



HAL
open science

Mesures en service et reconstruction de champs sur structures

Dominique Martini

► **To cite this version:**

Dominique Martini. Mesures en service et reconstruction de champs sur structures. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2011. Français. NNT: . tel-00653901

HAL Id: tel-00653901

<https://theses.hal.science/tel-00653901>

Submitted on 20 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE - AIX MARSEILLE I

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Spécialité : Mécanique du Solide

École doctorale : Physique, modélisation et sciences pour l'ingénieur

préparée au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique

présentée par

Dominique MARTINI

**Mesures en service et reconstruction
de champs mécaniques sur structures**

dirigée par Christian HOCHARD
co-encadrée par Jean-Paul CHARLES

soutenue le 10 Octobre 2011 devant le jury composé de :

Christian	BOLLER	Examineur
Marc	BONNET	Président
Jean-Paul	CHARLES	Examineur
Pascal	CASARI	Rapporteur
François	HILD	Rapporteur
Christian	HOCHARD	Examineur

Remerciements

Après quatre années passées au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, je tiens à remercier toutes les personnes qui, chacune à leur manière, ont permis de faire aboutir ces travaux.

Je remercie tout d'abord Dominique HABAULT, Directrice du LMA, et Sergio BELLIZZI, Directeur Adjoint, pour l'accueil au sein de leur laboratoire.

Je remercie tout particulièrement Christian HOCHARD, mon directeur de thèse, et Jean-Paul CHARLES, mon co-encadrant, pour la confiance qu'ils m'ont témoignée tout au long de ces quatre années. Que ce soit pour la proposition du sujet de thèse ou pour les différentes pistes de recherche que nous avons explorées, je les remercie d'avoir su écouter mes suggestions et d'y avoir apporté un avis scientifique pertinent. Je leur suis très reconnaissant de l'expérience qu'ils m'ont apportée aux cours de ces années de travail à leurs côtés.

Je tiens à remercier les membres de mon jury, Marc BONNET pour m'avoir apporté régulièrement son avis, François HILD et Pascal CASARI d'avoir accepté de rapporter mes travaux de thèse et enfin Christian BOLLER.

Je remercie tous les membres de l'équipe MESH pour leur accueil, leur sympathie et leurs contributions. Je remercie Noël LAHELLEC et Frédéric MAZEROLLE pour leur aide précieuse sur l'aspect expérimental, Djaffar BOUSSAA et Pierre SUQUET pour leurs avis sur certains points mathématiques et enfin Jean-Claude MICHEL et Hervé MOULINEC pour les nombreuses discussions que nous avons eues ensemble. Je tiens aussi à remercier Annie FORNACCIARI, notre gestionnaire, pour sa patience et sa gentillesse.

Enfin, je remercie ma femme Elsa et mon fils Auguste pour m'avoir soutenu tout au long de ces années et pour m'avoir supporté pendant la rédaction de ce manuscrit.

Table des matières

1	Spécification et mise en œuvre d'un Système de Mesure Embarqué (SME) pour la surveillance des structures	15
1.1	Introduction	15
1.2	SME pour la surveillance des structures nautiques à voiles	17
1.2.1	Système de mesure ASLab (Advance Sailing Lab)	17
1.2.2	Description technologique du SME ASLab	18
1.3	Spécifications du SME ASLab	19
1.3.1	Analyse du besoin du SME	19
1.3.2	Spécifications du SEAT	20
1.3.3	Evaluation des performances du SEAT	21
1.3.4	Spécification du STC	27
1.3.5	Conclusion	28
1.4	Extension à la surveillance des structures rigides	28
1.4.1	Introduction	28
1.4.2	Surveillance d'un safran	29
1.4.3	Surveillance d'un bras arrière de VTT	33
1.5	Conclusion	36
2	La surveillance des structures : un problème inverse	39
2.1	Introduction	39
2.2	Définition du problème inverse	40
2.2.1	Formulation générale du problème inverse de reconstruction de champ	40
2.2.2	Formulation réduite du problème inverse : application à la surveillance des structures	42
2.3	Approximation par la méthode des éléments finis	43
2.4	Illustration du principe de Saint-Venant	45
2.4.1	Comparaison directe des champs mécaniques solutions pour des cas de chargements équivalents	45
2.4.2	Comparaison des champs mécaniques reconstruits par identification d'une base réduite de chargement	48
2.4.3	Conclusion	49
2.5	Validation de la méthode de résolution du problème inverse	49
2.5.1	Qualité de la solution identifiée et erreurs d'entrée	49
2.5.2	Protocole de validation numérique et expérimentale	51
2.6	Conclusion	52

3	Surveillance des structures poutres	53
3.1	Introduction	53
3.2	Formulation du problème de poutre élémentaire	54
3.2.1	Modélisation du chargement	54
3.2.2	Construction d'une base de chargement pour les poutres élémentaires	57
3.2.3	Mesures et capteurs sur une poutre	61
3.3	Simulation d'un problème poutre élémentaire en flexion plane	62
3.3.1	Description des cas simulés	62
3.3.2	Etude du conditionnement de \mathbb{G}	64
3.3.3	Influence de l'erreur aléatoire sur l'erreur de la solution	68
3.3.4	Influence de l'erreur de modélisation sur l'erreur de la solution	70
3.3.5	Conclusion	72
3.4	Mise en œuvre et validation expérimentale pour une poutre en flexion	73
3.4.1	Chargement localisé aux extrémités de la structure	74
3.4.2	Identification d'une charge répartie le long de la structure	78
3.4.3	Identification d'un chargement localisé à l'intérieur de la structure	81
3.4.4	Conclusion	81
3.5	Suivi des conditions de chargement lors d'un essai à rupture sur une pale arrière d'hélicoptère	81
3.5.1	Problématique	81
3.5.2	Description de l'essai	83
3.5.3	Construction de l'opérateur d'identification	87
3.5.4	Identification des conditions de chargement	89
3.5.5	Identification réduite	91
3.5.6	Conclusion	94
3.6	Structures poutres complexes	95
3.6.1	Construction d'une base de chargement	95
3.6.2	Simulation d'un cas de structure complexe	96
3.6.3	Identification d'une charge localisée intérieure à une structure	100
3.7	Conclusion	106
4	Surveillance des structures plaques	107
4.1	Introduction	107
4.2	Formulation du problème de plaque	108
4.2.1	Description des plaques	108
4.2.2	Formulation du problème de membrane	109
4.2.3	Formulation du problème de flexion	110
4.2.4	Formulation du problème de flexion, théorie de Reissner-Mindlin	111
4.2.5	Construction des bases de chargement	112
4.2.6	Mesures et capteurs sur une plaque élémentaire	114
4.3	Simulation d'une plaque	114
4.3.1	Description	114
4.3.2	Résolution du problème de membrane	117
4.3.3	Résolution du problème de flexion	122
4.3.4	Conclusion	123

4.4	Application aux plaques trouées	126
4.4.1	Construction des bases de chargement	126
4.4.2	Etude du conditionnement de \mathbb{G}	129
4.4.3	Résolution du problème exact	129
4.4.4	Résolution du problème approché	129
4.4.5	Conclusion	130
4.5	Applications aux structures complexes	133
4.5.1	Construction des bases de chargement	133
4.5.2	Conditions de bords libres	134
4.5.3	Assemblage de plaques	137
4.5.4	Conclusion	139
4.6	Conclusion	140

Introduction

Contexte

Le dimensionnement optimal des structures est une problématique majeure en mécanique. Cette optimalité est définie par la minimisation des coûts de fabrication et d'utilisation pour des niveaux de sécurité et de performances donnés. D'un point de vue pratique, cela consiste à prédire au mieux la réponse des structures dans leurs conditions d'utilisation. La modélisation de ces structures et de leurs environnements est la première étape de ce processus. La deuxième étape est liée à l'expérimentation pour valider les modèles utilisés et les recalibrer afin de satisfaire au mieux les comportements réels observés. Enfin, pour compenser les limites des deux étapes précédentes, la dernière étape consiste à surveiller les structures tout au long de leur utilisation. A partir des outils de modélisation et d'expérimentation, leurs comportements et leurs environnements sont continuellement ré-évalués afin de respecter les critères de sécurité et de performances, mais aussi d'améliorer les connaissances relatives aux structures en service. La principale difficulté de cette dernière étape est l'adaptation des outils de modélisation et d'expérimentation à leur utilisation en service, c'est-à-dire sous la contrainte d'un temps minimum de résolution, avec un minimum de moyen et dans un environnement hostile. Les deux premières étapes concernent les phases de conception et de prototypage alors que la troisième étape s'étend sur toute la durée de vie des structures.

La modélisation du comportement des structures s'est développée de manière spectaculaire ces cinquantes dernières années depuis les méthodes analytiques simplifiées en élasticité linéaire [101, 88, 118, 35, 75], jusqu'aux méthodes de calcul numérique par éléments finis [33, 132, 131, 10, 91], par éléments de frontière [22, 19] et par éléments spectraux [38], en passant par les méthodes d'homogénéisation matériaux [14, 87]. Les performances actuelles des calculateurs, ainsi que les stratégies de calcul comme la décomposition de domaines [68, 111, 119], l'analyse multi-échelles [12] ou la réduction de modèles [13] permettent de traiter des problèmes intégrant des comportements anisotropiques et non-linéaires avec des évolutions temporelles. Cependant, si les méthodes de résolution linéaires permettent actuellement d'obtenir des résultats quasiment en temps réel, de nombreuses applications nécessitent encore plusieurs heures à plusieurs jours de calcul.

L'expérimentation sur structures est rapidement devenu un outil nécessaire pour répondre aux écarts entre leurs modèles et les observations. Les progrès des moyens de mesure ont permis de mettre en œuvre des méthodes systématiques pour le recalage et l'identification des paramètres descriptifs de ces modèles. Le recalage de modèle concerne principalement la modélisation dynamique des structures que ce

soit pour leurs comportements [34, 73, 90, 41, 48, 78] ou leurs conditions aux limites associées à leurs environnements [110, 37, 74, 92, 53, 2, 1, 64, 108, 128, 123]. L'identification des conditions aux limites à partir de la réponse de la structure permet de réduire les incertitudes du modèle global ce qui améliore a priori la prédiction du comportement de la structure en utilisation. Bien que ces méthodes puissent se ramener à des problèmes classiques d'inversion, les erreurs intrinsèques aux modèles et aux mesures imposent une régularisation qui modifie les fonctionnelles d'écart aux mesures soit en ajoutant de l'information a priori [117, 115, 46], soit en utilisant un algorithme de résolution réduisant l'influence des erreurs ou discriminant directement les bonnes solutions [66, 114, 4, 96, 129, 3]. Ces problèmes inverses de recalage ont parallèlement entraîné le développement de méthodes directes d'identification basées sur la construction de modèles paramétriques à partir des mesures de la réponse de la structure à des sollicitations connues ou inconnues [51, 42]. Ces modèles sont plus simples à mettre en œuvre, notamment pour l'utilisation d'outils statistiques nécessaires à l'évaluation de la qualité des modèles ainsi identifiés. Enfin, les progrès des techniques de mesure ont permis de s'intéresser à des descriptions plus fines des modèles de structures, notamment par l'identification des lois de comportement matériaux [79, 55, 20, 32, 21, 44, 103, 6, 104], des conditions aux limites statiques [107, 84, 23, 121, 93, 109, 30, 76, 77, 97, 126, 130, 67, 58] et des champs de déplacement [40, 9, 120, 17, 116, 71, 105]. Ces derniers travaux sur la reconstruction des champs de déplacement font le lien direct avec la surveillance des structures puisque ces méthodes de reconstruction sont en partie développées pour le contrôle in-situ.

Dernière étape du processus d'optimisation des structures, la surveillance s'est initialement focalisée sur l'aspect santé des structures. Initiés par l'aéronautique pour réduire les coûts de maintenance tout en améliorant la sécurité, ces travaux ont dans un premier temps traité des problématiques d'impacts sur les structures, que ce soit leurs localisations ou leurs amplitudes [25, 127, 31, 83, 124]. Dans un second temps, ce concept de santé des structures s'est développé à travers des outils de diagnostic en temps réel de l'état des structures et de prédiction de leurs durées de vie restante. Ces outils se basent sur les méthodes de recalage du comportement et utilisent le plus souvent un ensemble de solutions pré-calculées pour identifier en temps réel la meilleure solution correspondante aux mesures [95, 49, 43, 26, 27]. Le diagnostic de l'état des structures et la prédiction de leurs durées de vie restantes à partir d'observations sont des problèmes mal-posés et non-linéaires. Enfin, nous pouvons citer les travaux de suivi des excitations en service [98, 70] qui se rapprochent des applications que nous développons pour la surveillance des structures lesquelles concernent non pas leur santé, mais l'évaluation et l'optimisation de leurs performances.

Les travaux faits dans le cadre de cette thèse se situent dans l'étape de surveillance des structures et concernent l'identification des conditions aux limites ainsi que la reconstruction des champs mécaniques. L'objectif est de définir simultanément la technologie embarquée pour mesurer la réponse des structures ainsi que la méthode d'interprétation de ces mesures afin d'améliorer les connaissances sur ces structures et sur leurs environnements. Un des aspects originaux de ces travaux est que les résultats ainsi obtenus ne sont pas restreints à la conception et à la maintenance. Ces connaissances sont initialement destinées aux utilisateurs des

structures pour en améliorer les performances en temps réel et pour en faciliter l'apprentissage. Cette finalité et les contraintes imposées par la mesure embarquée nous ont orientés vers des techniques directes de résolution comme l'identification linéaire. Nous nous sommes alors intéressés à des méthodes de calcul par éléments finis sur des structures simplifiées de type poutres et plaques. La problématique principale de ce travail a été de définir les paramètres minimaux à identifier à partir des modèles mécaniques de ces structures et de leurs conditions aux limites. Pour cela, nous nous sommes basés sur le principe de Saint-Venant et sur le caractère global des champs recherchés afin d'associer ces paramètres aux seules conditions aux limites. A partir des conditions aux limites identifiées, nous reconstruisons les champs mécaniques par un calcul direct. Cette approche permet de se limiter à un problème stable d'identification pour la reconstruction des champs mécaniques. Cette stabilité signifie que l'influence des erreurs de mesure et de modèle sur les solutions de ce problème est limitée et quantifiable en fonction de la position des capteurs dans les structures notamment.

Enfin, ces travaux s'insèrent dans la thématique de la conception optimale des structures composites développée au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique depuis une quinzaine d'année. Ces travaux ont permis de développer des modèles précis des matériaux composites [63] et d'appliquer ces modèles aux structures composites [89]. Ces modèles ont ensuite ouvert la voie aux outils d'expertise et de recherche des défaillances des pièces composites [113, 7, 29] qui sont actuellement en développement. En parallèle, les travaux sur la surveillance des structures composites ont principalement portés sur la problématique de santé avec un intérêt particulier pour la prédiction de la durée de vie à partir d'un diagnostic d'endommagement [18]. Les travaux présentés dans cette thèse concernent aussi la surveillance des structures, mais les outils développés sont associés au suivi des structures et de leurs environnements pour une utilisation optimale.

Description du manuscrit

Le premier chapitre présente les travaux concernant la définition et la mise en œuvre d'un système de mesure embarqué et ses applications sur des structures réelles. Ce choix est lié à la connaissance des grandeurs observables ainsi qu'aux contraintes de résolution qui sont nécessaires pour définir précisément le cadre des méthodes d'interprétation des observations en grandeurs utiles. Dans cette partie, nous présentons les spécifications d'un système de mesure embarqué adaptées à l'interprétation en temps réel des mesures pour améliorer les performances des structures. Ces spécifications résultent de l'expérience acquise durant cette thèse à partir d'essais in-situ, que ce soit pour la mesure de la forme des voiles, ou que ce soit pour la caractérisation du chargement sur un safran et un bras arrière de VTT. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés au développement d'une électronique réduite pour la mesure embarquée. L'idée est de placer cette électronique au plus près des capteurs pour minimiser le transport analogique de l'information et accroître ainsi la précision et la fiabilité des mesures. Nous avons pu observer que cette précision est la principale contrainte pour l'optimisation des performances des structures en utilisation. L'utilisation normale des structures est généralement associée à des niveaux de sollicitations faibles. Nous avons aussi travaillé sur la concep-

tion d'un extensomètre de flexion pour la reconstruction simplifiée de géométrie qui requiert une précision de mesure très importante. Enfin, les instrumentations du safran et du bras arrière de VTT pour la caractérisation de leurs chargements en service soulignent l'intérêt d'une modélisation mécanique pour obtenir un problème bien posé au sens où sa solution est aisément exploitable.

Le deuxième chapitre de ce manuscrit présente naturellement la formulation du problème inverse de surveillance des structures à partir de cette modélisation mécanique. Cette formulation est basée sur un modèle statique de la structure, lequel est motivé par les conditions de résolution associées au problème inverse de surveillance des structures. Ce problème inverse consiste à déterminer en temps réel l'état des structures caractérisé par leurs champs mécaniques et leurs conditions aux limites. Nous utilisons la méthode des éléments finis pour résoudre ce problème à partir de la minimisation des écarts aux mesures définis au sens des moindres carrés. Le principe de Saint-Venant nous permet de limiter la quantité de paramètres à identifier ce qui régularise l'identification. Nous avons choisi d'identifier le chargement dans un premier temps, puis, à partir de ce chargement nous calculons directement les champs mécaniques, le comportement des structures considérées étant connu. Sachant que les champs mécaniques intérieurs dépendent principalement des résultantes globales du chargement, le choix d'une base restreinte du chargement permet a priori de limiter le nombre de paramètres à identifier tout en conservant une bonne description globale de l'état des structures. Nous traitons ensuite un exemple de structure en contraintes planes qui illustre la notion de champ mécanique intérieur. A partir de cet exemple, nous définissons la notion de chargements équivalents du point de vue de la réponse des structures associée aux champs mécaniques intérieurs. Ces chargements équivalents ont les mêmes effets sur les champs mécaniques intérieurs. Enfin, la modélisation des conditions aux limites réduite au chargement seulement. L'absence de conditions de déplacement est la conséquence des seules mesures de déformations. Cette approche permet aussi de s'affranchir des problèmes de mouvement de corps rigide liés à la souplesse des liaisons entre les structures étudiées et leurs environnements. Seul le chargement transmissible par les liaisons entre structures est directement caractérisé. L'intérêt de ce travail porte alors sur le choix des bases de chargement permettant d'obtenir un nombre minimum de paramètres à identifier, un conditionnement minimum de l'opérateur d'identification et une méthode systématique de positionnement des capteurs.

Le troisième chapitre présente une méthode de construction de la base de chargement dans le cadre des structures poutres. A partir des équations d'équilibre de ces structures, nous définissons la modélisation du chargement et nous utilisons les solutions analytiques de ces équations pour obtenir une base de chargement équilibrée et liée à la variation des champs mécaniques intérieurs. Nous choisissons pour cela des approximations polynomiales et polynomiales par morceau des champs mécaniques. Dans un premier temps, nous nous intéressons seulement à la résolution du problème inverse sur des poutres élémentaires afin de valider la méthode de reconstruction des champs mécaniques à partir de l'identification des paramètres de chargement. Ces structures élémentaires nous permettent aussi d'obtenir des conditions d'optimalité pour le positionnement des capteurs minimisant le conditionnement de l'opérateur d'identification et d'évaluer la stabilité de cette identification. Ces différents résultats sont ensuite validés expérimentalement sur une poutre réelle. Les essais réalisés

sur cette structure illustrent la notion d'erreur de mesure ainsi que sa décomposition en une erreur de modélisation et une erreur aléatoire. Cette distinction fournit des informations sur la précision requise par le système de mesure en fonction des applications envisagées. Ces essais illustrent aussi la notion de chargement équivalent ainsi que l'intérêt du recalage du chargement. Un exemple de suivi de chargement sur une structure réelle lors d'un essai à rupture est aussi présenté. Cet exemple permet d'illustrer l'intérêt de la méthode de suivi des conditions de chargement notamment pour l'exploitation des essais sur structure pour la validation des modèles et pour la certification des structures. Pour terminer, nous nous intéressons à des poutres dites complexes. Ces structures correspondent à des assemblages de poutres de type treillis ou à des géométries complexes de structures. Les bases de chargement et les positions des capteurs sont obtenus à partir d'une décomposition de ces structures en poutres élémentaires. Les résultats obtenus sur les poutres élémentaires nous permettent d'analyser simplement ces structures complexes et de définir les outils nécessaires à la résolution du problème inverse de surveillance. Cette décomposition des structures complexes concerne seulement la définition de la base de chargement et du positionnement des capteurs. La résolution du problème inverse est faite à partir du modèle global par éléments finis de ces structures.

Le dernier chapitre de cette thèse porte sur la mise en œuvre de la méthode pour les plaques. Ces structures illustrent parfaitement la problématique de la reconstruction de champs mécaniques complexes avec notamment la présence d'inclusions ou de singularités à l'intérieur des structures. A partir des travaux menés sur les poutres, nous utilisons dans un premier temps des solutions analytiques de type Trefftz pour définir des bases de chargement équilibrées et liées aux variations des champs mécaniques intérieurs. Les résultats numériques obtenus à partir de ces bases de chargement valident l'application de la méthode sur les plaques. Ces bases de chargement n'étant définies que pour des domaines étoilés, nous proposons ensuite une extension de ces bases à des plaques quelconques. Seuls les bords chargés de ces structures sont considérés pour définir un domaine étoilé équivalent. Les bases de chargement précédemment définies sont alors directement utilisées sur ces plaques quelconques pour résoudre le problème de surveillance des structures. Les bases de chargement ainsi construites sont incomplètes. Cependant, cette méthode permet de définir simplement des familles de fonctions associées aux variations des champs mécaniques intérieurs. Bien que les résultats obtenus sur des plaques trouées montrent que la solution est dégradée par rapport aux plaques étoilées, la qualité des solutions reste suffisante. Enfin, nous présentons appliquons la méthode proposée aux structures complexes modélisées par un assemblage de plaques. Comme pour les poutres, cette décomposition sert seulement à définir les bases de chargement associées aux structures globales et à positionner les capteurs. Les bords chargés des structures globales sont associés à des plaques élémentaires pour obtenir une famille de fonctions de chargement. L'équilibre global de ces fonctions de chargement donne ensuite une famille orthonormée de chargement.

Chapitre 1

Spécification et mise en œuvre d'un Système de Mesure Embarqué (SME) pour la surveillance des structures

1.1 Introduction

Ce travail a pour origine la problématique de la mesure en service de la forme des voiles sur des voiliers de compétition [28]. La géométrie de ces structures flexibles doit être parfaitement contrôlée afin d'optimiser l'utilisation du voilier. En effet, de faibles variations de géométrie entraînent une réduction ou une amélioration conséquente des performances du voilier [81]. Le contrôle précis de la géométrie représente alors un enjeu important pour des structures dont l'objectif principal est la performance.

Cette performance est définie comme étant la vitesse du voilier pour des conditions de navigation données associées au vent, à la houle et aux courants. Ainsi, la corrélation entre les performances du voilier, la forme de ses voiles mais aussi de manière plus générale l'état de la structure complète requiert la connaissance simultanée d'une multitude de paramètres dits de navigation. La simulation de ces structures est alors devenue un outil essentiel pour la prédiction et pour l'optimisation des performances. Cependant, la mesure embarquée sur ces structures reste une étape obligée pour alimenter et valider ces simulations du fait de la complexité des phénomènes physiques liés à l'interaction entre la structure et son environnement.

Ces mesures et les systèmes embarqués les réalisant se divisent en deux catégories. La première est liée à l'identification de la forme des voiles en navigation et à leur aérodynamisme, que ce soit pour leur conception ou leur réglage. La seconde concerne les éléments structuraux rigides comme la coque, l'haubanage ou le mât afin de quantifier les niveaux de chargement de ces éléments. Historiquement, les mesures d'aérodynamisme et de forme des voiles ont été les premières mises en œuvre. Ainsi, en 1925, Manfred Curry [36] installe des fils de soie au bout d'une tige pour caractériser l'écoulement du flux d'air autour des voiles. La photographie a ensuite permis de caractériser la forme des voiles, depuis l'exploitation manuelle

des clichés [81], jusqu'à leur traitement informatique à partir des techniques de vision par ordinateur comme la détection de contours ou la corrélation d'images [125, 69, 47, 85, 105]. Parallèlement, la mesure sur les éléments structuraux s'est développée à partir de l'instrumentation des coques, des pieds de mât et des câbles et des poulies d'haubanage [60, 57, 8, 99, 59, 45, 56] pour caractériser les sollicitations de ces éléments critiques. Le développement de SME spécifiques aux structures nautiques est aussi un des aspects de ces travaux. Ce développement concerne aussi bien la conception de capteurs avec par exemple la mesure du cisaillement ou de l'impact dans les coques sandwich [24, 80], la mesure de forme par fibres optiques [39, 65] et la mesure de pression aux creux des voiles [102], que la conception complète du SME [52, 15, 54, 82].

Dans ce contexte nous avons développé un SME pour la mesure simultanée des éléments flexibles et rigides des structures. L'intérêt est d'obtenir un système unique pour la caractérisation globale des structures. Cet aspect est fondamental pour permettre la diffusion d'un tel système. Les principes sur lesquels nous nous basons sont :

- La miniaturisation de l'électronique de mesure pour l'intégrer au plus près des capteurs tout en limitant son influence sur la structure.
- L'utilisation d'un réseau sans fil pour la répartition et la gestion des capteurs ainsi que la transmission des mesures.
- La limitation de la fréquence d'acquisition au profit du nombre de capteurs.

Ces principes se retrouvent dans la majorité des SME existant mais aucun ne permet de tous les réunir actuellement. La mise en œuvre de ces principes est faite à partir d'une décomposition du SME en différents sous-produits qui permettent de s'adapter simplement à toutes les applications envisagées. Ces travaux sont notamment basés sur les performances des systèmes commerciaux suivants **HBM CANHEAD**, **MicroStrain EmbedSense** et plus récemment **GreenVirtue WN128**. Les travaux que nous présentons ici sont immédiatement transposables à des structures aéronautiques ou de génie civil. Le choix des structures nautiques est avant tout un choix historique et pratique. Ces structures sont un environnement contraignant de mesure que ce soit en termes d'encombrement du système de mesure ou de sensibilité aux conditions extérieures (humidité, corrosion, variations de température, etc). De plus, les critères de dimensionnement en rigidité des structures nautiques imposent une précision importante, $\approx 10^{-6}$ déformation, pour de la mesure embarquée. Par conséquent, la mise en œuvre sur ces structures est une excellente illustration des performances d'un SME. Enfin, ces structures n'ont pas les exigences de sécurité et le coût des structures aéronautiques ce qui simplifie la mise en œuvre et l'utilisation du SME lors de sa conception.

Ce chapitre débute par la présentation du SME ASLab réalisé pour la mesure en service de la forme des voiles. Ce SME est un extensomètre de flexion qui permet de mesurer les courbures d'une surface courbe tendue pour en reconstruire simplement la forme. Ce prototype de SME nous a ensuite permis de définir une architecture plus générale dans laquelle trois sous-produits interviennent : les capteurs, les Systèmes Electronique d'Acquisition et de Transmission (SEAT) et les Systèmes de Transmission et de Calcul (STC). Le SEAT et le STC sont communs à toutes les applications, seuls les capteurs sont adaptés en fonction des caractéristiques mécaniques des structures mesurées. Nous nous sommes ensuite intéressés

aux spécifications requises par les SEATs pour répondre aux objectifs de la surveillance des structures d'optimisation des performances. Ces spécifications ont été établies à partir des systèmes existants et commercialisés, mais aussi des différents essais in-situ réalisés au cours de cette thèse, que ce soit pour la mesure en service de la forme des voiles ou l'identification des conditions de chargement sur un safran. Nous avons ensuite fait concevoir deux prototypes de SEAT et nous présentons les performances réelles obtenues par rapport aux spécifications souhaitées. Ces prototypes basés sur deux technologies de mesure différentes (TDC et ADC) nous ont permis de mieux identifier les possibilités technologiques actuelles pour la mesure embarquée et de définir les pistes de recherche à développer pour atteindre les spécifications requises. Enfin, nous présentons les essais in-situ réalisés sur un safran et un bras arrière de VTT. Ces essais ont pour objectif de valider les performances des SEATs et d'illustrer la mise en œuvre du SME développé sur des structures réelles. L'exploitation des mesures faites à partir d'essais de calibration seulement illustre aussi le caractère mal posé de l'interprétation des grandeurs observables en grandeurs utiles et l'intérêt de la modélisation mécanique pour résoudre ce problème.

1.2 SME pour la surveillance des structures nautiques à voiles

1.2.1 Système de mesure ASLab (Advance Sailing Lab)

Le système de mesure ASLab est développé dans le cadre de la thématique de recherche sur la surveillance des structures du LMA [28]. L'objectif est d'obtenir un système de mesure modulaire, peu intrusif et démontable pour la mesure de forme des voiles. Le fonctionnement de ce système est assez proche de ceux par fibres optiques. Des capteurs répartis dans les voiles mesurent localement les courbures de ces surfaces. La technologie des jauges de déformation permet de résoudre les problèmes liés à l'encombrement et à la sensibilité à l'environnement. Les phénomènes thermiques sont compensés localement et les mesures sont transmises vers une unité centrale à partir d'un réseau sans-fil de capteurs.

Le principal intérêt de ce système est d'être un extensomètre de courbure. Les jauges sont montées sur des supports glissant dans la voile à l'aide de poches. Ce montage permet d'amplifier les déformations mesurées par la jauge et de s'affranchir des déformations de tension de la voile. Cet aspect simplifie fortement la mesure de la forme courbe de structures dont les déformations prépondérantes sont dues à la tension. En effet, la reconstruction de la forme de la voile à partir des seules déformations de tension nécessite des modèles de comportement très complexes et non-linéaires [112]. La mesure directe des courbures permet une reconstruction simplifiée de cette forme à partir de méthodes de géométrie descriptive [28] ou par éléments finis [105].

De manière plus générale, l'extensométrie de courbure est un outil adapté pour identifier la forme courbe de structures dont la sollicitation principale n'en est pas l'origine. Le cas des mâts est actuellement une extension privilégiée de ce système. La mesure précise de la forme de ces structures est nécessaire à la conception des voiles. La pré-contrainte de tension et les rayons à mesurer, $\geq 100\text{m}$, rendent inopérante une instrumentation directe de la structure. L'extensométrie de courbure

avec amplification de la mesure par un support est donc particulièrement bien adaptée à cette application. Enfin, ces structures étant constamment chargées, le caractère démontable du SME est une nécessité pour obtenir des états de référence fiables. Les procédés de calibration à l'échelle de ces structures sont trop complexes à mettre en œuvre. Cet aspect est d'ailleurs fortement présent en génie civil où l'instrumentation à long terme in-situ pose encore de nombreux problèmes du fait des dérives mécaniques et de la complexité de la recalibration des capteurs.

1.2.2 Description technologique du SME ASLab

Ce SME est basé sur un réseau de capteurs. La mesure et l'acquisition sont réalisées par les Unités de Mesures UM. Ces UM sont regroupées en Bandes de Mesure BM pour former un réseau en bus dont le noeud maître est une Unité de Transmission UT. Ces UT communiquent avec l'Unité Centrale (UC) de type PC qui est chargée de l'interprétation des mesures effectuées par les UM. Le réseau de communication entre les UT et l'UC est un réseau de transmission sans-fil en étoile. L'organisation du SME et son intégration dans la structure, ici une voile, sont illustrées sur la figure 1.1.

L'intégration du système électronique d'acquisition dans les UM limite le transport analogique de la mesure au profit d'un transport numérique, filaire dans le réseau bus, puis sans fil dans le réseau étoilé. Le protocole de transmission sans-fil utilisé est pour l'instant un protocole bluetooth. Des travaux sont en cours pour obtenir une UT multi-protocoles (ZigBee, Bluetooth et Wifi). Le choix de ce protocole résulte du compromis entre le débit d'information et la consommation d'énergie qui sont requis par l'application. Enfin, le choix de conserver une partie du réseau en filaire est lié au nombre maximum d'UM utilisé. Ce nombre d'UM limite le débit de transmission dans le cas de réseaux sans-fil en étoile, en plus de la consommation.

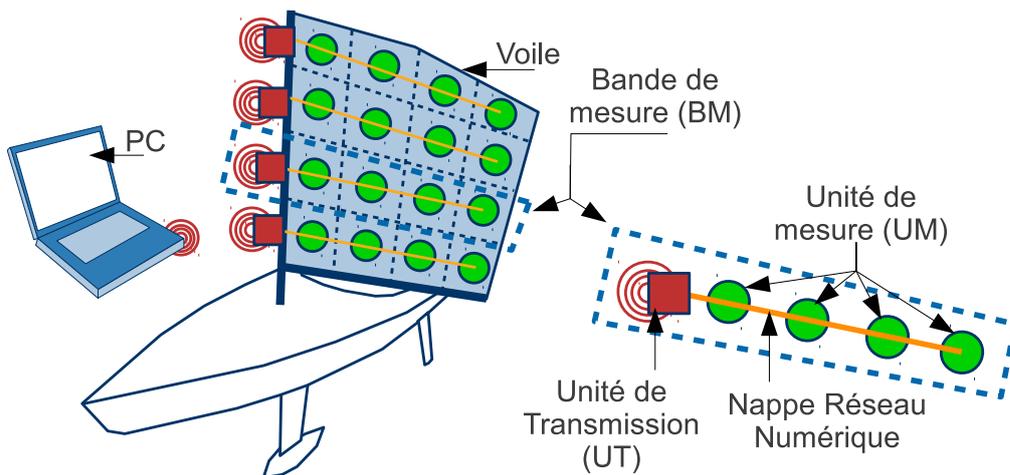


FIGURE 1.1 – Schématisation du Système de Mesure Embarqué (SME) ASLab.

Chaque UM est composée de capteurs mesurant les courbures dans différentes directions. La description de ces UM est illustrée sur la figure 1.2 dans le cas d'une mesure. Actuellement les UM utilisées pour la mesure de la forme des voiles contiennent trois directions de mesures, $[-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ]$. Les courbures sont mesurées à partir de

la déformation d'un support qui suit la forme de la structure instrumentée, ici la voile, et sur lequel les jauges de déformation sont collées. Ce support amplifie la relation liant la courbure à la déformation et résout aussi les problématiques d'installation des jauges dans la voile et de démontabilité du système. Enfin, l'utilisation de poches permet de laisser glisser les supports pour le montage d'extensométrie.

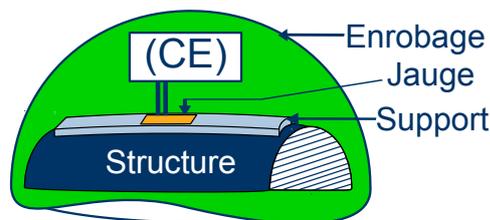


FIGURE 1.2 – Schématisation du principe de conception d'une Unité de Mesure (UM) du SME ASLab. Cette UM contient les jauges de déformations, le support de liaison avec la structure et l'électronique pour l'acquisition des mesures.

1.3 Spécifications du SME ASLab

1.3.1 Analyse du besoin du SME

La conception et la mise en œuvre du SME ASLab nous ont permis d'identifier les différentes problématiques associées à la conception et à l'optimisation de ce type de système. Nous présentons ici la formalisation de ces informations sous la forme d'un cahier des charges basé sur une analyse fonctionnelle simplifiée du produit.

Un SME est un produit dont la fonction est de permettre à un utilisateur de suivre l'évolution d'une ou plusieurs grandeurs physiques d'une structure en agissant sur cette structure. La ou les grandeurs physiques dont on souhaite obtenir l'évolution sont appelées « grandeurs utiles ». Ces grandeurs utiles ne sont pas directement observables. Des grandeurs dites « observables » sont alors mesurées, acquises et interprétées pour obtenir les grandeurs utiles. Par conséquent, la fonction principale du SME se décompose en trois sous-fonctions associées à des sous-produits du SME :

- Mesurer les grandeurs observables, fonction associée au sous-produit Capteur.
- Acquérir les mesures, fonction associée au sous-produit Système Electronique d'Acquisition et de Transmission (SEAT).
- Interpréter les mesures pour obtenir l'évolution de la ou les grandeurs utiles, fonction associée au sous-produit Système de Transmission et de Calcul (STC).

Le produit Capteur est composé des jauges et de leurs supports. Le produit SEAT est une carte électronique qui effectue la mesure à partir du capteur. Cette mesure est ensuite numérisée et transmise au STC. Le STC est composé de l'UT et de l'UC. L'UT centralise les informations issues des SEATs et les transmet par liaison sans-fil à l'UC. L'UC effectue l'interprétation des mesures et fournit les grandeurs utiles à l'utilisateur à partir d'un logiciel de calcul. L'organisation du SME et de ses composants est résumée sur la figure 1.3.

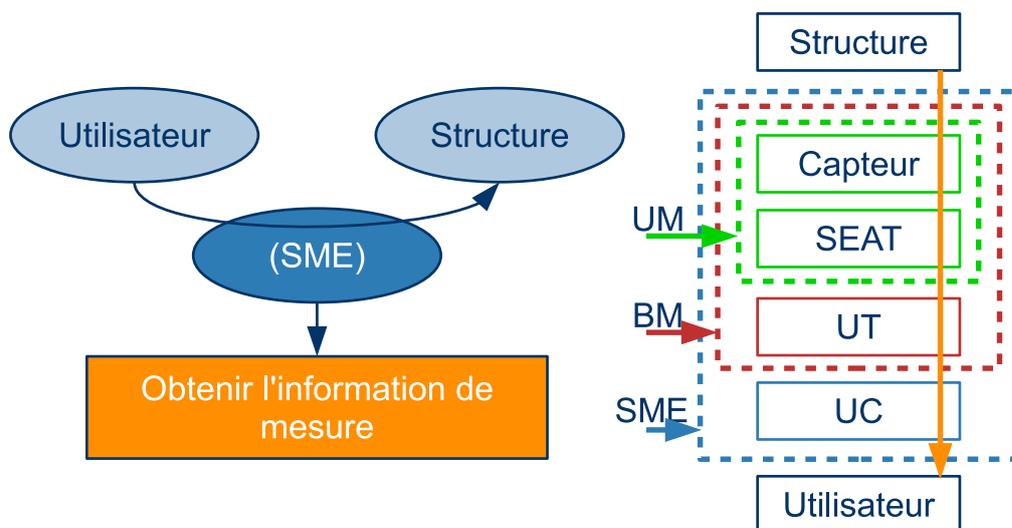


FIGURE 1.3 – Schématisation de l'analyse du besoin du SME et schématisation de la chaîne de création des grandeurs utiles depuis leur mesure sur la structure jusqu'à leur communication à l'utilisateur. Ce schéma illustre aussi la correspondance entre les sous-produits du SME et les éléments du réseau de mesure définis précédemment.

1.3.2 Spécifications du SEAT

Les spécifications du SEAT ont pour objectif de définir les caractéristiques nécessaires à la mesure embarquée dans le cadre de la surveillance des structures. Ces caractéristiques sont données dans le tableau 1.1. Nous considérons que ce système mesure principalement par demi-pont de Wheatstone. La mesure faite par le SEAT est associée à la variation relative de résistance $\Delta R/R$ caractéristique du demi-pont de Wheatstone. Cette grandeur physique permet de caractériser les performances intrinsèques du SEAT. L'unité de référence est le ppm = 10^{-6} . Cette valeur correspond à une micro-déformation dans le cas d'une mesure par demi-pont avec un coefficient de jauge de deux.

Le nombre de voies de mesure ou demi-ponts est justifié par la mesure d'au moins trois déformations dans chaque UM intégrant un SEAT. La principale difficulté de cette spécification réside dans la précision de la mesure qui est associée à l'amplitude du bruit. Le bruit est une variation aléatoire haute fréquence et de moyenne nulle de la mesure. Ce bruit peut être décrit par une distribution statistique supposée Gaussienne. L'amplitude du bruit correspond à l'écart obtenu entre les valeurs maximale et minimale du signal lorsque le demi-pont est équilibré. Du fait de cette distribution statistique, la définition du bruit à partir de l'amplitude de mesure requiert un intervalle de temps qui détermine le nombre d'échantillons sur lequel l'amplitude du bruit est évaluée pour une fréquence donnée. Cet intervalle de temps est égal au quart de la durée maximale de mesure en continu. Le nombre d'échantillons considérés pour évaluer l'amplitude maximale du bruit est alors de $3600 \times 7 = 25200$. En supposant que la distribution du bruit est gaussienne, ce nombre d'échantillons relie l'amplitude maximale du bruit $\Delta \varepsilon$ à son écart-type Σ_ε sous la forme, $\Delta \varepsilon \approx 4,29 \Sigma_\varepsilon$. Ce bruit est intrinsèque au SEAT, il est identifié indépendamment des bruits mécaniques introduits par les capteurs et des variations d'offset et thermique. Ces variations d'offset et thermique sont aussi intrinsèques au

SEAT. La stabilité des offsets limite le recalibrage au fur et à mesure de l'utilisation. La variation d'offset a été déterminée en fonction de la fréquence d'utilisation a priori du système. De même, la variation thermique du système permet de négliger son influence sur la mesure. Enfin, les capteurs de température sont nécessaires pour contrôler son évolution au cours de l'expérimentation.

Critères	Valeurs
Nombre de demi-ponts (voies de mesure)	≥ 3
Amplitude de mesure par voie	$\varepsilon = \pm 1000 \text{ppm}$ $\varepsilon_{min} = 1 \text{ppm}$
Fréquence d'acquisition	7Hz nominale
Autonomie	4h de mesure continue
Amplitude du bruit par voie	$\Delta\varepsilon = \pm 0,05 \text{ppm}$ à 7Hz sur 1h de mesure continue
Variation des offsets par voie	0,1ppm/jour, 3ppm/mois
Temps de stabilisation	$\leq 600 \text{s}$
Variation thermique	$\leq 0,1 \text{ppm}/^\circ\text{C}$ sur la plage $T_{max} = 60^\circ\text{C}$ et $T_{min} = 0^\circ\text{C}$
Encombrement	$h_{max} = 4 \text{mm}$, $L \times b \leq 70 \times 70 \text{mm}^2$
Capteur de température	2 PT1000

Tableau 1.1 – Spécifications du SEAT intégré dans une UM. Les valeurs de mesure exprimées en $\text{ppm} = 10^{-6}$ sont associées à la variation de résistance $\Delta R/R$ mesurée par demi-pont de Wheatstone.

1.3.3 Evaluation des performances du SEAT

a/ Description des tests et des SEATs évalués

Les spécifications précédentes du SEAT sont des objectifs définis à partir des différents essais in-situ et en laboratoire réalisés au cours de cette thèse. Nous n'avons pas encore pu atteindre ces spécifications. Cependant, la conception et les tests effectués sur deux SEATs de technologies différentes nous ont permis d'identifier les développements futurs du système. Ces SEATs ont été développés par les entreprises Mayday Electronics et Newsteo SAS.

Le premier SEAT est basé sur la technologie Time-to-Digital Converter (TDC) développée par ACAM. Le principe est de mesurer le temps de réponse d'un circuit RC. Un condensateur est monté en parallèle des jauges du demi-pont. Lorsque la jauge est déformée, sa résistance varie et modifie le temps caractéristique de réponse du circuit RC qui est numérisé par le TDC. Ainsi, la notion de demi-pont pour ce type de système est limitée à la comparaison de la mesure simultanée de deux jauges. Ce système n'utilise pas de pont de Wheatstone. Ce SEAT a été conçu par la société Mayday Electronics et est intégré dans le prototype ASLab.

Le second SEAT est un Analogic-to-Digital Converter (ADC) qui est un système classique de mesure par pont de Wheatstone. L'ADC numérise la variation de tension du pont qui est proportionnelle à la variation de résistance. Ce SEAT a été conçu par la société Newsteo mais n'a pas été finalisé du fait de ses performances réelles.

Le test des SEATs est constitué de trois séries d'essais :

- (E1) Essais de stabilité : Les SEATs sont connectés à une éprouvette en acier sur laquelle sont montées des jauges en T auto-compensées pour l'acier. L'éprouvette est laissée à plat sans sollicitation et le signal mesuré est utilisé pour déterminer le niveau de bruit, la stabilité thermique et la dérive des offsets. 7 essais ont été réalisés sur 20 jours.
- (E2) Essais de mesure en petites déformations : L'éprouvette précédente est dans un premier temps attachée verticalement et une masse de 20kg y est suspendue pour obtenir une déformation $\approx 5 \cdot 10^{-6}$. L'éprouvette est ensuite mise dans une machine de traction et un cycle de chargement de 0 à $400 \cdot 10^{-6}$ en déformation est imposé.
- (E3) Essais de mesure sur toute la plage : Une résistance variable de calibration est connectée aux SEATs. Le complément de pont utilisé est l'une des jauges de l'éprouvette précédente. La résistance variable est utilisée pour évaluer la plage de mesure complète de chaque SEAT et définir l'évolution du bruit en fonction du niveau de mesure.

b/ Essais de stabilité

L'éprouvette utilisée pour ces tests est en fonte. Deux montages de jauges en T sont installés comme illustré sur la figure 1.4. Ces montages en T ainsi que



FIGURE 1.4 – Illustration de l'éprouvette et des deux montages de jauges en T notés T_1 et T_2 .

l'autocompensation thermique des jauges permettent de négliger les phénomènes thermo-mécaniques de dérive. De plus, la position allongée de l'éprouvette et son aspect massif, $S = 10 \times 30\text{mm}^2$ permettent de négliger les phénomènes de dérive mécanique comme le fluage. L'objectif de ces essais est de caractériser dans un premier temps les dérives intrinsèques de l'électronique de mesure sur des essais longue durée. La correction de ces dérives permet ensuite d'évaluer le bruit intrinsèque de l'électronique ainsi que sa statistique. Enfin, la comparaison des essais effectués sur vingt jours permet de quantifier le phénomène de dérive des offsets.

La dérive du SEAT est divisée en deux catégories :

- La dérive de courte durée associée à la mise en route du système de mesure. Cette dérive est caractérisée par une variation importante de la mesure bien que l'état mesuré soit stable. Elle correspond à une phase de transition du système de mesure vers un régime permanent. Le temps caractéristique de cette dérive est le seul paramètre retenu.
- La dérive de longue durée associée principalement à l'évolution de température des différents composants du SEAT. Cette dérive est intrinsèque au SEAT.

Ces dérives sont illustrées sur la figure 1.5 qui montre l'évolution des déformations mesurées par les SEATs NS et ME lors de deux essais distincts. Les temps caractéristiques des dérives courte durée sont estimés à partir d'une moyenne sur

l'ensemble des essais réalisés durant ces vingt jours. Le temps caractéristique du système NS est d'environ $750\text{s} = 12,5\text{min}$ tandis que celui du système ME est d'environ $1500\text{s} = 25\text{min}$. En pratique cela signifie que le temps de mise en route de ces SEATs est de $12,5\text{min}$ pour le NS et de 25min pour le ME. Si le temps caractéristique de stabilisation du NS est proche de la spécification, celui du ME en est très éloigné. Cependant, le NS possède une isolation thermique qui répartit la température uniformément dans tous les composants. Cette isolation réduit la phase transitoire de démarrage du SEAT. Le système ME testé ne possède aucune isolation thermique autre que l'air du boîtier dans lequel il est installé. Une isolation thermique adéquate du ME devrait a priori permettre de réduire son temps de stabilisation. De plus, une correction de température interne peut être utilisée pour améliorer ce temps caractéristique.

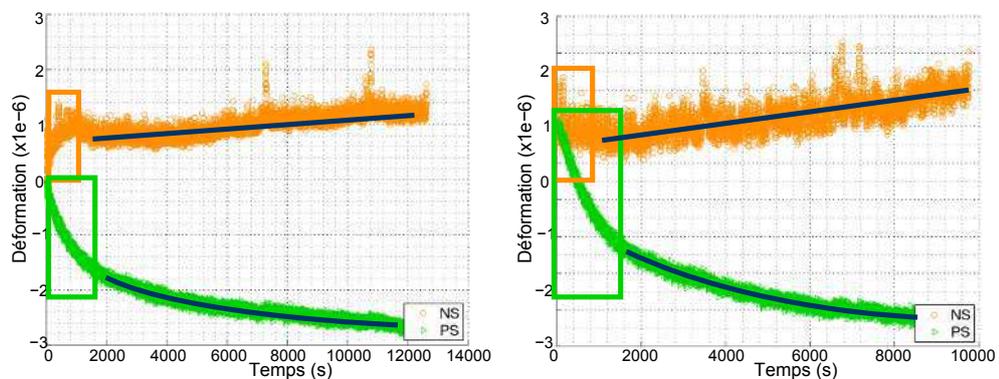


FIGURE 1.5 – Evolution des déformations pour deux essais de stabilité réalisés à deux jours d'intervalle. Les zones encadrées correspondent aux zones de dérive courte durée associée à la stabilisation du système lors de sa mise en route. Cette zone est définie par son temps caractéristique τ_d . A partir de $t \geq \tau_d$ la mesure est faite dans la zone avec dérive longue durée.

A partir de ces temps caractéristiques, la corrélation entre les évolutions de température mesurées pour les systèmes NS et ME et les dérives longue durée permet de définir les coefficients de dérive thermique de ces systèmes. Ces coefficients sont $1 \pm 0,5\text{ppm}/^\circ\text{C}$ pour le système NS et $0,6 \pm 0,5\text{ppm}/^\circ\text{C}$ pour le système ME. Ces valeurs sont dix fois supérieures à celle de la spécification. Cependant, la correction thermique interne est possible pour les deux systèmes et devrait permettre de réduire ces valeurs. De plus, la mesure de température utilisée comme référence pour le ME est externe à la carte contrairement au NS. Ainsi, l'évolution des déformations en fonction de la température obtenue pour le ME présente de fortes discontinuités. Ces discontinuités sont dues à une mauvaise estimation de la température de référence au niveau de la carte pour chacun des essais. Ce résultat est visible sur la figure 1.6 qui montre l'évolution des températures mesurées pour chaque système en fonction du temps et l'évolution des déformations en fonction de cette température.

Les dérives d'offset sont ensuite calculées à partir des signaux corrigés en température. Le système NS a une variation de $1,49\text{ppm}$ sur vingt jours tandis que le système ME a une variation de $3,96\text{ppm}$ sur 20 jours. Comme pour le résultat précédent, cette dérive du système ME devrait être améliorée par une meilleure isolation thermique et la prise en compte de la température interne du système.

Enfin, l'évolution des amplitudes maximales de bruit est faite à partir des signaux sans dérive. Pour cela, la zone de stabilisation n'est pas étudiée et une cor-

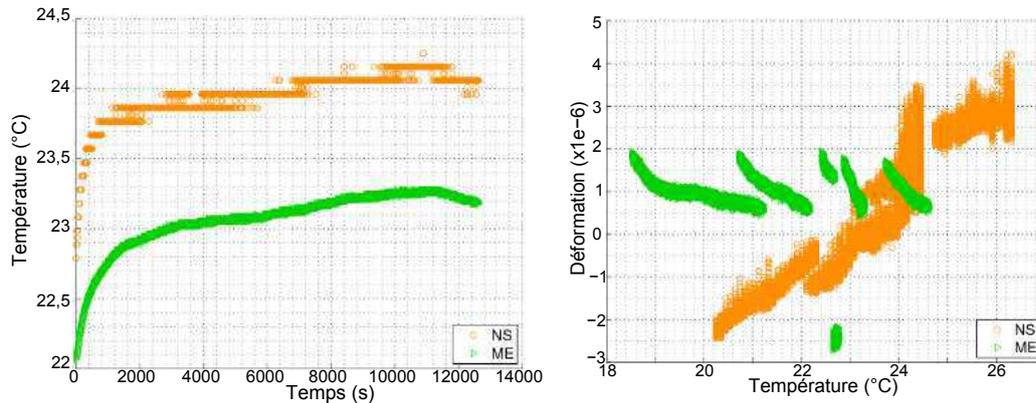


FIGURE 1.6 – Evolution des températures mesurées pour chaque SEAT en fonction du temps lors d'un essai de stabilité et évolution des déformations en fonction des températures mesurées pour l'ensemble des essais de stabilité.

rection locale de la dérive est effectuée pour chaque signal. Les dérives de chaque SEAT sont similaires et cette correction ne favorise pas l'un par rapport à l'autre. La figure 1.7 montre l'évolution des déformations corrigées pour l'évaluation statistique du bruit, ainsi que l'évolution des amplitudes maximales des bruits des systèmes NS et ME. L'hypothèse d'une distribution gaussienne de ce bruit donne une variation de 0,5% à 1% de ces amplitudes pour un intervalle de confiance à 95%. Le système ME présente un niveau de bruit inférieur à celui du système NS. Sur 25 200 échantillons, l'amplitude du bruit est de $\pm 0,6$ ppm pour le NS et de $\pm 0,25$ pour le ME. De plus l'évolution de cette amplitude en fonction du nombre d'échantillons est plus faible dans le cas du ME que dans celui du NS. Ce résultat correspond à l'utilisation simultanée de deux voies de mesure sur le ME mais à une seule voie sur le NS. L'utilisation simultanée de deux voies de mesure sur le NS revient à multiplier par 2 la fréquence d'acquisition globale de l'ADC et à multiplier par $\sqrt{2}$ l'amplitude du bruit.

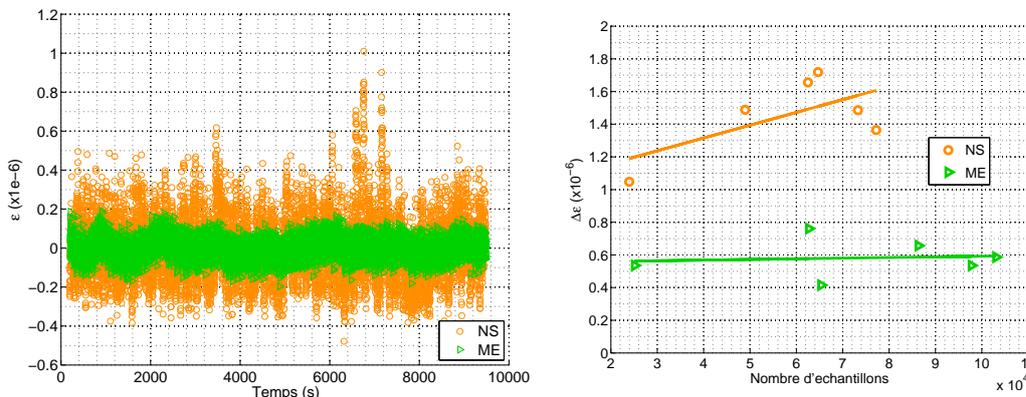


FIGURE 1.7 – Evolution des déformations mesurées après correction des dérives pour un essai de stabilité et évolution des amplitudes maximales des bruits de chaque SEAT en fonction du nombre d'échantillons pour tous les essais considérés.

c/ Essais de mesure en petite déformation

L'éprouvette instrumentée des deux montages en T est sollicitée en traction avec une machine d'essai comme illustré sur la figure 1.8. Ces essais de traction ont permis de valider les mesures faites par les SEATs en comparant les modules d'Young identifiés du matériau. La valeur de référence identifiée à partir de l'extensomètre MTS est de $212GPa$. Toutes les voies de mesure des SEATs ont été testées durant ces essais. La figure 1.9 montre l'évolution des déformations mesurées par

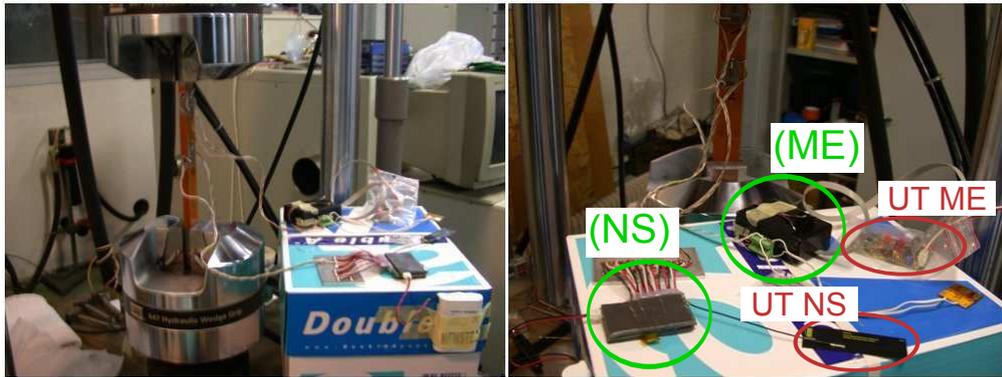


FIGURE 1.8 – Photographie du montage d'essai dans la machine de traction. Les SEATs et leurs UT sont identifiés sur la photographie.

chaque SEAT au cours de l'essai, ainsi que les valeurs correspondantes des modules d'Young identifiés. Les essais (1) à (6) ont été effectués avec T_1 connecté à ME et T_2 connecté à NS. Ces connexions sont inversées pour les essais (7) à (9), c'est-à-dire T_1 est connecté à NS et T_2 est connecté à ME. Les modules identifiés pour chaque montage de jauge T_1 et T_2 ainsi que leurs écarts à la référence sont donnés dans le tableau 1.2. La dépendance des valeurs des modules identifiés aux montages de jauges permet de valider le fonctionnement des SEATs sur une petite plage de mesure. Les valeurs de modules obtenues et leurs précisions valident aussi la mesure des SEATs.

Enfin des essais ont aussi été réalisés pour la mesure de très faible déformation $\leq 5 \cdot 10^6$. Ces essais montrent que la sensibilité des deux SEATs est suffisante pour mesurer $1 \cdot 10^6$. Ces essais ont été faits car la technologie de mesure du ME n'est pas une technologie de mesure en continu. De même, pour limiter l'échauffement et réduire la consommation, l'alimentation du demi-pont de NS est faite de manière alternative. Nous vérifions ainsi que ces choix technologiques ne réduisent pas la précision des mesures.

Montage	E	ΔE	ΔE_{ref}
T_1	214GPa	0,47%	0,94%
T_2	211GPa	0,13%	0,47%

Tableau 1.2 – Valeurs et variations des modules d'Young identifiés par les montages de jauges T_1 et T_2 . L'écart relatif entre les valeurs moyennes identifiées est de 1,25%.

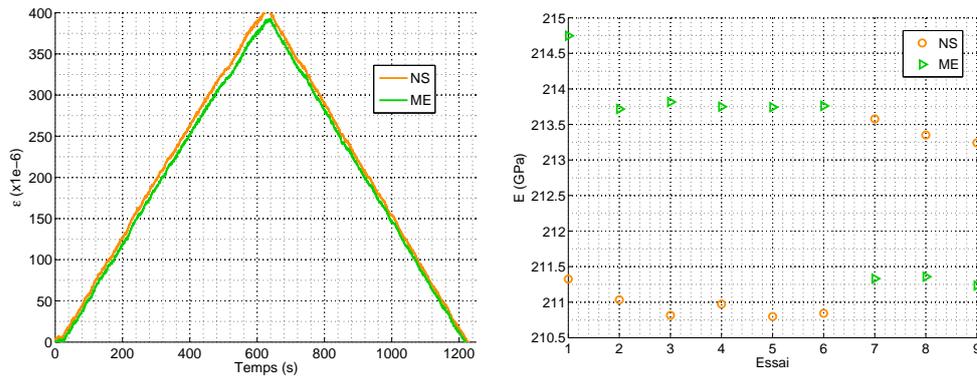


FIGURE 1.9 – Evolution des déformations mesurées sur l'éprouvette au cours de l'un des neuf essais de traction et évolution des modules d'Young identifiés à partir des mesures des systèmes ME et NS pour chaque essai.

d/ Essais sur la plage de mesure

Lors de ces essais, les SEATs ont été connectés à une résistance variable *MTS* utilisée pour la calibration des conditionneurs de ponts de mesure. La variation de cette résistance permet de comparer les évolutions théorique et réel du signal mesuré. L'écart entre ces évolutions théorique et réelle est appelé l'erreur de non-linéarité. La figure 1.10 montre l'évolution de cette erreur de non-linéarité des systèmes NS et ME. Cette erreur est minimale sur la plage $[-10^3 \text{ ppm}, 10^3 \text{ ppm}]$, puis elle se stabilise entre 0,2% et 0,5%. L'erreur de non-linéarité du système NS est inférieure à celle du système ME.

Enfin, la figure 1.10 donne également l'évolution de l'amplitude du bruit en fonction de la valeur du signal mesuré. L'amplitude du bruit du système NS ne dépend pas du signal mesuré contrairement au système ME. Cependant, l'amplitude du bruit du système ME est inférieure à celle du système NS sur la plage $[-10^3 \text{ ppm}, 10^3 \text{ ppm}]$. Au-delà de cette plage, bien que l'amplitude du bruit augmente, le ratio entre cette amplitude et la valeur du signal mesuré diminue et est inférieur à 0,1%. Ce résultat permet de négliger le bruit de mesure au-delà de la plage de mesure $[-10^3 \text{ ppm}, 10^3 \text{ ppm}]$. L'augmentation du bruit en fonction de la valeur mesurée dans le cas du système ME est a priori liée aux variations capacitives du commutateur de la résistance ajustable utilisée.

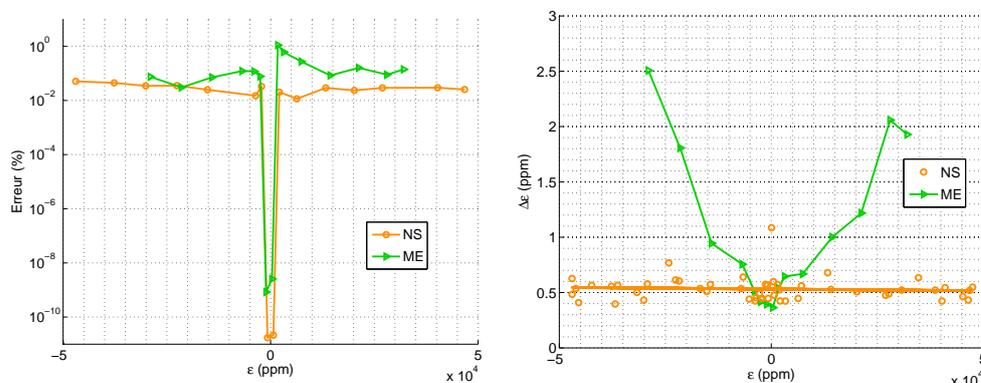


FIGURE 1.10 – Evolution de l'écart entre les évolution théorique et réelle du signal mesuré et évolution de l'amplitude du bruit en fonction de la valeur du signal mesuré.

e/ Conclusion

Ces essais ont permis d'évaluer les capacités de mesure des deux SEATs développés pour le SME. La plage de mesure de ces systèmes est conforme au cahier des charges. Sur la plage de mesure $[-10^3\text{ppm}, 10^3\text{ppm}]$, l'erreur entre le signal mesuré et la variation de résistance effective est inférieure à 0,1% pour les deux systèmes et la valeur minimale de 1ppm est effectivement mesurée.

La sensibilité thermique n'est en revanche pas validée pour les deux systèmes. Bien que le système NS vérifie la variation des offsets à long terme, les dérives thermiques intrinsèques orientent vers une compensation interne de la température pour assurer la stabilité requise par le cahier des charges. Le système ME possède de nombreux paramètres internes de compensation thermique qui peuvent être mis à profit pour corriger ce problème. La dérive minimale donnée par la fiche technique du fabricant est de 0,01ppm/°C.

Enfin, les amplitudes de bruit mesurées sont au mieux cinq fois supérieures à celles requises pour une heure de mesure en continu. Ce dernier point nous a fait abandonner la solution proposée par Newsteo SAS. En effet, en dépit des efforts considérables effectués lors de la conception de leur SEAT, l'amplitude de bruit n'a jamais pu atteindre celle du système ME de conception plus ancienne et plus simple. De plus, l'encombrement final du système NS dépassait celui du ME. L'apparition d'une nouvelle puce TDC d'Acam plus performante que la première nous oriente vers une mise à jours du système ME. Ce choix s'appuie aussi sur les méthodes de conditionnement électronique utilisées pour la mesure de très haute précision [72]. La technologie TDC permet de se rapprocher de ces méthodes de mesure alternative tout en limitant les moyens nécessaires pour la gestion de l'alimentation du système. Nous travaillons actuellement à la mise à jour du système ME.

1.3.4 Spécification du STC

La spécification du STC est relative au nombre maximum et aux types de capteurs potentiellement utilisables par le système. A partir des essais et de la littérature, leur nombre a été fixé à cinquante dans un premier temps. Ce nombre permet de définir la quantité d'information à transmettre en fonction du nombre de bits utilisés pour le codage de l'information, du nombre de voies de mesure et de la fréquence d'acquisition. Si le nombre de demi-ponts par capteur est imposé par la mécanique, la fréquence d'acquisition de ces mesures a été estimée à partir des essais sur structures effectués durant cette thèse et des applications envisagées. Les spécifications du STC sont données dans le tableau 1.3.

L'interprétation en temps réel de l'information par l'utilisateur limite l'intérêt d'un échantillonnage très élevé. La valeur de 7Hz est un compromis satisfaisant entre quantité d'information à interpréter et description des phénomènes observés. Ces phénomènes ont des fréquences de variation de 2Hz à 3Hz. De plus, l'acquisition de la température est de fréquence et de précision réduites. Cette information n'est qu'un contrôle des bonnes conditions d'utilisation du système et les temps caractéristiques des phénomènes thermiques sont de l'ordre de 5s environ du fait de l'isolation thermique des capteurs et du SEAT. Les mesures de déformation sont codées sur 24bits tandis que les mesures de température sont codées sur 12bits. Enfin, le temps de calcul des grandeurs utiles est estimé à partir de la résolution d'un

système linéaire $(50 \times 3)^2 = (150)^2$ qui correspond à la relation liant les grandeurs mesurées aux grandeurs observées.

Critères	Valeurs
Quantité d'information à transmettre	Déformation : $3 \times 50 \times 7 \times 24 = 25200/s$ Température : $2 \times 500 \times 1 \times 12 = 12000/s$
Protocole de communication	Total majoré : 30kbps Zigbee, Bluetooth, Wifi
Nombre d'opération à effectuer	$150 \times 7 \times 1,5 \approx 1600/s$
Autonomie	4h de transmission continue

Tableau 1.3 – *Caractéristiques du SEAT d'un capteur. Les valeurs de mesure exprimées en ppm (part per million, $\times 10^{-6}$) sont associées à la variation de résistance $\Delta R/R$ mesurée par demi-pont de Wheatstone.*

1.3.5 Conclusion

Cette analyse du besoin du produit SME et la spécification des différents produits nous ont permis d'identifier les pistes de recherche à développer. Pour le SEAT la mise à jour vers la nouvelle puce ACAM devrait permettre d'atteindre les amplitudes de bruit souhaitées. Une étude plus approfondie et un réglage plus précis de la sensibilité du SEAT en fonction de la température est en cours pour réduire les phénomènes de dérive thermique et de dérive des offsets aux valeurs de la spécification.

Enfin, des travaux ont été menés pour améliorer le STC que ce soit sur la partie réseau d'information avec gestion de différentes technologies et optimisation de la consommation, ou que ce soit sur la partie logiciel d'interface avec l'utilisateur pour la gestion, l'interprétation et la communication des grandeurs observées et utiles. Ces travaux concernant le STC ont été faits dans le cadre de deux stages en collaboration avec le *LMA*, l'entreprise Mayday Electronics, l'IUT d'électronique et la licence professionnelle de gestion informatique de l'Université de la Méditerranée.

1.4 Extension à la surveillance des structures rigides

1.4.1 Introduction

Afin de montrer les possibilités du SME développé, nous avons choisi d'instrumenter deux structures rigides, un safran et un bras arrière de VTT. Ces structures ont en commun la complexité des chargements qui leur sont appliqués en utilisation. L'aspect extensomètre de courbure n'est pas utilisé ici, les jauges sont directement collées sur la structure. Ceci est la conséquence de la rigidité de ces structures et d'états de référence non-sollicités assez simples à obtenir.

L'instrumentation du safran a pour objectif d'illustrer l'extension du SME à l'ensemble d'une structure nautique. Le choix du safran est avant tout un choix pratique. Cet élément présente l'intérêt d'être facilement démontable et observable depuis le bateau comme illustré sur la figure 1.11. De plus, le chargement qui s'y applique est relativement mal connu du fait de sa position à l'arrière de la structure. La traînée du bateau rend l'écoulement complexe autour de cet élément. Cette

exemple montre aussi la faisabilité de l'instrumentation et du suivi des appendices immergés des structures nautiques à l'aide du SME développé. Les applications envisagées par la suite concerne principalement les foils ou les quilles qui sont des éléments critiques.

L'instrumentation du bras arrière de VTT s'insère dans les thématiques de conception et d'optimisation des structures composites du LMA et des Universités de Provence et de la Méditerranée. Des travaux sont menés pour concevoir et optimiser un VTT en matériaux composites. Plusieurs versions de ce vélo ont été réalisées. L'une des limites à l'optimisation du dimensionnement est la connaissance du chargement en utilisation, notamment lors d'un réception de saut. L'instrumentation du bras arrière s'est naturellement imposée, du fait de la criticité de cette pièce dans la structure mais aussi des contraintes de mesure supplémentaires par rapport aux structures nautiques, telles que la fréquence d'acquisition et la résistance aux chocs du SEAT.

1.4.2 Surveillance d'un safran

a/ Instrumentation



FIGURE 1.11 – Photographie du safran.

Le safran instrumenté est un safran de First 27.7 dont les dimensions sont données sur la figure 1.12. Ces valeurs ont été obtenues à partir de mesures sur la structure et de l'extrapolation des quelques informations données par le constructeur. Ce safran est composé de deux peaux extérieures en fibres de verre et résine époxyde assemblées autour d'un longeron schématisé par la droite (P_1P_4) du schéma de la figure 1.12. Les espaces intérieurs sont comblés par une mousse de remplissage. Le manque d'information concernant cette structure ne nous a pas permis de la modéliser. Nous supposons que cette structure est assimilable à une poutre soumise à des charges localisées aux points P_1 , P_2 et P_4 , et à une charge répartie entre les points P_3 et P_4 qui représente la partie immergée du safran. En l'absence de modèle, nous nous sommes intéressés à une identification du chargement par calibration. Différentes configurations de chargement ont été réalisées en laboratoire. La sollicitation en utilisation est ensuite supposée être une combinaison linéaire de ces sollicitations de calibration. Cette identification a principalement servi à illustrer l'application du SME. Bien que cohérents qualitativement, ces résultats n'ont pas été validés quantitativement.

Le positionnement des capteurs a été fait à partir des travaux concernant la surveillance des poutres présentés dans la suite. Les capteurs sont répartis de manière uniforme sur la plus grande longueur possible en fonction du chargement supposé. Ainsi, deux capteurs seulement sont nécessaires sur la partie (P_1P_2) . Le nombre de capteurs sur la partie (P_2P_4) est alors donné par le nombre maximum de voies de mesure. La direction définie par le longeron sert de support pour la direction longitudinale du safran notée \underline{z} . Ce choix est justifié par le rôle structurel prépondérant du longeron par rapport aux peaux extérieures associées à l'aérodynamisme. Les jauges ont été disposées sur la droite (P_1P_4) comme illustré sur la figure 1.12. Enfin, les câbles des jauges sont ramenés sur la ferrure liant le safran au voilier par le bord de fuite. Ce câblage permet de limiter l'influence des capteurs sur le profil aérodynamique de la structure. Les SEATs et l'UT sont regroupés dans un boîtier étanche fixé sur la ferrure qui contient aussi les batteries d'alimentation. Les dimensions de ce boîtier sont $190 \times 75 \times 90\text{mm}^3$.

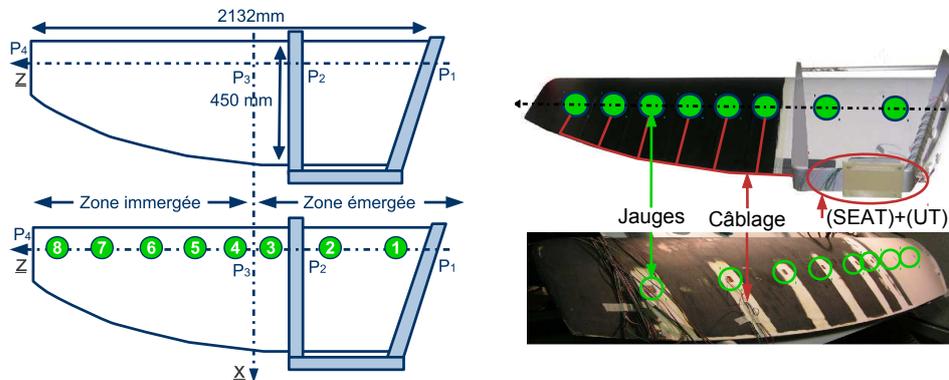


FIGURE 1.12 – Dimensions et schématisation de l'instrumentation du safran du First 27.7.

Les sollicitations de cette structure sont la flexion hors plan et la torsion d'axe \underline{z} liées à la poussée aérodynamique. La mesure de ces sollicitations est faite par des jauges dans la direction \underline{z} et dans des directions à $\pm 45^\circ$ par rapport à \underline{z} . Pour cela, nous utilisons des rosettes orientées dans les directions $[-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ]$ par rapport à \underline{z} . Ainsi, les mesures dans la direction 0° permettent d'identifier la flexion et les mesures dans les directions à $\pm 45^\circ$ permettent d'identifier la torsion. Enfin, les rosettes sont disposées symétriquement sur chaque face du safran pour réaliser des demi-ponts de flexion et de torsion. Cette instrumentation est liée au modèle poutre de la structure qui est supposé symétrique. Au final, ce safran est instrumenté de $8 \times 2 = 16$ rosettes de déformation qui permettent d'obtenir les courbures de la ligne moyenne de la poutre en huit positions distinctes. 24 déformations sont par conséquent mesurées.

b/ Calibration

Le chargement de la structure est approximé par une combinaison linéaire de six chargements discrets appliqués entre les capteurs comme illustré sur la figure 1.13. Ces chargements localisés sont des efforts de flexion et des moments de torsion, $(R_i, C_i)_{1 \leq i \leq 6}$. La calibration consiste alors à appliquer chacun de ces cas de chargement et de mesurer les courbures correspondantes. L'opérateur d'identification

linéaire \mathbb{G} est construit à partir de :

$$\mathbb{G} = [\Gamma(R_1) \quad \Gamma(C_1) \quad \cdots \quad \Gamma(C_6)] \quad \text{où } \mathbb{G}F = \Gamma \text{ et } F = \sum_{i=1}^6 [\alpha_i R_i + \beta_i C_i]$$

où Γ est le vecteur des courbures mesurées en chaque capteur et F est le vecteur de chargement inconnu. $\Gamma(R_1)$ est le vecteur des courbures mesurées en chaque capteur lorsque la structure est sollicitée seulement par R_1 .

La calibration des efforts de flexion, $(R_i)_{1 \leq i \leq 6}$, a été faite à partir de masses de 4kg et 20kg appliquées successivement entre les capteurs comme illustré sur la figure 1.13. Les moments de torsion $(C_i)_{1 \leq i \leq 6}$ sont appliqués en décalant le point d'application des efforts de flexion. Plusieurs essais de charge et de décharge ont été effectués pour évaluer l'aspect systématique de la calibration. Enfin, le safran est fixé à l'aide de la ferrure présente sur le navire lors de l'application des chargements de calibration. Cette fixation permet de tenir compte des conditions de déplacement de la structure en utilisation.

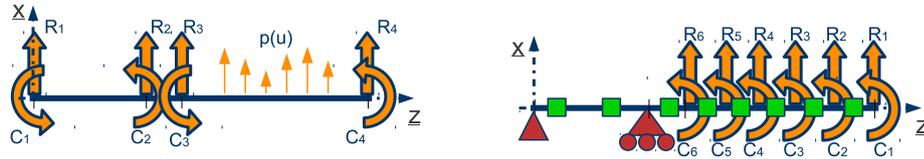


FIGURE 1.13 – Schématisation du chargement complexe associé à la modélisation poutre du safran et schématisation de l'approximation utilisée pour la calibration et l'identification du chargement.

c/ Essai in-situ

Les mesures in-situ n'ont pas pu être réalisées sur l'ensemble des capteurs pour deux raisons :

- Le logiciel d'acquisition et de gestion des mesures a présenté des problèmes de stabilité avec autant de voies de mesure (24). Nous avons dû nous limiter à 12 voies de mesure uniquement avec une fréquence d'acquisition de 5Hz.
- Certaines voies se sont oxydées au fur et à mesure des différents essais répartis sur un an malgré les précautions d'étanchéité .

Au final, les capteurs utilisés pour mesurer les déformations longitudinales sont les capteurs (1), (2), (4), (5), et (6). Les capteurs utilisés pour mesurer les déformations à $\pm 45^\circ$ sont les capteurs (4), (6), et (8). La figure 1.14 montre l'évolution des déformations longitudinales et de cisaillement mesurées lors d'un essai in-situ. Cette figure montre que les mesures sont cohérentes et corrélées qualitativement aux paramètres de navigation. La première partie des mesures est une allure de travers de vitesse moyenne $5Nds$, de 0s à 400s. Ensuite, toujours sur le même bord, le voilier est mis au près avec une vitesse moyenne de $4,5Nds$, de 400s à 975s. Enfin, le voilier vire de bord et se replace au près avec une vitesse moyenne de $4,7Nds$. L'ensemble des mesures effectuées lors des différents essais correspondent assez bien à l'allure du voilier.

L'identification du chargement de flexion et de torsion est fait en réduisant le nombre de charges localisées supposées. En effet, la réduction du nombre de capteurs

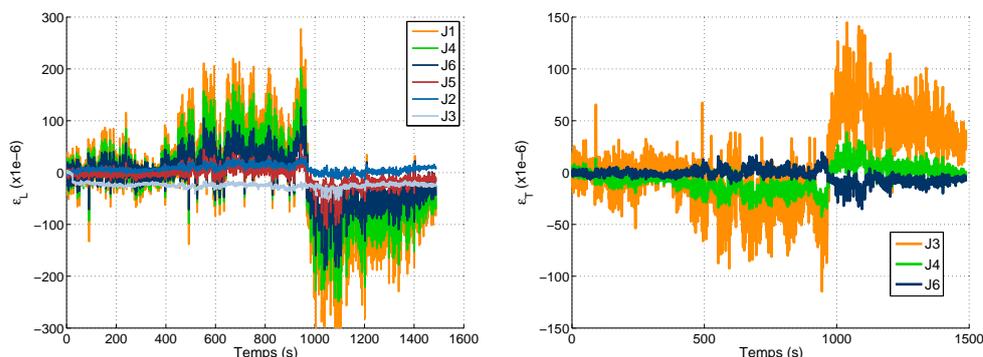


FIGURE 1.14 – Evolution des déformations longitudinales (z) mesurées sur les capteurs (1), (2), (4), (5), et (6) et évolution des déformations de cisaillement mesurées sur les capteurs (4), (6), et (8).

pour la torsion limite à trois les moments localisés identifiables. Pour la flexion, si le nombre de capteurs est a priori suffisant pour identifier les six efforts localisés, nous nous sommes finalement limités à deux efforts seulement. Ce choix est justifié par l'influence de chacun de ces efforts sur les mesures. La phase de calibration a montré que les efforts R_4 à R_6 étaient 20 à 5 fois moins influents sur les mesures que les efforts R_1 à R_3 . Ce résultat se traduit notamment par le conditionnement de \mathbb{G} qui est de ≈ 1000 pour l'identification des six efforts. Ce résultat implique que l'erreur sur les efforts identifiés les moins influents peut être jusqu'à mille fois plus importante que l'erreur sur les efforts identifiés les plus influents. Pour cette raison, nous n'identifions que les efforts R_1 et R_3 qui permettent d'obtenir le conditionnement le plus faible de \mathbb{G} . Pour la même raison, nous n'identifions que les couples $C_{23} = (C_2 + C_3)/2$ et $C_{45} = (C_4 + C_5)/2$ comme illustré sur la figure 1.15. L'identification directe de toutes les composantes donne des valeurs de résultantes de l'ordre de 20kN pour R_4 à R_6 .

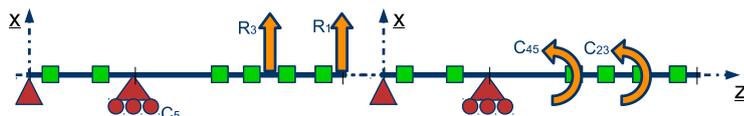


FIGURE 1.15 – Schématisation des conditions de chargement réduites pour la flexion et la torsion recherchées lors des essais in-situ.

La figure 1.16 montre les évolutions des efforts et des couples identifiés à partir des mesures effectuées in-situ présentées sur la figure 1.14. L'effort R_1 est prépondérant devant R_3 et le couple C_{45} est prépondérant devant le couple C_{23} . Ces résultats sont cohérents puisque l'augmentation de rigidité du safran de la zone immergée vers la zone émergée (z décroissant) a tendance à limiter l'influence des charges de flexion réparties dans ce sens. La réduction de la surface de la zone émergée vers la zone immergée réduit aussi l'intensité de la charge de torsion dans ce sens. Par comparaison avec les essais de calibration et à partir d'une méthode de reconstruction géométrique simplifiée, la flèche du safran est estimée à 6mm au maximum lors de l'essai et à 2,5mm en moyenne. Cette flèche moyenne correspond à un effort R_1 moyen de 50N et à un couple C_{45} de 110Nm. Si la valeur de R_1 paraît cohérente, le valeur du moment C_{45} est a priori surestimée. Ceci correspond assez bien aux

erreurs commises lors de la phase de calibration pour le chargement de torsion.

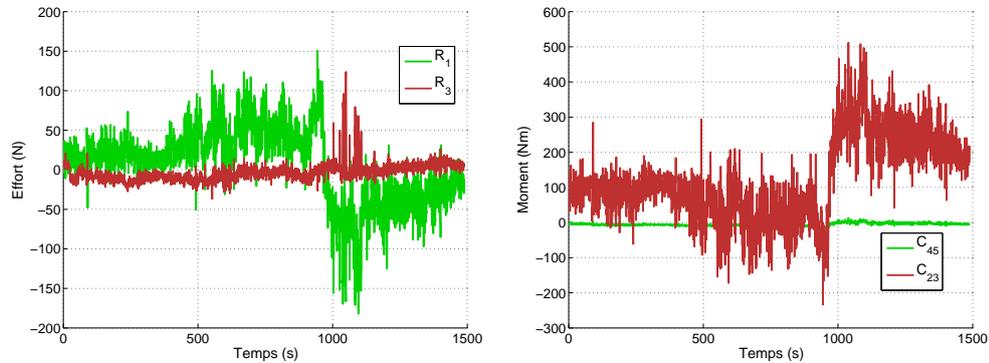


FIGURE 1.16 – Evolution des efforts R_1 et R_3 et des moments C_{23} et C_{45} identifiés à partir des mesures de déformations longitudinales et du cisaillement.

1.4.3 Surveillance d'un bras arrière de VTT

a/ Instrumentation

Le bras arrière de VTT lie le cadre à la roue arrière comme illustré sur la figure 1.17. Afin de simplifier l'instrumentation, nous supposons que cette structure est symétrique et qu'elle est soumise à des efforts plans. Le schéma cinématique du mécanisme liant le bras au cadre, à l'amortisseur et à la roue est donné sur la figure 1.18. Le chargement appliqué au bras est composé de six efforts aux points E , F et G associés aux trois liaisons pivot du bras (4) avec respectivement l'amortisseur (3), le cadre (1) et la roue non représentée. L'équilibre du bras permet de réduire le nombre d'inconnues de chargement à trois, X_{ab} , X_{rb} et Y_{rb} .

Le bras est instrumenté avec des rosettes de déformation dont le positionnement est illustré sur la figure 1.18. Ce positionnement est fait à partir d'une analyse par éléments finis simplifiée du bras. Cette analyse permet d'identifier les zones de déformation maximale. Les contraintes de positionnement supplémentaires considérées ont été la planéité des surfaces de collage sur le bras ainsi que les directions définies par les centres des liaisons. Enfin, les rosettes sont positionnées sur la face intérieure droite du bras, c'est-à-dire face à la roue, afin de protéger les jauges d'éventuelles projections.

b/ Calibration

La phase de calibration consiste à appliquer chacune des sollicitations supposées et de mesurer les déformations correspondantes des rosettes. Ces déformations servent ensuite à construire l'opérateur \mathbb{G} d'identification liant les déformations aux inconnues de chargement X_{ab} , X_{rb} et Y_{rb} . Le VTT est posé sur un bâti sans la roue arrière comme illustrée sur la figure 1.19. Des masses de 30kg et 50kg sont ensuite appliquées sur l'axe de la roue arrière pour simuler les différentes sollicitations. La position du VTT par rapport à la verticale ainsi que la position du bras par rapport au cadre sont ensuite modifiées pour obtenir la totalité des sollicitations. Cette configuration de calibration permet de créer une infinité de possibilités de chargement indépendantes.

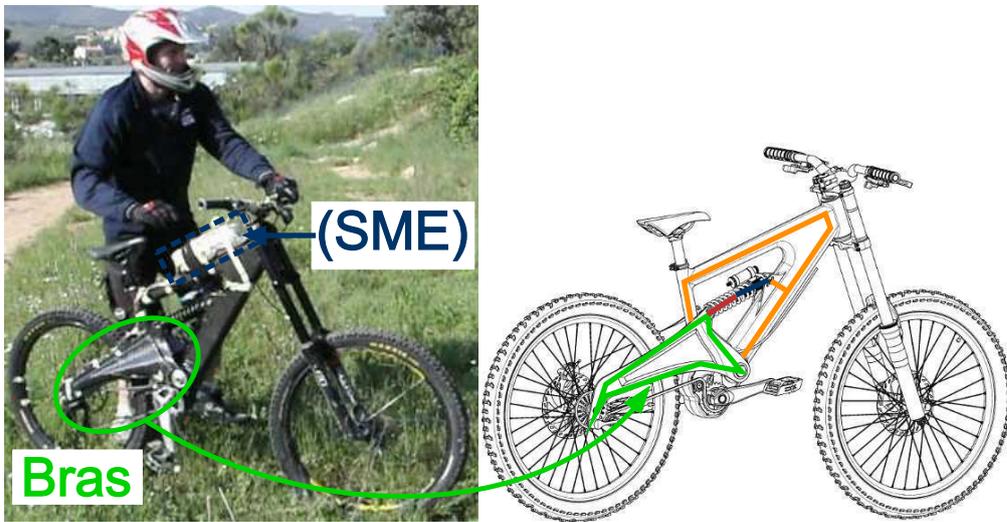


FIGURE 1.17 – Photographie du VTT réalisé à partir de fibres de carbone et d'une matrice époxyde et schématisation du bras arrière.

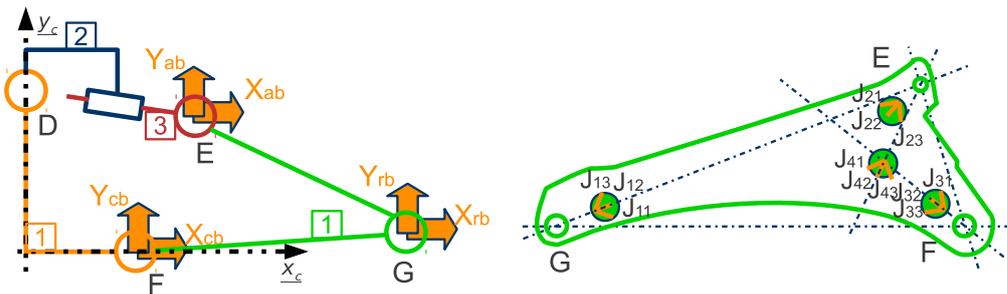


FIGURE 1.18 – Schéma cinématique du mécanisme liant le bras au cadre et à l'amortisseur du VTT et schématisation du positionnement des rosettes sur le bras.

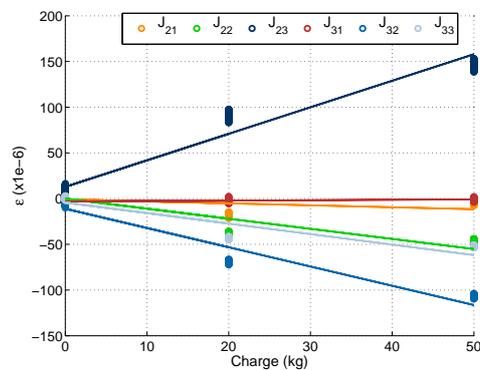
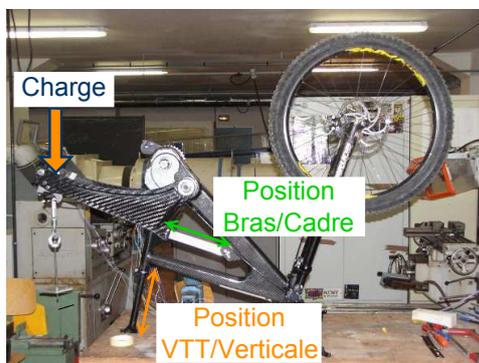


FIGURE 1.19 – Photographie du banc d'essai avec l'illustration des modifications des positions du VTT par rapport à la verticale et du bras par rapport au cadre et évolution des déformations mesurées sur les rosettes J_2 et J_3 en fonction des charges de 20kg et 50kg.

Les essais de calibration effectués présentent d'importantes non-linéarités vis-à-vis des charges appliquées pour une position fixée du VTT et du bras. Ceci est la conséquence de la dissymétrie du bras, de sa géométrie courbe, ainsi que de l'hyperstatisme des liaisons qui entraînent une modification des conditions aux limites avec le niveau de chargement. Pour régler ce problème, seules les six jauges dont les non-linéarités sont inférieures à 10% sont conservées pour l'identification. Ces jauges sont J_{23} , J_{32} , J_{41} , J_{42} , J_{43} et J_{13} . Les non-linéarités vis-à-vis du chargement sont illustrées sur la figure 1.19 qui montre l'évolution des déformations mesurées sur les rosettes J_2 et J_3 en fonction des masses de chargement 20kg et 50kg. Seules les déformations des jauges J_{23} et J_{32} augmentent linéairement avec la charge. Ce phénomène n'est pas a priori dû aux rosettes puisqu'une jauge fonctionne par rosette et qu'il est observé de manière systématique. Enfin, nous avons utilisé 32 configurations de chargement pour identifier les $6 \times 3 = 18$ coefficients de \mathbb{G} liant les trois résultantes X_{ab} , X_{rb} et Y_{rb} aux six mesures de déformation.

c/ Essai In-Situ

Les essais in-situ ont consisté à réaliser un saut avec le VTT comme illustré sur la figure 1.20. Après une prise d'élan de 20m, le cycliste saute un mur de 1,7m et s'arrête 2m après la réception. Ce test correspond à des conditions peu favorables de réception dans lesquelles la vitesse de chute est principalement verticale et la surface de réception horizontale. L'amortisseur est sollicité à son niveau maximum avec potentiellement une arrivée en butée. Les déformations mesurées au cours d'un des essais sont illustrées sur la figure 1.21 ainsi que l'évolution des sollicitations (X_{ab}, Y_{ab}) et (X_{rb}, Y_{rb}) . Les actions de la roue sur le bras ainsi que leur résultante totale R_{rb} sont aussi données sur la figure 1.22.

Chaque phase de l'essai est bien représentée sur les mesures. Pour $t \leq 74$ s le cycliste est sur le vélo à l'arrêt, pour $74 \leq t \leq 79$ s le cycliste prend son l'élan, pour $79 \leq t \leq 80$ s le cycliste fait la réception et enfin pour $t \geq 80$ s le cycliste s'arrête et descend du vélo. L'état de référence des déformations est pris pour $t \geq 90$ s lorsque le vélo est non-sollicité. L'action identifiée de la roue sur le bras pendant la première phase est d'environ 70kg, ce qui surestime légèrement la répartition de la masse du cycliste, ≈ 80 kg, sur les deux roues à l'arrêt qui est d'environ 65kg sur la roue arrière. Les oscillations de la phase de descente montrent que la fréquence d'acquisition de 15Hz est suffisante, l'écart entre les niveaux de chargement de cette phase et celui de la phase précédente sont cohérents pour l'action de la roue sur le bras. En revanche, cette fréquence d'acquisition ne permet pas de mesurer correctement la réception. Le niveau de chargement identifié paraît trop faible vis-à-vis des sollicitations précédentes. Enfin, si les actions identifiées de la roue sur le bras sont cohérentes, celles de l'amortisseur sur le bras sont trop élevées. A l'arrêt avec le cycliste, la modélisation utilisée montre que $R_{ab} \approx 3,5R_{rb}$. Or, la valeur identifiée de R_{ab} est telle que $R_{ab} = 10R_{rb}$. Les essais de calibration donnent $R_{ab} = 4,5R_{rb}$. L'identification in-situ sur-estime donc l'action de l'amortisseur sur le bras. Enfin, l'évolution des écarts aux mesures de la figure 1.22 montre que seule la jauge J_{22} présente un écart limité entre modèle et mesure. Les autres jauges présentent des écarts importants qui confirment les non-linéarités du comportement réel du bras par rapport au modèle simplifié utilisé pour la calibration. La réduction du nombre

de jauges utilisées pour l'identification en fonction de leurs écarts aux mesures ne permet pas d'obtenir des résultats plus cohérents. Ainsi, cet exemple met en avant les limites d'une approche basée sur la calibration seulement du système de mesure.



FIGURE 1.20 – Illustration d'une réception de saut d'un mur de 1,5m avec le VTT. L'amortissement du cycliste et le réglage des amortisseurs sont des éléments importants de la sollicitation du VTT.

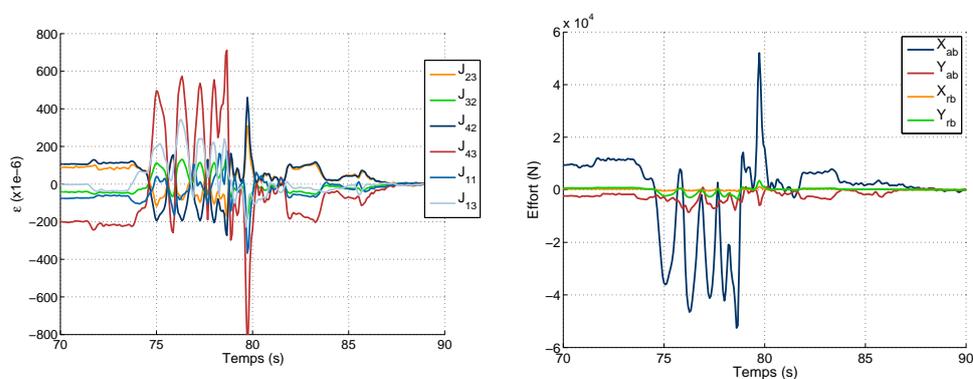


FIGURE 1.21 – Evolution des déformations mesurées lors du saut en VTT et évolution des actions identifiées ($X_{rb}, Y_{rb}, X_{ab}, Y_{ab}$). La prise d'élan débute à environ 75s et l'atterrissage correspond au pic entre 79s et 80s.

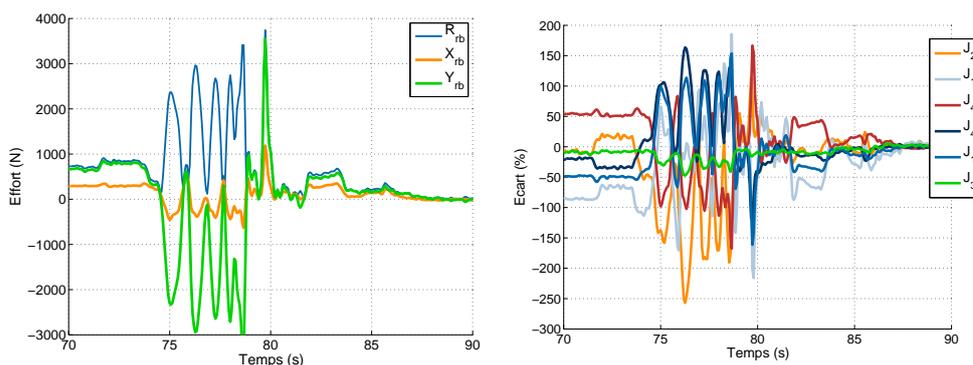


FIGURE 1.22 – Evolution de (X_{rb}, Y_{rb}, R_{rb}) identifiés et évolution de l'écart aux mesures pour chacune des jauges.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la définition, à la spécification et à l'application d'un Système de Mesure Embarqué pour la surveillance des struc-

tures. Ces travaux ont été motivés par la nécessité de caractériser précisément les grandeurs « observables ». Cette caractérisation permet ensuite de choisir la méthode la plus adaptée à l'identification des grandeurs « utiles » pour la surveillance des structures. A partir des travaux réalisés sur la mesure en service de la forme des voiles [28], nous avons analysé les besoins associés à la conception d'un SME dans un cadre plus général. Cette analyse nous a permis d'obtenir des spécifications précises à atteindre pour satisfaire à différentes applications, depuis la mesure de forme sur des structures flexibles jusqu'au suivi des conditions de chargement d'éléments structuraux. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la modularité du SME en séparant les éléments spécifiques aux applications comme les capteurs, des éléments standards comme le SEAT et l'UT. La volonté de standardisation du SEAT et de l'UT répond au besoin de la mise en œuvre d'un système unique de surveillance des structures. La réalisation de deux SEATs et leurs évaluations nous ont aussi permis de mieux cerner les possibilités actuelles de la mesure embarquée et de définir les axes de recherche nécessaires pour atteindre les spécifications voulues. Nos recherches dans ce domaine portent actuellement sur la diminution des niveaux de bruit, des variations thermiques et des variations d'offsets.

Les instrumentations du safran et du bras arrière de VTT ont permis dans un premier temps de préciser les spécifications du SME pour la surveillance des structures rigides. Un des résultats importants de ces travaux est que la fréquence d'acquisition des mesures peut être limitée à des valeurs faibles $\approx 5\text{Hz}$ à $\approx 20\text{Hz}$. Ce résultat permet de distribuer les mesures sur l'ensemble de la structure tout en limitant l'influence du SME puisque la fréquence d'acquisition définit directement la quantité d'énergie requise par le SME. Enfin, ces instrumentations ont montré la nécessité de développer des méthodes d'optimisation des opérateurs d'identification. Les techniques d'identification à partir d'une calibration seulement ne permettent pas d'obtenir des résultats quantitatifs fiables même dans des cas très simples à partir de la physique du chargement seulement. Ainsi, l'utilisation de modèles mécaniques est nécessaire pour régulariser le problème inverse de surveillance des structures. Les modèles de structure permettent d'explicitier les relations liant les paramètres à identifier aux mesures accessibles. Ces paramètres sont alors choisis afin d'optimiser la qualité des grandeurs « utiles » calculées. Les essais de calibration sont alors limités au recalage de ces modèles de structures.

Chapitre 2

La surveillance des structures : un problème inverse

2.1 Introduction

La problématique de la surveillance des structures est associée à la caractérisation de l'état mécanique des structures en service. Cet état mécanique est défini par les champs de contrainte, $\boldsymbol{\sigma}$, de déformation, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de déplacement u . L'environnement extérieur dans lequel évolue les structures est ensuite déduit de ces champs mécaniques. Nous caractérisons ainsi les conditions aux limites de chargement et de déplacement, en fonction de leur influence sur les structures.

La problématique de la surveillance des structures consiste alors à identifier les champs mécaniques et les conditions aux limites des structures à partir d'informations obtenues en utilisation. Ces informations sont des connaissances a priori ou des mesures des différentes grandeurs mécaniques. Cette identification des champs mécaniques est un problème inverse au sens où sa résolution dépend d'informations mal connues ou approchées qui entraînent des erreurs sur les solutions obtenues. Différentes méthodes permettent alors de contrôler ou de diminuer l'erreur sur la solution d'un problème inverse [94, 117, 115]. La problématique de l'amélioration des performances en service impose une résolution en temps réel de ce problème inverse. De ce fait, nous nous sommes seulement intéressés à une résolution linéaire du problème inverse associé à l'identification des champs mécaniques et des conditions aux limites. Nous proposons dans la suite une méthode pour restreindre les paramètres du problème à identifier, pour déterminer les positions optimales des mesures et enfin pour estimer la qualité de l'identification.

Le choix des paramètres minimaux du problème est basé sur les deux considérations suivantes :

- Le principe de Saint-venant : les champs mécaniques «loin» des zones d'application des conditions aux limites dépendent seulement des résultantes globales de ces conditions aux limites.
- Si l'on suppose que le comportement d'une structure est connu, alors les conditions aux limites caractérisent complètement l'état de cette structure.

Ainsi, la réponse globale de la structure définie à partir des champs mécaniques intérieurs est caractérisée par un nombre restreint de paramètres associés aux conditions

aux limites.

Dans ce chapitre nous présentons la formulation mécanique du problème inverse de la surveillance des structures. Ce problème est résolu à l'aide d'une méthode par éléments finis (EF). Cette méthode EF est bien adaptée à notre approche puisque les champs mécaniques sont approximés par des solutions de dimensions finies. En définissant les paramètres du problème à identifier à partir d'une base des conditions aux limites, une relation explicite linéaire entre les paramètres de chargement et les paramètres des champs mécaniques est obtenue. Le problème inverse est alors résolu par l'identification des paramètres des conditions aux limites, puis par reconstruction des champs mécaniques à partir de ces paramètres. Nous illustrons ensuite le principe de Saint-Venant sur le cas d'une plaque trouée en contraintes planes. Cet exemple met en avant la qualité des champs mécaniques reconstruits par rapport à la qualité de l'approximation du chargement identifié. Enfin, une erreur sur la solution reconstruite est présentée à la fin de ce chapitre. Cette erreur quantifie la qualité et la fiabilité des solutions obtenues.

2.2 Définition du problème inverse

2.2.1 Formulation générale du problème inverse de reconstruction de champ

Nous considérons seulement les conditions normales d'utilisation de la structure qui sont définies par :

- La structure est dans une configuration quasi-stable. Son modèle de comportement est linéaire ou linéarisable autour d'une position d'équilibre.
- Les conditions de chargement sont suffisamment régulières et lentement variables à l'échelle de l'observation. Les phénomènes inertiels sont négligés.

Dans ces conditions, nous souhaitons exprimer la formulation du problème inverse lié à l'identification des champs mécaniques et des conditions aux limites de la structure. On appelle Ω cette structure. Elle est soumise au chargement inconnu, F_b , sur son bord $\partial\Omega_F$ et au déplacement inconnu, u_b , sur son bord $\partial\Omega_u$. Le bord $\partial\Omega$ de la structure est tel que $\partial\Omega = \partial\Omega_F \oplus \partial\Omega_u$. Le schéma de la figure 2.1 illustre cette configuration. Des observations sont données sur une partie $\partial\Omega_m \subset \Omega$ appelée zone d'observation. Ces observations peuvent être a priori des mesures de déformation ou de déplacement. ϵ_m sont les mesures de déformation sur la partie $\partial\Omega_{m_\epsilon} \subset \partial\Omega_m$ et u_m sont les mesures de déplacement sur la partie $\partial\Omega_{u_m} \subset \partial\Omega_m$ comme illustré sur la figure 2.1. Si \underline{u} est le champ des déplacements, $\underline{\epsilon}$ est le champ des déformations et $\underline{\sigma}$ est le champ des contraintes de la structure Ω , alors le problème inverse est formulé par :

Trouver $(\underline{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \underline{f}_v, \underline{F}_b, \underline{u}_b)$ tels que :

$$\begin{array}{l} \text{Equations Mécaniques :} \\ \text{Equations d'Observation :} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}[\boldsymbol{\sigma}] + \underline{f}_v = \underline{0} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}_b \text{ sur } \partial\Omega_F \\ \underline{u} = \underline{u}_b \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m \text{ sur } \partial\Omega_{\boldsymbol{\varepsilon}_m} \\ \underline{u} = \underline{u}_m \text{ sur } \partial\Omega_{u_m} \end{array} \right.$$

La résolution de ce problème ne pouvant être faite de manière exacte, les meilleurs

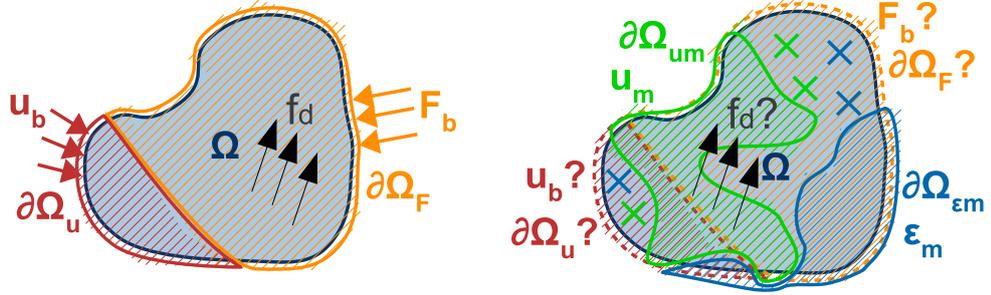


FIGURE 2.1 – Schématisation du problème classique de mécanique d'une structure soumise à un chargement extérieur avec des conditions aux limites en effort et en déplacement et schématisation du problème inverse associé à l'identification des champs mécaniques et des conditions aux limites à partir d'observations sur la structure.

solutions sont recherchées telles qu'elles minimisent une fonctionnelle quantifiant l'écart aux mesures. Cette fonctionnelle se met sous la forme :

$$\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon}, \underline{u}) = \lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \lambda_u(\underline{u} - \underline{u}_m) \quad (2.2)$$

Ainsi, ce problème inverse s'exprime aussi de la manière suivante :

Trouver $(\underline{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \underline{f}_v, \underline{F}_b, \underline{u}_b)$ tels que :

$$\begin{array}{l} \text{Equations Mécaniques :} \\ \text{Equation d'Observation :} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}[\boldsymbol{\sigma}] + \underline{f}_v = \underline{0} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}_b \text{ sur } \partial\Omega_F \\ \underline{u} = \underline{u}_b \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} \text{ sur } \Omega \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}, \underline{u}) = \arg \min \Lambda(\boldsymbol{\varepsilon}, \underline{u}) \text{ sur } \Omega_m$$

La résolution directe de ce problème inverse consiste alors à identifier dans un premier temps, les champs $\boldsymbol{\varepsilon}$ et \underline{u} qui minimisent l'écart aux mesures. Les champs restant $(\boldsymbol{\sigma}, \underline{f}_v, \underline{F}_b, \underline{u}_b)$ sont ensuite obtenus à partir des équations mécaniques. Cependant, sous cette forme, ce problème est mal-posé car l'existence et l'unicité des solutions ne peuvent pas être assurées :

- Seule une approximation de dimension finie des champs \underline{u} et $\boldsymbol{\varepsilon}$ est possible à cause du nombre fini d'observations.

- Du fait de cette approximation, il est a priori impossible que la relation de comportement et l'équation d'équilibre soient simultanément vérifiées. Le champ $\boldsymbol{\sigma}$ doit alors satisfaire au mieux ces deux relations.

Afin de régulariser ce problème inverse [94], des approximations de dimensions finies des champs mécaniques $(\underline{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ et des conditions aux limites $(\underline{f}_v, \underline{F}_b, \underline{u}_b)$ sont utilisées. Ces approximations doivent alors minimiser une fonctionnelle incorporant l'ensemble des équations du problème :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\underline{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \underline{f}_v, \underline{F}_b, \underline{u}_b) \text{ tels que : } (\underline{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \underline{f}_v, \underline{F}_b, \underline{u}_b) &= \arg \min \Lambda (\underline{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \underline{f}_v, \underline{F}_b, \underline{u}_b) \\ \text{où } \Lambda (\underline{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \underline{f}_v, \underline{F}_b, \underline{u}_b) &= \lambda_{\partial\Omega_{\varepsilon_m}}^1 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \lambda_{\partial\Omega_{u_m}}^2 (\underline{u} - \underline{u}_m) + \lambda_{\Omega}^3 (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \underline{f}_v) + \dots \\ &\quad + \lambda_{\partial\Omega_F}^4 (\boldsymbol{\sigma} \underline{n} - \underline{F}_b) + \lambda_{\partial\Omega_u}^5 (\underline{u} - \underline{u}_b) + \lambda_{\Omega}^6 (\boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les fonctions $\lambda_{\mathcal{D}}^i$ correspondent à des normes sur les domaines \mathcal{D} associés à chaque équation i . Dans la suite, nous considérons que les champs mécaniques et les conditions aux limites recherchés sont des approximations de dimension finie des champs mécaniques et des conditions aux limites réels. Le choix des fonctions $\lambda_{\mathcal{D}}^i$ permet alors de se ramener à des méthodes de type FEMU (Finite Element Method Update) [34, 48], CREM (Constitutive Relation Error Method) [73, 21] ou EGM (Equilibrium Gap Method) [32, 103]. Dans notre cas, du fait du nombre restreint de capteurs, une méthode de type VFM (Virtual Field Method) [55] n'est pas utilisable.

La prise en compte de plusieurs fonctions $\lambda_{\mathcal{D}}^i$ permettant de minimiser globalement le problème sur l'ensemble des équations nécessite des méthodes de résolution itératives pour ajuster le poids relatif de ces fonctions au fur et à mesure de l'identification. Ne souhaitant conserver qu'un problème d'identification linéaire, nous nous sommes seulement intéressés dans la suite à une méthode de type FEMU basée sur la seule équation d'observation. Les équations mécaniques sont supposées exactement vérifiées pour réduire directement la complexité du problème et le régulariser.

2.2.2 Formulation réduite du problème inverse : application à la surveillance des structures

Si le comportement de la structure est connu, les conditions aux limites permettent d'obtenir les champs mécaniques par résolution du problème direct. Ainsi, ces paramètres sont a priori suffisants pour résoudre le problème inverse. De plus, si de très nombreux *ddl* sont nécessaires pour décrire correctement les champs mécaniques, un nombre restreint de paramètres suffit à décrire correctement les conditions aux limites. En effet, puisque seules les conditions normales d'utilisation de la structure sont considérées, les conditions aux limites sont a priori régulières et suffisamment connues. L'amélioration des performances des structures se résume alors à identifier leurs chargements extérieurs et à calculer directement leurs champs mécaniques intérieurs qui dépendent principalement des résultantes globales et peu des distributions locales des conditions aux limites. Cette définition correspond au principe de Saint-Venant.

La formulation du problème inverse devient alors :

Trouver $(\underline{\bar{u}}, \underline{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\bar{f}}_v, \underline{\bar{F}}_b, \underline{\bar{u}}_b)$ tels que :

$$\text{Equations Mécaniques : } \begin{cases} \underline{\text{div}}[\underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}] + \underline{\bar{f}}_v = \underline{\mathbf{0}} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\bar{F}}_b & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \underline{\bar{u}} = \underline{\bar{u}}_b & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbb{C}\underline{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Equation d'Observation :

$$(\underline{\bar{f}}_v, \underline{\bar{F}}_b, \underline{\bar{u}}_b) = \arg \min \left[\lambda_{\partial\Omega_{\varepsilon_m}}^1 (\underline{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(f, F, \underline{\bar{u}}_b) - \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \lambda_{\partial\Omega_{u_m}}^2 (\underline{\bar{u}}(f, F, \underline{\bar{u}}_b) - u_m) \right] \text{ sur } \Omega_m$$

Les champs $(\underline{\bar{u}}, \underline{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}})$ sont les approximations des champs mécaniques réels à l'intérieur de la structure, $\Omega_i \subset \Omega$.

Enfin, dans le cadre de la surveillance des structures, le problème inverse est formulé avec deux hypothèses supplémentaires :

- Les mesures sont restreintes aux seules déformations. Il n'y a pas de mesure de déplacement. Cette hypothèse est due à la technologie des systèmes de mesure embarqués considérés.
- Les conditions aux limites ne concernent que le chargement : $\partial\Omega_F = \partial\Omega$ et $\partial\Omega_u = \emptyset$. Cette hypothèse est liée à l'absence de mesure de déplacement. Elle permet aussi de s'affranchir des incertitudes inhérentes aux liaisons entre la structure et son environnement extérieur. u_b n'est alors associé qu'au mouvement de corps rigide (MCR). Dans la suite, \mathcal{F}_{SA} est l'espace des chargements extérieurs qui respectent l'équilibre.

L'intérêt de cette dernière hypothèse est bien illustrée dans [16] qui présente des essais de rupture sur des pales d'éoliennes. Les dimensions de ces structures $\approx 10m$ à $40m$ de long ainsi que leurs rigidités ne permettent pas de considérer les bâtis de fixation comme infiniment rigides. Des mesures de déplacement faites suffisamment loin de la liaison entre le bâti et la structure sont alors utilisées comme conditions aux limites dans les simulations pour valider les modèles. L'utilisation des seules conditions de chargement ainsi que la mesure des déformations permet de résoudre simplement ce problème.

Avec les hypothèses précédemment citées, le problème inverse associé à la surveillance des structures se met sous la forme suivante :

Trouver $(\underline{\bar{u}}, \underline{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\bar{F}}_b)$ tels que :

$$\text{Equations Mécaniques : } \begin{cases} \underline{\text{div}}[\underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}] + \underline{\bar{f}}_v = \underline{\mathbf{0}} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\bar{F}}_b & \text{sur } \partial\Omega \\ \underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbb{C}\underline{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

$$\text{Equation d'Observation : } (\underline{\bar{f}}_v, \underline{\bar{F}}_b, \underline{\bar{u}}_b) = \arg \min_{(f, F) \in \mathcal{F}_{SA}} \left[\lambda_{\partial\Omega_m}^1 (\underline{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(f, F) - \boldsymbol{\varepsilon}_m) \right] \text{ sur } \Omega_m$$

2.3 Approximation par la méthode des éléments finis

Une formulation par éléments finis est utilisée pour approximer la solution du problème dans un espace de dimension finie. (X) sont les coordonnées généralisées

d'un point M quelconque de la structure et $\bar{u}(X) = \sum \phi_i(X) \underline{u}_i = {}^T \Phi(X) \bar{U}$ son déplacement. ${}^T \bar{U} = [\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_n]$ est le vecteur des déplacements nodaux, n le nombre de degrés de liberté (ddl) et $\Phi(X)$ est la matrice des fonctions de forme du champ de déplacement calculée en $M(X)$.

L'approximation du chargement sur $\partial\Omega$ est aussi de dimension finie. $\bar{F}_b = \sum \Psi_i^b \underline{f}_i^b = {}^T \Psi^b \bar{F}_b$ et $\bar{f}_v = \sum \Psi_i^d \underline{f}_i^d = {}^T \Psi^d \bar{F}_d$ sont les vecteurs de chargement sur $\partial\Omega$ et dans Ω . ${}^T \bar{F}_b = [\underline{f}_1^b \cdots \underline{f}_p^b]$ est le vecteur des paramètres de chargement sur $\partial\Omega$ et ${}^T \bar{F}_d = [\underline{f}_1^d \cdots \underline{f}_p^d]$ est le vecteur des paramètres de chargement dans Ω . Dans la suite, F désigne le vecteur de l'ensemble des paramètres de chargement sur $\partial\Omega$ et dans Ω . Les fonctions $(\Psi_i^b)_{1 \leq i \leq p_b}$ et $(\Psi_i^d)_{1 \leq i \leq p_d}$ forment une base de fonctions de dimensions finies p_b et p_d sur $\partial\Omega$ et dans Ω pour l'approximation du chargement. Le choix de ces fonctions sera explicité par la suite en fonction des modèles de structure utilisés. \mathcal{F}_{SA}^p est l'espace des chargements équilibrés sur $\partial\Omega$ et dans Ω de dimension p .

Avec ces notations, les équations mécaniques du problème inverse se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \bar{U} &= \mathbb{A} \bar{F} \text{ avec } {}^T \bar{U} \mathbb{A} \bar{F} = \int_{\partial\Omega} \bar{u} \cdot \bar{F}_b \, dS + \int_{\Omega} \bar{u} \cdot \bar{f}_v \, d\Omega \\ \Rightarrow {}^T \bar{U} \mathbb{A} \bar{F} &= {}^T \bar{U} \cdot \sum_{k,i} \left[\int_{\partial\Omega} \Phi_k(X) \cdot {}^T \Psi_i^b(X) \, dS + \int_{\Omega} \Phi_k(X) \cdot {}^T \Psi_i^d(X) \, dS \right] \cdot \bar{F} \end{aligned}$$

\mathbb{K} est la matrice de rigidité de la structure. La relation entre \bar{U} et ε_m est donnée par l'opérateur gradient noté \mathbb{B} , et par l'opérateur de projection sur $\partial\Omega_m$ noté Π_m , on en déduit :

$$\Pi_m \mathbb{B} \bar{U} \subseteq \varepsilon_m \Leftrightarrow \mathbb{B} \Pi_m \bar{U} \subseteq \varepsilon_m \quad (2.5)$$

L'expression discrétisée du problème inverse est donnée par :

Trouver $(\bar{U}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}, \bar{F})$ tels que :

$$\begin{aligned} \text{Equation d'Observation :} \quad & \bar{F} = \arg \min_{F \in \mathcal{F}_{SA}^p} \|\mathbb{B} \Pi_m U(F) - \varepsilon_m\|^2 \\ \text{Equations Mécaniques :} \quad & \begin{cases} \bar{\varepsilon} = \mathbb{B} \bar{U} \\ \bar{\sigma} = \mathbb{C} \bar{\varepsilon} \\ \mathbb{K} \bar{U} = \mathbb{A} \bar{F} \Leftrightarrow \bar{U} = \mathbb{K}^{-1} \mathbb{A} \bar{F} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

La solution de ce problème est alors obtenue par la résolution de l'équation d'observation associée à la minimisation de l'écart aux mesures. Les paramètres de chargement \bar{F} ainsi obtenus permettent dans un second temps de calculer les champs mécaniques approchés $(\bar{U}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma})$ de la structure. \mathbb{K}^{-1} est calculée avec le bon choix de u_b . Ce choix influe sur les conditions nécessaires et suffisantes de résolution de la minimisation au sens des moindres carrés. Ces conditions sont :

- u_b ne doit pas être dual à l'un des vecteurs de la base d'approximation du chargement.
- Le nombre de mesures est supérieur au nombre de paramètres de chargement à identifier, $m \geq p$.

Dans ce cas, on obtient \bar{F} au sens des moindres carrés sous la forme :

$$\bar{F} = ({}^T\mathbb{G} \cdot \mathbb{G})^{-1} \cdot {}^T\mathbb{G} \cdot \varepsilon_m \quad \text{où } \mathbb{G} = \mathbb{B}_{\pi m} \mathbb{K}^{-1} \mathbb{A} \quad (2.7)$$

La métrique utilisée pour le calcul de la norme de l'écart aux mesures est la norme L_2 . L'utilisation d'une métrique plus adaptée au problème comme celle issue de l'erreur en relation de comportement [21] est une piste de recherche future.

2.4 Illustration du principe de Saint-Venant

L'exemple suivant illustre le principe de Saint-Venant qui justifie la reconstruction des champs mécanique à partir de l'identification du chargement. Soit Ω une plaque élastique et isotrope sollicitée en contraintes planes et illustrée sur la figure 2.2. Cette structure est encastrée à l'une de ses extrémités. Une densité linéique d'effort, F_b est imposée sur le bord opposé. Cette densité est modélisée par les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(y) &= A \left[\frac{y+b}{b} \right] \\ f_2(y) &= A \left[1.79775 \cdot \exp \left[- \left(\frac{y-0.5b}{0.76625b} \right)^2 \right] \right] \\ f_3(y) &= A \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{2b} (y+b) \right) \right] \\ f_4(y) &= A \left[\frac{5}{6b^3} (y+b)^2 (1.4b - y) \right] \end{aligned}$$

Ces fonctions sont pondérées pour que leurs résultantes en effort et en moment exprimées au centre de la structure soient égales :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f_i d\Gamma &= \int_{\partial\Omega} f_1 d\Gamma \quad 2 \leq i \leq 4 \\ \int_{\partial\Omega} s f_i d\Gamma &= \int_{\partial\Omega} s f_1 d\Gamma \quad 2 \leq i \leq 4 \end{aligned}$$

2.4.1 Comparaison directe des champs mécaniques solutions pour des cas de chargements équivalents

Nous comparons dans un premier temps les champs de contrainte de von Mises calculés à partir de chaque cas de chargement donnés précédemment. La sollicitation linéaire f_1 est prise comme référence pour cette comparaison et ces champs de contrainte sont donnés sur les figures 2.3 et 2.4. σ_{VM}^i est le champ de contrainte de von Mises associé au cas de chargement f_i . Ces valeurs sont normées par la valeur de contrainte maximale du cas de référence. Les figures 2.5 et 2.6 illustrent

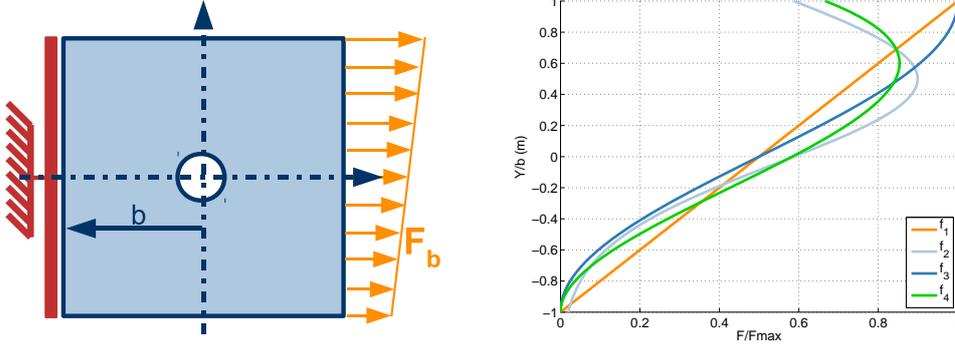


FIGURE 2.2 – Schématisation de la structure Ω et de ses conditions aux limites, et illustration des distributions du chargement sur le bord.

les écarts entre les champs des contraintes de von Mises du cas de référence et des chargements $(f_i)_{2 \leq i \leq 4}$. Ces écarts sont obtenus de la manière suivante :

$$\delta\sigma_{VM}^i = \frac{|\sigma_{VM}^1 - \sigma_{VM}^i|}{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma_{VM}^1 d\Omega} \quad 2 \leq i \leq 4 \quad (2.8)$$

La statistique du champ de référence des contraintes de von Mises est :

$$\sigma_{VM}^{mean} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma_{VM}^1 d\Omega = 25,5\% \sigma_{VM}^{max}$$

$$\sigma_{VM}^{std} = \sqrt{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} [\sigma_{VM}^1 - \sigma_{VM}^{mean}]^2} = 16,0\% \sigma_{VM}^{max}$$

Enfin, l'écart global entre le chargement de référence et le chargement i est défini par :

$$\Delta F_b^i = \sqrt{\frac{|W_{f_1} - W_{f_i}|}{W_{f_1}}} = \sqrt{\frac{\int_{\Gamma} |f_1 u_1 - f_i u_i| d\Gamma}{\int_{\Gamma} f_1 u_1 d\Gamma}} \quad 1 < i \leq 4 \quad (2.9)$$

L'écart local entre le chargement de référence et le chargement i est défini par :

$$\delta F_b^i = \sqrt{\frac{[f_1 - f_i] \cdot [u_1 - u_i]}{\frac{1}{\Gamma} \int_{\Gamma} f_1 u_1 d\Gamma}} \quad (2.10)$$

Les figures 2.5 et 2.6 montrent que les écarts maximaux au champ de référence sont localisés. Le tableau 2.1 récapitule les écarts maximums et moyens au chargement et au champ de référence pour les différentes fonctions de chargement. Les valeurs maximales des écarts au champ de référence sont supérieures aux valeurs maximales des écarts au chargement de référence. En revanche, les valeurs moyennes des écarts au champ de référence sont inférieures aux valeurs moyennes des écarts au chargement de référence. Ces résultats montrent que la sensibilité des champs mécaniques aux distributions de chargements est seulement restreinte à certaines zones de la structure. Ainsi, l'écart moyen entre les champs mécaniques calculés à partir de chargements de résultantes équivalentes est inférieur à l'écart moyen des distributions exactes de ces chargements.

Fonctions	ΔF_b	δF_b		$\delta \sigma_{VM}$	
		Max	Mean	Max	Mean
f_2	14,6%	36,4%	12,3%	78,6%	7,01%
f_3	34,0%	14,9%	11,1%	33,5%	9,46%
f_4	12,0%	29,0%	9,43%	63,4%	5,66%

Tableau 2.1 – Expression des valeurs des écarts entre les chargements $(f_i)_{2 \leq i \leq 4}$ et le chargement de référence f_1 .

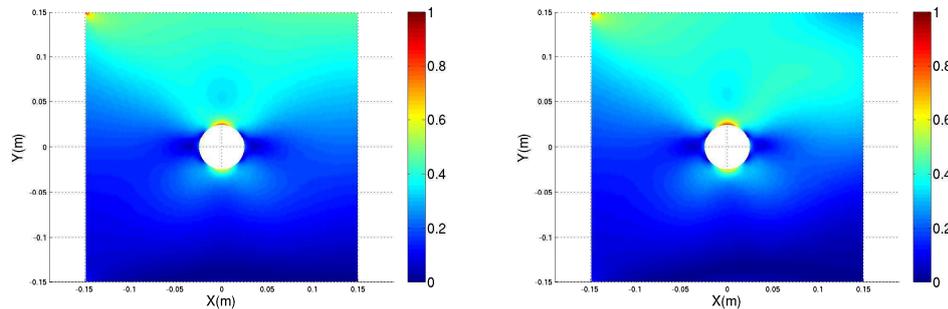


FIGURE 2.3 – Représentation des champs normalisés des contraintes de von Mises pour les sollicitations f_1 et f_2

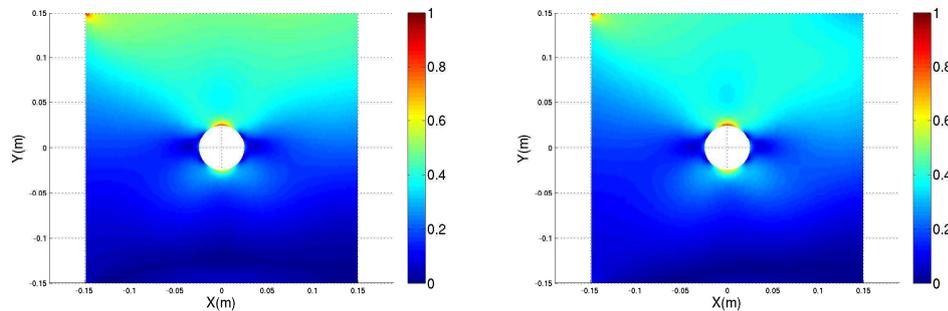


FIGURE 2.4 – Représentation des champs normalisés des contraintes de von Mises pour les sollicitations f_3 et f_4

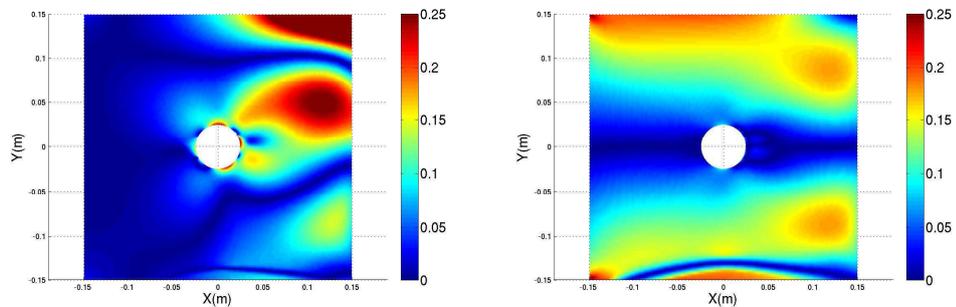


FIGURE 2.5 – Ecart entre les champs des contraintes de von Mises du cas de référence et des cas de chargement f_2 et f_3 . Cet écart est normé par la valeur moyenne de contrainte du cas de référence. L'échelle varie de 0% à 25%.

2.4.2 Comparaison des champs mécaniques reconstruits par identification d'une base réduite de chargement

Nous nous intéressons à la résolution du problème inverse associé au cas de chargement f_1 et f_4 . La base des fonctions de chargement est définie sous la forme $\Psi = [\psi_1 \ \psi_2] = [u \ 1]$ où $u = y/b$ est une variable adimensionnalisée. Deux cas d'identification sont considérés :

- (C1) : Cas exact, les données mesurées sont simulées à partir de f_1 exactement décrite par la base de chargement, $f_1 = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$. (α, β) sont les paramètres de chargement à identifier. Cet exemple permet de valider la formulation du problème inverse.
- (C2) : Cas approché, les données mesurées sont simulées à partir de f_4 qui n'est qu'approchée par la base de chargement, $f_4 \approx \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$. Cet exemple permet de valider l'utilisation du principe de Saint-Venant pour construire la base de chargement.

Le tableau 2.2 donne les valeurs des coefficients identifiés pour les deux exemples d'identification, ainsi que les écarts à la référence en chargement et en champ. Ces écarts sont calculés entre la solution associée aux données mesurées (f_1 et f_4) et la solution identifiée à partir de la base de chargement Ψ .

L'identification (C1) permet de constater le bon fonctionnement de la méthode et son intégration dans le logiciel COMSOL. La solution recherchée est exactement identifiée. L'identification (C2) permet de valider l'approche basée sur le principe de Saint-Venant. Le chargement complet de la structure est réduit à deux paramètres seulement. Ces paramètres de chargement suffisent à reconstruire ensuite les champs mécaniques complets de la structure contenant $n = 150000$ ddl. Les erreurs entre la solution identifiée et le cas de référence sont localisées près du bord d'application du chargement. Les champs mécaniques «loin» de ce bord sont correctement reconstruits à partir du chargement simplifié identifié.

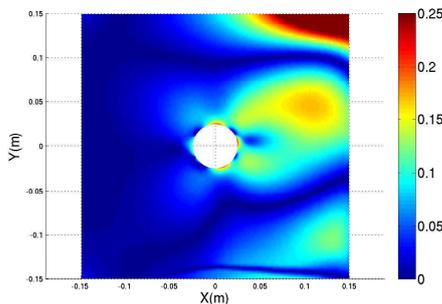


FIGURE 2.6 – *Ecart entre les champs des contraintes de von Mises du cas de référence et du cas de chargement f_4 . Cet écart est normé par la valeur moyenne de contrainte du cas de référence. L'échelle varie de 0% à 25%.*

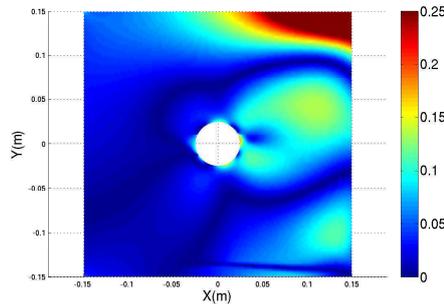


FIGURE 2.7 – *Ecart entre les champs des contraintes de von Mises du cas f_4 et de la solution identifiée à partir d'une base de chargement linéaire. Cet écart est normé par la valeur moyenne de la contrainte du cas f_4 . L'échelle varie de 0% à 25%.*

Identification	Coefficients		δF_b		$\delta \sigma_{VM}$	
	α	β	Max	Mean	Max	Mean
(C1)	1	1	0%	0%	0%	0%
(C2)	1,04	1,02	35,2%	19,6%	68,3%	5,54%

Tableau 2.2 – Valeurs des coefficients identifiés et des écarts au cas de référence pour chaque identification.

2.4.3 Conclusion

Cet exemple illustre les notions de champs mécaniques intérieurs et de chargements équivalents associées au principe de Saint-Venant. Des chargements équivalents simplifiés suffisent à reconstruire correctement les champs mécaniques intérieurs des structures. Ainsi, l'écart moyen observé entre les distributions équivalentes de chargement est réduit du point de vue des champs mécaniques calculés.

Afin de quantifier ce résultat, nous définissons dans la suite une erreur entre les champs reconstruits et les champs de référence. L'évolution de cette erreur en fonction des erreurs de mesure est ensuite étudiée pour quantifier la stabilité de la méthode de reconstruction proposée.

2.5 Validation de la méthode de résolution du problème inverse

2.5.1 Qualité de la solution identifiée et erreurs d'entrée

L'écart entre la solution identifiée et la solution réelle du problème inverse est défini par :

$$\delta[\mathcal{S}]^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2 = \frac{Tr[\mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})(\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})]}{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} Tr[\mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}] d\Omega}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le champ de déformation de la solution réelle du problème inverse et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est le champ de déformation de la solution identifiée. La validation de la méthode consiste à évaluer cet écart entre la solution identifiée et la solution réelle en fonction des différentes sources d'erreur du problème inverse. Ces sources d'erreurs créent des erreurs dites d'entrée du problème qui s'organisent de deux manières :

- Les erreurs de modélisation : ces erreurs sont issues des écarts entre le problème réel et le modèle utilisé. Les approximations associées au chargement, au comportement et aux mesures sont les principaux facteurs de ces erreurs.
- Les erreurs aléatoires : ces erreurs sont principalement la conséquence de l'influence de l'environnement sur l'acquisition des mesures. Ces erreurs sont aléatoires, c'est à dire de moyenne nulle, ou considérées comme telles. Elles se caractérisent par une statistique (distribution et écart-type). Ces erreurs sont communément appelées bruit de mesure car elles ne concernent que le signal mesuré.

Du fait de la linéarité du comportement de la structure, les erreurs de modélisation et les erreurs aléatoires sont représentées par une variation sur les mesures réelles de la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_m^0 + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{mod} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{rand}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ est l'ensemble des mesures acquises, $\boldsymbol{\varepsilon}_m^0$ est l'ensemble des valeurs réelles des mesures, et $\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod}$ et $\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand}$ sont les variations des mesures acquises par rapport aux mesures réelles causées respectivement par les erreurs de modélisation et les erreurs aléatoires. A partir de cette expression, la solution identifiée est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{G}\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\varepsilon}_m &\Leftrightarrow \mathbb{G}\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^0 + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand} \\ \mathbb{G}\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\varepsilon}_m &\Leftrightarrow \mathbb{G}\bar{\boldsymbol{F}} = \mathbb{G}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand} \\ \mathbb{G}\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\varepsilon}_m &\Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F} + (\mathbb{T}\mathbb{G} \cdot \mathbb{G})^{-1} \cdot \mathbb{G} \cdot (\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand})\end{aligned}$$

L'écart entre les champs de déformation réel et identifié, $\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, s'écrit au point (X) sous la forme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbb{B}(X) [U - \bar{U}] = \mathbb{B}(X)\mathbb{K}^{-1}\mathbb{A} [F - \bar{F}] \\ \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbb{B}(X)\mathbb{K}^{-1}\mathbb{A} (\mathbb{T}\mathbb{G} \cdot \mathbb{G})^{-1} \cdot \mathbb{G} \cdot (\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand})\end{aligned}$$

ce qui donne pour la densité d'énergie de déformation :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2 &= \mathbb{T} (\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand}) \mathbb{S} (\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand}) \\ \text{où } \mathbb{S} &= \mathbb{T} \left[\mathbb{B}(X)\mathbb{K}^{-1}\mathbb{A} (\mathbb{T}\mathbb{G}\mathbb{G})^{-1} \mathbb{G} \right] \cdot \mathbb{K} \left[\mathbb{B}(X)\mathbb{K}^{-1}\mathbb{A} (\mathbb{T}\mathbb{G}\mathbb{G})^{-1} \mathbb{G} \right]\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de l'énergie moyenne de déformation :

$$E_\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega Tr[\mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}] d\Omega$$

on en déduit l'expression suivante de l'erreur sur la solution identifiée en fonction des erreurs d'entrée du système :

$$\begin{aligned}\delta[\mathcal{S}]^2 &= \frac{\mathbb{T} (\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand}) \cdot \mathbb{S} \cdot (\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand})}{E_\Omega} \\ \delta[\mathcal{S}]^2 &= \frac{\mathbb{T} \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} \cdot \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \mathbb{T} \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand} \cdot \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand} + 2\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} \cdot \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand}}{E_\Omega} \\ \delta[\mathcal{S}]^2 &= \delta[\mathcal{S}_{mod}]^2 + \delta[\mathcal{S}_{rand}]^2 + \delta[\mathcal{S}_{cc}]^2\end{aligned}$$

L'erreur sur la solution est la somme d'une erreur de modélisation, $\delta[\mathcal{S}_{mod}]$, d'une erreur aléatoire $\delta[\mathcal{S}_{rand}]$ et d'une erreur couplée $\delta[\mathcal{S}_{cc}]$ associée à la corrélation entre les erreurs de modélisation et aléatoire. Cette erreur sur la solution est un champ qui s'exprime en chacun des points de la structure mais aussi à chaque instant de l'acquisition.

L'erreur aléatoire $\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand}$ est liée à l'acquisition de la mesure. Cette erreur est définie sur un nombre d'échantillons associés à la même solution réelle. La statistique sur le nombre d'échantillons N de l'erreur de mesure globale $\boldsymbol{\delta\varepsilon}$ est définie par :

$$\boldsymbol{\delta\varepsilon} = \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand} \Rightarrow \begin{cases} \langle \boldsymbol{\delta\varepsilon} \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} + \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand}) = \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{mod} \\ \langle \langle \boldsymbol{\delta\varepsilon} \rangle \rangle_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\boldsymbol{\delta\varepsilon} - \langle \boldsymbol{\delta\varepsilon} \rangle_N)^2 = \langle \langle \boldsymbol{\delta\varepsilon}_{rand} \rangle \rangle_N^2 \end{cases} \quad (2.11)$$

La moyenne, $\langle \delta[\mathcal{S}] \rangle_N$ et l'écart-type, $\langle \langle \delta[\mathcal{S}] \rangle \rangle_N$ sur le nombre d'échantillons N de l'erreur de la solution identifiée sont alors données par :

$$\begin{aligned} \langle \delta[\mathcal{S}] \rangle_N^2 &= \frac{T \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \cdot \mathbb{S} \cdot \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{E_\Omega} = \frac{T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mod} \cdot \mathbb{S} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mod}}{E_\Omega} = \delta[\mathcal{S}_{mod}]^2 \\ \langle \langle \delta[\mathcal{S}] \rangle \rangle_N^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \frac{T (\delta \boldsymbol{\varepsilon} - \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N) \mathbb{S} (\delta \boldsymbol{\varepsilon} - \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N)}{E_\Omega} \\ \langle \langle \delta[\mathcal{S}] \rangle \rangle_N^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \frac{T \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbb{S} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + T \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N \cdot \mathbb{S} \cdot \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N - 2T \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbb{S} \cdot \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N}{E_\Omega} \\ \langle \langle \delta[\mathcal{S}] \rangle \rangle_N^2 &= \frac{N}{N-1} \frac{\langle T \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbb{S} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N + T \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N \cdot \mathbb{S} \cdot \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N - 2T \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N \cdot \mathbb{S} \cdot \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_N}{E_\Omega} \\ \langle \langle \delta[\mathcal{S}] \rangle \rangle_N^2 &= \frac{N}{N-1} \left[\langle \delta[\mathcal{S}]^2 \rangle_N - \delta[\mathcal{S}_{mod}]^2 \right] = \frac{N}{N-1} \left[\langle \delta[\mathcal{S}_{rand}]^2 \rangle_N + \langle \delta[\mathcal{S}_{cc}]^2 \rangle_N \right] \\ \langle \langle \delta[\mathcal{S}] \rangle \rangle_N^2 &= \langle \langle \delta[\mathcal{S}_{rand}] \rangle \rangle_N^2 \end{aligned}$$

or, $\langle \delta[\mathcal{S}_{cc}]^2 \rangle_N = 0$ car la moyenne de l'erreur aléatoire est nulle, ainsi :

- la valeur moyenne de l'erreur de la solution identifiée, $\langle \delta[\mathcal{S}] \rangle_N$, est égale à la valeur moyenne de l'erreur de modélisation, $\delta[\mathcal{S}_{mod}]$. Cette erreur correspond à un biais sur la solution qui définit la précision intrinsèque entre le modèle et la structure réelle.
- l'écart-type de l'erreur de la solution identifiée, $\langle \langle \delta[\mathcal{S}] \rangle \rangle_N$, est égale à l'écart-type de l'erreur aléatoire, $\delta[\mathcal{S}_{rand}]$. Cette erreur est un bruit sur la solution qui définit une précision statistique liée aux incertitudes de l'acquisition.

La validation de la méthode de résolution consiste à évaluer précisément la statistique de l'erreur sur la solution en fonction de l'erreur sur les mesures. Le problème résolu est un problème d'identification linéaire multivariées. Ainsi, $\delta[\mathcal{S}]$ est proportionnelle à $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ sous la forme :

$$\delta[\mathcal{S}] \propto \text{Cond}[\mathbb{G}] \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{où} \quad \text{Cond}[\mathbb{G}] = \frac{\lambda_G^{max}}{\lambda_G^{min}}$$

$\text{Cond}[\mathbb{G}]$ est le conditionnement de l'opérateur d'identification \mathbb{G} défini comme étant le rapport entre ses valeurs propres maximale et minimale. La minimisation de $\delta[\mathcal{S}]$ impose de minimiser $\text{Cond}[\mathbb{G}]$ et $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mod} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{rand}$ est généralement imposé par le système de mesure. Le choix de $\delta[\mathcal{S}]$ pour un indice de fiabilité donné définit alors l'erreur aléatoire admissible pour la résolution du problème inverse. Ce critère permet ensuite de valider ou d'infirmer l'utilisation d'un système de mesure pour une application donnée.

2.5.2 Protocole de validation numérique et expérimentale

Le protocole de validation numérique de la méthode de résolution proposée est le suivant :

- Optimisation de la valeur du conditionnement de \mathbb{G} en fonction des quantités à identifier, les vecteurs de la base de chargement, et en fonction du positionnement des points de mesures.

- Evaluation de la relation entre l’erreur sur la solution et l’erreur sur les mesures, en fonction de l’erreur aléatoire et de l’erreur de modélisation.

Cette validation est basée sur des simulations numériques du problème inverse pour lesquelles des erreurs de modélisation et des erreurs aléatoires sont introduites. Des mesures sont simulées à partir de cas test appartenant ou n’appartenant pas aux bases de chargement choisies. Les erreurs de modélisation sont liées à l’écart entre la solution de référence simulée à partir du chargement de référence, et la solution identifiée à partir de la mesure de la solution de référence. Les erreurs aléatoires sont ensuite générées à partir de N échantillons aléatoires compris dans une plage de valeurs donnée. A partir de ces simulations nous obtenons la relation de proportionnalité liant $\delta[\mathcal{S}]$, $Cond[\mathbb{G}]$, et $\delta\epsilon$.

La validation expérimentale de la méthode de reconstruction de champ consiste ensuite à vérifier la mise en œuvre de la méthode sur des structures réelles ainsi que les relations obtenues entre l’erreur de la solution et les erreur de mesure. La validation numérique de la méthode de reconstruction de champ a été faite sur des poutres et des plaques. Seules les poutres ont fait l’objet d’une validation expérimentale dans ces travaux.

2.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons formulé le problème inverse associé à la surveillance des structures dans leurs conditions normales d’utilisation. La méthode utilisée pour la résolution de ce problème inverse est basée sur le principe de Saint-Venant qui permet de simplifier la modélisation du chargement de la structure. Ce chargement est identifié dans un premier temps, puis les champs mécaniques sont directement calculés à partir de ce chargement. Cette approche réduit le problème inverse à un problème d’identification linéaire. L’exemple de la plaque trouée illustre ensuite le principe de Saint-Venant. Les écarts aux champs de référence sont localisés aux bords de la structure et ces écarts sont en moyenne plus faibles que ceux obtenus entre les chargements de référence et approximés.

Enfin, la qualité de la reconstruction des champs est liée au choix de la base d’approximation du chargement de la structure. Le principe de Saint-Venant nous a orienté vers des structures simplifiées de type poutres et plaques. La modélisation du chargement est alors donnée par les formulations variationnelles des équations de la mécanique pour chacune de ces structures.

Chapitre 3

Surveillance des structures poutres

3.1 Introduction

La principale application de la surveillance des poutres est la caractérisation du chargement et des liaisons entre les structures et leurs environnements. La modélisation simplifiée de ces structures limite l'intérêt de la reconstruction des champs mécaniques pour le contrôle d'éléments critiques de la structure. La caractérisation du chargement et des champs mécaniques des poutres est en outre aisément interprétable par un utilisateur pour évaluer l'état global des structures, afin d'en optimiser les performances en utilisation. Cette caractérisation peut aussi être utilisée pour une analyse post-utilisation du comportement des structures et de leurs environnements. Ces structures deviennent alors des capteurs d'effort complexes multi-sollicitations. Les informations recueillies servent ensuite à alimenter des modèles plus évolués afin d'optimiser leurs conceptions. Cette approche est illustrée dans plusieurs travaux depuis l'identification du champ de pression sur une aile [23], l'action du vent sur un mât d'éolienne [70], l'évolution spatiale et éventuellement temporelle du chargement sur une structure de type pont [74, 121, 93, 128], jusqu'à la définition de bases de chargement pour l'identification de chargements statiques et dynamiques [30, 76]. Tous ces exemples utilisent des techniques de régularisation pour limiter la sensibilité des paramètres identifiés aux erreurs de mesures. Ces approches consistent à identifier au mieux des paramètres de chargement indépendamment de leur conséquence sur la structure.

Notre approche diffère sensiblement puisque nous définissons la qualité des paramètres de chargement identifiés à partir de la réponse de la structure. Ainsi, même si les écarts au chargement de référence peuvent être importants, la fiabilité de la méthode est évaluée à partir des écarts aux champs mécaniques reconstruits. Cette approche définit un chargement équivalent au sens de son influence sur la structure et la caractérisation statistique de l'écart aux champs mécaniques [106] est utilisée pour estimer la fiabilité de la solution de ce problème d'identification. Notre objectif est de proposer une méthode systématique de choix de la base de chargement ainsi que du positionnement des capteurs pour obtenir un problème stable et directement inversible. Bien que cette approche puisse paraître restrictive, la carac-

térisation absolue des conditions d'utilisation d'une structure n'est pas forcément d'une plus grande utilité. En effet, les incertitudes de modélisation et de fabrication imposent un processus de conception itératif entre prédiction et expérimentation. Ainsi, la connaissance du chargement du point de vue de la structure est adaptée à ce processus et permet aussi de mieux appréhender le chargement complexe réel.

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode proposée à la surveillance des poutres et nous illustrons ses diverses applications. La modélisation du chargement est obtenue par une formulation variationnelle liée aux cinématiques classiques (Euler-Bernoulli & Timoshenko) de ces structures. A partir de cette modélisation nous définissons une base de chargement liée aux sollicitations élémentaires des poutres. Cette base permet de définir les paramètres à identifier ainsi que les grandeurs à mesurer pour résoudre le problème.

La méthode proposée est ensuite validée numériquement sur des exemples simples. Cette validation consiste à évaluer l'erreur de la solution identifiée $\delta[\mathcal{S}]$ en fonction des erreurs aléatoires de mesure, $\delta\epsilon_{rand}$, et des erreurs de modélisation, $\delta\epsilon_{mod}$. Le travail effectué porte principalement sur la construction de la base de chargement et sur le positionnement des capteurs. L'objectif est de définir des critères de choix systématique permettant la stabilité du problème d'identification. Une validation expérimentale de la méthode est ensuite effectuée. L'intérêt de cette méthode est aussi illustré par un test de rupture d'une pale de rotor arrière d'hélicoptère. Cet exemple permet d'identifier la problématique liée à la mise en œuvre de la méthode sur des structures réelles, et de proposer des éléments de réponse. Enfin, nous nous intéressons aux poutres complexes. Les bases de chargement et les positionnements des capteurs sont obtenus à partir d'une décomposition de ces structures en sous-structures élémentaires. La résolution du problème inverse est ensuite effectuée sur la totalité de la structure.

3.2 Formulation du problème de poutre élémentaire

3.2.1 Modélisation du chargement

Une poutre est une structure dont une des dimensions est grande devant les deux autres. La figure 3.1 illustre cette définition. La structure est modélisée géométriquement par une succession de sections droites dont les centres forment sa ligne moyenne. Si L est une dimension caractéristique de la structure dans la direction \underline{x} normale aux sections, et si b et h sont des dimensions caractéristiques de la structure dans les directions \underline{y} et \underline{z} associées aux sections, alors :

$$L > 10 \max(b, h)$$

Avec ces hypothèses géométriques, la cinématique de la poutre se décompose en fonction de sa ligne moyenne et de ses sections droites. Seule la ligne moyenne est supposée se déformer. Les sections droites ont un mouvement de corps rigide par rapport à la ligne moyenne. Le champ de déplacement et le tenseur de déformation

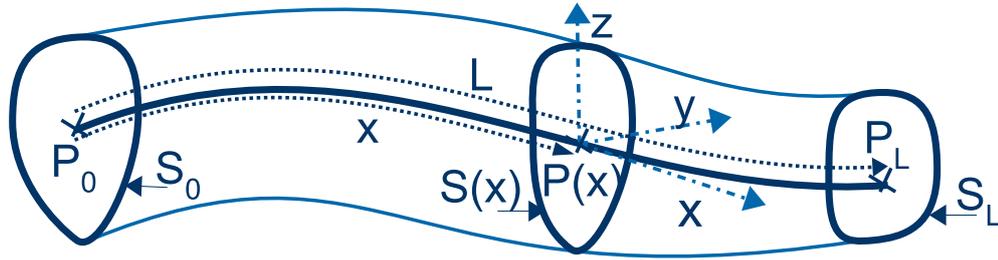


FIGURE 3.1 – Schématisation d'une poutre

sont donnés par :

$$\underline{u}(x, y, z) = \underline{u}(x) + \underline{PP}_0 \wedge \underline{\theta}(x) = \begin{bmatrix} u_x(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x) \\ u_y(x) - z\theta_x(x) \\ u_z(x) + y\theta_x(x) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} u_{x,x} - y\theta_{z,x} + z\theta_{y,x} & (u_{y,x} - \theta_z - z\theta_{x,x})/2 & (u_{z,x} + \theta_y + y\theta_{x,x})/2 \\ (u_{y,x} - \theta_z - z\theta_{x,x})/2 & 0 & 0 \\ (u_{z,x} + \theta_y + y\theta_{x,x})/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En supposant que la structure est soumise à une densité de force volumique \underline{f}_v et à une densité de force surfacique \underline{F}_b sur son bord $\partial\Omega$, l'équilibre de la poutre Ω est décrit par les équations suivantes :

$$\frac{d\underline{M}}{dx} + \underline{x} \wedge \underline{T} + \underline{c}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\underline{T}}{dx} + \underline{r}(x) = 0 \quad \text{le long de } L \quad (3.1)$$

$$\underline{M}(0) = -\underline{C}^0 \quad \text{et} \quad \underline{T}(0) = -\underline{R}^0 \quad \text{en } S_0 \quad (3.2)$$

$$\underline{M}(L) = \underline{C}^L \quad \text{et} \quad \underline{T}(L) = \underline{R}^L \quad \text{en } S_L \quad (3.3)$$

$$\underline{R}^0 + \underline{R}^L + \int_0^L \underline{r}(x) dx = 0 \quad (3.4)$$

$$\underline{C}^0 + \underline{C}^L + L \underline{x} \wedge \underline{R}^L + \int_0^L [\underline{c}(x) + \underline{x} \wedge \underline{r}(x)] dx = 0 \quad (3.5)$$

Les équations (3.1) à (3.3) caractérisent l'équilibre interne de la poutre alors que les équations (3.4) à (3.5) caractérisent l'équilibre du chargement extérieur nécessaire à la résolution du problème. La résolution du problème poutre est possible si les fonctions \underline{r} et \underline{c} sont intégrables sur L .

Ces équations font intervenir les grandeurs internes intégrées sur la section droite de la poutre qui sont définies par :

$$\underline{M} = \int_S \underline{PM} \wedge \underline{\sigma} \cdot \underline{x} dS = \int_S \begin{bmatrix} z\sigma_{12} - y\sigma_{13} \\ z\sigma_{11} \\ -y\sigma_{11} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} dS$$

$$\underline{T} = \int_S \underline{\sigma} \cdot \underline{x} dS = \int_S \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} dS$$

Le chargement équivalent défini dans ces équations correspond aussi à l'intégration

des chargements volumique et surfacique dans les sections droites :

$$\underline{r} = \int_S \underline{f}_v dS + \oint_{\partial S} \underline{E}_b dl \quad \text{et} \quad \underline{c} = \int_S \underline{PM} \wedge \underline{f}_v dS + \oint_{\partial S} \underline{PM} \wedge \underline{E}_b dl$$

$$\underline{R}^i = \int_{S_i} \underline{E}_b dS \quad \text{et} \quad \underline{C}^i = \int_{S_i} \underline{PM} \wedge \underline{E}_b dS \quad \text{avec} \quad i = 0, L$$

Trois torseurs modélisent alors le chargement d'une poutre : deux sont localisés aux surfaces extrémités, S_0 et S_L , et le dernier est réparti le long de la ligne moyenne L . Ces torseurs sont représentés par :

$$\{\mathcal{T}\}_{P_0}^0 = \left\{ \begin{array}{c} \underline{R}^0 \\ \underline{C}^0 \end{array} \right\} \quad \{\mathcal{T}\}_{P_L}^L = \left\{ \begin{array}{c} \underline{R}^L \\ \underline{C}^L \end{array} \right\} \quad \{\mathcal{T}\}_P^{rep} = \left\{ \begin{array}{c} \int_0^x r(s) ds \\ \int_0^x [\underline{c}(s) + (s-x)\underline{x} \wedge r(s)] ds \end{array} \right\}$$

Une poutre soumise seulement à ces trois torseurs d'effort est dite « élémentaire » car elle permet de décrire n'importe quelle structure poutre dite « complexe » comme un assemblage de poutres élémentaires. Ces structures poutres complexes sont généralement de deux sortes illustrées sur les figures 3.2, 3.3 et 3.4.

- Les treillis qui sont un assemblage de poutres permettant d'obtenir une structure globale ramifiée. Ce type de structure permet notamment de réaliser des armatures légères.
- Les poutres sous chargement multiple. Ces structures sont généralement utilisées pour limiter les assemblages.



<http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:RRTrussBridgeSideView.jpg>

FIGURE 3.2 – Illustration d'une structure treillis pour la réalisation d'un pont.

Bien que les équations d'équilibre (3.1) à (3.5) soient directement applicables à des structures complexes, nous considérerons ces structures comme un assemblage de structures élémentaires. Cette considération est liée aux points suivants :

- L'instrumentation d'une partie de la structure ne permet pas de discriminer les cas de chargement multiple du cas de chargement élémentaire. Comme cela est illustré sur la figure 3.4, les actions des torseurs extérieurs à la partie instrumentée sont équivalentes à celles de torseurs extrémités somme de tous ces torseurs de chargement.



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Boeing_747_Le_Bourget_FRA_002.jpg

FIGURE 3.3 – Illustration d'un fuselage de boeing 747 composé de poutres courbes sous chargement multiple.

- La complexité de la structure est prise en compte pour introduire des conditions supplémentaires sur la base de chargement et la réduire. Cet aspect permet de développer une formulation globale et de proposer une méthode générale de résolution.

3.2.2 Construction d'une base de chargement pour les poutres élémentaires

a/ Modèle de poutre de Timoshenko

La modélisation du chargement d'une poutre élémentaire correspond à la théorie des poutres de Timoshenko. Trois torseurs seulement décrivent le chargement complet de la structure. Les deux torseurs localisés aux extrémités contiennent six composantes constantes, trois résultantes et trois moments. Chaque composante est associée à une sollicitation élémentaire ayant un sens physique. La base naturelle choisie pour décrire le chargement localisé correspond à ces six sollicitations élémentaires. On note $\left(\{\mathcal{T}_j\}_{M_i}^i\right)_{1 \leq j \leq 6}^{i=0,L}$ les vecteurs de la base du chargement localisé exprimés aux points M_i de chaque extrémité. Le torseur d'effort localisé à l'extrémité $i = 0, L$ est noté :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}\}_{M_i}^i &= \sum_{j=1}^6 \alpha_j^i \{\mathcal{T}_j\}_{M_i}^i \\ \{\mathcal{T}\}_{M_i}^i &= \alpha_1^i \begin{Bmatrix} R_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{M_i} + \alpha_2^i \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ R_{2i} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{M_i} + \alpha_3^i \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{3i} & 0 \end{Bmatrix}_{M_i} + \dots \\ &+ \alpha_4^i \begin{Bmatrix} 0 & C_{1i} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{M_i} + \alpha_5^i \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{2i} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{M_i} + \alpha_6^i \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{3i} \end{Bmatrix}_{M_i} \end{aligned}$$

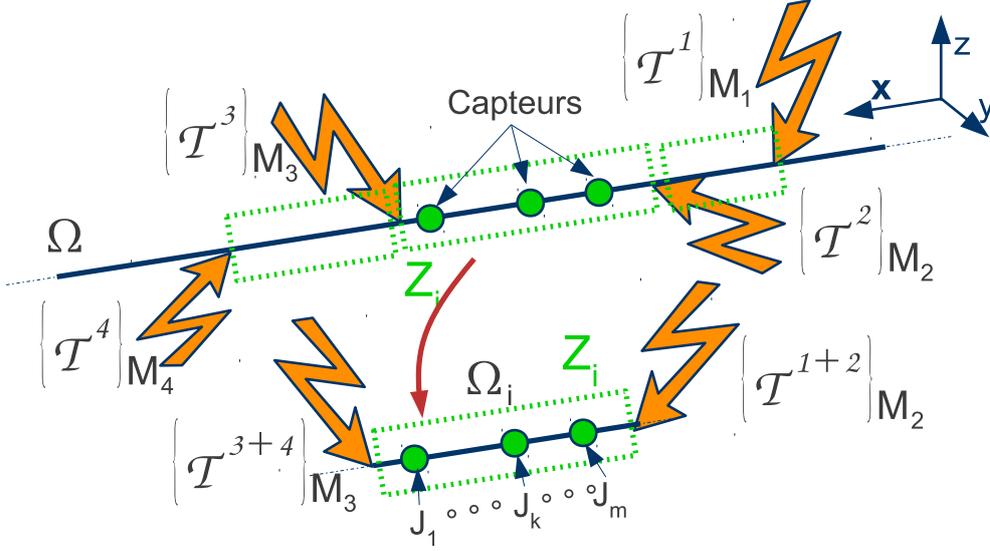


FIGURE 3.4 – Schématisation d'une poutre sous chargement multiple. Cette structure peut être considérée comme l'assemblage de sous-structures élémentaires (zones encadrées vertes). L'instrumentation d'une zone intérieure Z_i ne permet que d'identifier la somme des torseurs extérieurs à celle-ci. Les capteurs $(J_i)_{1 \leq i \leq m}$ placés entre M_2 et M_3 ne peuvent pas différencier de manière unique $\{\mathcal{T}^1\}$ et $\{\mathcal{T}^2\}$ de $\{\mathcal{T}^{1+2}\}$, ainsi que $\{\mathcal{T}^3\}$ et $\{\mathcal{T}^4\}$ de $\{\mathcal{T}^{3+4}\}$

La base du chargement associée au torseur d'effort réparti $\{\mathcal{T}\}_P^{rep}$ est similaire à celle du chargement localisé. Cependant, les quantités associées aux résultantes et aux moments sont des fonctions. Ainsi, ce torseur est décrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}\}_P^{rep} &= \sum_{j=1}^6 \left[\sum_{k=1}^{p_j} \alpha_{jk}^r \{\mathcal{T}_j^k\}_P^{rep} \right] \\ \{\mathcal{T}\}_P^{rep} &= \sum_{k=1}^{p_1} \alpha_{1k}^r \begin{pmatrix} \int r_{1k} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_P + \sum_{k=1}^{p_2} \alpha_{2k}^r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \int r_{2k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_P + \sum_{k=1}^{p_3} \alpha_{3k}^r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \int r_{3k} & 0 \end{pmatrix}_P + \dots \\ &+ \sum_{k=4}^{p_4} \alpha_{4k}^r \begin{pmatrix} 0 & \int c_{1k} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_P + \sum_{k=1}^{p_5} \alpha_{5k}^r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \int c_{2k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_P + \sum_{k=1}^{p_6} \alpha_{6k}^r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \int c_{3k} \end{pmatrix}_P \end{aligned}$$

Les torseurs $\left(\{\mathcal{T}_j^k\}_P^{rep} \right)_{1 \leq j \leq 6}^{1 \leq k \leq p_j}$ définissent la base du chargement réparti. Les densités de résultante $(r_{jk})_{1 \leq j \leq 3}^{1 \leq k \leq p_j}$ et de moment $(c_{jk})_{1 \leq j \leq 3}^{1 \leq k \leq p_j}$ sont des vecteurs de la base des espaces des fonctions auxquels appartiennent les différentes fonctions du chargement réel. Pour simplifier les expressions primitives des fonctions de chargement sont directement utilisées sous la forme :

$$r(x) = \int_0^x \underline{r}(s) ds \quad \text{et} \quad \underline{c}(x) = \int_0^x [\underline{c}(s) + \underline{PM} \wedge \underline{r}(s)] ds \quad (3.6)$$

L'expression de $\left\{ \mathcal{T}_j^k \right\}_P^{rep}$ est réduite à :

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T} \right\}_P^{rep} &= \sum_{k=1}^{p_1} \alpha_{1k}^r \begin{Bmatrix} r_{1k} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P + \sum_{k=1}^{p_2} \alpha_{2k}^r \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ r_{2k} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P + \sum_{k=1}^{p_3} \alpha_{3k}^r \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{3k} & 0 \end{Bmatrix}_P + \dots \\ &+ \sum_{k=4}^{p_1} \alpha_{4k}^r \begin{Bmatrix} 0 & c_{1k} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P + \sum_{k=1}^{p_5} \alpha_{5k}^r \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{2k} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P + \sum_{k=1}^{p_6} \alpha_{6k}^r \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & c_{3k} \end{Bmatrix}_P \end{aligned}$$

Dans le cas général, les espaces des fonctions de chargement sont de dimensions infinies, et donc les $(p_j)_{1 \leq j \leq 6}$ aussi. L'identification de ces conditions de chargement à partir d'un nombre fini de capteurs est alors impossible. Cependant, le domaine de la surveillance des structures dans lequel nous travaillons permet de restreindre fortement les fonctions recherchées. Ces fonctions sont connues a priori et nous nous intéressons principalement aux effets globaux de la réponse de la structure limitant ainsi les longueurs de variation des distributions des chargements recherchés, p est le nombre de fonctions vecteurs de cette base et est supposé constant pour l'ensemble des six fonctions du chargement réparti.

A partir de ces bases de chargements, localisés et réparti, le torseur global de chargement de la poutre se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T} \right\}_P &= \left\{ \mathcal{T} \right\}_P^0 + \left\{ \mathcal{T} \right\}_P^L + \left\{ \mathcal{T} \right\}_P^{rep} \\ &= \sum_{j=1}^6 \alpha_j^i \left\{ \mathcal{T}_j \right\}_P^0 + \sum_{j=1}^6 \alpha_j^L \left\{ \mathcal{T}_j \right\}_P^L + \sum_{j=1}^6 \left[\sum_{k=1}^p \alpha_{jk}^r \left\{ \mathcal{T}_j^k \right\}_P^{rep} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

où les coefficients $\left(\alpha_j^i \right)_{1 \leq j \leq 6}^{1 \leq i \leq 2}$ et $\left(\alpha_{jk}^r \right)_{1 \leq j \leq 6}^{1 \leq k \leq p}$ sont les paramètres de chargement. Le nombre de paramètres à identifier est donc de $2 \times 6 + 6 \times p = 6(2+p)$ dans le cas le plus général. La dimension de la base d'approximation du chargement est cette valeur $6(2+p)$ qui correspond au nombre de paramètres nécessaires à l'approximation des conditions de chargement. Enfin, les hypothèses faites lors de la formulation du problème inverse imposent un nombre au moins aussi grand de mesures pour résoudre ce problème.

La formulation développée nécessite l'équilibre de la base de chargement. La méthode de construction d'une base de chargement équilibrée consiste à exprimer directement l'un des deux torseurs d'effort localisé en fonction des autres à l'aide de l'équilibre de la structure :

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T} \right\}_{P_0} &= \left\{ \mathcal{T} \right\}_{P_0}^0 + \left\{ \mathcal{T} \right\}_{P_0}^L + \left\{ \mathcal{T} \right\}_{P_0}^{rep} = \left\{ 0 \right\}_{P_0} \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^6 \alpha_j^0 \left\{ \mathcal{T}_j \right\}_{P_0}^0 &= - \left[\sum_{j=1}^6 \alpha_j^L \left\{ \mathcal{T}_j \right\}_{P_0}^L + \sum_{j=1}^6 \left[\sum_{k=1}^p \alpha_{jk}^r \left\{ \mathcal{T}_j^k \right\}_{P_0}^{rep} \right] \right] \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha_j^0 = - \left[\alpha_j^L + \sum_{k=1}^p \alpha_{jk}^r r_{jk} \right] & 1 \leq j \leq 3 \quad \text{et} \quad \alpha_4^0 = - \left[\alpha_4^L + \sum_{k=1}^p \alpha_{4k}^r c_{4k} \right] \\ \alpha_5^0 = - \left[\alpha_5^L - L \alpha_3^L + \sum_{k=1}^p \alpha_{4k}^r c_{4k} \right] & \text{et} \quad \alpha_6^0 = - \left[\alpha_6^L + L \alpha_2^L + \sum_{k=1}^p \alpha_{4k}^r c_{4k} \right] \end{cases} \end{aligned}$$

Cette expression définit une base réduite du chargement associée aux seuls torseurs $\{\mathcal{T}_j\}_{P_L}^L$ et $\{\mathcal{T}_j\}_{P_L}^{rep}$. Le MCR associé au dual du torseur $\{\mathcal{T}_j\}_{P_0}^0$ obtenu par équilibre est utilisé pour la résolution du problème inverse. Ce MCR n'est pas co-linéaire aux deux des vecteurs de la base de chargement associés à $\{\mathcal{T}_j\}_{P_L}^L$ et $\{\mathcal{T}_j\}_{P_L}^{rep}$. Dans la suite, on note $(\mathcal{T})_{1 \leq j \leq 6(p+3)}$ les vecteurs de la base de chargement.

Enfin, cette base de chargement est orthonormée au sens de l'énergie de déformation à partir de l'algorithme de Gram-Schmidt. La base de chargement orthonormée, $(\mathcal{T}_j^\perp)_{1 \leq j \leq 6(p+3)}$ est obtenue à partir de $(\mathcal{T}_j)_{1 \leq j \leq 6(p+3)}$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall n \leq 2(p+3) \quad \mathcal{T}_n^\perp &= \alpha_n \mathcal{T}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \mathcal{T}_k^\perp \\ \text{où} \quad &\begin{cases} \int_{\Omega} Tr \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{T}_n^\perp) \mathbb{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{T}_k^\perp) \right] d\Omega = 0 \quad \forall k \leq n-1 \\ \int_{\Omega} Tr \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{T}_n^\perp) \mathbb{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{T}_n^\perp) \right] d\Omega = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

La méthode de construction de la base de chargement nécessite d'approximer les fonctions du chargement réparti. Nous avons utilisé pour cela deux méthodes d'approximation :

- Approximation polynomiale $P[X]$. La fonction de chargement réparti est approximée par une combinaison linéaire de fonctions polynomiales.
- Approximation constante par morceau CPM . La fonction de chargement réparti est approximée par une succession de valeurs constantes comme cela est fait dans [5].

Ce choix des méthodes d'approximation est motivé par l'aspect complémentaire de ces bases ainsi que par le phénomène de Runge qui limite l'ordre de la base $P[X]$. Enfin, d'autres bases d'approximation des fonctions de chargement peuvent être utilisées. Cependant, les efforts localisés imposent une solution linéaire le long de la poutre pour la courbure qui est exactement décrite par les bases choisies. De plus, le procédé d'orthonormalisation permet d'obtenir a priori des résultats similaires avec n'importe quelle base de fonctions.

b/ Note sur les modèles de poutre d'Euler-Bernouilli

Dans le cas du modèle d'Euler-Bernouilli, les équations d'équilibre se simplifient sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{M}}{dx^2} + \frac{d\underline{c}}{dx}(x) + \underline{r}(x) &= 0 \quad \text{le long de } L \\ \underline{M}(0) = -\underline{C}^0 \quad \text{et} \quad \underline{T}(0) = -\underline{R}^0 \quad &\text{en } S_0 \\ \underline{M}(L) = \underline{C}^L \quad \text{et} \quad \underline{T}(L) = \underline{R}^L \quad &\text{en } S_L \\ \underline{R}^0 + \underline{R}^L + \int_0^L \underline{r}(x) dx &= 0 \\ \underline{C}^0 + \underline{C}^L + L \underline{x} \wedge \underline{R}^L + \int_0^L [\underline{c}(x) + x \underline{x} \wedge \underline{r}(x)] dx &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la première équation lie les densités de moment et de résultante qui ne peuvent plus être différenciées du point de vue de la réponse de la structure. Les

équations d'équilibre se mettent alors sous une forme qui fait seulement intervenir des distributions d'efforts, $\underline{r}(x)$:

$$\frac{d^2 \underline{M}}{dx^2} + \underline{r}(x) = 0 \quad \text{le long de } L \quad (3.9)$$

$$\underline{M}(0) = -\underline{C}^0 \quad \text{et} \quad \underline{T}(0) = -\underline{R}^0 \quad \text{en } S_0 \quad (3.10)$$

$$\underline{M}(L) = \underline{C}^L \quad \text{et} \quad \underline{T}(L) = \underline{R}^L \quad \text{en } S_L \quad (3.11)$$

$$\underline{R}^0 + \underline{R}^L + \int_L \underline{r}(x) dx = 0 \quad (3.12)$$

$$\underline{C}^0 + \underline{C}^L + L \underline{x} \wedge \underline{R}^L + \int_L [x \underline{x} \wedge \underline{r}(x)] dx = 0 \quad (3.13)$$

Cela revient à considérer dans l'expression de la base de chargement du torseur d'effort réparti que les fonctions de moment sont directement proportionnelles aux fonctions de résultante, soit :

$$\forall 1 \leq k \leq p \quad c_{1k} = 0 \quad \& \quad c_{2k} = \beta_2 r_{3k} \quad \& \quad c_{3k} = \beta_3 r_{2k}$$

3.2.3 Mesures et capteurs sur une poutre

Pour des raisons technologiques, nous nous intéressons seulement aux mesures de déformation par jauges sur le bord de la structure. Le problème de poutre tel qu'il est formulé a une solution analytique dans le cas d'une poutre droite à comportement isotrope. Cette solution analytique donne les relations de comportement suivantes sur le bord de la structure [35, 11] :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{T_x}{ES} + z \frac{M_y - xT_z}{EI_y} - y \frac{M_z + xT_y}{EI_z} + \Psi(M_x, y, z, x) \\ \epsilon_{xy} &= \frac{M_x}{GI_x} \frac{\partial}{\partial z} \phi(y, z) \\ \epsilon_{xz} &= -\frac{M_x}{GI_x} \frac{\partial}{\partial y} \phi(y, z) \end{aligned}$$

Dans ces expressions, Ψ est la fonction de gauchissement de la section et ϕ est la fonction de cisaillement. Ces fonctions dépendent seulement des géométries des sections des poutres considérées. Les sollicitations de traction et de flexion peuvent être identifiées séparément à partir de la mesure de ϵ_{xx} :

- Traction : $T_x \neq 0 \Rightarrow \epsilon_T = \epsilon_{xx}(y, z) + \epsilon_{xx}(-y, -z)$. Les déformations mesurées dans des positions diamétralement opposées sont sommées.
- Flexion \underline{y} : $(T_z, M_y) \neq 0 \Rightarrow \epsilon_{Fy} = \epsilon_{xx}(y, z) - \epsilon_{xx}(y, -z)$. Les déformations mesurées dans des positions symétriques par rapport au plan (\vec{x}, \underline{y}) sont soustraites.
- Flexion \underline{z} : $(T_y, M_z) \neq 0 \Rightarrow \epsilon_{Fz} = \epsilon_{xx}(y, z) - \epsilon_{xx}(-y, z)$. Les déformations mesurées dans des positions symétriques par rapport au plan (\vec{x}, \underline{z}) sont soustraites.

En présence de torsion, ce découplage n'est possible que si :

- Le gauchissement est nul (section circulaire) ou libre.
- Le facteur de gauchissement est à symétrie centrale (section de la poutre à symétrie centrale).

L'identification de la sollicitation de torsion ($M_x \neq 0$) est obtenue par la mesure de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ dans une direction $\underline{n} = [n_x \ n_y \ n_z]$. Cette mesure $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ donne une relation entre $\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{xz}$. Les mesures de déformation sont planes, ce qui permet de supposer que $\underline{n} = [n_x \ n_y \ 0]$ et que $(\boldsymbol{\varepsilon}_{iz})_{i=x,y,z} = 0$. \underline{x} est l'axe de la poutre. La mesure dans la direction \underline{n} est égale à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} & \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = n_x^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} + n_y^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} + 2n_x n_y \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}$$

Le découplage de la sollicitation est obtenu par différence des déformations mesurées dans les directions $\pm\theta$. $\boldsymbol{\varepsilon}_T = \boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_{-n} = 2n_x n_y \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}$. Le signal mesuré est maximum pour $n = [1 \ \pm 1]/\sqrt{2}$ c'est à dire dans la direction à $\pm 45^\circ$ par rapport à \underline{x} l'axe de la poutre.

Dans le cas d'une poutre droite isotrope et avec une géométrie symétrique, le découplage des sollicitations permet d'identifier séparément chacune de ces sollicitations. Pour cette raison, nous illustrons la méthode de reconstruction de champ à partir d'une seule sollicitation. Les résultats sont identiques pour les autres sollicitations. La sollicitation présentée est la flexion plane qui est celle contenant le plus grand nombre de paramètres de chargement a priori dans un problème de poutre. Le cas de l'identification de sollicitations couplées sera ensuite traité à partir de l'essai à rupture sur une pale d'hélicoptère. Cette structure est assimilée à une poutre anisotrope à section variable et dissymétrique.

3.3 Simulation d'un problème poutre élémentaire en flexion plane

3.3.1 Description des cas simulés

La validation de la méthode de résolution du problème inverse consiste à estimer l'erreur de la solution identifiée, $\delta[\mathcal{S}]$, en fonction des erreurs de mesure aléatoire, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{rand}$, et de modélisation, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{mod}$. Cette estimation de l'erreur de la solution est faite pour quatre cas simulés de chargement. Le principe des simulations est de générer des mesures à partir du cas de chargement considéré, d'utiliser ces mesures pour identifier les paramètres liés aux bases d'approximation du chargement, et de comparer la solution ainsi identifiée avec la solution calculée à partir du chargement « exact » .

Soit Ω la poutre de section rectangulaire ($b \times h$) et de longueur L , soumise à une sollicitation de flexion plane illustrée sur la figure 3.5. Cette structure est soumise aux torseurs d'effort suivants :

$$\forall i = 0, L \ \{\mathcal{T}\}_{P_i}^i = \begin{Bmatrix} R^i \\ C^i \end{Bmatrix}_{P_i}^i \quad \{\mathcal{T}\}_P^{rep} = \sum_k \begin{Bmatrix} \int r_k(s) ds \\ \int (s-x)r_k(s) ds \end{Bmatrix}_P^{rep}$$

$(\{\mathcal{T}\}_{P_i}^i)_{i=0,L}$ sont les torseurs localisés à ses extrémités et $\{\mathcal{T}\}_P^{rep}$ est le torseur d'effort réparti.

Le chargement réparti, $r(x)$, est approximé à partir des deux bases de chargement :

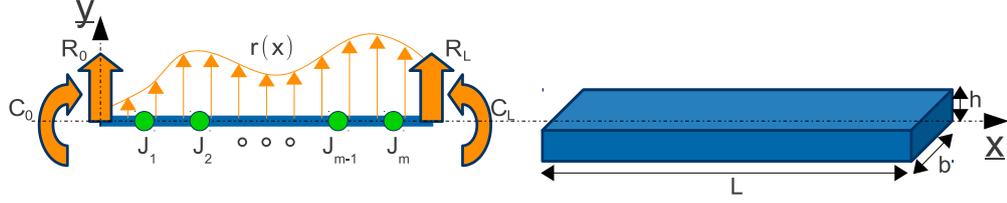


FIGURE 3.5 – Schématisation de la poutre étudiée, sollicitée en flexion plane.

- La base de chargement polynomiale $P[X]$, $r(x) = \sum \alpha_k x^k$.
- La base de chargement constante par morceau CPM, $r(x) = \sum \beta_k h(\delta x_k)$ où h est la fonction échelon sur l'intervalle δx_k . Le terme de base est employé pour décrire la famille de fonctions définie sur chaque morceau de la structure qui approxime la fonction de chargement. Cependant, cette famille de fonctions n'est pas une base au sens mathématique du terme.

La grandeur mesurée pour l'identification de la sollicitation de flexion est la courbure, $\gamma(x)$ obtenue à partir des mesures de déformation sur les faces inférieure $(-\frac{h}{2})$ et supérieure $(\frac{h}{2})$ de la poutre. Ainsi :

$$\begin{cases} \varepsilon\left(x, \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}\gamma(x) + \varepsilon_0(x) \\ \varepsilon\left(x, -\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2}\gamma(x) + \varepsilon_0(x) \end{cases} \Rightarrow \gamma_{mes}(x) = \frac{2}{h} \left[\varepsilon_{mes}\left(x, \frac{h}{2}\right) - \varepsilon_{mes}\left(x, -\frac{h}{2}\right) \right]$$

où $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$ et $\gamma = \gamma_z$. $(J_k)_{1 \leq k \leq m}$ sont les capteurs associés aux m mesures de courbure.

L'orthonormalisation des bases de chargement donne les fonctions d'approximation de la courbure illustrées sur la figure 3.6. Cette figure montre le lien entre la longueur caractéristique de variation $(L_{\gamma_i})_{1 \leq i \leq p+2}$ des éléments et la dimension de la base. Cette relation est donnée par :

$$\forall i \geq 2 \quad L_{\gamma_i} = \left(\frac{2}{i-1} \right) L$$

Le MCR nécessaire au calcul de la base de chargement équilibrée est pris à l'extrémité $x=0$ de la poutre. Ce MCR définit l'origine des déplacements pour la solution identifiée. Les relations entre les bases de chargement et les fonctions de courbure sont données par :

$$\forall 1 \leq j \leq 6 \quad \begin{cases} \{\mathcal{T}_j\}_{P_L}^L = \begin{Bmatrix} R_{j\bar{y}}^L \\ C_{j\bar{z}}^L \end{Bmatrix}_{P_L}^L = EI \begin{Bmatrix} -\partial_x \gamma_j(L) \bar{y} \\ \gamma_j(L) \bar{z} \end{Bmatrix}_{P_L}^L \\ \{\mathcal{T}_j\}_P^{rep} = \begin{Bmatrix} r_{j\bar{y}} \\ c_{j\bar{z}} \end{Bmatrix}_P^{rep} = EI \begin{Bmatrix} \int \partial_s^2 \gamma_j(s) ds \bar{y} \\ \int (s-x) \partial_s^2 \gamma_j(s) ds \bar{z} \end{Bmatrix}_{P_L}^L \end{cases}$$

où ∂_s et ∂_s^2 sont respectivement les dérivées première et seconde par rapport à s . Dans la suite, les fonctions de chargement réparti sont approximées à partir de p_r fonctions, ainsi :

$$r(s) \approx \sum_{k=1}^{p_r} \alpha_k s^k \quad \& \quad r(s) \approx \sum_{k=1}^{p_r} \beta_k h(\delta s_k)$$

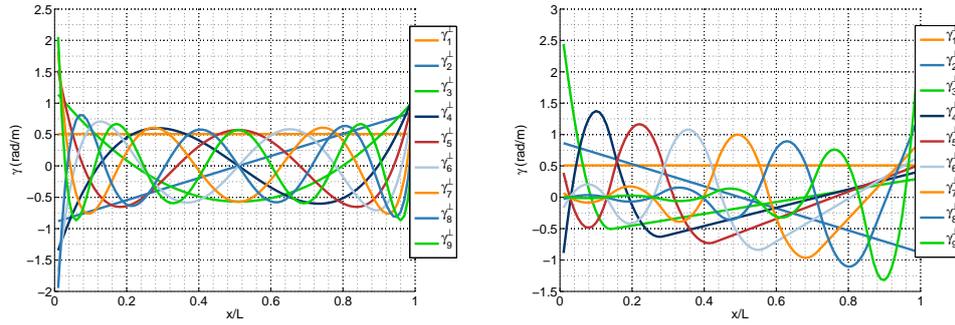


FIGURE 3.6 – Illustration de la base des courbures associée aux bases de chargement de dimension 7, polynomiale $P[X]$ et continue par morceau (CPM).

s est la variable adimensionnée définie sur $[0, 1]$ telle que $x = sL$.

Les cas de chargement (1) et (2) (cf. figure 3.7) sont directement construits à partir des bases de chargement. Ces cas de chargement permettent de vérifier la méthode de résolution et d'étudier simplement la sensibilité de la méthode aux erreurs de mesure, sans erreur de modélisation. Les cas de chargement (3) et (4) (cf. figure 3.8) ne sont qu'approximés par les bases de chargement. Ces cas de chargement introduisent l'erreur de modélisation et permettent d'étudier globalement la sensibilité de la méthode de résolution aux erreurs de mesure.

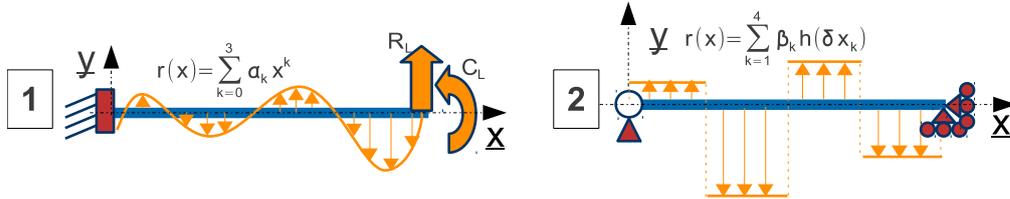


FIGURE 3.7 – Schématisation des cas de chargement (1) et (2) construits à partir des bases de chargement $P[X]$ et CPM.

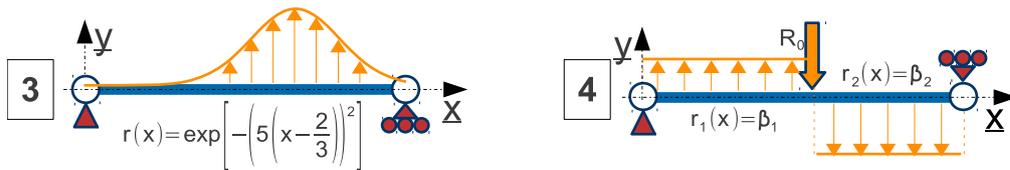


FIGURE 3.8 – Schématisation des cas de chargement (3) et (4). Le cas (3) correspond à une distribution gaussienne d'une charge répartie. Le cas (4) correspond à l'introduction d'une charge localisée à l'intérieure de la structure élémentaire.

3.3.2 Etude du conditionnement de \mathbb{G}

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent 2.5.1, l'erreur sur la solution est proportionnelle au conditionnement de \mathbb{G} , $Cond[\mathbb{G}]$. L'optimisation de $Cond[\mathbb{G}]$ est alors nécessaire pour optimiser $\delta[\mathcal{S}]$. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps aux influences du nombre de degrés de liberté, de la dimension des bases d'approximation, et du choix des points de mesure, position et nombre. Dans

la suite, n est le nombre de ddl de la structure, m est le nombre de points de mesure et p est la dimension des bases d'approximation.

a/ Dimension des bases d'approximation du chargement

La dimension des bases d'approximation du chargement, p , correspond aux nombres d'éléments de ces bases. Dans le cas de la sollicitation de flexion étudiée, $p = p_r + 2$, où p_r est le nombre de fonctions d'approximation du chargement réparti. L'évolution du conditionnement de \mathbb{G} en fonction de p est donnée sur la figure 3.9. Ce conditionnement est calculé pour un même nombre de ddl , $n = 300$ et une même distribution de capteurs, uniforme, composée de $m = 12$ capteurs.

Ce résultat montre que le conditionnement de \mathbb{G} augmente avec la dimension de la base d'approximation ce qui correspond à l'évolution attendue puisque le nombre de paramètres à identifier est égal à p . Cette croissance du conditionnement s'explique assez bien par le fait que l'augmentation de p est lié à l'ajout de fonctions à faible longueur de variation. Ces fonctions seront naturellement plus sensibles aux phénomènes oscillatoires et par conséquent au bruit des mesures.

Enfin, le conditionnement de la base CPM est inférieur à celui de la base $P[X]$. Ce résultat explique en partie le choix de l'approximation par morceau par rapport à l'approximation polynomiale pour les problèmes d'interpolation.

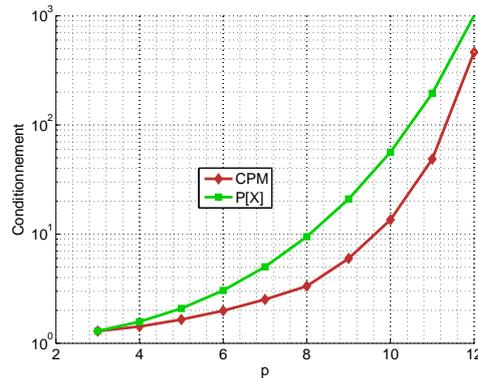


FIGURE 3.9 – Evolution du conditionnement en fonction de la dimension de la base d'approximation, p , pour une distribution uniforme des $(J_k)_{1 \leq k \leq m}$.

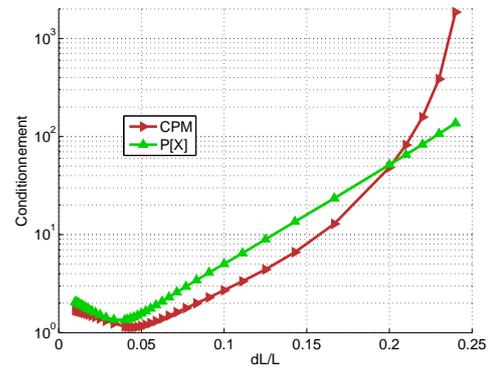


FIGURE 3.10 – Evolution du conditionnement en fonction de dL , $(J_k)_{1 \leq k \leq m} \in [dL, L - dL]$, dans le cas $m = 9$, $p = 6$, et $n = 100$.

b/ Distribution des capteurs

La distribution des capteurs est un paramètre majeur du conditionnement de \mathbb{G} . Nous nous intéressons dans un premier temps à la longueur de mesure c'est-à-dire à l'espacement maximum entre tous les capteurs de la structure élémentaire, soit la distance $J_1 J_m$ sur la figure 3.5. En faisant varier cette distance telle que $(J_k)_{1 \leq k \leq m} \in [dL, L - dL]$, le conditionnement de \mathbb{G} décroît jusqu'à atteindre un minimum puis croît en fonction de dL comme cela est illustré sur la figure 3.10. dL est la distance séparant les extrémités de la poutre $x = 0$ et $x = L$ des capteurs J_1 et J_m . La distribution des capteurs est uniforme, c'est-à-dire que l'écart entre tous les capteurs est constant. La distance dL minimisant $Cond[\mathbb{G}]$ est globalement inférieure à $0,05L$.

où L est la longueur de la poutre. Nous considérons dans la suite que la distance dL est toujours supérieure à $0,05L$, et que le conditionnement décroît continuellement en fonction de dL . Ce choix est la conséquence des hypothèses du modèle poutre qui impose d'écarter les capteurs des zones d'introduction d'efforts.

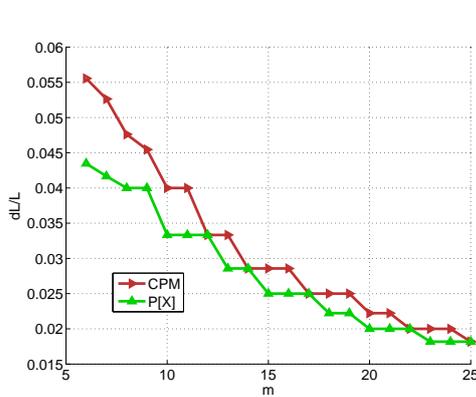


FIGURE 3.11 – Evolution du dL optimal en fonction de m dans le cas $p = 6$ et $n = 100$.

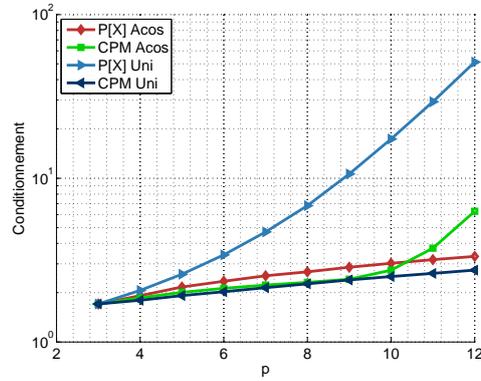


FIGURE 3.12 – Evolution de $Cond[\mathbb{G}]$ en fonction de p avec $m = p$ et $n = 100$. dL est égal la longueur de mesure de la distribution *Arccosinus*.

Ce résultat a été vérifié pour différentes distributions des capteurs. Nous nous intéressons ensuite au choix de la distribution optimale, c'est-à-dire minimisant $Cond[\mathbb{G}]$. Dans le cas d'un problème d'identification linéaire multi-variables associé à des fonctions polynomiales, la distribution optimale des capteurs est en *Arccosinus* associée aux racines des polynômes de Tchebychev du 1^{er} ordre. Les hypothèses nécessaires à ce résultat sont les suivantes [100, 122, 86] :

- Les fonctions polynomiales sont définies sur l'intervalle $[-1, 1]$.
- Les mesures sont effectuées simultanément en des positions distinctes et sans corrélation.
- Le nombre de capteur m est égal à la dimension p des bases d'approximation.

La comparaison entre les conditionnements obtenus pour une distribution uniforme et une distribution en *Arccosinus* est donnée sur la figure 3.12. La longueur de mesure est constante et est égale à la longueur définie par la distribution en *Arccosinus*. L'évolution du conditionnement est représentée en fonction de la dimension de la base d'approximation dans le cas $P[X]$ et CPM , pour un nombre m de capteurs égal à la dimension de la base. L'opérateur \mathbb{G} est alors directement inversible. La distribution en *Arccosinus* diminue considérablement $Cond[\mathbb{G}]$ par rapport à la distribution uniforme dans le cas de la base $P[X]$. Dans le cas de la base CPM , $Cond[\mathbb{G}]$ est faiblement influencé par le choix de ces distributions uniforme et *Arccosinus*.

La définition précédente de l'optimalité de la distribution *Arccosinus* ne tient pas compte de la valeur limite de $dL = 5\%L$, ni des cas pour lesquels m est supérieur à la dimension p de la base. Ces cas sont illustrés sur la figure 3.13 où $dL = 5\%L$ dans un premier temps, et m est imposé dans un second temps. Ces contraintes ont pour effets de réduire l'écart entre les distributions uniformes et *Arccosinus*. Enfin, un algorithme de construction d'une distribution optimale, tel que défini dans [122], basée sur la distribution *Arccosinus* telle que $m \geq p$ ne modifie pas ce résultat. A partir de ces résultats, nous nous limitons dans la suite à une distribution uniforme

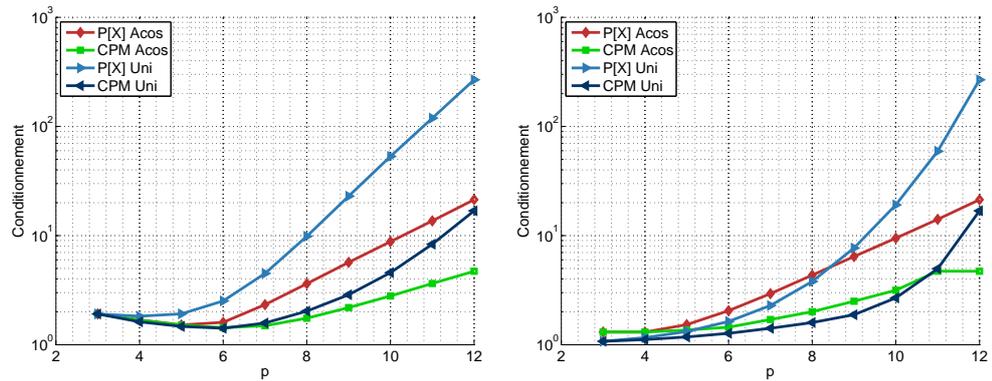


FIGURE 3.13 – Evolution du conditionnement de \mathbb{G} en fonction de p avec $n = 100$ et $dL = 5\%L$. Sur la figure de gauche, $m = p$ pour chaque valeur du conditionnement et sur la figure de droite, $m = 12$.

des capteurs.

c/ Influence de n et de m

La figure 3.14 montre l'évolution de $Cond[\mathbb{G}]$ en fonction de n , le nombre de ddl et de m le nombre de capteurs uniformément distribués. $Cond[\mathbb{G}]$ est indépendant de n à partir d'une certaine valeur. En effet, la solution par éléments finis tend vers la solution analytique lorsque n augmente. Cette solution analytique permet de construire un opérateur \mathbb{G}_{SA} identique à \mathbb{G} lorsque n est suffisamment grand. Pour chaque cas d'identification, la valeur limite de n peut être obtenue à partir d'un critère d'erreur entre la solution EF et la solution analytique calculée à partir des bases de chargement. Dans la suite, n est pris suffisamment grand pour que $Cond[\mathbb{G}]$ en soit indépendant. Enfin, le conditionnement de \mathbb{G} décroît lorsque m augmente dans le cas de la base $P[X]$. Ce résultat signifie que pour un nombre de paramètres donné, l'augmentation du nombre de points de mesure utilisés permet de moyennner les erreurs et d'améliorer la stabilité de la solution. Ce résultat est standard pour les problèmes d'identification linéaire. Dans le cas de la base CPM , $Cond[\mathbb{G}]$ n'est que très faiblement influencé par m . Les variations observées sont principalement dues aux placements des points de mesure dans le maillage EF.

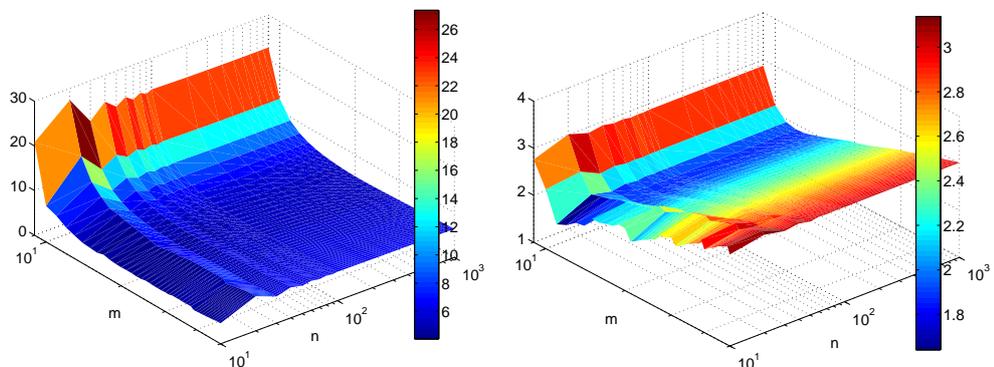


FIGURE 3.14 – Evolution du conditionnement de \mathbb{G} en fonction de m et de n , pour $p = 9$ et $dL = 5\%L$ pour les bases $P[X]$ et CPM .

d/ Conclusion

Cette étude de $Cond[\mathbb{G}]$ nous a permis de définir les conditions d'identification utilisées dans la suite de ce travail. Nous supposons que les capteurs sont uniformément distribués et que le nombre de ddl , n , est supérieur à 100. Du fait des conditions expérimentales de validation des études numériques suivantes, nous avons choisi un ordre des bases d'approximation p égale à 6, ce qui correspond à la présence de quatre fonctions de chargement réparti. Les points de mesure sont uniformément distribués et leur nombre m est de 9. Ces valeurs de n , m , et p impose que $Cond[\mathbb{G}] = 5,0$ pour la base $P[X]$, et que $Cond[\mathbb{G}] = 2,7$ pour la base CPM . La qualité de l'identification du chargement est alors évaluée à partir de ces conditions d'identification, et de la reconstruction des champs de courbure. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre et des mesures sont données dans le tableau 3.1.

E (GPa)	ν	L (mm)	b (mm)	h (mm)	m	n	p
185	0,3	640	24	3,2	9	100	6

Tableau 3.1 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre étudiée.

3.3.3 Influence de l'erreur aléatoire sur l'erreur de la solution

a/ Résolution du problème exact

Soient les cas de chargement décrits sur la figure 3.7. Ces cas de chargement (1) et (2) sont définis par :

$$F_b^1 = \sum_{i=1}^6 f_i^{\perp P[X]} \quad \text{et} \quad F_b^2 = \sum_{i=1}^6 \beta_i f_i^{CPM} \quad (3.14)$$

où $(f_i^{\perp P[X]})_{1 \leq i \leq 6}$ est la base orthonormée $P[X]$ et $(f_i^{CPM})_{1 \leq i \leq 6}$ est la base CPM standard. Les coefficients $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 6}$ sont tels que : $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -5$, $\beta_3 = 2$, et $\beta_4 = -3$. Les mesures utilisées dans un premier temps sont les mesures exactes, c'est-à-dire les valeurs calculées aux points de mesure.

Les figures 3.15 et 3.16 illustrent l'évolution des chargements identifiés par chacune des bases d'approximation ainsi que les champs de courbure reconstruits à partir de ces chargements identifiés pour chacun des cas. Chaque base identifie exactement son cas de chargement propre comme le montre le tableau 3.2. L'erreur des champs reconstruits est nulle dans le cas (1) pour la base $P[X]$ et dans le cas (2) pour la base CPM . Ce résultat valide la mise en œuvre de la méthode de reconstruction des champs à partir de l'identification du chargement puisque une configuration imposée est parfaitement identifiée. Les erreurs des champs reconstruits sont calculées par rapport à la valeur moyenne du champ de référence.

L'identification du cas de chargement (2) à partir de la base $P[X]$ et l'identification du cas de chargement (1) à partir de la base CPM montrent l'équivalence entre les bases de chargement ainsi que la localisation de l'erreur aux extrémités de la poutre. Sur la zone d'observation, c'est-à-dire pour $x/L \in [0.1, 0.9]$, l'erreur des champs reconstruits est faible et est très inférieure à celle hors de cette zone d'observation où l'erreur est maximale. Ce résultat valide a posteriori l'utilisation d'un chargement simplifié basé sur le principe de Saint-Venant.

Cas	$\delta[\mathcal{S}]$ CPM (%)				$\delta[\mathcal{S}]$ P[X] (%)			
	MAX	MEAN	STD	ΔE_d	MAX	MEAN	STD	ΔE_d
1	407	33,9	73,0	21,0	$3 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-4}$
2	$8 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-3}$	23,4	2,17	4,81	13,7

Tableau 3.2 – Tableau de la statistique spatiale des erreurs $\delta[\mathcal{S}]$ des champs reconstruits avec l'identification des cas de chargement (1) et (2) à partir des bases CPM et P[X]. Pour chaque cas de chargement, les maximums, moyennes et écarts types de $\delta[\mathcal{S}]$ sont calculés à partir des distributions spatiales de l'erreur. ΔE_d représente l'erreur en énergie de déformation de la solution reconstruite par rapport au champ de référence.

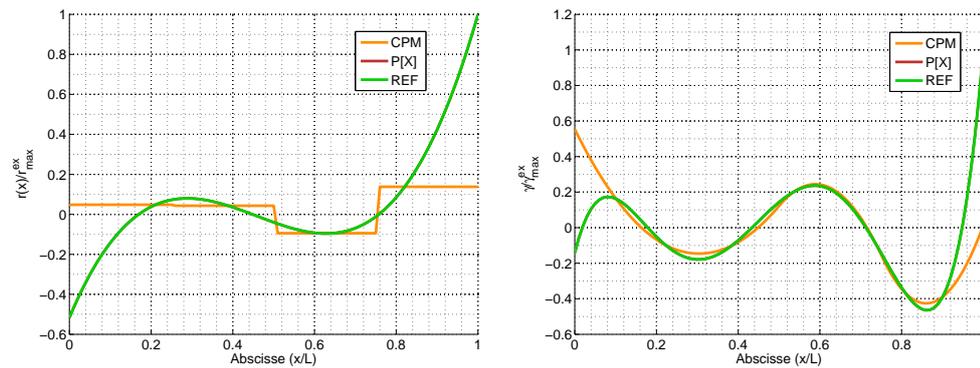


FIGURE 3.15 – Comparaison des chargements imposés et identifiés et comparaison des courbures calculées et reconstruites pour le cas de chargement (1) à partir des bases CPM et P[X]. Les solutions identifiées à partir de la base P[X] sont confondues avec le cas de référence noté REF. Les valeurs sont normées par les valeurs maximales des champs de référence.

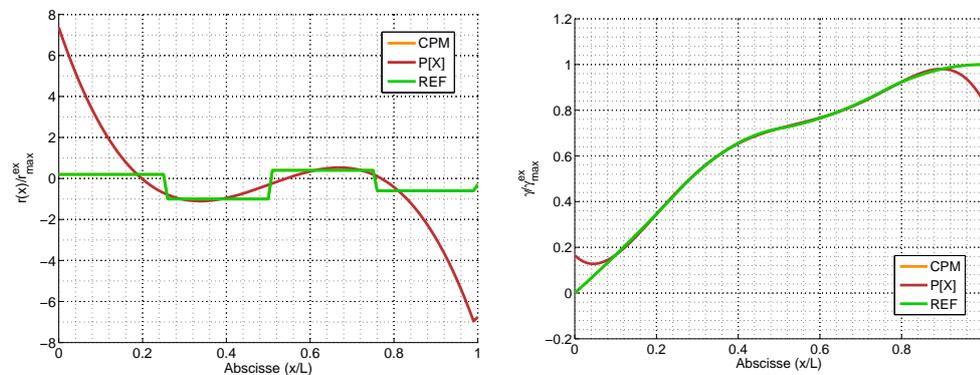


FIGURE 3.16 – Comparaison des chargements imposés et identifiés et comparaison des courbures calculées et reconstruites pour le cas de chargement (2) à partir des bases P[X] et CPM. Les solutions identifiées à partir de la base CPM sont confondues avec le cas de référence noté REF. Les valeurs sont normées par les valeurs maximales des champs de référence.

b/ Résolution bruitée du problème inverse

La mise en œuvre de la méthode étant validée sur les exemples précédents, nous évaluons ensuite la stabilité de la méthode au bruit de mesure. Pour cela, une erreur aléatoire est introduite sur les mesures, et l'évolution des erreurs des champs reconstruits est étudiée. L'erreur aléatoire de mesure est calculée à partir d'un pourcentage de la valeur moyenne des champs de référence. Les mesures se

mettent sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_m^0 + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{mean}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_m^0$ est la mesure simulée, $\boldsymbol{\varepsilon}_{mean}$ est la valeur de déformation moyenne, et $\boldsymbol{\alpha} \in [0.01, 1]$ représente la quantité de bruit sur les mesures. A partir d'une valeur de $\boldsymbol{\alpha}$, $N = 10000$ échantillons sont générés par une distribution uniforme sur $[-1, 1]$ en chaque point de mesure tels que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^k = \boldsymbol{\varepsilon}_m^{k0} + \boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{\varepsilon}_{mean} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 1 \leq k \leq m \\ 1 \leq N \leq 10000 \\ \boldsymbol{\alpha}_i \in [-\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}] \end{cases}$$

La stabilité de la méthode de reconstruction est évaluée à partir du rapport des écarts types sur le nombre d'échantillons du bruit. La grandeur τ_{STD} est définie comme étant le rapport des écarts types entre le champ reconstruit et les mesures :

$$\tau_{STD} = \frac{\langle\langle \delta[\mathcal{S}] \rangle\rangle_N}{\langle\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle_N} = \frac{\langle\langle \delta[\mathcal{S}] \rangle\rangle_N}{\langle\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{rand} \rangle\rangle_N}$$

La figure 3.17 montre les évolutions de τ_{STD} et de $\tau_{STD}/\text{Cond}[\mathbb{G}]$ pour les champs reconstruits à partir des cas propres de chargement de chaque base d'approximation. Ces rapports sont indépendants de $\boldsymbol{\alpha}$ et leurs maxima se situent aux extrémités de la poutre. Dans la zone d'observation, l'écart type de l'erreur du champ reconstruit est inférieur à l'écart type de l'erreur des mesures. Ce résultat valide la stabilité de la méthode de reconstruction de champ basée sur l'identification du chargement. Cette stabilité du problème de reconstruction de champ est identique à celle du problème d'identification des paramètres de chargement puisque $\langle\langle \delta[\mathcal{S}] \rangle\rangle_N \leq \text{Cond}[\mathbb{G}] \times \langle\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle_N$.

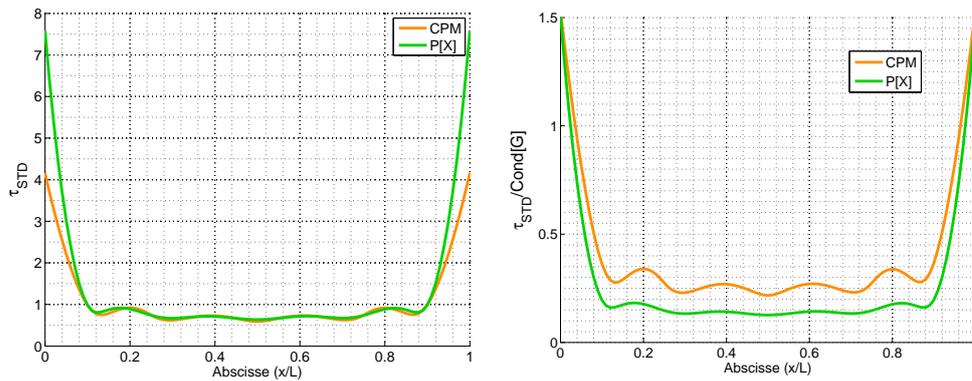


FIGURE 3.17 – Evolution du rapport des écarts types τ_{STD} des champs de courbure reconstruits et des mesures, et évolution du rapport $\tau_{STD}/\text{Cond}[\mathbb{G}]$ pour tous les cas de chargement identifiés à partir de la base $P[X]$. Ces rapports sont calculés pour les champs reconstruits à partir de l'identification des chargements propres aux bases $P[X]$ et CPM .

3.3.4 Influence de l'erreur de modélisation sur l'erreur de la solution

La validation de la méthode de reconstruction de champ est terminée avec les cas de chargement (3) et (4). Les chargements répartis identifiés ainsi que les champs

de courbure reconstruits sont illustrés sur les figures 3.18 et 3.19. Ces résultats sont obtenus à partir des mesures sans bruits. Les erreurs maximales sont localisées aux extrémités comme dans les cas précédents et l'équivalence entre les base d'approximation est respectée comme le montrent les maxima, moyennes et écarts types des erreurs des solutions du tableau 3.3.

Cas	$\delta[\mathcal{S}]$ CPM (%)				$\delta[\mathcal{S}]$ P[X] (%)			
	MAX	MEAN	STD	ΔE_d	MAX	MEAN	STD	ΔE_d
3	9,31	0,773	1,45	2,24	14,6	1,18	2,59	2,83
4	25,0	4,53	4,50	7,86	87,7	7,19	13,7	12,4

Tableau 3.3 – Tableau des statistiques de l'erreur à la solution pour l'identification des cas de chargement 3 et 4 à partir des bases CPM et P[X]. Pour chaque cas de chargement, les maxima, moyennes et écarts types de $\delta[\mathcal{S}]$ sont calculés à partir des distributions spatiales de l'erreur. ΔE_d représente l'erreur en énergie de déformation de la solution reconstruite par rapport au champ de référence.

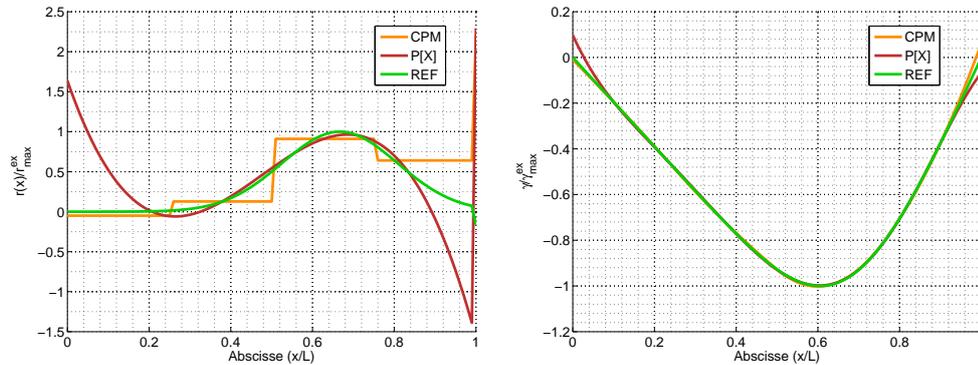


FIGURE 3.18 – Comparaison du chargement imposé et des chargements identifiés à partir des bases P[X] et CPM (gauche), et comparaison de la courbure calculée et des courbures reconstruites avec les bases de chargement P[X] et CPM (droite). Cas de chargement (3).

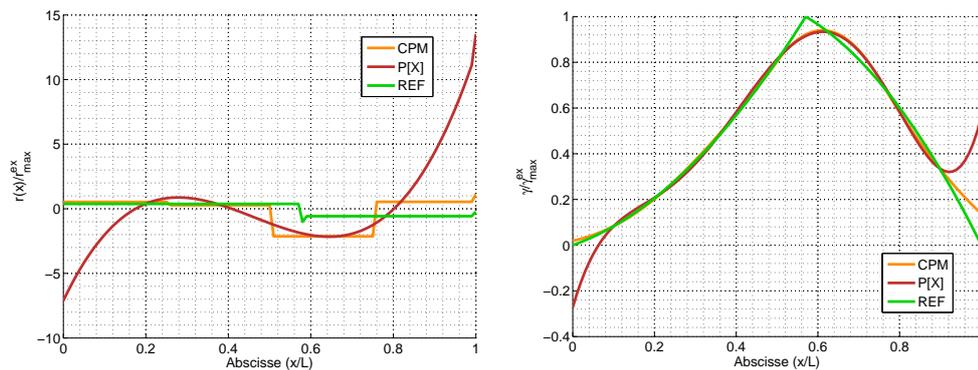


FIGURE 3.19 – Comparaison du chargement imposé et des chargements identifiés à partir des bases P[X] et CPM (gauche), et comparaison de la courbure calculée et des courbures reconstruites avec les bases de chargement P[X] et CPM (droite). Cas de chargement (4).

La sensibilité aux erreurs de mesure aléatoires est aussi étudiée pour ces cas de chargement. Le rapport des écarts types τ_{STD} conserve les mêmes propriétés que précédemment ce qui confirme l'expression de $[\mathcal{S}]$ obtenue dans le chapitre

précédent 2.5. L'écart type du champ reconstruit ne dépend que de l'écart type de l'erreur aléatoire. Ce résultat est illustré sur la figure 3.20 pour la base de chargement $P[X]$ pour tous les cas de chargement identifiés. De plus, cet écart type du champ reconstruit est inférieur à celui de l'erreur de mesure sur la zone d'observation.

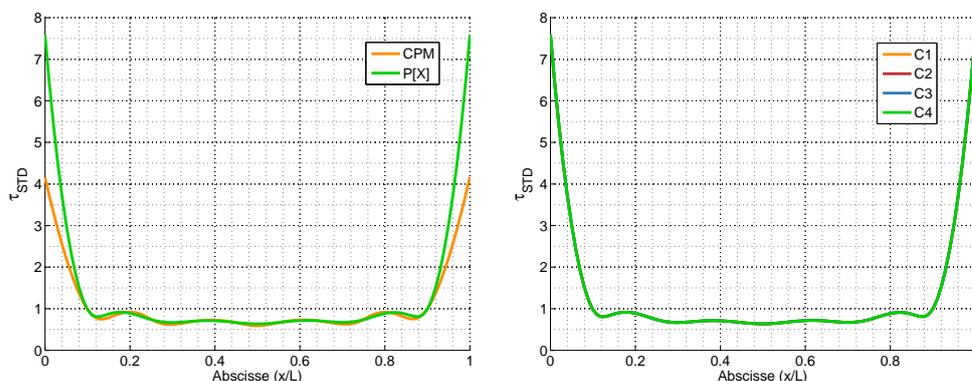


FIGURE 3.20 – Evolution du rapport des écarts types τ_{STD} pour le cas de chargement (4) calculé pour les bases $P[X]$ et CPM, et évolution du rapport des d'écarts types pour tous les cas de chargement calculé pour la base $P[X]$.

Enfin, l'erreur des champs de déplacement reconstruits à partir des paramètres de chargement identifiés montre aussi la stabilité de la méthode. Un facteur 10 à 100 est obtenu par rapport à l'erreur sur les champs de courbure. Ce résultat est la conséquence du calcul du déplacement par intégration de la courbure. L'opérateur d'intégration permet de lisser les erreurs locales associées au champ de courbure. La figure 3.21 montre les champs de déplacement reconstruits pour les cas de chargement (1) et (4). Ce résultat montre l'intérêt de la reconstruction du déplacement à partir de mesures de déformation et valide l'utilisation du SME développé au chapitre 1. Cette procédure permet une intégration des mesures ce qui améliore la stabilité de la solution.

Cependant, le champ de déplacement reconstruit est défini à un MCR près puisqu'aucun déplacement n'est mesuré. Les résultats présentés sont calculés à partir du MCR exact de la structure. En pratique, les incertitudes relatives à ce MCR peuvent fortement dégrader la qualité de la solution reconstruite. En revanche, si le champ de déplacement n'a besoin que d'être défini de manière relative par rapport à une référence choisie, cette méthode permet d'obtenir une bonne précision sur ce champ.

3.3.5 Conclusion

Cette mise en œuvre numérique a permis de valider la méthode proposée de reconstruction des champs mécaniques à partir de l'identification du chargement. Ainsi, cette méthode permet de régulariser le problème inverse de reconstruction de champ tout en limitant l'erreur des solutions calculées. Les erreurs maximales sont localisées aux zones d'application du chargement. Ce résultat valide l'hypothèse de simplification du chargement basée sur le principe de Saint-Venant. L'utilisation d'une distribution uniforme des capteurs à l'intérieure de la structure limite l'erreur

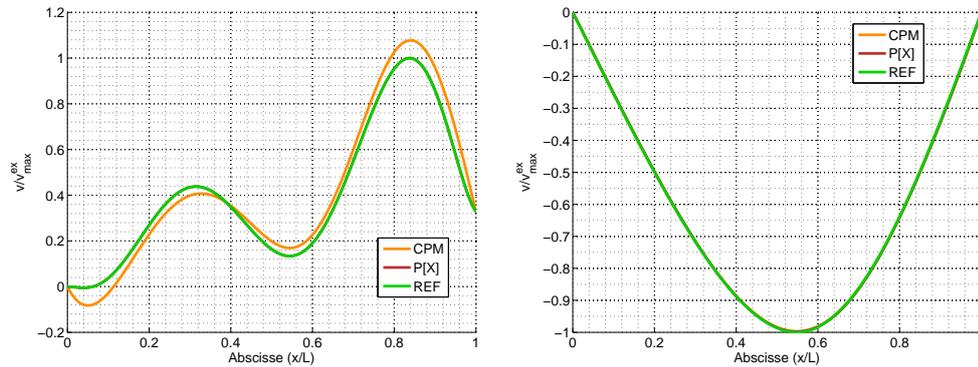


FIGURE 3.21 – Comparaison des champs de déplacement (flèche) reconstruits à partir des paramètres de chargement identifiés avec les bases $P[X]$ et CPM , pour les cas de chargement 1 et 4.

sur les champs mécaniques reconstruits. De plus, cette méthode permet de définir un chargement équivalent du point de vue de la réponse de la structure, et ce chargement peut être ordonné en fonction d'une longueur caractéristique de variation des effets induits sur la structure. Par conséquent, une connaissance a priori du chargement permet de réduire simplement la dimension de la base utilisée pour l'approximation.

L'étude des deux bases d'approximation, constante par morceau CPM , et polynomiale, $P[X]$, a montré leur équivalence pour l'identification du chargement et la reconstruction des champs. L'étude simultanée de ces deux bases est liée aux physiques qu'elles permettent de décrire. L'une est une physique discontinue du chargement qui peut s'utiliser dans des cas de contact entre structures ou de changement de milieu (air/eau par exemple). L'autre est une physique continue du chargement qui peut s'utiliser dans les milieux homogènes. Un exemple d'application simultanée de ces bases de chargement est la structure safran présentée précédemment. L'utilisation conjointe des deux bases de chargement permet de décrire le comportement des parties immergée et émergée.

Bien que le cas d'une poutre en flexion simple ait seulement été présenté, ces résultats ont été vérifiés pour les cinq autres sollicitations élémentaires dans le cas des poutres isotropes, symétriques, et/ou à gauchissement libre. Pour le cas des poutres anisotropes, non-symétriques, et/ou gauchies, le couplage des sollicitations peut poser un problème majeur comme cela est illustré dans la suite sur une pale d'hélicoptère. Si l'utilisation d'une base de chargement orthonormée permet de résoudre les problèmes d'influence relative des différentes sollicitations, la définition de cette base de chargement peut s'avérer délicate d'un point de vue physique.

3.4 Mise en œuvre et validation expérimentale pour une poutre en flexion

La validation expérimentale de la méthode a été faite sur une poutre en flexion plane. L'objectif a été dans un premier temps de retrouver les résultats précédents concernant la sensibilité de la solution aux erreurs de mesure. Dans un second temps, ces expérimentations nous ont permis d'identifier et de classer les sources

d'erreur supplémentaires liées à la mise en œuvre.

Pour ces expérimentations, une poutre en acier a été utilisée. Les caractéristiques mécaniques de la poutre ont été identifiées à partir d'un essai de traction sur un échantillon. Ces caractéristiques sont données dans le tableau 3.4. La mesure des courbures est effectuée par 18 jauges de déformation uniformément distribuées le long de la poutre, symétriques deux à deux et montées en demi-pont. Ce montage permet de mesurer seulement les déformations de flexion en neuf positions indépendantes.

E (GPa)	ν	ρ (kg/l)	L (mm)	b (mm)	h (mm)	m	n	p
185	0,3	6880.0	640	24	3,2	9	100	6

Tableau 3.4 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre et valeurs des paramètres de mesure.

3.4.1 Chargement localisé aux extrémités de la structure

a/ Description de l'essai

La première expérimentation consiste à solliciter la structure à ses extrémités en lui appliquant des moments. Le banc d'essai est celui représenté sur la figure 3.22. La poutre est maintenue dans des mors en liaison pivot et pivot glissant avec le bâti. Des roues sont liées aux mors et des paniers permettent d'appliquer des efforts sur leur périphérie à l'aide de masses. Les paramètres de chargement sont les couples C_1 et C_2 des extrémités qui sont déterminés en fonction des masses utilisées, de la gravité et du rayon des roues.

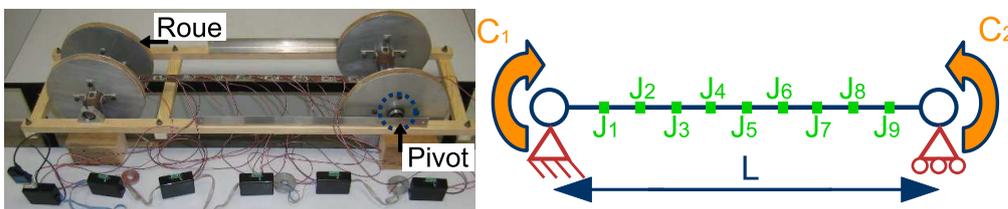


FIGURE 3.22 – Illustration du banc d'essai de flexion. Des couples sont appliqués aux extrémités de la poutre à l'aide de masses liées aux roues des mors maintenant la poutre.

Différentes configurations de chargement ont été réalisées. Les résultats présentés concernent une augmentation progressive de C_1 et C_2 qui correspond à un ajout de masse de 0kg à 2,8kg et une alternance entre C_1 et C_2 à partir d'une masse de 100,5g. La figure 3.23 illustre les chargements utilisés pour ces essais. La poutre passe d'une configuration de flexion simple avec des couples et des résultantes différents à ses extrémités, à une configuration de flexion pure dans laquelle les couples C_1 et C_2 sont quasiment égaux et les résultantes quasiment nulles. Les chargements imposés correspondent à des valeurs non-nulles pour les seules fonctions f_1^\perp et f_2^\perp des bases d'approximation dont les valeurs sont représentées sur la figure 3.23.

Ces cas de chargement illustrent les influences des erreurs aléatoire et de modélisation sur l'erreur du champ reconstruit. Dans le premier cas de chargement, l'amplitude de l'erreur aléatoire représente 0,3% de la déformation maximale mesurée, dans le second cas de chargement, l'amplitude de l'erreur aléatoire représente 13,2% de la déformation maximale mesurée.

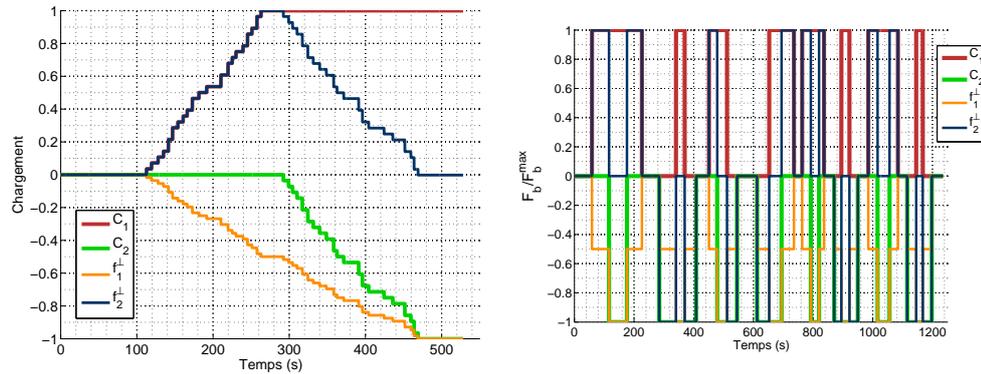


FIGURE 3.23 – Evolution des couples C_1 et C_2 appliqués aux extrémités de la poutre pour la première série d'expérimentation et évolution des fonctions f_1^\perp et f_2^\perp des bases d'approximation. Ces valeurs sont normées par leurs maximums. Pour le premier cas de chargement des masses de 0kg à 2,8kg sont utilisées pour chacun des couples C_1 et C_2 . Pour le second cas de chargement, une masse de 100,5g est utilisée.

b/ Identification des chargements et reconstruction des champs de courbure

Les déformations mesurées aux neuf points de mesure sont illustrées sur la figure 3.24 pour les deux cas de chargement. Les évolutions des erreurs des paramètres de chargement données sur les figures 3.25 et 3.26 pour les deux bases de chargement montrent que :

- Les erreurs associées à chaque base d'approximation sont équivalentes. La base *CPM* amplifie moins l'erreur aléatoire du fait de son conditionnement plus faible d'un facteur 2. Les différences d'amplitude des erreurs aléatoires pour les fonctions d'une même base sont dues aux coefficients de normalisation qui sont cinq fois plus faible pour $(f_k^\perp)_{2 \leq k \leq 6}$ que pour f_1^\perp .
- Les erreurs des paramètres non nulles suivent les niveaux de chargement supposés. Ce résultat indique la présence d'une erreur de modélisation, $\delta\gamma_{mod}$, associée aux différentes sources d'erreur de l'essai. Cette erreur de modélisation correspond à la valeur moyenne de l'erreur du champ reconstruit pour chaque palier de chargement.

La caractérisation de l'erreur aléatoire est faite à partir de l'évolution du rapport des écarts types des champs reconstruits et des mesures pour chaque cas de chargement. Les maxima et les moyennes de cette évolution en chaque point de discrétisation de la structure sont donnés sur la figure 3.27. Ces résultats sont identiques à ceux obtenus lors des simulations numériques. L'écart type du champ reconstruit dans la zone d'observation est inférieur à celui des mesures. Enfin, l'amplitude maximale du bruit de mesure est en moyenne de $1,3 \cdot 10^{-6}$, ce qui correspond à 0,3% de la plage de mesure pour le premier cas de chargement et à 13% de la plage de mesure pour le second cas de chargement. L'écart type est de $0,4 \cdot 10^{-6}$.

L'erreur de modélisation se traduit par un biais sur le champs reconstruit comme cela est illustré sur la figure 3.28. Ce biais est a priori plus important pour le second cas de chargement que pour le premier. En effet, à partir des valeurs moyennes des erreurs des paramètres de chargement, l'erreur de modélisation peut être estimée à 4% de la valeur maximale pour le premier cas de chargement et à 25% de la

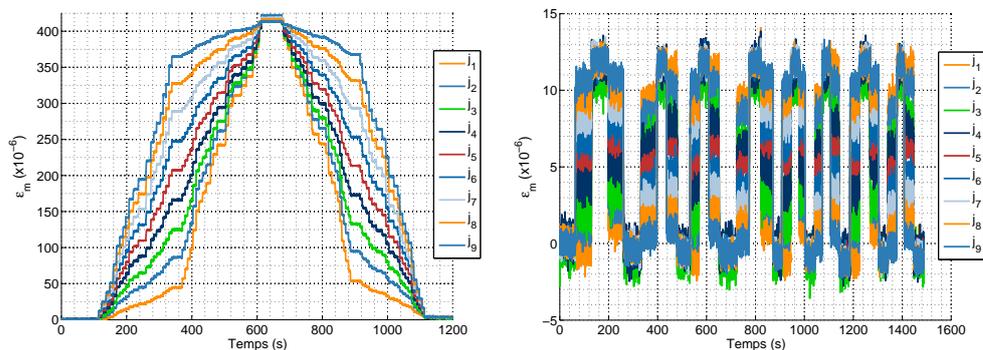


FIGURE 3.24 – Evolution des déformations mesurées dans les deux cas de chargement de la première série d'expérimentation. Ces déformations vont de 0 à $4,25 \cdot 10^{-4}$ pour le premier cas de chargement et de 0 à $12 \cdot 10^{-6}$ pour le second cas de chargement.

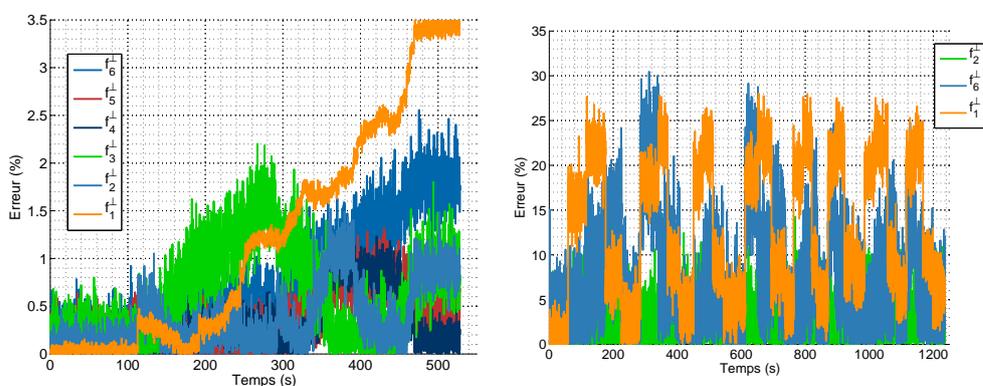


FIGURE 3.25 – Evolution des erreurs des paramètres de chargement identifiés à partir de la base d'approximation CPM pour les deux cas de chargement de la première série d'expérimentation. Ces erreurs sont calculées à partir de l'écart entre les paramètres identifiés par la base CPM et les paramètres supposés de chargement associés aux masses appliquées. Cet écart est ensuite normé par la valeur maximale supposée de chaque paramètre sur la plage de mesure.

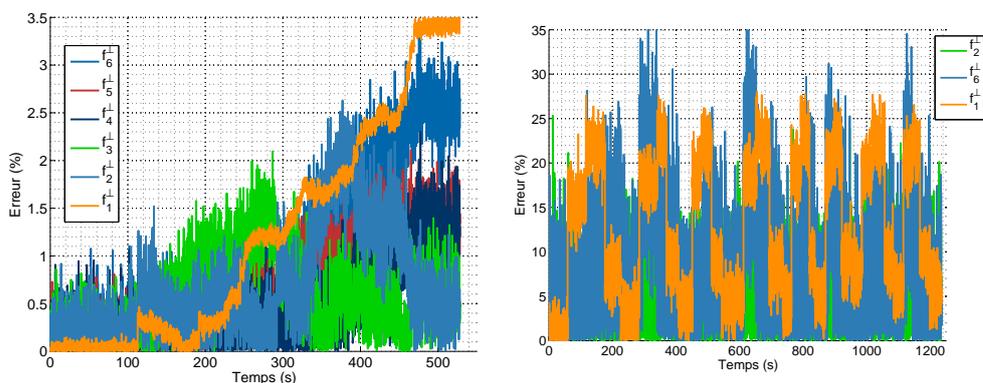


FIGURE 3.26 – Evolution des erreurs des paramètres de chargement identifiés à partir de la base d'approximation $P[X]$ pour les deux cas de chargement de la première série d'expérimentation. Ces erreurs sont calculées à partir de l'écart entre les paramètres identifiés par la base CPM et les paramètres supposés de chargement associés aux masses appliquées. Cet écart est ensuite normé par la valeur maximale supposée de chaque paramètre sur la plage de mesure.

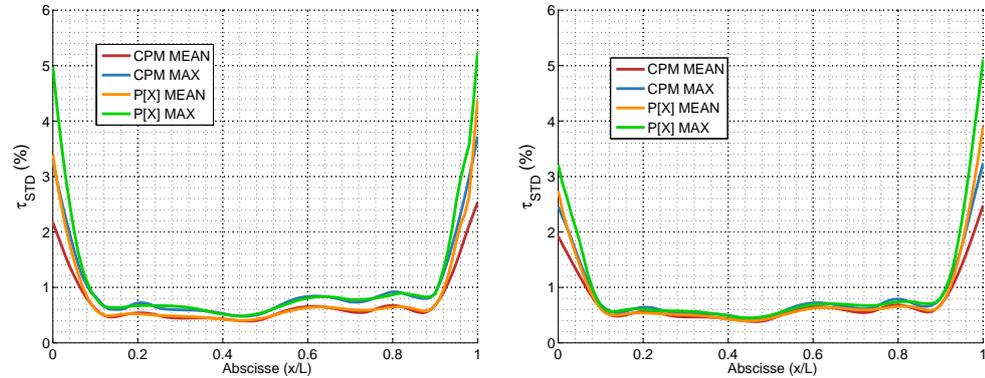


FIGURE 3.27 – Evolution des maxima, MAX, et des moyennes, MEAN, du rapport des écarts types sur l'ensemble des valeurs de chaque cas de chargement. Ce rapport est inférieur à un dans la zone d'observation.

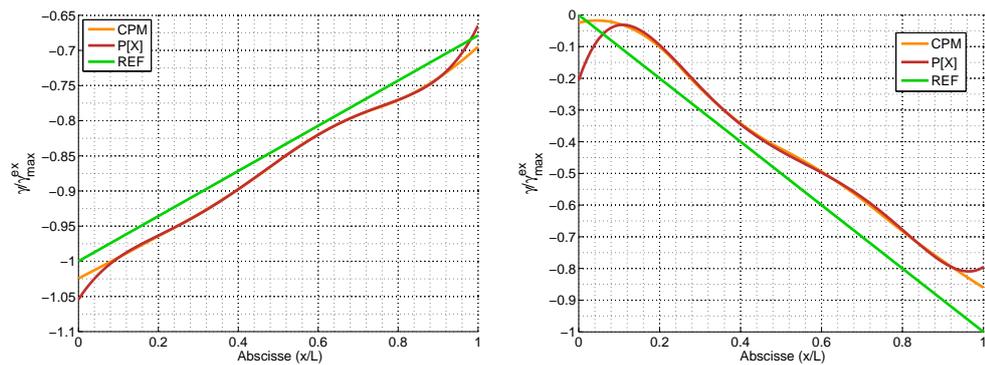


FIGURE 3.28 – Evolution des champs reconstruits à partir des paramètres de chargement identifiés pour chaque base de chargement à un instant donné, pour chaque cas de chargement.

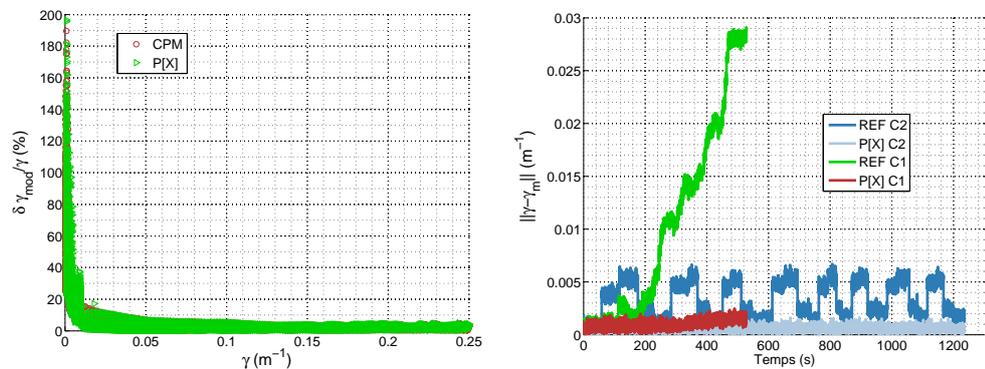


FIGURE 3.29 – Evolution de $\delta\gamma_{mod}/\gamma$ en fonction de γ/γ_{max} pour l'ensemble des valeurs de chaque cas de chargement et évolution des écarts aux mesures des solutions identifiées à partir des base d'approximation et des solution de référence calculées à partir des chargement supposés.

valeur maximale pour le second cas de chargement. Par conséquent, cette erreur n'est pas simplement proportionnelle aux valeurs mesurées. L'évolution du rapport de l'erreur de modélisation et de la valeur de courbure calculés en chaque point de la structure, $\delta\gamma_{mod}/\gamma$, en fonction de la valeur de courbure aux points montre la présence d'une erreur de modélisation non proportionnelle. L'évolution de cette erreur est similaire pour les deux cas de chargement comme le montre la figure 3.29. Lorsque γ est petit, le rapport $\delta\gamma_{mod}/\gamma$ devient très grand. L'évolution de l'écart aux mesures de l'ensemble des configurations de chargement confirme le caractère non proportionnelle de l'erreur de modélisation puisque cet écart croît avec le chargement pour les solutions de référence calculées à partir des chargement supposés. En revanche, ces écarts sont constants et semblables pour les solutions identifiées à partir des bases d'approximation dans les deux cas de chargement. L'évolution des écarts aux mesures est donnée sur la figure 3.29.

Cette non-proportionalité de $\delta\gamma_{mod}$ et de γ est la conséquence des incertitudes liées à l'application du chargement du banc d'essai. Les sources les plus probables sont la présence de frottement et la précision des masses utilisées. Ces incertitudes créent une variation non linéaire des conditions de chargement qui entraîne une non-linéarité de l'évolution de l'erreur en fonction de la valeur de courbure. Lorsque le niveau de chargement augmente, l'influence de ces incertitudes sur la réponse de la structure diminue par rapport à l'influence du chargement imposé. $\delta\gamma_{mod}$ tend vers une évolution linéaire en fonction de γ qui est de 4% pour $\gamma \geq \gamma_{max}/2$. Cette valeur est la limite de l'erreur de modélisation associée aux incertitudes de l'instrumentation comme le positionnement des jauges, l'alignement de l'éprouvette etc.

3.4.2 Identification d'une charge répartie le long de la structure

a/ Description du banc

L'objectif de cet essai est de valider l'identification d'une charge répartie. Nous avons pour cela utilisé le poids propre de la poutre. La procédure de mesure est la suivante :

- La poutre est initialement posée sur la tranche sur une table. La verticale est parallèle à la largeur de la poutre. Cette position correspond à la position de référence non déformée.
- La poutre est ensuite posée en appui sur deux cylindres à ses extrémités. La verticale est parallèle à la hauteur de la poutre. La poutre est alors soumise aux actions de son poids propres et des résultantes d'appui aux extrémités.

La masse volumique équivalente de la poutre instrumentée est évaluée par pesée, elle est égale à $\rho = 6,880\text{kg/l}$. La masse volumique équivalente identifiée à partir des mesures est de $\rho = 6,807\text{kg/l}$.

b/ Identification du chargement et reconstruction du champ de courbure

Les résultats obtenus pour l'identification des paramètres de chargement et la reconstruction du champ de courbure sont similaires à ceux du cas précédent. Les deux bases d'approximation donnent des résultats identiques et l'erreur la plus importante porte sur le paramètre de chargement associé aux résultantes des appuis.

Cet écart traduit la dissymétrie des couples et des résultantes aux appuis. Ce résultat est illustré sur la figure 3.31 qui montre l'évolution des erreurs des paramètres de chargement identifiés.

La figure 3.32 montre que le bruit du champ reconstruit est inférieur au bruit de mesure dans la zone d'observation et qu'un biais est visible entre les solutions identifiées et la solution calculée à partir du chargement supposé. Ce biais est créé par une dissymétrie des résultantes et des moments aux appuis. Ainsi, le chargement est précisément évalué avec l'ajout de moments et de résultantes aux appuis qui font correspondre au mieux essai et modèle.

Ce résultat est aussi visible sur la figure 3.33 qui montre l'évolution de l'erreur de modélisation en fonction de la courbure ainsi que l'évolution de l'écart aux mesures de la solution calculée et des solutions reconstruites. L'erreur de modélisation est non proportionnelle pour les faibles valeurs de courbure et tend à se stabiliser pour les grandes valeurs de courbure. Enfin, l'écart aux mesures est stable pour les solutions identifiées à partir des bases d'approximation tandis que l'écart aux mesures de la solution calculée à partir du chargement supposé dépend fortement du niveau de chargement.

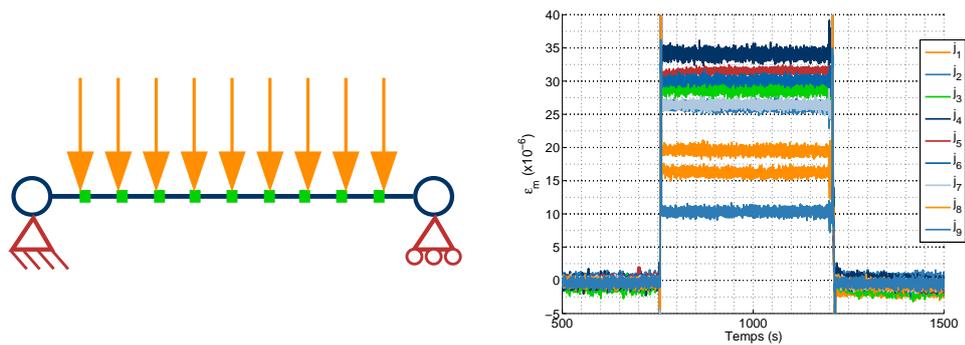


FIGURE 3.30 – Cas de chargement de l'expérimentation avec charge répartie le long de la structure et évolution des déformations mesurées.

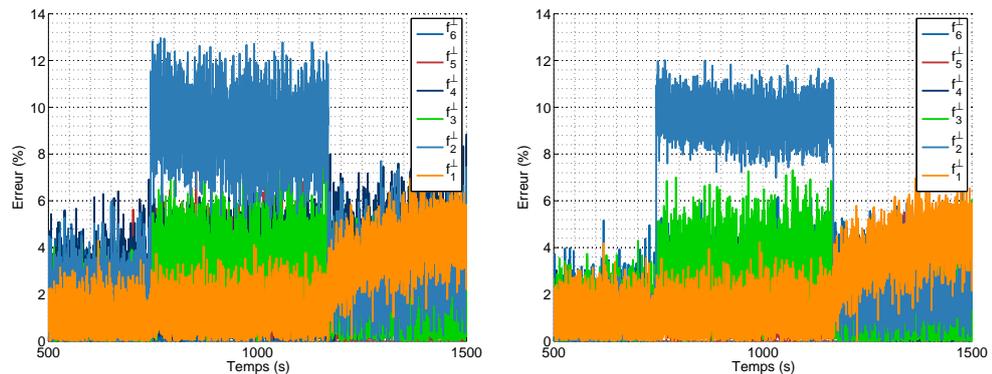


FIGURE 3.31 – Evolution des erreurs des paramètres de chargement identifiés à partir des bases d'approximation $P[X]$ et CPM. Ces erreurs sont calculées à partir de l'écart entre les paramètres identifiés par les bases d'approximation et les paramètres supposés de chargement associés au poids propre. Cet écart est ensuite normé par la valeur maximale des paramètres de chargement sur la plage de mesure.

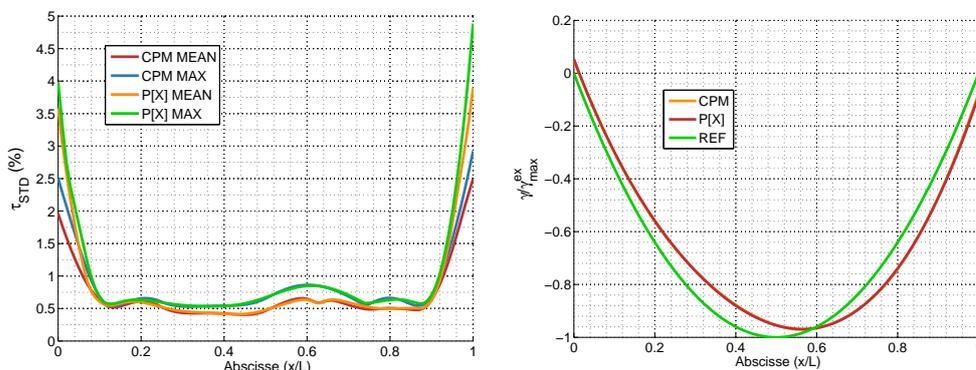


FIGURE 3.32 – Evolution des maxima, MAX, et des moyennes, MEAN, du rapport des écarts types sur l'ensemble des valeurs de chaque cas de chargement. Ce rapport est inférieur à un dans la zone d'observation.

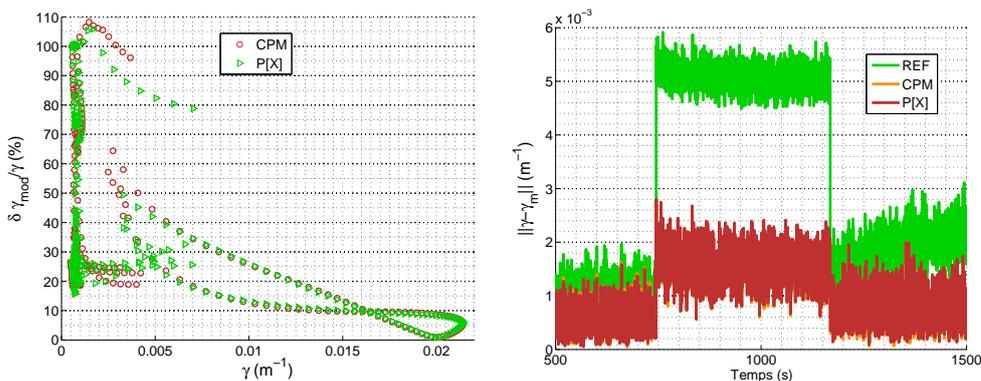


FIGURE 3.33 – Evolution de $\delta\gamma_{mod}/\gamma$ en fonction de γ/γ_{max} pour l'ensemble des valeurs de chaque cas de chargement et évolution des écarts aux mesures des solutions identifiées à partir des bases d'approximation $P[X]$ et CPM.

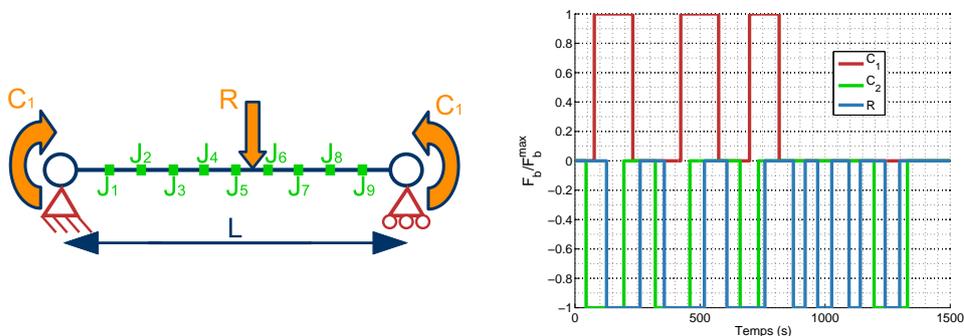


FIGURE 3.34 – Cas de chargement de l'expérimentation avec charge localisée à l'intérieur de la structure et évolution des paramètres de chargement C_1 , C_2 et R , normés par leur valeurs maximales.

3.4.3 Identification d'un chargement localisé à l'intérieur de la structure

a/ Description de l'essai

La dernière expérimentation consiste à introduire une charge localisée à l'intérieur de la structure en plus du chargement localisé à ses extrémités. Ce cas est illustré sur la figure 3.34. La poutre est positionnée dans le banc de flexion précédent. Des couples C_1 et C_2 sont imposés aux extrémités de la structure et une masse permet d'appliquer un effort R à l'intérieur de la structure. Les paramètres de chargement sont C_1 , C_2 et R , dont les valeurs sont fixées. La poutre est successivement chargée par ces paramètres. C_1 et C_2 sont appliqués à partir de masse de 100,5g et R est appliqué à l'aide d'une masse de 200,5g.

b/ Identification du chargement et reconstruction du champ de courbure

Les figures 3.35, 3.36 et 3.37 valident encore la méthode proposée pour l'identification du chargement et la reconstruction de champ. L'erreur de modélisation calculée par rapport au cas de chargement supposé est d'au minimum 20% pour le niveau de déformation maximum alors qu'il n'était que de 10% en moyenne pour le même niveau de déformation dans les autres cas. Ce résultat est cohérent puisque la solution recherchée n'appartient pas aux bases de chargement contrairement aux cas précédents. L'erreur de modélisation comporte une erreur non-proportionnelle liée aux incertitudes du chargement, une erreur proportionnelle liée aux incertitudes de mesure et une erreur proportionnelle liée au modèle. Enfin, la stabilité de la méthode de reconstruction vis à vis des erreurs aléatoires est encore confirmée, le rapport des écarts types suit toujours la même évolution.

3.4.4 Conclusion

Ces expérimentations nous ont permis de valider la méthode sur des cas réels et simples d'identification. Les erreurs des paramètres de chargement identifiés et des champs reconstruits ont les évolutions attendues. De plus, ces essais nous ont permis de mettre en avant le contrôle des conditions de chargement d'une structure lors d'une expérimentation à partir d'un recalage du chargement. La méthode proposée permet de résoudre la problématique d'un écart important entre les mesures et les données simulées a priori à l'aide de ce recalage. En supposant un degré de précision du modèle de la structure, l'écart aux mesures permet d'évaluer les incertitudes sur les conditions aux limites et de les modifier en conséquence. Cette application est illustrée dans la suite par un test sur une pale de rotor arrière d'hélicoptère.

3.5 Suivi des conditions de chargement lors d'un essai à rupture sur une pale arrière d'hélicoptère

3.5.1 Problématique

L'objectif initial de cet essai est de valider un modèle de comportement à rupture des matériaux composites sur une pale arrière de rotor d'hélicoptère contenant une

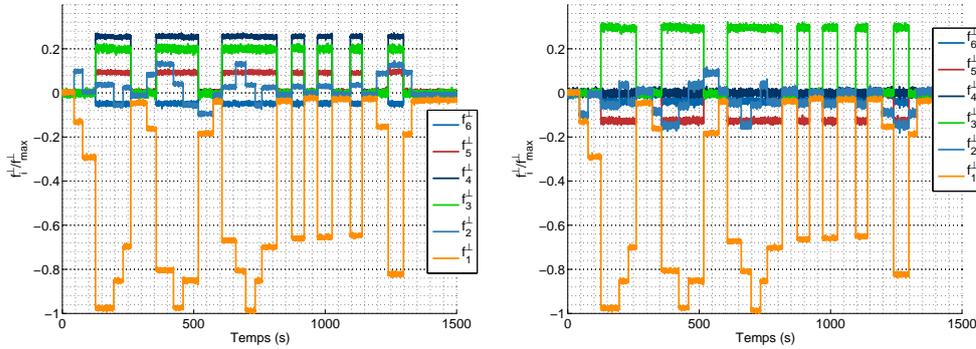


FIGURE 3.35 – Evolution des paramètres de chargement identifiés à partir des bases d'approximation CPM et $P[X]$ normés par leurs valeurs maximales.

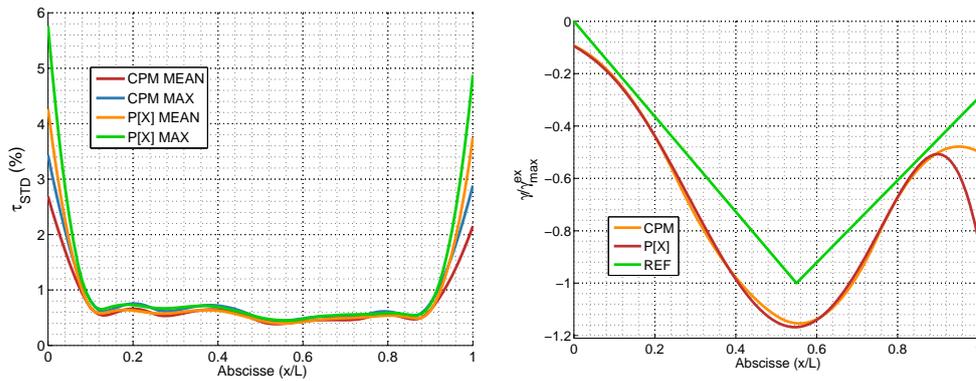


FIGURE 3.36 – Evolution des maxima, MAX, et des moyennes, MEAN, du rapport des écarts types sur l'ensemble des valeurs du chargement et évolution des courbures reconstruites à partir des paramètres de chargement identifiés.

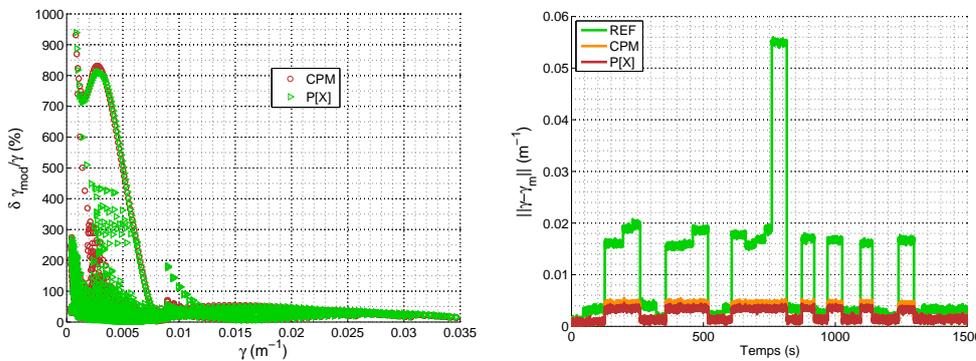


FIGURE 3.37 – Evolution de $\delta\gamma_{mod}/\gamma$ en fonction de γ/γ_{max} et évolution des écarts aux mesures des solutions identifiées à partir des bases d'approximation $P[X]$ et CPM.

fissure sur l'une de ses faces. Le modèle utilisé doit prédire la charge à rupture de la pale à partir d'une sollicitation combinée de flexion et de torsion. Cependant, l'utilisation d'une structure réelle crée des incertitudes sur les conditions aux limites qui sont utilisées dans la simulation de validation de l'essai. Par conséquent, la qualité de la validation est étroitement liée au contrôle de ces conditions aux limites, que ce soit dans les liaisons entre la structure et son banc d'essai ou dans l'évaluation des conditions de chargement.

Nous avons décidé d'appliquer les méthodes développées précédemment pour réaliser le contrôle du chargement de cette structure durant l'essai. Cet essai nous a permis d'identifier les possibilités et les limites de l'approche que nous avons développée pour le suivi en service de l'état mécanique des structures. La principale difficulté de cette application est le comportement anisotrope, assymétrique et couplé de cette structure. Le chargement modélisé par un torseur d'effort est associé à une modélisation poutre de la structure. De plus, la zone d'intérêt, lieu de la rupture, et la zone d'instrumentation, positions des capteurs pour le suivi des conditions de chargement, sont choisies suffisamment loin des zones d'introduction des conditions aux limites. Le modèle de comportement de la structure est un modèle 3D complet implémenté dans SAMCEF. Ce modèle tient compte de l'endommagement du matériau et de la fissure. La complexité de cette structure ne permet pas d'utiliser un modèle de poutre pour réaliser une instrumentation adéquate.

3.5.2 Description de l'essai

a/ Présentation du banc d'essai

La pale est soumise à une sollicitation combinée de flexion et de torsion jusqu'à rupture. Le banc d'essai de la pale est illustré sur les figures 3.38 et 3.39. Un mors en alliage aluminium usiné à sa forme maintient la pale juste avant le pied de pale et un joint souple de quelques millimètres est inséré entre le mors et la pale afin d'éviter des concentrations de contraintes dans cette liaison. Un contre appui est utilisé à l'extrémité du pied de pale pour réduire le cisaillement dans la liaison. Le chargement du vérin est introduit en bout de pale par un autre carcan. La liaison entre le vérin et le carcan est une rotule de centre P . Le vérin est libre en translation dans les directions \underline{x}_e et \underline{y}_e , la direction de sollicitation étant \underline{z}_e , où $\mathbf{R}_e = (\underline{x}_e, \underline{y}_e, \underline{z}_e)$ est le repère de l'essai.

L'effort appliqué sur la structure est mesuré à l'aide d'une cellule d'effort qui sert de liaison entre le carcan et le vérin. La rotule entre le vérin et le carcan assure que seules des résultantes sont appliquées au point P . En revanche, l'absence de rotule entre le capteur d'effort et le vérin ne donne la valeur de l'effort que dans la direction \underline{z}_e . Les efforts dans les autres directions $(\underline{x}_e, \underline{y}_e)$ ne sont pas mesurés. Enfin, huit jauges de déformation sont installées sur la pale pour réaliser le suivi du chargement, et un système de stéréo-corrélation permet de visualiser le champ des déplacements dans la zone d'intérêt qui entoure la fissure. La zone d'instrumentation de la pale pour les huit jauges a été choisie pour que la fissure et l'introduction des conditions aux limites n'influent pas sur leurs mesures. La zone d'instrumentation et la zone d'intérêt sont illustrées sur la figure 3.38. L'erreur aléatoire de mesure est négligée dans ces essais du fait des déformations mesurés, 10^{-4} , par rapport aux déformations du bruit du système d'acquisition $\approx 10^{-7}$ déformation. De plus,

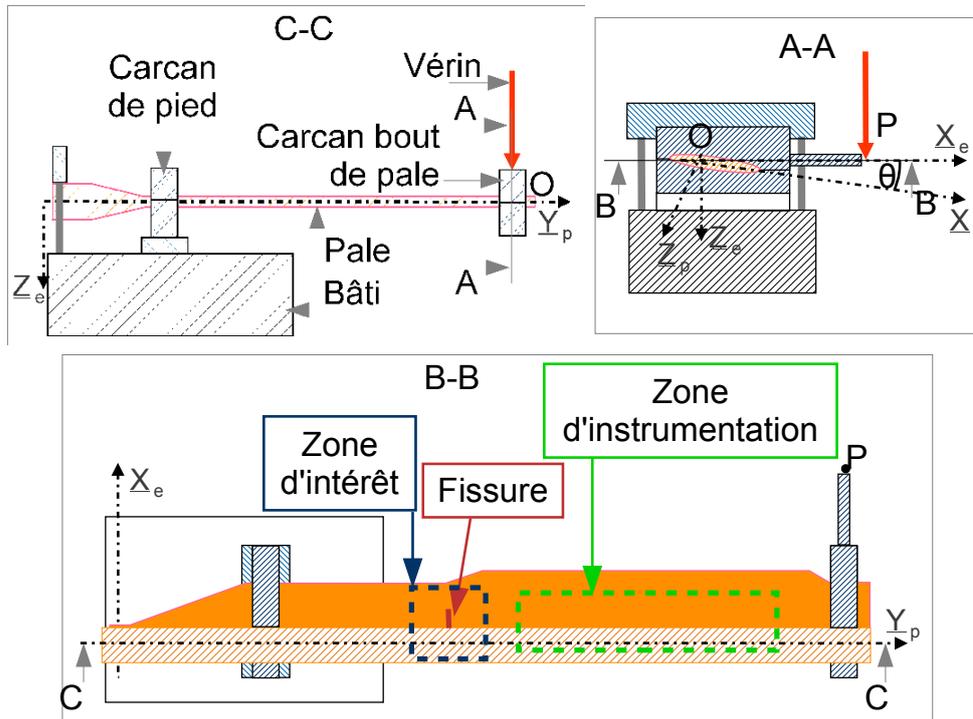


FIGURE 3.38 – Schématisation du banc d'essai pour la sollicitation flexion/torsion de la pale

les mesures sont moyennées sur les périodes de charge puisque le chargement est appliqué de manière incrémentale par palier. Seules les erreurs de modélisation sont considérées. Pour cette raison nous n'utilisons que des erreurs relatives pour quantifier l'écart aux mesures ou la stabilité du chargement identifié. Ces erreurs sont principalement dues au modèle de la structure et au positionnement des jauges.

b/ Présentation des incertitudes dans les conditions aux limites

Les incertitudes sur les conditions aux limites ont deux origines :

- Les phénomènes locaux de sur-contrainte ou sous-contrainte causés par une mauvaise connaissance des liaisons entre la structure et son environnement. Par exemple, bien que la liaison entre la pale et le carcan s'apparente à un encastrement, les jeux et le joint peuvent localement modifier cette liaison et introduire une certaine souplesse.
- La modification des directions de sollicitation causée par la souplesse du bâti, les déplacements liés aux déformations de la structure ou la rigidité des liaisons glissantes. Par exemple, bien qu'en petite déformation la structure est soumise à de grands déplacements qui modifient le repère du chargement par rapport au repère de la pale.

L'influence des sur-contraintes sur la zone d'intérêt est éliminée en éloignant les zones d'application des conditions aux limites. La distance nécessaire à cet éloignement est estimée à partir de simulations dans lesquelles ces conditions aux limites sont écartées de la zone d'intérêt. La position de la fissure étant imposée par le com-

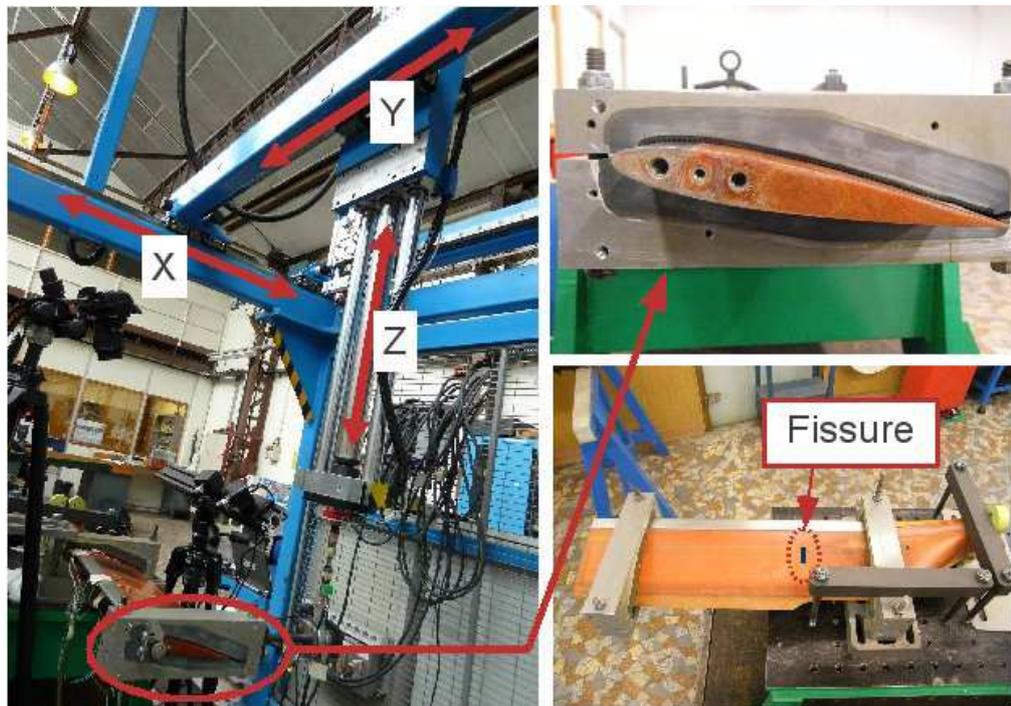


FIGURE 3.39 – Photographie du banc d'essai pour la sollicitation flexion/torsion de la pale et illustration de la liaison pale/carcan.

portement de la pale, cette approche nous a permis de valider la position du carcan de pied de pale et du carcan de bout de pale. Dans la suite, nous nous intéressons seulement aux problèmes associés à la modification des directions de sollicitation, que ce soit par le déplacement de la pale ou l'introduction d'efforts parasites. Le comportement de la pale est supposé élastique linéaire et nous identifions l'évolution du chargement lié à ce comportement au fur et à mesure de l'essai.

Les incertitudes du chargement ont deux origines :

- Le déplacement de R_p le repère de la pale par rapport à R_e le repère de l'essai causé par les rotations de flexion et de torsion qui sont paramétrées à l'aide des angles θ_x , θ_y et θ_z associés respectivement aux sollicitations de flexion par rapport à \underline{x}_p , de torsion par rapport à \underline{y}_p et de flexion par rapport à \underline{z}_p .
- Le déplacement du point P qui impose au vérin un déplacement dans les directions \underline{x}_e et \underline{y}_e . Les efforts de translation du vérin n'étant pas nuls, ce déplacement crée des composantes de chargement suivant \underline{x}_e et \underline{z}_e . Les valeurs maximales de ces efforts sont évaluées à 70N dans la direction \underline{x}_e et 40N dans la direction \underline{y}_e . De plus, la déformation de la tige liant le point P au carcan crée un mouvement relatif entre O , le centre de la section de la pale, et P ce qui modifie le bras de levier des moments induits par les résultantes transmises par la rotule.

L'objectif de cette identification est de caractériser toutes les sollicitations à chaque instant et d'utiliser ensuite ces valeurs dans le modèle pour la simulation de l'essai et la validation du modèle de comportement. Cette identification est basée sur le seul modèle élastique linéaire. Par conséquent, le chargement réel ne pourra pas être exactement identifié tout au long de l'essai. Les grands déplacements de la structure

créent une dépendance des champs mécaniques à la géométrie déformée, ce qui entraîne un comportement non-linéaire de la structure. Ces grands déplacements sont illustrés sur la figure 3.40 où sont superposées des images de la pale en position initiale et dans une position précédant la rupture. Les non-linéarités sont supposées apparaître entre 250N et 300N. Ces niveaux de sollicitation créent a priori des déplacements de plus 5% et des angles de plus de 5°. Ainsi, les sollicitations identifiées de 0N à 250N correspondent aux sollicitations réelles de l'essai. Au-delà, les sollicitations identifiées correspondent à un chargement équivalent au chargement réel du point de vue de la réponse de la structure. Bien que simplifiée, cette approche permet de contrôler dans un premier temps la réponse de la structure et le chargement qui lui est imposé par le banc d'essai à partir de simples simulations linéaires. L'objectif est de valider le modèle de comportement global de la structure et le chargement supposé de l'essai.

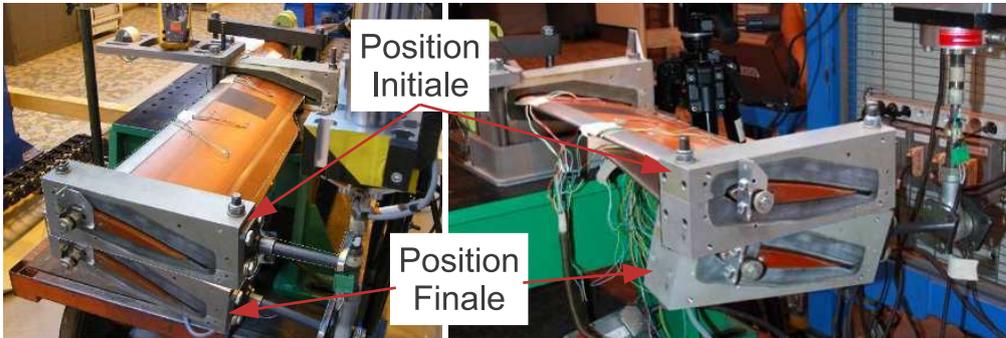


FIGURE 3.40 – Illustration du déplacement de la pale entre sa position initiale et la position finale avant propagation de la fissure. Ces positions sont superposées sur chacune des prises de vues. Les angles de rotation prépondérants sont la flexion θ_x et la torsion θ_y . Ces angles sont estimés inférieurs à 20° tout au long de l'essai, à partir de ces photographies et des observations expérimentales.

c/ Modélisation de l'essai

L'essai est modélisé dans SAMCEF à partir du schéma de la figure 3.38. Un torseur d'effort est appliqué en P . La section de centre O comprise dans le carcan est rigidement liée à P . Le torseur d'effort s'exprime dans R_e et R_p sous la forme :

$$\{\mathcal{F}\}_{(P,R_e)} = \left\{ \begin{array}{c} F_z z_e \\ \underline{0} \end{array} \right\}_{(P,R_e)} = \left\{ \begin{array}{c} F_z [\cos(\theta) z_p + \sin(\theta) x_p] \\ \underline{0} \end{array} \right\}_{(P,R_p)}$$

L'objectif est de valider ou d'infirmer cette configuration de chargement. Pour cela, nous identifions l'ensemble des composantes du torseur d'effort appliqué au centre de la section de la pale et exprimé dans le repère propre de la pale R_p . L'intérêt est que ce repère permet une interprétation aisée des sollicitations. Le torseur recherché est le suivant :

$$\{\mathcal{F}\}_{(O,R_p)} = \left\{ \begin{array}{cc} T_x & M_x \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{array} \right\}_{(O,R_p)} = \left\{ \begin{array}{c} F_z [\cos(\theta) z_p + \sin(\theta) x_p] \\ -dF_z y_p \end{array} \right\}_{(O,R_p)}$$

où d est la distance entre O le centre de la section chargée de la pale et P le point d'application du chargement. Du fait de la rotule en P , ce torseur d'effort pourrait se limiter à 3 résultantes seulement. Nous avons choisi de ne pas nous limiter à cette seule configuration qui ne tient pas compte des déformations éventuelles du carcan, ni de l'influence relative des différentes sollicitations.

3.5.3 Construction de l'opérateur d'identification

L'opérateur d'identification est construit à partir des cas de chargement élémentaires à identifier. Pour cela nous appliquons successivement chacune des composantes du torseurs d'effort complet au centre de la section du carcan de bout. La base de chargement considérée est la suivante :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_1\}_{(O,R_p)} &= \begin{Bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(O,R_p)} & \{\mathcal{T}_2\}_{(O,R_p)} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(O,R_p)} & \{\mathcal{T}_3\}_{(O,R_p)} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \end{Bmatrix}_{(O,R_p)} \\ \{\mathcal{T}_4\}_{(O,R_p)} &= \begin{Bmatrix} 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(O,R_p)} & \{\mathcal{T}_5\}_{(O,R_p)} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(O,R_p)} & \{\mathcal{T}_6\}_{(O,R_p)} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha_6 \end{Bmatrix}_{(O,R_p)} \end{aligned}$$

Le chargement équivalent de l'essai est cherché sous la forme :

$$\{\mathcal{T}\}_{(O,R_p)} = \sum_{k=1}^6 \alpha_k \{\mathcal{T}_k\}_{(O,R_p)}$$

Dans la suite, les torseurs de chargement considérés sont tous exprimés au point O dans le repère R_p .

Ces cas de chargement donnent les champs de déformation sur les faces supérieure et inférieure de la pale. La construction de l'opérateur \mathbb{G} est obtenue à partir des valeurs de champ aux positions $(X_i)_{1 \leq i \leq 8}$ dans les directions $(n_i)_{1 \leq i \leq 8}$ associées à chaque cas de sollicitation $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq 6}$. \mathbb{G} est donné par :

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{n_1}^1 & \varepsilon_{n_1}^2 & \cdots & \varepsilon_{n_1}^6 \\ \varepsilon_{n_2}^1 & \varepsilon_{n_2}^2 & \cdots & \varepsilon_{n_2}^6 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varepsilon_{n_8}^1 & \varepsilon_{n_8}^2 & \cdots & \varepsilon_{n_8}^6 \end{pmatrix} \quad \text{où } \varepsilon_{n_i}^j = {}^T n_i \cdot \varepsilon(X_i, \alpha_j) \cdot n_i$$

Seules des jauges simples sont utilisées pour cet essai. Etant donné le caractère 2D des surfaces instrumentées, l'utilisation de rosettes eût été plus appropriée mais la limitation du nombre de voies de mesure ne l'a pas permis. La relation entre les paramètres de chargement et les mesures de déformation aux points $(X_k)_{1 \leq k \leq 8}$ est alors donnée par :

$$\mathbb{G}F = \varepsilon_m \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{n_1}^1 & \varepsilon_{n_1}^2 & \cdots & \varepsilon_{n_1}^6 \\ \varepsilon_{n_2}^1 & \varepsilon_{n_2}^2 & \cdots & \varepsilon_{n_2}^6 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varepsilon_{n_8}^1 & \varepsilon_{n_8}^2 & \cdots & \varepsilon_{n_8}^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{n_1}^m \\ \varepsilon_{n_2}^m \\ \vdots \\ \varepsilon_{n_8}^m \end{bmatrix}$$

Ce système est résolu en déterminant la solution F_{id} par moindres carrés :

$$F_{id} = ({}^T\mathbb{G} \cdot \mathbb{G})^{-1} \cdot {}^T\mathbb{G} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (3.15)$$

Les positions des capteurs ainsi que les directions de mesure qui leur sont associées sont déterminées pour minimiser $Cond[\mathbb{G}]$. Cette optimisation est faite de manière exploratoire à partir des contraintes suivantes :

- La direction de mesure privilégiée est \underline{y}_p pour toutes les sollicitations sauf pour la torsion (α_5) dont la direction est de $\pm 45^\circ$ par rapport à \underline{y}_p .
- La zone d'instrumentation est choisie entre la zone d'intérêt entourant la fissure et la section d'introduction du chargement.
- L'instrumentation est réalisée de manière symétrique.

La configuration optimale de mesure doit permettre de découpler les sollicitations élémentaires que sont la traction, la flexion et la torsion. Cependant, l'anisotropie du comportement et l'asymétrie de la géométrie ne permettent pas d'obtenir cette configuration avec les contraintes de positionnement imposées.

Avec ces contraintes de positionnement, la configuration optimale de mesure par face est donnée sur la figure 3.41. Cette configuration ne permet pas de réduire suffisamment le conditionnement de \mathbb{G} du fait des écarts entre les influences relatives de chaque sollicitation. En effet, les déformations moyennes associées à chaque sollicitation, $(\boldsymbol{\varepsilon}_k^{AVR})_{1 \leq k \leq 6}$, sont données dans le tableau 3.5. Le rapport (1) compare ces déformations calculées à partir de l'énergie de déformation globale de la structure et normées par rapport à la valeur de la déformation moyenne associée à α_3 . La sollicitation de traction est environ 100 fois moins influente que la sollicitation de flexion associée à α_3 . Ce résultat signifie que si toutes les sollicitations ont le même ordre de grandeur, l'identification du chargement de traction nécessite une précision de la mesure inférieure à 1% afin de discriminer son influence dans la réponse de la structure. Cela revient à considérer que la sollicitation de traction doit être au moins 10 fois inférieure à celle de flexion pour que la valeur identifiée soit considérée comme fiable pour un niveau d'erreur de l'ordre de 10% sur les mesures. Etant donné le dispositif d'essai, cette sollicitation est au mieux de l'ordre de grandeur de α_3 . Par conséquent son influence sur la structure est négligeable et nous pourrions ne pas la prendre en compte. De plus, le rapport (2) du tableau 3.5 compare les déformations moyennes calculées à partir des seules surfaces supérieure et inférieure de la pale. L'écart entre les sollicitations de traction (α_2) et de flexion (α_3) y est encore plus important et montre qu'il est a priori impossible d'identifier la traction à partir de mesures sur ces surfaces dans le cas d'un chargement combiné sans découplage. Enfin, le rapport (2) montre aussi que les sollicitations de flexion α_1 et α_6 ont une influence très faible sur les surfaces extérieures par rapport aux sollicitations de flexion α_3 et de torsion α_4 .

Sollicitation	$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{AVR}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_2^{AVR}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_3^{AVR}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_4^{AVR}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{AVR}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_6^{AVR}$
Ratio (1)	0,12	0,014	1,0	2,75	2,3	0,30
Ratio (2)	0,010	$4,1 \cdot 10^{-5}$	1,0	3,0	0,80	0,023

Tableau 3.5 – Valeur des rapports $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{AVR}/\boldsymbol{\varepsilon}_3^{AVR}$ de l'énergie de déformation des surfaces extérieures de la pale pour les sollicitations élémentaires $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq 6}$ par rapport à l'énergie de déformation de la sollicitation α_3 .

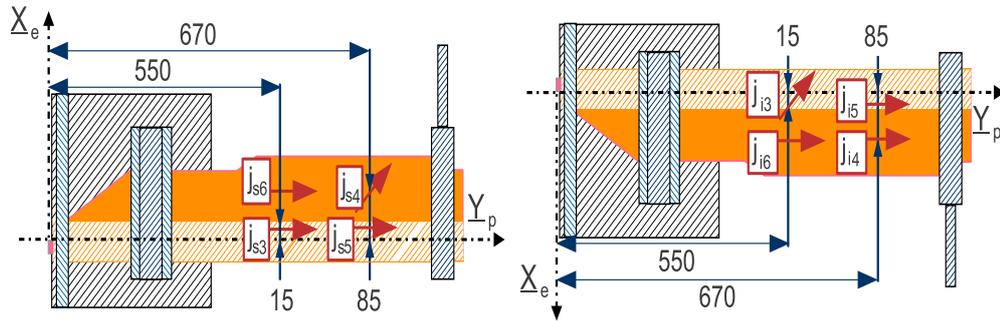


FIGURE 3.41 – Schématisation de l'instrumentation des faces supérieure et inférieure de la pale. Les flèches indiquent les directions de mesures.

Les écarts observés entre les déformations moyennes de chaque sollicitation sur la structure globale ou sur les surfaces extérieures posent un problème pour l'identification du tenseur complet de chargement. Ces écarts dégradent fortement le conditionnement de l'opérateur d'identification que l'on ramène à 900 environ. Pour évaluer la pertinence des résultats, nous utilisons une méthode de perturbation de la solution. L'écart maximum aux mesures de la solution identifiée est utilisé pour perturber les mesures. L'identification du chargement à partir de ces mesures perturbées donne une enveloppe de variation pour la solution identifiée. L'identification est cohérente si cette enveloppe de variation contient des solutions possibles du problème. Cette méthode est illustrée sur le schéma de la figure 3.42. La distribution de l'erreur est supposée uniforme car cette erreur correspond à des incertitudes sur le modèle de la structure, le positionnement des jauges et les sollicitations.

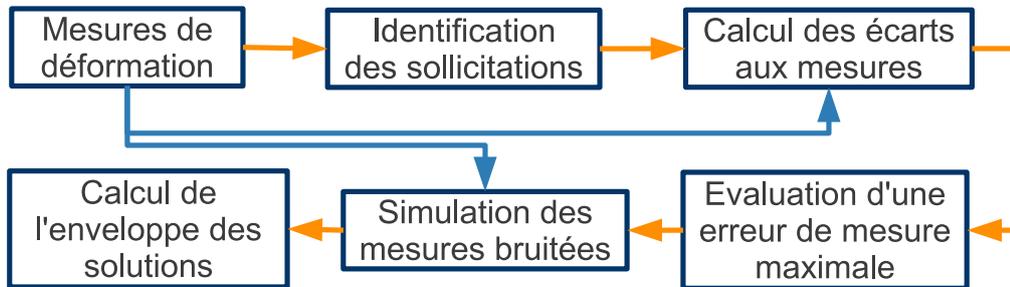


FIGURE 3.42 – Schématisation de la méthode de détermination d'un niveau d'erreur pour les sollicitations identifiées à partir du calcul d'une enveloppe de solutions. Les flèches primaires oranges symbolisent les étapes successives de la méthode. Les flèches secondaires bleues symbolisent l'utilisation d'éléments antérieurs dans une étape.

3.5.4 Identification des conditions de chargement

a/ Analyse préliminaire des mesures et du chargement

Les valeurs de déformations mesurées pendant l'essai sur les huit jauges sont illustrées sur la figure 3.43. Ces jauges sont notées $(J_{ik})_{1 \leq k \leq 4}$ sur la face inférieure de la pale et $(J_{sk})_{1 \leq k \leq 4}$ sur la face supérieure, conformément au schéma de la figure 3.41. Ces mesures de déformation sont données en fonction de l'effort de chargement

mesuré par la cellule d'effort liant le carcan au vérin. La comparaison de ces déformations mesurées avec les déformations calculées à partir du chargement supposé valide le bon fonctionnement des jauges. Toutes les tendances (signe et croissance) sont respectées. En revanche, un facteur multiplicatif d'environ $2/3$ apparaît entre les déformations mesurées et les déformations simulées sur la plage de chargement 0N à 250N qui nous sert de référence. La validation du modèle n'ayant pu être effectuée pour l'instant, nous appliquons dans toute la suite un coefficient sur les déformations mesurées qui corrige cet effet.

Afin d'estimer le chargement de référence sur la plage 0N à 250N qui correspond a priori à la partie linéaire du comportement de la structure, une première identification est réalisée pour obtenir les angles de rotation de la section d'application du chargement. L'évolution de ces rotations est donnée sur la figure 3.44. Ces rotations paramètrent le mouvement relatif du repère local de la pale et du repère de l'essai. Les valeurs obtenues correspondent aux ordres de grandeurs des valeurs observées lors de l'essai $\approx 20^\circ$. De plus on constate que θ_z qui est associé à la flexion plane, (α_1, α_6) est quasiment nulle, ce qui correspond bien aux différences de rigidité données par le modèle. Le chargement dans le repère de la pale est ensuite obtenu par projection du chargement supposé connu dans le repère de l'essai à l'aide des angles de rotation identifiés. Les efforts nécessaires au déplacement du vérin sont aussi pris en compte par l'ajout de composantes dans les directions \underline{x}_e et \underline{y}_e . L'estimation des paramètres de chargement des résultantes et des moments est illustrée sur la figure 3.45. Les sollicitations prépondérantes sont la flexion hors-plan et la torsion. Le rapport α_3/F_z décroît progressivement tandis que les rapports α_1/F_z et α_2/F_z augmentent progressivement avec l'augmentation des angles de rotations. F_z est l'effort appliqué par le vérin. Cette estimation du chargement donne aussi la valeur des déformations moyennes des surfaces à partir des énergies de déformation comme illustré sur la figure 3.44. L'évolution des déformations moyennes montre que dans cette configuration de mesure, l'ensemble des sollicitations autres que la flexion associée à α_3 et la torsion associée à α_6 sont négligeables sur la réponse de la structure. Leurs influences sont au maximum de l'ordre de quelques pourcents.

b/ Identification de l'ensemble des sollicitations

Nous identifions dans premier temps l'ensemble des six sollicitations élémentaires. La figure 3.46 donne les efforts et les moments obtenus. La figure 3.47 donne les écarts relatifs entre les déformations mesurées et les déformations calculées aux points de mesure à partir du chargement identifié.

Les écarts aux mesures sont au maximum de 2% pour les jauges de la face inférieure et d'au maximum 1,5% pour les jauges de la face supérieure. La résultante globale identifiée est environ 4,5 fois plus importante que la résultante globale estimée en tenant compte de l'effort mesuré et des efforts de translation du vérin. Par exemple, la sollicitation de traction identifiée va de 400N à 700N alors que l'effort vérin va de 50N à 200N. Enfin, la perturbation des mesures à partir d'une erreur estimée de 5% permet d'obtenir les plages de variation indiquées dans le tableau 3.6 pour les paramètres de chargement identifiés. Pour une enveloppe de variation contenant 85% des valeurs calculées à partir d'une erreur sur les mesures de $\pm 5\%$, seule la sollicitation de torsion a une erreur inférieure à 10%. La flexion α_3

présente une erreur d'environ 20%. Ces enveloppes de variations des paramètres de chargement permettent cependant d'incorporer le chargement supposé de l'essai.

Les erreurs obtenues pour chaque sollicitation valident la prépondérance de la torsion, α_4 , et de la flexion, α_3 . Les influences des autres sollicitations sur la structure sont faibles, ce qui crée une grande incertitude sur les valeurs identifiées. Ces premiers résultats confirment que l'influence de α_2 est négligeable sur la réponse de la structure.

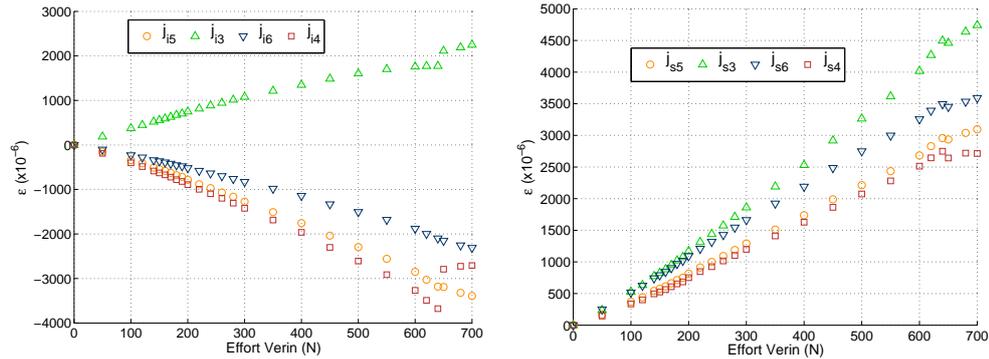


FIGURE 3.43 – *Mesure des valeurs de déformation pour les jauges des faces inférieure et supérieure de la pale au cours de l'essai. Ces mesures sont exprimées en fonction de l'effort de chargement mesuré par la cellule d'effort.*

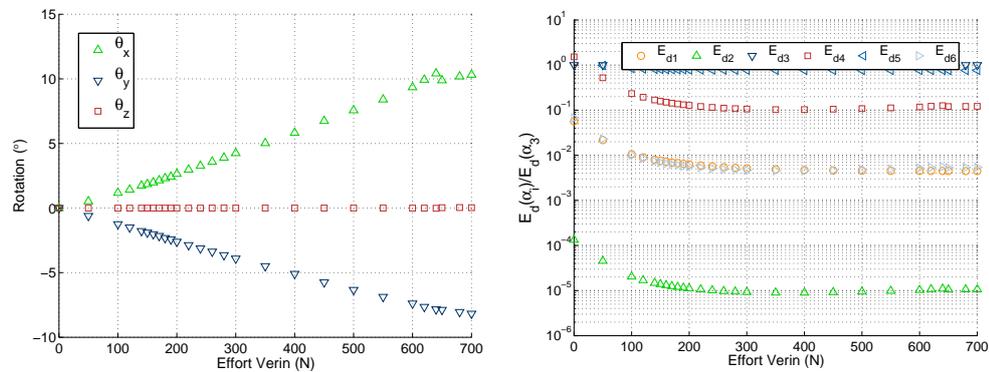


FIGURE 3.44 – *Identification des rotations θ_x , θ_y et θ_z de la section de chargement de la pale et évolution des rapports des énergies de déformations associées aux sollicitations supposées de l'essai à partir de ces rotations de la section.*

Coefficient de chargement	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
Erreur (%)	± 64	± 300	± 23	± 85	$\pm 5,3$	± 80

Tableau 3.6 – *Erreur sur les coefficients identifiés pour une enveloppe de variation à 85% des valeurs identifiées avec une perturbation des mesures de $\pm 5\%$.*

3.5.5 Identification réduite

Le problème rencontré dans cette identification est dû aux variations de rigidité de la pale vis à vis des différentes sollicitations et à leur couplage. Une première méthode de résolution consiste à négliger les paramètres dont l'influence est a priori

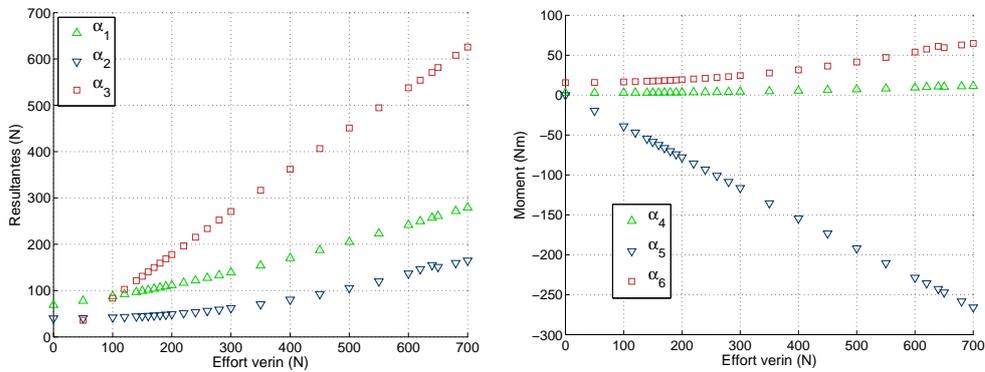


FIGURE 3.45 – Valeur des paramètres de chargement calculés à partir des connaissances a priori du chargement dans le repère de l'essai et à partir de la rotation du repère de la pale par rapport au repère de l'essai. Le chargement a priori exprimé dans le repère de l'essai prend en compte les efforts de translation du vérin et l'effort mesuré par le capteur.

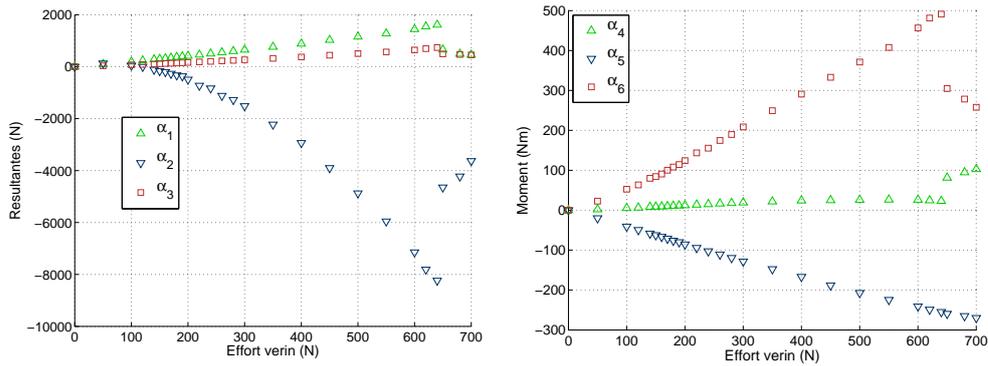


FIGURE 3.46 – Valeurs identifiées des coefficients $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 6}$ associés à chaque sollicitation.

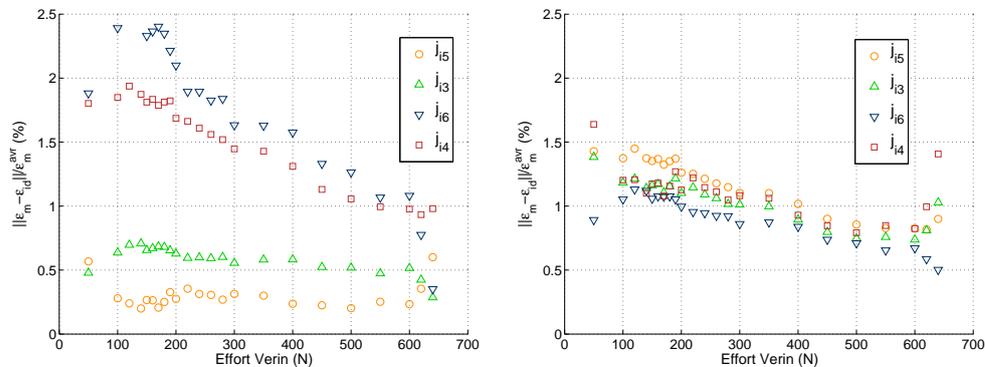


FIGURE 3.47 – Ecart aux mesures pour les jauges des faces inférieure et supérieure associés à l'identification de tous les paramètres de chargement.

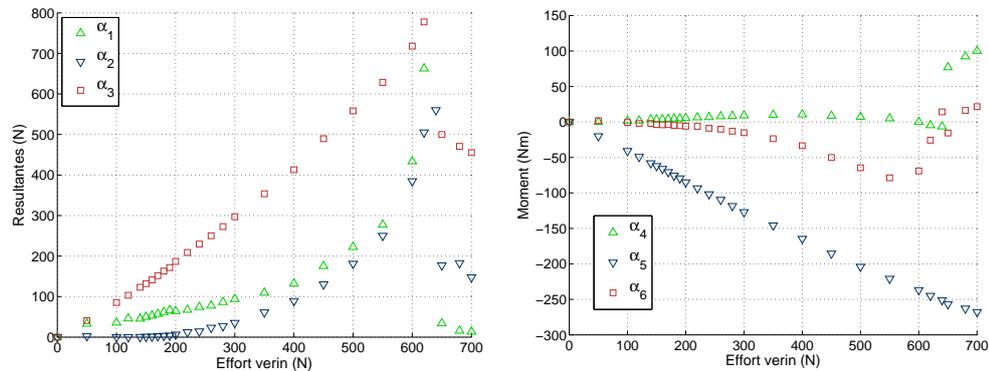


FIGURE 3.48 – Valeurs identifiées des coefficients $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 6}$ associés à chaque sollicitation. L'identification est réduite en négligeant les valeurs propres les plus faibles de l'opérateur \mathbb{G} normé à partir des paramètres de chargement identifiés directement dans un premier temps.

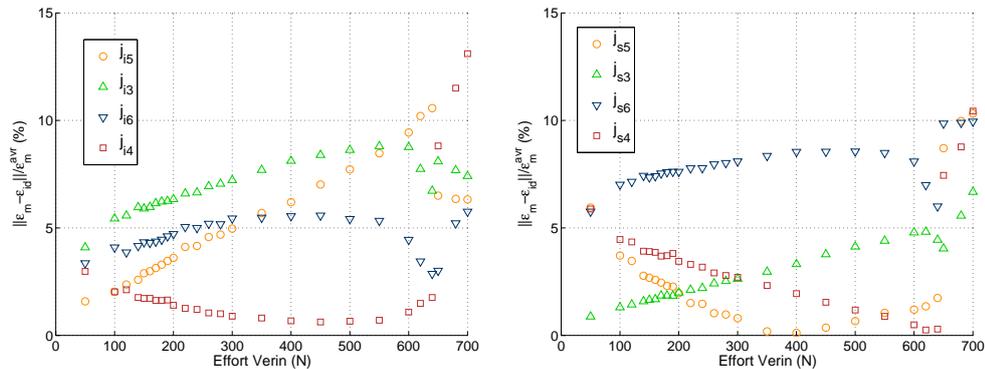


FIGURE 3.49 – Ecarts relatifs entre les déformations mesurées et les déformations calculées aux points de mesures à partir du chargement identifié. L'identification est réduite en négligeant les valeurs propres les plus faibles de l'opérateur \mathbb{G} normé à partir des paramètres de chargement identifiés directement dans un premier temps.

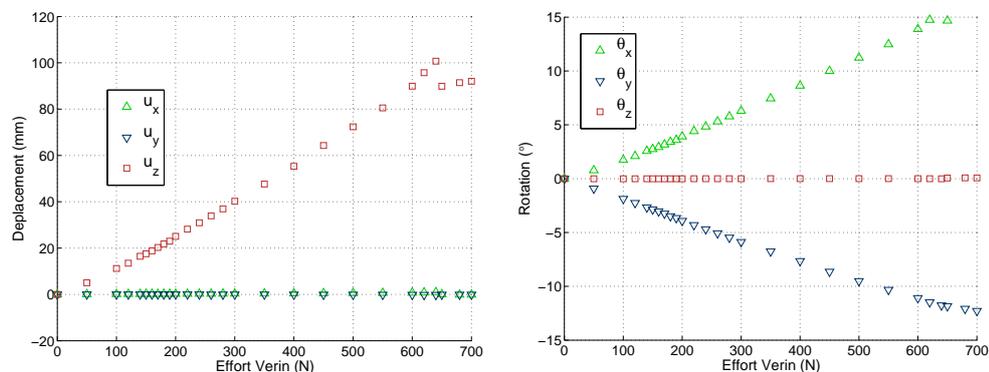


FIGURE 3.50 – Valeurs des déplacements du point O centre de la section d'application du chargement. L'identification est réduite en négligeant les valeurs propres les plus faibles de l'opérateur \mathbb{G} normé à partir des paramètres de chargement identifiés directement dans un premier temps.

faible par rapport aux autres sur les mesures. Cette méthode est équivalente à appliquer un filtre. Dans notre cas nous pouvons négliger α_2 . Cependant, même en ayant négligé α_2 la solution identifiée reste fortement incertaine et très éloignée de la solution supposée. La résultante globale identifiée reste 2,5 fois supérieure à celle estimée.

Une solution consiste alors à supprimer une sollicitation supplémentaire, mais ce choix n'est plus aussi évident que dans le cas de la traction. Les sollicitations α_1 , α_4 et α_6 permettent toutes de réduire notablement le conditionnement et elles ont une influence comparable sur la réponse de la structure. Pour limiter la perte d'information liée à ce filtrage, nous utilisons la décomposition en valeurs singulières de \mathbb{G} . Ces valeurs singulières sont associées à des directions orthogonales d'identification et à des longueurs de variation. Ainsi, les valeurs singulières les plus faibles sont les plus sensibles aux erreurs de mesures. Négliger les valeurs singulières les plus faibles permet de filtrer efficacement les mesures. Cependant, la décomposition en valeurs singulières adéquate au filtrage de l'identification dépend du poids relatif des différents paramètres à identifier. Afin de ne pas trop pénaliser les composantes dont l'influence sur la réponse de la structure est faible, nous avons choisi de renormer les sollicitations à partir des paramètres directement identifiés dans la partie précédente.

Les évolutions des paramètres de chargement identifiés en résultante et en moment par cette méthode sont données sur la figure 3.48. L'écart entre la résultante globale identifiée et celle estimée est de 10% environ sur la plage 0N à 200N. Les valeurs de α_1 , α_2 , α_3 , α_4 et α_5 correspondent assez bien à l'évolution attendue. En revanche, l'évolution de α_6 ne paraît pas cohérente. En effet, la configuration expérimentale ne permet pas a priori d'obtenir un moment négatif. Cependant, sa valeur est faible en comparaison de la torsion et son influence est par conséquent assez réduite sur la réponse de la structure. Enfin, les écarts aux mesures de la figure 3.49 confirment le résultat obtenu. Les erreurs sont relativement stables jusqu'à 300N et elles augmentent ensuite. Cette évolution correspond bien à une erreur de modélisation constante dans le domaine de comportement linéaire élastique de la structure, puis à une erreur de modélisation qui croît avec la non-linéarité de la réponse de la structure liée aux grands déplacements.

3.5.6 Conclusion

Les paramètres de chargement identifiés doivent permettre de recalculer le chargement utilisé dans SAMCEF pour valider la rupture de la pale au niveau de la fissure. Les calculs effectués pour l'instant dans SAMCEF sans ce recalage du chargement mais en prenant en compte l'aspect non linéaire géométrique du comportement de la structure n'ont pas permis de retrouver les champs de déformation mesurés par stéréo-corrélation d'images autour de l'entaille. L'étape suivante de cet essai consiste à utiliser les paramètres de chargement identifiés directement ainsi que ceux identifiés avec la méthode de décomposition en valeurs singulières pour comparer les champs mécaniques mesurés et calculés dans la zone d'intérêt.

Enfin, ces travaux ont mis en avant un écart important entre le modèle SAMCEF et les mesures effectuées lors de l'essai [50]. Certaines corrections du modèle sont encore nécessaires pour mieux décrire le comportement réel de la pale. Cependant,

le recalage du chargement devrait permettre d'accélérer cette phase de correction et d'obtenir une meilleur correspondance entre les champs mesurés et calculés dans la zone d'intérêt.

3.6 Structures poutres complexes

3.6.1 Construction d'une base de chargement

La définition et l'illustration des poutres complexes ont été données dans la section 3.2. En considérant qu'une structure Ω est constituée d'un ensemble de q poutres élémentaires, $\Omega = \bigcup \omega_i$, les équations de l'équilibre global de la structure complexe se mettent alors sous la forme $\forall i \in \mathbb{N}^q$:

$$\frac{d\underline{M}_i}{dx} + \underline{x} \wedge \underline{T}_i + \underline{c}_i(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\underline{T}_i}{dx} + \underline{r}_i(x) = 0 \quad \text{le long de } L \quad (3.16)$$

$$\underline{M}_i(0) = -\underline{C}_i^0 \quad \text{et} \quad \underline{T}_i(0) = -\underline{R}_i^0 \quad \text{en } S_{0i} \quad (3.17)$$

$$\underline{M}_i(L) = \underline{C}_i^L \quad \text{et} \quad \underline{T}_i(L) = \underline{R}_i^L \quad \text{en } S_{Li} \quad (3.18)$$

$$\underline{R}_i^0 + \underline{R}_i^L + \int_L \underline{r}_i(x) dx = 0 \quad (3.19)$$

$$\underline{C}_i^0 + \underline{C}_i^L + L \underline{x} \wedge \underline{R}_i^L + \int_L [\underline{c}_i(x) + \underline{x} \wedge \underline{r}_i(x)] dx = 0 \quad (3.20)$$

$$\mathcal{A}_C \left(\underline{C}_i^k, \sum_j \underline{C}_j \right) = \mathcal{B}_C \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_R \left(\underline{R}_i^k, \sum_j \underline{R}_j \right) = \mathcal{B}_R \quad \text{en } S_{ki} \quad (3.21)$$

Les équations (3.16) à (3.20) traduisent l'équilibre de la structure élémentaire ω_i . L'équation (3.21) traduit l'égalité des efforts intérieurs et extérieurs à Ω aux surfaces extrémités de liaison de la structure élémentaire ω_i , S_{0i} et S_{Li} . Les termes \mathcal{B}_R et \mathcal{B}_C sont associés au chargement extérieur de la structure. La figure 3.51 montre la structure Ω composée des huit structures élémentaires $(\omega_i)_{1 \leq i \leq 8}$ et soumise au chargement extérieur $(F_i, C_i)_{1 \leq i \leq 3}$ aux points M_1 , M_2 et M_6 . Cette décomposition de la structure complexe en sous-structure élémentaire est utilisée pour optimiser l'instrumentation. La base de chargement est directement obtenue à partir du chargement extérieur de la structure globale sauf dans certains cas comme l'identification de la position d'une charge localisée à l'intérieur d'une structure.

La base de chargement doit permettre d'identifier les paramètres de chargement et de reconstruire les champs de déformation de la structure. La définition de cette base de chargement globale est identique à la méthode utilisée dans le cas des structures élémentaire. Les torseurs des actions extérieures appliquées à la structure Ω sont identifiés dans un premier temps. Un MCR est ensuite associé à une partie du chargement extérieur possible et les autres inconnues de chargement sont utilisées pour définir la base de chargement de la structure complexe. Par exemple, pour la structure Ω de la figure 3.51, (F_2, C_2) sont associés au MCR et la base de chargement est construite à partir de (F_1, C_1) et (F_3, C_3) comme cela est fait pour les structures élémentaires dans l'équation 3.7. Cette base est ensuite orthonormée au sens défini par l'équation 3.8.

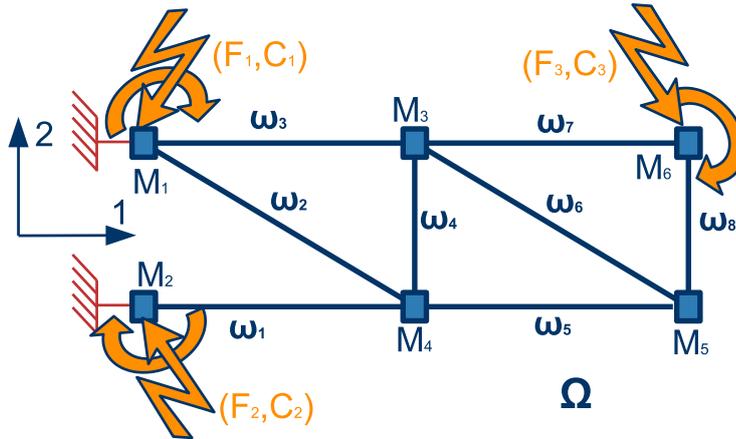


FIGURE 3.51 – Schématisation d'une structure complexe Ω composée des structures élémentaires $(\omega_i)_{1 \leq i \leq 8}$.

3.6.2 Simulation d'un cas de structure complexe

La problématique de l'identification du chargement et de la reconstruction des champs pour les structures complexes est étudiée à partir de l'exemple de la figure 3.52, avec et sans charge répartie p_3 et p_7 sur les structures élémentaires ω_3 et ω_7 . La construction de la base de chargement est faite en utilisant (F_2, C_2) comme MCR. Chaque couple $(F_k, C_k)_{1,3}$ correspond à trois inconnues de chargement, $(F_{kx}, F_{ky}, C_{kz})_{1,3}$. La base de chargement contient au maximum huit éléments. Enfin, le choix de l'ordre des composantes dans l'algorithme d'orthonormalisation de la base n'a pas d'influence sur les résultats. Nous appelons dans la suite (\mathcal{T}_k^\perp) les vecteurs de la base orthonormée de chargement.

Dans ces conditions, le problème d'identification est similaire à celui d'une structure élémentaire, excepté pour le positionnement des capteurs et les grandeurs mesurées. Ces grandeurs mesurables sont les courbures et les déformations normales de chaque sous-structure. Contrairement au cas élémentaire, l'identification des paramètres de chargement nécessite la prise en compte simultanée de ces deux grandeurs. A titre d'exemple, la figure 3.52 montre le rapport des écarts types τ_{STD} pour les champs de courbure et de déformation reconstruits à partir des paramètres de chargement identifiés avec les seules mesures de déformation. Le terme déformation désigne les déformations normales associées seulement à la traction des structures élémentaires. Dans ces conditions, $Cond[\mathbb{G}] \approx 2 \cdot 10^3$ et $\tau_{STD}(\gamma) > 10^3$. De plus, l'utilisation des seules mesures de courbure entraîne une déficience du rang de \mathbb{G} .

Dans la suite, les mesures de déformation et de courbure sont utilisées simultanément pour résoudre le problème d'identification du chargement et de reconstruction de champ. Nous nous intéressons alors au positionnement optimal des capteurs permettant de minimiser $Cond[\mathbb{G}]$. En se basant sur les résultats obtenus pour les structures élémentaires, les positions quasi-optimales sur chaque sous-structure maximisent la distance entre les mesures avec une distribution uniforme. Cette analogie permet de réduire les possibilités de positionnement qui ne dépend alors plus que du choix du nombre de capteurs par sous-structures, ainsi que du choix des sous-structures à instrumenter. L'objectif est d'obtenir le plus faible nombre de sous-structures à instrumenter pour un nombre minimum de capteurs.

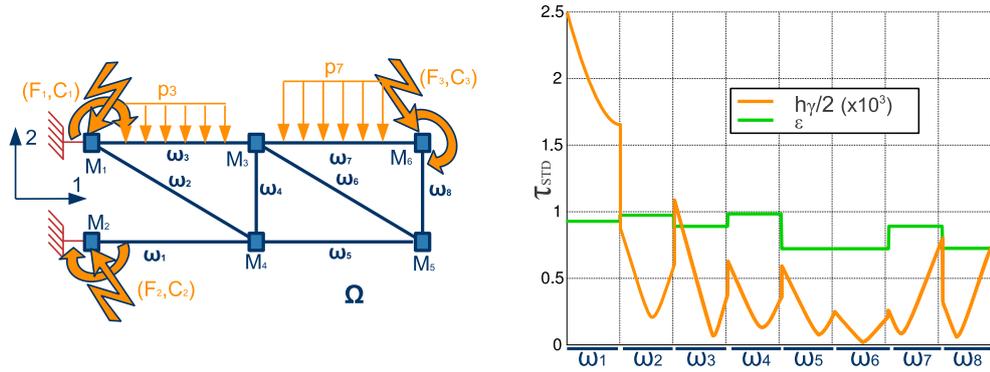


FIGURE 3.52 – Schématisation d'une structure complexe Ω composée des structures élémentaires $(\omega_i)_{1 \leq i \leq 8}$ et évolution du rapport des écarts types τ_{STD} des champs reconstruits (courbure et déformation) dans le cas d'une identification à partir des seules mesures de déformation.

Le choix du nombre de capteurs par sous-structure dépend du type de sollicitation. Ainsi, pour les sous-structures n'étant soumises qu'à des charges localisées aux extrémités, seuls deux capteurs sont nécessaires pour identifier les sollicitations de flexion et 1 capteur pour la traction et la torsion. Dans l'exemple traité, les sous-structures ω_1 , ω_2 , ω_4 , ω_5 , ω_6 , ω_8 peuvent être instrumentées avec deux capteurs seulement. Lorsqu'elles sont soumises à des charges réparties, les sous-structures ω_3 et ω_7 sont a priori instrumentées avec trois capteurs. Enfin, la sur-instrumentation des sous-structures a pour effet d'améliorer la qualité de la solution sur la sous-structure sur-instrumentée seulement. L'augmentation du nombre de capteurs doit donc privilégier le nombre de sous-structures instrumentées.

Pour valider ces considérations a priori issues des résultats obtenus sur les structures élémentaires, nous considérons les cas suivants :

- Cas sans charge répartie : Les charges réparties p_3 et p_7 sont nulles.
- Cas avec charge répartie : Les charges réparties p_3 et p_7 sont non nulles.

Dans ces deux cas, les configurations de mesure à un, deux et trois capteurs par sous-structure sont comparées. Pour chaque configuration, nous identifions le choix optimal des sous-structures à instrumenter ainsi que les valeurs de conditionnement associées. Enfin, nous supposons que les capteurs mesurent simultanément les courbures et les déformations. Ce choix permet de limiter le nombre de capteurs et leur encombrement sur la structure.

a/ Cas sans charge répartie

Les charges réparties p_3 et p_7 sont supposées nulles. Six paramètres associés aux charges localisées $(F_{kx}, F_{ky}, C_{kz})_{1,3}$ sont considérés. Le nombre optimal de capteurs par sous-structure et le nombre de sous-structures à instrumenter sont cherchés de manière exploratoire en se basant sur les hypothèses précédemment citées. Nous nous limitons aux configurations à un, deux et trois capteurs par sous-structure. Le tableau 3.7 donne les valeurs de conditionnement, les sous-structures instrumentées et les rapport d'écarts types τ_{STD} des paramètres de chargement identifiés et des champs reconstruits.

D'après ce tableau et les évolutions de τ_{STD} , la configuration optimale de mesure est composée de deux capteurs par sous-structure répartis sur les trois sous-

structures (1), (2) et (7). Comme supposée, la configuration à trois capteurs répartis sur deux sous-structures dégrade le conditionnement et la sensibilité au bruit. Cette sensibilité au bruit est donnée par τ_{STD} . Si $\tau_{STD} \leq 1$ alors les erreurs de mesure sont amorties. Si $\tau_{STD} \geq 1$ alors les erreurs de mesures sont amplifiées d'autant. Enfin, le nombre de sous-structures instrumentées peut être réduit du fait de la mesure simultanée des courbures et des déformations. Par exemple, dans la configuration à deux capteurs par sous-structure, le nombre de mesures disponibles est de $2 \times 2 \times 3 = 12$. Le nombre de paramètres de chargement étant de 6, la quantité de mesures peut être réduite. Dans ce cas, le conditionnement se dégrade fortement. En revanche, si le nombre de mesures de déformation est réduit à la place du nombre de sous-structures, le conditionnement reste le même. Ainsi, les mesures de flexion ont un rôle prépondérant dans l'identification. Ces mesures définissent donc les règles liant les nombres de mesures et de sous-structures instrumentées au du nombre de paramètres à identifier.

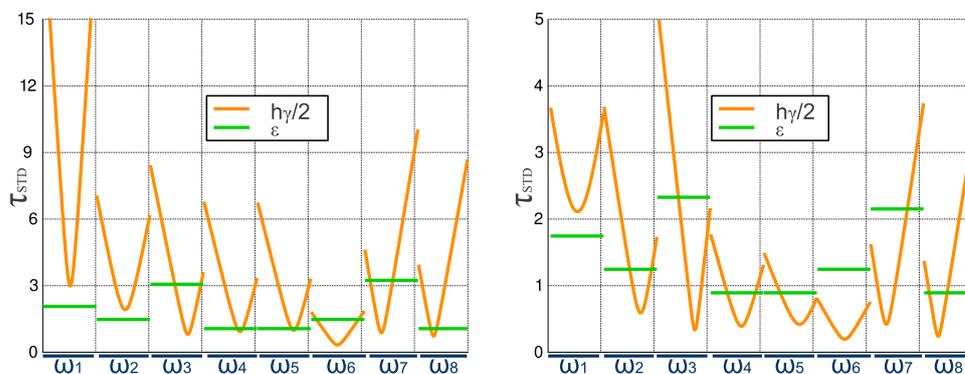


FIGURE 3.53 – Evolution des rapports d'écarts types τ_{STD} des champs reconstruits à partir des paramètres de chargement identifiés pour les sous-structures ω_1 à ω_8 avec 1 puis 2 capteurs par sous-structures sans charge répartie.

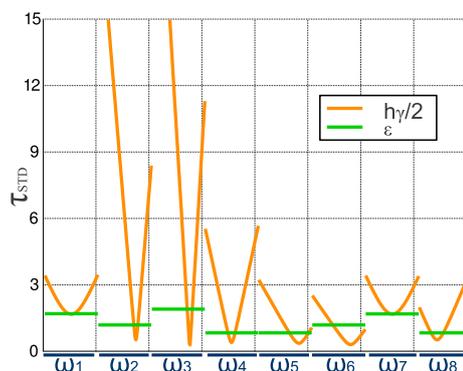
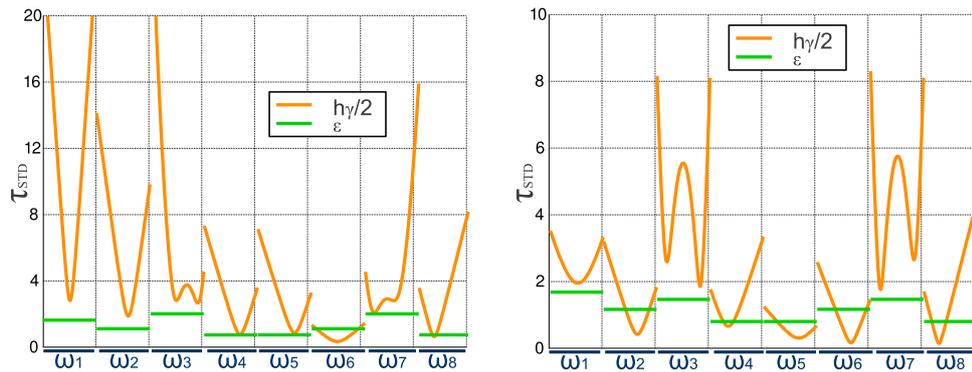
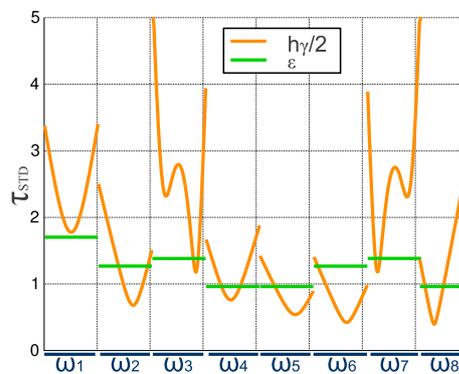


FIGURE 3.54 – Evolution des rapports d'écarts types τ_{STD} pour les champs reconstruits à partir des paramètres de chargement identifiés pour le cas à 3 capteurs par sous-structure sans charge répartie.

Nombre de capteurs	1	2	3
Sous-structures	1 2 3 4 5 8	1 2 7	1 7
$Cond [G]$	4,23	3,12	11,3
$\tau_{STD}^{mean}(\gamma)$	4,15	1,46	4,06
$\tau_{STD}^{mean}(\epsilon)$	1,75	1,39	1,30
$\tau_{STD}^{mean}(\mathcal{T})$	3,95	4,40	8,31

Tableau 3.7 – Valeurs des paramètres d'instrumentation en fonction du nombre de capteurs.

FIGURE 3.55 – Evolution des rapports d'écarts types τ_{STD} des champs reconstruits à partir des paramètres de chargement identifiés pour les sous-structures ω_1 à ω_8 avec 1 puis 2 capteurs par sous-structures avec charge répartie.FIGURE 3.56 – Evolution du rapport d'écarts types τ_{STD} des champs reconstruits à partir des paramètres de chargement identifiés pour les sous-structures ω_1 à ω_8 avec 3 capteurs par sous-structures avec charge répartie.

Nombre de capteurs	1	2	3
Sous-structures	(-)	1 3 4 7	1 3 7
$Cond [G]$	7,46	3,05	2,95
$\tau_{STD}^{mean}(\gamma)$	5,43	2,32	1,57
$\tau_{STD}^{mean}(\epsilon)$	1,40	1,26	1,11
$\tau_{STD}^{mean}(\mathcal{T})$	8,40	5,5	6

Tableau 3.8 – Valeurs des paramètres d'instrumentation en fonction du nombre de capteurs.

b/ Cas avec charge répartie

Les charges réparties p_3 et p_7 sont supposées non-nulles. Le nombre de paramètres de chargement est égal à huit. En s'appuyant sur les résultats précédents, nous ne considérons que les configurations de mesure à un, deux et trois capteurs par sous-structure qui sont basées sur l'identification des charges de flexion et la simultanéité des mesures de courbure et de déformation. Ces configurations sont respectivement associées à huit, quatre et trois sous-structures.

Les figures 3.55 et 3.56 montrent l'évolution des rapports d'écart type des champs reconstruits et le tableau 3.8 récapitule les valeurs des paramètres d'optimisation. $Cond[G]$ est minimisé pour la configuration à trois capteurs sur trois sous-structures comme attendu. Ces résultats confirment les résultats précédents et permettent de définir les règles de positionnement des capteurs dans le cas des structures complexes. Ainsi, le nombre de capteurs nécessaires à l'instrumentation dépend des types de charges appliquées aux structures élémentaires. Ce nombre est déterminé en considérant les structures dont le nombre de sollicitations est le plus important. Ensuite, le nombre de sous-structures à instrumenter dépend du nombre de paramètres de chargement à identifier. De plus, il n'est pas nécessaire de sur-instrumenter les sous-structures, comme cela est observé dans la configuration à trois capteurs par sous-structure. L'utilisation de deux capteurs sur la structure (1) ne modifie pas les résultats obtenus. Enfin, les sous-structures à instrumenter sont préférentiellement celles soumises au chargement extérieur qui sont dans ce cas les sous-structures (1), (2), (3), (7) et (8).

3.6.3 Identification d'une charge localisée intérieure à une structure

a/ Problématique

L'identification d'une charge concentrée à l'intérieur d'une poutre élémentaire est un exemple de cas isostatique où la décomposition de la structure complexe présente un intérêt pour le recalage des conditions aux limites. Cette identification est basée sur la discontinuité du chargement identifié sur chaque sous-structure élémentaire. Le cas de chargement (4) contenant une charge localisée à l'intérieur d'une poutre élémentaire et simulé dans la section précédente met en avant le caractère régularisant de la reconstruction de champ à partir du chargement. Ainsi, l'erreur sur le champ reconstruit à l'intérieur de la zone d'observation est inférieure à l'erreur d'approximation du chargement. Certaines applications peuvent cependant nécessiter de réduire l'erreur du chargement identifié pour recalibrer les conditions aux limites. La structure est alors considérée comme complexe et composée de deux sous-structures. La charge localisée R est supposée introduite à la jonction des deux sous-structures, P_1 et P_2 à l'abscisse x_R comme illustré sur le schéma 3.57. Ainsi, pour ce problème, l'équation de liaison (3.21) se met sous la forme :

$$R_1^L + R_2^L = F \quad \text{et} \quad C_1^L + C_2^L = 0 \quad (3.22)$$

Si la position de la charge est supposée connue, cette équation permet de réduire la base de chargement. Cependant, la position de la charge est en pratique assez mal connue, d'autant plus que cette modélisation correspond à une simplification de la charge réelle répartie sur une petite zone. Ainsi, cette équation est utilisée pour

identifier le chargement équivalent qui permet de respecter au mieux le modèle de comportement de la structure à partir des mesures. Ce chargement est obtenu à partir de l'identification séparée du chargement de chaque sous-structure.

L'identification des bases de chargement associées à chaque sous-structure permet de déterminer F à partir de l'équation de liaison, mais aussi de vérifier que l'équation de moment est bien vérifiée. Ainsi, si la liaison des deux sous-structures n'est pas faite à l'endroit d'application de la charge, l'équation de moment ne sera pas nulle. Un terme de discontinuité apparaît. En tenant compte des incertitudes de mesure, la position qui minimise la valeur de ce terme correspond a priori à la position de la liaison entre les deux sous-structures. Nous illustrons cette approche à partir du cas de chargement (4) simulé dans la section précédente. Si la méthode utilisée peut s'étendre a priori à l'identification de plusieurs charges localisées, des travaux doivent être menés pour en étudier la faisabilité. De même, nous ne traitons pas un problème d'optimisation complet pour la résolution. Nous supposons une zone de recherche et la solution est obtenue à partir de l'évaluation directe du terme de discontinuité.

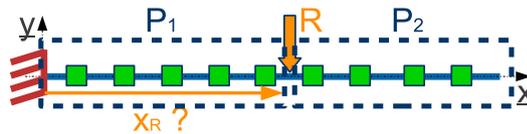


FIGURE 3.57 – Schématisation de la poutre élémentaire avec une charge localisée de position inconnue.

b/ Formulation du problème

Soit la poutre Ω soumise à une charge localisée à l'abscisse $x_R/L = 0,57$ et à des charges réparties sur chaque sous-structure définie de part et d'autre de cette charge. Ce cas de chargement correspond au cas (4) de la figure (3.8). La structure globale est instrumentée avec neuf capteurs mesurant localement les courbures de la poutre. Ces capteurs sont uniformément répartis le long de la poutre. La position de la charge localisée est supposée comprise entre les abscisses $x_R/L = 0,4$ et $x_R/L = 0,7$.

Le terme de discontinuité est évalué à partir du saut de courbure à la liaison des deux sous-structures. Une position de la liaison est supposée et les paramètres de chargement de chaque sous-structure sont identifiés indépendamment à partir des capteurs se trouvant sur chaque sous-structure. Les champs de courbures sont ensuite reconstruits et la discontinuité entre ces champs au point de liaison est calculée. γ_1 est la courbure de la sous-structure de gauche, γ_2 est la courbure de la sous-structure de droite, et γ est la courbure de la structure complexe. La discontinuité $\Delta\Gamma$ est obtenue à partir de l'énergie de déformation associée au saut de courbure sous la forme :

$$\Delta\Gamma = \frac{EI \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)^2}{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} EI \cdot \gamma^2 d\Omega}$$

$\Delta\Gamma$ est normé par rapport à l'énergie de déformation moyenne de la structure complète. Ainsi, à partir des données simulées, nous allons estimer cette quantité, dans un premier temps sans erreur sur les mesures et dans un second temps avec erreurs.

Nous allons ainsi définir dans quelles conditions cette méthode peut être mise en œuvre.

c/ Résolution à partir de mesures exactes

Dans un premier temps, $\Delta\Gamma$ est calculé à partir des mesures « exactes ». La figure (3.58) illustre la discontinuité de courbure des champs reconstruits à partir de l'identification des paramètres de chargement de chaque sous-structure. Le saut de courbure est visible dans les cas où la position supposée de la liaison ne correspond pas à la position imposée dans le calcul des mesures. L'évolution de $\Delta\Gamma$ en fonction de la position supposée de la liaison entre les sous-structures est bien minimum pour la position imposée de la liaison dans le calcul des mesures.

Cette évolution montre aussi que $\Delta\Gamma$ est une fonction non-convexe du fait de la présence de minima locaux situés aux points de mesures. Ceci est la conséquence du procédé d'identification des paramètres de chargement qui minimise l'écart entre la courbure reconstruite et la courbure mesurée aux points de mesure. Ainsi, lorsqu'un point de mesure définit la liaison entre les sous-structures, les courbures reconstruites minimisent l'écart aux mesures. Par conséquent, la discontinuité de courbure à la liaison est faible par construction. Cette discontinuité sera d'autant plus faible que le nombre de mesures tend vers le nombre de paramètres identifiés. Ainsi, si les sous-structures possèdent autant de mesures que de paramètres de chargement à identifier, la discontinuité est nulle aux points de mesures.

L'utilisation de cette méthode nécessite par conséquent d'avoir plus de mesures que de paramètres à identifier sur au moins l'une des sous-structures considérées. Enfin, si la position de la liaison ne peut pas être associée à une position de capteur, une autre méthode consiste à restreindre la solution sur des abscisses ne comportant pas de points de mesure.

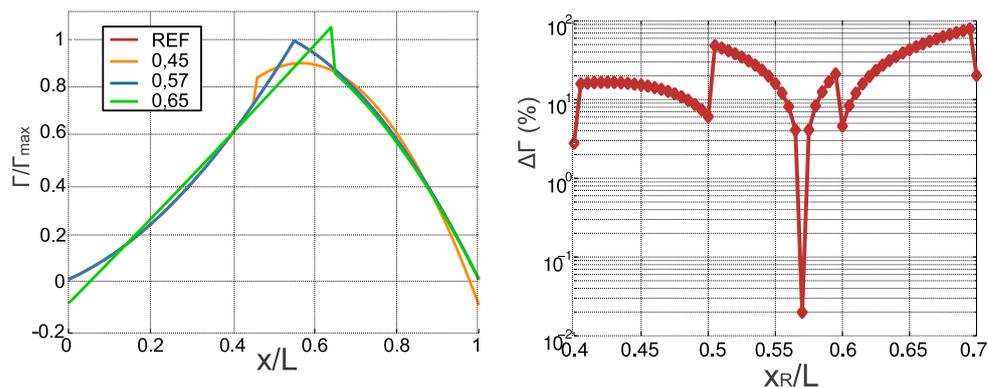


FIGURE 3.58 – Comparaison de la courbure de référence $x_R/L = 0,57$ et des courbures reconstruites à partir de l'identification des paramètres de chargement de chaque sous-structure pour une liaison supposée aux abscisses $x_R/L = 0,45$, $x_R/L = 0,57$ et $x_R/L = 0,65$ et évolution de $\Delta\Gamma$ en fonction de l'abscisse x_R/L de la liaison.

d/ Résolution à partir de mesures bruitées

La résolution à partir de mesures bruitées permet d'évaluer la stabilité de cette identification. L'évolution de la probabilité d'obtenir le minimum de $\Delta\Gamma$ en une

position donnée est illustrée sur la figure (3.59). Cette évolution est calculée sur 10000 échantillons générés à partir d'une loi uniforme, en fonction des positions supposées de la liaison et d'un niveau de bruit α défini comme un pourcentage de la valeur moyenne des déformations considérées.

Ce résultat montre que lorsque $\alpha \rightarrow 0$ la probabilité de trouver $x_R/L = 0,57$ est de 1, soit $p(x_R/L = 0,57) = 1$. Cette probabilité diminue lorsque α augmente et les positions associées aux mesures $x_R/L = 0,4$, $x_R/L = 0,5$, $x_R/L = 0,6$, et $x_R/L = 0,7$ deviennent prépondérantes, autour de 11%, tandis que celle de toutes les autres positions deviennent égales. Ce résultat est cohérent puisque comme nous l'avons déjà souligné, les positions des mesures correspondent à des minima locaux de la fonction de discontinuité. Ainsi, plus l'erreur sur les mesures augmente, plus ces minima vont devenir prépondérants par rapport au minimum du saut de discontinuité lié à l'équation de liaison (3.21). De plus, lorsque l'erreur augmente, les possibilités de chargements à l'origine des mesures augmentent et cela implique que toutes les positions deviennent équi-probables. Enfin, en utilisant la valeur moyenne de $\Delta\Gamma$ sur tous les échantillons de bruit, le minimum de $\Delta\Gamma$ est bien retrouvé en $x_R/L = 0,57$.

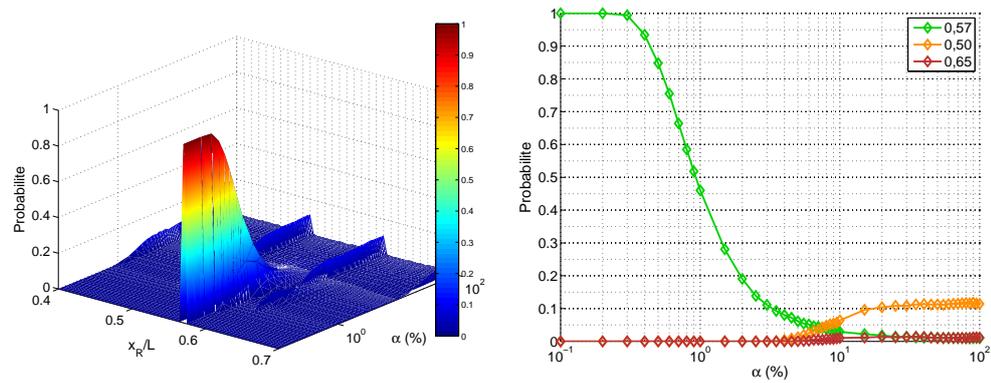


FIGURE 3.59 – Evolution de la fonction de la loi de probabilité du minimum de $\Delta\Gamma$ en fonction de α et de la position supposée de la liaison x_R/L et évolution de la loi de probabilité du minimum de $\Delta\Gamma$ en fonction de α pour les positions supposées $x_R/L = 0,57$, $x_R/L = 0,50$, et $x_R/L = 0,65$.

Pour résoudre la problématique de la localisation des minima aux points de mesures, nous enlevons ces points et leur voisinage des positions possibles de la liaison. Le voisinage du point est strictement inférieur à $\pm 20mm$. Ces positions restreintes permettent de calculer loi de probabilité du minimum de $\Delta\Gamma$ en fonction de α et x_R/L . Cette évolution est représentée sur la figure (3.60). La décroissance de cette loi de probabilité en fonction de α pour $x_R/L = 0,57$ est plus faible que précédemment, $p(x_R/L = 0,57) = 45\%$ contre $p(x_R/L = 0,57) = 30\%$ pour $\alpha = 1,5\%$, mais cette décroissance est toujours présente et conduit à l'équi-probabilité de toutes les positions lorsque α augmente.

e/ Validation expérimentale

Cette méthode a été validée expérimentalement à l'aide du banc d'essai précédemment présenté 3.22. L'objectif est de recalculer le chargement identifié pour réduire l'erreur de modélisation à celle observée lors des essais sans charge localisée à l'intérieure de la structure. Pour cela, la structure est divisée en deux sous-structures

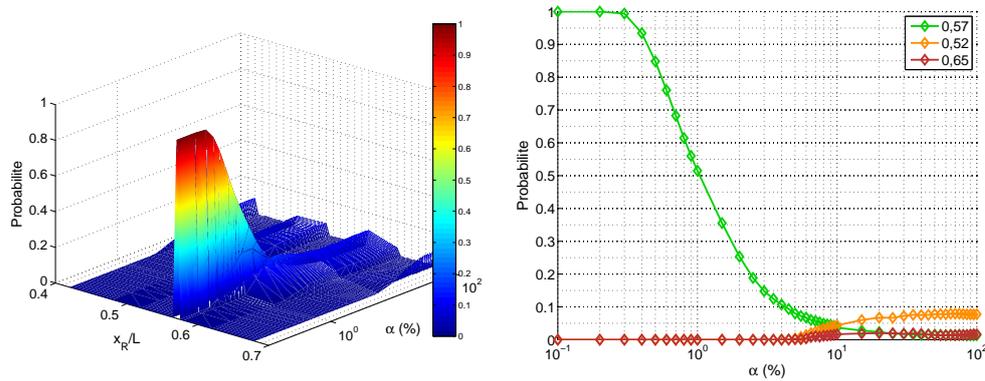


FIGURE 3.60 – Evolution de la loi de probabilité du minimum de $\Delta\Gamma$ en fonction de α et de la position supposée de la liaison x_R/L et évolution de la loi de probabilité du minimum de $\Delta\Gamma$ en fonction de α pour les positions supposées $x_R/L = 0,57$, $x_R/L = 0,52$, et $x_R/L = 0,65$. La loi de probabilité est calculée en supposant que les points de mesure et leur voisinage ($\pm 20\text{mm}$) ne sont pas des positions possibles de la liaison.

élémentaires et des bases d'approximation $P[X]$ sont supposées sur chaque sous-structure. L'ordre de ces bases est de $p = 3$, ce qui permet de conserver un nombre constant de paramètres à identifier. La position de la liaison est comprise entre les abscisses $[0,4, 0,7]$. La charge est supposée appliquée à l'abscisse $x_R/L = 0,55$.

L'évolution du saut de courbure en fonction de la position de la liaison sur l'ensemble de l'essai est donnée sur la figure (3.61). Le niveau d'erreur aléatoire est d'environ 10% sur les mesures de déformation. Comme attendu, les positions des points de mesures correspondent à des minima de saut. Sachant que la charge n'est pas introduite sur un point de mesure, les positions des points de mesure et leurs voisinages à $\pm 10\text{mm}$ sont ensuite enlevés des positions possibles pour l'identification. De plus, nous nous limitons seulement aux instants pendant lesquels la charge est effectivement appliquée.

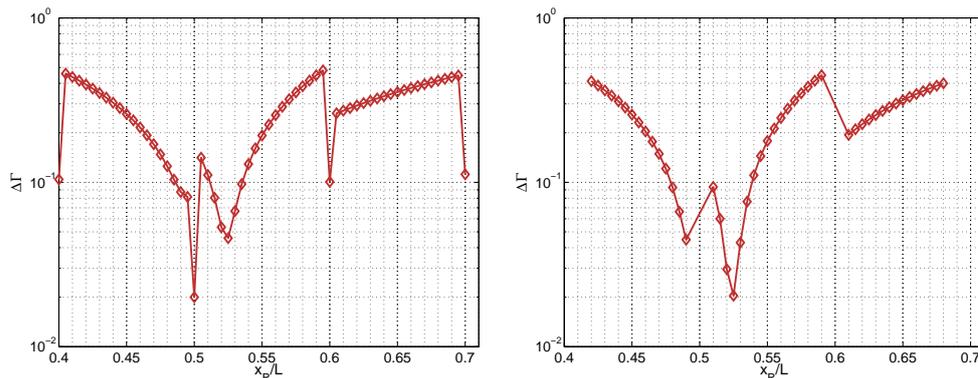


FIGURE 3.61 – Evolution du saut de courbure moyen sur l'essai complet et sur l'ensemble des valeurs possibles de x_R et évolution du saut de courbure moyen sur les seules configurations chargées de l'essai et sans les positions des points de mesure pour x_R .

Avec ces hypothèses, l'évolution du saut de courbure moyen et la loi de probabilité calculées sur ces cas de chargement permettent d'identifier la position de la charge localisée en $x_R/L = 0,525$ comme cela est illustré sur la figure (3.61). De plus, la fonction de densité moyenne obtenue permet de définir un indice de fiabilité de

la position de la charge. Cette position est $x_R/L = 0,525 \pm 0,005$ à 85%.

La figure (3.62) montre l'évolution temporelle du saut de courbure sur l'ensemble de l'essai. En dehors des instants pendant lesquels la charge est effectivement introduite, la valeur du saut est quasi-nulle au bruit de mesure près. La distribution de la loi de probabilité du minimum de $\Delta\Gamma$ est uniforme. Ce résultat explique la dégradation de cette loi lorsque tous les instants sont pris en compte dans l'identification. Ce résultat montre aussi la cohérence de la méthode proposée pour la localisation de la charge puisque toutes les positions deviennent équiprobables lorsqu'aucune charge n'est appliquée.

Enfin, les écarts aux mesures sont comparés entre la solution recalée en chargement à partir de cette identification et les solutions identifiées précédemment à partir des bases d'approximation *CPM* et *P[X]*. L'écart aux mesures de la solution recalée est constant et ne dépend pas du niveau de chargement lors de l'introduction de la charge. Cet écart aux mesures est appelé écart de référence et est normé à partir des déformations mesurées. L'erreur de modélisation liée à l'approximation du chargement est supprimée par le recalage. De plus, l'évolution de l'erreur de modélisation après recalage permet de retrouver les 10% d'erreur des essais précédents. Ce résultat permet de valider une fois de plus la possibilité d'utiliser cette méthode pour le recalage de chargement pour les structures, que ce soit en essai ou en service, avec aussi la possibilité de définir des zones de chargement.

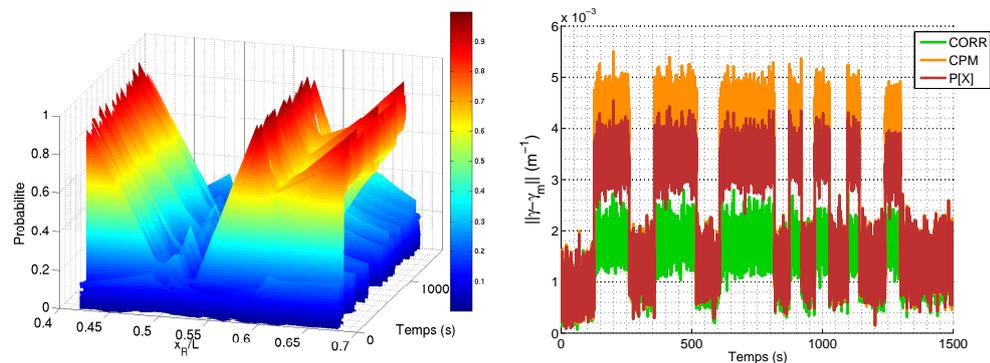


FIGURE 3.62 – Evolution du saut de courbure à chaque instant de l'essai et évolution des écarts aux mesures de la solution recalée et des solutions identifiées directement à partir des bases *P[X]* et *CPM*.

f/ Conclusion

Cette méthode de localisation d'une charge à l'intérieur d'une structure a pour objectif de permettre le recalage du chargement sur une structure. Cette méthode donne de bons résultats si le niveau d'erreur aléatoire sur les mesures n'est pas trop important. L'identification peut alors être faite à chaque instant à partir des valeurs mesurées. En revanche, si le niveau de bruit augmente par rapport aux mesures, une moyenne est nécessaire pour obtenir une solution fiable. Un indice de fiabilité est défini en fonction du niveau de bruit et de la précision souhaitée sur la zone identifiée.

3.7 Conclusion

L'application de la méthode de reconstruction de champ à partir de l'identification des paramètres de chargement confirme la régularisation du problème inverse dans le cas des structures poutres. Cette méthode permet de réduire considérablement le nombre de paramètres à identifier et d'obtenir un problème d'identification linéaire bien posé. Cette approche assimile la structure à un capteur d'effort multi-sollicitations qui permet de définir le chargement équivalent nécessaire à l'optimisation des performances et de la conception de la structure. Ce chargement équivalent est défini par rapport à la réponse de la structure.

L'analyse des poutres élémentaires permet de définir des règles de positionnement des mesures pour minimiser le conditionnement de \mathbb{G} l'opérateur d'identification. Ainsi, l'erreur sur les champs reconstruits est majorée par l'erreur maximale sur les mesures à l'intérieur de la zone d'observation. Les erreurs maximales sont obtenues aux extrémités de la poutre. Ces résultats ont été validés expérimentalement et ils mettent en avant l'intérêt du recalage du chargement des structures vis à vis du modèle de comportement utilisé. En effet, sur une certaine plage d'utilisation, des petites perturbations de ce chargement peuvent générer des variations importantes de réponse de la structure. L'identification de ces variations en service permet soit d'adapter l'utilisation de la structure en fonction des conditions de conception, soit de corriger le chargement supposé lors d'un essai sur structure. Cet aspect acquiert une importance particulière lors de l'essai effectué sur la pale arrière d'hélicoptère. Cet essai avait pour objectif de valider un modèle de comportement matériau et les mesures effectués pendant l'essai permettent d'expliquer les écarts entre la prédiction de la rupture et son observation. Le modèle utilisé n'est a priori pas suffisant pour décrire le comportement réel de cette structure. Ainsi, les travaux complémentaires sont pour l'instant orientés vers une mise à jour du modèle de comportement de la structure.

Enfin, les travaux portant sur les portiques mettent en avant les différentes applications liées à la surveillance des structures en utilisation et à la mise en œuvre de la méthode. La décomposition en structure élémentaire donne des règles systématiques de positionnement des capteurs pour stabiliser l'identification. L'instrumentation d'un plus grand nombre de sous-structures est privilégiée par rapport à la sur-instrumentation de quelques sous-structures seulement. Cette décomposition en structures élémentaires fournit aussi une méthode de recalage du chargement à partir de la localisation de chargements localisés à l'intérieur des structures complexes.

Chapitre 4

Surveillance des structures plaques

4.1 Introduction

Comme pour les poutres, la surveillance des plaques est associée à la caractérisation du chargement et des liaisons entre les structures et leurs environnements. En revanche, la caractérisation des champs mécaniques est un aspect propre aux plaques qui met en avant l'intérêt de la méthode proposée pour la reconstruction de champ à partir de l'identification des paramètres de chargement. En effet, l'identification directe des champs mécaniques à partir d'un nombre limité de mesures est un problème mal-posé au sens où une bonne description des champs mécaniques des structures nécessite un nombre important de *ddl*. Ce problème d'identification est donc nécessairement sous-contraint à moins de réduire la qualité de l'approximation des champs mécaniques et/ou d'utiliser des méthodes de régularisation coûteuse en temps de calcul. Ces aspects sont illustrés dans [9, 17] avec une approximation modale du champ de déplacement et dans [116] avec une approximation par éléments finis. Ainsi, les cas des structures contenant des inclusions ou des singularités sont particulièrement complexes à traiter.

La méthode proposée est en revanche parfaitement adaptée à la reconstruction des champs mécaniques de ce type de structures. L'identification des paramètres de chargement dissocie le conditionnement de l'identification du nombre de *ddl* nécessaires à la description des champs mécaniques des structures. Ainsi, des champs très riches peuvent être utilisés sans dégrader le conditionnement de l'identification qui est associée aux seuls paramètres de chargement. Ces paramètres sont a priori restreints pour les applications de surveillance des structures par le principe de Saint-Venant.

La mise en œuvre de la méthode nécessite dans un premier temps de définir le problème d'identification du chargement relatif aux plaques. Comme pour les poutres, ces plaques sont considérées comme des capteurs multi-sollicitations qui identifient des chargements adaptés aux réponses de ces structures. Le choix des bonnes bases de chargement permet de se ramener à un problème bien posé d'identification. Ces bases de chargement sont construites à partir des solutions analytiques de type Trefftz [62, 61] des formes faibles des équations mécaniques associées à ces

structures. Cette construction crée des bases de chargement complètes, équilibrées et associées à des longueurs caractéristiques de variation des champs mécaniques induits dans les structures. Ces bases de chargement sont ensuite orthonormées pour approximer les chargements réels en fonction de leurs influences sur les réponses des structures. En ce sens, cette approche diffère des travaux concernant l'identification des chargements « réels » sur des plaques. Ces travaux concernent aussi bien l'identification de sollicitations précises comme des pressions aérodynamiques et des efforts de liaison, [109, 97], ou des pressions de contact entre solides [107, 130, 58], que la mise en œuvre de méthodes générales pour l'identification d'efforts de traction à partir de formulations par éléments finis [30, 76], par éléments de frontière [84] ou par éléments de type Trefftz [126, 67]. Ces méthodes sont soit régularisées par l'ajout d'un opérateur de type [117], soit fortement sur-contraintes à partir de mesure de champs. L'application de ces travaux à la surveillance des structures requiert alors des méthodes de décision permettant d'identifier rapidement les bonnes solutions.

La démarche adoptée pour l'application de la méthode aux plaques est similaire à celle utilisée pour les poutres. Nous nous intéressons dans un premier temps à des plaques dites élémentaires. Les bases de chargement correspondantes à ces structures sont obtenues à partir des solutions analytiques de type Trefftz du problème direct. Ces bases sont complètes, équilibrées et de dimensions liées à l'évolution des champs mécaniques intérieurs. Nous étudions alors la sensibilité des solutions reconstruites aux erreurs de mesure en fonction du nombre de ddl , n , du nombre de capteurs, m , de la dimension des bases, p , et des distributions des capteurs dans les structures. Cette démarche est faite dans un premier temps sur des structures étoilées, puis sur des plaques quelconques avec notamment des inclusions et/ou des singularités. L'étude de la sensibilité des solutions reconstruites nous permet alors de quantifier la qualité de ces bases de chargement devenues incomplètes sur ces structures. Enfin, à partir d'une décomposition en sous-structures élémentaires, nous proposons une méthode systématique de construction des bases de chargement et du positionnement des capteurs pour les structures dites « complexes » modélisées par des assemblages de structures plaques. Cette décomposition se limite à la définition du chargement seulement. La résolution du problème est faite à partir de la modélisation globale par éléments finis de la structure.

4.2 Formulation du problème de plaque

4.2.1 Description des plaques

Une plaque est définie comme ayant une de ses dimensions petites devant les deux autres. Cette notion se traduit par la relation suivante :

$$\frac{h}{\min(L, b)} \leq \frac{1}{4}$$

où L , b et h sont les trois dimensions caractéristiques de la structure associées à trois directions orthogonales. Cette définition permet de représenter géométriquement la structure comme étant composée d'un ensemble de segments associés à la dimension h . Les centres de ces segments définissent un plan moyen. Seul ce plan moyen est

supposé se déformer, les segments ont un mouvement de corps rigide. Ces hypothèses se traduisent par la cinématique suivante :

$$\underline{u}(x, y, z) = \underline{u}(x, y) + \underline{MM}_0(z) \wedge \underline{\theta}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ u_y(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ u_z(x, y) \end{bmatrix}$$

Cette cinématique correspond à un développement limité à l'ordre 1 en z , coordonnée associée à la hauteur h , du champ de déplacement de la structure. Le tenseur des déformations est donné par :

$$\begin{aligned} \nabla \underline{u}^{sym} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(u_{x,x} + z\theta_{y,x}) & u_{x,y} + u_{y,x} + z\theta_{y,y} - z\theta_{x,x} & u_{z,x} + \theta_y \\ u_{x,y} + u_{y,x} + z\theta_{y,y} - z\theta_{x,x} & 2(u_{y,y} - z\theta_{x,y}) & u_{z,y} - \theta_x \\ u_{z,x} + \theta_y & u_{z,y} - \theta_x & \delta h \end{pmatrix} \\ \nabla \underline{u}^{sym} &= \underline{\varepsilon} + z\underline{\gamma} + \frac{\underline{\tau}}{2} \\ \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u_{x,x} & u_{x,y} + u_{y,x} & 0 \\ u_{x,y} + u_{y,x} & 2u_{y,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\gamma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\theta_{y,x} & \theta_{y,y} - \theta_{x,x} & 0 \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} & -2\theta_{x,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\tau} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{z,x} + \theta_y \\ 0 & 0 & u_{z,y} - \theta_x \\ u_{z,x} + \theta_y & u_{z,y} - \theta_x & \delta h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans la suite, nous nous intéressons seulement à la théorie de Kirchhoff-Love qui consiste à négliger le cisaillement hors plan, $\underline{\tau} = 0$ par rapport aux sollicitations planes de traction et de cisaillement, $\underline{\varepsilon} \neq 0$ et par rapport aux sollicitations hors plan de flexion et de torsion, $\underline{\gamma} \neq 0$. Cette théorie est utilisée lorsque la hauteur h de la plaque est telle que :

$$\frac{h}{\min(L, b)} < \frac{1}{20}$$

A priori, la méthode proposée pour la reconstruction de champs à partir de l'identification du chargement s'applique aussi à la théorie des plaques dites épaisses, $\underline{\tau} \neq 0$. Seule la famille des solutions analytiques des formes faibles des équations mécaniques diffère dans ce cas.

En supposant que la plaque Ω est en équilibre sous l'action d'une distribution de charge volumique \underline{f}_v et d'une distribution de charge surfacique \underline{F}_b sur son bord $\partial\Omega$, la formulation variationnelle des équations de la mécanique définit la modélisation du chargement des plaques.

4.2.2 Formulation du problème de membrane

Le problème de membrane est associé à des sollicitations planes de traction et de cisaillement de la structure Ω . Si \underline{z} est la direction associée à sa hauteur, les charges réparties se mettent sous la forme :

$$\underline{f}_v = f_{vx}\underline{x} + f_{vy}\underline{y} \quad \text{et} \quad \underline{F}_b = F_{bx}\underline{x} + F_{by}\underline{y}$$

La cinématique de la structure est la suivante : $\underline{u} = u_x(x,y)\underline{x} + u_y(x,y)\underline{y}$. La formulation variationnelle des équations d'équilibre donne les équations suivantes :

$$\underline{div}[\mathbf{N}] + \underline{r} = \underline{0} \text{ dans } \Sigma \Rightarrow \begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} + r_x = 0 \text{ dans } \Sigma \\ N_{y,y} + N_{xy,x} + r_y = 0 \text{ dans } \Sigma \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{N} \cdot \underline{n}_{\partial\Sigma} = \underline{R} \text{ sur } \partial\Sigma \Rightarrow \begin{cases} N_x n_x + N_{xy} n_y = R_x \text{ sur } \partial\Sigma \\ N_{xy} n_x + N_y n_{xy} = R_y \text{ sur } \partial\Sigma \end{cases} \quad (4.2)$$

où Σ est la surface du plan moyen et $\partial\Sigma$ son contour. r est une densité surfacique d'effort, R est une densité linéique d'effort telles que :

$$\begin{aligned} r_x &= F_{bx} + \int_h f_{vx} dz & \text{et} & & r_y &= F_{by} + \int_h f_{vy} dz \\ R_x &= \int_h F_{bx} dz & \text{et} & & R_y &= \int_h F_{by} dz \end{aligned}$$

La modélisation du chargement correspond à ces densités linéique et surfacique d'effort. Ainsi, la base de chargement du problème de membrane est définie à partir de fonctions intégrables sur la surface Σ et son contour $\partial\Sigma$.

4.2.3 Formulation du problème de flexion

La cinématique du problème de flexion et de torsion est de la forme :

$$\underline{u} = z\theta_y(x,y)\underline{x} - z\theta_x(x,y)\underline{y} + u_z(x,y)\underline{z}$$

L'hypothèse de Kirchhoff-Love permet de réduire cette cinématique sous la forme :

$$\underline{\tau} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{z,x} + \theta_y = 0 \\ u_{z,y} - \theta_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{u}(x,y,z) = -zu_{z,x}(x,y)\underline{x} - zu_{z,y}(x,y)\underline{y} + u_z(x,y)\underline{z}$$

Le tenseur de courbure est alors donné par :

$$\underline{\gamma} = - \begin{pmatrix} u_{z,xx} & u_{z,xy} & 0 \\ u_{z,xz} & u_{z,yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La formulation variationnelle donne les équations d'équilibre suivantes de la surface moyenne Σ :

$$\underline{div}[\underline{div}[\mathbf{M}]] + c_{y,x} - c_{x,y} + r_z = 0 \text{ dans } \Sigma \quad (4.3)$$

$${}^T \underline{n} \cdot \underline{div}[\mathbf{M}] + ({}^T \underline{\tau} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{n})_{,s} = C_{n,s} - c_s + R_z \text{ sur } \partial\Sigma \quad (4.4)$$

$${}^T \underline{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{n} = -C_s \text{ sur } \partial\Sigma \quad (4.5)$$

$$\forall i \llbracket {}^T \underline{\tau} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{n} \rrbracket_i = -\llbracket C_n \rrbracket_i \text{ au points anguleux } P_i \quad (4.6)$$

où $\mathbf{M} = \int_h z \underline{\sigma} dz$ correspond à l'intégration du tenseur des contraintes dans l'épaisseur de la plaque, $(\underline{c}, \underline{C})$ et $(\underline{r}, \underline{R})$ sont respectivement des densités surfaciques et linéiques

de moment et d'effort définies par :

$$\underline{c} = \int_h \begin{bmatrix} -zf_{vy} - F_{by}(h) + F_{by}(-h) \\ zf_{vx} dz + F_{bx}(h) - F_{bx}(-h) \\ 0 \end{bmatrix} dz \quad \text{et} \quad \underline{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_h f_{vz} dz + F_{bz}(h) + F_{bz}(-h) \end{bmatrix} dz$$

$$\underline{C} = \int_h \begin{bmatrix} -zF_{by} \\ zF_{bx} \\ 0 \end{bmatrix} dz \quad \text{et} \quad \underline{R} = \int_h \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{bz} \end{bmatrix} dz$$

Les équations d'équilibre permettent de simplifier la modélisation du chargement. En effet, l'équation (4.3) ne permet pas de différencier r_z , $c_{y,x}$ et $c_{x,y}$ du point de vue de la réponse de la structure. Ainsi, la densité d'effort surfacique $p_z = c_{y,x} - c_{x,y} + r_z$ est utilisée pour modéliser ces chargements. De même, les équations (4.4), (4.5) et (4.6) définissent respectivement la densité linéique d'effort P_z , la densité linéique de moment tangent C_s et les efforts F_i aux points anguleux P_i . Cette modélisation minimale du chargement permet de ré-écrire les équations d'équilibre sous la forme :

$$\text{div}[\underline{\text{div}}[\mathbf{M}]] + p_z = 0 \quad \text{dans } \Sigma \quad (4.7)$$

$${}^T \underline{n} \cdot \underline{\text{div}}[\mathbf{M}] + ({}^T \underline{\tau} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{n})_{,s} = P_z \quad \text{sur } \partial\Sigma \quad (4.8)$$

$${}^T \underline{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{n} = -C_s \quad \text{sur } \partial\Sigma \quad (4.9)$$

$$\forall i \quad [{}^T \underline{\tau} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{n}]_i = F_i \quad \text{aux points anguleux } P_i \quad (4.10)$$

4.2.4 Formulation du problème de flexion, théorie de Reissner-Mindlin

Dans le cadre de la théorie des plaques de Reissner-Mindlin, la cinématique définie dans l'équation (4.2.3) n'est pas simplifiée et la formulation variationnelle conduit aux équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}[\mathbf{M}] - \underline{T} + \underline{c} = 0 \\ \underline{\text{div}}[\underline{T}] + r_z = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Sigma \quad \Leftrightarrow \begin{cases} M_{xx,x} + M_{xy,y} - T_x + c_y = 0 \\ M_{yy,y} + M_{xy,x} - T_y - c_x = 0 \\ T_{x,x} + T_{y,y} + r_z = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Sigma \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \underline{n} = \underline{C} \\ {}^T \underline{n} \cdot \underline{T} = R_z \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Sigma \quad \Leftrightarrow \begin{cases} M_{xx}n_x + M_{xy}n_y = C_y \\ M_{yy}n_y + M_{xy}n_x = -C_x \\ T_x n_x + T_y n_y = R_z \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Sigma \quad (4.12)$$

où $\underline{n} = [n_x \ n_y]^T$ est la normale au contour $\partial\Sigma$. Ces équations font intervenir les contraintes intégrées dans l'épaisseur :

$$\mathbf{M} = \int_h \begin{pmatrix} z\sigma_{xx} & z\sigma_{xy} & 0 \\ z\sigma_{xy} & z\sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dz \quad \text{et} \quad \underline{T} = \int_h \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ 0 \end{bmatrix} dz$$

La modélisation du chargement est directement obtenue à partir des densités surfacique et linéique de moment et d'effort ($\underline{c}, \underline{C}$) et ($\underline{r}, \underline{R}$). Ce problème est donc similaire à celui du problème de membrane en termes de chargement mais trois paramètres cinématiques sont nécessaires à sa description, u_z , θ_x et θ_y . Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'à la théorie de Kirchhoff-Love pour les plaques en flexion.

4.2.5 Construction des bases de chargement

Les contraintes que nous souhaitons imposer aux bases de chargement sont :

- Chaque vecteur de ces bases doit être équilibré.
- La dimension des bases, p , qui correspond à leurs dimensions, doit être lié à l'évolution des champs mécaniques intérieurs créés par chaque vecteur de chargement.

Pour imposer ces contraintes, nous avons choisi d'utiliser une famille de solutions analytiques du problème associées aux effets intérieurs des structures et obtenues par une méthode de Trefftz [62]. Ces solutions sont recherchées sous forme polynomiale et respectant l'équilibre local ce qui donne une relation de récurrence entre les coefficients du polynôme. Cette relation de récurrence définit le nombre minimum de fonctions nécessaires à l'entière description d'un degré polynomial donné. Ce nombre de fonctions est de quatre au maximum pour chaque degré polynomial considéré. La base de chargement \mathcal{F}^q de dimension $p = q$ est alors définie par :

$$\mathcal{F}^q = \{ \underline{F}_i^q = \boldsymbol{\sigma}(\underline{u}_i^q) \cdot \underline{n}_{\partial\Omega} ; \underline{u}_i^q \in \mathcal{U}^q \}$$

avec $\mathcal{U}^q = \left\{ \underline{u}_i^q = \sum_{j=0}^r \alpha_{ij} x^j y^{q-j} ; \underline{\text{div}}[\mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_i^q)] = -\underline{f}_v \text{ dans } \Omega \ \& \ \left(\begin{array}{l} 0 < i \leq 4 \\ 0 < r \leq q \end{array} \right) \right\}$

La résolution de cette équation est faite par superposition d'une solution particulière associée à \underline{r} et p_z et d'une solution homogène associée à $\underline{\text{div}}\mathbf{N} = 0$ et $\underline{\text{div}}[\underline{\text{div}}[\mathbf{M}]] = 0$. Si les fonctions \underline{r} et p_z ne sont pas connues a priori, une approximation polynomiale continue ou continue par morceau est utilisée comme dans le cas des poutres. Pour simplifier la mise en œuvre de la méthode, nous nous intéressons seulement au cas $\underline{r} = 0$ et $p_z = 0$. Les cas $\underline{r} \neq 0$ et $p_z \neq 0$ augmente seulement la dimension de la base de chargement du nombre de fonctions considérées. Enfin, la famille de solutions associées à \mathcal{U}^q est définie pour les domaines étoilés exclusivement en élasticité linéaire. Dans la suite, nous présentons des résultats sur les structures isotropes qui sont directement transposables à des structures anisotropes

Dans le cas d'une plaque rectangulaire de dimensions $L_1 \times L_2$ élastique isotrope, pour la sollicitation de membrane, les bases des champs de déplacement \mathcal{U}^3 de dimension $p = 14$ et de contrainte \mathcal{S}_T^2 de dimension $p = 11$ se mettent sous la forme :

$$\mathcal{U}^3 = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{2y}{L_2} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{x}{L_1} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ y \\ L_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2x \\ L_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{y^2}{L_2^2} \\ \frac{2xy}{L_2^2} \\ \frac{-4xy}{L_2^2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{(1+v)x^2}{L_1^2} \\ \frac{-4xy}{L_1^2} \\ \frac{(1+v)y^2}{L_2^2} \end{array} \right), \dots$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{2xy}{L_1^2} \\ \frac{x^2}{L_1^2} \\ \frac{2xy}{L_1^2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{y((3+v)y^2 - 6x^2)}{L_2^3} \\ \frac{(1+v)xy^2}{L_2^3} \\ \frac{(1+v)x^2y}{L_2^3} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{(2vx^2 + 3(1-v)y^2)x}{3L_1^3} \\ \frac{-(1+v)x^2y}{L_1^3} \\ \frac{(1+v)x^2y}{L_1^3} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{-(1+v)x^2y}{L_2^3} \\ \frac{(2vy^2 + 3(1-v)x^2)y}{3L_2^3} \\ \frac{(1+v)x^2y}{L_1^3} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{(1+v)x^2y}{L_1^3} \\ \frac{x((3+v)x^2 - 6y^2)}{L_1^3} \\ \frac{(1+v)x^2y}{L_2^3} \end{array} \right) \right\}$$

$$\mathcal{S}_T^2 = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{v} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{v} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 - \mathbf{v} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{-2vx}{L_2} \\ \frac{-2x}{L_2} \\ \frac{2vy}{L_2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{2x}{L_1} \\ \frac{-2(2+v)x}{L_1} \\ \frac{-2y}{L_1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{-2(2+v)y}{L_2} \\ \frac{2y}{L_2} \\ \frac{-2x}{L_2} \end{array} \right), \dots$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{-2y}{L_1} \\ \frac{-2vy}{L_1} \\ \frac{2vx}{L_1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{-2(2+v)xy}{L_2^2} \\ \frac{2xy}{L_2^2} \\ \frac{(2+v)y^2 - x^2}{L_2^2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{vx^2 + y^2}{2vL_1^2} \\ \frac{vy^2 - (1+2v)x^2}{2vL_1^2} \\ \frac{-xy}{L_1^2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{vx^2 - (2+v)y^2}{2vL_2^2} \\ \frac{x^2 + vy^2}{2vL_2^2} \\ \frac{-xy}{L_2^2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{2xy}{L_1^2} \\ \frac{-2(2+v)xy}{L_1^2} \\ \frac{(2+v)x^2 - y^2}{L_1^2} \end{array} \right) \right\}$$

Ces bases sont normées et la projection de \mathcal{S}_T^3 sur les bords de la structures donne la base correspondante de chargement. Ainsi :

$$F_i^r = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_{Ti}^r \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \boldsymbol{\sigma}_{Ti}^r \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq 4 \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases}$$

Chaque vecteur de \mathcal{S}_T^3 correspond à un tenseur des contraintes en notation ingénieur, $\boldsymbol{\sigma} = {}^T[\boldsymbol{\sigma}_{xx} \ \boldsymbol{\sigma}_{yy} \ \boldsymbol{\sigma}_{xy}]$.

Pour la sollicitation de flexion, les bases des champs de déplacement, \mathcal{W}^4 de dimension $p = 14$, et de contrainte \mathcal{S}_F^2 de dimension $p = 11$ se mettent sous la forme :

$$\mathcal{W}^4 = \left\{ 1, \frac{x}{L_1}, \frac{y}{L_2}, \frac{x^2}{L_1^2}, \frac{y^2}{L_2^2}, \frac{xy}{L_1L_2}, \frac{x^3}{L_1^3}, \frac{x^2y}{L_1^2L_2}, \frac{xy^2}{L_1L_2^2}, \frac{y^3}{L_2^3}, \frac{x^3y}{L_1^3L_2}, \frac{x^2(x^2-3y^2)}{L_1^4}, \frac{y^2(y^2-3x^2)}{L_2^4}, \frac{xy^3}{L_1L_2^3} \right\}$$

$$\mathcal{S}_F^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\nu}{L_2^2} \\ \frac{1}{L_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1^2} \\ \frac{1}{\nu L_1^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1-\nu}{2L_1L_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3\nu y}{L_2^3} \\ \frac{3y}{L_2^3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\nu x}{L_1L_2^2} \\ \frac{x}{L_1L_2^2} \\ \frac{(1-\nu)y}{L_1L_2^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{y}{L_1^2L_2} \\ \frac{\nu y}{L_1^2L_2} \\ \frac{(1-\nu)x}{L_1^2L_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3x}{L_1^3} \\ \frac{3\nu x}{L_1^3} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \frac{(2\nu-1)y^2-\nu x^2}{L_1L_2^3} \\ \frac{(2-\nu)y^2-x^2}{L_2^4} \\ \frac{2(\nu-1)xy}{L_2^4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\nu xy}{L_1L_2^3} \\ \frac{xy}{L_1L_2^3} \\ \frac{(1-\nu)y^2}{2L_1^3L_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{xy}{L_1^3L_2} \\ \frac{\nu xy}{L_1^3L_2} \\ \frac{(1-\nu)y^2}{2L_1^3L_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(2-\nu)x^2-y^2}{L_1^4} \\ \frac{(2\nu-1)x^2-\nu y^2}{L_1^4} \\ \frac{2(\nu-1)xy}{L_1^4} \end{pmatrix} \right\}$$

Ces bases sont aussi normées et les équations d'équilibre (4.7) à (4.10) donnent alors le chargement associé à chaque tenseur de contrainte à partir de l'expression du tenseur \mathbf{M}_i^r :

$$\mathbf{M}_i^r = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_{Fi}^r = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \boldsymbol{\sigma}_{Fi}^r \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq 4 \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Contrairement au cas des poutres, la dimension des bases de chargement de membrane et de flexion n'est pas égal à leur degré polynomial puisque quatre fonctions au maximum sont utilisées par degré. Dans la suite, nous illustrons la méthode de reconstruction à partir des bases de dimension $p = 15$ ce qui correspond à un degré polynomial de 3. $(\boldsymbol{\sigma}_{Tk})_{1 \leq k \leq p_T}$ est la base de traction et $(\boldsymbol{\sigma}_{Fk})_{1 \leq k \leq p_F}$ est la base de flexion. Enfin, ces bases de chargement sont orthonormées à partir de l'algorithme modifié de Gram-Schmidt. Les bases de chargement orthonormées $\mathcal{S}_T^{q\perp}$ et $\mathcal{S}_F^{q\perp}$ sont données par :

$$\forall n \leq p_j \quad \boldsymbol{\sigma}_{jn}^\perp = \alpha_n \boldsymbol{\sigma}_{jn} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \boldsymbol{\sigma}_{jk}^\perp$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \int_{\Omega} Tr \left[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{jn}^\perp) \mathbb{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{jk}^\perp) \right] d\Omega = 0 \quad \forall k \leq n-1 \\ \int_{\Omega} Tr \left[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{jn}^\perp) \mathbb{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{jn}^\perp) \right] d\Omega = 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

où $j = T, F$ suivant que les bases de membrane ou de flexion sont considérées. La notation $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{jn}^\perp)$ désigne le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ calculé par éléments finis à partir

du chargement défini par le vecteur de chargement $\boldsymbol{\sigma}_{jn}^\perp \cdot \boldsymbol{n}_{\partial\Omega}$. Ces bases de chargement orthonormées sont celles utilisées pour la résolution du problème d'identification du chargement par éléments finis. Les champs mécaniques calculés pour chaque vecteur de ces bases orthonormées donnent l'opérateur \mathbb{G} d'identification des paramètres de chargement.

4.2.6 Mesures et capteurs sur une plaque élémentaire

Les mesures considérées sur les plaques sont des mesures de déformation associées à n'importe quelle direction du plan. En pratique, ces structures sont instrumentées à partir de rosettes de déformation mesurant les déformations dans trois directions différentes. Ces directions sont écartées de 45° ou de 60° en règle générale. Les composantes du tenseur de déformation sont liées aux déformations mesurées par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{-\alpha} \\ \varepsilon_0 \\ \varepsilon_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(-\alpha) & 2\cos(-\alpha) \cdot \sin(-\alpha) & \sin^2(-\alpha) \\ \cos^2(0) & 2\cos(0) \cdot \sin(0) & \sin^2(0) \\ \cos^2(\alpha) & 2\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

où α est l'angle de l'écart relatif des directions de mesure de la rosette. L'étude de cette relation montre que son conditionnement est minimisé lorsque $\alpha = 60^\circ$ soit 1,41 contre 2,61 lorsque $\alpha = 45^\circ$. Dans la suite, nous considérons que les déformations sont toujours mesurées dans trois directions ce qui donne directement les composantes du tenseur plan de déformation, $\nabla \underline{u}^{sym}$. Nous n'étudions pas l'influence des directions de mesure. Les erreurs relatives à ces mesures sont directement intégrées dans l'erreur de modélisation $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mod}$.

L'expression du tenseur global de déformation permet d'obtenir les relations suivantes :

$$\nabla \underline{u}^{sym} = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) + z\boldsymbol{\gamma}(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \nabla \underline{u}^{sym} \left(\frac{h}{2} \right) + \nabla \underline{u}^{sym} \left(\frac{-h}{2} \right) \\ \boldsymbol{\gamma}(x, y) = \frac{2}{h} \left[\nabla \underline{u}^{sym} \left(\frac{h}{2} \right) - \nabla \underline{u}^{sym} \left(\frac{-h}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (4.14)$$

La mesure sur les faces supérieure et inférieure des plaques découple les sollicitations de membrane et de flexion. Par conséquent, nous traitons séparément la résolution des problèmes de membrane et de flexion dans la suite de ces travaux. Le problème de membrane est associé aux mesures des déformations planes $\boldsymbol{\varepsilon}$, tandis que le problème de flexion est associé aux mesures des courbures $\boldsymbol{\gamma}$.

4.3 Simulation d'une plaque

4.3.1 Description

La validation de la méthode de résolution du problème inverse est similaire à celle utilisée pour les poutres. L'erreur de la solution identifiée, $\delta[\mathcal{S}]$, est estimée en fonction des erreurs de mesure, aléatoire ($\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{rand}$) et de modélisation ($\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mod}$). Cette estimation de l'erreur de la solution est faite pour deux cas simulés de chargement pour chaque sollicitation. Nous nous intéressons aux sollicitations de membrane et

flexion pour obtenir le positionnement optimal des capteurs associé aux résolutions conjointes de ces problèmes. La résolution directe du problème par éléments finis avec le chargement considéré donne les mesures utilisées pour identifier les paramètres liés aux bases d'approximation du chargement. La solution ainsi identifiée est ensuite comparée avec la solution calculée à partir du chargement « exact ». Le choix des cas simulés est similaire à celui des poutres. Nous considérons un cas « exact » au sens où le chargement est inclus dans la base de chargement et un cas « approché » au sens où le chargement est seulement approximé par la base de chargement.

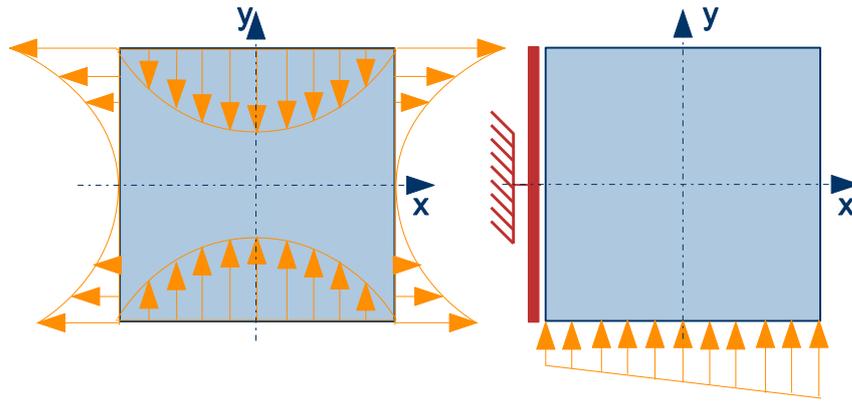


FIGURE 4.1 – Schématisation des cas tests de chargement exact (1) et approché (2) associés à la sollicitation de membrane avec la base de chargement S_T^3

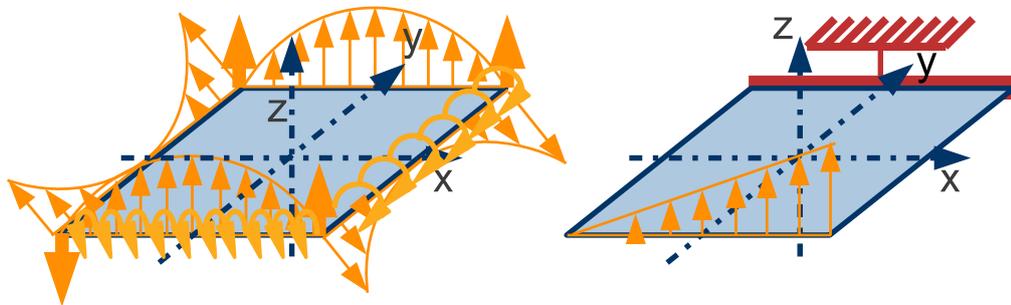


FIGURE 4.2 – Schématisation des cas tests de chargement exact (1) et approché (2) associés à la sollicitation de flexion avec la base de chargement S_F^3

Les cas de chargement sont illustrés sur les figures 4.1 et 4.2. La plaque Ω est rectangulaire de dimensions $b \times b$ et de hauteur h . Cette structure est isotrope. Les champs de contrainte de von Mises sont utilisés dans la suite pour représenter les différents champs mécaniques. Ces champs intègrent toutes les composantes du tenseur des contraintes. Enfin, les résultats présentés sont obtenus à partir des bases de chargement S_T^3 et S_F^3 , soit $p = 15$, qui approximent le chargement réel par des fonctions polynomiales de degré 3. Le nombre de points de mesure utilisés pour l'identification des paramètres de chargement est de $m = 5$ ce qui correspond à $5 \times 3 = 15$ valeurs de déformation. $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy})$ sont mesurées en chaque point.

Enfin, les figures 4.3 et 4.4 montre l'évolution des champs de contrainte de von Mises calculés à partir de quatre vecteurs des bases de chargement $S_T^{3\perp}$ et $S_F^{3\perp}$.

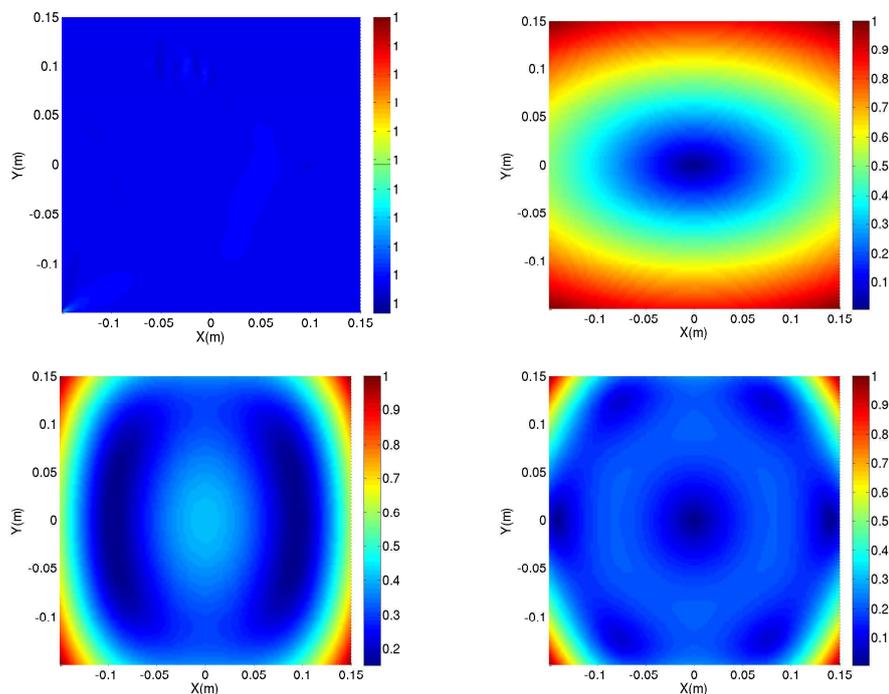


FIGURE 4.3 – Illustration des champs de contrainte de von Mises obtenus à partir des chargements associés aux tenseurs σ_{T1}^\perp , σ_{T6}^\perp , σ_{T9}^\perp et σ_{T15}^\perp de la base $S_T^{3\perp}$, respectivement de gauche à droite et de haut en bas.

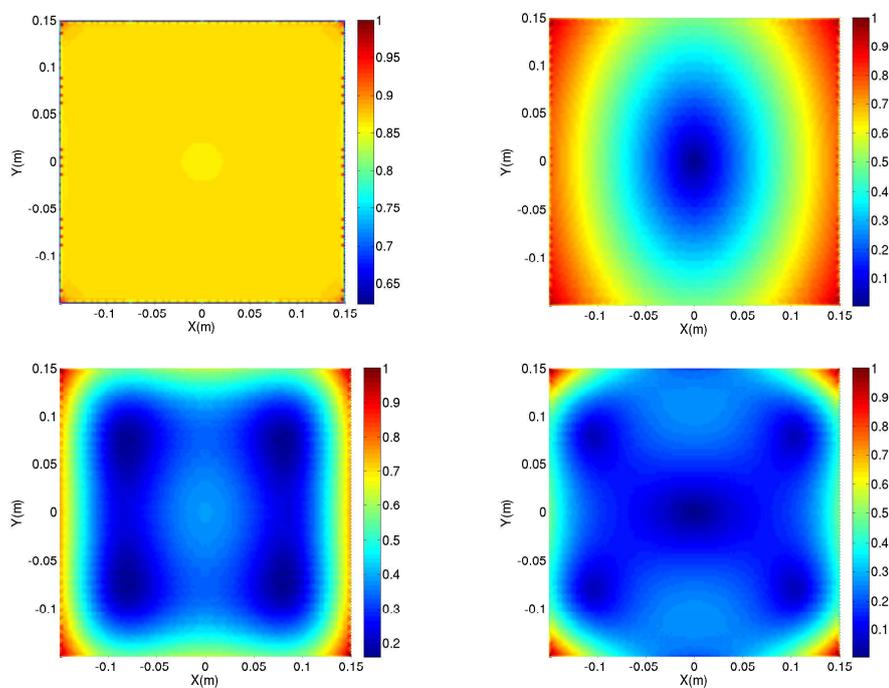


FIGURE 4.4 – Illustration des champs de contrainte de von Mises obtenus à partir des chargements associés aux tenseurs σ_{F2}^\perp , σ_{F6}^\perp , σ_{F11}^\perp et σ_{F15}^\perp de la base $S_F^{3\perp}$, respectivement de gauche à droite et de haut en bas.

Ces vecteurs ont les degrés 0, 1, 2 et 3. Cette figure illustre le lien entre le degré des fonctions polynomiales de chargement et l'évolution des champs mécaniques intérieurs. Dans le cas du problème de flexion, la contrainte équivalente de von Mises est calculée à partir des courbures. Cette contrainte équivalente se met sous la forme :

$$\sigma_{VMF} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \sqrt{(\gamma_{xx} + \nu\gamma_{yy})^2 + (\gamma_{yy} + \nu\gamma_{xx})^2 - (\gamma_{xx} + \nu\gamma_{yy}) \cdot (\gamma_{yy} + \nu\gamma_{xx}) + 3(1-\nu)\gamma_{xy}^2}$$

4.3.2 Résolution du problème de membrane

a/ Etude du conditionnement de \mathbb{G}

Comme nous l'avons déjà vu, le conditionnement de \mathbb{G} caractérise la sensibilité des paramètres identifiés et des champs reconstruits aux erreurs de mesure. Nous commençons par vérifier que le nombre de degrés de liberté, n , n'influe par sur ce conditionnement, que le nombre de point de mesure m le réduit et que la dimension de la base, p l'augmente. Comme nous l'avons observé lors de l'étude des poutres, l'identification des paramètres de chargement permet de localiser les erreurs des solutions sur les bords de la structure, à « l'extérieur » de la zone d'observation. Ainsi, nous avons choisi de positionner les points de mesure sur un cercle de rayon R . Ce rayon caractérise la zone d'observation comme illustré sur la figure 4.5. Le conditionnement de \mathbb{G} est aussi étudié en fonction de R .

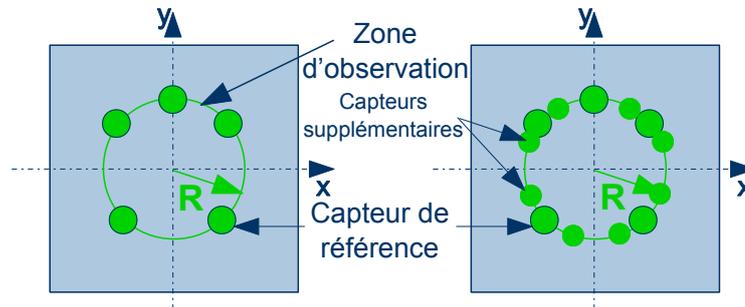


FIGURE 4.5 – Schématisation du positionnement des capteurs et de la zone d'observation à partir du rayon de mesure, R , et schématisation de l'ajout de positions dans la configuration de mesure, ici deux positions supplémentaires par quart de cercle .

L'évolution du conditionnement de \mathbb{G} en fonction de n et m est illustré sur la figure 4.6. Comme dans le cas des poutres, $Cond[\mathbb{G}]$ est indépendant de n et décroît lorsque m croît. Les différentes configurations de mesure sont obtenues à partir d'une configuration initiale fixe de cinq capteurs dont le rayon de la zone d'observation est $R = 0,6b$, à laquelle sont rajoutés successivement des points de mesure équi-répartis dans chaque quart de cercle. Ces points r de mesure supplémentaires par quart de cercle correspondent aux angles suivants : $(k\pi/(2(r+1)))_{1 \leq k \leq r}$. La figure 4.5 illustre l'ajout de deux positions à la configuration de mesure de référence. Enfin, $Cond[\mathbb{G}]$ est inversement proportionnel au rayon de la zone d'observation comme illustré sur la figure 4.6. Ce résultat est cohérent avec l'évolution de $Cond[\mathbb{G}]$ observée pour les poutres. L'augmentation de R correspond à l'agrandissement de la zone d'observation et au rapprochement des capteurs des zones d'application du chargement. Ce résultat est aussi une conséquence direct du principe de Saint-Venant qui dit que

les champs mécaniques intérieurs de la structure ne dépendent que des résultantes globales du chargement. Ainsi, plus les capteurs sont positionnés au centre de la structure, moins ils différencient les chargements. A partir de ces résultats, nous

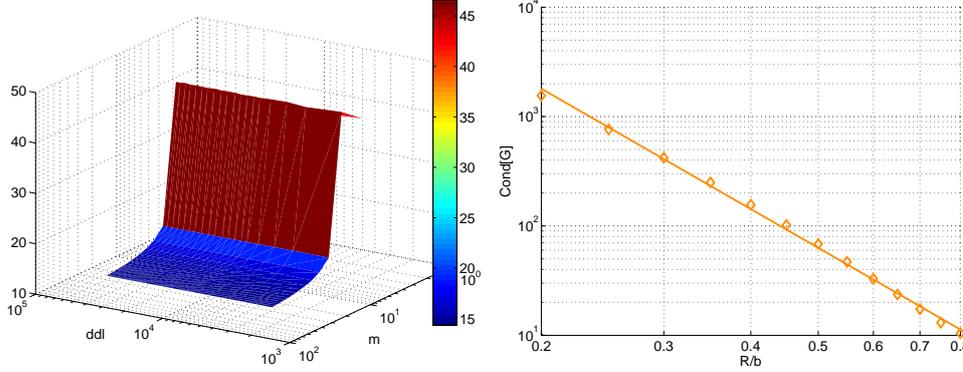


FIGURE 4.6 – Evolution de $Cond[\mathbb{G}]$ en fonction de n et de m pour $p = 15$ et $R = 0,6b$ et évolution de $Cond[\mathbb{G}]$ en fonction de R pour $n = 133924$ et $m = 5 \times 3$.

avons choisi d'utiliser $m = 5$ capteurs et $n = 133924$ pour les simulations. Les bases de chargement utilisées sont les bases S_T^3 et S_F^3 . L'étude de la répartition optimale des capteurs en fonction de la valeur du rayon de la zone d'observation donne la distribution angulaire $[36^\circ, 90^\circ, 144^\circ, 225^\circ, 315^\circ]$ des capteurs sur le cercle de rayon R pour les sollicitations identifiées, de membrane ou de flexion. Cette configuration est celle illustrée sur la figure 4.5 qui est obtenue par une recherche exploratoire en supposant différentes valeurs de R et en tenant compte des symétries du problème. Dans la suite, nous utilisons cette distribution des capteurs pour étudier l'identification des chargements de membrane et de flexion ainsi que pour étudier la reconstruction des champs mécaniques en fonction de R . L'évolution correspondante de $Cond[\mathbb{G}]$ en fonction de R est celle de la figure 4.6.

b/ Résolution du problème exact

Nous considérons la résolution du problème associé au cas de chargement exact en membrane. Ce chargement se met sous la forme :

$$\underline{F}_b = \alpha_1 \sigma_{T1}^\perp + \alpha_2 \sigma_{T2}^\perp + \alpha_3 \sigma_{T3}^\perp + \alpha_4 \sigma_{T4}^\perp + \alpha_5 \sigma_{T5}^\perp + \alpha_9 \sigma_{T9}^\perp + \alpha_{10} \sigma_{T10}^\perp$$

Les paramètres de chargement sont exactement identifiés quelle que soit la valeur du rayon de la zone d'observation dans le cas de mesures non-bruitées, c'est-à-dire obtenues à partir du calcul par éléments finis du problème direct. Ce résultat valide la mise en œuvre de la méthode dans le code de calcul COMSOL. Le rapport d'écart type $\tau_{STD} = \langle \langle \delta[\mathcal{S}] \rangle \rangle_N / \langle \langle \delta \epsilon \rangle \rangle_N^{max}$ est utilisé pour étudier la sensibilité de la solution aux erreurs de mesure. L'erreur aléatoire de mesure est générée à partir de $N = 10000$ échantillons et d'une loi de probabilité uniforme. L'amplitude du bruit est définie par le paramètre α qui est un pourcentage de la valeur moyenne des déformations mesurées, ainsi $\delta \epsilon_{rand} \in [-\alpha \epsilon_m^{AVR}, \alpha \epsilon_m^{AVR}]$. La figure 4.7 montre l'évolution de τ_{STD} pour différentes valeurs de R . Comme attendu, $\tau_{STD} \approx 1$ dans la zone d'observation et la valeur maximale $\tau_{STD}^{max} = Cond[\mathbb{G}]$ est atteinte au bord de la structure. Ainsi, la sensibilité de la solution aux erreurs aléatoires de mesure dépend directement de

$Cond[G]$ ce qui valide la régularisation de la reconstruction des champs mécaniques par l'identification des paramètres de chargement. Ce résultat est indépendant de la valeur de α .

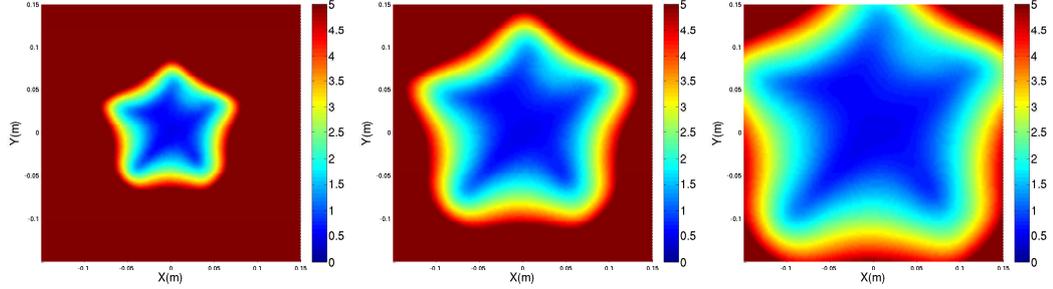


FIGURE 4.7 – Distribution du rapport d'écart type τ_{STD} dans les cas $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$, pour l'identification du cas de référence exact pour la sollicitation de membrane.

c/ Résolution du problème approché

Nous considérons la résolution du problème associé au cas de chargement approché en membrane. Ce cas de chargement introduit une erreur de modélisation intrinsèque à la résolution comme illustré sur la figure 4.8. Cette figure représente les champs de contrainte de von Mises du cas référence et des solutions reconstruites avec des rayons $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$ de la zone d'observation. La figure 4.9 montre les erreurs $\delta[\mathcal{S}] = \delta[\mathcal{S}_{mod}]$ de ces solutions reconstruites par rapport à la solution de référence avec des mesures non-bruitées. Le calcul de $\delta[\mathcal{S}]$ est modifié par rapport à la définition du chapitre (2. Du fait des concentrations de contrainte, la déformation de référence n'est pas la déformation moyenne au sens de l'énergie, mais la déformation telle que 80% des déformations de Ω soient supérieures à cette valeur. Cette définition de ϵ_{ref} se traduit par :

$$Tr[CE_{ref}\epsilon_{ref}] \leq Tr[CE(X)\epsilon(X)] \quad \text{avec} \quad \forall X \in \omega \subset \Omega \text{ et } \omega = 80\%\Omega$$

Dans le cas de chargement étudié, $\epsilon_{moy} \approx 4\epsilon_{ref}$ avec $Tr[CE_{moy}\epsilon_{moy}] = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} Tr[CE\epsilon] d\Omega$.

Ces résultats montrent que l'erreur de modélisation varie en fonction du rayon R d'observation. Un critère d'optimalité est alors défini pour le rayon d'observation en fonction du niveau maximum de $\delta[\mathcal{S}_{mod}]$ imposé. Ce maximum est noté $\delta[\mathcal{S}_{mod}]^{max}$. Le rayon d'observation optimal permet d'obtenir la plus grande zone de Ω telle que $\delta[\mathcal{S}_{mod}] \leq \delta[\mathcal{S}_{mod}]^{max}$ sur cette zone. Cette zone définit la partie utile notée A_{ZU} de Ω qui caractérise en pratique la zone surveillée de la structure. La figure 4.10 montre l'évolution de A_{ZU} en fonction de R pour différentes valeurs de $\delta[\mathcal{S}_{mod}]^{max}$. Ainsi, si $\delta[\mathcal{S}_{mod}]^{max} = 10\%$ alors le rayon optimal R_{op} est de $0,6b$.

Nous considérons ensuite le problème bruité, c'est-à-dire en introduisant une erreur aléatoire sur les mesures. Comme précédemment, cette erreur est générée à partir de 10000 échantillons et d'une loi uniforme d'amplitude $\alpha\epsilon_m^{AVR}$. L'évolution du rapport des écarts types τ_{STD} est donnée sur la figure 4.11. Cette évolution est similaires à celle du cas précédant illustrée sur la figure 4.7. Le problème de reconstruction est bien régularisé au sens où l'erreur de mesure n'est pas amplifiée à l'intérieure de la zone d'observation et au sens où le rapport τ_{STD} du problème

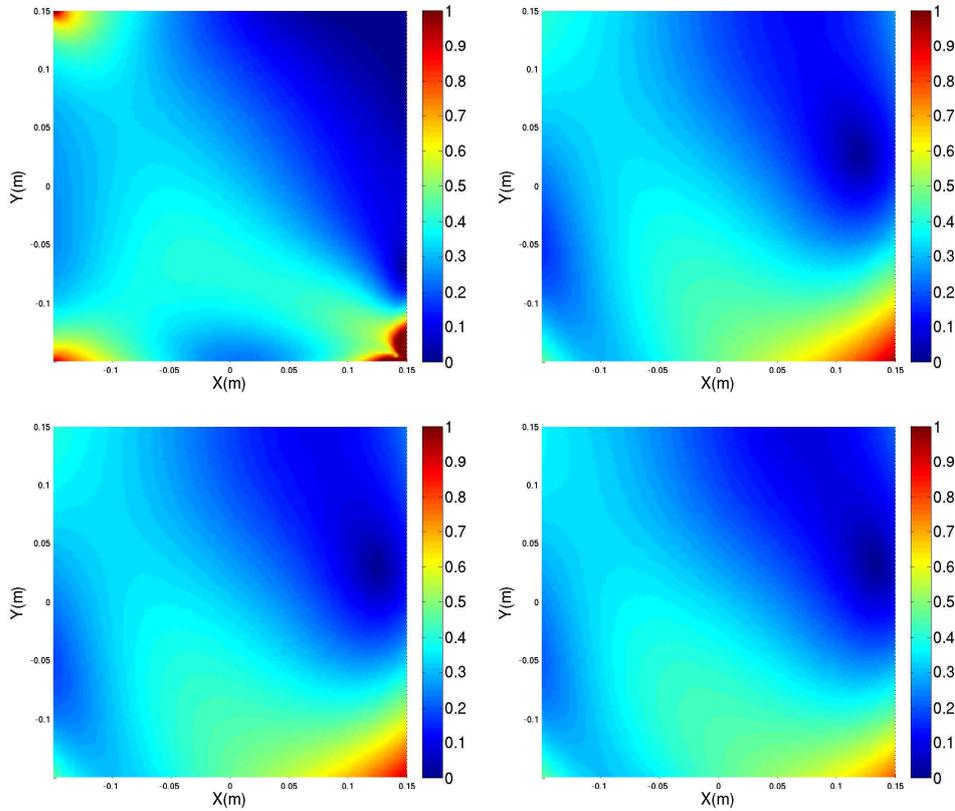


FIGURE 4.8 – Illustration des champs de contrainte de von Mises obtenu à partir des cas de référence approché de membrane et reconstruits à partir des chargements identifiés avec les rayons $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$ de la zone d'observation, respectivement de gauche à droite et de haut en bas.

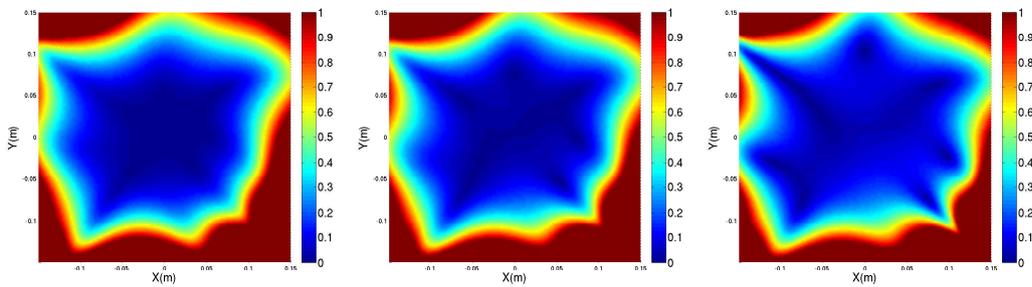


FIGURE 4.9 – Distribution de $\delta[\mathcal{S}]$ pour des rayons de la zone d'observation respectivement égaux à $0,3b$, $0,5b$ et $0,7b$. La valeur de référence ϵ_{ref} est prise telle que la densité d'énergie associée soit inférieure à 80% des valeurs de densité d'énergie de Ω .

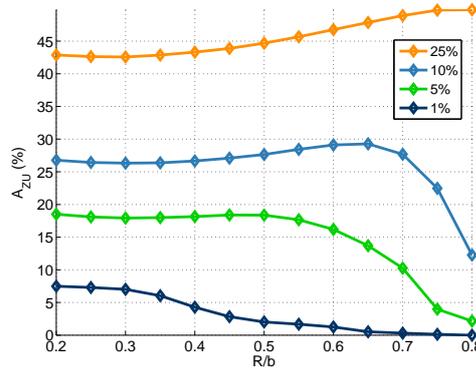


FIGURE 4.10 – Evolution de la zone utile A_{ZU} ($\%Ω$) en fonction du rayon R de la zone d'observation pour différentes valeurs de $\delta[\mathcal{S}_{mod}]^{max}$, 25%, 10%, 5% et 1%.

de reconstruction des champs mécaniques est identique à celui du problème d'identification du chargement. Enfin, la figure 4.12 montre l'évolution du rapport entre l'erreur maximale totale $\delta[\mathcal{S}]$ et l'écart type du bruit des mesures pour différents niveaux de bruit qui est noté τ_{MAX} . Ce rapport tend vers τ_{STD} lorsque α , le paramètre de bruit, augmente. Pour $\alpha \leq 1\%$ l'erreur de modélisation est prépondérante et le bruit n'a pas ou peu d'influence sur l'erreur de la solution : τ_{MAX} diminue proportionnellement à l'augmentation de α . Pour $5\% \leq \alpha \leq 25\%$, les erreurs de modélisation et aléatoire sont comparables et τ_{MAX} se stabilise. Enfin, pour $\alpha \geq 25\%$, l'erreur aléatoire est prépondérante sur l'erreur de modélisation et $\tau_{MAX} \approx \tau_{STD}$. Ce résultat permet d'estimer l'erreur de modélisation à 13% des déformations mesurées.

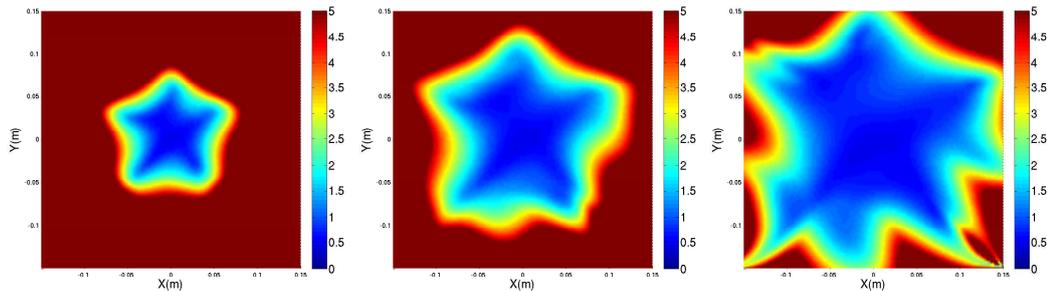


FIGURE 4.11 – Distribution du rapport d'écart type τ_{STD} dans les cas $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$, pour l'identification du cas de référence approché de membrane.

Ces résultats permettent de définir une position optimale de la zone d'observation en fonction de l'importance relative des erreurs aléatoire et de modélisation. Si l'erreur de modélisation est a priori prédominante, un rayon d'observation de $0,5b$, c'est-à-dire à égal distance du centre et du bord de la structure, est utilisé. Si l'erreur aléatoire est a priori prédominante, un rayon d'observation compris entre $0,65b$ et $0,8b$ doit être privilégié.

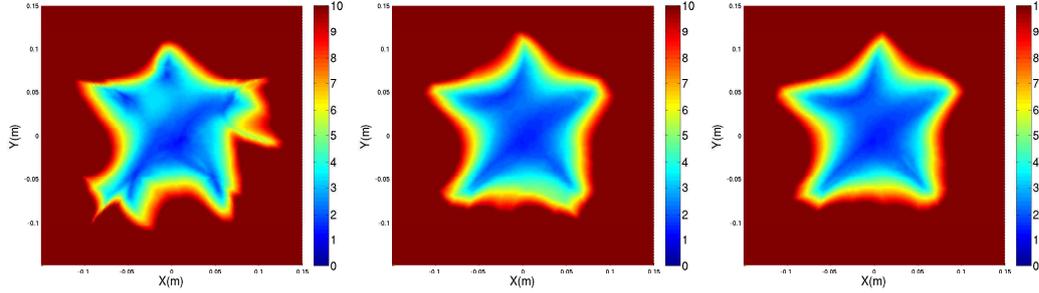


FIGURE 4.12 – Distribution du rapport τ_{MAX} dans les cas $\alpha = 0,6\%$, $\alpha = 2\%$ et $\alpha = 10\%$, pour l'identification du cas de référence approché de membrane avec $R = 0,5b$.

4.3.3 Résolution du problème de flexion

a/ Etude du conditionnement de \mathbb{G}

Pour le problème de flexion, l'évolution de $Cond[\mathbb{G}]$ est similaire à celle du problème de membrane. Ce conditionnement est indépendant de n , augmente avec la dimension de la base et diminue lorsque m augmente avec la configuration minimale de référence donnée dans la figure 4.5. Enfin, $Cond[\mathbb{G}]$ diminue lorsque R augmente comme illustré sur la figure 4.15 et le conditionnement du problème de flexion est plus faible que celui de membrane. La résolution du problème de flexion est faite dans les mêmes conditions d'identification que le problème de membrane : $m = 5$, $n = 66961$, la base de chargement est \mathcal{S}_F^3 et la distribution optimale des capteurs sur la frontière de la zone d'observation de rayon R est donnée par les angles $[36^\circ, 90^\circ, 144^\circ, 225^\circ, 315^\circ]$.

b/ Résolution du problème exact

Le chargement associé au problème exact se met sous la forme :

$$\underline{F}_b = \alpha_1 \sigma_{T1}^\perp + \alpha_2 \sigma_{T2}^\perp + \alpha_3 \sigma_{T3}^\perp + \alpha_4 \sigma_{T4}^\perp + \alpha_5 \sigma_{T5}^\perp + \alpha_9 \sigma_{T9}^\perp + \alpha_{10} \sigma_{T10}^\perp$$

Ces paramètres de chargement sont exactement identifiés quelle que soit la valeur du rayon de la zone d'observation dans le cas de mesures non-bruitées. La figure 4.13 montre l'évolution de τ_{STD} pour différentes valeurs de R . $\tau_{STD} \approx 1$ dans la zone d'observation et la valeur maximale $\tau_{STD} = Cond[\mathbb{G}]$ est atteinte au bord de la structure. Comme pour le problème de flexion, ce résultat est indépendant de la valeur de α l'amplitude du bruit, ce qui valide la régularisation de la reconstruction des champs mécaniques par l'identification des paramètres de chargement.

c/ Résolution du problème approché

La figure 4.14 montre les champs de contrainte de von Mises de la solution de référence et des solutions reconstruites à partir des rayons $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$ de la zone d'observation pour le problème approché de flexion. La figure 4.17 montre les erreurs de modélisation $\delta[\mathcal{S}_{mod}]$ de ces solutions reconstruites par rapport à la solution de référence. Comme pour le problème de membrane, $\delta[\mathcal{S}]$ est calculée à partir de la déformation de référence telle que 80% des déformations de Ω soient supérieures à cette valeur. Ces résultats montrent que le cas de flexion

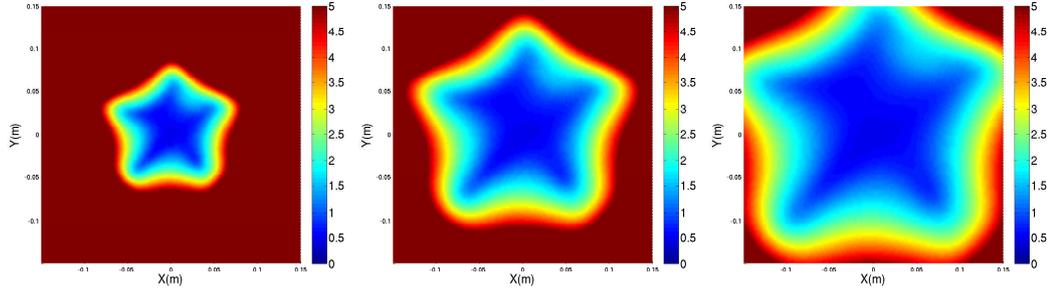


FIGURE 4.13 – Distribution du rapport d'écart type τ_{STD} dans les cas $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$, pour l'identification du cas de référence exact de flexion.

considéré est moins sévère a priori que celui de traction. Pour une même dimension d'approximation, la base de chargement de flexion permet de mieux approximer le chargement imposé. Cependant, cet exemple ne tient pas compte des charges réparties sur la surface.

La faible valeur de l'erreur d'approximation est aussi illustrée sur la figure 4.16 qui montre l'évolution de A_{ZU} en fonction de R . Les valeurs de A_{ZU} sont supérieures à celles du problème de membrane. De plus, A_{ZU} est inversement proportionnelle à R ce qui signifie que $\delta[\mathcal{S}_{mod}]$ décroît en fonction R comme cela est illustré sur la figure 4.17. Ce résultat signifie que lorsque R croît, l'erreur de modélisation croît. Ainsi, bien que le conditionnement diminue, l'augmentation de l'écart entre les mesures et le modèle prédomine et dégrade la solution. Cet aspect est aussi la conséquence de la localisation spatiale des conditions aux limites de flexion. Cette localisation est associée à l'épaisseur de la plaque, ce qui réduit l'influence spatiale des effets de bords à l'intérieur de la structure par rapport aux sollicitations de membrane. Une bonne approximation de la solution est alors rapidement obtenue en l'absence de charges réparties. L'utilisation d'éléments plaque de type Reissner-Mindlin dans le code de calcul par éléments finis nous a permis de valider ce résultat en fonction de l'épaisseur de la plaque.

L'étude du problème bruité dans les mêmes conditions que le problème de membrane montre que l'évolution de τ_{STD} est celle attendue comme illustré sur la figure 4.18. La figure 4.19 montre que l'erreur de modélisation peut être estimée à moins de 0,5%, valeur à partir de laquelle τ_{MAX} se stabilise. Ces résultats montrent que sans charge répartie, le problème de membrane est celui qui impose le positionnement des capteurs, le problème de flexion étant naturellement mieux conditionné.

4.3.4 Conclusion

Ces applications de la méthode de reconstruction de champ à partir de l'identification des paramètres de chargement nous ont permis de valider son utilisation. Dans le cadre de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love, cette méthode permet de régulariser le problème de reconstruction des champs puisque sa sensibilité est égale à la sensibilité du problème d'identification du chargement. Comme pour les poutres, l'écart type de l'erreur de la solution à l'intérieur de la zone d'observation est inférieur ou égal à l'écart type de l'erreur aléatoire. L'étude de différents cas de chargement permet aussi de définir une position optimale de la zone d'observation

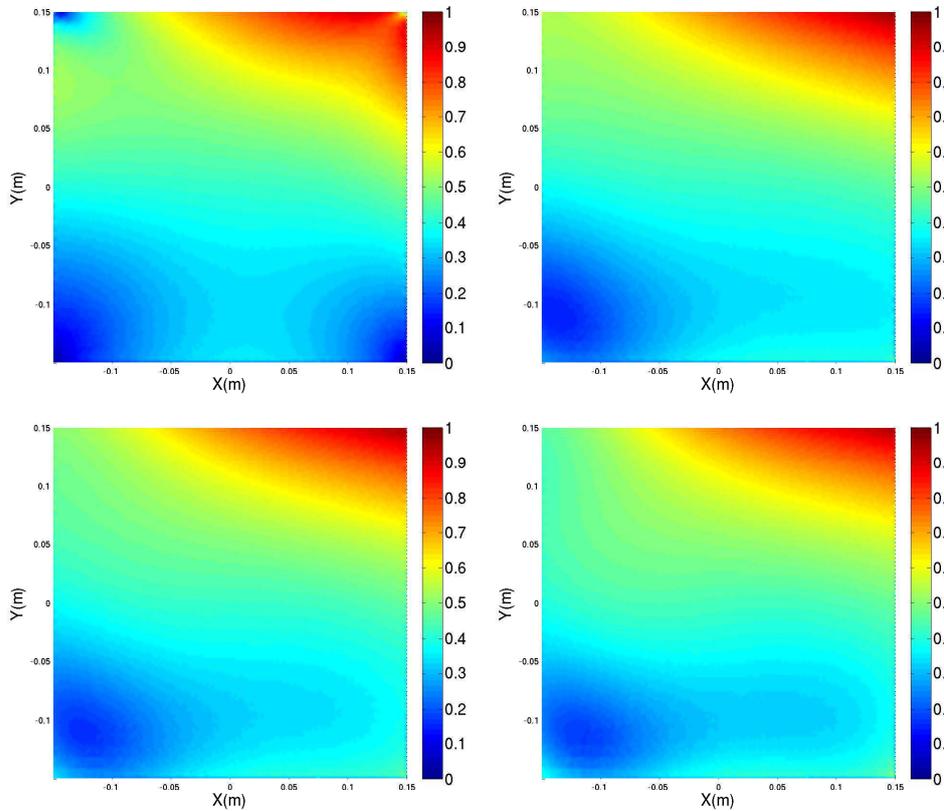


FIGURE 4.14 – Illustration des champs de contrainte de von Mises obtenu à partir du cas de référence approché de flexion et reconstruits à partir des chargements identifiés avec les rayons $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$ de la zone d'observation, respectivement de gauche à droite et de haut en bas.

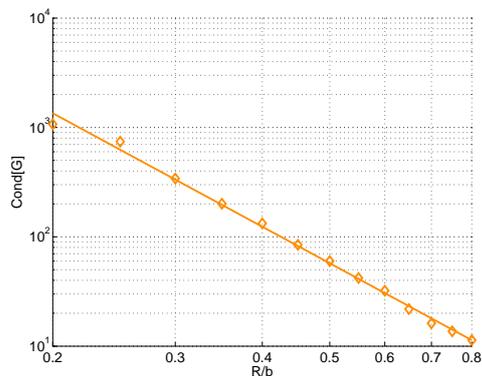


FIGURE 4.15 – Evolution de $Cond[G]$ en fonction de R pour $n = 66962$ et $m = 5 \times 3$ pour le problème de flexion.

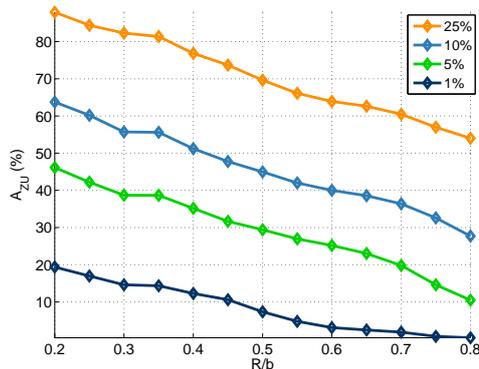


FIGURE 4.16 – Evolution de la zone utile A_{ZU} ($\% \Omega$) en fonction du rayon R de la zone d'observation pour $\delta[\mathcal{S}_{mod}]^{max}$ égale à 25%, 10%, 5% et 1%.

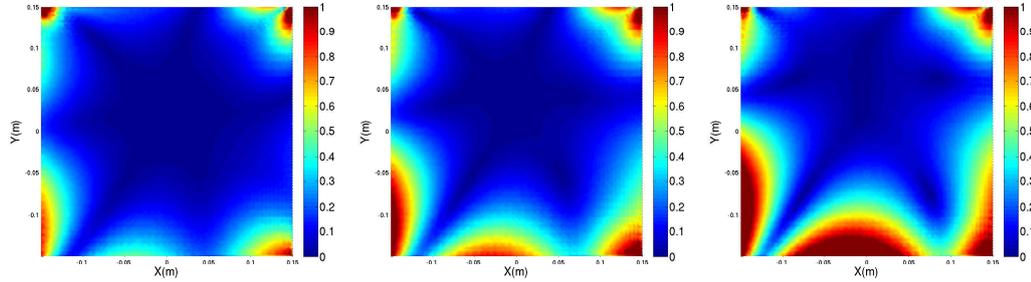


FIGURE 4.17 – Distribution de $\delta[\mathcal{S}]$ pour des rayons de la zone d'observation égaux à $0,3b$, $0,5b$ et $0,7b$. La valeur de référence ε_{ref} est prise telle que la densité d'énergie associée soit inférieure à 80% des valeurs de densité d'énergie de Ω .

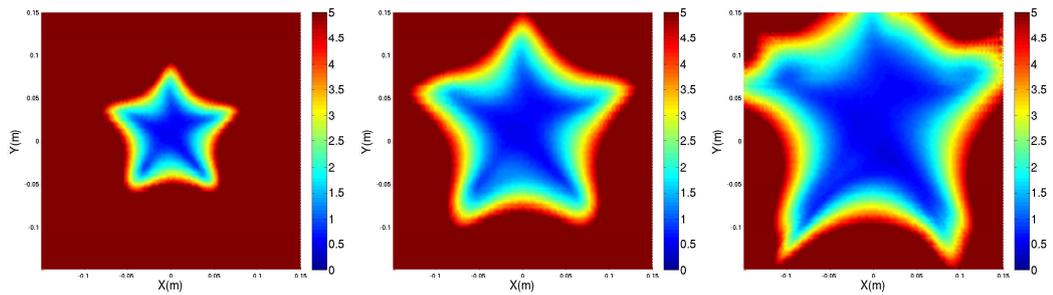


FIGURE 4.18 – Distribution du rapport d'écart type τ_{STD} dans les cas $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$, pour l'identification du cas de référence approché de flexion.

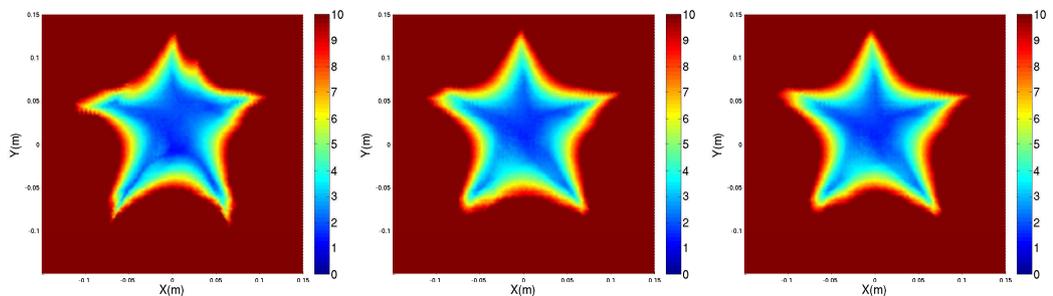


FIGURE 4.19 – Distribution du rapport τ_{MAX} dans les cas $\alpha = 0,8\%$, $\alpha = 5\%$ et $\alpha = 25\%$ pour l'identification du cas de référence approché de flexion avec $R = 0,5b$.

en fonction de l'importance relative des erreurs aléatoire et de modélisation. Cette position est définie par le problème de membrane moins bien conditionné que le problème de flexion. Ainsi, la base de chargement de flexion est a priori plus complète que la base de chargement de membrane puisque l'erreur de modélisation obtenue pour différents chargements de flexion est inférieure à celle obtenue pour différents chargements de membrane. Cependant, ces résultats ne tiennent pas compte des charges réparties qui réduisent les différences entre ces deux bases. Les charges réparties de flexion introduisent des effets locaux à plus grande longueur de variation que les effets de bords.

4.4 Application aux plaques trouées

4.4.1 Construction des bases de chargement

La méthode présentée précédemment pour les plaques étoilées permet de construire une base complète et équilibrée du chargement associée à l'évolution des champs mécaniques intérieurs. Cette démarche est parfaitement adaptée à la surveillance des structures puisqu'elle filtre les phénomènes locaux et reconstruit de manière fiable les champs mécaniques globaux de la structure surveillée. Cependant, cette méthode est a priori limitée aux domaines étoilés ce qui n'est pas le cas d'une grande majorité de plaques comme celles contenant des inclusions ou des singularités. Nous avons alors choisi de traiter ce problème de construction des bases de chargement sur des plaques quelconques à partir de l'étude d'une plaque trouée. Notre objectif a été de conserver la construction des bases de chargement présentée précédemment. Pour cela nous définissons des domaines étoilés de référence Ω_{ref} associés aux plaques quelconques Ω privées de leurs inclusions.

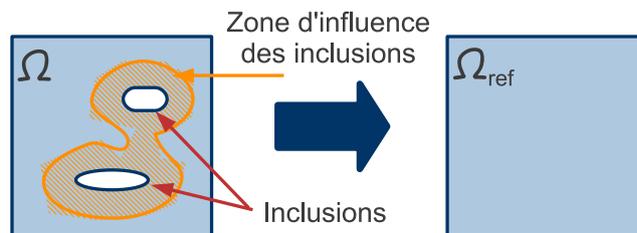


FIGURE 4.20 – Schématisation de la plaque étoilée Ω_{ref} obtenue à partir du bord $\partial\Omega \setminus \Gamma_s$ de la structure Ω

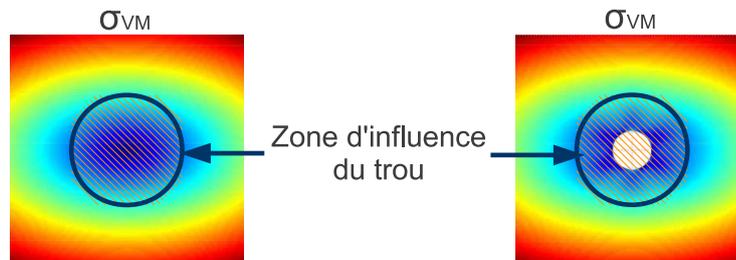


FIGURE 4.21 – Schématisation des champs de contraintes de von Mises résultant de l'application de chargements identiques sur des plaques étoilée et trouée.

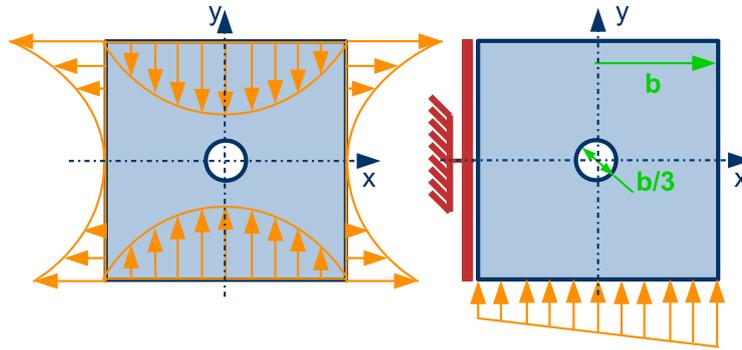


FIGURE 4.22 – Schématisation des cas de chargement exact et approché pour la simulation du problème de membrane de plaque trouée.

Soit Ω une plaque contenant des inclusions comme illustré sur la figure 4.20. La structure Ω_{ref} est définie comme étant le domaine étoilé associé au contour $\partial\Omega \setminus \Gamma_s$ où Γ_s est le bord des inclusions de Ω . Ces deux structures sont supposées soumises aux mêmes conditions de chargement extérieur. Une zone d'influence des inclusions est alors définie comme étant la zone sur laquelle les champs mécaniques de ces structures sont différents. La taille de cette zone dépend de la taille des inclusions et du type de sollicitations. Si ces inclusions sont suffisamment éloignées des bords utilisés pour définir Ω_{ref} , les champs mécaniques près de ces bords sont identiques sur Ω_{ref} et Ω . Ainsi, des chargements identiques appliqués à ces structures créent des champs identiques près des bords définissant le domaine étoilé de référence Ω_{ref} . Par conséquent, une base de chargement associée aux effets intérieurs de la structure Ω_{ref} sera aussi une base de chargement associée aux effets intérieurs de la structure Ω .

Cette démarche est illustré sur une plaque de dimensions $2b \times 2b$ contenant en son centre un trou de rayon $r = b/6$ comme illustré sur la figure 4.21. Les champs de contrainte de von Mises obtenus à partir des mêmes conditions de chargement montrent la localisation de la zone d'influence du trou sur la structure initiale par rapport à la structure de référence étoilée. Près des bords communs aux deux structures, ces champs de contrainte sont identiques. Cet exemple illustre bien l'équivalence des conditions de chargement sur les champs loins des inclusions.

Nous utilisons ensuite les deux cas de chargement de la figure 4.22, l'un exact et l'autre approché, pour illustrer l'application de la méthode de reconstruction de champ. L'objectif de cet exemple est de valider l'utilisation des bases de chargement de flexion et de membrane construites à partir de structures étoilées équivalentes. Nous présentons seulement les résultats associés au problème de membrane. Comme pour le cas des plaques étoilées, les phénomènes à courte longueur de variation sont restreints dans le problème de flexion par rapport au problème de membrane.

Enfin, la figure 4.23 illustre les champs de von Mises associés aux éléments σ_{T1}^\perp , σ_{T6}^\perp , σ_{T9}^\perp et σ_{T15}^\perp de la base de chargement $\mathcal{S}_7^{3\perp}$ appliquée à la plaque trouée. Comme dans le cas des plaques étoilées, le degré polynomial des fonctions de chargement est associé à l'évolution des champs mécaniques intérieurs.

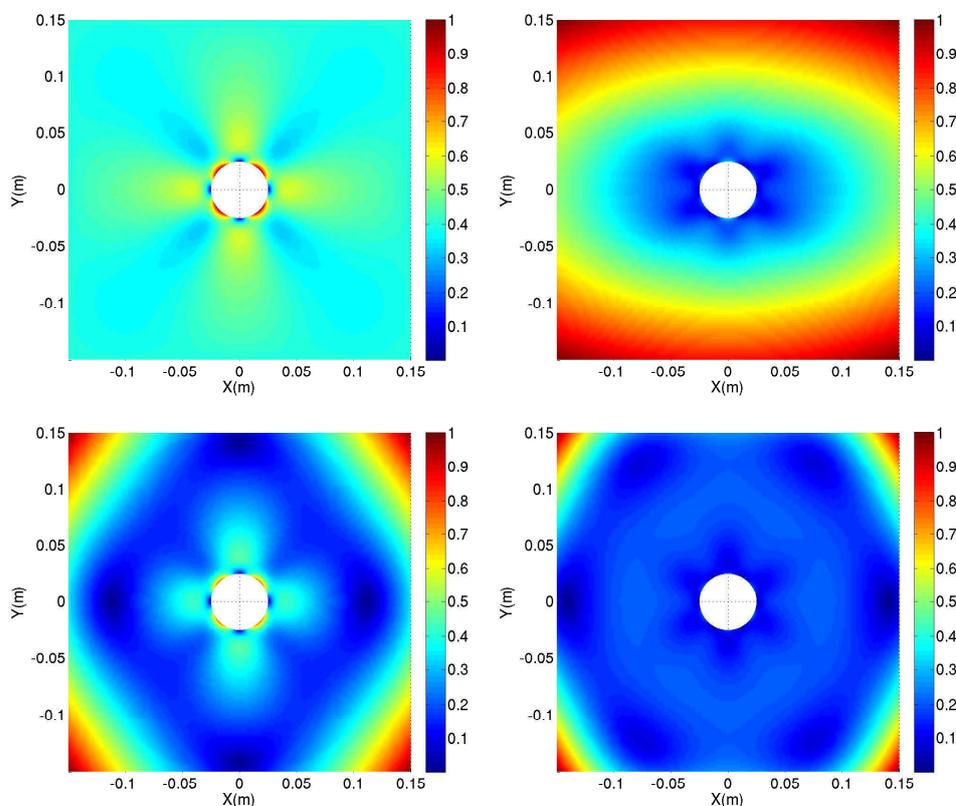


FIGURE 4.23 – Illustration des champs de von Mises obtenus à partir du chargement associé aux tenseurs σ_{T1}^\perp , σ_{T6}^\perp , σ_{T9}^\perp et σ_{T15}^\perp de la base $S_T^{\perp 3}$. Le degré polynomial des fonctions de chargement augmente de gauche à droite et de haut en bas.

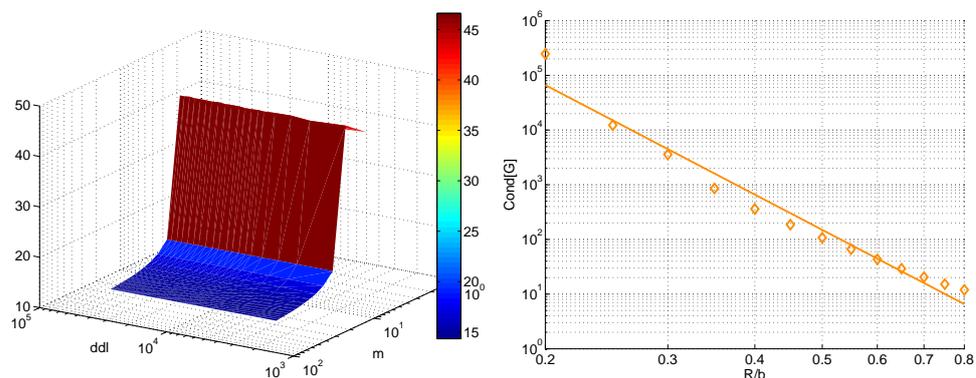


FIGURE 4.24 – Evolution de $\text{Cond}[G]$ en fonction de n et de m pour $p = 15$ et $R = 0,6b$ et évolution de $\text{Cond}[G]$ en fonction de R pour $n = 66962$ et $m = 5 \times 3$, pour la base de chargement $S_T^{\perp 3}$ appliquée à une plaque trouée.

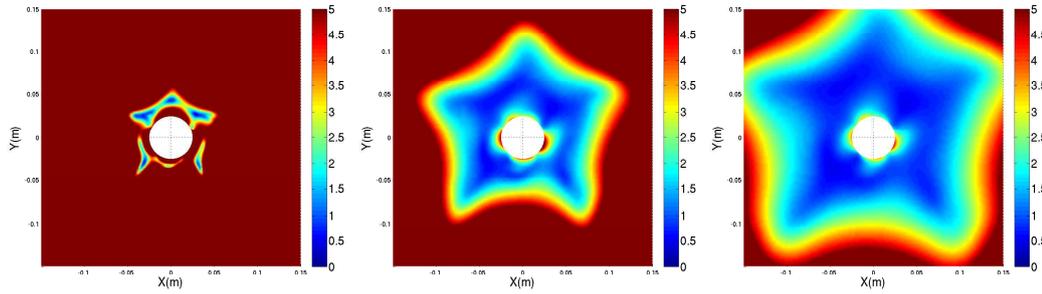


FIGURE 4.25 – Distribution du rapport d'écart type τ_{STD} dans les cas $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$, pour l'identification du cas de référence exact de membrane.

4.4.2 Etude du conditionnement de \mathbb{G}

Le conditionnement de l'opérateur d'identification est évalué en fonction de n , m , R et de la distribution angulaire des capteurs sur le bord de la zone d'observation. Comme le montre la figure 4.24, $Cond[\mathbb{G}]$ est indépendant de n et décroît avec m . $Cond[\mathbb{G}]$ décroît aussi en fonction de R . Cependant, cette évolution est plus importante que dans le cas des structures étoilées lorsque R diminue. Ainsi, si les conditionnements de ces deux problèmes sont sensiblement égaux pour $0,45b \leq R \leq 0,8b$, les valeurs en $R = 0,2b$ diffèrent d'un facteur 100. Ce phénomène s'explique assez bien par les sur-contraintes que génère le trou. La perte de sensibilité des champs intérieurs de la structure par rapport aux variations de chargement est accentuée par les fortes contraintes à proximité du trou qui ne dépendent que des chargements associés aux petites dimensions. Ce résultat s'observe d'autant mieux que la répartition spatiale de la concentration de contrainte est grande. Enfin, les conditionnements optimaux sont obtenus pour les distributions $[36^\circ, 90^\circ, 144^\circ, 225^\circ, 315^\circ]$ des capteurs sur le bord de la zone d'observation.

4.4.3 Résolution du problème exact

La résolution du problème exact montre que la qualité de la solution reconstruite est dégradée dans la zone d'observation à proximité du trou comme illustré sur la figure 4.25 et que ce phénomène s'accroît lorsque R décroît. Ce résultat correspond bien à l'augmentation de $Cond[\mathbb{G}]$ en fonction de R et est cohérent avec l'influence du trou sur la réponse de la structure vis à vis des sollicitations de dimensions élevées. Cependant, ce résultat ne signifie pas pour autant que la solution reconstruite est considérablement dégradée. En effet, ces zones à proximité du trou ont des niveaux de contrainte bien plus élevés que ceux mesurés. Ainsi, la variation des champs mécaniques liée à l'erreur aléatoire reste proportionnellement faible par rapport à la valeur de référence de ces mêmes champs au bord du trou.

4.4.4 Résolution du problème approché

La résolution du problème approché permet dans un premier temps de valider l'utilisation de la base de chargement pour des plaques quelconques. En effet, les champs de contrainte de von Mises de la solution de référence et des solutions reconstruites sont semblables comme illustré sur la figure 4.26. Les figures 4.27 et 4.28 montrent que l'erreur de modélisation augmente par rapport au cas des plaques

étoilées notamment près du trou à l'intérieur de la structure. Les valeurs maximales de A_{ZU} sont plus faibles pour une même valeur de $\delta[\mathcal{S}_{mod}]^{max}$. Les rayons optimaux correspondant sont aussi plus faibles, compris entre $0,4b$ et $0,7b$. Ces résultats montrent que les singularités ou les inclusions dégradent l'erreur de modélisation des solutions reconstruites lorsque le rayon d'observation augmente plus rapidement que dans le cas des plaques étoilées. Cet aspect est justifié par le fait qu'en augmentant les rayons d'observation, l'identification favorise les paramètres de chargement de dimensions plus élevées au détriment des paramètres de chargement des dimensions les plus faibles. Or, les effets de surcontraintes sont principalement liés à ces derniers paramètres ce qui explique la dégradation des solutions reconstruites dans les zones de surcontrainte.

Un autre résultat important est que cette méthode permet d'éloigner les capteurs du trou tout en obtenant des champs mécaniques reconstruits de qualité. Cet aspect est bien adapté à la problématique de la surveillance des structures. Les erreurs de mesure liées à l'instrumentation des zones dont les champs mécaniques présentent des gradients importants sont ainsi fortement réduites. De manière générale, en supposant une erreur de positionnement $\underline{\delta X}$ d'un capteur par rapport à sa position supposée, un développement limité à l'ordre 1 de la déformation mesurée $\varepsilon(\underline{X} + \underline{\delta X})$ en fonction de la déformation supposée $\varepsilon(\underline{X})$ donne :

$$\varepsilon(\underline{X} + \underline{\delta X}) = \varepsilon(\underline{X}) + \nabla\varepsilon(\underline{X}) \cdot \underline{\delta X} + o(\underline{\delta X})$$

Ainsi, une erreur de modélisation proportionnelle à $\nabla\varepsilon$ et à $\underline{\delta X}$ est introduite dans la mesure. Pour une valeur donnée de $\underline{\delta X}$, a priori définie par les possibilités d'instrumentation, le positionnement dans des zones à faibles gradients de champ permet de limiter l'influence de $\underline{\delta X}$ sur l'erreur de mesure. Ce raisonnement permet aussi de justifier le positionnement des capteurs loin des zones d'introduction d'efforts qui entraînent de forts gradients de champ.

Enfin, les figures 4.29 et 4.30 confirment les résultats précédemment obtenus. La stabilité aux erreurs aléatoires de mesure est conservée dans la zone d'observation comme pour le cas exact. L'évolution du rapport τ_{MAX} entre $\delta[\mathcal{S}]$ et l'écart type de l'erreur aléatoire montre l'augmentation relative de l'erreur de modélisation par rapport à l'erreur aléatoire.

4.4.5 Conclusion

Cet exemple valide la construction des bases de chargement des plaques quelconques à partir de domaines étoilés équivalents. Bien que la présence de surcontraintes accroisse les erreurs de modélisation à l'intérieur des structures, la qualité des solutions reste suffisante du fait notamment de l'augmentation locale des contraintes. Cet exemple montre aussi l'intérêt de la méthode proposée pour la surveillance des plaques trouées en service. L'instrumentation de ces structures loin des zones à forts gradients de champ permet de réduire considérablement les erreurs de mesure et d'obtenir une bonne estimation des champs mécaniques autour du trou.

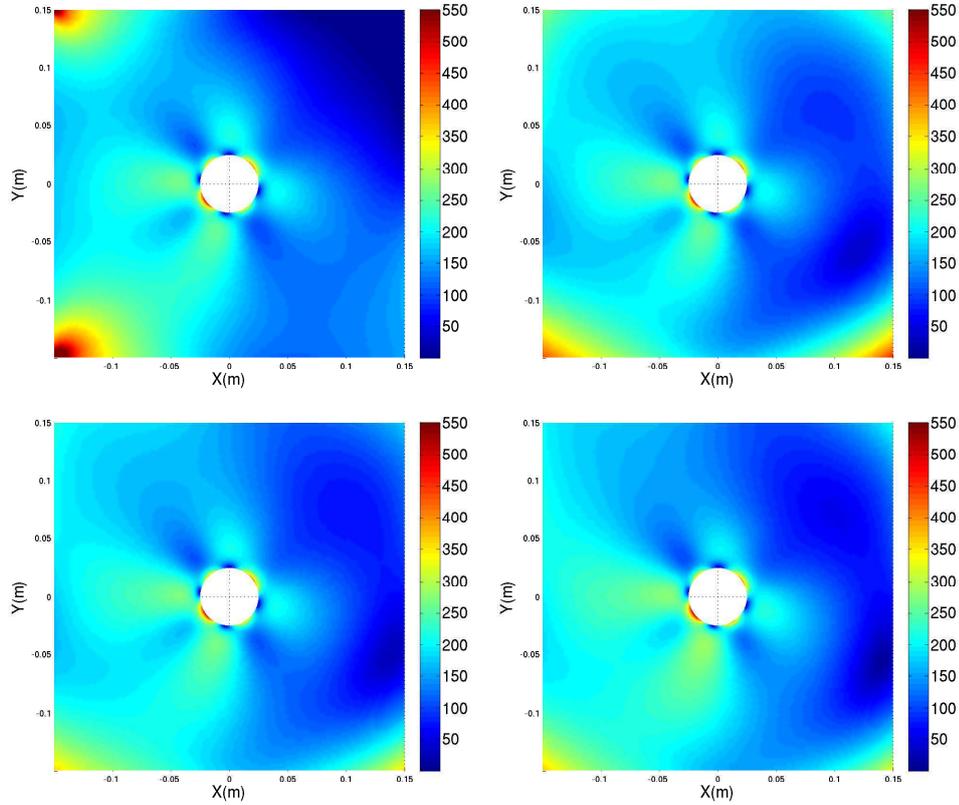


FIGURE 4.26 – Illustration des champs de contrainte de von Mises obtenu à partir du cas de référence approché en membrane et reconstruits à partir des chargements identifiés avec les rayons $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$ de la zone d'observation, respectivement de gauche à droite et de haut en bas.

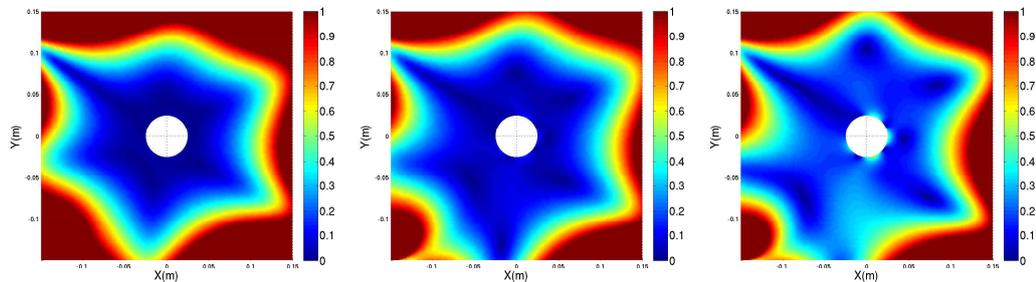


FIGURE 4.27 – Distribution de $\delta[\mathcal{S}_{mod}]$ pour des rayons de la zone d'observation égaux à $0,3b$, $0,5b$ et $0,7b$. La valeur de référence ε_{ref} est prise telle que la densité d'énergie associée soit inférieure à 80% des valeurs de densité d'énergie de Ω .

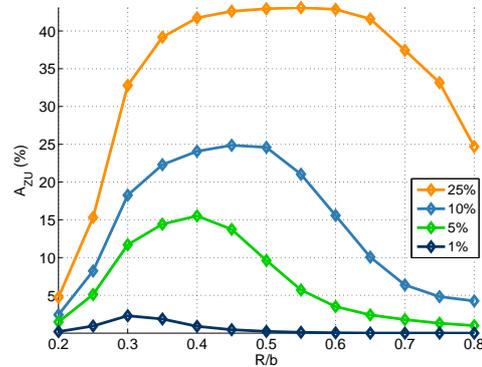


FIGURE 4.28 – Evolution de la zone utile A_{ZU} ($\% \Omega$) en fonction du rayon R de la zone d'observation pour différentes valeurs de $\delta[\mathcal{S}_{mod}]^{max}$, 25%, 10%, 5% et 1%.

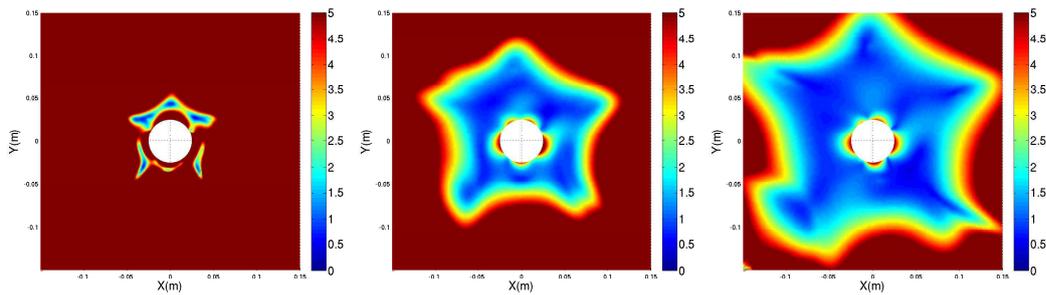


FIGURE 4.29 – Distribution du rapport d'écart type τ_{STD} dans les cas $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$, pour l'identification du cas de référence approché en membrane.

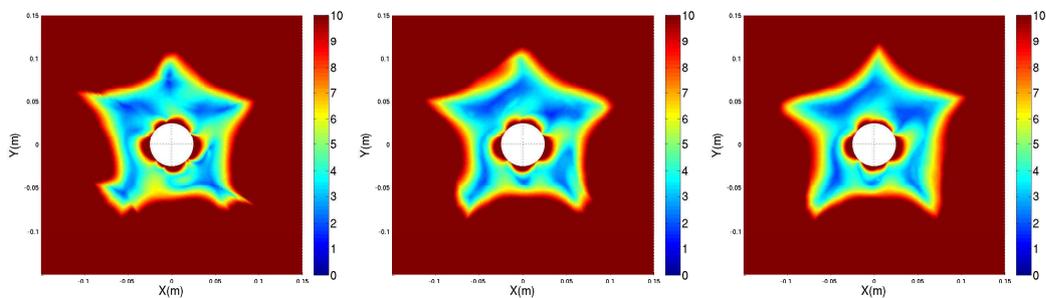


FIGURE 4.30 – Distribution du rapport τ_{MAX} dans les cas $\alpha = 0,6\%$, $\alpha = 2\%$ et $\alpha = 10\%$, pour l'identification du cas de référence approché en membrane avec $R = 0,5b$.

4.5 Applications aux structures complexes

4.5.1 Construction des bases de chargement

Nous proposons de construire des bases de chargement pour des structures complexes à partir des bases de chargement des plaques élémentaires. Soit Ω une structure quelconque modélisée par un assemblage de plaques quelconques. Cette structure possède des bords à chargement connu ou nul et des bords à chargement inconnu. Les bases de chargement globales pour cette structure sont définies de la manière suivantes :

- Construction de domaines étoilés ou de domaines étoilés équivalents à partir des seuls bords à chargement inconnu de la structure complexe.
- Définition des bases de chargement associées à ces domaines étoilés.
- Construction d'une base de chargement globale à partir des restrictions des bases de chargement de chaque domaine étoilé sur les bords à chargement inconnu de la structure complexe. Cette base de chargement globale est obtenue telle qu'elle respecte l'équilibre de la structure complexe.

Les deux premières étapes de cette méthode sont illustrées sur la figure 4.31 qui représente les domaines étoilés équivalents aux seuls bords à chargement inconnu, $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ et $\partial\Omega_3$. Ces chargements inconnus sont alors notées \underline{F}_1 , \underline{F}_2 et \underline{F}_3 et s'expriment à partir des bases de chaque domaine étoilé. Les bases de chargement

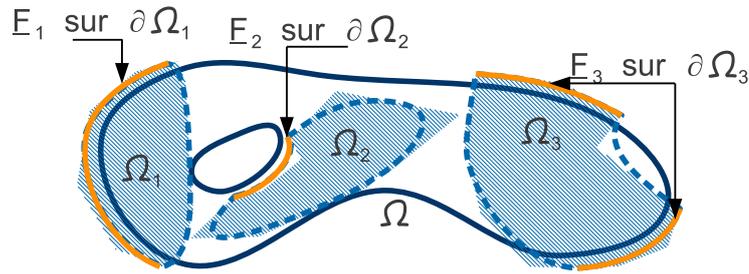


FIGURE 4.31 – Schématisation de la structure Ω soumise aux chargements inconnus \underline{F}_1 , \underline{F}_2 et \underline{F}_3 sur les bords $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ et $\partial\Omega_3$. Ces bords sont alors utilisés pour définir les domaines étoilés équivalents Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 nécessaires à la définition des bases de chargement dont sont issues les bases de chargement globales.

globales sont alors obtenues à partir de l'expression de l'équilibre de la structure complexe qui se met sous la forme générale :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{F}_b dS + \int_{\Omega} \underline{f}_d d\Omega = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{P_r} \alpha_i \int_{\partial\Omega_r} \underline{F}_b^i dS + \int_{\partial\Omega \setminus \cup \partial\Omega_r} \underline{F}_b dS + \int_{\Omega} \underline{f}_d d\Omega = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{F}_b dS + \int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{f}_d d\Omega = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{P_r} \alpha_i \int_{\partial\Omega_r} \underline{OM} \wedge \underline{F}_b^i dS + \int_{\partial\Omega \setminus \cup \partial\Omega_r} \underline{OM} \wedge \underline{F}_b dS$$

$$+ \int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{f}_d d\Omega = 0$$

où $(\underline{F}_b^i)_{1 \leq i \leq P_r}$ sont les vecteurs de la base de chargement associée au domaine étoilé équivalent Ω_r créé à partir du $\partial\Omega_r$ à chargement inconnu. $\partial\Omega \setminus \cup \partial\Omega_r$ est alors constitué de l'ensemble des bords à chargement connu de la structure Ω . Ces équations se

mettent alors sous la forme suivante :

$$\mathbb{H} \cdot \underline{A} = \underline{F}_d \quad \text{avec} \quad \underline{A} = {}^T [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_p] \quad \text{et} \quad p = \sum_{k=1}^r p_k$$

\underline{F}_d représente l'écart à l'équilibre des chargements connus. Les bases de chargement de la structure complexe sont ensuite obtenues à partir de la résolution de ce système linéaire qui s'écrit comme la somme d'une solution générale associée à l'équation homogène $\mathbb{H} \cdot \underline{A} = \underline{0}$ et d'une solution particulière associée à l'équation particulière $\mathbb{H} \cdot \underline{A} = \underline{F}_d$. Ces bases se mettent alors sous la forme :

$$\mathcal{S}_{\Omega}^{\perp} = \left\{ \underline{F} = \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \alpha_i^0) \underline{F}^i ; \underline{F}^i \in \bigcup \mathcal{S}_{\Omega_r}, \underline{A} \in \text{Ker}[\mathbb{H}] \text{ et } \mathbb{H} \cdot \underline{A}^0 = \underline{F}_d \right\}$$

La dimension de ces bases est alors de $p_c = p - q = \sum_{k=1}^r p_k - q$ où $q \leq 6$ est le nombre d'équations d'équilibre indépendantes. Les vecteurs $\underline{A} = {}^T [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_p]$ et $\underline{A}^0 = {}^T [\alpha_1^0 \ \alpha_2^0 \ \cdots \ \alpha_p^0]$ sont déterminés pour que les bases $\mathcal{S}_{\Omega}^{\perp}$ soient orthonormales au sens de l'énergie de déformation. Ces bases peuvent être dégénérées du fait de la redondance de certains effets induits par les conditions de chargement sur des bords associés à des domaines séparés. Ainsi la dimension des bases de chargement est $p_c \leq \sum_{k=1}^r p_k - q$. Cette dégénérescence potentielle est traitée dans le procédé d'orthonormalisation. Enfin, cette approche permet de conserver la méthode de Trefftz de définition de bases de chargement associées aux champs intérieurs des structures tout en conservant une approche globale du problème de structure qui traite de manière implicite l'assemblage des sous-domaines.

4.5.2 Conditions de bords libres

a/ Description du problème

Dans un premier temps, la méthode de construction de bases de chargement pour les structures complexes est utilisée pour ajouter des informations a priori sur des bords à chargement connu pour des plaques élémentaires. Ceci est le cas des bords libres, ie $\underline{F}_b = \underline{0}$, du cas de chargement de la figure 4.22. La plaque Ω est décomposée en deux plaques Ω_1 et Ω_2 . Une base de chargement de type Trefftz est définie sur Ω_1 tandis que les chargements connus sur les bords de Ω_2 sont utilisés comme cela est illustré sur la figure 4.32. Sur cet exemple, l'équilibre de la structure

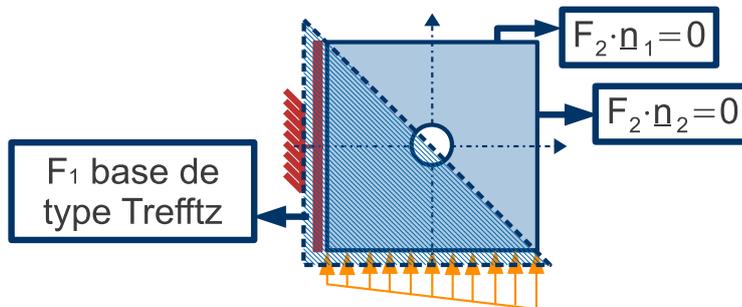


FIGURE 4.32 – Schématisation des plaques élémentaires Ω_1 et Ω_2 associées à la structure Ω et de leurs bases de chargement respectives, F_1 et F_2 .

globale se met sous la forme :

$$\mathbb{H}\underline{F}_1 = \underline{0}$$

La base de chargement associée à la structure complexe correspond alors à une restriction de la base de chargement définie sur la plaque élémentaire comme celle utilisée dans la section précédente. La dimension de la base correspondante est de $p_c = p - 3$.

b/ Mise en œuvre

Cette restriction de la base de chargement a été faite sur des plaques étoilées et sur des plaques trouées. Les conditionnements des opérateurs \mathbb{G} sont réduits dans les deux cas, jusqu'à un facteur 10 pour $R = 0,2b$, et les solutions identifiées sont considérablement améliorées pour un même degré polynomial des bases considérées. Ces résultats sont illustrés dans la suite sur les seules plaques trouées.

Cette réduction du conditionnement de \mathbb{G} est illustré sur la figure 4.33 dans le cas d'une plaque trouée. Ce conditionnement optimal est obtenu pour une distribution des capteurs différente de celle de la base non réduite. Cette distribution des capteurs tend à se rapprocher des seuls bords contenant les fonctions de chargement de la base. La diminution de ce conditionnement signifie que la sensibilité des solutions reconstruites aux erreurs aléatoires est réduite comme cela est illustré sur la figure 4.34. Cette figure montre aussi que les zones utiles dans lesquelles $\tau_{STD} \leq 1$ sont considérablement agrandies par la prise en compte des bords libres.

Enfin, les figures 4.35 et 4.36 montrent que la qualité des champs reconstruits à partir de la base de chargement réduite est considérablement améliorée par rapport au cas de la base de chargement sans bords libres. Ce résultat est confirmé par la figure 4.37 qui montre l'agrandissement des zones utiles pour des niveaux d'erreurs donnés. De plus, la base réduite diminue le nombre de capteurs nécessaire à l'identification tout en conservant les mêmes résultats que ceux présentés pour le conditionnement et la sensibilité aux erreurs aléatoire et de modélisation. Ce résultat est illustré sur la figure 4.37.

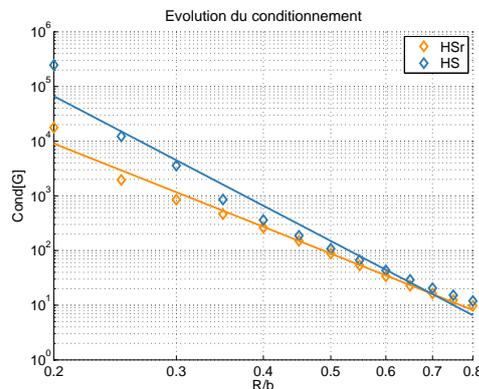


FIGURE 4.33 – Evolution de $Cond[\mathbb{G}]$ en fonction de R pour $n = 66962$ et $m = 5 \times 3$ pour la base de chargement standard (HS) et la base de chargement réduite (HSr).

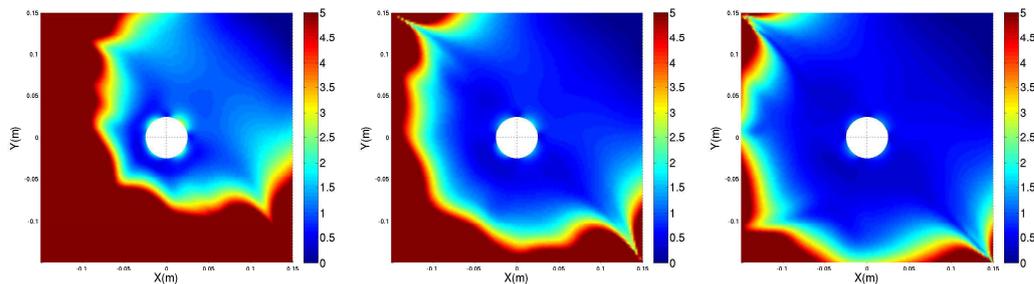


FIGURE 4.34 – Distribution du rapport d'écart type τ_{STD} dans les cas $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$ pour l'identification du cas de référence à partir de la base de chargement réduite.

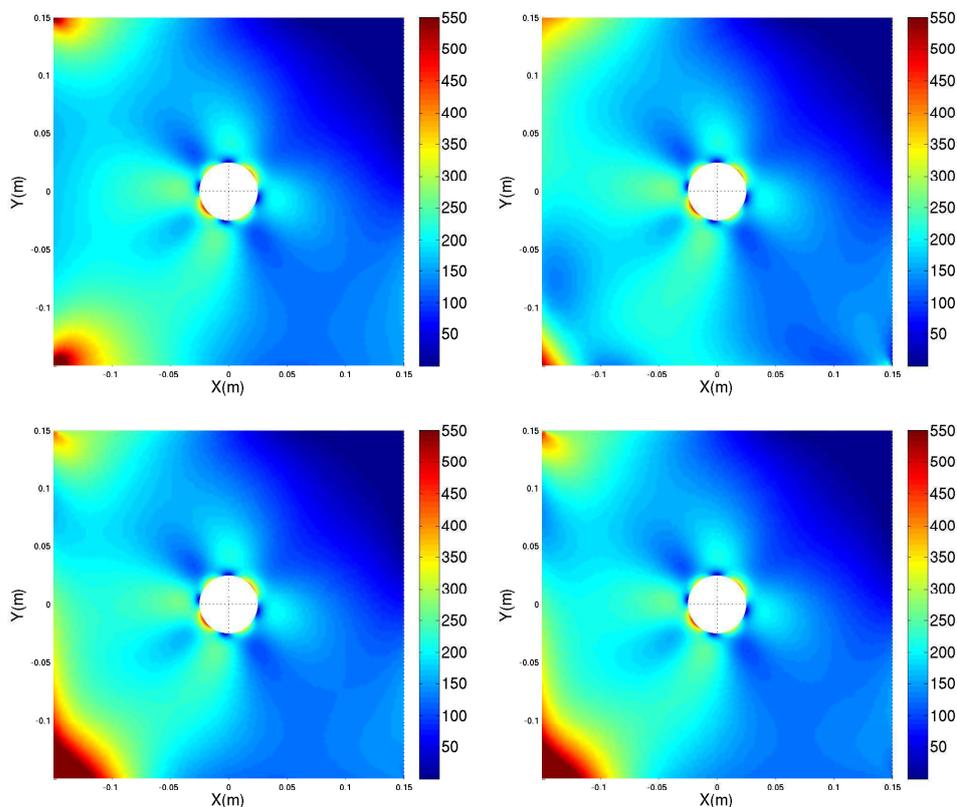


FIGURE 4.35 – Illustration des champs de contrainte de von Mises obtenu à partir du cas de référence approché en membrane par la base de chargement réduite et reconstruits à partir des chargements identifiés avec les rayons $R = 0,3b$, $R = 0,5b$ et $R = 0,7b$ de la zone d'observation, respectivement de gauche à droite et de haut en bas.

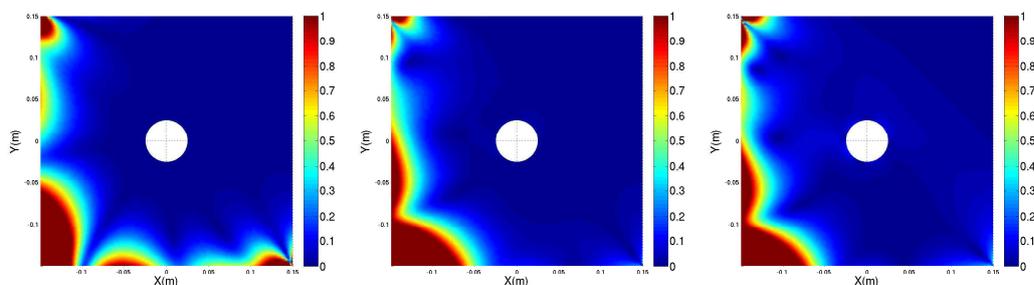


FIGURE 4.36 – Distribution de $\delta[\mathcal{L}_{mod}]$. La valeur de référence ε_{ref} est prise telle que la densité d'énergie associée soit inférieure à 80% des valeurs de densité d'énergie de Ω .

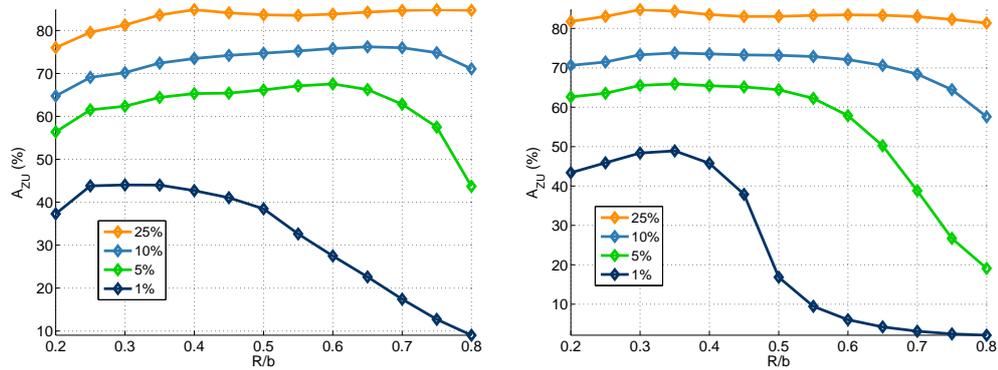


FIGURE 4.37 – Evolution de la zone utile A_{ZU} ($\% \Omega$) dans le cas de la base de chargement réduite pour les configurations à 5 capteurs (gauche) et 4 capteurs (droite) pour des valeurs de $\delta[\mathcal{S}_{mod}]^{max}$ égales à 25%, 10%, 5% et 1%.

4.5.3 Assemblage de plaques

a/ Description du problème

La méthode de construction d'une base de chargement sur une structure complexe est mise en œuvre sur une structure Ω en L . Cette structure est encadrée sur l'un de ses bords et est soumise à une distribution d'effort sur un autre bord comme illustré sur la figure 4.38. Cette structure est décomposée en plusieurs plaques élémentaires afin de définir une base de chargement globale. Les décompositions considérées sont illustrées sur la figure 4.38.

Dans un premier temps, la structure complexe est décomposée en trois domaines contenant l'ensemble des bords extérieurs dans Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 . Sur chacun de ces domaines, nous utilisons une base de type Trefftz de degré 1 ce qui correspond au total à $7 \times 3 - 3 = 18$ vecteurs de chargement pour la base de chargement globale. Ainsi, six capteurs sont nécessaires à la résolution du problème. Ces capteurs sont répartis par deux sur chaque domaine. Dans un second temps, nous utilisons une décomposition associée aux seuls bords chargés de la structure complexe. Nous utilisons une base de type Trefftz sur les domaines Ω_1 et Ω_2 comme illustrés sur la figure 4.38. Cette décomposition correspond à une base de chargement global de dimension $11 \times 2 - 3 = 19$ a priori, le degré polynomial des bases de chaque domaine est de 2. Cependant, une dégénérescence de cette base est obtenue ce qui diminue la dimension de la base complète à 14. Ainsi, seuls cinq capteurs sont nécessaires pour identifier cette base de chargement. Trois capteurs sont répartis sur Ω_1 et les deux capteurs restant sont positionnés sur Ω_2 . La comparaison de ces deux décompositions met en avant l'intérêt de l'utilisation des connaissances a priori sur certaines parties de la structure. Enfin, la qualité et la stabilité des solutions sont évaluées en fonction du rayon d'observation comme illustré sur la figure 4.39 pour les deux bases de chargement.

b/ Mise en œuvre

Les figures 4.40 et 4.41 montrent l'évolution des erreurs de modélisation des solutions reconstruites à partir des bases de chargement respectivement avec et sans prise en compte des bords libres de la structure. La base de chargement incluant les

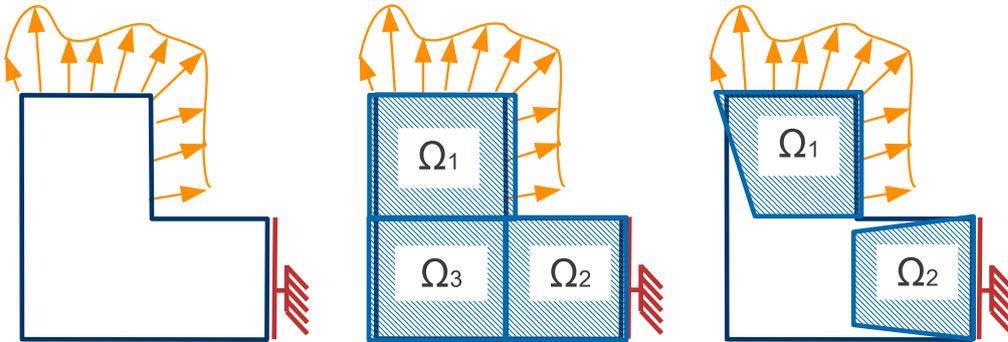


FIGURE 4.38 – Shématisation de la structure complexe en L et schématisation des configurations de résolution considérées associées à une décomposition de la structure complexe pour la définition des bases de chargement.

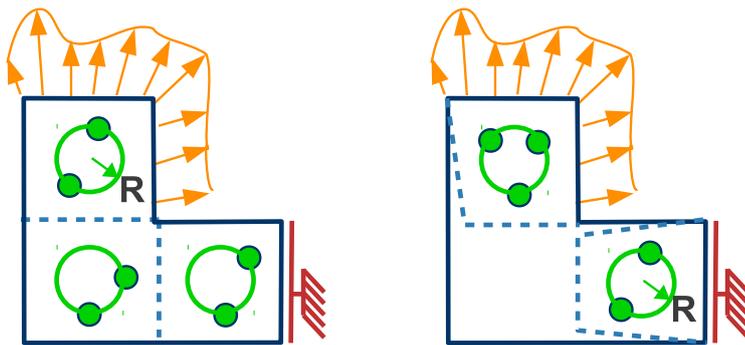


FIGURE 4.39 – Shématisation du positionnement des capteurs en fonction du rayon d'observation dans les cas des bases de chargement sans et avec prise en compte des bords libres.

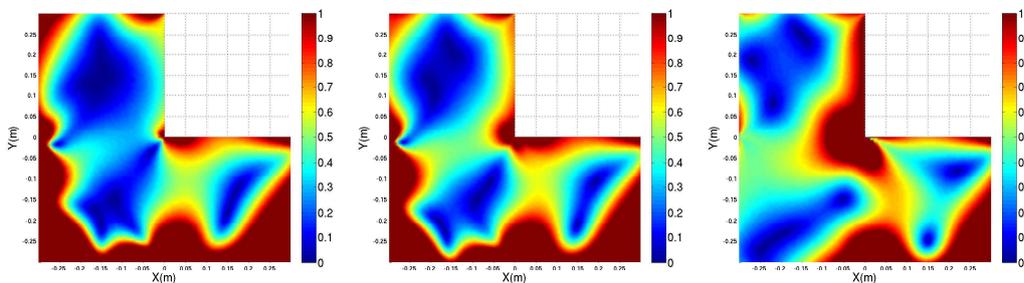


FIGURE 4.40 – Distribution de $\delta[\mathcal{S}_{mod}]$ les rayons d'observation $0,2b$, $0,4b$ et $0,65b$ pour la base de chargement sans prise en compte des bords libres. La valeur de référence ϵ_{ref} est prise telle que la densité d'énergie associée soit inférieure à 80% des valeurs de densité d'énergie de Ω .

bords libres améliore considérablement la qualité de la solution reconstruite comme dans le cas des plaques. De plus, bien que le conditionnement de la base définie sur l'ensemble des bords de la structure soit inférieure à celui de la base incluant les bords libres, la sensibilité aux erreurs aléatoires est plus faible dans le cas de la base avec bords libres. Ce résultat est illustré sur les figures 4.42 et 4.43 qui montrent l'évolution de τ_{STD} . L'aire des zones utiles telles que $\tau_{STD} \leq 1$ est plus importante dans le cas de la base de chargement incluant les bords libres.

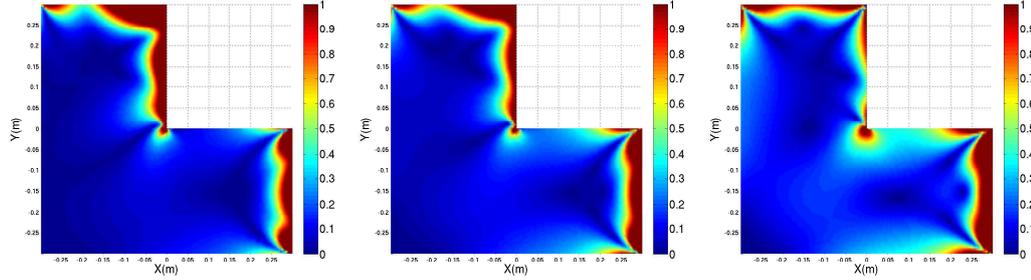


FIGURE 4.41 – Distribution de $\delta[\mathcal{S}_{mod}]$ pour les rayons d'observation $0,2b$, $0,4b$ et $0,65b$ pour la base de chargement incluant les bords libres. La valeur de référence ϵ_{ref} est prise telle que la densité d'énergie associée soit inférieure à 80% des valeurs de densité d'énergie de Ω .

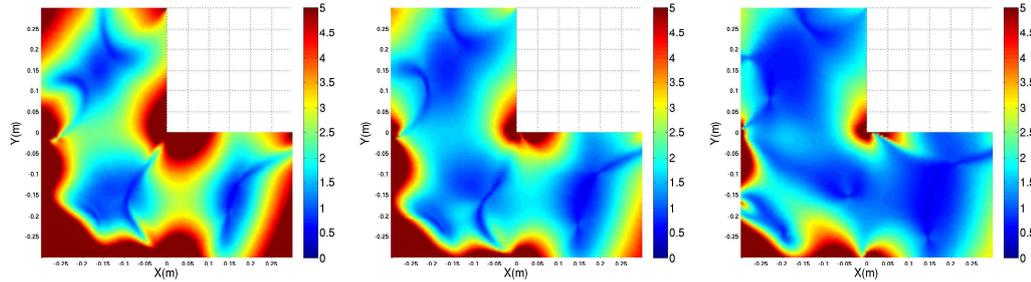


FIGURE 4.42 – Distribution du rapport d'écart type τ_{STD} pour des rayons d'observation de $0,3b$, $0,5b$ et $0,7b$ dans le cas de la base sans les bords libres.

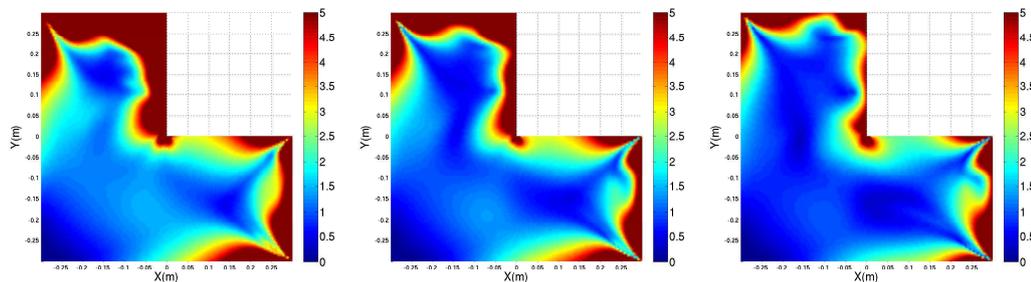


FIGURE 4.43 – Distribution du rapport d'écart type τ_{STD} pour des rayons d'observation de $0,3b$, $0,5b$ et $0,7b$ dans le cas de la base incluant les bords libres.

4.5.4 Conclusion

Les exemples traités dans cette partie valident la méthode proposée pour la construction de bases de chargement équilibrées et liées aux effets intérieurs dans

le cas de structures complexes. La prise en compte des seules bords chargés des structures complexes et le respect de l'équilibre global donnent des bases particulièrement bien adaptées au problème de reconstruction de champs. Ces bases réduisent les erreurs de modélisation pour une dimension donnée ainsi que le nombre de capteurs nécessaire à la reconstruction. Ce résultat est d'une grande importance pour les applications de surveillance des structures envisagées où les reconstructions de champs sont obtenues à partir d'un nombre restreint de capteurs.

Enfin, les travaux complémentaires envisagés sont l'application de la méthode aux assemblage de plaques couplant flexion et traction ainsi que la définition d'algorithmes d'optimisation du positionnement des capteurs.

4.6 Conclusion

L'application de la méthode de reconstruction de champs à partir de l'identification des paramètres de chargement est illustrée sur les plaques. Ces structures présentent un intérêt particulier que ce soit pour le suivi de la forme des structures ou que ce soit pour le suivi des distributions de contrainte. Nous avons défini dans un premier temps des bases de chargement issues des solutions analytiques du problème de plaque. Ces solutions sont définies sur des domaines étoilés seulement. Nous avons ensuite étendu ces bases de chargement aux plaques quelconques, ce qui permet de conserver la relation entre l'évolution des champs mécaniques intérieurs et la dimension de ces bases. Pour cela nous avons constaté que les champs près des bords de ces plaques quelconques contenant des inclusions ou des singularités sont identiques aux champs des plaques étoilées ayant les mêmes frontières extérieures. Ainsi, les bases de chargement construites sur les domaines étoilés équivalents sont utilisées pour définir des bases de chargement sur les domaines quelconques. Cet aspect permet de résoudre les problèmes de localisation liés à l'utilisation de fonctions de chargement quelconques. Les résultats obtenus pour la surveillances des plaques trouées montrent que cette approximation donne une qualité suffisante des solutions du problème inverse. Ainsi, comme pour les plaques étoilées, la sensibilité aux erreurs de mesures est limitée dans la zone d'observation. Cependant, l'influence des chargements associé aux faibles dimensions dégrade légèrement la qualité des solutions aux bords des inclusions et des singularités.

Nous avons ensuite proposé une méthode d'extension de ces bases aux assemblages de plaques élémentaires définies par les bords à chargement inconnus des structures complexes. Sur chaque plaque élémentaire, une base de chargement de type Trefftz est définie et l'équilibre global des structures complexes permet d'extraire des bases de chargement globales et équilibrées. Cette méthode permet de traiter le cas des structures complexes ainsi que d'ajouter des conditions a priori sur le chargement de certaines parties de la structure. Nous avons alors obtenu une méthode systématique de définition des bases de chargement des structures complexes respectant l'équilibre et associées leurs effets intérieurs. Nous avons ensuite validé l'application de cette méthode dans le cas d'une structure élémentaire avec des bords libres et dans le cas d'un assemblage de plaques en contraintes planes.

Enfin, les travaux complémentaires à mener concernent les assemblages de plaques hors plan ainsi que des méthodes systématiques d'optimisation du positionnement des capteurs.

Conclusion

Ces travaux de thèse concernent le suivi des structures et de leurs environnements en service. Cet aspect est lié à la thématique de la surveillance des structures avec pour objectif l'amélioration des performances en donnant aux utilisateurs des informations en temps réel sur les structures et leurs environnements. Cette thématique permet aussi d'accroître les connaissances générales relatives aux conditions d'utilisation.

Nous nous sommes dans un premier temps intéressés aux aspects technologiques de cette thématique en étudiant les systèmes de mesure embarqués et leurs environnements d'utilisation à partir d'essais in-situ sur des structures nautiques. Cette étude a mené à la définition des possibilités de mesure c'est-à-dire aux grandeurs observables, leurs conditions d'obtention et leurs interprétations. A partir de cette réflexion, nous avons pu définir un cadre scientifique précis pour la résolution du problème inverse associé à la surveillance des structures. Ces résultats nous ont aussi permis de mieux appréhender les besoins et les possibilités sur lesquels axer les recherches futures.

Sous les contraintes technologiques des SME et de leurs conditions d'utilisation, nous avons choisi de nous intéresser seulement à des formulations conduisant à des identifications linéaires directes afin de respecter les contraintes de temps réel imposées par l'utilisation. De plus, l'objectif d'évaluation des performances des structures autorise une modélisation linéaire et statique de leur comportement. Le problème inverse associé à la surveillance des structures consiste alors à reconstruire les champs mécaniques ainsi que les conditions aux limites à partir de mesures de déformation réparties dans la structure. La connaissance a priori du comportement de la structure permet de se restreindre à la seule identification des conditions aux limites. Les champs mécaniques sont ensuite directement calculés à partir de ces conditions identifiées. De plus, ces conditions aux limites sont exprimées en chargement seulement ce qui est la conséquence de la mesure des seules déformations ainsi que des incertitudes de déplacement dans les liaisons entre les structures et leurs environnements. Les déplacements se limitent au choix du mouvement de corps rigide qui définit le repère de référence de la résolution. Enfin, le principe de Saint-venant permet a priori de limiter le nombre de paramètres nécessaires à la description du chargement tout en conservant une bonne description des champs mécaniques intérieurs. Cette notion est illustrée sur un exemple de solide en contraintes planes. Ainsi, cette approche sépare le conditionnement de l'opérateur d'identification du nombre de degrés de liberté de la structure ce qui autorise la reconstruction de champs mécaniques complexes à partir d'un faible nombre de paramètres de chargement. La principale difficulté de cette méthode de résolution est alors le choix des

bonnes bases d'approximation du chargement et l'optimisation du conditionnement de l'opérateur d'identification.

Cette méthode est appliquée dans un premier temps aux poutres. Nous utilisons une description élémentaire de ces structures pour définir de manière systématique les bases de chargement ainsi que les positionnements des capteurs. Les bases de chargement sont construites à partir des solutions analytiques des équations de la mécanique de ces structures projetées sur les bords des structures considérées. Les bases de chargement ainsi obtenues sont alors équilibrées et reliées à l'évolution des champs mécaniques intérieurs. A partir de ces bases de chargement, nous validons la stabilité de la résolution du problème inverse en quantifiant les erreurs des solutions reconstruites. Ces exemples illustrent la régularisation du problème de reconstruction de champ à partir de l'identification des conditions de chargement. Les essais effectués sur une poutre élémentaire à partir d'un banc de flexion valident aussi les différents résultats obtenus et illustrent les notions d'erreur de modélisation et aléatoire qui sont présentes dans ce problème. Ces essais montrent l'intérêt apporté par le recalage des conditions aux limites pour améliorer la prédiction du comportement des structures. Cet aspect est aussi développé lors d'un essai de rupture effectué sur une pale d'hélicoptère dont l'exploitation directe des observations ne permet pas de conclure quant aux raisons des écarts importants entre la simulation et l'expérience. Ces travaux mettent en avant l'intérêt de ce type de méthode pour valider ou infirmer des essais de certification sur structures. Cet aspect est actuellement un des axes de travail pour l'application de la méthode d'identification proposée.

La dernière partie de cette thèse est dédiée à l'application de la reconstruction de champ sur des plaques. Nous traitons dans un premier temps le cas des plaques étoilées qui permet de se ramener aux cas des poutres en utilisant une famille complète de solutions analytiques des équations de la mécanique. Ces solutions sont projetées sur le bord de la structure pour obtenir une base complète d'approximation des conditions de chargement qui est directement liée à l'évolution des champs mécaniques intérieurs. Les résultats de stabilité du problème inverse sont aussi retrouvés pour ces structures. Nous utilisons ensuite ces résultats pour construire des bases de chargement associées à des plaques quelconques contenant notamment des inclusions et des singularités. Des connaissances a priori sur le chargement de ces inclusions permettent de se limiter aux seuls bords dont le chargement est inconnu et de définir des structures étoilées de référence pour construire des bases de chargement. Bien que ces bases ne soient pas complètes, les résultats obtenus montrent que les solutions sont seulement faiblement dégradées. Cet exemple est représentatif des applications de la méthode à la surveillance directe des champs mécaniques, que ce soit pour obtenir la forme de structures ou les distributions de contrainte. De plus, la méthode proposée permet d'éloigner les capteurs des zones de forts gradients de champ ce qui accroît la fiabilité des mesures. Enfin, nous proposons une méthode de réduction des bases de chargement qui améliore effectivement la résolution des problèmes de plaques étoilées et qui permet d'enrichir les bases des plaques quelconques. Cette méthode de réduction est obtenue par la restriction de la base de chargement à une partie du bord de la structure dont le chargement est inconnu. Des plaques élémentaires sont définies sur ces bords et l'équilibre global de la structure donne une base de chargement global. Le cas des structures complexes modélisées par des assemblages de plaques est traité par cette approche. Ainsi, les

bases de chargement et les positions des capteurs sont obtenus par décomposition des structures complexes tandis que la résolution du problème par éléments finis est faite sur la structure globale.

Références bibliographiques

- [1] R. Adams and J. Doyle. Multiple force identification for complex structures. *Experimental Mechanics*, 42(1) :24–36, 2002. [10](#)
- [2] H. Ahmadian, J. E. Mottershead, and M. I. Friswell. Boundary condition identification by solving characteristic equations. *Journal of Sound and Vibration*, 247(5) :755–763, Nov. 2001. [10](#)
- [3] A. Alarcon, C. Bodel, and M. Bonnet. A coupled unscented kalman filter and modified error in constitutive relation technique for structural dynamics identification. In *Proceddings of the 8th Conference on Structural Dynamics*, 2011. [10](#)
- [4] O. Allix and P. Vidal. A new multi-solution approach suitable for structural identification problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :2727–2758, 2002. [10](#)
- [5] F. Amiot, F. Hild, and J. Roger. Identification of elastic property and loading fields from full-field displacement measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :2863–2887, 2007. [60](#)
- [6] S. Avril, M. Bonnet, A. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, and F. Pierron. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381–402, July 2008. [10](#)
- [7] S. Bakker. Using microtomography and numerical predictions for the investigation of failed composites. Master’s thesis, Technical University of Delft, 2010. [11](#)
- [8] C. Baley and M. Cailler. Elements sur le comportement expérimental et numérique de la structure d’un voilier de 7.70m en cours de navigation. In *La construction navale en composite*, pages 436–445, Paris, 1992. [16](#)
- [9] J. Bartley-Cho, D. Wang, and J. Kudva. Shape estimation of deforming structures. In *42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference and Exhibit*. AIAA Inc., 2001. [10](#), [107](#)
- [10] J.-L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis : Solides élastiques*. Presses Université Laval, 1990. [9](#)
- [11] A. Bazergui, T. Bui-Quoc, A. Biron, G. McIntyre, and C. Laberge. *Résistance des Matériaux*. 1985, école polytechnique de montréal édition. [61](#)
- [12] H. B. Ben Dhia. Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(12) :899–904, 1998. [9](#)

- [13] P. Benner, D. C. Sorensen, and V. Mehrmann, editors. *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, volume 45. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005. [9](#)
- [14] A. Bensoussan and etc. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. Elsevier Science Ltd, July 1978. [9](#)
- [15] R. J. Bermudez. Method of monitoring/measuring rigging loads. Patent us2003/0074978a1, 2003. [16](#)
- [16] P. Berring, K. Branner, C. Berggreen, and H. W. Knudsen. Torsional performance of wind turbine blades-Part 1 : Experimental investigation. In *16th International Conference on Composite Materials*, 2007. [43](#)
- [17] P. Bogert, E. Haugse, and R. Gehrki. Structural shape identification from experimental strains using a modal transformation technique. In *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference and Exhibit*. AIAA Inc., 2003. [10](#), [107](#)
- [18] C. Bois, P. Herzog, and C. Hochard. Monitoring a delamination in a laminated composite beam using in-situ measurements and parametric identification. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4-5) :786–805, 2007. [11](#)
- [19] M. Bonnet. *Boundary integral equation methods for solids and fluids*. Wiley, 1995. [9](#)
- [20] M. Bonnet, H. Bui, and A. Constantinescu. Variational principles and exploitation of field measurements in elasticity. *Mécanique & Industries*, 4(6) :687–697, Nov. 2003. [10](#)
- [21] M. Bonnet and A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2) :R1–R50, 2005. [10](#), [42](#), [45](#)
- [22] C. Brebbia, J. Telles, and L. Wrobel. *Boundary element techniques - Theory and applications in engineering*. Springer, 1984. [9](#)
- [23] X. Cao, Y. Sugiyama, and Y. Mitsui. Application to artificial neural network to load identification. *Computers and Structures*, 69 :63–78, 1998. [10](#), [53](#)
- [24] P. Casari. Mesure des sollicitations mécaniques sur les structures composites sandwich : applications aux multicoques transocéaniques et aux class-americas. In *Journées Extensométrie 2003*, 2003. [16](#)
- [25] C. Chang and C. Sun. Determining transverse impact force on a composite laminate by signal deconvolution. *Experimental Mechanics*, 29(4) :414–419, 1989. [10](#)
- [26] F. Chang. Structural health monitoring : Quantification, validation, and implementation. In *Proceedings of the 6th International Workshop on Structural Health Monitoring*. DESTech Publications, Inc., 2007. [10](#)
- [27] F. Chang. Structural health monitoring from system integration to autonomous systems. In *Proceedings of the 7th International Workshop on Structural Health Monitoring*. DESTech Publications, Inc., 2009. [10](#)
- [28] J. Charles. Mesure d’un profil de voile à bord du Class-America areva challenge. Rapport interne, Université de la Méditerranée, 2006. [15](#), [17](#), [37](#)

- [29] J. Charles, S. Miot, S. Bakker, D. Martini, and C. Hochard. Optimizing the use of laminated composite structures from multiscale damage models to damage measurements. In *Proceedings of the 17th JNC*, 2011. 11
- [30] J. Chock and R. Kapania. Load updating for finite element models. *AIAA Journal*, 41(9) :1667–1673, 2003. 10, 53, 108
- [31] W. S. Choi and F. Chang. Identification of impact force and location using distributed sensors. *AIAA Journal*, 34(12) :13–6142, 1996. 10
- [32] D. Claire, F. Hild, and S. Roux. A finite element formulation to identify damage fields : the equilibrium gap method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 :189–208, 2004. 10, 42
- [33] R. Clough. The finite element method in plane stress analysis. In *Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, 1960. 9
- [34] N. Cottin, H. Felgenhauer, and H. G. Natke. On the parameter identification of elastomechanical systems using input and output residuals. *Ing-Arch*, 54 :378–387, 1984. 10, 42
- [35] J. Courbon. *Résistance des matériaux*. Dunod, 1965. 9, 61
- [36] M. Curry. *L'aérodynamique de la voile et l'art de gagner les régates*. Chiron edition, 1925. 15
- [37] J. Doyle. Further developments in determining the dynamic contact law. *Experimental Mechanics*, 24 :265–270, 1984. 10
- [38] J. Doyle. *Wave propagation in structures*. Springer-Verlag edition, 1997. 9
- [39] N. Eady and A. M. Gallon. Sail shape measurement apparatus. Patent gb2400171a, Insensys Ltd, 2005. 16
- [40] M. Enzmann, C. Linz, and T. Theis. Robust shape control of flexible structures using strain-measurement-gauges and piezoelectric stack actuator. 1998. 10
- [41] C. Farhat and F. Hemez. Updating finite element dynamics models using an element-by-element sensitivity methodology. *AIAA Journal*, 31(9) :1702–1711, 1993. 10
- [42] S. Fassois. Identification, model-based method. In *Encyclopedia of vibration*. Associated press edition, 2001. 10
- [43] S. Fassois and J. Sakellariou. Time-series methods for fault detection and identification in vibrating structures. *Philosophical Transaction of the Royal Society A*, 365 :411–448, 2007. 10
- [44] P. Feissel and O. Allix. Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(13-16) :1968–1983, Mar. 2007. 10
- [45] F. Fossati and D. Vitalone. Sailboat rigging and fitting design optimization : an experimental approach. In *17th International Symposium on Yach Design and Yacht Construction*, 1999. 16
- [46] A. Fregolent, W. D'Ambrogio, P. Salvini, and A. Sestieri. Regularisation techniques for dynamic model updating using input residual. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2(3) :171–200, Mar. 1996. 10

- [47] S. Freids. An image processing based system for the three dimensional sail shape analysis. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1991. [16](#)
- [48] M. Friswell and J. Mottershead. *Finite element model updating in structural dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1995. [10](#), [42](#)
- [49] C. Fritzen and P. Kraemer. Methods for self-diagnosis of smart structures based on dynamical properties. In *Proceeding on International Workshop on Smart Materials and Structures*, 2007. [10](#)
- [50] A. Galucio, P. Jetteur, D. Trallero, and J. Charles. Toward numerical fatigue prediction of composite structures : application to helicopter rotor blades. In *3rd ECCOMAS Thematic Conference on Mechanical Response of Composites*, 2011. [94](#)
- [51] W. Gawronski and H. G. Natke. On ARMA models for vibrating systems. *Probabilistic Engineering mechanics*, 1(3) :150–156, 1986. [10](#)
- [52] S. A. Gedeon. Sailboat and crew performances optimization system. Patent us6308649b1, 2001. [16](#)
- [53] S. Granger and L. Perotin. An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure part 1 : Theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(1) :53–65, 1999. [10](#)
- [54] W. Graves, T. Barbera, J. B. Braun, and L. Imas. Measurement and simulation of pressure distribution on full size sails. In *3rd High Performance Yacht Design Conference*, volume 2, page 4, 2008. [16](#)
- [55] M. Grédiac, E. Toussaint, and F. Pierron. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method : principle and definition. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :2691–2705, 2002. [10](#), [42](#)
- [56] H. Hansen, P. Jackson, and K. Hochkirch. Comparison of wind tunnel and full-scale aerodynamic sail force measurements. In *High Performance Yacht Design Conference*, 2002. [16](#)
- [57] J. Hausen, J. Talvia, R. Wiefelsputt, and U. Heinemann. Stresses on sailing yachts at sea. *Reports in Applied Measurement*, 7(2), 1991. [16](#)
- [58] C. Hauser, B. Walz, P. Mainçon, and C. Barnardo. Application to inverse FEM to earth pressure estimation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44 :705–714, 2008. [10](#), [108](#)
- [59] M. Hentinen and G. Holm. Load measurements on the 9,4m sailing yacht 'saillab'. In *The International HISWA Symposium on Yacht Design and Yacht Construction*, 1994. [16](#)
- [60] J. S. Herman. A sail force dynamometer : design, implementation and data handling. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1988. [16](#)
- [61] C. Hochard. A trefftz approach to computational mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(15) :2367–2386, Apr. 2003. [107](#)

- [62] C. Hochard, P. Ladevèze, and L. Proslier. A simplified analysis of elastic structures. *European Journal of Mechanics A Solids*, 12(4) :509–535, 1993. [107](#), [112](#)
- [63] C. Hochard and Y. Thollon. A generalized damage model for woven ply laminates under static and fatigue loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 32(1) :158–165, 2010. [11](#)
- [64] E. Jacquelin and P. Hamelin. Force recovered from three recorded strains. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :73–88, 2003. [10](#)
- [65] M. P. W. Jones, R. D. G. Roberts, and I. Peirce. Structural member bend radius and shape sensor and measurement apparatus. Patent 04255194.5, Insensys Ltd, 2006. [16](#)
- [66] R. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82(Series D) :35–45, 1960. [10](#)
- [67] M. S. Karaś and A. P. Zieliński. Boundary-value recovery by the trefftz approach in structural inverse problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(7) :605–625, Dec. 2006. [10](#), [108](#)
- [68] D. E. Keyes, Y. Saad, and D. G. Truhlar. *Domain-based parallelism and problem decomposition methods in computational science and engineering*. SIAM, 1995. [9](#)
- [69] A. K. Klein. A comparison of experimental and theoretical sail forces. Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1990. [16](#)
- [70] M. Klinikov and C. P. Fritzen. An updated comparison of the force reconstruction methods. *Key Engineering Materials*, 347 :461–466, 2007. [10](#), [53](#)
- [71] S. Klute, R. Duncan, R. Fielder, G. Butler, J. Mabe, A. Sang, R. Seeley, and M. Raum. Fiber-optic shape sensing and distributed strain measurements on a morphing chevron. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. AIAA Inc., 2006. [10](#)
- [72] M. Kreuzer. High-precision measuring technique for strain gage transducers. *HBM*, 2001. [27](#)
- [73] P. Ladevèze and M. Reynier. FE modeling and analysis : a localization method of stiffness errors and adjustments of FE models. *Vibration Analysis Techniques and Applications*, pages 355–361, 1989. [10](#), [42](#)
- [74] S. Law, T. Chan, and Q. Zeng. Moving force identification : a time domain method. *Journal of Sound and Vibration*, 201(1) :1–22, 1997. [10](#), [53](#)
- [75] S. Lekhnitskii. *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1968. [9](#)
- [76] J. Li and R. Kapania. Load updating for non-linear finite element models. In *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference and Exhibit*. AIAA Inc., 2004. [10](#), [53](#), [108](#)
- [77] A. Lizotte and W. Lokos. Deflection based aircraft structural load estimation with comparison to flight. In *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference and Exhibit*. AIAA Inc., 2005. [10](#)

- [78] F. Louf, P. E. Charbonnel, P. Ladeveze, and C. Gratien. An updating method for structural dynamics models with unknown excitations. *Journal of Physics : Conference Series*, 135 :012065, Nov. 2008. 10
- [79] R. Mahnken and E. Stein. A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136(3-4) :225–258, 1996. 10
- [80] P. Manganelli, B. Wagemaker, and P. Wilson. Investigation of slamming load using lam patches on a scale model of an open60' class yacht. In *The International HISWA Symposium on Yacht Design and Yacht Construction*, 2002. 16
- [81] C. A. Marchaj. *Sailing Theory and Practice*. Dodd Mead, revised edition, 1964. 15, 16
- [82] I. Maria Viola and R. G. Flay. Full-scale pressure measurements on a sparkman and stephens 24-foot sailing yacht. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 98(12) :800–807, Dec. 2010. 16
- [83] M. Martin and J. Doyle. Impact force identification from wave propagation responses. *International Journal of Impact Engineering*, 18(1) :65–77, 1996. 10
- [84] T. Martin, J. Halderman, and G. Dulikravich. An inverse method for finding unknown surface tractions and deformations in elastostatics. *Computers and Structures*, 56(5) :825–835, 1995. 10, 108
- [85] Y. Masuyama and T. Fukasawa. Full scale measurement of sail force and the validation of numerical calculation method. In *The 13th Chesapeake Sailing Yacht Symposium*, 1997. 16
- [86] V. Melas. Functional approach to optimal experimental design. *Springer Science+Business Media Inc.*, 184, 2006. 66
- [87] G. W. Milton. *The Theory of Composites*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2002. 9
- [88] R. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18 :31–38, 1951. 9
- [89] S. Miot, C. Hochard, and N. Lahellec. A non-local criterion for modelling unbalanced woven ply laminates with stress concentrations. *Composite Structures*, 92(7) :1574–1580, 2010. 11
- [90] J. Mottershead and M. Friswell. Model updating in structural dynamics a survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2) :347–375, 1993. 10
- [91] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150, Sept. 1999. 9
- [92] P. Möller. Load identification through structural modification. *Journal of Applied Mechanics*, 66 :236–241, 1999. 10
- [93] S. Nakagiri and K. Suzuki. Finite element interval analysis of external loads identified by displacement inputs with uncertainty. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168 :63–72, 1999. 10, 53

- [94] M. Z. Nashed. Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations. In D. L. Colton and R. P. Gilbert, editors, *Constructive and Computational Methods for Differential and Integral Equations*, volume 430, pages 289–332. Springer Berlin Heidelberg, 1974. [39](#), [42](#)
- [95] H. G. Natke and C. Cempel. The symptom observation matrix for monitoring and diagnostics. *Journal of Sound and Vibration*, 248(4) :597–620, Dec. 2001. [10](#)
- [96] L. J. L. Nordström, H. Johansson, and F. Larsson. A strategy for input estimation with sensitivity analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(11) :2219–2246, Mar. 2007. [10](#)
- [97] S. Padmanabhan, J. Hubner, A. Kumar, and P. Ifju. Load and boundary condition calibration using full-field strain measurements. *Experimental Mechanics*, 46 :569–578, 2006. [10](#), [108](#)
- [98] E. Parloo, P. Verboven, P. Guillaume, and M. Van Overmeire. Force identification by means of in-operation modal models. *Journal of Sound and Vibration*, 262(1) :161–173, Apr. 2003. [10](#)
- [99] D. B. Peters. Determination of force coefficients for racing yacht sails using actual force measurements. Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1992. [16](#)
- [100] F. Pukelsheim. *Optimal designs of experiments*. John Wiley and Sons Inc., john wiley and sons inc. edition, 1993. [66](#)
- [101] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12 :69–76, 1945. [9](#)
- [102] A. Rossetti, R. Codeluppi, A. Golfarelli, M. Zagnoni, A. Talamell, and M. Tartagni. A PCB-embedded pressure sensor for wireless wind sail monitoring. *Procedia Engineering*, 5 :315–318, 2010. [16](#)
- [103] S. Roux and F. Hild. Digital image mechanical identification. *Experimental Mechanics*, 48 :495–508, 2008. [10](#), [42](#)
- [104] J. Réthoré. A fully integrated noise robust strategy for the identification of constitutive laws from digital images. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(6) :631–660, Nov. 2010. [10](#)
- [105] M. Salzmann, J. Pilet, S. Ilic, and P. Fua. Surface deformation models for nonrigid 3D shape recovery. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(8) :1481–1487, 2007. [10](#), [16](#), [17](#)
- [106] G. Saporta. *Probabilités, analyses des données et statistiques*. Editions technip edition, 2006. [53](#)
- [107] D. Schnur and N. Zabarás. Finite element solutions of 2D inverse elastic problems using spatial smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30 :57–75, 1990. [10](#), [108](#)
- [108] N. Sehlstedt. Construction of three-dimensional orthogonal surface basis functions and well-conditioned boundary traction vector estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(6-8) :631–651, Feb. 2004. [10](#)

- [109] S. Shkarayev, R. Krashantisa, and A. Tessler. An inverse interpolation method utilizing in-flight strain measurements for determining loads and structural response of aerospace vehicles. In *3rd International Workshop on Structural Health Monitoring*, Stanford, 2001. DesTech. [10](#), [108](#)
- [110] S. S. Simonian. Inverse problems in structural dynamics—I. theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(3) :357–365, Mar. 1981. [10](#)
- [111] B. F. Smith, P. E. Bjørstad, and W. Gropp. *Domain Decomposition : Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Mar. 2004. [9](#)
- [112] M. Spalatel-Lazar, F. Léné, and N. Turbé. Modelling and optimization of sails. *Computers & Structures*, 86(13-14) :1486–1493, July 2008. [17](#)
- [113] D. Tack. Composite damage expertise by coupling theoretical damage prediction with μ -computed tomography. Master’s thesis, Technical University of Delft, 2009. [11](#)
- [114] I. Takahashi. Identification for critical flutter load and boundary conditions of a beam using neural networks. *Journal of Sound and Vibration*, 228(4) :857–870, 1999. [10](#)
- [115] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimator*. SIAM edition, 2005. [10](#), [39](#)
- [116] A. Tessler and J. L. Spangler. A least-squares variational method for full-field reconstruction of elastic deformations in shear-deformable plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(2-5) :327–339, Feb. 2005. [10](#), [107](#)
- [117] A. Tikhonov and V. Arsenin. *Solution of ill-posed problems*. Winston, 1977. [10](#), [39](#), [108](#)
- [118] Timoshenko and Woinowsky-Krieger. *Théorie des plaques et coques*. Béranger, Paris, 1961. [9](#)
- [119] A. Toselli and O. Widlund. *Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory*, volume 34. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005. [9](#)
- [120] H. Tsunoda and Y. Senbokuya. Shape measurement of a flat stretched lightweight membrane for planar antenna structure. In *42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference and Exhibit*. AIAA Inc., 2001. [10](#)
- [121] E. Turco. Load distribution modelling for pin-jointed trusses by an inverse approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 165 :291–306, 1998. [10](#), [53](#)
- [122] D. Ucinski. *Measurement optimization for parameter estimation in distributed systems*. Technical university press zielona gora edition, 1999. [66](#)
- [123] T. Uhl. The inverse identification problem and its technical application. *Archive of Applied Mechanics*, 77(5) :325–337, Nov. 2007. [10](#)
- [124] S. Vanlanduit, P. Guillaume, B. Cauberghe, E. Parloo, G. De Sitter, and P. Verboven. On-line identification of operational loads using exogenous inputs. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1-2) :267–279, July 2005. [10](#)

- [125] D. Wasner and J. Pollien. Stress tests with strain gages on the "UBS-Switzerland" before her participation in the round the world race. *Reports in Applied Measurement*, 3(2), 1983. [16](#)
- [126] A. Wroblewski and A. P. Zielinski. Structural inverse problems solved by the t-element approach. *Institute of Fundamental Technological Research*, 13 :473–480, 2006. [10](#), [108](#)
- [127] C. Yen and E. Wu. On the inverse problem of rectangular plates subjected to elastic impact. part i : method development and numerical verification. *Journal of Applied Mechanics*, 62(3) :692–705, 1995. [10](#)
- [128] L. Yu and T. Chan. Recent research on identification of moving loads on bridges. *Journal of Sound and Vibration*, 305(1-2) :3–21, Aug. 2007. [10](#), [53](#)
- [129] B. Zarate and J. Caicedo. Finite element model updating : multiple alternatives. *Engineering Structures*, 2008. [10](#)
- [130] X. Zhao and Y. Xu. Finite element-based force identification of sliding support systems - part i theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 :229–248, 2006. [10](#), [108](#)
- [131] A. P. Zielinski and O. Zienkiewicz. Generalized finite element analysis with t-complete boundary solution functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 :509–528, 1985. [9](#)
- [132] O. Zienkiewicz and R. Taylor. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill edition, 1967. [9](#)

Mesures en service et reconstruction de champs sur structures

Resumé : ce manuscrit traite de la problématique de la surveillance des structures depuis la mesure en service jusqu'à la caractérisation des champs mécaniques.

La technologie des systèmes de mesure est étudiée dans la première partie. Les spécifications d'un système de mesure embarqué sont identifiées à partir d'essais en service sur des structures et à partir des applications envisagées. Ces spécifications définissent les hypothèses de résolution du problème inverse lié à l'interprétation des mesures.

La deuxième partie présente la formulation du problème inverse de surveillance des structures à partir des hypothèses précédemment énoncées. Le principe est de reconstruire les champs mécaniques à partir de l'identification des conditions aux limites. Seul le chargement est considéré et le principe de Saint-Venant permet de restreindre le nombre de paramètres nécessaires à sa modélisation. La difficulté réside alors dans le choix des bonnes bases de chargement et dans le positionnement des capteurs.

Cette méthode est appliquée aux structures poutres dans la troisième partie. Les bases de chargement sont obtenues à partir d'une projection des solutions analytiques du problème de poutre sur les bords des structures. Le positionnement des capteurs est ensuite étudié sur des structures poutres élémentaires qui réduisent le problème inverse à une identification polynomiale. La décomposition des structures poutres complexes en structures élémentaires simplifie alors la définition des bases de chargement et le positionnement des capteurs.

La dernière partie présente les résultats obtenus sur des structures plaques. Les bases de chargement sont construites par projection des solutions analytiques pour les domaines étoilés. L'extension à des domaines quelconques est faite en considérant seulement les bords chargés des structures pour se ramener à des domaines étoilés équivalents. Bien que ces bases ne soient plus complètes, les résultats obtenus sur des plaques trouées montrent leur intérêt. Ces résultats servent ensuite à la construction des bases de chargement et au positionnement des capteurs pour les structures complexes modélisées par des assemblages de plaques.

Mots-clés : surveillance des structures, reconstruction de champ, identification de chargement.

Integrated measurements and full-field reconstruction for structures

Abstract : this thesis tackles the problem of structural monitoring from integrated measurements to full-field reconstruction.

In a first part, the technology of measurement systems is studied. An integrated measurement system is specified from some structural tests in-service and its future applications. These specifications define the mechanical framework of structural monitoring.

The inverse problem associated with structural monitoring is expressed in a second part. The mechanical hypothesis result from the previously defined framework. The boundary conditions are identified in order to reconstruct the mechanical fields. The loads are considered only and the Saint-Venant's principle allows to limit the number of the loading parameters. The main issue is then to find the right loading basis and to optimize the sensor locations.

This method for structural monitoring is applied to beams in the third part. The analytical solutions of the mechanical equations for beams are projected on the boundary of the structures in order to obtain the loading basis. The optimal sensor locations are then estimate from elementary structures, what reduces the inverse problem to a polynomial identification. The complex beam structures are then decomposed into elementary ones, what drastically simplifies the construction of the loading basis and the sensor locations.

In a last part, plate structures are considered. The loading basis are firstly defined by the projection of the analytical solutions of star-shaped domain. These basis are then extended to any plate structures using some loaded boundaries only in order to design an equivalent star-shaped domain. Even if these loading basis are incomplete sets, the results are in good agreement. The same principle is used to obtain the loading basis for complex structures modeled by plate assemblies.

Keywords : structural monitoring, full-field reconstruction, load identification.