je sais. Là aussi, il y a trois petits points, il dit que c'est le n plus unième terme.
350. J : Lui, c'est le [Inaudible] terme.

351. Y : C'est le... Là aussi... Ah non, attend, attend le $n+1$ [il insiste sur le « n »] pas le $m+1$.
352. L : Bon oui, là c'était en m et là, maintenant, on passe en n .
353. Y : Comment attend, comment il a fait. Mais y a un bug là/
354. L : Oh... Un coup en m , un coup en n .
355. Y : Il peut pas, non mais là... Pourquoi il met sur $n!$? Là, il y a un truc que je comprends pas. Il va de zéro à m , d'accord ? Et après il commence à écrire les n . Y a des n , c'est pas avec des n c'est des m , il s'est trompé là, y a une erreur.
356. L : Son n je vois pas trop d'où il vient.
357. Y : Non, non, non mais non, si c'est ça.
358. L : Regarde c'est $n+1$...
359. Y : Non mais si, c'est ça, sauf que là, il faut mettre de zéro à, à... [à T2] Là, y a pas une erreur ?
360. T2 : Peut-être.
361. Y : Ce serait pas n ici au lieu de m ?
362. T2 : Pourquoi ?
363. Y : Parce que, ici, en fait il met le n ici, là et puis il met m^m , m^m ... Enfin là, des fois il met m^m et des fois m puissance... Ah non, ok d'accord. Alors...
364. T2 : En fait, il y a effectivement une erreur de frappe.
365. L : Il y a un problème avec les m et les n .
366. T2 : Oui, il y a un problème avec les n et les k .
367. Y : Les k ouais. Ici, les n ça devrait être des k .
368. T2 : Oui. Ici, c'est des k d'accord...
369. Y : Voilà.
370. T2 : Puis ici à la ligne en dessous ça devient/
371. Y : Ca devient des n .
372. T2 : Ca devient des n . D'accord ?
373. Y : Ok.
374. T2 : Parce que C_m^k , justement c'est ça, ici...
375. Y : Ouais.
376. T2 : Sauf qu'à la place de n c'est k .
377. Y : D'accord ouais.
378. T2 : Donc vous avez qu'à dire que ici c'est n .
379. Y : Ouais, ouais.
380. T2 : Puis en suite le reste c'est correct.
381. Y : Par contre euh... Et ensuite il dit, on regarde le $(n+1)$ ième terme de cette somme...
382. T2 : Ouais.
383. Y : Et il dit que le $(n+1)$ ième terme de cette somme c'est celui-là.

384. T2 : Oui.
385. Y : Mais c'est le même que celui-là.
386. T2 : Oui.
387. Y : Mais celui-là, dans cette suite, c'est pas le $(n+1)$ ième.
388. T2 : C'est le combienième alors ?
389. J : Celui du milieu.
390. Y : Celui-là, ah non, celui là c'est le m -ième.
391. T2 : Oui.
392. Y : Ah d'accord, c'est bon. Enfin celui-là, ça peut être... Enfin le $(n+1)$ ième, ça peut être n'importe lequel.
393. T2 : Ah ben non le $(n+1)$ ième c'est pas n'importe lequel.
394. Y : Celui qui est juste après n .
395. T2 : Celui qui est juste après n alors combien il y en a avant là ?
396. Y : Ben y en a n avant.
397. T2 : Oui, il y en a n avant. Là c'est le premier terme, là c'est le deuxième terme/
398. Y : Oui mais n c'est une valeur euh...
399. T2 : Ca c'est le/
400. Y : le troisième.
401. J : Le troisième.
402. T2 : Celui-là où il y a une $1/3!$ devant c'est le ?
403. Y : Quatrième.
404. T2 : Quatrième, donc celui où il y a un $1/n!$ c'est...
405. Y : C'est le $(n - 1)$ ième... Non, c'est le m ième.
406. T2 : Non. Si là, où il y a $3!$, c'est le/
407. Y : Ah oui, oui d'accord ok, c'est le $(n + 1)$ ième.
408. T2 : C'est le $(n+1)$ ième. Donc, c'est ce qui est dit ici.
409. Y : Oui mais enfin, n c'est comme k , je veux dire.
410. T2 : C'est k .
411. J : Oui, c'est ce qu'il voulait dire justement.
412. T2 : C'est l'indice de sommation.
413. Y : En fait donc après, on va jusqu'à m .
414. T2 : Oui. Donc on somme effectivement entre un et m . Et ce qu'il fait c'est qu'entre ce un et ce m , qu'est-ce qu'il fait ?
415. L : Ben il prend des valeurs au alentour de n quoi. Comme on a toujours fait pour démontrer...
416. T2 : Il prend pas n'importe quelle valeur au alentour de n , il prend laquelle ?

417. L : Ben il prend celles qui sont le plus intéressantes pour sa démonstration.
418. T2 : Voilà. Il prend la $(n+1)$ ième. Entre 1 et m , donc pour que ça ait un sens il faut que, que $n+1$ soit plus petit que m .
419. Y : Oui.
420. T2 : D'accord ? Et vu que c'est l'indice de sommation, c'est raisonnable, d'accord, n il varie jusqu'à, jusqu'à/
421. Y : Jusqu'à m /
422. T2 : Il va être...
423. Y : n il varie jusqu'à m .
424. T2 : Oui.
425. Y : Et ensuite, et donc là, après le $(n+1)$ ième terme, il y a le $(n+2)$ ième terme...
426. T2 : Ouais.
427. Y : ... $(n+3)$ ième terme...
428. T2 : Ouais. Jusqu'à ?
429. Y : Jusqu'à...
430. T2 : Jusqu'à m .
431. Y : m ième.
432. T2 : Jusqu'au m ième terme. Ca va ?
433. Y : Ouais.
- [Discussion non transcrite sur la somme, notamment lorsque l'indice atteint les extrémités]
434. Y : Et pourquoi il augmente, si m augmente là ?
435. L : Ouais.
436. Y : Ca devrait diminuer enfin...
437. T2 : Qu'est-ce qui diminue.
438. Y : Un sur quelque chose de grand...
439. T2 : Ouais.
440. Y : ... Ca fait quelque chose de petit ?
441. T2 : Ouais. Et donc ?
442. Y : Ah oui mais c'est un moins quelque chose... C'est d'accord.
443. T2 : Ouais.
444. Y : Donc justement ça grandit, plus m grandit, plus le... plus ça tend vers un en fait.
445. T2 : Plus c'est proche de un. Oui.
446. Y : Plus c'est proche de un, d'accord.
447. L : Moins ça a d'influence.
448. Y : Donc là, plus ça augmente quoi.

449. T2 : Ouais.
450. Y : Donc plus... plus m augmente, plus ça augmente. Enfin plus...
451. J : Oui, oui.
452. T2 : Oui, enfin mettez vous d'accord là-dessus, il y a une petite gymnastique là.
453. Y : Parce que si, si m ...
454. L : Ouais.
455. J : Ouais, ouais.
456. Y : ... Il augmente, ça, ça va diminuer.
457. L : Ouais je suis d'accord avec toi, parce que ça va être un moins...
458. Y : Et un moins/
459. L : ... Quelque chose de petit, ça fait un quasiment.
460. Y : Un truc petit, plus il est petit et plus ça va tendre vers un.
461. L : Voilà. Et à la fin, quand on multipliera par un et ben ça changera rien.
462. J : Bon. Ben là, on continue c'est pareil, c'est comme si t'avais rien fait.
463. T2 : Donc ok. Avancez.
464. L, J : [Inaudible].
465. L : Si tu multiplies par un indéfiniment, ça changera rien autre que lui-même. T'es d'accord avec moi ?
466. J : Si tu prends le $(n+1)$ ième terme.
467. L : C'est simple fois un, fois un, fois un, fois un...
468. Y : Non mais...
469. J : Non mais, si tu prends le $(n+1)$ ième terme...
470. Y : cinq fois un, fois un, fois un, ça fera ça cinq.
471. L : Ca dépend modulo quoi/
472. J : Modulo 2π .
473. L : Si on dit modulo 2π /
474. Y : Mais arrête...
475. L : cinq modulo deux, ça fait un, c'est évident.
476. J : Non, ça fait zéro.
477. L : Si.
478. T1 : Vous en êtes où ?
479. Y : On en est ici, on a remarqué que, on a compris pourquoi le terme il augmentait quand m augmentait. Donc ça, c'est bon. Jusque là, on a compris toutes les étapes quoi.
480. L : cinq modulo trois, ça fait deux.
481. J : Non.

482. L : Ben si.
483. Y : Ca, ça montre qu'elle est croissante.
484. L : cinq modulo trois, ça fait deux.
485. J : Prouve le.
486. L : Je te le prouve.
487. J : Vas-y. I'm here for you.
488. L : Ok. Là t'as cinq, cinq. En lui-même, tout est relatif. Tu fais une division...
489. J : cinq modulo deux ça fait zéro.
490. L : Mais non ! tu prends modulo deux, tu fais une division euclidienne par deux. T'y vas deux fois, il reste un. Donc ça fait un, cinq modulo deux. cinq modulo deux ça fait un.
491. J : C'est ce que j'ai dit.
492. L : quoi ?
493. J : C'est ce que j'ai dit.
494. L : Non. Si.
- [Il continue sur le registre des modulo puis sur leur prochaine sortie. Je ne transcris pas.]
495. T1 : Alors, vous en êtes où ?
496. L : Là, on a fait un peu de modulo mais... C'était pour se faire une petite pause.
497. T1 : Ah d'accord.
498. L : On commençait à avoir les neurones qui chauffaient alors...
499. J : Le relou...
500. Y : Non, on est à là... Donc, là, tout ça on a tout compris. Donc là, si on regarde le $(n+1)$ ième terme d'accord, c'est le $(n+1)$ ième terme...
501. T1 : Qu'est-ce qu'il se passe ?
502. Y : et ben si m augmente, le terme augmente/
503. T1 : Hum.
504. Y : Parce que, parce que m c'est... Plus m est grand et plus ça, c'est petit donc là un moins quelque chose petit... Plus, plus c'est petit et plus ça tend vers un donc forcément ça va augmenter. Ok. Ensuite « en effet... », donc là, c'est ce que, enfin, il explique pourquoi ça augmente.
505. T1 : Hum.
506. Y : « Ce qui montre que la suite est croissante ».
507. T1 : Est-ce que ça vous êtes d'accord.
508. Y : Mais en fait, mais non...
509. L : [Rires] Il dit tous les arguments en faveur, après y a pas de raison qu'il soit pas d'accord.
510. Y : Non, non mais, non pourquoi c'est... là une suite c'est... Ah si, si, si.
511. T1 : Alors pourquoi ?

512. L : Ben on multiplie par un truc inférieur à un, ça diminue non ?
513. Y : Mais pourquoi m , m c'est quelque chose de fini non ?
514. T1 : Oui mais m il augmente quand on fait... C'est la suite u_m , vous êtes d'accord ?
515. Y, L : Ouais.
516. T1 : Quand m augmente, on regarde la convergence de la suite donc m augmente.
517. Y : Ouais d'accord, ouais mais bon.
518. T1 : Et, on a regardé pour m fixé mais après on regarde quand m tend vers l'infini.
519. Y : Ouais, ouais.
520. L : Ca, c'est pour un m fixé...
521. Y : Ouais c'est, moi ce qui me...
522. T1 : Chaque terme là, le terme en question, lui, vous êtes d'accord que le terme en question, vous êtes tous les trois d'accord que le terme en question il augmente...
523. Y : Ah oui, ça c'est...
524. L : Hum.
525. T1 : Quand m tend vers l'infini.
526. J : Ouais.
527. Y : Ouais.
528. T1 : Qu'est-ce qu'il se passe pour le reste ? Qu'est-ce qu'on peut, comment on peut justifier que la suite est croissante ou non ?
529. Y : On a qu'à écrire le $(m+1)$ ième terme moins le m ième.
530. T1 : Hum.
531. Y : Et puis, on regarde si c'est positif.
532. T1 : Hum.
533. Y : Mais là ce qui me perturbe un peu c'est le n , là. Enfin j'arrive pas à...
534. L : C'est k on t'a dit.
535. T1 : Oui, ça c'est euh, oui.
536. J : C'est ce [Inaudible].
537. Y : Ok, donc là...
538. T1 : u_m c'est une somme.
539. Y : Oui, c'est le m qui va augmenter, enfin...
540. T1 : Est-ce que vous pensez que c'est le m qui va augmenter ?
541. Y : Non, mais non je veux dire, non.
- [Rires]
542. T1 : A part rire les autres ça... ?

543. L : Non mais là, au moins... Là, ça va être pareil, comme c'est une suite, ça dépend à quel point de la suite on va le prendre. Au moins pour euh, là, au début pour $k = 0$ là, ça fera un, un sur un, pour $k = 2$...
544. J : Non, ça vaut zéro.
545. Y : Non, non zéro factorielle, ça fait un.
546. J : Ben oui, je sais c'est ce que je dis.
- [Rires]
547. L : Après, pour le deuxième terme, ça sera $1/2!$ et ainsi de suite, enfin ça va augmenter...
548. T1 : Qu'est-ce qui va augmenter ? En fait.
549. L : Le... Au final, ça diminue parce que c'est un sur quelque chose de plus en plus grand.
550. T1 : C'est quoi qui augmente, c'est quoi qui diminue ?
551. J : Ben en fait le m augmente et le $1/n!$ diminue
552. L : Ouais. $1/n!$ ça va se rapprocher de zéro et euh... $1 - 1/m$ ça va se rapprocher de un. Quand on va augmenter.
553. T1 : Ouais.
554. Y : Ca dépend.
555. T1 : Vous avez u_n , u_m plutôt.
556. Y : u_m .
557. T1 : Ca a été exprimé en une somme. Il y a combien de termes ?
558. Y : De m termes.
559. T1 : De m termes bon. Quand m augmente qu'est-ce qu'il se passe ?
560. L : Il y a plus de termes.
561. T1 : D'accord ?
562. Y : Mouais. Quand m augmente...
563. T1 : Et les termes ils font quoi ? En fait, il y a deux choses qui se passent. Non, vous êtes pas d'accord ? Y a pas deux choses qui se passent ?
564. L : Si.
565. T1 : Il y a plus de termes, ça c'est...
566. Y : Et ils augmentent les termes en plus... Enfin ouais, ils croissent.
567. L : Hum...
568. Y : Elle croît la suite.
569. T1 : Hum.
570. Y : Ouais.
571. T1 : Est-ce que vous êtes tous les trois convaincus que la suite est croissante ? C'est ce qui est écrit derrière.
572. Y : Ca, oui.

573. L : Hum. Ah d'accord, ok.
574. T1 : Parce que après il va falloir faire un exposé pour essayer d'expliquer aux autres...
575. Y : Ouais.
576. T1 : A ceux qui n'ont pas lu la preuve donc euh...
577. L : Donc à chaque fois, on va rajouter un terme et un terme qui sera inférieur à un. On va multiplier le reste par ce terme qui sera inférieur à un. Quand on multiplie par un truc inférieur à un, on diminue.
578. T1 : Ca, c'est un peu contradictoire avec le fait d'être croissant.
579. L : Oui, c'est pour ça que ça me semble bizarre... Un petit peu. Mais en même temps, on voit que le numérateur il change aussi. A mais, oui comme le numérateur change, si c'est bon, moi je suis d'accord. Pour un numérateur constant j'aurais pas été d'accord mais le numérateur il change aussi.
580. J : Vous y allez à la soirée ?
581. Y : Hein ?
582. J : Vous y allez à la soirée ?
583. Y : Moi non.
584. L : [Inaudible].
585. J : Toi non plus.
586. L : Si, si, j'y vais.
- [Discussion sur « la soirée » non transcrite]
587. Y : Regarde ça, ça, il dit que...
588. T1 : Vous avez réussi à conclure sur la croissance ?
589. L : Oui, parce que en fait, c'est parce que le numérateur il est pas constant. Il augmente aussi.
590. Y : Ouais c'est k/m en fait.
591. T1 : Qu'est-ce qui augmente ? J'ai toujours pas compris.
592. Y : Ben si on voit clairement...
593. T1 : Est-ce que... Donc là, il y a combien de termes dans cette suite, cette somme là ? En fait, il y en a $m + 1$.
594. Y : Oui, il y en a $m + 1$ puisqu'on commence par zéro.
595. L : Ouais.
596. Y : Y en a $m + 1$ termes. Ensuite, et...
597. T1 : Ensuite, chaque terme fait quoi ?
598. Y : Chaque terme ? Et ben chaque terme croît si m croît. Ouais ?
599. T1 : Hum.
600. Y : Donc euh, oui.
601. T1 : Et ensuite vous, vous vous ajoutez éventuellement quand vous passez, quand vous êtes au départ à m et vous passez à $m + 1$, qu'est-ce qu'il se passe. Le nombre de termes, c'est quoi ?

602. Y : On rajoute un terme en plus. Et en plus, chaque terme a augmenté. Donc la suite, elle est plus grande et chaque terme a augmenté aussi.
603. T1 : Vous êtes tous d'accord là ? Tous les trois ? Non ?
604. L : [Inaudible].
605. T1 : Hein ? C'est trop subtil ?
606. L : Non, c'est pas ça. C'est au niveau de la... Parce que encore, on les additionnerait chaque terme, je comprendrais parce que c'est vrai qu'en additionnant même par petit...
607. T1 : Là, peut être, il y a une incompréhension sur ce que l'on appelle les termes. C'est quoi les termes ?
608. Y : Un terme c'est ça. Ca c'est un terme, ça c'est un terme, ça c'est un terme...
609. L : Ouais, voilà. C'est pas ça alors... ?
610. Y : Ca, c'est un terme qui a été décomposé.
611. T1 : Ca, c'est un terme qui est égal à celui-là.
612. L : Ouais d'accord, c'est bon.
613. Y : Tout ça, c'est un terme.
614. L : Hum. Ouais.
615. Y : Quand m augmente, chaque terme augmente et en même temps la suite elle augmente en termes parce que si m augmente, on rajoute des termes en plus...
616. L : Ouais, ouais...
617. Y : Donc en fait, on veut aller vers l'infini.
618. T1 : Hum.
619. Y : Ok.
620. J : Donc elle est croissante.
621. L : Je suis d'accord, on multiplie que par des positifs, alors y a pas de raison que ce soit négatif.
622. J : Ah, ça on sait pas, il suffit qu'il y ait un petit signe moins devant qui s'était caché...
623. Y : Donc on dit qu'elle est croissante. Après... On dit qu'elle est inférieure à celle-là.
624. L : Hum, hum...
625. Y : Oui, forcément, celle là elle est plus grande.
626. J : C'est où que t'as vu ça ?
627. Y : Parce que on [Inaudible] les m .
628. J : Pourquoi elle est plus grande ?
629. Y : Ben celle-là [Inaudible] que celle-là.
630. J : Et ça, ça nous fait dire qu'on se retrouve encore à, au schmilblick du départ.
631. L : Ouais mais le schmilblick du départ était euh/
632. J : Tais toi, attend deux secondes, je parle tu vois.
633. L : C'était majoré par e .

634. J : Attends chut. Je suis en train de parler là, donc tu m'écoutes. Après, je te laisserai la parole. Mais d'abord, je suis en train... Ça ressemble à ça.
635. Y : Oui, c'était pour ça, oui.
636. J : Et on a dit justement que ça... ça majorait sur 3, c'était majoré par 3.
637. L : Celle-là, elle majore celle-là. Parce que le terme en m là...
638. T1 : Là, il a montré que la suite elle est croissante, vous êtes d'accord ? Et ensuite qu'est-ce qu'il veut faire ?
639. Y : Il montre qu'elle est majorée.
640. T1 : Oui.
641. Y : Elle est majorée par ça. Donc ça, on a vu que... C'est la même que ici.
642. J : Donc ça fait que c'est majoré par...
643. Y : Ouais enfin... Il dit qu'elle est majorée mais par quoi parce que... En fait, il enlève les termes en m .
644. J : Hum, hum.
645. T1 : Il utilise vraisemblablement derrière comment on peut majorer ça. Ça se majore par quoi ça, les termes. Chaque terme il se majore par quoi ?
646. L : Par un.
647. Y : Ben ouais.
648. T1 : Donc euh, disons que chaque terme du produit c'est par un et donc le terme total ? Ca, c'est le terme, ce qu'on appelle le terme.
649. L : [Inaudible].
650. T1 : C'est majoré par $1/n!$.
651. J : Le $1/n!$ d'accord.
652. Y : Ouais. Ah oui, d'accord donc chaque...
653. J : C'est pour cela qu'on peut dire que...
654. Y : D'accord c'est pour ça qu'il a majoré tout par un. Ok. Ca, on sait, on sait que c'est inférieur à, que c'est majoré par e parce que... C'est dans le rappel du début là qu'il nous a montré tout à l'heure. Ensuite « En effet... », ouais [Inaudible], chaque morceau est majoré par un. Et oui... Ah non, attends. On avait pas dit qu'une puissance ça allait plus vite que... Ah si c'est bon, comme la croissance. [Inaudible] factorielle que la puissance.
655. L : Ça dépend...
656. Y : Si m^m c'est plus grand que...
657. L : Ça dépend m c'est combien.
658. J : Non « montre que », on s'en fout.
659. Y : Non regarde.
660. L : Ben m si [Inaudible].
661. J : Ben si tu prends par exemple deux, ça fait quatre.
662. Y : égal...

663. J : Et là, ça fait quoi ? Deux ? ça fait deux. Ben si, deux puissance deux ça fait quatre.
664. Y : Ben non ça peut pas marcher.
665. L : Ben si regarde, deux puissance deux, ça fait quatre et factorielle deux ça fait deux.
666. J : Y a un décalage, il y a quelque chose qui... Parce que là, on avait bien dit justement que c'était égal ces deux là. Et Ouais !
667. Y : Non, pas que c'était égal.
668. L : Et non.
669. J : Non enfin je veux dire que lui il était plus grand/
670. L : Non, on a dit que/
671. J : Que c'est plus grand que lui. Donc ça voudrait dire deux puissance deux et là c'est trois.
[J et L s'amusent]
672. L : Bon, il y a $1/3^3$, y a $1/3^3$.
673. J : Ouais.
674. L : Ca va te faire un fois trois fois...
675. J : vingt sept.
676. L : trois fois trois, neuf...
677. J : vingt sept.
678. Y : Ben oui.
679. L : vingt sept et factorielle 3, ca fait six. Là, on peut voir que celui-là il sera toujours inférieur/
680. Y : Ben oui...
681. L : Parce que un sur un chiffre plus grand/
682. Y : parce que puissance/
683. L : La puissance croît plus vite/
684. Y : Que le factoriel.
685. L : Voilà, là on est d'accord.
686. J : Et ben voilà.
687. Y : Donc c'est pour ça que...
688. L : Voilà.
689. J : C'est ce que je disais.
690. L : Là, on a montré qu'elle est croissante et majorée/
691. Y : Donc elle converge. Et donc « on montre qu'elle converge vers... »/
692. J : e .
693. Y : Vers e . « Si on regarde attentivement l'égalité »... Quoi « le $(n + 1)$ ème terme tend vers $1/n!$ quand m tend vers l'infini ».
694. L : Ouais logique. Si on a montré que, que la seconde partie, après le $1/n!$ /

695. Y : Ouais sur $n!$.
696. L : Etait majorée par un n mais qu'il se rapprochait de plus en plus de un.
697. Y : Ouais, quand m tend vers l'infini.
698. L : Donc quand il se rapproche comme égal à un, forcément ça tendra... Ouais, ça c'est logique ça.
699. Y : Ouais, c'est ça. C'est bon, après exponentielle parce qu'on a regardé, on a vu au dos, à cause du début. Sauf que là, je comprends pas vraiment parce que là, on dit que, qu'on a appelé e , on a appelé e , ben ça a rien à voir avec l'exponentielle ?
700. T1 : Si. C'est une définition de l'exponentielle.
701. Y : Oui mais...
702. T1 : C'est cette définition là que prend Cauchy à ce moment là, d'accord.
703. Y : Il existait l'exponentielle avant ? Avant Cauchy ?
704. L : Ben oui, il existait avant puisqu'il utilise ça dans son rappel. Dans, dans...
705. J : Plus ou moins quoi...
706. L : Il utilise ça pour faire sa démonstration.
707. Y : Ou c'est lui qui l'a défini ?
708. T1 : Je pense pas que ce soit lui qui l'ait défini, ça il faut demander à un historien. Non. Mais là, pour l'instant, dans leur connaissance à ce moment là, c'est que e ça correspond à cette somme.
709. Y : Et ça, comment ils le savaient ?
710. L : Ben, c'est eux qu'ils l'ont défini.
711. T1 : En fait e , c'est un, c'est un élément... C'est même... Au départ, vous l'avez vu comme fonction non ?
712. Y : Hum, ouais, ouais.
713. T1 : Exponentielle de x comme étant... C'est une fonction telle que les dérivées, c'est toujours la même d'accord. Il y a une espèce d'unicité et quand vous faites le développement de l'exponentielle...
714. Y : Ouais on a...
715. T1 : En série entière, ça vous donne exactement cette formule là.
716. Y : Ouais.
717. T1 : D'accord ?
718. Y : Oui mais... Ok.
719. T1 : Donc là maintenant, non mais pour notre, pour le travail là, ce qu'il faut avoir en tête c'est que e , ça donc, c'est égal à ça.
720. Y : D'accord.
721. T1 : C'est la limite de ça. Le rappel, c'était pour ça.
722. L : D'accord.
723. T1 : Donc à l'époque de Cauchy, il savait que e c'était égal à ça. Je sais pas exactement comment il était introduit mais je pense que... Pour des raisons fonctionnelles.

724. Y : Ca me perturbe quand on parle de exponentielle, logarithme et tout. Ok, on les a vu mais on sait jamais d'où ils viennent.
725. L : Ben ils viennent, on les définit comme ça...
726. Y : Oui mais ok, mais qui c'est qui l'a défini comme ça ?
727. T1 : Vous, vous l'avez vu comment e , si ça vous intéresse. Vous l'avez vu comment au lycée ?
728. Y : Ben nous...
729. J : On nous l'a donné quoi.
730. Y : On nous l'a donné. On nous a dit ben voilà ça c'est l'exponentielle, ça c'est [inaudible]...
731. T1 : On vous l'a donné comment exactement, ça veut dire quoi ?
732. Y : On nous a dit exponentielle, quand on tape sur la calculatrice exponentielle e ça fait 2,71...
733. T1 : Ca d'accord.
734. L : On nous a dit c'est une fonction qui croît tout le temps. Que c'est la fonction qui croît le plus vite...
735. Y : Que quand on l'intègre, ça fait toujours exponentielle x , que quand on la dérive, ça fait toujours...
736. T1 : En fait, vous avez vu les propriétés d'une fonction.
737. L : Ouais voilà.
738. Y : Ouais on l'a, on l'a [inaudible] en même temps que le logarithme.
739. T1 : Qui en fait la définit.
740. Y : Ouais, voilà.
741. T1 : C'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule fonction qui vérifie ces propriétés là. Donc c'est/
742. L : On a vu ces propriétés mais sans savoir comment elles ont été inventées et puis pourquoi elles ont été inventées, sans...
743. Y : Ouais on sait pas ce qu'il y a derrière, parce que exponentielle, e derrière il y a bien quelque chose enfin... C'est pas, on l'a forcément, ça correspond forcément à...
744. T1 : Derrière, il y a ce que l'on appelle les fonctions puissances d'accord, a^x , d'accord ? Il se trouve que e c'est la fonction puissance qui vérifie que la dérivée c'est elle-même.
745. L : C'est ça, c'est une puissance particulière, c'est ça qui est bizarre ?
746. T1 : Alors maintenant e^1 ben c'est e .
747. Y : Ouais ça...
748. T1 : Et c'est aussi la fonction réciproque/
749. Y : Du logarithme.
750. T1 : Du logarithme. Le logarithme ça peut se définir comme une intégrale de $1/t$.
751. Y : Hum, hum...
752. T1 : Comme une certaine surface. Alors moi historiquement, je peux pas vous donner de détails. C'est des ordres de grandeurs, vous avez vu les ordres de grandeurs, c'est important au niveau du calcul ça.

753. L : Non ça, on a pas trop...
754. Y : Ordre de grandeur ?
755. L : [Inaudible].
756. T1 : Vous savez que les choses sont d'ordre de grandeur comme n , comme $1/n$, comme n^2 ...
757. J : Hum, hum.
758. T1 : Et après il y a des choses qui sont, on dit des « petits o », des « grands O »...
759. L : Ah.
760. Y : Ah d'accord, ok.
761. T1 : Ca vous dit quelque chose ?
762. Y : Ouais, ouais, ouais.
763. T1 : En physique, en...
764. L : Non mais avec $T2$ on l'a étudié.
765. T1 : Donc euh... Ca intervient comme ça.
766. Y : Ouais.
767. T1 : Pour de l'informatique aussi. Il y a des algorithmes que se font en $\log(n)$ plutôt qu'en n , en temps. On fait $\log(n)$ étapes pour faire un calcul. Ca c'est très important, par exemple, si c'est en exponentielle de n , si c'est exponentiel, ça explose en temps. Très rapidement, si n est assez grand, votre programme il ne s'arrêtera jamais si il fait autant de calcul.
768. L : Ouais c'est vrai qu'en mettant en log déjà on...
769. T1 : Alors que si vous arrivez avec un algorithme qui est beaucoup plus rapide, donc $\log(n)$ c'est beaucoup plus rapide que n qui est beaucoup plus rapide que exponentielle de n . Ca, c'est les ordres de grandeurs.
770. L : En électronique, des fois on utilise log pour faire l'échelle. L'échelle logarithmique comme...
771. T1 : Mais pour revenir au sujet concret là.
- [T2 intervient dans la salle pour dire que les exposés auront lieu dans quinze minutes. J s'amuse avec le micro]
772. T1 : [T1 vient de se renseigner auprès de P] Donc à l'époque de Cauchy, c'est au début du XIX, donc ça fait au moins un siècle que c'est déjà connu.
773. Y : Ah ouais.
774. T1 : Le fait que e , c'est donc la série comme ça.
775. Y : D'accord.
776. T1 : Ca vient, ça vient du log en fait, vraiment comme fonction réciproque du log. Ensuite, on sait que la dérivée successive, ça doit être la même fonction et là on peut développer en série entière et ça donne e égal ce nombre là. D'accord ?
777. Y : D'accord.
778. L : Y a beaucoup de chiffres comme ça qui découlent de suite. Y a la suite de Fibonacci là et on voit que c'est une suite/

779. J : Y a π aussi.
780. L : π c'est une suite aussi ?
781. J : Ouais. C'est une suite de nombre, je sais pas quoi.
782. T1 : C'est une bonne question. Les nombres est-ce qu'ils découlent tous de suites ?
783. L : Y en a beaucoup qui découlent de suite. Mais pourquoi, ils prennent des suites au hasard ou ils étudient plusieurs suites et ils voient celles qui ont des propriétés intéressantes pour plus tard ?
784. T1 : Par exemple π ça découle de quoi à votre avis.
785. J : Je crois que c'est les nombres premiers justement, c'est l'inverse des nombres premiers... c'est la somme des inverses des nombres premiers, un truc comme ça je crois.
786. T1 : Non, le nombre π vous le rencontrez plus tôt, à l'école. Vous savez pas ce que c'est qu'un nombre premier quand vous rencontrez π .
787. Y : Non, quand on...
788. T1 : Pas vraiment disons.
789. Y : C'est le cercle.
790. T1 : Voilà le cercle. C'est quand même assez naturel de se demander quelle est la longueur d'un cercle.
791. Y : Oui enfin c'est naturel, enfin non. Non, moi je trouve pas très... On a dit que c'était π , bon d'accord on a dit ça mais...
792. T1 : Non, non, non, se demander quelle est la longueur d'un cercle.
793. T2 : La circonférence.
794. Y : Le périmètre.
795. L : $2\pi R$.
796. J : Ah ben oui, si on doit calculer...
797. T2 : Oui, le périmètre.
798. J : Ah oui, je l'avais oublié !!
799. Y : Ah ben oui, d'accord.
800. L : Pour moi π l'angle, je croyais qu'on parlait de π radian, je me suis dit.
- [Inaudible]
801. T1 : Non mais là, il faut revenir au problème là. On divague un peu.
802. T2 : Oui, oui, parce que sinon vous aurez pas de pause et euh...
803. J : Ah bon.
804. L : De toute façon, on est venu pour travailler.
- [Rires]
805. T2 : Non, vous en êtes où ?
806. L : Là.
807. Y : Bon ça y est, on est à la fin.

808. T2 : D'accord.
809. Y : On a compris toute la preuve.
810. L : « La preuve est-elle valide ? », non. Voilà.
811. J : Mais en fait, j'ai l'impression que ça tourne en rond quoi...
812. L : Ouais, en fait ouais.
813. J : Parce que regarde, ça c'est quoi... C'est...
814. L : Ben ouais, mais ça, c'est un truc déjà connu c'est la...
815. J : Et ça tend vers e .
816. L : Donc pour montrer que ça, ça tend vers e , il l'approche par une autre suite qui tend vers e , qui est déjà connu et qui tend vers e .
817. J, L : [Inaudible].
818. T1 : Vous en êtes où la maintenant ?
819. Y : Ben...
820. T1 : Concrètement, vous en êtes à la fin là ?
821. Y : Ouais, ouais.
822. T1 : D'accord. Donc là, ce qui est écrit, vous comprenez ce qui est écrit ?
823. Y : La dernière phrase, là ?
824. T1 : Ca.
825. Y : Oui, oui.
826. T1 : Donc ça, c'est la limite de la suite que l'on cherche d'accord ?
827. Y : Ouais.
828. T1 : Qui doit être égale... On veut montrer que c'est égal à ça avec les petits points.
829. Y : Ouais. Ça continue...
830. T1 : Ca veut dire quoi ?
831. J : c'est jusqu'à m .
832. Y : Non jusqu'à l'infini quoi, un sur...
833. T1 : Jusqu'à m ? Jusqu'à l'infini ?
834. Y : Non, c'est jusqu'à l'infini.
835. J : Ouais mais... Jusqu'à l'infini pardon.
836. T1 : Et c'est exactement quoi par rapport au rappel ?
837. Y : Ben c'est exactement, on retrouve exactement cette formule ici, là.
838. T1 : Oui, c'est-à-dire en gros le rappel c'est/
839. Y : C'est exactement ça, quoi.
840. T1 : Hum.
841. Y : Ouais c'est la somme de... ouais quand n tend vers l'infini.

842. T1 : D'accord, donc là, il utilise la définition de e ...
843. Y : Ouais, il utilise ce qu'on a fait dans le rappel.
844. T1 : Une façon de calculer e qui correspond à la limite de cette série là, d'accord ?
845. Y : Ouais.
846. T1 : Hein, donc là, Cauchy sait très bien ça, d'accord donc cette égalité là c'est e égal... C'est le rappel.
847. Y : Ouais, c'est connu quoi.
848. T1 : Maintenant, il faut montrer que ça c'est égal à ça pour conclure.
849. Y : Ca, ça y est on l'a vu. C'est... On a vu que quand m tend vers l'infini, tous ces coefficients, ils tendent vers un.
850. L : [Inaudible].
851. T1 : D'accord.
852. Y : Et donc, ça fait que si ça tend vers un, ça fait bien 1 plus $1/1$ plus $1/2$ fois 1, donc plus $1/3!$ fois 1...
853. J : Oui c'est pour ça que c'était réorganisé justement, c'est pour bien qu'on voit ça.
854. T1 : Quand on avait étudié la croissance tout à l'heure...
855. Y : Oui.
856. T1 : Hein je vous rappelle, donc euh, vous aviez remarqué que... que chaque terme croît, croît...
857. J : Hum, hum.
858. T1 : Qu'il tend vers un là, si vous voulez, $1/n!$ avec... parce que c'est $1/n!$ fois ce terme.
859. Y : Ouais.
860. T1 : Mais il y avait autre chose qui croît.
861. Y : Ben euh, la longueur de la suite.
862. T1 : Oui, la longueur oui.
863. Y : Je sais pas si on dit longueur, enfin la...
864. T1 : Le nombre de termes.
865. Y : Ouais le nombre de termes. Ben oui donc euh/
866. T1 : Alors, est-ce que c'est évident, est-ce que c'est évident que quand on fait la limite, quand m croît, est-ce que c'est évident... Chaque terme, on est tous d'accord chaque terme tend bien vers $1/n!$?
867. Y : Ouais.
868. J : hum.
869. Y : Et, ça tend vers un nombre infini de termes, ouais. Enfin, il y aura un nombre infini de termes.
870. T1 : Vous êtes tous convaincus de ça, il n'y a pas...
871. L : Ca, c'est vrai.
872. Y : Ah ben oui, c'est logique.

873. T1 : Vous pensez qu'il n'y a pas de problème là.
874. L : Ouais.
875. Y : Ouais, c'est le cas, ouais, y a pas de problème ?
876. T1 : Moi je dis rien moi, c'est pas mon... Moi, je sais pas.
877. Y : Ah vous savez pas ?
878. J : Si, si, moi je suis d'accord.
879. Y : Moi, ça me paraît...
880. L : Toi, tu sais ?
881. J : Non, non, mais c'est je veux dire, c'est...
882. T1 : C'est votre avis qui compte, il ne faut pas me faire confiance à moi. Je peux dire des bêtises.
883. J : Ca va loin quoi, tous ces factoriels...
884. Y : Non mais si...
885. L : [Inaudible] C'est égal à e .
886. T1 : Donc vous êtes convaincus par la conclusion alors ?
887. Y : Ah ben oui.
888. T1 : On passe à la limite...
889. Y : Ouais.
890. T1 : Vous pensez tous que la preuve, elle vous paraît juste ?
891. Y : Ben ouais.
892. J : En fait, c'est vrai.
893. T1 : Alors maintenant...
894. Y : On explique les étapes maintenant ?
895. T1 : Pour tous les trois, c'est clair pour tous les trois.
896. L : Ouais.
897. J : Oui, oui c'est bon.
898. T1 : Parce que si il y a, parce que si l'un de vous n'est pas d'accord, il faut en discuter entre vous je veux dire.
899. L : Ouais, ouais, c'est bon.
900. J : Non, non.
901. T1 : Maintenant dans chaque étape.
902. Y : Non mais en fait à mon avis, ça me paraît... Enfin moi, je suis complètement d'accord mais là, comme vous nous dites là, j'ai l'impression que la preuve est pas valide.
903. L : Ouais, moi aussi. Après là, c'est du social, plus des mathématiques.
904. T1 : Mais il faut d'abord, maintenant...
905. Y : Mais je comprends pas.

906. T1 : ... Comme vous allez préparez un petit exposé, il faut quand même expliquer pourquoi ça marche.
907. Y : Ben ouais.
908. T1 : Donc euh...
909. J : C'est Maple qui dit.
910. T1 : Donc euh, écrivez un peu les étapes. Au moins, vous vous les redites entre vous hein. Ce que vous venez de me dire, quand m tend vers l'infini qu'est-ce qu'il se passe ? D'accord ? Vous décomposez rapidement les étapes de...
911. Y : de toute la preuve, le rappel, là... Ok, on est d'accord, hein ?
912. T1 : Le rappel c'est... Oui. Vous pouvez aller assez vite.
913. Y : Bon là, d'accord, le binôme de Newton, il développe, hop il arrange un peu.
914. J : Oui. Il applique bêtement, justement le binôme de Newton...
915. Y : Ensuite, il montre que le terme que ça, quand m tend vers l'infini, ben ça, ça tend vers un.
916. L : Voilà.
917. Y : Donc, il montre que à chaque fois que la...
918. J : Ca, il faudrait peut-être qu'on le montre ça justement. Parce que si ça se trouve, on va être complètement étonné que ça tende pas vers 1 et à ce moment là... Non ? J'ai faux ?
- [Digressions]
919. Y : Elle te paraît juste cette preuve ?
920. L : Non.
921. J : Si, si, elle me paraît complètement juste. C'est tout à part ces deux là, là.
922. Y : Ben ouais.
923. J : Ben justement ça tend vers un donc, tu prends tous les premiers là, tous les trucs/
924. Y : Hum, hum.
925. J : S'il te plait tu peux arrêter, merci [à L qui s'amuse à le perturber]. Tu prends tous les premiers comme ça et après tu, tu vois que ça tend vers un.
926. Y : Hum.
927. J : En plus, il dit clairement, là ça fait un justement c'est cool. Et après là, tu continues comme ça...
- [J et L s'amuse]
928. J : Non ouais mais c'est carrément ça.
929. T1 : Pour revenir à la conclusion.
930. Y : Ouais.
931. T1 : Vous pensez tous que, donc vous m'avez dit, quand m tend vers l'infini qu'est-ce qu'il se passe ? Vous avez, là pour l'instant vous avez $(m + 1)$ termes d'accord.
932. Y : D'accord. Quand m augmente de un, ça rajoute un terme et ça, chaque terme là augmente... tend de plus vers un quoi...

933. T1 : Hum.
934. Y : Ensuite on rajoute, si on rajoute une infinité de termes, ça veut dire, ça veut dire que là, la suite, il y aura une infinité de termes...
935. T1 : Ouais.
936. Y : Et que chaque, chaque euh, comment on peut appeler ça ?
937. T1 : Chaque terme, ou prenez le n ème terme carrément, il tend vers quoi ?
938. Y : Le n ème terme il tend sur un, $1/n!$ parce que, enfin, cette partie tend vers un quoi quand m tend vers l'infini.
939. T1 : Est-ce que pour vous le fait que l'on puisse arriver avec une infinité de termes chaque terme tendant vers quelque chose, ça veut dire que tout tend vers cette infinité de termes. Voyez là, là, vous avez une infinité de termes aussi...
940. Y : Ouais.
941. T1 : Pour une limite. Est-ce que pour vous c'est clair, c'est un argument que vous avez déjà employé ?
942. Y : On peut pas savoir ce qu'il se passe après quoi, on sait pas... Là, on sait que, si...
943. L : Moi, pour moi, on travaille beaucoup au voisinage de l'infini, donc ça veut dire que en l'infini tout va marcher, dans les grandes valeurs tout va marcher. Mais dans les petites valeurs pour moi, il va y avoir un petit décalage. Pour moi, ce sera pas égal à e pile mais à e virgule...
944. J : Ah non c'est compris entre deux et trois hein.
945. Y : Ouais t'as vu, c'est comme euh... Quand on fait Taylor Lagrange.
946. J : C'est pour ça qu'on le majore comme ça, au moins on dit que c'est...
947. L : Pour moi ce sera compris entre deux valeurs mais une valeur...
948. Y : Mais plus il y a de termes, plus ça va tendre vers e en fait.
949. J : Hein ?
950. Y : Plus il y a de termes plus/
951. J : Ah oui, oui.
952. Y : Plus ça va se rapprocher de exponentielle. C'est ça, en fait.
953. T1 : Allez essayez d'écrire un peu les choses. Qu'est-ce qu'il se passe, vous avez écrit n termes d'accord ?
954. Y : Ouais.
955. T1 : Vous faites tendre m vers l'infini. Vous ajoutez des termes comme ça.
956. Y : Ouais.
957. T1 : Puis en même temps les termes comme ça ils tendent vers $1/n!$ d'accord ? Vous voyez, vous avez deux choses qui tendent comme ça. Est-ce que vous êtes sûr qu'à la fin ça tend bien vers la limite des $1/n!$?

[Pause]

958. L : En gros, on fait comme ça pour le démontrer. Ca c'est e , d'abord on met le premier ça va faire un, le premier terme ça va faire un, après ça va encore faire un et après ça va diminuer en

petit carré comme ça, à chaque fois. Puis à la fin en les additionnant tous on va arriver à peu près à e .

[Rires]

959. L : Avec tous nos petits carrés. Une infinité de petits carrés.

960. Y : Non mais si enfin...

961. L : Non mais oui, ça fait comme tu vois le truc [ils ont vu en classe une preuve en termes de « petits carrés » de la convergence de la série des $1/2^k$] En fait tu mets des termes de plus en plus petits, à la fin ça va apporter un truc minime...

962. Y : Non mais enfin, c'est sûr que quand m tend vers l'infini, enfin c'est égal à ça, jusqu'à un sur factorielle de l'infini... ça existe pas mais...

963. T1 : Vous êtes sûr qu'à la fin c'est un sur factorielle de l'infini quoi, tout marche bien ?

964. Y : Ben ça oui, ben oui. Je pense.

965. J : Ben déjà, si ça tend vers l'infini [Inaudible].

966. L : Pour ça, oui.

967. Y : Oui mais tout ça c'est égal, on le sait ça c'est...

968. T1 : Si on faisait des choses assez numériques d'accord ? Vous avez un terme, il tend sur $1/5!$, ouais ? C'est un terme au départ, je sais pas combien il fait... Combien ça fait $1/5!$? Vous avez votre nombre qui s'écrit zéro virgules quelque choses, d'accord ? Puis petit à petit il tend vers, quand m tend vers l'infini ça s'approche du $1/5!$ d'accord ?

969. Y : Ouais.

970. T1 : Mais en même temps, à chaque fois, vous rajoutez des termes.

971. Y : Ouais.

972. T1 : D'accord ? Alors comment ça fonctionne tout ça ? Alors à la fin on tend bien vers $1+1/1+1/2!+\dots$?

973. Y : Non, bon non, pour que ça atteigne bien $1/n!$, il faut que, enfin c'est que quand m tend vers l'infini que ça tend vers $1/\dots$ Il faut forcément que il y ait une infinité de termes pour que ça, ça tende bien vers $1/n!$ Enfin donc euh...

974. T1 : D'accord.

975. Y : Oui c'est... Donc dans les deux sens, il faut que ça tende vers l'infini quoi enfin. Non pour que ça, ça tende vers $1/n!$, il faut que il y ait une infinité, il faut que il y ait une infinité de termes... Enfin si ça me paraît.

976. T1 : Ca vous paraît juste quoi...

977. T2 : C'est ok on... ?

978. T1 : Bon maintenant on va passer au, vous passez vraiment à la préparation de l'exposé...

979. Y : Ok, d'accord.

980. T1 : Donc vous décomposez, bon les étapes vous les avez vu hein ? Faudra présenter rapidement les étapes, essayer d'expliquer aux autres...

981. J : Ok.

982. L : Moi j'aimais bien mes petits carrés.

983. Y : Tes petits carrés, c'était bien.
984. L : Tiens d'ailleurs c'est pas [Inaudible].
985. Y : Quoi ?
986. L : [inaudible] c'est 2,7. Là tu mets un, là tu remets un.
987. Y : Ca fait deux.
988. L : Ca fait deux et là t'a rempli [Inaudible].
989. Y : Non.
990. L : ...0,7.
991. Y : Après tu mets 0,5.
992. L : Pourquoi tu mets 0,5 ? Après tu mets... Ah ouais, c'est bon.
993. Y : Si, ça marche.
994. L : [Inaudible].
995. J : Ah mais ça marche hein !
996. L : Mais oui... Tiens regarde les petits... Les petits carrés.
997. J : Mais oui, ça marche avec les petits carrés.
998. L : Mais si regarde quand tu fais des petits bouts, après on prend un plus petit bout, après on prend encore un plus petit bout, un plus petit bout, un plus petit bout...
999. J : A chaque fois, on va rajouter un tout petit renseignement, justement par rapport au e , on va rajouter un tout petit renseignement. Mais $1/1000$ de renseignement tu vois... Mais ce sera un renseignement que on se rapproche de e .
- [Ils discutent de leur rôle respectif pour l'exposé]

**Annexe 29 : Transcription des débats
du deuxième groupe d'étudiants de
l'INSA travaillant sur la preuve
inspirée par le texte de Liouville**

1^{er} Groupe d'étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy

1. T1 : Donc avant de rentrer complètement dans la preuve hein, c'est principalement la lecture de l'énoncé.
2. L : Hum, hum.
3. T1 : Donc vous échangez un peu si vous jugez que c'est valide ou non. Si c'est juste ou non...
4. L : Hum, hum.
5. T1 : Et puis vous faites une petite recherche sur l'auteur... du cours en question qui est Cauchy.
[Recherche sur l'auteur non transcrite]
6. T1 : Vous avez regardé le critère de Cauchy ?
7. T : Ouais là.
8. T1 : Ca vous dit quelque chose ?
9. L : Le critère de Cauchy...
10. T : Le critère de Cauchy...
11. T1 : Est-ce que vous avez rencontré ça cette année, le critère de Cauchy ? Les suites de Cauchy ?
12. L : Non ça me dit rien.
13. R : Non.
14. T : Non.
- [Un silence, ils continuent la recherche]
15. T : Une suite de Cauchy c'est une suite convergente quoi.
16. T1 : Et de manière générale en maths, dans ce que vous avez lu dans l'article, il a fait quoi Cauchy d'après ce qui est écrit, vous avez vu ?
17. L : Il a fait pas mal de... pas mal d'analyse non ?
18. T : Il a défini la convergence d'une suite, enfin défini mathématiquement.
19. T1 : Disons plutôt qu'il a énoncé un critère, oui. On lui attribue un critère, le critère de Cauchy.
20. L : Hum.
21. T1 : La suite converge si ça devient indéfiniment petit, à partir d'un certain moment, les différences des termes. Bon maintenant vous pouvez passer à l'énoncé. Donc l'énoncé c'est ce qui est encadré là, juste au début. Essayez d'échanger pour savoir si pour vous c'est juste, c'est pas juste... Si vous avez une idée, sans regarder la preuve hein, si vous avez une idée de comment on peut montrer ça. Si vous avez déjà vu ça...
22. L : Moi j'ai jamais vu ça et ça me paraît bizarre que la limite de notre u_n quoi, ça tende vers, vers..., vers e .
23. T1 : Vers e . Est-ce que vous pouvez pas essayer de regarder avec une calculatrice si ça/
24. L : Maple, avec Maple.
25. T1 : Ou avec Maple, oui.

26. L : Ben déjà, ils ne nous disent pas ce que c'est [Inaudible].
27. R : Tout en haut.
28. T : Hein ?
29. T1 : Donc e c'est le/
30. R : Tout en haut/
31. T : Ah oui merde.
32. T1 : c'est le e que vous avez rencontré a priori déjà au lycée, non vous l'avez pas rencontré ?
33. L : Le e de l'exponentielle ?
34. T1 : Oui...
35. T : Donc sa valeur c'est quoi du coup, 2,70 - 2,71 ?
36. T1 : Hum.
37. T : Donc là, la suite elle converge vers e en fait.
38. T1 : C'est l'énoncé, c'est ce que ça dit. La question c'est de savoir si vous pensez que c'est vrai.
39. T : Moi, je dois avoir le développement de Taylor de l'exponentielle.
40. T1 : Vous pouvez regarder. Toi R , tu en penses quoi ? A priori, est-ce que ça tend vers e cette suite ?
41. R : Ben si on fait les calculs de limites... Non, pas spécialement non. Ça tendrait plus facilement vers un.
42. T1 : Sur votre calculatrice, ça semble tendre vers un c'est ça ?
43. R : Non, non sur la calculatrice non.
44. T1 : Alors pourquoi ça... Essaye d'expliquer pourquoi tu penses que ça tend vers un ?
45. R : Ben on calcul la limite quand n tend vers l'infini... Donc $1/n$ tend vers zéro.
46. T1 : Hum.
47. R : Puis un puissance n exposant l'infini, ça fait un.
48. T : Ouais, de tête j'ai fait ça tout à l'heure mais/
49. L : Moi aussi.
50. T1 : Tu es convaincu toi avec cet argument.
51. T : Ouais.
52. L : Moi je suis d'accord aussi. Pour moi c'était ça.
53. T1 : Vous pensez tous que ça tend vers un ?
54. L : C'est ça.
55. T1 : Essayez de regarder ce que ça donne quand vous faites/
56. L : je suis en train d'essayer.
57. T1 : Le calcul pour $n = 1000$...
58. L : Je suis en train de faire la manip là [Un calcul formel sur Maple].

59. T1 : Non mais essayez simplement avec des valeurs numériques. A ce moment là, vous allez bien voir si ça...
60. L : Il donne bien e .
61. T : Non avec un chiffre.
62. L : Il donne l'exponentielle comme résultat quand n égal plus l'infini.
63. T1 : Donc là, Maple dit exactement que c'est e .
64. T : Maple, il dit ça... Maple a toujours raison [Rires]... Sauf quand c'est trop compliqué et qu'il y arrive plus. Ouais, parce que là, on va pas avoir un tout à fait, donc on va avoir un virgule quelque chose qu'il va multiplier, multiplier, multiplier ça va faire... [Il tape sur le clavier de l'ordinateur] Ouais, ça va faire quelque chose de gros.
65. L : Ouais.
- [Nouveaux essais numériques]
66. L : 2,71.
67. R : Ben ouais, 2,71 ça fait e .
68. T1 : Alors comment vous expliquez ça, par rapport à votre première idée. Au départ, vous avez tous dit que ça tendait vers un.
69. T : Euh, Ouais.
70. T1 : Donc là, T , tu avais posé un question, tu avais dit que ça faisait un virgule quelque chose...
71. T : Ben ouais, parce que c'est pas tout à fait un. Si c'était rigoureusement un, parce que là, on fait une grosse approximation quand même en disant l'infini. On considère que un sur quelque chose de grand ça fait zéro. Et 1/1000, ça fait pas zéro. Donc on a un plus zéro virgule... Et le « zéro virgule », il est quand même pas négligeable quand il est multiplié exposant mille.
72. L : Alors pourquoi vers e , c'est ça...
73. T : Pourquoi vers e , alors là par contre.
74. T1 : Ouais ça... Est-ce que vous avez appris des techniques pour montrer ça... pour étudier ce genre de suite en... Cette année ? Vous avez étudié des limites de suites vous avez fait des calcul comme ça.
75. T : Euh, ouais... On a fait des limites de suites.
76. L : Hum, hum.
77. T1 : Moi je peux vous donner une indication. Vous pouvez mettre ça, quand vous avez une puissance, vous pouvez mettre ça sous la forme d'un exponentiel justement pour avoir e .
78. L : Ouais...
79. T1 : Ca prend quelle forme si vous mettez ça sous la forme d'une exponentielle ?
80. T : a^n c'est quoi ?
81. R : C'est exponentielle de...
82. T : $n \ln(a)$?
83. R : Hum.
84. L : Alors...

85. R : Ca arrive, ça arrive...
86. T : Ah oui, ma trousse est trop petite.
87. T1 : Hum ?
88. L : Exponentielle de $n \ln(1+1/n)$...
89. T : Sur n ouais.
90. T1 : Alors qu'est-ce que vous pouvez en faire.
91. T : Le problème c'est que là, on a des log et...
92. L : Ca nous fait aussi $\ln(1)$ par rapport [Inaudible].
93. T1 : Ouais, Maple ça donne un résultat.
- [Rires]
94. T1 : Mais après...
95. L : Non ?
96. T : Ben non, c'est l'inverse...
97. T1 : Donc L , qu'est-ce qu'on peut dire de $\log(1+1/n)$?
98. T : C'est le log d'un produit qui fait le log du premier terme plus le log du deuxième. $\ln(ab)$ ça fait $\ln(a)+\ln(b)$. Mais là, $\ln(a + b)$...
99. T1 : Est-ce que vous avez déjà vu un... Quelque chose de la forme $\log(1+t)$ quand t tend vers zéro, qu'est-ce que... ? A quoi ça ressemble ? Ca vous dit rien ? Vous avez fait des développements limités ?
100. L : Ouais c'est ce que j'étais en train de me dire, les développements limités... Si on sait vers quoi ça tend...
101. T : $1+1/n$, ça ressemble au début d'un développement limité...
102. T1 : Ca vous dit rien ? Vous avez vu des équivalents sinon ? Je vous donne plusieurs pistes...
103. L : Ah ouais, ouais, ouais...
104. T : Ouais... Quand est-ce qu'on dit que c'est équivalent déjà ?
105. T1 : $\log(1+t)$ c'est équivalent à quoi ? Ca veut dire, « être équivalent » ça veut dire que ça tend de la même façon vers le même type de, à la même vitesse vers la même limite. C'est-à-dire que le quotient tend vers un.
106. T : Hum, d'accord.
107. T1 : Ca vous dit rien le $\log(1+t)$ c'est équivalent à quoi ? Vous êtes capable de re-calculer le développement limité de $\log(1+t)$, au moins le début ? Comment on fait ?
108. T : Tiens R , je te sens réveillé ce matin !
109. R : Oui...
110. T1 : Non mais après, on va passer à autre chose hein...
111. L : Si on prend la formule du développement limité...
- [Inaudible]
112. L : Non, mais il y a internet !

113. T : Ha.
114. T1 : Vous pouvez regarder, ou sur Maple. Vous avez le DL sur Maple ?
115. T : C'est sur Wiki qu'il y avait les DL. J'en suis pas persuadé mais...
116. L : C'est une bonne question.
117. T : Voilà.
118. T : Dommage qu'on ait pas notre petite fiche, petite fiche magique...
119. T1 : Avec les DL ?
120. T : Hum. Avec les...
121. L : $\ln(1+x)$...
122. T : La somme de $i = 1$ à n des moins un... plus un petit o de x^i .
123. T1 : D'accord, alors le premier terme, le premier terme c'est quoi ?
124. L : Le premier terme pour moi, ça nous fera...
125. T : $(-1)^2/1$...
126. L : Puissance deux, ça va nous faire un... $1/1$... ça fait, ça nous fait t .
127. T : Ca nous ferait t , ouais.
128. L : t plus euh...
129. T1 : Ca veut dire que $\log(1 + 1/t)$ à votre avis il est équivalent à quoi ?
130. T : Ben il serait...
131. L : Euh... à la courbe, à la courbe de t ouais. A la première bissectrice.
132. T : Hum. Donc, ça tend, ça tend/
133. T1 : [à T2] Tu passes à la suite ?
134. T2 : [à T1] Ouais, à côté ils passent. Vous pouvez passer quand vous avez envie.
135. T1 : Là, je leur faisais découvrir comment on pouvait montrer un peu le résultat mais...
136. T2 : Ouais, autrement qu'en tapant sur Maple !
- [Rires]
137. T2 : $\ln(1 + t)$, on l'a vu quand même hein, un certain nombre de fois...
138. T : Ah bon ?
139. L : Si, si, si.
- [Rires]
140. T2 : C'est équivalent à quoi ?
141. L : Ben à t .
142. T2 : à t .
143. L : Ouais.

144. T1 : Bon maintenant, une fois que l'on sait que c'est équivalent à t , pour aller un peu plus vite, comment on fait... Qu'est-ce qu'on peut dire, n fois $\ln(1+1/n)$ c'est équivalent à quoi quand n tend vers l'infini ? $1/n$ ça tend vers quoi quand n tend vers l'infini, vous l'avez dit ça.
145. T : zéro.
146. L : Ben zéro.
147. T1 : Donc c'est comme t qui tend vers zéro, $\log(1 + 1/n)$ c'est équivalent à ?
148. T : zéro ?
149. T1 : Ben à $1/n$.
150. T : Ouais. Ah, euh, oui ben oui parce que $t/$
151. T1 : Quand on multiplie par n ça veut dire que ça, ça tend vers quoi, en oubliant l'exponentielle, n fois $\log(1 + 1/n)$? Ca converge vers quelle limite ?
152. T : Ben ça fait n/n , ça fait exponentielle un, ça fait exponentielle.
153. T1 : A l'intérieur ça tend vers, l'intérieur tend vers un là.
154. T : Ouais, ouais.
155. T1 : Ca tend vers l'exponentielle de un.
156. L : C'est ça.
157. T : Ben c'est ce qui/
158. T1 : Conclusion, le résultat de l'énoncé ?
159. T : Ben...
160. L : Ben c'est l'exponentielle, c'est ça.
161. T1 : Ouais.
162. T1 : Ca a été trop vite R ?
163. R : Non, non.
164. T1 : Donc là, ensuite, le but de la deuxième partie c'est d'arriver à analyser la preuve d'accord ? La preuve qui a été donnée par Cauchy dans son cours au début du XIX. Donc Cauchy faisait un cours à l'école polytechnique. Donc voilà, il a donné la preuve qui est ci-dessous.
165. T : Et c'est...
166. T1 : Donc vous la lisez et il faudra essayer de détacher les différentes étapes, de discuter entre vous si vous pensez que telle étape est, vous paraît convaincante ou non, si il faut compléter par des arguments, si vous êtes sûrs que c'est vrai ou non, etc.
167. L : Ok.
168. T : Au boulot.
169. T1 : Voilà, là, vous avez un peu plus de temps. La première partie, c'est un rappel, ce n'est pas... Hein la première partie vous la lisez pour avoir ça en tête mais c'est un rappel, qui vous redonne la définition de e . e c'est la limite de la somme là, la somme des $1/k!$ ça vous l'avez déjà rencontré non ?
170. T : Ca oui, ça me dit quelque chose.

171. T1 : Donc on part de cette base là. La preuve du rappel, c'est simplement de montrer que cette somme a bien une limite. Qu'on note ϵ ensuite. Mais c'est pas ça, le but du... du sujet.
172. L : Inférieur ou égal à...
173. T1 : Si vous voulez regarder le rappel, vous pouvez argumenter entre vous si quelqu'un n'est pas convaincu que, enfin c'est une preuve rapide du fait que u_n a une limite. Vous comprenez les arguments, tous ?
174. T : Ouais, je pense, ouais.
175. T1 : C'est quoi, quels sont les arguments ?
176. T : Ah oui, croissante parce qu'on a ça.
- [Inaudible]
177. T1 : Essayez d'échanger, il ne faut pas rester trop longtemps sur le... Vous êtes plusieurs, vous êtes trois, vous pouvez aller plus vite à trois que tout seul.
178. L : D'accord.
179. T1 : Si quelqu'un a compris quelque chose, il essaye de l'expliquer aux autres et inversement, quand quelqu'un est bloqué sur quelque chose il demande aux autres si ils ont compris. Parce que après, il faut passer après le rappel. Le rappel, c'est vraiment comment on définit ϵ , une façon de définir ϵ d'accord comme étant la limite d'une suite. Pour dire que c'est la limite d'une suite, il faut quand même justifier que la suite a une limite. Donc, c'est ce qui est justifié.
180. L : D'accord.
181. T : Ouais, elle a une limite parce qu'elle est majorée.
182. T1 : Parce qu'elle est majorée, ça c'est un des arguments mais il y en a un autre.
183. T : Croissante, elle est croissante... donc elle a une limite. Parce que si elle était décroissante et minorée, elle aurait une limite aussi.
184. T1 : Oui.
185. T : Et là, on sait que la limite elle est inférieure à trois.
186. T1 : Hum. Alors après, il y a des techniques pour l'approcher hein. On trouve que c'est 2,7 etc hein.
187. T : Parce que là, on sait que c'est plus petit que trois...
188. T1 : Hum. On sait que c'est pas... On sait que c'est pas négatif non plus... A propos de, qu'est-ce que vous savez sur ϵ . Est-ce que vous avez des choses... R ou L ? Pour que chacun parle. Est-ce qu'on vous a déjà dit quelque chose sur le nombre ϵ ?
189. L : Hum... Non, ça me dit rien. Personnellement je connaissais même pas sa valeur, sa valeur exacte, comme ça de tête.
190. T1 : Mais est-ce qu'il a une valeur exacte.
191. R : Non, y a pas de valeur exacte.
192. L : Non, justement.
193. T1 : Comment est-ce que vous savez qu'il n'a pas de valeur exacte. Qu'est-ce qu'on vous a dit, c'est quel type de nombre ?
194. T : C'est comme π , mais qu'est-ce que c'est π comme nombre, tu te souviens ? Un irrationnel.

195. T1 : Oui.
196. T : Donc c'est un irrationnel, comme Pi.
197. T1 : En fait, c'est même plus qu'un irrationnel, donc irrationnel, c'est quelque chose qui s'écrit pas sous la forme a/b , et puis il y a des nombre, donc racine de deux, vous savez que c'est un nombre irrationnel aussi. Racine carré de deux ça s'écrit pas sous la forme a/b .
198. T : Hum.
199. R : Ouais ça...
200. T1 : Par contre racine carré de deux, c'est racine d'un polynôme.
201. R : Hum.
202. T1 : e c'est même pas racine d'un polynôme à coefficients rationnels.
203. L : Hum, hum.
204. T1 : C'est ce qu'on appelle les nombres transcendants.
205. L : Jamais entendu.
206. T : Ouais, c'est juste un...
207. T1 : La notion de transcendance, vous avez jamais entendue ?
208. R : Non.
209. L : Non.
210. T1 : Bon c'est pas la question, c'est pas en lien direct avec le sujet, mais c'est pour... Donc c'est un nombre qui est assez riche ou compliqué si vous voulez d'une certaine façon.
211. T : Ouais là, ce qui est marrant enfin, on définit un nombre/
212. T1 : Hum.
213. T : Avec tout un tas d'autres nombres, les notations, les factorielles et tout c'est... Ca c'est oui, e , c'est un nombre qui est compliqué visiblement !
214. T1 : Là, on le définit comment là, comme une...
215. T : Ben, c'est comme une suite euh... C'est la somme, ouais c'est une suite.
216. T1 : Alors, tu le vois comment toi e , comme étant la somme de quoi.
217. R : C'est une somme de...
218. T1 : La somme de quoi.
219. L : Ben c'est une somme des inverses de...
220. T1 : Hum.
221. L : De factorielles de zéro à l'infini.
222. T1 : Donc, c'est une somme un peu particulière, c'est une somme infini.
223. L : Oui.
224. T1 : Donc on définit un réel comme une somme infini. C'est ce qu'on appelle une limite.
225. L : Ouais.

226. T1 : D'accord, c'est quand même une limite une somme infinie. Bon, on passe maintenant à l'énoncé ? Donc on a comme rappel, e c'est ça d'accord ? Donc il faut justifier à partir de ça que la suite u_n tend bien vers e , d'accord ?
227. ? : Ok.
228. T1 : Donc c'est ça, la preuve donnée par Cauchy, c'est la preuve de cet énoncé là. Dire que la suite u_n tend bien vers cette limite là. D'accord ? Donc vous pouvez essayer de décomposer la preuve pour l'expliquer.
229. L : J'ai pas compris pourquoi on a des coefficients qui arrivent devant, devant le, devant le somme des [Inaudible] factorielles.
230. R : Le couple euh, le couple (m, k) ?
231. L : Ouais. Parce que là...
232. R : Il apparaît nulle part.
233. L : ... Dans le rappel, ça y est pas.
234. T : Qu'est-ce que c'est que C_m^k déjà ?
235. L : Tu sais, c'est les coefficients que tu obtiens avec le triangle de Pascal.
236. T : Ah, bon. J'aime bien faire le triangle de Pascal, moi.
- [Rires]
237. T1 : Vous pouvez parler plus fort !
238. L : D'accord...
239. T1 : Qu'est-ce que vous savez plus ce que c'est... Dites moi.
240. L : Ben moi, je vois pas pourquoi on a les coefficients qui arrivent devant dans notre suite, dans notre somme, alors qu'on les avait pas...
241. T1 : Alors c'est quoi les coefficients ? C'est ce qu'on appelle quoi ?
242. L : Je sais plus...
243. T1 : Vous retenez, vous vous rappelez ce que c'est là, ces C_m^k , il y a une autre notation maintenant, maintenant vous utilisez $\binom{m}{k}$... Ou dans l'autre sens.
244. L : Oui, c'est... Ouais.
245. T1 : C'est ce que l'on appelle les coefficients binomiaux.
246. L : Je sais plus le nom.
247. T1 : Ca, ça vient quand vous développer $(a + b)^m$. Vous vous rappelez comment ça s'écrit $(a + b)^m$?
248. L : Euh...
249. T1 : Vous pouvez regarder hein, si vous trouvez quelque part.
250. L : Ouais, je sais plus le coefficient c'est $m - 1$ par enfin... Y a des factorielles aussi, je sais plus.
251. T1 : Vous avez rencontré ça $(a + b)^m$?
252. L : Oui, oui.
253. R : Oui, oui.

254. T1 : Est-ce que vous l'avez rencontré au lycée déjà ? Est-ce que ça vous dit quelque chose ?
255. L : Au lycée, ben on l'avait... Ben c'était pour, ouais, pour développer $(a + b)$. Mais on l'avait pas à la puissance m . On l'avait à la puissance trois, quatre.
256. R : Ouais.
257. L : On utilisait comme ça, les coefficients binomiaux, avec le triangle de Pascal.
258. T1 : D'accord.
259. T : C'est au lycée ! pas moi, oula...
260. L : En terminale, on faisait ça. Et là, je sais que quand c'est à la puissance m , il y a une formule pour trouver les coefficients.
261. T1 : Hum, donc euh là, c'est cette formule binomiale qui est utilisée là.
262. L : Ouais.
263. T1 : D'accord.
- [Quelqu'un pianote sur le clavier]
264. L : C'est ça ?
265. R : $n!$ sur $(n - k)!k!$.
266. L : Je croyais que c'était un peu l'inverse mais bon.
267. T : Oui, mais après tu l'arranges comme tu veux. Tu l'as vu au lycée ça R ?
268. R : Non.
269. L : Cette formule là, je l'ai pas vu au lycée. Mais...
270. T : Ouais c'est ça hein, si k appartient à $[0, n]$.
271. L : Le triangle de pascal, il donne cette formule là.
272. T : Tu vas te blesser là R . C'est un peu fort pour toi... Je crois qu'il a plus d'encre hein, je voudrais pas être désagréable mais...
273. R : Tu pouvais me le dire avant !
274. L : Et ça me dit toujours pas pourquoi il arrive là, lui.
275. T : Non ?
276. L : [Inaudible] C'est ça regarde... Ouais, après c'est de la forme que je connais.
277. T : Et ça, là regarde... C'est un peu ça.
278. L : Oui, oui, oui, c'est la formule générale.
279. T : Mais c'est la formule générale, ça. Ah, la formule générale avec les sommes, tout ?
280. L : Parce que là, si je, si je refais, par rapport à ce qu'il y a marqué si je refais la formule... $m...$ par $(m - k)!...$ Sur $k!...$ T'es d'accord.
281. T : Hum.
282. L : Ok... Comment ça s'appelle déjà. Ca marche quand même.
283. R : Oui, oui. Dans les deux sens, tout dépend aussi le couple, comme il nous a dit, le couple (m, k) , on utilise maintenant le couple (k, m) . C'est pour ça que ça fait ça.

284. L : Je sais pas je croyais que c'était la même chose [Inaudible]. Il développe tout ça à la puissance m ... Ouais à la fin les coefficients sont nuls parce que on a $(m - m)$ qui fait zéro.
285. R : Hum ?
286. L : On a des coefficients...
- [Pause]
287. L : C'est quoi la [Inaudible] pour vous de, genre quand x tend vers l'infini de $1/x^x$.
288. R : $1/x$, quand x tend vers quoi ? l'infini ?
289. L : L'infini. $1/x^x$. Le x puissance x .
290. R : Comme ça ?
291. L : Ouais. Donc ça nous fait $1/x$ le tout puissance x aussi. C'est la même chose. En l'infini je sais plus ce que l'on fait.
292. R : ça va tendre vers zéro.
293. T : Je crois que... Tu crois qu'il calcule quelque chose, là ?
294. R : Ca tend vers zéro.
295. T : Ah oui, non d'accord.
296. L : Ca tend vers zéro. Je sais pas pourquoi mais ça tend vers zéro.
297. R : Il suffit de calculer à l'intérieur de la parenthèse en premier... 1 sur l'infini zéro, zéro puissance l'infini zéro.
298. L : Ouais... Ouais.
299. R : Si c'est un nombre compris entre zéro et un, à l'infini, ça fera toujours zéro.
300. L : C'est vrai.
301. R : Y a une suite ?
302. T : Ben oui, il y en a partout !
303. L : « On constate que ce terme augmente avec l'augmentation de m car... »
304. T : Oui, tout augmente en ce moment.
305. T : Attend, le $(n + 1)$ ième terme il sort comme ça ? Le C , attend le coefficient de ça, on tombe à ça ?
306. R : Non, non, non... le $(n + 1)$ ième terme, celui là.
307. T : Oui.
308. R : Juste celui là. Parce que ça, c'est la somme de ça.
309. T : Ouais, mais ouais, mais si tu prends le $(n + 1)$ ième tu peux... De ça tu sors, tu sors le terme que tu veux.
310. R : Oui, ben c'est pour ça, $(n + 1)$...
311. T : Bon attend, quand tu identifies, ça, c'est ça ?
312. R : C'est ça.
313. T : Non c'est ça.

314. R : Non, ça, c'est ça. Ca, c'est ton coefficient.
315. T : C'est ça qui est le coefficient ou c'est ça qui est le coefficient ?
316. L : Le plus gros truc là.
317. R : Le plus grand truc, le coefficient, c'est ça.
318. T : [Inaudible].
319. L : Je te dis là, le coefficient, il est égal à m par $(m - k)$ factorielle/
320. R : Et ainsi de suite.
321. L : Sur... Sur euh...
322. T : Non, ben non.
323. R : Là, ça devrait être.
324. T : Là, le coefficient c'est m , là, c'est $m(m - 1)/2$, là, c'est le gros truc encore et après ça. Je veux dire euh... Ca, ça devient ça, hein. Regarde, factorielle / factorielle, ici on a m puissance euh...
325. L : Attends pourquoi ?
326. T : C'est ça qui au fur et à mesure tend vers un.
327. R : Ou l'inverse, c'est pareil.
328. T : Non, non, non. Donc ça, c'est bien un coefficient, ça. Là, le coefficient il est gros, là il est petit... Enfin en taille.
329. L : Moi, j'ai pas compris la dernière égalité de la page.
330. R : Celle-là ?
331. L : J'arrive pas à voir qu'est-ce que c'est que ce... Ah, attends... Qu'est-ce que c'est... Ah si c'est bon.
332. T : Euh, ça, ça devient ça ?
333. L : Ouais, parce que là t'as ton m , le m ici, là ça se simplifie, ça fait $1/(m - 1)$...
334. T : Ouais.
335. L : Bon, déjà dans le premier ça marche, on se retrouve avec $(m - 1)/m$, ça te fait $1 - 1/m$. D'accord non ?
336. T : Attends, faudrait l'écrire je crois.
337. R : Vas-y écris.
338. L : Si t'as, si tu te retrouves avec euh...
339. T : [Inaudible] D'accord.
340. L : Si tu te retrouves avec ça, t'es d'accord ?
341. T : Oui.
342. L : Ca, c'est bien...
343. T : [inaudible] Ok.
344. L : Euh... Et après...

345. T : Et ben, ça marche pareil pour tous les termes. Parce que là on a $(m - 1)$ après $(m - 2)$, $(m - 3)$... Ouais. Mais il sort de où le moins là ? Ah il sort de...
346. R : Parce que là tu dois avoir du plus, ça fait $-n + 1$, quand tu mets normalement.
347. L : Non, mais je suis d'accord... C'est le m qui me pose problème...
348. T : Tiens, écris au crayon de papier après.
- [Inaudible]
349. L : Moi j'ai un problème, c'est que je vois pas pourquoi au dénominateur, pourquoi on a m et pas m^{m-1} ? Parce que...
350. T : Moi, j'ai un problème avec les signes. On a tous un problème avec le rang n je crois bien...
351. L : [Inaudible].
352. R : ...Si tu l'enlèves, tu as un moins... Tu prends sur m voilà... m/m plus $1/m$. Le moins, il part devant toute ta fraction.
353. T : Ouais, on a pas besoin de parenthèses parce que c'est la barre de fraction qui fait la parenthèse.
354. R : Oui, oui.
355. T : Simplement... Oui, c'est-à-dire qu'il développe pas complètement, il [inaudible]. Mais après, ça, il le laisse euh... Comme ça.
356. R : Oui, oui, oui.
357. L : Mais ça ne résout toujours pas mon problème.
358. R : Ouais, le $(n + 1)$ qu'il y a pas là, $(n + 1)$... Enfin là, en bas, tu veux dire le $(n + 1)$?
359. L : Non, c'est parce que j'arrive pas à voir comment on se retrouve avec un m là, au dénominateur.
360. T1 : Dans le terme là spécifique. Vous regardez un terme en particulier, c'est ça ?
361. T : Ouais, ouais, ouais.
362. T1 : Vous comprenez pas l'égalité entre...
363. L : C'est sur m , dans chaque partie de la multiplication... Et j'arrive pas à voir pourquoi c'est pas m puissance $m - 1$ ou quelque chose comme ça. Moi je verrais plutôt ça.
364. T : Tout à l'heure c'es toi qui disait... Mais tu l'as dit tout à l'heure.
365. L : Ouais ? Mais non.
366. T1 : Essayez d'expliquez...
367. L : Moi je suis parti du fait que au dénominateur on avait m , mais j'arrive pas à voir pourquoi on a m .
368. T1 : Et là, on a m^n , c'est ça ? Au dénominateur.
369. L : Ouais.
370. T1 : Comment on fait, vous avez pas une idée ?
371. T : Vu que à chaque fois on a m , là on doit avoir $(m - 1)/m$, ici après on a $(m - 2)/m$... on a m , m , m , m , et vu que c'est des produits ben on a $n m$.
372. L : J'ai pas suivi !

[Inaudible]

373. R : là, si tu re-développes tu vas retomber sur la même chose, sauf que tu n'auras pas le m ici, tu auras $m - 1$ là.
374. T : Ouais, c'est pas vraiment... Ouais, ça change rien.
375. T1 : Vous pensez qu'il n'y a pas assez de termes à droite c'est ça ? Je comprends pas la...
376. L : Non c'est parce qu'au dénominateur par exemple si je [inaudible] ici, le m qui au numérateur là et le m^m qui est là pour moi ça me donnerait $1/m^{m-1}$.
377. T1 : Ouais d'accord. Et ensuite...
378. L : Ben ça, je le retrouve nulle part après. J'arrive pas à voir comment il disparaît. En tout cas...
379. T1 : C'est toi L qui a expliqué ça tout à l'heure ?
380. T : Ouais.
381. L : Je suis parti du fait que/
382. T1 : Bon déjà ça c'est le cas, c'est un des cas là c'est $(m - 1)$...
383. L : Hum, hum.
384. T : Là, je pense qu'on a ça et puis fois après, c'est ça, un truc comme ça ?
385. L : Ouais sauf que c'est m^m au dénominateur.
386. T : Ouais, mais c'est parce que regarde m fois m fois m fois m fois m ...
387. L : Ah ouais, d'accord, ok... Ok d'accord.
388. T : $1/2$ fois $1/2$ fois $1/2$ fois... ça fait $1/2^n$.
389. L : Ouais d'accord, ouais ok.
390. T1 : Donc euh, jusque là, ça... ?
391. L : Hum.
392. T : Pour l'instant on arrive à...
393. T1 : A suivre ?
394. T : A suivre ?
395. T1 : Hum.
396. T : On a pas encore tourné la page !
397. R : Vas-y tourne.
398. T1 : Ouais, passez au verso.
399. T2 : Ca va ?
400. T1 : Ca va, ouais.
401. T : On a un peu de mal pour la première page.
402. T1 : Oui, ils viennent de tourner la page.
403. T2 : Et alors ça marche, ils sont d'accord avec la preuve ?
404. T1 : Jusque là... Est-ce que vous êtes tous convaincus tous les trois ?

405. L : Ouais, pour l'instant.
406. R : Ouais.
407. T : Pour l'instant, ouais.
- [Ils lisent la preuve]
408. T : Ouais les termes en k/m c'est..., c'est ça. « k » sur « m », c'est cette partie là... $1/m^k$.
409. R : [Inaudible] Là, on a du factoriel.
410. T : Oui c'est le m .
411. R : Tu vois, ils ont inversé.
412. T : Non, ils ont pas inversé !
413. R : Ben ils ont juste, si.
414. T : Ben non.
415. R : Par rapport à cette ligne là. Tu vois le factoriel il est sous [Inaudible].
416. T : Ouais, mais ça se fait.
417. R : Ils ont juste inversé.
418. T : Non mais ça se fait tout seul on a dit.
- [Inaudible]
419. T : $3/2$ fois $1/4$ et $1/4$ fois $3/2$ c'est un peu la même chose hein.
420. R : Oui.
421. T : Ouais donc là, ils ont échangé...
422. R : Ils ont échangé parce qu'on peut prendre le dernier terme, on peut simplifier ça par ça. On sort le $n!$ et on a plus que du m . Tu simplifies énormément.
423. L : Vous en êtes où, là, de la preuve ?
424. R : Nous on est là.
425. T : C'est une « preuve » ou c'est une « preuve » [Il joue sur les prononciation].
426. L : Hum, hum. Vous en êtes où ?
427. T : Au début, là ! Et toi tu es arrivé où, là ?
428. L : Je suis vers un truc là... Une grande série de chiffres, ça me fait peur.
429. T1 : Vous en êtes où, là ? Donc là, vous avez compris les premières étapes ?
430. L : Les premières, oui.
431. T1 : La première, ça a été de transformer la suite u_m qui était un produit en une somme écrite comme ça. Alors qu'est-ce qu'il fait ensuite ? Vous pouvez, je vais vous laisser un recto verso comme ça de façon... Vous pouvez regarder en même temps.
432. L : Bon alors là, il y avait écrit ce qu'il a trouvé tout à l'heure.
433. R : Ouais ça, c'est la même chose ouais. Ouais non, là, il le majore.
434. L : Après ça c'est inférieur ou égal à/
435. R : La même chose sans/

436. L : sans le coefficient... Si je suis pas d'accord encore, c'est grave ou...
437. R : Oui, y a des chances oui.
438. L : Parce que les coefficients, ils sont pas toujours supérieurs à un.
439. R : Ceux-là ?
440. L : Ouais.
441. R : Ben... Justement.
442. T : Justement ben ouais si ils sont plus petits que un ça veut dire que [Inaudible].
443. R : Ils sont inférieurs ou égal à un, c'est obligé. C'est ce qu'ils nous disent justement, c'est inférieur ou égal à un. Sinon, c'est pas possible.
444. T : Ben ouais, sinon tu peux pas faire ça. Vu qu'ils sont plus petits que un, ça veut dire que... Si tu multiplies $1/2$ par quelque chose de plus petit que un, on a quelque chose de plus petit que $1/2$.
445. R : Parce que ça, si tu le simplifies...
446. L : D'accord, ben en fait... Non je croyais qu'ils étaient supérieurs à un, les coefficients. Ouais, mais quand tu regardes.
447. T : Ben non, ils peuvent pas parce que m fois m sur m^2 , on aurait un, et là on a $m(m - 1)$.
448. L : Ouais, ouais, mais je sais... Pour moi/
449. R : [Inaudible] C'est toujours inférieur à un.
450. L : Pour moi, je parlais sur le fait que... Parce que je voyais le triangle de Pascal et tout est supérieur à un dans le triangle de Pascal, c'est pour ça. Mais non, ouais, ben sinon dans ce cas là effectivement...
451. T : Donc on peut faire ça, on peut faire ces calculs là comme ça. Ca c'est valable comme truc.
452. L : Dans ce cas là, pourquoi ça va faire euh...
453. T : [Inaudible].
454. R : Ouais, ça c'est facile à démontrer.
455. L : Pourquoi c'est facile à démontrer ?
456. R : Quoi, quoi ?
457. L : Chaque chose en son temps.
458. T : Si jamais tu fais tomber ma trousse...
459. T : Oui, c'est inférieur.
460. L : Ouais. Hum, hum.
461. R : C'est le développement limité de e .
462. T : Donc si tu mets $x = 1$...
463. R : $x = 1$.
464. T : Tu mets $x = 1$, ça fait ça, ça donne ça.
465. R : Ouais, si on prend le $x = 1$.
466. T : $1 + 1/1$ et...

467. L : Ouais, ouais, ouais.
468. R : Ouais, c'est ça...
469. T : $1 + 1/1 + 1/2 + 1/3! \dots$ Ouais.
470. L : Ouais, c'est ça.
471. T : J'aime bien les maths comme ça. C'est sympa comme ça. Puis, ça fait un peu reprendre tout ce qu'on a vu.
472. R : Oui.
473. T : Tout ce qu'on a vu et retenu ou pas.
474. L : [Inaudible].
475. T : Donc là, elle est croissante. On l'a vu qu'elle était croissante avant. Là, on montre qu'elle est majorée.
476. R : Hum.
477. T : Et elle est donc croissante et majorée. Donc elle converge.
478. R : Converge.
479. L : « La suite est donc croissante... »
480. T : Elle converge vers où ? Vers e ?
481. L : « ... et majorée, elle converge ».
482. T : Ouais... La page d'avant c'est marqué.
483. L : « On montre maintenant que Un converge vers e . En effet, si on regarde... »
484. T : Après on montre que ça, ça converge vers e .
485. R : Ca, on a dit que c'était ça. Ok, d'accord. Et tous les termes, si on prend le dernier terme par exemple, on a vu qu'on pouvait le factoriser comme ça, lorsque m tend vers l'infini ça fait $1 - 0$ à chaque fois, donc ça fait $1/n!$.
486. T : Moi il y a quelque chose qui me gêne dans la preuve. C'est que là, on est en train... On a dit que cette preuve, elle définissait e .
487. R : Hum.
488. T : Mais on utilise e pour le définir. En fait, on utilise/
489. R : On utilise le développement limité de e . Tu utilise cette suite et ça tu détermènes que c'est le développement limité de e . Donc tu en concluras que c'est e .
490. T : Tu utilises cette suite comme ça euh... ?
491. R : Ben non, on a utilisé des coefficients, on est tombé sur cette suite, en majorant.
492. T : Parce que là, ça veut dire que le gars qui a fait ça, il savait pas que ça, c'était le développement limité de e . T'imagines... Son boulot...
493. L : Ben si, parce qu'il l'a fait.
494. T : Ah voilà, et ben ça va pas. Si il l'a fait c'est qu'il le savait et il le fait pour savoir si il peut le faire. C'est un serpent... On se mord la queue quoi.
495. T1 : Alors où en êtes vous ?

496. L : Au serpent qui se mord la queue... Vers la fin.
497. T : Hein ?
498. L : Au serpent qui se mord la queue.
499. T1 : Bon la preuve... La première grande partie, vous avez compris ce qui été fait là. Disons qu'on pourrait le décomposer en plusieurs parties mais...
500. T : Ouais.
501. T1 : Mais jusque là, vous avez fait jusqu'au fait que la suite converge c'est ça ?
502. T : Hum.
503. L : Ouais.
504. T : C'est croissante... Convergente... Et vers où.
505. T1 : Hum. Est-ce que vous êtes tous d'accord que ça se décompose comme ça les étapes ? On peut regarder un peu les étapes avant de finir avec la dernière étape.
506. L : Hum...
507. T1 : Toi, tu penses que ça se décompose comme ça. Allez chacun doit parler là. Vas-y, tu décomposerais ça comment ? Le début, qu'est-ce que fait Cauchy ?
508. R : Ben il développe sa somme.
509. T1 : Hum.
510. R : Donc euh... Les coefficients binominaux...
511. T : Les coefficients binominaux, binominaux [Rires].
512. R : Donc euh... il multiplie par $1/m^k$...
513. T1 : Hum.
514. R : Donc après, il réorganise ses dénominateurs pour que dans le coefficient il n'y ait plus que du m . Pour pouvoir simplifier ensuite, avoir une factorisation beaucoup plus simple.
515. T : Ouais, il met tout ce qui est en m d'un côté et...
516. R : En n ...
517. T : Enfin, en autre chose, il met de l'autre côté.
518. T1 : Est-ce qu'on peut considérer que ça, c'est une première étape à votre avis ?
519. L : Bon ouais, ouais.
520. R : Ben oui, c'est une simplification.
521. T : Ouais, c'est une simplification.
522. L : [Inaudible] Retrouver une forme qui est plus simplifiée à l'entrée, il faut, il nous faut quelque chose de reconnaissable... Donc euh... Justement après avec cette forme là, on... Il trouve euh, il trouve une nouvelle égalité pour euh, pour permettre [Inaudible].
523. T : En fait, il utilise ça pour montrer qu'elle est, qu'elle est... Vers la fin, la finalité c'est montrer qu'elle est croissante.
524. T1 : [Inaudible] Ca pour montrer qu'elle est croissante.
525. T : Ce qu'il fait, il doit quand même avoir une idée de ce qu'il veut montrer quand même.

526. L : Ben oui, forcément.
527. T : Il utilise des règles qui devaient déjà être établies puisque il peut pas. Là on, il veut, il montre qu'elle est croissante. Ensuite il montre qu'elle est majorée. Donc, on en déduit... Enfin la règle dit qu'elle est... qu'elle converge. Si elle est croissante et majorée, il y a une règle qui dit qu'elle converge. Et ensuite, il essaye de voir vers où elle converge.
528. T1 : D'accord, alors vous en êtes à cette étape là et je vous laisse réfléchir. Voir si vous êtes... Pour l'instant là, toutes les précédentes différentes étapes, vous êtes convaincus tous les trois ?
529. T : Ouais ça va.
530. L : Ouais je pense aussi.
531. R : Moi aussi.
- [Digressions non transcrites]
532. L : T'es toujours pas convaincu toi que le serpent il s'est mordu la queue ?
533. R : Euh... Non.
534. T : Moi, je suis pas convaincu que le serpent ne se morde pas la queue. Parce qu'on utilise e , on utilise e pour voir si on peut utiliser e , en fait. J'ai l'impression que ça donne ça.
535. R : Ben là, la différence c'est que y a un « petit o » encore.
536. L : Ouais, ben...
537. T : Mais il est où...
538. R : Là, il y a [Inaudible] c'est pour ça que c'est inférieur à e .
539. L : Ouais, voilà.
540. R : Et après, on essaye de voir si...
541. T : Ouais mais, c'est pas strictement inférieur c'est égal, inférieur ou égal.
542. R : Hum... Le « petit o », il tend vers zéro.
543. L : Ouais.
544. R : Lorsque m tend vers l'infini.
545. T : [Inaudible].
546. L : Cherche pas, t'as tort.
547. T : C'est comme les suites, comme les récurrences putain...
548. R : [Rires].
549. T : J'adore les récurrences.
550. L : Ok.
551. R : [Inaudible] T'en es où ?
552. L : Là, je suis ici.
553. T : « Le $(n + 1)$ ième terme tend vers $1/n!$ quand m tend vers l'infini »...
554. L : Attends c'est la somme de...
555. R : Ca, c'est les...

556. T : Celui-là ?
557. R : Non, celui juste avant.
558. T : Celui-là ?
559. R : Ouais. C'est logique par rapport à ça. C'est celui-là, le $(n + 1)$ ième terme. On a dit que c'était ça/
560. L : Ouais.
561. R : Quand m tend vers l'infini/
562. L : Ouais, d'accord.
563. R : Chaque fois la somme ça fait zéro, donc ça fait un à la puissance n , donc ça va faire $1/n!$. C'est bien ce qu'ils nous disent.
564. L : [Inaudible].
565. R : Ouais.
566. T : Faudrait des renvois.
567. R : Mais c'est la suite euh... Tu mets une étoile ici.
568. T : Vers e ...
569. R : Limite plus l'infini.
570. L : Alors...
571. T : Ouais mais là, tu vois, là on met vers e , c'est gentil. C'est moi ça qui... Si on avait mis euh... vers π , ça tendrait vers π ?
572. R : Non, c'est pas le développement de π ça.
573. T : Ouais, voilà, on utilise un développement limité.
574. R : Ben oui.
575. T : Hum et tout à l'heure, on a dit [Inaudible].
576. L : Tu connais le développement limité de π ?
577. T : Oh ben ça m'a jamais empêché de dormir.
578. L : T'es foutu.
579. T : J'irai voir sur Internet après.
580. R : Non mais si ça se trouve il a... Comme nous, il a utilisé le résultat graphique et après il essaye de le prouver expérimentalement parce qu'il a déjà sa réponse mais il faut le prouver.
581. T : Je sais pas... Enfin bon.
- [Pause]
582. T : Parce que ça c'est le développement limité de l'exponentielle... Oui. Il manque le, il manque le petit o.
583. T2 : Vous en êtes à quelle étape ?
584. T : L'étape là.
585. R : Oui.

586. T2 : D'accord.

[Pause]

587. T2 : Et alors, vous avez eu le temps d'y réfléchir ou vous êtes euh...

588. L : On est en train de réfléchir... Mais moi, j'ai du mal à retrouver l'égalité finale, ça me...

589. T : Ouais...

590. L : C'est un peu un mélange de tout ce qu'on a vu avant. Tout est...

591. T : Ben ouais, c'est pour ça qu'on le prouve, tout ce qu'il y a avant.

592. L : Oui voilà. Mais après, j'arrive pas à refaire l'association... Tout ce qu'il y a plus haut avec euh...

593. T2 : Alors, qu'est-ce qu'il fait... Avec quelle égalité tu es d'accord, pas d'accord ?

594. L : Ben j'arrive pas à retrouver par exemple l'égalité de la limite quand m va vers l'infini/

595. T2 : Ca égal ça ?

596. L : Voilà, ouais.

597. T2 : Est-ce que vous êtes d'accord que le $(n + 1)$ ième terme tend vers $1/n!$.

598. L : Ca, je suis d'accord.

599. T : Ca vient de la page d'avant. Un truc qu'on a montré la page/

600. T2 : Ok, d'accord.

601. L : C'est la limite de ça, là.

602. T2 : Ok. Est-ce que vous êtes, si le $(n + 1)$ ième terme dans ce truc là, il tend vers $1/n!$... Celui là c'est le, c'est le $(2 + 1)$ ième. Donc d'accord ?

603. L : Ouais.

604. T2 : n c'est le $(n + 1)$ ième terme, ça c'est deux, c'est le $(2 + 1)$ ième terme. Donc il est censé tendre vers ?

605. L : Vers $1/2$, $1/2$.

606. T2 : $1/2!$, $1/2$. D'accord, celui-ci est censé tendre vers...

607. L : $1/3!$.

608. T2 : $1/3!$ d'accord. Ca c'est les quotients, on pourrait regarder que les termes de...

609. L : Hum, hum.

610. T2 : D'accord. Ici, il va y avoir un m^3 , il y a aussi un m^3 au dénominateur donc ça va tendre vers un, donc ça tend vers $1/3!$... D'accord ? Donc cette égalité là, elle essaye de dire ça, elle essaye de dire que les termes là, ils tendent vers $1/n!$ et il les remplace ici.

611. L : Hum.

612. T2 : C'est un truc comme ça qu'il semble faire hein.

613. L : Ouais, ouais.

614. T2 : Et celle de, la deuxième égalité « $= e$ » est-ce que vous voyez d'où elle vient ?

615. T : Non, c'est ça le problème.

616. T2 : Ok. Est-ce que vous aviez regardé le rappel ?
617. L : Oui.
618. T2 : Le rappel il dit quoi ?
619. T : Que la limite de la somme de $k = 0$ à n de $1/k!$ tend vers e quand n tend vers plus l'infini.
620. T2 : Ok.
621. L : Ouais.
622. T2 : Donc la somme de $1/k!$ tend vers e .
623. L : Ouais, c'est ce qu'on a.
624. T : Hum. La somme de $1/k!$ tend vers e , ben ouais. Mais qu'est-ce qu'on fait là ? On prend ça pour prouver euh... Ca c'est la démonstration de ça ou on utilise ça pour démontrer ça.
625. T2 : Non, ça c'est un rappel, d'accord ? C'est pour ça si je l'ai encadré ici c'est pour dire que vous avez le droit d'utiliser ça.
626. L : Hum.
627. T2 : Que la limite de ça c'est e .
628. L : Donc dans ce cas là, ouais... Parce que là, c'est exactement...
629. T : Ben ouais, c'est ça que je disais que le serpent se mordait la queue tout à l'heure.
630. L : [Inaudible].
631. T2 : Oui. Ok. Bon alors moi, ce que j'aimerais que vous discutiez maintenant c'est, vous avez peut-être un peu d'avance sur les autres. Les autres sont pas encore allés jusqu'à cet endroit de l'analyse. Ce qui serait intéressant, pour chaque étape est-ce qu'elle vous convainc ou pas quoi ? D'accord ? Vous venez de voir à peu près ce qu'il est en train de se passer et si vous, vous l'aviez fait...
632. L : Hum, hum.
633. T2 : Est-ce que c'est un raisonnement que vous auriez pu faire ? Est-ce que c'est un raisonnement que vous trouvez valable ? Est-ce que c'est un raisonnement qui vous semble poser des problèmes, que vous connaissez, que vous connaissez pas, d'accord ?
634. T : Ben ça utilise des trucs qu'on connaît...
635. T2 : A priori, ça utilise pas mal de trucs que vous connaissez oui.
636. T : Il les arrange bien après, il les arrange comme il faut pour mettre tous les m à droite, les coefficients... Parce qu'en fait les termes se sont croisés parce qu'au début on a $1/m^2$ puis $m(m-1)/2$ après il arrange pour mettre les, le $1/2$ d'un côté, $m(m-1)/m^2$ de l'autre. Suite à ces arrangements, il faut déjà avoir une idée de là où on va pour pouvoir les faire ces arrangements...
637. T2 : Ca, c'est un peu expert quoi ?
638. T : Ouais.
- [Pause]
639. T2 : Bon, euh... Est-ce que vous pouvez regarder, si vous aviez à calculer cette limite là, sans refaire le, le, sans reprendre son raisonnement à lui/
640. L : Comment on ferait ?

641. T2 : Qu'est-ce qu'il se passe quand m tend vers plus l'infini ? A votre avis... Déjà, vous voyez qu'il y a des petits pointillés dans la somme hein ?
642. R : Hum.
643. L : Oui.
644. T2 : Qu'est-ce qu'il se passe sur ces pointillés quand m tend vers l'infini ? Et qu'est-ce qu'il se passe pour chacun des termes quand m tend vers plus l'infini ?
645. T : Ca tend...
646. T2 : Il y a combien de termes dans cette somme ?
647. L : Y a...
648. T : Y en a $m + 1$.
649. T2 : $m + 1$. Est-ce que vous êtes d'accord les autres ?
650. R : Hum.
651. T : $m + 1$.
652. T2 : $m + 1$ termes, oui ? Non ?
653. R : Ouais.
654. L : Moi je... moi je suis pas convaincu parce que... y en a $n + 1$?
655. T2 : m, m , j'aurais du choisir des lettres plus...
656. L : $m + 1$.
657. T2 : Donc qu'est-ce qu'il se passe sur... D'accord ou pas L ?
658. L : Non, je vois pas.
659. T2 : Ben on peut le reprendre. Est-ce que vous êtes d'accord que c'est le même calcul qui est écrit que celui-ci par exemple ?
660. L : Ouais.
661. T : Hum, hum.
662. T2 : Ici, quand tu fais cette, donc c'est une somme, il va y avoir le nombre de termes qu'il y a dans cette somme là.
663. L : Hum, hum. Oui, oui, oui.
664. T2 : Y en a combien de termes dans cette somme ?
665. L : Y en a $m + 1$ ouais.
666. T2 : Donc ça marche, ok. Donc revenons ici, est-ce que vous pouvez essayer, sans reprendre exactement le même raisonnement que lui, de voir ce qu'il se passe ici quand m tend vers plus l'infini à partir de cette égalité. Vous m'avez dit qu'il y avait $m + 1$ termes dans l'égalité, qu'est-ce qu'il se passe quand m tend vers plus l'infini sur le nombre de termes par exemple.
667. L : Le nombre de termes...
668. T2 : Ben y a combien de termes ?
669. T : Combien y a de termes quand m tend vers plus l'infini...
670. L : Toujours le même nombre de termes, sauf qu'il y en a qui deviendront négligeables.

671. T2 : Le même nombre de termes sauf qu'il y en a qui deviendront négligeables, c'est-à-dire combien de termes si c'est le même nombre ?
672. L : Ben $m + 1$.
673. T2 : $m + 1$?
674. T : Ouais, mais on a dit que m tendait vers plus l'infini. Plus l'infini plus 1 c'est plus l'infini.
675. L : Ah, d'accord ouais...
676. T2 : Alors qu'est-ce qu'il se passe, vous en pensez quoi ? Quand m tend vers, disons sans regarder vers l'infini, quand m grandit, qu'est-ce qu'il se passe par rapport au nombre de termes ? Disons que m grandit de un. Qu'est-ce qu'il se passe ?
677. R : Il y a un terme de plus.
678. T : Ben, on a un terme de plus.
679. T2 : L ?
680. L : Ouais, ben ouais.
681. T2 : Oui, dans cette somme là, si vous faites augmenter m de un, vous allez avoir un terme de plus. Ok ?
682. T : [Inaudible].
683. T2 : Dans le même temps ici, est-ce qu'il change ces termes là ? Quand m grandit ? Les premiers.
684. L : Les premiers ben non.
685. T : Non, je crois pas.
686. L : Euh, si.
687. T : Si ?
688. L : Si, ben si à chaque fois que m grandit euh, tout le développement change.
689. T2 : Est-ce que vous pouvez essayer de reformuler, quand m grandit, à la fois on a un terme de plus/
690. L : Ouais.
691. T2 : Mais en plus/
692. L : Tous les termes d'avant sont changés.
693. T2 : Tous les termes d'avant sont changés. Donc maintenant ce que je voudrais que vous regardiez, c'est qu'est-ce qu'il va se passer, de combien de termes on parle ici ? Dans cette égalité là entre limite de $(1+1/m)^m$ et $1+1+1/2!...$ Enfin la dernière égalité là.
694. L : Ben là, on a $m + 1$ termes donc euh...
695. T2 : Ici, il y a combien de termes ?
696. L : Y en a une infinité.
697. T2 : Une infinité hein. Donc on part, c'est pour voir un peu ce qu'il y a à analyser hein, on part d'un problème où on a un certain nombre de termes qui bougent avec m /
698. L : Hum, hum.
699. T2 : Ce certain nombre de termes il grandit aussi quand m grandit/

700. L : Hum.
701. T2 : Qu'est-ce qu'il va se passer quand m va tendre vers l'infini, quand on va passer à la limite ?
[Pause]
702. T2 : Je vous laisse réfléchir un petit peu.
703. T : Vous avez compris la fin ? Quand m grandit le nombre de termes grandit mais chaque terme change. Quand m tend vers l'infini...
704. L : Hum...
705. L : Vous vous en sortez les gars ?
706. T : Hum ?
707. L : Vous vous en sortez ?
708. T : Non.
709. L : J'arrive pas à modéliser ce que ça va faire. Parce que quand m augmente, ça va rajouter un terme, on va modifier les autres d'avant.
710. R : Je comprends pas pourquoi ça va modifier les autres avant... Celui-là, tu veux dire si on est à...
711. L : Ben t'as toujours ton m qui apparaît dans les termes d'avant.
712. R : m tu veux dire ?
713. L : Par exemple si tu as trois/
714. R : Oui d'accord, oui ça y est si tu passes au rang quatre d'accord.
715. L : Si tu reprends ceux d'avant, tous tes termes ils vont être changés.
716. R : Oui mais quand tu fais la limite, regarde si tu développes, ça fait m^2/m^2 , ça fait un... Ca va changer... Enfin si tu calcules la limite/
717. L : Comment ?
718. R : Si tu calcules vers l'infini, ça change rien, m^2/m^2 ça fait 1, donc on aura toujours que le premier chiffre. Ca nous rajoutera simplement $1/(m+1)$ en fait... Devant l'infini c'est négligeable.
719. L : Euh... Ouais là, c'est vrai
720. R : Tous les autres se modifient mais ils sont de même puissance donc euh... Ca fait rien.
721. T : Non moi j'ai du mal... Passer de là à l'infini euh...
722. T2 : Qu'est-ce que vous arrivez à en dire ?
723. L : Ben on est en train de se dire que ben, en fait, les termes en eux-mêmes ils changent...
724. T2 : Ouais.
725. L : Mais leur limite elle change pas.
726. T2 : Ouais. Ca a du sens de parler de limite d'un terme ?
727. L : Hum... Oui.
728. T2 : Ouais. Ils ont des rapports entre eux les termes ou...
729. L : Hum...

730. T2 : C'est des termes de quoi d'ailleurs... Bon, Ok. Donc ce que tu dis : les termes ont la même limite même si ils bougent.
731. L : Ouais.
732. T2 : Ok.
- [Pause]
733. L : Et en fait/
734. T2 : Oui, vas-y.
735. L : Parce que en fait, ben la, la limite de ce qu'on cherche, de $(1 + 1/m)^m$, ça va être la limite de chaque terme...
736. T2 : Ouais.
737. L : Qu'on va sommer. Et si on dit que justement les autres termes précédents, d'un autre rang, ont toujours la même limite et qu'on rajoute un terme, nous ce qu'il faudrait montrer pour montrer que ça tend vers quelque chose c'est que en fait nos termes, la forme de nos termes c'est une suite décroissante...
738. T : Le terme, le terme qui suit euh... le terme $n + 1$ est plus petit que le terme n .
739. L : Ouais.
740. T : Les termes sont plus petits. Ca, ben on le voit, on le voit c'est clair.
741. L : Hum.
742. T2 : Ouais. Et vous pensez donc qu'il est nécessaire que le terme que l'on rajoute quand m augmente de un...
743. L : Soit plus petit que...
744. T2 : Soit plus petit que ?
745. L : Que les termes précédents.
746. T2 : Que les termes précédents.
747. L : Que chacun des termes précédents.
748. T2 : Pourquoi on a besoin de ça ?
749. L : Ben pour que à la fin ils deviennent de plus en plus petit et...
750. T2 : Ouais.
751. L : Et qu'ils..., pas qu'ils apportent moins d'information mais qu'ils soient plus négligeable et qu'on arrive à tendre vers... vers un terme constant, vers une limite.
752. T2 : Bon, bon. Est-ce que le terme qu'on rajoute, il va avoir une limite particulière ? Vous pensez qu'il va tendre vers quoi ? Si vous dites que les termes ils vont tendre vers quelque chose.
753. T : Ben ils vont tendre vers zéro.
754. T2 : Ils vont tendre vers zéro ?
755. T : Ben si ils sont de plus en plus petits.
756. T2 : Je pose une dernière question. Le $(n + 1)$ ième terme, il est arrivé à quel moment ? Quand on fait grandir m .

757. L : Le $(n + 1)$ ième terme...
758. T2 : Enfin on regarde n ... Est-ce que vous êtes d'accord qu'au départ il n'y était pas ? Si je regarde que pour $m = 1$, j'ai, j'ai juste ça.
759. L : Hum, hum.
760. T2 : D'accord pour $m = 2$, j'ai ça. Pardon, il faut peut-être que je me... Pour $m = 2$ je dois avoir ça, c'est ça ? Pour $m = 3$, j'ai ça.
761. L : Hum, hum.
762. T2 : D'accord ? Donc ici, il apparaît à quel moment celui-ci ? Quand m égal combien ?
763. R : Ben n .
764. T2 : Hum. Un truc comme ça hein.
765. R : Ouais.
766. T2 : D'accord, donc il apparaît bien à un certain moment.
767. L : Oui.
768. T2 : Mais vous venez de me dire que les termes qu'on rajoute, ils doivent tendre vers zéro. Celui-ci il a bien été rajouté à un certain moment ?
769. L : Ouais.
770. T2 : Et pourtant, il tend vers quoi.
771. L : Vers $1/n!$.
772. T2 : Ouais c'est zéro ça ?
- [Pause]
773. T2 : Bon, je vous donne des questions comme ça et je vous laisse en débattre et c'est bien si vous arrivez un peu à vous situer par rapport à ça. Donc vous êtes d'accord qu'on rajoute des termes quand m augmente. La question que je pose c'est ces termes là qu'on rajoute, ici après, en fait dans la limite, ils vont être par ici, sur les petits points...
774. L : Hum.
775. T2 : D'accord, après le dernier plus.
776. L : Ouais.
777. T2 : Est-ce que vous pouvez en parler un peu ? Ces termes qu'on rajoute en fait, ils vont servir à quoi, est-ce qu'ils interviennent ici, est-ce que c'est négligeable d'ailleurs après ce plus là ? C'est pareil que si on mettait zéro ?
778. T : Non. Non parce que plus on aura de termes et plus on va se rapprocher de la valeur de e .
779. T2 : Ouais donc est-ce que négligeable c'est le bon mot ?
780. T : Ben non c'est pas négligeable puisque ça rajoute de l'information.
781. T2 : Ouais bon quand même il semble que, d'accord ? Allez.
- [Silence puis digressions]
782. L : En fait moi, la seule chose que je vois/
783. T : J'ai faim.

[Rires]

784. L : La seule chose que j'arrive à voir c'est que... Ils seront pas négligeables/

785. R : Hum.

786. L : C'est que... Ils seront quand même de plus en plus petits.

787. T : Hum.

788. R : Hum. Oui, oui c'est sûr.

789. T : C'est d'ailleurs pour ça que e , vu qu'on a une infinité de termes qui s'ajoutent comme ça, on peut pas avoir une valeur exacte. C'est pour ça qu'on a une infinité de décimales 2,71 tac tac tac...

790. L : Hum, hum.

791. T : Avec des termes, des décimales qui s'ajoutent, qui s'ajoutent, qui s'ajoutent. De plus en plus petites donc un nombre de décimales de plus en plus loin de la virgule.

792. L : Hum, hum.

793. T : Puisque $1/240000$, ça va faire 0,0000... donc on va avoir des décimales en nombre infini de décimales.

794. L : C'est sûr mais...

795. T : D'où les pointillés, parce que si on a « égal e », on a forcément des pointillés. Si on avait pas des pointillés, si on était arrêté à $1/n!$ là.

796. R : Ca aurait empêché de/

797. T : On se serait rapproché de e ... Pour être égal à e , il faut forcément qu'il y ait des pointillés.

[Digressions]

798. L : Et sinon, après euh...

799. T : Ouais, c'est con parce tout ce qu'on avait compris avant...

800. L : Ouais en fait, je sais pas si... Ce que je suis en train de chercher.

801. T : Dis nous tout.

802. L : C'est comment on pourrait trouver notre limite en partant de ça, de cette ligne là, sans faire ça forcément.

803. R : Si on a pas du tout ça ? Si on calcule la limite quand m tend vers plus l'infini, ça va nous donner automatiquement ce qu'il y a en dessous. Parce que là, c'est le même, c'est comme la limite des polynômes. Le plus grand des [inaudible], ça fait m^2/m^2 , ça fait un, chaque fois ça va faire un, ça va tendre vers la somme de tous ces termes. C'est écrit là.

804. L : Et euh...

805. R : Et ? Ca te va pas ?

806. L : Si vite fait, mais bon... Ca va pas me faire dire que j'arrive à e quoi.

807. R : Ah mais non, on tombe au-dessus. Et après euh...

[Inaudible]

808. T : Que dire de plus ?

809. L : On cherche un peu dans le vide j'ai l'impression. Je sais plus trop où on va, on cherche et...

810. T : On est paumé quoi.
811. L : En court. Mais pour résumer c'est ça.
812. T2 : Bon.
813. T : On a du mal à aller, à aller à la limite quoi. Tout ce qu'il y a avant c'est bon parce qu'on est dans les cas finis avec un début et surtout une fin mais là euh, la limite elle est à l'infini euh... Pour voir ce qu'il se passe on a du mal.
814. T2 : Est-ce que c'est, est-ce que je saisis le problème je sais pas, est-ce que c'est la même chose c'est trois petits points ici et ces trois petits points ici.
815. T : Non, ah non.
816. T2 : Non, c'est quoi la différence ?
817. T : Celui-ci, c'est pour masquer la quantité de termes/
818. T1 : Ouais.
819. T : La quantité de termes finie qu'il y a là.
820. T2 : D'accord.
821. T : Et entre ces deux termes là, il y a une quantité finie quand même de termes.
822. T2 : Ouais, on sait pas combien, mais il y en a une quantité finie.
823. T : On sait pas combien. Ici, donc là, on en a une quantité finie/
824. T2 : Ouais.
825. T : Mais ici, on en a pas une quantité fini parce que, ici c'est [Inaudible] la limite les trois pointillés là. Et le fait qu'on ait le « égal e » aussi. Parce que si on avait pas les pointillés, on aurait pas « égal e ».
826. T2 : Oui, d'accord.
827. T : Enfin, je pense.
828. L : Il n'empêche que si n est assez grand, on aurait quand même quelque chose qui s'approcherait de e quand même.
829. T2 : Oui.
830. T : On aurait à peu près e . Mais on pourrait pas, si on a rigoureusement égal on a forcément les pointillés là. Parce que e c'est 2,71... C'est ce que j'ai dit tout à l'heure.
831. L : Ouais.
832. T : 2,71 avec une infinité de décimale/
833. L : Oui, d'accord, oui, oui. Je sais pas si on va arriver exactement à e .
834. T : Ben on arrive exactement à e /
835. R : En l'infini.
836. T : Pour la limite quoi.
837. R : [inaudible] Infini.
838. L : Ouais, certes.

839. T2 : Bon. J'avais prévu quelque chose mais j'ai oublié. Voilà : combien de termes est-ce que l'on regarde, quand vous regardez la limite... De chacun des, de...
840. T : Moi, je pense une infinité.
841. T2 : Pour pouvoir passer de cette ligne là à cette ligne là d'accord/
842. T : Il augmente le nombre de termes de façon infinie.
843. T2 : Combien de termes est-ce qu'on doit regarder pour passer de là à là ? Pour dire remplacer ça, celui-là par, remplacer $1/3!$ fois $m(m-1)/m^2$ enfin $m(m-1)(m-2)/m^3$ pour le remplacer par ça et etc etc. Sur combien de termes est-ce que l'on raisonne ?
844. T : Sur combien de termes on raisonne pour que $m(m-1)/m^2$ ça fasse un quoi.
845. T2 : Pour pouvoir passer ici là, prendre la limite. Pour pouvoir passer en fait de cette ligne là qui est une égalité à une ligne d'égalité en terme de, sur des limites. Combien est-ce qu'on a besoin de regarder de termes ? Sur combien de termes vous travaillez pour passer de là à là ?
846. L : Sur euh... n termes... $n + 1$ termes.
847. T2 : Où est-ce qu'il y a $n + 1$ termes... $n + 1$ ou...
848. T : $m + 1$, il y en a ici, $m + 1$.
849. T2 : Mais pourquoi tu dis n ? Tu dis $n + 1$?
850. L : $n + 1$.
851. T2 : Donc toi tu dis $n + 1$, lesquels ?
852. L : D'ici jusqu'à ici.
853. T2 : D'ici jusqu'à ici.
854. T : Ouais jusqu'à là.
855. T2 : Donc jusqu'au $(n + 1)$ ième terme de, du développement.
856. L : C'est ça, oui.
857. T2 : Donc tu dis que tu travailles sur $n + 1$, et ici tu arrives à combien de termes ?
858. L : Là, y en a une infini/
859. T : Là, y en a $n + 1$, là, y en a plus $n + 1$.
860. L : Ouais voilà.
861. T2 : Y en a combien ?
862. T : Moi, je pense il y en a...
863. T1 : [à T2] Tu viens voir deux secondes ?
864. T2 : [à T1] Ouais.
865. T2 : Donc on en a, a priori ici on en a une infinité hein.
866. T : Y en a une infinité.
867. T2 : Ce que j'aimerais que vous arriviez à dire, c'est est-ce que c'est possible et pourquoi et comment, en raisonnant sur $n + 1$ termes, d'avoir une conclusion sur une infinité de termes. Est-ce que c'est possible ou pas ça ?
868. T : En général oui, c'est comme ça, après est-ce que c'est possible ?

869. R : n est pas défini, si le n tend vers l'infini, si n tend vers l'infini, oui on peut conclure aussi sur l'infini.
870. T : Ouais non, si.
871. R : Là on a dit que c'était sur $n + 1$ termes, si n tend vers l'infini, on peut conclure sur l'infini ? Tous dépend de la valeur de n choisi.
872. T : Si « n » tend vers l'infini ?
873. R : Oui, là on a dit qu'on travaillait sur $n + 1$ /
874. T : Ouais.
875. R : Et on a dit on conclut sur une infinité de termes.
876. T : Hum.
877. R : Pour pouvoir conclure sur une infinité de termes il faut que $n + 1$ tendent vers l'infini.
878. T : Si $n + 1$ tend vers l'infini donc n tend vers l'infini, ouais.
879. R : Et même pas parce que le $n + 1$ il est là et il y en a encore après.
880. T : Hum, là il y en avait encore après aussi. Moi, je pense que c'est le $m + 1$ qu'il fait tendre vers plus l'infini puisque c'est tout ça qu'on fait, tout ça, c'est l'intégralité qu'on fait tendre vers l'infini pour avoir /
881. R : Mais c'est quoi plus l'infini ?
882. T : L'infini c'est... Je sais pas [Rires].
883. L : Tu disais R avant ?
884. R : Non rien. Juste avant ?
885. L : Ouais.
886. R : On travaille sur les $n + 1$, si on fait prendre à n la valeur l'infini on peut conclure sur l'infini.
887. L : Hum. En fait c'est la limite d'une limite quoi.
888. T : La limite d'une limite ?
889. R : Non, la limite d'une valeur infinie.
890. L : Ouais, mais on vient de dire que il y avait une, un nombre fini de termes.
891. R : Là, sur l'égalité, mais la limite.
892. L : Donc c'est bien la limite d'une limite.
893. R : Si la limite d'un nombre de termes fini est égale à la somme de termes infinie. C'est le problème qu'on a.
894. L : Et...
895. R : [Inaudible] Ca c'est égal à ça. On a un nombre de termes qui est fini.
896. T : On a un nombre de termes infini puisqu'on prend la limite quand m tend vers l'infini.
897. R : Hum.
898. T : Si on avait pris la limite quand m tendait vers zéro euh... On aurait pas eu...
899. L : Non mais [Inaudible].

900. T : Y en aurait eu deux [Inaudible]. Si on fait tendre m vers zéro, tout ça fait zéro, zéro, zéro...
Donc là, on a un nombre de terme infini parce qu'on prend la limite quand m tend vers l'infini/
901. R : On a la limite de ce nombre, en l'infini, ça tend vers zéro. Donc il faut qu'on ait autant de termes jusqu'à ce qu'ils tendent vers zéro. Mais $1/n!$ égal à zéro c'est impossible donc on a une infinité de termes. Hum ?
902. T : On fait tout tendre vers zéro, on fait tendre m , on fait tendre deux [Rires].
903. L : Non mais voilà, c'est...
904. R : Si on fait la limite de tout ça, c'est la limite de tout ça et on sait que la limite, la limite de $1/m^m$ en plus l'infini c'est zéro. Donc ça veut dire que la limite de ça c'est donc tout ça plus, plus zéro. [Inaudible] Plus zéro.
905. L : Hum.
906. T1 : Vous voulez encore combien de temps ? Avant de passer à la mise en commun.
907. L : Je sais pas.
908. T : Ben peut-être qu'ils nous débloqueraient ?
909. T1 : Vous arrivez à préciser un peu le souci ? Ou l'absence de souci ?
910. T : Quand il y a une absence de souci, tout va bien. Bon, je pensais qu'il y avait une infinité de termes parce qu'on prend la limite quand m tend vers l'infini.
911. T1 : Oui.
912. T : Et vu que là, on avait, on a $m + 1$ termes, donc c'est fini là ici... On a m qui tend vers plus l'infini donc on a une infinité de termes... Ouais et chaque terme, à l'infini, les termes tendent pas vers zéro mais les termes, les termes sont quand même de plus en plus petits. Donc ça veut dire, il faut...
913. T2 : Ok. Essayer de préparer un... Je vous laisse travailler encore cinq minutes, je vais voir avec les autres et si c'est ok pour fusionner...
914. L : Hum, hum.
915. R : C'est la somme d'une infinité de termes tendant vers zéro mais ils l'atteignent jamais.
916. L : Somme d'une infinité de termes qui tendent vers zéro ?
917. T : Non c'est le terme l'infini-ième...
918. L : Non, parce que le premier terme il tend vers un...
919. R : Non [Inaudible].
920. T : C'est pas ça, c'est l'infini-ième qui tend vers zéro.
921. R : Oui voilà, une somme de termes qui se rapprochent de zéro. Là, on a $1/2$ et après on a $1/6$ et ainsi de suite et on se rapproche de zéro.
922. L : Ouais.
923. T : On peut supputer que le dernier terme tende vers zéro.
924. L : Ouais ben suppute.
925. R : C'est exactement ce qui est là. Le dernier terme il tend vers zéro.
926. T : Ouais, mais là, c'est mal écrit [inaudible].

927. R : Limite en plus l'infini de $1/m^m$.

[Pause]

928. L : Bon, ouais parce qu'en fait ouais... m^m ... C'est quoi ton truc là, que tu as marqué ?

929. R : Limite de $1/m^m$, limite de ça. Ce terme là. Ca fait zéro.

930. L : Oui, c'est sûr. Ca je dis pas la contraire. Le [Inaudible], c'est qu'on travaille sur des... On arrive pas jusqu'à m^m . Il s'arrête à m^m . Donc en fait, si on veut, si on veut trouver la limite quand on a m qui tend vers l'infini, on ramène sur les $(n + 1)$ ième termes, il faut qu'on fasse tendre n vers l'infini aussi.

931. T : Et oui, comment on fait ça ?

932. L : Après, on a quelque chose de correct si on travaille sur les $(n + 1)$ ième termes en faisant tendre n vers l'infini.

933. R : Hum.

934. T1 : Vous avez... [à T2] Qu'est-ce qu'on fait ? [Inaudible]

[Pause]

935. L : Bon là que, que dire de plus... Tu supputes encore ou tu supputes plus ?

936. [Les groupes se rejoignent. T1 explique les consignes.]

**Annexe 30 : Transcription des débats
de l'exposé des étudiants de l'INSA
travaillant sur la preuve inspirée par
le texte de Liouville**

Exposé des étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy (E-INSA-C) :

[Etant donné le nombre d'intervenants et leur répartition par rapport au micro, j'ai souvent eu des difficultés pour distinguer les étudiants qui posent les questions. Il sont représentés par un point d'interrogation.]

1. T2 : Allez, donc vous avez quelque chose comme un quart d'heure, maximum.
2. L1 : Allez vas-y L2.
3. L2 : Alors, l'introduction, alors là, on a eu un problème de l'école euh... Un problème de Cauchy. Je sais pas si vous le connaissez. Non, personne connaît Cauchy ?
4. ? : Ben si. Les suites de Cauchy.
5. L2 : Si ? Voilà. On l'a étudié en cours, donc tout le monde est censé connaître. Après, alors voilà, là on avait... En point de départ, on avait comme rappel un énoncé et la preuve de cet énoncé. Tout ça, après on le démontrera, un peu plus en détails. Ca, c'est rien que l'introduction. Donc là, on sait que Cauchy, il était enseignant à l'école polytechnique. Et puis c'est là, qu'il a mis [Inaudible]. Voilà, maintenant je laisse la parole à L1 qui va vous présenter plus en détails la démonstration de la preuve et de l'énoncé.
6. L1 : La démonstration de la preuve et de l'énoncé... Alors plutôt la preuve de ce qu'a, de ce qu'a montré Cauchy dans son école. Donc euh... En fait euh, lui, il veut chercher la limite en plus l'infini de $(1 + 1/m)^m$, euh ce qu'il... Alors, que je dise pas de bêtises... [Inaudible]...
7. P : Puissance quoi tu as dit ?
8. L1 : Puissance n .
9. P : n .
10. ? : C'est pas $1/n$?
11. L1 : Puissance m .
12. P : Y a n et m ou c'est le même.
13. L1 : Non, c'est puissance m .
14. T2 : Si tu veux, tu peux remonter peut-être le papier pour...
15. L1 : Ouais, peut-être.
16. Y : On va l'écrire au tableau. Ou, on peut remplacer les m par des n .
17. L1 : Et donc, il nous dit que c'est égal à la somme de $i = 0$ à m des coefficients binomiaux de m à k de $1/m^k$, euh...
18. Y : En fait là, il a appliqué le binôme de Newton.
19. L1 : Donc, il applique le binôme de Newton. Il développe sa forme, ça donne ça. On reconnaît les coefficients binomiaux ici, ici, ici... Et, et donc, il multiplie ça par le $1/m^k$, ici. Alors après, ce qu'il veut faire c'est, c'est réécrire ça sous une forme différente pour qu'il puisse trouver des relations plus simples pour trouver la limite à la fin. Et donc, euh, si tu veux continuer...
20. Y : Ben ensuite, il a juste arrangé un peu son expression. Il a écrit donc euh... Il a écrit les termes avec les factorielles devant comme ça, il les a mis en, il les a mis devant pour les faire

apparaître. Ensuite, donc là, on a plus que les termes avec les m et euh, donc on s'intéresse, donc euh... Il s'est intéressé à la limite, à un terme, par exemple au $(n + 1)$ ième terme et donc il a remarqué que, il l'a un peu arrangé de façon à l'exprimer comme ça, comme ça... On voit que, quand on voit que m augmente le $1 - 1/m$ ça, enfin plus m augmente, plus, donc ça, ça va tendre vers un quoi. Parce que un moins quelque chose de très petit, plus le quelque chose est petit et plus ça va tendre vers un. Et donc euh, quand m augmente, ça, ça tend vers un parce que les termes en k/m diminuent effectivement, voilà. Et donc, ça montre que la suite euh... Elle est croissante puisque, à chaque fois si m augmente, si m augmente, le nombre de termes de la suite va augmenter et en plus chaque euh, chaque terme va aussi augmenter puisque ça tend de plus en plus vers 1 . Ouais ? Et donc comme à l'infini chaque, à l'infini à chaque fois que ça, à chaque fois... Bon, à l'infini, ça tend tout le temps vers 1 donc ça va être la limite d'une suite avec un nombre de terme infini des, de $1/n!$. Donc on revient à la définition de l'exponentielle donc, l'exponentielle, on l'a vu avec le rappel du début, ici, que l'exponentielle, en fait, c'était la somme, c'était cette formule là, donc euh... En développant avec le binôme de Newton, il a démontré que l'exponentielle et ben c'était bien égal. Que la limite de cette suite, c'était bien égal à l'exponentielle.

[Ils manipulent les transparents]

21. Y : Chaque terme là, quand m tend vers l'infini est bien euh... Il est égal à un. Donc euh, ensuite, donc on les remplace tous par des un ici, en l'infini donc ça $1 + 1/1 + 1/2 + 1/3!$ etc. Et donc on a une terme, une suite, donc avec une infinité de termes. Donc là, on pourrait rajouter, après les trois petits points, on pourrait rajouter un sur factorielle de l'infini... Ca se fait pas trop. Et donc, on a une infinité de termes de $1/n!$, en fait. Et ça c'est, ça revient à ... Exponentielle.
22. ? : A e ou à exponentielle ?
23. L1 : Parce que c'est, vu que c'est notre développement...
24. Y : e , ouais c'est e .
25. L2 : C'est e , c'est exponentielle.
26. L1 : Vu que c'est la forme du développement du, du développement limité de notre euh, de notre exponentielle. Si on va plus loin, si... En plus l'infini, si on fait le développement avec le maximum de termes, on retombera sur l'égalité avec l'exponentielle.
27. P : e c'est l'exponentielle de un.
28. Y : Ouais c'est ça, c'est l'exponentielle de un.
29. L1 : Hum.
30. P : e puissance un.
31. Y : En fait, ouais, plus il y a de termes, plus on va avoir une valeur approchée de e , en fait. Plus m est grand, c'est comme on a vu avec le, avec euh, Taylor Lagrange, avec le développement limité.
32. T2 : Des questions ?
33. P : Alors ? Vous êtes d'accord ?
34. Y : Ben on pense que la preuve elle est... On est d'accord, enfin...
35. L1 : Ouais.
36. Y : Tout ce qu'il a fait, ça me semble logique quoi.

37. P : Six à zéro ?
38. Y : Six à zéro.
39. L1 : C'est ça, ouais.
40. P : Vous êtes six, il y en a six qui ont voté pour que...
41. Y : Ouais, c'est ça.
42. L1 : Hum.
43. P : Que c'était bon.
44. Y : Ouais.
45. P : Ok.
46. Y : Et on a vérifié sur Maple, quand on tape, quand on fait $(1 + 1/m)^m$, ça nous donne bien e .
Donc...
47. P : Ca, c'est deux choses différentes.
48. Y : Ouais.
49. P : Est-ce que le résultat est vrai ?
50. Y : Il est vrai là, c'est sûr.
51. P : Et est-ce que la démonstration est/
52. Y : Ben la démonstration...
53. L1 : Nous parait logique.
54. Y : Nous parait logique, ouais.
55. L2 : Ouais. Sociologiquement parlant, je dirais non.
56. P : Tu n'es pas convaincu ?
57. L2 : Non parce que non, moi sur le plan social, je suis pas convaincu du tout...
58. L1 : Non, moi non plus !
59. P : Comment t'es pas convaincu toi ?
60. L2 : Non.
61. P : Alors, vas-y.
62. L2 : Mais pas par la démonstration en elle-même, plus par les profs, en fait. C'est...
63. J : Moi aussi.
64. L2 : Je me rend compte qu'il y a une erreur quelque part, qu'il n'y a pas eu assez de rigueur
quelque part, ça c'est sûr/
65. T2 : Mais où ?
66. L2 : Ah ça, je sais pas, je suis un peu comme lui. Je suis pas trop rigoureux non plus, mais...
- [Rires]
67. L2 : Mais quand on voit déjà, il utilise aucun signe. Enfin, c'est pas de la mathématique très
profonde, il utilise jamais « pour tout », « pour toute valeur », « il existe un »... Il va pas trop
dans le détail. Pour moi il a l'air vachement de passer euh, faire une démonstration plus comme

une explication rapide que vraiment comme une explication, vraiment à titre mathématique. Là, on a plus l'impression que c'est plus un physicien qui fait des maths, qu'un vrai mathématicien, dans la façon de démontrer les choses. Mais après, c'est où qu'il a pas été rigoureux, moi je pourrais pas vous le dire. Après, c'est la façon dont tous les profs demandent « êtes vous sûrs d'être... », « six à zéro »... Ca pour moi...

68. P : Tu sens bien que...

69. Y : Ouais, on sent que/

70. L2 : Ouais, voilà.

71. P : Qu'il y a un truc sous la table.

72. L2 : Voilà.

73. Y : Voilà, tout à fait.

74. L1 : On arrive pas à...

75. L2 : J'ai travaillé deux ans à la brigade criminelle.

[Rires]

76. P : Et alors, la bande de touristes [*P* s'adresse aux étudiants qui écoutent], qu'est-ce que vous en pensez ?

[Rires]

77. L2 : [Inaudible] Les calculs, on a pas eu le temps de les refaire donc euh...

78. Y : Non mais les calculs, on les a pas refait non plus. Mais on les a mené quoi.

[Rires]

79. Y : Non mais si quand là, on voit, quand il fait le binôme de Newton on, enfin on... C'est correct, les calculs sont justes. Enfin, je sais pas moi...

80. ? : [Inaudible] Le début ?

81. Y : Comment ?

82. ? : Tu peux remettre le début, s'il te plait ?

[Ils bougent les transparents]

83. Y : En fait ouais, ça me paraît, ça me paraît complètement... Le seul... Non vas-y, vas-y.

84. L1 : Moi, il y a quelque chose qui dès le début, qui m'a, qui m'a... Après, à partir du moment où j'étais parti dans son raisonnement et où j'ai vu ça, après j'ai fait le développement tout ça, j'ai suivi les étapes logiques. Mais déjà, j'ai pas compris, j'ai pas exactement compris sa première égalité, pourquoi, pourquoi c'est égal à, au..., à un développement comme ça là.

85. Y : Si, si, c'est le binôme de Newton.

86. L1 : Ben oui, mais pourquoi/

87. Y : Parce que le un/

88. J : Mais là, c'est puissance m donc c'est... C'est ça puissance m , c'est $(a + b)^m$.

89. T : Ouais, c'est ça.

90. Y : Donc le un, il le met pas.

91. L1 : Hum... C'est aux autres qu'il faut expliquer !

92. J : Voilà, c'est $(a + b)^m$ donc ça ressemble à dire que c'est la somme des...
93. L2 : Fait le au tableau, fait le au tableau.
94. J : Ouais, fait au tableau !
- [Rires]
95. Y : Non mais le principe, c'est la formule du binôme de Newton, non c'est ça ?
96. L1 : Oui, non mais ça, je suis d'accord.
97. Y : Après il l'a développé, il a calculé les coefficients binomiaux et voilà.
98. J : Puis, comme un puissance n'importe quoi, ça fait un...
99. Y : Ouais voilà, ça fait un puissance $m - k$, tu sais...
100. L2 : Et comme là...
101. L1 : Ouais, mais je vois pas pourquoi ça, c'est égal à ça.
102. Y : Ah, à la fin.
103. L1 : Je crois pas pourquoi ça, c'est égal à ça.
104. Y : Ca, égal à ça ?
105. L1 : Ben ça, c'est égal à ça ?
106. Y : Tu comprends pas pourquoi c'est égal à ça ? Ben si, mais regarde, c'est le binôme de Newton.
107. L1 : Je fais que ça de regarder.
108. Y : Jusque là, tu vois le binôme de Newton ?
109. L2 : Moi, je sais pas quand...
110. L1 : Ben, vas-y [Inaudible].
111. Y : $(a + b)^m$, c'est égal à la somme de a fois $m - 1$ fois b^m ... Euh...
112. L1 : Hum.
113. Y : Ouais, c'est ça, b^k , enfin... Donc là, 1 fois 1^{m-1} et ben, ça fait toujours un. On est bien d'accord, et en plus il faut rajouter le [Inaudible]/
114. L1 : Ouais, ouais...
115. Y : 1 fois 1 sur... Fois tout ce terme, puissance k . Tout ce terme puissance k , c'est pareil que $1/m^k$...
116. L2 : Ah moi, ce qui me semble bizarre c'est que là/
117. T1 : Expliquez un peu mieux la fin, là.
118. L2 : Au début, ça à l'origine, on avait dit que c'était euh, on a dit que c'était inférieur, que c'était majoré par trois, mais je vois pas pourquoi, en disant que c'était majoré par trois, on en vient à l'égalité de $e/$
119. Y : Non mais, on a juste dit/
120. L2 : Parce que à l'origine, il n'y avait que ça.
121. Y : On a juste dit qu'il y avait une limite.

122. L2 : Ca, on disait que c'était majoré par trois.
123. Y : Non.
124. L2 : Si, parce que à l'origine, on a dit que la limite de la somme machin là, c'était égal à e mais après là, il est pas parti de la limite de la somme. Là, il est parti directement à partir du développement qu'on a dit qu'il est majoré par trois, on va dire. On a jamais dit que ça était égal à e .
125. L1 : Non c'est ça, c'est pas ça qu'il/
126. Y : Mais non, au début dans le rappel, on a juste montrer que cette suite elle avait pour limite e parce que on a majoré, on l'a majorée et on a trouvé une limite finie.
127. L1 : Non dans le rappel, c'est que c'était inférieur à e , à trois, c'était inférieur à trois/
128. L2 : Ah ben, voilà.
129. L1 : Mais après, nous ce qu'on voit c'est que cette forme là, c'est la même chose que le développement de euh, de l'exponentielle.
130. L2 : Et alors ?
131. L1 : On remarque ça, donc...
132. ? : Tu peux expliquer le $(n + 1)$ ième terme il tend vers $1/n!$.
133. L1 : Le $(n + 1)$ ième terme tend vers $1/n!$... Attend. Ok.
134. Y : Attend, ça ?
135. L1 : Non, ici.
136. R : Celui-là, ouais.
137. ? : Pourquoi il tend vers $1/n!$ alors que là, si on fait la limite euh...
138. R : Si parce que...
139. Y : Si, si, ça tend vers un.
140. ? : Ca fait m , c'est l'infini, $m - 1$ tend vers l'infini, $m - n$ tend vers l'infini...
141. P : Mais pourquoi ça tend vers un ?
142. T1 : Ca, c'est écrit sur le transparent précédent.
143. R : Euh, si on fait le calcul.
144. L1 : C'est parce que [Inaudible].
145. ? : C'est l'infini sur l'infini.
146. L1 : Si tu reprends cette expression là, si tu reprends cette expression là...
147. T2 : Tu peux la marquer cette forme là ?
148. L1 : Tu fais la limite de ça, en plus l'infini, là, ça te donnera des termes proches de un, d'accord, et à la fin, ça te donnera $1/n!$.
149. P : Alors, qu'est-ce que... ça t'a convaincu ?
150. ? : Ouais, mais c'était le développement, parce que, en fait, si on regardait juste la première forme, pour moi, la limite elle était indéterminable quoi.
151. L1 : Ouais, mais c'est en utilisant cette forme là, qu'on, qu'on...

152. P : Là donc, $(1 - 1/m)(1 - 2/m)\dots(1 - (n - 1)/m)$.
153. Y : Ca tend vers un.
154. P : Ils disent ça tend vers un. Donc, fffff, je remplace par un et j'ai $1/n!$. Est-ce que c'est... Ca vous paraît...
155. ? : Faut pas dire égal quoi.
156. ? : Mais ça dépend où s'arrête n non ? Ca dépend où s'arrête n , n on le fait tendre [Inaudible].
157. P : Est-ce que ça a quelques rapports avec ce qu'on a vu tout à l'heure, quoi ?
158. ? : Ben dans le égal, il faut préciser que m tend vers l'infini.
159. Y : Non, ça c'est égal à ça.
160. ? : Est-ce que n tend vers l'infini ?
161. Y : Mais si m tend vers l'infini un moins un sur quelque chose d'infini ça fait un moins zéro/
162. ? : Oui, oui.
163. Y : Ca fait un.
164. ? : Mais si n tend vers l'infini. Faut pas faire tendre n vers l'infini. Enfin si n c'est un nombre très, très, très grand, quoi...
165. T2 : C'est peut-être le transparent d'après ?
166. L2 : Ouais...
167. Y : Ouais, c'est ça.
168. T2 : Parce que ça c'est une égalité, effectivement, on est pas dans des limites hein. Les limites c'est plutôt ce transparent-là.
169. Y : C'est là-haut.
170. T2 : Et le passage dont vous parlez, il se situe à quel endroit dans ce, dans cette preuve ? Quand on passe d'une expression d'égalités à des limites ?
171. L2 : Ben là, là.
172. L1 : C'est juste à la fin.
173. T2 : Ouais.
174. ? : Faire les limites pour trouver les termes euh...
175. T2 : Qu'est-ce qu'on fait finalement, est-ce que vous pouvez résumer ce qui est fait dans cette dernière étape de passage à la limite ?
176. L1 : Ben...
177. Y : Ben en fait, on fait tendre m vers l'infini/
178. T2 : Ouais.
179. Y : Donc on rajoute des termes à la suite.
180. T2 : Ouais.
181. Y : Et on rajoute en augmentant m , les coefficients, enfin ça, ça tend vers un puisque on a vu que...
182. L1 : n est forcément fini.

183. Y : Donc on étire une suite en fait en longueur et on réduit tous les termes, en fait, à $1/n!$.
184. T2 : Tu peux montrer ce qu'il se passe avec ton, ta... Le passage [Inaudible].
185. Y : De là à là ? Et ben là, tous ceux là, ils deviennent égal à, ça c'est égal à un, ça c'est égal à un aussi, ça c'est égal à un et ensuite on rajoute une infinité de termes...
186. P : Oui mais alors, ce qu'il dit lui, hein, je poursuis ton doute. Si tu prends le deuxième-là $m(m - 1)/m^2 \dots$
187. Y : Ouais.
188. P : Là deux, on sait ce que c'est, y a pas de problème, on est d'accord. Mais là, quand tu as pris n...
189. Y : Ouais.
190. P : Si tu as n fixé, ok. Mais n , il est peut-être très grand, alors est-ce que tu as le droit de dire qu'il est vraiment fixé.
191. ? : Si il est très grand, ça va faire, ça va faire une limite pas déterminable, si on utilise la forme développée...
192. L1 : [Inaudible]...
193. ? : On a pas de conditions sur la valeur de n .
194. L2 : Voilà, c'est ce que je dis...
195. P : Là, en bas là, ici tac, ça.
196. Y : Ouais.
197. ? : Ouais. Le $1 - (n - 1)/m$ si n est très, très grand, proche de l'infini, enfin pourquoi pas, on nous l'interdit pas...
198. P : Ca fait un produit infini, ça fait un peu... Est-ce que ça fait pas un peu zéro fois l'infini, un truc comme ça.
199. T1 : Il y a certains d'entre vous qui avait fait la même remarque au début. Vous disiez que $(1 + 1/m)^m$, ça devait tendre vers un parce que $1 + 1/m$ tendait vers un et...
200. L2 : Hum.
201. L1 : Hum, ouais.
202. T1 : Et vous vous êtes rendu compte que ce n'étais pas le cas.
203. Y : Ouais, on s'était...
204. ? : Le fait que n soit un entier naturel, ça l'empêche pas de tendre vers l'infini.
205. T2 : Est-ce que vous pouvez lever le truc et regarder la preuve qu'il y a derrière là, sur le tableau ?
- [Ils le font. Voir l'annexe ??]
206. Y : T'as vu, ils avaient déjà écrit ça... Alors...
- [Pause]
207. L2 : Qu'est-ce que je disais, c'est ça qu'il manquait dans son truc à Cauchy c'est des termes mathématiques.

[Rires]

208. L2 : Là, je vois dans trois lignes, on en a plus que dans une page de... Ca, je suis d'accord...
209. T2 : Alors, est-ce que quelqu'un peut résumer, prendre en charge l'explication de ce qu'il y a là ?
210. L2 : Ben on va faire dans l'ordre. Tu fais la première ligne $L1$, moi je fais la troisième... Toi tu fais la deuxième. Allez tu fais la première, je fais la deuxième ?
211. Y : Ben...
- [Pause]
212. L2 : Bon alors là, on peut voir que là, déjà, il y a une somme qui est déterminée, c'est ben c'est la même qu'on avait là. Non, même pas.
213. L1 : Non.
214. ? : Pourquoi vous avez mis que la somme des $1/(2n)$, c'est égal à $n/(2n)$?
215. ? : Parce que c'est la somme des termes d'une suite géométrique, non ? Euh...
216. T2 : Combien de fois, combien il y a de termes dans la somme ?
217. Y : Y en a $n+1$.
218. T2 : de $1/(2n)$...
219. ? : n fois.
220. L2 : $n + 1$.
221. T2 : $n, n+1$, pardon, ouais. Pfff, mettez un un à la place du zéro alors, partout dans la somme. Donc du coup, en fait, il y a n termes parce qu'on commence à un. Donc on ajoute n fois $1/(2n)$...
222. ? : Ah. Ouais.
223. T2 : Ce qui fait $n/(2n)$. D'accord ?
- [Pause]
224. T2 : Donc il y a deux étapes dans cette chose-là. La première, qui est de dire je regarde un terme dans la somme, d'accord ? N'importe lequel, comme tout à l'heure Cauchy prenait le $(n + 1)$ ième d'accord ?
225. L2 : Ouais.
226. T2 : On voit qu'il tend vers zéro, vous êtes d'accord avec ça ?
227. L2 : Ouais.
228. T2 : Tout à l'heure, il tendait vers quoi dans la preuve de Cauchy ?
229. L2 : Il tendait vers un... Ca dépend à quel moment.
230. R : $1/n!$
231. T2 : Un, c'était le produit qui accompagnait quoi ?
232. L2 : $1/n!$, donc ça tendait vers $1/n!$.
233. T2 : Donc le $(n + 1)$ ième terme il tendait vers...
234. L2 : $1/n!$.

235. T2 : Et donc, qu'est-ce qu'il disait Cauchy, il disait les termes, ils tendent chacun vers $1/n!$, donc la somme tend vers la somme des $1/n!$.
236. Y : Ben oui.
237. T2 : D'accord ? C'était la dernière étape, vous êtes d'accord avec ce que je... ?
238. Y : Ouais, ouais.
239. L2 : Ouais, mais je...
240. T2 : Donc là, je refais le même raisonnement, je dis, c'est la somme des, de, de termes comme ça, chacun tend vers zéro...
241. L2 : Ouais.
242. T2 : Donc je dis, ben la limite, c'est la somme des limites, c'est-à-dire zéro... D'ailleurs, il faudrait aussi rajouter un, enfin bref, c'est mal écrit mais rajouter... Donc c'est une somme de zéro. C'est la somme des limites, c'est zéro, zéro,... Donc à la fin, j'ai zéro.
243. Y : Ouais, ouais.
244. L1 : Hum, hum.
245. T2 : Ok. La suite, c'est pour dire en fait, que c'est peut-être pas si clair que ça. Parce que chacun des termes est plus grand que $1/(2n)$...
246. L2 : Ouais.
247. T2 : D'accord. Vous êtes d'accord avec cette inégalité ?
248. ? : Hum.
249. L2 : Avec celle-là, là ?
250. T2 : Ouais.
251. L2 : Ouais ça, je suis d'accord.
252. T2 : Et donc, vu que il y a n termes dans la somme, d'accord, j'ai n termes plus grand que $1/(2n)$, ma somme elle va être plus grande que $1/2$. D'accord ?
253. L2 : Ouais, Ouais.
254. T2 : Donc, est-ce que ça fonctionne tout ça.
255. Y : Ben non.
256. T2 : Qu'est-ce qu'il ne va pas.
257. Y : Ben, c'est pas supérieur à $1/2$...
258. L2 : Moi, le problème, je trouve que on néglige des termes, en quoi, en partant, en considérant l'infini. Au moins là, on partait de principes que c'était multiplié par des facteurs un et au voisinage de l'infini. Et le problème, c'est que dans le début quand ça a pas la valeur l'infini, ce sera pas du tout euh... On pourra pas prendre la même considération. Et comme généralement c'est toujours tous les premiers termes d'une suite qui influence le plus on va avoir un décalage sur les premiers termes et c'est là que c'est le plus important. Après quand on aura des termes infiniment petits qu'on a un décalage ou pas, ça influencera pas beaucoup... Les premiers termes comme c'est les plus gros généralement dans les suites comme ça, ils sont définis 1 sur quelque chose...

259. T2 : Est-ce que, je suis pas sûr que tout le monde ait bien vu. Est-ce que vous voyez qu'il y a un problème avec ce qui est écrit au tableau ou il n'y en a pas ?
260. ? : Je comprends pas le...
261. Y : Si, si y a un problème là. Ici, on dit que c'est égal à zéro et là, que c'est supérieur à $1/2$.
262. T2 : J'ai n termes dans la somme.
263. Y : Zéro, c'est pas supérieur à $1/2$!
264. T2 : J'ajoute $1/(2n) + 1/(2n) + 1/(2n) + \dots$
265. Y : Ouais, ouais.
266. P : Il y a quand même deux raisonnements là/
267. Y : Non mais là, c'est, ça va pas/
268. P : Il y a deux démonstrations, il y en a au moins une qui doit être fausse.
269. Y : Ben oui, mais c'est celle...
270. P : Parce que c'est quand même assez difficile que les deux choses soient vraies.
271. Y : Parce que là, on dit que ça fait zéro et on dit que c'est supérieur à $1/2$. Zéro, c'est pas supérieur à $1/2$.
272. P : Ben oui, donc y a un problème.
273. Y : Y a un problème.
274. ? : C'est la limite, c'est la limite. C'est la limite de v_n en haut, en bas, c'est v_n tout court.
275. L1 : Ouais, voilà.
276. T2 : Oui, alors est-ce que si v_n est tout le temps plus grand que $1/2$, ça limite ça peut être zéro ?
277. L2 : Ben non. Logiquement, non.
278. ? : Non.
279. T2 : Donc, il y a certainement une partie du raisonnement qui est douteux là-dedans.
280. Y : Ouais.
281. T2 : C'est quoi qui est douteux à votre avis ?
282. L1 : Ben à mon avis, c'est le donc là.
283. L2 : Ouais, ce qui est entre guillemets.
284. L1 : parce que/
285. ? : Ben en haut, on fait l'hypothèse que la somme des limites, c'est la limite de la somme.
286. T2 : Ouais.
287. ? : Il faut voir si c'est vrai ou pas.
288. L1 : Ah ouais... Ce serait bizarre que ce qu'on [Inaudible].
289. T2 : Tu peux répéter ça ? On dit que limite de $a + b$, donc limite de $u_n + v_n$, c'est pareil que la limite de u_n plus la limite de v_n .
290. ? : Ouais, moi je suis d'accord, ouais.
291. T2 : Est-ce qu'on est, vous êtes d'accord avec ça ? Non ?

292. ? : Oui.
293. ? : Ben je sais pas, quand on a $ax + b + 1/x \dots$
294. T2 : Ouais.
295. ? : On le sépare en deux et on regarde $1/x$ vers quoi ça tend...
296. L2 : Hum.
297. ? : et ax vers quoi ça tend.
298. P : En deux, oui.
299. ? : Enfin voilà, on fait ça.
300. P : Quand il n'y en a que deux.
301. ? : Quand il n'y en a que deux, ouais mais bon...
302. T2 : Et là, combien il y en a ?
303. ? : Ben là, il y en a n .
304. L1 : $n + 1$.
305. P : Et n et clac...
306. ? : Non, il est pas arrêté.
307. L1 : Y a n limites.
308. T2 : Ouais, ça ferait n limites. Est-ce que, est-ce que Cauchy il fait ça ? Est-ce que dans la preuve, il y a un genre de truc comme ça ?
309. L2 : Après, je crois... Ben oui.
310. L1 : Ouais, là, là.
311. T2 : A quel moment ?
312. L1 : A la fin.
313. L2 : Ben au moment, qu'on parlait tout à l'heure, là.
314. T2 : Tu peux la remettre peut-être, pour tout le monde sur le...
315. L2 : Ah ouais, ouais.
- [Il met le bon transparent sur le rétroprojecteur.]
316. J : C'est l'autre.
317. L2 : Oh si, c'est là, hein.
318. Y : Non, c'est pas celle-là. Si mais, c'est à ce moment là, c'est juste après...
319. L2 : Si. Ouais, c'est surtout après.
320. L1 : C'est à la fin.
321. Y : C'est là.
322. L1 : C'est à la fin quand il dit que, que le $(n + 1)$ ième terme tend vers $1/n!$ et qu'après il utilise ça dans la limite, c'est comme la première, la première, la première partie de ce que vous avez fait, au tableau.
323. T2 : Ouais.

324. ? : Il prend chaque terme, il dit que la limite c'est pareil et il...
325. T2 : Ouais.
326. ? : Voilà.
327. T2 : Et ça vous en pensez quoi ?
328. L1 : C'est louche.
329. T2 : Quand vous avez une somme comme ça, avec un nombre de termes qui grandit...
330. L2 : Moi je suis d'accord avec C , quand on avait la limite de plusieurs termes sommés, on pouvait faire la somme des limites quoi. On a toujours fait ça.
331. ? : La question c'est quand il y en a n quoi.
332. L2 : Ouais par contre quand il y en a n , quand c'est un nombre... Pour moi, je sais pas, n c'est plusieurs fois, mais après.
333. P : Oui, mais est-ce que n est fixé, une fois pour toute, par dieu, au départ, ou est-ce que dans la, dans le truc, n à certains moments il est fixé puis à d'autres il varie ?
334. L2 : Ben pour moi, il sera toujours, il sera toujours. Pour moi, personnellement, il sera toujours fixé entre les bornes quoi.
335. L1 : Ouais.
336. L2 : Il sera peut-être pas fixe...
337. P : Entre quelles bornes ?
338. L2 : Ben entre les bornes de la somme.
339. Y : Entre zéro et l'infini.
340. L2 : Zéro et l'infini.
341. P : Entre zéro et l'infini. Oui mais là...
342. L1 : Donc il est pas fixé.
343. ? : Il est pas compris, sinon il pouvait pas faire le développement qu'il a fait.
344. L1 : Ouais, mais c'est assez bizarre ça. Parce que pour moi, entre zéro et l'infini, ça veut dire qu'il pourra pas être la valeur infini. Mais la valeur infini moins un, elle est fixé... Non.
- [Rires]
345. L1 : La valeur « infini moins un »...
346. L2 : L'infini moins un, c'est une valeur, c'est un plus un certain nombre de fois autre chose.
347. ? : L'infini c'est pas une valeur.
348. L2 : Donc ça revient à qu'est-ce que l'infini...
- [Rires]
349. ? : L'infini c'est pas un nombre.
350. Y : Ben si.
351. T2 : Bon on va peut-être... C'est moins le quart, donc...
352. T1 : On va passer aux autres.

353. T2 : On va peut-être passer aux autres parce que c'est pour juste que vous voyez le, ce sur quoi on avait envie d'insister. C'est clair qu'il y a un souci avec la dernière partie du raisonnement/
354. Y : Ouais.
355. T2 : Ou ce que regarde Cauchy c'est un terme, il regarde un terme de la somme et il en déduit que la limite de la somme, il peut sommer les limites individuelles des termes. Et ça, c'est problématique quand on a pas un nombre de termes fixés. D'accord, on le fait bien quand on a juste deux suites, donc la limite de la somme c'est la somme des limites, mais quand on en a un nombre indéterminé, ça pose problème. A priori, ce pas là du raisonnement, il peut mener à des preuves fausses comme clairement celle qu'il y a... A des preuves d'énoncé faux comme celui qu'il y a au tableau derrière.
356. Y : Oui, mais il trouve quand même un résultat.
357. L2 : Ouais mais pourtant, c'est bon ce qu'il trouve, pour finir.
358. Y : Mais il trouve un résultat bon.
359. T2 : Mais là, pourtant l'énoncé est bon.
360. ? : Je pense qu'il faut mettre des conditions, faut mettre des conditions pour qu'il puisse appliquer sa...
361. L2 : Ouais, c'est ça qu'il/
362. P : C'est-à-dire, il y a beaucoup, pas mal de termes, quand il y a pas mal de termes, on peut remplacer par leur limite, à conditions que le nombre de termes en question il soit majoré par quelque chose de fixe. Mais si le nombre de termes lui-même, lui aussi, il augmente à l'infini hein, il pourrait se faire que, individuellement, on puisse remplacer par exemple $m(m-1)/m^2$ par un, hein, mais que si on veut les remplacer tous ensemble quand ils sont très nombreux...
363. ? : ça marche pas.
364. P : Ben oui. Et ça, c'est pas sans rapport avec les, les discussions qu'on va avoir dans l'autre, dans l'autre truc, dans l'autre groupe.
365. T1 : Une des techniques que vous verrez peut-être plus tard c'est de, de prendre fixe n termes, qu'on fait tendre vers l'infini et le reste on essaye de le négliger.
366. ? : On sépare en deux parties et on range...
367. T1 : C'est ça, en deux parties. Là, c'est pas du tout ce que fait Cauchy, il passe directement à la limite.
368. T2 : Alors effectivement, l'énoncé est valable, ce n'est pas parce que l'énoncé est valable que la preuve qu'il en donne est valide.
369. P : Ben oui. Prenez un exercice, n'importe lequel, on dit « montrer que, etc ». Bon, ben, y a des copies qui sont bonnes et des copies qui sont pas bonnes et pourtant le résultat il est quand même valable.
370. L2 : Ouais je sais, à mon contrôle j'ai eu faux alors que j'avais tout bon.
371. ? : Elle a été corrigé cette preuve, enfin quelqu'un a retravaillé dessus après ou...
372. T2 : Alors cette preuve là en fait elle est... Pourquoi on vous l'a donné au départ, on l'a trouvé dans un... Ben Liouville notamment, qui est l'auteur de la deuxième preuve a proposé une amélioration de cette preuve là, en disant que les preuves de Cauchy étaient insuffisantes. Donc

il l'a fait je sais plus l'article, je sais plus exactement dans les années... Là, c'est en 1821 et l'article de Cauchy il est, je sais pas peut-être vingt ans après...

373. T1 : De Liouville.

374. T2 : De Liouville pardon, c'est Liouville qui corrige cette preuve là et peut-être une vingtaine d'années après.

375. ? : Ce coup-ci, c'était bon avec Liouville ?

376. T2 : Disons que c'était peut-être pas selon les critères que l'on utiliserait aujourd'hui, on écrit pas les maths de la même manière que ce qui est écrit ici ou la preuve de Liouville, mais en tout cas, cette chose là était prise en compte. Euh... On passe à l'autre groupe.

377. P : On pourra peut-être vous dire, tout de suite après le deuxième groupe, on peut globalement quoi... Comment on a fait, pourquoi ils étaient dans la merde et pourquoi après on a réussi à surmonter tout ça.

[Applaudissements, remerciements et changement de groupe]