HAL
open science

Méthodes de traitement de données géophysiques par transformée en ondelettes.

Frédérique Moreau

To cite this version:

Frédérique Moreau. Méthodes de traitement de données géophysiques par transformée en ondelettes.. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Rennes 1, 1995. Français. NNT : . tel-00656040

HAL Id: tel-00656040

https://theses.hal.science/tel-00656040v1

Submitted on 3 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

F. MOREAU

ISSN 1240-1498
ISBN 2-905532-68-8

méthodes de traitement de données géophysiques par transformée en ondelettes

MEMOIRES

1996

Géosciences Rennes

n° 69

MEMOIRES DE GEOSCIENCES - RENNES

n° 69

Frédérique MOREAU

METHODES DE TRAITEMENT DE DONNEES GEOPHYSIQUES PAR TRANSFORMEE EN ONDELETTES

Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes I
soutenue le 20 Octobre 1995

Géosciences - Rennes
UPR-CNRS n°4661
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
F - 35042 - RENNES Cédex
(France)

1995

ISSN : 1240-1498

ISBN : 2-905532-68-8

1995

GEOSCIENCES-RENNES
UPR-CNRS n°4661
Université de Rennes I - Campus de Beaulieu
F-35042-RENNES Cédex (France)

Frédérique MOREAU

Méthodes de traitement de données géophysiques par transformée en ondelettes.

Mémoires de Géosciences Rennes, n° 69, 177 p.

Résumé

Cette thèse concerne le développement de nouvelles méthodes de traitement et d'interprétation de données de champs de potentiel.

Dans un premier temps, nous avons élaboré un algorithme rapide de débruitage de données géophysiques par transformée en ondelettes orthogonales. La méthode proposée permet de tenir compte des non-stationnarités du rapport signal/bruit. Elle est basée sur quelques tests statistiques qui permettent de séparer les coefficients d'ondelettes dus au signal de ceux dus au bruit. Le signal est alors reconstruit par transformée inverse sur les coefficients conservés.

L'idée directrice de la deuxième méthode est d'effectuer une imagerie structurale du sous-sol à partir d'un champ mesuré en surface. Nous avons d'abord intégré la théorie du potentiel dans la théorie des ondelettes, par l'intermédiaire de l'homogénéité des champs dus à des sources multipolaires. L'introduction d'ondelettes définies à partir du noyau de Poisson permet alors de déterminer précisément la localisation et le degré d'homogénéité des sources présentes. L'utilisation des lignes d'extréma de la transformée rend la méthode robuste vis-à-vis du bruit. Nous avons ensuite généralisé la méthode au cas des sources étendues, ce qui nous permet de localiser et de caractériser des bords d'objets. L'inclinaison des structures peut être déterminée par l'utilisation d'ondelettes complexes. En dernier lieu, cette formulation du problème inverse nous a permis de développer une méthode de filtrage par critères structuraux (type et profondeurs des sources).

Nous donnons quelques exemples d'applications sur des données gravimétriques. Les possibilités de la méthode sont illustrées sur des zones de fractures ou de subduction.

Abstract

This thesis concerns the development of new processing and interpretation methods of potential field data.

First of all, we have elaborated a fast algorithm to denoise geophysical data with the help of orthogonal wavelets transform. The method takes into account non-stationarities of the signal-to-noise ratio. It is based on statistical criteria which allow to distinguish the wavelet coefficients generated by the signal and these by the noise. The signal is then reconstructed with the preserved coefficients by an inverse transform.

The second method was conduct to develop a structural imaging of the substratum from a field measured at the surface. We have first inserted the potential theory into the wavelet theory owing to the homogeneity of fields produced by multipolar sources. The introduction of wavelets satisfying the Poisson equation allow to define precisely the location and the homogeneity of the existing sources. The use of the ridge function of the wavelet transform makes the method robust in regards of noise. We have generalized the method to extended sources in order to localize and characterize edge structures. Their slopes is then determined by the use of complex wavelets. Finally, this formulation of the inverse problem gives a tool to develop a filtering from structural criteria (type and depth of sources).

We give some applications on gravimetric data. The feasability of the method is then illustrated from examples on fracture zones and subduction zones.

Table des matières

Introduction générale 1

Notations 5

Chapitre I Filtrage par ondelettes orthogonales I.7

1 Introduction I.7

2 Filtrage de données géophysiques non-stationnaires par ondelettes orthogonales I.8

3 Compléments sur l'analyse en ondelettes orthogonales I.19

3.1 Les débuts de l'analyse en ondelettes orthogonales I.19

3.2 Analyse multirésolution I.20

3.3 Exemples de bases orthogonales I.25

a Ondelettes de Meyer I.25

b Ondelettes de Daubechies I.28

Chapitre II Problème inverse des champs de potentiel II.31

1 Introduction II.31

2 Quelques opérateurs utiles II.33

2.1 Rappels sur la transformée en ondelettes continues II.33

2.2 Opérateurs de prolongement et de dérivation des champs de potentiel II.35

3 Transformée en ondelettes de fonctions homogènes II.37

3.1 Relation entre les coefficients d'ondelettes de deux dilatations différentes II.37

3.2 Ondelettes multipolaires - Définitions II.39

3.3 Exemples synthétiques II.41

3.4 Influence du bruit sur la transformée en ondelettes II.47

4 Transformée en ondelettes – Cas général II.50

4.1 Formulation du problème II.50

4.2 Caractérisation des sources II.50

4.3 Localisation verticale II.51

a A partir de l'expression analytique des lignes de maxima II.51

b A partir de la convergence des lignes d'extréma II.55

5 Conclusion II.57

6 Annexe : Analyse en ondelettes de champs de potentiel II.57

Chapitre III Problème inverse – Sources étendues III.75

1 Introduction III.75

2 Lien avec les sources ponctuelles - Choix de sources étendues types . . III.76

2.1 Formulation III.76

2.2 Caractérisation des sources III.76

2.3 Localisation verticale III.80

a Bords verticaux III.80

b Bords inclinés III.86

3 Ondelettes complexes III.90

3.1 Introduction III.90

a Choix des ondelettes complexes III.90

b Extraction du squelette de la transformée en ondelettes complexes . . III.91

3.2 Caractérisation d'un dipôle III.94

a Détermination de l'inclinaison III.94

b Détermination de la profondeur III.96

3.3 Caractérisation d'un bord incliné III.98

a Détermination de l'inclinaison III.98

b Détermination de la profondeur III.105

4 Applications à des données gravimétriques III.106

4.1 Introduction III.106

4.2 Zone de fracture Mendocino III.106

4.3 Zone de subduction Kermadec III.116

5 Conclusion III.124

Chapitre IV Reconstruction de signaux – Filtrage par critères structuraux . . . IV.125

1 Introduction IV.125

2 Principes IV.126

2.1 Formule de reconstruction IV.126

2.2 Noyau reproduisant IV.127

3 Mise en pratique IV.128

3.1 Reconstruction de la transformée en ondelettes à partir de ses arêtes IV.128

a Méthode générale IV.128

b Méthode de relaxation IV.129

c Interpolation par spline biharmonique IV.130

d Conclusion partielle IV.132

3.2 Discrétisation – Reconstruction du signal à partir de sa transformée en ondelettes IV.133

4 Conclusion IV.136

Chapitre V Analyse 3D V.137

1 Introduction V.137

2 Principes V.137

3 Test synthétique V.143

4 Conclusion V.145

Conclusion générale – Perspectives 147

Annexes 151

1 Expression analytique des ondelettes multipolaires 151
1.1 Ondelettes "horizontales" 151
1.2 Ondelettes "verticales" 154

2 Discrétisation des ondelettes paires 157
2.1 Le problème 157
2.2 Solution en "passant par Fourier" 157

3 Expression des anomalies du champ pour quelques sources types 165
3.1 Champ gravimétrique 165
a Ligne infinie 165
b Lame verticale 165
c Lame inclinée 166
d Marche d'escalier 166
e Marche d'escalier inclinee 167
3.2 Champ magnétique 168
a Ligne infinie 168
b Lame verticale 169
c Lame inclinée 169

4 Déconvolution d'Euler. Degré d'homogénéité de quelques sources types. 169
4.1 Ligne infinie 170
4.2 Lame verticale 170
4.3 Marche d'escalier 172

Bibliographie 175

Introduction générale

Introduction générale

L'idée essentielle sur laquelle reposent les méthodes d'analyse par ondelettes est de représenter les signaux à différentes échelles [36]. Cette possibilité est extrêmement intéressante en géophysique où l'information portée par les signaux est souvent véhiculée *via* des lois d'échelles ou *via* des non-stationnarités. C'est par exemple le cas des signaux sismologiques dont l'ordre d'arrivée des trains d'onde constitue une information capitale. C'est aussi le cas des champs de potentiel, gravimétriques ou magnétiques, dont les variations intègrent les effets de structures géologiques pluriéchelles, voire fractales. Face à la nécessité de prendre en compte les non-stationnarités de leurs signaux, les géophysiciens ont utilisé des techniques dérivées de méthodes plus classiques. C'est ainsi que les sismologues ont utilisé l'analyse de Fourier à fenêtre glissante pour étudier la dispersion des ondes de surface [13]. Mais les adaptations de méthodes classiques ont rapidement montré leurs limites. Par exemple, dans le cas de l'analyse de Fourier par fenêtre glissante, l'étude des périodes très courtes vis-à-vis de la durée de la fenêtre d'analyse présente des défauts analogues à ceux de l'analyse de Fourier ordinaire. La nécessité de rompre avec les approches classiques s'est faite de plus en plus pressante en traitement du signal et de l'image, et au début des années 80, plusieurs auteurs ont indépendamment proposé des méthodes reposant sur une philosophie d'analyse en termes d'échelle [33]. En géophysique, le coup d'envoi a été donné par les travaux de Jean Morlet [18] où les ondelettes apparaissent explicitement.

La transformée en ondelettes présente l'avantage de réunir les "bonnes" propriétés de l'analyse de Fourier classique et de l'analyse par fenêtre glissante : les propriétés de dilatation des fonctions *cos* et *sin* et la localisation temporelle de la fenêtre d'analyse. L'analyse en ondelettes consiste à décomposer les signaux sur une famille de fonctions obtenues en dilatant et translatant une ondelette dite analysante, dont la caractéristique essentielle est d'être localisée, c'est-à-dire nulle ou presque hors d'un intervalle de temps borné. La famille d'ondelettes ainsi obtenue comprend des membres dont le support temporel est aussi étroit qu'on le veut. Dès lors, quelque soit la soudaineté des variations d'un signal, il existera

toujours des ondelettes de la famille qui seront au bon endroit et qui auront la bonne durée pour capter le phénomène.

L'article le plus souvent cité comme le "révélateur" de la philosophie des ondelettes à la communauté scientifique est celui d'Alex Grossmann et Jean Morlet paru au *SIAM Journal of Mathematical Analysis* en 1984 [21]. Depuis cette date, la théorie des ondelettes n'a cessé de se développer. Plusieurs étapes majeures ont été franchies par le groupe de mathématiciens dirigé par Yves Meyer à l'Université de Paris Dauphine : la découverte d'ondelettes orthogonales et du principe de l'analyse multirésolution, ainsi que l'élaboration d'algorithmes numériques extrêmement rapides ([39], [31], [10], [50]). Un aspect intéressant dans la génèse de la théorie des ondelettes est le très bref délai qui sépare les développements mathématiques des applications dans différents secteurs scientifiques ou industriels [37]. Paradoxalement, alors que Jean Morlet est géophysicien, l'utilisation des ondelettes en géophysique est encore peu développée [14]. Cela résulte en partie du fait que l'utilisation en aveugle des ondelettes ne suffit pas pour obtenir des résultats scientifiques importants : la philosophie des ondelettes ne peut donner son maximum que si elle est profondément imbriquée dans la théorie physique des signaux que l'on désire analyser. Actuellement, la théorie des ondelettes est constituée de deux grands domaines : celui de la transformation en ondelettes continue et celui des ondelettes orthogonales et des paquets d'ondelettes [24]. Les applications de ces deux pans théoriques sont différentes. Par exemple, la transformation continue a permis l'analyse fine de signaux de turbulence [2] et, en géophysique, des variations temporelles du champ magnétique terrestre [40]. Les ondelettes orthogonales ont, entre autre, été utilisées pour comprimer des signaux et des images numériques ([30], [7]), résoudre efficacement des systèmes linéaires [5] et des équations aux dérivées partielles non-linéaires [28].

Le travail constituant cette thèse utilise à la fois des ondelettes orthogonales et la transformée en ondelettes continue. Les spécificités de ces deux classes d'ondelettes nous ont été utiles pour aborder deux problèmes très différents. Les ondelettes orthogonales ont été utilisées pour éliminer le bruit présent dans des signaux géophysiques dont le rapport signal/bruit n'est pas constant. Parmi les différentes façons de traiter ce problème, nous avons retenu une approche probabiliste, issue de la théorie des problèmes inverses, où l'orthogonalité des ondelettes joue un rôle déterminant. C'est, en effet, la condition d'orthogonalité et le théorème de Parseval qui y est attaché qui nous ont permis d'élaborer une méthode dont le principe consiste à transporter l'information du signal dans l'espace des ondelettes où chaque coefficient de la transformée constitue un quantum d'information indépendant des autres. Ces quanta sont ensuite selectionnés à l'aide de tests statistiques pour fournir, par transformée en ondelettes inverse, le signal filtré. L'orthogonalité des ondelettes permet aussi de construire des algorithmes de filtrage très rapides, mais nous montrons que cette possibilité n'est offerte que si le choix de la norme définissant le produit scalaire pour les ondelettes est cohérent avec la statistique du bruit que l'on désire éliminer.

La majeure partie de cette thèse utilise la transformation en ondelettes continue et concerne l'analyse de champs de potentiel. Nous avons choisi ce sujet car beaucoup de signaux géophysiques relèvent de la théorie du potentiel et gagneraient à être étudiés à l'aide de méthodes non-stationnaires telles que l'analyse en ondelettes. C'est bien sûr le cas du champ géomagnétique et du champ de pesanteur, mais c'est également vrai pour les champs

électriques mesurés lors de sondages en courant continu. On peut également citer les champs thermiques et les champs de contraintes statiques. Notre principal souci a été d'imbriquer la théorie des ondelettes au sein de la théorie du potentiel afin de disposer d'une base solide sur laquelle on pourrait établir des développements ultérieurs. Les germes sur lesquels nous avons bâti notre travail sont l'homogénéité des champs créés par des sources ponctuelles et la formule de prolongement harmonique. L'homogénéité fait bon ménage avec les ondelettes et l'analyse de fonctions homogènes a fait l'objet d'articles dès le début de l'ère des ondelettes [22]. Mais, dans notre cas, il fallait également lancer des ponts entre les ondelettes et le prolongement harmonique d'une part, et entre les ondelettes et la géophysique d'autre part. Le premier pont est construit à l'aide d'une classe d'ondelettes très particulières appartenant au semi-groupe de Poisson. Ces ondelettes nous ont permis de donner un sens à la formule de prolongement harmonique : la hauteur de prolongement dans l'espace physique devient la dilatation dans la transformation en ondelettes. Le second pont consiste à voir quelle information géophysique pertinente est accessible grâce aux ondelettes.

En commençant ce travail, nous étions désireux d'inventer une méthode permettant de réaliser une imagerie structurale du sous-sol à partir d'un champ mesuré en surface. Par imagerie structurale, nous entendons reconnaître des bords plus ou moins nets d'objets géologiques. La première étape à franchir est donc celle de la détection et de la résolution : à partir de quand une zone séparant deux objets géologiques peut-elle être vue comme un bord net ? A partir de quand est-il possible de discerner deux bords très proches ? Nous verrons que la classe d'ondelettes du semi-groupe de Poisson permet de donner un sens physique très précis à la transformation en ondelettes et, par conséquent, d'éclairer précisément la notion de bord et de résolution. Une fois un bord détecté, il s'agit d'en caractériser la géométrie en déterminant la position de quelques points remarquables. La caractérisation est une question ouverte que l'on peut étendre à volonté et dont nous n'avons abordé que les aspects les plus simples. Notre stratégie a été de traiter le problème des sources multipolaires ponctuelles et nous disposons maintenant d'une caisse à outils assez complète qui nous permet de discerner, localiser et caractériser de telles sources. Notre théorie est écrite pour un nombre quelconque de dimensions et constitue une sorte de théorie asymptotique lorsqu'on s'intéresse à des bords d'objets. L'idée que nous exploitons dans ce cas est que les ondelettes permettent de regarder des bords de bords, ou, si cela ne suffit pas, des bords de bords de bords, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on tombe sur quelque chose qui soit proche d'une source ponctuelle. Une autre question géophysique que nous avons abordée concerne le filtrage. Nous verrons que la méthode permet de reconstruire un champ partiel à partir d'un nombre restreint de sources sélectionnées en fonction de leurs caractéristiques (profondeur, etc.). A terme, cette approche devrait permettre de réaliser des filtrages sur des critères structuraux directement en rapport avec la géologie.

Le débruitage de signaux non-stationnaires par transformée en ondelettes orthogonales est traité dans un premier chapitre. Nous y définirons les différents critères de filtrages que nous avons utilisé, ainsi que l'algorithme rapide que nous avons effectué.

Le problème inverse des champs de potentiels est traité dans différents chapitres. Le chapitre II est consacré aux sources homogènes dans le cas bi-dimensionnel. Nous y avons introduit les ondelettes particulières que nous avons utilisées, ainsi que les bases de la méthode

pour déterminer les différentes caractéristiques des ces sources. Nous avons ensuite traité le cas des sources étendues et la caractérisation de bords dans un troisième chapitre. Les cas des bords verticaux et inclinés y sont décrits séparément, la détermination de l'inclinaison nécessitant l'introduction d'ondelettes complexes.

Dans le chapitre IV, nous décrivons le filtrage par critères structuraux que nous effectuons à partir de la méthode de résolution du problème inverse développée précedemment. Dans un dernier chapitre, nous généraliserons la méthode en trois dimensions.

Notations

- Transformée de Fourier :

$$TF(f(x)) = F(u) = \tilde{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi ux}dx$$

$$TF^{-1}(F(u)) = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{2i\pi ux}du$$

- Convolution :
  - si $f \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}$

$$(f * g)(x) = f(x) *_x g(x)$$

  - si $f \in \mathbb{R}^2$, $g \in \mathbb{R}$

$$(f(.,z) * g)(x) = f(x,z) *_x g(x)$$

  - convolution 2D, $f \in \mathbb{R}^2$, $g \in \mathbb{R}^2$

$$(f * g)(x,z) = f(x,z) *_{xz} g(x,z)$$

- Opérateur conjugué pour $f \in \mathbb{C}$: $\bar{f}$

- Transformée de Hilbert :

$$\mathcal{H}(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\pi(x-\xi)}d\xi$$

Chapitre I

Filtrage par ondelettes orthogonales

Chapitre I

Filtrage par ondelettes orthogonales

1 Introduction

L'acquisition de données géophysiques s'accompagne en général d'une estimation du bruit que contiendra ces données. Le problème est alors de séparer d'un côté l'information géophysique contenue dans le signal, de l'autre côté le bruit. Les méthodes habituelles de filtrage des données font appel à des filtrages passe-bas [6], c'est-à-dire que toutes les fréquences au-delà d'un certain seuil sont éliminées du signal, sans distinction entre les hautes fréquences dues au bruit (en général haute fréquence) et celles provenant du signal géophysique (couvrant plusieurs bandes de fréquence). D'autre part, ce bruit intervient souvent de telle sorte que le rapport signal/bruit est non-stationnaire. Pour tenir compte de façon optimale de cet aspect, une analyse locale est nécessaire. C'est pourquoi la transformée en ondelettes est bien adaptée à ce problème. En particulier, on utilisera la décomposition en ondelettes orthogonales qui permet de représenter le signal sous forme de coefficients indépendants, localisés à la fois en temps et en fréquence. Cette propriété permettra l'utilisation du théorème de Parseval qui transposera l'information du signal dans l'espace des échelles. Le filtrage consistera alors à déterminer la part des coefficients représentatifs du signal géophysique et à éliminer ceux dont la composante principale est le bruit. On obtient alors le signal filtré par transformée en ondelettes inverse sur les coefficients conservés. Différents critères de seuillage existent, qui permettent d'effectuer ce "tri" des coefficients. Ils sont définis à travers la théorie de l'information, ou bien sont issus directement de l'analyse statistique ([58], [35]). La méthode de "débruitage" que nous avons développée s'applique à tout type de signal non-stationnaire, avec pour seule hypothèse que le bruit des données soit connu et de type gaussien. Cette hypothèse n'altère que très peu le caractère général de la méthode, puisque ce type de bruit est le plus fréquemment

rencontré sur des données expérimentales. D'autre part, l'orthogonalité des ondelettes ainsi que l'hypothèse de bruit gaussien permettent de construire un algorithme rapide de filtrage.

La première partie de ce chapitre est composée d'un article accepté à *Geophysical Research Letters*. Nous y décrivons succintement la transformée en ondelettes orthogonales, les différents critères de filtrage choisis étant ensuite définis pour le problème étudié. Nous y décrivons également l'algorithme rapide de filtrage que nous avons utilisé sur des signaux synthétiques, afin de comparer les différents critères. Nous montrons également un exemple d'application sur des données de potentiel électrique mesurées dans une carrière de calcaire souterraine ([42], [41]).

Quelques éléments de l'analyse en ondelettes orthogonales sont donnés dans une deuxième partie. Nous y décrivons les bases de l'analyse multirésolution ainsi que son utilisation dans la construction de l'algorithme pyramidal, algorithme permettant d'effectuer de façon simple et rapide une décomposition d'un signal sur une base d'ondelettes orthogonales. Nous donnons également les expressions des bases orthogonales construites par Meyer et Daubechies, cette dernière étant celle que nous avons choisi pour effectuer le filtrage.

2 Filtrage de données géophysiques non-stationnaires par ondelettes orthogonales

(article sous presse à *Geophysical Research Letters*)

Résumé

Nous proposons une méthode de filtrage basée sur la décomposition en ondelettes orthogonales. De telles décompositions peuvent être effectuées par l'action récursive de filtres mirroirs en quadrature passe-bas et passe-haut *via* un algorithme pyramidal. Nous avons traité le problème de débruitage de signaux non-stationnaires, en introduisant un algorithme rapide pour le cas particulier d'un bruit blanc gaussien. Nous avons comparé différents critères de seuillage : le critère d'information d'Akaike (AIC), le critère de longueur minimum de description (MDL) et les test de décision du χ^2 (CST). Les tests effectués sur des signaux synthétiques montrent que le critère AIC ne permet pas d'éliminer efficacement le bruit. Les critères MDL et CST donnent des résultats comparables et éliminent efficacement le bruit. Une application à des données de potentiel électrique mesurée dans une carrière souterraine illustre l'intérêt de la méthode pour traiter des signaux géophysiques présentant de fortes non-stationnarités.

Filtering non-stationary geophysical data with orthogonal wavelets

Frédérique Moreau, Dominique Gibert, and Ginette Saracco
Géosciences Rennes - CNRS/INSU, Université de Rennes 1, France.

Received September 27, 1995; revised November 13, 1995; accepted November 27, 1995

Submitted to *Geophysical Research Letters*, September 1995; revised November 1995.

Short title: FILTERING WITH ORTHOGONAL WAVELETS

Abstract. A filtering method based on both orthogonal wavelet decomposition and chi-squared statistics is proposed to clean non-stationary signals embedded in a gaussian white noise. An application to a time series of thermistance data recorded in an underground quarry illustrates the interest of the technique.

Introduction

The wavelet theory (*Grossmann and Morlet* [1984]; see *Meyer* [1990], *Daubechies* [1992], and *Holschneider* [1995] for reviews) constitutes a powerful framework to process and analyze non-stationary geophysical signals [*Foufoula-Georgiou and Kumar*, 1994]. In particular, the important problem of signal denoising has recently been addressed by means of both continuous [e.g. *Mallat and Hwang*, 1992] and orthogonal wavelet decompositions [*Donoho and Johnstone*, 1994; *Saito*, 1994]. Denoising needs to distinguish the noise from the signal and, depending on the particular models assumed for these components, distinct algorithms may be proposed. In the present study we address the particular issue of cleaning signals embedded in gaussian white noise through orthogonal wavelet decomposition. We propose a special-purpose filtering criterion based on a Chi-Square Thresholding (CST), and compare its performance to those of two general-purpose and popular threshold criteria: the Akaike's Information Criterion (AIC) [*Akaike*, 1965] and the Minimum Description Length (MDL) [*Rissanen*, 1978; *Wax and Kailath*, 1985]. Examples with synthetic tests and real geophysical data are given.

Denoising Signals with Wavelets

An orthogonal wavelet basis reads $\left\{2^{-m/2}\psi\left(2^{-m}t-n\right)\right\}$ with $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ where the analyzing wavelet $\psi(x)$ is an oscillating function localized around the origin. The wavelet coefficients of a discrete signal may be efficiently computed via a pyramidal algorithm *Mallat* [1989] and provide a way to examine the information content of the original signal in the time-scale half-plane. If the input signal s counts $K=2^N$ values, the first 2^{N-1} wavelet coefficients correspond to the finest scale available and fixed by the sampling interval, the next 2^{N-2} coefficients are for the immediately upper scale (i.e. twice the finest scale), and so on until the last coefficient which corresponds to the largest scale available (i.e. the length of the signal). A filtered signal is obtained by performing an inverse wavelet transform with a subset of the initial K wavelet coefficients.

Filtering Criteria

Since each of the K coefficients may be either rejected or retained, the set $\mathcal{A}=\{s_l\}$ of the a priori possible filtered signals possesses 2^K elements, and a filtering criterion is necessary to decide which of the s_l's is the denoised signal. Of course, the final choice depends on the problem at hand, and for the particular case of gaussian-white and zero-mean noise we propose the CST criterion whose "best" signal s_{CST} verifies

$$CST\left(s_{CST}\right)\simeq p_0 \tag{1}$$

with

$$CST(s_l) \equiv prob\left(\chi_n^2 \leq \frac{\|s - s_l\|^2}{\sigma^2}\right) \tag{2}$$

where χ_n^2 is the Chi-square probability function with n degrees of freedom. The variance, σ^2, of the noise is assumed a priori known, and

$$\|s - s_l\|^2 \equiv \sum_{i=1}^{K} (s_i - s_{l,i})^2 . \tag{3}$$

The probability threshold p_0 in (1) fixes the level of risk accepted that some noise remains in s_{CST}.

In order to show the reader that the choice of a particular filtering criterion is critical and strongly depends on the problem at hand, we consider two general-purpose criteria: the Akaike's Information Criterion (AIC) [*Akaike*, 1965] and the Minimum Description Length (MDL) [*Rissanen*, 1978]. These criteria are often used to choose among a collection of a priori models, like for instance ARMA models in signal processing [*Wax and Kailath*, 1985], with different complexities k. The MDL criterion has been used by *Saito* [1994] in the context of wavelet filtering. When applied to the gaussian case, the AIC and MDL criteria respectively retain the signals s_{AIC} and s_{MDL} such that

$$AIC(s_{AIC}) = \min[AIC(s_l)], \tag{4}$$

$$MDL(s_{MDL}) = \min[MDL(s_l)], \tag{5}$$

with

$$AIC(s_l) = \|s - s_l\|^2/\sigma^2 + 2k, \tag{6}$$

$$MDL(s_l) = \|s - s_l\|^2/(2\sigma^2) + (3/2)\,k \ln K. \tag{7}$$

In our case, k is the number of wavelet coefficients used to produce s_l.

The Denoising Algorithm

The next step is to apply the criteria (1), (4) and (5) to find the output filtered signal into $\mathcal{A}$. Even for short data series, the number of elements in $\mathcal{A}$ is considerable and disables an exhaustive search in the whole set of trial signals. However, the gaussian noise assumption allows a straightforward pre-selection of admissible trial models and limits the search in a subset $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ with only K elements. Let us define the set $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$ formed by the $\binom{K}{k}$ trial signals reconstructed with k wavelet coefficients. Obviously,

$$\bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}. \tag{8}$$

From (2), (6), and (7) we find that, for either criterion, the best candidate s_k belonging to $\mathcal{A}_k$ is such that

$$\|s - s_k\|^2 = \sum_i W_i^2 \quad MINIMUM. \tag{9}$$

where the sum is restricted to the $K-k$ wavelet coefficients W_i discarded to reconstruct s_k. Condition (9) is satisfied if s_k is constructed from the k wavelet coefficients with the largest modulus. Hence, the best signal belonging to each subset $\mathcal{A}_k$ is directly obtained without spanning the whole subset. Equation (8) shows that the initial search performed in the entire set $\mathcal{A}$ may be replaced by a sequential search in the K subsets $\mathcal{A}_k$. In other words, the search is now restricted to the set

$$\mathcal{B} = \{s_k\,;\, k = 1, \cdots, K\} \tag{10}$$

where each element s_k is constructed from the k largest wavelet coefficients. Equation (9) holds because both the wavelet theory and the gaussian statistics rely on the same L^2 norm. If non-gaussian statistics were to be chosen for the noise model, another norm should be used and included in the wavelet transform to produce a fast algorithm similar to the one established in the gaussian case. For instance, an exponential statistics corresponds to the L^1 norm.

Examples

Synthetic Noisy Signals

The synthetic signals, named "Blocks" and "Heavisine" (Figure 1a), are the same as those used by *Donoho and Johnstone* [1994] and have been digitized over 2048 values and contaminated by zero-mean gaussian white noises with $\sigma^2 = 1$ (Figure 1b). For all the following examples, we used the Daubechies' analyzing wavelet possessing 10 vanishing moments [*Daubechies*, 1992]. The AIC-filtered signals still contain a large amount of noise (Figure 1c) which indicates that, for the gaussian statistics, the balance between the fitting and the penalty terms in (6) favors the models with too many degrees of freedom. The MDL- and CST-filtered (with $p_0 \approx 0.5$) signals (Figure 1d,e) are cleaner and we observe limited Gibbs effects in the Blocks signal and several spikes in the Heavisine signal produced by the CST filter. A visual comparison of our results with those obtained by *Donoho and Johnstone* [1994] with a Daubechies' wavelet shows that both the MDL and CST filters almost work like the thresholding used by these authors who found average square errors differing by less than 20% of ours (see Figure 1). Note that smaller errors have been obtained by *Saito* [1994] and by *Donoho and Johnstone* [1994] for the Blocks signal and with the Haar wavelet which, for this particular type of signal, is more efficient than the Daubechies' wavelet used in the present study.

Figure 2 displays the three curves $AIC(s_k)$, $MDL(s_k)$, and $CST(s_k)$ corresponding to the Heavisine signal and plotted for a limited k range centered on the best value found (369, 25, and 39 for AIC, MDL, and CST, respectively). The curves corresponding to the AIC and MDL criteria are almost symmetrical and flat in a wide interval centered on the minimum. Instead, the curve for the CST filter has a sigmoidal shape with a narrow and steep transition zone between the region where the residuals have a very low probability ($\simeq 0$) and becomes a purely gaussian white noise and the region with high probability ($\simeq 1$). This narrow transition zone makes the CST filter unambiguous since a very limited range of possible values for k is associated to the steep edge (Figure 2). As a consequence, the choice of the probability threshold p_0 is not critical and, in most cases, choosing $p_0 > 0.5$ implies a single value for k.

The efficiency of the filters have also be assessed by filtering a pure gaussian white noise with a unit variance. The AIC filter gives a signal reconstructed with a large number (155) of wavelet coefficients. This confirms that the AIC criterion is unable to remove a large part of the noise present in the data. Conversely, the signals obtained with both the MDL and the CST filters are identically null. This agrees with *Saito*'s results [*Saito*, 1994] obtained with the MDL criterion.

Electrical Geophysical Signal

We now illustrate the utility of the method with an application of the MDL and CST filters to thermistance measurements made in a limestone underground quarry [*Morat and Le Mouël*, 1992; *Morat et al.*, 1995]. This signal is strongly non-stationary and possesses abrupt variations (Figure 3). It is particularly interesting to check how the filters are able to account for the abrupt change of regime observed around $t = 2000\ s$. A noise variance $\sigma^2 = 9 \times 10^{-2}\ Ohm^2$ estimated from the high-frequency part of the power spectrum of the entire signal has been used. The MDL- and CST-filtered signals are shown in Figure 3. In accordance with the previous synthetic tests, both filters give qualitatively equivalent results, although the MDL output seems slightly more smoothed than the CST output. A quantitative assessment can be made by examining the Fourier energy spectra of both the initial and filtered signals (Figure 4). Most of the energy of the left half ($t < 2000\ s$) of the initial signal is located in the approximative low-frequency waveband $0 \lesssim f \lesssim 0.03\ Hz$ while the right half ($t > 2000\ s$) has its energy essentially in the $0.015 \lesssim f \lesssim 0.045\ Hz$ waveband (Figure 4). These distinct spectral contents are a consequence of the sudden change of the initial signal around $t = 2000\ s$. The energy spectra of the left halves of the filtered signals show that both the MDL and the CST criteria filtered out the frequencies $f \gtrsim 0.035\ Hz$. We also observe that the CST filter is more efficient to preserve the energy in the low-frequency waveband where most of the information is expected. The energy spectra of the right halves of the

filtered signals more clearly illustrate the difference between the filters. In particular, one can see that most of the energy removed by the MDL filter lies in the waveband where the signal-to-noise ratio is high. Conversely, the spectrum of the noise removed by the CST filter indicates that this filter correctly preserved the information waveband. This shows that the CST filter has correctly managed for the non-stationarities of the signal-to-noise ratio: the CST filter roughly acted like a low-pass filter with a cutoff frequency $f_c \simeq 0.03\ Hz$ for the left half of the signal and with $f_c \simeq 0.045\ Hz$ for the right half. The CST filter automatically detects the waveband where the signal-to-noise ratio is high and filters out the frequencies outside this waveband. Such a filtering with a varying and automatically adapted cutoff frequency is impossible by means of classical linear filtering.

Conclusion

Orthogonal wavelet decompositions coupled with the CST criteria is efficient to clean non-stationary signals embedded in gaussian white noise. Contrary to the classical Fourier filtering, the CST filter automatically adapts its cutoff characteristics through a local evaluation of the signal-to-noise ratio. For the gaussian case considered in this letter, the adapted CST criterion is more efficient than the general purpose AIC and MDL criteria. Fast algorithms may be designed as far as the norm used in the scalar product of the wavelet decomposition is compatible with the statistics assumed for the noise.

Acknowledgments. We thank Pierre Morat for kind supplying the thermistance data and helpful comments. We are pleased to acknowledge Alex Grossmann and Jean Morlet for their stimulating discussions. This study was funded by ATP's *Télédétection spatiale* (CNES and CNRS-INSU) and *Valorisation* (CNRS-INSU). The computer programs used to perform this study are available upon request to the authors.

References

Akaike, H., Fitting autoregressive models for prediction, *Ann. Inst. Stat. Math.*, *21*, 261-265, 1965.

Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, *CBMS Ser. Appl. Math.*, Vol. 61, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.

Donoho, D., and I.M. Johnstone, Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, *Biometrika*, *81*, 425-455, 1994.

Foufoula-Georgiou, E., and P. Kumar, eds., *Wavelets in Geophysics*, 362 pp., Academic, San Diego, Calif., 1994.

Grossmann, A., and J. Morlet, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math.*, *15*, 723-736, 1984.

Holschneider, M., *Wavelets: An analysis tool*, 423 pp., Clarendon, Oxford, 1995.

Mallat, S., Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *315*, 69-87, 1989.

Mallat, S., and W.L. Hwang, Singularity detection and processing with wavelets, *IEEE Trans. Inform. Theory*, *38*, 617-643, 1992.

Meyer, Y., *Ondelettes et opérateurs*, 383 pp., Hermann, Paris, 1990.

Morat, P., and J.-L. Le Mouël, Signaux électriques engendrés par des variations de contrainte dans des roches poreuses non saturées, *C. R. Acad. Sci., Ser.II, 315*, 955-963, 1992.

Morat, P., J.-L. Le Mouël, S. Pride, and C. Jaupart, Sur de remarquables oscillations de température, d'humidité, de potentiel électrique observées dans une carrière souterraine, *C. R. Acad. Sci., Ser.II, 320*, 173-180, 1995.

Rissanen, J., Modeling by shortest data description, *Automatica*, *14*, 465-471, 1978.

Saito, N., Simultaneous noise suppression and signal compression using a library of orthonormal bases and Minimum Description Length criterion, in *Wavelets in Geophysics*, edited by E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar, pp. 299-324, Academic, San Diego, Calif., 1994.

Wax, M., and T. Kailath, Detection of signals by information theoretic criteria, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, *33*, 387-392, 1985.

This manuscript was prepared with the AGU LaTeX macros v3.0.

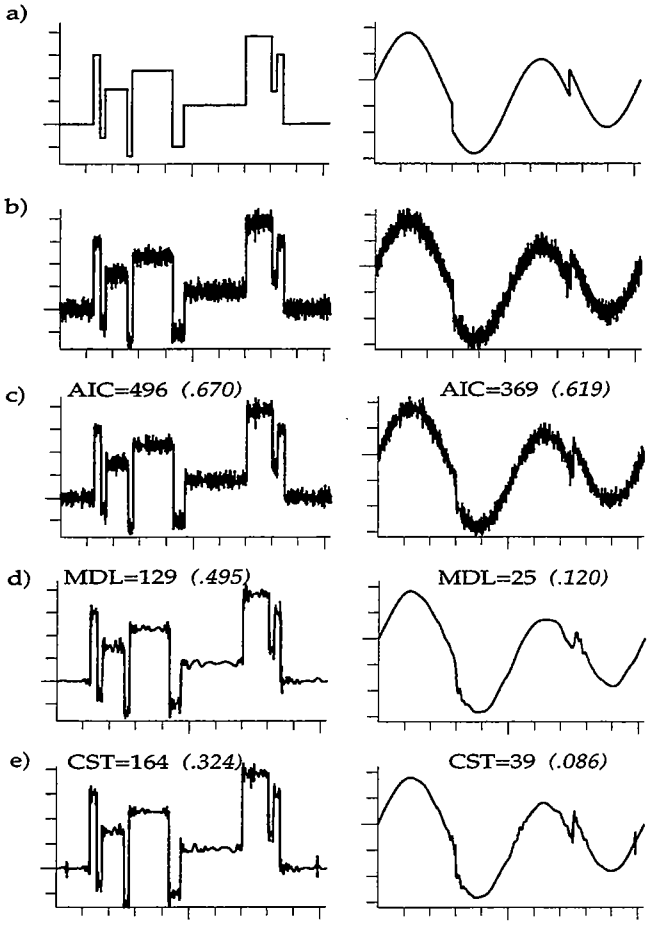


Figure 1. a) Synthetic signals 'blocks' (left) and 'heavisine' (right). b) The same signals contaminated by a gaussian white noise with a unit variance. c) Outputs obtained with the AIC filter, the numbers indicate the number of wavelet coefficients used to produce these reconstructed signals. d) Outputs obtained with the MDL filter. e) Outputs obtained with the CST filter. Numbers in parenthesis are average square errors.

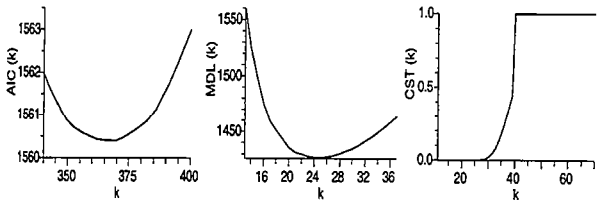


Figure 2. Criteria curves $AIC\,(s_k)$ (left), $MDL\,(s_k)$ (middle), and $CST\,(s_k)$ (right) corresponding to the heavisine signal and plotted for a limited range of k centered on the best value. Notice the flatness of the $AIC\,(s_k)$ curve and the sharp sigmoidal shape of the $CST\,(s_k)$ curve.

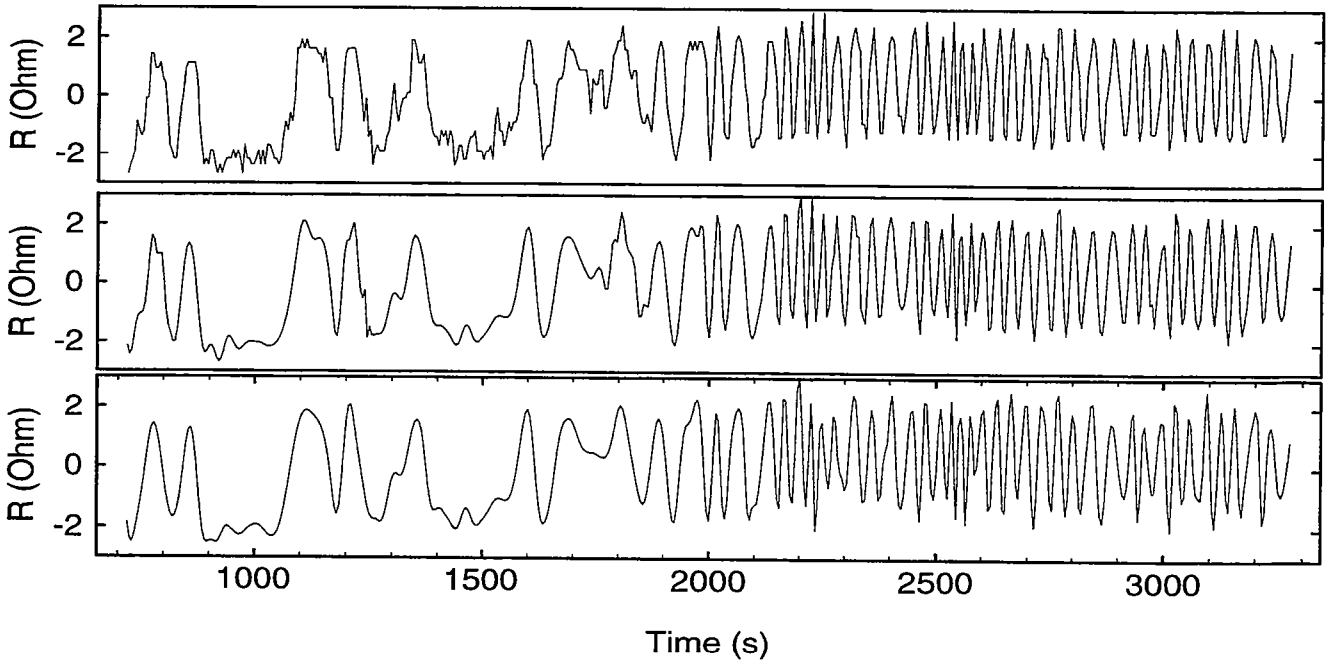


Figure 3. Top: original thermistance data. Middle: CST-filtered signal. Bottom: MDL-filtered signal.

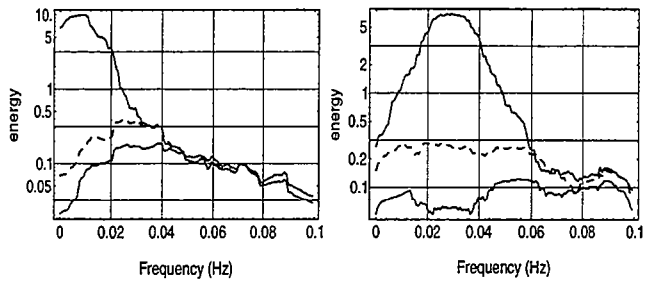


Figure 4. Left: energy spectra of the left halves ($t < 2000\ s$) of the original signal (upper curve), of the noise removed by the CST filter (lower solid curve), and of the noise removed by the MDL filter (dashed curve). Right: same as left part of the figure for the right halves ($t > 2000\ s$) of the signals.

3 Compléments sur l'analyse en ondelettes orthogonales

3.1 Les débuts de l'analyse en ondelettes orthogonales

Nous donnons ici quelques éléments de base de l'analyse en ondelettes orthogonales. Pour plus de détails, on pourra se référer à Daubechies [10] et Meyer [38].

Les bases d'ondelettes orthogonales sont introduites à partir de la forme discrétisée de la transformée en ondelettes continues, qui est redondante. Cette discrétisation doit à la fois garantir la reconstruction du signal analysé, en trouvant un compromis entre redondance et perte d'information, et tenir compte des propriétés particulières des ondelettes analysantes (enveloppe à support temporel variable en fonction de la gamme de fréquence). L'ondelette analysante pour un facteur de dilatation a et un paramètre de translation b est $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{a}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, $\psi(x)$ étant l'ondelette mère. On choisit un échantillonnage des échelles a sous forme exponentielle, les ondelettes étant, en coordonnées logarithmiques, à largeur de bande constante dans l'espace de Fourier. Le paramètre de translation b est discrétisé en fonction de l'échelle, de manière à prendre en compte la largeur de l'ondelette qui dépend de la dilatation, c'est-à-dire de façon que le principe d'incertitude soit vérifié. On a alors $\{(a_0^n, mb_0a_0^n),\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ pour tout couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, l'ondelette s'exprimant par

$$\psi_{m,n} = a_0^{-n/2}\psi\left(a_0^{-n}x - mb_0\right) \tag{I.1}$$

Cette discrétisation conduit à un pavage du plan espace-échelle à $\Delta f/f$ constant. Le choix du couple (a_0, b_0) est fait de telle sorte qu'il permette la reconstruction d'un signal à partir de ces coefficients, ou en d'autres termes, qu'il permette l'existence d'un opérateur inverse de la transformée en ondelette. Ce choix est à l'origine de la théorie des frames [10].

Dans l'ensemble des a_0, b_0 définis comme permettant la reconstruction de signaux, il est alors possible de déterminer ceux pour lesquels l'information ne sera plus redondante, c'est-à-dire que les ondelettes analysantes formeront une base orthogonale. Pour que des ondelettes forment une base orthonormale, il faut que $a_0 = 2$, $b_0 = 1$, alors :

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-n/2}\psi(2^n x - m) \tag{I.2}$$

La première base orthogonale a été construite dès 1909 par Haar [23], elle est définie par :

$$\left\{\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi\left(2^j x - k\right);\ j,k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{I.3}$$

où l'ondelette

$$\psi(x) = \begin{cases} sgn\left(\frac{1}{2} - x\right) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \tag{I.4}$$

est une fonction à support compact $[0,1]$. En pratique, cette base n'est que de peu d'interêt du fait de sa forme peu adaptée à des signaux réguliers.

Une base d'ondelettes orthogonales régulière a été construite par Meyer [39]. L'ondelette mère est construite à partir de sa transformée de Fourier, c'est une ondelette réelle à support infini.

Par la suite, Mallat [31] a développé le concept d'analyse multirésolution qui a permis de développer un algorithme général de construction de différentes bases orthogonales. Nous en donnons les principes dans la partie suivante.

3.2 Analyse multirésolution

L'analyse mutirésolution consiste à écrire toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ en terme d'approximations successives à des échelles de plus en plus fines qui convergent vers f.

Définition : Une analyse multirésolution est une suite de sous-espaces emboités de $L^2(\mathbb{R})$

$$...V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ... \tag{I.5}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\cap V_j = \{0\} \qquad \cup \bar{V}_j = L^2(\mathbb{R})$

(ii) $f \in V_j \iff f(2\,.) \in V_{j+1} \quad j \in \mathbb{Z}$

(iii) $f \in V_0 \iff f(\,.-k) \in V_0 \quad k \in \mathbb{Z}$

(iv) Il existe dans V_0 une fonction φ appelée fonction d'échelle telle que la collection des $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base orthormée de V_0.

En d'autres termes, les projections de f dans V_j (quand j augmente) représentent des approximations successives de plus en plus fines de f. V_j représente les approximations à l'échelle 2^j.

Construction de la base orthonormée d'ondelettes : Les ondelettes sont construites à partir d'une analyse multirésolution en considérant les sous-espaces orthogonaux aux V_j qui correspondent à la différence d'information entre deux projections successives de f.

Soit W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} : $W_j \oplus V_j = V_{j+1}$. Les espaces W_j vérifient alors :

(i) $f \in W_j \iff f(2\,.) \in W_{j+1} \quad j \in \mathbb{Z}$

(ii) $f \in W_0 \iff f(\,.-k) \in W_0 \quad k \in \mathbb{Z}$

(iii) $W_j \perp W_{j'}$ pour $j \neq j'$

(iv) $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathbb{R})$

De plus, il existe une fonction $\psi \in W_0$ telle que $\{\psi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base orthonormée de W_0. Il s'ensuit que $\left\{2^{j/2}\psi(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}\right\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut alors se décomposer en une série d'ondelettes telle que

$$f(x) = \sum_j \sum_k d_k^j \psi_{j,k}(x)\ . \tag{I.6}$$

En pratique, on peut utiliser la décomposition $L^2(\mathbb{R}) = V_0 \bigoplus_{j\geq 0} W_j$ f étant déterminée par

$$f(x) = \sum_k c_k^0 \varphi_{0,k}(x) + \sum_{j\geq 0}\sum_k d_k^j \psi_{j,k}(x) \,. \tag{I.7}$$

Nous verrons plus loin comment calculer simplement les coefficients c_k^j et d_k^j. Nous expliquons maintenant comment l'analyse multirésolution permet de calculer explicitement les fonctions φ et ψ.

Soit $\varphi \in V_0$. Alors il existe des coefficients $\{h_k\}$ tels que l'on ait l'équation de dilatation :

$$\varphi(x) = \sum_k h_k \varphi(2x - k)\,, \tag{I.8}$$

l'ondelette mère s'écrivant en fonction de la fonction d'échelle :

$$\psi(x) = \sum_k g_k \varphi(2x - k)\,. \tag{I.9}$$

Certaines conditions sur $\{h_k\}$ sont à imposer pour que la base d'ondelette soit orthonormale [9]. La première se déduit de la transformée de Fourier de l'équation de dilatation

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2}\sum h_k e^{ik\xi/2}\tilde{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{I.10}$$

dans laquelle on pose $\xi = 0$, on obtient ainsi $\sum_k h_k = 2$.

D'autre part, la condition d'orthonormalité impose que

$$\begin{aligned} g_k &= (-1)^k h_{1-k} \\ \sum_k g_k &= 0 \\ \sum_k h_{k-2p} h_{k-2q} &= 2\delta_{pq} \end{aligned} \tag{I.11}$$

La fonction d'échelle et l'ondelette mère sont donc entièrement définies par les coefficients $\{h_k, k \in \mathbb{Z}\}$ vérifiant les propriétés ci-dessus.

En plus de fournir un moyen très efficace pour construire des bases orthonormales, l'analyse multirésolution permet d'établir un lien avec les filtres miroirs en quadratures (encart 1) et ainsi de développer un algorithme rapide de transformée en ondelettes : *l'algorithme pyramidal.*

Encart 1 : Ondelettes orthogonales et filtres miroirs en quadrature :

La transformée de Fourier de l'équation de dilatation peut s'écrire

$$\tilde{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\tilde{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \qquad \text{avec} \quad m_0(\xi) = \frac{1}{2}\sum_k h_k e^{ik\xi}$$

m_0 étant une fonction 2π–périodique telle que $m_0(0) = 1$. D'autre part, la transformée de Fourier de l'ondelette s'écrit

$$\tilde{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\tilde{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \qquad \text{avec} \quad m_1(\xi) = \frac{1}{2}\sum_k g_k e^{ik\xi}$$

Les conditions d'orthonormalité des fonctions φ et ψ imposent les relations $\sum_k |\tilde{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$, $\sum_k \left|\tilde{\psi}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1$ et $\sum_k \tilde{\varphi}(\omega + 2k\pi)\bar{\tilde{\psi}}(\omega + 2k\pi) = 0$ que l'on exprime en fonction de m_0 et m_1 :

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$|m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 = 1 \qquad \text{(ii)}$$

$$m_1(\omega)\bar{m}_0(\omega) + m_1(\omega + \pi)\bar{m}_0(\omega + \pi) = 0 \qquad \text{(iii)}$$

Les trois conditions (i), (ii), (iii) impliquent que m_0 et m_1 sont des filtres miroirs en quadratures.

Algorithme pyramidal

Cet algorithme développé par Mallat [31] permet de calculer les coefficients de "moyennes" c_k^j et les coefficients en ondelettes (coefficients de "différences") d_k^j introduits précédemment, en se basant sur l'analyse multirésolution.

Soit $f_0 \in V_0$, alors

$$f_0 = \sum_k c_k^0 \varphi_{0,k} \qquad \text{(I.17)}$$

D'autre part $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$, donc f_0 peut être décomposé en $f_{-1} \in V_{-1}$ et $g_{-1} \in W_{-1}$:

$$f_0 = f_{-1} + g_{-1} = \sum_k c_k^1 \varphi_{-1,k} + \sum_k d_k^1 \psi_{-1,k} \qquad \text{(I.18)}$$

On note $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$.

Du fait que $\varphi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$ constituent des bases orthormées,

$$\begin{aligned} c_k^1 &= \langle f_{-1}, \varphi_{-1,k}\rangle = \langle f_0, \varphi_{-1,k}\rangle \\ d_k^1 &= \langle g_{-1}, \psi_{-1,k}\rangle = \langle f_0, \psi_{-1,k}\rangle \end{aligned} \qquad \text{(I.19)}$$

car $\langle g_{-1}, \varphi_{-1,k}\rangle = 0$ et $\langle \mathrm{f}_{-1}, \psi_{-1,\mathrm{k}}\rangle = 0$. Donc

$$\begin{aligned} c_k^1 &= \sum_n c_n^0 \langle \varphi_{0,n}, \varphi_{-1,k}\rangle \\ d_k^1 &= \sum_n c_n^0 \langle \varphi_{0,n}, \psi_{-1,k}\rangle \end{aligned} \tag{I.20}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{0,n}, \varphi_{-1,k}\rangle &= \int \varphi(x-n)\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, \varphi\Big(\frac{x}{2} - k\Big) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \varphi(x-(n-2k))\ \varphi\Big(\frac{x}{2}\Big) dx \\ &= h_{n-2k} \end{aligned} \tag{I.21}$$

de même

$$\langle \varphi_{0,n}, \psi_{-1,k}\rangle = g_{n-2k} \tag{I.22}$$

donc

$$\begin{aligned} c_k^1 &= \sum_n h_{n-2k} c_n^0 \\ d_k^1 &= \sum_n g_{n-2k} c_n^0 \end{aligned} \tag{I.23}$$

On pourra donc calculer les coefficients de moyennes et d'ondelettes c^1 et d^1 à partir de c^0 en appliquant simplement les filtres H et G tel que :

$$c^1 = Hc^0, \qquad d^1 = Gc^0 \tag{I.24}$$

Nous pouvons clairement généraliser cette décomposition : $f_{-j} \in V_{-j}$ se décompose en $f_{-j-1} \in V_{-j-1}$ et $g_{-j-1} \in W_{-j-1}$, le passage de la résolution $-j$ à la résolution $-j$–1 s'effectuant par l'intermédiaire des filtres H et G de façon que

$$c^{j+1} = Hc^j,\ d^{j+1} = Gc^j \tag{I.25}$$

L'algorithme pyramidal de décomposition en ondelettes se représente schématiquement par :

$$\begin{array}{ccccccc} c^0 & \xrightarrow{H} & c^1 & \xrightarrow{H} & c^2 & \xrightarrow{H} & c^3 \ldots \\ & \searrow^{G} & d^1 & \searrow^{G} & d^2 & \searrow^{G} & d^3 \ldots \end{array} \tag{I.26}$$

Pour reconstruire le signal, il suffit d'inverser le schéma précédent. En effet, on peut montrer facilement que :

$$c_n^0 = \sum_k \left(h_{n-2k} c_k^1 + g_{n-2k} d_k^1\right) \tag{I.27}$$

ce qui s'exprime en fonction des filtres duals H* et G* par

$$c^0 = H^* c^1 + G^* d^1 \tag{I.28}$$

forme que l'on généralise aux espaces V_{-j} de la même façon que dans le cas de la décomposition. L'algorithme de reconstruction se schématise donc de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} c^0 & \overset{H^*}{\leftarrow} & c^1 & \overset{H^*}{\leftarrow} & c^2 & \overset{H^*}{\leftarrow} & c^3 \ldots \\ & \overset{G^*}{\nwarrow} & d^1 & \overset{G^*}{\nwarrow} & d^2 & \overset{G^*}{\nwarrow} & d^3 \ldots \end{array} \tag{I.29}$$

On peut également noter que

$$\begin{aligned} HH^* + GG^* &= Id \\ HG^* &= 0 \end{aligned} \tag{I.30}$$

ce qui implique que H et G se comportent comme des filtres miroirs en quadrature avec H filtre passe-bas, G filtre passe-haut ([47], [60]).

De plus, cet algorithme préserve le nombre d'échantillons non-nuls. En effet, après L niveaux, nous ne gardons que les coefficients $d^1, d^2, \ldots d^L, c^L$ de la décomposition, c'est-à-dire que si c^0 est de longueur N, le nombre d'échantillons que l'on conservera sera $N/2 + N/4 + \ldots + N/2^L + N/2^L = N$, ce qui est un résultat attendu dans le cas d'une base orthogonale.

3.3 Exemples de bases orthogonales

3.3.a Ondelettes de Meyer

Les ondelettes de Meyer sont définies à partir de leur transformée de Fourier [4] :

$$\tilde{\psi}(u) = e^{-i\pi u}\theta(u) \tag{I.31}$$

telles que

$$\begin{array}{ll} \theta(u) = \theta(-u) & \\ \theta(u) \neq 0 & \textit{pour } |u| \in [1/2-\varepsilon, 1+2\varepsilon] \\ \theta(u) = 1 & \textit{pour } |u| \in [1/2+\varepsilon, 1-2\varepsilon] \\ \theta^2(u) + \theta^2(1-u) = 1 & \textit{pour } |u| \in [1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon] \\ \theta(2u) = \theta(1-u) & \textit{pour } |u| \in [1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon] \end{array} \tag{I.32}$$

avec $0 < \varepsilon \leq 1/6$.

L'ensemble $\left\{2^{j/2}\psi(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}\right\}$ constitue alors une base orthonormée. Les coefficients en ondelettes d'une fonction *f(x)* s'écrivent :

$$d_k^j = 2^{-j/2}\, TF^{-1}\left[\tilde{f}(u)\,\bar{\tilde{\psi}}(2^{-j}u)\right](2^{-j}k) \tag{I.33}$$

où $\bar{\tilde{\psi}}$ est le complexe conjugué de $\tilde{\psi}$. Le signal est alors reconstruit par la relation :

$$f(x) = \sum_j \sum_k d_k^j \psi_{j,k}(x) \tag{I.34}$$

qui montre que la base d'ondelettes orthogonales de Meyer est issue d'une analyse multirésolution (eq I.6).

Nous allons voir comment la transformée en ondelette d'un signal discret s'effectue dans le cas particulier de la base de Meyer. En effet, l'algorithme pyramidal ne peut pas être utilisé du fait que cette base n'est pas construite à partir d'une fonction d'échelle.

Rappels : Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'un signal discret *f(n)* formé de N échantillons:

$$\tilde{f}(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{-2i\pi\nu n/N} \qquad \text{pour} \quad \nu = -\frac{N}{2}+1 \text{ à } \frac{N}{2}$$

Réciproquement, la TFD inverse est donnée par

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \tilde{f}(\nu)\, e^{2i\pi\nu n/N} \qquad \text{pour} \quad n = 0 \text{ à } N-1$$

On considère un signal discret formé de N échantillons *f(n), n= 0 à N-1*, tel que $N = 2^p$, p entier > 1.

L'ondelette discrète $\psi_{j,k}(n)$ est définie par sa Transformée de Fourier Discrète (TFD) $\tilde{\psi}_{j,k}(\nu)$:

$$\tilde{\psi}_{j,k}(\nu) = 2^{-j/2}\, e^{-2i\pi 2^{-j}\nu k/N}\, \hat{\psi}\big(2^{-j}\nu/N\big) \qquad \text{pour} \quad \nu = -\frac{N}{2}+1 \text{ à } \frac{N}{2} \tag{I.37}$$

où $\tilde{\psi}$ est le spectre de l'ondelette de Meyer définie par l'équation (I.31). Les ondelettes discrètes sont donc obtenues par discrétisation du spectre continue de l'ondelette de Meyer aux fréquences $2^{-j}\nu/N$, leurs formes temporelles étant obtenues par la TFD inverse de $\tilde{\psi}_{j,k}(\nu)$ (figure 1). Ces ondelettes sont symétriques, à support infini.

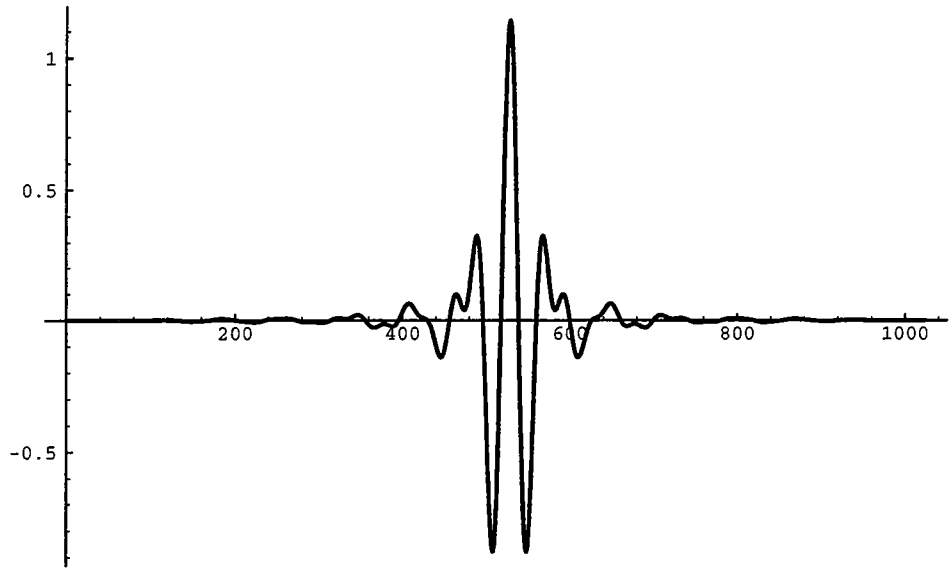


Figure 1 Ondelette de Meyer.

Les coefficients en ondelette du signal discret sont alors :

$$\begin{aligned} d_k^j &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, \psi_{j,k}(n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\nu=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \tilde{f}(\nu)\, \bar{\tilde{\psi}}_{j,k}(\nu) \\ &= 2^{-j/2}\, TF^{-1}\Big[\tilde{f}(\nu)\, \bar{\tilde{\psi}}\big(2^{-j}\nu/N\big)\Big]\, \big(2^{-j}k\big) \end{aligned} \tag{I.38}$$

De plus, on définit un coefficient d'ondelette particulier représentant la moyenne du signal :

$$d_0^0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\,, \tag{I.39}$$

alors d_k^j et d_0^0 caractérisent la transformée en ondelettes discrète directe.

Remarques: * On peut montrer que j varie de –p à –1 et que k varie de 0 à $(2^j N - 1)$ pour j donné. On a donc un nombre total de N–1 coefficients d_k^j, plus le coefficient d_0^0.

* Les basses fréquences correspondent à j = –p , les hautes fréquences à j = –1.

Grâce aux propriétés de l'analyse multirésolution, le signal discret est reconstruit de la façon suivante :

$$f(n) = \sum_{j=-p}^{-1} \sum_{k=0}^{2^j N-1} d_k^j \, \psi_{j,k}(n) + d_0^0 \tag{I.40}$$

La TFD de cette expression est :

$$\tilde{f}(\nu) = \sum_{j=-p}^{-1} \sum_{k=0}^{2^j N-1} d_k^j \, \tilde{\psi}_{j,k}(\nu) \tag{I.41}$$

ce qui donne après transformations :

$$f(n) = d_0^0 + TF^{-1}\left[\sum_{j=-p}^{-1} 2^{-j/2} \sum_{k=0}^{2^j N-1} d_k^j \, e^{-2i\pi 2^{-j}\nu k/N} \, \tilde{\psi}\left(2^{-j}\nu/N\right) \right](n) \tag{I.42}$$

La reconstruction du signal nécessite donc de prendre en compte les N coefficients d'ondelettes : d_k^j et la moyenne du signal d_0^0.

3.3.b Ondelettes de Daubechies

Les ondelettes de Daubechies [9] sont construites directement à partir des conditions imposées par l'analyse multirésolution, auxquelles on ajoute une condition de régularité sur l'ondelette. Cette condition de régularité sera liée au nombre de moments nuls de l'ondelette [50], c'est-à-dire que plus l'ondelette aura de moments nuls, plus elle sera régulière. Une ondelette de Daubechies ayant *N>0* moments nuls vérifiera les conditions d'existence et d'orthogonalité (cf. équation I.11) :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2N-1} h_k = 2 \\ &\sum_{k=0}^{2N-1} h_k h_{k-2n} = \delta_{0n} \quad \forall n \end{aligned} \tag{I.43}$$

la condition sur le nombre de moment nul s'écrivant :

$$\sum_{k=1}^{2N} (-1)^k k^n h_{k+1} = 0, \quad n = 0, 1, ...N-1 \tag{I.44}$$

La condition de support compact pour les ondelettes de Daubechies s'exprime à partir des fonctions m_0 définies lorsque nous avons introduit les filtres mirroirs en quadrature. En effet, soit une fonction d'échelle φ à support compact. Alors, la fonction 2π–périodique correspondante

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-in\xi} \tag{I.45}$$

(telle que $\tilde{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\tilde{\varphi}(\xi/2)$) est un polynôme trigonométrique. De plus, la condition d'orthonormalité de φ implique que :

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1\,. \tag{I.46}$$

D'autre part, Daubechies [10] a montré que, pour que φ et ψ soient suffisamment régulières, il faut que m_0 s'écrive sous la forme

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2}\right)^N Q(\xi)\,, \tag{I.47}$$

Q étant un polynôme trigonométrique. Une des familles d'ondelettes construite par Daubechies est définie par :

$$|Q(\xi)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \left(sin^2 \frac{\xi}{2}\right)^k . \tag{I.48}$$

L'ondelette pour *N=1* correspond alors à la base de Haar. Le support des ondelettes ainsi définies est $[1-N, N]$. A partir de ces relations, on construit les filtres $H = \{h_k, k = 0, 2N-1\}$ et $G = \left\{(-1)^k h_{1-k}, k = 0, 2N-1\right\}$ grâce auxquels nous pourrons

utiliser l'algorithme pyramidal. Les valeurs des filtres H sont données dans Daubechies [10], celles pour H et G correspondant à $N=10$ sont données dans le tableau 1.

L'ondelette et la fonction d'échelle pour $N=10$ sont représentées sur la figure 2 (pour d'autres valeurs de N, on pourra se référer à Daubechies [10]). C'est cette ondelette que nous avons utilisée dans la partie filtrage de ce chapitre. Nous l'avons choisie en raison de sa régularité, le nombre de moments nuls n'important pas dans cette application.

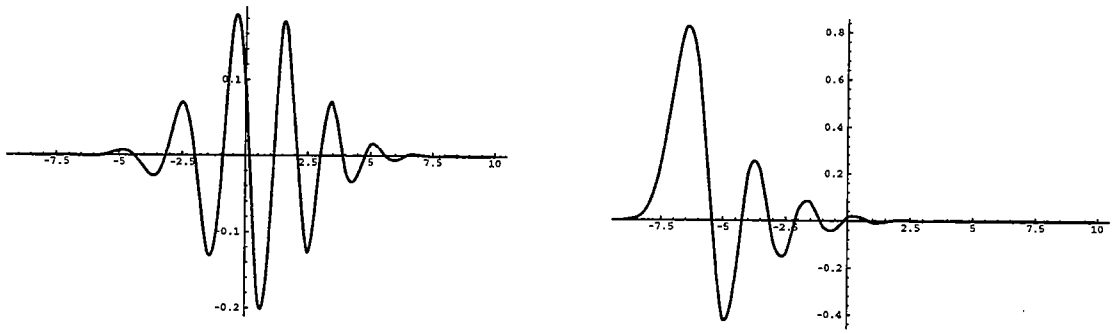


Figure 2 Gauche : Ondelette de Daubechies pour N=10. Droite : Fonction échelle correspondante

n	H	G
0	0.0266700579005473	-0.0000132642028945
1	0.1881768000776347	-0.0000935886703202
2	0.5272011889315757	-0.0001164668551285
3	0.6884590394534363	0.0006858566949564
4	0.2811723436605715	0.0019924052951925
5	-0.2498464243271598	-0.0013953517470688
6	-0.1959462743772862	-0.0107331754833007
7	0.1273693403357541	-0.0036065535669870
8	0.0930573646035547	0.0332126740593612
9	-0.0713941471663501	0.0294575368218399
10	-0.0294575368218399	-0.0713941471663501
11	0.0332126740593612	-0.0930573646035547
12	0.0036065535669870	0.1273693403357541
13	-0.0107331754833007	0.1959462743772862
14	0.0013953517470688	-0.2498464243271598
15	0.0019924052951925	-0.2811723436605715
16	-0.0006858566949564	0.6884590394534363
17	-0.0001164668551285	-0.5272011889315757
18	0.0000935886703202	0.1881768000776347
19	-0.0000132642028945	-0.0266700579005473

Tableau 1 Coefficients des filtres H et G de l'ondelette de Daubechies pour N=10

Chapitre II

Problème inverse des champs de potentiel

Chapitre II

Problème inverse des champs de potentiel

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode basée sur la transformée en ondelette pour résoudre le problème inverse des champs de potentiel. Afin d'introduire en quels termes le problème se pose, nous prenons l'exemple du champ gravitationnel, les autres types de champ (magnétique, thermique...) s'exprimant de la même façon. Le champ de gravité en un point M de l'espace s'exprime par :

$$f(M) = \int\int\int_V \nabla_M \cdot \frac{\rho(M)}{|PM|} dV \tag{II.1}$$

$|PM|$ étant la distance du point M au point source P appartenant au volume V, ρ représentant la densité. Le problème direct est très simple : connaissant la forme, les positions et les densités des sources à l'intérieur d'un volume V, le champ au point M est la somme des effets de chacune des sources. La résolution du problème inverse n'est pas aussi immédiate. A partir du champ observé, il faut retrouver à la fois géométrie, localisation et densité des sources présentes. La principale difficulté pour résoudre ce problème est la non-unicité de la solution. En effet, plusieurs types de sources peuvent être responsables du même champ observé en surface. Une deuxième difficulté provient de l'instabilité du problème vis-à-vis du bruit. De nombreux articles traitent de cet aspect mal-posé du problème inverse des champs de potentiels ([45], [44]). Des solutions sont apportées en limitant la non-unicité de la solution par l'apport d'informations *a-priori* [26], tandis que l'instabilité peut être réduite en régularisant les équations mal conditionnées.

En géophysique, le problème inverse est résolu principalement de deux façons. La première consiste à donner par exemple, la forme de la source (sphère, cylindre ...) afin de réduire le nombre de paramètres à déterminer (densité, rayon de la source, coordonnées du centre ...) [11]. Cette méthode consiste alors en un filtrage du signal géophysique selon la forme de la source choisie et donne de bons résultats lorsque les informations *a-priori* apportées sont pertinentes. La deuxième solution consiste, soit à rechercher la distribution de densité responsable des anomalies observées en découpant l'espace en petits domaines, ou bien à rechercher des interfaces entre des domaines de densité connue ([19], [27]). Cette deuxième approche apporte moins de contraintes au problème inverse, mais l'aspect mal-posé reste important, rendant les interprétations de données peu robustes.

Nous avons abordé le problème d'un point de vue intermédiaire entre ces deux méthodes. D'un côté, nous avons voulu garder le caractère général de la seconde méthode en apportant le moins possible d'informations *a-priori*, tout en gardant la simplicité de la première méthode. L'objectif étant une imagerie structurale du sous-sol, nous cherchons à localiser et caractériser des bords plus ou moins abruptes. Le premier pas consiste alors à localiser de façon automatique quelques anomalies essentielles du champ observé. Nous cherchons ensuite à déterminer les caractéristiques structurales des sources responsables de ces anomalies (forme, profondeur, intensité). L'information *a-priori* que nous apportons consiste en quelques sources types à partir desquelles nous identifierons les sources détectées. Cette approche est à la base de la déconvolution d'Euler qui fournit à la fois la profondeur caractéristique d'une source et sa nature structurale au moyen de l'homogénéité locale du champ étudié [59]. Mais cette méthode repose sur des aspects théoriques qui ne sont pas vérifiés lors des applications, en particulier en ce qui concerne l'homogénéité locale des champs (cf. annexe 4).

La transformée en ondelette, grâce à ces propriétés d'analyses locales, nous a paru un moyen judicieux de prendre en compte les exigences fixées. Nous avons pu intégrer la théorie des ondelettes dans la théorie du potentiel grâce aux propriétés d'échelles que possède le champ crée par une source multipolaire. En effet, il vérifie la relation d'homogénéité

$$f(ax, az) = a^n f(x, z) \tag{II.2}$$

n étant le degré d'homogénéité du champ qui permet de caractériser la source. Dans ce chapitre, nous traitons le cas du problème inverse dans le cas de sources homogènes afin d'utiliser cette relation d'homogénéité. Nous verrons dans le chapitre III les possibilités d'applications à des sources étendues.

Dans un premier temps, nous rappellerons quelques propriétés de la transformée en ondelettes continues ainsi que les définitions des différents opérateurs que nous serons amenés à utiliser. Nous verrons ensuite que la résolution du problème inverse nécessite l'introduction d'ondelettes particulières qui ont la propriété d'être solution de l'équation de Poisson. Elles nous permettent de confondre l'axe des dilatations de la transformée en ondelettes avec celui des profondeurs dans l'espace physique. Nous avons ainsi accès à toutes les caractéristiques de la source. De plus, nous montrons que la méthode proposée est très stable vis-à-vis du bruit grâce à l'utilisation des lignes d'extréma (arêtes) de la transformée en ondelettes. Nous verrons également que, même si aucune hypothèse d'homogénéité du champ n'est introduite, nous avons toujours accès aux différents paramètres de la source. Les parties suivantes concerne le problème 2D, avec une approche liée à des exemples d'applications à des données. On

trouvera une formulation plus théorique à N-dimensions en annexe de ce chapitre sous forme d'un article soumis à *Inverse Problem.*

2 Quelques opérateurs utiles

2.1 Rappels sur la transformée en ondelettes continues

La représentation temps-fréquence

La représentation temps-fréquence a été introduite afin de pallier aux insuffisances de la transformée de Fourier. En effet, cette dernière décompose un signal sur une base de sinus et de cosinus, c'est-à-dire sur des fonctions non localisées et périodiques. Elle ne permettra donc pas d'effectuer une analyse temporelle locale des signaux et représentera mal des signaux non-périodiques. La transformée de Fourier à fenêtre glissante introduite par Gabor [15] a permi d'introduire le concept de représentation temps-fréquence. Elle consiste à décomposer le signal sur de petites portions de temps en analysant le contenu fréquentiel de chaque section indépendemment, par une transformée de Fourier classique. D'autre part, le fenêtrage est accompli en introduisant une fonction de pondération qui permettra une localisation du signal en temps. L'inconvénient de la transformée de Fourier à fenêtre glissante est d'utiliser une fenêtre de largeur constante tout le long de l'analyse. Une fenêtre adaptée aux basses fréquences ne le sera plus pour les hautes fréquences. En effet, le nombre d'oscillations à l'intérieur de la fenêtre augmentera, et l'on se ramènera alors à une analyse par transformée de Fourier classique ne permettant pas de localiser des singularités hautes fréquences du signal. De le même façon, une fenêtre adaptée aux hautes fréquences ne permettra plus de voir ce qui se passe dans les basses fréquences. L'idéal serait donc de définir une fenêtre à support variable permettant de s'adapter aux différentes fréquences du signal, et c'est ce qu'a permi la tranformée en ondelettes grâce à une représentation temps-échelle.

La transformée en ondelettes

Cet outil d'analyse est apparue dans les années 1980 à partir d'un premier travail de Jean Morlet [43] effectué en vue d'applications sismiques, puis a connu de nombreux développements mathématiques. Un bref aperçu historique de l'évolution de l'analyse en ondelettes est donné par Graps [20]. La transformée en ondelettes consiste à décomposer un signal en composantes élémentaires localisées à la fois en temps et en fréquences. Cela s'effectue par translation et dilatation d'une ondelette analysante. Les coefficients en ondelettes d'une fonction f calculés au temps t pour une dilatation a sont alors :

$$\begin{aligned} W_{\psi|f}(t,a) &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)d\tau \\ &= f(t) *_t \psi_a(t) \end{aligned} \tag{II.3}$$

ψ étant l'ondelette analysante et $\psi_a(t) = \frac{1}{a}\psi\left(\frac{t}{a}\right)$.

La seule condition imposée sur le choix de l'ondelette est la condition d'admissibilité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\tilde{\psi}(u)\right|^2}{|u|} du < \infty \tag{II.4}$$

$\tilde{\psi}$ étant la transformée de Fourier de ψ. Cette condition signifie que l'ondelette doit être de moyenne nulle. On peut cependant noter qu'elle n'est nécessaire que si l'on veut effectuer une analyse complète d'un signal, c'est-à-dire si l'on veut en étudier les composantes grâce à la transformée en ondelettes, puis le reconstruire à partir de ces coefficients d'ondelettes. C'est en effet la possibilité d'une reconstruction qui impose cette condition sur l'ondelette analysante (nous reprendrons ce point dans le chapitre IV).

Selon le type de problème à résoudre, on pourra ajouter des conditions supplémentaires sur le choix de l'ondelette. En particulier, il sera préférable que l'ondelette soit à la fois bien localisée en temps et en fréquence. Les propriétés de localisation de la transformée en ondelettes seront alors exploitées de façon optimale.

Discrétisation de la transformée en ondelettes

Afin d'effectuer des applications numériques de la transformée en ondelettes, il est nécessaire d'introduire des formules discrétisées sur une grille. Un échantillonnage dyadique[1] des dilatations suffit à l'analyse des fréquences contenues dans un signal. Nous choisirons donc une grille linéaire en temps et dyadique en dilatation. D'autre part, nous devons faire évoluer les paramètres d'échelle et de translation : les paramètres de translation en temps varieront linéairement. Les paramètres de dilatation sont inversement proportionnels à des fréquences et seront décomposés en octaves, elles-mêmes décomposées en voix.

En notant δt la période d'échantillonnage, *nvoct* le nombre de voix par octave et a_0 la dilatation de départ, les paramètres de translations et de dilatations s'expriment alors par

$$a_k = a_0\, 2^{\frac{k-1}{nvoct}} \quad et \quad t_j = j\delta t\,. \tag{II.5}$$

La forme discrétisée de la transformée en ondelettes sera alors

$$\begin{aligned} W_{\psi|f}(t_j\,, a_k) &= f(t_j) *_{t_j} \psi_{a_k}\left(\frac{t_j}{a_k}\right) \\ &= \frac{1}{a}\sum_i f(t_i)\psi\left(\frac{t_j - t_i}{a_k}\right) \end{aligned} \tag{II.6}$$

Classiquement, la transformée en ondelettes est représentée dans un plan (*temps* (ou *espace*), $Log_2(dilatation)$) du fait de l'échantillonage choisi. C'est cette représentation que nous utiliserons dans la majeure partie de cette thèse, à part quelques exceptions où une représentation en échelle linéaire de la dilatation nous était indispensable.

---

1 en puissance de 2

2.2 *Opérateurs de prolongement et de dérivation des champs de potentiel*

([16], [17])

Les champs de potentiels vérifient l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 f(x,y,z) = 0 \tag{II.7}$$

La transformée de Fourier 2D par rapport à x et y de cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} &(2i\pi u)^2 F(u,v,z) + (2i\pi v)^2 F(u,v,z) + \frac{\partial^2 F(u,v,z)}{\partial z^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\partial^2 F(u,v,z)}{\partial z^2} - \left(2\pi\sqrt{u^2+v^2}\right)^2 F(u,v,z) = 0 \end{aligned} \tag{II.8}$$

dont la solution est :

$$F(u,v,z) = c_1\, e^{2\pi z\sqrt{u^2+v^2}} + c_2\, e^{-2\pi z\sqrt{u^2+v^2}} \tag{II.9}$$

En supposant que l'on connait le champ en $z=0$, et que la fonction f est définie dans le demi espace $z>0$, la solution admissible de cette équation est :

$$\begin{aligned} F(u,v,z) &= c_2\, e^{-2\pi z\sqrt{u^2+v^2}} \\ &= F(u,v,z=0)\, e^{-2\pi z\sqrt{u^2+v^2}}\ . \end{aligned} \tag{II.10}$$

L'opérateur de prolongement des champ de potentiel est alors défini par :

$$\boxed{\widetilde{P_z}(u,v) = e^{-2\pi z\sqrt{u^2+v^2}}} \tag{II.11}$$

La dérivation oblique correspond à l'opérateur $\vec{q}.\vec{\nabla}$ où $\vec{q}$ est un vecteur unitaire de composantes (α,β,γ), c'est-à-dire

$$\vec{q}.\vec{\nabla} f(x,y,z) = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z} \tag{II.12}$$

dont la transformée de Fourier 2D par rapport à x et y est :

$$\begin{aligned} \vec{q}.\vec{\nabla} F(u,v,z) &= 2i\pi(\alpha u + \beta v)\, F(u,v,z) + \gamma\frac{\partial F}{\partial z} \\ &= 2i\pi(\alpha u + \beta v)\, F(u,v,z) + \gamma\, F(u,v,z=0)\,\frac{\partial \widetilde{P_z}(u,v)}{\partial z} \\ &= 2i\pi(\alpha u + \beta v)\, F(u,v,z) - 2\pi\gamma\sqrt{u^2+v^2}\ F(u,v,z=0) \end{aligned} \tag{II.13}$$

d'où

$$\vec{q}.\vec{\nabla}F(u,v,z=0) = 2\pi\left(i(\alpha u+\beta v) - \gamma\sqrt{u^2+v^2}\right)F(u,v,z=0) \qquad \text{(II.14)}$$

L'opérateur de dérivée oblique des champ de potentiel est alors défini par :

$$\widetilde{OD}(u,v,\vec{q}) = 2\pi\left(i(\alpha u+\beta v) - \gamma\sqrt{u^2+v^2}\right) \qquad \text{(II.15)}$$

3 Transformée en ondelettes de fonctions homogènes

3.1 Relation entre les coefficients d'ondelettes de deux dilatations différentes

Dans cette partie, nous cherchons à déterminer les paramètres (structure et localisation) qui caractérisent une source homogène responsable d'une anomalie de champ de potentiel. Pour cela, nous allons exprimer la transformée en ondelettes d'un champ de potentiel en fonction des paramètres de localisation horizontale et verticale de la source, ainsi que du degré d'homogénéité de ce champ. En effet, tout champ de potentiel dû à une source localisée est homogène. Ce degré d'homogénéité permettra de caractériser le type de source présente, c'est pourquoi il est également appelé "indice structural" dans le cadre de la déconvolution d'Euler [59].

Soit une ondelette $\psi(x)$. Les coefficients en ondelette d'une fonction $f(x\,,z_0)$ sont pour une dilatation a :

$$\begin{aligned} W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a) &= f(x\,,z_0) *_x \frac{1}{a}\,\psi\Big(\frac{x}{a}\Big) \\ &= f(x\,,z_0) *_x D_x^a\psi(x) \end{aligned} \tag{II.16}$$

où l'on définit l'opérateur de dilatation

$$D_x^a\psi(x) = \frac{1}{a}\,\psi\Big(\frac{x}{a}\Big)\,. \tag{II.17}$$

Afin d'établir une relation entre les coefficients en ondelettes et les caractéristiques de la source, nous introduisons les propriétés de la fonction f particulières au problème posé :

- Dans le cadre des champs de potentiel, nous pourrons utiliser l'opérateur de prolongement vers le haut (ou le bas) qui relie le champ en z au champ en z_0 par la relation

$$f(x,z) = P_{z-z_0}(x) \;*_x f(x,z_0) \quad , \tag{II.18}$$

l'expression de la transformée de Fourier de l'opérateur de prolongement étant

$$\widetilde{P_z}(u) = e^{-2\pi|u|z} \tag{II.19}$$

avec :

$z > 0$ pour un prolongement vers le haut.
$z < 0$ pour un prolongement vers le bas.

- Si $f(x,z)$ est une fonction homogène de degré n, elle vérifie l'équation d'homogénéité :

$$\begin{aligned} f(ax,az) = a^n f(x,z) &\Leftrightarrow f(x,az) = a^n\, f\Big(\frac{x}{a},z\Big) \\ &\Leftrightarrow a\, f(x,az) = a^{n+2}\,\frac{1}{a}\, f\Big(\frac{x}{a},z\Big) \\ &\Leftrightarrow D_z^{1/a} f(x,z) = a^{n+2}\, D_x^a\, f(x,z) \end{aligned} \tag{II.20}$$

Nous aurons donc à faire intervenir $f(ax,az)$ dans le calcul de la transformée en ondelette afin de faire apparaître l'ordre d'homogénéité n de l'anomalie.

Remarque : Si n est entier, la source sera ponctuelle et homogène, si n n'est pas entier, la source sera "localisée" autour d'un point et homogène.

En utilisant ces propriétés, nous allons chercher à exprimer les coefficients en ondelettes pour une dilatation a (eq. II.16) en fonction des coefficients en ondelettes d'une autre dilatation a', afin de déterminer en quels termes peuvent se comparer ces deux voix.

Soit $a' > a$

$$\begin{aligned} W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a) &= f(x,z_0) *_x \frac{1}{a}\psi\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= \frac{a}{a'}\frac{a'}{a} f\left(x\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}, z_0\right) *_x \frac{a'}{a}\frac{1}{a'}\psi\left(\frac{x}{a'}\frac{a'}{a}\right) \\ &= D_x^{a/a'}\left[\frac{a}{a'} f\left(\frac{a}{a'}x, z_0\right) *_x \frac{1}{a'}\psi\left(\frac{x}{a'}\right)\right] \\ &= D_x^{a/a'}\left[D_x^{a'/a} f(x,z_0) *_x D_x^{a'}\psi(x)\right] \end{aligned} \tag{II.21}$$

et en utilisant l'équation d'homogénéite puis l'opérateur de prolongement dans la relation :

$$\begin{aligned} D_z^{a/a'} f(x,z) &= \frac{a'}{a} f\left(x, \frac{a'}{a}z\right) \\ &= \frac{a'}{a} f(x,z) *_x P_{z\left(\frac{a'}{a}-1\right)}(x) \end{aligned} \tag{II.22}$$

on arrive à :

$$\begin{aligned} W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a) &= \left(\frac{a}{a'}\right)^{n+2} D_x^{a/a'}\left[D_{z_0}^{a/a'} f(x,z_0) *_x D_x^{a'}\psi(x)\right] \\ &= \left(\frac{a}{a'}\right)^{n+1} D_x^{a/a'}\left[f(x,z_0) *_x P_{z_0\left(\frac{a'}{a}-1\right)}(x) *_x D_x^{a'}\psi(x)\right] \end{aligned} \tag{II.23}$$

Cette relation montre que dans le cas général, l'action de l'opérateur de prolongement sur les ondelettes ne fournit pas une fonction qui permettrait de simplifier encore l'expression de la transformée en ondelettes d'un champ de potentiel. Le choix de l'ondelette analysante apparaît donc très important dans la formulation du problème. En effet, l'application d'ondelettes classiques en théorie des ondelettes (dérivées de Gaussienne) dans ce problème restera limitée en raison de l'instabilité numérique du prolongement vers le bas. C'est pourquoi nous introduisons des ondelettes invariantes par prolongement telles que

$$P_H(x) *_x D_x^{a'}\psi(x) = K\, D_x^{a''}\psi(x) \tag{II.24}$$

où $a''>a'$ si $H>0$, et K est un facteur qui dépend de a' et de H. L'équation (1.8) devient alors

$$\begin{aligned} W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a) &= K\left(\frac{a}{a'}\right)^{n+1} D_x^{a/a'}\left[f(x,z_0) *_x D_x^{a''}\psi(x)\right] \\ &= K\left(\frac{a}{a'}\right)^{n+1} D_x^{a/a'}\left[W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a'')\right] \end{aligned} \tag{II.25}$$

qui permet de retrouver la totalité de la transformée en ondelettes à partir d'une seule voix a".

Dans le paragraphe suivant, nous définissons plus précisément les ondelettes invariantes par prolongement que nous utiliserons, et nous reformulons l'équation (II.25) pour ce cas particulier.

3.2 Ondelettes multipolaires - Définitions

Les ondelettes particulières invariantes par prolongement que nous sommes amenés à introduire doivent vérifier la condition d'admissibilité, c'est-à-dire être de moyenne nulle. Elles sont générées à partir du champ de potentiel produit par des sources multipolaires et sont alors définies par :

$$\begin{aligned} \psi^L(x) &= OD(x, \vec{q_1},...,\vec{q_L}) *_x P_1(x) \\ \text{où } OD(x, \vec{q_1}, ..., \vec{q_L}) &= OD(x, \vec{q_1}) *_x ... *_x OD(x, \vec{q_L}) \end{aligned} \tag{II.26}$$

où l'on a introduit l'opérateur de dérivation oblique des champs de potentiel défini par sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \widetilde{OD}(u, \vec{q_l} = \alpha_l \vec{x} + \gamma_l \vec{z}) &= 2\pi(i\alpha_l u - \gamma_l |u|) \\ \Longleftrightarrow OD(x, \vec{q_l} = \alpha_l \vec{x} + \gamma_l \vec{z}) &\equiv \vec{q_l}.\vec{\nabla} \end{aligned} \tag{II.27}$$

$\vec{q_l}$ étant un vecteur unitaire de composante (α_l, β_l) dans la base définie par les vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{z}$. L est alors un ordre de dérivation qui contrôle la nature multipolaire de l'ondelette et son nombre de moments nuls, c'est-à-dire que le choix de l'ondelette analysante dépendra de la régularité du champ à étudier. Il faut également noter que le choix L=0 devra être évité du fait que l'ondelette ne sera plus admissible, elle correspondra à l'opérateur de prolongement qui n'est pas à moyenne nulle.

Les expressions analytiques des ondelettes multipolaires seront calculées à partir de leurs transformées de Fourier :

$$\tilde{\psi}^L(u) = \widetilde{P_1}(u) \prod_{l=1}^{L} \widetilde{OD}(u, \alpha_l \vec{x} + \gamma_l \vec{z}) \ . \tag{II.28}$$

En particulier, les ondelettes que nous utiliserons dans les différents exemples traités par la suite corrrespondront à $(\alpha_l = 1, \gamma_l = 0)$, c'est-à-dire $\psi_x^L(x) = \dfrac{\partial^L P_1(x)}{\partial x^L}$. On trouvera les expressions analytiques de ces ondelettes "horizontales" dans l'annexe 1.

A partir des ondelettes invariantes par prolongement choisies (équation II.26), nous reprenons maintenant le calcul de la transformée en ondelettes d'un champ de potentiel. L'action de la dilatation sur l'ondelette analysante s'exprime par :

$$\begin{aligned} D_x^a \psi^L(x) &= \frac{1}{a} \psi^L\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= a^L OD(x, \vec{q_1}, ..., \vec{q_L}) *_x P_a(x) \end{aligned} \tag{II.29}$$

En effet, $\frac{1}{a}\psi^L\left(\frac{x}{a}\right) = TF^{-1}\left(\tilde{\psi}^L(au)\right)$

$$= TF^{-1}\left(\widetilde{P_1}(au)\prod_{l=1}^{L}\widetilde{OD}(au, \alpha_l\vec{x} + \gamma_l\vec{z})\right)$$

$$= TF^{-1}\left(\widetilde{P_a}(u)\prod_{l=1}^{L}a\,\widetilde{OD}(u, \alpha_l\vec{x} + \gamma_l\vec{z})\right)$$

$$= a^L P_a(x) *_x OD(x, \vec{q_1}) *_x \ldots *_x OD(x, \vec{q_L})$$

Donc l'action du prolongement sur l'ondelette (eq. II.24) est

$$\begin{aligned} P_H(x) *_x D_x^a\psi^L(x) &= a^L\, OD(x, \vec{q_1}, \ldots, \vec{q_L}) *_x P_{a+H}(x) \\ &= \left(\frac{a}{a+H}\right)^L (a+H)^L\, OD(x, \vec{q_1}, \ldots, \vec{q_L}) *_x P_{a+H}(x) \\ &= \left(\frac{a}{a+H}\right)^L D_x^{a+H}\psi(x) \end{aligned} \tag{II.31}$$

L'équation (II.23) devient alors

$$\begin{aligned} W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a) &= \left(\frac{a}{a'}\right)^{n+1} D_x^{a/a'}\left[f(x,z_0) *_x P_{z_0\left(\frac{a'}{a}-1\right)}(x) *_x D_x^{a'}\,\psi(x)\right] \\ &= \left(\frac{a}{a'}\right)^{n+1} D_x^{a/a'}\left[f(x,z_0) *_x \left(\frac{a'}{a'+z_0\left(\frac{a'}{a}-1\right)}\right)^L D_x^{a'+z_0\left(\frac{a'}{a}-1\right)}\,\psi(x)\right] \end{aligned} \tag{II.32}$$

Soit $a'' = a' + z_0\left(\frac{a'}{a} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad a' = a\,\frac{a''+z_0}{a+z_0}$, alors

$$\begin{aligned} W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a) &= \left(\frac{a}{a\frac{a''+z_0}{a+z_0}}\right)^{n+1}\left(\frac{a\frac{a''+z_0}{a+z_0}}{a''}\right)^L D_x^{a/\left(a\frac{a''+z_0}{a+z_0}\right)}\left[f(x,z_0) *_x D_x^{a''}\,\psi(x)\right] \\ &= \left(\frac{a}{a''}\right)^L\left(\frac{a+z_0}{a''+z_0}\right)^{n+1-L} D_x^{\frac{a+z_0}{a''+z_0}} W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a'') \end{aligned} \tag{II.33}$$

et en notant $\beta = \frac{a+z_0}{a''+z_0}$

$$W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a) = \left(\frac{a}{a''}\right)^L \beta^{n+1-L} D_x^{\beta} W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a'') \tag{II.34}$$

Cette équation qui relie deux voix de la transformée en ondelettes permettra de retrouver à la fois l'ordre multipolaire n de la source ainsi que sa profondeur z_0 ainsi que nous le montrons dans la partie suivante.

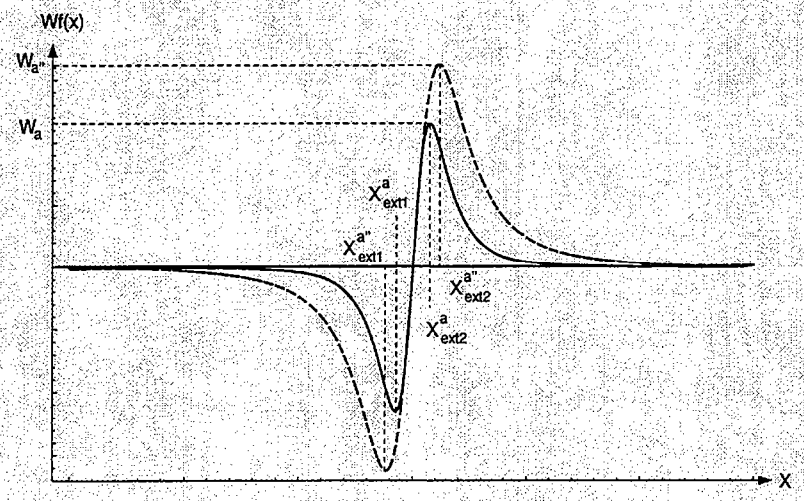
3.3 Exemples synthétiques

Les exemples étudiés vont permettre d'illustrer l'application de l'équation (II.34). Nous étudions le cas de trois champs dus à des sources homogènes localisées en $z=20$ unités de profondeur et de degré d'homogénéité $n=-1$, $n=-1.5$, $n=-2$. Le champ pour $n=-1$ est le champ de gravité dû à une ligne infinie en y, le champ pour $n=-1.5$ est obtenu par une dérivée 1/2 par rapport à x du champ $n=-1$, le champ pour $n=-2$ est obtenu par une dérivée première par rapport à x du champ $n=-1$. Nous discutons en premier lieu de la caractérisation des sources par leur profondeur et leur degré d'homogénéité, et dans un second temps de la localisation horizontale.

L'algorithme pour retrouver z_0 et n est basé sur l'équation II.34, les valeurs à extraire étant les rapports de dilatation et d'amplitude entre deux voix. *La connaissance de la position et de la valeur des extréma de la transformée en ondelettes sera donc suffisante pour calculer les inconnues.* Cet algorithme est expliqué en détail dans l'encart 2.

Encart 2 : Algorithme de recherche de la profondeur z_0 et du degré d'homogénéité n correspondant à une source ponctuelle multipolaire à partir de deux voix de la transformée en ondelette.

Le point de départ est l'équation II.34, on utilise les notations de la figure suivante :



* 1er pas : consiste à déterminer le facteur de dilatation β qui existe entre les deux voix (quand il existe au moins deux extréma) :

$$\beta = \left| \frac{x^{a''}_{ext1} - x^{a''}_{ext2}}{x^{a}_{ext1} - x^{a}_{ext2}} \right|$$

et ainsi de déterminer

$$z_0 = \frac{\beta a'' - a}{1 - \beta}$$

* 2ème pas : consiste à déterminer le rapport d'amplitude entre les deux voix

$$r = \beta \frac{W_a}{W_{a''}} \left(\frac{a''}{a} \right)^L$$

si W_a et $W_{a''}$ sont les extréma de respectivement $W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a)$ et $W_{\psi|f(.,z_0)}(x\,,a'')$. Le β apparait du fait de l'opérateur de dilatation de la voix a". On obtient alors l'ordre multipolaire de la source à partir de l'eq. (II.34) par :

$$n = \frac{ln(r)}{ln(\beta)} - 1 + L$$

Dans un premier temps, nous avons appliqué cet algorithme pour une ondelette "horizontale" L=1, correspondant à la dérivée première par rapport à x de l'opérateur de prolongement (cf. annexe 1). Les champs et leur transformée en ondelettes pour deux voix a=30 et a=100 sont représentés sur la figure 3. Les résultats obtenues à partir de ces deux voix sont :

- champ n=-1 : $z_{0,exp} = 20.25$ et $n_{exp} = -1.013$
- champ n=-1.5 : $z_{0,exp} = 20.25$ et $n_{exp} = -1.517$
- champ n=-2 : $z_{0,exp} = 20.$ et $n_{exp} = -1.999$

Ces très bons résultats sont obtenus de la même façon pour les ondelettes horizontales L=2 et L=3. Il faut cependant noter que les résultats seront d'autant meilleurs que l'on prendra des dilatations plus grandes, et ce en raison du plus faible échantillonnage des plus petites dilatations dans le calcul numérique de la transformée en ondelettes tel que nous l'avons implémenté.

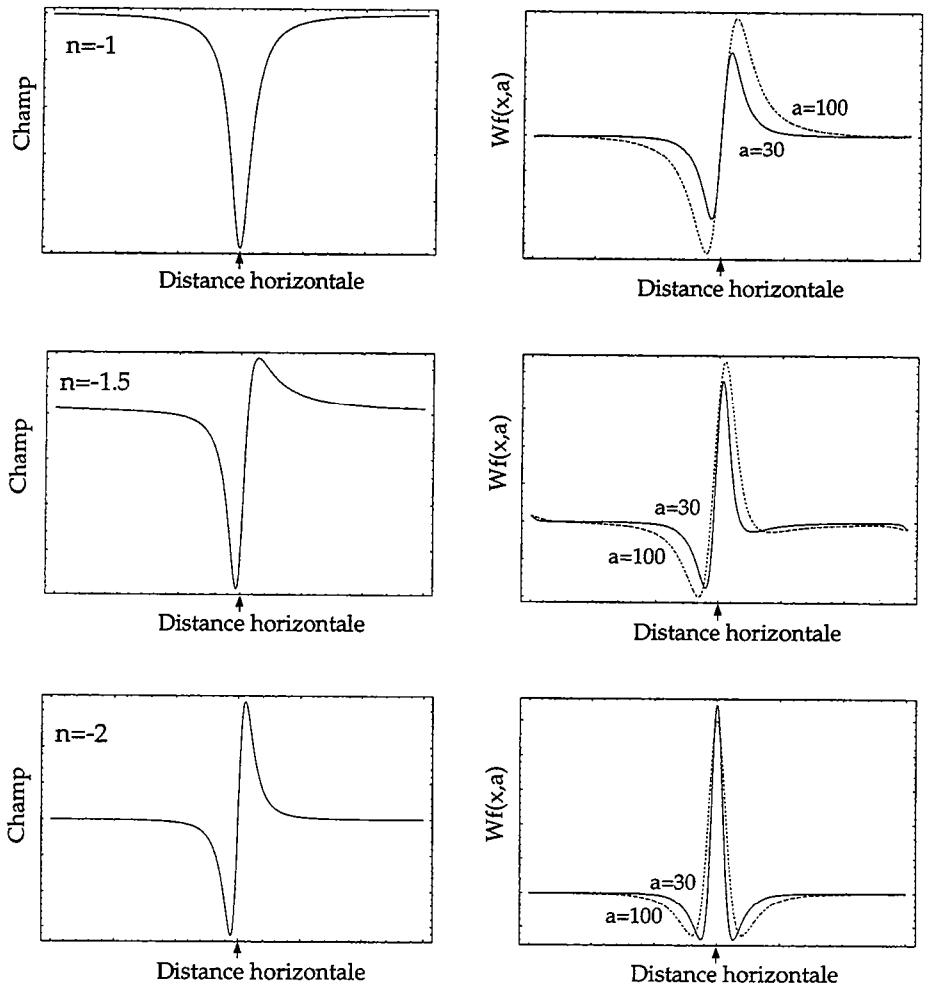


Figure 3 Gauche : champs d'une ligne infinie en y localisée en $z_0 = 20$ unités de profondeurs, de degré d'homogénéité n=-1, n=-1.5, n=-2. La flèche indique la position horizontale de la source. Droite : 2 voix de leur transformée en ondelettes avec l'ondelette L=1. En trait plein pour la dilatation a=30, en pointillé pour la dilatation a=100.

En ce qui concerne la localisation horizontale, les propriétés de la transformée en ondelettes font que les lignes d'extréma convergent vers l'anomalie quand a décroît. Mais en pratique, on ne peut pas calculer la transformée en ondelettes pour des dilatations inférieures à une dilatation a_{min} (voir annexe 1) et la convergence des lignes est très lente. Ce fait est illustré sur la figure 4 où la transformée en ondelettes totale et les lignes d'extréma (arêtes) issues de ces cartes sont représentées. Les niveaux de gris utilisés tout le long de cette thèse pour la représentation des transformées en ondelettes correspondent à des valeurs croissantes du foncé vers le clair. Ainsi, pour les transformée en ondelettes réelles, le noir et le blanc correspondent au maximum d'énergie contenu dans le signal.

Pour les champs n=-1 et n=-1.5, la convergence des lignes d'extréma est visible mais pas suffisante pour une localisation exacte. Par contre pour le champ n=-2, l'arête centrale verticale permet cette localisation exacte. Dans le cas général, pour les sources d'ordre multipolaire entier, il sera toujours possible de trouver une ondelette qui permettra d'extraire une arête verticale localisée exactement sur la source. C'est le cas pour la source n=-1 où l'application de l'ondelette L=2, grâce à une dérivée de plus, donnera une ligne d'extréma supplémentaire verticale (figure 5). On peut également noter que la transformée pour L=2 du champ n=-1 est égale à celle pour L=1 du champ n=-2 à un facteur a près. En ce qui concerne le cas des sources d'exposant non entier, la localisation exacte est plus problématique, car même si l'on trouve une ondelette pour laquelle une des lignes d'extréma sera verticale, elle sera un peu décalée par rapport à la position de la source (figure 5).

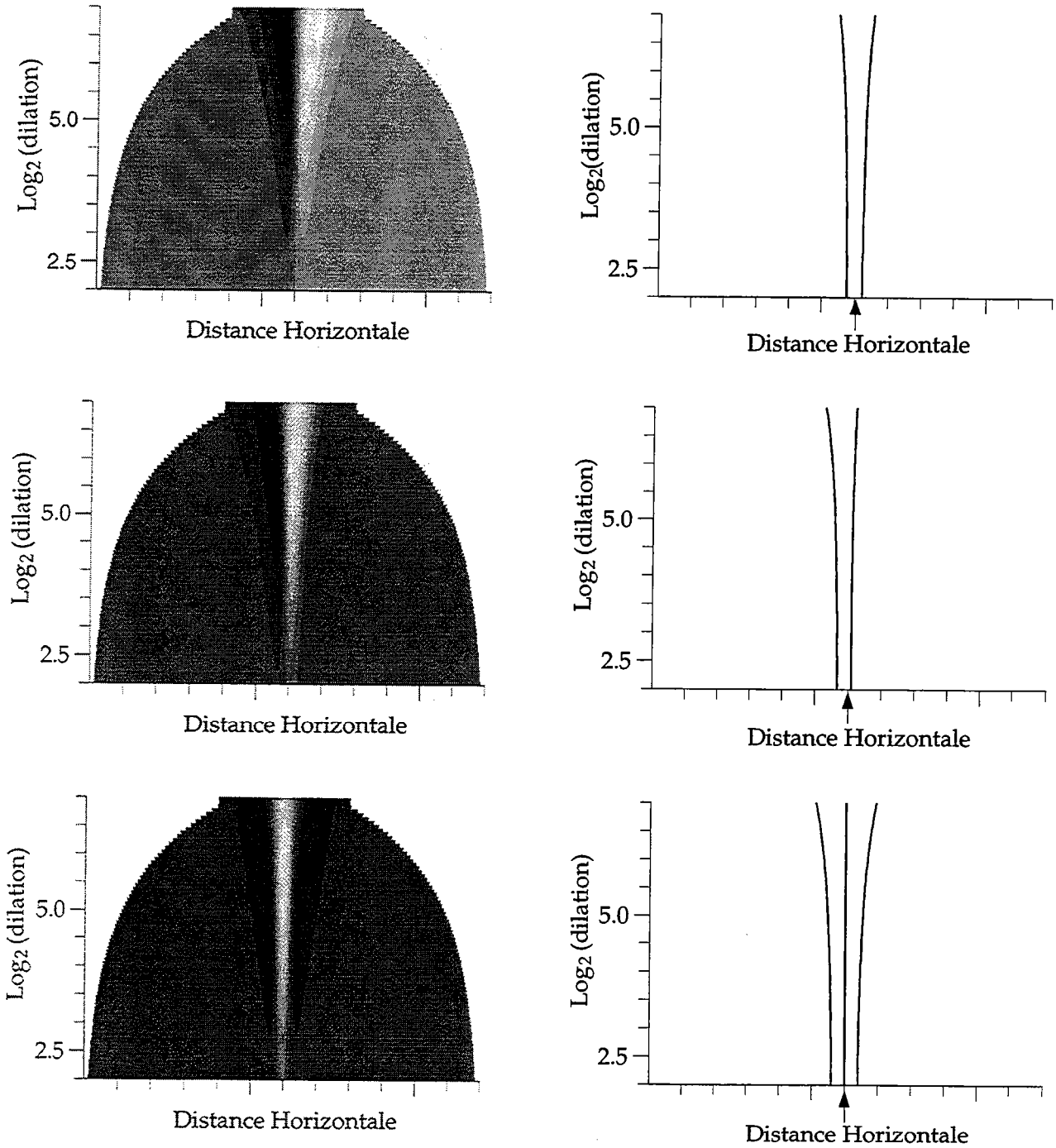


Figure 4 Transformée en ondelettes et lignes d'extréma des champs de degrés d'homogénéité n=-1, -1.5, -2 pour l'ondelette L=1. La flèche indique la position horizontale de la source.

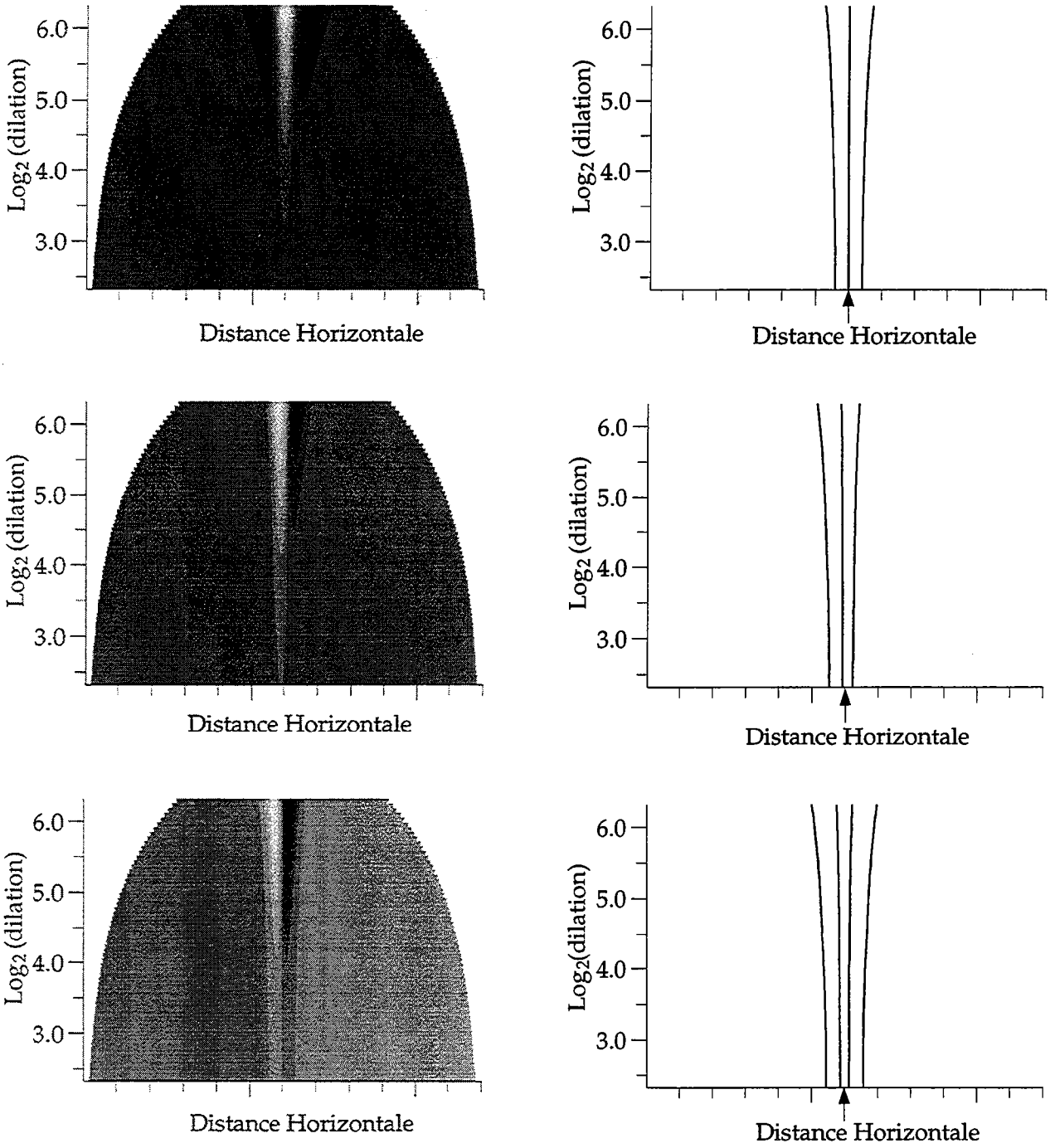


Figure 5 Transformée en ondelettes et lignes d'extréma des champs de degrés d'homogénéité n=-1, -1.5, -2 pour l'ondelette L=2. La flèche indique la position horizontale de la source.

3.4 Influence du bruit sur la transformée en ondelettes

Dans cette partie, nous allons voir de quelle façon la présence de bruit dans un signal affecte sa transformée en ondelettes. On suppose que le signal bruité s'écrit :

$$f_n(x) = f(x) + n(x)\,. \tag{II.39}$$

Sa transformée en ondelettes est :

$$W_{\psi|f_n}(x,a) = W_{\psi|f}(x,a) + W_{\psi|n}(x,a)\,. \tag{II.40}$$

Du fait de la linéarité de la transformée en ondelettes, si *n(x)* est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ_n^2 alors $W_{\psi|n}$ sera également de type gaussien de variance :

$$\begin{aligned}\sigma^2_{W_{\psi|n}} &= \sigma_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_a^2(t)dt \\ &= \frac{\sigma_n^2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(t)dt\end{aligned} \tag{II.41}$$

la deuxième ligne étant obtenue par le changement de variable *u=t/a*. Donc

$$\sigma^2_{W_n} = C\frac{\sigma_n^2}{a} \tag{II.42}$$

Ce résultat montre que la variance du bruit associée aux coefficients en ondelettes varie en *1/a*, donc que les coefficients les moins affectés par le bruit seront ceux correspondant à des grandes dilatations. Ce résultat est clairement visible sur la figure 6 où sont représentées deux voix de la transformée avec une ondelette L=1 du champ n=-1 auquel nous avont ajouté un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 0.003$ et $\sigma = 0.01$.

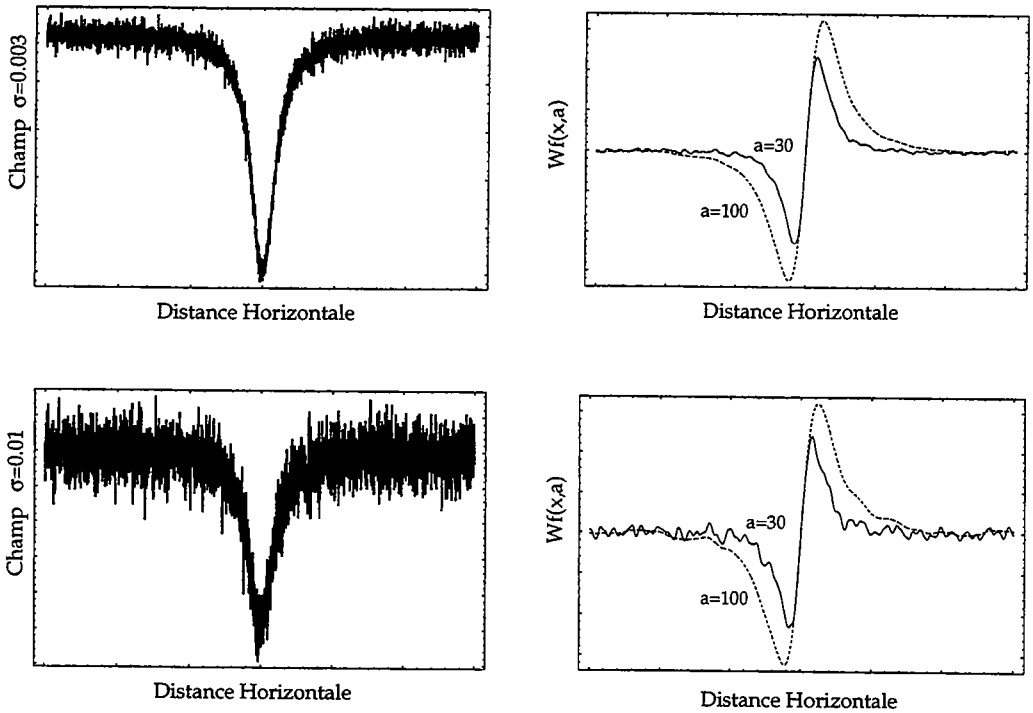


Figure 6 Champ d'homogénéité n=-1 auquel nous avons ajouté un bruit blanc gaussien : 1ère ligne $\sigma = 0.003$, 2ème ligne $\sigma = 0.01$. 2ème colonne : 2 voix (a=30 et a=100) de la transformée en ondelette correspondante avec l'ondelette L=1.

Sur cette figure, nous voyons également que les lieux de la transformée les moins affectés par le bruit sont ses extréma, le rapport signal/bruit à cet endroit étant en effet le plus grand. L'influence du bruit sur les lignes d'extréma représentées en fonction de la dilatation est montré sur la figure 7. Nous retrouvons le résultat sur la plus grande stabilité des grandes dilatations face au bruit, et nous voyons également que dans le signal le moins bruité, les lignes d'extréma n'ont quasiment pas été modifiées par la présence de bruit. L'algorithme de recherche des profondeurs et des degrés d'homogénéité caractérisant les sources responsables des anomalies du champ, à partir des extréma de la transformée en ondelettes, apparaît donc trés robuste au bruit (voir tableau 2).

	sig/bruit=33.3 (sur les extrema)	sig/bruit=10. (sur les extrema)
n=-1	n_{exp}=-1.082 , ze=21.4	n_{exp}=-1.245 , ze=23.8
n=-1.5	n_{exp}=-1.406 , ze=18.6	n_{exp}=-1.335 , ze=17.3
n=-2	n_{exp}=-1.858 , ze=18.7	n_{exp}=-1.527 , ze=16.

Tableau 2

En ce qui concerne la localisation horizontale, nous avons représenté sur la figure 8 les lignes d'extréma de la transformée en ondelettes du champ n=-1 pour les ondelettes L=1 et L=2. Cette figure montre que la position de la source est légèrement altérée par la présence de bruit. De plus, il apparaît des lignes d'extréma supplémentaires dues au bruit. Mais elles ne pourront en aucun cas être confondues avec les lignes d'extréma dues à la source puisque d'amplitudes beaucoup plus faibles (figure 9).

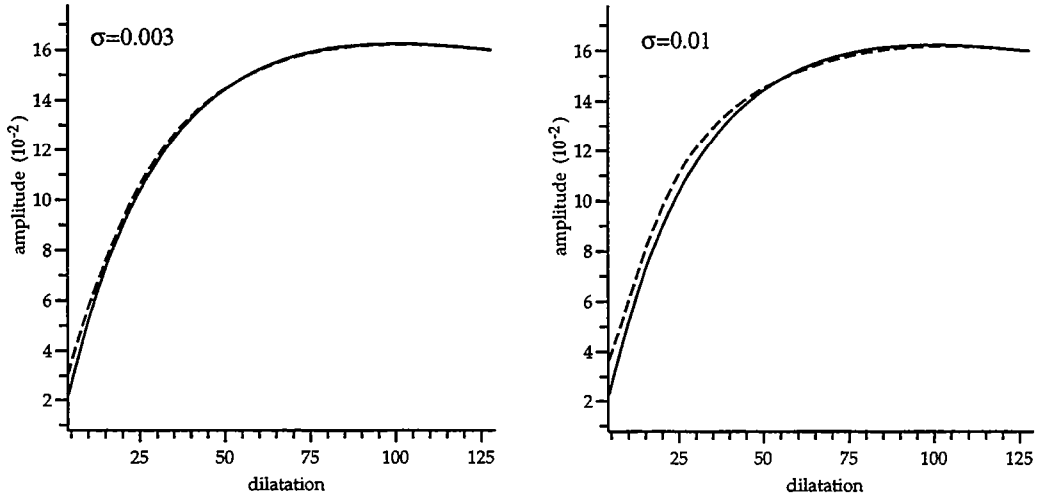


Figure 7 Comparaison des lignes d'extréma (représentées en fonction de leur amplitude) issues du champ n=-1 pour en trait plein, le signal non-bruité – en pointillé, le signal bruité. La valeur du bruit ajouté est indiquée sur la figure.

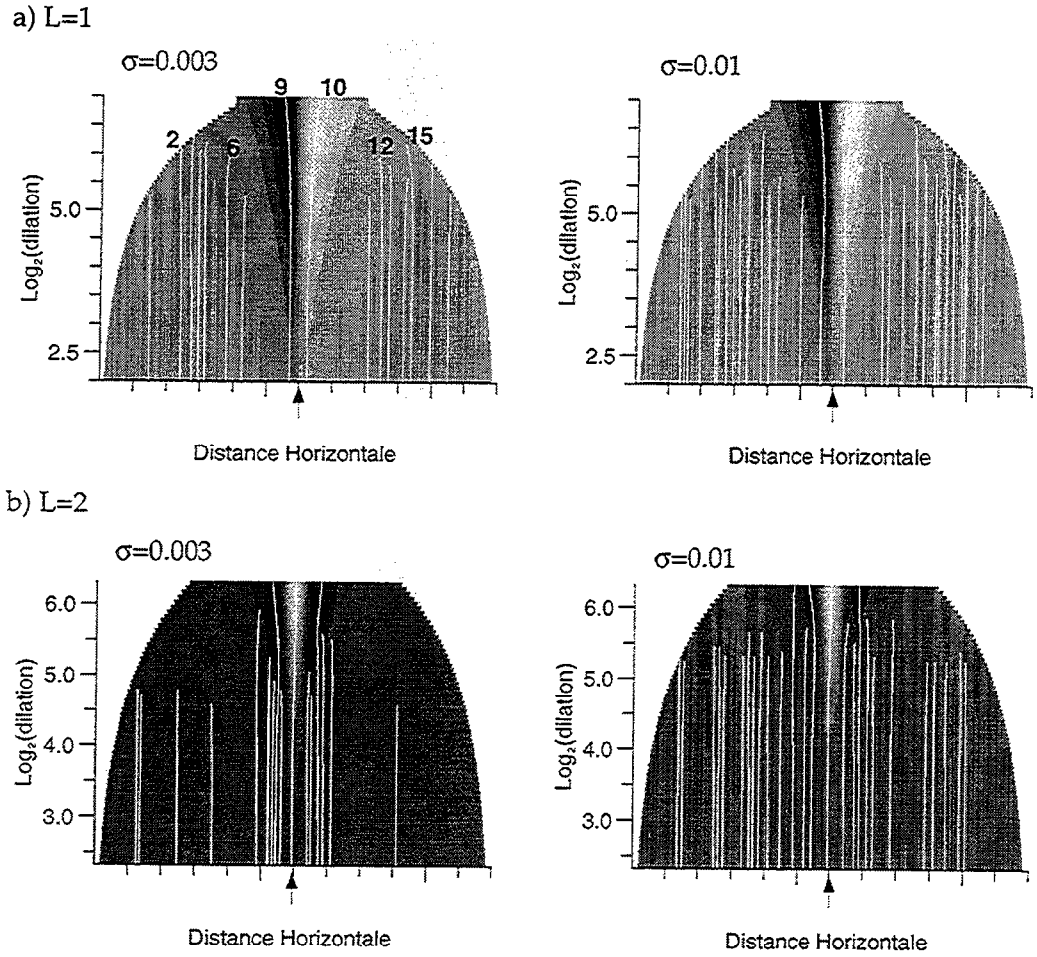


Figure 8 Transformées en ondelettes et lignes d'extréma superposées en blanc pour les champs bruités représentés figure 6 avec a) l'ondelette L=1. b) l'ondelette L=2

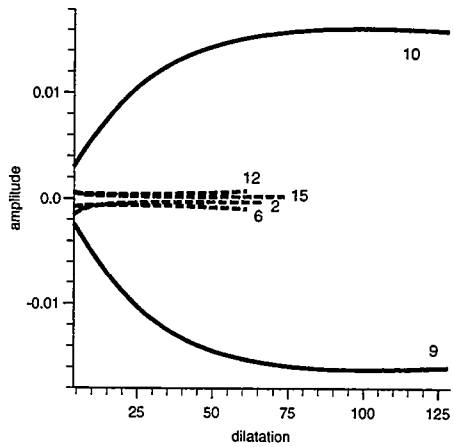


Figure 9 Arêtes du champ n=-1 avec σ = 0.003 pour l'ondelette L=1. Les arêtes 9 et 10 correspondent au signal, les autres correspondent au bruit (voir figure 8). La différence d'amplitude entre les lignes d'extréma dues au signal, et celles dues au bruit est clairement visible.

4 Transformée en ondelettes – Cas général

4.1 Formulation du problème

Dans le paragraphe précédent, nous avons établi un lien entre transformée en ondelettes et champs de potentiel homogènes en introduisant des ondelettes invariantes par prolongement. Les paramètres de localisation de la source et le degré d'homogénéité du champ lié au type de source apparaissent alors explicitement et sont déterminés numériquement par comparaison de deux voix de la transformée en ondelettes. Dans cette partie, nous proposons une formulation plus générale, sans hypothèses sur l'homogéité du champ observé.

En considérant à nouveau les ondelettes multipolaires

$$\begin{aligned}\psi_a^L(x) &= \frac{1}{a}\psi^L\left(\frac{x}{a}\right)\\ &= a^L OD(x, \vec{q_1}, ..., \vec{q_L}) *_x P_a(x)\,,\end{aligned} \tag{II.43}$$

les coefficients de la transformée en ondelettes d'un champ $f(x,z_0)$ dû à une source située à une profondeur z_0 s'écrivent :

$$\begin{aligned}W_{\psi^L|f(.,z_0)}(x\,,a) &= a^L OD(x, \vec{q_1}, ..., \vec{q_L}) *_x f(x, z_0) *_x P_a(x)\\ &= a^L OD(x, \vec{q_1}, ..., \vec{q_L}) *_x f(x, z_0 + a)\end{aligned} \tag{II.44}$$

c'est-à dire que la transformée en ondelettes est le champ de la source dérivé et prolongé en z_0+a. Dans cette formulation, la caractérisation de la source par un degré d'homogénéité n'apparaît plus, mais nous verrons qu'il est possible de déterminer indirectement le type de sources présentes. L'approche pour localiser horizontalement les sources reste la même que dans la formulation précédente, il suffit de localiser les lignes d'extréma de la transformée en ondelettes. Nous verrons également que l'expression (II.44) permet d'extraire les expressions analytiques des lignes d'extréma afin de localiser verticalement les sources.

4.2 Caractérisation des sources

Les exemples donnés dans la partie II-3 (figures 4, 5) montrent que le nombre de lignes d'extréma de la transformée pour une ondelette d'ordre multipolaire donné dépend du degré d'homogénéité du champ. Cela semble donc un moyen de caractériser le type de source présente. En effet, en exprimant le champ en fonction d'une fonction de Green g et d'une fonction "intensité" d, l'équation (II.44) devient :

$$W_{\psi^L|f(.,z)}(x\,,a) = a^L OD(x, q_1, ..., q_L) *_x d(x, z) *_{xz} g(x, z + a) \tag{II.45}$$

La caractérisation de la source est alors entièrement portée par la fonction intensité d, caractérisation que l'on effectue par rapport à la fonction de Green de départ. Dans l'exemple des champs d'homogénéité –1, –1.5, –2 étudiés précédemment, la fonction de Green est la même - égale au champ de gravité dû à une ligne infinie en y, ce qui correspond dans le

plan *(x,z)* au champ dû à une masse ponctuelle - la fonction intensité est alors équivalente à une dérivée d'ordre $r \in \mathbb{R}$:

$$d(x,z) = \frac{\partial^r \delta(x,z)}{\partial x^r} \tag{II.46}$$

Dans le cas où l'ordre de dérivation r est entier, la caractérisation de la source pourra se faire directement à partir du nombre d'extréma de la transformée en ondelettes, puisque cette dérivation correspondra à r lignes d'extréma supplémentaires de la transformée en ondelette par rapport à celle de la fonction de Green. C'est le résultat que l'on obtenait dans la partie (II-3) entre les champs n=-2 et n=-1 (ce dernier correspondant à la fonction de Green) étudiés pour la même ondelette (figures 4, 5). En ce qui concerne les dérivations d'ordre r non-entier, cette caractérisation à partir du nombre d'arêtes n'est plus possible. De même, lorsque deux sources seront proches, il pourra être difficile d'identifier les types d'anomalies présentes du fait de la coalescence des résultats. Dans ce cas, il sera préférable de se baser sur la forme des lignes d'extréma en fonction de leur amplitude, comme nous le verrons plus loin.

Nous introduisons ici une classification qui nous servira par la suite et qui découle naturellement de la discussion précédente. Nous appellerons :

- source "masse" : quand le résultat de la convolution du champ et de l'ondelette donne la fonction de Green de cette source (correspond au champ de gravité de la source "masse").
- source "dipôle" : quand le résultat de la convolution du champ et de l'ondelette est la dérivée 1ère de la fonction de Green (correspond ainsi au champ d'un dipôle).
- source "quadrupôle" : quand le résultat de la convolution du champ et de l'ondelette est la dérivée 2nde de la fonction de Green (correspond ainsi au champ d'un quadrupôle).

En reprenant le même exemple, le champ n=-1 convolué avec l'ondelette L=1 donnera une "ligne de dipôle", le champ n=-2 convolué avec l'ondelette L=1 donnera une "ligne de quadrupôle", etc..., et avec les mêmes précautions sur la coalescence des résultats, nous pouvons résumer les choses en disant qu'une ligne d'extréma correspondra à une source masse, 2 lignes d'extréma à une source dipôle... . Cette classification ne prend pas en compte les anomalies de degrés d"homogénéité non-entiers, par exemple, le champ n=-1.5 convolué avec l'ondelette L=1 ne pourra pas être défini plus précisément que "quelque chose entre ligne de dipôle et ligne de quadrupôle".

4.3 Localisation verticale

4.3.a A partir de l'expression analytique des lignes de maxima

En ce qui concerne la localisation verticale, l'équation (II.45) nous permet d'exprimer analytiquement les lignes d'extréma de la transformée en ondelettes pour des sources particulières. Pour des sources dérivant de la même fonction de Green, nous calculons les arêtes en faisant porter une dérivée sur la fonction de Green, les autres dérivées (dans le cas où L>1) étant

portées par la fonction intensité *d(x,z)*. Dans le cas des sources homogènes précédemment étudiées (champs d'homogénéité –1, –1.5, –2), la fonction de Green est (cf annexe 3) :

$$g(x, z_0) = \frac{-2z_0}{x^2 + z_0^2} \tag{II.47}$$

Les expressions des lignes d'extréma de la transformée en ondelettes des champs déduits de cette fonction de Green par la fonction intensité définie par l'équation (II.46) lorsque l'on utilise les ondelettes multipolaires horizontales précédemment définies sont données dans l'encart 3.

Encart 3 : Expression des lignes d'extréma pour une source ponctuelle

La fonction de Green est le champ de gravité dû à une ligne infinie en *y*, localisée en $(x_0 = 0, z_0)$: $g(x, z_0) = \dfrac{-2z_0}{x^2 + z_0^2}$.

Les ondelettes sont : $\psi_x^L(x) = \dfrac{\partial^L P_1(x)}{\partial x^L}$

- **Ligne de masse** g est maximum en $x=0$ d'où

$$Max^L_{ligne\,de\,masse}(a) = \frac{2a^L}{a + z_0}$$

- **Ligne de dipôle**

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{4xz_0}{\left(x^2 + z_0^2\right)^2} \quad et \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4z_0 \frac{z_0^2 - 3x^2}{\left(x^2 + z_0^2\right)^3}$$

d'où $\frac{\partial g_z}{\partial x}$ est maximum en $x = \pm\dfrac{z_0}{\sqrt{3}}$ et

$$Max^L_{ligne\,de\,dipole}(a) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{a^L}{\left(a + z_0\right)^2}$$

- **Ligne de quadrupôle**

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4z_0 \frac{z_0^2 - 3x^2}{\left(x^2 + z_0^2\right)^3} \quad et \quad \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = 48\,xz_0 \frac{x^2 - z_0^2}{\left(x^2 + z_0^2\right)^4}$$

d'où $\frac{\partial g_z}{\partial x}$ est maximum en x=0 et en 2 autres solutions.

Pour x=0

$$Max^L_{ligne\,de\,quadrupole}(a) = \frac{4a^L}{\left(a + z_0\right)^3}$$

Ces lignes d'extréma sont représentées sur la figure 10, la première ligne correspondant aux lignes de masses, la 2ème ligne aux lignes de dipôles, la 3ème ligne aux lignes de quadrupôles, pour la 1ère colonne L=1, 2ème colonne L=2, 3ème colonne L=3. Les formes de ces lignes d'extréma pourront être une base pour caractériser le type de source détectée.

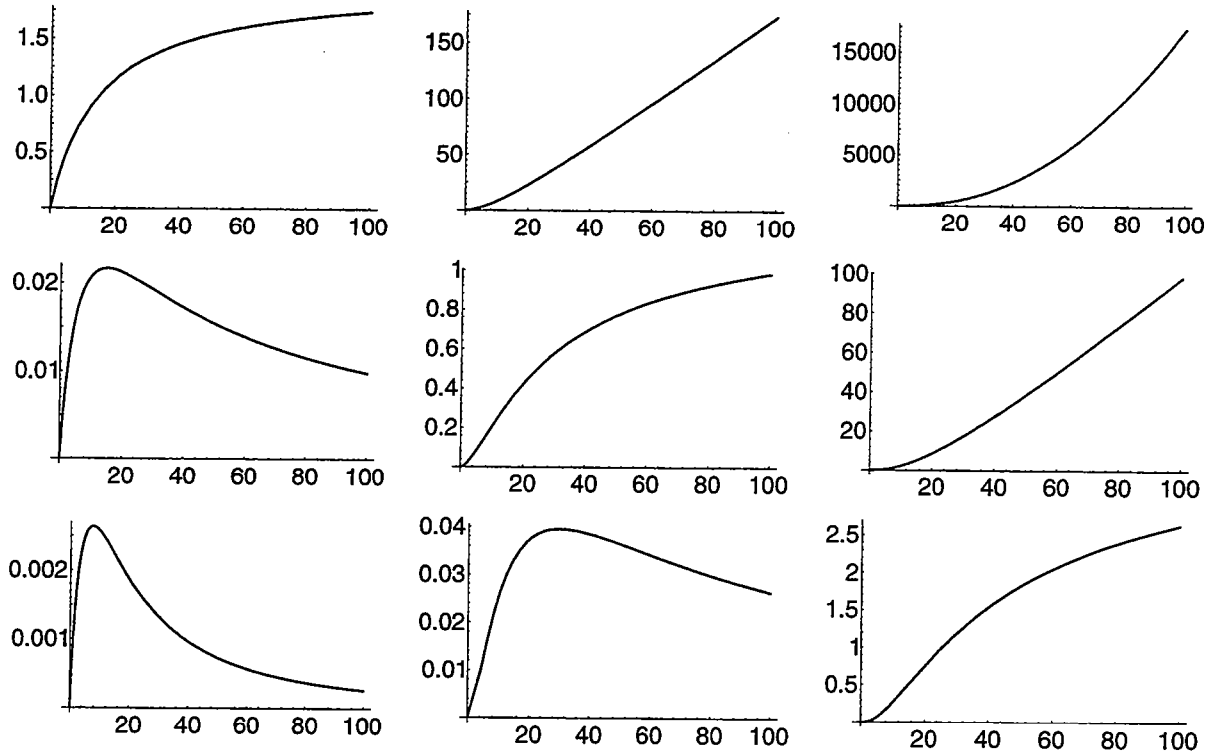


Figure 10 Arêtes théoriques d'une ligne infinie en y, avec en abcisse : la dilatation, en ordonnée : l'amplitude des extréma de la transformée en ondelettes. La 1ère ligne correspond aux lignes de masses, la 2ème ligne aux lignes de dipôles, la 3ème ligne aux lignes de quadrupôles, pour la 1ère colonne L=1, 2ème colonne L=2, 3ème colonne L=3.

A partir de l'expression des arêtes de la transformée en ondelettes, il est alors possible de déterminer la profondeur de la source en effectuant un ajustement par moindre carré des lignes d'extréma déterminées numériquement par rapport aux expressions théoriques connues. Nous représentons dans un plan (z_1, z_2) les barres d'erreurs associées à l'ajustement (décroissant du clair vers le foncé) ainsi que le meilleur point calculé (en gris clair). La ligne d'extréma calculée pour la profondeur $z_0 = z_1 = z_2$ ainsi déterminée est superposée en gris sur les points expérimentaux (figure 11). Cet algorithme donne de très bon résultats pour les champs de degré d'homogénéité entier pour lesquels les lignes d'extréma s'expriment analytiquement.

Il faut cependant noter que cet algorithme est numériquement instable et que la barre d'erreur associée au meilleur point peut être grande dès qu'il y a présence de bruit dans les données.

Nous allons voir qu'il existe une autre façon d'estimer les profondeurs des sources.

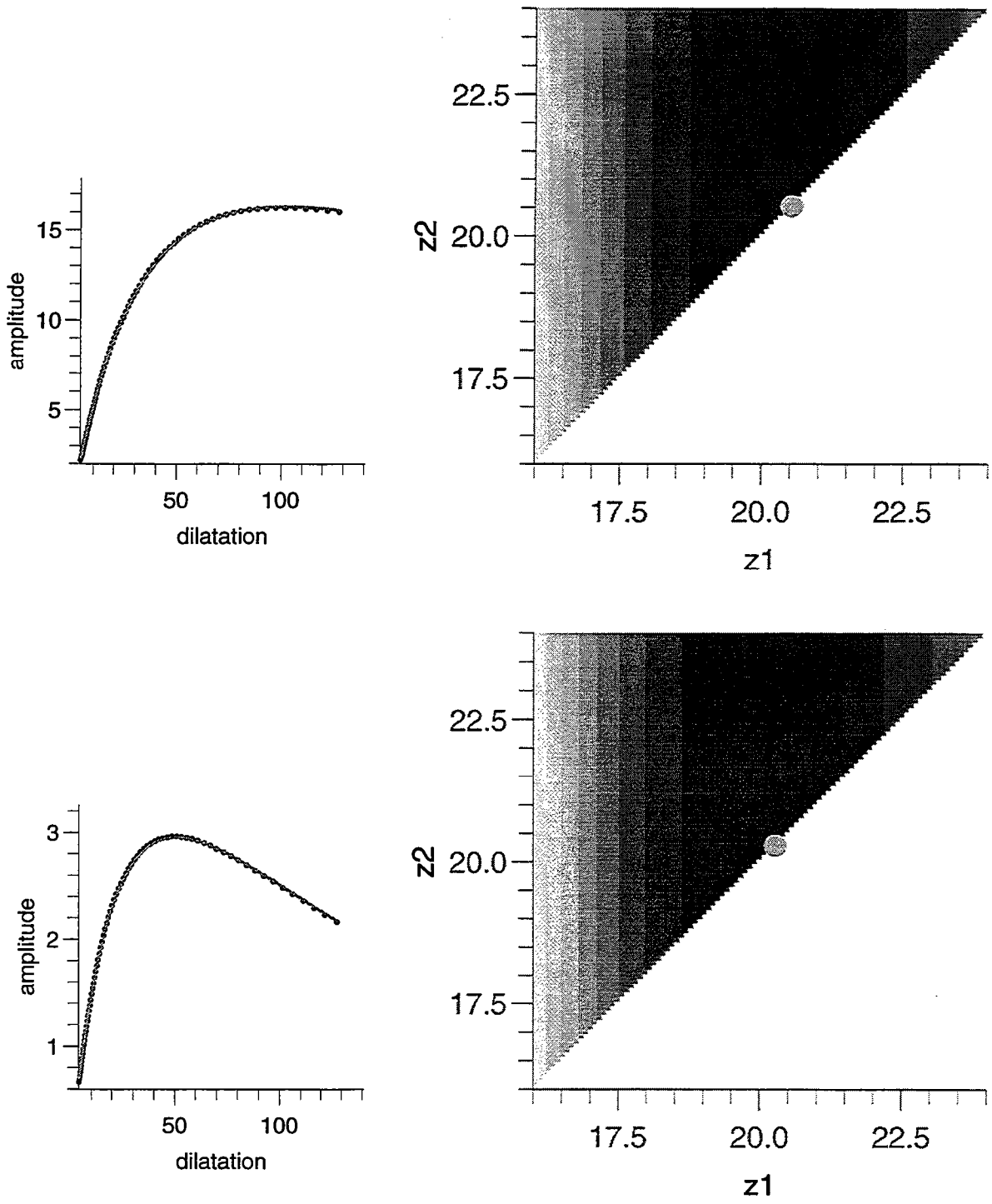


Figure 11 a) Une des lignes d'extréma du champ n=-1 pour l'ondelette L=1 (cf figure 4). Le résultat de l'ajustement (sur une ligne de dipôle) donne *z=20.53*. b) ligne d'extréma centrale (verticale) du champ n=-2 pour l'ondelette L=1. Le résultat de l'ajustement (sur une ligne de quadrupôle) donne *z=20.28*.

4.3.b A partir de la convergence des lignes d'extréma

Comme nous l'avons vu lorsque nous avons cherché à localiser horizontalement les sources (§II-3), les arêtes de la transformée en ondelettes convergent vers la position horizontale de la source quand le facteur de dilatation décroît, la localisation exacte ne pouvant être faite que lorsqu'il existe une arête verticale. Cette nécessité qu'apparaisse une ligne d'extréma verticale n'est due qu'au fait que, en pratique, nous ne pouvons pas étudier la transformée en ondelettes du champ pour des dilatations inférieures à une dilatation minimum. Dans la formulation proposée dans cette partie, nous voyons (eq. II.44) que le facteur de dilatation a apparaît comme hauteur de prolongement du champ initial (à une distance z_0 de la source) dérivé un certain nombre de fois selon l'ondelette choisie. En nous plaçant à une distance $z_0 + a = 0$, nous serons donc localisés exactement au niveau de la source. Intuitivement, les lignes d'extréma devraient donc converger vers la source pour une "dilatation négative" $a = -z_0$. Il suffirait donc de rechercher la convergence des arêtes dans les dilatations négatives pour localiser à la fois horizontalement et verticalement la source. En pratique, il faudra donc qu'il existe au moins deux arêtes.

Ce résultat est facilement vérifiable pour les sources issues de la fonction de Green d'une ligne infinie. En reprenant les calculs des arêtes de la transformée en ondelettes (encart 3) dans les cas ligne de dipôle et ligne de quadrupôle, nous voyons que les lignes d'extréma non verticales ont pour expression dans le plan (x,a) :

$$x = \pm C(z_0 + a) \tag{II.53}$$

dont l'intersection est clairement en $x=0$ (position horizontale de la source), i.e. $a = -z_0$ (position verticale de la source). Le calcul n'a pas été effectué analytiquement pour des anomalies de degrés d'homogénéité non-entiers, mais le résultat serait le même. Ce procédé est illustré sur la figure 12 où nous avons prolongé les arêtes des transformées avec l'ondelette L=1 des champs n=-1 (ligne de dipôle), -1.5, –2 (ligne de quadrupôle), les dilatations étant représentées sur une échelle linéaire. Nous obtenons une bonne approximation de la profondeur de la source dans les trois cas, la localisation horizontale étant également bien définie.

Il faut également noter que dans cet exemple, les arêtes sont des droites du fait que les sources sont homogènes. Dans le cas de degrés d'homogénéité non-entiers où la source est localisée mais pas ponctuelle, la localisation obtenue reste correcte. En effet, la source sera vue comme une source ponctuelle dès que l'on s'en éloignera suffisamment, c'est-à-dire lorsque les dilatations augmenteront. C'est également ce résultat que nous utiliserons plus loin lorsque les sources seront moins localisées et non-homogènes.

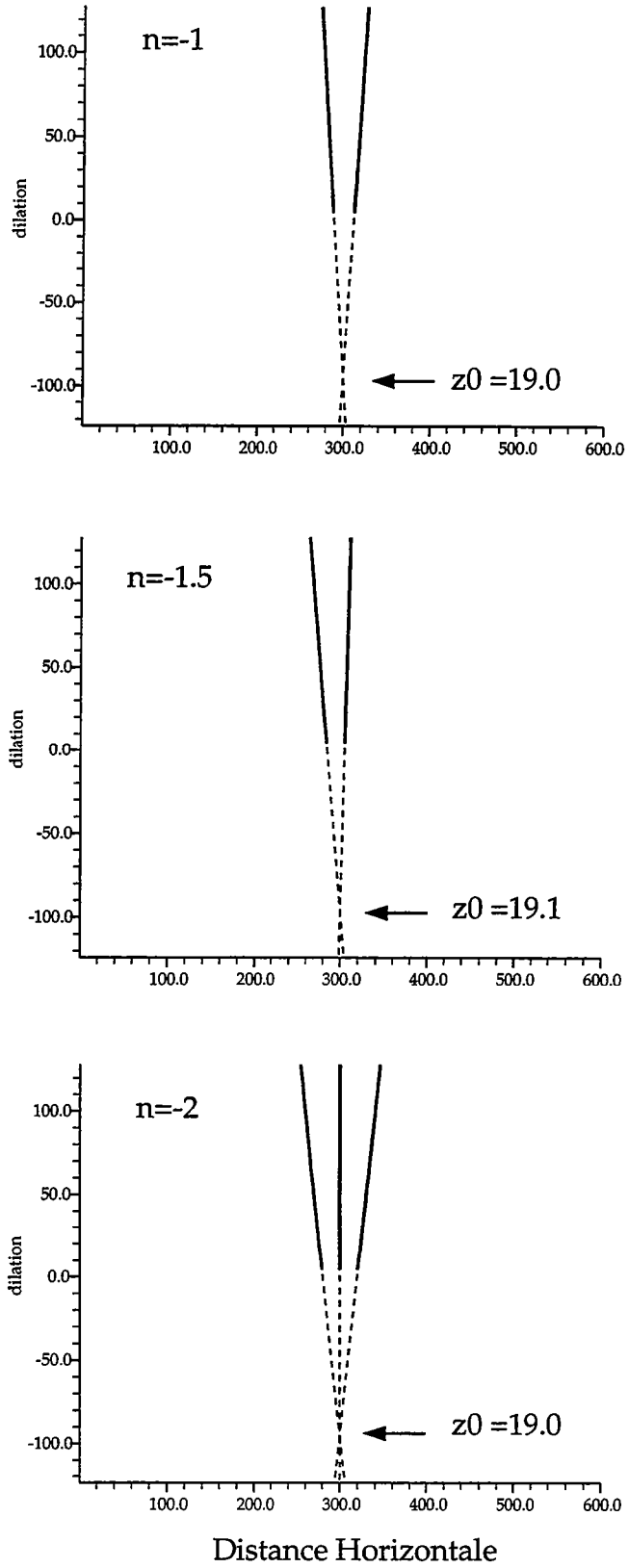


Figure 12 Localisation horizontale et verticale des sources en recherchant la convergence des arêtes. Exemples des champs d'homogénéité n=-1, −1.5, −2. Le pas d'échantillonage en x étant de 0.2, les dilatations doivent être multipliées par 0.2 pour obtenir les résultats indiqués.

5 Conclusion

Dans cette première partie, nous avons formulé une méthode de résolution du problème inverse spécifique aux champ de potentiels, en introduisant la transformée en ondelettes. La restriction du problème aux sources homogènes nous a permis d'introduire la déconvolution d'Euler qui permet de caractériser simplement la nature de la source. Même si la déconvolution d'Euler seule permet de résoudre le problème inverse, il nous a semblé judicieux d'introduire la transformée en ondelettes. Nous avons en effet montré qu'il suffisait de travailler avec les lignes d'extréma de la transformée pour résoudre le problème, et que de ce fait la méthode était très robuste au bruit, ce qui n'est pas le cas de la déconvolution d'Euler seule. De plus, dans le cas de sources proches, la coalescence est mieux prise en compte par la transformée en ondelettes, toujours par le fait que nous utilisons les lignes d'extréma.

Dans un deuxième temps, nous avons montré qu'il existait d'autres moyens de localiser verticalement les sources dans un contexte plus général ne prenant pas en compte d'hypothèse d'homogénéité du champ. La méthode est toujours basée sur l'extraction des arêtes de la transformée en ondelette pour lesquelles nous obtenons une expression analytique qui permet de retrouver la profondeur des sources. Nous avons défini dans quelles mesures nous pouvions différencier les types de sources responsables des anomalies du champ, n'ayant plus accès directement au degré d'homogénéité introduit par la déconvolution d'Euler.

6 Annexe : Analyse en ondelettes de champs de potentiel

(Article soumis à *Inverse Problem*)

Résumé

La transformée en ondelettes d'un champ de potentiel homogène dû à une source ponctuelle multipolaire est formulée. Nous introduisons une classe d'ondelettes analysantes basée sur le semi-groupe de Poisson. Elle possède des propriétés remarquables vis-à-vis de la formule de prolongement harmonique des champs de potentiel. Nous montrons que les transformées en ondelettes obtenues à partir de ces ondelettes permettent de déterminer simplement, à la fois les coordonnées et la nature multipolaire de la source responsable du champ observé.

Wavelet analysis of potential fields

Frédérique Moreau[†], Dominique Gibert[†], Matthias Holschneider[‡], and
Ginette Saracco[†]

[†]Géosciences Rennes (CNRS/INSU) Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

[‡]Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex, France

In preparation for *Inverse Problems*

November 24, 1995

Abstract

In this paper we describe how a continuous wavelet technique may be used to locate and characterize homogeneous point sources from the field they generate measured in a distant hyperplane. For this we introduce a class of wavelets for which the Poisson semi-group essentially acts as a dilation.

1 Introduction

Consider a point source located at the origin, and assume now that you can measure the field it generates in a distant hyperplane. The problem is to recover the properties (type, strength, location, orientation,$\cdots$) of the source from this measurement. A naive approach might be to use a deconvolution technique. However, because of the finite accuracy of measurements, this method cannot be really used in practice. The approach we propose is based on the continuous wavelet transform. Since this is a family of convolutions with well-localized functions, we shall not encounter the instabilities of deconvolutions. This kind of technique might have applications in remote sensing of sources. Obvious examples are subsurface

imaging in geophysics from potential field measurements on the Earth's surface. Also, in medicine where stationary temperature fields obey the Poisson equation, applications to infrared thermography are in sight.

In the present study, we limit our discussion to homogeneous point sources. These constitute a natural family to represent local heterogeneities. However, we shall limit ourselves to the single source problem and leave the discussion of the multisource situation to a subsequent paper.

2 Wavelet analysis: the basic formulas

2.1 Wavelet transform and wavelet synthesis

In this section the basic formulas of wavelet analysis are summarized for the convenience of the reader (see [8], [2] for general theory on the continuous wavelet transform). For the sake of generality we work in n dimensions and state the results on a formal level.

Let s and g be complex valued functions over $\mathbb{R}^n$. The wavelet transform of s with respect to the analyzing wavelet g is defined through [6], [7]

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[g,s](b,a) &\equiv \int_{\mathbb{R}^n} dx \frac{1}{a^n} \overline{g}\left(\frac{x-b}{a}\right) s(x) && (1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \frac{1}{a^n} \widetilde{g}\left(\frac{b-x}{a}\right) s(x), && (2) \end{aligned}$$

where $\widetilde{g}(x) = \overline{g}(-x)$ and dx is the n-dimensional Lebesgue measure. Here $b \in \mathbb{R}^n$ is a position parameter and $a \in \mathbb{R}_+$ is a scale parameter. The wavelet transform of a function over $\mathbb{R}^n$ is thus a function over the position-scale half-space $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. The first formula expresses the wavelet transform in terms of a correlation function whereas the second is a convolution. If the wavelet is symmetric and real valued, $\widetilde{g} = g$ and both notions coincide.

By introducing the dilation (D_a) and translation operators (T_b) whose actions are respectively defined by

$$\begin{aligned} D_a s(x) &\equiv a^{-n} s(x/a) && (3) \\ T_b s(x) &\equiv s(x-b), && (4) \end{aligned}$$

the wavelet transform may be written either as a family of scalar products or as a family of convolutions indexed by the scale parameter a:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[g,s](b,a) &= \langle T_b D_a g \mid s \rangle, && (5) \\ &= (D_a \widetilde{g} * s)(b). && (6) \end{aligned}$$

Here the convolution product is defined as usual,

$$(\widetilde{g} * s)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} dy \widetilde{g}(x-y) s(y) = (s * \widetilde{g})(x). \tag{7}$$

In the Fourier space the wavelet transform reads

$$\mathcal{W}[g,s](b,a) = \int_{\mathbb{R}^n} du\, \overline{\widehat{g}(au)}\, e^{2i\pi ub}\, \widehat{s}(u), \tag{8}$$

where the independent variable u is dual of either x or b and the direct and inverse Fourier transforms are respectively defined by

$$\mathcal{F}[s(x)](u) \equiv \widehat{s}(u) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} dx e^{-2i\pi ux} s(x), \tag{9}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{s}(u)](x) \equiv s(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} du e^{2i\pi ux} \widehat{s}(u). \tag{10}$$

The wavelet synthesis $\mathcal{M}$ maps functions $r(b,a)$ over $\mathbb{H}^{n+1}$ to functions over $\mathbb{R}^n$ and the synthesis of r with respect to the synthesizing wavelet h reads

$$\mathcal{M}[h,r](x) = \int_{\mathbb{H}^{n+1}} \frac{dbda}{a} \frac{1}{a^n} h\left(\frac{x-b}{a}\right) r(b,a) \tag{11}$$

$$= \int_{\mathbb{H}^{n+1}} \frac{duda}{a} \widehat{h}(au)\, e^{2i\pi ux} \widehat{r}(u,a). \tag{12}$$

2.2 Relation between $\mathcal{W}$ and $\mathcal{M}$

The wavelet synthesis $\mathcal{M}$ is the adjoint of the wavelet transform $\mathcal{W}$,

$$\int_{\mathbb{H}^{n+1}} \frac{dbda}{a} \overline{\mathcal{W}[g,s]}(b,a)\, r(b,a) = \int_{\mathbb{R}^n} dx\, \overline{s}(x)\, \mathcal{M}[g,r](x), \tag{13}$$

and, in the Fourier space, the combination of these operators reads

$$\mathcal{M}[h, \mathcal{W}[g,s]] : \widehat{s}(u) \mapsto \widehat{m}_{g,h}(u) \widehat{s}(u), \tag{14}$$

with

$$\widehat{m}_{g,h}(u) = \int_0^\infty \frac{da}{a} \overline{\widehat{g}}(au)\, \widehat{h}(au). \tag{15}$$

Note that the Fourier multiplier $\widehat{m}_{g,h}$ only depends on the direction of u, $\widehat{m}_{g,h} = \widehat{m}_{g,h}(u/|u|)$. This is because the measure da/a is scaling invariant.

In case that g and h are such that $\widehat{m}_{g,h}(u) = c_{g,h}$ with $0 < |c_{g,h}| < \infty$, we say that g, h are an analysis reconstruction pair, or that h is a reconstruction

wavelet for g. We say that g is admissible if g is its own reconstruction wavelet, or (what is the same) if

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \quad \int_0^\infty \frac{da}{a} \left|\widehat{g}(au)\right|^2 = c_{g,g} < \infty \tag{16}$$

Note that if $\widehat{g}$ is continuous at the origin, then we have necessarily $\widehat{g}(0) = 0$ if g is admissible. Note also that s may be recovered from its wavelet transform with respect to a non-admissible wavelet if a suitable reconstruction wavelet is chosen. Therefore in what concerns the analysis using wavelets, the admissibility of the wavelets is not mandatory.

If g and h are an analysis reconstruction pair, then the following formula holds

$$\int_{\mathbb{H}^{n+1}} \frac{dbda}{a} \overline{\mathcal{W}\left[g,s\right]}\left(b,a\right) \mathcal{W}\left[h,r\right]\left(b,a\right) = c_{g,h} \int_{\mathbb{R}^n} dx\, \overline{s}(x)\, r(x). \tag{17}$$

In particular if g is admissible, then we have conservation of energy

$$\int_{\mathbb{H}^{n+1}} \frac{dbda}{a} \left|\mathcal{W}\left[g,s\right]\left(b,a\right)\right|^2 = c_{g,g} \int_{\mathbb{R}^n} dx\, \left|s(x)\right|^2. \tag{18}$$

2.3 Covariance and homogeneous functions

The wavelet transform is covariant with respect to both translations and dilations,

$$\mathcal{W}[g, T_\beta s](b,a) = \mathcal{W}[g,s](b-\beta, a), \tag{19}$$

$$\mathcal{W}[g, D_\lambda s](b,a) = \frac{1}{\lambda^n} \mathcal{W}[g,s]\left(\frac{b}{\lambda}, \frac{a}{\lambda}\right). \tag{20}$$

The last invariance implies a certain behavior for wavelet transforms of homogeneous functions $s(x)$ of degree $\alpha \in \mathbb{R}$, i.e. such that

$$s(\lambda x) = \lambda^\alpha s(x)\ \forall \lambda > 0. \tag{21}$$

Indeed, the wavelet transform of homogeneous functions satisfies [5]

$$\mathcal{W}[g,s](\lambda b, \lambda a) = \lambda^\alpha \mathcal{W}[g,s](b,a), \tag{22}$$

and is fully determined by dilating and scaling one voice[1]:

$$\mathcal{W}[g,s](b,a) = a^\alpha \mathcal{W}\left[g,s\right](b/a, 1). \tag{23}$$

As a consequence the points where $\mathcal{W}[g,s](b,a) = 0$ are unions of straight lines converging towards the center of homogeneity. In the same way, the local maxima

[1] According to the primevial litterature concerning the wavelet transform [4], we shall hereafter call a line $\mathcal{W}\left[g,s\right](b, a = constant)$ a "voice" of the wavelet transform.

for each voice, that is the set of points where $\partial_b \mathcal{W}[g,s](b,a) = 0$, form cone-like structures pointing towards the origin. More precisely, if the wavelet transform is locally maximum at position b and scale a, so it will be at position λb and scale λa. The set of points obtained as $\lambda > 0$ varies is a line along which the wavelet transform scales with a power-law revealing the degree α of homogeneity of s.

A natural generalization of homogeneous functions are quasi-homogeneous functions where (21) is replaced by

$$s(\lambda x) = \lambda^\alpha s(x) + (\lambda x)^\alpha \log \lambda. \tag{24}$$

Obvious examples are the functions $x^\alpha \log x$. Note that for $\alpha \in \mathbb{N}$, the wavelet transform of a quasi-homogeneous function satisfies again [[2]]

$$\mathcal{W}[g,s](\lambda b, \lambda a) = \lambda^\alpha \mathcal{W}[g,s](b,a), \tag{25}$$

provided the wavelet has at least α vanishing moments,

$$\int dx\, x^\beta g(x) = 0, \ |\beta| \leq \alpha. \tag{26}$$

Indeed, in this case the second term in formula (24) is not visible in the wavelet transform.

3 Wavelet analysis based on the Poisson semi-group

3.1 Harmonic extension as a wavelet transform

Consider the following boundary value problem for a function of $q = (x,z) \in \mathbb{H}^{n+1}$:

$$\begin{array}{ll} i) & \Delta\phi(q) = 0 \ \ \forall q \in \mathbb{H}^{n+1} \\ ii) & \phi(x, z=0) = s(x) \\ iii) & \int_{\mathbb{R}^n} dx\, |\phi(x, z \geq 0)|^2 < K < \infty \end{array} \tag{27}$$

where s is a function in $\mathbb{R}^n$ that we suppose bounded and in $L^2(\mathbb{R}^n)$ and K is a constant. Condition $iii)$ implies that ϕ is of limited growth when $z \to +\infty$ and then that the field ϕ is uniquely determined by s and its boundary behavior at infinity. Such a field is called the harmonic extension of s into the upper half-space $\mathbb{H}^{n+1}$ and can be obtained explicitly from s by means of the Poisson semi-group:

$$\phi(x,z) = (D_z p * s)(x) \tag{28}$$

$$= \mathcal{W}[p,s](x,z) \tag{29}$$

where the Poisson kernels are defined by [1]

$$p(x) = c_{n+1}(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}, \ \widehat{p}(u) = e^{-2\pi|u|}, \tag{30}$$

and verify the semi-group property

$$D_z p * D_{z'} p = D_{z+z'} p. \tag{31}$$

As the remaining analysis will show this semi-group structure is the basic algebraic requirement and our analysis applies to the heat semi-group as well. Owing to both equation (6) and the symmetry properties of the Poisson kernel [see formula (30)], the harmonic extension of s may be written under the form of a wavelet transform with respect to p [equation (29)]. Let us remark that in the present case the analyzing wavelet is not admissible since $\widehat{p}(u)$ is continuous and $\widehat{p}(0) = 1$. Also, the scale parameter a plays the role of the physical dimension z along which the function s is upward-continued, while the translation parameter is the equivalent of x [compare equations (6) and (29)].

For later reference we note that relation (28) holds even in the case of tempered distributions as boundary values. More precisely, if ϕ satisfies at $\Delta\phi = 0$ in $\mathbb{H}^{n+1}$ and if ϕ is of at most polynomial growth

$$|\phi(b,a)| \leq c\,(a + 1/a)^K\,(1 + |b|)^K \tag{32}$$

for some c and $K > 0$, then the limit

$$\phi(\cdot, z) \to \phi(\cdot, 0^+), \quad (z \searrow 0) \tag{33}$$

holds in the sense of distributions [1], [3]. In addition, the field $\phi(\cdot, z)$ may be recovered, up to some polynomial, from the boundary distribution by means of the harmonic continuation formula,

$$\phi(\cdot, z) = D_z p * \phi(\cdot, 0^+) + P. \tag{34}$$

Here P is a polynomial in $n+1$ variables. However, to give a precise meaning to the convolution, we have to regularize p in such a way that its Fourier transform is regular around the origin. That is if we consider the functions p_l defined through

$$\widehat{p_l}(u) = e^{-2\pi|u| - 2\pi/|lu|}, \tag{35}$$

then $\widehat{p_l}(u) \to \widehat{p}(u)$ as $l \to \infty$. Now we have more precisely:

$$\phi(\cdot, z) = \lim_{l\to\infty} D_z p_l * \phi(\cdot, 0^+) + P. \tag{36}$$

However, to simplify the notations, we shall not use this cumbersome formula and convolutions of distributions with the Poisson kernel always suppose this limit.

3.2 Homogeneous sources

In this section we recall the main properties of homogeneous distributions in $\mathbb{R}^m$. A distribution σ is called homogeneous of degree α if for all test functions ψ we have

$$\sigma(\psi_\lambda) = \lambda^\alpha \sigma(\psi), \; \psi_\lambda = \lambda^m \psi(\lambda\cdot), \; \lambda > 0. \tag{37}$$

If ψ is allowed to vary over all test functions with support in $\mathbb{R}^m$ we say that σ is a distribution in $\mathbb{R}^m$. If instead (37) holds only for those ψ whose support does not contain the origin, we say that σ is a distribution in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. For instance, every homogeneous function of degree $\alpha > -m$ defines a distribution of degree α. Other examples are given by the δ distribution and all its partial derivatives $\partial^\beta \delta$ with the multi-index $\beta \in \mathbb{N}^m$. Its degree of homogeneity is $-m-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_m$. These are the only distributions having their support in one single point, and they can be identified with the classical multipoles. More general examples are given by replacing the ordinary derivative with the fractional derivative defined by

$$\partial^\beta : \widehat{s}(u) \mapsto (2i\pi u)^\beta \widehat{s}(u), \ \beta \in \mathbb{R}^m, \tag{38}$$

where the branch cut of the logarithm is taken on the negative part of the real axis. Note however that the distributions $\partial^\beta \delta$ with $\beta \in \mathbb{R}^m$ are not sharply localized anymore but exhibit a power law decay at large distances.

We now list some well known properties without proof [3]. The space of homogeneous distributions in respectively $\mathbb{R}^m$ and $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ for a fixed degree α is a vector space. It can be shown that every homogeneous distribution in $\mathbb{R}^m$ is automatically tempered. Therefore its Fourier transform is defined in the sense of distributions. It follows, from the continuity of the Fourier transform and its covariance under dilation, that the Fourier transform of homogeneous distributions in $\mathbb{R}^m$ of degree α is again a homogeneous distribution but of degree $-m-\alpha$.

We now come to the problem of extensions. Every homogeneous distribution in $\mathbb{R}^m$ defines a homogeneous distribution in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ by restricting the set of test functions. However, the converse is not true. More precisely, not every homogeneous distribution σ_0 in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ has a homogeneous extension to a distribution σ in $\mathbb{R}^m$, and we have to distinguish two different situations. First, if $\alpha \neq -m, -m-1, -m-2 \cdots$ a homogeneous distribution σ_0 in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ can be extended to a homogeneous distribution σ in $\mathbb{R}^m$ of the same degree. Moreover, this extension is unique in the class of homogeneous distributions. In the remaining case, $m-\alpha \in \mathbb{N}$, the things are a little more complicated since not always a homogeneous extension exists. Clearly an extension exists by the Hahn-Banach theorem, however the extension need not be homogeneous any more. However, there always exists an extension that is quasi-homogeneous in the sense that there is some distribution η such that

$$\sigma(\psi_\lambda) = \lambda^\alpha \sigma(\psi) + \eta(\psi) \log \lambda, \ \psi_\lambda = \lambda^m \psi(\lambda \cdot), \ \lambda > 0 \tag{39}$$

for all test functions in $\mathbb{R}^m$. Here η is a linear combination of derivatives $\partial^\beta \delta$ with the multi-index $\beta \in \mathbb{N}^m$ and $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m = -m-\alpha$. However, this quasi-homogeneous extension σ is not unique. Note that the class of those homogeneous distributions over $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ that have a homogeneous extension to $\mathbb{R}^m$ can be completely characterized. But since we will not use this we will skip

the details and we refer to the literature. For later reference note that the Fourier transform of a quasi-homogeneous distribution satisfies at

$$\widehat{\sigma}(\psi_\lambda) = \lambda^{-m-\alpha}\widehat{\sigma}(\psi) + \theta(\psi)\log\lambda,\ \psi_\lambda = \lambda^m\psi(\lambda\cdot),\ \lambda > 0 \tag{40}$$

where $\theta = \widehat{\eta}$ is a homogeneous polynomial of degree $-m-\alpha$. It follows that the distribution $v = \widehat{\sigma} + \theta\log|\cdot|$ is homogeneous of degree $-m-\alpha$. Therefore we have that $\widehat{\sigma}$ can be written as a sum of a homogeneous distribution and a logarithmic correction:

$$\widehat{\sigma} = v - \theta\log|\cdot| \tag{41}$$

3.3 The field of homogeneous sources

Consider now the Poisson equation in $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Delta\phi(q) = -\sigma(q),\ q \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{42}$$

where the (generalized) function σ is a source term and this equation is to be understood in the sense of distributions. We work from now on in n dimensions because the $n+1$'th direction will play a privileged role and we shall write $q = (x, z)$, with $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$. Clearly, in application in geophysics we have $n = 2$, the two horizontal dimensions. The third dimension is the vertical direction. As it stands the solution ϕ in terms of σ is not unique. However, the tempered solutions to the homogeneous equation are the harmonic polynomials, and thus ϕ is essentially determined by σ, up to some polynomial. In addition, for physical reasons, we add the following requirements on the growth behavior at infinity. We suppose that as $q \to \infty$

$$|\phi(q)| \leq \begin{cases} c\log|q| & for\ \ n = 1 \\ c & for\ \ n > 1 \end{cases}. \tag{43}$$

Then the solution is actually unique up to a global constant.

We are particularly interested in homogeneous sources of the type discussed in the previous section. Suppose now that σ is a homogeneous distribution of degree α in $\mathbb{R}^{n+1}$. Consider first the case where $\alpha \notin \mathbb{N}$. We claim that there is a unique distribution ϕ which is homogeneous of degree $\alpha + 2$, and satisfies (42). Indeed, the Fourier transform $\widehat{\sigma}$ is a homogeneous distribution in $\mathbb{R}^{n+1}$of degree $-n-1-\alpha$. It follows that $\widehat{\phi} = \widehat{\sigma}/|u|^2$ defines a distribution in $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. Now this distribution is homogeneous of degree $\rho = -n-3-\alpha$. Since now $\rho \notin \mathbb{N}$, we may extend $\widehat{\phi}$ to a homogeneous distribution in all of $\mathbb{R}^{n+1}$. Its inverse Fourier transform ϕ is then clearly a solution of the Poisson equation we have considered and the degree of homogeneity is $\alpha + 2$ as claimed.

Suppose now that $-n-1-\alpha \in \mathbb{N}$. Again we may set $\widehat{\phi} = \widehat{\sigma}/|u|^2$ to define a distribution in $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. But now it is not clear wether or not it has a homogeneous extension. However a quasi-homogeneous extension exists. Its inverse

Fourier transform satisfies therefore at the decomposition of quasi-homogeneous distributions

$$\widehat{\phi}(\psi_\lambda) = \lambda^{\alpha+2}\phi(\psi) + \theta(\psi)\ln\lambda, \tag{44}$$

where θ is a polynomial of degree $\alpha+2$. Therefore in particular for $\alpha < -2$ the field is again homogeneous. Note that this general discussion is nicely exhibited by the Green's functions where $\sigma = \delta$ [1]:

$$G_0(q) = \begin{cases} c_2 \ln|q| & (n=1) \\ c_{n+1}|q|^{1-n} & (n>1) \end{cases}. \tag{45}$$

Until now we have discussed general homogeneous sources. However, for obvious physical reasons, we have to require that σ is supported by a subset of the lower half-space $z \leq 0$. As an additional property we may introduce the boundary distribution of the field ϕ in the hyperplane $z = 0$. More precisely the following limit exists in the sense of distributions

$$\phi(\cdot, z) \to \phi(\cdot, 0^+), \ (z \searrow 0). \tag{46}$$

This boundary distribution satisfies the same homogeneity and quasi-homogeneity properties as ϕ. In addition, the field $\phi(\cdot, z)$ may be recovered from the boundary distribution by means of the harmonic continuation formula,

$$\phi(\cdot, z) = D_z p * \phi(\cdot, 0^+). \tag{47}$$

4 Wavelet analysis of homogeneous fields.

4.1 Wavelets based on the Poisson semi-group

We now introduce a class of wavelets that behave nicely under the Poisson semi-group. This will be necessary to analyze homogeneous potential fields and will be used in the next section. More precisely, we say that a wavelet g satisfies the dilation-continuation condition if the following holds true

$$D_a g * D_{a'} p = c D_{a''} g. \tag{48}$$

Here $c = c(a, a')$ and $a'' = a''(a, a')$ are functions of the scales a and a'. This means that the continuation operator maps the dilated wavelet $D_a g$ into a wavelet at the same position but at scale a'' and amplitude c. In this section we will discuss some properties of wavelets that satisfy the dilation-continuation property. In particular we want to construct a large family of solutions of (48).

First note that an immediate solution is given by the Poisson kernel itself. Indeed the semi-group property

$$D_a p * D_{a'} p = D_{a+a'} p \tag{49}$$

shows that the Poisson kernel is a (non admissible) wavelet that satisfies the dilation-continuation property with $c = 1$ and $a'' = a + a'$. To obtain more general solutions, consider a linear operator $\mathcal{L}$ satisfies the following properties with respect to the dilation and translation operators,

$$D_a \mathcal{L} = a^\gamma \mathcal{L} D_a, \ \gamma \in \mathbb{R} \tag{50}$$

$$T_b \mathcal{L} = \mathcal{L} T_b. \tag{51}$$

Property (51) means that $\mathcal{L}$ is a Fourier multiplier which by (50) is homogeneous of degree γ. Thus

$$\mathcal{L} : \widehat{s}(u) \mapsto m(u)\widehat{s}(u), \ m(\lambda u) = \lambda^\gamma m(u). \tag{52}$$

Now if g has the dilation-continuation property, we claim that $\mathcal{L}g$ too has the dilation-continuation property with the same function a'' and c replaced by $(a/a'')^\gamma c$. Indeed we may write

$$D_a \mathcal{L} g * D_{a'} p = a^\gamma \mathcal{L} \left(D_a g * D_{a'} p \right) \tag{53}$$

$$= (a/a'')^\gamma c D_{a''} \mathcal{L} g. \tag{54}$$

Therefore in particular all functions given by

$$\widehat{g}(u) = m(u) e^{-|u|}, \ m(\lambda u) = \lambda^\gamma m(u), \tag{55}$$

are solutions of equation (48). In the special case where we have in addition $c = c(a')$ and $a'' = a + a'$, a second family of solutions can be obtained as follows: suppose g satisfies

$$D_a g * D_{a'} p = c(a') D_{a+a'} g, \tag{56}$$

a derivation with respect to a shows that $(x\partial_x) g$ is again solution of (56) with the same function c. Therefore, a general family of solutions is given by

$$P(x\partial_x) \mathcal{L} p, \tag{57}$$

where P is a polynomial in one variable and $\mathcal{L}$ is the operator (52).

4.2 Wavelet analysis of homogeneous fields

Both the covariance of the wavelet transform with respect to dilations (20) and the homogeneity of degree $\alpha + 2$ of the field ϕ ensure that

$$\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](b, a) = \mathcal{W}\left[g, D_z p * \phi(\cdot, 0^+)\right](b, a) \tag{58}$$

$$= \left[D_a \widetilde{g} * D_z p * \phi(\cdot, 0^+)\right](b) \tag{59}$$

$$= c(a, z) \left[D_{a''(a,z)} \widetilde{g} * \phi(\cdot, 0^+)\right](b) \tag{60}$$

$$= c(a, z) \mathcal{W}\left[g, \phi(\cdot, 0^+)\right](b, a''(a, z)). \tag{61}$$

Now, using the covariance of the wavelet transform and the homogeneity of the boundary distribution $\phi(\cdot, 0^+)$, we obtain

$$\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](b, a) = c(a, z)\, a''(a, z)^{-\alpha-2}\, \mathcal{W}[g, \phi(\cdot, 0^+)]\left(\frac{b}{a''(a, z)}, 1\right) \quad (62)$$

To simplify the discussion, let us assume that the wavelet g belongs to the class defined by (57). Then the last equation becomes

$$\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](b, a) = \left(\frac{a}{a+z}\right)^{\gamma} (a+z)^{-\alpha-2}\, \mathcal{W}[g, \phi(\cdot, 0^+)]\left(\frac{b}{a+z}, 1\right) \quad (63)$$

In order to get some insight into the geometry of this equation note that there are two functions f and F such that the wavelet transform can be written as

$$\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](b, a) = f(a)\, F\left(\frac{b}{z+a}\right), \quad (64)$$

where f and F read

$$f(a) = (a+z)^{-\alpha-2}\left(\frac{a}{a+z}\right)^{\gamma} \quad (65)$$

$$F(b) = \mathcal{W}[g, \phi(\cdot, 0^+)](b, 1). \quad (66)$$

Note that the set of points (b, a) which satisfy $b/(z+a) = cst$ are located on the straight line in the half-space. For various constants cst, we obtain a family of lines that intersect at the point $(0, -z)$ outside the half-space $\mathbb{H}^{n+1}$. Therefore, the wavelet transform exhibits a cone-like structure where the top of the cone is shifted to the location of the source outside the half-space. This provides a natural geometric way to locate the source. The homogeneity α of the source, can be obtained either from the full expression of $f(a)$ using the formerly estimated z or from the asymptotic behavior $f(a) \simeq a^{-\alpha-2}$ in the limit $a \to \infty$.

It might be instructive to give a second derivation of these results using only the homogeneity of the field ϕ and not using the boundary field $\phi(\cdot, 0^+)$. Again, the covariance of the wavelet transform with respect to dilations (20) and the homogeneity of the field ϕ imply that

$$\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](b, a) = \left(\frac{a'}{a}\right)^{n} \mathcal{W}[g, D_{a'/a}\phi(\cdot, z)]\left(\frac{ba'}{a}, a'\right) \quad (67)$$

$$= \left(\frac{a'}{a}\right)^{n-\alpha-2} \mathcal{W}\left[g, \phi\left(\cdot, \frac{za'}{a}\right)\right]\left(\frac{ba'}{a}, a'\right). \quad (68)$$

Here the dilation is acting on the first n variables only. Now, the harmonic extension relation (28) enables us to obtain $\phi(\cdot, za'/a)$ from $\phi(\cdot, z)$:

$$\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](b, a) = \left(\frac{a'}{a}\right)^{n-\alpha-2} \mathcal{W}[g, D_{z(a'/a-1)}p * \phi(\cdot, z)]\left(\frac{ba'}{a}, a'\right) \quad (69)$$

$$= \left(\frac{a'}{a}\right)^{n-\alpha-2} \left(D_{a'}\widetilde{g} * D_{z(a'/a-1)}p * \phi(\cdot, z)\right) \left(\frac{ba'}{a}\right). \quad (70)$$

As before, assume that the wavelet g has the dilation-continuation property (48). Then we obtain

$$\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](b, a) = c \cdot \left(\frac{a'}{a}\right)^{n-\alpha-2} \left(D_{a''}\widetilde{g} * \phi(\cdot, z)\right) \left(\frac{ba'}{a}\right) \quad (71)$$

$$= c \cdot \left(\frac{a'}{a}\right)^{n-\alpha-2} \mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)] \left(\frac{ba'}{a}, a''\right). \quad (72)$$

where c and a'' are functions of a', a and z (62). If, in addition, g belongs to the family (57) and verifies (52), this last expression simplifies

$$\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](b, a) = \left(\frac{a}{a''}\right)^{\gamma} \left(\frac{a''+z}{a+z}\right)^{\gamma+n-\alpha-2} \mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)] \left(b\frac{a''+z}{a+z}, a''\right). \quad (73)$$

This equation is valid for all $a'' > 0$ which now plays the role of a parameter. In order to recover from this expression the geometry of the shifted cone-like structure in the wavelet transform, consider two points $\Omega = (b, a)$ and $\Omega'' = (b(a''+z)/(a+z), a'')$. The straight line they define passes through the location of the source $(0, -z)$. From (73), we see that the ratio of the wavelet coefficients at these points can be written as

$$\frac{\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](\Omega)}{\mathcal{W}[g, \phi(\cdot, z)](\Omega'')} = \frac{f(a)}{f(a'')}. \quad (74)$$

5 Examples of source characterization

We shall now examine how the wavelet transform enables both a localization and a characterization of homogeneous sources responsible for an observed field. For an easy display of the results, we work in a 2-dimensional physical space (i.e. with $n = 1$). Equation (73) is our basic working equation from which the horizontal and the vertical coordinates of the source are to be determined together with its homogeneity α. The wavelet used in the present example is displayed at the upper right corner of figures 1, 2, and 3 and is defined by

$$\widetilde{g}_1(x) = \frac{d}{dx}p(x), \quad (75)$$

and such that $\gamma = 1$. For this wavelet, equation (73) reduces to

$$\mathcal{W}[g_1, \phi(\cdot, z)](b, a) = \frac{a}{a''} \left(\frac{a''+z}{a+z}\right)^{-\alpha} \mathcal{W}[g_1, \phi(\cdot, z)] \left(b\frac{a''+z}{a+z}, a''\right). \quad (76)$$

We consider three examples of sources localized at the origin and corresponding to $\alpha = -3$, -3.5, and -4. The potential fields $\phi(x, z = 20)$ created by these sources are respectively shown at the upper-left corner of figures 1, 2, and 3, and the wavelet trnasforms of the fields are shown at the middle-left of the same figures. Note that the field created by the source with a non-integer homogeneity $\alpha = -3.5$ has a non-symmetric wavelet transform (see figure 2). Two voices of these wavelet transforms corresponding to the dilations $a = 6$ (solid lines) and $a = 20$ (dashed lines) are displayed at the middle-right part of the figures. The voices of the wavelet transforms of the fields for the sources with $\alpha = -3$, and $\alpha = -3.5$ possess two extremas and the voices for $\alpha = -4$ have three. A two-step algorithm can be used to estimate both the homogeneity index α and the depth z to the source from the measurement plane (here, $z = 20$). First, the depth is geometrically determined by using equation (74) and is given by the location outside $\mathbb{H}^2$ where the lines of extrema of the wavelet transform cross (see the lower-left corner of figures 1, 2, and 3). Remark that the convergence of the lines of extrema of the wavelet transforms also gives a determination of the horizontal position of the source which creates the analyzed field. Once z is known, the exponent α is computed by examining the variation of the amplitude of the wavelet transform along a given line of extrema (see the lower-right corner of figures 1, 2, and 3). This procedure accurately (i.e. up to the numerical precision of the computer) restitutes the theoretical values of α and z.

6 Conclusion

We have shown that the wavelet transform of the potential field generated by a homogeneous source and measured in a hyperplane possesses truncated cone-like structures pointing towards the location of the source. In addition, the variation of the wavelet coefficients over the scales reflect the degree of homogeneity of the source. This simple geometric interpretation allows an easy localization and characterization of point sources. At the basis of this result is the construction of wavelets that behave nicely under the harmonic continuation. As we have shown, a large family of such wavelets exists.

7 Acknowledgments

The present study was funded by the Centre National de la Recherche Scientifique (INSU) *via* ATP's *Télédétection Spatiale* and *Valorisation.* Discussions with Alexander Grossmann strongly influenced and clarified our work. The computations were done with the processing facilities operated by the *Centre des Ressources Informatiques* from *Université de Rennes 1*, thanks to Jean-Pierre Boulard, François Dagorn and Eric Picheral for their technical support.

References

[1] Courant R and Hilbert D 1966 *Methods of mathematical physics* (New York: Interscience Publishers)

[2] Holschneider M 1995 *Wavelets: an analysis tool* (Oxford: Oxford University Press)

[3] Hörmander L 1982 *The analysis of linear partial differential operators: I* (Berlin: Springer-Verlag)

[4] Goupillaud P, Grossmann A and Morlet J 1984 Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis *Geoexploration* **23** 85-102

[5] Grossmann A, Holschneider M, Kronland-Martinet R and Morlet J 1987 Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transforms, in *Inverse Problems: An Interdisciplinary Study, Adv. Electr. Electr. Phys.* **19** 298-306 (San Diego: Academic)

[6] Grossmann A and Morlet J 1984 Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape *SIAM J. Math. Anal.* **15** 723-736

[7] Grossmann A, Morlet J and Paul T 1985 Transforms associated to square integrable group representations, I - general results *J. Math. Phys.* **27** 2473-79

[8] Meyer Y 1990 *Ondelettes et opérateurs* (Paris: Hermann)

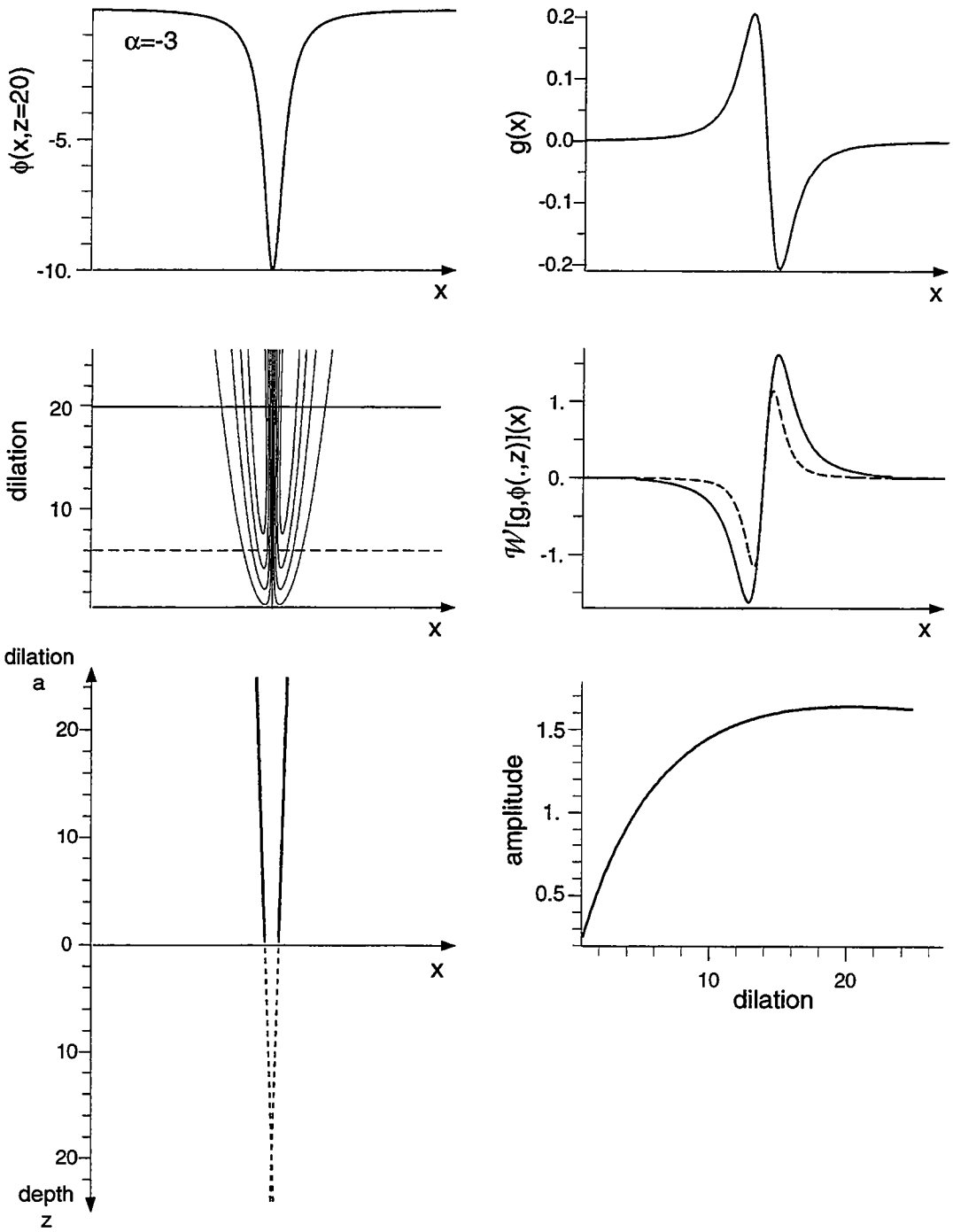


Figure 1: Wavelet analysis of the potential field measured at $z = 20$ and created by a homogeneous source with $\alpha = -3$ located at the origin (upper-left corner). Middle-left: wavelet transform of the field obtained with the analyzing wavelet shown at the upper-right corner and given by equation (75). Middle-right: two voices of the wavelet transform corresponding to $a = 6$ (dashed line) and $a = 20$ (solid line). Lower-left: the intersection of the straight lines formed by the extrema of the voices of the wavelet transform is at the source location. Lower-right: the variation of the amplitude of the wavelet transform along any line of extrema is controlled by both the depth z and the homogeneity α of the source (see equations 73 and 76).

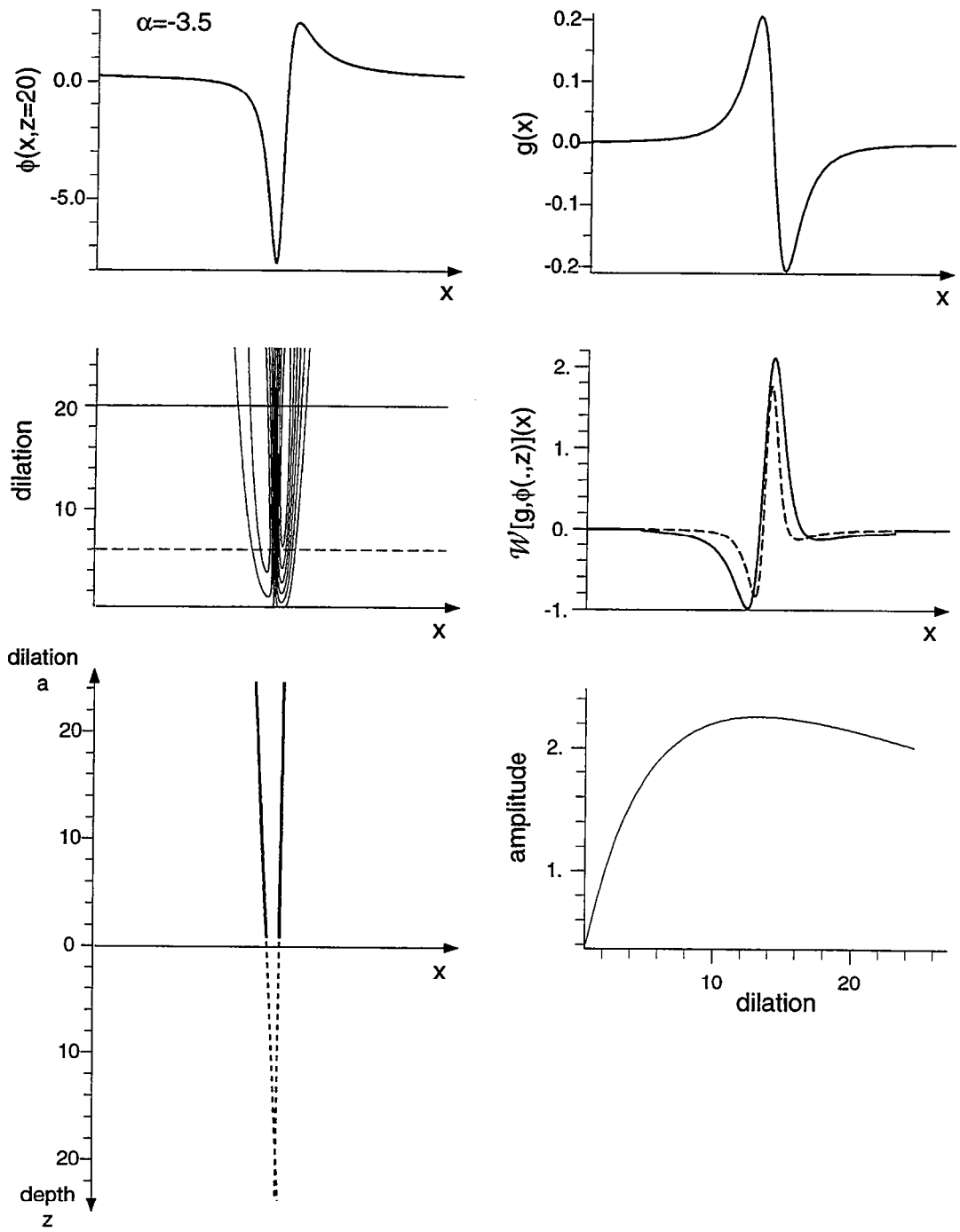


Figure 2: Same as figure 1 for $\alpha = -3.5$.

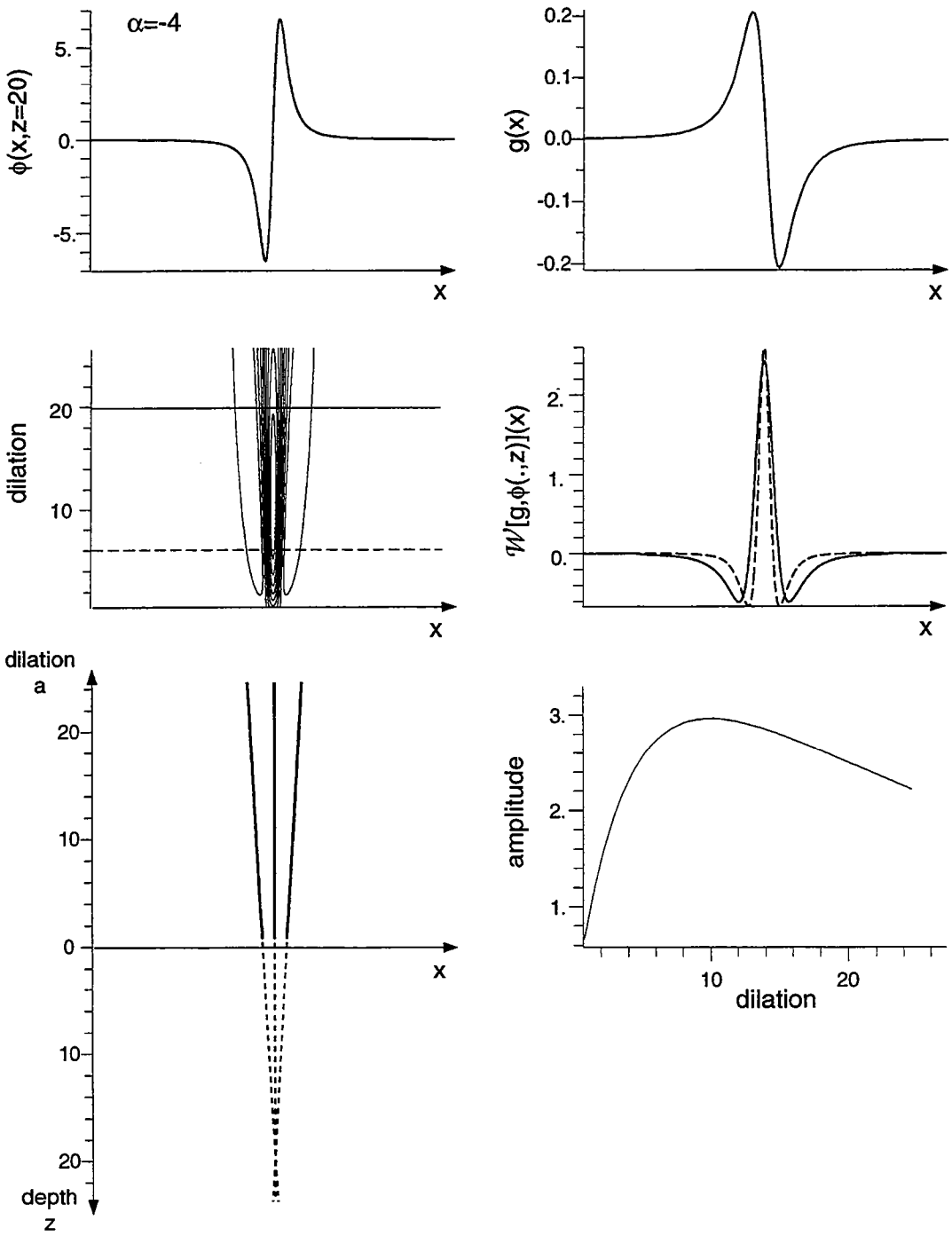


Figure 3: Same as figure 1 for $\alpha = -4$.

Chapitre III

Problème inverse – Sources étendues

Chapitre III

Problème inverse – Sources étendues

1 Introduction

La résolution du problème inverse des champs de potentiel dans le cas des sources homogènes définie dans le chapitre II pourra être un premier élément d'analyse de données géophysiques de terrain. Mais les résultats seront limités du fait qu'il existe peu d'éléments dans la nature susceptibles d'être assimilés à des sources ponctuelles. Afin d'obtenir une méthode plus réaliste d'interprétation de données géophysiques dans le cadre d'une imagerie structurale, il nous faut donc détecter des bords d'objets, et ainsi définir des structures étendues. De la même façon que dans le cas des sources localisées, il nous faudra alors déterminer les caractéristiques de ces bords, type de sources, localisation. La théorie développée dans le cas des sources ponctuelles peut-être étendue à des sources étendues. On remarque en effet que la transformée en ondelettes permet de faire une analyse à différentes échelles, c'est-à-dire que si l'on observe un objet étendu à grande distance, on le verra comme une source ponctuelle. Cela constitue l'aspect asymptotique de notre méthode. Nous verrons donc comment l'utiliser dans le cas de sources étendues pour lesquelles les champs de potentiel correspondants ne sont plus homogènes.

Dans une première partie, nous avons repris la formulation du paragraphe II.4 en recherchant les modifications à apporter pour déterminer la géométrie des bords détectés, ainsi que leur localisation horizontale et verticale. Nous déterminons aussi quelles sont les limites de la méthode lorsque les bords ne sont plus verticaux, l'inclinaison de la structure constituant une inconnue supplémentaire. Afin de rechercher la solution de cette inconnue supplémentaire, nous introduisons dans une deuxième partie la transformée en ondelettes complexes. Nous la formulons dans la même logique que la méthode avec les ondelettes multipolaires réelles. Nous verrons que cette représentation du signal permet d'accéder à des informations supplémentaires, en particulier que l'inclinaison des bords peut maintenant être définie.

2 Lien avec les sources ponctuelles - Choix de sources étendues types

2.1 Formulation

Du fait que la formulation du §II.4 ne comporte d'autre hypothèse que le signal à étudier dérive d'un champ de potentiel, nous pouvons la reprendre dans le cadre des sources étendues. Les coefficients en ondelettes de ce champ de potentiel sont :

$$W_{\psi^L|f(.,z)}(x\,,a) = a^L OD(x, \vec{q_1}, ..., \vec{q_L}) *_{x,z} d(x,z) *_x g(x, z+a) \qquad \text{(III.1)}$$

Nous allons voir de quelle manière les résultats obtenus dans le cas des sources homogènes peuvent être repris dans le cas des sources étendues en apportant quelques précisions sur les propriétés de la fonction de distribution de densité.

Contrairement à la fonction de Green g, la fonction distribution de densité d ne vérifie pas l'équation de Laplace. Dans ce cas, l'opérateur OD^L n'agit plus comme un opérateur de dérivation oblique si $\vec{q_1}, ...\vec{q_L} \neq \vec{x}$. En effet, en reprenant la définition de l'opérateur de dérivation oblique

$$\widetilde{OD}(u, \alpha\vec{x} + \gamma\vec{z}) = 2\pi(i\alpha u - \gamma|u|) \qquad \text{(III.2)}$$

nous voyons que la partie $2i\pi\alpha u$ correspond toujours à une dérivation horizontale, mais que la partie $-2\pi\gamma|u|$ n'est plus équivalente à la dérivée verticale. L'opérateur de dérivation oblique ne permet donc plus de calculer la dérivée verticale de la distribution de densité $d(x,z)$. De ce fait, des gradients verticaux de d ne pourront pas être détectés à partir d'un échantillonnage horizontal des données, c'est-à-dire qu'on ne pourra donc identifier que des variations latérales de densité. La transformée en ondelettes de champs de potentiel produits par des fonctions d'intensité $d(z)$ indépendantes de la variable horizontale ne permettra pas d'extraire d'information sur ce type de distribution, elle tendra en effet vers zéro en présence de telles distributions.

2.2 Caractérisation des sources

Dans le cas des sources étendues, il nous faudra définir quels types de sources nous recherchons, c'est-à-dire définir des fonctions de Green et des fonctions d'intensité qui seront suffisamment réalistes par rapport à ce que nous escomptons rencontrer dans les données géophysiques. Dans le cadre de cette étude, nous recherchons des bords d'objets plus ou moins lisses, inclinés ou non. De la même façon que dans le cas des sources homogènes, la régularité du bord conditionnera le choix de l'ondelette, en fonction du nombre de moments nuls nécessaire à la détection de ce bord. Si l'on suppose que la régularité de la distribution de densité de la source est d'ordre n, il faudra choisir une ondelette contenant au moins $n+1$ dérivées. Ainsi, le résultat de la transformée en ondelettes sera fonction de la régularité de la distribution de densité initiale $d(x,z)$ et de l'ordre L de l'opérateur OD^L. En définissant $s(x,z) = d(x,z) *_{x,z} OD^L(x, \vec{q_1}, ..., \vec{q_L})$, nous voyons que la transformée en ondelettes (III.1) est égale au champ de potentiel crée par cette nouvelle distribution (à l'altitude $z+a$). La classification que nous avions introduite dans le cas des sources ponctuelles reste alors valable (p. II.51), et dépend de la nature de la distribution multipolaire $s(x,z)$: masse, dipôle, quadrupôle etc.

Pour illustrer ces résultats, nous prenons l'exemple d'une mar<che d'escalier qui est une discontinuité d'ordre zéro. La distribution de densité est alors :

$$d(x,z) = \begin{cases} H\left(z - z_m + \frac{\Delta z}{2}\right) & si\ x \geq x_0 \\ H\left(z - z_m - \frac{\Delta z}{2}\right) & si\ x < x_0 \end{cases} \tag{III.3}$$

avec :

H : distribution d'Heaviside

z_m : position verticale du centre de la couche horizontale d'épaisseur Δz contenant la marche d'escalier

x_0 : position horizontale de la discontinuité

Dans le cas général d'une ondelette définie par L dérivées par rapport à x de l'opérateur de prolongement (ondelettes horizontales), la distribution multipolaire correspondante est :

$$s(x,z) = \Pi\left(\frac{z - z_m}{\Delta z}\right)\delta^{(L-1)}(x - x_0) \tag{III.4}$$

avec

Π : fonction porte telle que $\Pi(z) = \begin{cases} 0 & si\ |z| > 1/2 \\ 1 & si\ |z| \leq 1/2 \end{cases}$.

$\delta^{(L-1)}$: dérivée d'ordre *L-1* du Dirac.

Pour L=1, *s(x,z)* correspond alors à une distribution de masse le long du bord $x_e(z) = \Pi\left(\frac{z-z_m}{\Delta z}\right)\delta(x - x_0)$. Pour L=2, *s(x,z)* correspond à une distribution de dipôles le long du bord x_e etc... On peut également noter que les bords horizontaux de cette structure ne seront pas détectés par la transformée en ondelettes, conformément à la remarque de la partie précédente.

En prenant maintenant l'exemple d'une lame verticale, la fonction de densité est

$$d_l(x,z) = \Pi\left(\frac{z - z_m}{\Delta z}\right)\delta(x - x_0) \tag{III.5}$$

et la distribution multipolaire associée sera

$$s_l(x,z) = \Pi\left(\frac{z - z_m}{\Delta z}\right)\delta^{(L)}(x - x_0) \tag{III.6}$$

On retrouve donc les résultats de la marche d'escalier à une dérivée près, c'est-à-dire que pour l'ondelette L=1, *s(x,z)* correspondra à une distribution de dipôles le long du bord x_E, pour L=2 à une distribution de quadrupôles etc.

Nous avons représenté sur les figures 13 et 14 les champs de potentiels dus à ces distributions pour la fonction de Green correspondant au champ de gravité d'une ligne infinie, ainsi que leur transformée en ondelettes pour les ondelettes L=1, 2 et 3. Le principe de la localisation horizontale du bord reste le même : localiser les lignes d'extréma verticales. La caractérisation de la source pourra se faire également toujours sur le même principe, en fonction du nombre de lignes d'extréma de la transformée en ondelettes.

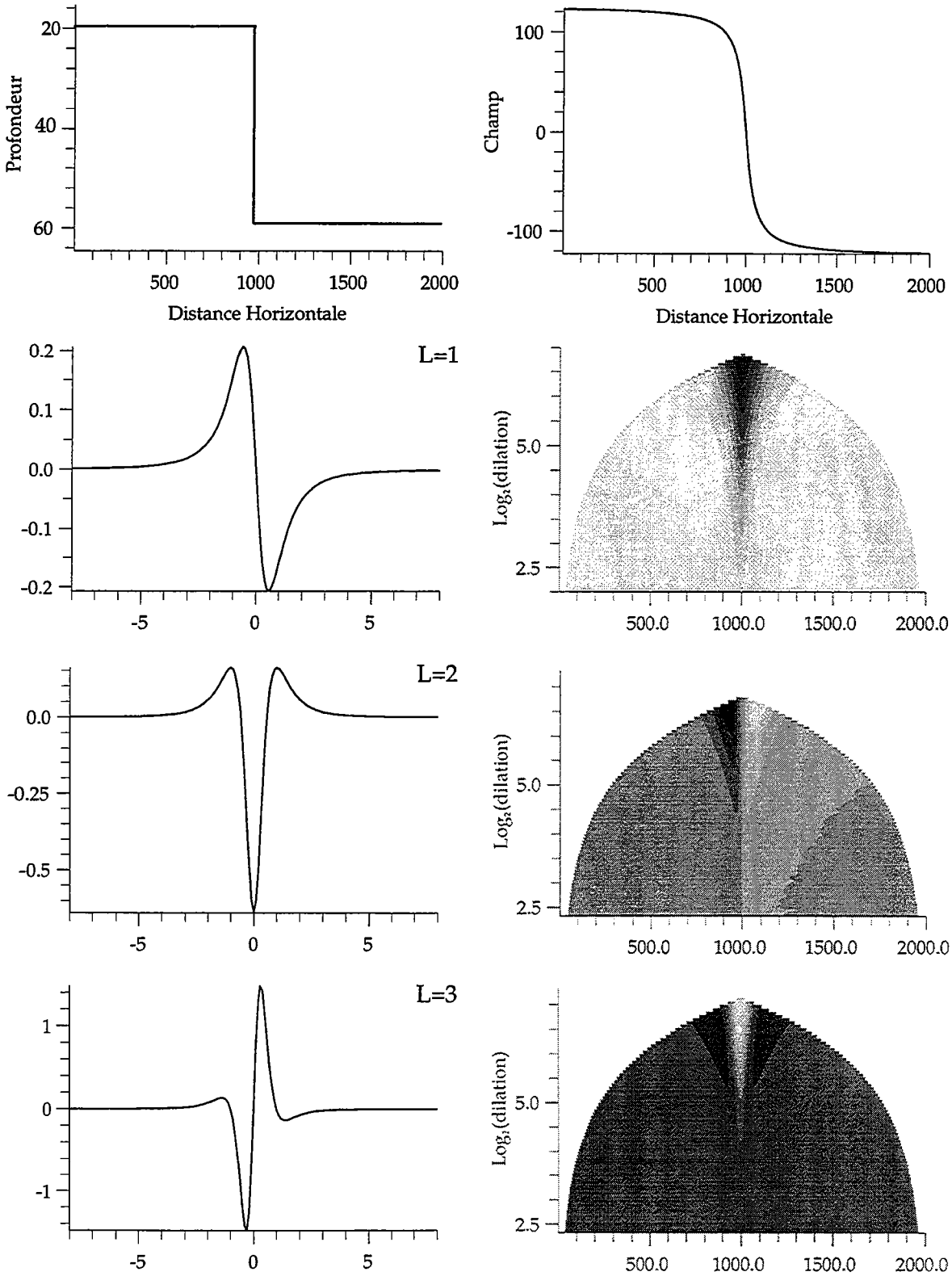


Figure 13 Transformées en ondelettes du champ de gravité (haut droite) dû à une marche d'escalier de profondeurs 20 à 60 unités de profondeur. Les ondelettes L=1,2 et 3 sont représentées sur la colonne de gauche, les transformées à droite. Pour L=1 : a0=4. Pour L=2 et L=3 : a0=5. Dans les 3 cas, nv=5, nvoct=15.

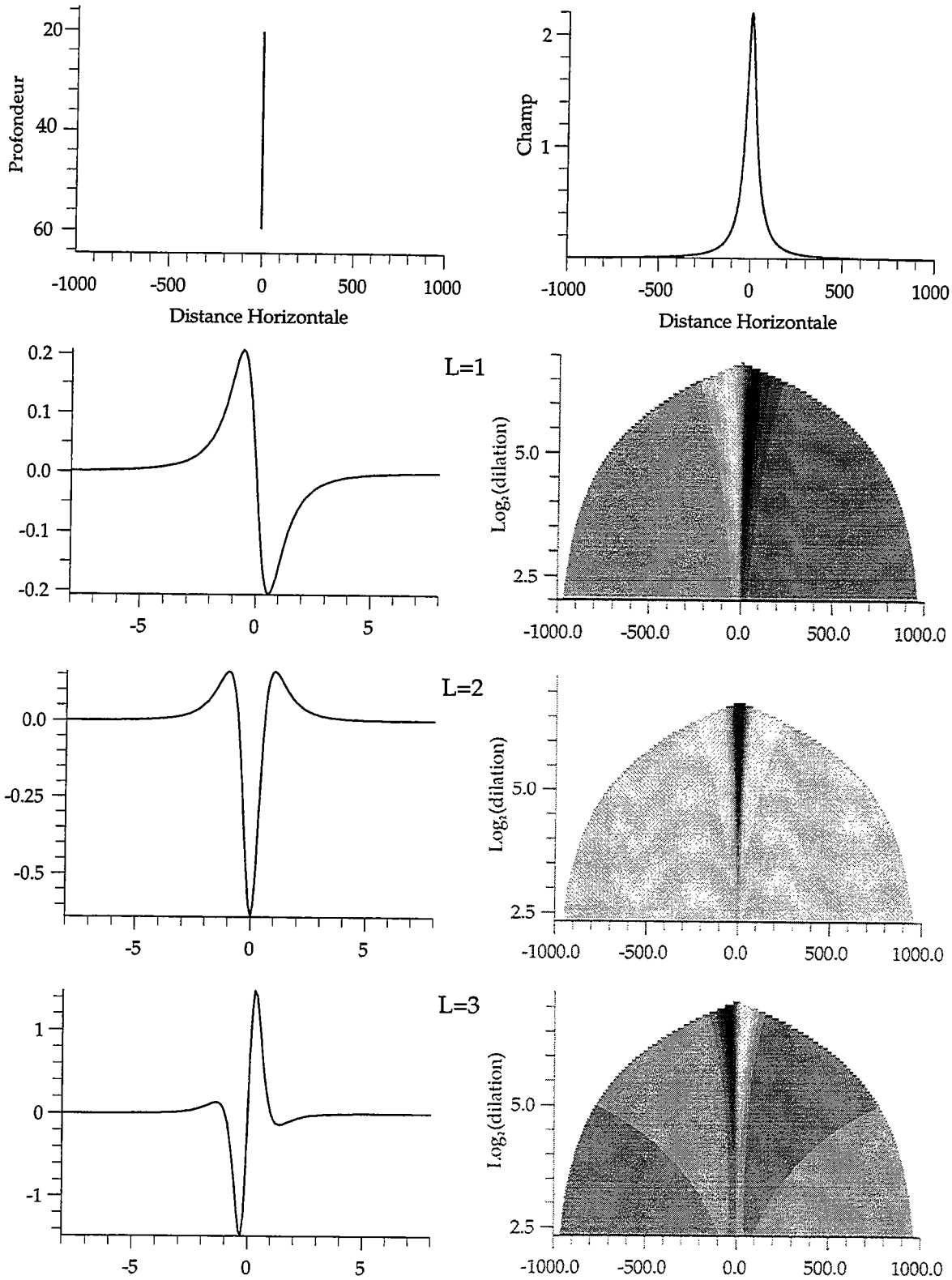


Figure 14 Transformées en ondelettes du champ de gravité (haut droite) dû à une lame de profondeurs 20 à 60 unités de profondeur. Les ondelettes L=1,2 et 3 sont représentées sur la colonne de gauche, les transformées à droite. Pour L=1 : a0=4. Pour L=2 et L=3 : a0=5. Dans les 3 cas, nv=5, nvoct=15.

2.3 Localisation verticale

2.3.a Bords verticaux

De la même façon que pour les sources homogènes, nous pouvons extraire des expressions analytiques des arêtes de la transformée en ondelettes à partir de l'équation (III.1) et appliquer le même algorithme de recherche des profondeurs de la source.

Nous prenons comme source type l'exemple des bords verticaux définis par leur distribution de densité *d(x,z)* dans le paragraphe précédent. Nous pouvons réécrire la fonction de Green de base comme le champ de gravité dû à une lame verticale comprise entre les profondeurs z_1 et z_2 :

$$g(x, z_1, z_2) = ln\left[\frac{x^2 + z_1^2}{x^2 + z_2^2}\right] \qquad \text{(III.7)}$$

Dans ce cas, nous aurons accès aux expressions théoriques des arêtes pour des sources résultantes lame de masse, lame de dipôle, lame de quadrupôle etc. Leurs expressions sont données dans l'encart 4.

Ces lignes d'extréma sont représentées sur la figure 15 : la première ligne correspond aux lames de masses, la 2ème ligne aux lames de dipôles, la 3ème ligne aux lames de quadrupôles, pour la 1ère colonne L=1, 2ème colonne L=2, 3ème colonne L=3. La forme de ces lignes d'extréma pourra être à nouveau une base pour caractériser le type de distribution multipolaire de la source.

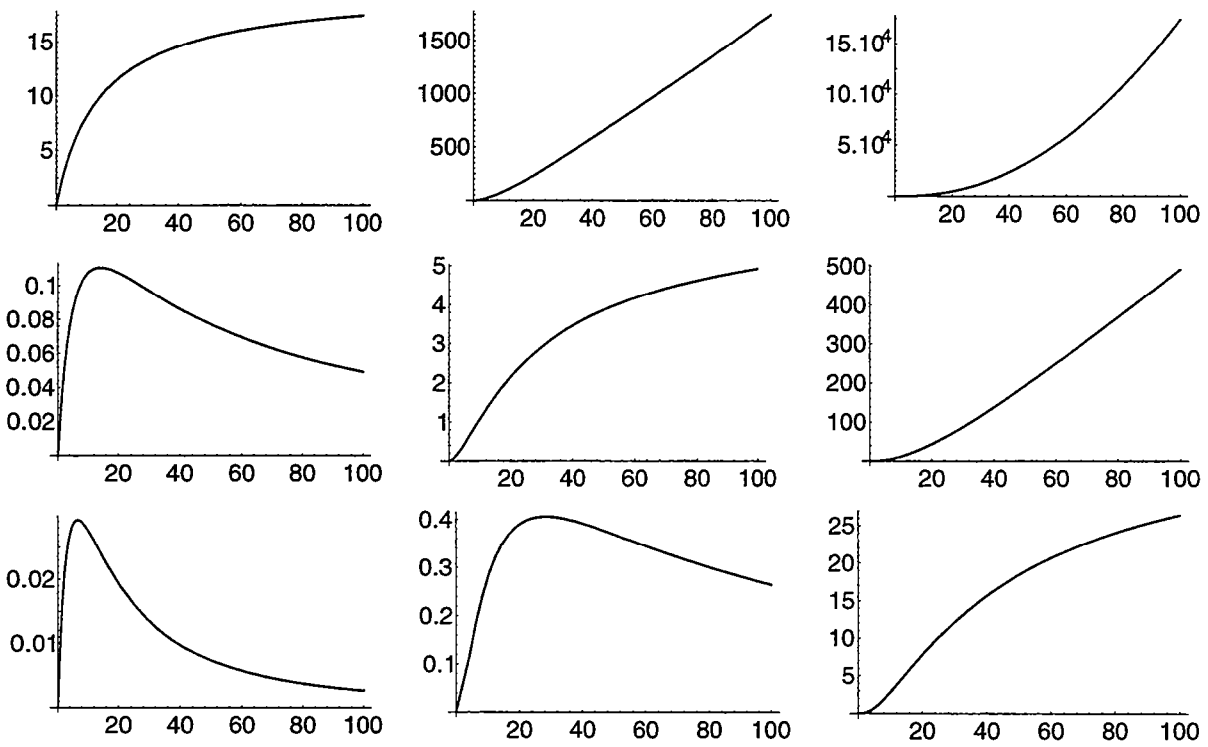


Figure 15 Lignes d'extréma théorique en fonction de la dilatation pour les différentes sources résultantes : 1er ligne : lame de masse, 2ème ligne : lame de dipôle, 3ème ligne : lame de quadrupôle, pour la 1ère colonne L=1, 2ème colonne L=2, 3ème colonne L=3.

Encart 4 : Expression des lignes d'extréma d'une lame verticale (fonction de Green = champ de gravité dû à une lame infinie en y)

La source est en $(x_0 = 0, z_1, z_2)$

$$g_z = ln\left[\frac{x^2 + z_1^2}{x^2 + z_2^2}\right]$$

- **Lame de masse** : g_z est maximum en x=0 d'où

$$Max^L_{lame\,de\,masse}(a) = 2a^L\, ln\left(\frac{a + z_1}{a + z_2}\right)$$

- **Lame de dipôle** : $\frac{\partial g_z}{\partial x}$ est maximum en $x_I(z_1, z_2) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{z_1^4 + z_2^4 + 14 z_1^2 z_2^2} - z_1^2 - z_2^2}{6}}$

et

$$Max^L_{lame\,de\,dipole}(a) = \pm a^L\, x_I(z_{1eq}, z_{2eq}) \frac{z_{2eq}^2 - z_{1eq}^2}{\left[x_I^2(z_{1eq}, z_{2eq}) + z_{1eq}^2\right]\left[x_I^2(z_{1eq}, z_{2eq}) + z_{2eq}^2\right]}$$

avec $z_{1eq} = a + z_1$, $z_{2eq} = a + z_2$

- **Lame de quadrupôle** : $\frac{\partial g_z}{\partial x}$ est maximum en x=0 et en 2 autres solutions.

Pour x=0

$$Max^L_{lame\,de\,quadrupole}(a) = -2a^L\left(\frac{1}{(a + z_1)^2} - \frac{1}{(a + z_2)^2}\right)$$

Les résultats de l'ajustement des arêtes obtenues par transformée en ondelettes des champs dus à une lame verticale et à une marche verticale sont représentés sur les figures 16 et 17 pour différentes ondelettes multipolaires. Les résultats sont bons dans tous les cas, mais ils sont d'autant meilleurs si l'on utilise une ondelette d'ordre de dérivation L grand. Cet ajustement des arêtes expérimentales sur les expressions théoriques des lignes d'extréma permet d'obtenir une bonne approximation des profondeurs de la base et du sommet du bord détecté.

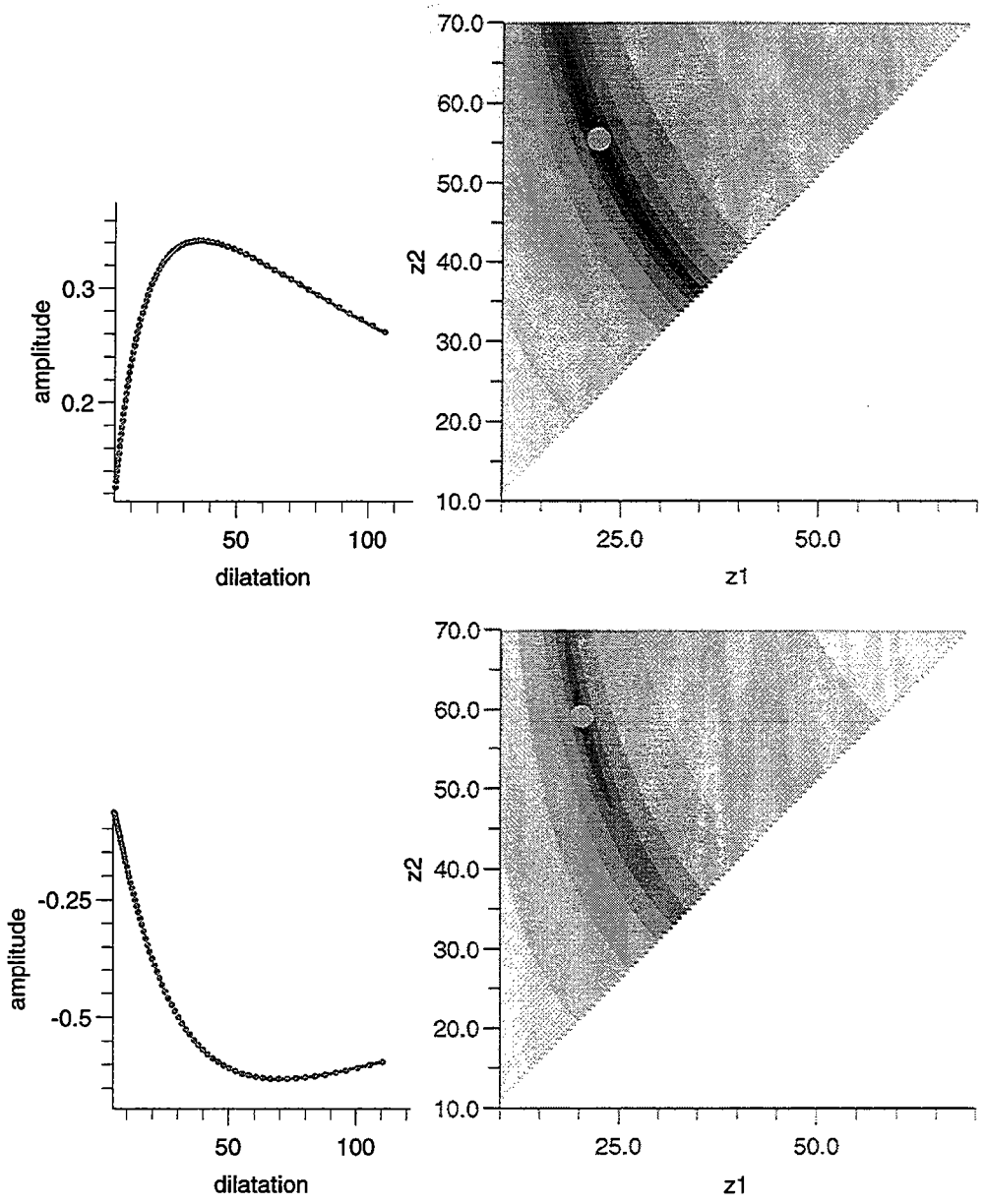


Figure 16 Arêtes de la transformée en ondelettes pour une lame située entre $z_1 = 20$ et $z_2 = 60$ unités de profondeur (cf fig. 14). Haut: pour L=1, ajustement sur lame de dipôle, le résultat est $z_1 = 22.1$, $z_2 = 55.5$ – Bas : pour L=2, ajustement sur lame de quadrupôle, le résultat est $z_1 = 20.3$, $z_2 = 59.1$

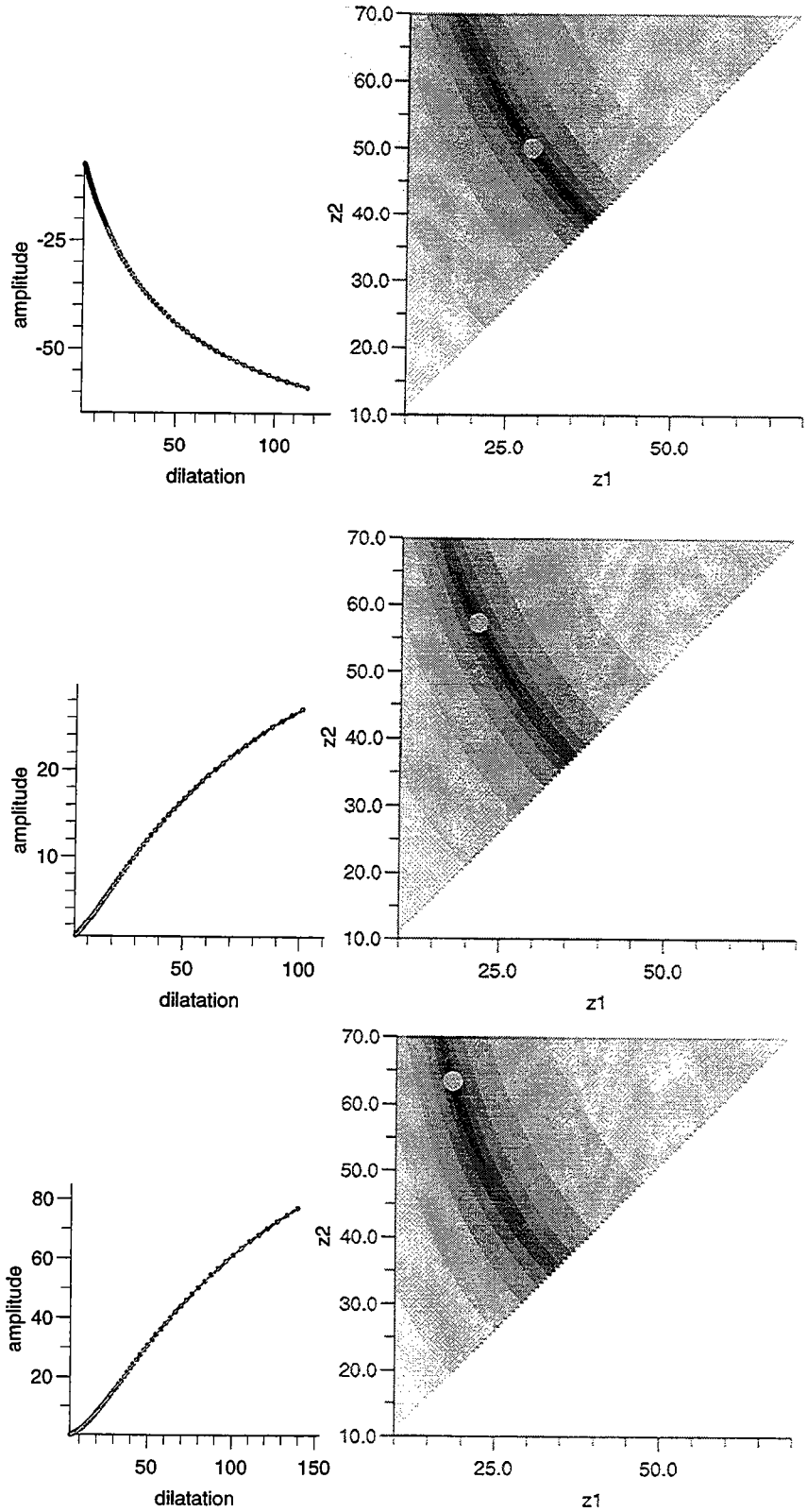


Figure 17 Arêtes de la transformée en ondelettes pour une marche d'escalier située entre $z_1 = 20$ et $z_2 = 60$ unités de profondeur (cf figure 13). Haut: pour L=1, ajustement sur lame de masse, le résultat est $z_1 = 28.8$, $z_2 = 50$. – Milieu : pour L=2, ajustement sur lame de dipôle, le résultat est $z_1 = 21.5$, $z_2 = 57.3$ – Bas : pour L=3, ajustement sur lame de quadrupôle, le résultat est $z_1 = 18.5$, $z_2 = 63.3$

Approximation des profondeurs par convergence des arêtes. En restant toujours sur le même exemple des distributions multipolaires associées à une lame, nous voyons (fig. 15) que ses lignes d'extréma ont la même forme que celles obtenues pour une source ponctuelle. On peut le vérifier pour la lame de masse en faisant tendre z_2 vers z_1 :

Soit $z_2 = z_1 + \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} max_{lame\ masse} &= 2a^L(ln(a+z_2) - ln(a+z_1)) \\ &= 2a^L(ln(a+z_1+\varepsilon) - ln(a+z_1)) \\ &= 2a^L\left(ln\left((a+z_1)\left(1+\frac{\varepsilon}{a+z_1}\right)\right) - ln(a+z_1)\right) \\ &= 2a^L ln\left(1+\frac{\varepsilon}{a+z_1}\right) \end{aligned} \tag{III.12}$$

et par un développement limité, on obtient :

$$max_{lame\ masse} \simeq 2a^L \frac{\varepsilon}{a+z1} \tag{III.13}$$

donc pour $\varepsilon = 1$,

$$max_{lame\ masse} \simeq max_{ligne\ masse} \tag{III.14}$$

(cf §II.3.3). Ce résultat est compatible avec l'idée que si l'on observe une lame à grande distance, c'est-à-dire pour des grandes dilatations, nous la verrons comme une source ponctuelle localisée au centre de gravité de la lame. Nous pourrons donc obtenir une idée de la localisation verticale du bord en prolongeant les arêtes de la transformée en ondelettes dans les dilatations négatives. Ce résultat est présenté sur la figure 18 pour une lame en $z_1 = 20$, $z_2 = 60$ unités de profondeur. La profondeur déterminée par cette prolongation appartient au tiers le plus superficiel du bord détecté (*z=30*). En reprenant les expressions des positions horizontales des lignes d'extréma d'une lame de dipôle en fonction de la dilatation et des profondeurs z_1 et z_2 (voir $x_I(z_{1eq}, z_{2eq})$ dans l'encart 4), on devrait pourtant obtenir l'intersection des arêtes en $x_I = 0$ c'est à dire en $a = -z_1$ ou $a = -z_2$. Cette différence provient du fait que, contrairement aux lignes d'extréma d'une source ponctuelle, celles dues à une lame ne sont pas linéaires dans les dilatations négatives, alors qu'elles le sont approximativement dans les dilatations positives. Nous avons représenté sur la figure 19 la position horizontale de l'arête théorique d'une lame de dipôle $x_I(z_{1eq}, z_{2eq})$ en fonction de la dilatation pour $z_1 = 20$, $z_2 = 60$. Si l'on prolonge la partie linéaire dans les dilatations négatives, on retrouvera bien l'intersection en $z \simeq 30$.

Finalement, la prolongation des arêtes dans les dilatations négatives détermine une profondeur qui correspond à un point situé dans la partie supérieure du bord détecté et donne ainsi une première approximation de sa position verticale.

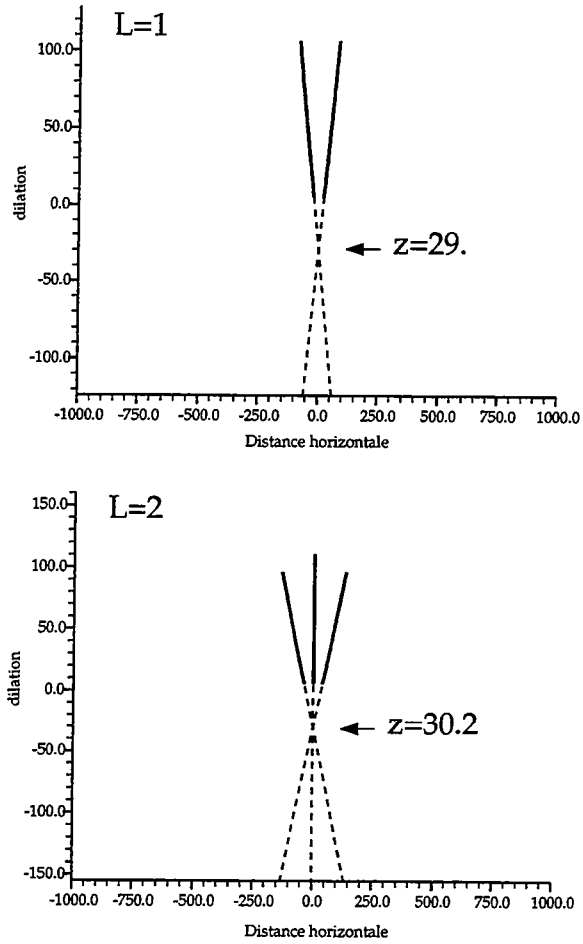


Figure 18 Prolongation des arêtes de la transformée en ondelette du champ dû à une lame verticale ($z_1 = 20,\ z_2 = 60$) pour les ondelettes L=1 et L=2. La profondeur ainsi déterminée (indiquée sur la figure) est bien située dans l'intervalle $[z_1, z_2]$.

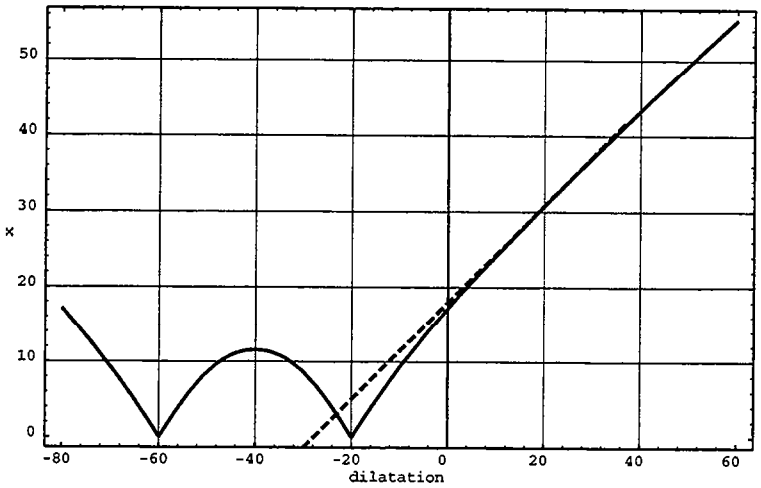


Figure 19 Trait plein : arête théorique $x_I(a, z_1, z_2)$ (avec $z_1 = 20,\ z_2 = 60$) pour une lame de dipôle. L'arête est approximativement linéaire dans les dilatations positives, mais la prolongation expérimentale dans les dilatations négatives (tirets) ne donne pas les intersections théoriques prévues en a=-z_1 et/ou a=-z_2.

2.3.b Bords inclinés

Le choix de bords verticaux comme sources types reste assez simpliste vis-à-vis des structures que l'on peut rencontrer, en particulier si l'on prend l'exemple des zones de fractures océaniques qui ne présenteront jamais des bords parfaitement verticaux. Nous allons voir comment les résultats de la partie précédente sont modifiés lorsque nous cherchons à déterminer les paramètres de structures inclinées : localisation, inclinaison et type de source.

Nous prenons comme exemple le cas d'un champ de gravité dû à une lame inclinée. Ce cas peut s'étendre à celui d'une marche d'escalier inclinée par l'intermédiaire de la distribution de densité, de la même façon que dans l'exemple précédent sur les bords verticaux. La fonction de Green correspondant à une lame inclinée et permettant d'extraire les expressions analytiques des arêtes théoriques des sources résultantes (masses, dipôles, quadrupôles..) est donnée dans l'encart 5, ainsi que l'expression de la ligne d'extréma théorique de la lame inclinée de masse. Nous n'avons pas rapporté les expressions pour lame inclinée de dipôle et quadrupôle car elles deviennent très compliquées et ne permettent donc pas d'appliquer l'ajustement linéaire simple que nous avons utilisé dans les applications précédentes.

En premier lieu, la localisation horizontale du bord ne sera plus aussi simple. En effet, la position des lignes d'extréma sur l'axe horizontal dépend de l'angle d'inclinaison de la structure (voir encart 5). Nous ne détecterons pas l'une ou l'autre des extrémités du bord (la plus superficielle ou la plus profonde), mais une position intermédiaire dépendante de son inclinaison. D'autre part, nous ne trouverons plus d'arêtes verticales du fait que les effets des deux extrémités interfèrent, l'arête ayant tendance à s'incliner vers le bord le plus profond. Ce résultat est représenté sur la figure 20 où nous avons superposé la transformée en ondelettes et les arêtes du champ dû à une marche située en $z_1 = 20$, $z_2 = 100$ unités de profondeur et inclinée de $\theta = 30^o$ par rapport à l'horizontale. Le premier bord est en $x_1 = 1000$, le deuxième en $x_2 = 1140$. Pour l'ondelette L=1, nous voyons que la seule ligne d'extréma détectée (non verticale) se situe à mi-chemin entre les deux bords, tandis que les lignes d'extréma pour l'ondelette L=2 sont légèrement décalées par rapport à leurs positions lorsque le bord est vertical (comparer avec la figure 13). Enfin, l'effet de la coalescence des deux bords est clairement illustré dans le cas de l'ondelette L=3. Les lignes d'extréma détectées correspondent à des valeurs de coefficients en ondelettes d'ordres de grandeur différents, la transformée en ondelettes permettant de détecter relativement bien le bord le plus superficiel (lignes 2 et 3) tandis que le bord le plus profond n'est pas détecté dans les plus hautes fréquences (ligne 4). Finalement, si les deux extrémités du bord étaient séparées par une assez grande distance, nous aurions trouvé – de la même façon que dans l'exemple du bord vertical – trois arêtes pour la première extrémité et trois arêtes pour la deuxième, l'information contenue dans ces six arêtes se confondant lorsque les bords se rapprochent.

Le deuxième problème proviendra de la difficulté croissante d'exprimer analytiquement les lignes d'extréma des transformées en ondelettes de champs dus à des sources de plus en plus compliquées. En effet, à partir de l'expression de la ligne d'extréma de la lame inclinée de masse, nous voyons que l'ajustement simple par moindres carrés que nous faisions en recherchant les profondeurs z_1 *et* z_2 ne peut plus être appliqué lorsque 3 inconnues sont à déterminer lors de l'ajustement. Seul un ajustement non-linéaire permettrait de déterminer à la

Encart 5 : Expression des arêtes d'une lame inclinée (fonction de Green = champ de gravité dû à une lame inclinée infinie en y)

La lame est située en $x_0 = 0$, z_1, z_2 et inclinée de θ par rapport à la verticale

$$g_z(x) = -cos^2\theta\, ln\left[\frac{x^2+z_1^2}{\left(x+(z_1-z_2)tan\theta\right)^2+z_2^2}\right]$$
$$+2\,sin\theta\,cos\theta\left\{arctan\left(\frac{x+(z_1-z_2)tan\theta}{z_2}\right)-arctan\left(\frac{x}{z_1}\right)\right\}$$

- **Lame de masse inclinée**

$$\frac{\partial g_z}{\partial x} = 2\,(z_2-z_1)\,\frac{x(z_2+z_1)-z_1\,tan\theta\,(z_2-z_1)}{\left(\left(x+(z_1-z_2)tan\theta\right)^2+z_2^2\right)\left(x^2+z_1^2\right)}$$

donc g_z est maximum en $x = \dfrac{z_1(z_2-z_1)tan\theta}{z_1+z_2}$ d'où

$$Max^L_{l.inc.masse}(a) = 2a^L\{-cos^2\theta\, ln\left(\frac{a+z_1}{a+z_2}\right)$$
$$+\,2\,sin\theta\,cos\theta\,arctan\left(\frac{z_1-z_2}{2a+z_1+z_2}tan\theta\right)\}$$

fois les 3 inconnues, mais la façon dont l'inclinaison θ intervient dans l'expression de l'arête rend l'algorithme très peu robuste. Nous pourrons cependant obtenir une approximation des profondeurs des deux extrémités en effectuant un ajustement uniquement sur les deux variables z_1 *et* z_2 et en donnant comme information *a-priori* une valeur de l'angle θ (pour la lame inclinée de masse). On pourra également obtenir de bonnes approximations des profondeurs (mais aucune valeur de l'inclinaison) en utilisant les expressions analytiques d'un bord vertical. Les résultats pour les ondelettes L=1, L=2, L=3 pour la marche inclinée étudiée précédemment sont représentés sur les figures 21, 22 et 23. Nous devons maintenant utiliser toutes les arêtes du fait qu'elles ne sont plus symétriques comme dans le cas vertical. L'approximation de la profondeur du bord superficiel sera meilleure que celle du bord le plus profond, celle-ci étant en générale surestimée. On pourra également obtenir une approximation de la profondeur du bord (ou du "centre de gravité" du bord) en prolongeant les arêtes dans les dilatations négatives. Ces résultats sont également représentés sur la figure 20.

Finalement, la présence d'un bord incliné est assez clairement identifiable à partir de la transformée en ondelettes du champ dû à ce type de source. Cependant, la formulation du problème inverse en terme de transformée en ondelettes réelles ne permet pas de déterminer l'inclinaison de ces structures, bien que les localisations horizontales et verticales soient relativement bien définies.

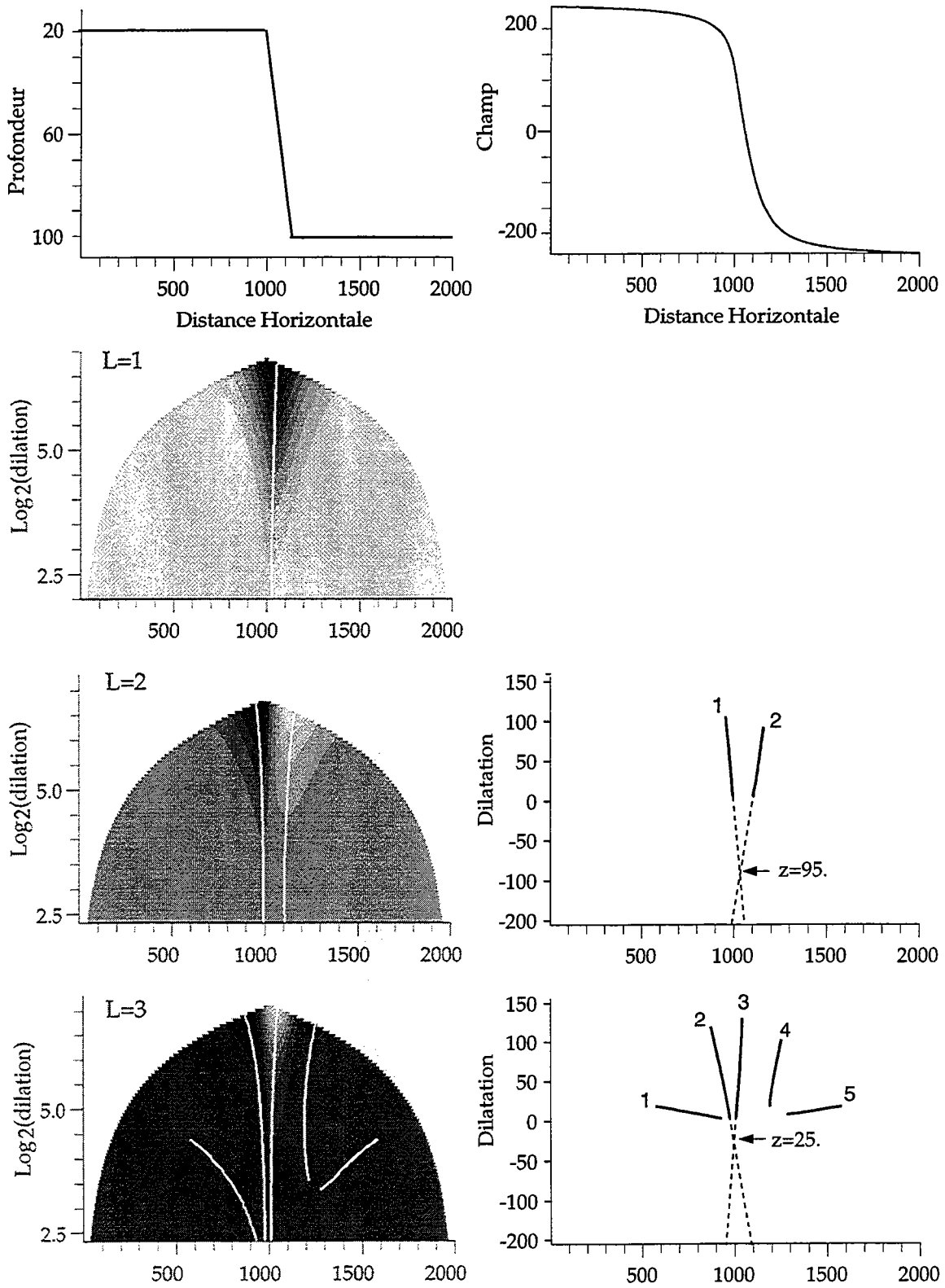


Figure 20 Transformées en ondelettes et arêtes du champ de gravité (haut droite) dû à une marche inclinée ($z_1 = 20$, $z_2 = 100$, $\theta = 30°$) pour L=1, L=2, L=3. Droite : convergence des arêtes dans les dilatations négatives pour L=2 et L=3. Les profondeurs ainsi déterminées sont indiquées sur la figure.

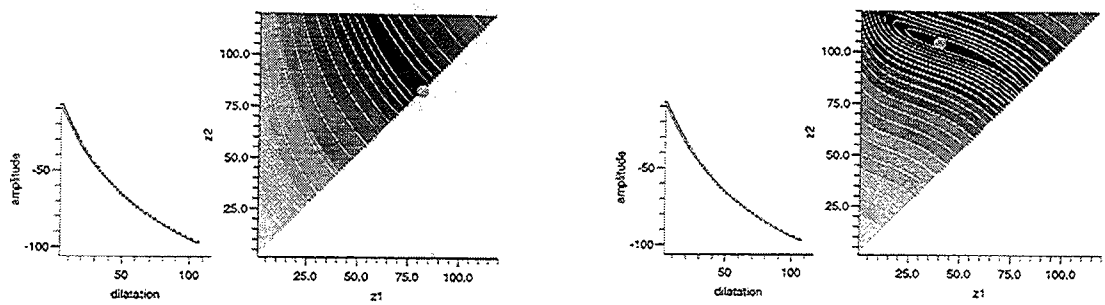


Figure 21 Ajustement des arêtes de la marche inclinée pour L=1. Gauche : en utilisant l'arête théorique due à une lame verticale de masse => $z_1=81.5$, $z_2=82.8$. Droite : en utilisant l'arête théorique due à une lame inclinée de masse en donnant l'angle d'inclinaison de 30°/x => $z_1=40$, $z_2=104$.

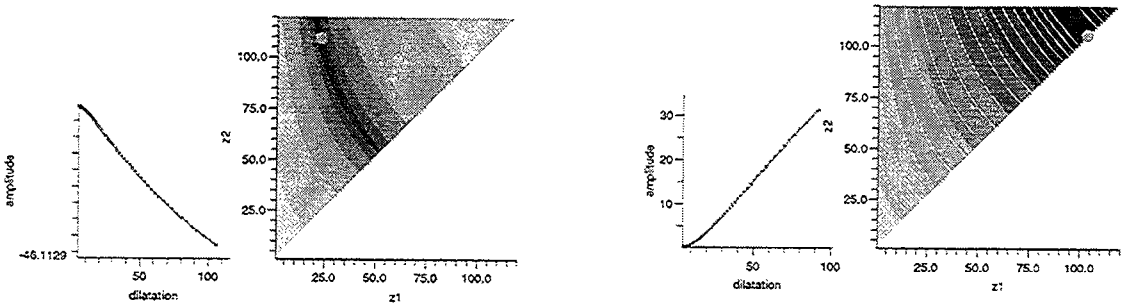


Figure 22 Ajustement des arêtes de la marche inclinées pour L=2, en utilisant l'arête théorique due à une lame verticale de dipôle. Gauche : arête n° 1 => $z_1=23$, $z_2=109$. Droite : arête n° 2 => $z_1=103$, $z_2=105.6$.

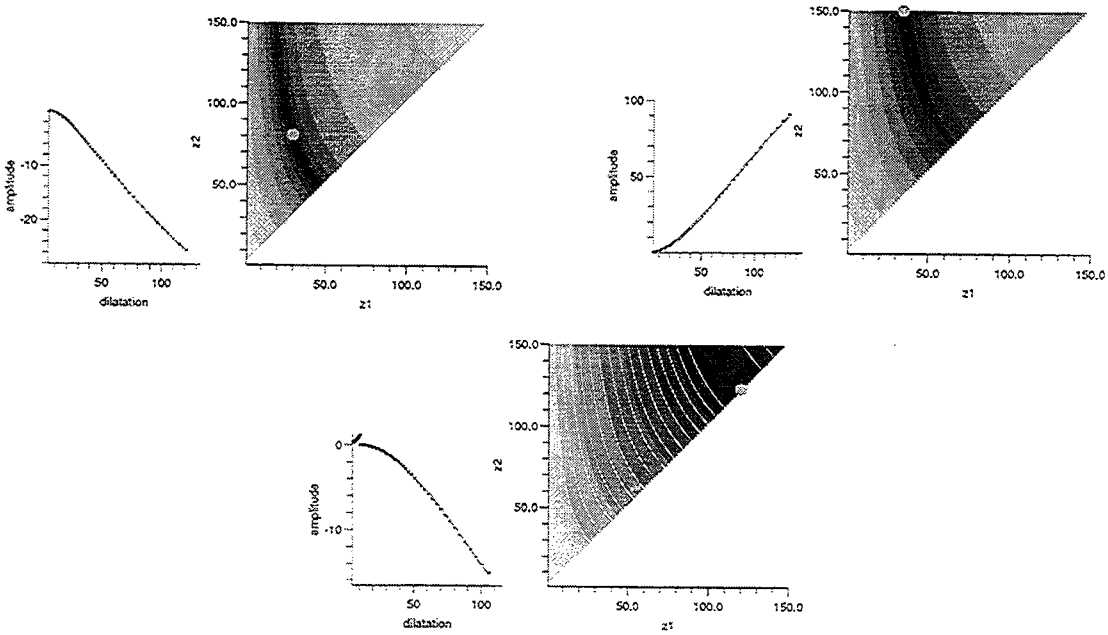


Figure 23 Ajustement des arêtes de la marche inclinées pour L=3, en utilisant l'arête théorique due à une lame verticale de quadrupôle. Haut gauche : arête n° 2 => $z_1=30$, $z_2=80$. Haut droite : arête n° 3 => $z_1=34$, $z_2>150$. Bas : arête n° 4 => $z_1=120$, $z_2=123$.

3 Ondelettes complexes

3.1 Introduction

Dans la partie précédente concernant la résolution du problème inverse pour des sources étendues à partir d'ondelettes réelles, nous avons vu que la méthode fournissait une bonne estimation des localisations horizontales et verticales des sources. Par contre, elle ne permettait pas de mesurer leur inclinaison, sauf à introduire ce paramètre comme information *a-priori*. La détermination de ce paramètre est également important lorsque nous sommes en présence de sources vectorielles, pour lesquelles l'orientation du vecteur est une inconnue supplémentaire. Ce sera le cas lorsque nous aurons à traiter des données magnétiques.

Pour résoudre le problème inverse de la façon la plus générale et la plus automatique possible, nous introduisons la transformée en ondelettes complexes qui permet d'analyser un signal grâce à deux représentations complémentaires, module et phase. Nous avons ainsi accès à un plus grand nombre d'informations sur le signal étudié. Nous définissons dans un premier temps les ondelettes complexes que nous utiliserons, ainsi que la façon dont l'information est extraite des représentations module et phase. Dans un deuxième temps, nous étudierons deux exemples synthétiques illustrant les possibilités de ce type de transformée.

3.1.a Choix des ondelettes complexes

Les conventions de signe utilisées pour la transformée de Hilbert sont les suivantes :

$$\mathcal{H}(x(t)) = \frac{1}{\pi t} *_t x(t)$$
$$\mathcal{H}(X(u)) = -i\, sgn(u) X(u)$$

le signal analytique $z(t)$ associé à $x(t)$ étant défini par :

$$z(t) = x(t) + i\,\mathcal{H}(x(t))$$

Les propriétés que l'on utilisera sont

- 1 Linéarité : $\mathcal{H}(a\,x(t) + b\,y(t)) = a\,\mathcal{H}(x(t)) + b\,\mathcal{H}(y(t))$
- 2 Convolution :$\mathcal{H}(x(t) *_t y(t)) = \mathcal{H}(x(t)) *_t y(t) = x(t) *_t \mathcal{H}(y(t))$

Afin d'utiliser en partie les résultats obtenus précédemment à partir des ondelettes réelles multipolaires, nous utilisons des ondelettes complexes construites à partir des ondelettes multipolaires, telles que les parties réelles et imaginaires soient transformées de Hilbert l'une de l'autre. En particulier, on peut choisir les ondelettes complexes ψ_C^L telles qu'elles correspondent au signal analytique associé aux ondelettes multipolaires "horizontales" (les

conventions de signes utilisées sont indiquées dans l'encart précédent) :

$$\tilde{\psi}_x^L(u) = \widetilde{P_1}(u) \prod_{i=1}^{L} OD(x, \vec{x}) \,. \tag{III.20}$$

Nous définissons les ondelettes multipolaires "verticales" par :

$$\tilde{\psi}_z^L(u) = \widetilde{P_1}(u)\, OD(x, \vec{z}) \prod_{i=1}^{L-1} OD(x, \vec{x}) \,. \tag{III.21}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_x^L(u) &= (2i\pi u)^L\, e^{-2\pi|u|} \\ \tilde{\psi}_z^L(u) &= (2i\pi u)^{L-1}(-2\pi|u|)\, e^{-2\pi|u|} = i\, sgn(u)\tilde{\psi}_x^L(u) \end{aligned} \tag{III.22}$$

d'où

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_z^L(u) &= -\mathcal{H}\Big(\tilde{\psi}_x^L(u)\Big) \\ \tilde{\psi}_x^L(u) &= +\mathcal{H}\Big(\tilde{\psi}_z^L(u)\Big) \end{aligned} \tag{III.23}$$

Les ondelettes multipolaires complexes que nous utiliserons seront alors :

$$\psi_C^L = \psi_x^L + i\,\mathcal{H}\Big(\psi_x^L\Big) = \psi_x^L - i\,\psi_z^L \tag{III.24}$$

Les expressions analytiques des parties réelles et imaginaires de ces ondelettes pour L=1, L=2 et L=3 sont données en annexe 1. Ces ondelettes complexes sont représentées figure 24, leurs modules et leurs phases sur la figure 25.

3.1.b Extraction du squelette de la transformée en ondelettes complexes

Le squelette défini dans le cadre de cette thèse correspond à l'endroit de la phase où l'énergie contenue dans le signal est maximum. Dans ce sens, nous pourrons extraire le squelette en prenant les lignes de phases correspondant aux lignes de maxima du module de la transformée en ondelettes.

Compte tenu de la meilleure stabilité de la phase en présence de bruit par rapport au module, il serait pourtant préférable d'extraire le squelette directement à partir de la phase. L'orientation de la source ne variant pas en fonction de la fréquence, on pourra donc rechercher les lignes où la phase reste constante à toutes les échelles, c'est-à-dire que le squelette correspondra au lieu où la dérivée de la phase par rapport aux dilatations sera nulle. Nous verrons également que le squelette peut être extrait en considérant les endroits où la variation de la phase pour une échelle donnée est la plus rapide, c'est-à-dire là où la dérivée de la phase par rapport à l'espace (ou au temps) est extrémum.

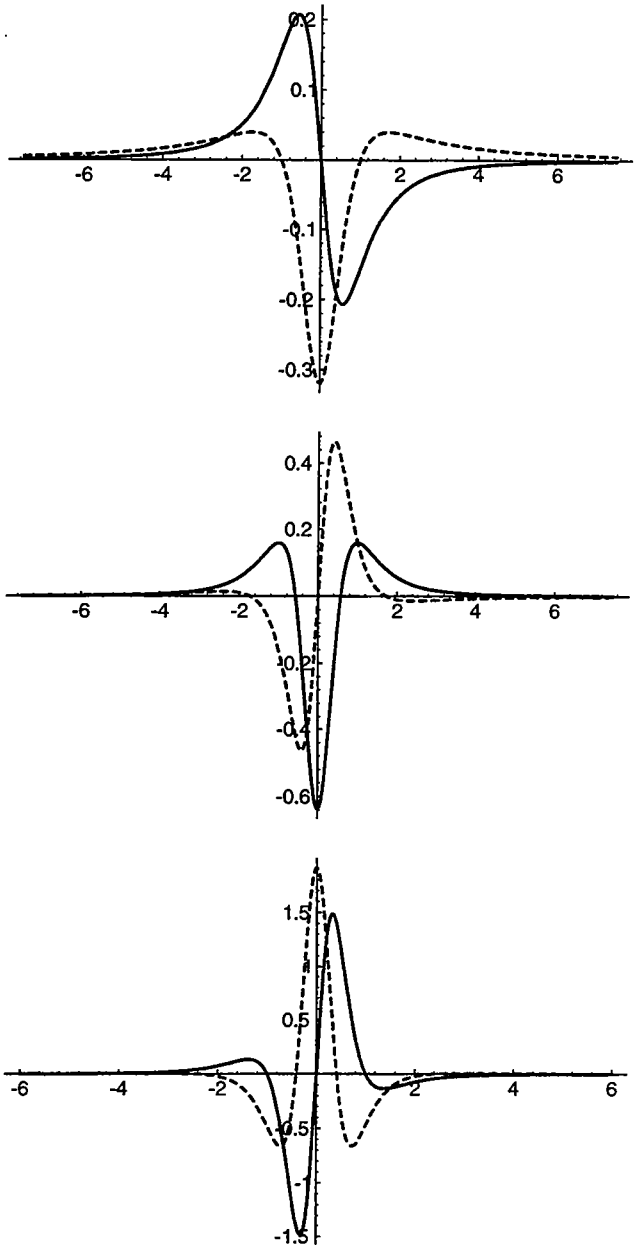


Figure 24 Parties réelles (trait plein) et imaginaires (pointillés) des ondelettes complexes pour L=1, L=2, L=3 (du haut vers le bas).

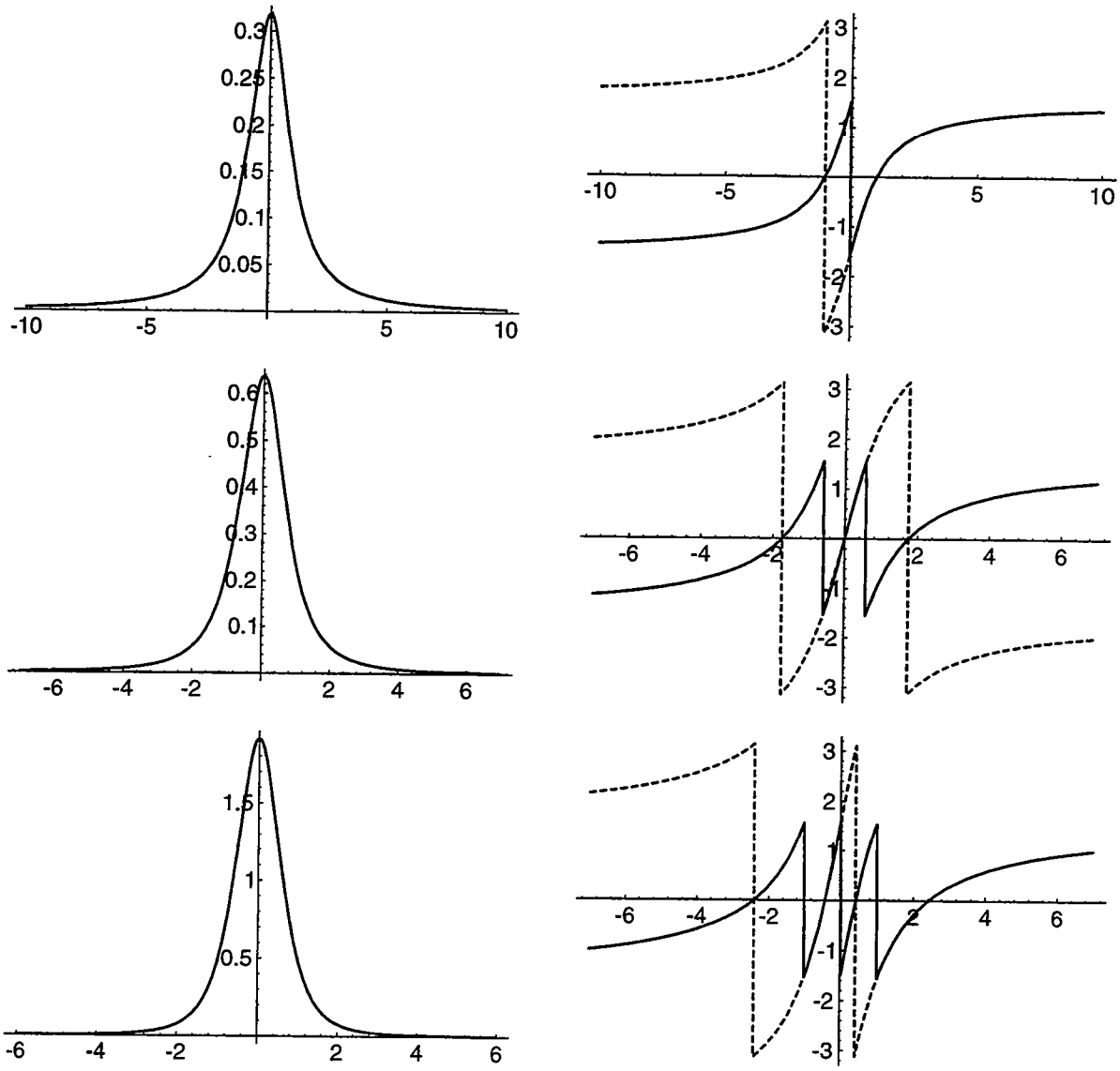


Figure 25 Module (gauche) et phase (droite) des ondelettes complexes pour L=1, L=2, L=3. (du haut vers le bas). Sur la représentation de la phase, la ligne en trait plein correspond au calcul de la phase avec ATAN (entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$), la ligne en pointillé la phase calculée avec ATAN2 (entre $-\pi$ et π)

3.2 Caractérisation d'un dipôle

3.2.a Détermination de l'inclinaison

Dans cette partie, nous ne considérons que des sources ponctuelles qui sont maintenant des sources magnétiques, c'est à dire qu'il faudra à la fois déterminer la profondeur de la source et l'inclinaison du dipôle.

On a (pour L=1)

$$\begin{aligned} \psi_x(u) &= 2i\pi u\, e^{-2\pi|u|} \\ \psi_z(u) &= -2\pi|u|\, e^{-2\pi|u|} = i\, sgn(u)\psi_x(u) \end{aligned} \qquad \text{(III.25)}$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi_z(u) &= -\mathcal{H}(\psi_x(u)) \\ \psi_x(u) &= +\mathcal{H}(\psi_z(u)) \end{aligned} \qquad \text{(III.26)}$$

On cherche à extraire la phase de la transformée en ondelettes de l'anomalie magnétique due à un dipôle situé en $x=0$, incliné d'un angle θ par rapport à l'axe x. L'expression de cette anomalie est :

$$A(x,z) = J(x,z) *_{xz} g(x,z) *_x (cos\theta\, DO(x,\vec{x}) + sin\theta\, DO(x,\vec{z})) \qquad \text{(III.27)}$$

la fonction J représentant la distribution d'aimantation de la source, la fonction g étant la fonction de Green associée à la source. La transformée en ondelettes de ce champ est donc :

$$\begin{aligned} W_{\psi_C|A(.,z)}(x,a) &= J(x,z) *_{xz} g(x,z) *_x (cos\theta\, DO(x,\vec{x}) + sin\theta\, DO(x,\vec{z})) *_x \psi_{C,a}(x) \\ &= J(x,z) *_{xz} g(x,z) *_x \{(cos\theta\, DO(x,\vec{x}) + sin\theta\, DO(x,\vec{z})) *_x \mathcal{H}(\psi_{z,a}(x)) \\ &- i\,(cos\theta\, DO(x,\vec{x}) + sin\theta\, DO(x,\vec{z})) *_x \psi_{z,a}(x)\} \\ &= J(x,z) *_{xz} g(x,z) *_x \psi_{z,a}(x) *_x \{\mathcal{H}(cos\theta\, DO(x,\vec{x}) + sin\theta\, DO(x,\vec{z})) \\ &- i(cos\theta\, DO(x,\vec{x}) + sin\theta\, DO(x,\vec{z}))\} \end{aligned} \qquad \text{(III.28)}$$

Avec les mêmes conventions que précédemment, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(DO(x,\vec{x})) &= -DO(x,\vec{z}) \\ \mathcal{H}(DO(x,\vec{z})) &= +DO(x,\vec{x}) \end{aligned} \qquad \text{(III.29)}$$

donc

$$\begin{aligned} W_{\psi_C|A(.,z)}(x,a) &= J(x,z) *_{xz} g(x,z) *_x \psi_{z,a}(x) *_x \{-cos\theta\, DO(x,\vec{z}) + sin\theta\, DO(x,\vec{x}) \\ &- i\, cos\theta\, DO(x,\vec{x}) - i\, sin\theta\, DO(x,\vec{z})\} \\ &= J(x,z) *_{xz} g(x,z) *_x \psi_{z,a}(x) *_x \left(e^{i(\pi+\theta)} DO(x,\vec{z}) + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} DO(x,\vec{x})\right) \end{aligned} \qquad \text{(III.30)}$$

Au niveau de l'anomalie (en *x=0*), $DO(0,\vec{x}) = 0$ (et $\psi_{z,a}(0) \neq 0$), la phase est donc :

$$\varphi = \theta + \pi \ . \tag{III.31}$$

Nous avons testé ce résultat sur un dipôle situé en *z=40* unités de profondeurs et incliné de 60° par rapport à l'horizontale. Le module et la phase de la transformée en ondelettes correspondante sont représentés sur la figure 26, ainsi que le squelette déterminé à partir des lignes d'extréma du module. La valeur de la phase le long de l'arête est représentée figure 27, nous obtenons une phase constante et égale à –120°, ce qui est le résultat attendu, du fait que le calcul numérique de la phase s'effectue dans l'intervalle $[-180^o, 180^o]$ (l'angle théorique que nous devons obtenir est $\varphi = 180^o + 60^o = 240^o$ dans l'intervalle $[0^o, 360^o]$).

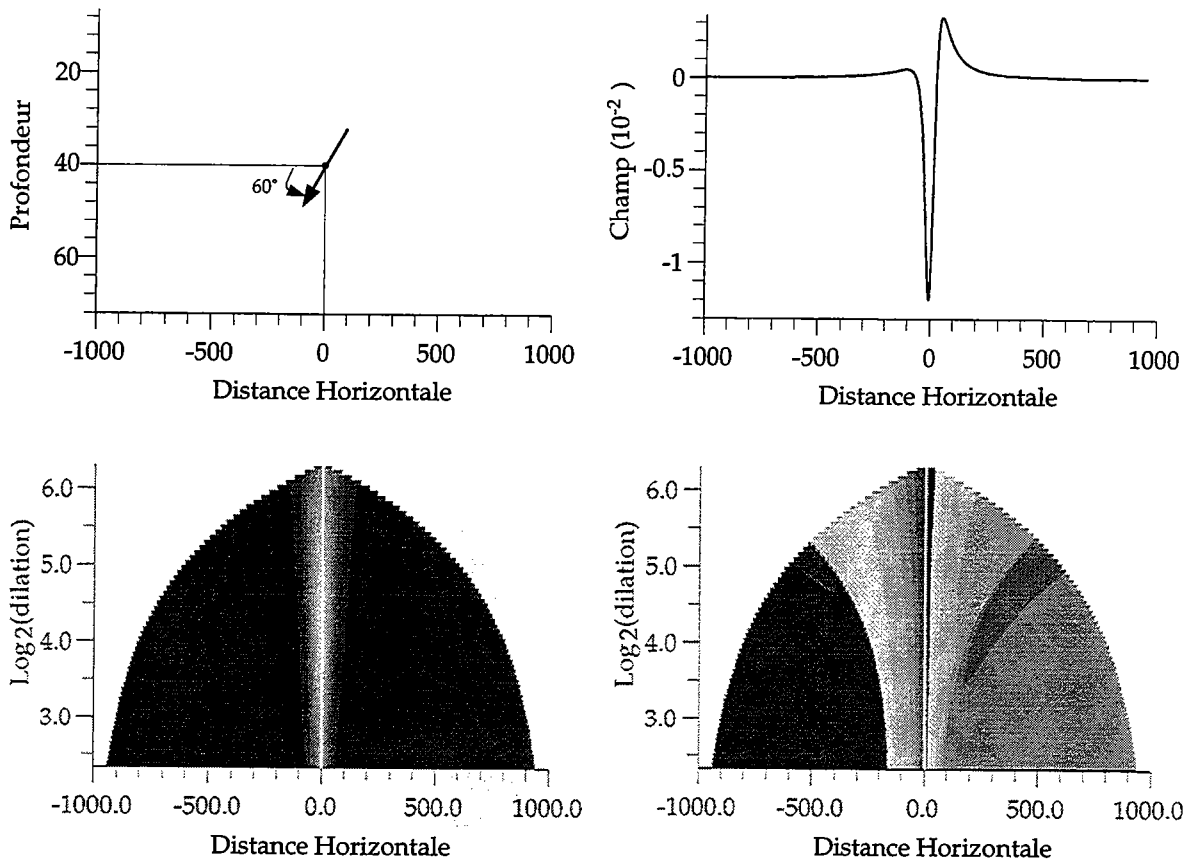


Figure 26 Haut : dipôle en *z=40* unité de profondeur, d'inclinaison de 60° par rapport à l'horizontale et champ correspondant. Bas : module (gauche) et phase (droite) de la transformée en ondelettes pour L=1 (a0=5, nv=4, nvoct=15). Le squelette (en blanc) est superposé sur ces 2 cartes.

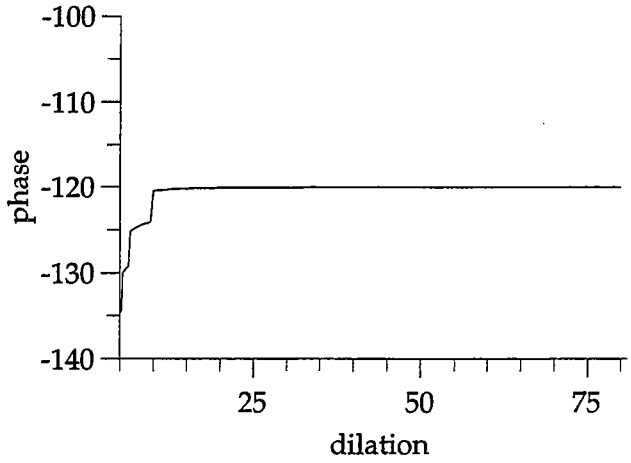


Figure 27 Phase le long de l'arête représentée figure 26.

3.2.b Détermination de la profondeur

La détermination de la profondeur des sources ne pourra plus se faire en recherchant la convergence des arêtes du fait que nous n'aurons plus accès qu'à une seule ligne de maximum du module (voir la forme du module figure 25). Mais nous pourrons à nouveau calculer les expressions analytiques des arêtes pour des sources particulières. Nous avons calculé ces expressions dans le cas de la fonction de Green correspondant au champ de gravité d'une ligne infinie en y (encart 6). Ainsi, la tranformée en ondelettes du champ d'un dipôle pour l'ondelette complexe L=1 correspondra au champ dû à un quadrupôle, prolongé de $(z_0 + a)$. L'ajustement de l'arête du champ étudié figure 26 est représenté sur la figure 28 et donne une très bonne approximation de la profondeur du dipôle.

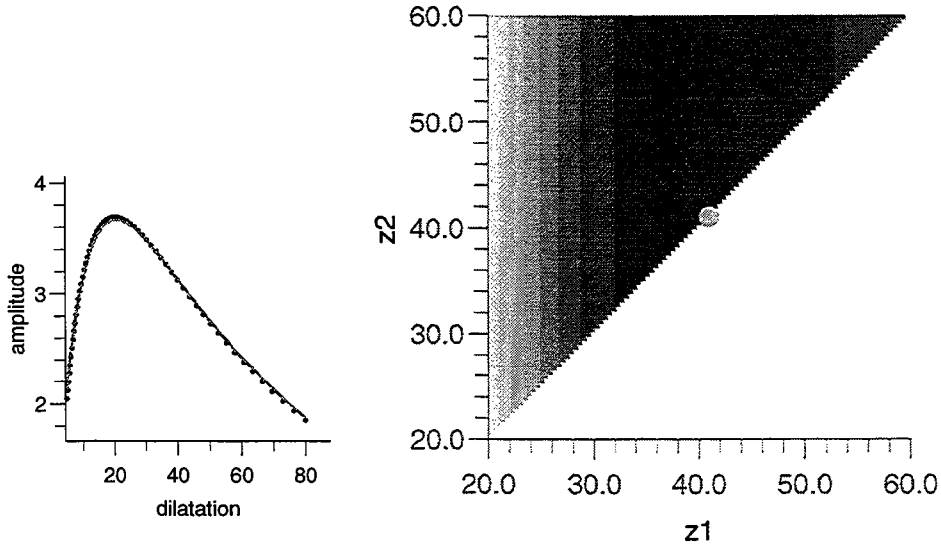


Figure 28 Module le long de l'arête représentée figure 26. L'ajustement de l'arête sur une ligne de quadrupôle (L=1) donne *z=41.0* (z0 théorique = 40).

Encart 6 : Expressions des lignes d'extréma d'une source ponctuelle pour des ondelettes complexes (fonction de Green = champ de gravité dû à une ligne infinie en y)

La source est en $(x_0 = 0,\, z_0)$

$$g_z = \frac{-2z_0}{x^2 + z_0^2}$$

- **Ligne de masse** g_z est maximum en x=0 d'où

$$Max_{\,ligne\,de\,masse}\left(W_{\psi_C^L|f}\right)(a) = \frac{2a^L}{a + z_0}$$

- **Ligne de dipôle**

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{4xz_0}{\left(x^2 + z_0^2\right)^2} \quad et \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z_0 \frac{x^2 - z_0^2}{\left(x^2 + z_0^2\right)^2}$$

$\frac{\partial g_z}{\partial x}$ est maximum en $x = \pm\frac{z_0}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\partial g_z}{\partial z}$ est maximum en $x = \pm z_0\sqrt{3}$ d'où

$$Max_{\,ligne\,de\,dipole}\left(W_{\psi_C^L|f}\right)(a) = \frac{\sqrt{7}}{2}\frac{a^L}{\left(a + z_0\right)^2}$$

- **Ligne de quadrupôle**

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4z_0 \frac{z_0^2 - 3x^2}{\left(x^2 + z_0^2\right)^3} \quad et \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4z_0 \frac{3x^2 - z_0^2}{\left(x^2 + z_0^2\right)^3}$$

$\frac{\partial^2 g_z}{\partial x^2}$ *et* $\frac{\partial^2 g_z}{\partial z^2}$ sont maximum en x=0 et en 2 autres solutions.
Pour x=0

$$Max_{\,ligne\,de\,quadrupole}\left(W_{\psi_C^L|f}\right)(a) = \frac{4a^L}{\left(a + z_0\right)^3}$$

3.3 Caractérisation d'un bord incliné

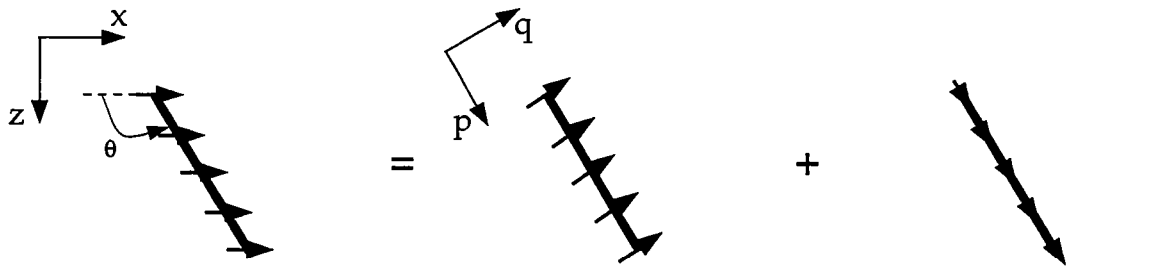
3.3.a Détermination de l'inclinaison

Résultat théorique

On se place dans le cas d'une fonction de Green newtonienne. La partie réelle de la transformée en ondelettes s'écrit alors :

$$W_{\psi_x|f(.,z)}(x,a) = a\, OD(x,\vec{x}) *_x d(x,z) *_{xz} g(x,z+a) \qquad \text{(III.38)}$$

La convolution de l'opérateur de dérivée oblique avec la distribution de densité donne une lame inclinée de dipôle que l'on peut décomposer selon le schéma suivant :



$$OD(x,\vec{x}) * d(x,z) \quad = \quad \sin(\theta)\, OD(x,\vec{q}) * d(x,z) \;+\; \cos(\theta)\, OD(x,\vec{p}) * d(x,z)$$

Dans la deuxième partie de la décomposition, la "masse" est parallèle à la direction des dipôles, donc

$$OD(x,\vec{p}) *_x d(x,z) = \delta(x_E, z_E) \qquad \text{(III.39)}$$

(x_E, z_E) étant les coordonnées d'un point courant sur la lame inclinée.

On obtient finalement

$$\begin{aligned} W_{\psi_x|f(.,z)}(x\,,a) &= a\, sin\theta\, OD(x,\vec{q}) *_x d(x,z) *_{xz} g(x,z+a) \\ &+ a\, cos\theta\, \delta(x_E,z_E) *_{xz} g(x,z+a) \\ &= a\, sin\theta\, OD(x,\vec{q}) *_x d(x,z) *_{xz} g(x,z+a) \\ &+ a\, cos\theta\, g(x-x_E, z-z_E+a) \end{aligned} \qquad \text{(III.40)}$$

On peut décomposer de la même façon la partie imaginaire :

$$\begin{aligned} W_{\psi_z|f(.,z)}(x\,,a) &= -i\, a\, OD(x,\vec{z}) *_x d(x,z) *_{xz} g(x,z+a) \\ &= -i\, \{a\, cos\theta\, OD(x,\vec{q}) *_x d(x,z) *_{xz} g(x,z+a) \\ &- a\, sin\theta\, \delta(x_E,z_E) *_{xz} g(x,z+a)\} \\ &= -i\, a\, cos\theta\, OD(x,\vec{q}) *_x d(x,z) *_{xz} g(x,z+a) \\ &+ i\, a\, sin\theta\, g(x-x_E, z-z_E+a) \end{aligned} \qquad \text{(III.41)}$$

La transformée en ondelettes complexes s'écrit alors :

$$\begin{aligned} W_{\psi_C} &= W_{\psi_x} + W_{\psi_z} \\ &= a\, e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\, OD(x,\vec{q}) *_x d(x,z) *_{xz} g(x, z+a) \\ &+ a\, e^{i\theta}\, g(x - x_E, z - z_E + a) \end{aligned} \tag{III.42}$$

La première partie de cette expression correspond à l'action des dipôles, la deuxième correspond à l'action d'une masse qui se situerait à l'extrémité de la lame, au niveau du bord superficiel. Quand a deviend grand, la deuxième partie devient prédominante par rapport à la première car elle ne fait pas apparaître de terme dérivée. La phase tend alors vers l'inclinaison de la lame :

$$\varphi \rightarrow \theta \quad \text{quand} \quad a \nearrow \tag{III.43}$$

Applications

Nous étudions le cas du champ de gravité dû à une lame inclinée de 120° par rapport à l'horizontale, située entre les profondeurs $z_1 = 20$, $z_2 = 1000$, le bord superficiel étant situé en *x=1000* (figure 29). Pour nous ramener au calcul théorique précédent, il faut donc appliquer une ondelette multipolaire complexe L=1 pour obtenir une lame de dipôle.

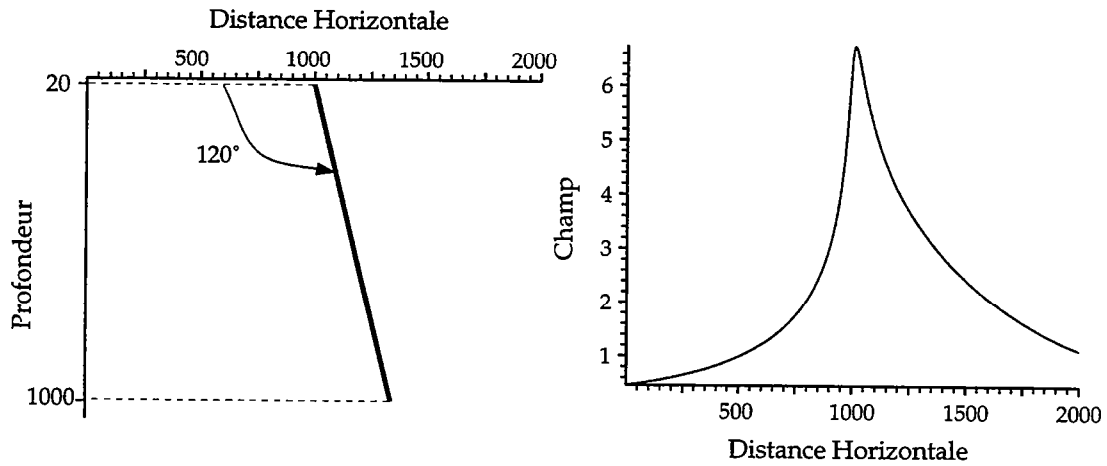


Figure 29 Lame inclinée de 120° par rapport à l'horizontale, située entre les profondeurs $z_1 = 20$, $z_2 = 1000$ et champ de gravité correspondant

La phase de la transformée en ondelettes de cette anomalie est représentée en courbes de niveaux sur la figure 30, ainsi que le squelette obtenu selon les différentes méthodes proposées en (3.1.b), c'est-à-dire quand le module de la transformée est maximum, quand la dérivée de la phase par rapport à la dilatation est nulle, et quand la dérivée de la phase par rapport à x est extrémum. La représentation de la phase en courbe de niveaux montre que la phase localisée au niveau du bord est bien égale à l'inclinaison de ce bord, ce qui est le résultat théorique prévu. On observe également que la phase obtenue à partir du squelette de la transformée

ne donne pas un résultat aussi net que dans le cas du dipôle (figure 27), en particulier pour les petites dilatations, et cela quel que soit le type d'extraction du squelette choisi. On peut cependant noter que les meilleurs résultats sont obtenus à partir du squelette déterminé quand la dérivée de la phase par rapport à x est extrémum.

La détermination de l'inclinaison pour ce type de source doit donc se faire pour des facteurs d'échelle grand, l'action des dipôles (équation III.42) n'étant pas négligeable dans les petites dilatations.

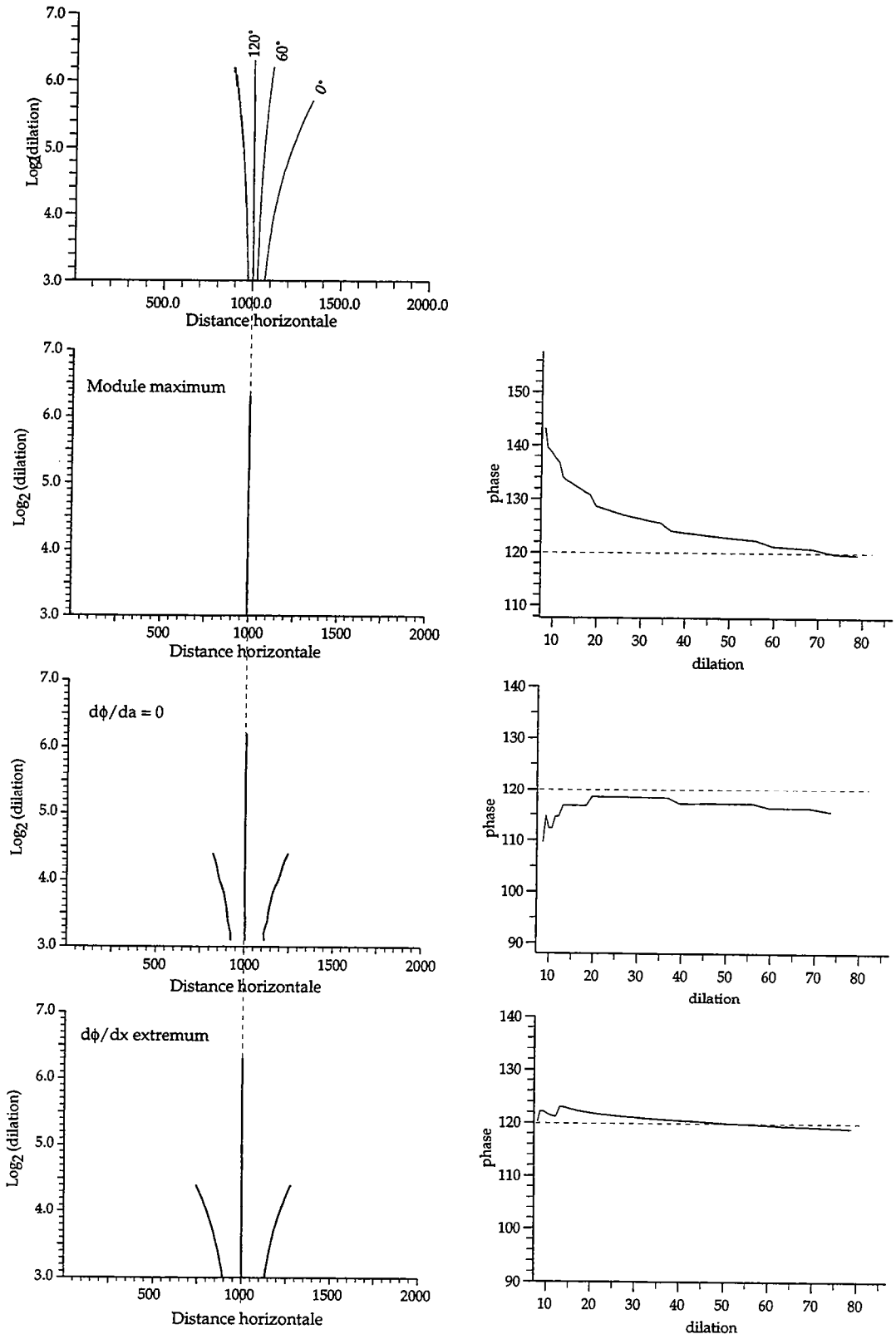


Figure 30 Haut : phase (courbes de niveaux) de la transformée en ondelettes complexe pour L=1 de l'anomalie représentée fig. 29. Les squelettes correspondants, déterminés de différentes façons (indiquées sur la figure) sont ensuite représentés sur la gauche. A droite, la représentation de la phase en fonction de la dilatation le long de ce squelette dans chacun des trois cas.

Influence du bruit

Nous avons vu au chapitre II l'influence du bruit sur la détection des lignes d'extréma de la transformée en ondelettes réelles, en particulier que la variance du bruit des ondelettes multipolaires réelles variait en *1/a*. Le phénomène sera le même dans le cas de la détection des lignes de maxima du module dans le cas des ondelettes complexes.

Nous allons voir quelle est l'influence du bruit sur la détermination du squelette de la transformée en ondelettes, en comparant qualitativement les différentes méthodes dont nous nous sommes servis dans la section précédente.

Nous avons représenté sur la figure 31 les résultats obtenus sur la phase de la transformée en ondelettes complexes pour L=1 du champ de gravité dû à une lame verticale située en $z_1 = 20$, $z_2 = 1000$ unités de profondeur. La phase le long du squelette extrait quelle que soit la méthode donne exactement l'angle d'inclinaison de la lame par rapport à l'horizontale (90°). En effet, dans le cas d'une lame verticale, l'action des dipôles horizontaux et verticaux dans la décomposition (III.42) s'annule parfaitement, il ne reste donc plus l'effet de masse qui perturbait les résultats de la lame inclinée dans les petites dilatations.

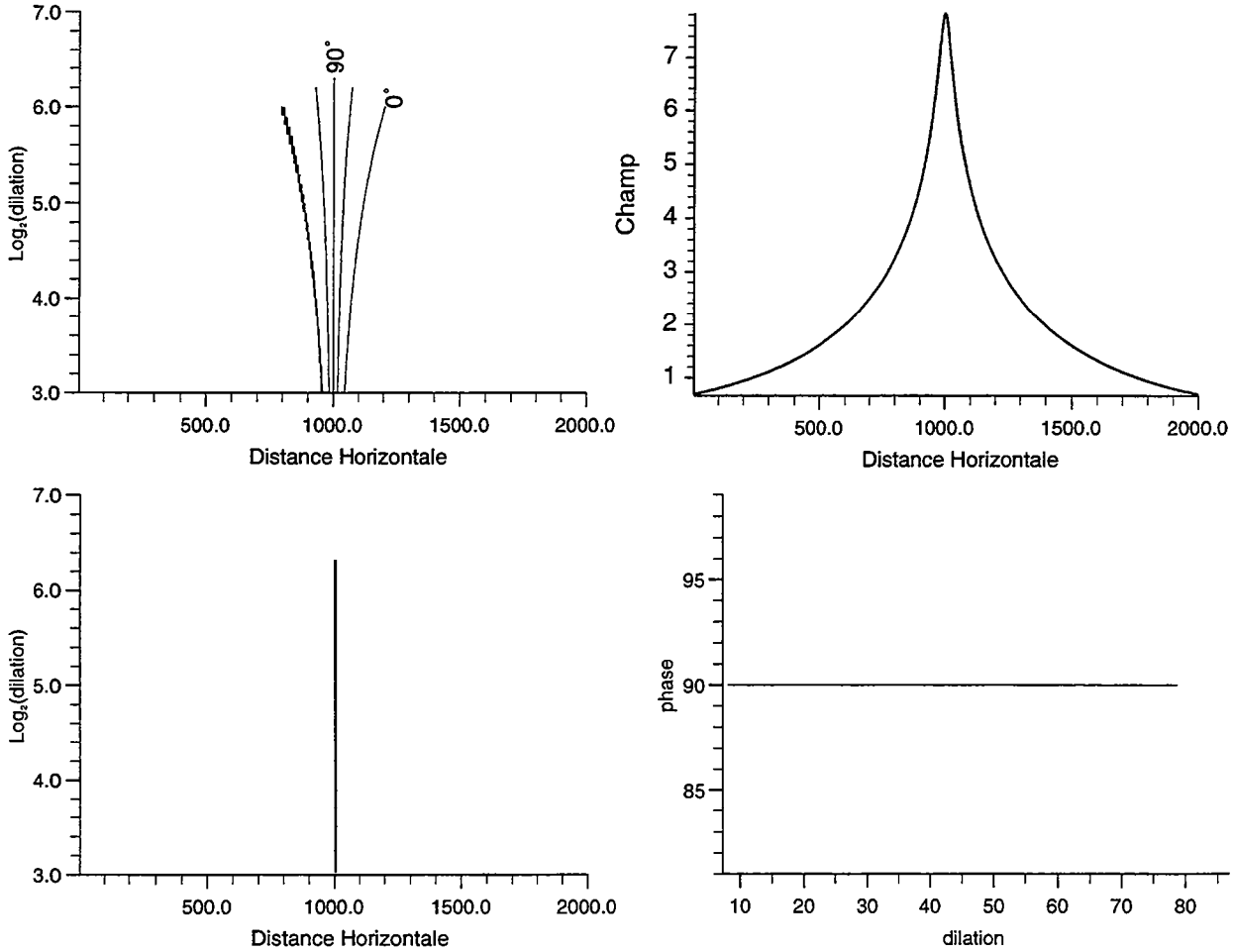


Figure 31 Haut droit : champ de gravité dû à une lame verticale située en $z_1 = 20$, $z_2 = 1000$. Haut gauche : Phase représentée en courbes de niveaux de la transformée en ondelettes complexes pour L=1. Le squelette correspondant, donnant le même résultat quelque soit la méthode d'extraction, est représenté en bas à gauche. Bas droit : représentation de la phase en fonction de la dilatation le long de ce squelette.

Nous avons ajouté à ce signal un bruit blanc Gaussien d'écart type $\sigma = 0.5$. Les résultats sur la phase sont représentés figure 32 où nous comparons les résultats des différentes méthodes d'extraction du squelette. Dans les trois cas, ce sont à nouveau les petites dilatations qui sont les plus affectées par le bruit. Au vu de cette figure, on peut également considérer que la détermination du squelette de la transformée en ondelettes complexes par la recherche des extréma de la dérivée de la phase par rapport à la position horizontale est la moins stable en présence de bruit. L'extraction du squelette soit par détermination du module maximum de la transformée, soit par recherche des lignes de phase constante (dérivée de la phase par rapport à la dilatation nulle) donnent des résultats équivalents, avec une erreur de $\pm 2^o$ si l'on ne considère pas les plus hautes fréquences.

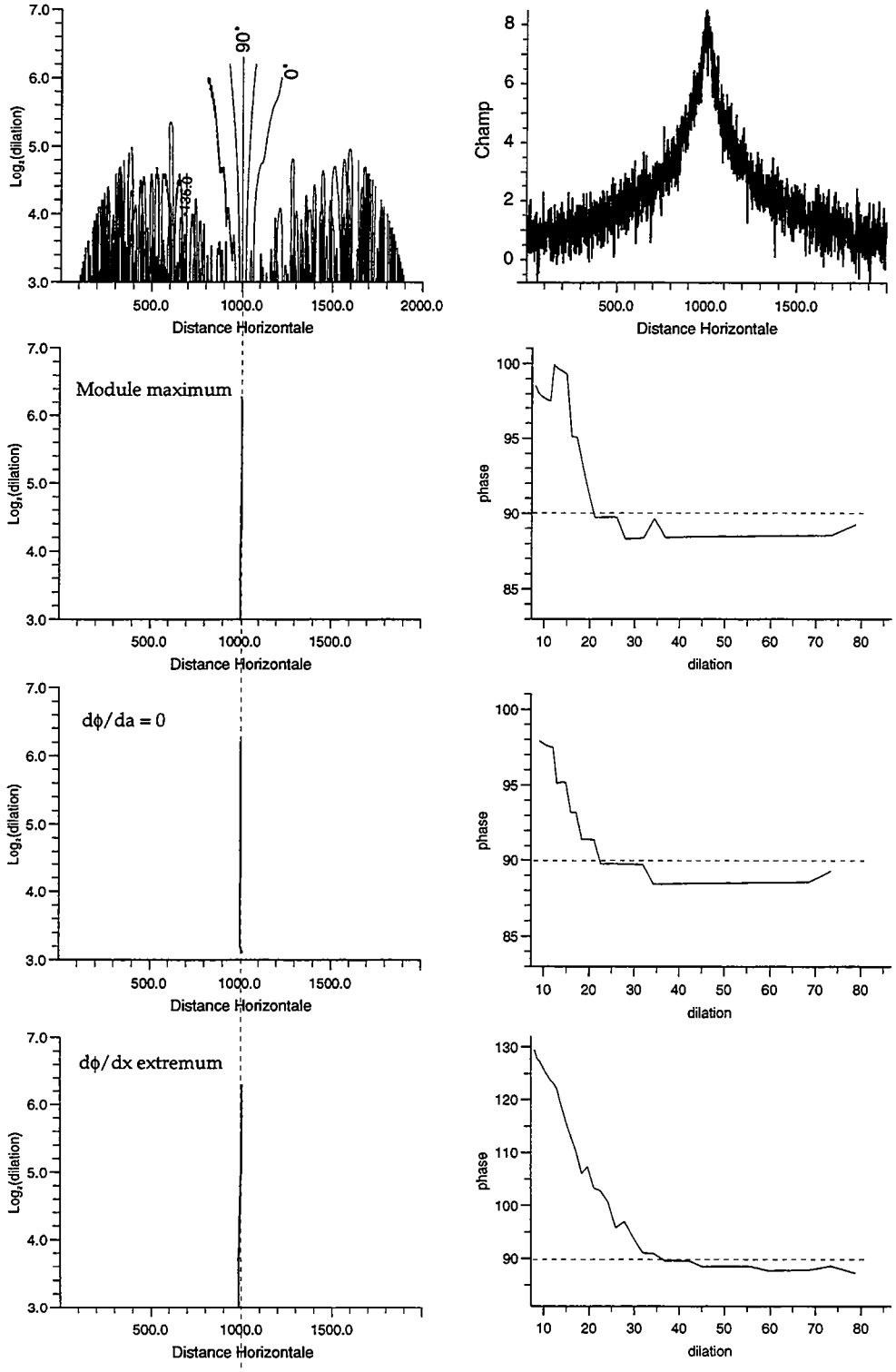


Figure 32 Haut droit : champ de gravité dû à une lame verticale située en $z_1 = 20$, $z_2 = 1000$ auquel nous avons ajouté un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 0.5$. Haut gauche : Phase représentée en courbes de niveaux de la transformée en ondelettes complexes pour L=1. Ensuite, à gauche : squelette extrait de la transformée en ondelettes selon les différentes méthodes, avec en correspondance à droite, les valeurs de la phase le long du squelette. L'influence du bruit est comparable quelle que soit la méthode d'extraction du squelette utilisée.

3.3.b Détermination de la profondeur

Nous pouvons à nouveau déterminer une approximation des profondeurs des bords en recherchant l'expression analytique des arêtes dues à des lames verticales de multipôles dans le cas des ondelettes complexes (encart 7). Nous n'avons pas calculé les expressions analytiques des arêtes lorsque la source est une lame inclinée de multipôles, mais cela pourrait être fait. L'angle d'inclinaison étant en effet maintenant connu grâce à la phase, il pourrait être introduit dans l'algorithme d'ajustement linéaire des arêtes sans que cela constitue une information *a-priori* comme c'était le cas lorsque l'on utilisait les ondelettes réelles.

Les résultats sont alors équivalents à ceux que l'on obtenait dans le cas des ondelettes réelles. Les profondeurs que l'on détermine sont significatives de la partie superficielle du bord, la partie la plus profonde étant moins bien résolue.

Encart 7 : Calcul des arêtes théoriques d'une lame verticale (ondelettes multipolaires complexes)

La fonction de Green est

$$g_z = ln\left[\frac{x^2+z_1^2}{x^2+z_2^2}\right]$$

- **Lame de masse**

$$Max_{lame\,de\,masse}\left(W_{\psi_C^L}\right)(a) = 2a^L\, ln\left(\frac{a+z_1}{a+z_2}\right)$$

- **Lame de dipôle**

$$Max_{lame\,de\,dipole}\left(W_{\psi_C^L}\right)(a) = -2a^L\,\frac{(z_2-z_1)}{(a+z_1)(a+z_2)}$$

- **Lame de quadrupôle**

$$Max_{lame\,de\,quadrupole}\left(W_{\psi_C^L}\right)(a) = -2a^L\left(\frac{1}{(a+z_1)^2}-\frac{1}{(a+z_2)^2}\right)$$

4 Applications à des données gravimétriques

4.1 Introduction

Les données que nous utiliserons dans cette partie sont issues de la grille d'anomalies de gravité marine de Sandwell [54] calculée à partir d'une compilation de données altimétriques Seasat, Geosat (ERM et GM)[2] et ERS-1. La méthode utilisée [57] permet d'obtenir une grille de résolution et de précision comparable à des profils de gravité obtenus sur bateaux. Elle est calculée sur une grille de Mercator, les points en longitude étant espacés de 1/20 degrés, l'espacement des points en latitude variant avec la latitude. Sur chacune des zones que nous avons extraite de cette grille, nous avons donc dû effectuer une projection afin de nous ramener à une grille rectangulaire, l'espacement des points en latitude étant alors constant.

Nous avons choisi d'étudier quelques structures telles que des zones de fractures ou des zones de subduction, que l'on peut modéliser à partir de la structure "lame" que nous avons introduit dans notre méthode d'inversion. Notre choix s'est porté sur des structures soit Nord-Sud, soit Est-Ouest afin de travailler sur des profils extraits de la grille approximativement perpendiculaires à la structure étudiée, évitant ainsi des corrections d'inclinaisons des résultats.

4.2 Zone de fracture Mendocino

La zone de fracture de Mendocino est située dans le Pacifique Nord. Elle s'étend sur plusieurs milliers de kilomètres de la côte ouest des Etats-Unis à 40°N jusqu'à la longitude de 210°W. Nous avons choisi d'étudier la zone comprise entre 150°W et 130°W, où la zone de fracture de Mendocino possède une expression topographique relativement simple. A cette endroit, la différence d'âge entre la partie Sud et la partie Nord de la zone de fracture (ZF) est de 25–30 Ma [34]. Nous avons extrait de cette zone dix profils Nord-Sud espacés de 2° ($\simeq 200\ km$) numérotés de 1 à 10 (figure 33). Le pas d'échantillonnage le long de ces profils est $\delta y = 0.038^o$ ($\simeq 4.2\ km$), ils sont représentés sur la figure 34, la ZF Mendocino étant clairement identifiable aux alentours de 40° de latitude.

Dans un premier temps, nous avons appliqué à chacun de ces profils une transformée en ondelettes réelles avec l'ondelette L=1. La zone de fracture étant un contraste entre deux milieux de densité différente, nous la modélisons par une lame, c'est–à-dire que le résultat de cette transformée en ondelettes devrait être une lame de dipôle. Afin de déterminer quelles sont les lignes d'extréma qui correspondent à la ZF Mendocino, nous avons représenté sur la figure 35 la transformée en ondelette du profil 5 à laquelle nous avons superposé les lignes d'extréma correspondantes. Il existe deux lignes d'extréma correspondant à la ZF Mendocino, confirmant que la structure détectée est une lame de dipôle. Cependant, nous ne considèrerons que l'arête de plus grande énergie qui se situe alors entre une anomalie de gravité négative et une anomalie de gravité positive. C'est sur cette arête que nous appliquerons l'algorithme d'ajustement nous permettant de déterminer les profondeurs. La localisation de toutes les lignes d'extréma extraites des transformées en ondelettes pour tous les profils est représentée sur la figure 36. Les arêtes correspondant à la localisation de la ZF Mendocino et qui nous serviront à déterminer les profondeurs sont représentées par des étoiles. Les résultats de l'ajustement de ces arêtes pour chacun des profils sont représentés sur la figure 37 et sont

[2] Exact Repeat Mission et Geodetic Mission

cohérents d'un profil à l'autre. Nous avons effectué l'ajustement sur un intervalle de dilatation (15–55), excepté pour le profil 3 qui donne de meilleurs résultats entre des dilatations 10 et 35 et sur le profil 7 où l'arête ne se prolonge pas au-delà de la dilation 13. Les résultats sur la plupart des profils montrent que l'une des extrémités de la lame est très superficielle (< 4 km) tandis que la deuxième extrémité se situe approximativement entre 20 et 60 km. Ces profondeurs sont compatibles avec les profondeurs de compensation obtenues dans d'autres études à partir du géoide et de la bathymétrie ([53], [8]). Les résultats sur les profils 1 à 3 sont différents car l'on se situe dans une zone où la ZF Mendocino devient plus complexe, se séparant en une partie Nord et une partie Sud [32]. Sur certains profils (1, 6, 9) et dans l'intervalle de dilatation choisi, l'algorithme d'ajustement des arêtes ne parvient pas à déterminer les profondeurs du bord détecté, la structure étant alors assimilée à une source ponctuelle. Un ajustement sur un autre intervalle de dilatation donne un résultat différent (exemple pour le profil 9, figure 37), plus proche de ceux obtenus sur les autres profils.

Dans un second temps, nous avons étudié ces profils à partir d'une transformée en ondelettes complexes pour L=1. De la même façon que dans le cas des ondelettes réelles, nous avons représenté sur la figure 38 la localisation des lignes d'extréma, les étoiles localisant les arêtes correspondant à la ZF Mendocino. Les squelettes des transformées en ondelettes de chacun des profils, calculés à partir des lignes de maxima du module, sont représentés sur la figure 39. Excepté le profil 7, la ZF est détectée par une seule arête verticale se prolongeant sur toute la gamme de dilatation. C'est sur cette arête que nous déterminerons la phase de la transformée en ondelettes. Dans le cas du profil 7, la ligne 7 qui correspond au maximum d'énergie est affectée par la présence d'une autre anomalie aux alentours de 40,7°, représentée par la ligne 8. Dans ce cas, nous déterminerons la phase dans les petites dilations grâce à la ligne 7, dans les grandes dilatations à partir de la ligne 8. La valeur de la phase le long de ces arêtes est représentée sur la figure 40. Elle reste assez constante d'un profil à l'autre et tend vers –130° quand la dilatation augmente. En considérant toujours que le résultat de la convolution de l'ondelette complexe L=1 avec l'anomalie due à la ZF est une lame de dipôle, la phase obtenue doit être égale à l'angle d'inclinaison du bord (§ 3.3.a). Si la zone de fracture est verticale, on doit obtenir une phase de –90°. En effet, les profils sont traité du Sud vers le Nord, et la partie la plus agée de la lithosphère, donc la plus profonde, est située au Sud de la zone de fracture. La valeur de la phase obtenue indiquerait donc que la zone de fracture est inclinée d'environ 40° par rapport à la verticale et en direction du Nord. Nous retrouvons bien que la partie la plus profonde est située au Sud, la partie la plus superficielle au Nord. Cependant, la valeur de l'inclinaison est beaucoup trop importante, même en considérant que la transition entre les deux domaines de densité différente n'est pas parfaitement verticale. Cette valeur pourrait être expliquée par la structure thermique des zones de fractures. En effet, la distribution de température due à une zone de fracture pour une différence d'âge de 30 Ma ([29], [55])(figure 41) indique que l'isotherme 900° (entre 20 et 50 km) est inclinée d'environ 50° de la partie agée vers la partie jeune. Cette structure thermique pourrait être responsable de la valeur de la phase obtenue, en considérant que l'interface entre les deux milieux d'âges différents est vertical.

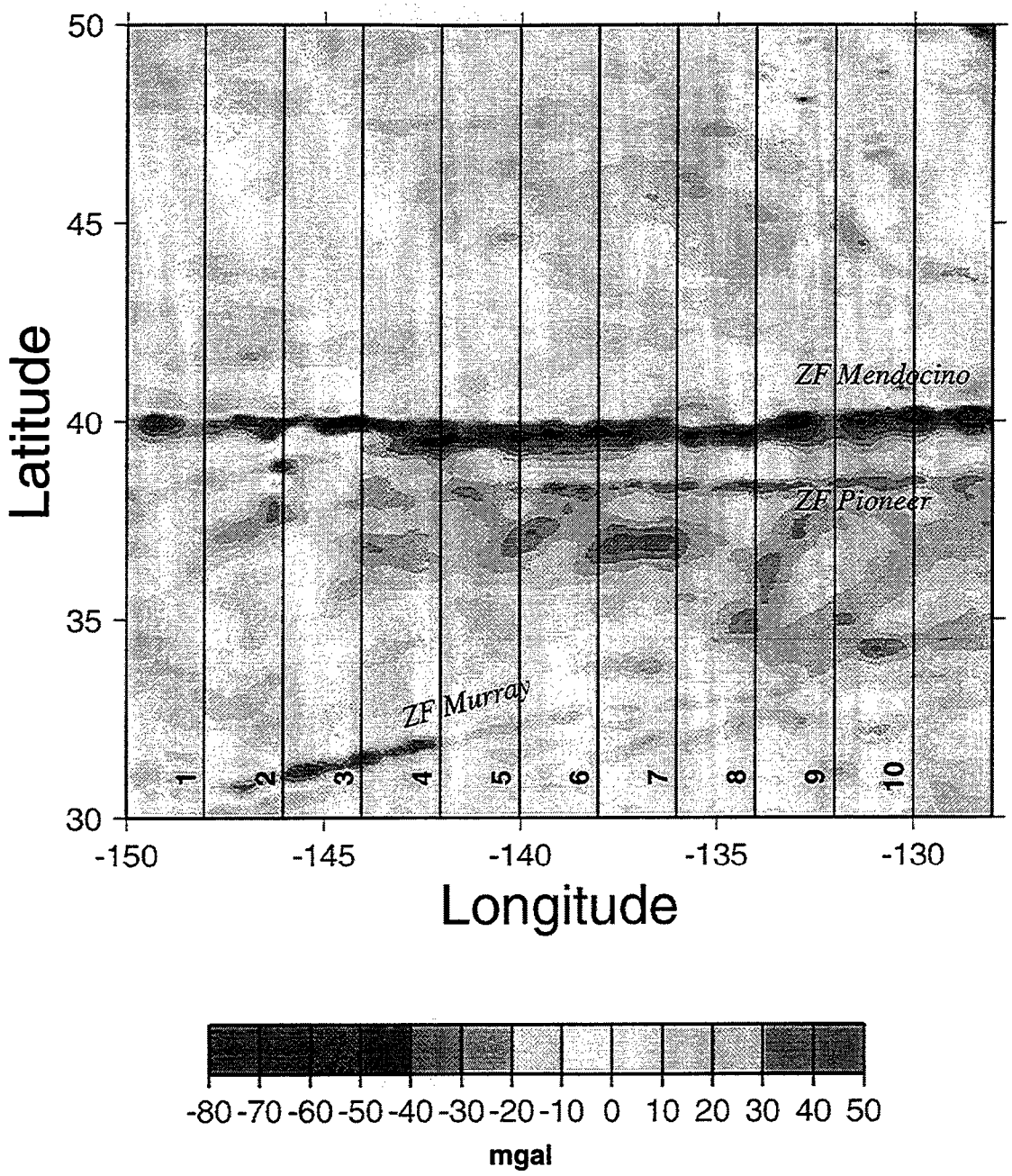


Figure 33 Localisation de la zone de fracture Mendocino et des profils extraits de la grille de gravité de Sandwell [54].

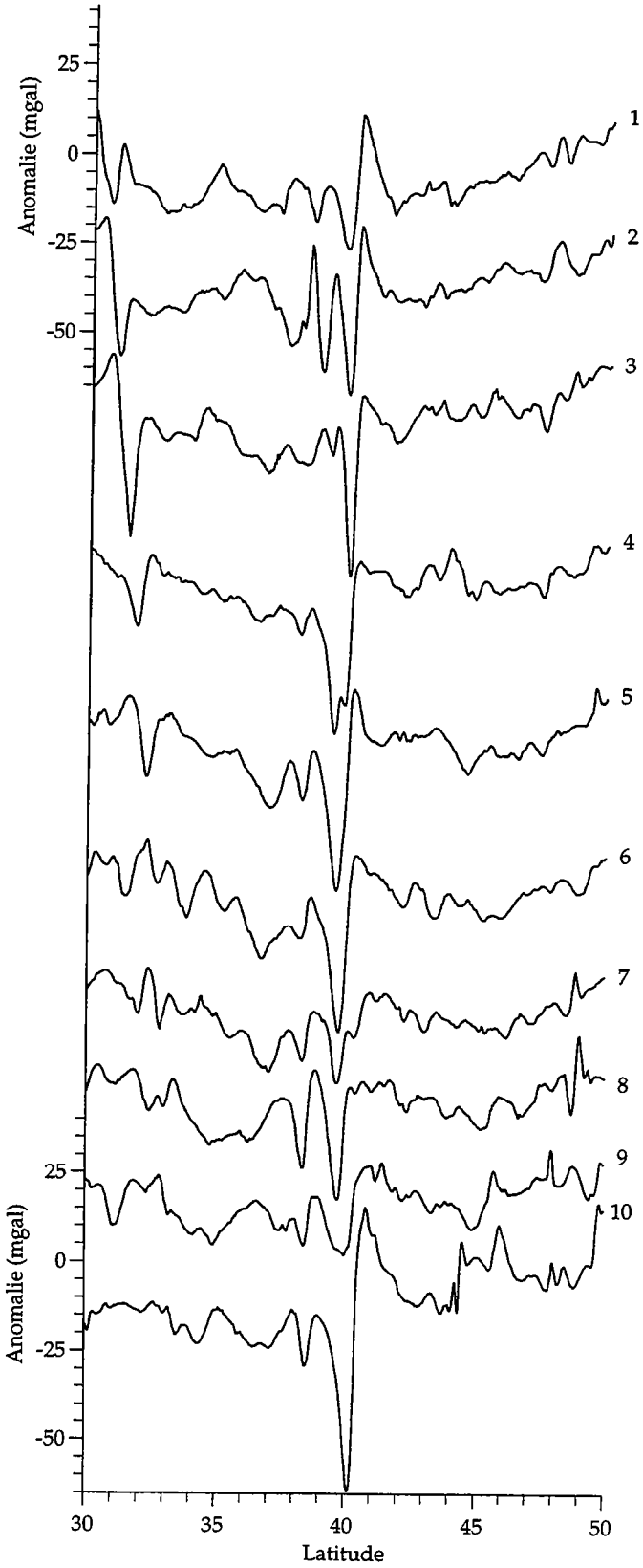


Figure 34 Profils d'anomalie de gravité. La ZF Mendocino est à environ 40° de latitude.

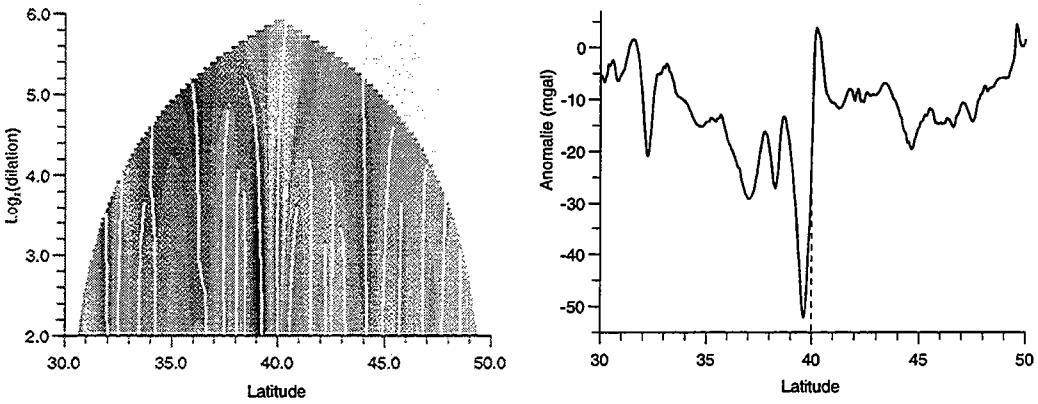


Figure 35 Transformée en ondelettes (L=1) et lignes d'extréma du profil 5, représenté à droite. L'arête de plus grande énergie localisée sur la ZF Mendocino correspond à la transition entre une anomalie négative et une anomalie positive.

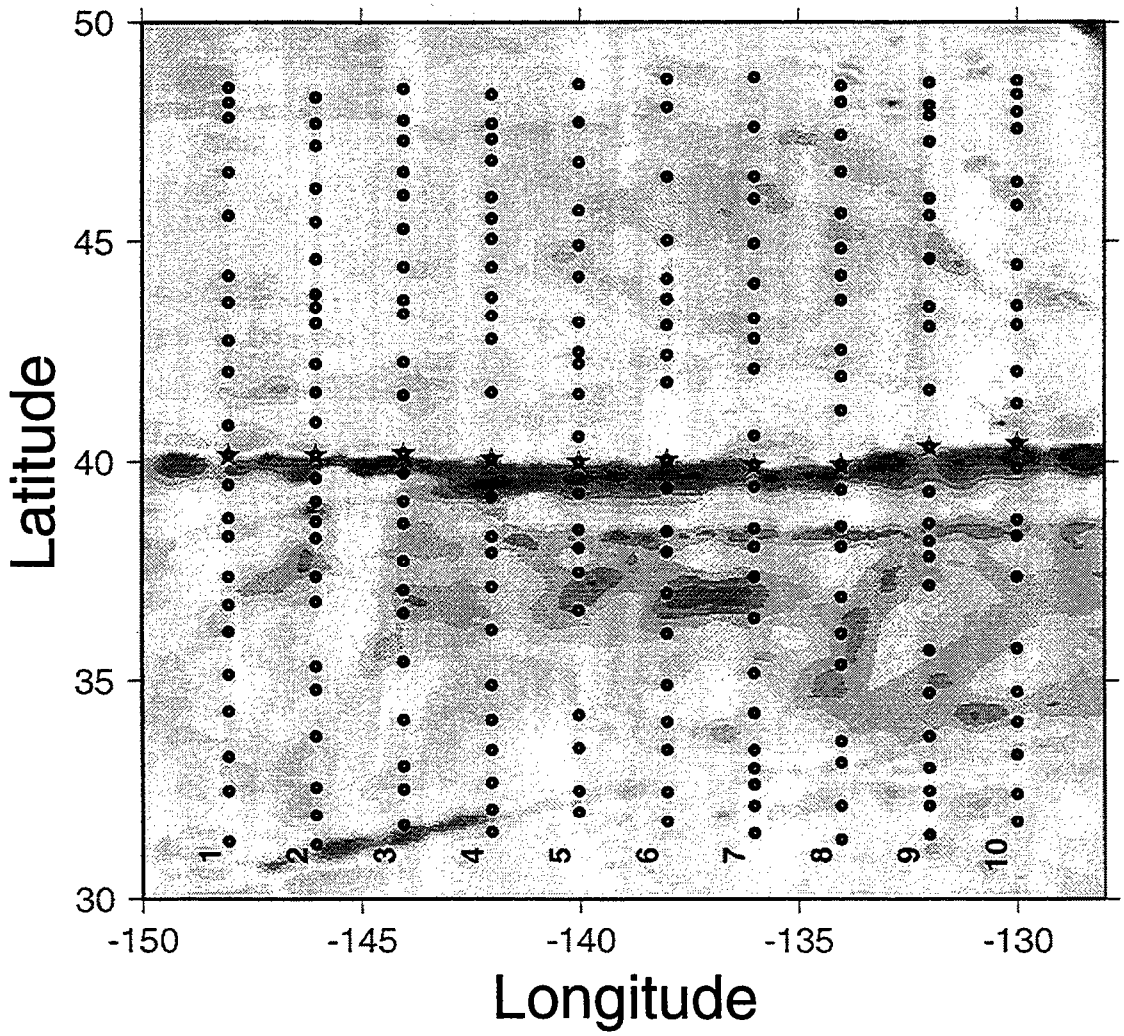


Figure 36 Localisation des arêtes obtenues par transformée avec l'ondelette L=1.
Les arêtes correspondant à la ZF Mendocino sont représentées par une étoile.

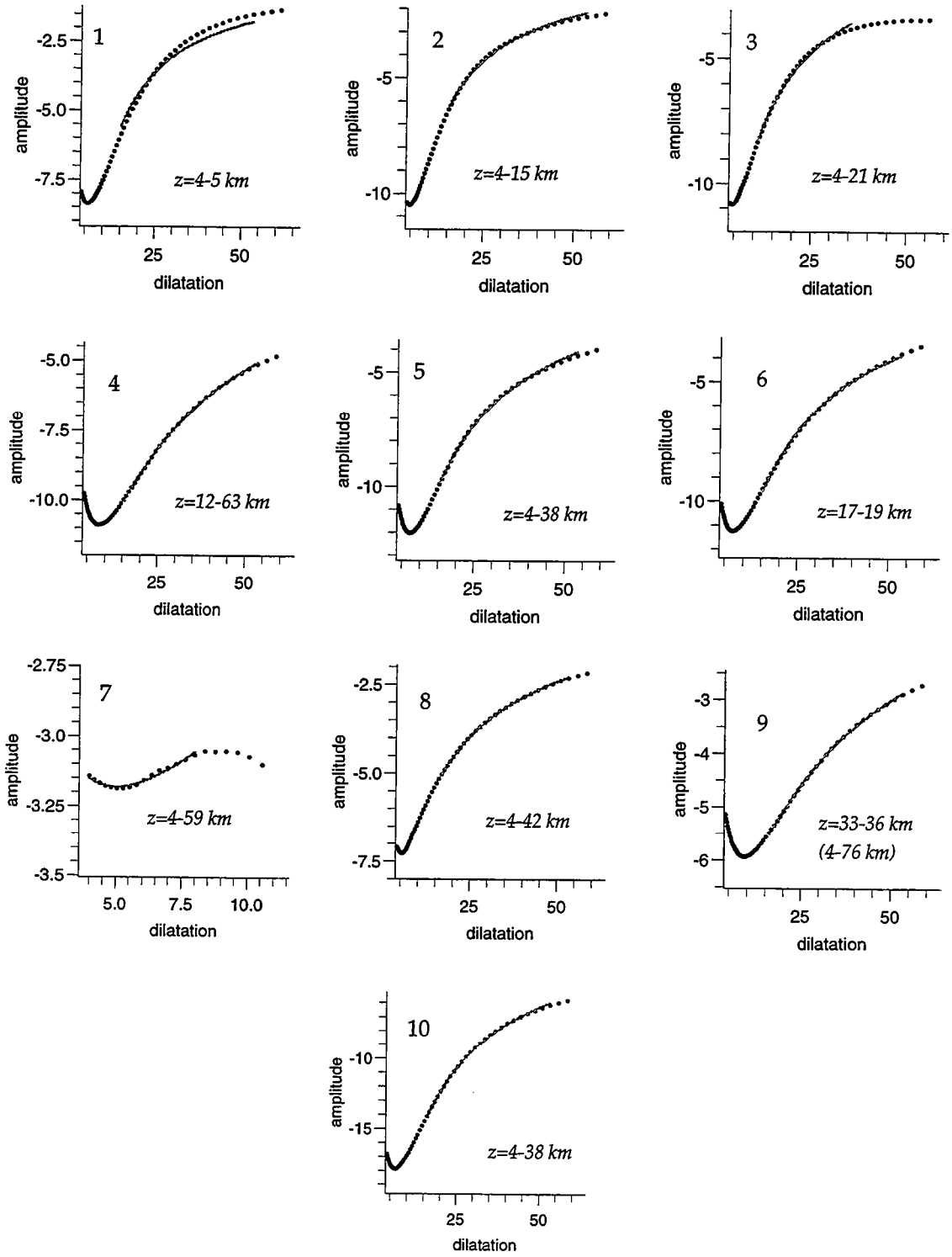


Figure 37 Ajustement des arêtes représentées par une étoile sur la figure 36, pour les profils 1 à 10. Les profondeurs ainsi déterminées sont indiquées sur la figure. Pour le profil 9, les profondeurs obtenues pour un intervalle de dilatation différent sont indiqués entre parenthèses.

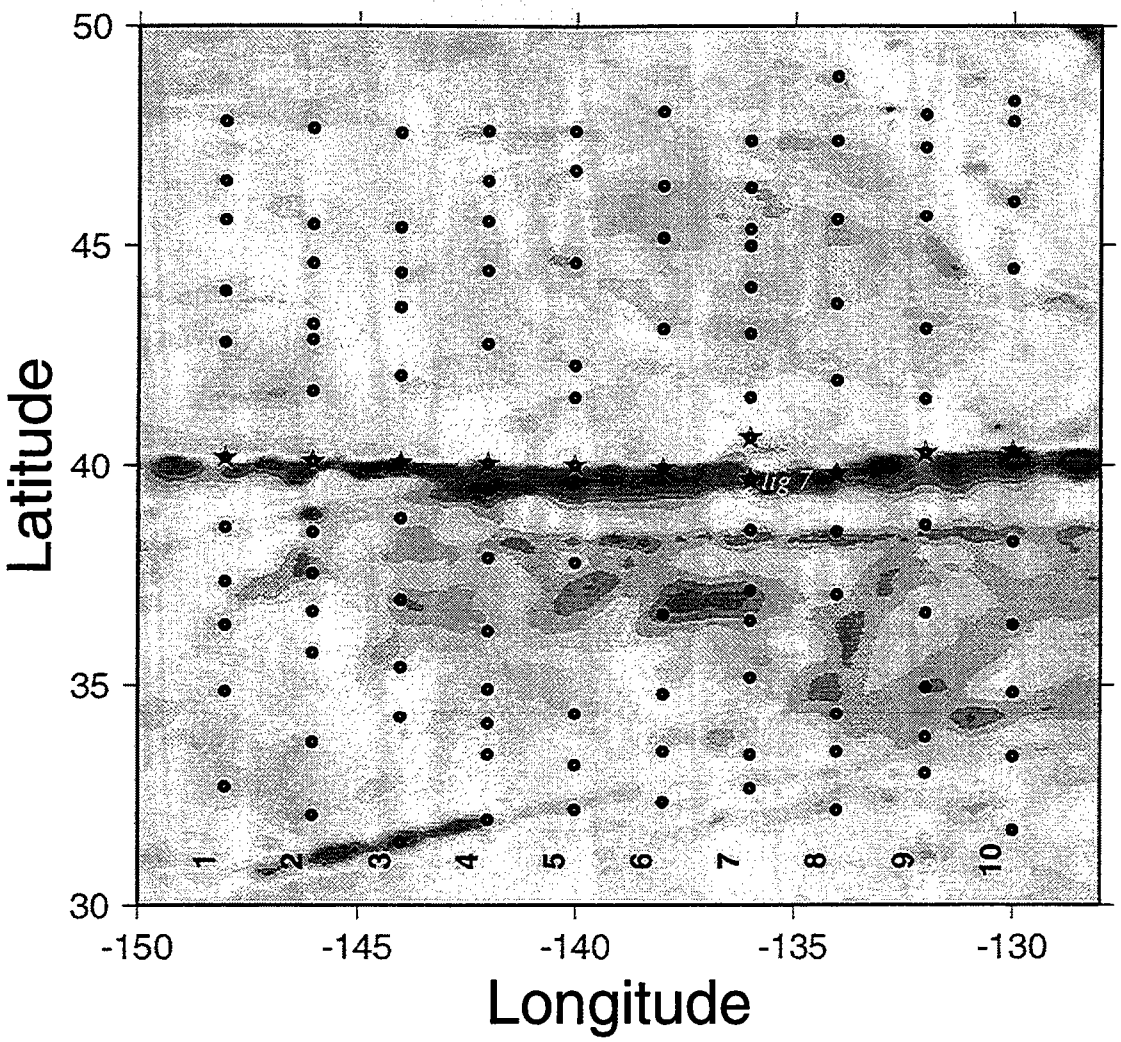


Figure 38 Localisation des arêtes obtenues par transformée avec l'ondelette complexe L=1. Les arêtes correspondant à la ZF Mendocino sont représentées par une étoile.

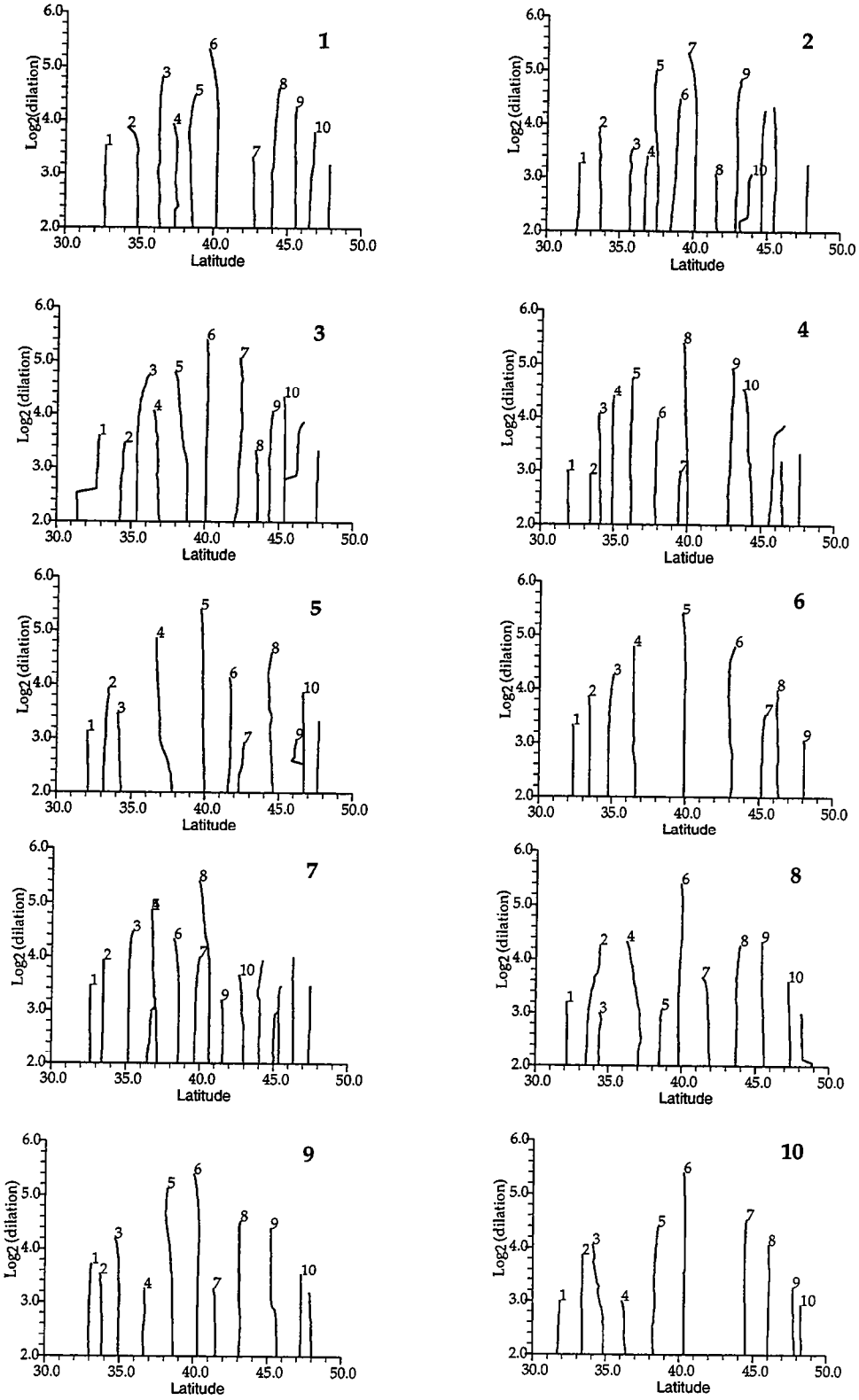


Figure 39 Squelettes des transformées en ondelettes complexes L=1 de chacun des profils 1 à 10, calculés à partir des lignes de maxima du module. Les arêtes correspondants à la ZF Mendocino sont clairement identifiables aux alentours de 40° de latitude.

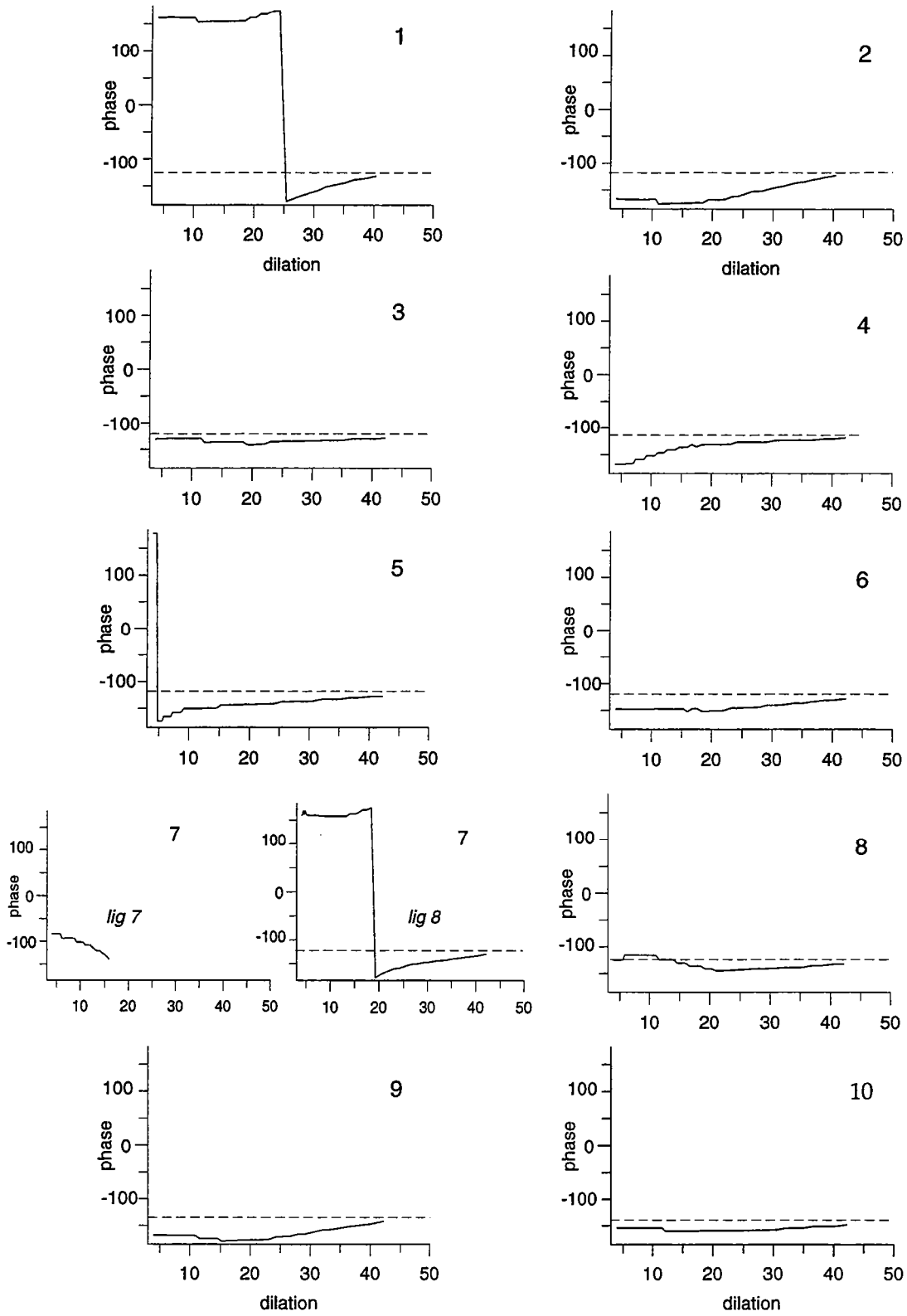


Figure 40 Phase le long des arêtes localisées par une étoile sur la figure 38, pour les profils 1 à 10. Pour le profil 7, la phase correspondant à la ZF Mendocino est celle de la ligne 7 pour les petites dilatations, celle de la ligne 8 pour les grandes dilatations.

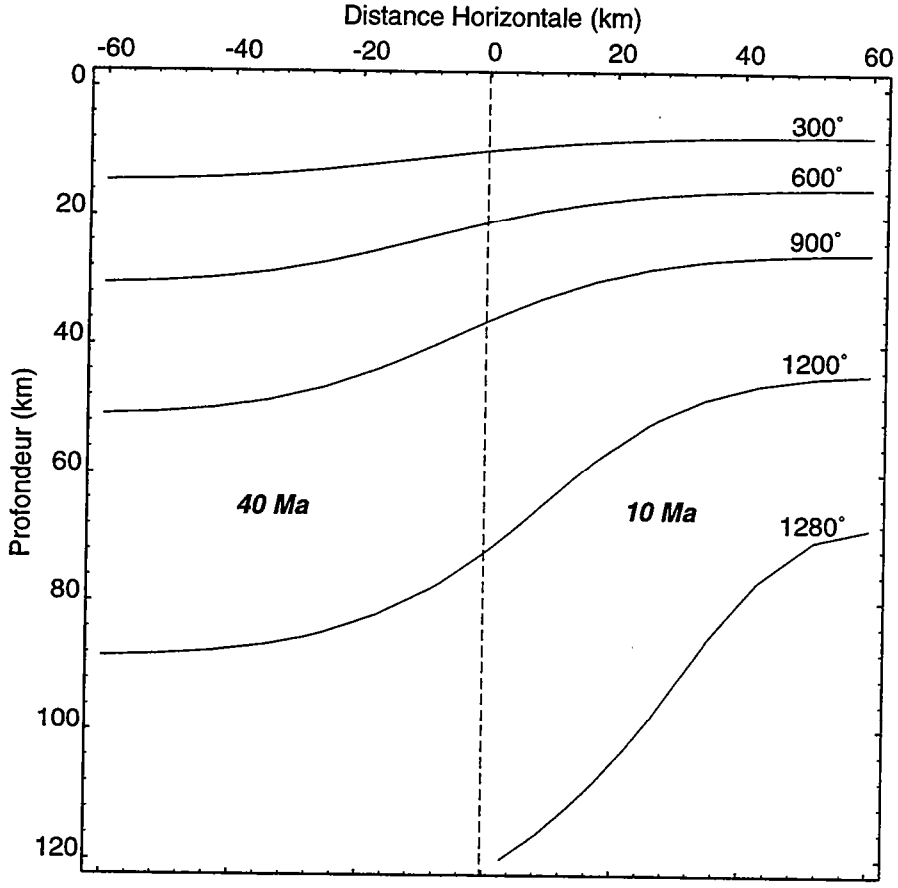


Figure 41 Structure thermique en présence d'une zone de fracture verticale. L'offset en age est de 30 Ma.

4.3 Zone de subduction Kermadec

La zone de subduction de Kermadec est située dans le Pacifique Sud entre 180°E–185°E et 25°S–40°S. La zone de Benioff associée à cette zone de subduction est inclinée de 60° vers l'ouest et se prolonge jusqu'à des profondeurs d'environ 500–550 km ([25], [49]). Nous avons extraits 12 profils E-W intersectant la zone de subduction avec un angle d'environ 70°. Ils sont espacés de 0,85° ($\simeq$ 95 km), le pas d'échantillonnage en longitude étant de 0.05° ($\simeq$ 5.5 km) (figure 42). Ces profils sont représentés en fonction de la longitude sur la figure 43. Nous n'avons pas apporté de corrections d'inclinaison de ses profils par rapport à la structure étudiée, nous avons en effet vérifié que cette correction ne modifiait pas de façon significative les résultats obtenus.

Nous appliquons dans un premier temps une transformée en ondelettes réelles pour l'ondelette L=1 sur chacun des profils. Nous avons représenté sur la figure 44 la transformée en ondelettes du profil 200 et les lignes d'extréma correspondantes. La zone de subduction y est détectée par deux arêtes, c'est-à-dire que nous pourrons la modéliser par une lame de dipôle. La localisation de toutes les lignes d'extréma détectées pour chacun des profils est représentée sur la carte d'anomalie de gravité (figure 45), les arêtes correspondant à la zone de subduction étant indiquées par une étoile. Nous avons estimé les profondeurs associées à la zone de subduction en prolongeant les arêtes dans les dilatations négatives. Les résultats sont présentés sur la figure 46. Les profondeurs obtenues varient entre 120 et 250 km sur tous les profils, excepté pour le profil 340 qui correspond à la transition entre la zone de subduction Kermadec et la zone de subduction Tonga et qui donne une profondeur plus importante. Par cette méthode, nous n'avons accès qu'à la profondeur d'un centre de masse qui, d'après les résultats théoriques, se situerait dans la moitié la plus superficielle de la plaque océanique plongeante. Les ordres de grandeur des profondeurs obtenues sont donc compatibles avec une zone de Benioff se prolongeant jusqu'à environ 500 km ([25], [49]).

Nous avons ensuite effectué une analyse en ondelettes complexes L=1 sur les profils afin de déterminer l'inclinaison possible de la plaque plongeante. La localisation des lignes de maxima du module déduites de ces transformées est représentée sur la carte d'anomalie de gravité (figure 47). Une seule ligne de maxima pour chaque profil correspond à la zone de subduction Kermadec (représentée par une étoile). La transition entre la zone de subduction Kermadec et la zone de subduction Tonga est marquée par une localisation des lignes de maxima des profils 340 et 360 très décalée par rapport à celle des autres profils. Les squelettes de chaque transformée en ondelettes ont été extraits à partir des lignes de maxima du module. Les phases correspondants aux lignes localisées sur la zone de subduction sont représentées figure 48. Les résultats sont très cohérents d'un profil à l'autre, les phases variant entre approximativement -100° dans les petites dilatations et 20° dans les grandes dilatations. L'interprétation de ces résultats est difficile du fait qu'aucune tendance ne se dégage de ces lignes de phase. Pour certains profils (160, 180, 200), la phase présente un seuil assez marqué aux alentours des dilatations 10–20, avec une valeur de phase d'environ –50°. Mais le peu de profils présentant cette tendance nous empêche de considérer cette valeur de phase comme caractéristique de l'inclinaison de la plaque plongeante. Les phases ne semblent pas non plus tendre vers une valeur constante dans les grandes dilatations. Ce grand intervalle de variation de la phase pour une même structure reste inexpliqué. La modélisation d'une plaque d'épaisseur non négligeable par une lame pourrait être une source d'erreurs.

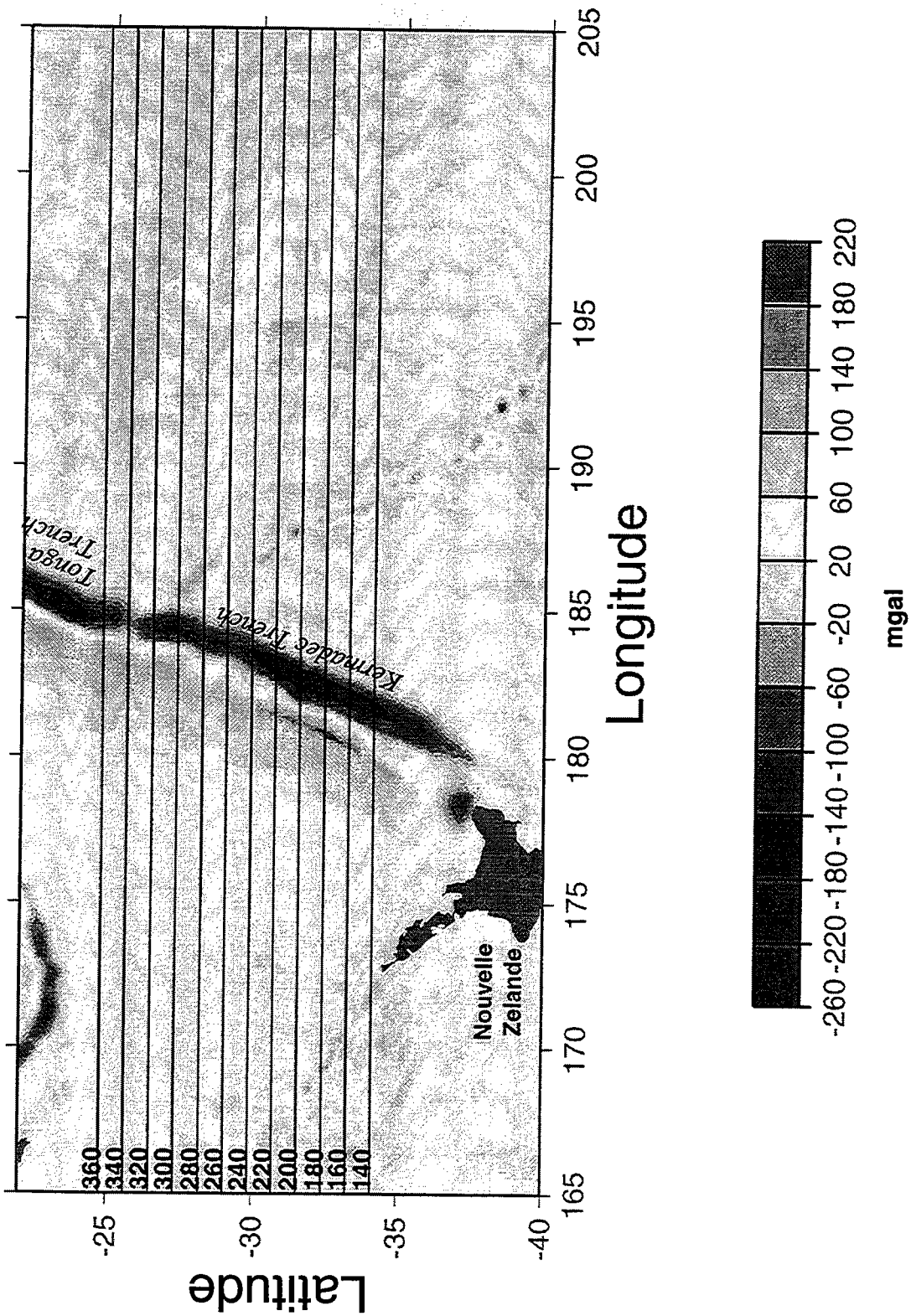


Figure 42 Localisation de la zone de subduction Kermadec–Tonga et des profils extraits de la grille de gravité de Sandwell [54].

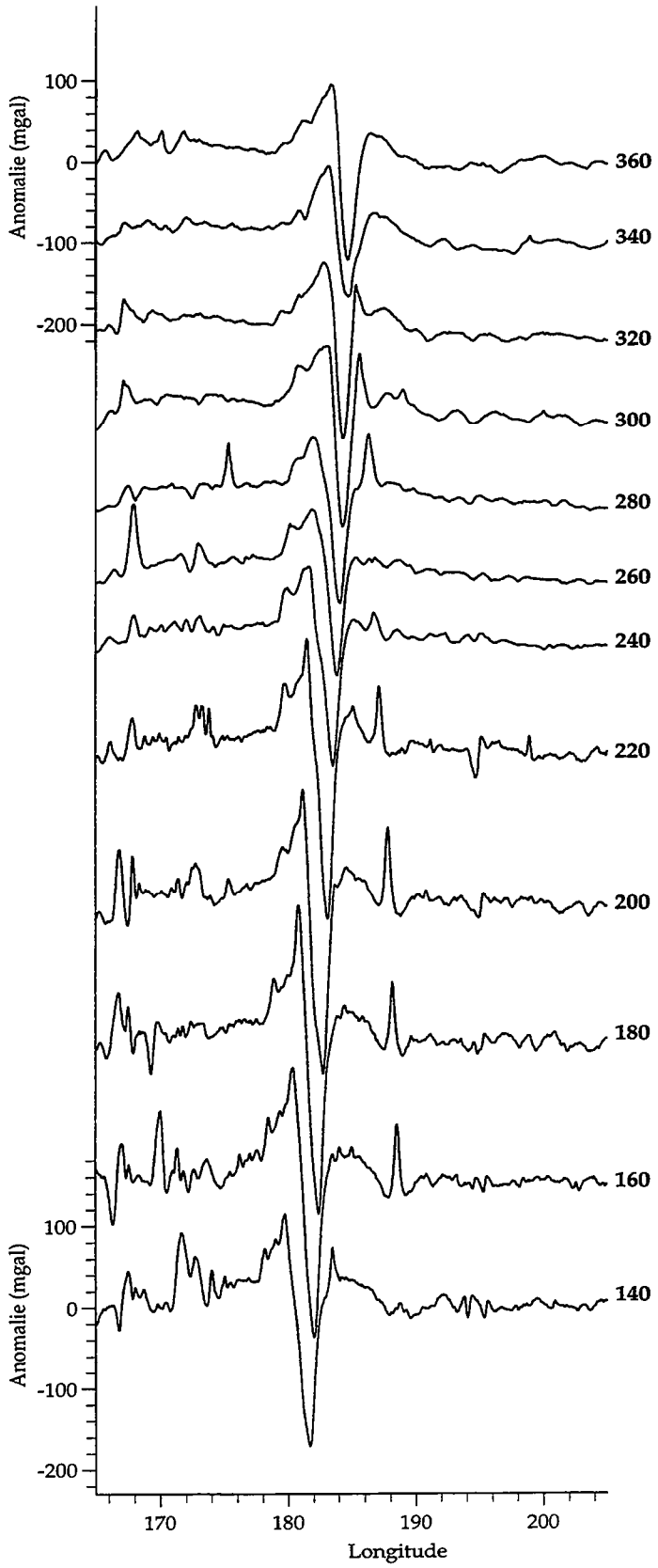


Figure 43 Profils d'anomalie de gravité. La zone de subduction Kermadec est située aux alentours de 182°-184° de longitude

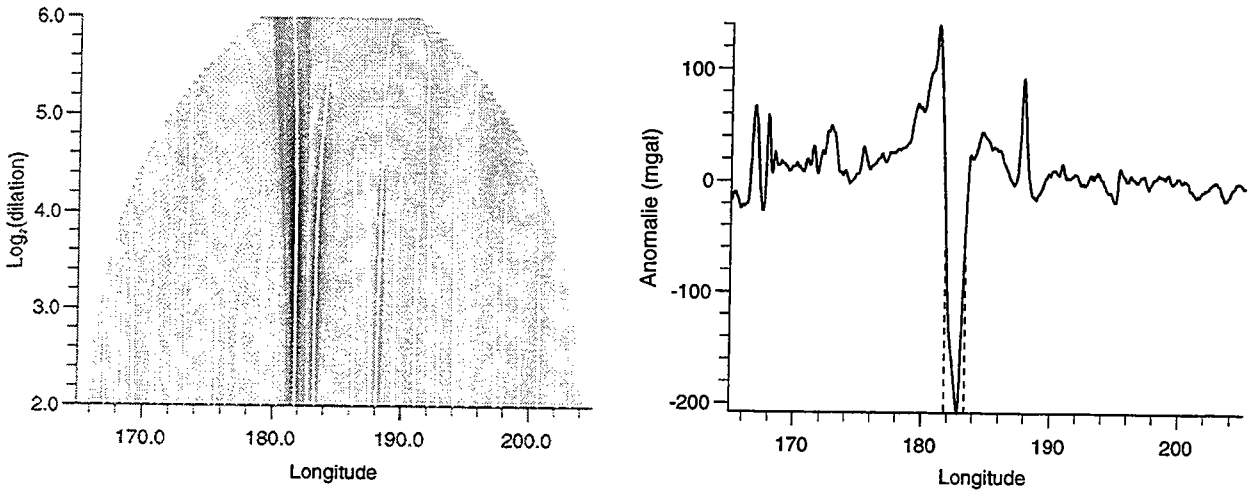


Figure 44 Transformée en ondelettes (L=1) du profil 200 (représenté à droite), et lignes d'extéma correspondante. Les deux arêtes de plus grande énergie localisant la zone de subduction Kermadec sont en 181,7 et 183,3 degrés de longitude.

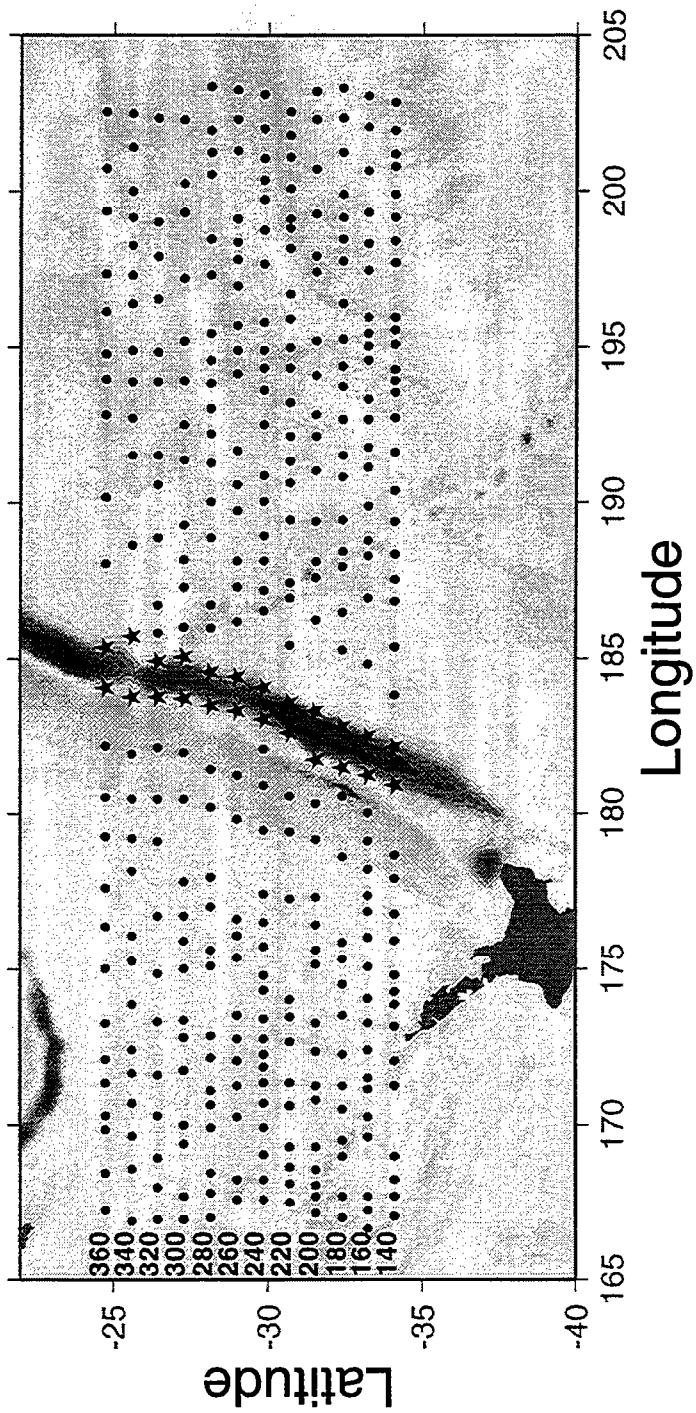


Figure 45 Localisation des lignes d'extréma des transformées en ondelettes (L=1) de tous les profils. Les lignes d'extréma correspondant à la zone de subduction Kermadec sont indiquées par une étoile.

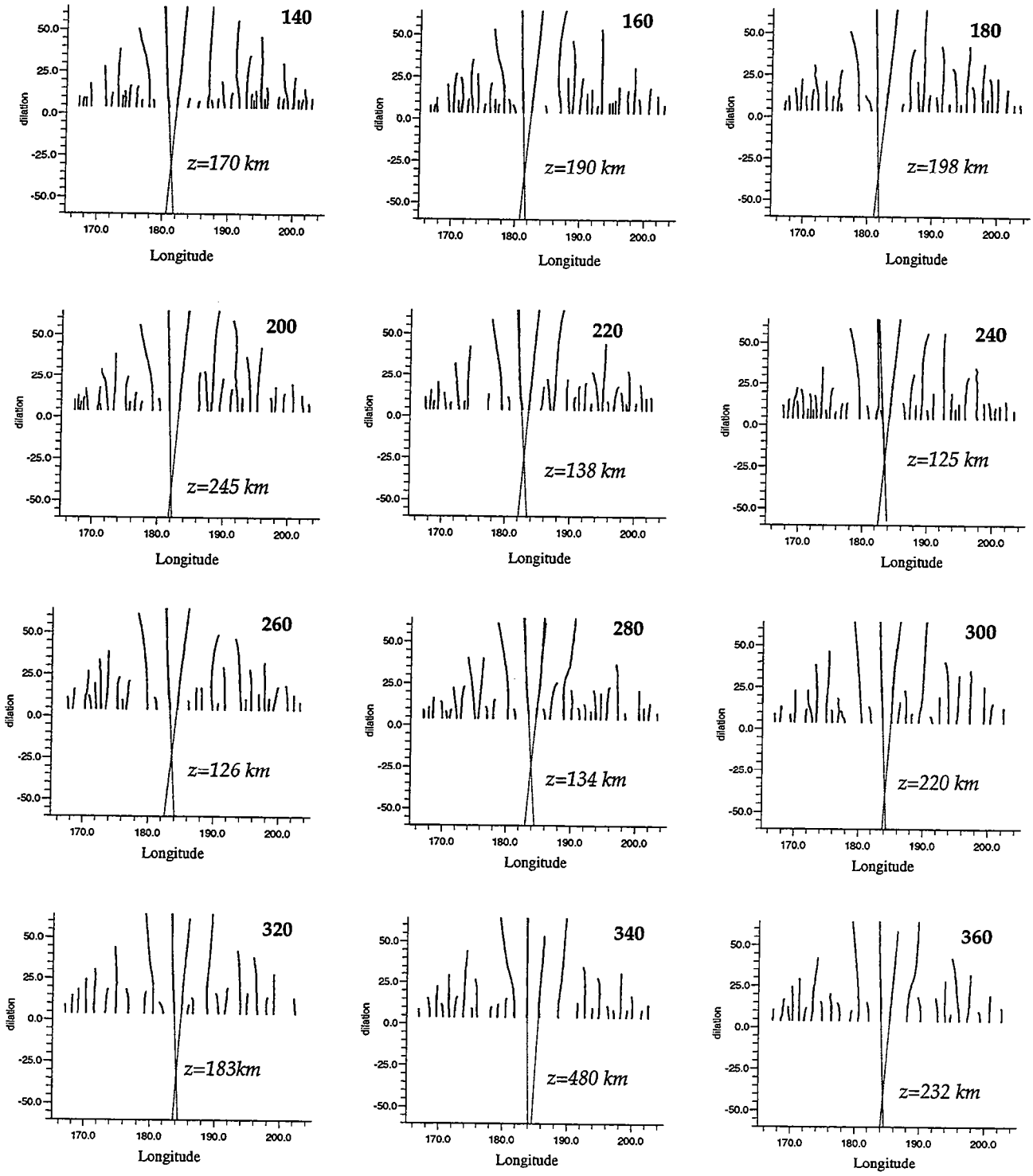


Figure 46 Lignes d'extréma des transformées en ondelettes (L=1) de chacun des profils. Les profondeurs associées à la zone de subduction (indiquées sur la figure) sont obtenues par prolongation des arêtes (localisées par une étoiles sur la figure 45) dans les dilatations négatives.

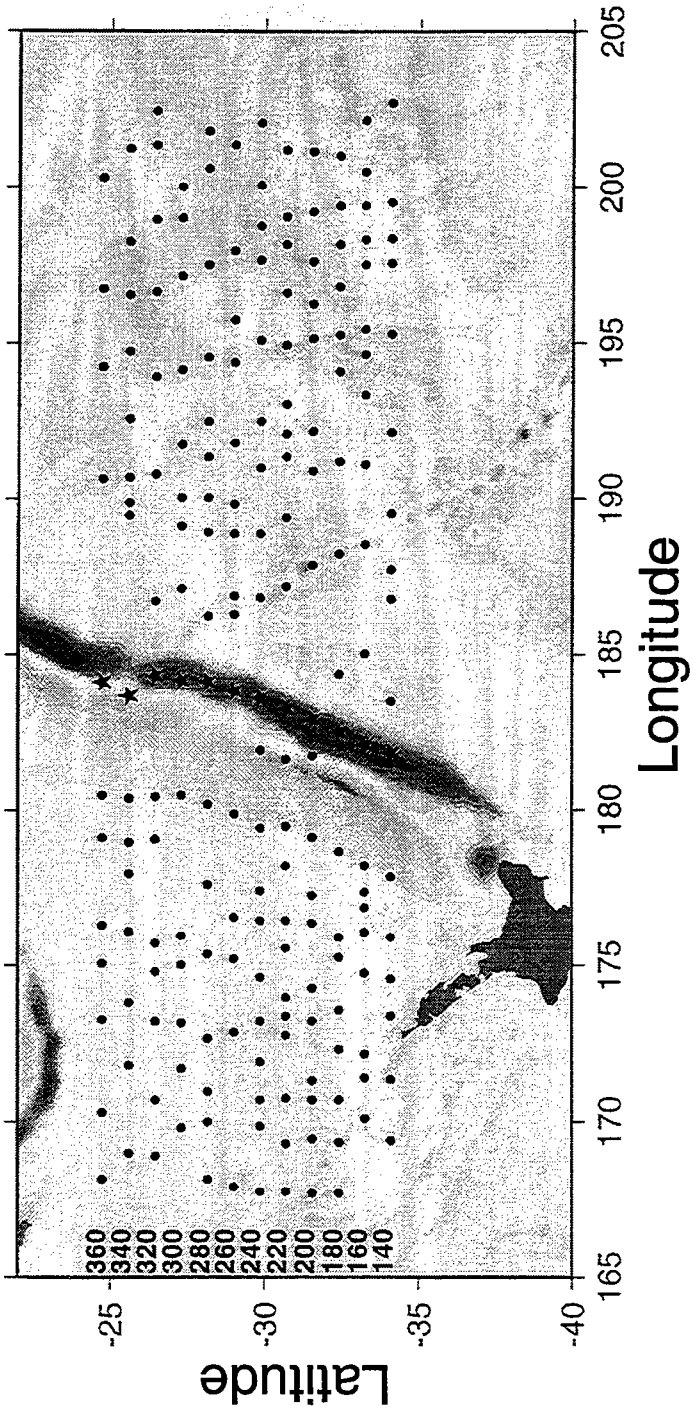


Figure 47 Localisation des lignes de maxima du module des transformées en ondelettes complexes (L=1) de tous les profils. Les lignes de maxima correspondant à la zone de subduction Kermadec sont indiquées par une étoile.

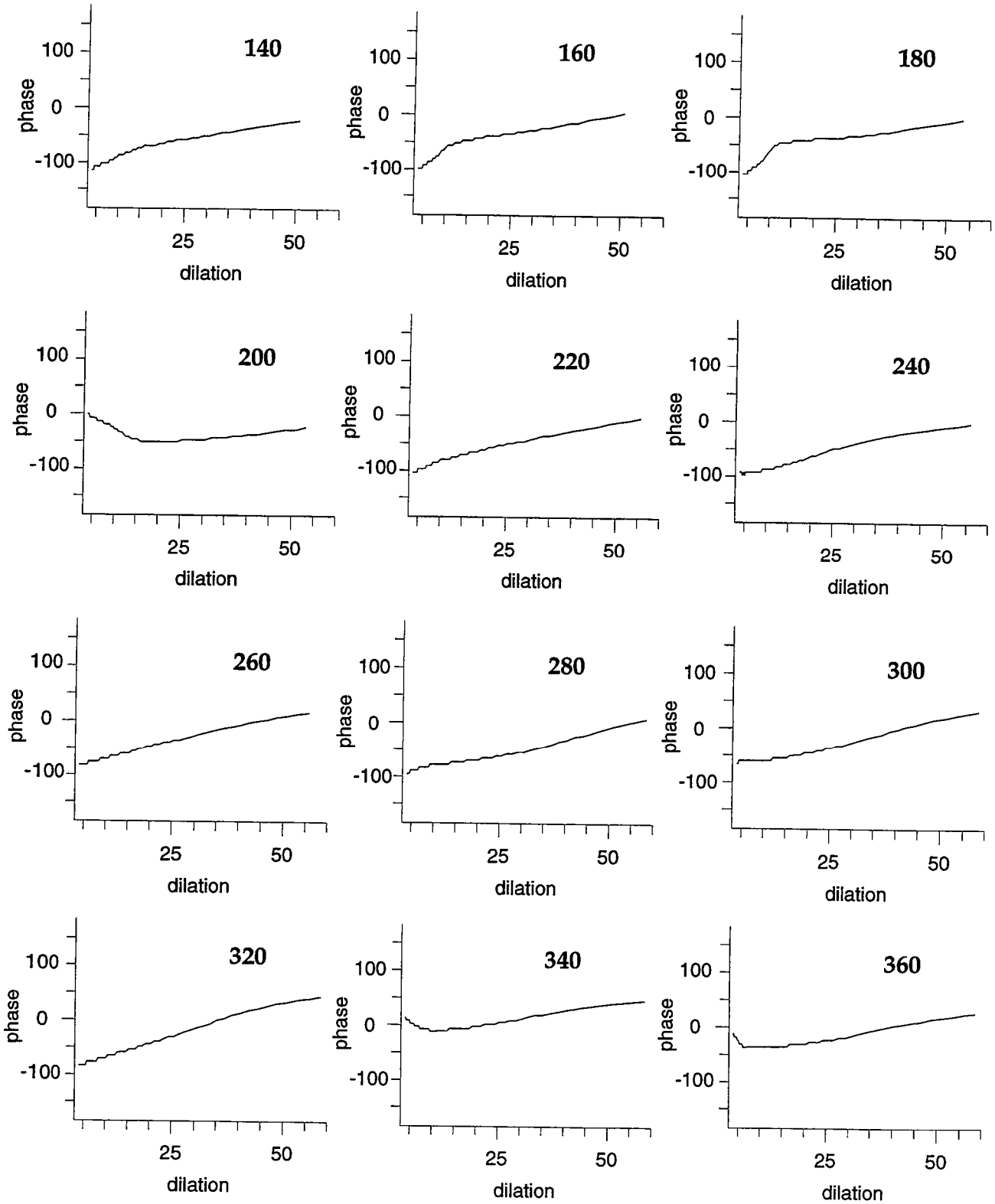


Figure 48 Phase le long des arêtes localisées par une étoile sur la figure 47.

5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons vu que la transformée en ondelettes était un outil puissant pour la résolution du problème inverse des champs de potentiels. Elle permet une localisation très précise des événements majeurs du signal. La théorie développée dans le cadre de sources homogènes nous a permi d'introduire des ondelettes multipolaires réelles. L'axe des dilatations de la transformée en ondelettes devient alors équivalent à un axe de prolongement analytique correspondant aux profondeurs. La profondeur de la source, ainsi que sa nature multipolaire, sont alors déterminées de façon très directe. De plus, nous avons montré que l'utilisation de la transformée en ondelettes, en particulier des lignes d'extréma, rendait la méthode robuste vis-à-vis du bruit.

Nous avons pu généraliser cette méthode à des sources étendues dont les champs ne vérifient plus l'équation d'homogénéité, car elle constitue une sorte de théorie asymptotique dans laquelle des bords d'objet peuvent être vus à certaines échelles comme des sources ponctuelles. Nous avons ainsi montré que l'on pouvait caractériser des structures verticales avec des déterminations de leurs profondeurs précises. Nous avons ensuite été amené à introduire des ondelettes complexes multipolaires qui nous ont permis de déterminer l'inclinaison magnétique de sources ponctuelles et l'inclinaison (géométrique) de structures inclinées.

En règle générale, cette méthode donne d'excellents résultats sur des sources isolées, même en présence de bruit. On peut d'ores et déjà penser que les résultats ne seront pas trop détériorés lorsque deux sources seront proches, en particulier si l'on ne considère que les petites dilatations. Le problème qui pourrait alors survenir serait la présence d'un bruit important qui nous empêcherait d'avoir accès à ces petites dilatations.

Une première application à des données de gravité marine nous a permi de montrer les possibilités de cette méthode. L'étude de deux structures de caractères différents, notamment en terme de profondeurs (une zone de fracture et une zone de subduction), a montré que nous obtenons effectivement des ordres de grandeur des profondeurs différents, compatibles avec les descriptions communément admises de ces deux types de structures. Nous avons également pu expliquer les résultats concernant la phase déterminée à partir de la transformée en ondelettes complexe, au moins pour la zone de fracture. Ces premiers résultats sont encourageants, bien que nous soyons conscients qu'une étude plus fine est nécessaire pour proposer une véritable interprétation géodynamique des résultats.

Chapitre IV

Reconstruction de signaux – Filtrage par critères structuraux

Chapitre IV

Reconstruction de signaux – Filtrage par critères structuraux

1 Introduction

Le cadre de l'analyse en ondelette permet de filtrer des signaux. Une première application à partir d'ondelettes orthogonales a été traitée dans le chapitre I sur des données géophysiques. Le problème abordé dans ce chapitre est différent : nous souhaitons effectuer un filtrage de données de champs de potentiel, afin de reconstruire un champ partiel dû à certaines sources selectionnées. Le choix du type de sources se fera selon des critères de forme ou de profondeurs.

La méthode que nous proposons est directement liée à l'analyse des champs de potentiel par ondelettes continues formulée dans les chapitres II et III. Nous avons vu que la détection des anomalies du signal se faisait en recherchant les arêtes de la transformée en ondelettes, celles-ci ayant des caractéristiques différentes selon le type de sources présentes. Le principe du filtrage que nous proposons consiste à sélectionner les lignes d'extréma dues à un type de source choisi et à reconstruire le signal uniquement à partir de ces arêtes.

Dans un premier temps, nous rappellerons les principes de la reconstruction des signaux dans le cadre de la transformation en ondelettes continue. Nous verrons également qu'il est possible de reconstruire la transformée en ondelettes à partir d'une seule voix connue. Nous pourrons utiliser soit le noyau reproduisant, que nous définirons et qui résulte de la redondance de la transformée en ondelettes continue, ou bien la formulation particulière aux champs de potentiels que nous avons développée dans les deux chapitres précédents. Les étapes conduisant au filtrage seront donc : sélection des arêtes, reconstruction d'une voix

puis de la transformée en ondelettes à partir de ces lignes d'extréma, et enfin recontruction du signal à partir de cette transformée.

Le cadre théorique posé, nous aborderons les problèmes auxquels nous avons été confrontés lors des applications numériques. Nous verrons par quels moyens nous pouvons contraindre la reconstruction d'une voix à partir de ces extréma. Nous verrons également comment l'on peut tenir compte de la discrétisation lors de la reconstruction de la transformée en ondelettes et du signal.

2 Principes

2.1 Formule de reconstruction

Dans le cadre de la théorie des ondelettes continues, il est possible de reconstruire le signal initial à partir de sa transformée en ondelettes en recherchant l'ondelette reconstructive $\chi(x)$ telle que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} W_{\psi|f}(x,a) *_x \chi_a(x) da \tag{IV.1}$$

Le calcul de la transformée de Fourier de cette expression conduit à (Ψ et X étant les transformée de Fourier de respectivement ψ et χ) :

$$\int_0^{+\infty} \Psi(au)\mathrm{X}(au)da = 1 \tag{IV.2}$$

qui admet pour solution :

$$\mathrm{X}(bu) = \frac{\bar{\Psi}(bu)}{\int_0^{+\infty} |\Psi(au)|^2 da} \qquad \forall b > 0 \tag{IV.3}$$

si

$$0 < \int_0^{+\infty} |\Psi(au)|^2 da < \infty\,. \tag{IV.4}$$

Cette dernière relation fournit alors la condition d'admissibilité

$$0 < C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\Psi(u)|^2}{|u|} du < \infty \tag{IV.5}$$

qui signifie que l'ondelette ψ doit être de moyenne nulle (i.e. $\Psi(0) = 0$). L'expression de l'ondelette reconstructive est alors :

$$\chi_a(x) = \frac{\bar{\psi}_a(-x)}{aC_\psi} \tag{IV.6}$$

ce qui permet d'obtenir la formule de reconstruction continue

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\psi|f}(\tau, a)\, \bar{\psi}_a(x-\tau) d\tau \frac{da}{a}.} \tag{IV.7}$$

Les ondelettes multipolaires que nous utilisons dans l'analyse de champs de potentiel développée précédemment sont admissibles et permettent donc la reconstruction du signal analysé grâce à la relation (IV.7).

2.2 Noyau reproduisant

La décomposition d'un signal sur la famille d'ondelettes continue $\{\psi_a(t-\tau), a \in \mathbb{R}^{+*}, \tau \in \mathbb{R}\}$ est redondante. Il en résulte que les coefficients en ondelettes sont corrélés. En effet, une échelle donnée b peut être calculée en utilisant la formule de reconstruction (IV.7) :

$$\begin{aligned} W_{\psi|f}(x\,,b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b} f(\tau)\, \psi\left(\frac{x-\tau}{b}\right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b\,C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\psi|f}(\tau'\,,a)\, \bar{\psi}\left(\frac{\tau-\tau'}{a}\right) \psi\left(\frac{x-\tau}{b}\right) d\tau' \frac{da}{a^2} d\tau \end{aligned} \quad \text{(IV.8)}$$

Soit $\xi = \dfrac{\tau-\tau'}{a}$, $d\xi = \dfrac{d\tau}{a}$ alors

$$W_{\psi|f}(x\,,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b\,C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\psi|f}(\tau'\,,a)\, \bar{\psi}(\xi) \psi\left(\frac{x-\tau'-a\xi}{b}\right) d\tau' \frac{da}{a} d\xi \quad \text{(IV.9)}$$

Nous introduisons maintenant le noyau reproduisant de l'ondelette ψ défini par :

$$\begin{aligned} N_b(x) &= \frac{1}{C_\psi} (\psi * \bar{\psi}_b)(x) \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau)\, \frac{1}{b} \bar{\psi}\left(\frac{x-\tau}{b}\right) d\tau \end{aligned} \quad \text{(IV.10)}$$

on en déduit l'équation reproduisante :

$$W_{\psi|f}(x\,,b) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\psi|f}(\tau'\,,a) N_{b/a}\left(\frac{x-\tau'}{a}\right) d\tau' \frac{da}{a} \quad \text{(IV.11)}$$

On peut également introduire une fonction $K_{b,a}$ équivalente au noyau reproduisant définie par :

$$\begin{aligned} K_{b,a}(x) &= \frac{1}{C_\psi} (\psi_a * \bar{\psi}_b)\,(x) \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \psi\left(\frac{\tau}{a}\right) \frac{1}{b} \bar{\psi}\left(\frac{x-\tau}{b}\right) d\tau \end{aligned} \quad \text{(IV.12)}$$

On obtient alors une version modifiée de l'équation reproduisante que nous utiliserons lors des applications numériques :

$$W_{\psi|f}(x,b) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W_{\psi|f}(\tau',a)K_{a,b}(x-\tau')\,d\tau'\frac{da}{a}$$
$$= \int_0^{+\infty} W_{\psi|f}(x,a) *_x K_{a,b}(x)\frac{da}{a} \qquad \text{(IV.13)}$$

Dans le filtrage que nous souhaitons effectuer, le noyau reproduisant pourra donc être utilisé dans l'étape de reconstruction de la transformée en ondelettes à partir de certains coefficients connus. En particulier, la relation IV.13 permettra de calculer chaque voix b de la transformée à partir d'une seule voix connue a.

3 Mise en pratique

3.1 Reconstruction de la transformée en ondelettes à partir de ses arêtes

3.1.a Méthode générale

Dans cette partie, nous cherchons à reconstruire la transformée en ondelettes uniquement à partir de ses lignes d'extréma. La reconstruction de la transformée en ondelettes à partir d'une voix connue pourra être effectuée à partir du noyau reproduisant. Dans le cadre de la théorie du problème inverse formulée à partir de la décomposition en ondelettes multipolaires, nous avons un deuxième moyen de déduire toutes les voix de la transformée à partir d'une seule connue, grâce à la relation

$$W_{\psi^L|f(.,z_0)}(x,a) = a^L OD(x,q_1,...,q_L) *_x f(x,z_0) *_x P_a(x)\,. \qquad \text{(IV.14)}$$

En effet, quelque soit la dilatation choisie, cette voix correspondra à un champ de potentiel, la relation entre chaque voix s'exprimant par un prolongement analytique de la façon suivante :

$$W_{\psi^L|f(.,z_0)}(x,b) = \frac{b^L}{a^L} W_{\psi^L|f(.,z_0)}(x,b) * P_{b-a}(x) \qquad \text{(IV.15)}$$

La connaisance de la voix a suffit donc à déterminer la voix b par l'intermédiaire d'un simple prolongement de *(b-a)* et d'un facteur multiplicatif. Il faut cependant remarquer que, du fait de l'instabilité numérique de l'opérateur de prolongement vers le bas, il faudra utiliser les voix correspondant aux échelles les plus petites pour reconstruire celles correspondant aux échelles les plus grandes, c'est-à-dire que $b>a$.

La principale difficulté à considérer pour réaliser le filtrage par "type de sources" est alors de reconstruire une voix de la transformée à partir de ces seuls extréma. En effet, le noyau reproduisant n'est pas suffisant pour réaliser la reconstruction d'une voix. A ce stade, la seule contrainte est apportée par la méthode de résolution du problème inverse que nous avons proposée : la transformée en ondelettes est un champ de potentiel, c'est-à-dire qu'elle doit vérifier l'équation de Laplace. Le problème consiste alors en une interpolation ou extrapolation sur tous les points de l'échantillonnage spatial, à partir de quelques points connus.

Plusieurs méthodes d'interpolation existent, il suffit alors de choisir les plus adaptées à notre problème. Dans les parties suivantes, nous décrivons deux méthodes, méthode de relaxation et méthode d'interpolation par spline biharmonique, qui permettent d'effectuer une interpolation 2D. Nous reconstruisons alors directement la totalité de la transformée en ondelettes à partir des extréma de chaques voix. Ces méthodes permettent de reconstruire une fonction vérifiant l'équation de Laplace, ce qui est le cas de la transformée en ondelettes.

3.1.b Méthode de relaxation

La transformée en ondelettes *W(x,a)* d'un champ de potentiel avec une ondelette multipolaire vérifie :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial a^2} = 0 \qquad \text{(IV.16)}$$

du fait que l'axe des dilatations peut être confondu avec celui des profondeurs. On réécrit cette équation comme une équation de diffusion

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial a^2} \qquad \text{(IV.17)}$$

Quand $t \longrightarrow \infty$, la distribution initiale se *relaxe* vers une solution d'équilibre dont les dérivées par rapport au temps tendent vers zéro. Ce sera donc la solution de l'équation (IV.16).

L'interpolation se fait sur une grille rectangulaire *(j=1,...N ; k=1,..M)*. L'équation (IV.17) s'écrit alors :

$$W_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{4}\left(W_{j+1,k}^{n} + W_{j-1,k}^{n} + W_{j,k+1}^{n} + W_{j,k-1}^{n}\right) \qquad \text{(IV.18)}$$

la valeur du module au point *(j,k)* de la grille et à l'itération *n+1* étant déterminée par la moyenne des quatres points avoisinants déterminés à l'itération *n*. La première itération est effectuée à partir des valeurs et positions des lignes d'extréma, les autres points de la grille étant initialisés à zéro. On répètera ensuite la procédure jusqu'à convergence de la solution, en conservant les valeurs initiales des points correspondants aux extréma.

Les tests que nous avons effectués à partir de cette méthode ont montré que les rapports de dilatations était bien pris en compte dans la reconstruction de chaque voix de la transformée en ondelettes, au moins dans le milieu de la grille (figure 49). Par contre, il subsiste quelques problèmes en ce qui concerne les valeurs des voix extrêmes puisqu'elles sont interpolées à partir de valeurs initialisées à zéro (correspondant à des points extérieurs à la grille dans laquelle la transformée est reconstruite). De plus, les résultats obtenus montrent

que l'algorithme ne parvient pas à déterminer une courbe de pente nulle sur les extréma, même lorsque l'on ajoute quelques points de part et d'autre des extréma de façon à ajouter cette contrainte. Finalement, la reconstruction de la transformée en ondelettes à partir de la méthode de relaxation n'a pas donné de résultats concluants. Des améliorations sur l'algorithme pourraient sans doutes être apportées afin de lui faire prendre en compte la valeur des pentes : nulle aux extréma et aux extrémités du signal. De plus, cette méthode nécessite un échantillonnage linéaire en dilatation, ce qui augmente le nombre d'opérations à effectuer depuis l'analyse du signal à partir d'un échantillonage dyadique, jusqu'à sa reconstruction à partir d'un échantillonnage linéaire.

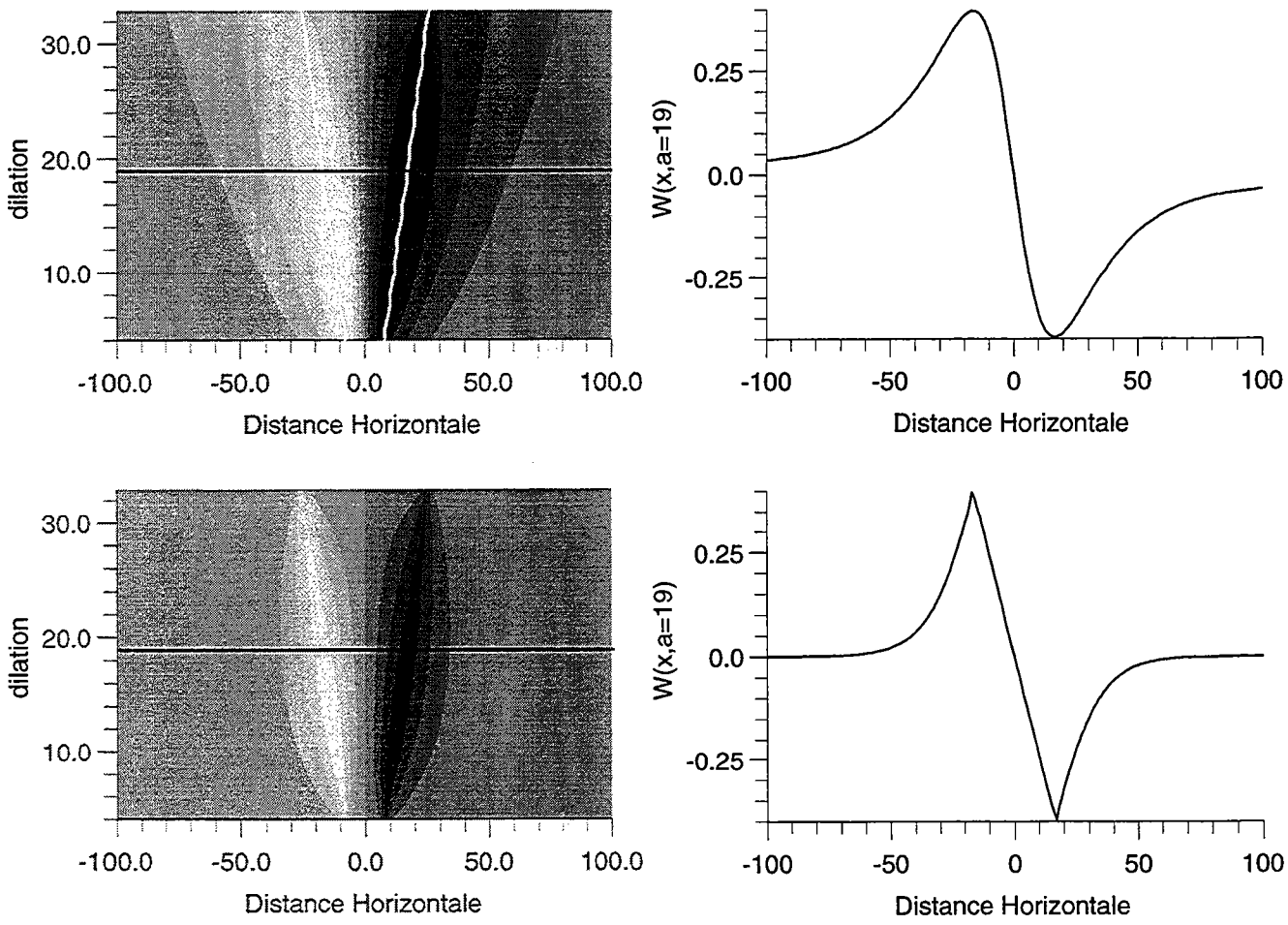


Figure 49 Haut : Transformée en ondelettes initiale sur laquelle sont superposées les arêtes (en blanc), et forme de la voix correspondant au trait noir (a=19). Bas : transformée reconstruite par relaxation sur les arêtes et voix correspondant au trait noir (a=19)

3.1.c Interpolation par spline biharmonique

Cette méthode permet de déterminer une surface (ou une courbe) de courbure minimum passant par des points non-uniformément espacés pour des dimensions quelconques [56]. L'algorithme est basé sur la fonction de Green de l'opérateur biharmonique. La surface (ou

courbe) d'interpolation est une combinaison linéaire de fonctions de Green centrées en chaque point. Leurs amplitudes sont ajustées de sorte que la surface d'interpolation passe par les points. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'introduire l'information sur la pente de la courbe en chaque point. Nous la décrivons ici pour le cas 2D.

L'interpolation par splines biharmoniques consiste à déterminer la fonction biharmonique passant par N points. L'équation à résoudre est alors :

$$\nabla^4 w(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j)$$
$$w(\vec{x}_i) = w_i \tag{IV.19}$$

∇^4 étant l'opérateur biharmonique et $\vec{x}$ la position dans l'espace 2D. La solution générale de cette équation est :

$$w(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi(\vec{x} - \vec{x}_j) \tag{IV.20}$$

avec $\phi = |\vec{x}|^2(ln|\vec{x}| - 1)$ la fonction de Green biharmonique en 2D. Les α_j sont alors obtenus par la résolution du système linéaire

$$w_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \tag{IV.21}$$

Lorsque des informations supplémentaires concernant les pentes en certains points sont données, le système à résoudre est :

$$p_i = \left(\vec{\nabla} w.\vec{n}\right)_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \vec{\nabla}\phi(\vec{x}_i - \vec{x}_j).\vec{n} \tag{IV.22}$$

p_i étant la valeur de la pente dans la direction $\vec{n}_i$ et $\vec{\nabla}\phi = \vec{x}\,(2\,ln|\vec{x}| - 1)$ le gradient de la fonction de Green en 2D.

Une fois les α_j calculés, la fonction biharmonique $w(\vec{x})$ est évaluée en chaque point à partir de l'équation (IV.20).

Bien que cet algorithme soit bien adapté à notre problème, nous n'en avons pas obtenu de résultats concluants (figure 50). Le principal inconvénient est que la contrainte de pente nulle aux extrémités du signal est mal prise en compte, avec pour conséquence une amplification de la dilatation.

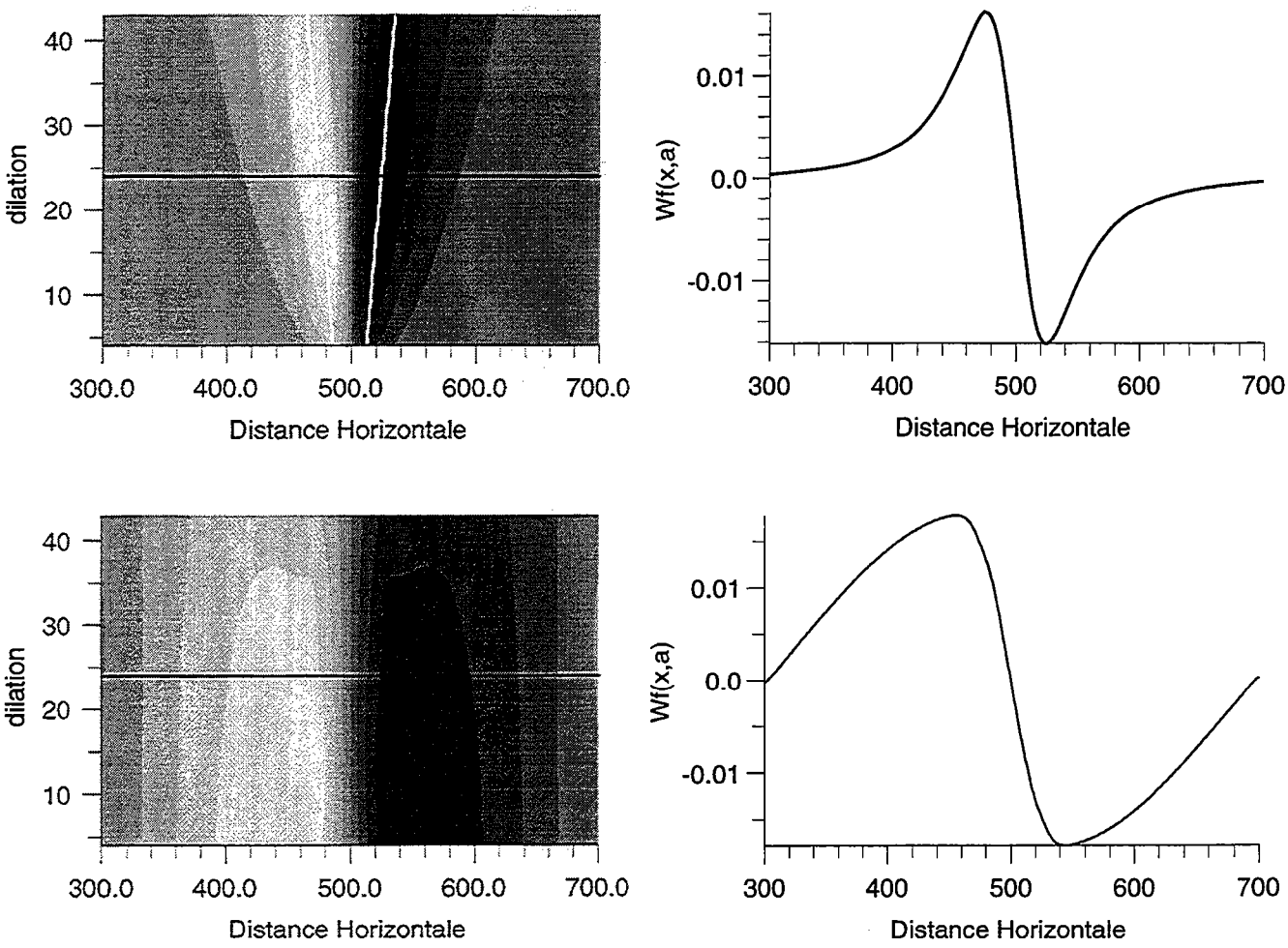


Figure 50 Haut : Transformée en ondelettes initiale sur laquelle sont superposées les arêtes (en blanc), et forme de la voix correspondant au trait noir (a=24). Bas : transformée reconstruite par interpolation par spline biharmonique sur les arêtes et voix correspondant au trait noir (a=24)

3.1.d Conclusion partielle

Les premiers résultats obtenus lors de la reconstruction la carte de transformée en ondelettes à partir de quelques arêtes sélectionnées selon des critères structuraux n'ont, pour l'instant, pas été concluants. La principale difficulté est d'apporter les bonnes hypothèses sur le problème à résoudre afin de déterminer les algorithmes d'interpolation les mieux adaptés. Bien que les méthodes proposées, relaxation et splines biharmoniques, nous aient semblées tenir compte de façon significative de la contrainte principale – la transformée en ondelettes reconstruite doit vérifier l'équation de Laplace – nous n'avons pas réussi à en tirer des résultats satisfaisants. Cette première étape du filtrage par critères structuraux que nous souhaitons effectuer reste donc à achever. Nous abordons cependant dans la partie suivante l'étape consistant à reconstruire un signal à partir de sa transformée en ondelettes. Cet aspect pourra être utilisé lorsque la reconstruction de la transformée en ondelettes à partir de ces arêtes sera résolue.

3.2 Discrétisation – Reconstruction du signal à partir de sa transformée en ondelettes

Dans cette partie, nous étudions la reconstruction de signaux à partir des ondelettes réelles multipolaires que nous avons définies. Dans ce cas, l'ondelette reconstructive est :

$$\chi_a(x) = \frac{\psi_a(-x)}{aC_\psi} \tag{IV.23}$$

Dans un premier temps, il nous faut tenir compte de l'échantillonnage dyadique en dilatation que nous avons utilisé. Le passage des expressions continues (IV.7) et (IV.13) de la partie précédente à leurs équivalents discrets est donc :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{a_j=0}^{+\infty} W_{\psi|f}(x, a_j) *_x \psi_{a_j}(-x) \frac{\Delta a_j}{a_j}. \tag{IV.24}$$

et

$$W_{\psi|f}(x, b) = \sum_{a_j=0}^{+\infty} W_{\psi|f}(x, a_j) *_x K_{a_j,b}(x) \frac{\Delta a_j}{a_j} \tag{IV.25}$$

avec $a_j = a_0\, 2^{\frac{j-1}{nv}}$, a_0 = dilatation initiale, nv = nbre de voix/octave et $\Delta a_j = a_{j+1} - a_j$.

La principale difficulté de la mise en pratique de la reconstruction des signaux à partir de leur tranformée en ondelettes est la troncature de la somme sur les dilatations. En théorie, la somme doit porter de zéro à l'infini, en pratique, nous n'échantillonnons la transformée que dans un intervalle de dilatation $[a_{min}, a_{max}]$. Nou avons vérifié que la formule de reconstruction (IV.7) permet bien de retrouver le signal pour l'ondelette L=1 (encart 8). Nous allons chercher quel est le terme correctif à apporter à la reconstruction lorsque la somme sur les dilatations est faite entre deux dilatations a_1 *et* a_2. Nous reprenons les calculs de la reconstruction pour l'ondelette L=1 (encart 8) :

$$\begin{aligned}
F_{rec}(u,z) &= \frac{-1}{C_\psi} \int_{a_1}^{a_2} a\, TF\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \widetilde{P_{2a}}(u) du \\
&= 16\pi^2 u^2 F(u,z) \left(\left[\frac{-a}{4\pi|u|} e^{-4\pi|u|a} \right]_{a_1}^{a_2} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-4\pi|u|a}}{4\pi|u|} du \right) \\
&= 16\pi^2 u^2 F(u,z) \left\{ \frac{1}{4\pi|u|} \left(a_1 e^{-4\pi|u|a_1} - a_2 e^{-4\pi|u|a_2} \right) - \frac{1}{16\pi^2 u^2} \left[e^{-4\pi|u|a} \right]_{a_1}^{a_2} \right\} \\
&= F(u,z)\, T(u, a1, a2)
\end{aligned} \tag{IV.26}$$

avec

$$T(u, a_1, a_2) = 4\pi|u| \left(a_1 e^{-4\pi|u|a_1} - a_2 e^{-4\pi|u|a_2} \right) + e^{-4\pi|u|a_1} - e^{-4\pi|u|a_2} \tag{IV.27}$$

Ces relations montrent que pour retrouver le signal, il suffira de déconvoluer le signal reconstruit *f(x)* par un filtre $t^{-1}(x, a_1, a_2)$. La fonction *T(u,a1,a2)* est représentée sur la figure

51 pour des valeurs de a_1 et a_2 représentatives de celles utilisées en pratique. Elle montre que lorsque la somme sur les dilatations n'est pas complète, les hautes fréquences et les basses fréquences du signal ne seront plus prises en compte. Tout dépendra ensuite du contenu spectral du signal à reconstruire. S'il comporte des fréquences intermédiaires, la troncature de la somme ne jouera que très peu, le signal sera bien reconstruit sans avoir à apporter une correction en terme de déconvolution. S'il contient soit des très hautes fréquences soit des très basses fréquences, il faudra apporter une correction au signal reconstruit.

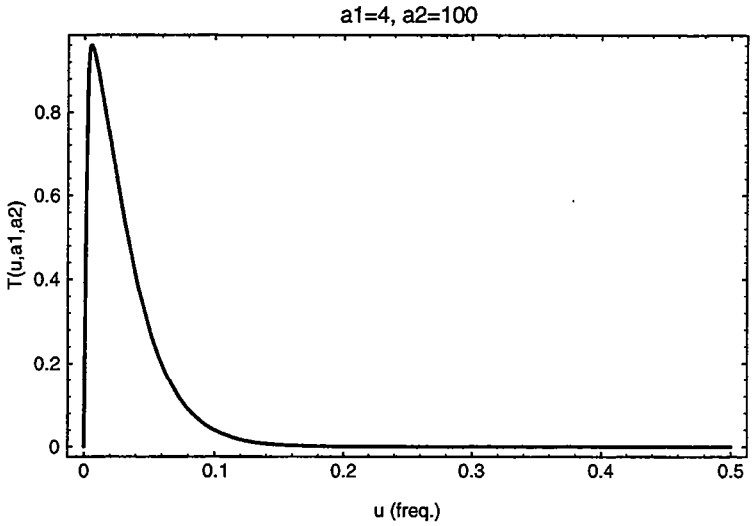


Figure 51 Filtre $T(u,a_1,a_2)$ pour a_1=4, a_2=100

Encart 8 : Reconstruction d'un signal pour l'ondelette L=1 ($\bar{\psi}(-x) = \psi(x)$) :

$$f_{rec}(x,z) = \frac{-1}{C_\psi}\int_0^{+\infty} W_{\psi|f(.,z)}(x\,,a) * \psi_a(x)\frac{da}{a}$$

$$= \frac{-1}{C_\psi}\int_0^{+\infty} \{af(x,z) * OD(x,\vec{x}) * P_a(x)\} * \{aOD(x,\vec{x}) * P_a(x)\}\frac{da}{a}$$

$$= \frac{-1}{C_\psi}\int_0^{+\infty} af(x,z) * OD(x,\vec{x},\vec{x}) * P_{2a}(x)\frac{da}{a}$$

$$= \frac{-1}{C_\psi}\int_0^{+\infty} a\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x^2} * P_{2a}(x)\frac{da}{a}$$

En exprimant cette relation dans Fourier, on a :

$$F_{rec}(u,z) = \frac{-1}{C_\psi}\int_0^{+\infty} a\,TF\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\widetilde{P_{2a}}(u)da$$

$$= \frac{-(2i\pi u)^2 F(u,z)}{C_\psi}\int_0^{+\infty} a\,e^{-4\pi|u|a}da$$

$$= \frac{4\pi^2u^2F(u,z)}{C_\psi}\left(\left[\frac{-a}{4\pi|u|}e^{-4\pi|u|a}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{4\pi|u|}e^{-4\pi|u|a}da\right)$$

$$= \frac{4\pi^2u^2F(u,z)}{C_\psi}\left[\frac{1}{16\pi^2u^2}e^{-4\pi|u|a}\right]_0^{+\infty}$$

On a $C_\psi = \frac{1}{4}$, donc$F_{rec}(u,z) = F(u,z)$

4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons proposé un filtrage par critères structuraux. Il consiste à sélectionner les lignes d'extréma de la transformée en ondelettes correspondant à des sources choisies selon leur forme ou leurs profondeurs afin de reconstruire un champ filtré. La formulation du problème inverse des chapitres II et III nous donne les critères de selection des arêtes. Il nous faut alors reconstruire la totalité de la transformée en ondelettes à partir de ces seules lignes d'extréma, avant de reconstruire le signal correspondant.

La première étape de reconstruction de la transformée n'est pas encore totalement éclaircie. La seule contrainte que nous pouvons y apporter est que la transformée en ondelettes du champ à partir des ondelettes multipolaires doit être elle-même un champ de potentiel. Les deux algorithmes testés, méthode de relaxation et d'interpolation par splines biharmoniques, n'ont pas donnés les résultats attendus, bien qu'ils nous aient semblé adaptés à cette contrainte.

La deuxième étape concernant la reconstruction du signal à partir de sa transformée en ondelettes doit également être abordée avec prudence. En effet, nous avons montré que la mise en pratique des formules de reconstruction nécessitait de prendre en compte l'intervalle de dilatation dans lequel l'analyse est effectuée. Les résultats dépendront alors du contenu fréquentiel du signal à reconstruire : il sera bien reconstruit s'il ne contient ni de très hautes fréquences, ni de très basses fréquences.

Chapitre V

Analyse 3D

Chapitre V

Analyse 3D

1 Introduction

L'analyse de signaux de champs de potentiel uni-dimensionnels par la méthode proposée dans les chapitres II et III permet d'effectuer une imagerie structurale 2D. Nous pouvons en effet déterminer la géométrie et les profondeurs des sources responsables des champs observés en surface. En utilisant des profils de données proches, nous pourrons approcher une image 3D du sous-sol, en extrapolant les résultats obtenus pour chacun des profils. Afin de réaliser une analyse plus globale, il est important de pouvoir utiliser les nombreuses données en grilles disponibles. Nous proposons donc une analyse tridimensionnelle de champs de potentiel basée sur les mêmes principes que la méthode développée en 2D dans les chapitres précédents.

Dans cette partie, nous nous intéresserons plus particulièrement à la détermination des orientations à la fois horizontales et verticales des structures détectées par la transformée en ondelettes. La caractérisation des sources par leur forme et leurs profondeurs sera alors disponible de la même façon que dans le cas 2D.

2 Principes

Nous avons conduit l'analyse 3D de façon à nous ramener à une analyse 2D. Le principe consiste à localiser une structure dans le plan horizontal. Nous pouvons alors effectuer l'analyse 2D dans la direction de la structure détectée, à partir des ondelettes complexes définies dans la partie III-3.

La première partie de l'analyse dans le plan horizontal consiste en une décomposition en ondelettes complexes dont les parties réelles et imaginaires représenteront respectivement les

axes x et y. La phase ainsi obtenue donne l'orientation des structures dans le plan horizontal. La deuxième partie consiste en une analyse en ondelettes complexes dont les parties réelles et imaginaires seront orientées, l'une dans la direction verticale z, l'autre dans la direction déterminée à partir de l'analyse horizontale.

Nous nous plaçons dans le cas équivalent à l'analyse en ondelettes 2D pour l'ondelette multipolaire L=2. Il nous faudra alors combiner les transformées obtenues avec cinq ondelettes distinctes pour représenter les différentes directions de l'espace. Les diférentes ondelettes utilisées seront :

$$\begin{aligned}
\psi_{xx}(x,y) &= OD(x,y,\vec{x},\vec{x}) *_{xy} P_1(x,y) \\
\psi_{yy}(x,y) &= OD(x,y,\vec{y},\vec{y}) *_{xy} P_1(x,y) \\
\psi_{xy}(x,y) &= OD(x,y,\vec{x},\vec{y}) *_{xy} P_1(x,y) \\
\psi_{xz}(x,y) &= OD(x,y,\vec{x},\vec{z}) *_{xy} P_1(x,y) \\
\psi_{yz}(x,y) &= OD(x,y,\vec{y},\vec{z}) *_{xy} P_1(x,y)
\end{aligned} \tag{V.1}$$

Elles sont représentées sur les figures 53 et 54.

La différence avec le cas 2D provient du fait que l'on ne définira plus les parties réelles et imaginaire des ondelettes comme transformées de Hilbert l'une de l'autre, cette notion n'étant pas généralisable à des espaces de dimension supérieur à 2. Les résultats théoriques obtenus dans la partie III-3, concernant le calcul des phases des transformées en ondelettes complexes et leur lien avec l'orientation de la structure détectée, ne seront donc pas directement applicables en trois dimensions.

Nous nous plaçons dans le repère représenté figure 52, où θ représente l'angle entre l'axe x et la direction p de la source dans le plan horizontal *(x,y)*, ϕ l'angle entre p et la direction de la source dans le plan *(p,z)*.

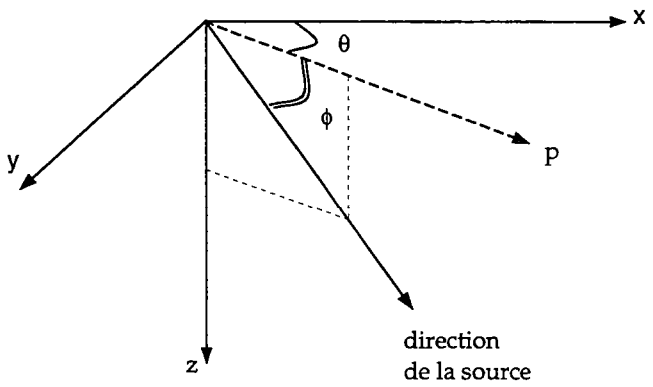


Figure 52

Dans un but de simplification, nous écrirons les transformées en ondelettes uniquement en fonction de la "direction" des ondelettes à partir desquelles elles sont effectuées, c'est-à-dire :

$$W_{xx} = W_{\psi_{xx}|f(.,.,z)}(x,y,a) = f(x,y,z) *_{xy} \frac{1}{a^2}\psi_{xx}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right)$$
$$W_{xy} = W_{\psi_{xy}|f(.,.,z)}(x,y,a)$$
$$etc...$$

La phase horizontale de la transformée en ondelettes pourrait être obtenue uniquement à partir des ondelettes ψ_{xx} et ψ_{yy}. Dans le cas de sources simples comme les lames ou les marches d'escalier que nous avons étudié précédemment, les transformées avec ces deux ondelettes donneront deux lignes d'extréma symétriques de part et d'autre de la structure. Les coefficients en ondelettes localisés au-dessus de la structure seront donc nuls dans les deux cas. Par conséquent, la phase calculée à partir du rapport de ces deux transformées en ondelettes sera indéterminée là où il nous faut obtenir une orientation. Nous avons donc choisi de calculer la phase horizontale avec une sorte de normalisation. Nous calculons les modules des transformées en ondelettes complexes dans les plans *(x,z)* et *(y,z)*, les parties réelles et imaginaires dans ces deux plans étant respectivement ψ_{xx} et ψ_{yy}, ψ_{xz} et ψ_{yz}. On obtient finalement la phase horizontale par :

$$\theta = arctan\left(\frac{\sqrt{W_{yy}^2 + W_{yz}^2}}{\sqrt{W_{xx}^2 + W_{xz}^2}}\right). \tag{V.3}$$

A partir de l'orientation de la structure déterminée dans le plan horizontal *(x,y)*, l'analyse dans le plan vertical *(p,z)* peut être effectuée par analogie au cas 2D. Le module et la phase verticale de la transformée en ondelettes sont calculés de la façon suivante :

- Pour le module :

$$\left|W_{plan\{p,z\}}\right| = \sqrt{W_{pp}^2 + W_{pz}^2} \tag{V.4}$$

- Pour la phase :

$$\phi = arctan\left(\frac{W_{pz}}{W_{pp}}\right) \tag{V.5}$$

Les transformées W_{pz} et W_{pp} sont obtenues à partir des ondelettes :

$$\psi_{pz}(x,y) = OD(x,y,cos\theta\vec{x} + sin\theta\vec{y},\vec{z}) *_{xy} P_1(x,y) \tag{V.6}$$

$$\psi_{pp}(x,y) = OD(x,y,cos\theta\vec{x} + sin\theta\vec{y},cos\theta\vec{x} + sin\theta\vec{y}) *_{xy} P_1(x,y) \tag{V.7}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\psi_{pz}(x,y) &= cos\theta\,\psi_{xz}(x,y) + sin\theta\,\psi_{yz}(x,y)\\ \psi_{pp}(x,y) &= cos^2\theta\,\psi_{xx}(x,y) + sin^2\theta\,\psi_{yy}(x,y) + 2sin\theta cos\theta\,\psi_{xz}(x,y)\end{aligned} \tag{V.8}$$

En effet, les transformées de Fourier des opérateurs de dérivations obliques introduits dans les équations (V.7) et (V.6) sont :

$$OD(u,v,\vec{p},\vec{z}) = cos\theta\,OD(u,v,\vec{x},\vec{z}) + sin\theta\,OD(u,v,\vec{y},\vec{z})$$

et

$$\begin{aligned}OD(u,v,\vec{p},\vec{p}) &= [2i\pi(cos\theta\,u + sin\theta\,v)]^2\\ &= cos^2\theta\,(2i\pi u)^2 + sin^2\theta\,(2i\pi v)^2 + 2sin\theta cos\theta\,(2i\pi u.2i\pi v)\\ &= cos^2\theta\,OD(u,v,\vec{x},\vec{x}) + sin^2\theta\,OD(u,v,\vec{y},\vec{y}) + 2sin\theta cos\theta\,OD(u,v,\vec{x},\vec{y})\end{aligned}$$

Dans la partie suivante, nous donnons quelques exemples d'applications. Nous nous limiterons à la description du module et des phases horizontales et verticales obtenus dans un exemple synthétique afin de valider les résultats théoriques décrits. En effet, l'extraction des *surfaces* de maxima n'a pas encore été abordée. Elle constitue une des difficultés majeures de l'établissement d'une théorie 3D basée sur les résultats de la méthode proposée dans les chapitre II et III, dans laquelle l'extraction des lignes d'extréma constitue l'élément principal.

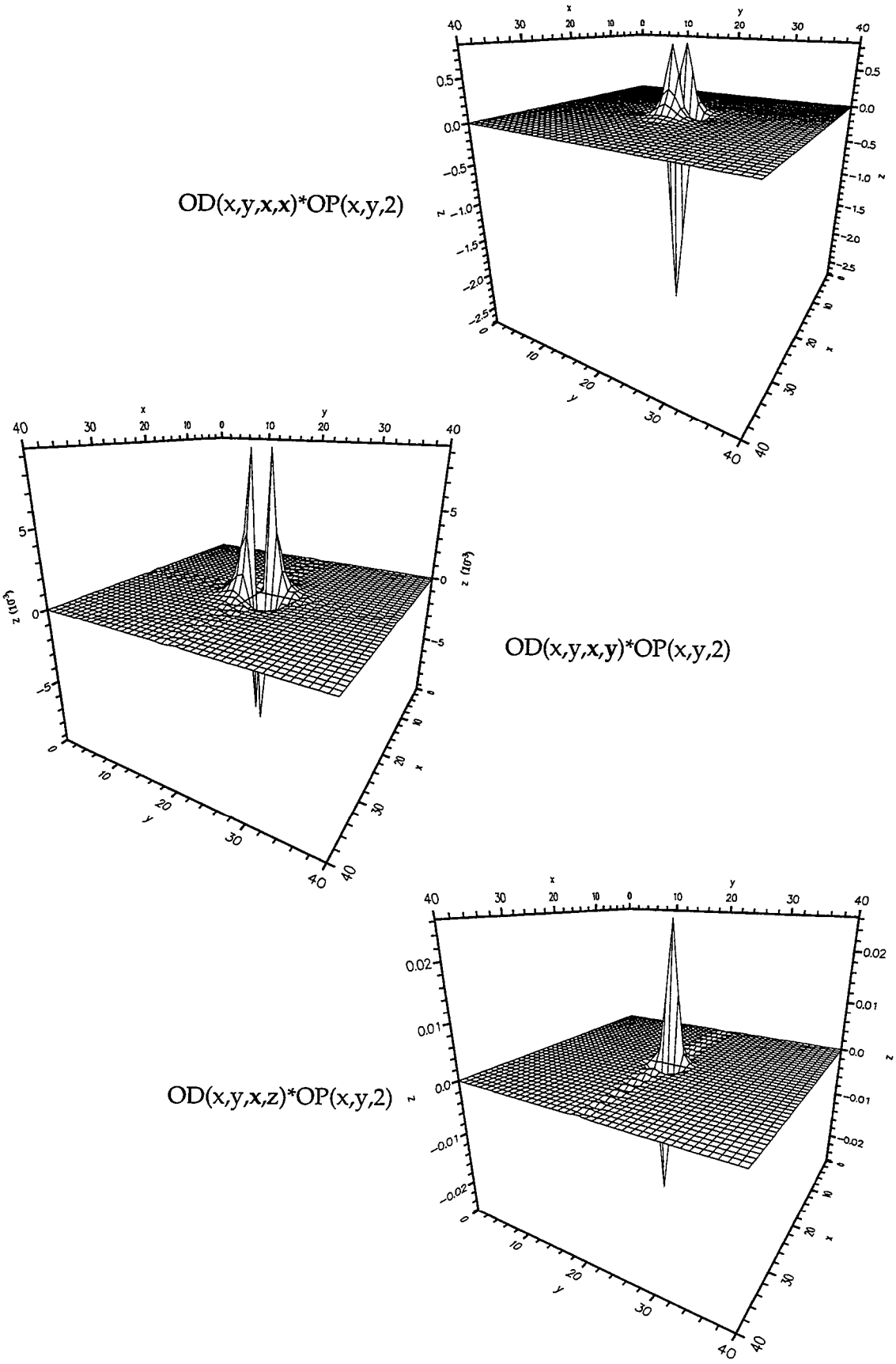
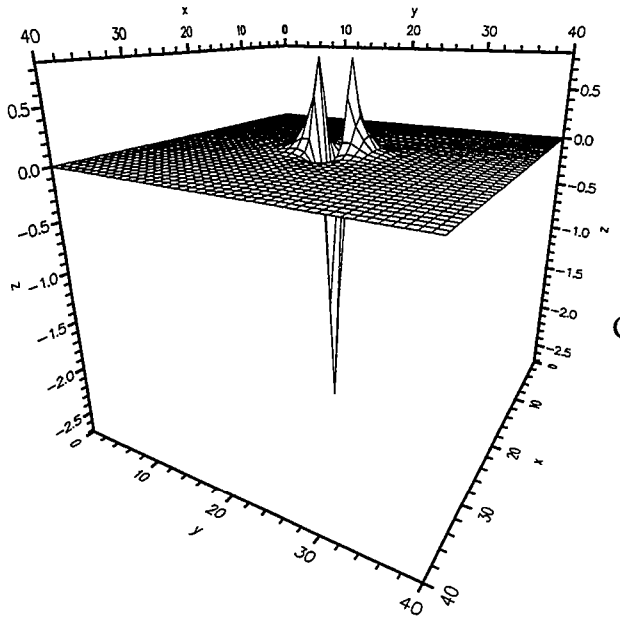
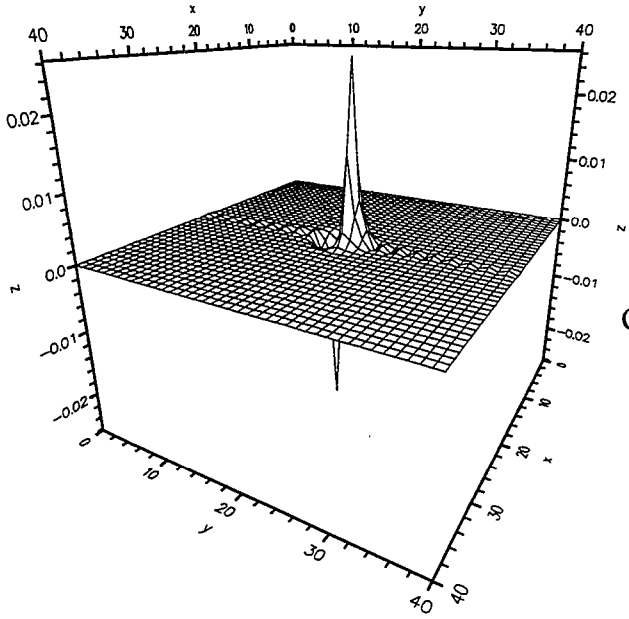


Figure 53 Ondelettes 3D W_{xx}, W_{xy}, W_{xz} pour un prolongement égal à 2



OD(x,y,y,y)*OP(x,y,2)



OD(x,y,y,z)*OP(x,y,2)

Figure 54 Ondelettes 3D W_{yy}, W_{zy} pour un prolongement égal à 2

3 Test synthétique

L'exemple que nous donnons dans cette partie a pour but de montrer les potentialités de la méthode proposée. Nous n'avons pas effectué de véritable transformée en ondelettes 3D, les calculs n'ont été menés que pour une seule voix (correspondant à la dilatation a=2, cf figures 53 et 54). Cet exemple nous permettra également de déterminer de façon expérimentale les relations existant entre les phases telles que nous les avons définies et les inclinaisons de la structure détectées dans les différents plans considérés.

La source que nous considérons est une lame inclinée de $\theta_l = 30^o$ dans le plan horizontal et de $\phi_l = 75^o$ dans le plan vertical, cette lame étant infinie dans la direction déterminée par l'angle θ_l. La phase horizontale obtenue à partir de l'équation (V.3) est représentée sur la figure 55. Ces valeurs s'écartent peu de 60° sur toute la carte. Au niveau du bord supérieur de la source, la phase obtenue est $\theta \simeq 60,5^o$. La phase horizontale telle que nous l'avons définie ne donne donc pas directement l'angle d'inclinaison de la structure mesuré à partir de l'axe x dans le plan horizontal. La relation existant entre ces deux paramètres serait :

$$\theta_l = 90^o - \theta \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \tag{V.11}$$

Il faudra bien sûr retrouver ce résultat théoriquement, mais il nous indique que la phase horizontale que nous avons définie contient bien l'information sur l'orientation de la structure dans le plan horizontal. Des tests effectués pour d'autres valeurs de θ_l ont en effet donné le même résultat.

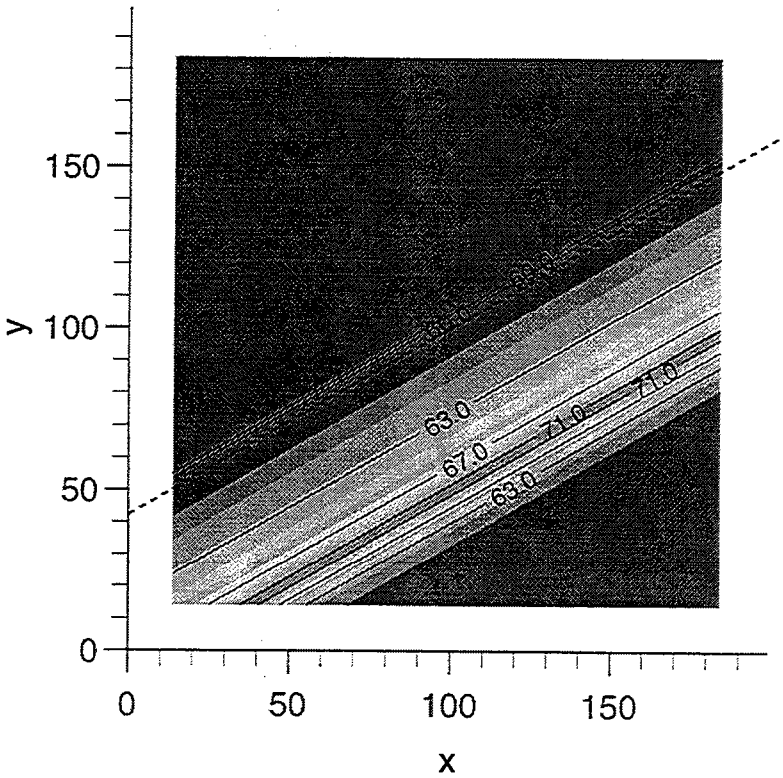


Figure 55 Phase horizontale (eq. V.3) pour une lame inclinée de 30° dans le plan horizontal. Le trait en tireté correspond à la localisation dans le plan *(x,y)* du bord le plus superficiel de la lame.

Nous représentons maintenant le module et la phase obtenus dans le plan vertical à partir des expressions (V.4) et (V.5). En ce qui concerne le module (figure 56), le résultat est équivalent à celui observé dans le cas bidimensionnel (§III-3). Les maxima sont légèrement décalés par rapport à la localisation du bord le plus superficiel de la lame du fait que cette structure est inclinée. En ce qui concerne la phase verticale, la valeur obtenue au niveau du bord est $\phi \simeq -98^o$ (figure 57). L'angle d'inclinaison de la structure étant $\phi_l = 75^o$, on peut considérer que la phase verticale si elle contient une information sur cette inclinaison devrait être égale à *-105°*, c'est-à-dire que la relation existant entre ces deux paramètres serait :

$$\phi_l = 180^o + \phi \equiv \pi + \phi \tag{V.12}$$

Ce résultat est également à vérifier, d'autant plus que si l'on prenait la phase à l'endroit où le module est maximum (comme dans le cas 2D), l'erreur sur la détermination de l'angle d'inclinaison serait encore plus grande que lorsque l'on prend la valeur de la phase exactement au-dessus du bord. Il faut cependant rappeler que la valeur de la dilatation avec laquelle cet exemple est effectué est faible. A ce sujet, nous avons montré pour les ondelettes complexes de l'analyse bidimensionnelle que l'inclinaison d'objets étendus était mal déterminée dans les petites dilatations. C'est certainement cet effet qui joue à nouveau dans l'analyse tridimensionnelle.

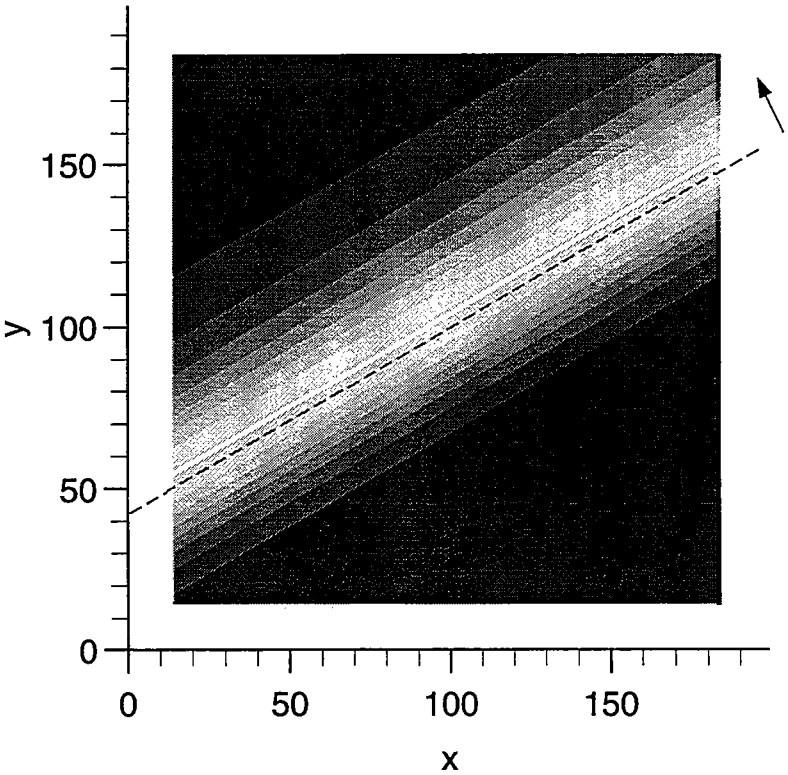


Figure 56 Module (eq. V.4) pour une lame inclinée de 30° dans le plan horizontal et de 75° dans le plan vertical. Le trait en tireté correspond à la localisation dans le plan *(x,y)* du bord le plus superficiel de la lame. Le trait blanc correspond au module maximum. La flèche indique la direction dans laquelle la lame s'incline dans le plan vertical.

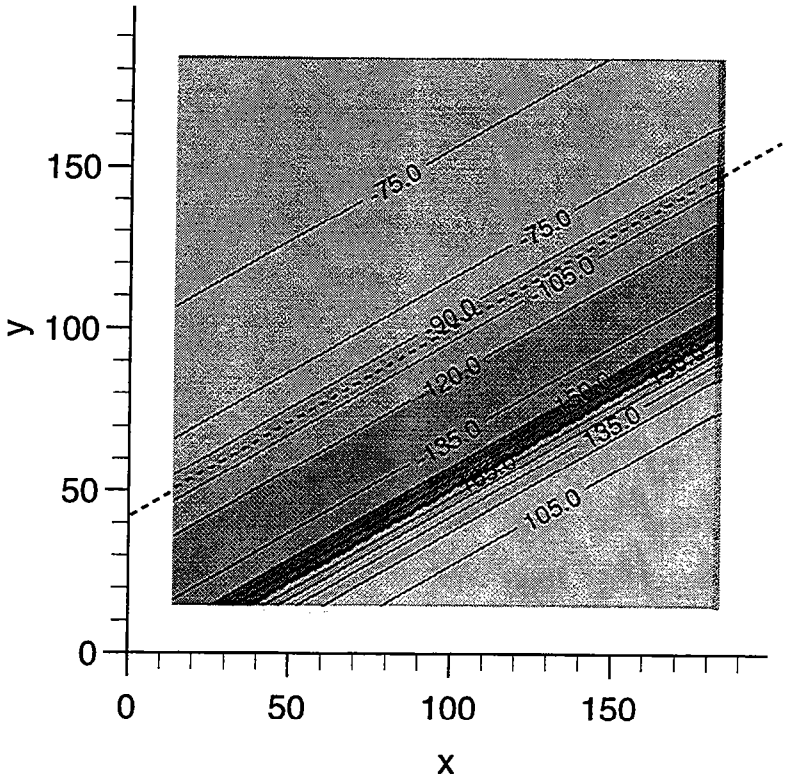


Figure 57 Phase verticale (eq. V.5) pour une lame inclinée de 30° dans le plan horizontal et de 75° dans le plan vertical.. Le trait en tireté correspond à la localisation dans le plan *(x,y)* du bord le plus superficiel de la lame.

4 Conclusion

Nous avons posé les principes de la méthode de résolution du problème inverse des champs de potentiel à partir de la transformée en ondelettes dans un espace tridimensionnel. De nombreux points sont encore à éclaircir, notamment du point de vue théorique. En particulier, il faudra définir des *surfaces* de maxima, le principal problème étant la visualisation des résultats. D'autre part, nous avons pu déterminer numériquement les angles d'inclinaisons horizontaux et verticaux de structures simples, en les reliant aux phases horizontales et verticales que nous avons défini. La détermination des profondeurs n'a pas encore été abordée, elle ne pose pas de véritables problèmes puisqu'elle sera calquée sur la méthode développée en 2D.

Conclusion générale – Perspectives

Conclusion générale – Perspectives

Les différentes méthodes proposées dans cette thèse concernent le traitement de données géophysiques, en particulier de données de champs de potentiel. Les propriétés de l'analyse par ondelettes nous ont paru particulièrement intéressantes vis-à-vis des particularités de ce type de données. En effet, elle est à-même d'effectuer des analyses locales grâce à une décomposition des signaux à différentes échelles. Les diverses contributions responsables de singularités dans un signal peuvent alors être individualisées. De cette façon, les non-stationnarités des signaux géophysiques sont prises en compte de façon optimale. Les deux pôles principaux de l'analyse en ondelettes, analyse orthogonale et analyse continue, se distinguent par leurs domaines d'applications respectifs. Alors que l'analyse en ondelettes orthogonale est un outil très utilisé pour comprimer des signaux ou des images (entre autres applications), l'analyse en ondelettes continue s'adapte à la physique des signaux, permettant alors une analyse très fine. Nous avons utilisé ces deux aspects en proposant deux méthodes distinctes, l'une consacrée au débruitage de données géophysiques non-stationnaires, la deuxième au problème inverse des champs de potentiel.

La première méthode proposée consiste en un filtrage non-stationnaire, éliminant le bruit contenu dans des données géophysiques dont le rapport signal/bruit n'est pas constant. La transformation en ondelettes orthogonales permet de décomposer le signal en "quanta" d'information indépendants les uns des autres, représentés par les coefficients d'ondelettes. Le filtrage consiste alors à sélectionner les coefficients dus au signal et à éliminer ceux dus au bruit. On obtient le signal filtré par transformée inverse sur la nouvelle série de coefficients. Les critères statistiques que nous avons utilisés pour sélectionner ces quanta d'information nous ont également permis d'élaborer un algorithme de filtrage rapide, restreint à l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien. Il est à noter que cet algorithme pourra être modifié selon la statistique du bruit que l'on désire éliminer. Deux des trois critères de seuillage proposés sont en effet adaptables à n'importe quel type de bruit.

Les tests réalisés à la fois sur des signaux synthétiques et des données de potentiel électrique mesurées dans une carrière souterraine ont fourni des résultats satisfaisants.

L'exemple des données de potentiel électrique, dans lesquelles le rapport signal/bruit est fortement non-stationnaire, a ainsi montré que le bruit est éliminé sans dégradation de l'information géophysique. Des applications à d'autres types de données sont envisageables. On peut citer le domaine de l'altimétrie, où cette méthode de débruitage permettra d'améliorer la résolution spatiale. Les traitements faisant appel à une utilisation conjointe de données altimétriques et de données acquises lors de campagnes en mer seront améliorés, la résolution des deux séries de données étant alors comparable.

La deuxième méthode proposée utilise la transformée en ondelettes continue et concerne le problème inverse des champs de potentiel. Nous l'avons traité de telle sorte qu'il nous conduise à une imagerie structurale du sous-sol. La résolution du problème inverse consiste alors à déterminer des bords d'objets géologiques en les caractérisant par leur géométrie, leurs profondeurs et leur intensité. La première étape de ce travail a été d'imbriquer la théorie des ondelettes dans celle des champs de potentiel. C'est à travers les propriétés d'échelle que possèdent à la fois les ondelettes et les champs dus à des sources homogènes que nous avons pu relier ces deux théories. En effet, les coefficients en ondelettes d'une fonction f pour une ondelette ψ sont :

$$W_{\psi|f}(x,a) = f(x) *_x \frac{1}{a}\psi\left(\frac{x}{a}\right) \tag{1}$$

tandis que le champ g d'une source homogène de degré n vérifie :

$$g(ax,az) = a^n g(x,z) \ . \tag{2}$$

Le lien a été établi par l'intermédiaire du prolongement harmonique P qui permet de déterminer le champ à l'altitude az à partir du champ connu en z :

$$g(x,az) = g(x,z) *_x P_{az-z}(x) \ . \tag{3}$$

Nous avons alors été amenés à introduire une classe d'ondelettes particulières appartenant au semi-groupe de Poisson, appelées ondelettes multipolaires. Dans ce cas, la hauteur de prolongement dans l'espace physique devient la dilatation dans la transformée en ondelettes :

$$W_{\psi|g(.,z)}(x,a) = a^L g(x,z+a) *_x OD^L(x,\vec{q_1},...\vec{q_L}) \tag{4}$$

L étant l'ordre multipolaire de l'ondelette, OD représentant l'opérateur de dérivation oblique des champs de potentiel. L'information disponible à partir de tous ces éléments est la localisation horizontale et verticale, ainsi que la nature multipolaire des sources homogènes étudiées. Les paramètres des sources responsables du champ de potentiel observé sont tous extraits de l'information contenue dans les lignes d'extréma de la transformée en ondelettes. Ainsi, nous avons montré que la méthode était robuste vis-à-vis du bruit.

Cette formulation de problème inverse dans le cas de sources homogènes a constitué le cadre théorique de l'imagerie structurale que nous souhaitions réaliser. La détection de bords de structures a été effectuée en considérant le caractère asymptotique de la méthode. En effet, plus l'on s'éloigne d'une structure étendue, c'est-à-dire dans le cadre de cette méthode plus l'on analyse le signal à de grandes dilatations, plus la structure sera vue comme une source

ponctuelle homogène. La reconnaissance de la géométrie des bords détectés ainsi que de leurs profondeurs a pu être résolue. De plus, l'utilisation de la transformée en ondelettes complexes nous a permis d'accéder à de nouvelles informations concernant l'angle d'inclinaison des structures.

Des applications de cette méthode ont été effectuées à partir de données gravimétriques marines, sur une zone de fractures et une zone de subduction. Nous avons alors montré que, même si les résultats restent à affiner, ces structures peuvent être isolées et localisées. Les ordres de grandeurs des profondeurs de compensation déterminées sont en accord avec les résultats obtenus à partir d'autres traitements, nous permettant ainsi de valider notre méthode.

Cette méthode d'inversion des champs de potentiels nous a amené à la réalisation d'un filtrage par critères stucturaux permettant de reconstruire un champ partiel dans lequel la forme et les profondeurs des sources sont connues. Les principes de ce filtrage sont indiqués, les résultats numériques étant à améliorer. Nous avons également introduit en quels termes une analyse tridimensionnelle peut être conduite afin de réaliser une imagerie du sous-sol à partir de données en grille. Le passage à des coordonnés sphériques ne pose pas de problèmes de principe et nous permettrait d'effectuer une analyse à l'échelle du globe terrestre.

Les domaines d'applications possibles de la méthode d'inversion proposée sont nombreux. Tout champ de potentiel peut être analysé, que ce soit des données magnétiques, gravimétriques, altimétriques, thermiques, électriques etc... Les thèmes abordés dans cette thèse ont concerné principalement une imagerie structurale de la lithosphère à partir de données gravimétriques. L'application à des données altimétriques ou magnétiques dans la même optique est immédiate à partir de la formulation proposée. On peut d'ores et déjà penser à des applications conduisant à une imagerie des couches plus superficielles de la Terre – de l'ordre de la centaine de mètres – à partir de données de très haute résolution. Des applications dans le domaine médical sont également envisageables en thermographie infra-rouge pour la recherche de tumeurs.

Annexes

Annexes

1 Expression analytique des ondelettes multipolaires

Nous donnons ici les expressions analytiques des ondelettes multipolaires définies à partir de leurs transformées de Fourier :

Pour les ondelettes "horizontales" : $\tilde{\psi}_x^L(u) = \widetilde{P_1}(u) \prod_{i=1}^{L} \widetilde{OD}(u, \vec{x})$.

Pour les ondelettes "verticales" : $\tilde{\psi}_z^L(u) = \widetilde{P_1}(u)\, \widetilde{OD}(u, \vec{z}) \prod_{i=1}^{L-1} \widetilde{OD}(u, \vec{x})$.

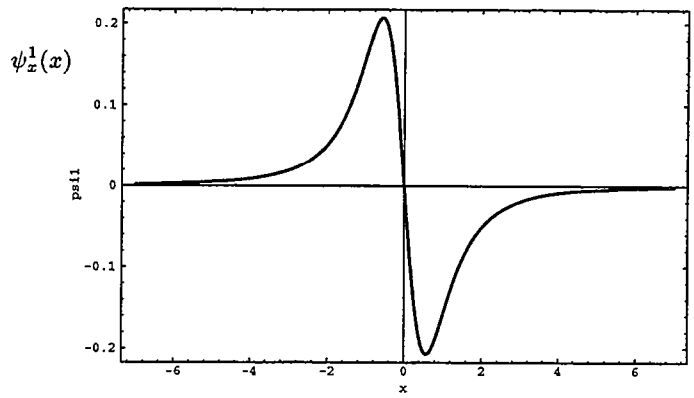
Dans chaque cas, nous représenterons l'ondelette et sa transformée de Fourier en définissant les dilatations minimales que l'on peut utiliser en pratique. En considérant que le pas d'échantillonage de l'ondelette dans le domaine temporel est unitaire, la dilatation minimale correspondra à 2 fois la fréquence à laquelle la transformée de Fourier de l'ondelette s'annule.

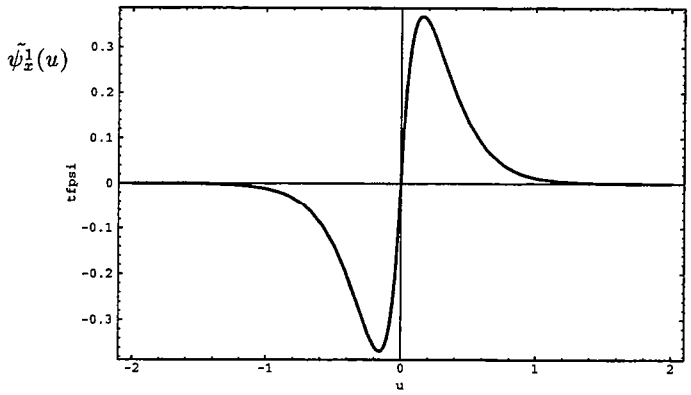
1.1 Ondelettes "horizontales"

- **L=1** L'expression de l'ondelette et de sa TF sont

$$\tilde{\psi}_x^1(u) = 2i\pi u\, e^{-2\pi|u|}$$
$$\psi_x^1(x) = \frac{-2}{\pi} \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

Représentation graphique :



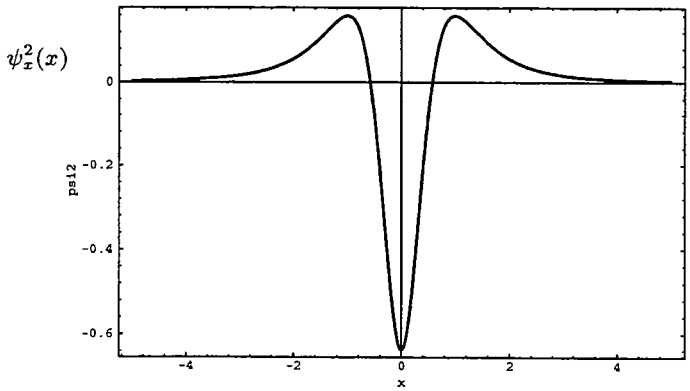


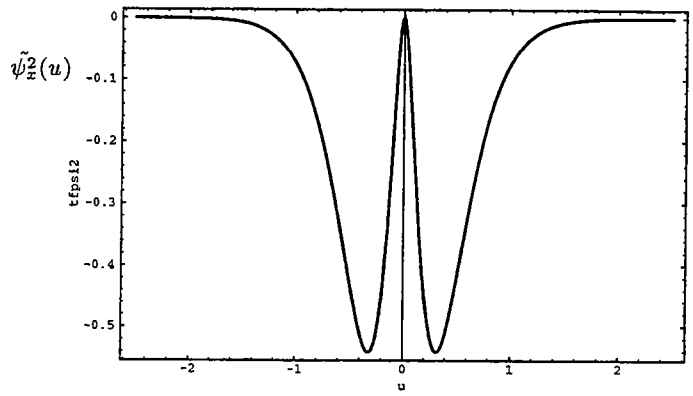
La transformée de Fourier s'annulant pour $u \simeq 2$, la dilatation minimum que l'on peut prendre est $a_{min} \simeq 4$.

- **L=2** L'expression de l'ondelette et de sa TF sont

$$\tilde{\psi}_x^2(u) = -4\pi^2 u^2 \, e^{-2\pi|u|}$$
$$\psi_x^2(x) = \frac{-2}{\pi} \frac{\left(1 - 3x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

Représentation graphique :



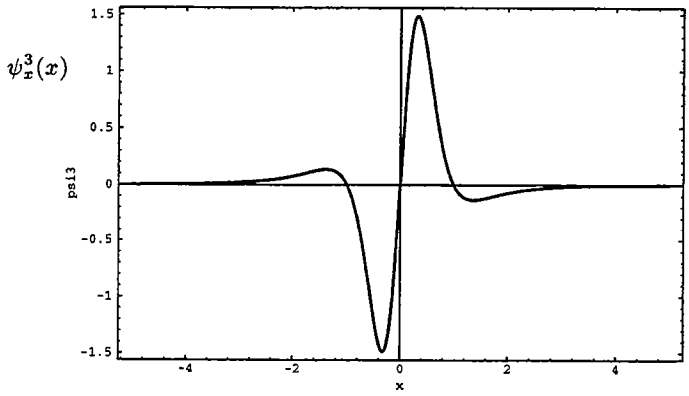


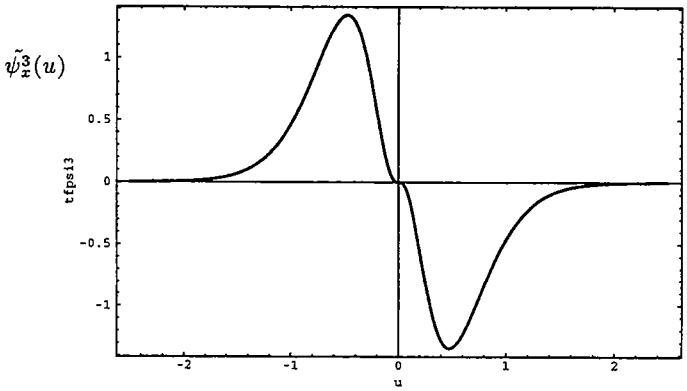
La transformée de Fourier s'annulant pour $u \simeq 2.2$, la dilatation minimum que l'on peut prendre est $a_{min} \simeq 4.4$. En pratique, on prendra $a_{min} = 5$.

- **L=3** L'expression de l'ondelette et de sa TF sont

$$\tilde{\psi}_x^3(u) = -8i\pi^3 u^3 . e^{-2\pi|u|}$$
$$\psi_x^3(x) = \frac{24}{\pi}\frac{\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}$$

Représentation graphique :





La transformée de Fourier s'annulant pour $u \simeq 2.4$, la dilatation minimum que l'on peut prendre est $a_{min} \simeq 4.8$. En pratique, on prendra $a_{min} = 5$.

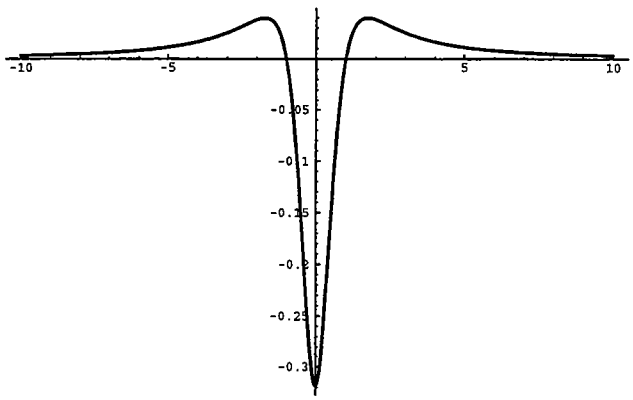
1.2 Ondelettes "verticales"

- **L=1,**

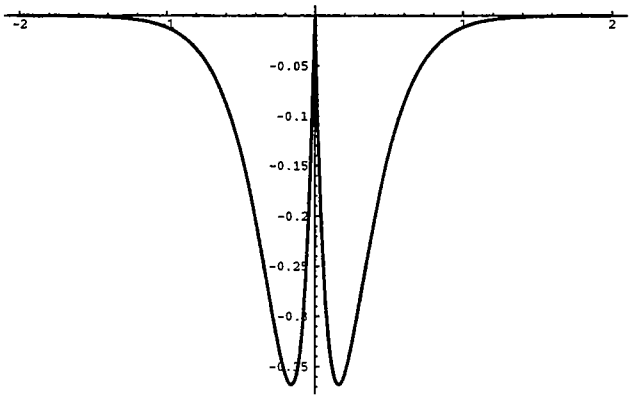
$$\tilde{\psi}_z^1(u) = -2\pi|u|\, e^{-2\pi|u|}$$
$$\psi_z^1(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$$

Représentation graphique :

$\psi_z^1(x)$



$\tilde{\psi}_z^1(u)$

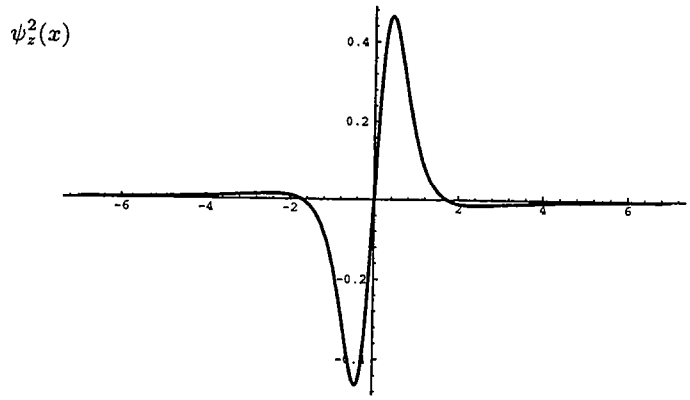


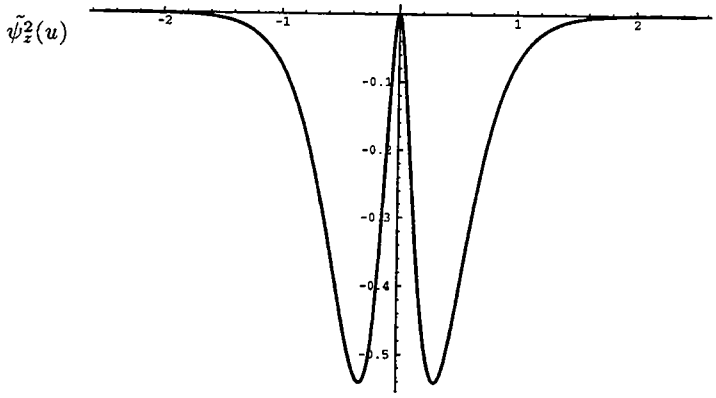
La transformée de Fourier s'annulant pour $u \simeq 2$, la dilatation minimum que l'on peut prendre est $a \simeq 4$.

- **L=2,**

$$\tilde{\psi}_z^2(u) = -4i\pi^2 u^2\, e^{-2\pi|u|}$$
$$\psi_z^2(x) = \frac{2x}{\pi}\frac{(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

Représentation graphique :



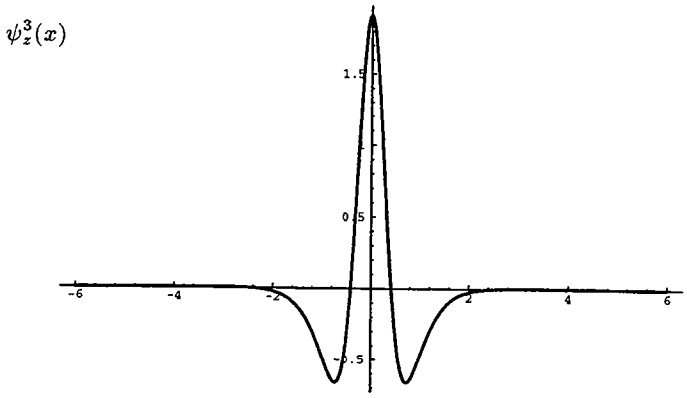


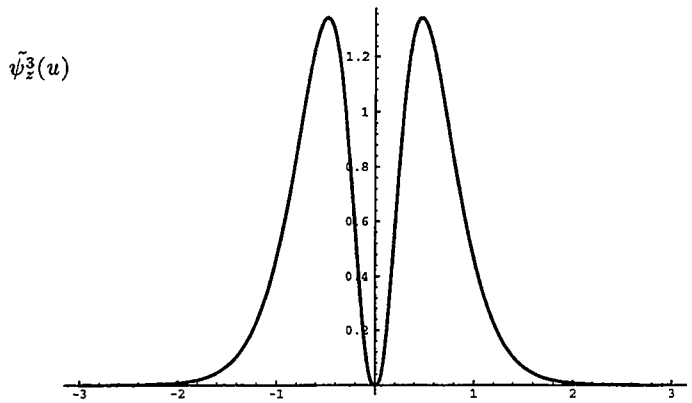
La transformée de Fourier s'annulant pour $u \simeq 2.2$, la dilatation minimum que l'on peut utiliser est $a_{min} = 4.4$.

- **L=3**,

$$\tilde{\psi}_z^3(u) = 8\pi^3|u|^3\, e^{-2\pi|u|}$$
$$\psi_z^3(x) = \frac{6}{\pi}\frac{\left(1-6x^2+x^4\right)}{\left(1+x^2\right)^4}$$

Représentation graphique :





La transformée de Fourier de l'ondelette L=3 s'annulant pour $u \simeq 2.5$, la dilatation minimum que l'on peut utiliser est $a_{min} = 5$.

2 Discrétisation des ondelettes paires

2.1 Le problème

En général, l'échantillonnage des ondelettes continues ne pose pas de problèmes, à partir du moment où la condition de Shannon est respectée. Dans certains cas la troncature de l'ondelette peut présenter des difficultés. En particulier, la discrétisation de l'ondelette L=2 pose des problèmes en raison de sa parité et peut-être de son pic central important par rapport aux 2 "lobes", la troncature lui enlevant sa propriété de moyenne nulle.

Le problème rencontré s'exprime analytiquement de la façon suivante: soit $\psi(t)$ une ondelette telle que

$$\begin{cases} \psi(t) \simeq 0 & |t| \geq T \\ \tilde{\psi}(u) \simeq 0 & |u| \geq u_m \end{cases} \tag{7}$$

Une discrétisation au pas $\tau = 1/2u_m$ est suffisante pour que la transformée de Fourier de l'ondelette discrète vérifie

$$\tilde{\psi}_\tau(u) = \tilde{\psi}(u) \qquad |u| < u_m \tag{8}$$

En revanche, la troncature de l'ondelette,

$$\psi_T(t) = \psi(t) \sqcap \left(\frac{t}{2T}\right) \tag{9}$$

fournit :

$$\tilde{\psi}_T(u) = 2T\,\tilde{\psi}(u) * sinc(2Tu) \neq \tilde{\psi}(u) \tag{10}$$

Il s'agir de savoir si la dégradation de $\tilde{\psi}(u)$ est tolérable ou non.

La difficulté peut venir lorsque l'ondelette ne peut plus être considérée de moyenne nulle, ce qui se traduit dans Fourier par :

$$\tilde{\psi}_T(0) = 2T \int_{-u_m}^{u_m} \tilde{\psi}(\xi)\, sinc(2T\xi)\, d\xi \neq 0 \tag{11}$$

ce qui n'arrive que pour les ondelettes paires. Le seul moyen d'améliorer les choses est d'augmenter le support 2T de l'ondelette (problèmes pour des applications numériques).

2.2 Solution en "passant par Fourier"

L'ondelette est générée dans l'espace de Fourier. En faisant marcher le théorème de Shannon, on trouve qu'une discrétisation au pas $\nu = 1/2T$ fournit

$$\psi_\nu(t) = \psi(t) \qquad |t| < T \tag{12}$$

La transformée en Z inverse est

$$\psi_\nu(t) = \nu \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(n\nu) \left(\frac{1}{Z}\right)^n \qquad |t| < T \tag{13}$$

où $Z^{-1} = e^{2i\pi\nu t}$

Il suffit d'échantillonner $\psi_\nu(t)$ pour obtenir l'ondelette discrète. Un des intérêts de la formule ci-dessus est que la somme peut parfois être calculée pour $n \to +\infty$. C'est le cas pour nos ondelettes multipolaires qui ont pour expression dans Fourier :

- Ondelettes "horizontales" : $\tilde{\psi}^L(u) = (2i\pi u)^L e^{-2\pi|u|}$
- Ondelettes "verticales" : $\tilde{\psi}^L(u) = -2\pi|u|(2i\pi u)^{L-1} e^{-2\pi|u|}$

On montre que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, a^n = \frac{a}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, a^n = \frac{a\,(1+a)}{(1-a)^3} \qquad |\,a\,| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3\, a^n = \frac{a\,(1+a\,(4+a))}{(1-a)^4}$$

<u>Démonstration :</u>

- 1°) Soit $S_n(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$ pour $|a| < 1$. On a

$$\begin{aligned} S_n'(a) &= \frac{1}{(1-a)^2} \\ &= 1 + 2a + \ldots\ldots + na^{n-1} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} na^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} na^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} na^n &= S_n'(a) - S_n \\ &= \frac{a}{(1-a)^2} \qquad \textit{pour } |a| < 1 \end{aligned}$$

- 2°) On dérive deux fois S_n :

$$\begin{aligned}
S_n''(a) &= \frac{2}{(1-a)^3} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a^{n-1} + S_n'(a) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 a^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) a^{n-1} + S_n'(a) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a^{n-1} + S_n'(a) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a^n + 2S_n'(a)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n &= S_n''(a) - 2S_n'(a) - \sum_{n=0}^{+\infty} n a^n \\
&= \frac{a(1+a)}{(1-a)^3} \qquad \text{pour } |a| < 1
\end{aligned}$$

- 3°) On dérive trois fois S_n :

$$\begin{aligned}
S_n^{(3)}(a) &= \frac{6}{(1-a)^4} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 a^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a^{n-1} + 2S_n''(a) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^3 a^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a^n + 2S_n''(a) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 a^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} n a^n + 2S_n(a) + 2S_n''(a)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 a^n &= S_n^{(3)}(a) - 2S_n''(a) - 2S_n(a) - 5\sum_{n=0}^{+\infty} n a^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n \\
&= \frac{6}{(1-a)^4} - \frac{4}{(1-a)^3} - \frac{2}{1-a} - \frac{5a}{(1-a)^2} - \frac{4a(1+a)}{(1-a)^3} \\
&= \frac{a(1+a(4+a))}{(1-a)^4} \qquad \text{pour } |a| < 1
\end{aligned}$$

Discrétisation des ondelettes "horizontales"

Cas L=1 (impaire, cette discrétisation n'est pas nécessaire)

$$\begin{aligned}\psi_\nu^1(t) &= \nu \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2i\pi\nu n)\, e^{-2\pi\nu|n|} \left(Z^{-1}\right)^n \\ &= 2i\pi\nu^2 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} n \left(e^{-2\pi\nu}\, Z^{-1}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(e^{-2\pi\nu}\, Z\right)^n\right] \\ &= 2i\pi\nu^2 \left[\frac{\frac{e^{-2\pi\nu}}{Z}}{\left(1-\frac{e^{-2\pi\nu}}{Z}\right)^2} - \frac{Ze^{-2\pi\nu}}{(1-Ze^{-2\pi\nu})^2}\right] \qquad (20)\end{aligned}$$

Soit $C = e^{-2\pi\nu}$

$$\begin{aligned}\psi_\nu^1(t) &= 2i\pi\nu^2 CZ \left[\frac{(1-CZ)^2-(Z-C)^2}{(Z-C)^2(1-CZ)^2}\right] \\ &= 2i\pi\nu^2 CZ\, \frac{N_1}{D_1} \qquad (21)\end{aligned}$$

Après développement,

$$\begin{aligned}N_1 &= \left(Z^2-1\right)\left(C^2-1\right) \\ D_1 &= \left(C\left(1+Z^2\right) - Z\left(1+C^2\right)\right)^2 \qquad (22)\end{aligned}$$

et avec $b = 2\pi\nu t$, on a $Z = cos\, b - i\, sin\, b$ et

$$\begin{aligned}Z^2 - 1 &= -2iZ\, sin\, b \\ 1 + Z^2 &= 2Z\, cos\, b \qquad (23)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}N_1 &= 2i\, sin\,(b)\, Z\left(1-C^2\right) \\ D_1 &= Z^2\left(2Ccos(b) - \left(1+C^2\right)\right)^2 \qquad (24)\end{aligned}$$

et

$$\psi_\nu^1(t) = -4\pi\nu^2 C\, \frac{\left(1-C^2\right) sin\, b}{\left(2Ccos\, b - (1+C^2)\right)^2} \qquad (25)$$

Finalement, en remplaçant b et C et avec $\nu = 1/2T$, on obtient :

$$\psi_\nu^1(t) = -\frac{\pi}{T^2}\, \frac{sin\,(\pi t/T)\, e^{-\pi/T}\left(1-e^{-2\pi/T}\right)}{\left(2e^{-\pi/T}cos(\pi t/T) - \left(1+e^{-2\pi/T}\right)\right)^2} \qquad (26)$$

Cas L=2

$$\begin{aligned}
\psi_\nu^2(t) &= \nu \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2i\pi\nu n)^2 e^{-2\pi\nu|n|} \left(Z^{-1}\right)^n \\
&= -4\pi^2\nu^3 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \left(e^{-2\pi\nu} Z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \left(e^{-2\pi\nu} Z\right)^n\right] \\
&= -4\pi^2\nu^3 \left[\frac{\frac{e^{-2\pi\nu}}{Z}\left(1+\frac{e^{-2\pi\nu}}{Z}\right)}{\left(1-\frac{e^{-2\pi\nu}}{Z}\right)^3} + \frac{Ze^{-2\pi\nu}\left(1+Ze^{-2\pi\nu}\right)}{\left(1-Ze^{-2\pi\nu}\right)^3}\right]
\end{aligned} \tag{27}$$

Soit $C = e^{-2\pi\nu}$

$$\begin{aligned}
\psi_\nu^2(t) &= -4\pi^2\nu^3 CZ \left[\frac{(Z+C)(1-CZ)^3 + (1+CZ)(Z-C)^3}{(Z-C)^3(1-CZ)^3}\right] \\
&= -4\pi^2\nu^3 CZ \frac{N_2}{D_2}
\end{aligned} \tag{28}$$

Après développement,

$$\begin{aligned}
N_2 &= Z\left(1+Z^2\right)\left(1-C^4\right) + \left(Z^4 - 6Z^2 + 1\right)\left(C - C^3\right) \\
D_2 &= \left(Z - C\left(1+Z^2\right) + C^2 Z\right)^3
\end{aligned} \tag{29}$$

et avec $b = 2\pi\nu t$, on a $Z = cos\, b - i\, sin\, b$ et

$$\begin{aligned}
&Z\left(1+Z^2\right) = 2Z^2 \cos b \\
&Z^4 - 6Z^2 + 1 = (cos(2b) - 3)(2\cos(2b) - 2i\, sin(2b)\,) = 2(cos(2b) - 3)Z^2 \\
&1 + Z^2 = 2Z \cos b
\end{aligned} \tag{30}$$

d'où

$$\begin{aligned}
N_2 &= Z^2\left(2\left(1-C^4\right)\cos b + 2C\left(cos(2b) - 3\right)\left(1-C^2\right)\right) \\
D_2 &= Z^3\left(1 - 2C\cos b + C^2\right)^3
\end{aligned} \tag{31}$$

et

$$\psi_\nu^2(t) = -8\pi^2\nu^3 C \frac{\left(1-C^4\right)\cos b + C\left(cos(2b) - 3\right)\left(1-C^2\right)}{\left(1 - 2C\cos b + C^2\right)^3} \tag{32}$$

Finalement, en remplaçant b et C et avec $\nu = 1/2T$, on obtient :

$$\psi_T^2(t) = -\frac{\pi^2}{T^3} e^{\frac{-\pi}{T}} \frac{cos\left(\pi\frac{t}{T}\right)\left(1 - e^{\frac{-4\pi}{T}}\right) + e^{\frac{-\pi}{T}}\left(cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - 3\right)\left(1 - e^{\frac{-2\pi}{T}}\right)}{\left(1 - 2e^{\frac{-\pi}{T}} cos\left(\pi\frac{t}{T}\right) + e^{\frac{-2\pi}{T}}\right)^3} \tag{33}$$

qui représente exactement la fonction.

Cas L=3 Impaire, pas besoin de discrétisation particulière

Discrétisation des ondelettes "verticales"

Cas L=1

$$
\begin{aligned}
{}_z\psi_\nu^1(t) &= \nu \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-2\pi\nu|n|\right) e^{-2\pi\nu|n|} \left(Z^{-1}\right)^n \\
&= -2\pi\nu^2 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} n \left(e^{-2\pi\nu} Z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(e^{-2\pi\nu} Z\right)^n\right] \\
&= -2\pi\nu^2 \left[\frac{\frac{e^{-2\pi\nu}}{Z}}{\left(1-\frac{e^{-2\pi\nu}}{Z}\right)^2} + \frac{Ze^{-2\pi\nu}}{\left(1-Ze^{-2\pi\nu}\right)^2}\right]
\end{aligned} \tag{34}
$$

Soit $C = e^{-2\pi\nu}$

$$
\begin{aligned}
{}_z\psi_\nu^1(t) &= -2\pi\nu^2 CZ \left[\frac{(1-CZ)^2 + (Z-C)^2}{(Z-C)^2(1-CZ)^2}\right] \\
&= -2\pi\nu^2 CZ \frac{N_1}{D_1}
\end{aligned} \tag{35}
$$

Après développement,

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \left(Z^2+1\right)\left(C^2+1\right) - 4CZ \\
D_1 &= \left(C\left(1+Z^2\right) - Z\left(1+C^2\right)\right)^2
\end{aligned} \tag{36}
$$

et avec $b = 2\pi\nu t$, on a $Z = cos\, b - i\, sin\, b$ et

$$
Z^2 + 1 = 2Z\ cos\, b \tag{37}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 2Z\left\{cos\, b\ \left(1+C^2\right) - 2C\right\} \\
D_1 &= Z^2\left(2C\, cos\, b - \left(1+c^2\right)\right)^2
\end{aligned} \tag{38}
$$

et

$$
\psi_\nu^1(t) = -4\pi\nu^2 C \frac{cos\, b\left(1+C^2\right) - 2C}{\left(2C\, cos\, b - \left(1+C^2\right)\right)^2} \tag{39}
$$

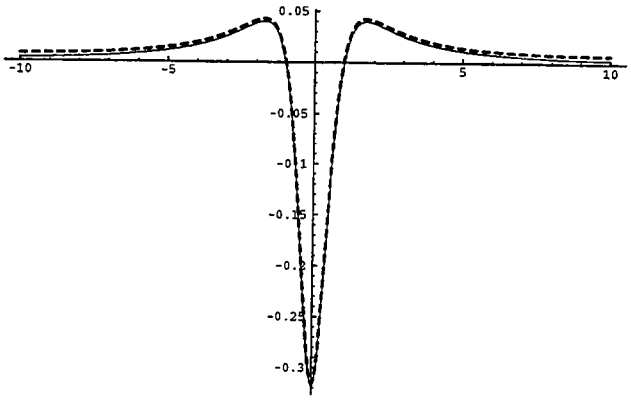
Finalement, en remplaçant b et C et avec $\nu = 1/2T$, on obtient :

$$
\psi_\nu^1(t) = -\frac{\pi}{T^2} \frac{e^{-\pi/T}\left\{cos\left(\pi t/T\right)\left(1+e^{-2\pi/T}\right) - 2e^{-\pi/T}\right\}}{\left(2e^{-\pi/T} cos(\pi t/T) - 1 - e^{-2\pi/T}\right)^2} \tag{40}
$$

Cette discrétisation donne bien une ondelette de moyenne nulle, mais on ne retrouve pas exactement la forme de l'ondelette calculée directement par

$$\psi_z^1(t) = \frac{t^2 - 1}{\pi(t^2+1)^2} \tag{41}$$

ce que l'on voit sur la figure suivante, avec en pointillé l'ondelette discrétisée à partir de la transformée en Z -> moyenne de 0.007 pour un pas d'échantillonnage de 0.25 — en trait plein, l'ondelette discrétisée directement —> moyenne de —0.249 pour un pas d'échantillonage de 0.25



Cas L=2 Ondelette impaire, pas besoin de discrétisation particulière.

Cas L=3

$$\begin{aligned}
{}_z\psi_\nu^3(t) &= \nu \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 8\pi^3\nu^3|n|^3\, e^{-2\pi\nu|n|}\left(Z^{-1}\right)^n \\
&= 8\pi^3\nu^4\left[\sum_{n=0}^{+\infty} n^3\left(e^{-2\pi\nu}\, Z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n^3\left(e^{-2\pi\nu}\, Z\right)^n\right] \\
&= 8\pi^3\nu^4\left[\frac{\frac{C}{Z}\left(1+\frac{C}{Z}\left(4+\frac{C}{Z}\right)\right)}{\left(1-\frac{C}{Z}\right)^4} + \frac{CZ\left(1+CZ(4+CZ)\right)}{(1-CZ)^4}\right]
\end{aligned} \tag{42}$$

Soit $C = e^{-2\pi\nu}$

$$\begin{aligned}
{}_z\psi_\nu^3(t) &= 8\pi^3\nu^4 CZ\left[\frac{\left(Z^2+C(4Z+C)\right)(1-CZ)^4 + \left(1+CZ(4+CZ)\right)(Z-C)^4}{(Z-C)^4(1-CZ)^4}\right] \\
&= 8\pi^3\nu^4 CZ\,\frac{N_3}{D_3}
\end{aligned} \tag{43}$$

Après développement,

$$\begin{aligned}
N_3 &= Z^2\left(1+Z^2\right)\left(1+C^6\right) + 4Z\left(1-2Z^2+Z^4\right)\left(C+C^5\right) \\
&+ \left(1-10Z^2-10Z^4+Z^6\right)\left(C^2+C^4\right) - 8C^3Z\left(Z^4-6Z^2+1\right) \\
D_3 &= \left(C\left(1+Z^2\right) - Z\left(1+C^2\right)\right)^4
\end{aligned} \tag{44}$$

et avec $b = 2\pi\nu t$, on a $Z = cos\, b - i\, sin\, b$ et

$$\begin{aligned}
&1 + Z^2 = 2Z\ cos\, b \\
&Z^4 - 6Z^2 + 1 = 2Z^2\,(cos(2b) - 3) \\
&1 - 2Z^2 + Z^4 = -4Z^2\, sin^2\, b \\
&1 - 10Z^2 - 10Z^4 + Z^6 = 2Z^3\ (cos(3b) - 10\, cos\, b)
\end{aligned} \tag{45}$$

d'où

$$\begin{aligned}
{}_z\psi^3_\nu(t) = 16\pi^3\nu^4 C\{\ & \frac{cos\, b\,\left(1 + C^6\right) - 8C^3\,(cos(2b) - 3)}{(2C\, cos\, b - 1 - C^2)^4} + \\
& \frac{\left(C^2 + C^4\right)(cos(3b) - 10\, cos\, b) - 8\left(C + C^5\right) sin^2\, b}{(2C\, cos\, b - 1 - C^2)^4}\ \}
\end{aligned} \tag{46}$$

Finalement, en remplaçant b et C et avec $\nu = 1/2T$, on obtient :

$$\begin{aligned}
{}_z\psi^3_T(t) = \frac{\pi^3}{T^4} e^{\frac{-\pi}{T}} & \frac{cos\left(\pi\frac{t}{T}\right)\left(1 + e^{\frac{-6\pi}{T}}\right) - 8e^{\frac{-3\pi}{T}}\left(cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - 3\right)}{\left(2e^{\frac{-\pi}{T}}\, cos\left(\pi\frac{t}{T}\right) - 1 - e^{\frac{-2\pi}{T}}\right)^4} + \\
& \frac{\left(e^{\frac{-2\pi}{T}} + e^{\frac{-4\pi}{T}}\right)\left(cos\left(3\pi\frac{t}{T}\right) - 10cos\left(\pi\frac{t}{T}\right)\right) - 8\left(e^{\frac{-\pi}{T}} + e^{\frac{-5\pi}{T}}\right) sin^2\left(\pi\frac{t}{T}\right)}{\left(2e^{\frac{-\pi}{T}}\, cos\left(\pi\frac{t}{T}\right) - 1 - e^{\frac{-2\pi}{T}}\right)^4}
\end{aligned} \tag{47}$$

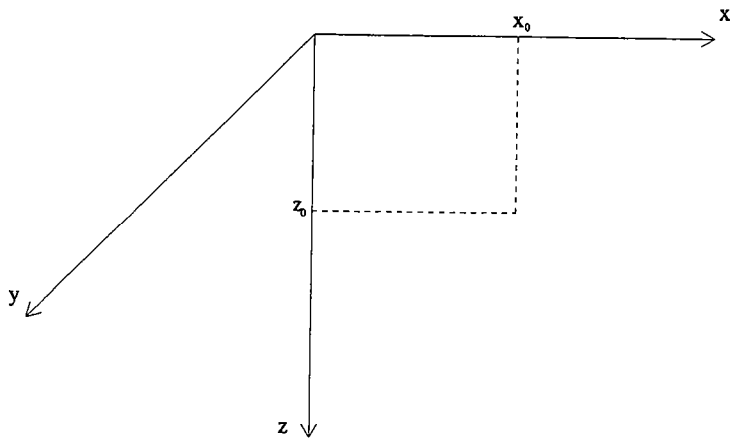
Cette discrétisation permet de retrouver exactement l'ondelette.

3 Expression des anomalies du champ pour quelques sources types

3.1 Champ gravimétrique

3.1.a Ligne infinie

On se place dans la configuration suivante:

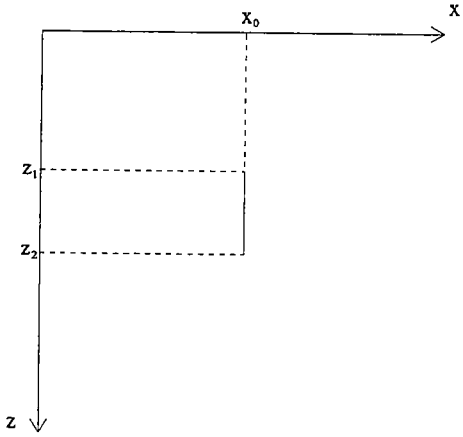


L'expression de la composante z du champ de gravité d'une ligne infinie en y est:

$$g_z(x,z) = \frac{2(z_0 - z)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{48}$$

3.1.b Lame verticale

On se place dans le plan *(x,z)*, la lame étant de dimensions infinies en y. Les notations sont celles de la figure :

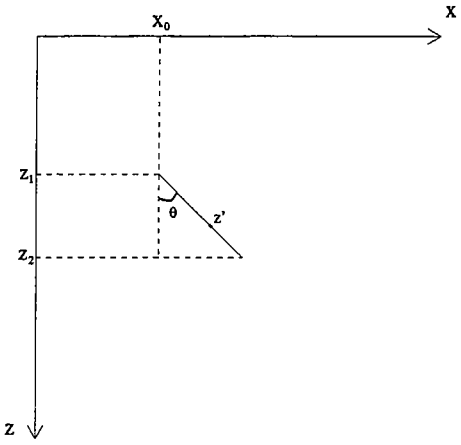


Le champs de cette lame est obtenu en intégrant entre $z - z_1$ et $z - z_2$ le champ d'une ligne infinie. On obtient :

$$g(x,z) = ln\left[\frac{(x - x_0)^2 + (z - z_2)^2}{(x - x_0)^2 + (z - z_1)^2}\right] \tag{49}$$

3.1.c Lame inclinée

On se place dans le plan *(x,z)*, la lame étant de dimensions infinies en y. Les notations sont celles de la figure :



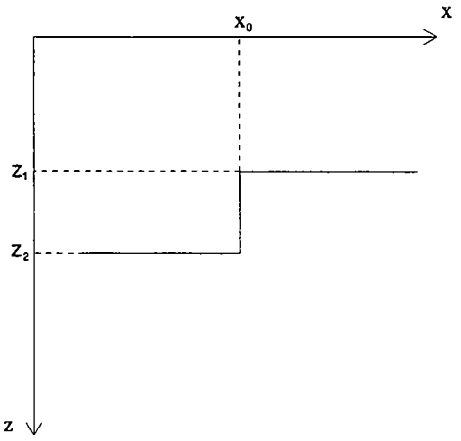
A partir du champ d'une ligne infinie en y, on a (si $x_0 = 0$)

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{2(z' - z)}{(x - x')^2 + (z - z')^2} \tag{50}$$

avec $x' = (z' - z_1)tan\theta$. Le champ de gravité d'une lame inclinée est donc :

$$\begin{aligned} g(x,z) &= -2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{z - z'}{(x - (z' - z_1)tan\theta)^2 + (z - z')^2} dz \\ &= -cos^2\theta \, ln\left(\frac{x^2 + (z - z_1)^2}{(x + (z_1 - z_2)tan\theta)^2 + (z - z_2)^2}\right) \\ &+ 2\, sin\theta \, cos\theta \left\{ arctan\left[\frac{x + (z_1 - z_2)tan\theta}{z - z_2}\right] - arctan\left[\frac{x}{z - z_1}\right] \right\} \end{aligned} \tag{51}$$

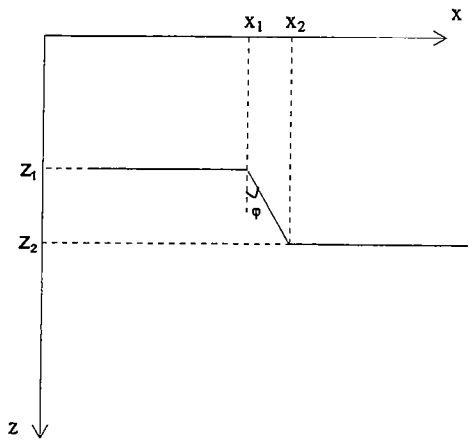
3.1.d Marche d'escalier



Pour obtenir l'expression du champ de gravité d'une marche d'esalier, on intègre l'expression du champ d'une ligne infinie sur x de $-\infty$ à x_0 en $(z - z_2)$, de x_0 à $+\infty$ en $(z - z_1)$, et en z de $z - z_1$ à $z - z_2$ en x_0. On obtient

$$g(x,z) = 2(z_1 - z)\arctan\left(\frac{x_0 - x}{z_1 - z}\right) - 2(z_2 - z)\arctan\left(\frac{x_0 - x}{z_2 - z}\right)$$
$$+ (x - x_0)\ln\left(\frac{(x - x_0)^2 + (z - z_2)^2}{(x - x_0)^2 + (z - z_1)^2}\right) \tag{52}$$

3.1.e Marche d'escalier inclinee



Pour obtenir l'expression du champ de gravité de cette structure on intègre l'expression du champ d'une ligne infinie sur x de $-\infty$ à $+\infty$ et en z de z_1 à z_2, en utilisant le théorème de Stokes pour convertir l'intégrale de surface en intégrale linéaire :

$$\begin{aligned} f(x,z) &= \int\int_S \frac{2(z' - z)}{(x - x')^2 + (z - z')^2} dx'dz' \\ &= 2\int \frac{(z' - z)}{(z - z')^2} \int \frac{1}{\frac{(x-x')^2}{(z-z')^2} + 1} dx'dz' \\ &= 2\int \frac{(z' - z)}{(z - z')^2} \int -(z - z')\frac{1}{X^2 + 1} dX dz' \\ &= 2\oint arctan\left(\frac{x - x'}{z - z'}\right) dz' \end{aligned} \tag{53}$$

x' étant fonction de z'.

Dans le cas de la marche inclinée $x' = (z' - z_1)tan\varphi + x_1$ sur le bord incliné, c'est–à–dire entre z_1 et z_2. Donc

$$f(x,z) = 2\int_{z_1}^{z_2} arctan\left(\frac{x - (z' - z_1)tan\varphi - x_1}{z - z'}\right) dz' \tag{54}$$

Finalement

$$
\begin{aligned}
f(x, z=0) = {} & 2z_2 arctan\left(\frac{x_2 - x}{z_2}\right) - 2z_1 arctan\left(\frac{x_1 - x}{z_1}\right) \\
& + 2(z_2 - z_1)\frac{(x - x_1)z_2 - (x - x_2)z_1}{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \\
& - 2(x_2 - x_1)\frac{(x - x_1)z_2 - (x - x_2)z_1}{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\left(arctan\left(\frac{x_2 - x}{z_2}\right) - arctan\left(\frac{x_1 - x}{z_1}\right)\right)
\end{aligned} \tag{55}
$$

3.2 Champ magnétique

On détermine le champ magnétique pour une fonction de Green *g(x,z)*, une aimantation *J(x,z)* et une inclinaison magnétique θ mesurée à partir de l'axe horizontal :

$$A(x, z, \theta) = J(x, z) * [cos\theta.DO(x, \vec{x}) + sin\theta.DO(x, \vec{z})] * g(x, z) \tag{56}$$

et

$$
\begin{aligned}
DO(x, \vec{x}) * g(x, z) &\equiv \frac{\partial g}{\partial x} \\
DO(x, \vec{z}) * g(x, z) &\equiv \frac{\partial g}{\partial z}
\end{aligned} \tag{57}
$$

Dans le cas d'anomalies magnétiques dues à des sources géométriques particulières, la fonction de Green aura pour expression la composante verticale du champ gravimétrique de ces sources.

Nous donnons les expressions des anomalies magnétiques d'une ligne infinie et d'une lame verticale, en supposant que le plan d'observation est en *z=0*.

3.2.a Ligne infinie

La fonction de Green est égale au champ de gravité dû à une ligne infinie située en z_0 et x_0 :

$$g(x, z) = \frac{2(z_0 - z)}{x^2 + (z - z_0)^2} \tag{58}$$

En *z=0*, l'anomalie magnétique due à cette source est :

$$A(x, \theta) = -2\,\frac{2\,x\,z_0\,cos\theta + \left(x^2 - z_0^2\right) sin\theta}{\left(x^2 + z_0^2\right)^2} \tag{59}$$

3.2.b Lame verticale

La fonction de Green est égale au champ de gravité dû à une lame située en $x_0 = 0$ et limitée par z_1 et z_2 :

$$g(x,z) = ln\left[\frac{x^2 + (z - z_2)^2}{x^2 + (z - z_1)^2}\right] \tag{60}$$

En *z=0*, l'anomalie magnétique due à une lame est :

$$A(x,\theta) = -2\,\frac{x\left(z_2^2 - z_1^2\right)cos\theta + \left(x^2 - z_1 z_2\right)(z_2 - z_1)\,sin\theta}{\left(x^2 + z_1^2\right)\left(x^2 + z_2^2\right)} \tag{61}$$

3.2.c Lame inclinée

La fonction de Green est égale au champ de gravité dû à une lame limitée par z_1 et z_2, et inclinée d'un angle φ par rapport à x est :

$$\begin{aligned} g(x,z) = & -cos^2\varphi\, ln\left[\frac{x^2 + (z - z_1)^2}{(x + (z_1 - z_2)tan\varphi)^2 + (z - z_2)^2}\right] \\ & + 2\,sin\varphi\, cos\varphi\left(arctan\left(\frac{x - (z_1 - z_2)tan\varphi}{z - z_2}\right) - arctan\left(\frac{x}{z - z_1}\right)\right) \end{aligned} \tag{62}$$

En *z=0*, l'anomalie magnétique due à une lame inclinée est :

$$\begin{aligned} A(x,\theta) = 2(z_1 - z_2)\{ & \frac{[x(z_1 + z_2) + z_1 tan\varphi(z_1 - z_2)]\,cos\theta}{\left(x^2 + z_1^2\right)\left((x + (z_1 - z_2)tan\varphi)^2 + z_2^2\right)} \\ & + \frac{\left[x^2 - z_1 z_2 + x\,tan\varphi\,(z_1 - z_2)\right]sin\theta}{\left(x^2 + z_1^2\right)\left((x + (z_1 - z_2)tan\varphi)^2 + z_2^2\right)}\} \end{aligned} \tag{63}$$

4 Déconvolution d'Euler. Degré d'homogénéité de quelques sources types.

La déconvolution d'Euler est une méthode pour estimer la profondeur des sources, en particulier dans le cadre des champs de potentiels magnétiques ou gravimétriques. Cette technique est basée sur l'équation d'homogeneité d'Euler qui fait apparaître un "indice structural" correspondant au degré d'homogénéité de la source. On peut ainsi déterminer à la fois la profondeur et la structure de la source sans apporter d'hypothèses *a-priori*. L'application à des données magnétiques est décrite par Thompson [59] et par Reid et al [48].

La déconvolution d'Euler est basée sur les relations suivantes (cas 2D). Une fonction *f(x,z)* est homogène de degré n si

$$f(ax, az) = a^n f(x,z) \tag{64}$$

Cette relation est équivalente à l'équation d'homogénéité d'Euler

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x,z) \tag{65}$$

En considérant que f est un champ de potentiel dû à une source localisée en (x_0, z_0), et que le plan d'observation est en $z=0$, on obtient l'équation :

$$x_0\frac{\partial f}{\partial x} + z_0\frac{\partial f}{\partial z} = x\frac{\partial f}{\partial x} - nf(x - x_0, z_0) \tag{66}$$

A partir du champ mesuré en surface, on pourra donc déterminer les inconnues x_0, z_0 et n, permettant de localiser et de caractériser la source.

Dans cette annexe, nous calculons les indices structuraux de quelques sources types dans le cas du champ gravitationnel. Nous montrons que seules des sources ponctuelles peuvent être traitées par la méthode de déconvolution d'Euler.

4.1 Ligne infinie

L'expression de la composante verticale du champ de gravité d'une ligne infinie en y située en (x_0, z_0) est:

$$g_z(x,z) = \frac{2(z_0 - z)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{67}$$

Les dérivées par rapport à x et z de ce champ sont :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{4(x - x_0)(z - z_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^2} \tag{68}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -2.\frac{(x - x_0)^2 - (z - z_0)^2}{\left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^2} \tag{69}$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation d'Euler, on obtient :

$$\begin{aligned}(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x} + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \\ &= -f(x,z)\end{aligned} \tag{70}$$

L'indice structural d'une ligne infinie en y est donc $n=-1$.

4.2 Lame verticale

Le champ de gravité dû à une lame située en (x_0, z_1, z_2) est :

$$g(x,z) = ln\left[\frac{(x - x_0)^2 + (z - z_2)^2}{(x - x_0)^2 + (z - z_1)^2}\right] \tag{71}$$

Les dérivées de g par rapport à x et à z sont :

$$g'_x = \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{2(x-x_0)\Big((z-z_2)^2-(z-z_1)^2\Big)}{\Big((x-x_0)^2+(z-z_1)^2\Big)\Big((x-x_0)^2+(z-z_2)^2\Big)} \tag{72}$$

et

$$g'_z = \frac{\partial g}{\partial z} = -2.\frac{(x-x_0)^2(z_2-z_1)+(z-z_1)(z-z_2)(z_1-z_2)}{\Big((x-x_0)^2+(z-z_1)^2\Big)\Big((x-x_0)^2+(z-z_2)^2\Big)} \tag{73}$$

L'indice structural n est alors mal défini car il faut ramener la localisation verticale de la lame en (z_1, z_2) à la localisation d'une source ponctuelle en z_0. En partant de l'équation (66) et en supposant $x_0 = 0$ et z=*0*, on peut déterminer pour des valeurs fixées de z_1 et z_2, les valeurs de z_0 et n les plus probables. On représente donc la fonction

$$z_0(x,n) = x\,\frac{g'_{x|z=0}}{g'_{z|z=0}} - n\,\frac{g_{z=0}}{g'_{z|z=0}} \tag{74}$$

en fonction de x et de n. Nous pourrons déterminer graphiquement la valeur de n pour laquelle z_0 est constant, et en déduire la valeur de z_0 correspondante.

Nous prenons comme exemple une lame située en $z_1 = 8$ et $z_2 = 20$ unités de profondeurs. Sur la représentation des contours (fig. 70), on voit que la valeur pour laquelle z_0 reste constant est $n \simeq -0.935$. La profondeur calculée correspondante est $z_0 \simeq 12.68$. Avec cette valeur de l'indice structural, la profondeur de source déterminée par la déconvolution d'Euler est donc

$$z_0 \simeq \frac{z_1+z_2}{2}\,. \tag{75}$$

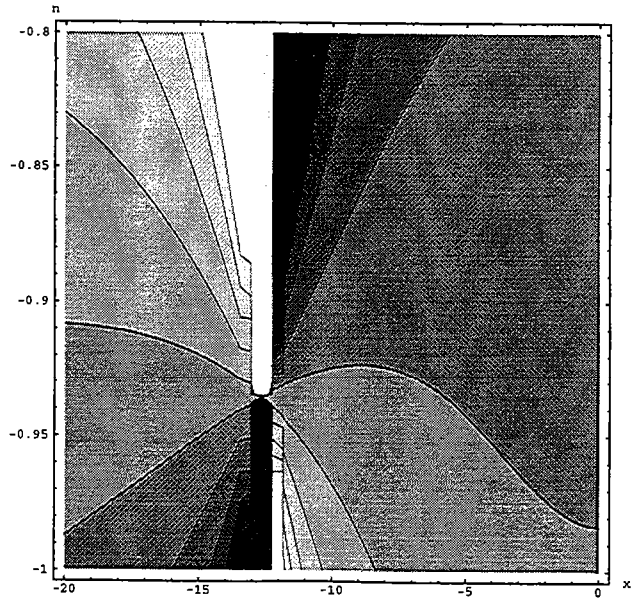


Figure 70 Contours de $z_0(x,n)$ pour $z_1 = 8$ et $z_2 = 20$

On peut également montrer que si la lame tend vers une ligne infinie (i.e. $z_2 \longrightarrow z_1$), l'indice structural tend vers –1, et que si la lame devient de dimension infinie en z (i.e. $z_2 \longrightarrow \infty$), l'indice tendrait vers –0.675 (fig.71 pour $z_2 = 100$).

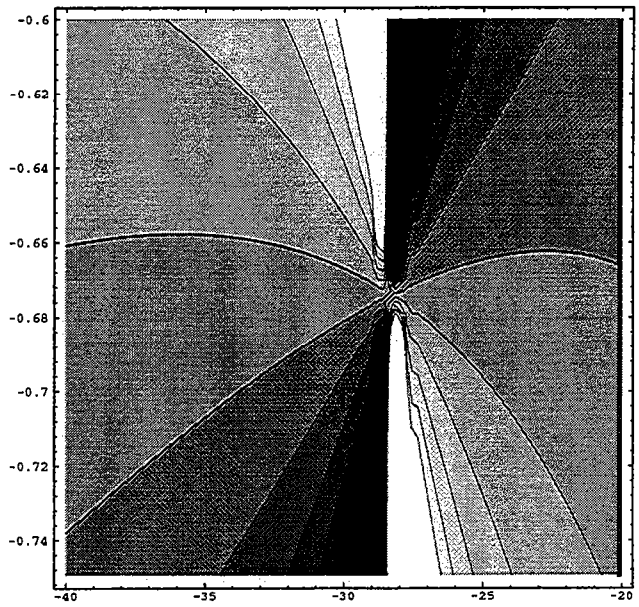


Figure 71 Contours de $z_0(x,n)$ pour $z_1 = 8$, $z_2 = 100$

En conclusion, la valeur de l'indice structural dans le cas d'une lame verticale est fonction de ses profondeurs. En pratique, on détermine une profondeur équivalent $z_0 = c(z_1 + z_2)$, $0 < c < 1$, la valeur de c dépendant de z_1 *et* z_2. L'indice structural calculé à partir de la déconvolution d'Euler ne pourra donc pas être associé à ce type de source puisqu'il n'est pas unique.

4.3 Marche d'escalier

Le champ de gravité dû à une marche d'escalier située en (x_0, z_1, z_2) est :

$$g(x,z) = 2(z_1 - z)\arctan\left(\frac{x_0 - x}{z_1 - z}\right) - 2(z_2 - z)\arctan\left(\frac{x_0 - x}{z_2 - z}\right) + (x - x_0)\ln\left(\frac{(x-x_0)^2 + (z-z_2)^2}{(x-x_0)^2 + (z-z_1)^2}\right) \tag{76}$$

Pour obtenir l'indice structural correspondant à cette anomalie, on procède de la même façon que pour la lame : nous représentons la fonction $z_0 = f(x,n)$ afin de déterminer graphiquement la valeur de n pour laquelle z_0 est constant, et en déduire la valeur de z_0 correspondante.

Nous prenons comme exemple une marche située en $z_1 = 8$ et $z_2 = 20$ unités de profondeurs. Sur la représentation des contours (fig. 72), on voit que l'indice structural d'une marche d'escalier est nul, et en calculant la profondeur équivalente pour les valeurs

de $z_1 = 8$ et $z_2 = 20$, on obtient $z_0 = 12.46 \simeq \frac{z_1 + z_2}{2}$. Contrairement au cas de la lame, l'indice structural est déterminé de façon unique dans le cas de la marche d'escalier. Mais la profondeur déterminée lors de la déconvolution d'Euler pourra correspondre à plusieurs profondeurs de la base et du sommet de la marche

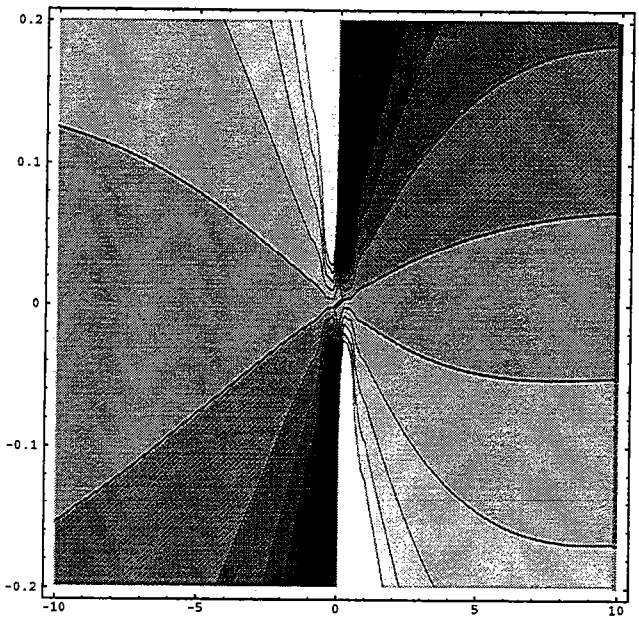


Figure 72 Contours de $z_0(x, n)$ pour $z_1 = 8$ et $z_2 = 20$

Bibliographie

Bibliographie

[1] **Akaike H.**. Fitting autoregressive models for prediction. *Ann. Inst. Stat. Math.*, **21** : 261–265, 1965.

[2] **Arneodo A., Argoul F., Bacry E., Elezgaray J., and Muzy J.F.**. Ondelettes, multifractales et turbulences. *Diderot éditeurs, Arts et sciences,Paris*, 1995.

[3] **Bendat J.S. and Piersol A.G.**. Random data : Analysis and measurements procedures. *Wiley-Intersciences*, 1986.

[4] **Bertrand 0., Bohorquez J., and Pernier J.**. Analyse et filtrage de signaux numériques par décomposition en ondelettes discrètes. *Rapport interne, INSERM*, 1989.

[5] **Beylkin G., Coifman R., and Rokhlin V.**. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. *I. Comm. Pure Applied Math.*, **43** : 141–183, 1991.

[6] **Bracewell R.N.**. The fourier transform and its applications. *Mc Graw-Hill, International Student Ed., Singapore*, 1978.

[7] **Coifman R.R. and Wickerhauser M.V.**. Entropy-based algorithms for best basis selection. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **38** : 713–718, 1992.

[8] **Crough S.T.**. Geoid anomalies across fractures zones and the thickness of the lithosphere. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **44** : 224–230, 1979.

[9] **Daubechies I.**. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, **XLI** : 909–996, 1988.

[10] **Daubechies I.**. Ten lectures on wavelets. *SIAM, Philadelphia*, 1992.

[11] **Dobrin M.B.**. Introduction to geophysical prospecting. *McGraw Hill, Tokyo*, 1976.

[12] **Donoho D.**. Wavelet shrinkage and w.v.d.: a 10–minute tour. *in Wavelet Analysis and Applications, ed. Y. Meyer & S. Roques, Frontières, Gif-sur-Yvette*, pp. 109–128, 1993.

[13] **Dziewonski A.M. and Hales A.L.**. Numerical analysis of dispersed seismic waves. *Methods in Computational physics, Academic Press*, Vol. 11, 1972.

[14] **Foufoula Georgiou and Kumar P.**. Wavelets in geophysics. *Academic Press*, 1994.

[15] **Gabor D.**. Theory of communication. *J. Inst. Elect. Engrg.*, **93** : 428–457, 1946.

[16] **Galdeano A.**. Traitement des données aéromagnétiques : méthodes et applications. *Thèse de l'Université Paris VI*, 1974.

[17] **Gibert D. and Galdeano A.**. A computer program to perform transformations of gravimetric and aeromagnetic surveys. *Computers & Geosciences*, **11** : 553–588, 1985.

[18] **Goupillaud P., Grossmann A., and Morlet J.**. Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration*, **23** : 85–102, 1984.

[19] **Granser H.**. Nonlinear inversion of gravity data using the schmidt-lichtenstein approach. *Geophysics*, **52** : 88–93, 1987.

[20] **Graps A.L.**. An introduction to wavelets. *IEEE Computational Sciences and Engineering*, Vol 2, no2, 1995.

[21] **Grossmann A. and Morlet J.**. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math.*, **15** : 723–736, 1984.

[22] **Grossmann A., Holschneider M., Kronland-Martinet R., and Morlet J.**. Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transforms. *Inverse problems ; Advances in Elect. and Electron Physics, Acad. Press*, Suppl. 19, pp 298–306, 1987.

[23] **Haar A.**. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Math. Ann*, **69** : 331–371, 1910.

[24] **Holschneider M.**. Wavelets : An analysis tool. *Clarendon, New-York*, 1995.

[25] **Isacks B. and Molnar P.**. Distribution of stresses in the descending lithosphere from a global survey of focal-mechanism solutions of mantle earthquakes. *Rev. of Geophys. Space Phys.*, **9** : 103–174, 1971.

[26] **Jackson D.D.**. The use of *a-priori* data to resolve non-uniquiness in linear inversion. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **57** : 137–157, 1979.

[27] **Last B.J. and Kubik K.**. Compact gravity inversion. *Geophysics*, **48** : 713–721, 1983.

[28] **Latto A. and Tenenbaum E.**. Compactly supported wavelets and the numerical solution of burger's equation. *C. R. Acad. Sci.*, **331 (I)** : 903–909, 1990.

[29] **Louden K.E. and Forsyth D.W.**. Thermal conduction across fracture zones and the gravitational edge effect. *J. Geophys. Res.*, **81** : 4869–4874, 1976.

[30] **Mallat S. and Zhong S.**. Caracterization of signals from multiscale edges. *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell.*, **14** : 710–732, 1992.

[31] **Mallat S.**. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $l^2(\mathbf{r})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **315** : 69–88, 1989.

[32] **Mammerickx J. and Smith S.M.**. Bathymetry of the northeast western pacific. *Map and Chart Ser., Geol. Soc. of Am.*, MC-43, 1981.

[33] **Marr D. and Hildreth E.**. Theory of edge detection. *Proc. Roy. Soc. Lon*, **207** : 187–217, 1980.

[34] **Menard H.W. and Atwater T.M.**. Changes in direction of seafloor spreading. *Nature*, **219** : 463, 1968.

[35] **Menke**. Geophysical data analysis : Discrete inverse theory. *Academic press, Orlando*, 1984.

[36] **Meyer Y., Jaffard S., and Rioul O.**. L'analyse par ondelettes. *Pour la Science*, pp 28–34, sept. 1987.

[37] **Meyer Y. and Roques S.**. Wavelet analysis and applications. *Ed. Frontières, Gif-sur-Yvette*, 1992.

[38] **Meyer Y.**. Ondelettes et opérateurs. *Hermann, Paris*, 1990.

[39] **Meyer**. Orthonormal wavelets. *in Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space, ed. J.M. Combes, A. Grossman, Ph. Tchamitchian, Springer-Verlag, Berlin*, pp 21–37, 1989.

[40] **Mioara A., Gibert D., Hulot G., Le Mouel J.L., and Saracco G.**. Detection of geomagnetic jerks using wavelet analysis. *J. Geophys. Res*, **100** : 12557–12572, 1995.

[41] **Morat P., Le Mouel J.L., Pride S., and Jaupart C.**. Sur de remarquables oscillations de température, d'humidité, de potentiel électrique observées dans une carrière souterraine. *C. R. Acad. Sci., Ser.II*, **320** : 173–180, 1995.

[42] **Morat P. and Le Mouel J.L.**. Signaux éléctriques engendrés par des variations de contrainte dans des roches poreuses non saturées. *C. R. Acad. Sci., Ser.II*, **315** : 955–963, 1992.

[43] **Morlet J., Arens G., Fourgeau I., and Giard D.**. Wave propagation and sampling theory. *Geophysics*, **47** : 203–236, 1982.

[44] **Oldenburg D.**. The inversion and interpretation of gravity anomalies. *Geophysics*, **39** : 526–536, 1974.

[45] **Parker R.L. and Huestis S.P.**. The inversion of magnetic anomalies in the presence of topography. *J. Geophys. Res.*, **79** : 1587–93, 1974.

[46] **Parker R.L.**. Geophysical inverse theory. *Princeton University Press, Princeton*, 1994.

[47] **Perrier V.** . Ondelettes et simulation numérique. *Thèse de l'université Paris VI*, 1991.

[48] **Reid A.B., Allsop J.M., Granser H., Millett A.J., and Somerton I.W.**. Magnetic interpretation in three dimensions using euler deconvolution. *Geophysics*, **55** : 80–91, 1990.

[49] **Richter F.M.**. Focal mechanisms and seimic energy release of deep and intermediate earthquakes in the tonga-kermadec region and their bearing on the depth extent of mantle flow. *J. Geophys. Res.*, **84** : 6783–6795, 1979.

[50] **Rioul 0. and Duhamel P.**. Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transforms. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **38** : 569–586, 1992.

[51] **Rissanen J.**. Modeling by shortest data description. *Automatica*, **14** : 465–471, 1978.

[52] **Saito N.**. Simultaneous noise suppression ans signal compression using a library of orthonormal bases and minimum description length. *in Wavelets in Geophysics, edited by E. Foufoula and P. Kumar, Academic, San Diego*, pp 299–324, 1994.

[53] **Sandwell D.T. and Schubert G.**. Geoid height-age relation from seasat altimeter-profiles across the mendocino fracture zone. *J. Geophys. Res.*, **87** : 3949–3958, 1982.

[54] **Sandwell D.T. and Smith W.H.F.**. Global marine gravity from ers-1, geosat and seasat reveals new tectonic fabric. *EOS trans. AGU, Fall 1992 AGU supplement*, **73** : 133, 1992.

[55] **Sandwell D.T.** . Thermomechanical evolution of oceanic fracture zones. *J. Geophys. Res.*, **89** : 11401–11413, 1984.

[56] **Sandwell D.T.**. Biharmonic spline interpolation of geos-3 and seasat altimeter data. *Geophys. Res. Lett.*, **13** : 139–142, 1987.

[57] **Sandwell D.T.**. Antartic marine gravity field from high-density satellite altimetry. *Geophys. J. Int.*, **109** : 437–448, 1992.

[58] **Schwartz G.**. Estimating the dimension of a model. *Ann. Stat.*, **6** : 461–464, 1978.

[59] **Thompson D.T.** . Euldph : A new technique for making computer-assisted depth estimate from magnetic data. *Geophysics*, **47** : 31–37, 1982.

[60] **Torresani B.**. Wavelets signal and image analysis. *Note personnelle*, 1991.

[61] **Wax M. and Kailath T.**. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, **33** : 387–392, 1985.

MEMOIRES DE GEOSCIENCES-RENNES
Université de Rennes I - Campus de Beaulieu
35042 - RENNES Cedex tel : 99.28.60.80

Dans la même collection :

N°1 - **H. MARTIN** - Nature, origine et évolution d'un segment de croûte continentale archéenne : contraintes chimiques et isotopiques. Exemple de la Finlande orientale. **392 p., 183 fig., 51 tabl., 4 pl. (1985).** **Epuisé**

N°2 - **G. QUERRE** - Palingénèse de la croûte continentale à l'Archéen : Les granitoïdes tardifs (2,5-2,4 Ga) de Finlande Orientale. Pétrologie et géochimie. **226 p., 74 fig., 41 tabl., 3 pl. (1985).** **Epuisé**

N°3 - **J. DURAND** - Le Grès Armoricain. Sédimentologie. Traces fossiles. Milieux de depôt. **150 p., 76 fig., 9 tabl., 19 pl. (1985).** **Epuisé**

N°4 - **D. PRIOUR** - Genèse des zones de cisaillement : Application de la méthode des éléments finis à la simulation numérique de la déformation des roches. **157 p., 106 fig., 7 tabl. (1985).** **55F.**

N°5 - **V. NGAKO** - Evolution métamorphique et structurale de la bordure sud-ouest de la "série de Poli", segment camerounais de la chaîne panafricaine. **185 p., 76 fig., 16 tabl., 12 pl. (1986).** **Epuisé**

N°6 - **J. DE POULPIQUET** - Etude géophysique d'un marqueur magnétique situé sur la marge continentale sud-armoricaine. **159 p., 121 fig., 5 tabl. (1986).** **55F.**

N°7 - **P. BARBEY** - Signification géodynamique des domaines granulitiques. La ceinture des granulites de Laponie : une suture de collision continentale d'âge protérozoique inférieur (1.9-2.4 Ga). **324 p., 89 fig., 46 tabl., 11 pl. (1986).** **Epuisé**

N°8 - **Ph. DAVY** - Modélisation thermo-mécanique de la collision continentale. **233 p., 72 fig., 2 tabl. (1986).** **Epuisé**

N°9 - **Y. GEORGET** - Nature et origine des granites peralumineux à cordiérite et des roches associées. Exemple des granitoïdes du Massif Armoricain (France) : Pétrologie et géochimie. **250 p., 140 fig., 67 tabl. (1986).** **Epuisé**

N°10 - **D. MARQUER** - Transfert de matière et déformation progressive des granitoides. Exemple des massifs de l'Aar et du Gothard (Alpes Centrales Suisses). **287 p., 134 fig., 52 tabl., 5 cartes hors-texte (1987).** **120 F.**

N°11 - J.S. SALIS -Variation séculaire du champ magnétique terrestre. Direction et Paléointensité sur la période 7.000-70.000 BP dans la Chaîne des Puys. **190 p., 73 fig., 28 tabl., I carte hors-texte (1987). 90F.**

N°12 - Y. GERARD - Etude expérimentale des interactions entre déformation et transformation de phase. Exemple de la transition calcite-aragonite. **126 p., 42 fig., 3 tabl., 10 pl. (1987). 75F.**

N°13 - H. TATTEVIN - Déformation et transformation de phases induites par ondes de choc dans les silicates. Caractérisation par la microscopie électronique en transmission. **150 p., 50 fig., I tabl., 13 pl. (1987). 95F.**

N°14 - J.L. PAQUETTE - Comportement des systèmes isotopiques U-Pb et Sm-Nd dans le métamorphisme éclogitique. Chaîne Hercynienne et Chaîne Alpine. **190 p., 88 fig., 39 tab., 2 pl. (1987). 95F.**

N°15 - B. VENDEVILLE - Champs de failles et tectonique en extension; modélisation experimentale. **392 p., 181 fig., I tabl., 82 pl. (1987). Epuisé**

N°16 - E. TAILLEBOIS - Cadre géologique des indices sulfurés à Zn, Pb, Cu, Fe du secteur de Gouézec-St-Thois : Dévono-Carbonifère du flanc Sud du Bassin de Châteaulin (Finistère). **195 p., 64 fig., 41 tabl., 8 pl. photo., 8 pl. h.texte. (1987). 110F**

N°17 - J.P. COGNE - Contribution a l'étude paléomagnétique des roches déformées. **204 p., 86 fig., 17 tabl. (1987). 90F.**

N°18 - E. DENIS - Les sédiments briovériens (Protérozoïque supérieur) de Bretagne septentrionale et occidentale : Nature, mise en place et évolution. **263 p., 148 fig., 26 tab., 8 pl. (1988). 140F.**

N°19 - M. BALLEVRE - Collision continentale et chemins P-T : l'Unité pennique du Grand Paradis (Alpes Occidentales). **340 p., 146 fig., 10 tabl., (1988). Epuisé**

N°20 - J.P. GRATIER - L'équilibrage des coupes géologiques. Buts, méthodes et applications. Atelier du Groupe d'Etudes Tectoniques le 8 Avril 1987 à Rennes. **165 p., 82 fig., 2 tabl. (1988). 85F.**

N°21 - R.P. MENOT - Magmatismes paléozoïques et structuration carbonifère du Massif de Belledonne (Alpes Francaises). Contraintes nouvelles pour les schémas d'évolution de la chaine varisque ouest-européenne. **465 p., 101 fig., 31 tab., 6 pl., (1988). 200F**

N°22 - S. BLAIS - Les ceintures de roches vertes archéennes de Finlande Orientale : Géologie, pétrologie, géochimie et évolution géodynamique. **312 p., 107 fig., 98 tab., 11pl. photo, I pl. h.texte, (1989). 160F**

N°23 - A. CHAUVIN - Intensité du champ magnétique terrestre en période stable de transition, enregistrée par des séquences de coulées volcaniques du Quaternaire. **217 p., 100 fig., 13 tab. (1989). 100F.**

N°24 - J.P. VUICHARD - La marge austroalpine durant la collision alpine; évolution tectonométamorphique de la zone de Sesia-Lanzo. **307 p., 143 fig., 26 tab., 6 pl. hors-texte. (1989). 170F.**

N°25 - C. GUERROT - Archéen et Protérozoïque dans la chaîne hercynienne ouest-européenne : géochimie isotopique (Sr-Nd-Pb) et géochronologie U-Pb sur zircons. **180 p., 68 fig., 29 tab., I pl. (1989) 90F.**

N°26 - J.L. LAGARDE - Granites tardi-carbonifères et déformation crustale. L'exemple de la Méseta marocaine. **353 p., 244 fig., 15pl. (1989) 210F.**

N°27 - Ph. BARDY - L'orogène cadomien dans le Nord-Est du Massif Armoricain et en Manche Occidentale. Etude tectonométamorphique et géophysique. **395 p., 142 fig., 7 tab., I pl. hors-texte. (1989). 175F.**

N°28 - D. GAPAIS - Les Orthogneiss : Structures, mécanismes de déformation et analyse cinématique. **377 p., 184 fig., 3 tab. (1989). 275F.**

N°29 - E. LE GOFF - Conditions pression-température de la déformation dans les orthogneiss : Modèle thermodynamique et exemples naturels. **321 p., 146 fig., 42 tab. (1989). 150F.**

N°30 - D. KHATTACH - Paléomagnétisme de formations paléozoiques du Maroc. **220 p., 97 fig., 35 tab., (1989). 100F.**

N°31 - A. HAIDER - Géologie de la formation ferrifère précambrienne et du complexe granulitique encaissant de Buur (Sud de la Somalie). Implications sur l'évolution crustale du socle de Buur. **215 p., 18 fig., 42 tab., 7 pl. (1989). 130 F.**

N°32 - T. DANIEL - Traitement numérique d'image appliqué à l'analyse texturale de roches déformées. **186 p., 121 fig., 4 tab. (1989). 210 F.**

N°33 - C. LECUYER - Hydrothermalisme fossile dans une paléocroûte océanique associée à un centre d'expansion lent : Le complexe ophiolitique de Trinity (N. Californie, U.S.A). **342 p., 109 fig., 73 tab. (1989). 200 F.**

N°34 - P. RICHARD - Champs de failles au dessus d'un décrochement de socle: modélisation expérimentale. 382 p., 137 fig. (1989). 400 F.

N°35 - J. de BREMOND d'ARS - Estimation des propriétés rhéologiques des magmas par l'étude des instabilités gravitaires. Pétrologie du complexe plutonique lité de Guernesey. 370 p., 128 fig., 64 tabl. (1989). 180 F.

N°36 - A. LE CLEAC'H - Contribution à l'étude des propriétés physiques des minéraux à haute pression : Spectroscopie et calcul des grandeurs thermodynamiques de la lawsonite, des épidotes et des polymorphes de SiO_2. 190 p., 72 fig., 37 tabl. (1989). 100 F.

N°37 - 0. MERLE - Cinématique des nappes superficielles et profondes dans une chaîne de collision. 280 p., 165 fig., 3 tabl. (1990). 160F.

N°38 - P. ALLEMAND - Approche expérimentale de la mécanique du rifting continental. 205 p., 106 fig., 13 tabl. (1990). 160F.

N°39 - Ch. BASILE - Analyse structurale et modélisation analogique d'une marge transformante : l'exemple de la marge de Côte-d'Ivoire - Ghana. 230 p., 161 fig., 7 tabl. (1990) . 130F .

N°40 - M. AUDIBERT - Déformation discontinue et rotations de blocs. Méthodes numériques de restauration. Application à la Galilée. 250 p., 80 fig., 5 tabl., (1991). 150F.

N°41 - G. RUFFET - Paléomagnétisme et 40Ar/39Ar : étude combinée sur des intrusions précambriennes et paléozoïques du Trégor (Massif Armoricain) . 261 p., 80 fig., 19 tabl. (1991). 120F.

N°42 - P. SUZANNE - Extrusion latérale de l'Anatolie : Géométrie et mécanisme de la fracturation. 262 p., 100 fig., 12 pl., 5 tabl. (1991). 210F.

N°43 - G. FIQUET - Propriétés thermodynamiques de minéraux du manteau supérieur. Calorimétrie à haute température et spectroscopie Raman à haute pression et haute température. 274 p., 101 fig., 53 tabl. (1991). 130F.

N°44 - J. MARTINOD - Instabilités périodiques de la lithosphère (Flambage, Boudinage en compression et en extension). 283 p., 117 fig., 3 tabl., 2 pl. couleur. (1991). 170F.

N°45 - M.O. BESLIER - Formation des marges passives et remontée du manteau: Modélisation expérimentale et exemple de la marge de la Galice. 257 p., 86 fig., 5 tab., 2 pl. noir/blanc, 2 Pl. couleur. (1991). 180F.

N°46 - **J.B.L. FRANCOLIN** - Analyse structurale du Bassin du Rio Do Peixe. (Brésil) : 250 p., 83 fig., 3 tab., 9 pl. couleur. (1992). 300F.

N° 47 - **S. TOURPIN** - Perte des mémoires isotopiques (Nd, Sr, O) et géochimiques (REE) primaires des komatiites au cours du métamorphisme : exemple de la Finlande Orientale. 185 p., 53 fig., 23 tabl. (1992). 100F.

N° 48 - **J.A. BARRAT** - Genèse des magmas associés à l'ouverture d'un domaine océanique : Géochimie des laves du Nord-Est de l'Afrique (Mer Rouge - Afar) et d'Arabie. 175 p., 47 fig., 23 tab. (1992). 100F.

N° 49 - **E. HALLOT** - Injection dans les réservoirs magmatiques. Contraintes pétrologiques (Massifs de Fort La Latte et de Saint Brieuc, Bretagne Nord) et modélisation analogique. 331 p., 101 fig., 30 tabl. (1993). 180F.

N°50 - **T. SOURIOT** - Cinématique de l'extension post-pliocène en Afar. Imagerie SPOT et modélisation analogique. 225 p., 2 pl. coul., I tabl., 91 fig., 16 pl. photo., I carte H.Texte. (1993). I90F.

N° 51 - **T. EUZEN** - Pétrogenèse des granites de collision post- épaississement. Le cas des granites crustaux et mantelliques du Complexe de Pontivy-Rostrenen (Massif Armoricain, France). 350 p., 2 pl. coul., 34 tabl. en annexe, (1993). I90F.

N° 52 - **J. LE GALL** - Reconstitution des dynamismes éruptifs d'une province paléovolcanique : l'exemple du graben cambrien du Maine (Est du Massif Armoricain). Pétrogenèse des magmas andésitiques et ignimbritiques et leur signification dans l'évolution géodynamique cadomienne. 370 p., 30pl. photo., I pl. coul. (1993). 350 F.

N° 53 - **J. C. THOMAS** - Cinématique tertiaire et rotations de blocs dans l'ouest de l'Asie Centrale (Tien Shan Kirghiz et dépression Tadjik). Etude structurale et paléomagnétique. 330 p., 107 fig., 2 pl. coul., 18 tabl., 1 carte, annexes. (1993). 220 F.

N°54 - **F. LAFONT** - Influences relatives de la subsidence et de l'eustatisme sur la localisation et la géométrie des réservoirs d'un système deltaïque. Exemple de l'Eocène du bassin de Jaca, Pyrénées Orientales., 270 p., 115 fig., dont 17 pl. couleur. (1994). 150 F.

N° 55 - **C. BIELLMANN** - Stabilité et réactivité des carbonates à très hautes pression et température. Implications pour le stockage du Carbone dans le manteau terrestre., 230 p., 74 fig., 11 tabl., 1 pl. couleur (1993). 175 F.

N°56 - A. POTREL - Evolution tectono-métamorphique d'un segment de croûte continentale archéenne. Exemple de l'Amsaga (R.I. Mauritanie), dorsale Réguibat (Craton Ouest Africain). **400 p., (dont annexes) 125 fig., 21 tabl., 1 pl. couleur, 43 pl. photo (1994). 270 F.**

N° 57 - M. KUNTZ - Approche expérimentale de la déformation dans les systèmes préfracturés : Contribution à l'étude de l'inversion tectonique des bassins sédimentaires. **220 p., 19 pl., 87 fig., 3 tabl. (1994). 155 F.**

N° 58 - D. ROUBY - Restauration en carte des domaines faillés en extension. Méthode et applications. **266 p., 98 fig. dont annexes (1994). 180 F.**

N° 59 - J.J. TONDJI-BIYO - Chevauchements et bassins compressifs. Influence de l'érosion et de la sédimentation. Modélisation analogique et exemples naturels. **426 p., 141 fig., 4 pl. couleur, 21 tableaux, dont annexes (1995). 270 F.**

N° 60 - H. BOUHALLIER - Evolution structurale et métamorphique de la croûte continentale archéenne (Craton de Dharwar, Inde du Sud). **277 p., 100 fig., dont 5 pl. coul., 7 tab., dont annexes (1995). 150 F.**

N° 61 - P. GAUTIER - Géométrie crustale et cinématique de l'extension tardi-orogénique dans la domaine centre-égéen (îles des Cyclades et d'Eubée, Grèce). **430 p., 89 fig., dont 4 pl. coul., 1 tabl., dont annexes (1995). 220F.**

N° 62 - M.T. ROMAN BERDIEL - Mécanismes d'intrusion des granites supracrustaux. Modèles analogiques et exemples naturels. **270 p., 75 fig., 5 pl. laser, 9 tabl. (1995). 160F.**

N° 63 - M. JULLIEN - Polytypisme, ordre d'empilement et interstratification dans la cookéite et les phyllosilicates non micacés du métamorphisme. Influence de la pression. **226 p., 61 fig., 8 tabl. (1995). 150 F.**

N° 64 - Y. LAHAYE - L'altération des komatiites. **224 p., 70 fig., 29 tabl., + annexes (1995). 150 F.**

N° 65 - A. CRAVE - Quantification de l'Organisation des réseaux hydrographiques. **210 p., 68 fig., dont annexe (1995). 120 F.**

N° 66 - A. ESSAIFI - Relations entre magmatisme-déformation et altération hydrothermale : L'exemple des Jebilet centrales (Hercynien, Maroc). **331 p., 248 fig., 4 tabl., dont annexes (1995). 170 F.**

N° 67 - M. LE RAVALEC - Vitesses et perméabilité des roches : modélisation du rôle des fluides et des fissures. **276 p., 119 fig. 3 pl. couleur, 5 tabl., dont annexe (1995). 140 F.**

n° 68 - **A. SEMIANI** - Métallogénie de la zone de cisaillement aurifère est-ouzzalienne : structure, pétrologie et géochimie des gisements d'or de Tirek-Amesmessa (Hoggar occidental, Algérie). **262 p.,72 fig., 36 tabl., 4 pl. couleur + annexes, (1995).** **130 F.**

N° 69 - **F. MOREAU** - Méthodes de traitement de données géophysiques par transformée en ondelettes. **177 p., 57 fig., + annexes. (1995).** **100 F.**

BON DE COMMANDE

à retourner à : Arlette FALAISE
GEOSCIENCES-RENNES I
Université de Rennes
35042 - RENNES Cédex (France)
Tél : (33) 99.28.60.80 Fax : (33) 99.28.60.80

NOM .....

ORGANISME .....

.....

ADRESSE .....

Veuillez me faire parvenir les ouvrages suivants :

N°	Auteur	Nb exemplaires	P.U.	Total
			Total	
Frais d'envoi : 20,00F par volume			Frais d'envoi	
par volume supplémentaire : 5,00 F			Montant total	

Nous acceptons les bons de commandes.

Si vous réglez par chèque veuillez établir votre chèque au nom de :

Monsieur l'Agent Comptable de l'Université de Rennes I.

Résumé

Cette thèse concerne le développement de nouvelles méthodes de traitement et d'interprétation de données de champs de potentiel. Les principaux résultats portent sur deux points :

- Le filtrage non-stationnaire de données géophysiques à l'aide d'ondelettes orthogonales.
- La formulation du problème inverse des champs de potentiel en terme de décomposition en ondelettes continues.

Filtrage non-stationnaire

La méthode de filtrage que nous proposons est basée sur la décomposition en ondelettes orthogonales. Elle permet de tenir compte des non-stationnarités du rapport signal-sur-bruit fréquemment contenues dans des données géophysiques. Le signal est représenté *via* la transformée en ondelettes orthogonales sous forme de coefficients indépendants, localisés à la fois en temps et en fréquence. Le filtrage consiste alors à séparer les coefficients représentatifs du signal géophysique de ceux dus au bruit, et à reconstruire le signal par transformée en ondelettes inverse sur les coefficients conservés. Nous avons testé plusieurs critères statistiques permettant d'effectuer ce tri. L'hypothèse d'un bruit blanc gaussien nous a alors permis de développer un algorithme rapide de débruitage de données géophysiques.

Problème inverse des champs de potentiel

L'idée directrice de la méthode proposée est d'effectuer une imagerie structurale du sous-sol à partir d'un champ mesuré en surface, c'est-à-dire reconnaître des bords d'objets géologiques. Dans un premier temps, la méthode est développée pour le cas de sources homogènes multipolaires. Cela nous a permi d'établir un lien entre la théorie du potentiel et la transformée en ondelettes grâce à l'homogénéité du champ. Nous avons introduit des ondelettes particulières définies à partir du noyau de Poisson. Dans ce cas, la hauteur de prolongement harmonique dans l'espace physique est équivalente à la dilatation dans la transformée en ondelettes. Nous pouvons alors localiser précisément les sources responsables du champ observé et déterminer leur type, en les caractérisant par le degré d'homogénéité. De plus, la méthode est robuste vis-à-vis du bruit, grâce à l'utilisation des lignes d'extréma de la transformée en ondelettes.

Du fait du caractère asymptotique de cette formulation, nous avons ensuite pu la généraliser au cas de sources étendues. Des bords d'objets sont alors localisés et identifiés. L'utilisation d'ondelettes complexes nous donne également accès à l'inclinaison des structures. Cette formulation du problème inverse nous a permis de développer une méthode de filtrage par critères structuraux (type, profondeurs des sources).

Nous donnons quelques exemples d'applications sur des données gravimétriques issues de profils altimétriques. Les possibilités de la méthode sont illustrées sur la zone de fracture Mendocino, ainsi que sur la zone de subduction Kermadec-Tonga.

Mots clés :

problème inverse, champs de potentiel, filtrage, transformée en ondelettes, fonctions homogènes, déconvolution d'Euler, imagerie structurale, gravimétrie, géomagnétisme, géoide.

Editions de GEOSCIENCES RENNES

Université de Rennes I

F - 35042 - RENNES Cédex