



**HAL**  
open science

## Matrices aléatoires et probabilités libres

Florent Benaych-Georges

► **To cite this version:**

Florent Benaych-Georges. Matrices aléatoires et probabilités libres. Probabilités [math.PR]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. tel-00655935

**HAL Id: tel-00655935**

**<https://theses.hal.science/tel-00655935>**

Submitted on 3 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Mathématiques

FLORENT BENAYCH-GEORGES

---

Matrices aléatoires et probabilités libres

---

Rapporteurs : Michel LEDOUX Université Paul Sabatier, Toulouse  
Roland SPEICHER Universität des Saarlandes  
Dan-Virgil VOICULESCU University of California, Berkeley

Soutenue le 9 décembre 2011 devant le jury composé de :

Philippe BIANE CNRS et Université de Marne la Vallée  
Philippe BOUGEROL Université Pierre et Marie Curie, Paris  
Michel LEDOUX Université Paul Sabatier, Toulouse  
Sandrine PÉCHÉ Université Denis Diderot, Paris  
Alain ROUAULT Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines  
Roland SPEICHER Universität des Saarlandes



## REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont tout d'abord à Michel Ledoux, Roland Speicher et Dan-Virgil Voiculescu, qui ont pris le temps et la peine de lire ces longues notes en détail. Michel Ledoux et Roland Speicher me font de surcroît l'honneur d'être aujourd'hui membres du jury et je les en remercie chaleureusement.

Philippe Biane a guidé mes premiers pas dans la recherche et continue à me faire l'amitié de ses conseils. Pour tout cela, et pour sa présence dans le jury, je lui témoigne aujourd'hui ma reconnaissance. Philippe Bougerol, Sandrine Péché et Alain Rouault sont depuis plusieurs années, chacun à sa façon, des exemples pour moi. Je les remercie vivement de me faire l'honneur et le plaisir de participer au jury.

J'ai eu un très grand plaisir à travailler avec mes collaborateurs, aux qualités et à la patience desquels je rends ici hommage. Merci à Serban Belinschi, Thierry Cabanal-Duvillard, François Chapon, Nathanaël Enriquez, Alice Guionnet, Thierry Lévy, Mylène Maïda, Ion Nechita et Raj Rao Nadakuditi. Je tiens de plus à exprimer à Alice Guionnet ma gratitude pour l'attention bienveillante et encourageante qu'elle m'a souvent portée ces dernières années. Par ailleurs, Djalil Chafaï et Thierry Lévy m'ont rendu plusieurs services pour la rédaction de ce texte, je les en remercie.

J'aimerais remercier tous mes collègues et amis du "Labo de Probas", ainsi que ceux du Département de Mathématiques Appliquées à l'École Polytechnique et de la communauté mathématique en général.

Enfin, merci à mes amis, à ma famille et à Chloé pour leur constant soutien.



*Pour Chloé.*



# Introduction

L'objet de ce mémoire est de présenter, synthétiquement, l'essentiel de mes travaux. Ceux-ci portent tous sur les matrices aléatoires ou les probabilités libres, à l'exception d'un article consacré aux cycles de permutations aléatoires. Je les ai regroupés et répartis dans sept chapitres, auxquels s'ajoutent un chapitre dans lequel je présente divers projets de recherche, ainsi qu'une introduction succincte aux probabilités libres, en annexe. De plus, tout au long du texte, des précis sur divers sujets sont présentés sous forme d'encarts, afin que le lecteur puisse aisément se référer à ceux dont il a l'usage, et puisse tout aussi aisément ne pas lire ceux dont il sait connaître de contenu.

Le premier chapitre porte sur la construction, que j'ai faite dans ma thèse, de la convolution libre rectangulaire  $\boxplus_c$ , ainsi que sur les résultats que j'ai obtenus depuis sur ce sujet [A5, A8, A10, A16]. Ce travail s'inscrivait au départ dans un contexte plus général, celui des *distributions non commutatives jointes* de familles de matrices aléatoires rectangulaires. J'ai en effet démontré que la *liberté avec amalgamation* sur une certaine sous-algèbre permet de modéliser le comportement asymptotique de matrices aléatoires rectangulaires, une fois que celles-ci ont été plongées dans des matrices carrées plus grandes. Cependant, à l'issue de ma thèse, je n'ai pas développé ce point de vue beaucoup plus loin, me concentrant sur l'étude, assez riche et plus concrète, de la convolution libre rectangulaire. Par ailleurs, les énoncés de liberté asymptotique, notamment dans le contexte des matrices rectangulaires, sont assez lourds à formuler et peuvent sembler quelque peu arides au lecteur qui n'en connaîtrait pas les applications pratiques. Pour ces raisons, j'ai choisi de construire ce chapitre autour de la convolution libre rectangulaire, et d'aborder la liberté avec amalgamation seulement au dernier paragraphe, dont découle pourtant l'existence de cette convolution. Pour les mêmes raisons, je n'aborde pas dans ce texte l'étude que j'ai menée dans [A8] des opérateurs  $R$ -diagonaux entre deux sous-espaces et de l'entropie associée.

Cette convolution est l'opération qui permet d'inférer la loi empirique sur les valeurs singulières de la somme  $A + B$  de deux matrices aléatoires indépendantes de la seule connaissance des lois empiriques sur les valeurs singulières de  $A$  et de  $B$ . C'est donc une opération analogue à la convolution classique  $*$  ou à la convolution libre carrée  $\boxplus$  de Voiculescu. Elle a été utilisée par Gregoratti, Hachem et Mestre pour analyser un système de télécommunications dans [59].



Le deuxième chapitre est dédié à une transition de phase appelée *transition de phase BBP*, du nom des auteurs Baik, Ben Arous et Pécché qui l'ont mise en évidence. Elle porte sur les plus grandes valeurs propres d'une matrice aléatoire  $X$  soumise à une perturbation qui a la particularité de rester de rang fini quand la dimension de  $X$  tend vers l'infini. Le principe général est que si l'amplitude de la perturbation reste sous un certain seuil, les plus grandes valeurs propres ne bougent pas significativement, alors que au delà de ce seuil, elles se détachent de leur position initiale. Ce phénomène avait été prouvé dans un premier temps pour des matrices aléatoires  $X$  d'un type particulier (matrices de Wigner ou de Wishart), je l'ai généralisé avec mes co-auteurs Raj Rao, Alice Guionnet et Mylène Maïda [A14, A15, A17], et je propose dans ce texte une interprétation de ce phénomène via les probabilités libres. De plus, avec Alice Guionnet et Mylène Maïda, je donne une analyse des grandes déviations pour ce modèle [A18].

Le troisième chapitre est consacré à l'infinie divisibilité libre, ainsi qu'à ses applications. Ces applications portent sur la définition de nouveaux modèles matriciels, la régularisation par la convolution, et la répulsion des valeurs singulières à l'origine.

Il existe une relation entre les lois infiniment divisibles pour les convolutions  $*$ ,  $\boxplus$  et  $\boxplus_c$ . Ces ensembles de lois sont en effet indexés, via des formules de Lévy-Kinchine, avec les mêmes objets. Ils sont donc en bijection les uns avec les autres. Les bijections en question révèlent des correspondances assez profondes, puisqu'elles préservent les théorèmes limites du type loi des grands nombres, théorème central limite, etc. Cela a été prouvé dans les articles [15, 16, 14] de Voiculescu, Bercovici et Pata dans le cas de  $\boxplus$  et dans mon article [A4] dans le cas de  $\boxplus_c$ . Dans ce chapitre, je présente de nouveaux ensembles de matrices aléatoires généralisant le GO(U)E, que j'ai construits dans mes articles [A2, A4], et qui donnent aux bijections sus-mentionnées une interprétation plus concrète. Par ailleurs, dans l'article [A7] avec Serban Belinschi et Alice Guionnet, les propriétés particulières des lois infiniment divisibles pour  $\boxplus_c$  et  $\boxplus$  ont été utilisées pour montrer des propriétés régularisantes de leurs semi-groupes, ainsi que le phénomène de *répulsion des valeurs singulières à l'origine*, qui dit que les valeurs singulières de la somme de deux matrices aléatoires non hermitiennes indépendantes ont tendance à s'écarter de l'origine.

Dans le quatrième chapitre est présenté un travail que j'ai effectué assez récemment [A19], consacré à un résultat d'universalité pour les vecteurs propres de matrices de Wigner. On y prouve que pour  $[u_{i,j}]_{i,j=1}^n$  la matrice des vecteurs propres d'une matrice de Wigner, le processus aléatoire bivarié

$$\left( \sum_{1 \leq i \leq ns, 1 \leq j \leq nt} (|u_{i,j}|^2 - 1/n) \right)_{(s,t) \in [0,1]^2}$$

converge en loi (en un sens assez faible). Le fait marquant est que lorsque les coefficients de la matrice de Wigner sont centrés et de variance 1, la loi du processus limite ne dépend que de leur quatrième moment (et non de leur troisième). Dans le cas où ce quatrième

moment coïncide avec celui d'une gaussienne, le processus limite est un pont brownien biva-rié et la convergence est montrée dans un sens plus fort, celui de la topologie de Skorokhod.

Au cinquième chapitre, je présente la construction que j'ai menée avec Thierry Lévy, dans [A11], d'une famille de structures de dépendance dans un espace de probabilités non-commutatif, qui interpolent entre l'indépendance classique et la liberté. Il était connu que si  $A$  et  $B$  sont deux grandes matrices diagonales réelles dont les valeurs propres se répartissent approximativement selon deux mesures de probabilités  $\mu$  et  $\nu$ , et si  $U$  est une matrice de permutation choisie uniformément (resp. une matrice unitaire choisie sous la mesure de Haar), alors les valeurs propres de  $A + UBU^*$  se répartissent selon la mesure  $\mu * \nu$ , convolution classique de  $\mu$  et  $\nu$  (resp. selon la mesure  $\mu \boxplus \nu$ , convolution libre de  $\mu$  et  $\nu$ ). En donnant à  $U$  la loi au temps  $t$  d'un mouvement brownien convenablement normalisé sur le groupe unitaire dont la loi au temps 0 est la loi uniforme sur les matrices de permutation, nous avons défini une convolution  $*_t$  pour tout  $t$  réel positif, qui pour  $t = 0$  est la convolution classique et, pour  $t$  tendant vers l'infini, tend vers la convolution libre. Nous avons en fait défini la structure de dépendance entre deux sous-algèbres d'un espace de probabilités non-commutatif qui sous-tend cette convolution. Notre espoir initial était d'identifier des cumulants associés à cette convolution  $t$ -libre, c'est-à-dire des formes multilinéaires universelles dont l'annulation caractériserait la  $t$ -liberté de certains de leurs arguments. Nous pensions qu'ils pourraient réaliser une interpolation entre les cumulants classiques, intimement liés à la combinatoire des partitions d'un ensemble, et les cumulants libres, liés aux partitions non-croisées d'un ensemble muni d'un ordre cyclique. Cet espoir a été déçu et nous avons démontré qu'il n'existait pas de cumulants  $t$ -libres.

Au sixième chapitre, je donne un théorème central limite pour le mouvement brownien sur le groupe des matrices unitaires  $n \times n$ , dans la limite où  $n \rightarrow \infty$ . Plus précisément, je considère des combinaisons linéaires des coefficients d'un tel processus et je montre que lorsque la dimension tend vers l'infini, on a trois régimes limites possibles, selon que l'on considère une petite échelle de temps, une grande échelle de temps, ou une échelle intermédiaire. Dans le premier cas, le processus limite correspond à un mouvement brownien sur l'espace des matrices anti-hermitiennes de taille infinie, dans le deuxième, on a un mouvement brownien sur les matrices complexes (sans symétrie) de taille infinie, et dans l'échelle de temps intermédiaire, on obtient une interpolation entre ces deux extrêmes. Ces trois régimes limites trouvent leur interprétation dans la construction du mouvement brownien sur le groupe unitaire par *roulement sans glissement* de celui-ci sur son algèbre de Lie le long d'un mouvement brownien sur cette algèbre. Un sous-produit de ce travail est une démonstration fort courte de théorème central limite pour les coordonnées d'une matrice unitaire distribuée selon la mesure de Haar, résultat bien connu déjà prouvé par Diaconis *et al.*

Le septième chapitre porte sur un travail auquel j'ai consacré beaucoup de temps et d'énergie dans les deux années qui ont suivi ma thèse, que je trouve toujours intéressant

et profond, mais qui, je dois le dire, n'a pas eu beaucoup d'écho. Je dirais que les raisons, tout à fait justifiées, pour lesquelles ce travail semblait me mener à une sorte d'impasse, m'en ont appris beaucoup quant au fonctionnement de la recherche en mathématiques. Certaines erreurs sont instructives.

Dans ce travail, publié dans mon article [A12], on considère des permutations aléatoires qui s'écrivent comme des mots en des permutations aléatoires indépendantes : on se fixe tout d'abord un mot  $w$  en les lettres  $g_1, g_1^{-1}, \dots, g_k, g_k^{-1}$  et on introduit ensuite, pour tout  $n$ , un  $k$ -uplet  $s_1(n), \dots, s_k(n)$  de permutations aléatoires indépendantes de  $\{1, \dots, n\}$ . La permutation  $\sigma_n$  que l'on va considérer est celle obtenue en remplaçant chaque lettre  $g_i$  de  $w$  par  $s_i(n)$ . Par exemple, pour  $w = g_1 g_2 g_3 g_2^{-1}$ ,  $\sigma_n = s_1(n) \circ s_2(n) \circ s_3(n) \circ s_2(n)^{-1}$ . De plus, on s'autorise à restreindre les longueurs possibles des cycles des  $s_i(n)$  : on se fixe des ensembles  $A_1, \dots, A_k$  d'entiers positifs et on suppose que pour tout  $i$ ,  $s_i(n)$  est choisi uniformément dans l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  qui ont toutes leurs longueurs de cycles dans  $A_i$ . Par exemple, si  $A_1 = \{1, 2\}$ ,  $s_1(n)$  est une involution aléatoire de loi uniforme. On va s'intéresser aux *petits cycles* de  $\sigma_n$ , c'est à dire aux cycles de longueur fixée indépendamment de  $n$ . La loi de  $\sigma_n$  étant invariante par conjugaison, les positions de ces cycles sont uniformes, et seuls leurs nombres portent un aléa inconnu. On introduit donc, pour tout entier positif  $\ell$ , le nombre  $N_\ell(\sigma_n)$  de cycles de longueur  $\ell$  dans la décomposition de  $\sigma_n$  en produit de cycles de supports disjoints. On va étudier le comportement asymptotique des  $N_\ell(\sigma_n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On prouve tout d'abord que le représentant du mot  $w$  dans un certain quotient du groupe libre de générateurs  $g_1, \dots, g_k$  détermine l'ordre de grandeur asymptotique des  $N_\ell(\sigma_n)$ , et on prouve que dans de nombreux cas, les  $N_\ell(\sigma_n)$  sont asymptotiquement indépendants, et distribués selon une loi de Poisson de paramètre  $1/\ell$ . Au delà des questions de liberté asymptotique présentées au paragraphe 7.1, mon intérêt pour le sujet a été attisé par un problème apparemment fort difficile, auquel Thierry Lévy et moi-même nous sommes attelés en vain : la caractérisation des mots  $w$  en les lettres  $g_1, g_1^{-1}, \dots, g_k, g_k^{-1}$  tels que pour tout groupe compact (ou fini)  $G$ , pour toute famille  $s_1, \dots, s_k$  de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur  $G$ , la loi de la variable aléatoire obtenue en remplaçant chaque lettre  $g_i$  de  $w$  par  $s_i$  est la loi uniforme.

Enfin, jugeant les articles [A1, A3, A6, A9, A20] relativement isolés dans l'ensemble de mes travaux, je ne les présenterai pas ici.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Valeurs singulières de sommes de matrices aléatoires</b>	<b>15</b>
1.1 Convolution libre rectangulaire . . . . .	15
Encart 1.1. Valeurs singulières d'une matrice . . . . .	18
1.2 Un outil analytique pour le calcul de la convolution $\boxplus_c$ : la $R$ -transformée rectangulaire . . . . .	18
1.2.1 Définition . . . . .	19
1.2.2 Lien avec les intégrales sphériques . . . . .	21
1.3 Relations entre convolutions libres rectangulaires et carrées . . . . .	23
1.4 Distribution non commutative asymptotique de matrices aléatoires rectan- gulaires . . . . .	26
<b>2 La transition de phase BBP</b>	<b>29</b>
2.1 Présentation du problème et cas des matrices de Wigner et de Wishart . .	29
2.1.1 Contexte général : perturbations de rang fini de grandes matrices aléatoires . . . . .	29
2.1.2 Transition de phase de Baik-Ben Arous-Péché : les deux premiers exemples . . . . .	31
Encart 2.2. Transition BBP pour la percolation de dernier passage . . . . .	35
Encart 2.3. Matrices de Wigner, du GOE et du GUE . . . . .	36
Encart 2.4. Lois de Tracy-Widom . . . . .	37
2.2 Généralisation . . . . .	38
2.2.1 Résultats principaux . . . . .	38
2.2.2 Valeurs singulières de matrices non hermitiennes déformées . . . . .	46

2.2.3	Lien avec les probabilités libres . . . . .	48
2.3	Grandes déviations pour les modèles de matrices déformés . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Infinie divisibilité et théorèmes limites pour les convolutions libres, applications</b>	<b>53</b>
3.1	Bijection de Bercovici-Pata entre les lois $*$ - et $\boxplus$ -infiniment divisibles, interprétation matricielle . . . . .	53
3.2	Lois $\boxplus_c$ -infiniment divisibles . . . . .	57
3.3	Propriétés de régularisation des convolutions libres et phénomène de répulsion des valeurs singulières à l'origine . . . . .	60
3.3.1	Cas de la convolution libre carrée $\boxplus$ . . . . .	60
3.3.2	Cas de la convolution libre rectangulaire $\boxplus_c$ : régularité et répulsion des valeurs singulières à l'origine . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Vecteurs propres des matrices de Wigner : universalité des fluctuations globales</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Main results . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Un continuum de notions d'indépendance entre l'indépendance classique et l'indépendance libre</b>	<b>71</b>
5.1	Convolutions . . . . .	71
5.2	Structures de dépendance et $t$ -liberté . . . . .	73
5.3	Systèmes différentiels . . . . .	75
5.4	Inexistence de cumulants $t$ -libres . . . . .	76
Encart 5.5.	Calcul d' $\hat{t}$ o matriciel . . . . .	78
Encart 5.6.	Les trois définitions du mouvement brownien sur le groupe unitaire	78
Encart 5.7.	Mouvement brownien unitaire libre . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Théorème central limite pour le mouvement brownien sur le groupe unitaire</b>	<b>81</b>
<b>7</b>	<b>Petits cycles de mots libres en des permutations aléatoires</b>	<b>85</b>
7.1	Introduction . . . . .	85
7.2	Cas d'un mot trivial . . . . .	86

7.3	Mots non triviaux . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Perspectives</b>	<b>91</b>
	Matrices aléatoires à queues lourdes/creuses . . . . .	91
	Perturbations de matrices aléatoires . . . . .	92
	Matrices aléatoires à coefficients corrélés . . . . .	92
	Systèmes de particules en interaction . . . . .	92
	Vecteurs propres de matrices à bandes . . . . .	93
	Maximum de variables corrélées et lois de Tracy-Widom . . . . .	93
<b>9</b>	<b>Appendice : introduction aux probabilités libres</b>	<b>95</b>
9.1	Espaces de probabilités non commutatifs et liberté . . . . .	95
9.2	Structures de dépendance et produit libre d'espaces de probabilités non commutatifs . . . . .	96
9.3	Distributions de variables aléatoires non commutatives . . . . .	99
9.4	Liberté asymptotique des matrices aléatoires carrées . . . . .	100
9.5	Convolutions libres $\boxplus$ et $\boxtimes$ . . . . .	101
9.6	Cumulants libres et $R$ -transformée . . . . .	101
	9.6.1 Cumulants classiques . . . . .	102
	9.6.2 Cumulants libres . . . . .	103
	9.6.3 La $R$ -transformée . . . . .	104
9.7	Probabilités libres à valeurs opérateurs . . . . .	105
	<b>Liste des travaux publiés ou soumis</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>



# Chapitre 1

## Valeurs singulières de sommes de matrices aléatoires

Je vais présenter ici mon travail sur les matrices aléatoires rectangulaires. Comme je l'ai expliqué dans l'introduction, ce chapitre est construit autour de la convolution libre rectangulaire, mettant sa "matrice", la liberté avec amalgamation, au second plan.

La plupart des résultats présentés dans ce texte ont été démontrés dans le cas réel et le cas complexe. Ainsi,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $\beta = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ . Dans le cas réel, les matrices unitaires à considérer dans les énoncés sont réelles, donc orthogonales.

### 1.1 Convolution libre rectangulaire

Le point de départ de cette étude est la question suivante :

*Connaissant les valeurs singulières de deux matrices  $A$  et  $B$ , que peut-on dire des valeurs singulières de leur somme ?*

En toute généralité, il est bien entendu très difficile de répondre à cette question, qui relève de la géométrie algébrique (la définition et l'interprétation géométrique des valeurs singulières d'une matrice sont rappelés dans l'encart 1.1, à la fin de cette section). Cependant, en se concentrant sur le cas *générique* en grande dimension, *i.e.* en supposant  $A$  et  $B$  aléatoires, indépendantes et de lois isotropes et en faisant tendre leurs dimensions vers l'infini, on peut, d'une certaine façon, y répondre.

Plus précisément, on va considérer des matrices aléatoires  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times p}$  dont les dimensions  $n, p$  vont tendre vers l'infini de façon à ce que  $n/p \rightarrow c \in [0, 1]$  (la dépendance de  $A$  et  $B$  en  $n$  et  $p$  est implicite dans les notations).

On fait de plus les hypothèses suivantes :



- (a)  $A$  et  $B$  sont indépendantes,
- (b) au moins une des deux matrices  $A, B$  est invariante, en loi, par multiplication à droite et à gauche par n'importe quelle matrice unitaire,
- (c) il existe  $\mu_1, \mu_2$  lois sur  $\mathbb{R}_+$  telles que, pour la convergence faible en probabilité, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{\sigma \text{ val. sing. de } A} \delta_\sigma \longrightarrow \mu_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{\sigma \text{ val. sing. de } B} \delta_\sigma \longrightarrow \mu_2 \quad (1.1)$$

lorsque  $n, p \longrightarrow \infty$  avec  $n/p \longrightarrow c$  (dans les sommes ci-dessus, les valeurs singulières sont comptées avec multiplicité, et ce sera le cas tout au long de ce texte).

L'hypothèse (b) est une hypothèse d'*isotropie* (vérifiée, par exemple, pour une matrice à entrées gaussiennes standard indépendantes) et l'hypothèse (c) est la formalisation de l'idée que l'on connaît les valeurs singulières de  $A$  et  $B$ .

La réponse à la question posée plus haut est alors donnée par le théorème suivant, que j'ai démontré pendant ma thèse (voir [A5, Th. 3.13]<sup>1</sup>).

**Théorème 1.1** *Sous les hypothèses (a), (b) et (c) ci-dessus, il existe une loi non aléatoire  $\mu$  sur  $\mathbb{R}_+$ , ne dépendant que de  $\mu_1, \mu_2$  et  $c$ , telle que pour la convergence faible en probabilité, on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{\sigma \text{ val. sing. de } A+B} \delta_\sigma \longrightarrow \mu \quad (1.2)$$

lorsque  $n, p \longrightarrow \infty$  avec  $n/p \longrightarrow c$ .

La loi  $\mu$  ainsi définie, notée  $\mu_1 \boxplus_c \mu_2$ , est appelée la *convolution libre rectangulaire de rapport  $c$*  des lois  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

Ce théorème signifie que sous les hypothèses (a) et (b), pour connaître la loi selon laquelle les valeurs singulières de  $A + B$  se répartissent, il suffit de connaître les lois selon lesquelles les valeurs singulières de  $A$  et  $B$  se répartissent (ainsi que  $n/p$ ) : les autres types d'informations relatives aux valeurs singulières (valeurs singulières extrêmes, espacements,...) n'influent pas. La figure 1.1 donne une illustration de ce phénomène.

---

1. Le vocabulaire utilisé dans certains articles, dont [A5], est différent : afin d'avoir égalité, pour  $c = 1$ , entre  $\boxplus_c$  et la convolution  $\boxplus$  de Voiculescu, on y considère les *symétrisées* des mesures de (1.1) et (1.2) et non ces mesures elles-mêmes. Les lois sur  $\mathbb{R}_+$  étant entièrement définies par leurs symétrisées, les résultats sont équivalents.

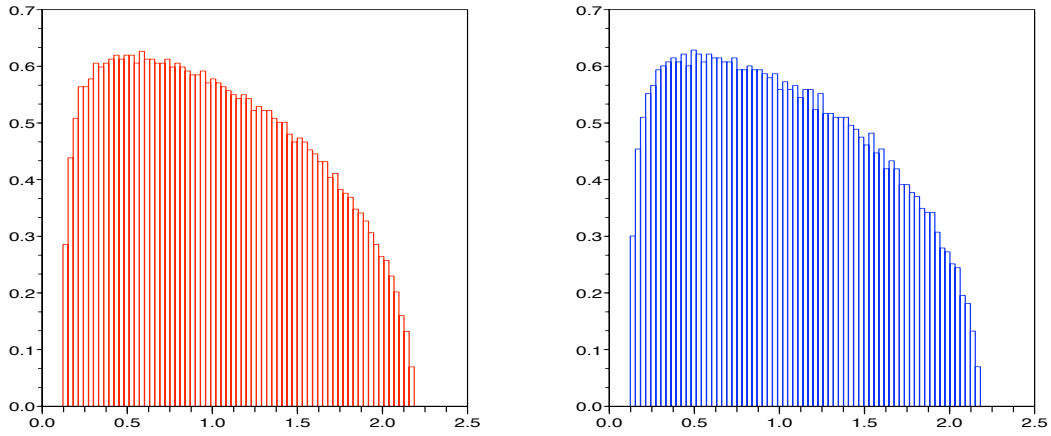


FIGURE 1.1 – **Valeurs singulières de  $A + B$  pour différents types d’espacement** : Histogrammes des valeurs singulières de  $A + B$  pour  $A$  matrice gaussienne et  $B$  matrice à valeurs singulières égales à  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$  (figure de gauche) ou  $B$  matrice à valeurs singulières i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]$  (figure de droite) : les espacements des valeurs singulières de  $B$  sont beaucoup moins réguliers dans le deuxième cas que dans le premier, et cela n’influe pas sur la forme limite de l’histogramme (cependant, on remarque que la convergence semble plus rapide dans la figure de gauche que dans celle de droite, ce qui corrobore les prédictions données par la théorie de la liberté de second ordre). Ici, les matrices sont de taille  $n \times p$  avec  $n = 4800$ ,  $p = 6000$ .

Dans le cas de mesures à support compact (le cas général étant ensuite obtenu par approximation, avec un contrôle sur le *rang* de l’erreur), le théorème 1.1 est une conséquence du théorème 1.10, qui caractérise le comportement asymptotique de la distribution non commutative jointe de grandes matrices rectangulaires. Cette caractérisation permet de prouver que les variables aléatoires

$$\frac{1}{n} \operatorname{Tr}[(A + B)(A + B)^*]^k \quad (k \geq 1)$$

(qui sont les *moments* des lois empiriques sur les valeurs singulières) se concentrent autour de valeurs qui ne dépendent que des nombres  $\frac{1}{n} \operatorname{Tr}[(AA^*)^\ell]$  et  $\frac{1}{n} \operatorname{Tr}[(BB^*)^\ell]$  (ainsi que du quotient  $n/p$ ). La dépendance des moments de la loi singulière empirique de  $A + B$  en les nombres  $\frac{1}{n} \operatorname{Tr}[(AA^*)^\ell]$  et  $\frac{1}{n} \operatorname{Tr}[(BB^*)^\ell]$  est explicitée à la section suivante, via les *cumulants libres rectangulaires* et la *R-transformée rectangulaire*.

**Remarque 1.2 (Lien avec la convolution  $\boxplus$  de Voiculescu)** Le théorème 1.1 est l’analogue, pour les valeurs singulières, du résultat sur la convolution  $\boxplus$  de Voiculescu présenté au paragraphe 9.5 de l’appendice. Des relations entre les convolutions  $\boxplus_c$  et  $\boxplus$  seront présentées plus bas. Nous verrons que dans les cas  $c = 0$  et  $c = 1$ ,  $\boxplus_c$  s’explique entièrement

à partir de  $\boxplus$  et que pour  $0 < c < 1$ , certaines relations peuvent être démontrées (c.f. théorèmes 1.8 et 1.9).

**Remarque 1.3 (Valeurs singulières de  $AB$ )** De la même façon, pour  $A, B$  matrices isotropes de tailles respectives  $n \times m$  et  $m \times p$ , dans la limite où  $n, m, p \rightarrow \infty$  avec  $n/m \rightarrow c$ ,  $m/p \rightarrow d$ , la loi empirique sur valeurs singulières du produit  $AB$  s'exprime à partir des lois empiriques sur les valeurs singulières de  $A$  et  $B$ , ainsi que des rapports limites  $c, d$ . Seulement, contrairement à ce qui apparaît lorsque l'on considère la  $A + B$ , la convolution multiplicative libre "carrée" de Voiculescu,  $\boxtimes$ , suffit pour résoudre le problème. En effet, à des zéros près, les carrés des valeurs singulières de  $AB$  sont les valeurs propres de  $ABB^*A^*$ , i.e. de  $A^*ABB^*$ , ce qui montre que le problème peut être résolu à l'aide de la convolution multiplicative libre  $\boxtimes$  présentée au paragraphe 9.5 de l'appendice.

### ENCART 1.1 – Valeurs singulières d'une matrice

Rappelons la définition des *valeurs singulières* d'une matrice. Toute matrice  $A \in \mathbb{K}^{n \times p}$  s'écrit  $A = UDV$ , avec  $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ,  $V \in \mathbb{K}^{p \times p}$  unitaires et  $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$  nulle hors de la diagonale et à termes diagonaux positifs ou nuls. Les termes diagonaux de  $D$  sont alors uniques (à l'ordre près) et sont appelés les *valeurs singulières* de  $A$ . L'interprétation géométrique de ces valeurs est la suivante :  $A$  transforme la boule unité euclidienne en une ellipsoïde, et les valeurs singulières de  $A$  sont les demi-longueurs des  $n \wedge p$  plus grands axes principaux de cette ellipsoïde, les autres axes étant de longueur nulle. La figure 1.2 donne une illustration en dimension 2. Les valeurs singulières de  $A$  sont les valeurs propres de  $\sqrt{AA^*}$  (resp. de  $\sqrt{A^*A}$ ) si  $n \leq p$  (resp.  $n \geq p$ ).

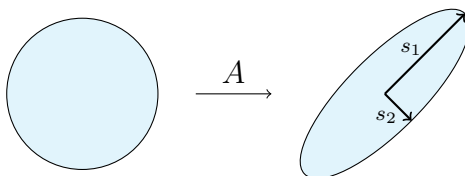


FIGURE 1.2 – Valeurs singulières  $s_1$  et  $s_2$  de  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

## 1.2 Un outil analytique pour le calcul de la convolution $\boxplus_c$ : la $R$ -transformée rectangulaire

Le théorème 1.1 affirme que les valeurs singulières de  $A + B$  se répartissent selon d'une loi  $\mu_1 \boxplus_c \mu_2$  qui ne dépend que de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , mais ne permet pas de d'exprimer concrètement  $\mu_1 \boxplus_c \mu_2$  en fonction de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Dans ce paragraphe, nous explicitons la dépendance de  $\mu_1 \boxplus_c \mu_2$  en  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $c$ .

### 1.2.1 Définition

La convolution libre rectangulaire  $\boxplus_c$  peut être calculée grâce à une transformation intégrale, comme la convolution classique  $*$  avec la transformée de Fourier ou la convolution libre  $\boxplus$  avec la  $R$ -transformée. Cette transformation, appelée la  *$R$ -transformée rectangulaire de rapport  $c$* , est définie comme suit.

Soit  $\mu$  une loi sur  $\mathbb{R}_+$  et  $c \in [0, 1]$ . On définit les fonctions<sup>2</sup>

$$M_\mu(z) := \int_{t \in \mathbb{R}_+} \frac{t^2 z}{1 - t^2 z} d\mu(t), \quad (1.3)$$

puis

$$H_\mu^{(c)}(z) := z(cM_\mu(z) + 1)(M_\mu(z) + 1), \quad (1.4)$$

et enfin

$$C_\mu^{(c)}(z) = T^{(c)-1} \left( \frac{z}{H_\mu^{(c)-1}(z)} \right) \text{ pour } z \neq 0, \text{ et } C_\mu^{(c)}(0) = 0, \quad (1.5)$$

où  $T^{(c)}(z) = (cz + 1)(z + 1)$ .

La fonction  $C_\mu^{(c)}(\cdot)$  définie en (1.5) est appelée  *$R$ -transformée rectangulaire de rapport  $c$  de  $\mu$* . Cette transformation permet de calculer la convolution libre de rectangulaire de deux lois, en vertu du théorème suivant [A5, Th. 3.12].

**Théorème 1.4** (i) *La fonction analytique  $C_\mu^{(c)}(\cdot)$  caractérise la loi  $\mu$ .*

(ii) *Pour  $\mu_1, \mu_2$  lois sur  $\mathbb{R}_+$ ,*

$$C_{\mu_1 \boxplus_c \mu_2}^{(c)}(z) = C_{\mu_1}^{(c)}(z) + C_{\mu_2}^{(c)}(z). \quad (1.6)$$

La preuve de la formule (1.6) ne repose pas directement sur la définition de la fonction  $C_\mu^{(c)}$  via les formules (1.3), (1.4) et (1.5), mais sur l'étude des coefficients du développement en série entière de  $C_\mu^{(c)}$  autour de zéro : en posant, pour  $\mu$  à support compact (le cas général se déduisant par approximation),

$$C_\mu^{(c)}(z) = \sum_{n \geq 1} k_{2n}^{\boxplus_c}(\mu) z^n, \quad (1.7)$$

---

2. Dans le cas où  $\mu$  est à support compact, toutes ces fonctions sont analytiques sur un voisinage de zéro dans  $\mathbb{C}$  dont l'amplitude est contrôlée par celle du support de  $\mu$ . Dans le cas général, on a encore des fonctions analytiques, mais elles sont définies sur des ensembles du type  $\{\rho e^{i\theta}; 0 \leq \rho < c, |\theta - \pi| < c'\}$  ( $c > 0, 0 < c' < \pi$ ). La notion la plus adéquate est alors celle de *germes* de fonctions analytiques sur des voisinages de 0 non tangentiels à  $\mathbb{R}_+$ .

les coefficients  $(k_{2n}^{\boxplus_c}(\mu))_{n \geq 1}$  sont appelés les *cumulants rectangulaires libres de rapport  $c$*  de  $\mu$ . La fonction  $M_\mu$  étant la fonction génératrice des moments de  $\mu$ , il n'est pas très difficile de voir que la relation entre les moments  $m_\ell(\mu) := \int_{\mathbb{R}} t^\ell d\mu(t)$  et ces cumulants est la suivante :

$$m_{2n}(\mu) = \sum_{\pi} c^{e(\pi)} \prod_{v \text{ bloc de } \pi} k_{|v|}^{\boxplus_c}(\mu) \quad (n \geq 1),$$

où la somme porte sur les  $\pi$  partitions non croisées (dont la définition est rappelée à la section 9.6.2 de l'appendice) de l'ensemble  $\{1, \dots, 2n\}$  dont tous les blocs ont un cardinal pair et où  $e(\pi)$  désigne le nombre de blocs de  $\pi$  de minimum pair. L'étude approfondie des structures combinatoires sous-jacentes à la *liberté avec amalgamation* (c.f. paragraphe 1.4) permet alors de montrer, via un analogue à la proposition 9.9, que

$$k_{2n}^{\boxplus_c}(\mu_1 \boxplus_c \mu_2) = k_{2n}^{\boxplus_c}(\mu_1) + k_{2n}^{\boxplus_c}(\mu_2) \quad (n \geq 1).$$

La formule (1.6) s'obtient alors immédiatement.

Comme le montre formule (1.6), la  $R$ -transformée rectangulaire de rapport  $c$  *linéarise* la convolution  $\boxplus_c$ . En plus du calcul pratique de  $\boxplus_c$ , cela permettra de comprendre les liens entre la convolution  $\boxplus_c$  et la convolution  $\boxplus$  associée aux matrices hermitiennes (c.f. paragraphe 1.3), de montrer que la convolution  $\boxplus_c$  est continue pour la topologie faible, etc...

Donnons maintenant un exemple d'application directe du théorème 1.4, correspondant à  $\delta_1 \boxplus_c \delta_1$  (qui n'est pas une loi dégénérée). D'autres exemples peuvent être trouvés dans [A5, Sect. 3.10].

**Exemple 1.5 (Somme d'isométries)** *Soit  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times p}$  aléatoires, indépendantes, l'une au moins étant de loi invariante par les actions du groupe unitaire à droite et à gauche, telles que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a la convergence en probabilité*

$$\#\{\sigma \text{ val. sing. de } A \text{ ou } B \text{ telle que } |\sigma - 1| > \varepsilon\} = o(n)$$

*lorsque  $n, p \rightarrow \infty$  avec  $n/p \rightarrow c$ . Alors on a la convergence faible en probabilité*

$$\frac{1}{n} \sum_{\sigma \text{ val. sing. de } A+B} \delta_\sigma \longrightarrow \frac{2\sqrt{\kappa^2 - (x^2 - 2)^2}}{c\pi x(4 - x^2)} \mathbb{1}_{|x^2 - 2| \leq \kappa} \mathbb{1}_{x \geq 0} dx, \quad (1.8)$$

*avec  $\kappa = 2\sqrt{c(2 - c)}$  (dans le cas où  $c = 0$ , le terme de droite doit s'interpréter comme la masse de Dirac en  $\sqrt{2}$ ). La figure 1.3 illustre cette convergence.*

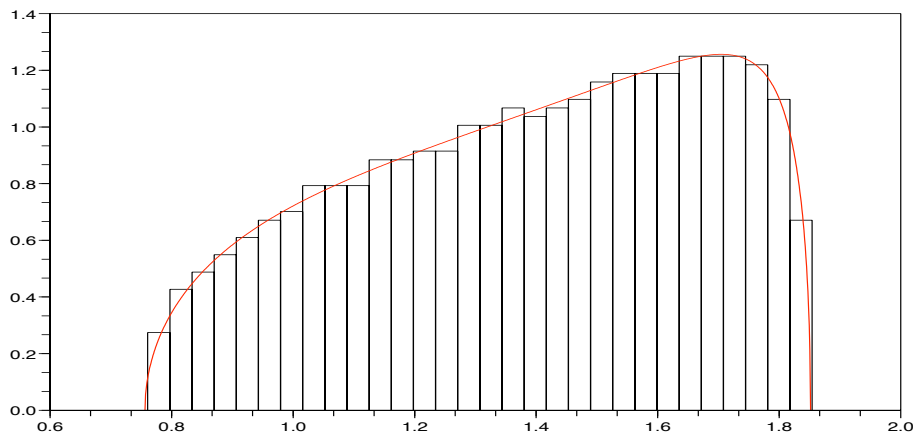


FIGURE 1.3 – **Valeurs singulières d’une somme d’isométries** : Histogramme des valeurs singulières de  $A + B$  et densité de la loi limite telle qu’elle est prédite par l’équation (1.8), sous les hypothèses de l’exemple 1.5. Ici,  $n = 10^3$ ,  $c = 0.3$ .

## 1.2.2 Lien avec les intégrales sphériques

Le théorème 1.4 permet d’affirmer que la  $R$ -transformée rectangulaire joue un rôle analogue, pour la convolution  $\boxplus_c$ , à celui joué par le logarithme de la transformée de Laplace pour la convolution classique  $*$ . Le théorème suivant, issu de [A16], permet d’affirmer que, au delà de cette analogie, la  $R$ -transformée d’une loi  $\mu$  est effectivement, à une intégration près, la limite du logarithme d’une suite de transformées de Laplace.

On considère une matrice  $M \in \mathbb{K}^{n \times p}$ , dépendant implicitement de paramètres  $n$  et  $p$ . On suppose que  $M$  peut être mise sous la forme  $M = UDV$ , avec  $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$  et  $V \in \mathbb{K}^{p \times p}$  unitaires, indépendantes et distribuées selon la mesure de Haar, et  $D$  déterministe, uniformément bornée, telle que

$$\frac{1}{n} \sum_{\sigma \text{ val. sing. de } D} \delta_{\sigma} \longrightarrow \mu,$$

où  $\mu$  est une loi à support compact. On introduit aussi une matrice  $E \in \mathbb{K}^{n \times p}$  dont toutes les entrées sont nulles, sauf une, égale à un. Alors on a le théorème suivant.

**Théorème 1.6** *Lorsque  $n, p \longrightarrow \infty$  avec  $n/p \longrightarrow c \in [0, 1]$  (si  $c = 0$ , on suppose aussi  $p = o(n^2)$ ), on a, pour  $\theta$  réel assez petit,*

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{E} \{ \exp[\sqrt{np}\theta \Re(\text{Tr}(EM))] \} \longrightarrow \beta \int_0^{\frac{\theta}{\beta}} \frac{C_{\mu}^{(c)}(t^2)}{t} dt. \quad (1.9)$$

Notons  $R_\nu$  la  $R$ -transformée de “type carré” d’une loi  $\nu$  (voir la section 9.6.3 de l’appendice). Dans les cas  $c = 0$  et  $c = 1$ , la fonction  $C^{(c)}$  étant reliée respectivement aux fonctions  $R_{\mu^2}$  et  $R_{s(\mu)}$ , où  $\mu^2$  désigne la loi de  $X^2$  pour  $X$  distribuée selon  $\mu$  et  $s(\mu)$  désigne la symétrisée de  $\mu$  (voir équation (1.11) plus bas), on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 1.7** *Dans le cas où  $c = 0$  (resp.  $c = 1$ ), on a*

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{\exp[\sqrt{np}\theta \Re(\operatorname{Tr}(EM))]\} \longrightarrow \beta \int_0^{\frac{\theta}{2}} t R_{\mu^2}(t^2) dt \quad (\text{resp. } \beta \int_0^{\frac{\theta}{2}} R_{s(\mu)}(t) dt).$$

Le point de départ de l’étude ayant mené au théorème précédent se trouve dans des travaux de Guionnet, Zeitouni, Collins, Zinn-Justin, Zuber, Maïda, Śniady, Mingo et Speicher, qui ont prouvé, dans les articles [63, 125, 39, 61, 41, 42, 40], que sous différentes hypothèses sur des matrices  $A, E$  de taille  $n \times n$ , pour  $U$  unitaire distribuée selon la mesure de Haar, pour une valeur adéquate de l’exposant  $\alpha$ , le comportement asymptotique de

$$\frac{1}{n^\alpha} \log \mathbb{E}\{\exp[n\theta \operatorname{Tr}(EU AU^*)]\}$$

est lié à la théorie des probabilités libres. Par exemple, il a été prouvé [61, Th. 2] que si la loi empirique sur le spectre d’une matrice auto-adjointe  $A$  converge vers une loi  $\mu$ , alors pour  $E = \operatorname{Diag}(1, 0, \dots, 0)$  et  $\theta$  réel assez petit,

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{\exp[n\theta \operatorname{Tr}(EU AU^*)]\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\beta}{2} \int_0^{\frac{2\theta}{\beta}} R_\mu(t) dt, \quad (1.10)$$

où  $R_\mu$  est la  $R$ -transformée (de type “carré”) de  $\mu$  (voir section 9.6.3).

Le théorème (1.6) se montre en exprimant les colonnes de  $U$  et  $V$  à partir de vecteurs gaussiens, ce qui ramène l’espérance  $\mathbb{E}\{\exp[\sqrt{np}\theta \Re(\operatorname{Tr}(EM))]\}$  à une intégrale gaussienne. Un changement de variable adéquat fait alors apparaître la  $R$ -transformée rectangulaire de la loi empirique sur les valeurs singulières de  $M$ . À ma connaissance, cette technique est due à Guionnet et Maïda [61].

Avant de clore ce paragraphe, mentionnons le fait que les espérances d’exponentielles de traces de matrices aléatoires (c’est à dire les fonctions de partition de mesures de Gibbs sur

des espaces de matrices associées à des énergies qui s'expriment comme des traces) s'appellent en générale les *intégrales sphériques*. L'intégrale dite d'*Harich-Chandra-Itzykson-Zuber* en est un exemple assez connu [60]. Au delà de leurs liens avec les probabilités libres mentionnés plus haut, les intégrales sphériques intéressent beaucoup les communautés des physiciens et de la théorie de l'information. Le lecteur trouvera dans les textes [126, 63, 60] des références pour les intégrales sphériques impliquant des matrices carrées. Le cas des matrices rectangulaires a aussi fait l'objet d'investigations avant le travail présenté ici, par exemple dans les articles [102, 57, 74].

### 1.3 Relations entre convolutions libres rectangulaires et carrées

La convolution libre rectangulaire  $\boxplus_c$  rend compte des valeurs singulières de la somme de deux matrices non hermitiennes choisies indépendamment et de façon isotrope, dont les dimensions  $n, p \gg 1$  satisfont  $n/p = c$ . De même, la convolution libre  $\boxplus$  rend compte des valeurs propres de la somme de deux grandes matrices hermitiennes choisies indépendamment et de façon isotrope. Les valeurs singulières de matrices rectangulaires et les valeurs propres de matrices hermitiennes ne sont pas de objets sans relation, puisque les valeurs singulières d'une matrice  $M$  de taille  $n \times p$  avec  $n \leq p$  sont les valeurs propres de la matrice  $\sqrt{MM^*}$ . Cependant, l'opération  $M \mapsto \sqrt{MM^*}$  n'étant pas linéaire, il ne semble pas évident qu'il existe une relation entre les convolutions  $\boxplus$  et  $\boxplus_c$ .

Néanmoins, quand  $c = 1$  (*i.e.* quand les matrices sont carrées), en mettant bout-à-bout les résultats de liberté asymptotique de Voiculescu [116] et l'étude de la somme d'éléments  $R$ -diagonaux menée par Haagerup et Larsen [65, Prop. 3.5], on obtient le théorème suivant, qui se retrouve aussi immédiatement avec les outils présentés ici, en remarquant que pour  $c = 1$ , la  $R$ -transformée rectangulaire de rapport  $c$  s'exprime simplement à partir de la  $R$ -transformée de Voiculescu. Pour  $\mu$  loi sur  $\mathbb{R}_+$ , on note  $s(\mu)$  sa *symétrisée*, *i.e.* la loi sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$s(\mu)(A) = \frac{\mu(A) + \mu(-A)}{2} \quad (1.11)$$

pour tout borélien  $A$ .

**Théorème 1.8** *La convolution libre rectangulaire de rapport 1 de deux lois  $\mu_1, \mu_2$  sur  $\mathbb{R}_+$  est la loi sur  $\mathbb{R}_+$  dont la symétrisée est la convolution libre des symétrisées de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Autrement dit, pour  $\mu_1, \mu_2$  lois sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mu_1 \boxplus_1 \mu_2$  est la loi sur  $\mathbb{R}_+$  définie par le fait que*

$$s(\mu_1 \boxplus_1 \mu_2) = s(\mu_1) \boxplus s(\mu_2).$$



Ce résultat a une interprétation matricielle simple. Il signifie que pour  $M, N$  grandes matrices aléatoires carrées isotropes indépendantes, la mesure spectrale de

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M^* & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & N \\ N^* & 0 \end{bmatrix}$$

est proche de la convolution libre  $\boxplus$  des mesures spectrales de

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M^* & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & N \\ N^* & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

bien que les matrices de (1.12), ayant trop d'éléments de structure en commun, ne sont en général pas asymptotiquement libres.

Le résultat suivant [A10, Th. 3], qui fait intervenir la convolution libre multiplicative  $\boxtimes$ , semble plus surprenant. Pour  $c \in [0, 1]$ , introduisons la loi appelée *loi de Marchenko-Pastur<sup>3</sup> de paramètre  $c$*  :

$$L_{\text{MP}, c} := \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi cx} \mathbb{1}_{x \in [a, b]} dx, \quad (1.13)$$

pour  $a = (1 - \sqrt{c})^2$ ,  $b = (1 + \sqrt{c})^2$  (lorsque  $c = 0$ , cette loi doit être comprise comme la masse de Dirac en 1). Pour  $\mu$  loi sur  $\mathbb{R}_+$ , on note  $\sqrt{\mu}$  la loi de  $\sqrt{X}$  pour  $X$  v.a. de loi  $\mu$ .

**Théorème 1.9** *Pour  $\mu_1, \mu_2$  lois sur  $\mathbb{R}_+$  et  $c \in [0, 1]$ , on a*

$$\sqrt{\mu_1 \boxtimes L_{\text{MP}, c}} \boxplus_c \sqrt{\mu_2 \boxtimes L_{\text{MP}, c}} = \sqrt{(\mu_1 \boxplus \mu_2) \boxtimes L_{\text{MP}, c}}. \quad (1.14)$$

*En particulier, pour  $c = 0$ ,*

$$\sqrt{\mu_1} \boxplus_0 \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\mu_1 \boxplus \mu_2}, \quad (1.15)$$

*autrement dit, la convolution rectangulaire libre de rapport 0 de deux lois est l'unique loi sur  $\mathbb{R}_+$  dont la mesure image par l'application  $x \mapsto x^2$  est la convolution additive libre  $\boxplus$  des mesures images de ces deux lois par cette application.*

Ce théorème a plusieurs conséquences non attendues, quant à l'arithmétique des convolutions  $\boxplus$  et  $\boxtimes$  de Voiculescu, comme quant à l'infinie divisibilité libre. Le lecteur pourra les trouver dans [A10]. Donnons ici des interprétations, elles aussi inattendues, à mes yeux du moins, des formules (1.14) et (1.15).

---

3. Il existe plusieurs conventions quant aux lois de Marchenko-Pastur. Celle-ci correspond à la loi spectrale limite de  $XX^*$ , pour  $X$  matrice  $n \times p$  à entrées i.i.d. de variance  $1/p$ , lorsque  $n, p \rightarrow \infty$  avec  $n/p \rightarrow c$ .

Commençons par (1.15), qui est plus simple. Du point de vue des matrices aléatoires, cette formule signifie que pour  $A, B$  matrices  $n \times p$  indépendantes, lorsque  $1 \ll n \ll p$ , pour ce qui est de la loi empirique sur le spectre, on a

$$(A + B)(A + B)^* \simeq AA^* + BB^*.$$

Donnons maintenant une interprétation matricielle de la formule (1.14). On se place dans le régime asymptotique  $n, p \gg 1$  et  $n/p \simeq c$ . On se donne  $A, B$  des matrices aléatoires non hermitiennes,  $n \times n$ , indépendantes, l'une au moins étant de loi invariante par les actions du groupe unitaire, telles que

$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda \text{ val. pr. de } AA^*} \delta_\lambda \longrightarrow \mu_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{\lambda \text{ val. pr. de } BB^*} \delta_\lambda \longrightarrow \mu_2,$$

ainsi que  $X, X'$  deux matrices  $n \times p$  à entrées gaussiennes indépendantes de variance  $1/p$ . Alors  $\sqrt{\mu_1 \boxtimes L_{\text{MP},c}}$  et  $\sqrt{\mu_2 \boxtimes L_{\text{MP},c}}$  sont les limites des lois empiriques sur les valeurs singulières de  $AX$  et  $BX'$ , alors que  $\sqrt{(\mu_1 \boxplus \mu_2) \boxtimes L_{\text{MP},c}}$  est la limite de la loi empirique sur les valeurs singulières de  $\sqrt{AA^* + BB^*}X$ . Ainsi, (1.14) s'interprète de la façon suivante : du point de vue de la loi empirique sur les valeurs singulières,

$$AX + BX' \simeq \sqrt{AA^* + BB^*}X. \quad (1.16)$$

La figure 1.4 illustre ce phénomène.

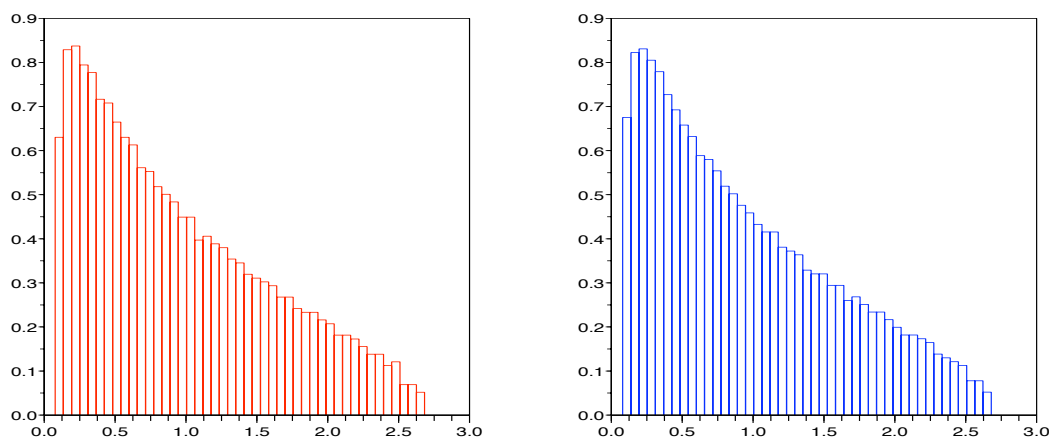


FIGURE 1.4 – **Illustration de l'identité** (1.16) : Histogrammes des valeurs singulières de  $AX + BY$  (gauche) et de  $\sqrt{AA^* + BB^*}X$  (droite) pour  $A$  matrice  $n \times n$  de valeurs singulières uniformément réparties sur  $[0, 1]$  et  $B, X, Y$  matrices de tailles respectives  $n \times n, n \times p, n \times p$  à entrées i.i.d. gaussiennes de variances respectives  $1/n, 1/p, 1/p$ . Ici,  $n = 2000, p = 2500$ .

## 1.4 Distribution non commutative asymptotique de matrices aléatoires rectangulaires

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment la liberté avec amalgamation sur une certaine sous-algèbre permet de modéliser le comportement asymptotique de matrices aléatoires rectangulaires, une fois celles-ci plongées dans des matrices carrées plus grandes. Ces résultats sont à la base de ce qui précède dans ce chapitre : en effet, le théorème 1.1, qui permet de définir la convolution  $\boxplus_c$ , découle du théorème 1.10 ci-dessous. Les définitions relatives aux *probabilités libres  $\mathcal{D}$ -valuées* et à la *liberté avec amalgamation* peuvent être trouvées au paragraphe 9.7 de l'appendice.

Considérons un entier  $d \geq 1$  et, pour chaque  $n \geq 1$ , des entiers positifs  $q_1, \dots, q_d$  dépendant de  $n$  (la dépendance en  $n$  des  $q_i$ , comme toujours dans ce texte, sera laissée implicite afin d'alléger les notations) tels que

$$q_1 + \dots + q_d = n \quad (1.17)$$

et tels que pour tout  $i = 1, \dots, d$ , il existe  $\rho_i > 0$  tel que  $\frac{q_i}{n} \rightarrow \rho_i$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

On note  $\mathcal{D}$  l'algèbre des matrices  $d \times d$  diagonales complexes. Nous allons conférer à l'algèbre  $M_n(\mathbb{C})$  des matrices  $n \times n$  complexes une structure d'**espace de probabilité non commutatif  $\mathcal{D}$ -valué**. A cette fin, les matrices  $n \times n$  vont être considérées comme des matrices  $d \times d$  par blocs, selon le découpage de  $n$  donné par la formule (1.17). Cela permet, en assimilant matrices scalaires et scalaires, de voir  $\mathcal{D}$  comme une **sous-algèbre** de  $M_n(\mathbb{C})$ . En outre, on définit une application  $\varphi_{\mathcal{D},n} : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  de la façon suivante : pour  $M \in M_n(\mathbb{C})$ , on écrit, via le découpage par blocs introduit précédemment,  $M = [M_{i,j}]_{i,j=1}^d$ , et on pose

$$\varphi_{\mathcal{D},n}(M) = \begin{pmatrix} \text{tr}(M_{1,1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \text{tr}(M_{d,d}) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

tr désignant la trace normalisée. Ainsi définie,  $\varphi_{\mathcal{D},n} : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  est une **espérance conditionnelle**.

Pour chaque  $n \geq 1$ , on se donne alors deux familles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $(D_j)_{j \in J}$  de matrices  $n \times n$  (la dépendance en  $n$  de chaque  $X_i$  et chaque  $D_j$  est, une nouvelle fois, implicite) à propos desquelles on fait les hypothèses suivantes :

- (a)  $(D_j)_{j \in J}$  est une famille de matrices déterministes dont la  $\mathcal{D}$ -distribution non commutative converge, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers celle d'une famille  $(d_j)_{j \in J}$  d'un espace de probabilités non commutatif  $\mathcal{D}$ -valué,
- (b)  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille de matrices aléatoires indépendantes dont chacune des  $d^2$  coordonnées, dans le découpage par blocs introduit précédemment, est invariante, en loi, par les actions à droite et à gauche du groupe unitaire,
- (c) pour tout  $i \in I$ , la  $\mathcal{D}$ -distribution non commutative de  $X_i$  converge en probabilité, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers celle d'un élément  $x_i$  d'un espace de probabilités non

commutatives  $\mathcal{D}$ -valué.

Le théorème suivant est l'analogue du théorème de liberté asymptotique de Voiculescu pour les matrices carrées, le théorème 9.6 de l'appendice.

**Théorème 1.10** *Sous les hypothèses précédentes, la famille*

$$(X_i)_{i \in I} \cup (D_j)_{j \in J}$$

*converge en  $\mathcal{D}$ -distribution, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers une famille  $(\tilde{x}_i)_{i \in I} \cup (\tilde{d}_j)_{j \in J}$  dont la  $\mathcal{D}$ -distribution est définie ainsi :*

- *on a les égalités en  $\mathcal{D}$ -distributions  $(\tilde{d}_j)_{j \in J} = (d_j)_{j \in J}$  et  $\tilde{x}_i = x_i$  pour tout  $i$ ,*
- *les  $\tilde{x}_i$  sont libres avec amalgamation sur  $\mathcal{D}$  entre eux et avec  $\{\tilde{d}_j; j \in J\}$ .*

On trouve une version un peu plus sophistiquée de ce théorème, autorisant la possibilité  $\rho_i = 0$  et plus de latitude quant au choix des matrices  $X_i$ , dans mon article [A5] (théorèmes 1.6 et 1.7). Une autre version a aussi été démontrée pour des matrices à entrées i.i.d. ou à bandes dans [A8]. Enfin, mentionnons qu'un résultat relevant de la même philosophie, pour des matrices à bandes, a été démontré par Shlyakhtenko dans [103].

Remarquons que ce théorème permet de caractériser les distributions non commutatives asymptotiques de matrices aléatoires rectangulaires. En effet, en choisissant les  $q_i$  de façon adéquate, on peut toujours plonger une matrice rectangulaire dans une matrice carrée plus grande, en l'étendant avec des zéros.

Disons pour finir quelques mots de la démonstration du théorème précédent. Elle se fait en considérant une matrice  $M$  qui s'écrit

$$M = M_1 \cdots M_p,$$

où chaque  $M_k$  s'écrit

$$M_k = P(X_i, X_i^*) \quad \text{ou} \quad M_k = P(D_j, j \in J),$$

avec  $P$  un polynôme non commutatif à coefficients dans  $\mathcal{D}$  tel que lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\varphi_{\mathcal{D},n}(M_k) \rightarrow 0 \tag{1.19}$$

et tel que deux matrices successives  $M_k, M_{k+1}$  sont toujours indépendantes. Il faut alors montrer que lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\varphi_{\mathcal{D},n}(M) \rightarrow 0. \tag{1.20}$$

La démonstration de la convergence (1.20) se fait en développant les traces normalisées apparaissant dans la définition de  $\varphi_{\mathcal{D},n}$  à l'équation (1.18) : on aboutit à une somme assez lourde, où l'exploitation de l'hypothèse (1.19) n'est pas évidente. Mais en s'y prenant patiemment, en mettant en évidence les structures combinatoires adéquates pour la quantification de l'ordre de chacun des termes de la somme (voir l'appendice de [A5]), on finit par y arriver...



# Chapitre 2

## La transition de phase BBP

### 2.1 Présentation du problème et cas des matrices de Wigner et de Wishart

#### 2.1.1 Contexte général : perturbations de rang fini de grandes matrices aléatoires

La question posée dans ce chapitre est la suivante :

*Comment une perturbation de rang fini agit-elle sur les valeurs propres extrêmes d'une grande matrice hermitienne ?*

Dans le cas où la matrice n'est pas supposée hermitienne, nous nous intéresserons à la même question quant aux valeurs singulières extrêmes. La question des vecteurs propres et des vecteurs singuliers sera aussi abordée.

Telle qu'elle est posée, la question est vague. Précisons la. On considère une matrice hermitienne  $X$  de taille  $n \times n$ ,  $n$  étant un paramètre laissé implicite et amené à tendre vers l'infini.

On perturbe  $X$  au moyen d'une matrice hermitienne  $P$  dont le rang  $r$  reste borné lorsque  $n$  tend vers l'infini. On définit donc

$$\tilde{X} := X + P \quad (\text{perturbation additive}),$$

ou

$$\tilde{X} := (I + P)X \quad (\text{perturbation multiplicative})$$

(dans le cas d'une perturbation multiplicative, la matrice  $X$  est supposée positive). On se placera dans un cadre où les normes d'opérateur de  $X$  et  $P$  restent bornées lorsque  $n$  tend vers l'infini. Quitte à extraire des sous-suites, on peut donc faire les deux hypothèses suivantes.

**Hypothèse 2.1** *La loi empirique sur les valeurs propres de  $X$  converge, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers une loi  $\mu$  à support compact.*

**Hypothèse 2.2** *Le rang  $r$  de  $P$  ne dépend pas de  $n$ .*

Quitte à extraire des sous-suites, encore une fois, on peut supposer que les  $r$  valeurs propres non nulles de  $P$  convergent. Afin de simplifier les notations, on fait alors l'hypothèse suivante<sup>1</sup>

**Hypothèse 2.3** *Les  $r$  valeurs propres non nulles*

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_r$$

*de  $P$  ne dépendent pas de  $n$ .*

Enfin, il faut faire une hypothèse quant aux positions relatives des sous-espaces propres de  $X$  et de  $P$ , les cas singuliers comme ceux où  $X$  et  $P$  sont codiagonalisables donnant bien entendu des résultats très particuliers.

**Hypothèse 2.4**  *$X$  et  $P$  sont aléatoires et indépendantes, de telle sorte que les vecteurs propres de  $X$  et  $P$  sont asymptotiquement en position générique<sup>2</sup>.*

Notons alors

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_1 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_n$$

les valeurs propres respectives de  $X$  et  $\tilde{X}$  (la dépendance en la dimension  $n$ , encore une fois, est implicite).

Soit  $r_0 \in \{0, \dots, r\}$  le nombre de valeurs propres  $> 0$  de  $P$  (qui a donc  $r - r_0$  valeurs propres  $< 0$ ). Les inégalités d'entrelacement de Weyl [2, Th. A.7] nous disent alors que, dans le cas d'une perturbation additive, pour tout  $i = r_0 + 1, \dots, n - (r - r_0)$ ,

$$\lambda_{i-r_0} \geq \tilde{\lambda}_i \geq \lambda_{i+(r-r_0)} \tag{2.1}$$

(pour des perturbations multiplicatives, des inégalités analogues peuvent aussi être montrées). On déduit facilement de (2.1) que la loi empirique sur le spectre de  $\tilde{X}$  converge vers

---

1. Dans les théorèmes relatifs à la *convergence* et aux *grandes déviations* des valeurs propres extrêmes de  $\tilde{X}$ , cette hypothèse pourra, de façon indolore, être remplacée par l'hypothèse plus faible que les valeurs propres non nulles de  $P$  convergent vers  $\theta_1, \dots, \theta_r$ . Néanmoins, dans les résultats relatifs aux *fluctuations* des valeurs propres extrêmes de  $\tilde{X}$  autour de leurs limites, une vitesse de convergence trop faible des valeurs propres non nulles de  $P$  vers  $\theta_1, \dots, \theta_r$  pourrait modifier les conclusions.

2. Ce que signifie précisément *être asymptotiquement en position générique* n'est pas précisé ici, mais nous donnerons des hypothèses précises plus loin.

la loi  $\mu$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , comme celle de  $X$ . La perturbation n'a pas modifié la répartition globale des valeurs propres. Il n'en est pas de même pour les valeurs propres extrêmes : nous allons voir que des  $|\theta_i|$  élevés donnent lieu à des déplacements importants de celles-ci, alors que pour des  $|\theta_i|$  faibles, elles resteront très proches de leurs positions initiales, si proches que leurs fluctuations autour de leurs limites restent du même ordre. Ces deux possibilités sont celles de la *transition de phase de Baik-Ben Arous-Péché*, mise en évidence par ces auteurs dans l'article séminal [7].

La figure 2.1 illustre ce phénomène et donne au lecteur une idée de certains des résultats présentés plus bas.

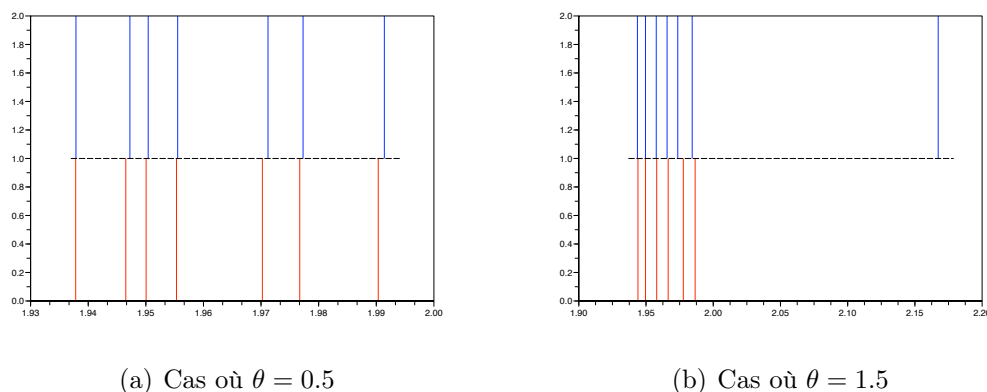


FIGURE 2.1 – **Comparaison entre les plus grandes valeurs propres d’une matrice GUE et celles de la même matrice déformée** : Les abscisses des segments verticaux correspondent aux plus grandes valeurs propres de  $X$ , matrice du GUE de dimension  $2 \cdot 10^3$  (sous la ligne en pointillés) ou à celles de  $\tilde{X} = X + \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$  (au dessus des pointillés). Image de gauche :  $\theta = 0.5$ . Image de droite :  $\theta = 1.5$ . Sur l’image de gauche, les valeurs propres de  $\tilde{X}$  sont très proches de celles de  $X$ . Sur celle de droite, on observe le même mimétisme entre les valeurs propres de  $\tilde{X}$  et celles de  $X$ , à un décalage près : la plus grande valeur propre de  $\tilde{X}$  vaut  $\approx 2.17$ .

## 2.1.2 Transition de phase de Baik-Ben Arous-Péché : les deux premiers exemples

### Matrices de Wigner déformées

Considérons une matrice de Wigner  $\sqrt[3]{\sqrt{n}X}$ . On sait alors que, sous certaines hypothèses quant aux coefficients de  $X$ , on a les convergences suivantes lorsque  $n \rightarrow \infty$  :

---

3. Une *matrice de Wigner* est une matrice aléatoire hermitienne ou symétrique réelle  $n \times n$  à entrées i.i.d. centrées de variance 1. Plus de précisions quant à cette définition et les résultats classiques (convergence vers la loi du demi-cercle, fluctuations des valeurs propres extrêmes,...) sont rappelés à l’encart 2.3 plus bas.



- la loi empirique sur le spectre de  $X$  tend vers la loi du demi-cercle de support  $[-2, 2]$ ,
- pour tout  $k \geq 1$  fixé, les  $k^{\text{èmes}}$  valeurs propres extrêmes  $\lambda_k$  et  $\lambda_{n+1-k}$  de  $X$  tendent vers 2 et  $-2$ ,
- pour tout  $k \geq 1$  fixé, le vecteur des  $k$  plus grandes valeurs propres de  $X$  a des fluctuations du type Tracy-Widom d'amplitude  $n^{-2/3}$  autour de leur limite 2 :  $n^{2/3}(\lambda_i - 2)_{i=1, \dots, k}$  converge en loi vers une loi de Tracy-Widom.

On définit alors, comme au dessus, la perturbation additive  $\tilde{X}$  de  $X$  par la formule

$$\tilde{X} = X + \text{diag}(\underbrace{\theta_1, \dots, \theta_{r_0}}_{>0}, \underbrace{\theta_{r_0+1}, \dots, \theta_r}_{<0}, \underbrace{0, \dots, \dots, 0}_{n-r \text{ val. pr. nulles}}),$$

où  $r, r_0$  et  $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_r$  sont indépendants de  $n$ .

On a alors le théorème suivant, portant sur le comportement asymptotique des plus grandes valeurs propres  $\tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots$  de  $\tilde{X}$ . Bien entendu, un résultat identique est valable pour les plus petites valeurs propres. Pour tout  $\theta > 0$ , on pose

$$\rho_\theta := \begin{cases} \theta + \frac{1}{\theta} & \text{si } \theta > 1, \\ 2 & \text{si } 0 < \theta \leq 1. \end{cases}$$

Notons que  $\theta \mapsto \rho_\theta$  est une fonction croissante et que  $\rho_\theta > 2$  dès que  $\theta > 1$ .

**Théorème 2.5** *Sous certaines hypothèses<sup>4</sup> sur les queues des distributions des coefficients de  $X$ , on a les convergences suivantes.*

(a) *Pour tout  $i = 1, \dots, r_0$  fixé,*

$$\tilde{\lambda}_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \rho_{\theta_i}$$

*et pour tout  $i > r_0$  fixé,*

$$\tilde{\lambda}_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2.$$

(b) *Si  $X$  est une matrice du GUE, pour tout  $i_0 = 1, \dots, r_0$  tel que  $\theta_{i_0} > 1$ , en posant*

$$J := \{i = 1, \dots, r_0; \theta_i = \theta_{i_0}\},$$

*à une constante multiplicative près, le vecteur*

$$\{\sqrt{n}(\tilde{\lambda}_i - \rho_{\theta_{i_0}}); i \in J\}$$

*converge en loi vers la loi du vecteur des valeurs propres ordonnées d'une matrice aléatoire du GUE de taille  $\#J$ .*

---

4. Les hypothèses sont du type décroissance sous-gaussienne ou inégalité de Poincaré (pour le cas "rang 1" du (c), les lois des coefficients doivent aussi être symétriques).

(c) Supposons  $\theta_1 \in (0, 1]$ . Si  $X$  est une matrice du GUE ou si la perturbation est de rang 1, alors les fluctuations de  $\tilde{\lambda}_1$  autour de sa limite 2 sont d'amplitude  $n^{-2/3}$  et du type Tracy-Widom si  $\theta_1 < 1$  ou Tracy-Widom généralisée si  $\theta_1 = 1$ .

La définition (partielle) des lois de Tracy-Widom est rappelée dans l'encart 2.4 plus bas. Les parties (a) et (b) du théorème sont dues à Pécché, Féral, Capitaine et Donati-Martin [92, 52, 33, 34]. La preuve de (c) est due à Pécché (cas GUE, [92, Th. 1.1]) et Pécché et Féral (cas rang 1, [52, Th. 1.4]). Dans le cas où  $X$  n'est pas du GUE et où  $\#J = 1$ , la convergence de (b) reste valable, mais la loi limite n'est plus gaussienne [33, Th. 2.2].

La partie (a) de ce théorème signifie que toute valeur propre  $\theta_i > 0$  de la matrice perturbante  $P := \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_r, 0, \dots, 0)$  donne lieu à une valeur propre  $\tilde{\lambda}_i$  de la matrice perturbée  $\tilde{X}$  qui sort du support  $[-2, 2]$  de la loi du demi-cercle si et seulement si  $\theta_i > 1$  : on a une *transition de phase* de seuil égal à 1.

Les parties (b) et (c) sont des expressions du *principe de répulsion* des valeurs propres.

En effet, la partie (b) peut s'interpréter comme suit. Une valeur propre  $\theta_{i_0} > 1$  de  $P$  de multiplicité 1 donnera lieu à une valeur propre  $\tilde{\lambda}_{i_0}$  de  $\tilde{X}$  qui est isolée hors de  $[-2, 2]$  aux fluctuations assez amples (en  $1/\sqrt{n}$ ) et gaussiennes. On verra plus tard (*c.f.* Théorème 2.9) que les fluctuations de la valeur propre  $\tilde{\lambda}_{i_1}$  associée à une autre valeur propre  $\theta_{i_1} > 1$  de  $P$  de multiplicité 1 sont indépendantes de celles de  $\tilde{\lambda}_{i_0}$ . Cependant, si  $\theta_{i_0}$  et  $\theta_{i_1}$  viennent à se rapprocher jusqu'à se confondre, les fluctuations jointes ne sont plus celles de deux variables gaussiennes indépendantes mais celles des valeurs propres d'une matrice gaussienne de taille 2, des variables en interaction répulsive.

La partie (c), quant à elle, signifie que si le  $\theta_{i_0}$  considéré au paragraphe précédent diminue jusqu'à passer sous le seuil 1, la valeur propre associée  $\tilde{\lambda}_{i_0}$  rentre dans le "bulk" du spectre, où elle n'est plus du tout isolée et l'amplitude de ses fluctuations, qui passe de  $1/\sqrt{n}$  à  $1/n^{2/3}$ , s'en voit drastiquement réduite. On verra même plus loin, au Théorème 2.9, que les fluctuations *jointes* de telles valeurs propres sont de type Tracy-Widom, ce qui appuie l'idée développée ci-dessus.

## Matrices de covariance empirique déformées

Considérons un vecteur gaussien centré  $G \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ , de matrice de covariance  $I$  ( $G$  dépend de  $n$ , mais encore une fois, la dépendance est laissée implicite). On se donne  $p$  copies indépendantes  $G_1, \dots, G_p$  de  $G$  et on définit la *matrice de covariance empirique*

(aussi appelée *matrice de Wishart*)

$$X := \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p G_k G_k^*.$$

On peut alors montrer que si  $n, p$  tendent vers l'infini de telle sorte que  $n/p \rightarrow c \in (0, 1]$ , alors :

- la loi empirique sur le spectre de  $X$  tend vers la loi de Marchenko-Pastur  $L_{\text{MP},c}$  introduite à la formule (1.13),
- pour tout  $k \geq 1$  fixé, les  $k^{\text{èmes}}$  valeurs propres extrêmes  $\lambda_k$  et  $\lambda_{n+1-k}$  de  $X$  tendent vers les bornes  $a = (1 - \sqrt{c})^2$  et  $b = (1 + \sqrt{c})^2$  du support de  $L_{\text{MP},c}$ ,
- pour tout  $k \geq 1$  fixé, la  $k^{\text{ème}}$  plus grande valeur propre  $\lambda_k$  de  $X$  a des fluctuations du type Tracy-Widom d'amplitude  $n^{-2/3}$  autour de sa limite  $b$  : pour une certaine constante  $\kappa$ ,  $\kappa n^{2/3}(\lambda_k - b)$  converge en loi vers une loi de Tracy-Widom réelle ou complexe.

Ces résultats peuvent se trouver dans respectivement [81, 56, 73].

On considère maintenant la matrice de covariance empirique

$$\tilde{X} := \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \tilde{G}_k \tilde{G}_k^*$$

d'un échantillon  $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_p$  de copies indépendantes d'un vecteur gaussien centré  $\tilde{G} \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ , dont la matrice de covariance  $\Sigma$  a pour spectre

$$\ell_1 \geq \dots \geq \ell_r > \underbrace{1 \geq \dots \geq 1}_{n-r \text{ val. pr. égales à } 1},$$

où  $r$  et les  $\ell_i$  ne dépendent pas de  $n$ . La matrice  $\tilde{X}$  est une perturbation multiplicative de  $X$  car on peut la réaliser via la formule  $\tilde{X} = \sqrt{I + P} X \sqrt{I + P}$ , où  $I + P = \Sigma$ .

Le théorème suivant a été montré par Baik, Ben Arous et Pécché dans le cas complexe [7] et par Paul dans le cas réel [91]. Rappelons que  $b$ , borne supérieure du support de  $L_{\text{MP},c}$ , est la limite de la valeur propre maximale  $\lambda_1$  de  $X$ .

**Théorème 2.6** *Les plus grandes valeurs propres de  $\tilde{X}$  satisfont la transition de phase suivante.*

Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , lorsque  $n, p \rightarrow \infty$  avec  $n/p \rightarrow c \in (0, 1]$ ,

$$\tilde{\lambda}_i \rightarrow \begin{cases} \ell_i(1 + \frac{c}{\ell_i - 1}) > b & \text{si } \ell_i > 1 + \sqrt{c}, \\ b & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Comme pour les matrices de Wigner déformées (c.f. Théorème 2.5), les fluctuations des valeurs propres de limites  $> b$  sont d'amplitude en  $1/\sqrt{n}$  et distribuées comme les valeurs propres de matrices du  $GO(U)E$  de taille finie, alors que les fluctuations des valeurs propres tendant vers  $b$  sont de type Tracy-Widom (éventuellement généralisée) et d'amplitude  $n^{-2/3}$ .

Notons que ce théorème peut s'interpréter comme relevant des statistiques (c'est d'ailleurs, semble-t-il, son origine [73]) : il donne les bases de la construction d'un *test* pour déceler un *signal* (les variables de variance  $\ell_i > 1 + \sqrt{c}$ ) au milieu d'un *bruit* (les variables de variance 1). Il permet de plus d'estimer de tels  $\ell_i$ . Par ailleurs, cette transition de phase s'interprète en termes de percolation de dernier passage (voir encart 2.2).

#### ENCART 2.2 – Transition BBP pour la percolation de dernier passage

Soient  $n \geq 1$ ,  $\pi_1, \dots, \pi_n > 0$  et, pour tout  $p \geq 1$ ,  $\hat{\pi}_p \in [0, +\infty)$ . On se donne :

- une matrice (à  $n$  lignes et une infinité de colonnes)  $[A_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j}$  à entrées indépendantes complexes telles que pour tout  $i, j$ , les parties réelles et imaginaires de  $A_{i,j}$  sont des gaussiennes centrées indépendantes de variance  $\frac{1}{2(\pi_i + \hat{\pi}_j)}$ ,
- une famille  $[W_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j}$ , indexée par  $\{1, \dots, n\} \times \{1, 2, 3, \dots\}$  de variables aléatoires indépendantes, telles que pour tout  $i, j$ ,  $W_{i,j}$  est de loi exponentielle de paramètre  $\pi_i + \hat{\pi}_j$ .

On note  $\lambda_1(n, p)$  la plus grande valeur propre de la matrice  $A(n, p)A(n, p)^*$ , où  $A(n, p) = [A_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  et on définit le *temps de dernier passage*

$$L(n, p) := \max_{\pi \in (1,1) \nearrow (n,p)} \sum_{(i,j) \in \pi} W_{i,j}, \quad (2.3)$$

où le max porte sur les chemins  $\pi$  sur  $\mathbb{Z}^2$  qui vont de  $(1, 1)$  à  $(n, p)$  avec des pas vers le haut et des pas vers la droite uniquement.

Alors on peut montrer l'identité en lois suivante.

**Théorème 2.7** *Les processus  $(\lambda_1(n, p))_{p \geq 1}$  et  $(L(n, p))_{p \geq 1}$  ont la même loi.*

Ce résultat a été démontré sous sa forme la plus aboutie, présentée ici, dans [44], mais des versions préliminaires partielles étaient déjà apparues dans [72, 7, 27]. On déduit alors des résultats sur la valeur propre maximale de matrices de Wishart que dans la cas où tous les  $W_{i,j}$  sont de paramètre 1, lorsque  $n, p \rightarrow \infty$  de telle sorte que  $n/p \rightarrow c \in [0, 1]$ , on a

$$\frac{1}{p} L(n, p) \rightarrow (1 + \sqrt{c})^2.$$

Multiplions maintenant les  $W_{i,j}$  de la première colonne par  $\ell \geq 1$  : les  $W_{i,j}$  sont donc des variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre  $1/\ell$  si  $i = 1$  et 1 sinon. Ainsi, les  $W_{i,j}$  de la première colonne ont tendance à être plus élevés et les chemins maximisants dans (2.3) auront un certain intérêt à rester sur la première colonne avant de partir à droite. Cette nouvelle tendance sera d'autant plus prégnante que  $\ell$  sera élevé. Le théorème 2.6 nous dit alors que pour  $n, p \gg 1$  tels que  $n/p \approx c \in [0, 1]$ ,

$$\frac{1}{p}L(n, p) \approx \begin{cases} \ell(1 + \frac{c}{\ell-1}) & \text{si } \ell > 1 + \sqrt{c}, \\ (1 + \sqrt{c})^2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui signifie que le “bonus” alloué à la première colonne modifie significativement  $L(n, p)$  si et seulement si  $\ell > 1 + \sqrt{c}$ . Il en résulte que les chemins maximisants resteront longtemps<sup>5</sup> sur la première colonne si et seulement si  $\ell > 1 + \sqrt{c}$ .

Ce résultat peut se retrouver de façon heuristique avec des calculs élémentaires en estimant le temps passé sur la première colonne [94, Sect. 3.2].

### ENCART 2.3 – Matrices de Wigner, du GOE et du GUE

Une *matrice de Wigner* est une matrice aléatoire symétrique réelle ou hermitienne dont les coefficients sont indépendants (modulo la symétrie), identiquement distribués sur la diagonale, identiquement distribués hors de la diagonale et dont les coefficients non diagonaux sont centrés et de variance 1. Une matrice du GOE est une matrice de Wigner symétrique réelle dont les coefficients sont gaussiens centrés, de variance 2 sur la diagonale. Une matrice du GUE est une matrice de Wigner hermitienne dont les coefficients diagonaux sont gaussiens centrés de variance 1 et dont les parties réelles et imaginaires des coefficients non diagonaux sont indépendantes, gaussiennes, centrés et de variance 1/2.

Considérons  $\sqrt{n}X = [x_{i,j}]_{i,j=1}^n$  une matrice de Wigner  $n \times n$  dont les lois des coefficients ne dépendent pas de  $n$ . Les résultats suivants, relatifs au comportement asymptotique de  $X$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , sont standards (voir respectivement [6, Th. 2.5], [6, Th. 5.2] et [107, 98]).

- La loi empirique sur les valeurs propres de  $X$  tend vers la loi, dite *loi du demi-cercle*, de support  $[-2, 2]$  et de densité  $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$ .
- Les valeurs propres extrêmes de  $X$  tendent vers  $-2$  et  $2$  si et seulement si  $\mathbb{E}[x_{1,1}^2]$  et  $\mathbb{E}[|x_{1,2}|^4]$  sont finis.
- Si les distributions des  $x_{i,j}$  sont symétriques et ont des décroissances sous-gaussiennes<sup>6</sup>, alors pour tout  $d \geq 1$  fixé, en notant

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$$

les  $d$  plus grandes valeurs propres de  $X$ , la loi du vecteur

$$\{n^{2/3}(\lambda_1 - 2), \dots, n^{2/3}(\lambda_d - 2)\}$$

tend vers la loi de Tracy-Widom (réelle ou complexe selon que  $X$  soit réelle ou complexe).

5. Ici, “longtemps” signifie “un temps proportionnel à  $p$ ”.

6. Une loi  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  est dite à *décroissance sous-gaussienne* si il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $t$  assez grand,  $\mu(\mathbb{R} \setminus [-t, t]) \leq e^{-t^\alpha}$ .

## ENCART 2.4 – Lois de Tracy-Widom

Le théorème classique de Fisher-Tippet-Gnedenko sur les statistiques des valeurs extrêmes nous dit que si  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a.i.i.d. de loi  $\mathcal{L}$ , le maximum  $\max\{X_1, \dots, X_n\}$  ne peut converger en loi (à transformation affine près), lorsque  $n \rightarrow \infty$ , que vers une masse de Dirac ou vers une des lois suivantes :

- une loi de Gumbel (par exemple lorsque  $\mathcal{L}$  est exponentielle ou gaussienne),
- une loi de Fréchet (lorsque  $\mathcal{L}$  est à queue lourde),
- une loi de Weibull (lorsque  $\mathcal{L}$  est à support borné).

C'est le comportement de la fonction de répartition de  $\mathcal{L}$  sur la droite de son support qui détermine les fluctuations asymptotiques de  $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ .

Au delà du cas où les  $X_i$  sont i.i.d., la présence de répulsion ou d'attraction entre les  $X_i$  peut changer complètement les fluctuations asymptotiques du maximum et donner lieu à des nouvelles lois limites. Par exemple, une classe de lois appelées *lois de Tracy-Widom* apparaît dans les contextes suivants :

- plus grande valeur propre d'une matrice de Wigner ou de Wishart à entrées sous-gaussiennes,
- particule la plus à droite d'un gaz de Coulomb,
- plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire,
- percolation de dernier passage à poids géométriques ou exponentiels en dimension 2,
- ASEP et TASEP,
- modèle de croissance polynucléaire (PNG).

Cette famille de lois dépend de deux paramètres : un entier  $d \geq 1$  et un réel  $\beta > 0$ . L'entier  $d$  représente la dimension du vecteur considéré et le réel  $\beta$  représente l'inverse d'une température. Par exemple, la loi des fluctuations des  $d$  plus grandes valeurs propres d'une matrice du GOE (resp. GUE) converge vers la loi de Tracy-Widom de paramètres  $d$  et  $\beta = 1$  (resp.  $\beta = 2$ ).

Décrivons succinctement la définition de la fonction de répartition  $F_\beta$  de la loi de Tracy-Widom de paramètres  $d = 1$  et  $\beta = 1$  ou  $2$  (des descriptions plus générales pourront être trouvées dans [114, 115, 96]).

La fonction  $F_2$  est définie par le déterminant de Fredholm

$$F_2(s) = \det(I - K_{\text{Ai}})_{L^2([s, +\infty))},$$

où  $K_{\text{Ai}}$  est le *noyau d'Airy*, défini par

$$K_{\text{Ai}}(x, y) = \frac{\text{Ai}(x) \text{Ai}'(y) - \text{Ai}'(x) \text{Ai}(y)}{x - y} = \int_0^{+\infty} \text{Ai}(x+t) \text{Ai}(y+t) dt.$$

La fonction  $F_2$  peut aussi être définie par

$$F_2(s) = \exp\left(-\int_s^{+\infty} (x-s)q^2(x)dx\right),$$

où  $q$  est la solution de l'équation différentielle  $q''(s) = sq(s) + 2q^3(s)$  (dite de *Painlevé II*) telle que  $q(x) \sim \text{Ai}(x)$  en  $+\infty$ .

La fonction  $F_1$  peut aussi se définir à partir de  $q$  via la formule

$$F_1(s) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_s^{+\infty} q(x) + (x-s)q^2(x)dx\right).$$

Chacun des modèles énumérés plus haut permet des calculs exacts, faisant apparaître une loi de Tracy-Widom directement (à l'exception des matrices non gaussiennes, que l'on compare simplement à des matrices gaussiennes). Il semble cependant probable que ces lois jouissent d'une plus forte universalité, leur permettant d'intervenir dans de nombreux contextes où un maximum de variables sujettes à répulsion est en jeu, même lorsque aucun calcul exact ne met en évidence un processus déterminantal.

## 2.2 Généralisation

Nous exposons ici des travaux développés récemment en collaboration avec Raj Rao d'une part, et avec Alice Guionnet et Mylène Maïda d'autre part. On généralise la transition de phase relative aux matrices de Wigner et de Wishart à des modèles de matrices plus généraux, dans le cadre présenté à la section 2.1.1. On présente aussi la transition de phase pour les vecteurs propres, abordée jusque là seulement pour les matrices de Wishart [91, 69, 86], ainsi que la question des perturbations de matrices non hermitiennes, elle aussi non abordée jusque là. Enfin, on relie les résultats obtenus aux probabilités libres.

### 2.2.1 Résultats principaux

#### Les modèles

On va se placer ici dans le cadre esquissé à la section 2.1.1 :  $X$  est une matrice aléatoire hermitienne déterministe  $n \times n$  dont la loi empirique sur les valeurs propres

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$$

converge, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers une loi à support compact  $\mu$ . Afin de situer les valeurs propres extrêmes de  $X$ , on fait aussi l'hypothèse<sup>7</sup> que

$$\lambda_1 \rightarrow b \quad \text{et} \quad \lambda_n \rightarrow a,$$

où  $a$  et  $b$  sont les bornes inférieure et supérieure du support de  $\mu$ . La matrice  $X$  est supposée déterministe, mais via le conditionnement, ce qui va suivre s'étend aisément au cas où  $X$

7. Sous une version plus faible de cette hypothèse, une partie importante de ce qui va suivre reste valable (*c.f.* [A14, Rem. 2.13]).

est aléatoire. On perturbe  $X$  au moyen d'une matrice hermitienne  $P$  dont le rang reste borné lorsque  $n$  grandit. On définit donc

$$\tilde{X} := X + P \quad (\text{perturbation additive}), \quad (2.4)$$

ou

$$\tilde{X} := (I + P)X \quad (\text{perturbation multiplicative}), \quad (2.5)$$

avec

$$P := \sum_{j=1}^r \theta_j u_j u_j^*. \quad (2.6)$$

Ici, l'entier  $r$  et les réels

$$\underbrace{\theta_1 \geq \dots \geq \theta_{r_0}}_{>0} \geq \underbrace{\theta_{r_0+1} \geq \dots \geq \theta_r}_{<0}$$

sont fixés indépendamment de  $n$ , et les vecteurs colonnes  $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^{n \times 1}$  sont :

- ou bien les vecteurs colonnes d'une matrice  $\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} g_{1,1} & \dots & g_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n,1} & \dots & g_{n,r} \end{bmatrix}$ , où les  $g_{i,j}$  sont des v.a.i.i.d. centrées de variance 1 satisfaisant une inégalité de log-Sobolev<sup>8</sup>,
- ou bien les orthonormalisés des vecteurs colonnes de la matrice des  $g_{i,j}$  ci-dessus.

Ces deux façons de construire  $P$  sont une formalisation de l'hypothèse 2.4 de la section 2.1.1. Elles définissent respectivement le *modèle à perturbations i.i.d.* et le *modèle à perturbations orthonormalisées*, qui sont en fait très proches, les  $u_j$  du modèle à perturbations i.i.d. étant quasiment orthonormés lorsque  $n \gg 1$ . Notons que dans le modèle à perturbations orthonormalisées, si les  $g_{i,j}$  sont gaussiennes, alors la famille  $(u_1, \dots, u_r)$  suit la loi uniforme sur la variété des familles de vecteurs orthonormaux.

Ajoutons une dernière hypothèse : dans le cas d'une perturbation multiplicative, la matrice  $X$  est supposée positive et  $\mu \neq \delta_0$ .

### Perturbations additives : $\tilde{X} = X + P$

Introduisons la transformée de Cauchy

$$G_\mu(z) := \int \frac{d\mu(x)}{z - x}$$

---

8. La définition précise d'une telle inégalité, vérifiée par exemple par les variables gaussiennes, pourra être trouvée dans [2]. Ici, nous nous servirons des inégalités de concentration en grande dimension que satisfont alors des vecteurs colonnes  $u_j$ .



de la loi empirique limite  $\mu$  de  $X$ , définie pour  $z$  hors du support de  $\mu$ , par exemple si  $z < a$  ou  $z > b$ . On va voir que les valeurs propres isolées de  $\tilde{X}$  lorsqu'elles existent, se situent à proximité des solutions des équations  $G_\mu(z) = \theta_i^{-1}$ .

En effet, en définissant (avec la convention  $\frac{1}{\pm\infty} = 0$ )

$$\bar{\theta} := \frac{1}{\lim_{z \downarrow b} G_\mu(z)} \geq 0, \quad \underline{\theta} := \frac{1}{\lim_{z \uparrow a} G_\mu(z)} \leq 0 \quad (2.7)$$

et, pour  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$\rho_\theta := \begin{cases} G_\mu^{-1}(1/\theta) & \text{si } \theta \in (-\infty, \underline{\theta}) \cup (\bar{\theta}, +\infty), \\ a & \text{si } \theta \in [\underline{\theta}, 0), \\ b & \text{si } \theta \in (0, \bar{\theta}], \end{cases} \quad (2.8)$$

on a le théorème suivant [A14, Th. 2.1], [A17, Th. 1.3].

**Théorème 2.8** *Pour tout  $i \in \{1, \dots, r_0\}$ , on a*

$$\tilde{\lambda}_i \longrightarrow \rho_{\theta_i} \quad (2.9)$$

et pour  $i \in \{r_0 + 1, \dots, r\}$ ,

$$\tilde{\lambda}_{n-r+i} \longrightarrow \rho_{\theta_i}. \quad (2.10)$$

De plus, pour tout  $i > r_0$  (resp. pour tout  $i \geq r - r_0$ ) fixé,

$$\tilde{\lambda}_i \longrightarrow b \quad (\text{resp. } \tilde{\lambda}_{n-i} \longrightarrow a). \quad (2.11)$$

De plus, les fluctuations des valeurs propres extrêmes de  $\tilde{X}$  sont données par le théorème suivant, qui compile les théorèmes 3.2, 3.4, 4.3, 4.4 et 4.5 de [A17]. La partie (1) concerne les valeurs propres se détachant de  $[a, b]$  et la partie (2) concerne les valeurs propres convergeant vers  $a$  ou  $b$ .

**Théorème 2.9** *Sous quelques hypothèses techniques supplémentaires, on a les résultats suivants.*

(1) Soient  $\underbrace{\alpha_1 > \dots > \alpha_{q_0}}_{>0} > \underbrace{\alpha_{q_0+1} > \dots > \alpha_q}_{<0}$  les valeurs différentes des  $\theta_i$  tels que  $\rho_{\theta_i} \notin \{a, b\}$  et pour tout  $j = 1, \dots, q$ , soit

$$I_j := \{i = 1, \dots, r; \theta_i = \alpha_j\}.$$

Alors la loi du vecteur

$$\left\{ \sqrt{n}(\tilde{\lambda}_i - \rho_{\alpha_j}); i \in I_j \right\}_{1 \leq j \leq q_0} \cup \left\{ \sqrt{n}(\tilde{\lambda}_{n-r+i} - \rho_{\alpha_j}); i \in I_j \right\}_{q_0+1 \leq j \leq q}$$

converge vers celle du vecteur

$$\{ \text{valeurs propres ordonnées de } c_{\alpha_j} M_j \}_{1 \leq j \leq q}, \quad (2.12)$$

où les matrices  $M_j$  sont des matrices aléatoires indépendantes du  $GO(U)E$   $k_j \times k_j$  et les  $c_{\alpha_j}$  sont des constantes ne dépendant que de  $\mu$  et de  $\alpha_j$  (voir [A17, Eq. (6)]).

(2) (2.1) Si aucun  $\theta_i$  n'est critique (i.e. égal à  $\underline{\theta}$  ou  $\bar{\theta}$ ), alors il existe  $\varepsilon > 0$  petit tel que avec grande probabilité, les valeurs propres de  $\tilde{X}$  convergeant vers  $a$  ou  $b$  sont à distance au plus  $n^{-1+\varepsilon}$  d'une valeur propre de  $X$ .

(2.2) Si de plus on est dans le modèle à perturbations i.i.d. ou bien si  $r = 1$ , alors en notant  $p_+$  et  $p_-$  le nombre de valeurs propres de  $\tilde{X}$  de limite respectivement  $> b$  et  $< a$ , pour tout  $i \geq 1$  fixé,

$$n^{1-\varepsilon}(\tilde{\lambda}_{p_++i} - \lambda_i) \longrightarrow 0 \quad (2.13)$$

et

$$n^{1-\varepsilon}(\tilde{\lambda}_{n+1-(p_-+i)} - \lambda_{n+1-i}) \longrightarrow 0. \quad (2.14)$$

Précisons quelque peu les hypothèses techniques supplémentaires nécessaires ici. Les hypothèses supplémentaires nécessaires à la démonstration de (1) portent sur la vitesse de convergence de la loi spectrale empirique de  $X$  vers  $\mu$  (qui doit être  $\ll n^{-1/2}$ ) ainsi que sur le quatrième cumulant des  $g_{i,j}$ . Les hypothèses supplémentaires nécessaires à la démonstration de (2) sont relatives aux espacements des valeurs propres extrêmes de  $X$ . Toutes ces hypothèses sont vérifiées presque sûrement lorsque  $X$  est aléatoire et choisie selon un modèle matriciel standard (Wigner, Wishart, gaz de Coulomb,...). De plus, dans ces modèles, le  $\varepsilon$  du (2) est assez petit pour que les  $\tilde{\lambda}_i$  convergeant vers  $a$  ou  $b$  héritent des fluctuations de Tracy-Widom auxquelles sont sujets les  $\lambda_i$  (voir la partie "Exemples" de [A17]).

Plutôt que de détailler ces exemples, rendons les deux théorèmes précédents plus concrets en montrant en quoi ils permettent d'expliquer la figure 2.1 présentée au début de ce chapitre.

On y perturbe une matrice de GUE par une matrice  $P$  de rang 1 dont on note  $\theta$  l'unique valeur propre non nulle. L'invariance de la loi de  $X$  par conjugaison assure que l'on est, à conditionnement près, dans le modèle orthonormalisé avec des  $g_{i,j}$  gaussiennes. La formule

de la transformée de Cauchy de la loi du demi-cercle nous indique que le seuil  $\bar{\theta}$  de la transition de phase vaut 1 et que la formule de  $\rho_\theta$  est  $\theta + \frac{1}{\theta}$  lorsque  $\theta > b = 2$ .

- Dans l'image de gauche de la figure 2.1,  $\theta = 0.5 < \bar{\theta}$  et effectivement, comme indiqué par (2.9),  $\tilde{\lambda}_1 \approx b = 2$ , alors que dans l'image de droite,  $\theta = 1.5 > \bar{\theta}$ , ce qui se traduit bien par  $\tilde{\lambda}_1 \approx \rho_\theta = 2.17$  et  $\tilde{\lambda}_2 \approx b$  conformément à (2.9) et (2.11).

- De plus, dans l'image de gauche on a, pour tout  $i$ ,  $\tilde{\lambda}_i \approx \lambda_i$ , avec des écarts

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| \ll \text{écart de } \lambda_i \text{ à sa limite } 2.$$

De même, dans l'image de droite, pour tout  $i$ ,  $\tilde{\lambda}_{i+1} \approx \lambda_i$ , avec des écarts

$$|\tilde{\lambda}_{i+1} - \lambda_i| \ll \text{écart de } \lambda_i \text{ à sa limite } 2.$$

Ces deux observations sont conformes à (2.13).

- Enfin, ici,  $n = 2.10^3$ , et l'équation (6) de [A17] donne la formule du  $c_\alpha$  de (2.12) :  $c_\alpha^2 = 1 - \alpha^{-2}$ . Dans l'image de droite, on a  $\tilde{\lambda}_1 \approx 2.167$ , ce qui donne  $\frac{\sqrt{n}(\tilde{\lambda}_1 - \rho_\theta)}{c_\theta} \approx 0.040$ , valeur raisonnable pour une variable gaussienne standard.

Donnons maintenant une idée de la démonstration de ces théorèmes. Pour tout  $z$  hors du spectre de  $X$ , on a

$$\det(z - \tilde{X}) = \det(z - X - P) = \det(z - X) \det(1 - (z - X)^{-1}P).$$

De là, en utilisant la forme de  $P$  donnée en (2.6) ainsi que l'identité  $\det(1 + AB) = \det(1 + BA)$ , valable même lorsque les matrices  $A, B$  ne sont pas carrées, on caractérise les valeurs propres de  $\tilde{X}$  qui ne sont pas dans le spectre de  $X$  de la façon suivante : ce sont les  $z$  tels que

$$\det \left( \begin{bmatrix} \theta_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_r^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1^*(z - X)^{-1}u_1 & \cdots & u_1^*(z - X)^{-1}u_r \\ \vdots & & \vdots \\ u_r^*(z - X)^{-1}u_1 & \cdots & u_r^*(z - X)^{-1}u_r \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (2.15)$$

On caractérise ainsi les valeurs propres de  $\tilde{X}$  hors du support de  $\mu$  via le déterminant d'une matrice  $r \times r$  et non  $n \times n$ .

Cette caractérisation suffit à prouver le théorème 2.8. En effet, il y est nécessaire de maîtriser l'équation (2.15) pour  $z$  à une distance de  $[a, b]$  d'ordre 1, ce qui peut facilement se faire avec des inégalités de concentration comme le théorème de Hanson-Wright [67]. Elles impliquent que pour  $n \gg 1$ ,

$$\begin{bmatrix} u_1^*(z - X)^{-1}u_1 & \cdots & u_1^*(z - X)^{-1}u_r \\ \vdots & & \vdots \\ u_r^*(z - X)^{-1}u_1 & \cdots & u_r^*(z - X)^{-1}u_r \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} G_\mu(z) & & \\ & \ddots & \\ & & G_\mu(z) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

d'où la caractérisation des limites des valeurs propres isolées de  $\tilde{X}$  comme les solutions des équations  $G_\mu(z) = \theta_i^{-1}$ .

Expliquons maintenant comment les matrices du GO(U)E de la partie (1) du théorème 2.9 apparaissent. Pour situer les choses, supposons par exemple que

$$\theta_1 = \theta_2 > \theta_3 \geq \theta_4 \geq \dots \geq \theta_r$$

et que  $\theta_1 > \bar{\theta}$ , si bien que  $G_\mu(\rho_{\alpha_1}) = \frac{1}{\theta_1} = \frac{1}{\theta_2}$ . Afin de déterminer les fluctuations du vecteur  $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$  autour de sa limite  $(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_1})$ , on va donner un développement limité du terme de gauche de (2.15) pour  $z = \rho_{\alpha_1} + \frac{x}{\sqrt{n}}$ . C'est le théorème central limite et une analyse fine du processus d'orthonormalisation qui permettent de pousser plus loin l'approximation de (2.16) et donnent, pour  $z = \rho_{\alpha_1} + \frac{x}{\sqrt{n}}$ ,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \theta_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \theta_r^{-1} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1^*(z-X)^{-1}u_1 & \cdots & u_1^*(z-X)^{-1}u_r \\ \vdots & & \vdots \\ u_r^*(z-X)^{-1}u_1 & \cdots & u_r^*(z-X)^{-1}u_r \end{bmatrix} \\ & \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}}(x-N) & -\frac{1}{\sqrt{n}}N'' & & & \\ -\frac{1}{\sqrt{n}}N'' & \frac{1}{\sqrt{n}}(x-N') & & & \\ & & \theta_3^{-1} - \theta_1^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \theta_r^{-1} - \theta_1^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où la matrice  $\begin{bmatrix} N & N'' \\ N'' & N' \end{bmatrix}$  est une matrice du  $GO(U)E$ . En prenant le déterminant de ces matrices, on en déduit, à une approximation près, que  $z = \rho_{\alpha_1} + \frac{x}{\sqrt{n}}$  est solution de l'équation (2.15) si et seulement si  $x$  est solution de l'équation

$$\det \left( x - \begin{bmatrix} N & N'' \\ N'' & N' \end{bmatrix} \right) = 0.$$

La partie (2) du théorème 2.9, quant à elle, se montre essentiellement en montrant que lorsque aucun  $\theta_i$  n'est critique, pour  $z$  proche de  $a$  ou  $b$ , l'équation (2.15) ne peut être satisfaite que si  $z$  est très proche d'un des  $\lambda_i$ . Pour situer les choses, supposons que  $r = 1$ , considérons le modèle à perturbations i.i.d. réelles d'une matrice de Wigner et plaçons nous au voisinage de  $b$ . On veut montrer que, selon que l'on ait  $\theta_1 < \bar{\theta}$  ou  $\theta_1 > \bar{\theta}$ , on a

$$\tilde{\lambda}_1 \approx \lambda_1, \tilde{\lambda}_2 \approx \lambda_2, \tilde{\lambda}_3 \approx \lambda_3, \dots$$

ou

$$\tilde{\lambda}_2 \approx \lambda_1, \tilde{\lambda}_3 \approx \lambda_2, \tilde{\lambda}_4 \approx \lambda_3, \dots,$$

le symbole  $\approx$  signifiant ici *égal à  $n^{-2/3-\varepsilon}$  près*, avec  $\varepsilon > 0$  petit.

Dans ce cas particulier où  $r = 1$ , l'équation (2.15) s'écrit

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{g_j^2}{z - \lambda_j} = \frac{1}{\theta_1}. \quad (2.17)$$

Le membre de gauche de cette équation étant une fonction décroissante de  $z$ , de limite  $+\infty$  à droite de chaque  $\lambda_j$  et  $-\infty$  à gauche de chaque  $\lambda_j$ , on voit que l'on a exactement une solution dans chaque intervalle ouvert  $(\lambda_{j+1}, \lambda_j)$ , ce que les inégalités de Weyl nous disaient déjà, au cas d'égalité près. Si  $\theta_1 > 0$  (resp.  $\theta_1 < 0$ ), comme le membre de gauche de (2.17) s'annule en  $\pm\infty$ , on sait que l'on a de plus une solution  $> \lambda_1$  (resp.  $< \lambda_n$ ). Ainsi, on a

$$\tilde{\lambda}_1 > \lambda_1 > \tilde{\lambda}_2 > \lambda_2 > \dots \dots \quad (\text{resp. } \lambda_1 > \tilde{\lambda}_1 > \lambda_2 > \tilde{\lambda}_2 > \dots \dots).$$

Concentrons nous par exemple sur l'intervalle  $[\lambda_2, \lambda_1]$  et montrons que, selon que l'on soit dans une des deux alternatives

$$0 < \theta_1 < \bar{\theta} \quad \text{ou} \quad \theta_1 \in \mathbb{R} \setminus [0, \bar{\theta}], \quad (2.18)$$

la solution de l'équation (2.17) dans cet intervalle se situe respectivement à droite ou à gauche du sous-intervalle  $[\lambda_2 + \frac{1}{n^{2/3+\varepsilon}}, \lambda_1 - \frac{1}{n^{2/3+\varepsilon}}]$ . Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que sur l'intervalle  $[\lambda_2 + \frac{1}{n^{2/3+\varepsilon}}, \lambda_1 - \frac{1}{n^{2/3+\varepsilon}}]$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{g_j^2}{z - \lambda_j} \approx \frac{1}{\bar{\theta}}. \quad (2.19)$$

En effet, selon celle des deux alternatives de (2.18) qui est vérifiée, on a respectivement

$$\frac{1}{\theta_1} > \frac{1}{\bar{\theta}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\theta_1} < \frac{1}{\bar{\theta}}$$

et la décroissance de la fonction  $z \mapsto \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{g_j^2}{z - \lambda_j}$  permet alors de situer la solution de l'équation (2.17).

Expliquons donc rapidement comment on obtient l'approximation (2.19). Soit  $z$  tel que

$$\lambda_2 + n^{-2/3-\varepsilon} \leq z \leq \lambda_1 - n^{-2/3-\varepsilon} \quad (2.20)$$

avec  $\varepsilon > 0$  petit. On découpe le terme de gauche de (2.19) de la façon suivante :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{g_j^2}{z - \lambda_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{g_j^2}{z - \lambda_j} + \frac{1}{n} \sum_{j=m+1}^n \frac{g_j^2}{z - \lambda_j}. \quad (2.21)$$

Tout d'abord, lorsque l'on a  $m \gg 1$  et  $n - m \gg 1$ , un résultat de concentration de la mesure du type Hanson-Wright [67] nous permet de remplacer les  $g_j^2$  par 1 dans les deux sommes ci-dessus :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{g_j^2}{z - \lambda_j} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{1}{z - \lambda_j} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{j=m+1}^n \frac{g_j^2}{z - \lambda_j} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{z - \lambda_j}. \quad (2.22)$$

Pour  $z$  satisfaisant (2.20), en prenant  $m = n^{1/3-\varepsilon'}$ , avec  $\varepsilon' > \varepsilon$  petit, on se défait des effets de bords liés aux premiers  $\lambda_j$ , et on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{z - \lambda_j} \approx \lim_{z \downarrow b} G_\mu(z) = \frac{1}{\bar{\theta}}. \quad (2.23)$$

L'équation (2.20) nous donne par ailleurs

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{1}{z - \lambda_j} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n^{-2/3-\varepsilon}} = n^{\varepsilon-\varepsilon'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.24)$$

En joignant (2.21), (2.22), (2.23) et (2.24), on voit que pour  $z \in [\lambda_2 + \frac{1}{n^{2/3+\varepsilon}}, \lambda_1 - \frac{1}{n^{2/3+\varepsilon}}]$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{g_j^2}{z - \lambda_j} \approx \frac{1}{\bar{\theta}}.$$

## Vecteurs propres

Présentons maintenant les résultats relatifs aux vecteurs propres. Pour  $i \in \{1, \dots, r_0\}$ , en notant  $\tilde{u}_i$  un vecteur propre unitaire de  $\tilde{X}$  associé à  $\tilde{\lambda}_i$ , le produit scalaire

$$\langle \tilde{u}_i, u_i \rangle$$

contient une partie de la “trace” (au sens courant du terme) que la déformation  $P$  a laissé sur  $X$ . On va voir que ce produit scalaire satisfait la même transition de phase, exprimant le fait que pour chaque  $\theta_i$  au delà du seuil, non seulement  $\tilde{X}$  a une valeur propre qui sort de  $[a, b]$ , mais en plus, le vecteur propre associé garde une composante strictement positive selon  $u_i$ , ce qui ne se produit pas si  $\theta_i$  est sous le seuil.

Le théorème suivant, issu de mon travail avec Raj Rao [A14, Th. 2.2 et 2.3], formalise ces idées. Il a été démontré seulement pour un modèle à perturbations orthonormalisées, mais s'étend aisément au cadre général utilisé dans cette section. Pour  $F$  sous espace d'un espace de Hilbert et  $x$  un vecteur de cet espace, on note  $|\langle x, F \rangle|$  la norme de la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ .

**Théorème 2.10** (1) Soit  $i_0$  tel que  $\theta_{i_0} > \bar{\theta}$  et  $\tilde{u}_{i_0}$  un vecteur propre unitaire de  $\tilde{X}$  associé à  $\tilde{\lambda}_{i_0}$ . Alors lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$|\langle \tilde{u}_{i_0}, \text{Span}\{u_i; \theta_i = \theta_{i_0}\} \rangle|^2 \rightarrow \frac{-1}{\theta_{i_0}^2 G'_\mu(\rho_{\theta_{i_0}})} > 0 \quad (2.25)$$

et

$$|\langle \tilde{u}_{i_0}, \text{Span}\{u_i; \theta_i \neq \theta_{i_0}\} \rangle| \rightarrow 0.$$

(2) On se place dans le cas où  $r = 1$  et où la seule valeur propre non nulle  $\theta$  de  $P$  est sous le seuil  $\bar{\theta}$ . On suppose de plus que  $\lim_{z \downarrow b} G'_\mu(z) = -\infty$ , comme c'est le cas dans la plupart des modèles classiques. Soit  $\tilde{u}$  un vecteur propre unitaire de  $\tilde{X}$  associé à  $\tilde{\lambda}_1$ . Alors

$$|\langle \tilde{u}, \ker(\theta - P) \rangle| \longrightarrow 0.$$

### Perturbations multiplicatives : $\tilde{X} = (I + P)X$

Dans le cas de perturbations multiplicatives, tout ce qui a été vu pour des perturbations additives reste valable, à la fois pour les plus grandes valeurs propres et pour les plus petites, en remplaçant la transformée de Cauchy  $G_\mu(z)$  par la  $T$ -transformée

$$T_\mu(z) := \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{x}{z - x} d\mu(x)$$

(seule la formule (2.25) est modifiée, voir [A14, Th. 2.8]). Les matrices de covariance empiriques constituent bien entendu l'exemple d'application standard, à ceci près que les hypothèses nécessaires aux résultats de fluctuations n'ont pas été vérifiées par les auteurs pour les plus petites valeurs propres de telles matrices (par contre, elles l'ont été pour les plus grandes valeurs propres).

La clé des démonstrations est un analogue de l'équation (2.15) : un réel  $z$  hors du spectre de  $X$  est une valeur propre de  $\tilde{X}$  si et seulement si

$$\det \left( \begin{bmatrix} \theta_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_r^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1^* X(z - X)^{-1} u_1 & \cdots & u_1^* X(z - X)^{-1} u_r \\ \vdots & & \vdots \\ u_r^* X(z - X)^{-1} u_1 & \cdots & u_r^* X(z - X)^{-1} u_r \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (2.26)$$

### 2.2.2 Valeurs singulières de matrices non hermitiennes déformées

L'avantage de la méthode reposant sur l'équation (2.15) est qu'elle s'adapte très bien à d'autres modèles, comme on l'a vu ci-dessus avec les perturbations multiplicatives. Dans l'article [A15] co-écrit avec Raj Rao, nous démontrons que les valeurs singulières extrêmes de matrices non hermitiennes, éventuellement rectangulaires, satisfont le même genre de transition de phase lorsque les matrices sont soumises à des perturbations de rang fini.

Le modèle est analogue à celui présenté dans la section 2.2.1, sauf que  $X$  est une matrice  $n \times p$ , avec  $n, p \longrightarrow \infty$  de telle sorte que  $n/p \longrightarrow c \in [0, 1]$ . L'hypothèse relative à la convergence de la loi spectrale empirique de  $X$  vers  $\mu$  est remplacée par la convergence de la *loi empirique sur les valeurs singulières* de  $X$  vers une loi à support compact  $\mu$  et

l'hypothèse relative à la convergence des valeurs propres extrêmes de  $X$  vers les bornes  $a$  et  $b$  du support de  $\mu$  est remplacée par la convergence des *valeurs singulières extrêmes* de  $X$  vers  $a$  et  $b$ . Enfin,  $P$  est définie par la formule

$$P = \sum_{j=1}^r \theta_j u_j v_j^*,$$

où les  $u_j$  sont des vecteurs colonnes  $n \times 1$ , les  $v_j$  des vecteurs colonnes  $p \times 1$  et les familles  $\{u_j; j = 1, \dots, r\}$  et  $\{v_j; j = 1, \dots, r\}$  sont indépendantes, chacune définie selon un des deux procédés présentés plus haut : on a donc là aussi un modèle à *perturbations i.i.d.* et un autre à *perturbations orthonormalisées*, ces deux modèles étant à de multiples égards presque équivalents en grande dimension.

On introduit alors la transformation intégrale

$$D_\mu(z) = \left[ \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{z}{z^2 - t^2} d\mu(z) \right] \times \left[ \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{z}{z^2 - t^2} d\tilde{\mu}(z) \right], \quad (2.27)$$

où  $\tilde{\mu} = c\mu + (1 - c)\delta_0$ . Les résultats de l'article [A15] montrent que les valeurs et vecteurs singuliers extrêmes de  $\tilde{X}$  satisfont le même genre de transition de phase que celles rencontrées précédemment. Cependant, les résultats ne sont pas aussi étendus que ceux présentés ci-dessus. Lorsque  $c < 1$ , certaines difficultés techniques restreignent ces résultats aux plus grandes valeurs singulières. Par ailleurs, les fluctuations des valeurs singulières tendant vers  $a$  ou  $b$  n'ont pas encore été étudiées.

Par exemple, si  $X$  est une matrice  $n \times p$  à entrées i.i.d. gaussiennes de variance  $1/p$ , la loi empirique sur ses valeurs singulières converge vers la loi

$$\frac{\sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}}{\pi c x} \mathbb{1}_{x \in [a, b]} dx,$$

où  $a = 1 - \sqrt{c}$ ,  $b = 1 + \sqrt{c}$ . Dans ce cas, chaque  $\theta_i > c^{1/4}$  ajoute à  $\tilde{X}$  une valeur singulière de limite située hors du support de  $\mu$ , égale à

$$\frac{\sqrt{(1 + \theta_i^2)(c + \theta_i^2)}}{|\theta_i|},$$

alors que les  $\theta_i$  qui sont  $\leq c^{1/4}$  n'ont pas d'influence sur les valeurs singulières extrêmes.

Autre exemple, celui où  $X$  est une matrice  $n \times n$  unitaire ou orthogonale distribuée selon la mesure de Haar. Dans ce cas, toutes les valeurs singulières de  $X$  valent 1, et chaque  $\theta_i$  ajoute à  $\tilde{X}$  une valeur singulière à droite de 1 dont la limite est

$$\frac{\theta_i + \sqrt{\theta_i^2 + 4}}{2}$$



ainsi qu'une valeur singulière à gauche de 1 dont la limite est

$$\frac{-\theta_i + \sqrt{\theta_i^2 + 4}}{2}.$$

Plus de détails sur ces deux exemples sont donnés à la Section 3 de [A15].

Enfin, mentionnons, avant de passer à la suite, que les résultats des deux articles [A14, A15] ont servi de base pour la mise en place d'un algorithme d'estimation de paramètres à Hachem, Loubaton, Mestre, Najim et Vallet [66].

### 2.2.3 Lien avec les probabilités libres

Il est à noter que les trois transitions de phase mises en évidence ici (celle relative aux perturbations additives de matrices hermitiennes, celle relative aux perturbations multiplicatives de matrices hermitiennes et enfin celle relative aux perturbations additives de matrices non hermitiennes, éventuellement rectangulaires) sont toutes gouvernées par des fonctions jouant un rôle dans les convolutions respectives  $\boxplus$ ,  $\boxtimes$  et  $\boxplus_c$ . En effet,

- la fonction  $G_\mu^{-1}$  est liée à la  $R$ -transformée  $R_\mu$  de  $\mu$  par la formule

$$G_\mu^{-1}(z) = R_\mu(z) + \frac{1}{z},$$

- la fonction  $T_\mu^{-1}$  est liée à la  $S$ -transformée  $S_\mu$  de  $\mu$  par la formule

$$T_\mu^{-1}(z) = \frac{z + 1}{zS_\mu(z)},$$

- la fonction  $D_\mu^{-1}$  est liée à la  $R$ -transformée rectangulaire de rapport  $c$  de  $\mu$  par la formule

$$(D_\mu^{-1}(z))^2 = \frac{(cC_\mu^{(c)}(z) + 1)(C_\mu^{(c)}(z) + 1)}{z}.$$

Il semble ainsi que les probabilités libres soient au coeur de cette transition de phase. Cela peut paraître surprenant, car jusqu'ici, le lien entre probabilités libres et matrices aléatoires, si puissant soit-il, s'était toujours limité à des questions *macroscopiques*, *i.e.* concernant l'ensemble du spectre, ne permettant pas d'aborder de question *microscopique*, par exemple concernant la position de valeurs propres isolées.

On peut expliquer ces coïncidences. Le spectre d'une grande matrice  $X$  déformée par une matrice de rang fini  $P$  de spectre

$$\theta_1, \dots, \theta_r, \underbrace{0, \dots, \dots, 0}_{n-r \text{ val. pr. nulles}}$$

peut se comprendre comme la limite, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de la convolution libre de la loi spectrale de  $X$  avec la loi

$$(1 - \varepsilon)\delta_0 + \varepsilon \frac{\delta_{\theta_1} + \cdots + \delta_{\theta_r}}{r}.$$

Considérons par exemple le cas d'une perturbation additive d'une matrice hermitienne  $X$ , et pour simplifier supposons que  $r = 1$  et notons  $\theta = \theta_1$ . Lorsque la dimension  $n$  est grande, loi spectrale empirique de  $\tilde{X}$  est proche de

$$\mu_\varepsilon := \mu \boxplus ((1 - \varepsilon)\delta_0 + \varepsilon\delta_\theta) \quad (2.28)$$

avec  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ .

**Lemme 2.11** *Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la loi  $\mu_\varepsilon$  admet un développement limité*

$$\mu_\varepsilon = \mu + \varepsilon \mathbf{m} + o(\varepsilon),$$

où  $\mathbf{m}$  est une mesure signée de masse totale nulle qui vérifie la transition de phase suivante (avec les notations introduites en (2.7) et (2.8)) :

- si  $\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ , le support de  $\mathbf{m}$  est contenu dans celui de  $\mu$ ,
- si  $\theta < \underline{\theta}$  ou  $\theta > \bar{\theta}$ ,  $\mathbf{m}$  s'écrit comme la somme d'une mesure de support contenu dans celui de  $\mu$  et d'une masse de Dirac en  $\rho_\theta$ , de poids 1.

Avant de donner la preuve de ce lemme, remarquons qu'il donne une explication à la transition de phase BBP en ce qui concerne les *positions* des valeurs propres extrêmes (la question des *fluctuations* est plus délicate, mais on verra plus tard qu'on peut néanmoins en dire quelque chose). En effet, modulo l'approximation de la loi spectrale empirique de  $\tilde{X}$  par  $\mu_\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 1/n$ , il permet de comprendre l'apparition, dans cette loi spectrale, d'une masse de Dirac de poids  $1/n$  (i.e. d'une valeur propre de  $\tilde{X}$ ) en  $\rho_\theta$  lorsque  $\theta < \underline{\theta}$  ou  $\theta > \bar{\theta}$ .

*Preuve du lemme 2.11.* Par [A7, Lem. 2.11] et [8, Lem. 2.17], prouver ce lemme revient à montrer que la transformée de Cauchy de  $\mu_\varepsilon$  admet le développement limité

$$G_{\mu_\varepsilon}(z) = G_\mu(z) + \varepsilon \mathbf{g}(z) + o(\varepsilon),$$

où  $\mathbf{g}$  est une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

- si  $\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ ,  $\mathbf{g}$  est analytique sur le complémentaire du support de  $\mu$  avec des valeurs réelles sur la droite réelle,
- si  $\theta < \underline{\theta}$  ou  $\theta > \bar{\theta}$ ,  $\mathbf{g}$  est méromorphe sur le complémentaire du support de  $\mu$  avec des valeurs réelles sur la droite réelle et un unique pôle, situé en  $\rho_\theta$  et de résidu 1.

La  $R$ -transformée de  $\mu_\varepsilon$  est  $R_\mu + R_{(1-\varepsilon)\delta_0 + \varepsilon\delta_\theta}$ . La fonction  $R_{(1-\varepsilon)\delta_0 + \varepsilon\delta_\theta}$  se calcule et admet le développement limité

$$R_{(1-\varepsilon)\delta_0 + \varepsilon\delta_\theta}(z) = \frac{\varepsilon\theta}{1 - \theta z} + o(\varepsilon),$$

d'où

$$R_{\mu_\varepsilon} = R_\mu(z) + \frac{\varepsilon\theta}{1 - \theta z} + o(\varepsilon).$$

Par la formule  $G_{\mu_\varepsilon}^{-1}(z) = R_{\mu_\varepsilon}(z) + \frac{1}{z}$ , on en déduit

$$G_{\mu_\varepsilon}(z) = G_\mu(z) - \varepsilon \frac{\theta G'_\mu(z)}{1 - \theta G_\mu(z)} + o(\varepsilon),$$

ce qui permet de conclure immédiatement.  $\square$

La théorie de la *liberté de second ordre*, développée essentiellement par Mingo, Nica, Speicher, Śniady et Collins [83, 84, 85, 40] permet de comprendre les fluctuations asymptotiques de la loi spectrale empirique de sommes ou de produits de matrices aléatoires. Cette théorie donne une explication heuristique de l'apparition de la loi des valeurs propres de matrices du GO(U)E de taille finie dans les fluctuations asymptotiques des valeurs propres de  $\tilde{X}$  hors du support de  $\mu$ . Nous ne détaillons pas cette explication ici, mais elle repose sur l'approche déjà utilisée au dessus.

Par ailleurs, dans les récentes prépublications [35, 30], Capitaine, Donati-Martin, Féral et Février ont prouvé que dans le cas où  $X$  s'écrit comme la somme d'une matrice de Wigner ou de Wishart et d'une matrice déterministe, les transitions de phase présentées aux théorèmes 2.8 et 2.10 peuvent se comprendre via la *subordination* (présentée dans ce texte à la section 3.3.1).

Par contre, à ma connaissance, la partie (2) du théorème 2.9 (concernant les fluctuations des valeurs propres tendant vers  $a$  ou  $b$ ) ne trouvent pas d'explication dans la théorie des probabilités libres.

## 2.3 Grandes déviations pour les modèles de matrices déformés

Les principes de grandes déviations pour les matrices aléatoires sont relativement rares. Les premiers sont ceux de Ben Arous et Guionnet [11] pour les matrices du GO(U)E (qui se généralisent naturellement aux gaz de Coulomb [51, 2]) et ceux de Ben Arous et Zeitouni pour les matrices gaussiennes non symétriques [13]. Durant la même période, Hiai et Petz ont aussi étudié les grandes déviations pour les matrices de Wishart et les matrices

unitaires distribuées selon la mesure de Haar [68]. Cabanal-Duvillard, Guionnet, Zeitouni, Capitaine et Biane, dans [29, 63, 23], ont établi des PGD pour des processus matriciels, liés aux intégrales sphériques et à l'entropie libre de Voiculescu. Par ailleurs, un PGD pour la plus grande valeur propre d'une matrice du GO(U)E est démontré dans [2], basé sur les travaux de Ben Arous, Dembo et Guionnet sur les verres de spin [10]. Alors que j'écris ce mémoire, Chatterjee et Varadhan prépublient le texte [38], à propos de grandes déviations pour les matrices aléatoires, dans un contexte quelque peu différent. Enfin, les déviations de la plus grande valeur propre d'une matrice du GO(U)E perturbée par l'addition d'une matrice de rang un ont été étudiées par Maïda dans [80] et les déviations des plus grandes valeurs propres de matrices de Wishart du type  $MM^*$ , avec  $M$  une matrice  $n \times p$  telle que  $n/p \rightarrow 0$ , ont été étudiées par Fey, van der Hofstad et Klok dans [53].

La plupart de ces PGD (plus précisément : tous sauf les trois derniers) portent sur des matrices gaussiennes ou de densité proportionnelle à  $e^{-n \operatorname{tr} V(M)}$ , dont on sait calculer la distribution des valeurs propres (ou pour lesquelles on en a une représentation via une équation différentielle stochastique). Pour des matrices plus générales, par exemple une matrice de Wigner  $X = [x_{i,j}]_{i,j=1}^n$  à coefficients non gaussiens, la fonction de taux d'un PGD pour les valeurs propres aurait des raisons de dépendre de la loi des  $x_{i,j}$ , et on n'a même pas idée de la forme qu'aurait une telle fonction de taux.

Dans l'article [A18], co-écrit avec Alice Guionnet et Mylène Maïda, nous étudions les grandes déviations des valeurs propres extrêmes dans le modèle  $\tilde{X} = X + P$  de la section 2.2.1, ainsi que dans un modèle quelque peu différent, où l'on ne suppose plus que les valeurs propres extrêmes de  $X$  tendent vers  $a$  et  $b$ . Dans un premier temps, on se restreint au cas où  $X$  est déterministe et diagonale, de loi spectrale tendant vers une loi à support compact  $\mu$  et n'ayant à la limite qu'un nombre fini  $p_+$  de valeurs propres à droite du support de  $\mu$ . On note comme précédemment  $r_0$  le nombre de  $j$  tels que  $\theta_j > 0$  et on a :

**Théorème 2.12** *Les  $r_0 + p_+$  plus grandes valeurs propres de  $\tilde{X}$  satisfont un principe de grandes déviations d'échelle  $n$  et ayant une bonne fonction de taux.*

La fonction de taux n'est pas, en général, explicite, mais on peut quand même en dire assez pour pouvoir, par exemple, en déduire une nouvelle démonstration du théorème 2.8 (voir [A18, Rem. 6.5]).

De ce théorème, on peut déduire des résultats relatifs au cas où  $X$  est aléatoire si l'on maîtrise assez bien les déviations de  $X$ . Par exemple (*c.f.* [A18, Th. 2.13]), il permet de prouver un PGD d'échelle  $n$  et de bonne fonction de taux pour les  $k$  plus grandes valeurs propres ( $k$  étant un entier quelconque) de  $\tilde{X}$  lorsque  $X$  est elle-même aléatoire, indépendante de  $P$  et prise dans un ensemble de matrices classique, c'est à dire de loi du

type

$$\frac{1}{Z_n^\beta} e^{-n \operatorname{tr} V(X)} d^\beta X,$$

où  $d^\beta X$  représente la mesure de Lebesgue standard sur l'espace des matrices symétriques réelles ( $\beta = 1$ ) ou hermitiennes ( $\beta = 2$ ) et  $V$  une fonction continue à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , supérieure à  $\beta \log(x)$ . Les matrices de Wishart gaussiennes et les matrices du GO(U)E perturbées constituent donc des exemples d'applications de ce travail.

La démonstration du théorème 2.12 repose encore sur la représentation des valeurs propres de  $\tilde{X}$  comme solutions de l'équation (2.15) : tout réel  $z$  hors du spectre de  $X$  est une valeur propre de  $\tilde{X}$  si et seulement si

$$\det \left( \begin{bmatrix} \theta_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_r^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1^*(z - X)^{-1} u_1 & \cdots & u_1^*(z - X)^{-1} u_r \\ \vdots & & \vdots \\ u_r^*(z - X)^{-1} u_1 & \cdots & u_r^*(z - X)^{-1} u_r \end{bmatrix} \right) = 0.$$

On établit d'abord un PGD pour une fonction qui, à un facteur aléatoire mais bien maîtrisé près, est le membre de gauche de l'équation précédente, puis on en déduit un PGD pour les zéros de cette fonction. Cette dernière étape, en quelque sorte une application du principe contraction, est assez délicate car l'application qui à une fonction associe ses zéros n'est pas continue dans l'espace où l'on travaille.

# Chapitre 3

## Infinie divisibilité et théorèmes limites pour les convolutions libres, applications

Dans ce chapitre, nous rappelons des résultats de base sur les lois infiniment divisibles pour la convolution classique  $*$ , que l'on trouve par exemple dans [58, 100], puis nous exposons la généralisation de cette théorie à la convolution additive libre  $\boxplus$ , due à Voiculescu, Bercovici et Pata, mettant en évidence une relation profonde existant entre les convolutions  $*$  et  $\boxplus$ . Nous exposons ensuite que l'interprétation matricielle que j'en ai faite dans [A2] et la version "rectangulaire" de l'infinie divisibilité, que j'ai développée pendant ma thèse.

Enfin, nous donnons des applications de cette théorie, à la régularisation par la convolution d'une part, et en mettant en évidence un phénomène de répulsion des valeurs singulières à l'origine d'autre part.

### 3.1 Bijection de Bercovici-Pata entre les lois $*$ - et $\boxplus$ -infiniment divisibles, interprétation matricielle

L'infinie divisibilité est une notion probabiliste fondamentale, à la base, par exemple, des processus de Lévy. On peut définir les lois infiniment divisibles comme les lois limites des sommes de v.a.i.i.d. : une loi  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  est dite  *$*$ -infiniment divisible* s'il existe une suite d'entiers  $(k_n)$  tendant vers  $+\infty$  et une suite de lois  $(\nu_n)$  telles que lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\underbrace{\nu_n * \cdots * \nu_n}_{k_n \text{ fois}} \longrightarrow \mu. \quad (3.1)$$

Dans ce cas, il existe une unique famille de lois  $(\mu^{*t})_{t \in [0, \infty)}$  issue de  $\delta_0$  telle que  $\mu^{*1} = \mu$  et qui est un semi-groupe pour la convolution  $*$ .

Ces lois sont caractérisées et classifiées via leur transformée de Fourier :  $\mu$  est  $*$ -infiniment divisible si et seulement si il existe un nombre réel  $\gamma$  et une mesure positive

$\sigma$  sur  $\mathbb{R}$  tels que la transformée de Fourier de  $\mu$  s'écrit  $\int_{t \in \mathbb{R}} e^{it\xi} d\mu(t) = e^{\Psi_\mu(\xi)}$ , avec

$$\Psi_\mu(\xi) = i\gamma\xi + \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left( e^{it\xi} - 1 - \frac{it\xi}{t^2 + 1} \right) \frac{t^2 + 1}{t^2}}_{:= -\frac{\xi^2}{2} \text{ pour } t = 0} d\sigma(t). \quad (3.2)$$

De plus, dans ce cas, le couple  $(\gamma, \sigma)$ , unique, est appelé le *couple de Lévy*<sup>1</sup> de  $\mu$  et la loi  $\mu$  est notée  $\nu_*^{\gamma, \sigma}$ .

Voiculescu et Bercovici ont démontré dans [15, 16] que tout ce qui précède reste valable si l'on remplace la convolution classique  $*$  par la convolution additive libre  $\boxplus$ , à ceci près que la caractérisation via la transformée de Fourier de la formule 3.2 doit être remplacée par la caractérisation suivante via la  $R$ -transformée :  $\mu$  est  $\boxplus$ -infinitement divisible si et seulement si il existe un nombre réel  $\gamma$  et une mesure positive  $\sigma$  sur  $\mathbb{R}$  tels que la  $R$ -transformée de  $\mu$  s'écrit

$$R_\mu(z) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{z + t}{1 - tz} d\sigma(t), \quad (3.3)$$

et  $\mu$  est alors notée  $\nu_{\boxplus}^{\gamma, \sigma}$ .

Une fois les caractérisations (3.2) et (3.3), appelées *formules de Lévy-Kinchine*, établies, on peut définir une bijection  $\Lambda$  de l'ensemble des lois  $*$ -infinitement divisibles vers l'ensemble des lois  $\boxplus$ -infinitement divisibles en associant la loi  $\nu_{\boxplus}^{\gamma, \sigma}$  à la loi  $\nu_*^{\gamma, \sigma}$ . Cette bijection, appelée *bijection de Bercovici-Pata*, est clairement un morphisme pour les opérations  $*$  et  $\boxplus$ . De plus, on peut démontrer que c'est un homéomorphisme pour la topologie faible et qu'elle commute avec les passages à la mesure image par les applications affines. Elle se caractérise alors totalement par le fait que, restreinte à l'ensemble des lois possédant des moments, elle transforme cumulants classiques en cumulants libres (dont les définitions sont rappelées au paragraphe 9.6 de l'appendice). Il en découle les relations suivantes :

- l'image, par la bijection  $\Lambda$ , de la loi gaussienne de moyenne  $m$  et variance  $\sigma^2$  est la loi semi-circulaire de centre  $m$  et rayon  $2\sigma$ ,
- la bijection  $\Lambda$  admet pour points fixes les masses de Dirac et les lois de Cauchy,
- pour tout  $\lambda > 0$ , l'image, par  $\Lambda$ , de la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  est la loi<sup>2</sup>

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi x} \mathbb{1}_{x \in [a, b]} dx & \text{si } \lambda \geq 1, \\ (1 - \lambda)\delta_0 + \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi x} \mathbb{1}_{x \in [a, b]} dx & \text{si } \lambda \leq 1, \end{cases} \quad \text{avec } a = (1 - \sqrt{\lambda})^2, b = (1 + \sqrt{\lambda})^2.$$

---

1. Le réel  $\gamma$  est parfois appelé *dérive* du semi-groupe associé à  $\mu$ , alors que la mesure finie  $\sigma$  s'interprète ainsi :  $\sigma(\{0\})$  représente la *composante brownienne* de ce semi-groupe et la mesure  $\mathbb{1}_{x \neq 0} \frac{1+x^2}{x^2} d\sigma(x)$ , lorsqu'elle est finie, représente sa *composante de Poisson composé* (dans le cas où cette mesure n'est pas finie, le semi-groupe se comprend par un passage à la limite subtil sur de telles décompositions).

2. Si  $\lambda > 1$ , cette loi est égale, à une dilatation près, à la loi de Marchenko-Pastur de paramètre  $1/\lambda$  telle que définie à l'équation (1.13).

Mais cette correspondance entre lois infiniment divisibles classiques et lois infiniment divisibles libres serait purement formelle sans le résultat suivant, démontré par Bercovici et Pata dans [14].

**Théorème 3.1** *La bijection de Bercovici-Pata préserve les théorèmes limites relatifs aux sommes de v.a.i.i.d.. Plus précisément, pour toute suite d'entiers  $(k_n)$  tendant vers  $+\infty$ , pour toute suite de lois  $(\nu_n)$ , pour toute loi  $*$ -infiniment divisible  $\mu$ , on a*

$$\underbrace{\nu_n * \cdots * \nu_n}_{k_n \text{ fois}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu \iff \underbrace{\nu_n \boxplus \cdots \boxplus \nu_n}_{k_n \text{ fois}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Lambda(\mu). \quad (3.4)$$

Notons que ce théorème n'est pas une conséquence du fait que  $\Lambda$  soit un morphisme pour  $*$  et  $\boxplus$  et un homéomorphisme, car les lois  $\nu_n$  ne sont pas supposées infiniment divisibles et on ne leur applique pas  $\Lambda$ . Il signifie que, à un niveau infinitésimal, les convolutions  $*$  et  $\boxplus$  se comportent de façons parallèles. Sa démonstration, reposant sur des transformations intégrales et de l'analyse complexe, n'en donne pas une approche très palpable. Le premier travail que j'ai effectué durant ma thèse, que je présente ci-dessous, donne une interprétation du théorème précédent en termes de matrices aléatoires, rendant ainsi la bijection de Bercovici-Pata et l'équivalence (3.4) plus intuitives.

Considérons une loi  $*$ -infiniment divisible  $\mu$ , et donnons nous une suite d'entiers  $(k_n)$  tendant vers  $+\infty$  ainsi qu'une suite de lois  $(\nu_n)$  telles que  $\nu_n^{*k_n} \rightarrow \mu$ , comme dans le terme de gauche de (3.4). Nous allons construire un modèle matriciel qui ramènera la démonstration de la convergence

$$\underbrace{\nu_n \boxplus \cdots \boxplus \nu_n}_{k_n \text{ fois}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Lambda(\mu) \quad (3.5)$$

à un problème de matrices aléatoires. À  $n$  fixé,  $\nu_n$  est la limite, lorsque la dimension  $d$  tend vers l'infini, de la loi empirique sur le spectre de la matrice aléatoire de taille  $d \times d$

$$M_d(\nu_n) := U \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\nu_n)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d^{(\nu_n)} \end{pmatrix} U^*, \quad (3.6)$$

où les  $\lambda_i^{(\nu_n)}$  ( $i = 1, \dots, d$ ) sont des v.a.i.i.d. de loi  $\nu_n$  et  $U$  une matrice unitaire ou orthogonale distribuée selon la mesure de Haar, indépendante des  $\lambda_i^{(\nu_n)}$ . En effet, il découle de la loi des grands nombres que, avec probabilité un,

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \delta_{\lambda_i^{(\nu_n)}} \xrightarrow[d \rightarrow \infty]{} \nu_n.$$



Il résulte alors de la définition de  $\boxplus$  que,  $n$  étant toujours fixé, la loi  $\nu_n^{\boxplus k_n}$  apparaissant dans (3.5) est la limite, lorsque la dimension  $d$  tend vers l'infini, de la loi empirique sur le spectre de

$$M_d(\nu_n)^{(1)} + \dots + M_d(\nu_n)^{(k_n)},$$

les matrices aléatoires  $M_d(\nu_n)^{(1)}, \dots, M_d(\nu_n)^{(k_n)}$  étant des copies indépendantes de la matrice  $M_d(\nu_n)$  définie en (3.6). On en déduit que (3.5) se réécrit ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty} (\text{loi spectrale} (M_d(\nu_n)^{(1)} + \dots + M_d(\nu_n)^{(k_n)})) = \Lambda(\mu).$$

À une interversion de limites près, (3.5) est alors une conséquence du théorème suivant [A4, Th. 3.1, Th. 6.1].

**Théorème 3.2** (a) *À dimension  $d$  fixée, la suite de matrices aléatoires hermitiennes de taille  $d \times d$*

$$M_d(\nu_n)^{(1)} + \dots + M_d(\nu_n)^{(k_n)}$$

*converge en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers une loi  $\mathbb{P}_d^\mu$  sur l'espace des matrices  $d \times d$  hermitiennes, de transformée de Fourier*

$$\int e^{i \text{Tr}(AM)} d\mathbb{P}_d^\mu(M) = e^{\mathbb{E}[d \psi_\mu(\langle u, Au \rangle)]} \quad \text{pour toute matrice } A \in \mathbb{K}^{d \times d} \text{ hermitienne,}$$

*où  $u$  est un vecteur de loi uniforme sur la sphère de  $\mathbb{K}^d$  et  $\Psi_\mu$  est l'exposant de Lévy de  $\mu$ , défini à l'équation (3.2).*

(b) *Lorsque  $d \rightarrow \infty$ , la loi empirique sur le spectre d'une matrice aléatoire distribuée selon  $\mathbb{P}_d^\mu$  converge en probabilité vers la loi  $\Lambda(\mu)$ .*

Ainsi, le fait que la bijection de Bercovici-Pata préserve les théorèmes limites s'exprime par le fait que les passages à la limite  $d \rightarrow \infty$  et  $n \rightarrow \infty$  s'intervertissent, i.e. que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_d(\nu_n)^{(1)} + \dots + M_d(\nu_n)^{(k_n)} & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & \mathbb{P}_d^\mu \\ \downarrow & & \downarrow \\ d \rightarrow \infty & & d \rightarrow \infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{loi spectrale empirique :} & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & \text{loi spectrale empirique :} \\ \mu_n^{\boxplus} & & \Psi(\mu) \end{array}$$

Un autre intérêt de l'article [A4] est qu'on y étudie les lois spectrales d'une nouvelle famille de modèles matriciels : dans la construction qui précède,  $\mu$  peut être n'importe quelle

loi  $*$ -infiniment divisible, comme par exemple une loi stable à queues lourdes, une loi de Cauchy... Par exemple, ce papier est, à ma connaissance, le premier à donner un résultat rigoureux pour la loi spectrale limite de matrices aléatoires dont les entrées ont des lois stables non gaussiennes (mais ces entrées ne sont pas indépendantes, ce qui distingue ce modèle de ceux étudiés dans [12, 9]). Les mêmes modèles matriciels ont été étudiés simultanément par Cabanal-Duvillard dans [28].

Pour finir, disons quelques mots de la démonstration du théorème 3.2. La partie (a) se démontre simplement avec la transformation de Fourier sur l'espace des matrices hermitiennes. La partie (b) se démontre avec la méthode des moments lorsque  $\mu$  possède des moments à tous ordres, et s'étend ensuite par approximation, avec un contrôle sur le *rang* de l'erreur.

## 3.2 Lois $\boxplus_c$ -infiniment divisibles

Dans l'article [A4], qui est issu de ma thèse, j'ai étudié l'infinie divisibilité pour les convolutions  $\boxplus_c$  ( $c \in [0, 1]$ ). Il s'avère, comme pour les convolutions  $*$  et  $\boxplus$ , que les lois issues des "théorèmes limites" sont aussi celles qui appartiennent à des semi-groupes pour  $\boxplus_c$  indexés par  $\mathbb{R}_+$ , et peuvent être caractérisées par une formule de Lévy-Kinchine [A4, Th. 2.2, 2.5, 2.6] :

**Théorème 3.3** *Pour  $\mu$  loi sur  $\mathbb{R}_+$ , on a équivalence entre les propositions suivantes :*

- (i) *Il existe une suite d'entiers  $(k_n)$  qui tend vers  $+\infty$  et une suite  $(\nu_n)$  de lois sur  $\mathbb{R}_+$  telles que  $\underbrace{\nu_n \boxplus_c \cdots \boxplus_c \nu_n}_{k_n \text{ fois}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$ .*
- (ii) *Il existe une famille de lois  $(\mu^{\boxplus_c t})_{t \in [0, +\infty)}$  issue de  $\delta_0$ , telle que  $\mu^{\boxplus_c 1} = \mu$  et qui est un semi-groupe pour  $\boxplus_c$ .*
- (iii) *Il existe une mesure symétrique finie  $\sigma$  sur  $\mathbb{R}$  telle que la  $R$ -transformée rectangulaire de rapport  $c$  de  $\mu$  est donnée par la formule*

$$C_\mu^{(c)}(z) = z \int_{t \in \mathbb{R}} \frac{1+t^2}{1-t^2 z} d\sigma(t).$$

*Dans ce cas,  $\sigma$  est unique et  $\mu$  est notée  $\nu_{\boxplus_c}^\sigma$ .*

Les lois satisfaisant ces conditions sont dites  $\boxplus_c$ -infiniment divisibles.

Le dernier point du théorème précédent permet de définir la *bijection de Bercovici-Pata de rapport  $c$*  de l'ensemble des lois  $*$ -infiniment divisibles symétriques<sup>3</sup> vers l'ensemble des lois  $\boxplus_c$ -infiniment divisibles, comme l'application, notée  $\Lambda_c$ , qui à toute loi  $\nu_*^{0,\sigma}$  (avec  $\sigma$  mesure symétrique finie sur  $\mathbb{R}$ ) associe  $\nu_{\boxplus_c}^\sigma$ . Comme  $\Lambda$ , la bijection  $\Lambda_c$  préserve les théorèmes limites [A4, Th. 3.3] :

**Théorème 3.4** *Soient  $(k_n)$  une suite d'entiers tendant vers  $+\infty$  et  $(\nu_n)$  une suite de lois symétriques sur  $\mathbb{R}$ . On définit  $|\nu_n|$  comme la loi de la v.a.  $|X|$  lorsque  $X$  est distribuée selon  $\nu_n$ . Alors pour toute loi  $*$ -infiniment divisible symétrique  $\mu$ , on a alors l'équivalence suivante :*

$$\underbrace{\nu_n * \cdots * \nu_n}_{k_n \text{ fois}} \longrightarrow \mu \iff \underbrace{|\nu_n| \boxplus_c \cdots \boxplus_c |\nu_n|}_{k_n \text{ fois}} \longrightarrow \Lambda_c(\mu). \quad (3.7)$$

Ce théorème permet facilement de voir que pour  $c = 1$ ,  $\Lambda_c$  est la restriction de la bijection de Bercovici-Pata “de type carré”  $\Lambda$  à l'ensemble des lois  $*$ -infiniment divisibles symétriques.

**Exemple 3.5** (a) *Pour  $\mu$  la loi gaussienne standard,  $\Lambda_c(\mu)$  est la loi de  $\sqrt{x}$ , pour  $x$  variable aléatoire distribuée selon la loi de Marchenko-Pastur  $L_{\text{MP},c}$  introduite en (1.13), c'est à dire la loi de densité*

$$\frac{\sqrt{(m_+^2 - x^2)(x^2 - m_-^2)}}{\pi c x} \mathbb{1}_{x \in [m_-, m_+]} dx$$

*et de support  $[m_-, m_+]$  pour  $m_\pm = 1 \pm \sqrt{c}$  (si  $c = 0$ , cette formule doit être comprise comme celle de la masse de Dirac en 1).*

(b) *Pour  $\mu$  la loi de Cauchy standard,*

$$\Lambda_c(\mu) = \frac{\mathbb{1}_{2x > 1-c}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{(1-c)^2}{4x^2}} \frac{dx}{c + x^2}.$$

*Les densités de ces lois sont représentées à la figure 3.1.*

Le cas de la loi gaussienne permet de situer la loi du demi-cercle et la loi de Marchenko-Pastur sur un même plan : la loi du demi-cercle, donnant la répartition limite des valeurs

---

3. On peut facilement voir, via la formule (3.2), que les lois  $*$ -infiniment divisibles symétriques sont précisément les lois  $\nu_*^{\gamma,\sigma}$  pour lesquelles  $\gamma = 0$  et  $\sigma$  est symétrique.

propres de matrices hermitiennes gaussiennes, joue le rôle de la loi gaussienne pour la convolution  $\boxplus$ , alors que la mesure image par l'application  $x \mapsto \sqrt{x}$  de la loi de Marchenko-Pastur  $L_{MP,c}$ , donnant la répartition limite des valeurs singulières de matrices  $n \times p$  gaussiennes, joue le rôle de la loi gaussienne pour la convolution  $\boxplus_c$ .

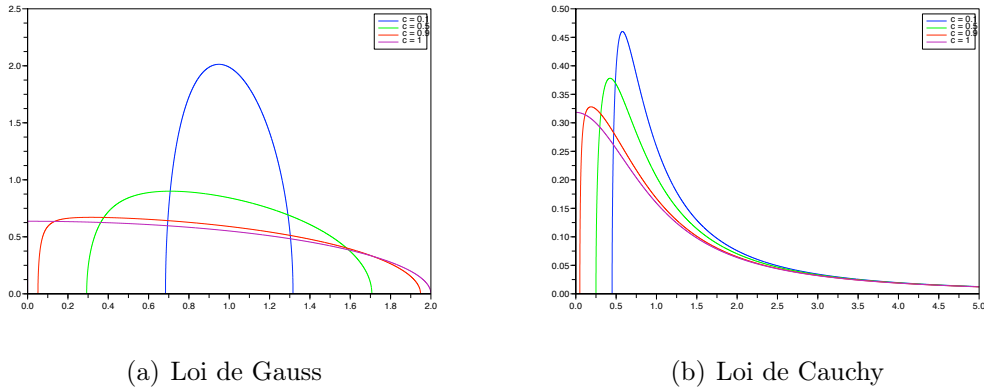


FIGURE 3.1 – **Densités des analogues  $\boxplus_c$ -infiniment divisibles des lois de Gauss et de Cauchy, pour  $c = 0.1, 0.5, 0.9$  et  $1$ .** On remarque un phénomène sur lequel on reviendra plus bas : lorsque  $c < 1$ , les supports de ces lois ne contiennent pas zéro. Le lecteur ne disposant pas d'une version couleur de ce texte pourra distinguer les courbes en remarquant que les supports sont d'autant plus étendus que  $c$  est proche de  $1$ .

Dans l'article [A4], je construis un modèle matriciel pour la bijection  $\Lambda_c$  du type de celui associé pour la bijection  $\Lambda$  et présenté au paragraphe précédent : le rôle des les valeurs propres  $y$  est joué par les valeurs singulières et la matrice hermitienne carrée  $M_d(\nu_n)$  de taille  $d \times d$  définie à l'équation (3.6)  $y$  est remplacée par la matrice rectangulaire de taille  $d \times d'$  suivante

$$M_{d,d'}(\nu_n) := U \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\nu_n)} & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & \lambda_d^{(\nu_n)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} V,$$

où les  $\lambda_i^{(\nu_n)}$  ( $i = 1, \dots, d$ ) sont des v.a.i.i.d. de loi  $\nu_n$  et  $U, V$  sont des matrices unitaires ou orthogonales de tailles respectives  $d \times d$ ,  $d' \times d'$  distribuées selon la mesure de Haar, indépendantes et indépendantes des  $\lambda_i^{(\nu_n)}$  (les dimensions  $d, d'$  sont ici amenées à tendre vers l'infini de telle façon que  $d/d' \rightarrow c$ ).

### 3.3 Propriétés de régularisation des convolutions libres et phénomène de répulsion des valeurs singulières à l'origine

La convolution classique  $*$  est un outil standard pour régulariser des fonctions ou des mesures. Dans l'article [A7], avec Serban Belinschi et Alice Guionnet, nous avons étudié les propriétés de régularisation des convolutions  $\boxplus$  et  $\boxplus_c$ . Les distributions intervenant dans l'univers des probabilités libres et des matrices aléatoires ayant souvent des densités aux dérivées infinies au bord de leur support, comme Biane l'a mis en évidence dans [19], cette étude est liée au caractère strictement positif de la densité. Afin de pouvoir utiliser les propriétés de semi-groupe, la régularisation par les lois infiniment divisibles est particulièrement intéressante, et nous avons donc porté une attention particulière à ce cas.

Nous allons voir ici que dans le cas de la convolution libre rectangulaire  $\boxplus_c$ , ces questions mettent en lumière un phénomène intéressant, que l'on peut avoir déjà observé dans les figures 1.1, 1.3, 1.4 et 3.1 : la densité de la convolution a tendance à s'annuler au voisinage de zéro, ce qui signifie concrètement que les valeurs singulières de la somme de deux matrices aléatoires ont tendance à s'écartier de l'origine.

#### 3.3.1 Cas de la convolution libre carrée $\boxplus$

Le théorème suivant, démontré en partie par Bercovici et Voiculescu [17, Th. 7.4] et en partie par Belinschi [8, Th. 4.1], montre que la convolution libre  $\boxplus$  a de fortes propriétés de régularisation.

**Théorème 3.6** *Soit  $\mu, \nu$  des lois sur  $\mathbb{R}$ , aucune d'entre elles n'étant concentrée en un point. Alors*

- (a) *La loi  $\mu \boxplus \nu$  se décompose en une somme d'atomes et d'une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*
- (b) *Les atomes de  $\mu \boxplus \nu$  sont les réels  $a$  tels qu'il existe  $b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $a = b + c$  et  $\mu(\{b\}) + \nu(\{c\}) > 1$ . Dans ce cas,  $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) + \nu(\{c\}) - 1$ .*
- (c) *Il existe un ouvert  $U$  et une fonction  $f$  analytique sur  $U$  et strictement positive sur  $U$  telle que la partie absolument continue de  $\mu \boxplus \nu$  est la mesure  $\mathbb{1}_{x \in U} f(x) dx$ .*

Ce théorème, aussi impressionnant soit-il, ne résout pas la question des points singuliers, ceux où la densité s'annule (à la frontière de  $U$ ), avec une dérivée souvent infinie. Dans l'article [A7], aux théorèmes 3.1 et 3.2, nous montrons que sous certaines hypothèses techniques que nous ne détaillerons pas ici, il est possible d'obtenir des résultats meilleurs que ceux du théorème précédent.

**Théorème 3.7** Soit  $\mu$  une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

- Sous certaines hypothèses portant sur  $G_\mu$ , pour toute loi  $\nu$  qui n'est pas une masse de Dirac, la mesure  $\nu \boxplus \mu$  a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est analytique et strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

- Si  $\mu$  est  $\boxplus$ -infinitement divisible, de semi-groupe associé  $(\mu^{\boxplus t})_{t \geq 0}$ , alors sous certaines hypothèses portant sur  $R_\mu$ , pour toute loi  $\nu$ , pour tout  $t > 0$ , la mesure  $\nu \boxplus \mu^{\boxplus t}$  a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est analytique et strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

La loi de Cauchy, dont la convolution libre  $\boxplus$  avec n'importe quelle loi coïncide avec sa convolution classique  $*$  avec la même loi, est bien entendu un exemple de loi régularisante au sens donné par ce théorème. Il existe d'autres exemples, donnés dans [A7]. Malheureusement, la proposition suivante [A7, Prop. 3.4] montre qu'il n'est pas possible de régulariser avec des lois permettant d'utiliser la méthode des moments.

**Proposition 3.8** Soit  $\mu$  est  $\boxplus$ -infinitement divisible, de semi-groupe associé  $(\mu^{\boxplus t})_{t \geq 0}$ . S'il existe  $t < 1$  tel que  $\mu^{\boxplus t}$  n'a pas d'atome et  $\mu$  a un deuxième moment fini, alors il existe une loi  $\nu$  telle que la densité de  $\mu \boxplus \nu$  n'est pas analytique partout et s'annule en un point.

Donnons quelques idées quant aux démonstrations des deux précédents théorèmes.

La première, naturelle quand on travaille avec la convolution libre, est de décoder une loi  $\mu$  à partir de sa transformée de Cauchy : on sait que pour Lebesgue-presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , la densité de la partie absolument continue de  $\mu$  en  $x$  est égale à

$$-\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} G_\mu(x + iy), \quad (3.8)$$

mais on peut même démontrer, [A7, Lem. 2.11], que pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\mu$  admet une densité analytique sur  $I$  si et seulement si  $G_\mu$ , initialement définie sur  $\mathbb{C}^+$ , se prolonge analytiquement à un voisinage de  $\mathbb{C}^+ \cup I$  (et dans ce cas, la densité est bien évidemment donnée par la partie imaginaire de ce prolongement, au facteur  $-1/\pi$  près). Ces remarques sont à l'origine d'une philosophie qui guide ces démonstrations : *moins  $G_\mu$  explose au voisinage d'un réel  $x$ , plus  $\mu$  est régulière en  $x$* . Dit autrement : *plus  $G_\mu$  admet de prolongements analytiques bas dans le plan complexe, plus  $\mu$  est régulière*. L'exemple le plus flagrant est celui où  $\mu = \nu \boxplus \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  désignant la loi de Cauchy. Dans ce cas, on a

$$G_\mu(z) = G_\nu(z + i), \quad (3.9)$$

si bien que  $G_\mu$  se prolonge analytiquement à  $\{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > -1\}$  (et bien sûr,  $\mu$  a une densité analytique sur  $\mathbb{R}$ ).

A partir de là, ce qui permettra de montrer la régularisation par la convolution libre est la *subordination*, dont la démonstration est due à Biane [21, Th. 3.1] : pour  $\mu, \nu$  lois sur  $\mathbb{R}$ , il existe deux fonctions analytiques  $\omega_1, \omega_2$  sur  $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$  telles que pour tout  $z \in \mathbb{C}^+$ ,

$$\Im(\omega_j(z)) \geq \Im(z) \quad (j = 1, 2), \quad (3.10)$$

et

$$G_{\mu \boxplus \nu}(z) = G_\mu(\omega_1(z)) = G_\nu(\omega_2(z)). \quad (3.11)$$

La formule (3.10) signifie que les fonctions  $\omega_j$  ont tendance à augmenter la partie imaginaire de leurs arguments, ce qui laisse imaginer, par (3.11), que, dans certains cas au moins, le prolongement de  $G_{\mu \boxplus \nu}$  au delà de  $\mathbb{C}^+$  sera possible.

### 3.3.2 Cas de la convolution libre rectangulaire $\boxplus_c$ : régularité et répulsion des valeurs singulières à l'origine

Nous allons voir ici que la convolution libre rectangulaire  $\boxplus_c$  partage certaines propriétés de régularité avec la convolution libre carrée  $\boxplus$ , et que dans ce cas, un phénomène supplémentaire se produit : la densité de la convolution a tendance à s'annuler au voisinage de zéro, ce qui signifie concrètement que les valeurs singulières de la somme de deux matrices aléatoires ont tendance à s'écarter de l'origine. C'est un phénomène que l'on peut déjà avoir observé dans les figures 1.1, 1.3, 1.4 et 3.1. De façon plus générale, la répulsion des valeurs singulières à l'origine joue un rôle clé dans plusieurs démonstrations s'appuyant sur une relation entre valeurs singulières et valeurs propres de matrices non hermitiennes, comme la démonstration, par Tao, Vu et Krishnapur, de l'universalité pour la loi du cercle [111] ou la démonstration, par Guionnet, Krishnapur et Zeitouni, du théorème de l'anneau unique [62].

Commençons par les résultats de **régularité** de la convolution  $\boxplus_c$ . Ils ont été établis dans le cas particulier où une des mesures est  $\boxplus_c$ -infiniment divisible [A7, Cor. 4.4 et 4.6, Prop. 4.10].

**Théorème 3.9** *Soit  $\mu$  une loi  $\boxplus_c$ -infiniment divisible telle que  $\mu \neq \delta_0$ .*

- Alors pour toute loi  $\nu$  sur  $\mathbb{R}_+$ , la partie singulière<sup>4</sup> de  $\mu \boxplus_c \nu$  est concentrée sur un

---

4. La partie singulière (resp. partie absolument continue) d'une mesure  $\mu$  est  $\mu^s$  (resp.  $\mu^{ac}$ ), où  $\mu = \mu^s + \mu^{ac}$ , avec  $\mu^s$  (resp.  $\mu^{ac}$ ) étrangère (resp. absolument continue) par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons que le support de  $\mu^s$  n'est à priori pas de mesure de Lebesgue nulle (penser par exemple au cas où  $\mu$  est la mesure de dénombrement sur l'ensemble des rationnels).

fermé de mesure de Lebesgue nulle, et la densité de sa partie absolument continue est continue sur le complémentaire de ce fermé dans  $\mathbb{R}_+$ .

- Sous certaines hypothèses supplémentaires portant sur  $\mu$ , pour toute loi  $\nu$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mu \boxplus_c \nu$  est absolument continue, de densité continue sur  $\mathbb{R}$ .

- Sous certaines hypothèses supplémentaires portant sur  $\mu$ , pour toute loi  $\nu$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mu \boxplus_c \nu$  est absolument continue, de densité continue sur  $\mathbb{R}$  et analytique sur un ouvert  $U$  tel que  $\mu \boxplus_c \nu(U) = 1$ .

Dans [A7, Prop. 4.11], on donne une condition suffisante portant sur la mesure finie  $\sigma$  pour que la loi  $\boxplus_c$ -infiniment divisible  $\mu = \nu_{\boxplus_c}^\sigma$  satisfasse les hypothèses du troisième point du théorème précédent. On peut par exemple montrer que pour tout  $\alpha \in [1, 2)$ , ces hypothèses sont satisfaites par les lois  $\boxplus_c$ -stables de paramètre  $\alpha$ , qui sont les images, par la bijection de Bercovici-Pata  $\Lambda_c$ , des lois  $*$ -stables symétriques de même paramètre, et au nombre desquelles figure la loi de Cauchy pour  $\boxplus_c$ , dont la densité est donnée à la formule (3.5).

Abordons maintenant l'étude du comportement à l'origine de  $\mu \boxplus_c \nu$ . Pour  $\mu, \nu$  lois sur  $\mathbb{R}_+$ , il est facile de voir, par un raisonnement d'algèbre linéaire, que

$$(\mu \boxplus_c \nu)(\{0\}) \geq \mu(\{0\}) + \nu(\{0\}) - 1. \quad (3.12)$$

La première partie du théorème suivant, tirée de la proposition 4.12 de [A7], donne une sorte de réciproque de (3.12). La deuxième partie, tirée de la proposition 4.13 de [A7], donne un sens concret phénomène de **répulsion des valeurs singulières à l'origine**.

**Théorème 3.10** *Soit  $\mu, \nu$  deux lois sur  $\mathbb{R}_+$  telles que  $\mu$  est  $\boxplus_c$ -infiniment divisible.*

- On a  $(\mu \boxplus_c \nu)(\{0\}) = (\mu(\{0\}) + \nu(\{0\}) - 1)_+$ , avec  $x_+ := \max\{x, 0\}$ .
- Si  $\mu(\{0\}) + \nu(\{0\}) < 1$ , alors pour un certain  $\varepsilon > 0$ , la loi  $\mu \boxplus_c \nu$  ne charge pas l'intervalle  $[0, \varepsilon]$ .

Terminons par une conséquence simple de ce théorème, qui rendra peut-être les considérations de ce chapitre moins abstraites aux yeux du lecteur, et, on l'espère, le convaincra de leur utilité. Ce résultat est à rapprocher de ceux de Śniady [105] et de Haagerup [64].



**Corollaire 3.11** *Soient  $A, X \in \mathbb{K}^{n \times p}$  des matrices aléatoires indépendantes, qui dépendent de façon implicite de  $n$  et  $p$ , entiers qui vont tendre vers l'infini de telle façon que  $n/p \rightarrow c \in [0, 1]$ . On suppose que les coordonnées de  $X$  sont i.i.d. gaussiennes centrées de variance  $\sigma^2/p$  (avec  $\sigma > 0$  fixé) et que la loi empirique sur les valeurs singulières de  $A$  converge en probabilité vers une loi  $\neq \delta_0$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour la convergence en probabilité,*

$$\#\{\lambda \text{ val. sing. de } A + X; \lambda \leq \varepsilon\} = o(n).$$

# Chapitre 4

## Vecteurs propres des matrices de Wigner : universalité des fluctuations globales

In this chapter, I present the three main results my work of [A19] : Theorems 4.1 and 4.2 and Proposition 4.5.

### 4.1 Introduction

It is well known that the matrix  $U_n = [u_{i,j}]_{i,j=1}^n$  whose columns are the eigenvectors of a GOE or GUE matrix  $X_n$  can be chosen to be distributed according to the Haar measure on the orthogonal or unitary group. As a consequence, much can be said about the  $u_{i,j}$ 's : their joint moments can be computed via the so-called *Weingarten calculus* developed in [39, 41], any finite (or not too large) set of  $u_{i,j}$ 's can be approximated, as  $n \rightarrow \infty$ , by independent Gaussian variables (see [71, 37] or Theorem 6.3 of the present text) and the global asymptotic fluctuations of the  $|u_{i,j}|$ 's are governed by a theorem of Donati-Martin and Rouault, who proved in [45] that as  $n \rightarrow \infty$ , the bivariate càdlàg process

$$\left( B_{s,t}^n := \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq ns, \\ 1 \leq j \leq nt}} (|u_{i,j}|^2 - 1/n) \right)_{(s,t) \in [0,1]^2}$$

(where  $\beta = 1$  in the real case and  $\beta = 2$  in the complex case) converges in distribution, for the Skorokhod topology, to the *bivariate Brownian bridge*, i.e. the centered continuous Gaussian process  $(B_{s,t})_{(s,t) \in [0,1]^2}$  with covariance

$$\mathbb{E}[B_{s,t} B_{s',t'}] = (\min\{s, s'\} - ss')(\min\{t, t'\} - tt'). \quad (4.1)$$

A natural question is the following :

*What can be said beyond the Gaussian case, when the entries of the Wigner matrix  $X_n$  are general random variables ?*

For a general Wigner matrix, the exact distribution of the matrix  $U_n$  cannot be computed and few works had been devoted to this subject until quite recently. One of the reasons is that while the eigenvalues of an Hermitian matrix admit variational characterizations as *extremums* of certain functions, the eigenvectors can be characterized as the *argmax* of these functions, hence are more sensitive to perturbations of the entries of the matrix. However, in the last three years, the eigenvectors of general Wigner matrices have been the object of a growing interest, due in part to some relations with the universality conjecture for the eigenvalues. In several papers (see, among others, [48, 49, 50]), a *delocalization property* was shown for the eigenvectors of random matrices. More recently, Knowles and Yin in [76] and Tao and Vu in [113] proved that if the first four moments of the atom distributions<sup>1</sup> of  $X_n$  coincide with the ones of a GOE or GUE matrix, then under some tail assumptions on these distributions, the  $u_{i,j}$ 's can be approximated by independent Gaussian variables as long as we only consider a finite (or not too large) set of  $u_{i,j}$ 's.

In this chapter, we consider the global behavior of the  $|u_{i,j}|$ 's, and we prove (Theorem 4.1) that for Wigner matrices whose entries have moments of all orders, the process  $(B_{s,t}^n)_{(s,t) \in [0,1]^2}$  has a limit in a weaker sense than for the Skorokhod topology and that this weak limit is the bivariate Brownian bridge if and only if the off-diagonal entries of the matrix have the same fourth moment as the GOE or GUE matrix (quite surprisingly, no hypothesis on the third moment is necessary). Under some additional hypotheses on the atom distributions (more coinciding moments and continuity), we prove the convergence for the Skorokhod topology (Theorem 4.2).

This result was conjectured by Chafaï, who also conjectures the same kind of universality for unitary matrices appearing in other standard decompositions, such as the singular values decomposition or the Housholder decomposition of non hermitian matrices, as long as the matrix considered has i.i.d. entries with first moments agreeing with the ones of Gaussian variables. It would also be interesting to consider the same type of question in the context of *band matrices*, connecting this problem with the so-called *Anderson conjecture* (see *e.g.* the works of Erdős and Knowles [46, 47], of Schenker [101] or of Sodin [106], or, for a short introduction, the blog note by Chafaï [36]).

## 4.2 Main results

For each  $n$ , let us consider a real or complex Wigner matrix

$$X_n := \frac{1}{\sqrt{n}} [x_{i,j}]_{i,j=1}^n$$

---

1. The *atom distributions* of a Wigner matrix are the distributions of its entries.

such that the distributions of the  $x_{i,j}$ 's on the diagonal and off the diagonal do not depend on  $n$  (*Wigner matrices* have been defined in Encart 2.3, at the end of Section 2.1.2).

Let us denote by  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  the eigenvalues of  $X_n$  and consider an orthogonal or unitary matrix  $U_n = [u_{i,j}]_{i,j=1}^n$  such that

$$X_n = U_n \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U_n^*.$$

Note that  $U_n$  is not uniquely defined. Let us choose it in a measurable way, no matter which one.

We define the bivariate càdlàg process

$$\left( B_{s,t}^n := \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq ns, \\ 1 \leq j \leq nt}} (|u_{i,j}|^2 - 1/n) \right)_{(s,t) \in [0,1]^2},$$

where  $\beta = 1$  in the real case and  $\beta = 2$  in the complex case.

The bivariate Brownian bridge has been defined in the introduction. The exact definition of the functional spaces of the two following theorems and of their topologies can be found in [A19, Sect. 4.1].

**Theorem 4.1** *Suppose that the  $x_{i,j}$ 's have moments of all orders. Then the sequence*

$$(\operatorname{distribution}(B^n))_{n \geq 1}$$

*has a unique possible accumulation point supported by  $C([0,1]^2)$ . This accumulation point is the distribution of a centered Gaussian process which depends on the distributions of the  $x_{i,j}$ 's only through  $\mathbb{E}[|x_{1,2}|^4]$ , and which is the bivariate Brownian bridge if and only if  $\mathbb{E}[|x_{1,2}|^4] = 4 - \beta$ , as in the Gaussian case.*

More precisions about the way the unique possible accumulation point depends on the fourth moment of the entries are given in Remark 4.3.

To get a stronger statement where the convergence in distribution to the bivariate Brownian bridge is actually stated, one needs stronger hypotheses.

**Theorem 4.2** *Suppose that the  $x_{i,j}$ 's have a density and moments of all orders, matching with the ones of a  $GO(U)E$  matrix up to order 10 on the diagonal and 12 above the diagonal. Then, as  $n \rightarrow \infty$ , the bivariate process  $B^n$  converges in distribution, for the Skorokhod topology in  $D([0,1]^2)$ , to the bivariate Brownian bridge.*

**Remark 4.3 Complements on Theorem 4.1.** One can wonder how the unique accumulation point mentioned in Theorem 4.1 depends on the fourth moment of the entries of  $X_n$ . Let  $G := (G_{s,t})_{(s,t) \in [0,1]^2}$  be distributed according to this distribution. We know that  $(G_{s,t})_{(s,t) \in [0,1]^2}$  is the bivariate Brownian bridge only in the case where  $\mathbb{E}[|x_{1,2}|^4] = 4 - \beta$ . In the other cases, defining  $F_{\text{semicircle}}$  as the cumulative distribution function of the semicircle law, the covariance of the centered Gaussian process

$$\left( \int_{u=-2}^2 u^k G_{s, F_{\text{semicircle}}(u)} du \right)_{s \in [0,1], k \geq 0}, \quad (4.2)$$

which determines completely the distribution of the process  $G$ , can be computed. However, making the covariance of  $G$  explicit out of the covariance of the process of (4.2) is a very delicate problem, and we shall only stay at a quite vague level, saying that the variances of the one-dimensional marginals of  $G$  are increasing functions of  $\mathbb{E}[|x_{1,2}|^4]$ . For example, that for all  $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$ ,

$$\text{Cov} \left( \int_{u=-2}^2 u^2 G_{s_1, F_{\text{semicircle}}(u)} du, \int_{u=-2}^2 u^2 G_{s_2, F_{\text{semicircle}}(u)} du \right) = \frac{\mathbb{E}[|x_{1,2}|^4] - 1}{4} (\min\{s_1, s_2\} - s_1 s_2).$$

**Remark 4.4 Comments on the hypotheses of Theorem 4.2 (1).** In order to prove the convergence in the Skorokhod topology, we had to make several hypotheses on the atom distributions : absolute continuity, moments of all orders and coincidence of their 10 (on the diagonal) and 12 (above the diagonal) first moments with the ones of a GOE or GUE matrix. We needed these assumptions to control the discontinuities of the process  $B^n$ . Even though these hypotheses might not be optimal (especially the continuity one), a bound on the tails of the atom distributions seems to be necessary to avoid too large variations of the process  $B^n$ . Indeed, as illustrated by Figure 4.1, for a GOE matrix (*left picture*),  $|u_{i,j}|^2$  is close to  $1/n$  for all  $i, j$  with high probability, whereas when the atom distributions have not more than a second moment (*right picture*), the matrix  $X_n$  looks more like a *sparse matrix*, and so does  $U_n$ , which implies that for certain  $(i, j)$ 's,  $|u_{i,j}|^2 - 1/n$  is not small enough. Since  $|u_{i,j}|^2 - 1/n$  is the jump of the process  $B^n$  at  $(s, t) = (i/n, j/n)$ , this could be an obstruction to the existence of a continuous limit for the process  $B^n$ . That being said, we have hopes to prove the theorem under a four moments hypothesis instead of a 12 moments one (see Remark 4.6 bellow).

Note that it follows from the previous theorem that for all  $0 \leq s < s' \leq 1$  and  $0 \leq t < t' \leq 1$ , the sequence of random variables

$$\frac{1}{\sqrt{(s' - s)(t' - t)}} \sum_{\substack{ns < i \leq ns' \\ nt < j \leq nt'}} (|u_{i,j}|^2 - 1/n)$$

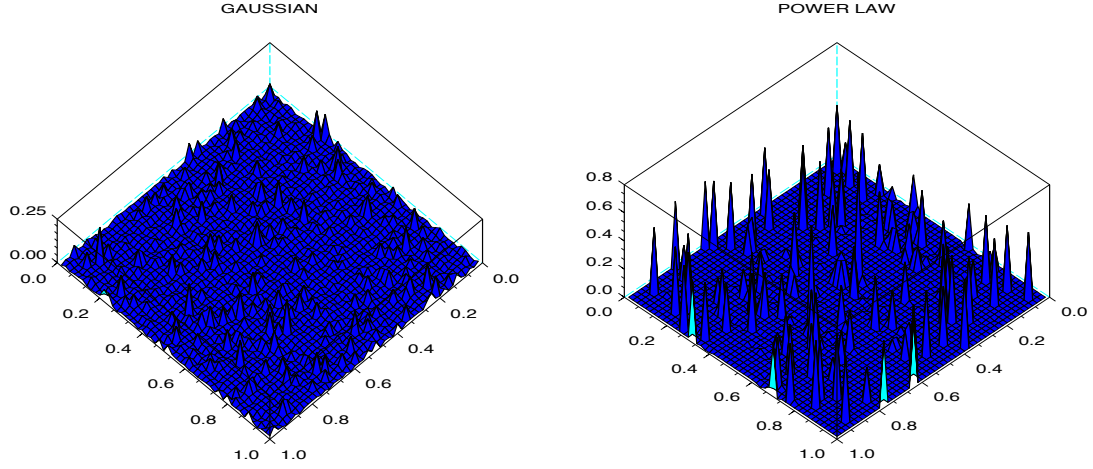


FIGURE 4.1 – **Influence of the tails of the atom distributions of  $X_n$  on the  $|u_{i,j}|$ 's** : Plot of the map  $(i/n, j/n) \mapsto ||u_{i,j}|^2 - 1/n|$  for two different choices of atom distributions. *Left* : GOE matrix. *Right* : Wigner matrix with atom distribution admitting moments only up to order  $2 + \varepsilon$  for a small  $\varepsilon$ . For both pictures, the matrices are  $n \times n$  with  $n = 50$ .

admits a limit in distribution as  $n \rightarrow \infty$ , hence is bounded in probabilité (in the sense of [111, Def. 1.1]). In the same way, it follows from [76] and [113] that the sequence  $n|u_{i,j}|^2 - 1$  is bounded in probability. In the next proposition, we improve these assertions by making them uniform on  $s, s', t, t', i, j$  and upgrading them to the  $L^2$  and  $L^4$  levels.

**Proposition 4.5** *Suppose that the  $x_{i,j}$ 's have densities and moments of all orders, matching with the ones of a  $GO(U)E$  matrix up to order 4. Then as  $n \rightarrow \infty$ , the sequences*

$$n|u_{i,j}|^2 - 1 \quad \text{and} \quad \frac{1}{\sqrt{(s' - s)(t' - t)}} \sum_{\substack{ns < i \leq ns' \\ nt < j \leq nt'}} (|u_{i,j}|^2 - 1/n) \quad (4.3)$$

*are bounded for the respective  $L^4$  and  $L^2$  norms, uniformly in  $s < s', t < t', i, j$ .*

**Remark 4.6 Comments on the hypotheses of Theorem 4.2 (2).** This proposition is almost sufficient to apply the tightness criterion that we use in this paper. Would the second term of (4.3) have been bounded for the  $L^{2+\varepsilon}$  norm (instead of  $L^2$ ), a four moments hypothesis would have been enough to prove that  $B^n$  converges in distribution, for the Skorokhod topology in  $D([0, 1]^2)$ , to the bivariate Brownian bridge.

Let us now outline the proofs of Theorems 4.1 and 4.2 and Proposition 4.5.

Firstly, Theorem 4.2 can be deduced from Theorem 4.1 by proving that the sequence  $(\text{distribution}(B^n))_{n \geq 1}$  is tight and only has  $C([0, 1]^2)$ -supported accumulation points. This can be done via some upper bounds on the fourth moment of the increments of  $B^n$  and on its jumps (*i.e.* of its discontinuities). The proofs of these bounds and of Proposition 4.5 rely on a comparison of the eigenvectors of  $X_n$  with the ones of a GO(U)E matrix. Indeed, thanks to the Weingarten calculus, one can easily establish such bounds for Haar-distributed matrices. Such a comparison is obtained with the “one-by-one entries replacement method” developed by Tao and Vu in recent papers, such as [112, 113].

Secondly, the proof of Theorem 4.1 relies on the following remark, inspired by some ideas of Jack Silverstein (see [6, Chap. 10] and [104]) : even though we do not have any “direct access” to the eigenvectors of  $X_n$ , we have access to the process  $(B_{s, F_{\mu_{X_n}}^n}^n)_{s \in [0, 1], u \in \mathbb{R}}$ , for  $F_{\mu_{X_n}}(u) := \frac{1}{n} \#\{i; \lambda_i \leq u\}$ . Indeed,

$$B_{s, F_{\mu_{X_n}}^n}^n(u) = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sum_{1 \leq i \leq ns} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \text{s.t. } \lambda_j \leq u}} (|u_{i,j}|^2 - 1/n),$$

hence for all fixed  $s \in [0, 1]$ , the function  $u \in \mathbb{R} \mapsto B_{s, F_{\mu_{X_n}}^n}^n(u)$  is the cumulative distribution function of the signed measure

$$\sqrt{\frac{\beta}{2}} \sum_{1 \leq i \leq ns} \sum_{j=1}^n (|u_{i,j}|^2 - 1/n) \delta_{\lambda_j}, \quad (4.4)$$

which can be studied via its moments

$$\sum_{1 \leq i \leq ns} \left( e_i^* X_n^k e_i - \frac{1}{n} \text{Tr} X_n^k \right) \quad (k \geq 1),$$

the  $e_i$ 's being the vectors of the canonical basis. From the asymptotic behavior of the *moments* of the signed measure of (4.4), one can then find out the asymptotic behavior of its *cumulative distribution function*.

Once the asymptotic distribution of the process  $(B_{s, F_{\mu_{X_n}}^n}^n)_{s \in [0, 1], u \in \mathbb{R}}$  identified, one can obtain the asymptotic distribution of the process  $(B_{s,t}^n)_{s \in [0, 1], t \in [0, 1]}$  because the function  $F_{\mu_{X_n}}$  tends to the (non random) cumulative distribution function  $F_{\text{semicircle}}$  of the semicircle law.

# Chapitre 5

## Un continuum de notions d'indépendance entre l'indépendance classique et l'indépendance libre

Avec Thierry Lévy, dans notre papier [A11], nous avons utilisé le mouvement brownien sur le groupe unitaire pour proposer une interpolation entre les notions d'indépendance et de liberté pour des éléments d'un espace de probabilités non-commutatif. Nous allons aborder cette question par le biais de la convolution des mesures.

### 5.1 Convolutions

Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux lois sur  $\mathbb{R}$ . La convolution classique de  $\mu$  et  $\nu$ , notée  $\mu * \nu$ , peut se décrire de la façon suivante. Soient  $A$  et  $B$  matrices diagonales de taille  $n \times n$  ( $A$  et  $B$  dépendent de façon implicite du paramètre  $n$ , comme les matrices  $S$ ,  $V$  et  $U_t$  suivantes) dont les mesures empiriques spectrales convergent respectivement vers  $\mu$  et  $\nu$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Soit  $S$  la matrice d'une permutation aléatoire de  $\{1, \dots, n\}$  de loi uniforme. Alors lorsque  $n$  tend vers l'infini, on a, pour la convergence faible en probabilités :

$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda \text{ val. pr. de } A+SB S^*} \delta_\lambda \longrightarrow \mu * \nu.$$

Considérons maintenant une matrice  $V$  de loi uniforme sur le groupe unitaire. Alors lorsque  $n$  tend vers l'infini, on a, pour la convergence faible en probabilités :

$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda \text{ val. pr. de } A+VB V^*} \delta_\lambda \longrightarrow \mu \boxplus \nu.$$

Il existe une interpolation naturelle entre la loi de  $S$  et celle de  $V$  : c'est, lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}_+$ , la famille des lois de d'un mouvement brownien unitaire  $U_t$  dont la loi initiale est la



loi uniforme sur le groupe des matrices de permutations (le mouvement brownien sur le groupe unitaire est défini à la fin de ce chapitre à l'encart 5.6). En effet, sa loi en  $t = 0$  est celle de  $S$ , alors que lorsque  $t$  tend vers l'infini, sa loi tend vers la loi uniforme. On a alors le résultat suivant [A11, Cor. 2.10].

**Théorème 5.1** *Avec les notations introduites ci-dessus, lorsque  $n$  tend vers l'infini, la mesure empirique spectrale de la matrice  $A + U_t B U_t^*$  converge faiblement en probabilité vers une loi sur  $\mathbb{R}$  qui ne dépend que de  $\mu$ ,  $\nu$  et  $t$ , que nous notons  $\mu *_t \nu$  et que nous appelons convolution  $t$ -libre de  $\mu$  et  $\nu$ .*

Ce théorème se déduit facilement de la convergence de la loi spectrale de  $U_t$  vers celle du mouvement brownien unitaire libre, de la convergence de la distribution non commutative du couple  $\{A, SBS^*\}$  et de la liberté asymptotique de matrices unitairement invariantes.

Un exemple classique où l'on sait calculer explicitement la convolution libre de deux mesures est celui où  $\mu = \nu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ . Dans ce cas,  $\mu *_t \nu = \frac{1}{4}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_2$  et  $\mu \boxplus \nu = \mathbb{1}_{[-2,2]}(x) \frac{dx}{\pi\sqrt{4-x^2}}$ . Pour ce qui est de la convolution  $t$ -libre, on peut montrer que pour tout  $t > 0$ ,

$$\frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2} *_t \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2} = \mathbb{1}_{[-2,2]}(x) \frac{\rho_{4t}(e^{4i \arccos \frac{x}{2}})}{\pi\sqrt{4-x^2}} dx, \quad (5.1)$$

où  $\rho_t$  est la fonction introduite à l'encart 5.7 plus bas. La figure 5.1 représente les densités de ces lois, calculées numériquement selon la méthode présentée à l'encart 5.7.

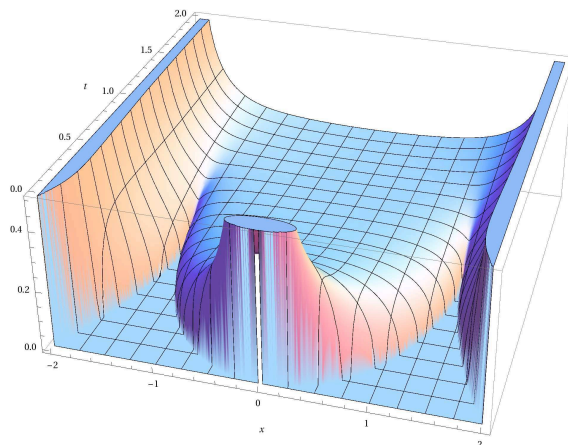


FIGURE 5.1 – Densité de  $\frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2} *_t \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2}$  en  $x \in [-2, 2]$  en fonction de  $x$  et  $t$ . On peut décrire complètement le support de la mesure à chaque temps. Ainsi le premier temps auquel ce support est l'intervalle  $[-2, 2]$  entier est  $t = 1$  et les deux derniers points à y entrer sont  $-\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$ .

## 5.2 Structures de dépendance et $t$ -liberté

Comme dans le cas de l'indépendance et de la liberté, l'existence de la convolution  $t$ -libre de deux mesures est un reflet de l'existence d'une structure de dépendance entre sous-algèbres d'un espace de probabilités non-commutatif. Par structure de dépendance, nous entendons la chose suivante : dans un espace de probabilités non-commutatif  $(\mathcal{A}, \varphi)$  où sont données deux sous-algèbres  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ , une structure de dépendance est une façon de reconstituer la restriction de  $\varphi$  à la sous-algèbre engendrée par  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  connaissant les seules restrictions de  $\varphi$  à  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ . Dans le langage des probabilités classiques, nous dirions qu'une telle structure permet d'inférer la loi jointe d'une famille de variables aléatoires de la seule connaissance de leurs lois individuelles. Plus de détails sont donnés dans la section 9.2 de l'appendice, où le lecteur trouvera les définitions des produits tensoriels et libres d'espaces de probabilités non commutatifs, ainsi que celles de la liberté et de l'indépendance dans de tels espaces.

Nous allons définir un modèle universel pour la  $t$ -liberté en définissant un état sur le produit libre des algèbres sous-jacentes à deux espaces de probabilités non-commutatifs quelconques. On utilise ici le produit libre  $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$  d'algèbres, défini à la section 9.2 de l'appendice.

**Définition 5.2** *Soient  $(\mathcal{A}_1, \varphi_1)$  et  $(\mathcal{A}_2, \varphi_2)$  deux espaces de probabilités non-commutatifs. Soit  $t$  un réel positif. Soit  $(\mathcal{U}, \tau)$  l'espace de probabilités non-commutatif engendré par un élément unitaire  $u_t$  dont la distribution est la mesure  $\nu_t$  définie à l'encart 5.7. Soit  $f$  l'unique morphisme d'algèbres*

$$f : \mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2 \rightarrow (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \star \mathcal{U}$$

*qui satisfait  $f(a_1) = a_1 \otimes 1$  pour tout  $a_1 \in \mathcal{A}_1$  et  $f(a_2) = u_t(1 \otimes a_2)u_t^*$  pour tout  $a_2 \in \mathcal{A}_2$ . On appelle produit  $t$ -libre de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  l'état  $\varphi_1 *_t \varphi_2$  sur  $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$  défini par*

$$\varphi_1 *_t \varphi_2 = [(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \star \tau] \circ f.$$

Le fait que la mesure  $\nu_t$  soit invariante par conjugaison complexe entraîne que la paire  $(u_t, u_t^{-1})$  a la même distribution que la paire  $(u_t^{-1}, u_t)$ , si bien qu'on aurait obtenu la même définition de  $\varphi_1 *_t \varphi_2$  en remplaçant  $f$  par le morphisme  $f'$  qui satisfait  $f'(a_1) = u_t(a_1 \otimes 1)u_t^*$  et  $f'(a_2) = 1 \otimes a_2$ .

Si  $t = 0$ , on retrouve la définition du produit tensoriel de deux états, transporté du produit tensoriel des algèbres à leur produit libre par le morphisme naturel  $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ . En revanche, si  $t > 0$ , l'élément  $u_t$  n'est pas scalaire dans  $\mathcal{U}$  et ceci permet d'assurer que  $f$  est injectif. Alors la sous-algèbre de  $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \star \mathcal{U}$  engendrée par  $\mathcal{A}_1 \otimes 1$  et  $u_t(1 \otimes \mathcal{A}_2)u_t^*$  est une réalisation du produit libre de  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ .

Un modèle universel étant défini, nous pouvons définir la  $t$ -liberté [A11, Def. 2.5].

**Définition 5.3** Soit  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espace de probabilités non-commutatif. Soient  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  deux sous-algèbres de  $\mathcal{A}$ . Notons  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les restrictions de  $\varphi$  à  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  respectivement. On dit que  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont  $t$ -libres si le morphisme d'algèbres naturel  $f : \mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}$  satisfait l'égalité  $\varphi \circ f = \varphi_1 *_t \varphi_2$ . On dit que deux parties de  $\mathcal{A}$  sont  $t$ -libres si les sous-algèbres involutives qu'elles engendrent le sont.

La remarque faite après la définition 5.2 assure que cette définition est symétrique en  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ .

On vérifie alors que la  $t$ -convolution correspond bien à la  $t$ -liberté.

**Proposition 5.4** Soit  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espace de probabilités non-commutatif. Soit  $t \geq 0$  un réel et soient  $a, b \in \mathcal{A}$  deux éléments autoadjoints  $t$ -libres, de distributions respectives  $\mu$  et  $\nu$ . Alors la distribution de  $a + b$  est  $\mu *_t \nu$ .

Nous pouvons définir d'autres convolutions  $t$ -libres. Par exemple, nous pouvons multiplier des éléments  $t$ -libres : si, avec les notations de la proposition ci-dessus,  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre et  $a$  et  $b$  sont positifs, on peut définir  $\mu \odot_t \nu$  comme la loi de  $\sqrt{b}a\sqrt{b}$ . Enfin, si  $a$  et  $b$  sont unitaires, auquel cas  $\mu$  et  $\nu$  sont des mesures de probabilités non plus sur  $\mathbb{R}$  mais sur le cercle unité, on peut définir  $\mu \odot_t \nu$  comme la loi de  $ab$ .

Donnons une brève explication quant au sens concret de la  $t$ -liberté. La **liberté** caractérise la distribution non commutative jointe de deux grandes matrices hermitiennes  $A, B$  dont les bases de vecteurs propres sont en situation générique (c'est à dire que l'on passe de l'une à l'autre en appliquant une transformation unitaire générique, qui s'obtient par exemple en la choisissant de façon aléatoire selon la mesure de Haar). L'**indépendance** caractérise la distribution non commutative jointe de deux matrices codiagonalisables telles que l'on passe d'une base de vecteurs propres de  $A$  classés dans l'ordre des valeurs propres à une telle base pour  $B$  en appliquant une permutation générique à cette base [A11, Th. 1.8]. La  **$t$ -liberté**, quant à elle, caractérise la distribution non commutative jointe de deux grandes matrices hermitiennes qui sont codiagonalisables à conjugaison près de l'une par un mouvement brownien unitaire pris au temps  $t$ .

Par ailleurs, la  $t$ -liberté est reliée au *processus de libération* défini par Voiculescu dans [119, Sect. 2.1] : schématiquement, on peut écrire

$$t\text{-liberté} = \text{processus de libération pris au temps } t + \text{indépendance au temps } 0.$$

Plus précisément, si  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont deux algèbres indépendantes, alors leurs images par le processus de libération issu de  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  au temps  $t$  sont  $t$ -libres.

### 5.3 Systèmes différentiels

Lorsqu'on cherche à faire des calculs avec des paires de variables  $t$ -libres, on est amené à calculer des expressions de la forme

$$\varphi(a_1 u_t b_1 u_t^* \dots a_n u_t b_n u_t^*), \quad (5.2)$$

où la famille  $\{a_1, \dots, a_n\}$  est indépendante de  $\{b_1, \dots, b_n\}$  et  $(u_t)_{t \geq 0}$ , mouvement brownien unitaire libre, est libre avec la réunion de ces deux familles.

La meilleure prise qu'on ait sur de telles expressions est de les considérer comme des fonctions de  $t$  et d'établir un système différentiel fermé le plus petit possible qu'elles satisfassent. Pour dériver par rapport à  $t$  une expression comme (5.2), on utilise une équation différentielle stochastique libre satisfaite par le mouvement brownien libre [18, Sect. 2.3], qui est l'analogie (et en un sens la limite lorsque la dimension  $n$  tend vers l'infini) de l'équation différentielle stochastique (5.5) qui définit le mouvement brownien unitaire.

Cette dérivée fait apparaître des produits d'expressions de la forme (5.2). En considérant tous les produits d'expressions de cette forme où  $a_1, \dots, a_n, u_t b_1 u_t^*, \dots, u_t b_n u_t^*$  apparaissent exactement une fois chacun, on obtient un ensemble fini de fonctions de  $t$  qui satisfait un système différentiel fermé. En résolvant de tels systèmes, on parvient à établir le résultat suivant [A11, Proposition 3.5].

**Proposition 5.5** *On définit une fonction  $G(t, z)$  dans un voisinage de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}$  de la façon suivante.*

*Soit  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espace de probabilités non-commutatif. Soient  $a$  et  $b$  deux éléments normaux indépendants dont les distributions sont à supports compacts et symétriques (c'est-à-dire que  $a$  et  $-a$  d'une part,  $b$  et  $-b$  d'autre part, ont même distribution) et  $(u_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien unitaire libre, libre avec  $\{a, b\}$ . Soit  $t \geq 0$ . On pose alors*

$$G(t, z) = \sum_{n \geq 1} \varphi((a u_t b u_t^*)^{2n}) e^{2nt} z^n.$$

*Alors,  $G$  est l'unique solution, dans un voisinage de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}$ , de l'équation non-linéaire*

$$\begin{cases} \partial_t G + 2z \partial_z (G^2) = 0, \\ G(0, z) = \sum_{n \geq 1} \varphi(a^{2n}) \varphi(b^{2n}) z^n. \end{cases}$$

C'est de cette proposition qu'on déduit la formule (5.1). On peut également en déduire la loi du produit de deux variables de Bernoulli  $t$ -libres. La densité obtenue est représentée à la figure 5.2.

**Proposition 5.6** *Pour tout  $t > 0$ , on a l'égalité de mesures suivantes sur le cercle unité :*

$$\frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2} \odot_t \frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2} = \rho_{4t}(\xi^2) d\xi,$$

où  $\rho_{4t}$  est la fonction introduite à l'encart 5.7 plus bas, i.e. la densité de la mesure  $\nu_{4t}$  par rapport à la loi uniforme sur le cercle.

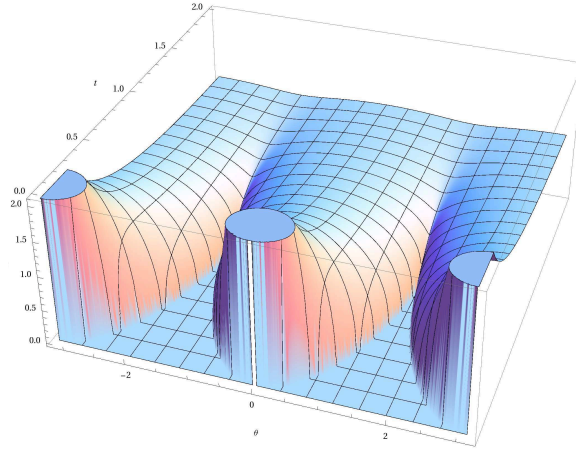


FIGURE 5.2 – Densité de  $\frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2} \odot_t \frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2}$  en  $e^{i\theta}$  en fonction de  $\theta$  et  $t$ . Le support de la mesure remplit le cercle pour la première fois au temps  $t = 1$ . Les derniers points à entrer dans le support sont  $i$  et  $-i$ .

## 5.4 Inexistence de cumulants $t$ -libres

Par analogie avec le cas de la liberté, nous nous sommes demandé s'il était possible de trouver des cumulants  $t$ -libres, c'est-à-dire des formes multilinéaires définies sur tout espace de probabilités non-commutatif et qui s'annuleraient dès lors qu'on les évalue sur des arguments qui peuvent être regroupés en deux familles non vides et  $t$ -libres (voir la section 9.6 de l'appendice pour une introduction aux cumulants classiques et libres). Dans le cas  $t$ -libre pour  $t > 0$ , nous avons montré qu'il n'existe rien d'aussi simple et puissant que les cumulants libres.

Afin d'énoncer ce résultat, présentons la forme sous laquelle nous avons cherché des candidats au rôle de cumulant  $t$ -libre.

Pour  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espace de probabilités non commutatif,  $n \geq 1$  et  $\sigma$  un élément du groupe  $\mathfrak{S}_n$  des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ , on définit une forme  $n$ -linéaire sur  $\mathcal{A}$  en posant, pour

tous  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ ,

$$\varphi_\sigma(a_1, \dots, a_n) = \prod_{(i_1 \dots i_r) \text{ cycle de } \sigma} \varphi(a_{i_1} \dots a_{i_r}).$$

Cette définition a un sens grâce au caractère tracial de  $\varphi$  (*i.e.* l'axiome  $\varphi(xy) = \varphi(yx)$  pour tous  $x, y$ ).

Nous allons chercher les cumulants  $t$ -libres sous la forme de combinaisons linéaires des  $\varphi_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  : c'est un modèle qui contient à la fois les cumulants classiques et les cumulants libres. On cherche bien entendu de telles fonctions qui aient la propriété de s'annuler dès lors qu'on les évalue sur des arguments qui peuvent être répartis en deux sous-ensembles non vides et qui forment deux familles  $t$ -libres.

**Définition 5.7** *Soit  $n \geq 2$  un entier et  $t \geq 0$  un réel. Un cumulant  $t$ -libre d'ordre  $n$  est une collection  $(c(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$  de nombres complexes telle que*

$$\sum_{\sigma \text{ } n\text{-cycle}} c(\sigma) \neq 0 \tag{5.3}$$

et telle que la propriété suivante soit vérifiée dans tout espace de probabilités non-commutatif  $(\mathcal{A}, \varphi)$  : pour toute paire  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  de sous-algèbres de  $\mathcal{A}$  qui sont  $t$ -libres par rapport à  $\varphi$ , et pour tous  $a_1, \dots, a_n$  éléments de  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  qui n'appartiennent ni tous à  $\mathcal{A}_1$ , ni tous à  $\mathcal{A}_2$ , on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c(\sigma) \varphi_\sigma(a_1, \dots, a_n) = 0. \tag{5.4}$$

Expliquons pourquoi la contrainte (5.3) est naturelle dans cette définition. Il est clair que si  $(c(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$  est un cumulant  $t$ -libre, alors pour tout  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ , la famille  $(c(\tau\sigma\tau^{-1}))_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$  est aussi un cumulant  $t$ -libre, tout comme

$$\left( \tilde{c}(\sigma) := \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} c(\tau\sigma\tau^{-1}) \right)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}.$$

L'avantage de ce dernier est qu'il est *invariant par conjugaison*, c'est à dire que pour tout  $\sigma, \tau$ ,  $\tilde{c}(\sigma) = \tilde{c}(\tau\sigma\tau^{-1})$ . La somme de (5.3) est alors le coefficient commun des cycles de longueur maximale, et le fait qu'il soit non nul pour tout  $n$  assure la possibilité de retrouver les moments  $\varphi(a^k)$  d'un élément  $a$  à partir de ses cumulants.

Notre résultat est le suivant [A11, Th. 4.3 et 4.4]. Par  $t$ -libre pour  $t = +\infty$ , nous entendons *libre*.

**Théorème 5.8** *1. Pour tout  $t \in [0, +\infty]$  et tout  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ , il existe un cumulant  $t$ -libre d'ordre  $n$ . Si de plus on demande que ce cumulant soit invariant par conjugaison,*

c'est-à-dire tel que  $c(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}) = c(\sigma_2)$  pour tous  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ , alors il est unique à multiplication près par une constante.

2. Il existe un cumulants  $t$ -libre d'ordre 7 si et seulement si  $t = 0$  ou  $t = +\infty$ .

Nous concluons ce chapitre par des encarts rappelant les formules de base du calcul d'Îto matriciel, la définition du mouvement brownien unitaire, ainsi que celle du mouvement brownien libre unitaire.

#### ENCART 5.5 – Calcul d'Îto matriciel

Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration et  $K = (K_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard sur l'espace des matrices anti-hermitiennes  $n \times n$  muni du produit scalaire  $A \cdot B = n \operatorname{Tr}(A^*B)$ , i.e. un processus à valeurs dans cet espace tel que les coefficients diagonaux de  $(i\sqrt{n}K_t)_{t \geq 0}$ , ainsi que les parties réelles et imaginaires multipliées par  $\sqrt{2}$  de ses coefficients sur-diagonaux forment des mouvements browniens réels standards indépendants. Alors pour toutes semi-martingales à valeurs matricielles  $X, Y$  de la forme

$$dX_t = A_t(dK_t)B_t + C_t dt, \quad dY_t = D_t(dK_t)E_t + F_t dt,$$

où  $A, B, C, D, E, F$  sont des processus matriciels  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptés, on a

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= (dX_t)Y_t + X_t dY_t - \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(B_t D_t) A_t E_t dt, \\ d\langle \operatorname{Tr}(X), \operatorname{Tr}(Y) \rangle_t &= -\frac{1}{n} \operatorname{Tr}(B_t A_t E_t D_t) dt, \end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignant la variation quadratique.

#### ENCART 5.6 – Les trois définitions du mouvement brownien sur le groupe unitaire

Pour  $K$  un mouvement brownien anti-hermitien  $n \times n$  comme défini à l'encart 5.5, on appelle *mouvement brownien unitaire* tout processus  $U = (U_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans l'espace des matrices complexes  $n \times n$  solution forte de

$$dU_t = dK_t U_t - \frac{1}{2} U_t dt \tag{5.5}$$

tel que  $U_0$  est unitaire avec probabilité un. On peut alors montrer, via le calcul stochastique matriciel, que avec probabilité un,  $U_t$  est unitaire pour tout  $t$ , et que les accroissements multiplicatifs à droite et à gauche de  $U_t$  sont stationnaires et indépendants : pour tout  $t_0$ , les processus  $(U_{t_0+t} U_{t_0}^*)_{t \geq 0}$  et  $(U_{t_0}^* U_{t_0+t})_{t \geq 0}$  sont des mouvements browniens unitaires indépendants de  $(U_s)_{0 \leq s \leq t_0}$ .

Le processus  $U$  peut aussi être défini en faisant rouler le groupe unitaire  $\mathcal{U}_n$  sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{u}$  sans glissement le long du processus  $K$  (en partant de  $U_0$ , qui est indépendant de  $K$ ). Précisons ce que cela signifie. Pour  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{u}$  chemin continu et lisse par morceaux issu de 0 et  $u_0 \in \mathcal{U}_n$ , "l'enroulement sans glissement" de  $\gamma$  sur  $\mathcal{U}_n$  issu de  $u_0$  est le chemin  $w_\gamma$  défini par

$w_\gamma(0) = u_0$  et  $w'_\gamma(t) = w_\gamma(t) \times \gamma'(t)$ . Ici,  $U$  peut être obtenu de cette façon à partir de  $K$  et de  $U_0$  à ceci près que  $K$  n'est pas lisse par morceaux. Néanmoins, on peut prouver que si  $(K^{(p)})_{p \geq 1}$  est une suite d'interpolations continues et affines par morceaux de  $K$ , alors la suite  $(w_{K^{(p)}})_{p \geq 1}$  converge en probabilité vers un processus qui ne dépend pas du choix des interpolations et qui est le processus  $U$  solution de (5.5). De façon équivalente,

$$U_t = \lim_{p \rightarrow \infty} U_0 \exp K \frac{t}{p} \exp(K \frac{2t}{p} - K \frac{t}{p}) \cdots \exp(K \frac{pt}{p} - K \frac{(p-1)t}{p}).$$

Pour plus de détails sur cette construction, voir [70, Sect. VI.7], [97, Eq. (35.6)] ou [55].

Enfin, on peut définir  $U$  comme un processus de Markov continu dont le générateur est  $\frac{1}{2}\Delta$ , où  $\Delta$  est le Laplacien sur  $\mathcal{U}_n$  pour la structure riemannienne engendrée par le produit scalaire sur l'algèbre de Lie défini par  $A \cdot B = n \operatorname{Tr}(A^*B)$ . Nous n'utiliserons pas cette approche, c'est pourquoi nous ne la détaillons pas.

#### ENCART 5.7 – Mouvement brownien unitaire libre

Soit  $U$  un mouvement brownien unitaire  $n \times n$ , comme défini à l'encart 5.6, issu de  $I$ . Biane, dans [18], et Rains, dans [95], ont montré que pour tout  $t \geq 0$ , la loi spectrale empirique de  $U_t$  converge en probabilité, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers l'unique loi  $\nu_t$  sur le cercle invariante par la transformation  $z \mapsto \bar{z}$  et de moments

$$e^{-\frac{kt}{2}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-t)^j}{j!} \binom{k}{j+1} k^{j-1} \quad (k \geq 0).$$

L'invariance de la loi de  $U$  par la conjugaison par n'importe quelle matrice unitaire et l'indépendance de ses accroissements permettent facilement d'en déduire que la distribution non commutative jointe de  $(U_t)_{t \geq 0}$  converge vers celle d'un processus  $(u_t)_{t \geq 0}$  d'éléments unitaires<sup>1</sup> d'un espace de probabilités non commutatif  $(\mathcal{A}, \varphi)$  tel que

- pour tous  $0 \leq s \leq t$ , la distribution de  $u_t u_s^*$  est  $\nu_{t-s}$ ,
- pour tout  $m \geq 1$ , pour tous  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m$ , les éléments  $u_{t_1} u_{t_0}^*, \dots, u_{t_m} u_{t_{m-1}}^*$  sont libres.

Une telle famille  $(u_t)_{t \geq 0}$  est appelée *mouvement brownien unitaire libre*.

On a une expression simple du support de  $\nu_t$  en fonction de  $t$  (voir [A11, Sect. 3.3.1]) mais pas de sa densité  $\rho_t$  par rapport à la loi uniforme sur le cercle. Cependant, la fonction analytique sur le disque unité  $\kappa_t$  dont la partie réelle est l'extension harmonique de  $\rho_t$ , donnée par la formule  $\kappa_t(z) = \int \frac{x+z}{x-z} d\nu_t(x)$ , satisfait l'équation

$$\frac{\kappa_t(z) - 1}{\kappa_t(z) + 1} e^{\frac{t}{2}\kappa_t(z)} = z \quad (5.6)$$

(cela peut être obtenu via la l'inversion de Lagrange, en utilisant la formule des moments de  $\nu_t$ ). En résolvant numériquement l'équation (5.6), on obtient la figure 5.3 ci-dessous.

1. Un *élément unitaire* dans un espace de probabilités non commutatif est un élément  $u$  tel que  $uu^* = u^*u = 1$ .



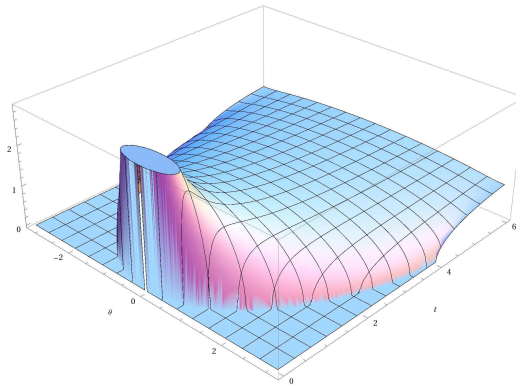


FIGURE 5.3 – Densité  $\rho_t$  de la loi  $\nu_t$  au point  $e^{i\theta}$  en fonction de  $\theta$  et  $t$ . On voit le support remplir le cercle progressivement lorsque  $t$  croît de 0 et 4, puis converger vers la loi uniforme.



# Chapitre 6

## Théorème central limite pour le mouvement brownien sur le groupe unitaire

The Brownian motion on the unitary group has been introduced in the present text in Encart 5.6. Mainly due to its relations with the free unitary Brownian motion (see Encart 5.7 above) and with the two-dimensional Yang-Mills theory, the Brownian motion on large unitary groups has appeared in several papers during the last decade. Rains, in [95], Xu, in [121], Biane, in [18, 20] and Lévy and Maïda, in [77, 78], are all concerned with the asymptotics of the spectral distribution of large unitary Brownian motions. In this section, we are concerned with the asymptotic distributions of linear combinations of the entries of an  $n \times n$  unitary Brownian motion as  $n$  tends to infinity.

It is clear that the same analysis would give similar results for the Brownian motion on the orthogonal group. For notational brevity, we chose to focus on the unitary group.

Our main result is the following one [A13, Th. 1.2]. Let  $(e^{-t/2}V_t)_{t \geq 0}$  a Brownian motion the group of  $n \times n$  matrices such that  $V_0 = I$  ( $V_t$  depends implicitly on the parameter  $n$ , as the matrix  $A$  below), let  $(\alpha_n)$  be a sequence of positive numbers with a limit  $\alpha \in [0, +\infty]$  and let  $A$  a be deterministic  $n \times n$  complex matrix such that for some fixed numbers  $a, p, q$ , as  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{n} \operatorname{Tr}(A) \rightarrow a, \quad \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(A^2) \rightarrow p, \quad \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(AA^*) \rightarrow q.$$

Let  $\mu$  be the distribution of a complex-valued continuous Gaussian centered process  $(X_t)_{t \geq 0}$

with independent increments such that

$$\mathbb{E}(X_t \overline{X_t}) = qt, \quad \mathbb{E}(X_t^2) = \begin{cases} -pt & \text{if } \alpha = 0, \\ -p \frac{\log(\alpha t + 1)}{\alpha} + a \frac{\log^2(\alpha t + 1)}{2\alpha} & \text{if } 0 < \alpha < +\infty, \\ 0 & \text{if } \alpha = +\infty. \end{cases} \quad (6.1)$$

**Theorem 6.1** *As  $n \rightarrow \infty$ , the distribution of the process*

$$(\alpha_n^{-1/2} \text{Tr}[A(V_{\log(\alpha_n t + 1)} - I)])_{t \geq 0}$$

*converges weakly to  $\mu$  in the space  $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{C})$  endowed with the topology of uniform convergence on every compact subset.*

Note that by the standard properties of the Gaussian spaces, this theorem that implies its multidimensional version : for any fixed  $d \geq 1$ , if  $A_1, \dots, A_d$  are  $n \times n$  matrices (depending implicitly on  $n$ ) such that as  $n \rightarrow \infty$ , for all  $i, j$ ,

$$\frac{1}{n} \text{Tr}(A_i) \rightarrow a_i, \quad \frac{1}{n} \text{Tr}(A_i A_j) \rightarrow p_{i,j}, \quad \frac{1}{n} \text{Tr}(A_i A_j^*) \rightarrow q_{i,j},$$

then the  $d$ -dimensional complex process

$$\{\alpha_n^{-1/2} \text{Tr}[A_1(V_{\log(\alpha_n t + 1)} - I)], \dots, \alpha_n^{-1/2} \text{Tr}[A_d(V_{\log(\alpha_n t + 1)} - I)]\}_{t \geq 0}$$

converges weakly to a distribution which can easily be expressed in terms of the  $a_i$ 's, the  $p_{i,j}$ 's, the  $q_{i,j}$ 's and of  $\alpha$ .

Recall that a *principal submatrix* of a matrix is a submatrix obtained by removing some columns, and the rows with the same indices.

**Corollary 6.2** *Let us fix  $p \geq 1$  and let  $(H_t), (S_t)$  be two independent standard Brownian motions on the Euclidian spaces of  $p \times p$  respectively Hermitian and skew-Hermitian matrices endowed with the respective scalar products  $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(XY)/2$ ,  $\langle X, Y \rangle = -\text{Tr}(XY)/2$ . Then, as  $n$  tends to infinity, the distribution of the  $\mathbb{C}^{p \times p}$ -valued process of the entries of any  $p \times p$  principal submatrix of  $\sqrt{n/\alpha_n}(V_{\log(\alpha_n t + 1)} - I)_{t \geq 0}$  converges to the one of the random process  $(H_{t-f_\alpha(t)} + S_{t+f_\alpha(t)})_{t \geq 0}$ , where*

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} t & \text{if } \alpha = 0, \\ \frac{\log(\alpha t + 1)}{\alpha} & \text{if } 0 < \alpha < +\infty, \\ 0 & \text{if } \alpha = +\infty. \end{cases}$$

Let us comment these results. The most constructive way to define the unitary Brownian motion is to consider a standard Brownian motion  $(K_t)_{t \geq 0}$  on the Lie algebra of the unitary group and to take its image by the *Itô map* (whose inverse is sometimes called the *Cartan map*), i.e. to wrap it around the unitary group : the process  $(U_t)_{t \geq 0}$  obtained is a unitary Brownian motion starting at  $I$ . This construction is the second of the ones presented in Encart 5.6. Our results give us an idea of the way the Itô map alters the process  $(K_t)_{t \geq 0}$  at different scales of time : for small times (i.e. when  $\alpha = 0$ ), the limit process is still purely skew-Hermitian, whereas for large times ( $\alpha = +\infty$ ), the limit process is a standard complex matricial Brownian motion (for intermediate scales of time,  $0 < \alpha < +\infty$ , the limit process is an interpolation between these extreme cases).

Moreover, the question of the choice of a rescaling of the time (depending on the dimension) raises interesting questions. There are other ways to scale the time for the Brownian motion on the unitary group. Our scaling of the time is the one for which the three limit regimes correspond respectively to small values of  $t$ , finite values of  $t$  and large values of  $t$  and for which the limit non commutative distribution of  $(e^{-t/2}V_t)_{t \geq 0}$  is the one of a free unitary Brownian motion. It also has a heuristic geometrical meaning : with this scaling, for any fixed  $t$ , the distance between  $V_0$  and  $V_t$  has the same order as the diameter of the unitary group (see [A13, Rem. 1.1]). It means that for any fixed  $t > 0$ , large values of  $n$ ,  $V_t$  is probably no longer too close to its departure point, while it also probably hasn't "orbited" the unitary group too many times.

To prove Theorem 6.1, we use Rebolledo's Theorem [2, Th. H.14], which states that to prove the convergence in distribution of a centered martingale to a Gaussian process with independent increments, it suffices to prove the  $L^1$ -convergence of the bracket of the martingale to the (deterministic) bracket of the limit process. Here, the convergence of the bracket is obtained via several iterations of the so-called *matricial Itô calculus*, presented in Encart 5.5.

A byproduct of Theorem 6.1 is a proof of the following theorem, about the asymptotic normality of unit vectors and unitary matrices. This result is not new (see below), but Theorem 6.1 allows to give a proof which, including the proof of Theorem 6.1, is the shortest we found in the literature. Its proof relies on the fact that the Haar measure is an invariant measure for the heat kernel on the unitary group.

**Theorem 6.3** *Let  $U$  be an  $n \times n$  unitary random matrix with Haar distribution and  $A$  be an  $n \times n$  non-random matrix (both  $U$  and  $A$  depending implicitly on  $n$ ) such that as  $n \rightarrow \infty$ ,*

$$\frac{1}{n} \operatorname{Tr}(AA^*) \rightarrow q \geq 0.$$

*Then as  $n \rightarrow \infty$ , the distribution of  $\operatorname{Tr}(AU)$  tends to a rotation-invariant complex Gaus-*

sian distribution with variance  $q$ .

Note that just like Theorem 6.1, by standard properties of Gaussian spaces, this theorem implies its mutlidimensional version : it follows directly from Theorem 6.3 that for any  $d \geq 1$ , if  $A_1, \dots, A_d$  are  $n \times n$  matrices (depending implicitly on  $n$ ) such that as  $n \rightarrow \infty$ , for all  $i, j$ ,

$$\frac{1}{n} \operatorname{Tr}(A_i A_j^*) \rightarrow q_{i,j} \in \mathbb{C},$$

then the distribution of the  $d$ -dimensional complex process

$$\{\operatorname{Tr}(A_1 U), \dots, \operatorname{Tr}(A_d U)\}$$

converges to the one of a complex Gaussian centered vector  $\{Z_1, \dots, Z_d\}$  such that for all  $i, j$ ,

$$\mathbb{E}[Z_i Z_j] = 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{E}[Z_i \overline{Z_j}] = q_{i,j}.$$

The historical first result of asymptotic normality of unit vectors was due to Émile Borel, who proved a century ago, in [26], that, for a uniformly distributed point  $(X_1, \dots, X_n)$  on the unit Euclidian sphere  $\mathbb{S}^{n-1}$ , the scaled first coordinate  $\sqrt{n}X_1$  converges weakly to the standard Gaussian distribution as the dimension  $n$  tends to infinity. As explained in the introduction of the paper [3] of Diaconis *et al.*, this says that the features of the “microcanonical” ensemble in a certain model for statistical mechanics (uniform measure on the sphere) are captured by the “canonical” ensemble (Gaussian measure). Since then, a long list of further-reaching results about the entries of uniformly distributed random orthogonal or unitary matrices have been obtained. The most recent ones are the previously cited paper of Diaconis *et al.*, the papers of Meckes and Chatterjee [82, 37], the paper of Collins and Stolz [43] and the paper of Jiang [71], where the point of view is slightly different.

# Chapitre 7

## Petits cycles de mots libres en des permutations aléatoires

### 7.1 Introduction

Dans cette section, je présente mes travaux [N1, A12], où l'on considère des permutations aléatoires qui s'écrivent comme des mots en des permutations aléatoires indépendantes : on se fixe tout d'abord un mot non trivial  $w$  en les lettres  $g_1, g_1^{-1}, \dots, g_k, g_k^{-1}$  et on introduit ensuite, pour tout  $n$ , un  $k$ -uplet  $s_1(n), \dots, s_k(n)$  de permutations aléatoires indépendantes de  $\{1, \dots, n\}$ . La permutation  $\sigma_n$  que l'on va considérer est celle obtenue en remplaçant chaque lettre  $g_i$  de  $w$  par  $s_i(n)$ . Par exemple, pour  $w = g_1 g_2 g_3 g_2^{-1}$ ,  $\sigma_n = s_1(n) \circ s_2(n) \circ s_3(n) \circ s_2(n)^{-1}$ . De plus, on s'autorise à restreindre les longueurs possibles des cycles des  $s_i(n)$  : on se fixe des ensembles  $A_1, \dots, A_k$  d'entiers positifs et on suppose que pour tout  $i$ ,  $s_i(n)$  est choisi uniformément dans l'ensemble<sup>1</sup> des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  qui ont toutes leurs longueurs de cycles dans  $A_i$ . Par exemple, si  $A_1 = \{1, 2\}$ ,  $s_1(n)$  est une involution aléatoire de loi uniforme. On va s'intéresser aux *petits cycles* de  $\sigma_n$ , c'est à dire aux cycles de longueur fixée indépendamment de  $n$ . La loi de  $\sigma_n$  étant invariante par conjugaison, les positions de ces cycles sont uniformes, et seules leurs longueurs portent un aléa inconnu. On introduit donc, pour tout entier positif  $\ell$ , le nombre  $N_\ell(\sigma_n)$  de cycles de longueur  $\ell$  dans la décomposition de  $\sigma_n$  en produit de cycles de supports disjoints. On va étudier le comportement asymptotique des  $N_\ell(\sigma_n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Avant d'énoncer les résultats, mettons ce travail en perspective.

Il est bien connu [4] que si  $\sigma_n$  est une permutation aléatoire de  $\{1, \dots, n\}$  de loi uniforme, alors les  $N_\ell(\sigma_n)$  ( $\ell \geq 1$ ) sont asymptotiquement indépendants et distribués selon les lois de Poisson de paramètres  $1/\ell$ . Par ailleurs, la loi des "grands cycles" (*i.e.* des cycles dont

---

1. On peut montrer que pour  $n$  assez grand, cet ensemble est non vide dès que  $n$  est un multiple du p.g.c.d. de  $A_i$  [87, Lem. 2.3].

la taille est proportionnelle à  $n$ ), ceux dont la taille varie avec  $n$ , s'exprime via la loi de Poisson-Dirichlet.

Nica a été le premier à considérer le cas où  $\sigma_n$  est un mot en des permutations aléatoires indépendantes et leurs inverses, distribuées selon la loi uniforme sur le groupe symétrique. Il a tout d'abord prouvé, dans [88], que le nombre de points fixes de telles permutations est  $o(n)$ , ce qui assure que les matrices de permutations aléatoires indépendantes sont asymptotiquement libres. Dans [89], il pousse son analyse plus loin, pour déterminer la loi limite du nombre de points fixes de  $\sigma_n$ , et plus généralement des  $N_\ell(\sigma_n)$  : il prouve que si le mot en question n'est pas une puissance d'un autre mot, alors pour tout  $\ell \geq 1$ ,  $N_\ell(\sigma_n)$  converge vers la loi de Poisson de paramètre  $1/\ell$ . Une conséquence de ce résultat est que les matrices de grandes permutations aléatoires indépendantes offrent un modèle pour la *liberté*, mais pas pour la *liberté de second ordre*<sup>2</sup>. Son résultat a de plus été utilisé récemment par Linial et Puder dans [79] où il apparaît que les mots libres en des permutations aléatoires jouent un rôle dans l'analyse des *n-lifts* de graphes.

Par ailleurs, les permutations à longueurs de cycles restreintes intéressent les combinato-riciens depuis longtemps (voir [122] pour un passage en revue de la littérature sur le sujet). Dans [123], par exemple, Yakymiv étudie la distribution limite jointe des  $N_\ell(\sigma_n)$  dans le cas où  $\sigma_n$  est distribuée uniformément dans l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  dont les longueurs des cycles appartiennent toutes à un ensemble fixé  $A$  infini.

Enfin, dans [87], Neagu confronte ces deux approches précédentes en étudiant la liberté asymptotique de matrices de permutations aléatoires indépendantes distribuées uniformément dans des ensembles de permutations de  $\{1, \dots, n\}$  de longueurs de cycles restreintes, ce qui l'amène à considérer des mots en de telles permutations, et à montrer que leur nombre de points fixes est  $o(n)$ . C'est la prolongation du travail de Neagu qui nous a amené au sujet de ce chapitre, dont les résultats impliquent par exemple que de telles matrices, bien que libres, ne satisfont pas la liberté asymptotique de second ordre. Au delà des questions de liberté asymptotique, mon intérêt pour le sujet a été attisé par un problème apparemment fort difficile, auquel Thierry Lévy et moi-même nous sommes attelés en vain : la caractérisation des mots  $w$  en les lettres  $g_1, g_1^{-1}, \dots, g_k, g_k^{-1}$  tels que pour tout groupe compact (ou fini)  $G$ , pour toute famille  $s_1, \dots, s_k$  de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur  $G$ , la loi de la variable aléatoire obtenue en remplaçant chaque lettre  $g_i$  de  $w$  par  $s_i$  est la loi uniforme.

## 7.2 Cas d'un mot trivial

On étudie d'abord le cas où  $w = g_i$  est un mot d'une seule lettre [N1, Prop. 2.1 et Th. 2.3].

---

2. Voir à la fin de la section 2.2.3 pour une présentation succincte à la théorie de la liberté asymptotique de second ordre.

**Théorème 7.1** Soit  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Sous certaines hypothèses techniques sur  $A_i$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a les convergences suivantes :

- si  $A_i$  est infini, pour toute partie finie  $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$  de  $A_i$ , le vecteur aléatoire

$$\{N_{\ell_1}(s_i(n)), \dots, N_{\ell_p}(s_i(n))\}$$

converge en loi vers

$$\text{Poisson}(1/\ell_1) \otimes \dots \otimes \text{Poisson}(1/\ell_p),$$

- si  $A_i$  est fini, en notant  $d_i := \max A_i$ , pour tout  $\ell \in A_i$ , on a

$$\frac{N_{\ell}(s_i(n))}{n^{\ell/d_i}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell}$$

dans tous les espace  $L^p$ .

La première partie de ce théorème, qui a été prouvée en même temps que moi par Yakymiv sous des hypothèses assez proches [123, Th. 1], signifie que lorsque  $A_i$  est infini, tout se passe, pour les cycles de longueurs admises, comme si l'on ne restreignait pas les longueurs de cycles possibles. La deuxième partie signifie que si  $A_i$  est fini,  $s_i(n)$  n'est pas loin d'avoir pour ordre  $d_i = \max A_i$  dans le groupe symétrique : la partie de  $\{1, \dots, n\}$  recouverte par ses cycles de longueur  $d_i$  est de cardinal  $n - O(n^{\kappa})$ , où  $\kappa = \frac{\max(A_i \setminus \{d_i\})}{d_i} < 1$ . Dans le cas où  $A_i$  est fini, il serait intéressant de comprendre les fluctuations de  $\frac{N_{\ell}(s_i(n))}{n^{\ell/d_i}}$  autour de sa limite. Il semble que la combinatoire analytique, comme présentée dans le livre de Flajolet et Sedgewick [54], puisse être d'un certain recours dans l'étude de cette question.

Donnons les grandes lignes de la démonstration du théorème 7.1. Notons  $\mathfrak{S}_n^{(A_i)}$  l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  dont tous les cycles ont leurs longueurs dans  $A_i$ . On voit assez facilement que l'on a, pour  $|z| < 1$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\#\mathfrak{S}_n^{(A_i)}}{n!} z^n = \exp \left( \sum_{\ell \in A_i} \frac{z^{\ell}}{\ell} \right). \quad (7.1)$$

De plus, la méthode de Hayman (voir [54]) permet de relier les comportements asymptotiques des coefficients des deux sommes de l'équation précédente. Par exemple, dans le cas où  $A_i$  est fini, on déduit de (7.1) que en notant  $p$  le p.g.c.d. de  $A_i$ , on a, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\#\mathfrak{S}_{np-p}^{(A_i)}}{\#\mathfrak{S}_{np}^{(A_i)}} \sim (np)^{\frac{p}{d_i} - p}.$$

Ensuite, la méthode d'inclusion/exclusion permet de conclure.



### 7.3 Mots non triviaux

On considère maintenant une permutation aléatoire  $\sigma_n$  construite à partir d'un mot  $w$  selon le mode présenté au premier paragraphe de la section 7.1, en supposant que pour tout  $i$ ,  $A_i$  satisfait l'hypothèse technique suivante :

$$A_i \text{ est fini} \quad \text{ou} \quad \sum_{\substack{j \geq 1 \\ j \notin A_i}} \frac{1}{j} < \infty. \quad (7.2)$$

La structure de  $w$  va bien entendu jouer un rôle dans le comportement des variables  $N_\ell(\sigma_n)$ . Le théorème précédent incite à penser que pour tout  $i$  tel que  $A_i$  est fini, pour  $d_i = \max A_i$ ,  $s_i(n)^{d_i} \approx \text{Id}_{\{1, \dots, n\}}$ , ce qui incite à penser que les séquences du type  $g_i^{d_i}$  dans  $w$  sont à neutraliser. Cette intuition est confirmée par le théorème suivant (voir [A12, Th. 3.4 et 3.6] pour des énoncés un petit peu plus précis). On note  $\mathbb{F}_k$  le groupe libre à  $k$  générateurs  $g_1, \dots, g_k$  et  $\mathbb{F}_k/H$  son quotient par les relations  $g_i^{d_i} = 1$ , pour les  $i$  dans  $\{1, \dots, k\}$  tels que  $A_i$  est fini.

**Théorème 7.2** • *Si l'élément de  $\mathbb{F}_k/H$  représenté par le mot  $w$  est d'ordre  $L$  fini, alors  $\sigma_n$  a aussi pour "ordre approximatif"  $L$ , puisque lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a*

$$N_L(\sigma_n) \sim \frac{n}{L}$$

et pour tout  $\ell \neq d$ ,

$$\frac{N_\ell(\sigma_n)}{n} \rightarrow 0.$$

• *Si l'élément de  $\mathbb{F}_k/H$  représenté par le mot  $w$  est d'ordre infini, alors deux cas peuvent se produire :*

(a)  *dans  $\mathbb{F}_k/H$ , le mot  $w$  ne représente pas le même élément, à conjugaison près, qu'un mot du type  $g_i^\alpha$ , avec  $i \in \{1, \dots, k\}$  et  $\alpha$  entier : alors pour tout  $\ell$ ,*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N_\ell(\sigma_n)] \geq \frac{1}{\ell}. \quad (7.3)$$

(b)  *à conjugaison près,  $w$  représente le même élément de  $\mathbb{F}_k/H$  que  $g_i^\alpha$ , pour un certain  $i \in \{1, \dots, k\}$  et un certain  $\alpha$  non nul : alors (7.3) est valable seulement pour les  $\ell$  tels que  $\ell|\alpha \in A_i$ .*

Dans le cas où l'ordre, dans  $\mathbb{F}_k/H$ , de l'élément représenté par  $w$  est infini, l'équation (7.3) du théorème précédent nous assure l'existence de cycles de taille  $\ell$  en quantité au moins aussi grande que si  $\sigma_n$  avait été uniformément distribuée sur le groupe symétrique (en effet, dans ce cas, on aurait  $\mathbb{E}[N_\ell(\sigma_n)] = \frac{1}{\ell}$ ). Le théorème suivant [A12, Th. 3.7 et 3.8], qui établit une convergence en loi, donne une estimation plus précise.

**Théorème 7.3** *Pour tout  $\ell \geq 1$ , on a convergence en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , de du vecteur*

$$\{N_1(\sigma_n), \dots, N_\ell(\sigma_n)\} \tag{7.4}$$

*converge en loi vers*

$$\text{Poisson}(1/1) \otimes \dots \otimes \text{Poisson}(1/\ell),$$

*dans chacun des cas suivants :*

- *tous les  $A_i$  sont infinis et  $w$  est un mot non trivial qui n'est pas une puissance d'un autre mot,*
- *$w = g_1 \cdots g_k$  avec  $k > 2$ .*

Notons que si  $w$  est une puissance d'un autre mot  $v$ , la décomposition en produit de cycles de  $\sigma_n$  se déduit de celle de la permutation aléatoire associée à  $v$ . Par ailleurs, dans le cas où  $w = g_1 \cdots g_k$  avec  $k = 2$ , on peut aussi donner la limite en loi du vecteur de (7.4), qui est encore un produit tensoriel de lois de type Poisson (voir [A12, Th. 3.8 et 3.12]).

La démonstration des deux théorèmes précédents repose sur le même genre de considérations que la démonstration du théorème 7.1 plus haut, auxquelles s'ajoute (et c'est là qu'est la difficulté principale) l'étude de certains graphes associés au mot  $w$ .



# Chapitre 8

## Perspectives

J'indique ici quelques unes des directions que j'aimerais suivre par la suite. Elles apparaissent ici dans l'ordre d'avancement du projet, qui n'est pas forcément celui de l'importance que je souhaite leur donner dans l'avenir.

### **Matrices aléatoires à queues lourdes/creuses**

Par “matrices aléatoires à queues lourdes”, on entend des matrices aléatoires dont les coefficients sont des variables à queues lourdes. Ces matrices ont été étudiées par Ben Arous et Guionnet dans l'article [12], puis par divers auteurs dans [9, 24, 25, 5]. Une variante, permettant plus de calculs, est obtenue en tronquant les coefficients de ces matrices avec un cut-off qui tend vers l'infini avec la dimension. Cela revient à considérer des matrices de ayant des moments de tous ordres, mais qui “explorent” lorsque la dimension tend vers l'infini : c'est le modèle étudié par Zakharevich dans [124], dont Ben Arous et Guionnet ont montré, dans [12], qu'il est, en un certain sens, asymptotiquement équivalent au leur.

De telles matrices, dûment renormalisées, sont proches de matrices “creuses”, *i.e.* de matrices contenant essentiellement des zéros. Dans un travail en cours avec Alice Guionnet et Camille Mâle, nous essayons de comprendre les fluctuations asymptotiques de la loi spectrale empirique de telles matrices. Le premier résultat obtenu est que ces fluctuations sont en  $1/\sqrt{n}$ ,  $n$  désignant la dimension, ce qui corrobore l'idée, déjà apparue dans [5], selon laquelle les valeurs propres de telles matrices sont plus proches de variables indépendantes que celles de matrices de Wigner standard, qui se distinguent fortement de variables indépendantes par les interactions répulsives auxquelles elles sont sujettes. Par ailleurs, dans l'optique de l'étude des vecteurs propres de telles matrices selon la méthode utilisée dans mon article [A19] (voir au chapitre 4 de ce texte), il serait intéressant d'étudier, pour de telles matrices, les lois spectrales selon un vecteur.

Par ailleurs, dans un travail en cours avec Thierry Cabanal-Duvillard, nous travaillons à une généralisation du théorème de Marchenko-Pastur au contexte suivant : on considère

une matrice  $X$  qui s'écrit

$$X = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p C_j C_j^*,$$

où les  $C_j$  sont des matrices colonnes aléatoires indépendantes, comme dans le théorème de Marchenko-Pastur, mais ici, on ne suppose plus que les coefficients des matrices colonnes sont tous du même ordre : certains coefficients sont beaucoup plus élevés que les autres, ce qui modifie le comportement asymptotique des valeurs propres de  $X$ .

### **Perturbations de matrices aléatoires**

Dans un travail en cours avec Nathanaël Enriquez, nous étudions la question simple suivante :

*Qu'advient-il des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice hermitienne  $X$  lorsqu'elle subit une perturbation aléatoire faible ?*

Plus précisément, on étudie les valeurs et vecteurs propres d'une matrice  $n \times n$  du type  $X_\varepsilon = X + P_\varepsilon$ , dans la limite où  $P_\varepsilon \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Selon l'amplitude de la perturbation  $P_\varepsilon$ , on voit plusieurs régimes apparaître à la limite.

### **Matrices aléatoires à coefficients corrélés**

De telles matrices partagent avec les matrices à queue lourde et les matrices à bande le fait de ne pas être "blanches", *i.e.* de garder une trace importante de la base dans laquelle elle a été écrite. Avec Djilil Chafaï et Camille Mâle, nous aimerions, en établissant une formule de Schwinger-Dyson, obtenir la convergence de la loi spectrale empirique de telles matrices.

### **Systèmes de particules en interaction**

Le *processus d'exclusion simple*, introduit par Spitzer en 1970, est un des modèles de mécanique statistique les plus simples. Il en existe plusieurs versions, mais toutes reposent sur le principe suivant : des particules sont placées en divers points d'une ligne (qui peut être la droite, un segment, un cercle ...), et elles font des mouvements vers la droite et/ou vers la gauche, indépendamment les unes des autres à ceci près que chaque particule est bloquée dans ses mouvements par ses voisins. Deux aspects de ce processus ont attiré mon attention récemment.

Pour plusieurs modèles de ce type, la loi des positions des particules coïncide avec celle des plus grandes valeurs propres de certaines matrices aléatoires (voir, par exemple, [99] ou le théorème 2.7, lié à ces questions).

Par ailleurs, ces processus induisent des dynamiques sur les diagrammes de Young. Or Philippe Biane, dans son article [22], a montré que diagrammes de Young aléatoires et probabilités libres étaient reliés par l’intermédiaire des représentations des grands groupes symétriques. Plus précisément, il a montré que certains grands diagrammes de Young aléatoires avaient des formes limites qui s’exprimaient simplement via les probabilités libres. La dynamique qu’il utilise pour passer d’un grand tableau à l’autre n’est pas la même que celle issue des processus d’exclusion, néanmoins, les outils qu’il a mis en place semblent être pertinents dans ce contexte aussi.

Ces deux types de sujets m’intéressent beaucoup. Notamment, j’ai avec Damien Simon le projet d’utiliser les idées de Biane pour déterminer la forme limite du diagramme de Young associé à un processus d’exclusion simple totalement asymétrique (TASEP) partant de conditions initiales plus générales que “tous les sites de gauche occupés, aucun site de droite occupé”.

### **Vecteurs propres de matrices à bandes**

Les matrices à bande constituent un modèle simple pour la transition de phase de Anderson. Dans ce contexte, celle-ci s’exprime de la façon suivante. Considérons une (grande) matrice à bande de taille  $n \times n$ , dont la bande est de largeur  $\ell$  : si  $\ell \gg \sqrt{n}$ , les vecteurs propres sont délocalisés et les valeurs propres ont des statistiques proches de celles des matrices de Wigner, alors que si  $\ell \ll \sqrt{n}$ , les vecteurs propres sont localisés et les valeurs propres ont des statistiques proches de celles d’un processus de Poisson. Cela n’est encore qu’une conjecture, malgré quelques avancées récentes (*c.f.* les travaux de Erdős et Knowles [46, 47], de Schenker [101] ou de Sodin [106]). J’aimerais essayer de mettre à contribution la méthode utilisée dans mon article [A19] pour étudier ces questions.

### **Maximum de variables corrélées et lois de Tracy-Widom**

L’encart 2.4 de ce texte, dédié aux lois de Tracy-Widom, explique que ces lois semblent remplacer les lois max-stables habituelles lorsque l’on considère un maximum de variables sujettes à répulsion. On connaît un certain nombre de modèles où l’on peut montrer, grâce à des calculs exacts, que ces lois interviennent. Il semble cependant probable que ces lois jouissent d’une plus forte universalité, leur permettant d’intervenir dans de nombreux contextes où un maximum de variables en interaction répulsive est en jeu, même lorsque aucun calcul exact ne met en évidence un processus déterminantal. C’est un sujet qui m’intéresse beaucoup, dont j’aimerais étudier les connexions avec un domaine des mathématiques assez actif actuellement, celui des corps convexes et des mesures log-concaves, dont un article emblématique est celui de Klartag [75].



# Chapitre 9

## Appendice : introduction aux probabilités libres

### 9.1 Espaces de probabilités non commutatifs et liberté

Un *espace de probabilités non commutatif* (en abrégé *e.p.n.c.*) est<sup>1</sup> un couple  $(\mathcal{A}, \varphi)$ , où  $\mathcal{A}$  est une algèbre sur  $\mathbb{C}$ , unifère<sup>2</sup> et involutive<sup>3</sup>, et  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{A}$ , appelée *état*, valant 1 en  $1_{\mathcal{A}}$  telle que  $\varphi(xy) = \varphi(yx)$  et  $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$  pour tout  $x, y$  dans  $\mathcal{A}$ . On suppose aussi que la forme sesquilinéaire hermitienne  $(x, y) \mapsto \varphi(xy^*)$  est définie positive. On appelle *variables aléatoires non commutatives* les éléments de  $\mathcal{A}$ . Une variable aléatoire non commutative est dite *constante* si elle est proportionnelle à  $1_{\mathcal{A}}$ .

Soit  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un e.p.n.c. Une famille  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  de sous-algèbres<sup>4</sup> de  $\mathcal{A}$  est dite *libre* si pour tout  $n \geq 1$ , pour tous  $i_1, \dots, i_n \in I$  tels que  $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \dots, i_{n-1} \neq i_n$ , pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{A}_{i_n}$ , on a

$$\varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = 0 \implies \varphi(x_1 \cdots x_n) = 0.$$

Une famille de parties de  $\mathcal{A}$ , ou de variables aléatoires non commutatives est dite *libre* si celles-ci sont contenues dans des sous-algèbres libres.

Si  $\mathcal{A}$  est de plus munie d'une structure de  $C^*$ -algèbre (dans ce cas,  $\varphi$  est toujours continue car elle est positive), alors on parle de  *$C^*$ -espace de probabilités non commutatif*.

---

1. Dans certains articles, toutes ces hypothèses ne sont pas faites, et dans ce cadre particulier, on parle alors de *\*-espace de probabilités non commutatif tracial et fidèle*. Notons que si la forme sesquilinéaire hermitienne associée à  $\varphi$  n'est que supposée positive, en quotientant l'algèbre par l'idéal bilatère contenu dans  $\ker \varphi$  des  $a \in \mathcal{A}$  tels que  $\varphi(aa^*) = 0$ , on obtient une forme définie positive.

2. Une algèbre  $\mathcal{A}$  est dite *unifère* si elle possède un élément neutre  $1_{\mathcal{A}}$  pour la multiplication.

3. Une algèbre  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbb{C}$  est dite *involutive* si elle est munie d'une involution  $x \mapsto x^*$  antilinéaire telle que pour tous  $x, y \in \mathcal{A}$ ,  $(xy)^* = y^*x^*$ .

4. Par convention, on désignera ici par *sous-algèbre* de  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre contenant  $1_{\mathcal{A}}$  et stable par  $x \mapsto x^*$ .



On vérifie aisément que si des sous-algèbres sont libres, alors leurs adhérences le sont.

Enfin, si  $\mathcal{A}$  est en plus une  $W^*$ -algèbre et si  $\varphi$  est normale (i.e. continue pour la topologie  $\sigma$ -faible d'opérateurs, ce qui équivaut au fait que si  $(x_i)_{i \in I}$  est un réseau croissant d'éléments positifs de  $\mathcal{A}$  qui converge faiblement vers  $x$ , alors  $\varphi(x_i)$  tend vers  $\varphi(x)$ ), on parle de  $W^*$ -*espace de probabilités non commutatif*. On vérifie, avec le théorème de densité de Kaplansky, que si des sous-algèbres sont libres, alors leurs bicommutants (i.e.  $W^*$ -algèbres engendrées) le sont.

**Exemple 9.1** 1. Si  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  est un espace de probabilité, toute algèbre stable par conjugaison de variables aléatoires complexes admettant des moments, munie de l'état donné par l'espérance, est un e.p.n.c.. Si de plus,  $\Omega$  est un espace topologique compact (resp. localement compact) et  $\Sigma$  est la tribu borélienne, alors en se restreignant à l'algèbre des fonctions continues (resp. à  $L^\infty$ ), on obtient un  $C^*$ - (resp.  $W^*$ -)e.p.n.c. agissant sur  $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ . Tout  $C^*$ - (resp.  $W^*$ -)e.p.n.c. dans lequel l'algèbre est commutative est de cette forme.

2. Un autre exemple classique est celui de l'algèbre  $M_n(\mathbb{C})$  des matrices  $n \times n$  complexes munie de la trace normalisée  $\text{tr} := \frac{1}{n} \text{Tr}$ .
3. On peut faire le produit tensoriel des deux exemples précédents en considérant une algèbre de variables aléatoires définies sur un espace de probabilités classique, à valeurs dans  $M_n(\mathbb{C})$ , dont toutes les coordonnées possèdent des moments, que l'on munit de l'état  $\mathbb{E} \circ \text{tr}$ .

À moins que l'une d'entre elles ne soit constante, si deux variables aléatoires non commutatives  $a, b$  sont libres, alors elles ne commutent pas. En effet, on doit avoir, quitte à retrancher à  $a$  et  $b$  leurs images par  $\varphi$ ,  $\varphi(ab^*a^*b) = 0$  et  $\varphi(aa^*b^*b) = \varphi(aa^*)\varphi(b^*b) > 0$ . De plus, comme on le verra au paragraphe suivant, l'espace vectoriel qu'elles engendrent est de dimension infinie. On en déduit donc que l'on n'a pas de sous-algèbres libres non triviales dans les deux premiers exemples. Dans le troisième, cela reste vrai, mais c'est plus difficile à démontrer.

## 9.2 Structures de dépendance et produit libre d'espaces de probabilités non commutatifs

Une façon de décrire une structure de dépendance entre deux sous-algèbres  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  d'un espace de probabilités non-commutatif est de donner une règle qui permette de calculer  $\varphi(P(a_1, a_2))$  pour tous  $a_1 \in \mathcal{A}_1$ ,  $a_2 \in \mathcal{A}_2$  et tout polynôme à deux variables non commutatives  $P$  connaissant les moments de  $a_1$  et  $a_2$ . C'est, indirectement, de cette façon que nous avons défini la liberté. C'est aussi de cette nature qu'est la règle  $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$  qui caractérise l'indépendance de deux variables aléatoires. Une telle description n'assure cependant pas l'existence d'exemples non triviaux de la structure de dépendance qu'on veut définir.

En probabilités classiques, la construction qui assure l'existence de variables indépendantes de lois arbitraires est celle du produit cartésien d'espaces mesurables muni du produit tensoriel des lois. Du point de vue non pas des espaces de probabilités mais des variables aléatoires, cette construction correspond au produit tensoriel des algèbres. Considérons par exemple un espace de probabilités  $(\Omega, \mathbb{P})$  et notons  $(\mathcal{A}, \varphi)$  l'espace de probabilités non-commutatif (commutatif!)  $(L^\infty(\Omega, \mathbb{P}), \mathbb{E})$ . Donnons-nous deux variables aléatoires bornées  $X$  et  $Y$  sur  $\Omega$ . Notons  $\mathcal{A}_X$  la sous-algèbre de  $\mathcal{A}$  engendrée par  $X$ , c'est-à-dire l'ensemble des polynômes en  $X$ , et  $\varphi_X$  la forme linéaire induite par l'espérance sur  $\mathcal{A}_X$ . Alors  $(\mathcal{A}_X, \varphi_X)$  est un e.p.n.c.. Considérons de façon analogue  $(\mathcal{A}_Y, \varphi_Y)$ . Il existe un unique morphisme d'algèbre  $f : \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y \rightarrow \mathcal{A}$  tel que  $f(X \otimes 1) = X$  et  $f(1 \otimes Y) = Y$ , et l'image de ce morphisme est exactement l'algèbre engendrée par  $X$  et  $Y$ . On peut *définir* un état  $\varphi_X \otimes \varphi_Y$  sur  $\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$  en posant  $(\varphi_X \otimes \varphi_Y)(a \otimes b) = \varphi_X(a)\varphi_Y(b)$ . Cette étape correspond à la construction du produit tensoriel de deux mesures. On peut alors, pour tout élément  $c$  de  $\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$ , comparer son espérance dans  $\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$  et dans  $\mathcal{A}$ , *i.e.* comparer  $(\varphi_X \otimes \varphi_Y)(c)$  et  $\varphi(f(c))$ . La proposition suivante est une caractérisation purement algébrique de l'indépendance :

*Les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si le morphisme d'algèbres  $f : \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y \rightarrow \mathcal{A}$  préserve les espérances, c'est-à-dire si  $\varphi_X \otimes \varphi_Y = \varphi \circ f$ .*

En généralisant de façon évidente la définition de  $\varphi_X \otimes \varphi_Y$  à un produit quelconque  $\otimes_{i \in I} \varphi_{|\mathcal{A}_i}$ , nous en tirons la définition générale suivante.

**Définition 9.2** *Soit  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espace de probabilités non-commutatif et  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille de sous-algèbres de  $\mathcal{A}$ . On dit que cette famille est indépendante si pour tout  $i \neq j$ , tout élément de  $\mathcal{A}_i$  commute à tout élément de  $\mathcal{A}_j$  et si le morphisme d'algèbres naturel  $f : \otimes_{i \in I} \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}$  satisfait l'égalité  $\varphi \circ f = \otimes_{i \in I} \varphi_{|\mathcal{A}_i}$ .*

La construction algébrique qui correspond à la liberté est le produit *libre* d'algèbres. Si  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  est une famille d'algèbres unifères, leur produit libre est la plus grosse algèbre unifère engendrée par les  $\mathcal{A}_i$ . Plus précisément, le produit libre des algèbres  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  est défini à isomorphisme près comme l'unique algèbre  $\mathcal{A}$  telle que pour tout  $i$ , on a une injection d'algèbres  $\iota_i : \mathcal{A}_i \hookrightarrow \mathcal{A}$ , et telle que si  $\mathcal{B}$  est une algèbre unifère telle que pour tout  $i$ , il existe un morphisme  $f_i : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{B}$ , alors il existe un unique morphisme  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tel que pour tout  $i$ ,  $f \circ \iota_i = f_i$ . Cette algèbre, que l'on note  $\star_{i \in I} \mathcal{A}_i$ , se construit aisément : si pour tout  $i$ ,  $\mathcal{A}_i^\circ$  est un supplémentaire, dans  $\mathcal{A}_i$ , de  $\mathbb{C} \cdot 1_{\mathcal{A}_i}$ , le produit libre des  $\mathcal{A}_i$  est l'espace vectoriel

$$\mathbb{C} \cdot 1 \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{i_1 \neq \dots \neq i_n} \mathcal{A}_{i_1}^\circ \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{i_n}^\circ, \quad (9.1)$$

sur laquelle le produit se définit de façon naturelle (en tenant compte du fait que le produit de deux éléments d'un même  $\mathcal{A}_i^\circ$  n'appartient pas forcément à  $\mathcal{A}_i^\circ$ ). Si les algèbres  $\mathcal{A}_i$  sont des  $\ast$ -algèbres, on peut munir le produit libre d'une involution qui en fera un *produit libre de  $\ast$ -algèbres*.

Étant donné une famille  $(\mathcal{A}_i, \varphi_i)_{i \in I}$  d'espaces de probabilités non commutatifs, il existe sur  $\star_{i \in I} \mathcal{A}_i$  un unique état  $\psi$  conférant au produit une structure d'e.p.n.c. tel que pour

tout  $i$ ,  $\varphi_i = \psi \circ \iota_i$  et tel que les sous-algèbres  $\iota_i(\mathcal{A}_i)$  sont libres dans le produit libre muni de l'état  $\psi$ . Cet état  $\psi$ , noté  $\star_{i \in I} \varphi_i$ , est défini de la façon suivante : dans la construction précédente, on choisit, pour tout  $i$ ,  $\mathcal{A}_i^\circ = \ker \varphi_i$ , et on définit  $\psi$  par  $\psi(1) = 1$  et  $\psi$  est nulle sur la somme située à droite de  $\mathbb{C} \cdot 1$  dans (9.1). Notons que cet état sur le produit libre des algèbres unifères est, en un sens, le plus naturel. L'e.p.n.c. obtenu est appelé *produit libre* des  $(\mathcal{A}_i, \varphi_i)$ .

L'analogue de la caractérisation de l'indépendance donnée plus haut est alors le suivant :

*Une famille  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  de sous-algèbres d'un même e.p.n.c.  $(\mathcal{A}, \phi)$  est libre si et seulement si en notant  $\psi = \star_{i \in I} \varphi_i$ , le morphisme canonique  $f$  du produit libre des  $\mathcal{A}_i$  dans  $\mathcal{A}$  satisfait  $\psi = \phi \circ f$ .*

**Exemple 9.3 (Algèbre de groupes)** *Pour  $G$  un groupe, on définit l'algèbre de  $G$   $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}^{(G)}$  de  $G$  comme l'ensemble des fonctions  $G \rightarrow \mathbb{C}$  de support fini (une telle fonction est notée  $\sum_{g \in G} x_g \cdot g$ ) muni de sa structure d'espace vectoriel complexe canonique, du produit de convolution :*

$$\sum_{g \in G} x_g \cdot g \times \sum_{g \in G} y_g \cdot g = \sum_{g \in G} \left( \sum_{h, k \in G, hk=g} x_h y_k \right) \cdot g$$

*et de la conjugaison*

$$\left( \sum_{g \in G} x_g \cdot g \right)^* = \sum_{g \in G} \overline{x_g} \cdot g^{-1}.$$

*On peut munir  $\mathbb{C}[G]$  d'une structure d'e.p.n.c. avec l'état tracial  $\varphi_G$  défini par*

$$\varphi_G \left( \sum_{g \in G} x_g \cdot g \right) = x_e,$$

*où  $e$  désigne l'élément neutre de  $G$ .*

*Pour  $(G_i)_{i \in I}$  une famille de groupes, l'e.p.n.c. associé au groupe produit cartésien des  $G_i$  s'identifie naturellement à l'e.p.n.c.  $(\otimes_{i \in I} \mathbb{C}[G_i], \otimes_{i \in I} \varphi_{G_i})$ , alors que l'e.p.n.c. associé au groupe produit libre des  $G_i$  s'identifie naturellement à l'e.p.n.c.  $(\star_{i \in I} \mathbb{C}[G_i], \star_{i \in I} \varphi_{G_i})$ .*

Disons maintenant quelques mots sur les pendants topologiques de ces constructions. On peut définir, de la même façon, le produit tensoriel et le produit libre de  $C^*$ - (resp.  $W^*$ -) e.p.n.c.. Dans l'idée, la construction est dans la continuité de la précédente : on considère le produit tensoriel ou libre des e.p.n.c., on le fait agir sur un espace de Hilbert, et on passe à l'adhérence. Cela dit, la construction détaillée est loin d'être évidente. Donnons ici un résultat central dans cette construction : on peut montrer, avec la construction GNS, que tout  $C^*$ -e.p.n.c. (resp. tout  $W^*$ -e.p.n.c.) se plonge, en tant que  $C^*$ -algèbre (resp.  $W^*$ -algèbre), dans l'algèbre  $\mathcal{B}(H)$  des opérateurs bornés sur un certain espace de Hilbert dans lequel on peut trouver un vecteur  $\xi$  tel que  $\varphi(\cdot) = \langle \cdot \xi, \xi \rangle$ .

### 9.3 Distributions de variables aléatoires non commutatives

Soit  $I$  un ensemble. Définissons l'algèbre  $\mathbb{C}\langle X_i, i \in I \rangle$  des polynômes à variables non commutatives indexées par  $I$  : il s'agit tout simplement du produit libre des algèbres unifères  $\mathbb{C}[X_i]$ , où  $i$  varie dans  $I$ .

La *distribution* d'une famille  $(a_i)_{i \in I}$  de variables aléatoires non commutatives d'un même e.p.n.c.  $(\mathcal{A}, \varphi)$ , est la forme linéaire

$$\mu_{(a_i)_{i \in I}} : P \in \mathbb{C}\langle X_i, i \in I \rangle \mapsto \varphi(P(a_i, i \in I)) \in \mathbb{C}.$$

Notons que par hypothèse, la suite des moments  $\varphi(a^k)$ ,  $k \geq 0$  d'un élément auto-adjoint  $a$  de  $\mathcal{A}$  est une suite positive au sens de [1], donc la suite des moments d'une mesure de probabilité sur la droite réelle :  $\mu_a$  est l'intégration par rapport à une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , que l'on appellera, lorsqu'elle est unique, *loi spectrale*, ou *distribution* de  $a$ . Elle est unique lorsque l'on travaille dans un  $C^*$ -e.p.n.c.. L'élément  $a$  est dit *positif* si  $\mu_a$  est l'intégration par rapport à une mesure portée par  $\mathbb{R}^+$ .

- Exemple 9.4**
1. Si  $(\mathcal{A}, \varphi)$  est  $(M_n(\mathbb{C}), \text{tr})$ , alors pour toute matrice auto-adjointe  $a$ ,  $\mu_a$  est la loi empirique sur le spectre de  $a$ .
  2. Si  $\mathcal{A}$  est une algèbre de variables aléatoires définies sur un espace de probabilités classique, à valeurs dans  $M_n(\mathbb{C})$ , dont tous les coefficients possèdent des moments exponentiels, que l'on munit de l'état  $\mathbb{E} \circ \text{tr}$ , alors pour toute matrice aléatoire hermitienne  $a$  de  $\mathcal{A}$ ,  $\mu_a$  est l'espérance de la loi spectrale de  $a$ , i.e. la mesure d'intensité de la mesure aléatoire donnée par la loi spectrale de  $a$ .
  3. Si  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{B}(H)$  pour un espace de Hilbert  $H$  et si  $\varphi(\cdot) = \langle \cdot, \xi, \xi \rangle$ ,  $\mu_a$  est la mesure de probabilité dont la valeur sur tout borélien  $B$  est  $\langle p_B(a)\xi, \xi \rangle$ , où  $p_B(a)$  est le projecteur spectral sur  $B$  pour  $a$ . Cette mesure est donc portée par le spectre de  $a$ .

**Remarque 9.5** On peut montrer que si deux familles  $(a_i, a_i^*)_{i \in I}$  et  $(b_i, b_i^*)_{i \in I}$  de deux e.p.n.c. (resp.  $C^*$ -e.p.n.c.,  $W^*$ -e.p.n.c.)  $(\mathcal{A}, \varphi)$  et  $(\mathcal{B}, \psi)$  ont la même distribution et engendrent  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  comme  $*$ -algèbres unifères (resp. comme  $C^*$ -algèbres, comme  $W^*$ -algèbres), alors on peut trouver un isomorphisme de  $*$ -algèbres (resp. un isomorphisme isométrique de  $C^*$ -algèbres, un isomorphisme isométrique de  $C^*$ -algèbres continu pour les topologies  $\sigma$ -faibles d'opérateurs) entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  qui envoie chaque  $a_i$  sur  $b_i$ , et préserve les états. Cette remarque nous éclaire sur l'intérêt que peut avoir cette théorie dans la perspective de la classification de ces algèbres.

Notons que si  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  est une famille libre de sous-algèbres de  $(\mathcal{A}, \varphi)$  et que si pour tout  $i$ ,  $a_i \in \mathcal{A}_i$ , alors la distribution de la famille  $(a_i)_{i \in I}$  dans  $(\mathcal{A}, \varphi)$  et dans le produit libre des

$(\mathcal{A}_i, \varphi|_{\mathcal{A}_i})$  est la même (par hypothèse de préservation de l'état). On en déduit le résultat suivant : *la distribution d'une famille libre ne dépend que des distributions individuelles*. Ce résultat est l'analogie du résultat de probabilités classiques qui dit que la loi jointe d'une famille de variables aléatoires indépendantes ne dépend que de leurs lois individuelles. Il sera central pour répondre à la question posée plus haut à propos des matrices aléatoires.

## 9.4 Liberté asymptotique des matrices aléatoires carrées

Si pour tout  $n \geq 1$ ,  $(a_i(n))_{i \in I}$  est une famille d'éléments d'un e.p.n.c.  $(\mathcal{A}(n), \varphi_n)$ , on dit que  $(a_i(n))_{i \in I}$  *converge en distribution* vers une famille  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments d'un e.p.n.c.  $(\mathcal{A}, \varphi)$  si les distributions convergent point par point. La famille  $(a_i(n))_{i \in I}$  est dite *asymptotiquement libre* si elle converge en distribution vers une famille libre.

On étend la notion de convergence en distribution (et donc la notion de liberté asymptotique) aux matrices aléatoires de la façon suivante : si pour tout  $n \geq 1$ ,  $(A_i(n))_{i \in I}$  est une famille de matrices aléatoires  $n \times n$ , on dit que la famille *converge en distribution en probabilité* vers une famille  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments d'un e.p.n.c.  $(\mathcal{A}, \varphi)$  si pour tout  $P \in \mathbb{C}\langle X_i, i \in I \rangle$ , la variable aléatoire classique donnée par la trace normalisée  $\text{tr } P(A_i(n), i \in I)$  converge en probabilité vers le nombre  $\varphi(P(a_i, i \in I))$ .

Les résultats liant probabilités libres et matrices aléatoires caractérisent la distribution non commutative **jointe** de familles de matrices aléatoires à partir de lois spectrales **individuelles** [120, 118].

**Théorème 9.6** *Soit, pour tout  $n \geq 1$ ,  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de matrices aléatoires  $n \times n$  hermitiennes<sup>5</sup>, dont les coordonnées ont des moments à tous les ordres. On suppose :*

- (a) *la famille  $(H_i)_{i \in I}$  est indépendante,*
- (b) *pour tout  $i \in I$ ,  $H_i$  a une loi invariante par conjugaison par les matrices unitaires ou bien est une matrice de Wigner,*
- (c) *pour tout  $i \in I$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la loi spectrale empirique de  $H_i$  converge faiblement en probabilité vers une loi à support compact déterministe.*

*Alors la famille  $(H_i)_{i \in I}$  est asymptotiquement libre : il existe une famille libre  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments auto-adjoints d'un e.p.n.c.  $(\mathcal{A}, \varphi)$  telle que pour tout  $P \in \mathbb{C}\langle X_i, i \in I \rangle$ , la variable aléatoire  $\text{tr } P(H_i, i \in I)$  converge en probabilité, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers le nombre  $\varphi(P(a_i, i \in I))$ .*

**Remarque 9.7** Ce théorème reste vrai en remplaçant l'hypothèse (ii) par le fait que les matrices sont du type  $H_i = X_i X_i^*$ , où  $X_i$  est une matrice rectangulaire  $n \times p$ , à coefficients i.i.d., avec  $n/p \rightarrow c > 0$  [68, 31, 32].

---

5. La dépendance en  $n$  des matrices  $H_i = H_i(n)$  est maintenue implicite ici afin de ne pas alourdir les notations. Il en sera de même des matrices  $D_j$  de la remarque 9.8 et pour  $A$  et  $B$  au paragraphe 9.5.

**Remarque 9.8 (Liberté asymptotique de matrices aléatoires avec des matrices déterministes)** Ce théorème peut être amélioré de la façon suivante : si pour tout  $n \geq 1$ , on considère aussi une famille  $(D_j)_{j \in J}$  de matrices déterministes  $n \times n$ , qui converge en distribution, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers une famille  $(d_j)_{j \in J}$ , alors la famille

$$(H_i)_{i \in I}, (D_j)_{j \in J},$$

indexée par l'union disjointe  $I \cup J$ , converge en distribution en probabilité vers la famille

$$(a_i)_{i \in I}, (d_j)_{j \in J},$$

où les ensembles  $\{a_i\}_{i \in I}$ ,  $\{d_j; j \in J\}$  sont libres.

## 9.5 Convolutions libres $\boxplus$ et $\boxtimes$

Le théorème précédent permet d'affirmer que pour  $A, B$  des matrices aléatoires hermitiennes  $n \times n$  indépendantes telles que  $A$  ou  $B$  est invariante, en loi, par conjugaison par n'importe quelle matrice unitaire et telles qu'il existe  $\mu_1, \mu_2$  lois sur  $\mathbb{R}$  telles que pour la convergence faible en probabilités,

$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda \text{ val. pr. de } A} \delta_\lambda \longrightarrow \mu_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{\lambda \text{ val. pr. de } B} \delta_\lambda \longrightarrow \mu_2,$$

il existe une loi  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$ , ne dépendant que de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  telle que pour la convergence faible en probabilités,

$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda \text{ val. pr. de } A+B} \delta_\lambda \longrightarrow \mu.$$

La loi  $\mu$  ainsi définie est alors appelée la *convolution additive libre* des lois  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . On la note  $\mu_1 \boxplus \mu_2$ .

Lorsque  $A$  et  $B$  sont en plus supposées positives, il existe aussi une loi, notée  $\mu_1 \boxtimes \mu_2$  et appelée *convolution multiplicative libre* de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , telle que pour la convergence faible en probabilités,

$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda \text{ val. pr. de } AB} \delta_\lambda \longrightarrow \mu_1 \boxtimes \mu_2.$$

## 9.6 Cumulants libres et $R$ -transformée

Il est naturel, une fois les convolutions libres définies, de chercher des transformations intégrales qui les linéarisent. Elles sont notamment utiles pour étendre à l'ensemble des lois de probabilités des résultats qui, comme ceux du paragraphe précédent, se démontrent

d'abord pour les lois à support compact. Dans le contexte des probabilités classiques, la convolution additive est linéarisée par le logarithme de la transformée de Fourier. Les coefficients du développement en série entière du logarithme de la transformée de Fourier de variables aléatoires classiques sont donc des fonctions additives de variables aléatoires indépendantes. Ils sont appelés *cumulants classiques* des variables aléatoires. L'objet de ce paragraphe est de rappeler la définition de ces cumulants classiques, puis de présenter leurs analogues libres. Ils ont été construits et étudiés essentiellement par Speicher et Nica [108, 109, 90], dans des travaux qui furent le point de départ de l'approche combinatoire des probabilités libres, laquelle s'est révélée très fructueuse.

### 9.6.1 Cumulants classiques

Soit  $\mu$  une mesure de probabilités à support compact sur  $\mathbb{R}$ . Les cumulants (classiques) de  $\mu$  sont les nombres  $(c_n^*(\mu))_{n \geq 1}$  définis par l'égalité

$$\log \int_{\mathbb{R}} e^{zt} d\mu(t) = \sum_{n \geq 1} c_n^*(\mu) \frac{z^n}{n!}.$$

Ils linéarisent la convolution : si  $\mu$  et  $\nu$  sont à support compact, on a  $c_n^*(\mu * \nu) = c_n^*(\mu) + c_n^*(\nu)$  pour tout  $n \geq 1$ .

Les cumulants sont reliés de façon combinatoire aux moments. Introduisons l'ensemble  $\text{Part}(n)$  des partitions de  $\{1, \dots, n\}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , notons  $m_n(\mu) = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t)$  le  $n$ -ième moment de  $\mu$ . Alors la relation qui lie moments et cumulants est la suivante : pour tout  $n \geq 1$ ,

$$m_n(\mu) = \sum_{\pi \in \text{Part}(n)} \prod_{\substack{B \text{ bloc de } \pi \\ B = \{i_1 < \dots < i_r\}}} c_r^*(\mu). \quad (9.2)$$

Cette relation se généralise à plusieurs variables de la façon suivante : pour  $X_1, \dots, X_d$  variables aléatoires réelles bornées, les cumulants  $c^*(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$  sont définis par la relation

$$\log \mathbb{E}[e^{z_1 X_1 + \dots + z_d X_d}] = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d} c^*(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \cdots z_{i_n} \quad (9.3)$$

et par le fait que  $c^*(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$  ne dépend pas de l'ordre de ses arguments. L'intérêt des cumulants vient alors du fait que, en plus de leur rôle dans la formule (9.3) du logarithme de la transformée de Fourier, ils caractérisent l'indépendance : on voit immédiatement par (9.3) que  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendants si et seulement si leurs cumulants mixtes s'annulent, i.e. si  $c^*(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) = 0$  dès que l'on n'a pas  $i_1 = \dots = i_n$ .

Voici la version multidimensionnelle de la relation (9.2) : pour  $Z_1, \dots, Z_n$  variables aléatoires réelles bornées,

$$\mathbb{E}[Z_1 \cdots Z_n] = \sum_{\pi \in \text{Part}(n)} \prod_{\substack{B \text{ bloc de } \pi \\ B = \{i_1 < \dots < i_r\}}} c^*(Z_{i_1}, \dots, Z_{i_r}). \quad (9.4)$$

En introduisant la fonction de Möbius<sup>6</sup>  $\text{Möb}(\cdot, \cdot)$  du treilli  $\text{Part}(n)$  muni de la relation d'ordre partiel pour laquelle  $\pi \leq \pi'$  si tout bloc de  $\pi$  est contenu dans un bloc de  $\pi'$ , la formule (9.4) s'inverse de la façon suivante :

$$c^*[Z_1, \dots, Z_n] = \sum_{\pi \in \text{Part}(n)} \text{Möb}(\pi, \mathbf{1}_n) \prod_{\substack{B \text{ bloc de } \pi \\ B = \{i_1 < \dots < i_r\}}} \mathbb{E}[Z_{i_1} \cdots Z_{i_r}], \quad (9.5)$$

où  $\mathbf{1}_n$  désigne le plus grand élément de  $\text{Part}(n)$ ,  $\{\{1, \dots, n\}\}$ .

## 9.6.2 Cumulants libres

C'est en adaptant la formule (9.4) au cadre non commutatif des probabilités libres que l'on définit les cumulants libres. Pour  $(\mathcal{A}, \varphi)$  espace de probabilités non-commutatif et  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ , la non-commutativité entraîne que l'ordre des éléments dans les expressions du type  $\varphi(a_1 \cdots a_n)$  compte. C'est ce qui amène à apporter plus d'attention à la structure des partitions utilisées. On introduit alors les *partitions non croisées* de  $\{1, \dots, n\}$  : une partition  $\pi$  de  $\{1, \dots, n\}$  est dite *non croisée* s'il n'existe pas quatre éléments  $x < y < z < t$  de  $E$  vérifiant  $x \overset{\pi}{\sim} z \not\sim y \overset{\pi}{\sim} t$ .

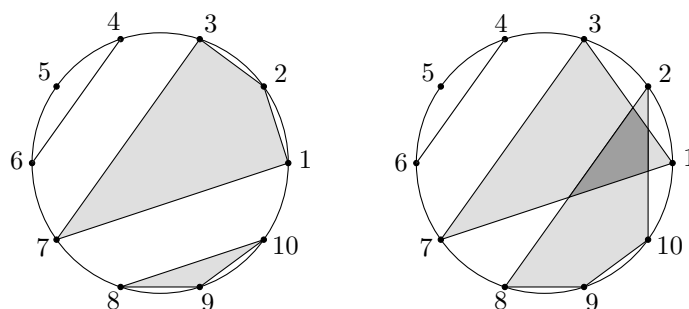


FIGURE 9.1 – La partition  $\{\{1, 2, 3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}, \{8, 9, 10\}\}$  est non-croisée alors que  $\{\{1, 3, 7\}, \{2, 8, 9, 10\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$  est croisée.

On note  $\text{NC}(n)$  l'ensemble des partitions non croisées de  $\{1, \dots, n\}$ , que l'on munit de l'ordre induit par celui de  $\text{Part}(n)$ . On note  $\text{Möb}_{\text{NC}}(\cdot, \cdot)$  sa fonction de Möbius.

On définit alors, récursivement, pour tout  $n \geq 1$ , la fonction  $n$ -linéaire  $k_n$  sur  $\mathcal{A}^n$  par la formule :

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}, \quad \varphi(a_1 \cdots a_n) = \sum_{\pi \in \text{NC}(n)} \prod_{\substack{B \text{ bloc de } \pi \\ B = \{i_1 < \dots < i_r\}}} k_r(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}),$$

6. La définition de la fonction de Möbius d'un ensemble fini partiellement ordonné se trouve par exemple au chapitre 10 de [90].



ou, de façon équivalente,

$$k_n(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\pi \in \text{NC}(n)} \text{Möb}_{\text{NC}}(\pi, \mathbf{1}_n) \prod_{\substack{B \text{ bloc de } \pi \\ B = \{i_1 < \dots < i_r\}}} \varphi(a_{i_1} \cdots a_{i_r}). \quad (9.6)$$

Pour  $a \in \mathcal{A}$ , les nombres  $k_n(a, \dots, a)$ , notés  $k_n(a)$ , sont appelés les *cumulants libres* de  $a$ .

**Proposition 9.9** *Soit  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espace de probabilités non commutatif. Deux sous-algèbres  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  de  $\mathcal{A}$  sont libres si et seulement si pour tout  $n \geq 1$  et tous  $a_1, \dots, a_n$  éléments de  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  qui n'appartiennent ni tous à  $\mathcal{A}_1$ , ni tous à  $\mathcal{A}_2$ , on a  $k_n(a_1, \dots, a_n) = 0$ .*

*En particulier, si  $a$  et  $b$  sont deux éléments libres de  $\mathcal{A}$ , on a pour tout  $n \geq 1$  l'égalité  $k_n(a + b) = k_n(a) + k_n(b)$ .*

### 9.6.3 La $R$ -transformée

Ainsi, les cumulants libres linéarisent la convolution libre et caractérisent la liberté. Une transformation intégrale analytique dont les coefficients seraient les cumulants libres permettrait donc de linéariser la convolution additive libre.

Le théorème suivant donne le lien entre la série formelle dont les coefficients sont les moments  $\varphi(a^n)$  d'une variable aléatoire non commutative  $a$  et la série formelle dont les coefficients sont ses cumulants libres.

**Théorème 9.10** *Soit  $a \in \mathcal{A}$ . Alors les séries formelles*

$$G_a(z) := \sum_{n \geq 0} \varphi(a^n) \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} \quad \text{et} \quad R_a(z) := \sum_{n \geq 0} k_{n+1}(a) z^n$$

*sont liées par la relation*

$$R_a(z) = G_a^{-1}(z) - \frac{1}{z},$$

*où  $G_a^{-1}(\cdot)$  désigne l'inverse de  $G_a(\cdot)$  pour la composition.*

En remarquant que si  $\mu$  est une loi à support compact dont les moments coïncident avec ceux de  $a$ ,  $G_a(z)$  coïncide avec la *transformée de Cauchy* de  $\mu$

$$G_\mu(z) := \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{z - x} \quad (\text{pour } z \notin \text{support}(\mu)), \quad (9.7)$$

on obtient alors (en étendant par densité aux lois à support non compact <sup>7</sup>) la transformation qui linéarise  $\boxplus$  : c'est la  $R$ -transformée de  $\mu$ , définie par

$$R_\mu(z) = G_\mu^{-1}(z) - \frac{1}{z}. \quad (9.8)$$

**Exemple 9.11** Pour  $\mu$  respectivement égale à  $\delta_a$ ,  $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ ,  $\frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - (x-m)^2} \mathbf{1}_{|x-m| \leq r} dx$ ,  $L_{MP,c}$ ,  $\frac{dx}{\pi(1+x^2)}$ , on a  $R_\mu(z) = a$ ,  $\frac{z-1+\sqrt{1+z^2}}{2z}$ ,  $m + \frac{r^2}{4}z$ ,  $\frac{1}{1-cz}$ ,  $-i$ . On peut facilement en déduire que la convolution libre et la convolution classique de la loi de Cauchy avec n'importe quelle loi sont les mêmes, et que la convolution libre de deux lois de Bernouilli symétriques est la loi d'arcsinus  $\frac{dx}{\pi\sqrt{x(2-x)}}$  sur  $[0, 2]$ .

De la même façon, la convolution multiplicative libre  $\boxtimes$  se calcule via une transformation intégrale : en posant

$$T_\mu(z) = \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{x d\mu(x)}{z-x} \quad (\text{pour } z \notin \text{support}(\mu)), \quad (9.9)$$

et en définissant la  $S$ -transformée de  $\mu$  par la formule

$$S_\mu(z) = (1+z)/(zT_\mu^{-1}(z)), \quad (9.10)$$

on a la formule  $S_{\mu \boxtimes \nu}(z) = S_\mu(z)S_\nu(z)$  pour toutes lois  $\mu, \nu$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

## 9.7 Probabilités libres à valeurs opérateurs

Les notions d'espérance conditionnelle et d'indépendance conditionnelle ont aussi leurs analogues libres. Nous en présentons ici brièvement la théorie [120, 117, 109, 103], qui est la clé de la modélisation que l'on fait du comportement asymptotique des matrices aléatoires rectangulaires.

Si  $\mathcal{A}$  est une  $*$ -algèbre unifère et  $\mathcal{D}$  une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$ , une application linéaire  $\varphi_{\mathcal{D}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  qui envoie  $1_{\mathcal{A}}$  sur  $1_{\mathcal{A}}$  et satisfait, pour tout  $a \in \mathcal{A}, d, d' \in \mathcal{D}$ ,  $\varphi_{\mathcal{D}}(dad') = d\varphi_{\mathcal{D}}(a)d'$ , est appelée une *espérance conditionnelle* de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$ . Le couple  $(\mathcal{A}, \varphi_{\mathcal{D}})$  est alors un *espace de probabilités non commutatif  $\mathcal{D}$ -valué*.

De nombreuses notions des probabilités libres ont leurs analogues " $\mathcal{B}$ -valués".

Une famille  $(\mathcal{A}_i)_{1 \leq i \leq r}$  de sous  $*$ -algèbres unifères de  $\mathcal{A}$  qui contiennent toutes  $\mathcal{D}$  est dite *libre avec amalgamation sur  $\mathcal{D}$*  si pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $i_1, \dots, i_n \in I$  tels que  $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$ , pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{A}_{i_n}$ , on a

$$\varphi_{\mathcal{D}}(x_1) = \dots = \varphi_{\mathcal{D}}(x_n) = 0 \implies \varphi_{\mathcal{D}}(x_1 \cdots x_n) = 0.$$

---

7. Dans le cas où  $\mu$  est à support compact, les fonctions  $G_\mu$  et  $R_\mu$  sont analytiques sur des voisinages respectivement de  $\infty$  et de zéro dans  $\mathbb{C}$  dont les amplitudes sont contrôlées par le support de  $\mu$ . Dans le cas général, on a encore des fonctions analytiques, mais elles sont définies sur des *voisinages non tangentiels* de  $\infty$  et de zéro. La notion la plus adéquate est alors celle de *germes* de fonctions analytiques.

Une famille de parties de  $\mathcal{A}$ , ou de variables aléatoires non commutatives est dite *libre avec amalgamation sur  $\mathcal{D}$*  si elles sont contenues dans des sous-algèbres qui le sont.

Si  $(a_i)_{i \in I}$  est une famille d'éléments d'un e.p.n.c.  $\mathcal{D}$ -valué  $(\mathcal{A}, \varphi_{\mathcal{D}})$ , la  $\mathcal{D}$ -distribution de la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est l'application

$$\mu_{(a_i)_{i \in I}}^{\mathcal{D}} : P \in \mathcal{D}\langle X_i, i \in I \rangle \mapsto \varphi_{\mathcal{D}}(P(a_i, i \in I)) \in \mathcal{D},$$

où  $\mathcal{D}\langle X_i, i \in I \rangle$  est l'algèbre des polynômes à coefficients dans  $\mathcal{D}$ , et à variables non commutatives (ni entre elles, ni avec les éléments de  $\mathcal{D}$ ), indexées par  $I$  (c'est l'ensemble des sommes finies de termes du type  $d_0 X_{i_1} d_1 X_{i_2} \cdots X_{i_k} d_k$ , avec  $k \geq 0$ ,  $i_1, \dots, i_k \in I$  et  $d_0, \dots, d_k \in \mathcal{D}$ ).

On peut définir, de la même façon qu'au paragraphe 9.2, le *produit libre avec amalgamation sur  $\mathcal{D}$*  de n'importe quelle famille d'espaces de probabilités non commutatifs  $\mathcal{D}$ -valués. On en déduit le même genre de propriétés pour la liberté avec amalgamation qu'au paragraphe 9.2, par exemple le fait de pouvoir construire à sa guise des variables libres avec amalgamation de  $\mathcal{D}$ -distributions individuelles prescrites, et le fait que *la  $\mathcal{D}$ -distribution d'une famille libre avec amalgamation ne dépend que des  $\mathcal{D}$ -distributions individuelles*. Notons que si l'on a un état  $\varphi$  sur  $\mathcal{A}$  tel que  $\varphi = \varphi \circ \varphi_{\mathcal{D}}$ , la distribution (avec  $\varphi$ ) d'une famille d'éléments libres avec amalgamation est entièrement déterminée par les  $\mathcal{D}$ -distributions individuelles, mais non par les distributions individuelles avec  $\varphi$ .

Enfin, lorsque  $\mathcal{D}$  est de dimension finie, on peut définir, comme au paragraphe 9.4, la *convergence en  $\mathcal{D}$ -distribution* et la *convergence en  $\mathcal{D}$ -distribution en probabilité* pour des suites d'éléments de  $\mathcal{D}$ -espaces de probabilités non commutatifs.

# Liste des travaux publiés ou soumis

- [A1] F. Benaych-Georges *Failure of the Raïkov theorem for free random variables*. Séminaire de Probabilités XXXVIII, (2005) 313–320.
- [A2] F. Benaych-Georges *Classical and free infinitely divisible distributions and random matrices*. Ann. Probab. Vol. 33, no. 3 (2005) 1134–1170.
- [A3] F. Benaych-Georges *Taylor expansions of  $R$ -transforms, application to supports and moments*. Indiana Univ. Math. J., Vol. 55, no. 2 (2006) 465–483.
- [A4] F. Benaych-Georges *Infinitely divisible distributions for rectangular free convolution : classification and matricial interpretation*. Probab. Theory Related Fields, Vol. 139, issue 1–2 (2007), 143–189.
- [A5] F. Benaych-Georges *Rectangular random matrices, related convolution*. Probab. Theory Related Fields, Vol. 144, issue 3 (2009), 471–515.
- [A6] F. Benaych-Georges, I. Nechita *A permutation model for free random variables and its classical analogue*. Pacific J. Math., 242 (2009), no. 1, 33–51.
- [A7] S.T. Belinschi, F. Benaych-Georges, A. Guionnet *Regularization by free additive convolution, square and rectangular cases*. Complex Anal. Oper. Theory, Vol. 3, no. 3 (2009) 611–660.
- [A8] F. Benaych-Georges *Rectangular random matrices, related free entropy and free Fisher’s information*. J. Operator Theory, Vol. 62, no. 2 (2009) 371–419.
- [A9] F. Benaych-Georges, T. Cabanal-Duvillard *A matrix interpolation between classical and free max operations : I. The univariate case*. J. Theoret. Probab., Vol. 23, no. 2 (2010) 447–465.
- [A10] F. Benaych-Georges *On a surprising relation between the Marchenko-Pastur law, rectangular and square free convolutions*. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., Vol. 46, no. 3 (2010), 644–652.
- [A11] F. Benaych-Georges, T. Lévy *A continuous semigroup of notions of independence between the classical and the free one*. Ann. Probab., Vol. 39, no. 3 (2011), 904–938.
- [A12] F. Benaych-Georges *Cycles of free words in several independent random permutations with restricted cycle lengths*. Indiana Univ. Math. J., Vol. 59, no. 5 (2010) 1547–1586.

- [A13] F. Benaych-Georges *Finite dimensional projections of the Brownian motion on large unitary groups*. Bull. Soc. Math. France. Vol. 140, no. 1 (2012) 1–18.
- [A14] F. Benaych-Georges, R. N. Rao *The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices*. Adv. Math. Vol. 227, no. 1 (2011), 494–521.
- [A15] F. Benaych-Georges, R. N. Rao *The singular values and vectors of low rank perturbations of large rectangular random matrices*. Preprint (2011).
- [A16] F. Benaych-Georges *Rectangular R-transform at the limit of rectangular spherical integrals*. J. Theoret. Probab., Vol. 24, no. 4 (2011) 969–987.
- [A17] F. Benaych-Georges, A. Guionnet, M. Maïda *Fluctuations of the extreme eigenvalues of finite rank deformations of random matrices*. Electron. J. Probab., Vol. 16 (2011), Paper no. 60, 1621–1662.
- [A18] F. Benaych-Georges, A. Guionnet, M. Maïda *Large deviations of extreme eigenvalues of finite rank deformations of deterministic matrices*. À paraître dans Probab. Theory Related Fields (2011).
- [A19] F. Benaych-Georges *Eigenvectors of Wigner matrices : universality of global fluctuations*. Preprint (2011).
- [A20] F. Benaych-Georges, F. Chapon *Random right eigenvalues of Gaussian quaternionic matrices*. À paraître dans Random Matrices : Theory and Applications (RMTA).

### Notes non publiées :

- [N1] F. Benaych-Georges *Cycles of random permutations with restricted cycle lengths*. ArXiv :0712.1903.
- [N2] F. Benaych-Georges, N. Enriquez *Perturbations of diagonal matrices by band random matrices*. ArXiv :1104.1983.

### Acte de conférence :

- [AC1] F. Benaych-Georges, R. N. Rao. *The breakdown point of signal subspace methods*. Proceedings of the 2010 IEEE Sensor, Array, Multichannel Processing Workshop. October 2010, Jerusalem, Israel.

# Bibliographie

- [1] N.I. Akhiezer *The classical moment problem*. Oliver & Boyd, 1965.
- [2] G. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni *An Introduction to Random Matrices*. Cambridge studies in advanced mathematics, 118 (2009).
- [3] A. D'Aristotile, P. Diaconis, C. Newman *Brownian motion and the classical groups*. With Probability, Statistica and their applications : Papers in Honor of Rabii Bhattacharaya. Edited by K. Athreya *et al.* 97–116. Beechwood, OH : Institute of Mathematical Statistics, 2003.
- [4] R. Arratia, A.D. Barbour, S. Tavaré *Logarithmic combinatorial structures : a probabilistic approach*. EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2003.
- [5] A. Auffinger, G. Ben Arous, S. Péché *Poisson convergence for the largest eigenvalues of heavy tailed random matrices*. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 45 (2009), no. 3, 58–610.
- [6] Z.D. Bai, J.W. Silverstein *Spectral analysis of large dimensional random matrices*. Second Edition, Springer, New York, 2009.
- [7] J. Baik, G. Ben Arous, S. Péché *Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices*. Ann. Prob. 33 (2005) 1643–1697.
- [8] S.T. Belinschi. *The Lebesgue decomposition of the free additive convolution of two probability distributions*, Probab. Theory Related Fields 142 (2008), no. 1-2, 125–150.
- [9] S.T. Belinschi, A. Dembo, A. Guionnet *Spectral measure of heavy tailed band and covariance random matrices*. Comm. Math. Phys. 289 (2009), no. 3, 1023–10.
- [10] G. Ben Arous, A. Dembo, A. Guionnet *Aging of spherical spin glasses*. Probab. Theory Related Fields 120 (2001), no. 1, 1–67.
- [11] G. Ben Arous, A. Guionnet *Large deviations for Wigner's law and Voiculescu's non commutative entropy*. Probab. Theory Related Fields, 108, (1997) 517–542.
- [12] G. Ben Arous, A. Guionnet *The spectrum of heavy tailed random matrices*. Comm. Math. Phys. 278 (2008), no. 3, 715–751.
- [13] G. Ben Arous, O. Zeitouni *Large deviations from the circular law*. ESAIM Probab. Statist. 2 (1998), 123–134.

- [14] H. Bercovici, V. Pata, with an appendix by P. Biane *Stable laws and domains of attraction in free probability theory*. Annals of Mathematics, 149. (1999) 1023–1060.
- [15] H. Bercovici, D. Voiculescu *Lévy-Hinchin type theorems for multiplicative and additive free convolution* Pacific J. Math. 153 (1992), no. 2, 217–248.
- [16] H. Bercovici, D. Voiculescu *Free convolution of measures with unbounded supports*. Indiana Univ. Math. J. 42 (1993) 733–773.
- [17] H. Bercovici, D. Voiculescu *Regularity questions for free convolution*. Nonselfadjoint operator algebras, operator theory, and related topics, 37–47, Oper. Theory Adv. Appl. 104, Birkhäuser, Basel, 1998.
- [18] P. Biane *Brownian motion, free stochastic calculus and random matrices*. Free probability theory (Waterloo, ON, 1995), Fields Inst. Commun., 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [19] P. Biane *On the Free convolution by a semi-circular distribution*. Indiana Univ. Math. J., Vol. 46, (1997), 705–718.
- [20] P. Biane *Segal-Bargmann transform, functional calculus on matrix spaces and the theory of semi-circular and circular systems*. J. Funct. Anal. 144 (1997), no. 1, 232–286.
- [21] P. Biane *Processes with free increments*. Math. Z., 227, (1998), no. 1, 143–174.
- [22] P. Biane *Representations of symmetric groups and free probability*, Adv. Math. 138 (1998), no. 1, 126–181.
- [23] P. Biane, M. Capitaine, A. Guionnet *Large deviation bounds for matrix Brownian motion*. Invent. Math. 152 (2003), no. 2, 433–459.
- [24] C. Bordenave, P. Caputo, D. Chafaï *Spectrum of large random reversible Markov chains – heavy-tailed weights on the complete graph*. To appear in Ann. Probab.
- [25] C. Bordenave, P. Caputo, D. Chafaï *Spectrum of non-Hermitian heavy tailed random matrices*. To appear in Comm. Math. Phys.
- [26] É. Borel *Sur les principes de la théorie cinétique des gaz*. Annales de l'École Normale Supérieure 23 (1906), 9–32.
- [27] A. Borodin, S. Péché *Airy kernel with two sets of parameters in directed percolation and random matrix theory*. J. Stat. Phys. 132 (2008), no. 2, 275–290.
- [28] T. Cabanal-Duvillard *A matrix representation of the Bercovici-Pata bijection*. Electron. J. Probab. 10 (2005), no. 18, 632–661.
- [29] T. Cabanal Duvillard, A. Guionnet *Large deviations upper bounds for the laws of matrix-valued processes and non-communicative entropies*. Ann. Probab. 29 (2001), no. 3, 1205–1261.
- [30] M. Capitaine *Additive/multiplicative free subordination property and limiting eigenvectors of spiked additive deformations of Wigner matrices and spiked sample covariance matrices*. Preprint, 2011.

- [31] M. Capitaine, M. Casalis *Asymptotic freeness by generalized moments for Gaussian and Wishart matrices. Application to beta random matrices.* Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), no. 2, 397–431.
- [32] M. Capitaine, C. Donati-Martin *Strong asymptotic freeness for Wigner and Wishart matrices.* Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), no. 2, 767–803.
- [33] M. Capitaine, C. Donati-Martin, D. Féral *The largest eigenvalues of finite rank deformation of large Wigner matrices : convergence and nonuniversality of the fluctuations.* Ann. Probab. 37 (2009)1–47.
- [34] M. Capitaine, C. Donati-Martin, D. Féral *Central limit theorems for eigenvalues of deformations of Wigner matrices.* A paraître aux Annales de L’Institut Henri Poincaré (2011).
- [35] M. Capitaine, C. Donati-Martin, D. Féral, M. Février *Free convolution with a semi-circular convolution and eigenvalues of spiked deformations of Wigner matrices.* Preprint 2010.
- [36] D. Chafaï *Anderson localization.* Blog note, <http://blog.djalil.chafai.net/2010/09/07/anderson-localization/>
- [37] S. Chatterjee, E. Meckes *Multivariate normal approximation using exchangeable pairs.* ALEA 4, 257–283 (2008).
- [38] S. Chatterjee, S.R.S. Varadhan *Large deviations for random matrices.* arXiv.
- [39] B. Collins *Moments and Cumulants of Polynomial Random Variables on Unitary Groups, the Itzykson-Zuber Integral, and Free Probability.* Int. Math. Res. Not., No. 17, 2003.
- [40] B. Collins, J.A. Mingo, P. Śniady, R. Speicher *Second order freeness and fluctuations of random matrices. III. Higher order freeness and free cumulants.* Doc. Math. 12 (2007), 1–70.
- [41] B. Collins, P. Śniady *Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group.* Comm. Math. Phys. 264 (2006), no. 3, 773–795.
- [42] B. Collins, P. Śniady *New scaling of Itzykson-Zuber integrals.* Annales de l’IHP Prob. Stats. 43, 2 (2007), 139–146.
- [43] B. Collins, M. Stolz *Borel theorems for random matrices from the classical compact symmetric spaces.* Annals of Probability Volume 36, Number 3 (2008), 876–895.
- [44] A.B. Dieker, J. Warren *On the largest-eigenvalue process for generalized Wishart random matrices.* ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 6 (2009), 369–376.
- [45] C. Donati-Martin, A. Rouault *Truncations of Haar unitary matrices, traces and bivariate Brownian bridge.* ArXiv :1007 :1366.
- [46] L. Erdős, A. Knowles *Quantum Diffusion and Eigenfunction Delocalization in a Random Band Matrix Model.* To appear in Commun. Math. Phys.
- [47] L. Erdős, A. Knowles *Quantum Diffusion and Delocalization for Band Matrices with General Distribution.* To appear in Annales Inst. H. Poincaré.



- [48] L. Erdős, B. Schlein, H.-T. Yau *Semicircle law on short scales and delocalization of eigenvectors for Wigner random matrices*. Ann. Probab. 37 (2009), no. 3, 815–852.
- [49] L. Erdős, B. Schlein, H.-T. Yau *Local semicircle law and complete delocalization for Wigner random matrices*. Comm. Math. Phys. 287 (2009), no. 2, 641–655.
- [50] L. Erdős, B. Schlein, H.-T. Yau *Wegner estimate and level repulsion for Wigner random matrices*. To appear in Int. Math. Res. Not.
- [51] D. Féral *On large deviations for the spectral measure of discrete Coulomb gas*. Séminaire de Probabilités XLI, 19–49, Lecture Notes in Math., 1934, Springer, Berlin, 2008.
- [52] D. Féral, S. Péché *The largest eigenvalue of rank one deformation of large Wigner matrices*. Comm. Math. Phys. 272 (2007)185–228.
- [53] A. Fey, R. van der Hofstad, M. Klok *Large deviations for eigenvalues of sample covariance matrices, with applications to mobile communication systems*. Adv. in Appl. Probab. 40, (2008) 1048–1071.
- [54] P. Flajolet, R. Sedgewick *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [55] P.K. Friz, H. Oberhauser *Rough path limits of Wong-Zakai type with modified drift term*. Journal of Functional Analysis 256 (2009), 3236–3256.
- [56] S. Geman *A limit theorem for the norm of random matrices*. Ann. Probab., 8, 252–261, 1980.
- [57] A. Ghaderipoor, C. Tellambura *Generalization of some integrals over unitary matrices by character expansion of groups*. J. Math. Physics, 49 073519 (2008).
- [58] V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov *Limit distributions for sums of independent random variables*. Adisson-Wesley Publ. Co., Cambridge, Mass., 1954.
- [59] D. Gregoratti, W. Hachem, X. Mestre *Space-time block coding for the DF relay channel*. Prépublication, 2011.
- [60] A. Guionnet *Large random matrices : lectures on macroscopic asymptotics*. École d’Été de probabilités de Saint-Flour XXXVI–2006, Lect. Notes Math. 1957 (2009).
- [61] A. Guionnet, M. Maïda *A Fourier view on the  $R$ -transform and related asymptotics of spherical integrals*. J. Funct. Anal. 222, 2, (2005), 435–490.
- [62] A. Guionnet, M. Krishnapur, O. Zeitouni *The single ring theorem*. To appear in Ann. Math.
- [63] A. Guionnet, O. Zeitouni *Large deviations asymptotics for spherical integrals*. J. Funct. Anal. 188, 2 (2002), 461–515.
- [64] U. Haagerup *Unpublished lecture notes at MSRI*. (2001)
- [65] U. Haagerup, F. Larsen *Brown’s spectral distribution measure for  $R$ -diagonal elements in finite von Neumann algebras* Journ. Functional Analysis. 176, 331–367 (2000).

- [66] W. Hachem, P. Loubaton, X. Mestre, J. Najim, P. Vallet *A Subspace Estimator for Fixed Rank Perturbations of Large Random Matrices*. Prépublication, 2011.
- [67] D.L. Hanson, F.T. Wright *A bound on tail probabilities for quadratic forms in independent random variables*. Ann. Math. Statist., 42, (1971) 1079–1083.
- [68] F. Hiai, D. Petz *The semicircle law, free random variables, and entropy*. Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs Volume 77, 2000.
- [69] D.C. Hoyle, M. Rattay. *Statistical mechanics of learning multiple orthogonal signals : asymptotic theory and fluctuation effects*. Phys. Rev. E (3), 75(1) :016101, 13, 2007.
- [70] N. Ikeda, S. Watanabe *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland, 1981.
- [71] T. Jiang *How many entries of a typical orthogonal matrix can be approximated by independent normals ?* Ann. Probab. 34(4), 1497–1529. 2006.
- [72] K. Johansson *Shape fluctuations and random matrices*. Comm. Math. Phys. 209 (2000), no. 2, 437–476.
- [73] I.M. Johnstone *On the distribution of the largest Principal Component*. Ann. Statist. 29 (2001) 295–327.
- [74] Y. Kabashima *Inference from correlated patterns : a unified theory for perceptron learning and linear vector channels*. Journal of Physics : Conference Series 95 (2008) 012001.
- [75] B. Klartag *A central limit theorem for convex sets*. Invent. Math. 168 (2007), no. 1, 91–131.
- [76] A. Knowles, J. Yin *Eigenvector Distribution of Wigner Matrices*. ArXiv :1102.0057.
- [77] T. Lévy *Schur-Weyl duality and the heat kernel measure on the unitary group*. Adv. Math. 218 (2008), no. 2, 537–575.
- [78] T. Lévy, M. Maïda *Central limit theorem for the heat kernel measure on the unitary group*. J. Funct. Anal. 259 (2010), no. 12, 3163–3204.
- [79] N. Linial, D. Puder. *Word maps and spectra of random graph lifts*. Random Structures and Algorithms 37 (2010), no. 1, 100–135.
- [80] M. Maïda *Large deviations for the largest eigenvalue of rank one deformations of Gaussian ensembles*. Elec. J. Probab. 12, (2007) 1131–1150.
- [81] V.A. Marchenko, L.A. Pastur *The distribution of eigenvalues in certain sets of random matrices*. Mat. Sb. 72 (1967) 507-536 ; traduc. anglaise USSR Sb. 1 (1967) 457–483.
- [82] E. Meckes *Linear functions on the classical matrix groups*. Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 10, 5355–5366.
- [83] J.A. Mingo, A. Nica *Annular noncrossing permutations and partitions, and second-order asymptotics for random matrices*. Int. Math. Res. Not. 2004, no. 28, 1413–1460.

- [84] J.A. Mingo, R. Speicher *Second order freeness and fluctuations of random matrices. I. Gaussian and Wishart matrices and cyclic Fock spaces.* J. Funct. Anal. 235 (2006), no. 1, 226–270.
- [85] J.A. Mingo, P. Śniady, R. Speicher *Second order freeness and fluctuations of random matrices. II. Unitary random matrices.* Adv. Math. 209 (2007), no. 1, 212–240.
- [86] B. Nadler *Finite sample approximation results for principal component analysis : a matrix perturbation approach.* Ann. Statist., 36(6) :2791–2817, 2008.
- [87] M. Neagu *Asymptotic freeness of random permutation matrices with restricted cycles lengths.* Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), 2017–2049.
- [88] A. Nica *Asymptotically free families of random unitaries in symmetric groups.* Pacific J. Math. 157 (1993), no. 2, 29–310.
- [89] A. Nica *On the number of cycles of a given length of a free word in several random permutations.* Random Structures and Algorithms, Vol. 5, No. 5, 703–730, 1994.
- [90] A. Nica, R. Speicher *Lectures on the combinatorics of free probability.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 335. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [91] D. Paul *Asymptotics of sample eigenstructure for a large dimensional spiked covariance model.* Statist. Sinica, 17(4) :1617–1642, 2007.
- [92] S. Péché *The largest eigenvalue of small rank perturbations of Hermitian random matrices.* Probab. Theory Related Fields, 134, (2006) 127–173.
- [93] S. Péché *Universality results for the largest eigenvalues of some sample covariance matrix ensembles.* Probab. Theory Related Fields 143 (2009) 481–516.
- [94] S. Péché *The edge of the spectrum of random matrices.* Habilitation à diriger des recherches.
- [95] E.M. Rains *Combinatorial properties of Brownian motion on compact classical groups.* J. Theo. Prob., Vol. 10, No. 3, 259–279. 1997.
- [96] J.A. Ramírez, B. Rider, B. Virág *Beta ensembles, stochastic Airy spectrum, and a diffusion.* To appear in J. Amer. Math. Soc.
- [97] L.C.G. Rogers, D. Williams *Diffusions, Markov processes and martingales : Volume 2, Ito calculus.* J. Wiley & sons, 1987.
- [98] A. Ruzmaikina *Universality of the edge distribution of eigenvalues of Wigner random matrices with polynomially decaying distributions of entries.* Comm. Math. Phys. 261 (2006) 277–296.
- [99] T. Sasamoto *Fluctuations of the one-dimensional asymmetric exclusion process using random matrix techniques.* J. Stat. Mech. Theory Exp. 2007, no. 7, P07007, 31 pp. (electronic).
- [100] K.I. Sato *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Volume 68 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

- [101] J. Schenker *Eigenvector localization for random band matrices with power law band width*. Comm. Math. Phys. 290, (2009) 1065–1097.
- [102] B. Schlittgen, T. Wettig *Generalizations of some integrals over the unitary group*. J. Phys. A, 36, 3195 (2003).
- [103] D. Shlyakhtenko *Random Gaussian band matrices and freeness with amalgamation*. Internat. Math. Res. Notices 1996, no. 20, 1013–1025.
- [104] J.W. Silverstein *Weak convergence of random functions defined by the eigenvectors of sample covariance matrices*. Ann. Probab. 18 (1990), no. 3, 1174–1194.
- [105] P. Śniady *Random regularization of Brown spectral measure*. J. Funct. Anal. 193 (2002) 291–313.
- [106] S. Sodin *The spectral edge of some random band matrices*. Ann. of Math. (2) 172 (2010), no. 3, 2223–2251.
- [107] A. Soshnikov *Universality at the edge of the spectrum in Wigner random matrices*. Comm. Math. Phys. 207 (1999) 697–733.
- [108] R. Speicher *Multiplicative functions on the lattice of non-crossing partitions and free convolution*. Math. Annalen 298 (1994) 611–628.
- [109] R. Speicher *Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator-valued free probability theory*. Mem. Amer. Math. Soc. 132 (1998), no. 627.
- [110] F. Spitzer *Interaction of Markov processes*. Advances in Math. 5 1970 246–290 (1970).
- [111] T. Tao, V. Vu (with an appendix by M. Krishnapur) *Random matrices : Universality of ESDs and the circular law*. Ann. Probab. Vol. 38, no. 5 (2010), 2023–2065.
- [112] T. Tao, V. Vu *Random matrices : universality of local eigenvalue statistics*. ArXiv 0906.0510, to appear in Acta Mathematica.
- [113] T. Tao, V. Vu *Random matrices : universality of eigenvectors*. ArXiv 1103.2801.
- [114] C. Tracy, H. Widom *Level spacing distribution and Airy kernel*. Commun. Math. Phys. 159 (1994) 151–174.
- [115] C. Tracy, H. Widom *On orthogonal and symplectic matrix ensembles*. Commun. Math. Phys. 177 (1996), 727–754.
- [116] D. Voiculescu *Limit laws for random matrices and free products*. Invent. Math. 104 (1991), no. 1, 201–220.
- [117] D. Voiculescu *Operations on certain non-commutative operator-valued random variables*. Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992). Astérisque No. 232 (1995), 243–275.
- [118] D. Voiculescu *A strengthened asymptotic freeness result for random matrices with applications to free entropy*. Internat. Math. Res. Notices 1998, no. 1, 41–63.

- [119] D. Voiculescu *The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. VI. Liberation and mutual free information.* Adv. Math. 146 (1999), no. 2, 101–166.
- [120] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica *Free random variables.* CRM Monographs Series No.1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [121] F. Xu *A random matrix model from two-dimensional Yang-Mills theory.* Comm. Math. Phys. 190 (2) 287–307. 1997.
- [122] A.L. Yakymiv *The distribution of lengths of the  $m$ -th maximal cycle in a random  $A$  permutation.* Discrete Math. Appl. 15 (5), 527–546 (2005).
- [123] A.L. Yakymiv *Random  $A$ -Permutations : Convergence to a Poisson Process.* Mathematical Notes, 2007, Vol. 81, No. 6, pp. 840–846.
- [124] I. Zakharevich *A generalization of Wigner's law.* Commun. Math. Phys. 268(2), 403–414 (2006).
- [125] P. Zinn-Justin, J.-B. Zuber *On some integrals over the  $U(N)$  unitary group and their large  $N$  limit.* J. Phys. A 36, 12 (2003) 3173–3193.
- [126] A. Zvonkin *Matrix integrals and map enumeration : an accessible introduction.* Math. Comput. Modelling 26, 8–10 (1997), 281–304. Combinatorics and physics (Marseilles, 1995).