HAL
open science

Préparation et stabilisation d'un champ non classique en cavité par rétroaction quantique

Clément Sayrin

To cite this version:

Clément Sayrin. Préparation et stabilisation d'un champ non classique en cavité par rétroaction quantique. Physique Quantique [quant-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT : . tel-00654082

HAL Id: tel-00654082

https://theses.hal.science/tel-00654082

Submitted on 20 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Département de Physique
de l'École Normale Supérieure

Laboratoire Kastler Brossel

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **Physique Quantique**

présentée par

Clément SAYRIN

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris VI

Sujet :

Préparation et stabilisation d'un champ non classique en cavité par rétroaction quantique

Soutenue le 28/09/2011 devant le jury composé de :

Dr.	Antoine Browaeys	Rapporteur
Dr.	Michel Brune	Directeur de thèse
Pr.	Nicolas Cerf	Examinateur
Pr.	Pierre Rouchon	Examinateur
Pr.	Jérôme Tignon	Président
Dr.	Denis Vion	Rapporteur

À mes parents,

Remerciements

Je présente dans ce mémoire les résultats de mon travail de thèse, effectuée au Laboratoire Kastler Brossel. Il est presque inutile de rappeler qu'ils ne sont pas le fait d'une seule personne, et qu'ils n'auraient pas été possibles sans l'aide de nombreuses autres. Je tiens ici à les remercier.

Je voudrais d'abord remercier Serge Haroche, Jean-Michel Raimond et Michel Brune, qui m'ont donné la chance de travailler dans leur groupe d'*Électrodynamique quantique en cavité*. L'expérience «S15» est le fruit d'un incroyable travail long de plusieurs années, et participer pendant près de cinq ans à un morceau de son existence a été particulièrement enrichissant et formateur. Ce fut aussi pour moi l'occasion de profiter de leurs grands sens physique et culture scientifique. Leur encadrement au jour le jour et leur inépuisable enthousiasme ont été cruciaux à tout moment, des plus réjouissants aux plus difficiles. Je me souviendrai avec émotion de ce début de nuit de 2008 où tous trois attendaient avec impatience derrière nous autres thésitifs que nos traitements de données, toujours trop longs dans ces moments là, fassent apparaître nos premiers chats de Schrödinger reconstruits. Ou de ces coups d'«épée» sous nos yeux inquiets lors de cette interminable extraction du cœur de l'expérience, coincé dans son enceinte à azote.

Je tiens tout particulièrement à remercier Michel, qui a accepté d'encadrer cette thèse. Il a plus d'une fois débloqué des situations désespérées grâce à sa complète maîtrise du dispositif expérimental et sa connaissance de tous les boutons magiques, tournés devant des étudiants médusés ! Avec Jean-Michel, il a permis le bon fonctionnement au jour le jour de l'expérience. Tous deux se sont également toujours montrés disponibles, pendant et après ma thèse, pour répondre à mes interrogations. Pour tout ça, je tiens à les remercier vivement.

Je voudrais également remercier toutes les personnes avec lesquelles j'ai eu la chance de travailler. J'ai commencé ma thèse peu de temps après que les premiers résultats de mesures QND ont été obtenus. Dans cette période de grande effervescence, mes prédécesseurs Christine Guerlin, mais surtout Julien Bernu et Samuel Deléglise ont pourtant pris tout le temps qu'il fallait pour m'apprendre à faire fonctionner cette grosse machine, et ont su m'accueillir chaleureusement dans le groupe malgré ma naturelle discrétion. Un merci particulier à Samuel avec lequel j'ai toujours eu plaisir à travailler pendant près de trois ans : sa bonne humeur, couplée à un goût immodéré pour le chant, a toujours été de pair avec une grande rigueur scientifique et un acharnement au travail impressionnants. Je lui souhaite beaucoup de réussite pour son retour au LKB.

J'ai également eu la chance de partager ces quelques années en S15 avec Igor Dotsenko, notre post-doc, qui a fourni un travail considérable et moteur pour l'expérience. J'ai eu vraiment beaucoup de plaisir à travailler et échanger avec lui, et je suis sûr que notre bonne entente a aussi contribué aux résultats que je présente ici. Ils sont autant les siens que les miens.

Merci également à ceux qui ont rejoint le groupe après moi, Xingxing Zhou et Bruno Peaudecerf en premier lieu. C'est avec eux que j'ai partagé ces moments particuliers de fermeture / ouverture / refroidissement /réparation de cryostat, avec ou sans soudure à 1h du matin passée, mais souvent avec le McDo de 22h, mais aussi ceux de réjouissance au moment des premiers résultats ! Leurs qualités humaines ont toujours permis de maintenir une ambiance admirable en «salle de manip'», chose qui ne va pas de soi étant donné la proximité imposée ou l'organisation des plannings de transfert. Merci pour cela aussi à tous les membres du groupe, passé ou présent : Sébastien, Andy, Jonas, Thomas, Cédric, Gilles, Adrian, Théo, Raul, Carla, Sha et Adrien.

Je veux également remercier tout le personnel technique ou administratif du département de physique de l'ENS et du LKB, si souvent indispensable : Didier Courtiade et son équipe, Jean-Michel et ses mécanos, Olivier et son liqué, France, Thierry, Christophe, Linda, Dominique, «Yo», Jack...

Une part non négligeable de mes quatre années de thèse a par ailleurs été dédiée à l'enseignement. J'ai eu énormément de plaisir à participer à la préparation à l'agrégation de Montrouge et je souhaite remercier ici toutes les personnes avec lesquelles j'ai enseigné, pris des cafés, critiqué les élèves, rempli et porté des caisses de matériel, ou simplement refait le monde, voire la physique : André, Anne, Éric, Nasser, François, Pierre-François, Agnès, FX, Jean-François, Martial, Guilhem, Hélène, Tristan, Aurélien, Pierre, Sébastien, Élise, Olivier, Antonin, Frédéric, Guillaume. Une mention toute particulière à Florian Iglesias, mon éternel binôme, et à Kenneth Maussang, mon fidèle compagnon de café (qui a donc joué un rôle non négligeable pendant la rédaction de ce rapport) qui avant d'être des collègues, sont surtout des amis.

Merci également à toutes les personnes qui m'ont accompagné durant toutes ces années, et sans lesquels la vie à Paris ne serait pas ce qu'elle est : le Quantum Gang (Tarik, Ariane, Carles, Nir, Jean, François, Julien, Juliette, Thomas, Armin, Thibault), fondé aux temps immémoriaux du M2, mais aussi tout mon petit groupe d'agrégatifs-ou-presque (Benjamin, Fanny, Florence, Kenneth, Anne-Laure, Caro, Miguel, Marie-Anne, Mathieu, Stéphane, Marc, Rachel, Bastien, Evelyne, Nadia, et Clarisse), et mes deux amis de toujours, Thomas et Julien.

Enfin et surtout, merci à mes parents, mon frère, et ma sœur, sans lesquels je ne serais sans doute pas là où j'en suis aujourd'hui.

Table des matières

Introduction **1**

I Atomes et photons en cavité **11**
I.1 Oscillateur harmonique 14
I.1.1 La cavité Fabry-Pérot de grande finesse 14
I.1.1.a Caractéristiques 14
I.1.1.b Contrôle de la fréquence de résonance 16
I.1.2 Description théorique 19
I.1.2.a Un champ quantifié 19
I.1.2.b Couplage à l'environnement 20
I.2 Atomes à deux niveaux 23
I.2.1 Formalisme et notations 23
I.2.1.a Atome à deux niveaux et spin 1/2 23
I.2.1.b Manipulation de l'état interne 25
I.2.2 Interférométrie de Ramsey 27
I.2.3 Atomes de Rydberg circulaires 29
I.2.3.a Propriétés 29
I.2.3.b Préparation et contrôle 32
I.2.3.c Modification de la phase de l'interféromètre 36
I.2.3.d Détection 38
I.3 Deux systèmes en interaction 40
I.4 Mesure Quantique Non-Destructive 44
I.4.1 Mesure du nombre de photons 45
I.4.1.a Principe de la mesure 45
I.4.1.b Mesures projectives et mesures faibles 45
I.4.1.c Modification des populations 47
I.4.1.d Imperfections de l'interféromètre 48
I.4.1.e Retour à la sphère de Bloch 50
I.4.1.f Déphasage par photon 51
I.4.2 Suivi temporel de l'état du champ 53
I.4.3 Moyennes d'ensemble 56
I.4.3.a Reconstruction par maximum de vraisemblance 56
I.4.3.b Choix du nombre d'atomes de mesure 58

II Rétroaction quantique **63**
II.1 Principe général . . . 63
II.1.1 Une boucle de rétroaction quantique . . . 63
II.1.2 Signal de sortie et filtre quantique . . . 68
II.1.2.a Mesures faibles : action et paramètres . . . 68
II.1.2.b Une rétroaction retardée . . . 70
II.1.3 Signal d'erreur et rétroaction . . . 72
II.1.3.a Fidélité . . . 72
II.1.3.b Une définition plus générale . . . 74
II.1.3.c Loi de contrôle . . . 77
II.1.3.d Sélection des attracteurs . . . 79
II.1.3.e Loi de contrôle «Fidélité» . . . 81
II.1.4 Bilan . . . 82
II.2 Simulations numériques . . . 84
II.2.1 Méthode Monte-Carlo . . . 85
II.2.2 Stabilisation d'un état de Fock . . . 88
II.2.2.a Trajectoires quantiques . . . 88
II.2.2.b Régime stationnaire . . . 91
II.2.3 Préparation d'un état de Fock . . . 93
II.2.4 Choix de distance . . . 94

III La rétroaction quantique expérimentalement **97**
III.1 Un nouvel ordinateur de contrôle . . . 97
III.1.1 Description générale . . . 99
III.1.2 Détections atomiques . . . 101
III.1.2.a Fonctionnement des cartes compteur . . . 101
III.1.2.b Synchronisation des cartes compteur . . . 103
III.1.3 Injections micro-ondes . . . 104
III.1.4 Synchronisation avec la séquence expérimentale . . . 106
III.2 Calibration des paramètres expérimentaux . . . 110
III.2.1 Contrôle de l'amplitude des corrections . . . 110
III.2.1.a Contraintes expérimentales . . . 111
III.2.1.b Calibration . . . 112
III.2.2 Calibration du détecteur . . . 114
III.2.2.a Optimisation du détecteur . . . 114
III.2.2.b Efficacité de détection . . . 116
III.2.2.c Franges de Ramsey et erreurs de détection . . . 119
III.2.3 Déphasage par photon . . . 121
III.3 Contrôle des imperfections . . . 122
III.3.1 Contrôle de la phase des injections . . . 122
III.3.2 Effets parasites éventuels dus aux injections cohérentes . . . 125
III.4 Modification du filtre quantique . . . 127
III.4.1 Réduction du temps de calcul . . . 127

III.4.2 Suivi en temps réel de l'état du champ 131
III.4.3 Prise en compte des erreurs de détection 132

IV Résultats expérimentaux **139**
IV.1 Séquence expérimentale 139
IV.1.1 Initialisation 140
IV.1.2 Séquence de rétroaction continue 143
IV.1.3 Mesure QND indépendante 145
IV.2 Résultats expérimentaux 146
IV.2.1 Trajectoires individuelles 146
IV.2.2 Distribution moyenne du nombre de photons 152
IV.2.2.a État stationnaire du champ 152
IV.2.2.b Taille de l'espace de Hilbert 158
IV.2.3 Fidélité de la préparation et vitesse de convergence 159
IV.2.4 Estimation des barres d'erreur 162
IV.2.5 Phase de l'interféromètre 164
IV.2.6 Deux choix de distance 167
IV.2.6.a Modification de la loi de contrôle «Fidélité» 167
IV.2.6.b Comparaison des lois de contrôle 169
IV.3 Analyse du comportement du filtre 171
IV.3.1 Trajectoires défaillantes 171
IV.3.2 Régime stationnaire 175
IV.3.2.a Statistique des injections 175
IV.3.2.b Variation de la fidélité à la cible 175
IV.3.3 Correction d'un saut quantique 178
IV.3.3.a Simulation expérimentale 178
IV.3.3.b Correction d'un saut 179
IV.3.3.c Retour à l'état stationnaire 181
IV.3.4 Rapidité de convergence et mesures QND itérées 185
IV.3.4.a Méthode «essais/erreurs» 185
IV.3.4.b Fidélité de préparation 186
IV.3.4.c Comparaison 187

Conclusion **191**

A Synchronisation des cartes compteur **195**

B Barres d'erreur de la mesure QND de contrôle **197**

Bibliographie **199**

Table des figures

1 Préparation d'états nombre par l'emploi de «trapping states» dans une expérience de CQED . . . 3
2 Principe de notre expérience de CQED . . . 4
3 Schéma de notre expérience de rétroaction quantique . . . 9

I.1 Schéma du dispositif expérimental . . . 13
I.2 Schéma des miroirs de la cavité micro-onde supraconductrice . . . 16
I.3 Spectre de résonance de la cavité micro-onde . . . 17
I.4 Dérives de fréquence . . . 18
I.5 Préparation d'un état classique du champ . . . 23
I.6 Représentation de l'état d'un système à deux niveaux sur la sphère de Bloch 24
I.7 Manipulation de l'état interne de l'atome . . . 26
I.8 Schéma des zones de Ramsey . . . 27
I.9 Niveaux de Rydberg circulaires utilisés . . . 30
I.10 Diagramme d'énergie des niveaux de Rydberg en présence d'un champ électrique . . . 31
I.11 Préparation des atomes dans les niveaux de Rydberg circulaires . . . 33
I.12 Sélection de vitesse . . . 35
I.13 Distribution de vitesse des atomes . . . 36
I.14 Franges de Ramsey . . . 37
I.15 Détection des atomes . . . 39
I.16 Énergie des états habillés . . . 41
I.17 Évolution du spin atomique lors de l'interaction dispersive avec le champ quantique . . . 44
I.18 Évolution des populations $P(n)$ par décimation . . . 49
I.19 Décimation et sphère de Bloch . . . 50
I.20 Histogrammes des phases des spins atomiques mesurés après interaction avec un champ quantique contenant quelques photons . . . 52
I.21 Calibration du déphasage par photon . . . 52

I.22 Succession des phases de l'interféromètre dans la mesure suivant la rétroaction. 53
I.23 Réduction progressive de la distribution des nombres de photons 54
I.24 Évolution temporelle du nombre de photons obtenue par décimation . . . 55
I.25 Évolution des populations $P(k,t|n)$ obtenues par analyse itérative 59
I.26 Deux distributions indistinguables par mesure QND à 1 atome 60

II.1 Boucle de rétroaction classique 64
II.2 Boucle de rétroaction quantique 66
II.3 Une itération de la boucle de rétroaction 67
II.4 Choix du déphasage par photon 69
II.5 Une rétroaction retardée 70
II.6 Coefficients $\Gamma_n^{(\mathrm{n_c})}$ pour $1 \leq \mathrm{n_c} \leq 4$. 74
II.7 Boucle de rétroaction quantique retardée 84
II.8 Trajectoire quantique simulée avec le contrôle «Distance» 89
II.9 Trajectoire quantique simulée avec le contrôle «Fidélité» 90
II.10 Régime stationnaire de la rétroaction simulée 92
II.11 Établissement du régime stationnaire de la rétroaction simulée 93
II.12 Préparation d'états de Fock pour une rétroaction simulée 95
II.13 Taux de convergence de la boucle de rétroaction simulée 95

III.1 Répartition des tâches entre les deux systèmes de contrôle 98
III.2 Vue de la façade du nouvel ordinateur de contrôle ADwin Pro-II 100
III.3 Comptage des atomes en mode «Comptes» 102
III.4 Comparaison des franges de Ramsey 103
III.5 Circuit micro-onde 104
III.6 Séquence de signaux digitaux pour l'injection d'un champ d'amplitude et phase contrôlées 105
III.7 Synchronisation de l'ordinateur de contrôle 108
III.8 Chronologie des impulsions digitales pour une préparation atomique unique 110
III.9 Calibration des injections cohérentes 113
III.10 Linéarité de la chaîne d'injection 114
III.11 Détection et déclenchement de la rampe d'ionisation 115
III.12 Équilibrage des détections des deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ 115
III.13 Mesure de l'efficacité de détection 118
III.14 Mesure des erreurs de détection 120
III.15 Calibration du déphaseur 123

III.16 Calibration des impulsions uniques 123
III.17 Différence d'amplitude entre les deux voies d'injection 124
III.18 Réglage retenu du déphaseur 124
III.19 Effet des injections micro-ondes sur le contraste des franges 126
III.20 Effet des injections micro-ondes sur la phase des franges 126
III.21 Temps de calcul et taille de l'espace de Hilbert 130
III.22 Boucle ouverte de la rétroaction : comparaison ADwin/ancien système . . 132
III.23 Boucle ouverte de la rétroaction : comparaison ADwin/ancien système (bis) 132

IV.1 Passage adiabatique de $|g, n+1\rangle$ à $|e, n\rangle$ 141
IV.2 Modification du désaccord atome–champ pour les atomes serpillières par effet Stark quadratique 141
IV.3 Distribution de vitesse des atomes serpillières 142
IV.4 Franges de Ramsey avec et sans atomes serpillières 142
IV.5 Diagramme espace-temps d'une trajectoire atomique 144
IV.6 Trajectoire quantique expérimentale pour $\mathrm{n_c} = 2$ 148
IV.7 Trajectoire quantique expérimentale pour $\mathrm{n_c} = 3$ 149
IV.8 Trajectoire quantique expérimentale pour $\mathrm{n_c} = 1$ 150
IV.9 Trajectoire quantique expérimentale pour $\mathrm{n_c} = 4$ 151
IV.10 Distributions stationnaires des nombres de photons pour 4 états cibles . . 153
IV.11 Établissement du régime stationnaire 155
IV.12 Évolution temporelle des déviations standards moyennes 157
IV.13 Comparaison entre deux tailles de l'espace de Hilbert 159
IV.14 Préparation de l'état cible 161
IV.15 Temps de convergence et taux de succès 162
IV.16 Estimation des barres d'erreur de la mesure QND de contrôle 163
IV.17 Choix de la direction de mesure pour les cibles $|3\rangle$ et $|4\rangle$ 164
IV.18 Probabilité conditionnelle $\pi_g(n, \phi_r = \varphi(3))$ 165
IV.19 Temps de convergence vers l'état cible $|4\rangle$ pour deux choix de phases Ramsey 167
IV.20 Trajectoire quantique injectant trop de photons dans la cavité 168
IV.21 Choix expérimental de la loi de contrôle 170
IV.22 Trajectoire quantique défaillante 172
IV.23 Seuil de déclenchement des corrections 173
IV.24 Seuil de déclenchement des corrections à 2 paramètres 173
IV.25 Histogramme des injections de correction 176
IV.26 Variation de la fidélité en p itérations de la boucle 177

IV.27 Variation de la fidélité en p itérations de la boucle ouverte 178
IV.28 Simulation expérimentale d'un saut quantique de $|3\rangle$ vers $|2\rangle$ 180
IV.29 Simulation expérimentale du retour à l'équilibre depuis l'état cible 182
IV.30 Simulation expérimentale d'un saut quantique hypothétique de $|3\rangle$ vers $|0\rangle$ 183
IV.31 Simulation expérimentale d'un saut quantique hypothétique de $|3\rangle$ vers $|1\rangle$ 184
IV.32 Distribution des nombres de photons mesurée après une expérience de rétroaction quantique en boucle ouverte et avec critère de convergence . . 186
IV.33 Optimisation du paramètre τ de la méthode «essais/erreurs» 187
IV.34 Comparaison des temps de convergence de deux protocoles de préparation d'états nombre 189

A.1 Synchronisation des cartes compteur 196

Introduction

La mécanique quantique a été élaborée au début du XXe siècle pour répondre à certaines questions laissées sans réponse par la mécanique classique de Newton et l'électromagnétisme de Maxwell. L'explication du spectre de rayonnement du corps noir par Planck dès la fin du XIXe siècle ne fut que la première étape qui marqua le début d'une longue série de succès. Jamais mise en défaut depuis son avènement dans les années 1920, elle est sans aucun doute à la base des plus grandes avancées technologiques modernes. Les physiciens ont en effet acquis depuis les pères fondateurs de la théorie une profonde connaissance et une grande maîtrise des systèmes quantiques. Les atomes ou les photons peuvent maintenant être piégés, manipulés ou détectés un à un dans une variété d'expériences toujours plus complexes, ce qui était encore jugé impossible par Schrödinger au milieu du siècle passé.

La capacité croissante à contrôler des *systèmes quantiques* toujours plus simples a pu être mise à profit pour étudier, tester et comprendre plus profondément encore cette étrange théorie. La manipulation d'électrons uniques par exemple a pu clairement mettre en évidence les principes de *complémentarité* et de *superposition des états*. Dans une expérience de type fentes d'Young [1], Tonomura *et al.* ont pu reconstruire progressivement les mêmes figures d'interférence que celles obtenues dans des expériences simples d'optique ondulatoire par l'envoi successif de particules individuelles. Dans une formulation volontairement propre à choquer l'intuition classique, les électrons, à la fois ondes et corpuscules comme prédit par de Broglie en 1923, sont passés simultanément par les deux fentes du dispositif.

De même, si en 1935 Einstein, Podolsky, et Rosen [2] furent amenés à introduire une théorie à variables cachées en réponse au «paradoxe EPR» alors soulevé, ce n'est qu'en 1981 qu'elle put être invalidée quand les expériences d'Alain Aspect [3, 4, 5] par la génération et la manipulation de photons intriqués permirent pour la première fois la violation des inégalités de Bell [6]. C'est la *non-localité* de la mécanique quantique qui fut alors révélée.

Manipuler des systèmes quantiques simples et les préparer dans des états *ad hoc* s'est donc révélé crucial dans l'étude de la théorie quantique. L'intérêt s'est amplifié plus encore avec l'avènement de l'*information quantique* [7, 8] au milieu des années 1990. Quand les systèmes physiques permettant le transport, le traitement ou encore l'enregistrement de l'information deviennent aussi simples que des atomes ou des photons uniques, leurs propriétés intrinsèquement quantiques entrent en jeu et peuvent être exploitées de façon admirable. L'ordinateur quantique, dans son principe, exploite ainsi les phénomènes d'interférence et d'intrication, ou encore la capacité qu'ont les systèmes quantiques à être dans plusieurs états simultanément, pour surpasser son alter-ego classique sur de nom-

breux aspects. L'algorithme de Shor [9] par exemple permet notamment la factorisation de grands nombres en des temps polynomiaux, alors que l'incapacité de l'ordinateur classique à procéder efficacement à ce calcul est à la base de la quasi-totalité de la cryptographie moderne.

S'il a fallu attendre la fin du XXe siècle pour voir ce domaine se développer, c'est précisément parce qu'il requiert l'utilisation de systèmes quantiques quasi-idéaux pour disposer de *qubits* ou de mémoires quantiques, sur lesquels repose le calcul quantique. À l'instar du calcul classique, celui-ci se base sur l'utilisation de *portes quantiques*, opérations unitaires appliquées sur un ou plusieurs qubits simultanément. Seules quelques unes d'entre elles sont nécessaires pour les réaliser toutes [10]. C'est par exemple le cas des deux portes à 1 qubit, «phase» et «rotation», auxquelles on associe la porte à deux qubits, C-NOT :

$$\begin{array}{lll}
\text{phase :} & |0\rangle \to |0\rangle & |1\rangle \to \mathrm{e}^{i\varphi}|1\rangle \\
\text{rotation :} & |0\rangle \to \cos\theta|0\rangle - \sin\theta|1\rangle & |1\rangle \to \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle \\
\mathrm{C-NOT} : & |00\rangle \to |00\rangle & |01\rangle \to |01\rangle \\
 & |10\rangle \to |11\rangle & |11\rangle \to |10\rangle.
\end{array}$$

Pour tester la qualité de la réalisation de telles opérations élémentaires (portes quantiques, mémoires quantiques...), la tomographie de processus quantique fut proposée par Poyatos, Cirac et Zoller [11] et par Chuang et Nielsen [12] en 1997. Elle repose elle-aussi sur la capacité à préparer des états quantiques particuliers *sur demande*. La fidélité du processus quantique réalisé au processus idéal est quantifiée par une série de mesures simples après opération de la porte quantique sur un ensemble d'états modèles préalablement choisis. Initialement réalisée en RMN [13], cette méthode d'analyse fut ensuite adaptée à de très nombreux domaines : ions piégés [14], optique quantique [15], atomes froids [16], ou encore qubits supraconducteurs [17].

Parmi ces multiples systèmes manipulant des objets quantiques, l'électrodynamique quantique en cavité est particulièrement adaptée à la manipulation et à l'étude de l'interaction des atomes et des photons. La lumière piégée dans une cavité de haute finesse forme avec le ou les atomes interagissant avec elle un système *quasiment* isolé de l'environnement. Dès lors, l'électrodynamique quantique en cavité fournit un outil formidable pour la réalisation des tests fondamentaux de la mécanique quantique. En permettant la manipulation de systèmes physiques très simples, aussi bien microscopiques que mésoscopiques, ce sont les expériences de pensée à l'origine de la théorie quantique qui peuvent être réalisées en laboratoire. Mais c'est tout particulièrement dans le régime dit de *couplage fort* entre les photons et les atomes que l'électrodynamique quantique en cavité se révèle d'un intérêt majeur. Atteint pour la première fois en 1983 avec des cavités micro-ondes [18], puis en 1995 avec des cavités optiques [19] ou encore en 2004 sur des circuits supraconducteurs [20], ce régime permet de rendre les processus de relaxation ou de décohérence, *i.e.* le couplage à l'environnement, négligeables à l'échelle de l'interaction entre les deux systèmes. C'est dans ces conditions que purent être préparés de façon déterministe les états bien particuliers du champ électromagnétique que sont les états nombre, ou états de Fock, notés $|n\rangle$, et qui contrairement à un champ classique, contiennent un nombre n fixé d'excitations.

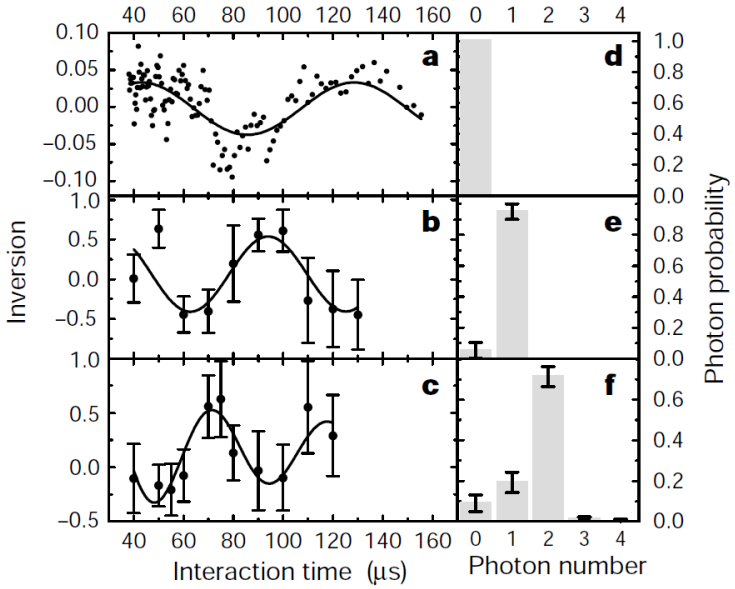


FIGURE 1 – Préparation d'états nombre par l'emploi de «trapping states» dans une expérience de CQED (Varcoe, *et al.* [21]). *À gauche :* observation d'oscillations de Rabi quantiques dans l'état préparé. *À droite :* distribution des nombres de photons correspondante.

En 2000 par exemple, les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ furent préparés par Varcoe [21] par l'emploi de «trapping states», ou «niveaux piégeants». Dans ces expériences, des atomes de Rydberg à deux niveaux, notés $|e\rangle$ (état «excité») et $|g\rangle$ (état «fondamental»), sont en interaction résonante avec un champ micro-onde piégé dans une cavité supraconductrice fermée. Le système initialement préparé dans l'état $|e, n\rangle$ (atome dans l'état excité et n photons dans la cavité) oscille alors périodiquement entre cet état et l'état $|g, n+1\rangle$ à une pulsation $\Omega_n = \sqrt{n+1}\,\Omega_0$ dépendant du nombre de photons, réalisant ainsi des oscillations de Rabi quantiques [22]. Les atomes préparés dans le niveau $|e\rangle$ interagissent avec le champ, initialement dans le vide de photons $|0\rangle$, pendant un temps $t_{\mathrm{n_c}}$ tel que $\Omega_{\mathrm{n_c}} t_{\mathrm{n_c}} = 2\pi$, avant d'être détectés. Si tous les états $|n < \mathrm{n_c}\rangle$ voient leurs nombres de photons augmenter après le passage d'un atome (la transition $|e, n\rangle \longrightarrow |g, n+1\rangle$ est possible puisque $\Omega_n t_{\mathrm{n_c}} \neq 2\pi$), l'*état cible* $|\mathrm{n_c}\rangle$, lui, est laissé invariant et donc finalement préparé après le passage de plusieurs atomes.

En 2009, ce ne sont non plus seulement des états nombre mais des états arbitraires du champ électromagnétique qui furent préparés par Hofheinz *et al.* [23]. Un «qubit de phase» supraconducteur, atome artificiel à deux niveaux, et une cavité micro-onde coplanaire interagissent de façon résonante sur des intervalles de temps précisément contrôlés. Le qubit, dont l'état interne est par ailleurs manipulé par un champ classique, construit alors peu à peu par des oscillations de Rabi quantiques l'état désiré.

Une autre approche est toutefois possible pour la génération d'états quantiques. Elle

repose sur les postulats de la mécanique quantique décrivant le processus de mesure idéale. Si un système quantique est soumis à la mesure d'une observable O, alors :

- les résultats ne peuvent être que des valeurs propres de O ;
- le système est projeté à l'issue de la mesure sur l'état propre de O correspondant à la valeur propre mesurée.

Une telle mesure est dite projective ou de von Neumann [24], et permet de préparer le système quantique dans l'un des états propres de l'observable mesurée. Cependant, le système une fois préparé dans un tel état n'est pas assuré d'y rester *a posteriori* : la mesure a un *effet en retour* [25] sur le système mesuré qui a trait aux inégalités d'Heisenberg. Si l'incertitude sur l'observable O est annulée après la mesure, l'incertitude sur toute observable Q ne commutant pas avec elle est maximale :

$$\Delta O \cdot \Delta Q \geq \langle [O, Q] \rangle / 2.$$

Par exemple, si nous mesurions la position d'une particule quantique, son impulsion souffrirait d'une indétermination complète. Aussi, peu de temps après la mesure, la position de la particule serait à nouveau inconnue. C'est à la fin des années 1970 que les *mesures quantiques non destructives* (QND) furent introduites [26, 27, 28, 29] : la *répétabilité* de la mesure est imposée. L'observable mesurée est alors une constante du mouvement, *i.e.* commute avec le hamiltonien du système, assurant ainsi la stabilité des états dans lesquels la mesure projette. La réalisation expérimentale de mesures QND est donc en soi une préparation d'un système quantique dans un état faisant partie d'un ensemble préalablement choisi, *i.e.* l'ensemble des états propres de la mesure.

Des mesures quantiques non-destructives ont pu être réalisées à partir de notre dispositif expérimental. Une cavité Fabry-Pérot de très haute finesse, constituée de miroirs en niobium supraconducteur, piège un champ micro-onde, formant ainsi un modèle d'oscillateur harmonique. Des atomes de rubidium excités dans des niveaux de Rydberg circulaires se comportant comme des atomes à deux niveaux traversent la cavité en se couplant très fortement au champ électromagnétique. Contrairement aux expériences de Varcoe ou Hofheinz,

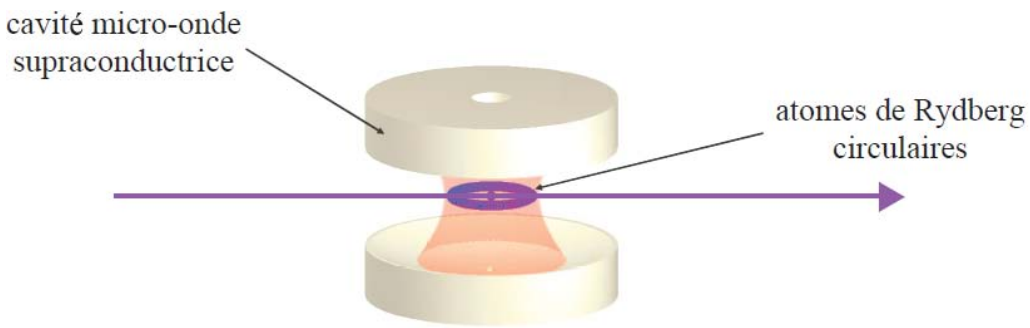


FIGURE 2 – Principe de notre expérience d'électrodynamique quantique en cavité. Des atomes de Rydberg circulaires interagissent avec un mode du champ électromagnétique piégé dans une cavité Fabry-Pérot micro-onde de très haute finesse.

les deux systèmes sont ici en interaction dispersive, condition nécessaire à la réalisation de mesures non-destructives du nombre de photons. Dans ces conditions, un atome en interaction avec un champ contenant n photons subit un déplacement lumineux de ses niveaux d'énergie [30]. Fonction du nombre de photons, il peut être mesuré par un interféromètre de Ramsey, aussi utilisé dans les horloges atomiques [31], menant ainsi à une mesure QND du nombre de photons dans la cavité. Permettant dans un premier temps la détection d'un seul photon [32], elles furent ensuite étendues, grâce à l'obtention de temps de vie du champ de plus de $0,1\,\mathrm{s}$, à la mesure des états nombre $|0\rangle$ à $|7\rangle$ [33], puis à la préparation d'états chats de Schrödinger par une mesure de la parité d'un champ classique [34].

Les mesures QND comme outil de préparation d'états nombre présentent toutefois un inconvénient : contrairement aux expériences déjà évoquées, la préparation est intrinsèquement aléatoire. En effet, le résultat de la mesure ne peut pas être prédit, seule la statistique des résultats est connue *a priori*. Leur puissance réside toutefois dans le fait qu'elles permettent un suivi *en temps réel* de l'évolution du champ. Elles ont par exemple rendu possible la première observation des sauts quantiques de la lumière [35, 33], manifestation de la *décohérence*. C'est par ce processus qu'un système préparé dans un état quantique finit inévitablement par rejoindre notre monde classique, et ce d'autant plus vite que le système considéré est «gros». Une étude approfondie de la décohérence fut réalisée dans notre groupe. Ainsi, l'évolution d'un état chat de Schrödinger, superposition cohérente de champs classiques mésoscopiques et de phases opposées, vers un mélange statistique a pu être «filmée» [34]. Et c'est en exploitant notre capacité à préparer les états nombre du rayonnement qu'une tomographie du processus de décohérence a pu être réalisée [36].

Cette dernière expérience, faite parallèlement par Wang [37], nous rappelle encore une fois l'intérêt de la préparation des états de Fock. Mais elle révèle également à quel point la décohérence rend fragile ces états hautement non classiques. Les expériences que nous présentons dans ce mémoire ont pour objectif de stabiliser ces états quantiques de la lumière en les protégeant contre la décohérence.

La lutte contre la décohérence est un problème abordé depuis longtemps maintenant, dans le domaine de l'information quantique notamment. L'information, codée sous forme de qubits par exemple, peut être dégradée lors de son transport par des *erreurs*, telles que des modifications de la phase des superpositions cohérentes («phase flip»), des inversions de bits («bit flip»), voire leur perte pure et simple. Pour espérer réaliser des protocoles complexes d'information quantique [38], impliquant de nombreux qubits intriqués, et pour lesquels la décohérence est rapide, il a donc fallu développer, sur le modèle de l'information classique, des *codes correcteurs d'erreur quantiques* [39]. L'idée est d'utiliser des qubits auxiliaires, ou *ancillae*, sur lesquels l'information portée par un qubit «originel» est dupliquée. En préparant par exemple des états intriqués à trois qubits, tells que les états GHZ (Greenberger, Horn et Zeilinger [40])

$$|\Psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle \pm |111\rangle\right),$$

il est possible de corriger des phase flips et bit flips sur un seul des trois qubits.

C'est en 1998 que les premiers codes correcteurs d'erreur furent réalisés, sur des spins en RMN [41]. Depuis lors, de nombreux autres systèmes se sont révélés propices à leur implémentation. Citons par exemple les ions piégés, où un protocole complet d'encodage, erreur et correction a pu être réalisé et répété [42], l'optique quantique, où contrairement aux systèmes ioniques l'erreur primordiale à corriger est la perte de qubits [43], ou encore les qubits supraconducteurs, qui ont pu être récemment préparés dans des états intriqués tripartites [44, 45]. Des variantes des protocoles standards ont également été réalisées, tel qu'en 2001 des codes correcteurs à 5 qubits en RMN [46], ou plus récemment des codes correcteurs non plus sur des qubits mais sur des systèmes codant l'information sur des variables continues [47].

Plutôt que de corriger les erreurs induites par la décohérence, une autre approche vers la protection des états quantiques consiste à coder l'information sur des états *insensibles* à la décohérence. On dit qu'ils appartiennent à des sous-espaces sans décohérence, ou «decoherence-free subspaces» (DFS) [48]. L'idée en fut pour la première fois donnée par Palma, Suominen et Ekert [49] puis par Duan et Guo [50]. Si l'on s'intéresse par exemple aux déphasages induits par la décohérence entre les deux états du qubit :

$$|0\rangle \mapsto |0\rangle \qquad\qquad |1\rangle \mapsto \mathrm{e}^{i\varphi}|1\rangle,$$

alors il est possible d'utiliser, une nouvelle fois, un qubit auxiliaire pour coder l'information sur une base insensible à ces déphasages. En effet, si l'on définit maintenant les deux états orthogonaux :

$$|0\rangle_{DF} = |01\rangle \qquad\qquad |1\rangle_{DF} = |10\rangle,$$

alors la transformation induite par le couplage à l'environnement devient :

$$|0\rangle_{DF} \mapsto \mathrm{e}^{i\varphi}|0\rangle_{DF} \qquad\qquad |1\rangle_{DF} \mapsto \mathrm{e}^{i\varphi}|1\rangle_{DF}.$$

Le terme de phase global pouvant être oublié, le sous-espace $\{|0\rangle_{DF}, |1\rangle_{DF}\}$ est bien un DFS. Généralisé plus tard par Viola [51], le principe fut réalisé expérimentalement en optique quantique en 2000 par Kwiat [52], puis sur des ions piégés [53], et des spins en RMN [54, 55].

Aussi bien les codes correcteurs d'erreur que l'utilisation de sous-espaces ou sous-systèmes insensibles à la décohérence «dupliquent» l'information à protéger sur des systèmes quantiques auxiliaires. La technique à laquelle nous allons nous intéresser plus particulièrement dans ce mémoire agit directement sur le système à préserver : il s'agit du *contrôle quantique*, ou *rétroaction quantique*. Van Handel, Stockton et Mabuchi [56] en donnent la définition suivante :

> « Le système quantique à contrôler est mesuré *via* son interaction avec un système mètre mesuré destructivement, et fournissant un signal de détection classique. Le résultat de la mesure est ensuite utilisé pour modifier les paramètres d'évolution hamiltonienne du système de sorte à réaliser de façon optimale un objectif prédéfini.»

Une difficulté propre à la rétroaction *quantique* [57] apparaît immédiatement : comme les postulats de la mécanique quantique l'imposent, la mesure par le mètre a une inévitable *action en retour* sur le système quantique. Utiliser des mesures projectives, qui modifient par nature profondément l'état quantique du système, rendrait dès lors la rétroaction particulièrement instable. Cette contrainte impose par conséquent l'utilisation de mesures dites *faibles*, qui réduisent la perturbation induite par la mesure au prix d'une information seulement partielle sur le système.

Par ailleurs, trouver la transformation optimale qui donne les paramètres du *régulateur* en fonction des résultats de la mesure est en général très ardu. La tâche est simplifiée si l'on utilise comme entrée non plus les résultats bruts de la mesure mais plutôt une *meilleure estimation* de l'état du système quantique au moment où la régulation est appliquée : un *filtre quantique* doit alors être développé. Connaissant l'évolution libre du système, les résultats des mesures précédentes et les régulations appliquées jusqu'alors, le filtre quantique donne la matrice densité *estimée* du système, permettant le calcul des régulations futures. L'action en retour de la mesure doit également être prise en compte par le filtre, ce qui est rendu possible grâce au développement de modèles théoriques du processus de mesure [25].

Introduites initialement en optique quantique en vue de la préparation d'états dits *comprimés*[58, 59], les idées de la rétroaction quantique furent ensuite développées et généralisées, par Wiseman notamment [60, 61]. Des réalisations expérimentales ont rapidement été recherchées. Les contrôles quantiques réalisés n'obéissent toutefois pas tous à la définition de la rétroaction quantique donnée par [56], et d'autres formes ont été proposées. La rétroaction par exemple peut se faire non pas par une action unitaire sur le système à contrôler mais plutôt par une modification de la mesure opérée par le mètre, tel que proposé dans [62]. On parle alors de *mesure adaptative*.

D'autres protocoles, connus sous le nom de *contrôle cohérent*, ou *contrôle tout-optique* dans le cadre de l'optique quantique, n'impliquent pas la mesure du mètre mais utilisent seulement des transformations unitaires sur le système et sur le «mètre» intriqué avec lui. Ainsi, Nelson *et al.* [63] purent transférer les corrélations quantiques préalablement créées entre un spin B et un spin C auxiliaire vers un spin A, *i.e.* transmettre une information «de nature quantique», chose impossible par un protocole classique.

La rétroaction peut également se faire par *apprentissage* («learning control»). Ici, plusieurs copies d'un même système sont utilisées pour optimiser, par une succession d'essais, les paramètres d'une transformation appliquée au final sur le système original [64]. Dans ce cas toutefois, aucune rétroaction n'est faite sur le temps de vie d'un systèmes unique.

Quelques expériences seulement à ce jour ont pu réaliser certains aspects d'une rétroaction quantique telle que définie plus haut. Sans doute les difficultés déjà relevées y sont-elles pour quelque chose. Ainsi, Smith *et al.* [65] utilisèrent de tels protocoles pour geler l'évolution libre d'un état non-classique du système formé par un gaz atomique en couplage fort avec un mode du champ électromagnétique piégé dans une cavité optique. En utilisant un laser de forçage de faible amplitude, qui permet en outre une mesure continue du système couplé, ce dernier est préparé dans un état stationnaire. La détection d'un photon en sortie

de la cavité optique le projette alors dans un état non classique pour lequel des oscillations de Rabi quantiques sont observées. En modifiant l'amplitude du laser de forçage, ils purent alors geler ces oscillations sur des temps correspondant à plusieurs de leur période, puis les redémarrer sans changer ni leur phase ni leur amplitude après retour à des amplitudes de contrôle faibles, prouvant ainsi leur capacité à manipuler l'état quantique du système.

En optique quantique toujours, Cook *et al.* [66] réalisèrent une distinction optimale de deux états cohérents d'un mode optique propageant. Deux de ces états étant non-orthogonaux, la mécanique quantique interdit l'existence d'une mesure permettant de les distinguer parfaitement. Or la mesure permettant une discrimination optimale suppose la préparation complexe d'états chats de Schrödinger, superpositions cohérentes très fragiles des deux états cohérents en question. En utilisant le fait qu'une mesure complète du nombre de photons dans le mode nécessite un temps fini, Cook *et al.* purent réaliser une mesure aussi performante que la mesure par états chats sans avoir à préparer le système dans un de ces états hautement non-classiques. Le mode mesuré est en fait couplé à une source classique dont l'amplitude est contrôlée en temps réel en fonction des résultats des photodétections réalisées jusqu'alors. La rétroaction quantique permet ici une acquisition optimale d'information sur le système contrôlé.

Citons enfin Gillett *et al.* [67] qui furent en mesure de corriger des «phase flips» sur des qubits optiques par rétroaction quantique. Deux états non-orthogonaux du qubit sont considérés. Préparé dans un de ces deux états, le qubit est soumis à des «phase flips» après transmission *via* une ligne bruitée. En utilisant le résultat d'une mesure faible sur le qubit, Gillet *et al.* purent décider de la rotation optimale à appliquer sur le qubit pour restaurer l'état initial, quel que soit le choix fait initialement parmi les deux états considérés. L'utilisation de rétroaction quantique a donc permis ici de stabiliser deux états du qubit soumis, pendant un temps précédent la phase de correction, à des déphasages simulant l'action de la décohérence.

L'utilisation en continu de protocoles de rétroaction quantique permettant la stabilisation d'un système quantique sur un état quantique ciblé n'a toutefois pas encore été rendue possible. Si des expériences similaires pour le contrôle de variables classiques ont pu être faites [68, 69], la seule tentative connue sur un système quantique fut réalisée en 2004 pour la préparation d'états comprimés de spin atomique dans un gaz d'atomes froids [70]. La rétractation ultérieure des auteurs est sans doute une indication supplémentaire de la difficulté du contrôle des systèmes quantiques.

C'est dans ce contexte que l'expérience que nous avons menée [71, 72] s'est inscrite. Inspirée par une proposition de Geremia [73], elle consiste à préparer puis à stabiliser un oscillateur harmonique quantique, à savoir le champ électromagnétique piégé dans notre cavité micro-onde de haute finesse, dans un de ses états nombre $|n\rangle$. La lutte contre la décohérence menée est donc en soi moins ambitieuse que celle des codes correcteurs d'erreur puisque seul un état préalablement choisi pourra être stabilisé. Elle constitue toutefois la première réalisation d'un contrôle quantique en continu, un domaine encore balbutiant comparé aux codes correcteurs. La figure 3 en donne un schéma de principe. Des atomes de Rydberg réalisent une mesure faible, donc non projective, du nombre de photons dans

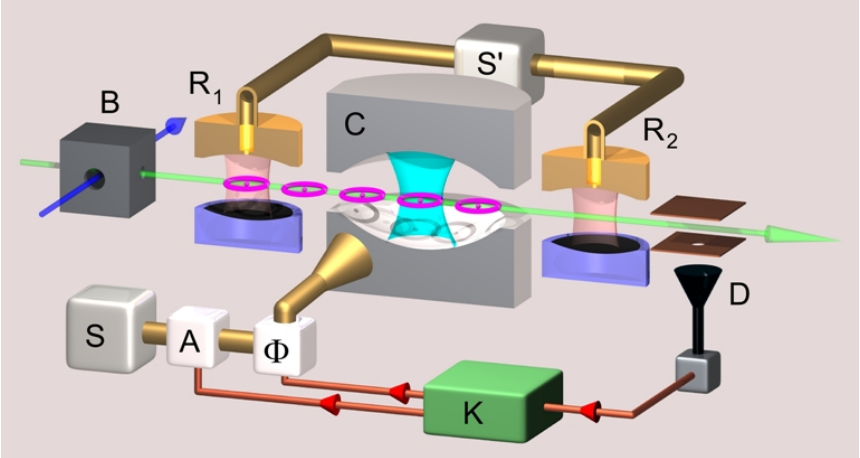


FIGURE 3 – Schéma de notre expérience de rétroaction quantique. Un interféromètre de Ramsey (cavités R_1 et R_2) entoure une cavité micro-onde Fabry-Pérot de haute finesse C. Des atomes de Rydberg préparés dans la boîte B réalisent une mesure QND du nombre de photons dans le champ piégé, avant d'être détectés dans le détecteur D. Le régulateur K traite l'information fournie par D pour appliquer un déplacement cohérent, créé par une source S, d'amplitude A et phase Φ contrôlées.

la cavité, permettant un suivi en temps réel de l'état du champ. Celui-ci est estimé par un filtre quantique à l'aide des résultats des détections atomiques et de toutes les connaissances *a priori* dont nous disposons sur le système (états antérieurs, précédentes actions du régulateur, taux de relaxation). Les corrections que nous appliquons consistent à injecter dans la cavité des champs cohérents de faible amplitude : leur amplitude et leur phase constituent les paramètres de la régulation.

Au cours de la première année de ma thèse, nous avons pu préparer et reconstruire des états chats de Schrödinger, superpositions de deux champs cohérents de phases opposées, et des états de Fock. Ces travaux sont présentés intégralement dans la thèse de Samuel Deléglise [74] et je n'en rendrai donc pas compte dans mon mémoire. Celui-ci est dédié à la description de l'expérience de contrôle quantique que nous avons réalisée.

Dans un premier chapitre, nous présenterons une vue d'ensemble du dispositif expérimental. Les atomes à deux niveaux utilisés et l'oscillateur harmonique à contrôler seront présentés aussi bien dans un cadre théorique qu'expérimental. La façon dont ils interagissent sera exposée et nous rappellerons alors les résultats obtenus par Christine Guerlin [75] et Julien Bernu [76] au cours de leurs thèses permettant la réalisation des mesures quantiques non-destructives.

Le deuxième chapitre donnera une description théorique de la boucle de rétroaction. Fruits d'une collaboration avec le groupe de Pierre Rouchon (École des Mines ParisTech), le filtre quantique développé ainsi que la façon dont les corrections sont calculées (*loi de contrôle*) en fonction de notre estimation de l'état du champ seront décrits en détail. Des simulations numériques basées sur des méthodes Monte-Carlo quantiques nous permettront

alors de vérifier la faisabilité de l'expérience.

Nous aborderons dans le troisième chapitre les aspects expérimentaux de la réalisation de la rétroaction à proprement parler. Nous présenterons notamment la nouvelle architecture matérielle que nous avons dû utiliser et mettre en place pour assurer un contrôle en temps réel de l'expérience. Toutes les calibrations des paramètres expérimentaux intervenant dans les calculs du filtre quantique seront également exposées. Nous verrons alors comment il a dû être modifié pour prendre en compte les imperfections identifiées.

Le quatrième et dernier chapitre présentera enfin les résultats expérimentaux obtenus. Nous verrons alors que nous avons été capables de préparer le champ intra-cavité de façon déterministe dans les états de Fock $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ et $|4\rangle$, puis de les stabiliser sur des temps longs devant leurs temps de vie.

Chapitre I

Atomes et photons en cavité

La manipulation et le contrôle d'un oscillateur harmonique à l'aide d'atomes à deux niveaux peut paraître *a priori* peu complexe : ce sont deux des objets quantiques les plus simples que nous faisons interagir. Cependant, si la description théorique du couplage de ces deux systèmes idéaux est relativement aisée, la situation est tout autre dès qu'il s'agit de réaliser et de contrôler expérimentalement ces deux éléments. Le dispositif complexe d'électrodynamique quantique en cavité grâce auquel toutes les expériences qui seront présentées dans ce mémoire ont pu être menées a une longue histoire. Sa version la plus récente, fruit du travail de thèse de Sébastien Gleyzes [77], fut achevée en 2006, avant donc le début de ma thèse. J'ai ainsi eu la chance d'arriver dans le groupe peu après la première observation de sauts quantiques de la lumière [35, 33] à l'aide de mesures quantiques non-destructives (QND). Nous ne chercherons donc pas dans ce chapitre à donner une description exhaustive aussi bien du système expérimental que des mesures QND à proprement parler. Le lecteur intéressé pourra les trouver dans les mémoires des étudiants m'ayant précédé [74, 76, 75, 77]. Nous nous contenterons d'en rappeler les principaux points, nécessaires à une compréhension globale de l'expérience.

L'oscillateur harmonique auquel nous nous intéresserons dans ce mémoire est un mode du champ électromagnétique piégé dans une cavité Fabry-Pérot de très grande finesse. La description qu'en fait la mécanique quantique ainsi que la façon dont nous le contrôlons seront notamment exposées dans une première partie.

Nous nous concentrerons dans la deuxième partie sur les atomes à deux niveaux interagissant avec lui. Après avoir introduit les notations et formalismes nécessaires, nous rappellerons le principe de l'interférométrie Ramsey. La description des atomes choisis et des niveaux d'énergie permettant de réaliser expérimentalement un atome à deux niveaux sera alors donnée. La façon dont ils sont préparés dans ces états, manipulés et détectés sera également précisée.

La troisième partie se concentrera sur l'interaction de ces deux systèmes dans le régime particulier qu'est le régime de couplage fort, pour lequel tous les phénomènes de relaxation sont négligeables à l'échelle du couplage entre l'atome et le champ.

La dernière partie sera finalement consacrée à la description des mesures quantiques non-destructives elles-mêmes, développées dans les thèses de Christine Guerlin [75] et Julien

Bernu [76], et qui constituent l'élément de base des expériences de rétroaction quantique dont nous rendrons compte par la suite.

Montage expérimental

Avant de commencer l'étude des deux systèmes en interaction dans nos expériences, commençons par donner une description rapide du dispositif expérimental. Nous reviendrons plus en détail sur certains de ses éléments dans les sections qui suivent.

La figure I.1 en présente un schéma d'ensemble. Des atomes de rubidium sont issus d'un four chauffé à 185 °C. Ils se propagent en un jet horizontal à travers l'expérience. Après avoir été sélectionnés en vitesse, à 250 m/s, par des impulsions laser, il sont excités dans les niveaux de Rydberg circulaires, évoqués dans l'introduction, au sein d'une enceinte appelée «boîte à circulariser».

Ils interagissent ensuite avec le champ quantique piégé dans la cavité micro-onde supraconductrice C. Celle-ci est placée au sein d'un interféromètre de Ramsey constitué par deux cavités de faible surtension (ou zones de Ramsey, R_1 et R_2) et permettant le contrôle de l'état interne des atomes. Les atomes sont finalement détectés au niveau d'un détecteur à ionisation D, situé à environ 30 cm de la boîte à circulariser. Les atomes sont donc détectés environ $1,2$ ms après avoir été excités.

Le montage contient en fait deux cavités micro-ondes supraconductrices et trois zones de Ramsey. Cependant, la première cavité traversée par les atomes s'est révélée avoir une finesse bien trop faible pour pouvoir être utilisée [1] et nous ne considérerons plus maintenant que la seconde cavité et les deux dernières zones de Ramsey.

Les hautes finesses des cavités micro-ondes sont obtenues en utilisant des matériaux supraconducteurs, en l'occurrence du niobium. L'usage d'un cryostat est donc indispensable pour refroidir la cavité à des températures plus faibles que le Kelvin. Un écran d'azote liquide à 77 K entoure tout le dispositif. Un bain à ^{4}He est alors utilisé pour refroidir, après pompage, les cavités à $1,5$ K et liquéfier de l'^{3}He. Un pompage sur le réservoir d'^{3}He permet enfin de descendre à $0,8$ K. Toutes les pièces au sein du cryostat ne sont donc pas à la température des miroirs, et des photons «chauds» peuvent venir augmenter le nombre de photons dans le mode à l'équilibre thermique. Pour y remédier, les cinq cavités micro-ondes sont enfermées dans une boîte d'écrantage thermalisée à $0,8$ K. Les orifices permettant le passage des atomes sont suffisamment petits pour être sous-coupure, *i.e.* ne pas autoriser le passage de photons de fréquences proches de celles utilisées (de l'ordre de 51 GHz).

1. Après une belle vie toutefois : avec son temps de vie historique de 130 ms, elle fut utilisée dans les travaux de thèse de Sébastien, Christine, Julien et Samuel !

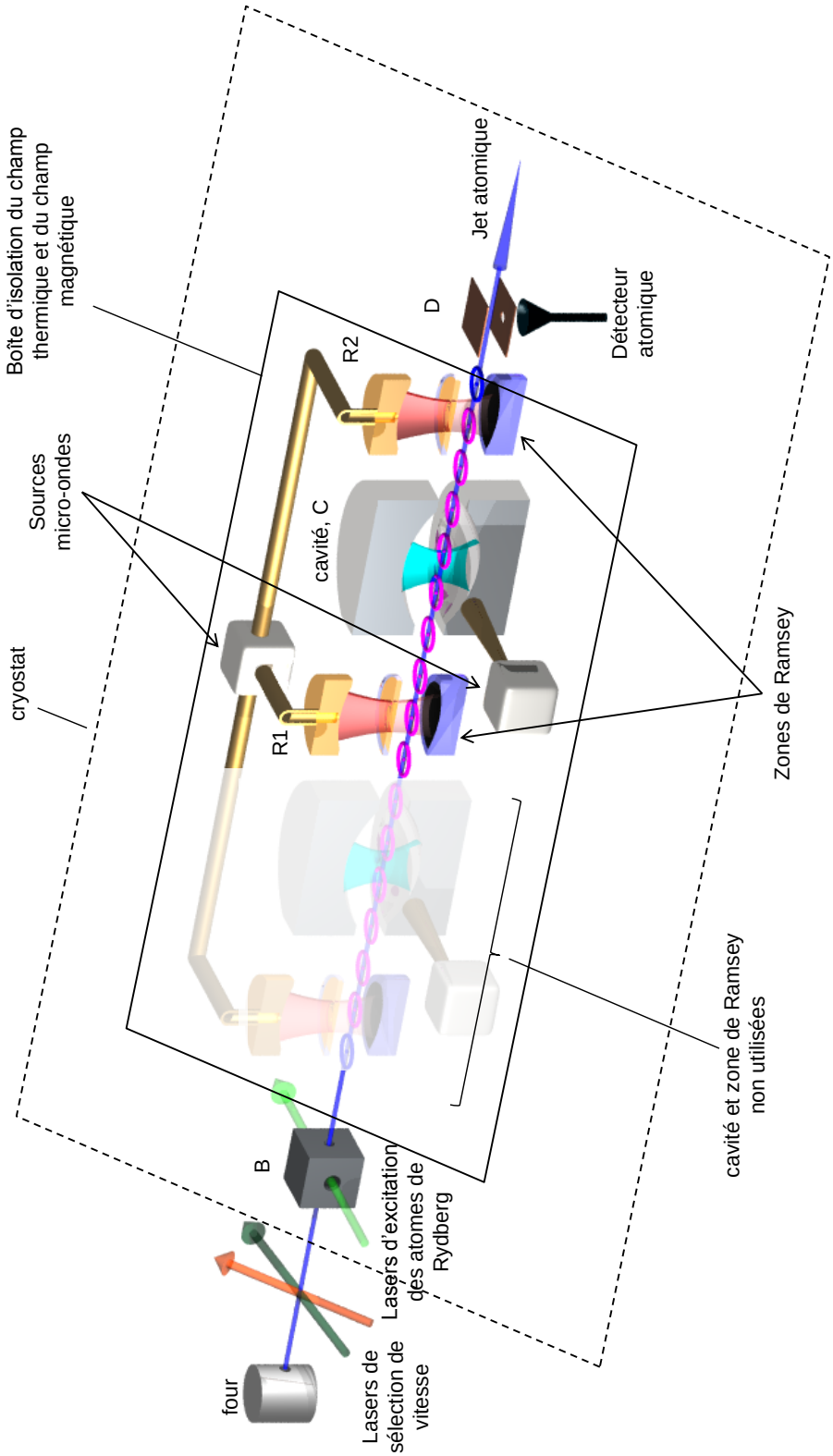


FIGURE I.1 – Schéma du dispositif expérimental

I.1 Oscillateur harmonique

Au cœur de notre dispositif expérimental se trouve la cavité micro-onde supraconductrice contenant le mode du champ électromagnétique qui constitue le système quantique que nous souhaitons contrôler. La façon dont elle fut réalisée, ses propriétés et celles du mode choisi seront exposées dans une première partie. Nous rappellerons ensuite le formalisme permettant de décrire l'oscillateur harmonique quantique qu'est ce mode du champ, ainsi que son couplage à l'environnement.

I.1.1 La cavité Fabry-Pérot de grande finesse

L'emploi d'une cavité micro-onde permet d'isoler un mode du champ électromagnétique. C'est ce système quantique que nous ferons notamment interagir avec des atomes à deux niveaux. Le régime d'interaction que nous visons, celui de couplage fort, nécessite toutefois des taux de relaxation faibles devant le couplage. Et ce n'est non pas un mais une longue série d'atomes que nous chercherons à faire interagir avec le *même* champ quantique. Aussi le temps de vie du champ, ou encore la finesse de la cavité utilisée, doivent être suffisamment élevés. L'utilisation de matériau supraconducteur, en l'occurrence de niobium, est une solution couramment utilisée dans le domaine des micro-ondes et des radio-fréquences. Comme déjà expliqué, l'emploi d'un cryostat à hélium se trouve *de facto* indispensable.

I.1.1.a Caractéristiques

Pour obtenir des finesses élevées, utiliser des cavités fermées, percées de trous sous-coupure pour laisser entrer et sortir les atomes, est une solution avantageuse [78, 79]. Nous verrons toutefois au paragraphe I.2.3 que nous avons à imposer un champ électrique permanent et homogène le long de la trajectoire atomique pour assurer la stabilité des atomes à deux niveaux. Ceci est incompatible avec l'emploi de cavités fermées : faites d'un seul bloc de matériau conducteur, elles ne permettent pas l'application d'un champ électrique directeur ; et les ouvertures étant par nécessité petites, les atomes passant à proximité des parois sont soumis à de forts gradients de champ électrique.

La solution retenue dans notre dispositif a été d'utiliser une cavité ouverte, composée de deux miroirs en configuration Fabry-Pérot [80]. Les miroirs sont d'abord usinés au diamant dans un substrat de cuivre afin de permettre une qualité de surface élevée [2] et ainsi limiter les pertes par diffraction. Une couche de niobium de 12 µm est alors déposée par pulvérisation cathodique [3] permettant d'obtenir les hautes réflectivités requises.

Géométrie La figure I.2 donne la géométrie des miroirs utilisés et leur agencement dans le résonateur. Séparés d'environ 28 mm et de rayon de courbure de l'ordre de 40 mm, ils permettent d'obtenir des fréquences de résonance de l'ordre de 51,1 GHz pour le mode

2. Rugosité de surface de 6 nm rms et une précision à grande échelle de 300 nm crête à crête.

3. Procédé développé et réalisé par P. Bosland, E. Jacques et B. Visentin au CEA, utilisé pour des cavités accélératrices dans les accélérateurs de particule [81].

gaussien TEM_{900}. Notons que l'emploi d'un mode d'ordre impair, $q = 9$ ici, est indispensable : l'onde stationnaire doit avoir un ventre d'amplitude maximale à l'endroit où passent les atomes, *i.e.* au centre du mode, couplés au champ *via* une interaction dipolaire électrique. Ceux-ci ont une trajectoire horizontale, *i.e.* orthogonale à l'axe de la cavité. L'amplitude du champ électrique vu par les atomes est alors une fonction gaussienne de leur position r dans la cavité, notée $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(r, z)$ (r et z sont les coordonnées polaires de $\mathbf{r}$, l'axe z étant l'axe de la cavité, et l'origine étant choisie au centre de la cavité) :

$$\mathcal{E}(r, z) = \mathcal{E}_0 f_{\mathrm{T}}(z) \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} \equiv \mathcal{E}_0 f(r, z). \tag{I.1}$$

$f_{\mathrm{T}}(z)$ est le profil transverse du mode représenté schématiquement figure I.2. $w(z)$ est le col, ou «waist», du mode gaussien, identique à celui obtenu avec un mode propageant (laser) :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}, \tag{I.2}$$

où $\lambda = 5,87\,\mathrm{mm}$ est la longueur d'onde du mode, et $w_0 \simeq 6\,\mathrm{mm}$ son col au centre de la cavité. Notons que nous obtenons alors un volume de mode relativement faible :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi w_0^2 d}{4} \simeq 770\,\mathrm{mm}^3, \tag{I.3}$$

assurant un champ d'amplitude importante et donc un couplage aux atomes d'autant meilleur :

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathrm{cav}}}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} \simeq 1,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V/m}. \tag{I.4}$$

Les miroirs ne sont en fait pas sphériques. Afin de lever la dégénérescence entre les deux modes de polarisations orthogonales, ils sont plutôt choisis de forme toroïdale. Avec deux rayons de courbure de $39,4\,\mathrm{mm}$ et de $40,6\,\mathrm{mm}$, les deux modes sont séparés de $1,2\,\mathrm{MHz}$, écart nettement plus grand que la fréquence caractéristique du couplage avec les atomes que nous obtiendrons, de l'ordre de $49\,\mathrm{kHz}$. Aussi les atomes pourront être considérés comme n'interagissant qu'avec un et un seul mode du champ.

Notons par ailleurs que l'usage d'une géométrie ouverte permet de coupler le mode de la cavité à un guide d'onde extérieur par diffraction sur les bords des miroirs. C'est ainsi que le couplage à une source micro-onde classique est rendu possible sans avoir à percer de trou dans les miroirs, ce qui dégraderait la qualité de leur surface.

Une très grande finesse Répétons le encore, accéder au régime de couplage fort entre les atomes et le champ électromagnétique requiert des taux de relaxation aussi faibles que possible. Pour le champ, ce taux de relaxation est simplement l'inverse du temps de vie $\mathrm{T}_{\mathrm{cav}}$ d'un photon dans la cavité. Celui-ci est en fait lié à la largeur spectrale intrinsèque $\Delta\nu_{\mathrm{cav}}$ de la résonance *via* la relation [82] $2\pi\Delta\nu_{\mathrm{cav}}\mathrm{T}_{\mathrm{cav}} = 1$, et donc à la finesse $\mathcal{F}$ du résonateur.

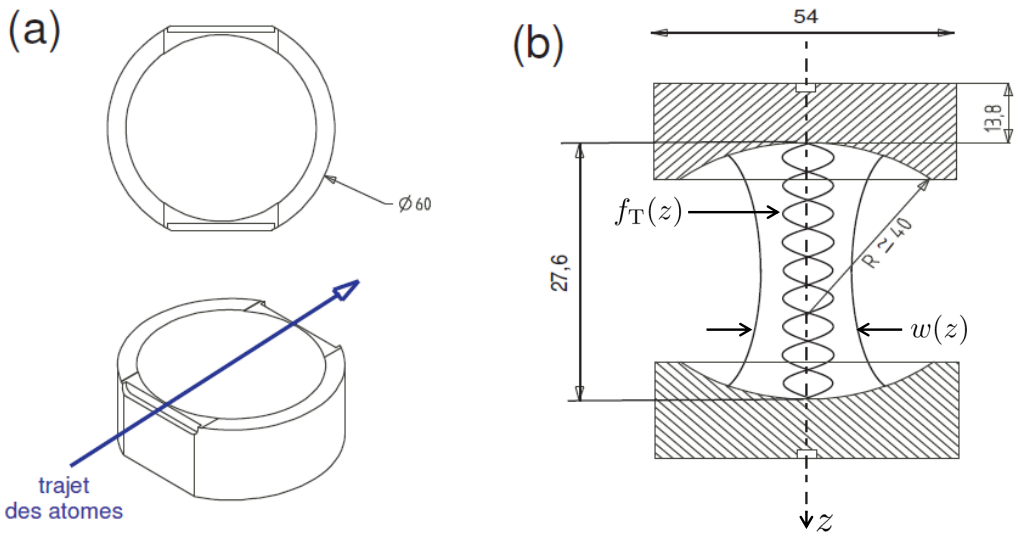


FIGURE I.2 – Schéma des miroirs de la cavité micro-onde supraconductrice. **a.** Vue de dessus et vue de trois-quarts. **b.** Schéma du résonateur. Les distances sont en millimètres. Par souci de lisibilité, la distance entre les deux miroirs est exagérée comparativement à leur taille. $f_T(z)$ est le profil transverse du mode, $w(z)$ son col à la cote z.

Dans les expériences que nous présentons dans les chapitres suivants, le temps de vie mesuré[4] des photons dans la cavité est de $T_{cav} = 65\,\text{ms}$ (pour le mode gaussien d'ordre $q = 9$). La largeur intrinsèque de la résonance est alors $\Delta\nu = 2,5\,\text{Hz}$, correspondant à une finesse $\mathcal{F}$ et un facteur de qualité Q de :

$$Q = 2,1 \cdot 10^{10} \qquad \mathcal{F} = Q/q = 2,3 \cdot 10^{9}. \tag{I.5}$$

Notons que les facteurs de qualité ainsi mesurés avec un résonateur ouvert sont comparables aux meilleurs obtenus avec des résonateurs fermés dans le même domaine spectral ($Q = 4,0 \cdot 10^{10}$ par exemple dans [79]).

I.1.1.b Contrôle de la fréquence de résonance

Dans nos expériences, nous aurons à contrôler précisément la différence des fréquences de résonance de la cavité et des atomes à deux niveaux utilisés, aussi appelée *désaccord*. La nature de leur interaction en dépend en effet fortement. Il nous faut donc pouvoir changer finement la fréquence ν_{cav} de la cavité, étant donnée la fréquence caractéristique du couplage atome/cavité $\sim 49\,\text{kHz}$, *i.e.* avec une précision de l'ordre du kilohertz. Au vu de la géométrie du résonateur, cela correspond à un contrôle au nanomètre au moins de la distance séparant les deux miroirs.

Pour cela, un premier réglage grossier est réalisé à l'aide de cales en cuivre séparant les deux miroirs, et dont l'épaisseur est contrôlée au µm, soit un accord au MHz, *via* des

4. La façon dont nous mesurons ce temps de vie est donnée dans [80].

décapages chimiques. Une fois la cavité refroidie à $\sim 1\,\mathrm{K}$, le régalage fin est assuré par des cales piézoélectriques aux bornes desquelles une tension électrique contrôlée est imposée. Le facteur de conversion est alors de l'ordre de $2,5\,\mathrm{kHz/V}$, avec une plage de $5\,\mathrm{MHz}$ environ.

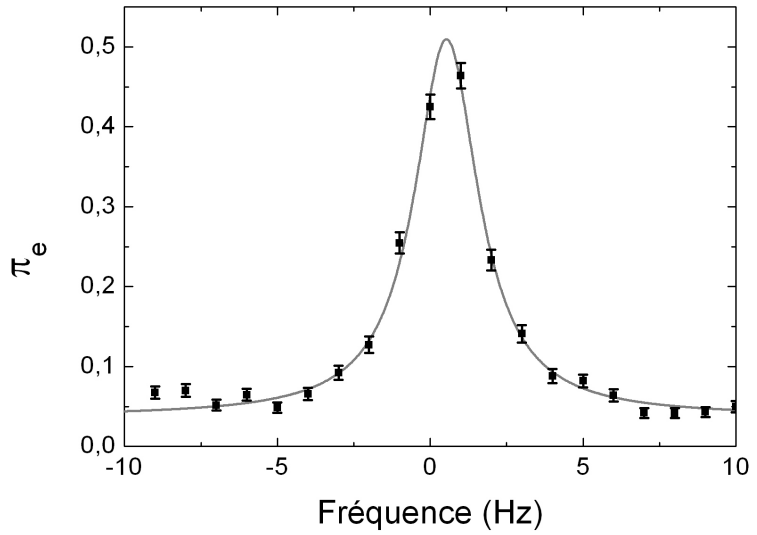


FIGURE I.3 – Spectre de résonance de la cavité micro-onde. La probabilité qu'un atome préparé dans l'état $|g\rangle$ quitte la cavité dans l'état $|e\rangle$ après avoir interagi de façon résonante avec le champ qu'elle contient est tracée en fonction de la fréquence de l'injection remplissant le mode au préalable. Le longueur de l'injection est de 500 ms.

Le contrôle de la valeur absolue de la fréquence de résonance de la cavité n'est cependant pas le seul paramètre important. Il nous faudra aussi en assurer la stabilité temporelle. Cette fois, la contrainte est bien plus sévère. Comme nous le verrons au cours des prochains chapitres, les expériences que nous souhaitons mener nécessitent une stabilité de phase du champ intracavité sur des temps de l'ordre de quelques dizaines de millisecondes. Cela impose notamment des fluctuations de fréquence petites devant 100 Hz, soit une distance inter-miroirs contrôlée au dixième d'Angström. Notons que cette contrainte est toutefois moins dure que lors d'expériences précédentes ayant permis l'observation de l'effet Zenon quantique [83], pour lesquelles la phase du champ devait être stable sur des temps de l'ordre de 1s, soit une position relative des miroirs stable à 10^{-13} mètre. Les travaux réalisés alors ont donc pu être remis à profit pour les expériences présentées dans ce mémoire.

Pour assurer une telle stabilité de phase, il nous a fallu dans un premier temps isoler toutes les sources de vibration mécanique du montage : les câbles reliant les sources de tension ou de micro-onde au dispositif passent sous des blocs de plomb eux-mêmes posés sur des blocs de ciment isolés des vibrations du sol par de la mousse, les tuyaux métalliques menant aux pompes sont coulés dans ces mêmes blocs de ciment, le montage est posé sur

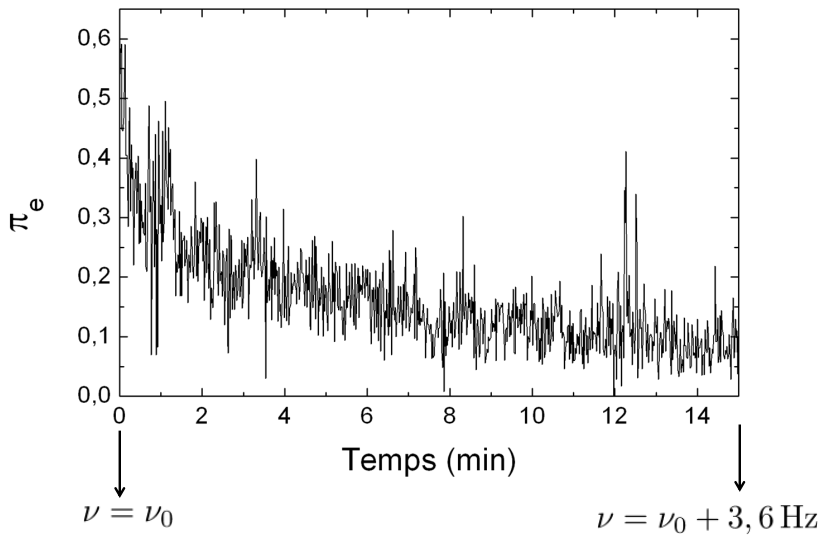


FIGURE I.4 – Dérives de fréquences observées pendant 15 min. La probabilité qu'un atome préparé dans l'état $|g\rangle$ quitte la cavité dans l'état $|e\rangle$ après avoir interagi de façon résonante avec le champ qu'elle contient est tracée en fonction du temps. Les deux fréquences données correspondent aux résultats de deux mesures de fréquence de résonance (voir figure I.3) réalisées juste avant et juste après cet enregistrement.

des pieds pneumatiques [5]... Par ailleurs la température de la cavité, modifiant la fréquence de résonance d'environ 1 Hz/mK, doit être activement stabilisée. Enfin le bain d'hélium «bouillonnant», à 4 K, doit être stabilisé en pression, sous peine de déplacer la résonance *via* des contraintes mécaniques, à hauteur de 1 Hz/mbar. La description détaillée du contrôle de tous ces paramètres pourra être trouvée dans le mémoire de thèse de Julien Bernu [76].

Pour mesurer la fréquence de résonance de la cavité, nous utilisons l'interaction avec les atomes que nous décrirons au paragraphe I.2, atomes à deux niveaux notés $|g\rangle$ (état fondamental) et $|e\rangle$ (état excité). Ceux-ci interagissent ici de façon résonante avec le champ : la fréquence de la transition $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ est fixée à ν_{cav}. Un échange d'énergie est alors autorisé entre les deux systèmes : les atomes préparés dans l'état $|g\rangle$ peuvent absorber des photons du mode [6], et alors quitter la cavité dans l'état $|e\rangle$. La probabilité π_e qu'un atome soit dans $|e\rangle$ en sortie de la cavité mesurée sur un ensemble de $\simeq 40$ atomes successifs est d'autant plus grande que le nombre de photons initialement présents est élevé.

Nous injectons alors un champ dans la cavité *via* une impulsion de longueur fixée mais dont nous varions la fréquence ν. Le tracé de π_e en fonction de ν constitue notre mesure du spectre de la cavité. La figure I.3 en donne le résultat pour des impulsions de 500 ms. La largeur à mi-hauteur mesurée après ajustement lorentzien est de $2,5$ Hz. C'est précisément la largeur $\Delta\nu_0$ intrinsèque de la résonance, limitée par temps de vie [82], $\Delta\nu_0 = 1/2\pi \mathrm{T}_{\mathrm{cav}} = 2,5$ Hz. Il n'y a donc pas de modulations de fréquence rapides à l'échelle

5. Tels que ceux utilisés pour les tables optiques anti-vibratoires.
6. La section IV.1 donnera le détail de la méthode.

du temps de mesure (de l'ordre de quelques secondes).

Pour contrôler les variations sur des échelles de temps plus longues, aussi appelées *dérives*, nous enregistrons maintenant à fréquence d'injection fixe la probabilité π_e sur des temps longs, par exemple 15 min sur la figure I.4. Des dérives plus faibles que $0,3$ Hz/min sont ainsi obtenues, nous permettant d'assurer des variations de fréquence plus faibles que 10 Hz sur des temps de mesure de l'ordre de 30 min. Toutes les 30 min au plus, la fréquence de résonance de la cavité devra donc être réajustée.

I.1.2 Description théorique

I.1.2.a Un champ quantifié

La description quantique du champ électromagnétique [84] se fait *via* la donnée des deux opérateurs, a et $a^\dagger$, hermitiques conjugués l'un de l'autre, et appelés respectivement opérateurs *annihilation* et *création*. Le hamiltonien du champ s'écrit grâce à eux sous la forme

$$H_{\text{cav}} = h\nu_{\text{cav}}\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \equiv h\nu_{\text{cav}}\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right). \tag{I.6}$$

Nous avons introduit ici la fréquence $\nu_{\text{cav}} = \omega_{\text{cav}}/2\pi$ du champ et l'opérateur $\hat{N} = a^\dagger a$, *opérateur nombre*, dont les états propres $|n\rangle$ sont également les états propres du hamiltonien. Ce sont ces états, dits *états de Fock* ou *états nombre*, que nous chercherons à préparer dès le chapitre suivant. Rappelons ici simplement les relations qui donnent leurs noms à tous ces opérateurs :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \qquad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle. \tag{I.7}$$

Les états $|n\rangle$ sont donc les états contenant un nombre fixé n de quanta d'énergie $h\nu_{\text{cav}}$, ou photons.

L'opérateur champ électrique enfin, de polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$ et d'amplitude $\mathcal{E}_0$, est défini comme

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}a + h.c., \tag{I.8}$$

où $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0 f(\mathbf{r})$ est le profil du champ donné équation (I.1).

Les états nombre que nous venons d'introduire ne correspondent pas à un champ classique. Pour ces états en effet, le champ électrique moyen $\langle n|\hat{\mathbf{E}}|n\rangle$ est nul. Les états *cohérents* ou *de Glauber* [85] en sont la bonne représentation. Notés $|\alpha\rangle$, et états propres de l'opérateur destruction

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \tag{I.9}$$

où α est un nombre complexe, ils se décomposent dans la base des états de Fock sous la forme

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{I.10}$$

Dans une évolution hamiltonienne de hamiltonien H_{cav}, ils deviennent

$$|\alpha(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\frac{\omega_{\text{cav}}t}{2}}\left|\alpha \mathrm{e}^{-i\omega_{\text{cav}}t}\right\rangle. \tag{I.11}$$

Nous retrouvons alors l'évolution «classique» de la phase d'un champ de pulsation ω_{cav}. Par abus de langage, nous appellerons dorénavant α l'amplitude d'un champ électrique préparé dans l'état $|\alpha\rangle$.

Notons pour finir que si le nombre de photons est fixé dans un état de Fock $|n\rangle$, il n'en est rien dans un état cohérent. Une mesure du nombre de photons dans un tel état $|\alpha\rangle$ donne en effet le résultat n avec une statistique poissonienne. La probabilité $P(n)$ de mesurer n est

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \tag{I.12}$$

Le nombre moyen de photons y est alors simplement

$$\langle \hat{N}\rangle = \langle \alpha|\hat{N}|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \tag{I.13}$$

I.1.2.b Couplage à l'environnement

L'oscillateur harmonique décrit par le modèle donné au paragraphe précédent et que nous cherchons à manipuler n'est bien sûr pas un système isolé. S'il est couplé à une source micro-onde classique permettant de préparer des états cohérents, il l'est aussi avec l'environnement. C'est ce couplage qui est à l'origine des phénomènes de *relaxation* et de *décohérence*. Si nous pouvons le négliger à l'échelle du temps d'interaction avec un atome, il n'en est rien à l'échelle d'une expérience entière au cours de laquelle le même champ interagit avec une longue série de sondes atomiques. Nous devons donc en donner un cadre formel.

En présence de relaxation Du fait du couplage à l'environnement, le nombre de photons présents dans la cavité ne reste pas constant au cours du temps : ceux-ci ont maintenant la possibilité d'en sortir. Inversement des photons de l'environnement peuvent y entrer. Les deux processus se compensent une fois l'équilibre atteint : pour un environnement à température finie T, qui joue alors le rôle de thermostat, celui-ci est établi quand l'oscillateur harmonique est dans son état dit *thermique*, décrit par la statistique de Bose-Einstein à la température T et à la pulsation ω_{cav} :

$$P_{\text{th}}(n) = \mathrm{e}^{-\frac{n\hbar\omega_{\text{cav}}}{\mathrm{k_B}T}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_{\text{cav}}}{\mathrm{k_B}T}}\right), \tag{I.14}$$

où $\mathrm{k_B}$ est la constante de Boltzmann. Dans cet état, le nombre moyen de photons présents dans le mode est

$$n_{\text{th}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega_{\text{cav}}}{\mathrm{k_B}T}} - 1}. \tag{I.15}$$

À $51,1\,\mathrm{GHz}$ et $0,8\,\mathrm{K}$, température à laquelle sera refroidi le mode, ce nombre vaut seulement $n_{\mathrm{th}} = 0,05$.

Il nous faut maintenant décrire l'évolution de l'état du champ vers cet état d'équilibre. Pour rendre compte de la transformation de sa matrice densité ρ sous chacun deux processus évoqués ci-dessus, nous introduisons les deux *opérateurs de saut* L_- et L_+ décrivant respectivement la perte et le gain d'un photon par le mode :

$$L_- = \sqrt{\kappa_-}a \qquad\qquad L_+ = \sqrt{\kappa_+}a^\dagger. \tag{I.16}$$

Dans le cadre d'une description markovienne de l'environnement [30, 84], valable pour un environnement suffisamment grand devant l'oscillateur harmonique, en termes de nombre de degrés de liberté par exemple, et pour des évolutions sur des temps longs devant le temps de mémoire de l'environnement, l'équation d'évolution de la matrice densité ρ de l'oscillateur harmonique, ou *équation maîtresse*, peut s'écrire sous la forme dite *de Lindblad* [86] :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}\left[H,\rho\right] + \mathbf{L}\rho, \tag{I.17}$$

$$\mathbf{L}\rho = \sum_{\mu=\{+,-\}}\left(L_\mu\rho L_\mu^\dagger - \frac{1}{2}L_\mu^\dagger L_\mu\rho - \frac{1}{2}\rho L_\mu^\dagger L_\mu\right), \tag{I.18}$$

où le premier terme de l'équation (I.17) décrit simplement une évolution hamiltonienne de hamiltonien H. Pour des intervalles de temps infinitésimaux, l'équation (I.17) prend la forme, en représentation d'interaction par rapport au hamiltonien H,

$$\rho(t+\mathrm{d}t) = \left(\mathbb{1} + \mathrm{d}t\mathbf{L}\right)\rho(t). \tag{I.19}$$

Notons aussi que dans le cadre de ce modèle, la probabilité par unité de temps qu'un *saut quantique* L_+ ou L_- ait lieu est donnée par

$$p_+ = \mathrm{Tr}\left(L_+^\dagger L_+\rho\right) = \kappa_+\mathrm{Tr}\left(aa^\dagger\rho\right) = \kappa_+(1+\langle n\rangle) \tag{I.20}$$

$$p_- = \mathrm{Tr}\left(L_-^\dagger L_-\rho\right) = \kappa_-\mathrm{Tr}\left(a^\dagger a\rho\right) = \kappa_-\langle n\rangle. \tag{I.21}$$

À l'équilibre thermique, ces deux probabilités étant égales, nous obtenons simplement

$$\frac{\kappa_+}{\kappa_-} = \frac{n_{\mathrm{th}}}{n_{\mathrm{th}}+1}. \tag{I.22}$$

Nous introduisons alors le *taux de relaxation* κ, défini tel que

$$\kappa_+ = n_{\mathrm{th}}\kappa \qquad\qquad \kappa_- = (n_{\mathrm{th}}+1)\kappa. \tag{I.23}$$

Notons de suite qu'eu égard à la valeur très faible de n_{th} aux températures auxquelles nous travaillerons, $n_{\mathrm{th}} = 0,05$, la probabilité qu'un saut quantique à partir d'un état de Fock

$|n\rangle$ corresponde au gain d'un photon est très faible, dès que $n \neq 0$, comparée à celle que le saut se traduise par une perte de photon.

À partir de l'équation (I.23), il vient en outre

$$\frac{\mathrm{d}\langle \hat{N} \rangle}{\mathrm{d}t} = -\kappa \left(\langle \hat{N} \rangle - n_{\mathrm{th}} \right). \tag{I.24}$$

$\mathrm{T}_{\mathrm{cav}} = \kappa^{-1}$ est donc le temps caractéristique de décroissance du nombre moyen de photons dans la cavité, appelé dorénavant *temps de vie* d'un photon. Il est en effet possible de montrer que le champ préparé dans l'état de Fock $|n\rangle$ voit la population de cet état décroître exponentiellement, à température nulle [7], en $\mathrm{T}_{\mathrm{cav}}/n$. L'état nombre contenant 1 photon est donc en particulier «perdu» en $\mathrm{T}_{\mathrm{cav}}$.

Couplage à une source micro-onde classique Voyons maintenant comment nous sommes en mesure de coupler le champ à une source micro-onde et comment nous préparons ainsi les états semi-classiques de Glauber. Nous n'en donnerons pas ici une description théorique précise. Celle-ci peut être trouvée par exemple dans [30]. Précisons simplement que l'opération qui consiste à injecter un champ cohérent $|\alpha\rangle$ dans le mode de la cavité est décrite par l'*opérateur déplacement* $\mathcal{D}(\alpha)$ défini comme

$$\mathcal{D}(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}. \tag{I.25}$$

Il tient son nom du fait qu'un champ cohérent d'amplitude β est transformé en un champ d'amplitude $\alpha + \beta$ après application de $\mathcal{D}(\alpha)$:

$$\mathcal{D}(\alpha)|\beta\rangle = \mathrm{e}^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}|\alpha + \beta\rangle. \tag{I.26}$$

En pratique, la construction d'un état classique $|\alpha\rangle$ se fait par le couplage du mode du champ électromagnétique avec une source micro-onde classique, d'amplitude et de fréquence bien contrôlées. Partant du vide de photons, coupler la source au mode pendant un temps t_{inj} très inférieur [8] au temps de vie des photons $\mathrm{T}_{\mathrm{cav}}$ revient alors à préparer le champ dans l'état $|\alpha = \gamma t_{\mathrm{inj}}\rangle$, où γ est le *taux d'injection* dont la valeur dépend de la puissance de la source micro-onde. Nous supposerons dans toute la suite l'approximation linéaire $t_{\mathrm{inj}} \ll \mathrm{T}_{\mathrm{cav}}$ vérifiée.

Le schéma de principe de l'injection est donné figure I.5. Le synthétiseur utilisé fournit une onde à $\sim 12,8\,\mathrm{GHz}$. À sa sortie, une diode PIN à une entrée et une sortie [9], contrôlée par un signal digital s_a, est utilisée comme commutateur rapide. La durée d'une injection est alors contrôlée avec une précision de l'ordre du temps de commutation de la diode, *i.e.* $\sim 100\,\mathrm{ns}$. L'impulsion micro-onde ainsi générée est alors quadruplée en fréquence avant de voir son intensité diminuée dans un atténuateur variable de précision, de gamme $0 - 80\,\mathrm{dB}$. Nous disposons alors d'un contrôle précis du taux d'injection γ. La façon dont ce coefficient est calibré sera donnée au paragraphe III.2.1.

7. À température $T = 0,8\mathrm{K}$, la correction est faible, le temps de vie étant alors de $\mathrm{T}_{\mathrm{cav}}/(n+(2n+1)n_{\mathrm{th}})$.
8. Dans le cas général, l'amplitude du champ préparé s'écrit $\alpha = \gamma \mathrm{T}_{\mathrm{cav}} \left(1 - \mathrm{e}^{-t_{\mathrm{inj}}/\mathrm{T}_{\mathrm{cav}}}\right)$.
9. Dite «SPST» pour «Single Pole Single Throw».

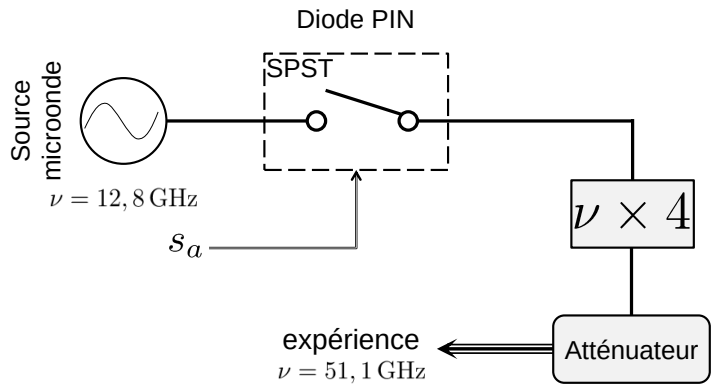


FIGURE I.5 – Préparation d'un état classique du champ. Un signal micro-onde à $12,8\,\mathrm{GHz}$ est transmis *via* une diode PIN, contrôlée par un signal digital s_a, à un quadrupleur de fréquence. L'amplitude de l'onde à $51\,\mathrm{GHz}$ est alors contrôlée par un atténuateur variable $0 - 80\,\mathrm{dB}$ dont la sortie est couplée *via* des guides d'onde au mode du champ électromagnétique constituant l'oscillateur harmonique.

I.2 Atomes à deux niveaux

Décrivons maintenant l'atome à deux niveaux utilisé comme sonde du champ électromagnétique dans nos expériences. La première partie nous permettra d'introduire tous les concepts et notations dont nous aurons besoin par la suite, tandis que les parties suivantes seront consacrées à la réalisation expérimentale.

I.2.1 Formalisme et notations

I.2.1.a Atome à deux niveaux et spin 1/2

L'analogie entre un système quantique à deux niveaux, et *a fortiori* entre les atomes à deux niveaux dont nous voulons nous servir, et un spin 1/2 est totale. Le formalisme associé [87, 30] peut alors être intégralement utilisé : les deux niveaux communément notés $|e\rangle \equiv |+\rangle_z$ et $|g\rangle \equiv |-\rangle_z$, états excité et fondamental respectivement, sont les états propres du hamiltonien H_{at} :

$$H_{\mathrm{at}} = \frac{h\nu_{\mathrm{at}}}{2}\sigma_z, \tag{I.27}$$

où ν_{at} est la fréquence de la transition $|g\rangle \longleftrightarrow |e\rangle$, et σ_z l'un des trois opérateurs de Pauli qui, avec l'unité $\mathbb{1}_{\mathrm{at}}$, forment une base de l'espace des opérateurs sur le système à deux niveaux. Ils s'écrivent dans la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{I.28}$$

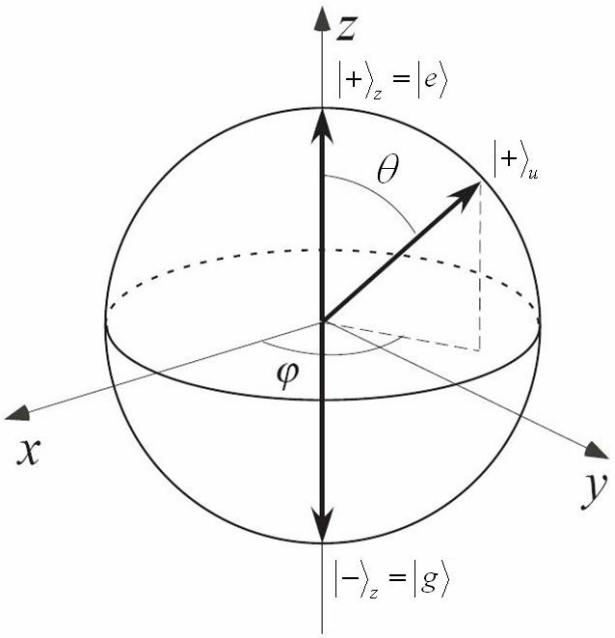


FIGURE I.6 – Représentation de l'état d'un système à deux niveaux sur la sphère de Bloch.

Par analogie, nous définissons donc le *pseudo-spin atomique* $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$, où $\boldsymbol{\sigma}$ est le vecteur de composantes σ_x, σ_y et σ_z.

Notons que nous avons choisi ici sans perte de généralité de fixer comme origine des énergies la moyenne des énergies des niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$:

$$\frac{E_e + E_g}{2} \equiv 0. \tag{I.29}$$

Un état quelconque $|\psi\rangle$ de l'atome à deux niveaux est décrit par la donnée de deux angles $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ en s'écrivant sous la forme

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|e\rangle + \mathrm{e}^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|g\rangle. \tag{I.30}$$

Une représentation géométrique simple peut alors être utilisée : la *sphère de Bloch* [38]. Un état de l'atome à deux niveaux de «paramètres» (θ, φ) y est représenté par un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de coordonnées sphériques (θ, φ) (voir figure I.6). Cet état est noté $|+\rangle_{\mathbf{u}}$ par analogie avec les états $|\pm\rangle_{i=x,y,z}$, l'état $|-\rangle_{\mathbf{u}} = |+\rangle_{-\mathbf{u}}$ lui étant orthogonal.

Nous introduisons finalement les opérateurs de création et de destruction d'excitation atomique, σ_+ et σ_- respectivement, définis comme

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g| \qquad\qquad \sigma_- = |g\rangle\langle e|. \tag{I.31}$$

L'opérateur dipôle électrique $\mathbf{D} = q\mathbf{R}$, purement non-diagonal dans la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, peut alors s'écrire

$$\mathbf{D} = d(\boldsymbol{\epsilon}_a\sigma_- + \boldsymbol{\epsilon}_a^*\sigma_+), \tag{I.32}$$

où l'on a introduit le paramètre réel d et le vecteur complexe $\boldsymbol{\epsilon}_a$ *via*

$$q\langle g|\mathbf{R}|e\rangle = d\boldsymbol{\epsilon}_a. \tag{I.33}$$

I.2.1.b Manipulation de l'état interne

Dans les expériences que nous allons réaliser, il sera crucial de pouvoir manipuler l'état interne des atomes. Cela se fait *via* l'interaction avec un champ électrique classique $\mathbf{E}_r$, de pulsation ω_r et de polarisation $\boldsymbol{\epsilon}_r$, décrite par le hamiltonien dipolaire électrique H_r :

$$H_r = -\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}_r(t), \qquad \mathbf{E}_r(t) = i\mathcal{E}_r\left(\boldsymbol{\epsilon}_r \mathrm{e}^{-i(\omega_r t+\varphi)} - \boldsymbol{\epsilon}_r^* \mathrm{e}^{i(\omega_r t+\varphi)}\right). \tag{I.34}$$

Nous passons alors dans le référentiel tournant à ω_r, et dans le cadre de l'approximation séculaire, négligeant les termes de phase rapidement variables, le hamiltonien des atomes en présence du champ électrique devient le hamiltonien indépendant du temps

$$\tilde{H} = \frac{\hbar\Delta_r}{2}\sigma_z - i\frac{\hbar\Omega_r}{2}\left[\mathrm{e}^{-i\varphi}\sigma_+ - \mathrm{e}^{i\varphi}\sigma_-\right], \tag{I.35}$$

où $\Delta_r = \omega_{\mathrm{at}} - \omega_r$ est le désaccord atome/champ. Ω_r est la pulsation de Rabi classique, qui peut être supposée réelle sans perte de généralité, et qui est définie comme

$$\Omega_r = \frac{2d}{\hbar}\mathcal{E}_r\boldsymbol{\epsilon}_a^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_r. \tag{I.36}$$

On peut alors montrer que le hamiltonien $\tilde{H}$ peut en fait se mettre sous la forme

$$\tilde{H} = \frac{\hbar\Omega_r'}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} \qquad \Omega_r' = \sqrt{\Omega_r^2+\Delta_r^2}, \tag{I.37}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\Omega_r'}\left[\Delta_r\mathbf{e}_z + \Omega_r\left(-\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y\right)\right]. \tag{I.38}$$

Remarquons simplement que :
- si $\Omega_r = 0$, alors $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$,
- si $\Delta_r = 0$, alors $\mathbf{n}$ est dans le plan équatorial de la sphère de Bloch.

Dans ce dernier cas, c'est le choix seul de la phase φ du champ $\mathbf{E}_r$ qui détermine la direction du vecteur $\mathbf{n}$. $\mathbf{n}$ repère donc la direction autour de laquelle se fait la rotation dans la sphère de Bloch. Pour des raisons qui apparaîtront évidentes plus tard, nous appelons *direction d'observation* la direction définie par le vecteur orthogonal à $\mathbf{n}$ contenu dans le plan équatorial de la sphère. Notons également qu'alors, la pulsation Ω_r' se réduit à la pulsation de Rabi classique Ω_r.

Si nous nous rappelons que $\boldsymbol{\sigma}$ est le générateur des rotations, nous pouvons nous convaincre que l'interaction de l'atome à deux niveaux avec le champ électrique $\mathbf{E}_r$, décrite par le hamiltonien $\tilde{H}$ donné (I.37), équivaut au temps t à une rotation du spin atomique

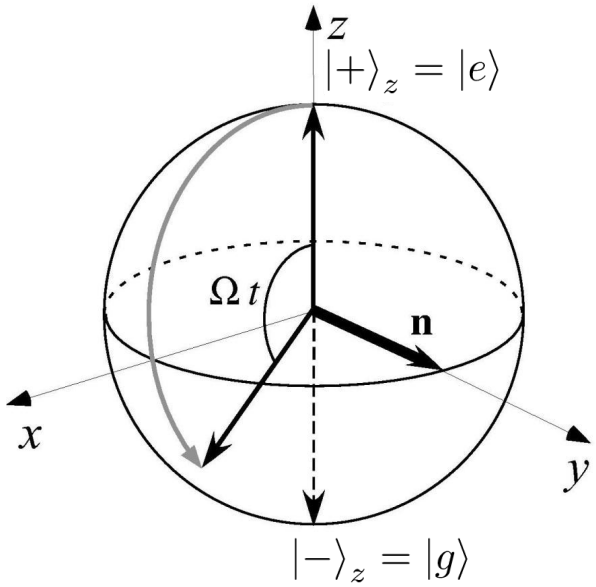


FIGURE I.7 – Manipulation de l'état interne de l'atome. En présence d'un champ électrique oscillant résonant avec l'atome à deux niveaux, une oscillation de Rabi classique fait passer continûment des états $|e\rangle$ et $|g\rangle$ aux superpositions cohérentes à poids égaux $1/\sqrt{2}(|e\rangle + \mathrm{e}^{i\varphi}|g\rangle)$. La valeur de φ dépend de la direction d'observation, et donc du vecteur $\mathbf{n}$.

dans la sphère de Bloch d'un angle $\Omega'_r t$ autour du vecteur $\mathbf{n}$. La figure I.7 en donne un exemple dans la situation qui nous intéresse, *i.e.* quand le champ et les atomes sont à résonance, et pour $\mathbf{n}$ choisi le long de l'axe $\mathbf{e}_y$. Le passage continu du niveau $|e\rangle$ au niveau $|g\rangle$, et inversement de $|g\rangle$ à $|e\rangle$, constitue ce que l'on appelle des *oscillations de Rabi*, classiques ici. Pour le choix particulier

$$\Omega_r t = \frac{\pi}{2}, \tag{I.39}$$

l'interaction avec le champ micro-onde produit les superpositions cohérentes à poids égaux

$$|e\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle + \mathrm{e}^{i\varphi}|g\rangle\right) \qquad |g\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\mathrm{e}^{-i\varphi}|e\rangle + |g\rangle\right). \tag{I.40}$$

Nous appellerons dorénavant cette transformation, brique élémentaire de l'interférométrie Ramsey décrite au paragraphe I.2.2, une *impulsion* $\pi/2$.

Zones de Ramsey Expérimentalement, ces oscillations de Rabi classiques ont lieu dans des cavités de faible surtension que nous appelons *zones de Ramsey*. Leur géométrie doit permettre une bonne localisation du mode du champ, de sorte à n'autoriser l'interaction qu'avec un seul atome. Les petits volumes de mode qui en découlent impliquent alors des champs aussi faibles que quelques photons. Le champ doit cependant continuer à pouvoir

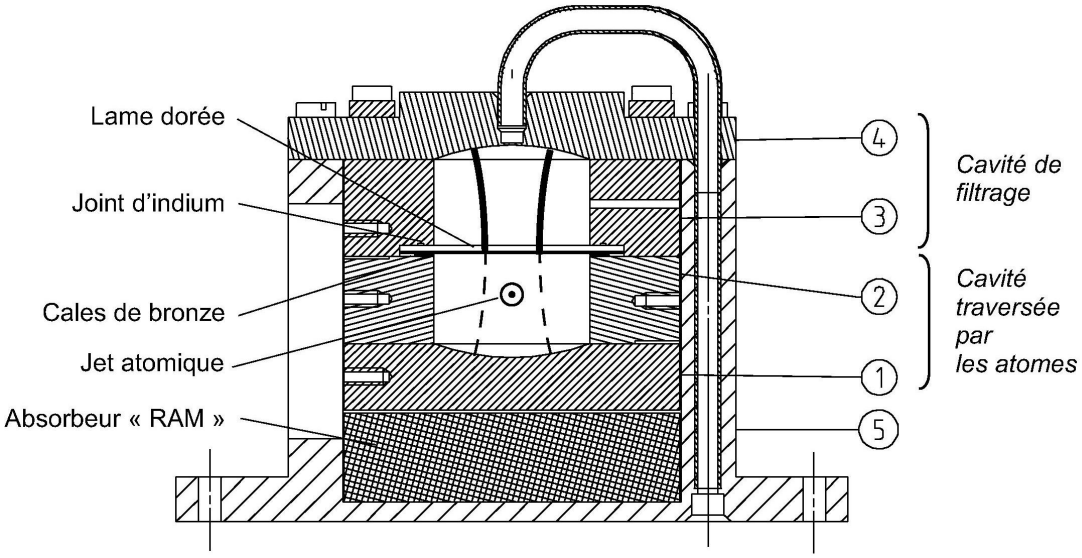


FIGURE I.8 – Schéma des zones de Ramsey. Le champ micro-onde est d'abord mis en forme dans une cavité de filtrage. La lame dorée transmet partiellement la micro-onde qui fuit dans la cavité traversée par les atomes. Une partie du champ est réfléchie dans le mode par le miroir en graphite (1), le reste étant finalement absorbé par un absorbeur micro-onde.

être traité classiquement. Sans entrer dans les détails [77], la solution consiste à imposer une forte dissipation dans la cavité [88], par l'usage de miroirs en graphite : le facteur de qualité mesuré est de l'ordre de 100. La mise en forme du mode est quant à elle réalisée grâce à un cavité de filtrage de bon facteur de qualité $Q \approx 1000$ (voir figure I.8).

Pour créer un champ dans les zones de Ramsey, nous utilisons des sources micro-ondes classiques couplées *via* des guides d'ondes au mode de la cavité (voir figure). De même que pour la cavité supraconductrice, l'amplitude du champ injecté est précisément contrôlée grâce à un atténuateur calibré à 51 GHz, et la durée des impulsions, typiquement de l'ordre de 2 µs, grâce à des interrupteurs rapides type diode PIN. Si la première permet de contrôler la pulsation de Rabi classique $\Omega_r \propto \mathcal{E}_r$, la seconde fixe le temps d'interaction t de l'atome avec le champ et donc l'angle $\Omega_r t$ de la rotation de spin subie au passage par la zone de Ramsey.

I.2.2 Interférométrie de Ramsey

Maintenant que nous savons comment manipuler l'état interne des atomes, voyons comment cela peut être exploité pour réaliser un interféromètre atomique . Un interféromètre de Ramsey est l'équivalent atomique d'un interféromètre optique de Mach-Zehnder. Dans ce dernier, deux chemins optiques obtenus par division d'amplitude sur une lame séparatrice interfèrent après recombinaison sur une deuxième lame, la figure d'interférence en sortie de l'interféromètre dépendant de la différence de marche ou de phase entre les deux chemins. Ici, le rôle des deux chemins est joué par les deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$, et la lame

séparatrice correspond à l'impulsion $\pi/2$ qui, pour un atome initialement dans l'état $|e\rangle$, prépare la superposition cohérente

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle). \tag{I.41}$$

Si maintenant dans une seconde zone de Ramsey, une nouvelle impulsion $\pi/2$ est réalisée, que devient l'état atomique ? Cela dépend bien sûr de la direction $\mathbf{n}$ autour de laquelle la rotation du spin est faite dans la sphère de Bloch. Celle-ci est contrôlée par la phase φ du champ micro-onde avec lequel interagit l'atome. Plaçons nous ici dans le référentiel tournant à ω_{at}. Dans la définition de $|\psi_0\rangle$ donnée équation (I.41), nous avons implicitement pris comme origine des phases la phase du champ micro-onde dans la première zone de Ramsey. Si le champ dans la seconde zone de Ramsey a *la même* phase que dans la première, alors la direction d'observation se trouve être la même et l'atome est amené dans l'état $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre. La probabilité π_g de détecter l'atome dans $|g\rangle$ est donc de 1.

Pour que les deux impulsions puissent avoir de façon reproductible la même phase, il nous faut utiliser la même source micro-onde pour les deux zones de Ramsey : c'est la façon la plus simple d'arriver à ce résultat, sans avoir à utiliser des procédés complexes de verrouillage de phase. Puisque la source et les atomes sont à résonance, les phases qu'ils accumulent pendant l'intervalle de temps séparant les deux impulsions sont identiques. La phase accumulée par la source dans le référentiel tournant est donc nulle et l'égalité de phase entre les deux impulsions micro-ondes est assurée.

Si nous voulons maintenant modifier la direction d'observation de la seconde impulsion $\pi/2$, nous pouvons exploiter les deux ordres de grandeur de différence entre la longueur des impulsions et l'intervalle de temps qui les sépare. Les deux zones de Ramsey que nous utilisons sont en effet distantes d'environ 9 cm, ce qui correspond à un temps de vol $t_{\text{vol}} = 360\,\mu\text{s}$ pour des atomes à 250 m/s. Si nous désaccordons la source micro-onde de $\nu_s - \nu_{\text{at}} = \delta\nu = 1,4\,\text{kHz}$ seulement, la différence de phase accumulée entre les deux impulsions $\pi/2$ est de π. Par ailleurs, une impulsion $\pi/2$ nécessitant typiquement $2\,\mu\text{s}$, les fréquences de Rabi classiques mises en jeu sont de l'ordre de 125 kHz, soit deux ordres de grandeur au-dessus de $\delta\nu$. Très clairement, il est donc possible en utilisant des désaccords $\delta\nu \sim$ qqs. kHz de conserver la condition de résonance, tout en variant la phase de la seconde impulsion $\pi/2$. Celle-ci est donnée par

$$\varphi = (\omega_s - \omega_{\text{at}})t_{\text{vol}}. \tag{I.42}$$

On peut alors montrer que la probabilité π_g de détecter un atome dans $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre prend la forme

$$\pi_g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi. \tag{I.43}$$

De façon analogue à l'interféromètre de Mach-Zehnder, la probabilité de détecter un atome dans une des deux «voies» de sortie ($|e\rangle$ ou $|g\rangle$) est une fonction sinusoïdale de la différence de phase φ accumulée entre les deux impulsions $\pi/2$. Mesurer π_g renseigne donc sur ce déphasage φ.

I.2.3 Atomes de Rydberg circulaires

Nous nous sommes fixé le cadre formel de l'atome à deux niveaux que nous souhaitons utiliser. Il nous faut maintenant pouvoir en disposer expérimentalement. Le choix de l'atome et des niveaux dans lesquels il sera préparé doit répondre à certaines contraintes.

- Il faut d'une part une structure de niveaux suffisamment peu complexe pour pouvoir être adressée, au moins pour les premières étapes de la préparation, par des lasers de longueurs d'onde «courantes». Les atomes alcalins, quasi-exclusivement utilisés dans les expériences d'optique atomique, y répondent bien. Dans notre dispositif, nous utilisons des atomes de rubidium 85 ;
- Il faut d'autre part, bien sûr, trouver deux niveaux tels que la description théorique donnée au paragraphe précédent soit applicable dans le cadre d'approximations «raisonnables» ;
- En outre, la fréquence de résonance du système à deux niveaux ainsi formé doit être dans le domaine des micro-ondes, *i.e.* le domaine où nous disposons de cavités de haute finesse, comme nous l'avons vu au paragraphe I.1 ;
- Enfin, nous l'avons évoqué précédemment, il nous faudra atteindre le régime dit de couplage fort pour pouvoir réaliser les mesures quantiques non-destructives en vue. Le temps de vie des niveaux doit donc être suffisamment grand pour minimiser les taux de relaxation, et le dipôle électrique de la transition élevé afin de maximiser le couplage des atomes avec le champ électrique qu'ils sonderont.

Les *atomes de Rydberg circulaires* satisfont à ces critères. Dans cette section, après avoir donné les principales caractéristiques de ces niveaux particuliers, nous décrirons brièvement la façon dont nous les préparons et les détectons dans notre système expérimental.

I.2.3.a Propriétés

Les atomes dits de Rydberg [89] sont les atomes pour lesquels le nombre quantique principal n est très élevé. Les atomes alcalins que nous considérons, excités dans ces niveaux, voient leur électron de valence très éloigné du cœur : dans une vision classique, cet atome *hydrogénoïde* est alors un dipôle électrique d'autant plus grand que l'électron est éloigné du noyau, *i.e.* d'autant plus grand que n est élevé. Il sera d'autant mieux couplé au champ électrique que nous souhaitons sonder.

Afin de rendre le temps de vie de ces niveaux excités aussi grands que possible, nous optons par ailleurs pour l'utilisation des états dits *circulaires* [90]. Ces niveaux pour lesquels les nombres quantiques orbital et magnétique sont maximaux ($l = m = n - 1$) sont en effet étonnamment stables. Sans entrer dans les détails, cela est lié aux règles de sélection dipolaire électrique qui imposent à un état circulaire de niveau n, que nous noterons dorénavant $|nC\rangle$, de se désexciter vers l'état circulaire inférieur $|(n-1)C\rangle$, et vers cet état seulement. Leur temps de vie croît même en n^5. Les expériences que nous avons menées ont utilisé les niveaux circulaires $|51C\rangle \equiv |e\rangle$ et $|50C\rangle \equiv |g\rangle$ (voir figure I.9). Leurs temps de vie respectifs sont de $31,5\,\mathrm{ms}$ et $28,5\,\mathrm{ms}$.

Ces niveaux sont en outre dits «circulaires» en référence à la forme de l'orbitale élec-

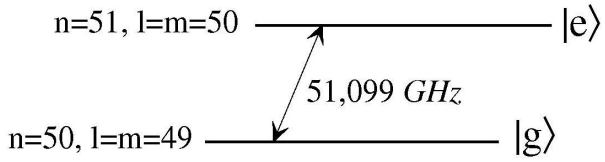


FIGURE I.9 – Niveaux de Rydberg circulaires utilisés dans nos expériences. La transition atomique à 51,099 GHz est dans le domaine micro-onde.

tronique. Celle-ci est en effet torique et localisée au voisinage de la trajectoire circulaire d'un électron dans le modèle de Bohr. Les caractéristiques principales des atomes de Bohr se retrouvent alors chez les atomes de Rydberg circulaires :

- Les énergies des niveaux dans le vide ne dépendent que de n et croissent en $-1/n^2$. La fréquence de la transition $|(n-1)C\rangle \longleftrightarrow |nC\rangle$ décroît donc en $1/n^3$. Pour les niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ que nous utilisons, celle-ci est comme requis dans le domaine des micro-ondes (voir figure I.9) ;
- Le rayon de l'orbitale croît quant à lui en n^2. Il en va alors de même pour le dipôle de la transition $|(n-1)C\rangle \longleftrightarrow |nC\rangle$, introduit au paragraphe I.2.1, dont la composante σ^+ prend la forme [30, p. 254]

$$d_n = n^2 \frac{|q| a_0}{\sqrt{2}}, \tag{I.44}$$

  où q est la charge de l'électron et $a_0 = 0,53\,\text{Å}$ le rayon de Bohr. Pour les niveaux que nous utilisons, ce dipôle est de l'ordre de $1800|q|a_0$, soit 400 fois plus grand que celui de la transition $D2$. À l'échelle atomique, les niveaux de Rydberg circulaires sont donc des atomes géants, véritables antennes très sensibles au champ électrique micro-onde.

Il nous reste finalement à vérifier la condition la plus essentielle : les niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ peuvent-ils être considérés comme formant un système à deux niveaux ? En champ nul, la réponse est non. Les niveaux circulaires sont alors quasi-dégénérés avec la plupart des niveaux dits *elliptiques*, de même nombre quantique principal, mais de moment orbital plus faible. Nous pouvons toutefois utiliser la grande sensibilité des niveaux de Rydberg au champ électrique pour lever cette dégénérescence grâce à l'*effet Stark*.

La figure I.10 donne le diagramme des niveaux d'énergie pour les deux multiplicités $n = 50$ et $n = 51$ de l'atome hydrogénoïde en présence d'un champ électrique statique F. Notons que nous y introduisons un nouveau nombre quantique n_1, appelé nombre quantique parabolique : la présence du champ électrique brise la symétrie sphérique et le nombre quantique orbital l n'est plus un bon nombre quantique. Il est remplacé par n_1, qui prend ses valeurs entre 0 et $n - |m| - 1$. Pour un niveau circulaire notamment, $n_1 = 0$. Il est alors possible de montrer [91] que l'énergie du niveau $|n, m, n_1\rangle$ prend la forme $E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)}$, dans un développement à l'ordre 2 en champ électrique,

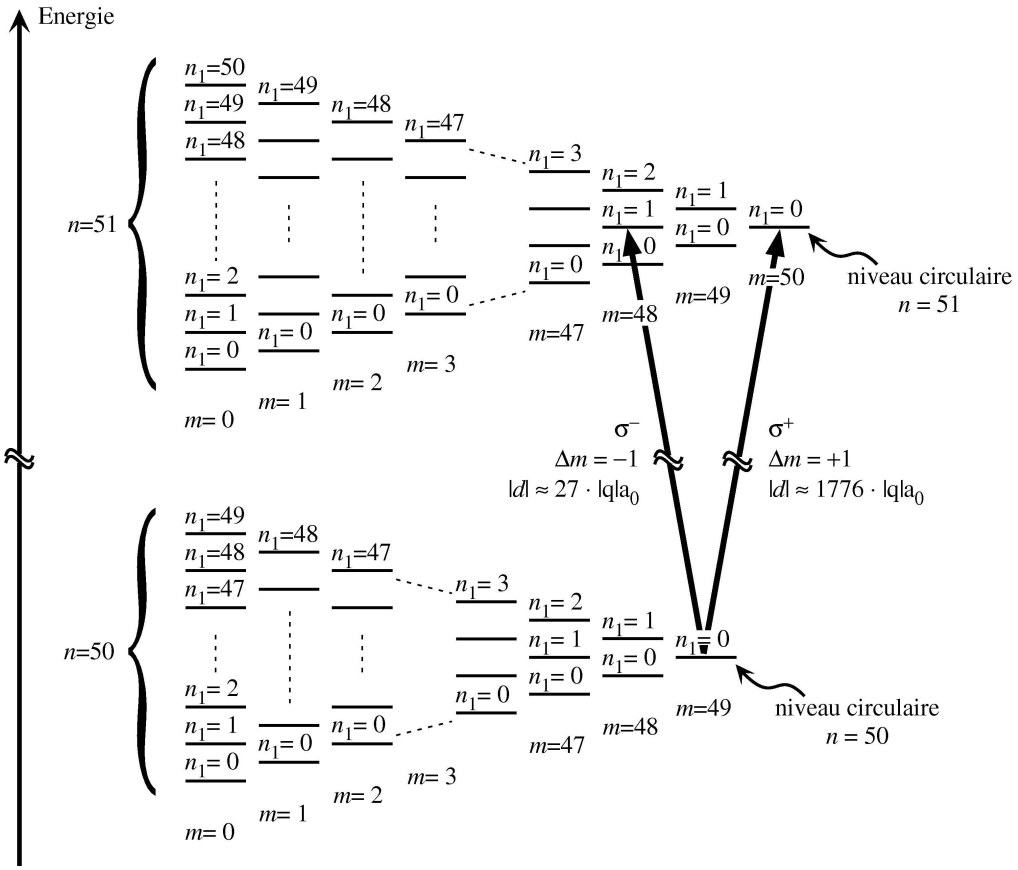


FIGURE I.10 – Diagramme d'énergie des niveaux de Rydberg $n = 50$ et $n = 51$ pour un atome hydrogénoïde en présence d'un champ électrique. Le dipôle de la transition σ^+ $|50C\rangle \to |51C\rangle$, de $1776|q|a_0$, est 66 fois plus grand que le dipôle de la transition σ^- de même fréquence $|50C\rangle \to |n = 51, m = 48, n_1 = 1\rangle$. Préparé dans un des états circulaires, l'atome se comporte comme un atome à deux niveaux.

avec

$$E^{(0)} = -\frac{1}{2n^2}, \tag{I.45}$$

$$E^{(1)} = \frac{3}{2}knF, \tag{I.46}$$

$$E^{(2)} = -\frac{1}{16}\left(17n^2 - 3k^2 - 9m^2 + 19\right)n^4F^2, \tag{I.47}$$

où $k = 2n_1 - n + |m| + 1$, et où les énergies et champs sont exprimés en unités atomiques. Il faut essentiellement noter qu'un effet Stark linéaire permet alors de lever la dégénérescence entre l'état circulaire et les deux états de m immédiatement inférieurs ($m = n - 2$) par 100 MHz/(V/cm). En présence d'un champ électrique même faible la transition circulaire – circulaire ($\Delta m = +1$) peut alors être notablement distinguée des transitions vers les états

elliptiques ($\Delta m = 0$). La transition $\Delta m = -1$ reste toutefois très proche en fréquence, mais les deux ordres de grandeur entre son dipôle et d_n nous autorise à la négliger. C'est donc bien d'un système à deux niveaux dont nous disposons maintenant.

Notons pour finir que si l'effet Stark linéaire s'annule pour les niveaux circulaires, un effet quadratique subsiste. La transition $|50C\rangle \longleftrightarrow |51C\rangle$ voit alors sa fréquence déplacée de l'ordre de $-255\,\mathrm{kHz}/(\mathrm{V/cm})^2$. Par l'emploi de champs électriques de l'ordre du $\mathrm{V}\cdot\mathrm{cm}^{-1}$, nous pourrons donc modifier la fréquence atomique sur quelques centaines de kilohertz, soit sur des échelles plus grandes que le couplage entre le champ de la cavité et les atomes, de l'ordre de 49 kHz dans nos expériences. Nous pourrons en particulier amener à loisir l'atome à ou hors résonance avec le champ.

Remarque : En champ nul, c'est en fait la stabilité même des niveaux circulaires qui est remise en question [92]. C'est en effet le champ électrique qui fixe l'axe de quantification. Si le champ appliqué s'annule ou est trop faible, cet axe ne sera plus bien défini et les champs électriques résiduels pourront modifier l'état interne de l'atome au sein de la multiplicité. Le champ électrique se doit donc d'être gardé non nul tout le long de la trajectoire atomique, et rendu aussi homogène que possible pour éviter des variations rapides de l'axe de quantification, toujours pour préserver les niveaux circulaires, mais aussi pour éviter des déphasages inhomogènes des atomes dans le jet, qui limiteraient le contraste de l'interféromètre de Ramsey. Un potentiel électrique bien contrôlé est donc appliqué à toutes les pièces du montage [10] à proximité desquelles les atomes transitent. Le champ électrique statique résultant est appelé *champ électrique directeur*.

I.2.3.b Préparation et contrôle

Circularisation des atomes de rubidium Expliquons maintenant comment nous préparons les atomes de rubidium dans les états de Rydberg circulaires que nous avons choisis. La «circularisation» des atomes, initialement amenés par pompage optique dans l'un des deux sous-niveaux hyperfins de l'état fondamental, $\left|5S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\right\rangle$, est un processus complexe. Nous n'en donnerons qu'un aperçu ici, les détails pouvant être trouvés dans la thèse de Tristan Meunier [93]. La figure I.11 en donne le principe général.

À l'aide de trois impulsions laser à 780 nm, 776 nm et $1,26\,\mu\mathrm{m}$, les atomes sont préparés dans un premier temps dans le niveau $|52f, m = 2\rangle$ en champ électrique nul (étape (1)). Notons que sur les trois lasers utilisés, seul le premier échelon à 780 nm est pulsé, typiquement $2\,\mu\mathrm{s}$. C'est donc cette impulsion qui déclenche effectivement la procédure de circularisation et qui sera prise comme référence de temps dans toute la suite.

10. C'est finalement 25 potentiels qu'il faut appliquer. La thèse de Sébastien Gleyzes [77] explique comment nous choisissons leurs valeurs.

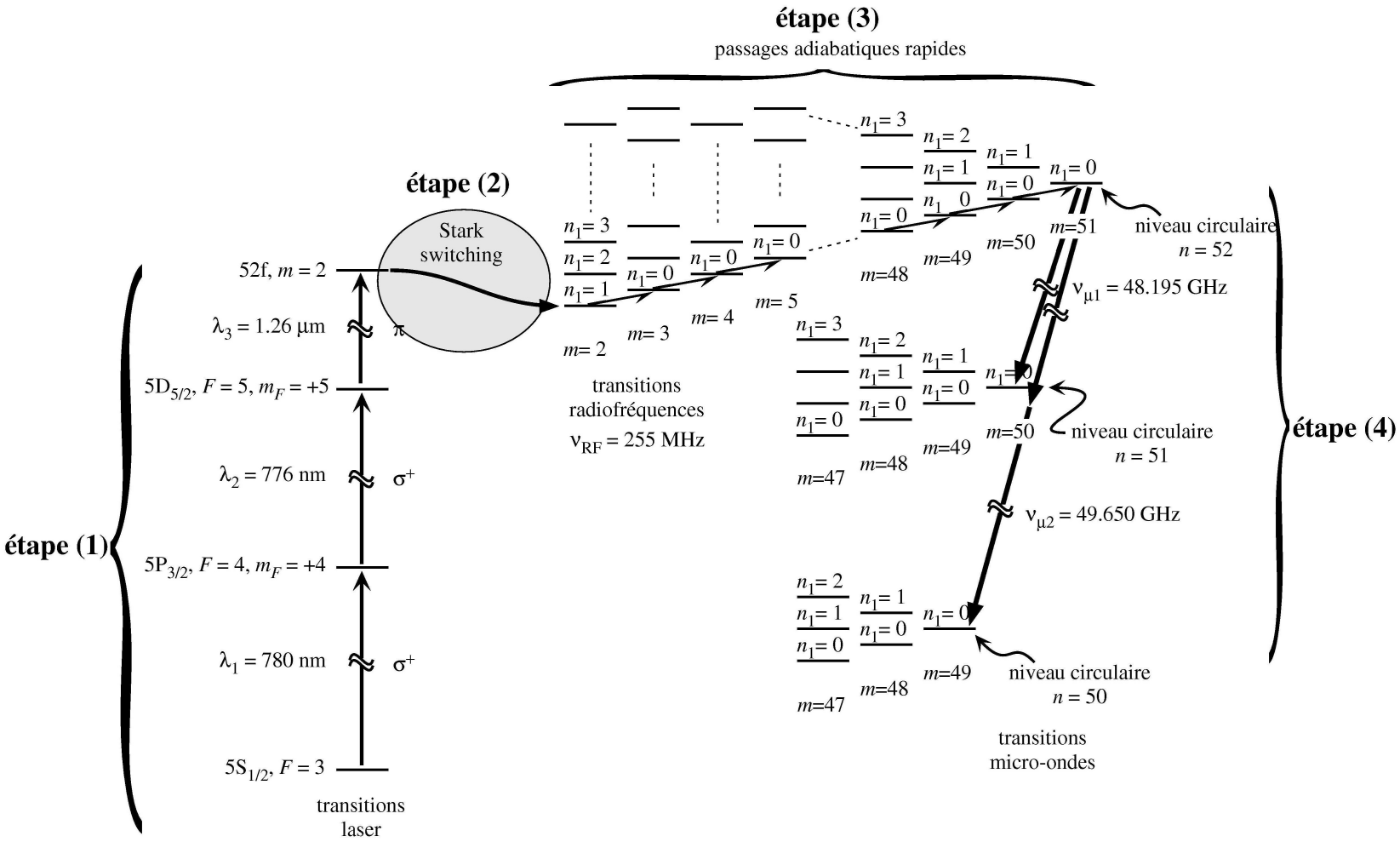


FIGURE I.11 – Préparation des atomes dans les niveaux de Rydberg circulaires.

Il est ensuite indispensable de poursuivre la circularisation en champ électrique non-nul pour lever la dégénérescence entre les niveaux elliptiques et circulaires. Le branchement progressif du champ électrique permet de faire passer adiabatiquement les atomes vers le niveau $|n = 52, n_1 = 1, m = 2\rangle$ (étape (2)). L'absorption de 49 photons radio-fréquences à 255 MHz par un passage adiabatique rapide prépare alors le niveau circulaire $|52C\rangle$ (étape (3)). Pour lever la dégénérescence entre les transitions σ^+ et σ^-, un champ magnétique de l'ordre de 18 G est en outre appliqué.

Le passage aux niveaux $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ se fait finalement par une transition à un photon de fréquence 48, 2 GHz ou à deux photons de fréquence 49, 6 GHz respectivement (étape (4)). Cette transition se fait en présence d'un grand champ électrique de sorte à bien séparer les niveaux circulaires des niveaux elliptiques : seul le niveau circulaire $|52C\rangle$ est amené vers les multiplicités 50 ou 51, et cette impulsion est donc appelée impulsion de *purification*.

Taux de répétition : Pour éviter que les champs magnétiques forts utilisés lors de la circularisation ne viennent perturber, par effet Zeeman, les niveaux circulaires *a posteriori*, cette procédure est intégralement réalisée dans une enceinte en niobium supraconducteur appelée *boîte à circulariser*. Le champ électrique qui y règne est varié tout au long de la séquence dans une «rampe à circulariser» de 70 µs de long. Cela fixe une limite inférieure au taux de répétition de la circularisation. L'impulsion de purification en constitue un autre facteur limitant. Celle-ci n'est en effet pas bien confinée dans la boîte à circulariser et inonde donc une grande partie du montage. Il faut alors s'assurer qu'aucun atome circulaire n'est dans une région de forts gradients de champ électrique au moment de ces impulsions, sous peine de voir leurs états modifiés. Pour des atomes à 250 m/s, la préparation n'a ainsi pu être répétée que toutes les 82 µs.

Contrôle de la position et de la vitesse Le contrôle de la position des atomes dans l'espace et dans le temps est indispensable dans nos expériences. De la circularisation à la détection, en passant par l'interférométrie Ramsey décrite plus bas, leur manipulation nécessite en effet qu'ils soient à un instant bien défini (début d'une impulsion $\pi/2$ par exemple) dans une partie bien particulière du dispositif expérimental (zone de Ramsey).

La source d'atomes que nous utilisons est un four chauffé à 185 °C contenant une cellule de plusieurs grammes de rubidium. En sortie du four, le faisceau atomique est collimaté à l'aide de deux diaphragmes. Une faible extension transverse de l'ordre de 0, 7 mm est alors obtenue. D'une part cela présente l'avantage de limiter la sensibilité aux gradients de champ électrique résiduels. D'autre part, nous pouvons alors nous assurer que les atomes passent bien par un ventre des modes des champs avec lesquels ils interagissent. C'est dans cette situation que le champ électrique «vu» est d'amplitude maximale et donc que le couplage entre les atomes et le champ est maximisé.

Mais si la localisation transverse est alors assurée, il n'en est rien longitudinalement. En sortie du four en effet, les vitesses significativement représentées s'étendent d'environ 150 m/s à 600 m/s (voir figure I.13). Il nous faut donc sélectionner activement une classe de vitesse relativement étroite dans la distribution si nous voulons pouvoir connaître la position des atomes circulaires à tout instant. Cette sélection de vitesse repose sur l'utili-

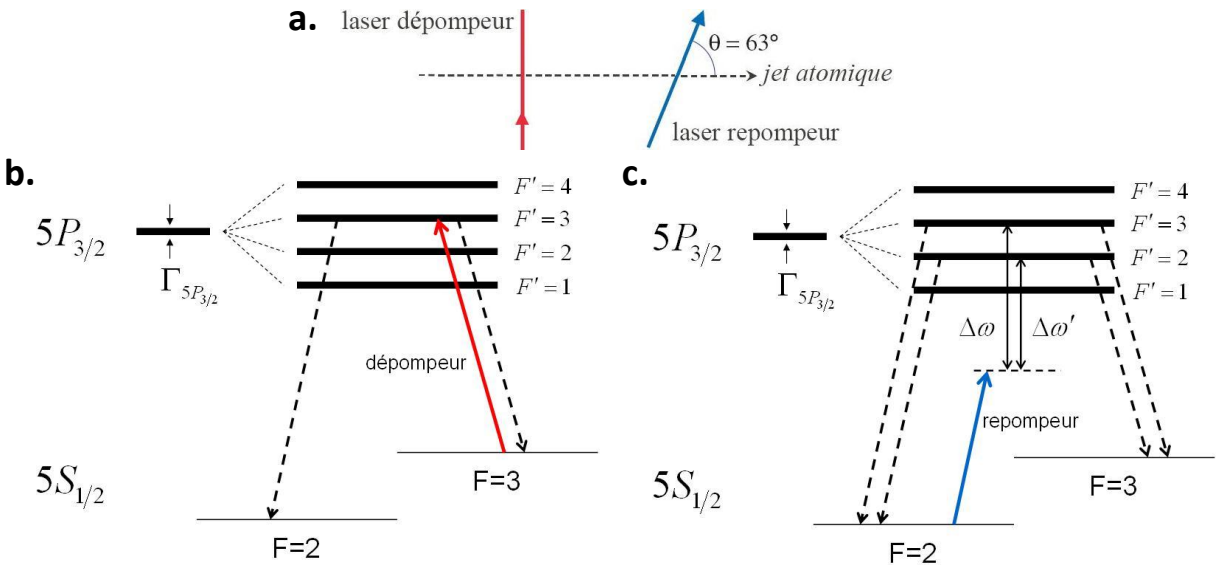


FIGURE I.12 – Sélection de vitesse. **a.** Dispositif utilisé pour la sélection en vitesse des atomes. **b.** Un premier laser dépompeur perpendiculaire au jet atomique amène tous les atomes dans le niveau $F = 2$ *via* $F' = 3$. **c.** Un second laser repompeur faisant un angle θ avec le jet ramène dans $F = 3$ *via* $F' = 3$ les atomes de vitesse $v = \Delta\omega\lambda_{\text{rep}}/2\pi\cos\theta$ souhaitée. Une seconde classe de vitesse est également sélectionnée *via* $F' = 2$: $v' = \Delta\omega'\lambda_{\text{rep}}/2\pi\cos\theta$.

sation de deux lasers en amont de la boîte à circulariser appelés *dépompeur* et *repompeur* (voir figure I.12). Nous réalisons en fait ce que l'on appelle un pompage optique sélectif en vitesse [94].

La laser dépompeur d'abord, accordé sur la transition $\left|5S_{1/2}, F = 3\right\rangle \rightarrow \left|5P_{3/2}, F' = 3\right\rangle$ et allumé en continu, permet d'amener tous les atomes en sortie du four vers le sous-niveau hyperfin de plus basse énergie $\left|5S_{1/2}, F = 2\right\rangle$. Le laser repompeur, pulsé cette fois, et désaccordé de $\Delta\omega \approx 145\,\text{MHz}$ vis à vis de la transition $\left|5S_{1/2}, F = 2\right\rangle \rightarrow \left|5P_{3/2}, F' = 3\right\rangle$, permet de ramener une certaine classe de vitesse vers le niveau $|F = 3\rangle$. Il est en effet aligné de telle sorte qu'il fasse un angle $\theta \approx 63°$ avec le jet atomique, et seuls les atomes de vitesse v pour laquelle l'*effet Doppler* compense exactement le désaccord $\Delta\omega$ seront «repompés». Puisque seuls les atomes préparés dans l'état $|F = 3\rangle$ peuvent être excités par le premier échelon de la circularisation, tous les atomes circulaires produits ont cette vitesse v.

La sélection Doppler de la classe de vitesse se trouve par ailleurs raffinée par l'utilisation d'une sélection *en temps de vol*. Ainsi, le laser repompeur et le laser à 780 nm marquant le début de la circularisation étant tous deux pulsés et séparés spatialement, seuls les atomes ayant une vitesse leur permettant de «voir» l'une et l'autre de ces impulsions laser seront excités. Notons en outre que si la sélection par effet Doppler autorise en fait la présence d'une autre classe de vitesse v', repompée *via* le niveau $|F' = 2\rangle$, la sélection par temps de vol permet finalement de la supprimer (figure I.13). La durée de l'impulsion repompeur est le paramètre qui contrôle la largeur de la classe de vitesse sélectionnée : plus elle sera

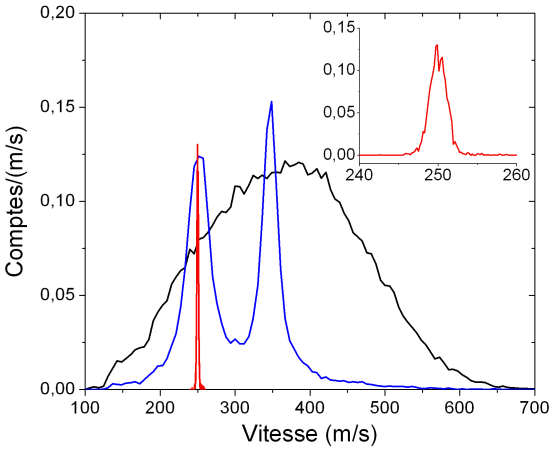


FIGURE I.13 – Distribution de vitesse des atomes : en noir, sans sélection de vitesse ; en bleu, avec le laser repompeur allumé en continu ; en rouge (et dans l'encart), avec le laser repompeur allumé 4 µs.

longue, plus la classe de vitesse sera large. Pour une durée de 4 µs par exemple, nous obtenons des atomes à (250 ± 2) m/s.

Nombre d'atomes par paquet La procédure d'excitation des atomes issus d'une vapeur atomique produit les niveaux circulaires voulus avec une statistique poissonienne : le nombre d'atomes préparés à chaque circularisation n'est donc pas fixé. Nous désignerons dans toute la suite par *paquet* ou *échantillon* atomique l'ensemble des atomes excités après une séquence de préparation, qui peut donc contenir un, plusieurs ou même aucun atome.

Le paramètre qui nous permet de contrôler le nombre moyen d'atomes par paquet n_a est une nouvelle fois la durée de l'impulsion repompeur. Un rétrécissement de la distribution de vitesse s'accompagne d'une diminution du nombre d'atomes préparés et le choix résulte finalement d'un compromis. Notons toutefois que nous ne chercherons pas systématiquement à avoir un grand nombre d'atomes préparés par échantillon. La statistique poissonienne implique en effet un écart-type de n_a en $\sqrt{n_a}$. Or le nombre d'atomes interagissant avec le champ quantique soumis aux mesures quantiques non-destructives se devra d'être bien connu. Plus précisément, il nous faudra autant que faire se peut éviter les situations où plus d'un atome sont présents simultanément dans la cavité. Nous allumons donc en général le laser repompeur sur un temps relativement court, de 2 à 4 µs, pour n_a valant alors typiquement de $0,4$ à $0,6$, et une classe de vitesse large de 2 à 4 m/s.

I.2.3.c Modification de la phase de l'interféromètre

Au paragraphe I.2.2, nous avons expliqué comment la manipulation de l'état interne des atomes peut être utilisée pour réaliser un interféromètre de Ramsey. Nous avons notamment

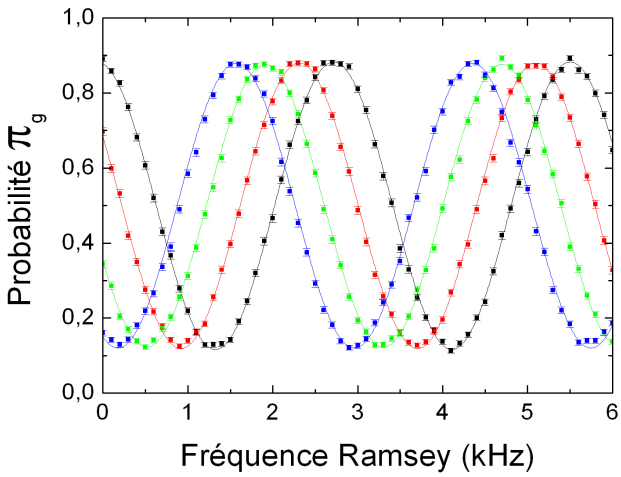


FIGURE I.14 – Franges de Ramsey. Probabilité π_g de détecter un atome dans $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre en fonction de la fréquence de la source micro-onde (l'origine des abscisses est arbitraire), et pour quatre déplacements Stark différents. Les traits continus sont des ajustements sinusoïdaux de contraste moyen 76 % et sans décalage (moyenne à 50%).

vu que le choix de la fréquence des impulsions micro-ondes permet de choisir la phase de l'interféromètre, la probabilité de détecter un atome dans $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre s'écrivant (équation (I.43))

$$\pi_g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\varphi = (\omega_S - \omega_{\text{at}})t_{\text{vol}}). \tag{I.48}$$

Toutefois, au sein d'une même réalisation d'une expérience, cette fréquence ne peut pas être modifiée, d'un échantillon à l'autre par exemple [11]. Or, comme nous le verrons au paragraphe I.4, nous aurons besoin d'une telle flexibilité dans la réalisation de mesures quantiques non-destructives.

Une autre façon de modifier la phase de mesure consiste à utiliser l'effet Stark. En modifiant le champ électrique le long de la trajectoire atomique, nous pouvons en effet modifier les niveaux d'énergie et donc la phase accumulée par les atomes pendant leur temps de vol. En pratique, cela se fait à l'aide de deux potentiels électriques appliqués sur chacun des miroirs de la seconde zone de Ramsey.

Dans toute la suite, nous noterons de façon générale ϕ_r la phase de la seconde impulsion $\pi/2$, appelée aussi phase de l'interféromètre, qui prend en compte à la fois le déplacement

11. La fréquence de la source est contrôlée par GPIB, dont les «temps de latence» de l'ordre de la milliseconde sont incompatibles avec une modification en temps réel dans nos expériences où le temps entre deux échantillons est de moins de 100 µs.

Stark et le désaccord entre la source et les atomes :

$$\phi_r = \int_0^{t_{\mathrm{vol}}} (\omega_{\mathrm{at}}(t) - \omega_S)\,\mathrm{d}t. \tag{I.49}$$

Le signe de ϕ_r, choisi opposé à celui de φ (équation (I.42)), est purement conventionnel. La figure I.14 donne la probabilité π_g de détecter un atome dans $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre en fonction de la fréquence de la source micro-onde et pour quatre déplacements Stark différents. De tels signaux constituent ce qu'on appelle des *franges de Ramsey*.

Notons qu'expérimentalement, l'interféromètre a un contraste C fini et potentiellement une probabilité moyenne π_0 différente de 50%. L'équation I.48 devient alors

$$\pi_g = \pi_0 + \frac{C}{2}\cos\phi_r. \tag{I.50}$$

La réduction du contraste C peut avoir pour origine une imperfection des impulsions $\pi/2$ mais aussi la présence de champs électriques inhomogènes entre les deux cavités Ramsey. Comme nous l'avons évoqué précédemment, la phase accumulée par les atomes pendant leur temps de vol peut alors dépendre de leur position exacte dans le jet. En moyenne sur tous les atomes, cela revient à introduire un bruit sur la phase ϕ_r, et finalement à réduire le contraste C. Notons enfin que si les potentiels électriques utilisés pour modifier la phase de l'interféromètre sont eux-même bruités, alors une moyenne temporelle réduira à son tour le contraste. Il nous a donc fallu prendre soin de limiter autant que faire se peut de tels bruits électriques. En particulier, des diviseurs de tension de gain $\sim 1/10$ sont systématiquement insérés entre les sources de tension et ces électrodes de contrôle.

I.2.3.d Détection

Avant de conclure cette section, il nous reste à expliquer comment les atomes sont finalement détectés, un critère essentiel étant que les deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ doivent être bien distingués. La détection se fait par ionisation de l'atome. L'électron de valence des atomes de Rydberg étant peu lié au noyau, il suffit d'un champ électrique statique d'une centaine de V/cm pour l'arracher. Cette ionisation est en outre sélective en énergie : le seuil d'ionisation dépend de la valeur n du niveau atomique [89], et si un niveau elliptique et un niveau circulaire appartenant à une même multiplicité seront difficilement distinguables, la discrimination sera aisée pour deux niveaux circulaires distincts.

La thèse d'Alexia Auffèves-Garnier [95] donne les détails du détecteur que nous utilisons. Nous n'en donnons figure I.15.a qu'une vue de principe. Il est constitué d'une cathode plate et d'une anode percée entre lesquelles transitent les atomes. En appliquant une rampe temporelle de tension sur la cathode — appelée dans toute la suite *rampe d'ionisation* ou *de détection* — tout en fixant le potentiel de l'anode, nous sommes en mesure d'ioniser les niveaux circulaires $|52C\rangle$, $|51C\rangle$ et $|50C\rangle$ à des instants différents. L'électron arraché est ensuite focalisé à l'aide de «lentilles électrostatiques» dans un multiplicateur d'électrons. Le temps auquel l'électron est détecté nous permet alors de remonter au niveau d'énergie de l'atome ionisé : nous définissons des *fenêtres temporelles* sur le spectre d'ionisation,

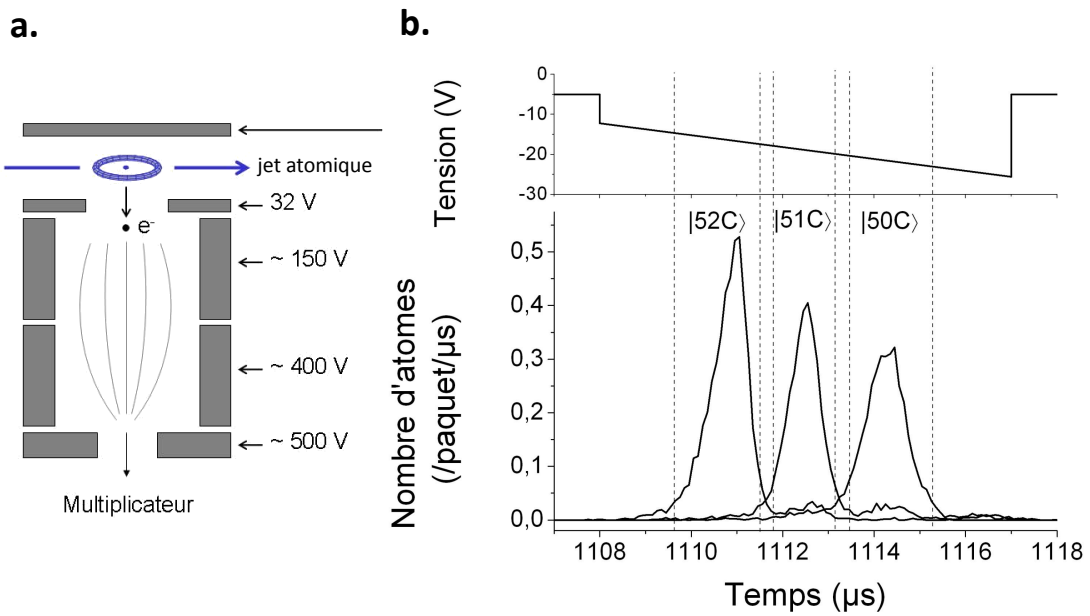


FIGURE I.15 – Détection des atomes. **a.** Schéma de principe du détecteur. Un potentiel électrique variable appliqué sur une des électrodes du détecteur permet l'ionisation des atomes présents au dessus du trou de l'anode. L'électron arraché est focalisé par des lentilles électrostatiques vers un multiplicateur d'électrons. **b.** Signal temporel de détection enregistré pour une rampe de potentiel donnée et moyenné sur ≈ 5000 échantillons. Les trois niveaux circulaires $|52C\rangle$, $|51C\rangle$, et $|50C\rangle$ sont bien distinguables *via* la définition de trois fenêtres de détection.

telles que données sur la figure I.15.b, chacune étant associée respectivement à un et un seul niveau circulaire. La détection d'un électron dans l'une de ces fenêtres correspond à la détection d'un atome dans le niveau circulaire associé.

Remarque Si les trois niveaux circulaires sont bien distinguables deux à deux sur le spectre d'ionisation, la distinction entre les niveaux elliptiques et le niveau circulaire d'une même multiplicité est plus délicate. Il faut donc s'assurer autant que faire se peut que les échantillons sont aussi purs que possibles, *i.e.* ne contiennent pas d'atomes dans des niveaux elliptiques. Passer par le niveau $|52C\rangle$ pour préparer les niveaux $|51C\rangle$ et $|50C\rangle$ va dans ce sens, et permet une *purification* des niveaux. La circularisation n'étant jamais parfaite, une partie des atomes sont en fait préparés dans des niveaux elliptiques de la multiplicité 52. Après la dernière impulsion micro-onde amenant le niveau $|52C\rangle$ vers le niveau $|51C\rangle$ ou $|50C\rangle$, les niveaux circulaires ont une énergie notablement plus faible que ces niveaux elliptiques, restés dans leur multiplicité élevée. L'emploi d'un champ électrique ionisant toutes les multiplicités au-dessus du niveau circulaire désiré permet alors de se débarrasser de ces niveaux «parasites».

I.3 Deux systèmes en interaction

Nous avons maintenant décrit séparément chacun des deux systèmes au cœur de notre expérience : le champ quantifié et l'atome à deux niveaux. Une fois couplés, leur comportement est notablement modifié. En particulier, ils deviennent inséparables et doivent être décrits au sein d'une même entité, l'*atome habillé*. Nous donnerons dans cette section toutes les propriétés de ce nouveau système utilisées ultérieurement. Notons que nous ne traiterons que le cas où la relaxation, aussi bien du champ que de l'atome, est négligeable, *i.e.* le régime de couplage fort.

De même que nous l'avons fait au paragraphe I.2.1 lors de notre étude de l'interaction entre un atome à deux niveaux et un champ classique, nous décrivons le couplage entre ce même atome et le champ quantique étudié au paragraphe I.1 par un hamiltonien dipolaire électrique :

$$H_{\text{int}} = -\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -d\mathcal{E}(\mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon}_a\sigma_- + \boldsymbol{\epsilon}_a^*\sigma_+)\cdot(\boldsymbol{\epsilon}a + \boldsymbol{\epsilon}^* a^\dagger). \tag{I.51}$$

Dans le cadre de l'approximation de champ tournant [30], négligeant les termes à variation de phase rapide en représentation d'interaction vis à vis du hamiltonien libre $H_0 = H_{\text{at}} + H_{\text{cav}}$, le hamiltonien d'interaction peut s'écrire sous la forme

$$H_{\text{int}} = \frac{\hbar\Omega_0(\mathbf{r})}{2}\left(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger\right), \tag{I.52}$$

avec

$$\Omega_0(\mathbf{r}) = -\frac{2\mathcal{E}_0 d\boldsymbol{\epsilon}_a\cdot\boldsymbol{\epsilon}}{\hbar} f(\mathbf{r}) \equiv \Omega_0 f(\mathbf{r}), \tag{I.53}$$

où $f(\mathbf{r})$ est, rappelons-le, le profil du champ électrique dans la cavité. $\Omega_0/2\pi$ est précisément la fréquence caractéristique du couplage que nous avons déjà utilisée, et est appelée *fréquence de Rabi du vide*. Elle vaut

$$\Omega_0/2\pi = 49\,\text{kHz}. \tag{I.54}$$

Le terme $\sigma_+ a$ décrit la destruction d'un photon conjointe à l'excitation d'un atome, et le terme $\sigma_- a^\dagger$ le transfert d'excitation opposé. Les termes négligés sont en fait les termes non résonants $\sigma_- a$ et $\sigma_+ a^\dagger$ pour lesquels l'atome à deux niveaux *et* l'oscillateur harmonique perdent (resp. gagnent) une excitation simultanément.

Le hamiltonien du système couplé prend donc finalement la forme dite de Jaynes-Cummings [96] :

$$H_{\text{JC}} = \frac{\hbar\omega_{\text{at}}}{2}\sigma_z + \hbar\omega_{\text{cav}}\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\left(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger\right) f(\mathbf{r}). \tag{I.55}$$

Dans le cadre de ce modèle, les états stationnaires des systèmes libres sont couplés deux à deux : les sous-espaces $\mathcal{S}_n = \{|e,n\rangle, |g,n+1\rangle\}$ sont laissés invariants par le hamiltonien

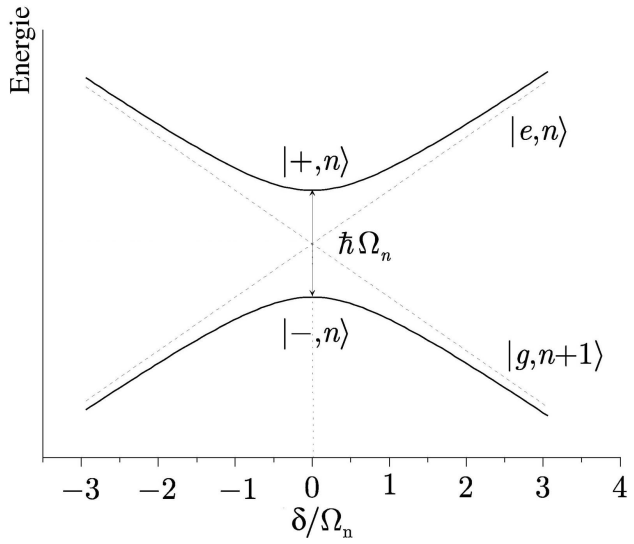


FIGURE I.16 – Énergie des états habillés de la n^{e} multiplicité en fonction du désaccord atome/champ δ ramené à la pulsation de Rabi Ω_n.

H_{JC}. Seul le niveau fondamental $|g,0\rangle$ n'est couplé à aucun autre état. L'évolution au sein de la n^{e} multiplicité $\mathcal{S}_n$ se fait alors selon le hamiltonien réduit

$$H_n = \hbar \begin{pmatrix} \omega_{\text{cav}}(n+1) + \delta/2 & \Omega_n f(\mathbf{r})/2 \\ \Omega_n f(\mathbf{r})/2 & \omega_{\text{cav}}(n+1) - \delta/2 \end{pmatrix}, \tag{I.56}$$

où $\delta = \omega_{\text{at}} - \omega_{\text{cav}}$ est le *désaccord* entre les deux systèmes libres, et

$$\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1} \tag{I.57}$$

le couplage entre les deux états de $\mathcal{S}_n$. Les états propres de H_n, au profil $f(\mathbf{r})$ près, s'écrivent

$$|+,n\rangle = \cos\frac{\theta_n}{2}|e,n\rangle + \sin\frac{\theta_n}{2}|g,n+1\rangle \tag{I.58}$$

$$|-,n\rangle = \sin\frac{\theta_n}{2}|e,n\rangle - \cos\frac{\theta_n}{2}|g,n+1\rangle. \tag{I.59}$$

L'angle $0 \leq \theta_n < \pi$ est défini comme

$$\tan\theta_n = \frac{\Omega_n}{\delta}. \tag{I.60}$$

Les états $|\pm,n\rangle$ sont les *états habillés* du système atome/champ, et leurs énergies, tracées figure I.16 en fonction de δ/Ω_n, s'écrivent sous la forme

$$E_{\pm,n} = \hbar\omega_{\text{cav}}(n+1) \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{\Omega_n^2 + \delta^2}. \tag{I.61}$$

Nous allons nous intéresser maintenant aux deux cas extrêmes suivants : $\delta = 0$ et $|\delta| \gg \Omega_0$. Dans ces deux situations, la dépendance en $\mathbf{r}$ de la pulsation de Rabi peut être traitée simplement, en introduisant un *temps effectif d'interaction*. Pour des atomes de vitesse v, plutôt que de considérer un temps d'interaction avec le champ de w_0/v, où w_0 est le col du mode du champ, avec une pulsation de Rabi dépendant de la position $r = vt$ des atomes, il est possible de montrer [30] que tout se passe comme si la pulsation de Rabi du vide était Ω_0, indépendante de $\mathbf{r}$, en remplaçant le temps d'interaction par les temps effectifs t^r_{eff} et t^d_{eff} pour les régimes résonant et dispersif respectivement, obtenus par intégration du profil gaussien :

$$t^r_{\text{eff}} = \sqrt{\pi}\frac{w_0}{v} \qquad\qquad t^d_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{w_0}{v}. \tag{I.62}$$

À résonance

Dans le cas $\delta = 0$, le hamiltonien de Jaynes-Cummings réduit prend la forme simple

$$H_n = \hbar\omega_{\text{cav}}(n+1) + \frac{\hbar\Omega_n}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.63}$$

Cette forme de hamiltonien a en fait déjà été rencontrée au paragraphe I.2.1, dans le cadre de l'étude de l'interaction de l'atome à deux niveaux avec un champ classique. C'est en effet le même hamiltonien que celui donné équation (I.37) avec $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$, en remplaçant Ω'_r par Ω_n et en faisant l'analogie formelle

$$|e, n\rangle \leftrightarrow |e\rangle \tag{I.64}$$

$$|g, n+1\rangle \leftrightarrow |g\rangle. \tag{I.65}$$

Il vient donc directement qu'à résonance l'interaction entre l'atome à deux niveaux et le champ classique résulte en une oscillation à la pulsation Ω_n entre les états $|e, n\rangle$ et $|g, n+1\rangle$ appelée *oscillation de Rabi quantique*. L'appellation *pulsation de Rabi du vide* de Ω_0 prend tout son sens.

Un atome préparé dans l'état $|e\rangle$ peut alors fournir un photon au mode du champ sous réserve de bien choisir le temps d'interaction qui le fera quitter la cavité dans l'état $|g\rangle$. On dit qu'on réalise alors une *impulsion* π. C'est cette méthode, que nous avons déjà évoquée dans l'introduction, qui est utilisée dans d'autres groupes pour préparer de façon déterministe des états quantique du champ [97, 23].

Régime dispersif

Plaçons nous maintenant loin de résonance : $|\delta| \gg \Omega_n$. Comme indiqué figure I.16, les énergies et états propres de H_n sont maintenant très proches de ce qu'ils sont en l'absence de couplage. Dans une approche *perturbative* très générale, qui consiste à ne garder les petites corrections (ici en Ω_n/δ) que dans les termes de phase, en les négligeant dans les

amplitudes (de probabilité ici), nous considérons que si les états propres de l'atome habillé restent ceux du système découplé,

$$|+,n\rangle \simeq |e,n\rangle \qquad \text{et} \qquad |-,n\rangle \simeq |g,n+1\rangle \qquad \text{pour} \quad \delta > 0, \tag{I.66}$$

$$|+,n\rangle \simeq |g,n+1\rangle \qquad \text{et} \qquad |-,n\rangle \simeq |e,n\rangle \qquad \text{pour} \quad \delta < 0, \tag{I.67}$$

leurs énergies subissent un *déplacement lumineux* tel que

$$E_{e,n} = E^0_{e,n} + \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\delta}(n+1) \tag{I.68}$$

$$E_{g,n+1} = E^0_{g,n+1} - \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\delta}(n+1). \tag{I.69}$$

Les énergies avec les exposants «0» sont les énergies du système découplé. Dans le cadre de cette approximation, le hamiltonien de Jaynes-Cummings peut en fait se récrire, à une constante près, sous la forme

$$H_{\mathrm{JC}}^{\mathrm{disp}} = H_{\mathrm{cav}} + \frac{\hbar}{2}\left[\omega_{\mathrm{at}} + \frac{\Omega_0^2}{2\delta}\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\right]\sigma_z. \tag{I.70}$$

La fréquence de résonance atomique $\omega_{\mathrm{at}}/2\pi$ se trouve donc modifiée en présence de n photons de la quantité

$$\Delta\omega_{\mathrm{at}}(n) = \frac{\Omega_0^2}{2\delta}\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{I.71}$$

Le terme en 1/2, déplacement lumineux en l'absence de photon, est le *déplacement de Lamb*.

L'interaction pendant un temps t_{int} de l'atome à deux niveaux avec le champ quantique contenant n photons résulte donc en un déphasage supplémentaire $\Delta\phi(n)$ entre les états $|e\rangle$ et $|g\rangle$, comparé au cas où l'atome n'est pas couplé à la cavité, de la forme

$$\Delta\phi(n) = \phi_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\phi_0}{2} + \phi(n) \qquad\qquad \phi_0 = \frac{\Omega_0^2 t_{\mathrm{int}}}{2\delta}. \tag{I.72}$$

$\phi(n)$ est par définition le déphasage induit par le champ amputé du déplacement de Lamb $\phi_0/2$. En outre, nous appellerons dorénavant ϕ_0 le *déphasage par photon*. Sa valeur est contrôlée par :

- le désaccord δ, modifié en choisissant la fréquence de résonance de la cavité ;
- le temps d'interaction $t_{\mathrm{int}} = t^d_{\mathrm{eff}}$: la géométrie du mode étant fixée, celui-ci ne dépend que de la vitesse des atomes interagissant avec le champ. Pour des atomes à 250 m/s, il vaut environ 30 µs.

Si nous revenons pour conclure à la représentation de la sphère de Bloch et considérons un atome préparé initialement dans l'état $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$, une telle interaction revient en la rotation dans le plan équatorial de la sphère du pseudo-spin atomique de la quantité $\phi(n) = n\phi_0$ (voir figure I.17), si nous omettons le terme de Lamb commun à tous les nombres de photons n.

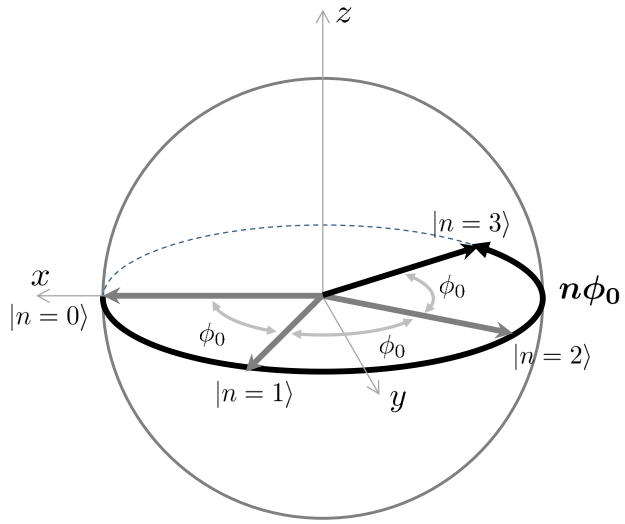


FIGURE I.17 – Évolution du spin atomique lors de l'interaction dispersive avec le champ quantique préparé dans un état de Fock $|n\rangle$. Le déplacement $\phi_0/2$ commun à tous les états nombre n'est pas représenté.

I.4 Mesure Quantique Non-Destructive

Prétendre contrôler un système, et *a fortiori* un système quantique, ne peut bien sûr pas se faire sans la capacité à acquérir de l'information sur son état. Dans nos expériences, nous avons choisi d'utiliser des *mesures quantiques non-destructives* (QND). Proposées pour la première fois par Braginsky [26], leurs caractéristiques, dont nous nous contentons de donner les deux principales seulement, furent définies en 1980 par Caves [28] :

1. D'une part, la mesure d'une observable O ne doit pas affecter les états propres de O : c'est là qu'est le critère de «non destruction». Dans notre expérience, l'observable mesurée est l'opérateur nombre $\hat{N}$, et la mesure que nous réalisons doit donc laisser inchangés tous les états de Fock $|n\rangle$. En particulier, la mesure ne doit pas *détruire* le système, comme le font par exemple des compteurs usuels de photons ;
2. D'autre part, la mesure doit pouvoir être *répétée* : si une observable vient d'être mesurée sur un système quantique, une mesure ultérieure de la même observable sur le même système doit donner le même résultat. Autrement dit, l'observable mesurée doit être une constante du mouvement. Il en est ainsi dans nos expériences puisque $\hat{N}$ commute bien sûr avec le hamiltonien libre du champ quantique $H = \hbar\omega_{\text{cav}}(\hat{N} + 1/2)$. Il faut toutefois s'assurer que les atomes et le champ interagissent en régime *dispersif* seulement. Aucun échange d'énergie entre les deux systèmes n'est autorisé.

Dans nos expériences, ce sont précisément ces sondes atomiques qui réalisent la mesure de l'état quantique. Celle-ci requiert toutefois de nombreux atomes pour être concluante : chaque atome ne réalise pas une mesure complète du nombre de photons mais seulement une *mesure faible*. Dans cette section, nous décrirons précisément le processus de mesure faible utilisant notre interféromètre de Ramsey. Nous verrons comment il peut être exploité

pour un suivi temporel de l'état du champ ou pour une étude statistique d'ensemble *via* deux méthodes d'analyse distinctes. Les avantages de chacune des deux méthodes seront donnés.

I.4.1 Mesure du nombre de photons

I.4.1.a Principe de la mesure

Au paragraphe I.2.2, nous avons expliqué comment nous réalisons un interféromètre de Ramsey : un atome, initialement préparé dans l'état $|e\rangle$ par exemple, subit deux impulsions $\pi/2$, de phases *a priori* différentes, et séparées dans le temps. Nous avons alors vu que la mesure de la probabilité π_g de détecter l'atome dans l'état $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre est liée à la phase accumulée par l'atome entre les deux impulsions $\pi/2$, comparativement à celle de la source micro-onde remplissant les zones de Ramsey.

Au paragraphe I.3, c'est le déphasage $\Delta\phi(n)$ du dipôle atomique induit par son interaction avec le champ quantique piégé dans la cavité de grande finesse, et préparé dans l'état de Fock $|n\rangle$, qui a été étudié. Le principe de la mesure du nombre de photons dans la cavité tombe alors sous le sens : le déphasage $\Delta\phi$ est mesuré à l'aide de l'interféromètre de Ramsey en plaçant la cavité micro-onde supraconductrice entre les deux zones de Ramsey (voir figure I.1). Pour un interféromètre de phase ϕ_r, de décalage π_0 et de contraste C, l'équation (I.50) devient simplement pour un champ dans l'état $|n\rangle$

$$\pi_g(n,\phi_r) = \pi_0 + \frac{C}{2}\cos\left(\phi_r + \Delta\phi(n)\right) = \pi_0 + \frac{C}{2}\cos\left(\phi_r + \frac{\phi_0}{2} + \phi(n)\right). \tag{I.73}$$

I.4.1.b Mesures projectives et mesures faibles

Au vu de l'équation (I.73), la mesure de $\pi_g(\phi_r)$ doit pouvoir fournir de l'information sur le nombre de photons présents dans la cavité. Cependant, si le nombre de photons n'est pas bien défini, comment cette mesure peut-elle donner un résultat «précis» ? Et quelle est l'information fournie par la détection d'une unique sonde atomique ? Pour répondre à ces questions, nous devons en fait déterminer la loi de transformation du champ sous l'action de la mesure, *i.e.* décrire le processus de mesure.

La mesure idéale de von Neumann est une mesure idéale telle que décrite par les postulats de la mécanique quantique. Pour une observable O, de valeurs propres [12] o_j, d'états propres $|o_j\rangle$, et en notant $P_j = |o_j\rangle\langle o_j|$ les projecteurs sur les états propres, la probabilité d'obtenir le résultat o_i après mesure sur un système de matrice densité ρ est

$$\pi_P(o_i|\rho) = \mathrm{Tr}\left(\rho P_i\right). \tag{I.74}$$

Après la mesure, le système est *projeté* dans l'état

$$\rho' = \frac{P_i \rho P_i}{\pi_P(o_i|\rho)}. \tag{I.75}$$

12. Supposées ici non dégénérées.

Dans nos expériences, l'observable à mesurer est l'opérateur nombre $\hat{N}$, et une mesure consiste en la détection d'un atome en sortie de l'interféromètre. Toutefois, au vu du paragraphe précédent, un atome unique ne permet pas de mesurer de façon univoque le nombre de photons dans la cavité, et la mesure ne peut être décrite comme une mesure de von Neumann. Nous avons donc besoin ici du formalisme des *mesures généralisées* [30, 98].

Une telle mesure est définie par un ensemble d'opérateurs M_i, appelés *opérateurs de Kraus*, non nécessairement hermitiens, chacun d'eux étant associé à un unique résultat de la mesure. Pour un système initialement dans l'état ρ, la probabilité d'obtenir le résultat i est

$$\pi(i|\rho) = \mathrm{Tr}\left(M_i \rho M_i^\dagger\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho M_i^\dagger M_i\right). \tag{I.76}$$

Le système est alors projeté sur l'état

$$\rho' = \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\pi(i|\rho)}. \tag{I.77}$$

La condition supplémentaire

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathbb{1} \tag{I.78}$$

permet d'assurer que $\sum_i \pi(i|\rho) = 1$. Notons de suite que la mesure de von Neumann n'en est qu'un cas particulier qui consiste à choisir les opérateurs M_i comme $M_i = P_i$. Les opérateurs $E_i = M_i^\dagger M_i$ permettant le calcul des probabilités $\pi(i|\rho)$ sont appelés POVM pour Positive Operator Valued Measure.

Nous devons donc maintenant trouver les opérateurs de Kraus permettant de décrire la mesure que nous faisons du champ quantique. Il nous suffit en fait de donner la loi de transformation du champ dans le cas d'une détection dans $|e\rangle$ ou dans $|g\rangle$ d'un atome en sortie de l'interféromètre, décrites respectivement par les opérateurs de Kraus M_e et M_g. Pour un champ dans l'état de Fock $|n\rangle$ et un atome préparé initialement dans l'état $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$ après la première impulsion $\pi/2$, l'état du système atome-champ avant la seconde impulsion Ramsey est

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-i(\phi(n)+\phi_0)/2}|e\rangle + e^{i\phi(n)/2}|g\rangle\right). \tag{I.79}$$

La seconde impulsion $\pi/2$ fermant l'interféromètre de phase ϕ_r prépare alors l'état

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \longrightarrow \cdots \tag{I.80}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow & -i\mathrm{e}^{i(\phi_r-\phi_0/2)/2} \sin\left(\frac{\phi_r + \phi_0/2 + \phi(n)}{2}\right)|e\rangle \\ & + \mathrm{e}^{-i(\phi_r+\phi_0/2)/2} \cos\left(\frac{\phi_r + \phi_0/2 + \phi(n)}{2}\right)|g\rangle. \end{aligned} \tag{I.81}$$

Les termes de phase n'étant pas significatifs une fois l'atome détecté, les opérateurs M_e et M_g peuvent être définis comme [13]

$$M_e = \sin\left(\frac{\phi_r + \phi_0/2 + \phi(\hat{N})}{2}\right) \qquad M_g = \cos\left(\frac{\phi_r + \phi_0/2 + \phi(\hat{N})}{2}\right). \tag{I.82}$$

Nous retrouvons alors la probabilité π_g, donnée équation (I.73), de détecter un atome dans $|g\rangle$ dans le cas d'un interféromètre parfait de phase ϕ_r, sachant que n photons sont dans la cavité :

$$\pi(g|n,\phi_r) \equiv \pi_g(n,\phi_r) = \mathrm{Tr}\left(|n\rangle\langle n| M_g^\dagger M_g\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\phi_r + \frac{\phi_0}{2} + \phi(n)\right). \tag{I.83}$$

Le terme de déplacement de Lamb $\phi_0/2$ étant commun à tous les nombres de photons, il peut en fait être inclus dans la définition de la phase ϕ_r de l'interféromètre. Dans toute la suite, nous retiendrons donc la définition des opérateurs de Kraus suivante :

$$M_e = \sin\left(\frac{\phi_r + \phi(\hat{N})}{2}\right) \qquad M_g = \cos\left(\frac{\phi_r + \phi(\hat{N})}{2}\right). \tag{I.84}$$

I.4.1.c Modification des populations

Nous venons de donner les opérateurs de Kraus permettant de décrire la mesure réalisée par l'interféromètre de Ramsey du nombre de photons dans la cavité. Nous n'avons cependant pas encore expliqué comment notre connaissance de la distribution des nombres de photons $P(n)$ est modifiée à chaque détection atomique.

Si un atome, après interaction avec un champ dans l'état ρ, est détecté dans l'état $i = e, g$ en sortie de l'interféromètre de phase ϕ_r, l'équation (I.77) nous donne la distribution $P(n|i,\phi_r) = \mathrm{Tr}\left(\rho'|n\rangle\langle n|\right)$:

$$P(n|i,\phi_r) = \mathrm{Tr}\left[\frac{M_i(\phi_r)\rho M_i^\dagger(\phi_r)}{\mathrm{Tr}\left(\rho M_i^\dagger(\phi_r) M_i(\phi_r)\right)}|n\rangle\langle n|\right]. \tag{I.85}$$

Le point important est alors que la mesure réalisée est *non-destructive* : d'après la propriété n°1 des mesures QND données au début de cette partie, les états propres de la mesure, *i.e.* les états de Fock, doivent être laissés invariants par le processus de mesure. Les opérateurs de Kraus *doivent* donc être diagonaux dans la base des états de Fock, et c'est bien ce que nous avons obtenu équation (I.84). Dès lors l'équation (I.85) peut se récrire

$$P(n|i,\phi_r) = \frac{1}{\mathrm{Tr}\left(\rho E_i(\phi_r)\right)}\mathrm{Tr}\left[E_i(\phi_r)\rho|n\rangle\langle n|\right] = \frac{\mathrm{Tr}(\rho|n\rangle\langle n|)}{\mathrm{Tr}\left(\rho E_i(\phi_r)\right)}\mathrm{Tr}\left(E_i(\phi_r)|n\rangle\langle n|\right) \tag{I.86}$$

13. Les formules obtenues résultent d'un choix arbitraire dans la définition de ϕ_r. Notons que la convention choisie ici est différente de celle de [33].

$$P(n|i,\phi_r) = \frac{\pi(i|n,\phi_r)}{\pi_i(\phi_r)} P(n), \tag{I.87}$$

où l'on a introduit la notation $\pi_i(\phi_r) = \pi(i|\rho,\phi_r)$. L'équation (I.87) n'est rien d'autre que la loi de Bayes d'inversion des probabilités conditionnelles [99], valable en statistique classique, et applicable ici dans un contexte quantique uniquement du fait que la mesure est QND. La distribution des nombres de photons $P(n)$, sachant qu'une détection a donné le résultat i, est donc simplement modifiée en la multipliant par la probabilité conditionnelle d'obtenir le résultat i en présence de n photons, à un facteur de normalisation près. Si par exemple le résultat i est improbable en présence de n_0 photons, la population de l'état $|n_0\rangle$ est notablement réduite après la détection.

Figure I.18, nous donnons un exemple de modification de la distribution des nombres de photons après détection d'un atome dans l'état $|e\rangle$ ou $|g\rangle$. L'état initial est un champ inconnu contenant au plus 7 photons, la phase de mesure ϕ_r est choisie nulle, et le déphasage par photon fixé à $\phi_0 = \pi/4$. Après une détection unique, la distribution reste large, mettant en évidence le fait que la mesure est faible, mais certaines populations $P(n)$ croissent au détriment des autres. Si un atome est détecté dans $|g\rangle$ par exemple, la probabilité d'avoir 0 photon en cavité est doublée, tandis que la probabilité d'en avoir 4 est annulée. Encore une fois, cela découle du fait que détecter un atome dans $|g\rangle$ avec $\phi_r = 0$ est impossible en présence de 4 photons : si nous détectons alors un atome dans $|g\rangle$, c'est qu'*il n'y a pas* 4 photons dans la cavité, et $P(4)$ est annulé. L'idée de notre protocole de mesure est alors d'envoyer une succession d'atomes QND répéter de telles mesures faibles jusqu'à ce qu'un seul état de Fock survive. Nous parlons de *mesure par décimation.*

Notons cependant figure I.18 que, quel que soit le résultat de la détection atomique, les populations de certains nombres de photons restent identiques deux à deux : $P(1)$ et $P(7)$, $P(2)$ et $P(6)$, et $P(3)$ et $P(5)$. Pour ces états en effet, les fonctions de décimation $\pi_g(n,\phi_r = 0)$ sont égales deux à deux, et des mesures même répétées ne permettront pas de les discriminer. Pour ce faire, il faut en fait répéter la mesure pour plusieurs phases ϕ_r. Une mesure avec $\phi_r = \pi/2$ permet par exemple d'avoir $\pi_g(2,\phi_r) \neq \pi_g(6,\phi_r)$ et ainsi de rendre discernables les deux états de Fock en question.

I.4.1.d Imperfections de l'interféromètre

Nous n'avons pas encore pris en compte le fait que l'interféromètre n'est pas parfait. Comme nous l'avons déjà vu, il peut en effet avoir un contraste fini et un décalage. Nous avons même déjà expliqué comment la probabilité $\pi_g(n,\phi_r)$ s'en trouve modifiée (équation (I.73) par exemple). Étant donné que la donnée seule de ces probabilités conditionnelles, *i.e.* des POVMs, suffit à la mesure par décimation, prendre en compte le contraste fini et le décalage des franges de Ramsey revient à redéfinir les POVMs E_i sous la forme :

$$E_g = \pi_0 + \frac{C}{2}\cos\left(\phi_r + \phi(\hat{N})\right) \qquad E_e = \pi_0 - \frac{C}{2}\cos\left(\phi_r + \phi(\hat{N})\right). \tag{I.88}$$

Notons que cela n'implique toutefois pas l'utilisation d'opérateurs de Kraus «imparfaits». Nous verrons au chapitre III que l'interféromètre imparfait, menant aux POVMs (I.88), est

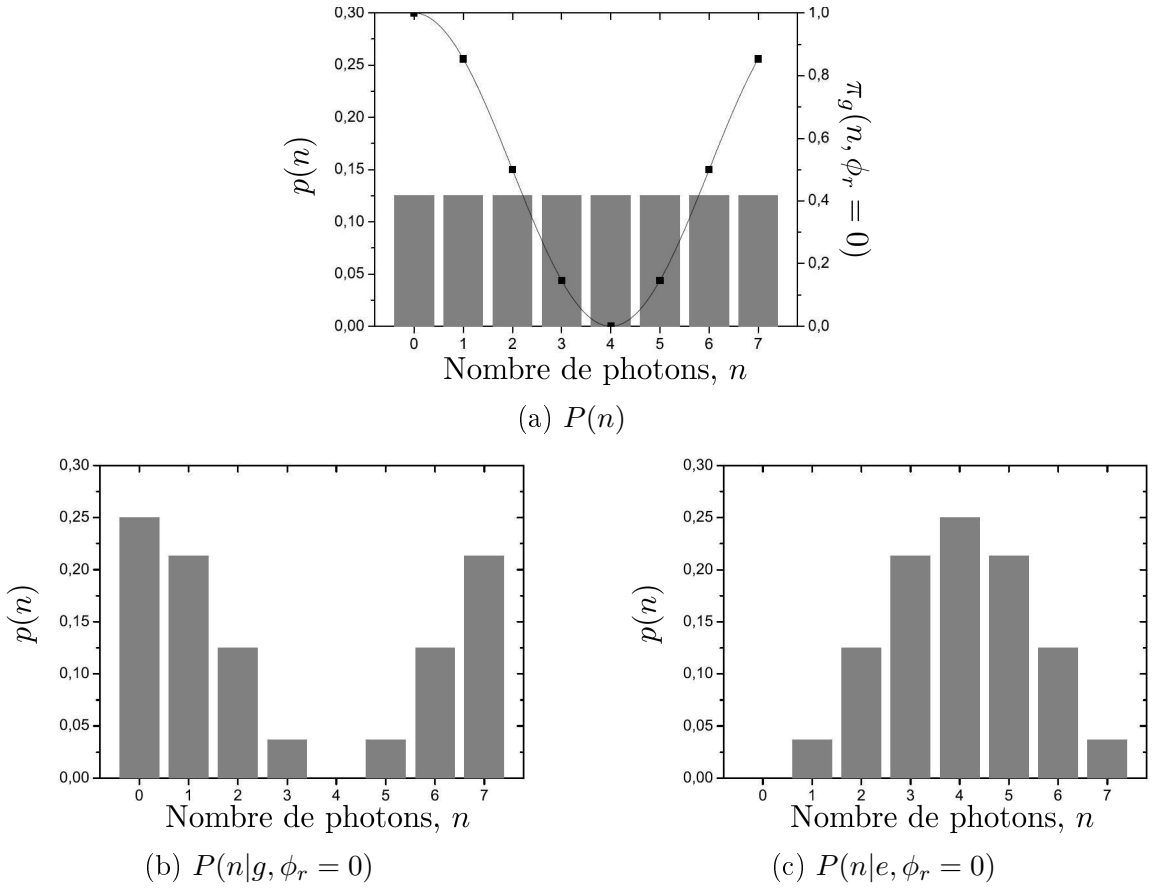


FIGURE I.18 – Évolution des populations $P(n)$ par décimation, après détection d'un atome pour un déphasage par photon $\phi_0 = \pi/4$ et un interféromètre de phase ϕ_r. (a) Distribution initiale des nombres de photons (histogrammes) correspondant à un champ inconnu contenant au plus 7 photons. Les points sont les probabilités conditionnelles $\pi(g|n, \phi_r) \equiv \pi_g(n, \phi_r)$ de détecter un atome dans $|g\rangle$ pour la phase de mesure ϕ_r et un état de Fock $|n\rangle$. (b) Populations des états de Fock si l'atome a été détecté dans $|g\rangle$. (c) Populations des états de Fock si l'atome a été détecté dans $|e\rangle$.

en fait équivalent à un interféromètre parfait, *i.e.* où la mesure est décrite par les opérateurs de Kraus idéaux (I.84), couplé à un détecteur ayant des erreurs de détection (atome $|e\rangle$ détecté comme un atome $|g\rangle$ par exemple).

I.4.1.e Retour à la sphère de Bloch

Il peut être utile de retourner à la représentation de la sphère de Bloch pour mieux comprendre le principe de la mesure QND réalisée. Nous avons vu au paragraphe I.3 que l'interaction d'un atome avec le champ quantique préparé dans un état de Fock $|n\rangle$ revient en la rotation d'un angle $\phi(n)$ de son pseudo-spin dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. La figure I.19 donne par exemple la répartition des spins pour les états de Fock $|0\rangle$ à $|7\rangle$ et pour un déphasage par photon $\phi_0 = \pi/4$. Remarquons alors que la mesure de la probabilité $\pi_g(\phi_r)$ en sortie de l'interféromètre est simplement la mesure d'une des composantes du spin atomique dans le plan équatorial de la sphère. Par exemple[14], pour $\phi_r = 0$ ou $\pi/2$:

$$\pi_g(n, \phi_r = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\phi(n)) = \frac{1}{2} + \langle S_x \rangle \tag{I.89}$$

$$\pi_g(n, \phi_r = \pi/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\phi(n)) = \frac{1}{2} - \langle S_y \rangle. \tag{I.90}$$

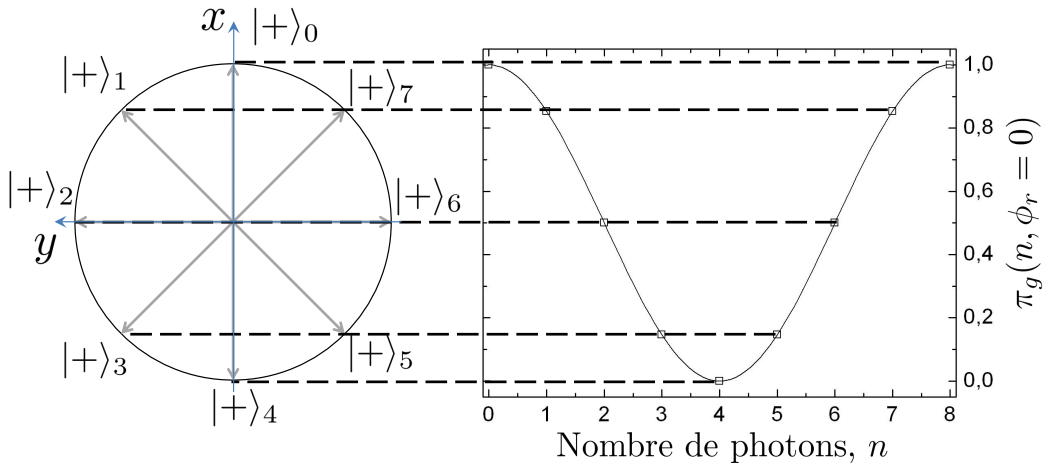


FIGURE I.19 – Décimation et sphère de Bloch. *À gauche :* Plan équatorial de la sphère de Bloch. La position des spins atomiques après interaction avec le champ préparé dans les états de Fock $|0\rangle$ à $|7\rangle$ est donnée pour un déphasage par photon $\phi_0 = \pi/4$. *À droite :* Probabilités conditionnelles $\pi_g(n, \phi_r = 0)$. Elles sont égales à une constante près à la composante S_x du spin atomique.

La position des spins atomiques dans le plan équatorial de la sphère de Bloch étant caractéristique du nombre de photons dans la cavité, une mesure des composantes de ce

14. $\langle S_i \rangle$ étant donné en unité de $\hbar$.

spin est une mesure du nombre de photons dans la cavité. La nécessité de répéter les mesures faibles pour plusieurs phases de mesure justifiée au paragraphe précédent prend alors une autre interprétation : il nous faut mesurer à la fois $\langle S_x \rangle$ et $\langle S_y \rangle$. La phase de mesure ϕ_r fixant la composante du spin mesurée, il nous faut effectivement modifier ϕ_r au cours d'une mesure du nombre de photons.

I.4.1.f Déphasage par photon

Avant de poursuivre notre étude des mesures QND, voyons comment nous pouvons exploiter cette nouvelle interprétation pour calibrer le déphasage par photon ϕ_0. Nous préparons pour cela un champ proche[15] d'un état de Fock à 2 photons et excitons 800 échantillons atomiques, soit ≈ 250 atomes. Quatre phases différentes de l'interféromètre ϕ_r^i $(1 \leq i \leq 4)$, telles que donnée figure I.14, sont utilisées. Elles sont réparties de façon aléatoire sur l'ensemble des atomes. En utilisant les résultats des détections de 60 atomes successifs, nous pouvons alors mesurer quatre projections $\langle S_i \rangle$ du spin atomique, desquelles nous déduisons une estimation des composantes $\langle S_x \rangle$ et $\langle S_y \rangle$. La position du spin atomique dans la sphère de Bloch, avant la seconde impulsion $\pi/2$, est alors simplement repérée par l'angle

$$\varphi = \mathrm{atan} \frac{\langle S_y \rangle}{\langle S_x \rangle}. \tag{I.91}$$

Pour tous les ensembles de 60 atomes successifs (atome 1 à 60, puis 2 à 62...) obtenus à partir des 250 atomes de la réalisation, φ est évalué, et l'expérience est répétée 4000 fois.

La figure I.20 donne l'histogramme des phases φ ainsi mesurées. Nous voyons apparaître très clairement plusieurs pics dans la distribution : le spin atomique ne peut pas prendre un continuum de positions après son interaction avec le champ quantique mais plutôt quelques positions bien marquées, correspondant aux différents nombres de photons présents dans la cavité. C'est en fait la quantification du nombre de photons qui est ici mise en évidence.

Le nombre d'atomes choisi pour la mesure, $N_{\mathrm{at}} = 60$, résulte, de même que nous le verrons au paragraphe I.4.2, d'un compromis entre la *précision* de la mesure (les pics sont d'autant plus fins que le nombre d'atomes participant à la mesure est grand) et la durée de la mesure (d'autant plus longue que N_{at} est grand) qui doit rester courte devant le temps de relaxation des nombres de photons mesurés. Si le temps de mesure est trop long en effet, le spin mesuré avec les premiers atomes de la fenêtre, et correspondant à un nombre n de photons, sera différent de celui mesuré avec les derniers atomes, correspondant par exemple à $n-1$ photons, et la mesure sera brouillée. Ici, la mesure à 60 atomes correspond à un temps de mesure de l'ordre de 25 ms.

Pour obtenir la valeur de la phase φ attachée à chaque nombre de photons n, nous ajustons la distribution obtenue par une somme de gaussiennes de même largeur, dépendant du nombre d'atomes N_{at}. L'accord obtenu est très bon, et nous traçons figure I.21 la position

15. Nous utilisons déjà ici le résultat des chapitres suivants. Le champ utilisé est en réalité produit à l'issue d'une procédure de rétroaction quantique.

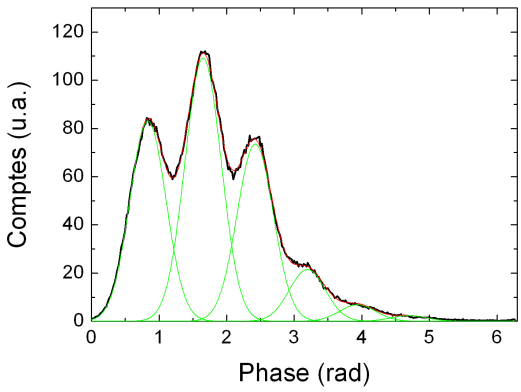


FIGURE I.20 – Histogrammes des phases des spins atomiques mesurés après interaction avec un champ quantique contenant quelques photons. Six pics sont clairement visibles, mettant en évidence le nombre fini des positions possibles du spin dans le plan équatorial de la sphère de Bloch, *i.e.* la quantification du nombre de photons dans la cavité.

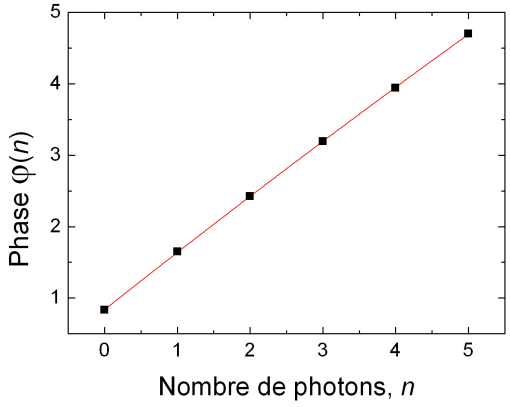


FIGURE I.21 – Calibration du déphasage par photon. Les points sont les positions des centres des gaussiennes obtenues figure I.20. Les barres d'erreur sont plus petites que les points. La ligne continue correspond à un ajustement polynomial d'ordre 2. Le déphasage induit par n photons est trouvé valant : $\phi(n) = (0,256 \pm 0,003)\,\pi\,n - (0,002 \pm 0,0006)\,\pi\,n^2$.

du centre de chaque gaussienne en fonction du nombre de photons n qui lui est attribué. Notons que pour savoir à quel pic est associé quel n, la même mesure est répétée pour un champ préparé dans le vide de photons $|0\rangle$: nous repérons ainsi sans ambiguïté à quel pic correspond $n = 0$. L'attribution pour les autres nombres de photons en découle.

Un ajustement polynomial du deuxième ordre est alors réalisé sur les points de mesure de la figure I.21, donnant la dépendance en le nombre de photons de la phase du spin atomique après interaction avec le champ quantique. Nous trouvons ici

$$\phi(n) = (0,256 \pm 0,003)\,\pi\,n - (0,002 \pm 0,0006)\,\pi\,n^2. \tag{I.92}$$

Nous avons poussé l'ajustement jusqu'à l'ordre 2 pour estimer la non-linéarité du déphasage par photon dans les conditions de l'expérience, qui apparaît si on pousse le développement des énergies $E_{\pm,n}$ à des ordres plus élevés que l'ordre 1 en Ω_0/δ. Le terme non linéaire, relativement au terme linéaire $n\phi_0$, est d'autant plus grand que n est grand mais ne vaut que 5% de $n\phi_0$ pour $n = 7$.

Nous avons ici décrit le principe de la mesure QND du nombre de photons. Celle-ci a été réalisée pour la première fois dans le groupe par Gilles Nogues [32] puis plus récemment par Sébastien Gleyzes [35] et Christine Guerlin [33]. Pour mieux comprendre ce que nous sommes capables d'extraire de ces mesures, nous présenterons brièvement

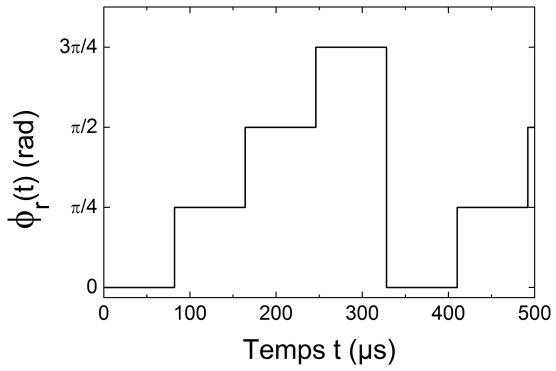


FIGURE I.22 – Succession des phases de l'interféromètre dans la mesure suivant la rétroaction.

dans les paragraphes suivants les résultats obtenus par Christine à partir de l'analyse par décimation, ainsi qu'une analyse d'ensemble développée par Michel Brune [36]. Dans toutes ces expériences, le temps de vie de la cavité était de $T_{cav} = 130\,\text{ms}$.

I.4.2 Suivi temporel de l'état du champ

Les expériences que nous présentons ici ont permis [33, 75] un suivi temporel de la distribution des nombres de photons dans la cavité. Elles consistent à effectuer une mesure QND par décimation à l'aide d'un jet d'atomes de Rydberg circulaires sur un champ préparé initialement dans un état cohérent. Pour observer les nombres de photons allant de 0 à 7, celui-ci est choisi contenant $\simeq 3$ photons ; le déphasage par photon quant à lui est choisi valant $\phi_0 = \pi/4$, correspondant à un désaccord atome/champ de 272 kHz. Finalement, les phases de mesure utilisées sont au nombre de 4, notées a, b, c et d, et alternées dans cet ordre à chaque préparation d'un paquet atomique. Elles sont en outre telles que

$$a - b = c - b = d - c \simeq \pi/4. \tag{I.93}$$

La franges de Ramsey données figure I.14 correspondent à un réglage proche des phases de mesure, pour lequel la figure I.22 donne l'évolution temporelle des phases utilisées. La durée d'un «plateau» correspond au temps séparant deux échantillons.

Pour obtenir une mesure du nombre de photons, il faut, comme nous l'avons déjà expliqué, plusieurs mesures faibles sur le même champ. Mais quel est le nombre d'atomes que nous devons détecter pour obtenir une mesure satisfaisante ? Encore une fois, le choix doit résulter d'un compromis. Augmenter le nombre d'atomes réalisant une mesure ne fait *a priori* qu'augmenter la précision de la mesure par décimation, et il semble donc qu'il nous faille choisir un nombre d'atomes aussi grand que possible. Cependant, tous les calculs réalisés jusqu'à présent supposent l'interaction du mode du champ quantique avec un et un seul atome. Si maintenant deux atomes se trouvent être présents simultanément dans la cavité,

(a)

i ddcbccabcdaadaabadddbadbc
j ggegggggggggeeggggeggeggggg

i ddcaddabbccdccbcdaabbccab
j eeegeeeggeggeeeeeegegegge

i dababbaacbccdadccdcbaaacc
j egegeeggegegegeggegeggggg

i bcdaddaabbbbdbdcdccadaada
j eeegegegeeeeegeeeggggeggeg

(b)

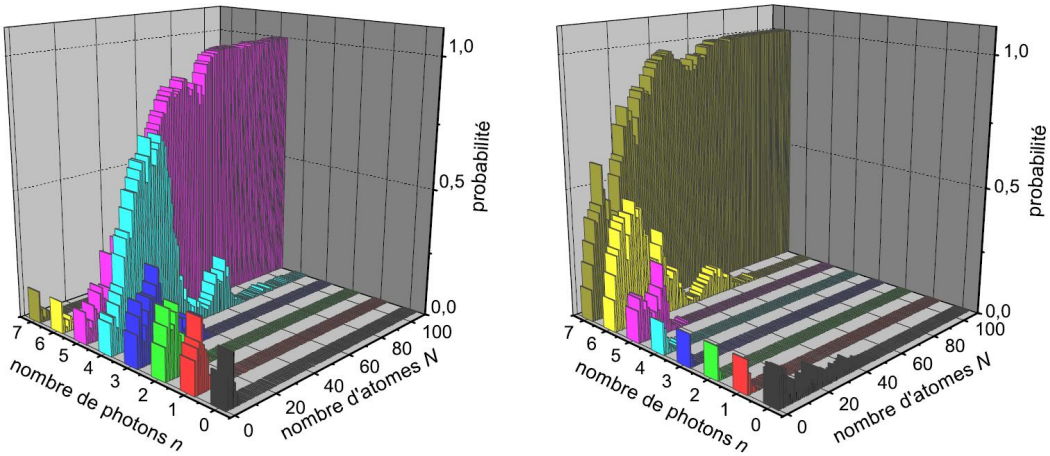


FIGURE I.23 – Réduction progressive de la distribution des nombres de photons vers celle d'un état nombre pour deux réalisations particulières. (a) Résultats des 50 premières détections atomiques (j,i) où l'on note j l'état atomique et i la phase de mesure. (b) Distribution des nombres de photons en fonction du nombre d'atomes détectés pour un ensemble de 110 atomes.

l'interaction entre la cavité et le système à deux atomes prend potentiellement une forme nettement différente de la situation à un atome, les pulsations de Rabi correspondantes s'en trouvent modifiées et le déphasage par photon ϕ_0 aussi. De telles situations doivent donc être absolument évitées, et le nombre moyen d'atomes présents dans un échantillon est maintenu faible, à environ $0,6$. Dès lors, détecter un grand nombre d'atomes prend du temps. Si ce temps devient trop long devant $\mathrm{T_{cav}}$, alors la mesure se fait sur des intervalles de temps pendant lesquels la relaxation a le temps de faire effet. En particulier, même si le champ est préparé initialement dans un état de Fock, le nombre de photons dans la cavité au début et à la fin de la mesure peut varier. Le nombre n de photons dans la cavité n'est donc pas bien défini et la mesure QND échoue à donner un nombre précis. Le compromis trouvé alors a été de choisir $N_{\mathrm{at}} = 110$ atomes participant au processus de décimation. Ce choix s'est avéré suffisamment grand pour que la décimation soit efficace, et suffisamment petit pour que le temps de mesure[16] $\simeq 26\,\mathrm{ms}$ ne soit pas limitant : le temps de vie des photons dans la cavité était dans ces expériences de $\mathrm{T_{cav}} = 130\,\mathrm{ms}$.

La figure I.23 donne le résultat de la mesure par un ensemble de 110 atomes sur un champ cohérent, et ce dans deux réalisations différentes. La loi de distribution initiale

16. Dans ces expériences, le temps séparant deux échantillon était de $70\,\mu\mathrm{s}$.

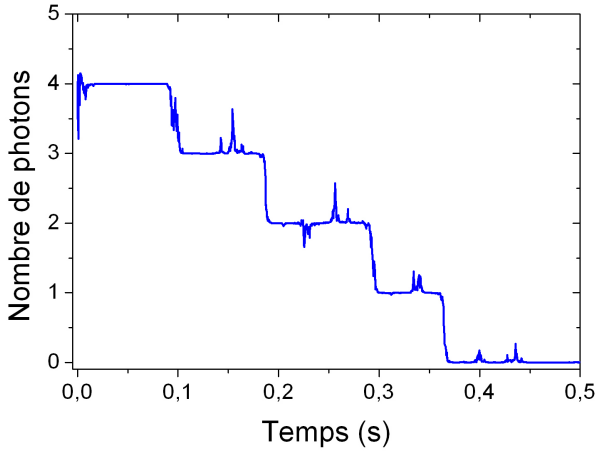


FIGURE I.24 – Évolution temporelle du nombre de photons dans la cavité. Le nombre moyen de photons $\langle n \rangle$ est évalué à chaque instant en utilisant l'information fournie par les $N_{\text{at}} = 110$ derniers atomes détectés. Cette trajectoire correspond à une projection initiale du champ cohérent vers l'état de Fock $|4\rangle$. La cascade de sauts quantiques est la signature de la relaxation.

correspond à celle d'un champ inconnu (distribution uniforme) supposé contenir au plus 7 photons. Nous vérifions ainsi qu'à l'issue de la mesure, seul un nombre de photons n survit : la succession de mesures faibles a bel et bien résulté en une mesure idéale de von Neumann. Au bout des 110 atomes, le champ contient exactement n photons, *i.e.* est dans l'état de Fock $|n\rangle$.

Si maintenant nous ne nous contentons pas de détecter seulement 110 atomes mais plusieurs milliers, et que pour chaque fenêtre de 110 atomes nous suivons le même protocole de mesure que celui donné ci-dessus, nous sommes capables de suivre l'évolution temporelle du nombre de photons dans la cavité. Nous traçons ainsi figure I.24 le nombre $n(t)$ de photons mesuré en fonction du temps t, pour une réalisation ayant initialement convergé vers $n = 4$. Les premières 26 ms correspondent à la projection progressive du champ sur l'état de Fock $|4\rangle$. Une cascade de *sauts quantiques* est ensuite enregistrée, signature de la relaxation, jusqu'à ce que plus aucun photon ne soit présent dans la cavité. Notons par ailleurs que chaque palier à un nombre de photons entier correspond environ à deux fenêtres de 110 atomes indépendantes, *i.e.* à deux estimations successives et indépendantes du nombre de photons. Si ce n'est quand la relaxation agit, le fait que ces deux mesures donnent le même résultat est une vérification de la *répétabilité* de notre mesure.

Remarque Dans les expériences présentées ici, et par exemple sur la figure I.23, nous ne mesurons que les populations des nombres de photons inférieurs à 7. La raison en est que la fonction de décimation $\pi(i|n, \phi_r)$ est une fonction périodique de n. Pour le déphasage par photon $\phi_0 = \pi/4$ par exemple, quel que soit le résultat i de la détection d'un atome

$\pi(i|0,\phi_r) = \pi(i|8,\phi_r)$. Aussi, en partant d'une distribution où $P(0) = P(8)$, les deux états de Fock $|0\rangle$ et $|8\rangle$ ne pourront jamais être distingués. La mesure du nombre de photons est en fait faite *modulo 8*, pour $\phi_0 = \pi/4$.

Une solution à ce problème consiste à utiliser notre connaissance de la façon dont relaxe le champ : les états $|n\rangle$ et $|n+8\rangle$ diffèrent par leurs temps de vie. Ainsi, si entre deux sondes QND modifiant la distribution $P(n)$ d'après l'équation (I.87) nous la modifions encore en utilisant l'équation maîtresse (I.17) pour prendre en compte la relaxation sur le temps séparant les deux atomes, nous pouvons distinguer les états de Fock égaux modulo 8.

Avec l'analyse par décimation des détections atomiques, nous sommes donc capables de mesurer sur des réalisations individuelles de l'expérience le nombre de photons présents dans la cavité, *i.e.* de réaliser une mesure projective de $\hat{N}$. Nous sommes également capables de suivre l'évolution temporelle du nombre de photons. Cependant, la résolution en temps d'une telle méthode est limitée : il nous faut ici 26 ms pour qu'un et un seul état de Fock survive à la fin de la mesure. Si nous voulions étudier la relaxation des états de Fock $|n\rangle$ [37, 36], une telle méthode serait inefficace pour des n trop grands : pour $|n=7\rangle$ par exemple, le temps de vie ~ 19 ms est plus court que le temps de mesure.

C'est précisément dans ce contexte qu'une autre analyse a été introduite [76, 36], permettant d'améliorer la résolution temporelle de la mesure. Basée sur des principes de reconstruction par maximum de vraisemblance [100], celle-ci se fait toutefois au prix du renoncement à obtenir une analyse pour chaque réalisation de l'expérience, ou *trajectoire*. Une analyse d'ensemble, décrite au paragraphe suivant, est alors obtenue.

I.4.3 Moyennes d'ensemble

I.4.3.a Reconstruction par maximum de vraisemblance

Écrivons tout d'abord explicitement la façon dont est transformée la distribution du nombre de photons après une mesure à N_{at} atomes par décimation. Il suffit en fait de répéter N_{at} fois la loi de transformation pour une unique mesure faible donnée équation (I.87). Partant d'une distribution P_0, pour la p^{e} réalisation de l'expérience, et en notant pour le k^{e} atome détecté dans cette trajectoire $j^{(p)}(k)$ le résultat de la détection et $\phi_r^{(p)}(k)$ la phase de mesure, nous obtenons la distribution $P_1^{(p)}$:

$$P_1^{(p)}(n) = \prod_{k=1}^{N_{\text{at}}} \left[\frac{\pi\left(j^{(p)}(k)|n,\phi_r^{(p)}(k)\right)}{\pi_{j^{(p)}(k)}(\phi_r^{(p)}(k))} \right] P_0(n) \tag{I.94}$$

$$= \frac{1}{Z^{(p)}} \Pi_{N_{\text{at}}}^{(p)}(n) P_0(n), \tag{I.95}$$

où $Z^{(p)}$ est une constante de normalisation et $\Pi^{(p)}_{N_{\rm at}}(n)$ la fonction de décimation à $N_{\rm at}$ atomes pour la $p^{\rm e}$ trajectoire :

$$\Pi^{(p)}_{N_{\rm at}}(n) = \prod_{k=1}^{N_{\rm at}} \pi\left(j^{(p)}(k)|n, \phi^{(p)}_r(k)\right). \tag{I.96}$$

La distribution P_0 que nous avions choisie au paragraphe précédent était une distribution plate ($P_0(n \leq 7) = 1/8$) rendant compte de notre ignorance sur l'état du champ. Si nous voulons réduire le temps de mesure, il nous faut réduire le nombre $N_{\rm at}$ d'atomes mesurés, le risque étant que la mesure ne permette plus la projection du champ sur un et un seul état nombre. Dans ce cas la distribution $P^{(p)}_1$ obtenue garde mémoire du choix de P_0. Cependant, si nous faisons maintenant la moyenne des distributions $P^{(p)}_1$ obtenues sur un grand nombre de trajectoires, nous obtenons une nouvelle estimation P_1 de la distribution initiale du nombre de photons dans la cavité, bien sûr meilleure que ne l'était P_0 :

$$P_1 = \overline{P^{(p)}_1(n)}^{(p)}. \tag{I.97}$$

Puisque P_1 est une meilleure estimation des populations initiales, nous pouvons répéter les transformations (I.95) et (I.97) pour obtenir une nouvelle distribution P_2 à partir de la distribution P_1. Le processus est alors répété plusieurs fois :

$$P_{m+1}(n) = \overline{\frac{1}{Z^{(p)}}\Pi^{(p)}_{N_{\rm at}}(n)P_m(n)}^{(p)}. \tag{I.98}$$

Supposons pour un temps que nous connaissions l'état du champ au début de la mesure, et notons $P_{\rm réel}(n)$ la distribution des nombres de photons dans cet état. Si alors nous choisissons $P_0 = P_{\rm réel}$, la mesure étant QND, $P_1 = P_0 = P_{\rm réel}$, et ce quel que soit le choix de $N_{\rm at}$. En d'autres termes, $P_{\rm réel}$ est un *point fixe* de la transformation (I.98) :

$$P_{\rm réel}(n) = \overline{\frac{1}{Z^{(p)}}\Pi^{(p)}_{N_{\rm at}}(n)P_{\rm réel}(n)}^{(p)}. \tag{I.99}$$

En partant de la distribution plate $P_0(n)$, et pour un nombre «suffisant» d'itérations, nous pouvons alors obtenir le[17] point fixe de la transformation $P_{\rm réel}$. Notons que cette méthode est l'exacte analogue du principe de reconstruction d'états par maximum de vraisemblance [100]. Celle-ci consiste à trouver la matrice densité point fixe des transformations de la forme

$$\rho \mapsto R(\rho)\rho \qquad\qquad \rho \mapsto \rho R(\rho), \tag{I.100}$$

où $R(\rho)$ est une matrice construite de façon analogue à la fonction de décimation $\Pi_{N_{\rm at}}$, *i.e.* à partir des POVMs de toutes les mesures réalisées et de la statistique des résultats obtenus. Le point fixe de la transformation est l'opérateur densité qui maximise la fonction

17. Il n'y en a en fait pas qu'un seul. Voir la discussion plus bas.

de *vraisemblance*, *i.e.* qui maximise la probabilité de mesurer les résultats obtenus au cours de la reconstruction.

Les POVMs que nous avons employés ici sont tous *diagonaux* dans la base des états nombre, et ne fournissent donc aucune information sur les cohérences de la matrice densité. Eux seuls ne peuvent donc pas être utilisés pour une reconstruction totale de la matrice densité, comme cela a été fait précédemment par Samuel Deléglise [74, 34]. Nous faisons en fait une reconstruction par maximum de vraisemblance des populations seules du champ.

Dans [36], 20 itérations de mesures à $N_{\text{at}} = 25$ atomes, correspondant à un temps de mesure de 6 ms seulement, ont permis une étude complète de la décohérence des états de Fock $|n\rangle$, pour $0 \leq n \leq 7$. Nous traçons en traits pleins figure I.25 l'évolution des populations $P(k, t|n)$ des états de Fock $|k\rangle$ obtenues après moyenne sur les trajectoires ayant initialement convergé vers l'état de Fock $|n\rangle$. Les ajustements en pointillés sont très bons, y compris pour les nombres aussi élevés que $n = 7$, preuve que la mesure est cette fois peu limitée en résolution temporelle.

I.4.3.b Choix du nombre d'atomes de mesure

Comparativement à l'analyse par décimation, si cette méthode a l'inconvénient de ne pas pouvoir donner de résultats pour chacune des trajectoires enregistrées, elle permet cependant de raccourcir notablement le temps de mesure. Si nous ne nous intéressons qu'à des mesures d'ensemble, cette méthode doit donc être utilisée en priorité puisqu'elle autorise une meilleure fidélité de reconstruction vis à vis de la distribution des nombres de photons au début de la mesure en minimisant les effets de la relaxation pendant le temps de mesure.

Dans [36], $N_{\text{at}} = 25$ atomes ont été utilisés pour la mesure, soit un temps de mesure de 6 ms. Mais peut-on réduire encore ce nombre d'atomes ? Un choix naturel, pour minimiser le temps de mesure, est de n'utiliser qu'un seul atome. Ce n'est cependant pas une bonne solution. En effet, quelle que soit la phase ϕ_r de mesure, nous ne serions alors capables d'extraire que le transfert moyen, *i.e.* la probabilité de trouver un atome dans $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre :

$$\pi_g(\phi_r|P) = \sum_n P(n)\pi(g|n, \phi_r), \tag{I.101}$$

Dès lors, deux distributions P_1, P_2 telles que

$$\forall \phi_r \quad \pi_g(\phi_r|P_1) = \pi_g(\phi_r|P_2) \tag{I.102}$$

ne pourraient être distinguées.

Trouver deux telles distributions n'est pas compliqué. Nous en donnons ici une méthode géométrique. Si l'on associe à chaque nombre de photons n, dans un plan analogue au plan équatorial de la sphère de Bloch, un vecteur $\mathbf{e}_n$, et à chaque direction de mesure de phase ϕ_r le vecteur $\mathbf{e}_{\phi_r}$ (voir figure I.26) tels que

$$\mathbf{e}_n = \cos\phi(n)\,\mathbf{e}_x + \sin\phi(n)\,\mathbf{e}_y, \tag{I.103}$$

$$\mathbf{e}_{\phi_r} = \cos\phi_r\,\mathbf{e}_x - \sin\phi_r\,\mathbf{e}_y, \tag{I.104}$$

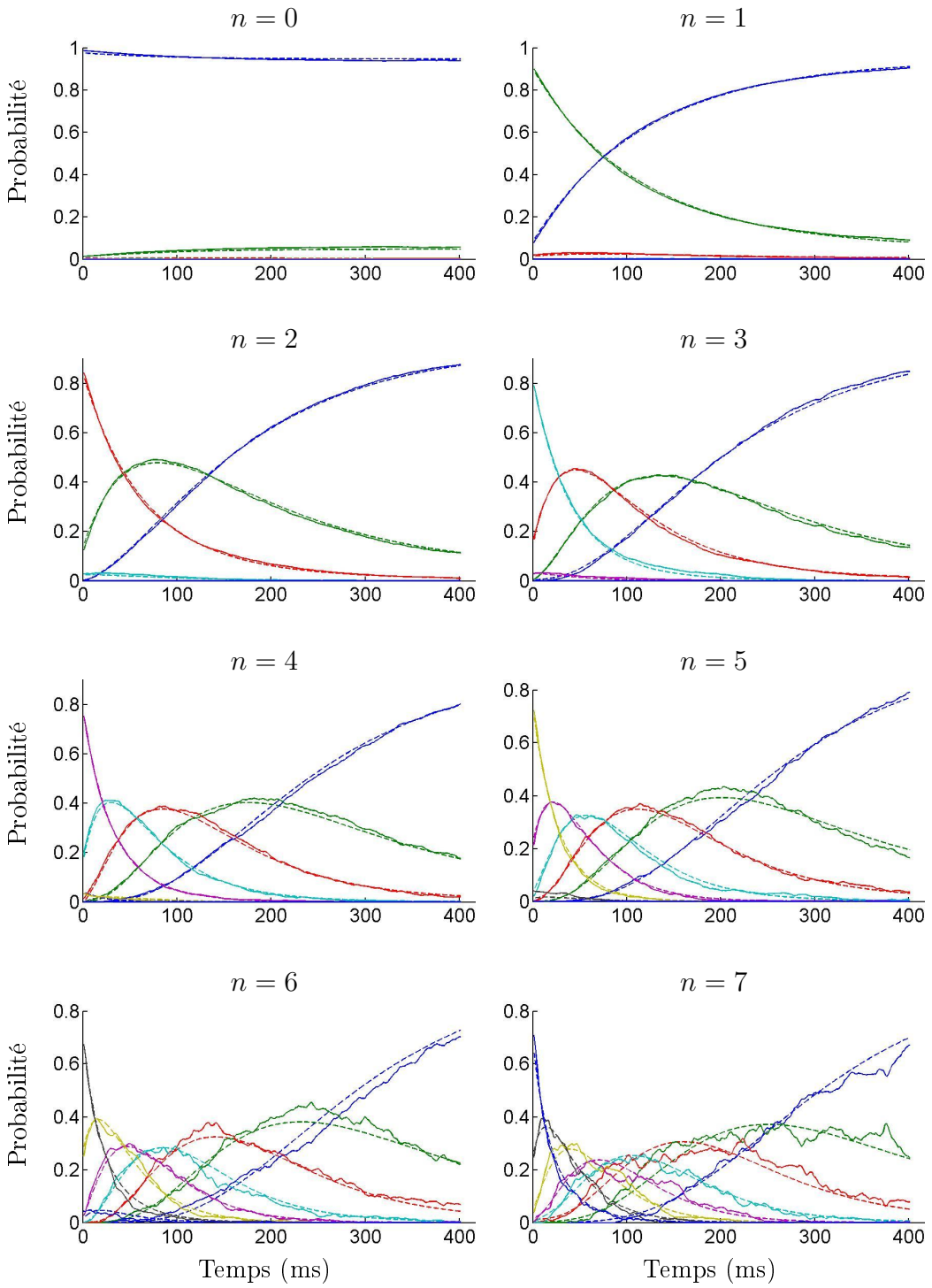
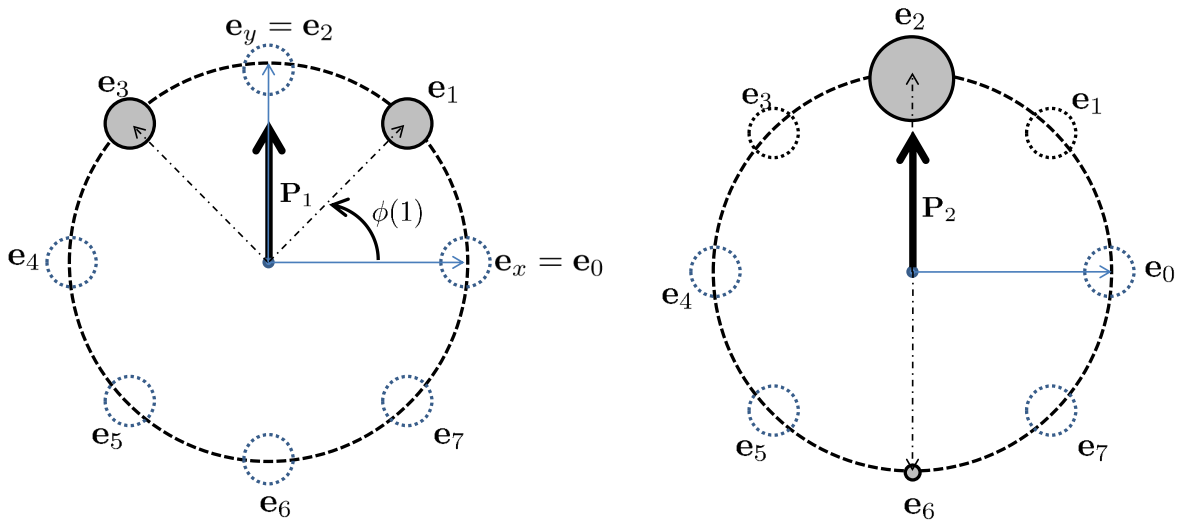


FIGURE I.25 – Évolution des populations $P(k, t|n)$ mesurées (traits pleins) et ajustées (tirets). Les valeurs de k allant de 0 à 7 sont respectivement représentées en bleu, vert, rouge, cyan, mauve, jaune, noir et bleu. Les huit figures correspondent à la sélection des différents états de Fock $|n\rangle$.



(a) $P_1(1) = P_1(3) = 0,5$ (b) $P_2(2) = 0,85$; $P_2(6) = 0,15$

FIGURE I.26 – Deux distributions indistinguables par mesure QND à 1 atome. À chaque nombre de photons n est associé un vecteur $\mathbf{e}_n$. La taille des ronds grisés symbolise les populations $P(n)$; $\mathbf{P_i} = \sum_n P_i(n)\mathbf{e}_n$ est le dipôle de la distribution P_i. Ici, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$.

alors

$$\pi_g(\phi_r|P) = \sum_n P(n)\cos^2\left(\frac{\phi_r + \phi(n)}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_n P(n)\mathbf{e}_n\right)}_{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{e}_{\phi_r}. \tag{I.105}$$

Le vecteur $\mathbf{P}$, par analogie avec l'électromagnétisme, est le *dipôle* de la distribution P, et deux distributions de même dipôle satisfont à la condition (I.102). La figure I.26 en donne un exemple.

L'ambiguïté peut toutefois être levée si nous utilisons maintenant une mesure à au moins deux atomes. Il est en effet alors possible de s'intéresser non plus seulement à la probabilité de mesurer g en sortie de l'interféromètre, mais aussi à la statistique des événements ee, eg et gg, *i.e.* aux corrélations entre mesures sur une même trajectoire. Si l'on reprend les deux distributions données figure I.26 par exemple, et dans le cas d'un interféromètre parfait [18] :

- Pour P_2, et pour une mesure de phase $\phi_r = -\phi(2)$, seuls les événements ee et gg peuvent être enregistrés, avec une probabilité plus élevée pour ee :

$$P_2(ee|\phi_r = \phi(2)) = P_2(e|\phi(2)) = 85\% \qquad P_2(gg|\phi(2)) = 15\% \qquad P_2(eg|\phi(2)) = 0; \tag{I.106}$$

- Pour P_1 en revanche, et avec la même direction de mesure, les événements eg sont possibles, et la mesure de gg est très improbable :

$$P_1(ee|\phi(2)) = 73\% \qquad P_2(gg|\phi(2)) = 2\% \qquad P_2(eg|\phi(2)) = 25\%. \tag{I.107}$$

18. De contraste unité et sans décalage.

La mesure des probabilités P_{ee}, P_{gg} et P_{eg} permet alors de distinguer *a priori* des distributions de même dipôle.

Évidemment, il est possible de trouver des distributions de probabilité qui vérifient à la fois la condition (I.102) et l'égalité deux à deux de toutes les probabilités P_{ij} dans toutes les directions de mesure. C'est le cas par exemple des distributions P_3 et P_4 telles que

$$P_3(n\,\text{pair} \leq 7) = \frac{1}{4} \qquad P_3(n\,\text{impair} \leq 7) = 0 \tag{I.108}$$

$$P_4(n\,\text{pair} \leq 7) = 0 \qquad P_4(n\,\text{impair} \leq 7) = \frac{1}{4}, \tag{I.109}$$

qui ont même dipôle et même *quadripôle* $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q}_{ij} = \sum_n P(n)\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_n \wedge (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_n)) \quad (i,j) \in \{x,y\}^2. \tag{I.110}$$

Il est en effet possible de montrer que

$$P_{eg}(\phi_r) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\phi}_\mathbf{r}} \cdot \mathcal{Q}(\mathbf{e}_{\phi_r}), \tag{I.111}$$

$$P_{ee}(\phi_r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_{\phi_r} \cdot \left(\frac{1}{2}\mathcal{Q}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\phi}_\mathbf{r}}) + \mathbf{P}\right), \tag{I.112}$$

$$P_{gg}(\phi_r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_{\phi_r} \cdot \left(\frac{1}{2}\mathcal{Q}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\phi}_\mathbf{r}}) - \mathbf{P}\right). \tag{I.113}$$

L'égalité des dipôle et quadripôle équivaut donc à l'égalité de toutes les probabilités $P_{ij}(\phi_r)$.

Avec une mesure à 2 atomes, seules les distributions qui ont même dipôle et même quadripôle resteront indistinguables. Le raffinement peut bien sûr être prolongé avec des mesures prenant en compte de plus en plus d'atomes, et faisant intervenir des termes multipolaires d'ordres d'autant plus élevés. Cependant, si nous ne nous intéressons qu'à des distributions de nombres de photons peu dispersées [19], trouver des distributions significativement différentes de mêmes dipôle et quadripôle est plus difficile. Avec deux telles distributions P_3 et P_4, nous pouvons en effet créer la pseudo-distribution $\Delta = P_3 - P_4 \neq 0$ qui a ses monopôle, dipôle et quadripôle nuls, ce qui n'est possible que si Δ prend au moins cinq valeurs non nulles [20]. Il faut donc trouver cinq nombres de photons n tels que $P_3(n)$ et $P_4(n)$ soient distincts, de plus que les les barres d'erreur de la mesure, pour invoquer la nécessité de mesures à plus que 2 atomes.

Notons pour finir que toute cette discussion suppose un choix aléatoire des phases de mesure pour les atomes détectés : une mesure à 4 phases avec deux atomes est bien sûr impossible si le motif de phase est régulier. En utilisant une variation régulière de la phase pour les *échantillons* comme montré figure I.22, le caractère aléatoire de la présence d'un *atome* dans l'échantillon permet de remplir cette contrainte (voir par exemple figure I.23.a).

19. Ce qui sera le cas au chapitre IV, où nous réaliserons des expériences de rétroaction quantique cherchant à préparer des états de Fock, pour lesquels P a évidemment une variance faible.

20. $\mathbf{P}$ a deux composantes indépendantes. $\mathcal{Q}$, tenseur symétrique de dimension 2 et de trace unité, est également défini par deux nombres, et la nullité du monopole $\sum_n \Delta(n) = 0$ fixe la cinquième condition.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps introduit toutes les notations et les formalismes théoriques nécessaires à la description des deux systèmes quantiques en interaction dans nos expériences : un atome à deux niveaux et un oscillateur harmonique. Les atomes de Rydberg circulaires, dont les propriétés remarquables ont été exposées, nous permettent de réaliser expérimentalement un atome à deux niveaux quasi-idéal. L'oscillateur harmonique quant à lui est un mode du champ électromagnétique piégé dans une cavité Fabry-Pérot micro-onde de très haute surtension. Des temps de vie aussi grands que $T_{cav} = 65\,\text{ms}$ ont pu être obtenus, amenant l'interaction avec l'atome à deux niveaux dans le régime de couplage fort. Nous avons alors vu comment, en régime dispersif, le champ quantique induit un déphasage du «spin» atomique par des effets de déplacements lumineux des niveaux d'énergie de l'atome. C'est ce déphasage qui est exploité pour réaliser une mesure quantique non-destructive du nombre de photons piégés dans la cavité. Un interféromètre de Ramsey a ainsi été construit pour mesurer de tels effets.

Dans une dernière partie, les résultats obtenus dans le groupe ces dernières années ont été exposés. Nous avons ainsi pu introduire deux méthodes d'analyse distinctes des mesures QND. Une méthode par décimation d'une part, qui réalise explicitement une mesure projective du nombre de photons à chaque réalisation de l'expérience. Un suivi temporel du nombre de photons dans la cavité est alors possible, permettant l'observation de sauts quantiques de la lumière. Une méthode itérative d'autre part, qui renonce à l'analyse par trajectoire, mais permet, par un procédé de moyenne sur de nombreuses réalisations, d'extraire la moyenne d'ensemble de la distribution des nombres de photons dans le champ en un temps de mesure notablement réduit par rapport à la méthode précédente. Chacune de ces deux méthodes sera utilisée dans les chapitres suivants.

Nous disposons donc maintenant des systèmes quantiques et des techniques de mesure nécessaires à l'acquisition d'information sur le champ quantique que nous souhaitons manipuler. Les trois prochains chapitres sont dévolus à la description de la rétroaction quantique que nous avons mise en place permettant cette manipulation.

Chapitre II

Rétroaction quantique

Nous avons décrit au chapitre I le système quantique que nous souhaitons contrôler en temps réel : un mode du champ électromagnétique piégé dans une cavité supraconductrice. Nous avons ensuite vu comment il est possible de réaliser une mesure quantique non-destructive du nombre de photons à l'aide d'atomes de Rydberg circulaires. L'oscillateur harmonique est alors préparé dans un des états de Fock $|n\rangle$, où n est le résultat de la mesure. Cette préparation est cependant intrinsèquement aléatoire : la mesure obéit aux postulats de la mécanique quantique. Seule la statistique de préparation est donc *a priori* connue. Ces états sont par ailleurs particulièrement fragiles : nous avons vu au paragraphe I.4.2 comment la relaxation par une succession de sauts quantiques détruit ces états en un temps de l'ordre de $\mathrm{T_{cav}}/n$.

Dans ce chapitre, nous verrons comment il est possible de préparer de façon déterministe un état de Fock $|\mathrm{n_c}\rangle$ puis de le protéger contre la décohérence. Les principes bien connus de la rétroaction classique seront utilisés pour construire une boucle de rétraction quantique dont nous donnerons le principe général dans une première partie. Nous verrons alors à quelles difficultés nous avons dû faire face. En particulier, il nous a fallu définir une distance entre états quantiques, distance dont le choix conditionne l'efficacité de la rétroaction. Nous décrirons donc en détail la façon dont nous avons décidé de sa forme.

Avant de tester expérimentalement la boucle ainsi construite, nous présenterons dans une seconde partie les résultats de simulations numériques basées sur des méthodes Monte-Carlo quantiques. Les résultats obtenus montreront la faisabilité de la rétroaction quantique élaborée tout au long du chapitre et marqueront le début de la réalisation expérimentale.

II.1 Principe général

II.1.1 Une boucle de rétroaction quantique

L'utilisation de boucles de rétroaction, ou systèmes asservis, est plus que courante en physique classique et dans notre vie quotidienne. Un des exemples les plus connus est sans doute le thermostat d'un four. Pour le physicien, on pourrait également citer les

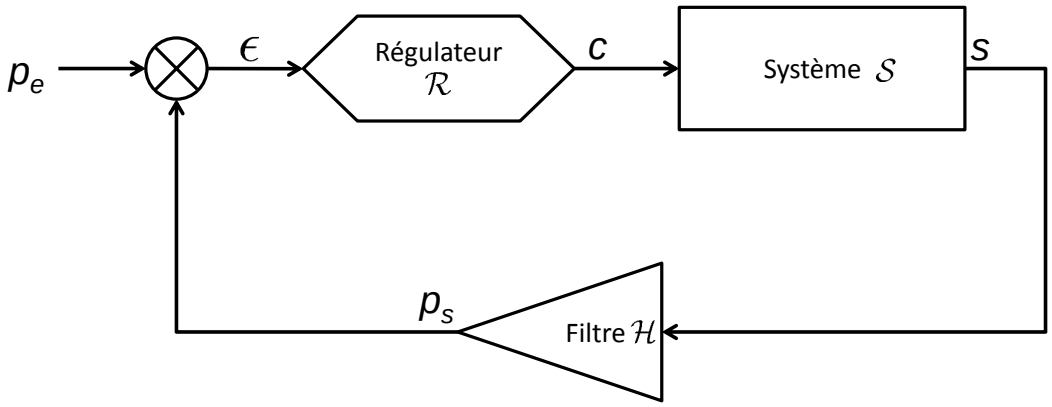


FIGURE II.1 – Boucle de rétroaction classique. Le signal de sortie s est traité par un filtre $\mathcal{H}$. Sa sortie p_s est comparée à la consigne p_e. Le signal d'erreur ϵ résultant est utilisé par le régulateur $\mathcal{R}$ pour calculer la correction c.

asservissements de circuits électroniques ou encore ceux des lasers. Tous ces systèmes, quoique très divers, sont constitués des mêmes éléments principaux, regroupés de façon schématique sur la figure II.1, et énumérés ci-dessous (on donne entre parenthèses ce qu'ils sont dans le cas du thermostat d'un four) :

Le système L'objet (le four) dont on veut contrôler une des propriétés physiques p (la température) ;

Le signal de sortie La grandeur physique mesurée s qui renseigne sur (ou qui est) la propriété du système que l'on veut asservir (la résistance de la thermistance du four) ;

Le filtre Le signal de sortie, avant de pouvoir être exploité, peut nécessiter le passage par un filtre $\mathcal{H}$ qui en extrait les informations pertinentes : $p_s = \mathcal{H}(s)$ (la table de conversion résistance–température pour la thermistance utilisée) ;

La consigne La valeur p_e que l'on cherche à imposer à la grandeur p (la température voulue pour le four). La différence avec la valeur actuelle p_s constitue le *signal d'erreur* $\epsilon = \mathcal{E}(p_e, p_s)$;

Le régulateur et la correction Étant donné ϵ, le *régulateur* doit alors calculer la *correction* $c = \mathcal{R}(\epsilon)$ à appliquer au système pour amener la grandeur p vers la valeur désirée p_e (la résistance chauffante et son alimentation commandée). Les régulateurs PID (proprotionnel-intégrateur-dérivateur) sont les plus courants.

Le problème que nous nous posons ici est celui de la préparation et de la protection contre la décohérence d'un état $|\mathrm{n_c}\rangle$ choisi. La solution retenue est de transposer au monde quantique les idées de la rétroaction classique [57] : le système considéré $\mathcal{S}$ est le champ électromagnétique piégé dans la cavité micro-onde, dont la propriété physique p que nous cherchons à contrôler est bien évidemment l'état quantique, donné par sa matrice densité ρ. La consigne p_e est *l'état cible*, à savoir $\rho_\mathrm{c} = |\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|$.

La simplicité de la transposition s'arrête cependant ici. Nous nous heurtons à une première difficulté lors de la mesure du signal de sortie sur le système quantique $\mathcal{S}$. De

fait, comme prédit par les postulats de la mécanique quantique, cette mesure a un effet en retour aléatoire sur le système étudié : après celle-ci, $\mathcal{S}$ est projeté dans un nouvel état qui dépend du résultat de la mesure. Or cette inévitable perturbation est d'autant plus forte que l'information acquise est précise. Un compromis est trouvé par l'emploi de *mesures faibles*, déjà rencontrées au I.4.1, qui ne fournissent qu'une information partielle sur le système, mais avec une perturbation *a minima*.

La consigne étant ici la matrice densité de l'état à préparer, le filtre $\mathcal{H}$ doit être en mesure d'estimer en temps réel la matrice densité de $\mathcal{S}$, afin d'appliquer la correction *ad hoc*. Contrairement à ce que nous pouvons faire avec une boucle de rétroaction classique, l'emploi seul de mesures faibles, sans information *a priori*, ne nous permet toutefois pas de connaître parfaitement l'état de $\mathcal{S}$ après l'une d'elle. Le *filtre quantique* utilisé, dont nous donnerons le détail du fonctionnement dans les paragraphes suivants, devra donc, connaissant l'état initial du système, actualiser son *estimation* ρ_s à chaque modification, contrôlée ou pas, de l'état du champ : l'action en retour des mesures, les corrections faites sur $\mathcal{S}$ dans le cadre de la rétroaction, ainsi que les modifications dues à toutes les imperfections expérimentales, telles que la décohérence *via* le temps de vie fini du champ. Nous voyons déjà ici à quel point la connaissance du dispositif expérimental devra être précise pour que la rétroaction puisse être efficace.

Nous rencontrerons enfin une difficulté dans la définition du signal d'erreur qui contrôle les corrections de la boucle. Comment définir la *distance*, au sens de la différence, qu'il y a entre deux états quantiques, à savoir l'état cible ρ_c et l'état courant ρ_s ? La réponse à cette question sera donnée au paragraphe II.1.3.

Au fait de ces difficultés, propres à toute boucle de rétroaction quantique, revenons à notre cas particulier et décrivons étape par étape une itération de la boucle. Le schéma de principe, adapté de celui donné figure II.1, en est donné figure II.2.

De même que dans nos expériences décrites au chapitre précédent, des atomes de Rydberg circulaires réalisent sur le champ micro-onde par une succession de mesures faibles une mesure QND du nombre de photons piégés. Après chaque détection atomique $j = e, g$ (le signal de sortie) cependant, une correction est appliquée afin que les mesures suivantes tendent à rapprocher l'état du champ de l'état cible.

Le plus simple techniquement consiste à utiliser une correction classique, à savoir l'injection dans le mode de champs cohérents $|\alpha\rangle$ d'amplitude et phase contrôlées. La même source classique qui nous avait permis précédemment de préparer le champ dans un état cohérent, et dont le couplage à la cavité a déjà été décrit au paragraphe I.1.2.b, est maintenant utilisée pour réaliser de «petits» déplacements dans l'espace des phases. La façon dont est choisi le paramètre α sera décrite au paragraphe II.1.3.c.

Nous définissons alors une itération de la boucle comme la succession des trois événements suivants (voir aussi la figure II.3), donnés pour l'itération numéro k :

1. détection du k^{e} atome [1] dans le niveau $|e\rangle$ ou $|g\rangle$,

1. Dans toute cette section, nous ne ferons pas la distinction entre «atome» et «échantillon» faite au chapitre I. Cela revient en fait à supposer que nous sommes dans le cas idéal où tous les échantillons contiennent un et un seul atome.

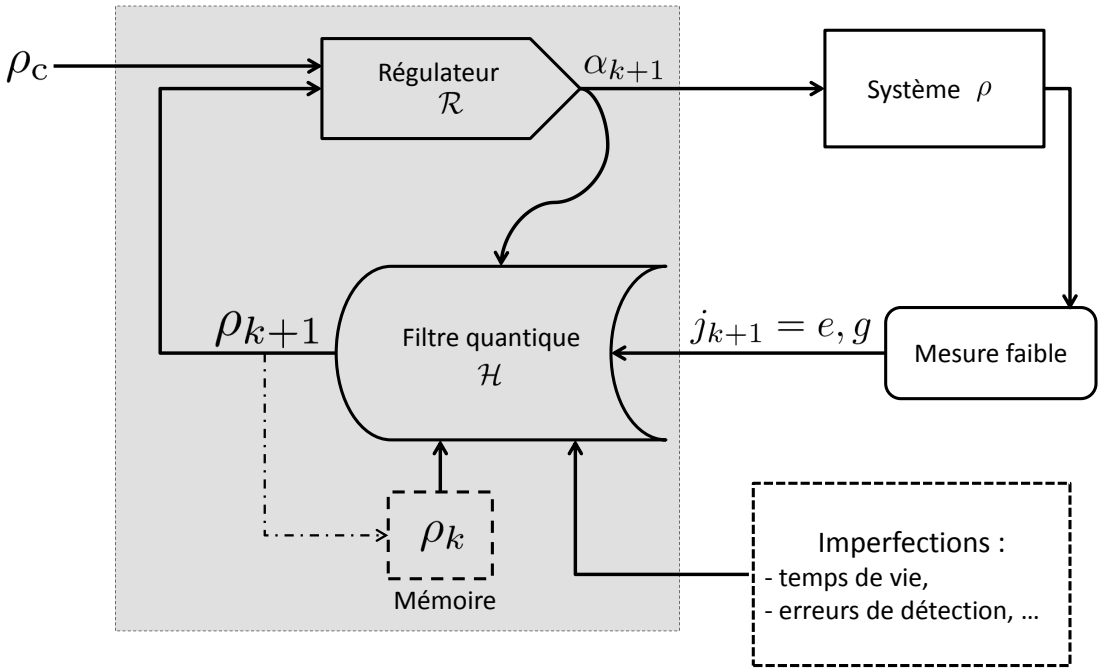


FIGURE II.2 – Boucle de rétroaction quantique. À la (k+1)^{e} itération de la boucle, le filtre quantique a en mémoire l'état du champ ρ_k, actualisé en ρ_{k+1} à partir du résultat de la mesure atomique j_{k+1}, du déplacement α_k et des imperfections expérimentales. Étant donné la consigne ρ_c, la prochaine correction $\alpha_{k+1} = \mathcal{R}(\rho_c, \rho_{k+1})$ est calculée par le régulateur. Le rectangle grisâtre représente l'ordinateur de contrôle à trois entrées (consigne, mesure, imperfections) et une sortie (correction) en charge de la rétroaction.

2. calcul de la correction optimale α_k à appliquer et injection du champ cohérent correspondant,
3. évolution libre pendant le temps nécessaire au prochain atome $(k+1)$ pour arriver au niveau du détecteur.

À l'instant suivant l'interaction du champ avec le k^{e} atome et sa détection, soit juste avant l'injection de la k^{e} correction α_k, la matrice densité du champ micro-onde intracavité (notre système $\mathcal{S}$) est notée ρ_k. Après cette injection, l'état du système est alors [2]

$$\rho_{k+\frac{1}{3}} = \mathbf{D}_k \rho_k, \tag{II.1}$$

2. Nous utilisons ici une notation à indices fractionnaires. Le passage de l'état ρ_k vers l'état ρ_{k+1} étant divisé en trois étapes, les états intermédiaires sont notés $\rho_{k+1/3}$ et $\rho_{k+2/3}$.

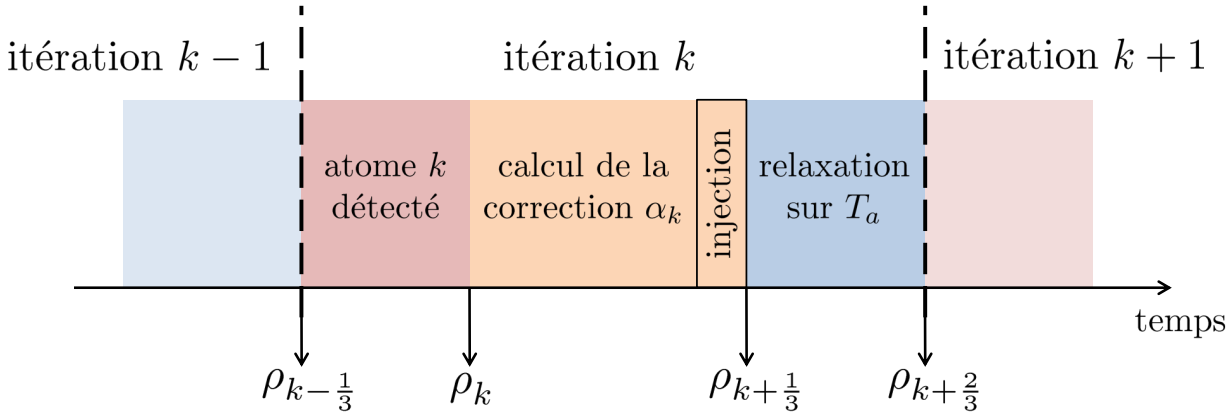


FIGURE II.3 – Une itération de la boucle de rétroaction est divisée en trois étapes : détection d'un atome (zone rouge), calcul du déplacement cohérent à appliquer (zone orange), et évolution libre sur un temps T_a nécessaire à l'atome suivant pour atteindre le détecteur (zone bleue). Nous donnons aussi les notations utilisées pour désigner la matrice densité estimée du champ à chaque étape.

où l'action du super-opérateur $\mathbf{D}_k$, contrôlée par le paramètre α_k, est définie *via* l'opérateur déplacement $\mathcal{D}(\alpha_k)$ introduit au paragraphe I.1.2.b :

$$\mathbf{D}_k\rho = \mathcal{D}(\alpha_k)\rho\mathcal{D}(-\alpha_k) \equiv \rho(\alpha_k). \tag{II.2}$$

L'amplitude α_k de la correction quant à elle est calculée par le régulateur juste après la détection de l'atome k, en fonction de ρ_k et de ρ_c :

$$\alpha_k = \mathcal{R}(\rho_c, \rho_k). \tag{II.3}$$

Notons que contrairement au cas de la boucle de rétroaction classique, il n'y a pas ici à proprement parler de *signal d'erreur* à partir duquel le régulateur calcule la correction à appliquer. Il utilise en fait l'estimation brute ρ_k de l'état du champ et la matrice densité de la cible ρ_c pour calculer α_k. Toutefois α_k sera choisi afin de minimiser la *distance à l'état cible*, ou l'*erreur*, de l'état du champ après application de la correction : $\mathcal{E}(\rho_c, \mathbf{D}_k\rho_k)$.

Il faut ensuite tenir compte de la relaxation sur le temps fini T_a d'une itération de la boucle. La façon dont est modifiée la matrice densité a déjà été donnée équation (I.19) et on a donc

$$\rho_{k+\frac{2}{3}} = \mathbf{T}\rho_{k+\frac{1}{3}} = (\mathbb{1} + T_a\mathbf{L})\rho_{k+\frac{1}{3}}. \tag{II.4}$$

Un atome de Rydberg, ou sonde atomique, réalise enfin une mesure faible du nombre de photons. Après détection de la sonde dans l'un des deux états $|j_{k+1}\rangle = |e\rangle$ ou $|g\rangle$, le champ est projeté sur une nouvelle matrice densité

$$\rho_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1}\rho_{k+\frac{2}{3}}. \tag{II.5}$$

L'expression du super-opérateur $\mathbf{M}_{k+1}$ qui traduit l'effet en retour de la mesure sur le champ, en fonction du résultat de la détection atomique j_{k+1}, est donnée au II.1.2.

Après la détection du $(k+1)$ième atome, la matrice densité du champ est donc donnée par la formule

$$\rho_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1}\mathbf{TD}_k\,\rho_k = \left(\prod_{i=0}^{k}\mathbf{M}_{i+1}\mathbf{TD}_i\right)\rho_0 \equiv \boldsymbol{\mathcal{H}}_{k+1}\rho_0, \tag{II.6}$$

où ρ_0 est l'état initial du champ, et $D_0 = \mathbb{1}$.

Les paragraphes suivants ont pour objectif de détailler la façon dont est fait le calcul de l'amplitude des corrections, *i.e.* donner les expressions des fonctions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{E}$, ainsi que celles de tous les super-opérateurs rencontrés.

II.1.2 Signal de sortie et filtre quantique

II.1.2.a Mesures faibles : action et paramètres

Intéressons nous dans un premier temps à l'actualisation de la matrice densité après une détection atomique ayant donné le résultat j. Comme nous l'avons déjà vu au paragraphe I.4.1, l'action en retour de la mesure est décrite par les opérateurs de Kraus $M_{j=e,g}$. Ainsi, si un atome est détecté dans l'état j en sortie de l'interféromètre, la matrice densité du champ devient

$$\rho \longmapsto \mathbf{M}_j\,\rho = \frac{M_j\rho M_j^\dagger}{\mathrm{Tr}(\rho M_j^\dagger M_j)}, \tag{II.7}$$

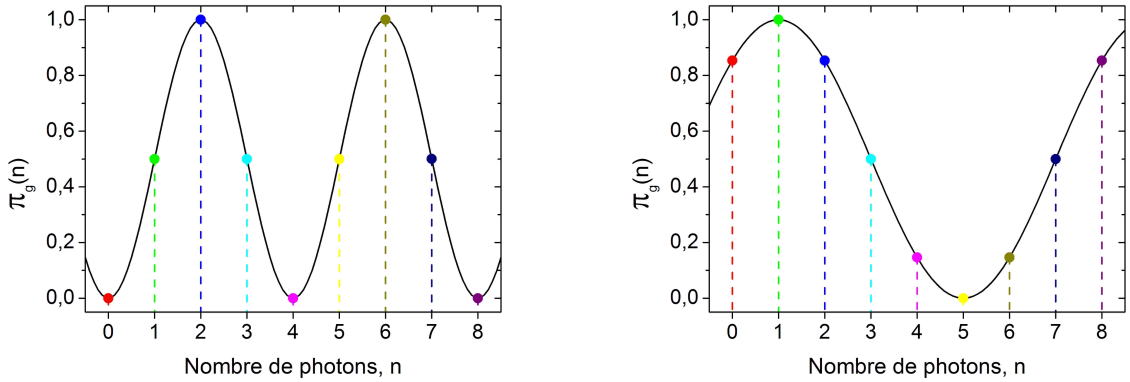
où les opérateurs M_j ont été définis équation (I.84). Ils dépendent des deux mêmes paramètres expérimentaux, à savoir la phase de l'interféromètre Ramsey ϕ_r et le déphasage par photon ϕ_0, ou de façon équivalente le déphasage $\phi(n)$ induit par n photons sur le dipôle atomique (défini équation (I.72)) :

$$M_e = \sin\left(\frac{\phi_r + \phi(\hat{N})}{2}\right) \qquad\qquad M_g = \cos\left(\frac{\phi_r + \phi(\hat{N})}{2}\right).$$

Un choix naturel pour la phase de l'interféromètre de Ramsey est la valeur $\varphi_r(\mathrm{n_c})$ telle que pour un champ dans l'état cible $|\mathrm{n_c}\rangle$, l'interféromètre soit sur un milieu de franges (ou encore que la probabilité de détecter un atome dans $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ soit 50%) :

$$\varphi_r(\mathrm{n_c}) = \frac{\pi}{2} - \phi(\mathrm{n_c}). \tag{II.8}$$

La sensibilité de l'interféromètre à la variation du nombre de photons est en effet alors maximale autour de l'état cible.



(a) $\phi_0 = \pi/2$ (b) $\phi_0 = \pi/4$

FIGURE II.4 – Probabilité $\pi_g(n)$ de détecter une sonde QND dans l'état $|g\rangle$ pour un champ préparé dans l'état de Fock $|n\rangle$, et pour deux choix de déphasage par photon ϕ_0. Dans les deux cas, ϕ_r est choisi de telle sorte que $\pi_g(3) = 0,5$.

Afin que la mesure puisse bien distinguer l'état cible des autres états nombre, un choix naturel semble être de prendre un déphasage par photon de l'ordre de $\phi_0 = \pi/2$. Nous traçons figure II.4a la probabilité $\pi_g(n)$ de détecter un atome dans l'état $|g\rangle$ pour différents états de Fock $|n\rangle$, l'interféromètre de Ramsey étant réglé avec la phase $\phi_r = \varphi_r(3)$. Si les états $|2\rangle$ et $|4\rangle$ sont alors effectivement discriminés de manière optimale de l'état cible $|\mathrm{n_c} = 3\rangle$, il n'en est rien pour $|1\rangle$ ou $|5\rangle$. Avec ce réglage de l'interféromètre, il n'est en fait pas possible de distinguer les états $|0\rangle$ et $|4\rangle$, $|1\rangle$, $|3\rangle$ et $|5\rangle$, et $|2\rangle$ et $|6\rangle$.

Un choix plus judicieux consiste à choisir un déphasage par photon deux fois plus faible : $\phi_0 = \pi/4$. Nous traçons de même figure II.4b la probabilité $\pi_g(n)$ avec ce réglage pour les différents états de Fock $|n\rangle$. Il apparaît alors que si $\pi_g(2)$ et $\pi_g(4)$ sont maintenant un peu plus proches de $\pi_g(3)$ que dans la situation précédente, la distinction reste aisée, et surtout que l'état $|\mathrm{n_c} = 3\rangle$ est maintenant bien séparé des ensembles $\{|n\rangle \,/\, n < 3\}$ et $\{|n\rangle \,/\, 3 < n < 7\}$. Le filtre est en mesure de déterminer de façon efficace s'il y a plus ou moins de photons dans la cavité que dans l'état cible. Il ne peut toutefois pas distinguer par la mesure seule les états $|3\rangle$ et $|7\rangle$ ($\pi_g(3) = \pi_g(7)$), mais le temps de vie de $|7\rangle$ étant relativement court (9 ms contre 22 ms pour $|3\rangle$), la relaxation permettra de lever l'incertitude rapidement [3].

Nous retiendrons donc pour l'instant le choix des paramètres suivants :

$$\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c}) = \frac{\pi}{2} - \phi(\mathrm{n_c}), \qquad \phi_0 = \frac{\pi}{4}. \tag{II.9}$$

3. En fait, en 9 ms. Avec $\phi_0 = \pi/2$, la distinction entre $|1\rangle$ et $|3\rangle$ par exemple ne pouvait se faire que sur des temps aussi longs... que le temps de vie de l'état cible $|3\rangle$!

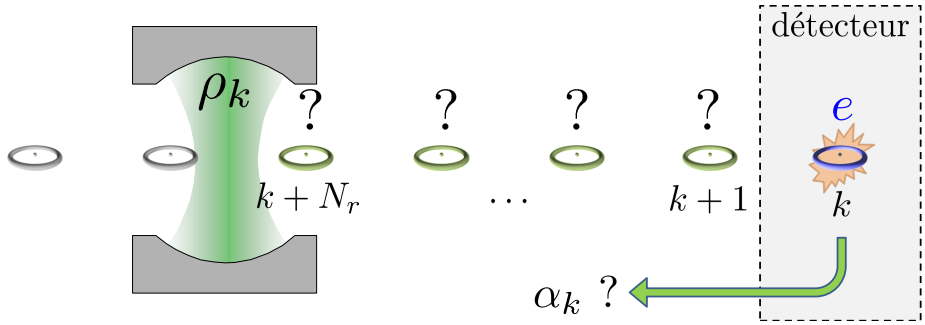


FIGURE II.5 – Une rétroaction retardée. On considère l'instant $t = t_{\text{det}}(k)$ auquel l'atome k vient d'être détecté, ici dans l'état $|e\rangle$. $N_r = 4$ atomes sont en vol entre la cavité et le détecteur, repéré par un bandeau gris, et le dernier atome ayant interagi avec le champ est l'atome $k + N_r$. Leurs états sont encore inconnus et le filtre quantique les traite donc comme des atomes ayant réalisé des mesures non-lues. Il calcule alors l'amplitude de la prochaine correction à appliquer, *i.e.* α_k.

II.1.2.b Une rétroaction retardée

Pour que les corrections calculées soient efficaces, le régulateur $\mathcal{R}$ doit disposer d'une estimation aussi bonne que possible de l'état du champ *au moment* du calcul. Jusqu'à présent, nous avons considéré que juste après la détection de l'atome k, cette estimation optimale est ρ_k, calculée par le filtre quantique $\mathcal{H}$, et dont l'expression a été donnée équation (II.6). Si l'on y regarde de plus près, cela suppose que la détection de l'atome k a lieu *immédiatement* après son interaction avec le champ. La dernière étape du calcul de ρ_k est en effet

$$\rho_k = \mathbf{M}_k \rho_{k-1+\frac{2}{3}}, \tag{II.10}$$

où $\mathbf{M}_k$ rappelons-le décrit l'interaction du champ avec l'atome k (équation (II.7)).

L'hypothèse faite précédemment est en fait erronée : la cavité supraconductrice est située à distance non nulle du détecteur à ionisation, environ 86 mm, une distance qu'un atome à $250\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ met $T_r = 344\,\mu\mathrm{s}$ à parcourir. *A priori* ce *retard* n'est pas gênant : en considérant que l'atome est détecté juste après son interaction avec le champ, nous oublions que les deux systèmes restent en fait intriqués pendant T_r, jusqu'à la détection de l'atome. Toutefois, choisir d'appliquer le postulat de projection avant ou après le délai T_r ne modifie pas la matrice densité résultante du champ. Tout revient donc à considérer que la projection de l'atome k sur l'état $|e\rangle$ ou l'état $|g\rangle$ a lieu à la sortie de la cavité supraconductrice [4], mais que l'information sur son état met un temps T_r à nous parvenir : il y a un *retard* dans la chaîne de détection.

Cela complique malgré tout l'estimation de l'état du champ. Ce retard se traduit en effet par le fait qu'au moment où nous prenons connaissance de l'état de l'atome k, *i.e.* $344\,\mu\mathrm{s}$ après son interaction avec le champ, $N_r = (344\,\mu\mathrm{s}/82\,\mu\mathrm{s}) = 4$ atomes supplémentaires ont

4. Sans oublier bien sûr la seconde impulsion $\pi/2$ qui ferme l'interféromètre.

interagi avec le champ. La figure II.5 illustre cette situation : à l'instant $t = t_{\mathrm{det}}(k)$ auquel l'état de l'atome k est connu, $N_r = 4$ atomes sont en chemin entre la cavité et le détecteur, et l'état du champ a donc déjà été modifié par les mesures faibles opérées par ces atomes ($k+1$ à $k+N_r$).

Le régulateur ne peut donc pas utiliser la matrice densité ρ_k, telle que nous l'avions calculée équation (II.6), pour décider de la correction à appliquer sur le champ. S'il le fait, c'est la modification par les N_r mesures faibles $\mathbf{M}_{k+1\leq i\leq k+N_r}$ qui est oubliée. Pire, au cours du temps de vol de l'atome k entre la cavité et le détecteur, N_r autres atomes ont été détectés (atomes $k-N_r$ à $k-1$), chacun déclenchant un calcul du filtre et du régulateur, et donc N_r déplacements de correction $\mathbf{D}_{k-N_r\leq i\leq k-1}$ appliqués. Un filtre quantique supplémentaire $\mathcal{H}_{\mathrm{r}}$ est donc chargé d'améliorer l'estimation de l'état du champ. Prendre en compte ces N_r déplacements est chose aisée : leurs amplitudes, calculées par le régulateur aux itérations précédentes, sont parfaitement connues. La situation est plus complexe pour les N_r atomes en vol entre la cavité et le détecteur. S'ils ont déjà interagi avec le champ, et ont déjà été projetés dans un des états $|e\rangle$ ou $|g\rangle$, ils n'ont pas encore été détectés et les résultats de leurs détections sont donc encore inconnus. Le seul choix qui s'impose à nous est donc de traiter ces atomes comme s'ils réalisaient une *mesure non-lue* sur le champ, décrite par le super-opérateur $\mathbf{M}_{\mathrm{nl}}$:

$$\rho \longmapsto \mathbf{M}_{\mathrm{nl}}\,\rho = M_g \rho M_g^{\dagger} + M_e \rho M_e^{\dagger}. \tag{II.11}$$

Pour que l'estimation ρ_k soit la plus complète possible, il faut par ailleurs prendre en compte la relaxation pendant T_r. L'opérateur densité ρ_k, calculé par les filtres quantiques $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{r}}$, et à partir duquel le régulateur décide de la correction α_k à appliquer, est donc calculé ainsi :

$$\rho_k = \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{(r)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_k \rho_0, \tag{II.12}$$

où les opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{(r)}$ et $\boldsymbol{\mathcal{H}}_k$ sont définis comme

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{(r)} = \left(\prod_{i=k}^{k+N_r-1} \mathbf{M}_{\mathrm{nl}} \mathbf{T} \mathbf{D}_{i-Nr} \right), \tag{II.13}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{T} \mathbf{D}_{i-N_r} \right). \tag{II.14}$$

Dans les équations (II.12), (II.13) et (II.14), les déplacements $\mathbf{D}_i$ avec $i \leq 0$ sont égaux à l'identité. En d'autres termes, on ne fait pas de corrections tant qu'aucun atome n'a atteint le détecteur :

$$\forall i \leq 0 \quad \mathbf{D}_i = \mathbb{1}. \tag{II.15}$$

Notons que si $\boldsymbol{\mathcal{H}}_k$ peut encore être calculé par une relation de récurrence,

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{k+1} = \left[\mathbf{M}_{k+1} \mathbf{T} \mathbf{D}_{k-N_r}\right] \boldsymbol{\mathcal{H}}_k, \tag{II.16}$$

il n'en est rien pour $\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{(r)}$, et il n'y a donc plus de relation de récurrence entre ρ_{k+1} et ρ_k. Toutefois, le filtre n'a pas à faire le calcul *complet* de ρ_k à chaque itération, *i.e.* en partant systématiquement de ρ_0. Il peut en effet garder en mémoire la matrice densité $\tilde{\rho}_k$ définie comme

$$\tilde{\rho}_k = \boldsymbol{\mathcal{H}}_k \rho_0, \tag{II.17}$$

qui peut être calculée par récurrence à partir de l'équation (II.16) en utilisant les informations acquises à l'itération $k+1$ (détection de l'atome $k+1$ et injection de α_{k-N_r}) :

$$\tilde{\rho}_{k+1} = \left[\mathbf{M}_{k+1}\mathbf{TD}_{k-N_r}\right] \tilde{\rho}_k. \tag{II.18}$$

L'estimation ρ_{k+1} est alors obtenue à partir de $\tilde{\rho}_{k+1}$ en appliquant le filtre $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{k+1}^{(r)}$ rendant compte du retard dans la chaîne de détection :

$$\rho_{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{k+1}^{(r)} \tilde{\rho}_{k+1}. \tag{II.19}$$

Notons que la matrice $\tilde{\rho}_k$ décrit en fait l'état du champ tel qu'il est juste après que l'atome k ait quitté la cavité et ait été projeté dans un des états $|e\rangle$ ou $|g\rangle$. Les N_r atomes de retard n'ont alors pas encore interagi avec le champ.

II.1.3 Signal d'erreur et rétroaction

L'objectif de cette section est de donner une définition au signal d'erreur $\mathcal{E}(\rho_c, \rho)$ évoqué précédemment. Le choix que nous ferons est important : l'efficacité de la rétroaction quantique en dépend notablement. C'est en effet par la donnée de $\mathcal{E}$ que la correction α_k est calculée par le régulateur $\mathcal{R}$, le choix optimal consistant à injecter le champ cohérent d'amplitude

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha \in \mathbb{C}} \mathcal{E}\left[\rho_c, \rho_k(\alpha)\right]. \tag{II.20}$$

La *distance* à l'état cible après l'injection α_k est alors minimisée. Modifier $\mathcal{E}$ revient donc à modifier les actions du filtre, et le choix devra donc être fait avec soin.

Après avoir donné quelques définitions courantes de distance entre deux états quantiques, nous verrons comment le choix de $\mathcal{E}$ est en fait contraint par quelques arguments simples. Deux définitions possibles seront alors données, ainsi que, pour chacune d'elles, la *loi de contrôle* associée, *i.e.* la façon dont α_k est calculé.

II.1.3.a Fidélité

À la question «Quand, ou comment, peut-on dire que deux états quantiques sont *proches* ou *loin* l'un de l'autre ?», plusieurs réponses ont été données, notamment dans le cadre de la cryptographie quantique [101], où ces notions sont cruciales pour pouvoir tester la sécurité de tel ou tel protocole quantique. Plusieurs définitions courantes de *fidélité* existent ainsi.

Pour deux états purs $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, le choix le plus naturel consiste à la définir comme le recouvrement entre les deux états :

$$\mathcal{F}_{\mathrm{p}}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2. \tag{II.21}$$

Cette définition ne se transpose cependant pas facilement au cas de mélanges statistiques. Une généralisation possible [102] couramment utilisée est donnée sous la forme

$$\mathcal{F}_{\mathrm{m}}(\rho_1, \rho_2) = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}}\right). \tag{II.22}$$

On citera également la probabilité d'erreur $PE(\rho_1, \rho_2)$, ou la distance de Kolmogorov $K(\rho_1, \rho_2)$, toutes deux dérivées de l'information classique, et qui s'écrivent [101]

$$K(\rho_1, \rho_2) = 1 - 2PE(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}|\rho_1 - \rho_2|. \tag{II.23}$$

Ici, nous cherchons à définir une distance à notre état cible $\rho_{\mathrm{c}} = |\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|$ pour toute matrice densité ρ. Il se trouve alors que, ρ_{c} étant un état pur, toutes les définitions de distance ou de fidélité données ci-dessus se ramènent à la définition intuitive

$$\mathcal{F}(\rho_{\mathrm{c}}, \rho) = \mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{c}}\rho) = \langle\mathrm{n_c}|\rho|\mathrm{n_c}\rangle. \tag{II.24}$$

Remarquons au passage que le maximum de la fidélité $\mathcal{F}$ est atteint pour $\rho = \rho_{\mathrm{c}}$ seulement, pour lequel

$$\mathcal{F}(\rho_{\mathrm{c}}, \rho_{\mathrm{c}}) = 1. \tag{II.25}$$

Si l'on veut définir un signal d'erreur au sens usuel du terme, qui s'annule quand la cible est atteinte, on définira alors

$$\mathcal{E}(\rho_{\mathrm{c}}, \rho) = 1 - \mathcal{F}(\rho_{\mathrm{c}}, \rho) = 1 - \langle\mathrm{n_c}|\rho|\mathrm{n_c}\rangle. \tag{II.26}$$

Si cette définition est naturelle, et simple à calculer, elle présente néanmoins un inconvénient sérieux : quel que soit l'état de Fock $|n \neq \mathrm{n_c}\rangle$, la fidélité $\mathcal{F}$ s'annule :

$$\forall n \neq \mathrm{n_c} \quad \mathcal{F}(\rho_{\mathrm{c}}, |n\rangle\langle n|) = 0. \tag{II.27}$$

Il n'est donc pas possible, avec un telle définition, de distinguer entre eux les états de Fock différents de l'état cible. Il nous a paru alors nécessaire de trouver une autre définition pour le signal d'erreur de la boucle, qui puisse traduire notre sentiment qu'un état de Fock $|n \gg \mathrm{n_c}\rangle$ est plus «loin» de $|\mathrm{n_c}\rangle$ que $|\mathrm{n_c} - 1\rangle$ par exemple.

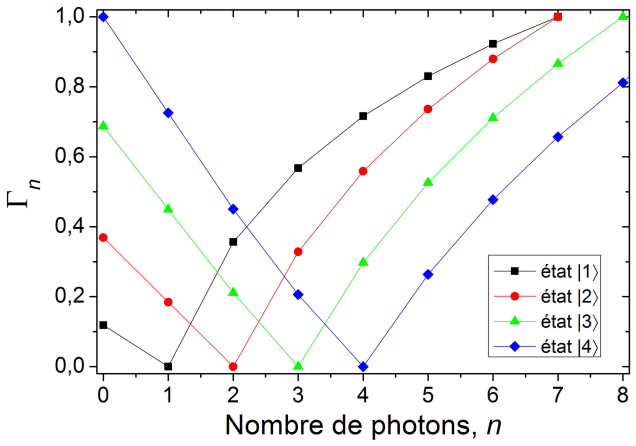


FIGURE II.6 – Coefficients $\Gamma_n^{(\mathrm{n_c})}$ pour $1 \leq \mathrm{n_c} \leq 4$.

II.1.3.b Une définition plus générale

Nous allons dans ce paragraphe chercher à définir une nouvelle *distance* $d(\rho_\mathrm{c}, \rho)$ à l'état cible, renonçant ainsi à une définition générale de distance entre deux matrices densité quelconques. Celle-ci doit remplir un certain nombre de critères, que nous donnons ci-dessous, et dont les implications seront exploitées ci-après.

- En tant que distance, $d(\rho_\mathrm{c}, \rho)$ doit être réel positif pour toute matrice densité ρ ;
- Nous choisirons également par souci de simplicité une distance $d(\rho_\mathrm{c}, \rho)$ qui soit une fonction linéaire de ρ ;
- Plus en relation avec notre expérience, nous chercherons une distance à la cible ρ_c qui ne soit pas modifiée par une mesure non-lue sur le champ ;
- Enfin, le critère déjà évoqué réclamant qu'un état de Fock $|n\rangle$ soit d'autant plus éloigné de ρ_c que $|n - \mathrm{n_c}|$ est grand devra être vérifié.

Une dernière contrainte sera imposée au paragraphe II.1.3.d, mais celle-ci a directement trait à la loi de contrôle que nous aurons alors défini et nous ne l'expliciterons donc que plus tard.

Nous verrons alors que la distance retenue prend la forme

$$d(\rho_\mathrm{c}, \rho) = \sum_n \Gamma_n^{(\mathrm{n_c})} \rho_{nn}, \tag{II.28}$$

où les coefficients Γ_n sont donnés figure II.6 pour les quatre états cibles que nous considérerons, *i.e.* $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, et $|4\rangle$.

Reprenons maintenant un à un les critères donnés ci-dessus et justifions la forme de la distance donnée équation (II.28).

Positivité de la distance Dans la discussion qui suit, nous nous restreignons aux cas où la distance $d(\rho_c, \rho)$ est une fonction linéaire de ρ. Elle peut alors s'écrire sous la forme

$$d(\rho_c, \rho) = \mathrm{Tr}(\Gamma\rho), \tag{II.29}$$

où Γ est une matrice quelconque ne dépendant que de ρ_c.

Comme déjà expliqué, nous imposons dans un premier temps à $d(\rho_c, \rho)$ d'être réel et positif pour toute matrice densité ρ. Ceci implique

$$\forall\rho \quad d(\rho_c, \rho) = d(\rho_c, \rho)^* \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(\Gamma\rho) = \mathrm{Tr}(\Gamma^\dagger\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Tr}((\Gamma - \Gamma^\dagger)\rho) = 0. \tag{II.30}$$

Notons $A = \Gamma - \Gamma^\dagger$ la partie antisymétrique de Γ. En remplaçant dans l'équation (II.30) ρ par $|n\rangle\langle n|$, on trouve que tous les éléments diagonaux de A sont nuls :

$$\forall n \quad \langle n|A|n\rangle = 0. \tag{II.31}$$

Étant donné maintenant deux entiers n et m quelconques et différents, construisons les deux états $|\psi\rangle = (|n\rangle + |m\rangle)/\sqrt{2}$ et $|\varphi\rangle = (|n\rangle + i|m\rangle)/\sqrt{2}$. D'après la condition (II.30), on trouve :

$$\mathrm{Tr}(A|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{1}{2}(\langle n|A|m\rangle - \langle n|A|m\rangle^*) = i\,\mathrm{Im}(\langle n|A|m\rangle) = 0, \tag{II.32}$$

et de même :

$$\mathrm{Tr}(A|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \frac{i}{2}(\langle n|A|m\rangle + \langle n|A|m\rangle^*) = i\,\mathrm{Re}(\langle n|A|m\rangle) = 0. \tag{II.33}$$

Des équations (II.31) à (II.33) on déduit que la matrice A est nulle, ou encore

$$\Gamma = \Gamma^\dagger. \tag{II.34}$$

Γ est donc une matrice hermitienne. Soit $\mathcal{B} = \{|e_i\rangle\}$ une base de diagonalisation de Γ. Exploitons maintenant le fait que $d(\rho_c, \rho)$ est positif pour toute matrice ρ. Alors,

$$\forall|e_i\rangle \in \mathcal{B} \quad \mathrm{Tr}(\Gamma|e_i\rangle\langle e_i|) = \langle e_i|\Gamma|e_i\rangle \in \mathbb{R}^+. \tag{II.35}$$

Dans la base $\mathcal{B}$, Γ est donc une matrice diagonale à coefficients positifs : c'est une matrice hermitienne positive.

Ainsi, pour que la distance d que nous cherchons à définir soit à la fois linéaire et réelle positive sur l'ensemble des matrices densité, alors il doit exister une matrice densité ρ_0 et un scalaire positif γ tels que

$$d(\rho_c, \rho) = \gamma\mathrm{Tr}(\rho_0\rho). \tag{II.36}$$

La réciproque est évidente.

Distance et mesure non lue Nous imposons maintenant à la distance $d(\rho_c, \rho)$ de ne pas changer après une mesure non lue sur ρ. Le choix qui est fait ici consiste en fait à ne définir une distance que vis à vis des états propres de l'observable mesurée, *i.e.* l'opérateur nombre de photons $\hat{N}$: les cohérences ne sont pas prises en compte dans le calcul. Par exemple, l'état cohérent $|\alpha\rangle$ est considéré comme aussi éloigné de la cible que le mélange statistique

$$\rho_\alpha = \sum_n |\langle n|\alpha\rangle|^2 \, |n\rangle\langle n|.$$

En reprenant les notations du paragraphe II.1.1, on a alors

$$\mathbb{E}\left(d\left(\rho_c, \rho_{k+1}\right)|\rho_{k+\frac{2}{3}}\right) = d\left(\rho_c, \rho_{k+\frac{2}{3}}\right), \tag{II.37}$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance mathématique. Il vient ensuite

$$\begin{aligned} &\forall\rho \quad d\left(\rho_c, \mathbf{M}_{\mathrm{nl}}\rho\right) - d\left(\rho_c, \rho\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Tr}\left((\Gamma - M_g^\dagger \Gamma M_g - M_e^\dagger \Gamma M_e)\rho\right) = 0. \end{aligned} \tag{II.38}$$

En notant $B = (\Gamma - M_g^\dagger \Gamma M_g - M_e^\dagger \Gamma M_e)$, et d'après la discussion précédente sur Γ, on en déduit que B est hermitienne positive. Or,

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(\Gamma) - \mathrm{Tr}\left(\Gamma(\underbrace{M_g M_g^\dagger + M_e M_e^\dagger}_{\mathbb{1}})\right) = 0. \tag{II.39}$$

B est donc une matrice hermitienne positive de trace nulle, *i.e.* $B = 0$ et

$$M_g^\dagger \Gamma M_g + M_e^\dagger \Gamma M_e = \Gamma. \tag{II.40}$$

La matrice densité ρ_0 définie précédemment comme $\Gamma = \gamma\rho_0$ est donc la matrice densité d'un état laissé invariant par une mesure non lue du nombre de photons. Ceci impose à ρ_0 d'être un mélange statistique d'états de Fock, *i.e.* des états propres de la mesure, et donc à Γ d'être diagonal dans la base des états de Fock.

Pour résumer, nous avons montré que pour définir une distance $d(\rho_c, \rho)$ à l'état cible $|\mathrm{n_c}\rangle$, linéaire en ρ, réelle positive, et telle qu'une mesure non lue sur ρ ne modifie pas la valeur de la distance, alors il faut définir une matrice $\Gamma^{(\mathrm{n_c})}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \forall n \in \mathbb{N} & \langle n|\Gamma^{(\mathrm{n_c})}|n\rangle = \Gamma_n^{(\mathrm{n_c})} & \geq & 0 \\ \forall n \neq n' & \langle n|\Gamma^{(\mathrm{n_c})}|n'\rangle & = & 0 \\ & d(\rho_c, \rho) & = & \mathrm{Tr}(\Gamma^{(\mathrm{n_c})}\rho). \end{array}\right. \tag{II.41}$$

Une distance bornée et croissante avec $|n - \mathrm{n_c}|$ Maintenant que nous avons une forme générale pour la distance que l'on cherche à définir, voyons comment choisir les éléments diagonaux, *i.e.* les seuls non nuls, de $\Gamma^{(\mathrm{n_c})}$.

En s'inspirant des idées du paragraphe précédent, nous voulons définir conjointement à d une fidélité sous la forme

$$\mathcal{F}_\mathrm{d}\left(|\mathrm{n_c}\rangle, \rho\right) = 1 - d(\rho_\mathrm{c}, \rho) \equiv \mathrm{Tr}(\Lambda^{(\mathrm{n_c})}\rho), \tag{II.42}$$

positive pour tout ρ, et égale à 1 pour $\rho = \rho_\mathrm{c}$. Il nous faut alors imposer à $\Gamma^{(\mathrm{n_c})} = 1 - \Lambda^{(\mathrm{n_c})}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \neq \mathrm{n_c} \quad 0 & < & \Gamma_n^{(\mathrm{n_c})} \leq 1 \\ \Gamma_{\mathrm{n_c}}^{(\mathrm{n_c})} & = & 0. \end{array} \right. \tag{II.43}$$

Comme expliqué précédemment, nous voulons enfin que la distance ainsi définie traduise le fait qu'un état $|n\rangle$ est considéré d'autant plus loin de $|\mathrm{n_c}\rangle$ que $|n - \mathrm{n_c}|$ est grand. Nous cherchons donc les coefficients $\Gamma_n^{(\mathrm{n_c})}$ tels que $\Gamma_n^{(\mathrm{n_c})}$ soit une fonction de n dans $[0, 1]$ qui croît avec $|n - \mathrm{n_c}|$. C'est effectivement ce qui ressort de la figure II.6. Le paragraphe II.1.3.d nous permettra de contraindre l'étagement entre les $\Gamma_n^{(\mathrm{n_c})}$.

Retour à la fidélité Remarquons pour conclure que si l'on définit $\Gamma^{(\mathrm{n_c})}$ comme

$$\Gamma^{(\mathrm{n_c})} = \mathbb{1} - |\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|, \tag{II.44}$$

les conditions (II.41) et (II.43) sont vérifiées et l'on retrouve la fidélité telle que définie au paragraphe précédent :

$$d(\rho_\mathrm{c}, \rho) = 1 - \mathrm{Tr}(|\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|\rho) = 1 - \mathcal{F}(\rho_\mathrm{c}, \rho). \tag{II.45}$$

La fidélité $\mathcal{F}$ est donc un cas particulier de la définition générale que nous avons établie ici.

II.1.3.c Loi de contrôle

Maintenant que nous disposons d'une définition pour le signal d'erreur de notre boucle de rétroaction (équation (II.41)), il nous reste à calculer le déplacement optimal α_k étant donné la matrice densité du système ρ_k. L'idée en a déjà été donné équation (II.20) :

$$\alpha_k = \underset{\alpha \in \mathbb{C}}{\arg\min}\, d(\rho_\mathrm{c}, \mathcal{D}(\alpha)\rho_k\mathcal{D}(-\alpha)). \tag{II.46}$$

Un tel calcul est cependant bien coûteux, et il n'est bien sûr pas envisageable de chercher numériquement à chaque itération de la boucle le paramètre α qui minimise une telle distance : le temps séparant le passage entre deux échantillons étant $T_a = 82\,\mu\mathrm{s}$, le régulateur doit avoir fini son calcul en un temps plus court que T_a. Deux simplifications ont donc été faites :

- D'une part, l'état initial du champ $|\alpha_0\rangle$ pouvant être choisi réel sans perte de généralité, la matrice densité de la cible étant réelle également, tout comme les opérateurs de Kraus décrivant la mesure, nous pouvons nous limiter à des injections de contrôle réelles : les corrections cohérentes $|\alpha_k\rangle$ et le champ initialement injecté sont *en phase* ou *en opposition de phase* ;
- D'autre part, pour trouver une expression analytique pour la correction α_k, permettant ainsi un calcul *rapide* de la correction, nous nous contentons d'un développement à l'ordre 2 en α de la fonction $d(\rho_c, \mathcal{D}(\alpha)\rho_k\mathcal{D}(-\alpha))$. Comme nous le verrons plus tard, il faudra alors prendre garde à ce que les injections faites ne soient pas trop «grandes» pour que le calcul reste valable.

Dans le cadre de cette approximation, la matrice déplacée $\mathcal{D}(\alpha)\rho\mathcal{D}(-\alpha)$ peut alors s'écrire

$$\mathbf{D}(\alpha)\rho \equiv \rho(\alpha) = \rho - \alpha^2\left[\rho, a^\dagger - a\right] + \frac{\alpha^2}{2}\left[\left[\rho, a^\dagger - a\right], a^\dagger - a\right] + o(\alpha^2). \tag{II.47}$$

On en déduit simplement

$$d(\rho_c, \rho(\alpha)) = d(\rho_c, \rho) - \alpha a_1(\rho) - \frac{\alpha^2}{2}a_2(\rho) + o(\alpha^2) \tag{II.48}$$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1(\rho) & = & -\mathrm{Tr}\left(\left[\Gamma^{(n_c)}, a^\dagger - a\right]\rho\right) \\ a_2(\rho) & = & -\mathrm{Tr}\left(\left[\left[\Gamma^{(n_c)}, a^\dagger - a\right], a^\dagger - a\right]\rho\right) \end{array} \right. . \tag{II.49}$$

Choisissons alors α_k sous la forme

$$\alpha_k = c_1 a_1(\rho_k), \tag{II.50}$$

et calculons pour ce choix particulier la *fonction de gain* $\mathcal{G}$, définie comme

$$\mathcal{G}(\alpha) = d(\rho_c, \rho_k) - d(\rho_c, \mathbf{D}(\alpha)\rho_k), \tag{II.51}$$

qui quantifie de combien le champ se rapproche de la cible après le déplacement α. Avec la condition (II.50) et le développement (II.48), il vient

$$\mathcal{G}(c_1) = c_1 a_1(\rho_k)^2 + \frac{1}{2}c_1^2 a_2(\rho_k). \tag{II.52}$$

Remarquons alors que $\mathcal{G}(0) = 0$ et $\mathcal{G}'(0) = a_1(\rho_k)^2 \geq 0$: $\mathcal{G}$ est croissante en $c_1 = 0$ et il est donc toujours possible de trouver un coefficient $c_1 \geq 0$ tel que $\mathcal{G}(c_1) \geq 0$, *i.e.* que le champ se rapproche de l'état cible après le déplacement défini équation (II.50).

Précisons quel est ce choix en distinguant deux cas, selon le signe de $\mathcal{G}''(0) = a_2(\rho_k)$:

- Si $a_2(\rho_k) < 0$, alors $\mathcal{G}(c_1)$ a un maximum en $c_1 = -1/a_2(\rho_k)$ et

$$\alpha_k = -\frac{a_1(\rho_k)}{a_2(\rho_k)} \tag{II.53}$$

  est la correction à appliquer ;

– Si $a_2(\rho_k) \geq 0$, alors $\mathcal{G}(c_1)$ n'a pas de maximum et *a priori*, prendre c_1, et donc α_k, aussi grands que possible semble être le bon choix. Il ne faut cependant pas oublier que les calculs ici faits l'ont été *via* un développement à l'ordre 2 en α, et on ne peut donc pas choisir un déplacement trop grand sous peine d'explorer des domaines où nos calculs deviennent faux. Nous introduisons ici une borne supérieure sur les injections que nous nous autorisons :

$$\alpha_{\max} = 0,1. \tag{II.54}$$

Si $a_2(\rho_k) \geq 0$, la correction choisie est alors

$$\alpha_k = \mathrm{sign}[a_1(\rho_k)]\alpha_{\max}. \tag{II.55}$$

Résumons donc la *loi de contrôle* qui, étant donné la matrice densité $\rho_k = \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{(r)}\tilde{\rho}_k$, donne la correction α_k à appliquer :

$$\mathcal{R}_{\mathrm{d}} : \rho_k \longmapsto \alpha_k = \mathcal{R}_{\mathrm{d}}(\rho_k) = \begin{cases} \min\left(-\dfrac{|a_1(\rho_k)|}{a_2(\rho_k)}, \alpha_{\max}\right)\mathrm{sign}[a_1(\rho_k)] & \text{si} \quad a_2(\rho_k) < 0 \quad \text{(a)} \\ \mathrm{sign}[a_1(\rho_k)]\,\alpha_{\max} & \text{si} \quad a_2(\rho_k) \geq 0 \quad \text{(b)} \end{cases} \tag{II.56}$$

où l'on choisit par convention : $\mathrm{sign}(0) = +1$. Dans toute la suite, nous ferons référence à cette loi de contrôle *via* le nom contrôle «Distance».

II.1.3.d Sélection des attracteurs

Analysons un peu la loi de contrôle proposée équation (II.56). Nous pouvons notamment remarquer qu'il nous a fallu une «double» loi de contrôle pour pouvoir imposer qu'à chaque déplacement α_k la distance à l'état cible diminue. Ceci est intimement lié au fait que la loi de contrôle (II.56.a) seule a d'autres points fixes, ou *attracteurs*, que l'état cible $|\mathrm{n_c}\rangle$.

Tous les états pour lesquels $a_1(\rho)$ est nul sont en effet des points fixes du contrôle simplifié, *i.e.* du contrôle «Distance» dont la condition (II.56.b) serait remplacée par

$$\alpha_k = 0 \quad \text{si } a_2(\rho_k) \geq 0. \tag{II.57}$$

Or, il est aisé de montrer que pour toute matrice densité ρ diagonale dans la base des états de Fock, $a_1(\rho) = 0$. Ainsi, tout mélange statistique d'états de Fock, et donc en particulier tous les états de Fock, sont des points fixes de ce contrôle simplifié. Si le champ se trouve préparé dans un de ces états, plus aucune correction ne sera appliquée.

La condition (II.56.b) permet alors une sélection supplémentaire au sein de ces attracteurs : les états ρ_k pour lesquels $a_2(\rho_k) \geq 0$, *i.e.* les états pour lesquels la distance après déplacement

$$\tilde{d}(\rho_{\mathrm{c}}, \rho_k; \cdot\,) : \alpha \longmapsto \tilde{d}(\rho_{\mathrm{c}}, \rho_k; \alpha) = d(\rho_{\mathrm{c}}, \mathcal{D}(\alpha)\rho_k\mathcal{D}(-\alpha)) \tag{II.58}$$

a un maximum local[5] en $\alpha = 0$, sont «supprimés» par l'application d'une correction forte : $|\alpha| = \alpha_{\max}$.

Au contraire, tous les attracteurs ρ_k du contrôle simplifié pour lesquels $\tilde{d}(\rho_c, \rho_k; \alpha)$ a un minimum local en $\alpha = 0$ restent des attracteurs du contrôle «Distance» complet.

L'objectif est donc de choisir $\Gamma^{(n_c)}$ tel que :
- $|n_c\rangle$ soit un attracteur du contrôle «Distance»,
- $|n \neq n_c\rangle\langle n|$ soit au contraire «supprimé».

Ces considérations nous permettent de restreindre encore un peu plus le choix que nous avons sur la matrice $\Gamma^{(n_c)}$. Sachant que $\tilde{d}'(\rho_c, |n\rangle\langle n|; \alpha = 0) = 0$ pour tout n, où $\tilde{d}'$ désigne la dérivée par rapport à α de $\tilde{d}$, elle doit en effet être choisie telle que

$$\forall n \neq n_c \quad \tilde{d}''(\rho_c, |n\rangle\langle n|; 0) < 0 \tag{II.59}$$

$$\tilde{d}''(\rho_c, |n_c\rangle\langle n_c|; 0) > 0. \tag{II.60}$$

De tels coefficients peuvent être calculés et l'on trouve

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad \tilde{d}''(\rho_c, |n\rangle\langle n|; 0) &= -a_2(|n\rangle\langle n|) \\ &= 2\left[(2n+1)\Gamma_n^{(n_c)} - n\Gamma_{n-1}^{(n_c)} - (n+1)\Gamma_{n+1}^{(n_c)}\right] && \text{(II.61)} \\ &= -2\left[(n+1)\left(\Gamma_{n+1}^{(n_c)} - \Gamma_n^{(n_c)}\right) - n\left(\Gamma_n^{(n_c)} - \Gamma_{n-1}^{(n_c)}\right)\right]. && \text{(II.62)} \end{aligned}$$

La donnée d'un vecteur $\vec{\sigma}$, dont les éléments σ_n sont choisis tels que

$$\forall n \neq n_c \quad \sigma_n > 0 \tag{II.63}$$

$$\sigma_{n_c} = -\sum_{n \neq n_c} \sigma_n < 0 \tag{II.64}$$

suffit alors à fixer les valeurs de la matrice $\Gamma^{(n_c)}$ en fixant les dérivées secondes de $\tilde{d}$:

$$\forall n \quad \tilde{d}''(\rho_c, |n\rangle\langle n|; 0) = -2\sigma_n. \tag{II.65}$$

En notant $\vec{\Gamma}^{(n_c)}$ le vecteur formé par la diagonale de $\Gamma^{(n_c)}$, on a

$$\mathcal{L}\vec{\Gamma}^{(n_c)} = \vec{\sigma} \qquad :\forall n \quad (n+1)\left(\Gamma_{n+1}^{(n_c)} - \Gamma_n^{(n_c)}\right) - n\left(\Gamma_n^{(n_c)} - \Gamma_{n-1}^{(n_c)}\right) = \sigma_n \tag{II.66}$$

$$:\forall n \quad n\left(\Lambda_n^{(n_c)} - \Lambda_{n-1}^{(n_c)}\right) - (n+1)\left(\Lambda_{n+1}^{(n_c)} - \Lambda_n^{(n_c)}\right) = \sigma_n, \tag{II.67}$$

où $\Lambda^{(n_c)} = 1 - \Gamma^{(n_c)}$ a été introduit équation (II.42).

Les calculs seront faits en pratique en dimension finie. Si l'on note N le nombre maximum de photons que l'on s'autorise, la condition (II.64) revient à imposer

$$\sum_{n=0}^{N} \sigma_n = (N+1)\Lambda_N^{(n_c)} = 0. \tag{II.68}$$

5. Sa dérivée première en $\alpha = 0$ est $-a_1(\rho_k) = 0$.

En dehors de l'espace de Hilbert de taille $\mathcal{N} = N + 1$, la fidélité vis à vis de l'état cible est nulle, *i.e.* la distance à l'état cible est maximale :

$$\forall n \geq N \quad \Gamma_n^{(\mathrm{n_c})} = 1. \tag{II.69}$$

Remarquons d'ailleurs l'analogie avec un problème classique simple : pour une chaîne linéaire de masselottes reliées par des ressorts de raideur $k_{n,n+1} = n + 1$, dont les déplacements vis à vis de leurs positions d'équilibre sont notés x_n, et dont les accélérations sont notées a_n, on a l'équation :

$$(n+1)(x_{n+1} - x_n) - n(x_n - x_{n-1}) = a_n, \tag{II.70}$$

exact analogue de l'équation (II.66). La condition (II.64) s'interprète alors comme l'absence de forces extérieures sur le système de masselottes, et le problème donné revient à trouver un jeu de déplacements $\{x_n\}$ tel que la force de rappel subie par la n^{e} masse soit la donnée a_n. Une telle inversion ne pose pas de problèmes numériquement.

Nous avons donc ramené le problème du choix des coefficients $\Gamma_n^{(\mathrm{n_c})}$ à celui du choix des σ_n. Leurs valeurs furent finalement optimisées *via* des simulations numériques telles que présentées au paragraphe II.2, répétées pour plusieurs vecteurs $\vec{\sigma}$.

II.1.3.e Loi de contrôle «Fidélité»

Intéressons nous pour finir à ce que devient la loi de contrôle «Distance» dans le cas où l'on choisit la fidélité $\mathcal{F}$ [71]. Comme expliqué précédemment, cela revient à écrire

$$1 - \Gamma^{(\mathrm{n_c})} = \Lambda^{(\mathrm{n_c})} = |\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|. \tag{II.71}$$

Considérons maintenant une matrice densité ρ *proche* de l'état cible :

$$\rho = \rho_{\mathrm{c}} - \eta\xi_0 \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \eta = 1 - \mathcal{F}(\rho_{\mathrm{c}}, \rho) & \ll & 1 \\ \mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{c}}\xi_0) & = & 1 \end{array} \right. . \tag{II.72}$$

Calculons alors les coefficients $a_1^{\mathcal{F}}(\rho)$ et $a_2^{\mathcal{F}}(\rho)$ du développement de $\tilde{d}(\rho_{\mathrm{c}}, \rho; \alpha)$ avec ce choix de distance :

$$a_1^{\mathcal{F}}(\rho) = \underbrace{a_1^{\mathcal{F}}(\rho_{\mathrm{c}})}_{0} - \eta a_1^{\mathcal{F}}(\xi_0) = -\eta a_1^{\mathcal{F}}(\xi_0), \tag{II.73}$$

$$a_2^{\mathcal{F}}(\rho) = a_2^{\mathcal{F}}(\rho_{\mathrm{c}}) - \eta a_2^{\mathcal{F}}(\xi_0) = -\underbrace{\mathrm{Tr}\left(\left[\rho_{\mathrm{c}}, a^\dagger - a\right]^2\right)}_{4\mathrm{n_c}+2} - \eta a_2^{\mathcal{F}}(\xi_0). \tag{II.74}$$

En gardant le choix précédent de correction $\alpha = c_1 a_1^{\mathcal{F}}(\rho)$, la fonction de gain $\mathcal{G}(\alpha)$ s'écrit maintenant

$$\mathcal{G}(c_1) = \eta^2 a_1^{\mathcal{F}}(\xi_0)^2 \left(c_1 + \frac{1}{2}c_1^2\left(a_2^{\mathcal{F}}(\rho_{\mathrm{c}}) - \eta a_2^{\mathcal{F}}(\xi_0)\right)\right) \tag{II.75}$$

$$= \eta^2 a_1^{\mathcal{F}}(\xi_0)^2 \left(c_1 - \frac{1}{2}(4\mathrm{n_c} + 2)c_1^2\right) + O(\eta^3), \tag{II.76}$$

qui a un maximum pour

$$c_1 = \frac{1}{4\mathrm{n_c} + 2}. \tag{II.77}$$

Avec cette approximation supplémentaire, nous pouvons donc obtenir un contrôle avec un gain c_1 constant, et non dépendant de ρ_k comme c'était le cas avec le contrôle «Distance». Cependant, comme expliqué précédemment, pour éviter que les autres états de Fock que $|\mathrm{n_c}\rangle$ soient aussi des points fixes du contrôle, il faut ajouter une condition supplémentaire. Ici, elle n'est pas sortie naturellement du calcul parce que nous avons commencé par supposer que l'état du champ était déjà «proche» de la cible. L'idée est de fixer un seuil $0 < \epsilon \ll 1$ sur la distance à la cible au-delà duquel une correction importante devra être faite.

Finalement, le contrôle «Fidélité» se résume ainsi :

$$\mathcal{R}_\mathrm{f} : \rho_k \longmapsto \alpha_k = \mathcal{R}_\mathrm{f}(\rho_k) = \begin{cases} -\dfrac{a_1^{\mathcal{F}}(\rho_k)}{4\mathrm{n_c} + 2} & \text{si} \quad \mathcal{F}(\rho_\mathrm{c}, \rho_k) \geq 1 - \epsilon \quad \text{(a)} \\ \mathrm{sign}(\mathrm{n_c} - \langle n \rangle_k)\alpha_\mathrm{max} & \text{si} \quad \mathcal{F}(\rho_\mathrm{c}, \rho_k) < 1 - \epsilon \quad \text{(b)} \end{cases} . \tag{II.78}$$

Remarque : Si l'on compare les deux lois de contrôle, «Distance» (II.56) et «Fidélité» (II.78), nous pouvons noter une différence de principe importante. Avec le contrôle «Distance», les corrections sont ainsi faites que le champ s'éloigne autant que possible des états pour lesquels la distance $\tilde{d}(\rho_\mathrm{c}, \rho; \alpha)$ a un maximum local en $\alpha = 0$, et nous choisissons donc les coefficients de la matrice $\Gamma^{(\mathrm{n_c})}$ afin que les états de Fock $|n \neq \mathrm{n_c}\rangle$ vérifient ce critère «notablement» : $\tilde{d}''(\rho_\mathrm{c}, |n\rangle\langle n|; 0) = \sigma_n > 0$.

Avec le contrôle «Fidélité» en revanche, on peut montrer que bien que cette condition soit toujours vérifiée, la fonction $\tilde{d}$ est nulle jusqu'à l'ordre 3 en α dès que $|n - \mathrm{n_c}| > 1$. Cela implique que distinguer les états *via* la variation de $\tilde{d}$ en α est alors très inefficace, d'autant plus si on se contente d'en calculer la dérivée seconde. C'est donc directement la fidélité $\mathcal{F}(\rho_\mathrm{c}, \rho_k)$, et non plus ses dérivées secondes, qui est utilisée pour distinguer les attracteurs de la loi de contrôle : l'injection α_max est faite quand la fidélité est trop basse, et non quand la dérivée seconde a le mauvais signe.

Un problème persiste malgré tout. Puisque dès que $|n - \mathrm{n_c}| > 1$, la fonction distance $\tilde{d}(\rho_\mathrm{c}, |n\rangle\langle n|; \alpha)$ varie en α^4, il faudra de très nombreuses injections pour quitter le domaine $\{\rho / \mathcal{F}(\rho_\mathrm{c}, \rho) < 1 - \epsilon\}$ si l'état du champ y tombe (*via* des sauts quantiques par exemple). Ce qui est contraire à l'orientation globale choisie qui consiste à se limiter à de petites injections : $\alpha_\mathrm{max} = 0,1$. Nous verrons plus tard que cette tendance à injecter beaucoup de photons pour ce contrôle se retrouve dans les simulations numériques.

II.1.4 Bilan

Avant de conclure cette première partie, résumons ici les différentes étapes du calcul du filtre quantique dans une itération de la boucle (voir FIG. II.7). Le début de la k^e itération

est marqué par la détection de l'atome k. À cet instant, la matrice densité estimée du champ (ρ_k), à partir de laquelle la prochaine correction à appliquer (α_k) est choisie, est calculée grâce au filtre quantique ($\mathcal{H}$,$\mathcal{H}_r$). Selon que l'on utilise le contrôle «Distance» (II.56) ou «Fidélité» (II.78), la correction $\alpha_k = \mathcal{R}_\mathrm{d}(\rho_k)$ ou $\alpha_k = \mathcal{R}_\mathrm{f}(\rho_k)$ respectivement est choisie. Pour pouvoir décider de la prochaine correction, le régulateur doit disposer de l'estimation ρ_{k+1} de l'état du champ. Nous avons expliqué au paragraphe II.1.2 que pour ce faire, le filtre calcule d'abord la matrice $\tilde{\rho}_{k+1}$ par récurrence à partir de la matrice densité $\tilde{\rho}_k$. ρ_{k+1} est ensuite simplement obtenue par application de $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{k+1}^{(r)}$. Rappelons ici comment est calculée $\tilde{\rho}_{k+1}$.

1. Après l'interaction avec le k^e atome, la correction α_{k-N_r} a été injectée dans la cavité :

$$\tilde{\rho}_{k+\frac{1}{3}} = \mathbf{D}_{k-N_r}\tilde{\rho}_k.$$

D'après la façon dont a été calculé α_{k-Nr}, on a

$$\mathbb{E}(d(\rho_\mathrm{c}, \tilde{\rho}_{k+\frac{1}{3}})|\tilde{\rho}_k) \leq d(\rho_\mathrm{c}, \tilde{\rho}_k); \tag{II.79}$$

2. Il faut alors prendre en compte la relaxation sur l'intervalle T_a :

$$\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}} = \mathbf{T}\tilde{\rho}_{k+\frac{1}{3}};$$

3. L'atome $(k+1)$ est ensuite détecté, permettant au filtre quantique $\mathcal{H}$ d'actualiser son estimation du champ en fonction du résultat de cette mesure :

$$\tilde{\rho}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1}\,\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}.$$

D'après l'équation (II.37), après la mesure, en moyenne, l'état ne s'éloigne ni ne se rapproche de la cible :

$$\mathbb{E}\left(d\left(\rho_\mathrm{c}, \tilde{\rho}_{k+1}\right)|\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}\right) = d\left(\rho_\mathrm{c}, \tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}\right). \tag{II.80}$$

Remarquons alors que s'il n'y avait pas de relaxation, *i.e.* si $\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}} = \tilde{\rho}_{k+\frac{1}{3}}$, nous aurions la relation

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(d(\rho_\mathrm{c}, \tilde{\rho}_{k+1})|\tilde{\rho}_k\right) \leq d(\rho_\mathrm{c}, \tilde{\rho}_k), \\ \text{et donc}\quad &0 \leq \mathbb{E}\left(d(\rho_\mathrm{c}, \tilde{\rho}_{k+1})\right) \leq \mathbb{E}\left(d(\rho_\mathrm{c}, \tilde{\rho}_k)\right) \leq 1, \end{aligned} \tag{II.81}$$

prouvant ainsi la convergence de notre loi de contrôle vers l'état cible $|\mathrm{n_c}\rangle$, puisque nous nous sommes par ailleurs assurés, *via* les conditions «b» des contrôles «Distance» ou «Fidélité», que les points fixes de la boucle sont «proches» de $|\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|$. Les démonstrations mathématiques de la convergence de chacune des deux lois de contrôle sont données dans [103, 104, 105].

Malheureusement, si la relaxation peut rapprocher de la cible l'état du champ, par exemple si $\rho = |\mathrm{n_c}+1\rangle\langle\mathrm{n_c}+1|$, elle peut aussi l'en éloigner si $\rho = |\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|$. Nous ne

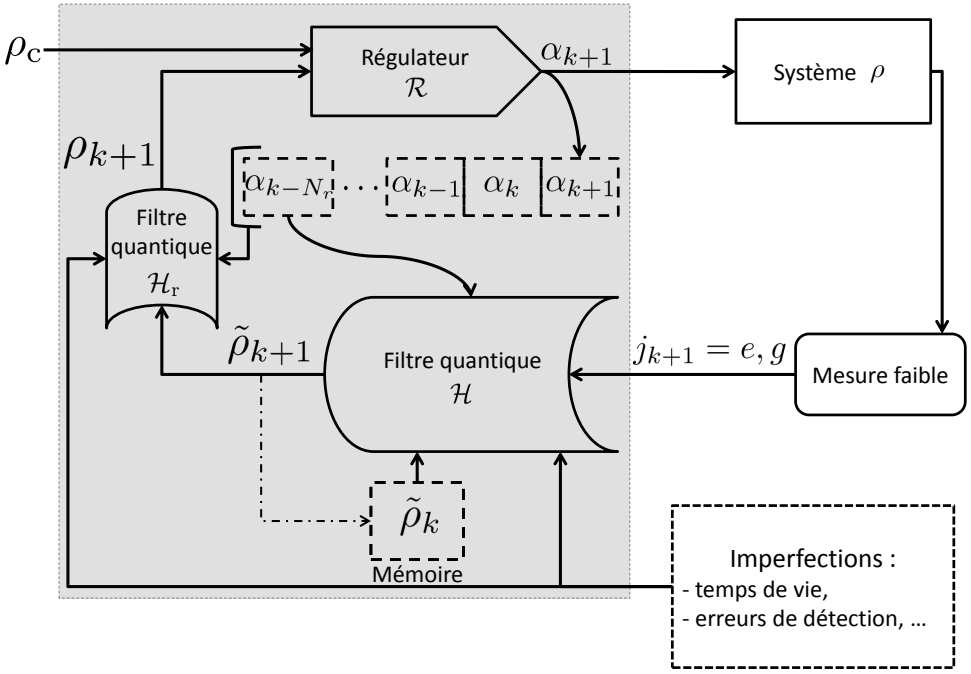


FIGURE II.7 – Boucle de rétroaction quantique retardée. Comparé à la boucle FIG. II.2, un filtre quantique supplémentaire $\mathcal{H}_r$ est chargé de prendre en compte les N_r atomes et injections de retard. Le filtre ne peut par ailleurs plus calculer ρ_{k+1} par une relation de récurrence à partir de ρ_k mais à partir de $\tilde{\rho}_k = \boldsymbol{\mathcal{H}}_k \rho_0$ seulement. C'est donc cette dernière qu'il garde en mémoire à chaque itération.

pouvons donc pas écrire de lois de la forme (II.79) pour le passage de $\tilde{\rho}_{k+\frac{1}{3}}$ à $\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}$, et la loi (II.81) tombe. Nous ne sommes plus assurés de la convergence vers $|\mathrm{n_c}\rangle$.

Ici encore, il apparaît que notre boucle de rétroaction ne pourra être efficace que si elle corrige l'état du champ en des temps plus courts que celui nécessaire à la relaxation pour détruire l'état cible, *i.e.* son temps de vie $T_{\mathrm{n_c}} = \mathrm{T_{cav}}/\mathrm{n_c}$;

4. Avant de pouvoir calculer la correction α_{k+1} à appliquer au cours de l'itération $(k+1)$, le filtre quantique $\mathcal{H}_r$ doit finalement estimer l'état ρ_{k+1} du champ tel qu'il est au moment du calcul :

$$\rho_{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{k+1}^{(r)} \tilde{\rho}_{k+1}.$$

II.2 Simulations numériques

Maintenant que nous disposons du principe d'une rétroaction quantique sur notre système quantique, et avant d'en voir la transcription expérimentale, il nous faut en tester la

faisabilité au vu des imperfections expérimentales (relaxation et retard de la boucle) *via* des simulations numériques. Nous aurons alors l'occasion de choisir les valeurs numériques de la matrice $\Gamma^{(\mathrm{n_c})}$ utilisée dans le contrôle «Distance».

Dans un premier paragraphe, nous détaillerons la façon dont ont été faites ces simulations, avant d'en donner les résultats dans les paragraphes suivants. Le choix de la loi de contrôle sera alors fait.

II.2.1 Méthode Monte-Carlo

Les simulations que nous avons réalisées sont basées sur l'utilisation de méthodes dites Monte-Carlo quantiques [106, 107]. Une succession de tirages aléatoires est réalisée afin de simuler l'incertitude classique ou quantique telle qu'elle se manifeste dans nos expériences :

- lors du processus de relaxation, succession de sauts quantiques aléatoires, *i.e.* créations ou destructions d'un photon dans la cavité, dont la statistique est contrôlée par le temps de vie $\mathrm{T_{cav}}$ des photons dans le champ piégé et la température T,
- lors d'une mesure sur un système quantique, en l'occurrence une mesure de l'état d'une sonde atomique, dont la statistique des résultats doit être connue,
- lors de la préparation d'un échantillon atomique dont l'occupation est régie par une statistique poissonienne.

Pour pouvoir simuler une *trajectoire quantique* telle que décrite ci-dessous, il nous faudra donc calculer simultanément deux matrices densité différentes :

- L'une dite *réelle*, qui correspond à la matrice densité du champ connue par un observateur omniscient, et que l'on notera $\rho^{(R)}$. Ici, cela signifie que l'observateur est capable de détecter l'émission d'un photon vers l'environnement (saut quantique $|n\rangle \mapsto |n-1\rangle$) ou la création d'un photon dans la cavité (saut quantique $|n\rangle \mapsto |n+1\rangle$), et d'actualiser sa connaissance du système en conséquence. Il n'y a alors pas de processus de *décohérence* associé à la relaxation, et si le champ est initialement préparé dans un état pur, il reste dans un état pur tout le long de la trajectoire quantique : l'observateur a une connaissance parfaite du système. Connaissant $\rho^{(R)}$, nous pourrons donc prédire la statistique des résultats d'une mesure d'un atome de Rydberg ayant sondé le champ dans la cavité, et ainsi, par une succession de *lancés de dés* respectant cette statistique, simuler une trajectoire quantique individuelle ;
- L'autre dite *estimée*, qui correspond à la matrice densité du champ connue par un observateur réel, *i.e.* un observateur tel que nous le serons lors de la réalisation expérimentale de la rétroaction. Cet observateur n'a pour informations que les résultats des détections atomiques, et ne peut prendre en compte la relaxation du champ que par des procédés de type équation pilote. Cette fois, la relaxation induit bel et bien de la décohérence : l'état estimé initialement pur devient finalement un mélange statistique. Cette matrice densité estimée n'est rien d'autre que la matrice densité ρ_k dont la méthode de calcul a été donnée au paragraphe précédent.

Détaillons maintenant les trajectoires quantiques simulées et précisons à chaque étape comment sont calculées $\rho_k^{(R)}$ et ρ_k. Comme nous l'avons précisé précédemment, ρ_k est en

fait calculée à partie de $\tilde{\rho}_k$ *via* l'expression :

$$\rho_k = \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{(r)} \tilde{\rho}_k.$$

Contrairement à ρ_k, $\tilde{\rho}_k$ peut être calculée par récurrence.

1. Au début de la trajectoire quantique, le champ est préparé dans l'état cohérent contenant $\mathrm{n_c}$ photons en moyenne :

$$\rho_0 = \rho_0^{(R)} = |\alpha = \sqrt{\mathrm{n_c}}\rangle\langle\alpha = \sqrt{\mathrm{n_c}}|; \tag{II.82}$$

2. Après le passage de l'atome k par la cavité, les matrices densité décrivant l'état du champ sont les matrices $\tilde{\rho}_k$ et $\rho_k^{(R)}$. La correction qui est alors appliquée est la correction α_{k-N_r}. Si nous utilisons l'expression exacte[6] de $\mathcal{D}(\alpha)$ pour le calcul de $\rho_k^{(R)}$, $\tilde{\rho}_k$ est calculé *via* le déplacement à l'ordre 2 en α (II.47) :

$$\rho_{k+\frac{1}{3}}^{(R)} = \mathcal{D}(\alpha_{k-N_r})\, \rho_k^{(R)}\, \mathcal{D}(-\alpha_{k-N_r}) \qquad \tilde{\rho}_{k+\frac{1}{3}} = \mathbf{D}_{k-N_r} \tilde{\rho}_k; \tag{II.83}$$

3. La relaxation sur la durée T_a doit alors être prise en compte [30]. Les probabilités p_+ et p_- qu'il y ait un saut quantique qui crée ou détruise, respectivement, un photon dans la cavité doivent d'abord être calculées. En reprenant les notations du paragraphe I.1.2.b, les opérateurs de saut associés sont respectivement

$$L_+ = \sqrt{\kappa_+} a^\dagger \qquad L_- = \sqrt{\kappa_-} a, \tag{II.84}$$

et les probabilités de sauts qui en découlent sont

$$p_+ = \kappa_+ T_a \mathrm{Tr}\left(a a^\dagger \rho_{k+\frac{1}{3}}^{(R)}\right) \qquad p_- = \kappa_- T_a \mathrm{Tr}\left(a^\dagger a \rho_{k+\frac{1}{3}}^{(R)}\right). \tag{II.85}$$

On définit par ailleurs l'opérateur J et la probabilité p_0 qu'il n'y ait pas de saut :

$$J = \frac{1}{2}\left(L_+^\dagger L_+ + L_-^\dagger L_-\right) = \frac{1}{2}\left(\kappa_+ a a^\dagger + \kappa_- a^\dagger a\right) \tag{II.86}$$

$$p_0 = 1 - p_+ - p_- \tag{II.87}$$

$$= \mathrm{Tr}\left((\mathbb{1} - T_a J)\rho_{k+\frac{1}{3}}^{(R)}(\mathbb{1} - T_a J)\right), \tag{II.88}$$

où la dernière égalité est vraie à l'ordre 1 en $T_a/\mathrm{T_{cav}}$.
Un nombre aléatoire $0 \leq p \leq 1$ est alors tiré au sort :
– Si $p \leq p_+$, il y a un saut vers le haut :

$$\rho_{k+\frac{2}{3}}^{(R)} = \frac{\kappa_+ T_a}{p_+}\left(a^\dagger \rho_{k+\frac{1}{3}}^{(R)} a\right), \tag{II.89}$$

6. À la taille finie de l'espace de Hilbert près.

– Si $p_+ < p \leq p_+ + p_-$, il y a un saut vers le bas :

$$\rho^{(R)}_{k+\frac{2}{3}} = \frac{\kappa_- T_a}{p_-} \left(a\, \rho^{(R)}_{k+\frac{1}{3}} a^\dagger \right), \tag{II.90}$$

– Si $p_+ + p_- < p$, il n'y a pas de saut quantique :

$$\rho^{(R)}_{k+\frac{2}{3}} = \frac{1}{p_0} \left[(\mathbb{1} - T_a J)\, \rho^{(R)}_{k+\frac{1}{3}}\, (\mathbb{1} - T_a J) \right]. \tag{II.91}$$

La nature du saut, et même son existence, sont en revanche inconnues du filtre quantique en charge du calcul de $\tilde{\rho}_{k+1}$. Il utilise donc un développement au premier ordre en $T_a/\mathrm{T_{cav}}$ de l'équation de Lindblad (I.18) :

$$\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}} = (\mathbb{1} + T_a \mathbf{L})\, \tilde{\rho}_{k+\frac{1}{3}}; \tag{II.92}$$

4. Lorsque l'atome $(k+1)$ vient alors à être détecté, un premier tirage aléatoire est opéré pour déterminer si l'échantillon atomique contient effectivement un atome. En effet, rappelons que les atomes de Rydberg sont préparés avec une statistique poissonienne, avec une occupation moyenne n_a. Nous ne considérerons ici que les situations où n_a est suffisamment faible pour négliger la probabilité d'avoir plus d'un atome préparé. On note $P_a(n)$ la probabilité d'en avoir n :

$$P_a(0) = \mathrm{e}^{-n_a} \sim 1 - n_a \qquad P_a(1) = n_a \mathrm{e}^{-n_a} \sim n_a \qquad P_a(n \geq 2) \ll 1. \tag{II.93}$$

Si le résultat du tirage aléatoire prédit l'absence d'atomes, alors les matrices densité sont inchangées :

$$\rho^{(R)}_{k+1} = \rho^{(R)}_{k+\frac{2}{3}} \qquad\qquad \tilde{\rho}_{k+1} = \tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}. \tag{II.94}$$

En revanche, si un atome a effectivement été préparé, les probabilités p_e et p_g de mesurer $|e\rangle$ et $|g\rangle$, respectivement, sont calculées à partir de l'opérateur densité réel $\rho^{(R)}$:

$$p_j = \mathrm{Tr}\left(M_j\, \rho^{(R)}_{k+\frac{2}{3}}\, M_j^\dagger \right) \quad j = \{e, g\}. \tag{II.95}$$

De même que nous l'avions fait pour le calcul de la relaxation, un nombre aléatoire $0 \leq q \leq 1$ est tiré et comparé à p_e et $p_g = 1 - p_e$:
– si $q \leq p_e$, l'atome $(k+1)$ est détecté dans $|e\rangle$,
– sinon, l'atome est détecté dans $|g\rangle$.
Dans les deux cas, les matrices densité réelles et estimées sont actualisées ainsi, avec $j = \{e, g\}$ le résultat de la mesure :

$$\rho^{(R)}_{k+1} = \frac{M_j\, \rho^{(R)}_{k+\frac{2}{3}}\, M_j^\dagger}{p_j} \qquad\qquad \tilde{\rho}_{k+1} = \frac{M_j\, \tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}\, M_j^\dagger}{\mathrm{Tr}\left(M_j\, \tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}\, M_j^\dagger \right)}; \tag{II.96}$$

5. La dernière étape de la boucle consiste à calculer α_{k+1} connaissant $\rho_{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{H}}^{(r)}_{k+1} \tilde{\rho}_{k+1}$, ce qui a d'ores et déjà été expliqué au paragraphe II.1.

Les étapes 2 à 5 sont alors répétées jusqu'à arrêt de la boucle. Les paragraphes suivants sont dévolus aux résultats de ces simulations.

II.2.2 Stabilisation d'un état de Fock

II.2.2.a Trajectoires quantiques

Simulons dans un premier temps une trajectoire quantique individuelle pour laquelle, partant du champ cohérent $\left|\alpha_0 = \sqrt{3}\right\rangle$, nous cherchons à préparer l'état de Fock $|\mathrm{n_c} = 3\rangle$. Les paramètres de la simulation sont les suivants.

Relaxation Le temps de vie d'un photon dans la cavité est $\mathrm{T_{cav}} = 65\,\mathrm{ms}$, et le champ thermique environnant contient $n_{\mathrm{th}} = 0,05$ photon en moyenne ;

Préparation atomique En moyenne $n_a = 0,2$ atomes sont préparés tous les $T_a = 82\,\mu\mathrm{s}$, à une vitesse $v = 250\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. À cette vitesse, la boucle a un retard de $N_r = 4$ atomes ;

Mesure Le déphasage par photon utilisé est $\phi_0 = \pi/4$, et la phase des franges de Ramsey est choisie telle que $\pi_e(\mathrm{n_c} = 3) = 0,5$, soit $\phi_r = \varphi_r(3)$. Nous considérons par ailleurs des franges de contraste unité et sans décalage ;

Espace de Hilbert Pour la matrice densité estimée, les calculs sont faits avec un espace de Hilbert de taille $\mathcal{N} = 9$, soit 8 photons au maximum dans la cavité. Cela correspond au choix que nous aurons à faire expérimentalement. En revanche, pour le calcul de la matrice densité réelle $\rho^{(R)}$, nous utilisons $\mathcal{N} = 22$ de sorte à s'affranchir autant que faire se peut de toute approximation, notamment lors du calcul du déplacement : la troncature de l'espace doit se faire à des nombres de photons pour lesquels la population $\langle n|\rho^{(R)}|n\rangle$ est négligeable ;

Injections cohérentes L'injection maximale autorisée est $\alpha_{\max} = 0,1$. Nous utiliserons (voir III.2.1) par ailleurs une borne inférieure sur l'amplitude de la correction opérée, et nous incorporons donc cette limite dans la simulation : $\alpha_{\min} = 0,001$;

Lois de contrôle Pour la loi de contrôle «Distance», nous utiliserons les paramètres :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
$\Gamma^{(3)}_{nn}$	0,69	0,45	0,21	0	0,26	0,48	0,66	0,81	1

. (II.97)

Pour le contrôle «Fidélité», le seuil est fixé à $\epsilon = 0,1$.

Les figures II.8 et II.9 donnent les résultats de deux simulations [7] de trajectoires quantiques obtenues avec les lois de contrôle «Fidélité» et «Distance» respectivement. Sur chacune d'elles, la trajectoire quantique est stoppée au bout de 164 ms, correspondant à 2000 préparations atomiques. Nous traçons, de haut en bas :

- le résultat des détections atomiques,
- la distance à l'état cible calculée à partir de la matrice densité estimée ρ_k,
- les amplitudes des injections cohérentes, en échelle logarithmique ($\mathrm{sgn}(\alpha)\log|\alpha|$),
- les probabilités $P_{\mathrm{est}}(\mathrm{n_c})$ et $P_{\mathrm{réel}}(\mathrm{n_c})$ d'avoir $\mathrm{n_c}$ photons (en vert), $P_{\mathrm{est}}(n > \mathrm{n_c})$ et $P_{\mathrm{réel}}(n > \mathrm{n_c})$ d'en avoir plus (en bleu), et $P_{\mathrm{est}}(n < \mathrm{n_c})$ et $P_{\mathrm{réel}}(n < \mathrm{n_c})$ d'en avoir moins (en rouge), pour l'état estimé (en traits pleins) et pour l'état réel (en pointillés) respectivement.

7. Bien que la ressemblance avec les figures du chapitre IV soit troublante, il s'agit bien de simulations !

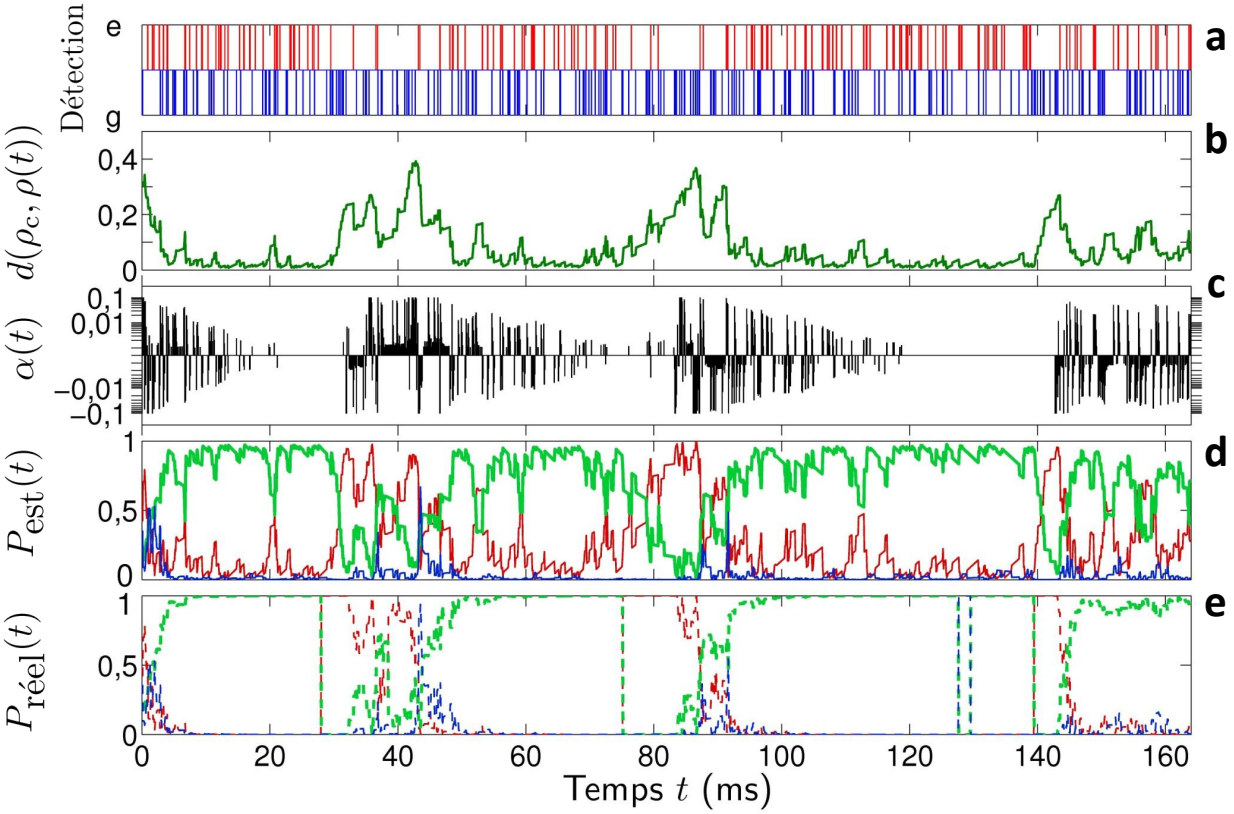


FIGURE II.8 – Contrôle «Distance» : Trajectoire quantique individuelle de durée 164 ms préparant et préservant l'état nombre $|\mathrm{n_c} = 3\rangle$. **a.** Résultats des détections atomiques : une barre rouge vers le haut correspond à un atome dans $|e\rangle$, une barre bleue vers le bas à $|g\rangle$. **b.** Distance $d(\rho_c = |3\rangle\langle 3|, \rho)$ calculée pour la matrice densité estimée et la loi de contrôle «Distance». **c.** Amplitude des injections cohérentes en échelle logarithmique signée $(\mathrm{sgn}(\alpha) \log |\alpha|)$. **d.** Tracé de $P_{\text{est}}(\mathrm{n_c} = 3, t)$ (vert), $P_{\text{est}}(n > 3, t)$ (bleu) et $P_{\text{est}}(n < 3, t)$ (rouge). **e.** Tracé de $P_{\text{réel}}(\mathrm{n_c} = 3, t)$ (vert), $P_{\text{réel}}(n > 3, t)$ (bleu) et $P_{\text{réel}}(n < 3, t)$ (rouge).

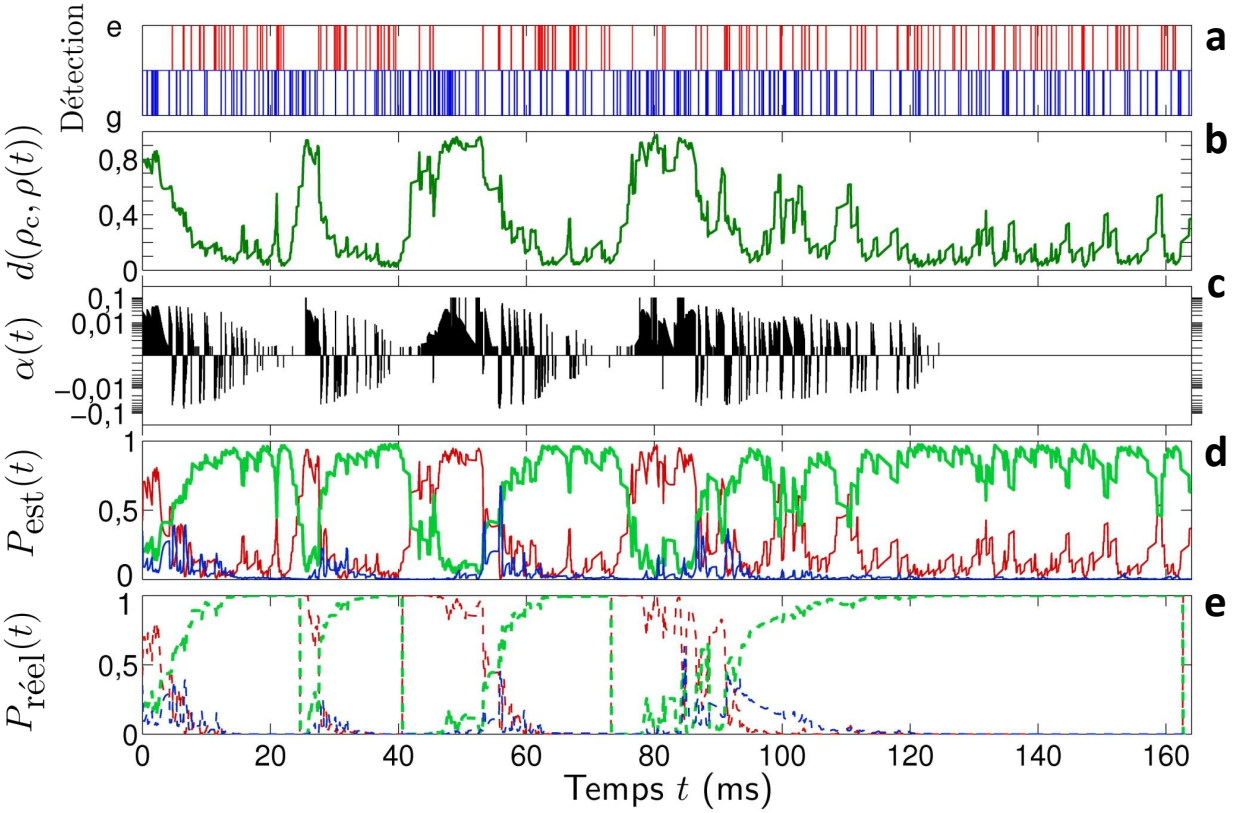


FIGURE II.9 – Contrôle «Fidélité» : Trajectoire quantique individuelle préparant et préservant l'état nombre $|\mathrm{n_c} = 3\rangle$. **a.** Résultats des détections atomiques : une barre rouge vers le haut correspond à un atome dans $|e\rangle$, une barre bleue vers le bas à $|g\rangle$. **b.** Distance $d(\rho_c = |3\rangle\langle 3|, \rho)$ calculée pour la matrice densité estimée et la loi de contrôle «Fidélité». **c.** Amplitude des injections cohérentes en échelle logarithmique signée ($\mathrm{sgn}(\alpha)\log|\alpha|$). **d.** Tracé de $P_{\text{est}}(\mathrm{n_c} = 3, t)$ (vert), $P_{\text{est}}(n > 3, t)$ (bleu) et $P_{\text{est}}(n < 3, t)$ (rouge). **e.** Tracé de $P_{\text{réel}}(\mathrm{n_c} = 3, t)$ (vert), $P_{\text{réel}}(n > 3, t)$ (bleu) et $P_{\text{réel}}(n < 3, t)$ (rouge).

Les caractéristiques des deux trajectoires sont semblables et les commentaires que nous ferons sur la figure II.8 seront donc aussi valables pour la figure II.9. Au début de la trajectoire, le champ préparé dans l'état cohérent $\left|\alpha_0 = \sqrt{3}\right\rangle$ est à une distance d'environ $0,3$ de la cible. La rétroaction est donc activée pour amener le champ jusqu'à $|3\rangle$ en un temps de l'ordre de 5 ms, pendant lesquelles des corrections exponentiellement décroissantes sont réalisées. La distance à l'état cible tombe alors à une valeur basse, et la régulation s'arrête. La boucle de rétroaction a *préparé* l'état de Fock désiré.

À environ $t = 27$ ms, le champ subit un saut quantique vers $|2\rangle$. Il se caractérise par un brusque changement des populations $P_{\text{réel}}$. Si jusqu'à présent, P_{est} était relativement proche du champ réel, ce n'est plus le cas juste après le saut quantique. Il faudra quelques millisecondes au filtre quantique pour réaliser qu'il y a eu un saut, après quoi la distance à l'état cible raugmente, réactivant ainsi la régulation. Pendant toute cette période, les distributions réelles et estimées sont à nouveau très proches, prouvant ainsi que le filtre quantique est efficace y compris quand les injections micro-ondes sont nombreuses. Notons alors que malgré l'apparition d'un second saut quantique au cours de la correction, à $t = 39$ ms, la boucle de rétroaction est finalement capable, en un peu moins de 20 ms ici, de *restituer* l'état de Fock désiré. Les deux sauts quantiques ultérieurs, à $t \sim 75$ ms et $t \sim 140$ ms, sont corrigés de la même façon.

II.2.2.b Régime stationnaire

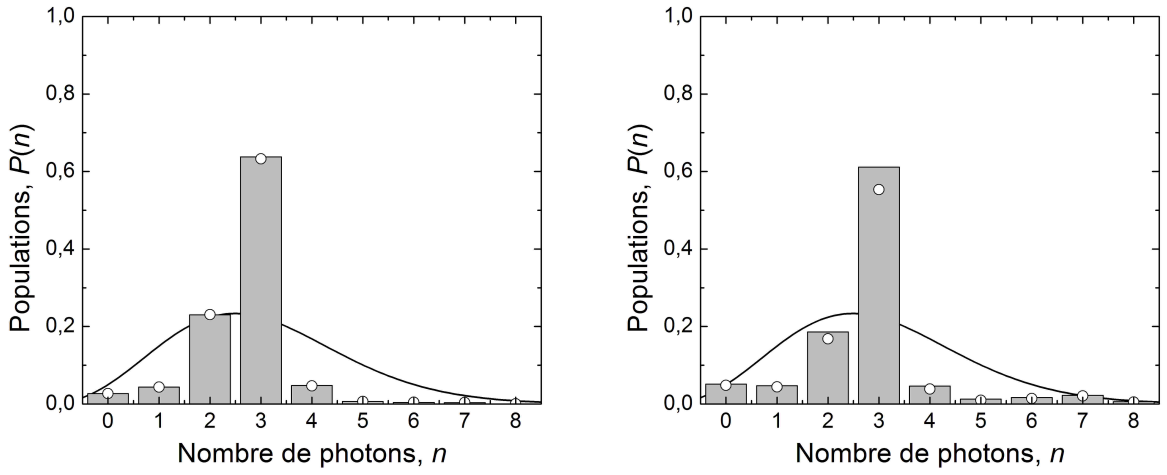
Nous simulons $N_t = 1000$ telles trajectoires quantiques pour chacune des deux lois de contrôle. Nous cherchons tout d'abord à en extraire la distribution des nombres de photons dans *l'état stationnaire* de la rétroaction. Pour cela, pour chacune des N_t trajectoires ainsi obtenues, nous moyennons les distributions P_{est} et $P_{\text{réel}}$ sur toute la trajectoire, exceptés les 200 premiers paquets atomiques, *i.e.* à partir de $t_0 = 16$ ms. Ces N_t distributions moyennes obtenues sont finalement moyennées entre elles, et le résultat est donné figure II.10. Nous y traçons sur le même graphe les distributions moyennées réelles et estimées (points et histogrammes respectivement), ainsi que la distribution initiale correspondant au champ cohérent $|\alpha_0\rangle$.

Aussi bien pour le contrôle «Distance» que pour le contrôle «Fidélité», les distributions obtenues sont clairement sub-poissoniennes, avec notamment :

$$\begin{aligned} \langle P_{\text{est}}(\mathrm{n_c} = 3)\rangle &= 64\% \quad \text{pour le contrôle «Distance»,} \\ &= 63\% \quad \text{pour le contrôle «Fidélité».} \end{aligned}$$

Les simulations prédisent donc, qu'en moyenne, la boucle de rétroaction quantique décrite dans ce chapitre est bel et bien capable de préserver l'état de Fock $|\mathrm{n_c} = 3\rangle$, le champ y restant plus de 60% de son temps, sur un intervalle de temps plus de 7 fois plus long que son temps de vie.

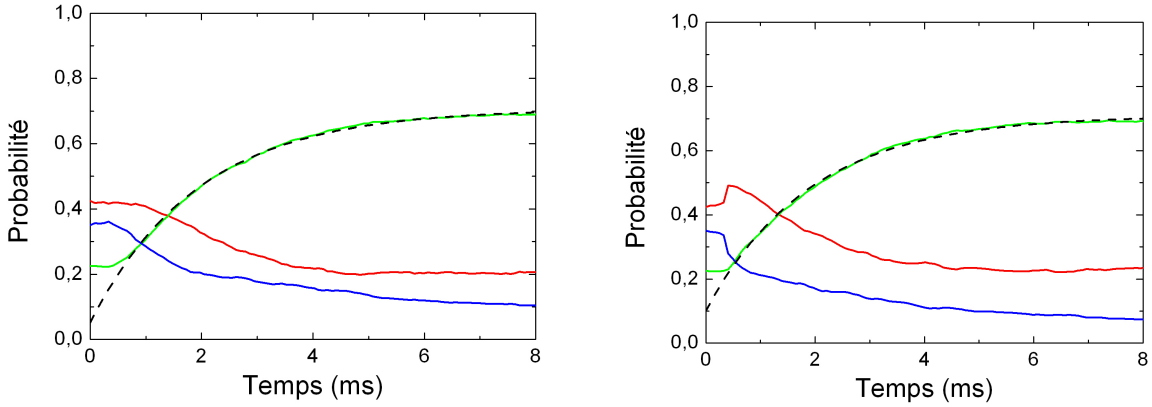
Au vu des fidélités estimées $P_{\text{est}}(3)$ il semble par ailleurs que le contrôle «Fidélité» et le contrôle «Distance» sont aussi efficaces l'un que l'autre. Deux remarques doivent toutefois être faites.



(a) Contrôle «Distance» (b) Contrôle «Fidélité»

FIGURE II.10 – Populations moyennes pour une boucle de rétroaction en régime stationnaire. Les histogrammes correspondent aux prédictions de la matrice densité estimée, les points à celles de la matrice densité réelle. La ligne continue correspond à la distribution des nombres de photons dans le champ cohérent initial $\left|\alpha = \sqrt{3}\right\rangle$.

- Après un processus de moyenne, les distributions $\langle P_{\text{est}}\rangle$ et $\langle P_{\text{réel}}\rangle$ doivent être identiques : une différence traduirait un défaut du filtre quantique. Or si l'accord est excellent avec le contrôle «Distance», il n'en est rien avec le contrôle «Fidélité» : $P_{\text{réel}}(\mathrm{n_c}) = 55\%$ contre les 63% annoncés par le filtre. En y regardant de plus près, il apparaît que pour cette loi de contrôle, la probabilité (réelle) d'avoir plus de 8 photons dans la cavité est de près de 10%, alors qu'elle est négligeable avec la contrôle «Distance». Une des dérives du contrôle «Fidélité» semble donc être une tendance à injecter trop de photons dans la cavité, ce que le filtre quantique, avec son espace de Hilbert de taille limitée, ne peut pas suivre. Une solution consisterait à ajouter un critère supplémentaire lors du calcul de la correction à appliquer :
  - Si $\langle n\rangle > \mathrm{n_c} + 1,5$, plus aucune correction n'est appliquée ;
  - Le calcul des corrections standard reprend dès que $\langle n\rangle < \mathrm{n_c} + 1$.
- Même si nous oublions pour un temps ce défaut, les distributions estimées pour les deux lois de contrôle, qui partagent la même fidélité à la cible, sont différentes si nous comparons leurs déviations standards σ : $0,30$ pour le contrôle «Distance» contre $0,45$ pour le contrôle «Fidélité». Cela se traduit pour cette dernière par des populations des nombres de photons n «très» différents de $\mathrm{n_c}$, *i.e.* $|n - \mathrm{n_c}| \geq 2$, plus élevées. C'est particulièrement le cas pour $P_{\text{est}}(7)$, de plus de 2% avec le contrôle «Fidélité» contre moins de $0,4\%$ avec le contrôle «Distance». Notons que le fait que $P(7)$ soit plus élevé que $P(6)$ ou $P(5)$ par exemple peut s'expliquer par le fait qu'il s'agit, comme nous l'avons déjà vu, du nombre de photons «mesuré» de la même



(a) Contrôle «Fidélité», et ajustement exponentiel de paramètre $\tau = (1,95 \pm 0,02)$ ms.

(b) Contrôle «Distance», et ajustement exponentiel de paramètre $\tau = (1,92 \pm 0,02)$ ms.

FIGURE II.11 – Évolution temporelle de la distribution P_{est} moyennée sur 1000 trajectoires quantiques individuelles. $P_{\text{est}}(\text{n}_\text{c} = 3, t)$ est tracé en vert, $P_{\text{est}}(n > \text{n}_\text{c}, t)$ en bleu et $P_{\text{est}}(n < \text{n}_\text{c}, t)$ en rouge. La courbe noire est un ajustement exponentiel de $P(\text{n}_\text{c})$, de temps caractéristique τ donné dans les sous-légendes.

façon que la cible $(\pi_g(\phi_r = \varphi_r(3)|3) = \pi_g(\varphi_r(3)|7))$.

Ainsi, l'analyse des distributions stationnaires obtenues semble plaider en faveur de la loi de contrôle «Distance».

Nous traçons finalement figure II.11 l'évolution temporelle, aux temps courts, de la distribution P_{est} moyennée sur les mêmes 1000 trajectoires quantiques individuelles pour les deux lois de contrôle. Nous mettons ainsi en évidence le temps nécessaire à la rétroaction pour atteindre son état stationnaire à partir du champ cohérent $|\alpha_0\rangle$. Aussi bien pour le contrôle «Distance» que pour le contrôle «Fidélité», $P_{\text{est}}(\text{n}_\text{c}, t)$ est bien ajusté par une exponentielle décroissante, de temps caractéristique de l'ordre de $\tau = 2\,\text{ms}$. Les $500\,\mu\text{s}$ initiales où la distribution n'évolue quasiment pas correspondent au temps moyen nécessaire à détecter un atome $t_1 = T_a/n_a = 410\,\mu\text{s}$.

II.2.3 Préparation d'un état de Fock

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes intéressés qu'au régime stationnaire de notre rétroaction quantique. Cela revient à regarder à un instant pris au hasard la distribution du nombre de photons dans la cavité. L'objectif étant maintenant de préparer avec une fidélité aussi élevée que possible l'état de Fock désiré $|\text{n}_\text{c}\rangle$, il faut définir un critère d'arrêt de la boucle qui dépende de l'état instantané estimé du champ. Dans ce paragraphe, nous simulons des expériences où l'on arrête la rétroaction quand le critère suivant est vérifié :

$$P_{\text{est}}(\text{n}_\text{c}) \geq 80\%, \tag{II.98}$$

et ce pour trois itérations successives de la boucle.

500 trajectoires quantiques sont simulées de la sorte. Nous donnons figure II.12 la distribution des nombres de photons dans la cavité, pour un état ainsi préparé. Comme attendu, il apparaît clairement que la fidélité à l'état cible est maintenant plus élevée que quand nous arrêtions la boucle à un instant aléatoire, puisqu'elle atteint 82% pour le contrôle «Distance» et 80% pour le contrôle «Fidélité». Notons cependant qu'une nouvelle fois les populations des nombres de photons plus grands que 8 ne sont pas négligeables avec le contrôle «Fidélité», la probabilité d'avoir plus que 8 photons s'élevant cette fois à près de 5%. Malgré tout, les simulations nous laissent donc présupposer qu'une telle boucle de rétroaction doit pouvoir *préparer* l'état nombre désiré avec une bonne fidélité.

Pour conclure ce paragraphe, nous traçons figure II.13 le taux de succès en fonction du temps, *i.e.* la proportion de trajectoires ayant satisfait le critère (II.98) à un instant t donné, toujours à partir de 500 trajectoires quantiques. Aussi bien pour le contrôle «Distance» que pour le contrôle «Fidélité», $1 - \mathrm{e}^{-1} = 63\%$ des trajectoires ont convergé en 7 ms. Aux temps longs cependant, le contrôle «Distance» apparaît plus efficace.

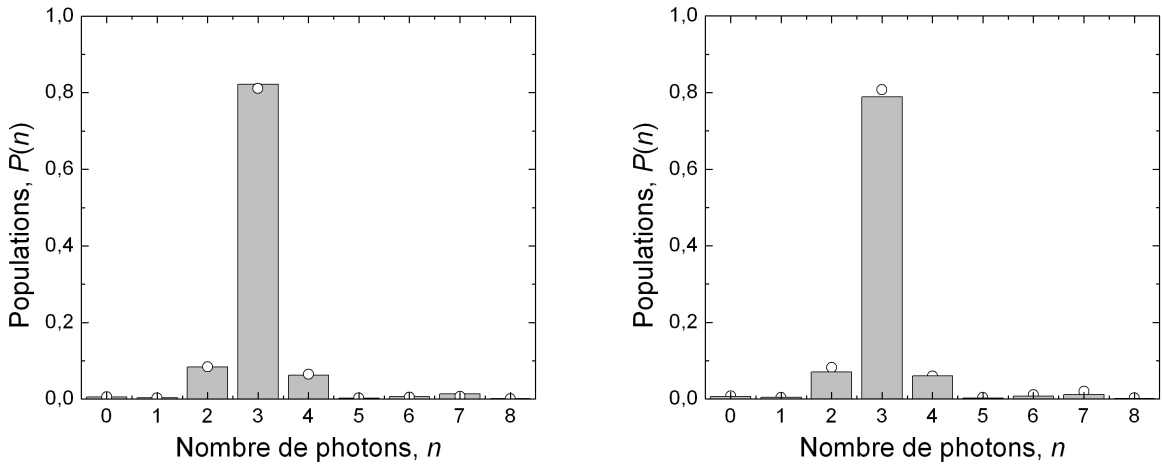
II.2.4 Choix de distance

Les simulations que nous venons de réaliser nous indiquent que la boucle de rétroaction quantique que nous avons définie au paragraphe précédent devrait permettre de préparer l'état de Fock $|3\rangle$ en un temps relativement court (7 ms) et avec une bonne fidélité (80%), ainsi que de le protéger contre la décohérence. L'efficacité avec laquelle la rétroaction opère dépend cependant du choix de la loi de contrôle. Si la différence entre les deux lois utilisées est faible au niveau des temps de convergence, les distributions moyennes stationnaires obtenues ont mis en évidence un défaut majeur du contrôle «Fidélité» : la surinjection de photons évoquée au paragraphe II.2.2.a résulte en une mauvaise estimation de l'état du champ par le filtre, trop à l'étroit dans son espace de Hilbert de taille finie. Les résultats expérimentaux du chapitre IV viendront confirmer ces conclusions.

Avant de tester expérimentalement la rétroaction quantique avec le contrôle «Distance», il nous faut fixer les valeurs numériques des matrices $\Gamma^{(\mathrm{n_c})}$, pour les états cibles $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, et $|4\rangle$. C'est en répétant ces simulations que nous avons optimisé ce choix. Les résultats ont déjà été tracés figure II.6, nous en donnons les valeurs numériques dans le tableau II.1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$n \geq 8$
$\Gamma^{(1)}_{nn}$	0,12	0	0,36	0,57	0,72	0,83	0,92	1	1	1
$\Gamma^{(2)}_{nn}$	0,37	0,18	0	0,33	0,56	0,74	0,88	1	1	1
$\Gamma^{(3)}_{nn}$	0,68	0,45	0,21	0	0,30	0,53	0,71	0,87	1	1
$\Gamma^{(4)}_{nn}$	1	0,73	0,45	0,21	0	0,26	0,48	0,66	0,81	1

TABLE II.1 – Choix des valeurs numériques des matrices $\Gamma^{(\mathrm{n_c})}$, pour $1 \leq \mathrm{n_c} \leq 4$.



(a) Contrôle «Distance» (b) Contrôle «Fidélité»

FIGURE II.12 – Distributions $P_{\text{est}}(n)$ (histogrammes) et $P_{\text{réel}}(n)$ (points) obtenues par interruption de la rétroaction quantique selon le critère (II.98).

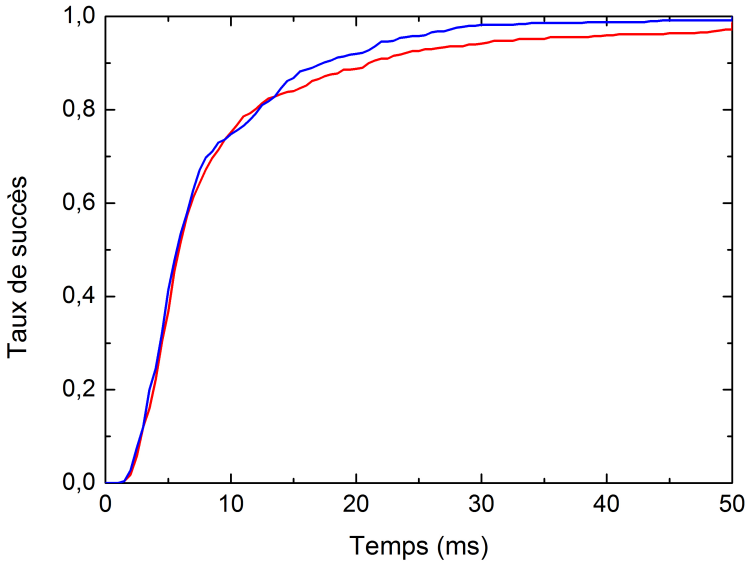


FIGURE II.13 – Taux de convergence de la boucle de rétroaction en fonction du temps. Avec le contrôle «Distance» (en bleu) et le contrôle «Fidélité» (en rouge). Les deux courbes sont calculées à partir de 500 trajectoires quantiques.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé dans un premier temps comment il est possible d'adapter les idées répandues des *boucles de rétroaction* de la physique classique au monde quantique, afin de contrôler de façon active l'état d'un système quantique, en l'occurrence un champ micro-onde piégé dans une cavité Fabry-Pérot. L'élaboration d'un protocole de rétroaction quantique a nécessité le franchissement de plusieurs difficultés, et en premier lieu celui de la mesure en mécanique quantique, dont les effets en retour sur le système sondé sont inévitables. L'utilisation des *mesures faibles* déjà introduites au chapitre précédent a permis de résoudre ce premier problème : elles fournissent une information partielle sur le système mais le perturbent de façon minimale.

Pour amener le champ micro-onde sondé en continu par des atomes de Rydberg circulaires vers l'état cible, nous avons opté pour l'utilisation de faibles injections de champs cohérents. Pour choisir le déplacement optimal, il nous a alors fallu définir une *filtre quantique* capable d'estimer en temps réel la matrice densité du champ, compte tenu des détections atomiques, des choix de correction précédents, de toutes les imperfections expérimentales, et du *retard* à l'acquisition de l'information, dû au temps de vol fini nécessaire aux atomes pour le passage de la cavité au détecteur à ionisation.

Une fois la matrice densité du champ donnée, les amplitudes des corrections sont alors choisies de sorte à minimiser la *distance* à l'état cible. Nous avons alors dû donner la définition de cette distance. Nous avons commencé par fixer l'ensemble des contraintes imposées à la distance à construire, puis nous en avons déduit que celle-ci ne pouvait prendre qu'une forme simple, définie par la donnée seule d'une matrice diagonale dans la base des états propres de la mesure, *i.e.* des états de Fock. Deux formes particulières ont alors été choisies, et pour chacune d'elle, une *loi de contrôle* permettant le calcul explicite des amplitudes de champs cohérents à injecter.

Une fois la boucle de rétroaction quantique construite, nous avons dans une seconde partie simulé, à partir de méthodes Monte-Carlo quantiques, une expérience consistant en la préparation et la stabilisation de l'état nombre $|3\rangle$. Les fidélités élevées obtenues, ainsi que les temps de préparation relativement courts, nous laissent présager qu'une réalisation expérimentale est possible, pour les états nombre $|1\rangle$ à $|4\rangle$, malgré le temps de vie limité des photons dans la cavité. Les chapitres suivants y sont consacrés.

Chapitre III

La rétroaction quantique expérimentalement

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit le principe théorique de la rétroaction quantique que nous souhaitons maintenant mettre en place expérimentalement. Une telle réalisation n'a été rendue possible que par l'acquisition d'un nouvel ordinateur de contrôle, capable de modifier en temps réel la séquence expérimentale. Dans un première partie, nous donnerons une description de son fonctionnement et identifieront les tâches qu'il aura à accomplir : détection des atomes et injections micro-ondes. L'ancien système de contrôle restant en grande partie utilisé, nous aurons également à expliquer comment les deux systèmes ont été synchronisés afin de pouvoir fonctionner simultanément.

Une fois le système de contrôle décrit, nous présenterons dans une seconde partie toutes les calibrations nécessaires au bon fonctionnement de la rétroaction. Plusieurs paramètres expérimentaux interviennent en effet directement dans les calculs du filtre quantique, et ils doivent donc être mesurés de façon précise. Le taux d'injection des champs micro-ondes, l'efficacité de détection, les imperfections de l'interféromètre et le déphasage par photon seront ainsi quantifiés.

Dans la troisième partie du chapitre, nous nous intéresserons à certaines autres imperfections expérimentales qui ne sont pas prises en compte dans les calculs du filtre. Nous devrons notamment nous assurer qu'elles sont suffisamment petites pour pouvoir être négligées.

Au vu des résultats des deux premières sections, nous aurons enfin dans une quatrième partie à modifier le filtre quantique défini au chapitre précédent. Les contraintes sur le temps de calcul, imposées par le dispositif expérimental, et les imperfections du détecteur et de l'interféromètre seront alors prises en compte.

III.1 Un nouvel ordinateur de contrôle

Les précédentes expériences réalisées dans le groupe utilisaient un logiciel de contrôle développé par Stefan Kuhr et Samuel Deléglise. Une séquence expérimentale, essentiel-

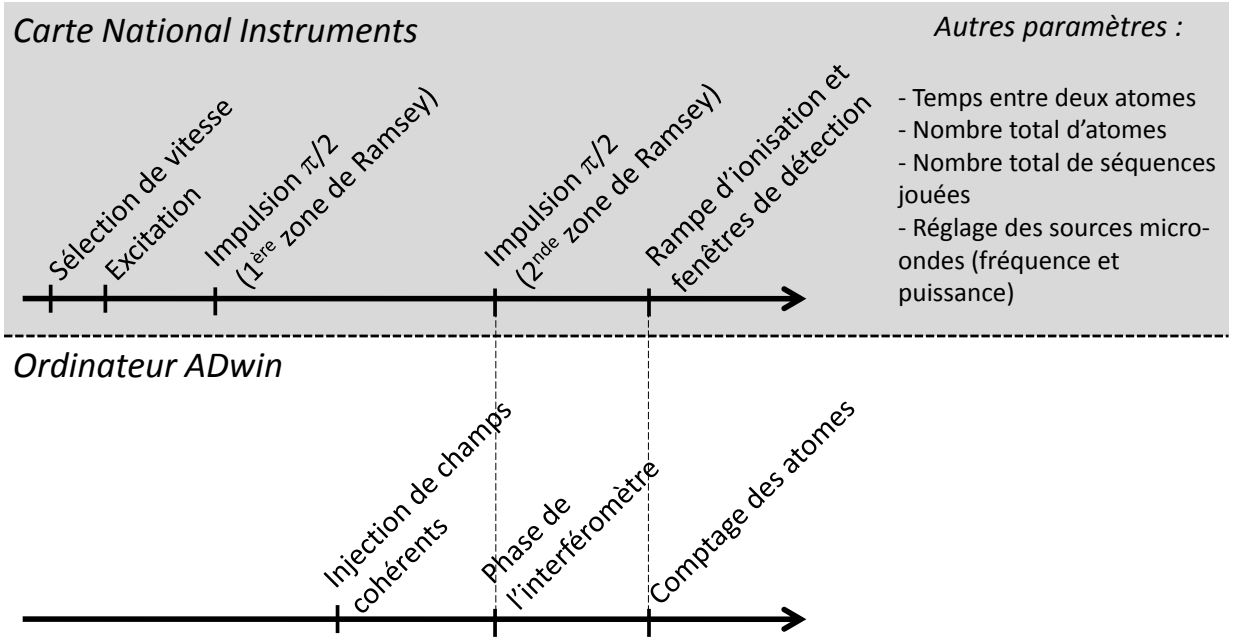


FIGURE III.1 – Répartition des tâches entre les deux systèmes de contrôle. Les flèches symbolisent la trajectoire d'un atome dans le dispositif, et les différents événements, contrôlés par le système National Instruments (pré-programmé) ou le système ADwin (temps réel), sont énumérés. Les paramètres généraux contrôlés par la carte NI sont aussi donnés. Notons que la phase de l'interféromètre n'est contrôlé par ADwin que dans certains cas bien particuliers (voir texte).

lement composée d'une succession d'impulsions digitales et de sorties analogiques, était pré-programmée puis enregistrée dans la mémoire tampon d'une carte, développée par National Instruments (NI). Celle-ci était alors chargée de jouer la séquence *a posteriori* sans possibilité d'intervention de la part de l'utilisateur. Il a donc fallu utiliser et développer une nouvelle architecture matérielle et logicielle pour pouvoir réaliser nos expériences de rétroaction quantique, pour lesquelles pré-programmer une séquence est bien évidemment impossible.

Le nouvel ordinateur de contrôle que nous avons utilisé est une unité «ADwin Pro-II» développée par Jäger Messtechnik. Dans la suite du manuscrit, nous la désignerons simplement sous le nom «ADwin». Son rôle est de réaliser la partie purement «rétroaction» de l'expérience, le reste de la séquence expérimentale restant programmé au préalable sur le système NI. La figure III.1 donne schématiquement la répartition des tâches entre les deux systèmes de contrôle. Il faut noter essentiellement que la structure globale d'une séquence reste pré-programmée. Au niveau d'une part d'un échantillon atomique seul, toutes les étapes de sélection de vitesse, d'excitation dans les niveaux de Rydberg circulaires et de manipulation de l'état interne dans les zones de Ramsey voient tous leurs paramètres, y compris le minutage, définis au préalable. D'autre part, le temps séparant deux échantillons

atomiques, le nombre total d'échantillons par séquence, et le nombre de fois qu'est répétée une séquence sont contrôlés par le système NI. Au niveau de la détection en revanche, si la forme de la rampe d'ionisation, l'instant auquel elle est déclenchée et la définition des fenêtres de détection déjà rencontrées au paragraphe I.2.3 restent définis par la carte NI, le comptage effectif des atomes revient à l'ADwin : la sortie du détecteur à ionisation est reliée au nouvel ordinateur de contrôle (voir aussi paragraphe III.1.2). Le rôle principal du système temps réel consiste toutefois à contrôler les injections micro-ondes faites dans la cavité supraconductrice. Cela requiert, comme nous l'avons déjà vu au paragraphe I.1.2.b et comme nous le verrons plus en détail au paragraphe III.1.3, l'usage d'interrupteurs rapides sur le circuit micro-onde. Nous utilisons pour cela des diodes PIN à contrôle TTL : les signaux digitaux ouvrant ou fermant les diodes utilisées seront donc générés par l'ADwin. Précisons par ailleurs que dans certaines expériences bien particulières (voir paragraphe IV.2.3), nous aurons besoin de laisser au nouvel ordinateur de contrôle le réglage de la phase de l'interféromètre, mais que celui-ci est en général fait par le système NI.

Notons pour finir que le logiciel de contrôle de l'ADwin, quant à lui, a été développé en interne par Igor Dotsenko. Dans cette section, nous décrirons dans un premier temps l'unité en tant que telle. Nous détaillerons notamment la façon dont elle contrôle la détection des atomes et les injections micro-ondes. La synchronisation des deux systèmes de contrôle sera alors présentée dans une dernière sous-partie.

III.1.1 Description générale

Comme nous l'avons vu au chapitre II, et notamment sur la figure II.7, l'ordinateur en charge de la rétroaction se doit de réaliser *le calcul* puis *l'injection* des champs cohérents de contrôle, au vu notamment des résultats des *détections atomiques*. Trois éléments le composent donc essentiellement, dévolus respectivement à chacune de ces opérations (voir figure III.2).

La carte du processeur central, ou CPU C'est à ce niveau que tous les calculs nécessaires au choix des corrections sont faits : le filtre quantique et le régulateur y sont matérialisés.

Le processeur central est cadencé à 300 MHz. Ce n'est donc pas un processeur rapide, mais il présente l'avantage d'avoir une bonne stabilité temporelle : le temps séparant deux opérations successives est ainsi bien défini. En outre et surtout, le temps de réponse à une requête est très précis et très court [1], à savoir (300±30) ns. C'est un atout certain pour nos expériences où contrôler le temps de calcul et la synchronisation des différents éléments est crucial.

La carte CPU dispose par aileurs d'une mémoire interne de 250 kB, à accès rapide, et d'une mémoire externe de 250 MB, à temps d'accès plus longs et moins stables. L'espace total est donc amplement suffisant pour stocker à la fois les différentes matrices et autres variables nécessaires à un calcul rapide, et le code source. Ce

1. Contrairement à tout ordinateur «standard» sous Linux, Mac, Windows...

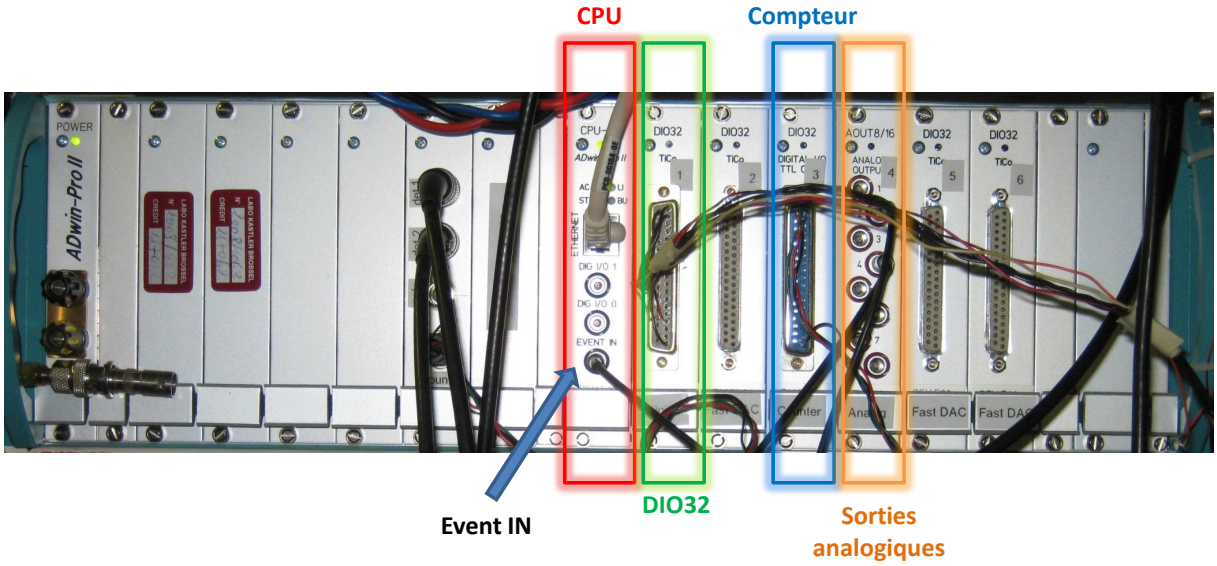


FIGURE III.2 – Vue de la façade du nouvel ordinateur de contrôle ADwin Pro-II. Cinq types de cartes sont utilisés : en rouge, la carte CPU contenant le processeur principal, dont l'entrée «Event IN» est indiquée par une flèche (voir texte) ; en bleu la carte compteur ; en vert la carte DIO32 à 32 entrées/sorties digitales ; en orange, une carte à 8 sorties analogiques ; les trois cartes restantes, utiles pour la génération de signaux analogiques rapides, n'ont pas été utilisées dans les travaux présentés ici.

dernier est pré-compilé sur un ordinateur externe, et seuls les fichiers binaires sont donc en mémoire de l'ADwin.

Une entrée digitale «Event IN» permet enfin la synchronisation de l'exécution du code avec l'ancienne architecture expérimentale. Le programme est en effet composé de plusieurs *processus*, le passage de l'un à l'autre étant réglable à l'envi, processus eux-mêmes divisés en *événements*. Une impulsion reçue sur l'entrée «Event IN» permet de déclencher un événement, par exemple une itération entière de la boucle de rétroaction. Nous désignerons dorénavant un tel signal par «impulsion événement» ;

La carte entrées/sorties digitales, ou DIO32 32 entrées ou sorties digitales sont disponibles. C'est grâce à elles que nous contrôlerons l'amplitude et la phase des injections, *via* des signaux TTL adressés aux diodes PIN déjà évoquées.

Cette carte possède sa propre horloge, qui devra donc être synchronisée avec celle du CPU, et une pile FIFO, accessible par la carte CPU, dans laquelle sont stockés des couples de la forme :

(x, t) où x est un nombre binaire donnant l'état des sorties digitales, et t le temps d'horloge auquel le nombre x devra être réalisé.

À chaque fois qu'un élément de la pile est réalisé, l'horloge de la carte est remise à zéro. L'instant auquel la carte doit produire le nombre x est donc donné relativement

aux événements précédents[2]. Précisons par ailleurs que si le couple (x, t) est lu par la carte alors que son horloge indique un temps $t_\mathrm{h} > t$, le nombre x est immédiatement réalisé et l'horloge remise à zéro ;

La carte compteur C'est à ce niveau que les atomes $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ sont comptés. Elle ressemble beaucoup à la carte DIO32 en ce sens qu'elle possède elle aussi sa propre horloge et sa propre pile FIFO, accessible par la carte CPU. La section III.1.2 en donnera quelques détails, ainsi que la façon dont elle fut synchronisée avec l'architecture expérimentale déjà existante.

En réalité, l'ordinateur ADwin pourrait à lui seul contrôler l'ensemble du dispositif expérimental, *i.e.* remplacer intégralement l'ancienne architecture matérielle. C'est dans un souci de simplicité que nous nous sommes contentés de modifier au minimum le système expérimental : l'ADwin ne contrôle que les interrupteurs rapides du circuit micro-onde de la cavité supraconductrice, permettant comme nous le verrons au paragraphe III.1.3 le contrôle de l'amplitude et de la phase des injections. Le comptage[3] des atomes lui revient également. En vue d'expériences futures, et comme on peut le voir sur la figure III.2, quatre autres cartes sont donc d'ores et déjà en place :

Carte sortie analogique 8 sorties analogiques «lentes» sont disponibles (résolution $\sim$ 2 µs). Comme nous le verrons au chapitre suivant, cette carte nous sera utile pour contrôler en temps réel la phase de mesure de l'interféromètre de Ramsey ;

Cartes FastDAC Au nombre de trois, il s'agit de cartes DIO32 dotées d'un processeur et d'une mémoire tampon propres, et qui seront couplées à terme avec des convertisseurs numérique/analogique, permettant de générer des signaux analogiques rapides (résolution de 120 ns, par exemple pour les rampes de champ électrique au moment de la circularisation des atomes).

Dans les prochaines sections, nous nous intéresserons plus en détails à la façon dont l'ordinateur de contrôle détecte les atomes et contrôle les injections micro-ondes. Nous exposerons finalement la façon dont est faite la synchronisation entre les différentes cartes de l'ADwin, et entre l'ADwin et le reste de l'expérience.

III.1.2 Détections atomiques

III.1.2.a Fonctionnement des cartes compteur

Nous avons déjà donné au paragraphe I.2.3 le principe de fonctionnement du détecteur à ionisation. Nous avons également vu comment, à partir de fenêtres temporelles, nous étions capables de compter les atomes dans les états $|e\rangle$ ou $|g\rangle$, selon l'instant auquel l'électron d'ionisation était détecté. Voyons ici comment cela est fait en pratique.

2. Il est aussi possible de faire fonctionner la carte dans un mode où le temps t est donné de façon absolue, l'horloge n'étant pas réinitialisée après un événement. Cependant nous n'utiliserons pas ce mode dans les travaux présentés ici.

3. Et le comptage seul : le déclenchement de la rampe d'ionisation et la définition des fenêtres de détections sont toujours du ressort du système NI.

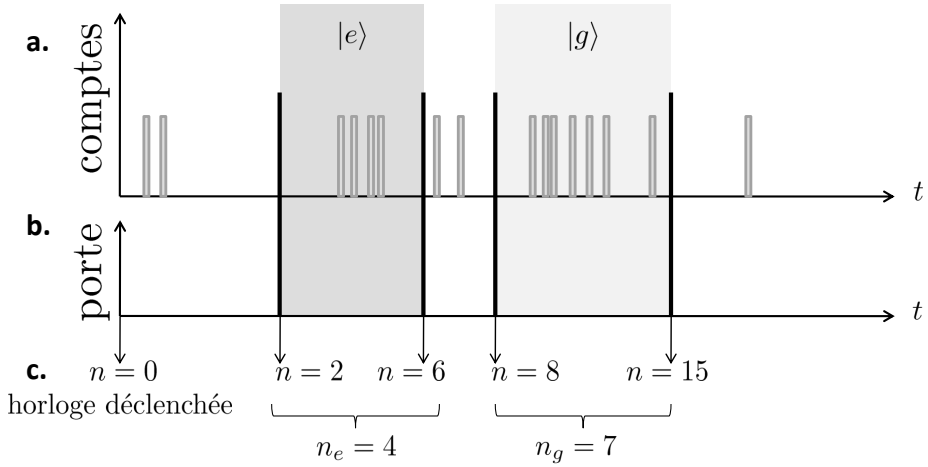


FIGURE III.3 – Comptage des atomes en mode «Comptes». **a.** Signaux TTL reçus sur l'entrée «Compteur» de la carte du même nom. Chaque impulsion correspond à un atome détecté par le détecteur à ionisation. **b.** Signaux TTL reçus sur l'entrée «Porte» de la carte compteur. Elles définissent deux fenêtres de détection (en grisé), l'une pour les atomes $|e\rangle$, l'autre pour les atomes $|g\rangle$. **c.** À chaque impulsion porte reçue, le nombre n de comptes est enregistré. La différence entre deux comptes successifs donne le nombre d'atomes détectés dans la fenêtre temporelle correspondante. Ici, $n_e = 4$ atomes $|e\rangle$ et $n_g = 7$ atomes $|g\rangle$ sont détectés.

Les cartes compteur dont nous disposons, aussi bien pour l'ADwin que pour l'ancien ordinateur de contrôle, fonctionnent *via* deux entrées digitales :

- une entrée «Compteur», reliée à la sortie du détecteur à ionisation qui génère une impulsion TTL à chaque détection d'un atome,
- une entrée «Porte», dont l'utilité est donnée ci-après.

À un instant t_0 donné, l'horloge interne de la carte compteur est déclenchée : chaque impulsion TTL reçue sur l'entrée «Compteur» est alors comptée en incrémentant un entier n. Deux modes de fonctionnement peuvent être utilisés :

Comptes Dans ce mode, l'entier n est enregistré dans une pile FIFO à chaque impulsion reçue sur l'entrée «Porte» de la carte (voir figure III.3). La différence entre deux éléments successifs de la pile est alors le nombre d'atomes détectés dans la fenêtre définie par les deux dernières impulsions porte. C'est avec quatre telles impulsions, envoyées au début et à la fin de chaque fenêtre de détection, que nous comptons le nombre d'atomes $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ présents dans un paquet atomique ;

Temps d'arrivée Tous les p cycles de l'horloge, soit typiquement 10 à 100 ns, l'entier n est enregistré dans la pile. La différence entre deux éléments successifs de la pile est alors le nombre d'atomes détectés en p cycles d'horloge. C'est ce mode qui est utilisé pour tracer l'évolution temporelle du nombre d'atomes reçus par unité de temps.

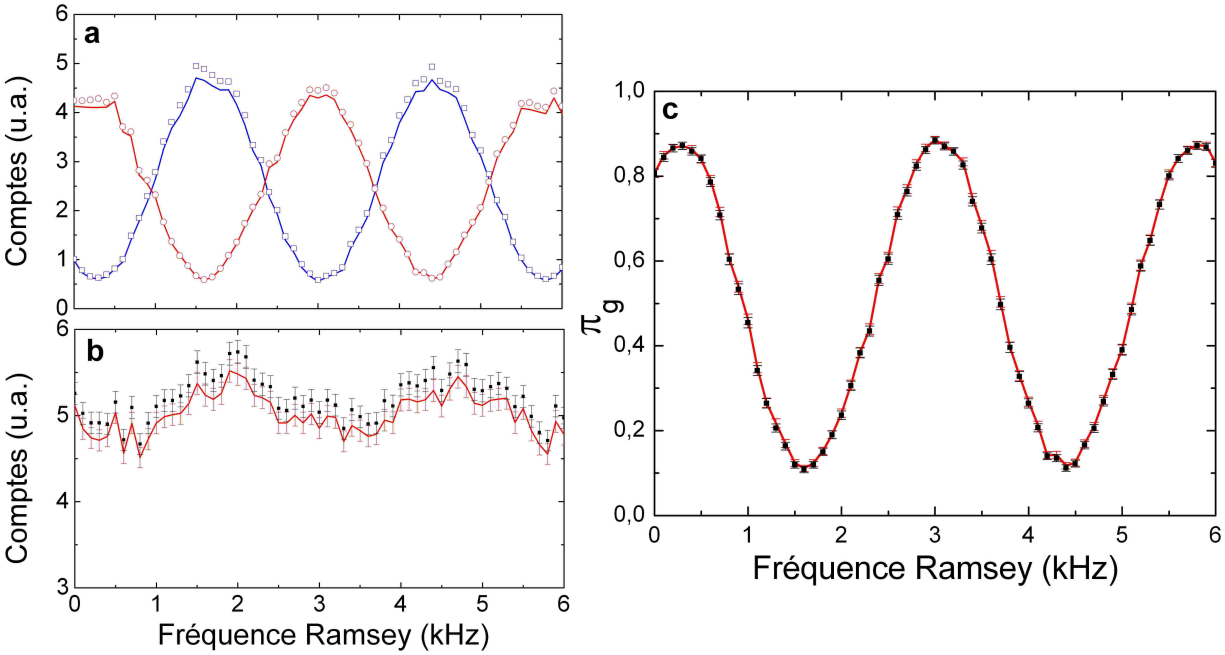


FIGURE III.4 – Comparaison des comptes et des franges de Ramsey obtenues avec les cartes compteur National Instruments (points) et ADwin (traits continus). **a.** Nombres d'atomes $|e\rangle$ (bleu) et $|g\rangle$ (rouge) détectés en unité arbitraire. **b.** Nombre total d'atomes détectés dans les mêmes unités que a. **c.** Probabilité de détecter un atome dans $|g\rangle$. L'origine des abscisses est arbitraire.

III.1.2.b Synchronisation des cartes compteur

Avant de lancer à proprement parler une expérience de rétroaction quantique, de nombreux tests et calibrations doivent être réalisés, l'objet de ce chapitre étant d'en rendre compte. Notons alors que toutes ces expériences préliminaires sont faites avec l'ancien contrôle de l'expérience uniquement. Pour que les conclusions que nous en tirons soient toujours valables quand nous laisserons l'ADwin détecter les atomes, il faut que les deux cartes compteurs, *i.e.* de l'ancienne (National Instruments) et de la nouvelle (ADwin) architecture, soient en parfait accord.

D'après ce qui précède, un tel accord semble aisé à réaliser : il suffit d'envoyer les mêmes impulsions porte aux deux cartes compteur. Ce n'est malheureusement pas aussi simple. Il peut en effet y avoir un temps de latence entre le moment où l'impulsion porte est reçue et le moment où le nombre de comptes est effectivement lu. Et ce temps de latence, qui dépend du matériel utilisé et du logiciel de contrôle, n'est bien évidemment *a priori* pas le même pour les deux systèmes de détection. Un possible délai existe donc entre les deux systèmes. Si tel est le cas, des atomes détectés dans $|e\rangle$ par un système sont détectés dans $|g\rangle$ par l'autre : à nombre total d'atome fixé, la proportion d'atomes dans $|e\rangle$ depend de la carte compteur utilisée.

Pour s'assurer que ce délai n'est pas trop grand et que cela n'est donc pas dommageable

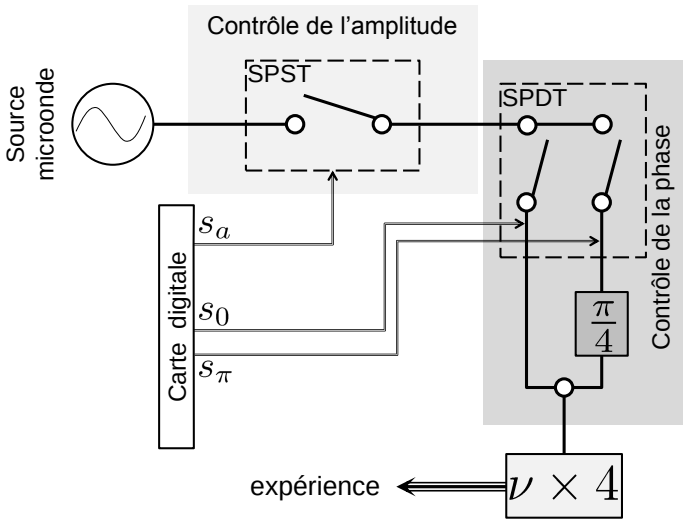


FIGURE III.5 – Circuit micro-onde : une source micro-onde classique à 12 GHz est reliée à l'entrée d'une diode PIN simple entrée/simple sortie, ouverte ou fermée *via* un signal digital s_a. La durée de l'impulsion TTL contrôle l'amplitude du champ injecté. La sortie de la diode SPST est reliée à l'entrée d'une diode simple entrée/double sortie, contrôlée par deux signaux digitaux s_0 et s_π. Dans l'une des voies de sortie, un déphaseur induit un déphasage de $\pi/4$ par rapport à l'autre branche. L'onde passe finalement par un quadrupleur de fréquence avant d'être injectée dans les guides d'onde de la cavité.

pour notre expérience, nous enregistrons un signal de franges de Ramsey, en utilisant simultanément la carte National Instruments et la carte ADwin. Les résultats sont donnés figure III.4. Il apparaît clairement que la différence entre les deux franges est négligeable. Toutefois la carte ADwin détecte systématiquement moins d'atomes que la carte NI, la différence étant de l'ordre de 3%. Ce désaccord ne peut pas être expliqué par un décalage temporel des fenêtres de détection, puisque ce défaut touche aussi bien les comptes dans $|e\rangle$ que dans $|g\rangle$. Un faible taux de comptes est donc manqué par la carte ADwin, mais là encore dans une proportion suffisamment faible pour pouvoir être oublié.

Notons finalement qu'une estimation plus précise du délai entre les deux systèmes, donnée dans l'annexe A, fait apparaître un retard de l'ordre de 50 ns seulement du système NI par rapport à l'ADwin. Il est en particulier plus faible que la résolution avec laquelle les fenêtres de détection peuvent être contrôlées (100 ns).

III.1.3 Injections micro-ondes

Attardons nous maintenant sur la façon dont sont contrôlées les injections de champ micro-onde. Nous avons déjà vu au chapitre I comment l'utilisation de diodes PIN dirigées par signal TTL permet de choisir l'amplitude des injections. Précisons ici ce qu'il en est du contrôle de la phase.

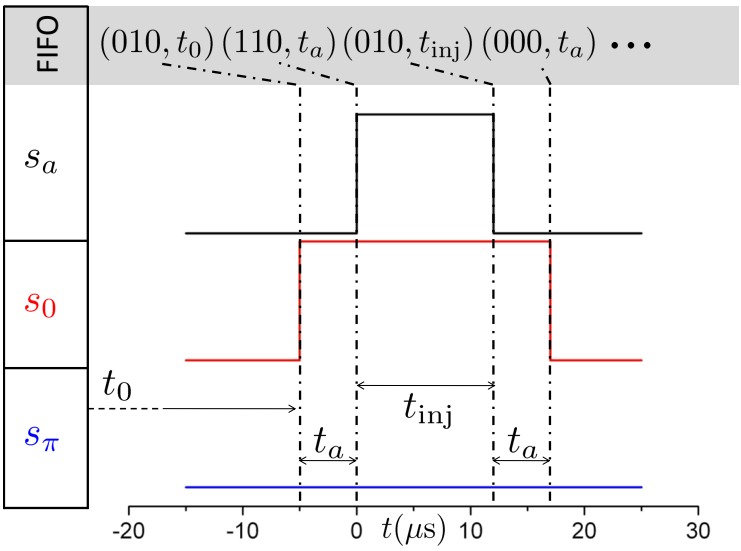


FIGURE III.6 – Séquence de signaux digitaux pour l'injection d'un champ d'amplitude et phase contrôlées. *Bandeau supérieur :* Succession des couples nombre binaire/temps inscrits dans la pile FIFO et permettant la réalisation de la séquence donnée ici. Le nombre binaire est $s_{\mathrm{MW}} = [s_a s_0 s_\pi]$. *Traces :* Évolution temporelle des signaux digitaux s_a (noir), s_0 (rouge) et s_π (bleu) permettant d'injecter pendant une durée t_{inj} un champ de phase 0. L'avance t_a est définie dans le texte.

Au chapitre II, nous avons expliqué que nous pouvions nous contenter d'injections réelles pour réaliser notre boucle de rétroaction. Cela signifie que la phase des champs cohérents injectés, relativement au champ initial, est 0 ou π. Nous avons donc opté pour l'utilisation d'un déphaseur variable (Spectrum Microwave) inséré dans l'une des voies de sortie d'une diode PIN SPDT (Single Pole Double Throw), *i.e.* à une entrée et deux sorties (figure III.5), les deux voies étant recombinées après le déphaseur. De façon semblable à la diode PIN réglant l'amplitude de l'injection, l'ouverture ou la fermeture des deux voies de la diode SPDT sont contrôlées *via* deux signaux digitaux indépendants. En décidant d'ouvrir l'une ou l'autre de ces voies, il est possible de contrôler la phase de l'injection.

Le réglage du déphaseur en tant que tel ne sera abordé qu'au paragraphe III.3. Précisons simplement ici que l'onde en sortie de la source étant à $\sim$ 12 GHz, puis quadruplée à $\sim$ 51 GHz juste avant d'être injectée dans les guides d'ondes du cryostat, le déphaseur se doit de déphaser l'onde de $\pi/4$ seulement.

L'utilisation des deux voies du déphaseur suffit *a priori* au contrôle simultané de la phase et de l'amplitude du champ cohérent injecté. Le choix de la voie fixe la valeur de la phase tandis que la durée de l'ouverture de l'interrupteur correspondant règle l'amplitude. Toutefois, pour s'affranchir des éventuels problèmes de différence de temps de commutation entre les deux voies, nous préférons faire l'usage d'une troisième diode PIN dévolue au contrôle de l'amplitude seule. Il s'agit en fait de la diodé SPST déjà décrite au paragraphe I.1.2.b. L'injection d'un champ cohérent $|\alpha\rangle$ d'amplitude et phase fixées se fait donc *via* le

contrôle de trois signaux digitaux, l'un s_a devant fixer la valeur de $|\alpha|$, tandis que les deux autres, s_0 et s_π, permettent de choisir entre $\arg(\alpha) = 0$ ($s_0 = +1$ et $s_\pi = 0$) et $\arg(\alpha) = \pi$ ($s_0 = 0$ et $s_\pi = +1$). Il faut toutefois s'assurer que l'ouverture ou la fermeture des voies de la diode SPDT ne modifient pas la longueur de l'injection définie par s_a. Pour ce faire, nous ne nous autorisons à modifier les valeurs de s_0 et s_π que $t_a = 5\,\mu\text{s}$ avant le début ou après la fin de l'impulsion s_a, *i.e.* quand la diode SPST est fermée seulement. Notons que l'avance t_a choisie ici est relativement longue et, qu'au besoin, elle pourra être réduite. En effet, la seule contrainte basse sur t_a est donnée par le temps de commutation t_c des diodes, de l'ordre de 100 ns : $t_a \gg t_c$.

La figure III.6 donne un exemple de séquence réalisant une injection micro-onde de phase «0». Cette séquence d'impulsions digitales est réalisée *via* l'utilisation de la carte DIO32 de l'ADwin. Comme nous l'avons déjà dit, cette carte possède sa propre horloge et une pile FIFO, remplie de couples (x, t) nombre binaire/temps. Ici, le nombre binaire à *réaliser* est le nombre à 3 bits s_{MW} qui s'écrit $[s_a s_0 s_\pi]$ en notation binaire. Comme suggéré ci-dessus, nous avons choisi comme convention d'associer l'état ouvert du commutateur à la valeur $+1$ de s. Ainsi, le nombre $s_{\text{MW}} = 101$ correspond à un injection en cours (diode SPST ouverte, $s_a = +1$) avec la phase π (voie «0» de la diode SPDT fermée, $s_0 = 0$, voie «π» ouverte, $s_\pi = +1$). Le bandeau supérieur de la figure III.6 donne la succession des couples (x, t) utilisés pour générer la séquence associée. Rappelons que le temps t est le temps d'horloge, donné relativement à l'événement précédent, auquel le nombre x doit être réalisé.

III.1.4 Synchronisation avec la séquence expérimentale

Dans les deux parties précédentes, nous avons vu comment nous comptons utiliser la carte compteur pour la détection atomique, et la carte DIO32 pour l'injection des champs cohérents de contrôle. Le chapitre II a quant à lui donné le détail des calculs qui devront être faits par la carte CPU. Si leurs fonctionnements *individuels* ont donc déjà été donnés, nous n'avons pas encore expliqué comment ces cartes fonctionneront *ensemble*, et au sein d'une architecture expérimentale plus vaste : l'ancien système est toujours utilisé pour toute l'excitation des atomes, les impulsions de champ micro-ondes dans les zones de Ramsey, le déclenchement des rampes d'ionisation... Là est tout l'objet de cette section.

Le fonctionnement de l'ordinateur de contrôle, au cours d'une expérience de rétroaction quantique, est subdivisé en trois grandes phases : une phase d'initialisation, une phase correspondant au déroulement de l'expérience elle-même, et enfin une phase de terminaison.

Initialisation Avant de lancer le premier atome de Rydberg à travers la cavité, les cartes de l'ordinateur de contrôle doivent être préparées :

- Au niveau du CPU, sont initialisées toutes les variables nécessaires au calcul futur des corrections cohérentes. C'est notamment dans cette phase que tous les paramètres expérimentaux (temps séparant deux échantillons atomiques, calibration des injections, phase de l'interféromètre...) sont mis dans la mémoire de la carte ;

- La carte de sortie digitale est quant à elle mise dans son état par défaut. Étant donné qu'elle ne contrôle que la ligne d'injection micro-onde, cela consiste à donner la valeur par défaut du nombre binaire $s_{\mathrm{MW}} = [s_a s_0 s_\pi]$. Au lieu de se contenter de fermer toutes les voies ($s_{\mathrm{MW}} = 000$), nous préférons laisser ouverte la voie «0» de la diode contrôlant la phase d'injection. Nous n'aurons ainsi à modifier $[s_0 s_\pi]$ que lorsque le régulateur aura décidé d'injecter un champ de phase π. À la fin de la phase d'initialisation, la carte DIO32 est donc dans l'état

$$s^0_{\mathrm{MW}} = 010. \tag{III.1}$$

- Au cours de cette première phase enfin, la carte compteur, mise en mode «Comptes», voit son horloge déclenchée. L'ordinateur commence donc à compter les impulsions en sortie du détecteur à atomes quelques secondes à quelques minutes [4] avant l'ionisation du premier atome.

Expérience Une fois l'ordinateur de contrôle de la rétroaction ainsi préparé, il ne nous reste plus qu'à démarrer la séquence expérimentale [5]. Comme nous l'avons évoqué précédemment, une grande partie en reste pré-programmée. Puisque seules les impulsions micro-ondes vers la cavité sont contrôlées par l'ADwin, la préparation des atomes (impulsions laser, radio-fréquence et micro-onde), la manipulation de leur état interne (impulsions $\pi/2$ dans les zones de Ramsey), et leur détection (déclenchement de la rampe d'ionisation, et génération des impulsions porte) voient tous leurs paramètres et minutages contrôlés par le système NI. Retenons pour l'instant seulement que :

- un échantillon atomique est préparé tous les $T_a = 82\,\mu\mathrm{s}$,
- $1104\,\mu\mathrm{s}$ après l'impulsion laser d'excitation, la rampe de détection est générée. Celle-ci dure $21\,\mu\mathrm{s}$ mais la fenêtre de détection des atomes $|g\rangle$, qui vient chronologiquement après celle des atomes $|e\rangle$, est close $11\,\mu\mathrm{s}$ après son déclenchement. Par conséquent, $1115\,\mu\mathrm{s}$ après l'impulsion laser, la détection de tous les niveaux à détecter est achevée.

Du point de vue de l'ancien système de contrôle, la séquence programmée ne diffère alors de celle utilisée pour la mesure de franges de Ramsey dans le vide que par un seul point : une impulsion digitale supplémentaire est envoyée à chaque échantillon préparé, *i.e.* tous les T_a, sur l'entrée «Event IN» de la carte CPU de l'ADwin. C'est par cette impulsion, et par cette impulsion seule, que la synchronisation avec l'ordinateur chargé de la rétroaction est réalisée. Voyons maintenant de quelle façon.

4. Selon le temps de latence de l'utilisateur.
5. Dont nous donnerons le détail au paragraphe IV.1.

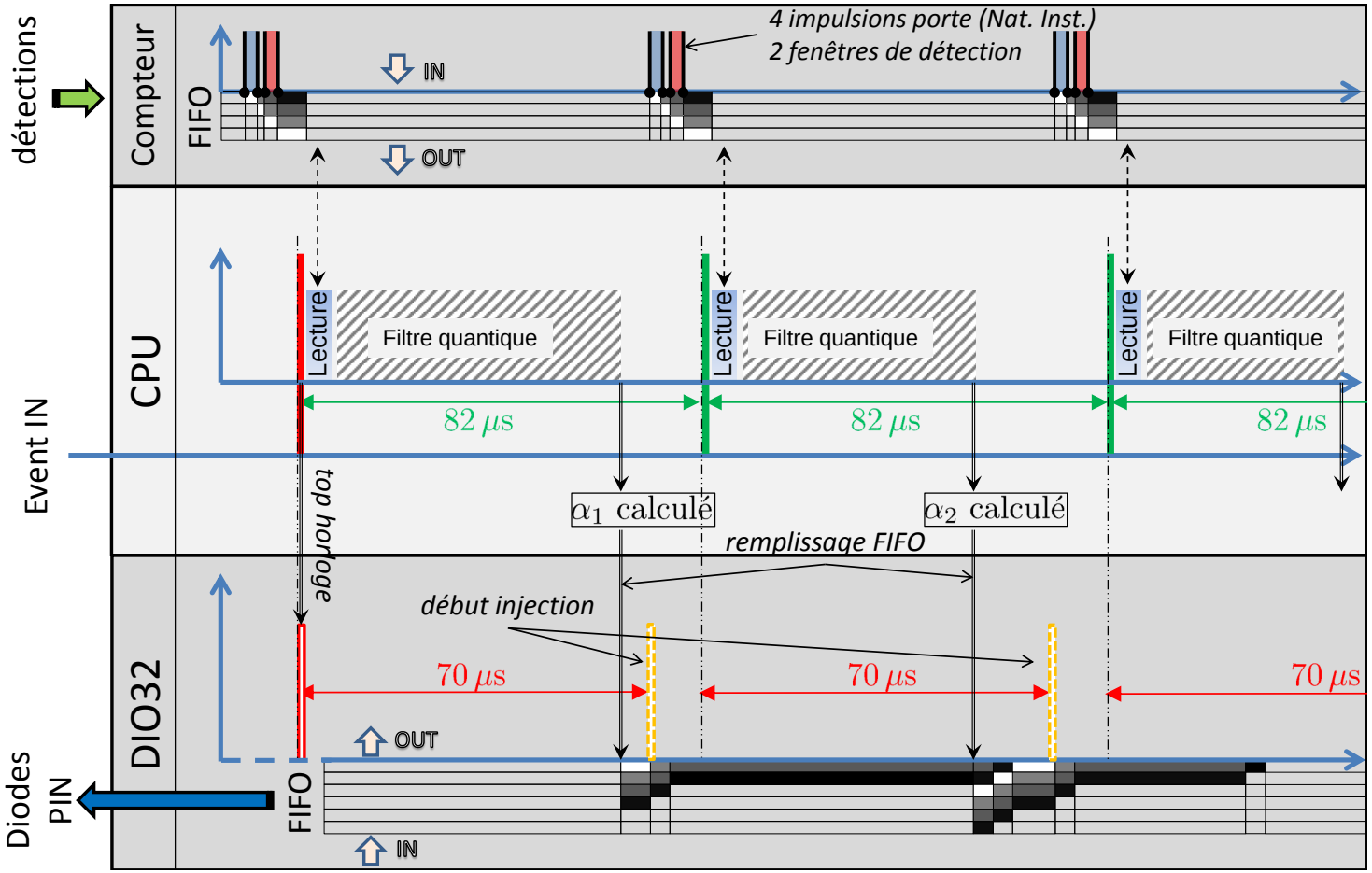


FIGURE III.7 – Synchronisation de l'ordinateur de contrôle. *Piles FIFO :* Elles sont symbolisées par des grilles, chaque case (niveaux de gris) correspondant à un élément de la pile. Elles sont remplies par le côte *IN* et vidées par le côte *OUT*. *Carte compteur :* À chaque impulsion porte reçue, générée par le système NI, un élément est ajouté à la pile. Celle-ci est vidée par la carte CPU. *Carte CPU :* Toutes les 82 µs, une impulsion «Event IN» (barres rouge et vertes) déclenche la lecture des comptes puis le calcul du filtre quantique. Le résultat est inséré dans la pile de la carte DIO32. *Carte DIO32 :* Son horloge est déclenchée par le top horloge généré par la carte CPU (barre rouge). 70 µs après chaque impulsion événement, l'injection débute (barres jaunes) : la pile FIFO est vidée.

Sur la figure III.7, nous schématisons la façon dont sont synchronisés les trois cartes de l'ADwin et l'ancien système de contrôle. Toutes les 82 µs, la carte CPU reçoit *via* son entrée «Event IN» une impulsion digitale (rectangles rouge et verts sur la figure III.7). Celle-ci est envoyée 1117 µs après le laser d'excitation, *i.e.* après que tous les atomes aient été détectés : la quatrième et dernière impulsion porte a d'ores et déjà été reçue par la carte compteur, et sa pile FIFO contient les quatre comptes nécessaires au calcul des nombres n_e et n_g d'atomes $|e\rangle$ et $|g\rangle$, respectivement, présents dans l'échantillon qui vient d'être détecté (bandeau supérieur du schéma de principe). La réception d'une impulsion événement entraîne dès lors la chaîne d'événements suivants :

- Dans un premier temps, la carte CPU accède à la pile FIFO du détecteur et lit les quatre derniers comptes qui y sont stockés (double flèche en pointillés sur la figure) de sorte à calculer n_e et n_g. Notons qu'il est alors crucial que l'impulsion externe arrive sur la carte CPU *après* la dernière impulsion porte de la carte compteur. Suite à la lecture, la pile FIFO de la carte compteur est vidée ;
- Au vu des détections atomiques n_e et n_g, le filtre quantique actualise alors son estimation de la matrice densité du champ dans la cavité, et le régulateur calcule l'amplitude et la phase du champ cohérent à injecter. Cette étape, matérialisée par un rectangle hachuré sur la figure III.7, est de durée variable. Le paragraphe III.4.1 explique comment nous la rendons aussi courte que possible ;
- Une fois la correction souhaitée α_k calculée, il faut demander à la carte digitale de l'exaucer. Pour cela, la carte CPU accède à la pile FIFO de la carte DIO32 et y inscrit une séquence de couples (s_{MW}, t), de la façon suggérée au paragraphe III.1.3. Ceci ne peut cependant marcher que si les horloges des cartes CPU et DIO32 sont bien synchronisées : le temps t, calculé par la carte du processeur, est interprété par la carte digitale. Pour ce faire, lorsque la carte CPU reçoit la première impulsion événement (rectangle rouge sur la figure III.7), elle déclenche simultanément son horloge *et* l'horloge de la carte digitale («top horloge» sur la figure). Notons par ailleurs que ces calculs sont faits de telle sorte que l'injection de la micro-onde débute un intervalle de temps fixé, en pratique 70 µs, après la réception de l'impulsion événement. Elle commence ainsi toujours avant la réception de l'impulsion suivante. La figure III.8 donne la chronologie des impulsions digitales associées à un échantillon atomique unique.

À chaque réception d'une impulsion événement, les trois étapes ci-dessus sont alors répétées jusqu'à l'arrêt de la trajectoire quantique, selon un des critères donnés au chapitre II. Si l'expérience doit être répétée, une partie de la phase d'initialisation est reproduite (les variables par exemple existent déjà, il faut simplement leur donner leurs valeurs initiales) et le processeur se remet en attente d'un signal sur son entrée «Event IN». Sinon, la phase de terminaison est lancée.

Terminaison Une fois l'expérience terminée, les horloges des cartes compteur et DIO32 sont stoppées, la carte digitale est remise dans son état par défaut, et l'exécution du programme s'arrête. Toutes les données enregistrées par l'ADwin au cours de l'expérience sont alors accessibles à un ordinateur externe.

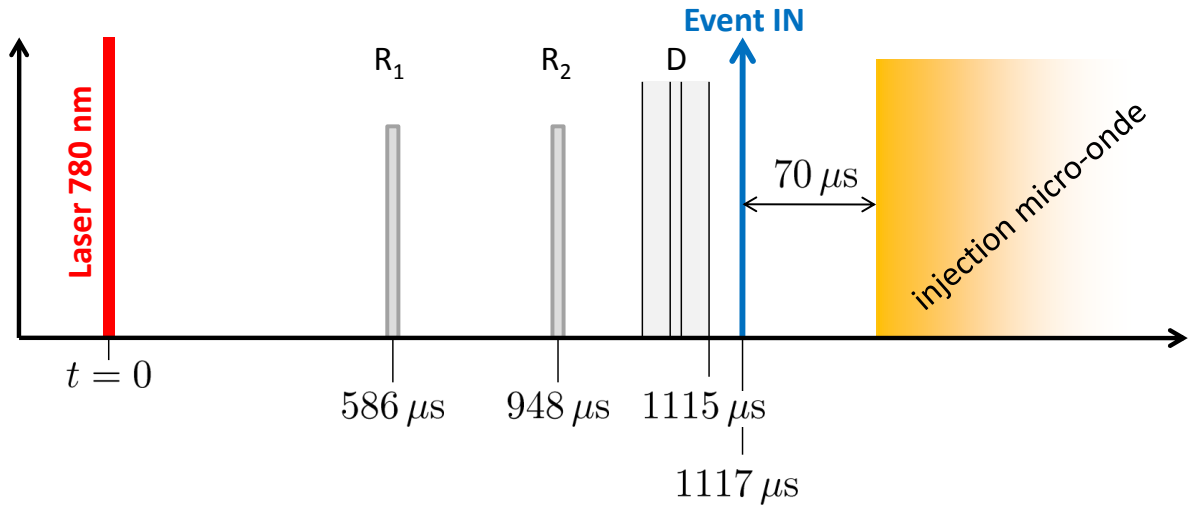


FIGURE III.8 – Chronologie des impulsions digitales pour une préparation atomique unique. L'origine des temps correspond à l'impulsion laser excitatrice à 780 nm. L'atome ainsi préparé subit deux impulsions micro-ondes $\pi/2$, à $t = 586\,\mu s$ et $948\,\mu s$, dans les zones de Ramsey. Il est finalement détecté dans deux fenêtres temporelles closes à $t = 1115\,\mu s$. $2\,\mu s$ plus tard, une impulsion TTL est envoyée sur l'entrée «Event IN» de la carte CPU de l'ADwin, qui réalise alors $70\,\mu s$ plus tard une injection micro-onde dans la cavité. Par souci de lisibilité, l'échelle n'est pas respectée.

III.2 Calibration des paramètres expérimentaux

Nous avons décrit au chapitre précédent comment le filtre quantique, connaissant les amplitudes des injections cohérentes réalisées et les résultats des détections atomiques peut estimer en temps réel l'état du champ dans la cavité. Pour que l'estimation soit aussi précise que possible, et par conséquent les corrections d'autant plus efficaces, il nous faut avoir une connaissance et un contrôle précis aussi bien de la façon dont fonctionne le détecteur à atomes, que des caractéristiques des champs cohérents de correction et des paramètres de notre mesure QND. Dans cette section, nous nous intéresserons successivement à chacun de ces points.

III.2.1 Contrôle de l'amplitude des corrections

Intéressons nous dans un premier temps au paramètre de contrôle de notre rétroaction quantique, à savoir l'amplitude des champs cohérents injectés dans la cavité. Après avoir détaillé certaines contraintes expérimentales, nous décrirons la façon dont nous les calibrons.

III.2.1.a Contraintes expérimentales

Au paragraphe I.1, nous avons expliqué comment le champ micro-onde intracavité est couplé à une source classique, de fréquence et d'amplitude contrôlées, et comment, en créant une impulsion de durée τ à l'aide d'une diode PIN, nous pouvons choisir l'amplitude du champ cohérent injecté,

$$\alpha(\tau) = \gamma\tau. \tag{III.2}$$

Dans le cadre de notre rétroaction quantique, tous les $T_a = 82\,\mu\text{s}$, le régulateur peut décider d'injecter un champ aussi grand que $\alpha_{\text{max}} = 0,1$, soit $0,01$ photon en moyenne. Cela correspond à un taux d'injection $\gamma \geq 0,1/82 = 10^{-3}\,\mu\text{s}^{-1}$. *A priori*, cette contrainte semble peu sévère. Dans des expériences précédentes, à titre de comparaison, nous étions capables en quelques microsecondes d'injecter des champs aussi grands que 4 à 5 photons. Cela correspond à un coefficient γ 10^3 fois plus grand.

Cependant, comme nous avons pu le voir sur les simulations numériques du chapitre précédent, nous ne pouvons pas nous contenter d'injections aussi grandes que α_{max} : pour que la rétroaction puisse être efficace, il faut permettre à α de varier sur une gamme relativement large. Nous devons alors pouvoir répondre à deux questions :

- «quelle est l'amplitude minimale des corrections dont nous avons besoin ?»,
- «quelle est la durée minimale de l'injection que nous autorisons ?».

Imaginons que le champ soit initialement préparé dans un état cohérent $|\alpha_0\rangle$. Après un temps T_a, son amplitude aura varié de

$$\delta\alpha = \alpha_0 \frac{T_a}{2\mathrm{T}_{\text{cav}}}, \tag{III.3}$$

T_{cav} étant le temps de vie d'un photon dans la cavité. Pour $T_a = 82\,\mu\text{s}$, et un champ de 3 photons, on trouve

$$\delta\alpha \approx 10^{-3}. \tag{III.4}$$

Cette estimation fixe l'ordre de grandeur des injections les plus faibles que nous aurons à faire au vu des paramètres expérimentaux : $\alpha_{\text{min}} = \delta\alpha$. Une telle amplitude est en effet tout juste compensée par la relaxation sur la durée d'une itération de la boucle. Comme annoncé au chapitre II, les bornes imposées aux injections cohérentes de correction sont donc :

$$\alpha_{\text{max}} = 0,1 \qquad\qquad \alpha_{\text{min}} = 0,001. \tag{III.5}$$

La gamme choisie des amplitudes s'étend sur deux décades. Il doit donc en être de même de la gamme des temps d'injection. Si alors nous optons pour le taux γ minimum, $\gamma_{\text{m}} = 10^{-3}\,\mu\text{s}^{-1}$, à savoir tel que α_{max} soit injecté en $82\,\mu\text{s}$, alors α_{min} est injecté en $0,8\,\mu\text{s}$.

Or les diodes PIN utilisées, contrôlées par des signaux TTL, ont typiquement des temps de commutation t_{c} de l'ordre de 100 ns. Si nous voulons des injections qui soient toujours

relativement longues devant t_c, le choix $\gamma = \gamma_m$ semble imposé (à un facteur numérique proche de l'unité près).

Comme mentionné précédemment, nous devons donc faire en sorte que le taux d'injection soit maintenant 1000 fois plus faible que ce que nous utilisions précédemment. Cela correspond à 60dB d'atténuation supplémentaires. L'usage d'un mixeur passif en lieu et place du quadrupleur actif précédemment utilisé, ainsi que l'ajout d'une atténuation fixe de 30 dB, avant l'atténuateur variable (paragraphe I.1.2.b) permettant le réglage fin de γ, ont été nécessaires.

Avant de terminer ce paragraphe, il ne faut pas oublier que, outre les champs cohérents de correction, il nous faudra préparer le champ de la cavité dans l'état cohérent initial, état qui contient quelques photons. Or, les corrections cohérentes de la rétroaction se doivent d'avoir une relation de phase bien définie avec le champ initial. Il nous faudra donc utiliser la même source classique, *via* les mêmes câbles et guides d'onde, pour assurer une telle contrainte. L'usage de deux voies d'injection est par exemple à proscrire, puisque toute variation légère de la température, par exemple, le long d'un des circuits induit des variations de phase incontrôlables entre les deux chemins. L'injection initiale durera ainsi typiquement, pour un champ initial de 3 photons,

$$t_{\mathrm{ini}} = \gamma_{\mathrm{m}}^{-1}\sqrt{3} = 1,5\,\mathrm{ms}. \tag{III.6}$$

III.2.1.b Calibration

Voyons maintenant comment calibrer le taux d'injection γ. Pour cela, nous mesurons, pour plusieurs champs cohérents $|\alpha\rangle$ préparés, un signal de franges de Ramsey, *i.e.* la probabilité de détecter un atome dans $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre, $\pi_g(\alpha)$. Les franges de Ramsey en présence d'un champ cohérent $|\alpha\rangle$ étant la somme des franges obtenues dans les états de Fock $|n\rangle$ pondérées par les populations $P(n)$ du champ préparé, il vient

$$\pi_g(\alpha) = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{n\geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \pi_g(n), \tag{III.7}$$

$$\text{où} \quad \pi_g(n) = \pi_0 + \frac{C}{2}\cos\left(\phi_r + \phi(n)\right). \tag{III.8}$$

En faisant l'hypothèse d'un déphasage par photon linéaire[6], $\phi(n) = n\phi_0$, on peut alors montrer que

$$\pi_g(\alpha = \gamma t_S) = \pi_0 + \frac{C}{2}\cos\left(\phi_r + (\gamma t_S)^2 \sin\phi_0\right) \mathrm{e}^{(\gamma t_S)^2(\cos\phi_0 - 1)}. \tag{III.9}$$

Les paramètres π_0, C et ϕ_r pouvant être mesurés au préalable sur des franges de Ramsey avec une cavité vide, et le déphasage par photon ϕ_0 étant déterminé par ailleurs (voir

6. De même qu'au chapitre I, nous incluons le déplacement de Lamb dans la phase ϕ_r de l'interféromètre. Par conséquent, $\phi(0) = 0$.

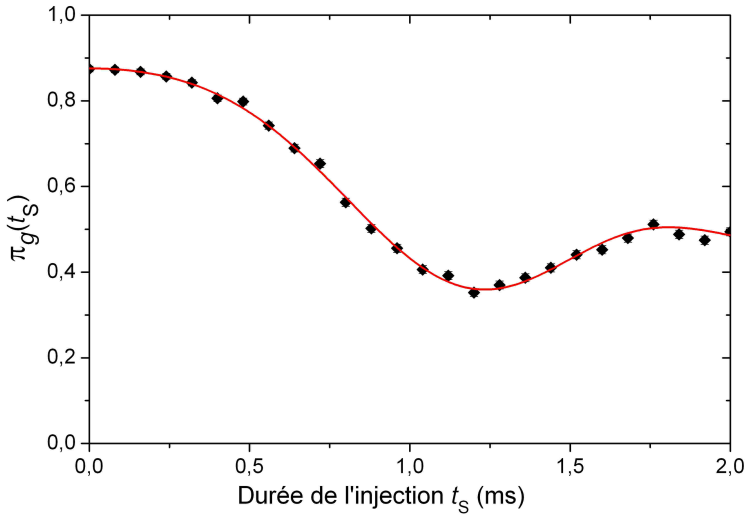


FIGURE III.9 – Calibration des injections cohérentes : Probabilité de détecter un atome dans $|g\rangle$ en fonction de l'amplitude, en unité de temps, du champ cohérent injecté dans la cavité. La courbe rouge correspond à un ajustement à un paramètre (γ, voir texte), ici $\gamma^{-1} = (633 \pm 3)\mu$s. L'intervalle entre deux points de mesure est de 80 µs.

paragraphe III.2.3), le tracé de $\pi_g(t_S)$ et son ajustement par la loi (III.9) fournissent alors γ, le seul paramètre libre de l'ajustement. La figure III.9 donne un exemple d'une telle calibration, pour lequel la phase de l'interféromètre a été choisie nulle ($\phi_r = 0$). Le résultat trouvé est ici

$$\gamma^{-1} = (633 \pm 3)\,\mu\text{s}, \tag{III.10}$$

où γ^{-1} est le temps nécessaire à l'injection d'un champ d'amplitude unité.

Nous avons vu au paragraphe précédent que les durées d'injection varieront sur plus de trois décades au cours d'une expérience typique de rétroaction quantique, si l'on compare l'amplitude α_{min} à celles des champs cohérents préparés en début d'expérience. La calibration proposée figure III.9 explore cependant des variations sur des échelles de temps de l'ordre de la milliseconde seulement. En effet, même si l'intervalle entre deux points de mesure est de 80 µs, avec le choix de ϕ_r ici fait, $\pi_g(t_S)$ ne varie significativement que pour t_S de l'ordre de quelques centaines de microsecondes. Il nous a donc fallu vérifier que la dépendance linéaire en t_S de l'amplitude du champ injecté est bel et bien valable sur les trois décades explorées.

Pour cela, nous avons comparé la mesure de $\pi_g(\alpha_0 = \gamma t_0)$ faite ci-dessus à une situation où nous injectons une succession de N impulsions courtes, de durée $\tau = 2\,\mu$s, et distantes de 1 µs, telles que $N\tau = t_0$. Nous traçons figure III.10 les résultats obtenus pour $N = 150$, 300, 500, et 700, superposés aux résultats obtenus avec des injections continues. Le très bon

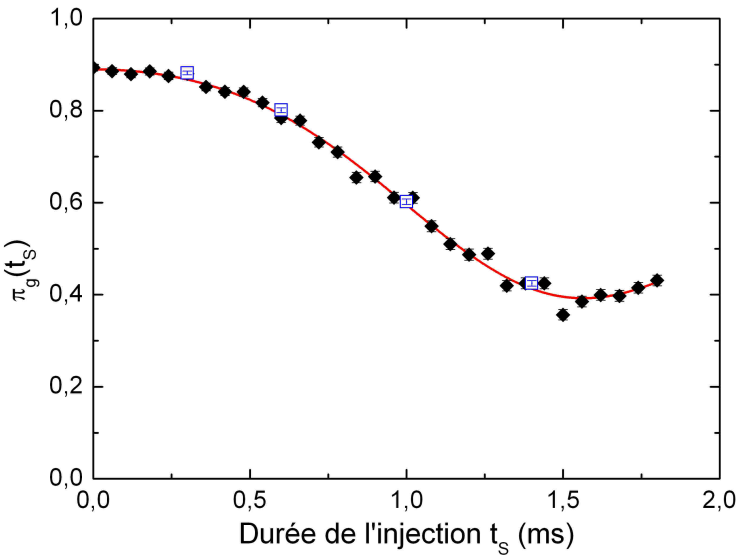


FIGURE III.10 – Linéarité de la chaîne d'injection : Comparaison de l'amplitude des champs créés par une impulsion de durée t_S (points noirs et ajustement rouge), et N impulsions de durée t_S/N (carrés bleus), par mesure de la probabilité de détecter un atome dans $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre.

accord entre les deux mesures confirme le comportement linéaire de la chaîne d'injection des plus petites aux plus grandes amplitudes des champs cohérents préparés.

III.2.2 Calibration du détecteur

L'un des éléments cruciaux de notre boucle de rétroaction est bien évidemment le détecteur à atomes. Outre les prédictions *a priori* que nous pouvons faire étant donné notre connaissance du système et de sa relaxation, c'est par lui seul que nous acquérons de l'information en temps réel sur le champ piégé dans la cavité. Connaître précisément ses paramètres de fonctionnement, et les prendre en compte *in extenso* dans le filtre quantique est donc absolument nécessaire. Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons successivement à la façon dont nous avons optimisé puis caractérisé le fonctionnement du détecteur. L'inclusion de son efficacité limitée dans le filtre quantique ne sera donnée qu'au paragraphe III.4.

III.2.2.a Optimisation du détecteur

Nous avons déjà décrit au paragraphe I.2.3 le détail du fonctionnement du détecteur à ionisation. Les paramètres que nous cherchons ici à optimiser et caractériser sont les

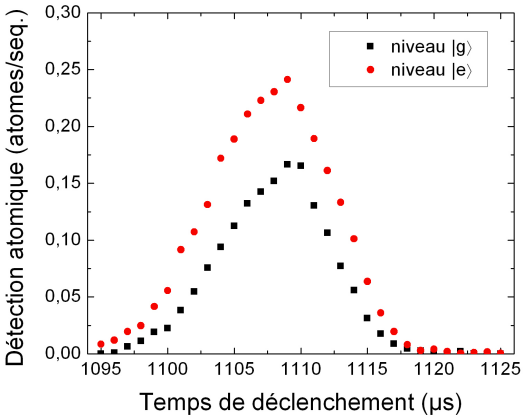


FIGURE III.11 – Détections en fonction de l'instant de déclenchement de la rampe d'ionisation, pour les niveaux $|e\rangle$ (points rouges) et $|g\rangle$ (carrés noirs). L'origine des temps correspond à l'impulsion laser d'excitation.

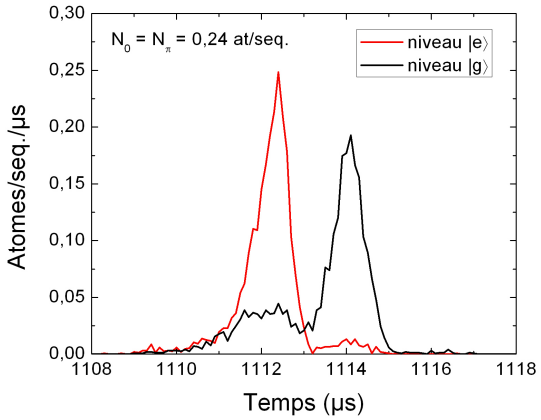


FIGURE III.12 – Signal temporel de détection pour un atome préparé dans $|e\rangle$ (courbe rouge) ou dans $|g\rangle$ (courbe noire). La rampe de détection est déclenchée 1104 µs après le début de l'impulsion laser d'excitation.

suivants.

L'efficacité de détection Notée ϵ_d, elle est définie comme le rapport du nombre d'atomes détectés sur le nombre d'atomes qui ont effectivement atteint le détecteur ;

Le taux d'erreur Si un atome $|e\rangle$ atteint le détecteur, la probabilité qu'il soit détecté comme un atome dans le niveau $|g\rangle$ n'est pas nulle. Cette probabilité d'erreur peut *a priori* dépendre du niveau réel de l'atome, et nous la noterons donc η_e ou η_g selon que l'atome est dans $|e\rangle$ ou $|g\rangle$, respectivement.

Notons qu'*a priori* ϵ_d peut également dépendre du niveau atomique. Un déséquilibre dans l'efficacité de détection doit cependant être évité. Outre le fait que cela indiquerait une mauvaise utilisation du détecteur, nous aurions alors en sortie de l'interféromètre un nombre moyen d'atomes par paquet dépendant de l'état des atomes, et donc de l'état du champ. Cela rendrait encore plus complexe l'inclusion dans le filtre quantique de la statistique d'occupation des paquets atomiques, comme nous aurons à le faire, au vu des conclusions de cette partie. Il nous a donc fallu jouer sur les valeurs des potentiels des électrodes du détecteur, ainsi que sur l'instant auquel la rampe de détection est déclenchée, pour faire en sorte que les deux niveaux soient détectés de façon symétrique, sans pour autant réduire ϵ_d significativement.

Le réglage est fait en deux étapes :

– Dans une première expérience, nous préparons les atomes dans l'état $|e\rangle$ ou dans l'état $|g\rangle$ dans la boîte à circulariser. Pour chacune de ces préparations, nous mesurons le nombre total d'atomes détectés par paquet en fonction de l'instant auquel nous déclenchons la rampe de détection. Cela revient à faire varier la position du

nuage atomique vis à vis du détecteur au moment de l'ionisation. Les résultats d'une telle mesure sont donnés figure III.11. Le passage du nuage atomique au centre du détecteur se matérialise par un «plateau» sur le signal enregistré, et c'est bien sûr dans cette région que l'efficacité de détection est la meilleure. Il faut donc trouver un jeu de paramètres tel que le plateau obtenu avec les atomes $|e\rangle$ ait un recouvrement avec celui obtenu avec les atomes $|g\rangle$. Ici, déclencher la rampe de détection 1104 µs après l'impulsion laser d'excitation est un bon choix ;

– Dans une deuxième expérience, l'instant auquel la rampe doit être déclenchée ayant été déterminé ci-dessus, nous enregistrons le signal temporel de détection atomique pour un atome préparé dans l'état $|e\rangle$ et le comparons à celui où nous faisons de surcroît une impulsion π dans l'une des zones de Ramsey, préparant ainsi [7] un atome dans $|g\rangle$. Nous comparons alors le nombre total d'atomes détectés dans les deux situations, *i.e.* l'intégrale temporelle du signal obtenu, noté respectivement N_0 ou N_π. Si les niveaux préparés sont purs et si l'impulsion π est parfaite, N_0 est simplement le nombre d'atomes détectés dans $|e\rangle$ et N_π le nombre d'atomes détectés dans $|g\rangle$. Si $|e\rangle$ et $|g\rangle$ sont détectés avec la même efficacité, alors ce nombre ne doit pas varier d'une situation à l'autre : $N_0 = N_\pi$. Notons par ailleurs que même si l'impulsion π n'est pas parfaite, N_0 et N_π ne sont égaux que si la détection est équilibrée. Le résultat d'un telle expérience est donnée figure III.12. Ici, nous trouvons [8] $N_0 = 0,240 \pm 0,004$ et $N_\pi = 0,245 \pm 0,004$ atomes préparés par échantillon, confirmant ainsi le bon réglage du détecteur.

De telles mesures doivent alors être réalisées pour plusieurs choix des potentiels électriques dans le détecteur (anode et lentilles électrostatiques, voir paragraphe I.2.3), jusqu'à ce que les deux critères évoqués ci-dessus soient satisfaits. Les résultats des figures III.11 et III.12 correspondent à un réglage satisfaisant.

III.2.2.b Efficacité de détection

Une fois fixés les potentiels des électrodes du détecteur, et l'instant auquel la rampe d'ionisation est déclenchée, il ne nous reste plus qu'à caractériser effectivement la détection, *i.e.* mesurer ϵ_d, η_e et η_g. Intéressons nous tout d'abord à ϵ_d.

Comme nous l'avons déjà évoqué, la mesure précise de l'efficacité de détection est très importante dans le cadre de nos expériences de rétroaction quantique. Elle l'a été d'autant plus que, si dans les dernières expériences réalisées dans le groupe [74, 76, 75, 77], ϵ_d a toujours été de l'ordre de 50%, elle est tombée à moins de 10% après un accident survenu sur le montage. En effet, la destruction puis le remplacement, survenus entre temps, de la jupe

7. Notons que la préparation des niveaux $|g\rangle$ est alors différente de celle faite pour choisir l'instant auquel la rame de détection est déclenchée. Les atomes étaient alors directement préparés dans l'état $|g\rangle$ dans la boîte à circulariser. Nous ne pouvons pas utiliser ici cette méthode puisque l'efficacité de la préparation par purification du niveau $|52C\rangle$ (voir paragraphe I.2.3) dépend du niveau préparé.

8. Les nombres obtenus résultent d'une moyenne sur $p = 15300$ réalisation. L'erreur statistique relative est donc de $\sqrt{pN}^{-1} \simeq 1,6\%$.

à azote du cryostat ont notamment [9] eu comme conséquence le désalignement du détecteur à ionisation avec les compteurs d'électrons. Un réalignement du détecteur a donc dû être fait, nous permettant de ramener ϵ_d vers ses valeurs — sinon historiques — raisonnables, de l'ordre de 35%.

La mesure de l'efficacité de détection consiste à utiliser un atome en interaction résonante avec la cavité, et qui, préparé dans l'état $|e\rangle$, peut déposer *via* une impulsion π un photon dans la cavité initialement vide. En comparant le nombre moyen de photons dans la cavité après le passage de l'atome au nombre moyen d'atomes détectés, et connaissant l'efficacité d'injection d'un photon $\chi = 0,8$, nous aurons alors une mesure de ϵ_d.

Dans cette expérience, il est important de s'assurer qu'il n'y a jamais plus d'un atome à la fois qui interagit avec la cavité. Pour ce faire, l'efficacité de préparation des niveaux de Rydberg est rendue très faible : $n_a^{(d)} = 0,09$ atomes sont détectés par échantillon. Il faudra vérifier *a posteriori* que le nombre *réel* d'atomes préparés est lui aussi suffisamment faible.

Du fait du faible nombre d'atomes détectés, il est en fait préférable, d'un point de vue statistique, de mesurer le nombre de photons injectés dans les réalisations où aucun atome injecteur n'est détecté (au moins 90% des réalisations). Nous mesurons donc le nombre de photons injectés par les atomes injecteurs non détectés plutôt que par les atomes injecteurs détectés. Ce nombre n'est toutefois pas vraiment mesuré : nous comparons les franges de Ramsey obtenues avec une cavité vide à celles de l'expérience décrite ici. Le signal de franges mesuré, noté $\pi_g^{(0m)}$, est alors la somme pondérée des franges de Ramsey correspondant à une cavité vide, $\pi_g^{(0)}$, et à une cavité contenant 1 photon, $\pi_g^{(1)}$:

$$\pi_g^{(0m)} = p(0|0m)\pi_g^{(0)} + p(1|0m)\pi_g^{(1)}, \tag{III.11}$$

où $p(0|0m)$ (resp. $p(1|0m)$) est la probabilité qu'il n'y ait pas de photon dans la cavité (resp. qu'il y en ait un), sachant qu'aucun atome injecteur n'a été détecté. Avec $P_a(1|0m) = 1-P_a(0|0m)$ la probabilité qu'il y ait réellement un atome sachant qu'aucun n'a été détecté, nous avons

$$p(1|0m) = 1 - p(0|0m) = \chi P_a(1|0m) \equiv a. \tag{III.12}$$

En utilisant des raisonnements bayesiens, nous trouvons par ailleurs

$$\begin{aligned} P_a(1|0m) &= \frac{P_a(1)}{P_a(0m)} P_a(0m|1) = \frac{n_a^{(d)}/\epsilon_d}{1 - n_a^{(d)}}(1-\epsilon_d) \\ &= \frac{1/\epsilon_d - 1}{1/n_a^{(d)} - 1}. \end{aligned} \tag{III.13}$$

Finalement, sachant que les franges $\pi_g^{(1)}$ sont simplement les franges $\pi_g^{(0)}$ déphasées de $\phi(1)$, et en notant respectivement π_0 et C le décalage et le contraste de $\pi_g^{(0)}$, le signal $\pi_g^{(0m)}$ enregistré est donné par

$$\pi_g^{(0m)}(\phi_r) = \pi_0 + \frac{C}{2}\left[(1-a)\cos\left(\phi_r - \phi_r^0\right) + a\cos\left(\phi_r - \phi_r^0 + \phi(1)\right)\right], \tag{III.14}$$

9. Nous laisserons au lecteur le soin de s'imaginer les autres conséquences.

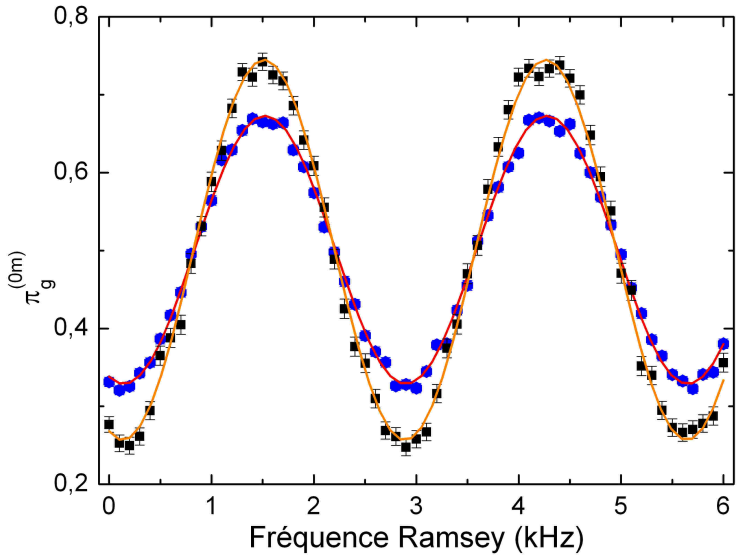


FIGURE III.13 – Mesure de l'efficacité de détection : Les points noirs et l'ajustement orange correspondent à des franges de Ramsey dans le vide. Les points bleus correspondent aux franges de Ramsey obtenues en présence d'un atome injecteur non détecté. L'origine des abscisses est arbitraire. Ici, les ajustements donnent finalement une efficacité de détection de 35%.

où ϕ_r est contrôlé en modifiant la fréquence Ramsey, et ϕ_r^0 fixe l'origine des phases. L'idée est donc de mesurer dans un premier temps les paramètres π_0, C et ϕ_r^0 à partir de franges de Ramsey obtenues avec une cavité vide ($a = 0$), pour ensuite ajuster le signal $\pi_g^{(0m)}$ avec la formule ci-dessus, qui n'a alors plus qu'un seul paramètre libre, a, $\phi(1) = \phi_0$ étant simplement le déphasage par photon. La relation entre a et ϵ_d est alors

$$\epsilon_d = \left(1 + \frac{a}{\chi}\frac{1 - n_a^{(d)}}{n_a^{(d)}}\right)^{-1}. \tag{III.15}$$

L'ajustement de la figure III.13 donne $a = 0,15$ soit finalement

$$\epsilon_d = 0,35. \tag{III.16}$$

Avant de conclure, notons que le nombre effectif d'atomes préparés dans cette expérience est finalement $n_a = n_a^{(d)}/\epsilon_d = 0,26$, et la probabilité d'avoir strictement plus de 1 atome préparé, $P_a(n > 1) = 3\%$, est bel et bien négligeable. Insistons cependant sur le fait que cette probabilité n'est négligeable *qu'ici* : dans toutes nos expériences de rétroaction quantique, nous aurons à tenir compte des situations où 2 atomes sont préparés simultanément.

L'efficacité du détecteur est donc plus faible que dans nos expériences précédentes, sans pour autant l'être de façon rédhibitoire. Ce sera sans doute un paramètre limitant de notre rétroaction.

III.2.2.c Franges de Ramsey et erreurs de détection

Il ne nous reste plus maintenant qu'à estimer les taux d'erreur de détection, η_e et η_g. Une première façon consiste à les mesurer sur le spectre d'ionisation brut. Rappelons en effet que la détection dans un niveau ou dans l'autre se fait *via* la définition de fenêtres temporelles, superposées au spectre d'ionisation. Si alors des atomes $|g\rangle$ peuvent être détectés au sein de la fenêtre de détection dévolue à $|e\rangle$, η_g prend des valeurs non nulles. Nous traçons figure III.14 les spectres obtenus en préparant un atome dans $|g\rangle$, subissant ou ne subissant pas une impulsion π dans l'une des zones de Ramsey. À partir d'un tel signal, nous définissons les fenêtres de détection telles qu'indiquées. Pour l'atome préparé dans $|g\rangle$, nous comptons alors :

- $0,28$ atome par paquet dans la fenêtre $|g\rangle$,
- $0,01$ atome par paquet dans la fenêtre $|e\rangle$.

En supposant que l'état initialement préparé est pur, cela correspond à une erreur de détection

$$\eta_g = 4\%. \tag{III.17}$$

Nous pourrions de même mesurer η_e en préparant initialement un atome dans l'état $|e\rangle$, et ainsi s'affranchir du contraste fini des impulsions π dans les zones de Ramsey. Ceci étant dit, nous n'utiliserons pas *in fine* les coefficients η_g et η_e mesurés de la sorte. Quelles sont en effet les conséquences, dans notre expérience, de taux d'erreurs non nuls ? Si l'on détecte un atome dans $|g\rangle$ par exemple, il y a une probabilité non nulle que l'atome ait été en réalité dans l'état $|e\rangle$. Il y a donc brouillage de la figure d'interférence, et le contraste des franges de Ramsey est réduit. D'autres imperfections expérimentales peuvent réduire à leur tour le contraste de l'interféromètre, par exemple des impulsions $\pi/2$ imparfaites, des déphasages inhomogènes du dipôle atomique (la phase de l'interféromètre dépend de la position de l'atome dans le jet atomique) ou encore l'impureté de la préparation des niveaux circulaires, *i.e.* la présence éventuelle de niveaux elliptiques dans les échantillons. Ceci étant dit, il est possible de montrer [74] que la carte quantique décrivant notre interféromètre, et prenant en compte toutes ces erreurs, est strictement équivalente à la carte quantique d'un interféromètre, de mêmes contraste et décalage, mais dont les seules imperfections seraient des erreurs de détection η_e et η_g. Il est alors inutile de tenter de distinguer les poids respectifs de chaque source d'erreur dans la détérioration de notre interféromètre, et nous utilisons des efficacités de détection *effectives*, η_e^{eff} et η_g^{eff}, pour rendre compte de toutes les imperfections.

Voyons alors comment sont modifiées les franges de Ramsey pour des efficacités de détection limitées. Une nouvelle fois, si l'on détecte un atome dans $|g\rangle$ par exemple, il y a une probabilité non nulle, que nous notons $p(e|g_d)$, que l'atome ait été en réalité dans

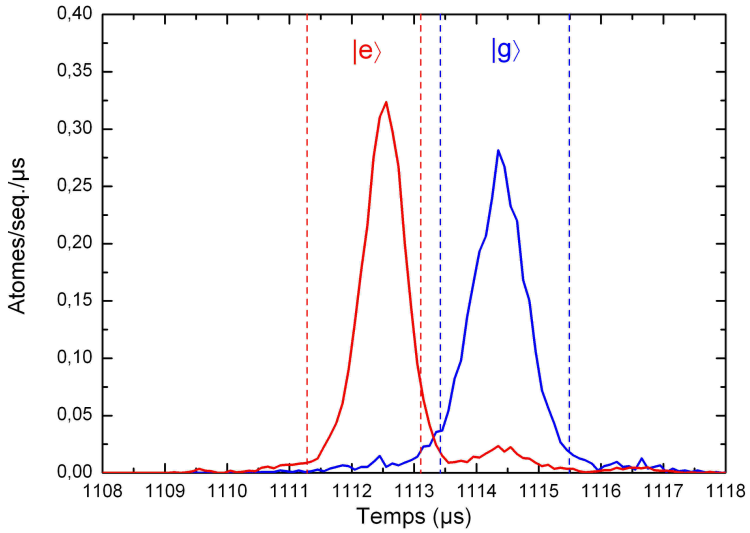


FIGURE III.14 – Spectre d'ionisation pour un atome préparé dans $|g\rangle$ (bleu) et un atome préparé dans $|g\rangle$ subissant une impulsion π dans une des zones de Ramsey (rouge). Les traits pointillés verticaux correspondent à une définition des fenêtres de détection.

l'état $|e\rangle$. Les franges de Ramsey, ou encore la probabilité de détecter un atome dans $|g\rangle$, π_g, sont alors modifiées de la façon suivante :

$$\pi_g = p(g_d|g)\,\pi_g^0 + p(g_d|e)\,\pi_e^0, \tag{III.18}$$

où π_j^0 est la probabilité que l'atome soit effectivement dans le niveau $|j\rangle$ en sortie de l'interféromètre, et $p(g_d|j)$ la probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ sachant qu'il est en réalité dans l'état $|j\rangle$. D'après les définitions de η_e^{eff} et η_g^{eff}, il vient alors

$$\pi_g = (1-\eta_g^{\text{eff}})\,\pi_g^0 + \eta_e^{\text{eff}}\,\pi_e^0. \tag{III.19}$$

Si l'interféromètre, hormis ces défauts de détection, est supposé parfait, les franges $\pi_j^0(\phi_r)$ sont de contraste unité et sans décalage. En prenant en compte les erreurs de détection, on a donc

$$\pi_g(\phi_r) = \frac{1-\eta_g^{\text{eff}}+\eta_e^{\text{eff}}}{2} + \frac{1-\eta_g^{\text{eff}}-\eta_e^{\text{eff}}}{2}\cos(\phi_r). \tag{III.20}$$

Finalement, nous n'utilisons donc pas la mesure de η_g donnée plus tôt, mais extrayons les efficacités de détection effectives d'un ajustement des franges de Ramsey :

$$\pi_g(\phi_r) = \pi_0 + \frac{C}{2}\cos(\phi_r) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \eta_e^{\text{eff}} &= \pi_0 - \dfrac{C}{2}, \\[2ex] \eta_g^{\text{eff}} &= 1-\pi_0-\dfrac{C}{2}. \end{cases} \tag{III.21}$$

Nous trouvons typiquement les valeurs :

$$\eta_g^{\text{eff}} = 0,11 \qquad\qquad \eta_e^{\text{eff}} = 0,13.$$

III.2.3 Déphasage par photon

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons calibré les corrections cohérentes de la rétroaction, et la façon dont les atomes sont détectés. Il nous reste donc seulement à caractériser la mesure effectivement faite par les atomes sur le champ de la cavité. Au paragraphe I.4, nous avons d'ores et déjà vu que la donnée des opérateurs de Kraus M_e et M_g suffit à la décrire complètement. Leurs expressions ne dépendent en outre que de la phase de l'interféromètre ϕ_r, et du déphasage induit par la présence de photons dans la cavité, que nous avions noté $\phi(n)$:

$$M_e = \cos\left(\frac{\phi_r + \phi(\hat{N})}{2}\right) \qquad\qquad M_g = \sin\left(\frac{\phi_r + \phi(\hat{N})}{2}\right).$$

Au paragraphe II.1, nous avons vu qu'un bon choix de paramètre consiste à utiliser un déphasage par photon de $\pi/4$ avec un interféromètre de phase

$$\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c}) = \frac{\pi}{2} - \phi(\mathrm{n_c}). \tag{III.22}$$

Il nous a donc fallu modifier la fréquence de résonance de la cavité à l'aide des cales piezo-électriques jusqu'à obtenir le désaccord δ correspondant à un tel déphasage par photon. Rappelons au passage que la valeur de $\phi(n)$ est déterminée *via* la mesure de l'histogramme des phases des dipôles atomiques en sortie de l'interféromètre (voir paragraphe I.4.3). Nous obtenons, pour une tension de $-330\,\mathrm{V}$ appliquée sur les piezo-électriques, correspondant à une fréquence de résonance de la cavité de l'ordre de $\nu = 51,098835\,\mathrm{GHz}$, les résultats déjà donnés au paragraphe I.4.3 :

$$\phi(n) = (0,256\,\pi)\,n - (0,002\,\pi)\,n^2. \tag{III.23}$$

La phase de l'interféromètre ϕ_r est alors réglée en choisissant la fréquence Ramsey $\omega_S/2\pi$ (voir équation (I.49)) *ad hoc* :

$$\omega_S = \omega_0 - \frac{1}{t_{\text{vol}}}\left(\frac{\pi}{2} - \phi(\mathrm{n_c})\right), \tag{III.24}$$

où $\omega_0/2\pi$ est une fréquence Ramsey pour laquelle la probabilité de détecter $|g\rangle$ est maximale en champ vide, et t_{vol} le temps séparant les deux impulsions $\pi/2$.

III.3 Contrôle des imperfections

Dans la section précédente, nous avons réalisé toutes les calibrations des paramètres expérimentaux intervenant explicitement dans le calcul du filtre quantique : le taux d'injection des impulsions micro-ondes, l'efficacité de détection, les imperfections de l'interféromètre et le déphasage par photon. D'autres imperfections expérimentales, que nous n'incluons pas dans le filtre, existent toutefois et sont susceptibles d'altérer l'efficacité de la rétroaction. Certaines d'entre elles ont déjà été évoquées au chapitre I, à savoir les bruits [10] de phase de l'interféromètre de Ramsey et les dérives de fréquence de la cavité. Nous nous intéressons ici plus spécifiquement aux imperfections qui ont directement trait à notre expérience de rétroaction quantique : le réglage de la phase des injections, *i.e.* la calibration du déphaseur, et les éventuelles perturbations induites sur les sondes atomiques par les champ cohérents de correction.

III.3.1 Contrôle de la phase des injections

Nous avons donné au paragraphe III.1.3 le schéma du circuit micro-onde permettant à la fois le contrôle de l'amplitude et de la phase des champs cohérents injectés dans la cavité. Nous avons alors expliqué sans plus de détails que le déphaseur se doit d'induire une différence de phase de $\pi/4$ entre les deux chemins possibles, pour qu'après le quadruplage de la fréquence, le choix de phase se fasse entre 0 et π. Voyons ici comment le déphaseur a été réglé.

L'expérience que nous réalisons consiste à injecter successivement dans la cavité initialement vide deux impulsions de même durée, la première passant par la voie «0» du chemin micro-onde, la seconde par la voie «π». Si la différence de phase $\delta\phi$ entre les deux voies est bien π, alors la cavité reste vide après cette double impulsion. Pour un déphasage $\delta\phi$ quelconque, et en notant α_1 l'amplitude de chacune des deux impulsions, le champ cohérent résultant est

$$\alpha_2 = \alpha_1(1 + e^{i\delta\phi}) = t_1\gamma(1 + \mathrm{e}^{i\delta\phi}) \equiv \gamma_{\mathrm{eff}} t_1, \tag{III.25}$$

où t_1 est la longueur d'une impulsion individuelle, γ la grandeur, déjà rencontrée précédemment, caractérisant l'injection dans la cavité, et γ_{eff} un taux d'injection effectif défini comme

$$\gamma_{\mathrm{eff}} = \gamma(1 + \mathrm{e}^{i\delta\phi}). \tag{III.26}$$

Si nous suivons alors le protocole proposé au paragraphe III.2.1 pour mesurer le taux γ en remplaçant les injections qui y étaient faites par la double injection définie ici, nous aurons une mesure de $|\gamma_{\mathrm{eff}}|$, et donc de $\delta\phi$:

$$\delta\phi = 2\arccos\left(\frac{|\gamma_{\mathrm{eff}}|}{2\gamma}\right). \tag{III.27}$$

10. Bruit sur les potentiels électrostatiques essentiellement, limités par exemple par l'emploi de diviseurs de tension entre les sources de tension et le montage.

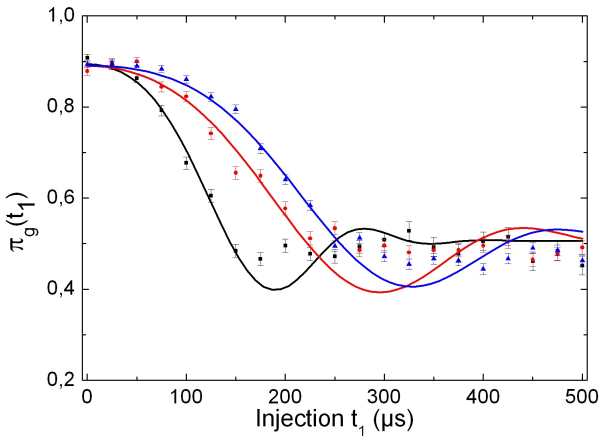


FIGURE III.15 – Calibration du déphaseur par injection de deux impulsions de même durée t_1 mais de phases différentes. Les trois ensembles de points correspondent à trois différences de phase : Φ_0 (bleu), $\Phi_1 = \Phi_0 - 0,052\,\text{rad}$ (rouge) et $\Phi_2 = \Phi_0 - 0,116\,\text{rad}$ (noir). Les lignes continues sont des ajustements de calibration de paramètres $\gamma^{-1} = (100 \pm 7)\,\mu\text{s}$ (noir), $(158 \pm 10)\,\mu\text{s}$ (rouge) et $(167 \pm 8)\,\mu\text{s}$ (bleu).

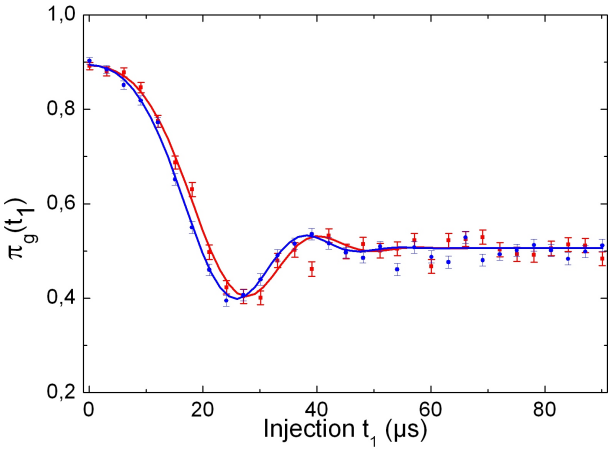


FIGURE III.16 – Calibrations individuelles de l'amplitude des impulsions avec la phase 0 (rouge) ou π (bleu). Les ajustements donnent les taux d'injection $\gamma_0^{-1} = (14,2 \pm 0,4)\,\mu\text{s}$ pour la phase 0, et $\gamma_\pi^{-1} = (13,5 \pm 0,3)\,\mu\text{s}$ pour la phase π.

Idéalement, si $\delta\phi = \pi$, alors $\gamma_{\text{eff}} = 0$. Il nous faut donc trouver le réglage du déphaseur qui minimise $|\gamma_{\text{eff}}|$.

Nous traçons figure III.15 le résultat de telles mesures pour trois réglages différents du déphaseur : Φ_0, $\Phi_1 = \Phi_0 - 0,052\,\text{rad}$ et $\Phi_2 = \Phi_0 - 0,116\,\text{rad}$. Les deux impulsions sont séparées de $10\,\mu\text{s}$. Grossièrement, plus le nombre de photons laissés dans la cavité après les deux impulsions est grand, *i.e.* plus la différence de phase est loin de π, plus la probabilité π_g mesurée de détecter un atome dans $|g\rangle$ est faible [11]. Le réglage de la courbe bleue apparaît donc plus favorable que celui des courbes rouge ou noire. Pour s'en convaincre, nous ajustons chacun de ces trois ensembles de points par la loi de calibration (III.9). La courbe bleue est bien celle qui donne le coefficient γ_{eff} le plus faible :

$$\gamma_{\text{eff}}^{-1} = (167 \pm 8)\,\mu\text{s}. \tag{III.28}$$

Ce nombre est à comparer à ce que donne la calibration d'une injection unique, donnée figure III.16 pour chacune des deux voies du déphaseur :

$$\gamma^{-1} \approx 14\,\mu\text{s}. \tag{III.29}$$

Ainsi, si en $170\,\mu\text{s}$ une seule de ces impulsions injecte environ 150 photons dans la cavité, deux impulsions successives de phases différentes de $\delta\phi$ n'en injectent plus qu'un seul.

11. Ce n'est vrai que pour les faibles amplitudes.

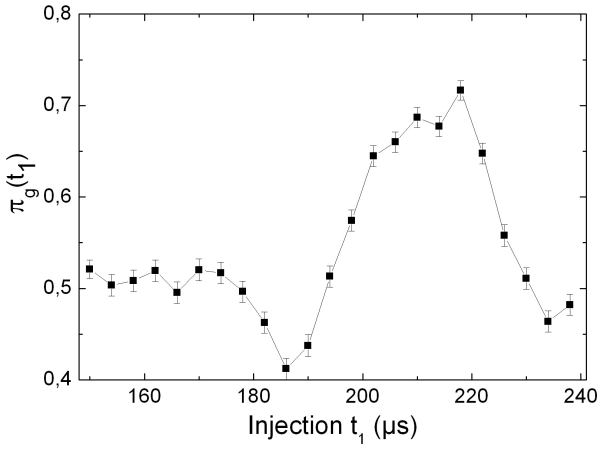


FIGURE III.17 – Différence d'amplitude entre les deux voies d'injection. Une injection de phase π de 200 µs est suivie d'une impulsion de durée t_1. π_g est la probabilité de détecter $|g\rangle$ en sortie de l'interféromètre, maximale pour une cavité vide.

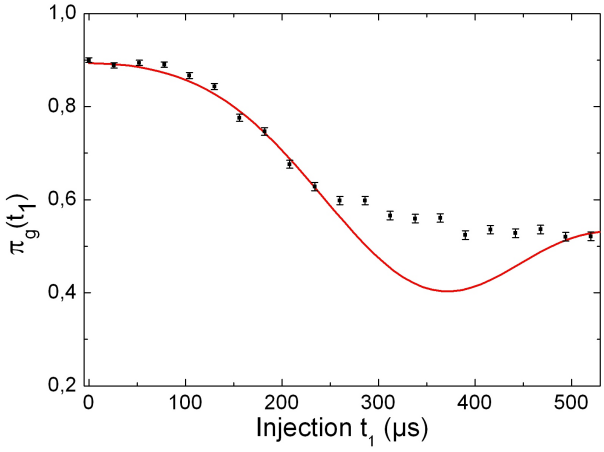


FIGURE III.18 – Calibration du déphaseur par injection de deux impulsions de durées t_1 pour la phase 0 et $0,96\,t_1$ pour la phase π. L'ajustement donné a pour paramètre $\gamma_{\text{eff},0}^{-1} = (19 \pm 2) \times 10\mu\text{s}$.

Il apparaît cependant sur la figure III.16 que les deux voies d'injection n'ont pas tout à fait le même facteur de transmission. Le coefficient γ est en effet plus grand pour la phase π que pour la phase 0 :

$$\gamma_0^{-1} = (14,2 \pm 0,4)\ \mu\text{s} \qquad \gamma_\pi^{-1} = (13,5 \pm 0,3)\ \mu\text{s}. \tag{III.30}$$

Cette différence d'environ $0,5$ dB peut d'ailleurs être mesurée directement en comparant à l'analyseur de spectre l'amplitude d'un signal à 12 GHz passant par l'une ou l'autre de ces voies. Nous pouvons également visualiser cette différence en injectant *via* la voie «π» (avec le réglage optimal du déphaseur obtenu figure III.15) une impulsion de 200 µs suivie, 30 µs plus tard, par une impulsion de phase «0» dont la durée est variée. Le résultat d'une telle expérience est donné figure III.17. Il apparaît clairement que les impulsions de phase 0 sont, à durées d'injection identiques, plus faibles que les impulsions de phase π : il faut une impulsion de 210 µs pour compenser au mieux l'impulsion précédente de 200 µs. Là encore, le rapport de ces deux temps correspond aux $0,5$ dB de différence déjà trouvés.

Si l'on répète finalement l'expérience précédente de calibration du déphaseur, en prenant soin d'utiliser des injections plus intenses de $0,5$ dB pour la phase 0, soit un facteur environ $1,04$ sur la durée de l'injection, nous obtenons les résultats de la figure III.18, pour lesquels

$$\gamma_{\text{eff},0}^{-1} = (19 \pm 2) \times 10\mu\text{s} \qquad \gamma_{\text{eff},\pi}^{-1} = (18 \pm 2) \times 10\mu\text{s}. \tag{III.31}$$

Au vu des barres d'erreur, les résultats sont donc peu différents si l'on prend ou pas en compte cette différence d'intensité dans la calibration du déphaseur, confirmant ainsi le réglage déjà obtenu. La calibration de l'injection, détaillée au paragraphe III.2.1, s'en trouve

cependant légèrement modifiée en ce sens que ce sont dorénavant deux taux d'injection, γ_0 et γ_π, qui sont donnés à l'ordinateur de contrôle, et non plus seulement un.

Notons par ailleurs que l'ajustement par la loi de calibration (III.9) est relativement peu concluant pour les temps d'injection longs, à partir de $t_1 = 200\,\mu\text{s}$ sur la figure III.18. Une étude approfondie du phénomène expliquant un tel écart n'a pas été faite, un critère visuel pouvant être gardé pour le réglage du déphaseur. Peut-être sommes nous sensibles à des effets de chauffage du quadrupleur ou du déphaseur du fait des longs temps d'injection ? Nous nous contentons donc ici d'un ajustement sur les premiers points de la courbe pour avoir une estimation de γ_{eff}. En utilisant l'équation (III.27), nous obtenons alors le déphasage induit par le déphaseur [12] :

$$\delta\phi = \pi - (0,02 \pm 0,008)\pi. \tag{III.32}$$

L'écart de $0,02\pi$ à la situation idéale n'a pas pu être réduit par un simple réglage du déphaseur, ou par un changement de la fréquence d'injection (si la source micro-onde et la cavité ne sont pas en résonance, une dérive de phase a cours entre les deux injections, limitant ainsi l'efficacité de la compensation de la première injection par la seconde).

Il y a donc un défaut de phase résiduel, de l'ordre de $0,02\pi$, entre les deux voies d'injection, suffisamment faible ceci dit pour que le filtre quantique n'ait pas à le prendre en compte. Insistons pour finir sur l'importance d'un telle conclusion : si nous avions dû incorporer ce défaut dans le calcul du filtre, cela l'aurait *considérablement* compliqué. Si la phase des injections peut prendre des valeurs autres que 0 ou π, relativement au champ cohérent initial, les corrections α ne peuvent en effet plus être considérées comme purement réelles et toutes les simplifications faites au préalable tombent. L'importance du soin à apporter au réglage du déphaseur est donc certaine [13].

III.3.2 Effets parasites éventuels dus aux injections cohérentes

Pour conclure cette section, intéressons nous aux possibles effets secondaires d'une injection micro-onde. Nous avons en effet jusqu'à présent oublié que pour injecter un champ dans la cavité, il faut en créer un considérablement plus grand dans toute la boîte d'écrantage contenant la cavité supraconductrice et les zones de Ramsey. Le long temps de vie des photons dans la cavité, temps caractéristique de la perte d'un photon de la cavité vers l'environnement... mais aussi de l'entrée d'un photon dans la cavité depuis l'environnement, nous oblige en effet à injecter de très nombreux photons dans l'environnement pour espérer en faire entrer quelques-uns dans le mode du champ.

12. L'erreur est obtenue en utilisant la formule

$$\frac{\Delta(\delta\phi)}{\delta\phi} = \frac{T_0/T_{\text{eff},0}}{1-(T_0/T_{\text{eff},0})^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_{\text{eff},0}}{T_{\text{eff},0}}\right)^2}$$

avec $T_0 = \gamma_0^{-1}$ et $T_{\text{eff},0} = \gamma_{\text{eff},0}^{-1}$.

13. Cela implique notamment un re-réglage périodique, par exemple au beau milieu d'une période de prise de données !

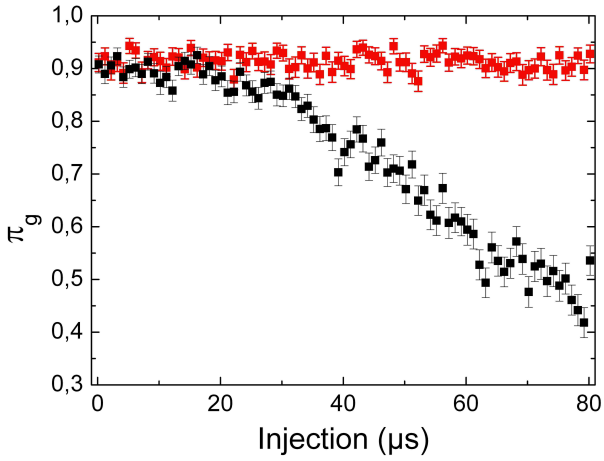


FIGURE III.19 – Effet des injections micro-ondes sur le contraste des franges de Ramsey. L'interféromètre est réglé avec la phase de mesure $\phi_r^{(1)} = 0$. La probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ est tracée en fonction de la longueur des injections, à une fréquence $\nu_{\text{inj}} = \nu_{\text{cav}}$ (en noir) ou $\nu_{\text{inj}} = \nu_{\text{cav}} + 50\,\text{kHz}$ (en rouge). 80 µs d'injection correspondent à un champ d'amplitude $0,1$.

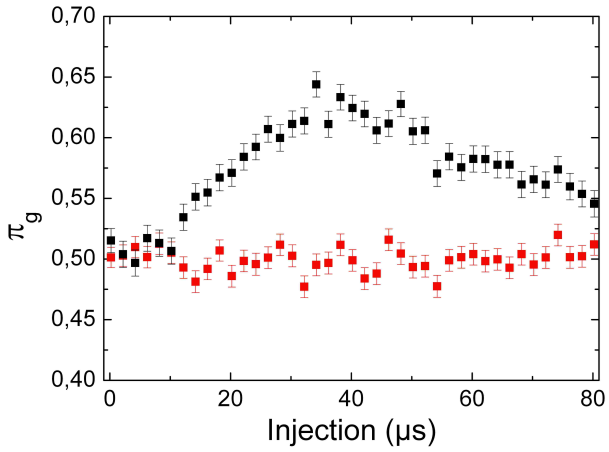


FIGURE III.20 – Effet des injections micro-ondes sur la phase des franges de Ramsey. L'interféromètre est réglé avec la phase de mesure $\phi_r^{(2)} = \pi/2$. La probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ est tracée en fonction de la longueur des injections, à une fréquence $\nu_{\text{inj}} = \nu_{\text{cav}}$ (en noir) ou $\nu_{\text{inj}} = \nu_{\text{cav}} + 50\,\text{kHz}$ (en rouge).

La présence d'un champ aussi intense peut potentiellement influer sur l'état ou la phase des sondes atomiques présents dans la boîte au moment de l'injection, et ainsi modifier la phase ou le contraste de l'interféromètre. Il nous a donc fallu vérifier que les injections que nous ferons au cours de la rétroaction n'altèrent pas les franges de Ramsey obtenues en champ vide.

Pour cela, nous enregistrons un signal de franges de Ramsey, *i.e.* la probabilité π_g de trouver un atome dans l'état $|g\rangle$, dans la situation où une injection micro-onde est faite à chaque échantillon atomique, au moment où le nuage est au centre de la cavité [14]. La mesure est répétée pour des durées d'injection allant de $0,2$ à $80,2$ µs, et avec un taux d'injection γ sensiblement identique à celui que nous utiliserons dans nos expériences de rétroaction quantique : 82 µs d'injection correspondent à un champ d'amplitude $\alpha_{\max} = 0,1$. De même, le désaccord entre les atomes est la cavité est $\delta = \nu_{\text{at}} - \nu_{\text{cav}} \approx +250\,\text{kHz}$.

Nous traçons figures III.19 et III.20 les résultats obtenus pour deux phases de l'interféromètre de Ramsey, respectivement $\phi_r^{(1)} = 0$ tel que π_g soit maximum pour une cavité vide, et $\phi_r^{(2)} = \pi/2$ tel que π_g soit [15] 50 % pour une cavité vide. Dans le premier cas, nous visualiserons alors l'effet des injections sur le contraste, tandis que dans le deuxième cas, nous serons sensibles à l'effet des injections sur la phase des franges. Par ailleurs, pour

14. Plus précisément, le milieu de l'impulsion correspond au passage de l'atome par le centre de la cavité.
15. Dans le cas de franges sans décalage.

s'affranchir de l'effet des déplacements lumineux induits par la présence de photons dans le mode de la cavité, effets que nous ne voulons pas sonder ici, nous réglons la fréquence ν_{inj} du champ injecté dans la boîte 50 kHz au-dessus de la fréquence de résonance de la cavité, et donc 50 kHz plus près des atomes. Nous nous affranchissons ainsi de l'injection effective de photons dans la cavité, en amplifiant *a priori* les effets sur les atomes présents dans la boîte au moment de l'injection. Les résultats obtenus avec cette fréquence d'injection sont tracés en rouge sur les deux figures. Nous donnons à titre de comparaison, en noir, les résultats obtenus quand l'injection est faite à résonance ($\nu_{\text{inj}} = \nu_{\text{cav}}$). Si dans ce dernier cas, la modification des franges est notable [16], il n'en est rien dans le cas d'une injection désaccordée : aucune structure ne ressort des barres d'erreur, même pour les injections aussi longues que 80 µs. Nous n'aurons donc pas à inclure dans le filtre quantique de déphasages ou pertes de contraste induits par les injections de correction réalisées pendant le temps de vol d'une sonde atomique dans la boîte d'écrantage.

III.4 Modification du filtre quantique

Dans les sections précédentes, nous avons vu dans un premier temps comment le nouvel ordinateur de contrôle a été greffé à l'ancienne architecture expérimentale et comment la synchronisation entre ces deux systèmes est réalisée. Nous avons ensuite détaillé les calibrations des paramètres expérimentaux que nous avons à prendre en compte dans le filtre quantique. Il est apparu notamment que l'efficacité finie du détecteur doit être incluse dans les calculs, ce que nous avions complètement omis dans le chapitre II.

Au vu des diverses contraintes expérimentales ainsi mises en évidence, des modifications doivent être apportées au filtre quantique. Il faut d'une part s'assurer que le temps nécessaire au calcul des corrections est compatible avec le minutage d'une séquence expérimentale, et d'autre part inclure les erreurs de détection et imperfections de l'interféromètre dans les calculs.

III.4.1 Réduction du temps de calcul

Au vu de la chronologie des événements donnée au paragraphe III.1.4, il apparaît qu'une condition nécessaire au bon fonctionnement de la rétroaction est que tous les calculs du filtre quantique et du régulateur soient finis avant le début de l'injection micro-onde, 70 µs après réception de l'impulsion événement. Ce choix des 70 µs est ceci dit arbitraire. La limite supérieure sur la longueur du calcul est en fait fixée par le temps séparant deux échantillons atomiques, $T_a = 82$ µs. Le processeur se doit en effet d'avoir fini tous ses calculs et donné ses instructions à la carte DIO32 avant que l'échantillon suivant n'atteigne le détecteur, sous peine d'accumuler des retards dans la boucle. En prenant en compte les temps nécessaires à la lecture des détections atomiques, et à l'inscription des couples (s_{MW}, t) dans la pile de la carte DIO32, l'ordinateur a donc moins de 82 µs pour faire tous les calculs nécessaires à la rétroaction. Si l'on se rappelle qu'à chaque itération de la boucle, l'ordinateur doit

16. C'est de cet effet dont nous nous sommes servis pour calibrer l'injection.

manipuler des matrices carrées de taille au moins 8×8 pour calculer l'effet d'une mesure QND, de la relaxation, et des éventuels déplacements du champ, et ce pour l'atome juste détecté et tous les atomes de retard... la tâche semble peu aisée.

Plusieurs simplifications dans le calcul ont donc dû être utilisées pour satisfaire une telle contrainte. Nous en donnons ici quelques exemples :

- Nous cherchons d'abord à calculer le moins d'éléments possible dans les matrices que nous manipulons. Ainsi, à chaque fois qu'une matrice hermitienne de dimension $\mathcal{N}^2$ est utilisée (la matrice densité du champ par exemple), seul le triangle inférieur, *i.e.* $\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)/2$ éléments, est calculé ;
- L'emploi de boucles `for` est autant que faire se peut évité, notamment lors du calcul de produits ou de sommes de matrices. Un gain de temps substantiel est obtenu en écrivant explicitement l'expression des éléments de la matrice résultat. Par exemple, pour calculer $A = BC$, nous écrirons

```
A(1,1) = B(1,1)C(1,1) + B(1,2)C(2,1) + ... + B(1,8)C(8,1);

A(1,2) = B(1,1)C(1,2) + B(1,2)C(2,2) + ... + B(1,8)C(8,2);

...
```

  L'écriture du code en est bien sûr rendue plus délicate ;
- Nous l'avions déjà mentionné au paragraphe II.2, les déplacements $\mathcal{D}(\alpha)$ décrivant l'injection de champs cohérents $|\alpha\rangle$ sont calculés *via* un développement à l'ordre 2 en α. Le fait que l'amplitude maximale injectée soit $\alpha_{\max} = 0,1$ justifie cette approximation ;
- D'autres expressions données au chapitre II sont par ailleurs simplifiées. Comme nous le verrons ci-dessous, le calcul des déplacements est l'opération qui ralentit le plus, et de loin, le calcul de la boucle. Or, rappelons ici l'expression de la matrice densité ρ_k utilisée pour calculer l'amplitude α_k de la correction appliquée à la k^{e} itération de la boucle (équations (II.12) à (II.19)) :

$$\rho_k = \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{(r)} \tilde{\rho}_k = \left(\prod_{i=k}^{k+N_r-1} \mathbf{M}_{\text{nl}} \mathbf{T} \mathbf{D}_{i-Nr} \right) \tilde{\rho}_k,$$

  où $\mathbf{M}_{\text{nl}}$, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{D}_{i-Nr}$ sont les super-opérateurs décrivant respectivement une mesure non-lue, la relaxation sur le temps d'une itération de la boucle et un déplacement d'amplitude α_{i-N_r}. Si l'on compte le déplacement calculé lors de l'estimation de la matrice $\tilde{\rho}_k$,

$$\tilde{\rho}_k = \boldsymbol{\mathcal{H}}_k \rho_0 = \left[\mathbf{M}_k \mathbf{T} \mathbf{D}_{k-N_r-1} \right] \rho_{k-1},$$

  $N_r + 1 = 5$ calculs de déplacements sont alors à faire à chaque itération de la boucle. Sachant, comme nous allons le voir, qu'un seul de ces calculs prend au minimum 15 µs, il semble impossible de satisfaire la contrainte des 82 µs. Une approximation supplémentaire, valable dans la limite des petits déplacements et des intervalles de

temps courts devant T_{cav}, est donc faite dans l'expression de $\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{(r)}$: quoique les super-opérateurs $\mathbf{M}$, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{D}$ ne commutent pas de façon générale, nous les regroupons «par type» pour obtenir l'expression suivante :

$$\rho_k = \mathbf{M}_{\mathrm{nl}}^{N_r}\mathbf{T}^{N_r}\left(\prod_{i=k}^{k+N_r-1}\mathbf{D}_{i-Nr}\right)\tilde{\rho}_k = \mathbf{M}_{\mathrm{nl}}^{N_r}\mathbf{T}^{N_r}\tilde{\rho}_k(\alpha_t), \tag{III.33}$$

$$\alpha_t = \sum_{i=k}^{k+N_r-1}\alpha_i. \tag{III.34}$$

Les N_r déplacements peuvent ainsi être regroupés en un seul déplacement d'amplitude α_t. L'absence de termes de phases est assurée par le fait que tous les coefficients α_i sont réels. En procédant ainsi, un seul calcul de déplacement, au lieu de N_r, est à faire lors du traitement des atomes de retard, soit un gain non négligeable d'au moins 45 µs.

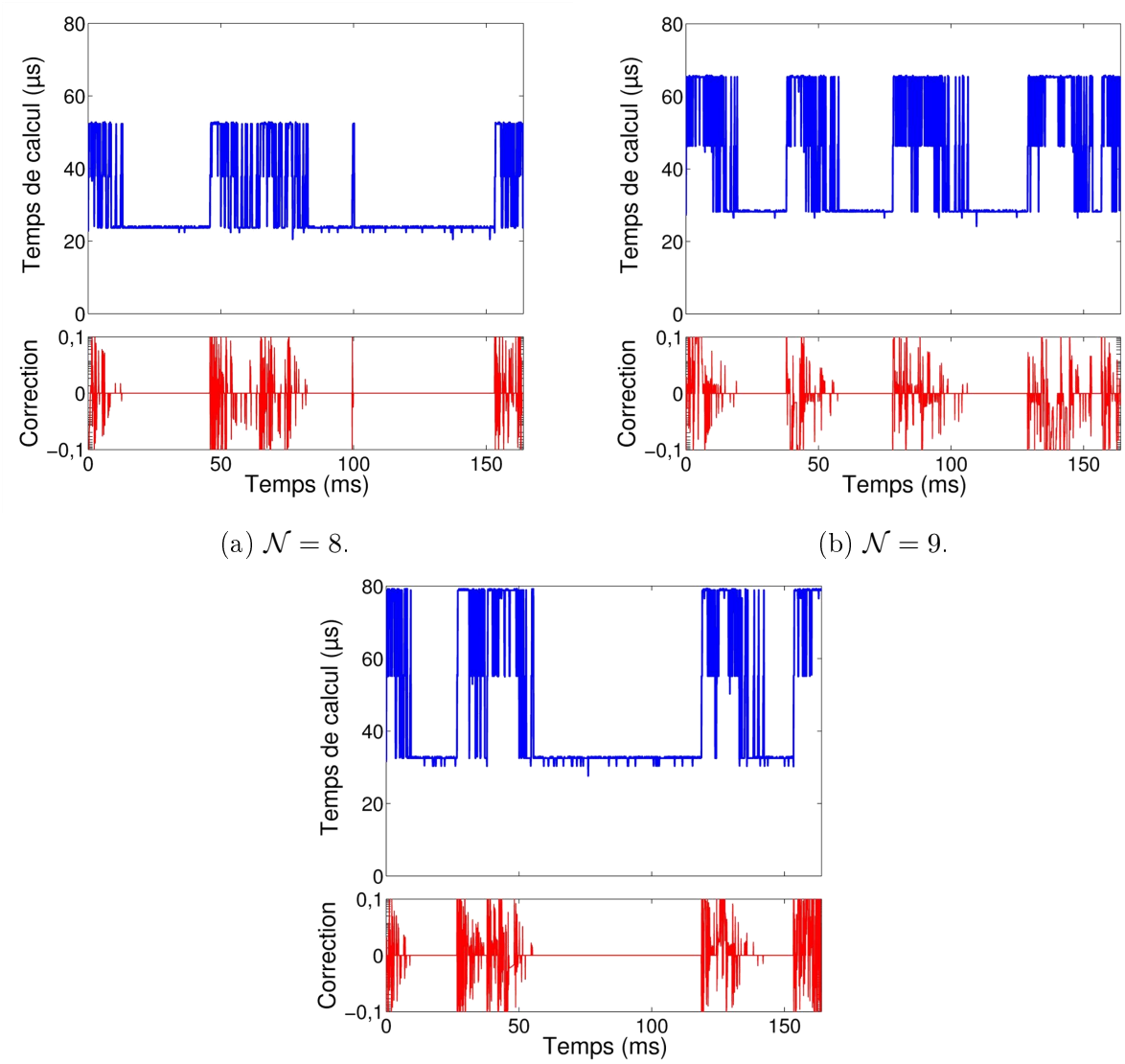
Nous nous devons finalement de discuter du choix de la taille de l'espace de Hilbert utilisé. Un compromis doit en effet être trouvé :

- Plus l'espace de Hilbert est grand, plus l'estimation que nous faisons de l'état du champ est bonne. C'est particulièrement vrai dans les situations, telles que rencontrées dans nos simulations numériques du chapitre précédent, où le nombre de photons dans la cavité s'envole du fait d'un trop grand nombre d'injections de correction ;
- Plus l'espace de Hilbert est petit en revanche, plus les calculs sont rapides.

Il nous faut donc choisir la dimension $\mathcal{N}$ la plus grande possible qui permette au processeur de finir tous les calculs nécessaires à une itération de la boucle en moins de 82 µs. Nous traçons figure III.21 le temps de calcul d'une itération de la boucle et l'amplitude des corrections cohérentes le long d'une trajectoire quantique, pour trois tailles différentes de l'espace de Hilbert ($\mathcal{N} = 8$, 9, ou 10). La corrélation entre les temps de calcul les plus longs et les amplitudes α_k non nulles y est flagrante. Nous mettons ainsi clairement en évidence le poids important des déplacements dans le temps de calcul total d'une itération. Cela peut en partie être expliqué par le fait que le calcul de $\rho(\alpha)$ fait intervenir des termes de la forme ρa ou $a\rho$ qui ne sont pas hermitiens. *Tous* les éléments de ces matrices doivent alors être calculés, et non plus seulement ceux du triangle inférieur.

Pour chacune des trajectoires quantiques considérées, il apparaît par ailleurs que le temps de calcul d'une itération ne prend essentiellement que trois valeurs distinctes :

- Si tous les coefficients α_i qui interviennent dans les calculs de ρ_k ou de $\tilde{\rho}_k$ sont nuls, tous les déplacements $\mathcal{D}(\alpha_i)$ sont égaux à l'identité, et aucun de ces longs calculs n'est à faire. Le temps de calcul est alors minimal : 24 µs, 28µs et 33 µs pour $\mathcal{N} = 8$, 9, et 10 respectivement ;
- Si au contraire aucun de ces termes n'est nul, la durée de l'itération est maximale, et l'on trouve 52 µs, 65µs et 79 µs pour $\mathcal{N} = 8$, 9, et 10 respectivement ;
- Si enfin l'un seul des deux déplacements à calculer est l'identité, le surplus de temps vis à vis de la durée minimale de l'itération est, comparé à la situation précédente,



(a) $\mathcal{N} = 8$.

(b) $\mathcal{N} = 9$.

(c) $\mathcal{N} = 10$.

FIGURE III.21 – Temps de calcul en microsecondes (bleu) et amplitude des corrections en échelle logarithmique signée (rouge) le long d'une trajectoire quantique, et pour trois tailles $\mathcal{N}$ de l'espace de Hilbert utilisé. La corrélation entre les longs temps de calcul et les amplitudes non nulles est apparente.

divisé par deux. C'est par exemple le cas si la correction α_k est nulle, mais que l'une au moins des N_r corrections précédentes ne l'est pas.

De cette étude ressort finalement le fait que l'utilisation d'espaces de Hilbert de taille au moins 10 est à proscrire. Au moins 80 µs sont alors nécessaires au calcul d'une itération de la boucle dès que la rétroaction devient active, *i.e.* très, voire trop, proche de la limite maximale des 82 µs.

En revanche, il apparaît que toutes les simplifications de calcul utilisées dans le code, et évoquées ci-dessus, permettent pour $\mathcal{N} = 8$ ou 9 de satisfaire amplement la contrainte de temps sur le calcul des corrections. Les résultats du paragraphe IV nous permettront en outre de nous convaincre que cette taille est suffisamment grande pour ne pas dégrader la qualité de la rétroaction.

III.4.2 Suivi en temps réel de l'état du champ

Avant de passer à l'étude des calibrations de la boucle de rétroaction, testons, dans un cas simple, la synchronisation du nouvel ordinateur de contrôle avec le reste du dispositif expérimental, ainsi que la fiabilité de ses calculs. L'expérience que nous réalisons consiste à suivre en temps réel l'évolution du champ intracavité, initialement préparé dans l'état cohérent $\left|\alpha = \sqrt{3}\right\rangle$, et sondé, toutes les 82 µs, par des atomes en configuration Ramsey avec :

- un déphasage par photon de l'ordre de $\pi/4$: $\phi(n) = (0,265\pi)\, n$,
- l'interféromètre réglé avec la phase $\phi_r = \varphi_r(3) = \pi/2 - \phi(3)$.

Nous suivons ainsi, pour ces deux paramètres, les recommandations du chapitre précédent préconisées dans le cas où l'état cible de la rétroaction est $|n = 3\rangle$. Notons que nous sommes sur le point d'étudier le fonctionnement en *boucle ouverte* de la rétroaction.

La détection des sondes est faite en parallèle par l'ADwin et par la carte NI. L'idée est alors de comparer l'évolution des populations $P(n,t)$ calculées en temps réel par ADwin, et *a posteriori* par notre logiciel d'analyse QND usuel, développé lors d'expériences précédentes [33]. Les deux analyses utilisent donc la méthode itérative exposée au paragraphe I.4.2. La relaxation en $\mathrm{T_{cav}} = 65$ ms est prise en compte, et les événements où plus d'un atome sont détectés ne sont pas analysés. Notons enfin que l'analyse a été faite ici avec un espace de Hilbert de taille [17] $\mathcal{N} = 10$, mais que, par souci de lisibilité, nous ne tracerons pas $P(8,t)$ et $P(9,t)$, pour ainsi dire nuls tout le long de la trajectoire.

Nous traçons figure III.22 les deux ensembles $\{P(n,t)/0 \leq n \leq 7\}$ ainsi obtenus après moyenne sur 400 trajectoires quantiques de 400 ms chacune. Ici, si le nouvel ordinateur de contrôle utilise les comptes donnés par sa propre carte compteur, les résultats obtenus avec notre logiciel d'analyse QND externe correspondent au traitement des détections obtenues par la carte National Instruments. Le fait que, pour tous les nombres de photons tracés, les courbes soient à peine distinguables nous confirme d'une part que les résultats des détections ADwin et NI ne sont pas significativement différents, et d'autre par que les

17. Ici, puisqu'aucun déplacement n'est à faire, le filtre quantique a le temps de finir ses calculs en moins de 82 µs avec $\mathcal{N} = 10$.

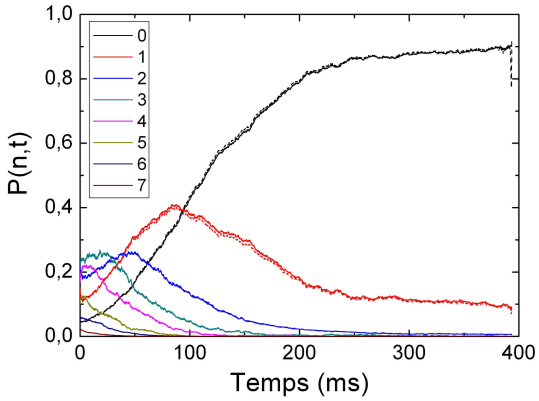


FIGURE III.22 – Comparaison des populations $P(n,t)$ calculées en temps réel par ADwin (traits continus), et *a posteriori* par le logiciel d'analyse QND à partir des comptes de la carte NI (pointillés), dans une expérience de boucle ouverte.

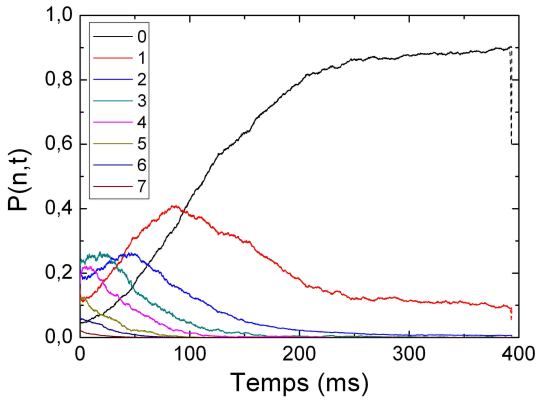


FIGURE III.23 – Comparaison des populations $P(n,t)$ calculées en temps réel par ADwin (traits continus), et *a posteriori* par le logiciel d'analyse QND (pointillés) dans une expérience de boucle ouverte. Les deux analyses utilisent les résultats donnés par la carte compteur de l'ADwin.

calculs faits par l'ADwin *en temps réel* sont aussi bons que ceux faits par un ordinateur externe, *a posteriori*, qui lui a tout son temps.

Pour s'en convaincre, nous traçons finalement ces deux mêmes ensembles $\{P(n,t)\}$ sur la figure III.23, les deux analyses traitant cette fois les comptes reçus par la carte ADwin. Les trajectoires sont maintenant indistinguables [18].

Nous montrons ainsi que, dans un cas simple au moins, *i.e.* la boucle ouverte de la rétroaction que nous cherchons à mettre en place, le filtre quantique est capable de donner une estimation fiable et en temps réel de l'état du champ dans la cavité.

III.4.3 Prise en compte des erreurs de détection

Dans le filtre quantique décrit au chapitre précédent, nous n'avons pas pris en compte les erreurs de détection. L'objet de ce paragraphe est d'y apporter les corrections nécessaires.

Nous avons vu, dans un premier temps, que l'efficacité de détection n'est maintenant plus que de 35%. Les expériences de rétroaction quantique présentées au chapitre suivant sont typiquement faites avec une préparation atomique telle que $n_a^{(d)} \approx 0,2$ atomes par paquet soient détectés. En réalité, il y a donc $n_a = n_a^{(d)}/\epsilon_d \approx 0,6$ atomes par paquet. Pour ces valeurs de n_a, la probabilité qu'il y ait 2 atomes dans le nuage est de près de 10%, et nous

18. Le lecteur doutant de la présence de deux ensembles de trajectoires pourra s'en convaincre en regardant les deux derniers points de $P(0,t)$ et $P(1,t)$. Leurs valeurs aberrantes sont liées à un artefact de notre logiciel QND.

ne pouvons donc plus négliger de tels événements. La probabilité d'en avoir strictement plus que 2 est en revanche de l'ordre de 2% et nous omettrons tous ces événements.

A priori, si deux atomes se retrouvent simultanément dans la cavité, la situation est bien plus complexe qu'avec un atome unique. Des phénomènes de collisions assistées par cavité [108] sont en effet alors possibles : deux atomes peuvent par exemple échanger leurs excitations sans modifier le nombre de photons dans la cavité. Toutefois, nous avons vérifié *via* des simulations numériques que, pour le grand désaccord atome-cavité utilisé, la modification de l'état du champ lors du passage *simultané* de deux atomes est indistinguable de celle induite par le passage *successif* de ces deux mêmes atomes, à résultats de détection égaux. Nous traiterons donc tous les événements à 2 atomes comme la succession de deux événements à 1 atome.

Il nous faut maintenant passer en revue tous les résultats possibles d'une détection atomique et, pour chacun d'eux, modifier la loi simple (II.7). Dans toute la suite, nous noterons :

- $P_a(n|m_d)$ la probabilité qu'il y ait n atomes «réels» sachant que m atomes ont été détectés, et inversement $P_a(m_d|n)$ la probabilité de détecter m atomes sachant qu'il y en a n,
- n_a le nombre moyen d'atomes préparés par paquet, et $P_a(n) = \exp(-n_a)n_a^n/(n!)$ la probabilité qu'il y ait n atomes dans le nuage,
- $p_J^{(d)}$ la probabilité que la détection atomique donne le résultat J : $\{e\}$, $\{g\}$, $\{e,g\}$, $\{g,g\}$, $\{e,e\}$ ou $\{0\}$,
- p_J la probabilité que les atomes soient dans la configuration J en sortie de l'interféromètre,
- $p(J_1^d|J_2)$ la probabilité de détecter le résultat J_1 sachant que les atomes sont dans la configuration J_2, et inversement $p(J_1|J_2^d)$ la probabilité que les atomes aient été dans la configuration J_1 sachant qu'ils ont été détectés dans la configuration J_2.

Nous définissons par ailleurs les opérateurs de Kraus M_J, correspondant au résultat J d'une détection atomique contenant $n_e(J)$ atomes $|e\rangle$ et $n_g(J) = N(J) - n_e(J)$ atomes $|g\rangle$, et les probabilités p_J associées pour une matrice densité $\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}$, en gardant les notations du chapitre précédent, par

$$M_J = \sqrt{\binom{N(J)}{n_e(J)}}(M_e)^{n_e(J)}(M_g)^{n_g(J)}, \tag{III.35}$$

$$p_J = \mathrm{Tr}(M_J\,\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}\;M_J^\dagger). \tag{III.36}$$

Notons qu'ici, nous ne faisons par exemple pas la distinction entre les configurations (e,g) et (g,e). Bien que les atomes soient distinguables, au sens statistique du terme, nous ne pouvons pas les discriminer avec notre détecteur qui les détecte simultanément. Ce n'est ceci dit en rien un problème puisque, les opérateurs M_e et M_g étant diagonaux, ils commutent entre eux, et

$$M_{(e,g)} = M_{(g,e)} = M_e M_g = \frac{1}{\sqrt{2}}M_{eg}, \tag{III.37}$$

où M_{eg} a été défini équation (III.35). Si une mesure sur le champ de matrice densité ρ donne le résultat $\{e, g\}$, alors, en oubliant toute erreur de détection éventuelle, son état est projeté après la mesure sur

$$\begin{aligned}\rho_{\{e,g\}} &= \frac{1}{2}\rho_{(e,g)} + \frac{1}{2}\rho_{(g,e)} \\ &= \frac{M_g(M_e\,\rho\,M_e^\dagger)M_g^\dagger}{2\,\mathrm{Tr}\left(\rho\,M_{(e,g)}^\dagger M_{(e,g)}\right)} + \frac{M_e(M_g\,\rho\,M_g^\dagger)M_e^\dagger}{2\,\mathrm{Tr}\left(\rho\,M_{(g,e)}^\dagger M_{(g,e)}\right)} \\ &= \frac{M_{eg}\,\rho\,M_{eg}^\dagger}{p_{eg}} = \rho_{(e,g)} = \rho_{(g,e)},\end{aligned}$$

et la distinction $(e, g)/(g, e)$ n'est donc pas nécessaire. Notons toutefois que $p_{eg} = p_{(e,g)} + p_{(g,e)} = 2p_{(e,g)}$, ce qui se traduit également par le facteur $\sqrt{2}$ dans les équations (III.35) et (III.37), présent pour assurer l'égalité

$$M_{ee}M_{ee}^\dagger + M_{gg}M_{gg}^\dagger + M_{eg}M_{eg}^\dagger = \mathbb{1}, \tag{III.38}$$

ou de façon plus générale,

$$\forall N \quad \sum_{J/N(J)=N} M_J^\dagger M_J = \sum_{n_e(J)} \binom{N}{n_e(J)} (M_e^\dagger M_e)^{n_e(J)} (M_g^\dagger M_g)^{N-n_e(J)} = \mathbb{1}. \tag{III.39}$$

Aucun atome détecté Supposons qu'à une itération de la boucle, aucun atome ne soit détecté, *i.e.* $J = 0$. Les probabilités qu'il y ait 0, 1 ou 2 atomes sont alors

$$P_a(n|0_d) = P_a(0_d|n)\frac{P_a(n)}{P_a(0_d)}, \tag{III.40}$$

$$\text{où} \quad P_a(0_d) = \sum_{n=0}^{2} P_a(0_d|n)\,P_a(n) = P_a(0) + (1-\epsilon_d)P_a(1) + (1-\epsilon_d)^2 P_a(2). \tag{III.41}$$

L'équation III.40 n'est rien d'autre que la loi classique d'*inversion de Bayes*.

Si n atomes sont présents mais qu'aucun n'est détecté, n mesures non lues ont alors été faites sur le champ de la cavité. La loi de transformation de ρ est alors

$$\tilde{\rho}_{k+1} = \sum_{n=0}^{2} P_a(n|0_d)\,\mathbf{M}_{\mathrm{nl}}^n\,\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}. \tag{III.42}$$

Deux atomes détectés Si maintenant nous supposons que deux atomes ont été détectés, nous sommes dans une situation où tous les atomes effectivement préparés ont été vus par le détecteur, puisque nous négligeons les situations où plus de 2 atomes ont pu être excités. Les seuls défauts à prendre en compte sont donc les erreurs de détection. Si le résultat de

la détection est $J_0 \in \mathcal{S}_2 = \{\{e,e\},\{e,g\},\{g,g\}\}$, la probabilité que le paquet atomique soit dans la configuration $J_1 \in \mathcal{S}_2$ est

$$p(J_1|J_0^d) = p(J_0^d|J_1)\frac{p_{J_1}}{p_{J_0}^{(d)}}, \tag{III.43}$$

$$\text{où} \quad p_{J_0}^{(d)} = \sum_{J\in\mathcal{S}_2} p(J_0^d|J)p_J. \tag{III.44}$$

La définition des p_J ayant déjà été donnée équation (III.36), il ne nous reste qu'à donner l'expression des probabilités $p(J_1^d|J_2)$, où J_1 et J_2 sont des configurations à deux atomes :

$$\begin{cases} p(e^d,e^d|e,e) &= (1-\eta_e)^2 \\ p(e^d,e^d|e,g) &= (1-\eta_e)\,\eta_g \\ p(e^d,e^d|g,g) &= \eta_g^2 \end{cases} \tag{III.45}$$

$$\begin{cases} p(g^d,g^d|e,e) &= \eta_e^2 \\ p(g^d,g^d|e,g) &= \eta_e\,(1-\eta_g) \\ p(g^d,g^d|g,g) &= (1-\eta_g)^2 \end{cases} \tag{III.46}$$

$$\begin{cases} p(e^d,g^d|e,e) &= 2(1-\eta_e)\,\eta_e \\ p(e^d,g^d|g,g) &= 2(1-\eta_g)\,\eta_g \\ p(e^d,g^d|e,g) &= (1-\eta_e)(1-\eta_g)+\eta_e\eta_g. \end{cases} \tag{III.47}$$

La loi de transformation de la matrice densité du champ, après la détection d'un paquet atomique dans la configuration J_0 contenant deux atomes, est alors

$$\tilde{\rho}_{k+1} = \sum_{J\in\mathcal{S}_2} p(J|J_0^d)\,\frac{M_J\,\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}M_J^\dagger}{p_J}, \quad \mathcal{S}_2 = \{\{e,e\},\{e,g\},\{g,g\}\}\,. \tag{III.48}$$

Un seul atome détecté Cette situation est la plus complexe. D'une part, il peut y avoir ou pas un deuxième atome en présence qui n'a pas été détecté. D'autre part, l'atome mesuré peut l'avoir été correctement ou pas. Toutes les configurations, excepté celle où aucun atome n'a été préparé, sont donc possibles.

Donnons dans un premier temps les probabilités qu'il y ait 1 ou 2 atomes sachant qu'un seul a été détecté. Il nous faut pour cela les probabilités

$$P_a(1_d|1) = \epsilon_d \tag{III.49}$$

$$P_a(1_d|2) = 2\epsilon_d\,(1-\epsilon_d). \tag{III.50}$$

En utilisant les mêmes arguments bayesiens que précédemment, nous trouvons finalement

$$P_a(1|1_d) = \frac{P_a(1)}{P_a(1)+2(1-\epsilon_d)P_a(2)}, \tag{III.51}$$

$$P_a(2|1_d) = \frac{2(1-\epsilon_d)P_a(2)}{P_a(1)+2(1-\epsilon_d)P_a(2)}. \tag{III.52}$$

Si l'on note j le résultat de la mesure, il nous faut maintenant donner toutes les probabilités $p(J|j^d)$, probabilité que les atomes soient dans la configuration J, où $J \neq \{0\}$ est une configuration quelconque, sachant qu'un atome a été détecté et qu'il l'a été dans $|j\rangle$. Par souci de lisibilité, nous ne donnerons les résultats que pour $j = e$. Les résultats pour $j = g$ s'obtiennent alors simplement en échangeant les indices e et g dans les formules (III.59).

Détaillons le calcul de $p(e, g|e^d)$, les autres se calculant de manière analogue. D'une part, cette probabilité n'est non nulle que si $P_a(2|1_d)$ est non nul :

$$p(e, g|e^d) = P_a(2|e^d)\, p(e, g|e^d; 2) = P_a(2|1_d)\, p(e, g|e^d; 2), \tag{III.53}$$

où $p(e, g|e^d; 2)$ est la probabilité que les atomes soient dans la configuration $\{e, g\}$ sachant qu'un atome a été détecté dans $|e\rangle$, et qu'il y a en réalité 2 atomes. Nous avons utilisé le fait que la probabilité $P_a(2|e^d)$ qu'il y ait deux atomes sachant qu'un atome a été détecté dans $|e\rangle$ est égale à la probabilité $P_a(2|1^d)$ qu'il y ait deux atomes sachant qu'un atome à été détecté. Autrement dit, la probabilité d'avoir 2 atomes en réalité dans le nuage ne dépend pas de l'état dans lequel l'atome a été détecté. La loi d'inversion de Bayes (III.40) nous donne alors

$$p(e, g|e^d; 2) = p(e^d|e, g; 2; 1_d)\frac{p(e, g|2)}{p(e^d|2; 1_d)} = p(e^d|e, g; 1_d)\frac{p_{eg}}{p(e^d|2; 1_d)}, \tag{III.54}$$

$$\text{avec} \quad p(e^d|2; 1_d) = p(e^d|e, e; 1_d)p_{ee} + p(e^d|e, g; 1_d)p_{eg} + p(e^d|g, g; 1_d)p_{gg}, \tag{III.55}$$

où $p(e^d|i, j; 1_d)$ est la probabilité de détecter e sachant qu'il y a deux atomes, en configuration $\{i, j\}$, et qu'un et un seul a été détecté [19]. Ces probabilités ont pour expression

$$p(e^d|e, e; 1_d) = 1 - \eta_e, \tag{III.56}$$

$$p(e^d|g, g; 1_d) = \eta_g, \tag{III.57}$$

$$p(e^d|e, g; 1_d) = \frac{1 - \eta_e + \eta_g}{2}. \tag{III.58}$$

19. Nous utilisons implicitement le fait que la probabilité que deux atomes soient dans la configuration J à deux atomes ($J = \{e, g\}$ ici), sachant qu'il y a deux atomes, ne dépend pas du fait qu'un atome ait été détecté ou pas : $p(e, g|1_d; 2) = p(e, g|2)$.

Nous pouvons alors écrire le résultat final :

$$\begin{cases} p(e|e^d) &= P_a(1|1_d)\,\dfrac{(1-\eta_e)p_e}{(1-\eta_e)p_e+\eta_g p_g}, \\ p(g|e^d) &= P_a(1|1_d)\,\dfrac{\eta_g p_g}{(1-\eta_e)p_e+\eta_g p_g}, \\ p(e,e|e^d) &= P_a(2|1_d)\dfrac{\eta_e p_{ee}}{\eta_e p_{ee}+\frac{1-\eta_e+\eta_g}{2}p_{eg}+\eta_g p_{gg}}, \\ p(e,g|e^d) &= P_a(2|1_d)\dfrac{\frac{1-\eta_e+\eta_g}{2}p_{eg}}{\eta_e p_{ee}+\frac{1-\eta_e+\eta_g}{2}p_{eg}+\eta_g p_{gg}}, \\ p(g,g|e^d) &= P_a(2|1_d)\dfrac{\eta_g p_{gg}}{\eta_e p_{ee}+\frac{1-\eta_e+\eta_g}{2}p_{eg}+\eta_g p_{gg}}. \end{cases} \tag{III.59}$$

La loi de transformation de $\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}$ s'écrit alors comme précédemment :

$$\tilde{\rho}_{k+1} = \sum_{J\in\mathcal{S}_1} p(J|e^d)\frac{M_J\,\tilde{\rho}_{k+\frac{2}{3}}\,M_J^\dagger}{p_J}, \quad \mathcal{S}_1 = \{\{e\},\{g\},\{e,e\},\{e,g\},\{g,g\}\}\,. \tag{III.60}$$

Du fait de l'imperfection de notre détecteur, la simple loi de transformation (II.7) doit donc être remplacée par les trois lois (III.42), (III.60), et (III.48). Cela implique notamment le calcul de toutes les probabilités du type (III.59) à chaque détection atomique. Notons d'ailleurs que toutes ces probabilités dépendent de l'occupation moyenne n_a d'un paquet atomique. Pour optimiser l'évaluation faite par le filtre quantique au cours de la rétroaction, nous mesurons alors en temps réel ce paramètre n_a, plutôt que d'en fixer une valeur moyenne au début de l'expérience. Ceci est fait en mesurant le nombre moyen d'atomes détectés par paquet $n_a^{(d)}$ à partir des précédentes trajectoires quantiques, et d'en déduire n_a connaissant ϵ_d.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu dans un premier temps comment le nouvel ordinateur de contrôle, en charge du suivi en temps réel de l'état du champ, et du calcul et de l'injection des champs cohérents de correction, a été mis en place au sein de l'architecture expérimentale déjà existante. La synchronisation de ses multiples cartes avec le reste du montage, ainsi que la concordance des mesures réalisées par la nouvelle et l'ancienne carte de comptage des atomes, ont ainsi été discutées en détails.

Par la suite, nous nous sommes attachés à calibrer tous les paramètres expérimentaux intervenant dans les calculs du filtre quantique. Les défauts du détecteur à atomes (efficacité de détection) et de l'interféromètre de Ramsey (pris en compte *via* des taux d'erreurs de détection effectifs) ont ainsi été mesuré. La calibration de l'amplitude des champs de correction, ainsi que le choix de la gamme de variation à utiliser pour la rétroaction, ont par ailleurs été exposés.

Dans la troisième section du chapitre, nous nous sommes penchés sur de possibles imperfections expérimentales, non prises en compte par la rétroaction. Nous avons ainsi vérifié que la différence de phase, induite par le déphaseur contrôlant le signe des injections de correction, est suffisamment proche de la valeur désirée, et que les atomes de Ryberg, dans leur parcours au sein du dispositif expérimental, ne sont pas perturbés par ces mêmes injections, les franges de Ramsey conservant ainsi leur contraste, décalage et phase calibrés par ailleurs.

Dans une dernière partie enfin, nous avons vu comment la réalité du dispositif expérimental doit être prise en compte dans l'élaboration du filtre quantique décrit au chapitre précédent. Après s'être assurés que le temps de calcul nécessaire à la bonne réalisation d'une itération de la boucle de rétroaction satisfait bien aux contraintes temporelles liées à l'expérience, nous avons vérifié que, sur une réalisation de la rétroaction en boucle ouverte, les prédictions en temps réel du filtre quantique sont identiques à celles, faites *a posteriori*, de notre logiciel d'analyse de mesures QND, développé précédemment. Les imperfections de détection et de l'interféromètre ont enfin pu être prises en compte *via* une complexification indispensable du filtre.

Tous les ingrédients sont donc à ce stade réunis pour commencer nos expériences de rétroaction quantique sur l'état du champ micro-onde intracavité, dont les résultats sont présentés au chapitre suivant.

Chapitre IV

Résultats expérimentaux

Nous avons décrit au chapitre II le principe théorique de la rétroaction quantique que nous souhaitons mettre en œuvre : l'objectif est de préparer le champ de la cavité dans un état de Fock cible $|n_c\rangle$, et de le protéger contre la décohérence. La réalisation expérimentale d'une telle boucle de rétroaction a nécessité, comme nous l'avons vu au chapitre III, la mise en place d'un ordinateur de contrôle, capable de réagir en temps réel sur la séquence expérimentale, et une calibration précise de tous les paramètres intervenant dans l'estimation de la matrice densité du champ. Maintenant toutes ces étapes franchies, nous sommes en mesure de tester effectivement et expérimentalement notre procédure.

Nous aurons dans un premier temps à décrire la séquence expérimentale utilisée. Celle-ci se divise en trois étapes dont nous donnerons successivement le détail : une phase d'*initialisation* préparant le champ dans l'état initial désiré, la phase de rétroaction quantique à proprement parler, et enfin une phase de mesure nous permettant de tester la qualité de la boucle. Nous présenterons alors les résultats obtenus pour les quatre états cibles $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ et $|4\rangle$, en s'intéressant successivement aux trois points suivants : les *trajectoires quantiques* individuelles d'une part, le *régime stationnaire* de la rétroaction d'autre part, et l'efficacité de *préparation* de l'état cible enfin, en termes de fidélité et de vitesse de convergence. Nous pourrons ensuite par une analyse statistique des trajectoires enregistrées mieux comprendre comment la rétroaction quantique agit, et notamment comment les sauts quantiques sont corrigés. Dans une dernière partie, nous comparerons finalement la vitesse avec laquelle un état de Fock est préparé à celle obtenue avec une méthode «essais/erreurs», ne se servant que de mesures QND comme outil de préparation.

IV.1 Séquence expérimentale

Dans cette section, nous décrivons les trois étapes constituant la réalisation d'une expérience de rétroaction quantique. Nous nous attarderons essentiellement sur la phase d'initialisation, que nous n'avons pas encore détaillée. Les paramètres expérimentaux utilisés dans les deux dernières étapes, de rétroaction quantique et de mesure des performances de la boucle, seront ensuite donnés.

IV.1.1 Initialisation

Avant de lancer la rétroaction quantique à proprement parler, il nous faut préparer le champ de la cavité dans un état connu, et de préférence suffisamment proche de l'état cible pour améliorer la rapidité de convergence de la boucle. L'idée est donc, comme nous l'avons déjà vu, de préparer le champ cohérent $\left|\alpha_0 = \sqrt{\mathrm{n_c}}\right\rangle$ contenant autant de photons en moyenne que la cible $|\mathrm{n_c}\rangle$. C'est en effet l'état classique qui maximise la probabilité de trouver $\mathrm{n_c}$ à l'issue d'une mesure QND.

La façon dont un tel état est préparé a déjà été présentée, aux paragraphes I.1.2.b et III.2.1 notamment. Cependant, nous avons alors toujours supposé que la cavité est dans le vide de photons avant le début de l'injection de champ micro-onde. Ce n'est pas le cas de façon générale. Les expériences que nous réalisons nécessitent en effet d'être répétées de très nombreuses fois si nous voulons en extraire un comportement moyen. Le taux de répétition de l'expérience est alors un paramètre important, que nous cherchons bien sûr à rendre aussi grand que faire se peut. Dès lors, l'intervalle de temps séparant la réalisation de deux trajectoires quantiques, testant les mêmes paramètres expérimentaux, est rendu aussi faible que possible. En particulier, il est bien plus faible que le temps de vie moyen d'un photon dans la cavité, *i.e.* $\mathrm{T_{cav}} = 65\,\mathrm{ms}$. Si le champ est laissé dans un état proche de la cible à la fin d'une trajectoire quantique, nous ne pourrons plus supposer que la cavité est vide au début de la suivante, *i.e.* au moment de l'impulsion micro-onde préparant l'état cohérent $|\alpha_0\rangle$. Notons en outre que même si nous attendions suffisamment longtemps, la cavité ne serait pas dans l'état $|0\rangle$ mais dans le mélange statistique qu'est le champ thermique à $0,8\,\mathrm{K}$ contenant environ $0,05$ photons.

Entre la fin d'une trajectoire quantique et le début de la suivante, nous devons donc préparer *activement* l'état vide $|0\rangle$. L'idée est d'utiliser des atomes en interaction résonante avec la cavité qui, préparés dans l'état $|g\rangle$, pourront en absorber les excitations. Nous appelons ces atomes, pour des raisons évidentes, «atomes serpillières». Une solution consisterait alors à contrôler le temps d'interaction t_{int} des atomes résonants avec la cavité pour leur faire faire une rotation π, absorbant ainsi un photon par atome préparé. Ceci étant dit, une telle solution, quoique possible, voit son efficacité dépendre notablement :

- de l'état dans lequel la cavité est initialement : imaginons que le temps d'interaction t_{int} est tel qu'un atome préparé dans $|g\rangle$, avec un champ initialement dans l'état $|1\rangle$, subisse une impulsion π :

$$\Omega_0 t_{\mathrm{int}} = \pi. \tag{IV.1}$$

  Si maintenant le champ est laissé dans l'état $|4\rangle$, l'impulsion subie par l'atome devient une impulsion 2π,

$$\sqrt{4}\Omega_0 t_{\mathrm{int}} = 2\pi, \tag{IV.2}$$

  et aucun photon n'est absorbé. La dépendance de la fréquence de Rabi en le nombre de photons intracavité est ici le facteur limitant ;
- du nombre d'atomes dans l'échantillon : le fait est que la fréquence de Rabi dépend également du nombre d'atomes interagissant simultanément avec le mode de la cavité.

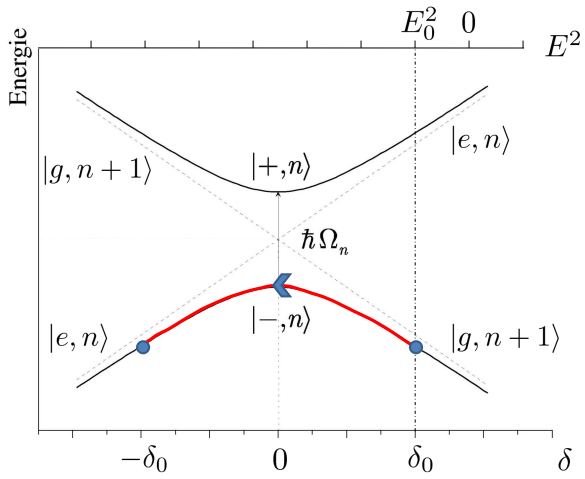


FIGURE IV.1 – Transition adiabatique de $|g,n+1\rangle$ à $|e,n\rangle$. δ_0 et E_0 sont respectivement les désaccord et champ électrique initiaux, correspondant à ceux utilisés pour les sondes Ramsey.

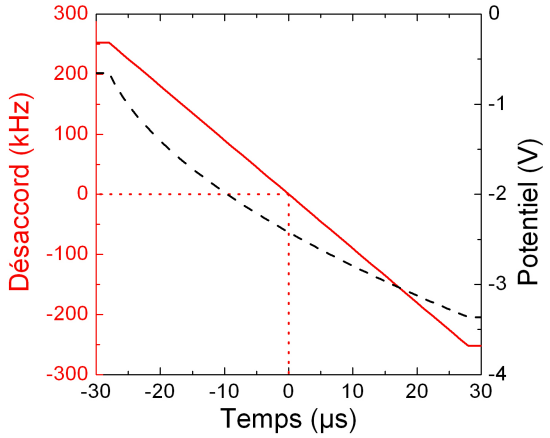


FIGURE IV.2 – Modification du désaccord atome–champ pour les atomes serpillières par effet Stark quadratique. L'origine des temps correspond au passage du centre du nuage atomique par le centre du mode de la cavité.

Or, pour rendre l'absorption de photons efficace, nous chercherons à rendre aussi grand que possible le nombre d'atomes préparés par échantillon. La préparation étant poissonienne, cela implique une fluctuation d'autant plus grande du nombre d'atomes effectivement présents, et donc du nombre de photons absorbés par atome.

La solution retenue est de faire passer les atomes quasi-adiabatiquement de l'état $|g,n+1\rangle$ à l'état $|e,n\rangle$. Nous utilisons pour cela notre capacité à modifier continûment le désaccord atome/champ par effet Stark en changeant les potentiels appliqués sur les miroirs de la cavité, et donc le champ électrique statique E en son sein. Nous rappelons sur la figure IV.1 la variation des énergies des états propres de l'atome habillé en fonction du champ électrique dans la cavité, *i.e.* du désaccord $\delta \sim E^2$. En partant de l'état $|g,n+1\rangle$ et [1] $\delta = \delta_0 = 250\,\text{kHz}$, correspondant à la valeur du champ électrique utilisé pour les sondes QND, nous augmentons progressivement E pour faire passer le désaccord de δ_0 à $-\delta_0$. L'*anticroisement* à la résonance des niveaux $|+,n\rangle$ et $|-,n\rangle$ permet alors le passage du niveau $|g,n+1\rangle$ au niveau $|e,n\rangle$ en sortie de la cavité. La figure IV.2 donne le profil temporel du potentiel appliqué sur l'un des deux miroirs et permettant une telle variation du désaccord δ. Notons que quand le nuage atomique passe par le centre du mode de la cavité, les atomes sont à résonance avec le champ.

1. Notons que l'effet Stark étant quadratique pour les niveaux circulaires, nous ne pouvons que diminuer la fréquence atomique par application d'un champ électrique. Le désaccord en champ faible doit donc être positif si l'on veut pouvoir mettre ainsi les atomes à résonance.

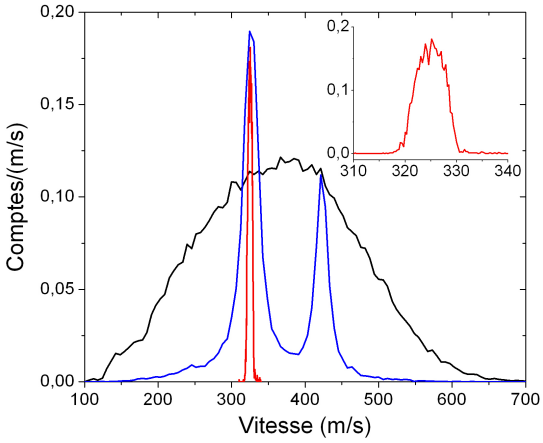


FIGURE IV.3 – Distribution de vitesse des atomes serpillières : en noir, sans sélection de vitesse ; en bleu, avec le laser repompeur allumé en continu ; en rouge (et dans l'encart), avec le laser repompeur allumé 20 µs.

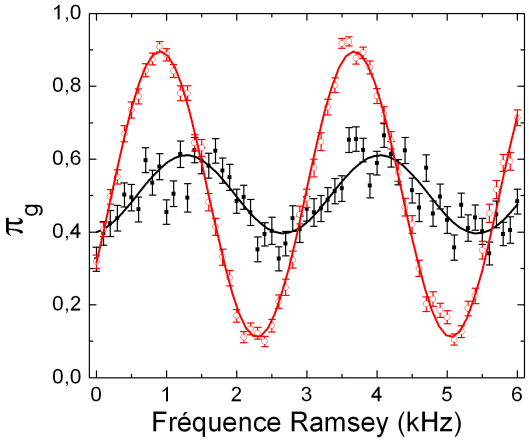


FIGURE IV.4 – Franges de Ramsey avec (rouge) et sans (noir) atomes serpillières. Le champ cohérent injecté avant leur passage est d'amplitude unité. Les lignes continues sont des ajustements sinusoïdaux. Avec deux préparations d'atomes serpillières, le contraste trouvé est de $(78,5 \pm 0,5)\%$, contre $\sim 20\%$ sans.

Paramètres expérimentaux Comme nous l'avons précédemment évoqué, nous cherchons à avoir un grand nombre d'atomes serpillières par échantillon, sans pour autant se priver d'une sélection de vitesse : la rampe de potentiel sur la cavité doit être appliquée au bon moment. Les contraintes expérimentales sont toutefois moins sévères que pour les atomes QND, pour lesquels le temps d'interaction avec le champ de la cavité devait être précisément contrôlé. Ici, la classe de vitesse peut être relativement large. Par ailleurs, au vu de la distribution de vitesse donnée figure IV.3, il est plus efficace de centrer la distribution de vitesse sélectionnée sur des valeurs plus élevées que les $250\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ des atomes QND. Pour des raisons techniques cependant, nous ne pouvons pas utiliser deux procédures de circularisation différentes pour les sondes et pour les serpillières, et leurs vitesses ne doivent donc pas être notablement différentes. Nous choisissons alors de leur donner une vitesse de $(325 \pm 4)\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Au chapitre I, nous avons expliqué que le choix des 82 µs séparant deux préparations atomiques est lié à la position des atomes dans leur parcours au moment des impulsions micro-ondes de purification des autres échantillons. Cet intervalle de temps dépend donc de la vitesse des atomes, et les serpillières se voient séparées finalement de 90 µs.

Notons par ailleurs que ces atomes serpillières sont précisément les atomes que nous avions utilisés au chapitre I pour mesurer le spectre de la cavité : nous regardions alors le taux de transfert des atomes préparés dans l'état $|g\rangle$ vers l'état $|e\rangle$, caractéristique du

nombre de photons dans la cavité, après une injection micro-onde de fréquence connue.

Efficacité Pour tester l'efficacité des serpillières, nous utilisons une nouvelle fois le fait que le contraste des franges est réduit en présence d'un champ dans la cavité. Si, entre l'injection d'un champ $|\alpha\rangle$ et le passage des sondes Ramsey, nous envoyons des atomes serpillières effacer le champ tout juste créé, le contraste des franges devrait toutefois être celui mesuré en l'absence de champ. Sur la figure IV.4, nous traçons en rouge les franges obtenues pour $\alpha = 1$, avec 2 échantillons serpillières préparés, contenant chacun en moyenne $5,3$ atomes. Elles sont à comparer à celles obtenues quand aucun atome serpillière n'est envoyé, tracées en noir sur la même figure. La différence est manifeste : le contraste passe de 20% à plus de 78% avec ces serpillières. Notons de surcroît que le contraste $C_2 = (78,5 \pm 0,5)\%$ mesuré avec ces 2 serpillières préparées est inchangé si nous en envoyons 10. Si au contraire une seule excitation est réalisée, le contraste des franges décroît légèrement : $C_1 = (76,5 \pm 0,4)\%$.

Deux échantillons serpillières sont donc suffisants pour effacer un champ cohérent contenant 1 photon. En pratique, lorsque nous réaliserons les expériences de rétroaction quantique, nous ne pourrons pas présumer de la qualité de la boucle, et nous ne pourrons notamment pas exclure *a priori* les situations où le filtre quantique échoue gravement dans son estimation de l'état du champ. Dès lors, il se peut qu'en fin de trajectoire quantique, le nombre de photons dans la cavité soit très élevé. Pour pallier ces situations *pathologiques*, nous décidons d'envoyer systématiquement 50 échantillons de serpillières au début d'une réalisation de la boucle.

IV.1.2 Séquence de rétroaction continue

Une fois le champ cohérent $\left|\alpha = \sqrt{\mathrm{n_c}}\right\rangle$ préparé, la rétroaction quantique peut commencer. Nous précisons ici les paramètres expérimentaux utilisés au cours de l'opération de la rétroaction quantique en suivant étape par étape le parcours d'un atome de sa préparation à sa détection (voir figure IV.5).

- À un instant pris comme origine des temps débute, par une impulsion laser à 780 nm de 2 µs, la circularisation d'un échantillon d'atomes de rubidium dans la boîte à circulariser, qu'un atome éventuellement circularisé quitte dans le niveau $|g\rangle$ à la vitesse de $250\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. En moyenne, environ $0,6$ atomes sont ainsi préparés ;
- À $t = 586\,\mu\mathrm{s}$, il subit une première impulsion $\pi/2$ dans la première zone de Ramsey ;
- Il traverse alors la cavité et interagit avec le champ de façon dispersive, le désaccord étant $\delta = 243\,\mathrm{kHz}$. Le déphasage subi en présence de n photons, déjà mesuré au paragraphe I.4, est

$$\phi(n) = (0,256\pi)n - (0,002\pi)n^2; \tag{IV.3}$$

- Dans la seconde zone de Ramsey, une nouvelle impulsion $\pi/2$ est réalisée, à $t = 948\,\mu\mathrm{s}$, telle que la phase de l'interféromètre soit

$$\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c}) = \frac{\pi}{2} - \phi(\mathrm{n_c}); \tag{IV.4}$$

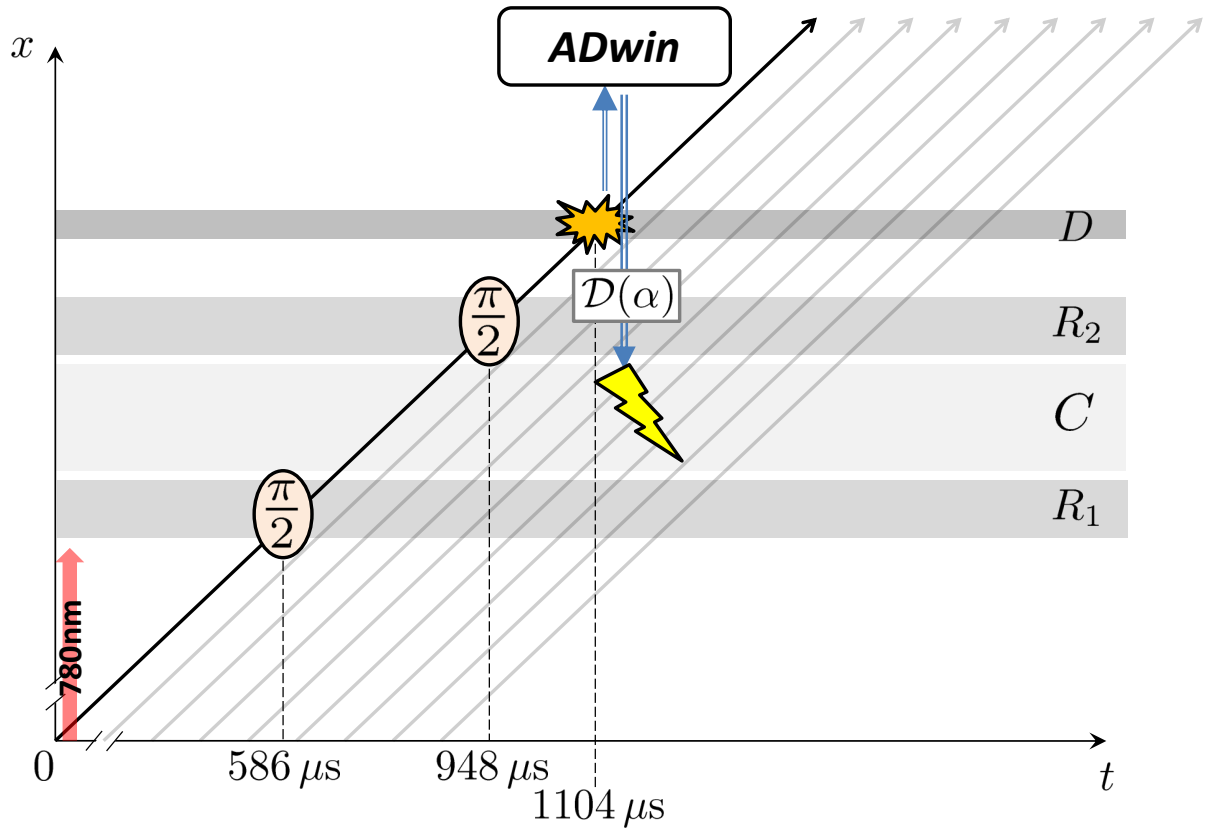


FIGURE IV.5 – Diagramme espace-temps d'une trajectoire atomique. Les flèches obliques représentent les trajectoires des atomes, préparés toutes les 82 µs. Les zones grisées correspondent aux deux cavités Ramsey (R_1 et R_2), à la cavité micro-onde (C) et au détecteur (D). À $t = 586$ µs et $t = 948$ µs, l'atome subit une impulsion $\pi/2$, puis est détecté à $t = 1104$ µs (début de la rampe d'ionisation). À $t = 1117$ µs, une impulsion digitale (double flèche) déclenche les calculs de l'ADwin, qui injecte (éclair) un champ cohérent α de correction dans C, 70 µs plus tard. Le schéma n'est pas à l'échelle.

- À $t = 1104\,\mu s$, l'atome est alors dans le détecteur à ionisation et la rampe d'ionisation est déclenchée. Du fait de l'efficacité limitée du détecteur, environ $0,2$ atomes seulement sont détectés par échantillon ;
- À $t = 1117\,\mu s$, une impulsion digitale envoyée sur l'entrée «Event IN» de l'ordinateur de contrôle ADwin marque le début du calcul de la prochaine correction cohérente à appliquer, au vu notamment des résultats de la détection tout juste faite. L'injection débute $70\,\mu s$ plus tard.

Ces six étapes sont finalement répétées toutes les $82\,\mu s$ jusqu'à l'arrêt de la rétroaction quantique.

IV.1.3 Mesure QND indépendante

Une fois la boucle de rétroaction stoppée, et afin d'en évaluer la qualité, il nous faut reconstruire la matrice densité du champ préparé. En toute rigueur, il faudrait donc utiliser un processus de tomographie, telle que cela a été fait précédemment sur des états de Fock ou sur des chats de Schrödinger [34, 74]. Toutefois, une telle reconstruction est longue à réaliser. Les moyennes de nombreuses observables doivent être mesurées indépendamment (les observables considérées ne commutent pas entre elles). La reconstruction d'un état chat de Schrödinger nécessite par exemple une journée entière de mesure continue. Ici, l'état ciblé est un état de Fock, qui n'a aucune cohérence. Pour tester la qualité de la rétroaction quantique, nous nous contentons donc de mesurer les populations du champ préparé, ce qui ne nécessite qu'une mesure QND du nombre de photons, bien plus rapide qu'une tomographie complète.

Notons que le filtre quantique nous donne déjà une estimation de la distribution des nombres de photons dans la cavité à la fin de la procédure de rétroaction. Cependant, cette estimation est le résultat d'une mesure utilisant beaucoup d'informations *a priori* sur le champ : la matrice densité du champ au début de la boucle, la connaissance de la relaxation, les amplitudes des champs injectés... Pour tester de façon fiable notre protocole de rétroaction quantique, nous devons en outre utiliser une mesure *indépendante* de la rétroaction quantique tout juste opérée pour ne pas biaiser nos conclusions, et utilisant aussi peu d'information *a priori* sur le champ. Nous débutons donc, immédiatement après la fin de la séquence de rétroaction continue, une nouvelle mesure quantique non-destructive, à l'aide de sondes de Ramsey identiques à celles utilisées pour la boucle. Deux critères essentiels sont à satisfaire.

1. D'une part, la mesure doit se faire en un temps aussi court que possible. Si l'intervalle séparant la fin de la rétroaction et l'instant auquel la distribution des nombres de photons est évalué est trop grand, la relaxation aura le temps de la modifier et nous n'aurons pas une évaluation satisfaisante de la qualité du filtre ;

2. D'autre part, nous devons être capables de distinguer clairement autant de nombres de photons que possible, eu égard au déphasage par photon utilisé $\sim \pi/4$, *i.e.* tous les nombres de photons $n \leq 7$. Le filtre quantique y arrive avec une seule phase de mesure en utilisant sa connaissance de la relaxation. Cela nécessite toutefois l'intégration sur

un temps de l'ordre du temps de vie des photons : pour distinguer $|3\rangle$ et $|7\rangle$, il faut un temps de l'ordre de $\mathrm{T_{cav}}/7 = 9\,\mathrm{ms}$. Cela est en contradiction avec la contrainte précédente. La solution retenue est d'utiliser alors une mesure QND à 4 phases, telle que présentée au chapitre I, pour laquelle tous les nombres $n \leq 7$ sont bien discriminés sans avoir à invoquer la relaxation du champ.

Notons par ailleurs que nous serons uniquement intéressés par des mesures d'ensemble, l'objectif n'étant pas de mesurer le nombre de photons à la fin de chaque trajectoire quantique, mais plutôt l'état obtenu en moyenne sur un grand nombre de trajectoires. Le choix se porte donc naturellement sur une mesure QND *itérative* à 4 phases, telle qu'elle a été présentée au paragraphe I.4.3, et qui permet notamment de satisfaire le critère n°1.

Rappelons que nous avions conclu le chapitre I en expliquant que l'utilisation de deux atomes seulement par trajectoire quantique devrait suffire à obtenir une estimation fiable de la distribution du nombre de photons. Dans toute la suite par conséquent, nous utiliserons effectivement deux atomes en moyenne pour la mesure QND itérative suivant la rétroaction. Nous précisons ici *en moyenne* car nous fixons en réalité le nombre d'échantillons participant à la mesure, plutôt que le nombre d'atomes détectés. De la sorte, la mesure finit toujours au même instant, quelle que soit la trajectoire quantique. Le nombre d'atomes détectés étant de l'ordre de $0,2$ par échantillon, nous choisissons d'utiliser 10 échantillons dans la mesure, qui dure de fait

$$T_{\mathrm{mes}} = 820\,\mu\mathrm{s} \ll \mathrm{T_{cav}}. \tag{IV.5}$$

IV.2 Résultats expérimentaux

La façon dont nous voulons agir en continu sur l'état du champ a maintenant été exposée en détails. Nous en présentons dans cette section les principaux résultats. Après avoir donné des exemples de trajectoires quantiques «typiques», nous nous intéresserons à son comportement moyen. La distribution stationnaire du champ sera alors mesurée, ainsi que la fidélité avec laquelle nous pouvons préparer l'état de Fock ciblé. La vitesse avec laquelle le champ converge vers cet état sera également analysée. La comparaison des résultats obtenus pour plusieurs jeux de paramètres expérimentaux (taille de l'espace de Hilbert, phase de l'interféromètre...) nous permettra en outre de justifier leurs valeurs retenues *in fine*.

IV.2.1 Trajectoires individuelles

Nous donnons dans cette première partie des exemples de trajectoires quantiques typiques. Les paramètres expérimentaux que nous avons utilisés ne seront justifiés que plus tard. Précisons simplement que pour les cibles $|1\rangle$ et $|2\rangle$:

- la phase de l'interféromètre est toujours $\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c}) = \pi/2 - \phi(\mathrm{n_c})$,
- l'espace de Hilbert utilisé pour les calculs est de taille $\mathcal{N} = 8$.

Pour les cibles $|3\rangle$ et $|4\rangle$ en revanche :
- la phase de l'interféromètre est modifiée à chaque préparation atomique, et prend alternativement les valeurs $\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c})$ et $\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c} - 1)$,
- l'espace de Hilbert est de taille $\mathcal{N} = 9$.

Dans tous les cas, les trajectoires quantiques présentées ici ont été obtenues en utilisant le contrôle «Distance» défini au chapitre II. Sur les figures IV.6 et IV.7, nous en donnons deux exemples, de durée 164 ms, et correspondant respectivement aux cibles $|\mathrm{n_c} = 2\rangle$ et $|\mathrm{n_c} = 3\rangle$.

Notons tout de suite que les deux figures ressemblent beaucoup[2] aux figures simulées II.8 et II.9. Les commentaires seront donc sensiblement les mêmes que ceux faits au chapitre II.

Nous traçons dans un premier temps (bandeau **a** des figures) le résultat des détections atomiques[3] enregistrées par la carte compteur de l'ADwin. À partir de ces résultats notamment, le filtre quantique calcule l'opérateur densité estimé du champ $\rho(t)$, sa distance à l'état cible $d(\rho_\mathrm{c}, \rho(t))$ tracée dans le bandeau **b**, et l'amplitude des corrections à appliquer (bandeau **c**). La partie **d** des figures donne l'évolution temporelle des probabilités $P(\mathrm{n_c})$ (vert), $P(n < \mathrm{n_c})$ (rouge) et $P(n > \mathrm{n_c})$ (bleu). Nous donnons de surcroît la matrice densité du champ estimée à quatre instants différents, correspondant successivement à l'état du champ initialement (état cohérent $\left|\alpha = \sqrt{\mathrm{n_c}}\right\rangle$), une fois la cible préparée, après un saut quantique, et pendant la correction de ce saut quantique.

Après une première période d'environ 20 ms, soit 240 itérations de la boucle et 50 atomes détectés, pendant laquelle de nombreuses injections sont réalisées, la distance à l'état cible atteint des valeurs relativement basses et les corrections s'arrêtent. L'état cible a alors été préparé, avec une fidélité élevée de l'ordre de 80%. Sur la matrice densité notamment, aucune cohérence n'est visible, et les populations des états autres que $|\mathrm{n_c}\rangle$ sont faibles.

Le champ reste dès lors dans cet état jusqu'à ce que la relaxation induise un saut quantique, le plus souvent vers $|\mathrm{n_c} - 1\rangle$, comme c'est le cas sur les deux figures autour de $t = 40$ ms : $P(\mathrm{n_c} - 1)$ prend brusquement des valeurs élevées, augmentant la distance à la cible tout aussi rapidement. Notons que cela se fait sans l'apparition de cohérences dans la matrice densité. Le champ étant alors loin de $|\mathrm{n_c}\rangle$, la source micro-onde redevient active jusqu'à ce que la cible soit restaurée, en un temps de l'ordre de 10 à 20 ms (120 à 240 itérations). La correction s'accompagne cette fois de l'apparition de cohérences dans la matrice densité.

Très clairement, il apparaît sur ces trajectoires que le filtre quantique est capable, à l'aide d'injections de champs cohérents bien choisis, de *préparer* l'état de Fock désiré, mais aussi de le *stabiliser* sur des temps beaucoup plus longs que son temps de vie, malgré sa fragilité dans le processus de décohérence. Les figures IV.8 et IV.9 donnent deux autres exemples de contrôle continu de l'état du champ, permettant respectivement la préparation des états $|1\rangle$ et $|4\rangle$.

2. Voir la note 7 de la page 88.

3. Ici, les événements à 2 atomes sont aussi pris en compte. Dans le cas où les deux atomes sont dans le même état, ces événements sont repérés par des barres de longueur double sur les figures.

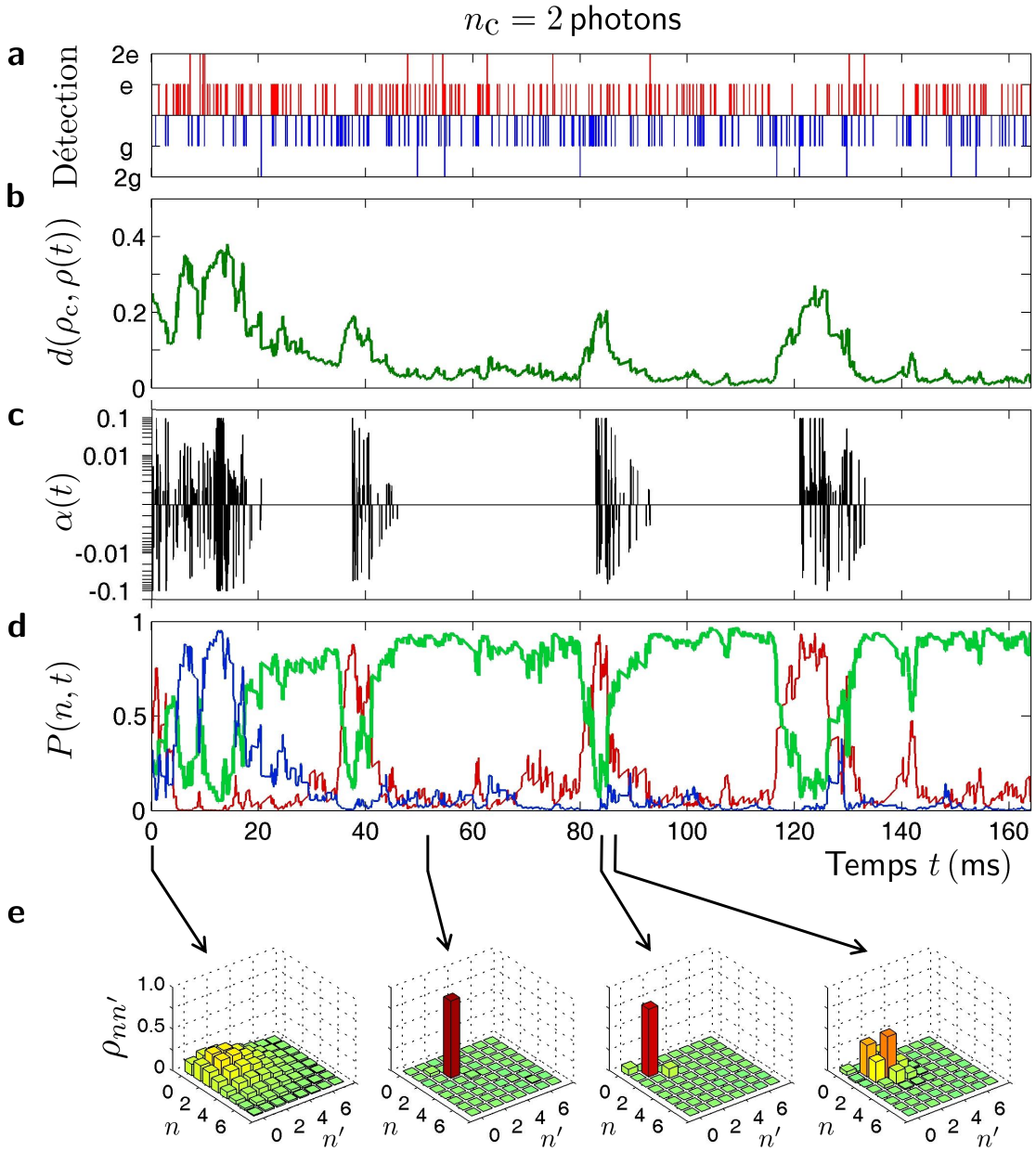


FIGURE IV.6 – Trajectoire quantique expérimentale pour $n_c = 2$ et le contrôle «Distance». **a.** Résultats des détections atomiques enregistrées par l'ordinateur de contrôle : une barre rouge vers le haut correspond à un atome dans $|e\rangle$, une barre bleue vers le bas à $|g\rangle$. Les traits de longueur double indiquent les événements à 2 atomes détectés. **b.** Distance $d(\rho_c = |2\rangle\langle 2|, \rho)$ calculée par l'ADwin *via* la loi «Distance». **c.** Amplitude des injections cohérentes en échelle logarithmique signée : $\mathrm{sgn}(\alpha)\log|\alpha|$. **d.** Tracé de $P(n_c = 2, t)$ (vert), $P(n > 2, t)$ (bleu), et $P(n < 2, t)$ (rouge). **e.** Valeurs absolues des matrices densité du champ estimé à quatre instants différents : à $t = 0$, $t = 52\,\mathrm{ms}$ après convergence vers l'état cible, $t = 83,2\,\mathrm{ms}$ après détection d'un saut quantique, et à $t = 85,2\,\mathrm{ms}$ pendant la correction du-dit saut.

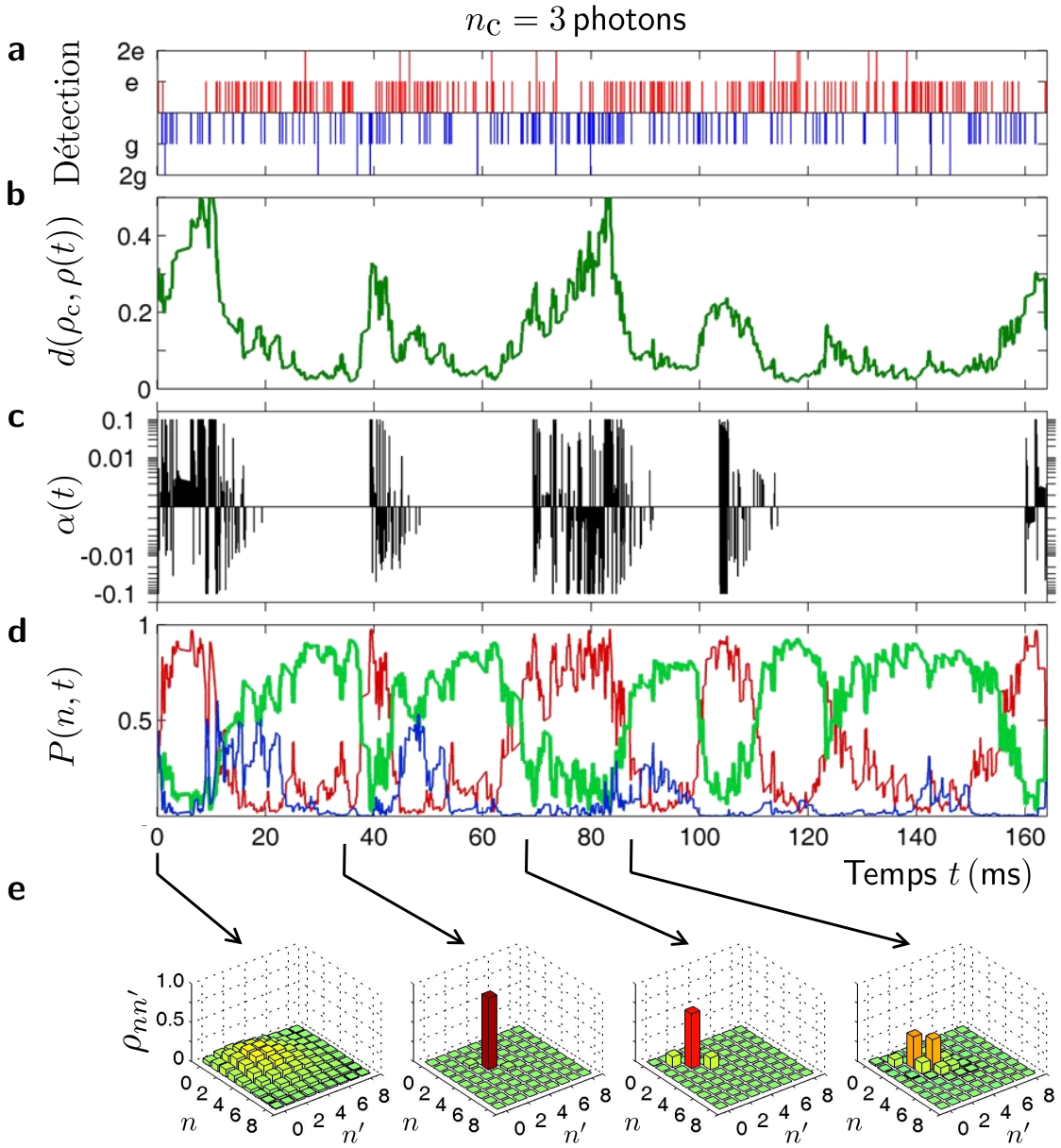


FIGURE IV.7 – Trajectoire quantique expérimentale pour $n_c = 3$ et le contrôle «Distance». **a.** Résultats des détections atomiques enregistrées par l'ordinateur de contrôle : une barre rouge vers le haut correspond à un atome dans $|e\rangle$, une barre bleue vers le bas à $|g\rangle$. Les traits de longueur double indiquent les événements à 2 atomes détectés. **b.** Distance $d(\rho_c = |3\rangle\langle 3|, \rho)$ calculée par l'ADwin *via* la loi «Distance». **c.** Amplitude des injections cohérentes en échelle logarithmique signée : $\mathrm{sgn}(\alpha)\log|\alpha|$. **d.** Tracé de $P(n_c = 3, t)$ (vert), $P(n > 3, t)$ (bleu), et $P(n < 3, t)$ (rouge). **e.** Valeurs absolues des matrices densité du champ estimé à quatre instants différents : à $t = 0$, $t = 35,7$ ms après convergence vers l'état cible, $t = 69,3$ ms après détection d'un saut quantique, et à $t = 85,9$ ms pendant la correction du-dit saut.

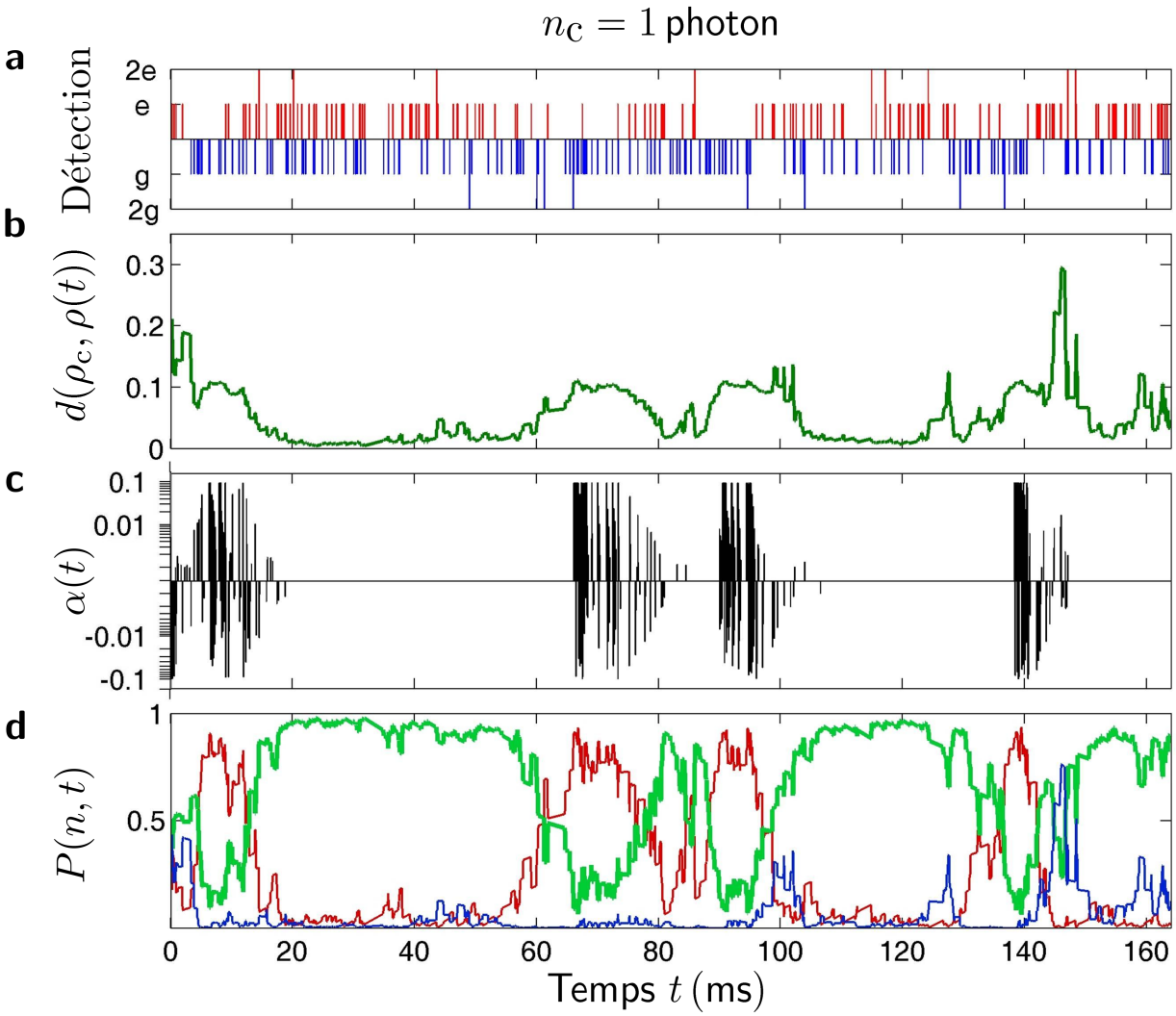


FIGURE IV.8 – Trajectoire quantique expérimentale pour $n_c = 1$ et le contrôle «Distance». **a.** Résultats des détections atomiques enregistrées par l'ordinateur de contrôle : une barre rouge vers le haut correspond à un atome dans $|e\rangle$, une barre bleue vers le bas à $|g\rangle$. Les traits de longueur double indiquent les événements à 2 atomes détectés. **b.** Distance $d(\rho_c = |1\rangle\langle 1|, \rho)$ calculée par l'ADwin *via* la loi «Distance». **c.** Amplitude des injections cohérentes en échelle logarithmique signée. **d.** Tracé de $P(n_c = 1, t)$ (vert), $P(n > 1, t)$ (bleu), et $P(n < 1, t)$ (rouge).

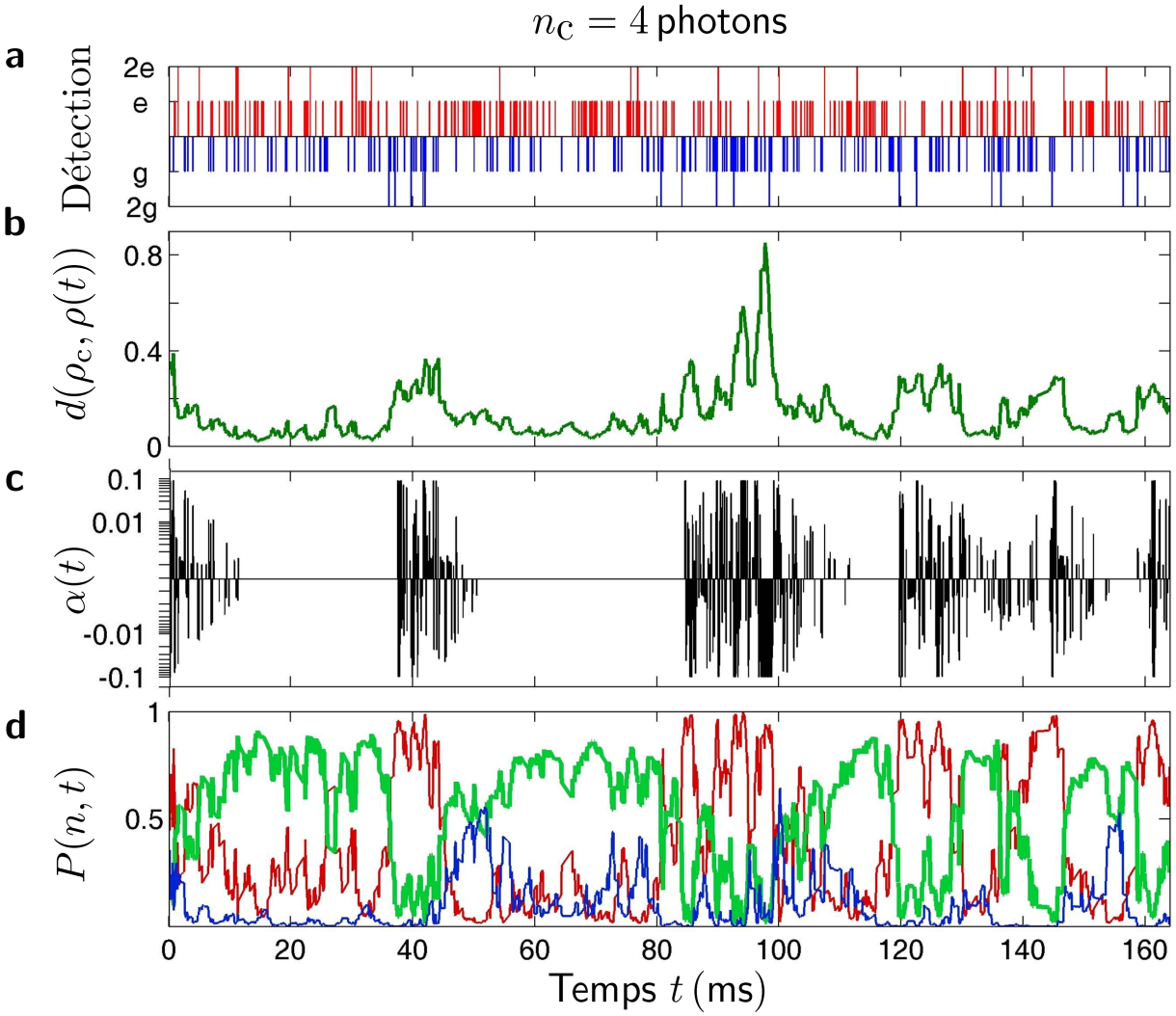


FIGURE IV.9 – Trajectoire quantique expérimentale pour $n_c = 4$ et le contrôle «Distance». **a.** Résultats des détections atomiques enregistrées par l'ordinateur de contrôle : une barre rouge vers le haut correspond à un atome dans $|e\rangle$, une barre bleue vers le bas à $|g\rangle$. Les traits de longueur double indiquent les événements à 2 atomes détectés. **b.** Distance $d(\rho_c = |4\rangle\langle 4|, \rho)$ calculée par l'ADwin *via* la loi «Distance». **c.** Amplitude des injections cohérentes en échelle logarithmique signée. **d.** Tracé de $P(n_c = 4, t)$ (vert), $P(n > 4, t)$ (bleu), et $P(n < 4, t)$ (rouge).

Avant de discuter plus en détails du comportement du filtre, remarquons simplement que les quatre trajectoires présentées ici diffèrent essentiellement par la fidélité de préparation de la cible, et par la fréquence à laquelle la source devient active. L'une comme l'autre sont liées à la fragilité de l'état cible, d'autant plus grande que le nombre de photons qu'il contient est élevé : le temps de vie de $|n\rangle$ est, rappelons le, $\mathrm{T_{cav}}/n$, soit 16 ms seulement pour $|4\rangle$, malgré tout préparé puis préservé efficacement.

Pour caractériser cette efficacité, il nous faut répéter l'expérience un grand nombre de fois, et étudier le comportement moyen de la boucle de rétroaction. C'est tout l'objet des paragraphes suivants. Nous serons alors capables de connaître l'état stationnaire du champ, ainsi que la pureté de l'état préparé. Une étude de la rapidité de la préparation sera en outre faite, et les choix des phases Ramsey, de la taille de l'espace de Hilbert, et de la loi de contrôle justifiés.

IV.2.2 Distribution moyenne du nombre de photons

Comme annoncé, nous nous intéressons dans un premier temps au *régime stationnaire* de la boucle de rétroaction. Nous chercherons tout d'abord à obtenir la distribution des nombres de photons dans ce régime, et ce pour les quatre états cibles. La façon dont il s'établit sera ensuite analysée et quantifiée par la donnée de temps caractéristiques d'évolution. Nous aurons en outre l'occasion de justifier du choix de quelques paramètres expérimentaux.

IV.2.2.a État stationnaire du champ

De même que nous l'avions fait lors de nos simulations numériques du chapitre II, pour mesurer quelle est la distribution des nombres de photons dans l'état *stationnaire* du champ, nous réalisons une succession de trajectoires quantiques que nous arrêtons *à temps fixe*, $t_f = 164$ ms en l'occurrence. Notons que nous obtiendrions les mêmes résultats si nous arrêtions chaque trajectoire à un instant *aléatoire*, différent d'une réalisation à l'autre, mais choisi plus grand que le temps de convergence de la boucle donné plus bas. C'est encore une fois par simplicité que t_f a été choisi fixe : nous pouvons alors programmer au préalable le nombre total d'échantillons atomiques préparés, *i.e.* d'itérations de la boucle, à savoir 2000. Après le 2000e échantillon, l'ordinateur de contrôle peut donc s'arrêter, les 10 échantillons suivants réalisant la mesure QND itérative indépendante de la rétroaction.

Les résultats de la figure IV.10 sont obtenus en enregistrant, pour chacune des 4 cibles ($|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ et $|4\rangle$), 4000 trajectoires quantiques. Les histogrammes correspondent aux résultats de la mesure QND de contrôle, notés $P_{\mathrm{QND}}(n)$, et les ronds aux prédictions du filtre moyennées sur toutes les trajectoires amputées de leurs 200 premières itérations [4], soit 16 ms, et que nous notons $P_{\mathrm{F}}^{(s)}(n) = \langle P_{\mathrm{F}}(n,t)\rangle_{t\geq 16\,\mathrm{ms}}$, où $P_{\mathrm{F}}(n,t)$ est la distribution estimée par le filtre à l'instant t et moyennée sur toutes les trajectoires quantiques. Nous donnons en outre la distribution initiale des nombres de photons, $P_{\mathrm{QND}}^{(0)}$, obtenue de la même façon que P_{QND}, avec un temps d'arrêt nul, $t_f = 0$.

4. Ce choix se justifiera quand nous aurons étudié l'établissement du régime stationnaire.

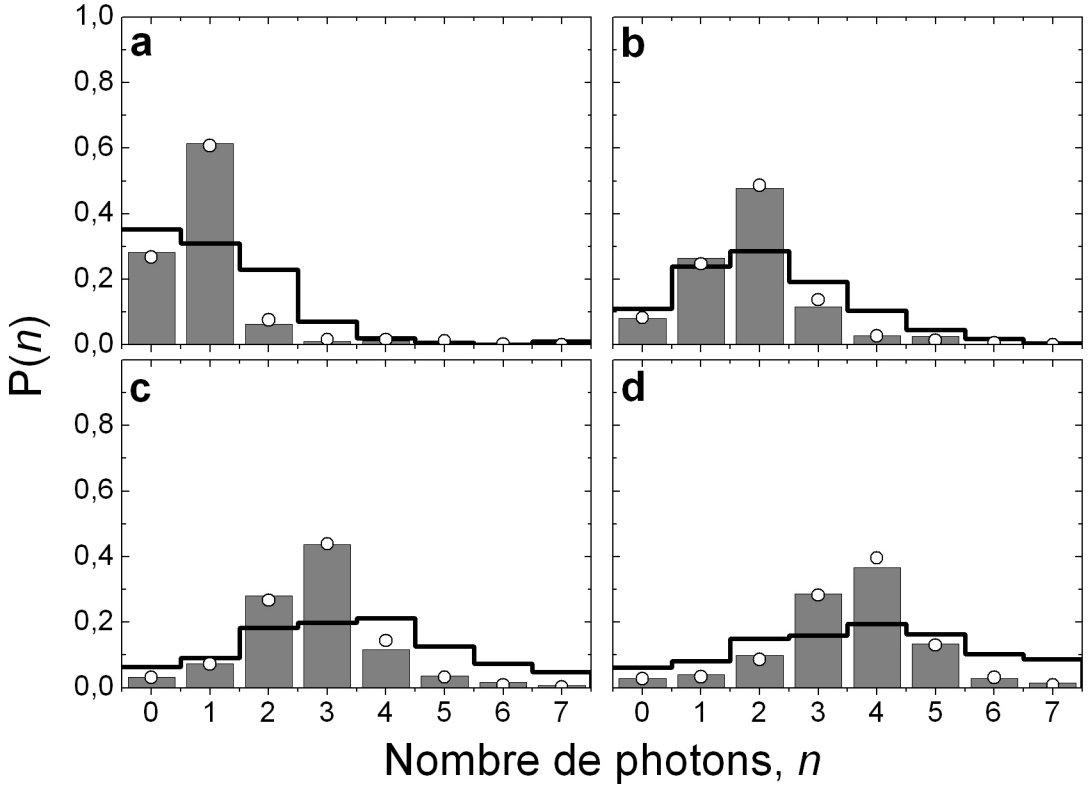


FIGURE IV.10 – Distributions stationnaires des nombres de photons pour 4 états cibles. *Histogrammes :* distribution P_{QND} obtenue par la mesure QND indépendante de la rétroaction, la boucle de rétroaction étant arrêtée à $t_f = 164\,\mathrm{ms}$. *Ronds :* distribution moyenne $P_{\mathrm{F}}^{(s)}$ estimée par l'ordinateur de contrôle. *Traces :* Champ initial $P_{\mathrm{QND}}^{(0)}$ mesuré de la même façon que les histogrammes ($t_f = 0$). Les états cibles sont respectivement $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, et $|4\rangle$ pour les figures **a**, **b**, **c**, et **d**.

	σ	$P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$	$P_{\lvert\sqrt{\mathrm{n_c}}\rangle}(\mathrm{n_c})$
$\lvert 1\rangle$	$0,95$	61%	37%
$\lvert 2\rangle$	$0,79$	48%	27%
$\lvert 3\rangle$	$0,69$	44%	22%
$\lvert 4\rangle$	$0,69$	37%	20%

TABLE IV.1 – Distributions stationnaires de la rétroaction. Nous donnons, pour chaque état cible, l'écart-type ramené à la moyenne $\sigma^2 = (\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2)/\langle N\rangle$ et la fidélité $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$ de la distribution P_{QND} mesurée. La dernière colonne donne la fidélité maximale possible pour un état cohérent, obtenue pour $\left|\sqrt{\mathrm{n_c}}\right\rangle$.

De façon significative, la distribution stationnaire de la rétroaction est plus étroite que la distribution cohérente initiale, de variance unité, mais présente surtout une fidélité à la cible $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$ notablement accrue. Le tableau IV.1 récapitule les résultats obtenus, et compare notamment $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$ à la fidélité maximale accessible avec un état cohérent, atteinte pour l'état $\left|\sqrt{\mathrm{n_c}}\right\rangle$. La rétroaction quantique fournit systématiquement un gain d'au moins 60%. Se contenter d'arrêter la boucle à un instant choisi au hasard pour préparer l'état cible n'est cependant pas la méthode optimale, et nous verrons au paragraphe IV.2.3 qu'il est possible d'obtenir des fidélités élevées en se servant des prédictions du filtre pour arrêter la boucle au moment opportun. L'information donnée par les distributions stationnaires porte plutôt sur le *temps moyen* passé par le champ dans l'état désiré : $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$ en est le ratio sur un intervalle de temps fixé. Comme nous l'avions vu sur quelques exemples de trajectoires quantiques, les résultats de la figure IV.10 confirment ainsi que la rétroaction quantique est effectivement capable d'amener le champ de la cavité dans l'état de Fock ciblé et de l'y laisser, jusqu'à ce que la relaxation l'en fasse partir. Le fait que $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$ décroisse avec $\mathrm{n_c}$ est la signature de la fragilité des états nombre $|n\rangle$ d'autant plus grande que n est élevé.

Notons finalement que l'accord entre les prédictions du filtre et la mesure QND de contrôle est excellent. En moyenne, la différence absolue entre les deux distributions est en effet seulement de $0,6\%$ à $0,8\%$. C'est une confirmation supplémentaire du fait que le filtre est capable d'estimer de façon fiable la matrice densité du champ en temps réel, y compris quand la source micro-onde est active [5]. Nous pouvons alors nous servir de ces prédictions pour obtenir le temps moyen d'établissement du régime stationnaire en traçant la moyenne sur toutes les trajectoires quantiques réalisées de $P(n,t)$, soit par définition $P_{\mathrm{F}}(n,t)$, plutôt que de mesurer P_{QND} pour de nombreux temps d'arrêt t_f.

5. Nous n'avions vérifié au chapitre III la qualité des prédictions qu'en boucle ouverte, *i.e.* sans calculs de déplacements dans le filtre.

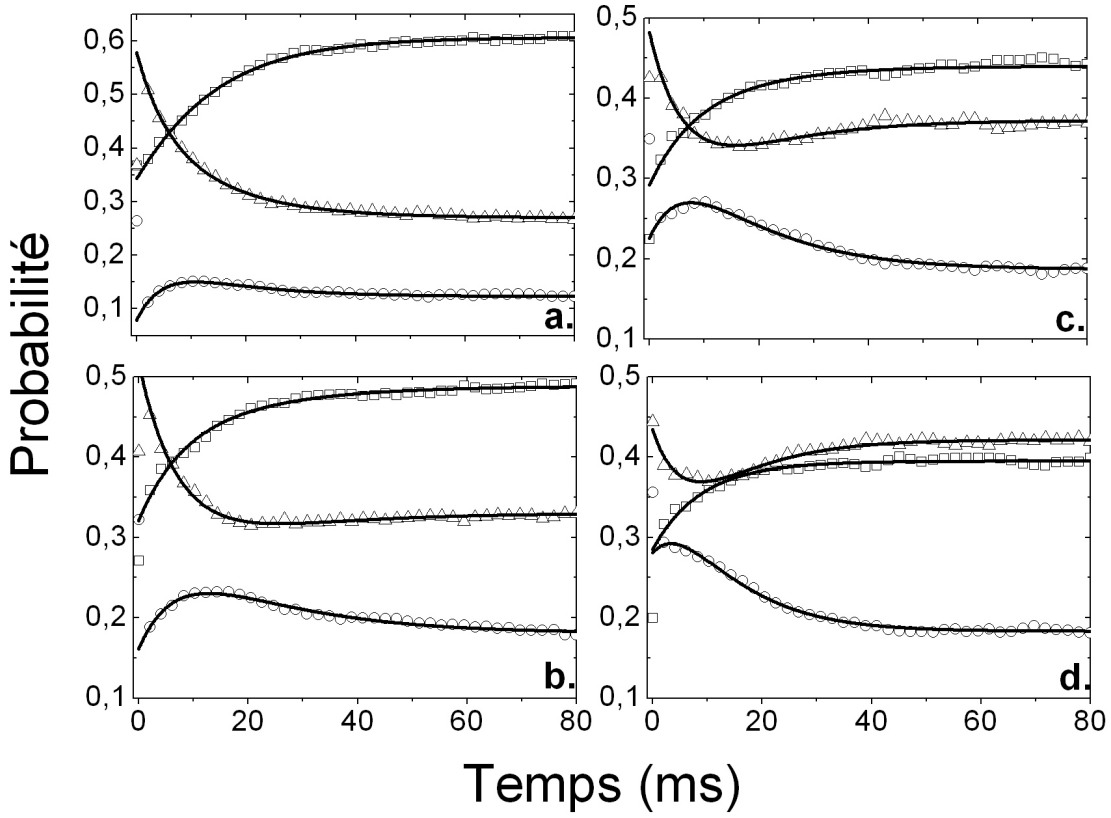


FIGURE IV.11 – Établissement du régime stationnaire : Dans chaque sous figure, nous traçons l'évolution temporelle moyenne, sur les 80 premières millisecondes, de $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{n_c}, t)$ (carrés), $P_{\mathrm{F}}(n < \mathrm{n_c}, t)$ (triangles) et $P_{\mathrm{F}}(n > \mathrm{n_c}, t)$ (ronds). L'intervalle entre deux points est de 25 itérations, soit 2 ms. Les traits continus sont des ajustements par la somme de deux exponentielles $\sim \mathrm{e}^{-t/t_i}$: l'établissement du régime stationnaire se fait en une première étape à variation rapide, de temps caractéristique t_1, puis une seconde plus lente de temps caractéristique t_2. **a** : état cible $|1\rangle$, $t_1 = (4,9 \pm 0,1)$ms, $t_2 = (13,7 \pm 0,1)$ms ; **b** : état cible $|2\rangle$, $t_1 = (7,4 \pm 0,1)$ms, $t_2 = (18,8 \pm 0,2)$ms ; **c** : état cible $|3\rangle$, $t_1 = (6,7 \pm 0,2)$ms, $t_2 = (14,2 \pm 0,3)$ms ; **d** : état cible $|4\rangle$, $t_1 = (6,8 \pm 0,3)$ms, $t_2 = (9,9 \pm 0,3)$ms.

La figure IV.11 donne l'évolution moyenne, sur les 80 premières millisecondes, de $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{n_c}, t)$, $P_{\mathrm{F}}(n < \mathrm{n_c}, t)$ et $P_{\mathrm{F}}(n > \mathrm{n_c}, t)$, et ce pour les quatre cibles. Il apparaît que toutes les traces sont bien ajustées par la somme de deux exponentielles de temps caractéristiques respectifs t_1 et t_2. Notons que les trois distributions sont ajustées simultanément et partagent donc les mêmes temps t_1 et t_2. Leurs valeurs sont données dans la légende. Quel que soit l'état cible, l'établissement du régime stationnaire se fait par une variation initiale des distributions de probabilité en un temps t_1 de 5 à 7 ms, puis par une plus lente en t_2 de l'ordre de 10 à 20 ms.

Pour comprendre l'origine de cette double évolution, nous traçons aussi, figure IV.12, l'évolution temporelle, pour les quatre mêmes cibles et toujours sur les 80 premières millisecondes, de la moyenne sur toutes les trajectoires quantiques[6] des déviations standard, ramenées à la moyenne, de $P(n, t)$. On entend par déviation standard ramenée à la moyenne le coefficient σ,

$$\sigma = \frac{\sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}}{\sqrt{\langle N \rangle}}, \tag{IV.6}$$

qui prend la valeur 1 pour une distribution poissonienne. La variation est maintenant bien décrite par une seule exponentielle décroissante de temps caractéristique τ de l'ordre de 6 à 7 ms, *i.e.* aussi long que la période initiale d'établissement du régime stationnaire mise en évidence figure IV.11. Si toutes les trajectoires débutent avec une variance unité, correspondant à l'état cohérent initial, celle-ci décroît rapidement vers des valeurs de l'ordre de $0,5$. Or une telle réduction de la variance n'est possible que *via* la mesure QND du nombre de photons. Les injections de correction, quant à elles, tendent à rendre la distribution poissonienne et ainsi à ramener σ vers 1. Le temps τ correspond donc au temps nécessaire au système pour acquérir de l'information sur le nombre de photons dans la cavité. Ici, 6 à 7 ms, soit 15 à 17 atomes détectés, sont nécessaires pour au moins séparer l'état cible des ensembles $\{n < \mathrm{n_c}\}$ et $\{n > \mathrm{n_c}\}$. Pour comparaison, dans les mesures QND présentées à la fin du chapitre I, 110 atomes détectés environ permettaient de bien distinguer tous les nombres de photons plus petits que 7. Notons également qu'au cours de la projection du champ sur un état de Fock, la rétroaction n'est pas passive : la fidélité à la cible augmente. Aussi apparaît-il que la rétroaction quantique n'a pas besoin d'une information complète sur le nombre de photons pour appliquer des corrections sur le champ : les deux actions que sont *la mesure* et *la correction* sont simultanées.

Remarque : L'analyse des courbes faites ici ne tient pas compte des 20 premiers échantillons de la trajectoire, *i.e.* des premières $1,6$ ms. Il est en effet difficile d'extraire un comportement général du début de la trajectoire, où l'évolution de la distribution des nombres de photons dépend fortement du choix de l'état initial, notamment de sa pertinence (voir paragraphe IV.3.2), et où le filtre a relativement peu d'informations sur le champ (peu voire aucun atome n'a été détecté). On pourra se référer aux évolutions aux temps courts des

6. On notera bien qu'il ne s'agit pas de l'évolution temporelle de la déviation standard de la distribution moyenne P_{F}, mais bien de la moyenne des déviations standard de la distribution P, distribution calculée à chaque trajectoire quantique.

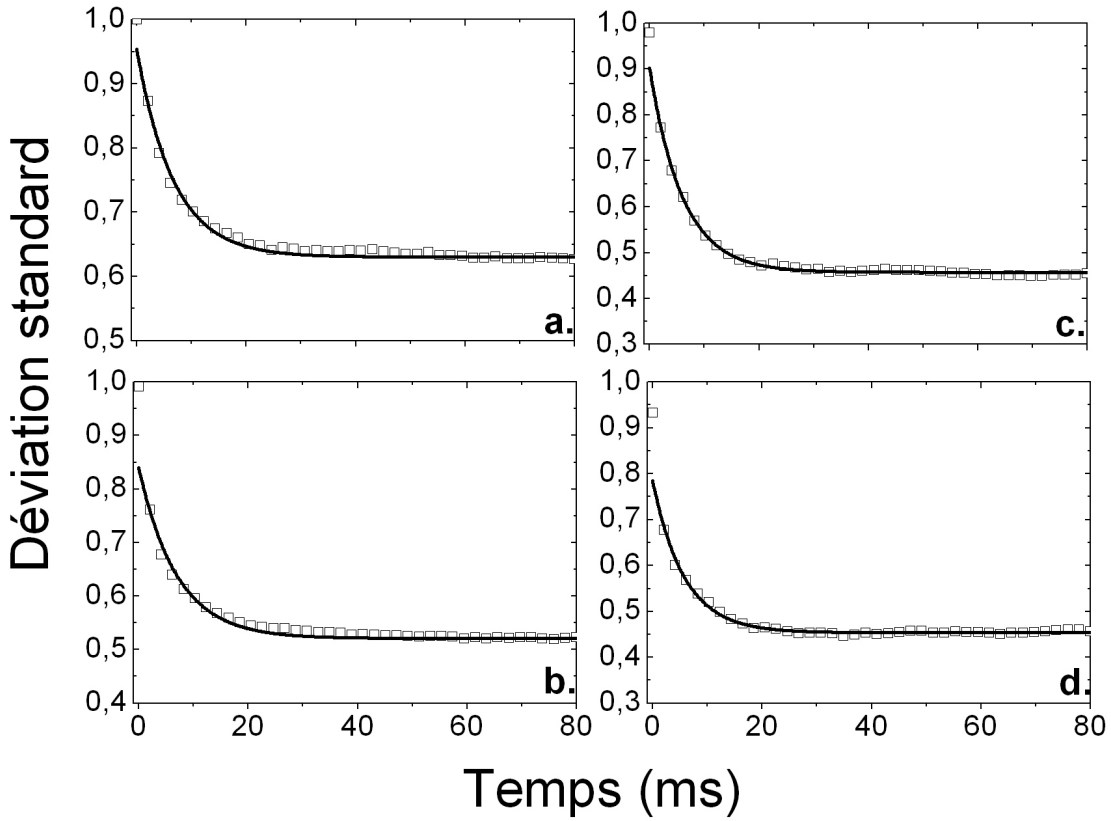


FIGURE IV.12 – Évolution temporelle des déviations standards moyennes : *Carrés :* moyenne sur 4000 trajectoires des déviations standards normalisées de la distribution $P(n,t)$ des nombres de photons estimée par le filtre. *Ligne :* ajustement exponentiel de temps caractéristique τ. **a** : état cible $|1\rangle$, $\tau = (6,39 \pm 0,04)$ms ; **b** : état cible $|2\rangle$, $\tau = (7,00 \pm 0,05)$ms ; **c** : état cible $|3\rangle$, $\tau = (6,02 \pm 0,02)$ms ; **d** : état cible $|4\rangle$, $\tau = (5,78 \pm 0,04)$ms. Les erreurs données sont purement numériques.

distributions données figure II.11, page 93, obtenues à partir des simulations numériques du chapitre II pour s'en convaincre.

Cela explique en particulier que les ajustements des déviations standards figure IV.12 ne tendent pas à temps nul vers 1, point initial de toutes les trajectoires. Sur les 4 figures, on constate en fait une décroissance très rapide de σ au début de la trajectoire, avant d'observer les évolutions décrites plus haut.

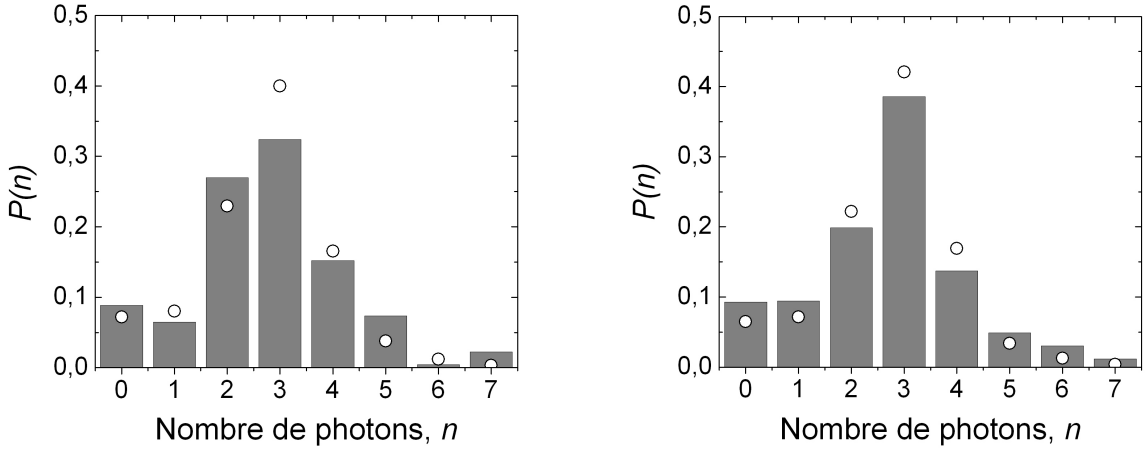
L'établissement du régime stationnaire de la rétroaction quantique semble donc se faire dans un premier temps par l'acquisition en environ 6 ms d'information sur le champ *via* la mesure QND, au cours de laquelle le champ est d'ores et déjà amené vers la cible. La distribution des nombres de photons devient alors sub-poissonienne en moyenne, et les cohérences de la matrice densité diminuent. Alors que jusqu'à présent, la rétroaction quantique opérait sur un champ de nombre de photons relativement mal défini, et avec des cohérences, elle se doit dans un deuxième temps d'amener vers l'état cible un système relativement différent : le champ est maintenant en moyenne dans un état sub-poissonien, la déviation standard étant de l'ordre de $0,5$, et avec peu de cohérences. Cette deuxième étape est relativement plus longue que la première puisqu'elle se fait en un temps de l'ordre de 15 ms. Notons que nous aurons l'occasion dans les paragraphes suivants de commenter davantage ces temps caractéristiques de correction.

IV.2.2.b Taille de l'espace de Hilbert

Avant de poursuivre l'analyse des performances de la rétroaction quantique, voyons ici l'influence qu'a la taille de l'espace de Hilbert utilisé dans les calculs du filtre quantique. Au paragraphe III.4.1, nous avons montré comment l'ordinateur de contrôle est capable de réaliser tous les calculs nécessaires à une itération de la boucle en moins que les 82 µs séparant deux échantillons. Nous avons alors vu que la taille de l'espace de Hilbert ne pouvait pas être choisie plus grande que $\mathcal{N} = 9$ sous peine de ne pas respecter cette contrainte de temps. Peut-elle toutefois être choisie plus petite ?

Pour le vérifier, nous comparons les distributions des nombres de photons obtenues avec $\mathcal{N} = 8$ ou 9 après l'opération de la rétroaction quantique vers l'état cible $|3\rangle$. Pour ces expériences de tests, notons que la phase de l'interféromètre pour les sondes de la rétroaction est choisie fixe à $\phi_r = \varphi_r(3)$. Les résultats sont donnés figure IV.13. S'il y apparaît assez nettement que la fidélité à l'état cible est plus faible pour $\mathcal{N} = 8$ que pour $\mathcal{N} = 9$, il nous faut aussi relever le fait que l'accord entre le filtre quantique et la mesure QND de contrôle est bien moins bon si l'on opte pour le «petit» espace de Hilbert. Par exemple, nous mesurons une fidélité de moins de 33% à l'issue de la rétroaction, alors que le filtre quantique en attendait 40%. De ces mesures ressort le fait que pour $|3\rangle$, l'espace de Hilbert doit être choisi de taille $\mathcal{N} = 9$. Autrement dit, la probabilité d'avoir 8 photons dans la cavité ne peut pas être négligée dans le calcul du filtre.

Les mêmes expériences ont été reproduites pour l'état cible $|2\rangle$, pour lequel le choix de l'un ou l'autre de ces espaces s'est avéré ne pas avoir d'influence sur les performances de la rétroaction. Ici, la cible est suffisamment loin des limites de l'espace de Hilbert pour que



(a) $\mathcal{N} = 8$ (b) $\mathcal{N} = 9$

FIGURE IV.13 – Comparaison entre deux tailles de l'espace de Hilbert. Les histogrammes donnent les résultats d'une mesure QND suivant l'opération de la rétroaction vers $|3\rangle$ avec une seule phase Ramsey ($\phi_r = \varphi_r(3)$) pendant la boucle. Les ronds blancs donnent les prédictions du filtre quantique, dont les calculs sont faits avec un espace de Hilbert de taille $\mathcal{N} = 8$ ou 9.

les effets de bord soient négligeables aussi bien pour $\mathcal{N} = 8$ que $\mathcal{N} = 9$. Dans toutes les expériences dont nous rendrons compte dans ce chapitre, nous choisirons donc :

- $\mathcal{N} = 8$ pour les états cibles $|1\rangle$ et $|2\rangle$,
- $\mathcal{N} = 9$ pour les états cibles $|3\rangle$ et $|4\rangle$.

IV.2.3 Fidélité de la préparation et vitesse de convergence

Nous cherchons maintenant à préparer avec une fidélité élevée l'état cible $|\mathrm{n_c}\rangle$. Comme nous l'avons expliqué précédemment, plutôt que d'arrêter la rétroaction à un instant aléatoire, nous utilisons la connaissance qu'a le filtre sur l'état actuel du champ pour définir un critère d'arrêt pertinent. En pratique, nous décidons de rouvrir la boucle et de commencer la mesure QND de contrôle dès que, pour 3 itérations successives, la fidélité estimée à l'état cible est plus grande que 80%. Nous désignerons dans toute la suite ce critère d'arrêt sous le nom «critère de convergence».

Notons qu'alors le nombre d'itérations de la boucle n'est pas fixé *a priori*, et nous ne pouvons plus pré-programmer le passage des sondes de la rétroaction, à une ou deux phases Ramsey, à celles de la mesure QND itérative, qui nécessite 4 phases différentes. L'ordinateur de contrôle ADwin est donc en charge, dans ces expériences, du réglage des phases Ramsey, *i.e.* de la génération des potentiels électriques appliqués dans la seconde zone de Ramsey. Ceci n'est rendu possible que par l'utilisation de la carte à sorties analogiques que nous avions évoquée au chapitre III. Le nombre total d'échantillons préparés, incluant ceux de

la rétroaction et ceux de la mesure QND qui suit, est en revanche fixé à 2800. Le nombre d'échantillons dévolus à la rétroaction seule est quant à lui limité à 2000 de sorte qu'il y ait toujours au moins 800 échantillons, soit 160 atomes détectés en moyenne, pour la mesure QND de contrôle. C'est bien plus que les 2 atomes en moyenne dont nous avons besoin pour reconstruire la distribution des nombres de photons. Cela nous permet toutefois si nécessaire de comparer les résultats obtenus à ceux utilisant une mesure QND non plus itérative mais par décimation, qui nécessite plus d'atomes.

Les résultats de cette expérience sont donnés sur la figure IV.14, après moyenne sur environ 3900 trajectoires quantiques (l'expérience est reproduite 4000 fois mais certaines réalisations ne convergent pas dans les 2000 échantillons/164 ms imparties). Comme nous l'avions annoncé, la fidélité de la préparation $f_{\mathrm{n_c}} = P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$ est maintenant nettement augmentée, comparée à l'état cohérent initial, et même à la distribution stationnaire. Nous montrons ainsi que nous sommes effectivement capables de préparer *sur demande*, et avec une *fidélité élevée*, les états de Fock $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, et $|4\rangle$:

$$f_1 = 82\% \qquad f_2 = 79\%$$
$$f_3 = 72\% \qquad f_4 = 68\%. \tag{IV.7}$$

De même que nous l'avions fait lors des simulations numériques du chapitre II, nous pouvons par ailleurs extraire la rapidité de convergence de la boucle en étudiant la statistique des temps auxquels le critère de convergence est atteint pour la première fois. Nous traçons ainsi figure IV.15 le taux de succès $\zeta_S(t)$ de la rétroaction en fonction du temps, *i.e.* la proportion de trajectoires quantiques ayant convergé à l'instant t. Toutes les courbes ont la même allure : après une période initiale d'environ 5 ms au cours de laquelle aucune trajectoire quantique ne converge, $\zeta_S(t)$ croît rapidement puis de plus en plus lentement vers sa valeur maximale, $\zeta_S(+\infty) = 1$. Notons que cet intervalle de temps où ζ_S reste nul correspond précisément à la période initiale que nous avons évoqué lors de l'étude du régime stationnaire : c'est le temps nécessaire à la mesure QND pour distinguer nettement l'état cible des autres états [7]. Nous pouvons alors définir un temps de convergence moyen pour la préparation d'un état cible donné comme le temps $t_{\mathrm{conv}}^{(\mathrm{n_c})}$ tel que

$$\zeta_S(t_{\mathrm{conv}}^{(\mathrm{n_c})}) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 63\%. \tag{IV.8}$$

Nous obtenons alors les résultats suivants :

$$t_{\mathrm{conv}}^{(1)} = 26\,\mathrm{ms} \qquad t_{\mathrm{conv}}^{(2)} = 31\,\mathrm{ms}$$
$$t_{\mathrm{conv}}^{(3)} = 49\,\mathrm{ms} \qquad t_{\mathrm{conv}}^{(4)} = 58\,\mathrm{ms}. \tag{IV.9}$$

Nous reviendrons au paragraphe IV.3.4 sur l'analyse de ces temps de convergence. Nous comparerons alors les performances de notre boucle de rétroaction à une autre méthode de préparation d'états de Fock basée sur l'utilisation de mesures QND seulement. Mais finissons pour l'instant de justifier les valeurs des paramètres expérimentaux utilisés dans la boucle, et notamment le choix des phases Ramsey des sondes.

7. Sans pour autant distinguer tous ces états deux à deux.

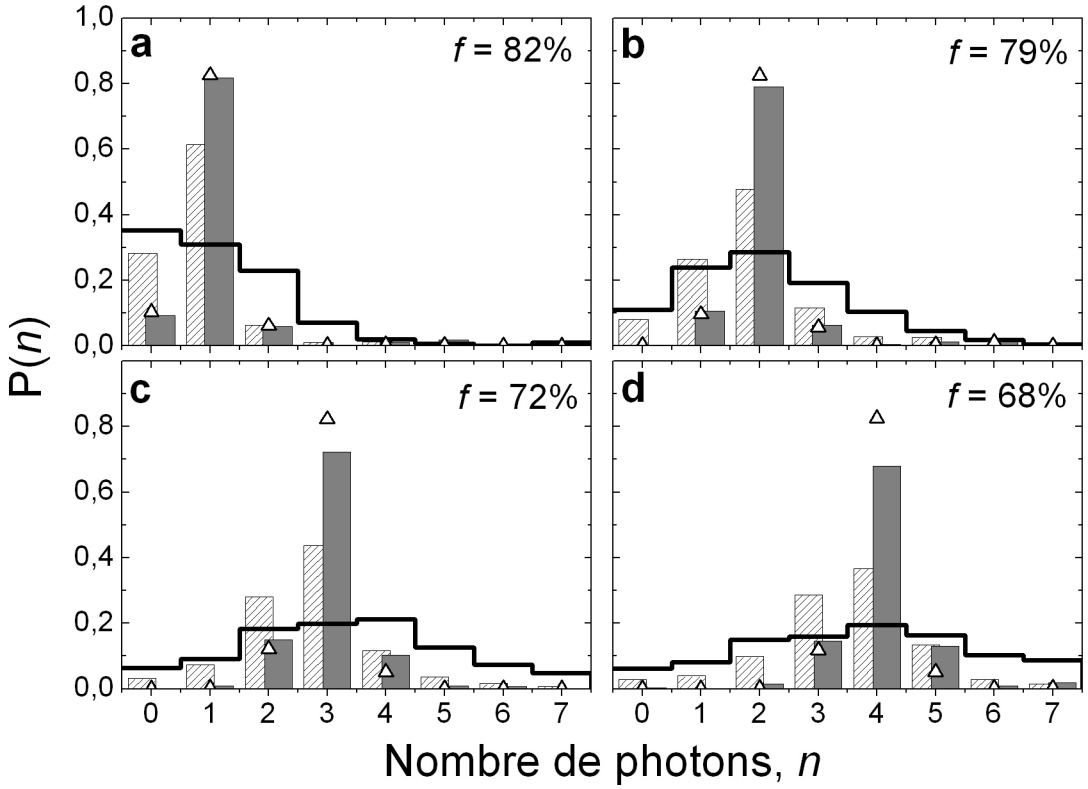


FIGURE IV.14 – Préparation de l'état cible. *Histogrammes gris :* Résultats de la mesure QND de contrôle suite à une boucle de rétroaction arrêtée selon le critère de convergence. La fidélité $f = P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$ est donnée dans la figure. *Triangles :* Prédictions du filtre au moment de l'arrêt de la rétroaction selon ce même critère. *Histogrammes hachurés :* Rappel des résultats obtenus en régime stationnaire. *Lignes :* État cohérent initial. Les quatre figures **a**, **b** , **c** et **d** correspondent respectivement aux états cibles $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ et $|4\rangle$.

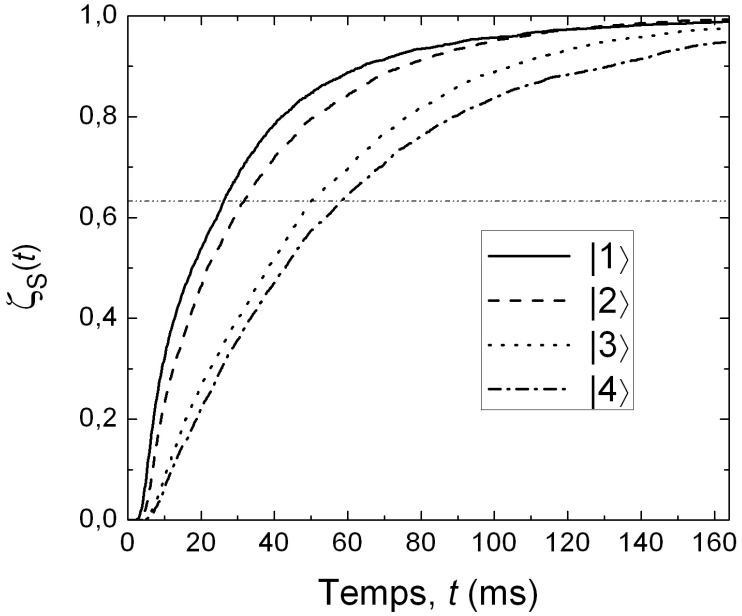


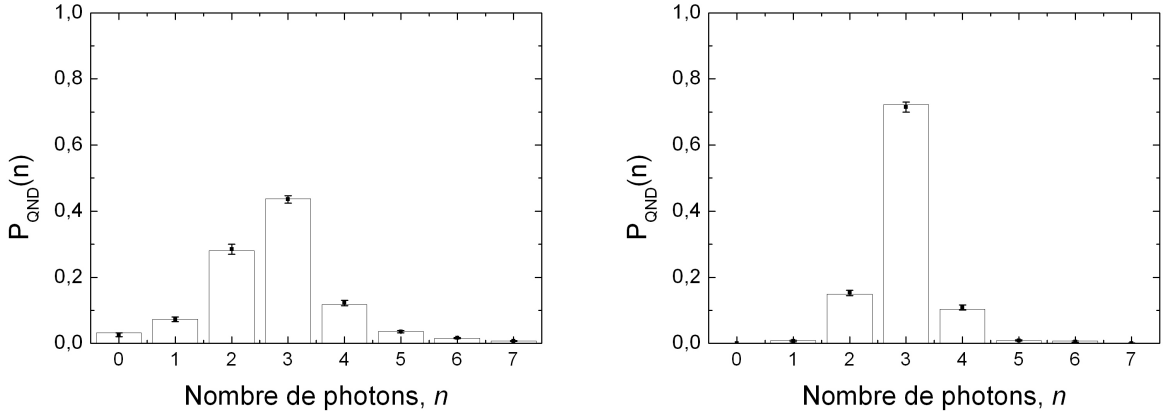
FIGURE IV.15 – Temps de convergence et taux de succès. Tracé, pour les 4 états cibles, du taux de succès $\zeta_S(t)$ obtenu avec une expérience de rétroaction quantique stoppée pour trois mesures successives de $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c}) \geq 80\%$. La ligne horizontale correspond à un niveau de $1 - \mathrm{e}^{-1} = 63\%$, choisi comme repère pour la définition d'un temps de convergence.

Remarque : Le critère de convergence que nous avons ici défini nécessite le vote positif ($P(\mathrm{n_c}) > 80\%$) de trois itérations successives pour ouvrir la boucle de rétroaction. De la sorte, nous évitons des situations où $P(\mathrm{n_c})$ dépasserait le seuil le temps d'une itération seulement, du fait d'une détection atomique erronée par exemple. Le choix de 3 itérations est cependant plus ou moins arbitraire. Nous avons essayé les mêmes expériences en faisant un vote sur 10, 20 ou 30 itérations par exemple, mais la fidélité de préparation ne s'en est pas trouvée améliorée, tandis que le temps de convergence, lui, augmentait.

IV.2.4 Estimation des barres d'erreur

Dans les deux dernières sections, nous avons donné les distributions des nombres de photons en régime stationnaire et après préparation de l'état cible, obtenues par la mesure QND indépendante de la rétroaction. Dans cette section, nous cherchons à estimer les barres d'erreur du processus de reconstruction. Exposons dans un premier temps la méthode employée pour les obtenir.

Imaginons qu'après une expérience de rétroaction quantique, la mesure QND indépendante ait eu pour résultat la distribution $P^{(0)}_{\mathrm{QND}}(n)$. Pour estimer les barres d'erreur associées à cette mesure, nous simulons, par les mêmes méthodes que celles utilisées au chapitre II,



(a) Distribution stationnaire des nombres de photons pour l'état cible $|3\rangle$

(b) Distribution des nombres de photons après préparation de l'état cible $|3\rangle$

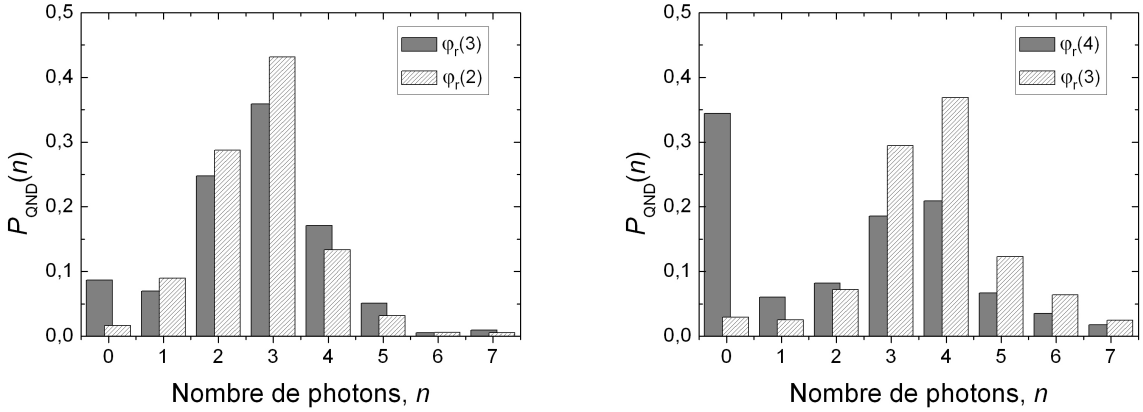
FIGURE IV.16 – Distributions des nombres de photons obtenues expérimentalement (histogramme) et par les simulations numériques estimant les barres d'erreur de la reconstruction (carrés).

une trajectoire quantique reproduisant la mesure QND de contrôle sur un champ de populations $P^{(0)}_{\mathrm{QND}}(n)$. Cela revient en fait à simuler les résultats de la détection de 10 échantillons atomiques successifs ayant les mêmes propriétés que ceux utilisés expérimentalement pour la mesure QND indépendante (nombre d'atomes par échantillon, phases de mesure...), et ayant interagit avec le champ $P^{(0)}_{\mathrm{QND}}(n)$.

Les résultats expérimentaux présentés dans les sections précédentes ont été systématiquement obtenus par une moyenne d'ensemble sur 4000 réalisations. En simulant 4000 trajectoires quantiques, et en utilisant les 4000 ensembles de détections atomiques alors simulés, nous pouvons réitérer notre protocole de reconstruction fournissant une nouvelle distribution des nombres de photons, $P^{(1)}_{\mathrm{QND}}(n)$.

La procédure est répétée 10 fois afin d'obtenir 10 distributions simulées $P^{(1\leq i\leq 10)}_{\mathrm{QND}}(n)$. La distribution moyenne est alors calculée, et la déviation standard correspondante constitue notre estimation des barres d'erreur de la reconstruction de $P^{(0)}_{\mathrm{QND}}(n)$.

Sur la figure IV.16, nous donnons les barres d'erreur de la reconstruction des distributions $P_{\mathrm{QND}}(n)$ obtenues après les expériences visant à préparer l'état cible $|3\rangle$, en régime stationnaire et après convergence. Notons d'une part que la distribution moyenne simulée est identique à la distribution obtenue expérimentalement, comme il se doit après une mesure QND. Les barres d'erreur d'autre part sont relativement petites. Sur l'ensemble des expériences réalisées, pour tous les états cibles, elles s'élèvent à $0,01-0,02$ pour $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$ et $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c}\pm 1)$, mais sont significativement plus petites que $0,01$ pour tous les autres nombres de photons. L'annexe B donne les barres d'erreur estimées pour tous les états cibles.



(a) Cible $|3\rangle$. 2000 trajectoires sont moyennées pour $\varphi_r(3)$, 3000 pour $\varphi_r(2)$.

(b) Cible $|4\rangle$. 2000 trajectoires sont moyennées pour $\varphi_r(4)$, 4000 pour $\varphi_r(3)$.

FIGURE IV.17 – Choix de la direction de mesure pour les cibles $|3\rangle$ et $|4\rangle$. *Histogrammes grisés :* Distribution P_{QND} mesurée avec la phase Ramsey des sondes choisie sur la valeur $\varphi_r(\mathrm{n_c})$. *Histogrammes hachurés :* Distribution P_{QND} mesurée avec la phase Ramsey des sondes choisie sur la valeur $\varphi_r(\mathrm{n_c}-1)$.

IV.2.5 Phase de l'interféromètre

Au chapitre II, nous avons justifié le choix de la phase Ramsey utilisée au cours de la boucle de rétroaction, $\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c})$. C'est cette direction de mesure qui permet de distinguer le plus rapidement l'état cible des autres états de Fock, et donc notamment de repérer un saut quantique. Cependant, dans les expériences exposées aux paragraphes précédents, nous n'avons pas utilisé ce réglage pour les cibles $|3\rangle$ et $|4\rangle$. Dans ces deux situations, nous utilisons alternativement la phase $\varphi_r(\mathrm{n_c})$ et $\varphi_r(\mathrm{n_c}-1)$. Ce choix se justifie pour plusieurs raisons. Voyons lesquelles en comparant des expériences où la phase de mesure est unique, et choisie sur $\varphi_r(\mathrm{n_c})$ ou $\varphi_r(\mathrm{n_c}-1)$, pour les états cibles $|3\rangle$ et $|4\rangle$. Insistons ceci dit sur le fait que dans tous les autres paragraphes, pour ces deux cibles, la phase est toujours alternée entre ces deux valeurs.

S'il est utile de bien repérer les sauts quantiques de $|\mathrm{n_c}\rangle$ vers $|\mathrm{n_c}\pm 1\rangle$, il est aussi utile de savoir rapidement si les corrections appliquées ont été efficaces, ou si au contraire, des sauts quantiques supplémentaires ont eu lieu entre temps. Pour cela, choisir le réglage de l'interféromètre tel que $|\mathrm{n_c}-1\rangle$ ou $|\mathrm{n_c}+1\rangle$ corresponde à un milieu de franges ($\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c}-1)$ ou $\varphi_r(\mathrm{n_c}+1)$ respectivement) est le plus adapté (voir figure IV.18). Dans le premier cas par exemple, le filtre quantique pourra tout aussi bien repérer les sauts quantiques de $|\mathrm{n_c}\rangle$ vers $|\mathrm{n_c}-1\rangle$, et sera en outre plus à même de savoir si un saut supplémentaire de $|\mathrm{n_c}-1\rangle$ à $|\mathrm{n_c}-2\rangle$ a eu lieu, ou si au contraire les corrections d'ores et déjà appliquées ont ramené le champ vers l'état cible. La contrepartie en est bien sûr que les états $|\mathrm{n_c}\rangle$ et $|\mathrm{n_c}+1\rangle$ sont

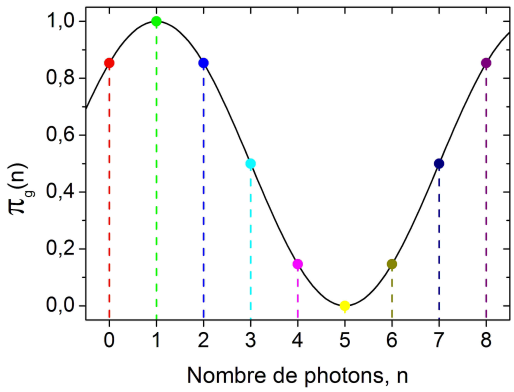


FIGURE IV.18 – Probabilité $\pi_g(n)$ de détecter une sonde QND dans l'état $|g\rangle$ pour un champ préparé dans l'état de Fock $|n\rangle$, avec $\phi_0 = \pi/4$ et $\phi_r = \varphi(3)$.

maintenant très mal distingués. Un tel choix se justifie donc d'autant mieux que le nombre de photons contenus dans l'état cible est élevé : le temps de vie des niveaux $|\mathrm{n_c}\rangle$ et $|\mathrm{n_c} \pm 1\rangle$ en est d'autant plus faible, et :

- Si un saut quantique amène le champ vers l'état $|\mathrm{n_c} - 1\rangle$, dans un temps qui peut finir par être court devant le temps de réaction de la boucle, un second saut quantique pourra l'amener vers l'état $|\mathrm{n_c} - 2\rangle$;
- Tandis que si un saut quantique amène le champ vers l'état $|\mathrm{n_c} + 1\rangle$, un autre saut quantique le ramènera certainement et dans des délais d'autant plus courts vers l'état cible. En outre, la probabilité qu'un saut quantique vers $|\mathrm{n_c} + 1\rangle$ ait lieu est très faible comparée à celle que le saut ait lieu vers $|\mathrm{n_c} - 1\rangle$: elle est plus faible d'un facteur $(1 + n_{\mathrm{th}})/n_{\mathrm{th}} \simeq 20$.

Nous donnons figure IV.17a deux distributions stationnaires obtenues après rétroaction quantique vers l'état $|3\rangle$ pour chacun de ces choix de phases. 3000 et 2000 trajectoires sont moyennées pour $\phi_r = \varphi_r(2)$ et $\varphi_r(3)$ respectivement. Très distinctement, il apparaît que le premier des deux choix est le meilleur : la fidélité stationnaire mesurée est de 43%, contre seulement 36% pour $\phi_r = \varphi_r(3)$. Et la probabilité d'avoir 0 photon dans la cavité, de près de 9% si nous choisissons de bien distinguer $|3\rangle$ des autres états, tombe à moins de 2% si la priorité est donnée à la détection des sauts. Cela peut s'expliquer par le fait qu'avec le choix $\phi_r = \varphi_r(3)$, les états $|2\rangle$ et $|0\rangle$ sont détectés de la même façon ($\pi_g(0) = \pi_g(2)$). Nous rappelons figure IV.18 le tracé de la probabilité conditionnelle de détecter un atome dans $|g\rangle$ pour ce réglage de phase. Seule la relaxation permet alors de les distinguer, mais sur des temps d'au moins 30 ms. Par conséquent, le filtre quantique peut être trompé et attribuer une probabilité trop élevée à l'état $|2\rangle$, au détriment de l'état $|0\rangle$. Les corrections alors appliquées ne seront pas suffisantes pour ramener le champ vers $|3\rangle$.

Une autre justification du choix $\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c} - 1)$ vient lorsque le nombre de photons devient plus grand que 3, *i.e.* pour la cible $|4\rangle$ seulement dans les expériences présentées

ici. En effet, du fait du choix du déphasage par photon de $\phi_0 = \pi/4$, si $\mathrm{n_c} \geq 4$, alors l'état $|\mathrm{n_c} - 4\rangle$ «existe» et se trouve être indistinguable de l'état cible pour un interféromètre de phase $\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c})$:

$$\begin{aligned}\pi_g(\mathrm{n_c} - 4) &= \pi_0 + \frac{C}{2}\cos(\varphi_r(\mathrm{n_c}) + \phi(\mathrm{n_c} - 4)) \\ &\approx \pi_0 + \frac{C}{2}\cos(\pi/2 - \phi(\mathrm{n_c}) + \phi(\mathrm{n_c}) - 4\phi_0) \\ &= \pi_0 + \frac{C}{2}\cos(-\pi/2) = \pi_g(\mathrm{n_c}). \end{aligned} \tag{IV.10}$$

Bien sûr la relaxation permet toujours de les distinguer, mais l'état $|\mathrm{n_c} - 4\rangle$ vivant plus longtemps que $|\mathrm{n_c}\rangle$, la distinction se fait sur le temps de vie de la cible. Une telle boucle de rétroaction est vouée à l'échec. Nous en donnons un exemple figure IV.17b. Les distributions stationnaires P_{QND}, après rétroaction quantique vers la cible $|4\rangle$, sont données pour les deux réglages de phase $\varphi_r(3)$ et $\varphi_r(4)$, après moyenne sur 2000 et 4000 trajectoires respectivement. La différence est flagrante ! Avec le second choix en effet, la probabilité d'avoir 0 photon dans la cavité, de près de 35%, est même plus grande que la probabilité d'en avoir 4. C'est évidemment un état plus simple à stabiliser. En choisissant $\phi_r = \varphi_r(3)$ en revanche, la rétroaction permet de maintenir l'état $|4\rangle$ près de 40% du temps.

Pour les deux cibles $|3\rangle$ et $|4\rangle$, le choix de la phase de l'interféromètre sur $\varphi_r(\mathrm{n_c} - 1)$ semble donc s'imposer. Cependant, nous n'avons ici regardé les conséquences de ce choix que sur les distributions stationnaires des nombres de photons. Or, si nous tentons avec ces réglages de réaliser une expérience visant à préparer un état nombre avec une haute fidélité, le critère de convergence étant choisi comme $P(\mathrm{n_c}) = 80\%$ (cf. paragraphe IV.2.3), il se trouve que seul un faible pourcentage de trajectoires quantiques satisfont au critère dans les 164 ms imparties. Nous traçons figure IV.19 le taux de succès $\zeta_S(t)$ obtenu en visant l'état $|4\rangle$, avec le choix de phase $\phi_r = \varphi(3)$, et le comparons à celui obtenu au paragraphe précédent, où la phase était choisie alternativement sur $\varphi(3)$ et $\varphi(4)$. À peine 30% des trajectoires satisfont au critère de convergence dans les 164 ms imparties. La période initiale pendant laquelle aucune trajectoire ne converge est en outre de près de 30 ms. L'explication d'un tel échec réside dans le fait qu'avec le choix de ne faire des mesures QND que dans la direction où seul $|\mathrm{n_c} - 1\rangle$ est bien distingué des autres états... $|\mathrm{n_c}\rangle$ est moins bien distingué des autres états ! Par conséquent, la mesure QND ne peut pas mener efficacement à des fidélités à l'état cible aussi hautes que 80% : la confusion avec les autres états proches, $|\mathrm{n_c} + 1\rangle$ et $|\mathrm{n_c} + 2\rangle$, est trop grande.

Un compromis a donc dû être fait pour les deux cibles que sont $|3\rangle$ et $|4\rangle$.

- D'une part, choisir $\phi_r = \varphi_r(\mathrm{n_c} - 1)$ permet d'augmenter l'efficacité de la rétroaction, ce qui se traduit par une distribution stationnaire plus fidèle à la cible ;
- D'autre part, faire des mesures le long de la direction $\varphi_r(\mathrm{n_c})$ est indispensable si nous voulons pouvoir préparer la cible avec une fidélité élevée en un temps raisonnable.

La solution retenue a de fait déjà été donnée : d'un échantillon à l'autre, la phase Ramsey vaut alternativement $\varphi_r(\mathrm{n_c})$ ou $\varphi_r(\mathrm{n_c} - 1)$. Tous les résultats donnés dans les autres paragraphes ont utilisé ce réglage particulier.

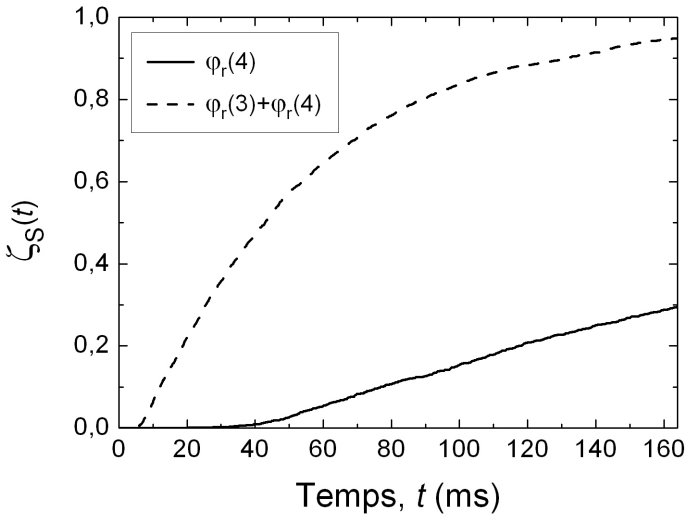


FIGURE IV.19 – Temps de convergence vers l'état cible $|4\rangle$ pour deux choix de phases Ramsey. Évolution temporelle du taux de succès $\zeta_S(t)$ pour la préparation de l'état $|4\rangle$, avec la phase Ramsey $\phi_r = \varphi_r(4)$ (*traits continus*), et avec l'alternance de phase entre $\varphi_r(3)$ et $\varphi_r(4)$ (*tirets*).

IV.2.6 Deux choix de distance

Au chapitre II nous avons défini deux lois de contrôle utilisables pour la rétroaction quantique : le contrôle «Distance» et le contrôle «Fidélité», version simplifiée du précédent [8]. Dans toutes les expériences des paragraphes précédents, nous n'avons cependant utilisé que le contrôle «Distance». L'objet de cette section est de présenter comment les suspicions que nous avions déjà au vu des simulations numériques se sont confirmées expérimentalement, à savoir que le contrôle «Fidélité» est globalement moins efficace que son homologue.

Dans un premier temps, nous verrons comment nous avons dû le modifier pour corriger certains défauts flagrants sur les trajectoires quantiques, puis nous comparerons ses performances à celles déjà présentées du contrôle «Distance».

IV.2.6.a Modification de la loi de contrôle «Fidélité»

À partir de nos simulations numériques, nous avions vu que la rétroaction quantique, basée sur la loi de contrôle «Fidélité», avait tendance à injecter trop de photons dans la cavité. Cela s'est trouvé être confirmé par l'expérience, et ce directement sur les trajectoires quantiques. Nous représentons par exemple figure IV.20 une trajectoire, dont l'état cible est $|3\rangle$, mettant en évidence ce défaut. Nous y traçons exclusivement l'amplitude des injections

8. Quoique premier utilisé historiquement.

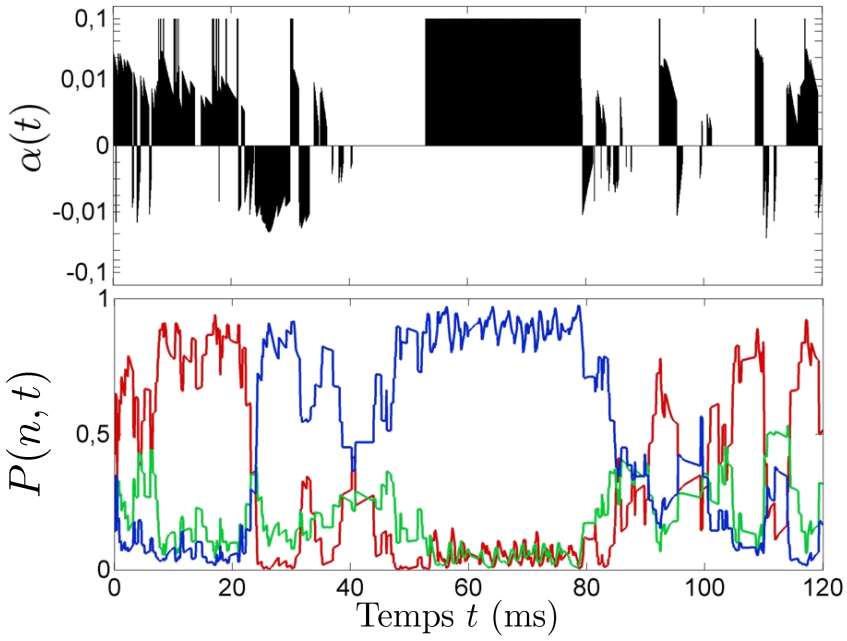


FIGURE IV.20 – Trajectoire quantique injectant trop de photons dans la cavité. Le filtre utilise la loi de contrôle «Fidélité», et l'état cible est $|3\rangle$. *En haut :* amplitude des injections en échelle logarithmique signée. *En bas :* en rouge, $P(n < 3, t)$, en vert $P(3, t)$, et en bleu $P(n > 3, t)$.

utilisées et les trois populations $P(n < 3, t)$, $P(3, t)$ et $P(n > 3, t)$.

Entre $t = 50\,\text{ms}$ et $t = 80\,\text{ms}$, le régulateur choisit à chaque itération, soit près de 400 fois, d'injecter le champ cohérent d'amplitude maximale autorisée, $\alpha_{\max} = 0,1$. La fidélité étant alors très basse, c'est en effet la décision qui découle du critère (b) de la loi II.78. Rappelons qu'il stipule que quand la fidélité est plus basse qu'un certain seuil, en l'occurrence $\epsilon = 0,1$, la correction à appliquer est d'amplitude maximale, $\alpha_{\max}$. Un champ cohérent d'amplitude 40 a ainsi pu potentiellement être injecté [9]. Nous voyons donc apparaître ici un défaut majeur de cette loi de contrôle : puisqu'il n'est pas possible avec le choix de la fidélité comme distance de distinguer les situations où le champ contient en moyenne $\mathrm{n_c} + 1$ et $n \gg \mathrm{n_c}$ photons, il est possible qu'une succession d'injections cohérentes construise un champ dans la cavité toujours plus grand sans pour autant que la distance à la cible ne soit modifiée. Si la fidélité est basse initialement, l'amplitude maximale de correction sera donc toujours choisie, toujours avec la même phase, et le champ ne fera que croître. Si le champ finit par dépasser les limites de l'espace de Hilbert, relativement petit, utilisé pour les calculs de la boucle, les prédictions du filtre ne pourront plus être dignes de confiance. De telles situations doivent donc être absolument évitées.

La solution retenue est d'ajouter précisément un critère dans la loi de contrôle prenant

9. Le champ étant sondé en permanence cependant, l'effet Zenon [83, 109] peut freiner la construction du champ.

en compte le nombre moyen de photons $\langle n \rangle$ contenus dans la cavité, permettant ainsi de traiter différemment les situations où le champ, de fidélité à la cible faible, contient peu ou beaucoup de photons. Nous ajoutons donc le raffinement suivant au critère (b) de la loi de contrôle «Fidélité» :

Si au cours de la rétroaction, $\langle n \rangle$ devient plus grand que $\mathrm{n_c} + 1,5$, les injections s'arrêtent ($\alpha = 0$), jusqu'à ce que $\langle n \rangle$ repasse sous le seuil de $\mathrm{n_c} + 1$.

Notons que les valeurs des seuils ont été déterminées par optimisation à partir de simulations numériques. L'emploi d'une telle modification a permis de supprimer les situations catastrophiques comme celle de la figure IV.20. Ce choix est cependant peu satisfaisant : nous décidons *sciemment* d'ouvrir la boucle de rétroaction le temps que la relaxation ramène le champ dans un domaine de l'espace des états où nos corrections sont efficaces. C'est un argument fort en défaveur du contrôle «Fidélité», le contrôle «Distance» n'ayant pas montré la même instabilité.

IV.2.6.b Comparaison des lois de contrôle

Nous donnons dans ce paragraphe quelques résultats permettant de comparer les performances de la rétroaction quantique utilisant l'une ou l'autre des deux lois de contrôle dont nous disposons. Nous donnons ainsi pour chacune d'elles figure IV.21, pour une rétroaction quantique d'état cible $|2\rangle$, la distribution stationnaire des nombres de photons, ainsi que celle après sélection avec un critère de convergence. Dans ce second cas, nous traçons en outre l'évolution du taux de succès $\zeta_S(t)$. Les résultats donnés pour le contrôle «Distance» sont les mêmes que ceux donnés aux sections précédentes.

Sur la figure IV.21a d'abord, il apparaît que la fidélité stationnaire $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c})$ est plus faible de 2% seulement avec le contrôle «Fidélité» (46%) qu'avec le contrôle «Distance» (48%). Il apparaît toutefois que la distribution est plus large avec le contrôle «Fidélité» : la déviation standard est maintenant de $0,87$, contre $0,79$ précédemment. En effet tous les nombres $n > \mathrm{n_c}$ sont alors plus peuplés avec cette loi de contrôle qu'avec le conrôle «Distance» : comme nous l'avons expliqué au paragraphe précédent, les situations où le nombre de photons est plus grand que la cible ne sont pour ainsi dire pas corrigées. Cette excès de population est aussi à signaler pour $n = 0$. Ce que nous avons également pu observer dans des expériences de rétroaction vers la cible $|3\rangle$.

De même sur la figure IV.21b, les résultats sont un peu moins bon avec la loi «Fidélité» : la fidélité de préparation n'est plus que de 77%, contre 79% dans les résultats présentés au paragraphe IV.2.3.

Enfin, la figure IV.21c finit de nous convaincre : les temps de convergence observés sont relativement plus longs avec le contrôle «Fidélité».

La rétroaction quantique apparaît donc moins efficace si elle se base sur la loi de contrôle «Fidélité», à laquelle nous avons dû en outre apporter une correction peu satisfaisante, au lieu d'utiliser la loi de contrôle «Distance». Cela nous a mené à n'utiliser que la loi de contrôle «Distance» pour les tests approfondis de la rétroaction quantique, et tous les résultats présentés dans la suite de ce chapitre utiliseront donc exclusivement cette loi.

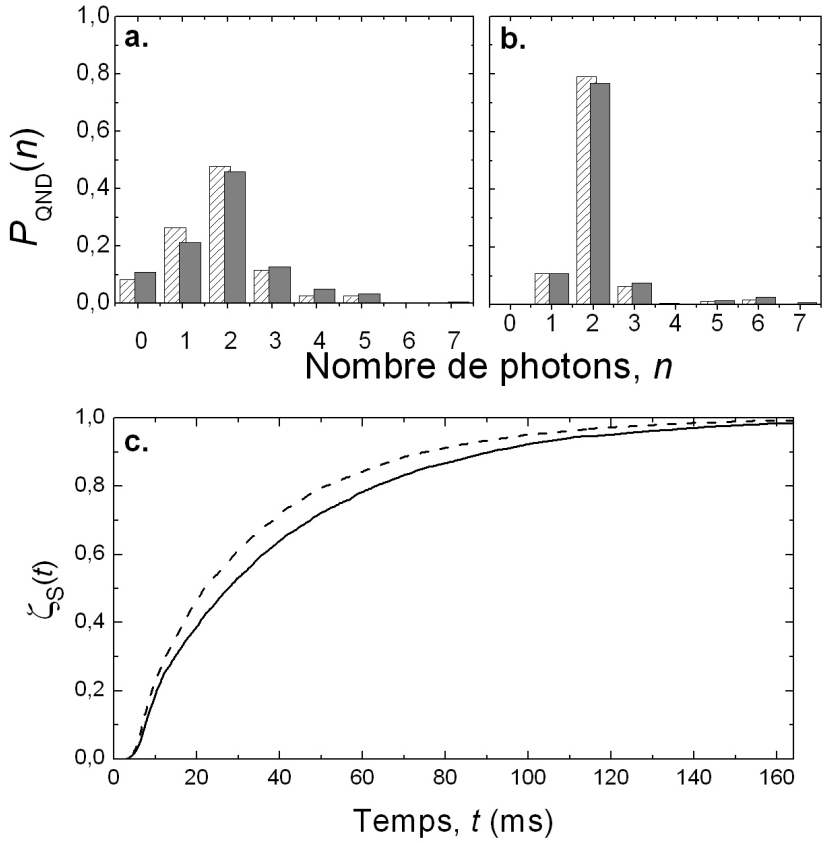


FIGURE IV.21 – Choix expérimental de la loi de contrôle *via* des expériences ayant pour cible $|2\rangle$. **a.** Distributions stationnaires des nombres de photons, pour le contrôle «Distance» (hachuré) et le contrôle «Fidélité» (grisé). **b.** Distributions après convergence pour le contrôle «Distance» (hachuré) et le contrôle «Fidélité» (grisé). **c.** Taux de succès $\zeta_S(t)$ correspondant aux expériences de la figure **b**, pour le contrôle «Distance» (tirets) et le contrôle «Fidélité» (ligne continue).

IV.3 Analyse du comportement du filtre

Dans cette dernière partie, nous cherchons à mieux comprendre ou caractériser la façon dont la rétroaction quantique agit. Après avoir identifié et expliqué certains défauts du filtre, nous verrons plus précisément comment les sauts quantiques sont effectivement corrigés. Une dernière partie nous permettra de comparer la rapidité de la préparation de la cible à celle que nous obtiendrions avec une préparation simpliste basée sur des mesures QND seules.

IV.3.1 Trajectoires défaillantes

Si au paragraphe IV.2.1 nous avons exclusivement présenté des trajectoires quantiques particulièrement convainquantes, toutes celles que nous avons enregistrées ne le sont pas autant. La rétroaction quantique se heurte notamment souvent au problème de la correction des sauts quantiques vers $|\mathrm{n_c}+1\rangle$. Nous traçons figure IV.22 une trajectoire quantique où cette situation se produit. À $t = 80\,\mathrm{ms}$ environ, la probabilité $P(4)$ augmente brutalement, signature d'un saut quantique vers $|4\rangle$. Pourtant, alors que la source micro-onde était particulièrement active dans les 20 ms précédentes, celle-ci devient quasi immédiatement inactive. Le filtre finit même par hésiter entre la présence de 4 et 5 photons dans la cavité... sans pour autant réactiver les corrections cohérentes ! Un saut quantique finit par amener le champ dans l'état $|2\rangle$ et la correction reprend.

Pour comprendre cette asymétrie dans le traitement des sauts quantiques, rappelons comment les corrections à appliquer sont choisies. La loi de contrôle «Distance» (II.56) s'écrit :

$$\mathcal{R}_\mathrm{d} : \tilde{\rho}_k \longmapsto \alpha_k = \mathcal{R}_\mathrm{d}(\tilde{\rho}_k) = \begin{cases} \min\left(-\dfrac{|a_1(\tilde{\rho}_k)|}{a_2(\tilde{\rho}_k)}, \alpha_\mathrm{max}\right) \mathrm{sign}[a_1(\tilde{\rho}_k)] & \text{si} \quad a_2(\tilde{\rho}_k) < 0 \quad \text{(a)} \\ \mathrm{sign}[a_1(\tilde{\rho}_k)]\, \alpha_\mathrm{max} & \text{si} \quad a_2(\tilde{\rho}_k) \geq 0 \quad \text{(b)} \end{cases}$$

Nous l'avions expliqué au chapitre II, si le champ se trouve être un mélange statistique d'états de Fock, alors $a_1(\rho) = 0$. Aussi n'y aura-t-il injection de champs cohérents que si $a_2(\rho) \geq 0$. Imaginons alors qu'après avoir préparé l'état cible $|\mathrm{n_c}\rangle$, un saut quantique vers $|n = \mathrm{n_c} \pm 1\rangle$ se produit. La matrice densité estimée par le filtre quantique peut alors s'écrire sous la forme

$$\rho_\epsilon = (1-\epsilon)|\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}| + \epsilon|n\rangle\langle n|. \tag{IV.11}$$

Pour quelle valeur de ϵ la correction reprend-elle ? Autrement dit, avec quelle précision l'état $|n = \mathrm{n_c} \pm 1\rangle$ doit-il être identifié pour que le régulateur décide de la reprise des injections ? On peut montrer sans problèmes que le critère $a_2(\rho_\epsilon) \geq 0$ mène à la condition

$$\epsilon \geq \frac{-a_2(|\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|)}{a_2(|n\rangle\langle n|) - a_2(|\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|)} = \frac{\sigma_{\mathrm{n_c}}}{\sigma_{\mathrm{n_c}} - \sigma_n}, \tag{IV.12}$$

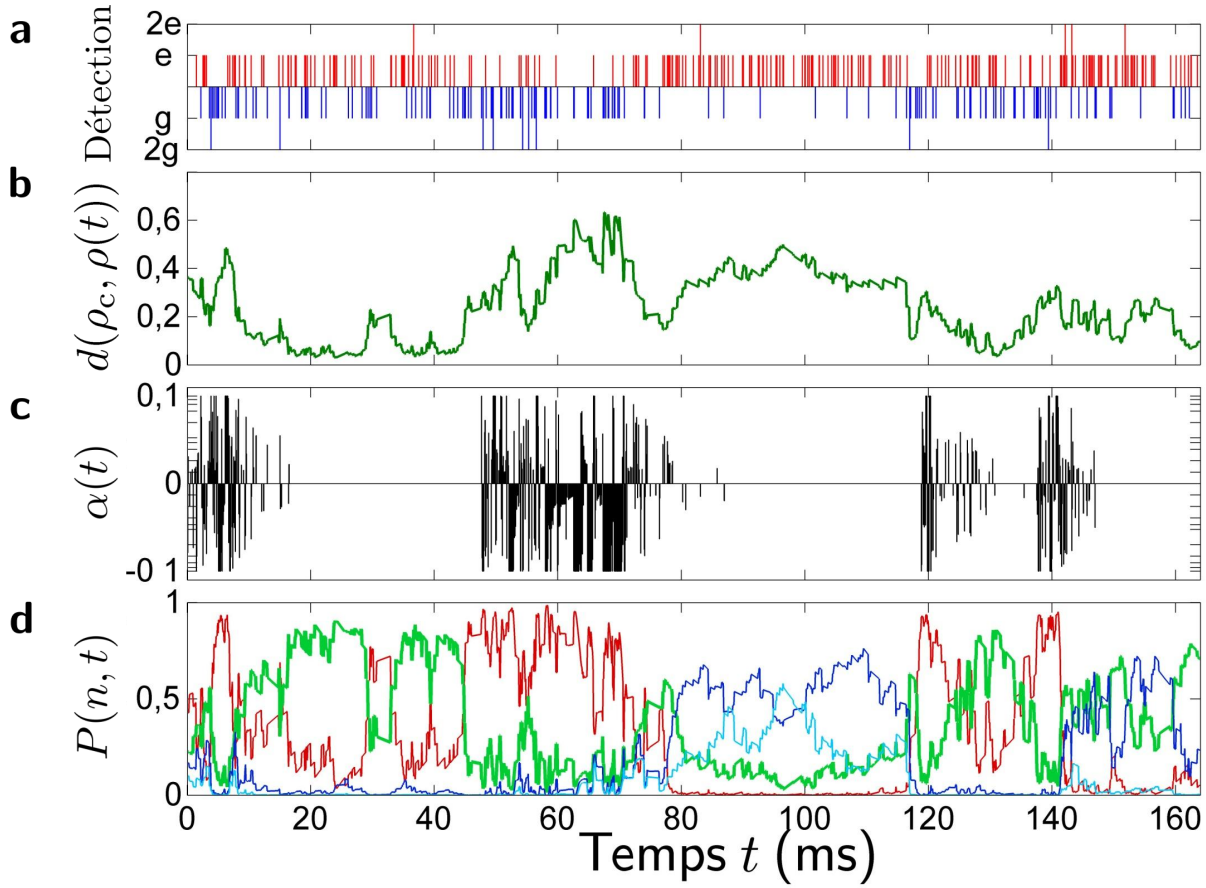


FIGURE IV.22 – Trajectoire quantique défaillante préparant l'état cible $|3\rangle$. **a.** Détections atomiques. **b.** Distance à l'état cible. **c.** Amplitude des corrections en échelle logarithmique signée. **d.** Probabilités estimées par l'ordinateur de contrôle : $P(n < 3, t)$ en rouge, $P(3, t)$ en vert, $P(4, t)$ en bleu foncé, $P(5, t)$ en bleu ciel.

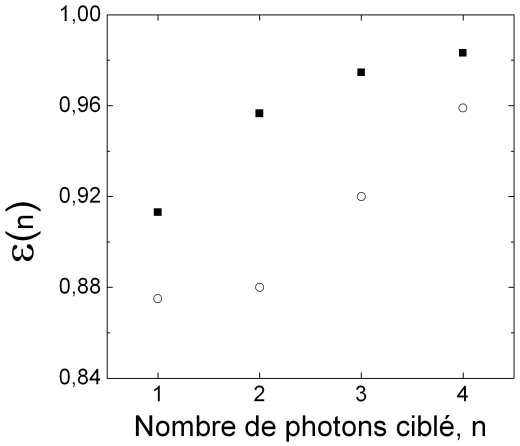


FIGURE IV.23 – Seuils de déclenchement des corrections $\epsilon_p(n)$ pour un saut $|n\rangle \to |n+1\rangle$ (carrés) et $\epsilon_m(n)$ pour un saut $|n\rangle \to |n-1\rangle$ (ronds).

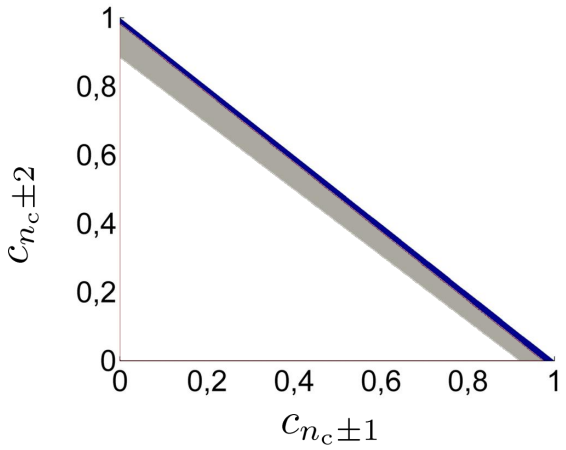


FIGURE IV.24 – Coefficients $(c_{\mathrm{n_c}+1}, c_{\mathrm{n_c}+2})$ (zone noire) et $(c_{\mathrm{n_c}-1}, c_{\mathrm{n_c}-2})$ (zone grisée) induisant une injection d'amplitude maximale pour $\mathrm{n_c} = 3$.

$$\epsilon_p(\mathrm{n_c}) \equiv \frac{\sigma_{\mathrm{n_c}}}{\sigma_{\mathrm{n_c}} - \sigma_{\mathrm{n_c}+1}}, \qquad \epsilon_m(\mathrm{n_c}) \equiv \frac{\sigma_{\mathrm{n_c}}}{\sigma_{\mathrm{n_c}} - \sigma_{\mathrm{n_c}-1}}. \tag{IV.13}$$

Les coefficients σ_n sont les coefficients que nous avions introduits au paragraphe II.1.3 pour choisir les attracteurs de la loi de contrôle «Distance». Par définition $\epsilon_p(\mathrm{n_c})$ (resp. $\epsilon_m(\mathrm{n_c})$) est la valeur minimale que doit avoir $P(\mathrm{n_c}+1)$ (resp. $P(\mathrm{n_c}-1)$) pour que les injections reprennent après un saut vers $|\mathrm{n_c}+1\rangle$ (resp. $|\mathrm{n_c}-1\rangle$), en supposant que la matrice densité du champ puisse toujours s'écrire sous la forme (IV.11), avec $n = \mathrm{n_c}+1$ (resp. $\mathrm{n_c}-1$).

Nous traçons figure IV.23 les coefficients ϵ_p et ϵ_m pour les quatre états cibles. Nous mettons alors en évidence l'asymétrie notable qui existe entre les sauts vers les nombres de photons plus élevés et les sauts vers le bas :

$$\forall \mathrm{n_c} \quad \epsilon_p(\mathrm{n_c}) > \epsilon_m(\mathrm{n_c}). \tag{IV.14}$$

Par exemple, si pour $\mathrm{n_c} = 2$ et un saut vers $|1\rangle$, avoir $P(\mathrm{n_c}) \leq 12\%$ déclenche les corrections, il faut $P(\mathrm{n_c}) \leq 4,5\%$ si le saut a lieu vers $|3\rangle$.

Notons de plus que, sur la figure IV.22 pour laquelle $\mathrm{n_c} = 3$, même quand les états $|4\rangle$ *et* $|5\rangle$ sont peuplés la source micro-onde reste calme. Pour visualiser plus nettement cette asymétrie entre les deux directions possibles d'un saut quantique, nous considérons les matrices densité

$$\rho_p = c_{\mathrm{n_c}+1}|\mathrm{n_c}+1\rangle\langle\mathrm{n_c}+1| + c_{\mathrm{n_c}+2}|\mathrm{n_c}+2\rangle\langle\mathrm{n_c}+2| + (1 - c_{\mathrm{n_c}+1} - c_{\mathrm{n_c}+2})|\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}| \tag{IV.15}$$

$$\rho_m = c_{\mathrm{n_c}-1}|\mathrm{n_c}-1\rangle\langle\mathrm{n_c}-1| + c_{\mathrm{n_c}-2}|\mathrm{n_c}-2\rangle\langle\mathrm{n_c}-2| + (1 - c_{\mathrm{n_c}-1} - c_{\mathrm{n_c}-2})|\mathrm{n_c}\rangle\langle\mathrm{n_c}|, \tag{IV.16}$$

et nous mettons en évidence figure IV.24, pour $\mathrm{n_c} = 3$, la région de l'espace $\mathbb{R}^2$ dans laquelle doit être choisi le couple $(c_{\mathrm{n_c}+1}, c_{\mathrm{n_c}+2})$ pour ρ_p, ou $(c_{\mathrm{n_c}-1}, c_{\mathrm{n_c}-2})$ pour ρ_m, pour que

la rétroaction réactive les injections. Très clairement, cette région est plus petite pour un saut vers le haut que pour un saut vers le bas.

Avec le choix des paramètres que nous avons fait, il apparaît donc que la rétroaction quantique est moins encline à activer les injections cohérentes lorsqu'un saut quantique vers $|\mathrm{n_c}+1\rangle$ survient que lorsque le saut mène à $|\mathrm{n_c}-1\rangle$. La correction finit malgré tout par se faire, au moins *via* la relaxation. Par ailleurs, le fait déjà mentionné que la probabilité d'observer un saut vers $|\mathrm{n_c}+1\rangle$ à partir de $|\mathrm{n_c}\rangle$ est beaucoup plus faible que la probabilité que le saut ait lieu vers $|\mathrm{n_c}-1\rangle$ permet à la rétroaction utilisant cette loi de contrôle de rester malgré tout efficace. Nous n'avons pas eu le temps de tester de nouveaux paramètres au vu de cette analyse. Nous aurions pu chercher par exemple à fixer des contraintes sur les seuils $\epsilon_{p,m}(\mathrm{n_c})$, telles que leur donner une valeur maximale, mais cela nécessite bien évidemment des tests expérimentaux ou des simulations numériques, puisqu'il est difficile de prévoir *a priori* la réussite de tel ou tel choix de coefficients.

Notons toutefois que fixer de telles contraintes n'est pas forcément un problème simple. Imaginons par exemple que nous voulions imposer une valeur maximale ϵ_l :

$$\epsilon_{p,m}(\mathrm{n_c}) \leq \epsilon_l. \tag{IV.17}$$

En utilisant les expression de ϵ_p et ϵ_n, et en se rappelant la contrainte sur les σ_n,

$$\sigma_{\mathrm{n_c}} = -\sum_{n\neq \mathrm{n_c}} \sigma_n < 0, \tag{IV.18}$$

nous pouvons alors montrer l'inégalité

$$0 > \frac{\sum_{n/|n-\mathrm{n_c}|\geq 2} \sigma_n}{-\sigma_n} \geq \frac{2}{\epsilon_l} - 3. \tag{IV.19}$$

Cela fixe déjà une valeur minimale au seuil ϵ_l :

$$\epsilon_l \geq 0,67. \tag{IV.20}$$

Quel que soit les coefficient σ_n que nous choisissons, il faudra toujours attendre que $P(\mathrm{n_c})$ soit plus faible que 34% pour réactiver les corrections après un saut de $|\mathrm{n_c}\rangle$ vers $|\mathrm{n_c}\pm 1\rangle$.

Si de plus, nous voulions imposer une contrainte de la forme (IV.17) à tous les coefficients σ_n,

$$\forall n \neq \mathrm{n_c} \quad \frac{\sigma_{\mathrm{n_c}}}{\sigma_{\mathrm{n_c}} - \sigma_n} \leq \epsilon_l, \tag{IV.21}$$

nous pourrions alors montrer que ϵ_l est contrainte par la taille de l'espace de Hilbert :

$$\epsilon_l \geq 1 - \frac{1}{\mathcal{N}}. \tag{IV.22}$$

Pour $\mathcal{N} = 9$ par exemple, nous aurions la condition $\epsilon_l \geq 0,89$.

Il semble donc que modifier *simplement* la loi de contrôle pour corriger cette asymétrie entre les sauts vers le haut et vers le bas ne soit pas immédiat. Il y a sans doute là une marge de progression pour améliorer la qualité de la rétroaction.

IV.3.2 Régime stationnaire

Revenons maintenant à l'étude du régime stationnaire de la rétroaction. Nous tenterons dans cette section d'extraire de l'étude statistique des injections réalisées, mais aussi des modifications induites de la distribution des nombres de photons, de nouvelles informations sur le comportement de la boucle.

IV.3.2.a Statistique des injections

Voyons dans un premier temps quelle est la statistique des amplitudes de correction choisies au cours d'une trajectoire quantique. Nous traçons figure IV.25 l'histogramme des amplitudes des injections pour une boucle de rétroaction ayant $|4\rangle$ pour cible. Les mêmes 4000 trajectoires que celles étudiées au paragraphe IV.2.2 sont utilisées. Il ressort essentiellement de cet histogramme le fait que la distribution est bien symétrique : comme nous pouvions nous y attendre, il n'y a pas d'information de phase globalement gardée vis à vis du champ cohérent initial qui pourrait introduire un biais dans le choix de la phase des corrections. La mesure QND préparant des états de Fock, la phase du champ est en fait très rapidement brouillée, plus vite que l'acquisition d'information sur le nombre de photons en outre, puisque les mesures non-lues, nombreuses, participent aussi au brouillage. Notons toutefois que le brouillage n'est total qu'une fois la rétroaction arrêtée : les corrections appliquées sont efficaces essentiellement en présence de cohérences dans la matrice densité.

Un élément vient cependant briser cette symétrie : il apparaît en effet qu'une injection particulière, $\alpha \approx -0,05$, est plus probable d'un ordre de grandeur que les autres d'amplitudes voisines. Cette correction a en fait lieu au début de chaque trajectoire quantique : le choix que nous avons fait de l'état initial du champ en est la raison. Nous avons expliqué précédemment que nous préparons le champ dans l'état cohérent $\left|\alpha = \sqrt{\mathrm{n_c}}\right\rangle$ pour maximiser la fidélité initiale $P(\mathrm{n_c})$. Toutefois, la rétroaction quantique utilisant le contrôle «Distance» ne cherche pas à maximiser la fidélité, mais plutôt à minimiser la distance à la cible. Or l'état cohérent qui minimise cette distance n'est pas l'état $\left|\alpha = \sqrt{\mathrm{n_c}}\right\rangle$. Il n'en est certes pas très différent mais pour $\mathrm{n_c} = 4$, c'est le champ d'amplitude $\alpha = 1,95$, soit l'état cohérent contenant $3,8$ photons. À chaque début de trajectoire quantique, le régulateur applique donc la correction d'amplitude $-0,05$ de sorte à amener le champ initial préparé d'amplitude 2, vers celui d'amplitude $1,95$.

Sur la figure IV.25, nous pouvons également remarquer qu'outre les corrections d'amplitude maximale, $\alpha = \pm\alpha_{\max}$, la plupart des corrections réalisées sont choisies faibles : à lui seul, l'intervalle $[-0,01\ 0,01]$ représente plus de 50% des amplitudes choisies (le choix $|\alpha| = \alpha_{\max}$ en constitue quant à lui 25%). La restriction $|\alpha| \leq 0,1$ ne semble donc pas très contraignante avec ce choix de loi de contrôle.

IV.3.2.b Variation de la fidélité à la cible

Plutôt que de nous intéresser seulement au comportement général de la boucle, nous pouvons également extraire des prédictions du filtre la façon dont réagit la rétroaction dans

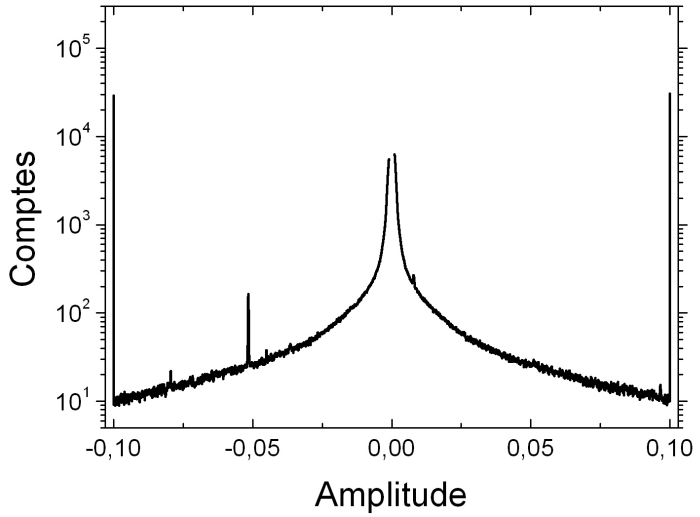


FIGURE IV.25 – Histogramme des injections de correction, en échelle logarithmique, pour une boucle de rétroaction ayant $|4\rangle$ pour état cible.

certaines situations bien précises. Le paragraphe IV.3.3 en est un exemple tout particulier puisque nous nous concentrerons uniquement sur l'intervalle de temps suivant un saut quantique.

Dans cette section, nous cherchons plutôt à comprendre comment agit la rétroaction en fonction de la fidélité du champ à l'état cible $P(\mathrm{n_c})$. Nous traçons pour cela figure IV.26, pour $\mathrm{n_c} = 3$ seulement, la variation de fidélité $\Delta_p P(\mathrm{n_c}) = \overline{P_{k+p}(\mathrm{n_c}) - P_k(\mathrm{n_c})}^{(k)}$ entre une itération k et l'itération $k+p$, moyennée sur les itérations k de même fidélité $P_k(\mathrm{n_c})$. $\Delta_p P(\mathrm{n_c})$ est tracée en fonction de ce choix $P_k(\mathrm{n_c})$, et pour plusieurs valeurs de p.

Notons tout d'abord que les courbes se croisent toutes autour de $P(\mathrm{n_c}) = 44\%$, qui est la valeur de la fidélité à la cible en régime stationnaire. La ligne en points tirets correspond à l'écart à la distribution stationnaire $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c}) - P_k(\mathrm{n_c})$. En d'autres termes, et comme attendu, si la fidélité à la cible est plus faible que sa valeur en régime stationnaire, alors la rétroaction la fait croître après quelques itérations. Sinon, elle décroît.

Nous pouvons également remarquer que pour les petites valeurs de p, $\Delta_p P(\mathrm{n_c})$ ne prend de valeurs notables que pour les faibles fidélités, $P(\mathrm{n_c}) \leq 10\%$: ce sont en fait celles pour lesquelles de fortes corrections sont appliquées. Si nous augmentons p, *i.e.* si nous regardons les variations de fidélité sur de plus grands intervalles de temps ($p = 100$ correspond à 8 ms d'écart), la distinction entre $P(\mathrm{n_c}) \leq 10\%$ et $P(\mathrm{n_c}) \geq 10\%$ disparaît peu à peu et la variation $\Delta_p P(\mathrm{n_c})$ tend finalement vers l'écart à la distribution stationnaire. Nous obtenons ainsi la façon dont le régime stationnaire s'établit, en un peu plus de 200 itérations, *i.e.* environ 16 ms, comme nous l'avions déjà vu figure IV.11.

Nous comparons enfin sur la figure IV.27 ces variations à celle obtenues, pour $p = 10$,

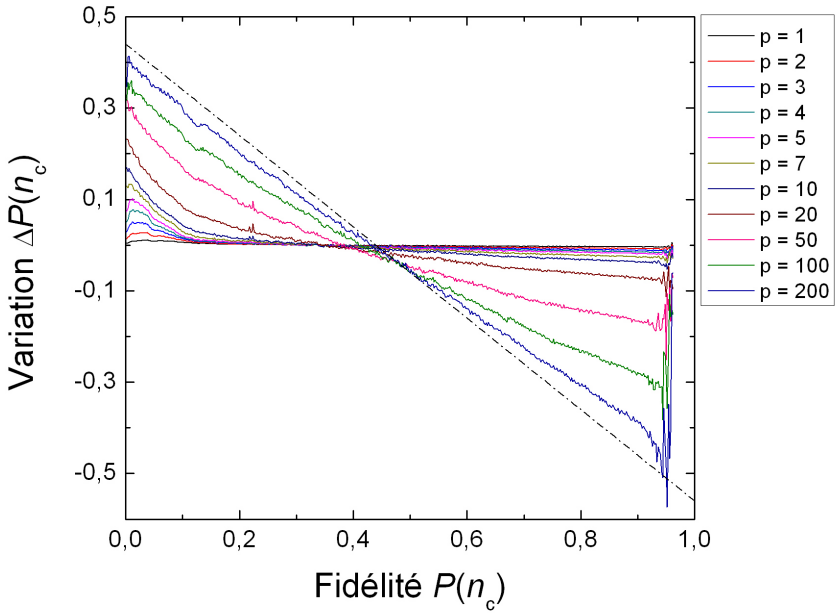


FIGURE IV.26 – Variation de la fidélité en p itérations de la boucle. Nous traçons en fonction de $P(\mathrm{n_c})$ les moyennes $\overline{P_{k+p}(\mathrm{n_c}) - P_k(\mathrm{n_c})}^{(k)}$ sur les itérations k de fidélité $P(\mathrm{n_c})$ pour plusieurs valeurs de p. Les point tirets noirs donnent l'écart à la distribution stationnaire : $P_{\mathrm{QND}}(\mathrm{n_c}) - P(\mathrm{n_c})$.

50 et 100, en boucle ouverte. Nous pouvons ainsi estimer une nouvelle fois le temps nécessaire à la rétroaction pour commencer ses corrections, mais en fonction de la fidélité à la cible cette fois. Il apparaît tout d'abord que pour les faibles valeurs de p, il n'y a pas de différence, aux hautes fidélités, entre la boucle ouverte et la boucle fermée : la rétroaction se contente de laisser le champ évoluer librement. Cela correspond aux périodes de tranquillité observées sur les trajectoires quantiques où, le champ ayant été préparé dans l'état cible, la source micro-onde est maintenue éteinte. Au bout de $p = 100$ itérations toutefois, soit environ 8 ms, la décroissance de la fidélité observée en boucle fermée devient plus faible que celle de la boucle ouverte. Là encore, cet intervalle correspond au temps, déjà observé, nécessaire au processus de mesure pour acquérir de l'information, en l'occurrence réaliser qu'un saut quantique a eu lieu. Dès lors, les corrections peuvent reprendre et la relaxation est contrecarrée. Une étude plus précise de la correction apportée à un saut quantique sera donnée au paragraphe suivant.

Pour les fidélités les plus basses en revanche, et ce dès $p = 1$, la boucle fermée est plus efficace que la boucle ouverte, dont le seul outil lui permettant d'augmenter $P(\mathrm{n_c})$ est la mesure QND en elle-même [10].

10. Ce qui explique le fait que pour $P(\mathrm{n_c}) = 0$, en boucle ouverte, aucune augmentation de fidélité n'est

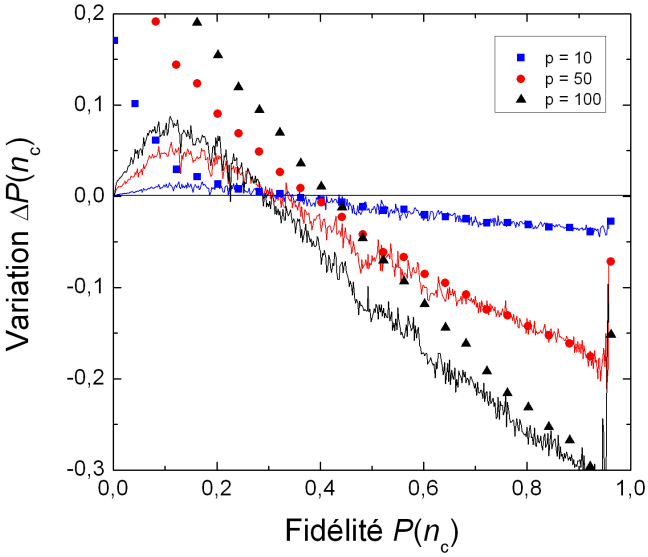


FIGURE IV.27 – Variation de la fidélité en p itérations de la boucle ouverte, avec $\mathrm{n_c} = 3$. Nous traçons en fonction de $P(\mathrm{n_c})$ les moyennes $\overline{P_{k+p}(\mathrm{n_c}) - P_k(\mathrm{n_c})}^{(k)}$ sur les itérations k de fidélité $P(\mathrm{n_c})$ pour $p = 10$ (bleu), $p = 50$ (rouge) et $p = 100$ (noir). Les points correspondent aux valeurs obtenues en boucle fermée.

IV.3.3 Correction d'un saut quantique

IV.3.3.a Simulation expérimentale

Dans cette section, nous cherchons à analyser la façon dont la boucle de rétroaction réagit suite à un saut quantique. Nous devons pour cela faire la moyenne sur de nombreuses trajectoires quantiques et observer l'évolution temporelle de la distribution des nombres de photons et celle des injections de correction réalisées, en prenant comme origine des temps le saut quantique... Mais bien sûr, contrairement aux simulations numériques, nous n'avons pas accès à la matrice densité «réelle» instantanée du champ et nous ne savons pas quand un saut quantique se produit. La solution consiste à en faire une *simulation expérimentale*.

- Nous préparons dans un premier temps un état de Fock $|n\rangle$ quelconque par une mesure QND sur un champ cohérent connu ;
- Une fois le résultat n de la mesure déterminé, nous fermons la boucle de rétroaction et lui demandons de préparer l'état de Fock désiré, ici $|\mathrm{n_c} = 3\rangle$. Cependant, contrairement à ce que nous faisions dans toutes les expériences présentées jusqu'ici, nous induisons en erreur le filtre quantique : l'état initial que le filtre quantique prend comme point de départ de ses estimations n'est pas l'état de Fock $|n\rangle$, mais plu-

à signaler.

tôt l'état cible $|\mathrm{n_c}\rangle$. Ou plus précisément, nous donnons comme distribution initiale des nombres de photons la distribution mesurée après une expérience avec critère de convergence, *i.e.* celle donnée figure IV.14. Au final, le filtre «croit» que l'état cible est préparé alors que le «vrai» champ est dans l'état nombre correspondant au résultat de la mesure QND.

En étudiant le comportement de la rétroaction, à partir de l'instant même où nous fermons la boucle, *i.e.* de l'instant où le *saut simulé* a eu lieu, nous pouvons analyser la façon dont un saut quantique est corrigé.

Mesure QND de préparation Ici, la mesure QND dont nous nous servons pour préparer l'état de Fock initial se doit de donner un résultat n pour chaque réalisation de l'expérience. Nous utilisons donc la méthode par décimation, *i.e.* la même méthode que celle utilisée par le filtre quantique, à ceci près que 4 phases de mesure sont maintenant utilisées : c'est la même mesure que celle faite dans [33], rappelée au chapitre I, permettant l'observation des sauts quantiques de la lumière. 400 ou 480 échantillons contenant en moyenne $0,2$ atomes sont alors préparés, suite à l'injection d'un champ cohérent de 3 photons. La dernière fenêtre de 60 atomes détectés, longue d'environ 25 ms, est celle dont nous utiliserons le résultat pour classer *a posteriori* les trajectoires quantiques : nous considérons qu'une trajectoire quantique a débuté avec un saut vers l'état $|n\rangle$ si et seulement si la distribution des nombres de photons mesurée par cette fenêtre vérifie $P_{\mathrm{QND}}(n) \geq 80\%$. Les trajectoires pour lesquelles aucun nombre n ne vérifie ce critère ne sont donc pas analysées.

Paramètres de la boucle Pour chaque trajectoire quantique, 1000 itérations de la boucle sont réalisées, avec l'état cible $|3\rangle$. Comme précédemment, les phases Ramsey utilisées alternent d'un échantillon à l'autre entre $\varphi_r(3)$ et $\varphi_r(2)$. L'expérience est répétée 22000 fois, pour lesquelles 9654 seulement ont été conservées. Les autres avaient moins de 60 atomes détectés (12 seulement) ou ne remplissaient pas le critère sur les $P_{\mathrm{QND}}(n)$ (12334 au total).

IV.3.3.b Correction d'un saut

Nous traçons figure IV.28 les probabilités $\overline{P}(n,t)$ obtenues par moyenne des prédictions du filtre sur les 2759 trajectoires quantiques pour lesquelles la mesure QND initiale a vérifié le critère $P_{\mathrm{QND}}(2) \geq 80\%$. Comme nous l'avons dit, la distribution initiale estimée par le filtre correspond à la distribution moyenne obtenue après préparation de l'état cible $|3\rangle$ *via* la rétroaction quantique. Nous simulons donc ici le saut quantique $|\mathrm{n_c} = 3\rangle \rightarrow |2\rangle$.

Dans les premières millisecondes suivant le saut, la fidélité à l'état cible $\overline{P}(\mathrm{n_c})$ décroît brutalement d'environ 1% à chaque nouvelle itération de la boucle, alors que $\overline{P}(2)$ croît à plus de $1,5\%$ par itération. Le filtre quantique prend alors conscience qu'un saut a eu lieu, et la source micro-onde est activée (la moyenne des valeurs absolues des amplitudes $\overline{|\alpha|}(t)$ est aussi donnée sur la figure). Cela permet au bout de 5 ms de stopper la progression de $\overline{P}(2)$ au détriment de $\overline{P}(3)$ et d'entamer le retour lent vers les valeurs stationnaires. Ce dernier se fait en un peu plus de 15 ms. Nous retrouvons donc typiquement les mêmes

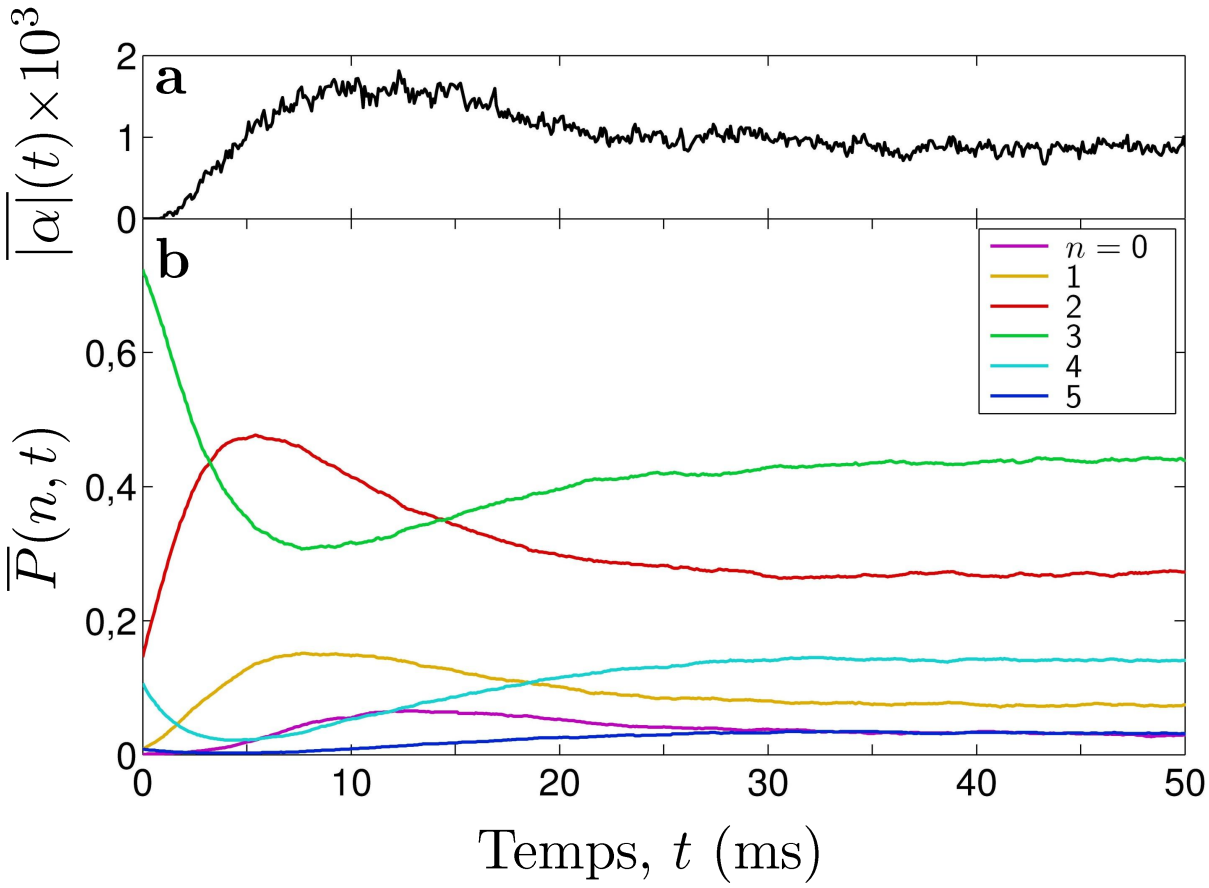


FIGURE IV.28 – Simulation expérimentale du retour à l'équilibre après un saut quantique de $|\mathrm{n_c}=3\rangle$ vers $|2\rangle$. **a** Amplitude $\overline{|\alpha|}(t)$ des injections cohérentes de correction moyennées en valeur absolue sur toutes les trajectoires quantiques pour lesquelles la mesure QND initiale a donné le résultat 2, *i.e.* $P_{\mathrm{QND}}(2) \geq 80\%$. **b** Probabilités $\overline{P}(n,t)$ obtenues par moyenne sur ces mêmes trajectoires.

ordres de grandeur de temps que ceux déjà rencontrés au paragraphe IV.2.2 : le retour au régime stationnaire se fait en 5 à 6 ms pendant lesquelles l'information sur le champ dans la cavité est acquise et la rétroaction activée, puis en 15 ms avec une décroissance progressive des injections nécessaires. Les valeurs à temps long des $\overline{P}(n)$ correspondent à 1 ou 2% près à la distribution stationnaire P_{QND} donnée au paragraphe IV.2.2.

À titre de comparaison, nous traçons figures IV.30 et IV.31 les probabilités $\overline{P}(n,t)$ obtenues lorsque la mesure QND initiale a donné les résultats 0 (2311 trajectoires sélectionnées) et 1 (3307 trajectoires) respectivement. Les temps caractéristiques d'évolution sont assez semblables à ceux observés lorsque le saut simulé a eu lieu vers $|2\rangle$. Toutefois, le filtre quantique se rend compte ici que le champ est «plus loin» de la cible que dans l'expérience précédente et les corrections appliquées sont donc près de deux fois plus grandes.

IV.3.3.c Retour à l'état stationnaire

Nous pouvons également extraire des données la façon dont le champ, une fois préparé dans l'état cible $|\mathrm{n_c} = 3\rangle$, retourne vers la distribution stationnaire. Il nous suffit pour cela de faire la même analyse qu'au paragraphe précédent mais en ne sélectionnant cette fois que les 1092 trajectoires quantiques pour lesquelles la mesure QND initiale a donné le résultat $n = \mathrm{n_c} = 3$. Ici, le filtre quantique n'est donc pas trompé au moment de la fermeture de la boucle.

Les résultats sont donnés figure IV.29. Pour toutes les populations $\overline{P}(n,t)$, ainsi que pour l'amplitude moyenne $\overline{|\alpha|}(t)$ des corrections réalisées, le retour au régime stationnaire se fait régulièrement en un temps de l'ordre de 15 ms. Ici, le filtre quantique a déjà une estimation fiable du champ au début de la trajectoire quantique, et les 6 ms, observées notamment au paragraphe précédent, nécessaires à l'acquisition de cette information ne sont donc plus requises. Notons toutefois que $\overline{|\alpha|}(t)$ ne prend de valeurs non nulles qu'après environ 1 ms, soit 3 atomes détectés en moyenne. Ce même délai est visible sur la figure IV.28, *i.e.* lors de la correction d'un saut vers $|\mathrm{n_c} - 1\rangle$. Le temps typique de réaction de la boucle de rétroaction est donc très court, de l'ordre de 1 ms, plus court en particulier, comme nous l'avions déjà soupçonné, que le temps moyen nécessaire à la mesure QND pour fournir une information précise, de l'ordre de 6 à 8 ms au vu de tous les résultats précédents.

Nous traçons en outre figure IV.29 l'évolution temporelle $P_{\mathrm{relax}}(3,t)$ que nous observerions en boucle ouverte, calculée à partir de la distribution initiale $\overline{P}(n,0)$. Là encore, nous notons que $\overline{P}(3,t)$ s'écarte de $P_{\mathrm{relax}}(3,t)$ dès la première milliseconde, et lui reste toujours supérieure : la boucle de rétroaction réagit vite, et réagit efficacement !

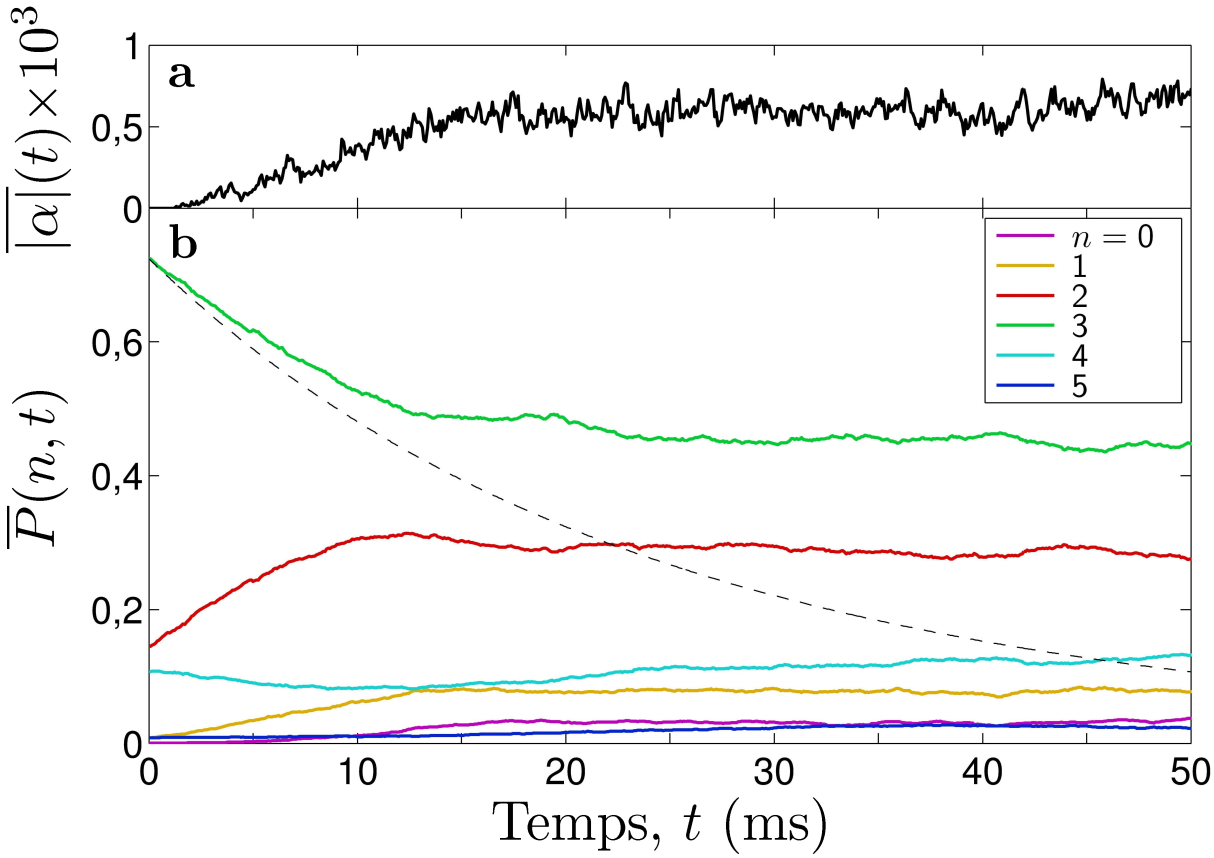


FIGURE IV.29 – Simulation expérimentale du retour à l'équilibre depuis l'état cible $|\mathrm{n_c}=3\rangle$. **a** Amplitude $\overline{|\alpha|}(t)$ des injections cohérentes de correction moyennées en valeur absolue sur toutes les trajectoires quantiques pour lesquelles la mesure QND initiale a donné le résultat 3, *i.e.* $P_{\mathrm{QND}}(3) \geq 80\%$. **b** Probabilités $\overline{P}(n,t)$ obtenues par moyenne sur ces mêmes trajectoires. La courbe en pointillés correspond à l'évolution temporelle calculée de $P_{\mathrm{relax}}(3)$ en boucle ouverte à partir de la distribution initiale $\overline{P}(n,0)$.

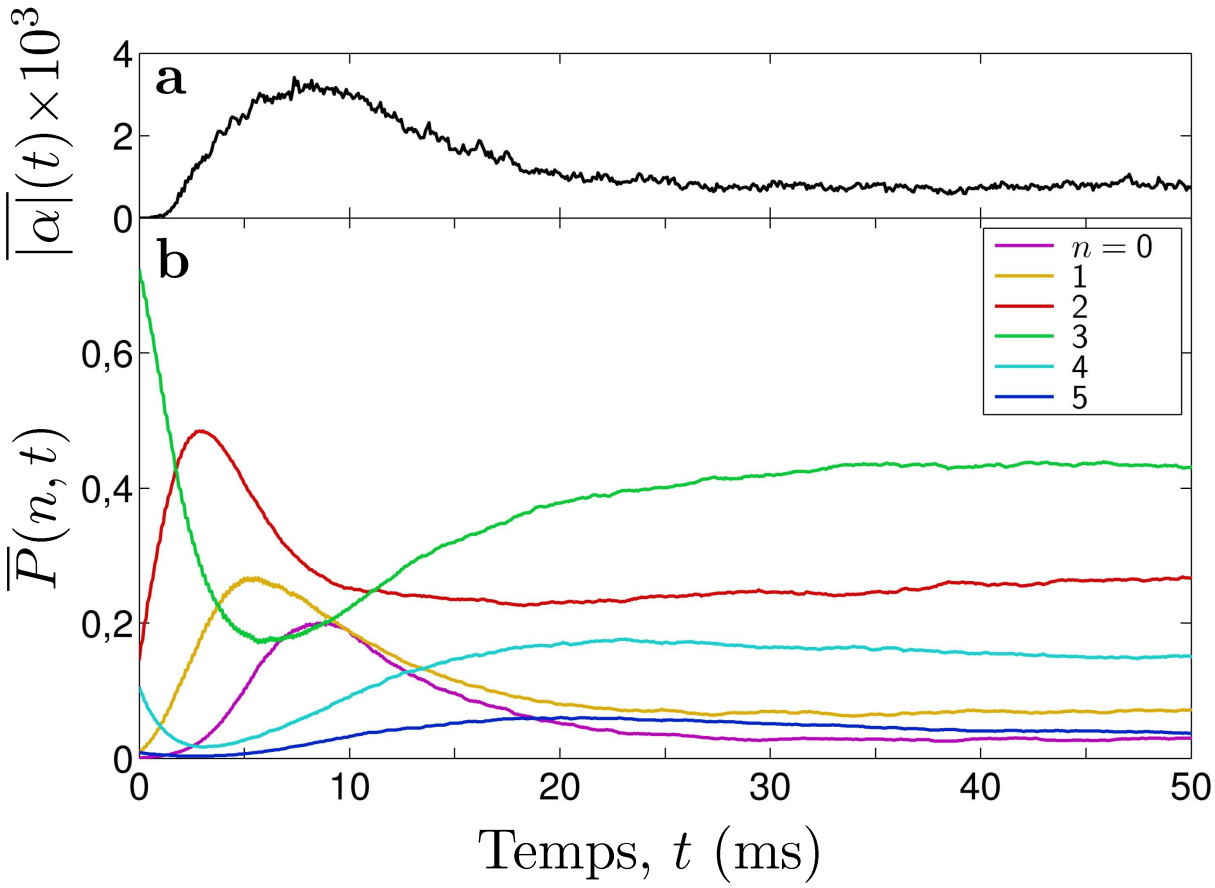


FIGURE IV.30 – Simulation expérimentale du retour à l'équilibre après un saut quantique hypothétique de $|\mathrm{n_c}=3\rangle$ vers $|0\rangle$. **a** Amplitude $\overline{|\alpha|}(t)$ des injections cohérentes de correction moyennées en valeur absolue sur toutes les trajectoires quantiques pour lesquelles la mesure QND initiale a donné le résultat 0, *i.e.* $P_{\mathrm{QND}}(2) \geq 80\%$. **b** Probabilités $\overline{P}(n,t)$ obtenues par moyenne sur ces mêmes trajectoires.

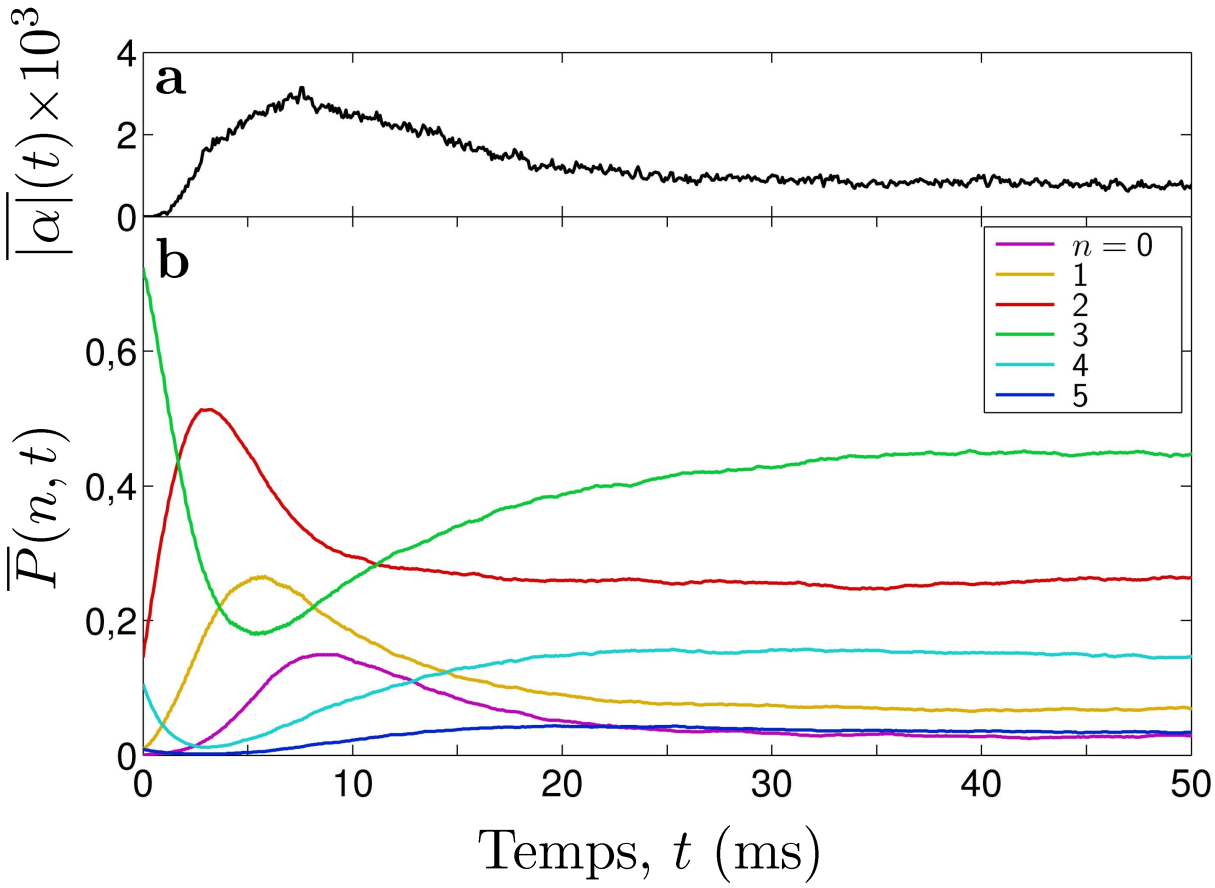


FIGURE IV.31 – Simulation expérimentale du retour à l'équilibre après un saut quantique hypothétique de $|\mathrm{n_c}=3\rangle$ vers $|1\rangle$. **a** Amplitude $\overline{|\alpha|}(t)$ des injections cohérentes de correction moyennées en valeur absolue sur toutes les trajectoires quantiques pour lesquelles la mesure QND initiale a donné le résultat 1, *i.e.* $P_{\mathrm{QND}}(2) \geq 80\%$. **b** Probabilités $\overline{P}(n,t)$ obtenues par moyenne sur ces mêmes trajectoires.

IV.3.4 Rapidité de convergence et mesures QND itérées

Dans cette section, nous cherchons à tester la rapidité avec laquelle notre protocole de rétroaction quantique prépare l'état de Fock désiré. Il nous faut donc le comparer à une autre méthode de préparation *déterministe* d'états nombre, mais qui n'utilise pas de rétroaction quantique, *i.e.* qui soit complètement *passive*. Nous décrirons donc dans un premier temps le principe de cette méthode, baptisée «essais/erreurs», et comparerons ensuite leurs performances.

IV.3.4.a Méthode «essais/erreurs»

Principe Nous cherchons ici à préparer de façon déterministe un état de Fock préalablement choisi aussi simplement que possible, en gardant les mesures quantiques non-destructives comme outil de projection sur un de ces états de Fock. La solution la plus naturelle est la suivante.

- Nous injectons initialement un champ cohérent $|\alpha_0\rangle$ choisi tel que la probabilité de mesurer $\mathrm{n_c}$ photons à l'issue d'une mesure QND est maximale : $\alpha_0 = \sqrt{\mathrm{n_c}}$;
- Nous démarrons alors une séquence de mesure QND en envoyant les mêmes sondes que celles utilisées pour la rétroaction quantique, et ce sur un intervalle de temps τ préalablement fixé ;
- Au bout de ce temps τ, le résultat de la mesure est lu. En gardant le même critère de convergence que nous avions utilisé au paragraphe IV.2.3, la préparation est couronnée de succès si la distribution de probabilité obtenue est telle que $P(\mathrm{n_c}) \geq 80\%$. Si ce n'est pas le cas, le champ est effacé, *i.e.* ramené vers le vide de photons, et les trois étapes définies ici sont répétées jusqu'au succès de la préparation [11].

Réalisation expérimentale Cette méthode de préparation n'a pas été effectivement réalisée expérimentalement. Par simplicité d'une part, et pour s'affranchir des problèmes techniques tels que la minimisation du temps nécessaire à l'effacement du champ d'autre part, nous avons préféré une nouvelle fois la *simuler expérimentalement*. Pour cela, nous nous contentons d'enregistrer les prédictions du filtre quantique dans une expérience de boucle ouverte, avec un champ initialement préparé dans l'état $|\alpha_0\rangle$. Les phases Ramsey sont choisies de la même façon que pour la rétroaction quantique étudiée jusqu'à présent. Pour chaque trajectoire, la distribution au temps τ suivant le début de l'expérience est lue, et la trajectoire est considérée comme un succès ou comme un échec. En répétant cette expérience de nombreuses fois, en l'occurrence 4000 fois, nous obtenons la probabilité $p_S(\tau)$ qu'une trajectoire soit un succès après une mesure de durée τ. Nous pouvons alors *calculer* l'évolution temporelle du taux de succès $\zeta_S(t|\tau)$, *i.e.* la proportion des trajectoires ayant préparé au temps t l'état cible, que nous obtiendrions dans une expérience «essais/erreurs». Puisqu'il faut à chaque essai attendre un temps τ avant de considérer une trajectoire comme fructueuse ou non, $\zeta_S(t|\tau)$ est en fait une fonction en escalier, dont chaque «marche» est

11. «Ce n'est qu'en essayant continuellement, que l'on finit par réussir. En d'autres termes : plus ça rate, plus on a de chances que ça marche... » (proverbe Shadock).

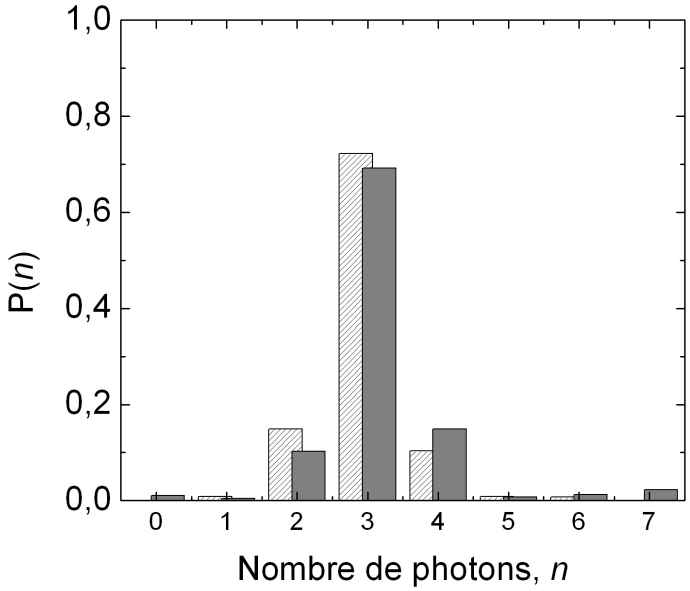


FIGURE IV.32 – Distribution des nombres de photons mesurée après une expérience de rétroaction quantique en boucle ouverte et avec critère de convergence pour l'état cible $|3\rangle$ (histogrammes grisés). Les histogrammes hachurés sont ceux obtenus en boucle fermée.

de durée τ. À la n^{e} marche, *i.e.* au temps $t = n\tau$, ζ_S est donné par

$$\zeta_S(n|\tau) = 1 - [1 - p_S(\tau)]^n \,. \tag{IV.23}$$

Traduit en fonction du temps, nous avons donc

$$\zeta_S(t|\tau) = 1 - [1 - p_S(\tau)]^{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor} \,. \tag{IV.24}$$

IV.3.4.b Fidélité de préparation

Nous nous apprêtons à comparer les temps de préparation moyens obtenus avec la rétroaction quantique et la méthode «essais/erreurs» décrite dans cette section. Cette comparaison n'aura cependant de sens que si la fidélité à la cible de l'état préparé est la même dans les deux expériences. Nous l'avons déjà mesurée au paragraphe IV.2.3 pour la rétroaction quantique, il reste donc à le faire pour la méthode passive. Il nous suffit pour cela de déterminer une nouvelle fois *via* une mesure QND indépendante la distribution des nombres de photons obtenue quand le protocole de préparation a déclarée une trajectoire comme fructueuse, *i.e.* quand la fidélité mesurée par le filtre a atteint la valeur $P(\mathrm{n_c}) \geq 80\%$. Ici encore, l'expérience «essais/erreurs» n'est pas réalisée *stricto sensu* : la fidélité de l'état préparé est simplement mesurée sur une expérience de rétroaction en *boucle ouverte* avec le

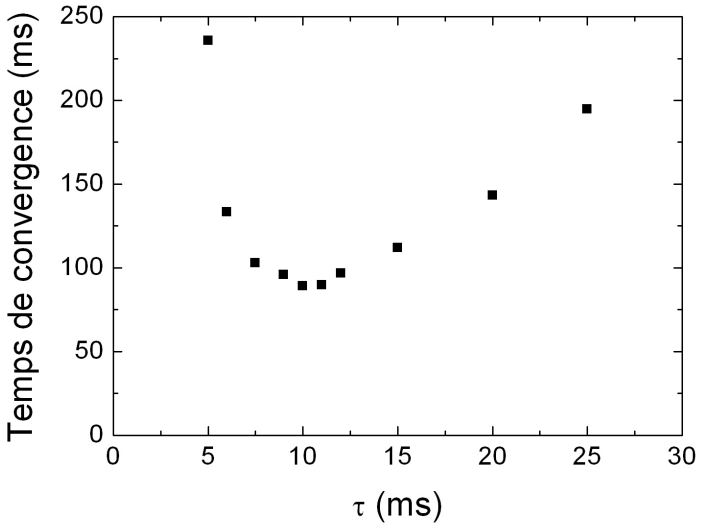


FIGURE IV.33 – Optimisation du paramètre τ de la méthode «essais/erreurs» pour l'état cible $|2\rangle$. Le temps de convergence tel que défini dans le texte est tracé en fonction de la longueur τ d'une mesure de la boucle.

critère d'arrêt : $P(\mathrm{n_c}) \geq 80\%$. 6000 trajectoires quantiques sont alors enregistrées, pour lesquelles 2040 seulement ont vérifié ce critère au moins une fois. La distribution des nombres de photons mesurée à partir de ces 2040 trajectoires est donnée figure IV.32 pour l'état cible $|3\rangle$. Elle est très semblable à celle obtenue en boucle fermée. En d'autres termes, les états produits par la rétroaction quantique et par la méthode «essais/erreur» ont des fidélités à la cible identiques. Nous pourrons donc nous contenter de comparer les temps de convergence sans plus de complications.

IV.3.4.c Comparaison

Nous donnons ici les résultats des expériences simulées de la méthode «essais/erreurs», décrite dans les paragraphes précédents. Pour chaque état cible, le paramètre τ est choisi tel que le temps de convergence mesuré soit minimal. Celui-ci est défini, comme précédemment, comme le temps nécessaire à la préparation pour atteindre un taux de succès ζ_S de $1 - \mathrm{e}^{-1} = 63\%$. Notons que dans l'approximation continue [12] de $\zeta_S(t)$, *i.e.* si $\zeta_S(t)$ pouvait s'écrire

$$\zeta_S(t) = 1 - (1 - p_S(\tau))^{t/\tau}, \tag{IV.25}$$

12. Sur la figure IV.34, cela reviendrait à assimiler les courbes en escalier à une ligne continue passant par chaque sommet supérieur.

le temps auquel le seuil à 63% est atteint est en fait le temps moyen de convergence de la préparation :

$$\langle t \rangle = \frac{\tau}{-\ln(1 - p_S(\tau))}, \tag{IV.26}$$

ce qui justifie *a posteriori* le choix des 63% comme niveau de référence. Sur la figure IV.33, le temps de convergence mesuré pour la méthode «essais/erreurs» préparant l'état $|2\rangle$ est tracé en fonction du choix du paramètre τ. Pour cette cible, le choix $\tau = 10\,\mathrm{ms}$ est optimal.

Cette procédure d'optimisation est répétée pour tous les états cibles. Nous traçons alors figure IV.34 les taux de succès $\zeta_S(t)$ obtenus pour chaque cible et y donnons les temps τ choisis. Dans tous les cas, il apparaît que la rétroaction quantique que nous avons mise en place et étudiée dans ce manuscrit est notablement plus rapide que la méthode «essais/erreurs» que nous considérons dans cette section. Le tableau ci-dessous compare les temps de convergence mesurés pour les deux méthodes et chacune des 4 cibles.

	Rétroaction cohérente	Méthode «essais/erreurs»
$\|1\rangle$	26 ms	42 ms
$\|2\rangle$	31 ms	89 ms
$\|3\rangle$	49 ms	251 ms
$\|4\rangle$	58 ms	418 ms

TABLE IV.2 – Temps de convergence pour deux protocoles différents de préparation d'états nombre.

La différence relative entre les deux méthodes de préparation est donc d'autant plus grande que le nombre de photons dans la cible est élevé, allant jusqu'à une différence d'un facteur 7 pour $|\mathrm{n_c} = 4\rangle$. Ce gain de temps substantiel met nettement en lumière l'intérêt, en terme de préparation d'états de Fock, de la boucle de rétroaction que nous avons développée.

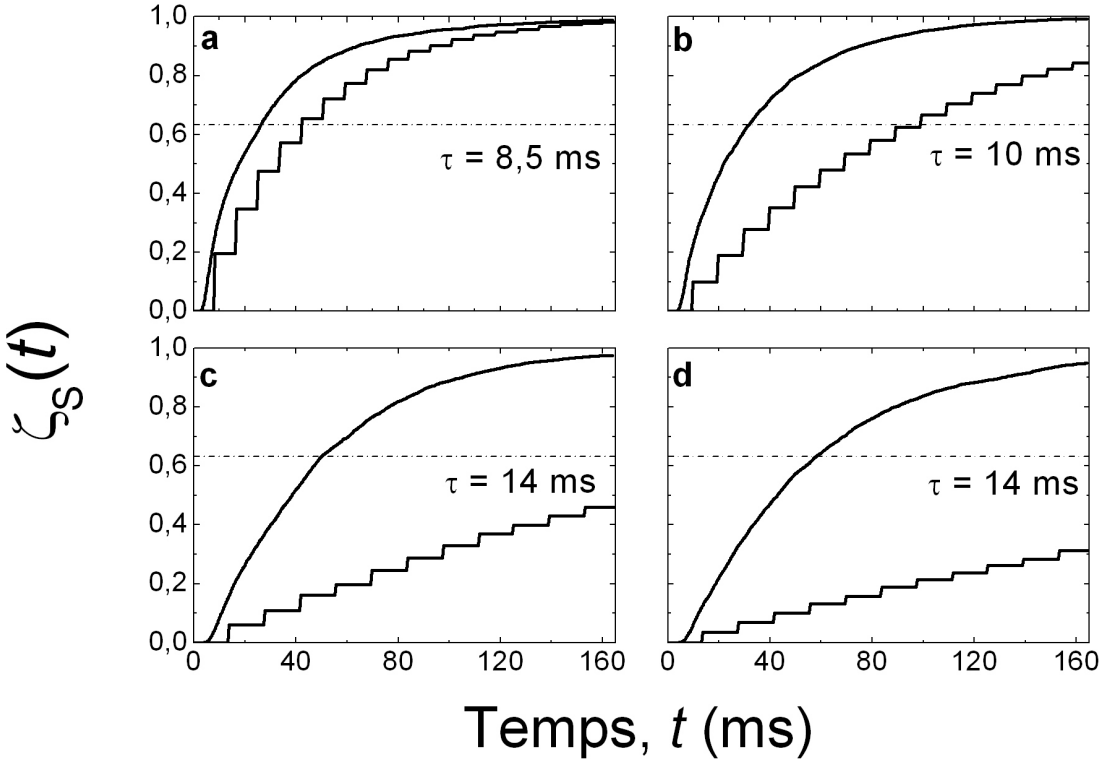


FIGURE IV.34 – Comparaison des temps de convergence de deux protocoles de préparation d'états nombre. Les figures **a**, **b**, **c** et **d** correspondent respectivement aux états $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ et $|4\rangle$. Pour chacun d'eux, nous traçons le taux de succès $\zeta_S(t)$ d'une expérience dont le critère d'arrêt est $P(\mathrm{n_c}) \geq 80\%$. Les lignes continues sont les résultats de la rétroaction quantique, les lignes en escalier ceux de la méthode «essais/erreurs», de paramètre τ, présentée dans ce chapitre. Les lignes horizontales repèrent le niveau $\zeta_S = 63\%$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents résultats obtenus par l'utilisation de la rétroaction quantique décrite tout au long de ce manuscrit. Après avoir donné le détail expérimental des séquences utilisées, nous avons dans un premier temps identifié les principales actions de la boucle à partir de trajectoires quantiques individuelles, à savoir la *préparation* des états cibles $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ et $|4\rangle$, puis leur *protection* envers la décohérence par la correction des inévitables sauts quantiques.

En utilisant une mesure QND indépendante de la rétroaction, nous avons alors pu extraire des nombreuses trajectoires enregistrées la distribution *stationnaire* des nombres de photons dans la cavité. Une nette augmentation de la fidélité du champ à l'état cible $|\mathrm{n_c}\rangle$, comparé à ce qui peut se faire de mieux avec des champs classiques ($\left|\sqrt{\mathrm{n_c}}\right\rangle$), a été observée. L'établissement du régime stationnaire a par ailleurs été étudié, nous permettant de mieux comprendre la façon dont la rétroaction agit.

Nous nous sommes ensuite plus particulièrement intéressés à la façon dont les sauts quantiques sont corrigés par une *simulation expérimentale* d'un tel saut. L'évolution moyenne de la distribution des nombres de photons après le saut ainsi que le choix des injections cohérentes appliquées ont alors pu être enregistrés.

La définition d'un critère d'arrêt pertinent de la boucle de rétroaction nous a finalement permis de *préparer* avec une fidélité élevée les quatre états nombre visés. La rapidité avec laquelle cette préparation est faite a été comparée à celle que nous avons si nous nous contentons passivement de mesurer le nombre de photons présents dans un champ cohérent, recommençant la mesure en cas d'échec en réinitialisant le champ à chaque fois. La rétroaction quantique que nous avons développée est alors apparue nettement plus efficace que cette méthode dite «essais/erreurs», la préparation pouvant être jusqu'à 7 fois plus rapide.

Conclusion

Le système d'électrodynamique quantique en cavité dont nous disposons s'est révélé particulièrement adapté à la réalisation de tests fondamentaux de la mécanique quantique. Dans des expériences précédant ce travail, la réalisation de mesures quantiques non-destructives a permis de suivre l'évolution temporelle du nombre de photons piégés dans la cavité, révélant ainsi l'existence des sauts quantiques de la lumière [33, 35]. Des états non-classiques du champ tels que des états de Fock et des états chats de Schrödinger ont ensuite pu être préparés et reconstruits [34]. L'action de la décohérence sur ces mêmes états a été précisément quantifiée [36]. Notre dispositif expérimental permet donc d'avoir une connaissance précise du système quantique qu'est le mode du champ électromagnétique piégé dans la cavité.

Dans ce manuscrit, nous avons étendu les capacités de notre montage au *contrôle* de cet oscillateur harmonique quantique. Par un suivi en temps réel de l'état du champ, et par l'utilisation en continu d'une boucle de rétroaction quantique utilisant des injections micro-ondes comme outil de contrôle, nous avons pu préparer sur demande les états nombre du rayonnement et les stabiliser en corrigeant les sauts quantiques induits par la décohérence.

Pour assurer la réussite de protocoles de contrôle quantique, une connaissance précise de tous les paramètres expérimentaux susceptibles d'influencer l'action de la boucle de rétroaction est requise, de la chaîne de détection à la chaîne de régulation. Il nous a fallu en particulier développer un filtre quantique permettant d'estimer la matrice densité du champ à partir des mesures QND du nombre de photons et des corrections appliquées. L'action en retour de la mesure a également dû être prise en compte, difficulté propre aux systèmes de rétroaction *quantiques*. Enfin, ce sont les imperfections expérimentales (relaxation, contraste de l'interféromètre, préparation des atomes,...) qui ont dû être incluses dans les calculs du filtre. Disposant de l'estimation de l'état du champ à tout instant, nous avons alors pu, à l'aide d'une loi de contrôle préalablement définie, déterminer la correction optimale à réaliser permettant la minimisation de la distance à l'état de Fock ciblé.

Le contrôle en temps réel d'une séquence expérimentale a en outre nécessité la mise en place d'une nouvelle architecture matérielle, incorporée au dispositif existant, qui permette la prise de décisions en temps réel. Après en avoir décrit le fonctionnement, nous avons exposé les résultats expérimentaux obtenus démontrant notre capacité à contrôler en continu un système quantique et à lutter contre sa décohérence. Une étude plus approfondie des performances de la rétroaction a finalement permis d'estimer les temps caractéristiques de préparation et de stabilisation des états quantiques. Nous avons notamment montré que l'utilisation de la rétroaction, comparée à une méthode passive, autorise un gain de temps

substantiel dans la préparation des états nombre.

Perspectives

L'analyse *a posteriori* des expériences de rétroaction quantique que nous avons menées a permis d'en identifier certaines limites. Il est notamment apparu que les rares sauts quantiques s'accompagnant du gain d'un photon dans la cavité sont moins bien corrigés que ceux lui faisant perdre un photon. Aussi des améliorations du filtre quantique sont sans doute possibles. Nous pourrions par exemple imaginer utiliser des prédictions à plus long terme pour le calcul de la correction optimale à appliquer : plutôt que de minimiser la distance à la cible de l'état du champ juste après l'injection, nous pourrions prendre en compte le fait que l'injection est suivie d'une mesure QND puis d'une autre injection. Si la mesure ne modifie pas les populations, elle réduit en revanche les cohérences, et prendre en compte cet effet peut amener le régulateur à changer l'amplitude du champ cohérent à injecter.

Par ailleurs, nous avons vu que la rétroaction est moins efficace quand le champ possède peu de cohérences. Modifier le régulateur pour maintenir un niveau minimum de cohérences peut alors potentiellement améliorer les performances de la boucle.

Il est toutefois difficile de prédire *a priori* la réussite de tel ou tel protocole, notamment en termes de stabilité de la rétroaction. Des simulations numériques seront donc nécessaires avant toute mise en place expérimentale.

D'autres expériences de contrôle quantique sont par ailleurs possibles. Nous pouvons par exemple modifier le moyen d'action de la boucle de rétroaction. Plutôt que d'utiliser l'injection de champs cohérents, nous pouvons par exemple utiliser des atomes de Rydberg en interaction résonante avec le champ de la cavité, qui injecteraient ou ôteraient des photons de la cavité. Plus précisément, nous envisageons d'utiliser les «trapping states», déjà utilisés par le groupe de H. Walther à Garching pour préparer des états de Fock, et que nous avons déjà évoqués dans l'introduction. En laissant les atomes interagir avec le champ pendant une durée telle qu'ils subissent une rotation 2π dans l'état cible $|\mathrm{n_c}\rangle$, tous les états [1] sauf $|\mathrm{n_c}\rangle$ se trouvent modifiés par l'interaction. *A priori*, utiliser des «trapping states» seuls à partir du vide permettrait de préparer l'état $|\mathrm{n_c}\rangle$ en envoyant des atomes préparés dans l'état $|e\rangle$ seulement. Toutefois, cette préparation est particulièrement instable si le champ thermique n'est pas négligeable : si le champ suite à un saut quantique se trouve dans l'état $|\mathrm{n_c}+1\rangle$, les atomes $|e\rangle$ suivants ne feront qu'augmenter le nombre de photons dans le champ, l'éloignant toujours plus de la cible. Dans ce cas, les atomes résonants doivent être préparés dans l'état $|g\rangle$ pour ramener le champ vers $|\mathrm{n_c}\rangle$. Une boucle de rétroaction est donc nécessaire : le régulateur doit simplement choisir si les atomes résonants sont préparés dans le niveau $|e\rangle$ (injection de photons) ou dans le niveau $|g\rangle$ (absorption de photons). Les premières simulations numériques indiquent qu'une telle expérience est réaliste, quoi

1. Il y a en fait d'autres états nombre pour lesquels la condition de «trapping state» est vérifiée. Ce sont tous ceux pour lesquels les atomes subissent une rotation $2n\pi$.

que techniquement plus complexe que la rétroaction «cohérente» que nous avons réalisée.

Plutôt que de modifier le paramètre de contrôle de la rétroaction, nous pouvons également modifier la mesure réalisée. Si par exemple nous choisissons le déphasage par photon comme $\phi_0 = \pi$, la mesure du nombre de photons devient une mesure de parité. C'est cette mesure qui était utilisée dans [34] pour transformer un champ cohérent $|\alpha\rangle$ en un état chat de Schrödinger :

$$|\psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle\right), \qquad |\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle\right).$$

Ces deux états sont des états propres de l'opérateur parité $\hat{\Pi}$ défini comme

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}|n\rangle &= +|n\rangle \quad \text{si } n \text{ est pair,} \\ &= -|n\rangle \quad \text{si } n \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Plus précisément, $|\psi_p\rangle$ ne contient que des nombres pairs de photons ($\hat{\Pi}|\psi_p\rangle = |\psi_p\rangle$), et $|\psi_i\rangle$ que des nombres impairs de photons ($\hat{\Pi}|\psi_i\rangle = -|\psi_i\rangle$). Si maintenant le champ est préparé dans un de ces états, $|\psi_p\rangle$ par exemple, alors si la décohérence induit la perte d'un photon par la cavité, le champ est projeté dans l'état $|\psi_i\rangle$, *i.e.* l'état chat de parité opposée. En utilisant, comme nous l'avons fait dans nos expériences, une succession d'atomes de Rydberg réalisant une mesure de la parité du champ, nous serions alors capables de détecter ces sauts quantiques. La boucle de rétroaction pourrait alors consister à envoyer des atomes résonants réinjecter un photon dans la cavité, pour ramener le champ sur l'état chat de parité désirée. Un tel protocole a déjà été étudié théoriquement [110, 111] et devrait permettre de stabiliser ces états exotiques du champ quantique.

Dans un autre registre que le contrôle quantique, notons pour conclure que notre capacité nouvelle à modifier en temps réel une séquence expérimentale nous permettrait d'améliorer la procédure de mesure quantique non-destructive du nombre de photons. Choisir aléatoirement la phase de mesure à chaque nouvel atome, et garder le déphasage par photon constant n'est en effet pas le meilleur choix, en terme de rapidité de la mesure. La procédure optimale consiste en fait à diviser par deux le déphasage par photon à chaque atome détecté, et à choisir la phase de mesure en fonction des résultats des mesures précédentes [112, 30]. Pour distinguer parmi N nombre de photons, $\log_2(N)$ atomes seulement sont alors nécessaires. Dans les expériences de Christine Guerlin [33], les nombres de photons de 0 à 7 étaient mesurés, soit $N = 8$ nombres de photons différents. Pour une seule mesure, 110 atomes étaient nécessaires. Avec la méthode optimale, 3 atomes seulement sont nécessaires en théorie, *i.e.* sans prendre en compte les imperfections de l'expérience. Le temps de mesure pourrait donc être notablement réduit, sans se priver cette fois d'une estimation du nombre de photon à chaque réalisation, comme c'est le cas avec la méthode itérative dont nous nous sommes servis dans nos expériences.

Annexe A

Synchronisation des cartes compteur

Nous cherchons ici à évaluer le délai possible entre les deux systèmes de comptage des atomes, ADwin et NI. Dans l'expérience que nous réalisons pour ce faire, nous nous autorisons à envoyer des impulsions porte différentes aux deux détecteurs. Une sortie digitale supplémentaire de l'ancien système de contrôle est alors utilisée en parallèle de celle généralement utilisée pour générer ces impulsions. Si l'ADwin continue à recevoir les impulsions porte «usuelles», l'ancien système les reçoit effectivement décalées d'un temps τ. Nous enregistrons alors un signal de franges de Ramsey, pour une cavité vide, correspondant à un maximum de probabilité de trouver un atome dans $|g\rangle$, et comparons les nombres d'atomes détectés par les deux systèmes pour $\tau = 0$ et $\tau = -100\,\text{ns}$ (l'ancien système reçoit alors les impulsions porte avant l'ADwin). Les résultats, correspondants à $p = 640000$ préparations atomiques, ou encore $\langle N \rangle \approx 125000$ atomes détectés, sont donnés dans le tableau A.1.

Nous avons ici choisi la phase de l'interféromètre de sorte qu'il y ait plus d'atomes dans $|g\rangle$ que dans $|e\rangle$. Si nous retardons les fenêtres de détection ($\tau > 0$), $|e\rangle$ étant détecté avant $|g\rangle$, nous augmenterons alors le nombre effectif d'atomes $|e\rangle$ détectés au détriment du nombre de $|g\rangle$. La figure A.1 permet de s'en convaincre : nous y traçons les nombres d'atomes $|e\rangle$ et $|g\rangle$ comptés en fonction du décalage τ entre les impulsions porte usuelles et les impulsions porte effectivement reçues. Autour de $\tau = 0$, le nombre d'atomes $|g\rangle$ diminue bien au détriment de $|e\rangle$ pour les valeurs de τ positives.

Il apparaît donc que pour $\tau = 0$, les fenêtres de détection du compteur National Instruments sont en retard vis à vis des fenêtres de détection du compteur ADwin, puisque c'est ce dernier qui enregistre la plus grande fraction d'atomes $|g\rangle$. Si nous avançons les premières de 100 ns, la situation s'inverse. La figure A.1 est aussi instructive : nous pouvons voir que la probabilité π_g de détecter un atome dans $|g\rangle$ mesurée par l'ADwin correspond à une valeur intermédiaire entre celles mesurées par la carte NI pour $\tau = 0$ et $\tau = -100\,\text{ns}$.

Nous déduisons donc de cette expérience que si nous utilisons les mêmes impulsions porte pour l'ancienne et la nouvelle carte compteur, les fenêtres de détection effectives seront en avance d'environ 50 ns pour l'ADwin. Or une telle différence est plus faible que l'avance ou le retard minimum, de 100 ns, que nous pouvons appliquer en pratique sur une sortie digitale. Nous ne pourrons donc pas la compenser.

	x	NI	ADwin	ADwin − NI	$\delta x/x$
$\tau = 0$	$n_{\|e\rangle}$	16200	15576	-625	$-0,040$
	$n_{\|g\rangle}$	106930	107096	$+166$	$0,002$
	$N = n_{\|e\rangle} + n_{\|g\rangle}$	123130	122672	-459	$0,004$
	$T = n_{\|g\rangle}/N$	$86,8\%$	$87,3\%$	$0,5\%$	$0,005$
$\tau = -100\,\mathrm{ns}$	$n_{\|e\rangle}$	15122	15552	$+430$	$0,028$
	$n_{\|g\rangle}$	110793	109807	-986	$0,009$
	$N = n_{\|e\rangle} + n_{\|g\rangle}$	125915	125359	-556	$0,004$
	$T = n_{\|g\rangle}/N$	$88,0\%$	$87,6\%$	$0,4\%$	$-0,005$

TABLE A.1 – Tableau comparatif des comptages ADwin et NI dans une expérience de franges de Ramsey, correspondant à 640000 préparation atomiques.

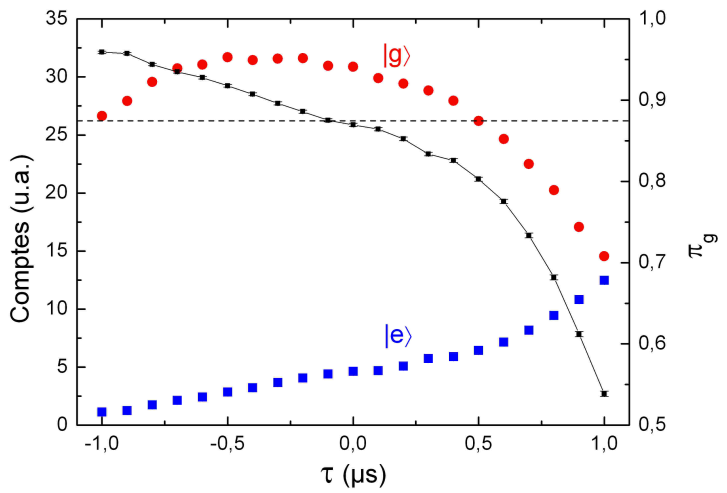
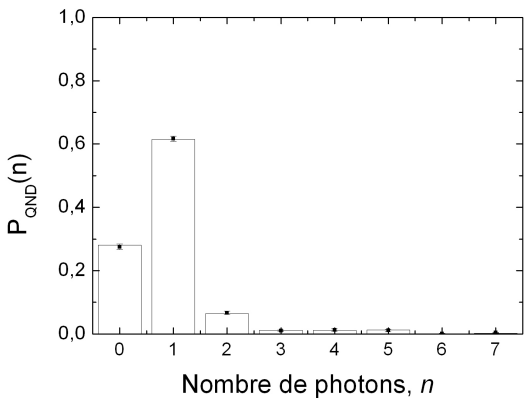


FIGURE A.1 – Synchronisation des cartes compteur : *Échelle de gauche :* Nombre d'atomes détectés dans l'état $|g\rangle$ (rouge) ou $|e\rangle$ (bleu) en fonction du décalage temporel τ entre les impulsions portes usuelles et les impulsions porte utilisées. *Échelle de droite :* Probabilité π_g de détecter un atome dans $|g\rangle$ en fonction de τ. La ligne pointillée correspond à cette probabilité mesurée par la carte compteur ADwin, qui utilise les impulsions porte sans décalage. L'intervalle de temps entre deux points est de 100 ns.

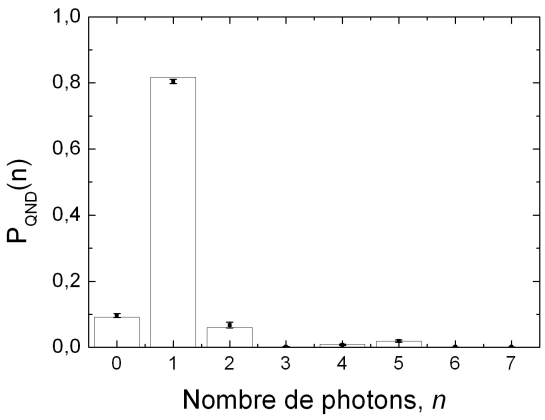
Annexe B

Barres d'erreur de la mesure QND de contrôle

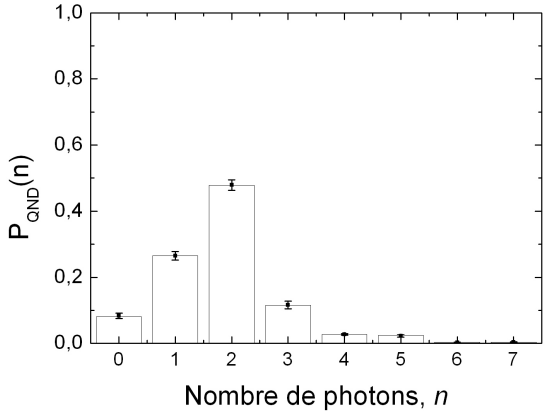
Nous traçons ici pour les quatre états cibles les distributions des nombres de photons obtenues expérimentalement (histogramme) et par les simulations numériques estimant les barres d'erreur de la reconstruction (carrés). La méthode utilisée pour les obtenir est donnée au paragraphe IV.2.4



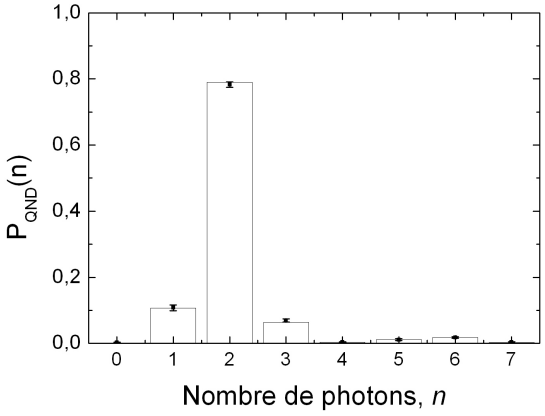
Distribution stationnaire des nombres de photons pour l'état cible $|1\rangle$



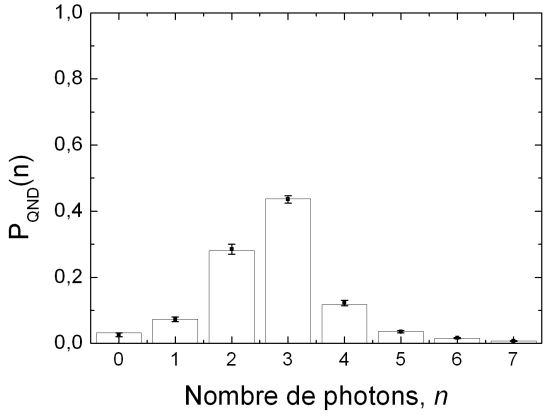
Distribution des nombres de photons après préparation de l'état cible $|1\rangle$



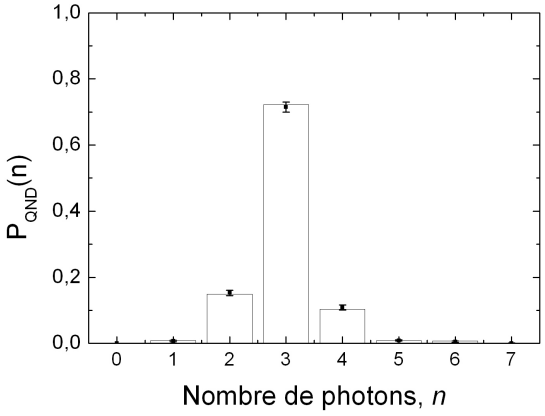
Distribution stationnaire des nombres de photons pour l'état cible $|2\rangle$



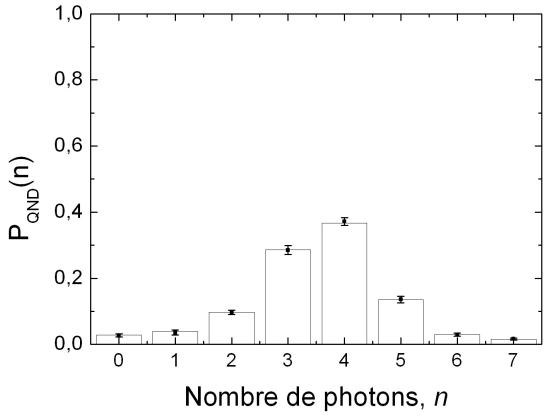
Distribution des nombres de photons après préparation de l'état cible $|2\rangle$



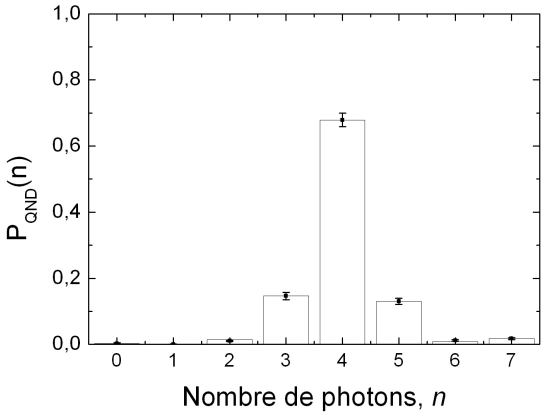
Distribution stationnaire des nombres de photons pour l'état cible $|3\rangle$



Distribution des nombres de photons après préparation de l'état cible $|3\rangle$



Distribution stationnaire des nombres de photons pour l'état cible $|4\rangle$



Distribution des nombres de photons après préparation de l'état cible $|4\rangle$

Bibliographie

[1] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, et H. Ezawa. "Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern". *American Journal of Physics*, **57**, n° 2, 117 (1989). Journal article, URL `http://dx.doi.org/doi/10.1119/1.16104`.

[2] A. Einstein, B. Podolsky, et N. Rosen. "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ?" *Phys. Rev.*, **47**, n° 10, 777 (May 1935).

[3] A. Aspect, P. Grangier, et G. Roger. "Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem". *Phys. Rev. Lett.*, **47**, n° 7, 460 (Aug 1981).

[4] A. Aspect, P. Grangier, et G. Roger. "Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment : A new violation of bell's inequalities". *Phys. Rev. Lett.*, **49**, n° 2, 91 (Jul 1982).

[5] A. Aspect, J. Dalibard, et G. Roger. "Experimental test of bell's inequalities using time- varying analyzers". *Phys. Rev. Lett.*, **49**, n° 25, 1804 (Dec 1982).

[6] J. S. Bell. "On the Einstein Podolsky Rosen paradox". *Physics*, **1**, 195 (1964).

[7] D. P. DiVincenzo. "Quantum computation". *Science*, **270**, n° 5234, 255 (1995). URL `http://www.sciencemag.org/content/270/5234/255.abstract`.

[8] A. Ekert et R. Jozsa. "Quantum computation and shor's factoring algorithm". *Rev. Mod. Phys.*, **68**, n° 3, 733 (Jul 1996).

[9] P. W. Shor. "Algorithms for quantum computation : discrete logarithms and factoring". Dans *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, p. 124–134. IEEE Computer Society, Washington, DC, USA (1994). URL `http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1398518.1399018`.

[10] D. P. DiVincenzo. "Two-bit gates are universal for quantum computation". *Phys. Rev. A*, **51**, n° 2, 1015 (Feb 1995).

[11] J. F. Poyatos, J. I. Cirac, et P. Zoller. "Complete characterization of a quantum process : The two-bit quantum gate". *Phys. Rev. Lett.*, **78**, n° 2, 390 (Jan 1997).

[12] I. L. Chuang et M. A. Nielsen. "Prescription for experimental determination of the dynamics of a quantum black box". *Journal of Modern Optics*, **44**, n° 11-12, 2455 (1997). URL `http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500349708231894`.

[13] M. A. Nielsen, E. Knill, et R. Laflamme. "Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance". *Nature*, **396**, n° 6706, 52 (novembre 1998). URL `http://dx.doi.org/10.1038/23891`.

[14] M. Riebe, K. Kim, P. Schindler, T. Monz, P. O. Schmidt, T. K. Körber, W. Hänsel, H. Häffner, C. F. Roos, et R. Blatt. "Process tomography of ion trap quantum gates". *Phys. Rev. Lett.*, **97**, n° 22, 220407 (Dec 2006).

[15] Y.-F. Huang, X.-F. Ren, Y.-S. Zhang, L.-M. Duan, et G.-C. Guo. "Experimental teleportation of a quantum controlled-not gate". *Phys. Rev. Lett.*, **93**, n° 24, 240501 (Dec 2004).

[16] S. H. Myrskog, J. K. Fox, M. W. Mitchell, et A. M. Steinberg. "Quantum process tomography on vibrational states of atoms in an optical lattice". *Phys. Rev. A*, **72**, n° 1, 013615 (Jul 2005).

[17] M. Neeley, M. Ansmann, R. C. Bialczak, M. Hofheinz, N. Katz, E. Lucero, A. O/'Connell, H. Wang, A. N. Cleland, et J. M. Martinis. "Process tomography of quantum memory in a josephson-phase qubit coupled to a two-level state". *Nat Phys*, **4**, n° 7, 523 (juillet 2008). URL `http://dx.doi.org/10.1038/nphys972`.

[18] Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond, et S. Haroche. "Observation of self-induced rabi oscillations in two-level atoms excited inside a resonant cavity : The ringing regime of superradiance". *Phys. Rev. Lett.*, **51**, n° 13, 1175 (Sep 1983).

[19] R. J. Brecha, L. A. Orozco, M. G. Raizen, M. Xiao, et H. J. Kimble. "Observation of oscillatory energy exchange in a coupled-atom—cavity system". *J. Opt. Soc. Am. B*, **12**, n° 12, 2329 (Dec 1995). URL `http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-12-12-2329`.

[20] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. "Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics". *Nature*, **431**, n° 7005, 162 (septembre 2004). URL `http://dx.doi.org/10.1038/nature02851`.

[21] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger, et H. Walther. "Preparing pure photon number states of the radiation field". *Nature*, **403**, n° 6771, 743 (février 2000). URL `http://dx.doi.org/10.1038/35001526`.

[22] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, et S. Haroche. "Quantum rabi oscillation : A direct test of field quantization in a cavity". *Phys. Rev. Lett.*, **76**, n° 11, 1800 (Mar 1996).

[23] M. Hofheinz, H. Wang, M. Ansmann, R. C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, J. Wenner, J. M. Martinis, et A. N. Cleland. "Synthesizing arbitrary quantum states in a superconducting resonator". *Nature*, **459**, n° 7246, 546 (mai 2009). URL `http://dx.doi.org/10.1038/nature08005`.

[24] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press (1955).

[25] J. A. Wheeler et W. H. Zurek. *Theory of measurement.* Princeton University Press (1983).

[26] V. B. Braginskii et Y. I. Vorontsov. "Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique". *Soviet Physics Uspekhi*, **17**, n° 5, 644 (1975). URL `http://stacks.iop.org/0038-5670/17/i=5/a=R02`.

[27] V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov, et K. S. Thorne. "Quantum nondemolition measurements". *Science*, **209**, n° 4456, 547 (1980). URL `http://www.sciencemag.org/content/209/4456/547.abstract`.

[28] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, et M. Zimmermann. "On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. i. issues of principle". *Rev. Mod. Phys.*, **52**, n° 2, 341 (Apr 1980).

[29] K. S. Thorne, R. W. P. Drever, C. M. Caves, M. Zimmermann, et V. D. Sandberg. "Quantum nondemolition measurements of harmonic oscillators". *Phys. Rev. Lett.*, **40**, n° 11, 667 (Mar 1978).

[30] J. M. Raimond et S. Haroche. *Exploring the quantum.* Oxford Graduate Texts (2006).

[31] A. D. Cronin, J. Schmiedmayer, et D. E. Pritchard. "Optics and interferometry with atoms and molecules". *Rev. Mod. Phys.*, **81**, n° 3, 1051 (Jul 2009).

[32] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, et S. Haroche. "Seeing a single photon without destroying it". *Nature*, **400**, n° 6741, 239 (juillet 1999). URL `http://dx.doi.org/10.1038/22275`.

[33] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.-M. Raimond, et S. Harochev. "Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting". *Nature*, **448**, n° 23, 889 (August 2007).

[34] S. Deléglise, I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J.-M. Raimond, et S. Haroche. "Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence". *Nature*, **455**, n° 7212, 510 (septembre 2008). URL `http://dx.doi.org/10.1038/nature07288`.

[35] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. B. Hoff, M. Brune, J.-M. Raimond, et S. Haroche. "Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity". *Nature*, **446**, n° 7133, 297 (Mars 2007).

[36] M. Brune, J. Bernu, C. Guerlin, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, I. Dotsenko, J. M. Raimond, et S. Haroche. "Process tomography of field damping and measurement of fock state lifetimes by quantum nondemolition photon counting in a cavity". *Phys. Rev. Lett.*, **101**, n° 24, 240402 (Dec 2008).

[37] H. Wang, M. Hofheinz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, J. Wenner, A. N. Cleland, et J. M. Martinis. "Measurement of the decay of fock states in a superconducting quantum circuit". *Phys. Rev. Lett.*, **101**, n° 24, 240401 (Dec 2008).

[38] M. A. Nielsen et I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge University Press (2000).

[39] A. M. Steane. "Error correcting codes in quantum theory". *Phys. Rev. Lett.*, **77**, n° 5, 793 (Jul 1996).

[40] D. M. Greenberger, M. A. Horne, et A. Zeilinger. "Going Beyond Bell's Theorem" (décembre 2007). 0712.0921, URL http://arxiv.org/abs/0712.0921.

[41] D. G. Cory, M. D. Price, W. Maas, E. Knill, R. Laflamme, W. H. Zurek, T. F. Havel, et S. S. Somaroo. "Experimental quantum error correction". *Phys. Rev. Lett.*, **81**, n° 10, 2152 (Sep 1998).

[42] P. Schindler, J. T. Barreiro, T. Monz, V. Nebendahl, D. Nigg, M. Chwalla, M. Hennrich, et R. Blatt. "Experimental repetitive quantum error correction". *Science*, **332**, n° 6033, 1059 (2011). URL http://www.sciencemag.org/content/332/6033/1059.abstract.

[43] C.-Y. Lu, W.-B. Gao, J. Zhang, X.-Q. Zhou, T. Yang, et J.-W. Pan. "Experimental quantum coding against qubit loss error". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **105**, n° 32, 11050 (2008). URL http://www.pnas.org/content/105/32/11050.abstract.

[44] L. DiCarlo, M. D. Reed, L. Sun, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. Frunzio, S. M. Girvin, M. H. Devoret, et R. J. Schoelkopf. "Preparation and measurement of three-qubit entanglement in a superconducting circuit". *Nature*, **467**, n° 7315, 574 (septembre 2010). URL http://dx.doi.org/10.1038/nature09416.

[45] M. Neeley, R. C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Mariantoni, A. D. O/'Connell, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, Y. Yin, T. Yamamoto, A. N. Cleland, et J. M. Martinis. "Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits". *Nature*, **467**, n° 7315, 570 (septembre 2010). URL http://dx.doi.org/10.1038/nature09418.

[46] E. Knill, R. Laflamme, R. Martinez, et C. Negrevergne. "Benchmarking quantum computers : The five-qubit error correcting code". *Phys. Rev. Lett.*, **86**, n° 25, 5811 (Jun 2001).

[47] M. Lassen, M. Sabuncu, A. Huck, J. Niset, G. Leuchs, N. J. Cerf, et U. L. Andersen. "Quantum optical coherence can survive photon losses using a continuous-variable quantum erasure-correcting code". *Nat Photon*, **4**, n° 10, 700 (octobre 2010). URL http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2010.168.

[48] D. A. Lidar et K. B. Whaley. "Decoherence-free subspaces and subsystems". Dans F. Benatti et R. Floreanini (rédacteurs), *Irreversible Quantum Dynamics*, tome 622 de *Springer Lecture Notes in Physics*, p. 83–120 (2003). ArXiv :quant-ph/0301032, URL http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/0301032.

[49] G. M. Palma, K.-A. Suominen, et A. K. Ekert. "Quantum computers and dissipation". *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **452**, n° 1946, 567 (1996). URL http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/452/1946/567.abstract.

[50] L.-M. Duan et G.-C. Guo. "Preserving coherence in quantum computation by pairing quantum bits". *Phys. Rev. Lett.*, **79**, n° 10, 1953 (Sep 1997).

[51] E. Knill, R. Laflamme, et L. Viola. "Theory of quantum error correction for general noise". *Phys. Rev. Lett.*, **84**, n° 11, 2525 (Mar 2000).

[52] P. G. Kwiat, A. J. Berglund, J. B. Altepeter, et A. G. White. "Experimental verification of decoherence-free subspaces". *Science*, **290**, n° 5491, 498 (2000). URL http://www.sciencemag.org/content/290/5491/498.abstract.

[53] D. Kielpinski, V. Meyer, M. A. Rowe, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, et D. J. Wineland. "A decoherence-free quantum memory using trapped ions". *Science*, **291**, n° 5506, 1013 (2001). URL http://www.sciencemag.org/content/291/5506/1013.abstract.

[54] E. M. Fortunato, L. Viola, J. Hodges, G. Teklemariam, et D. G. Cory. "Implementation of universal control on a decoherence-free qubit". *New Journal of Physics*, **4**, n° 1, 5 (2002). URL http://stacks.iop.org/1367-2630/4/i=1/a=305.

[55] L. Viola, E. M. Fortunato, M. A. Pravia, E. Knill, R. Laflamme, et D. G. Cory. "Experimental realization of noiseless subsystems for quantum information processing". *Science*, **293**, n° 5537, 2059 (2001). URL http://www.sciencemag.org/content/293/5537/2059.abstract.

[56] R. van Handel, J. K. Stockton, et H. Mabuchi. "Modelling and feedback control design for quantum state preparation". *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, **7**, n° 10, S179 (2005). URL http://stacks.iop.org/1464-4266/7/i=10/a=001.

[57] A. C. Doherty, S. Habib, K. Jacobs, H. Mabuchi, et S. M. Tan. "Quantum feedback control and classical control theory". *Phys. Rev. A*, **62**, n° 1, 012105 (Jun 2000).

[58] Y. Yamamoto, N. Imoto, et S. Machida. "Amplitude squeezing in a semiconductor laser using quantum nondemolition measurement and negative feedback". *Phys. Rev. A*, **33**, n° 5, 3243 (May 1986).

[59] H. M. Wiseman et G. J. Milburn. "Squeezing via feedback". *Phys. Rev. A*, **49**, n° 2, 1350 (Feb 1994).

[60] H. M. Wiseman et G. J. Milburn. "Quantum theory of optical feedback via homodyne detection". *Phys. Rev. Lett.*, **70**, n° 5, 548 (Feb 1993).

[61] H. M. Wiseman. "Quantum theory of continuous feedback". *Phys. Rev. A*, **49**, n° 3, 2133 (Mar 1994).

[62] H. M. Wiseman et A. C. Doherty. "Optimal unravellings for feedback control in linear quantum systems". *Phys. Rev. Lett.*, **94**, n° 7, 070405 (Feb 2005).

[63] R. J. Nelson, Y. Weinstein, D. Cory, et S. Lloyd. "Experimental demonstration of fully coherent quantum feedback". *Phys. Rev. Lett.*, **85**, n° 14, 3045 (Oct 2000).

[64] H. Rabitz, R. de Vivie-Riedle, M. Motzkus, et K. Kompa. "Whither the future of controlling quantum phenomena ?" *Science*, **288**, n° 5467, 824 (2000). URL `http://www.sciencemag.org/content/288/5467/824.abstract`.

[65] W. P. Smith, J. E. Reiner, L. A. Orozco, S. Kuhr, et H. M. Wiseman. "Capture and release of a conditional state of a cavity qed system by quantum feedback". *Phys. Rev. Lett.*, **89**, n° 13, 133601 (Sep 2002).

[66] R. L. Cook, P. J. Martin, et J. M. Geremia. "Optical coherent state discrimination using a closed-loop quantum measurement". *Nature*, **446**, n° 7137, 774 (avril 2007). URL `http://dx.doi.org/10.1038/nature05655`.

[67] G. G. Gillett, R. B. Dalton, B. P. Lanyon, M. P. Almeida, M. Barbieri, G. J. Pryde, J. L. O'Brien, K. J. Resch, S. D. Bartlett, et A. G. White. "Experimental feedback control of quantum systems using weak measurements". *Phys. Rev. Lett.*, **104**, n° 8, 080503 (Feb 2010).

[68] P. Bushev, D. Rotter, A. Wilson, F. m. c. Dubin, C. Becher, J. Eschner, R. Blatt, V. Steixner, P. Rabl, et P. Zoller. "Feedback cooling of a single trapped ion". *Phys. Rev. Lett.*, **96**, n° 4, 043003 (Feb 2006).

[69] A. Kubanek, M. Koch, C. Sames, A. Ourjoumtsev, P. W. H. Pinkse, K. Murr, et G. Rempe. "Photon-by-photon feedback control of a single-atom trajectory". *Nature*, **462**, n° 7275, 898 (décembre 2009). URL `http://dx.doi.org/10.1038/nature08563`.

[70] J. Geremia, J. K. Stockton, et H. Mabuchi. "Real-time quantum feedback control of atomic spin-squeezing". *Science*, **304**, n° 5668, 270 (2004). URL `http://www.sciencemag.org/content/304/5668/270.abstract`.

[71] I. Dotsenko, M. Mirrahimi, M. Brune, S. Haroche, J.-M. Raimond, et P. Rouchon. "Quantum feedback by discrete quantum nondemolition measurements : Towards on-demand generation of photon-number states". *Phys. Rev. A*, **80**, n° 1, 013805 (Jul 2009).

[72] C. Sayrin, I. Dotsenko, X. Zhou, B. Peaudecerf, T. Rybarczyk, S. Gleyzes, P. Rouchon, M. Mirrahimi, H. Amini, M. Brune, J.-M. Raimond, et S. Haroche. "Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states". *Nature*, **477**, n° 7362, 73 (septembre 2011). URL `http://dx.doi.org/10.1038/nature10376`.

[73] J. Geremia. "Deterministic and nondestructively verifiable preparation of photon number states". *Phys. Rev. Lett.*, **97**, n° 7, 073601 (Aug 2006).

[74] S. Deléglise. *Reconstruction complète d'états non-classiques du champ en électrodynamique quantique en cavité.* Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2009).

[75] C. Guerlin. *Mesure quantique non destructive répétée de la lumière : états de Fock et trajectoires quantiques.* Thèse de doctorat, Université PARIS 6 (2007).

[76] J. Bernu. *Mesures QND en Electrodynamique Quantique en Cavité : Production et Décohérence d'Etats de Fock - Effet Zénon.* Thèse de doctorat, Université PARIS 6 (Septembre 2008).

[77] S. Gleyzes. *Vers la préparation de cohérences quantiques mésoscopiques : réalisation d'un montage à deux cavités supraconductrices.* Thèse de doctorat, Université Paris VI (2006).

[78] D. Meschede, H. Walther, et G. Müller. "One-atom maser". *Phys. Rev. Lett.*, **54**, n° 6, 551 (Feb 1985).

[79] S. Brattke, B. T. H. Varcoe, et H. Walther. "Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics". *Phys. Rev. Lett.*, **86**, n° 16, 3534 (Apr 2001).

[80] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J.-M. Raimond, et S. Haroche. "An ultrahigh finesse Fabry-Perot superconducting resonator as photon box for cavity-QED experiments". *APL*, **90**, 164101 (2007).

[81] P. Bosland, A. Aspart, E. Jacques, et M. Ribeaudeau. "Preparation and rf tests of l-band superconducting niobium-coated copper cavities". Dans *1998 Applied Superconductivity Conference*, tome 9, p. 896–899. Ieee-Inst Electrical Electronics Engineers Inc, Palm Desert, California (1998). 13 NEW YORK 2 Part 1 225LY.

[82] J. Jackson. *Classical Electrodynamics.* Wiley, New York (1975).

[83] J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Kuhr, I. Dotsenko, M. Brune, J. M. Raimond, et S. Haroche. "Freezing coherent field growth in a cavity by the quantum zeno effect". *Phys. Rev. Lett.*, **101**, n° 18, 180402 (Oct 2008).

[84] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg. *An Introduction to Quantum Electrodynamics.* Wiley (1992).

[85] R. J. Glauber. "Coherent and incoherent states of the radiation field". *Phys. Rev.*, **131**, n° 6, 2766 (Sep 1963).

[86] G. Lindblad. "On the generators of quantum dynamical semigroups". *Communications in Mathematical Physics*, **48**, 119 (1976). 10.1007/BF01608499, URL `http://dx.doi.org/10.1007/BF01608499`.

[87] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë. *Mécanique quantique.* Hermann (1997).

[88] J. I. Kim, K. M. Fonseca Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes, et A. F. R. de Toledo Piza. "Classical behavior with small quantum numbers : The physics of ramsey interferometry of rydberg atoms". *Phys. Rev. Lett.*, **82**, n° 24, 4737 (Jun 1999).

[89] T. F. Gallagher. *Rydberg Atoms.* Cambridge Monographs on Atomic, Molecular and Chemical Physics. Cambridge University Press (1994).

[90] R. G. Hulet et D. Kleppner. “Rydberg atoms in "circular" states”. *Phys. Rev. Lett.*, **51**, n° 16, 1430 (Oct 1983).

[91] J. Hare. *Étude théorique et expérimentale des atomes de Rydberg circualires : vers une mesure directe de la constante de Rydberg en unités de fréquence.* Thèse de doctorat, Université Paris 6 (1991).

[92] M. Gross et J. Liang. “Is a circular rydberg atom stable in a vanishing electric field ?” *Phys. Rev. Lett.*, **57**, n° 25, 3160 (Dec 1986).

[93] T. Meunier. *Oscillations de Rabi induites par renversement du temps : un test de la cohérence d'une superposition quantique mésoscopique.* Thèse de doctorat, Univeristé Paris 6 (2004).

[94] M. Pinard, C. G. Aminoff, et F. Laloë. “Velocity-selective optical pumping and doppler-free spectroscopy”. *Phys. Rev. A*, **19**, n° 6, 2366 (Jun 1979).

[95] A. Auffèves-Garnier. *Oscillation de Rabi à la frontière classique-quantique. Génération de Chats de Schrödinger.* Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2004).

[96] E. Jaynes et F. Cummings. “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser”. *Proceedings of the IEEE*, **51**, n° 1, 89 (1963). URL `http://dx.doi.org/10.1109/PROC.1963.1664`.

[97] M. Hofheinz, E. M. Weig, M. Ansmann, R. C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, H. Wang, J. M. Martinis, et A. N. Cleland. “Generation of fock states in a superconducting quantum circuit”. *Nature*, **454**, n° 7202, 310 (juillet 2008). URL `http://dx.doi.org/10.1038/nature07136`.

[98] H. Breuer et F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems.* Oxford University Press (2002).

[99] M. Bayes et M. Price. “An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. by the late rev. mr. bayes, f. r. s. communicated by mr. price, in a letter to john canton, a. m. f. r. s.” *Philosophical Transactions*, **53**, 370 (1763). URL `http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/53/370.short`.

[100] A. I. Lvovsky. “Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography”. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, **6**, n° 6, S556 (2004). URL `http://stacks.iop.org/1464-4266/6/S556`.

[101] C. Fuchs et J. van de Graaf. “Cryptographic distinguishability measures for quantum-mechanicalstates”. *IEEE Transactions on Information Theory*, **45**, n° 4, 1216 (1999).

[102] R. Jozsa. “Fidelity for mixed quantum states”. *Journal of Modern Optics*, **41**, n° 12, 2315 (1994). URL `http://www.informaworld.com/10.1080/09500349414552171`.

[103] M. Mirrahimi, I. Dotsenko, et P. Rouchon. “Feedback generation of quantum Fock states by discrete QND measures”. Dans *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 1451 – 1456. Shanghai, Chine (janvier 2010). URL `http://hal-ensmp.archives-ouvertes.fr/hal-00485694/en/`.

[104] H. Amini, M. Mirrahimi, et P. Rouchon. "Stabilization of a delayed quantum system : the photon box case-study". *ArXiv e-prints* (juillet 2010). 1007.3584.

[105] H. Amini, P. Rouchon, et M. Mirrahimi. "Design of Strict Control-Lyapunov Functions for Quantum Systems with QND Measurements". *ArXiv e-prints* (mars 2011). 1103.1365.

[106] M. B. Plenio et P. L. Knight. "The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics". *Rev. Mod. Phys.*, **70**, n° 1, 101 (Jan 1998).

[107] J. Dalibard, Y. Castin, et K. Mølmer. "Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics". *Phys. Rev. Lett.*, **68**, n° 5, 580 (Feb 1992).

[108] S. Osnaghi, P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J. M. Raimond, et S. Haroche. "Coherent control of an atomic collision in a cavity". *Phys. Rev. Lett.*, **87**, n° 3, 037902 (Jun 2001).

[109] B. Misra et E. C. G. Sudarshan. "The zeno's paradox in quantum theory". *Journal of Mathematical Physics*, **18**, n° 4, 756 (1977). URL http://link.aip.org/link/?JMP/18/756/1.

[110] D. Vitali, P. Tombesi, et G. J. Milburn. "Controlling the decoherence of a "meter" via stroboscopic feedback". *Phys. Rev. Lett.*, **79**, n° 13, 2442 (Sep 1997).

[111] D. Vitali, S. Zippilli, P. Tombesi, et J.-M. Raimond. "Decoherence control with fully quantum feedback schemes". *Journal of Modern Optics*, **51**, n° 6-7, 799 (2004). URL http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500340408233597.

[112] S. Haroche, M. Brune, et J. Raimond. "Measuring photon numbers in a cavity by atomic interferometry : optimizing the convergence procedure". *J. Phys. II France*, **2**, n° 4, 659 (1992). URL http://dx.doi.org/10.1051/jp2:1992157.

Préparation et stabilisation d'un champ non classique en cavité par rétroaction quantique

Résumé L'utilisation de boucles de rétroaction est au cœur de nombreux systèmes de contrôle classiques. Un contrôleur compare le signal mesuré par une sonde à la valeur de consigne. Il dirige alors un actionneur pour stabiliser le signal autour de la valeur ciblée. Étendre ces concepts au monde quantique se heurte à une difficulté fondamentale : le processus de mesure modifie inévitablement par une action en retour le système à contrôler. Dans ce mémoire, nous présentons la première réalisation d'une boucle de rétroaction quantique utilisée en continu. Le système contrôlé est un mode du champ électromagnétique piégé dans une cavité Fabry-Pérot micro-onde de très haute finesse. Des atomes de Rydberg circulaires réalisent par une succession de mesures dites faibles une mesure quantique non-destructive du nombre de photons dans le mode. Étant donnés les résultats de ces mesures, et connaissant toutes les imperfections expérimentales du système, un ordinateur de contrôle estime en temps réel la matrice densité du champ piégé dont il déduit l'amplitude de champs micro-ondes classiques à injecter permettant de stabiliser l'état du champ autour d'un état cible. Dans ce mémoire, nous montrons comment nous avons été capables de préparer sur demande et de stabiliser les états de Fock du champ contenant de 1 à 4 photons.

Mots-clés CQED, rétroaction quantique, atomes de Rydberg, états de Fock, décohérence, mesure QND.

Preparation and Stabilisation of a Non-Classical Field in Cavity by Quantum Feedback

Abstract Feedback loops are central to most classical control procedures. A controller compares the signal measured by a sensor with the target value or set-point. It then adjusts an actuator to stabilize the signal around the target value. Generalizing this scheme to the quantum world must overcome a fundamental difficulty : the sensor measurement cause a random back-action on the system. In this manuscript, we demonstrate the first continuously operated quantum feedback loop. The system to be controlled is a mode of the electromagnetic field trapped in a very high finesse microwave Fabry-Perot cavity. Circular Rydberg atoms achieve a quantum non-demolition measurement of the photon number in the mode by the succession of weak measurements. Knowing the outcome of these measurements, and knowing all the experimental imperfections of the system, a classical computer estimates in real-time the density matrix of the field. It then calculates the amplitude of small classical microwave fields injected into the cavity in order to stabilize the field around a target state. In this thesis, we have been able to prepare on demand and stabilize Fock states containing from 1 to 4 photons.

Keywords CQED, quantum feedback, Rydberg atoms, Fock states, decoherence, QND measurement.