



HAL
open science

Chemins et animaux : applications de la théorie des empilements de pièces

Axel Bacher

► **To cite this version:**

Axel Bacher. Chemins et animaux : applications de la théorie des empilements de pièces. Combinatoire [math.CO]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2011. Français. NNT: . tel-00654805

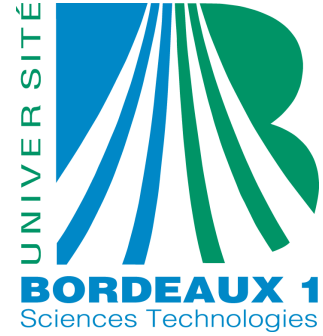
HAL Id: tel-00654805

<https://theses.hal.science/tel-00654805>

Submitted on 23 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université Bordeaux 1
U.F.R. de Mathématiques et Informatique

THÈSE

pour l'obtention du grade de docteur, spécialité Informatique

Chemins et animaux : applications de la théorie des empilements de pièces

présentée par

Axel BACHER

le 28 octobre 2011

devant le jury composé de :

Mme Mireille BOUSQUET-MÉLOU	directrice de thèse
M. Philippe DI FRANCESCO	examineur
M. Dominique GOUYOU-BEAUCHAMPS	rapporteur
M. Gilles SCHAEFFER	rapporteur
M. Xavier VIENNOT	examineur

Remerciements

Je remercie sincèrement (bien que brièvement) tous ceux qui ont contribué d'une quelconque manière à ce que ces trois années soient pour moi une période aussi épanouissante qu'agréable, tant d'un point de vue scientifique qu'extrascientifique.

Je remercie tout particulièrement Mireille Bousquet-Mélou pour sa bienveillante direction, ainsi que mes rapporteurs et mon jury de thèse, l'équipe Combinatoire et Algorithmique du LaBRI, le groupe de travail ALÉA, et tous les autres avec qui j'ai pu avoir des échanges enrichissants.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien constant.

Résumé

Le but de cette thèse est d'établir des résultats énumératifs sur certaines classes de chemins et d'animaux. Ces résultats sont obtenus en appliquant la théorie des empilements de pièces développée par Viennot. Nous étudions les excursions discrètes (ou chemins de Dyck généralisés) de hauteur bornée ; nous obtenons des interprétations combinatoires et des extensions de résultats de Banderier, Flajolet et Bousquet-Mélou. Nous décrivons et énumérons plusieurs classes de chemins auto-évitant, dits chemins faiblement dirigés. Ces chemins sont plus nombreux que les chemins prudents qui forment la classe naturelle la plus grande jusqu'alors. Nous calculons le périmètre de site moyen des animaux dirigés, prouvant des conjectures de Conway et Le Borgne. Enfin, nous obtenons des résultats nouveaux sur l'énumération des animaux de Klarner et les animaux multi-dirigés de Bousquet-Mélou et Rechnitzer.

Mots clés : combinatoire énumérative, combinatoire analytique, séries génératrices, empilements de pièces

Abstract

The goal of this thesis is to establish enumerative results on several classes of paths and animals. These results are applications of the theory of heaps of pieces developed by Viennot. We study discrete excursions (or generalized Dyck paths) with bounded height ; we obtain combinatorial interpretations and extensions of results from Banderier, Flajolet and Bousquet-Mélou. We describe and enumerate several subclasses of self-avoiding walks (SAW), called weakly directed walks. These classes are larger than the class of prudent walks, which is the largest natural subclass of SAW enumerated so far. We compute the average site perimeter of directed animals, proving conjectures from Conway and Le Borgne. Finally, we obtain new results on the enumeration of Klarner animals and multi-directed animals defined by Bousquet-Mélou and Rechnitzer.

Keywords : enumerative combinatorics, analytic combinatorics, generating functions, heaps of pieces

Table des matières

Introduction	7
1 Empilements de pièces	17
1.1 Ensembles partiellement ordonnés	17
1.1.1 Définitions, relation de couverture	17
1.1.2 Segments initiaux et finaux	18
1.1.3 Extensions linéaires	19
1.2 Empilements et monoïdes partiellement commutatifs	19
1.2.1 Empilements de pièces	19
1.2.2 Monoïde des d'empilements	20
1.2.3 Monoïdes partiellement commutatifs	21
1.2.4 Séries génératrices	22
1.3 Théorèmes d'inversion	23
1.3.1 Inversion de Viennot	23
1.3.2 Empilements à motifs exclus et modèles ordonnés	24
1.3.3 Empilements stricts	28
1.4 Empilements marqués	29
1.4.1 Empilements marqués et factorisations d'empilements	29
1.4.2 Empilements stricts et presque stricts	31
1.4.3 Empilements marqués d'une pièce	32
1.5 Empilements de segments et de dimères	33
1.5.1 Empilements de segments	33
1.5.2 Adjacences droites et gauches	34
1.5.3 Empilements de dimères	36
2 Excursions discrètes	39
2.1 Chemins dans un graphe orienté	40
2.1.1 Matrice d'adjacence	40
2.1.2 Empilements de cycles	41
2.1.3 Permutations partielles	43
2.1.4 Graphes avec une symétrie	45
2.2 Chemins de Łukasiewicz	49
2.2.1 Chemins généraux et empilements de segments	49
2.2.2 Chemins stricts	51
2.2.3 Chemins de Dyck et empilements de dimères	53
2.3 Chemins prenant un nombre fini de pas	54
2.3.1 Diagrammes de permutations	54
2.3.2 Cas général	56
2.3.3 Ensembles de pas symétriques	62

3	Chemins faiblement dirigés	67
3.1	Définitions	68
3.1.1	Chemins faiblement dirigés	68
3.1.2	Décomposition en facteurs irréductibles	68
3.1.3	Modèle diagonal	70
3.2	Énumération	71
3.2.1	Ponts partiellement dirigés	71
3.2.2	Ponts faiblement dirigés	75
3.2.3	Chemins faiblement dirigés généraux	76
3.3	Applications	78
3.3.1	Asymptotique	78
3.3.2	Nature des séries	80
3.3.3	Génération aléatoire	84
3.4	Une nouvelle classe de chemins	86
3.4.1	Définition	86
3.4.2	Énumération	88
4	Animaux dirigés	91
4.1	Définitions	92
4.1.1	Réseaux carrés et triangulaires	92
4.1.2	Empilements de dominos	93
4.2	Énumération	95
4.2.1	Réseaux bornés	95
4.2.2	Réseaux non bornés	97
4.2.3	Asymptotique	98
4.3	Sites adjacents, boucles et périmètre de site	100
4.3.1	Définitions	100
4.3.2	Réseau carré	101
4.3.3	Réseau triangulaire	107
4.3.4	Asymptotique	109
4.4	Exemples	110
4.4.1	Animaux de source ponctuelle	110
4.4.2	Animaux de source compacte	111
4.4.3	Demi-animaux dans les réseaux rectangulaires	112
5	Animaux de Klarner	115
5.1	Définitions	115
5.1.1	Animaux et empilements de segments	115
5.1.2	Pyramides de Klarner	116
5.1.3	Empilements connexes et animaux de Klarner	117
5.2	Énumération	119
5.2.1	Empilements connexes et empilements généraux	119
5.2.2	Construction colonne par colonne	122
5.2.3	Résultats asymptotiques	127
5.3	Bijections avec les chemins de Dyck	129
5.3.1	Animaux multi-dirigés et chemins culminants irréductibles	129
5.3.2	Chemins de Dyck sans grand pic ou vallée profonde	131
	Références	134

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la combinatoire énumérative. Notre but sera d'appliquer la théorie des empilements de pièces de Viennot à plusieurs problèmes d'énumération de chemins et d'animaux. La théorie des empilements est développée dans le chapitre 1. Dans cette introduction, nous commençons par présenter succinctement le domaine de la combinatoire énumérative. Nous présentons ensuite les familles de chemins et d'animaux que nous étudierons. Enfin, nous résumons chapitre par chapitre les contributions de la thèse.

La combinatoire énumérative

Problèmes d'énumération

L'objet de la combinatoire est l'étude de structures discrètes, en général possédant une description simple. Étant donné un ensemble fini de telles structures, *énumérer* cet ensemble consiste à déterminer son cardinal. Des problèmes d'énumération interviennent naturellement dans de nombreux domaines de recherche ; on peut notamment citer l'analyse d'algorithmes, où ils apparaissent dans des calculs de complexité, et la physique statistique, où ils apparaissent dans la détermination des fonctions de partition.

Par exemple, un *chemin de Dyck* est un chemin constitué de pas montant ou descendant d'une unité qui commence et finit à hauteur 0 et reste à une hauteur positive. Comme montré figure 1, on compte 5 chemins de Dyck de longueur 6.

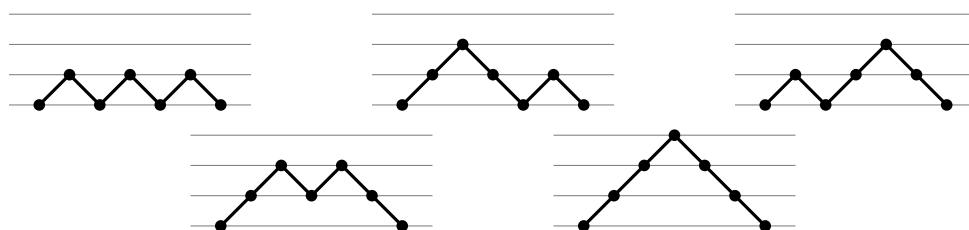


FIGURE 1 – Les cinq chemins de Dyck de longueur 6.

En pratique, on souhaite décrire une méthode pour calculer le nombre d'objets de taille n , pour tout entier n , sans avoir à les construire exhaustivement. Un cadre formel est celui de *classe combinatoire* : une classe combinatoire est un ensemble \mathcal{C} muni d'une fonction de taille $|\cdot|$ à valeur dans les entiers, tel que, pour tout entier n fixé, l'ensemble \mathcal{C}_n des objets de \mathcal{C} de taille n est fini. On note dans ce cas c_n le cardinal de l'ensemble \mathcal{C}_n .

Pour reprendre l'exemple ci-dessus, les nombres de chemins de Dyck de longueur $2n$, pour $n \geq 0$, sont les célèbres nombres de Catalan, donnés par

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (0.1)$$

Les nombres de Catalan sont sans doute la suite d'entiers la plus célèbre de la combinatoire énumérative. On peut renvoyer à [50], ou à l'entrée **A000108** de l'*Online Encyclopedia of Integer Sequences* [48] pour de très nombreux exemples où elle intervient.

Une autre question naturelle consiste à trouver un équivalent simple du nombre c_n quand n tend vers l'infini. C'est le domaine de la *combinatoire analytique* [27]. Dans notre exemple des nombres de Catalan, la formule de Stirling permet de trouver, à partir de (0.1),

$$c_n \sim \frac{4^n}{\pi n^{3/2}}. \quad (0.2)$$

Un cadre un peu plus général que celui ci-dessus est celui des *classes paramétrées*. Une classe paramétrée est une classe \mathcal{C} munie d'un paramètre p (un paramètre, aussi appelé statistique, est une fonction de \mathcal{C} dans \mathbb{N}). Par exemple, de nombreux paramètres naturels existent sur les chemins de Dyck, tels que la hauteur maximale d'un sommet, ou encore le nombre de pics (pas montants suivis d'un pas descendant).

Notons $c_{n,k}$ le nombre d'objets de la classe paramétrée \mathcal{C} tels que $|C| = n$ et $p(C) = k$. L'*énumération paramétrée* consiste à calculer ces nombres pour tous entiers n, k . On peut également s'intéresser au problème plus faible de trouver la valeur *moyenne*, notée p_n , du paramètre p sur les objets de taille n .

D'autres problèmes asymptotiques apparaissent dans le cas des classes paramétrées. La connaissance des nombres $c_{n,k}$ est équivalente à celle de la *distribution* du paramètre p parmi les objets de taille n . On peut s'intéresser à l'évolution de cette distribution quand n tend vers l'infini, et notamment à déterminer une *distribution limite*. Plus modestement, on peut déterminer un équivalent simple de la valeur moyenne p_n .

Séries génératrices

La méthode la plus simple pour déterminer les nombres c_n est de donner une formule close, à la manière de (0.1), permettant de les calculer. Les séries génératrices sont une autre présentation des nombres c_n . La *série génératrice* (dite *ordinaire*) de la classe combinatoire \mathcal{C} est la série formelle

$$C(t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n,$$

ou de manière équivalente,

$$C(t) = \sum_{C \in \mathcal{C}} t^{|C|}.$$

Les séries génératrices possèdent de nombreuses propriétés agréables : des informations sur la structure des objets de \mathcal{C} se traduisent souvent en équations donnant la série $C(t)$ (voir

ci-dessous). De ce fait, elles constituent un outil fondamental en combinatoire énumérative. Par exemple, la série génératrice des nombres de Catalan est

$$C(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}. \quad (0.3)$$

En effectuant un développement de Taylor, on retrouve l'expression (0.1) donnant le nombre c_n . Une expression telle que (0.3) donnant la série génératrice d'une classe fournit donc une méthode pour l'énumérer ; dans certains cas, on peut donner une telle expression alors qu'aucune formule close simple n'existe pour les coefficients c_n .

Les séries génératrices les plus simples sont les séries *rationnelles*, qui sont égales au quotient de deux polynômes. Les séries *algébriques* sont un peu plus complexes : on dira que la série $C(t)$ est algébrique s'il existe un polynôme $P(x, y)$ non nul tel que $P(t, C(t)) = 0$. Par exemple, la série $C(t)$ des nombres de Catalan vérifie l'équation

$$C(t) = 1 + tC(t)^2. \quad (0.4)$$

Trouver une équation de ce type est très utile car on peut s'en servir pour calculer algorithmiquement les coefficients c_n , y compris s'il n'existe pas d'expression telle que (0.3) donnant directement la série $C(t)$.

Une famille encore plus générale de séries est celle des séries *différentiellement finies*, ou *D-finies* [50, chapitre 6]. Une série est D-finie si elle est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynômiaux. Là encore, une telle équation sur la série $C(t)$ permet de retrouver les coefficients c_n . Il existe aussi des séries qui ne sont pas D-finies. Nous en rencontrerons plusieurs dans cette thèse.

Une fois connue la série $C(t)$, ou une équation qui la définit, on peut aussi chercher à en déduire l'asymptotique des coefficients c_n . Une technique utilisée est l'*analyse de singularité*, et est présentée en détail dans le livre [27]. Cette technique repose sur l'étude des valeurs de la série $C(t)$ au voisinage de son cercle de convergence.

Enfin, soit p un paramètre de la classe \mathcal{C} et soit $c_{n,k}$ le nombre d'objets C de \mathcal{C} tels que $|C| = n$ et $p(C) = k$. On définit la série *bivariée* $C_p(t, u)$ de la manière suivante :

$$C_p(t, u) = \sum_{n \geq 0} c_{n,k} t^n u^k = \sum_{C \in \mathcal{C}} t^{|C|} u^{p(C)}.$$

Comme ci-dessus, la connaissance de la série $C_p(t, u)$, ou d'une équation qui la définit, permet de calculer les coefficients $c_{n,k}$. De plus, soit p_n la valeur moyenne du paramètre p parmi les objets de taille n . Notons $P(t)$ la série définie par

$$P(t) = \sum_{n \geq 0} p_n c_n t^n = \sum_{C \in \mathcal{C}} p(C) t^{|C|}.$$

Le coefficient $p_n c_n$ est la somme des quantités $p(C)$ pour tous les objets C de taille n ; on l'appellera la valeur *totale* du paramètre sur les objets de taille n . On peut calculer la série $P(t)$ à partir de la série bivariée $C_p(t, u)$ de la manière suivante :

$$P(t) = \frac{\partial C_p}{\partial u}(t, 1).$$

Une fois connue la série $P(t)$, on peut calculer les coefficients $p_n c_n$; une simple division par c_n donne la valeur moyenne cherchée p_n .

Méthodes d'énumération

Nous exposons maintenant les principales méthodes pour répondre aux problèmes d'énumération. Dans cette thèse, nous nous intéressons principalement aux méthodes les plus combinatoires, c'est-à-dire qui utilisent de manière centrale la structure combinatoire des objets à énumérer.

La méthode la plus élémentaire est la méthode *bijjective*, qui consiste à décrire une bijection entre l'ensemble à énumérer et un ensemble dont le cardinal est déjà connu. Une bijection est d'autant plus intéressante qu'elle est simple à décrire et qu'elle préserve la structure des objets, par exemple si des paramètres naturels des objets sont envoyés sur d'autres paramètres naturels. Bien sûr, une telle approche n'est pas toujours possible.

Une autre méthode, souvent appelée *méthode récursive*, est de décrire une décomposition canonique des objets de la classe \mathcal{C} à énumérer en sous-objets plus petits. Ces sous-objets peuvent eux-mêmes appartenir à la classe \mathcal{C} ou à d'autres classes dont l'énumération est connue. Par exemple, on peut décomposer les chemins de Dyck de hauteur $2n$ au premier retour à la hauteur 0, ce qui donne deux chemins de Dyck dont la somme des longueurs fait $2n - 2$ (figure 2). On obtient ainsi la formule de récurrence, valable pour $n \geq 1$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k},$$

avec la condition initiale $c_0 = 1$. Cette formule est équivalente à l'équation (0.4) qui définit la série $C(t)$ et permet de calculer les nombres c_n .

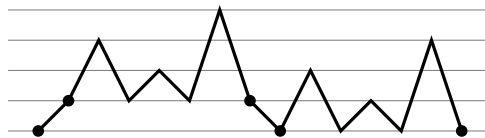


FIGURE 2 – En considérant le premier retour à la hauteur 0, on obtient une décomposition canonique des chemins de Dyck non vides. Cette décomposition comprend un pas montant, un pas descendant et deux chemins de Dyck plus petits. Cette décomposition se traduit en une formule de récurrence sur les nombres c_n ou en une équation donnant la série $C(t)$.

Chemins

Les chemins des objets combinatoires étudiés sous de très nombreuses formes. Les chemins de Dyck, mentionnés plus haut, en sont un exemple. Dans cette thèse, nous nous intéressons à deux grandes familles de chemins.

Excursions discrètes

La première famille de chemins que nous étudions est celle des *excursions discrètes*. Les excursions discrètes sont une généralisation des chemins de Dyck : ce sont des chemins qui commencent et terminent à hauteur 0 et restent à une hauteur positive. En revanche, contrairement aux chemins de Dyck, leurs pas peuvent monter ou descendre d'un nombre

quelconque d'unités. Pour cette raison, les excursions discrètes sont également appelées *chemins de Dyck généralisés* [37, 23].

Étant donné un ensemble fini $S \subseteq \mathbb{Z}$, on s'intéresse aux excursions dont l'incrément de hauteur de chaque pas est dans S (figure 3). Les chemins de Dyck correspondent au cas $S = \{-1, 1\}$. Plusieurs méthodes existent pour énumérer ces excursions : l'utilisation de certaines propriétés des séries de Laurent [28], les méthodes par grammaires [37, 23], la méthode du noyau [8, 2] ou encore l'identification des séries génératrices avec des fonctions de Schur [6]. Le résultat principal d'énumération, qu'on peut obtenir par toutes ces méthodes, affirme que la série génératrice des excursions est algébrique. De plus, si $S \subseteq \{-b, \dots, a\}$, la série possède un polynôme annulateur de degré $\binom{a+b}{a}$ [2]. Si l'ensemble S est *symétrique* ($-S = S$), alors on peut trouver un polynôme annulateur de degré 2^a [6].

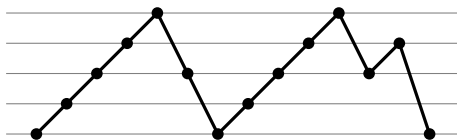


FIGURE 3 – Une excursion de hauteur 4 à pas dans $S = \{1, -2, -3\}$.

Chemins auto-évitants

La deuxième famille de chemins qui nous intéresse est celle des *chemins auto-évitants*. Un chemin du réseau carré est dit auto-évitant s'il ne visite pas deux fois le même sommet. Énumérer les chemins auto-évitants est un problème très étudié depuis plusieurs décennies ; on renvoie au livre [42] pour une introduction complète au sujet. On conjecture que le nombre a_n de chemins auto-évitants de longueur n et la distance moyenne d_n entre leurs extrémités vérifient

$$a_n \sim \lambda \mu^n n^\gamma, \quad d_n \sim \kappa n^\nu,$$

avec $\gamma = 11/32$ et $\nu = 3/4$. Plusieurs méthodes prédisent ces valeurs, même si aucune n'est rigoureuse pour l'instant : études numériques [32, 44], comparaison avec d'autres modèles [17, 43], arguments probabilistes utilisant des processus SLE [38], énumération de chemins auto-évitants sur des réseaux aléatoires [26]... Ces valeurs se maintiennent sur d'autres réseaux, à la différence de la constante de croissance μ qui dépend du réseau. Il a été récemment prouvé que la constante μ vaut $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ sur le réseau triangulaire [25] ; elle pourrait également être un nombre biquadratique, valant environ 2,64, sur le réseau carré [33].

Vu la difficulté à énumérer les chemins auto-évitants, il est naturel d'étudier des classes restreintes. Idéalement, on cherche des sous-classes qui aient à la fois une description simple et naturelle et une structure permettant de les énumérer. On cherche également à ce que ces sous-classes soient les plus grandes possibles. Ainsi, la classe naturelle la plus grande qu'on sache énumérer pour l'instant est constituée de chemins *prudents* [4, 22, 18], avec une constante de croissance d'environ 2,48.

Animaux

Un *animal* du réseau carré est un ensemble connexe et fini de sommets (figure 4). Les animaux sont étudiés en combinatoire et en physique statistique, où ils sont par exemples liés à des problèmes de percolation.

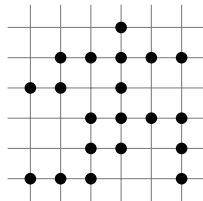


FIGURE 4 – Un animal du réseau carré.

Comme les chemins auto-évitants, les animaux sont des objets très simples à définir ; ils sont en revanche tout aussi difficiles à énumérer. On appelle *sites* les sommets d'un animal ; l'*aire* d'un animal est son nombre de sites. Notons a_n le nombre d'animaux d'aire n du réseau carré. Le seul résultat connu sur les nombres a_n est que la quantité $a_n^{1/n}$ tend vers une constante K quand n tend vers l'infini, avec

$$3,87 \leq K \leq 4,65.$$

On conjecture que la valeur a_n est équivalente à $\kappa\mu^n/n$ [14].

Face à la difficulté du problème, on s'intéresse encore à des sous-familles qui soient plus faciles à énumérer. Presque toutes les familles énumérables pour l'instant sont définies soit par une propriété de *convexité* (par exemple, les animaux à colonnes convexes), soit par une *direction privilégiée*. C'est cette dernière propriété qui nous intéresse dans cette thèse ; nous étudions deux familles, les animaux dirigés et les animaux de Klarner (aussi appelés animaux multi-dirigés).

Animaux dirigés

Soit S un ensemble fini de sommets. Un animal A est dit *dirigé* de source S si tout site de A peut être atteint à partir de S par un chemin ne prenant que des pas Nord et Est et ne passant que par des sites de A . Le nom de ces animaux vient du fait qu'ils ont une direction privilégiée, le Nord-Est. On peut également définir des animaux dirigés sur deux autres réseaux, le réseau triangulaire et le réseau hexagonal. La figure 5 montre des animaux dirigés à une seule source (on parle de source *ponctuelle*) sur les trois réseaux.

Contrairement aux animaux généraux, l'énumération des animaux dirigés de source ponctuelle sur le réseau carré est bien connue [20, 29, 3]. La série génératrice de ces animaux vaut

$$A(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-3t}} - 1 \right).$$

Deux méthodes principales existent pour l'énumération des animaux dirigés. La première, originellement employée par Dhar [20] puis reprise par d'autres auteurs [5, 41, 1], repose sur la comparaison avec des *modèles de gaz*. La deuxième méthode utilise une bijection

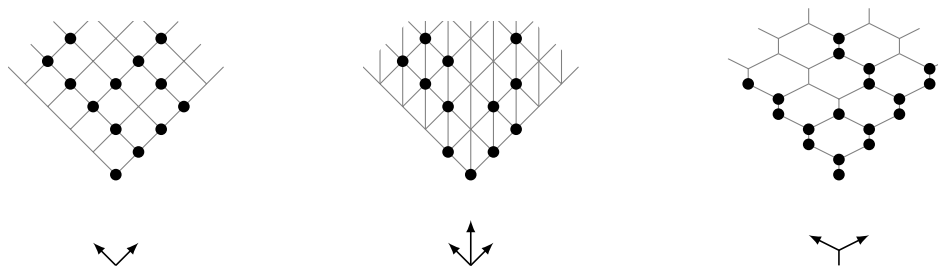


FIGURE 5 – Des animaux dirigés de source ponctuelle sur les réseaux carré, triangulaire et hexagonal dirigés. Les réseaux sont tournés de sorte que la direction privilégiée est représentée vers le haut.

avec des empilements de pièces [3]. Cette dernière méthode est explicitée et étendue au chapitre 4.

Les deux méthodes évoquées ci-dessus peuvent être étendues au réseau triangulaire. En revanche, le réseau hexagonal leur résiste pour l’instant. En fait, le problème semble intrinsèquement plus difficile : la série génératrice des animaux dirigés sur le réseau hexagonal n’est probablement pas D-finie [31], alors qu’elle est algébrique sur les deux autres réseaux.

D’autres problèmes sur les animaux dirigés consistent à prendre en compte d’autres paramètres que l’aire. Les problèmes de ce type sont très nombreux (voir par exemple [15, 5]). Des résultats précis existent pour certains paramètres (largeur, nombre de sites portés à droite...), mais d’autres sont plus difficiles à étudier (hauteur, périmètre...).

Animaux de Klarner

Les animaux de Klarner forment une autre famille d’animaux. Comme les animaux dirigés, ils se déclinent sur les réseaux carré et triangulaire, auxquels s’ajoutent le *réseau carré droit* (c’est-à-dire le réseau carré avec la direction privilégiée Nord ; pour éviter l’ambiguïté, nous appellerons *réseau carré biaisé* le réseau carré, représenté figure 5, dont la direction privilégiée est le Nord-Est). La définition formelle est donnée au chapitre 5 ; sur les réseaux carré biaisé et triangulaire, les animaux de Klarner sont des animaux dirigés pouvant avoir plusieurs sources (figure 6). Pour cette raison, on les qualifie également de *multi-dirigés*. En particulier, tout animal dirigé de source ponctuelle est multi-dirigé.

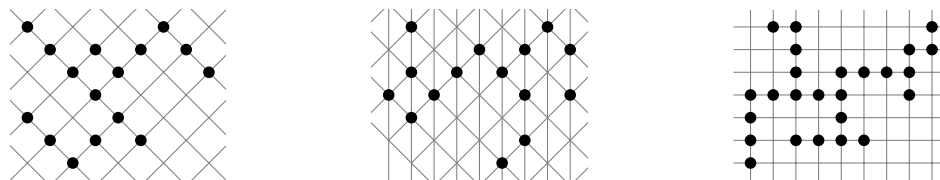


FIGURE 6 – Deux animaux multi-dirigés sur le réseau carré biaisé (à gauche) et le réseau triangulaire (au milieu). À droite, un animal de Klarner sur le réseau carré droit.

Ces animaux ont été introduits par Klarner [35], sur les réseaux carré droit et triangulaire. Bousquet-Mélou et Rechnitzer [10] ont ensuite repris les animaux de Klarner sur le réseau triangulaire et leur ont donné une définition plus agréable, liée à certains empilements de

pièces. Ils ont aussi étendu la définition au réseau carré biaisé et leur ont donné le nom d'animaux multi-dirigés.

La formule suivante, due à Bousquet-Mélou et Rechnitzer, donne la série génératrice des animaux multi-dirigés sur le réseau triangulaire :

$$K(t) = \frac{D}{(1-D)\left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{D^{k+1}}{1-D^k(1+D)}\right)},$$

où D désigne la série génératrice des nombres de Catalan,

$$D = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} - 1.$$

Une formule analogue est valable sur le réseau carré biaisé, avec une valeur différente de la série D . Une interprétation combinatoire de ces formules a été ensuite donnée par Viennot [53]. En revanche, aucune formule de ce type n'existe pour l'instant sur le réseau carré droit.

En utilisant des matrices de transfert, Klarner a montré que le nombre d'animaux de Klarner d'aire n sur le réseau carré droit est au moins proportionnel à $3,72^n$, ce qui est supérieur aux autres classes d'animaux énumérées jusqu'à présent (par exemple, le nombre d'animaux dirigés est en 3^n sur le réseau carré). La formule ci-dessus permet de déduire que, sur le réseau carré biaisé, le nombre d'animaux multi-dirigés est proportionnel à $3,58^n$.

Résumé de la thèse

Chapitre 1

Le chapitre 1 sert de préliminaires aux autres chapitres, donnant plusieurs résultats qui seront appliqués plus loin. Il présente la théorie des empilements, puis donne un certain nombre d'extensions nouvelles répondant à nos besoins. Notamment, il énonce une généralisation du lemme d'inversion permettant de compter les empilements évitant certains motifs et il montre comment énumérer les empilements marqués d'une pièce.

Chapitre 2

Le chapitre 2 donne des méthodes d'énumération des excursions discrètes dans plusieurs cas : celui où S ne contient pas de pas strictement supérieurs à 1 (cas des *chemins de Łukasiewicz*), et celui où S est fini. Dans ce dernier cas, nous donnons une explication combinatoire à la forme des séries des excursions de hauteur bornée [2, 6]. Notre approche fournit aussi des résultats nouveaux dans le cas où l'ensemble S des pas est symétrique.

Chapitre 3

Le chapitre 3 présente une nouvelle sous-classe de chemins auto-évitant, que nous appelons *chemins faiblement dirigés*. Nous énumérons cette classe en utilisant les résultats

précédents sur les chemins de Łukasiewicz. Nous montrons qu'elle possède une constante de croissance de 2,54 environ, ce qui la rend plus grande que celle des chemins prudents. Nous montrons également que la série génératrice des chemins faiblement dirigés, à la différence des séries comptant des classes plus simples, admet une frontière naturelle dans le plan complexe, et donc n'est pas D-finie. Nous donnons également un algorithme de génération aléatoire des chemins faiblement dirigés. Enfin, nous présentons une classe de chemins encore plus grande, mais plus difficile à énumérer.

Chapitre 4

Le chapitre 4 étudie trois paramètres des animaux dirigés : le nombre de sites adjacents, le nombre de boucles et le périmètre de site. Nous obtenons une forme générale des séries génératrices donnant la valeur moyenne de chaque paramètre sur plusieurs réseaux carrés et triangulaires. Ceci fournit une preuve combinatoire de résultats de Bousquet-Mélou [5] et prouve des conjectures de Conway et Le Borgne [15, 39].

Chapitre 5

Le chapitre 5 étudie les animaux de Klarner sur les trois réseaux triangulaire, carré biaisé et carré droit. Nous donnons des équations caractérisant les séries génératrices de ces animaux, et nous en déduisons des résultats asymptotiques. Nous donnons également des bijections entre les animaux de Klarner et certaines familles de chemins de Dyck.

Chapitre 1

Empilements de pièces

Ce premier chapitre a pour but de présenter la théorie des empilements et d'établir un certain nombre d'extensions. Ces résultats seront appliqués tout au long de la thèse.

Le chapitre est organisé comme suit. La chapter 1.1 présente succinctement quelques éléments de théorie des ensembles partiellement dirigés, qui sont le fondement de la théorie des empilements. La chapter 1.2 donne la définition formelle des monoïdes d'empilements, ainsi qu'une vision alternative, les monoïdes partiellement commutatifs. La chapter 1.3 étudie ensuite au lemme d'inversion, qui est le résultat fondamental de la théorie, et en donne une généralisation permettant d'énumérer les empilements évitant certains motifs. La chapter 1.4 donne quelques résultats pour énumérer les empilements dont on a marqué certaines pièces. Enfin, la chapter 1.5.1 définit deux modèles d'empilements, les empilements de segments et ceux de dimères, qui interviennent dans cette thèse à de nombreuses reprises.

Notation. Si S est un ensemble et R une relation sur S , on notera indifféremment $x R y$ ou $xy \in R$ pour signifier que x et y sont liés par la relation R .

1.1 Ensembles partiellement ordonnés

Avant de définir les empilements, nous donnons ici quelques éléments de théorie des ensembles partiellement ordonnés dont nous aurons besoin. Aucune preuve n'est donnée; une introduction plus complète au domaine peut être trouvée dans [49, chapitre 3].

1.1.1 Définitions, relation de couverture

Définition 1.1. Soit P un ensemble. Un *ordre partiel* sur P est une relation \leq telle que :

- \leq est réflexive : pour tout $x \in P$, $x \leq x$;
- \leq est antisymétrique : pour tous $x, y \in P$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$;
- \leq est transitive : pour tous $x, y, z \in P$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

Un *ordre partiel strict* sur P est une relation $<$ telle que :

- $<$ est irreflexive : pour tout $x \in P$, $x \not< x$;
- $<$ est transitive : pour tous $x, y, z \in P$, si $x < y$ et $y < z$, alors $x < z$.

Ces deux notions sont en fait essentiellement les mêmes : à tout ordre partiel strict $<$ sur P , on peut associer un ordre partiel \leq défini par $x \leq y$ si $x < y$ ou $x = y$. Réciproquement, à tout ordre partiel \leq on peut associer un ordre partiel strict $<$ défini par $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$. Dans la suite, \leq désignera un ordre partiel sur P et $<$ son ordre partiel strict associé.

Un élément x de P est dit *minimal* s'il n'existe pas de y tel que $y < x$. Il est dit *maximal* s'il n'existe pas de y tel que $x < y$. Si x et y sont deux éléments de P , on dit que y *couvre* x si $x < y$ et qu'il n'existe pas de z tel que $x < z < y$.

Supposons que l'ensemble P est fini. L'ordre \leq est engendré par sa relation de couverture : ceci signifie que pour tous x, y dans P , on a $x \leq y$ si et seulement si il existe une suite finie x_0, \dots, x_n telle que $x_0 = x$, $x_n = y$, et x_{i+1} couvre x_i pour tout i . La couverture est en fait la plus petite relation ayant cette propriété : si R est une relation engendrant l'ordre \leq et y couvre x , alors xy est dans R .

Le *diagramme de Hasse* de P est le graphe dont les sommets sont les éléments de P et dont les arêtes sont $x \rightarrow y$ si y couvre x . Par convention, quand on représente ce diagramme, toutes les arêtes pointent vers le haut, ce qui permet d'omettre leur orientation. Un exemple se trouve figure 1.1.

1.1.2 Segments initiaux et finaux

Définition 1.2. Un sous-ensemble S de P est un *segment initial* si tout élément inférieur à un élément de S est encore dans S :

$$x \in S \text{ et } y \leq x \Rightarrow y \in S.$$

Un sous-ensemble S est un *segment final* si tout élément supérieur à un élément de S est dans S :

$$x \in S \text{ et } x \leq y \Rightarrow y \in S.$$

Enfin, un sous-ensemble X est une *antichaîne* si ses éléments sont deux à deux non comparables :

$$x, y \in X \Rightarrow x \not\leq y.$$

Soit S un segment initial de P . Il est facile de vérifier que le complémentaire $P \setminus S$ est un segment final, et vice-versa.

Soit X un sous-ensemble de P . On définit les deux ensembles suivants :

$$\downarrow X = \{y \in P \mid \exists x \in X, y \leq x\};$$

$$\uparrow X = \{y \in P \mid \exists x \in X, x \leq y\}.$$

L'ensemble $\downarrow X$ est toujours un segment initial et l'ensemble $\uparrow X$ est toujours un segment final. Le lemme suivant montre que tout segment initial ou final admet une représentation canonique de ce type.

Lemme 1.3. *Soit S un segment initial (resp. final) de P . Il existe une unique antichaîne X tel que $S = \downarrow X$ (resp. $\uparrow X$). De plus, X est l'ensemble des éléments maximaux (resp. minimaux) de S .*

1.1.3 Extensions linéaires

Définition 1.4. Un ordre \sqsubseteq sur P est dit *total* si, pour tout x et tout y de P , on a $x \sqsubseteq y$ ou $y \sqsubseteq x$.

Un ordre total \sqsubseteq est une *extension linéaire* de \leq si $x \leq y$ implique $x \sqsubseteq y$ pour tous x, y .

En utilisant le lemme de Zorn, on montre que tout ordre \leq admet une extension linéaire. Le résultat suivant montre également qu'on peut trouver des extensions linéaires vérifiant certaines conditions supplémentaires.

Lemme 1.5. *Un élément x de P est minimal (resp. maximal) si et seulement si il existe une extension linéaire \sqsubseteq de \leq tel que x est minimal (resp. maximal) pour \sqsubseteq .*

Deux éléments x et y de P sont tels que y couvre x si et seulement si il existe une extension linéaire \sqsubseteq de \leq telle que y couvre x pour \sqsubseteq .

1.2 Empilements et monoïdes partiellement commutatifs

1.2.1 Empilements de pièces

La théorie des empilements de pièces que nous développons ici est due à Viennot [52] ; on peut également citer [36, 3] sur le sujet.

Définition 1.6. Un *modèle d'empilements* est un alphabet A (éventuellement infini), muni d'une relation C telle que :

1. C est réflexive : pour tout $a \in A$, $aa \in C$;
2. C est symétrique : pour tous $a, b \in A$, si $ab \in C$ alors $ba \in C$.

Les éléments de A sont des *positions*, et deux positions a et b sont dites *concurrentes* si ab est dans C . Intuitivement, deux positions sont concurrentes si elles se chevauchent, de sorte qu'une pièce à position b peut être posée sur une pièce à position a .

Un empilement du modèle (A, C) est représenté sur la figure 1.1. Il consiste en un certain nombre de pièces, toutes à une position dans A , qui s'empilent les unes sur les autres si leurs positions sont concurrentes.

Définition 1.7. Un *empilement de pièces* H du modèle (A, C) est un triplet (P, ℓ, \preceq) , où P est un ensemble fini dont les éléments sont appelés *pièces*, ℓ est un étiquetage de P à valeurs dans A et \preceq est un ordre partiel sur P vérifiant pour toutes pièces x et y :

1. si $\ell(x)$ et $\ell(y)$ sont concurrentes, alors $x \preceq y$ ou $y \preceq x$;
2. si y couvre x pour l'ordre \preceq , alors $\ell(x)$ et $\ell(y)$ sont concurrentes.

Les pièces de H minimales pour l'ordre \preceq sont appelées *pièces minimales* de H . L'ensemble de leurs positions est noté $\min(H)$. Les pièces qui sont maximales sont appelées *pièces maximales* et l'ensemble de leurs positions est noté $\max(H)$.

Enfin, un empilement (P, ℓ, \preceq) est *trivial* si P est une antichaîne pour \preceq .



FIGURE 1.1 – À gauche, un empilement d’un modèle à quatre positions a, b, c, d , et relation de concurrence $C = \{aa, bb, cc, dd, ab, ba, bc, cb, cd, dc\}$. À droite, le diagramme de Hasse de la relation \preceq , avec une arête entre x et y si y couvre x .

Un empilement de pièces s’entend à *isomorphisme près* : deux empilements (P_1, ℓ_1, \preceq_1) et (P_2, ℓ_2, \preceq_2) sont *isomorphes* s’il existe une bijection de P_1 dans P_2 envoyant ℓ_1 sur ℓ_2 et \preceq_1 sur \preceq_2 . On considérera alors qu’il s’agit du même empilement.

L’étiquette $\ell(x)$ d’une pièce x est appelée la *position* de x . Une pièce y est dite *au dessus* d’une pièce x si $x \preceq y$; la pièce x est dite *au dessous* de y .

Un empilement trivial est un ensemble de pièces dont aucune ne repose sur une autre ; la donnée d’un tel empilement est équivalente à celle des positions de ses pièces, qui sont deux à deux non concurrentes. Pour cette raison, on fera souvent la confusion entre un empilement trivial et l’ensemble des positions de ses pièces.

1.2.2 Monoïde des d’empilements

Si H_1 et H_2 sont deux empilements, on forme le *produit* H_1H_2 en laissant tomber H_2 sur H_1 . Un exemple est montré figure 1.2. Le résultat suivant donne une définition rigoureuse de ce produit.

Proposition 1.8. *Soit $H_1 = (P_1, \ell_1, \preceq_1)$ et $H_2 = (P_2, \ell_2, \preceq_2)$ deux empilements tels que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Soit $P = P_1 \cup P_2$. Il existe un unique empilement (P, ℓ, \preceq) tel que :*

1. les restrictions de ℓ et \preceq à P_1 sont ℓ_1 et \preceq_1 ;
2. les restrictions de ℓ et \preceq à P_2 sont ℓ_2 et \preceq_2 ;
3. l’ensemble P_1 est un segment initial de P pour \preceq .

L’empilement (P, ℓ, \preceq) ainsi construit sera appelé le *produit* de H_1 et de H_2 , et noté H_1H_2 .

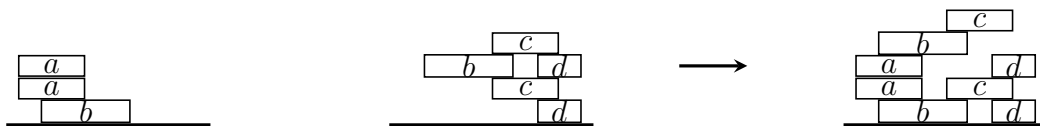


FIGURE 1.2 – Le produit de deux empilements du modèle de la figure 1.1.

Preuve. Soit (P, ℓ, \preceq) un empilement vérifiant les conditions voulues. L’étiquetage ℓ est entièrement déterminé par ses restrictions à P_1 et P_2 . Soit x et y deux pièces de P telles que y couvre x pour \preceq . Le fait que P_1 est un segment initial rend impossible le fait que y soit dans P_1 et x dans P_2 . Il y a donc trois cas possibles :

- (a) $x \in P_1, y \in P_1$ et $x \preceq_1 y$;
- (b) $x \in P_2, y \in P_2$ et $x \preceq_2 y$;
- (c) $x \in P_1, y \in P_2$ et $\ell(x)$ et $\ell(y)$ sont concurrentes.

De plus, si deux pièces x et y vérifient (a), (b) ou (c), alors on doit avoir $x \preceq y$. Un ordre étant engendré par sa relation de couverture, on en déduit que \preceq est l'ordre engendré par (a), (b) et (c), donc entièrement déterminé.

Soit maintenant \preceq l'ordre engendré par les trois relations ci-dessus. Prouvons que (P, ℓ, \preceq) est un empilement vérifiant les conditions de la proposition. Il est clair, par construction, que deux pièces x et y telles que $\ell(x)$ et $\ell(y)$ sont concurrentes sont comparables. De plus, si y couvre x , alors x et y vérifient (a), (b) ou (c). On en déduit que $\ell(x)$ et $\ell(y)$ sont concurrentes. Donc (P, ℓ, \preceq) est bien un empilement.

Par construction encore, la restriction de \preceq à P_1 et P_2 est bien \preceq_1 et \preceq_2 , respectivement, et aucune pièce de P_1 n'est jamais au dessus d'une pièce de P_2 . \square

Le produit ainsi défini est associatif [52]. On note 1 l'empilement vide, qui ne contient aucune pièce. L'empilement 1 est un élément neutre pour le produit. Soit $\mathfrak{H}(A, C)$ l'ensemble des empilements du modèle (A, C) : cet ensemble est ainsi muni d'une structure de monoïde.

1.2.3 Monoïdes partiellement commutatifs

Les monoïdes partiellement commutatifs, également appelés *monoïdes de Cartier–Foata*, apparaissent dans [12]. Le lien avec les monoïdes d'empilements est établi dans [36].

Soit A^* le monoïde des mots sur l'alphabet A . Le monoïde partiellement commutatif associé à la relation de concurrence C est défini comme le quotient de A^* par une congruence, c'est-à-dire une relation d'équivalence compatible avec la multiplication [13, chapter 1.5]. Plus précisément, on note \equiv_C la plus petite congruence de A^* telle que $ab \equiv_C ba$ pour toutes les lettres a et b telles que $ab \notin C$.

Définition 1.9. Le *monoïde partiellement commutatif* sur l'alphabet A et avec relation de concurrence C est le monoïde quotient A^*/\equiv_C . On le note $\mathfrak{L}(A, C)$.

Cette construction signifie concrètement que $\mathfrak{L}(A, C)$ est le monoïde ayant pour générateurs les lettres de A , muni de la relation $ab = ba$ si a et b ne sont pas concurrentes. Notons que par convention, une lettre a est toujours concurrente à elle-même malgré l'égalité $aa = aa$.

Soit $a_1 \cdots a_n$ un mot du monoïde $\mathfrak{L}(A, C)$. On associe à ce mot un empilement, en créant une pièce x_i de position a_i pour tout i , et en les empilant dans l'ordre pour i de 1 à n . Si deux positions a et b ne sont pas concurrentes, l'ordre dans lequel on empile les pièces de positions a et b n'a pas d'importance, ce qui correspond au fait que a et b commutent.

Cette transformation montre que les monoïdes $\mathfrak{H}(A, C)$ et $\mathfrak{L}(A, C)$ sont isomorphes. Par la suite, nous confondrons un mot de $\mathfrak{H}(A, C)$ et son empilement associé.

Exemple. L'empilement de la figure 1 est associé au mot $baadcdbc$, qui peut également s'écrire $dbcdaabc$.

Propriété 1.10. Soit H un empilement. On a les propriétés suivantes :

- La position a est dans $\min(H)$ si et seulement si H s'écrit aH' .
- La position b est dans $\max(H)$ si et seulement si H s'écrit $H'b$.

- Soit a et b deux positions concurrentes. Il existe deux pièces x et y , de positions a et b , telles que y couvre x si et seulement si H s'écrit $H'abH''$.

Preuve. Toutes ces propriétés sont des conséquences directes du lemme 1.5. □

1.2.4 Séries génératrices

Soit (A, C) un modèle d'empilements. On associe à chaque position a de A un poids \bar{a} , pris dans un anneau de séries formelles. Le poids d'un empilement H , noté \bar{H} , est le produit des poids des pièces qui le composent. On définit ainsi la série génératrice \mathbf{H} des empilements du modèle $\mathfrak{H}(A, C)$, si cette série existe :

$$\mathbf{H} = \sum_{H \in \mathfrak{H}(A, C)} \bar{H}.$$

Dans la suite, nous travaillerons avec des poids *universels*, c'est-à-dire que nous considérerons que la série \mathbf{H} appartient à l'anneau des séries formelles avec une indéterminée \bar{a} pour chaque position a . Ceci garantit l'existence de cette série. Pour travailler avec d'autres poids, il suffit de prendre une spécialisation de la série \mathbf{H} . Par exemple, en spécialisant chaque indéterminée \bar{a} en t , on obtient la série génératrice des empilements comptés selon leur nombre de pièces :

$$\mathbf{H}(\bar{a} = t) = \sum_{H \in \mathfrak{H}(A, C)} t^{|H|}.$$

Cette série n'est en revanche définie que si l'ensemble A est fini.

Soit maintenant S un sous-ensemble de A . On note \mathbf{H}_S la série génératrice des empilements dont les pièces minimales sont S :

$$\mathbf{H}_S = \sum_{\min(H)=S} \bar{H}.$$

De même, on notera $\mathbf{H}_{[S]}$ la série génératrice des empilements dont les pièces minimales sont incluses dans S :

$$\mathbf{H}_{[S]} = \sum_{\min(H) \subseteq S} \bar{H}.$$

Par souci de clarté, on se tiendra à la même convention dans toute la thèse : chaque fois qu'une série génératrice compte des empilements d'un modèle, un indice $[S]$ indique qu'on compte les empilements H tels que $\min(H) \subseteq S$, alors qu'un indice S indique qu'on compte les empilements H tels que $\min(H) = S$. Les deux séries génératrices ci-dessus sont liées par :

$$\mathbf{H}_{[S]} = \sum_{T \subseteq S} \mathbf{H}_T; \tag{1.1}$$

$$\mathbf{H}_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S \setminus T|} \mathbf{H}_{[T]}. \tag{1.2}$$

On définit à présent la série génératrice *alternée* des empilements triviaux :

$$\mathbf{T} = \sum_{T \text{ trivial}} (-1)^{|T|} \bar{T}.$$

De même, on définit la série alternée des empilements triviaux inclus dans un ensemble de lettres S :

$$\mathbf{T}_{[S]} = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|} \bar{T}.$$

1.3 Théorèmes d'inversion

Les résultats présentés ici permettent de calculer plusieurs séries génératrices comptant des empilements. Comme indiqué précédemment, nous supposons que les poids des positions sont universels ; il est possible de spécialiser une identité à d'autres poids si les spécialisations de toutes les séries qu'elle implique sont bien définies.

1.3.1 Inversion de Viennot

Le lemme d'inversion [52] est le principal résultat d'énumération sur les empilements, avec de multiples applications. Il permet de calculer les séries \mathbf{H} et $\mathbf{H}_{[S]}$, définies ci-dessus, à partir des séries génératrices des empilements triviaux.

Théorème 1.11 (Cartier–Foata, Viennot). *Les séries formelles¹ \mathbf{H} et \mathbf{T} sont inverses l'une de l'autre :*

$$\mathbf{HT} = 1. \tag{1.3}$$

Plus généralement, la série $\mathbf{H}_{[S]}$ vérifie :

$$\mathbf{H}_{[S]}\mathbf{T} = \mathbf{T}_{[A \setminus S]}. \tag{1.4}$$

Si l'alphabet A est fini, la série \mathbf{T} est un polynôme, souvent facile à calculer ; ceci fournit une méthode pour calculer \mathbf{H} . En particulier, si A est fini, alors la série \mathbf{H} est rationnelle.

Dans la suite, nous donnerons une généralisation de ce résultat.

Soit maintenant S un ensemble de positions. On appelle *bord* de S , et on note ∂S , les positions a de S telles qu'il existe b hors de S tel que a et b sont concurrentes.

Corollaire 1.12. *Soit S et T deux ensembles de positions tels que $\partial S \subseteq T \subseteq S$. On a :*

$$\mathbf{H}_{[T]} = \mathbf{T}_{[S \setminus T]}\mathbf{H}_{[S]}.$$

Preuve. Considérons l'ensemble $A \setminus T$. Il est union disjointe de $S \setminus T$ et $A \setminus S$; de plus, comme T contient le bord de S , aucune position de $S \setminus T$ n'est concurrente à une position de $A \setminus S$. La série des empilements triviaux inclus dans $A \setminus T$ vaut donc :

$$\mathbf{T}_{[A \setminus T]} = \mathbf{T}_{[S \setminus T]}\mathbf{T}_{[A \setminus S]}.$$

Le résultat découle donc du théorème 1.11 appliqué à $\mathbf{H}_{[T]}$ et $\mathbf{H}_{[S]}$. □

1. En réalité, ce résultat (ainsi que le corollaire 1.12 et le théorème 1.16) est valable dans une *algèbre de séries formelles partiellement commutatives* de variables A et avec la relation $ab = ba$ si $ab \notin C$.

1.3.2 Empilements à motifs exclus et modèles ordonnés

Définition 1.13. Soit H un empilement et soit a et b deux positions concurrentes. L'empilement H contient le *motif* ab s'il existe deux pièces x et y , de positions respectives a et b , telles que y couvre x .

Notons qu'un motif n'est pas symétrique : les motifs ab et ba sont différents. Par la définition des empilements, un empilement ne peut contenir un motif ab que si ab est dans C . La propriété 1.10 indique que dans ce cas, l'empilement H contient le motif ab si et seulement si H s'écrit $H'abH''$.

Étant donné un certain nombre de motifs interdits, notre but sera d'énumérer les empilements ne contenant aucun de ces motifs. Soit (A, C) un modèle d'empilements. On se donne une partition $C = C_1 \cup C_2$ de la relation de concurrence (les relations C_1 et C_2 ne sont pas nécessairement symétriques : ainsi, il est possible que le motif ab soit dans C_1 mais ba dans C_2). On définit :

- \mathcal{H}^1 l'ensemble des empilements dont tous les motifs sont dans C_1 ,
- \mathcal{H}^2 l'ensemble des empilements dont tous les motifs sont dans C_2 .

On note \mathbf{H}^1 et \mathbf{H}^2 la série de \mathcal{H}^1 et la série alternée de \mathcal{H}^2 , respectivement :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^1 &= \sum_{H_1 \in \mathcal{H}^1} \bar{H}_1 \\ \mathbf{H}^2 &= \sum_{H_2 \in \mathcal{H}^2} (-1)^{|H_2|} \bar{H}_2.\end{aligned}$$

Soit S un sous-ensemble de A . On définit de même les séries $\mathbf{H}_{[S]}^1$ et $\mathbf{H}_{[S]}^2$ comptant les empilements dont les pièces minimales sont à positions dans S .

En choisissant $C_1 = C$ et $C_2 = \emptyset$, on retrouve pour \mathcal{H}^1 l'ensemble de tous les empilements et pour \mathcal{H}^2 l'ensemble des empilements triviaux. Le théorème 1.11 fournit alors un lien entre les séries \mathbf{H}^1 et \mathbf{H}^2 . Nous donnerons un résultat similaire dans le cas général, moyennant certaines conditions sur le modèle.

Définition 1.14. Un *modèle ordonné d'empilements* est un modèle d'empilements (A, C) muni d'un ordre partiel strict $<$ sur A vérifiant les conditions suivantes pour toutes positions a , b et c :

0. si $b < a$, alors $ab \notin C$;
1. si $ac \notin C$, $b < a$ et $bc \in C$, alors $c < a$;
2. si $ac \notin C$, $ab \in C$ et $c < b$, alors $c < a$.

De plus, soit $C_1 \cup C_2$ une partition de la relation de concurrence C . Cette partition est dite *compatible* avec l'ordre $<$ si pour toutes positions a , b , c :

3. Si $ac \notin C$, $ab \in C_1$ et $cb \in C_2$, alors $c < a$.
4. Si $ac \notin C$, $ba \in C_2$ et $bc \in C_1$, alors $c < a$.

Les conditions 1, 2, 3 et 4 sont illustrées figure 1.3.

Notons qu'en particulier, tout modèle d'empilements (A, C) peut être étendu en un modèle ordonné d'empilements par l'ordre vide, qui vérifie toujours les conditions 0, 1 et 2. De plus, la partition $C_1 = C$, $C_2 = \emptyset$ est toujours compatible avec l'ordre vide. Un autre exemple est donné dans la chapter 1.5.1.

Le résultat suivant montre que, si toutes les positions non concurrentes sont comparables, les conditions 1 et 2 sont automatiquement vérifiées.

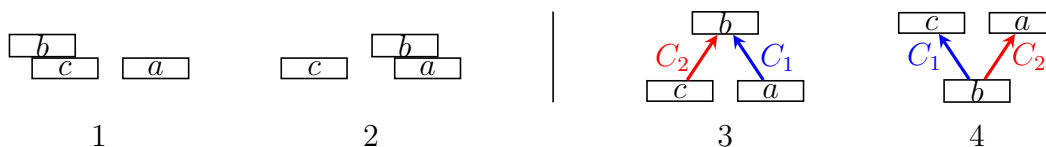


FIGURE 1.3 – À gauche, les conditions 1 et 2 impliquant l'inégalité $c < a$ si $(A, C, <)$ est un modèle ordonné d'empilements. À droite, les conditions 3 et 4 impliquant l'inégalité $c < a$ si $C_1 \cup C_2$ est une partition compatible.

Lemme 1.15. Soit (A, C) un modèle d'empilements et $<$ une relation d'ordre strict sur A telle que pour toutes positions a, b :

$$a < b \text{ ou } b < a \iff ab \notin C.$$

Alors $(A, C, <)$ est un modèle ordonné d'empilements.

Preuve. La condition 0 est vraie par hypothèse. Pour prouver la condition 1, supposons par l'absurde qu'on ait trois lettres a, b, c telles que $ac \notin C$, $b < a$ et $bc \in C$ mais $c \not< a$. On a donc $a < c$, donc $b < c$, ce qui contredit le fait que b et c sont concurrentes. Le cas de la condition 2 est symétrique. \square

Nous pouvons à présent énoncer le résultat permettant d'énumérer les empilements à motifs exclus. Ce résultat sera appliqué dans les chapitres suivants.

Théorème 1.16. Soit $(A, C, <)$ un modèle ordonné d'empilements et $C_1 \cup C_2$ une partition compatible de C . Les séries génératrices \mathbf{H}^1 et \mathbf{H}^2 sont inverses l'une de l'autre :

$$\mathbf{H}^1 \mathbf{H}^2 = 1. \quad (1.5)$$

Plus généralement, soit S un segment initial de A pour l'ordre $<$. On a :

$$\mathbf{H}_{[S]}^1 \mathbf{H}^2 = \mathbf{H}_{[A \setminus S]}^2. \quad (1.6)$$

Ce théorème implique bien le lemme d'inversion : en choisissant $C_1 = C$ et $C_2 = \emptyset$, on retrouve pour \mathcal{H}^1 les empilements généraux et pour \mathcal{H}^2 les empilements triviaux. Cette partition est toujours compatible avec l'ordre vide ; de plus, tout sous-ensemble S de A est un segment final pour l'ordre vide.

Pour prouver ce théorème, on fixe H_1 un empilement de $\mathcal{H}_{[S]}^1$ et H_2 un empilement de \mathcal{H}^2 . On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{a \in \max(H_1) \mid aH_2 \in \mathcal{H}^2\}; \\ Z_2 &= \{b \in \min(H_2) \mid H_1b \in \mathcal{H}_{[S]}^1\}; \\ Z &= Z_1 \cup Z_2. \end{aligned}$$

Les positions de Z sont appelées les positions *transférables* de (H_1, H_2) . Si a est dans Z_1 , notons $H_1 = H'_1 a$. Le *transfert* de a est l'application $(H'_1 a, H_2) \mapsto (H'_1, aH_2)$. De même si b est dans Z_2 et $H_2 = bH'_2$, le transfert de b est l'application $(H_1, bH'_2) \mapsto (H_1 b, H'_2)$.

Lemme 1.17. Soit a dans Z et soit (H'_1, H'_2) les empilements obtenus en transférant a . L'ensemble des positions transférables de (H'_1, H'_2) est encore Z .

Preuve. Prouvons tout d'abord que si deux positions b et c sont dans Z , avec $b \neq c$, alors b et c ne sont pas concurrentes. Les positions de Z_1 sont incluses dans $\max(H_1)$, donc sont deux à deux non concurrentes; de même pour celles de Z_2 . Soit donc b dans Z_1 et c dans Z_2 : comme b est transférable, bc n'est pas dans C_1 ; comme c est transférable, bc n'est pas dans C_2 . Donc bc n'est pas dans C .

Soit maintenant Z' l'ensemble des positions transférables de (H'_1, H'_2) . On remarque que le transfert de la position a est involutif: a est dans Z' , et le transfert de a effectué à partir des empilements (H'_1, H'_2) donne (H_1, H_2) . Ainsi, il suffit de prouver que $Z \subseteq Z'$: en appliquant le même raisonnement aux empilements (H'_1, H'_2) , on montre que $Z' \subseteq Z$.

Soit donc b dans Z avec $a \neq b$: comme a et b ne sont pas concurrentes, transférer a n'a pas d'incidence sur le transfert de b . En particulier, on a $b \in Z'$, ce qui montre bien que $Z \subseteq Z'$. \square

Lemme 1.18. *Supposons que (H_1, H_2) n'est pas dans $\{1\} \times \mathcal{H}_{[A \setminus S]}^2$. L'ensemble Z est non vide.*

Prouver ce lemme est la partie la plus difficile; c'est là qu'intervient le fait que le modèle (A, C) est ordonné. Avant tout, nous montrons comment on en déduit le théorème.

Preuve du théorème 1.16. Tout d'abord, on note que l'équation (1.6) implique (1.5): il suffit de choisir $S = A$, qui est bien un segment final.

Soit \sqsubseteq un ordre total sur A . Soit D le domaine $(\mathcal{H}_{[S]}^1 \times \mathcal{H}^2) \setminus (\{1\} \times \mathcal{H}_{[A \setminus S]}^2)$. On définit une application $\Phi: D \rightarrow D$ de la façon suivante. Soit (H_1, H_2) dans D et Z l'ensemble des positions transférables. Soit a la position de Z la plus petite pour l'ordre \sqsubseteq . On définit $\Phi(H_1, H_2)$ comme le résultat du transfert de a .

Le lemme 1.18 assure que Φ est bien définie, et le lemme 1.17 assure que Φ est une involution. De plus, comme Φ transfère une pièce de ou vers H_2 , les contributions de (H_1, H_2) et de $\Phi(H_1, H_2)$ dans la série $\mathbf{H}_{[S]}^1 \mathbf{H}^2$ sont opposées et s'annulent. Ainsi, seules les contributions des éléments hors de D restent, ce qui prouve l'équation (1.6). \square

Reste donc à prouver le lemme 1.18. La preuve utilise de manière centrale les conditions 0 à 5 décrites dans la définition 1.14 et illustrées sur la figure 1.3. Nous commençons par énoncer deux lemmes supplémentaires.

Lemme 1.19. *Soit H un empilement et a une position. On suppose qu'aucune pièce de H n'est à une position concurrente à a et qu'il existe une pièce de H à position b telle que $b < a$. Alors il existe une position c dans $\min(H)$ telle que $c < a$.*

Symétriquement, s'il existe une pièce b de H telle que $a < b$, alors il existe une position c dans $\min(H)$ telle que $a < c$.

Preuve. Soit x une pièce de H à position b , et soit y une pièce minimale de H telle que $y \preceq x$; on note c la position de y . Il existe donc des pièces x_0, \dots, x_n dans H , telles que x_i couvre x_{i+1} pour tout $0 \leq i < n$ et $x_n = y$. Soit b_i la position de x_i : les positions b_i et b_{i+1} sont donc concurrentes pour tout i .

Par hypothèse, a n'est concurrente avec aucune des b_i . La condition 1 implique que pour tout i , si $b_i < a$ alors $b_{i+1} < a$. Or $b_0 = b < a$; de proche en proche, on trouve bien $c = b_n < a$.

Le cas symétrique est identique et utilise cette fois la condition 2. \square

Lemme 1.20. Soit H_2 un empilement de \mathcal{H}^2 et a dans A tel que aH_2 n'est pas dans \mathcal{H}^2 . Alors il existe b dans $\min(H_2)$ tel que :

- soit ab est dans C_1 ,
- soit $b < a$.

Symétriquement, soit H_1 un empilement de \mathcal{H}^1 et b dans A tel que H_1b n'est pas dans \mathcal{H}^1 . Alors il existe c dans $\max(H_1)$ tel que :

- soit cb est dans C_2 ,
- soit $c < b$.

Ce lemme est illustré figure 1.4.

Preuve. Traitons tout d'abord le premier cas. Supposons que H_2 est dans \mathcal{H}^2 mais pas aH_2 , et notons x la pièce minimale de aH_2 à position a . Il existe donc une pièce y , à position b , qui couvre x et telle que $ab \in C_1$. On distingue deux cas de figure.

1. Soit y est une pièce minimale de H_2 , auquel cas b remplit les conditions du lemme.
2. Soit y n'est pas une pièce minimale de H_2 . Dans ce cas, soit $H'_2bH''_2$ une écriture de l'empilement H_2 telle qu'on ait

$$aH_2 = H'_2abH''_2.$$

Pour que cette dernière égalité soit vraie, la lettre a doit commuter avec toutes les lettres de H'_2 . On en déduit qu'aucune pièce de H'_2 n'est concurrente à a . Soit maintenant z une pièce de H'_2 telle que y couvre z et soit c la position de z . On a donc $cb \in C_2$. La condition 3 implique donc que $c < a$. Le lemme 1.19 donne l'existence de d dans $\min(H'_2)$, donc dans $\min(H_2)$, tel que $d < a$.

Le cas symétrique est traité de la même manière et utilise la condition 4. \square

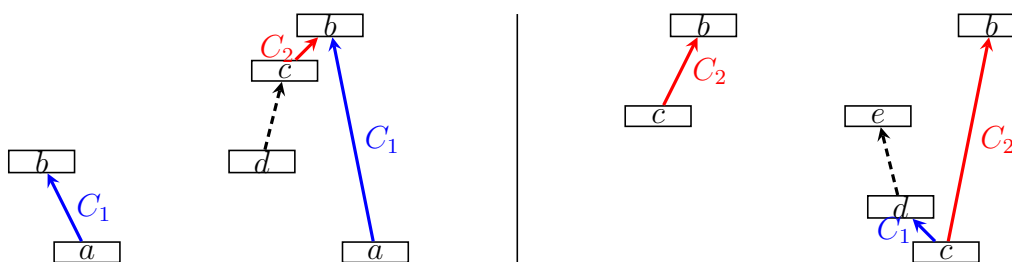


FIGURE 1.4 – À gauche, la preuve du lemme 1.20. Si aH_2 n'est pas dans \mathcal{H}^2 , il existe b tel que $ab \in C_1$. Si b n'est pas dans $\min(H_2)$, on prouve l'existence d'une pièce à position d telle que $d < a$ et $d \in \min(H_2)$. À droite, la deuxième partie du lemme 1.20.

Preuve du lemme 1.18. Par l'absurde, supposons que Z soit vide. Si H_1 est vide, alors H_2 n'est pas dans $\mathcal{H}^2_{[A \setminus S]}$ par hypothèse. Il existe donc b dans $\min(H_2)$ tel que $b \in S$. L'empilement b étant dans $\mathcal{H}^1_{[S]}$, b est dans Z . C'est une contradiction.

Supposons maintenant H_1 non vide. Soit a dans $\max(H_1)$, minimale pour l'ordre $<$. La position a n'étant pas transférable, l'empilement aH_2 n'est pas dans \mathcal{H}^2 . Le lemme 1.20 assure donc l'existence d'un b dans $\min(H_2)$ tel que $b < a$ ou $ab \in C_1$.

De plus, la position b n'est pas dans Z_2 par hypothèse, donc H_1b n'est pas dans $\mathcal{H}_{[S]}^1$. Ceci signifie soit que $\min(H_1b)$ n'est pas inclus dans S , soit que H_1b n'est pas dans \mathcal{H}^1 . Nous avons donc quatre cas à traiter.

- Soit $b < a$ et $\min(H_1b)$ n'est pas inclus dans S . Notons y la pièce maximale de H_1b à position b ; la seule pièce minimale de H_1b pouvant être à position non dans S est y , ce qui montre que b n'est pas dans S et y est minimale. Aucune pièce de H_1 n'est donc à position concurrente à b . Le lemme 1.19 assure qu'il existe c dans $\min(H_1)$, donc dans S , tel que $b < c$. Ceci contredit le fait que S est un segment initial.
- Soit $ab \in C_1$ et $\min(H_1b)$ n'est pas inclus dans S . Notons à nouveau y la pièce maximale de H_1b à position b . La pièce y couvrant une pièce à position a , les empilements H_1 et H_1b ont les mêmes pièces minimales, ce qui contredit le fait que $\min(H_1) \subseteq S$.
- Soit $b < a$ et H_1b n'est pas dans \mathcal{H}^1 . Le lemme 1.20 fournit un c dans $\max(H_1)$ tel que $c < b$ ou $cb \in C_2$. La condition 1 montre donc que $c < a$, ce qui contredit la minimalité de a .
- Soit $ab \in C_1$ et H_1b n'est pas dans \mathcal{H}^1 . Le lemme 1.20 fournit un c dans $\max(H_1)$ tel que $c < b$ ou $cb \in C_2$. Les conditions 2 et 3 montrent donc que $c < a$, ce qui contredit la minimalité de a . \square

Dans ce mémoire, nous donnons plusieurs applications du théorème 1.16. La première, et la plus simple, de ces applications est l'énumération des empilements stricts, déjà bien connue par ailleurs.

1.3.3 Empilements stricts

Définition 1.21. Un empilement est dit *strict* s'il ne contient aucun motif de type aa pour a une lettre de A .

Soit C_1 l'ensemble des motifs ab pour $a \neq b$ et C_2 celui des motifs de type aa . Avec les notations de la chapitre précédente, l'ensemble des empilements stricts est \mathcal{H}^1 . Les empilements de \mathcal{H}^2 sont qualifiés de *multi-triviaux* (voir figure 1.5).



FIGURE 1.5 – À gauche, un empilement strict. À droite, un empilement multi-trivial.

Considérons maintenant le modèle ordonné d'empilements (A, C, \emptyset) . Il est facile de vérifier que la partition $C = C_1 \cup C_2$ est compatible avec l'ordre vide. De plus, tout ensemble S de positions est un segment initial de A pour l'ordre vide.

On définit la série génératrice \mathbf{H}^s des empilements stricts et la série génératrice alternée \mathbf{T}^m des empilements multi-triviaux. De même, on définit les séries $\mathbf{H}_{[S]}^s$ et $\mathbf{T}_{[S]}^m$ pour tout ensemble S de positions. Le théorème 1.16 donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s \mathbf{T}^m &= 1; \\ \mathbf{H}_{[S]}^s \mathbf{T}^m &= \mathbf{T}_{[A \setminus S]}^m. \end{aligned}$$

Un empilement multi-trivial est construit en remplaçant chaque pièce d'un empilement trivial par une pile de taille arbitraire formée de pièces à la même position. Chaque pièce de position a ayant pour poids $-\bar{a}$, la série $\mathbf{T}_{[S]}^m$ est donnée par la substitution :

$$\mathbf{T}_{[S]}^m = \mathbf{T}_{[S]} \left(\bar{a} \rightarrow \frac{\bar{a}}{1 + \bar{a}} \right); \quad (1.7)$$

Ainsi, on a, après application du lemme d'inversion :

$$\mathbf{H}_{[S]}^s = \mathbf{H}_{[S]} \left(\bar{a} \rightarrow \frac{\bar{a}}{1 + \bar{a}} \right). \quad (1.8)$$

Alternativement, un empilement général est construit en remplaçant chaque pièce d'un empilement strict par une pile de taille arbitraire. Chaque pièce de position a a cette fois un poids \bar{a} , ce qui donne :

$$\mathbf{H}_{[S]} = \mathbf{H}_{[S]}^s \left(\bar{a} \rightarrow \frac{\bar{a}}{1 - \bar{a}} \right).$$

Ces deux identités sont bien sûr équivalentes.

1.4 Empilements marqués

Un problème auquel nous serons confrontés est d'énumérer des empilements marqués d'un certain ensemble de pièces. Le but de cette chapitre est d'introduire des outils pour manipuler ce type d'objets.

1.4.1 Empilements marqués et factorisations d'empilements

Définition 1.22. Un *empilement marqué* est un couple (H, X) , où H est un empilement et X un ensemble de pièces de H formant une antichaîne pour \preceq (*i.e.* un ensemble de pièces deux à deux non comparables).

Soit $H = (P, \ell, \preceq)$ un empilement. On s'intéresse maintenant à *factoriser* l'empilement H , c'est-à-dire à trouver un couple (H_1, H_2) d'empilements tels que $H = H_1 H_2$. La proposition 1.8, qui définit le produit de deux empilements, montre que ceci est équivalent à trouver une partition $P = P_1 \cup P_2$, où P_1 est un segment initial de P .

Définition 1.23. Soit (H, X) un empilement marqué. La factorisation de H créée en *tirant les pièces de X vers le bas*, notée $F_{\downarrow}(H, X)$, est le couple (H_1, H_2) tel que $H = H_1 H_2$ et où les pièces de H_1 sont celles au dessous d'une pièce de X (y compris les pièces de X elles-mêmes).

De même, la factorisation de H créée en *poussant les pièces de X vers le haut*, noté $F_{\uparrow}(H, X)$, est le couple (H_1, H_2) tel que $H = H_1 H_2$ et où les pièces de H_2 sont celles au dessus d'une pièce de X (figure 1.6).

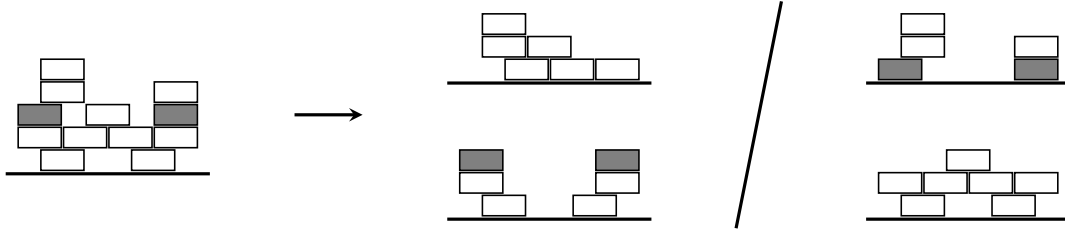


FIGURE 1.6 – À gauche, un empilement marqué. Au centre, son image par F_{\downarrow} . À droite, son image par F_{\uparrow} .

Proposition 1.24. *Les applications F_{\downarrow} et F_{\uparrow} sont des bijections de l'ensemble des empilements marqués vers celui des couples d'empilements.*

De plus, soit (H, X) un empilement marqué et (H_1, H_2) la factorisation $F_{\downarrow}(H, X)$. Les pièces maximales de H_1 sont exactement les pièces de X . De même, si $(H_1, H_2) = F_{\uparrow}(H, X)$, alors les pièces minimales de H_2 sont les pièces de X .

Preuve. D'après la proposition 1.8, trouver une factorisation de H revient à trouver une partition $P_1 \cup P_2$ de P , tel que P_1 est un segment initial et P_2 un segment final. La proposition découle donc du lemme 1.3. \square

Ainsi, on ramène l'étude des empilements marqués à celle de couples d'empilements, plus agréables à traiter. Étant donnés deux empilements H_1 et H_2 , nous montrons maintenant comment trouver les positions des pièces minimales du produit H_1H_2 .

Définition 1.25. Soit H un empilement. On appelle *voisinage* de H , et on note $v(H)$, l'ensemble des positions a telles qu'au moins une pièce de H est à une position concurrente à a .

Lemme 1.26. *Soit H_1 et H_2 deux empilements. L'ensemble des positions des pièces minimales du produit H_1H_2 est donné par :*

$$\min(H_1H_2) = \min(H_1) \cup (\min(H_2) \setminus v(H_1)).$$

Preuve. Toute pièce minimale de H_1 est encore minimale dans H_1H_2 , car elle ne peut couvrir aucune pièce de H_2 .

Soit maintenant y une pièce minimale de H_2 . La pièce y n'est pas minimale dans H_1H_2 si et seulement si il existe une pièce x de H_1 telle que y couvre x . Ceci signifie que les positions de x et y sont concurrentes, donc que la position de y est dans $v(H_1)$. \square

Soit H un empilement tel que $\min(H) = S$. En écrivant l'empilement H sous la forme $\bar{S}H_2$, on trouve ainsi :

$$\mathbf{H}_S = \bar{S}\mathbf{H}_{[v(S)]}, \quad (1.9)$$

où \bar{S} est le produit des poids des positions de S . Cette identité fournit une alternative à l'équation (1.2) pour calculer la série \mathbf{H}_S en fonction de séries de type $\mathbf{H}_{[T]}$.

1.4.2 Empilements stricts et presque stricts

Nous traitons maintenant le cas des empilements stricts marqués. Comme précédemment, nous cherchons à ramener leur étude à celle de couples d'empilements stricts. Pour cela, nous définissons un objet intermédiaire.

Définition 1.27. Un empilement marqué (H, X) est dit *presque strict* si aucune pièce non marquée n'est couverte par une pièce de même position.

Soit (H, X) un empilement marqué presque strict. On appelle *pile* de H un ensemble maximal de pièces à la même position empilées directement les unes sur les autres; on appelle *pires marquées* les piles de H contenant une pièce de X . Ces piles consistent toujours en une ou deux pièces, et la pièce marquée est toujours en dessous. On appelle X^+ l'ensemble consistant en la pièce du dessus de chaque pile marquée. On définit les transformations, illustrées figure 1.7 :

$$\begin{aligned} F_{\downarrow}^s(H, X) &= F_{\downarrow}(H, X); \\ F_{\uparrow}^s(H, X) &= F_{\uparrow}(H, X^+). \end{aligned}$$

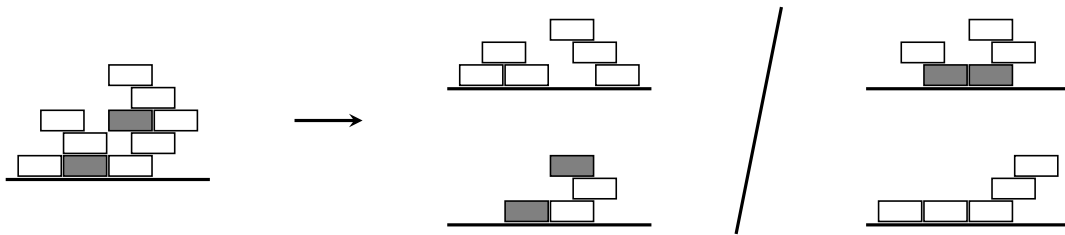


FIGURE 1.7 – À gauche, un empilement marqué presque strict. Au centre, son image par F_{\downarrow}^s . À droite, son image par F_{\uparrow}^s . Les deux factorisations séparant toujours les deux pièces l'une sur l'autre à la même position, tous les facteurs obtenus sont stricts.

Lemme 1.28. Les applications F_{\downarrow}^s et F_{\uparrow}^s sont des bijections de l'ensemble des empilements marqués presque stricts vers l'ensemble des couples d'empilements stricts.

De plus, soit (H, X) un empilement marqué presque strict et (H_1, H_2) la factorisation $F_{\downarrow}^s(H, X)$. L'ensemble $\max(H_1)$ est égal à l'ensemble des positions des pièces de X . De même, si $(H_1, H_2) = F_{\uparrow}^s(H, X)$, alors l'ensemble $\min(H_2)$ est l'ensemble des positions des pièces de X .

Preuve. Tout d'abord, on remarque que si (H_1, H_2) est égal à $F_{\downarrow}^s(H, X)$ ou $F_{\uparrow}^s(H, X)$, alors H_1 et H_2 sont stricts. En effet, si deux pièces x et y sont dans la même pile avec y au dessus de x , alors x est toujours dans H_1 et y dans H_2 .

L'ensemble X étant l'ensemble des pièces inférieures de chaque pile marquée, la transformation $(H, X) \mapsto (H, X^+)$ est injective; les fonctions F_{\downarrow} et F_{\uparrow} étant injectives, F_{\downarrow}^s et F_{\uparrow}^s sont aussi injectives.

Soit maintenant H_1 et H_2 deux empilements; soit X l'ensemble des pièces maximales de H_1 et Y l'ensemble des pièces minimales de H_2 . Soit Y^- l'ensemble des pièces inférieures de chaque pile de l'empilement $H_1 H_2$ contenant une pièce de Y . On a :

$$(H_1, H_2) = F_{\downarrow}^s(H, X) = F_{\uparrow}^s(H, Y^-),$$

ce qui prouve la surjectivité et donne les ensembles $\max(H_1)$ et $\min(H_2)$. \square

Tout empilement marqué presque strict s'obtient à partir d'un empilement strict en remplaçant chaque pièce marquée par une pile marquée, de taille 1 ou 2. En termes de séries génératrices, cela correspond, pour chaque pièce x de X de position a , à une multiplication par $1 + \bar{a}$. Ainsi, on peut ramener l'étude des empilements marqués stricts aux empilements marqués presque stricts, et donc aux paires d'empilements stricts.

1.4.3 Empilements marqués d'une pièce

En application de ce qui précède, nous traitons le cas des empilements marqués d'une seule pièce, à position fixée. Soit (A, C) un modèle d'empilements et a une position de A .

Notons $\mathbf{M}^{(a)}$ la série génératrice des empilements marqués d'une pièce de position a et $\mathbf{V}^{(a)}$ la série génératrice des empilements H évitant a , *i.e.* tels que $a \notin v(H)$. De même, soit $\mathbf{M}^{(a)s}$ la série des empilements stricts marqués d'une pièce de position a et $\mathbf{V}^{(a)s}$ la série des empilements stricts évitant a .

Les séries $\mathbf{V}^{(a)}$ et $\mathbf{V}^{(a)s}$ peuvent être facilement calculées en utilisant le théorème d'inversion (théorème 1.11) : en effet, les empilements évitant a sont exactement les empilements du modèle dont les positions sont $A \setminus v(a)$.

Soit S un sous-ensemble de A ; on note $\mathbf{M}_{[S]}^{(a)}$ et $\mathbf{V}_{[S]}^{(a)}$, les séries comptant les mêmes empilements que ci-dessus, dont les pièces minimales sont à positions dans S . On fait de même pour les empilements stricts.

Lemme 1.29. *Supposons que la position a est dans S . On a :*

$$\mathbf{M}_{[S]}^{(a)} = \mathbf{H}_{[S]} \mathbf{H}_{\{a\}}; \quad (1.10)$$

$$\mathbf{M}_{[S]}^{(a)s} = \frac{1}{1 + \bar{a}} \mathbf{H}_{[S]}^s \mathbf{H}_{\{a\}}^s. \quad (1.11)$$

Supposons maintenant que a n'est pas dans S . On a :

$$\mathbf{M}_{[S]}^{(a)} = \left(\mathbf{H}_{[S]} - \mathbf{V}_{[S]}^{(a)} \right) \mathbf{H}_{\{a\}}; \quad (1.12)$$

$$\mathbf{M}_{[S]}^{(a)s} = \frac{1}{1 + \bar{a}} \left(\mathbf{H}_{[S]}^s - \mathbf{V}_{[S]}^{(a)s} \right) \mathbf{H}_{\{a\}}^s. \quad (1.13)$$

Preuve. Soit $(H, \{x\})$ un empilement marqué d'une pièce à position a . On utilise la bijection F_{\uparrow} pour construire un couple (H_1, H_2) , tel que $\min(H_2) = \{a\}$. Le lemme 1.26 assure que :

$$\min(H) = \min(H_1) \cup \left(\{a\} \setminus v(H_1) \right).$$

Si a est dans S , alors $\min(H)$ est inclus dans S si et seulement si $\min(H_1)$ l'est : ceci prouve l'équation (1.10). Si a n'est pas dans S , alors $\min(H)$ est inclus dans S si et seulement si $\min(H_1)$ l'est et a est dans $v(H_1)$. La série $\mathbf{H}_{[S]} - \mathbf{V}_{[S]}^{(a)}$ comptant les empilements ayant a dans leur voisinage, on a bien prouvé l'équation (1.12).

Considérons maintenant le cas des empilements stricts. Soit $\mathbf{M}_{[S]}^{(a)*}$ la série comptant les empilements marqués d'une pièce de position a presque stricts. Ils sont obtenus en remplaçant une pièce de position a par une pile d'une ou deux pièces. On a donc :

$$\mathbf{M}_{[S]}^{(a)*} = (1 + \bar{a}) \mathbf{M}_{[S]}^{(a)s}.$$

On utilise maintenant la bijection F_{\uparrow}^s pour transformer les empilements marqués en couples d'empilements stricts. On prouve ainsi les identités (1.11) et (1.13) de la même manière que (1.10) et (1.12). \square

1.5 Empilements de segments et de dimères

Pour finir ce chapitre, nous définissons deux modèles particuliers d'empilements de pièces : les empilements de *segments*, et un cas particulier, les empilements de *dimères*. Les empilements de dimères forment sans doute le modèle d'empilements le plus utilisé, notamment pour l'énumération des animaux dirigés [3]. Les empilements de segments, plus généraux, ont été étudiés dans [11].

Ces deux modèles d'empilements nous seront utiles à de nombreuses reprises au cours de cette thèse.

1.5.1 Empilements de segments

Définition 1.30. Un *segment* est un couple d'entiers (i, j) tel que $i \leq j$. L'ensemble des *sommets* du segment (i, j) est l'ensemble $\{i, \dots, j\}$; l'ensemble des *arêtes* du segment (i, j) est l'ensemble $\{i, \dots, j-1\}$; la *longueur* du segment (i, j) est l'entier $j-i$, égal au nombre d'arêtes du segment.

Deux segments sont *concurrents* s'ils ont au moins un sommet en commun; de manière équivalente, ils sont concurrents si leurs arêtes sont consécutives. Enfin, soient q_0, q_1, \dots des indéterminées. On attribue à chaque segment de longueur ℓ le poids q_ℓ .

L'ensemble des segments muni de cette relation de concurrence et de ces poids définit un modèle d'empilements de pièces. Un empilement de segments est représenté figure 1.8.

Comme indiqué dans la définition, un segment de longueur non nulle peut être représenté par son ensemble de sommets ou par son ensemble d'arêtes. L'une ou l'autre vision sera plus commode selon les applications.

On s'intéresse maintenant à l'énumération des empilements de segments. Soit k un entier positif ou nul et soit V_k l'ensemble $\{0, \dots, k\}$. On pose également $V_{-1} = \emptyset$. On considère le sous-modèle, appelé modèle *borné de largeur k* , constitué des segments dont les sommets sont dans V_k . On note H_k la série comptant les empilements de segments de ce modèle. Le théorème 1.11 donne

$$H_k = \frac{1}{T_k},$$

où T_k est la série alternée des empilements triviaux de segments contenus dans V_k .

Soit $T(z)$ la série génératrice des séries T_{k-1} (l'utilité de ce décalage d'indice est apparente ci-dessous) :

$$T(z) = \sum_{k \geq 0} T_{k-1} z^k.$$

On note également $Q(z)$ la série des indéterminées q_ℓ :

$$Q(z) = \sum_{\ell \geq 0} q_\ell z^\ell.$$

Lemme 1.31. La série génératrice $T(z)$ vaut :

$$T(z) = \frac{1}{1 - z + zQ(z)}.$$

Preuve. Un empilement trivial de segments, observé de gauche à droite, peut être vu comme une séquence d'éléments de deux types (figure 1.9) :

- un sommet libre ;
- un segment de longueur ℓ , contenant $\ell + 1$ sommets.

La série T_k étant alternée, le poids effectif d'un segment de longueur ℓ est $-q_\ell$. On ajoute maintenant l'indéterminée z comptant le nombre de sommets. L'ensemble V_{k-1} comptant k sommets, on a

$$\sum_{k \geq 0} T_{k-1} z^k = \frac{1}{1 - (z - \sum_{\ell \geq 0} q_\ell z^{\ell+1})}.$$

Le résultat s'ensuit. □

1.5.2 Adjacences droites et gauches

Définition 1.32. Soit $a = (i_a, j_a)$ et $b = (i_b, j_b)$ deux segments. Le motif ab est une *adjacence à droite* si $j_a = i_b$; il est une *adjacence à gauche* si $j_b = i_a$.

Ces notions sont illustrés figure 1.8.

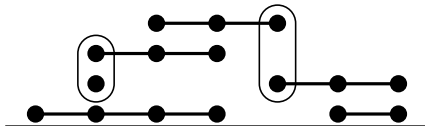


FIGURE 1.8 – Un empilement de segments contenant une adjacence à droite et une adjacence à gauche, marquées sur la figure.

On s'intéresse maintenant aux empilements de segments sans adjacence à droite. Pour énumérer ces empilements, nous utiliserons les résultats de la chapter 1.3.2. Notons C la relation de concurrence entre les segments, C_2 l'ensemble des adjacences à droite et C_1 le complémentaire à C de C_2 .

Soient $a = (i_a, j_a)$ et $b = (i_b, j_b)$ deux segments. On note $a < b$ si on a l'inégalité $j_a < i_b$.

Lemme 1.33. Le modèle des segments muni de la relation d'ordre $<$ est un modèle ordonné. La partition $C_1 \cup C_2$ de C est compatible avec cet ordre.

Preuve. Soit $a = (i_a, j_a)$ et $b = (i_b, j_b)$ deux segments non concurrents. Leurs ensembles de sommets sont disjoints, donc on a nécessairement $j_a < i_b$ ou $j_b < i_a$, donc $a < b$ ou $b < a$. Le lemme 1.15 implique donc que le modèle des segments muni de l'ordre $<$ est ordonné.

Prouvons que la condition 3 de la définition 1.14 est vérifiée. Soient $a = (i_a, j_a)$, $b = (i_b, j_b)$ et $c = (i_c, j_c)$ trois segments tels que $ab \in C_1$, $cb \in C_2$ et $ac \notin C$. Par l'absurde, supposons que $c \not< a$; ceci implique que $a < c$. Comme cb est dans C_2 , on a $j_c = i_b$; comme $a < c$,

on a $j_a < i_c$; enfin, comme $i_b \leq j_b$ et $i_c \leq j_c$, on a $j_a < i_b$. Les segments a et b sont donc non concurrents, ce qui contredit le fait que $ab \in C_1$.

De même, on prouve la condition 4 : supposons que $bc \in C_1$, $ba \in C_2$ et $ac \notin C$. Supposons par l'absurde que $a < c$. On a donc $j_b = i_a$ et $j_a < i_c$, ce qui implique $j_b < i_c$, donc $b < c$, ce qui contredit le fait que $bc \in C_1$. \square

Les conditions du théorème 1.16 sont donc remplies. On dira qu'un empilement est *quasi-trivial* si tous ses motifs sont dans C_2 .

À nouveau, plaçons nous dans le modèle des segments inclus dans V_k . Notons H_k^d la série des empilements sans adjacence droite de ce modèle. Notons également T_k^d la série alternée des empilements quasi-triviaux. Le théorème 1.16 affirme que

$$H_k^d = \frac{1}{T_k^d}.$$

Notons $T^d(z)$ la série génératrice des séries T_k^d , cette fois sans décalage d'indice :

$$T^d(z) = \sum_{k \geq 0} T_k^d z^k.$$

Lemme 1.34. *La série $T^d(z)$ vaut*

$$T^d(z) = \frac{1}{1 - z + Q(z)}.$$

Preuve. La preuve reprend celle du lemme 1.31, à la différence que deux segments a et b d'un empilement quasi-trivial sont autorisés à être adjacents à droite. On choisit cette fois la vision par arêtes plutôt que par sommets. Un empilement quasi trivial, observé de gauche à droite, peut se voir comme une séquence de deux types d'éléments :

- une arête non occupée ;
- un segment de longueur ℓ , occupant ℓ arêtes.

Ceci permet de conclure de la même manière que pour le lemme 1.31. L'absence de décalage d'indice est due au fait que seules k arêtes relient les sommets de V_k . \square

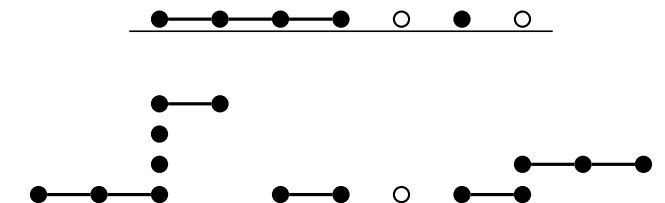


FIGURE 1.9 – En haut, un empilement trivial de segments inclus dans V_6 . En bas, un empilement quasi-trivial de segments inclus dans V_{10} .

Dans ce qui précède, nous avons tenu compte uniquement des adjacences à droite. Dans le chapitre 5, nous chercherons à énumérer des empilements de segments sans adjacence ni à droite, ni à gauche. Posons C'_2 l'ensemble des motifs ab où a et b sont adjacents à droite ou à gauche et C'_1 son complémentaire à C . Le lemme suivant montre que l'approche développée ci-dessus ne peut pas fonctionner dans ce cas.

Lemme 1.35. *Il n'existe pas d'ordre partiel $<$ sur le modèle des segments rendant compatible la partition $C'_1 \cup C'_2$.*

Ce lemme montre qu'il est impossible d'appliquer le théorème 1.16 pour énumérer les empilements sans adjacence. Soit H_k^{gd} la série des empilements sans adjacence de segments inclus dans V_k . Expérimentalement, les séries $1/H_k^{gd}$ ne vérifient pas d'équation aussi simple que les séries T_k et T_k^d , ce qui tend à montrer que le problème est effectivement plus difficile.

Preuve. Posons $a = (1, 1)$, $b = (0, 2)$ et $c = (0, 0)$. Les motifs ab et ba sont dans C'_1 , tandis que les motifs bc et cb sont dans C'_2 . De plus, les segments a et c ne sont pas concurrents.

Supposons que la partition $C'_1 \cup C'_2$ est compatible avec l'ordre $<$. La condition 3 de la définition 1.14 implique que $c < a$, et la condition 4 implique que $a < c$. C'est une contradiction. \square

1.5.3 Empilements de dimères

Définition 1.36. On appelle *dimère* un segment de longueur 1.

Les dimères sont donc les segments contenant une seule arête. Pour cette raison, on confondra souvent un dimère avec son unique arête.

En utilisant la même relation de concurrence que pour les segments, l'ensemble des dimères est un modèle d'empilements. Attribuons le poids t à chaque dimère. Le modèle des empilements de dimères étant un sous-modèle de celui des segments, les séries génératrices des empilements de dimères peuvent être obtenues en effectuant dans les séries comptant les empilements de segments les substitutions $q_1 = t$ et $q_\ell = 0$ pour $\ell \neq 1$. Ainsi, la série génératrice $Q(z)$ vaut tz .

Soit $H_k(t)$ la série génératrice des empilements de dimères inclus dans V_k . Comme le montre le lemme 1.31, cette série s'écrit $1/T_k(t)$, avec

$$\sum_{k \geq 0} T_{k-1}(t)z^k = \frac{1}{1 - z + tz^2}.$$

Définition 1.37. Les *polynômes de Fibonacci*, notés $F_k(t)$, sont les polynômes obéissant à la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} F_0(t) &= F_1(t) = 1; \\ F_k(t) &= F_{k-1}(t) - tF_{k-2}(t), \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Cette définition est équivalente à

$$\sum_{k \geq 0} F_k z^k = \frac{1}{1 - z + tz^2}.$$

On en déduit l'identité $T_{k-1}(t) = F_k(t)$. Pour cette raison, les polynômes de Fibonacci apparaîtront chaque fois qu'un problème d'énumération fait intervenir des empilements de dimères.

Considérons maintenant le modèle des segments de longueur ≥ 1 inclus dans V_k , et utilisons les poids $q_\ell = t^\ell$ pour $\ell \geq 1$. La série $Q(z)$ vaut donc

$$Q(z) = \frac{tz}{1-tz}.$$

Notons $H_k^d(t)$ la série comptant les empilements de segments sans adjacence droite de ce modèle. D'après la lemme 1.34, cette série vaut $1/T_k^d(t)$, avec

$$\sum_{k \geq 0} T_k^d(t) z^k = \frac{1}{1-z + \frac{tz}{1-tz}} = \frac{1-tz}{1-z+tz^2}.$$

On réécrit cette égalité comme

$$1 + z \sum_{k \geq 0} T_k^d(t) z^k = \frac{1}{1-z+tz^2}.$$

On en déduit que la série $T_k^d(t)$ vaut le polynôme de Fibonacci $F_{k+1}(t)$. On a donc l'égalité $T_k^d(t) = T_k(t)$, donc aussi $H_k^d(t) = H_k(t)$.

Cette égalité s'explique par une bijection entre empilements de segments sans adjacence droite et empilements de dimères. Cette bijection s'obtient en remplaçant chaque segment $[i, j]$ par l'empilement de dimères $[i, i+1] \cdots [j-1, j]$ (figure 1.10). La bijection inverse consiste à regrouper en segments tous les dimères adjacents à droite.

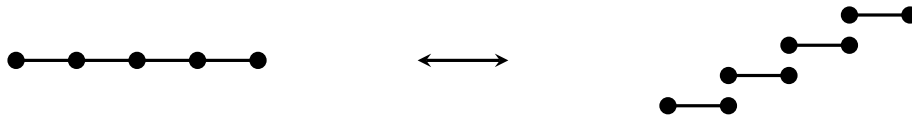


FIGURE 1.10 – La bijection entre empilements de segments de longueur non nulle sans adjacence droite et empilements de dimères. Chaque segment est remplacé par une suite de dimères adjacents à droite.

Chapitre 2

Excursions discrètes

Rappelons qu'une excursion discrète est un chemin qui prend des pas de hauteur dans un ensemble $S \subseteq \mathbb{Z}$, qui commence et termine à hauteur 0 et qui ne visite que des hauteurs positives (figure 3). On définit la *hauteur* d'une excursion comme la hauteur maximale d'un de ses sommets.

On considère maintenant pour tout pas s de S un poids q_s à valeur dans un corps \mathbb{K} . Notons E_k la série génératrice des excursions de hauteur au plus k comptées selon ces poids. Il est classique [2] que cette série est rationnelle, et s'écrit sous la forme

$$E_k = \frac{F_k}{F_{k+1}},$$

où les F_k sont des polynômes, dont nous donnerons une interprétation combinatoire par la suite.

Soit $F(z)$ la série

$$F(z) = \sum_{k \geq 0} F_k z^k. \tag{2.1}$$

Supposons que cette série est rationnelle, et s'écrit $F(z) = N(z)/D(z)$. Soit E la série génératrice des excursions sans contrainte de hauteur. En écrivant la relation de récurrence des polynômes F_k et en faisant tendre k vers l'infini, on trouve l'identité $D(E) = 0$ (une preuve plus détaillée se trouve dans [6]). Ainsi, la série E est algébrique sur le corps \mathbb{K} .

Dans son article [6], Bousquet-Mélou montre que la série $F(z)$ est rationnelle si l'ensemble S des pas autorisés est fini. Plus précisément, si $\max S = a$ et $\min S = -b$, on peut prendre les polynômes $N(z)$ et $D(z)$ de degrés respectifs $d_{a,b} - a - b$ et $d_{a,b}$, où $d_{a,b} = \binom{a+b}{a}$. Ceci montre donc que la série E est algébrique de degré au plus $d_{a,b}$. Bousquet-Mélou montre également que, si l'ensemble S est *symétrique*, ce qui implique $a = b$, le dénominateur peut être réduit au degré 2^a .

Dans ce chapitre, nous étudions les excursions discrètes dans deux cas. Le premier est celui des *chemins de Łukasiewicz*, dont l'ensemble des pas S est inclus dans $\mathbb{Z}^- \cup \{1\}$. Nous verrons que, dans ce cas, la série $F(z)$ est rationnelle dès que la série $\sum_j q_{-j} z^j$ l'est.

Le deuxième est le cas plus classique où l'ensemble S est fini. Nous donnons une explication combinatoire au fait que la série $F(z)$ est rationnelle en donnant des interprétations combinatoires du numérateur $N(z)$ et du dénominateur $D(z)$, ainsi que de leurs degrés. Nous étudions aussi le cas où l'ensemble S est symétrique. Dans ce cas, nous montrons que

la fraction rationnelle $N(z)/D(z)$ se simplifie, et nous en déduisons plusieurs propriétés intéressantes des polynômes F_k et des séries E_k .

Le chapitre est organisé comme suit. La chapter 2.1 donne des outils classiques, dus à Viennot, pour relier les chemins dans un graphe quelconque aux empilements de cycles élémentaires ; nous utilisons ces outils pour interpréter combinatoirement les polynômes F_k . La chapter 2.2 applique ces résultats à l'étude des chemins de Łukasiewicz. La chapter 2.3, quant à elle, étudie le cas où l'ensemble des pas S est fini, ainsi que le cas particulier où il est, de plus, symétrique.

2.1 Chemins dans un graphe orienté

Dans cette chapter, on notera $G = (V, A)$ un graphe orienté. Un *chemin* de G est une suite $\alpha = a_1 \cdots a_n$ d'arcs de A consécutifs (c'est-à-dire que le point d'arrivée de chaque arc est le point de départ du suivant). Si s est le point de départ de a_1 et t le point d'arrivée de a_n , on dira que α joint s à t et on notera $\alpha: s \rightarrow t$. Pour tout sommet s de V , on définit également le *chemin vide au point s* , noté ε_s , qui ne contient aucun arc et joint s à s .

Un sommet u est *visité* par un chemin α si u est le point de départ ou d'arrivée d'un arc de α . L'ensemble des sommets visités par α est appelé le *support* de α , et noté $\text{supp}(\alpha)$.

Comme pour les empilements, on attribue à chaque arc a un poids \bar{a} . Si $\alpha = a_1 \cdots a_n$ est un chemin de G , on note $\bar{\alpha}$ son poids, défini comme le produit des poids des arcs qui le composent :

$$\bar{\alpha} = \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n.$$

On note également W_{st} la série génératrice des chemins de G joignant s à t :

$$W_{st} = \sum_{\alpha: s \rightarrow t} \bar{\alpha}.$$

De la même manière que pour les empilements, nous supposons que les poids des arcs sont universels, c'est-à-dire que nous travaillons dans l'anneau des séries formelles avec une indéterminée \bar{a} pour chaque arc a . Ceci garantit l'existence de W_{st} ; considérer d'autres poids revient ensuite à spécialiser cette série.

2.1.1 Matrice d'adjacence

Supposons l'ensemble des sommets V fini. On peut alors, sans perte de généralité, supposer que $V = \{0, \dots, k-1\}$. On note A la matrice d'adjacence de G , dont le coefficient A_{ij} vaut la somme des poids \bar{a} pour tous les arcs a joignant i à j ; on note également W la matrice dont le coefficient (i, j) vaut la série W_{ij} définie ci-dessus.

Il est classique que, si $n \geq 0$, le coefficient (i, j) de la matrice A^n compte les chemins de G de longueur n joignant i à j . Ainsi, la matrice W vaut :

$$W = \sum_{n \geq 0} A^n = (1 - A)^{-1},$$

où 1 désigne la matrice identité. La formule de Cramer donne donc le coefficient W_{ij} :

$$W_{ij} = \frac{\text{cof}_{ji}(1 - A)}{\det(1 - A)}, \quad (2.2)$$

où $\text{cof}_{ji}(1 - A)$ désigne le cofacteur de coordonnées (j, i) dans la matrice $1 - A$.

Dans la suite, nous donnons une interprétation classique, due à Viennot, de cette formule utilisant des empilements de pièces.

Remarque. On a supposé ici l'ensemble V fini, ce qui suffira à nos besoins. Dans le cas où cet ensemble est infini, il reste possible d'écrire la formule (2.2). Cette équation implique alors un *déterminant infini*, défini par exemple dans [30]. Tout le reste de cette chapitre reste valable dans ce cadre, mais nous omettrons les détails.

2.1.2 Empilements de cycles

On s'intéresse désormais aux *cycles* du graphe G , c'est-à-dire les chemins ayant même point de départ et d'arrivée, vus à une permutation cyclique des arcs près. Le poids d'un cycle γ , noté $\bar{\gamma}$, est égal à son poids en tant que chemin, c'est-à-dire au produit des poids des arcs qui le composent.

Définition 2.1. Un chemin est dit *auto-évitant* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet. De même, un cycle non vide est dit *élémentaire* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet. Deux chemins ou cycles sont *concurrents* si leurs supports ne sont pas disjoints.

Nous noterons $\beta: s \rightsquigarrow t$ si le chemin auto-évitant β joint s à t .

Muni de cette relation de concurrence, l'ensemble des cycles élémentaires de G est un modèle d'empilements de pièces. Nous présentons maintenant un lien, dû à Viennot, entre les chemins et les empilements de ce modèle.

Définition 2.2. Soit $\alpha = a_1 \cdots a_n$ un chemin joignant s à t . On construit inductivement une suite $(\beta_i)_{0 \leq i \leq n}$ de chemins auto-évitants, et une suite $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'empilements de cycles, de la manière suivante :

- $\beta_0 = \varepsilon_s$ (le chemin vide au point s) et $H_0 = 1$;
- si $i > 0$, on distingue deux cas :
 - si la concaténation $\beta_{i-1}a_i$ est un chemin auto-évitant, alors $\beta_i = \beta_{i-1}a_i$ et $H_{i+1} = H_i$;
 - sinon, on écrit $\beta_{i-1}a_i = \beta_i\gamma$, où γ est un cycle élémentaire ; on pose ensuite $H_i = \gamma H_{i-1}$.

Dans le deuxième cas, on dira que l'arc a_i est un arc *terminal* du chemin α . Enfin, on pose $f(\alpha) = (\beta_n, H_n)$.

Plus intuitivement, on construit le couple $f(\alpha) = (\beta, H)$ en parcourant le chemin α . Dès que le chemin atteint un sommet déjà visité, le cycle élémentaire constitué des pas depuis la première visite se « détache » de α . Une fois tous les cycles détachés, il ne reste qu'un chemin auto-évitant β . De plus, soient $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ les cycles qui se sont détachés. L'empilement H est construit en empilant ces cycles dans l'ordre inverse :

$$H = \gamma_m \cdots \gamma_1.$$

Un arc est terminal s'il provoque un détachement de cycle. Cette construction est illustrée figure 2.1.

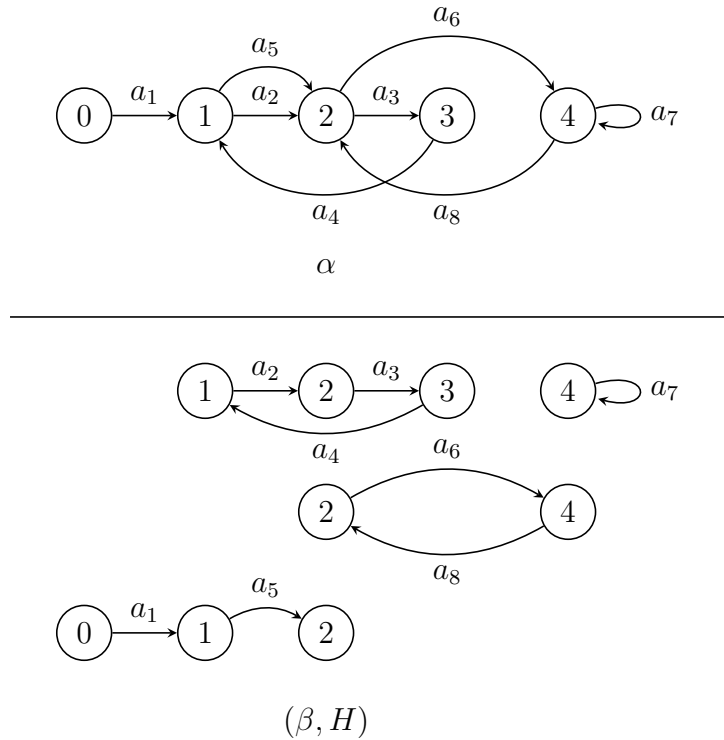


FIGURE 2.1 – En haut, un chemin $\alpha = a_1 \cdots a_8$ joignant les sommets 0 et 2. En suivant ce chemin, l'arc a_4 fait se détacher le cycle $\gamma_1 = a_2 a_3 a_4$; l'arc a_7 fait se détacher le cycle $\gamma_2 = a_7$; enfin, l'arc a_8 fait se détacher le cycle $\gamma_3 = a_6 a_8$. Il reste ainsi un chemin auto-évitant $\beta = a_1 a_5$. L'empilement de cycles ainsi obtenu est $H = \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1$. Son unique cycle minimal, γ_3 , est concurrent à β .

Théorème 2.3 (Viennot). *L'application f est une bijection entre les chemins joignant s à t et les couples (β, H) , où β est un chemin auto-évitant de s à t et H est un empilement de cycles élémentaires tel que tous les cycles minimaux de H sont concurrents à β .*

Nous dirons que deux arcs a et b sont *consécutifs* si le point d'arrivée de a est égal au point de départ de b . Le lemme suivant permet de caractériser les chemins contenant des arcs terminaux consécutifs.

Lemme 2.4. *Soit α un chemin et $(\beta, H) = f(\alpha)$. Soient a et b deux arcs terminaux de α ; soient γ_a et γ_b les cycles de l'empilement H contenant les arcs a et b . Supposons de plus que les arcs a et b sont consécutifs dans le graphe G .*

Les arcs a et b apparaissent consécutivement dans le chemin α si et seulement si γ_a couvre γ_b dans l'empilement H .

Preuve. Notons u le sommet d'arrivée de l'arc a , qui est le sommet de départ de l'arc b . Tout d'abord, on note que les cycles γ_a et γ_b visitent tous deux u , donc sont concurrents.

Supposons que les arcs a et b apparaissent consécutivement dans le chemin α . Les deux arcs étant terminaux, les cycles γ_a et γ_b se détachent consécutivement. Les cycles étant empilés dans l'ordre inverse, on en déduit que γ_a couvre γ_b dans l'empilement H .

Supposons maintenant que les arcs a et b n'apparaissent pas consécutivement. Soit η le chemin compris entre a et b : ce chemin va de u à u , et visite donc deux fois le sommet u .

Par conséquent, un cycle δ visitant u se détache entre γ_a et γ_b . Le cycle δ étant concurrent à la fois à γ_a et à γ_b , le cycle γ_a ne couvre pas γ_b . \square

Nous allons maintenant utiliser le théorème 2.3 pour calculer la série génératrice des chemins joignant s à t . On remarque que les arcs contenus dans le chemin α et dans $f(\alpha)$ sont les mêmes, de sorte que la bijection f conserve le poids.

Si S est un ensemble de cycles élémentaires, on rappelle qu'on note $\mathcal{H}_{[S]}$ la série génératrice des empilements de cycles H tels que $\min(H) \subseteq S$. Le théorème implique que :

$$W_{st} = \sum_{\beta: s \rightsquigarrow t} \bar{\beta} \mathcal{H}_{[v(\beta)]},$$

où $v(\beta)$ désigne l'ensemble des cycles élémentaires concurrents à β . En particulier, dans le cas où $s = t$, le seul chemin auto-évitant β possible est le chemin vide. En notant $v(s)$ l'ensemble des cycles élémentaires contenant s , on a donc :

$$W_{ss} = \mathcal{H}_{[v(s)]}.$$

Notons maintenant F la série alternée des empilements triviaux de cycles :

$$F = \sum_{\gamma_1 \cdots \gamma_r} (-1)^r \bar{\gamma}_1 \cdots \bar{\gamma}_r,$$

où $\gamma_1 \cdots \gamma_r$ désigne un empilement trivial de cycles élémentaires. Si X est un sous-ensemble de V , notons $F_{[X]}$ la série alternée des empilements triviaux de cycles dont tous les sommets sont dans X . En utilisant le théorème 1.11, on trouve :

$$W_{st} = \sum_{\beta: s \rightsquigarrow t} \frac{\bar{\beta} F_{[V \setminus \text{supp}(\beta)]}}{F}; \quad (2.3)$$

et en particulier :

$$W_{ss} = \frac{F_{[V \setminus \{s\}]}}{F}. \quad (2.4)$$

Esquissons à partir de cette formule une preuve du fait que la série E_k , comptant les excursions de hauteur au plus k dont les pas sont dans un ensemble fixé S , est de la forme F_k/F_{k+1} où les F_k sont des polynômes. Notons V_k l'ensemble $\{0, \dots, k\}$ et F_{k+1} la série alternée des empilements de cycles sur V_k (cette série est en fait un polynôme). L'ensemble $V_k \setminus \{0\}$ est égal à $\{1, \dots, k\}$, en bijection avec $\{0, \dots, k-1\}$. La série $F_{[V_k \setminus \{0\}]}$ est donc égale à F_k .

On s'intéresse également à la série $E_{k,i}$ comptant les chemins commençant à la hauteur 0, finissant à la hauteur i , et ne visitant que des sommets de hauteur entre 0 et k inclus. La formule (2.3) montre que cette série est aussi rationnelle, de dénominateur F_{k+1} . Son numérateur est en revanche plus complexe.

2.1.3 Permutations partielles

Nous allons maintenant faire le lien entre les formules (2.2) et (2.3). Pour cela, nous utilisons la notion de permutation partielle.

Définition 2.5. Une *permutation partielle* d'ordre k est un couple $\pi = (S, \sigma)$, où S est un sous-ensemble de $\{0, \dots, k-1\}$ et σ est une permutation de l'ensemble S .

L'ensemble S est appelé le *support* de π et noté $\text{supp}(\pi)$; les *cycles* de π sont les cycles de σ . On note leur nombre $\text{cyc}(\pi)$. Enfin, la *signature* de π , notée $\varepsilon(\pi)$, est égale à la signature de σ .

On note \mathfrak{P}_k l'ensemble des permutations partielles d'ordre k . La signature d'une permutation partielle vérifie la formule classique :

$$\varepsilon(\pi) = (-1)^{|\text{supp}(\pi)| + \text{cyc}(\pi)}.$$

Soit maintenant G le graphe complet de sommets $V = \{0, \dots, k-1\}$ et π une permutation partielle d'ordre k . On peut représenter π sous forme de diagramme, en traçant un arc $i \rightarrow \pi(i)$ pour tous les sommets s de $\text{supp}(\pi)$. Chaque cycle de π devient alors un cycle élémentaire du graphe G ; ces cycles sont à supports disjoints, donc non concurrents. Cette remarque fournit une bijection entre les permutations partielles et les empilements triviaux de cycles de G .

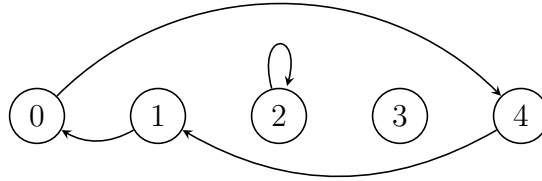


FIGURE 2.2 – Un empilement trivial de cycles. La permutation partielle correspondante, d'ordre 5, s'écrit $\pi = (S, \sigma)$, avec $S = \{0, 1, 2, 4\}$ et $\sigma = (4\ 1\ 0)(2)$. Elle vérifie $\text{cyc}(\pi) = 2$.

On calcule à présent la série $\det(1 - A)$ en développant le déterminant :

$$\det(1 - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=0}^{k-1} (1 - A)_{i, \sigma(i)},$$

où \mathfrak{S}_k est le groupe des permutations d'indice k . En développant le produit, on trouve :

$$\det(1 - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \sum_{S \subseteq \{0, \dots, k-1\}} \left(\prod_{i \in S} -A_{i, \sigma(i)} \right) \left(\prod_{i \notin S} \delta_{i, \sigma(i)} \right).$$

Les seules contributions non nulles de la deuxième somme sont celles telles que $\sigma(i) = i$ pour tout i hors de S . Notons $\tilde{\sigma}$ la restriction de σ à S et π la permutation partielle $(S, \tilde{\sigma})$. Les permutations σ et $\tilde{\sigma}$ ayant même signature, on trouve :

$$\det(1 - A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_k} \varepsilon(\pi) \prod_{i \in \text{supp}(\pi)} (-A_{i, \pi(i)}).$$

On en tire :

$$\det(1 - A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_k} (-1)^{\text{cyc}(\pi)} \prod_{i \in \text{supp}(\pi)} A_{i, \pi(i)}.$$

En utilisant le lien de la figure 2.2, cette dernière série s'interprète comme la série alternée des empilements triviaux de cycles. Ainsi, la série F définie plus haut est égale à $\det(1-A)$. En notant $\bar{\pi}$ le produit des $A_{i,\sigma(i)}$ pour i dans $\text{supp}(\pi)$, cela s'écrit :

$$F = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_k} (-1)^{\text{cyc}(\pi)} \bar{\pi}. \quad (2.5)$$

On a bien montré que les dénominateurs des expressions (2.2) et (2.3) sont les mêmes. Les numérateurs peuvent être traités de même.

2.1.4 Graphes avec une symétrie

On considère maintenant le cas où le graphe G possède une *symétrie*, c'est-à-dire une involution ϕ agissant sur les sommets de V laissant invariant le graphe, y compris le poids des arcs. Comme ϕ est une involution, on peut toujours trouver une partition $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ de l'ensemble des sommets telle que :

- V_0 est l'ensemble des points fixes de ϕ ;
- l'image par ϕ de V_1 est V_2 .

On note V' le quotient de $V_1 \cup V_2$ par l'involution ϕ , c'est-à-dire l'ensemble des paires $\{v, \phi(v)\}$ pour v dans V_1 . Par abus, si v est dans $V_1 \cup V_2$, on notera encore v sa classe d'équivalence.

Définition 2.6. On note G^+ le graphe dont les sommets sont $V^+ = V_0 \cup V'$, muni d'un arc $s \rightarrow t$ pour chaque arc $s \rightarrow t$ de G tel que s est dans $V_0 \cup V_1$.

On note G^- le graphe dont les sommets sont $V^- = V'$, muni :

- d'un arc $s \rightarrow t$, de poids \bar{a} , pour chaque arc $a: s \rightarrow t$ de G tel que s et t sont dans V_1 ;
- d'un arc $s \rightarrow t$, de poids $-\bar{a}$, pour chaque arc $a: s \rightarrow t$ de G tel que s est dans V_1 et t dans V_2 .

Les graphes G^+ et G^- sont appelés les graphes *réduits* de G correspondant à la partition $V_0 \cup V_1 \cup V_2$. Un exemple de construction de ces graphes est donné figure 2.3.

Le résultat qui suit montre que si le graphe G possède une symétrie, les séries génératrices F et W_{st} , définies précédemment, sont calculables à partir de séries analogues dans les graphes réduits. On note F^+ et F^- les séries comptant les configurations de cycles de G^+ et G^- , respectivement. De même, on note W_{st}^+ et W_{st}^- les séries comptant les chemins joignant la classe d'équivalence de s à celle de t .

Lemme 2.7. *La série F des empilements triviaux de cycles vaut :*

$$F = F^+ F^-.$$

De plus, soient s et t des sommets de V . La série W_{st} des chemins de s à t dans le graphe G est donnée par :

- si t est dans V_0 , alors

$$W_{st} = W_{st}^+;$$

- si s est dans V_0 et t n'est pas dans V_0 , alors

$$W_{st} = \frac{W_{st}^+}{2};$$

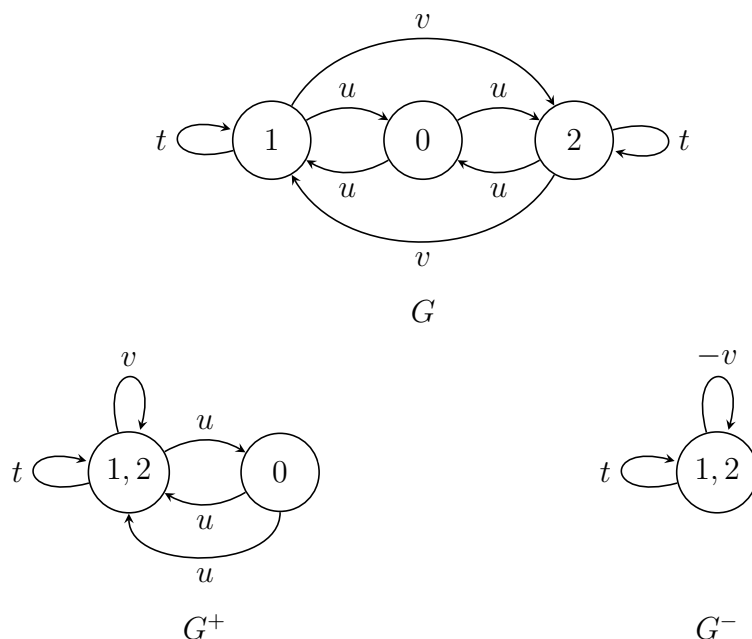


FIGURE 2.3 – En haut, le graphe G , où on a indiqué le poids des arcs. Ce graphe admet une symétrie laissant l'état 0 fixe et envoyant 1 sur 2. En bas à gauche, le graphe G^+ correspondant à cette symétrie ; les deux arcs de poids u joignant 0 à 1 et de 0 à 2 deviennent deux arcs de 0 à $\{1, 2\}$. En bas à droite, le graphe G^- ; l'arc de poids v joignant 1 à 2 devient un arc de poids $-v$ joignant $\{1, 2\}$ dans lui-même.

– si s et t sont dans V_1 ou s et t sont dans V_2 , alors

$$W_{st} = \frac{W_{st}^+ + W_{st}^-}{2} ;$$

– si s est dans V_1 et t dans V_2 ou vice versa, alors

$$W_{st} = \frac{W_{st}^+ - W_{st}^-}{2} .$$

Preuve. Soit A la matrice d'adjacence du graphe G . Le fait que G est invariant par l'involution ϕ implique que la matrice A est de la forme suivante, où les blocs correspondent aux ensembles V_0, V_1 et V_2 :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{00} & A_{01} & A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{10} & A_{12} & A_{11} \end{array} \right) .$$

Soit P la matrice de changement de base suivante :

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{array} \right) ,$$

où 1 désigne le bloc identité. La matrice inverse vaut

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 0 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right).$$

Dans cette nouvelle base, la matrice A s'écrit :

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{00} & 2A_{01} & 0 \\ \hline A_{10} & A_{11} + A_{12} & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{11} - A_{12} \end{array} \right).$$

On note A^+ et A^- les deux blocs de cette matrice :

$$A^+ = \left(\begin{array}{c|c} A_{00} & 2A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} + A_{12} \end{array} \right), \quad A^- = \left(A_{11} - A_{12} \right).$$

Ceci permet d'exprimer le déterminant F de la matrice $1 - A$:

$$F = \det(1 - A) = \det(1 - A^+) \det(1 - A^-).$$

On reconnaît dans A^+ et A^- les matrices d'adjacence des graphes G^+ et G^- , respectivement. Ainsi, on a bien l'égalité $F = F^+ F^-$.

Soit maintenant W , W^+ et W^- les pseudo-inverses $(1 - A)^{-1}$, $(1 - A^+)^{-1}$ et $(1 - A^-)^{-1}$, respectivement. On commence par écrire les décompositions en blocs de W^+ et W^- :

$$W^+ = \left(\begin{array}{c|c} W_{00}^+ & W_{01}^+ \\ \hline W_{10}^+ & W_{11}^+ \end{array} \right), \quad W^- = \left(W_{11}^- \right).$$

La décomposition en blocs de la matrice A permet d'écrire

$$P^{-1}WP = \left(\begin{array}{c|c|c} W_{00}^+ & W_{01}^+ & 0 \\ \hline W_{10}^+ & W_{11}^+ & 0 \\ \hline 0 & 0 & W_{11}^- \end{array} \right).$$

On en déduit l'expression suivante de la matrice W , par changement de base inverse :

$$W = \left(\begin{array}{c|c|c} W_{00}^+ & \frac{W_{01}^+}{2} & \frac{W_{01}^+}{2} \\ \hline W_{10}^+ & \frac{W_{11}^+ + W_{11}^-}{2} & \frac{W_{11}^+ - W_{11}^-}{2} \\ \hline W_{10}^+ & \frac{W_{11}^+ - W_{11}^-}{2} & \frac{W_{11}^+ + W_{11}^-}{2} \end{array} \right).$$

Le coefficient (i, j) des matrices W , W^+ et W^- étant égal à la série des chemins joignant i à j dans les graphes G , G^+ et G^- , on lit bien dans cette matrice les expressions de W_{st} du lemme. \square

Pour finir, nous déduisons du lemme 2.7 le résultat plus simple suivant.

Lemme 2.8. *Soit s un sommet quelconque de V . On a l'égalité*

$$\sum_{t \in V} W_{st} = \sum_{t \in V^+} W_{st}^+.$$

Preuve. Supposons tout d'abord que s est dans V_0 . En utilisant le lemme 2.7, on trouve

$$\sum_{t \in V} W_{st} = \sum_{t \in V_0} W_{st}^+ + \sum_{t \in V_1} \frac{W_{st}^+}{2} + \sum_{t \in V_2} \frac{W_{st}^+}{2}.$$

On rappelle que $\phi(V_2) = V_1$ et que $W_{s\phi(t)}^+ = W_{st}^+$ pour tout t dans V_1 . En regroupant la deuxième et la troisième, on trouve

$$\sum_{t \in V} W_{st} = \sum_{t \in V_0} W_{st}^+ + \sum_{t \in V_1} W_{st}^+.$$

Ceci permet de conclure.

Supposons maintenant que s est dans V_1 . Dans ce cas, on a

$$\sum_{t \in V} W_{st} = \sum_{t \in V_0} W_{st}^+ + \sum_{t \in V_1} \frac{W_{st}^+ + W_{st}^-}{2} + \sum_{t \in V_2} \frac{W_{st}^+ - W_{st}^-}{2}.$$

On procède de même que précédemment. Les termes en W_{st}^- s'annulant, on trouve à nouveau

$$\sum_{t \in V} W_{st} = \sum_{t \in V_0} W_{st}^+ + \sum_{t \in V_1} W_{st}^+.$$

Le cas où s est dans V_2 étant identique, ceci prouve le lemme. \square

Remarque. Dans cette thèse, nous ne considérons que le cas où l'automorphisme ϕ est une involution. Cependant, on peut considérer le cas plus général où le graphe G possède un groupe Γ d'automorphismes. Montrons que dans ce cas également, la série F des empilements triviaux se factorise.

Considérons l'espace E_V des combinaisons linéaires formelles de sommets de V . Via la matrice d'adjacence, on peut considérer l'ensemble A des arcs comme un endomorphisme de E_V . Soit γ une permutation de V . Le fait que γ est un automorphisme de G est équivalent au fait que les endomorphismes A et γ commutent.

Soit p l'application linéaire définie par

$$p = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma.$$

Le fait que Γ est un groupe implique que p est un projecteur ($p \circ p = p$). Par conséquent, les sous-espaces $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont supplémentaires dans E_V . De plus, l'endomorphisme A commutant avec tous les γ , il commute avec p , donc les sous-espaces $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par A . On a donc

$$F = \det(1 - A) = \det(1 - A|_{\text{Im } p}) \det(1 - A|_{\text{Ker } p}) = F^+ F^-.$$

Pour calculer les déterminants F^+ et F^- , il faut décrire une base de E_V compatible avec la décomposition $E_V = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et écrire la matrice A sur cette base. On obtient une matrice formée de deux blocs diagonaux A^+ et A^- , que l'on voit comme matrices d'adjacence de deux graphes G^+ et G^- . Les séries F^+ et F^- sont les séries alternées des empilements triviaux de cycles sur ces graphes. Ainsi, si s et t sont des sommets, on peut exprimer la série W_{st} en fonction de séries de chemins dans les graphes réduits G^+ et G^- .

2.2 Chemins de Łukasiewicz

Définition 2.9. Un *chemin de Łukasiewicz* est une excursion discrète à pas dans un ensemble S tel que $S \subseteq \{1\} \cup \mathbb{Z}^-$. Les pas de valeur 1 sont appelés *pas montants*; les pas de \mathbb{Z}^- sont des *pas descendants*.

Cette définition est légèrement différente de la notion habituelle de chemins de Łukasiewicz. Les pas contraints à être de hauteur 1 sont les pas montants, non les descendants; les excursions joignent les sommets 0 et 0, non 0 et -1 . Nous utilisons néanmoins la définition ci-dessus, en particulier parce qu'elle est plus commode pour traiter les chemins culminants.

2.2.1 Chemins généraux et empilements de segments

Soit S ensemble de pas inclus dans $\{1\} \cup \mathbb{Z}^-$. Quitte à attribuer le poids 0 à certains pas, nous supposons que l'ensemble des pas autorisés est $S = \{1\} \cup \mathbb{Z}^-$. Nous notons m le poids du pas montant 1 et d_s le poids du pas descendant $-s$. Soit $D(z)$ la série génératrice des poids des pas descendants :

$$D(z) = \sum_{s \geq 0} d_s z^s.$$

Les cycles élémentaires des chemins de pas dans S ont une forme particulière, due au fait que le seul pas montant est de hauteur 1. Un cycle élémentaire est toujours composé d'un unique pas descendant $-s$ et de s pas montants. Un tel cycle a pour poids $-m^s d_s$ et il occupe $s + 1$ sommets consécutifs. Par conséquent, un cycle contenant un pas descendant de valeur $-s$ peut être vu comme un *segment* de longueur s (voir chapitre 1.5.1). Cette correspondance est illustrée figure 2.4.

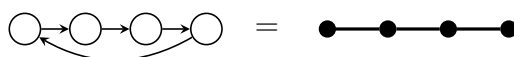


FIGURE 2.4 – Un cycle visitant 4 sommets et contenant un pas descendant de hauteur 3 est un segment de longueur 3.

Notons que la série

$$\sum_{s \geq 0} m^s d_s z^s$$

vaut $D(mz)$. Le résultat suivant, qui donne la série $F(z)$ définie par (2.1), est donc une application directe du lemme 1.31.

Théorème 2.10. *La série $F(z)$ associée à l'ensemble S est donnée par*

$$F(z) = \frac{1}{1 - z + zD(mz)}.$$

Le théorème ci-dessus permet de calculer les polynômes F_k , donc la série E_k des excursions de hauteur au plus k , qui vaut F_k/F_{k+1} . Notons que la série $F(z)$ est rationnelle dès que la série $D(z)$ l'est.

La série E , comptant les excursions sans contrainte de hauteur, est donnée par le résultat suivant.

Proposition 2.11. *La série E des excursions vérifie l'équation suivante :*

$$E = 1 + ED(mE).$$

Preuve. Soit α une excursion non vide. On considère le dernier pas de α . Ce pas est nécessairement descendant ; notons le $-s$. On obtient la factorisation suivante :

$$\alpha = \alpha'(-s).$$

On effectue à présent une décomposition de Catalan du chemin α' : on considère le dernier pas montant qui finit à hauteur i , pour tout $i = 1, \dots, s$. On obtient la décomposition suivante, illustrée figure 2.5 :

$$\alpha = \alpha_0 1 \alpha_1 1 \dots \alpha_s(-s).$$

Par construction, les chemins α_i sont tous des excursions. On obtient donc l'équation suivante sur la série E :

$$E = 1 + \sum_{s \geq 0} m^s E^{s+1} d_s.$$

La proposition s'ensuit. □

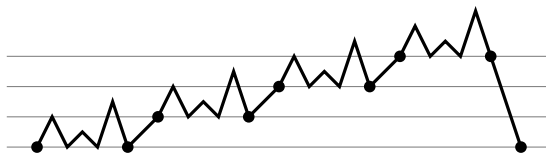


FIGURE 2.5 – Décomposition d'une excursion de dernier pas -3 . Cette décomposition implique 3 pas montants et 4 excursions.

On note à présent $E_{k,i}$ la série des chemins joignant 0 à i et ne visitant que des sommets entre 0 et k inclus.

Proposition 2.12. *La série $E_{k,i}$ vaut*

$$E_{k,i} = \frac{m^i F_{k-i}}{F_{k+1}}.$$

Appelons *pseudo-culminants* les chemins de hauteur k joignant 0 à k . D'après la proposition ci-dessus, la série $C_k = E_{k,k}$ des chemins pseudo-culminants de hauteur k vaut

$$C_k = \frac{m^k}{F_{k+1}}.$$

Preuve. On utilise la formule (2.3). Le seul chemin auto-évitant qui joint 0 à i est celui composé de i pas montants ; son poids est m^i et il visite les sommets $\{0, \dots, i\}$. On a donc

$$E_{k,i} = \frac{m^i F_{\{i+1, \dots, k\}}}{F_{k+1}}.$$

L'ensemble $\{i+1, \dots, k\}$ comptant $k-i$ sommets, la série $F_{\{i+1, \dots, k\}}$ vaut F_{k-i} . □

2.2.2 Chemins stricts

Dans cette chapitre, nous cherchons à énumérer les chemins *stricts*, définis ci-dessous, qui nous seront utiles dans le cadre de l'énumération de chemins auto-évitant et d'animaux.

Définition 2.13. Un chemin de Łukasiewicz est dit *strict* s'il ne contient pas deux pas descendants consécutifs.

Nous noterons E^* la série comptant les excursions strictes.

Proposition 2.14. *La série E^* vérifie*

$$E^* = 1 + D(mE^*).$$

Preuve. La preuve suit celle de la proposition 2.11. Soit α une excursion stricte non vide et $-s$ son dernier pas. L'excursion α étant stricte, ce pas ne peut être précédé d'un pas descendant. On trouve donc la décomposition suivante :

$$\alpha = \alpha_0 1 \alpha_1 1 \cdots \alpha_{s-1} 1 (-s).$$

Les chemins α_i , pour $i = 0, \dots, s-1$, sont tous des excursions strictes. On a donc

$$E^* = \sum_{s \geq 0} m^s (E^*)^s d_s,$$

ce qui termine la preuve. □

Notons maintenant $E_{k,i}^*$ la série des chemins stricts de hauteur au plus k joignant 0 à i . Le résultat suivant est l'analogue du théorème 2.10 et de la proposition 2.12 permettant de calculer les séries $E_{k,i}^*$.

Théorème 2.15. *La série $E_{k,i}^*$ est donnée par*

$$E_{k,i}^* = \frac{m^i F_{k-i-1}^*}{F_k^*},$$

où les séries F_k^* sont définies par

$$F^*(z) = \sum_{k \geq 0} F_k^* z^k = \frac{1}{1 - z + D(mz)}. \quad (2.6)$$

En particulier, on trouve la série $C_k^* = E_{k,k}^*$ des chemins stricts pseudo-culminants :

$$C_k^* = \frac{m^k}{F_k^*}.$$

Pour prouver ce résultat, nous utiliserons encore la bijection décrite dans la définition 2.2, qui transforme un chemin α en un couple (β, H) , où β est un chemin auto-évitant et H est un empilement de segments.

Nous aurons besoin de comprendre plus finement la structure de l'empilement H . En particulier, nous nous intéressons aux arcs terminaux du chemin α . Un arc $i \rightarrow i+s$ dans le graphe G_k sera dit montant (resp. descendant) si s est un pas montant (resp. descendant).

Lemme 2.16. Soit α un chemin joignant 0 à i dans le graphe G_k . Les arcs terminaux de α sont exactement les arcs descendants de α .

Preuve. Considérons la procédure décrite dans la définition 2.2. À chaque étape, nous avons un chemin auto-évitant β_{i-1} , qui joint 0 à un sommet j de G_k . L'unique chemin ayant cette propriété est composé de j pas montants et visite donc tous les sommets entre 0 et j .

On en déduit que si a_i est un arc montant, alors $\beta_{i-1}a_i$ est encore auto-évitant, de sorte que a_i n'est pas terminal; à l'inverse, si a_i est un arc descendant, le chemin $\beta_{i-1}a_i$ n'est jamais auto-évitant. L'arc a_i est donc terminal. \square

Lemme 2.17. Soit α un chemin de Łukasiewicz et (β, H) son image par f . Le chemin α est strict si et seulement si H n'a pas d'adjacence à droite.

La définition d'adjacence à droite peut être trouvée dans la chapter 1.5.2.

Preuve. Soit a et b deux arcs descendants de α tels que les arcs a et b de G_k sont consécutifs. Les lemmes 2.16 et 2.4 signifient que les arcs a et b sont consécutifs si et seulement si les cycles correspondants γ_a et γ_b sont tels que γ_a couvre γ_b dans l'empilement H .

On utilise maintenant la correspondance décrite figure 2.4, qui permet de voir les cycles γ_a et γ_b comme des segments. Le fait que les arcs descendants a et b sont consécutifs dans G_k signifie que les segments γ_b et γ_a sont adjacents à droite (figure 2.6). Ainsi, le chemin α possède deux arcs descendants consécutifs si et seulement si l'empilement H possède deux cycles γ_a et γ_b adjacents à droite tels que γ_a couvre γ_b . \square

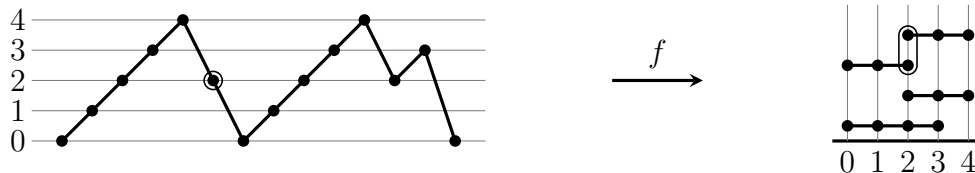


FIGURE 2.6 – À gauche, un chemin de Łukasiewicz. À droite, l'empilement de segments associé via la bijection f . Les segments correspondant aux deux pas descendants consécutifs sont adjacents à droite.

Preuve du théorème 2.15. Soit α un chemin strict joignant 0 à i dans le graphe G_k et soit (β, H) l'image de α par f (voir définition 2.2). Le seul chemin auto-évitant de 0 à i est composé de i pas montants, et visite les sommets $0, \dots, i$.

Le lemme 2.17 montre que l'empilement de segments H est sans adjacence à droite; de plus, ses segments minimaux sont concurrents à β . On remarque ensuite que l'ensemble des segments concurrents à β forment un segment initial pour l'ordre $<$ (si γ_a est concurrent à β et $\gamma_b < \gamma_a$, alors γ_b est concurrent à β). Le lemme 1.33 montre donc que l'on peut appliquer le théorème 1.16. Soit F_k^* la série des empilements quasi-triviaux de segments inclus dans V_k et $F_{[X]}^*$ la série des empilements quasi-triviaux de segments inclus dans un ensemble de sommets X . On a

$$E_{k,i}^* = \frac{m^i F_{\{i+1, \dots, k\}}^*}{F_{[0, \dots, k]}^*},$$

soit

$$E_{k,i}^* = \frac{m^i F_{k-i-1}^*}{F_k^*}.$$

La valeur de F_k^* est ensuite donnée par le lemme 1.34. \square

2.2.3 Chemins de Dyck et empilements de dimères

Les chemins de Łukasiewicz les plus simples sont ceux dont les pas sont dans $S = \{-1, 1\}$ et tels que chaque pas a pour poids t . De tels chemins sont appelés *chemins de Dyck* (figure 2.7). Les cycles élémentaires des chemins de Dyck sont tous composés d'un pas montant et d'un pas descendant, et leur poids est t^2 . De tels cycles peuvent se voir comme des *dimères* (voir chapitre 1.5.3). Le poids d'un dimère étant t^2 plutôt que t , les polynômes comptant les empilements triviaux sont $F_k(t^2)$, où les $F_k(t)$ sont les polynômes de Fibonacci (voir définition 1.37).

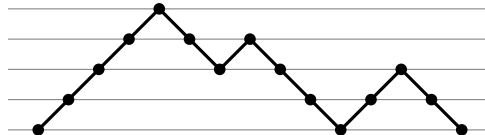


FIGURE 2.7 – Un chemin de Dyck de hauteur 4.

La proposition 2.11, quant à elle, donne l'équation suivante pour la série des excursions :

$$E = 1 + t^2 E^2.$$

De cette équation, on tire la valeur de E :

$$E = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2}}{2t^2}.$$

Les coefficients de cette série sont les *nombre de Catalan*, dont nous avons parlé dans l'introduction de la thèse.

La chapitre 1.5.3 présente une manière alternative d'obtenir les polynômes de Fibonacci, comme comptant des empilement quasi-triviaux de segments. Nous montrons ci-dessous une vision des chemins de Dyck analogue de ces empilements.

Considérons l'ensemble de pas $S = \{1\} \cup \mathbb{Z}_{<0}$, muni des poids $q_s = t^{|s|}$. Un chemin de Dyck peut être vu comme un chemin strict prenant de tels pas (donc un chemin strict de Łukasiewicz), en groupant tous les pas descendants consécutifs en un seul pas descendant.

Nous utilisons les résultats de la chapitre précédente pour énumérer ces chemins. Dans ce cadre, le poids m vaut toujours t , et la série $D(z)$ vaut

$$D(z) = \sum_{s \geq 1} t^{|-s|} z^s = \frac{tz}{1 - tz}.$$

proposition 2.14 montre que la série E^* des chemins de Dyck vérifie

$$E^* = 1 + \frac{t^2 E^*}{1 - t^2 E^*}.$$

On calcule également la série $F^*(z)$ définie dans la chapter 2.2.2 :

$$F^*(z) = \frac{1}{1 - z + \frac{t^2 z}{1 - t^2 z}} = \frac{1 - t^2 z}{1 - z + t^2 z^2}.$$

Ceci permet de calculer la série $E_{k,i}^*$ des chemins de hauteur au plus k joignant 0 à i , en utilisant le théorème 2.15 :

$$E_{k,i}^* = \frac{m^i F_{k-i-1}^*}{F_k^*}.$$

Ces deux méthodes sont bien sûr équivalentes : l'équation gouvernant la série E^* définit également la série des nombres de Catalan. De plus, les polynômes F_k^* sont définis par $F_0^* = 1$, $F_1^* = 1 - t^2$ et $F_k^* = F_{k-1}^* - t^2 F_{k-2}^*$ pour $k > 1$. Ainsi, ils sont identiques aux polynômes de Fibonacci $F_k(t^2)$.

2.3 Chemins prenant un nombre fini de pas

À présent, Nous nous intéressons aux chemins dont les pas montants peuvent être supérieurs à 1. Nous nous restreignons aux cas où l'ensemble des pas S autorisés est fini. Comme indiqué ci-dessus, la série $F(z)$ est dans ce cas rationnelle ($F(z) = N(z)/D(z)$). Nous développons une approche combinatoire qui nous permet d'interpréter les polynômes $N(z)$ et $D(z)$ et de déduire de nouveaux résultats dans le cas où l'ensemble S est *symétrique*, qui viennent s'ajouter à ceux de [6].

Nous faisons à nouveau la distinction entre les pas montants et descendants, en définissant les sous-ensembles

$$\begin{aligned} S^+ &= \{s : s \in S \text{ et } s > 0\}; \\ S^- &= \{-s : s \in S \text{ et } s < 0\}. \end{aligned}$$

Nous laissons de côté l'éventuel pas 0. De plus, suivant la notation de [6], nous notons a l'élément maximal de S^+ et b l'élément maximal de S^- .

2.3.1 Diagrammes de permutations

Soit π un empilement trivial de cycles, identifié à une permutation partielle via la bijection de la figure 2.2. Ainsi que le montre la figure 2.2, ces empilements ne sont pas aussi simples que pour les chemins de Łukasiewicz. Nous séparons les arcs de l'empilement π en trois catégories :

- des *arcs fixes* $i \rightarrow i$, si $0 \in S$;
- des *arcs montants*, de la forme $i \rightarrow i + s^+$ avec $s^+ \in S^+$;
- des *arcs descendants*, de la forme $i \leftarrow i + s^-$ avec $s^- \in S^-$.

Pour représenter l'empilement π , on placera les sommets sur une droite horizontale. Les arcs montants seront tracés au-dessus de cette droite et les arcs descendants seront tracés au-dessous, comme sur la figure 2.2. Le fait que π est un empilement trivial de cycles élémentaires entraîne que chaque sommet i appartient à l'un des six types suivants, illustrés figure 2.8 :

- i est un *sommet libre* : aucune arête n'est incidente à i ;

- i est un *point fixe* : un arc fixe est incident à i ;
- i est une *tête de cycle* : un arc montant sort de i , un arc descendant entre en i ;
- i est un *sommet transitoire haut* : deux arcs montants sont incidents à i , l'un entrant, l'autre sortant ;
- i est un *sommet transitoire bas* : deux arcs descendants sont incidents à i , l'un entrant, l'autre sortant ;
- i est une *queue de cycle* : un arc montant entre en i et un arc descendant en sort.

Enfin, nous considérerons un autre paramètre d'un empilement trivial de cycles, le nombre de *croisements stricts*. Un croisement strict est constitué de deux arcs qui se coupent sur le diagramme : soit deux arcs montants $i \rightarrow j$ et $i' \rightarrow j'$, soit deux arcs descendants $i \leftarrow j$ et $i' \leftarrow j'$. Dans les deux cas, ces arcs doivent vérifier $i < i' < j < j'$.

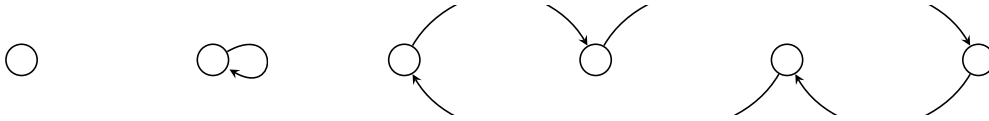


FIGURE 2.8 – Les six types de sommets possibles, de gauche à droite : sommet libre, point fixe, tête de cycle, sommet transitoire haut, sommet transitoire bas, queue de cycle.

Remarquons que le diagramme de la permutation inverse π^{-1} est obtenu en prenant le symétrique du diagramme de π par rapport à l'horizontale. Cette opération préserve les points fixes, têtes de cycle et queues de cycle.

On note $\text{fixe}(\pi)$ le nombre de points fixes de π , $\text{tête}(\pi)$ le nombre de têtes de cycles de π et $\text{crois}(\pi)$ le nombre de croisements stricts de π . Le résultat suivant permet de calculer le terme $(-1)^{\text{cyc}(\pi)}$ de la formule (2.5) en fonction de ces trois paramètres.

Lemme 2.18. *Toute permutation partielle π vérifie*

$$(-1)^{\text{cyc}(\pi)} = (-1)^{\text{fixe}(\pi) + \text{tête}(\pi) + \text{crois}(\pi)}.$$

Remarque. Les paramètres que nous avons introduits sont reliés à d'autres paramètres plus classiques. Suivant les définitions de [16], nous notons $\text{exc}(\pi)$ le nombre d'*excédances faibles* de π (têtes de cycles, sommets transitoires hauts et points fixes dans notre terminologie) et $\text{croi}(\pi)$ son nombre de *croisements* (croisements stricts et sommets transitoires hauts). Il découle des définitions que ces paramètres sont reliés par

$$\text{croi}(\pi) + \text{tête}(\pi) + \text{fixe}(\pi) = \text{crois}(\pi) + \text{exc}(\pi).$$

Le lemme ci-dessus se réécrit donc en

$$(-1)^{\text{cyc}(\pi)} = (-1)^{\text{exc}(\pi) + \text{croi}(\pi)}.$$

Preuve. Établissons le résultat par récurrence sur $\text{crois}(\pi)$. Supposons tout d'abord que la permutation π ne possède pas de croisement strict. Les cycles de π sont alors soit des points fixes, soit contiennent une tête de cycle, une queue de cycle, et un certain nombre de sommets transitoires (figure 2.9). On a donc

$$\text{cyc}(\pi) = \text{fixe}(\pi) + \text{tête}(\pi),$$

qui implique bien l'identité du lemme.

Supposons maintenant que π possède au moins un croisement strict. Supposons qu'il s'agit d'un croisement haut, donc deux arcs montants $a: i \rightarrow j$ et $a': i' \rightarrow j'$ tels que $i < i' < j < j'$ (si ce n'est pas le cas, on répète le raisonnement sur la permutation π^{-1}). Supposons de plus que i' est minimal, puis que i est maximal : ainsi, aucun arc qui part à un point entre i et i' ne croise a ou a' . Soit τ la transposition échangeant i et i' et considérons la permutation $\pi\tau$: dans cette nouvelle permutation, les arcs a et a' ne se croisent plus (figure 2.9). Les autres croisements sont inchangés, ce qui montre que $\text{crois}(\pi\tau) = \text{crois}(\pi) - 1$. De plus, multiplier par une transposition augmente ou diminue le nombre de cycles de 1. On trouve donc bien le résultat par hypothèse de récurrence. \square

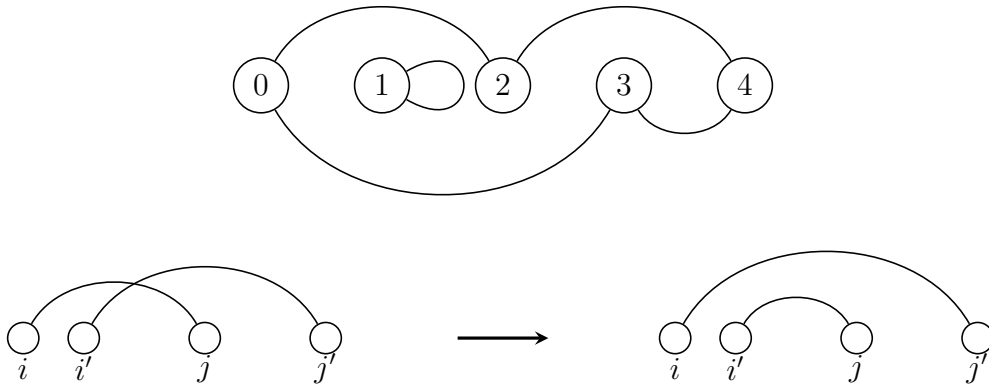


FIGURE 2.9 – En haut, une permutation sans croisement strict comportant deux cycles : l'un est un point fixe, l'autre contient une seule tête de cycle. En bas, l'opération de décroisement consistant à multiplier par la transposition (i, i') .

2.3.2 Cas général

Le résultat que nous allons montrer est le suivant, qui apparaît dans [6].

Théorème 2.19. *Soit $a = \max(S^+)$ et $b = \min(S^-)$ et soit $F(z)$ la série définie par (2.1). Il existe deux polynômes $D(z)$ et $N(z)$, de degrés en z respectifs $\binom{a+b}{a}$ et $\binom{a+b}{a} - a - b$, tels que*

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}.$$

Le terme dominant de $D(z)$ est

$$\pm q_a \binom{a+b-1}{a} q_{-b} \binom{a+b-1}{b} z \binom{a+b}{b}.$$

Le terme dominant de $N(z)$ est

$$\pm q_a \binom{a+b-1}{a}^{-b} q_{-b} \binom{a+b-1}{b}^{-a} z \binom{a+b}{b}^{-a-b}.$$

Comme indiqué précédemment, si E est la série comptant les excursions non bornées du modèle S et si $F(z)$ s'écrit comme dans le théorème, on a $D(E) = 0$. La série E est donc algébrique de degré au plus $\binom{a+b}{b}$.

Pour énumérer les empilements triviaux du graphe G_{k-1} , nous construisons un automate fini qui construit successivement les arcs incidents à chaque sommet. Soit π un empilement trivial de cycles et i un entier entre 0 et k . On note π_i l'ensemble des arcs de π incidents à au moins un élément de $\{0, \dots, i-1\}$ (figure 2.10). Ainsi, on a $\pi_0 = \emptyset$ et $\pi_k = \pi$. De plus, notons $\bar{\pi}_i$ le produit des poids des arcs de π_i et $f_i(\pi)$ la quantité

$$f_i(\pi) = (-1)^{\text{fixe}(\pi_i) + \text{tête}(\pi_i) + \text{crois}(\pi_i)} \bar{\pi}_i.$$

Le lemme 2.18 implique que

$$f_k(\pi) = (-1)^{\text{cyc}(\pi)} \bar{\pi},$$

ce qui, combiné avec la formule (2.5), donne

$$F_k = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_k} f_k(\pi). \quad (2.7)$$

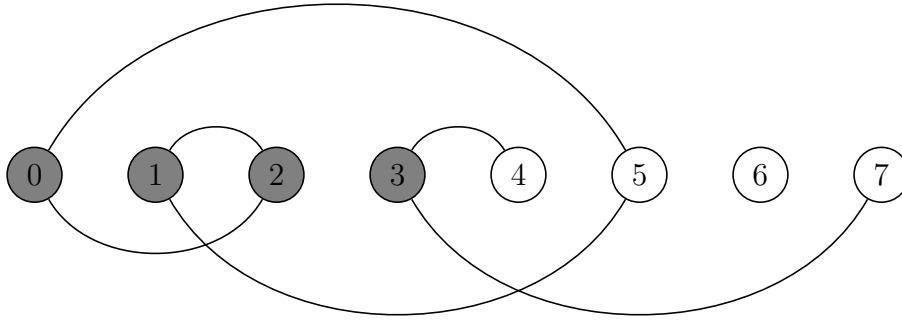


FIGURE 2.10 – Le diagramme π_4 correspondant à un empilement trivial de cycles. Il contient tous les arcs incidents à un sommet grisé. L'ensemble A_4 est $\{4, 5\}$; l'ensemble B_4 est $\{5, 7\}$.

En supposant construits le diagramme π_i et la quantité f_i , nous allons montrer comment construire les éléments suivants π_{i+1} et f_{i+1} . Nous notons A_i (resp. B_i) l'ensemble des sommets supérieurs ou égaux à i qui sont points d'arrivée (resp. de départ) des arcs de π_i (figure 2.10). En particulier, aux points $i = 0$ et $i = k$, on a $A_i = B_i = \emptyset$.

Pour construire les arcs incidents au sommet i , il nous faut décider à quel type ce sommet appartient (voir figure 2.8). Ce choix dépend des arcs de π_i qui sont déjà incidents à i , donc de si i appartient ou non à A_i et B_i . Le choix des arcs incidentes à i détermine ensuite les ensembles A_{i+1} et B_{i+1} . Les six cas à distinguer sont détaillés dans le tableau de la figure 2.11.

Si le sommet i est une tête de cycle ou un sommet transitoire haut, un nouvel arc montant de la forme $i \rightarrow i+s$ est créé. Bien sûr, l'élément $i+s$ ne doit pas être déjà dans l'ensemble A_i , sans quoi π ne serait pas un empilement trivial. De même, si i est une tête de cycle ou un sommet transitoire bas, un arc descendant de forme $i \leftarrow i+s$ est créé, avec $i+s \notin B_i$.

Cette remarque montre que si i est un sommet libre, fixe ou transitoire, le cardinal des ensembles A_i et B_i n'est pas affecté; si i est une tête de cycle, ces deux cardinaux augmentent d'un; si i est une queue de cycle, les deux cardinaux diminuent d'un. Par récurrence, on voit donc que le cardinal de A_i reste égal au cardinal de B_i . De plus, le fait que les pas

type de i	conditions	A_{i+1}	B_{i+1}
libre	$i \notin A_i$ $i \notin B_i$	A_i	B_i
point fixe	$i \notin A_i$ $i \notin B_i$	A_i	B_i
tête de cycle	$i \notin A_i$ $i \notin B_i$	$A_i \cup \{i + s^+\}$	$B_i \cup \{i + s^-\}$
transitoire haut	$i \in A_i$ $i \notin B_i$	$A_i \cup \{i + s\} \setminus \{i\}$	B_i
transitoire bas	$i \notin A_i$ $i \in B_i$	A_i	$B_i \cup \{i + s\} \setminus \{i\}$
queue de cycle	$i \in A_i$ $i \in B_i$	$A_i \setminus \{i\}$	$B_i \setminus \{i\}$

FIGURE 2.11 – Un résumé des six types de sommets décrits figure 2.8. Connaissant les ensembles A_i et B_i et le type du sommet i , on en déduit les ensembles A_{i+1} et B_{i+1} . Ce tableau gouverne les transitions du graphe \mathcal{A} .

de S^+ sont au plus a et les pas de S^- sont au plus b implique que $A_i \subseteq \{i, \dots, i + a - 1\}$ et $B_i \subseteq \{i, \dots, i + b - 1\}$.

Supposons maintenant qu'un arc montant $i \rightarrow i + s$ est créé. Un autre arc montant $i' \rightarrow j'$, avec $i' < i$, croise cet arc si $i < j' < i + s$; ceci implique que $j' \in A_i$. Ajouter l'arc $i \rightarrow i + s$ ajoute donc un croisement pour chaque élément j de A_i tel que $i < j < i + s$. De même, ajouter un arc descendant $i \leftarrow i + s$ ajoute un croisement pour chaque élément j de B_i tel que $i < j < i + s$.

Ainsi, il est possible de construire l'empilement trivial π et de calculer la quantité $f_k(\pi)$ en ne gardant en mémoire que les ensembles A_i et B_i . On note \tilde{A}_i et \tilde{B}_i les ensembles $A_i - i$ et $B_i - i$, respectivement, de sorte que $\tilde{A}_i \subseteq \{0, \dots, a - 1\}$ et $\tilde{B}_i \subseteq \{0, \dots, b - 1\}$.

Les remarques ci-dessus aboutissent à la construction d'un graphe \mathcal{A} , dont les chemins sont en bijection avec les empilements triviaux des graphes G_{k-1} . Pour éviter la confusion, nous utilisons le langage des automates pour parler du graphe \mathcal{A} , appelant *états* ses sommets et *transitions* ses arcs.

Définition 2.20. On note \mathcal{A} l'automate fini $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ défini comme suit.

- Les états de \mathcal{Q} sont les couples (A, B) , tels que $A \subseteq \{0, \dots, a - 1\}$, $B \subseteq \{0, \dots, b - 1\}$ et $|A| = |B|$.
- Les transitions de \mathcal{T} appartiennent à six catégories :
 - les sommets libres $(A, B) \rightarrow (A - 1, B - 1)$, tels que $0 \notin A$ et $0 \notin B$;
 - les points fixes $(A, B) \rightarrow (A - 1, B - 1)$, tels que $0 \notin A$, $0 \notin B$ et $0 \in S$;
 - les têtes de cycle $(A, B) \rightarrow (A \cup \{s^+\} - 1, B \cup \{s^-\} - 1)$, telles que $0 \notin A$, $0 \notin B$, $s^+ \in S^+ \setminus A$ et $s^- \in S^- \setminus B$;
 - les sommets transitoires hauts $(A, B) \rightarrow (A \cup \{s^+\} \setminus \{0\} - 1, B - 1)$, tels que $0 \in A$, $0 \notin B$ et $s^+ \in S^+ \setminus A$;
 - les sommets transitoires bas $(A, B) \rightarrow (A - 1, B \cup \{s^-\} \setminus \{0\} - 1)$, tels que $0 \notin A$, $0 \in B$ et $s^- \in S^- \setminus B$;
 - les queues de cycle $(A, B) \rightarrow (A \setminus \{0\} - 1, B \setminus \{0\} - 1)$, avec $0 \in A$ et $0 \in B$.
- Le poids d'une transition $t = (A, B) \rightarrow (A', B')$ est $\varepsilon f_0 f^+ f^-$, avec :
 - ε vaut -1 si t est un point fixe ou une tête de cycle, 1 sinon;
 - si t est un point fixe, f_0 vaut q_0 (le poids du pas 0 de S); sinon, f_0 vaut 1 ;
 - si t est une tête de cycle ou un sommet transitoire haut, f^+ vaut $(-1)^c q_{s^+}$ où c est

- le nombre d'éléments de A différents de 0 et inférieurs à s^+ ; sinon, f^+ vaut 1;
- si t est une tête de cycle ou un sommet transitoire bas, f^- vaut $(-1)^c q_{s^-}$ où c est le nombre d'éléments de B différents de 0 et inférieurs à s^- ; sinon, f^- vaut 1.

On note également Q_0 l'état (\emptyset, \emptyset) de \mathcal{Q} .

Un exemple de la construction de l'automate \mathcal{A} est donné figure 2.12. Le nombre d'états de cet automate est

$$|\mathcal{Q}| = \sum_{j=0}^{\min(a,b)} \binom{a}{j} \binom{b}{j},$$

que nous réécrivons en

$$|\mathcal{Q}| = \sum_{j=0}^{\min(a,b)} \binom{a}{j} \binom{b}{b-j}.$$

L'identité de Chu-Vandermonde (choisir j éléments parmi a puis $b - j$ éléments parmi b est équivalent à choisir b éléments parmi $a + b$) donne donc

$$|\mathcal{Q}| = \binom{a+b}{b}. \tag{2.8}$$

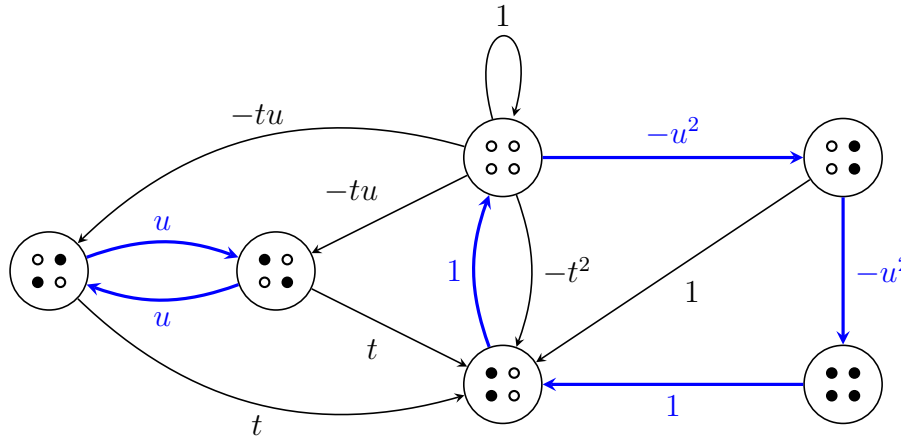


FIGURE 2.12 – L'automate \mathcal{A} correspondant à l'ensemble $S = \{-2, -1, 1, 2\}$, muni des poids $q_{-1} = q_1 = t$ et $q_{-2} = q_2 = u$. Dans chaque état, la ligne du haut représente l'ensemble A (les éléments de A sont représentés par un \bullet et les éléments hors de A par un \circ), tandis que la ligne du bas représente l'ensemble B . Les deux ensembles sont inclus dans $\{0, 1\}$. En trait épais, l'unique empilement trivial de cycles passant par tous les états de \mathcal{A} (voir lemme 2.23). Son poids est u^6 .

En utilisant ce qui précède, on aboutit au résultat suivant.

Lemme 2.21. *Les empilements triviaux de cycles du graphe G_{k-1} sont en bijection avec les chemins allant de Q_0 à Q_0 et de longueur k dans l'automate \mathcal{A} . De plus, le poids du chemin correspondant à l'empilement π est la quantité $f_k(\pi)$.*

Ce lemme permet d'utiliser les résultats de la chapter 2.1 pour prouver le théorème 2.19. Pour cela, nous définissons trois suites d'états de l'automate \mathcal{A} . Nous supposerons que

$b \leq a$. Posons

$$\begin{aligned} P_j &= (\{0, \dots, j-1\}, \{0, \dots, j-1\}), & 0 \leq j \leq b; \\ Q_j &= (\{a-j, \dots, a-1\}, \{b-j, \dots, b-1\}), & 0 \leq j \leq b; \\ R_j &= (\{j, \dots, j+b-1\}, \{0, \dots, b-1\}), & 0 \leq j \leq a-b. \end{aligned}$$

Les égalités $P_0 = Q_0$, $Q_b = R_{a-b}$ et $R_0 = P_b$ montrent que ces trois suites couvrent en tout $a+b$ états (figure 2.13).

Lemme 2.22. *Soit Π un empilement trivial de cycles élémentaires de l'automate \mathcal{A} qui ne visite pas le sommet Q_0 . L'empilement Π ne visite aucun des états Q_j , ni aucun des R_j , ni aucun des P_j .*

Preuve. Soit (A, B) un état tel que $0 \in A$ et $0 \in B$. Par définition, toute transition sortant de (A, B) est une queue de cycle et mène à $(A-1, B-1)$. En particulier, la seule transition sortant de l'état P_j , pour $j > 0$, mène à P_{j-1} . Ceci prouve que tout cycle contenant l'un des P_j contient P_0 , qui est Q_0 .

Soit maintenant (A, B) un état tel que $a-1 \in A$ et $b-1 \in B$; soit $t: (A', B') \rightarrow (A, B)$ une transition qui mène vers cet état. L'ensemble A' est inclus dans $\{0, \dots, a-1\}$, donc $a-1$ n'est pas dans $A'-1$; de même, $b-1$ n'est pas dans $B'-1$. La seule possibilité est donc que t est une tête de cycle, avec $A' = A \setminus \{a-1\} + 1$ et $B' = B \setminus \{b-1\} + 1$. En particulier, la seule transition arrivant à Q_j , pour $j > 0$, est une tête de cycle venant de Q_{j-1} . Ceci prouve que tout cycle contenant l'un des Q_j contient Q_0 .

Enfin, soit (A, B) un état tel que $B = \{0, \dots, b-1\}$ mais $0 \notin A$. Toute transition partant de (A, B) doit être un état transitoire bas. Tous les points de $\{1, \dots, b-1\}$ étant déjà dans b , seul le pas $s^- = b$ est possible. L'état d'arrivée de cette transition est $(A-1, B)$. En particulier, la seule transition partant de R_j , pour $j > 0$, arrive en R_{j-1} . Ceci prouve que tout cycle contenant l'un des R_j contient R_0 , c'est-à-dire P_b ; on a déjà établi qu'un tel cycle contient Q_0 . \square

Lemme 2.23. *Il existe un unique empilement trivial de cycles Π de l'automate \mathcal{A} visitant tous les états. Son poids est, au signe près,*

$$\bar{\Pi} = \pm q_a^{\binom{a+b-1}{a}} q_{-b}^{\binom{a+b-1}{b}}.$$

De plus, les états P_j , Q_j et R_j définis ci-dessus sont les états d'un cycle élémentaire Γ_0 de Π . Ce cycle est de poids

$$\bar{\Gamma}_0 = \pm q_a^b q_{-b}^a.$$

Preuve. Soit Π un empilement trivial de cycles visitant chaque état, que l'on peut donc voir comme une permutation de l'ensemble des états. Soit M le nombre d'arcs montants de longueur a contenus dans les transitions de Π (c'est-à-dire le nombre de têtes de cycle et sommets transitoires hauts avec $s^+ = a$). Soit (A, B) un état tel que $a-1 \in A$. Toute transition qui arrive dans un tel état doit contenir un arc montant de longueur a . Le nombre d'états (A, B) tels que $a-1 \in A$ est

$$\sum_{j \geq 1} \binom{a-1}{j-1} \binom{b}{j}.$$

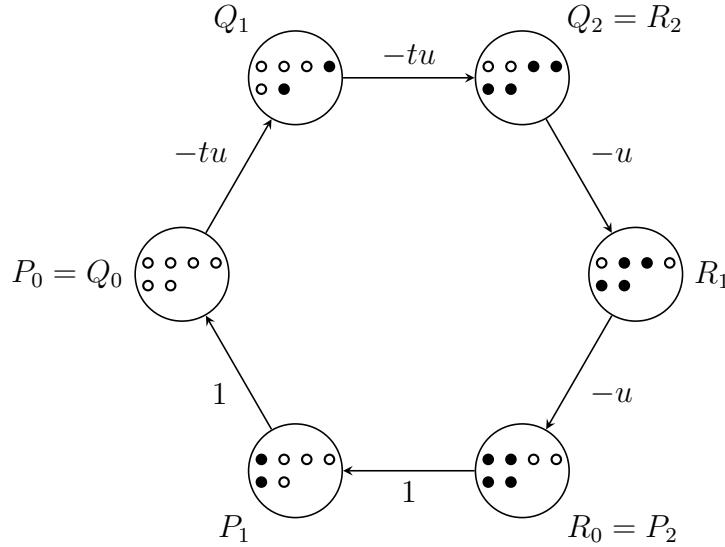


FIGURE 2.13 – Les états P_j , Q_j et R_j pour $a = 4$, $b = 2$, $q_4 = t$ et $q_{-2} = u$. Ces états forment un cycle élémentaire de l'automate \mathcal{A} , de poids t^2u^4 . De plus, tout cycle élémentaire qui contient un quelconque de ces états contient aussi l'état Q_0 .

On a donc, puisque Π visite chaque état,

$$M \geq \sum_{j \geq 1} \binom{a-1}{j-1} \binom{b}{j} = \sum_{j \geq 1} \binom{a-1}{a-j} \binom{b}{j} = \binom{a+b-1}{a}.$$

De plus, si une transition contenant un arc montant part d'un état (A, B) , on doit avoir $0 \notin B$. On a donc, de la même manière

$$M \leq \sum_{j \geq 0} \binom{a}{j} \binom{b-1}{j} = \sum_{j \geq 0} \binom{a}{a-j} \binom{b-1}{j} = \binom{a+b-1}{a}.$$

Les inégalités ci-dessus sont donc des égalités, ce qui signifie que toutes les transitions de Π partant d'un état (A, B) tel que $0 \notin B$ contiennent un arc montant de longueur a .

On répète le même raisonnement sur les arcs descendants de longueur b . Leur nombre est

$$\binom{a+b-1}{b}.$$

Les remarques précédentes déterminent entièrement les transitions partant de n'importe quel état (A, B) :

- si $0 \in A$ et $0 \in B$, la transition partant de (A, B) est une queue de cycle ;
- si $0 \in A$ et $0 \notin B$, la transition partant de (A, B) est un sommet transitoire haut dont l'arc est de longueur a ;
- si $0 \notin A$ et $0 \in B$, la transition partant de (A, B) est un sommet transitoire bas dont l'arc est de longueur b ;
- si $0 \notin A$ et $0 \notin B$, la transition partant de (A, B) est une tête de cycle dont les arcs sont de longueurs a et b .

Le nombre d'états (A, B) tels que $0 \notin A$ étant $\binom{a+b-1}{a}$ et le nombre d'états (A, B) tels que $0 \notin B$ étant $\binom{a+b-1}{b}$, le poids des transitions de Π est bien celui annoncé.

Pour vérifier que le Π ainsi construit est bien un empilement trivial, on examine un état (A, B) et on montre qu'il existe une unique transition de Π arrivant en (A, B) . Pour cela, on utilise le fait que tous les arcs montants des transitions de Π sont de longueur a , tandis que tous les arcs descendants sont de longueur b . Ainsi, une transition arrivant en (A, B) contient un arc montant si et seulement si $a - 1$ est dans A ; la même transition contient un arc descendant si et seulement si $b - 1$ est dans B . Ceci détermine bien de manière unique la transition et montre que Π est un empilement trivial.

Enfin, on vérifie aisément que le cycle

$$Q_0 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_b = R_{a-b} \rightarrow \cdots \rightarrow R_0 = P_b \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 = Q_0$$

est un cycle de Π ayant le poids $q_a^b q_{-b}^a$. Un exemple de la permutation Π est donné figure 2.12. \square

Preuve du théorème 2.19. Le lemme 2.21 montre que $F(z)$ peut se voir comme la série génératrice des chemins joignant Q_0 à Q_0 dans l'automate \mathcal{A} . Nous calculons cette série à l'aide de la formule (2.4). Pour tenir compte de la longueur des chemins dans l'automate \mathcal{A} , nous ajoutons un poids z à toutes les transitions. Soit $D(z)$ le polynôme comptant les empilements triviaux de cycles de \mathcal{A} et $N(z)$ le polynôme comptant les empilements triviaux ne visitant pas l'état Q_0 .

Le lemme 2.23 montre que le degré de $D(z)$ est égal au nombre d'états de \mathcal{A} , soit $\binom{a+b}{b}$; il fournit également le terme dominant du polynôme $D(z)$. D'après le lemme 2.22, la série $N(z)$ compte des empilements triviaux de cycles de l'automate \mathcal{A} privé de $a + b$ états. Le lemme 2.23 fournit ainsi le degré et le terme dominant du polynôme $N(z)$. \square

2.3.3 Ensembles de pas symétriques

Définition 2.24. Un ensemble de pas S est *symétrique* si $-S = S$ et si, pour tout s de S , les pas s et $-s$ ont même poids.

Le résultat que nous allons montrer est le suivant.

Théorème 2.25. *Supposons que l'ensemble S est symétrique et soit $D(z)$ et $N(z)$ les polynômes du théorème 2.19. Ces deux polynômes ont un facteur commun :*

$$\begin{aligned} D(z) &= D^+(z)X(z); \\ N(z) &= N^+(z)X(z), \end{aligned}$$

de sorte que la série $F(z)$ s'écrit

$$F(z) = \frac{N^+(z)}{D^+(z)}.$$

De plus, les degrés des polynômes $D^+(z)$ et $N^+(z)$ sont respectivement d et $d - 2a$, avec

$$d = \frac{1}{2} \left[\binom{2a}{a} + 2^a \right].$$

Rappelons que, si $F(z)$ est une fraction rationnelle, son dénominateur est un polynôme annulateur de la série des excursions E . Bousquet-Mélou s'est également intéressée aux ensembles de pas finis symétriques dans [6]. Son principal résultat sur le sujet est le suivant.

Théorème 2.26. *Il existe un polynôme annulateur de la série E de degré 2^a .*

Soit $\widetilde{D}(z)$ le polynôme annulateur de Bousquet-Mélou. On observe expérimentalement que ce polynôme est un diviseur du polynôme $D^+(z)$:

$$D^+(z) = \widetilde{D}(z)Y(z).$$

Le facteur $Y(z)$ et le facteur $X(z)$ du théorème 2.25 sont tous deux de degré $d - 2^a$. Toujours expérimentalement, on a en fait l'égalité $X(z) = Y(z)$. Je n'ai pas trouvé d'explication à ce fait remarquable. En revanche, la fraction rationnelle $N^+(z)/D^+(z)$ semble irréductible en général : le facteur $Y(z)$ ne divise pas $N^+(z)$.

Preuve du théorème 2.25. Pour prouver le théorème, nous considérons l'automate \mathcal{A} introduit précédemment. Soit ϕ l'involution sur les états de \mathcal{A} définie par $\phi(A, B) = (B, A)$. Puisque S est symétrique, l'automate \mathcal{A} est, par construction, invariant sous l'action de ϕ .

Soit \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}^- les *automates réduits* introduits dans la définition 2.6 ; appelons $D^+(z)$ et $D^-(z)$ les polynômes comptant les empilements triviaux de cycles dans ces graphes. Le lemme 2.7 affirme que

$$D(z) = D^+(z)D^-(z).$$

De plus, l'état $Q_0 = (\emptyset, \emptyset)$ est invariant sous l'action de ϕ . Soit $N^+(z)$ la série des empilements triviaux de cycles de \mathcal{A}^+ ne visitant pas l'état Q_0 . La formule (2.4) montre que la série des chemins de Q_0 à Q_0 dans l'automate \mathcal{A}^+ est

$$\frac{N^+(z)}{D^+(z)}.$$

Le lemme 2.7 affirme que cette série est $F(z)$, ce qui permet de conclure. \square

Le théorème 2.25 exploite le fait que si S est symétrique, l'automate \mathcal{A} l'est aussi. Nous présentons ci-dessous un autre résultat, exploitant cette fois le fait que le graphe G_k est symétrique. Ce résultat part du fait suivant, constaté par Bousquet-Mélou : considérons les polynômes de Fibonacci $F_k(t^2)$, associés à l'ensemble de pas $S = \{-1, 1\}$ des chemins de Dyck. Ces polynômes admettent, pour tout k , une factorisation :

$$F_k(t^2) = F_k^+(t)F_k^-(t).$$

De plus, soit $S_k(t)$ la série des chemins de hauteur au plus k et finissant à une hauteur quelconque. On peut écrire

$$S_k(t) = \sum_{i=0}^k E_{k,i}(t),$$

où $E_{k,i}(t)$ est la série des chemins finissant à hauteur i . Les résultats de la chapitre 2.1 montrent que la série $S_k(t)$ est rationnelle, de dénominateur $F_{k+1}(t^2)$. En réalité, on

constate une simplification : le dénominateur se réduit au facteur $F_{k+1}^+(t)$. Nous nous proposons d'expliquer ce fait.

Montrons tout d'abord les raisons de la factorisation du polynôme F_{k+1} . Soit ϕ l'involution agissant sur les sommets du graphe G_k définie par $\phi(i) = k - i$. Le fait que S est symétrique implique que G_k est invariant sous l'action de ϕ . Posons $V = \{0, \dots, k\}$ l'ensemble des sommets de G_k . On définit la partition suivante de V , selon la parité de k :

- si $k = 2\ell - 1$, on pose $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \{0, \dots, \ell - 1\}$ et $V_2 = \{\ell, \dots, 2\ell - 1\}$;
- si $k = 2\ell$, on pose $V_0 = \ell$, $V_1 = \{0, \dots, \ell - 1\}$ et $V_2 = \{\ell + 1, \dots, 2\ell\}$.

Dans les deux cas, l'ensemble des points fixes de ϕ est V_0 et $\phi(V_1) = V_2$. Ceci permet de définir les graphes réduits G_k^+ et G_k^- (définition 2.6). Ces graphes sont illustrés figure 2.14. Rappelons que la série des empilements triviaux de cycles de G_k est F_{k+1} ; notons F_{k+1}^+ et F_{k+1}^- les séries analogues sur les graphes réduits. Le lemme 2.7 montre bien la factorisation $F_{k+1} = F_{k+1}^+ F_{k+1}^-$.

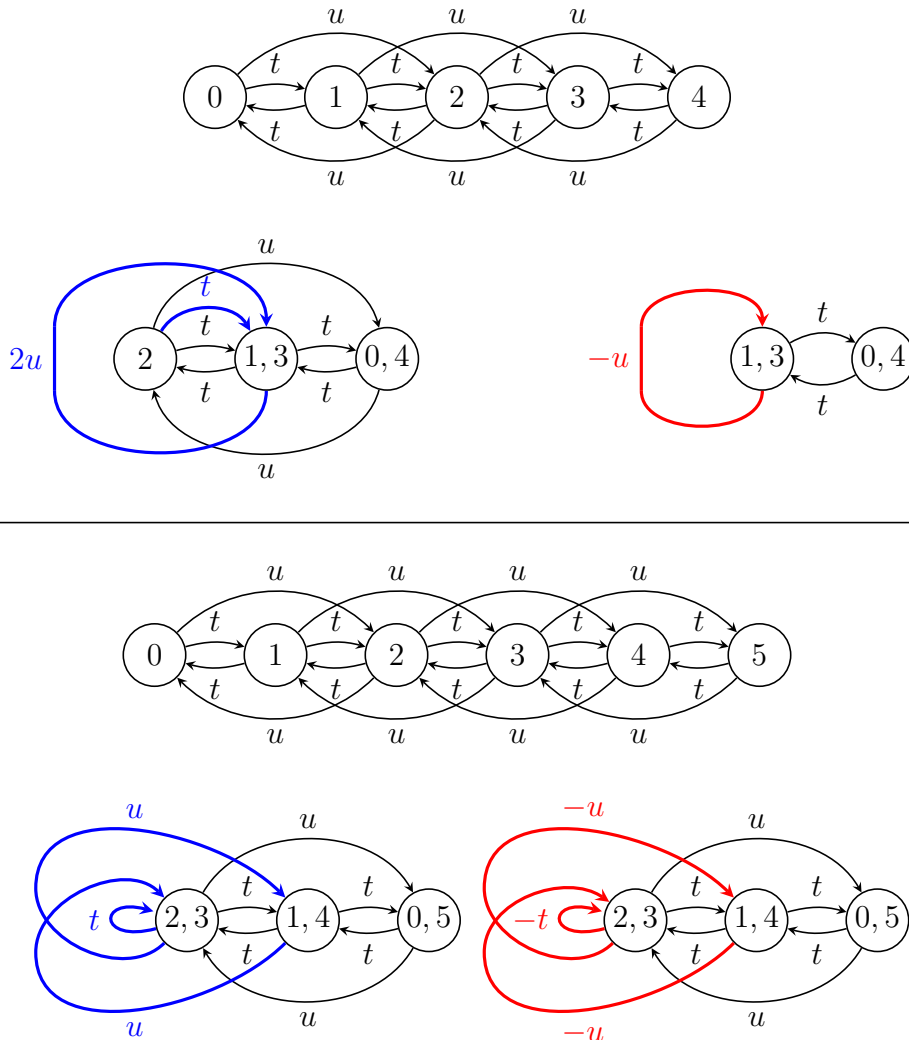


FIGURE 2.14 – En haut, les graphes G_4 , G_4^+ et G_4^- du modèle $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ de la figure 2.12. Le graphe réduit G_4^+ est identique à G_2 auquel on a ajouté deux arcs (en trait épais). Le graphe réduit G_4^- est identique à G_1 auquel on a ajouté un arc (en trait épais). En bas, les graphes G_5 , G_5^+ et G_5^- du même modèle. Les deux graphes réduits sont identiques au graphe G_2 auquel on a ajouté trois arcs.

Nous pouvons dès à présent expliquer le fait que, pour les chemins de pas dans $\{-1, 1\}$, le dénominateur de la série $S_k(t)$ est $F_{k+1}^+(t)$: notons $E_{k,i}^+$ la série des chemins joignant les sommets $\{0, k\}$ à $\{i, k-i\}$ dans le graphe G^+ . Le lemme 2.8 montre que

$$S_k(t) = \sum_{i=0}^{k/2} E_{k,i}^+.$$

On conclut en remarquant que toutes les séries $E_{k,i}^+$ ont pour dénominateur $F_{k+1}^+(t)$ d'après la formule (2.3).

Nous énonçons maintenant un résultat valable pour tous les ensembles de pas symétriques. Rappelons que E_k et C_k désignent respectivement la série génératrice des excursions et des chemins pseudo-culminants dans le graphe G_k .

Théorème 2.27. *Les séries E_k et C_k valent*

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\frac{F_k^+}{F_{k+1}^+} + \frac{F_k^-}{F_{k+1}^-} \right);$$

$$C_k = \frac{1}{2} \left(\frac{F_k^+}{F_{k+1}^+} - \frac{F_k^-}{F_{k+1}^-} \right).$$

De plus, les quatre séries génératrices

$$F_p^+(z) = \sum_{\ell \geq 0} F_{2\ell}^+ z^\ell,$$

$$F_p^-(z) = \sum_{\ell \geq 0} F_{2\ell}^- z^\ell,$$

$$F_i^+(z) = \sum_{\ell \geq 0} F_{2\ell-1}^+ z^\ell,$$

$$F_i^-(z) = \sum_{\ell \geq 0} F_{2\ell-1}^- z^\ell$$

sont rationnelles de dénominateur $D^+(z)$.

Pour prouver le théorème, nous commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 2.28. *Soit H un graphe dont l'ensemble des sommets est $\{0, \dots, j-1\}$. Pour $k \geq j$, soit $G_{k-1} + H$ le graphe de sommets $\{0, \dots, k-1\}$ et dont les arcs sont ceux de G_{k-1} et ceux de H (si $k < j$, on ne garde que les arcs joignant des sommets de G_{k-1}).*

Soit F_k^H la série des empilements triviaux de cycles de $G_{k-1} + H$, avec la convention $F_0^H = 1$. Soit $F^H(z)$ la série

$$F^H(z) = \sum_{k \geq 0} F_k^H z^k.$$

La série $F^H(z)$ est rationnelle de dénominateur $D^+(z)$.

Preuve. La contribution de la série F_k^H pour $k < j$ étant un polynôme, on peut se restreindre à étudier les graphes $G_{k-1} + H$ pour $k \geq j$. Dans ce cas, soit π un empilement trivial de cycles de $G_{k-1} + H$. On rappelle qu'on note π_j l'ensemble des arcs de π incidents à au moins un sommet de $\{0, \dots, j-1\}$.

Fixons ψ un ensemble d'arcs tel qu'il existe un empilement trivial π avec $\pi_j = \psi$. Soit $Q_\psi = (\tilde{A}_j, \tilde{B}_j)$ l'état de l'automate \mathcal{A} correspondant au diagramme ψ . L'ensemble des empilements triviaux π de G_k tels que $\pi_j = \psi$ est en bijection avec les chemins de longueur $k - j$ joignant l'état Q_ψ vers Q_0 dans l'automate \mathcal{A} .

Le nombre d'arcs incidents aux sommets $0, \dots, j - 1$ étant fini, le nombre de diagrammes possibles ψ est fini. Notons $W_\psi(z)$ la série des chemins joignant les états Q_ψ et Q_0 dans l'automate \mathcal{A} . On a

$$\sum_{k \geq j} F_k^H(z) z^k = \sum_{\psi} (-1)^{\text{fixe}(\psi) + \text{tête}(\psi) + \text{crois}(\psi)} |\psi| z^j W_\psi(z).$$

Le lemme 2.7 permet d'exprimer la série $W_\psi(z)$ en fonction de la série $W_\psi^+(z)$ comptant des chemins dans l'automate réduit \mathcal{A}^+ :

$$\sum_{k \geq j} F_k^H(z) z^k = \sum_{\psi} (-1)^{\text{fixe}(\psi) + \text{tête}(\psi) + \text{crois}(\psi)} |\psi| z^j W_\psi^+(z).$$

D'après la formule (2.3), la série W_ψ^+ est rationnelle de dénominateur $D^+(z)$, ce qui termine la preuve. \square

Preuve du théorème 2.27. Tout d'abord, notons que les graphes G_k^+ et G_k^- privés du sommet $\{0, k\}$ sont G_{k-1}^+ et G_{k-1}^- , respectivement. Les séries des empilements triviaux de cycles de G_k^+ et G_k^- étant respectivement F_{k+1}^+ et F_{k+1}^- , la formule (2.4) donne

$$W_{00}^+ = \frac{F_k^+}{F_{k+1}^+};$$

$$W_{00}^- = \frac{F_k^-}{F_{k+1}^-}.$$

Le sommet 0 étant dans V_1 et le sommet k dans V_2 , le lemme 2.7 donne les expressions de E_k et C_k .

L'ensemble S étant fini, le nombre d'arcs de G_k joignant V_1 à V_2 est indépendant de k si k est assez grand. Il existe donc quatre graphes H_p^+ , H_p^- , H_i^+ et H_i^- tels que, en utilisant la notation du lemme 2.28 :

$$G_{2\ell}^+ = G_\ell + H_p^+;$$

$$G_{2\ell}^- = G_{\ell-1} + H_p^-;$$

$$G_{2\ell-1}^+ = G_{\ell-1} + H_i^+;$$

$$G_{2\ell-1}^- = G_{\ell-1} + H_i^-.$$

Ces graphes sont illustrés figure 2.14. Le lemme 2.28 permet de conclure. \square

Le chapitre est organisé comme suit. La chapter 3.1 définit les chemins faiblement dirigés et en donne une caractérisation en termes de facteurs irréductibles. Nous définissons également une variante diagonale du modèle. Nous énumérons les chemins faiblement dirigés dans la chapter 3.2. La chapter 3.3 donne la nature des séries génératrices et le comportement asymptotique du nombre de chemins faiblement dirigés, ainsi qu'un algorithme de génération aléatoire uniforme de ponts faiblement dirigés. Enfin, nous proposons une nouvelle famille encore plus nombreuse de chemins dans la chapter 3.4.

3.1 Définitions

Dans tout le chapitre, nous considérerons les chemins comme des mots sur l'alphabet $\{N, S, E, O\}$. De plus, nous appellerons, par exemple, *chemin NSE* un chemin auto-évitant composé uniquement de pas N, S et E. Nous faisons de même pour tous les sous-ensembles de $\{N, S, E, O\}$.

3.1.1 Chemins faiblement dirigés

Le point de départ de la définition des chemins faiblement dirigés est le suivant : les chemins NEO et SEO sont caractérisés par le fait que le facteur entre deux points quelconques de même hauteur n'est composé que d'un seul type de pas (E ou O). Les chemins faiblement dirigés sont, de ce point de vue, une généralisation naturelle des chemins partiellement dirigés.

Définition 3.1. Un chemin est dit *faiblement dirigé* si le facteur situé entre deux points quelconques de même hauteur est partiellement dirigé.

En réalité, un chemin joignant deux points à la même hauteur doit contenir autant de pas Nord que de pas Sud. En conséquence, le facteur situé entre deux points de même hauteur d'un chemin faiblement dirigé est soit un chemin NSE, soit un chemin NSO.

3.1.2 Décomposition en facteurs irréductibles

La définition ci-dessus, bien que très simple et naturelle, n'est pas commode du point de vue de l'énumération, pour laquelle on préfère une présentation sous forme de décomposition en parties plus simples. Nous donnons maintenant une caractérisation des chemins faiblement dirigés faisant intervenir les ponts irréductibles définis plus haut. Un chemin faiblement dirigé n'étant pas nécessairement un pont, il nous faut tout d'abord définir une factorisation des chemins généraux en facteurs irréductibles.

Définition 3.2. Soit un chemin joignant les sommets v_0 et v_f . Ce chemin est dit *positif* si tous ses sommets v vérifient $h(v) \geq h(v_0)$. Il est dit *copositif* si tous ses sommets $v \neq v_f$ vérifient $h(v) < h(v_f)$.

Dans la suite, si α est un chemin, on note $\tilde{\alpha}$ le chemin *réciproque* de α . Ce chemin est obtenu en lisant α à l'envers et en remplaçant les pas N par des S, les E par des O et vice-versa. Géométriquement, prendre le chemin réciproque est équivalent à parcourir le chemin à l'envers.

Définition 3.3. Soit α un chemin non vide. Le chemin α est dit *réductible* s'il peut s'écrire sous la forme $\beta\gamma$, où β est copositif non vide et γ est positif non vide. Il est dit *coréductible* si $\tilde{\alpha}$ est réductible. Enfin, il est dit *irréductible* s'il n'est ni réductible ni coréductible.

Lemme 3.4. Soit α un chemin. Une et une seule des conditions suivantes est vérifiée :

1. α est vide ;
2. α est irréductible ;
3. α possède une unique factorisation de la forme $\beta\delta_1\cdots\delta_n\gamma$, où β est un chemin copositif irréductible, γ est un chemin positif irréductible, et les δ_i sont des ponts irréductibles ;
4. $\tilde{\alpha}$ possède une unique factorisation de la même forme que celle de la condition 3.

Pour prouver ce lemme, nous donnons une caractérisation plus simple des chemins réductibles. On appelle *séparateur* d'un chemin un pas N partant de la hauteur j et qui est seul dans sa ligne (c'est-à-dire qu'il est le seul à croiser la droite de hauteur $j + 1/2$). Un séparateur est *terminal* s'il est le dernier pas du chemin.

Lemme 3.5. Un chemin est réductible si et seulement si il contient un séparateur non terminal.

Preuve. Soit α un chemin. Si α s'écrit $\beta\gamma$ où β est copositif non vide et γ positif non vide, alors le dernier pas de β est un séparateur non terminal. Réciproquement, si α possède un séparateur non terminal, alors on construit la factorisation $\beta\gamma$ en coupant après ce séparateur. \square

Preuve du lemme 3.4. Supposons que le chemin α est non vide et joint les sommets v_0 et v_f . On remarque tout d'abord que si α est réductible, on a $h(v_0) < h(v_f)$; de même, si α est coréductible, on a $h(v_0) > h(v_f)$. Le chemin α ne peut donc être à la fois réductible et coréductible.

Supposons maintenant que α est réductible. On forme la factorisation $\alpha = \beta\delta_1\cdots\delta_n\gamma$ en coupant après chaque séparateur. Aucun des facteurs ne contenant de séparateur non terminal, chaque facteur est irréductible ; inversement, toute factorisation de ce type qui ne coupe pas après un séparateur contient un facteur réductible, ce qui prouve l'unicité.

Si α est coréductible, on répète le même raisonnement sur le chemin $\tilde{\alpha}$. \square

Le chemin α s'il est irréductible, et les chemins β , γ , et δ_i sinon sont appelés les *facteurs irréductibles* du chemin α .

Proposition 3.6. Un chemin est faiblement dirigé si et seulement si tous ses facteurs irréductibles sont partiellement dirigés.

La proposition est illustrée figure 3.2.

Preuve. Puisque les facteurs irréductibles d'un chemin vivent dans des bandes horizontales disjointes, le facteur situé entre deux points de même hauteur est inclus dans un seul facteur irréductible. Il est donc partiellement dirigé dès que tous les facteurs irréductibles le sont.

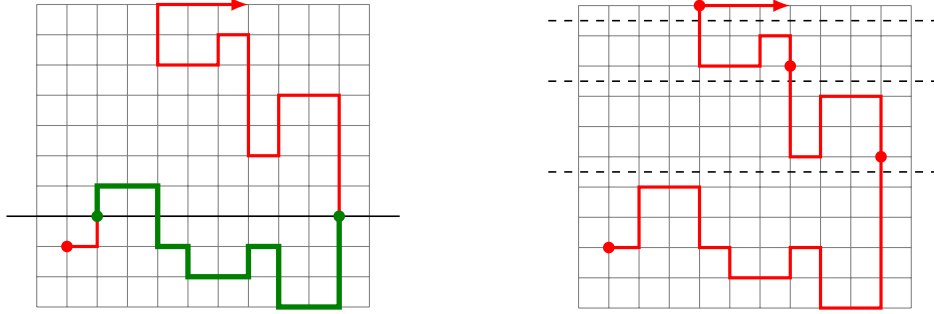


FIGURE 3.2 – Les deux caractérisations des chemins faiblement dirigés. À gauche, le facteur situé entre deux visites à la même hauteur est soit un chemin NSE, soit un chemin NSO. À droite, les quatre facteurs irréductibles sont soit des chemins NSE, soit des chemins NSO.

Réciproquement, considérons un chemin faiblement dirigé irréductible α . Nous montrons par l'absurde que ce chemin est soit un chemin NSE, soit un chemin NSO. Supposons qu'il contienne à la fois un pas E et un pas O. Dans ce cas, il contient un pas E et un pas O séparés uniquement par des pas N et S ; le chemin étant auto-évitant, ces pas sont en fait soit tous N, soit tous S. Par symétrie, supposons que le chemin α s'écrit

$$\alpha = \beta EN^j O \gamma.$$

Soit B l'intervalle des hauteurs visitées par le chemin β et C l'intervalle des hauteurs visitées par γ . Si B et C sont disjoints, le chemin α est réductible, car l'un des pas N de la factorisation ci-dessus est séparateur. S'ils visitent chacun un point à une même hauteur h , le facteur situé entre ces deux points contient des pas E, O et N, et donc aussi des pas S, donc n'est pas partiellement dirigé. C'est une contradiction. \square

3.1.3 Modèle diagonal

Nous introduisons également des chemins faiblement dirigés dans un modèle diagonal. Ce modèle repose sur une définition différente de hauteur : la hauteur d'un sommet est maintenant la somme de ses coordonnées. La définition des chemins faiblement dirigés est ensuite identique au modèle horizontal : un chemin est faiblement dirigé si le facteur situé entre deux points de même hauteur est partiellement dirigé. Pour éviter l'ambiguïté, nous appellerons *modèle horizontal* le modèle décrit ci-dessus où la hauteur d'un sommet est son ordonnée.

La nouvelle notion de hauteur permet également de définir des ponts. Le lemme 3.4 reste vrai, avec une preuve identique (les pas N et E pouvant tenir lieu de séparateur). De la même manière, tout chemin dont les facteurs irréductibles sont partiellement dirigés est faiblement dirigé. La réciproque, en revanche, n'est pas vraie, comme le montre le chemin de la figure 3.3.

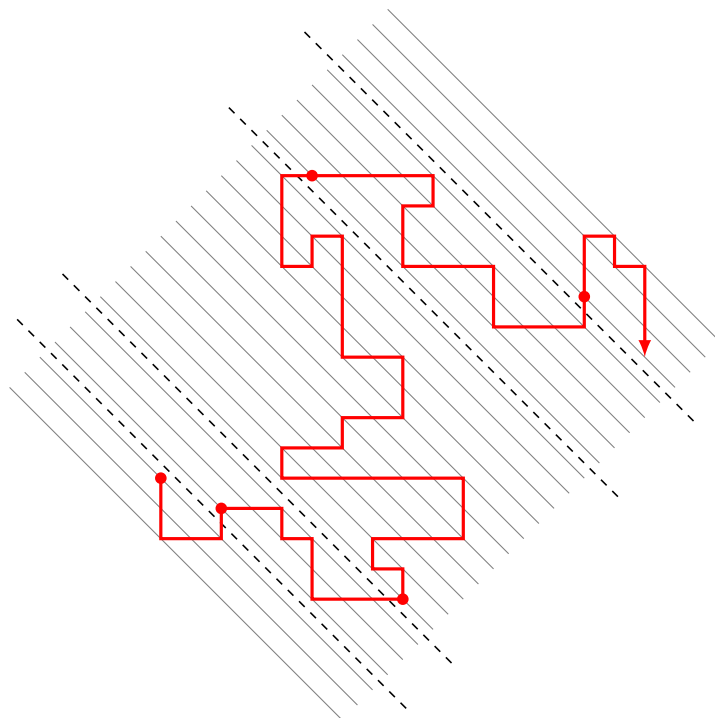


FIGURE 3.3 – Un chemin faiblement dirigé du modèle diagonal, découpé en cinq facteurs irréductibles. À noter que le troisième facteur n'est pas partiellement dirigé.

3.2 Énumération

3.2.1 Ponts partiellement dirigés

La proposition 3.6 montre que les chemins faiblement dirigés sont essentiellement des suites de facteurs partiellement dirigés irréductibles ; de plus, tous ces facteurs sauf le premier et le dernier sont des ponts. En conséquence, pour énumérer ces chemins, nous commençons par énumérer les ponts partiellement dirigés. Il est en fait plus agréable d'étudier les *pseudo-ponts*, ou chemins joignant v_0 à v_f tels que tout sommet v vérifie $h(v_0) \leq h(v) \leq h(v_f)$ (figure 3.4).

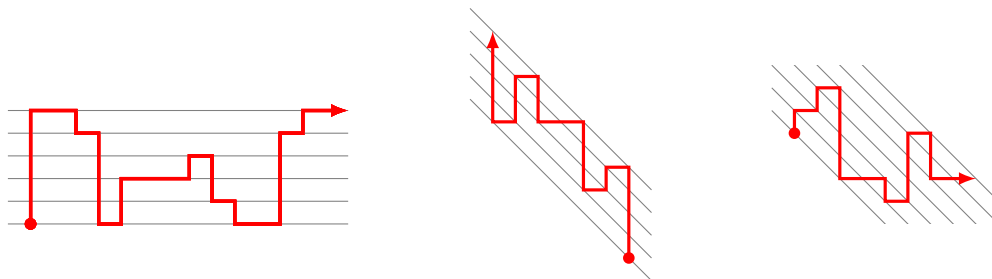


FIGURE 3.4 – À gauche, un pseudo-pont NSE du modèle horizontal. Au milieu, un pseudo-pont NSO du modèle diagonal. À droite, un pseudo-pont NSE du modèle diagonal.

Prenons l'exemple des ponts NSE dans le modèle horizontal. Attribuons la hauteur 1 au pas N, la hauteur -1 au pas S et la hauteur 0 au pas E. Un pseudo-pont NSE est alors, dans la terminologie du chapitre 2, un chemin *pseudo-culminant*. Cependant, la famille

des chemins NSE ne rentre pas directement dans le cadre de ce chapitre à cause de la condition d'auto-évitance, qui interdit les motifs NS et SN.

Pour contourner cette difficulté, nous donnons une autre manière de voir les chemins NSE. Nous dirons qu'un chemin NSE est *propre* s'il ne commence ni ne finit par un pas S. Cette restriction n'a pas d'importance, car tous les pseudo-ponts sont des chemins propres. Si α est un chemin NSE (donc auto-évitant) propre, nous appelons *facteur descendant* tout facteur situé strictement entre deux pas N consécutifs. On obtient ainsi une factorisation du chemin α en pas N et en facteurs descendants. Le chemin α étant auto-évitant et propre, tous les facteurs descendants sont des chemins SE propres. Le langage \mathcal{D} des facteurs descendants possibles est reconnu par l'expression régulière non ambiguë

$$\mathcal{D} = 1 + E + E(E + S)^*E. \quad (3.2)$$

De plus, par construction, la factorisation ne contient pas deux facteurs descendants consécutifs.

Nous pouvons maintenant compter les ponts partiellement dirigés du modèle horizontal. Nous avons montré que les facteurs irréductibles d'un chemin faiblement dirigé sont nécessairement des chemins NSE ou des chemins NSO. Par symétrie, nous nous contentons donc d'étudier les chemins NSE.

Proposition 3.7. *Soit $k \geq 0$. La série génératrice des pseudo-ponts NSE de hauteur k dans le modèle horizontal est*

$$\hat{B}_k(t) = \frac{t^k}{G_k(t)},$$

où les $G_k(t)$ sont les polynômes définis par

$$\begin{aligned} G_0(t) &= 1 - t, & G_1(t) &= 1 - 2t + t^2 - t^4, \\ G_k(t) &= (1 - t + t^2 + t^3)G_{k-1}(t) - t^2G_{k-2}(t) && \text{pour } k \geq 2. \end{aligned}$$

La série génératrice des ponts NSE vaut, quant à elle,

$$B(t) = 1 + t \sum_{k \geq 0} \hat{B}_k(t).$$

Preuve. Comme indiqué précédemment, nous factorisons les pseudo-ponts en isolant les pas N. Le facteur N a pour hauteur 1 dans le modèle horizontal, tandis qu'un facteur descendant β a pour hauteur $-|\beta|_S$, où $|\beta|_S$ est le nombre de pas S dans le chemin β . Ceci fait de l'ensemble de pas $\{\mathbf{N}\} \cup \mathcal{D}$ un modèle de chemins de Łukasiewicz ; deux facteurs descendants ne pouvant être consécutifs, les pseudo-ponts sont les chemins pseudo-culminants stricts de ce modèle.

Soit $D(t, z)$ la série génératrice des facteurs descendants, où t compte le nombre de pas et z la hauteur. L'expression régulière non ambiguë (3.2) se traduit en

$$D(t, z) = t + \frac{t^2}{1 - t - tz}.$$

Le théorème 2.15 donne donc

$$\hat{B}_k(t) = \frac{t^k}{G_k(t)},$$

où les polynômes G_k sont définis par

$$\sum_{k \geq 0} G_k(t) z^k = \frac{1}{1 - z + D(t, tz)} = \frac{1 - t - t^2 z}{1 - (1 - t + t^2 + t^3)z + t^2 z^2}.$$

On en déduit la formule de récurrence des polynômes $G_k(t)$. Enfin, un pont NSE est soit vide, soit un pseudo-pont NSE suivi d'un pas N. On en déduit la formule donnant $B(t)$. \square

Nous étudions maintenant le modèle diagonal. Dans ce modèle, il nous faut étudier quatre types de ponts : les ponts NSO, les ponts NSE, les ponts NEO (équivalents, *via* la symétrie par rapport à l'axe NE, aux ponts NSE) et les ponts SEO (équivalents aux ponts NSO).

Proposition 3.8. *Soit $k \geq 0$. La série génératrice des pseudo-ponts NSO de hauteur k dans le modèle diagonal est*

$$\hat{B}_k^1 = \frac{t^k}{G_k(t)},$$

où les polynômes $G_k(t)$ sont définis par

$$\begin{aligned} G_0(t) &= 1, & G_1(t) &= 1 - t^2, \\ G_k(t) &= (1 + t^2)G_{k-1}(t) - t^2(2 - t^2)G_{k-2}(t) && \text{pour } k \geq 2. \end{aligned}$$

La série des ponts NSO vaut

$$B^1(t) = 1 + t \sum_{k \geq 0} \hat{B}_k^1(t).$$

Preuve. Le cas des pseudo-ponts NSO est traité de la même manière que pour le modèle horizontal : les facteurs descendants sont les facteurs situés entre deux pas N consécutifs. La différence est que les pas O ont pour hauteur -1 dans le modèle diagonal, ce qui signifie qu'un facteur descendant β a pour hauteur $-|\beta|$. On obtient donc la série génératrice $D(t, z)$ des facteurs descendants

$$D(t, z) = tz + \frac{t^2 z^2}{1 - 2tz}.$$

Les polynômes $G_k(t)$ sont cette fois définis par

$$\sum_{k \geq 0} G_k(t) z^k = \frac{1 - 2t^2 z}{1 - (1 + t^2)z + t^2(2 - t^2)z^2},$$

ce qui donne bien la formule de récurrence de la proposition. De plus, un pont NSO est soit vide, soit un pseudo-pont suivi d'un pas N. \square

Proposition 3.9. *Soit $k \geq 0$. La série génératrice des pseudo-ponts NSE de hauteur k dans le modèle diagonal vaut*

$$\hat{B}_k^2 = (2 - t^2)^k \hat{B}_k^1(t),$$

où la série $\hat{B}_k^1(t)$ est donnée par la proposition 3.8. De plus, la série des ponts NSE vaut

$$B^2(t) = 1 + 2t \sum_{k \geq 0} \hat{B}_k^2(t).$$

Le cas des chemins NSE est plus compliqué, car le pas E a pour hauteur 1 dans le modèle diagonal. Les facteurs de \mathcal{D} n'ont donc plus nécessairement une hauteur négative, ce qui nous fait sortir du cadre des chemins de Łukasiewicz. Nous utilisons donc une méthode différente pour nous ramener au cas des chemins NSO.

Nous notons $E_k^2(t)$ la série des excursions NSE de hauteur au plus k (une excursion est un chemin positif terminant à hauteur 0). Nous notons également $E_k^*(t)$ la série des excursions NSO de hauteur au plus k ne finissant pas par S.

Lemme 3.10. *Les séries $E_k^2(t)$ et $E_k^*(t)$ sont liées par*

$$1 + E_k^2(t) = (2 - t^2)E_k^*(t).$$

Preuve. Soit α une excursion NSO de hauteur au plus k qui finit par NO ; écrivons $\alpha = \beta\text{NO}$. Le chemin β est alors une excursion qui ne termine pas par S, ce qui montre que l'excursion α est comptée par $t^2E_k^*(t)$.

On remarque ensuite que la série $E_k^2(t)$ compte également les excursions NSO : en effet, les excursions NSE sont exactement les chemins réciproques des excursions NSO. Le passage au chemin réciproque ne change ni la longueur, ni la hauteur.

Soit donc α une excursion NSO quelconque de hauteur au plus k . On distingue deux cas :
 – soit α ne finit pas par S : de telles excursions sont comptées par $E_k^*(t)$;
 – soit α s'écrit βS ; le chemin β ne finit donc pas par N. Soit $\alpha' = \beta\text{O}$: le chemin α' est une excursion finissant par O mais pas par NO. La remarque précédente montre que ces excursions sont comptées par $E_k^*(t) - 1 - t^2E_k^*(t)$.

Ajouter ces deux contributions permet d'établir le lemme. \square

Preuve de la proposition 3.9. Soit $k \geq 1$ et soit α un pseudo-pont NSO de hauteur k . On coupe α au dernier passage à hauteur 0. On trouve $\alpha = \beta\text{N}\gamma$, où γ est un pseudo-pont de hauteur $k - 1$ et β est une excursion de hauteur au plus k qui ne termine pas par S. On a donc

$$B_k^1(t) = tE_k^*(t)B_{k-1}^1(t).$$

Soit maintenant α un pseudo-pont NSE de hauteur k . On coupe α un pas après le dernier passage à la hauteur 0, ce qui donne $\alpha = \beta\gamma$, où γ est un pseudo-pont de hauteur $k - 1$ et β est soit N, soit une excursion de hauteur au plus k suivie d'un pas E (figure 3.5). On en déduit

$$B_k^2(t) = (t + tE_k^2(t))B_{k-1}^2(t).$$

Le lemme 3.10 permet de conclure.

Pour finir, un pont NSE est soit vide, soit un pseudo-pont suivi d'un pas N ou E. On en déduit la formule donnant $B^2(t)$. \square

Pour finir, nous énumérons également les ponts NO pour résoudre certaines ambiguïtés.

Proposition 3.11. *Soit $k \geq 0$. La série génératrice des pseudo-ponts NO de hauteur k dans le modèle diagonal est*

$$\hat{B}_k^0 = \frac{t^k}{F_k(t^2)},$$

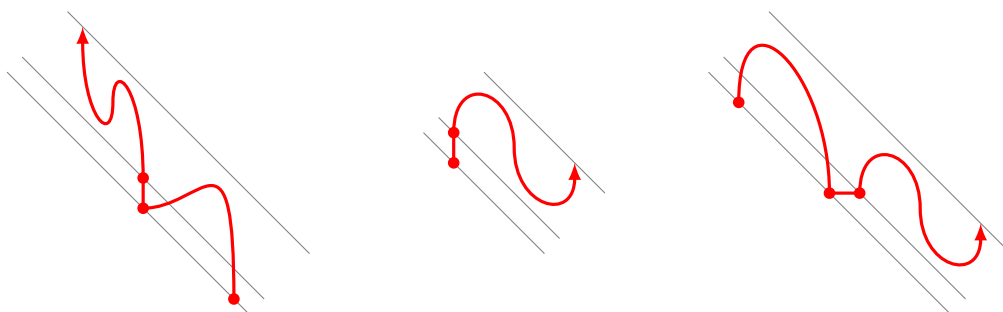


FIGURE 3.5 – À gauche, la factorisation des pseudo-ponts NSO. Au milieu et à droite, la factorisation des pseudo-ponts NSE : le premier facteur est soit un pas N (milieu), soit une excursion suivie d'un pas E (droite).

où les $F_k(t^2)$ sont les polynômes de Fibonacci évalués en t^2 (voir définition 1.37). De plus, la série des ponts NO est

$$B^0(t) = 1 + t \sum_{k \geq 0} \hat{B}_k^0(t).$$

Preuve. Le pas N ayant pour hauteur 1 et le pas O pour hauteur -1 , les pseudo-ponts NO sont identiques à des chemins de Dyck pseudo-culminants. La proposition découle donc des résultats de la chapitre 2.2.3. Le résultat apparaît par ailleurs tel quel dans [9]. \square

3.2.2 Ponts faiblement dirigés

Grâce aux ponts partiellement dirigés énumérés dans la chapitre précédente, nous pouvons maintenant énumérer les ponts faiblement dirigés du modèle horizontal. Pour le modèle diagonal, nous nous contentons d'énumérer les ponts composés de ponts irréductibles partiellement dirigés ; nous avons vu que tous ces ponts sont faiblement dirigés.

Proposition 3.12. *Dans le modèle horizontal, la série des ponts faiblement dirigés est donnée par*

$$W(t) = \frac{1}{1 + t - 2(1 - B(t))^{-1}},$$

où $B(t)$ est la série des ponts NSE donnée par la proposition 3.7.

Preuve. On utilise le fait que tout pont s'écrit de manière unique comme suite de ponts irréductibles. Si $I(t)$ est la série des ponts NSE irréductibles, on a

$$B(t) = \frac{1}{1 - I(t)}.$$

Un pont faiblement dirigé irréductible est, d'après la proposition 3.6, un pont irréductible NSE ou NSO. Le seul pont irréductible qui soit à la fois NSE et NSO est N. On a donc

$$W(t) = \frac{1}{1 - (2I(t) - t)}.$$

On en déduit la formule annoncée. \square

Proposition 3.13. *Dans le modèle diagonal, la série des ponts composés de ponts irréductibles partiellement dirigés est donnée par*

$$W^d(t) = \frac{1}{1 + 2t + 2(1 - B^0(t)^{-1}) - 2(1 - B^1(t)^{-1}) - 2(1 - B^2(t)^{-1})},$$

où les séries $B^0(t)$, $B^1(t)$ et $B^2(t)$ sont données par les propositions 3.11, 3.8 et 3.9 respectivement.

Preuve. Soit $I^0(t)$ et $I^1(t)$ et $I^2(t)$ les séries des ponts irréductibles NO, NSO et NSE respectivement. Un pont s'écrivant de manière unique comme une suite de ponts irréductibles, on a, pour $n \in \{0, 1, 2\}$,

$$B^n(t) = \frac{1}{1 - I^n(t)}.$$

Notons \mathcal{I}_{NSO} l'ensemble des ponts irréductibles NSO ; on utilise une notation similaire pour les autres ensembles de pas. Soit aussi \mathcal{I} l'ensemble des ponts irréductibles partiellement dirigés ; on a

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\text{NSO}} \cup \mathcal{I}_{\text{NSE}} \cup \mathcal{I}_{\text{SEO}} \cup \mathcal{I}_{\text{NEO}}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{NSO}} \cap \mathcal{I}_{\text{NSE}} &= \{\mathbf{N}\}, & \mathcal{I}_{\text{NSO}} \cap \mathcal{I}_{\text{SEO}} &= \emptyset, & \mathcal{I}_{\text{NSO}} \cap \mathcal{I}_{\text{NEO}} &= \mathcal{I}_{\text{NO}}, \\ \mathcal{I}_{\text{NSE}} \cap \mathcal{I}_{\text{SEO}} &= \mathcal{I}_{\text{SE}}, & \mathcal{I}_{\text{NSE}} \cap \mathcal{I}_{\text{NEO}} &= \{\mathbf{N}, \mathbf{E}\}, & \mathcal{I}_{\text{SEO}} \cap \mathcal{I}_{\text{NEO}} &= \{\mathbf{E}\}. \end{aligned}$$

Les ensembles \mathcal{I}_{NO} et \mathcal{I}_{SE} sont comptés par $I^0(t)$, les ensembles \mathcal{I}_{NSO} et \mathcal{I}_{SEO} sont comptés par $I^1(t)$, et les ensembles \mathcal{I}_{NSE} et \mathcal{I}_{NEO} sont comptés par $I^2(t)$. Un argument d'inclusion-exclusion élémentaire donne donc la série $I^d(t)$ des ponts partiellement dirigés

$$I^d(t) = 2I^1(t) + 2I^2(t) - 2I^0(t) - 2t.$$

On en déduit la formule pour $W^d(t)$. □

3.2.3 Chemins faiblement dirigés généraux

Nous énumérons maintenant les chemins faiblement dirigés qui ne sont pas nécessairement des ponts. Par souci de simplicité, nous nous limitons au modèle horizontal.

Lemme 3.14. *Soit $P(t)$ la série des chemins NSE positifs et $Q(t)$ celle des chemins NSE copositifs. Ces deux séries sont données par*

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2t^2} \left(\sqrt{\frac{1-t^4}{1-2t-t^2}} - 1 - t \right); \\ Q(t) &= 1 + tP(t). \end{aligned}$$

Preuve. Pour prouver ce résultat, nous utilisons une factorisation standard des chemins positifs. Nous appelons *excursion NSE* un chemin NSE qui commence et finit à hauteur 0 et dont tous les points ont une hauteur positive. Soit α un chemin NSE positif. Si α n'est pas une excursion, nous coupons α après son dernier passage à hauteur 0. Nous obtenons

$\alpha = \beta N \gamma$, où γ est un chemin positif et β est une excursion ne terminant pas par S, autrement dit, une excursion propre dans notre terminologie. Notons $E(t)$ la série des excursions NSE propres et $\bar{E}(t)$ la série des excursions générales. On trouve

$$P(t) = \bar{E}(t) + tE(t)P(t).$$

Pour calculer la série $E(t)$, nous voyons les excursions NSE propres comme des chemins stricts de Łukasiewicz en utilisant la factorisation évoquée précédemment. Nous utilisons la proposition 2.14, qui donne l'équation

$$E(t) = 1 + D(t, tE(t)),$$

où $D(t, z)$ est la série génératrice des facteurs descendants, qui vaut

$$D(t, z) = t + \frac{t^2}{1 - t - tz}.$$

On en déduit

$$E(t) = \frac{1 - t + t^2 + t^3 - \sqrt{(1 - t^4)(1 - 2t - t^2)}}{2t^2}.$$

Pour calculer $\bar{E}(t)$, on remarque qu'une excursion propre non vide est une excursion suivie d'un pas E, ce qui donne $E(t) = 1 + t\bar{E}(t)$. On en déduit la valeur de $P(t)$. Pour calculer $Q(t)$, on remarque qu'un chemin copositif non vide est obtenu comme l'image miroir en tant que mot d'un chemin positif suivie d'un pas N final. \square

Théorème 3.15. *La série des chemins faiblement dirigés du modèle horizontal vaut*

$$\bar{W}(t) = 1 + (2I_T(t) - 2t) + 2(2I_Q(t) - t)W(t)(2I_P(t) - t),$$

où les séries $I_T(t)$, $I_P(t)$ et $I_Q(t)$ comptent les chemins NSE irréductibles généraux, positifs et copositifs, respectivement, et sont données par

$$I_T(t) = T(t) - 1 - 2I_Q(t)B(t)I_P(t), \quad I_P(t) = \frac{P(t) - 1}{B(t)}, \quad I_Q(t) = \frac{Q(t) - 1}{B(t)},$$

où la série $T(t)$ est donnée par (3.1), la série $B(t)$ par la proposition 3.7 et les séries $P(t)$ et $Q(t)$ par le lemme 3.14.

Preuve. Notons $I_T(t)$, $I_P(t)$ et $I_Q(t)$ les séries génératrices des chemins NSE irréductibles généraux, positifs et copositifs respectivement. En décomposant les chemins NSE en facteurs irréductibles selon les quatre cas du lemme 3.4 et en remarquant qu'une suite de ponts irréductibles est un pont, on trouve

$$T(t) = 1 + I_T(t) + I_Q(t)B(t)I_P(t) + I_Q(t)B(t)I_P(t).$$

De plus, un chemin non vide est positif si et seulement si son premier facteur l'est ; un chemin est copositif si et seulement si son dernier facteur l'est. On en déduit

$$\begin{aligned} P(t) &= 1 + B(t)I_P(t); \\ Q(t) &= 1 + I_Q(t)B(t). \end{aligned}$$

Ceci donne les valeurs des séries $I_T(t)$, $I_P(t)$ et $I_Q(t)$.

Pour énumérer les chemins faiblement dirigés, on utilise le fait qu'un chemin est faiblement dirigé si et seulement si ses facteurs irréductibles sont des chemins NSE ou NSO (proposition 3.6). Les chemins NSO irréductibles sont comptés par les mêmes séries que les chemins NSE, par symétrie ; on remarque de plus que les seuls chemins irréductibles qui soient à la fois NSE et NSO sont N et S ; de plus, N est positif et copositif. Les séries des chemins irréductibles partiellement dirigés généraux, positifs et copositifs sont donc respectivement $2I_T(t) - 2t$, $2I_P(t) - t$ et $2I_Q(t) - t$. On en déduit la forme de la série $\overline{W}(t)$. \square

3.3 Applications

3.3.1 Asymptotique

Dans cette chapitre et la suivante, nous étudions des propriétés analytiques des séries calculées précédemment. Nous utilisons pour cela des résultats classiques d'analyse complexe. Nous commençons par remarquer que la série $T(t)$, comptant les chemins partiellement dirigés et donnée par (3.1), a pour rayon de convergence $\sqrt{2} - 1$. En d'autres termes, cette série est convergente dans le disque

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{2} - 1\}.$$

A fortiori, toutes les séries génératrices comptant des chemins partiellement dirigés sont également convergentes dans le disque \mathcal{D} .

Théorème 3.16. *Soit W_n le nombre de ponts faiblement dirigés de longueur n du modèle horizontal. On a, quand n tend vers l'infini,*

$$W_n \sim \kappa \mu^n,$$

avec $\mu \simeq 2,5447$.

Soit F_n le nombre de facteurs irréductibles d'un pont faiblement dirigé. L'espérance et la variance de F_n vérifient

$$\mathbb{E}(F_n) \sim \mathfrak{m}n, \quad \mathbb{V}(F_n) \sim \mathfrak{s}^2 n,$$

où $\mathfrak{m} \simeq 0,318$ et $\mathfrak{s}^2 \simeq 0,7$. La variable aléatoire $\frac{F_n - \mathfrak{m}n}{\mathfrak{s}\sqrt{n}}$ converge en probabilité vers une loi normale.

Ces résultats restent vrais pour les chemins faiblement dirigés généraux.

De ce résultat, on déduit que la distance moyenne entre les extrémités d'un chemin faiblement dirigé de longueur n croît linéairement, car cette distance est minorée par $\mathbb{E}(F_n)$.

Preuve. La proposition 3.12 donne la série $W(t)$ en fonction de la série $B(t)$ des ponts NSE. Cette série comptant des chemins partiellement dirigés, elle est convergente dans le disque \mathcal{D} défini ci-dessus, et $W(t)$ est méromorphe dans \mathcal{D} .

Soit $I(t)$ la série $2(1 - B(t)^{-1}) - t$ des ponts partiellement dirigés irréductibles. Dans le disque \mathcal{D} , la série $W(t)$ possède un pôle à chaque valeur de t telle que $I(t) = 1$. Supposons

qu'un tel pôle existe. La série $I(t)$ étant apériodique et à coefficients positifs, il existe un unique pôle dominant, qui est de plus réel positif et simple. Pour prouver l'existence de ce pôle, nous utilisons des bornes supérieures et inférieures de la série $I(t)$. Soit I_n et T_n le nombre de ponts partiellement dirigés irréductibles et de chemins NSE généraux, respectivement. On a $0 \leq I_n \leq 2T_n$, ce qui montre que

$$\sum_{m \leq n} I_m t^m = I^-(t) \leq I(t) \leq I^+(t) = \sum_{m \leq n} I_m t^m + \sum_{m > n} 2T_m t^m.$$

Notant $I_{\leq n}(t)$ et $T_{\leq n}(t)$ les sommes partielles jusqu'à l'ordre n des séries $I(t)$ et $T(t)$, on peut calculer les séries $I^-(t)$ et $I^+(t)$ de la façon suivante :

$$I^-(t) = I_{\leq n}(t), \quad I^+(t) = T(t) - (2T_{\leq n}(t) - I_{\leq n}(t)).$$

En utilisant ces bornes, nous montrons l'existence d'un pôle dominant, que nous notons ρ . Prendre $n = 300$ fournit 5 décimales exactes. Ceci prouve que $\rho < \sqrt{2} - 1$; comme le rayon de convergence de la série $I(t)$ est au moins $\sqrt{2} - 1$, ceci montre que les ponts faiblement dirigés forment une *séquence surcritique* [27, chapitre V.2].

On en déduit le comportement asymptotique annoncé de W_n , avec $\mu = 1/\rho$. De plus, soit $W(t, u)$ la série des ponts faiblement dirigés où u compte le nombre de facteurs irréductibles :

$$W(t, u) = \frac{1}{1 - uI(t)}. \quad (3.3)$$

Le comportement de F_n est donné par [27, proposition IX.7]. Les nombres \mathbf{m} et \mathbf{s} vérifient

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\rho I'(\rho)}, \quad \mathbf{s}^2 = \frac{I''(\rho) + I'(\rho) - I'(\rho)^2}{\rho I'(\rho)^3}.$$

Nous calculons les valeurs approchées de \mathbf{m} et \mathbf{s}^2 à partir de celle de ρ .

Intéressons-nous maintenant à la série $\overline{W}(t)$ des chemins faiblement dirigés généraux, donnée par le théorème 3.15. Les séries $I_P(t)$, $I_Q(t)$ et $I_T(t)$ comptent toutes des chemins NSE, donc sont convergentes dans \mathcal{D} . De plus, les séries $2I_Q(t) - t$ et $2I_P(t) - t$ sont strictement positives pour $t > 0$. La série $\overline{W}(t)$ a donc, comme $W(t)$, un unique pôle dominant dans \mathcal{D} , qui est ρ .

De plus, la série donnant les chemins faiblement dirigés généraux prenant en compte le nombre de facteurs irréductibles est

$$\overline{W}(t, u) = 1 + u(2I_T(t) - 2t) + 2u^2(2I_Q(t) - t)W(t, u)(2I_P(t) - t),$$

où $W(t, u)$ est donné par (3.3). Les résultats s'ensuivent. \square

Théorème 3.17. *Soit W_n^d le nombre de ponts du modèle diagonal de longueur n composés de ponts irréductibles partiellement dirigés. On a, quand n tend vers l'infini,*

$$W_n^d \sim \kappa \mu^n,$$

avec $\mu \simeq 2,5378$.

Soit F_n^d le nombre moyen de facteurs irréductibles d'un tel pont. L'espérance et la variance de F_n^d vérifient

$$\mathbb{E}(F_n^d) \sim \mathbf{m}n, \quad \mathbb{V}(F_n^d) \sim \mathbf{s}^2 n,$$

où $\mathbf{m} \simeq 0,395$ et $\mathbf{s}^2 = 1 \pm 2.10^{-3}$. La variable aléatoire $\frac{F_n^d - \mathbf{m}n}{\mathbf{s}\sqrt{n}}$ converge en probabilité vers une loi normale.

Preuve. Les arguments sont identiques à ceux de la preuve du théorème 3.16. Là encore, la série $W^d(t, u)$ s'écrit

$$W^d(t, u) = \frac{1}{1 - uI^d(t)},$$

où $I^d(t)$ compte les chemins partiellement dirigés irréductibles du modèle diagonal. La seule modification est la borne supérieure sur la série $I^d(t)$ que nous utilisons, qui est $I^d(t) \leq 4T(t)$ au lieu de $I(t) \leq 2T(t)$. \square

Remarque. Les théorèmes 3.16 et 3.17 montrent que la constante de croissance est légèrement supérieure dans le modèle horizontal. Il ne semble pas que ceci soit prévisible. Écrivons les séries $W(t)$ et $W^d(t)$ sous la forme

$$W(t) = \frac{1}{1 - I(t)}, \quad W^d(t) = \frac{1}{1 - I^d(t)},$$

où $I(t)$ et $I^d(t)$ comptent les ponts partiellement dirigés irréductibles. La série $I^d(t) = 2t + O(t^2)$ domine la série $I(t) = t + O(t^2)$ au voisinage de 0, mais les graphes des deux séries se croisent avant que l'une ou l'autre n'atteignent 1 (figure 3.6). Ainsi, la série $I(t)$ atteint 1 avant la série $I^d(t)$.

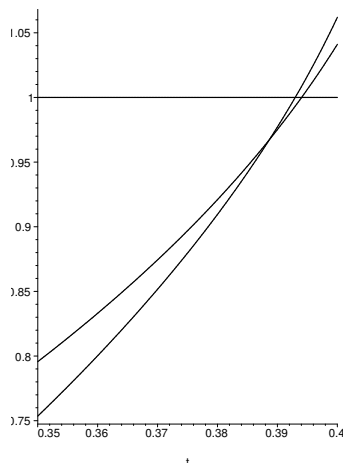


FIGURE 3.6 – Les graphes des séries $I(t)$ et $I^d(t)$ pour $0,35 < t < 0,4$. La série $I^d(t)$ domine d'abord, puis les graphes se croisent avant que les séries n'atteignent 1.

3.3.2 Nature des séries

Nous nous intéressons maintenant à la nature des séries que nous avons calculées. Par souci de simplicité, nous ne traitons que le modèle horizontal, mais les ponts formés de ponts irréductibles partiellement dirigés dans le modèle diagonal peuvent être traités par des arguments similaires. Nous utilisons ici des résultats classiques d'analyse complexe. Le lecteur pourra se référer à [45] sur ce sujet.

Théorème 3.18. *La série $B(t)$ des ponts NSE donnée dans la proposition 3.7 converge au voisinage de 0 et admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$, où \mathcal{E} consiste en les deux intervalles réels $[-\sqrt{2} - 1, -1]$ et $[\sqrt{2} - 1, 1]$ et en la courbe*

$$\mathcal{E}_0 = \left\{ x + iy : x \geq 0 \text{ et } y^2 = \frac{1 - x^2 - 2x^3}{1 + 2x} \right\}.$$

Cette courbe, montrée figure 3.7, est une frontière naturelle de la série $B(t)$: tous ses points sont des singularités de $B(t)$. Les mêmes résultats restent vrais pour la série $W(t)$ des ponts faiblement dirigés. En particulier, $B(t)$ et $W(t)$ ne sont pas D -finies.

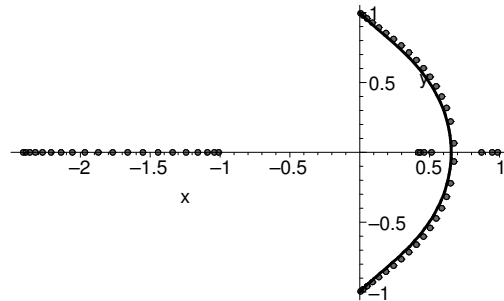


FIGURE 3.7 – La courbe \mathcal{E}_0 et les pôles de la série $\hat{B}_{20}(t)$.

Lemme 3.19. Soit f et g deux fonctions holomorphes sur un domaine ouvert connexe $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ telles que $g(z)$ n'est jamais nul, f' est non identiquement nulle, et pour tout entier k , f^k n'est pas identiquement égale à g . Soit \mathcal{S} l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathcal{U} : \exists k \in \mathbb{N}, f(z)^k = g(z)\}.$$

L'ensemble des points d'accumulation de \mathcal{S} dans \mathcal{U} est égal à l'ensemble des z de \mathcal{U} tels que $|f(z)| = 1$.

Preuve. Soit z un point d'accumulation de \mathcal{S} . Il existe donc une suite (z_n) de complexes tendant vers z , et une suite d'entiers (k_n) tels que

$$f(z_n)^{k_n} = g(z_n).$$

Les fonctions $z \mapsto f(z)^k - g(z)$ étant holomorphes non identiquement nulles, leurs zéros sont isolés ; on peut donc supposer que k_n tend vers l'infini. Par continuité, les nombres $f(z_n)$ et $g(z_n)$ tendent vers $f(z)$ et $g(z)$, respectivement. Comme $g(z)$ n'est pas nul, la valeur $f(z_n)^{k_n}$ ne peut ni tendre vers 0, ni diverger, ce qui montre que $f(z)$ est de module 1.

Soit maintenant \mathcal{S}' l'ensemble des points z tels que $|f(z)| = 1$. Les zéros de f' étant isolés, l'ensemble des z tels que $f'(z) \neq 0$ est dense dans \mathcal{S}' . Soit de plus w dans \mathcal{S}' . La fonction f étant holomorphe non constante donc ouverte, il existe un z arbitrairement proche de w tel que $f(z)$ est une racine quelconque de l'unité. L'ensemble des z tels que $f(z)$ est une racine de l'unité est donc dense dans \mathcal{S}' . L'ensemble des points d'accumulation de \mathcal{S} étant fermé, il suffit donc de montrer que tous les z tels que $f'(z) \neq 0$ et $f(z)$ est une racine de l'unité sont des points d'accumulation de \mathcal{S} .

Si g est identiquement égale à 1, l'ensemble \mathcal{S} est égal à l'ensemble des points z tels que $f(z)$ est une racine de l'unité ; l'ensemble des points d'accumulation de \mathcal{S} est bien \mathcal{S}' . Sinon, supposons, encore par densité, que $g(z) \neq 1$; supposons également que $f(z)$ est une racine ℓ -ième de l'unité. Soit k un multiple de ℓ ; on a donc $f(z)^k = 1$. Nous allons montrer l'existence d'un point z_k , proche de z , tel que $f(z_k)^k = g(z_k)$. Réécrivons cette équation en

$$\left(\frac{f(z_k)}{f(z)} \right)^k = g(z_k).$$

Une condition suffisante pour cela est

$$\frac{1}{k} = \frac{\log(f(z_k)/f(z))}{\log g(z_k)}.$$

Sachant que $g(z) \notin \{0, 1\}$, un développement limité au point z donne

$$\frac{1}{k} = \frac{f'(z)}{f(z) \log g(z)} (z_k - z) + O((z_k - z)^2).$$

Sachant que $f'(z) \neq 0$, cette équation admet, pour k assez grand, une solution vérifiant

$$z_k - z = \frac{f(z) \log g(z)}{f'(z)} \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Les nombres z_k ainsi définis tendent donc vers z et sont différents de z pour k assez grand. Le point z est donc un point d'accumulation de \mathcal{S} . \square

Lemme 3.20. *Pour $z \neq 0$, l'équation $z(u + u^{-1}) = 1 - z + z^2 + z^3$ a deux racines comptées avec multiplicité. Le produit de ces racines est 1. Leur module est 1 si et seulement si z est dans l'ensemble \mathcal{E} défini ci-dessus.*

Soit

$$u(z) = \frac{1 - z + z^2 + z^3 - \sqrt{(1 - z^4)(1 - 2z - z^2)}}{2z}$$

la série donnant la racine définie en $z = 0$. Cette série a pour rayon de convergence $\sqrt{2} - 1$ et pour singularités $\pm\sqrt{2} - 1$, ± 1 et $\pm i$. Elle admet un prolongement analytique dans

$$\mathcal{U}_0 = \mathbb{C} \setminus \left([-\sqrt{2} - 1, -1] \cup [\sqrt{2} - 1, 1] \cup]-i\infty, -i] \cup [i, i\infty[\right).$$

Preuve. L'existence de deux racines de produit 1 est claire. Supposons maintenant qu'elles ont pour module 1, i.e. u est de la forme $e^{i\theta}$. La quantité $h(z) = \frac{1 - z + z^2 + z^3}{2z} = \cos \theta$ est donc dans l'intervalle réel $[-1, 1]$. En écrivant $z = x + iy$ et en exprimant la partie imaginaire de $h(z)$ en fonction de x et y , on trouve que $h(z)$ est réel si et seulement si $y = 0$ (donc $z \in \mathbb{R}$) ou

$$y^2(1 + 2x) = 1 - x^2 - 2x^3. \quad (3.4)$$

Comme $y^2 \geq 0$, ceci n'est possible que si $x \in [-1/2, x_c]$ où x_c vérifie $1 - x_c^2 - 2x_c^3 = 0$. Observons que la courbe ainsi définie contient \mathcal{E}_0 .

Pour les valeurs réelles de z , une étude élémentaire de h montre que $h(z) \in [-1, 1]$ si et seulement si $z \in [-\sqrt{2} - 1, -1] \cup [\sqrt{2} - 1, 1]$ (figure 3.8, gauche). Si $z = x + iy$ n'est pas réel et si (3.4) est vérifiée, on a $h(z) = \frac{-1 + 4x^2 + 4x^3}{1 + 2x}$. Sachant que $x_c \in [-1/2, x_c]$, ceci est vrai si et seulement si $x \geq 0$ (figure 3.8, milieu). Nous avons ainsi prouvé que $|u(z)| = 1$ si et seulement si $z \in \mathcal{E}$.

Les propriétés de la série u s'obtiennent par des résultats classiques d'analyse complexe (en fait, u admet un prolongement analytique sur \mathbb{C} coupé selon n'importe quelles courbes joignant les 6 singularités). La figure 3.8, à droite, montre un tracé du module de $u(z)$ prolongée comme ci-dessus. \square

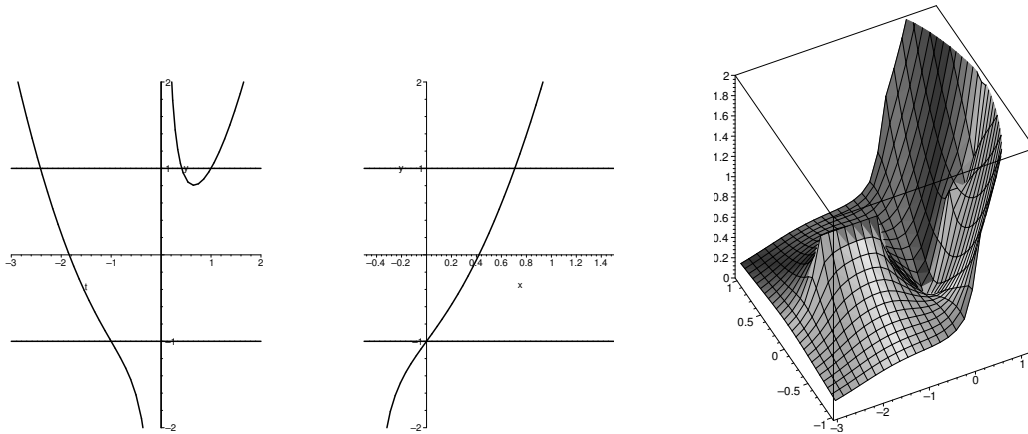


FIGURE 3.8 – Les fonctions $t \mapsto h(t) = \frac{1-t+t^2+t^3}{2t}$ et $x \mapsto \frac{-1+4x^2+4x^3}{1+2x}$, et le tracé du module de $u(z)$ montrant les deux coupures sur l'axe réel.

Preuve du théorème 3.18. Considérons la série $\hat{B}_k(t)$ définie dans la proposition 3.7. Cette série vaut

$$\hat{B}_k(t) = \frac{u(t) - u(t)^{-1}}{\left((1-t)u(t) - t\right)u(t)^k - \left((1-t)u(t)^{-1} - t\right)u(t)^{-k}},$$

Cette fonction est méromorphe dans \mathbb{C} ; un complexe z en est un pôle si

$$u(z)^{2k} = \frac{(1-z)u(z)^{-1} - t}{(1-z)u(z) - z}. \quad (3.5)$$

Posons

$$f(z) = u(z)^2, \quad g(z) = \frac{(1-z)u(z)^{-1} - z}{(1-z)u(z) - z}.$$

D'après le lemme 3.20, la fonction f est holomorphe dans \mathcal{U}_0 et la fonction g méromorphe; de plus, f n'est pas constante et on vérifie facilement que le numérateur comme le dénominateur de g ne s'annulent qu'en 0. Posons donc $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \setminus \{0\}$. Les lemmes 3.19 et 3.20 montrent que les points d'accumulation des pôles des $\hat{B}_k(t)$ sont les points de \mathcal{E} .

Les pôles de $B(t)$ n'ont donc pas de point d'accumulation hors de \mathcal{E} , ce qui montre que $B(t)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$. Montrons maintenant que \mathcal{E}_0 est une frontière naturelle de $B(t)$. Pour cela, nous montrons que si z est non réel, il est un pôle d'au plus une série $\hat{B}_k(t)$, donc un pôle de $B(t)$; par conséquent, les points de \mathcal{E}_0 sont des points d'accumulation de pôles de $B(t)$, donc des singularités de $B(t)$. Supposons donc que z est un pôle de $\hat{B}_k(t)$ et $\hat{B}_\ell(t)$. L'identité (3.5) montre que $u(z)^{2k} = u(z)^{2\ell}$, donc $|u(z)| = 1$. Réécrivons (3.5) en

$$\frac{z}{1-z} = \frac{u(z)^{k+1} - u(z)^{-(k+1)}}{u(z)^k - u(z)^{-k}}.$$

Ainsi, $z/(1-z)$, donc z , est réel car quotient de deux imaginaires purs. Ceci termine la preuve.

Le lien entre les séries $W(t)$ et $B(t)$ implique que $W(t)$ possède également un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$ et la même frontière naturelle. \square

3.3.3 Génération aléatoire

Nous présentons maintenant un algorithme pour la génération aléatoire des ponts faiblement dirigés dans le modèle horizontal. Ce générateur est un générateur de Boltzmann [24], ce qui signifie que la probabilité de tirer un chemin donné α est

$$\mathbb{P}(\alpha) = \frac{x^{|\alpha|}}{C(x)},$$

où $C(x)$ est la série génératrice des chemins à engendrer et x est un paramètre inférieur au rayon de convergence de C . La longueur moyenne d'un chemin ainsi engendré est

$$\mathbb{E}(|\alpha|) = \frac{xC'(x)}{C(x)}.$$

Le paramètre x est ainsi choisi en fonction de la longueur désirée de la sortie.

Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux classes de chemins et $\Gamma_{\mathcal{A}}$ et $\Gamma_{\mathcal{B}}$ des générateurs de Boltzmann pour ces classes. Si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, on peut obtenir un générateur pour $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ en appelant $\Gamma_{\mathcal{A}}$ avec probabilité $\frac{A(x)}{A(x)+B(x)}$ et $\Gamma_{\mathcal{B}}$ avec probabilité $\frac{B(x)}{A(x)+B(x)}$. On peut également obtenir un générateur pour $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ en prenant $(\Gamma_{\mathcal{A}}, \Gamma_{\mathcal{B}})$.

De plus, si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, on peut obtenir un générateur pour \mathcal{B} grâce à un algorithme de *rejet* : on engendre des éléments de \mathcal{A} jusqu'à en trouver un dans \mathcal{B} . Enfin, si $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, on peut trouver un générateur pour \mathcal{B} en engendrant un couple (b, c) et en oubliant c .

Pour engendrer les ponts faiblement dirigés, nous considérons les classes de chemins suivantes :

- la classe \mathcal{E} des excursions NSE propres ;
- la classe $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$ des chemins positifs terminant par un pas \mathbf{N} ;
- la classe \mathcal{I} des ponts NSE irréductibles ;
- la classe \mathcal{W} des ponts faiblement dirigés.

Nous construisons successivement des générateurs de Boltzmann pour toutes ces classes, de la manière suivante.

- Pour engendrer les éléments de \mathcal{E} , nous utilisons la construction de la preuve de la proposition 2.14. Soit \mathcal{D} la classe des facteurs descendants (ou chemins SE propres non vides) et soit \mathcal{D}_n la sous-classe des chemins de hauteur n . On a

$$\mathcal{E} = 1 + \bigcup_{n \geq 0} (\mathcal{E}\mathbf{N})^n \mathcal{D}_n.$$

Le langage \mathcal{D} est de plus donné par l'expression régulière non ambiguë

$$\mathcal{D} = \mathbf{E} + \mathbf{E}(\mathbf{S} + \mathbf{E})^* \mathbf{E}.$$

Considérons la famille

$$\mathcal{E}' = 1 + \mathbf{E} + \mathbf{E}(\mathcal{E}\mathbf{N}\mathbf{S} + \mathbf{E})^* \mathbf{E}.$$

À un réordonnement des facteurs près, les classes \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont identiques. On peut donc tirer de cette identité un générateur de Boltzmann pour \mathcal{E} .

- Soit α est un chemin de $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$. Le chemin α finit par un \mathbf{N} , donc n'est pas une excursion. Il s'écrit donc $\beta\mathbf{N}\gamma$, où β est une excursion propre et γ est soit vide soit un chemin de $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$. On obtient

$$\mathcal{P}_{\mathbf{N}} = \mathcal{E}\mathbf{N}(1 + \mathcal{P}_{\mathbf{N}}).$$

On en déduit un générateur de Boltzmann pour $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$.

- Pour engendrer les éléments de \mathcal{I} , on engendre un chemin de \mathcal{P}_N et on le décompose en facteurs irréductibles. Soit \mathcal{R} la classe des chemins de \mathcal{P}_N irréductibles qui ne sont pas des ponts. En isolant le premier facteur irréductible des chemins de \mathcal{P}_N , on trouve

$$\mathcal{P}_N = \mathcal{R} + \mathcal{I}(1 + \mathcal{P}_N).$$

En utilisant un algorithme de rejet pour éliminer les éléments de \mathcal{R} , puis en ne gardant que le premier facteur irréductible, on obtient un générateur de Boltzmann pour \mathcal{I} .

- Enfin, un pont faiblement dirigé est une suite de ponts partiellement dirigés irréductibles. Soit \mathcal{I}_O l'ensemble des ponts NSO irréductibles différents de N . On a

$$\mathcal{W} = 1 + \mathcal{I}\mathcal{W} + \mathcal{I}_O\mathcal{W}.$$

Un générateur de Boltzmann pour \mathcal{I}_O est obtenu de la même manière que celui pour \mathcal{I} , avec un rejet final pour éliminer le chemin N . On en déduit un générateur de Boltzmann pour \mathcal{W} .

Proposition 3.21. *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Le générateur aléatoire décrit ci-dessus, avec le paramètre x choisi de sorte que $xW'(x)/W(x) = n$, renvoie un pont faiblement dirigé avec une longueur comprise entre $(1 - \varepsilon)n$ et $(1 + \varepsilon)n$ en temps moyen $O(n)$.*

Preuve. Soit x un réel positif inférieur au rayon de convergence ρ de W donné par le théorème 3.16. Nous commençons par prouver que si l'algorithme renvoie un chemin de longueur m , il a, en moyenne, tourné en temps $O(m)$, et ce indépendamment du paramètre x .

Soit $P_N(t)$ la série génératrice de la classe \mathcal{P}_N . Cette série a pour rayon de convergence $\sqrt{2} - 1$, qui est supérieur à ρ . La longueur moyenne d'un chemin de \mathcal{P}_N produit par notre algorithme est donc inférieure à $\rho P'_N(\rho)/P_N(\rho)$ [24, proposition 2.1], qui est indépendant de x . En particulier, engendrer un élément de \mathcal{P}_N selon le paramètre x prend un temps moyen constant et la longueur moyenne de la sortie est bornée.

Tester si un chemin est dans \mathcal{R} ou non est effectué en temps linéaire. La probabilité de tirer un chemin hors de \mathcal{R} est

$$\begin{aligned} \frac{I(x)(1 + P_N(x))}{P_N(x)} &\geq x \frac{1 + P_N(x)}{P_N(x)} = x \frac{1 - x + x^2 + x^3 + \sqrt{(1 - x^4)(1 - 2x - x^2)}}{2} \\ &\geq \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Le nombre moyen d'essais nécessaires pour engendrer un élément de \mathcal{I} est donc borné par une constante indépendante de x , ce qui assure qu'engendrer un élément de \mathcal{I} prend un temps constant en moyenne. Enfin, le chemin N est engendré si le chemin de \mathcal{P}_N engendré est dans $N(1 + \mathcal{P}_N)$. La probabilité que cela arrive est inférieure à $x(1 + P_N(x))/P_N(x)$, qui est borné au voisinage de ρ . Tirer un élément de \mathcal{I}_O prend donc également un temps constant en moyenne, si le paramètre x est assez grand.

Enfin, le nombre de facteurs irréductibles d'un chemin de longueur m est inférieur à m , ce qui montre qu'un pont faiblement dirigé de longueur m est engendré en temps $O(m)$.

Fixons maintenant n et ε , et choisissons le paramètre x comme spécifié ci-dessus (ceci est possible car $xW'(x)/W(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers ρ). Nous appelons notre générateur jusqu'à obtenir un pont de longueur dans l'intervalle désiré. Le théorème 6.3 de [24] montre que, en moyenne, le nombre d'essais nécessaires est borné. En effet, la série $W(t)$ est analytique dans un Δ -domaine, avec un exposant critique -1 (voir théorème 3.16). \square

La figure 3.9 montre un pont engendré selon cet algorithme.

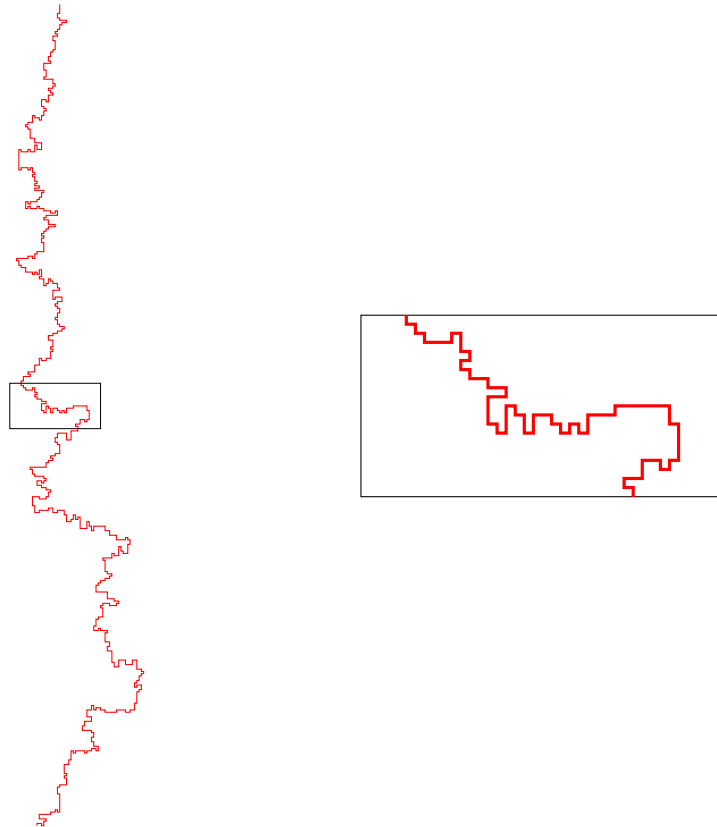


FIGURE 3.9 – À gauche, un pont faiblement dirigé aléatoire de longueur 1008. À droite, un zoom sur une partie du chemin.

3.4 Une nouvelle classe de chemins

3.4.1 Définition

Nous définissons maintenant une nouvelle classe de chemins qui généralise les chemins faiblement dirigés du modèle horizontal. Ces chemins sont, comme les chemins faiblement dirigés, caractérisés par leurs facteurs irréductibles ; ces facteurs appartiennent à une classe qui elle-même généralise les chemins partiellement dirigés. Nous commençons par définir cette classe.

Si α est un chemin, nous notons $r(\alpha)$ le chemin α tourné d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre.

Proposition 3.22. *Il existe une unique classe \mathcal{A} de chemins vérifiant l'identité suivante :*

$$\mathcal{A} = (\mathbf{N} + \mathbf{E}r(\mathcal{B}))^*, \quad (3.6)$$

où \mathcal{B} est l'ensemble des chemins de \mathcal{A} qui sont des ponts. De plus, tous les chemins de \mathcal{A} sont auto-évitants.

Un chemin de \mathcal{A} est montré figure 3.10.

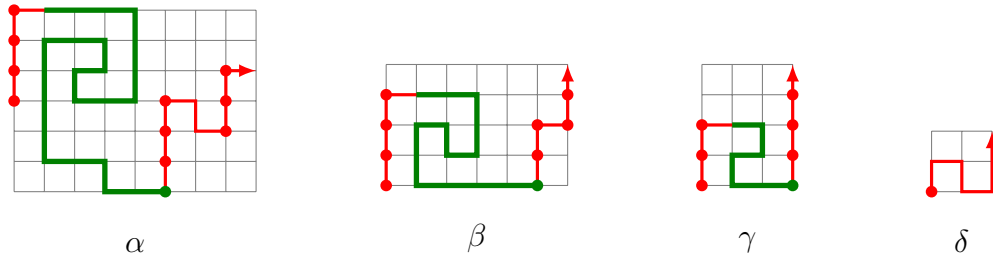


FIGURE 3.10 – De gauche à droite : un chemin α de la classe \mathcal{A} , factorisé en pas \mathbf{N} et en facteurs de $\text{Er}(\beta)$, où β est un pont de \mathcal{A} ; le premier chemin β intervenant dans la factorisation de α , lui-même factorisé de façon analogue; le premier facteur γ intervenant dans la factorisation de β ; le premier facteur δ intervenant dans la factorisation de γ . Le chemin δ est un chemin NSE propre, donc dans \mathcal{A} (voir ci-dessous). En particulier, tous les chemins de \mathcal{A} sont inscrits dans la bande verticale déterminée par leurs extrémités.

Preuve. Commençons par montrer l'existence de la classe \mathcal{A} . Posons $\mathcal{A}_0 = \emptyset$ et, pour $n \geq 1$,

$$\mathcal{A}_n = (\mathbf{N} + \text{Er}(\mathcal{B}_{n-1}))^*,$$

où \mathcal{B}_{n-1} est l'ensemble des chemins de \mathcal{A}_{n-1} qui sont des ponts. Posons \mathcal{A} l'union des classes \mathcal{A}_n pour $n \geq 0$ et \mathcal{B} l'ensemble des chemins de \mathcal{A} qui sont des ponts.

Montrons que la classe \mathcal{A} ainsi construite vérifie l'équation (3.6). La classe \mathcal{B}_{n-1} étant incluse dans \mathcal{B} par construction, on a

$$\mathcal{A}_n = (\mathbf{N} + \text{Er}(\mathcal{B}_{n-1}))^* \subseteq (\mathbf{N} + \text{Er}(\mathcal{B}_{n-1}))^*.$$

La classe \mathcal{A} étant l'union des \mathcal{A}_n , elle est également incluse dans $(\mathbf{N} + \text{Er}(\mathcal{B}))^*$. Réciproquement, soit α dans $(\mathbf{N} + \text{Er}(\mathcal{B}))^*$; montrons que α est dans \mathcal{A} . Le nombre de facteurs de $\text{Er}(\mathcal{B})$ apparaissant dans α étant fini, ils sont tous dans \mathcal{B}_n pour un certain n . On en déduit

$$\alpha \in (\mathbf{N} + \text{Er}(\mathcal{B}_n))^* = \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}.$$

Prouvons maintenant l'unicité de la classe \mathcal{A} . Supposons qu'il existe deux classes \mathcal{A} et \mathcal{A}' vérifiant toutes deux l'équation (3.6), avec $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}'$. Soit α un chemin de taille minimale dans la différence symétrique (disons, $\alpha \in \mathcal{A}$ mais $\alpha \notin \mathcal{A}'$). Comme α est dans $(\mathbf{N} + \text{Er}(\mathcal{B}))^*$ mais pas dans $(\mathbf{N} + \text{Er}(\mathcal{B}'))^*$, il existe un chemin β dans $r(\mathcal{B})$ mais pas dans $r(\mathcal{B}')$. Comme $\text{E}\beta$ est un facteur de α , β est de longueur inférieure à α , ce qui contredit la minimalité de α .

Prouvons enfin que les chemins de \mathcal{A} sont auto-évitants. Procédons par récurrence sur la longueur des chemins. Il est clair que le chemin vide est auto-évitant; supposons donc que tous les chemins de \mathcal{A} de longueur $k < n$ sont auto-évitants et soit α un chemin de \mathcal{A} de longueur n . Le chemin α admet donc une décomposition en pas \mathbf{N} et en facteurs de type $\text{Er}(\beta)$, où β est un pont de \mathcal{A} . Les chemins β étant plus courts que α , l'hypothèse de récurrence montre qu'ils sont auto-évitants. De plus, les chemins β étant des ponts, chaque facteur vit dans une bande verticale propre (figure 3.10). Le chemin α est donc auto-évitant. \square

Examinons les classes \mathcal{A}_n , définies dans la preuve ci-dessus, pour les premières valeurs de n . La classe \mathcal{A}_0 est vide par définition. La classe \mathcal{A}_1 est donc égale à \mathbf{N}^* . La classe \mathcal{A}_2 est

donc égale à $(\mathbf{N} + \mathbf{E})^*$, donc contient tous les chemins NE. Un chemin NE étant un pont si et seulement si il est vide ou il finit par \mathbf{N} , la classe \mathcal{A}_3 vaut

$$\mathcal{A}_3 = (\mathbf{N} + \mathbf{E} + \mathbf{E}(\mathbf{E} + \mathbf{S})^*\mathbf{E})^*.$$

On reconnaît dans le terme $\mathbf{E} + \mathbf{E}(\mathbf{E} + \mathbf{S})^*\mathbf{E}$ l'expression régulière donnant les chemins SE propres (3.2). On en déduit que \mathcal{A}_3 est la classe des chemins NSE propres.

La classe \mathcal{A} est donc une généralisation des chemins NSE propres, ce qui implique que la classe définie ci-dessous est une généralisation des ponts faiblement dirigés. Si α est un chemin, on note $s(\alpha)$ l'image de α par la symétrie par rapport à l'axe vertical.

Définition 3.23. On note \mathcal{W} la classe des ponts dont les facteurs irréductibles sont dans \mathcal{A} ou dans $s(\mathcal{A})$.

Les ponts de \mathcal{A} et $s(\mathcal{A})$ étant auto-évitants, les ponts de \mathcal{W} sont également auto-évitants.

Remarque. Les chemins NSE vérifient la propriété que, entre deux visites à la même abscisse, le chemin est dans \mathbf{N}^* ou dans \mathbf{S}^* . Une caractérisation similaire des chemins de \mathcal{A} existe, mais elle est plus difficile à énoncer et à démontrer. Elle apparaîtra dans une version ultérieure de la thèse.

3.4.2 Énumération

Nous cherchons maintenant à énumérer les éléments de \mathcal{W} . Ces chemins étant des suites de ponts irréductibles de \mathcal{A} et $s(\mathcal{A})$, nous énumérons tout d'abord les ponts de \mathcal{A} , c'est-à-dire la famille \mathcal{B} .

Comme montré sur la figure 3.10, les chemins de \mathcal{A} vivent dans la bande verticale déterminée par leurs extrémités. Par conséquents, les chemins de \mathcal{B} , qui sont des ponts, sont inscrits dans le rectangle déterminé par leurs extrémités. Soit α un chemin de \mathcal{B} ; la *largeur* de α , notée $\ell(\alpha)$, et la *hauteur* de α , notée $h(\alpha)$, sont la largeur et la hauteur de ce rectangle. Nous notons $B(t, u, v)$, ou simplement $B(u, v)$, la série génératrice

$$B(u, v) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} t^{|\alpha|} u^{\ell(\alpha)} v^{h(\alpha)}.$$

Nous noterons également $B_k(u)$ le coefficient en v^k de $B(u, v)$, c'est-à-dire la série génératrice des ponts de \mathcal{B} de hauteur k .

Théorème 3.24. *La série $B(u, v)$ est l'unique série formelle en les variables t, u, v solution de l'équation*

$$B(u, v) \odot_v \left(1 + \frac{v}{1 - v + tuB(tv, u)} \right) = \frac{1}{1 - tv},$$

où \odot_v note le produit de Hadamard selon la variable v .

Lemme 3.25. *Tout chemin de \mathcal{A} admet une unique factorisation compatible avec (3.6) ne comprenant pas deux facteurs descendants consécutifs.*

Preuve. Soit β et γ deux chemins de \mathcal{B} . Le chemin $\beta\mathbf{N}\gamma$ est encore un pont, et il est encore dans \mathcal{A} par définition ; il est donc dans \mathcal{B} . Par conséquent, le chemin $\mathbf{E}r(\beta)\mathbf{E}r(\gamma)$ est dans $\mathbf{E}r(\mathcal{B})$. Si α est un chemin de \mathcal{A} , on construit la factorisation voulue en regroupant tous les facteurs descendants consécutifs. Cette construction est bien unique. \square

Preuve. Le lemme 3.25 montre que les chemins de \mathcal{B} peuvent être vus comme des chemins stricts de Łukasiewicz, dont les pas montants sont des pas \mathbf{N} et les pas descendants sont les facteurs de $\mathbf{E}r(\mathcal{B})$. De plus, l'image par r d'un chemin de longueur ℓ et de hauteur h est un chemin de longueur h et de hauteur $-\ell$. La série $D(u, v)$ comptant les facteurs descendants est donc

$$D(u, v) = tuB(v, u).$$

Soit $B_j(u)$ le coefficient en v^j de la série $B(u, v)$, c'est-à-dire la série génératrice des ponts de hauteur j . Un pont de hauteur $j \geq 1$ étant un pseudo-pont de hauteur $j - 1$ suivi d'un pas \mathbf{N} , le théorème 2.15 montre que

$$B_j(u) = \frac{t^j}{G_{j-1}(u)}, \quad (3.7)$$

où les $G_j(u)$ sont définis par

$$G(u, v) = \sum_{j \geq 0} G_j(u)v^j = \frac{1}{1 - v + D(u, tv)} = \frac{1}{1 - v + tuB(tv, u)}. \quad (3.8)$$

Les équations $B_j(u)G_{j-1}(u) = t^j$ (et $B_0(u) = 1$) peuvent se réécrire sous la forme

$$B(u, v) \odot_v \left(1 + vG(u, v)\right) = \frac{1}{1 - tv}.$$

On en déduit que la série $B(u, v)$ vérifie l'équation annoncée.

Pour montrer que la solution est unique, écrivons $B(u, v)$ sous la forme

$$B(u, v) = \sum_{i, j} B_{i, j} u^i v^j.$$

Nous montrons, par récurrence sur $i + j$, que le coefficient $B_{i, j}$ est uniquement déterminé par l'équation du théorème. Le coefficient $B_{0, 0}$ est nécessairement 1 ; l'équation (3.7) montre que le coefficient $B_{i, j}$ est déterminé par les coefficients jusqu'à u^i de la série $G_{j-1}(u)$. La définition (3.8) de la série $G(u, v)$ montre que ceci demande la connaissance des coefficients de $B(tv, u)$ jusqu'à u^{i-1} et v^{j-1} ; il suffit donc de connaître les $B_{k, \ell}$ pour $k + \ell < i + j$. Ceci termine la preuve. \square

Malheureusement, l'équation gouvernant la série $B(u, v)$ est très difficile à résoudre. La preuve du théorème donne une manière algorithmique de calculer la série (calculer les coefficients en $u^i v^j$ pour des valeurs croissantes de $i + j$), mais je n'ai pas pu donner d'expression donnant $B(u, v)$.

En utilisant les factorisations des chemins de \mathcal{A} et de \mathcal{W} , on obtient les deux formules

$$A(t) = \frac{1}{1 - t - tB(1, 1)};$$

$$W(t) = \frac{1}{1 + t - 2(1 - B(1, 1)^{-1})},$$

le terme $1 - B(1, 1)^{-1}$ comptant les ponts irréductibles de \mathcal{A} . Des arguments similaires à ceux du théorème 3.16 montrent que le rayon de convergence de $W(t)$ est environ 0,392, ce qui donne une constante de croissance d'environ 2,549.

Chapitre 4

Animaux dirigés

Ce chapitre a pour but d'étudier les animaux dirigés sur les réseaux carré et triangulaire, et en particulier de trois paramètres de ces animaux. Nous renvoyons à l'introduction de la thèse pour une présentation générale des animaux dirigés ; nous donnons également la définition de ces animaux sur un graphe orienté quelconque.

Définition 4.1. Soit G un graphe orienté et S un ensemble fini de sommets de G . Un *animal dirigé* (ou simplement *animal*, s'il n'y a pas d'ambiguïté) de G de source S est un ensemble fini A de sommets de G contenant S , tel que pour tout $v \in A$ il existe un $s \in S$ et un chemin orienté de s à v ne passant que par des sites de A .

Un sommet de A sera appelé un *site* ; le nombre de sites de A est appelé l'*aire* de A , et noté $|A|$.

Les trois paramètres qui nous intéressent sont illustrés sur la figure 4.1 : le nombre de paires de *sites adjacents*, le nombre de *boucles*, et le nombre de *voisins* (également appelé *périmètre de site* ou simplement *périmètre*) d'un animal dirigé. Les définitions formelles se trouvent dans la chapter 4.3.

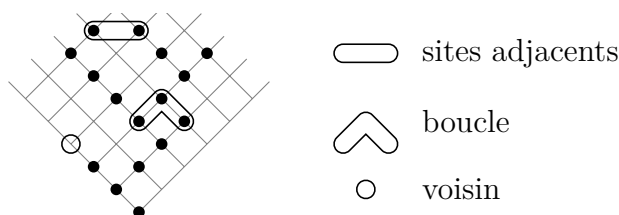


FIGURE 4.1 – Un animal dirigé marqué de deux sites adjacents, d'une boucle, et d'un voisin.

Notant, par exemple, $p(A)$ le périmètre de l'animal A , on peut définir la série génératrice suivante, comptant les animaux dirigés selon l'aire et le périmètre :

$$A^p(t, u) = \sum_A t^{|A|} u^{p(A)}.$$

Cette série génératrice intervient dans certains problèmes de percolation en probabilités [51], mais n'est malheureusement pas connue et est supposée non D-finie [34]. Nous

considérons à la place la série génératrice donnant le périmètre total des animaux d'aire fixée :

$$\frac{\partial A^p}{\partial u}(t, 1) = \sum_A p(A)t^{|A|}.$$

En divisant le périmètre total des animaux dirigés d'aire n par le nombre de ces animaux, on trouve le périmètre de site moyen des animaux d'aire donnée. La série ci-dessus peut également être interprétée comme la série génératrice des animaux marqués d'un voisin.

Cette série génératrice, et les séries analogues comptant le nombre total de sites adjacents et de boucles des animaux d'aire fixée, sont plus faciles à calculer. Le nombre total de boucles a été calculé par Bousquet-Mélou sur le réseau carré [5]. Le périmètre total sur ce même réseau fait l'objet d'une conjecture de Conway [15]; une autre conjecture a été énoncée par Le Borgne sur les réseaux de largeur bornée [39].

Nous prouvons toutes ces conjectures dans la chapter 4.3 et calculons aussi la série analogue donnant le nombre de sites adjacents. Nos résultats sont en fait plus généraux : ils sont valables sur différents types de réseaux, définis dans la chapter 4.1, et pour les animaux de source S quelconque. Nous tirons également de ces résultats des corollaires asymptotiques.

Le chapitre est organisé comme suit. La chapter 4.1 définit les réseaux que nous considérons et explicite la bijection avec les empilements de dominos. La chapter 4.2 énonce des résultats classiques sur l'énumération des animaux dirigés selon l'aire seule. La chapter 4.3 contient les résultats généraux concernant les trois paramètres ci-dessus. La chapter 4.4 donne quelques applications de ces résultats.

4.1 Définitions

4.1.1 Réseaux carrés et triangulaires

Définition 4.2. Soit B un ensemble soit inclus dans \mathbb{Z} , soit de la forme $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ avec k pair. Le *réseau carré biaisé* (s'il n'y a pas d'ambiguïté, le *réseau carré*) de base B est le graphe dont les sommets sont les points (i, j) de $B \times \mathbb{Z}$ tels que $i + j$ est pair, muni des arcs de forme $(i, j) \rightarrow (i - 1, j + 1)$ et $(i, j) \rightarrow (i + 1, j + 1)$. Le *réseau triangulaire* de base B possède de plus les arcs $(i, j) \rightarrow (i, j + 2)$.

Nous considérons dans ce chapitre quatre types de réseaux :

- le réseau complet, de base $B = \mathbb{Z}$;
- le demi-réseau, de base $B = \mathbb{N}$;
- le réseau cylindrique de largeur k , de base $B = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ (pour k pair);
- le réseau rectangulaire de largeur k , de base $B = \{0, \dots, k - 1\}$.

Le réseau complet et le demi-réseau sont collectivement appelés les *réseaux non bornés*, et les réseaux cylindriques et rectangulaires sont appelés *réseaux bornés* (figure 4.2). Les réseaux cylindriques sont nécessairement de largeur paire, pour que la condition « $i + j$ est pair » ait un sens.

Bien sûr, le réseau carré complet peut être plus simplement réalisé en prenant pour sommets l'ensemble \mathbb{Z}^2 . La définition ci-dessus est motivée par le fait que le réseau carré biaisé



FIGURE 4.2 – À gauche, un animal dirigé du réseau carré cylindrique de largeur 6. À droite, un animal dirigé du réseau triangulaire rectangulaire de largeur 5.

a une *direction privilégiée* vers le haut (tous les arcs pointent vers le haut) ; la direction des arcs est importante pour les animaux dirigés.

Une source S du réseau carré ou triangulaire de base B sera dite *linéaire* si tous les éléments de S sont de la forme $(i, 0)$ (ce qui implique que i est pair). Dans ce cas, nous confondrons l'ensemble S avec l'ensemble des abscisses de ses points. Une source linéaire peut donc être vue comme un ensemble d'éléments pairs de B .

4.1.2 Empilements de dominos

Nous définissons maintenant l'outil principal d'énumération des animaux que nous utiliserons dans ce chapitre et le suivant. Cet outil est une application qui transforme les animaux en certains empilements de pièces, les empilements de *dominos*.

Définition 4.3. Soit B une partie ou un quotient de \mathbb{Z} . On appelle *modèle d'empilements de dominos* de base B le modèle d'empilements dont les pièces sont les éléments de B et tel que les pièces i et i' sont concurrentes si et seulement si $|i - i'| \leq 1$.

Dans le cas où $B = \mathbb{Z}$, ce modèle est équivalent aux empilements de dimères définis dans la chapter 1.5.3 : le domino d'indice i correspond au domino dont l'unique arête est i .

Définition 4.4. Soit A un ensemble fini de sommets du réseau triangulaire de base B et soit $s = (i, j)$ un site de A . La *projection* du site s , notée $\pi(s)$, est le domino d'indice i ; la *hauteur* du site s est l'entier j . La projection de A , notée $\pi(A)$, est l'empilement de dominos obtenu en empilant les projections $\pi(s)$ de tous les sites de A par ordre croissant de hauteur.

Pour justifier cette définition, on remarque que deux sites distincts $s = (i, j)$ et $s' = (i', j)$ à la même hauteur vérifient nécessairement $|i - i'| \geq 2$ à cause du fait que $i + j$ et $i' + j$ sont pairs. Les deux dominos $\pi(s)$ et $\pi(s')$ ne sont donc pas concurrents. La projection $\pi(A)$ ne dépend donc pas de l'ordre dans lesquels sont empilés les dominos de même hauteur. Un animal du réseau carré étant, en particulier, un animal du réseau triangulaire, on peut également définir sa projection $\pi(A)$.

Comme le montrent les résultats suivants, la projection fournit des bijections entre animaux dirigés et empilements de dominos. Ces bijections sont illustrées figure 4.3.

Lemme 4.5. Soit B une base et S une source linéaire. Il y a bijection entre les animaux dirigés de source S et d'aire n du réseau triangulaire de base B et les empilements de dominos dont les pièces minimales ont pour positions S et comptant n pièces.

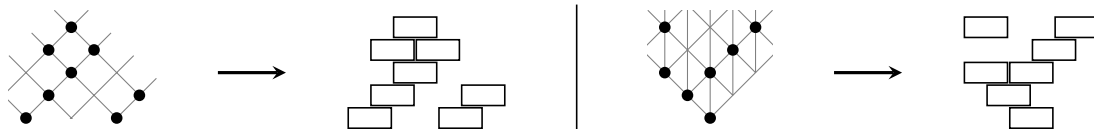


FIGURE 4.3 – À gauche, un animal dirigé à deux sources sur le réseau carré et l’empilement correspondant. À droite, un animal à une source sur le réseau triangulaire et l’empilement correspondant. Dans les deux cas, l’empilement est obtenu en remplaçant chaque site par un domino 2×1 .

Dans le cas où S est une source ponctuelle, les animaux dirigés sont ainsi en bijection avec les pyramides (ou empilements ayant une unique pièce minimale). Pour prouver ce lemme, nous définissons, pour chaque domino d’un empilement, une *hauteur* à valeur dans \mathbb{N} .

Définition 4.6. Soit H un empilement de dominos et x un domino de H à position i . On définit inductivement la *hauteur* de x , notée $h(x)$, de la manière suivante.

- Si x est minimal dans H , $h(x) = 0$.
- Si x couvre un domino y à position i , soit $j = h(y)$. On a alors $h(x) = j + 2$.
- Sinon, soit j la hauteur maximale d’un domino y tel que x couvre y . On a alors $h(x) = j + 1$.

La figure 4.3 montre des empilements dont chaque domino x est dessiné à la hauteur $h(x)$.

Preuve du lemme 4.5. Soit H un empilement de dominos dont les pièces minimales sont à position dans S . Pour construire l’animal correspondant à H , on calcule la hauteur des dominos de H selon la définition 4.6. On fait correspondre à chaque domino de position i et de hauteur j le site (i, j) , et on définit l’animal A comme l’ensemble des sites correspondants aux dominos de H .

L’animal A ainsi construit est bien un animal dirigé de source S : chaque site x non minimal est relié dans le réseau triangulaire à un site y tel que x couvre y . De proche en proche, chaque site est donc relié à un site minimal.

Réciproquement, si A est un animal dirigé de source S , la construction précédente appliquée à la projection $\pi(A)$ redonne bien l’animal A , ce qui montre que la construction est bijective. \square

Le lemme suivant, qui sera utile par la suite, se démontre facilement par récurrence grâce au fait que les positions de S sont paires.

Lemme 4.7. Soit S une source linéaire du réseau de base B . Soit H un empilement de dominos dont les pièces minimales sont à positions dans S . Soit x un domino de H de position i et de hauteur j . La somme $i + j$ est paire.

Le lemme suivant permet de traiter également les animaux du réseau carré.

Lemme 4.8. Soit A un animal dirigé de source S du réseau triangulaire de base B . L’animal A est un animal dirigé du réseau carré de base B si et seulement si la projection $\pi(A)$ est un empilement strict.

Preuve. Pour prouver ce lemme, on remarque que l'ensemble de sommets A est un animal dirigé de source S du réseau carré si et seulement si pour tout site v de A hors de S , il existe un site w dans A tel que $w \rightarrow v$ est un arc du réseau carré. Ceci est équivalent à dire que, pour tout site v hors de S , le domino $\pi(v)$ ne couvre pas de domino à la même position, donc que $\pi(A)$ est un empilement strict. \square

4.2 Énumération

Ici, nous considérons l'un quelconque des quatre types de réseaux décrits ci-dessus et une source linéaire S . Nous notons $A_S^\circ(t)$ et $A_S^\Delta(t)$ les séries génératrices des animaux de source S des réseaux carré et triangulaire, respectivement. Pour les énoncés valables sur les deux réseaux, nous utiliserons la notation commune $A_S(t)$. Nous noterons également $A_{[S]}(t)$ la série génératrice des animaux dirigés de source incluse dans l'ensemble S .

Via la bijection du lemme 4.5, les animaux de source incluse dans S correspondent aux empilements dont les pièces minimales sont à positions incluses dans S . Les liens (1.1) et (1.2) se traduisent donc en

$$A_{[S]}(t) = \sum_{T \subseteq S} A_T(t); \quad (4.1)$$

$$A_S(t) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} A_{[T]}(t). \quad (4.2)$$

De plus, d'après le lemme 4.8, les animaux du réseau carré correspondent à des empilements stricts. Les identités (1.7) et (1.8) se traduisent donc en

$$A_{[S]}^\Delta(t) = A_{[S]}^\circ\left(\frac{t}{1-t}\right); \quad (4.3)$$

$$A_{[S]}^\circ(t) = A_{[S]}^\Delta\left(\frac{t}{1+t}\right). \quad (4.4)$$

Les chapitres suivantes montrent comment calculer les séries ci-dessus dans les quatre types de réseaux.

Nous utilisons des notations particulières pour les séries $A_S(t)$ où $S = \{0\}$, comptant des animaux dirigés de source ponctuelle. Ces animaux correspondent à des *pyramides* de dominos, ou empilements n'ayant qu'une seule pièce minimale, à la position 0. Nous notons :

- $A(t)$ la série des animaux dirigés de source $\{0\}$ sur le réseau complet ;
 - $D(t)$ la série des animaux dirigés de source $\{0\}$ sur le demi-réseau ;
 - $A_k(t)$ la série des animaux dirigés de source $\{0\}$ sur le réseau cylindrique de largeur k ;
 - $D_k(t)$ la série des animaux dirigés de source $\{0\}$ sur le réseau rectangulaire de largeur k .
- Les animaux comptés par les séries $D(t)$ et $D_k(t)$ seront également appelés des *demi-animaux* de source ponctuelle.

4.2.1 Réseaux bornés

Nous commençons par les réseaux bornés, c'est-à-dire ceux dont la base B est finie. Le modèle d'empilements correspondant est donc également fini, ce qui permet d'utiliser le

théorème d'inversion (théorème 1.11) pour calculer la série $A_{[S]}(t)$. On obtient le résultat suivant.

Proposition 4.9. *La série des animaux dirigés de source incluse dans S sur le réseau triangulaire de base finie B est*

$$A_{[S]}^{\Delta}(t) = \frac{T_{[B \setminus S]}(t)}{T_{[B]}(t)},$$

où $T_{[S]}(t)$ est la série alternée des empilements triviaux dont les positions sont dans S .

L'identité (4.2) permet de déduire de cette formule la série $A_S^{\Delta}(t)$; l'identité (4.4) permet ensuite d'en déduire les séries correspondantes sur le réseau carré.

Nous sommes donc ramenés à calculer les séries alternées comptant les empilements triviaux. Ce calcul est fait grâce aux deux résultats suivants, qui expriment les séries $T_{[S]}(t)$ en fonction des polynômes de Fibonacci $F_k(t)$, définis dans la définition 1.37. Nous définissons également, pour $k \geq 2$, des polynômes notés $\hat{F}_k(t)$ par

$$\hat{F}_k(t) = F_k(t) - tF_{k-2}(t). \quad (4.5)$$

Lemme 4.10. *Si $B = \{0, \dots, k-1\}$, la série alternée $T_{[B]}(t)$ des empilements triviaux est égale à $F_{k+1}(t)$. Si $B = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, la série alternée $T_{[B]}(t)$ des empilements triviaux est égale à $\hat{F}_k(t)$.*

Preuve. Si $B = \{0, \dots, k-1\}$, il est déjà montré dans la chapter 1.5.3 que la série des empilements triviaux est $F_{k+1}(t)$. Soit donc T un empilement trivial inclus dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Nous distinguons deux cas.

1. Soit 0 n'est pas dans T . L'empilement trivial T est donc inclus dans $\{1, \dots, k-1\}$.
2. Soit 0 est dans T ; on écrit dans ce cas $T = (0)T'$. Les dominos 1 et $k-1$ étant concurrents à 0, ils ne sont pas dans T' . L'empilement trivial T' est donc inclus dans $\{2, \dots, k-2\}$.

Les empilements dans le cas 1 sont comptés par $F_k(t)$; le domino 0 ayant pour poids $-t$ dans les séries alternées, ceux dans le cas 2 sont comptés par $-tF_{k-2}(t)$. \square

Lemme 4.11. *Soit S un ensemble fini de positions. Écrivons la décomposition $S = S_1 \cup \dots \cup S_\ell$ en intervalles maximaux de S . La série génératrice des empilements triviaux inclus dans S est*

$$T_{[S]}(t) = F_{|S_1|+1}(t) \cdots F_{|S_\ell|+1}(t).$$

Preuve. Soit S_i et S_j deux intervalles maximaux de S avec $i \neq j$. Un élément de S_i et un élément de S_j ne peuvent pas être concurrents, sans quoi on pourrait fusionner les intervalles S_i et S_j . On en déduit que la donnée d'un empilement trivial inclus dans S est identique à la donnée d'empilements triviaux inclus respectivement dans S_1, \dots, S_ℓ . En termes de séries génératrices, on a donc

$$T_{[S]}(t) = T_{[S_1]}(t) \cdots T_{[S_\ell]}(t).$$

Le lemme 4.10 permet de conclure. \square

À titre d'exemple, les résultats ci-dessus permettent de calculer les séries $A_k(t)$ et $D_k(t)$ définies plus haut. On trouve

$$A_k^\Delta(t) = \frac{F_k(t)}{\hat{F}_k(t)} - 1; \quad (4.6)$$

$$D_k^\Delta(t) = \frac{F_k(t)}{F_{k+1}(t)} - 1. \quad (4.7)$$

4.2.2 Réseaux non bornés

Nous faisons maintenant le même travail sur les réseaux non bornés. Les deux résultats qui suivent ont déjà été prouvés [20, 3], nous les citons donc sans preuve.

Proposition 4.12. *Les séries $A(t)$ et $D(t)$ sont données par*

$$\begin{aligned} A^\Delta(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1 \right); \\ D^\Delta(t) &= \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} - 1; \\ A^\diamond(t) &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-3t}} - 1 \right); \\ D^\diamond(t) &= \frac{1-t - \sqrt{(1+t)(1-3t)}}{2t}. \end{aligned}$$

Traisons maintenant le cas des sources non ponctuelles. Nous dirons qu'une source C dans le réseau complet est *compacte* si elle est constituée de ℓ sites consécutifs, de la forme

$$C = \{i, i+2, \dots, i+2\ell-2\}.$$

Dans le demi-réseau, nous imposons de plus que 0 soit dans C .

Proposition 4.13. *Soit C une source compacte comportant ℓ sites. La série génératrice des animaux de source C sur le réseau complet est*

$$A_C(t) = D(t)^{\ell-1} A(t).$$

Sur le demi-réseau, cette série vaut

$$A_C(t) = D(t)^\ell.$$

Nous pouvons enfin calculer la série $A_S(t)$ pour une source S quelconque. Rappelons que, si S est un ensemble de positions, le voisinage de S , noté $v(S)$, est égal à l'ensemble des positions concurrentes à une position de S .

Proposition 4.14. *Soit S une source linéaire du réseau complet ou du demi-réseau et soit C la plus petite source compacte contenant S . La série génératrice des animaux dirigés de source S est, pour le réseau triangulaire*

$$A_S^\Delta(t) = t^{|S|-|C|} T_{[v(C)\setminus v(S)]}(t) A_C^\Delta(t).$$

Preuve. Nous utilisons dans cette preuve plusieurs résultats de théorie des empilements du chapitre 1. Nous commençons par utiliser l'identité (1.9), qui permet de calculer les séries $A_S(t)$ et $A_C(t)$:

$$\begin{aligned} A_S(t) &= t^{|S|} A_{[v(S)]}; \\ A_C(t) &= t^{|C|} A_{[v(C)]}. \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite le corollaire 1.12 pour trouver un lien entre les séries $A_{[v(S)]}(t)$ et $A_{[v(C)]}(t)$. Puisque S est inclus dans C , on a $v(S) \subseteq v(C)$; puisque C est la plus petite source compacte contenant S , les positions du bord de $v(C)$ (celles qui sont concurrentes à une position hors de $v(C)$) sont dans $v(S)$. On trouve donc

$$A_{[v(S)]}(t) = T_{[v(C) \setminus v(S)]} A_{[v(C)]}(t).$$

La proposition s'ensuit. □

4.2.3 Asymptotique

Nous utilisons maintenant les résultats d'énumération ci-dessus pour en déduire des équivalents asymptotiques. Pour commencer, nous étudions les racines des polynômes de Fibonacci.

Lemme 4.15. *Pour tout $k \geq 1$, les polynômes $F_k(t)$ et $\hat{F}_k(t)$ sont scindés et à racines simples dans \mathbb{R} . Soit ρ_k et $\hat{\rho}_k$, respectivement, la plus petite racine de ces polynômes. On a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_k} &= 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{k+1} \right); \\ \frac{1}{\hat{\rho}_k} &= 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2k} \right). \end{aligned}$$

Preuve. On vérifie par récurrence sur k que les degrés des polynômes $F_k(t)$ et $\hat{F}_k(t)$ sont $\lfloor k/2 \rfloor$. Nous utilisons ensuite les identités suivantes que vérifient les polynômes de Fibonacci, d'une manière proche de ceux de Tchebycheff :

$$\begin{aligned} F_k \left(\frac{1}{4 \cos^2(\theta)} \right) &= \frac{\sin[(k+1)\theta]}{(2 \cos \theta)^k \sin \theta}; \\ \hat{F}_k \left(\frac{1}{4 \cos^2(\theta)} \right) &= \frac{2 \cos(k\theta)}{(2 \cos \theta)^k}. \end{aligned}$$

Ces identités sont facilement vérifiées par récurrence sur k . En choisissant les valeurs appropriées de θ dans l'intervalle $]0, \pi/2[$, ces identités permettent de trouver toutes les racines. On en déduit les valeurs des plus petites racines. □

Nous sommes maintenant en mesure de calculer l'asymptotique du nombre d'animaux dirigés sur tous les réseaux.

Proposition 4.16. *Soit S une source linéaire d'un réseau et $a_S(n)$ le nombre d'animaux dirigés de source S et d'aire n . Quand n tend vers l'infini, on a un équivalent de la forme*

$$a_S(n) \sim \lambda_S \mu^n n^\gamma.$$

Dans le réseau triangulaire, les constantes μ et γ sont données par :

- dans le réseau complet, $\mu^\Delta = 4$ et $\gamma^\Delta = -1/2$;
- dans le demi-réseau, $\mu^\Delta = 4$ et $\gamma^\Delta = -3/2$;
- dans le réseau cylindrique de largeur k , $\mu^\Delta = 1/\hat{\rho}_k$ et $\gamma^\Delta = 0$;
- dans le réseau rectangulaire de largeur k , $\mu^\Delta = 1/\rho_{k+1}$ et $\gamma^\Delta = 0$.

Dans le réseau carré, les constantes μ et γ sont données par

$$\mu^\diamond = \mu^\Delta - 1; \quad \gamma^\diamond = \gamma^\Delta.$$

Preuve. Des formules de la proposition 4.12, nous déduisons les développements limités suivants, quand t tend vers $1/4$:

$$\begin{aligned} D^\Delta(t) &= 1 - 2(1 - 4t)^{1/2} + O((1 - 4t)^{3/2}); \\ A^\Delta(t) &= \frac{1}{2}(1 - 4t)^{-1/2} + O(1). \end{aligned}$$

Les propositions 4.13 et 4.14 permettent d'obtenir des développements similaires pour les séries $A_S^\Delta(t)$ sur le demi-réseau et le réseau complet, sachant que les polynômes $F_k(t)$ ont leurs racines supérieures à $1/4$. Les équivalents asymptotiques sont ensuite obtenus par *analyse de singularité*. Le résultat que nous utilisons, qui est un cas particulier de [27, théorème VI.4], affirme que si une série $S(t)$ est analytique dans un Δ -domaine autour du point $1/\mu$ et vérifie, au voisinage de $t = 1/\mu$,

$$S(t) \sim \lambda(1 - \mu t)^{-\alpha},$$

alors le coefficient de t^n vérifie, quand n tend vers l'infini,

$$[t^n]S(t) \sim \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \mu^n n^{\alpha-1}.$$

Ce résultat permet d'obtenir les valeurs de μ et de γ pour les réseaux non bornés : en effet, les séries $D^\Delta(t)$ et $A^\Delta(t)$ admettent un prolongement analytique dans le plan complexe privé de la demi-droite $[1/4, +\infty[$, qui contient un Δ -domaine ; les polynômes $F_k(t)$ sont quant à eux analytiques dans un disque de rayon supérieur à $1/4$.

Dans les réseaux bornés, la série $A_S(t)$ est rationnelle, donc l'asymptotique est déterminée par les racines du dénominateur $F_{k+1}(t)$ ou $\hat{F}_k(t)$. Le lemme 4.15 permet de conclure.

Enfin, pour le réseau carré, nous utilisons le lien (1.8). La série $S(t)$ ci-dessus, évaluée en $\frac{t}{1+t}$, vérifie

$$S\left(\frac{t}{1+t}\right) \sim \lambda(1+t)^\alpha (1 - (\mu - 1)t)^{-\alpha}.$$

Cet équivalent est valable quand $\frac{t}{1+t}$ tend vers μ , donc quand t tend vers $\frac{1}{\mu-1}$. On en déduit l'équivalent

$$[t^n]S\left(\frac{t}{1+t}\right) \sim \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^\alpha (\mu-1)^n n^{\alpha-1}.$$

On en déduit la forme des coefficients de la série $A_S^\diamond(t)$. □

4.3 Sites adjacents, boucles et périmètre de site

4.3.1 Définitions

Nous nous intéressons maintenant aux paramètres des animaux dirigés illustrés figure 4.1. Toutes les définitions de cette chapitre sont valables à la fois dans les réseaux carrés et triangulaires.

Définition 4.17. Soit A un animal dirigé du graphe G de source incluse dans S . Deux sites de A sont dits *adjacents* s'ils sont de la forme (i, j) et $(i + 2, j)$. Un site de A de la forme $(i + 1, j + 1)$ est une *boucle* si les sommets (i, j) et $(i + 2, j)$ sont des sites de A .

Un S -voisin de A est un sommet v de G qui n'est pas dans A mais tel que $A \cup \{v\}$ est un animal dirigé de source incluse dans S .

Supposons que le graphe G est un sous-graphe du graphe G' . Un S -voisin interne de A est un S -voisin de A vu comme animal dirigé du graphe G ; un S -voisin externe de A est un S -voisin de A vu comme animal dirigé du graphe G' . Enfin, un sommet v de G est dit sur le *bord* du graphe s'il existe un arc de G' reliant v à un sommet hors de G .

Pour les besoins de cette définition, le demi-réseau et les réseaux rectangulaires seront vus comme sous-graphe du réseau complet. Les réseaux complets et cylindriques sont vus comme sous-graphe d'eux-mêmes; pour eux, il n'y a pas de différence entre voisins internes et externes.

Nous noterons $j(A)$ et $\ell(A)$ le nombre de paires de sites adjacents et le nombre de boucles de A , respectivement. Le nombre de S -voisins internes (resp. externes) de l'animal A sera appelé le S -périmètre interne (resp. externe) de A . Nous noterons ces périmètres $p_S^i(A)$ et $p_S^e(A)$. De plus, nous notons $e(A)$ le nombre de sites de A sur le bord du réseau.

Nous définissons maintenant les quatre séries génératrices correspondant aux paramètres ci-dessus :

$$\begin{aligned} J_{[S]}(t) &= \sum_A j(A)t^{|A|}; \\ L_{[S]}(t) &= \sum_A \ell(A)t^{|A|}; \\ P_{[S]}^e(t) &= \sum_A p_S^e(A)t^{|A|}; \\ P_{[S]}^i(t) &= \sum_A p_S^i(A)t^{|A|} \end{aligned}$$

(comme d'habitude, l'indice $[S]$ signifie que les animaux comptés sont de source incluse dans S).

Dans la suite, nous calculons toutes ces séries dans le réseau carré, et les séries $J_{[S]}(t)$ et $L_{[S]}(t)$ dans le réseau triangulaire. Pour cela, nous utilisons la correspondance de la chapitre 4.1 avec les empilements de dominos. Deux dominos d'un empilement sont *adjacents* s'ils sont à des positions i et $i + 2$ et à la même hauteur (voir définition 4.6 pour le sens de la hauteur d'un domino). Un domino est une *boucle* s'il couvre deux dominos adjacents. Une position i est sur le *bord* du modèle B si soit $i - 1$ soit $i + 1$ n'est pas dans B . Ces paramètres sont bien les mêmes que ceux décrits ci-dessus sur les animaux.

On se donne maintenant une source linéaire S , que l'on peut voir comme un ensemble de positions. Les animaux à source incluse dans S correspondent aux empilements de dominos dont les pièces minimales sont à positions dans S . Une pièce minimale d'un empilement est dite *illégal* si elle n'est pas dans S . En l'absence d'indication explicite, un empilement sera supposé sans pièce minimale illégale.

Nous définissons les séries génératrices suivantes :

- $M_{[S]}(t)$ la série génératrice des empilements marqués d'une pièce à position i telle que $i + 2$ est dans B ;
 - si i est dans S , $W_{[S]}^{(i)}(t)$ la série génératrice des empilements ayant une pièce minimale à position i et une pièce minimale illégale à position $i + 2$;
 - $W_{[S]}(t)$ la somme des $W_{[S]}^{(i)}(t)$ pour toutes les positions i dans S telles que $i + 2$ n'est pas dans S ;
 - $E_{[S]}(t)$ la série génératrice des empilements marqués d'une pièce sur le bord du modèle.
- Nous notons également $M_S(t)$ et $E_S(t)$ les séries similaires comptant les empilements dont l'ensemble des positions des pièces minimales est S . De plus, si i est dans S mais pas $i + 2$, nous notons $W_S^{(i)}(t)$ la série $A_{S \cup \{i+2\}}(t)$ et $W_S(t)$ la somme des séries $W_S^{(i)}(t)$.

Montrons que ces séries sont toutes facilement calculables. La série $W_{[S]}(t)$, tout d'abord, est donnée par

$$W_{[S]}(t) = \sum_{\substack{i \in S \\ i+2 \notin S}} \sum_{\substack{T \subseteq S \\ i \in T}} A_{T \cup \{i+2\}}(t). \quad (4.8)$$

Elle se calcule en utilisant les résultats de la chapter 4.2. Ensuite, les séries $M_{[S]}(t)$ et $E_{[S]}(t)$ valent, par définition,

$$M_{[S]}(t) = tA'_{[S]}(t) - \sum_{i+2 \notin B} M_{[S]}^{(i)}(t); \quad (4.9)$$

$$E_{[S]}(t) = \sum_{i-1 \notin B \text{ ou } i+1 \notin B} M_{[S]}^{(i)}(t), \quad (4.10)$$

où $M_{[S]}^{(i)}(t)$ désigne la série génératrice des empilements marqués d'une pièce à position i . Ces séries sont calculables grâce au lemme 1.29.

4.3.2 Réseau carré

Nous traitons maintenant le réseau carré, ce qui signifie que tous les empilements considérés dans cette chapter sont stricts.

Théorème 4.18. *Les séries génératrices donnant le nombre total de sites adjacents, boucles et voisins des animaux dirigés du réseau carré de source incluse dans S sont données par*

$$J_{[S]}^{\diamond}(t) = \frac{tM_{[S]}^{\diamond}(t) - W_{[S]}^{\diamond}(t)}{1+t}; \quad (4.11)$$

$$L_{[S]}^{\diamond}(t) = t(1+t)J_{[S]}^{\diamond}(t); \quad (4.12)$$

$$P_{[S]}^{e\diamond}(t) = |S|A_{[S]}^{\diamond}(t) + tA'_{[S]}(t) - J_{[S]}^{\diamond}(t); \quad (4.13)$$

$$P_{[S]}^{i\diamond}(t) = P_{[S]}^{e\diamond}(t) - E_{[S]}^{\diamond}(t). \quad (4.14)$$

Les mêmes séries traitant des animaux de source S sont

$$J_S^\diamond(t) = \frac{tM_S^\diamond(t) + j(S)A_S^\diamond(t) - W_S^\diamond(t)}{1+t}; \quad (4.15)$$

$$L_S^\diamond(t) = t(1+t)J_S^\diamond(t); \quad (4.16)$$

$$P_S^{e\diamond}(t) = |S|A_S^\diamond(t) + tA_S^\diamond(t) - J_S^\diamond(t); \quad (4.17)$$

$$P_S^{i\diamond}(t) = P_S^{e\diamond}(t) - E_S^\diamond(t). \quad (4.18)$$

Les séries $M_{[S]}(t)$, $W_{[S]}(t)$ et $E_{[S]}(t)$ étant calculables grâce aux remarques ci-dessus, le théorème permet bien de trouver des formules explicites pour les séries cherchées. Des exemples de calculs sont donnés dans la chapitre 4.4.

Pour prouver le théorème, nous aurons besoin de certains résultats intermédiaires. Le premier d'entre eux concerne les périmètres externe et interne.

Lemme 4.19. *Soit A un animal du réseau carré de source incluse dans S . Les périmètres externe et interne de A sont donnés par*

$$\begin{aligned} p_S^e(A) &= |S| + |A| - j(A); \\ p_S^i(A) &= p_S^e(A) - e(A). \end{aligned}$$

En sommant ces identités pour tous les animaux de source incluse dans S ou de source S , on prouve les équations (4.13), (4.14), (4.17) et (4.18).

Preuve. Traitons tout d'abord le cas du périmètre externe. Nous pouvons donc considérer que A est un animal dirigé du réseau complet ou d'un réseau cylindrique. Soit Z le nombre de couples (v, w) , où v est un site de A et w est tel que $v \rightarrow w$ est un arc du réseau. Tous les sommets du réseau ayant pour degré sortant 2, on a

$$Z = 2|A|.$$

L'ensemble A étant un animal dirigé, le sommet w est soit un site de A , soit un S -voisin externe de A . Les seuls sites de A non comptés sont ceux de S ; de plus, deux sites pointent vers le même sommet si et seulement s'ils sont adjacents. On a donc

$$Z = |A| + p_S^e(A) + j(A) - |S|,$$

qui donne la formule annoncée pour $p_S^e(A)$.

Les sites ayant un voisin non interne étant exactement les sites au bord du réseau, on a de plus

$$p_S^e(t) = p_S^i(t) + e(A). \quad \square$$

Pour prouver les équations restantes du théorème 4.18, nous commencerons par prouver (4.11) et (4.12), puis nous passerons aux équations (4.15) et (4.16) en utilisant un argument d'inclusion-exclusion. Nous aurons pour cela besoin du lemme suivant (valable également dans le réseau triangulaire).

Lemme 4.20. *Les séries $W_{[S]}(t)$ et $W_S(t)$ sont liées de la manière suivante :*

$$W_{[S]}(t) = \sum_{T \subseteq S} (W_T(t) - j(T)A_T(t)).$$

Preuve. Considérons la série

$$\sum_{T \subseteq S} W_T(t).$$

Écrivons $W_T(t)$ comme la somme des $W_T^{(i)}(t)$ pour tous les i dans T tels que $i + 2$ n'est pas dans T . Nous séparons la somme selon que $i + 2$ est dans S ou non :

$$\sum_{T \subseteq S} W_T(t) = \sum_{T \subseteq S} \left(\sum_{\substack{i \in T \\ i+2 \notin S}} W_T^{(i)}(t) \right) + \sum_{T \subseteq S} \left(\sum_{\substack{i \in T \\ i+2 \notin T \\ i+2 \in S}} W_T^{(i)}(t) \right).$$

Nous reconnaissons la série $W_{[S]}(t)$ dans le premier terme du côté droit de l'équation. Nous réécrivons le deuxième terme en utilisant le fait que $W_T^{(i)}(t) = A_{T \cup \{i+2\}}(t)$ et en posant $T' = T \cup \{i + 2\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{T \subseteq S} W_T(t) &= W_{[S]}(t) + \sum_{T' \subseteq S} \left(\sum_{\substack{i \in T' \\ i+2 \in T'}} A_{T'}(t) \right) \\ &= W_{[S]}(t) + \sum_{T' \subseteq S} j(T') A_{T'}(t). \end{aligned}$$

Le lemme s'ensuit. □

Pour prouver les équations restantes du théorème 4.18, nous introduisons de nouvelles séries génératrices. On rappelle qu'un empilement marqué *presque strict* est un empilement dont aucune pièce non marquée n'est couverte par une pièce à la même position (définition 1.27). On rappelle également que deux dominos sont *indépendants* si aucun n'est au dessus de l'autre. On définit les ensembles suivants, dont les éléments sont *a priori* des empilements de dominos dont les pièces minimales sont à positions dans S :

- $\mathcal{J}_{[S]}^*$ l'ensemble des empilements presque stricts marqués de deux dominos adjacents ;
 - $\mathcal{L}_{[S]}^*$ l'ensemble des empilements presque stricts marqués d'une boucle ;
 - $\mathcal{M}_{[S]}^*$ l'ensemble des empilements presque stricts marqués d'une pièce à une position i telle que $i + 2$ est dans B ;
 - $\mathcal{W}_{[S]}^*$ l'ensemble des empilements presque stricts marqués d'une pièce minimale à une position i et possédant une pièce minimale illégale à la position $i + 2$;
 - $\mathcal{I}_{[S]}^{2*}$ (resp. $\mathcal{I}_{[S]}^{3*}$) l'ensemble des empilements presque stricts marqués de deux pièces indépendantes à des positions de type i et $i + 2$ (resp. i et $i + 3$) ;
 - $\mathcal{X}_{[S]}^{2*}$ (resp. $\mathcal{X}_{[S]}^{3*}$) l'ensemble des empilements marqués d'une pièce x à une position i et possédant une pièce minimale illégale à position $i + 2$ (resp. $i + 3$) indépendante de x .
- L'astérisque est là pour indiquer que les empilements de ces ensembles sont presque stricts. On remarque qu'on a les inclusions $\mathcal{J}_{[S]}^* \subseteq \mathcal{I}_{[S]}^{2*}$ et $\mathcal{W}_{[S]}^* \subseteq \mathcal{X}_{[S]}^{2*}$.

Soient $J_{[S]}^*(t)$, $L_{[S]}^*(t)$, $M_{[S]}^*(t)$, $W_{[S]}^*(t)$, $I_{[S]}^{2*}(t)$, $I_{[S]}^{3*}(t)$, $X_{[S]}^{2*}(t)$ et $X_{[S]}^{3*}(t)$ les séries génératrices des ensembles ci-dessus. Un empilement presque strict pouvant être obtenu à partir d'un empilement strict en dupliquant éventuellement chaque pièce marquée, on a les liens

$$J_{[S]}^*(t) = (1+t)^2 J_{[S]}^\circ(t); \quad (4.19)$$

$$L_{[S]}^*(t) = (1+t) L_{[S]}^\circ(t); \quad (4.20)$$

$$M_{[S]}^*(t) = (1+t) M_{[S]}^\circ(t); \quad (4.21)$$

$$W_{[S]}^*(t) = (1+t) W_{[S]}^\circ(t). \quad (4.22)$$

Les équations (4.11) et (4.12) sont donc équivalentes à des identités entre ces séries génératrices. Ces identités sont prouvées grâce aux quatre lemmes suivants, qui utilisent des bijections entre les différents ensembles d'empilements presque stricts.

Lemme 4.21. *La série $L_{[S]}^*(t)$ vaut*

$$L_{[S]}^*(t) = tJ_{[S]}^*(t).$$

Preuve. Nous prouvons ce résultat en utilisant une bijection qui agit en retirant une pièce,

$$\phi_0: \mathcal{L}_{[S]}^* \rightarrow \mathcal{J}_{[S]}^*.$$

Pour définir ϕ_0 , nous utilisons le lemme 1.28. Ce lemme affirme l'existence de la bijection F_{\downarrow}^s , qui consiste à factoriser un empilement marqué presque strict en tirant les pièces marquées vers le bas.

Soit $(H, \{x\})$ un empilement de $\mathcal{L}_{[S]}^*$. L'image $F_{\downarrow}^s(H, \{x\})$ est une paire d'empilements (H_1, H_2) tels que les pièces minimales de H_1H_2 sont incluses dans S et la boucle x est l'unique pièce maximale de H_1 . Écrivons $H_1 = H'_1x$ et $H' = H'_1H_2$: l'empilement H'_1 a donc deux pièces minimales, qui sont adjacentes (figure 4.4, gauche). Appelons les y et z . De plus, comme les empilements H_1 et H'_1 ont les mêmes pièces minimales et même voisinage, le lemme 1.26 implique que les empilements H_1H_2 et H'_1H_2 ont mêmes pièces minimales. On pose donc

$$\phi_0(H, \{x\}) = (H', \{y, z\}).$$

L'opération est facilement réversible en remettant en place la pièce x . □

Lemme 4.22. *L'identité suivante est vérifiée :*

$$I_{[S]}^{2*}(t) - J_{[S]}^*(t) = tI_{[S]}^{3*}(t).$$

Preuve. Nous utilisons une deuxième bijection qui agit en retirant une pièce,

$$\phi_1: \mathcal{I}_{[S]}^{2*} \setminus \mathcal{J}_{[S]}^* \rightarrow \mathcal{I}_{[S]}^{3*}.$$

Soit $(H, \{x, y\})$ un empilement de $\mathcal{I}_{[S]}^{2*} \setminus \mathcal{J}_{[S]}^*$. Posons $(H_1, H_2) = F_{\downarrow}^s(H, \{x, y\})$ (on tire les pièces x et y vers le bas).

Les pièces x et y n'étant pas adjacentes, l'une d'elles, disons x , est plus haute que l'autre. Posons $H_1 = H'_1x$ et $H' = H'_1H_2$. L'empilement H_1 étant strict, H'_1 doit avoir une seconde pièce maximale, z , à une position à distance 3 par rapport à celle de y (figure 4.4, milieu). Les empilements H_1 et H'_1 ayant mêmes pièces minimales et même voisinage, on pose

$$\phi_1(H, \{x, y\}) = (H', \{y, z\}).$$

Cette opération est réversible : soit $(H', \{y, z\})$ un empilement de $\mathcal{I}_{[S]}^{3*}$ et soit (H'_1, H_2) son image par F_{\downarrow}^s . Les positions des pièces y et z étant à distance 3, le lemme 4.7 interdit qu'elles soient à la même hauteur ; disons que z est plus haute. On pose $H_1 = H'_1x$, tel que les pièces maximales de H_1 sont x et y et leurs positions à distance 2, et $H = H_1H_2$. On a alors $\phi_1(H, \{x, y\}) = (H', \{y, z\})$. □

Lemme 4.23. *L'identité suivante est vérifiée :*

$$X_{[S]}^{2*}(t) - W_{[S]}^*(t) = tX_{[S]}^{3*}(t).$$

Preuve. Nous utilisons une troisième bijection qui agit en retirant une pièce,

$$\phi_2: \mathcal{X}_{[S]}^{2*} \setminus \mathcal{W}_{[S]}^* \rightarrow \mathcal{X}_{[S]}^{3*}.$$

Soit $(H, \{x\})$ un empilement de $\mathcal{X}_{[S]}^{2*} \setminus \mathcal{W}_{[S]}^*$ tel que x est à position i et soit y la pièce minimale illégale de H . On pose $(H_1, H_2) = F_{\downarrow}^s(H, \{x, y\})$, tirant les pièces x et y vers le bas. La pièce x n'étant pas minimale, elle couvre une pièce z à position $i - 1$ (figure 4.4, droite). Écrivons $H_1 = H_1'x$ et $H' = H_1'H_2$. À nouveau, retirer la pièce x n'affecte pas les pièces minimales de H' , ce qui permet de poser

$$\phi_2(H, \{x\}) = (H', \{z\}).$$

Cette opération est réversible en reposant la pièce x . □

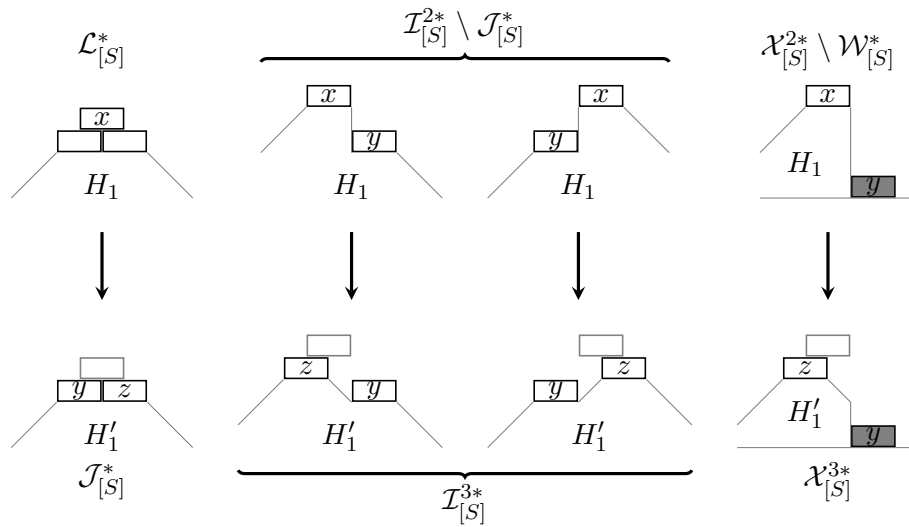


FIGURE 4.4 – À gauche, la bijection ϕ_0 : retirer la pièce x révèle deux pièces adjacentes y et z . Au milieu, la bijection ϕ_1 : retirer la pièce x révèle une pièce z , plus haute que y et de position à distance 3. À droite, la bijection ϕ_2 (la pièce minimale illégale y est grisée). Retirer la pièce x révèle une pièce z à une position à distance 3 de y .

Lemme 4.24. *L'identité suivante est vérifiée :*

$$I_{[S]}^{2*}(t) + X_{[S]}^{2*}(t) = t \left(M_{[S]}^*(t) + I_{[S]}^{3*}(t) + X_{[S]}^{3*}(t) \right).$$

Preuve. Nous utilisons une quatrième et dernière bijection agissant en retirant une pièce,

$$\phi_3: \mathcal{I}_{[S]}^{2*} \cup \mathcal{X}_{[S]}^{2*} \rightarrow \mathcal{M}_{[S]}^* \cup \mathcal{I}_{[S]}^{3*} \cup \mathcal{X}_{[S]}^{3*}.$$

Dans cette preuve, si x est une pièce, nous notons x^+ la pièce la plus haute de la pile de x et x^- la pièce la plus basse de la pile (voir chapter 1.4.2).

Soit H un empilement de $\mathcal{I}_{[S]}^{2*}$ ou $\mathcal{X}_{[S]}^{2*}$. Dans le premier cas, on note x la pièce marquée de gauche et y la pièce marquée de droite ; dans le deuxième, on note x la pièce marquée et y la pièce minimale illégale (figure 4.5). Dans les deux cas, nous notons i la position de x et $(H_1, H_2) = F_{\uparrow}^s(H, \{x, y\})$, poussant cette fois les pièces x^+ et y^+ vers le haut. Soit également $H_2 = y^+H_2'$ et $H' = H_1H_2'$. Nous distinguons trois cas, illustrés sur la figure 4.5.

1. La pièce x^+ est la seule pièce minimale de H'_2 : l'empilement $(H', \{x\})$ est dans $\mathcal{M}_{[S]}^*$.
2. L'empilement H'_2 possède une pièce minimale z à position $i + 3$, qui n'est pas une pièce minimale illégale de H' : l'empilement $(H', \{x, z\})$ est dans $\mathcal{I}_{[S]}^{3*}$.
3. L'empilement H'_2 possède une pièce minimale z à position $i + 3$, qui est une pièce minimale illégale de H' : l'empilement $(H', \{x\})$ est dans $\mathcal{X}_{[S]}^{3*}$.

Cette opération est réversible en remettant en place la pièce y^+ et en séparant les cas selon si y^+ est une pièce minimale illégale de H ou non. Si H' est dans $\mathcal{M}_{[S]}^*$, replacer la pièce y^+ est possible car la position $i + 2$ est dans B . \square

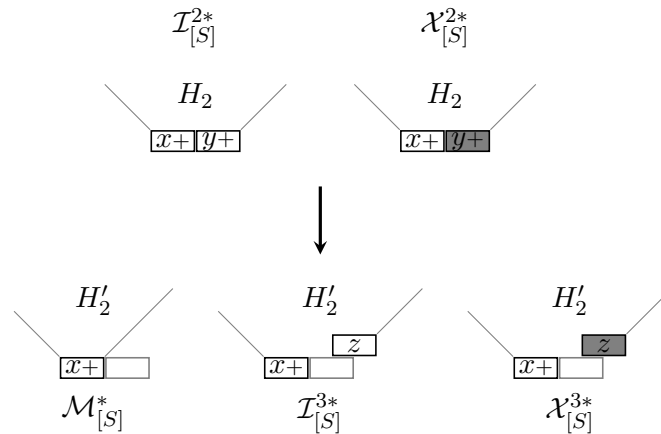


FIGURE 4.5 – La bijection ϕ_3 ; les pièces minimales illégales sont grisées. Après avoir retiré la pièce y^+ , une pièce minimale z de H'_2 peut ou non être découverte. Si oui, l'empilement H' est dans $\mathcal{I}_{[S]}^{3*}$ ou $\mathcal{X}_{[S]}^{3*}$ selon si z est une pièce minimale illégale de H' ou non. Si non, l'empilement H' est dans $\mathcal{M}_{[S]}^*$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème.

Preuve du théorème 4.18. Nous commençons par prouver les équations (4.11) et (4.12). En combinant les lemmes 4.21, 4.22, 4.23 et 4.24, on trouve les identités

$$\begin{aligned} L_{[S]}^*(t) &= J_{[S]}^*(t); \\ J_{[S]}^*(t) &= M_{[S]}^*(t) - W_{[S]}^*(t). \end{aligned}$$

Les identités (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22) permettent de conclure. Pour en déduire (4.15) et (4.16), on utilise un argument d'inclusion-exclusion, qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} J_S^\diamond(t) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} J_{[T]}^\diamond(t); \\ L_S^\diamond(t) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} L_{[T]}^\diamond(t); \\ M_S^\diamond(t) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} M_{[T]}^\diamond(t). \end{aligned}$$

Le lemme 4.20 implique également

$$W_S^\diamond(t) - j(S)A_S^\diamond(t) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} W_{[T]}^\diamond(t).$$

Les équations (4.15) et (4.16) découlent donc de (4.11) et (4.12). Enfin, les équations (4.13), (4.14), (4.17) et (4.18) sont des conséquences directes du lemme 4.19. \square

4.3.3 Réseau triangulaire

Nous obtenons également des résultats valables sur le réseau triangulaire traitant du nombre de sites adjacents et de boucles. Notons que Bousquet-Mélou [5] étudie également le nombre de boucles des animaux sur le réseau triangulaire, mais utilise une définition différente des boucles, qui donne une série plus difficile à calculer. Nos méthodes ne permettent en revanche pas d'obtenir de résultat sur le périmètre; on pense par ailleurs que la série donnant le périmètre total des animaux d'aire fixée est transcendante [15], ce qui laisse penser qu'une telle approche ne peut fonctionner.

Théorème 4.25. *Les séries donnant le nombre total de sites adjacents et de boucles des animaux de source incluse dans S et d'aire fixée sont*

$$J_{[S]}^\Delta(t) = \frac{tM_{[S]}^\Delta(t) - W_{[S]}^\Delta(t)}{1+t}; \quad (4.23)$$

$$L_{[S]}^\Delta(t) = tJ_{[S]}^\Delta(t). \quad (4.24)$$

Les mêmes séries comptant des animaux de source S sont

$$J_S^\Delta(t) = \frac{tM_S^\Delta(t) + j(S)A_S^\Delta(t) - W_S^\Delta(t)}{1+t}; \quad (4.25)$$

$$L_S^\Delta(t) = tJ_S^\Delta(t). \quad (4.26)$$

Nous n'avons cette fois besoin que de deux lemmes, un certain nombre de résultats sur le réseau carré se traduisant directement sur le réseau triangulaire.

Lemme 4.26. *L'identité suivante est vérifiée :*

$$L_{[S]}^\Delta(t) = tJ_{[S]}^\Delta(t).$$

Preuve. La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 4.20, à ceci près que nous utilisons la bijection F_\downarrow plutôt que F_\downarrow^s , à cause du fait que nous travaillons sur des empilements généraux plutôt que presque stricts. \square

Comme pour le réseau carré, nous définissons les ensembles suivants, dont les éléments sont des empilements généraux dont les pièces minimales sont à positions dans S :

- $\mathcal{J}_{[S]}^\Delta$ l'ensemble des empilements marqués de deux pièces adjacentes;
- $\mathcal{I}_{[S]}^{2\Delta}$ (resp. $\mathcal{I}_{[S]}^{3\Delta}$) l'ensemble des empilements marqués de deux pièces indépendantes de positions i et $i+2$ (resp. i et $i+3$).

Nous notons $I_{[S]}^{2\Delta}(t)$ et $I_{[S]}^{3\Delta}(t)$ les séries génératrices des ensembles $\mathcal{I}_{[S]}^{2\Delta}$ et $\mathcal{I}_{[S]}^{3\Delta}$.

Lemme 4.27. *L'identité suivante est vérifiée :*

$$I_{[S]}^{2\Delta}(t) - J_{[S]}^\Delta(t) = \frac{t}{1-t} \left(2J_{[S]}^\Delta(t) + I_{[S]}^{3\Delta}(t) \right).$$

Preuve. Nous utilisons une nouvelle bijection,

$$\phi_1^\Delta : \mathcal{I}_{[S]}^{2\Delta} \setminus \mathcal{J}_{[S]}^\Delta \rightarrow (\mathcal{J}_{[S]}^\Delta + \mathcal{J}_{[S]}^\Delta) \cup \mathcal{I}_{[S]}^{3*},$$

où $+$ désigne l'union disjointe. Cette bijection est similaire à ϕ_1 (voir lemme 4.22) et illustrée figure 4.6. Soit $(H, \{x, y\})$ un élément de $\mathcal{I}_{[S]}^{2\Delta} \setminus \mathcal{J}_{[S]}^\Delta$. Soit (H_1, H_2) son image par F_\downarrow , obtenue en tirant les pièces x et y vers le bas. Les pièces x et y ne sont pas adjacentes, donc pas à la même hauteur ; supposons que x est la plus haute. Soit H'_1 l'empilement obtenu en retirant de H_1 toutes les pièces de la pile de x qui sont strictement plus hautes que y (figure 4.6) et $H' = H'_1 H_2$.

L'empilement H'_1 a nécessairement une deuxième pièce maximale, que nous appelons z . On pose $\phi_1^\Delta(H, \{x, y\}) = (H', \{y, z\})$. Deux cas sont possibles :

1. les pièces y et z sont adjacentes : l'empilement marqué $(H', \{y, z\})$ est dans $\mathcal{J}_{[S]}^\Delta$;
2. les pièces y et z sont de positions à distance 3 : l'empilement marqué $(H', \{y, z\})$ est dans $\mathcal{I}_{[S]}^{3\Delta}$.

La bijection inverse est obtenue en remplaçant la pile de la pièce x sur la pièce z . Dans le cas 2, les pièces y et z ne peuvent être à la même hauteur par le lemme 4.7. La pièce z est donc déterminée sans ambiguïté comme la plus haute des deux pièces maximales de H'_1 . En revanche, dans le cas 1, la pièce z peut être indifféremment celle de gauche ou celle de droite, menant au facteur 2 devant la série $\mathcal{J}_{[S]}^\Delta$. \square

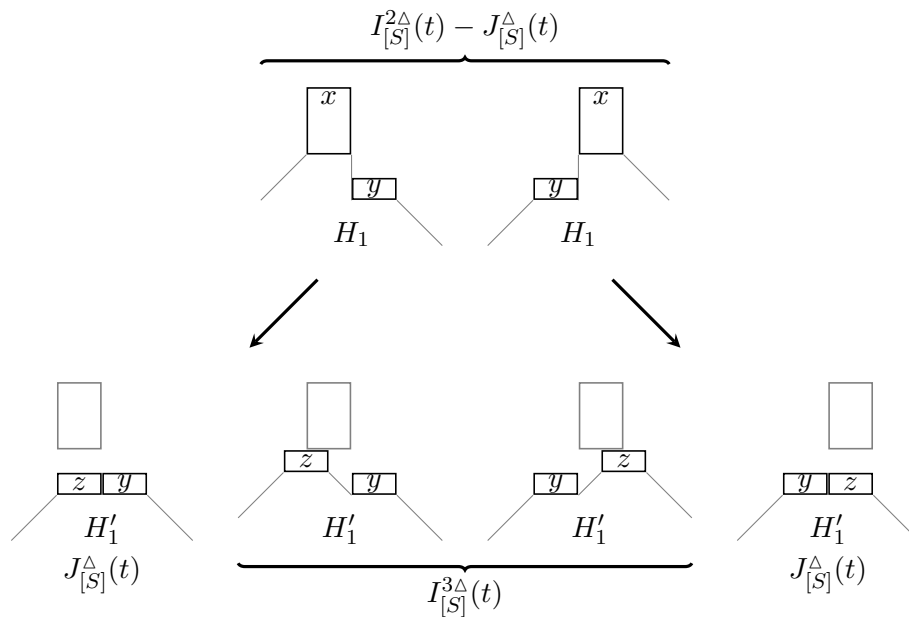


FIGURE 4.6 – La bijection ϕ_1^Δ : nous retirons toutes les pièces de la pile de x qui sont strictement plus hautes que y . Ceci découvre une pièce maximale z de H'_1 , qui est soit adjacente à y , soit plus haute que y et à une position à distance 3.

Preuve du théorème 4.25. Nous commençons par l'équation (4.23). Soit $(H, \{x\})$ un empilement compté par $M_{[S]}^\Delta(t)$. Nous utilisons la bijection F_\downarrow pour tirer la pièce marquée vers le bas. Nous remarquons ensuite qu'une paire (H_1, H_2) d'empilements peut être obtenue en remplaçant chaque domino d'une paire d'empilements stricts par une pile de

dominos ; les paires d'empilements stricts sont en bijection avec les empilements presque stricts (lemme 1.28). On a donc

$$M_{[S]}^{\Delta}(t) = M_{[S]}^* \left(\frac{t}{1-t} \right).$$

Les séries $I_{[S]}^2(t)$ et $I_{[S]}^3(t)$ vérifient des liens similaires. Enfin, la série $W_{[S]}^{\Delta}(t)$ vérifie

$$W_{[S]}^{\Delta}(t) = W_{[S]}^{\diamond} \left(\frac{t}{1-t} \right) = (1-t)W_{[S]}^* \left(\frac{t}{1-t} \right),$$

à cause du lien (4.22). En combinant les identités des lemmes 4.23 et 4.24 et en faisant la substitution $\frac{t}{1-t}$, on trouve donc

$$I_{[S]}^{2\Delta}(t) + W_{[S]}^{\Delta}(t) = \frac{t}{1-t} \left(M_{[S]}^{\Delta}(t) + I_{[S]}^{3\Delta}(t) \right).$$

Le lemme 4.27 permet ensuite d'obtenir (4.23). Le lemme 4.26, quant à lui, prouve (4.24). Les deux identités manquantes sont prouvées par le même argument d'inclusion-exclusion que pour le théorème 4.18, notant que le lemme 4.20 est également valable sur le réseau triangulaire. \square

4.3.4 Asymptotique

Nous tirons maintenant des théorèmes 4.18 et 4.25 des résultats asymptotiques. Soit $n \geq 0$ et S une source linéaire. Nous notons $j_S(n)$, $\ell_S(n)$, $p_S^e(n)$ et $p_S^i(n)$ les valeurs moyennes du nombre de sites adjacents, nombre de boucles, périmètre externe et périmètre interne des animaux dirigés de source S et d'aire n .

Corollaire 4.28. *Plaçons nous dans le réseau complet, dans le demi-réseau, ou dans un réseau cylindrique. Dans le réseau carré, on a les équivalents suivants quand n tend vers l'infini :*

$$\begin{aligned} j_S^{\diamond}(n) &\sim \frac{n}{\mu^{\diamond} + 1}; \\ \ell_S^{\diamond}(n) &\sim \frac{n}{(\mu^{\diamond})^2}; \\ p_S^{i\diamond}(n) &\sim p_S^{e\diamond}(n) \sim \frac{\mu^{\diamond} n}{\mu^{\diamond} + 1}. \end{aligned}$$

Sur le réseau triangulaire, on a, de plus :

$$\begin{aligned} j_S^{\Delta}(n) &\sim \frac{n}{\mu^{\Delta} + 1}; \\ \ell_S^{\Delta}(n) &\sim \frac{n}{\mu^{\Delta}(\mu^{\Delta} + 1)}. \end{aligned}$$

Les constantes μ^{\diamond} et μ^{Δ} sont données par la proposition 4.16. Dans les réseaux non bornés, ces constantes valent $\mu^{\diamond} = 3$ et $\mu^{\Delta} = 4$. On a donc

$$j_S^{\diamond}(n) \sim \frac{n}{4}; \quad \ell_S^{\diamond}(n) \sim \frac{n}{9}; \quad p_S^{i\diamond}(n) \sim p_S^{e\diamond}(n) \sim \frac{3n}{4}.$$

Sur le réseau triangulaire, on a

$$j_S^{\Delta}(n) \sim \frac{n}{5}; \quad \ell_S^{\Delta}(n) \sim \frac{n}{20}.$$

Preuve. Soit $a_S(n)$ le nombre d'animaux de source S . Nous commençons par utiliser les équations (4.15) et (4.25) qui donnent la série $J_S(t)$ en fonction des séries $M_S(t)$, $A_S(t)$ et $W_S(t)$. En utilisant l'identité (4.8) et la proposition 4.16, on remarque que le coefficient d'ordre n de $A_S(t)$ et $W_S(t)$ est $O(a_S(n))$.

De plus, dans les réseaux considérés, la position $i + 2$ est toujours dans l'ensemble B dès que i est dans B . On en déduit que la série $M_S(t)$ compte les animaux de source S marqués d'un domino quelconque. Le coefficient d'ordre n de $M_S(t)$ est donc $na_S(n)$, ce qui montre que les contributions de $A_S(t)$ et $W_S(t)$ sont négligeables. Le terme $\frac{t}{1+t}$ tendant vers $\frac{1}{\mu+1}$ quand t tend vers $1/\mu$, on trouve donc

$$[t^n]J_S(t) \sim \frac{na_S(n)}{\mu + 1}.$$

Ce coefficient étant égal à $a_S(n)j_S(n)$, on en déduit l'équivalent de $j_S(n)$. Les équivalents de $\ell_S(n)$ et $p_S^e(n)$ sont calculés de la même manière. Pour prouver celui de $p_S^i(n)$, il suffit de voir que la contribution de la série $E_S(t)$ est négligeable. Cette série est nulle dans les réseaux complet et cylindriques. Dans le demi-réseau, le lemme 1.29 montre que

$$E_S^\diamond(t) \leq E_{[S]}^\diamond(t) \leq \frac{A_{[S]}^\diamond(t)A_{\{0\}}^\diamond(t)}{1+t}.$$

La série $A_{[S]}^\diamond(t)$ a une singularité en $(1 - 3t)^{1/2}$ (voir proposition 4.16), tandis que la série $A_{\{0\}}^\diamond(t) = D^\diamond(t)$ vaut $1 + O((1 - 3t)^{1/2})$. Leur produit a donc aussi une singularité en $(1 - 3t)^{1/2}$, et le coefficient d'ordre n est bien négligeable devant $na_S(n)$. \square

4.4 Exemples

Nous donnons maintenant quelques exemples d'utilisation des théorèmes 4.18 et 4.25 donnant le nombre total de sites adjacents, de boucles et de voisins des animaux dirigés dans divers réseaux et pour diverses sources.

4.4.1 Animaux de source ponctuelle

Nous commençons par le cas le plus simple, celui des animaux de source ponctuelle sur le réseau complet.

Corollaire 4.29. *Les séries génératrices du nombre total de sites adjacents, boucles, et voisins des animaux dirigés de source ponctuelle du réseau carré complet sont*

$$\begin{aligned} J^\diamond(t) &= \frac{1}{2t(1+t)} \left(1 - \frac{1 - 4t + t^2 + 4t^3}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}} \right); \\ L^\diamond(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 - 4t + t^2 + 4t^3}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}} \right); \\ P^\diamond(t) &= \frac{1}{2t(1+t)} \left(\frac{1 - 3t + 2t^2 + t^3 - 3t^4}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}} - 1 + t + t^2 \right). \end{aligned}$$

Sur le réseau triangulaire, les séries du nombre total de sites adjacents et boucles sont

$$J^\Delta(t) = \frac{1}{2t(1+t)} \left(1 - t - \frac{1 - 7t + 12t^2 - 2t^3}{(1-4t)^{3/2}} \right);$$

$$L^\Delta(t) = \frac{1}{2(1+t)} \left(1 - t - \frac{1 - 7t + 12t^2 - 2t^3}{(1-4t)^{3/2}} \right).$$

Parmi ces valeurs, celle de $P^\circ(t)$ a été conjecturée par Conway [15] et celle de $L^\circ(t)$ a été prouvée par Bousquet-Mélou [5], en utilisant des modèles de gaz.

Preuve. Pour calculer les séries $J(t) \equiv J_{\{0\}}(t)$, nous utilisons les deux identités (4.15) et (4.25), qui donnent

$$J_{\{0\}}(t) = \frac{tM_{\{0\}}(t) + j(\{0\})A_{\{0\}}(t) - W_{\{0\}}(t)}{1+t}.$$

La série $M_{\{0\}}(t)$ est égale à $tA'(t)$, la valeur $j(\{0\})$ est nulle, et la série $W_{\{0\}}(t)$ est égale à $A_{\{0,2\}}(t)$, elle-même égale à $D(t)A(t)$ d'après la proposition 4.13. On en déduit les valeurs des séries $J^\circ(t)$ et $J^\Delta(t)$ grâce aux formules de la proposition 4.12. Les autres séries sont ensuite calculées de la même manière. \square

4.4.2 Animaux de source compacte

Pour illustrer la méthode pour traiter les animaux de source non ponctuelle, nous considérons les animaux à source compacte. Rappelons que la *source compacte de largeur ℓ* , notée C_ℓ , est l'ensemble de positions

$$C_\ell = \{0, 2, \dots, 2\ell - 2\}.$$

On note $A_c(t)$ la série

$$A_c(t) = \sum_{\ell \geq 1} A_{C_\ell}(t).$$

Rappelons également que le nombre d'animaux à source compacte d'aire n est 3^{n-1} sur le réseau carré et 4^{n-1} sur le réseau triangulaire [29]. La série ci-dessus vaut donc

$$A_c^\circ(t) = \frac{t}{1-3t}; \quad A_c^\Delta(t) = \frac{t}{1-4t}.$$

Par souci de simplicité, nous ne donnons pas ici les séries traitant le nombre de boucles et le périmètre; ces séries peuvent être facilement obtenues grâce aux formules des théorèmes 4.18 et 4.25.

Corollaire 4.30. *Les séries donnant le nombre total de sites adjacents dans les animaux à source compacte d'aire n sont*

$$J_c^\circ(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-2t}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}} - \frac{1-3t-2t^2}{(1+t)(1-3t)^2} \right);$$

$$J_c^\Delta(t) = \frac{1}{2(1+t)} \left(\frac{1-3t}{(1-4t)^{3/2}} - \frac{1-5t+t^2}{(1-4t)^2} \right).$$

Preuve. Nous utilisons de même les équations (4.15) et (4.25). Plaçons nous dans le cas de la source compacte C_ℓ . Dans ce cas, la série $M_{C_\ell}(t)$ vaut $tA'_{C_\ell}(t)$, la valeur $j(C_\ell)$ est $\ell - 1$, et la série $W_{C_\ell}(t)$ vaut $A_{C_{\ell+1}}(t)$, donc $D(t)A_{C_\ell}(t)$. En sommant pour ℓ de 1 à l'infini, on trouve donc

$$J_c(t) = \frac{1}{1+t} \left(t^2 A'_c(t) + \sum_{\ell \geq 1} (\ell - 1) A_{C_\ell}(t) - D(t) A_c(t) \right).$$

La série $A_{C_\ell}(t)$ valant $D(t)^{\ell-1} A(t)$, on a donc

$$J_c(t) = \frac{1}{1+t} \left(t^2 A'_c(t) + \frac{D(t)A(t)}{(1-D(t))^2} - D(t)A_c(t) \right).$$

La proposition 4.12 permet de conclure. \square

4.4.3 Demi-animaux dans les réseaux rectangulaires

Notre dernier exemple concerne les réseaux rectangulaires de largeur k . Nous étudierons les périmètres externe et interne des animaux dirigés de source $\{0\}$ sur le réseau carré.

Corollaire 4.31. *Les séries donnant le nombre total de voisins externes et internes des demi-animaux du réseau rectangulaire de largeur k valent*

$$\begin{aligned} P_k^{e\circ}(t) &= D_k^\circ(t) + \frac{t}{1+t} D_k^{\prime\circ}(t) - \frac{1}{1+t} D_k^\circ(t)^2; \\ P_k^{i\circ}(t) &= \frac{t}{1+t} D_k^\circ(t) + \frac{t}{1+t} D_k^{\prime\circ}(t) - \frac{1}{1+t} D_k^\circ \left(D_k^\circ(t) - D_{k-2}^\circ(t) \right), \end{aligned}$$

où la série $D_k^\circ(t)$ est donnée par (4.7).

Le Borgne [39] a proposé une conjecture au sujet des séries comptant le périmètre externe de ces animaux. Nos formules permettent de prouver cette conjecture.

Preuve. Plaçons nous dans le modèle $B = \{0, \dots, k-1\}$. Par symétrie, nous étudions les animaux de source $\{k-1\}$ à la place de $\{0\}$. Les deux séries $P_k^{e\circ}(t) \equiv P_{\{k-1\}}^{e\circ}(t)$ et $P_k^{i\circ}(t) \equiv P_{\{k-1\}}^{i\circ}(t)$ sont calculées par (4.17) et (4.18), qui demandent de calculer la série $J_{\{k-1\}}^\circ(t)$. La valeur $j(\{k-1\})$ est nulle; de plus, la position $k+1$ n'étant pas dans B , la série $W_{\{k-1\}}^\circ(t)$ est nulle également. Il ne nous reste donc qu'à calculer les séries $M_{\{k-1\}}^\circ(t)$ et $E_{\{k-1\}}^\circ(t)$. Les identités (4.9) et (4.10) donnent

$$\begin{aligned} M_{\{k-1\}}^\circ(t) &= tD_k^{\prime\circ}(t) - M_{\{k-1\}}^{(k-1)\circ}(t) - M_{\{k-1\}}^{(k-2)\circ}(t); \\ E_{\{k-1\}}^\circ(t) &= M_{\{k-1\}}^{(0)\circ}(t) + M_{\{k-1\}}^{(k-1)\circ}(t). \end{aligned}$$

Enfin, nous calculons les séries de la forme $M_{\{k-1\}}^{(i)\circ}(t)$ en utilisant le lemme 1.29. Une pyramide marquée ne pouvant être vide, cette série est égale à $M_{\{\{k-1\}\}}^{(i)s}(t)$. On remarque ensuite que :

- les séries $H_{\{0\}}^s(t)$ et $H_{\{0\}}^s(t)$ valent toutes deux $D_k^\circ(t)$ par symétrie;
- le seul empilement dont les pièces minimales sont à positions dans $\{k-1\}$ qui évite $k-2$ est l'empilement vide, de sorte que la série $V_{\{k-1\}}^{(k-2)s}(t)$ vaut 1;

- une pyramide stricte de pièce minimale $k - 1$ est soit réduite à une pièce, soit est une pièce surmontée d'une pyramide stricte de pièce minimale $k - 2$, de sorte que $H_{\{k-2\}}^s(t) = \frac{D_k^\diamond(t)}{t} - 1$;
- une pyramide de pièce minimale $k - 1$ qui évite 0 vit dans le modèle $\{2, \dots, k - 1\}$, de sorte que $V_{\{k-1\}}^{(0)s} = 1 + D_{k-2}^\diamond(t)$.

On en déduit enfin

$$M_{\{k-1\}}^{(0)\diamond}(t) = \frac{(D_k^\diamond(t) - D_{k-2}^\diamond(t))D_k^\diamond(t)}{1+t};$$

$$M_{\{k-1\}}^{(k-2)\diamond}(t) = \frac{D_k^\diamond(t) \left(\frac{D_k^\diamond(t)}{t} - 1 \right)}{1+t};$$

$$M_{\{k-1\}}^{(k-1)\diamond}(t) = \frac{(1 + D_k^\diamond(t))D_k^\diamond(t)}{1+t}.$$

Les formules annoncées sont déduites en injectant ces identités dans (4.15), (4.17) et (4.18). \square

Chapitre 5

Animaux de Klarner

Ce chapitre présente un travail en vue de l'énumération des animaux de Klarner, présentés dans l'introduction de la thèse. Nous suivons ici l'approche de Bousquet-Mélou et Rechnitzer qui utilise une bijection avec des empilements de dimères pour étudier les animaux de Klarner (ou animaux multi-dirigés) sur les réseaux triangulaire et carré biaisé [10]. Nous étendons cette bijection au réseau carré droit en utilisant cette fois des empilements de segments.

Nous présentons en réalité une légère variante des animaux de Klarner, qui n'affecte pas leur énumération. Le travail présenté ici est encore largement en cours, ce qui explique que les résultats ne sont pas aussi aboutis que ceux des autres chapitres.

Le chapitre est organisé comme suit. La chapter 5.1 donne une définition nouvelle des animaux de Klarner utilisant des empilements de segments. La chapter 5.2 étudie le problème de l'énumération de ces animaux, et donne des résultats asymptotiques. Enfin, la chapter 5.3 donne une bijection entre les animaux de Klarner et certains chemins de Dyck, et en explore les conséquences possibles.

Note. *Stricto sensu*, les animaux de Klarner sont définis sur les réseaux carré droit et triangulaire, alors que les animaux multi-dirigés de Bousquet-Mélou et Rechnitzer sont définis sur les réseaux triangulaire et carré biaisé (les définitions coïncident sur le réseau triangulaire). Nous utiliserons ici indifféremment les deux termes pour désigner les animaux sur les trois réseaux.

5.1 Définitions

5.1.1 Animaux et empilements de segments

Comme annoncé précédemment, nous introduisons un troisième réseau sur lequel nous étudierons les animaux, le réseau carré droit.

Définition 5.1. Le *réseau carré droit* est le graphe de sommets \mathbb{Z}^2 , avec les arêtes $(i, j) - (i + 1, j)$ et $(i, j) - (i, j + 1)$ pour tous entiers i, j .

En apparence, le réseau carré droit est plus simple que le réseau carré biaisé ; en réalité, la définition et l'énumération des animaux multi-dirigés sur ce réseau sont plus difficiles.

L'étude des animaux dirigés du chapitre précédent repose sur la projection qui associe à chaque animal du réseau triangulaire ou carré un empilement de dominos. Nous définissons de même la projection d'un animal du réseau carré droit, qui sera un empilement de segments plutôt que de dominos (le modèle des empilements de segments est défini dans la chapter 1.5.1).

Définition 5.2. Soit A un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 . On appelle *segment* de A un sous-ensemble s de A de la forme $\{(i, j), \dots, (i + \ell - 1, j)\}$, maximal pour l'inclusion (donc ni $(i - 1, j)$ ni $(i + \ell, j)$ ne sont dans A).

On appelle *projection* de s , et on note $\pi(s)$, le segment dont les arêtes sont $\{i, \dots, i + \ell - 1\}$ et *hauteur* de s l'entier j . La projection de A , encore notée $\pi(A)$, est obtenue en empilant les projections $\pi(s)$ de tous les segments s de A par ordre croissant de hauteur.

À cause de la condition de maximalité d'un segment de A , deux segments à la même hauteur ne sont jamais concurrents, ce qui implique que l'ordre dans lequel ils sont empilés n'a pas d'importance. Ceci justifie la définition.

Un exemple de projection d'un animal est donné figure 5.1. Pour dessiner les segments, nous adoptons une convention graphique similaire à celle du chapitre précédent : un segment est représenté par un rectangle. Pour plus de clarté, ℓ points sont représentés dans un segment de longueur ℓ . En accord avec cette convention, nous parlerons de *sites* d'un segment plutôt que d'arêtes.

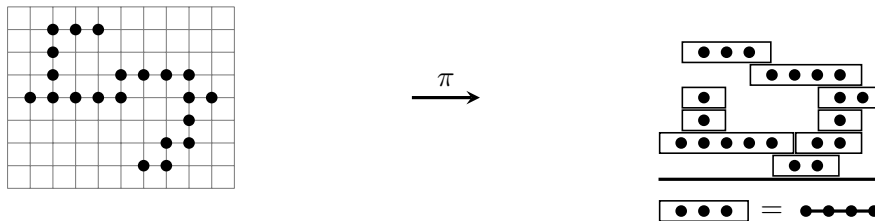


FIGURE 5.1 – À gauche, un animal du réseau carré droit. À droite, le résultat de la projection : chaque segment de l'animal comptant ℓ sites est remplacé par un segment de longueur ℓ , représenté par un rectangle contenant ℓ points. Ici, l'empilement qui résulte a deux adjacences à gauche.

Si A est un animal du réseau triangulaire ou carré biaisé, le fait que tous les sites (i, j) sont tels que $i + j$ est pair assure que tous les segments de A ne contiennent qu'un seul site. La projection de A est donc un empilement de dominos. Ainsi, cette définition généralise la projection définie sur les réseaux triangulaire et carré biaisé.

Comme sur les deux autres réseaux, la projection des animaux du réseau carré n'est pas injective. Nous nous intéresserons à des sous-classes d'animaux, sur les trois réseaux, pour lesquelles la projection est injective. Les animaux dirigés forment une telle sous-classe sur les réseaux triangulaire et carré biaisé, dont l'image par la projection est l'ensemble des pyramides. Les animaux multi-dirigés forment une classe plus grande.

5.1.2 Pyramides de Klarner

Les pyramides de Klarner sont l'équivalent sur le réseau carré droit des animaux dirigés. Notre but est, en partant d'une pyramide de segments H , de construire un animal $\psi(H)$ tel que $\pi \circ \psi(H) = H$.

Sur le réseau triangulaire, un tel animal est obtenu en faisant correspondre à chaque domino à position i un site (i, j) , où j est la *hauteur* du domino. Nous faisons de même pour les pyramides de segments : nous attribuons à l'unique segment minimal la hauteur 0 et à tout autre segment la hauteur $j + 1$, où j est la hauteur maximale d'un segment en dessous de lui. Si x est un segment d'arêtes $i, \dots, i + \ell - 1$ et de hauteur j , nous lui faisons correspondre les sites $(i, j), \dots, (i + \ell - 1, j)$. Nous notons $\psi(H)$ l'ensemble des sites correspondant aux segments de H .

L'ensemble $\psi(H)$ n'est pas nécessairement un animal du réseau carré droit. En effet, il peut arriver que, bien qu'un segment y repose sur un autre segment x , les sites de $\psi(H)$ correspondant à x et y ne sont pas reliés. Ce phénomène se produit quand les sites de x et de y sont consécutifs, *i.e.*, les segments x et y sont *adjacents* (voir définition 1.32). Ce phénomène peut être observé sur l'empilement de la figure 5.1. On a, en revanche, le résultat suivant.

Lemme 5.3. *Supposons que la pyramide H n'a d'adjacence ni à droite, ni à gauche. L'ensemble $\psi(H)$ est un animal du réseau carré.*

Preuve. Soit y un segment non minimal de la pyramide H et x un segment sur lequel y repose. Le segment y couvre donc x , ce qui signifie que y et x ne sont pas adjacents ; les sites de $\psi(H)$ qui correspondent à ces segments sont donc connectés dans le réseau carré. De proche en proche, chaque site est donc connecté au segment minimal, ce qui prouve que $\psi(H)$ est connexe. \square

Les animaux ayant la forme $\psi(H)$ où H est une pyramide de segments sans adjacence seront appelés *pyramides de Klarner*. Comme pour les pyramides de dominos, nous appellerons *demi-pyramide de Klarner* une pyramide de Klarner dont le segment minimal contient le site 0 et dont aucun segment ne contient de site négatif.

Comme le montre la figure 5.1, la réciproque du lemme 5.3 n'est pas vraie. Il existe ainsi des pyramides de segments H telles que $\psi(H)$ est un animal du réseau carré droit, mais pas une pyramide de Klarner.

5.1.3 Empilements connexes et animaux de Klarner

Le chapitre 4 et la chapter précédente définissent trois familles d'animaux ; chacune en bijection, via une application ψ , avec une famille d'empilements :

- les animaux dirigés de source ponctuelle sur le réseau triangulaire, en bijection avec les pyramides de dominos ;
 - les animaux dirigés de source ponctuelle sur le réseau carré biaisé, en bijection avec les pyramides strictes de dominos ;
 - les pyramides de Klarner, en bijection avec les pyramides de segments sans adjacence.
- Nous définissons à présent les animaux multi-dirigés en étendant dans chaque cas l'application ψ à une classe d'empilements plus large que les pyramides. Dans la suite, le terme « empilement » désignera indifféremment un empilement de dominos, un empilement strict de dominos ou un empilement de segments sans adjacence, selon le réseau auquel on s'intéresse.

Définition 5.4. Un empilement non vide H est *connexe* si pour tous segments x et y de H , il existe des segments $x = x_0, \dots, x_n = y$ tels que les segments x_i et x_{i+1} sont concurrents pour tout i .

Il est clair, en particulier, que toute pyramide est un empilement connexe. Alternative-ment, un empilement est connexe si et seulement si les sites occupés par ses segments sont consécutifs (figure 5.2a). Tout empilement se décompose en outre de manière unique en *composantes connexes*.

Soit H un empilement connexe. Nous définissons inductivement un animal $\psi(H)$, qui coïncide avec la construction précédente si H est une pyramide et est défini à une translation verticale près, de la manière suivante.

Définition 5.5. Soit H un empilement connexe et soit s un segment maximal de H ; écrivons $H = H's$. Soient H_1, \dots, H_n les composantes connexes de H' et A_1, \dots, A_n leurs images par ψ , construites inductivement.

Pour construire l'animal $\psi(H)$, on commence par placer le segment s très haut; ensuite, on remonte chaque animal A_i assez haut pour qu'il soit en contact avec s .

Dans le cas où H' est lui-même connexe, la construction revient à déposer le segment s sur l'animal $\psi(H')$. En particulier, si H est une pyramide, l'empilement H' est encore une pyramide, donc connexe. Ceci montre que l'application ψ est identique à celle donnant les animaux dirigés et les pyramides de Klarner.

Cette définition est justifiée par le résultat suivant. Elle est illustrée figure 5.2.

Lemme 5.6. *L'animal $\psi(H)$ est, à une translation verticale près, le même quel que soit le choix du segment maximal s .*

Preuve. Soit H un empilement connexe et soient s_1 et s_2 deux segments maximaux de H , pris de gauche à droite. Écrivons $H = H's_1s_2$ et soient H_1, \dots, H_n les composantes connexes de H' , de gauche à droite; soient A_1, \dots, A_n leurs images par ψ .

Les segments s_1 et s_2 n'étant pas concurrents, une seule des composantes H_i peut être concurrente à la fois à s_1 et à s_2 . De plus, il doit exister une telle composante, sans quoi H ne serait pas connexe. Appelons donc H_m l'unique composante connexe de H' concurrente à s_1 et s_2 .

On constate que, quel que soit l'ordre dans lequel les segments s_1 et s_2 sont ajoutés, l'animal $\psi(H)$ est construit en déposant les segments s_1 et s_2 sur l'animal A_m , puis en translatant l'animal très haut; les animaux A_1, \dots, A_{m-1} sont ensuite remontés assez haut pour qu'ils touchent s_1 , puis les animaux A_{m+1}, \dots, A_n sont remontés assez haut pour qu'ils touchent s_2 . Ceci termine la preuve. \square

Nous appellerons *multi-dirigés* les animaux de la forme $\psi(H)$, avec H un empilement connexe. L'application ψ est bien une bijection à cause de l'identité $\pi \circ \psi(H) = H$.

La classe des animaux multi-dirigés ainsi construite est légèrement différente de celles décrites dans [35, 10]; un avantage de cette définition est que la classe des animaux multi-dirigés est, par construction, symétrique selon l'axe vertical. Bien sûr, ce changement de définition n'a pas d'incidence sur l'énumération, puisque les animaux multi-dirigés restent en bijection avec les empilements connexes.

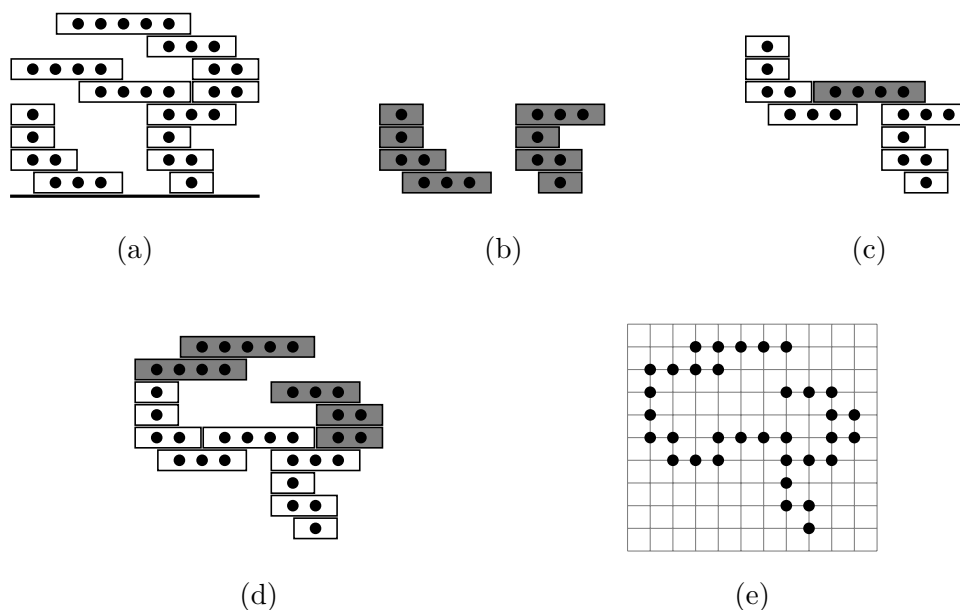


FIGURE 5.2 – La construction de l’animal image par ψ d’un empilement de segments connexe et sans adjacence (a). L’animal est construit segment par segment dans un ordre compatible avec celui de l’empilement. Les premiers segments forment deux composantes connexes (b). Le segment ajouté en (c) réunit ces deux composantes en remontant celle de gauche. Les derniers segments sont ensuite ajoutés (d). L’animal final est représenté en (e), et est indépendant de l’ordre dans lequel on empile les segments ; sa projection est bien l’empilement de départ (a).

5.2 Énumération

Dans l’article définissant ses animaux, Klarner a donné une équation que vérifie leur série génératrice, mais n’a pas pu résoudre cette équation [35]. Le lien entre les animaux de Klarner et les empilements de dominos a ensuite permis à Bousquet-Mélou et Rechnitzer [10] de donner une formule exacte pour l’énumération des animaux multi-dirigés dans les réseaux triangulaire et carré biaisé. Cette formule a ensuite été prouvée plus combinatoirement par Viennot [53]. Dans ce même article, Viennot montre également l’existence d’un lien entre les empilements connexes de dominos et certains modèles de physique statistique, par exemple étudiés dans [21].

Nous présentons ces travaux et montrons pourquoi la méthode de Bousquet-Mélou et Rechnitzer ne fonctionne pas pour le réseau carré droit.

5.2.1 Empilements connexes et empilements généraux

Soit $k \geq 1$ un entier. Nous considérons les animaux de Klarner de largeur k , c’est-à-dire occupant k colonnes consécutives. Nous attribuons le poids u aux sites situés dans la première colonne et le poids t aux autres sites.

Ceci permet d’écrire la série génératrice, notée $C_k(t, u)$, des animaux de Klarner de largeur k . Notons $C(t, u, z)$ la série génératrice

$$C(t, u, z) = \sum_{k \geq 1} C_k(t, u) z^k.$$

La spécialisation $C(t, t, 1)$ donne ainsi la série génératrice des animaux de Klarner comptés selon l'aire.

Nous notons également $H_k(t, u)$ la série génératrice des empilements du modèle borné de largeur k , où les sites de la première colonne portent le poids u et ceux des autres colonnes le poids t . Notons enfin $H(t, u, z)$ la série

$$H(t, u, z) = \sum_{k \geq 0} H_k(t, u) z^k.$$

Nous utiliserons les notations ci-dessus pour les énoncés valables indifféremment dans les trois modèles. Pour ceux concernant un modèle particulier, nous noterons, par exemple, $C_k^\Delta(t, u)$, $C_k^\circ(t, u)$ et $C_k^\square(t, u)$ pour désigner la série $C_k(t, u)$ dans les modèles triangulaire, carré biaisé et carré droit, respectivement.

Le lien habituel entre empilements de dominos et empilements stricts de dominos donne

$$H^\Delta(t, u, z) = H^\circ\left(\frac{t}{1-t}, \frac{u}{1-u}, z\right); \quad (5.1)$$

$$C^\Delta(t, u, z) = C^\circ\left(\frac{t}{1-t}, \frac{u}{1-u}, z\right), \quad (5.2)$$

ou alternativement

$$H^\circ(t, u, z) = H^\Delta\left(\frac{t}{1+t}, \frac{u}{1+u}, z\right); \quad (5.3)$$

$$C^\circ(t, u, z) = C^\Delta\left(\frac{t}{1+t}, \frac{u}{1+u}, z\right). \quad (5.4)$$

Dans la suite, nous nous concentrerons donc sur les réseaux triangulaire et carré droit.

Le résultat suivant, valable dans les trois modèles, permet de calculer la série $C(t, u, z)$ à partir de la série $H(t, u, z)$.

Proposition 5.7. *La série $C(t, u, z)$ des empilements connexes vaut*

$$C(t, u, z) = \frac{H(t, u, z)}{1 + zH(t, t, z)} - 1.$$

Le calcul de la série $C(t, u, z)$ se déduit donc de celui de $H(t, u, z)$. En revanche, il est impossible de faire la substitution $z = 1$ directement dans cette formule : en effet, nous allons voir que la série $H(t, u, z)$ ne converge pas au voisinage de $z = 1$.

Cette identité apparaît dans [10] pour le cas des empilements de dominos.

Preuve. Ce résultat repose sur le fait qu'un empilement peut se voir comme une suite d'empilements connexes séparés par une ou plusieurs colonnes vides. En d'autres termes, un empilement est une suite de colonnes vides éventuellement suivies d'un empilement connexe ; à gauche de la première colonne vide se trouve également éventuellement un empilement connexe. On trouve donc le lien

$$H(t, u, z) = \frac{1 + C(t, u, z)}{1 - z - zC(t, t, z)}.$$

En posant $u = t$ dans cette équation, on trouve

$$H(t, t, z) = \frac{1 + C(t, t, z)}{1 - z - zC(t, t, z)}.$$

Ensemble, ces deux équations impliquent l'identité de la proposition. \square

Plaçons nous maintenant dans le cas particulier où $t = u$, c'est à dire qu'on n'attache pas d'importance particulière aux sites situés dans la première colonne. Dans le cas du réseau triangulaire, les séries $H_k(t, t)$ sont calculées dans la chapter 1.5.3 : elles valent

$$H_k^\Delta(t, t) = \frac{1}{F_{k+1}(t)}, \quad (5.5)$$

où les polynômes de Fibonacci $F_k(t)$ sont définis par

$$\sum_{k \geq 0} F_k(t) z^k = \frac{1}{1 - z + tz^2}.$$

On déduit de cette identité une expression des polynômes $F_k(t)$:

$$F_k(t) = \frac{1 - D^{k+1}}{(1 - D)(1 + D)^k},$$

où D est la série $D^\Delta(t)$ des nombres de Catalan. Ceci permet de calculer la série $H^\Delta(t, t, z)$, et donc d'en déduire la série $C^\Delta(t, t, 1)$ des empilements connexes. Le détail du calcul est donné dans [10]. Le résultat final, valable pour les réseaux triangulaire et carré biaisé, est

$$C(t, t, 1) = \frac{D}{(1 - D) \left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{D^{k+1}}{1 - D^k(1 + D)} \right)}, \quad (5.6)$$

où D vaut la série $D(t)$ appropriée selon le réseau. Une preuve plus directe et combinatoire de ce résultat est donnée dans [53].

En revanche, dans le réseau carré droit, il n'est pas possible de mener le même calcul. Le calcul de la série $H_k^\square(t)$ comptant les empilements de segments sans adjacence est discuté dans la chapter 1.5.2 (cette série est alors notée $H_k^{gd}(t)$). Le lemme 1.35 montre qu'il est impossible d'appliquer le théorème d'inversion (théorème 1.16), qui était la base du calcul de $H_k^\Delta(t)$.

Soit $Q(t)$ la série définie par

$$Q(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{H_k(t, t)}{H_{k-1}(t, t)} \quad (5.7)$$

Dans le réseau triangulaire, cette série est $1 + D(t)$. Dans le réseau carré, la limite semble exister et avoir des coefficients positifs, mais est différente de $D^\square(t)$. Cette série pourrait être le paramètre naturel permettant d'exprimer la série $C^\square(t, t, 1)$, mais je n'ai pu ni trouver un équivalent de l'identité (5.6), ni même prouver l'existence de la série $Q^\square(t)$ ou la calculer.

L'examen des premiers termes de la série $Q^\square(t)$ par Gfun [46] semble montrer qu'elle n'est pas D-finie.

5.2.2 Construction colonne par colonne

Nous présentons ici une autre méthode pour calculer la série des empilements connexes, qui est essentiellement celle envisagée par Klarner. Nous nous concentrons, comme indiqué précédemment, sur les réseaux triangulaire et carré droit. Là encore, nous montrerons en quoi cette méthode permet d'aboutir pour le réseau triangulaire, mais rencontre des difficultés pour le réseau carré droit.

Nous calculons également avec cette méthode la série, notée $D_k(t, u)$, des demi-pyramides de largeur au plus k , où la variable u compte les sites dans la première colonne et t les autres sites. S'intéresser aux demi-pyramides est naturel pour deux raisons. Tout d'abord, les demi-pyramides de dominos sont plus faciles à énumérer que les empilements connexes ; ensuite, la formule (5.6) donnant la série génératrice des animaux multi-dirigés dans le réseau triangulaire fait intervenir la série $D(t)$ des demi-pyramides. Il est à espérer qu'il en soit de même sur le réseau carré droit.

Soient $A(v) = \sum_{k \geq 0} A_k v^k$ et $B(k) = \sum_{k \geq 0} B_k v^k$ des séries génératrices. Notons $A(v) \odot_v B(v)$ le produit de Hadamard des séries $A(v)$ et $B(v)$, défini comme

$$A(v) \odot B(v) = \sum_{k \geq 0} A_k B_k v^k.$$

Lemme 5.8. *Sur les réseaux triangulaire et carré droit, les séries $H_k(t, u)$ sont données par*

$$\begin{aligned} H_1(t, u) &= \frac{1}{1-u}; \\ H_k(t, u) &= \left[H_{k-1}(t, v) \odot_v H_2(v, u) \right]_{v=t}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

De plus, les séries $C_k(t, u)$ sont données par

$$\begin{aligned} C_1(t, u) &= \frac{u}{1-u}; \\ C_k(t, u) &= \left[C_{k-1}(t, v) \odot_v C_2(v, u) \right]_{v=t}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

Enfin, les séries $D_k(t, u)$ sont données par

$$\begin{aligned} D_1(t, u) &= \frac{u}{1-u}; \\ D_k(t, u) &= \frac{u}{1-u} + \left[D_{k-1}(t, v) \odot_v D_2(v, u) \right]_{v=t}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

Ces identités se traduisent en équations définissant les séries $H(t, u, z)$ et $C(t, u, z)$:

$$\begin{aligned} H(t, u, z) &= 1 + z \left[H(t, v, z) \odot_v H_2(v, u) \right]_{v=t}; \\ C(t, u, z) &= \frac{uz}{1-u} + z \left[C(t, v, z) \odot_v C_2(v, u) \right]_{v=t}. \end{aligned}$$

Preuve. Commençons par le cas de la série $H_k(t, u)$. L'expression de $H_1(t, u)$ est claire. Soit H un empilement de largeur k avec $k \geq 2$, possédant i sites dans la première colonne et j sites dans la deuxième.

Soit x un segment de H . Notons $x_{[1,2]}$ le segment constitué des sites de x dans les deux premières colonnes (ce segment n'est défini que si x possède au moins un tel site). Notons $H_{[1,2]}$ l'empilement constitué de tous les segments de la forme $x_{[1,2]}$. De la même manière, notons $H_{[2,k]}$ l'empilement constitué de tous les sites des segments de H dans toutes les colonnes sauf la première.

Les sites des colonnes à distance au moins 2 n'interagissant pas, l'empilement H est entièrement déterminé par $H_{[1,2]}$ et $H_{[2,k]}$. Écrivons maintenant la série génératrice, notée $\widetilde{H}_k(t, u, v)$, des empilements de largeur k avec une variable u comptant les sites dans la première colonne, une variable v pour les sites dans la deuxième colonne et une variable t pour les autres sites. On trouve

$$\widetilde{H}_k(t, u, v) = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} [v^j] H_{k-1}(t, v) [u^i v^j] H_2(v, u).$$

Ceci est équivalent à

$$\widetilde{H}_k(t, u, v) = H_{k-1}(t, v) \odot_v H_2(v, u).$$

La série $H_k(t, u)$ s'obtient ensuite en remplaçant v par t .

Pour calculer la série $C_k(t, u)$, on remarque que l'empilement H possède un site dans chaque colonne si et seulement si $H_{[1,2]}$ et $H_{[2,k]}$ possèdent un site dans toutes les leurs. Le raisonnement est donc identique. Enfin, pour calculer la série $D_k(t, u)$, on remarque que l'empilement H est une demi-pyramide si soit il n'a de sites que dans la première colonne, soit les empilements $H_{[1,2]}$ et $H_{[2,k]}$ sont des demi-pyramides. La formule annoncée s'ensuit. \square

Le résultat suivant donne les valeurs des séries $H_2(v, u)$, $C_2(v, u)$ et $D_2(v, u)$ apparaissant dans les formules ci-dessus.

Lemme 5.9. *Les séries comptant les trois types d'empilements sur deux colonnes dans le réseau triangulaire sont*

$$\begin{aligned} H_2^\Delta(v, u) &= \frac{1}{1 - u - v}; \\ C_2^\Delta(v, u) &= \frac{1}{1 - u - v} - \frac{u}{1 - u} - \frac{v}{1 - v} - 1; \\ D_2^\Delta(v, u) &= \frac{u}{1 - u - v}. \end{aligned}$$

Dans le réseau carré, ces séries valent

$$\begin{aligned} H_2^\square(v, u) &= \frac{1 - uv}{1 - u - v + u^2 v^2}; \\ C_2^\square(v, u) &= \frac{1 - uv}{1 - u - v + u^2 v^2} - \frac{u}{1 - u} - \frac{v}{1 - v} - 1; \\ D_2^\square(v, u) &= \frac{1 - v}{1 - u - v + u^2 v^2} - 1. \end{aligned}$$

Certaines de ces formules apparaissent dans [35].

Preuve. Commençons par le réseau triangulaire. Dans ce réseau, le modèle d'empilements sur deux colonnes possède deux pièces concurrentes, que nous noterons g (le domino de la colonne de gauche) et d (celui de la colonne de droite). Les poids respectifs de ces dominos sont u et v .

Un empilement peut être vu comme n'importe quel mot sur l'alphabet $\{g, d\}$, d'où la formule pour $H_2^\Delta(v, u)$. Cet empilement est connexe s'il ne contient ni seulement des g , ni seulement des d ; cela oblige à retrancher les termes correspondant au langage $1 + g^+ + d^+$ pour trouver la série $C_2^\Delta(v, u)$. Enfin, l'empilement est une demi-pyramide s'il commence par un g . On en déduit la formule pour $D_2^\Delta(v, u)$.

Pour le réseau carré, le modèle des empilements de segments sur deux colonnes compte trois pièces, toutes concurrentes entre elles : le segment comptant un site à gauche (que nous noterons g), le segment comptant un site à droite (que nous noterons d) et le segment comptant un site dans chacune des deux colonnes (que nous noterons b).

La condition de non adjacence interdit les motifs gd et dg ; ceci équivaut à dire qu'entre deux pièces b consécutives, il se trouve soit uniquement des pièces g , soit uniquement des pièces d . Les empilements sur deux colonnes sont donc reconnus par l'expression régulière non ambiguë

$$(1 + g^+ + d^+) [b(1 + g^+ + d^+)]^*.$$

En remarquant que la pièce g a pour poids u , la pièce d pour poids v et la pièce b pour poids uv , on en déduit l'expression

$$H_2^\square(v, u) = \frac{1 + \frac{u}{1-u} + \frac{v}{1-v}}{1 - uv \left(1 + \frac{u}{1-u} + \frac{v}{1-v}\right)}.$$

Cette expression se simplifie en la forme annoncée. La série $C_2^\square(v, u)$ est calculée de la même manière que dans le réseau triangulaire. Enfin, un empilement non vide est une demi-pyramide si et seulement si il ne commence pas par un d . L'expression régulière des demi-pyramides éventuellement vides est donc

$$g^* [b(1 + g^+ + d^+)]^*.$$

On en déduit l'expression de $D_2^\square(v, u)$. □

Les lemmes 5.8 et 5.9 nous permettent d'écrire le résultat suivant. Les équations sur le réseau triangulaire apparaissent dans [10].

Théorème 5.10. *Soit $k \geq 2$. Dans le réseau triangulaire, les séries $H_k(t, u)$, $C_k(t, u)$ et $D_k(t, u)$ obéissent aux équations de récurrence*

$$\begin{aligned} H_k^\Delta(t, u) &= \frac{1}{1-u} H_{k-1}^\Delta\left(t, \frac{t}{1-u}\right); \\ C_k^\Delta(t, u) &= \frac{1}{1-u} C_{k-1}^\Delta\left(t, \frac{t}{1-u}\right) - C_{k-1}^\Delta(t, t); \\ D_k^\Delta(t, u) &= \frac{u}{1-u} + \frac{u}{1-u} D_{k-1}^\Delta\left(t, \frac{t}{1-u}\right). \end{aligned}$$

Dans le réseau carré, ces mêmes séries vérifient

$$\begin{aligned} H_k^\square(t, u) &= \frac{1+(\alpha+\beta)(\alpha-1)}{\alpha-\beta} H_{k-1}^\square(t, t\alpha) - \frac{1+(\alpha+\beta)(\beta-1)}{\alpha-\beta} H_{k-1}^\square(t, t\beta); \\ C_k^\square(t, u) &= \frac{1+(\alpha+\beta)(\alpha-1)}{\alpha-\beta} C_{k-1}^\square(t, t\alpha) - \frac{1+(\alpha+\beta)(\beta-1)}{\alpha-\beta} C_{k-1}^\square(t, t\beta) - C_{k-1}^\square(t, t); \\ D_k^\square(t, u) &= \frac{u}{1-u} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} [(\alpha-1)D_{k-1}^\square(t, t\alpha) - (\beta-1)D_{k-1}^\square(t, t\beta)], \end{aligned}$$

où $\alpha = \alpha(u)$ et $\beta = \beta(u)$ sont les séries

$$\alpha(u) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4u^2(1-u)}}{2(1-u)}, \quad \beta(u) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4u^2(1-u)}}{2(1-u)}. \quad (5.8)$$

Preuve. Le résultat repose sur une décomposition en éléments simples des séries calculées dans le lemme 5.9, vues comme des fractions rationnelles en la variable v . Nous trouvons, pour le réseau triangulaire

$$\begin{aligned} H_2^\Delta(v, u) &= \frac{1}{1-u} \frac{1}{1 - \frac{1}{1-u}v}; \\ C_2^\Delta(v, u) &= H_2^\Delta(v, u) - \frac{1}{1-v} - \frac{u}{1-u}; \\ D_2^\Delta(v, u) &= uH_2^\Delta(v, u). \end{aligned}$$

Ceci permet d'extraire le coefficient de v^j de la série $H_2^\Delta(v, u)$:

$$[v^j]H_2^\Delta(v, u) = \frac{1}{1-u} \left(\frac{1}{1-u} \right)^j.$$

On fait de même pour les deux autres séries, en remarquant que les séries $C_k^\Delta(v, u)$ et $D_k^\Delta(v, u)$ ont un coefficient constant en u nul si $k \geq 1$. Par conséquent, pour calculer le produit de Hadamard, on peut se contenter d'extraire le coefficient en v^j pour $j \geq 1$. On trouve dans ce cas

$$\begin{aligned} [v^j]C_2^\Delta(v, u) &= \frac{1}{1-u} \left(\frac{1}{1-u} \right)^j - 1; \\ [v^j]D_2^\Delta(v, u) &= \frac{u}{1-u} \left(\frac{1}{1-u} \right)^j. \end{aligned}$$

Par définition du produit de Hadamard, on écrit l'identité du lemme 5.8 donnant, par exemple, $H_k^\Delta(t, u)$ sous la forme

$$H_k^\Delta(t, u) = \sum_{j \geq 1} \left([v^j]H_{k-1}^\Delta(t, v) [v^j]H_2^\Delta(v, u) \right) t^j.$$

En injectant la formule donnant les coefficients de $H_2^\Delta(v, u)$, on trouve la formule du théorème. On fait de même pour les séries $C_k^\Delta(t, u)$ et $D_k^\Delta(t, u)$.

Le réseau carré droit est traité de la même manière. On trouve les décompositions en éléments simples suivantes :

$$\begin{aligned} H_2^\square(v, u) &= \frac{1 + (\alpha + \beta)(\alpha - 1)}{\alpha - \beta} \frac{1}{1 - \alpha v} - \frac{1 + (\alpha + \beta)(\beta - 1)}{\alpha - \beta} \frac{1}{1 - \beta v}; \\ C_2^\square(v, u) &= H_2^\square(v, u) - \frac{1}{1 - v} - \frac{u}{1 - u}; \\ D_2^\square(v, u) &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha - 1}{1 - \alpha v} - \frac{\beta - 1}{1 - \beta v} \right) - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, on extrait les coefficients de v^j :

$$[v^j]H_2^\square(v, u) = \frac{1 + (\alpha + \beta)(\alpha - 1)}{\alpha - \beta} \alpha^j - \frac{1 + (\alpha + \beta)(\beta - 1)}{\alpha - \beta} \beta^j,$$

et pour $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} [v^j]C_2^\square(v, u) &= [v^j]H_2^\square(v, u) - 1; \\ [v^j]D_2^\square(v, u) &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} [(\alpha - 1)\alpha^j - (\beta - 1)\beta^j]. \end{aligned}$$

On en déduit les formules annoncées. □

Notant que la série $C(t, u)$ des empilements connexes est la somme des séries $C_k(t, u)$ pour $k \geq 1$, tandis que la série $D(t, u)$ des demi-pyramides est la limite des séries $D_k(t, u)$ quand k tend vers l'infini, on déduit du théorème 5.10 les équations

$$C^\Delta(t, u) = \frac{u}{1 - u} + \frac{1}{1 - u} C^\Delta\left(t, \frac{t}{1 - u}\right) - C^\Delta(t, t); \quad (5.9)$$

$$D^\Delta(t, u) = \frac{u}{1 - u} + \frac{u}{1 - u} D^\Delta\left(t, \frac{t}{1 - u}\right), \quad (5.10)$$

et pour le réseau carré

$$C^\square(t, u) = \frac{u}{1 - u} + \frac{1 + (\alpha + \beta)(\alpha - 1)}{\alpha - \beta} C^\square(t, t\alpha) - \frac{1 + (\alpha + \beta)(\beta - 1)}{\alpha - \beta} C^\square(t, t\beta) - C^\square(t, t); \quad (5.11)$$

$$D^\square(t, u) = \frac{u}{1 - u} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} [(\alpha - 1)D^\square(t, t\alpha) - (\beta - 1)D^\square(t, t\beta)]. \quad (5.12)$$

Comme attendu, l'équation gouvernant la série $D^\square(t, u)$ est plus simple que celle gouvernant la série $C^\square(t, u)$, à cause de l'absence de terme en $D^\square(t, t)$. Le calcul des premiers termes de la série $D^\square(t, t)$ montre également que, contrairement au cas du réseau triangulaire, cette série est différente de la série $Q^\square(t)$ définie par (5.7).

En utilisant les formules du théorème 5.10, il est facile de vérifier par récurrence les formules suivantes :

$$\begin{aligned} H_k^\Delta(t, u) &= \frac{1}{F_k(t) - uF_{k-1}(t)}; \\ D_k^\Delta(t, u) &= \frac{uF_{k-1}(t)}{F_k(t) - uF_{k-1}(t)}, \end{aligned}$$

où les $F_k(t)$ sont les polynômes de Fibonacci. On retrouve ainsi l'expression (5.5) quand $t = u$. Il n'y a pas de formule aussi simple pour la série $C_k^\Delta(t, u)$, mais la formule ci-dessus permet d'évaluer la série $H^\Delta(t, u, z)$, qui à son tour permet de calculer la série $C^\Delta(t, u, z)$ grâce à la proposition 5.7. Tous ces calculs sont effectués dans [10].

Sur le réseau carré, les équations sont plus difficiles à résoudre. L'observation des séries $H_k^\square(t, u)$ et $D_k^\square(t, u)$ pour les petites valeurs de k ne m'a pas permis de trouver un analogue des identités ci-dessus, qui est le point de départ de la résolution du modèle triangulaire.

5.2.3 Résultats asymptotiques

À présent, nous cherchons à tirer des équations précédentes des conséquences asymptotiques. Le résultat suivant se trouve dans [10] et s'obtient à partir de l'expression (5.6).

Théorème 5.11. *Les séries $C^\Delta(t, t, 1)$ et $C^\circ(t, t, 1)$ des animaux multi-dirigés sur les réseaux triangulaire et carré biaisé ne sont pas D -finies. De plus, le nombre d'animaux d'aire n est équivalent à $A\mu^n$, pour une constante A , sur ces deux réseaux avec $\mu^\Delta = 4,5878\dots$ et $\mu^\circ = 3,5878\dots$*

Il n'existe pas de résultat aussi précis sur le réseau carré, mais Klarner [35] a donné, en utilisant des matrices de transfert, un encadrement de la constante de croissance qui donne $\mu^\square = 3,7227\dots$

Nous cherchons maintenant à obtenir des résultats impliquant le nombre de sites dans la première colonne. Nous nous servirons pour cela des équations trouvées ci-dessus.

Théorème 5.12. *Soit t_c le rayon de convergence de la série $C(t, t)$. Pour $t < t_c$, soit $\rho(t)$ le rayon de convergence de la série $C(t, u)$ vue comme une série en la variable u . Le rayon $\rho(t)$ vaut, selon le réseau,*

$$\begin{aligned}\rho^\Delta(t) &= \left(1 + D^\Delta(t)\right)^{-1}, \\ \rho^\circ(t) &= D^\circ(t)^{-1}, \\ \rho^\square(t) &= \left(\frac{1 + t^2 - \sqrt{(1-t)(1-3t-t^2-t^3)}}{2t}\right)^{-1};\end{aligned}$$

De plus, la valeur t_c vérifie, selon le réseau,

$$t_c^\Delta \leq 1/4, \quad t_c^\circ \leq 1/3, \quad t_c^\square \leq t_0,$$

où t_0 est la solution réelle de

$$1 - 3t - t^2 - t^3 = 0.$$

Les mêmes résultats valent pour la série $D(t, u)$, avec une valeur différente de t_c .

Dans les réseaux triangulaire et carré biaisé, le rayon de convergence de $D(t, t)$ est en fait exactement $1/4$ et $1/3$ respectivement, tandis que celui de $C(t, t)$ est strictement inférieur. Dans le réseau carré droit, le théorème montre que les constantes de croissance (égales à l'inverse du rayon de convergence) des deux séries sont supérieures à $1/t_0$, qui vaut $3,3829\dots$. Les constantes de croissance expérimentales des séries $C^\square(t, t)$ et $D^\square(t, t)$ sont respectivement $3,7227\dots$ et $3,4165\dots$; en particulier, le rayon de convergence de $D(t, t)$ est strictement inférieur à t_0 , ce qui illustre la complexité du réseau carré droit par rapport au triangulaire.

Soit $P(t)$ la série qui intervient dans le calcul de $\rho^\square(t)$:

$$P(t) = \frac{1 + t^2 - \sqrt{(1-t)(1-3t-t^2-t^3)}}{2t}. \quad (5.13)$$

Cette série est déjà connue en combinatoire, et porte le numéro A082582 dans l'*Online Encyclopedia of Integer Sequences* de Sloane [48]. Elle compte les chemins de Dyck n'ayant pas de *grand pic*, ou facteur *uudd* [47]. Un lien possible entre les animaux de Klarner et ces chemins de Dyck est exploré dans la chapter 5.3.2.

Les fonctions donnant la valeur de $\rho(t)$ pour t inférieur à t_c sont montrées figure 5.3.

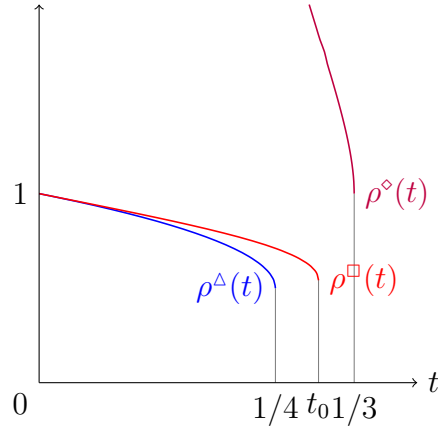


FIGURE 5.3 – Les graphes des fonctions donnant le rayon $\rho(t)$ dans les trois réseaux. En réalité, ce rayon n'est défini que pour $t < t_c$, avec t_c inférieur à $1/4$, $1/3$ ou t_0 .

Preuve. Soit $t < t_c$ fixé. Le fait que la série $C(t, u)$ converge montre que le rayon $\rho(t)$ existe (*i.e.*, le coefficient de u^k de la série $C(t, u)$ converge pour tout k) et n'est pas nul. La série $C(t, u)$ étant à coefficients positifs, la fonction ρ est décroissante pour $t < t_c$; de plus, le théorème de Pringsheim [27, théorème IV.6] montre que, si $\rho(t)$ est fini, cette série est singulière au point $u = \rho(t)$.

Dans le réseau triangulaire, la série $C(t, u)$ obéit à l'équation (5.9). Le terme $\frac{u}{1-u}$ assure que $\rho(t)$ est inférieur à 1; de plus, le terme en $C(t, \frac{t}{1-u})$ domine celui en $C(t, t)$ pour $u < 1$. Faisons tendre u vers $\rho(t)$. Le terme de gauche devient singulier, donc le terme de droite aussi. Il résulte que $\frac{t}{1-u}$ tend vers $\rho(t)$. On en déduit l'équation

$$\frac{t}{1 - \rho^\Delta(t)} = \rho^\Delta(t).$$

Cette équation n'a de solution réelle que si $t \leq 1/4$, ce qui montre l'inégalité $t_c^\Delta \leq 1/4$. De plus, la seule solution qui rende la fonction $\rho(t)$ décroissante est

$$\rho^\Delta(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4t}}{2},$$

qui est bien l'inverse de $1 + D^\Delta(t)$.

Dans le réseau carré droit, la série $C(t, u)$ obéit à l'équation (5.11). Là encore, le terme $\frac{u}{1-u}$ montre que le rayon $\rho(t)$ est inférieur à 1. Les séries $\alpha(u)$ et $\beta(u)$ ont également pour rayon de convergence 1. Enfin, comme montré figure 5.4, la quantité $\alpha(u)$ est toujours supérieure à 1 et à $\beta(u)$ pour $0 \leq u < 1$, ce qui montre que le terme dominant est celui en $C(t, t\alpha)$. Répétant le même raisonnement que ci-dessus, nous obtenons l'identité, valable pour $t < t_c$:

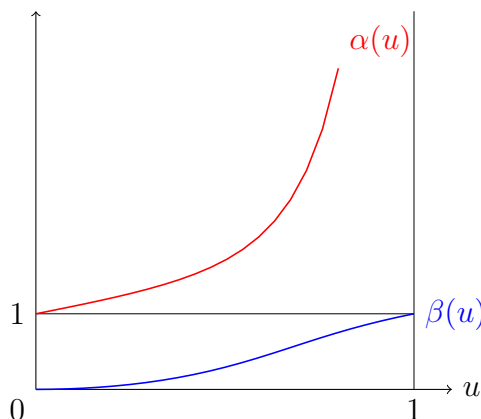
$$\rho^\square(t) = t\alpha(\rho^\square(t)).$$

En utilisant l'équation $(1 - u)\alpha(u)^2 - \alpha(u) + u^2 = 0$, on en déduit

$$(1 - \rho^\square(t))(t\rho^\square(t))^2 - t\rho^\square(t) + \rho^\square(t)^2 = 0.$$

La solution $\rho^\square(t) = 0$ ne convenant pas, on obtient finalement

$$\rho^\square(t)^2 - (1 + t^2)\rho^\square(t) + t = 0.$$

FIGURE 5.4 – Les graphes des fonctions α et β pour u entre 0 et 1.

Cette équation n'a de solution réelle que si $t < t_0$, ce qui montre l'inégalité $t_c^\square \leq t_0$; de plus, la seule solution qui rend $\rho(t)$ décroissante est $\rho^\square(t) = P(t)^{-1}$.

Enfin, pour traiter le réseau carré biaisé, nous utilisons le lien (5.4). On obtient l'équation

$$\frac{\rho^\diamond(t)}{1 + \rho^\diamond(t)} = \rho^\Delta\left(\frac{t}{1+t}\right),$$

qui montre bien que $t_c^\diamond \leq 1/3$ et que $\rho^\diamond(t)$ est l'inverse de $D^\diamond(t)$.

Le même raisonnement s'applique à la série $D(t, u)$, donnée par les équations (5.10) et (5.12). \square

5.3 Bijections avec les chemins de Dyck

Dans cette dernière chapitre, nous développons une approche bijective pour traiter les animaux multi-dirigés. Cette approche repose sur les bijections de le chapitre 2, qui transforment les empilements de dominos et de segments en chemins de Dyck.

Dans la suite, nous considérerons les chemins de Dyck comme des mots sur l'alphabet $\{u, d\}$, où u est le pas montant et d le pas descendant. De plus, si α est un mot $a_1 \cdots a_n$, nous notons $\tilde{\alpha}$ son image miroir $a_n \cdots a_1$.

5.3.1 Animaux multi-dirigés et chemins culminants irréductibles

Dans la chapter 2.2.3, il est montré que certains empilements de dimères sont en bijection avec certains chemins. En utilisant en plus la bijection entre animaux et empilements, on obtient le résultat suivant.

La définition suivante, qui est utilisée dans [9], est calquée sur la définition des ponts auto-évitant (voir chapitre 3).

Définition 5.13. On appelle *culminant* un chemin prenant des pas u et d et joignant les sommets v_0 et v_f , tel que la hauteur de tout sommet $v \neq v_f$ vérifie $h(v_0) \leq h(v) < h(v_f)$. Un chemin culminant non vide α est dit *irréductible* s'il ne s'écrit pas $\alpha = \beta\gamma$ où β et γ sont culminants non vides.

Proposition 5.14. *Soit $n \geq 1$. Il y a bijection entre les animaux multi-dirigés d'aire n sur le réseau triangulaire et les chemins culminants irréductibles comptant n pas descendants. Il y a également bijection entre les demi-animaux dirigés d'aire n et les chemins de Dyck de longueur $2n$.*

Preuve. Pour construire cette bijection, nous utilisons la bijection f décrite dans la définition 2.2. Soit ω un chemin culminant de hauteur k , possédant n pas descendants et $n+k$ pas montants. La bijection f transforme ω en une paire (η, H) , où η est composé de k pas montants et H est un empilement de dimères de largeur au plus $k-1$ comptant n pièces.

Le chemin ω est irréductible si et seulement si, à toute hauteur, il possède au moins un pas descendant. Ceci équivaut à dire que l'empilement H possède au moins un dimère dans chaque colonne, c'est-à-dire qu'il est connexe. Par construction, les animaux multi-dirigés d'aire n sont en bijection avec les empilements connexes de dimères ayant n pièces, ce qui conclut la preuve.

Les chemins (excursions) de Dyck sont traités de la même manière. Si ω est un chemin de Dyck non vide, $f(\omega)$ est de la forme (ε_0, H) , où ε_0 est le chemin vide au point 0 et H un empilement dont les pièces minimales touchent la colonne 0, c'est-à-dire une demi-pyramide. \square

La chapter 2.2.3 montre que les chemins de Dyck peuvent se voir comme des chemins stricts de Łukasiewicz, en groupant les pas descendants consécutifs. Nous utilisons la bijection f sur ces chemins de Łukasiewicz, ce qui donne des empilements de segments; le lemme 2.17 montre de plus que les empilements de segments obtenus sont sans adjacence à droite.

Les empilements de Klarner étant, en particulier, sans adjacence à droite, ils peuvent donc aussi se voir comme des chemins de Dyck. Pour décrire ces chemins, nous devons trouver comment se traduisent les adjacences à gauche.

Définition 5.15. On appelle *motif d'adjacence* d'un mot de Dyck un facteur de la forme $ud\tilde{\alpha}uu\beta du$, où α et β sont des mots de Dyck.

Un tel motif, ainsi que l'adjacence gauche auquel il correspond, est illustré figure 5.5.

Proposition 5.16. *Soit $n \geq 1$. Il y a bijection entre les animaux multi-dirigés d'aire n sur le réseau carré droit et les chemins culminants irréductibles sans motif d'adjacence comptant n pas descendants. Il y a également bijection entre les demi-pyramides de Klarner d'aire n et les chemins de Dyck sans motif d'adjacence de longueur $2n$.*

Preuve. Soit ω un chemin culminant de hauteur k , vu comme un chemin strict de Łukasiewicz. Ainsi qu'expliqué ci-dessus, la bijection consiste à utiliser la bijection f décrite dans la définition 2.2 pour transformer ω en un couple (η, H) , où η est le chemin auto-évitant composé de k pas montants et H est un empilement de segments de largeur $k-1$. Le chemin ω est irréductible si et seulement si l'empilement H est connexe.

Le chemin ω étant strict, le lemme 2.17 montre que l'empilement H n'a pas d'adjacence à droite. Il reste à montrer que H possède une adjacence gauche si et seulement si ω contient un motif d'adjacence.

Soient γ_b et γ_a deux segments adjacents à gauche de H , et soient a et b les pas descendants de ω correspondants. Les pas a et b sont donc de la forme $j \rightarrow i$ et $k \rightarrow j$, respectivement. Le chemin ω étant strict, le pas a est précédé d'un pas montant $j - 1 \rightarrow j$ et le pas b suivi d'un pas montant $j \rightarrow j + 1$. Intéressons-nous au facteur situé entre ces deux pas montants inclus : il est de la forme $ud\delta du$; le chemin δ commence à hauteur $j - 1$ et finit à hauteur $j + 1$ (figure 5.5).

Soit c un pas descendant situé entre a et b et γ_c le segment correspondant. Comme γ_a couvre γ_b , le segment γ_c ne peut être à la fois concurrent à γ_a et à γ_b . Ceci signifie que le pas c ne peut pas passer par la hauteur j . Le chemin δ ne peut donc traverser qu'en montant la ligne de hauteur j , ce qui montre qu'il est de la forme $\tilde{\alpha}uu\beta$.

Réciproquement, soit $\delta = ud\tilde{\alpha}uu\beta du$ un motif d'adjacence commençant à la hauteur $j - 1$ et finissant en $j + 1$. Soit a et b les pas descendants contenant le premier et le dernier d de δ , respectivement ; soit γ_a et γ_b les segments correspondants. Aucun pas descendant de δ ne passant par la hauteur j , le segment γ_a couvre γ_b , donc ces deux segments constituent une adjacence à gauche.

Le cas des demi-pyramides est traité de manière identique. □

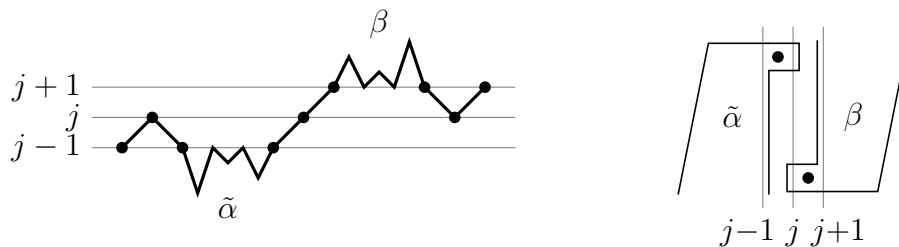


FIGURE 5.5 – À gauche, un motif d'adjacence contenant les deux facteurs $\tilde{\alpha}$ et β . À droite, l'image par la bijection f de ce motif vu comme un chemin strict de Łukasiewicz : les pas descendants au début de $\tilde{\alpha}$ et à la fin de β deviennent deux segments adjacents à gauche.

5.3.2 Chemins de Dyck sans grand pic ou vallée profonde

Pour conclure ce chapitre, nous nous intéressons aux demi-pyramides de Klarner, donc aux chemins de Dyck sans motif d'adjacence. Nous comparons ces chemins à deux autres familles de chemins de Dyck : les chemins n'ayant pas de facteur $uudd$ (ou *grand pic*) et les chemins n'ayant pas de facteur $dduu$ (ou *vallée profonde*). Ces chemins ont été étudiés dans [40, 47] ; les suites les énumérant portent respectivement les numéros A082582 et A086581 dans l'OEIS [48]. Nous noterons $P(t)$ et $V(t)$ les séries génératrices comptant respectivement les chemins de Dyck sans grand pic et sans vallée profonde.

Comme nous l'avons constaté plus haut, la série $P(t)$, donnée par (5.13), est l'inverse du rayon de convergence en u de la série $C^\square(t, u)$ (voir théorème 5.12). En combinant les équations vérifiées par les séries $P(t)$ et $\alpha(u)$, donnée par (5.8), on trouve de plus l'identité

$$P(t) = \alpha(tP(t)).$$

La série $V(t)$ est, quant à elle, donnée par

$$P(t) = 1 + tV(t).$$

Le rayon de convergence des séries $P(t)$ et $V(t)$ est la valeur t_0 du théorème 5.12.

De plus, si on compare les coefficients de la série $P(t)$ et de $Q^\square(t)$, donnée par (5.7), on trouve

$$P(t) = 1 + t + t^2 + 2t^3 + 5t^4 + 13t^5 + 35t^6 + O(t^7);$$

$$Q^\square(t) = 1 + t + t^2 + 3t^3 + 6t^4 + 16t^5 + 41t^6 + O(t^7).$$

Ce développement suggère que les coefficients de $Q^\square(t)$ sont supérieurs à ceux de $P(t)$, ce qui semble se confirmer aux ordres supérieurs.

Enfin, si on compare cette fois les coefficients de la série $V(t)$ à ceux de $1 + D^\square(t)$, on trouve

$$V(t) = 1 + t + 2t^2 + 5t^3 + 13t^4 + 35t^5 + 97t^6 + O(t^7);$$

$$1 + D^\square(t) = 1 + t + 2t^2 + 5t^3 + 13t^4 + 36t^5 + 104t^6 + O(t^7).$$

Là encore, les coefficients d'ordre supérieur de $D^\square(t)$ semblent rester supérieurs à ceux de $V(t)$. Ceci est cohérent avec le théorème 5.12 qui affirme que le rayon de convergence de $D^\square(t)$ est inférieur à celui de $V(t)$.

Au vu de l'inégalité coefficient par coefficient apparente $V(t) \leq 1 + D^\square(t)$, il semble intéressant de chercher une sous-classe des demi-pyramides de Klarner qui soit énumérée par $V(t)$, ce qui fournirait une nouvelle classe algébrique d'animaux. Une telle sous-classe pourrait également servir de base à une sous-classe des animaux de Klarner que l'on sache énumérer; l'analogie avec le réseau triangulaire, où la série $Q(t)$ est identique à l'inverse du rayon de convergence de la série $C(t, u)$, suggère que la série jouant le rôle de $Q^\square(t)$ pourrait être égale à $P(t)$. Le travail qui suit est effectué en vue de cet objectif.

Définition 5.17. Soit $\delta = ud\tilde{\alpha}uu\beta du$ un motif d'adjacence. On définit $\phi(\delta)$ comme le chemin $u\alpha u\beta dduu$. Soit ω un chemin ayant un motif d'adjacence δ marqué. On note $\phi(\omega)$ le chemin ω où on a appliqué ϕ au facteur δ et marqué la vallée profonde ainsi construite.

Le chemin $\phi(\delta)$, pour δ un motif d'adjacence, est illustré figure 5.6.

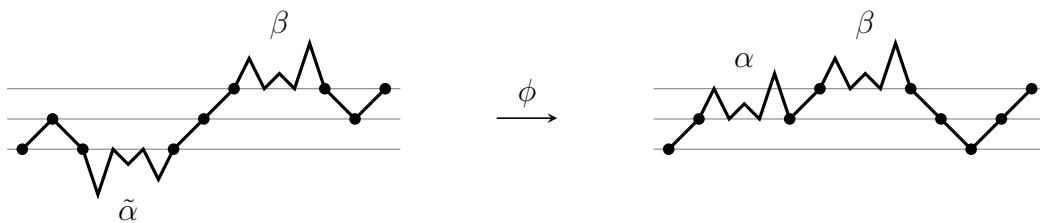


FIGURE 5.6 – La transformation ϕ : un motif d'adjacence est transformé en vallée profonde. La longueur du chemin est préservée.

Proposition 5.18. L'application ϕ est une injection de l'ensemble des chemins de Dyck marqués d'un motif d'adjacence vers celui des chemins de Dyck marqués d'une vallée profonde. Cette injection préserve la longueur des chemins.

Pour déduire de ce résultat l'injection cherchée des chemins sans vallée profonde vers les chemins sans motifs d'adjacence, il faudrait appliquer répétitivement la fonction ϕ à un chemin sans vallée profonde, en choisissant chaque fois le motif d'adjacence à transformer. Ce choix doit être fait de sorte que l'opération soit réversible, c'est-à-dire que l'on puisse savoir à chaque étape quelle vallée profonde vient d'être créée. Je n'ai pas pu pour l'instant décrire de telle injection.

Preuve. Tout d'abord, on note que, le chemin α étant un chemin de Dyck, le facteur $\phi(\delta)$ ne peut jamais descendre en dessous de la ligne de hauteur 0. Le chemin $\phi(\omega)$ est donc un chemin de Dyck si ω l'est.

Soit maintenant ω un chemin de Dyck marqué d'un motif d'adjacence. Montrons que, étant donné son image $\phi(\omega)$, on peut retrouver le chemin ω . Pour cela, soit c le point situé avant la vallée profonde marquée, et supposons que le point c se trouve à hauteur j . Soit b le point de dernier passage à la hauteur $j - 1$ avant c , et a le point de dernier passage à la hauteur $j - 2$ avant b . On constate (figure 5.6) que le facteur situé entre b et c est $u\beta$, et le facteur situé entre a et b est $u\alpha$. Connaissant α et β , on peut reconstituer le chemin de départ ω . \square

Bibliographie

- [1] M. ALBENQUE : A note on the enumeration of directed animals via gas considerations. *Ann. Appl. Probab.*, 19(5):1860–1879, 2009.
- [2] C. BANDERIER et P. FLAJOLET : Basic analytic combinatorics of directed lattice paths. *Theoret. Comput. Sci.*, 281(1-2):37–80, 2002. Selected papers in honour of Maurice Nivat.
- [3] J. BÉTRÉMA et J.-G. PENAUD : Modèles avec particules dures, animaux dirigés et séries en variables partiellement commutatives. *ArXiv Mathematics e-prints*, 2001. arXiv:math/0106210.
- [4] M. BOUSQUET-MÉLOU : Families of prudent self-avoiding walks. *J. Combin. Theory Ser. A*, 117(3):313–344, 2010. Arxiv:0804.4843.
- [5] M. BOUSQUET-MÉLOU : New enumerative results on two-dimensional directed animals. In *Proceedings of the 7th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Noisy-le-Grand, 1995)*, volume 180, pages 73–106, 1998.
- [6] M. BOUSQUET-MÉLOU : Discrete excursions. *Sém. Lothar. Combin.*, 57:Art. B57d, 23, 2006/08.
- [7] M. BOUSQUET-MÉLOU : Families of prudent self-avoiding walks. *J. Combin. Theory Ser. A*, 117(3):313–344, 2010.
- [8] M. BOUSQUET-MÉLOU et M. PETKOVŠEK : Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. *Discrete Math.*, 225(1-3):51–75, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Toronto, ON, 1998).
- [9] M. BOUSQUET-MÉLOU et Yann PONTY : Culminating paths. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 10(2):125–152, 2008.
- [10] M. BOUSQUET-MÉLOU et A. RECHNITZER : Lattice animals and heaps of dimers. *Discrete Math.*, 258(1-3):235–274, 2002.
- [11] M. BOUSQUET-MÉLOU et X. VIENNOT : Empilements de segments et q -énumération de polyominos convexes dirigés. *J. Combin. Theory Ser. A*, 60(2):196–224, 1992.
- [12] P. CARTIER et D. FOATA : *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*. Lecture Notes in Mathematics, No. 85. Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [13] A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON : *The algebraic theory of semigroups. Vol. I*. Mathematical Surveys, No. 7. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
- [14] A R CONWAY et A J GUTTMANN : On two-dimensional percolation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(4):891, 1995.
- [15] A. CONWAY : Some exact results for moments of 2D directed animals. *J. Phys. A*, 29(17):5273–5283, 1996.

- [16] S. CORTEEL : Crossings and alignments of permutations. *Adv. in Appl. Math.*, 38(2):149–163, 2007.
- [17] P. G. de GENNES : Exponents for the excluded volume problem as derived by the Wilson method. *Phys. Lett. A*, 38(5):339–340, 1972.
- [18] J. C. DETHRIDGE et A. J. GUTTMANN : Prudent self-avoiding walks. *Entropy*, 8:283–294, 2008.
- [19] J. C. DETHRIDGE et Anthony J. GUTTMANN : Prudent self-avoiding walks. *Entropy*, 10(3):309–318, 2008.
- [20] D. DHAR : Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter’s hard-square lattice-gas model. *Phys. Rev. Lett.*, 49(14):959–962, 1982.
- [21] P. DI FRANCESCO, E. GUITTER et C. KRISTJANSEN : Integrable 2D Lorentzian gravity and random walks. *Nuclear Phys. B*, 567(3):515–553, 2000.
- [22] E. DUCHI : On some classes of prudent walks. In *FPSAC’05*, Taormina, Italy, 2005.
- [23] P. DUCHON : On the enumeration and generation of generalized Dyck words. *Discrete Math.*, 225(1-3):121–135, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Toronto, ON, 1998).
- [24] P. DUCHON, P. FLAJOLET, Guy LOUCHARD et Gilles SCHAEFFER : Boltzmann samplers for the random generation of combinatorial structures. *Combin. Probab. Comput.*, 13(4-5):577–625, 2004.
- [25] H. DUMINIL-COPIN et S. SMIRNOV : The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. ArXiv:1007.0575, 2010.
- [26] B. DUPLANTIER et I. K. KOSTOV : Geometrical critical phenomena on a random surface of arbitrary genus. *Nucl. Phys. B*, 340(2-3):491–541, 1990.
- [27] P. FLAJOLET et Robert SEDGEWICK : *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [28] I. M. GESSEL : A factorization for formal Laurent series and lattice path enumeration. *J. Combin. Theory Ser. A*, 28(3):321–337, 1980.
- [29] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS et G. VIENNOT : Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem. *Adv. in Appl. Math.*, 9(3):334–357, 1988.
- [30] A. GROTHENDIECK : La théorie de Fredholm. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 2*, pages Exp. No. 91, 377–384. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [31] A. J. GUTTMANN et A. R. CONWAY : Hexagonal lattice directed site animals. In *Statistical physics on the eve of the 21st century*, volume 14 de *Ser. Adv. Statist. Mech.*, pages 491–504. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999.
- [32] A. J. GUTTMANN et A. R. CONWAY : Square lattice self-avoiding walks and polygons. *Ann. Comb.*, 5(3-4):319–345, 2001.
- [33] I. JENSEN et A. J. GUTTMANN : Self-avoiding polygons on the square lattice. *J. Phys. A*, 32(26):4867–4876, 1999.
- [34] I. JENSEN et A. J. GUTTMANN : Series expansions for two-dimensional directed percolation. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 47(1-3):835–837, 1996.
- [35] D. A. KLARNER : Cell growth problems. *Canad. J. Math.*, 19:851–863, 1967.
- [36] C. KRATTENTHALER : The theory of heaps and the Cartier–Foata monoid. <http://www.mat.univie.ac.at/~slc/books/cartfoa.pdf>.

- [37] J. LABELLE et Y. N. YEH : Generalized Dyck paths. *Discrete Math.*, 82(1):1–6, 1990.
- [38] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM et W. WERNER : On the scaling limit of planar self-avoiding walk. In *Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2*, volume 72 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 339–364. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [39] Y. LE BORGNE : Conjectures for the first perimeter moment of directed animals. *J. Phys. A*, 41(33):335004, 9, 2008. With online multimedia enhancements.
- [40] Y. LE BORGNE : Counting upper interactions in Dyck paths. *Sém. Lothar. Combin.*, 54:Art. B54f, 16 pp. (electronic), 2005/07.
- [41] Y. LE BORGNE et J.-F. MARCKERT : Directed animals and gas models revisited. *Electron. J. Combin.*, 14(1):Research Paper 71, 36 pp. (electronic), 2007.
- [42] N. MADRAS et G. SLADE : *The self-avoiding walk*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [43] B. NIENHUIS : Exact critical point and critical exponents of $O(n)$ models in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 49(15):1062–1065, 1982.
- [44] A. RECHNITZER et E. J. Janse van RENSBURG : Canonical Monte Carlo determination of the connective constant of self-avoiding walks. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 35(42):L605–L612, 2002.
- [45] W. RUDIN : *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third édition, 1987.
- [46] B. SALVY et P. ZIMMERMANN : Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20(2):163–177, 1994.
- [47] A. SAPOUNAKIS, I. TASOULAS et P. TSIKOURAS : On the dominance partial ordering of Dyck paths. *J. Integer Seq.*, 9(2):Article 06.2.5, 17 pp. (electronic), 2006.
- [48] N. J. A. SLOANE : The on-line encyclopedia of integer sequences. *Notices Amer. Math. Soc.*, 50(8):912–915, 2003. <http://oeis.org>.
- [49] R. P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, volume 49 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.
- [50] R. P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.
- [51] D. STAUFFER : *Introduction to percolation theory*. Taylor & Francis Ltd., London, 1985.
- [52] X. VIENNOT : Heaps of pieces. I. Basic definitions and combinatorial lemmas. In *Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985)*, volume 1234 de *Lecture Notes in Math.*, pages 321–350. Springer, Berlin, 1986.
- [53] X. VIENNOT : Multi-directed animals, connected heaps of dimers and Lorentzian triangulations. In *Journal of Physics*, volume 42 de *Conferences Series*, pages 268–280, 2006.