



Optique quantique multimode avec des peignes de fréquence

Olivier Pinel

► To cite this version:

Olivier Pinel. Optique quantique multimode avec des peignes de fréquence. Physique Quantique [quant-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. NNT: . tel-00654841

HAL Id: tel-00654841

<https://theses.hal.science/tel-00654841>

Submitted on 23 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique quantique

présentée par

Olivier PINEL

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie
sur le sujet :

Optique quantique multimode avec des peignes de fréquence

soutenue le 9 décembre 2010 devant le jury composé de :

M. Daniel BRAUN	Rapporteur
M. Fabien BRETENAKER	Président
M. Claude FABRE	Membre invité
M. Jean-Marc FRIGERIO	Examineur
M. Philippe GRANGIER	Examineur
M. Daniele ROMANINI	Rapporteur
M. Nicolas TREPS	Directeur de thèse

Remerciements

Cette thèse est le résultat d'un travail effectué au sein du Laboratoire Kastler-Brossel. Je tiens ainsi à remercier son directeur, Paul Indelicato, ainsi que tous ses membres, qui ont su m'accueillir pendant presque quatre ans. Evoluer au sein d'une telle densité de savoir fut particulièrement appréciable et enrichissant.

Mes travaux ont été encadrés par Nicolas Treps et Claude Fabre. Je tiens à les remercier tout particulièrement pour la confiance qu'ils ont su m'accorder, pour les conseils et l'encadrement qu'ils m'ont prodigué, ainsi que pour leur constante disponibilité.

Je remercie Daniel Braun, Fabien Bretenaker, Jean-Marc Frigerio, Philippe Grangier et Daniele Romanini pour avoir accepté de faire partie de mon jury, ce qui impliquait la lourde tâche qu'est la lecture de ce manuscrit.

Je tiens à remercier les nombreuses personnes avec qui j'ai pu collaborer. Jean-François Morizur a posé les premières briques du montage optique, aidé de Benoît Chalopin qui m'a aussi accompagné pendant mes premières années au laboratoire tandis que Giuseppe Patera a développé la théorie de ce qui n'était pas encore une réalité. Je remercie aussi Jinxia Feng pour son aide pendant un an et aussi tout particulièrement Renné Medeiros de Araújo et Pu Jian qui reprennent le flambeau des peigne de fréquence quantiques et à qui je souhaite bon courage. Je remercie aussi Julien Laurat, Virginia d'Auria, Brahim Lamine, Roman Schmeißner et Shifeng Jiang avec qui j'ai pu collaborer au sein du laboratoire ainsi que Thomas Vanderbruggen, Théo Rybarczyk et Gatien Verley qui ont effectué des stages sur mon expérience. Merci aussi à François Nez et Pierre Cladé pour leurs précieux conseils sur les lasers femtoseconde.

Des collaborations externes au LKB ont été établies pendant cette thèse, je tiens donc à remercier Philippe Réfrégier et Julien Fade de l'Institut Fresnel, ainsi que Guillaume Labroille et Manuel Joffre du Laboratoire Optique et Biosciences.

Je tiens aussi à remercier tous ceux avec qui j'ai pu passer des moments agréables au laboratoire ou à la cantine de Jussieu. Merci en particulier à Gaëlle, Taoufik, Olivier, Jean, Sidney, Jérémy, Pietro, Michael, Lambert, Lucile, Charles, Jérôme, Claire, Gabriel, Sophie, Alberto, Oxana, Romain, Chiara, Pierre, Aurélien, Godefroy et EOL.

Je tiens aussi à remercier les personnes avec qui j'ai été amené à collaborer pour mes enseignements, tout particulièrement Jean Hare et Romain Long.

Le personnel technique du laboratoire a grandement contribué à mes travaux, je remercie donc les membres de l'atelier mécanique, Jean-Michel Isac, Pascal Travers, Alain Vogt et Gaël Coupin pour leur dévouement et la qualité de leur travail, ainsi que Jean-Pierre Okpisz et Brigitte Delamour pour leur précieuse aide en électronique. Merci aussi à Florence Thibout de la verrerie et au personnel administratif Monique Granon, Laetitia Morel et Geneviève Léonis, qui ont toujours à cœur de nous faciliter la tâche.

Et finalement, merci à Wikipédia, sans quoi rien ne serait possible et les champignons ne mangeraient pas de radioactivité.

Table des matières

Mesure optimale de paramètres utilisant des ressources gaussiennes	23
1 Description multimode du champ électromagnétique	24
1.1 Champ électromagnétique classique	24
1.2 Modes du champ	25
1.2.1 Base de modes	25
1.2.2 Changement de base	26
1.3 Champ quantique	26
1.3.1 Changement de base	27
1.3.2 Quadratures du champ	27
1.4 Représentation des états quantiques	28
1.4.1 Matrice densité	28
1.4.2 Fonction de Wigner	29
1.5 États gaussiens	30
1.5.1 Définition	30
1.5.2 Zoologie des états gaussiens purs	30
1.5.2.1 États cohérents	30
1.5.2.2 Vide quantique	31
1.5.2.3 États comprimés	31
1.5.2.4 Vide comprimé	31
1.5.2.5 Corrélations quantiques	32
1.5.2.6 Généralisation	32
1.5.3 Intérêt expérimental	32
1.6 Effet des pertes optiques sur les états gaussiens	32
2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre	35
2.1 Mesures optiques et limites de sensibilité	35

2.2	Introduction à l'estimation de paramètres	37
2.2.1	Un exemple simple	37
2.2.1.1	Estimateurs de φ	37
2.2.1.2	Estimateurs biaisés et non biaisés	38
2.2.1.3	Variance des estimateurs	39
2.2.2	Borne de Cramér-Rao	40
2.2.2.1	Vraisemblance et log-vraisemblance	40
2.2.2.2	Borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé	40
2.2.3	Estimateurs efficaces.	43
2.2.3.1	Famille exponentielle	43
2.2.4	Conclusion	44
2.3	Estimation de paramètres par l'intermédiaire du champ électromagnétique	45
2.3.1	Protocole général d'une estimation	45
2.3.1.1	Mesure des quadratures	45
2.3.1.2	Petits paramètres	45
2.3.2	Champs électromagnétiques étudiés	45
	États Gaussiens	45
	Pureté	47
	Nombre de modes	47
	Approximation paraxiale	47
	Spectre lumineux	47
	Polarisation	48
	Intensité et fluctuations	48
2.3.3	Définitions	48
2.3.3.1	Modes et opérateurs annihilations	48
2.3.3.2	Quadratures du champ	49
2.3.3.3	Valeurs moyennes	51
2.3.3.4	Fonction de Wigner d'un état gaussien	52
2.3.4	Application de la théorie de Cramér-Rao à une mesure sur le champ électromagnétique	53
2.3.4.1	Mesure sur M ou $2 \times M$ quadratures	53
2.3.4.2	Calcul de l'information de Fisher	54
2.3.4.3	Interprétation physique des deux termes de l'information de Fisher	57
2.3.4.4	Choix des quadratures	58

2.3.4.5	Borne sur la sensibilité	58
2.3.4.6	Limite quantique standard	59
2.3.4.7	Conclusion	59
2.3.5	Optimisation expérimentale de la borne de Cramér-Rao	60
2.3.5.1	Dépendance du champ moyen par rapport au paramètre à mesurer	60
2.3.5.2	Énergie	61
2.3.5.3	Bruit du champ électromagnétique	62
	Ressources quantiques	62
	Borne sur l'information de Fisher	64
	Maximisation de l'information de Fisher	65
2.3.5.4	Résumé	65
2.3.6	Interprétation	66
2.3.6.1	Information de Fisher écrite dans une base adaptée	66
2.3.6.2	Mode de bruit et états comprimés	68
2.3.6.3	Résumé	69
2.3.7	Estimation de paramètres multiples	69
2.3.7.1	Cas à deux paramètres	70
2.3.8	Conclusion du chapitre	72
3	Détection homodyne et mesures optimales	74
3.1	Mesure d'un petit paramètre	74
3.2	Détection homodyne	76
3.2.1	Expression approchée de l'opérateur $\hat{D}$	77
3.2.2	Valeurs moyennes et fluctuations	78
3.3	Mesure si le mode de bruit n'est pas intriqué	79
3.4	Mesure si le mode de bruit est intriqué	80
3.4.1	Calcul du maximum de vraisemblance	81
3.4.2	Variance de $\tilde{p}_{MV}$	82
3.4.3	Estimateur du maximum de vraisemblance sur M qua- dratures	83
3.4.4	Réalisation expérimentale	85
3.4.5	Interprétation géométrique	85
3.5	Conclusion	86

4	Mesures optimales de distances, de délais et de dispersions	89
4.1	Les mesures de longueurs et leurs applications	90
4.1.1	Panorama de différentes mesures optique des longueurs	90
4.1.1.1	Utilisation historique des techniques optiques pour mesurer des distances	90
4.1.1.2	Interférométrie monochromatique	90
4.1.1.3	Interférométrie multi-longueurs d'ondes	91
4.1.1.4	LIDAR	92
4.1.1.5	Mesures utilisant des impulsions femtoseconde	92
	Intérêt des impulsions femtoseconde	92
	Premiers travaux utilisant des impulsions courtes	92
	Schéma proposé par Jun Ye	93
	Autres méthodes	94
4.1.1.6	Limitations et conclusion	95
4.1.2	Applications et perspectives	95
4.2	Théorie des mesures optimales dans le domaine temporel	96
4.2.1	Paquets d'ondes dans un milieu dispersif	96
4.2.2	Mesure de temps dans un milieu non dispersif	98
4.2.2.1	Limite de Cramér-Rao pour l'estimation d'un retard	98
4.2.2.2	Profil du mode de bruit	100
4.2.2.3	Limites de Cramér-Rao pour différents types de mesures	102
4.2.2.4	Conclusion	103
4.2.3	Mesures dans un milieu dispersif	103
4.2.3.1	Délais de la porteuse et de l'enveloppe	103
4.2.3.2	Mesure optimale des fluctuations de la dispersion	105
	Choix du deuxième paramètre	105
	Modes de bruit	105
4.3	Mise en pratique	108
4.3.1	Valeurs numériques	108
4.3.2	Possibilité d'atteindre ces valeurs	109
4.3.3	Mesures réalisables	109
4.3.4	Dispositif général de mesure de paramètres dans le domaine temporel	110
4.4	Conclusion	111

5	Réalisation expérimentale de mesures de temps et de dispersion	112
5.1	Principe général	113
5.2	Les champs qu'il faut produire	114
5.3	Techniques existantes de mise en forme d'impulsions	114
5.4	Mise en forme d'impulsion par des compensateurs de Soleil-Bravais	116
5.4.1	Le compensateur de Soleil-Bravais	116
5.4.2	État de la lumière après passage dans une lame biréfringente	117
5.4.3	État de la lumière après passage dans un ou deux Soleil-Bravais	118
5.4.4	Avantages et inconvénients de cette méthode	119
5.5	Mesure de paramètre en utilisant des compensateurs de Soleil-Bravais	120
5.5.1	Principe	120
5.5.2	Asymétrie spectrale	120
5.5.3	Simulation numérique	122
	Principe et hypothèses	122
	Résultats	122
	Conclusion	123
5.6	Conclusion	123

Production expérimentale d'états non classiques en régime femto-seconde **124**

6	Peignes de fréquence et cavités résonnantes	125
6.1	Impulsions courtes et peignes de fréquence	125
6.1.1	Les lasers à verrouillage de mode	125
6.1.2	Peigne de fréquence et impulsions femtoseconde	126
6.1.3	Propagation des impulsions courtes dans les milieux dispersifs linéaires	129
	Phase linéaire	131
	Phase quadratique	131
6.1.3.1	Exemple d'une impulsion gaussienne	131

6.2	Cavités optiques dispersives injectées par des peignes de fréquence	132
6.2.1	Modèle et description mathématique générale d'un interféromètre de Fabry-Pérot	133
6.2.2	Peigne de fréquence sans CEO et cavité non dispersive .	135
6.2.2.1	Résonance totale	135
6.2.2.2	Étude au voisinage de la résonance totale . .	136
6.2.2.3	Résonances partielles	137
6.2.2.4	Nombre de résonances partielles	138
6.2.2.5	Transmission au voisinage d'une résonance partielle	140
6.2.2.6	Moiré de fréquence	141
6.2.2.7	Conclusion	143
6.2.3	Prise en compte du CEO, de la dispersion de vitesse de phase et de la phase de Gouy dans la cavité	145
	Interprétation temporelle de l'influence du CEO	146
	Modes transverses et phase de Gouy	147
	Remarque : mesure du CEO avec une cavité résonnante	147
6.2.4	Effets de la GVD dans la cavité	147
6.2.4.1	Ordres de grandeurs	149
6.2.5	Application : conception d'une cavité femtoseconde de haute finesse	149
7	Effets non linéaires d'ordre 2 en régime femtoseconde	151
7.1	Effets non-linéaires d'ordre deux	152
7.1.1	Mélange à trois ondes	152
	La somme de fréquence	152
	La conversion paramétrique	152
7.1.2	Dispersion et accord de phase	153
7.1.3	Dispersion de vitesse de groupe	153
7.2	Doublement d'un peigne de fréquence	154
7.2.1	Point de vue temporel	154
7.2.2	Point de vue fréquentiel	155
7.3	OPO monomode dégénéré	155
7.3.1	Définition	155
7.3.2	Modèle étudié et approximations	156

7.3.3	Équations d'évolution	158
7.3.4	Équation classique	158
7.3.5	Calcul des fluctuations	161
7.4	SPOPO	162
7.4.1	Définition	162
7.4.2	Nature multimode	163
7.4.3	Équations d'évolutions dans le temps du SPOPO, sous le seuil	163
7.4.4	Diagonalisation et supermodes	165
7.4.5	Amplification, désamplification et bruit	165
7.4.6	Simulation numérique	167
7.4.7	Remarque : fonctionnement au-dessus du seuil	168
7.4.8	Conclusion	168
8	Principe général de l'expérience	169
8.1	Principe de l'expérience	171
8.2	Sources lumineuses	171
8.3	Asservissements	172
8.3.1	États comprimés	172
9	Sources lasers et préparation des faisceaux	174
9.1	Verdi V-18	174
9.2	Mira-900	175
9.2.1	Danger de la lumière produite par le laser	178
9.2.2	Bruits et défauts de la lumière produite par le laser	179
	« Q-switch mode-locking »	179
	Présence de continu	179
	Puissance	179
	Dépointé	179
	Fluctuations en spectre	179
	Profil spatial	180
9.2.3	Contrôle des paramètres du laser	180
	Puissance du laser	180
	Spectre du laser	180
	Oscilloscope	180
	Analyseur de spectre	182
	Photodiode à quadrants	183
	Autocorrélateur	183

	Caméra CMOS	185
9.3	Profil spatial du faisceau	185
9.3.1	Astigmatisme	185
9.3.2	Collimation	185
9.4	Isolation optique	186
9.5	Compensation de la dispersion	187
9.6	Doublement de fréquence	189
9.7	Délai entre la pompe et l'injection	191
9.8	Conclusion	193
10	Asservissements	194
10.1	Asservissement de la longueur de la cavité	194
10.1.1	Asservissement en réflexion ou en transmission	195
10.1.2	Asservissement par la méthode Hänsch-Couillaud	196
10.1.2.1	Principe	196
10.1.2.2	Mise en œuvre expérimentale	196
10.1.2.3	Résultats	197
10.1.2.4	Conclusion	197
10.1.3	Asservissement en tilt-locking	197
10.1.3.1	Principe	197
10.1.3.2	Mise en œuvre expérimentale	198
10.1.3.3	Résultats	198
10.1.3.4	Conclusion	198
10.1.4	Asservissement par la méthode Pound-Drever-Hall	198
10.1.4.1	Modulateur électro-optique	199
10.1.4.2	Modulation piézoélectrique à haute fréquence	199
	Résonances à hautes fréquences	199
	Alimentation électrique	199
	Circuit électrique résonnant	200
	Longueur d'onde acoustique	201
10.1.4.3	Mise en œuvre expérimentale	202
	Générateur	202
	Amplificateur	202
	Signal électrique utilisé	203
	Filtre passe-bas	203
	Amplification	203
	Mélangeur	203

	Ajustement de la phase relative	203
	Amplificateur basse fréquence	203
	Contrôleur PI	203
	Monture de l'actuateur piézoélectrique	204
	Remarques	204
10.1.4.4	Résultats	204
10.1.4.5	Améliorations à proposer	205
10.1.5	Asservissement par moiré de fréquence	205
10.1.5.1	Signal d'erreur théorique	205
	Effet de la dispersion	209
10.1.5.2	Mise en œuvre expérimentale.	209
10.1.5.3	Résultats et limites du procédé	210
10.1.5.4	Conclusion	212
10.1.6	Systèmes d'asservissements non implémentés	213
10.1.6.1	Cavité en anneau	213
10.1.6.2	Trains d'impulsions entrelacés	213
10.2	Asservissement de la phase relative	214
10.3	Asservissement du taux de répétition	214
10.3.1	Mise en œuvre expérimentale	215
	Signal mesuré	215
	Filtre passe-bande	215
	Synthétiseur	215
	Mélangeur	215
	Filtre passe-bas	216
	Ajustement de la fréquence	216
	Verrouillage de phase	216
	Actuateur piézoélectrique	216
10.3.2	Résultats	216
10.4	Asservissement du CEO	216
10.4.1	Mise en œuvre expérimentale	217
10.4.2	Conclusion et perspectives	218
11	Production expérimentale d'états non classiques multimodes	219
11.1	Description expérimentale du SPOPO	219
11.1.1	Description du SPOPO	220
11.1.1.1	Principe	220

11.1.1.2	Sensibilité aux bruits et aux variations de température	220
11.1.1.3	Configuration	221
11.2	Mise en place du SPOPO	222
11.2.1	Seuil du SPOPO	223
11.2.2	Amplification sensible à la phase	223
11.3	Mise en évidence des propriétés quantiques du SPOPO	223
11.3.1	Réduction du bruit quantique en intensité	223
11.3.1.1	Détection balancée	223
11.3.1.2	Résultats expérimentaux	226
11.3.2	Caractère multimode	227
11.3.2.1	Pertes et filtrage spectral	227
11.3.2.2	Mise en place du filtrage spectral	228
11.3.2.3	Pouvoir de résolution	231
11.3.2.4	Filtrage passe-bas ou passe-haut	232
	Correction du bruit d'obscurité des photodiodes	232
	Incertitudes	232
	Interprétation	232
11.3.3	Autre méthode d'analyse	234
11.4	Conclusion	234
12	Bilan et perspectives	235
Annexes		237
A	Description et procédure d'alignement de la cavité	238
A.1	Géométrie	238
A.1.1	Détail des éléments de la cavité	240
	D_1 : miroir dichroïque	240
	M_1 : coupleur d'entrée	240
	M_2 : miroir concave	240
	M_3 : miroir plan	240
	M_4 : coupleur de sortie	240
	M_5 : miroir plan	240
A.1.1.1	Cristal	241
A.1.2	Montures, translations et actionneurs	241
A.2	Alignement de l'injection	242

Table des matières

A.3	Cristal non-linéaire	245
A.4	Alignement de la pompe	246
A.4.1	Alignement spatial	246
A.4.2	Synchronisation de la pompe	246
A.5	Amplification sensible à la phase et seuil de l'OPO	247
B	Caractéristiques du mode résonnant	249
B.1	Waist au niveau du cristal	249
B.1.1	Cas sans astigmatisme	249
B.1.2	En tenant compte de l'astigmatisme	252
B.2	Waist au niveau du coupleur de sortie	253
B.3	Conclusion	254
	Bibliographie	255

Introduction

La lumière est un outil particulièrement adapté à la mesure des longueurs. En mesurant le temps de vol d'impulsions entre la Terre et la Lune, il est aujourd'hui possible de déterminer la distance de celle-ci avec une précision de l'ordre du mm [Murphy 08]. Les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles, comme VIRGO ou LIGO, ont pour ambition de détecter des vibrations infimes de la courbure de l'espace-temps, en réponse à des phénomènes astrophysiques distants comme des supernovæ ou des coalescences d'étoiles à neutrons [Harry 10]. De manière générale, on peut ainsi séparer les mesures de distances utilisant la lumière entre des mesures de temps de vol, qui nécessitent des impulsions courtes, et des mesures interférométriques, qui exploitent la cohérence des sources. Les premières donnent facilement accès à une information sur la distance absolue, tandis que les secondes sont généralement plus précises.

Les années 1990 ont vu le développement des lasers à verrouillage de modes, capables de produire des trains d'impulsions de quelques dizaines de femto-secondes de long [Spence 91], de façon très régulière. Les spectres de ces lasers sont appelés peignes de fréquence car ils sont composés d'un grand nombre de raies très fines et régulièrement espacées, dont les phases sont reliées entre elles de façon précise. L'utilisation de ces lasers permet ainsi d'unifier les mesures impulsionsnelles et interférométriques, faisant d'eux, parmi une multitude d'applications, des outils remarquables pour la métrologie des distances [Ye 04, Coddington 09]. Les travaux de Theodor Hänsch et de John Hall, lauréats du prix Nobel 2005, permirent d'asservir totalement ces lasers et de les transformer en des outils d'une précision extrême, au point d'être intégrés à certaines horloges atomiques. Ils présentent ainsi la particularité de pouvoir associer intimement mesures de temps et mesures de distance.

La dispersion et les fluctuations de l'indice de l'air limitent la précision et la sensibilité de ces mesures. Citons tout de même la récente mesure absolue d'une distance de 700 m entre deux bâtiments, à 7 nm près, pour un temps de mesure de 1 s [Lee 10]. En dehors de l'atmosphère terrestre, ces contraintes n'existent plus et un certain nombre de projets spatiaux envisagent ainsi des mesures de distances extrêmement précises entre des satellites. Citons par exemple le

projet Terrestrial Planet Finder de la NASA, qui vise à déployer dans l'espace un télescope interférométrique capable d'observer directement des planètes extra-solaires du type de la Terre. Ce projet nécessite de contrôler les distances relatives à l'intérieur d'une flottille de satellites, au nm près [Lawson 05].

La sensibilité de ces mesures, et de toute mesure physique en général, est limitée par des fluctuations incontrôlées, qu'on appelle bruit. Le perfectionnement des instruments et des techniques permet de limiter l'effet de ces perturbations et d'améliorer ainsi la qualité des mesures expérimentales. Cependant, même en réduisant le bruit des appareils, il subsiste toujours un bruit, lié aux fluctuations quantiques, qui limite de façon plus fondamentale les mesures.

Illustrons notre propos en considérant la mesure de l'intensité lumineuse émise par un laser. Dans le cadre de la mécanique quantique, la lumière peut être interprétée en termes de photons. Une photodiode idéale, qui convertit chacun de ces photons en électrons, produit ainsi un courant électrique, qui peut être mesuré. L'intensité mesurée fluctue en permanence et reflète le bruit de photon du flux lumineux, qui limite ainsi la sensibilité de la mesure.

Pour un état quantique *cohérent*, comme par exemple celui produit par un laser dénué de bruit technique, on appelle *limite quantique standard* [Caves 80] la sensibilité ultime que l'on peut espérer atteindre, indépendamment de la méthode de mesure employée. Cette limite évolue en fonction de la racine inverse du nombre de photons détectés. Au prix d'efforts expérimentaux importants [Slusher 85, Wu 86], il est cependant possible de produire des états quantiques, appelés *états comprimés*, dont les fluctuations sont telles qu'elles permettent des mesures au-delà de cette limite [Xiao 87, Grangier 87].

Les états cohérents et les états comprimés font partie de la classe plus générale des *états gaussiens*, qui est particulièrement intéressante car elle peut représenter des états à la fois intenses, raisonnablement accessibles expérimentalement et qui permettent des mesures au-delà de la limite quantique standard. Bien qu'il soit aussi possible d'envisager des mesures exploitant des ressources non gaussiennes plus précises que cette limite [Giovannetti 01], elles sont restreintes en pratique à des états à petits nombres de photons et ne peuvent rivaliser en sensibilité avec de simples mesures de faisceaux intenses. Malgré l'intérêt fondamental de ces états, nous nous restreindrons donc à l'étude d'états gaussiens intenses.

Un des principaux objectifs de cette thèse sera l'établissement de bornes sur la sensibilité que l'on peut atteindre pour la mesure d'un paramètre quel-

conque porté par le champ électromagnétique. Nous proposerons en outre des dispositifs de mesure optimaux, au sens où ils sont au moins aussi précis que toute autre mesure envisageable. Nous nous intéresserons spécifiquement aux mesures de temps, de distances et de dispersions et proposerons un dispositif expérimental original capable de tester ces théories.

L'utilisation d'états comprimés est une solution naturelle mais ambitieuse pour améliorer la sensibilité des mesures optiques. Comprimer l'état quantique d'une impulsion femtoseconde est particulièrement intéressant car cela revient à réduire le bruit quantique d'une source lumineuse, qui est déjà très peu bruitée techniquement. On peut répartir les expériences ayant produit des états comprimés en régime impulsional entre celles utilisant des cristaux non-linéaires d'ordre 2 en simple passage [Slusher 87] et celles exploitant des non-linéarités d'ordre 3 dans des fibres optiques [Rosenbluh 91].

Les oscillateurs paramétriques optiques (OPO) sont un outil de choix pour la production d'états comprimés, ils permettent notamment d'atteindre les facteurs de compression les plus importants à ce jour, pour des faisceaux continus [Mehmet 10]. Un OPO est composé d'une cavité résonnante optique, à l'intérieur de laquelle est placé un cristal non-linéaire d'ordre 2. L'interaction paramétrique qui se déroule à l'intérieur de celui-ci, exaltée par la cavité, conduit à la production d'états comprimés.

En régime femtoseconde, une des principales difficultés expérimentales vient du fait que la cavité doit être adaptée au taux de répétition des impulsions, la longueur de celle-ci devant ainsi correspondre précisément à la distance entre deux impulsions. Bien que de tels OPOs existent depuis longtemps [Edelstein 89], aucune expérience à ce jour n'a montré la production d'états comprimés en régime femtoseconde. Des travaux précédents de notre groupe [de Valcarcel 06, Patera 09] ont décrit le fonctionnement théorique d'un tel dispositif et étudié notamment son comportement quantique.

Nous présenterons dans cette thèse la réalisation expérimentale d'un oscillateur paramétrique optique et démontrerons la production d'états quantiques comprimés en régime femtoseconde.

Résumé et plan de la thèse

Cette thèse est divisée en deux grandes parties. La première vise tout d'abord à établir des limites de sensibilité pour la mesure de paramètres du champ électromagnétique, notamment quand les fluctuations de celui-ci sont comprimées. Nous proposerons en outre des schémas de mise en œuvre pratique de ces résultats. La seconde partie présente la réalisation expérimentale d'une source d'états comprimés dans le domaine temps-fréquence, qui constitue le point de départ des protocoles introduits dans la première partie.

Mesure optimale de paramètres utilisant des ressources gaussiennes

Le premier chapitre introduit très brièvement et sans démonstrations les définitions et outils de l'optique quantique qui seront utilisés dans les chapitres suivants. L'accent est mis sur une description quantique multimode de la lumière.

Le deuxième chapitre débute par des rappels sur l'estimation de paramètres de distributions statistiques classiques, en introduisant notamment l'information de Fisher et la borne de Cramér-Rao. Celle-ci constitue une borne sur la variance de toute estimation de paramètre, qui n'est cependant pas nécessairement atteignable. Ces notions sont ensuite appliquées à l'étude des champs électromagnétiques quantiques. On définit ainsi une borne de Cramér-Rao pour l'estimation d'un paramètre quelconque du champ. On montre ensuite dans quelle mesure un expérimentateur peut optimiser les ressources dont il dispose pour améliorer cette borne. Nous verrons notamment que la compression du bruit d'une quadrature d'un unique mode, appelé mode de bruit, est préférable à toutes les autres stratégies de compression ou d'intrication.

Dans le chapitre suivant, nous proposons des schémas de mesure génériques qui atteignent cette limite de sensibilité dans un grand nombre de situations expérimentales, y compris la solution optimisée déterminée au chapitre précédent. En particulier, si le mode de bruit est libre de toute intrication, une simple détection homodyne, dont l'oscillateur local est mis en forme temporellement et spatialement, est optimale au sens de Cramér-Rao.

Le quatrième chapitre s'intéresse plus précisément aux mesures de temps, de distances et de dispersions. Dans le vide, la lumière se propage toujours à la même vitesse, des mesures de temps de vol ou de distances sont ainsi équivalentes. Dans les milieux matériels en revanche, en raison de la dispersion, il n'y

a plus unicité entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Après un panorama des mesures de distances existantes, nous détaillons comment appliquer les résultats théoriques des chapitres précédents à des mesures optimales de phase, d'enveloppe ou de dispersion.

Le cinquième et dernier chapitre de la première partie est l'occasion d'introduire une proposition expérimentale visant à mettre en œuvre les mesures précédentes, à l'échelle d'une table d'expérimentation optique. On introduit à cette occasion une nouvelle méthode de mise en forme d'impulsions exploitant la biréfringence, que l'on étudie numériquement.

Production expérimentale d'états non classique en régime femtoseconde

Le sixième chapitre introduit succinctement les impulsions femtoseconde et le concept de peigne de fréquence. Le couplage de ceux-ci dans une cavité résonnante dispersive est ensuite présenté en détail. On s'attache notamment à décrire, par des expressions approchées mais analytiques, les phénomènes en jeu.

Le septième chapitre débute par un rappel des principes théoriques des phénomènes d'optique non-linéaires d'ordre 2, notamment le doublage de fréquence et les oscillateurs paramétriques optiques (OPO). On présente ensuite rapidement les résultats théoriques des OPOs pompés de façon synchrone (SPOPO) qui ont déjà été développés dans le groupe. Cette théorie n'a pas été l'objet de cette thèse, en conséquence seuls les résultats importants sont mentionnés.

Les chapitres suivants présentent la description complète de la mise en place expérimentale d'un SPOPO, ainsi que les résultats obtenus. Comme il est difficile de décrire successivement les différents composants sans disposer d'une vision du principe et de la finalité, le chapitre 8 est consacré à une présentation globale et simplifiée des différents éléments du SPOPO. Il a été conçu pour servir de guide à la lecture des autres chapitres.

Le neuvième chapitre présente les sources lasers employées sur l'expérience ainsi que la façon dont les faisceaux sont préparés pour être utilisés avec le SPOPO.

Le dixième chapitre est consacré à tous les systèmes d'asservissement qui ont été mis en place sur l'expérience. Cette description inclut un procédé expérimental, breveté pendant cette thèse, d'asservissement de cavité injectée par un peigne de fréquence.

Le onzième et dernier chapitre présente le fonctionnement du SPOPO lui-même. Nous présentons l'observation du seuil d'oscillation de celui-ci. En dessous de ce seuil, il a été mis en évidence une amplification sensible à la phase d'un faisceau injecté. On mesure la réduction du bruit quantique d'intensité de ce faisceau et l'on donne une preuve de sa nature multimode.

Une première annexe est consacrée à une description technique très détaillée du SPOPO, ainsi qu'à la procédure complète d'alignement.

Une deuxième annexe est dédiée à l'exposition des caractéristiques du mode résonnant dans la cavité en fonction des paramètres géométriques de celle-ci.

Contexte de la thèse

Cette thèse présente les résultats d'un travail de trois ans effectué au sein du Laboratoire Kastler-Brossel, sous la direction de Claude Fabre et Nicolas Treps. Benoît Chalopin, qui avait commencé sa thèse un an plus tôt, et Jean François Morizur, pendant son stage de master, avaient commencé à mettre en place les prémices de l'expérience. J'ai pris la suite pendant mon stage puis pendant la thèse qui a suivi. Avec l'aide de Benoît Chalopin, j'ai obtenu les premiers résultats, classiques, d'oscillation du SPOPO et d'amplification sensible à la phase. Giuseppe Patera, qui finissait sa thèse dans le groupe, avait développé une théorie du SPOPO et prévoyait l'observation d'états comprimés multimodes. Jinxia Feng a ensuite rejoint l'équipe pour un post-doctorat d'un an et nous avons pendant cette période produit les premiers états comprimés. Renné Medeiros de Araujo a ensuite débuté sa thèse au sein du groupe, suivi de Pu Jian un an plus tard. Nous avons alors caractérisé la nature multimode des états produits par le SPOPO.

Vincent Delaubert avait commencé à étudier l'application de la théorie de Cramér-Rao à l'estimation de paramètres du champ pendant sa thèse. Partant de ses travaux, j'ai développé la théorie beaucoup plus complète présentée ici. Julien Fade, qui était alors en thèse à l'Institut Fresnel à Marseille, et avec qui nous avons soumis une publication, a fourni une aide précieuse et un regard différent sur nos travaux.

Un autre pan de la thèse est le résultat d'une collaboration avec le groupe de Manuel Joffre du Laboratoire Optique et Biosciences, sous l'égide d'un contrat ANR commun. Le but de ce projet est de mettre en œuvre expérimentalement les théories de mesures optimales présentées dans cette thèse. Manuel Joffre et

Guillaume Labroille ont proposé un nouveau dispositif de mise en forme d'impulsions et un schéma de mesure optimale l'utilisant. J'ai contribué à améliorer celui-ci et simulé son fonctionnement et ses performances, tels que présentés dans cette thèse. Guillaume Labroille a posé les bases d'une première expérience utilisant ce procédé.

Première partie

Mesure optimale de paramètres utilisant des ressources gaussiennes

1 Description multimode du champ électromagnétique

Sommaire

1.1	Champ électromagnétique classique	24
1.2	Modes du champ	25
1.2.1	Base de modes	25
1.2.2	Changement de base	26
1.3	Champ quantique	26
1.3.1	Changement de base	27
1.3.2	Quadratures du champ	27
1.4	Représentation des états quantiques	28
1.4.1	Matrice densité	28
1.4.2	Fonction de Wigner	29
1.5	États gaussiens	30
1.5.1	Définition	30
1.5.2	Zoologie des états gaussiens purs	30
1.5.3	Intérêt expérimental	32
1.6	Effet des pertes optiques sur les états gaussiens	32

Nous allons dans ce chapitre introduire de façon très succincte les concepts et les notations du formalisme de l'optique quantique multimode qui nous seront utiles dans cette thèse.

1.1 Champ électromagnétique classique

Considérons un champ électrique classique réel oscillant $E(\vec{r}, t)$. D'une manière générale dans toute cette thèse les vecteurs seront notés en gras, à l'exception de ceux correspondant à une position dans l'espace qui seront distingués par une flèche.

La décomposition de Fourier du champ s'écrit sous la forme

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

1.1.1

Ce champ étant réel, on a nécessairement $\tilde{\mathbf{E}}(\vec{r}, \omega) = \tilde{\mathbf{E}}^*(\vec{r}, -\omega)$, ce qui implique que la décomposition de Fourier précédente contient une part d'information redondante. On introduit donc le champ complexe $\mathbf{E}^{(+)}$ que l'on définit par une intégration sur les fréquences positives du champ uniquement :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

1.1.2

Ce champ complexe porte la même information que le champ réel. Tous deux sont liés par la relation

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\vec{r}, t) + \mathbf{E}^{(+)*}(\vec{r}, t)$$

1.1.3

1.2 Modes du champ

1.2.1 Base de modes

Le champ électromagnétique peut toujours être décomposé sur une base de modes normalisés, qui peuvent être spatiaux, temporels, ou spatiotemporels. Nous ne considérerons dans cette thèse que des *champs transverses polarisés linéairement*, se propageant selon un axe z . Nous repérerons une position spatiale dans le plan transverse par la notation $\vec{\rho}$, de telle sorte que $\vec{r} = (\vec{\rho}, z)$ et ne considérerons plus que des champs scalaires. D'autre part, nous appellerons T la durée finie d'une mesure. Une base de modes transverses polarisés linéairement $\{u_i(\vec{r}, t)\}$ vérifie ainsi les relations

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u_i^*(\vec{r}, t) u_j(\vec{r}, t) d\vec{\rho} dt = \delta_{ij}$$

1.2.1

où δ_{ij} est le symbole delta de Kronecker. Le champ s'écrit dans cette base sous la forme

$$\mathbf{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_i \mathcal{E}_i u_i(\vec{r}, t)$$

1.2.2

Un exemple de modes spatiaux bien connu est fourni par les modes résonnants d'une cavité Fabry-Pérot, qui ont un profil spatial de Hermite-Gauss à deux dimensions. On peut transposer facilement ce concept aux modes temporels, en considérant une base d'impulsions dont les enveloppes temporelles suivent un profil de Hermite-Gauss.

1.2.2 Changement de base

La description du champ électromagnétique sur une base de modes n'est pas unique, il est possible de le représenter dans différentes bases. Appelons $\{v_i(\vec{r}, t)\}$ une autre base du champ. Le passage de $\{u_i(\vec{r}, t)\}$ à $\{v_i(\vec{r}, t)\}$ s'effectue par le biais d'une transformation unitaire U définie par

$$U_{i,j} = \int u_i^*(\vec{r}, t) v_j(\vec{r}, t) d\vec{\rho} dt \quad 1.2.3$$

qui permet d'écrire le passage d'une base à l'autre

$$v_j(\vec{r}, t) = \sum_i U_{i,j} u_i(\vec{r}, t) \quad 1.2.4$$

1.3 Champ quantique

Nous allons maintenant considérer des champs quantiques et présenter quelques résultats importants que nous n'allons pas démontrer. Pour une description plus détaillée, on pourra se référer à [Grynberg 10]. Appelons $\hat{E}(\vec{r}, t)$ l'opérateur quantique du champ électrique en représentation de Heisenberg [Cohen-Tannoudji 97]. On peut définir un opérateur $\hat{E}^{(+)}$, analogue quantique du champ complexe classique, tel que

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{r}, t) \quad 1.3.1$$

La quantification du champ s'effectue typiquement dans une boîte de volume V . En faisant l'hypothèse que le spectre de chaque mode u_i est concentré autour d'une pulsation centrale ω_i , il est possible de décomposer le champ électrique sur une base d'opérateurs annihilations $\{\hat{a}_i\}$, non hermitiens, associés aux modes

$\{u_i(\vec{r}, t)\}$:

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \sum_i \mathcal{E}_i \hat{a}_i u_i(\vec{r}, t) \quad 1.3.2$$

où $\mathcal{E}_i$ représente le champ élémentaire du mode. Les $\hat{a}_i$ et $\hat{a}_i^\dagger$ ne commutent pas, on a la relation

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad 1.3.3$$

L'opérateur $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ représente l'opérateur nombre de photons. Faisons maintenant l'hypothèse additionnelle que le spectre est étroit et centré autour d'une fréquence ω_0 . Cette hypothèse est raisonnable pour des impulsions produites par un laser femtoseconde de 100 fs de durée. On peut alors écrire [Treps 01] :

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 c T}} \sum_i \hat{a}_i u_i(\vec{r}, t) \quad 1.3.4$$

1.3.1 Changement de base

Comme pour le champ classique, il est possible d'écrire le champ quantique dans une autre base $\{v_i(\vec{r}, t)\}$

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 c T}} \sum_i \hat{b}_i v_i(\vec{r}, t) \quad 1.3.5$$

Ces nouveaux opérateurs annihilations $\hat{b}_i$ sont liés aux $\hat{a}_i$ par la relation

$$\hat{b}_j^\dagger = \sum_i U_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \quad 1.3.6$$

1.3.2 Quadratures du champ

Les opérateurs annihilations $\hat{a}_i$ ne sont pas hermitiens et ne sont donc pas des observables. On peut toutefois définir des opérateurs hermitiens de quadratures

$\hat{X}_i^+$ et $\hat{X}_i^-$, qui correspondent aux parties réelles et imaginaires des opérateurs

$$\begin{cases} \hat{X}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i \\ \hat{X}_i^- = i(\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i) \end{cases} \quad 1.3.7$$

Ces opérateurs ne commutent pas pour un même mode :

$$[\hat{X}_i^+, \hat{X}_j^-] = 2i\delta_{ij} \quad 1.3.8$$

On peut en déduire immédiatement une inégalité de Heisenberg sur les quadratures

$$\langle (\delta\hat{X}_i^+)^2 \rangle \langle (\delta\hat{X}_i^-)^2 \rangle \geq 1 \quad 1.3.9$$

La plupart des mesures que nous considérerons dans cette thèse porteront sur des quadratures du champ.

1.4 Représentation des états quantiques

1.4.1 Matrice densité

Lorsque l'état quantique est soumis à du bruit classique ou lorsque le système que l'on observe n'est pas isolé, une description par un état quantique unique pur $|\psi\rangle$ n'est plus satisfaisante. Il faut alors envisager une superposition statistique d'états $|\psi\rangle_1, |\psi\rangle_2, \dots$. L'état est alors dit mixte, par opposition aux états purs. Il est possible de décrire celui-ci en utilisant le formalisme de la matrice densité $\hat{\rho}$, définie par

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad 1.4.1$$

où les p_i représentent les poids statistiques des différents états purs intervenant dans l'état mixte. Ces poids vérifient nécessairement $\sum p_i = 1$ et l'on peut définir la pureté P de l'état par

$$P = \text{Tr} [\hat{\rho}^2] \quad 1.4.2$$

avec $0 < P < 1$ pour un état mixte et $P = 1$ pour un état pur.

La matrice densité est un outil assez général mais s'applique difficilement à l'optique quantique en variable continue car elle est difficile à manipuler et contient notamment une infinité d'éléments.

1.4.2 Fonction de Wigner

La fonction de Wigner, exprimée en fonction des quadratures du champ sur M modes, a pour expression [Fab 08]

$$W(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^M} \int \text{Tr}[\hat{\rho} e^{-i \sum_i (\hat{X}_i^+ Y_i^+ + \hat{X}_i^- Y_i^-)}] e^{i \sum_j (X_j^+ Y_j^+ + X_j^- Y_j^-)} d\mathbf{Y} \quad 1.4.3$$

où $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont des vecteurs de résultats de mesures sur les différentes quadratures

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1^+ \\ \vdots \\ X_M^+ \\ X_1^- \\ \vdots \\ X_M^- \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1^+ \\ \vdots \\ Y_M^+ \\ Y_1^- \\ \vdots \\ Y_M^- \end{pmatrix} \quad 1.4.4$$

L'intégration porte donc sur $2M$ quadratures.

Certaines propriétés de cette fonction la rapprochent d'une distribution de probabilité de mesure sur les quadratures, notamment :

- L'intégration sur toutes les quadratures de cette fonction vaut 1
- L'intégration de cette fonction sur toutes les quadratures sauf une conduit à la densité de probabilité de mesurer cette dernière.

Cette fonction peut cependant être négative, elle n'est donc pas une distribution de probabilité et on parle alors de *distribution de quasi-probabilité*.

1.5 États gaussiens

1.5.1 Définition

Les états gaussiens sont les états dont la fonction de Wigner est gaussienne. Ces fonctions s'écrivent d'une façon générale, à $2 \times M$ dimensions, sous la forme

$$W(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^M \sqrt{\det \Gamma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \Gamma^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})} \quad 1.5.1$$

Le vecteur $\bar{\mathbf{X}}$ est le vecteur des espérances $\langle \hat{X}_i^\pm \rangle$ des quadratures, Γ est la matrice de covariance des quadratures, de dimension $2M \times 2M$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \langle (\delta \hat{X}_1^+)^2 \rangle & \langle \delta \hat{X}_2^+ \delta \hat{X}_1^+ \rangle & \cdots & \langle \delta \hat{X}_1^+ \delta \hat{X}_M^- \rangle \\ \langle \delta \hat{X}_1^+ \delta \hat{X}_2^+ \rangle & \langle (\delta \hat{X}_2^+)^2 \rangle & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \langle \delta \hat{X}_M^- \delta \hat{X}_1^+ \rangle & & & \langle (\delta \hat{X}_M^-)^2 \rangle \end{pmatrix} \quad 1.5.2$$

Il est possible de montrer que la pureté de l'état vaut

$$P = \frac{1}{\sqrt{\text{Det} \Gamma}} \quad 1.5.3$$

Nous allons maintenant nous intéresser à quelques états importants parmi la classe des états gaussiens.

1.5.2 Zoologie des états gaussiens purs

1.5.2.1 États cohérents

Les états cohérents sont les états gaussiens dont la matrice de covariance est l'identité.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad 1.5.4$$

Très utilisés depuis Glauber [Glauber 63], ils présentent l'intérêt expérimental de bien décrire l'état de la lumière émise par un laser très au-dessus du seuil. Les variances des quadratures d'un état cohérent valent toutes 1 et ne sont pas corrélées. Les états cohérents correspondent mathématiquement aux états propres de l'opérateur d'annihilation.

1.5.2.2 Vide quantique

Un cas particulier d'état cohérent est le vide quantique, dont la valeur moyenne $\bar{X}$ est nulle. La valeur moyenne de son champ électrique est donc nulle mais ses fluctuations sont mesurables. Réciproquement, on peut définir un état cohérent comme un état dont les fluctuations des quadratures sont celles du vide.

1.5.2.3 États comprimés

L'inégalité de Heisenberg impose que pour un mode donné,

$$\langle (\delta\hat{X}_i^+)^2 \rangle \langle (\delta\hat{X}_i^-)^2 \rangle \geq 1 \quad 1.5.5$$

Si l'une des deux quadratures est inférieure à 1 et qu'elle n'est pas corrélée aux autres quadratures (les covariances sont nulles), alors on parle d'état comprimé. Si en plus l'état est pur, l'inégalité précédente devient une égalité, et la matrice de covariance peut s'écrire

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & & \sigma_2^2 & \\ & & & \frac{1}{\sigma_2^2} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad 1.5.6$$

1.5.2.4 Vide comprimé

Un état comprimé dont le champ électrique moyen est nul est appelé vide comprimé. Il est important de préciser que le vide comprimé comporte tout de même des photons, d'autant plus nombreux que l'état est comprimé.

1.5.2.5 Corrélations quantiques

Les termes non diagonaux correspondent à des corrélations entre les quadratures. Ces corrélations peuvent être d'origine classique ou quantique, et parmi les états corrélés, on distingue les états intriqués, qui ne peuvent être décrits comme une superposition statistique de produits tensoriels. Différents critères formels d'intrication existent, critère EPR [Reid 88], critère du Duan et Simon [Duan 00, Simon 00] le critère de Mancini [Mancini 02].

1.5.2.6 Généralisation

Par extension, on peut considérer les caractéristiques d'un état multimode sur des sous-ensembles de modes. Ainsi, pour un même état, certaines quadratures peuvent être intriquées, d'autres comprimées, vides, cohérentes etc.

1.5.3 Intérêt expérimental

Les différents états qui ont été présentés peuvent être produits expérimentalement, en utilisant des combinaisons de dispositifs linéaires (miroirs, lames séparatrices) et non linéaires (cristaux non-linéaires, vapeurs atomiques...). Cette thèse sera entièrement restreinte à l'étude des états gaussiens.

1.6 Effet des pertes optiques sur les états gaussiens

Étudions enfin l'effet des pertes optiques sur le bruit des états gaussiens. Celles-ci peuvent être modélisées (cf. Fig. 1.6.1) par un mélange sur une lame semi-réfléchissante avec le vide quantique. Le champ transmis par la lame semi-réfléchissante, après couplage partiel avec le vide, a pour expression

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{out}} = \sqrt{1 - \eta} \hat{\mathbf{E}}_{\text{in}} + \sqrt{\eta} \hat{\mathbf{E}}_{\text{vide}} \quad 1.6.1$$

tandis que toutes les quadratures subissent la même transformation. Les fluctuations du vide vérifient

$$\langle (\delta \hat{X}_{\text{vide}}^{\pm})^2 \rangle = 1 \quad 1.6.2$$

et ne sont pas corrélées aux fluctuations du faisceau incident, on en déduit l'expression des variances des quadratures après atténuation

$$\langle (\delta \hat{X}_{\text{out}}^{\pm})^2 \rangle = (1 - \eta) \langle (\delta \hat{X}_{\text{in}}^{\pm})^2 \rangle + \eta \quad 1.6.3$$

Une atténuation a pour conséquence de faire tendre les fluctuations vers celles du vide ou d'un état cohérent. Les états non classiques vont donc être très sensibles aux pertes. Imaginons que l'on dispose d'un état dont une des quadratures est infiniment comprimée. En présence de 50% de pertes, le bruit de cette quadrature ne sera plus que la moitié du bruit d'un état cohérent. Les expériences faisant intervenir des états comprimés ou intriqués vont donc être très sensibles aux pertes.

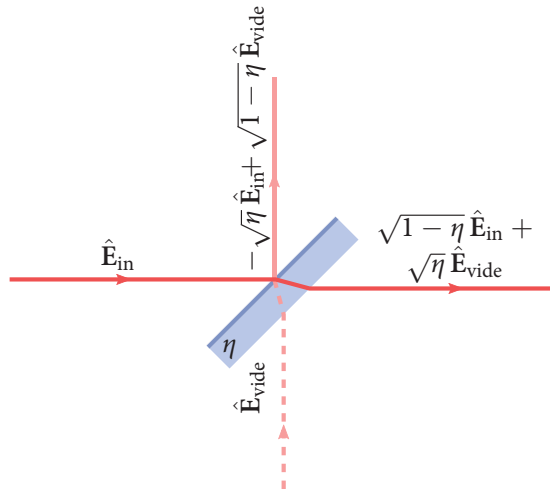


Fig. 1.6.1 : Modélisation des pertes par un mélange avec le vide quantique sur une lame semi-réfléchissante.

2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre

Sommaire

2.1	Mesures optiques et limites de sensibilité	35
2.2	Introduction à l'estimation de paramètres	37
2.2.1	Un exemple simple	37
2.2.2	Borne de Cramér-Rao	40
2.2.3	Estimateurs efficaces.	43
2.2.4	Conclusion	44
2.3	Estimation de paramètres par l'intermédiaire du champ électromagnétique	45
2.3.1	Protocole général d'une estimation	45
2.3.2	Champs électromagnétiques étudiés	45
2.3.3	Définitions	48
2.3.4	Application de la théorie de Cramér-Rao à une mesure sur le champ électromagnétique	53
2.3.5	Optimisation expérimentale de la borne de Cramér-Rao	60
2.3.6	Interprétation	66
2.3.7	Estimation de paramètres multiples	69
2.3.8	Conclusion du chapitre	72

2.1 Mesures optiques et limites de sensibilité

Les techniques optiques sont largement utilisées pour réaliser des mesures de très haute précision ou de très haute sensibilité. Parmi une multitude d'applications, on peut citer les exemples de la spectroscopie [Thorpe 08], de la mesure de distance [Lee 10], de la détection de polluants [Müller 07], de la

microscopie [Neumann 10], de l'imagerie [Popoff 10], etc. La lumière permet en effet d'extraire des informations à distance et de manière non-destructive, en atteignant des niveaux de sensibilité ou d'exactitude élevés. Un exemple frappant de la sensibilité extrême que l'on peut obtenir est ainsi donné par les interféromètres utilisés pour détecter des ondes gravitationnelles [Harry 10].

Supposons qu'un champ électromagnétique dépende d'un paramètre p , que l'on souhaite mesurer, et intéressons nous à la sensibilité que l'on peut espérer obtenir lors de cette mesure. Traitons ce champ $E(p)$ classiquement pour l'instant et intéressons-nous à la mesure de petites variations de p autour d'une valeur initiale que nous fixerons à 0, sans perte de généralité. Un développement au premier ordre fournit

$$E(p) \simeq E(0) + p \left. \frac{\partial E}{\partial p} \right|_0 \quad 2.1.1$$

La fraction du champ dans le mode $\left. \frac{\partial E}{\partial p} \right|_0$ est proportionnelle à la valeur de p . En mesurant celle-ci, on obtient donc une estimation directe du paramètre p . Imaginons que l'on soit capable d'effectuer une telle mesure, de façon parfaite et sans introduire de bruit. Le bruit du champ électromagnétique sur ce mode entraîne une imprécision sur la mesure de p . Diminuer le bruit du champ permet donc d'améliorer la mesure et pour un champ classique ceci est possible sans restriction, conduisant ainsi à une mesure en théorie parfaite. Une description plus complète nécessite cependant de considérer un champ quantique. Pour un tel champ, même en l'absence de bruit technique, il subsiste toujours un bruit, lié à la quantification du champ. Les propriétés de bruit quantique du champ électromagnétique vont donc limiter la sensibilité des mesures.

Quand la lumière est produite par des sources ordinaires produisant des états cohérents, par exemple un laser très au-dessus du seuil, la limite est appelée « limite quantique standard » ou « standard quantum limit » (SQL) en anglais [Caves 81]. De nombreuses expériences ont montré qu'il était possible d'améliorer les mesures optiques au-delà de cette limite en utilisant des états comprimés ou intriqués dont les propriétés de bruit sur les quadratures sont différentes. Ceci a été démontré pour un certain nombre de mesures, par exemple d'intensité ou de phase [Bachor 04]. Des travaux précédents dans le groupe ont visé à améliorer la sensibilité de la mesure de petits déplacements d'un faisceau lumineux [Treps 03].

L'objet de cette première partie de la thèse est d'établir des expressions générales portant sur la sensibilité ultime atteignable et de proposer des dispositifs

expérimentaux pour les atteindre.

2.2 Introduction à l'estimation de paramètres

Ce chapitre vise à proposer une introduction simple à l'estimation de paramètres de distributions de probabilités classiques à partir de tirages successifs. On introduira le formalisme et on s'intéressera notamment à établir une borne générale de la sensibilité que l'on peut espérer obtenir pour une estimation quelconque.

2.2.1 Un exemple simple

En guise d'introduction au problème plus général de l'estimation de paramètres, on s'intéresse au problème physique simple suivant : par temps pluvieux, on place un seau de surface S , connue, qui recueille des gouttes de pluie. L'expérience a lieu pendant un temps total $N \times T$ que l'on sépare en N intervalles de durée T . Pour chacun d'eux, on note combien de gouttes de pluie sont tombées dans le seau. Ces nombres de gouttes mesurés successivement sont notés $\{n_1, n_2, \dots, n_N\}$, ce que l'on appelle collectivement *l'échantillon*. Utilisant uniquement ces valeurs expérimentales, quelle va être la méthode optimale pour déterminer le nombre de gouttes qui tombent par unité de surface pendant un certain temps ? Les résultats de toute cette section sont inspirés de l'ouvrage de Ph. Réfrégier [Réfrégier 02], auquel on pourra se référer pour des explications supplémentaires.

Imaginons que la probabilité de mesurer n gouttes tombant pendant un temps T sur une surface S s'écrive sous la forme d'une distribution *poissonnienne* :

$$P_\varphi(n) = \frac{e^{-\varphi} \varphi^n}{n!}. \quad 2.2.1$$

L'espérance de cette statistique, c'est à dire le nombre moyen de gouttes qui tombent sur cette surface S pendant un temps T , vaut alors φ . C'est ce paramètre φ que nous voulons estimer en connaissant l'échantillon $\{n_1, n_2, \dots, n_N\}$.

2.2.1.1 Estimateurs de φ

On sait que φ est à la fois l'espérance et la variance de la distribution poissonnienne P_φ . Les moyennes et les variances de l'échantillon vont donc fournir une estimation directe de φ . On peut donc définir les deux fonctions

$$\tilde{\varphi}_1(\{n_1, n_2, \dots, n_N\}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i \quad 2.2.2$$

$$\tilde{\varphi}_2(\{n_1, n_2, \dots, n_N\}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i \right)^2. \quad 2.2.3$$

Ces deux fonctions tendent vers φ quand le nombre de mesures N devient grand, on va donc pouvoir les appeler des *estimateurs* de φ . On possède donc deux stratégies différentes d'estimation de φ .

2.2.1.2 Estimateurs biaisés et non biaisés

Pour un nombre de mesures N fixé, les deux estimateurs se comportent différemment. En effet, il est facile de montrer que l'espérance de $\tilde{\varphi}_1$ vaut

$$E(\tilde{\varphi}_1) = \varphi, \quad 2.2.4$$

tandis que celle de $\tilde{\varphi}_2$ vaut

$$E(\tilde{\varphi}_2) = \frac{N-1}{N} \varphi. \quad 2.2.5$$

On définit le *biais* comme étant l'écart entre l'espérance d'un estimateur et la vraie valeur à estimer. L'estimateur $\tilde{\varphi}_1$ est donc un estimateur *non biaisé* de φ tandis que $\tilde{\varphi}_2$ est un estimateur *biaisé*. Dans le cas de $\tilde{\varphi}_2$, on a ainsi un biais

$$b_{\tilde{\varphi}_2} = \frac{N-1}{N} \varphi - \varphi \quad 2.2.6$$

$$= -\frac{\varphi}{N}. \quad 2.2.7$$

Ce biais tend vers 0 quand N est grand, on peut donc dire que $\tilde{\varphi}_2$ est un estimateur biaisé *convergent*. On appelle estimateur *convergent* un estimateur dont l'espérance converge vers la vraie valeur φ à mesurer pour un grand nombre de mesures.

2.2.1.3 Variance des estimateurs

Nous disposons de deux estimateurs de φ , l'un biaisé et l'autre non. Il est maintenant intéressant de s'intéresser à leurs variances. En effet, pour un nombre de mesures N fixés, on va obtenir une valeur, idéalement proche de φ , qui constitue une estimation de φ . En répétant cette opération, on peut obtenir un ensemble d'estimations, qui va suivre une certaine distribution. Il est donc intéressant d'avoir un estimateur qui possède la plus petite variance. Afin de mieux percevoir le comportement des deux estimateurs, nous avons effectué une simulation sous Mathematica de 100 000 estimations d'un paramètre de statistique poissonnienne $\varphi = 5$, réalisées en prenant $N = 10$ mesures à chaque fois. On obtient les résultats suivants.

Estimateur	$\tilde{\varphi}_1$	$\tilde{\varphi}_2$
Moyenne	5.0022	4.49502
Variance	0.496451	4.88071

Les distributions des estimations sont présentées sur la figure 2.2.1.

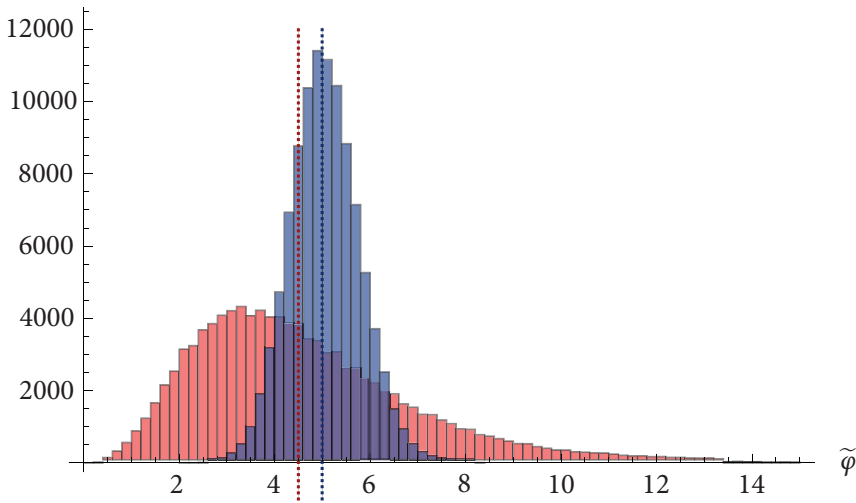


Fig. 2.2.1 : Distribution de 100 000 estimations de $\varphi = 5$ utilisant des échantillons de $N = 10$ mesures par les estimateurs $\tilde{\varphi}_1$ (en bleu) et $\tilde{\varphi}_2$ (en rouge). Les moyennes sont représentées en pointillés.

On observe bien que l'estimateur $\tilde{\varphi}_2$ est biaisé : la moyenne des estimations utilisant ce paramètre est très proche de la valeur théorique de $\frac{N-1}{N}\varphi = 4.5$, alors que l'estimateur $\tilde{\varphi}_1$ est clairement non biaisé. On constate aussi que la distribution de l'estimateur $\tilde{\varphi}_1$ est beaucoup plus « piquée » autour de la valeur théorique que celle de $\tilde{\varphi}_2$. Ceci se traduit par une variance un ordre de grandeur plus petite. On constate que $\tilde{\varphi}_1$ est un meilleur estimateur que $\tilde{\varphi}_2$ car il est non biaisé et que sa variance est plus petite. S'il apparaît clairement qu'il existe des estimateurs meilleurs que d'autres, des questions restent cependant ouvertes : peut-on écrire une borne inférieure de la variance d'un estimateur quelconque ? Existe-t-il un estimateur optimal ?

2.2.2 Borne de Cramér-Rao

2.2.2.1 Vraisemblance et log-vraisemblance

Dans l'exemple précédent, pour des gouttes d'eau tombant selon une distribution de probabilité $P_\varphi(n)$, nous mesurons des valeurs de n successives et cherchions à estimer φ . Le problème qui nous intéresse consiste donc à déduire d'un échantillon de mesures $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ le paramètre φ d'une distribution quelconque. Cette approche inverse va donc se traduire par la définition de la *vraisemblance* L_φ (*likelihood* en anglais), qui est simplement la probabilité de mesurer successivement $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$, φ étant inconnu. La vraisemblance est donc une probabilité exprimée comme une fonction de φ , pour un échantillon de mesure donné. Mathématiquement, on aura simplement, pour un échantillon $\mathbf{n}$ donné,

$$L_\varphi(\mathbf{n}) = P_\varphi(\mathbf{n}) \quad 2.2.8$$

On définit d'autre part la *log-vraisemblance* comme étant le logarithme de la vraisemblance :

$$l_\varphi(\mathbf{n}) = \log L_\varphi(\mathbf{n}) \quad 2.2.9$$

que l'on remarque être aussi l'opposée de l'information de Shannon.

2.2.2.2 Borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé

Nous cherchons à déterminer une borne minimale pour la variance d'un estimateur non biaisé de φ . Considérons un estimateur $\tilde{\varphi}(\mathbf{n})$ de φ . Si $\tilde{\varphi}$ est un estimateur non biaisé de φ , on peut écrire simplement

$$E(\tilde{\varphi}) = \varphi \quad 2.2.10$$

ce qui implique que

$$\int (\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi) L_{\varphi}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = 0 \quad 2.2.11$$

L'intégrale porte sur la totalité des mesures possibles, on écrit pour une fonction f quelconque :

$$\int f(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = \int f(n_1, \dots, n_N) dn_1, \dots, dn_N \quad 2.2.12$$

On peut définir de façon similaire la variance d'un estimateur non biaisé par

$$\sigma^2(\tilde{\varphi}) = \int (\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi)^2 L_{\varphi}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \quad 2.2.13$$

En faisant l'hypothèse que la fonction L_{φ} est suffisamment régulière, il est possible de dériver l'expression 2.2.11

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \int (\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi) L_{\varphi}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = 0 \quad 2.2.14$$

et d'intervertir les signes intégrale et dérivation

$$\int (\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi) \frac{\partial L_{\varphi}}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} - \int L_{\varphi}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = 0 \quad 2.2.15$$

d'où

$$\int (\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi) \frac{\partial L_{\varphi}}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = 1 \quad 2.2.16$$

En faisant intervenir la dérivée logarithmique $\frac{\partial l_{\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{1}{L_{\varphi}} \frac{\partial L_{\varphi}}{\partial \varphi}$, on peut réécrire cette expression sous la forme

$$\int (\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi) L_{\varphi}(\mathbf{n}) \frac{\partial l_{\varphi}}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = 1 \quad 2.2.17$$

que l'on peut alors factoriser :

$$\int \left((\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi) \sqrt{L_{\varphi}(\mathbf{n})} \right) \left(\sqrt{L_{\varphi}(\mathbf{n})} \frac{\partial l_{\varphi}}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) \right) d\mathbf{n} = 1 \quad 2.2.18$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne alors directement une inégalité sur la variance :

$$\sigma^2(\tilde{\varphi}) \geq \frac{1}{\int \left(\frac{\partial l_{\varphi}}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) \right)^2 L_{\varphi}(\mathbf{n}) \, \mathrm{d}\mathbf{n}} \quad 2.2.19$$

Le terme au dénominateur s'appelle *l'information de Fisher*.

$$I_{\text{Fisher}} = \int \left(\frac{\partial l_{\varphi}}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) \right)^2 L_{\varphi}(\mathbf{n}) \, \mathrm{d}\mathbf{n} \quad 2.2.20$$

Cette expression peut être simplifiée sous certaines hypothèses de régularité, en effet,

$$I_{\text{Fisher}} = \int \left(\frac{\partial l_{\varphi}}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) \right)^2 L_{\varphi}(\mathbf{n}) \, \mathrm{d}\mathbf{n} = \int \frac{\partial l_{\varphi}}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) \frac{\partial L_{\varphi}}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) \, \mathrm{d}\mathbf{n} \quad 2.2.21$$

Si la fonction est suffisamment régulière, on peut l'intégrer par parties pour obtenir une nouvelle expression de l'information de Fisher :

$$I_{\text{Fisher}} = - \int \frac{\partial^2 l_{\varphi}}{\partial \varphi^2}(\mathbf{n}) L_{\varphi}(\mathbf{n}) \, \mathrm{d}\mathbf{n} \quad 2.2.22$$

$$= -E \left(\frac{\partial^2 l_{\varphi}}{\partial \varphi^2} \right). \quad 2.2.23$$

L'information de Fisher est donc *l'opposée de l'espérance de la dérivée seconde de la log-vraisemblance*. En résumé, on obtient maintenant comme expression pour la variance de l'estimateur :

$$\sigma^2(\tilde{\varphi}) \geq \frac{1}{I_{\text{Fisher}}} \quad 2.2.24$$

Cette borne, appelée *Borne de Cramér-Rao* [Rao 45], représente une borne inférieure pour tout estimateur non biaisé d'un paramètre d'une statistique. Cette borne n'est pas toujours mathématiquement atteignable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas nécessairement un estimateur ayant cette valeur pour variance.

2.2.3 Estimateurs efficaces.

La variance de tout estimateur non biaisé est nécessairement supérieure à l'inverse de l'information de Fisher. On appelle *estimateur efficace* un estimateur qui sature la borne de Cramér-Rao, c'est à dire un estimateur dont la variance est égale à l'inverse de l'information de Fisher. Pour une mesure donnée, cet estimateur est le meilleur (ou un des meilleurs) estimateurs de la statistique. Cet estimateur est une fonction mathématique, qu'il faut idéalement réussir à mettre en place expérimentalement. Un tel appareil de détection, s'il existe, est ainsi optimal : il n'est pas possible d'imaginer un meilleur moyen de mesurer un paramètre, pour un ensemble de données fixé.

2.2.3.1 Famille exponentielle

Si l'on fait maintenant l'hypothèse qu'il existe un estimateur non biaisé efficace, on peut en déduire des contraintes sur la distribution statistique elle-même. La démarche que nous allons suivre maintenant va consister à supposer l'égalité dans la borne de Cramér-Rao pour ensuite considérer à rebours la démonstration précédente, et en déduire des conditions nécessaires sur la distribution. Pour établir la borne de Cramér-Rao, nous avons utilisé le théorème de Cauchy-Schwarz, ce qui nous a permis d'obtenir la relation 2.2.19. Le cas d'égalité correspond nécessairement au cas où les deux termes sont proportionnels. Cette constante de proportionnalité dépend du paramètre φ à estimer, condition qui se traduit mathématiquement par l'existence d'une fonction $\alpha(\varphi)$ telle que

$$\frac{\partial l_\varphi}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) \sqrt{L_\varphi(\mathbf{n})} = \alpha(\varphi) (\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi) \sqrt{L_\varphi(\mathbf{n})} \quad 2.2.25$$

$$\frac{\partial l_\varphi}{\partial \varphi}(\mathbf{n}) = \alpha(\varphi) (\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi) \quad 2.2.26$$

l_φ est donc nécessairement une primitive de $\alpha(\varphi) (\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) - \varphi)$, ce qui signifie que l'on peut l'écrire sous la forme

$$l_\varphi(\mathbf{n}) = a(\varphi)\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) + Nb(\varphi) + F(\mathbf{n}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(\varphi) = \int \alpha(\varphi) d\varphi \\ Nb(\varphi) = \int -\varphi \alpha(\varphi) d\varphi \end{cases} \quad 2.2.27$$

et la vraisemblance peut ainsi se mettre sous la forme

$$L_\varphi(\mathbf{n}) = e^{a(\varphi)\tilde{\varphi}(\mathbf{n})+F(\mathbf{n})+Nb(\varphi)} \quad 2.2.28$$

Si les mesures correspondent bien à N tirages indépendants suivant la même distribution de probabilité, la vraisemblance $L_\varphi(\mathbf{n})$ est nécessairement factorisable comme un produit de N probabilités de mesurer successivement des valeurs n_i .

$$L_\varphi(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^N P_\varphi(n_i) \quad 2.2.29$$

On peut donc nécessairement décomposer les fonctions $\tilde{\varphi}(\mathbf{n})$ et $F(\mathbf{n})$ comme des sommes de fonctions de n_i

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N t(n_i) \quad F(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N f(n_i) \quad 2.2.30$$

Ainsi, l'hypothèse que la borne de Cramér-Rao est atteinte implique que la distribution de probabilité peut se mettre sous la forme

$$P_\varphi(n) = \frac{e^{a(\varphi)t(n)+f(n)}}{Z(\varphi)} \quad 2.2.31$$

avec

$$Z(\varphi) \equiv e^{-b(\varphi)} = \int e^{a(\varphi)t(n)+f(n)} dn \quad 2.2.32$$

Toute distribution pouvant s'écrire sous la forme 2.2.31 fait partie de ce qu'on appelle la *famille exponentielle*.

2.2.4 Conclusion

Nous avons présenté quelques définitions et outils généraux bien connus concernant l'estimation de paramètres de distributions de probabilité à partir de tirages successifs. Ceci nous a notamment permis d'introduire l'information de Fisher et la borne de Cramér-Rao. Nous allons dans la suite de cette thèse utiliser ces résultats et ce formalisme pour déterminer des limites quantiques de mesures de paramètres par l'intermédiaire du champ électromagnétique. La difficulté majeure proviendra du fait que la mécanique quantique interdit la mesure simultanée d'opérateurs qui ne commutent pas.

2.3 Estimation de paramètres par l'intermédiaire du champ électromagnétique

2.3.1 Protocole général d'une estimation

Le protocole général étudié est présenté sur la figure 2.3.1. Une source de lumière produit une onde électromagnétique dépendant d'un paramètre p , que l'on décrit par un état quantique $|\psi(p)\rangle$. Ce champ est ensuite détecté par un appareil de mesure (ou un ensemble d'appareils), qui fournit un signal classique dépendant de p . À partir de celui-ci, un traitement de l'information est effectué et un estimateur de p , appelé $\tilde{p}$, est produit. Nous nous intéressons uniquement aux estimateurs non biaisés, c'est à dire aux estimateurs dont l'espérance vaut p .

2.3.1.1 Mesure des quadratures

Les mesures que nous allons effectuer porteront sur les quadratures du champ. Ces mesures peuvent être réalisées expérimentalement par l'intermédiaire de détectations homodyne. Nous postulons qu'il s'agit des mesures les plus générales qu'il soit possible de réaliser expérimentalement. Nous considérerons que nous sommes capables expérimentalement d'effectuer des mesures sur tous les modes du champ, indépendamment les uns des autres.

2.3.1.2 Petits paramètres

Le paramètre p que nous allons chercher à estimer sera toujours supposé *petit*, ce qui nous permettra de réaliser des développements au *premier ordre* dans les démonstrations.

2.3.2 Champs électromagnétiques étudiés

L'étude que nous allons réaliser va porter sur une classe d'états optiques que l'on *peut produire expérimentalement*. Nous allons tout d'abord préciser quels états nous allons prendre en compte dans notre étude, puis effectuer quelques approximations principalement destinées à simplifier les calculs.

États Gaussiens Nous allons tout d'abord nous restreindre à une certaine classe d'états que l'on peut raisonnablement produire expérimentalement et qui sont utilisés pour réaliser des mesures précises. Les *états cohérents*, introduits

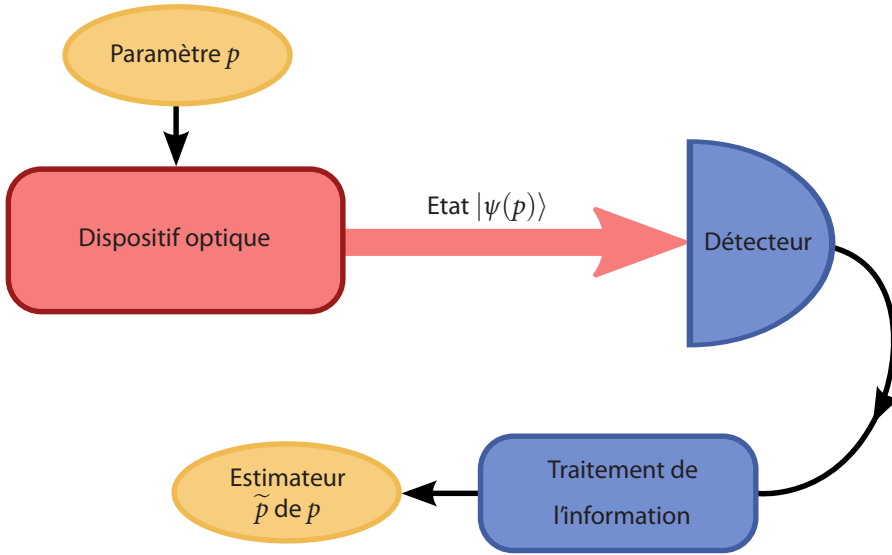


Fig. 2.3.1 : Principe général d'une estimation de paramètre du champ électromagnétique

par Glauber [Glauber 63], sont très intéressants expérimentalement car ils décrivent bien la lumière produite par un laser très au-dessus du seuil. Les états cohérents peuvent ainsi décrire la majorité des expériences modernes de mesures optiques utilisant des lasers. Depuis les années 1980 [Slusher 85, Wu 86], des états dit *comprimés* (*squeezed states*) ont été produits expérimentalement. Ces états présentent un intérêt expérimental car leurs propriétés de bruit étant différentes de celles des états cohérents, ils peuvent potentiellement accroître la sensibilité de certaines mesures [Caves 81, Xiao 87, Grangier 87] par rapport aux états cohérents. Les états comprimés ainsi produits peuvent aussi conduire simplement, en utilisant des composants optiques simples, à des états *intriqués* en quadrature, dont le bruit ne peut plus être décrit simplement quadrature par quadrature, mais uniquement dans leur globalité. L'ensemble de ces états peut être décrit par le formalisme unifié des *états gaussiens multimodes*, c'est-à-dire ceux dont la fonction de Wigner est gaussienne (cf. 1.5). Ils représentent une classe relativement large d'états non classiques qu'il est raisonnablement possible de produire expérimentalement. Ces états peuvent décrire des états intenses, qui sont intéressants expérimentalement car, comme nous le montrons, la sensibilité des mesures dépend de la racine inverse du nombre de pho-

tons détectés. Nous ne considérerons pas dans cette thèse l'utilisation d'états non gaussiens. Certains schémas de détection proposent l'utilisation de tels états [Giovannetti 01] et sont fondamentalement intéressants mais ils mettent en pratique en jeu un nombre si restreint de photons qu'ils ne peuvent rivaliser avec des mesures utilisant des états intenses.

Pureté Nous nous limiterons exclusivement dans cette thèse à l'étude des *états purs*, c'est-à-dire des états dont les bruits sur les quadratures sont minimaux, au sens où ils saturent l'inégalité de Heisenberg. Cette relation simplifie les démonstrations car elle diminue le nombre de paramètres nécessaire pour décrire le champ. Ainsi, le bruit d'un état comprimé monomode pur peut être décrit complètement par un seul paramètre au lieu de deux.

La raison pour laquelle nous n'allons pas considérer les états mixtes vient essentiellement du fait que l'on peut postuler que pour toute mesure portant sur un état mixte, on peut réaliser une autre mesure au moins aussi précise mettant en jeu un état pur identique par ailleurs. C'est aussi la raison pour laquelle nous n'allons pas considérer dans cette étude d'autres états (non gaussiens) que l'on peut produire simplement expérimentalement comme les états thermiques, émis par le rayonnement du corps noir, et qui sont plus bruyants que les états gaussiens purs. L'étude théorique de mesures utilisant des états mixtes, qui ne sera pas traitée dans cette thèse, est cependant intéressante car les états produits expérimentalement ne sont pas toujours purs.

Nombre de modes Afin de simplifier les calculs, le nombre de modes du champ électromagnétique sera considéré comme *fini*, égal à M . Ce paramètre pourra cependant être arbitrairement grand et les résultats que nous obtenons ne dépendront pas de celui-ci.

Approximation paraxiale Nous étudierons uniquement des faisceaux lumineux localisés dans le plan transverse et nous effectuerons tous les calculs dans le cadre de l'approximation paraxiale. Cette approximation est réaliste et correspond aux mesures typiques dans les laboratoires d'optique utilisant des lasers.

Spectre lumineux De manière analogue, dans le domaine fréquentiel, nous ferons l'hypothèse que *le spectre des fréquences de la lumière est restreint au voisinage d'une fréquence centrale*. Cette hypothèse est relativement restrictive mais elle

est indispensable car notre étude nécessite que tous les photons soient approximativement de même énergie. Expérimentalement, nous allons donc pouvoir décrire les mesures utilisant des ondes monochromatiques ou certaines impulsions. Cette approximation peut rester raisonnable pour des mesures utilisant des impulsions femtoseconde pas trop brèves, par exemple supérieures à 100 fs de long.

Polarisation Nous étudierons uniquement des états dont la polarisation est bien définie et ne dépend pas du paramètre à mesurer. Ceci présente l'immense avantage de nous permettre de ne manipuler que des champs scalaires. Il sera cependant intéressant dans le futur d'étendre la théorie à des mesures dans l'espace des polarisations.

Intensité et fluctuations L'étude de champ dont l'intensité dépend d'un paramètre à mesurer a déjà été étudiée ([Marin 97, Souto-Ribeiro 97, Gao 98]) et l'on sait qu'il est intéressant de comprimer les fluctuations du mode de champ moyen pour améliorer la précision de ces mesures. Nous ne nous intéresserons donc pas à ce cas et nous ferons l'hypothèse que l'intensité totale du faisceau est fixée, aux fluctuations près, et ne dépend pas du paramètre à estimer. D'autre part, nous ferons l'hypothèse que les *fluctuations du champ sont petites* et que l'on peut les traiter au *premier ordre*. Dans ces conditions, le nombre de photons du champ ne dépend que des valeurs moyennes de celui. Nous appellerons N le nombre de photons moyen du champ, qui ne dépendra pas du paramètre p .

2.3.3 Définitions

2.3.3.1 Modes et opérateurs annihilations

On appelle $u_1(\vec{r}, t, p)$ le mode normalisé de la valeur moyenne du champ électromagnétique $\hat{E}^+(r, t)$, dans l'état considéré $|\Psi(p)\rangle$.

$$u_1(\vec{r}, t, p) = \frac{\langle \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \rangle}{\sqrt{\int \langle E^{(+)}(\vec{r}, t) \rangle^2 d\vec{r} dt}}$$

2.3.1

A partir de ce vecteur $u_1(\vec{r}, t, p)$, on construit une base orthonormale $\{u_n(\vec{r}, t, p)\}_{1 \leq n \leq M}$. Dans toute la suite de la thèse, on notera parfois ces vecteurs sous la forme $\{u_n(p)\}$, la dépendance spatio-temporelle étant alors implicite, afin de simplifier l'écriture des expressions. Sous réserve que le spectre soit

suffisamment étroit (cf. 1.3) autour d'une fréquence centrale ω_0 , l'opérateur des fréquences positives du champ électromagnétique peut s'écrire dans cette base sous la forme

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 cT}} \sum_{i=1}^M \hat{a}_i(p) u_i(\vec{r}, t, p) \quad 2.3.2$$

où les a_i sont les opérateurs annihilation des modes $u_i(\vec{r}, t, p)$. Afin de pouvoir mesurer le paramètre p , il nous faut définir une base fixe, ne dépendant pas de p et qui va permettre d'avoir un référentiel extérieur dans lequel on pourra mesurer p . On définit donc une deuxième base $\{v_n\}_{1 \leq n \leq M}$ que l'on appellera la base de détection. Cette base est liée au détecteur. On appelle $\hat{b}_i$ les opérateurs annihilations dans cette base, l'opérateur champ électromagnétique s'écrivant

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 cT}} \sum_{i=1}^M \hat{b}_i v_i(\vec{r}, t) \quad 2.3.3$$

Ni les opérateurs $\hat{b}_i$ ni les modes v_i ne dépendent de p . On définit les vecteurs colonnes $\hat{\mathbf{A}}(p)$ et $\hat{\mathbf{B}}$ qui contiennent les différents opérateurs annihilations :

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p) \\ \vdots \\ \hat{a}_M(p) \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_M \end{pmatrix} \quad 2.3.4$$

$\hat{\mathbf{A}}(p)$ et $\hat{\mathbf{B}}$ sont reliés entre eux par une matrice unitaire de changement de base $\mathbf{U}(p)$ de telle sorte que

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{U}(p) \hat{\mathbf{B}} \quad 2.3.5$$

La matrice $\mathbf{U}(p)$ s'écrivant

$$\mathbf{U}(p) = \begin{pmatrix} \int u_1^*(\vec{r}, t, p) v_1(\vec{r}, t) d\vec{r} dt & \cdots & \int u_M^*(\vec{r}, t, p) v_1(\vec{r}, t) d\vec{r} dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int u_1^*(\vec{r}, t, p) v_M(\vec{r}, t) d\vec{r} dt & \cdots & \int u_M^*(\vec{r}, t, p) v_M(\vec{r}, t) d\vec{r} dt \end{pmatrix} \quad 2.3.6$$

2.3.3.2 Quadratures du champ

On peut définir les quadratures du champ mode par mode. Suivant les notations précédentes, ces quadratures sont regroupées au sein de vecteurs colonnes

$\hat{\mathbf{X}}^+(p)$ et $\hat{\mathbf{X}}^-(p)$

$$\hat{\mathbf{X}}^+(p) = \begin{pmatrix} \hat{X}_1^+(p) \\ \vdots \\ \hat{X}_M^+(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger(p) + \hat{a}_1(p) \\ \vdots \\ \hat{a}_M^\dagger(p) + \hat{a}_M(p) \end{pmatrix} \quad 2.3.7$$

$$\hat{\mathbf{X}}^-(p) = \begin{pmatrix} \hat{X}_1^-(p) \\ \vdots \\ \hat{X}_M^-(p) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger(p) - \hat{a}_1(p) \\ \vdots \\ \hat{a}_M^\dagger(p) - \hat{a}_M(p) \end{pmatrix} \quad 2.3.8$$

On définit de manière similaire les vecteurs $\hat{\mathbf{Y}}^+$ et $\hat{\mathbf{Y}}^-$, liés au détecteur

$$\hat{\mathbf{Y}}^+ = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1^+ \\ \vdots \\ \hat{Y}_M^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_M^\dagger + \hat{b}_M \end{pmatrix} \quad 2.3.9$$

$$\hat{\mathbf{Y}}^- = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1^- \\ \vdots \\ \hat{Y}_M^- \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_M^\dagger - \hat{b}_M \end{pmatrix} \quad 2.3.10$$

On définit aussi les vecteur concaténés $\hat{\mathbf{X}}(p)$ et $\hat{\mathbf{Y}}$, de dimension $2M$

$$\hat{\mathbf{X}}(p) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}^+(p) \\ \hat{\mathbf{X}}^-(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_1^+(p) \\ \vdots \\ \hat{X}_M^+(p) \\ \hat{X}_1^-(p) \\ \vdots \\ \hat{X}_M^-(p) \end{pmatrix} \quad 2.3.11$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}^+ \\ \hat{\mathbf{Y}}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1^+ \\ \vdots \\ \hat{Y}_M^+ \\ \hat{Y}_1^- \\ \vdots \\ \hat{Y}_M^- \end{pmatrix} \quad 2.3.12$$

On peut écrire simplement la relation de passage entre $\hat{\mathbf{X}}(p)$ et $\hat{\mathbf{Y}}$ par le biais d'une matrice *orthogonale*¹ *symplectique* $\Omega(p)$ telle que

$$\hat{\mathbf{X}}(p) = \Omega(p)\hat{\mathbf{Y}} \quad 2.3.13$$

On montre que $\Omega(p)$ s'écrit facilement en fonction des parties réelles et imaginaires de la matrice unitaire $\mathbf{U}(p)$

$$\Omega(p) = \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{U}(p)) & -\Im(\mathbf{U}(p)) \\ \Im(\mathbf{U}(p)) & \Re(\mathbf{U}(p)) \end{pmatrix} \quad 2.3.14$$

2.3.3.3 Valeurs moyennes

On pose d'une manière générale $\bar{Z} = \langle \psi | \hat{Z} | \psi \rangle$ la valeur moyenne quantique d'un opérateur quelconque $\hat{Z}$. Appliquée à un vecteur d'opérateur, comme $\hat{\mathbf{X}}(p)$ ou $\hat{\mathbf{Y}}$, cette notation représente le vecteur des valeurs moyennes quantiques de chaque opérateur. On peut de cette façon définir les vecteurs $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}(p)$, $\bar{\mathbf{X}}$ et $\bar{\mathbf{Y}}(p)$, qui sont donc les valeurs moyennes des vecteurs d'opérateurs associés, respectivement $\hat{\mathbf{A}}(p)$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{X}}(p)$ et $\hat{\mathbf{Y}}$.

Par construction, le champ moyen, qui était composé en moyenne de N photons, est entièrement dans le mode u_1 , ce qui signifie que la valeur moyenne du champ électromagnétique vaut

$$\bar{E}(\vec{r}, t, p) = i\sqrt{\frac{N\hbar\omega}{2\varepsilon_0 c T}} u_1(\vec{r}, t, p) \quad 2.3.15$$

La définition 2.3.1 implique que les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{a}_i$ valent quant à elles

$$\bar{a}_1 = \langle \psi(p) | \hat{a}_1(p) | \psi(p) \rangle = \sqrt{N} \quad 2.3.16$$

$$\bar{a}_{i>1} = \langle \psi(p) | \hat{a}_{i>1}(p) | \psi(p) \rangle = 0 \quad 2.3.17$$

Bien que l'opérateur $\hat{a}_1$ dépende de p , en fixant le mode $u_1(p)$ comme le mode de champ moyen, nous nous sommes assurés que ce mode comportait en moyenne N photons, les champs électriques portés par tous les autres modes étant nuls en moyenne. Le vecteur $\bar{\mathbf{A}}$ a donc pour expression

¹On rappelle qu'une matrice carrée réelle $\mathbf{O}$ est dite *orthogonale* si et seulement si $\mathbf{O}^\top = \mathbf{O}^{-1}$. Cette dénomination peut porter à confusion car de manière équivalente, ses vecteurs colonnes (ou lignes) forment une *base orthonormale*.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \sqrt{N} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.3.18$$

et ne dépend pas de p . Les valeurs moyennes des quadratures ne dépendent donc pas de p non plus et sont donc représentées par le vecteur

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{N} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.3.19$$

En revanche, les valeurs moyennes des opérateurs $\bar{b}_i(p) = \langle \psi(p) | \hat{b}_i | \psi(p) \rangle$ dépendent de p . C'est cette dépendance par rapport à p des projections du champ sur les différents modes de la base de détection que nous allons exploiter pour mesurer p .

2.3.3.4 Fonction de Wigner d'un état gaussien

Comme il a été vu précédemment (1.5), la fonction de Wigner du champ, si l'on fait l'hypothèse que l'état est *gaussien*, peut s'écrire sous la forme

$$W_p(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^M \sqrt{|\Gamma(p)|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\bar{\mathbf{X}})^\top \Gamma^{-1}(p)(\mathbf{X}-\bar{\mathbf{X}})} \quad 2.3.20$$

où $\Gamma(p)$ est la matrice $2M \times 2M$ qui représente la matrice de covariance du champ selon les quadratures $\hat{X}_i^+(p)$ et $\hat{X}_i^-(p)$ et $|\Gamma(p)|$ son déterminant. Si l'état est *pur*, alors nécessairement,

$$\det(\Gamma(p)) = \det(\Gamma^{-1}(p)) = 1 \quad 2.3.21$$

et donc

$$W_p(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^M} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\bar{\mathbf{X}})^\top \Gamma^{-1}(p)(\mathbf{X}-\bar{\mathbf{X}})} \quad 2.3.22$$

Si l'on veut maintenant représenter la fonction de Wigner du même champ électromagnétique dans une autre base, on peut utiliser la relation de passage 2.3.13 pour écrire la nouvelle fonction de Wigner du champ dans la base $\{\nu_i\}$.

$$W'_p(\mathbf{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^M |\Omega(p)|} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p))^\top \Omega^\top(p) \Gamma^{-1}(p) \Omega(p) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p))} \quad 2.3.23$$

La matrice $\Omega(p)$ est orthogonale, donc de déterminant 1. On pose maintenant $\Sigma(p)$ la matrice résultant de l'application de la transformation symplectique orthogonale $\Omega(p)$ à $\Gamma(p)$. $\Sigma(p)$ possède les mêmes valeurs propres et le même déterminant que $\Gamma(p)$.

$$\Sigma(p) = \Omega^\top(p) \Gamma(p) \Omega(p) \quad 2.3.24$$

$$W'_p(\mathbf{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^M} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p))^\top \Sigma^{-1}(p) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p))} \quad 2.3.25$$

2.3.4 Application de la théorie de Cramér-Rao à une mesure sur le champ électromagnétique

2.3.4.1 Mesure sur M ou $2 \times M$ quadratures

La fonction de Wigner $W'_p(\mathbf{Y})$ définit une densité de quasi-probabilité, il paraît donc naturel d'appliquer la théorie de l'information de Fisher développée précédemment aux probabilités marginales de la fonction de Wigner et d'en déduire une borne sur la variance de tout estimateur de p . Cependant, pour un mode du champ donné ν_i , les quadratures associées $\hat{Y}_i^+$ et $\hat{Y}_i^-$ sont des observables conjuguées, la mécanique quantique interdit donc leurs mesures simultanées. Il faut donc choisir, pour chaque mode, quelle quadrature mesurer. Comme il est possible que des mesures sur chacune de ces deux quadratures fournissent une information sur p il est possible que ce choix de quadrature de mesure entraîne une perte d'information. Helstrom a développé des bornes de Cramér-Rao *quantiques* pour l'estimation d'états, dans le formalisme de la matrice densité. Nous proposons ici une application de la limite de Cramér-Rao classique à des états quantiques dont la fonction de Wigner est gaussienne. Une approche naturelle consisterait à calculer une borne de Cramér-Rao pour une mesure sur une quadrature fixée de chaque mode. On pourrait ensuite optimiser cette borne en jouant sur le choix de la quadrature à mesurer. Ce procédé

2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre

est assez général mais complexe et nous n'allons pas le suivre. Celui que nous proposons est valable pour le cas particulier des états gaussiens purs.

1. Nous allons dans ce premier temps calculer une borne, de type Cramér-Rao, pour une mesure « virtuelle » utilisant le double des ressources (photons) et mettant en jeu deux mesures successives. Une première mesure, utilise N photons et porte sur une quadrature quelconque de chacun des M modes. Une deuxième mesure porte sur les M autres quadratures et utilise elle aussi N photons. L'hypothèse nécessaire est que la mesure porte sur des états identiques. Pour des mesures successives, cela signifie que le champ électromagnétique est le même pour les deux mesures, et que le paramètre p n'évolue pas. La dénomination de « virtuelle » ne signifie pas qu'on ne peut pas réaliser cette mesure, qui est une tomographie de l'état, mais plutôt que ce n'est pas celle que nous effectuons.
2. Nous allons ensuite montrer que pour un état gaussien pur cette borne ne dépend pas du choix des quadratures entre la première et la deuxième mesure. Cette borne pour une mesure virtuelle à $2N$ photons fournit une borne pour une mesure quelconque à N photons.
3. Nous montrerons dans le chapitre suivant qu'en utilisant une ou plusieurs détectations homodynes, il est possible d'atteindre cette borne pour une large classe d'états, correspondant aux situations les plus intéressantes expérimentalement.

2.3.4.2 Calcul de l'information de Fisher

L'information de Fisher a été définie comme l'espérance du carré de la dérivée de la log-vraisemblance (équation 2.2.20). La fonction de Wigner $W'_p(\mathbf{Y})$ d'un état gaussien définissant bien une densité de probabilité et non pas une simple quasi-probabilité, il est possible d'écrire l'information de Fisher pour la mesure virtuelle définie plus haut sous la forme d'une intégrale portant sur $2M$ quadratures

$$I_{\text{Fisher}} = - \int \frac{\partial^2 \log \left(W'_p(\mathbf{Y}) \right)}{\partial p^2} \Big|_0 W'_p(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \quad 2.3.26$$

La log-vraisemblance peut se développer sous la forme

$$\log \left(W'_p(\mathbf{Y}) \right) = -M \log(2\pi) - \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p))^\top \Sigma^{-1}(p) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p)) \quad 2.3.27$$

En dérivant la log-vraisemblance, la dépendance directe en M , qui correspond au nombre de modes et peut être arbitrairement grand, disparaît.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \left(W'_p(\mathbf{Y}) \right)}{\partial p} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right)^\top \Sigma^{-1}(p) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p))^\top \Sigma^{-1}(p) \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p))^\top \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial p} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p)) \end{aligned} \quad 2.3.28$$

La matrice $\Sigma^{-1}(p)$ est symétrique réelle, donc le premier terme est égal à la transposée du second. Comme ils sont scalaires, ils sont égaux et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \left(W'_p(\mathbf{Y}) \right)}{\partial p} &= \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right)^\top \Sigma^{-1}(p) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p))^\top \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial p} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p)) \end{aligned} \quad 2.3.29$$

La dérivée seconde de la log-vraisemblance vaut maintenant, pour $p = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \log \left(W'_p(\mathbf{Y}) \right)}{\partial p^2} \right|_0 &= \left(\left. \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p^2} \right|_0 \right)^\top \Sigma^{-1}(0) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) \\ &\quad + \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \left(\left. \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial p} \right|_0 \right) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) \\ &\quad - \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \Sigma^{-1}(0) \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right) \\ &\quad + \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \left(\left. \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial p} \right|_0 \right) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0))^\top \left(\left. \frac{\partial^2 \Sigma^{-1}}{\partial p^2} \right|_0 \right) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) \end{aligned} \quad 2.3.30$$

2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre

L'information de Fisher est l'opposée de l'espérance du terme précédent. L'espérance de $\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)$, $\int (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) W'_0(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}$, est strictement nulle pour un estimateur non biaisé donc les termes 1, 2 et 4 de l'expression précédente n'interviennent pas dans l'information de Fisher. Au final, on peut écrire l'information de Fisher comme la somme de deux termes

$$I_{\text{Fisher}} = I_1 + I_2$$

2.3.31

avec

$$\begin{cases} I_1 = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \Big|_0 \right)^\top \Sigma^{-1}(0) \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \Big|_0 \right) \\ I_2 = \int \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0))^\top \left(\frac{\partial^2 \Sigma^{-1}}{\partial p^2} \Big|_0 \right) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) W'_0(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \end{cases}$$

2.3.32

Il est possible de simplifier le terme I_2 . En effet,

$$I_2 = \frac{1}{2(2\pi)^M} \times \int (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0))^\top \left(\frac{\partial^2 \Sigma^{-1}}{\partial p^2} \Big|_0 \right) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0))^\top \Sigma^{-1}(0)(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0))} d\mathbf{Y}$$

2.3.33

$\Sigma^{-1}(0)$ est une matrice symétrique réelle, définie positive, il existe donc une unique matrice racine carrée définie positive de celle-ci. On appelle Λ cette matrice

$$\Lambda^2 = \Sigma^{-1}(0)$$

2.3.34

En effectuant le changement de variable $\mathbf{Z} = \Lambda (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0))$, on peut réécrire I_2 sous la forme

$$I_2 = \frac{1}{2(2\pi)^M} \int \mathbf{Z}^\top \Lambda^{-1} \left(\frac{\partial^2 \Sigma^{-1}}{\partial p^2} \Big|_0 \right) \Lambda^{-1} \mathbf{Z} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z}} d\mathbf{Z}$$

2.3.35

Seuls les termes diagonaux de la matrice $\Lambda^{-1} \left(\frac{\partial^2 \Sigma^{-1}}{\partial p^2} \Big|_0 \right) \Lambda^{-1}$ interviennent, en effet, par parité, $\int x y e^{-x^2 + y^2} dx dy = 0$. On obtient donc la relation :

$$I_2 = \frac{1}{2(2\pi)^M} \text{Tr} \left(\sqrt{2\pi} \Lambda^{-1} \left(\frac{\partial^2 \Sigma^{-1}}{\partial p^2} \Big|_0 \right) \Lambda^{-1} \right) \quad 2.3.36$$

Et donc finalement une expression simplifiée de I_2 .

$$I_2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\Sigma(0) \frac{\partial^2 \Sigma^{-1}}{\partial p^2} \Big|_0 \right) \quad 2.3.37$$

2.3.4.3 Interprétation physique des deux termes de l'information de Fisher

Les termes I_1 et I_2 sont liés aux informations que l'on peut obtenir en mesurant respectivement l'évolution du champ moyen et du bruit en fonction du paramètre p . Si le champ moyen dépend de p , cela signifie que la répartition de l'énergie du champ entre les quadratures $Y_i^\pm$ dépendra du paramètre p . En mesurant cette répartition, on peut mesurer p . De façon similaire, si le paramètre p agit sur la matrice de covariance, en mesurant celle-ci il devient possible d'extraire une information sur p .

Nous nous intéressons principalement au cas des variables continues, c'est-à-dire au cas où le champ moyen est très grand devant les fluctuations du champ. Par exemple, le champ moyen d'un faisceau de lumière visible de 1 mW est composé d'un nombre très grand de photons, de l'ordre de 10^{15} par seconde. Le terme I_2 est indépendant du nombre de photons du champ moyen, il ne dépend que des fluctuations de celui-ci. Le terme I_1 , quant à lui, croît linéairement avec le nombre de photons du champ moyen. Ceci veut dire que dans la plupart des situations, on pourra négliger le terme I_2 par rapport au terme I_1 . Il est cependant important de noter que ceci n'est pas toujours vrai, même pour un grand nombre de photons. En effet, il est tout à fait possible d'imaginer des situations où le champ moyen ne dépendrait pas de p . Ceci conduirait alors à un terme I_1 strictement nul. Dans la suite de cette thèse, nous allons toujours faire l'hypothèse raisonnable que l'on néglige l'influence de p sur les fluctuations du champ

$$I_1 \gg I_2 \quad 2.3.38$$

On négligera dans toute la suite de cette thèse le terme I_2 par rapport au terme I_1 . Prendre en compte I_2 nécessiterait une approche nettement plus complexe, prenant en compte la dépendance totale de l'état quantique, tel que développé par [Helstrom 69]. Puisque nous faisons l'hypothèse que la matrice de covariance

2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre

dépend faiblement de p , qui est lui-même petit, et afin de simplifier l'écriture des expressions, *on utilisera maintenant la notation Σ^{-1} à la place de $\Sigma^{-1}(0)$* . On prendra donc pour expression de l'information de Fisher

$$I_{\text{Fisher}} = \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)^\top \Sigma^{-1} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right) \quad 2.3.39$$

2.3.4.4 Choix des quadratures

La mesure que nous effectuons nécessite de mesurer sur M quadratures quelconques mais fixées, puis sur M autres quadratures orthogonales. L'expression de l'information de Fisher pourrait donc a priori dépendre du choix des quadratures. Il est cependant trivial de montrer que ce n'est pas le cas pour un état gaussien pur.

Exprimer cette expression dans une autre base nécessite de transformer Σ^{-1} et $\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)$, tous deux par l'intermédiaire d'une matrice symplectique orthogonale Ω . Dans cette nouvelle base, on a donc

$$I_{\text{Fisher}} = \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)^\top \Omega^\top \Omega \Sigma^{-1} \Omega^\top \Omega \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right) \quad 2.3.40$$

$$= \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)^\top \Sigma^{-1} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right) \quad 2.3.41$$

Pour un état gaussien pur, l'information de Fisher ne dépend donc pas du choix des quadratures que l'on mesure.

2.3.4.5 Borne sur la sensibilité

On définit le plus petit paramètre détectable $p_{\min}$ comme étant égal à l'écart type d'un éventuel estimateur efficace de p . Ceci revient à dire que l'espérance de la mesure est égale à l'écart type, ou encore que le rapport de signal sur bruit est égal à 1. Selon ce critère, on a

$$p_{\min} = \frac{1}{\sqrt{I_{\text{Fisher}}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)^\top \Sigma^{-1} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)}} \quad 2.3.42$$

2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre

Cette limite correspond à une borne sur la sensibilité d'une mesure virtuelle utilisant $2N$ photons et impliquant $2M$ quadratures. Elle ne dépend pas du choix des quadratures que l'on mesure et est donc nécessairement inférieure ou égale à la sensibilité que l'on peut espérer atteindre pour une mesure utilisant N photons. Nous l'appellerons borne de Cramér-Rao pour l'estimation d'un paramètre du champ électromagnétique.

2.3.4.6 Limite quantique standard

Dans le cas d'un état cohérent, la matrice de covariance est la matrice identité. Dans ce cas, la limite de sensibilité s'appelle la *limite quantique standard*, *standard quantum limit* en anglais (SQL), et a pour expression

$$P_{SQL} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right\|_0} \quad 2.3.43$$

Il est possible de montrer simplement la relation entre les normes

$$\left\| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right\|_0^2 = 4N \int \left| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0(\vec{r}, t)^2 d\vec{\rho} dt \quad 2.3.44$$

On rappelle que l'intégration porte sur le temps de la mesure et sur le plan *transverse* uniquement. On en déduit une expression de la limite quantique standard

$$P_{SQL} = \frac{1}{2\sqrt{N} \sqrt{\int \left| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0(\vec{r}, t)^2 d\vec{\rho} dt}} \quad 2.3.45$$

Cette limite quantique standard dépend en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ du nombre de photons du champ moyen, résultat bien connu [Caves 80, Caves 81].

2.3.4.7 Conclusion

Nous avons introduit une borne sur la sensibilité d'un estimateur non biaisé d'un paramètre du champ électromagnétique, indépendante de la méthode de mesure. Nous avons introduit pour cela une mesure virtuelle utilisant le double

des ressources ($2N$ photons et des mesures sur $2M$ quadratures), que nous avons explicitée et dont nous avons déterminé une borne inférieure sur la sensibilité. Cette borne ne dépendant pas du choix des quadratures, elle est nécessairement plus petite que la sensibilité de toute mesure mettant en jeu M quadratures. *Nous disposons donc maintenant d'une borne sur la sensibilité de toute mesure non biaisée d'un paramètre du champ électromagnétique, que nous avons appelé borne de Cramér-Rao pour l'estimation d'un paramètre du champ électromagnétique.*

2.3.5 Optimisation expérimentale de la borne de Cramér-Rao

Nous disposons maintenant d'une borne sur la sensibilité d'une mesure d'un paramètre du champ, indépendante de la méthode que l'on emploie. Cette borne ne dépend que de l'état quantique et de sa dépendance par rapport au paramètre à mesurer et n'est pas nécessairement atteignable. Jusqu'à présent, le point de vue que nous avons adopté consistait à considérer que nous disposions d'un champ électromagnétique dépendant de p , que nous pouvions mesurer de la façon que nous voulions, mais que nous ne contrôlions en aucune façon.

Dans cette section exclusivement, nous allons provisoirement changer de point de vue et nous intéresser à la situation où l'expérimentateur dispose d'une certaine latitude pour adapter le champ électromagnétique et sa dépendance par rapport à p . Nous allons expliciter les différents degrés de liberté sur lequel l'expérimentateur peut jouer pour abaisser cette borne de Cramér-Rao et donc améliorer la sensibilité des mesures d'une éventuelle mesure efficace. Cette optimisation passe par une maximisation de l'information de Fisher.

2.3.5.1 Dépendance du champ moyen par rapport au paramètre à mesurer

La valeur de l'information de Fisher est directement liée à la dépendance du champ électromagnétique par rapport au paramètre p à mesurer. Ceci revient simplement à exprimer que plus le champ moyen dépend de p , plus la sensibilité sur la mesure peut être grande. Cette influence est caractérisée entièrement par les termes $\left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0$ ou de façon équivalente $\left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 (\vec{r}, t)$. D'une manière générale, il est bien évident que pour effectuer une mesure précise, il faut se placer de préférence dans des conditions où le champ dépend beaucoup du paramètre à mesurer.

Pour donner un exemple concret, imaginons que l'on désire mesurer une variation de la distance entre deux objets par une méthode de mesure de temps de vol. On envoie des impulsions lumineuses entre deux points de l'espace et l'on

mesure ainsi la durée du parcours de la lumière. Dans le vide, la vitesse de la lumière étant constante, on peut déduire de tout retard temporel une variation de la distance séparant ces deux objets. Si maintenant on munit ces deux objets de miroirs et que la lumière effectue un certain nombre d'aller-retour avant d'être mesurée, la sensibilité de la mesure en sera augmentée d'autant.

On peut ainsi citer l'exemple des interféromètres à ondes gravitationnelles de type Virgo ou Ligo. Ces appareils d'une sensibilité difficile à concevoir produisent avant tout un signal qui dépend « beaucoup » du paramètre à mesurer, une déformation infime de la courbure de l'espace-temps [Aufmuth 05]. Ceci est accompli par l'utilisation de cavité Fabry-Pérot à l'intérieur des bras de l'interféromètre.

Les possibilités expérimentales pour améliorer la qualité des mesures sont infinies et constituent souvent la première et la plus importante des optimisations. Il est cependant difficile, voire impossible d'établir des limites de sensibilité si l'on s'autorise la possibilité de changer radicalement le dispositif expérimental. Gardant ceci en mémoire, *nous ne nous intéresserons pas dans cette thèse aux possibilités d'accroître la sensibilité d'une mesure en jouant sur la dépendance du champ moyen par rapport aux paramètres à mesurer. Nous prendrons donc toujours le vecteur $\left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0$ comme une donnée constante. Nous ferons aussi toujours l'hypothèse additionnelle que $\left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0$ est connu préalablement à la mesure. Cette connaissance représente un étalonnage de l'expérience.*

2.3.5.2 Énergie

Toutes choses égales par ailleurs, l'information de Fisher est proportionnelle au nombre de photons du champ moyen. Ceci signifie qu'accroître la puissance des faisceaux mesurés, ou augmenter la durée de la mesure si le paramètre n'évolue pas de façon significative pendant le temps de mesure, est un moyen efficace et bien connu d'améliorer la sensibilité des mesures. L'augmentation de la sensibilité évolue cependant en inverse de la racine du nombre de photons, il faut donc augmenter significativement l'énergie collectée pour accroître la sensibilité des mesures.

Il est important de remarquer qu'il n'est pas toujours simple ni même possible d'accroître la puissance des faisceaux lumineux détectés. Ceci peut également perturber la mesure, voire endommager le dispositif expérimental. Ainsi, si l'on décide de réaliser des mesures spectroscopiques sur des cellules vivantes, une trop forte puissance lumineuse risque de détruire les échantillons. Pour les

détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles, l'augmentation de la puissance du laser se traduit, entre autres, par une augmentation de la pression de radiation sur les miroirs et donc du bruit du dispositif [Harry 10]. Il peut aussi être avantageux pour un avion militaire d'émettre le moins d'énergie possible tout en gardant la possibilité de mesurer son environnement de façon active.

Accroître la sensibilité d'une mesure optique peut aussi être réalisé en augmentant la durée de la mesure, et donc en collectant plus de photons. Ceci est cependant limité par l'échelle typique des fluctuations du paramètre à mesurer, qui doit être constant pendant la période de la mesure dans la théorie que nous avons développée. Cette dépendance temporelle du bruit d'un paramètre est typiquement caractérisée par la variance d'Allan [Allan 66].

Dans toute cette thèse, nous allons fixer la valeur du nombre de photons du champ moyen N et la considérer comme une donnée.

2.3.5.3 Bruit du champ électromagnétique

Le dernier paramètre influençant l'information de Fisher est le bruit de celui-ci, caractérisé par la matrice de covariance du champ. Il est clair qu'en réduisant le bruit de certains modes, la sensibilité de la mesure peut être améliorée, nous allons déterminer maintenant dans quelle mesure.

Les premières expériences montrant qu'il est possible de produire des états sous-poissonniens datent du milieu des années 1980 [Slusher 85, Wu 86]. Il est cependant toujours notoirement difficile de comprimer fortement le bruit quantique d'un état. La compression du bruit dépend notamment très fortement des pertes et des fluctuations de phase et en 2010, le record de compression du bruit quantique est ainsi de 11.5 dB (en puissance) [Mehmet 10], correspondant à une réduction de la borne de Cramér-Rao (en écart type) d'un peu moins d'un facteur 4. Les possibilités d'influer sur le bruit du champ électromagnétique sont donc complexes et limitées mais réalisables expérimentalement et peuvent contribuer à accroître la sensibilité de mesures.

Nous allons nous intéresser dans cette sous-section 2.3.5.3 à mettre en forme le bruit de telle sorte que la sensibilité des mesures soit optimisée, mais tout d'abord, nous allons définir des critères de complexité technique qui vont nous servir de référence pour notre optimisation.

Ressources quantiques Tout état gaussien multimode peut être produit expérimentalement par une combinaison de squeezers indépendants et de composants linéaires (lames semi-transparentes...) [Braunstein 05]. Afin de quantifier

les ressources à notre disposition, nous allons donc écrire la matrice Σ^{-1} sous la forme d'un squeezer multimode (une assemblée de squeezer monomodes indépendants), à une transformation symplectique orthogonale Ω près. Les ressources dont nous disposons sont donc entièrement caractérisées par ces squeezer.

$$\Sigma^{-1} = \Omega^{\top} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_M^2 & & 0 \\ & & & \frac{1}{\sigma_1^2} & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{1}{\sigma_M^2} \end{pmatrix} \Omega \quad \text{où } \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_M^2 \geq 1$$

2.3.46

Pour plus de simplicité, et sans perdre de généralité, nous avons ordonné les valeurs propres de Σ^{-1} par ordre décroissant. On rappelle que d'une manière générale, une matrice est symplectique orthogonale si et seulement si elle peut s'exprimer sous la forme

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{U}) & -\Im(\mathbf{U}) \\ \Im(\mathbf{U}) & \Re(\mathbf{U}) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{U} \text{ unitaire}$$

2.3.47

Pour donner un exemple concret des transformations linéaires que l'on peut effectuer, si l'on sépare en deux un état comprimé monomode par l'intermédiaire d'une lame semi-transparente, les deux faisceaux produits seront intriqués entre eux. Ce type de transformation est simple à réaliser expérimentalement par rapport à la production de l'état comprimé lui-même. Nous considérerons donc que *les valeurs propres σ_i^2 (au sens algébrique et non symplectique) caractérisent complètement la difficulté expérimentale pour produire un état. Le but de toute cette section est de chercher à trouver la meilleure matrice Σ^{-1} pour mesurer un paramètre, sous la contrainte que ses valeurs propres sont fixées.*

La matrice Ω caractérise les transformations linéaires que l'on peut effectuer sur l'état, à ressources constantes. C'est donc cette matrice qui englobe la totalité des degrés de libertés dont nous disposons. Cette approche prend en compte les états comprimés multimodes, mais aussi tous les états gaussiens multipartites, intriqués sur $2 \times M$ quadratures. Le problème que l'on se pose consiste donc mathématiquement à optimiser l'information de Fisher en jouant uniquement sur Ω , qui doit être une matrice symplectique orthogonale :

$$I_{\text{Fisher}}^{\max} = \max_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)^{\top} \Omega^{\top} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_M^2 & & 0 \\ & & & \frac{1}{\sigma_1^2} & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{1}{\sigma_M^2} \end{pmatrix} \Omega \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right) \right\}$$

2.3.48

Il est important de noter que cette expression ne représente pas un simple changement de base de l'écriture de l'information de Fisher, cette dernière est d'ailleurs indépendante de la base dans laquelle on l'écrit. Nous cherchons plutôt à caractériser l'influence d'une transformation linéaire, appliquée à une matrice de covariance fixée et dans une base fixée, sur l'information de Fisher.

Borne sur l'information de Fisher Il est possible d'établir simplement une borne sur l'information de Fisher. Pour ce faire, rappelons tout d'abord le résultat suivant : *pour une matrice S symétrique réelle, définie positive, son rayon spectral $\rho(S)$ est égal à sa norme subordonnée au carré*, le rayon spectral étant la valeur absolue de sa plus grande valeur propre et la norme subordonnée étant définie par $\|S\| = \max_{X \neq 0} \left\{ \frac{\sqrt{X^{\top} S X}}{\sqrt{X^{\top} X}} \right\}$

$$\rho(S) = \|S\|^2 = \max_{X \neq 0} \left\{ \frac{X^{\top} S X}{X^{\top} X} \right\}$$

2.3.49

Cette borne est naturellement atteinte quand X est un vecteur propre du sous-espace associé à la plus grande valeur propre.

Appliquant ce résultat à l'information de Fisher, il est possible d'obtenir une maximisation de celle-ci, ne dépendant que du rayon spectral Σ^{-1} . Comme on a ordonné les valeurs propres, le rayon spectral vaut

$$\rho(\Sigma^{-1}) = \sigma_1^2$$

2.3.50

On obtient donc une inégalité sur l'information de Fisher

$$I_{\text{Fisher}} = \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)^{\top} \Sigma^{-1} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)$$

2.3.51

$$I_{\text{Fisher}} \leq \sigma_1^2 \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)^\top \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)$$

2.3.52

Maximisation de l'information de Fisher Nous avons obtenu une borne supérieure de l'information de Fisher, montrons maintenant qu'il est toujours possible de l'atteindre. Le vecteur $\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0$ étant fixé, cette valeur de l'information de Fisher sera atteinte si $\Omega \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right)$ est un vecteur propre de la matrice diagonale, appartenant au sous-espace de valeur propre σ_1^2 . Ceci est vérifié si, par exemple

$$\Omega \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right) = \begin{pmatrix} \left\| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0 \right\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3.53

La matrice Ω est orthogonale, mais elle est aussi symplectique. Toutes les transformations conservant la norme ne sont pas symplectiques, on peut cependant montrer qu'il existe toujours au moins une matrice Ω vérifiant cette relation.

En résumé, nous avons montré le résultat important que même si l'on dispose de plusieurs squeezers, *c'est le facteur de compression du squeezer le plus fort qui limite la borne de Cramér-Rao. La situation optimale correspond à la situation où la quadrature $\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \Big|_0$ est comprimée de ce facteur. Un seul squeezer est donc suffisant et optimal.* Nous reviendrons sur ce résultat important dans la section suivante. Ce résultat sera considérablement renforcé par la démonstration du chapitre suivant que dans ce cas précis, il est possible d'envisager une mesure qui atteigne cette borne de Cramér-Rao. Ce résultat a donc un réel intérêt expérimental.

2.3.5.4 Résumé

Nous avons étudié dans cette section différentes solutions envisageables pour optimiser la borne de Cramér-Rao pour l'estimation d'un paramètre du champ électromagnétique.

- Jouer sur la dépendance du champ par rapport au paramètre à mesurer est la méthode la plus radicale et bien souvent la plus importante pour

améliorer une mesure. Ce n'est cependant pas le propos de cette thèse que de s'intéresser à des optimisations de dispositifs expérimentaux, vastes et variées.

- Augmenter l'énergie collectée lors de la mesure est aussi une autre façon, parfois simple, d'accroître la sensibilité. La sensibilité, si elle atteint la borne de Cramér-Rao, dépend selon l'inverse de la racine carrée du nombre de photons. Il faut donc envisager d'accroître beaucoup les énergies mesurées pour augmenter significativement la sensibilité des mesures, ce qui n'est pas toujours souhaitable ou possible.
- Enfin, nous avons étudié la possibilité d'optimiser le bruit du champ lui-même, opération difficile expérimentalement. Nous avons montré qu'un squeezer monomode comprimant la quadrature $\left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0$ était suffisant et optimal. Nous allons expliciter ce résultat dans la section suivante.

Il est nécessaire de rappeler que les différentes optimisations que nous avons développées portent sur la borne de Cramér-Rao elle-même, c'est-à-dire sur la sensibilité ultime d'une mesure, indépendamment de la méthode employée. Ces bornes ne sont pas nécessairement atteignables.

2.3.6 Interprétation

2.3.6.1 Information de Fisher écrite dans une base adaptée

Dans la section précédente, nous avons exploré les différentes transformations unitaires qui peuvent agir sur un squeezer multimode, de façon à maximiser l'information de Fisher et donc la sensibilité éventuelle d'une mesure. Nous allons revenir maintenant au cas général, où le squeezing de la matrice de covariance n'est pas nécessairement optimal. *Nous ne cherchons donc plus dans cette section à optimiser la borne de Cramér-Rao en modifiant les conditions expérimentales mais plutôt à expliciter celle-ci dans des conditions données.* Nous pouvons choisir la base de détection $\{v_n\}_{1 \leq n \leq M}$, qui jusqu'à présent était quelconque, sans affecter la valeur de l'information de Fisher qui, elle, est nécessairement indépendante de la base de mesure. Fort du résultat précédent, fixons le premier

2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre

mode de cette base de telle sorte qu'il corresponde au mode $\left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0$, normalisé :

$$v_1 \equiv \frac{\left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0}{\left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \right\|} \quad 2.3.54$$

Nous pouvons alors compléter la base $\{v_n\}_{1 \leq n \leq M}$ de manière quelconque. Si l'on appelle toujours Σ la matrice de covariance dans cette base, l'expression de Fisher prend une forme très simple, ne faisant plus intervenir qu'un seul coefficient de la matrice de covariance inverse :

$$I_{\text{Fisher}} = \left(\left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \Sigma^{-1} \left(\left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0 \right) \quad 2.3.55$$

$$= \begin{pmatrix} \left\| \left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0 \right\| & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{(1,1)}^{-1} & \cdots & \Sigma_{(1,2M)}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{(2M,1)}^{-1} & \cdots & \Sigma_{(2M,2M)}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\| \left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0 \right\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.3.56$$

$$I_{\text{Fisher}} = \Sigma_{(1,1)}^{-1} \left\| \left. \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right|_0 \right\|^2 \quad 2.3.57$$

Dans cette base bien choisie, l'information ne dépend donc que d'un seul coefficient de l'inverse de la matrice de covariance Σ^{-1} . Elle ne dépend bien sûr pas, dans le cas général, d'un seul coefficient de la matrice de covariance Σ . On rappelle que ce résultat est général, il ne dépend pas de propriétés particulières de cette matrice de covariance ou d'une quelconque situation expérimentale privilégiée que l'on aurait choisie. Il est possible de réécrire l'information de Fisher en fonction du profil du champ sous la forme simple :

$$I_{\text{Fisher}} = 4N \Sigma_{(1,1)}^{-1} \int \left| \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0(\vec{r}, t) \right|^2 d\vec{r} dt \quad 2.3.58$$

2.3.6.2 Mode de bruit et états comprimés

Le mode ν_1 est appelé le *mode de bruit*, en effet, il vient de l'équation 2.3.57 que ce sont ses propriétés de bruit qui vont déterminer la borne de Cramér-Rao. Nous avons déjà montré que l'information de Fisher était optimale, à ressources données, quand ce mode de bruit était comprimé par le squeezer le plus fort dont nous disposions.

Dans le cas où la quadrature Y_1^+ du mode de bruit est comprimée du paramètre σ_1^2 , nous avons une matrice de covariance de la forme générale

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & * & & * \end{pmatrix} \quad 2.3.59$$

Les termes nuls de la première ligne et de la première colonne de la matrice représentent l'absence d'intrication entre la quadrature Y_1^+ et les autres. D'autre part, comme nous n'avons considéré que des états purs, son déterminant vaut 1 et son inverse est donc de la forme

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & * & & * \end{pmatrix} \quad 2.3.60$$

L'information de Fisher s'écrit donc

$$I_{\text{Fisher}} = 4\sigma_1^2 N \int \left| \frac{\partial u_1}{\partial p} \Big|_0 (\vec{r}, t) \right|^2 d\vec{r} dt \quad 2.3.61$$

tandis que la borne de Cramér-Rao vaut dans ce cas

$$p_{\min} = \frac{1}{2\sigma_1 \sqrt{N} \sqrt{\int \left| \frac{\partial u_1}{\partial p} \Big|_0 (\vec{r}, t) \right|^2 d\vec{r} dt}} \quad 2.3.62$$

2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre

Ceci signifie que le mode ν_1 est découplé de tous les autres et que l'information de Fisher est alors indépendante des propriétés d'intrication de tous ces modes $\nu_{n \geq 2}$. Une mesure monomode portant sur une quadrature du mode ν_1 sera alors suffisante pour extraire toute l'information du champ électromagnétique portant sur le paramètre p à mesurer. Ceci n'est vrai que s'il existe un estimateur efficace au sens de Cramér-Rao, question à laquelle nous nous intéresserons dans le chapitre suivant.

2.3.6.3 Résumé

- Nous avons montré dans cette section que dans une base bien choisie, la borne de Cramér-Rao ne dépend que d'un seul coefficient de la matrice inverse de covariance.
- Nous avons démontré le résultat important qu'à ressources quantiques données, il était *optimal de comprimer les fluctuations d'un unique mode, appelé mode de bruit*, que nous avons explicité. En supposant qu'il soit possible d'atteindre la limite de Cramér-Rao dans ce cas, ce que nous montrerons dans la chapitre suivant, toute autre utilisation des ressources quantiques aboutit soit à une perte de sensibilité, soit à une complexité accrue sans gain de sensibilité.
- *L'intrication n'est pas intéressante expérimentalement pour effectuer des mesures précises.*
- Enfin, nous avons retrouvé simplement qu'*on ne pouvait pas additionner les ressources quantiques provenant de plusieurs squeezers dans des modes différents.*

2.3.7 Estimation de paramètres multiples

Généralisons maintenant les résultats précédents à l'estimation de paramètres multiples du champ électromagnétique, que nous supposons toujours gaussien. Écrivons donc que la fonction de Wigner du champ dépend maintenant de Q paramètres $\{p_1, \dots, p_Q\}$

$$W'_{p_1, \dots, p_Q}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^M} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p_1, \dots, p_Q))^T \Sigma^{-1}(p_1, \dots, p_Q)(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p_1, \dots, p_Q))}$$

2.3.63

2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre

La borne de Cramér-Rao peut alors être étendue à l'étude de paramètres multiples, en faisant intervenir une matrice d'information de Fisher. Cette matrice a pour terme général

$$(\mathbf{I}_{\text{Fisher}})_{i,j} = \int \left(\frac{\partial \log(W'_{p_1, \dots, p_Q}(\mathbf{Y}))}{\partial p_i} \bigg|_0 \right) \left(\frac{\partial \log(W'_{p_1, \dots, p_Q}(\mathbf{Y}))}{\partial p_j} \bigg|_0 \right) W'_{p_1, \dots, p_Q}(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}$$

2.3.64

2.3.7.1 Cas à deux paramètres

Par souci de simplicité, on ne traite pour l'instant que l'étude de l'estimation simultanée de deux paramètres p et q . On étendra ensuite les résultats au cas à Q paramètres. On peut montrer facilement que la matrice d'information de Fisher peut s'écrire

$$\mathbf{I}_{\text{Fisher}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p}(0,0) \right)^\top \Sigma^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p}(0,0) & \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p}(0,0) \right)^\top \Sigma^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial q}(0,0) \\ \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p}(0,0) \right)^\top \Sigma^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial q}(0,0) & \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial q}(0,0) \right)^\top \Sigma^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial q}(0,0) \end{pmatrix}$$

2.3.65

Intéressons-nous au cas particulier où les deux modes de bruits correspondant aux paramètres p et q sont orthogonaux, c'est à dire quand $\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p}(0,0) \right)^\top \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial q}(0,0) \right) = 0$. Sous cette condition, il est possible de construire une base en fixant les deux premiers modes :

$$\begin{cases} v_1 \equiv \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p}(0,0)}{\left\| \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p}(0,0) \right\|} \\ v_2 \equiv \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial q}(0,0)}{\left\| \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial q}(0,0) \right\|} \end{cases}$$

2.3.66

Considérons la situation où ces modes sont tous les deux comprimés, c'est-à-dire que les quadratures Y_1^+ et Y_2^+ sont comprimées respectivement d'un facteur

2 Limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un paramètre

$\frac{1}{\sigma_1^2}$ et $\frac{1}{\sigma_2^2}$. Dans ces conditions, la matrice d'information de Fisher est diagonale et égale à

$$\mathbf{I}_{\text{Fisher}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \left\| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p}(0, 0) \right\|^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \left\| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial q}(0, 0) \right\|^2 \end{pmatrix} \quad 2.3.67$$

Ceci prouve le résultat intuitif que si les modes de bruits des deux paramètres ont leurs champs moyens orthogonaux et ne sont pas intriqués, les paramètres p et q sont bien orthogonaux au sens de l'information de Fisher. Cela signifie que la mesure de l'un ne donne pas d'information sur l'autre. Sous cette condition, il apparaît clairement que s'il existe un estimateur efficace au sens de Cramér-Rao, il est possible d'extraire simultanément toute l'information des paramètres p et q et qu'il est possible, à ressources quantiques limitées, d'obtenir une sensibilité maximale en utilisant deux squeezers monomodes pour comprimer les deux modes de bruits.

Cas à Q paramètres On peut généraliser les résultats précédents à l'étude de Q paramètres. Si l'on fait l'hypothèse que les Q paramètres $\{p_1, \dots, p_Q\}$ ont leurs modes de bruits associés orthogonaux, c'est à dire que

$$\forall i \neq j \quad \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p_i}(p_1 = 0, \dots, p_Q = 0) \right) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p_j}(p_1 = 0, \dots, p_Q = 0) \right) = 0 \quad 2.3.68$$

il devient possible de construire une base dont les Q premiers modes sont les modes de bruits normalisés, puis de la compléter de façon quelconque.

$$\forall i \in [1, Q], \quad v_i \equiv \frac{\frac{\partial \bar{Y}}{\partial p_i}(p_1 = 0, \dots, p_Q = 0)}{\left\| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p_i}(p_1 = 0, \dots, p_Q = 0) \right\|} \quad 2.3.69$$

Dans cette base, si l'on fait de nouveau l'hypothèse que les quadratures Y_i^+ sont comprimées d'un facteur $\frac{1}{\sigma_i^2}$ (et donc non intriquées), la matrice d'information de Fisher est bien diagonale.

$$\mathbf{I}_{\text{Fisher}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \left\| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p}(0, \dots, 0) \right\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_Q^2 \left\| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p_Q}(0, \dots, 0) \right\|^2 \end{pmatrix}$$

2.3.70

Sous ces hypothèses, s'il existe un estimateur efficace au sens de Cramér-Rao, il sera possible d'extraire simultanément toute l'information de chacun des paramètres.

2.3.8 Conclusion du chapitre

- Nous avons introduit une borne de Cramér-Rao sur la sensibilité d'une mesure non biaisée d'un paramètre porté par le champ électromagnétique, indépendamment de la méthode de mesure. Cette borne utilise les résultats sur la borne de Cramér-Rao pour l'estimation d'un paramètre d'une distribution classique mais sa nature est différente en raison des propriétés de la mécanique quantique, qui interdisent de mesurer deux opérateurs qui commutent.
- Il est important de rappeler que cette borne n'est pas nécessairement atteignable. Nous avons cependant discuté de différentes possibilités pour un expérimentateur d'optimiser cette borne, qui peuvent se traduire par une amélioration de la sensibilité de mesures éventuelles atteignant cette borne. Nous avons notamment montré le résultat important qu'il était optimal de compresser le bruit d'un unique mode, appelé « mode de bruit », défini comme étant la dérivée partielle du mode de champ moyen par rapport au paramètre à mesurer.
- Ce concept de mode de bruit nous a aussi permis d'explicitier la limite de Cramér-Rao sous une expression simple ne faisant intervenir que le profil du mode de bruit et un unique coefficient de la matrice de covariance inverse, écrite dans une base adaptée.
- Ces résultats ont été généralisés à la mesure simultanée de plusieurs paramètres du champ. Nous avons aussi montré le résultat intuitif que si

deux paramètres ont leurs modes de bruit orthogonaux et ne sont pas intriqués, ils sont indépendants. Il est possible de comprimer les modes de bruits des différents paramètres et d'abaisser les limites des mesures des différents paramètres, indépendamment les uns des autres.

L'existence d'estimateurs efficaces, atteignant ces bornes, n'a pas encore été abordée, c'est précisément l'objet du chapitre suivant.

3 Détection homodyne et mesures optimales

Sommaire

3.1	Mesure d'un petit paramètre	74
3.2	Détection homodyne	76
3.2.1	Expression approchée de l'opérateur $\hat{D}$	77
3.2.2	Valeurs moyennes et fluctuations	78
3.3	Mesure si le mode de bruit n'est pas intriqué	79
3.4	Mesure si le mode de bruit est intriqué	80
3.4.1	Calcul du maximum de vraisemblance	81
3.4.2	Variance de $\tilde{p}_{MV}$	82
3.4.3	Estimateur du maximum de vraisemblance sur M quadratures	83
3.4.4	Réalisation expérimentale	85
3.4.5	Interprétation géométrique	85
3.5	Conclusion	86

Nous avons déterminé dans le chapitre précédent des limites de sensibilité pour l'estimation de paramètres portés par le champ électromagnétique. Cette limite de Cramér-Rao n'est pas a priori atteignable, un estimateur efficace d'un paramètre donné n'existe pas nécessairement. Après avoir présenté la détection homodyne, nous allons montrer que sous certaines conditions, une méthode de détection faisant intervenir une ou plusieurs de ces détections homodynes peut atteindre cette limite.

3.1 Mesure d'un petit paramètre

Suivant le formalisme qui a été développé dans les sections précédentes, considérons que le champ électromagnétique moyen est porté par un mode

$u_1(p)$. Conformément aux hypothèses déjà effectuées, le nombre de photons du champ moyen est pris constant, égal à N . Pour p petit, il est possible de développer le mode $u_1(p)$ au premier ordre :

$$u_1(p) \simeq u_1(0) + p \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \quad 3.1.1$$

Le champ moyen est porté entièrement par $u_1(p)$, cela signifie pour p petit, le champ est nul en dehors de l'espace modal engendré par $\left\{ u_1(0), \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \right\}$, qui ne dépend pas de p . Ces vecteurs ne forment pas a priori une base orthonormale, ni même orthogonale. Construisons une base orthonormale (de Schmidt) de cet espace. On appelle v_1 le mode de bruit normalisé :

$$v_1 \equiv \frac{\left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0}{\left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \right\|} \quad 3.1.2$$

On construit v_2 , un vecteur normé du sous-espace engendré par $\{u_1(0), v_1\}$, orthogonal à v_1 .

$$v_2 = \frac{u_1(0) - (v_1 | u_1(0)) v_1}{\|u_1(0) - (v_1 | u_1(0)) v_1\|} \quad \text{avec } (v_1 | u_1(0)) = \int v_1^*(\vec{r}, t) u_1(\vec{r}, t, p=0) d\vec{r} dt \quad 3.1.3$$

Nous avons donc construit une base orthonormale $\{v_1, v_2\}$ qui contient toute l'information sur le champ moyen, pour un déplacement p petit. On complète maintenant cette base, sans contrainte particulière, pour former une base orthonormale $\{v_n\}_{1 \leq n \leq M}$ du champ électromagnétique. Dans cette base, il est possible de réécrire $u_1(p)$ sous la forme

$$u_1(p) = \left((v_1 | u_1(0)) + p \left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \right\| \right) v_1 + \|u_1(0) - (v_1 | u_1(0)) v_1\| v_2 \quad 3.1.4$$

Montrons maintenant que $(v_1 | u_1(0))$ est imaginaire pur. Le mode $u_1(p)$ est de norme constante donc

$$\left. \frac{\partial \|u_1\|^2}{\partial p} \right|_0 = 0 \quad 3.1.5$$

Ceci implique que

$$\left. \frac{\partial u_1^*}{\partial p} \right|_0 u_1(0) + \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 u_1^*(0) = 0 \quad 3.1.6$$

On a donc bien

$$\left. \frac{\partial u_1^*}{\partial p} \right|_0 u_1(0) \in i\mathbb{R} \quad 3.1.7$$

On pose donc

$$(v_1 | u_1(0)) = i\lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \quad 3.1.8$$

On peut aussi montrer que $\|u_1(0) - i\lambda v_1\| = \sqrt{1 - \lambda^2}$ et réécrire ainsi $u_1(p)$ sous la forme générale :

$$u_1(p) = \left(i\lambda + p \left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \right\| \right) v_1 + \sqrt{1 - \lambda^2} v_2 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad 3.1.9$$

Pour la mesure d'un petit paramètre p , l'information est entièrement contenue dans le mode v_1 . D'autre part, $i\lambda$ est imaginaire pur et $p \left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \right\|$ réel, ceci signifie qu'en mesurant la bonne quadrature du champ, dans le mode v_1 , on aura une information sur p indépendante de λ . Cette mesure de l'amplitude d'une quadrature peut être effectuée au moyen d'une détection homodyne, que nous allons maintenant introduire.

3.2 Détection homodyne

Une détection homodyne est un outil de mesure puissant permettant de mesurer l'amplitude d'une quadrature du champ électrique dans un mode donné. Le principe est représenté sur la figure 3.2.1. Au moyen d'une lame séparatrice semi-réfléchissante, on effectue le mélange entre un champ « signal », que l'on veut mesurer, et un champ dit « oscillateur local », d'intensité grande par rapport au signal. Le mode de cet oscillateur local est bien défini et ajustable par l'expérimentateur. Les deux faisceaux mélangés produits sont détectés en utilisant deux photodiodes. On effectue ensuite la différence électrique des deux photocourants produits par les deux photodiodes. En fonction de la phase relative entre le signal et l'oscillateur local, cette différence des intensités lumineuses est proportionnelle à une quadrature du champ signal, dans le mode du champ moyen de l'oscillateur local. Nous allons montrer ce résultat dans le cas qui nous intéresse. En utilisant les relations d'entrée et de sortie des opérateurs au passage d'une lame semi-réfléchissante, on montre que l'opérateur « différence des photocourants » s'écrit, sur une base de modes quelconques, sous la forme

$$\hat{D} = \sum_n \hat{s}_n^\dagger \hat{o}_n + \hat{o}_n^\dagger \hat{s}_n \quad 3.2.1$$

où $\hat{s}_n$ et $\hat{o}_n$ représentent les opérateurs annihilations des champs signal et oscillateur local, dans les modes ν_n . L'opérateur différence des courants est normalisé en nombre de photons.

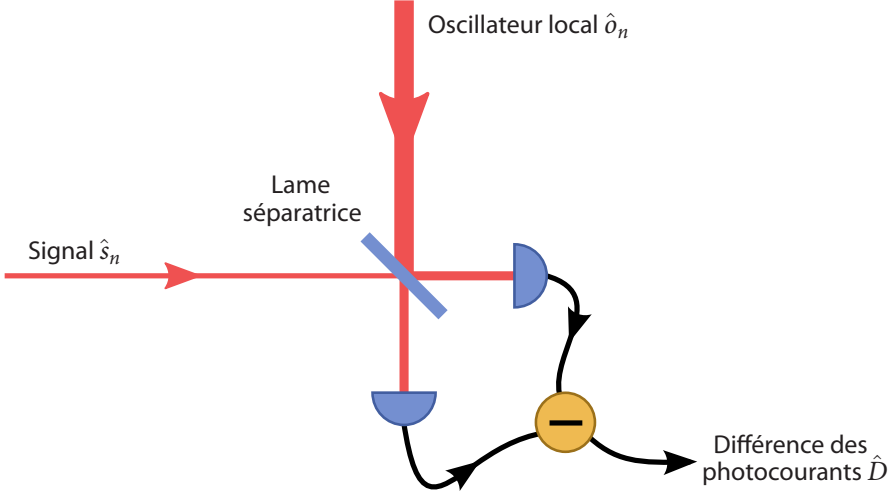


Fig. 3.2.1 : Schéma d'une détection homodyne

3.2.1 Expression approchée de l'opérateur $\hat{D}$

On considère qu'il y a N photons en moyenne dans le champ signal et $N_0 \gg N$ photons dans le champ oscillateur local. Il est possible de réécrire les opérateurs annihilations en séparant leurs valeurs moyennes de leurs opérateurs de fluctuations, écrites dans la base $\{\nu_n\}_{1 \leq n \leq M}$ définie en 3.1

$$\begin{cases} \hat{s}_1 = \langle \hat{s}_1 \rangle + \delta \hat{s}_1 = \sqrt{N} \left(i\lambda + p \left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0 \right) + \delta \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 = \langle \hat{s}_2 \rangle + \delta \hat{s}_2 = \sqrt{N} \sqrt{1 - \lambda^2} + \delta \hat{s}_2 \\ \hat{s}_{n>2} = \langle \hat{s}_n \rangle + \delta \hat{s}_n = \delta \hat{s}_n \end{cases} \quad 3.2.2$$

On rappelle que cette base avait été construite de telle sorte que le mode de champ moyen appartienne au sous-espace engendré par $\{\nu_1, \nu_2\}$. En appelant θ la phase entre l'oscillateur local et le signal, on peut écrire les opérateurs annihilations des modes de l'oscillateur local, dont le champ moyen est porté par

le mode ν_1

$$\begin{cases} \hat{o}_1 = \langle \hat{o}_1 \rangle + \delta \hat{o}_1 = \sqrt{N_0} e^{i\theta} + \delta \hat{o}_1 \\ \hat{o}_{n>1} = \langle \hat{o}_n \rangle + \delta \hat{o}_n = \delta \hat{o}_n \end{cases} \quad 3.2.3$$

On peut donc écrire les différents termes de l'opérateur $\hat{D}$, mode par mode

$$\begin{cases} \hat{s}_1^\dagger \hat{o}_1 + \hat{o}_1^\dagger \hat{s}_1 = \hat{s}_1^\dagger \langle \hat{o}_1 \rangle + \hat{s}_1^\dagger \delta \hat{o}_1 + \langle \hat{o}_1 \rangle^* \hat{s}_1 + \delta \hat{o}_1^\dagger \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2^\dagger \hat{o}_2 + \hat{o}_2^\dagger \hat{s}_2 = \hat{s}_2^\dagger \delta \hat{o}_2 + \delta \hat{o}_2^\dagger \hat{s}_2 \\ \hat{s}_n^\dagger \hat{o}_n + \hat{o}_n^\dagger \hat{s}_n = \delta \hat{s}_n^\dagger \delta \hat{o}_n + \delta \hat{o}_n^\dagger \delta \hat{s}_n \end{cases} \quad 3.2.4$$

En faisant l'hypothèse que l'intensité de l'oscillateur local est grande devant celle du signal, et que les fluctuations des champs sur tous les modes sont comparables et faibles par rapport au champ moyen du mode u_1 , on peut réécrire l'opérateur sous la forme

$$\hat{D} \simeq (\langle \hat{o}_1 \rangle^* \hat{s}_1 + \langle \hat{o}_1 \rangle \hat{s}_1^\dagger) \quad 3.2.5$$

$$\hat{D} \simeq \sqrt{N_0} \left((e^{-i\theta}) \hat{s}_1 + (e^{i\theta}) \hat{s}_1^\dagger \right) \quad 3.2.6$$

On retrouve bien le résultat que la différence des photocourants produit un signal proportionnel à la valeur d'une quadrature du champ signal dans le mode de champ moyen de l'oscillateur local. La détection homodyne « projette » sur le mode de l'oscillateur local. A l'intérieur de ce mode, la quadrature effectivement mesurée dépend de θ .

3.2.2 Valeurs moyennes et fluctuations

La valeur moyenne quantique de l'opérateur $\hat{D}$ se calcule facilement :

$$\langle \hat{D} \rangle = 2\sqrt{N_0 N} \left(\lambda \sin \theta + p \left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0 \cos \theta \right) \quad 3.2.7$$

Si l'on veut mesurer p , il faut fixer $\theta = 0$. Ceci assure que la différence des photocourants produit un signal proportionnel au paramètre à mesurer. Pour $\theta = 0$, on fixe donc la quadrature que l'on mesure, et on peut réécrire l'opérateur $\hat{D}$ en fonction de la quadrature $\hat{X}_{s_1}^+ = \hat{s}_1^\dagger + \hat{s}_1$.

$$\hat{D} \simeq \sqrt{N_0} \hat{X}_{s_1}^+ \quad 3.2.8$$

La valeur moyenne du champ s'écrit donc

$$\langle \hat{D} \rangle \simeq 2\sqrt{N_0 N} \left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0 p \quad 3.2.9$$

et les fluctuations du champ s'écrivent donc

$$\delta_{\hat{D}} \simeq \sqrt{N_0} \sqrt{\langle (\delta \hat{X}_{s_1}^+)^2 \rangle} \quad 3.2.10$$

3.3 Mesure si le mode de bruit n'est pas intriqué

Nous avons réalisé une détection homodyne dont le mode de champ moyen de l'oscillateur local (le « mode de détection ») correspond au mode de bruit du paramètre à détecter. Dans ce cas, et sous réserve que la phase relative entre l'oscillateur local et le signal soit bien ajustée, la différence des photocourants produit un signal électrique proportionnel à la valeur du paramètre à détecter. Il est donc naturel maintenant d'introduire l'estimateur $\tilde{p}$ du paramètre p , défini par

$$\tilde{p} \equiv \frac{\langle \hat{D} \rangle}{2\sqrt{N_0 N} \left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0} \quad 3.3.1$$

Cet estimateur est non-biaisé, il a pour écart type

$$\delta_{\tilde{p}} = \frac{\sqrt{\langle (\delta \hat{X}_{s_1}^+)^2 \rangle}}{2\sqrt{N} \left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0} \quad 3.3.2$$

Cette relation est vraie quel que soit l'état de compression ou d'intrication du mode de bruit. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il était généralement optimal que le mode de bruit soit comprimé pour obtenir la mesure

la plus précise possible. Considérons donc pour l'instant le cas où la quadrature $\delta\hat{X}_{s_1}^+$ est comprimée d'un facteur $\frac{1}{\sigma^2}$. L'absence d'intrication implique, en reprenant les notations du chapitre précédent, que $\Sigma_{(1,1)}^{-1} = 1/\Sigma_{(1,1)} = \sigma^2$. Nous pouvons faire apparaître l'information de Fisher 2.3.58 dans l'expression de l'écart type de cet estimateur :

$$\delta_{\tilde{p}} = \frac{1}{2\sqrt{N}\sigma \left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \Big|_0 \right\|} = \frac{1}{\sqrt{I_{\text{Fisher}}}}$$

3.3.3

L'estimateur $\tilde{p}$ atteint donc la limite de Cramér-Rao si le mode de bruit n'est pas intriqué à d'autres modes.

En conclusion, nous avons explicité un estimateur non-biaisé, physiquement réalisable, qui atteint la limite de Cramér-Rao dans le cas où le mode de bruit est cohérent ou comprimé, mais non intriqué à d'autres modes. Cet estimateur est donc *efficace* au sens de Cramér-Rao. Ceci signifie qu'il n'est pas possible d'imaginer un meilleur protocole expérimental d'estimation du paramètre p , conduisant à une incertitude plus faible sur la mesure. *Pour la mesure d'un paramètre dont le mode de bruit est comprimé ou cohérent, la détection homodyne est une méthode optimale.* Il peut bien sûr exister d'autres méthodes de détection optimales.

3.4 Mesure si le mode de bruit est intriqué

Nous avons déjà déterminé des conditions sur la matrice de covariance pour que les mesures soient optimales. Ceci suppose que l'expérimentateur a la possibilité de contrôler dans une certaine mesure l'état $|\psi(p)\rangle$ utilisé pour la mesure. Nous allons maintenant nous intéresser à la situation différente où $|\psi(p)\rangle$ est imposé, et essayer d'extraire le maximum d'information de l'état. Dans le cas où le mode de bruit est intriqué à d'autres, il est nécessaire de réaliser des mesures portant sur plusieurs modes du champ pour extraire le maximum d'information.

Nous allons montrer dans cette section que sous certaines conditions, il est possible d'imaginer une procédure impliquant mathématiquement l'estimateur du maximum de vraisemblance et physiquement un ensemble de détections homodynes portant sur plusieurs modes du champ.

3.4.1 Calcul du maximum de vraisemblance

Par définition, et comme son nom l'indique, l'estimateur du maximum de vraisemblance $\tilde{p}_{\text{MV}}(\mathbf{Y})$ est l'estimateur qui associe à une mesure $\mathbf{Y}$ donnée le paramètre p telle que la vraisemblance $L_p(\mathbf{Y})$ soit maximale.

$$\tilde{p}_{\text{MV}}(\mathbf{Y}) = p \quad \text{tel que} \quad L_p(\mathbf{Y}) = \max_q \{L_q(\mathbf{Y})\}$$

Déterminons tout d'abord l'expression mathématique de cet estimateur. En négligeant la dépendance en p de la matrice de covariance, la dérivée de la log-vraisemblance peut s'écrire

$$\frac{\partial l}{\partial p}(\mathbf{Y}) = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}(p)}{\partial p} \right)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(p)) \quad 3.4.1$$

On considère maintenant que p est suffisamment petit, on a donc $\bar{\mathbf{Y}}(p) \simeq \bar{\mathbf{Y}}(0) + p \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0$ et $\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}(p)}{\partial p} \simeq \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0$, ce qui permet de réécrire la dérivée de la log-vraisemblance sous la forme

$$\frac{\partial l}{\partial p}(\mathbf{Y}) = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0^\top \Sigma^{-1} \left[\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0) - p \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right] \quad 3.4.2$$

Par définition, l'estimateur du maximum de vraisemblance $\tilde{p}_{\text{MV}}$ vérifie nécessairement

$$\left. \frac{\partial l}{\partial p} \right|_{\tilde{p}_{\text{MV}}} = 0 \quad 3.4.3$$

ce qui conduit à la relation

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0^\top \Sigma^{-1} \left[(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) - \tilde{p}_{\text{MV}} \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right] = 0 \quad 3.4.4$$

qui nous permet d'exprimer l'estimateur du maximum de vraisemblance sous la forme

$$\tilde{p}_{\text{MV}}(\mathbf{Y}) = \frac{\left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0))}{\left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \Sigma^{-1} \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)} \quad 3.4.5$$

On remarque que la matrice symétrique réelle positive Σ^{-1} permet de définir un produit scalaire $(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})_{\Sigma^{-1}} \equiv \mathbf{A}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{B}$ et la norme associée $\|\mathbf{A}\|_{\Sigma^{-1}}^2 = \mathbf{A}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{A}$.

$$\tilde{p}_{\text{MV}}(\mathbf{Y}) = \frac{\left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \bullet \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0) \right)_{\Sigma^{-1}}}{\left\| \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right\|_{\Sigma^{-1}}^2} \quad 3.4.6$$

L'espérance de $\mathbf{Y}$ vaut $\bar{\mathbf{Y}}(p) \simeq \bar{\mathbf{Y}}(0) + p \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0$. Au premier ordre en p , on constate que l'espérance de $\tilde{p}_{\text{MV}}$ vaut bien p , $\tilde{p}$ est donc bien un *estimateur non biaisé* de p .

3.4.2 Variance de $\tilde{p}_{\text{MV}}$

La variance de $\tilde{p}_{\text{MV}}$ a pour expression

$$\sigma_{\tilde{p}_{\text{MV}}}^2 = E(\tilde{p}_{\text{MV}}^2) - E(\tilde{p}_{\text{MV}})^2 \quad 3.4.7$$

$$= E(\tilde{p}_{\text{MV}}^2) - p^2 \quad 3.4.8$$

$$\simeq E(\tilde{p}_{\text{MV}}^2) \quad \text{au premier ordre en } p \quad 3.4.9$$

$$\tilde{p}_{\text{MV}}^2 = \frac{\left[\left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) \right]^\top \left[\left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) \right]}{\left\| \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right\|_{\Sigma^{-1}}^4} \quad 3.4.10$$

$$= \frac{\left(\Sigma^{-1} \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0))^\top \left(\Sigma^{-1} \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)}{\left\| \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right\|_{\Sigma^{-1}}^4} \quad 3.4.11$$

La variance fait donc intervenir une intégrale portant sur les 2 quadratures de chacun des M modes

$$E(\tilde{p}_{\text{MV}}^2) = \int \tilde{p}_{\text{MV}}^2(\mathbf{Y}) w_p(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \quad 3.4.12$$

$$= \frac{\left(\Sigma^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \Big|_0 \right)^\top \left(\int \mathbf{Y} \mathbf{Y}^\top w_p'(\mathbf{Y} + \bar{\mathbf{Y}}(0)) d\mathbf{Y} \right) \left(\Sigma^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \Big|_0 \right)}{\left\| \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \Big|_0 \right\|_{\Sigma^{-1}}^4} \quad 3.4.13$$

La matrice $\mathbf{Y} \mathbf{Y}^\top$ ayant pour forme

$$\mathbf{Y} \mathbf{Y}^\top = \begin{pmatrix} Y_1^2 & Y_2 Y_1 & \cdots & Y_{2M} Y_1 \\ Y_1 Y_2 & Y_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ Y_1 Y_{2M} & & & Y_{2M}^2 \end{pmatrix} \quad 3.4.14$$

Par définition, le terme $\int \mathbf{Y} \mathbf{Y}^\top w_p'(\mathbf{Y} + \bar{\mathbf{Y}}(0)) d\mathbf{Y}$ est égal à la matrice de covariance Σ . On obtient donc l'expression de la variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance

$$\sigma_{\tilde{p}_{\text{MV}}}^2 = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \Big|_0 \right\|_{\Sigma^{-1}}^2} \quad 3.4.15$$

qui correspond exactement à l'inverse de l'information de Fisher. Ceci prouve bien que l'estimateur du maximum de vraisemblance sature la borne de Cramér-Rao. L'inconvénient de cet estimateur est qu'il fait intervenir des mesures sur $2 \times M$ quadratures, il n'est donc pas toujours possible de proposer un dispositif physique permettant de réaliser cette mesure.

3.4.3 Estimateur du maximum de vraisemblance sur M quadratures

Dans certains cas, il est possible de trouver une base dans laquelle l'estimateur du maximum de vraisemblance ne fait intervenir qu'une quadrature par mode, sur $Q \leq M$ modes, par exemple les quadratures Y_i^+ pour $i \in [1, Q]$. Pour que ceci soit atteint, il faut que dans cette base, seules les quadratures $Y_{1 \leq i \leq Q}^+$ soient

porteuses d'une information sur p , c'est à dire que d'une part

$$\begin{cases} \forall i \notin [1, Q], & \left. \frac{\partial Y_i^+}{\partial p} \right|_0 = 0 \\ \forall i \in [1, M], & \left. \frac{\partial Y_i^-}{\partial p} \right|_0 = 0 \end{cases} \quad 3.4.16$$

et d'autre part que ces quadratures $Y_{1 \leq i \leq Q}^+$ ne soient pas intriquées aux quadratures $Y_{i > Q}^+$ et Y_i^- . Écrivons la décomposition par blocs de la matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad 3.4.17$$

$\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ étant des matrices carrées, symétriques définies positives, respectivement de dimension $Q \times Q$ et $(1 - Q + M) \times (1 - Q + M)$. La matrice $\mathbf{A}$ porte donc l'information sur le bruit du sous-espace des quadratures portant de l'information sur le paramètre p . Il est important de noter qu'a priori, *il n'existe pas toujours une base vérifiant ces conditions*. La matrice de covariance inverse peut s'écrire simplement sous la forme

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix} \quad 3.4.18$$

Comme seules les quadratures $Y_{1 \leq i \leq Q}^+$ sont porteuses d'une information sur p , il n'est pas nécessaire d'effectuer de mesure sur les autres. Nous allons donc définir un nouvel estimateur $\tilde{p}'_{\text{MV}}$ ne faisant intervenir que Q quadratures. Nous définissons ce nouvel estimateur comme étant l'estimateur $\tilde{p}$, à la différence que l'on remplace les quadratures non mesurées par leurs espérances :

$$Y_{i > Q}^+ = \bar{Y}_{i > Q}^+(0) \quad 3.4.19$$

$$Y_i^- = \bar{Y}_i^-(0) \quad 3.4.20$$

Sous ces conditions, l'estimateur $\tilde{p}'_{\text{MV}}$ ne fait plus intervenir que les Q quadratures $Y_{1 \leq i \leq Q}^+$ et s'écrit :

$$\tilde{p}'_{\text{MV}}(\mathbf{Y}) = \frac{\left(\left. \frac{\partial \bar{Y}_1^+}{\partial p} \right|_0 \quad \dots \quad \left. \frac{\partial \bar{Y}_Q^+}{\partial p} \right|_0 \right) \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1^+ - \bar{Y}_1^+(0) \\ \vdots \\ Y_Q^+ - \bar{Y}_Q^+(0) \end{pmatrix}}{\left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \mathbf{A}^{-1} \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)} \quad 3.4.21$$

Il est alors facile, en suivant une démonstration similaire à celle effectuée précédemment pour l'estimateur de vraisemblance $\tilde{p}_{MV}$, de montrer que l'estimateur $\tilde{p}'_{MV}$ est bien un estimateur non-biaisé et efficace de p . En effet, d'une part,

$$E(\tilde{p}'_{MV}) = E(\tilde{p}_{MV}) = p \quad 3.4.22$$

et d'autre part,

$$\sigma_{\tilde{p}'_{MV}}^2 = \sigma_{\tilde{p}_{MV}}^2 = \frac{1}{I_{\text{Fisher}}} \quad 3.4.23$$

En conclusion, s'il existe une base dans laquelle seul un ensemble de quadratures $Y_{1 \leq i \leq Q}^+$ porte de l'information sur un paramètre p à mesurer, c'est-à-dire quand les conditions 3.4.16 et 3.4.17 sont vérifiées, il est possible d'écrire un nouvel estimateur, non-biaisé et efficace, ne faisant pas intervenir plus d'une quadrature par mode. Cet estimateur est réalisable expérimentalement.

3.4.4 Réalisation expérimentale

En imaginant que les conditions précédentes soient vérifiées, l'estimateur $\tilde{p}'_{MV}$ peut être réalisé expérimentalement en utilisant par exemple une détection homodyne multimode. Ceci implique de pouvoir séparer sans pertes les différents modes. Ces mesures donnent facilement accès aux paramètres $Y_i^+ - \bar{Y}_i^+$ pour $i \in [1, Q]$. On pondère ensuite ces Q valeurs par le vecteur ligne

$$\frac{\left(\left. \frac{\partial \bar{Y}_1^+}{\partial p} \right|_0 \quad \dots \quad \left. \frac{\partial \bar{Y}_Q^+}{\partial p} \right|_0 \right) \mathbf{A}^{-1}}{\left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)^\top \mathbf{A}^{-1} \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial p} \right|_0 \right)} \quad 3.4.24$$

qui est constant pour une expérience donnée et qu'il suffit donc de déterminer une fois pour toutes. Cette méthode expérimentale fournit une implémentation directe de l'estimateur $\tilde{p}'_{MV}$, s'il existe. Cet estimateur est efficace au sens de Cramér-Rao. Il permet d'extraire toute l'information d'une mesure si la matrice de covariance n'est pas optimale.

3.4.5 Interprétation géométrique

Revenons maintenant sur l'expression du maximum de vraisemblance 3.4.5. Il est possible de proposer une interprétation géométrique de ce résultat. Le

produit scalaire $(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})_{\Sigma^{-1}} \equiv \mathbf{A}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{B}$ permet de définir un espace euclidien. Dans cet espace, la projection de $\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)$ sur $\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_0$ s'écrit

$$\text{Proj}_{\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_0} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)) = \left[\frac{\left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_0 \bullet \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0) \right)_{\Sigma^{-1}}}{\left\| \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_0 \right\|_{\Sigma^{-1}}^2} \right] \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_0 \quad 3.4.25$$

$$= \tilde{p}_{MV} \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_0 \quad 3.4.26$$

Si l'on prend maintenant comme mesure la norme euclidienne de cet espace, la mesure algébrique de ce vecteur est donc $\tilde{p}_{MV} \left\| \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_0 \right\|_{\Sigma^{-1}}$. L'estimateur du maximum de vraisemblance est donc la mesure de la projection de $\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}(0)$ sur $\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_0$, cette mesure étant effectuée en prenant pour unité la racine de l'information de Fisher $\sqrt{I_{\text{Fisher}}} = \left\| \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_0 \right\|_{\Sigma^{-1}}$. Cette approche est représentée sur la figure 3.4.1.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre diverses méthodes pour détecter des petits paramètres du champ électrique, à la limite de Cramér-Rao. Deux situations se sont présentées.

La première correspond au cas où le mode de bruit est comprimé, sans être intriqué, ce que nous avons montré dans le chapitre précédent être optimal et constitue donc la *situation la plus importante expérimentalement*. Dans ce cas, *une simple détection homodyne*, dont l'oscillateur local a pour mode le mode de bruit du paramètre à mesurer, est optimale au sens de Cramér-Rao. Il n'est pas possible d'imaginer de méthode plus précise de mesure, même s'il est possible d'en envisager d'autres aussi précises.

La deuxième situation, plus complexe, correspond au cas où le mode de bruit est intriqué avec d'autres. Elle ne constitue donc pas une situation à rechercher mais peut tout de même correspondre à une réalité expérimentale, si les degrés de liberté dont dispose l'expérimentateur sont limités. En faisant l'hypothèse additionnelle forte qu'il était possible de trouver une base dans laquelle la quadrature du mode de bruit portant l'information n'était intriquée qu'avec une seule des quadratures de chaque mode, nous avons pu proposer une méthode

optimale au sens de Cramér-Rao pour mesurer un paramètre. La situation où cette hypothèse n'est pas vérifiée n'a pas été abordée.

Nous avons ainsi développé un cadre unifié pour mesurer un grand nombre de paramètres du champ électromagnétique de façon optimale.

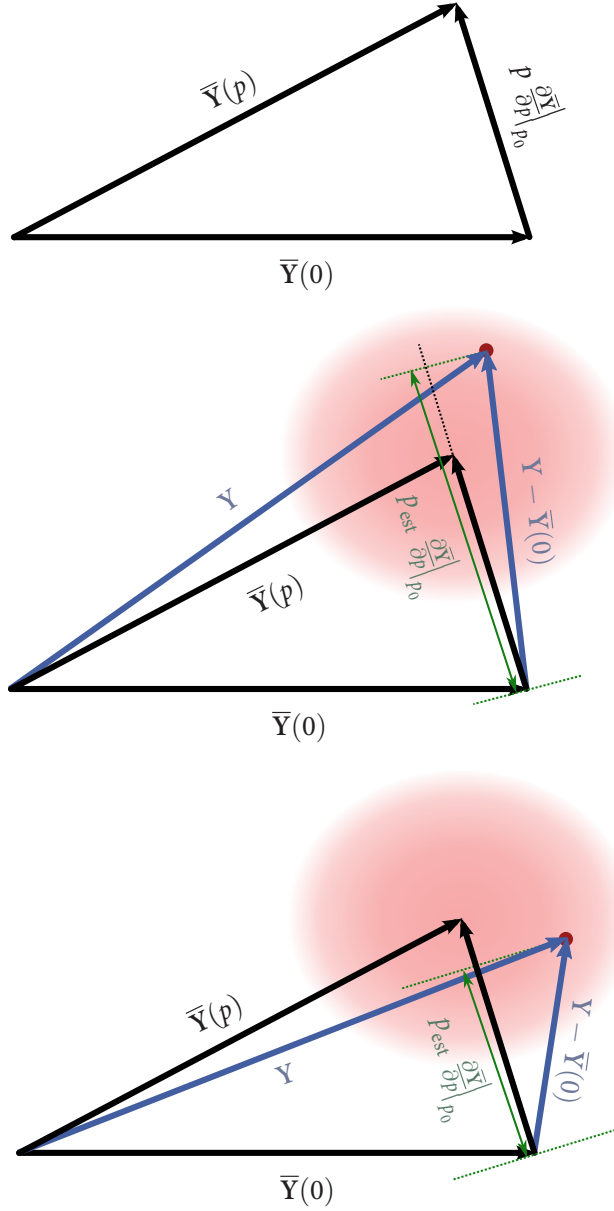


Fig. 3.4.1 : Représentation graphique de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans l'espace euclidien défini par le produit scalaire $(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})_{\Sigma^{-1}} = \mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{B}$. Le disque rouge représente la densité de probabilité d'effectuer une mesure donnée, centrée autour de l'espérance $\bar{Y}(p)$. Les vecteurs représentés en vert ont pour mesure $\tilde{p}_{MV}$, si l'on prend pour mesure la norme euclidienne associée et pour unité la racine carrée de l'information de Fisher, c'est à dire $\left\| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \right\|_{\Sigma^{-1}}$.

4 Mesures optimales de distances, de délais et de dispersions

Sommaire

4.1	Les mesures de longueurs et leurs applications	90
4.1.1	Panorama de différentes mesures optique des longueurs	90
4.1.2	Applications et perspectives	95
4.2	Théorie des mesures optimales dans le domaine temporel	96
4.2.1	Paquets d'ondes dans un milieu dispersif	96
4.2.2	Mesure de temps dans un milieu non dispersif	98
4.2.3	Mesures dans un milieu dispersif	103
4.3	Mise en pratique	108
4.3.1	Valeurs numériques	108
4.3.2	Possibilité d'atteindre ces valeurs	109
4.3.3	Mesures réalisables	109
4.3.4	Dispositif général de mesure de paramètres dans le domaine temporel	110
4.4	Conclusion	111

Nous nous proposons dans ce chapitre d'appliquer les résultats obtenus pour l'estimation optimale de petits paramètres du champ électromagnétique à des mesures dans le domaine temporel, qui vont nous permettre de considérer des mesures de délais, de déplacements et de dispersion. Après un rappel de différentes techniques de mesures optiques, des plus anciennes aux plus modernes, nous allons établir des limites de sensibilité pour des mesures de petits déplacements. L'idée générale est de réaliser dans le domaine temporel des expériences analogues à des travaux précédents du groupe d'Optique Quantique Multimode du LKB, qui se déroulaient dans le domaine spatial [Trep03]. Nous allons uniquement considérer dans ce chapitre des mesures directes de distance,

n'utilisant pas de cavités résonnantes. Nous ne nous intéresserons d'autre part qu'aux mesures longitudinales de distances.

4.1 Les mesures de longueurs et leurs applications

4.1.1 Panorama de différentes mesures optique des longueurs

4.1.1.1 Utilisation historique des techniques optiques pour mesurer des distances

L'utilisation de méthodes optiques pour mesurer des distances est très ancienne, on peut citer par exemple la mesure précise de la circonférence de la terre par Eratosthène au 3e siècle avant J.-C. Le *théodolite*, instrument inventé au 16e siècle permet de relever des angles selon des directions verticales et horizontales, et donc de mesurer des distances par triangulation. Il est encore utilisé aujourd'hui. L'invention de la photographie a permis le développement de la *photogrammétrie*, qui consiste à déterminer des distances à partir de photographies prises selon plusieurs points de vue. Cette technique est toujours employée, y compris pour des mesures de précision, on peut citer par exemple la mesure de la courbure du miroir primaire du radiotélescope de l'observatoire d'Arecibo [Estler 02].

4.1.1.2 Interférométrie monochromatique

Les premières expériences interférométriques de mesure de distance datent de la fin du 19e siècle. Michelson et Morley prouvent en 1887 l'absence d'entraînement de la lumière par « l'éther » en utilisant leur fameux interféromètre. En 1894, Michelson, aidé de Benoît, directeur du Bureau international des poids et mesures, détermine la longueur du mètre étalon (à l'époque une barre en platine iridié) en unités de longueur d'onde d'une raie du cadmium. Il propose ainsi de définir le mètre par rapport à des « unités naturelles » (cf. [Michelson 94]). En 1960 le mètre sera d'ailleurs défini par rapport à longueur d'onde d'une raie du krypton. Cette définition a depuis changé.

Ces méthodes interférométriques sont lentes et fastidieuses car il est nécessaire de compter un grand nombre de franges d'interférences mais sont très précises, puisqu'il est facile de mesurer une fraction de frange. On peut donc mesurer relativement facilement des longueurs à une fraction de longueur d'onde près. Dans le cas d'une mesure dont la distance varie rapidement, il n'est géné-

ralement plus possible de compter le nombre total de franges d'interférences. Puisque le signal est périodique de période λ , l'intensité mesurée évolue de façon monotone sur une demi-longueur d'onde. Cette distance $\lambda/2$ constitue donc ce que l'on appelle la *distance d'ambiguïté* (« ambiguity range » en anglais) du dispositif. Si la distance évolue de plus que cette distance d'ambiguïté entre deux mesures, il n'est plus possible de déterminer une distance de façon absolue.

Les techniques ont bien entendu beaucoup évolué depuis le 19e siècle et les sensibilités atteintes sont bien meilleures. Pour des développements récents, on peut citer par exemple [Smith 09] qui atteint des résolutions picométrique en utilisant un interféromètre fibré. La principale limitation de ces méthodes interférométriques reste la très courte distance d'ambiguïté et donc la difficulté à réaliser des mesures absolues.

4.1.1.3 Interférométrie multi-longueurs d'ondes

Dès 1898, Benoît avait proposé de réaliser les expériences interférométriques de mesures de longueur en utilisant plusieurs longueurs d'ondes [Benoît 98]. Les différentes longueurs d'ondes étant connues, en observant des coïncidences entre les franges brillantes et sombres des différentes raies, on obtient une information supplémentaire sur la distance absolue, voir par exemple [Wyant 71, Tilford 77, Fercher 85, Dändliker 88]. En utilisant par exemple deux sources monochromatiques de longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 , on dispose ainsi d'une *longueur d'onde synthétique* Λ

$$\Lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \quad 4.1.1$$

qui permet d'augmenter significativement la distance d'ambiguïté. Pour citer des développements plus récents, on peut se référer au système MSTAR ([Lay 03]) qui parvient à mesurer des distances absolues avec une sensibilité meilleure que le nm.

Bien qu'il ne soit pas nécessaire de scanner des franges d'interférence sur l'ensemble de la distance à mesurer, il faut tout de même scanner un nombre de franges important et tous ces dispositifs sont donc en conséquence intrinsèquement lents.

4.1.1.4 LIDAR

Une autre méthode fondamentalement différente pour mesurer des distances consiste à mesurer le temps de vol d'impulsions lumineuses. Cette technique est appelée LIDAR pour « Light Detection and Ranging », par analogie avec le radar. Il est intéressant de noter que l'utilisation du LIDAR est bien antérieure à l'invention du laser (pour un historique du LIDAR, on pourra se référer à [Flamant 05]). Les premières mesures de distances de nuages datent de 1935 et la dénomination LIDAR existait en 1950. La découverte du laser dans les années 1960 a bouleversé le domaine. Fiocco et Smullin sont ainsi des pionniers dans le domaine. En utilisant un laser à rubis pulsé, ils mesurèrent la distance Terre-Lune [Smullin 62] puis réalisèrent les premières mesures LIDAR de l'atmosphère terrestre [Fiocco 63]. Aujourd'hui, profitant de rétroreflecteurs catadioptriques qui ont été déposés sur la Lune lors des missions spatiales, la mesure de la distance Terre-Lune peut être effectuée avec une précision centimétrique [Chapront 02], voire millimétrique [Murphy 08]. La sensibilité des LIDAR est faible comparée aux mesures interférométriques mais ces dispositifs ne souffrent pas des problèmes de distance d'ambiguïté. Les meilleures sensibilités obtenues avec des LIDAR sont de l'ordre de $100\text{ }\mu\text{m}$ [Estler 02], ce qui est notablement moins bon que pour des mesures interférométriques.

4.1.1.5 Mesures utilisant des impulsions femtoseconde

Intérêt des impulsions femtoseconde Les lasers à impulsion femtoseconde sont des bons candidats pour réaliser des mesures précises de distances. Leur fonctionnement impulsif permet de mesurer simplement des temps de vol, tandis que leur spectre large et surtout, la relation extrêmement précise entre les différentes fréquences du peigne de fréquence sont particulièrement intéressants pour effectuer des mesures de distance. Ces lasers sont aujourd'hui des outils très stables et déjà très utilisés en métrologie.

Premiers travaux utilisant des impulsions courtes Chekhovsky et al. [Chekhovsky 98] réalisent en 1998 des mesures en utilisant des impulsions picoseconde. Des impulsions picoseconde intenses (plusieurs dizaines de mJ) sont élargies spectralement sur tout le spectre visible par passage dans de l'eau. Les impulsions picosecondes, de spectre blanc, sont ensuite utilisées pour réaliser des mesures de distance. La durée des impulsions permet une estimation grossière de la distance, tandis que l'interférométrie en lumière

blanche permet d'obtenir une précision absolue de $3\text{ }\mu\text{m}$. Ils combinent ainsi l'avantage des impulsions courtes (mesure par temps de vol) dans le domaine temporel et du spectre large pour obtenir une mesure précise de distance. Il n'y a cependant pas encore un contrôle précis du spectre du laser ce qui limite leur précision.

Les premiers à avoir utilisé un laser femtoseconde pour mesurer une distance ont été Minoshima et al. [Minoshima 00]. En utilisant un petit nombre de composantes spectrales monochromatiques issues d'un peigne de fréquence, ils réalisent une mesure multi-longueurs d'ondes. La précision obtenue est ainsi de $50\text{ }\mu\text{m}$ pour une mesure unique.

Schéma proposé par Jun Ye Jun Ye[Ye 04] propose un schéma théorique visant à utiliser une source de lumière femtoseconde pour combiner une mesure de temps de vol avec une mesure interférométrique. Il propose ainsi d'utiliser une photodiode rapide picoseconde pour déterminer approximativement une distance, puis de réaliser l'interférence entre une impulsion qui a parcouru la distance à mesurer et une autre impulsion qui a été émise juste au moment de la mesure. En observant le schéma de franges obtenues, il est possible de déterminer précisément la distance, idéalement à moins d'une longueur d'onde près. Un tel schéma implique que le taux de répétition et la phase absolue du laser sont stabilisés avec une grande précision pendant le temps que la lumière met à parcourir la distance.

Une autre limitation de ce dispositif vient du fait qu'il faut prendre en compte la dispersion du milieu dans lequel la lumière se propage. En effet, la mesure de temps de vol donne une information sur le délai de vitesse de groupe tandis qu'une mesure interférométrique fournit une information sur le délai de vitesse de phase. Si l'on connaît précisément les caractéristiques du milieu traversé (température, pression, composition), il est possible de construire un modèle théorique de la dispersion qui permet de relier les informations sur la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Ceci nécessite un environnement bien contrôlé et devient impossible sur de grandes distances. Jun Ye se restreint ainsi explicitement à des mesures dans l'espace. Il note d'autre part qu'il est envisageable d'utiliser une horloge atomique utilisant directement ce peigne de fréquence et de combiner ainsi intimement mesure de temps et mesure de fréquence.

Cui et al. [Cui 08] ont mis en œuvre expérimentalement ce schéma. Une différence notable réside cependant dans l'utilisation d'une corrélation croisée non linéaire d'ordre 2 au lieu d'une simple interférence linéaire. Ils obtiennent une

sensibilité de quelques centaines de nm. Ils pensent être limités par le jitter (gigue) de l'actuateur piézo-électrique.

Autres méthodes D'autres méthodes pour effectuer des mesures précises de distance en utilisant des lasers femtoseconde ont été proposées et démontrées récemment. On peut en citer 3 :

Salvadé et al. [Salvadé 08] proposent une approche hybride entre lasers continus et impulsionnels. Ils emploient une méthode d'interférométrie à deux longueurs d'ondes, les deux ondes monochromatiques intenses étant asservies sur deux longueurs d'ondes d'un peigne. L'écart entre ces deux longueurs d'onde détermine la longueur d'onde synthétique, qu'ils peuvent ajuster. Ils bénéficient ainsi à la fois de la référence de fréquence du peigne de fréquence et des puissances plus importantes aux fréquences qu'ils utilisent pour la mesure interférométrique. Ils obtiennent une précision absolue de 8 nm pour une mesure d'une distance de 80 cm.

Coddington et al. [Coddington 09] proposent une méthode légèrement différente mais qui vise elle aussi à combiner mesures de temps de vol et interférométriques. Ils utilisent ainsi deux lasers femtoseconde asservis, dont les taux de répétitions respectifs diffèrent légèrement. Dans le domaine fréquentiel, ceci revient à effectuer une interférométrie multi-fréquences utilisant beaucoup de fréquences simultanément. Ils obtiennent une précision absolue meilleure que le nm pour une distance (parcourue dans une fibre) supérieure au km. Cette méthode est cependant difficilement réalisable sur grande distance dans l'air, en raison de la dispersion.

Lee et al. [Lee 10] ont récemment proposé et démontré une nouvelle méthode extrêmement précise de mesure du temps de vol. Ils effectuent dans un cristal de PPKTP une somme de fréquence entre une impulsion signal et une impulsion de référence de même fréquences, colinéaires, de polarisations orthogonales et de même sens de propagation [Kim 07]. En raison de la biréfringence du cristal, les vitesses de groupe sont différentes pour les deux polarisations. L'efficacité de la conversion non linéaire va donc dépendre fortement du délai entre ces deux impulsions. Un miroir dichroïque transmet l'onde doublée, qui est mesurée, et réfléchit les deux ondes signal et référence, qui repassent dans le cristal en sens inverse. Un nouveau doublement a lieu en sens inverse et ce faisceau doublé est lui aussi mesuré. La différence entre les deux signaux fournit une information sur la distance relative entre les impulsions. La précision qu'ils obtiennent est de l'ordre du nm pour un temps d'intégration de 1 s et une distance mesurée de

1.4 km (à l'air libre, entre deux bâtiments). Il est important de noter que cette mesure ne nécessite pas de connaissance détaillée des propriétés de dispersion du milieu traversé puisque l'on ne mesure que le délai de groupe. La dispersion de vitesse de groupe a cependant pour effet d'allonger les impulsions, ce qui doit être pris en compte dans la mesure.

4.1.1.6 Limitations et conclusion

Diverses méthodes plus ou moins précises ont été présentées. Les mesures interférométriques sont par essence précises mais souffrent traditionnellement de limitations dues à leur faible distance d'ambiguïté. L'utilisation de plusieurs fréquences, soit sous la forme de plusieurs ondes monochromatiques de fréquence différentes, soit sous la forme d'impulsions, permet d'accroître cette distance d'ambiguïté. En revanche, le dispositif devient sensible à la dispersion. Conceptuellement, cette limitation provient du fait que l'on utilise la vitesse de groupe pour estimer une première fois la distance (temps de vol), puis la vitesse de phase pour raffiner le résultat (interférométrie), or ces deux vitesses sont différentes dans l'air. Dans le vide, et tout particulièrement dans l'espace, les approches combinant mesure du délai de groupe et de phase prennent cependant tout leur sens. Au vu des performances obtenues par interférométrie monochromatique, il ne paraît pas impossible d'envisager des mesures absolues de sensibilité picométrique.

4.1.2 Applications et prospectives

Les besoins en mesures précises de distances sont variés, au-delà des besoins en construction et en topographie. On peut citer l'exemple de LIDAR embarqués sur des avions, maintenant utilisés pour repérer des élévations de terrain de quelques dizaines de centimètres d'épaisseur cachées par des forêts [Doneus 08]. Des mesures interférométriques sont aussi utilisées pour mesurer des déplacements de la croûte terrestre [Milyukov 10]. Cependant, ces projets sont plus limités par des contraintes techniques que par des limites fondamentales. En revanche, pour des mesures dans l'espace, beaucoup de ces contraintes sont relâchées, notamment celles dues à la dispersion et aux fluctuations de l'air. Divers projets de satellites évoluant en formation existent, nécessitant un contrôle extrêmement précis des distances. Ces satellites évoluant dans le vide, il n'y a plus de problème de dispersion du milieu et les méthodes combinant mesures par temps de vol et mesures interférométriques sont particulièrement

intéressantes. On peut ainsi citer quelques exemples parmi une multitude de projets qui nécessitent un contrôle très précis des longueurs, à plus ou moins grandes distances.

Télescope à rayons X Cash et al. [Cash 00, White 00] proposent un interféromètre à rayons X pour imager le voisinage de trous noirs. Cette proposition implique 33 satellites en formation avec des précisions sur les distances relatives meilleure que 20 nm.

Terrestrial Planet Finder Le projet Terrestrial Planet Finder Interferometer de la Nasa [Lawson 05] vise à construire un télescope capable de détecter directement dans le domaine infrarouge des planètes extrasolaires autour d'une étoile. L'idée principale consiste à annuler, par le biais d'interférences destructives, la lumière provenant de l'étoile elle-même pour pouvoir observer la lumière, bien plus faible, provenant de planètes proches. Ce projet nécessite des satellites en formation, en mouvement, et dont les distances relatives sont contrôlées au nm près.

BEACON Le projet BEACON (Beyond Einstein Advanced Coherent Optical Network) [Turyshchev 09] a pour but de mesurer des éventuels facteurs de correction au-delà de la relativité générale. Le principe repose sur la mesure précise de distances entre 4 satellites en orbite haute (80 000 km) autour de la Terre. Le projet implique de pouvoir mesurer des écarts de 0.1 nm à une distance de 160 000 km.

Ces projets sont tous à la limite ou au-delà de ce qu'il est possible de réaliser techniquement aujourd'hui et la mesure de distance ultra-précise constitue ainsi un facteur limitant. Tout progrès dans le domaine de la mesure ultra-haute précision permettrait ainsi de donner le jour à ces projets ou bien d'en développer d'autres, encore plus ambitieux.

4.2 Théorie des mesures optimales dans le domaine temporel

4.2.1 Paquets d'ondes dans un milieu dispersif

Dans cette section nous allons rappeler les résultats bien connus sur la propagation d'un paquet d'onde spectralement étroit dans un milieu dispersif, au

premier ordre [Jackson 99]. On considère un champ électromagnétique que l'on décrit comme un paquet d'ondes de différentes fréquences :

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}(z=0, \omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega \quad 4.2.1$$

On considère que le spectre est concentré autour ω_0 , la *pulsation moyenne*. Si la relation de dispersion $k(\omega)$ est suffisamment régulière, on peut effectuer le développement au premier ordre de celle-ci :

$$k(\omega) \simeq k_0 + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \quad \text{avec } k_0 = k(\omega_0) \quad 4.2.2$$

et réécrire ainsi l'expression du champ électromagnétique sous la forme

$$E(z, t) = \left(\frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}(z=0, \omega) e^{-i(\omega - \omega_0) \left(t - \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} z \right)} d\omega \right) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad 4.2.3$$

Si l'on écrit maintenant le champ en $z = 0$ sous la forme

$$E(z=0, t) = g(t) e^{-i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \left(\int \tilde{E}(z=0, \omega) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega \right) e^{-i\omega_0 t} \quad 4.2.4$$

il apparaît clairement que le champ peut s'écrire d'une manière générale

$$E(z, t) = g \left(t - \frac{z}{v_g} \right) e^{-i\omega_0 \left(t - \frac{z}{v_\phi} \right)} \quad 4.2.5$$

où l'on a défini la *vitesse de groupe* v_g et la *vitesse de phase* v_ϕ par

$$v_g = \frac{1}{\left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}} \quad v_\phi = \frac{k_0}{\omega_0} \quad 4.2.6$$

On peut donc décomposer d'une manière générale le champ en une enveloppe et une porteuse, son enveloppe se propageant à la vitesse de groupe et sa porteuse à la vitesse de phase. Si l'on avait développé la relation de dispersion $k(\omega)$ au deuxième ordre, la vitesse de groupe aurait été dépendante de la fréquence et le champ aurait alors subi un effet de dispersion de vitesse de groupe, produisant une déformation de l'enveloppe le long de sa propagation. *Dans tout ce chapitre, nous négligerons les effets de la dispersion de vitesse de groupe.*

4.2.2 Mesure de temps dans un milieu non dispersif

4.2.2.1 Limite de Cramér-Rao pour l'estimation d'un retard

Intéressons-nous à appliquer la théorie de Cramér-Rao à une mesure d'un délai de temps ou d'espace dans le vide. Pour ce faire, considérons une onde électromagnétique se propageant à la vitesse c . Si le spectre est suffisamment concentré autour de sa valeur moyenne ω_0 , on peut écrire le mode u_1 du champ moyen sous la forme d'un produit d'une *enveloppe lentement variable* et d'une phase

$$u_1(z, t) = g\left(t - \frac{z}{c}\right) e^{-i\omega_0\left(t - \frac{z}{c}\right)} \quad 4.2.7$$

En appelant maintenant u la coordonnée d'espace-temps telle que

$$u = t - \frac{z}{c}, \quad 4.2.8$$

on peut réécrire le mode pour qu'il ne dépende que d'une coordonnée :

$$u_1(u) = g(u) e^{-i\omega_0 u} \quad 4.2.9$$

Si maintenant le champ électromagnétique subit un retard p , le champ retardé s'écrira sous la forme

$$u_1(u, p) = u_1(u - p) = g(u - p) e^{-i\omega_0(u - p)} \quad 4.2.10$$

Dans les chapitres précédents, nous avons établi des limites de sensibilité pour la mesure d'un petit paramètre p , indépendamment de la méthode de mesure considéré. Nous avons aussi montré qu'à ressources quantiques données, il était optimal de comprimer les fluctuations du mode de bruit de profil $\left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 / \left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \right\|$, défini comme le mode de la dérivée du champ moyen par rapport au paramètre à mesurer. Nous allons donc nous restreindre dans ce chapitre à l'étude de modes comprimés sur ce mode uniquement, d'un facteur σ , le cas $\sigma = 1$ correspondant à un état cohérent.

Nous avons établi dans les chapitres précédents (cf. équ. 2.3.58) une limite de Cramér-Rao sur le paramètre p le plus petit que l'on pouvait espérer mesurer, en faisant l'hypothèse d'un rapport de signal à bruit égal à 1, et ce, indépendamment de la méthode de mesure :

$$p_{\min} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{N} \left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \right\|} \quad 4.2.11$$

Établissons donc la norme $\left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0$:

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0^2 = \int \left| \frac{\partial u_1}{\partial p}(u, p=0) \right|^2 du \quad 4.2.12$$

$$= \int \left| -\frac{\partial u_1}{\partial u}(u, p=0) \right|^2 du \quad 4.2.13$$

L'application de la relation de Parseval nous permet d'écrire que

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0^2 = \int \left| \widetilde{\frac{\partial u_1}{\partial u}}(\omega) \right|^2 d\omega \quad 4.2.14$$

où le tilde représente la transformation de Fourier.

$$\widetilde{\frac{\partial u_1}{\partial u}}(\omega) = -i\omega \widetilde{u}_1(\omega) \quad 4.2.15$$

et donc

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0^2 = \int \omega^2 |\widetilde{u}_1(\omega)|^2 d\omega \quad 4.2.16$$

$$= \int (\omega - \omega_0)^2 |\widetilde{u}_1(\omega)|^2 d\omega - \omega_0^2 \int |\widetilde{u}_1(\omega)|^2 d\omega \quad 4.2.17$$

$$+ 2\omega_0 \int \omega |\widetilde{u}_1(\omega)|^2 d\omega \quad 4.2.18$$

Comme on a considéré que ω_0 était la fréquence moyenne du champ, si $\Delta\omega$ est l'écart type de la distribution spectrale du champ, alors on obtient la relation simple sur la norme du mode de bruit

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial p} \right\|_0^2 = \Delta\omega^2 + \omega_0^2 \quad 4.2.19$$

et la limite de Cramér-Rao prend la forme simple

$$p_{\min} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{N}\sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}} \quad 4.2.20$$

4.2.2.2 Profil du mode de bruit

Étudions le profil du mode de bruit. Celui-ci s'écrit simplement comme la somme d'un terme de dérivée de l'enveloppe et d'un terme de dérivée de la phase.

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0(u) = i\omega_0 g(u) e^{-i\omega_0 u} - g'(u) e^{-i\omega_0 u} \quad 4.2.21$$

Pour suivre les conventions établies dans les chapitres précédents, posons

$$v_1 = \frac{\left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0}{\left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0 \right\|} \quad 4.2.22$$

$$= \frac{\left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}} \quad 4.2.23$$

Étudions maintenant l'orthogonalité des profils $g'(u)e^{-i\omega_0 u}$ et $i\omega_0 g(u)e^{-i\omega_0 u}$ qui figurent dans l'expression de v_1 . Pour ce faire, nous allons réécrire l'enveloppe $g(u)$, complexe dans le cas général, sous la forme d'un module $A(u)$ et d'un argument $-\Phi(u)$. La phase temporelle sous ces définitions devient ainsi $\omega_0 u + \Phi(u)$ et la fréquence instantanée $\omega_0 + \frac{d\Phi}{du}$.

$$g(u) = A(u) e^{-i\Phi(u)} \quad 4.2.24$$

Le recouvrement entre les deux modes (non normalisés) et les normes carrées de ceux-ci s'écrivent comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \int g'^*(u) i\omega_0 g(u) du \right| = \omega_0 \left| \underbrace{\int A'(u) A(u) du}_{=0} + \int i\Phi'(u) A^2(u) du \right| \\ \qquad \qquad \qquad = \omega_0 \left| \int \Phi'(u) A^2(u) du \right| \\ \int g'^*(u) g'(u) du = \int A'^2(u) du + \int \Phi'^2(u) A^2(u) du \\ \omega_0^2 \int g^*(u) g(u) du = \omega_0^2 \end{array} \right. \quad 4.2.25$$

Comme les variations de la phase temporelle de l'enveloppe sont faibles sur une période optique, il est possible d'écrire que

$$|\Phi'| \ll \omega_0 \quad 4.2.26$$

Si nous faisons l'hypothèse additionnelle que la phase temporelle de l'enveloppe Φ varie lentement par rapport à l'amplitude de l'enveloppe, et donc que les variations sont faibles sur la durée d'une impulsion, il est possible d'écrire que

$$|\Phi'| \ll \left| \frac{A'}{A} \right| \quad 4.2.27$$

Sous cette condition, nous pouvons négliger le recouvrement par rapport aux normes des modes (les deux modes sont donc quasi-orthogonaux) et écrire que les normes carrées des deux modes valent

$$\int g'^*(u)g'(u) du \simeq \int A'^2(u) du = \Delta\omega^2 \quad 4.2.28$$

$$\omega_0^2 \int g^*(u)g(u) du = \omega_0^2 \quad 4.2.29$$

Il est maintenant possible de décomposer v_1 dans une nouvelle base orthonormée $\{w_1, w_2\}$, où l'on a défini

$$\begin{cases} w_1(u) = u_1(u, p = 0) \\ w_2(u) = \frac{-g'(u)e^{-i\omega_0 u}}{\Delta\omega} \end{cases} \quad 4.2.30$$

Le mode de bruit s'écrivant dans cette base

$$v_1 = i \frac{\omega_0}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}} w_1 + \frac{\Delta\omega}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}} w_2 \quad 4.2.31$$

On remarque le mode de bruit n'est pas orthogonal au mode de champ moyen. Il est la combinaison d'un terme lié à la dérivée de la phase et d'un terme lié à la dérivée de l'enveloppe. Le premier fournit une information sur la vitesse de phase, il est équivalent à une mesure interférométrique classique. Le second est lié à la vitesse de groupe, le mesurer revient ainsi à mesurer un temps de

vol d'impulsions électromagnétiques. Comme nous nous sommes placés dans le vide, les deux vitesses sont égales et les deux mesures aboutissent exactement à la même information.

Si l'on n'avait pas pu faire l'hypothèse que $\Phi(u)$ variait peu par rapport à $A(u)$, les modes w_1 et w_2 n'auraient pas été orthogonaux. Ceci traduit le fait qu'il devient difficile dans ce cas d'envisager une mesure purement interférométrique si la fréquence instantanée $\omega_0 + \frac{d\Phi}{du}$ dépend de u ou, de manière équivalente, une mesure de temps de vol si l'enveloppe est complexe. Malgré tout, l'expression de v_1 reste toujours correcte et une mesure utilisant un oscillateur local dans ce mode là peut être optimale par exemple. Dans la suite de ce chapitre nous allons considérer cette hypothèse comme vraie car elle permet de bien distinguer l'aspect mesure interférométrique de l'aspect mesure de temps de vol.

4.2.2.3 Limites de Cramér-Rao pour différents types de mesures

Mesure optimale Comme il a été démontré dans le chapitre 3, si l'on désire mesurer expérimentalement le paramètre de retard p en utilisant une détection homodyne, il faut utiliser un oscillateur local ayant pour mode de champ moyen v_1 , qui permet d'atteindre la limite de Cramér-Rao 4.2.20.

$$p_{\min, \text{optimal}} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{N}\sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}}$$

4.2.32

Mesure interférométrique Si l'on se restreint à une mesure interférométrique, c'est-à-dire une mesure utilisant uniquement la fraction $\|w_1 \cdot v_1\| = \frac{\omega_0}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}}$ de l'information portée sur le mode w_1 , la limite de Cramér-Rao pour une mesure de phase devient

$$p_{\min, \text{phase}} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{N}\omega_0}$$

4.2.33

Mesure par temps de vol De la même façon, si l'on se restreint maintenant à une mesure de temps de vol, c'est-à-dire exploitant l'information portée par le

mode w_2 , la limite de Cramér-Rao que l'on obtient est de

$$p_{\min, \text{ temps de vol}} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{N}\Delta\omega}$$

4.2.34

Mesures monochromatiques ou impulsionsnelles Pour effectuer une mesure de délai, une impulsion gaussienne de pulsation centrale ω_0 et de largeur $\Delta\omega$ admet une limite de Cramér-Rao inférieure à celle utilisant une onde monochromatique de même puissance moyenne à la pulsation ω_0 car il est possible d'exploiter une information additionnelle sur le temps de vol de l'impulsion. En admettant que l'on soit capable de mesurer expérimentalement à la limite de Cramér-Rao, les mesures impulsionsnelles peuvent être plus précises. Il faut toutefois tempérer ce résultat en remarquant cette mesure impulsionsnelle ne sera pas plus précise qu'une mesure optimale utilisant un faisceau de même puissance moyenne à la fréquence $\omega_0 + \Delta\omega$. Les mesures impulsionsnelles peuvent cependant présenter d'autres intérêts, d'ordre technique, la mesure du temps de vol permettant facilement de disposer d'une position absolue de l'impulsion.

4.2.2.4 Conclusion

Nous avons proposé une limite de Cramér-Rao pour la mesure d'un délai sur la trajectoire d'une onde lumineuse dans le vide. En utilisant le fait que le vide est un milieu non dispersif, il est possible d'identifier mesure de temps de vol et mesure interférométrique. La combinaison des deux permet ainsi de mesurer plus précisément un délai qu'en utilisant ces deux méthodes individuellement.

4.2.3 Mesures dans un milieu dispersif

4.2.3.1 Délais de la porteuse et de l'enveloppe

Nous avons obtenu des expressions pour des mesures de champs électromagnétiques se propageant dans le vide. Intéressons-nous maintenant aux situations où le champ se propage dans un milieu matériel dispersif et non absorbant.¹ Nous avons rappelé à la section 4.2.1 que dans un milieu dispersif, l'enveloppe et la porteuse se propageaient à des vitesses différentes. Les méthodes interférométriques et de temps de vol mesurent donc maintenant des

¹ Cette hypothèse est déjà en soi une approximation car les relations de Kramers-Kronig relient d'une manière générale absorption et dispersion.

paramètres différents. Il est intéressant de mesurer cet écart, que l'on va montrer être directement lié à la dispersion du milieu à la fréquence centrale des impulsions que l'on envoie.

Si l'on prend en compte la dispersion du milieu, il faut maintenant considérer un système à plusieurs paramètres. Sous l'hypothèse que la dispersion est faible et que l'on ne considère que la dispersion de vitesse de phase et pas les termes d'ordre supérieurs, on peut écrire le mode de champ moyen sous la forme

$$u_1(z, t) = g(t - z/v_g) e^{-i\omega_0(t - z/v_\phi)} \quad 4.2.35$$

L'expression précédente peut être exprimée en fonction de deux paramètres

$$\begin{cases} u = t - z/v_\phi \\ v = t - z/v_g \end{cases} \quad 4.2.36$$

Si l'on considère maintenant un petit délai de la porteuse p et de l'enveloppe q par rapport à u et v respectivement.

$$u_1(u, v, p, q) = g(v - q) e^{-i\omega_0(u - p)} \quad 4.2.37$$

La quantité $D = v - u$ représente la différence entre les délais de la porteuse et de l'enveloppe. Si l'onde lumineuse se propage sur une distance L dans un milieu dispersif homogène, on peut écrire

$$D = v - u = \frac{L}{v_g} - \frac{L}{v_\phi} = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} - \frac{k}{\omega} \right) L = n'(\omega_0) \frac{\omega_0}{c} L \quad 4.2.38$$

qui est directement relié à la dispersion du milieu traversé. Cette expression peut aussi être réécrite en longueur d'onde sous la forme

$$D = v - u = \frac{L}{v_g} - \frac{L}{v_\phi} = \frac{-n'(\lambda_0)\lambda_0}{c} L \quad 4.2.39$$

On appelle maintenant d le paramètre correspondant à une petite perturbation de cette différence des délais de l'enveloppe et de la porteuse, c'est-à-dire

$$d = q - p \quad 4.2.40$$

4.2.3.2 Mesure optimale des fluctuations de la dispersion

Pour calculer la limite de Cramér-Rao de l'estimation du paramètre d , il faut tout d'abord exprimer le champ électromagnétique en fonction de d . Nous considérons des fluctuations sur les deux paramètres p et q , il est donc nécessaire d'introduire un autre paramètre, exprimé en fonction de p et q , de telle sorte que le couple (d, m) décrive les mêmes effets que (p, q) . Comme nous avons deux paramètres à estimer, nous nous plaçons dans le formalisme développé précédemment (2.3.7) de l'estimation de paramètres multiples en introduisant une matrice 2×2 d'information de Fisher.

Choix du deuxième paramètre Nous avons une certaine liberté pour choisir m , qui est une fonction de p et de q . Afin de simplifier grandement l'interprétation de la matrice d'information de Fisher, nous allons choisir m de telle sorte que cette matrice soit diagonale, ce qui est équivalent à dire que les modes de bruits associés à d et m sont orthogonaux. On pourrait penser que, puisque $d = q - p$, le paramètre $p + q$ serait orthogonal mais ce n'est pas le cas. Il est simple de montrer qu'on peut plutôt prendre

$$m = \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} p + \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} q \quad 4.2.41$$

Nous allons juste vérifier qu'avec cette définition, les paramètres d et m sont bien orthogonaux au sens de l'information de Fisher.

Modes de bruit On peut tout de suite écrire p et q en fonction de m et d

$$\begin{cases} p = m - \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} d \\ q = m + \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} d \end{cases} \quad 4.2.42$$

Le mode de champ moyen s'écrit donc en fonction de ces nouveaux paramètres sous la forme

$$u_1(u, v, d, m) = g(u - m - \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} d) e^{-i\omega_0(v - m + \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} d)} \quad 4.2.43$$

Les dérivées s'écrivent :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u_1}{\partial d} \right|_{d,m=0} = -i\omega_0 \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} g(u) e^{-i\omega_0 v} - \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} g'(u) e^{-i\omega_0 v} \\ \left. \frac{\partial u_1}{\partial m} \right|_{d,m=0} = i\omega_0 g(u) e^{-i\omega_0 v} - g'(u) e^{-i\omega_0 v} \end{cases} \quad 4.2.44$$

que l'on peut écrire sur la base $\{w_1, w_2\}$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u_1}{\partial d} \right|_{d,m=0} = -i\omega_0 \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} w_1 + \Delta\omega \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega^2 + \omega_0^2} w_2 \\ \left. \frac{\partial u_1}{\partial m} \right|_{d,m=0} = i\omega_0 w_1 + \Delta\omega w_2 \end{cases} \quad 4.2.45$$

Les normes de ces modes valent donc :

$$\begin{cases} \left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial d} \right|_{d,m=0} \right\| = \frac{\omega_0 \Delta\omega}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}} \\ \left\| \left. \frac{\partial u_1}{\partial m} \right|_{d,m=0} \right\| = \sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2} \end{cases} \quad 4.2.46$$

et les modes de bruit associés aux paramètres d et m sont donc :

$$\begin{cases} v_d = -i \frac{\Delta\omega}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}} w_1 + \frac{\omega_0}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}} w_2 \\ v_m = i \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}} w_1 + \frac{\Delta\omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}} w_2 = v_1 \end{cases} \quad 4.2.47$$

Les modes de bruits associés à d et m sont orthogonaux, les paramètres sont donc bien orthogonaux au sens de l'information de Fisher. Le paramètre m est maintenant une moyenne pondérée des délais de la porteuse et de l'enveloppe. Dans le vide, ce paramètre s'identifie au paramètre p , tel que déterminé dans la section précédente. On peut donc concevoir le paramètre m comme une généralisation du paramètre de délai global p , en présence de dispersion. Ce paramètre m n'est pas qu'une construction mathématique et présente un intérêt expérimental fort. Il permet par exemple de mesurer les fluctuations de chemin optique entre deux points, indépendamment des fluctuations de la dispersion du milieu traversé, ce qui pourrait le rendre intéressant expérimentalement pour des mesures de distance dans un milieu matériel.

La matrice d'information de Fisher pour les paramètres d et m vaut donc :

$$\mathbf{I}_{\text{Fisher}} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0 \Delta \omega}{\sqrt{\Delta \omega^2 + \omega_0^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_0^2 + \Delta \omega^2} \end{pmatrix} \quad 4.2.48$$

On en déduit les expressions des plus petits paramètres d et m que l'on peut mesurer

$$\begin{cases} d_{\min} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\Delta \omega^2 + \omega_0^2}}{\omega_0 \Delta \omega} \\ m_{\min} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{N}\sqrt{\Delta \omega^2 + \omega_0^2}} \end{cases} \quad 4.2.49$$

Ces paramètres sont orthogonaux, cela signifie qu'il est possible, au sens de Cramér-Rao, de mesurer simultanément des fluctuations de la dispersion d'un milieu et du délai, au sens défini par m . Un tableau récapitulatif des modes de bruits associés aux mesures qui ont été introduites ici est présenté sur la figure 4.2.1.

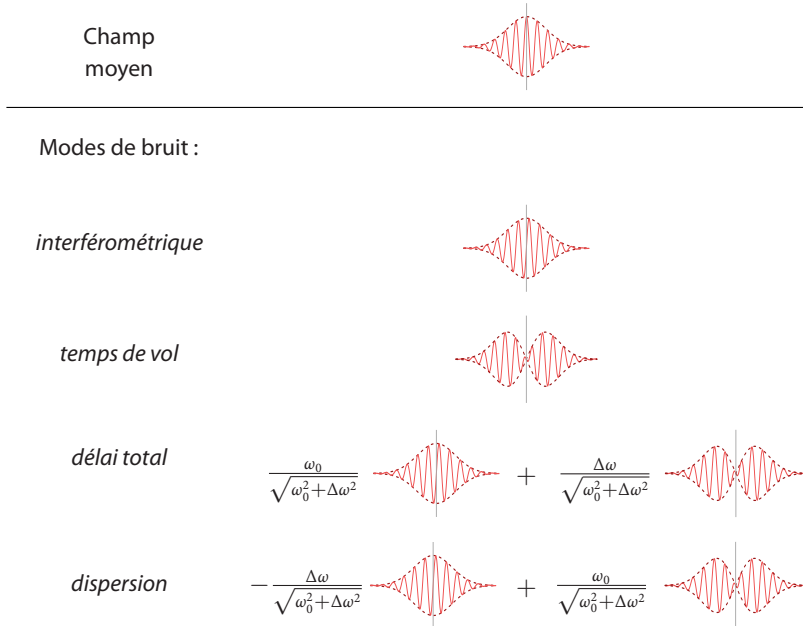


Fig. 4.2.1 : Mode de bruits associés à différentes mesures pour une impulsion gaussienne.

4.3 Mise en pratique

4.3.1 Valeurs numériques

Nous allons tout d'abord fournir quelques valeurs numériques pour les mesures précédentes. Nous allons considérer des mesures utilisant des trains d'impulsions gaussiennes de puissance moyenne $P = 1 \text{ mW}$, de longueur d'onde centrale $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ et de largeur spectrale à mi-hauteur $\Delta\lambda = 100 \text{ nm}$. Les mesures s'effectuent pendant un temps $T = 1 \text{ s}$. Toutes ces valeurs sont déterminées pour des états cohérents, il faut les pondérer d'un facteur σ si des états comprimés sont employés pour mesurer les paramètres.

Le nombre de photons du champ moyen vaut approximativement

$$N = \frac{PT}{hc/\lambda_0} \simeq 4 \times 10^{15} \quad 4.3.1$$

La pulsation centrale vaut environ

$$\omega_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} = 2.3 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1} \quad 4.3.2$$

et la largeur spectrale

$$\Delta\omega = 2\pi c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = 3 \times 10^{14} \text{ rad s}^{-1} \quad 4.3.3$$

Une mesure par interférométrie conduit ainsi à une limite de sensibilité de l'ordre de

$$p_{\min, \text{phase}} = \frac{1}{2\sqrt{N}\omega_0} = 3.4 \times 10^{-24} \text{ s} \quad 4.3.4$$

tandis qu'une mesure par temps de vol aboutit à une limite de

$$p_{\min, \text{temps de vol}} = \frac{1}{2\sqrt{N}\Delta\omega} = 2.6 \times 10^{-23} \text{ s}, \quad 4.3.5$$

qui est « peu précise » par rapport à la mesure interférométrique. Une mesure de délai optimale a donc une sensibilité très similaire à une mesure interférométrique dans les configurations que nous avons choisies.

$$p_{\min} = m_{\min} = \frac{1}{2\sqrt{N}\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}} \simeq 3.4 \times 10^{-24} \text{ s} \quad 4.3.6$$

Une mesure du délai entre l'enveloppe et la phase aboutit à une valeur proche de la sensibilité pour la mesure du délai de l'enveloppe, c'est-à-dire

$$d_{\min} = \frac{1}{2\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}}{\omega_0 \Delta\omega} = 2.6 \times 10^{-23} \text{ s} \quad 4.3.7$$

Ceci conduit à une limite de sensibilité pour une mesure de la dispersion de l'ordre de

$$n'_{\min}(\lambda_0) \times L = \frac{c}{\lambda_0} d_{\min} \simeq 1 \times 10^{-8} \quad 4.3.8$$

c'est-à-dire que la dispersion minimale que l'on puisse espérer mesurer, par m de matériau dispersif traversé, est de l'ordre de $n'_{\min}(\lambda_0) = 1 \times 10^{-8} \text{ m}^{-1}$

4.3.2 Possibilité d'atteindre ces valeurs

Les valeurs obtenues sont très petites et peuvent paraître difficile à atteindre expérimentalement. En réalité, ces valeurs ont été calculées pour des temps d'intégration très longs. Si l'on s'intéresse à des mesures de phénomènes fluctuant à haute fréquence, à puissance égale ces valeurs vont dépendre de la racine de la fréquence d'analyse. D'autre part, les bruits techniques vont devenir faibles à haute fréquence par rapport aux bruits quantiques. Les bruits techniques pourront par exemple avoir une dépendance fréquentielle typique en $1/f$ tandis que le bruit dû au shot noise est blanc. Il devient ainsi réaliste d'envisager d'atteindre ces limites. C'est dans ces conditions qu'il a été possible par exemple de mesurer des déplacements de faisceaux au-delà de la limite quantique standard [Treps 03]. On peut aussi remarquer que dans le domaine interférentiel, en utilisant des lasers commerciaux, [Smith 09] est limité par le bruit quantique pour ses mesures interférentielles.

4.3.3 Mesures réalisables

Nous disposons d'une méthode assez générale pour mesurer des paramètres, basée sur une détection homodyne dont l'oscillateur local correspond au mode de bruit du paramètre à mesurer. En considérant des systèmes multi-paramètres, nous pouvons même imaginer des mesures de certains paramètres indépendamment des fluctuations d'autres paramètres. La théorie que nous avons développée conduit naturellement à envisager différentes mesures.

Tout d'abord, on peut envisager des mesures de distance en mesurant la phase, le temps de vol ou les deux (dans le vide). Il est intéressant de remarquer que l'on a la possibilité ainsi de réaliser une mesure de temps de vol par un dispositif d'interférométrie linéaire.

Ensuite, on peut envisager des mesures optimales des fluctuations de la dispersion et réciproquement, on pourrait mesurer la quantité orthogonale, qui définit une mesure de chemin optique insensible aux fluctuations de la dispersion du milieu traversé. Étant donné que nombre de méthodes existantes sont limitées par cette dispersion et par ses fluctuations, cette mesure pourrait se révéler intéressante pour des mesures ultra-précises sur Terre.

Toutes ces mesures peuvent être réalisées avec un dispositif unique que nous allons décrire

4.3.4 Dispositif général de mesure de paramètres dans le domaine temporel

Le dispositif général que nous proposons pour une mesure d'un paramètre entre un émetteur et un récepteur, par exemple une mesure de distance ou de dispersion entre deux satellites, est présenté sur la figure 4.3.1. Les deux satellites sont chacun munis d'horloges, très précises, qui sont synchronisées entre elles. L'émetteur envoie des impulsions qui sont collectées (idéalement sans pertes) par le récepteur. Pendant le chemin, le champ électromagnétique est soumis à une perturbation p , qu'il s'agisse d'un délai, d'une dispersion ou autre. Le récepteur est muni d'une source laser, qui peut être mise en forme temporellement pour que le mode du champ moyen corresponde précisément à $\left. \frac{\partial u_1}{\partial p} \right|_0$. Cette source interne va ainsi servir d'oscillateur local à une détection homodyne qui va servir à mesurer le paramètre p de façon optimale, au sens de Cramér-Rao. Ceci signifie que ce dispositif, s'il n'introduit pas de bruit technique, est meilleur ou aussi bon que tout autre que l'on pourrait imaginer pour mesurer p , pour un signal reçu par le récepteur donné. En jouant sur la mise en forme temporelle de l'oscillateur local, on peut mesurer différents paramètres.

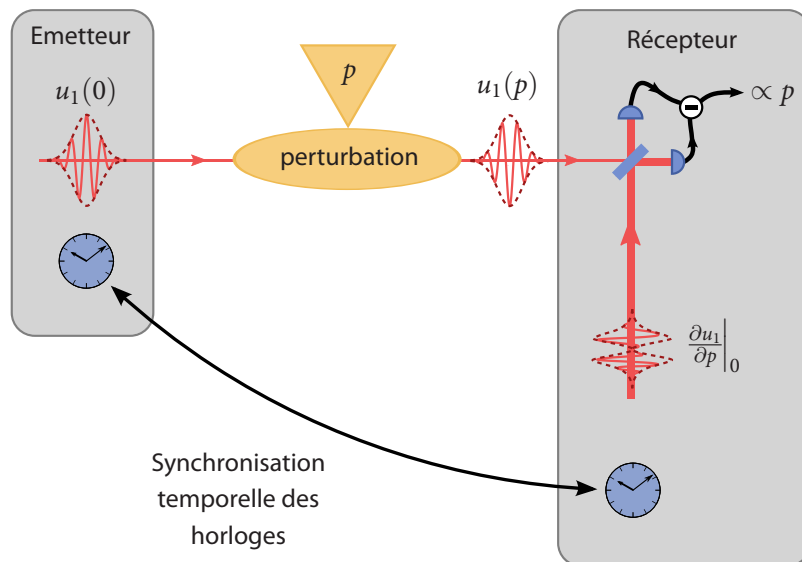


Fig. 4.3.1 : Principe général d'une mesure d'un paramètre dans le domaine temporel.

4.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre différents types de mesures de distances déjà existantes. Nous avons déterminé des limites pour des mesures de différents petits paramètres dans le domaine temporel, par exemple une distance, un temps de vol, une dispersion etc., dans un cadre théorique unifié. Nous avons enfin proposé une méthode générale de mesure optimale de ces paramètres à partir d'une détection homodyne.

5 Réalisation expérimentale de mesures de temps et de dispersion

Sommaire

5.1	Principe général	113
5.2	Les champs qu'il faut produire	114
5.3	Techniques existantes de mise en forme d'impulsions	114
5.4	Mise en forme d'impulsion par des compensateurs de Soleil-Bravais	116
5.4.1	Le compensateur de Soleil-Bravais	116
5.4.2	État de la lumière après passage dans une lame biréfringente	117
5.4.3	État de la lumière après passage dans un ou deux Soleil-Bravais	118
5.4.4	Avantages et inconvénients de cette méthode	119
5.5	Mesure de paramètre en utilisant des compensateurs de Soleil-Bravais	120
5.5.1	Principe	120
5.5.2	Asymétrie spectrale	120
5.5.3	Simulation numérique	122
5.6	Conclusion	123

Nous avons présenté dans le chapitre précédent une approche générale d'estimation d'un paramètre du champ électromagnétique, de façon optimale au sens de Cramér-Rao. Ce dispositif nécessite une synchronisation des horloges entre la source et le détecteur, ce qui est complexe expérimentalement. Nous allons proposer dans ce chapitre une configuration simplifiée utilisant une seule source lumineuse. Nous présenterons aussi une nouvelle méthode de mise en forme d'impulsions exploitant la biréfringence.

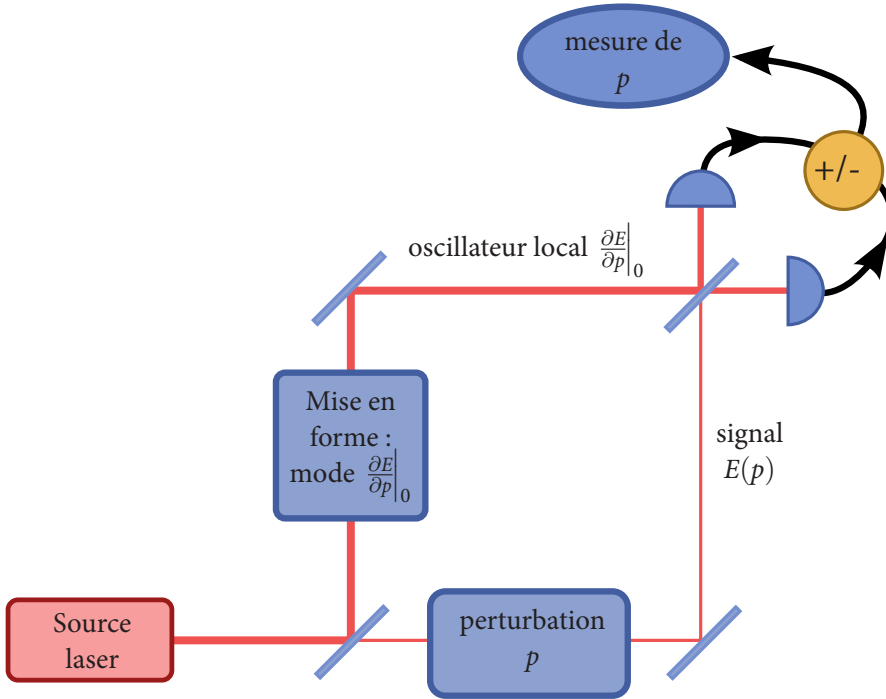


Fig. 5.1.1 : Schéma de mesure de paramètre à une seule source lumineuse

5.1 Principe général

Le dispositif représenté sur le schéma 4.3.1 implique la synchronisation de sources lumineuses à distance. Rendre cohérentes des sources indépendantes est difficile, c'est la raison pour laquelle nous allons proposer un schéma modifié utilisant une seule source lumineuse. Celle-ci sera utilisée à la fois par l'émetteur et le récepteur et l'on s'affranchira ainsi de la nécessité d'une synchronisation à distance.

La lumière produite par une source laser femtoseconde est séparée en deux faisceaux.

- Le premier faisceau est soumis à une perturbation p (par exemple une modulation de phase). Son champ (classique) a pour expression $E(p)$ et porte l'information sur le paramètre que l'on veut mesurer.
- Le second faisceau est mis en forme sur le mode $\frac{\partial E}{\partial p}|_0$. Il est intense par

rapport au premier.

- Les deux faisceaux sont utilisés comme signal et oscillateur local d'une détection homodyne, qui produit un signal proportionnel à p .

La méthode de mesure est optimale pour une mesure d'un champ $E(p)$ donné. Dans cette définition de l'optimalité, on ne considère bien sûr pas les ressources utilisées pour la détection, c'est-à-dire celles utilisées pour produire l'oscillateur local. Cette définition peut correspondre à une réalité expérimentale dans certaines situations. Par exemple, le facteur limitant d'une mesure sur un échantillon biologique peut être l'intensité maximale d'éclairement qu'il peut supporter.

5.2 Les champs qu'il faut produire

A chacun des paramètres que nous désirons mesurer correspond un mode de bruit, qui correspond à celui de l'oscillateur local dans notre schéma de mesure.

Nous avons montré que la mesure optimale d'un délai dans le vide nécessite de produire la dérivée temporelle totale du champ. Dans le domaine fréquentiel, si le signal s'écrit $\tilde{E}(\omega, p)$, cette dérivée est donc $i\omega\tilde{E}(\omega, 0)$. La mesure optimale d'un délai de phase met quant à elle en jeu uniquement la dérivée de la phase, c'est-à-dire $i\omega_0\tilde{E}(\omega, 0)$ pour un champ dont la porteuse est de pulsation ω_0 . D'une manière générale, on montre que tous les exemples de mesure précédents (délais de phase, d'enveloppe, dispersion, etc.) nécessitent de produire pour oscillateur local un champ de la forme

$$E_{OL} \propto i(\alpha\omega + \beta\omega_0)\tilde{E}(\omega, 0) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad 5.2.1$$

qui soit intense par rapport au champ signal que l'on souhaite mesurer. La production de cet oscillateur local va nécessiter l'emploi des techniques de mise en forme d'impulsions.

5.3 Techniques existantes de mise en forme d'impulsions

Nous allons présenter très brièvement dans cette section quelques méthodes de mise en forme d'impulsions. Pour une description plus détaillée, on pourra se référer à [Monmayrant 10], qui a servi de référence pour l'écriture de cette section.

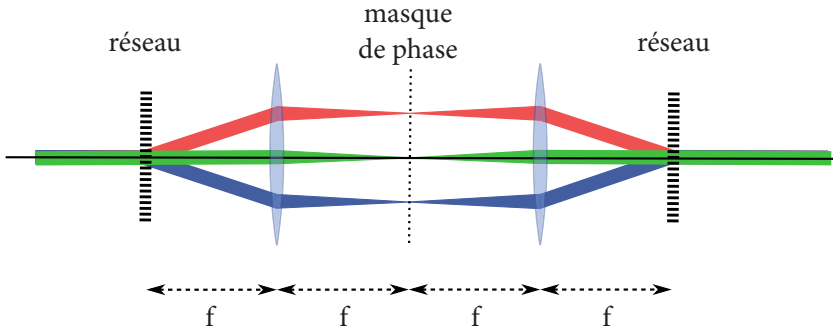


Fig. 5.3.1 : Principe de la mise en forme d'impulsions utilisant une ligne 4 - f

Différents phénomènes peuvent contribuer à déformer des impulsions en modifiant leur spectre, en phase ou en amplitude. On peut ainsi citer la dispersion de vitesse de groupe dans un milieu (cf. 6.1.3), les miroirs chirpés ou les lignes de compensation de dispersion, à prismes ou à réseaux (cf. 9.5). Ces méthodes permettent un contrôle grossier de la phase spectrale de champs lumineux.

L'utilisation d'une ligne 4 - F (cf. [Froehly 83]) a permis un contrôle beaucoup plus fin de l'amplitude et de la phase spectrales de peignes de fréquence. Le principe est représenté sur la figure 5.3.1. Le faisceau est tout d'abord dispersé par un élément dispersif comme un réseau ou un prisme, puis focalisé par une lentille ou un miroir. Au niveau du plan de focalisation, les différentes composantes spectrales sont ainsi étalées spatialement. A ce niveau, un masque de phase et/ou d'amplitude permet d'agir directement sur le spectre du peigne de fréquence. Les différentes composantes spectrales sont ensuite recombinaées de la même façon qu'elles ont été séparées. On dispose donc d'un moyen de contrôler la phase et l'amplitude spectrales de peignes de fréquence.

Le masque de fréquence peut être un simple masque fixe d'amplitude et de phase, ou un masque programmable, par exemple un SLM (Spatial Light Modulator) à cristaux liquides. Les caractéristiques du peigne peuvent alors être contrôlées dynamiquement.

Pour notre expérience, un masque fixe n'est pas optimal car nous avons besoin d'ajuster très finement les caractéristiques du peigne, il nous faut donc utiliser un dispositif réglable. D'autre part, les SLM à cristaux liquides sur le marché actuellement présentent l'inconvénient d'exhiber un important bruit de phase dû au rafraîchissement des pixels, même lorsque l'image est fixe (cf. [Tay 09]).

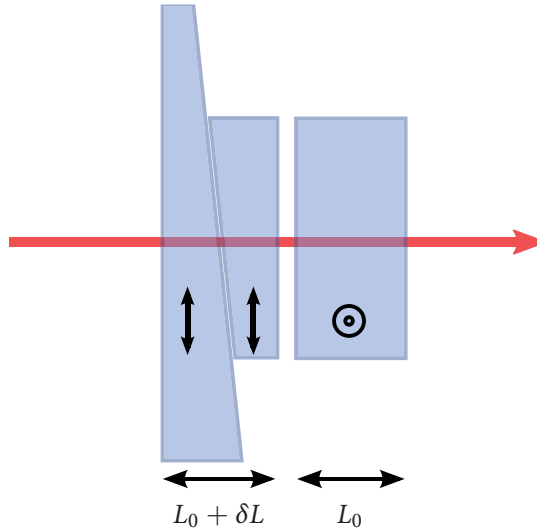


Fig. 5.4.1 : Schéma théorique d'un compensateur de Soleil-Bravais.

pour une caractérisation d'un SLM). Les méthodes existantes ne semblent donc pas satisfaire nos besoins pour cette expérience.

5.4 Mise en forme d'impulsion par des compensateurs de Soleil-Bravais

Nous allons maintenant introduire une nouvelle méthode pour mettre en forme des impulsions, qui va nous permettre de mesurer des paramètres du champ électromagnétique. L'idée originale de cette méthode est de Guillaume Labroille et Manuel Joffre du Laboratoire Optique et Bioscience, avec lesquels nous collaborons sur ce projet. J'ai contribué à ce projet en proposant un nouveau schéma de détection, qui sera présenté ici, ainsi que les simulations numériques qui y sont associées.

5.4.1 Le compensateur de Soleil-Bravais

Le compensateur de Soleil-Bravais, inventé indépendamment au milieu du 19^{ème} siècle par Bravais et Soleil [Bravais 51], est un dispositif permettant de modifier la polarisation de la lumière de manière réglable, en exploitant les pro-

priétés de biréfringence de cristaux uniaxes. Le compensateur de Soleil-Bravais (cf. Fig. 5.4.1) peut-être décrit par le dispositif suivant :

- deux prismes têtes-bêches de mêmes axes neutres. L'un des prismes peut-être translaté par une vis micrométrique, ce qui a pour effet de changer finement le chemin optique parcouru par la lumière. L'ensemble est donc équivalent à une unique lame biréfringente d'épaisseur variable, de longueur $L_0 + \delta L$.
- Une lame biréfringente d'épaisseur fixe L_0 , composée du même matériau, mais dont les axes neutres sont inversés par rapport au biprisme.

Le compensateur de Soleil-Bravais est similaire au compensateur de Babinet, la différence tenant dans le fait que la modification de la polarisation du faisceau lumineux incident est uniforme spatialement après passage dans un compensateur de Soleil-Bravais, tandis qu'elle varie transversalement pour un compensateur de Babinet. Le compensateur de Soleil-Bravais est aussi appelé compensateur de « Babinet-Soleil » ou de « Babinet-Soleil-Bravais ».

5.4.2 État de la lumière après passage dans une lame biréfringente

On rappelle brièvement les conséquences du passage de la lumière dans un milieu biréfringent. On appelle $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$ la base de vecteurs unitaires orientée selon les axes horizontaux et verticaux et $\{\vec{u}_o, \vec{u}_e\}$ une base de vecteurs unitaires selon les axes neutres du cristal, d'indices ordinaire n_o et extraordinaire n_e . On pose θ l'angle $(\vec{u}_x, \vec{u}_o)$. les conventions sont représentées sur la figure 5.4.2.

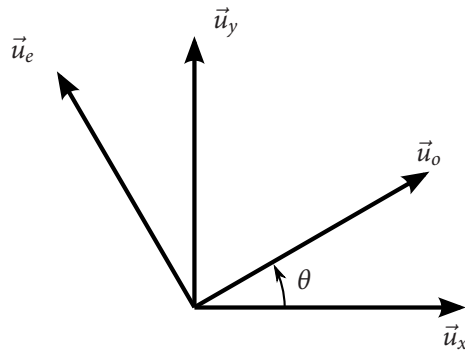


Fig. 5.4.2 : Conventions utilisées pour définir les axes.

$$\vec{u}_o = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) \quad 5.4.1$$

$$\vec{u}_e = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) \quad 5.4.2$$

On considère un champ monochromatique de pulsation ω polarisé linéairement selon l'axe y avant le passage dans le cristal. On peut donc écrire son amplitude complexe :

$$\vec{E}_i = E_i \vec{u}_y = \frac{E_i}{\sqrt{2}} (\sin \theta \vec{u}_o + \cos \theta \vec{u}_e) \quad 5.4.3$$

Après propagation dans une distance L de cristal biréfringent, l'amplitude peut s'écrire :

$$\vec{E}_s = \frac{E_i}{\sqrt{2}} \left(e^{i \frac{\omega n_o L}{c}} \sin \theta \vec{u}_o + e^{i \frac{\omega n_e L}{c}} \cos \theta \vec{u}_e \right) \quad 5.4.4$$

$$= \frac{E_i e^{i \frac{\omega n_o L}{c}}}{\sqrt{2}} (\sin \theta \vec{u}_o + e^{i \phi} \cos \theta \vec{u}_e) \quad 5.4.5$$

où il a été posé $\phi = \frac{\omega(n_e - n_o)L}{c}$. La nature de la polarisation de la lumière est changée, en fonction des valeurs de ϕ et de θ . Dans le cas général, l'onde est polarisée elliptiquement. Elle peut-être polarisée linéairement ou circulairement dans certains cas particuliers.

5.4.3 État de la lumière après passage dans un ou deux Soleil-Bravais

Le passage de la lumière dans le Soleil-Bravais est équivalent au passage à travers deux lames à faces parallèles biréfringentes du même cristal, une d'épaisseur variable $L_0 + \delta L$ et l'autre d'épaisseur fixe L_0 , dont les axes neutres sont tournés de 90 par rapport à la première. On considère maintenant uniquement le cas où $\theta = 45$. On montre alors facilement que l'état de la lumière après passage dans le Soleil-Bravais est :

$$\vec{E}_{SB}(\omega) = \frac{E_i e^{i \phi_m(\omega)}}{\sqrt{2}} \left(e^{-i \delta \phi(\omega)/2} \vec{u}_o + e^{i \delta \phi(\omega)/2} \vec{u}_e \right) \quad 5.4.6$$

On a posé $\phi_m(\omega) = \frac{\omega}{c} (n_o(\omega) + n_e(\omega)) (L_0 + \frac{\delta L}{2})$ la moyenne des phases accumulées entre les deux axes neutres et $\delta\phi(\omega) = \frac{\omega(n_e(\omega) - n_o(\omega))\delta L}{c}$ la différence des phases. Dans la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$, le champ s'écrit alors :

$$\vec{E}_{\text{SB}}(\omega) = E_i e^{i\phi_m(\omega)} \left(-i \sin\left(\frac{\delta\phi(\omega)}{2}\right) \vec{u}_x + \cos\left(\frac{\delta\phi(\omega)}{2}\right) \vec{u}_y \right) \quad 5.4.7$$

On s'intéresse maintenant au passage dans deux compensateurs de Soleil-Bravais consécutifs, orientés de la même façon mais composés de matériaux différents. En indexant les paramètres relatifs aux deux compensateurs par a et b , on peut alors écrire directement le champ en sortie :

$$\vec{E}_{\text{SB}}(\omega) = E_i e^{i(\phi_{a,m}(\omega) + \phi_{b,m}(\omega))} \left(-i \sin\left(\frac{\delta\phi_a(\omega) + \delta\phi_b(\omega)}{2}\right) \vec{u}_x + \cos\left(\frac{\delta\phi_a(\omega) + \delta\phi_b(\omega)}{2}\right) \vec{u}_y \right) \quad 5.4.8$$

On remarque que les composantes spectrales sur les deux directions sont toutes deux mises en forme en amplitude. On peut ajuster cette mise en forme en réglant les compensateurs. On remarque aussi que si l'on recombine les deux polarisations en utilisant un polariseur d'orientation réglable, il est possible de mettre en forme en amplitude et en phase le spectre.

5.4.4 Avantages et inconvénients de cette méthode

Cette méthode présente pour avantage d'être à la fois réglable et de ne pas ajouter de bruit aux faisceaux mis en forme. En revanche, il est nécessaire de tâtonner pour trouver les bons réglages. Cette méthode pourra d'autre part difficilement être ajustée dynamiquement. Les impulsions que l'on peut créer sont limitées à des profils spectraux relativement lisses, sans discontinuités. En revanche, les différents modes qui nous intéressent (cf. équ 5.2.1) nécessitent une fonction de transmission spectrale qui ne dépend que de façon affine de ω , et donc de façon non brusque. Cette technique, qui est théorique pour le moment, semble cependant bien répondre à nos besoins de mise en forme d'impulsions.

5.5 Mesure de paramètre en utilisant des compensateurs de Soleil-Bravais

5.5.1 Principe

Le principe de l'expérience consiste à séparer les deux composantes en polarisation à la sortie de deux Soleil-Bravais et à les utiliser comme signal et oscillateur local d'une détection homodyne. En jouant sur les différents degrés de liberté des Soleil-Bravais, on dispose d'un certain contrôle du terme $i \tan \left(\frac{\delta\phi_a(\omega) + \delta\phi_b(\omega)}{2} \right)$ et donc du rapport entre le signal et l'oscillateur local. Par exemple, si l'on veut mesurer un délai global, il faut que la relation

$$i \tan \left(\frac{\delta\phi_a(\omega) + \delta\phi_b(\omega)}{2} \right) \propto i\omega \quad 5.5.1$$

soit vérifiée pour les différentes composantes spectrales du peigne, c'est-à-dire autour de ω_0 . Pour pouvoir mesurer un paramètre, il faut aussi que l'oscillateur local soit intense devant le signal, il va donc être nécessaire d'atténuer ce dernier.

Un premier schéma simplifié ignorant les effets de dispersion des composants autres que les Soleil-Bravais est représenté sur la figure 5.5.1 .

Un faisceau produit par un laser femtoseconde passe à travers deux compensateurs de Soleil-Bravais, construits en matériaux différents. Les deux composantes de la polarisation sont séparées par un cube séparateur de polarisation. Une des deux est atténuée et subit ensuite une perturbation p . Cette voie représente le signal qui porte l'information sur le paramètre p à mesurer. L'autre voie subit un délai τ réglable et sa polarisation est tournée de 90. Cette voie constitue l'oscillateur local. Les deux faisceaux sont ensuite envoyés sur une détection homodyne, qui fournit un signal proportionnel à p .

5.5.2 Asymétrie spectrale

Les deux branches de l'interféromètre comportent des composants différents, ceci a pour conséquence que les faisceaux subissent des dispersions et des atténuations spectrales différentes selon les voies.

- Pour compenser les défauts de transmission spectrales, il faut veiller à utiliser des composants dont les traitements sont large bandes, des lames-d'ondes achromatiques et tenter de symétriser le plus possible les deux voies en utilisant des composants identiques. L'asymétrie sur la transmission peut se compenser par les réglages des compensateurs.

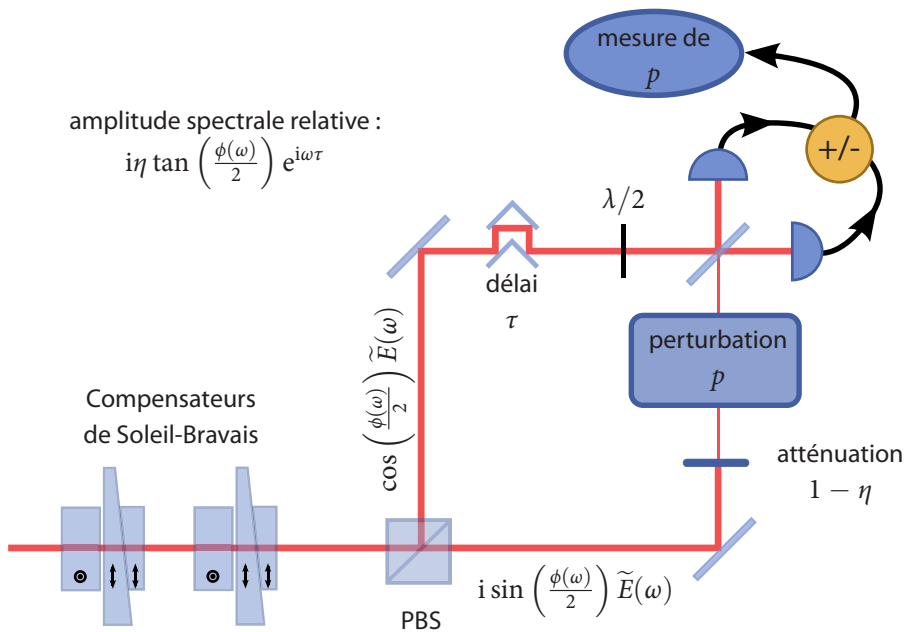


Fig. 5.5.1 : Schéma simplifié de la mise en forme en utilisant des compensateurs de Soleil-Bravais.

- Pour limiter les effets de l'asymétrie de la dispersion, on choisit tout d'abord des composants les moins dispersifs possible. Afin de compenser la dispersion, on peut envisager d'ajouter à l'intérieur de l'interféromètre des lames de verre d'épaisseurs réglables.

5.5.3 Simulation numérique

Principe et hypothèses Nous avons réalisé des simulations numériques en Mathematica du dispositif, en négligeant les effets de l'asymétrie des deux branches évoquée plus haut. La source lumineuse que nous avons considérée a un spectre gaussien, de longueur d'onde centrale 800 nm et de largeur à mi-hauteur 100 nm. Nous avons considéré des compensateurs de Soleil-Bravais en quartz et en fluorure de magnésium, dont nous avons utilisé les coefficients de Sellmeier ([Ghosh 99], [Dodge 84]) pour déterminer les dépendances spectrales de leurs indices de réfraction.

Nous avons ensuite calculé le recouvrement entre le mode simulé et le mode idéal pour effectuer une mesure donnée, ainsi que l'efficacité de conversion en puissance, en fonction des paramètres des Soleil-Bravais. L'optimisation a ensuite été effectuée manuellement en explorant les différents paramètres atteignables par le dispositif. Cette optimisation n'est pas convexe mais son comportement est tout de même suffisamment régulier pour qu'il soit possible de trouver simplement les points de fonctionnement optimaux.

Résultats Pour une mesure de délai total, il faut produire le mode $i\omega\tilde{E}(\omega)$, c'est-à-dire qu'il faut que

$$i \tan \left(\frac{\delta\phi_a(\omega) + \delta\phi_b(\omega)}{2} \right) \propto i\omega \quad 5.5.2$$

On montre qu'on obtient 38% de conversion vers un mode qui se recouvre au ppm près avec le mode théorique. La raison pour laquelle il est possible d'obtenir une aussi bonne conversion est que le mode à produire est très proche du mode de départ dans ce cas précis. Leur recouvrement est grand tant que $\frac{\Delta\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1$ (cf. équ. 4.2.31).

Pour une mesure de temps de vol, pour laquelle il faut produire le mode $i(\omega - \omega_0)\tilde{E}(\omega)$, qui est, lui, très différent du mode de départ, on montre qu'il est possible d'obtenir un recouvrement supérieur à 99.95% et une efficacité de conversion meilleure que 2.4%.

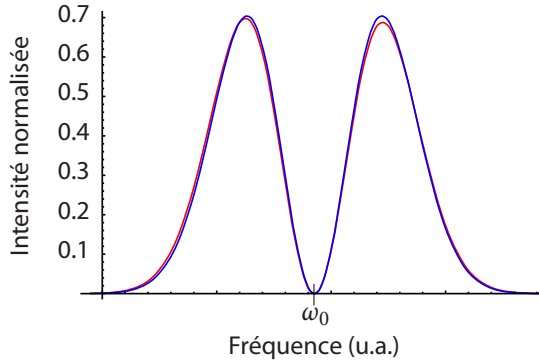


Fig. 5.5.2 : Comparaison du mode obtenu numériquement avec le mode de bruit idéal pour une mesure de temps de vol. L'intensité spectrale est représentée. Le mode simulé est en rouge, le mode idéal est en bleu. Le recouvrement entre les modes est supérieur à 99.95%.

Conclusion Les simulations numériques montrent qu'il est possible de produire les modes que nous voulons pour effectuer différentes mesures de temps ou de dispersion. Il est important cependant de noter que ces simulations ne prennent pas en compte les effets de la dispersion et des transmissions spectrales des traitements dans l'interféromètre, qui modéreront certainement ces résultats théoriques.

5.6 Conclusion

Nous avons présenté une méthode originale pour mesurer des petits paramètres de délais temporels ou de dispersions, qui avaient été évoqués théoriquement au chapitre précédent. Cette méthode utilise des compensateurs de Soleil-Bravais, dont les propriétés de biréfringence permettent de mettre en forme les amplitudes relatives entre les deux composantes en polarisation du champ. En séparant ces composantes, il est possible de produire un signal et un oscillateur local, qui permettent de mesurer une petite perturbation du signal par l'intermédiaire d'une détection homodyne. Nous avons présenté une explication théorique et des simulations numériques qui montrent la viabilité du dispositif. Certains effets problématiques n'ont pas été pris en compte et devront être compensés expérimentalement. C'est la tâche à laquelle s'attelle Guillaume Labroille, qui a commencé à mettre en place cette expérience.

Deuxième partie

Production expérimentale d'états non classiques en régime femtoseconde

6 Peignes de fréquence et cavités résonnantes

Sommaire

6.1	Impulsions courtes et peignes de fréquence	125
6.1.1	Les lasers à verrouillage de mode	125
6.1.2	Peigne de fréquence et impulsions femtoseconde	126
6.1.3	Propagation des impulsions courtes dans les milieux dispersifs linéaires	129
6.2	Cavités optiques dispersives injectées par des peignes de fréquence	132
6.2.1	Modèle et description mathématique générale d'un interféromètre de Fabry-Pérot	133
6.2.2	Peigne de fréquence sans CEO et cavité non dispersive	135
6.2.3	Prise en compte du CEO, de la dispersion de vitesse de phase et de la phase de Gouy dans la cavité	145
6.2.4	Effets de la GVD dans la cavité	147
6.2.5	Application : conception d'une cavité femtoseconde de haute finesse	149

Ce chapitre a pour but de servir d'introduction aux peignes de fréquence, ainsi que de présenter des résultats analytiques détaillés du couplage de ces peignes de fréquences dans des cavités résonnantes dispersives non absorbantes.

6.1 Impulsions courtes et peignes de fréquence

6.1.1 Les lasers à verrouillage de mode

Un laser peut émettre des ondes lumineuses à des fréquences optiques vérifiant la condition de bouclage en phase sur un tour de cavité. L'interférence entre les ondes après des réflexions multiples dans la cavité doit en effet être

constructive, ce qui mathématiquement se traduit par le fait que la phase accumulée sur un tour de cavité soit un multiple de 2π . Les différentes fréquences pouvant être émises correspondent à des *modes longitudinaux* du laser. Dans un laser monomode continu, la courbe de gain du milieu amplificateur et les conditions de compétitions entre modes imposent qu'un seul mode longitudinal résonne dans la cavité à un moment donné. Dans un laser multimode en revanche, un certain nombre de fréquences peuvent laser simultanément et si un grand nombre de fréquences sont émises, on peut parler de peigne de fréquence.

Le *verrouillage de mode* (« mode-locking ») [Ye 05] est le processus par lequel ces différents modes sont reliés par une relation de phase bien définie conduisant, dans le domaine temporel, à des *impulsions brèves*. Ce phénomène est induit dans le laser par un gain plus élevé pour un fonctionnement impulsional que pour un fonctionnement continu. Différents mécanismes sont envisageables, actifs ou passifs, et dans ce dernier cas on parle alors d'absorption saturable. Le premier laser à avoir fonctionné en verrouillage de mode fut un laser à Hélium-Néon [DiDomenico Jr 64, Crowell 65], produisant des impulsions nanoseconde, qui fut suivi en quelques années d'un grand nombre de lasers, utilisant divers milieux amplificateurs [Smith 70]. Le laser à Titane-Saphir [Spence 91] bouleversa le domaine dans les années 1990 et permit d'atteindre le régime femtoseconde et la mise sur le marché de solutions commerciales ultra-brèves.

Ces lasers ont débouché sur de nombreuses applications, tant pour leur caractéristiques temporelles (impulsions ultra-brèves) que fréquentielles (peignes de fréquence). La très forte concentration dans le temps et dans l'espace de l'énergie des impulsions permet d'obtenir facilement des effets intéressants dans les matériaux. Les lasers femtoseconde sont par exemple maintenant couramment utilisés pour découper par photoablation la cornée, en chirurgie des yeux [Juhász 99]. La grande stabilité de ces lasers et la précision de la relation entre les différentes fréquences du peigne sur un large spectre ont d'autre part permis de nombreux développements métrologiques, qui ont conduit aux travaux couronnés du prix Nobel 2005 de Theodor W. Hänsch et John L. Hall [Jones 00a, Holzwarth 00].

6.1.2 Peigne de fréquence et impulsions femtoseconde

Intéressons-nous tout d'abord à une unique impulsion lumineuse se propageant dans le vide. En faisant l'hypothèse que son spectre est limité, en pulsa-

tion, à des valeurs proches de ω_0 , on peut écrire le champ électromagnétique de cette impulsion unique en un point de l'espace sous la forme d'un produit d'une enveloppe lentement variable et d'une porteuse à la fréquence ω_0 :

$$E_{\text{impulsion}}(t) = g(t)e^{-i\omega_0 t} \quad 6.1.1$$

Le spectre $E(\omega)$ étant la transformée de Fourier du champ, cela signifie que pour obtenir des impulsions courtes, il faut nécessairement des spectres larges.

Imaginons maintenant la situation idéale où un laser à verrouillage de modes produit des impulsions successives *rigoureusement identiques*, séparées par un intervalle de temps τ , correspondant au temps de parcours de la cavité optique. L'expression du champ dans le domaine temporel peut alors s'écrire sous la forme d'une somme d'impulsions

$$E_{\text{train}}(t) = \sum_n g(t + n\tau)e^{-i\omega_0(t+n\tau)} \quad 6.1.2$$

Introduisant maintenant la distribution « peigne de Dirac » Δ_τ , définie comme étant une somme infinie de distributions de Dirac séparées de τ

$$\Delta_\tau(t) \equiv \sum_n \delta(t - n\tau) \quad 6.1.3$$

il est naturel de réécrire l'expression du champ d'un train d'impulsions sous la forme d'un produit de convolution entre ce peigne de Dirac et une unique impulsion

$$E_{\text{train}}(t) = \int \Delta_\tau(t' - t)g(t')e^{-i\omega_0 t'} dt' \quad 6.1.4$$

$$= (\Delta_\tau \star E_{\text{impulsion}})(t) \quad 6.1.5$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac étant elle-même un peigne de Dirac, on montre alors que le spectre peut s'écrire sous la forme d'un *peigne de Dirac en fréquence, limité par une enveloppe correspondant au spectre d'une impulsion unique*. L'intervalle entre deux pulsations du peigne est alors de $\omega_r = 2\pi/\tau$, correspondant à l'intervalle spectral libre de la cavité du laser et au taux de répétition de celui-ci.

$$E_{\text{train}}(\omega) = E_{\text{impulsion}}(\omega)\Delta_{\omega_r}(\omega)$$

6.1.6

Les fréquences du peigne, correspondant aux modes longitudinaux du laser, sont de la forme

$$\omega_n = n\omega_r$$

6.1.7

Cette description du peigne de fréquence est idéalisée, notamment parce que nous avons négligé la dispersion à l'intérieur de la cavité laser. D'impulsion en impulsion, l'écart entre l'enveloppe et la porteuse évolue sous l'effet de la dispersion de vitesse de phase. On appelle cet écart de phase entre le maximum de l'enveloppe et celui de la porteuse la *CEP* (*Carrier-Envelope Phase*, ou *phase enveloppe-porteuse* en français). Les paramètres du laser, par exemple le taux de répétition et la dispersion, peuvent aussi évoluer en fonction du temps.

Négligeons pour l'instant ces sources de bruit et considérons uniquement les effets de la dispersion. Sur un tour de cavité, le délai entre la porteuse et l'enveloppe peut s'écrire, en phase, sous la forme

$$\Delta\phi_{\text{CE}} = \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_\phi} \right) \omega_0 L_0$$

6.1.8

où v_g et v_ϕ représentent les vitesses de groupe et de phase *moyennes* sur un tour de cavité et L_0 le chemin optique à la fréquence ω_0 d'un tour de cavité. Si l'on fait l'hypothèse que pour l'impulsion « zéro » la CEP est nulle, pour l'impulsion n

$$\phi_{\text{CE}} = n\Delta\phi_{\text{CE}}$$

6.1.9

Le champ électromagnétique peut maintenant s'écrire sous la forme

$$E_{\text{train}}(t) = \sum_n g(t + n\tau) e^{-i\omega_0(t+n\tau)} e^{-in\Delta\phi_{\text{CE}}}$$

6.1.10

Les propriétés de la transformation de Fourier permettent de montrer simplement que le peigne de fréquence est maintenant décalé par rapport à l'origine. Il a pour expression

$$E_{\text{train}}(\omega) = E_{\text{impulsion}}(\omega) \Delta_{\omega_r}(\omega - \omega_{\text{CE}})$$

6.1.11

où la fréquence

$$\omega_{\text{CE}} = \frac{\Delta\phi_{\text{CE}}}{2\pi} \omega_r$$

6.1.12

est appelée *CEO*, pour *Carrier-Envelope Offset* (écart porteuse-enveloppe en français). D'une manière générale, les fréquences du peigne s'écrivent sous la forme

$$\omega_n = \omega_{\text{CE}} + n\omega_r$$

6.1.13

Un schéma représentant les deux points de vue, temporel et fréquentiel, est présenté sur la figure 6.1.1. Les valeurs de ω_{CE} et ω_r sont soumises au bruit technique et vont fluctuer dans le temps, elles peuvent cependant être asservies, comme nous le verrons par la suite.

6.1.3 Propagation des impulsions courtes dans les milieux dispersifs linéaires

Lorsqu'une impulsion se propage dans un milieu linéaire homogène isotrope, les différentes composantes spectrales accumulent des phases différentes. On appelle $\phi(\omega)$ cette *phase spectrale*. Si $\vec{k}(\omega, z)$ est le vecteur d'onde du champ lors de la propagation d'une impulsion selon l'axe z , la phase spectrale accumulée s'écrit

$$\phi(\omega) = \int k(\omega, z) dz$$

6.1.14

Lors d'une propagation dans un matériau linéaire, homogène, isotrope, la phase spectrale accumulée dépend uniquement du type de matériau et de l'épaisseur traversée, elle est indépendante des caractéristiques du faisceau lumineux, par exemple, de son intensité ou de la durée des impulsions.

Les réflexions sur des miroirs introduisent elles aussi des phases ayant une dépendance spectrale, ce que l'on peut interpréter qualitativement par le fait que les différentes fréquences pénètrent plus ou moins dans les miroirs avant d'être réfléchies.

Sous réserve que le spectre soit localisé autour d'une fréquence ω_0 et pour différentes sources de dispersion, on peut effectuer le développement de Taylor suivant et s'intéresser aux termes d'ordres successifs :

$$\phi(\omega) \simeq \phi(\omega_0) + \phi'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\phi''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

6.1.15

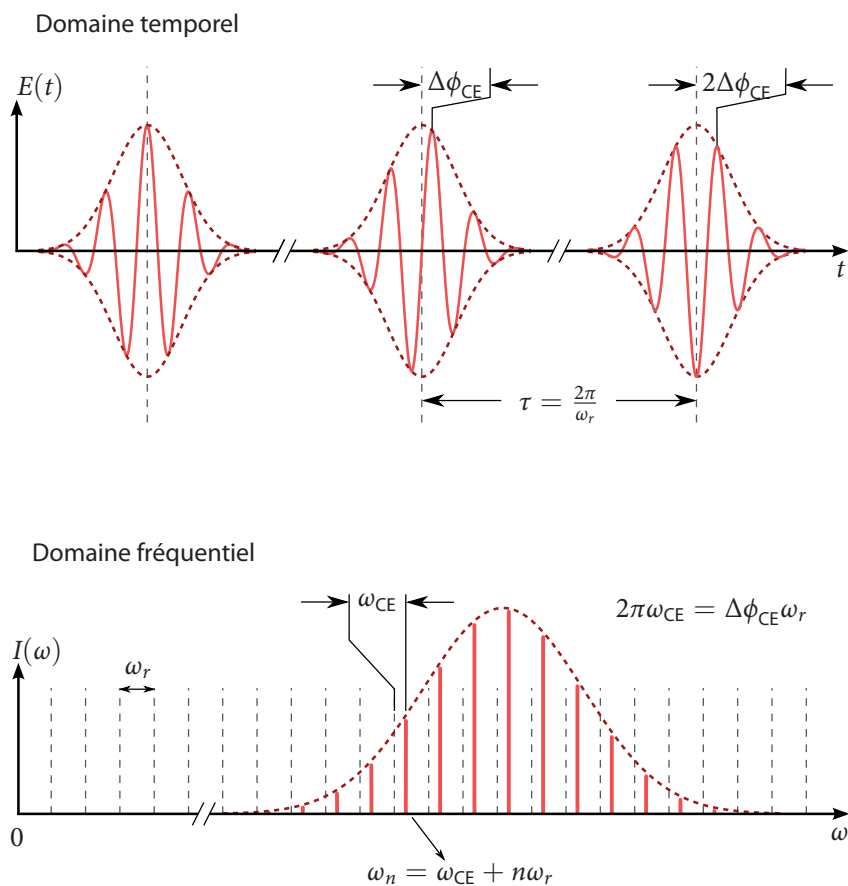


Fig. 6.1.1 : Équivalence entre les peignes de fréquence et les trains d'impulsions ultracourtes.

Phase linéaire La dispersion de vitesse de phase est caractérisée par le terme $\phi'(\omega_0)$ de phase linéaire. Elle a pour conséquence que la porteuse et l'enveloppe se propagent à des vitesses différentes mais ne déforme pas l'enveloppe.

Phase quadratique La *dispersion de vitesse de groupe* (GVD, *Group Velocity Dispersion*) induit le terme de phase quadratique $\phi''(\omega_0)$. Les différentes composantes spectrales ne se propagent plus à la même vitesse, l'impulsion va se déformer. Les différentes composantes spectrales vont aussi se répartir vers l'avant ou l'arrière du front d'onde, entraînant un glissement de fréquence, appelé *chirp* (gazouillis en français, peu usité), la fréquence de la porteuse évoluant continûment. On appelle GDD la *dispersion de délai de groupe* (*Group Delay Dispersion*).

6.1.3.1 Exemple d'une impulsion gaussienne

Prenons l'exemple d'une impulsion d'enveloppe gaussienne, de durée à mi-hauteur en intensité Δt et de porteuse ω_0 . Le champ électrique a pour expression dans le domaine temporel

$$E(t) = E_0 e^{-2 \log 2 \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2} e^{-i\omega_0(t)} \quad 6.1.16$$

Dans le domaine fréquentiel, cette impulsion est caractérisée par un spectre gaussien également

$$E(\omega) = 2\sqrt{\log 2} \frac{E_0}{\Delta\omega} e^{-2 \log 2 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2} \quad 6.1.17$$

où $\Delta\omega = 4 \log 2 / \Delta t$ représente maintenant la largeur spectrale à mi-hauteur en intensité. Après propagation dans un milieu dispersif entraînant l'accumulation d'une phase quadratique $\phi''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2/2$, la nouvelle durée de l'enveloppe à mi-hauteur s'écrit

$$\Delta t_{\text{élargi}} = \Delta t \sqrt{1 + \left(\frac{4 \log 2 \phi''(\omega_0)}{\Delta t^2}\right)^2} \quad 6.1.18$$

L'expression de Δt en fonction de ϕ'' est donc hyperbolique. On remarque que l'expression est analogue à l'évolution du diamètre d'un faisceau gaussien dans

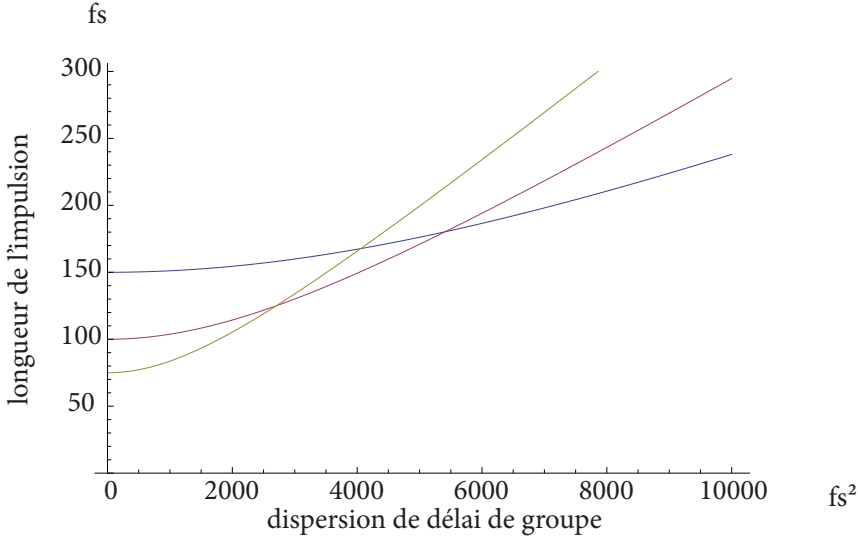


Fig. 6.1.2 : Graphe représentant l'évolution de la longueur de différentes impulsions en fonction de la dispersion du délai de groupe.

l'espace libre, la dispersion prenant la place de la diffraction. Pour ϕ'' suffisamment grand, on a aussi la relation asymptotique

$$\Delta t_{\text{élargi}} \propto \frac{\phi''}{\Delta t^2} \quad 6.1.19$$

ce qui signifie que plus les impulsions sont courtes initialement plus elles sont sensibles aux effets de la dispersion de vitesse de groupe le long de leur propagation. Un graphe représentant l'évolution de la durée d'impulsions de tailles différentes est présenté sur la figure 6.1.2.

6.2 Cavités optiques dispersives injectées par des peignes de fréquence

Nous allons nous intéresser dans cette section au couplage d'un peigne de fréquence dans une cavité optique. La théorie des cavités résonnantes en régime continu est bien connue mais de nouveaux effets apparaissent en régime

impulsionnel. Alfred Kastler étudia les interféromètres de Fabry-Pérot en impulsion dans les années 1970 [Kastler 74]. L'asservissement d'un peigne de fréquence sur une cavité optique fut réalisé par Jones et al. en 2000 [Jones 00b]. Des cavités optiques injectées par des peignes de fréquence sont maintenant utilisées pour des mesures d'absorption [Gherman 02]. L'étude des cavités optiques dans ce régime est intéressante pour cette thèse car l'OPO que nous allons présenter dans les chapitres suivants fonctionne en régime femtoseconde. D'autre part, nous aimerions construire une cavité femtoseconde de haute finesse afin de rendre le faisceau du laser monomode dans le domaine spatial et éventuellement d'asservir le laser lui-même sur cette cavité de référence. Nous allons négliger les effets d'absorption et considérer uniquement les effets de dispersion dans la cavité, du peigne incident ou de la cavité.

Bien que des calculs similaires existent déjà dans la littérature [Petersen 03, Chiche 09], il a paru pertinent de présenter différents résultats utiles à cette thèse, y compris de nouvelles expressions semi-analytiques du comportement hors résonance afin de bien caractériser les différents effets en jeu.

6.2.1 Modèle et description mathématique générale d'un interféromètre de Fabry-Pérot

Dans une cavité non dispersive, parcourue par des ondes planes et parfaitement résonnante, la phase $\phi(\omega_n) = \frac{\omega_n L}{c}$ accumulée sur un tour est un multiple de 2π , pour tout n . Dans une cavité dispersive en revanche, ou si l'on considère la phase de Gouy induite par le profil spatial des modes résonnants dans la cavité, l'expression de $\phi(\omega_n)$ est plus complexe et ne peut plus être un multiple de 2π pour toutes les fréquences simultanément. Tous les modes ne vont donc plus pouvoir être parfaitement résonnants et si la cavité est réglée pour que le mode de fréquence ω_0 soit résonnant, alors les modes sur les ailes du spectre risquent d'être filtrés (réfléchis) par la cavité.

On considère une cavité linéaire composée de deux miroirs de coefficients de réflexion et de transmission en champ r et t , et de coefficients en intensité $R = r^2$ et $T = t^2$. Le schéma général est présenté sur la figure 6.2.1. On considère que ces coefficients ne dépendent pas de la fréquence sur l'étendue spectrale considérée. Le spectre injecté dans la cavité est un peigne de fréquence dont on négligera la largeur spectrale de chaque dent et que l'on appellera $E_0(\omega_n)$. Le champ transmis par la cavité s'écrit donc

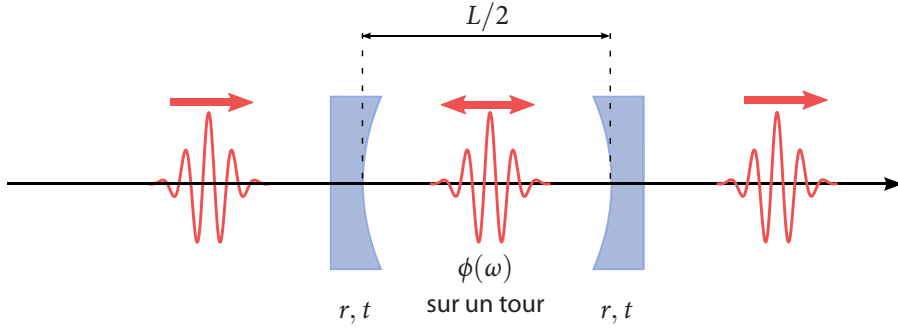


Fig. 6.2.1 : Schéma général considéré dans cette section. Des impulsions femtoseconde sont couplées dans une cavité résonnante. La cavité est de longueur L et le champ accumule une phase spectrale $\phi(\omega)$ sur un tour. L'impulsion réfléchi sur le premier miroir n'est pas représentée ici.

$$E_t(\omega_n) = t^2 E_0(\omega_n) \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} e^{-ik\phi(\omega_n)} \quad 6.2.1$$

$$= \frac{TE_0(\omega_n)}{1 - Re^{-i\phi(\omega_n)}} \quad 6.2.2$$

L'intensité peut maintenant s'écrire, en fonction de l'intensité incidente, sous la forme

$$I(\omega_n) = \frac{T^2 I_0(\omega_n)}{1 + R^2 - 2R \cos \phi(\omega_n)} \quad 6.2.3$$

$$= \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\phi(\omega_n)}{2} \right)} \quad 6.2.4$$

Nous allons nous intéresser uniquement à des cavités de haute finesse, pour lesquelles on a $R \simeq 1$ et

$$F \simeq \frac{\pi}{1-R} \quad 6.2.5$$

On peut donc réécrire l'expression de l'intensité incidente sous la forme appro-

chée

$$I(\omega_n) \simeq \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\phi(\omega_n)}{2}\right)} \quad 6.2.6$$

Dans la suite de ce chapitre, on se placera souvent dans des situations où $\phi(\omega)$ est petit (modulo 2π), afin de pouvoir utiliser l'expression approchée au premier ordre bien connue

$$I(\omega_n) \simeq \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{F}{\pi}\right)^2 (\phi(\omega_n)[2\pi])^2} \quad \text{si } (\phi(\omega_n)[2\pi]) \ll 2\pi \quad 6.2.7$$

6.2.2 Peigne de fréquence sans CEO et cavité non dispersive

Si l'on considère un peigne de fréquence sans CEO, alors on peut écrire que chaque fréquence du peigne est un multiple de ω_r

$$\omega_n = n\omega_r \quad 6.2.8$$

Si l'on néglige également la dispersion dans la cavité ainsi que les effets dus à la phase de Gouy, la phase accumulée sur une distance L peut s'écrire

$$\phi(\omega_n) = \frac{\omega_n L}{c} \quad 6.2.9$$

6.2.2.1 Résonance totale

Si $L = L_0 = \frac{2\pi c}{\omega_r}$, L_0 correspondant à la distance entre deux impulsions et au chemin optique de la cavité du laser, alors

$$\phi(\omega_n) = 2n\pi \quad 6.2.10$$

$$= 0[2\pi] \quad 6.2.11$$

Le spectre transmis a donc pour expression dans ce cas

$$I(\omega_n) = \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2(n\pi)} \quad 6.2.12$$

$$= I_0(\omega_n) \quad 6.2.13$$

La transmission du peigne de fréquence est totale, à toutes les fréquences. La longueur de cavité L_0 est la seule pour laquelle toutes les fréquences sont transmises complètement. *Dans le domaine temporel, elle correspond à la situation où les impulsions, après des tours successifs dans la cavité, ont leurs porteuses en phase et leurs enveloppes synchronisées temporellement.*

6.2.2.2 Étude au voisinage de la résonance totale

Étudions tout d'abord la situation où la longueur de la cavité est légèrement différente de la valeur idéale d'un facteur $\delta \ll \lambda_0$, où λ_0 est la longueur d'onde centrale du peigne de fréquence injecté dans la cavité. On pose donc

$$L = L_0 + \delta \quad 6.2.14$$

La phase accumulée sur un tour de cavité vaut donc maintenant, à 2π près :

$$\phi(\omega_n) = \frac{\omega_n(L_0 + \delta)}{c} = \frac{\omega_n \delta}{c} [2\pi] \quad 6.2.15$$

Le spectre transmis par la cavité s'écrit donc

$$I(\omega_n) = \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega_n \delta}{2c}\right)} \quad 6.2.16$$

$$\simeq \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{F\delta}{\pi c} \omega_n\right)^2} \quad 6.2.17$$

En imaginant maintenant que la largeur spectrale est suffisamment petite pour que $\omega_n \simeq \omega_0$, la transmission spectrale de la cavité ne dépend plus de la fréquence.

$$I(\omega_n) \simeq \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(2F \frac{\delta}{\lambda_0}\right)^2} \quad 6.2.18$$

Une allure typique de cette courbe de transmission est représentée sur la figure 6.2.2. En conclusion, au voisinage de la résonance totale, donc pour δ petit devant λ_0 , la transmission ne dépend pas de la fréquence. La transmission est lorentzienne en longueur de cavité, de largeur à mi-hauteur $\frac{\lambda_0}{F}$. On retrouve le

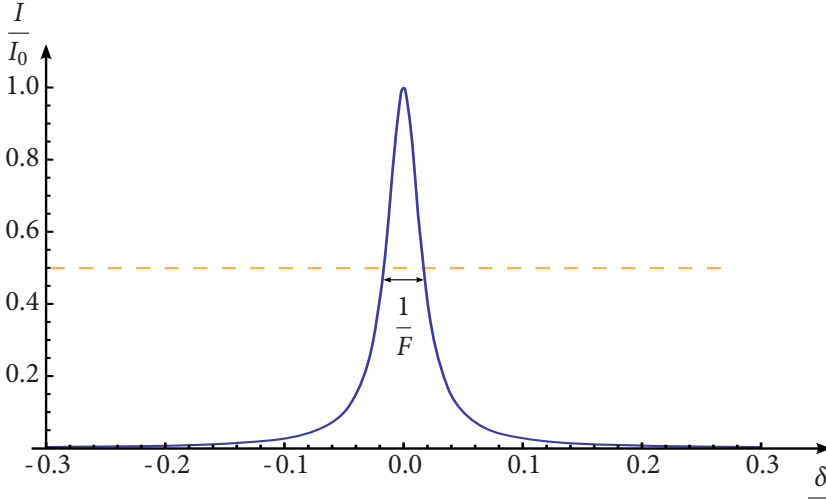


Fig. 6.2.2 : Allure de la transmission du pic central de résonance, en fonction de la longueur de la cavité, en l'absence de dispersion dans la cavité et en négligeant le CEO du peigne de fréquence. La finesse de la cavité est de 30.

résultat classique d'une cavité de finesse F injectée par une onde continue de longueur d'onde λ_0 .

6.2.2.3 Résonances partielles

En dehors de cette longueur L_0 , toutes les fréquences du peigne ne peuvent pas être résonnantes simultanément. Pour certaines longueurs de cavité cependant, un certain nombre de fréquences peuvent être résonnantes, conduisant à une transmission d'une fraction significative de l'intensité totale. On pose $L = L_0 + d$, le paramètre d n'étant pas considéré petit devant λ . La phase accumulée peut maintenant s'écrire, à 2π près :

$$\phi(\omega_n) = \frac{\omega_n(L_0 + d)}{c} = \frac{\omega_n d}{c} [2\pi] \quad 6.2.19$$

La fréquence ω_0 est entièrement transmise si $\phi(\omega_0) = \frac{\omega_0 d}{c} = 0[2\pi]$. Ceci est vérifié si la longueur d est un multiple de la longueur d'onde centrale $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$. Ainsi, pour des longueurs de cavité $L_0 + m\lambda_0$, la fréquence centrale est parfaitement résonnante dans la cavité. Les autres fréquences ne seront pas parfaitement résonnantes mais il pourra y avoir au moins une certaine transmission

de l'intensité totale et donc le peigne sera partiellement résonnant dans la cavité. On parle donc de *résonance partielle d'ordre m* . La phase spectrale pour ces résonances partielles s'écrit ainsi

$$\phi(\omega_n) = m \frac{\omega_n}{c} \lambda_0 [2\pi] \quad 6.2.20$$

$$= 2\pi m \frac{\omega_n}{\omega_0} [2\pi] \quad 6.2.21$$

$$= 2\pi m \frac{\omega_n - \omega_0}{\omega_0} [2\pi] \quad 6.2.22$$

Cette dernière expression est petite si la largeur spectrale autour de la fréquence ω_0 est petite. Sous cette approximation, on peut écrire la transmission du spectre pour une résonance d'ordre m sous la forme approchée

$$I(\omega_n) = \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\pi m \frac{\omega_n - \omega_0}{\omega_0}\right)} \quad 6.2.23$$

$$\simeq \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2mF}{\omega_0}\right)^2 (\omega_n - \omega_0)^2} \quad 6.2.24$$

En conclusion, la transmission du spectre pour une résonance d'ordre m est une lorentzienne centrée autour de ω_0 , de valeur maximale 1 et de largeur à mi-hauteur $\frac{\omega_0}{mF}$. Différents exemples de transmissions *spectrales* sont présentés sur la figure 6.2.3. Le spectre transmis par la cavité sera donc le produit de ces fonctions de transmission par le spectre incident.

6.2.2.4 Nombre de résonances partielles

La fréquence centrale ω_0 est toujours parfaitement transmise par la cavité pour les résonances partielles successives, même d'ordres élevés. La cavité étant linéaire, ces résonances correspondent simplement à celles d'une cavité injectée par une onde monochromatique de longueur d'onde λ_0 . En revanche, la largeur spectrale qui est effectivement transmise par la cavité devient de plus en plus petite quand l'ordre de la résonance partielle augmente, ce qui peut se voir simplement comme un phénomène de brouillage entre les différentes composantes spectrales. Comme le peigne du laser injecté dans la cavité présente un grand

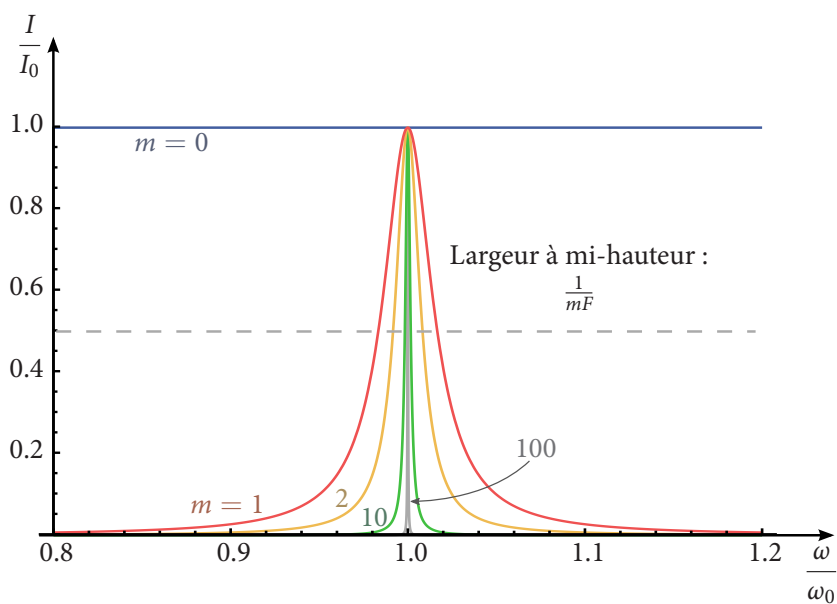


Fig. 6.2.3 : Transmission spectrale de la cavité pour différentes résonances partielles d'ordre m . La finesse de la cavité est de 30.

nombre de fréquences, la fraction totale de l'énergie transmise va devenir négligeable pour des résonances d'ordres élevés. Pour caractériser le nombre de résonances partielles, on prend pour critère le nombre N de résonances, partielles ou totales, pour lesquelles au moins 50 % de l'intensité à la fréquence $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ est transmise. A partir de l'expression précédente, on montre qu'il existe

$$N = 1 + \frac{\omega_0}{F\Delta\omega} \quad 6.2.25$$

résonances vérifiant ce critère, réparties de part et d'autre de la résonance totale, obtenue pour une longueur L_0 . Ceci signifie que l'on observera des résonances significatives sur une plage de longueur ΔL .

$$\Delta L = 1 + \frac{2\pi c}{\Delta\omega F} \quad 6.2.26$$

Ceci s'interprète comme un critère de recouvrement des enveloppes des impulsions avec des réflexions successives, le terme $2\pi c/\Delta\omega$ étant en effet, à un facteur numérique près, l'étendue spatiale d'une impulsion selon son axe de propagation. L'effet est amplifié par la finesse de la cavité. Pour une cavité de finesse 30 et une largeur spectrale normalisée $\Delta\omega/\omega_0 = 1/100$, cela signifie que l'on n'aura que $N = 4$ résonances partielles ou totales pour lesquelles 50 % de l'intensité à la fréquence $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ est transmise. Ceci signifie aussi qu'expérimentalement, il faudra ajuster la longueur de la cavité pour qu'elle soit égale à L_0 , à quelques micromètres près, pour pouvoir observer des phénomènes d'interférences, alors que L_0 vaut environ 4 m.

6.2.2.5 Transmission au voisinage d'une résonance partielle

On étudie maintenant la situation au voisinage d'une résonance partielle, en posant

$$L = L_0 + m\lambda_0 + \delta \quad \text{avec } \delta \ll \lambda_0 \quad 6.2.27$$

La phase accumulée sur un tour s'écrit maintenant

$$\phi(\omega_n) = \frac{\omega_n(L_0 + m\lambda_0 + \delta)}{c} \quad 6.2.28$$

$$= 2\pi m \frac{\omega_n - \omega_0}{\omega_0} + \frac{\omega_n \delta}{c} [2\pi] \quad 6.2.29$$

Pour $\delta \neq 0$, et pour $m \neq 0$, la fréquence centrale n'est plus parfaitement transmise, en revanche, la fréquence

$$\omega_{\max} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0 \delta}{2\pi m c}} \quad 6.2.30$$

le serait, si elle correspondait à une fréquence du peigne incident. On peut réécrire une nouvelle fois la phase accumulée sur un tour de cavité

$$\phi(\omega_n) = \frac{2\pi m(\omega_n - \omega_{\max})}{\omega_{\max}} [2\pi] \quad 6.2.31$$

et le spectre transmis prend ainsi la forme

$$I(\omega_n) = \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi m(\omega_n - \omega_{\max})}{\omega_{\max}}\right)} \quad 6.2.32$$

$$\simeq \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2mF}{\omega_{\max}}\right)^2 (\omega_n - \omega_{\max})^2} \quad 6.2.33$$

Ceci signifie que la fonction de transmission spectrale est maintenant une lorentzienne, centrée autour d'une fréquence différente de ω_0 et de largeur à mi-hauteur $\frac{\omega_{\max}}{mF}$. Le spectre va donc être déformé quand la longueur de la cavité évolue au voisinage d'une résonance partielle. En exprimant l'intensité transmise sous la forme

$$I(\omega_n) = \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2mF}{\omega_0}\right)^2 \left(\omega_n - \omega_0 + \frac{\omega_n \delta}{m\lambda_0}\right)^2} \quad 6.2.34$$

on peut maintenant représenter la transmission spectrale de la cavité en fonction de l'écart δ par rapport à une résonance partielle d'ordre m . Un exemple pour une pompe gaussienne est donné sur la figure 6.2.4. On rappelle qu'autour de la résonance totale, le spectre n'était pas déformé, au premier ordre en $\Delta\omega/\omega_0$.

6.2.2.6 Moiré de fréquence

Le déplacement du spectre peut s'interpréter comme un phénomène de moiré dans le domaine fréquentiel entre les pics de la fonction de transmission spec-

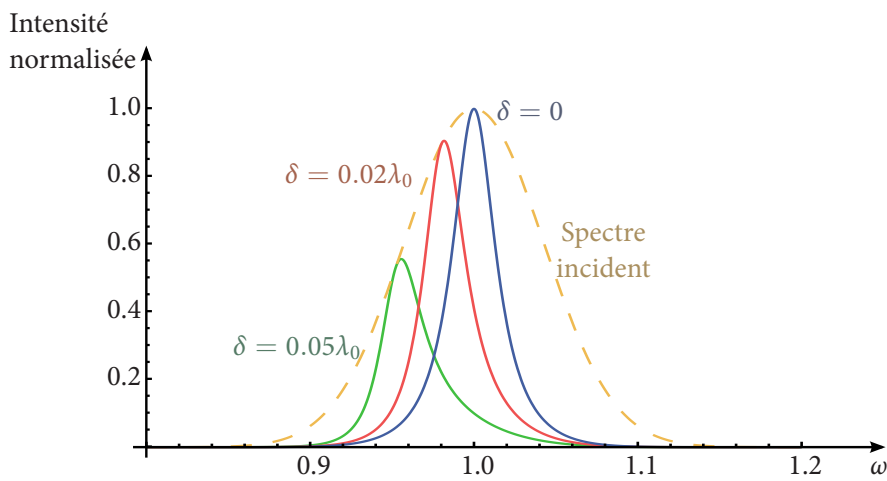


Fig. 6.2.4 : Spectres transmis par la cavité pour un peigne incident gaussien, de largeur à mi-hauteur $\Delta\omega = \omega_0/10$. La finesse de la cavité est prise égale à 30, la résonance partielle considérée est celle d'ordre $m = 1$. Les intensités sont tracées pour différents écarts δ par rapport au maximum de cette résonance partielle. La longueur de la cavité est donc de $L = L_0 + \lambda_0 + \delta$. L'intensité du peigne gaussien est normalisée de telle sorte que $I(\omega_0) = 1$.

trale de la cavité et les fréquences du peigne du laser. Ceci est présenté de façon schématique sur les figures 6.2.5, 6.2.6 et 6.2.7 pour un peigne incident de largeur infinie.

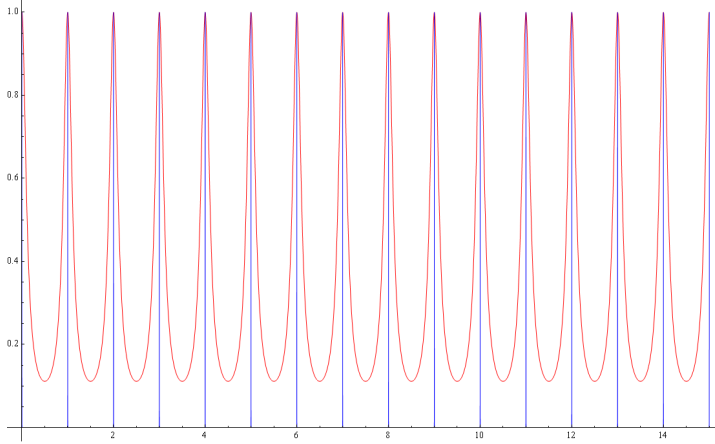


Fig. 6.2.5 : Spectre optique de l'injection (peigne infini) et de la transmission de la cavité (U.A.)

6.2.2.7 Conclusion

Pour que le peigne de fréquence sans CEO résonne dans la cavité sans dispersion, il est nécessaire que la longueur de la cavité soit un multiple de la longueur d'onde centrale λ_0 du peigne. La transmission est totale si cette longueur de cavité correspond au chemin optique de la cavité laser L_0 , ou bien à la distance entre deux impulsions successives. Si la longueur est égale à $L_0 + m\lambda_0$, le spectre sera partiellement transmis mais la fonction de transmission restera centrée autour de la fréquence centrale. Si la longueur de la cavité est égale à $L_0 + m\lambda_0 + \delta$ avec $0 \neq \delta \ll \lambda_0$, le spectre transmis est de surcroît déformé. Une simulation numérique de l'intensité totale transmise en fonction de la longueur de la cavité est présentée sur la figure 6.2.8.

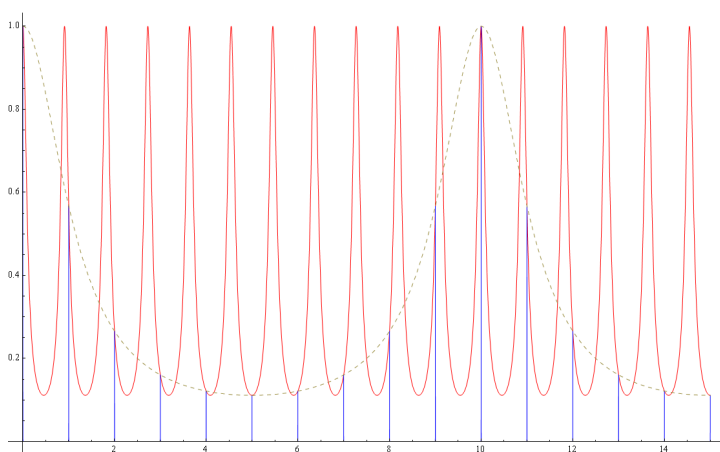


Fig. 6.2.6 : La longueur de la cavité est allongée d'une longueur d'onde. La transmission est maintenant limitée par une lorentzienne (en pointillés)

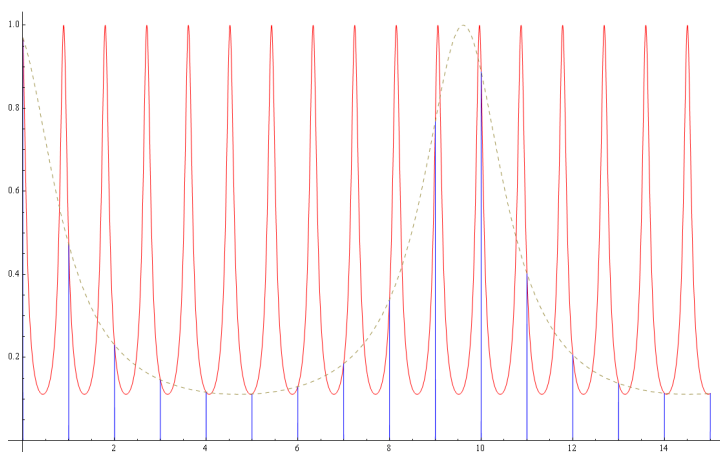


Fig. 6.2.7 : La longueur de la cavité est de nouveau allongée, d'une petite longueur. La courbe de transmission se décale maintenant en fréquence.

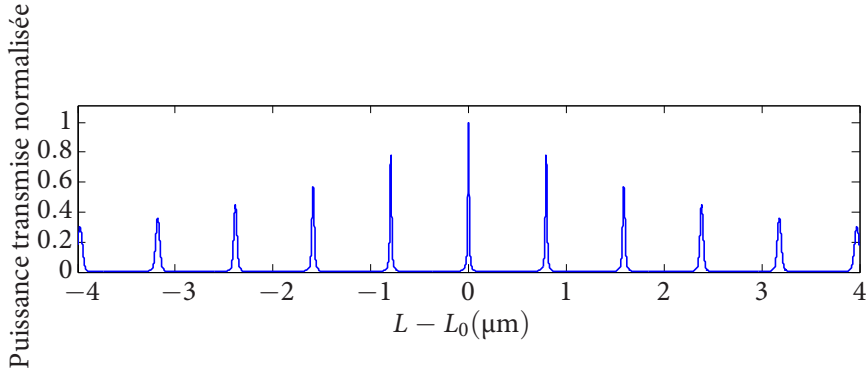


Fig. 6.2.8 : Intensité totale transmise en fonction de la longueur de la cavité, calculée numériquement. Le spectre incident est un peigne gaussien, centré à 795 nm, de largeur spectrale $\Delta\lambda = 6$ nm. La finesse de la cavité est de 125.

6.2.3 Prise en compte du CEO, de la dispersion de vitesse de phase et de la phase de Gouy dans la cavité

Dans le cas général, les fréquences du peigne ne sont plus des multiples de ω_r , on a alors

$$\omega_n = \omega_{\text{CE}} + n\omega_r \quad 6.2.35$$

D'autre part, si l'on écrit la phase accumulée sur un tour de cavité au premier ordre, on peut écrire une contribution dispersive sous la forme d'une phase linéaire $\phi' \times (\omega_n - \omega_0)$.

$$\phi(\omega_n) \simeq \frac{\omega_n L}{c} + \phi' \times (\omega_n - \omega_0) \quad 6.2.36$$

$$= -\omega_0 \phi' + \frac{\omega_n (L + c\phi')}{c} \quad 6.2.37$$

$L + c\phi'$ correspond au nouveau chemin optique de la cavité, à la pulsation ω_0 . On appellera abusivement ce chemin optique total L , afin de simplifier les expressions. L'effet de l'ajout d'une dispersion dans la cavité prend donc principalement la forme d'une phase constante additionnelle, que l'on appellera ϕ_0 .

$$\phi_0 = -\omega_0 \phi' \quad 6.2.38$$

Les effets du CEO et de la dispersion de vitesse de phase dans la cavité sont liés, le CEO étant lui même la conséquence de la dispersion de vitesse de phase dans la cavité laser. Par rapport à la situation précédente, le peigne n'est plus résonnant dans la cavité si la longueur de la cavité est un multiple de λ_0 . On appelle donc d_{CE} l'écart de longueur tel que la cavité soit résonnante pour une longueur

$$L = L_0 + d_{\text{CE}} \quad 6.2.39$$

La phase accumulée sur un tour de cavité peut maintenant s'écrire :

$$\phi(\omega_n) = \phi_0 + \frac{\omega_n L}{c} \quad 6.2.40$$

$$= \phi_0 + \frac{\omega_n}{c} (L_0 + d_{\text{CE}}) \quad 6.2.41$$

$$= \phi_0 + \omega_{\text{CE}} \frac{L_0}{c} + \frac{\omega_n d_{\text{CE}}}{c} \quad 6.2.42$$

Ceci signifie que la fréquence centrale ω_0 est maintenant résonnante pour

$$d_{\text{CE}} = -\frac{\omega_{\text{CE}}}{\omega_0} L_0 - \frac{c\phi_0}{\omega_n} \quad 6.2.43$$

En faisant l'hypothèse que le spectre est suffisamment étroit pour que $\omega_n \simeq \omega_0$, on peut réécrire cette expression sous la forme

$$d_{\text{CE}} = -\left(\frac{\omega_{\text{CE}}}{\omega_r} + \frac{\phi_0}{2\pi}\right) \lambda_0 \quad 6.2.44$$

L'effet du CEO du peigne de fréquence incident ou de la dispersion de vitesse de phase dans la cavité est donc de décaler spatialement les longueurs de résonance de la cavité.

Interprétation temporelle de l'influence du CEO Essayons maintenant d'interpréter le résultat précédent dans le domaine temporel. Si le peigne de fréquence présente un CEO ω_{CE} non nul, cela signifie que la CEP ϕ_{CE} se décale d'une valeur $\Delta\phi_{\text{CE}} = 2\pi\frac{\omega_{\text{CE}}}{\omega_r}$ (cf. équ. 6.1.12) entre deux impulsions successives. Afin que les impulsions successives soient en phase après des tours de cavités, il est donc nécessaire d'ajuster la phase accumulée sur un tour de cavité pour compenser l'évolution de la CEP, et donc de changer la longueur

de la cavité. Dans le cas général, les enveloppes ne sont plus exactement synchronisées. Il est cependant envisageable d'ajuster la dispersion de la cavité pour compenser cet effet. Dans cette situation, la cavité résonnante a le même chemin optique et la même dispersion que la cavité laser.

Modes transverses et phase de Gouy Dans une cavité résonnante, les modes de Hermite-Gauss constituent une base de modes propres résonnants. La propagation de ces différents modes transverses fait apparaître une phase additionnelle, appelée phase de Gouy. La phase de Gouy du mode résonnant dépend des paramètres géométriques de la cavité optique et de l'ordre du mode mais pas de la fréquence. Ceci signifie que la contribution de la phase de Gouy prend la forme d'une simple phase constante dans l'expression précédente. Comme pour une cavité optique injectée par une onde monochromatique, les différents modes transverses du champ seront résonnants pour des longueurs de cavité différentes.

Remarque : mesure du CEO avec une cavité résonnante La dispersion de vitesse de phase dans une cavité résonnante étant généralement constante dans le temps, la formule précédente montre qu'une telle cavité pourrait servir à mesurer les fluctuations de CEO d'un peigne de fréquence.

6.2.4 Effets de la GVD dans la cavité

Considérons maintenant le cas où la cavité présente de la dispersion de vitesse de groupe. On néglige les effets de dispersion du premier ordre dans la cavité, ainsi que les effets dus au CEO du peigne de fréquence incident. On écrit donc

$$\phi(\omega_n) = \frac{\omega_n L}{c} + \frac{1}{2} \phi''(\omega_0)(\omega_n - \omega_0)^2 \quad 6.2.45$$

Cette phase quadratique accumulée sur un tour de cavité a pour conséquence que toutes les fréquences du peigne ne pourront pas être résonnantes simultanément dans la cavité, ces fréquences de résonance n'étant plus réparties linéairement. Nous allons essayer de caractériser les effets de la dispersion de vitesse de groupe sur cette transmission.

Pour $L = L_0$, la fréquence centrale est résonnante et la phase accumulée sur un tour peut s'écrire, à 2π près

$$\phi(\omega_n) = \frac{1}{2} \phi''(\omega_0)(\omega_n - \omega_0)^2 [2\pi] \quad 6.2.46$$

Le spectre transmis par la cavité s'écrit donc

$$I(\omega_n) = \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{1}{4}\phi''(\omega_0)(\omega_n - \omega_0)^2\right)} \quad 6.2.47$$

et en considérant que la phase quadratique est suffisamment faible,

$$I(\omega_n) \simeq \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{F}{2\pi}\phi''(\omega_0)\right)^2 (\omega_n - \omega_0)^4} \quad 6.2.48$$

Le spectre transmis est donc limité, en fonction de la phase quadratique accumulée sur un tour de cavité. On montre alors que la fréquence $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ est transmise à plus que 50 % si

$$\phi'' < \frac{8\pi}{F\Delta\omega^2} \quad 6.2.49$$

Les effets de la dispersion de vitesse de groupe sont ainsi démultipliés par la finesse de la cavité. Pour pouvoir correctement transmettre un peigne de fréquence large à travers une cavité résonnante de haute finesse, il est donc nécessaire de contrôler très finement la GDD de cette dernière. Pour que l'on puisse négliger les effets de la GDD sur la transmission du spectre, il faut que

$$\phi'' \ll \frac{8\pi}{F\Delta\omega^2} \quad 6.2.50$$

Ceci peut s'interpréter en remarquant qu'à un facteur près, la longueur de l'impulsion est proportionnelle à $1/\Delta\omega$. Les effets de la GDD peuvent être négligés si le terme ϕ'' , généralement exprimé en fs^2 , est négligeable devant le carré de la durée de l'impulsion (exprimée typiquement en fs), divisé par la finesse de la cavité.

Dans le cas précédent d'une dispersion de vitesse de phase, nous avons vu que la situation optimale était celle où la dispersion (de vitesse de phase) de la cavité égalait celle de la cavité laser, qui est non nulle dans le cas général. En ce qui concerne la GVD, dans un laser à verrouillage de mode, le point de fonctionnement correspond à la situation où la GDD dans le laser est exactement compensée par les effets non-linéaires, ce qui impose que l'écart entre les fréquences des différents modes longitudinaux est constant. La GDD effective du laser est donc nulle, c'est pourquoi il faut toujours idéalement une phase quadratique nulle dans la cavité optique que l'on veut injecter.

6.2.4.1 Ordres de grandeurs

La cavité de l'oscillateur paramétrique optique que nous avons étudié, et qui sera présenté dans les chapitres suivants, a une finesse de 30 environ. Si l'on considère un peigne gaussien de longueur d'onde centrale 800 nm et de largeur 10 nm, le critère précédent conduit à la condition

$$\phi'' \ll 1000 \text{ fs}^2 \quad 6.2.51$$

Avec un peigne équivalent et une cavité de finesse 1000 (par exemple si l'on désire réaliser une cavité de filtrage femtoseconde), le critère devient

$$\phi'' \ll 30 \text{ fs}^2 \quad 6.2.52$$

Afin de donner un ordre de grandeur caractéristique, à 800 nm, le passage à travers 1 cm de silice fondue induit une phase quadratique ϕ'' de 350 fs². Le passage à travers 1 m d'air introduit quant à lui de l'ordre de 20 fs² [Pastirk 06], ce qui signifie que l'on ne peut pas négliger la dispersion de vitesse de groupe de l'air dans une cavité de haute finesse. Ceci signifie aussi qu'on peut utiliser cet effet pour contrôler finement la GDD d'une cavité optique en ajustant la pression de l'air à l'intérieur de celle-ci [Jones 04].

6.2.5 Application : conception d'une cavité femtoseconde de haute finesse

On a mis en évidence différents effets pouvant intervenir lorsque l'on désire coupler un peigne de fréquence dans une cavité optique. D'une manière générale, pour que la transmission soit optimale, il convient de s'assurer que la cavité ait le même chemin optique (à la fréquence ω_0) et les mêmes propriétés de dispersion de vitesse de phase que la cavité du laser qui a émis le peigne de fréquence. Il faut de surcroît que les effets de la GVD soient le plus faible possible. On a vu dans la section précédente que les cavités de haute finesse sont très sensibles aux effets de la dispersion de vitesse de groupe. Afin de limiter ces effets, il convient donc, soit de concevoir une cavité composée uniquement d'éléments faiblement dispersifs, soit de compenser les effets de la dispersion.

Concevoir une cavité non dispersive est délicat. D'une part les fabricants de miroir ont du mal à garantir des GDD plus petites que 5 fs². D'autre part, on a vu que la GVD de l'air était déjà en soi très importante, il faudrait donc placer la cavité dans le vide. Enfin, le cristal, même fin, introduit de la dispersion.

Compenser les effets de la dispersion nécessite de contrôler deux sources de dispersion simultanément. On pourrait par exemple envisager de placer un élément dispersif d'épaisseur variable dans la cavité et de contrôler la pression de l'air dans celle-ci.

7 Effets non linéaires d'ordre 2 en régime femtoseconde

Sommaire

7.1	Effets non-linéaires d'ordre deux	152
7.1.1	Mélange à trois ondes	152
7.1.2	Dispersion et accord de phase	153
7.1.3	Dispersion de vitesse de groupe	153
7.2	Doublement d'un peigne de fréquence	154
7.2.1	Point de vue temporel	154
7.2.2	Point de vue fréquentiel	155
7.3	OPO monomode dégénéré	155
7.3.1	Définition	155
7.3.2	Modèle étudié et approximations	156
7.3.3	Équations d'évolution	158
7.3.4	Équation classique	158
7.3.5	Calcul des fluctuations	161
7.4	SPOPO	162
7.4.1	Définition	162
7.4.2	Nature multimode	163
7.4.3	Équations d'évolutions dans le temps du SPOPO, sous le seuil	163
7.4.4	Diagonalisation et supermodes	165
7.4.5	Amplification, désamplification et bruit	165
7.4.6	Simulation numérique	167
7.4.7	Remarque : fonctionnement au-dessus du seuil	168
7.4.8	Conclusion	168

7.1 Effets non-linéaires d'ordre deux

7.1.1 Mélange à trois ondes

Cette section a pour but de rappeler très brièvement et qualitativement les phénomènes d'interaction dans les cristaux non-linéaires d'ordre 2. Dans un tel milieu, sous l'effet d'une onde électromagnétique, la polarisation du milieu présente un terme non-linéaire d'ordre deux :

$$\vec{P}(\vec{E}) = \chi \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \dots \quad 7.1.1$$

Le terme $\chi^{(2)}$ est appelé le tenseur de susceptibilité non-linéaire d'ordre 2. Cette polarisation non-linéaire a pour conséquence l'émission de composantes spectrales à des fréquences autres que celles du champ incident. On parle ainsi de mélange à trois ondes, l'une correspondant à la somme ou à la différence des deux autres, qu'il est possible d'interpréter en termes de photons. Parmi les effets possibles, ceux qui vont nous intéresser tout particulièrement sont :

La somme de fréquence A partir de deux photons de pulsations ω_1 et ω_2 on crée un unique photon de pulsation $\omega_1 + \omega_2$. Ce processus est représenté sur la figure 7.1.1. Si les deux photons précédents sont de même fréquence, on parle alors de *doublement de fréquence*.

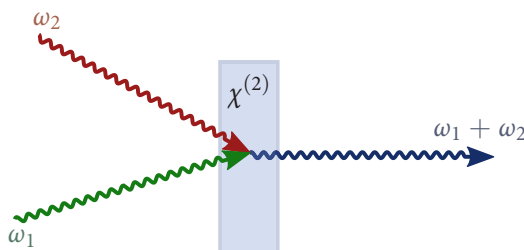


Fig. 7.1.1 : Interaction paramétrique à trois photons : somme de fréquence dans un cristal non-linéaire d'ordre deux.

La conversion paramétrique A partir d'un photon, dit de pompe, on en crée deux, de fréquences différentes, appelés *signal* et *complémentaire*. La fréquence de la pompe est égale à la somme des fréquences du signal et du complémentaire. Ce processus est représenté sur la figure 7.1.2. Si ces deux dernières sont identiques, on dit que l'on est en régime dégénéré.

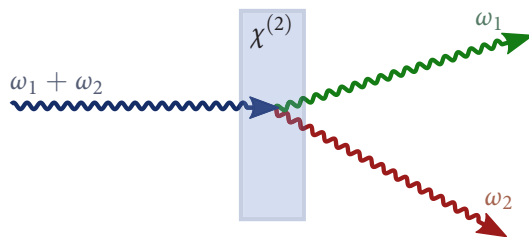


Fig. 7.1.2 : Interaction paramétrique à trois photons : conversion paramétrique dans un cristal non-linéaire d'ordre deux.

7.1.2 Dispersion et accord de phase

Le milieu du cristal non-linéaire est dispersif. En conséquence, la phase relative entre les ondes de fréquences différentes évolue longitudinalement lorsque le faisceau se propage dans le cristal. En fonction de la phase relative, il y a ainsi création ou destruction successives de photons à une fréquence donnée, ce qui limite fortement le gain de ces effets. Diverses méthodes existent cependant pour remédier à ce problème, utilisant notamment les propriétés de biréfringence des cristaux non-linéaires. En taillant précisément le cristal et en orientant les polarisations des différentes ondes¹, il est ainsi possible de faire en sorte que les différentes composantes spectrales, de polarisations différentes, se propagent à la même vitesse de phase. On parle donc d'*accord de phase*.

7.1.3 Dispersion de vitesse de groupe

Toutes nos expériences sont effectuées en utilisant des lasers impulsionnels. Dans ce régime, il faut prendre en compte la dispersion de vitesse de groupe dans le milieu. En effet, même si l'accord de phase est réalisé dans le cristal, la dispersion de vitesse de groupe a pour conséquence que les enveloppes des impulsions de fréquences différentes à l'intérieur du cristal se propagent à des vitesses de groupe différentes. Si le cristal n'est pas assez fin, les impulsions produites seront donc déformées et allongées.

¹On peut jouer sur d'autres paramètres : pression, température...

7.2 Doublement d'un peigne de fréquence

En pompant un cristal non-linéaire à l'accord de phase par un peigne de fréquence, il est possible d'obtenir un nouveau peigne de fréquence dont la fréquence centrale est doublée. Si le cristal est suffisamment fin pour que l'on puisse négliger les effets de dispersion de vitesse de groupe et que l'on considère que la susceptibilité non-linéaire ne dépend pas de la fréquence sur la largeur spectrale considérée, on peut raisonner simplement dans le domaine temporel.

7.2.1 Point de vue temporel

Prenons par exemple le cas simple d'une impulsion unique, de profil temporel gaussien, non chirpée.

$$E(t) = E_0 e^{-\left(\frac{t}{2\Delta t}\right)^2} e^{-i\omega_0 t} \quad 7.2.1$$

Sous ces hypothèses, le champ doublé est alors proportionnel au carré du champ de l'onde de la pompe (cf. équ. 7.1.1)

$$E_{\text{doublé}} \propto e^{-\left(\frac{\sqrt{2}t}{2\Delta t}\right)^2} e^{-2i\omega_0 t} \quad 7.2.2$$

L'onde produite est maintenant une nouvelle gaussienne, de largeur temporelle $\sqrt{2}$ fois plus petite que celle de la pompe. Dans le domaine spectral, sa longueur d'onde a été doublée et sa largeur spectrale est $\sqrt{2}$ fois plus large que celle de la pompe.

Considérons maintenant, non plus une impulsion unique mais un train d'impulsions femtoseconde, c'est-à-dire un peigne de fréquence dans le domaine spectral. Les impulsions successives sont doublées, il est donc bien évident que le train d'impulsions doublées aura le même taux de répétition que celui de la pompe. Comme ce taux de répétition est l'inverse de l'intervalle spectral libre, ceci signifie que l'écart entre deux fréquences consécutives du peigne doublé correspond exactement à celui du peigne pompe.

En résumé, si le peigne de fréquence de la pompe est gaussien, de pulsation centrale ω_0 , de largeur $\Delta\omega$, et d'intervalle entre deux fréquences ω_r , le peigne de fréquence doublé sera de pulsation centrale $2\omega_0$, de largeur $\sqrt{2}\Delta\omega$ et d'intervalle entre deux pulsations consécutives ω_r .

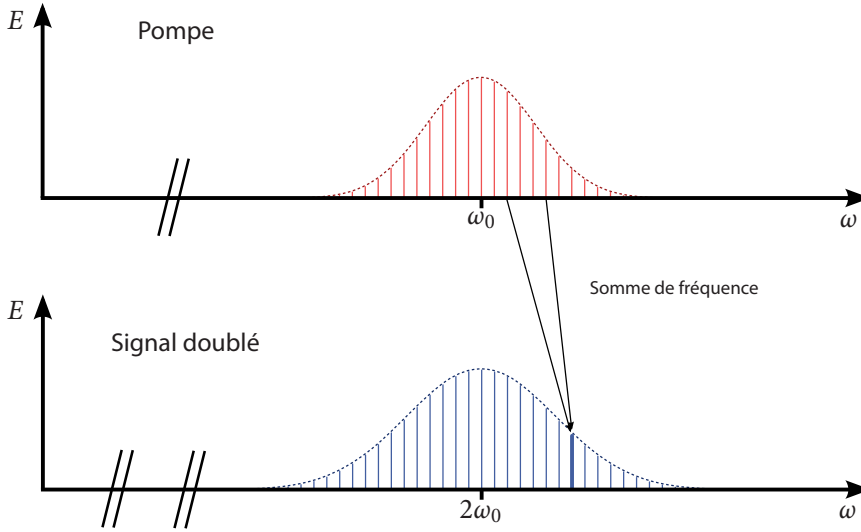


Fig. 7.2.1 : Interaction paramétrique lors du doublement d'un peigne de fréquence. Chaque couple de deux fréquences du peigne de la pompe peut produire une onde à la fréquence de la somme des deux.

7.2.2 Point de vue fréquentiel

Il est important de noter que *le doublement d'un peigne de fréquence ne correspond pas au doublement de chaque fréquence du peigne indépendamment des autres*. Les différentes fréquences peuvent en effet se sommer pour produire les fréquences d'un nouveau peigne. Ceci est représenté sur la figure 7.2.1. Ainsi, les pulsations $\omega_0 + n\omega_r$ et $\omega_0 + m\omega_r$ peuvent produire par somme de fréquence une onde à la pulsation $2\omega_0 + (n+m)\omega_r$. On voit donc bien que l'on donne naissance à un nouveau peigne de fréquence centrale $2\omega_0$ et que l'intervalle entre deux fréquences reste bien le même.

7.3 OPO monomode dégénéré

7.3.1 Définition

Nous venons de voir le principe du doublement d'un peigne de fréquence. Le phénomène inverse de la conversion paramétrique, par lequel un photon

en produit deux, est nettement moins efficace. Afin d'exalter ce phénomène, nous allons considérer le cas où le cristal est placé à l'intérieur d'un résonateur optique. Ceci constitue donc maintenant ce qu'on appelle un *oscillateur paramétrique optique* (OPO).

A partir d'une source lumineuse appelée pompe seront ainsi produits des photons appelés *signal* et *complémentaire*, les fréquences de ces deux derniers ayant pour somme la fréquence de la pompe. Avant de présenter les phénomènes complexes d'oscillation paramétrique optique pour des impulsions femtoseconde, nous allons étudier dans un premier temps le cas, plus simple, où la pompe est monochromatique. Le cas des OPO en régime femtoseconde sera traité dans la section suivante.

Les photons du signal et du complémentaire peuvent être de fréquences différentes, nous allons cependant nous restreindre au cas où ces deux fréquences sont identiques, et donc égales à la moitié de la fréquence de la pompe. On produit donc une composante *subharmonique* et on dit que l'OPO est *dégénéré*. Nous allons nous intéresser uniquement à cette situation dans cette section. Nous allons également considérer uniquement les cas où *la pompe n'est pas résonnante dans la cavité*. Pour une intensité de pompe suffisante, c'est-à-dire supérieure à un certain *seuil*, on montrera qu'il y a production d'un faisceau intense à la fréquence subharmonique de la pompe. En dessous de ce seuil, on s'intéressera au cas où un faisceau à cette fréquence subharmonique, appelé *injection*, est couplé dans cette cavité.

7.3.2 Modèle étudié et approximations

Nous allons nous intéresser au modèle suivant dont le schéma de principe est présenté sur la figure 7.3.1. La cavité est composée de trois miroirs semi-réfléchissants :

- Un coupleur d'entrée, de *pertes en amplitude* γ_e . C'est par ce miroir que le faisceau d'injection est couplé dans la cavité.
- Un coupleur de sortie, de *pertes en amplitude* γ_s . C'est par ce miroir que le faisceau étudié sort de la cavité.
- Un troisième miroir dont le coefficient de *pertes en amplitudes* γ_c représente les pertes par tour de la cavité. En effet, il est possible de montrer que l'absorption d'un faisceau est équivalente au mélange du faisceau sur une lame semi-réfléchissante avec un état vide.

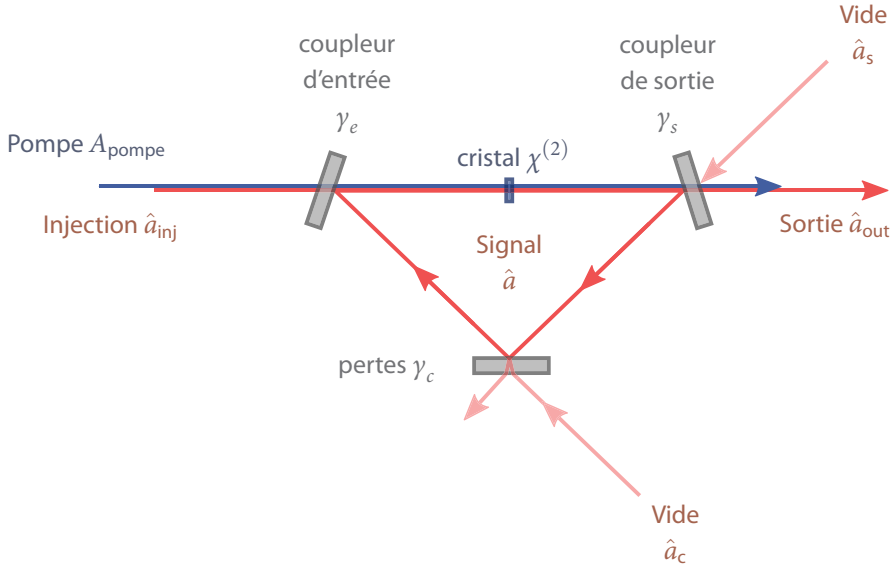


Fig. 7.3.1 : Représentation théorique d'un OPO monomode dégénéré, injecté. Les termes γ_e , γ_s et γ_c représentent les taux de transmission en intensité respectifs des miroirs.

On définit les pertes en amplitude γ d'un miroir de telle sorte que le coefficient de réflexion de ce miroir soit $r = 1 - \gamma$. Si l'on considère que toutes les pertes sont dues à une transmission, par conservation de l'énergie, le coefficient de transmission en amplitude s'écrit $t = \sqrt{2\gamma - \gamma^2} \simeq \sqrt{2\gamma}$ pour γ petit. Cette définition peut porter à confusion car dans ce cas, les *pertes en intensité* sont de $t^2 = 2\gamma$. On choisit cette convention afin de pouvoir se référer facilement à [Chalopin 09] et à [Patera 08].

La cavité est résonnante pour un seul mode transverse, on dit qu'elle est *spatialement monomode*. Le cristal non-linéaire est, lui, taillé et orienté pour être à l'accord de phase pour l'interaction paramétrique considérée. Nous allons aussi considérer que le faisceau de pompe est intense, qu'il n'évolue pas dans le temps, que les fluctuations de son champ sont très faibles par rapport à son champ moyen, ce qui permet un traitement *classique* de celui-ci. Nous ferons aussi l'hypothèse que son intensité diminue peu en résultat de l'interaction paramétrique. C'est l'hypothèse de *non-appauvrissement de la pompe* (« non-depletion » en anglais). Enfin, nous considérerons que l'évolution du champ signal sur un tour de cavité est lente, et que l'on peut ainsi faire l'hypothèse que l'intensité de

celui-ci avant et après passage dans le cristal sont peu différentes.

7.3.3 Équations d'évolution

Sur un tour de cavité, parcouru en un temps τ , l'écriture des relations d'entrée-sortie sur les trois miroirs de la cavité, en tenant compte des pertes intra-cavité du mode résonnant et du gain paramétrique g à l'intérieur du cristal non-linéaire conduit à l'expression suivante

$$\tau \frac{d\hat{a}}{dt} = -\gamma \hat{a}(t) + \sqrt{2\gamma_e} \hat{a}_{\text{inj}} + \sqrt{2\gamma_c} \hat{a}_c + \sqrt{2\gamma_s} \hat{a}_s + \tau g A_{\text{pompe}} \hat{a}^\dagger(t) \quad 7.3.1$$

les opérateurs étant indexés comme sur la figure 7.3.1. Les pertes totales sur un tour peuvent s'écrire $\gamma = \gamma_e + \gamma_s + \gamma_c$ et A_{pompe} est l'amplitude de la pompe, traitée classiquement. On pose $\sigma = \frac{\tau g A_{\text{pompe}}}{\gamma}$, qui exprime le rapport entre le gain paramétrique et les pertes par tour de cavité. On appellera σ la *puissance normalisée au seuil*, ce qui sera justifié par la suite. On peut maintenant réécrire l'équation d'évolution sous la forme

$$\frac{\tau}{\gamma} \frac{d\hat{a}}{dt} = -\hat{a}(t) + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} \hat{a}_{\text{inj}} + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma} \hat{a}_c + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma} \hat{a}_s + \sigma \hat{a}^\dagger(t) \quad 7.3.2$$

Cette équation faisant intervenir les opérateurs a et $a^\dagger$, il est naturel de faire intervenir les quadratures du champ pour la résoudre. On peut donc écrire de manière équivalente les deux équations portant sur les quadratures

$$\begin{cases} \frac{\tau}{\gamma} \frac{d\hat{X}^+}{dt} = -(1 - \sigma) \hat{X}^+(t) + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} \hat{X}_{\text{inj}}^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma} \hat{X}_c^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma} \hat{X}_s^+ \\ \frac{\tau}{\gamma} \frac{d\hat{X}^-}{dt} = -(1 + \sigma) \hat{X}^-(t) + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} \hat{X}_{\text{inj}}^- + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma} \hat{X}_c^- + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma} \hat{X}_s^- \end{cases} \quad 7.3.3$$

On résout cette équation en effectuant un traitement en perturbation [Reynaud 92].

7.3.4 Équation classique

En séparant les fluctuations du champ moyen, on écrit :

$$\hat{X}^{\pm}(t) = X^{\pm}(t) + \delta\hat{X}^{\pm}(t) \quad 7.3.4$$

$$\hat{X}_{\text{inj}}^{\pm} = X_{\text{inj}}^{\pm} + \delta\hat{X}_{\text{inj}}^{\pm} \quad 7.3.5$$

On suppose que les champs correspondants aux opérateurs $\hat{a}_c$ et $\hat{a}_s$ sont vides, donc de valeur moyenne nulles.

$$\hat{X}_s^{\pm} = \delta\hat{X}_s^{\pm} \quad 7.3.6$$

$$\hat{X}_c^{\pm} = \delta\hat{X}_c^{\pm} \quad 7.3.7$$

Les équations classiques d'évolution des quadratures deviennent donc

$$\begin{cases} \frac{\tau}{\gamma} \frac{dX^+}{dt} = -(1 - \sigma)X^+(t) + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} X_{\text{inj}}^+ \\ \frac{\tau}{\gamma} \frac{dX^-}{dt} = -(1 + \sigma)X^-(t) + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} X_{\text{inj}}^- \end{cases} \quad 7.3.8$$

En régime stationnaire, en dessous du seuil, on peut donc écrire les expressions des valeurs moyennes des quadratures dans la cavité

$$\begin{cases} X^+ = \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} \frac{X_{\text{inj}}^+}{1 - \sigma} \\ X^- = \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} \frac{X_{\text{inj}}^-}{1 + \sigma} \end{cases} \quad 7.3.9$$

et en sortie de cavité, après transmission par le coupleur de sortie

$$\begin{cases} X_{\text{out}}^+ = 2 \frac{\sqrt{\gamma_e \gamma_s}}{\gamma} \frac{X_{\text{inj}}^+}{1 - \sigma} \\ X_{\text{out}}^- = 2 \frac{\sqrt{\gamma_e \gamma_s}}{\gamma} \frac{X_{\text{inj}}^-}{1 + \sigma} \end{cases} \quad 7.3.10$$

La divergence de l'expression de X_{out}^+ quand $\sigma \rightarrow 1$ correspond au phénomène de seuil. On constate aussi une *amplification sensible à la phase*. En dessous du seuil, pour $\sigma < 1$, la quadrature X_{inj}^+ (en phase avec la pompe) est amplifiée

et la quadrature X_{inj}^- (déphasée de $\pi/2$) est désamplifiée. Si on écrit maintenant $\alpha_{\text{inj}} = |\alpha_{\text{inj}}| e^{i\varphi}$ pour caractériser ce déphasage, on montre facilement que

$$\frac{|\alpha_{\text{out}}|^2}{|\alpha_{\text{inj}}|^2} = 4 \frac{\gamma_e \gamma_s}{\gamma^2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \sigma)^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \sigma)^2} \right) \quad 7.3.11$$

On appelle maintenant G le coefficient d'amplification, c'est-à-dire le rapport entre les intensités transmises, avec et sans pompe ($\sigma = 0$)

$$G(\varphi) = \frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \sigma)^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \sigma)^2} \quad 7.3.12$$

Les valeurs extrêmes étant

$$G_{\text{ampli}} = \frac{1}{(1 - \sigma)^2} \quad G_{\text{desampli}} = \frac{1}{(1 + \sigma)^2} \quad 7.3.13$$

On remarque que l'amplification est infinie quand la puissance de la pompe tend vers le seuil, la désamplification est au maximum d'un facteur $1/4$. L'allure de $G(\phi)$ est représenté sur la figure 7.3.2.

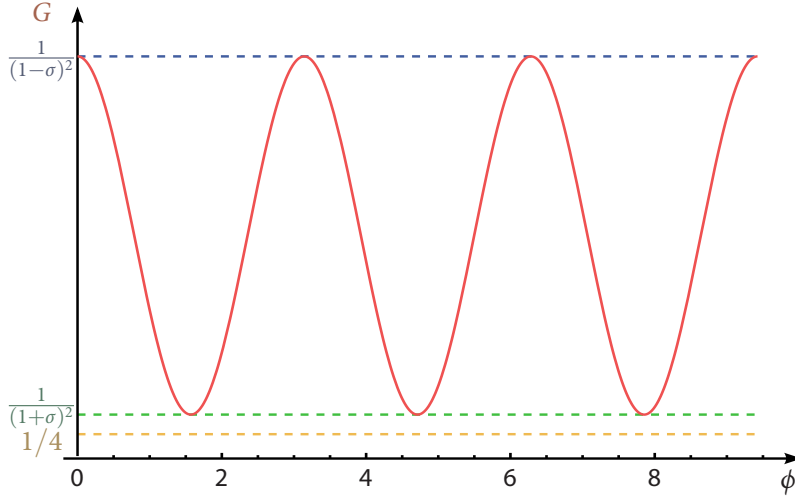


Fig. 7.3.2 : Courbe représentant l'amplification et la désamplification sensible à la phase. Cette courbe est tracée pour une puissance normalisée au seuil de $\sigma = 1/4$.

7.3.5 Calcul des fluctuations

Un traitement perturbatif des équations d'évolution conduit directement aux équations sur les fluctuations :

$$\begin{cases} \frac{\tau}{\gamma} \frac{d\delta\hat{X}^+}{dt} = -(1-\sigma)\delta\hat{X}^+(t) + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma}\delta\hat{X}_{\text{inj}}^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma}\delta\hat{X}_c^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma}\delta\hat{X}_s^+ \\ \frac{\tau}{\gamma} \frac{d\delta\hat{X}^-}{dt} = -(1+\sigma)\delta\hat{X}^-(t) + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma}\delta\hat{X}_{\text{inj}}^- + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma}\delta\hat{X}_c^- + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma}\delta\hat{X}_s^- \end{cases} \quad 7.3.14$$

On s'intéresse à la densité de bruit à une pulsation ω donnée, on va donc considérer les transformées de Fourier des opérateurs précédents, qui conduisent aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \delta\hat{X}^+(\omega) = \frac{1}{i\omega\tau + \gamma(1-\sigma)} \left(\sqrt{2\gamma_e}\delta\hat{X}_{\text{inj}}^+(\omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{X}_c^+(\omega) + \sqrt{2\gamma_s}\delta\hat{X}_s^+(\omega) \right) \\ \delta\hat{X}^-(\omega) = \frac{1}{i\omega\tau + \gamma(1+\sigma)} \left(\sqrt{2\gamma_e}\delta\hat{X}_{\text{inj}}^-(\omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{X}_c^-(\omega) + \sqrt{2\gamma_s}\delta\hat{X}_s^-(\omega) \right) \end{cases} \quad 7.3.15$$

En écrivant maintenant le mélange avec l'état vide sur le coupleur de sortie, on peut écrire les expressions des quadratures pour le champ qui sort de l'OPO

$$\begin{cases} \delta\hat{X}_{\text{out}}^+(\omega) = \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{i\omega\tau + \gamma(1-\sigma)} \left(\sqrt{2\gamma_e}\delta\hat{X}_{\text{inj}}^+(\omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{X}_c^+(\omega) + \sqrt{2\gamma_s}\delta\hat{X}_s^+(\omega) \right) \\ \quad - \delta\hat{X}_s^+(\omega) \\ \delta\hat{X}_{\text{out}}^-(\omega) = \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{i\omega\tau + \gamma(1+\sigma)} \left(\sqrt{2\gamma_e}\delta\hat{X}_{\text{inj}}^-(\omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{X}_c^-(\omega) + \sqrt{2\gamma_s}\delta\hat{X}_s^-(\omega) \right) \\ \quad - \delta\hat{X}_s^-(\omega) \end{cases} \quad 7.3.16$$

Un analyseur de spectre donne accès à la densité spectrale de bruit du photocourant produit par les photodiodes. Utilisé avec une détection homodyne, il est possible de mesurer un signal proportionnel à $\langle \delta X^+(\omega)\delta X^+(-\omega) \rangle$ (cf. [Fabre 95]). On suppose que les modes $\hat{a}_c$ et $\hat{a}_s$ sont vides. Ils sont donc aussi non corrélés à $\hat{a}_{\text{inj}}$. En posant $\Omega = \omega\tau/\gamma$ et $\eta = \gamma_s/\gamma$, on obtient les expressions des densités spectrales de bruits $V^+(\Omega)$ et $V^-(\Omega)$ correspondant aux quadratures $\hat{X}_{\text{out}}^+$ et $\hat{X}_{\text{out}}^-$.

$$\begin{cases} V^+(\Omega) = \frac{(1 - \sigma - 2\eta)^2 + \Omega^2}{(1 - \sigma)^2 + \Omega^2} + \frac{4\eta(1 - \eta)}{(1 + \sigma)^2 + \Omega^2} \\ V^-(\Omega) = \frac{(1 + \sigma - 2\eta)^2 + \Omega^2}{(1 + \sigma)^2 + \Omega^2} + \frac{4\eta(1 - \eta)}{(1 - \sigma)^2 + \Omega^2} \end{cases} \quad 7.3.17$$

Le terme Ω correspond à la fréquence d'analyse, normalisée à la bande passante de la cavité OPO. Le terme η , l'efficacité de sortie (*escape efficiency*), représente le rapport entre les pertes « utiles », dues au coupleur de sortie, et les pertes totales de la cavité. La compression de bruit est plus forte quand $\eta \rightarrow 1$, les pertes à l'intérieur de la cavité détruisant le squeezing. Expérimentalement, on se placera donc si possible dans la situation où les pertes à l'intérieur de la cavité seront faibles devant la transmission du coupleur de sortie. Sous cette approximation, on peut réécrire les densités spectrales de bruit :

$$\begin{cases} V^+(\Omega) = \frac{(1 + \sigma)^2 + \Omega^2}{(1 - \sigma)^2 + \Omega^2} \\ V^-(\Omega) = \frac{(1 - \sigma)^2 + \Omega^2}{(1 + \sigma)^2 + \Omega^2} \end{cases} \quad 7.3.18$$

L'état produit par l'OPO est donc bien comprimé. Il y a une réduction de bruit selon la quadrature $\hat{X}^-$ et un excès de bruit selon $\hat{X}^+$. En l'absence de pertes, nous avons $V^+(\Omega)V^-(\Omega) = 1$. L'état est donc limité par l'inégalité de Heisenberg. Ceci n'est plus vrai en présence de pertes, en effet, $\eta < 1$ implique que $V^+(\Omega)V^-(\Omega) > 1$.

7.4 SPOPO

7.4.1 Définition

Dans la section précédente, il a été traité le cas d'un OPO monomode injecté en dessous du seuil. Considérons maintenant le cas où la pompe et l'injection ne sont plus des champs monochromatiques mais des peignes de fréquence. Si le temps de parcours de la cavité correspond à celui de la cavité laser, et donc à l'inverse de l'écart entre deux fréquences du spectre, toutes les fréquences du peigne peuvent être résonnantes simultanément (si l'on néglige les phénomènes de dispersion). Dans le domaine temporel, ceci signifie qu'il n'y a qu'une seule impulsion circulant dans la cavité laser, d'où la dénomination

de *Synchronously Pumped Optical Parametric Oscillator* (SPOPO). Les premiers SPOPO, fonctionnant en régime picoseconde, furent conçus dans les années 70 [Burneika 72, Tanaka 78]. Les premières expériences en régime femtoseconde furent construites à la fin des années 80 [Edelstein 89, Mak 92]. Les SPOPO sont aujourd'hui commercialisés, par exemple par les entreprises Coherent ou APE. L'étude théorique du SPOPO qui va être présentée ici est le résultat des travaux de thèse de Giuseppe Patera [Patera 08], puis de Benoît Chalopin [Chalopin 09], qui m'ont précédé dans notre groupe. Ces résultats ont aussi fait l'objet de publications [de Valcarcel 06, Patera 09]. Un résumé de ces travaux et des résultats nécessaires à la compréhension de la mise en œuvre expérimentale du SPOPO est ainsi présenté. On pourra se référer aux travaux précédents pour un exposé plus détaillé.

7.4.2 Nature multimode

Le calcul précédent a été traité dans le cas d'un OPO monomode, le SPOPO est quant à lui intrinsèquement multimode. Chaque fréquence du peigne de la pompe est ainsi couplée à toutes les fréquences du peigne signal produit à l'intérieur de la cavité. On appellera ainsi $\hat{a}_m$ et $\hat{a}_{\text{inj},m}$ les opérateurs annihilation des champs signal (à l'intérieur de la cavité) et injection, pour une dent m du peigne. La pompe est, elle, traitée de façon classique, son amplitude dépendant cependant de sa fréquence. Pour une fréquence de pompe de fréquence $m + q$, pouvant produire des signaux et complémentaires de fréquences m et q , on notera ainsi α_{m+q} l'amplitude de celle-ci.

Le gain paramétrique n'est plus simplement un scalaire mais une matrice de couplage $f_{m,q}$, tenant compte de l'accord de phase du cristal de la cavité. Ainsi, comme présenté sur la figure 7.4.1, chaque fréquence du peigne résonnant dans la cavité peut avoir été produite par chacune des dents du peigne de la pompe. Toutes les fréquences sont ainsi couplées entre elles.

7.4.3 Équations d'évolutions dans le temps du SPOPO, sous le seuil

Nous allons maintenant déterminer des équations d'évolutions pour le SPOPO, pour chaque fréquence du peigne. En plus des hypothèses déjà établies pour l'OPO monomode, nous allons considérer que la pompe n'est pas chirpée, ce qui revient à dire que l'amplitude de la pompe peut être prise réelle à toute fréquence. On considérera également que la susceptibilité non linéaire du cristal est constante sur le spectre considéré. Nous allons tout de suite nous placer dans

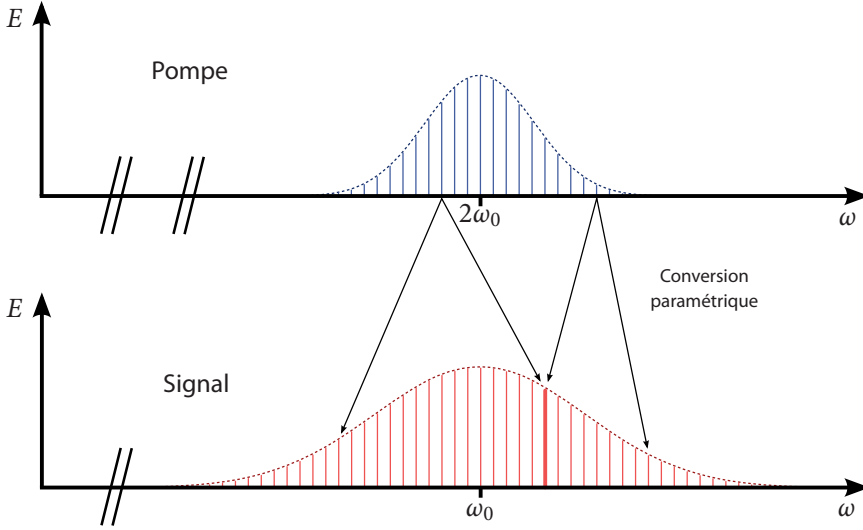


Fig. 7.4.1 : Interaction paramétrique à l'intérieur du SPOPO entre les différentes fréquences de la pompe et du champ signal, créé dans la cavité. Chaque fréquence de la pompe (en bleu) peut donner naissance à chacune des fréquences du peigne du signal (en rouge). La largeur spectrale du signal dépend de la pompe et de l'accord de phase du cristal.

le régime où les pertes dans la cavité sont petites par rapport à la transmission du miroir de sortie :

$$\gamma_s \gg \gamma_e, \gamma_c \quad \text{et donc} \quad \gamma \simeq \gamma_s$$

ce qui nous permet de négliger le couplage du vide dans la cavité (termes en $\hat{a}_s$ et $\hat{a}_c$). Sous ces hypothèses, l'équation d'évolution de l'opérateur annihilation à la fréquence m , peut s'écrire :

$$\frac{d\hat{a}_m}{dt} = -\gamma\hat{a}_m(t) + \sqrt{2\gamma_e}\hat{a}_{\text{inj},m}(t) + \gamma\sigma \sum_q f_{m,q} \alpha_{m+q} \hat{a}_q^\dagger(t)$$

7.4.1

où l'on rappelle que σ représente la puissance de la pompe, normalisée au seuil monomode, précédemment définie. La matrice définie par $\left\{ f_{m,q} \alpha_{m+q} \right\}_{m,q}$ est appelée *matrice de couplage spectral*. Elle contient toute l'information sur le couplage entre les différentes fréquences.

7.4.4 Diagonalisation et supermodes

Les équations d'évolutions précédentes constituent un système d'équations couplées. Afin de pouvoir le résoudre, nous diagonalisons la matrice de couplage. Ceci nous permet de nous placer dans une nouvelle base de modes, appelés « supermodes » et dans laquelle, les équations seront découplées. Dans cette nouvelle base, les opérateurs annihilations, que nous appelons $\hat{b}_n$ suivent les équations d'évolution découplées suivantes :

$$\frac{d\hat{b}_m}{dt} = -\gamma\hat{b}_m(t) + \sqrt{2\gamma_e}\hat{b}_{\text{inj},m}(t) + \gamma\sigma\Lambda_m\hat{b}_m^\dagger(t) \quad 7.4.2$$

Les $\{\Lambda_m\}_{m \geq 0}$ sont les valeurs propres de la matrice de couplage, correspondant aux modes propres $b_m^\dagger$. La matrice de couplage étant symétrique réelle, elles sont réelles. On ordonne les valeurs propres en fonction de leur valeurs absolues $|\Lambda_m|$, $|\Lambda_0|$ étant donc la plus grande. Les opérateurs annihilations $\hat{b}_m$ ne sont plus monochromatiques mais ils correspondent tout de même à des modes du champ, que l'on appellera *supermodes* [de Valcarcel 06, Wasilewski 06]. Cette dénomination provient du fait qu'il s'agit de combinaisons linéaires de modes longitudinaux de la cavité.

Les valeurs propres Λ_m associées à chaque mode correspondent à des gains relatifs. Quand $|\sigma\Lambda_0| < 1$ (et donc quand $\forall m, |\sigma\Lambda_m| < 1$), le SPOPO fonctionne comme une assemblée d'OPO monomodes indépendants en dessous du seuil. Dans notre configuration, ce facteur Λ_0 est grand devant 1, il est directement lié au rapport entre la puissance instantanée et la puissance moyenne du peigne. L'interaction dans le cristal étant rapide, c'est en effet la puissance instantanée du champ qui intervient, et non la puissance moyenne. Le seuil du SPOPO peut donc être considérablement réduit par rapport au seuil d'un OPO dont la pompe serait monochromatique et de même puissance moyenne, toutes choses égales par ailleurs.

7.4.5 Amplification, désamplification et bruit

Les équations, écrites dans la base des supermodes, sont découplées. Elles sont donc équivalentes à des OPO monomodes indépendants. On peut donc adapter les résultats des OPO monomodes, la seule différence provenant de la présence du paramètre Λ_m qui peut être positif ou négatif. La résolution mathématique des équations est cependant inchangée, nous avons donc pour les valeurs moyennes, avec les mêmes notations :

$$\begin{cases} X_{\text{out},m}^+ = 2 \frac{\sqrt{\gamma_e \gamma_s}}{\gamma} \frac{X_{\text{inj},m}^+}{1 - \Lambda_m \sigma} \\ X_{\text{out},m}^- = 2 \frac{\sqrt{\gamma_e \gamma_s}}{\gamma} \frac{X_{\text{inj},m}^-}{1 + \Lambda_m \sigma} \end{cases} \quad 7.4.3$$

Les quadratures amplifiées et désamplifiées dépendent donc du signe de Λ_m :

- Si $\Lambda_m > 0$, $X_{m,\text{out}}^+$ est amplifiée et $X_{m,\text{out}}^-$ désamplifiée.
- Si $\Lambda_m < 0$, $X_{m,\text{out}}^-$ est amplifiée et $X_{m,\text{out}}^+$ désamplifiée.

Le gain s'écrit, lui :

$$G_m = \frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \Lambda_m \sigma)^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \Lambda_m \sigma)^2} \quad 7.4.4$$

On a donc toujours

$$G_m^{\text{ampli}} = \frac{1}{(1 - |\Lambda_m| \sigma)^2} \quad 7.4.5$$

$$G_m^{\text{desampli}} = \frac{1}{(1 + |\Lambda_m| \sigma)^2} \quad 7.4.6$$

La phase correspondant à une amplification ou à une désamplification est cependant de 0 ou de $\pi/2$ selon le signe de Λ_m . On peut donc, pour une phase donnée, avoir certains modes amplifiés et d'autres désamplifiés.

Les densités spectrales de bruit s'écrivent quant à elles

$$\begin{cases} V_m^+(\Omega) = \frac{(1 + \Lambda_m \sigma)^2 + \Omega^2}{(1 - \Lambda_m \sigma)^2 + \Omega^2} \\ V_m^-(\Omega) = \frac{(1 - \Lambda_m \sigma)^2 + \Omega^2}{(1 + \Lambda_m \sigma)^2 + \Omega^2} \end{cases} \quad 7.4.7$$

Selon le signe de Λ_m , les quadratures voient leur bruit comprimé ou augmenté. Si l'on reprend le formalisme du chapitre 2, la matrice de covariance dans cette base, à une fréquence d'analyse donnée et ne considérant que M modes

du champ, s'écrit sous la forme

$$\Sigma(\Omega) = \begin{pmatrix} \frac{(1+\Lambda_1\sigma)^2+\Omega^2}{(1-\Lambda_1\sigma)^2+\Omega^2} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{(1+\Lambda_M\sigma)^2+\Omega^2}{(1-\Lambda_M\sigma)^2+\Omega^2} & & & 0 \\ & & & \frac{(1-\Lambda_1\sigma)^2+\Omega^2}{(1+\Lambda_1\sigma)^2+\Omega^2} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{(1-\Lambda_M\sigma)^2+\Omega^2}{(1+\Lambda_M\sigma)^2+\Omega^2} \end{pmatrix} \quad 7.4.8$$

7.4.6 Simulation numérique

Bien qu'il soit possible de montrer que sous certaines approximations, les supermodes sont des fonctions de Hermite-Gauss ([Patera 08]), un traitement plus poussé nécessite une simulation numérique. Giuseppe Patera a ainsi simulé le fonctionnement du SPOPO et déterminé les spectres fréquentiels des supermodes résonnants dans la cavité, ainsi que leurs valeurs propres associées. Ces simulations ont par la suite été adaptées par Benoît Chalopin aux paramètres expérimentaux de la cavité [Chalopin 09]. Le résultat de ces simulations est présenté sur la figure 7.4.2.

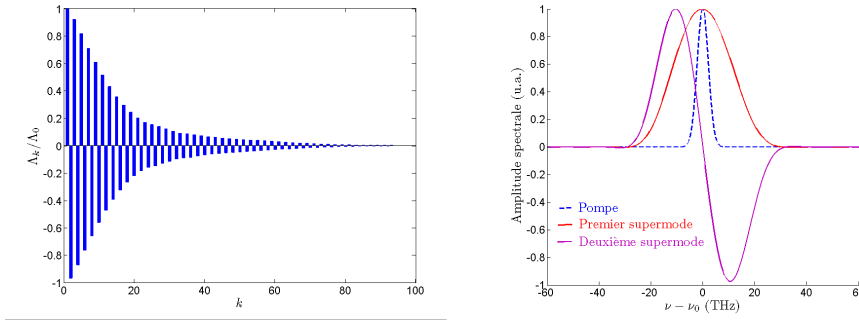


Fig. 7.4.2 : Valeurs propres Λ_m et allures des différents supermodes, simulés numériquement pour un cristal de BiBO de 500 μm d'épaisseur et des impulsions injectées de 120 fs de long. Simulation de B. Chalopin.

On constate que pour un cristal de 500 μm d'épaisseur, seul un petit nombre de supermodes ($\ll 100$) est associé à une valeur propre non négligeable devant

1 et contribue ainsi de manière significative au fonctionnement du SPOPO. Ces modes sont amplifiés ou désamplifiés en fonction de la phase relative entre la pompe et l'injection et voient leur propriétés de bruit évoluer en conséquence. Les autres modes, pour lesquels les valeurs propres Λ_m sont petites ne sont pas amplifiés ou désamplifiés et restent donc des états cohérents (en l'absence de bruit technique).

7.4.7 Remarque : fonctionnement au-dessus du seuil

Le seuil est déterminé par la plus grande valeur propre, en valeur absolue, que l'on a fixée comme étant Λ_0 . Au dessus du seuil, le SPOPO émet donc un champ intense dans ce mode là. Il est possible de montrer que les autres modes voient une puissance de pompe effective égale à celle du seuil du fondamental, et la compression de bruit qui y est associée. Dans cette situation, $\sigma\Lambda_0 = 1$, ainsi, pour $m > 0$, les variances des quadratures peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} V_m^+(\Omega) = \frac{(1 + \Lambda_m/\Lambda_0)^2 + \Omega^2}{(1 - \Lambda_m/\Lambda_0)^2 + \Omega^2} \\ V_m^-(\Omega) = \frac{(1 - \Lambda_m/\Lambda_0)^2 + \Omega^2}{(1 + \Lambda_m/\Lambda_0)^2 + \Omega^2} \end{cases} \quad 7.4.9$$

Les propriétés quantiques des SPOPO au-dessus du seuil n'ont pas été étudiées pendant cette thèse.

7.4.8 Conclusion

Les équations d'évolution du SPOPO font intervenir de nombreuses fréquences. Nous avons montré qu'en diagonalisant la matrice de couplage entre ces fréquences, il était possible de mettre en évidence une base de modes, appelés supermodes, pour lesquels ces équations sont découplées. Dans cette base, le SPOPO fonctionne, en dessous du seuil, comme une assemblée d'OPO monomodes indépendants les uns des autres. En fonction de la phase relative entre l'injection et la pompe, les supermodes sont ainsi amplifiés ou désamplifiés, ce qui correspond respectivement à une réduction ou un accroissement du bruit quantique par rapport à un état cohérent de même énergie. Ces supermodes peuvent être déterminés numériquement

8 Principe général de l'expérience

Sommaire

8.1	Principe de l'expérience	171
8.2	Sources lumineuses	171
8.3	Asservissements	172
8.3.1	États comprimés	172

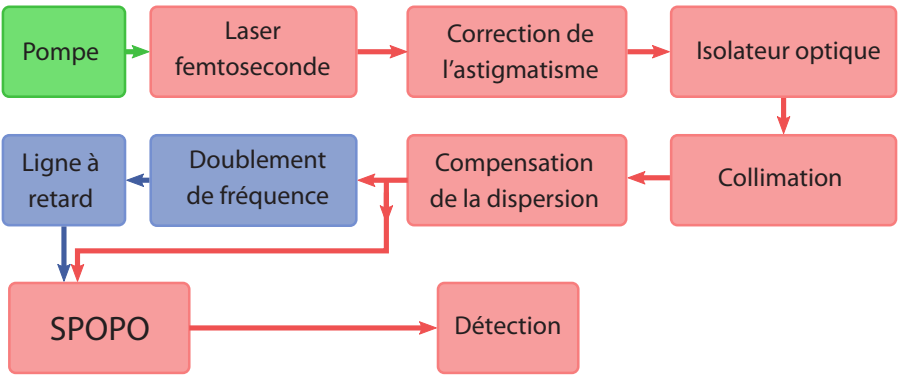


Fig. 8.0.1 : Schéma fonctionnel de l'expérience. Les asservissements ne sont pas représentés

Ce court chapitre introductif a pour vocation de présenter un aperçu de la mise en œuvre expérimentale de l'oscillateur paramétrique optique femtoseconde. Il a semblé nécessaire de présenter une vue d'ensemble de l'expérience et ses objectifs avant d'en détailler les composants individuellement dans les chapitres suivants. Il est conçu pour servir de référence pendant la lecture des chapitres suivants.

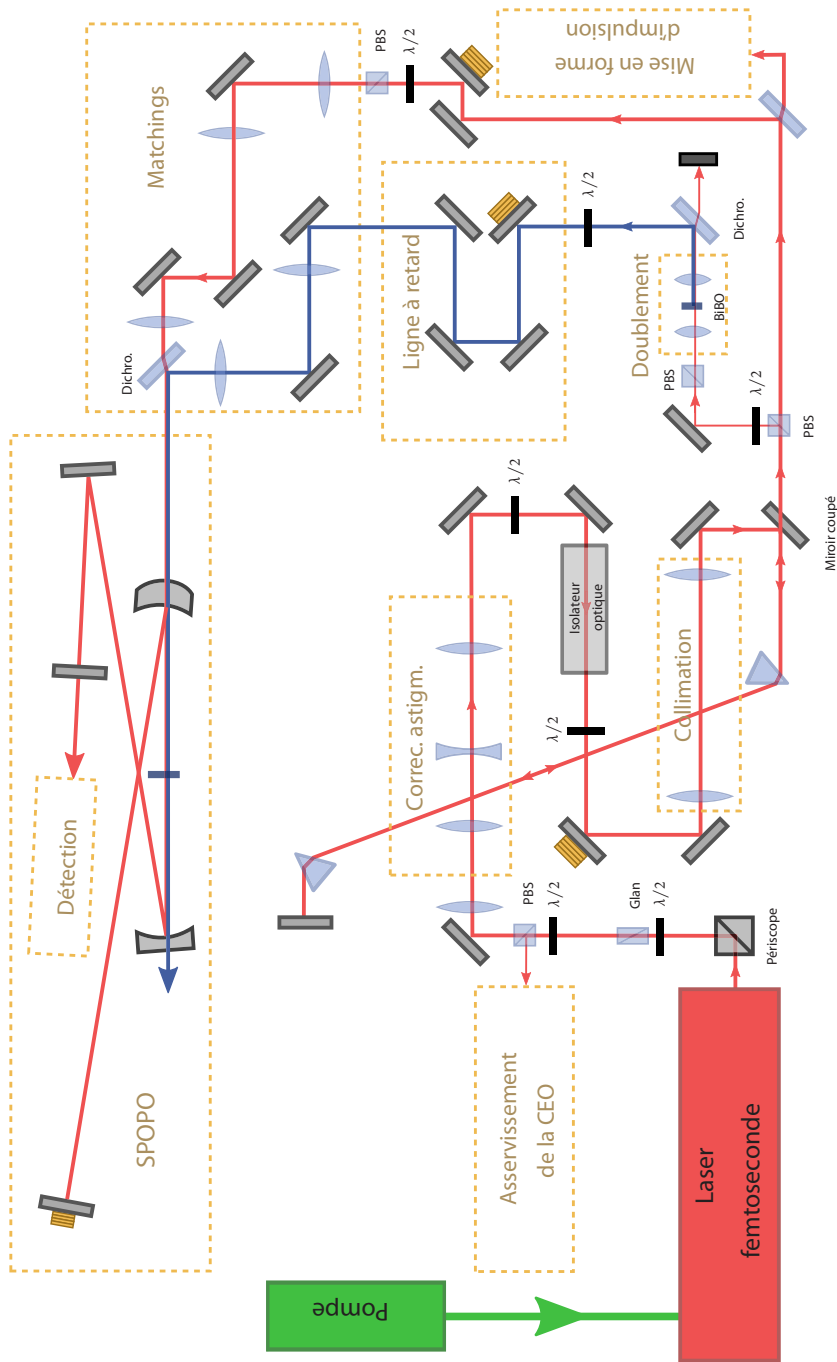


Fig. 8.0.2 : Schéma général de l'expérience. Les éléments et les chemins optiques ne sont pas représentés à l'échelle.

8.1 Principe de l'expérience

Un schéma fonctionnel de l'expérience est présenté sur la figure 8.0.1. Un autre schéma, présentant plus en détail les optiques utilisées, est présenté sur la figure 8.0.2.

Le cœur de cette expérience est un oscillateur paramétrique optique femtoseconde, qui sera appelé SPOPO dans la suite du texte, pour *Synchronously Pumped Optical Parametric Oscillator*. La théorie de cet appareil a été présentée dans le chapitre 7. Du point de vue expérimental, un SPOPO est donc un OPO pompé par des impulsions femtoseconde, la longueur de la cavité de l'OPO correspondant à la distance entre deux impulsions successives et donc à la longueur de la cavité laser produisant les impulsions lumineuses. Un faisceau infrarouge, dit *d'injection*, est résonnant dans la cavité du SPOPO. Quand on *pompe* cette cavité par un autre faisceau, de couleur bleue (violet), de fréquence centrale double du faisceau précédent (et non résonnant), on observe un phénomène d'amplification-désamplification, en fonction de la phase relative entre la pompe et l'injection. Cette théorie a été présentée au chapitre précédent (7.4.5). Ce fonctionnement n'est possible que si la puissance de la pompe n'est pas trop forte, c'est le fonctionnement *en dessous du seuil*. Au dessus d'un certain seuil de puissance de pompe, un faisceau infrarouge intense est produit même en l'absence d'injection dans la cavité, il s'agit du régime *au-dessus du seuil*. Nos expériences ont été principalement effectuées en dessous du seuil. Lorsque l'injection est désamplifiée, il a été montré que le bruit d'intensité de l'état produit par le SPOPO était comprimé. Le SPOPO étant un dispositif fondamentalement multimode, nous nous intéresserons aussi à mettre en évidence l'aspect multimode de l'état comprimé.

8.2 Sources lumineuses

La principale source lumineuse de l'expérience est un laser femtoseconde, produisant des impulsions ultra brèves dans le domaine infrarouge. Le fonctionnement de ce laser, ainsi que de sa pompe sont détaillés dans le chapitre suivant (9.1, 9.2). Ce laser femtoseconde présente des défauts (9.2.2), différents instruments de mesure (9.2.3) ont donc été mis en place pour contrôler l'état de l'appareil.

L'astigmatisme du faisceau est corrigé, puis celui-ci est collimaté (9.3), avant de passer à travers un isolateur optique (9.4). La dispersion du faisceau est en-

suite ajustée pour compenser la dispersion introduite par les différents éléments optiques traversés (9.5).

Une fois ce faisceau préparé, une partie de ce faisceau est injectée dans la cavité d'un OPO. Une fraction de ce faisceau est cependant doublée en fréquence auparavant (9.6), pour fournir un faisceau bleu qui servira de pompe de l'OPO.

8.3 Asservissements

Le chapitre 10 est dédié aux différents asservissements de l'expérience. En effet, ceux-ci sont d'une importance critique dans de telles expériences d'optiques quantiques et sont même parfois le facteur limitant pour les mesures (voir par exemple [Takeno 07]). Tout d'abord, le laser lui-même peut être asservi. Il a été mis en place un asservissement du taux de répétition de celui-ci (10.3) sur un synthétiseur de fréquence externe. D'autre part, une tentative d'asservissement de l'offset de la fréquence centrale du peigne (*Carrier Envelope offset, CEO*) est en cours (10.4).

La longueur de la cavité du SPOPO est asservie sur l'injection. Les méthodes de Hänsch-Couillaud (10.1.2) et du Tilt-locking (10.1.4) ont été essayées. Mais la cavité a été asservie au final pour la plupart des expériences par la méthode Pound-Drever-Hall (10.1.4). La modulation de la phase nécessaire pour ce dispositif d'asservissement est introduite par la vibration d'un actuateur piézo-électrique à une fréquence comprise entre 1 et 5 MHz (10.1.4.2). D'autre part, un nouveau dispositif d'asservissement des cavités femtoseconde utilisant le spectre transmis a été inventé, ce qui a conduit au dépôt d'un brevet pendant cette thèse (10.1.5).

La phase relative entre la pompe et l'injection doit aussi être asservie (10.2). Ceci a été obtenu en effectuant une détection synchrone, la modulation étant là encore obtenue par un actuateur piézo-électrique.

8.3.1 États comprimés

En utilisant une détection balancée (11.3.1.1), nous pouvons mettre en évidence une réduction du bruit d'intensité du faisceau par rapport à un état cohérent de même puissance. Cette mesure s'effectue grâce à un analyseur de spectre, à une fréquence d'analyse de quelques MHz. Nous avons aussi mis en place un dispositif permettant de mettre en évidence l'aspect multimode de l'état produit, dans le domaine fréquentiel. En dispersant le faisceau avec l'aide de

prismes, et en coupant le spectre à l'aide de lames de rasoir, nous mesurons l'évolution du bruit. En comparant le filtrage spectral avec une atténuation uniforme, il est possible de mettre en évidence l'aspect multimode de l'état produit par le SPOPO.

9 Sources lasers et préparation des faisceaux

Sommaire

9.1	Verdi V-18	174
9.2	Mira-900	175
9.2.1	Danger de la lumière produite par le laser	178
9.2.2	Bruits et défauts de la lumière produite par le laser	179
9.2.3	Contrôle des paramètres du laser	180
9.3	Profil spatial du faisceau	185
9.3.1	Astigmatisme	185
9.3.2	Collimation	185
9.4	Isolation optique	186
9.5	Compensation de la dispersion	187
9.6	Doublement de fréquence	189
9.7	Délai entre la pompe et l'injection	191
9.8	Conclusion	193

La source laser et les différentes étapes de préparation des faisceaux lumineux sont présentés dans ce chapitre. Nous détaillerons les différents procédés utilisés pour surveiller le fonctionnement des sources laser ainsi que les moyens utilisés pour préparer les faisceaux lumineux afin qu'ils puissent être utilisés pour l'expérience.

9.1 Verdi V-18

Le modèle VERDI V-18 de la marque Coherent [Coh 05] est un laser à état solide produisant un faisceau continu d'une puissance pouvant atteindre 18 W. Deux barrettes de diodes laser produisent des faisceaux, acheminés par des

fibres optiques, qui pompent un cristal dans une cavité résonnante. Composé d'*orthovanadate d'yttrium dopé au néodyme* ($Nd:YVO_4$), ce cristal produit un faisceau laser à 1064 nm. Celui-ci est doublé à l'intérieur même de la cavité résonnante par un cristal de *triborate de lithium* (LBO) pour produire un nouveau faisceau à 532 nm, qui émerge de l'appareil. Le milieu laser est à élargissement inhomogène, ce qui permet un fonctionnement monomode, ce comportement étant de surcroît renforcé par la présence d'un étalon de fréquence à l'intérieur de la cavité. Ce modèle a été produit en 2005, peu après que l'entreprise Coherent a changé sa gamme Verdi pour s'adapter aux nouvelles normes européennes ROHS sur les métaux lourds [Union Européenne 03]. Des discussions avec des responsables de Coherent France nous ont appris que ces nouveaux modèles étaient plus bruyés que les anciens. L'entreprise propose depuis, à la demande, certains modèles munis d'une électronique spéciale, plus adaptée selon eux pour pomper des lasers femtoseconde asservis.

9.2 Mira-900

Le laser Verdi V-18 est utilisé pour pomper un laser femtoseconde, lui aussi fabriqué par la marque Coherent, de modèle Mira-900[Coh 93]. Le milieu amplificateur est un cristal de saphir dopé au titane. Le verrouillage de modes (*mode-locking* en anglais) est passif. La présence d'effet Kerr dans la cavité change la forme du mode en fonction de l'intensité (instantanée) de l'onde lumineuse. Une fente de largeur et position réglable, sur le chemin du faisceau dans la cavité, permet alors d'introduire des pertes qui seront plus faibles pour un champ pulsé que pour un champ continu. Cette fente fait donc office d'absorbant saturable (effectif) et permet ainsi un fonctionnement femtoseconde du laser. Un filtre de Lyot, orientable, permet de sélectionner la longueur d'onde centrale du spectre du laser. Un système de compensation de la dispersion, composé de deux prismes, impose la quantité de dispersion. En translatant l'un des deux prismes, il est possible d'ajuster la longueur des impulsions. Une photodiode à l'intérieur de l'appareil mesure une fuite du faisceau produit par le laser sur une lame transparente. Ceci est utile pour s'assurer du bon fonctionnement du laser et diagnostiquer les problèmes éventuels.

A l'achat, l'un des miroirs de ce laser Mira-900 a été muni en usine d'un actuateur piézoélectrique (cf. Fig. 9.2.1). Ceci permet d'ajuster finement la longueur de la cavité et donc d'ajuster le taux de répétition des impulsions produites par le laser. Cette option fait partie de l'accessoire Synchro-Lock AP, qui est une

solution complète proposée par Coherent pour asservir le taux de répétition du laser, qui n'a pas été acquis. La monture du miroir de fond de cavité du laser a aussi été modifiée pour pouvoir être légèrement inclinée au moyen d'un actuateur piézoélectrique. Ceci permet de contrôler finement le CEO du peigne de fréquence produit par le laser. Le plan de cette monture est présenté sur la figure 9.2.2 et une photographie sur la figure 9.2.3.

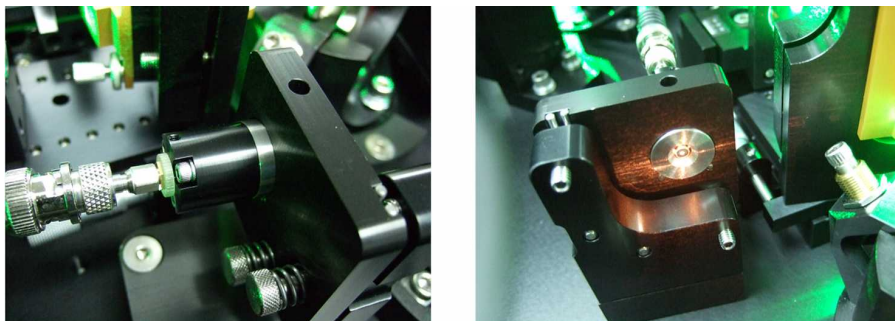


Fig. 9.2.1 : Photographies de l'actuateur piézoélectrique permettant de contrôler le taux de répétition du laser.

Lorsque l'expérience a débuté, en 2006-2007, la poussière ambiante dans la pièce salissait très rapidement les optiques du laser. Celles-ci devaient être nettoyées toutes les semaines. Une enceinte en Plexiglas a donc été construite autour du châssis du laser. Un flux d'air propre, obtenu en injectant un faible débit d'air comprimé, préalablement nettoyé par un filtre HEPA, permet de maintenir une surpression d'air dépourvu de poussière à l'intérieur de l'enceinte. Depuis, l'expérience entière a été placée sous un flux laminaire et cette injection d'air comprimée n'est plus utilisée. En revanche, l'enceinte en Plexiglas a été conservée car elle permet de diminuer l'influence des vibrations acoustiques sur le laser. Ceci a été constaté en étudiant la stabilité du laser en présence de vibrations acoustiques, produites par un haut parleur à proximité du laser. En émettant des sons à différentes fréquences, il est apparu que l'enceinte en Plexiglas autour du laser permettait de diminuer notablement l'influence des vibrations acoustiques de la pièce sur celui-ci.

En fonctionnement normal, ce laser peut produire plus de 2 W de puissance moyenne en régime femtoseconde, quand il est pompé par 13 W de puissance de pompe. Les impulsions femtoseconde ont un taux de répétition de 76 MHz environ, ce qui représente un chemin optique total dans la cavité de l'ordre de

177

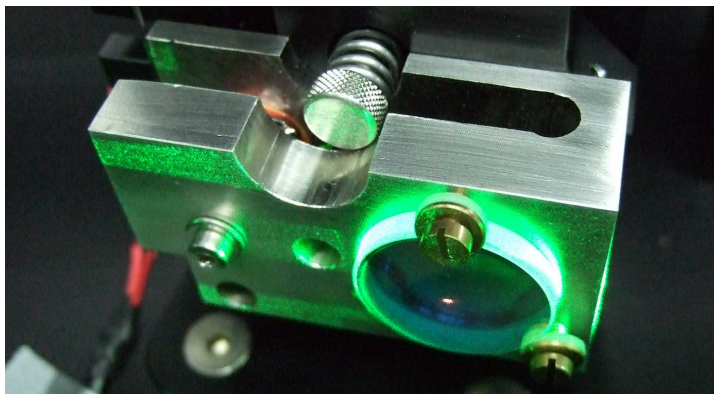


Fig. 9.2.3 : Photographie de la monture du miroir de fond de cavité, pouvant être orientée par un actuateur piézoélectrique.

4 m. Le laser est réglé pour produire un spectre de longueur d'onde centrale 795 nm et de largeur à mi-hauteur 7 nm, ce qui correspond à des impulsions de 120 fs de durée. Les impulsions les plus courtes qui ont été produites par ce laser ont été mesurées à 75 fs à mi-hauteur, au prix d'une certaine instabilité de la longueur d'onde centrale et de la puissance notamment.

9.2.1 Danger de la lumière produite par le laser

Ce laser fait partie de la classe IV et présente des risques significatifs pour les yeux. Son intensité moyenne, qui peut dépasser les 2 W est suffisante pour endommager définitivement les yeux. Une étude, [Thomas 02], a été réalisée sur des singes rhésus en utilisant un laser aux caractéristiques très proches du notre : impulsions de 120 fs, taux de répétition de 76 MHz, longueur d'onde centrale à 800 nm. Dans ces conditions expérimentales, il a été montré que les effets de la lumière femtoseconde étaient essentiellement thermiques et similaires aux effets de lasers continus de même puissances et longueurs d'ondes. Ceci s'explique a priori par le taux de répétition élevé de ces lasers. Des dommages permanents ont été observés sur la rétine pour des intensités moyennes inférieures à 25 mW, pendant un quart de seconde. Pour des taux de répétition plus faibles, ou des impulsions plus courtes, d'autres effets peuvent intervenir et abaisser les seuils de dommage (Voir par exemple [Nakamura 09]).

Afin de protéger les expérimentateurs, des lunettes de marque Glendale, de modèle 31-30300 ont été portées afin de protéger les yeux des radiations infra-

rouges autour de 800 nm produites par le laser. Des lunettes de modèle 31-30123 ont aussi été utilisées pour se protéger à la fois de la lumière infrarouge et bleue, autour de 400 nm, produite par doublement de fréquence.

Une exposition prolongée à la lumière produite par le laser peut toutefois engendrer des brûlures de la peau ou du matériel de la table optique.

9.2.2 Bruits et défauts de la lumière produite par le laser

« **Q-switch mode-locking** » Lorsque la fente du Mira est trop fermée, c'est-à-dire lorsque le paramètre d'absorption saturable devient trop fort, le laser entre généralement dans un mode de fonctionnement appelé en anglais *Q-switched mode-locking* [Haus 76, Hönninger 99]. Les impulsions successives voient alors leur puissance fluctuer, à la fréquence des oscillations de relaxation du laser. Qualitativement, la présence de l'absorbant saturable diminue les pertes quand l'intensité est élevée, ce qui conduit à réduire l'amortissement de ces oscillations de relaxation. Le laser passe ainsi d'un régime où les fluctuations du laser sont amorties à un régime où elles sont entretenues.

Présence de continu Si la fente est à l'inverse trop ouverte, le faisceau comportera aussi une composante continue, qui peut être détectée par un spectromètre. Ceci est aussi associé à une grande instabilité du laser.

Puissance Le laser peut fluctuer en puissance. Ceci peut être observé, soit en utilisant un mesureur de puissance, soit plus précisément en utilisant une photodiode récoltant une fraction de la lumière du laser. Ces fluctuations sont relativement lentes, avec des périodes typiques de quelques secondes et sont principalement marquées quand le laser est désaligné. Elles apparaissent aussi naturellement quand le laser est poussé au delà de ses spécifications, par exemple quand les impulsions produites sont plus courtes que 100 fs.

Dépointé Le pointé du faisceau produit par le laser peut fluctuer. Ces oscillations sont relativement lentes, à des fréquences typiques de 0.5 à 2 Hz.

Fluctuations en spectre De façon typiquement corrélé au dépointé du laser, le spectre peut fluctuer, parfois de plusieurs nanomètres. Ceci peut être mesuré en utilisant un spectromètre. Cette corrélation est typique, voir par exemple [Ye 05], p. 124.

Profil spatial Quand le laser se désaligne, le profil spatial du faisceau produit par le laser se dégrade. Ceci peut être observé à l'œil nu sur une feuille de papier ou plus finement en utilisant une caméra. D'une manière générale, en optimisant la puissance du laser, on améliore la qualité spatiale du faisceau. Ceci n'est malheureusement pas toujours le cas et il est parfois nécessaire de tâtonner en essayant différents réglages, non nécessairement optimaux, pour obtenir une qualité spatiale acceptable.

9.2.3 Contrôle des paramètres du laser

Différents outils de contrôle permettent de vérifier les paramètres du laser.

Puissance du laser La puissance du laser est caractérisée par un mesureur de puissance à thermopile. Les fluctuations du laser peuvent d'autre part être détectées de manière plus précise en utilisant une photodiode mesurant une petite fraction de la lumière émise par le laser. La photodiode interne du laser ne peut pas être utilisée ainsi car son électronique est munie d'un filtre passe-haut qui filtre la composante continue.

Spectre du laser Un spectromètre USB HR4000 de la marque Ocean Optics permet de mesurer le spectre du laser. Ceci permet de mesurer si la fréquence centrale est correcte. En pratique, la fréquence centrale dépend du réglage du laser, elle dépend notamment fortement de la position et de l'ouverture de la fente servant au verrouillage de mode du laser. Il est nécessaire de vérifier régulièrement qu'elle n'a pas évolué. L'observation du spectre permet aussi de détecter la présence éventuelle d'une onde continue dans le faisceau produit par le laser. Ceci se produit quand la fente du laser est trop ouverte. La largeur spectrale, quant à elle, change relativement peu quand le laser se désaligne un peu. Elle ne nécessite pas d'être mesurée souvent. Les spectres, avec et sans présence de continu sont présentés sur les figures

Oscilloscope Une photodiode, à l'intérieur du châssis du laser, mesure le signal produit par cet appareil, par le biais d'une fuite sur une lame transparente. L'électronique de cette photodiode est munie d'un filtre passe haut qui filtre la composante continue du signal électrique. Celui-ci est observé sur un oscilloscope analogique TDS420A qui en pratique a été dédié à cette utilisation. L'observation de pics périodiques à 76 MHz est attendue en fonctionnement

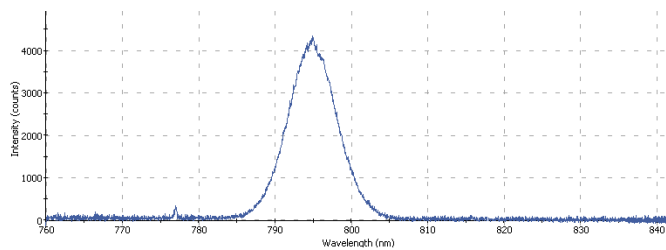


Fig. 9.2.4 : Spectre optique en régime femtoseconde, mesuré avec un spectromètre USB HR4000.

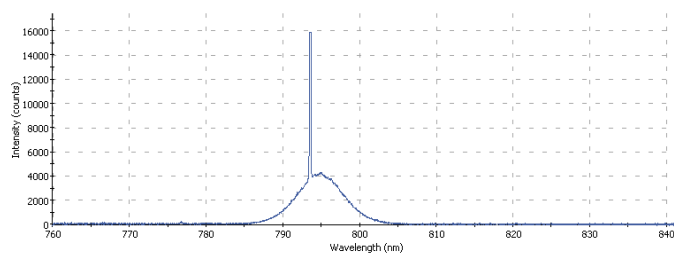


Fig. 9.2.5 : Spectre optique en régime femtoseconde, en présence d'une émission continue parasite. L'intensité est ici saturée à la fréquence du pic continu.

femtoseconde normal, tel que présenté sur la figure 9.2.6. En régime continu, on observe soit une absence de signal, soit un signal périodique à 76 MHz, proche d'une sinusoïde, qu'il est possible de distinguer qualitativement du régime femtoseconde. Occasionnellement, si le laser est très désaligné, il est possible que deux impulsions circulent simultanément dans la cavité. On observe alors un signal à 152 MHz. D'autre part, si le laser est en régime de fonctionnement Q-Switch, l'enveloppe des impulsions sera modulée par un signal à 800 kHz, tel que présenté sur la figure 9.2.7. Ceci ne constitue cependant pas la manière optimale de détecter la présence de ce phénomène, il est préférable d'utiliser un analyseur de spectre.

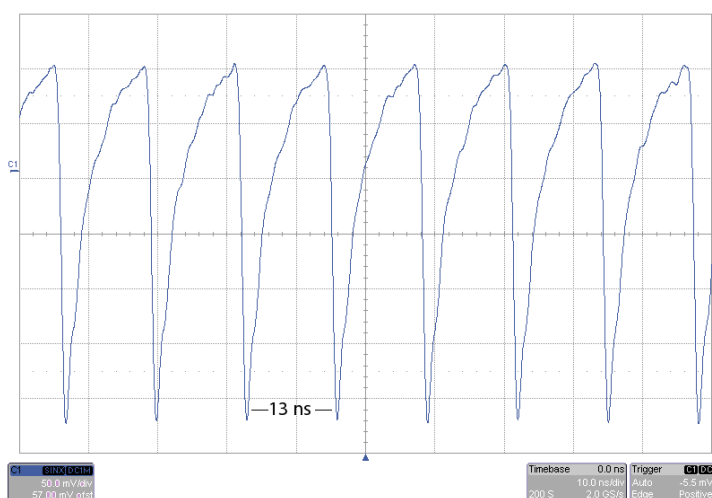


Fig. 9.2.6 : Signal observé sur la photodiode rapide, mesuré par un oscilloscope rapide (Le-croy Wavesurfer, différent de l'appareil analogue utilisé pour surveiller l'état du laser tous les jours)

Analyseur de spectre Le signal électrique de la photodiode est aussi mesuré par un analyseur de spectre. L'utilisation se fait en général en parallèle avec celle de l'oscilloscope car elles sont complémentaires. L'analyseur de spectre qui est principalement utilisé pour ces mesures est un modèle analogique Tektronix 2753P. En pratique il est dédié à cette utilisation quasi-exclusive. Cet analyseur de spectre permet d'avoir accès à des informations très précises sur le bruit du laser. Sa principale utilisation est de détecter un éventuel fonctionnement Q-switch du laser. Régulé avec une bande passante de 100 kHz, centré autour de

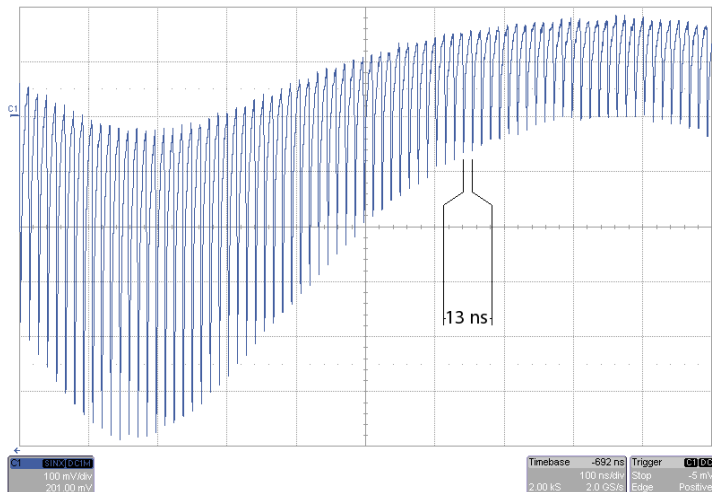


Fig. 9.2.7 : Effet du phénomène de Q-switch modelocking sur le signal produit par le laser, mesuré avec oscilloscope rapide

76 MHz, sur une plage de fréquence de 10 MHz, il permet d'observer le phénomène de Q-switch s'il apparaît. Celui-ci se traduit par la présence de pics de modulation autour du pic central à 76 MHz, séparés par des intervalles de 800 kHz environ. L'allure typique du phénomène de Q-switch est présentée sur la figure 9.2.9.

En utilisant un réglage plus fin autour du pic central à 76 MHz, par exemple une bande passante de 1 kHz pour une plage de fréquence de 50 kHz, on observe des pics de bruits relativement fins. Ces bruits sont problématiques car ils sont corrélés à une instabilité de l'expérience mais leurs origines n'ont jamais pu être déterminées. Les fréquences de ces bruits évoluent en fonction des jours et sont sensibles, dans une certaine mesure, à un réaligement du laser.

Photodiode à quadrants L'utilisation d'une photodiode à quadrants, composée de quatre zones sensibles très proches les unes des autres, permet d'estimer le dépointé du laser. Ceci est réalisé en soustrayant les signaux produits par deux des quatre quadrants pour obtenir une information sur le dépointé horizontal ou vertical.

Autocorrélateur Un autocorrélateur commercial PulseCheck, de la marque APE, permet de caractériser les impulsions femtoseconde. Cet appareil permet

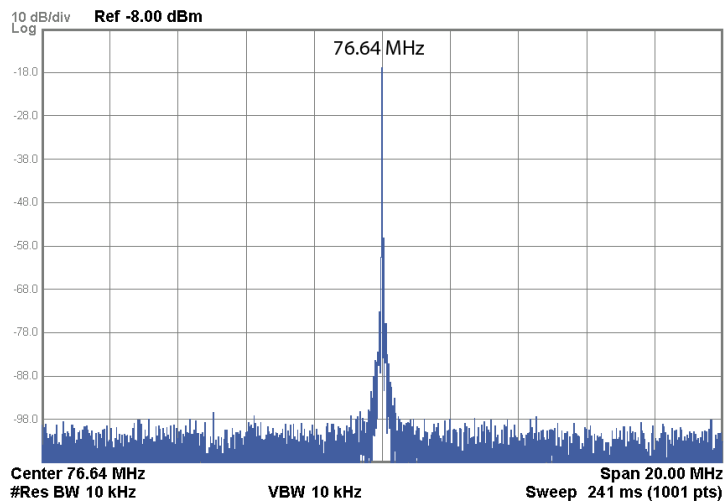


Fig. 9.2.8 : Spectre autour de la fréquence de répétition des impulsions femtoseconde, en fonctionnement normal.

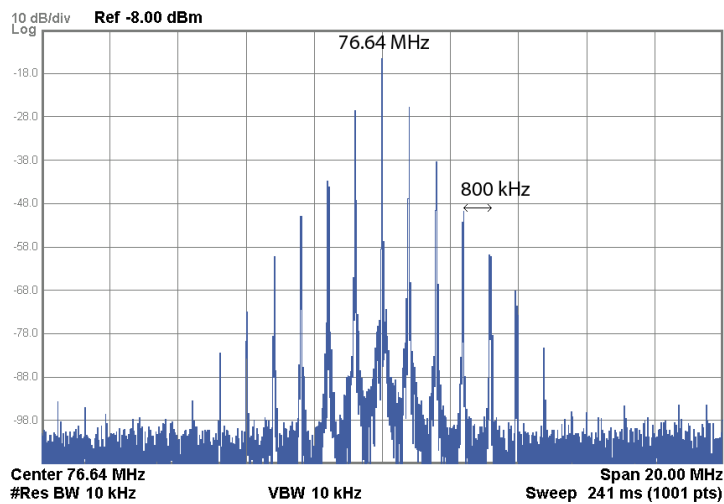


Fig. 9.2.9 : Effet du phénomène de Q-switch modelocking sur le signal produit par le laser, mesuré avec un analyseur de spectre.

de mesurer des traces d'autocorrélation non-linéaires pour des impulsions de longueur d'onde 800 nm, en utilisant un cristal doubleur. Il est aussi muni d'une option permettant de déterminer des signaux de corrélation croisée entre des impulsions à 800 nm et 400 nm, afin de pouvoir caractériser des impulsions à 400 nm. Ceci repose sur le principe d'une somme de fréquence dans un autre cristal non-linéaire (il est en effet difficile de doubler un signal à 400 nm). Malgré des essais répétés, il n'a pas encore été possible de caractériser des impulsions à 400 nm, en raisons de défaillances du matériel vendu. Nous n'avons malheureusement pas eu la possibilité pendant cette thèse de mesurer la longueur des impulsions produites par doublement de fréquence du Mira.

Caméra CMOS Des caméras Thorlabs de technologie CMOS, de modèle DCC1545M sont utilisées pour mesurer le profil du faisceau.

9.3 Profil spatial du faisceau

9.3.1 Astigmatisme

Le profil spatial du faisceau qui est produit par le laser femtoseconde est très elliptique. Afin de corriger son astigmatisme, il a été mis en place un système de trois lentilles cylindriques fonctionnant comme un zoom à une dimension. En ajustant finement les positions des lentilles, le profil du faisceau est rendu circulaire, en champ proche et en champ lointain.

9.3.2 Collimation

Le faisceau est collimaté sur le chemin optique, après passage dans l'isolateur optique. Une taille de waist de 1 mm a été choisie. En effet, cette dimension est suffisamment réduite pour que le passage à travers de nombreuses lentilles n'apporte pas trop d'aberrations tout en ne divergeant pas trop vite. La longueur de Rayleigh pour un tel waist est ainsi de 4 m environ. En focalisant donc à une distance de 4 m, il est possible de travailler avec un faisceau dont la largeur (au sens du paramètre w d'un faisceau gaussien) est comprise entre 1 et 1.4 mm environ. Nous disposons donc d'un faisceau qui reste faiblement divergent sur l'étendue de sa propagation sur la table optique.

9.4 Isolation optique

L'isolation optique s'effectue par le biais d'un isolateur optique à effet Faraday. Celui-ci est indispensable au bon fonctionnement de l'expérience. Le laser est en effet très sensible aux faisceaux rétro-réfléchis, au point de ne pas pouvoir fonctionner en verrouillage de mode en l'absence d'isolateur optique. Plusieurs critères sont rentrés en compte à l'achat de celui-ci. Outre les critères classiques de taux de transmission et d'isolation, son seuil de dommage et la dispersion induite sur le faisceau ont été des critères déterminants.

Les puissances que nous utilisons peuvent atteindre les deux watts de puissance moyenne. Comme notre laser fonctionne en régime impulsionnel, les seuils de dommage peuvent potentiellement être abaissés (voir par exemple [Lenzner 98]). D'autre part, comme nous travaillons en régime femtoseconde, nous sommes sensibles à la dispersion sur le chemin optique. A l'intérieur de l'isolateur optique, la lumière traverse plusieurs centimètres de TGG (Grenat de Terbium-Gallium). Ce matériau magnéto-optique n'est pas spécialement conçu pour être peu dispersif, comme par exemple la silice fondue. La présence de deux polariseurs de Glan de part et d'autre de l'isolateur optique contribue elle aussi à la dispersion.

Malgré nos demandes insistantes, aucun fabricant du marché n'a pu nous fournir de données de dispersion ou de garantie concernant les seuils de dommage pour un laser femtoseconde, ni même fournir d'informations concernant les dimensions des cristaux magnéto-optiques.

Notre choix s'est donc porté sur un isolateur optique IO-3-795 HP de chez OFR (groupe Thorlabs) qui présentait des seuils de dommage en continu élevés ($> 500 \text{ W/cm}^2$) ainsi qu'un facteur de forme relativement compact, ce qui laissait présager une dispersion modérée. Cet isolateur optique a été utilisé pendant plus de 2 ans sans être endommagé. Il a depuis été remplacé par le modèle IO-5-795 HP aux caractéristiques relativement similaires mais qui présente une ouverture plus large (de 5 mm au lieu de 2.7 mm d'ouverture), ce qui facilite grandement son alignement. Cet isolateur optique introduit une dispersion de délai de groupe de 2700 fs^2 environ, déterminée en mesurant la longueur d'impulsions avant et après passage dans l'isolateur optique.

9.5 Compensation de la dispersion

Outre l'isolateur optique, toutes les optiques traversées par les faisceaux introduisent un délai de vitesse de groupe et donc un allongement des impulsions. Cette dispersion de vitesse de groupe peut être compensée par une ligne de compensation de dispersion à prismes. Cette technique a été introduite pour la première fois par Fork, Martinez et Gordon en 1984 [Fork 84]. La plupart des matériaux transparents dans le visible présentent une dispersion positive. Afin de pouvoir générer une dispersion de vitesse de groupe négative, on utilise des prismes disposés selon un schéma permettant de faire parcourir un plus long chemin optique aux courtes longueurs d'ondes. Ceci introduit géométriquement une dispersion négative, qui permet de compenser la dispersion positive introduite par les autres éléments optiques. Le dispositif proposé initialement comportait 4 prismes (cf. fig. 9.5.1). Il est possible d'obtenir le même effet en n'utilisant que deux prismes et un miroir légèrement incliné verticalement (cf. fig. 9.5.2). Le faisceau réfléchi après un double passage dans chacun des deux prismes est superposé horizontalement au faisceau incident, mais à une hauteur différente. Il peut ainsi être réfléchi par un miroir coupé bien positionné. C'est cette configuration qui est mise en place expérimentalement sur l'expérience.

On rappelle que pour un faisceau incident sur un prisme, au minimum de déviation, les faisceaux incidents et transmis ont la même incidence par rapport aux faces d'entrée et de sortie du prisme. Il est donc possible, en taillant correctement les prismes, que toutes les réfractions sur les faces des prismes se fassent à l'angle d'incidence de Brewster, c'est-à-dire sans pertes pour de la lumière polarisée horizontalement. C'est cette configuration qui est choisie en pratique pour l'expérience. L'inconvénient de cette configuration vient justement du fait que les prismes sont au minimum de déviation, ce qui limite l'effet de dispersion de vitesse de groupe négative, que l'on cherche justement à introduire. Une alternative consisterait à utiliser des prismes dont les faces seraient traitées antireflet. Il serait alors possible d'obtenir des dispersions plus importantes avec des lignes de dispersion plus courtes.

Dans le cas des prismes taillés à Brewster, il est possible de montrer (cf. [Fork 84]) que la dispersion de délai de groupe « géométrique » (introduite par les différences de chemins optiques parcourues selon les longueurs d'ondes) peut approximativement s'écrire sous la forme :

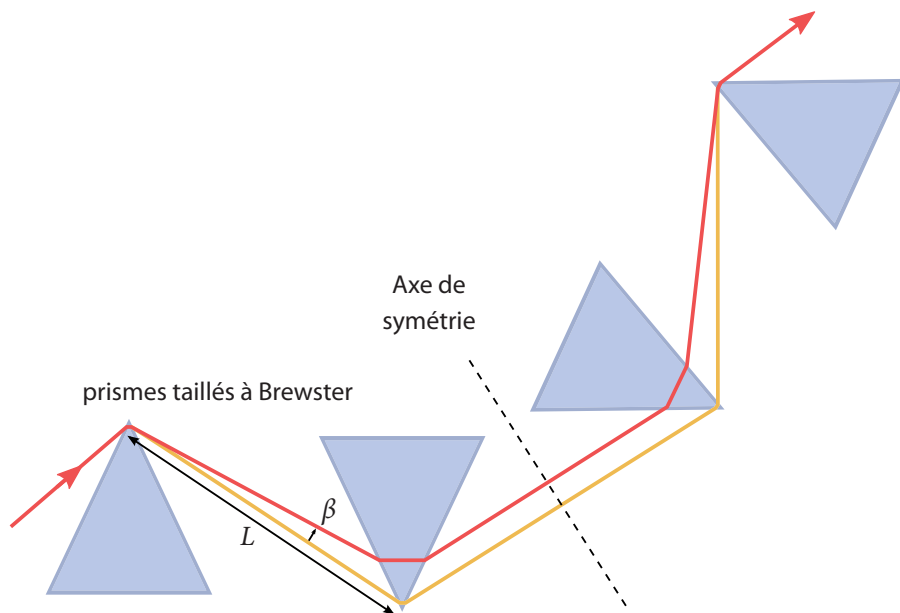


Fig. 9.5.1 : Ligne de compensation de dispersion à 4 prismes.

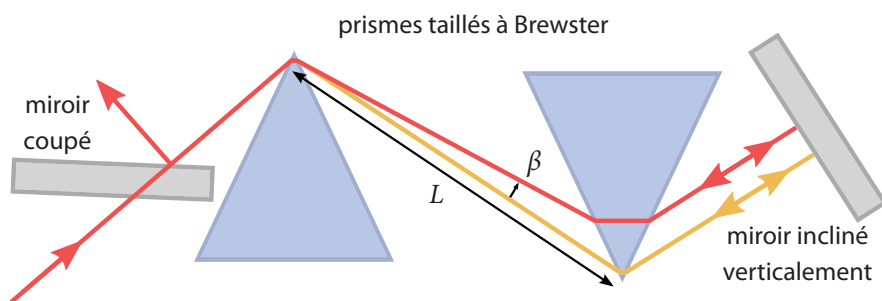


Fig. 9.5.2 : Ligne de compensation de dispersion à 2 prismes et un miroir. Le faisceau réfléchi est superposé horizontalement au faisceau incident, mais légèrement incliné verticalement. Il est réfléchi par un miroir coupé après un double passage dans chaque prisme.

$$\phi'' = \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} \simeq - \frac{2L\lambda_0^3}{\pi c^2} \left(\left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0} \right)^2 \quad 9.5.1$$

où ϕ représente la phase spectrale accumulée sur la propagation, L la distance entre les deux pointes des prismes, n l'indice du matériau et ω_0 et λ_0 les pulsation et longueur d'onde centrale du spectre. Ce délai s'exprime en s^2 . Cette formule fait bien apparaître que l'on utilise les propriétés de *dispersion de vitesse de phase* du matériau du prisme (terme en $\left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0}$) pour induire de la *dispersion de délai de groupe*. À ce terme géométrique négatif, il faut bien sûr rajouter un autre terme, positif, provenant des propriétés de dispersion de vitesse de groupe du matériau lui-même et qui est proportionnel à la distance parcourue par le faisceau dans les prismes. En pratique, on ajustera finement la dispersion de cette ligne de compensation en translatant un des prismes, ce qui permet d'introduire plus ou moins de dispersion positive dans la ligne, sans changer significativement la dispersion « géométrique » négative. Pour un prisme en SF10 acquis chez CVI Melles Griot, comme ceux que nous utilisons, la dispersion de vitesse de phase vaut approximativement, d'après les données du fabricant¹ :

$$\left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0} \simeq 50\,000 \text{ m}^{-1} \quad \text{pour } \lambda_0 = 795 \text{ nm} \quad 9.5.2$$

On peut en déduire que la phase quadratique introduite, en fonction de la distance L entre les pointes des prismes, vaut approximativement

$$\phi'' \simeq -8900 \text{ fs}^2 \text{ m}^{-1} \times L \quad 9.5.3$$

Expérimentalement, cette distance L a pour valeur 83 cm, ce qui représente une compensation de 7400 fs².

9.6 Doublement de fréquence

Une partie du faisceau est doublée en fréquence par un cristal de BIBO. Le Triborate de Bismuth, de formule brute BiBO₃, appelé couramment BIBO, est un cristal artificiel, biaxe, aux propriétés non-linéaires, découvert en 1962 [Levin 62] et dont les propriétés non-linéaires ont été mesurées en 1998 [Hellwig 98]. Le BIBO a depuis été utilisé pour diverses applications

¹ Cette valeur est obtenue à partir des valeurs de l'indice du SF10, fournies à l'adresse http://www.cvimellesgriot.com/Company/CVIMG_Refractive_Index.xls

d'optique non-linéaire : doublement de fréquence en cavité [Du 01], doublement de fréquence d'impulsions en simple passage [Wang 02], OPO femtoseconde [Ghotbi 06] ou production de faisceaux ultraviolets [Ghotbi 08] jusqu'à une longueur d'onde de 250 nm.

Nos cristaux de BIBO ont été achetés à l'entreprise chinoise Fujian Castech Crystals. La coupe de nos cristal est effectuée selon les angles $\theta = 152$ et $\phi = 90$, ce qui correspond à une non-linéarité théorique de 3.73 pm/V, pour une interaction à deux ondes de type I. Comme le laser fonctionne en régime femtoseconde, les intensités crêtes sont très élevées et les efficacités de conversion aussi, même en simple passage et avec un cristal non-linéaire fin. L'efficacité de conversion augmente avec l'épaisseur du cristal. Dans un cristal trop épais cependant, la dispersion de vitesse de groupe risque d'allonger la durée de l'impulsion produite. Les deux faces du cristal sont traitées antireflet autour des longueurs d'ondes 400 et 800 nm, avec des coefficients de transmission en puissance supérieurs à 99.7 %.

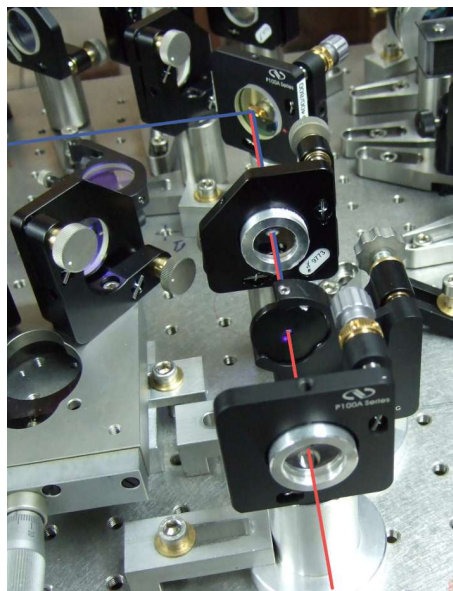


Fig. 9.6.1 : Photographie du dispositif de doublement de fréquence.

Le faisceau, approximativement collimaté, de largeur 1.2 mm, est focalisé au moyen d'un doublet achromatique de distance focale 5 cm. Le waist théorique au point de focalisation est d'environ 11 μm . Le cristal est monté dans une

monture Newport de type U100-ACG-3K, qui possède trois degrés de liberté. En jouant sur deux vis de rotation simultanément, il est possible de réaliser des rotations pures, sans translation. En jouant sur les trois vis simultanément, il est possible de translater le cristal, sans rotation de celui-ci. Le fondamental et l'harmonique sont séparés par un miroir dichroïque. Différents cristaux, d'épaisseurs comprises entre 100 et 1000 μm , ont été utilisés. Un cristal de 200 μm a été retenu car il nous permet d'obtenir suffisamment d'intensité lumineuse pour le faisceau doublé, sans être trop épais. Expérimentalement, en utilisant 1.6 W de puissance infrarouge, il est possible de produire 400 mW de faisceau doublé, ce qui correspond à une efficacité de conversion de 25 %. Cette puissance est amplement suffisante pour pomper le SPOPO. En utilisant un cristal de 1 mm, il a été obtenu plus de 800 mW de bleu. Ce cristal a été utilisé pendant plus de 2 ans sans dommage notable. Les spectres, avant et après doublement, sont présentés sur les figures 9.6.2 et 9.6.3. En faisant l'hypothèse que les impulsions sont limitées par transformée de Fourier, et en ajustant selon des profils gaussiens ou en sécante hyperbolique (aucun des deux ne s'ajustant correctement), nous obtenons des longueurs d'impulsions à mi-hauteur avant doublement de 132.7 fs et 100.7 fs respectivement. Après le doublement et selon les mêmes hypothèses, les longueurs d'impulsions du faisceau doublé sont estimées à 95.1 fs et 72.2 fs. Il avait été précédemment démontré (7.2) que le rapport entre les longueurs des impulsions avant et après doublement était théoriquement de $\sqrt{2}$. Cette relation est vérifiée à mieux que 1.5 % près. Bien que nous n'ayons pas pu mesurer la longueur des impulsions doublées en utilisant un autocorrélateur, cette mesure permet de suggérer que l'effet de la dispersion de vitesse de groupe intervient peu pour le doublement dans un cristal de BiBO de 200 μm d'épaisseur.

9.7 Délai entre la pompe et l'injection

Puisque notre OPO fonctionne en mode synchrone, il est nécessaire que la pompe et l'injection soient synchronisées, c'est-à-dire que les deux impulsions pénètrent simultanément dans le cristal non-linéaire de l'OPO. Pour des impulsions (limitées par transformée de Fourier) de 120 fs de long, cela veut dire que la différence de chemin optique entre la pompe et l'injection doit être inférieure à quelques micromètres pour qu'il y ait interaction. Une ligne à retard, composée de deux miroirs perpendiculaires translatables a donc été introduite sur le chemin de la pompe. Cette ligne à retard peut être translatée par un moteur de

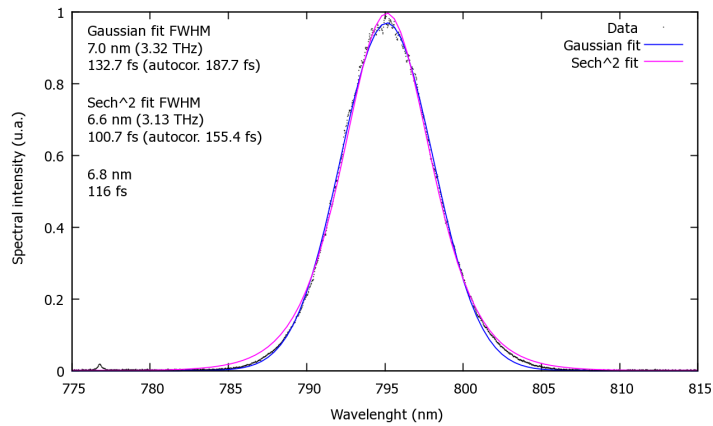


Fig. 9.6.2 : Spectre rouge avant doublement de fréquence. Les longueurs d'impulsions sont calculées en faisant l'hypothèse d'impulsions limitées par transformée de Fourier, les ajustements étant déterminés en faisant l'hypothèse d'impulsions de profils gaussien ou sécante hyperbolique.

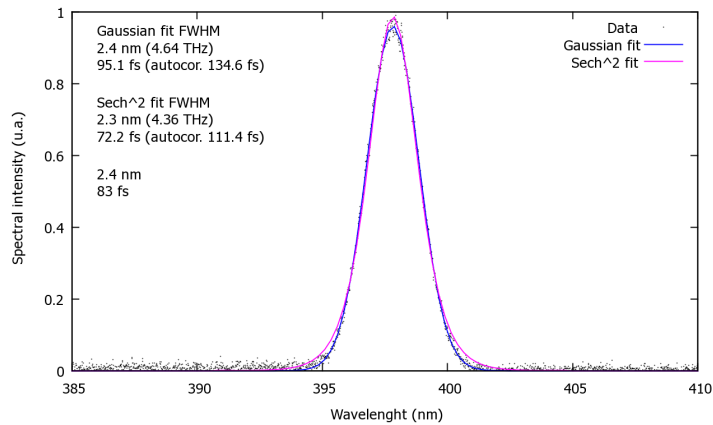


Fig. 9.6.3 : Spectre après doublement de fréquence.

marque Standa, modèle 8MT167-25. D'autre part, afin de pouvoir ajuster finement et dynamiquement le délai entre les deux voies (on parle alors plutôt de phase relative), un des miroirs du chemin est placée sur un actuateur piézoélectrique.

9.8 Conclusion

Nous avons préparés deux faisceaux femtoseconde, l'un à 795 nm, l'autre à 397 nm qui vont servir respectivement d'injection et de pompe du SPOPO.

10 Asservissements

Sommaire

10.1 Asservissement de la longueur de la cavité	194
10.1.1 Asservissement en réflexion ou en transmission	195
10.1.2 Asservissement par la méthode Hänsch-Couillaud	196
10.1.3 Asservissement en tilt-locking	197
10.1.4 Asservissement par la méthode Pound-Drever-Hall	198
10.1.5 Asservissement par moiré de fréquence	205
10.1.6 Systèmes d'asservissements non implémentés	213
10.2 Asservissement de la phase relative	214
10.3 Asservissement du taux de répétition	214
10.3.1 Mise en œuvre expérimentale	215
10.3.2 Résultats	216
10.4 Asservissement du CEO	216
10.4.1 Mise en œuvre expérimentale	217
10.4.2 Conclusion et perspectives	218

Ce chapitre est consacré à la présentation des différents asservissements qui ont été mis en place sur l'expérience. Comme sur de nombreuses expériences d'optique quantique, la qualité des asservissements est bien souvent critique ou limitante pour la qualité des résultats obtenus. La mise en place de ces différents asservissements a ainsi représenté un travail considérable pendant les trois années de la thèse et un grand nombre de méthodes, dont certaines vont être présentées, ont été mises en place sur cette expérience.

10.1 Asservissement de la longueur de la cavité

La longueur de la cavité, qui mesure 4 m, doit nécessairement être asservie pour que la transmission de la cavité soit maximale (i.e. sans pertes) et constante (i.e. sans bruit rajouté), avec une précision bien meilleure que la

longueur d'onde divisée par la finesse de la cavité (30), c'est-à-dire plus précis que le nanomètre. Cette cavité est injectée de façon synchrone, comme il a été vu précédemment (cf. 6.2.2.4) cela signifie que la longueur de la cavité doit être approximativement égale à la distance entre deux impulsions, avec une précision meilleure que quelques micromètres pour observer un phénomène d'interférence. La grande longueur de la cavité et le bruit du laser rendent l'asservissement de cette cavité, qui a donc été particulièrement ardu par rapport à d'autres OPO continus développés dans le groupe auparavant.

10.1.1 Asservissement en réflexion ou en transmission

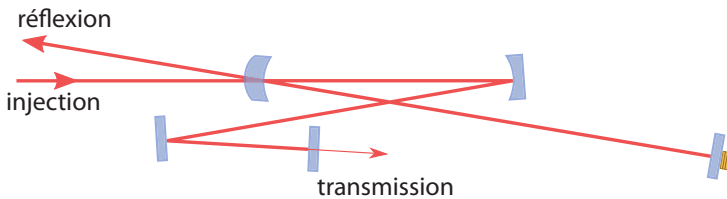


Fig. 10.1.1 : Asservissement en réflexion ou en transmission

Si le miroir de couplage d'entrée dans la cavité est incliné, il est possible de mesurer directement le faisceau réfléchi sur ce miroir. Dans le cas contraire, la mesure peut s'effectuer en utilisant par exemple une isolation optique ou une fuite sur un élément optique. Les mesures en réflexion sont souvent intéressantes car elles permettent de rendre indépendants la détection, qui porte sur le faisceau transmis, et l'asservissement, qui porte alors sur le faisceau réfléchi. D'autre part, les composantes à hautes fréquences, utilisées pour certains types d'asservissement, sont réfléchies lorsqu'elles sont au delà de la bande passante de la cavité. Certaines techniques d'asservissement, comme le « tilt-locking » [Shaddock 99] et l'asservissement en polarisation de Hänsch-Couillaud [Hänsch 80] ne peuvent fonctionner qu'en réflexion. Elles sont basées sur le principe d'une interférence entre le faisceau réfléchi directement sur le coupleur d'entrée et la fraction du mode résonnant qui ressort par ce miroir.

Dans le cas de notre cavité, les coupleurs d'entrée et de sortie de la cavité ont des transmissions très différentes. En effet, la transmission du miroir de sortie est de 20 % tandis que celle du miroir d'entrée est plus petite que 10^{-3} . Ceci a pour conséquence que la contribution de la réflexion directe du faisceau in-

jecté sur le miroir d'entrée est beaucoup plus importante que celle provenant de la transmission en retour du mode résonnant par ce même miroir. Le rapport signal/bruit qui peut être obtenu est donc très fortement diminué, ce qui nuit à la qualité des asservissements. D'autre part, d'un point de vue technique, la présence d'un fort niveau de signal continu (qui ne porte pas d'information) peut poser des problèmes de saturation pour les photodiodes et leurs électroniques.

10.1.2 Asservissement par la méthode Hänsch-Couillaud

10.1.2.1 Principe

Cette méthode, introduite par Hänsch et Couillaud [[Hänsch 80](#)] utilise la polarisation de la lumière pour asservir une cavité optique. On introduit dans une cavité un élément polarisant, qui impose que seuls les modes d'une seule polarisation rectiligne puissent se propager dans la cavité. On ajuste ensuite la polarisation du champ incident dans la cavité pour qu'elle soit rectiligne et orientée d'un angle θ , petit, par rapport à la polarisation du mode résonnant. Le champ réfléchi peut maintenant s'écrire comme l'interférence de deux termes : le champ réfléchi directement sur le miroir d'entrée et celui qui ressort par le miroir d'entrée. Ces deux champs sont polarisés linéairement, mais d'axes séparés d'un angle θ . En fonction de la phase relative entre eux, leur interférence produit donc dans le cas général une onde polarisée elliptiquement. La méthode de Hänsch-Couillaud consiste donc à mesurer cette ellipticité. Quand les deux ondes sont en phase, la polarisation du champ réfléchi est donc de polarisation rectiligne.

10.1.2.2 Mise en œuvre expérimentale

La sélection en polarisation de la cavité est assurée par le cristal, qui introduit de la biréfringence dans la cavité. Dans une cavité de haute finesse, les traitements introduisent généralement des biréfringences quand les miroirs sont inclinés. Cet effet est négligeable pour notre cavité de basse finesse. La polarisation de l'injection de la cavité est initialement optimisée pour maximiser la transmission, puis, au moyen d'une lame demi-onde, on la fait légèrement tourner. Après atténuation par des filtres ND, l'ellipticité du faisceau réfléchi est mesurée en utilisant une lame quart-d'onde puis un cube séparateur de polarisation, les axes de la lame étant orientés à 45 par rapport aux axes du cube. Les deux faisceaux sont ensuite détectés par deux photodiodes et leurs photocourants soustraits. Ceci fournit un signal d'erreur, que l'on peut utiliser en

entrée d'un régulateur PI. La correction renvoyée par ce régulateur est ensuite amplifiée et reliée aux bornes d'un actuateur électrique placé dans la cavité de l'OPO.

Il est important de noter qu'au sens strict, nous ne sommes pas dans le cadre de la théorie présentée dans l'article de Hänsch et Couillaud. En effet la théorie nécessite que l'on introduise des pertes à chaque tour sur une des polarisations alors que nous introduisons plutôt de la biréfringence. Pour une extension de la théorie à ce cas de figure-là, on pourra se référer à [Boon-Engering 97].

10.1.2.3 Résultats

Il a été possible d'asservir la cavité de cette façon mais les asservissements n'ont jamais été satisfaisants. Le rapport de signal à bruit est mauvais car le miroir d'entrée de la cavité a une transmission trop faible par rapport au miroir de sortie. La lame quart d'onde du détecteur d'ellipticité nécessite d'être constamment réalignée.

10.1.2.4 Conclusion

Cette méthode n'a pas permis d'asservir convenablement la cavité OPO. Si dans le futur un miroir de couplage d'entrée de plus grande transmission est utilisé, cette méthode pourra peut-être être envisagée de nouveau.

10.1.3 Asservissement en tilt-locking

10.1.3.1 Principe

L'asservissement de type tilt-locking [Shaddock 99] fonctionne sur un principe analogue à l'asservissement Hänsch-Couillaud mais dans le domaine des modes spatiaux au lieu des modes de polarisation. L'injection de la cavité étant parfaitement alignée, on désaligne légèrement l'injection dans le plan horizontal. Ce faisceau réfléchi peut ainsi se comprendre comme l'interférence entre le faisceau d'injection (légèrement désaligné) et une fraction du mode résonnant de la cavité, la phase relative entre les deux dépendant de la longueur de la cavité. En fonction de cette phase, l'interférence inclinera légèrement le faisceau d'un côté ou de l'autre par rapport à la position où la cavité est asservie. En mesurant ainsi l'orientation du faisceau, on peut obtenir un signal d'erreur, qui va nous permettre d'asservir la longueur de la cavité laser.

10.1.3.2 Mise en œuvre expérimentale

La cavité étant alignée parfaitement, on désaligne légèrement le faisceau d'injection dans le plan horizontal. On mesure ensuite la position moyenne du faisceau (atténué) en utilisant un détecteur à deux zones et en effectuant la soustraction des deux photocourants. Le détecteur à deux zones est centré pour renvoyer un signal nul quand la cavité est asservie. Ce signal d'erreur est exploité de façon similaire au cas de l'asservissement Hänsch-Couillaud.

10.1.3.3 Résultats

Il a été possible d'observer un signal d'erreur et d'asservir par intermittence la cavité de l'OPO. Cependant, les fluctuations lentes (~ 1 Hz) de pointé du laser sont bien trop importantes pour pouvoir raisonnablement asservir l'OPO. Elles sont en effet en général d'amplitudes comparables ou supérieures à l'effet que l'on cherche à mesurer.

10.1.3.4 Conclusion

Cette méthode n'a pas non plus permis d'asservir la cavité de l'OPO. Pour pouvoir envisager d'asservir la cavité en tilt-locking, il faudrait probablement utiliser un coupleur d'entrée de plus grande transmission d'une part et stabiliser le pointé du laser d'autre part. Ceci pourrait être effectué par exemple en utilisant une cavité de filtrage femtoseconde ou en stabilisant dynamiquement la position du laser. Ceci peut être effectué en utilisant par exemple un détecteur à quadrant et des montures orientables électroniquement. Il faudrait cependant que cet asservissement de pointé du laser soit suffisamment bon et ne rajoute pas trop de bruit à d'autres fréquences.

10.1.4 Asservissement par la méthode Pound-Drever-Hall

La méthode Pound-Drever-Hall [Drever 83] utilise une modulation de la phase (à une fréquence Ω) du faisceau injecté dans la cavité pour asservir celle-ci. Le faisceau transmis ou réfléchi par la cavité est détecté puis démodulé à la fréquence Ω . Les composantes à basse fréquence de l'intermodulation, obtenues grâce à un filtre passe-bas, fournissent, quand la phase de la modulation est correctement ajustée, un signal d'erreur qui peut être utilisé pour asservir la cavité.

10.1.4.1 Modulateur électro-optique

La façon la plus courante d'introduire une modulation de phase consiste à utiliser un modulateur électro-optique. L'inconvénient d'un tel dispositif est qu'il introduit de la dispersion. Le modulateur dont nous disposons, fabriqué par New Focus, introduit plus de $17\,000\text{ fs}^2$ de phase quadratique. Cette valeur a été mesurée par Théo Rybarczyk pendant son stage, en utilisant des traces d'autocorrélation avant et après passage dans le modulateur. La phase quadratique introduite sur le chemin optique ferait plus que doubler si l'on rajoutait ce modulateur et devrait être compensée. Il a ainsi semblé préférable de trouver une solution alternative pour effectuer cette modulation de phase.

10.1.4.2 Modulation piézoélectrique à haute fréquence

En utilisant un miroir attaché à un actuateur piézoélectrique vibrant à haute fréquence, il est possible de moduler la phase d'un faisceau lumineux. Celui-ci est en effet réfléchi sur un miroir qui oscille à haute fréquence, le chemin optique et donc la phase sont ainsi modulés. En pratique, si l'incidence du faisceau sur le miroir n'est pas à 0, il y a aussi un léger déplacement latéral de celui-ci. En pratique, les déplacements sont très faibles et l'on négligera ce déplacement latéral, même quand l'angle d'incidence est de 45.

Résonances à hautes fréquences Les actuateurs piézoélectriques que nous utilisons (PI, référence P-016.00H) sont conçues pour fonctionner à des fréquences n'excédant pas quelques dizaines de kHz. Il est cependant possible de les faire vibrer à des fréquences bien plus élevées, de manière détectable jusqu'à 5 MHz. On observe autour de certaines plages de fréquences des forêts de pics de résonance qui correspondent à des modes de vibration qui ne sont pas bien compris. Si mécaniquement, l'actuateur peut vibrer à ces fréquences, le phénomène est en revanche typiquement limité par l'intensité électrique que l'on peut fournir pour alimenter l'actuateur.

Alimentation électrique Un actuateur piézoélectrique peut être approximé électriquement par une capacité pure ($C \sim 42\text{ nF}$). Ceci signifie que le module de son impédance évolue comme

$$|Z| = \frac{1}{C\omega}$$

10.1.1

La dilatation du matériau piézoélectrique étant approximativement proportionnelle au champ électrique dans le milieu, donc à la tension appliquée aux bornes de l'actuateur. Ceci signifie que pour une amplitude de tension donnée l'intensité nécessaire sera proportionnelle à ω . Il faudra donc beaucoup d'intensité pour faire vibrer l'actuateur à plus d'un MHz, la majorité de la puissance utilisée étant dissipée dans la résistance interne du générateur. En pratique, avec les générateurs que nous utilisons, nous sommes limités par l'intensité qu'ils peuvent délivrer.

Circuit électrique résonnant La majorité de l'énergie électrique utilisée pour faire vibrer l'actuateur étant dissipée par l'impédance interne du générateur il est possible d'améliorer le système en adaptant l'impédance de celui-ci à l'impédance de l'actuateur. D'une manière parfaitement équivalente, on peut dire que l'on construit un circuit résonnant à la pulsation de modulation f désirée. Ceci peut être simplement réalisé en plaçant en parallèle de l'actuateur une bobine d'inductance L de telle sorte que

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

10.1.2

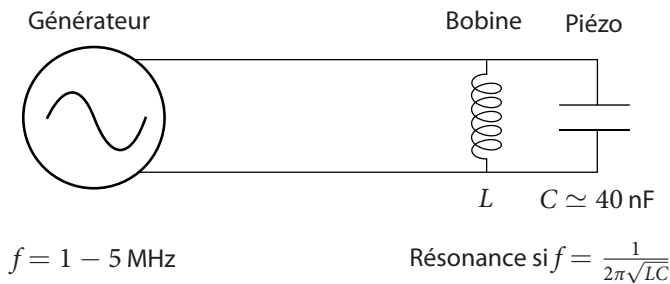


Fig. 10.1.2 : Circuit LC équivalent théorique formé par l'actuateur piézo-électrique, assimilé à une capacité pure et une bobine, placée en parallèle. La valeur de la bobine devrait selon ce modèle être calculée pour que le système soit résonnant à la fréquence de modulation. En pratique, les valeurs optimales diffèrent sensiblement.

Ceci a été réalisé expérimentalement. On observe un gain d'amplitude de modulation pour un générateur donné, qui est de l'ordre de 10, pour une large

bande passante. Il est important de bien noter que la théorie qui vient d'être présentée est simpliste. Les pertes à l'intérieur du circuit résonnant ainsi créé n'ont en effet pas été considérées alors qu'elles sont critiques. D'autre part, les capacités parasites des bobines à ces fréquences là peuvent devenir problématiques, tout comme les inductances parasites des fils de connexion. En conséquence, il est difficile de prédire en pratique l'inductance optimale à utiliser et ceci explique aussi le fait que le gain d'amplitude n'ait pas été supérieur. Un jeu de bobines, de marques et d'inductances différentes, a donc été testé. La meilleure bobine trouvée pour moduler entre 1 et 2 MHz est ainsi une bobine ayant pour inductance 5.6 μH , ce qui correspondrait d'après la formule théorique précédente à une fréquence de résonance de seulement 340 kHz. Malgré l'approche non déterministe employée pour trouver une configuration adéquate, il est important de noter qu'une fois le système réglé, il est très stable, même sur plusieurs jours et qu'il ne nécessite pas de réajustements réguliers.

Longueur d'onde acoustique Le module de Young du PZT, le matériau dont sont composés nos actuateurs piézoélectriques, est de l'ordre de $E \sim 50 \text{ GPa}$ [Low 95]. La densité du PZT est de l'ordre de $\rho \sim 7500 \text{ kg m}^{-3}$ (même source). Ceci a pour conséquence que la vitesse du son (pour une onde longitudinale) est de l'ordre de

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sim 2500 \text{ m s}^{-1} \quad 10.1.3$$

La longueur d'onde acoustique dans le milieu peut donc s'écrire, à une fréquence $\nu = 2 \text{ MHz}$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \sim 1 \text{ mm} \quad 10.1.4$$

Si l'on fixe sur l'actuateur un miroir, par exemple en le collant, les vibrations de l'actuateur se transféreront au miroir. En prenant une vitesse de propagation du son dans le BK7 de l'ordre de 5000 m s^{-1} , on obtient une longueur d'onde acoustique dans le verre de l'ordre de 2.5 mm. Dans tous les cas, ces longueurs d'ondes sont plus petites que les dimensions spatiales des objets que nous considérons. Ceci signifie qu'à ces fréquences de modulation, on ne peut pas considérer que les objets se déplacent en bloc.

Les conditions de la fixation entre l'actuateur et le miroir sont aussi à considérer. Les vitesses de propagation des ondes acoustiques sont assez différentes entre les deux matériaux et donc leurs impédances acoustiques aussi. La façon

dont les vibrations de l'actuateur vont se transférer au miroir va donc dépendre du mode de fixation utilisé. Le type de colle utilisé peut ainsi changer de façon substantielle la capacité du miroir à se déplacer. Ceci n'a pas encore été étudié systématiquement, mais il serait intéressant de comparer les amplitudes de modulation de phase obtenues en utilisant différents types de colles.

10.1.4.3 Mise en œuvre expérimentale

Le principe de la méthode est représenté sur la figure 10.1.3.

Générateur Le générateur Rigol DG1022, à double voie, est capable de produire deux signaux de même fréquence mais déphasés de façon arbitraire. La phase de l'injection du laser est modulée à une fréquence typique de 1.8 MHz. Cette fréquence est choisie pour correspondre à une résonance du système actuateur-miroir et donc une modulation de phase importante, tout en étant à suffisamment haute fréquence pour que le bruit naturel du laser ne soit pas trop important. On cherche donc la fréquence qui maximise au final le rapport de signal à bruit du signal d'erreur.

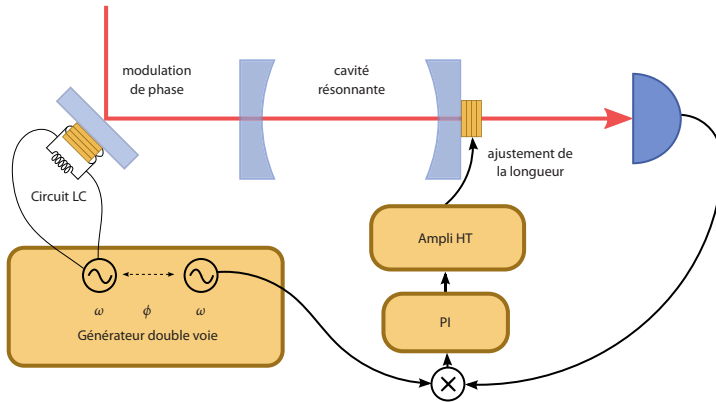


Fig. 10.1.3 : Principe de l'asservissement de Pound-Drever-Hall utilisant un actuateur piézo-électrique vibrant à haute fréquence. Certains filtres et amplificateurs ne sont pas représentés.

Amplificateur Un amplificateur Mini-Circuits ZHL-1A amplifie le signal électrique de modulation envoyé aux bornes de l'actuateur piézoélectrique.

Signal électrique utilisé En sortie de cavité, les propriétés quantiques du faisceau sont mesurées. Différents dispositifs de détection sont utilisables, mais d'une manière générale, il est toujours possible d'obtenir un signal électrique d'amplitude proportionnelle à l'intensité (optique) sortant de la cavité. Par exemple, le signal électrique peut provenir des photodiodes de la détection balancée, ou alors une partie du faisceau lumineux en sortie peut-être récupérée et envoyée sur une photodiode dédiée à l'asservissement. Il est aussi possible de détecter le faisceau réfléchi en entrée de cavité, même si nous avons vu que cette méthode ne fonctionnait pas bien pour notre cavité.

Filtre passe-bas Les hautes fréquences de ce signal sont ensuite éliminées par un filtre passe-bas à 5 MHz Mini-Circuits. Ceci a pour but de supprimer la majorité de la composante à 76 MHz, très énergétique, qui correspond au taux de répétition des impulsions produites par le laser. Cette composante saturerait les électroniques suivantes en l'absence de filtre.

Amplification Le signal est ensuite amplifié par un amplificateur Mini-Circuits ZFL-500LN.

Mélangeur Le signal amplifié est ensuite mélangé (Mini-Circuits ZAD-1) avec un oscillateur local produit par le générateur.

Ajustement de la phase relative A cette fréquence, la longueur d'onde électrique dans un câble coaxial est de l'ordre de 100 m. Il est donc peu pratique (quoique possible) d'utiliser des câbles BNC pour ajuster la phase relative entre l'oscillateur local et le signal, méthode souvent utilisée lorsque les fréquences de modulation sont plus importantes. La possibilité de produire deux signaux déphasés de façon arbitraire avec ce générateur se révèle très utile pour cette application. Ce réglage est en effet très important pour obtenir un asservissement de bonne qualité.

Amplificateur basse fréquence Le signal est ensuite amplifié par un amplificateur basse fréquence à bas bruit, fabriqué par l'atelier électronique du laboratoire. Le gain de cet amplificateur est réglable.

Contrôleur PI Divers systèmes d'asservissement PI (Proportionnel-Intégrateur) ont été testés. Le choix s'est finalement porté sur des systèmes

LB1005, fabriqués par New Focus. Bien que la qualité des boîtiers électroniques fabriqués localement par l'atelier électronique permette des résultats similaires en termes d'asservissement, ces boîtiers commerciaux présentent certains avantages. Ils sont en effet plus polyvalents dans leurs réglages et il est beaucoup plus simple et intuitif de trouver les bons paramètres de fonctionnement.

Monture de l'actuateur piézoélectrique Une des améliorations décisives de ce système d'asservissement a été le changement de la monture de l'actuateur électrique. Le système était initialement complexe et relativement peu rigide, faisant intervenir une bague en Plexiglas. Nous avons constaté que les accélérations rapides de la piézo induisaient des oscillations rapide du système piézo-miroir, phénomène appelé *ringing* en anglais (« tintement »). Pour l'observer, il suffit d'appliquer une tension périodique en triangle aux bornes de l'actuateur. On constate alors que les pics de cavité vibrent, pendant quelques ms, de façon reproductible. Afin d'éliminer ce phénomène, nous avons opté pour un système beaucoup plus robuste. Le miroir est maintenant collé sur un actuateur piézo-électrique. Celui-ci est lui-même collé sur une lourde pièce en laiton (cf. A.1.2). Celle-ci est fermement vissée sur la monture. La masse et la rigidité du système suppriment le phénomène de tintement.

Remarques Le signal d'intermodulation produit par le mélangeur comporte des composantes à haute fréquence. Ces composantes sont filtrées par l'amplificateur et par le contrôleur PI. D'autre part, en pratique, le signal électrique avant le mélangeur est séparé en deux par un « splitter » Mini-Circuits, afin de pouvoir asservir aussi la phase relative entre l'injection et la pompe du SPOPO.

10.1.4.4 Résultats

Utilisant cette méthode, il a été possible d'obtenir un signal d'erreur de bonne qualité et d'asservir la cavité de façon satisfaisante. C'est cette méthode qui a été principalement utilisée pendant la durée de la thèse, pour réaliser les mesures de compression de bruit notamment. Sauf indication contraire, c'est à cette méthode qu'il sera fait référence quand on parlera d'asservissement de la cavité du SPOPO.

10.1.4.5 Améliorations à proposer

Bien qu'un effort considérable ait été réalisé pour optimiser cet asservissement, crucial pour l'expérience, il reste possible de l'améliorer. En utilisant d'autres amplificateurs ou actionneurs, il serait possible d'augmenter l'amplitude de la modulation de phase. Il existe ainsi des résonateurs piézoélectriques spécialement conçus pour résonner à quelques MHz de fréquence. Ces résonateurs sont utilisés pour émettre des ultrasons, par exemple pour réaliser des échographies, ou pour des sonars sous-marins. Comme il a déjà été dit, il serait aussi intéressant de s'intéresser au système de fixation actionneur-miroir.

10.1.5 Asservissement par moiré de fréquence

Nous avons vu dans le chapitre 6 que lorsque la longueur de la cavité était décalée d'une longueur δ par rapport à une résonance partielle de la cavité, la transmission spectrale dépendait fortement de ce paramètre δ . D'après la figure 6.2.4, il apparaît qu'en mesurant le déplacement du spectre, on obtient une information sur la distance δ et que l'on peut ainsi asservir la longueur de la cavité sur une résonance partielle. Cette méthode pour asservir une cavité résonnante injectée par un peigne de fréquence, nouvelle à notre connaissance, a été baptisée « asservissement par moiré de fréquence ». Dans la section 6.2.2.6, il avait en effet été expliqué que le déplacement du spectre était le résultat d'un effet de moiré entre les fréquences du peigne injecté et le spectre de transmission de la cavité. Un brevet concernant cette méthode d'asservissement a été déposé pendant la thèse.

Une manière simple de mesurer le déplacement du spectre consiste à utiliser un réseau de diffraction, qui sépare spatialement les différentes composantes spectrales. Si l'on se place dans le plan focal d'une lentille, on a une relation linéaire entre la position transverse et la fréquence. On peut donc maintenant obtenir un signal lié au déplacement du spectre en utilisant un détecteur à deux zones et en soustrayant les signaux des deux photodiodes, d'une façon similaire à celle employée pour la méthode du tilt-locking. Le schéma général de la méthode est présenté sur la figure 10.1.4.

10.1.5.1 Signal d'erreur théorique

L'équation 6.2.34 caractérise la transmission spectrale lorsque la longueur de cavité est décalée d'une résonance partielle d'ordre m d'une distance δ . Sous

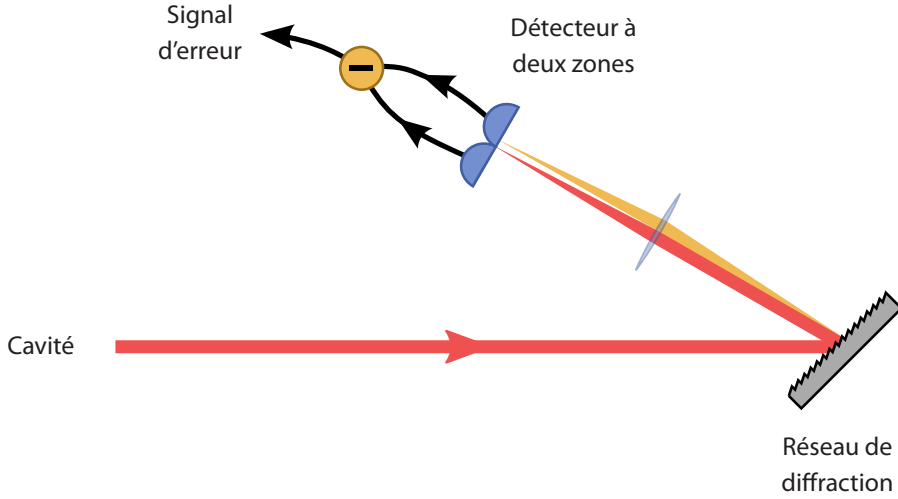


Fig. 10.1.4 : Schéma de l'asservissement par moiré de fréquence

réserve que la largeur spectrale soit faible devant ω_0 , il est possible de réécrire cette formule sous la forme approchée

$$I(\omega_n) = \frac{I_0(\omega_n)}{1 + \left(\frac{2mF}{\omega_0}\right)^2 \left(\omega_n - \omega_0 + \frac{\omega_0}{m\lambda_0}\delta\right)^2} \quad 10.1.5$$

Considérons un spectre incident gaussien de la forme

$$I(\omega) = I_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2} \quad 10.1.6$$

On a choisi ici d'appeler dans cette partie $\Delta\omega$ la *variance* du spectre gaussien, et non sa largeur à mi-hauteur, afin de simplifier les expressions mathématiques. On a d'autre part considéré un spectre continu et non discret, approximation que l'on peut effectuer si le spectre est constitué d'un grand nombre de fréquences.

L'expression du signal obtenu après soustraction des signaux des deux zones

va être proportionnelle à

$$D(\delta) = \int_{\omega_0}^{\infty} I(\omega, d) d\omega - \int_{-\infty}^{\omega_0} I(\omega, d) d\omega \quad 10.1.7$$

$$= I_0 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\Delta\omega} \right)^2}}{1 + \left(\frac{2mF}{\omega_0} \right)^2 \left(\omega + \frac{\omega_0}{m\lambda_0} \delta \right)^2} - \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\Delta\omega} \right)^2}}{1 + \left(\frac{2mF}{\omega_0} \right)^2 \left(\omega - \frac{\omega_0}{m\lambda_0} \delta \right)^2} d\omega$$

10.1.8

Pour $\delta = 0$, le signal est équilibré de part et d'autre de la photodiode à deux zones et $D(0) = 0$. Il n'existe pas de forme simple de $D(\delta)$, qui peut cependant être exprimé sous une forme analytique complexe, en utilisant Mathematica. La forme du signal observée lorsque l'on balaie la longueur de la cavité est présenté sur les figures 10.1.5 et 10.1.6.

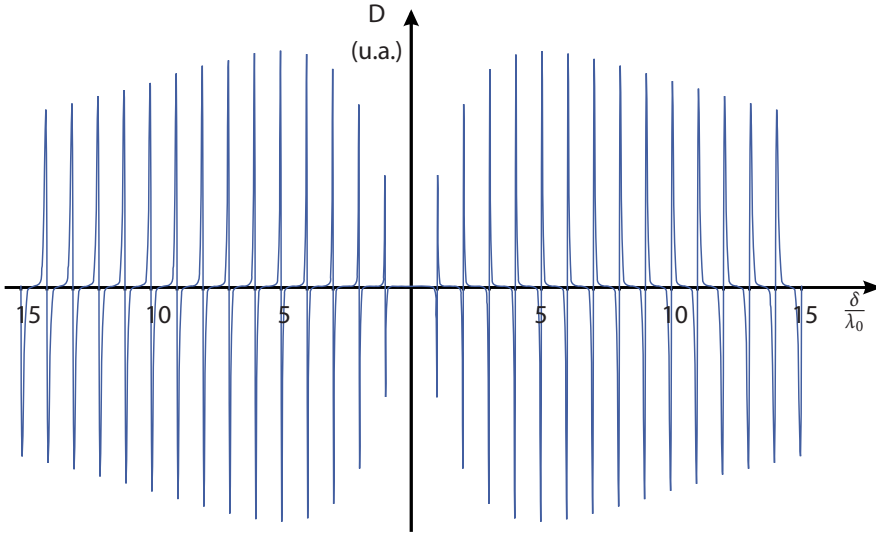


Fig. 10.1.5 : Signal d'erreur obtenu par la méthode du moiré de fréquence.

On peut effectuer un développement au premier ordre en δ pour obtenir l'expression du signal d'erreur au voisinage de la résonance. On obtient le résultat suivant :

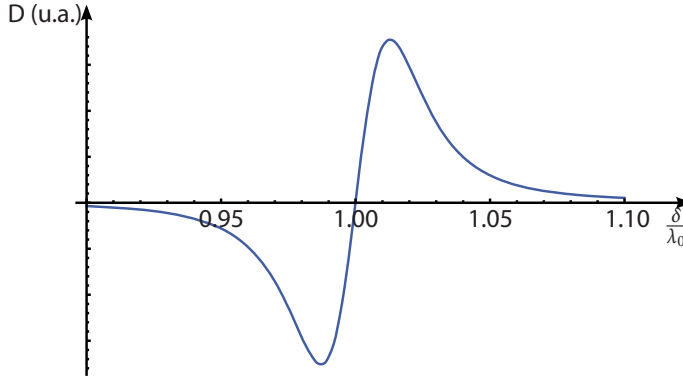


Fig. 10.1.6 : Détail du signal d'erreur par moiré de fréquence, autour de $L = L_0 + \lambda_0$, où L_0 représente la distance entre deux impulsions du peigne incident.

$$D(\delta) \simeq 2I_0 \frac{\omega_0}{m\lambda_0} \left(\frac{1 + e^{\frac{1}{8F^2 m^2 \alpha^2}} Ei\left(\frac{1}{8F^2 m^2 \alpha^2}\right)}{8F^2 m^2 \alpha^2} \right) \quad 10.1.9$$

Où l'on a posé $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ la largeur spectrale normalisée. La fonction Ei est la fonction « exponentielle intégrale », définie par

$$Ei(z) = - \int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad 10.1.10$$

On pose maintenant $Z = \sqrt{8Fm\alpha}$ et on obtient

$$D(\delta) \simeq \frac{\sqrt{2F\alpha\omega_0^2}}{\pi c} F(Z) \quad 10.1.11$$

où F est défini par

$$F(Z) = \frac{1}{Z} \left(1 + \frac{e^{\frac{1}{Z^2}} Ei\left(-\frac{1}{Z^2}\right)}{Z^2} \right) \quad 10.1.12$$

La fonction $F(Z)$ est représentée sur la figure 10.1.7. Cette fonction est équivalente à Z au voisinage de 0 et à $1/Z$ à l'infini. Malgré son allure similaire, cette fonction n'est pas liée de façon évidente à l'enveloppe de la courbe précédente mais bien à la pente des signaux d'erreurs pour des ordres de résonance m successifs.

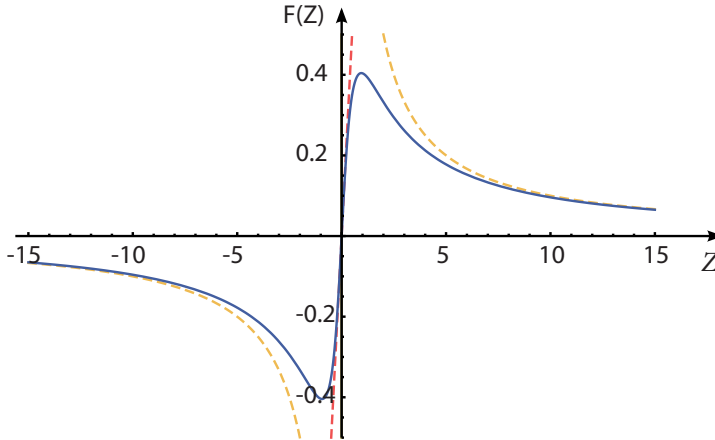


Fig. 10.1.7 : Représentation graphique de la fonction $F(Z) = \frac{1}{Z} \left(1 + \frac{e^{\frac{1}{Z^2}} Ei(\frac{1}{Z^2})}{Z^2} \right)$. Les fonctions approchées Z et $1/Z$ sont aussi représentées. N.B. cette courbe ne représente pas un signal d'erreur mais plutôt la pente de celui-ci autour de la résonance.

Effet de la dispersion La dispersion de vitesse de groupe a pour effet de déformer le signal d'erreur précédent, tel que présenté sur les figures 10.1.8 et 10.1.9. Ceci ne change pas de façon significative la qualité de l'asservissement pour de petites dispersions.

10.1.5.2 Mise en œuvre expérimentale.

Cette méthode est très simple à mettre en place. Une fraction du signal sortant de la cavité est collimatée puis dispersée à l'aide d'un réseau blazé en réflexion. Une lentille focalise ensuite le signal dispersé sur une photodiode à deux zones (en pratique, une photodiode à quadrant dont on utilise deux zones seulement), de telle sorte que la tache de focalisation soit plus petite que la photodiode. On soustrait ensuite les deux signaux issus des deux zones de la photodiode. Pour une longueur de cavité correspondant à des résonances partielles, on obtient directement un signal d'erreur, dont on peut régler l'offset en translatant la photodiode à deux zones. Ce signal est traité de la même façon que pour les autres méthodes par le biais d'un contrôleur PI.

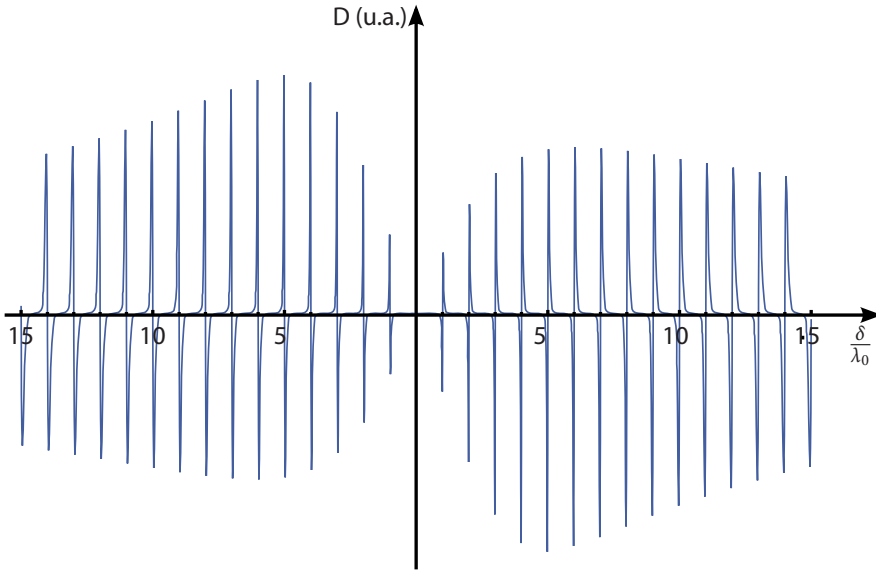


Fig. 10.1.8 : Signal d'erreur théorique obtenu par la méthode du moiré de fréquence, quand la phase quadratique accumulée sur un tour de cavité faut 500 fs^2 .

10.1.5.3 Résultats et limites du procédé

Cette méthode impose d'asservir sur une résonance partielle de la cavité, donc pour une longueur $L = L_0 + m\lambda_0$ avec $m \neq 0$. En pratique, si le CEO du peigne de fréquence incident n'est pas asservi, la position des pics de cavité va aussi fluctuer, il est donc nécessaire de se décaler d'au moins quelques longueurs d'ondes de la longueur de résonance totale de la cavité. Si la cavité n'est pas de trop haute finesse, la transmission spectrale peut être toujours acceptable pour ces résonances partielles. En pratique, pour une cavité de finesse 30 et un spectre de largeur à mi-hauteur 7 nm, en décalant de 4-5 longueurs d'ondes, il a été possible d'asservir la cavité de manière très stable. Le signal d'erreur obtenu expérimentalement est fourni sur les figures 10.1.10 et 10.1.11. La comparaison avec le signal d'erreur obtenu par la méthode Pound-Drever-Hall y est indiquée.

Cette méthode d'asservissement est particulièrement stable, sous réserve que l'on s'écarte suffisamment du pic central de la cavité. Cependant, plus on s'en éloigne plus le spectre transmis est étroit (cf. fig. 6.2.3). Il y a donc un compromis à effectuer entre transmission du spectre et stabilité de l'asservissement.

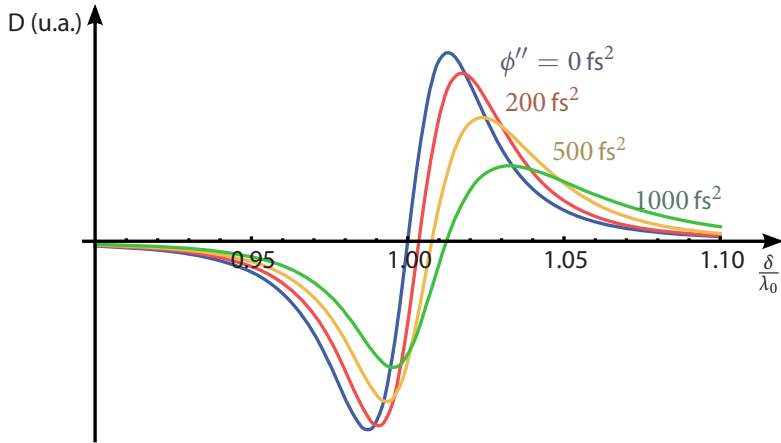


Fig. 10.1.9 : Détail du signal d'erreur théorique par moiré de fréquence, autour de $L = L_0 + \lambda_0$, en présence de dispersion de vitesse de groupe dans la cavité. Les courbes correspondent à des phases quadratiques $\phi'' = 0 \text{ fs}^2, 200 \text{ fs}^2, 500 \text{ fs}^2, 1000 \text{ fs}^2$.

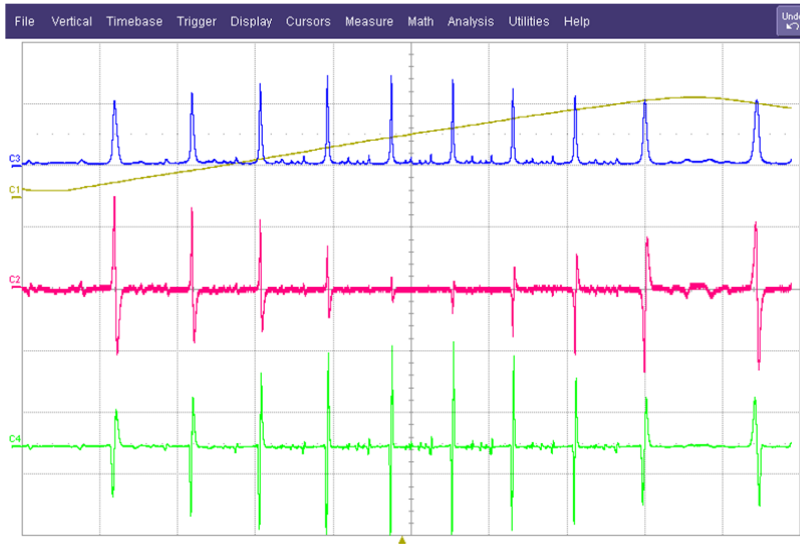


Fig. 10.1.10 : Pics de cavité et signaux d'erreur expérimentaux comparés pour les méthodes et moiré de fréquence et Pound-Drever-Hall, observés simultanément sur un oscilloscope.

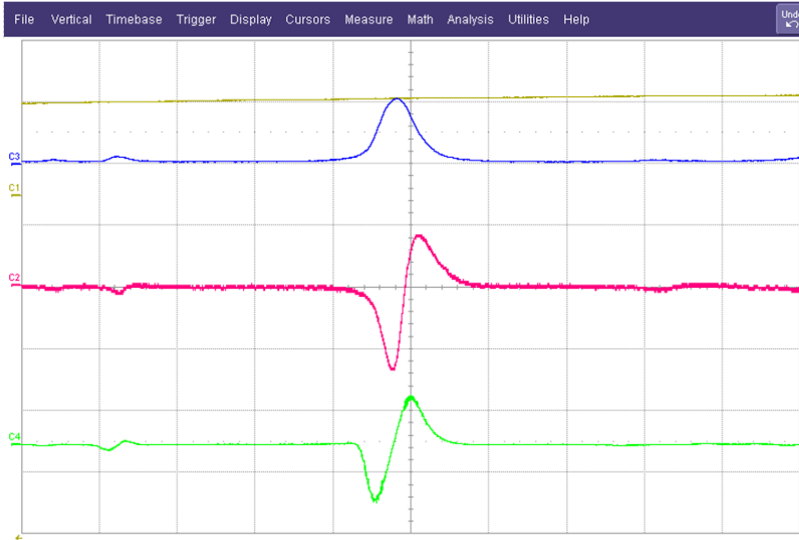


Fig. 10.1.11 : Pics de cavité et signaux d'erreur expérimentaux comparés pour les méthodes et moiré de fréquence et Pound-Drever-Hall, au voisinage d'une résonance partielle de la cavité.

Un rétrécissement du spectre est généralement un inconvénient mais pour certaines applications, ce filtrage spectral peut se révéler être un avantage. Si le spectre incident est large par rapport à la fonction de transmission de la cavité à l'ordre considéré, le spectre du faisceau émergent de la cavité sera lorentzien, de fréquence centrale et de largeur imposé. Il sera alors possible d'ajuster simplement la fréquence centrale transmise en translatant la photodiode à deux zones ainsi que de changer dans une certaine mesure la largeur du spectre en changeant l'ordre de la résonance.

Pour une cavité SPOPO cette méthode introduit des pertes dans la cavité, c'est pourquoi elle n'a pas été utilisée pour asservir la cavité lors des mesures de bruit quantique.

10.1.5.4 Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle méthode d'asservissement des cavités optiques injectées par des peignes de fréquence. Cette méthode d'asservissement est très stable et très simple à mettre en œuvre. Elle est robuste dans le temps et ne nécessite pas d'introduire une modulation ou une perturbation sur le fais-

ceau incident. En revanche, le spectre transmis est différent du spectre incident, ce qui est souvent un inconvénient. Au final, le faisceau émergent de la cavité est monomode spatial, tandis que sa longueur d'onde centrale et, dans une certaine mesure, sa largeur spectrale sont imposées. Les fluctuations de phase et d'intensité rapides par rapport au temps de vie des photons dans la cavité sont rejetées par la cavité. Cette méthode pourrait être utilisée pour produire des impulsions femtoseconde aux caractéristiques spatiales et fréquentielles très bien définies.

10.1.6 Systèmes d'asservissements non implémentés

Il est possible de proposer d'autres façons d'asservir la cavité, qui n'ont pas encore été testés en raison de leur complexité et d'un manque de temps, mais qui paraissent toutefois prometteurs, en permettant de s'affranchir de certaines contraintes évoquées plus haut.

10.1.6.1 Cavité en anneau

La cavité qui a été utilisée pendant tout le déroulement de cette thèse était linéaire. Dans une cavité en anneau, deux faisceaux peuvent s'y propager simultanément, sans interactions entre eux (en négligeant par exemple les effets thermiques ou de modulation croisées). En utilisant une telle cavité, il serait donc possible d'injecter dans la cavité un faisceau d'asservissement, qui tournerait en sens contraire de l'injection et de la pompe. L'avantage d'utiliser cette configuration, c'est que la dispersion de ce faisceau d'asservissement n'interviendrait pas sur le signal d'erreur. On pourrait donc utiliser un modulateur électro-optique pour moduler sa phase. Ceci aurait l'avantage de permettre de travailler à haute fréquence, avec une intensité plus grande et une meilleure amplitude de modulation. Le signal d'erreur serait donc probablement bien meilleur.

10.1.6.2 Trains d'impulsions entrelacés

L'aspect impulsionnel des faisceaux pourrait aussi être utilisé pour asservir la cavité de façon originale. Les photons détectés dans nos expériences sont mesurés pendant des temps très courts et déterminés, imposés par le taux de répétition du laser. Ainsi, en modifiant les électroniques des photodiodes que nous utilisons pour ne détecter les signaux lumineux pendant une fenêtre très courte autour de chaque impulsion, le signal mesuré resterait inchangé. Il suffirait de

déclencher électroniquement des fenêtres de détection, synchronisées au taux de répétition du laser.

Il est donc possible d'intercaler entre ces impulsions un autre train d'impulsions femtoseconde, qu'il serait possible d'utiliser pour asservir la cavité. De la même façon que pour la proposition précédente d'asservissement pour une cavité en anneau, il serait possible d'utiliser des impulsions très allongées par le passage dans un modulateur électro-optique, sans conséquence pour la qualité de l'asservissement. Un tel dispositif d'asservissement n'a jamais été réalisé à notre connaissance.

10.2 Asservissement de la phase relative

La phase relative entre la pompe et l'injection peut être asservie. Pour ce faire, on utilise une méthode très similaire à la méthode déjà présentée pour asservir la longueur de la cavité par la méthode de Pound-Drever-Hall. Un actuateur résonne à une fréquence élevée et module ainsi la phase de la pompe de la cavité. Cette fréquence doit cependant être différente de celle déjà utilisée pour la modulation, on choisit donc en pratique une fréquence autour de 1.4 MHz, correspondant à une résonance du système. Pour asservir la phase relative, le principe est identique à celui de l'asservissement de la cavité, la fréquence de modulation étant différente. Comme il a déjà été remarqué, le signal utilisé pour asservir la longueur de la cavité est séparé en deux (électriquement). Ce signal est traité de la même façon et fournit un signal d'erreur. La piézo sur laquelle s'effectue la rétroaction est placée dans la branche de l'injection.

Les difficultés de cet asservissement proviennent du couplage entre les asservissements de la cavité et de la phase relative. En effet, le bruit dû à l'asservissement de la cavité intervient sur le signal d'erreur de l'asservissement de la phase. En pratique, il faut régler très finement les paramètres de ces deux asservissements.

10.3 Asservissement du taux de répétition

Le laser produit un train d'impulsions femtoseconde, qui peuvent être détectées par une photodiode rapide. Ces impulsions brèves se traduisent dans le domaine spectral (du photocourant) par des pics de fréquence, leur nombre étant principalement limité par la bande passante du système photodiode-amplificateur. Le fondamental a bien sûr pour fréquence celle de l'émission

des trains d'impulsions, les autres pics correspondant aux différentes harmoniques. L'asservissement du taux de répétition consiste à verrouiller la phase relative entre une des harmoniques et un signal produit par une référence externe, un synthétiseur haute fréquence dans notre cas. En utilisant des harmoniques d'ordre plus élevés la précision de l'asservissement augmente.

10.3.1 Mise en œuvre expérimentale

Signal mesuré A la sortie du laser, une faible réflexion sur une lame transparente éclaire une photodiode rapide. Celle-ci mesure ainsi l'intensité produite par le laser. Ceci prend la forme dans le domaine temporel d'impulsions successives, de largeur déterminée par la bande passante de la photodiode. Dans le domaine fréquentiel, ceci se traduit par un ensemble de pics, que l'on peut détecter grâce à un analyseur de spectre.

Filtre passe-bande Un filtre passe-bande réglable (marque K&L, modèle 5BT-500/1000) permet de sélectionner une seule harmonique de ce spectre. Il s'agit de trouver un bon compromis entre l'intensité à cette fréquence et la fréquence elle-même. La 11^e harmonique, de fréquence 840 MHz environ, a été choisie. En utilisant une photodiode plus rapide, il serait possible de travailler à plus haute fréquence.

Synthétiseur Un synthétiseur haute fréquence délivre une onde sinusoïdale. En pratique, on mesure la fréquence de la 11^e harmonique, avec un analyseur de spectre ou un fréquence-mètre, puis on règle la fréquence du synthétiseur à cette fréquence, à quelques kHz près.

Mélangeur On mélange ensuite les deux ondes (mélangeur Mini-Circuits modèle ZP-2). Les niveaux d'entrée sont ensuite soigneusement ajustés. Le niveau du synthétiseur peut être réglé directement, celui provenant de la photodiode est tout d'abord amplifié (Mini-Circuits ZFL-1000 LN) puis atténué manuellement (atténuateur RLC Electronics). On optimise ces niveaux pour obtenir le plus de signal d'intermodulation possible tout en limitant la présence de distorsion harmoniques. Cette distorsion peut être observée en utilisant un analyseur de spectre, sous réserve que la différence de fréquence entre l'harmonique du laser et le synthétiseur ne soit pas trop faible. Il suffit de décaler légèrement la fréquence du synthétiseur dans ce cas.

Filtre passe-bas Un filtre passe bas à 1.9 MHz élimine ensuite toutes les composantes à haute-fréquence. Si l'on a bien pris soin d'éliminer les distorsions harmoniques, ce signal est maintenant une sinusoïde ayant pour fréquence la différence entre celle produite par le synthétiseur et celle de la 11^e harmonique du laser.

Ajustement de la fréquence En cherchant à réduire la fréquence des oscillations du signal d'intermodulation, on ajuste maintenant précisément la fréquence du synthétiseur pour s'accorder à celle du laser. Il est possible de l'ajuster de cette façon à quelques Hz près pendant un certain temps, dépendant principalement des dérives thermiques lentes du laser.

Verrouillage de phase Une boucle à verrouillage de phase analogique [Banerjee 06] fournit ensuite un signal d'erreur, que l'on peut utiliser pour rétroagir sur la longueur de la cavité.

Actuateur piézoélectrique La longueur de la cavité laser peut être contrôlée par le biais d'un actuateur piézoélectrique pouvant traduire l'un des miroirs de la cavité. Contrairement aux autres actionneurs utilisés sur l'expérience, celui-ci fonctionne en basse tension. Cette tension, entre -20 et 120 V, est fournie par un amplificateur de la marque PI, modèle E505.10.

10.3.2 Résultats

En utilisant cette méthode, il a été possible de verrouiller la phase d'une harmonique du laser sur une référence externe. Ceci assure que le taux de répétition du laser est bien asservi. En revanche, il a été constaté que cet asservissement introduisait du bruit d'intensité sur le laser. Plus ce verrouillage de phase est fin, quand on pousse les gains, plus on introduit un bruit d'intensité sur le laser, qui est préjudiciable par exemple à la qualité de l'asservissement de la cavité OPO.

10.4 Asservissement du CEO

Comme il a été expliqué au chapitre 6, en raison de la dispersion dans la cavité du laser femtoseconde, les fréquences ω_n des modes longitudinaux de la cavité suivent une relation du type

$$\omega_n = \omega_{CE} + n\omega_r$$

10.4.1

Le CEO ω_{CE} dépend de la dispersion de la cavité, il fluctue aussi dans le temps en fonction et contribue au bruit technique du laser. Le CEO peut être asservi en utilisant une méthode d'autoréférencement, dont le développement et les applications ont été récompensés par une part du prix Nobel de 2005.

Cette méthode ([Holzwarth 00]) utilise une fibre à cristaux photoniques dont la dispersion s'annule autour de la fréquence centrale de celui-ci. A l'intérieur de cette fibre, les effets d'automodulation de phase (non-linéarité d'ordre 3) élargissent le spectre tout en conservant la périodicité temporelle du champ et donc la structure en peigne. Il est possible d'élargir le spectre au point que des composantes à une fréquence et à son double soient présentes simultanément dans le spectre émergent de la fibre. En utilisant un cristal non linéaire d'ordre 2, il est maintenant possible de doubler les composantes de basse fréquence du spectre, produisant un nouveau peigne dont les fréquences sont de la forme

$$\omega_n = 2\omega_{CE} + n\omega_r$$

10.4.2

Si l'on réalise maintenant l'interférence entre les basses fréquences doublées et les hautes fréquences non doublées, on obtient un signal battant, entre autres, à la fréquence ω_{CE} que l'on peut isoler en utilisant un filtre passe-bas. On dispose ainsi d'un moyen de mesurer ω_{CE} . On peut ensuite éventuellement rétro-agir sur la cavité, de diverses manières en fonction des caractéristiques du laser pour asservir ω_{CE} . Dans un laser à prismes comme le Mira-900, on peut ajuster ω_{CE} en orientant légèrement le miroir de fond de cavité, ce qui rajoute une phase linéaire à l'intérieur de la cavité.

10.4.1 Mise en œuvre expérimentale

Le laser a tout d'abord été configuré pour produire des impulsions courtes de 75 fs, à la limite de ce qu'il peut produire. En utilisant une solution commerciale (XPS-800 de Menlo Systems), nous avons observé un signal de battement à la fréquence ω_{CE} de façon transitoire. En translatant le miroir de fond de cavité du laser (d'une façon détaillée à la section 9.2), nous avons pu faire varier ω_{CE} de plusieurs fois ω_r . Les rapports de signaux à bruit étant trop faibles, nous n'avons jamais observé de signal d'erreur exploitable et il n'a pas été possible d'asservir le CEO du laser ou de le mesurer pendant des périodes de temps étendues. Cette observation rejoint exactement les conclusions de l'article original [Holzwarth 00], qui utilisait le même laser, dans les mêmes conditions.

10.4.2 Conclusion et perspectives

Expérimentalement, il est donc difficile d'asservir le CEO de lasers dont les impulsions sont plus longues que 30 fs. Les causes du fort bruit observé sont complexes, [Dudley 06] propose ainsi une perte de cohérence due aux effets d'amplifications de l'émission spontanée dans la fibre. D'autres solutions existent cependant, par exemple utilisant des techniques d'interférences linéaires (voir [Gorbe 09]), qui pourraient être implémentées sur notre laser.

11 Production expérimentale d'états non classiques multimodes

Sommaire

11.1 Description expérimentale du SPOPO	219
11.1.1 Description du SPOPO	220
11.2 Mise en place du SPOPO	222
11.2.1 Seuil du SPOPO	223
11.2.2 Amplification sensible à la phase	223
11.3 Mise en évidence des propriétés quantiques du SPOPO . .	223
11.3.1 Réduction du bruit quantique en intensité	223
11.3.2 Caractère multimode	227
11.3.3 Autre méthode d'analyse	234
11.4 Conclusion	234

Les précédents chapitres ont visé à présenter les différents éléments qu'il est nécessaire de mettre en place pour faire fonctionner un oscillateur paramétrique optique en régime femtoseconde. La théorie du SPOPO montre que celui-ci peut être assimilé à une assemblée d'OPOs monomodes indépendants, sur une base de modes que nous avons appelés « supermodes ». Nous allons présenter dans ce chapitre la mise en place expérimentale d'un SPOPO et nous intéresser à caractériser l'état quantique produit par celui-ci, en recherchant notamment des preuves du fonctionnement multimode du dispositif.

11.1 Description expérimentale du SPOPO

Cette section vise à présenter les éléments importants du SPOPO, ainsi que le processus expérimental suivi pour produire des états non-classiques. La mise en place est très délicate et a constitué une des principales réalisations expérimentales de cette thèse. Toutefois, afin de faciliter la lecture de ce chapitre, l'exposé

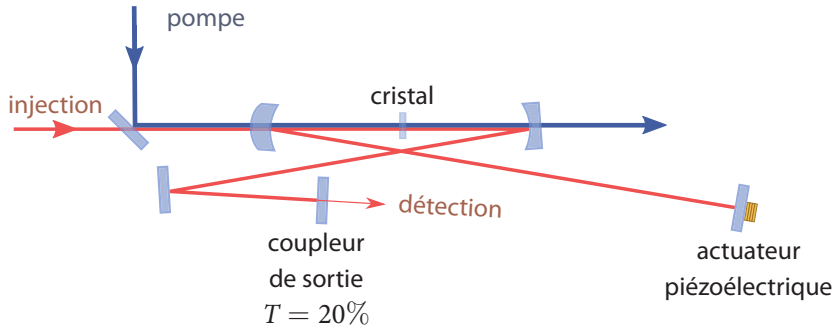


Fig. 11.1.1 : Modélisation des pertes par un mélange avec le vide quantique sur une lame semi-réfléchissante.

est volontairement succinct et se limite aux idées principales. Une description beaucoup plus technique, ainsi que la procédure complète d'alignement, nécessaires pour pouvoir reproduire l'expérience, sont détaillées dans l'annexe A.

11.1.1 Description du SPOPO

11.1.1.1 Principe

Le SPOPO que nous avons développé est une cavité résonnante dans laquelle est placé un cristal non-linéaire. Les impulsions de l'injection, de longueur d'onde 795 nm environ, sont résonnantes dans la cavité et la longueur de celle-ci est telle qu'elle corresponde à la distance entre deux impulsions émises par le laser, d'environ 392 cm. La pompe, de fréquence double, n'est pas résonnante dans la cavité. Une fraction de la lumière résonnante sort de la cavité à chaque tour. La production et la mesure des propriétés quantiques de cet état produit par le SPOPO constituent l'objet principal de cette expérience.

11.1.1.2 Sensibilité aux bruits et aux variations de température

La principale caractéristique de notre SPOPO, qui le distingue des OPO typiques dans les expériences du groupe provient du fait que sa longueur (chemin optique) doit mesurer environ 4 m pour qu'il puisse être pompé de façon synchrone par notre laser. Les OPOs sont d'une manière générale des appareils très sensibles aux vibrations mécaniques et acoustiques et sont généralement conçus

pour être compacts et rigides. La capacité à produire et à pouvoir observer des états non-classiques est ainsi directement liée à la stabilité générale du système.

La salle dans laquelle les expériences ont lieu est climatisée mais la puissance de froid produite est trop faible pour pouvoir stabiliser la température, tout particulièrement en été. La température de la table optique portant l'expérience fluctue donc pendant la journée et les différents éléments se contractent ou se dilatent, changeant les chemins optiques parcourus par les faisceaux lumineux. La longueur de l'OPO doit nécessairement être la même que celle du laser. Tous les éléments de la table ne se réchauffent ou se refroidissent pas à la même vitesse, cela signifie qu'il est nécessaire de réajuster régulièrement la longueur de la cavité OPO. Pour donner un ordre de grandeur, le coefficient de dilatation thermique de l'acier est de $1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Ceci signifie que pour une différence de température de 0.1 K entre les cavités de l'OPO et du laser, le désaccord entre leurs chemins optiques évolue d'environ 5 μm , c'est-à-dire la course de l'actuateur piézoélectrique.

11.1.1.3 Configuration

La configuration qui a été retenue est linéaire repliée (cf. fig. 11.1.1). Deux miroirs courbes (de rayon de courbure 10 cm), séparés d'environ 10 cm permettent d'obtenir un waist très petit ($\simeq 17 \mu\text{m}$) au niveau d'un cristal non-linéaire de Bi-BO. Les cristaux qui ont été utilisés avaient des épaisseurs de 350 ou 500 μm . La pompe n'est pas résonnante dans la cavité mais ses impulsions doivent être synchronisées précisément afin de pouvoir interagir avec les impulsions du signal dans la cavité. La pompe et l'injection sont mélangées par un miroir dichroïque en amont de la cavité.

Deux translations micrométriques permettent d'ajuster la distance totale de la cavité ainsi que celle entre les deux miroirs courbes. Cette dernière est particulièrement critique et l'on montre que cette distance doit être réglée à 100 μm près pour que le mode résonnant existe et ne soit pas trop astigmatique. La cavité est astigmatique et très sensible aux angles des faisceaux incidents sur les miroirs courbes. Ceux-ci doivent être les plus petits possible. Des calculs détaillés des caractéristiques du mode résonnant en fonction des distances entre les optiques sont présentés dans l'annexe B.

Les montures utilisées pour orienter les miroirs sont lourdes et stables mais sont encombrantes et limitent les possibilités en matière de chemin optique. Afin de pouvoir limiter les angles d'incidence sur les miroirs courbes, des ouvertures ont été percées dans les montures afin de pouvoir faire passer les faisceaux

à proximité des miroirs.

Tous les miroirs sont traités haute-réflexivité pour l'injection, sauf le coupleur de sortie qui transmet 20% de l'intensité. Cette valeur élevée permet théoriquement de ne pas limiter la compression du bruit quantique, en maximisant l'*escape efficiency* (cf. 7.3.5).

Le coupleur d'entrée est courbé sur sa face externe (ménisque), afin de former en transmission une lentille convergente qui facilite la focalisation des faisceaux dans le cristal.

11.2 Mise en place du SPOPO

Les principales étapes pour observer le seuil de l'OPO et une amplification sensible à la phase, effets décrits théoriquement au chapitre 7, sont présentées ici.

1. L'injection est tout d'abord alignée pour être résonnante dans la cavité vide.
2. Le cristal non-linéaire de BiBO est ensuite placé dans la cavité et orienté de telle façon que l'on observe un signal doublé.
3. La pompe est alors alignée spatialement pour être superposée au signal doublé à l'intérieur de la cavité.
4. A l'aide d'une ligne à retard, on balaie la différence de chemin optique entre la pompe et l'injection jusqu'à observer des figures d'interférences entre la pompe et le faisceau doublé produit dans la cavité. Ces interférences ne peuvent s'obtenir que quand le délai entre les deux faisceaux est inférieur à quelques dizaines de micromètres.
5. En présence d'injection et en dessous du seuil, on observe une amplification sensible à la phase lorsque l'on balaie la phase relative entre les deux faisceaux.
6. Pour une puissance de pompe suffisamment élevée et en l'absence d'injection, on observe le seuil de l'OPO.

11.2.1 Seuil du SPOPO

Dans la configuration précédemment décrite, nous avons observé le seuil du SPOPO. La puissance de pompe nécessaire pour atteindre le seuil est mesurée à l'aide d'un watt-mètre en silicium. Pour un cristal de $500\text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur, le seuil est obtenu pour une puissance de pompe de 32 mW. Pour un cristal de $350\text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur, le seuil est obtenu pour une puissance de 50 mW.

Ces valeurs sont compatibles avec les prédictions théoriques. On a observé une émission de faisceau intense au-dessus du seuil, prenant la forme de pics de cavité quand on balaye la longueur de celle-ci. Il a été possible d'asservir cette cavité sur un mode d'émission au-dessus du seuil.

11.2.2 Amplification sensible à la phase

Un phénomène d'amplification sensible à la phase a été observé. Le phénomène est présenté sur la figure 11.2.1. La meilleure désamplification observée est très proche de 0.25, à proximité du seuil. La valeur de l'amplification augmente quand on se rapproche du seuil, la valeur maximale que l'on peut mesurer est cependant limitée par l'asservissement de la cavité. En effet, il faut que le système d'asservissement puisse fonctionner avec des intensités très différentes. Des valeurs supérieures à 50 ont toutefois été observées. Suivant la méthode présentée dans le chapitre précédent, il a été possible d'asservir la phase relative entre l'injection et la pompe. A notre connaissance, l'amplification sensible à la phase dans un SPOPO est un résultat nouveau qui n'avait jamais été observé.

11.3 Mise en évidence des propriétés quantiques du SPOPO

La théorie du SPOPO que nous avons présentée (cf. 7.4.5) lie de façon directe l'amplification sensible à la phase à une modification des propriétés de bruit quantique. Nous allons maintenant nous attacher à caractériser expérimentalement les propriétés quantiques des états produits par le SPOPO. Nous nous intéresserons notamment à mettre en évidence son fonctionnement multimode.

11.3.1 Réduction du bruit quantique en intensité

11.3.1.1 Détection balancée

La détection balancée est un moyen simple de mesurer les propriétés de bruit en intensité d'un faisceau. Le dispositif est représenté sur la figure 11.3.1. Le

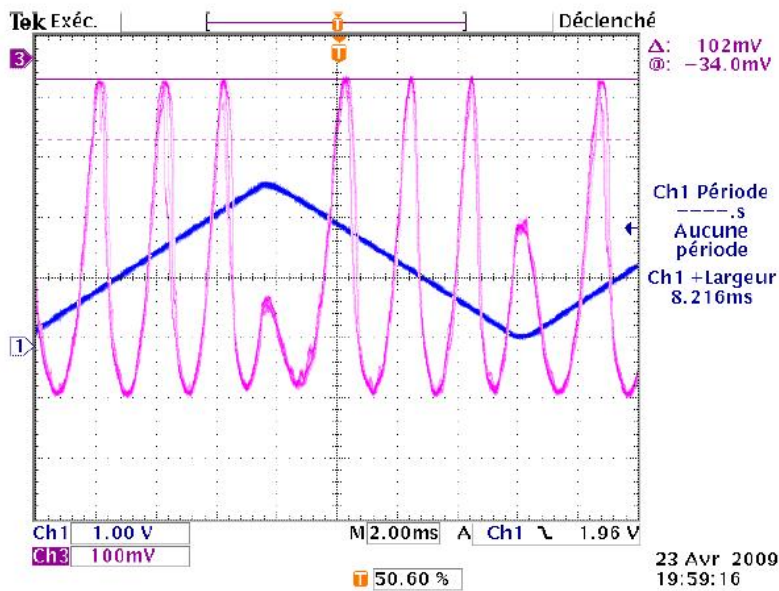


Fig. 11.2.1 : Signal d'intensité observé en sortie de cavité, témoignant d'une amplification sensible à la phase. Le signal est négatif sur cette courbe, l'amplification est donc en bas de la courbe. On observe un gain d'amplification de 4.3 et un gain de désamplification de 0.25, le SPOPO est donc très proche du seuil.

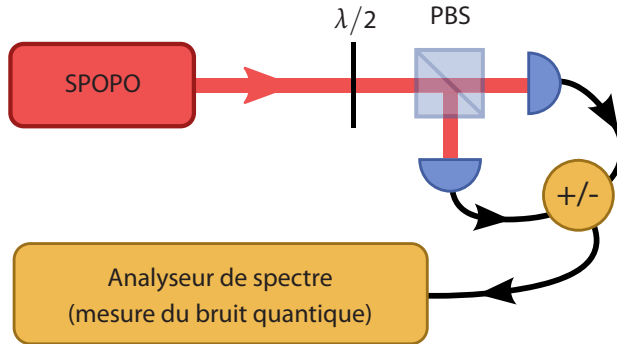


Fig. 11.3.1 : Détection équilibrée.

faisceau dont on veut mesurer le bruit est séparé en deux faisceaux d'égales puissances par une lame séparatrice, ou bien par un cube séparateur de polarisation précédé d'une lame-demi-onde. Les intensités lumineuses des deux faisceaux sont mesurées par deux photodiodes identiques.

- La somme des deux photocourants est parfaitement égale à ce que l'on aurait mesuré si l'on avait utilisé une unique photodiode pour mesurer l'intensité du faisceau signal, sans le séparer en deux.
- La différence des deux photocourants donne accès au bruit quantique standard (shot noise), à la puissance du faisceau, quelles que soient les propriétés de bruit quantique ou classique du faisceau.

En comparant les signaux électriques de somme et de différence, on obtient une mesure directe du bruit de l'état. Qualitativement :

- Si les bruits de ces signaux sont égaux, l'état est cohérent.
- Si la somme est plus grande que la différence, l'état présente un excès de bruit, classique ou quantique.
- Si la somme est plus faible que la différence, l'état est comprimé en intensité.

En pratique, on emploie un analyseur de spectre pour mesurer une compression de bruit éventuelle à une certaine *fréquence d'analyse*. Pour notre expérience,

cette fréquence est typiquement prise entre 1 et 3 MHz. Pour des fréquences inférieures, le faisceau présente du bruit technique, issu du laser lui-même (oscillations de relaxations autour de 700 kHz notamment). La bande passante de la cavité limite la compression des états (cf. équ. 7.4.7) à haute fréquence. La bande passante à mi-hauteur étant de 2.6 MHz pour notre cavité OPO, cela signifie qu'elle ne transmet que 50 % de l'intensité maximale à 1.3 MHz.

11.3.1.2 Résultats expérimentaux

La phase étant asservie pour que l'injection soit désamplifiée, nous avons observé une compression de bruit de 1.1 dB en puissance, à partir de 1 MHz (cf. 11.3.2). Ce résultat a pu être reproduit sur des mesures répétées, pendant une durée supérieure à une année, même après avoir démonté et remonté la cavité deux fois. Nous avons pu observer une compression de bruit de l'ordre de 1 dB pendant des durées supérieures à l'heure, sans réglages. Le facteur limitant devient dans ce cas les variations de températures à l'intérieur de la salle, qui obligent à compenser la longueur de la cavité si elles évoluent trop vite.

Le bruit observé pour des fréquences inférieures provient du laser lui-même principalement, le pic aux alentours de 700 kHz correspondant aux oscillations de relaxation du laser, ce qui est confirmé expérimentalement par la fréquence d'oscillation lorsque le laser est en Q-Switch modelocking (cf. 9.2.2). L'observation de compression de bruit par un SPOPO est un résultat nouveau.

La raison pour laquelle nous n'observons pas plus de compression de bruit n'est pas bien comprise. En effet, la désamplification et l'escape efficiency de notre système devraient conduire à nettement plus de réduction de bruit. Une explication pourrait cependant provenir d'une instabilité que nous observons lorsque nous balayons la phase relative entre la pompe et l'injection, à proximité de l'opposition de phase (désamplification), lorsque l'injection est légèrement en avance sur la pompe. L'origine de cette instabilité n'a pas été élucidée mais son effet croît clairement avec la force de la désamplification. Cette instabilité n'est par ailleurs pas adiabatique, l'effet est plus marqué lorsque la phase de l'injection croît par rapport à celle de la pompe.

Cet effet a deux conséquences principales. Premièrement, il nous interdit de verrouiller la phase lorsque la désamplification est trop importante. Deuxièmement, il nous oblige à asservir la phase de telle façon que l'injection soit légèrement en retard sur la pompe, afin que les fluctuations de phase autour du point d'asservissement n'atteignent pas ce point d'instabilité. Les deux nuisent à la réduction de bruit quantique.

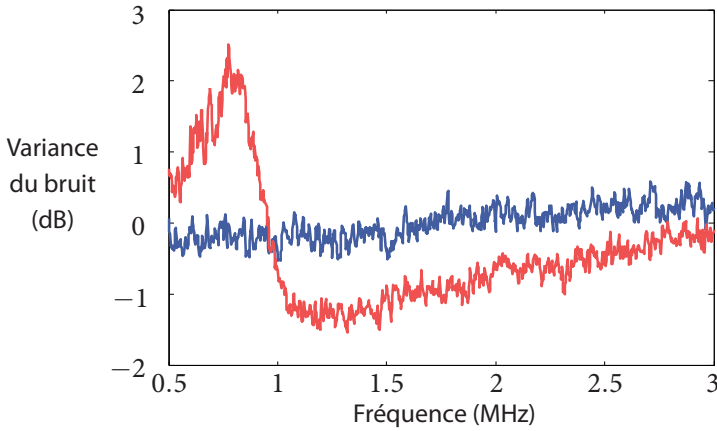


Fig. 11.3.2 : Observation expérimentale de la réduction du bruit quantique. La courbe rouge correspond au bruit du laser, la courbe bleue au bruit quantique standard. Ces courbes ne sont pas corrigées du bruit d'obscurité de la photodiode et sous-estiment donc légèrement le coefficient de compression du bruit d'intensité. La bande passante est ici de 30 kHz et la bande passante vidéo est de 10 Hz.

Il sera nécessaire de tester en utilisant d'autres cristaux non-linéaires, qui sont probablement le siège de l'effet fortement non-linéaire observé. On pourra ainsi envisager d'utiliser des cristaux de BBO ou de KTP.

11.3.2 Caractère multimode

Nous avons montré (cf. 7.4.5) que le SPOPO était un dispositif intrinsèquement multimode, que l'on pouvait décrire comme une assemblée de squeezers monomodes indépendants sur une base de supermodes. Ces supermodes ayant des profils fréquentiels différents, en analysant les propriétés de différentes bandes de fréquences (optiques) du faisceau désamplifié, il est possible de prouver le caractère multimode de celui-ci.

11.3.2.1 Pertes et filtrage spectral

Nous avons étudié l'effet des pertes sur le bruit des quadratures au premier chapitre et démontré que la variance évolue linéairement en fonction du coefficient de pertes en intensité (cf. équ. 1.6.3). Si l'on coupe une partie du spectre d'un état monomode, le bruit évolue comme si l'on introduit simplement des pertes uniformes. Pour un état multimode en revanche, la situation est plus

complexe. En effet, les pertes relatives entre les modes vont dépendre des profils spectraux des modes et de la façon dont on coupe le spectre. Illustrons ce phénomène par un exemple simple.

Considérons un état bimode (cf. fig. 11.3.3) composé de deux modes dont les spectres sont disjoints, répartis de part et d'autre de la fréquence ν_0 . Ces modes sont appelés 1 et 2, par fréquences croissantes. Le mode 1 est supposé comprimé en intensité tandis que le mode 2 est cohérent. Introduisons maintenant des pertes sur les basses fréquences uniquement. Seul le mode 1 sera initialement atténué, le bruit total d'intensité (normalisé à la puissance) va donc croître linéairement. Une fois que l'on a coupé complètement le mode 1, celui-ci est dans un état de vide quantique, non comprimé. L'état quantique du champ total est donc cohérent. Continuer à couper le spectre revient à atténuer un état cohérent, le bruit normalisé n'évolue donc plus. Lorsque tout le spectre est coupé, l'état est vide, non comprimé. L'évolution du bruit en fonction des pertes est donc une ligne brisée, alors que si l'on soumet le spectre à une atténuation achromatique, l'évolution est linéaire. Il est intéressant de remarquer que si l'on avait coupé en partant des fréquences élevées, le bruit normalisé aurait tout d'abord diminué, avant de remonter vers 1.

En conclusion, en étudiant l'évolution du bruit lorsque l'on ajoute des pertes sur un état quantique, on peut établir une preuve qu'un état n'est pas monomode. L'observation d'un écart par rapport au comportement d'un état monomode fournit donc une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'un état soit multimode.

11.3.2.2 Mise en place du filtrage spectral

Afin de pouvoir étudier différentes composantes spectrales du faisceau mesuré, nous avons mis en place une ligne de mise en forme spectrale en amont de la détection balancée. Celle-ci est présentée sur la figure 11.3.4.

Une fraction du faisceau est prélevée et mesurée afin de pouvoir asservir la cavité. L'asservissement est donc totalement indépendant de la mesure que l'on effectue sur la détection balancée. En pratique, on prélève 10% de l'intensité pour l'asservissement. Ceci n'a pas de conséquence sur la mesure de compression de bruit de l'ordre de 1 dB.

Après collimation, le faisceau est dispersé en utilisant deux prismes successifs en SF10 à l'incidence de Brewster, puis focalisé par un miroir concave à petite incidence. Les différentes composantes fréquentielles sont donc étalées spatialement dans le plan de focalisation (plan de Fourier). A ce niveau, deux

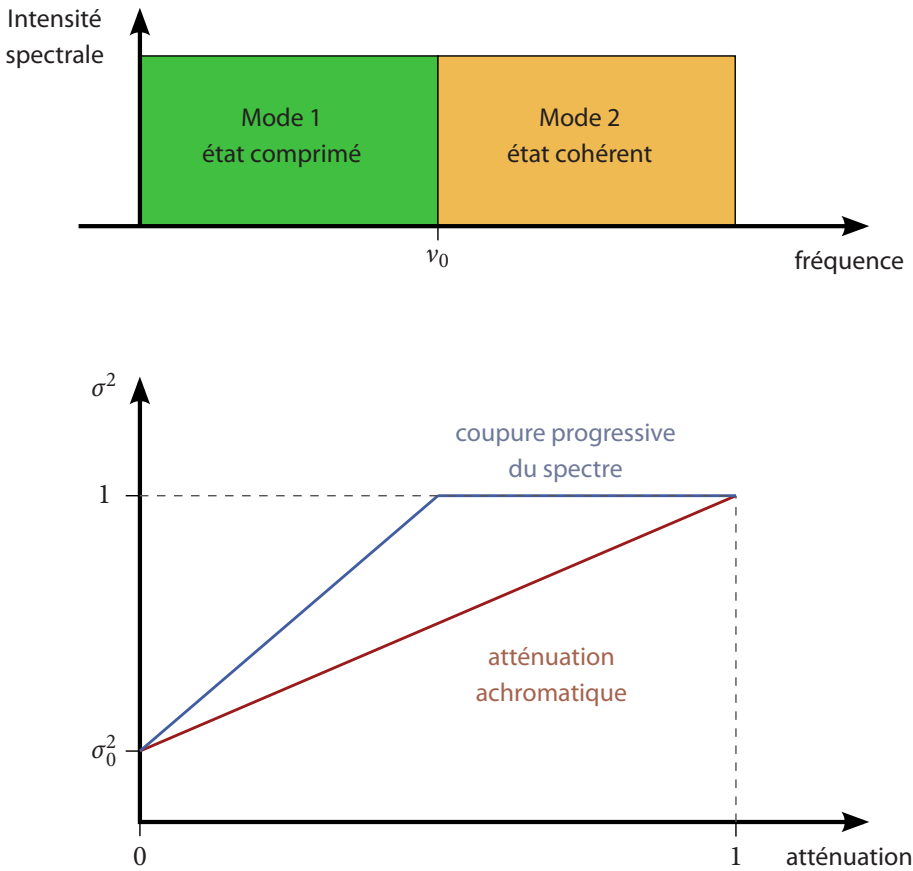


Fig. 11.3.3 : Comparaison entre des pertes achromatiques (filtre ND variable) et une coupure progressive du spectre pour un état bimode.

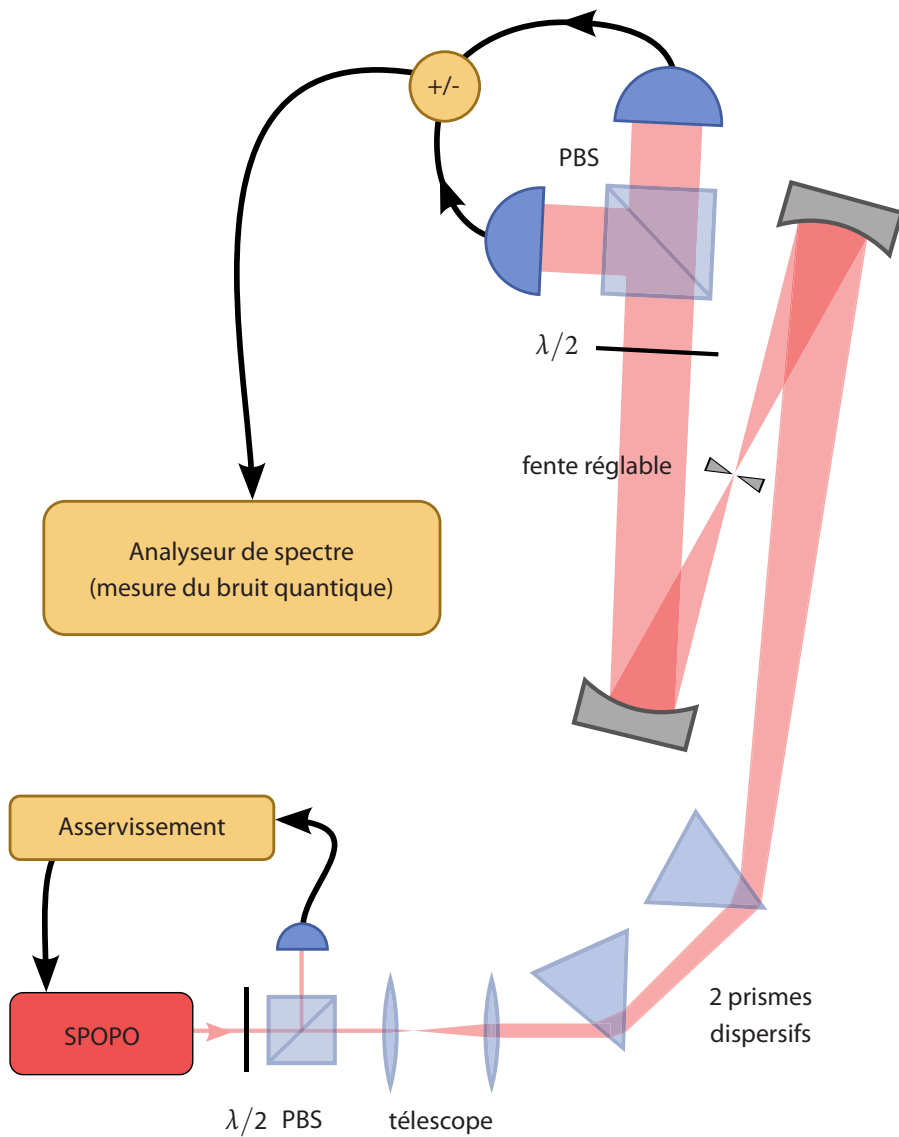


Fig. 11.3.4 : Dispositif de mesure du bruit quantique sur une fenêtre de spectre optique ajustable.

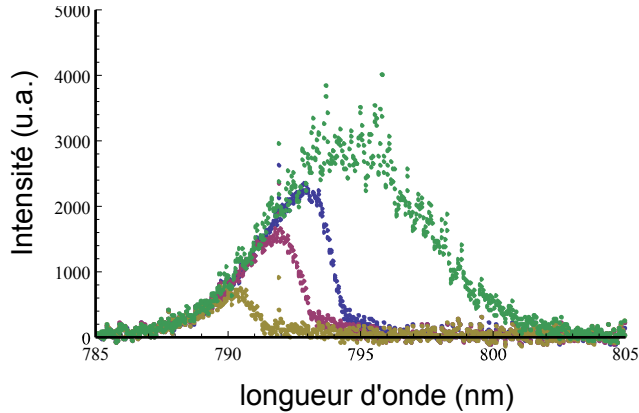


Fig. 11.3.5 : Spectres obtenus en coupant avec une lame de rasoir au niveau du plan de Fourier.

lames de rasoirs montées sur des translations micrométriques permettent de sélectionner le spectre transmis.

Un deuxième miroir concave collimate approximativement la lumière, en direction de la détection balancée. La lumière y est focalisée par des lentilles, de telle façon que toute la lumière, à toutes les fréquences, soit collectée par les photodiodes.

11.3.2.3 Pouvoir de résolution

Au niveau du plan de Fourier, l'étalement de chaque fréquence (fonction d'étalement du point) correspond au waist d'un faisceau gaussien monochromatique à la même fréquence. Les fréquences proches vont donc se chevaucher partiellement dans le plan de Fourier et limiter la résolution du dispositif. Afin de maximiser le pouvoir de résolution, il faut donc maximiser la dispersion. Nous avons donc utilisé des prismes en SF10, matériau très dispersif, et deux prismes plutôt qu'un. Il faut d'autre part minimiser les effets de la diffraction, raison pour laquelle nous avons utilisé un télescope pour élargir le faisceau le plus possible au niveau des prismes, en veillant à ce qu'il n'y ait pas de pertes sur les bords. Un exemple de spectre coupé est présenté sur la figure 11.3.5.

On constate que l'on dispose d'un pouvoir de résolution de 1.5 nm, à comparer à la largeur spectrale à mi-hauteur, qui vaut 7 nm.

11.3.2.4 Filtrage passe-bas ou passe-haut

L'approche la plus simple pour tester si notre état est monomode ou multimode consiste à couper progressivement son spectre, par le biais d'une lame de rasoir dans le plan de Fourier. Pour différentes fractions de l'intensité, on mesure le bruit et le bruit quantique standard du faisceau transmis par la lame de rasoir. Les mesures s'effectuent à la fréquence de 2.5 MHz, avec une bande passante de 10 kHz et une bande passante vidéo de 30 Hz. Pour chaque mesure, on enregistre 2×1000 points sur une durée de 5 s, le temps entre les mesures du bruit et du bruit quantique standard étant de l'ordre de 5 s lui aussi. Nous avons effectué trois mesures différentes consécutives consistant à mesurer l'intensité lorsque l'on coupe d'abord les basses fréquences, puis d'abord les hautes fréquences, puis en atténuant le faisceau en utilisant des densités neutres.

Correction du bruit d'obscurité des photodiodes Les mesures ont été corrigées du bruit d'obscurité des photodiodes, qui est identique pour toutes les mesures. Nous avons au final obtenu des valeurs, sur une échelle linéaire, des bruits d'intensité et du bruit quantique standard.

Incertitudes Les incertitudes augmentent lorsque l'on coupe beaucoup le faisceau et que l'on se rapproche ainsi du bruit d'obscurité des photodiodes, que nous compensons. En pratique, nous constatons que tant que l'on ne coupe pas plus de 80% de l'intensité, les fluctuations des mesures sont relativement constantes.

Afin d'obtenir une estimation des barres d'erreur, nous avons divisé chaque courbe en deux jeux de 500 points consécutifs. Nous avons pris les valeurs moyennes de chaque sous ensemble et obtenu ainsi 4 estimations du bruit normalisé. Nous avons répété l'opération pour l'ensemble des mesures pour lesquelles l'intensité mesurée représentait au minimum 20% de l'intensité totale. Nous avons alors déterminé un intervalle de confiance, identique pour chaque mesure, contenant 95% des mesures.

Interprétation Les différents résultats expérimentaux obtenus sont présentés sur les figures 11.3.6 et 11.3.7.

- On observe en premier lieu que lorsqu'on atténue le faisceau par l'intermédiaire de filtres neutres, l'évolution du bruit d'intensité en fonc-

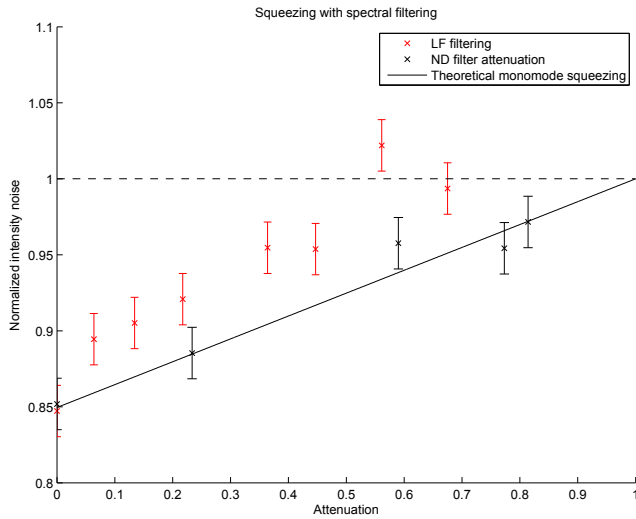


Fig. 11.3.6 : Comparaison de l'influence d'une coupure du spectre, en partant des basses fréquences, et d'une atténuation achromatique, sur le bruit normalisé du faisceau.

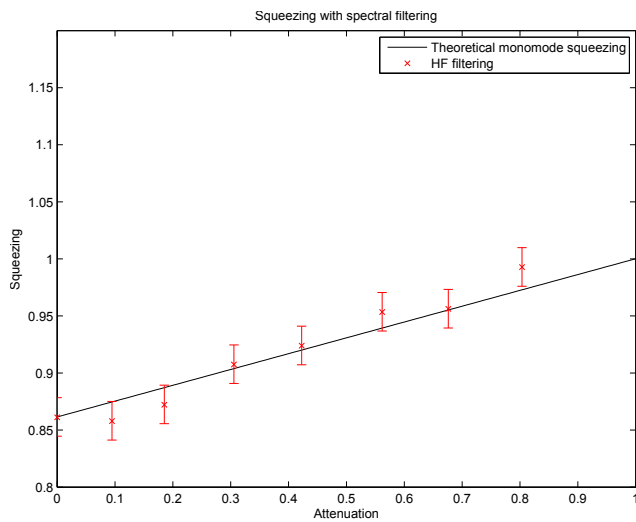


Fig. 11.3.7 : Influence d'une coupure du spectre, en partant des basses fréquences sur le bruit normalisé du faisceau.

tion de l'atténuation suit bien la loi théorique. Ceci confirme a posteriori la validité de l'estimation des incertitudes de nos mesures.

- Lorsque l'on coupe progressivement depuis les basses fréquences, l'écart par rapport à la situation monomode est marqué. Ceci permet d'affirmer que le faisceau produit par le SPOPO n'est pas monomode.
- Lorsque l'on coupe en partant des hautes fréquences, il n'est pas possible de conclure à un écart observable par rapport au cas monomode.
- Ce résultat est répétable qualitativement sur plusieurs journées d'expérimentations : le bruit évolue toujours nettement plus vite lorsque l'on coupe les basses fréquences en premier

11.3.3 Autre méthode d'analyse

L'approche que nous venons de présenter permet de mettre en évidence un fonctionnement multimode mais ne fournit pas d'information sur les modes. Nous avons alors envisagé d'appliquer la technique utilisée par [Spälter 97, Opatrný 02] pour caractériser des modes fréquentiels non-classiques. Le spectre est découpé en « modes pixels » d'intensité constante, correspondant à des plages de fréquences contiguës. En mesurant le bruit sur ces pixels et sur des combinaisons de ceux-ci, il est possible d'en déduire une matrice de corrélation des bruits d'intensité entre ces modes pixels. On peut alors en déduire une base de supermodes dans un espace pixélisé, ainsi que leurs bruits d'intensité associés. Ce traitement fera l'objet d'une publication ultérieure.

11.4 Conclusion

Nous avons réalisé expérimentalement un SPOPO en régime femtoseconde. Nous avons observé le seuil d'oscillations et nous avons pu l'asservir en fonctionnement au-dessus du seuil. Différents résultats nouveaux ont été produits sur cette expérience. En dessous du seuil, nous avons observé une amplification sensible à la phase d'un peigne de fréquence injecté. La phase relative entre la pompe et l'injection a d'autre part été asservie et nous avons pu observer une réduction du bruit d'intensité des faisceaux produits par le SPOPO. Nous avons enfin établi que le faisceau que nous avons produit était nécessairement multimode dans le domaine fréquentiel.

12 Bilan et perspectives

Il a été établi dans cette thèse une borne de type Cramér-Rao pour des mesures exploitant des ressources gaussiennes. Ceci a permis de montrer qu'en utilisant une détection homodyne monomode on pouvait réaliser des mesures optimales de paramètres portés par un champ électromagnétique donné. Ces résultats sont très généraux et couvrent un grand nombre de situations expérimentales comme démontré au sein de ce manuscrit. Il est possible de les étendre encore, comme par exemple l'étude des paramètres portés par la polarisation ou l'intensité du champ. L'étude de nouvelles statistiques, tout d'abord des états gaussiens impurs, puis des états non gaussiens serait également à considérer. On peut ainsi penser à l'étude de mesures de champs utilisant des états dont les modes de bruit seraient des chats de Schrödinger. Ces derniers peuvent qualitativement mener à des mesures précises au-delà de la limite standard en raison de la finesse des détails de leurs fonctions de Wigner. D'une manière générale, il serait intéressant de relier la théorie développée ici à la borne de Cramér-Rao quantique de Helstrom. Ces bornes exprimées en termes de matrice densité sont difficiles à appliquer à l'optique quantique en variable continue, il serait intéressant de pouvoir les exprimer dans un formalisme de distribution de quasi-probabilité.

Il a été montré le principe d'une expérience permettant d'appliquer cette théorie à des mesures optimales utilisant des impulsions femtoseconde. La mise en place d'une telle expérience a débuté au sein du groupe de Manuel Joffe du Laboratoire Optique et Biosciences. Parmi les objectifs à court terme, on peut citer les mesures optimales de délais de groupe ou de phase, de mesures de dispersions et de mesures de distances indépendantes de la dispersion, tout ceci en adaptant la mise en forme des impulsions de l'oscillateur local.

Comme il a été montré que l'utilisation d'états comprimés dans un mode bien défini, le mode de bruit, était optimale, nous avons cherché à produire expérimentalement des états comprimés en régime femtoseconde. Cette nouvelle expérience, qui a été initiée au début de cette thèse, a représenté la majorité du travail effectué pendant ces trois ans.

En utilisant un oscillateur paramétrique optique pompé de façon synchrone, nous avons pu amplifier et désamplifier un signal lumineux femtoseconde et produire de cette façon des trains d'impulsions femtoseconde comprimés en intensité. Nous avons d'autre part démontré le caractère multimode du faisceau produit, en comparant les propriétés de bruit du faisceau lorsque l'on introduit des pertes spectrales. Ceci constitue une preuve du comportement multimode mais ne fournit pas d'informations précises sur l'état produit. Des études plus poussées sont en cours, portant sur une étude quantitative des corrélations quantiques entre quatre bandes de fréquence.

Un des objectifs sera de mettre en place une détection homodyne. Ceci est relativement difficile car il faut mettre en forme les impulsions de l'oscillateur local et la technique traditionnelle, utilisant un masque de phase à cristaux liquide, est connue pour ajouter un fort bruit de phase à basse fréquence aux faisceaux. Une détection homodyne permettrait cependant une caractérisation complète des états produits, quadrature par quadrature et mode par mode.

Sur le plan purement expérimental, d'autres améliorations techniques sont à envisager. On peut ainsi citer l'asservissement la phase absolue de la source femtoseconde, ainsi que l'introduction d'une cavité de filtrage, qui permettrait de stabiliser les modes spatiaux des faisceaux lumineux et de réduire le bruit à haute fréquence de ceux-ci. La mise en forme de la pompe, à commencer par un simple contrôle du délai de dispersion de groupe de celle-ci, permettrait la production de différents états comprimés.

Un aspect qui n'a volontairement pas été abordé dans cette thèse est celui de l'utilisation de ressources multimodes comprimées, telles que celles produites par les SPOPOs, pour le calcul quantique. Les différents dispositifs existants reposent sur l'utilisation de tels ressources et envisagent généralement l'utilisation de multiples sources monomodes ou bimodes synchronisées entre elles. En utilisant un SPOPO et en contrôlant finement le spectre de la pompe, on pourrait produire directement des états fortement multimodes.

A terme, il est envisagé de produire de cette façon des états comprimés sur des modes bien définis et de les utiliser pour effectuer des mesures optimales en régime femtoseconde. Cette thèse fournit ainsi les bases théoriques et expérimentales de la réalisation de mesures optimales de paramètres portés par le champ électromagnétique, en régime femtoseconde.

Annexes

A Description et procédure d'alignement de la cavité

Sommaire

A.1 Géométrie	238
A.1.1 Détail des éléments de la cavité	240
A.1.2 Montures, translations et actuateurs	241
A.2 Alignement de l'injection	242
A.3 Cristal non-linéaire	245
A.4 Alignement de la pompe	246
A.4.1 Alignement spatial	246
A.4.2 Synchronisation de la pompe	246
A.5 Amplification sensible à la phase et seuil de l'OPO	247

Le SPOPO qui a été mis en place est complexe et a représenté la majorité de l'effort expérimental fourni pendant cette thèse. Il a déjà été décrit rapidement et sa procédure d'alignement ont été évoquées au chapitre 11. Cette annexe a pour but de revenir en détail sur ces points, de façon beaucoup plus technique.

A.1 Géométrie

La cavité optique de l'OPO est pompée de façon synchrone, sa longueur (chemin optique) doit donc être précisément égale à celle du laser de pompe, c'est-à-dire environ 392 cm. Afin de simplifier les explications, nous allons dans cette section considérer que cette longueur est précisément de 4 m. Celle-ci est nettement supérieure à la longueur typique des OPO fonctionnant en continu, ce qui constitue une difficulté expérimentale majeure, notamment pour l'asservissement de celle-ci.

La configuration qui a été mise en place expérimentalement est une géométrie linéaire repliée. Le schéma de principe est présenté sur la figure A.1.1. La

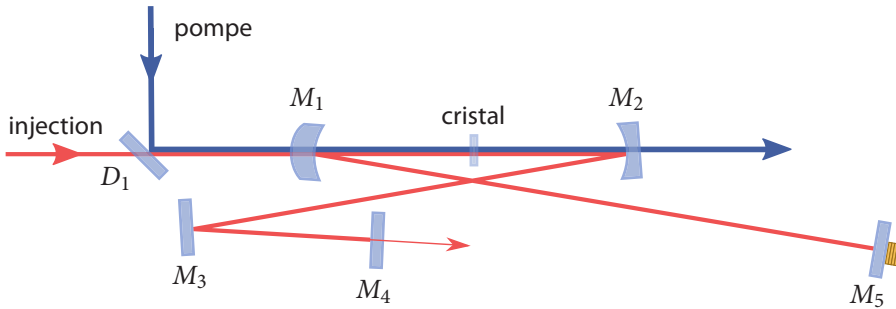


Fig. A.1.1 : Schéma de la cavité OPO

cavité est résonnante pour le faisceau signal à des longueurs d'ondes autour de 800 nm. Le cristal non-linéaire de BiBO (décrit section 9.6) est placé entre deux miroirs courbes (M_1 et M_2), de petit rayon de courbure ($R = 10$ cm). Ces deux miroirs sont porteurs de traitements haute réflectivité (HR) à ces longueurs d'ondes et sont légèrement inclinés dans le plan horizontal. Ils réfléchissent ainsi, avec un petit angle, les faisceaux de part et d'autre du cristal vers des miroirs plans, situés à une distance d'environ 95 cm. Le faisceau présente un waist au centre du cristal (par symétrie). Ce waist est petit (de l'ordre de $17 \mu\text{m}$) car les rayons de courbures des miroirs sont eux-mêmes petits, ce qui est nécessaire pour exalter les effets non-linéaires qui ont lieu dans le cristal. La distance entre le cristal et ces miroirs (à peu près à la distance focale de ceux-ci, c'est-à-dire 5 cm) est telle que les faisceaux réfléchis sont presque collimatés. Ils présentent des waists au niveau des miroirs plans (M_4 et M_5). Afin de rendre la configuration plus compacte, un des deux bras est replié par l'adjonction d'un deuxième miroir plan (M_3). Un des deux miroirs plans est un miroir traité HR, l'autre est un miroir de coefficient de réflexion en puissance de 80%, il constitue le miroir de couplage de sortie de la cavité. Un des deux miroirs courbes (traités HR) sert de coupleur d'entrée de l'injection dans la cavité.

Les deux miroirs courbes de part et d'autre du cristal réfléchissent peu les longueurs d'onde de la pompe, aux alentours de 400 nm. Le faisceau pompe n'est donc pas résonnant dans la cavité. Le faisceau pompe et le faisceau injection sont couplés par le même miroir, ils sont mélangés sur un miroir dichroïque (D_1) placé juste avant le miroir d'entrée.

A.1.1 Détail des éléments de la cavité

D_1 : miroir dichroïque Ce miroir dichroïque sert à mélanger la pompe, bleue, à 400 nm et l'injection, rouge, à 800 nm.

M_1 : coupleur d'entrée Cet élément est un ménisque en BK7 présentant deux faces de rayons de courbures et de traitements différents :

- une face concave orientée vers l'intérieur de la cavité, traitée haute réflectivité pour le rouge. Elle est traitée antireflet pour le bleu. Le rayon de courbure de cette face est de 10 cm.
- Une face convexe traitée antireflet pour le rouge et le bleu, de rayon de courbure -5 cm.

L'intérêt d'utiliser un ménisque au lieu d'un simple miroir concave apparaît au niveau du matching de la cavité. En effet, comme le waist dans la cavité est petit, le faisceau incident doit être très convergent, ce qui impose de placer des lentilles très convergentes à proximité de ce miroir d'entrée de la cavité si l'on veut éviter de travailler avec des faisceaux très larges. En transmission, ce ménisque constitue une lentille convexe-concave de focale 200 mm environ, alors qu'un simple miroir convexe est une lentille plan-concave de focale -200 mm. L'utilisation de ce ménisque apporte en conséquence un confort considérable pour le matching de la cavité. Ce miroir est légèrement incliné dans le plan horizontal.

M_2 : miroir concave Cet élément est un miroir concave de rayon de courbure 10 cm, traité haute réflectivité à 800 nm. Il est lui aussi incliné légèrement dans le plan horizontal

M_3 : miroir plan Ce miroir est plan, traité haute réflectivité à 800 nm pour une incidence nulle. L'angle d'incidence du faisceau sur ce miroir est proche de 0

M_4 : coupleur de sortie Son coefficient de réflexion en puissance est de 80% à 800 nm. La fraction transmise constitue la sortie de l'OPO.

M_5 : miroir plan Ce miroir est identique au miroir M_3 .

A.1.1.1 Cristal

Ce cristal est en BiBO, son épaisseur est de 500 μm . Se référer à la section 9.6 pour plus d'informations sur ce matériau.

A.1.2 Montures, translations et actuateurs

Les montures des miroirs M_1 , M_2 , M_4 , et M_5 sont de type Newport SL25.4BD. Elles sont particulièrement stables et sont réglables par le biais de vis micrométriques différentielles. Comme l'inclinaison horizontale des miroirs M_1 et M_2 est faible, les faisceaux passent à proximité des miroirs opposés. Afin de pouvoir profiter de la robustesse de ces montures tout en s'assurant que les angles d'incidence restent faibles, des trous ont été percés à même les montures à l'intérieur desquels passent les faisceaux lumineux. Le miroir M_3 et le dichroïque D_1 sont, eux, placés dans des blocs en métal massif car leurs orientations n'ont pas besoin d'être ajustées finement. Le cristal est placé à l'intérieur d'une pièce en cuivre. L'intérêt de ce matériau est qu'il conduit très bien la chaleur, il serait donc facile d'adapter sur cette pièce des modules Pelletier pour asservir la température du cristal. Toutefois, le cristal est fin et les propriétés du BiBO dépendent peu de la température, ce qui fait qu'il n'a pas été nécessaire, pour l'instant, de mettre en place cet asservissement. Cette pièce en cuivre est elle-même placée à l'intérieur d'une monture Newport de type U100-ACG-3K. Cette monture présente trois vis d'ajustement, ce qui permet d'effectuer des rotations et des translations longitudinales du cristal.

Les miroirs M_2 et M_5 sont montés sur des translations micrométriques. La position du miroir M_2 agit de manière critique sur la taille du waist dans la cavité ainsi que sur son astigmatisme (comme il sera montré au paragraphe B.1.2), la position de M_5 permet d'ajuster finement la longueur totale de la cavité. Translater ce miroir ne change que très peu le profil spatial du faisceau résonnant. Le nombre de translations a été réduit au minimum possible en pratique, afin de ne pas nuire à la stabilité mécanique de la cavité.

Le miroir M_5 est de surcroît monté sur un actuateur piézoélectrique, produit par PI (référence P-016.00H). Cet actuateur est composé de couches de PZT haute tension, séparées par des électrodes. Il est contrôlé par un amplificateur haute tension pouvant délivrer une tension entre 0 et 1000 V. Le déplacement total de cet actuateur est d'environ 5 μm . Le miroir est collé sur l'actuateur, celui-ci est lui-même placé à l'intérieur d'un support massif en laiton, qui est fixé sur la monture (voir figure A.1.2). L'ajout de ce support en laiton a contribué de

façon significative à la qualité de l'asservissement de la cavité.

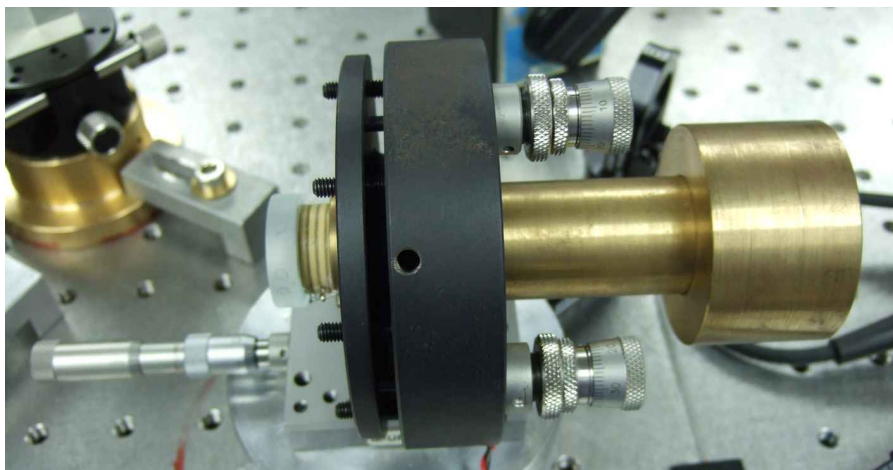


Fig. A.1.2 : Monture massive en laiton utilisée pour relier le miroir à la monture de rotation.

A.2 Alignement de l'injection

La cavité est tout d'abord alignée pour l'infrarouge, le cristal n'étant pas présent dans la cavité. Voici la procédure à suivre pour aligner l'injection de la cavité.

1. En utilisant des lentilles, on réalise un premier alignement du faisceau incident, de telle sorte que le profil spatial corresponde approximativement au mode qui sera résonnant dans la cavité.
2. On positionne ensuite le coupleur d'entrée et l'on vérifie que l'on a bien un waist de la taille désirée au niveau où le cristal sera placé.
3. On place ensuite les autres miroirs. On ajuste les longueurs des bras de la cavité de manière à ce que la longueur de la cavité corresponde approximativement à la longueur de la cavité du laser (déterminée précisément en mesurant le taux de répétition de celui-ci)
4. Il faut ensuite orienter le miroir M_2 pour que le faisceau passe bien par le trou qui a été percé à travers la monture du miroir M_1 . Il faut s'assurer

que l'on dispose d'une certaine marge d'ajustement du réglage horizontal de M_2 . Il est essentiel à ce stade que le faisceau ne passe pas trop proche du bord de la monture.

5. Il faut s'assurer que le faisceau est approximativement collimaté après sa réflexion sur le miroir M_2 . Ceci peut être corrigé en ajustant la position de la vis de translation micrométrique qui déplace le miroir M_2 . Il peut être nécessaire de corriger aussi le matching du faisceau incident si l'on s'aperçoit que le waist de ce faisceau n'est plus exactement au milieu entre les deux miroirs M_1 et M_2 .
6. Ensuite, il faut ajuster les miroirs M_2 , M_3 et M_4 pour que le faisceau revienne bien sur lui-même après réflexion sur le miroir M_4 , tout en se réfléchissant approximativement au centre de ces miroirs. Ceci est plus particulièrement important pour le miroir M_4 . Les montures sont conçues pour que leur rotation n'induisse pas de translation (montures à cardans, « gimbal »). Cependant, si le faisceau n'est pas exactement incident au centre du miroir, une rotation de celui-ci entraînera une translation et donc un changement de la longueur de la cavité qu'il faudra compenser. Cet effet ne peut pas être complètement supprimé en pratique mais il est nécessaire de le minimiser.
7. Il faut ensuite ajuster l'inclinaison du miroir M_1 pour que le faisceau réfléchi par celui-ci passe par le trou pratiqué dans la monture M_2 . Il est nécessaire de s'assurer que l'on ne passe pas trop proche des bords de la monture, avec une certaine marge de sécurité. Comme la rotation de M_1 modifie à la fois le chemin du faisceau et la position des trous dans les montures, il est alors nécessaire de recommencer les étapes précédentes jusqu'à ce que le faisceau passe bien par les centres des miroirs et des trous pratiqués dans les montures.
8. On repositionne alors le miroir M_5 pour qu'il soit illuminé en son centre. On l'oriente alors pour que le faisceau revienne bien sur lui-même après la réflexion sur ce miroir. Il est alors nécessaire généralement de jouer sur la translation du miroir M_2 et sur le matching du faisceau incident pour que le faisceau, après avoir parcouru près de 4 m dans la cavité, soit approximativement collimaté et circulaire.
9. A ce stade, on place une photodiode après une lentille, qui collecte la lumière transmise par le miroir M_4 . Puisque la longueur de la cavité n'a

aucune raison d'être précisément de la longueur du laser, les faisceaux, après des tours successifs dans la cavité, n'interféreront pas. Il faut cependant s'assurer qu'il n'y a pas de pertes significatives après de multiples réflexions. La transmission du coupleur d'entrée et les pertes internes de la cavité sont négligeables par rapport à la transmission T du coupleur de sortie. Il faut donc que l'intensité transmise après de multiples réflexions soit $1/T$ fois plus grande que celle obtenue en simple passage, c'est-à-dire celle obtenue en bloquant le faisceau lumineux au niveau du miroir M_5 . Il faut alors répéter les étapes précédentes jusqu'à ne plus avoir de pertes significatives dans la cavité.

10. Il faut maintenant ajuster précisément la longueur de la cavité, en translatant le miroir M_5 au moyen d'une vis micrométrique. On impose une rampe de tension périodique à l'actuateur piézoélectrique de ce miroir. On observe alors le signal de la photodiode sur un oscilloscope, déclenché par cette rampe. En utilisant la vis micrométrique, on translate alors lentement le miroir jusqu'à l'apparition d'un signal oscillant sur l'oscilloscope. Il n'est pas nécessaire de trop « zoomer » sur l'écran. En effet, si l'étape précédente a bien été appliquée, l'interférence sera nécessairement visible tout de suite. (Inversement, si elle n'a pas été bien appliquée, il est généralement très difficile d'aligner la cavité uniquement en maximisant la finesse des pics de cavité). Si l'on pousse le niveau de zoom trop loin en se plaçant en mode AC et sur une gamme de faible tension, on verra apparaître de nombreuses zones d'interférences, de faible finesse, correspondant soit à des interférences entre l'impulsion et ses répliques, soit à des interférences entre des rapports rationnels de tours de cavité (interférences entre les faisceaux après p et q réflexions). Ces interférences sont de visibilité très faible et ne peuvent pas être rendues très visibles en alignant la cavité.
11. Une fois que l'on observe des pics de cavité, il faut jouer sur tous les paramètres de la cavité pour optimiser leur finesse. D'une manière générale, il est souvent possible d'aligner ou de réaligner des cavités optiques en jouant uniquement sur leurs injections. En pratique, il est impossible d'aligner cette cavité en jouant uniquement sur l'injection de celle-ci, il est nécessaire de modifier les réglages de la cavité elle-même. Ceci est dû à la grande longueur des bras de cette cavité ainsi qu'au passage délicat par des trous dans les montures des miroirs.

12. Une fois que les pics de cavité sont approximativement optimisés, il est nécessaire de s'assurer qu'il n'y a pas d'effet de filtrage spatial dans la cavité. En effet, les modes transverses d'ordre supérieur étant plus étendus spatialement que le fondamental gaussien, si le faisceau s'approche trop d'un bord d'une des montures, ces modes subiront plus de pertes que le mode fondamental gaussien. La cavité deviendra alors artificiellement monomode spatiale, au prix de pertes intra-cavité importantes, ce qui n'est pas ce que nous recherchons. Cet effet est important et se produit assez naturellement quand on cherche à aligner la cavité en minimisant la transmission des modes spatiaux d'ordre supérieurs. Il est plus simple initialement de chercher uniquement à maximiser le pic correspondant au mode fondamental gaussien.
13. Une bonne façon de s'assurer de l'absence de filtrage spatial dans la cavité consiste à modifier légèrement les paramètres de la cavité un par un. En l'absence de filtrage spatial, certains modes fondamentaux vont voir leurs intensités transmises augmenter quand l'intensité du fondamental diminue. En présence de filtrage spatial, l'intensité transmise sur le mode fondamental peut diminuer en même temps que celle des autres. La finesse de la cavité donne aussi une indication directe de l'absence de pertes dans la cavité, il est cependant difficile d'effectuer cette mesure précisément.

A.3 Cristal non-linéaire

Une fois la cavité alignée pour être résonnante pour l'injection, le cristal non-linéaire peut être mis en place. Il est nécessaire de positionner ce cristal au waist du mode résonnant de la cavité, entre les deux miroirs concaves. Le cristal doit aussi être orienté pour que l'accord de phase soit réalisé. Comme le cristal est fin (500 μm), il est relativement simple d'obtenir un accord de phase approximatif et un doublement de fréquence. Ce signal doublé, une fois suffisamment intense pour être détectable par une photodiode, est utilisable pour optimiser la position et l'orientation du cristal. L'accord de phase étant relativement peu sensible en angle, on observe en conséquence que la position du cristal est beaucoup plus sensible que son orientation. Comme la rotation du cristal introduit aussi une translation de celui-ci, il est nécessaire de rattraper la position en utilisant les autres degrés de liberté. La monture est munie de trois vis, elle est conçue pour permettre des rotations pures en utilisant deux vis à la fois. En utilisant les trois

vis simultanément, il est aussi possible d'effectuer des translations pures.

A.4 Alignement de la pompe

La méthode la plus simple pour aligner la pompe consiste à tout d'abord observer de l'amplification paramétrique, sensible à la phase, à l'intérieur de la cavité. En optimisant spatialement et temporellement cette amplification/désamplification, on optimise la pompe. Voici les étapes pour aligner la pompe de l'OPO

A.4.1 Alignement spatial

1. On réalise un alignement approximatif de la pompe avec des lentilles.
2. On se sert du faisceau doublé à l'intérieur de la cavité comme d'une référence. En effet, la moitié du signal doublé dans la cavité ressort par le coupleur d'entrée de la pompe. Elle est donc dans le même mode spatial que la pompe de l'OPO au sens de propagation près. En utilisant une carte en papier, on peut donc superposer les deux faisceaux, par transparence, en différents points et aligner la pompe.
3. On vérifie la polarisation du faisceau pompe, qui doit être la même que celle du faisceau doublé dans la cavité, et donc orthogonale à celle du faisceau injecté, le cristal étant de type II.

A.4.2 Synchronisation de la pompe

La pompe étant maintenant approximativement dans le bon mode spatial, il faut maintenant synchroniser en temps la pompe et l'injection. On observe donc le faisceau bleu transmis par le miroir M_2 , qui est une superposition de la pompe et du doublement de l'injection. Quand la pompe et l'injection sont synchronisées, on doit observer des interférences entre les deux faisceaux bleus. On utilisera cette propriété pour synchroniser la pompe.

1. On asservit la cavité sur l'injection. L'asservissement n'a pas besoin d'être très précis mais il doit être suffisamment robuste pouvoir tenir longtemps sans décrocher.

2. On utilise une caméra CMOS pour collecter les deux faisceaux, qui doivent être recouverts spatialement si l'alignement précédent a été bien fait.
3. On ajuste les intensités de la pompe et de l'injection afin que les deux faisceaux bleus détectés par la caméra soient de mêmes intensités et neaturent pas celle-ci, afin de maximiser la visibilité des interférences.
4. On désaligne très légèrement la pompe pour se placer volontairement en configuration « coin d'air ». En effet, si l'alignement spatial est parfait, les interférences en teinte plate seront plus difficiles à observer. Des franges parallèles sont beaucoup plus simples à observer sur l'écran.
5. Tout en observant l'écran en permanence, on translate la ligne à retard de la pompe, par pas de $10\text{ }\mu\text{m}$ environ, jusqu'à observer des interférences sur l'écran. Il est très important de vérifier que la phase relative entre l'injection et la pompe n'est pas balayée par un actuateur piézoélectrique.
6. On optimise alors à la fois les miroirs de matching et la ligne à retard, jusqu'à obtenir une teinte plate et des interférences bien visibles.

A.5 Amplification sensible à la phase et seuil de l'OPO

La pompe étant maintenant correctement alignée et synchronisée, il suffit d'augmenter l'intensité de celle-ci pour observer un phénomène d'amplification sensible à la phase de l'injection.

1. La cavité étant toujours asservie sur l'injection, on applique une tension en triangle périodique sur un actuateur piézoélectrique situé sur le chemin de la pompe, afin de faire varier la phase relative entre la pompe et l'injection.
2. En déclenchant l'oscilloscope sur ce signal de modulation, on observe le signal (rouge) transmis par la cavité. En augmentant doucement l'intensité de la pompe, on doit observer une amplification sensible à la phase.
3. On optimise alors très soigneusement ce signal.
4. On balaie maintenant la longueur de la cavité et on coupe complètement le signal d'injection dans la cavité.

5. Si l'on augmente l'intensité de l'injection, on doit observer la production d'un signal subharmonique, qui se matérialise par des pics de cavité. Ceci signifie que l'OPO est passé en régime « au-dessus du seuil ». On prendra bien soin de ne pas endommager les photodiodes en les exposant à des signaux trop lumineux.
6. On mesure alors le seuil de l'OPO, c'est-à-dire l'intensité minimale de la pompe pour obtenir un signal lumineux infrarouge.

B Caractéristiques du mode résonnant

Sommaire

B.1	Waist au niveau du cristal	249
B.1.1	Cas sans astigmatisme	249
B.1.2	En tenant compte de l'astigmatisme	252
B.2	Waist au niveau du coupleur de sortie	253
B.3	Conclusion	254

Cette annexe a pour but de détailler les calculs des paramètres du mode gaussien résonnant dans la cavité en fonction des distances entre les miroirs. Ces résultats sont essentiels pour l'alignement de la cavité.

B.1 Waist au niveau du cristal

B.1.1 Cas sans astigmatisme

Calculons tout d'abord la taille du waist du faisceau résonnant dans la cavité en fonction des paramètres des éléments optiques. On négligera dans un premier temps les effets d'astigmatisme à l'intérieur de la cavité. L'expression de la matrice optique de cette cavité quand le faisceau se propage sur un tour est particulièrement lourde. En utilisant les symétries de la cavité, on peut toutefois, établir que le waist de cette cavité est équivalent à celui d'une autre cavité miroir-plan-miroir concave-miroir plan. Cette cavité réduite est représentée, dépliée, sur la figure B.1.1.

On appelle L ($\simeq 5$ cm) la distance entre le cristal et le miroir concave et R le rayon de courbure de ce miroir. On appelle S ($\simeq 1$ m) la longueur totale de cette cavité réduite, qui est fixée par le taux de répétition du laser. Pour que cette cavité soit résonnante, il suffit d'avoir des waists, appelés w_0 et w_1 aux deux extrémités de cette cavités. On appelle q_0 et q_1 les rayons complexes aux deux extrémités.

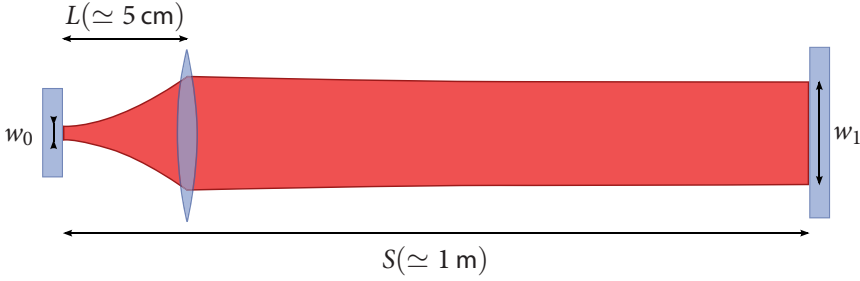


Fig. B.1.1 : Cavit  quivalente de la cavit  OPO. Le miroir de 100 mm de rayon de courbure est remplac  par une lentille équivalente de 50 mm de distance focale.

Au niveau du cristal, le rayon complexe q_0 s'écrit sous la forme

$$q_0 = i\pi \frac{w_0^2}{\lambda} \quad B.1.1$$

La matrice optique de propagation entre les deux waists s'écrit

$$M_{\text{r  d}} = \begin{pmatrix} 1 & S-L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B.1.2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2\frac{(S-L)}{R} & (S-L) + \left(1 - 2\frac{(S-L)}{R}\right)L \\ -\frac{2}{R} & 1 - \frac{2L}{R} \end{pmatrix} \quad B.1.3$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad B.1.4$$

La relation entre q_0 et q_1 s'écrit sous la forme

$$q_1 = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D} \quad B.1.5$$

Le rayon de courbure complexe q_1 représente un waist si et seulement si il est imaginaire pur. Comme q_0 l'est nécessairement, cette condition est vérifiée si et seulement si

$$q_0^2 = \frac{BD}{AC} = \frac{(L - \frac{R}{2})((S-L)L - \frac{SR}{2})}{S-L - \frac{R}{2}} \quad B.1.6$$

On en déduit l'expression de w_0 en fonction de λ , L et R , S étant fixé :

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left(-\frac{(L - \frac{R}{2})(S - L)L - \frac{SR}{2}}{S - L - \frac{R}{2}} \right)^{1/4} \quad B.1.7$$

Le diamètre du waist w_0 n'est défini que sur un intervalle $[L_1, L_2]$ tel que

$$L \in [L_1, L_2] \equiv \left[\frac{R}{2}, \frac{S}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{R}{S}} \right) \right] \quad B.1.8$$

La cavité est instable en dehors de ce domaine de définition. La représentation graphique de $w_0(L)$ est tracée sur la figure B.1.2 .

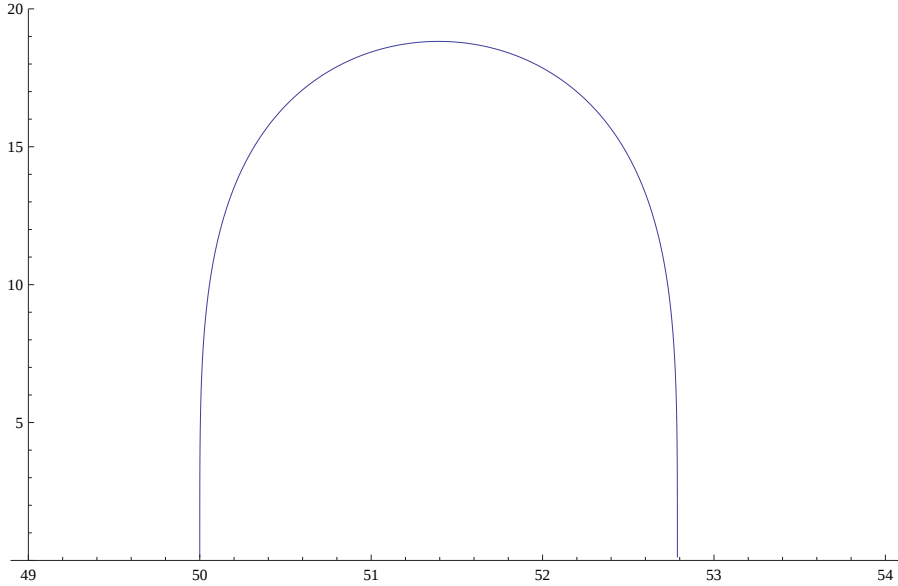


Fig. B.1.2 : Taille du waist au niveau du cristal en fonction de la distance entre le cristal et les miroirs concaves. L'abscisse est en mm, l'ordonnée en μm .

Un traitement numérique de la cavité complète peut permettre d'explicitier de façon plus exhaustive les domaines de stabilité de la cavité. Une cavité est stable si et seulement si la valeur absolue de sa trace est supérieure à 2 (cf. [Siegman 86], p. 601). On peut donc montrer numériquement qu'au voisinage de $L \simeq 5 \text{ cm}$, trois points sont à la limite de la stabilité. Il s'agit bien sûr des bornes L_1 et L_2 de l'intervalle précédent, ainsi que d'un point L_c très proche, à

$2\text{ }\mu\text{m}$ près environ, de la valeur correspondant au maximum de $w_0(L)$. Numériquement, les matrices de bouclage sur un tour de cavité (en partant du cristal) s'écrivent pour ces trois longueurs particulières

$$M_{L_1} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.4\text{ mm}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad M_{L_c} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_{L_2} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.4\text{ mm}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{B.1.9}$$

La cavité est donc semi-imageante pour $L = L_c$, elle est strictement équivalente à une cavité confocale. Les modes gaussiens résonnants dans la cavité sont donc dégénérés, en effet tous les modes pairs (resp. impairs) accumulent la même phase de Gouy sur un tour. Pour des longueurs $L = L_1$ ou $L = L_2$, la cavité n'a plus de mode propre gaussien, en effet $w_0(L_1) = w_0(L_2) = 0$. Une telle cavité est également très sensible aux aberrations et à l'alignement de la cavité. Pour toutes ces raisons, nous éviterons dans un premier temps de nous placer trop près de ces points de fonctionnement. Il pourrait cependant être intéressant de se placer en configuration semi-imageante dans le futur.

B.1.2 En tenant compte de l'astigmatisme

Les miroirs courbes de la cavité sont légèrement inclinés dans le plan horizontal, il est indispensable de prendre en compte cet effet qui induit de l'astigmatisme dans la cavité. Un miroir de rayon de courbure R , incliné d'un angle θ est en effet équivalent à un miroir elliptique, de rayons de courbures horizontaux et verticaux $R/\cos\theta$ et R respectivement. Il faut donc considérer la résonance d'un waist horizontal et d'un waist vertical. S'il existe un mode résonnant dans la cavité, il sera elliptique dans le cas général. Prenant cet effet en compte, il est possible de tracer les tailles des waists au niveau du cristal en fonction de l'angle d'inclinaison des miroirs. Ces courbes sont représentées sur la figure B.1.3.

Pour un angle $\theta \gtrsim 19$, la cavité ne peut plus être stable selon les deux directions spatiales simultanément. Il n'y a dans ce cas plus de mode gaussien résonnant dans la cavité. En pratique, l'angle est mesuré égal à 8.5° . Le waist est approximativement circulaire, de valeur $17\text{ }\mu\text{m}$.

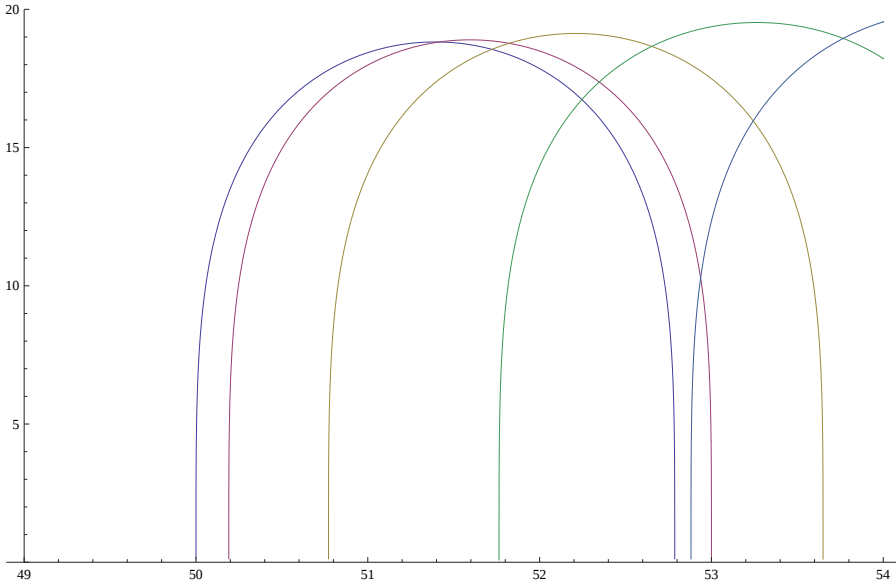


Fig. B.1.3 : Tailles du waist au niveau du cristal en fonction de la distance entre le cristal et ces miroirs, tracés pour différentes inclinaisons (0, 5, 10, 15, 19) de ces miroirs. L'abscisse est en mm, l'ordonnée en μm .

B.2 Waist au niveau du coupleur de sortie

On se place de nouveau dans l'étude de la cavité réduite. L'équation B.1.5 permet de déduire l'expression de q_1 en fonction de q_0 . En tenant compte du fait que q_1 et q_0 sont imaginaires purs, on peut écrire :

$$q_1 = \frac{(AD - BC)q_0}{-C^2q_0^2 + D^2} \quad B.2.1$$

Le waist au niveau du miroir de couplage peut donc s'écrire

$$w_1(L) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2 \lambda^2}{\pi^2 w_0^2(L) + \left(L - \frac{R}{2}\right)^2 \lambda^2}} w_0(L) \quad B.2.2$$

et donc

$$w_1(L) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left(\frac{\left(L + \frac{R}{2} - S\right) \left((S - L)L - \frac{RS}{2}\right)}{\left(L - \frac{R}{2}\right)} \right)^{1/4} \quad B.2.3$$

La taille du waist au niveau du coupleur de sortie est représenté sur la figure B.2.1. Dans notre configuration, le faisceau est approximativement circulaire, de waist 0.5 mm.

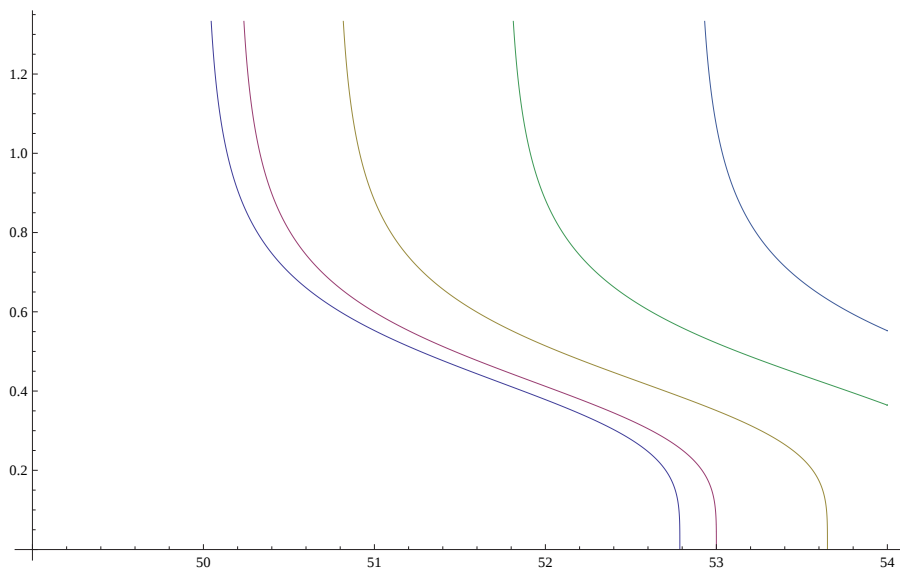


Fig. B.2.1 : Tailles du waist au niveau du coupleur de sortie, représentées pour différentes inclinaisons des miroirs concaves (0, 5, 10, 15, 19). L'abscisse et l'ordonnée sont en mm.

B.3 Conclusion

En conclusion, nous avons montré que, sous réserve que les angles à l'intérieur de la cavité ne soient pas trop importants, il peut exister un mode résonnant dans la cavité pour une certaine plage de distance entre les deux miroirs courbes de part et d'autre du cristal. Si un tel mode résonnant existe, la taille de son waist au niveau du cristal, ainsi que son astigmatisme, dépendent fortement de cette distance. Il faudra en pratique régler cette distance à mieux que 0.1 mm près.

Bibliographie

- [Allan 66] D. W. Allan. *Statistics of atomic frequency standards*. Proceedings of the IEEE, vol. 54, no. 2, pages 221 – 230, 1966. Cité p. [62](#)
- [Aufmuth 05] P. Aufmuth & K. Danzmann. *Gravitational wave detectors*. New Journal of Physics, vol. 7, page 202, 2005. Cité p. [61](#)
- [Bachor 04] H. A. Bachor & T. C. Ralph. A guide to experiments in quantum optics. Wiley Online Library, 2004. Cité p. [36](#)
- [Banerjee 06] D. Banerjee. PLL performance, simulation and design. Dog Ear Publishing, 2006. Cité p. [216](#)
- [Benoît 98] R. Benoît. *Application des phénomènes d'interférence à des déterminations métrologiques*. J. Phys. Theor. Appl., vol. 7, no. 1, pages 57–68, 1898. Cité p. [91](#)
- [Boon-Engering 97] J. M. Boon-Engering, W. E. van der Veer, E. A. J. M. Bente & W. Hogervorst. *Stabilization of an optical cavity containing a birefringent element*. Opt. Commun., vol. 140Volume 140, Issues 4-6, pages 285–288, 1997. Cité p. [197](#)
- [Braunstein 05] S. L. Braunstein. *Squeezing as an irreducible resource*. Phys. Rev. A, vol. 71, page 055801, 2005. Cité p. [62](#)
- [Bravais 51] M. A. Bravais. *Description d'un nouveau polariscope, et recherche sur des doubles réfractions peu énergétiques*. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, vol. 32, page 115, 1851. Cité p. [116](#)

- [Burneika 72] K. Burneika, M. Ignatavicius, V. Kabelka, A. Piskarskas & A. Stabinis. *Parametric light amplification and oscillation in KDP with mode-locked pump*. Quantum Electronics, IEEE Journal of, vol. vol.8, no.6, pages 574–574, 1972. Cité p. [163](#)
- [Cash 00] W. Cash, A. Shipley, S. Osterman & M. Joy. *Laboratory detection of X-ray fringes with a grazing-incidence interferometer*. Nature, vol. 407, pages 160–162, 2000. Cité p. [96](#)
- [Caves 80] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg & M. Zimmermann. *On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. Issues of principle*. Reviews of Modern Physics, vol. 52, no. 2, pages 341–392, 1980. Cité p. [17](#), [59](#)
- [Caves 81] C. M. Caves. *Quantum-mechanical noise in an interferometer*. Phys. Rev. D, vol. 23, no. 8, pages 1693–1708, Apr 1981. Cité p. [36](#), [46](#), [59](#)
- [Chalopin 09] B. Chalopin. *Optique quantique multimode : des images aux impulsions*. PhD thesis, 2009. Cité p. [157](#), [163](#), [167](#)
- [Chapront 02] J. Chapront, M. Chapront-Touzé & G. Francou. *A new determination of lunar orbital parameters, precession constant and tidal acceleration from LLR measurements*. Astronomy and Astrophysics, vol. 387, no. 2, pages 700–709, 2002. Cité p. [92](#)
- [Chekhovsky 98] A. M. Chekhovsky, A. N. Golubev & M. V. Gorbunov. *Optical Pulse Distance-Multiplying Interferometry*. Appl. Opt., vol. 37, no. 16, pages 3480–3483, 1998. Cité p. [92](#)
- [Chiche 09] R. Chiche, D. Jehanno, V. Soskov, A. Variola, F. Zomer & N. Picqué. *Les Cavités Fabry-Perot en mode pulsé et leurs récentes applications*. 2009. Cité p. [133](#)

- [Coddington 09] I. Coddington, W. C. Swann, L. Nenadovic & N. R. Newbury. *Rapid and precise absolute distance measurements at long range*. Nature Photonics, vol. 3, no. 6, pages 351–356, 2009. Cité p. [16](#), [94](#)
- [Coh 93] Coherent Laser Group. *Operator's Manual The Coherent Mira Model 900-B Laser*, 1993. Cité p. [175](#)
- [Coh 05] Coherent Laser Group. *Operator's Manual Verdi V-18 Diode-Pumped Lasers*, 2005. Cité p. [174](#)
- [Cohen-Tannoudji 97] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & G. Grynberg. *Photons and Atoms-Introduction to Quantum Electrodynamics*. 1997. Cité p. [26](#)
- [Crowell 65] M. Crowell. *Characteristics of mode-coupled lasers*. IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 1, no. 1, pages 12–20, 1965. Cité p. [126](#)
- [Cui 08] M. Cui, R. N. Schouten, N. Bhattacharya & S. A. Berg. *Experimental demonstration of distance measurement with a femtosecond frequency comb laser*. J. Europ. Opt. Soc. Rap. Public., vol. Vol 3, no. 08003, pages –, 2008. Cité p. [93](#)
- [Dändliker 88] R. Dändliker, R. Thalmann & D. Prongué. *Two-wavelength laser interferometry using superheterodyne detection*. Opt. Lett., vol. 13, no. 5, pages 339–341, 1988. Cité p. [91](#)
- [de Valcarcel 06] G. J. de Valcarcel, G. Patera, N. Treps & C. Fabre. *Multimode squeezing of frequency combs*. Physical Review A, vol. 74, no. 6, page 61801, 2006. Cité p. [18](#), [163](#), [165](#)
- [DiDomenico Jr 64] M. DiDomenico Jr. *Small-Signal Analysis of Internal (Coupling-Type) Modulation of Lasers*. Journal of Applied Physics, vol. 35, page 2870, 1964. Cité p. [126](#)
- [Dodge 84] M. J. Dodge. *Refractive properties of magnesium fluoride*. Appl. Opt., vol. 23, no. 12, pages 1980–1985, 1984. Cité p. [122](#)

- [Doneus 08] M. Doneus, C. Brieze, M. Fera & M. Janner. *Archaeological prospection of forested areas using full-waveform airborne laser scanning*. Journal of Archaeological Science, vol. 35, no. 4, pages 882–893, 2008. Cité p. [95](#)
- [Drever 83] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley & H. Ward. *Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator*. Appl. Phys. B : Lasers Opt., vol. Volume 31, Number 2, pages 97–105, 1983. Cité p. [198](#)
- [Du 01] C. Du, Z. Wang, J. Liu, X. Xu, B. Teng, K. Fu, J. Wang, Y. Liu & Z. Shao. *Efficient intracavity second-harmonic generation at 1.06 micron in a BiB3O6 (BIBO) crystal*. Applied Physics B : Lasers and Optics, vol. Volume 73, Issue 3, pages 215–217, 2001. Cité p. [190](#)
- [Duan 00] L. M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac & P. Zoller. *Inseparability criterion for continuous variable systems*. Physical Review Letters, vol. 84, no. 12, pages 2722–2725, 2000. Cité p. [32](#)
- [Dudley 06] J. M. Dudley, G. Genty & S. Coen. *Supercontinuum generation in photonic crystal fiber*. Rev. Mod. Phys., vol. 78, no. 4, pages 1135–1184, Oct 2006. Cité p. [218](#)
- [Edelstein 89] D. C. Edelstein, E. S. Wachman & C. L. Tang. *Broadly tunable high repetition rate femtosecond optical parametric oscillator*. Appl. Phys. Lett., vol. 54, page 1728, 1989. Cité p. [18](#), [163](#)
- [Estler 02] W. T. Estler, K. L. Edmundson, G. N. Peggs & D. H. Parker. *Large-scale metrology - An update*. CIRP Annals-Manufacturing Technology, vol. 51, no. 2, pages 587–609, 2002. Cité p. [90](#), [92](#)
- [Fab 08] Quantum optics, from one mode to many modes, 2008. Cité p. [29](#)

- [Fabre 95] C. Fabre. *Quantum fluctuations in light beams*. In *Fluctuations Quantiques/Quantum Fluctuations*, volume 1, page 181, 1995. Cité p. [161](#)
- [Fercher 85] A. F. Fercher, H. Z. Hu & U. Vry. *Rough surface interferometry with a two-wavelength heterodyne speckle interferometer*. *Appl. Opt.*, vol. 24, no. 14, pages 2181–2188, 1985. Cité p. [91](#)
- [Fiocco 63] G. Fiocco & L. D. Smullin. *Detection of scattering layers in the upper atmosphere (60-140 km) by optical radar*. *Nature*, vol. 199, pages 1275–1276, 1963. Cité p. [92](#)
- [Flamant 05] P. H. Flamant. *Atmospheric and meteorological Lidar : from pioneers to space applications*. *Comptes Rendus Physique*, vol. 6, no. 8, pages 864–875, 2005. Cité p. [92](#)
- [Fork 84] R. L. Fork, O. E. Martinez & J.P. Gordon. *Negative dispersion using pairs of prisms*. *Opt. Lett.*, vol. 9, pages 150–, 1984. Cité p. [187](#)
- [Froehly 83] C. Froehly, B. Colombeau & M. Vampouille. *Shaping and Analysis of Picosecond Light Pulses*. *Progress in Optics*, vol. 20, pages 63–153, 1983. Cité p. [115](#)
- [Gao 98] J. Gao, F. Cui, C. Xue, C. Xie & P. Kunchi. *Generation and application of twin beams from an optical parametric oscillator including an α -cut KTP crystal*. *Optics letters*, vol. 23, no. 11, pages 870–872, 1998. Cité p. [48](#)
- [Gherman 02] T. Gherman & D. Romanini. *Modelocked Cavity-Enhanced Absorption Spectroscopy*. *Opt. Express*, vol. 10, no. 19, pages 1033–1042, 2002. Cité p. [133](#)
- [Ghosh 99] G. Ghosh. *Dispersion-equation coefficients for the refractive index and birefringence of calcite and quartz crystals*. *Optics Communications*, vol. 163, no. 1-3, pages 95 – 102, 1999. Cité p. [122](#)

- [Ghotbi 06] M. Ghotbi, A. Esteban-Martin & M. Ebrahim-Zadeh. *BiB3O6 femtosecond optical parametric oscillator*. Opt. Lett., vol. 31, pages 3128–3130, 2006. Cité p. [190](#)
- [Ghotbi 08] M. Ghotbi, A. Esteban-Martin & M. Ebrahim-Zadeh. *Tunable, high-repetition-rate, femtosecond pulse generation in the ultraviolet*. Opt. Lett., vol. 33, pages 345–347, 2008. Cité p. [190](#)
- [Giovannetti 01] V. Giovannetti, S. Lloyd & L. Maccone. *Quantum-enhanced positioning and clock synchronization*. Nature, vol. 412, no. 6845, pages 417–419, 2001. Cité p. [17](#), [47](#)
- [Glauber 63] Roy J. Glauber. *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*. Phys. Rev., vol. 131, no. 6, pages 2766–2788, Sep 1963. Cité p. [31](#), [46](#)
- [Gorbe 09] M. Gorbe, C. Grebing, G. Steinmeyer & K. Osvey. *A linear optical method for measuring the carrier-envelope phase drift*. Applied Physics B : Lasers and Optics, vol. 95, no. 2, pages 273–280, 2009. Cité p. [218](#)
- [Grangier 87] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yurke & A. LaPorta. *Squeezed-light-enhanced polarization interferometer*. Phys. Rev. Lett., vol. 59, no. 19, pages 2153–2156, Nov 1987. Cité p. [17](#), [46](#)
- [Grynberg 10] G. Grynberg, A. Aspect & C. Fabre. *Introduction to Quantum Optics : From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. Cambridge Univ Pr, 2010. Cité p. [26](#)
- [Hänsch 80] T. W. Hänsch & B. Couillaud. *Laser frequency stabilization by polarization spectroscopy of a reflecting reference cavity*. Opt. Commun., vol. Volume 35, Issue 3, pages 441–444, 1980. Cité p. [195](#), [196](#)
- [Harry 10] G. M. Harry & others (VIRGO collaboration). *Advanced LIGO : the next generation of gravitational wave de-*

- tectors*. Classical and Quantum Gravity, vol. 27, page 084006, 2010. Cité p. [16](#), [36](#), [62](#)
- [Haus 76] H. A. Haus. *Parameter Ranges for CW Passive Mode Locking*. IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 12, no. 3, 1976. Cité p. [179](#)
- [Hellwig 98] H. Hellwig, J. Liebertz & L. Bohaty. *Exceptional large nonlinear optical coefficients in the monoclinic bismuth borate BiB3O6 (BIBO)*. Solid State Commun., vol. Volume 109, Issue 4, pages 249–251, 1998. Cité p. [189](#)
- [Helstrom 69] C. W. Helstrom. *Quantum detection and estimation theory*. Journal of Statistical Physics, vol. 1, no. 2, pages 231–252, 1969. Cité p. [57](#)
- [Holzwarth 00] R. Holzwarth, T. Udem, T. W. Hänsch, J. C. Knight, W. J. Wadsworth & P. S. J. Russell. *Optical frequency synthesizer for precision spectroscopy*. Physical Review Letters, vol. 85, no. 11, pages 2264–2267, 2000. Cité p. [126](#), [217](#)
- [Hönninger 99] C. Hönninger, R. Paschotta, F. Morier-Genoud, M. Moser & U. Keller. *Q-switching stability limits of continuous-wave passive mode locking*. Journal of the Optical Society of America B, vol. 16, no. 1, pages 46–56, 1999. Cité p. [179](#)
- [Jackson 99] J. D. Jackson. Classical electrodynamics third edition. John Wiley & Sons, 1999. Cité p. [97](#)
- [Jones 00a] D. J. Jones, S. A. Diddams, J. K. Ranka, A. Stentz, R. S. Windeler, J. L. Hall & S. T. Cundiff. *Carrier-envelope phase control of femtosecond mode-locked lasers and direct optical frequency synthesis*. Science, vol. 288, no. 5466, page 635, 2000. Cité p. [126](#)
- [Jones 00b] J. R. Jones, J. C. Diels, J. Jasapara & W. Rudolph. *Stabilization of the frequency, phase, and repetition rate of*

- an ultra-short pulse train to a Fabry-Perot reference cavity*. Optics Communications, vol. 175, no. 4-6, pages 409–418, 2000. Cité p. [133](#)
- [Jones 04] R. J. Jones & J. Ye. *High-repetition-rate coherent femtosecond pulse amplification with an external passive optical cavity*. Optics letters, vol. 29, no. 23, pages 2812–2814, 2004. Cité p. [149](#)
- [Juhasz 99] T. Juhasz, F.H. Loesel, R.M. Kurtz, C. Horvath, J.F. Bille & G. Mourou. *Corneal refractive surgery with femtosecond lasers*. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, vol. 5, no. 4, pages 902–910, 1999. Cité p. [126](#)
- [Kastler 74] A. Kastler. *Transmission of light pulse through a Fabry-Perot interferometer*. Nouvelle Revue d'Optique, vol. 5, page 133, 1974. Cité p. [133](#)
- [Kim 07] J. Kim, J. Chen, Z. Zhang, F. N. C. Wong, F. X. Kärtner, F. Loehl & H. Schlarb. *Long-term femtosecond timing link stabilization using a single-crystal balanced cross correlator*. Opt. Lett., vol. 32, no. 9, pages 1044–1046, 2007. Cité p. [94](#)
- [Lawson 05] P. R. Lawson & J. A. Dooley. *Technology plan for the terrestrial planet finder interferometer*. JPL Publication, 2005. Cité p. [17](#), [96](#)
- [Lay 03] O. P. Lay, S. Dubovitsky, R. D. Peters, J. P. Burger, S. W. Ahn, W. H. Steier, H. R. Fetterman & Y. Chang. *MSTAR : a submicrometer absolute metrology system*. Optics letters, vol. 28, no. 11, pages 890–892, 2003. Cité p. [91](#)
- [Lee 10] J. Lee, Y. Kim, K. Lee, S. Lee & S.-W. Kim. *Time-of-flight measurement with femtosecond light pulses*. Nature Photonics, vol. 4, pages 716–720, 2010. Cité p. [16](#), [35](#), [94](#)

- [Lenzner 98] M. Lenzner, J. Krüger, S. Sartania, Z. Cheng, C. Spielmann, G. Mourou, W. Kautek & F. Krausz. *Femtosecond optical breakdown in dielectrics*. Physical Review Letters, vol. 80, no. 18, pages 4076–4079, 1998. Cité p. [186](#)
- [Levin 62] E. M. Levin & C. L. McDaniel. *The System Bi₂O₃-B₂O₃*. Journal of the American Ceramic Society, vol. 45, no. 8, pages 355–360, 1962. Cité p. [189](#)
- [Low 95] T. S. Low & W. Guo. *Modeling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis*. Microelectromechanical Systems, Journal of, vol. 4, no. 4, pages 230–237, 1995. Cité p. [201](#)
- [Mak 92] G. Mak, Q. Fu & H. M. van Driel. *Externally pumped high repetition rate femtosecond infrared optical parametric oscillator*. Appl. Phys. Lett., vol. 60, page 542, 1992. Cité p. [163](#)
- [Mancini 02] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali & P. Tombesi. *Entangling macroscopic oscillators exploiting radiation pressure*. Physical review letters, vol. 88, no. 12, page 120401, 2002. Cité p. [32](#)
- [Marin 97] F. Marin, A. Bramati, V. Jost & E. Giacobino. *Demonstration of high sensitivity spectroscopy with squeezed semiconductor lasers*. Optics Communications, vol. 140, no. 1-3, pages 146–157, 1997. Cité p. [48](#)
- [Mehmet 10] M. Mehmet, H. Vahlbruch, N. Lastzka, K. Danzmann & R. Schnabel. *Observation of squeezed states with strong photon-number oscillations*. Phys. Rev. A, vol. 81, no. 1, page 013814, Jan 2010. Cité p. [18](#), [62](#)
- [Michelson 94] A. A. Michelson. *Les méthodes interférentielles en métrologie et l'établissement d'une longueur d'onde comme unité absolue de longueur*. Journal de Physique Théorique et Appliquée, vol. 3, no. 1, pages 5–22, 1894. Cité p. [90](#)

- [Milyukov 10] V. Milyukov, A. Kopaev, V. Zharov, A. Mironov, A. Myasnikov, M. Kaufman & D. Duev. *Monitoring crustal deformations in the Northern Caucasus using a high precision long base laser strainmeter and the GPS/GLONASS network*. Journal of Geodynamics, vol. 49, no. 3-4, pages 216–223, 2010. Cité p. [95](#)
- [Minoshima 00] K. Minoshima & H. Matsumoto. *High-Accuracy Measurement of 240-m Distance in an Optical Tunnel by use of a Compact Femtosecond Laser*. Appl. Opt., vol. 39, no. 30, pages 5512–5517, 2000. Cité p. [93](#)
- [Monmayrant 10] A. Monmayrant, S. Weber & B. Chatel. *A newcomer's guide to ultrashort pulse shaping and characterization*. Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics, vol. 43, page 103001, 2010. Cité p. [114](#)
- [Müller 07] D. Müller, A. Ansmann, I. Mattis, M. Tesche, U. Wandinger, D. Althausen & G. Pisani. *Aerosol-type-dependent lidar ratios observed with Raman lidar*. Journal of Geophysical Research, vol. 112, no. D16, 2007. Cité p. [35](#)
- [Murphy 08] T. W. Murphy, E. G. Adelberger, J. Battat, L. N. Carey, C. D. Hoyle, P. LeBlanc, E. L. Michelsen, K. Nordtvedt, A. E. Orin, J. D. Strasburger *et al.* *The Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation : Instrument Description and First Detections*. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 120 (863) : 20-37, vol. 120, no. PNNL-SA-56502, 2008. Cité p. [16](#), [92](#)
- [Nakamura 09] H. Nakamura, Y. Liu, T. E. Witt, R. J. Gordon & D. P. Edward. *Femtosecond laser photodisruption of primate trabecular meshwork : an ex vivo study*. Investigative ophthalmology & visual science, vol. 50, no. 3, page 1198, 2009. Cité p. [178](#)
- [Neumann 10] B. Neumann, T. Walter, J. K. Hériché, J. Bulkescher, H. Erfle, C. Conrad, P. Rogers, I. Poser, M. Held, U. Liebelet *et al.* *Phenotypic profiling of the human genome*

- by time-lapse microscopy reveals cell division genes.* Nature, vol. 464, no. 7289, pages 721–727, 2010. Cité p. [36](#)
- [Opatrný 02] T. Opatrný, N. Korolkova & G. Leuchs. *Mode structure and photon number correlations in squeezed quantum pulses.* Phys. Rev. A, vol. 66, no. 5, page 053813, Nov 2002. Cité p. [234](#)
- [Pastirk 06] I. Pastirk, X. Zhu, R. M. Martin & M. Dantus. *Remote characterization and dispersion compensation of amplified shaped femtosecond pulses using MIIPS.* Opt. Express, vol. 14, pages 8885–8889, 2006. Cité p. [149](#)
- [Patera 08] G. Patera. *Quantum properties of ultra-short pulses generated by SPOPOs : multi-mode squeezing and entanglement.* PhD thesis, UPMC - Paris VI, 2008. Cité p. [157](#), [163](#), [167](#)
- [Patera 09] G. Patera, N. Treps, C. Fabre & G. J. de Valcarcel. *Quantum theory of Synchronously Pumped type I Optical Parametric Oscillators : characterization of the squeezed supermodes.* The European Physical Journal D, vol. 56, no. 1, pages 123–140, 2009. Cité p. [18](#), [163](#)
- [Petersen 03] J. Petersen & A. Luiten. *Short pulses in optical resonators.* Opt. Express, vol. 11, no. 22, pages 2975–2981, 2003. Cité p. [133](#)
- [Popoff 10] S. Popoff, G. Lerosey, M. Fink, A.C. Boccara & S. Gigan. *Image transmission through an opaque material.* Nature Communications, vol. 1, no. 6, pages 1–5, 2010. Cité p. [36](#)
- [Rao 45] C. R. Rao. *Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters.* Bull. Calcutta Math. Soc., vol. 37, pages 81–91, 1945. Cité p. [42](#)
- [Réfrégier 02] Ph. Réfrégier. *Théorie du bruit et applications en physique.* Hermes Science, 2002. Cité p. [37](#)

- [Reid 88] M. D. Reid & P. D. Drummond. *Quantum correlations of phase in nondegenerate parametric oscillation*. Physical review letters, vol. 60, no. 26, pages 2731–2733, 1988. Cité p. [32](#)
- [Reynaud 92] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino & C. Fabre. *Quantum Fluctuations in Optical Systems*. Progress in Optics, vol. 30, pages 1–85, 1992. Cité p. [158](#)
- [Rosenbluh 91] M. Rosenbluh & R. M. Shelby. *Squeezed optical solitons*. Phys. Rev. Lett., vol. 66, no. 2, pages 153–156, Jan 1991. Cité p. [18](#)
- [Salvadé 08] Y. Salvadé, N. Schuhler, S. Lévêque & S. Le Floch. *High-accuracy absolute distance measurement using frequency comb referenced multiwavelength source*. Appl. Opt., vol. 47, no. 14, pages 2715–2720, 2008. Cité p. [94](#)
- [Shaddock 99] D. A. Shaddock, M. B. Gray & D. E. McClelland. *Frequency locking a laser to an optical cavity by use of spatial mode interference*. Opt. Lett., vol. 24, pages 1499–1501, 1999. Cité p. [195](#), [197](#)
- [Siegman 86] A.E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986. Cité p. [251](#)
- [Simon 00] R. Simon. *Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems*. Physical Review Letters, vol. 84, no. 12, pages 2726–2729, 2000. Cité p. [32](#)
- [Slusher 85] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz & J. F. Valley. *Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity*. Physical Review Letters, vol. 55, no. 22, pages 2409–2412, 1985. Cité p. [17](#), [46](#), [62](#)
- [Slusher 87] R. E. Slusher, P. Grangier, A. LaPorta, B. Yurke & M. J. Potasek. *Pulsed Squeezed Light*. Phys. Rev. Lett., vol. 59, no. 22, pages 2566–2569, Nov 1987. Cité p. [18](#)

- [Smith 70] P. W. Smith. *Mode-locking of lasers*. Proceedings of the IEEE, vol. 58, no. 9, pages 1342 – 1357, sep. 1970. Cité p. [126](#)
- [Smith 09] D. T. Smith, J. R. Pratt & L. P. Howard. *A fiber-optic interferometer with subpicometer resolution for dc and low-frequency displacement measurement*. Review of Scientific Instruments, vol. 80, page 035105, 2009. Cité p. [91](#), [109](#)
- [Smullin 62] L. D. Smullin & G. Fiocco. *Optical echoes from the Moon*. vol. 194, page 1267, 1962. Cité p. [92](#)
- [Souto-Ribeiro 97] P. H. S. Souto-Ribeiro, C. Schwob, A. Maître & C. Fabre. *Sub-shot-noise high-sensitivity spectroscopy with optical parametric oscillator twin beams*. Optics letters, vol. 22, no. 24, pages 1893–1895, 1997. Cité p. [48](#)
- [Spälter 97] S. Spälter, M. Burk, U. Strössner, M. Böhm, A. Sizmann & G. Leuchs. *Photon number squeezing of spectrally filtered sub-picosecond optical solitons*. EPL (Europhysics Letters), vol. 38, page 335, 1997. Cité p. [234](#)
- [Spence 91] D. E. Spence, P. N. Kean & W. Sibbett. *60-fsec pulse generation from a self-mode-locked Ti : sapphire laser*. Optics Letters, vol. 16, no. 1, pages 42–44, 1991. Cité p. [16](#), [126](#)
- [Takeno 07] Y. Takeno, M. Yukawa, H. Yonezawa & A. Furusawa. *Observation of -9 dB quadrature squeezing with improvement of phase stability in homodyne measurement*. Opt. Express, vol. 15, pages 4321–4327, 2007. Cité p. [172](#)
- [Tanaka 78] Y. Tanaka, T. Kushida & S. Shionoya. *Broadly tunable, repetitive, picosecond parametric oscillator*. Optics Communications, vol. 25, no. 2, pages 273–276, 1978. Cité p. [163](#)

- [Tay 09] J. W. Tay, M. A. Taylor & W. P. Bowen. *Sagnac-interferometer-based characterization of spatial light modulators*. *Applied optics*, vol. 48, no. 12, pages 2236–2242, 2009. Cité p. [115](#)
- [Thomas 02] R. J. Thomas, G. D. Noojin, D. J. Stolarski, R. T. Hall, C. P. Cain, C. A. Toth & B. A. Rockwell. *A comparative study of retinal effects from continuous wave and femtosecond mode-locked lasers*. *Lasers in surgery and medicine*, vol. 31, no. 1, pages 9–17, 2002. Cité p. [178](#)
- [Thorpe 08] M. J. Thorpe, D. Balslev-Clausen, M. S. Kirchner & J. Ye. *Cavity-enhanced optical frequency comb spectroscopy : application to human breath analysis*. *Opt. Express*, vol. 16, pages 2387–2397, 2008. Cité p. [35](#)
- [Tilford 77] Charles R. Tilford. *Analytical procedure for determining lengths from fractional fringes*. *Appl. Opt.*, vol. 16, no. 7, pages 1857–1860, 1977. Cité p. [91](#)
- [Treps 01] N. Treps & C. Fabre. *Effets quantiques dans les images optiques - Quantum effects in optical images*. PhD thesis, Université de Paris 06, 2001. Cité p. [27](#)
- [Treps 03] N. Treps, N. Grosse, W. P. Bowen, C. Fabre, H. A. Bachor & P. K. Lam. *A quantum laser pointer*. *Science*, vol. 301, no. 5635, page 940, 2003. Cité p. [36](#), [89](#), [109](#)
- [Turyshchev 09] S. G. Turyshchev, M. Shao, A. Girerd & B. Lane. *A search for new physics with the BEACON mission*. *International Journal of Modern Physics D*, vol. 18, no. 6, pages 1025–1038, 2009. Cité p. [96](#)
- [Union Européenne 03] Union Européenne. *Directive 2002/95/CE du Parlement européen et du Conseil du 27 janvier 2003 relative à la limitation de l'utilisation de certaines substances dangereuses dans les équipements électriques et électroniques*, 2003. Cité p. [175](#)
- [Wang 02] Z. Wang, B. Teng, K. Fu, X. Xu, R. Song, C. Du, H. Jiang, J. Wang, Y. Liu & Z. Shao. *Efficient second*

- harmonic generation of pulsed laser radiation in BiB3O6 (BIBO) crystal with different phase matching directions.* Opt. Commun., vol. Volume 202, Issues 1-3, pages 217–220, 2002. Cité p. [190](#)
- [Wasilewski 06] W. Wasilewski, A. I. Lvovsky, K. Banaszek & Czesław Radzewicz. *Pulsed squeezed light : Simultaneous squeezing of multiple modes.* Phys. Rev. A, vol. 73, page 063819, 2006. Cité p. [165](#)
- [White 00] N. White. *X-ray astronomy : Imaging black holes.* Nature, vol. 407, pages 146–147, 2000. Cité p. [96](#)
- [Wu 86] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall & H. Wu. *Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion.* Phys. Rev. Lett., vol. 57, no. 20, pages 2520–2523, Nov 1986. Cité p. [17](#), [46](#), [62](#)
- [Wyant 71] J. C. Wyant. *Testing Aspherics Using Two-Wavelength Holography.* Appl. Opt., vol. 10, no. 9, pages 2113–2118, 1971. Cité p. [91](#)
- [Xiao 87] M. Xiao, L. A. Wu & H. J. Kimble. *Precision measurement beyond the shot-noise limit.* Phys. Rev. Lett., vol. 59, no. 3, pages 278–281, Jul 1987. Cité p. [17](#), [46](#)
- [Ye 04] J. Ye. *Absolute measurement of a long, arbitrary distance to less than an optical fringe.* Opt. Lett., vol. 29, no. 10, pages 1153–1155, 2004. Cité p. [16](#), [93](#)
- [Ye 05] J. Ye. *Femtosecond optical frequency comb : Principle, operation, and applications.* Kluwer Academic / Springer, 2005. Cité p. [126](#), [179](#)

Résumé

Les lasers femtoseconde sont des sources de très haute précision pour la métrologie. La possibilité de produire des états comprimés dans ce régime pourrait conduire à une amélioration des mesures physiques. Dans une première partie, j'introduirai une limite de sensibilité pour l'estimation de paramètres portés par le champ électromagnétique, utilisant des ressources gaussiennes quelconques. Il peut être montré qu'un état comprimé monomode, sur un mode bien défini, est optimal d'un point de vue expérimental. Je présenterai alors un schéma simple et général, utilisant une détection homodyne, qui permet de mesurer de façon optimale des paramètres portés par le champ électromagnétique. Dans une seconde partie, je présenterai les résultats expérimentaux que nous avons obtenus en utilisant un oscillateur paramétrique optique femtoseconde pompé de façon synchrone. J'exposerai la production d'états comprimés en intensité dans ce régime ainsi que la preuve du caractère multimode de la lumière produite. Ceci constitue une étape majeure pour la production d'états multimodes sur mesure en régime femtoseconde.

Mots Clés

Optique quantique, métrologie, peignes de fréquence, mesure de temps, impulsions femtosecondes, fluctuations quantiques, oscillateur paramétrique optique.

Abstract

Femtosecond lasers are an incredible precision resource for metrology. The ability to produce squeezed states in this regime could then improve even more physical measurements. In a first part, I will present a precision limit for the estimation of parameters carried by the electromagnetic field, using general gaussian resources. It can be proven that a single-mode squeezer, on a well defined mode, is optimal from an experimental point of view. I will then exhibit a simple general scheme, based on homodyne detection, which allows to optimally measure parameters carried by the EM field. In the second part, I will present the experimental results we obtained using a femtosecond synchronously pumped optical parametric oscillator. I will demonstrate the production of intensity squeezing in that regime and the proof of the multimode aspect of the light produced. This is a crucial step in the production of tailored multimode squeezed states in the femtosecond regime.

Keywords

Quantum optics, metrology, frequency combs, time measurement, femtosecond pulses, quantum fluctuations, optical parametric oscillator.

