HAL
open science

Pureté des fibres de Springer affines pour GL_4

Zongbin Chen

To cite this version:

Zongbin Chen. Pureté des fibres de Springer affines pour GL_4. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112266 . tel-00656163

HAL Id: tel-00656163

https://theses.hal.science/tel-00656163

Submitted on 3 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre:

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Mathématiques

par

Zongbin CHEN

Sur la pureté des fibres de Springer affines non-ramifiées pour GL_4

Soutenue le 5 Decembre 2011 devant la Commission d'examen:

M. PIERRE-HENRI CHAUDOUARD	
M. ULRICH GÖRTZ	(Rapporteur)
M. GUY HENNIART	
M. GÉRARD LAUMON	(Directeur de thèse)
M. JEAN-LOUP WALDSPURGER	(Président)

Rapporteurs:

M. Thomas Haines

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

La thèse consiste de deux parties. Dans la première partie, on montre la pureté des fibres de Springer affines pour GL_4 dans le cas non-ramifié. Plus précisément, on construit une famille de pavages non standard en espaces affines de la grassmannienne affine, qui induisent des pavages en espaces affines de la fibre de Springer affine. Dans la deuxième partie, on introduit une notion de ξ-stabilité sur la grassmannienne affine $\mathscr{X}$ pour le groupe GL_d, et on calcule la séries de Poincaré du quotient $\mathscr{X}^\xi/T$ de la partie ξ-stable $\mathscr{X}^\xi$ par le tore maximal T par une processus analogue de la réduction de Harder-Narasimhan.

Mots-clefs : grassmannienne affine, fibre de Springer affine, pavage en espaces affines, pureté, ξ-stabilité.

On the purity of unramified affine Springer fibre for GL_4

Abstract

This thesis consists of two parts. In the first part, we prove the purity of affine Springer fibers for GL_4 in the unramified case. More precisely, we have constructed a family of non standard affine pavings for the affine grassmannian, which induce an affine paving for the affine Springer fiber. In the second part, we introduce a notion of ξ-stability on the affine grassmannian $\mathscr{X}$ for the group $G = \mathrm{GL}_d$, and we calculate the Poincaré polynomial of the quotient $\mathscr{X}^\xi/T$ of the stable part $\mathscr{X}^\xi$ by the maximal torus T by a process analogue to the Harder-Narasimhan reduction.

Keywords : affine grassmannian, affine Springer fiber, affine paving, purity, ξ-stablility.

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse, Gérard Laumon, très chaleureusement pour m'avoir proposé ce sujet de recherche et ses encouragements constants. Je le remercie aussi pour sa grande patience de m'écouter et de nombreuses heures consacrées à la lecture de la thèse.

Je remercie Ulrich Görtz et Thomas Haines d'avoir bien voulu écrire des rapports sur ma thèse et d'avoir signalé quelques imprécisions sur la longueur et l'ordre de Bruhat-Tits sur le groupe de Weyl affine. Je remercie également Pierre-Henri Chaudouard, Ulrich Görtz, Guy Henniart et Jean-Loup Waldspurger, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury.

Un grand merci à mes amis chinois, qui ont créé autour de moi une ambiance amicale, Zhou Guodong, Chen Ke, Zheng Weizhe, Chen Miaofen, Ma Xiaonan, Wu Han, Shan Peng, Liang Xiangyu, Shen Xu, Wang Chunhui, Sun Zhe, Hu Yong, Hu Yongquan, Liang Yongqi, Tang Shun, Shen Shu, Chen Li. Je remercie en particulier Shen Xu, Sun Zhe, Alexis Bouthier et Arno Kret pour les discussions mathématiques que j'ai eues avec eux.

Table des matières

1 Introduction **9**

1.1 Présentation des résultats principaux 9

1.2 Notations 12

I Pavages en espaces affines des fibres de Springer affines **15**

2 Pavages non standard de la grassmannienne affine **16**

2.1 Filtration de Moy-Prasad 16

2.2 Pavages non standard de la grassmannienne affine tronquée 17

2.3 Pavages en tranches de la grassmannienne affine tronquée 21

3 Application aux pavages de la fibre de Springer affine **29**

3.1 Rappel sur les fibres de Springer affines 29

3.2 Formes minimales des valuations radicielles non-ramifiées 30

3.3 La conjecture de pureté 33

3.4 Une proposition technique 35

3.5 Pavage pour GL_d dans un cas particulier 37

3.6 Pavage pour GL_3 37

3.7 Pavage pour GL_4 dans le cas nonramifié 40

II Sur une notion de ξ-stabilité sur la grassmannienne affine **50**

4 La notion de ξ-stabilité **51**

4.1 La notion de ξ-stabilité sur la grassmannienne affine 51

4.2 Rappel sur la théorie géométrique des invariantes de Mumford 52

4.3 Comparaison de deux notions de stabilité 56

5 La réduction d'Arthur-Kottwitz **57**

6 Séries de Poincaré de $\mathscr{X}^{\xi}/T$ **58**

6.1 Séries de Poincaré de la grassmannienne affine 59

6.2 $\mathscr{X}^{\xi}/T$ est homologiquement lisse 60

6.3 Séries de Poincaré 63

7 Domain fondamental de la fibre de Springer affine **66**

Références **68**

1 Introduction

1.1 Présentation des résultats principaux

Soit k un corps algébriquement clos. On note $F = k((\varepsilon))$ le corps de séries de Laurent sur k, $\mathcal{O} = k[[\varepsilon]]$ son anneau d'entier, $\mathfrak{p} = \varepsilon k[[\varepsilon]]$ son idéal maximal. On fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de F, et $\mathrm{val} : \overline{F} \to \mathbf{Q}$ la valuation discrete normalisée par $\mathrm{val}(\varepsilon) = 1$.

Soient $G = \mathrm{GL}_d$, T le tore maximal des matrices diagonales, B le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. On note $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}$ pour leurs algèbres de Lie et $\Phi(G,T)$ pour le système de racines de G par rapport à T. Soit $K = G(\mathcal{O})$, soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de $G(F)$, i.e. il est l'image inverse de B sous la projection naturelle $K \to G(k)$.

La grassmannienne affine est le quotient $\mathscr{X} = G(F)/K$ vu comme un ind-k-schéma. Elle classifie les réseaux dans F^d.

$$\mathscr{X} = \{L \subset F^d \mid L \text{ est un sous-}\mathcal{O}\text{-module libre de } F^d \text{ de rang } d \\ \text{tel que } F \cdot L = F^d\}.$$

Ce ind-k-schéma admet un pavage en espaces affines.

Théorème 1.1 (Bruhat-Tits)**.** *On a un pavage en espaces affines*

$$\mathscr{X} = \bigsqcup_{v \in X_*(T)} IvK/K.$$

1.1.1 Pavages des fibres de Springer affines

Soit $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier. La fibre de Springer affine

$$\begin{aligned} \mathscr{X}_\gamma &= \{g \in G(F)/G(\mathcal{O}) \mid \mathrm{Ad}(g^{-1})\gamma \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})\} \\ &= \{L \in \mathscr{X} \mid \gamma L \subset L\} \end{aligned}$$

a été introduite par Kazhdan et Lusztig dans [KL]. C'est un sous-schéma fermé localement de type fini et de dimension finie de $\mathscr{X}$. Elle est utilisée par Goresky, Kottwitz et Macpherson dans [GKM2] pour montrer le lemme fondamental de Langlands-Shelstad, sous l'hypothèse suivante :

Conjecture 1.1 (Goresky-Kottwitz-Macpherson)**.** Soit $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier, la cohomologie de la fibre de Springer affine $\mathscr{X}_\gamma$ est pure.

Dans [GKM1], Goresky, Kottwitz et Macpherson ont montré cette conjecture pour γ équivalué. L'élément γ est dit *équivalué* si $\mathrm{val}(\alpha(\gamma))$ ne dépend pas de la racine α de G sur $\overline{F}$ par rapport à $Z_\gamma(G)$. Pour cela, ils ont construit un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}_\gamma$. Pour une variété X sur k, un *pavage en espaces affines* de X est une filtration croissante exhaustive $X_0 \subset X_1 \subset \cdots$ de X telle que X_i est fermé et $X_i \backslash X_{i-1}$ est isomorphe à un espace affine standard, $\forall i$. Dans le cas où $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$ est équivalué, un tel pavage est obtenu en intersectant $\mathscr{X}_\gamma$ avec le pavage de Bruhat-Tits.

Mais pour $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$ non-équivalué, les intersections $\mathscr{X}_\gamma \cap IvK/K$ sont en général très singulières. Un exemple typique est le suivant.

Exemple 1.1. Soit $G = \mathrm{GL}_3$, $\gamma = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & & \\ & \varepsilon^4 & \\ & & -\varepsilon^4 \end{pmatrix}$. Pour $v \in \mathbf{Z}^3$, on note $\varepsilon^v = \begin{pmatrix} \varepsilon^{v_1} & & \\ & \varepsilon^{v_2} & \\ & & \varepsilon^{v_3} \end{pmatrix}$ et $C(v) = I\varepsilon^v K/K$. On a

$$C(0,2,-2) = \begin{bmatrix} 1 & & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^2 \\ \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 & 1 & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \varepsilon^v K/K.$$

En utilisant la coordonné

$$\begin{bmatrix} 1 & & a_0 + a_1\varepsilon \\ b_1\varepsilon & 1 & \sum_{i=0}^3 c_i\varepsilon^i \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 1 & & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^2 \\ \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 & 1 & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^4 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

on trouve que l'intersection $\mathscr{X}_\gamma \cap IvK/K$ est la sous-variété de $\mathbf{A}^7$ définie par l'équation

$$a_0 b_1 = 0.$$

Lucarelli a construit dans [Lu] un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}_\gamma$ pour PGL_3. Il part d'un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}$ qui est différent de celui de Bruhat-Tits. Dans notre exemple pour GL_3, Lucarelli rassemble le pavé singulier $C(0,2,-2) \cap \mathscr{X}_\gamma$ et le pavé lisse $C(1,1,-2) \cap \mathscr{X}_\gamma$, et redécoupe la réunion de ces deux pavés en utilisant le décomposition de Bruhat-Tits pour l'Iwahori

$$I' = \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(1,1,\varepsilon^2))I,$$

ce qui est équivalent à envoyer la branche $b_1 \neq 0$, $a_0 = 0$ vers la cellule $C(1,1,-2) \cap \mathscr{X}_\gamma$ et laisser l'autre fixé. Pour $b_1 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & & a_1\varepsilon \\ b_1\varepsilon & 1 & \sum_{i=0}^3 c_i\varepsilon^i \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \varepsilon^2 & \\ & & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix} K/K \\ &= \begin{bmatrix} 1 & b_1^{-1}\varepsilon^{-1} & a_1\varepsilon - b_1^{-1}c_3\varepsilon^2 \\ & 1 & \sum_{i=0}^2 c_i\varepsilon^i \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix} K/K, \end{aligned}$$

et

$$C(1,1,-2) \cap \mathscr{X}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & & \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^3 \\ & 1 & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix} K/K.$$

Donc la branche $b_1 \neq 0$, $a_0 = 0$ et la cellule $C(1,1,-2) \cap \mathscr{X}_\gamma$ se rassemblent en l'espace affine

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathfrak{p}^{-1}/\mathcal{O} & \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^3 \\ & 1 & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix} K/K \cong \mathbf{A}^6.$$

Remarquons que dans l'exemple 1.1, on peut aussi déplacer la branche $a_0 \neq 0$, $b_1 = 0$ vers le pavé lisse $C(-2,2,0) \cap \mathscr{X}_\gamma$, ce que ne fait pas Lucarelli. Nous utilisons en fait les deux possibilités pour obtenir une famille de pavages de GL_3 qui sont différents de celui de Lucarelli, mais qui nous permet de paver la fibre de Springer affine pour GL_4.

Pour $m \in \mathbf{Z}$, on note

$$\mathscr{X}_{\geq -m} = \{L \in \mathscr{X} \mid L \subset \varepsilon^{-m}\mathcal{O}^d\},$$

alors $\mathscr{X} = \lim_{m \to +\infty} \mathscr{X}_{\geq -m}$. Notre résultat principal est

Théorème 1.2. *Pour $G = \mathrm{GL}_4$ et $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier non-ramifié, $\mathscr{X}_{\geq -m} \cap \mathscr{X}_\gamma$ admet un pavage en espaces affines. Donc $\mathscr{X}_\gamma$ est pur.*

L'idée est de couper $\mathscr{X}_{\geq -m} \cap \mathscr{X}_\gamma$ en parties localement fermées telles que chaque partie est une fibration en espaces affines sur une sous-variété localement fermée de $\mathscr{X}_\gamma^{\mathrm{GL}_3}$, et donc le pavage est ramené aux pavages pour GL_3.

Passons maintenant en revue de cette partie.

Dans §2, nous construisons des pavages non standard en espaces affines de la grassmannienne affine. Après des rappels sur la filtration de Moy-Prasad et le décomposition de Bruhat-Tits, on commence par le pavage de la grassmannienne affine tronquée $\mathscr{X}_{\geq -m}$ et son "dual" $\mathscr{X}_{\leq m}$. Puis dans §2.3, pour $v \in X_*(T)$ tel que $v_1 \geq v_2 = \cdots = v_{d-1} \geq v_d$, on a coupé la variété de Schubert affine $\mathrm{Sch}(v) = \overline{KvK/K}$ en parties localement fermées, qui sont en effet des fibrations en espaces affines sur les grassmanniennes affines tronquées pour les sous-groupes de Levi standard de G. Leurs pavages sont ensuite ramenés à ceux de la grassmannienne affine tronquée. Signalons que dans §2.3.1, nous introduisons certaines fibrés vectoriels sur la grassmannienne affine et nous donnons de critère pour que l'intersection de deux fibrés vectoriels reste un fibré vectoriel. Ces résultats sont utilisés pour montrer que certaines rétractions sont en fait des fibrations en espaces affines.

Dans §3, nous utilisons ces pavages non standard aux pavages des fibres de Springer affines. D'abord, on fait des rappels sur les fibres de Springer affines. En suivant Goresky, Kottwitz et Macpherson on introduit les valuations radicielles, et on classifie les valuations radicielles non-ramifiées. Puis, on fait des rappels sur la conjecture de pureté de Goresky, Kottwitz et Macpherson. Nous entrons ensuite aux parties essentielles de la thèse. Après une proposition technique concernant des fibrations en espaces affines entre les sous-variétés des fibres de Springer affines, nous construisons des pavages en espaces affines des fibres de Springer affines dans les cas suivants :

1. $G = \mathrm{GL}_d$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_{d-1}(F) \subset \mathfrak{gl}_d(F)$ tel que $\alpha_{1,2}(\gamma) = n_1$ et $\gamma_2 \in \mathfrak{gl}_{d-1}(F)$ est équivalué de valuation $n_2 + r$, $r \in \mathbf{Q}$, $0 \leq r < 1$, $n_1 \leq n_2$, $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$.
2. $G = \mathrm{GL}_3$, γ quelconque.
3. $G = \mathrm{GL}_4$, γ non-ramifié.

1.1.2 La ξ-stabilité sur la grassmannienne affine

On introduit une notion de ξ-stabilité sur la grassmannienne affine. C'est un analogue local de la notion de ξ-stabilité sur l'espace de Hitchin introduite par Chaudouard

et Laumon dans [CL]. Le sous ind-k-schéma $\mathscr{X}^\xi$ des points ξ-stables est ouvert dans $\mathscr{X}$, il est invariant sous l'action du tore T. On s'intéresse au quotient $\mathscr{X}^\xi/T$. Par une comparaison avec la notion de stabilité en théorie géométrique des invariantes de Mumford, on montre que la quotient $\mathscr{X}^\xi/T$ est un ind-k-schéma. Le résultat principal de cette partie est

Théorème 1.3. *La séries de Poincaré de $\mathscr{X}^\xi/T$ est*

$$P_{\mathscr{X}^\xi/T}(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} (1-t^{2i})^{-1}.$$

De plus, on a $H_{2i+1}(\mathscr{X}^\xi/T) = 0$ et le frobenius agit sur $H_{2i}(\mathscr{X}^\xi/T)$ par q^{-i}, $\forall i \in \mathbf{Z}$, $i \geq 0$.

Pour cela, on montre d'abord que la variété $\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}/T$ est homologiquement lisse. C'est un corolaire d'un résultat de comparaison des singularités de la grassmannienne affine et du cône nilpotent, et du fait que le cône nilpotent est homologiquement lisse. Ensuite, on déduit la séries de Poincaré de $\mathscr{X}^\xi/T$ de celle de la grassmannienne affine en utilisant la réduction d'Arthur-Kottwitz, le point clé est une majoration de dimension de la partie non-ξ-stable $\mathscr{X}_{\geq -n} \backslash \mathscr{X}^\xi_{\geq -n}$.

Passons en revue cette partie.

Dans §4, après une petit rappel sur la fonction H_P d'Arthur, nous introduisons la notion de ξ-stablilité. Puis on rappelle la théorie géométrique des invariants de Mumford et nous montrons que la ξ-stabilité est une sorte de stabilité sur la grassmannienne affine sous l'action d'un tore "tordu", ce qui implique que $\mathscr{X}^\xi/T$ est un ind-k-schéma.

Dans §5, nous construisons la réduction d'Arthur-Kottwitz, qui nous permet de réduire les parties non-ξ-stables de $\mathscr{X}$ aux parties stables des grassmanniennes affines pour les sous-groupes de Levi standard de G.

Dans §6, nous calculons la séries de Poincaré de $\mathscr{X}^\xi/T$. Nous commençons par calculer celui de la grassmannienne affine. Puis nous montrons que $\mathscr{X}^\xi/T$ est homologiquement lisse en utilisant les résultats de Mirkovic-Vybornov et Borho-Macpherson. Après une majoration de dimension des parties non-ξ-stables, nous déduisons la séries de Poincaré de $\mathscr{X}^\xi/T$ et l'action de frobenius sur $H_*(\mathscr{X}^\xi/T)$ de ceux de la grassmannienne affine.

Dans §7, on rappel d'abord le résultat de Bezrukavnikov concernant l'action de $T_\gamma(\mathcal{O})$ sur $\mathscr{X}_\gamma$, où T_γ est le centralisateur de γ dans G. Puis on rappelle le théorème de Goresky, Kottwitz et Macpherson sur les points réguliers de $\mathscr{X}_\gamma$. On termine ensuite par définir un domain fondamental de $\mathscr{X}_\gamma$ sous l'action de $T_\gamma(F)/T_\gamma(\mathcal{O})$.

1.2 Notations

On fixe un nombre $d \in \mathbf{N}$, $d \geq 1$. On prend $k = \mathbf{C}$ le corps de nombres complexes, ou $k = \overline{\mathbf{F}}_p$ la clôture algébrique d'un corps fini avec $p > d$. On note $F = k((\varepsilon))$ le corps de séries de Laurent sur k, $\mathcal{O} = k[[\varepsilon]]$ son anneau d'entier, $\mathfrak{p} = \varepsilon\mathcal{O}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. On fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de F, et on note val : $\overline{F} \to \mathbf{Z}$ la valuation normalisée par $\mathrm{val}(\varepsilon) = 1$.

Soit $G = \mathrm{GL}_d$ le groupe linéaire sur k, T le tore diagonal de G, B le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de G. On notera leur algèbre de Lie par la lettre gothique correspondante. Pour tout sous-groupe fermé H de G stable par T sous l'action adjointe, on note $\Phi(H,T)$ l'ensemble des racines de T dans H. Pour $i,j = 1,\cdots,d$, $i \neq j$, on note $\alpha_{i,j} \in X^*(T)$ le caractère défini par

$$\alpha_{i,j}(\mathrm{diag}(t_1,\cdots,t_d)) = t_i t_j^{-1}.$$

Alors $\Phi(G,T) = \{\alpha_{i,j}\}$ est le système de racines de G par rapport à T. À toute racine $\alpha \in \Phi(G,T)$, on associe de la manière usuelle une co-racine $\alpha^\vee \in X_*(T)$. On note $\mathfrak{g}_{i,j}$ l'espace propre de poids $\alpha_{i,j}$. Pour $i = 1,\cdots,d-1$, on note $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$, ce sont des racines simples de G par rapport à B. On note $\{\varpi_i\}_{i=1}^{d-1}$ les poids fondamentaux correspondants. On note $X_*^+(T)$ le semi-groupe des co-caractères dominants. On note $W = \mathfrak{S}_d$ le groupe de Weyl de G, on note $s_{i,j} \in W$ la réflexion associée à la racine $\alpha_{i,j}$ et on simplifie $s_i = s_{i,i+1}$. La paire $(W, \{s_i\}_{i=1}^{d-1})$ est un groupe de Coxeter. On note $\widetilde{W} = W \ltimes X_*(T)$ le groupe de Weyl affine.

Pour $\mathbf{a} = (a_1,\cdots,a_d) \in \mathbf{Z}^d$, on l'identifie avec le co-caractère $v_{\mathbf{a}} \in X_*(T)$ défini par $v_{\mathbf{a}}(t) = (t^{a_1},\cdots,t^{a_d})$. À chaque $v \in X_*(T)$, on associe le sous-groupe parabolique semi-standard $P_v \supset T$ tel que

$$\mathrm{Lie}(P_v) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha_{i,j}(v)\geq 0} \mathfrak{g}_{i,j}.$$

L'application $v \in X_*(T) \to \overline{\varepsilon^v} \in T(F)/T(\mathcal{O})$ est un isomorphisme de groupes abéliens ; on identifie ces deux groupes dans la suite. On identifie aussi $X_*(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ avec $\mathfrak{t}$.

On utilise les notations introduites par Arthur dans [A] pour la formule des traces.

On note $\mathcal{L}(T)$ l'ensemble des sous-groupes de Levi de G contenant T. Pour $L, M \in \mathcal{L}(T), L \supset M$, on note $\mathcal{P}^L(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de L dont le facteur de Levi est M. On note $\mathcal{F}^L(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de L contenant M. Pour simplifier les notations on note encore $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}^G(M)$ et $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}^G(M)$.

On note $X^*(M) = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{G}_m)$ et $\mathfrak{a}_M^* = X^*(M) \otimes \mathbf{R}$. Le morphisme de restriction $X^*(M) \to X^*(T)$ induit une injection $\mathfrak{a}_M^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_T^*$. On note $(\mathfrak{a}_T^M)^*$ le sous-espace de $\mathfrak{a}_T^*$ engendré par $\Phi(M,T)$. On a une décomposition en somme directe

$$\mathfrak{a}_T^* = (\mathfrak{a}_T^M)^* \oplus \mathfrak{a}_M^*.$$

L'accouplement canonique

$$X_*(T) \times X^*(T) \to \mathbf{Z}$$

se prolonge linéairement en un accouplement parfait $\mathfrak{a}_T \times \mathfrak{a}_T^* \to \mathbf{R}$, avec $\mathfrak{a}_T = X_*(T) \otimes \mathbf{R}$. Pour $M \in \mathcal{L}(T)$, on note $\mathfrak{a}_M$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ dual de $\mathfrak{a}_M^*$. On identifie alors $\mathfrak{a}_M$ au sous-espace de $\mathfrak{a}_T$ annulé par $(\mathfrak{a}_T^M)^*$. On note $\mathfrak{a}_T^M$ le sous-espace de $\mathfrak{a}_T$ engendré par $\Phi^\vee(M,T)$. C'est aussi l'orthogonal de l'espace $\mathfrak{a}_M^*$ dans $\mathfrak{a}_T$. On a donc la décomposition

$$\mathfrak{a}_T = \mathfrak{a}_M \oplus \mathfrak{a}_T^M.$$

On note π_M, π^M les projections sur les deux facteurs.

Pour $M \in \mathcal{L}(T)$ un sous-groupe de Levi de G, on utilise un exposant ^{M} pour désigner l'objet correspondant pour M. Par exemple, $I^M = I \cap M_F$.

Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier qui est inférieure ou égale à x, et $\lceil x \rceil$ le plus petit entier qui est supérieur ou égale à x.

Première partie

Pavages en espaces affines des fibres de Springer affines

Sommaire

2 Pavages non standard de la grassmannienne affine **16**
2.1 Filtration de Moy-Prasad 16
2.2 Pavages non standard de la grassmannienne affine tronquée 17
2.2.1 Pavage triangulaire 18
2.2.2 Passage au dual 20
2.3 Pavages en tranches de la grassmannienne affine tronquée 21
2.3.1 Quelques fibrés vectoriels sur la grassmannienne affine 21
2.3.2 Rétractions aux sous-groupes de Levi 23
2.3.3 Pavage en tranches 27

3 Application aux pavages de la fibre de Springer affine **29**
3.1 Rappel sur les fibres de Springer affines 29
3.2 Formes minimales des valuations radicielles non-ramifiées 30
3.2.1 Classes de $G(F)$-conjugaison des tores maximaux de G_F . . . 30
3.2.2 Valuations radicielles pour GL_d 31
3.3 La conjecture de pureté 33
3.3.1 Pureté de ind-k-schéma 33
3.3.2 Conjecture de Goresky, Kottwitz et Macpherson 34
3.4 Une proposition technique 35
3.5 Pavage pour GL_d dans un cas particulier 37
3.6 Pavage pour GL_3 37
3.7 Pavage pour GL_4 dans le cas nonramifié 40
3.7.1 Premier type 42
3.7.2 Deuxième type 45

Dans cette partie, on va construire des pavages en espaces affines de la grassmannienne affine, on les utilisera ensuite pour paver des fibre de Springer affines en espaces affines dans certains cas.

2 Pavages non standard de la grassmannienne affine

2.1 Filtration de Moy-Prasad

On introduit l'action du tore "pivotant" $\mathbb{G}_m$ sur le corps $F = k((\varepsilon))$, définie par $t * \varepsilon^n = t^n \varepsilon^n, \forall t \in k^\times, n \in \mathbf{Z}$. Elle induit une action de $\mathbb{G}_m$ sur G_F et $\mathfrak{g}_F$. On a donc une action du tore $\widetilde{T} = \mathbb{G}_m \times T$ sur $\mathfrak{g}_F$, le premier facteur agissant comme le tore pivotant. On note $\epsilon_0 \in X^*(\mathbb{G}_m)$ le caractère définit par $\epsilon_0(t) = t$. On note $(\alpha_{i,j}, n)$ le caractère $(\epsilon_0^n, \alpha_{i,j})$ de $\widetilde{T}$ et on note $\widetilde{\Phi}(G,T) = \Phi(G,T) \times \mathbf{Z}$.

La décomposition en espaces propres de $\mathfrak{g}_F$ sous l'action de $\widetilde{T}$ est

$$\mathfrak{g}_F = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \varepsilon^m \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{(\alpha_{i,j},n) \in \widetilde{\Phi}(G,T)} \mathfrak{g}_{i,j} \varepsilon^n + \mathfrak{g} \varepsilon^N, \quad N \gg 0,$$

où $\varepsilon^m \mathfrak{t}$ est de poids $(0, m)$ et $\mathfrak{g}_{i,j}\varepsilon^n$ est de poids $(\alpha_{i,j}, n)$.

Pour $x \in \mathfrak{t}$ fixé, $t \in \mathbf{R}$, on définit une filtration sur $\mathfrak{g}_F$:

$$\mathfrak{g}_{x,t} = \bigoplus_{\alpha_{i,j}(x)+n \geq t} \mathfrak{g}_{i,j} \varepsilon^n + \mathfrak{g} \varepsilon^N, \quad N \gg 0.$$

C'est la filtration de Moy-Prasad sur $\mathfrak{g}_F$ introduite dans [MP]. Pour $t \geq 0$, on note $\mathbf{G}_{x,t}$ le sous-groupe de G_F contenant T dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_{x,t}$. En particulier, $\mathbf{G}_x = \mathbf{G}_{x,0}$ est un sous-groupe parahorique de G_F contenant $T(\mathcal{O})$. Pour tout sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ stabilisé par T, on note $\mathfrak{h}_{x,t} = \mathfrak{h}_F \cap \mathfrak{g}_{x,t}$, c'est aussi une filtration de Moy-Prasad sur $\mathfrak{h}_F$.

On note $\mathfrak{g}_{x,t+} = \bigoplus_{\alpha_{i,j}(x)+n>t} \mathfrak{g}_{i,j}\varepsilon^n + \mathfrak{g}\varepsilon^N$, $N \gg 0$, on a $\mathfrak{g}_{x,t+} = \mathfrak{g}_{x,t+\delta}$ pour $\delta > 0$ assez petit. On note

$$\mathfrak{g}_x(t) = \bigoplus_{\alpha_{i,j}(x)+n=t} \mathfrak{g}_{i,j}\varepsilon^n, \text{ et } \quad \mathfrak{g}(x,t) = \bigoplus_{\alpha_{i,j}(x)+n=t} \mathfrak{g}_{i,j},$$

On a les isomorphismes $\mathfrak{g}(x,t) \cong \mathfrak{g}_x(t) \cong \mathfrak{g}_{x,t}/\mathfrak{g}_{x,t+}$.

Exemple 2.1. 1. Pour $0 \in \mathfrak{t}$, on a $\mathbf{G}_0 = K$.

2. Pour $x_0 = \left(\frac{d}{d}, \frac{d-1}{d}, \cdots, \frac{1}{d}\right) \in \mathfrak{t}$, on a $\mathbf{G}_{x_0} = I$.
3. Pour $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^d$, on note $x_{\mathbf{a}} = \left(\frac{d}{d} - a_1, \frac{d-1}{d} - a_2, \cdots, \frac{1}{d} - a_d\right) \in \mathfrak{t}$, on a

$$\mathbf{G}_{x_{\mathbf{a}}} = I_{\mathbf{a}} := \mathrm{Ad}(\varepsilon^{\mathbf{a}})I.$$

2.2 Pavages non standard de la grassmannienne affine tronquée

Pour tout k-algèbre R, on dit que $L \subset R((\varepsilon))^d$ est un *réseau*, si L est un sous-$R[[\varepsilon]]$-module de $R((\varepsilon))^d$ tel qu'il existe un entier $N \gg 0$ avec

$$\varepsilon^N R[[\varepsilon]]^d \subset L \subset \varepsilon^{-N} R[[\varepsilon]]^d,$$

et que le quotient $L/\varepsilon^N R[[\varepsilon]]^d$ est un R-module projectif.

Pour $N, N' \in \mathbf{Z}$, $N > N'$, on note $X_{N,N'}$ la k-variété qui représente le foncteur qui envoie une k-algèbre R sur l'ensemble

$$X_{N,N'}(R) = \{L \subset R((\varepsilon))^d \text{ est un réseau } \mid \varepsilon^N R[[\varepsilon]]^d \subset L \subset \varepsilon^{N'} R[[\varepsilon]]^d\}.$$

Les $X_{N,N'}$ forment un système inductif de k-schémas et le ind-k-schéma

$$\mathscr{X} = \lim_{N \to +\infty,\, N' \to -\infty} X_{N,N'}$$

est appelé *la grassmannienne affine*. On note $L_0 = \mathcal{O}^d$, alors K est le stabilisateur de L_0 dans $G(F)$ et

$$\mathscr{X}(k) = \{L \subset F^d \mid L \text{ est un réseau dans } F^d\} = G(F)/K.$$

La grassmannienne affine n'est pas réduite comme un ind-k-schéma, mais puisque nous nous intéressons qu'à l'aspect géométrique-topologique de la grassmannienne affine, nous allons travailler avec sa structure réduite. Dans ce sens, le ind-k-schéma s'identifie avec leur points rationnels sur k.

On note $\mathrm{ind} : \mathscr{X} \to \mathbf{Z}$ l'application $\mathrm{ind}(gK) = \mathrm{ind}(gL_0) = \mathrm{val}(\det(g))$, $\forall gK \in \mathscr{X}$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on note $\mathscr{X}^{(n)} = \mathrm{ind}^{-1}(n)$; les $\mathscr{X}^{(n)}$ sont les composantes connexes de $\mathscr{X}$. Puisque le morphisme $\mathrm{val}(\det) : \mathrm{GL}_d(F) \to \mathbf{Z}$ est surjectif, toutes les composantes connexes sont isomorphes à la composante neutre $\mathscr{X}^{(0)}$. Pour plus de détails sur la grassmannienne affine, on s'envoie à [BL].

On va définir une ordre $\prec_{I_{\mathbf{a}}}$ sur $X_*(T)$, on commence par $\prec_I$. Soit $\mu, \nu \in X_*^+(T)$, alors $\mu \prec_I \nu$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \mu_1 &\leq \nu_1; \\ \mu_1 + \mu_2 &\leq \nu_1 + \nu_2; \\ &\vdots \\ \mu_1 + \cdots + \mu_d &= \nu_1 + \cdots + \nu_d. \end{aligned}$$

Puis on pose $W\mu \prec_I W\nu$. Pour tout $w, w' \in W/W_\mu$, où W_μ est le stabilisateur de μ, on pose $w\mu \prec w'\mu$ si et seulement si $w' \prec_B w$, où $\prec_B$ est l'ordre sur W/W_μ induite par celle de Bruhat-Tits sur W par rapport à B. Puis, pour $v, v' \in X_*(T)$, on pose

$$v \prec_{I_{\mathbf{a}}} v' \iff \varepsilon^{-\mathbf{a}} v \prec_I \varepsilon^{-\mathbf{a}} v'.$$

Théorème 2.1 (Bruhat-Tits)**.** *Pour* $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbf{Z}^d$*, on a un pavage en espaces affines*

$$\mathscr{X} = \bigsqcup_{v \in X_*(T)} I_{\mathbf{a}} v K/K,$$

où $I_{\mathbf{a}}vK/K$ est isomorphe à l'espace affine

$$\bigoplus_{\substack{(\alpha_{i,j},n_{i,j})\in\widetilde{\Phi}(G,T),\\ -\alpha_{i,j}(x_{\mathbf{a}})\leq n_{i,j}<\alpha_{i,j}(v)}} \mathfrak{g}_{i,j}\varepsilon^{n_{i,j}},$$

De plus, $I_{\mathbf{a}}v'K/K \subset \overline{I_{\mathbf{a}}vK/K}$ si et seulement si $v' \prec_{I_{\mathbf{a}}} v$.

Démonstration. En utilisant la translation par $\varepsilon^{-\mathbf{a}}$ sur la grassmannienne affine, il suffit de montrer le théorème pour $\mathbf{a} = 0$. Pour la démonstration de la première partie, on peut voir [IM] par exemple. Pour la relation d'adhérence, en utilisant les $\widetilde{T}$-orbites de dimension 1 sur la grassmannienne affine, on se ramène au cas $G = \mathrm{GL}_2$, où on peut vérifier directement. □

On va réécrire le théorème ci-dessus sous la forme d'une décomposition de Bialynicki-Birula. On note $\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}} \in X_*(\widetilde{T})$ le co-caractère défini par

$$\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t) = (t^d, \operatorname{diag}(t^{d-a_1d}, t^{d-1-a_2d}, \cdots, t^{1-a_dd})), \quad t \in k^\times$$

Considérons l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathscr{X}$ induite par le co-caractère $\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}} \in X_*(\widetilde{T})$. L'ensemble des points fixes $\mathscr{X}^{\mathbb{G}_m}$ est discret et égale à $\{vK,\ v \in X_*(T)\}$. De plus, on a

$$I_{\mathbf{a}}vK/K = \{L \in \mathscr{X} \mid \lim_{t\to 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)L = vK\}.$$

Ici, la limite porte le sens suivant : Soit $N \in \mathbf{N}$ assez grand tel que $L \in X_{N,-N}$, alors le morphisme $\lambda_L : \mathbb{G}_m \to \mathscr{X}$ défini par $\lambda_L(t) = \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)L$, $\forall t \in k^\times$ se factorise par $X_{N,-N}$ puisque $X_{N,-N}$ est stable sous l'action de $\widetilde{T}$. Et il se prolonge à un morphisme unique $\bar{\lambda}_L : \mathbf{A}^1 \to X_{N,-N}$ puisque $X_{N,-N}$ est propre, la limit en question est définie comme

$$\lim_{t\to 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)L = \bar{\lambda}_L(0),$$

qui ne dépend que de L.

2.2.1 Pavage triangulaire

Pour $m \in \mathbf{Z}$, on note

$$\mathscr{X}_{\geq m} = \lim_{N\to+\infty} X_{N,m}.$$

C'est un sous ind-k-schéma fermé $\widetilde{T}$-invariant de $\mathscr{X}$. On a

$$\mathscr{X}_{\geq m}(k) = \{L \in \mathscr{X} \mid L \subset \varepsilon^m L_0\}.$$

On observe que $L \in \mathscr{X}_{\geq m}(k)$ si et seulement s'il admet une base $\{b_i = \sum_{j=1}^d a_{i,j}e_j\}_{i=1}^d$ sur $\mathcal{O}$ tel que

$$\operatorname{val}(a_{i,j}) \geq m.$$

C'est équivalent à l'égalité

$$\mathscr{X}_{\geq m} = \bigsqcup_{v\in\mathbf{Z}^d,\, v_i\geq m,\, \forall i} IvK/K.$$

Proposition 2.2. *Soient* $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbf{Z}^d$ *et* $w \in X_*(T)$.

1. *Pour* $w \notin \mathscr{X}_{\geq m}$, *l'intersection* $\mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} wK/K$ *est vide.*
2. *Pour* $w \in \mathscr{X}_{\geq m}$, *l'intersection* $\mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} wK/K$ *est isomorphe à un espace affine standard. Plus précisément,* $\mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} wK/K = J_{\mathbf{a},m,w} wK/K \cong J_{\mathbf{a},m,w}$, *où* $J_{\mathbf{a},m,w}$ *est la sous-k-variété de* $I_{\mathbf{a}}$ *formée des matrices* $(x_{i,j})$ *telles que* $x_{i,i} = 1$ *et que*

$$m_{i,j} \leq \mathrm{val}(x_{i,j}) < \alpha_{i,j}(w), \quad \forall i \neq j,$$

   où $m_{i,j} = \max(-\alpha_{i,j}(x_{\mathbf{a}}), m - w_j) = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d}, m - w_j)$.
3. *Par conséquent, on a un pavage en espaces affines*

$$\mathscr{X}_{\geq m} = \bigsqcup_{w \in \mathscr{X}^T_{\geq m}} \mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} wK/K.$$

   L'inclusion $(\mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} vK/K) \subset \overline{(\mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} wK/K)}$ *implique que* $v \prec_{I_a} w$.

Démonstration. 1. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $w \notin \mathscr{X}_{\geq m}$, tel que l'intersection $\mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} wK/K$ est non-vide et prenons $y \in \mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} wK/K$. Puisque $\mathscr{X}_{\geq m}$ est fermé et invariant sous l'action de $\widetilde{T}$, on a

$$w = \lim_{t \to 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t) y \in \mathscr{X}_{\geq m},$$

d'où une contradiction. L'intersection $\mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} wK/K$ est donc vide.

2. Pour $w \in \mathscr{X}_{\geq m}$, un réseaux $L \in I_{\mathbf{a}} wK/K$ admet une base unique $\{b_i\}_{i=1}^d$ sur $\mathcal{O}$ de la forme

$$b_i = \varepsilon^{w_i} \left(e_i + \sum_{j=1,\, j \neq i}^{d} a_{j,i} e_j \right), \quad a_{j,i} \in F$$

tel que

$$-\alpha_{j,i}(x_{\mathbf{a}}) = a_j - a_i + \frac{j-i}{d} \leq \mathrm{val}(a_{j,i}) < \alpha_{j,i}(w).$$

On a $L \in \mathscr{X}_{\geq m}$ si et seulement si

$$\mathrm{val}(a_{j,i}) + w_i \geq m,$$

d'où la description précise de l'intersection $\mathscr{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}} wK/K$ dans la proposition.

□

On va passer aux composantes connexes de la grassmannienne affine.

Définition 2.1. Pour $v \in X_*(T)$, la variété fermée

$$\mathrm{Sch}(v) := \overline{IvK/K} = \bigsqcup_{w \prec_I v} IwK/K$$

est appelée *une variété de Schubert affine.*

Corollaire 2.3. *Soit $v \in X_*^+(T)$ tel que $v_1 \geq v_2 = \cdots = v_d$, soit $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbf{Z}^d$. Alors on a un pavage en espaces affines*

$$\mathrm{Sch}(v) = \bigsqcup_{w \in \mathrm{Sch}(v)^T} \mathrm{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K.$$

L'intersection $\mathrm{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K = J_{\mathbf{a},v,w} wK/K$, où $J_{\mathbf{a},v,w}$ est la sous-k-variété ouverte et fermée de $I_{\mathbf{a}}$ formée des matrices $(x_{i,j})$ telles que $x_{i,i} \in \mathcal{O}$ et que

$$\mathrm{val}(x_{i,j}) \geq m_{i,j}, \quad \forall i \neq j,$$

où $m_{i,j} = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d},\, v_d - w_j)$. De plus, l'inclusion

$$\mathrm{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K \subset \overline{(\mathrm{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}} w'K/K)}$$

implique que $w \prec_{I_a} w'$.

Démonstration. La variété de Schubert affine $\mathrm{Sch}(v)$ est l'une des composants connexes de $\mathscr{X}_{\geq v_d}$. En fait, on a

$$\mathrm{Sch}(v) = \mathscr{X}_{\geq v_d} \cap \mathscr{X}^{(v_1 + \cdots + v_d)}.$$

le corolaire se déroule de la proposition 2.2.

□

2.2.2 Passage au dual

On définit un accouplement

$$\mathrm{Tr} : F^d \times F^d \to F$$

par $\mathrm{Tr}((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$. Pour $L \in \mathscr{X}$, on note

$$L^\vee = \{y \in F^d \mid \mathrm{Tr}(x, y) \in \mathcal{O}, \forall x \in L\}.$$

Alors $L^\vee$ est un réseau et $(L^\vee)^\vee = L$. Ainsi on définit une involution $^\vee$ sur la grassmannienne affine $\mathscr{X}$.

Pour $m \in \mathbf{Z}$, on a

$$\mathscr{X}_{\geq -m}^\vee = \mathscr{X}_{\leq m} := \{L \in \mathscr{X} \mid L \supset \varepsilon^m L_0\}.$$

Lemme 2.4. *Pour $g \in G(F)$, $L \in \mathscr{X}$, on a $(gL)^\vee = (g^t)^{-1} L^\vee$.*

Utilisant ce lemme, on trouve une version duale du corolaire 2.3.

Corollaire 2.5. *Soit $v \in X_*^+(T)$ tel que $v_1 = \cdots = v_{d-1} \geq v_d$, soit $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbf{Z}^d$. Alors on a un pavage en espaces affines*

$$\mathrm{Sch}(v) = \bigsqcup_{w \in \mathrm{Sch}(v)^T} \mathrm{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K.$$

L'intersection $\mathrm{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K$ *est égale à* $\hat{J}^{-1}_{\mathbf{a},v,w} wK/K$*, où* $\hat{J}_{\mathbf{a},v,w}$ *est la sous-k-variété ouverte et fermée de* $I_{\mathbf{a}}$ *formée des matrices* $(x_{i,j})$ *telles que* $x_{i,i} \in \mathcal{O}$ *et que*

$$\mathrm{val}(x_{i,j}) \geq \hat{m}_{i,j}, \quad \forall i \neq j,$$

où $\hat{m}_{i,j} = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d}, -v_1 + w_i)$*. De plus, l'inclusion*

$$\mathrm{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}} vK/K) \subset \overline{\mathrm{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K)}$$

implique que $v \prec_{I_a} w$*.*

2.3 Pavages en tranches de la grassmannienne affine tronquée

On fixe $v \in X_*^+(T)$ tel que $v_1 \geq v_2 = \cdots = v_{d-1} \geq v_d$. Le but de cette section est de construire une famille de pavages non standard de la variété de Schubert affine $\mathrm{Sch}(v)$.

2.3.1 Quelques fibrés vectoriels sur la grassmannienne affine

Définition 2.2. Soit S un schéma de type fini sur k, le S-schéma $f : E \to S$ est appelé un *fibré en $\mathcal{O}$-modules* sur S s'il satisfait aux conditions suivantes :

1. Il existe une action de $\mathcal{O}$ sur E et une loi d'addition
$$+ : E \times_S E \to E$$
qui est $\mathcal{O}$-bilinéaire.
2. Il existe un $\mathcal{O}$-module *de type fini* M et un recouvrement $(U_i)_{i \in J}$ de S tel que on a des trivialisations qui sont compatibles avec les structures des $\mathcal{O}$-modules :
$$\varphi_i : E \times_S U_i \to M \times U_i, \quad \forall i \in J.$$

Définition 2.3. Soit $\mathcal{S}$ un ind-k-schéma, un morphisme entre les ind-k-schémas $f : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ est appelé un *fibré en $\mathcal{O}$-modules* s'il satisfait à la condition 1 dans la définition ci-dessus et que pour tout sous-k-schéma fermé de type fini S de $\mathcal{S}$, la restriction $f_S : \mathcal{E} \times_{\mathcal{S}} S \to S$ est un fibré en $\mathcal{O}$-modules sur S.

On rappelle que on a $\mathscr{X} = \lim_{n \to +\infty} X_{n,-n}$, où

$$X_{n,-n} = \{L \in \mathscr{X} \mid \varepsilon^n L_0 \subset L \subset \varepsilon^{-n} L_0\}.$$

Proposition 2.6. *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $\forall gK \in X_{n,-n}$*, on a*

$$\varepsilon^{2n} \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \subset \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \subset \varepsilon^{-2n} \mathfrak{g}(\mathcal{O}).$$

Démonstration. Pour $gL_0 \in X_{n,-n}$, on a $g^{-1}L_0 \in X_{n,-n}$ aussi. Par $gL_0 \subset \varepsilon^{-n} L_0$, on obtient $\mathrm{val}(g_{i,j}) \geq -n$. Parallèlement, on a $\mathrm{val}((g^{-1})_{i,j}) \geq -n$. Donc

$$\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \subset \varepsilon^{-2n} \mathfrak{g}(\mathcal{O}).$$

Le même argument pour $g^{-1}L_0 \in X_{n,-n}$ implique que

$$\mathrm{Ad}(g^{-1})\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \subset \varepsilon^{-2n} \mathfrak{g}(\mathcal{O}),$$

d'où la proposition. □

Sur $X_{n,-n}$, on note $L_{n,1}$ et $L_{n,2}$ les fibrés en $\mathcal{O}$-modules constants $\varepsilon^{2n}\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \times X_{n,-n}$ et $\varepsilon^{-2n}\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \times X_{n,-n}$ respectivement. On note $\overline{\mathcal{K}}_n$ le sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel constant $L_{n,2}/L_{n,1}$ dont la fibre sur $gK \in X_{n,-n}$ est $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})/\varepsilon^{2n}\mathfrak{g}(\mathcal{O})$. On note $\mathcal{K}_n$ l'image inverse de $\overline{\mathcal{K}}_n$ sous la projection naturelle $L_{n,2} \to L_{n,2}/L_{n,1}$. Évidement, $\mathcal{K}_n$ est un fibré en $\mathcal{O}$-modules sur $X_{n,-n}$.

Définition 2.4. Le fibré en $\mathcal{O}$-modules $\mathcal{K} := \lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{K}}_n$ sur $\mathscr{X}$ est appelé *le fibré tautologique.*

Le fibré tautologique $\mathcal{K}$ peut être vu comme le sous fibré en $\mathcal{O}$-module du "fibré vectoriel" constant $\tilde{\mathfrak{g}}_F := \mathfrak{g}_F \times \mathscr{X}$ dont la fibre sur gK est $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$.

On peut écrire $\mathcal{K}$ autrement. Le groupe K agit sur $G(F) \times \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ par la formule :

$$k \cdot (g,\, a) = (gk,\, \mathrm{Ad}(k^{-1})a).$$

On note $\mathcal{K} := G(F) \times_K \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ le quotient de $G(F) \times \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ par K. Alors $\mathcal{K} \cong G(F) \times_K \mathfrak{g}(\mathcal{O})$.

Soit Z un sous-k-schéma de $\mathscr{X}$ de type fini. Soit V un sous-$\mathcal{O}$-module de type fini de $\mathfrak{g}_F$, on note $\tilde{V}$ le fibré en $\mathcal{O}$-modules constant $V \times \mathscr{X}$ sur la grassmannienne affine $\mathscr{X}$. Dans la suite de la thèse, on va traiter souvent la restriction à Z du quotient de type

$$\frac{\tilde{V}}{\tilde{V} \cap \mathcal{K}}.$$

La question est de déterminer s'il est un fibré vectoriel.

Lemme 2.7. *Soit R un anneau local réduit noetherien, soit M un R-module de type fini. Soient s le point spécial de* $\mathrm{Spec}(R)$*, $\eta_1, \cdots, \eta_l$ les points génériques correspondant aux composantes irréductibles de* $\mathrm{Spec}(R)$*. On suppose que* $\dim_{k(s)}(M \otimes k(s)) = \dim_{k(\eta_i)}(M \otimes k(\eta_i))$*, $i = 1, \cdots, l$, alors M est un R-module libre.*

Démonstration. Soit $d = \dim_{k(s)}(M \otimes k(s))$. Prenons $m_1, \cdots, m_d \in M$ tel que leur réduction forment une base de $M \otimes k(s)$ sur $k(s)$. Alors le lemme de Nakayama implique que $m_1, \cdots, m_d$ engendre M. Soit N le noyau du morphisme $R^d \to M$ défini par $(r_i)_{i=1}^d \to \sum_{i=1}^d r_i m_i$. Puisque $\dim_{k(\eta_i)}(M \otimes k(\eta_i)) = d$, on a $N \otimes_R k(\eta_i) = 0$. Ceci implique que $N = 0$ car l'inclusion naturelle $R \to \bigoplus_{i=1}^l k(\eta_i)$ est injective par l'hypothèse que R est réduit.

□

Corollaire 2.8. *Soit R un anneau local réduit de type fini. Soient s le point spécial de* $\mathrm{Spec}(R)$*, $\eta_1, \cdots, \eta_l$ les points génériques correspondant aux composantes irréductibles de* $\mathrm{Spec}(R)$*. Soient E un R-module libre de type fini, E_1, E_2 deux facteurs directes de E. On suppose que*

$$\dim_{k(s)}(E_1 \otimes k(s) \cap E_2 \otimes k(s)) = \dim_{k(\eta_i)}(E_1 \otimes k(\eta_i) \cap E_2 \otimes k(\eta_i)), \quad i = 1, \cdots, l.$$

Alors $E_1 \cap E_2$ est un R-module libre.

Démonstration. Considérons le morphisme

$$\phi : E_1 \oplus E_2 \to E$$

défini par $(a,b) \to a-b$, $\forall a \in E_1$, $b \in E_2$.

L'hypothèse implique que

$$\dim_{k(s)}(\mathrm{Im}(\phi) \otimes k(s)) = \dim_{k(\eta_i)}(\mathrm{Im}(\phi) \otimes k(\eta_i)), \quad i = 1, \cdots, l.$$

Donc $\mathrm{Im}(\phi)$ est un R-module libre d'après le lemme 2.7. Ceci entraine que $\ker(\phi)$ l'est aussi.

□

Corollaire-Définition 2.9. *Soit Z un sous-k-schéma réduit de $\mathscr{X}$ de type fini. Soit V un sous-$\mathcal{O}$-module de type fini de $\mathfrak{g}_F$. On suppose que $\dim_k(V/V \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$ est indépendent de g pour $gK \in Z$, alors les $V/V \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ s'organisent en un fibré vectoriel que on notera $\tilde{V}/\tilde{V} \cap \mathcal{K}$ sur Z.*

Démonstration. Choisissons $N \in \mathbf{N}$ assez grand tel que $Z \subset X_{N,-N}$. D'après la proposition 2.6, on a

$$L_{N,1}\mid_Z \subset \mathcal{K}\mid_Z \subset L_{N,2}\mid_Z .$$

Alors les quotients

$$\mathcal{K}' := \overline{\mathcal{K}}_N|_Z, \quad \mathcal{V}' := \frac{\tilde{V} + L_{N,1}}{L_{N,1}}$$

sont des sous-fibrés vectoriels de dimension finie sur Z de $L_{N,2}/L_{N,1}$. De plus, pour tout $gK \in Z$, on a

$$\frac{V}{V \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} = \frac{\frac{V+\varepsilon^N\mathfrak{g}(\mathcal{O})}{\varepsilon^N\mathfrak{g}(\mathcal{O})}}{\frac{V+\varepsilon^N\mathfrak{g}(\mathcal{O})}{\varepsilon^N\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cap \frac{\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})}{\varepsilon^N\mathfrak{g}(\mathcal{O})}}$$

L'hypothèse implique que l'intersection $\mathcal{V}' \cap \mathcal{K}'$ est équi-dimensionel sur Z, donc il est un fibré vectoriel d'après le corolaire 2.8. Ainsi le quotient $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}' \cap \mathcal{K}'}$ est le fibré vectoriel que l'on cherche. □

2.3.2 Rétractions aux sous-groupes de Levi

Pour tout $P \in \mathcal{F}^G(T)$, on définit, suivant Arthur, le cône dans $(\mathfrak{a}_T^G)^*$

$$a_P^G = \{x \in (\mathfrak{a}_T^G)^* \mid \forall \alpha \in \Phi(N_P, T),\ \alpha^\vee(x) \geq 0, \text{ et } \forall \alpha \in \Phi(M_P, T),\ \alpha^\vee(x) = 0.\}$$

Définition 2.5. Le complexe dans $(\mathfrak{a}_T^G)^*$ défini par

$$\Delta = \{a_P^G \mid P \in \mathcal{F}^G(T)\}$$

est appelé *le complexe de Weyl.*

Le complexe de Weyl est une réalisation géométrique du complexe de Coxeter associé au groupe de Coxeter $(W, \{s_i\}_{i=1}^{d-1})$. On s'envoie dans [Bour] pour plus de détails.

Pour $\sigma \in \Delta$, on note $P_\sigma \in \mathcal{F}^G(T)$ le sous-groupe parabolique tel que $\sigma = a_{P_\sigma}^G$. On note $P_\sigma = M_\sigma N_\sigma$ la décomposition de Levi telle que $T \subset M_\sigma$.

On note Δ^i l'ensemble des simplexes de Δ de dimension i. Les sous-groupes paraboliques maximaux de G contenant T sont indexés par Δ^1. Soit $\sigma \in \Delta^1$, on note ϖ_σ

le générateur de l'intersection de σ et le réseau des poids de G par rapport à T. Les ϖ_σ sont des permutations des poids fondamentaux $(\varpi_i)_{i=1}^{d-1}$ sous l'action du groupe de Weyl. On définit les co-poids $\varpi_\sigma^\vee \in \mathfrak{a}_T^G$ par les équations

$$\alpha(\varpi_\sigma^\vee) = \varpi_\sigma(\alpha^\vee), \quad \forall \alpha \in \Phi(G,T).$$

On note $\chi_\sigma \in X_*(T)$ le générateur du semi-groupe $X_*(T) \cap \mathbf{N}\varpi_\sigma^\vee$. Plus généralement, pour $\sigma \in \Delta^i$, soit $\partial\sigma \cap \Delta^1 = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_i\}$. On définit $\chi_\sigma = \chi_{\sigma_1} + \cdots + \chi_{\sigma_i}$, alors $P_\sigma \in \mathcal{F}^G(T)$ est le sous-groupe parabolique associé à χ_σ, i.e. on a

$$\mathrm{Lie}(P_\sigma) = \bigoplus_{\alpha_{i,j}(\chi_\sigma)\geq 0} \mathfrak{g}_{i,j}.$$

Définition 2.6. On définit la rétraction $f_\sigma : \mathscr{X} \to \mathscr{X}^{M_\sigma}$ par

$$f_\sigma(x) = \lim_{t\to 0} \chi_\sigma(t)x.$$

Dans la suite, en tant que sous-indice, on identifie $\sigma \in \Delta$ et le sous-groupe parabolique P_σ. Quand $\sigma \in \Delta^1$, on les identifie aussi avec ϖ_σ.

Pour $\sigma \in \Delta^1$, on peut l'identifier avec un sous-ensemble nontrivial $J_\sigma \subset \{1, \cdots, d\}$ de la manière suivante :

$$i \in J_\sigma \iff \varpi_\sigma(\alpha_{i,j}^\vee) \geq 0, \forall j \neq i.$$

Pour $J \subset \{1, \cdots, d\}$ nontrivial, on note $\bar{J}$ le complément de J et

$$\mathrm{GL}_J = \mathrm{Aut}_k\big(\bigoplus_{i\in J} ke_i\big).$$

Fixe $c \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on note

$$R_\sigma^c(n) = \{v \in X_*(T) \mid \varpi_\sigma(v) = n;\ v_i > c, \forall i \in J_\sigma;\ v_j < c, \forall j \notin J_\sigma\}.$$

On note

$$S_\sigma^c(n) = \bigsqcup_{v\in R_\sigma^c(n)} IvK/K.$$

Lemme 2.10. *La rétraction*

$$f_\sigma : S_\sigma^c(n) \to S_\sigma^c(n) \cap \mathscr{X}^{M_\sigma}$$

est une fibration en espaces affines, en particulier sa restriction à IvK/K l'est aussi pout tout $v \in R_\sigma^c(n)$.

Démonstration. En utilisant la récurrence, il suffit de montrer l'énoncé dans le cas où P_σ est un sous-groupe parabolique maximal.

Par définition, on a

$$S_\sigma^c(n) \cap \mathscr{X}^{M_\sigma} = \bigcup_{v\in R_\sigma^c(n)} I^{M_\sigma} vK/K.$$

On note $N_{\sigma,I} = N_\sigma(F) \cap I$. Pour $mvK \in S^c_\sigma(n) \cap \mathscr{X}^{M_\sigma}$, $m \in I^{M_\sigma}$, on a

$$\frac{\mathfrak{n}_{\sigma,I}}{\mathfrak{n}_{\sigma,I} \cap \mathrm{Ad}(mv)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\mathfrak{n}_{\sigma,I}}{\mathfrak{n}_{\sigma,I} \cap \mathrm{Ad}(v)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car I^{M_σ} normalise $\mathfrak{n}_{\sigma,I}$. La dimension de la dernier terme est

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\Phi(N_\sigma,T)} (\alpha(v) + \lfloor \alpha(x_0) \rfloor) &= d\varpi_\sigma(v) + \sum_{\alpha\in\Phi(N_\sigma,T)} (\lfloor \alpha(x_0) \rfloor) \\ &= dn + \sum_{\alpha\in\Phi(N_\sigma,T)} (\lfloor \alpha(x_0) \rfloor)\end{aligned}$$

qui est constante pour $v \in R^c_\sigma(n)$, où $x_0 \in \mathfrak{t}$ est défini dans l'exemple 2.1. Donc les dimensions de $\mathfrak{n}_{\sigma,I}/\mathfrak{n}_{\sigma,I} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ sont constantes pour $gK \in S^c_\sigma(n) \cap \mathscr{X}^{M_\sigma}$. D'après le corolaire 2.9, ils s'organisent en un fibré vectoriel $\tilde{\mathfrak{n}}_{\sigma,I}/\tilde{\mathfrak{n}}_{\sigma,I} \cap \mathcal{K}$.

Par l'isomorphisme canonique

$$f_\sigma^{-1}(mvK) \cong \frac{\mathfrak{n}_{\sigma,I}}{\mathfrak{n}_{\sigma,I} \cap \mathrm{Ad}(mv)\mathfrak{g}(\mathcal{O})}, \quad \forall m \in I^{M_\sigma},\ v \in R^c_\sigma(n),$$

on obtient que $S^c_\sigma(n)$ est un $\tilde{\mathfrak{n}}_{\sigma,I}/\tilde{\mathfrak{n}}_{\sigma,I} \cap \mathcal{K}$-torseur sur $S^c_\sigma(n) \cap \mathscr{X}^{M_\sigma}$, d'où la proposition.

□

Pour $w \in X_*(T)$, $P \in \mathcal{F}(T)$, on dit que w est *positif* par rapport à P si

$$\alpha(w) > 0, \quad \forall \alpha \in \Phi(N_P,\, T),$$

où N_P est le radical unipotent de P. On dit qu'il est *négatif* par rapport à P si $-w$ est positif par rapport à P.

Proposition 2.11. *Soit $\sigma \in \Delta^1$. Soit $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^d$ tel que $\mathbf{a}$ est négatif par rapport à P_σ. Alors on a un pavage en espaces affines*

$$S^c_\sigma(n) = \bigsqcup_{w\in R^c_\sigma(n)} S^c_\sigma(n) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K,$$

l'inclusion $S^c_\sigma(n) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K \subset \overline{S^c_\sigma(n) \cap I_{\mathbf{a}} w'K/K}$ implique que $w \prec_{I_{\mathbf{a}}} w'$. De plus, on a l'intersection

$$S^c_\sigma(n) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K = \big(N_\sigma(F) \cap I\big) H_{\sigma,c;\mathbf{a},w} wK/K,$$

où $H_{\sigma,c;\mathbf{a},w} = H_1 \times H_2^{-1}$ avec

1. *H_1 est la sous-k-variété ouverte et fermée de $\mathrm{GL}_{J_\sigma}(F)$ formée des matrices $(x_{i,j})$ telles que $x_{i,i} \in \mathcal{O}$ et que*

   $$\mathrm{val}(x_{i,j}) \geq m_{i,j}, \quad \forall i,j \in J_\sigma;\ i \neq j,$$

   où $m_{i,j} = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d},\ \lceil c \rceil - w_j)$.
2. *H_2 est la sous-k-variété ouverte et fermée de $\mathrm{GL}_{\bar{J}_\sigma}(F)$ formée des matrices $(x_{i,j})$ telles que $x_{i,i} \in \mathcal{O}$ et que*

   $$\mathrm{val}(x_{i,j}) \geq \hat{m}_{i,j}, \quad \forall i,j \in \bar{J}_\sigma; i \neq j,$$

   où $\hat{m}_{i,j} = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d},\ -\lfloor c \rfloor + w_i)$.

Démonstration. Soit $\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}} \in X_*(\widetilde{T})$ le co-caractère défini par

$$\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t) = (t^d, \mathrm{diag}(t^{d-a_1 d}, t^{d-1-a_2 d}, \cdots, t^{1-a_d d})), \quad \forall t \in k^\times.$$

Pour $w \in X_*(T)$, on a

$$I_{\mathbf{a}} wK/K = \{x \in \mathscr{X} \mid \lim_{t\to 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x = wK\}.$$

Donc

$$S_\sigma^c(n) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K = \{x \in S_\sigma^c(n) \mid \lim_{t\to 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x = wK\}.$$

Pour $u \in N_\sigma(F) \cap I$, $x \in S_\sigma^c(n)$, on a

$$\lim_{t\to 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)ux = \lim_{t\to 0}[\mathrm{Ad}(\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t))u]\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x = \lim_{t\to 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x,$$

parce que $\alpha(\mathbf{a}) < 0$, $\forall \alpha \in \Phi(N_\sigma, T)$, d'où l'égalité

$$\lim_{t\to 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x = \lim_{t\to 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)[f_\sigma(x)]. \tag{1}$$

Cette égalité implique que le pavage non standard se factorise par la fibration f_σ : $S_\sigma^c(n) \to S_\sigma^c(n) \cap \mathscr{X}^{M_\sigma}$. Plus précisément,

$$S_\sigma^c(n) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K = (N_\sigma(F) \cap I) \cdot [(S_\sigma^c(n) \cap \mathscr{X}^{M_\sigma}) \cap I_{\mathbf{a}}^{M_\sigma} wK/K]. \tag{2}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} S_\sigma^c(n) \cap \mathscr{X}^{M_\sigma} &= \bigcup_{v \in R_\sigma^c(n)} I^{M_\sigma} vK^{M_\sigma}/K^{M_\sigma} \\ &= \mathscr{X}_{\geq \lceil c \rceil}^{\mathrm{GL}_{J_\sigma},(n_1)} \times \mathscr{X}_{\leq \lfloor c \rfloor}^{\mathrm{GL}_{\bar{J}_\sigma},(n_2)}, \end{aligned}$$

pour certaines indices $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$.

Donc la proposition se ramène aux corolaires 2.3 et 2.5, pour $\mathscr{X}_{\geq \lceil c \rceil}^{\mathrm{GL}_{J_\sigma},(n_1)}$ et $\mathscr{X}_{\leq \lfloor c \rfloor}^{\mathrm{GL}_{\bar{J}_\sigma},(n_2)}$ respectivement. □

Corollaire 2.12. *La rétraction*

$$f_\sigma : \big(N_\sigma(F) \cap I\big) H_{\sigma,c;\mathbf{a},w} wK/K \to H_{\sigma,c;\mathbf{a},w} wK^{M_\sigma}/K^{M_\sigma}$$

est une fibration en espaces affines.

Démonstration. D'après la démonstration ci-dessus, le pavage non standard factorise par la fibration $f_\sigma : S_\sigma^c(n) \to S_\sigma^c(n) \cap \mathscr{X}^{M_\sigma}$, qui est une fibration en espaces affines par le lemme 2.10. Donc après le pavage non standard, la restriction de f_σ à chaque pavé reste une fibration en espaces affines.

□

2.3.3 Pavage en tranches

On passe au pavage de la variété de Schubert affine $\mathrm{Sch}(v)$, $v \in X_*^+(T)$ tel que $v_1 \geq v_2 = \cdots = v_{d-1} \geq v_d$. On note

$$R(v) = \bigcup_{i=1}^{d-1} W \cdot \{v' \in X_*(T) \mid v' \prec v;\ \varpi_i(v') = \varpi_i(v)\},$$

et $S(v) = \bigcup_{v' \in R(v)} Iv'K/K$, c'est une sous-variété ouverte de $\mathrm{Sch}(v)$. Dans la suite, on va paver $S(v)$ en espaces affines. Le lemme suivant nous permet de paver $\mathrm{Sch}(v)$ par récurrence.

Lemme 2.13. *Soit $v \in X_*^+(T)$ tel que $v_1 \geq v_2 = \cdots = v_{d-1} \geq v_d$. S'il existe $\bar{v} \in X_*^+(T)$ tel que*

$$\mathrm{Sch}(v) = \mathrm{Sch}(\bar{v}) \cup S(v),$$

alors on a $\bar{v}_1 \geq \bar{v}_2 = \cdots = \bar{v}_{d-1} \geq \bar{v}_d$.

Démonstration. Dans le cas où $v_1 > v_2 = \cdots = v_d$, on a $v_1 \geq v_2 + d$, et $\bar{v} = (v_1 - d + 1,\ v_2 + 1, \cdots, v_d + 1)$.

Dans le cas où $v_1 = \cdots = v_{d-1} > v_d$, on a $v_1 \geq v_d + d$, et $\bar{v} = (v_1 - 1, \cdots, v_{d-1} - 1,\ v_d + d - 1)$.

Dans le cas où $v_1 > v_2 = \cdots = v_{d-1} > v_d$, on a $\bar{v} = (v_1 - 1,\ v_2, \cdots, v_{d-1},\ v_d + 1)$. □

D'abord, on construit une partition de $R(v)$. On prend $c \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Z}$ tel que

$$\begin{cases} v_2 < c < v_2 + 1, & \text{si } v_1 > v_2 = \cdots = v_{d-1} \geq v_d, \\ v_{d-1} - 1 < c < v_{d-1}, & \text{si } v_1 \geq v_2 = \cdots = v_{d-1} > v_d. \end{cases}$$

On écrit $R_\sigma^c(v) = R_\sigma^c(\varpi_i(v))$, où ϖ_i est l'unique poids fondamental dans l'orbite $W\varpi_\sigma$. On note $S_\sigma^c(v) = \bigcup_{v' \in R_\sigma^c(v)} Iv'K/K$. Alors on a la partition disjointe

$$R(v) = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta^1} R_\sigma^c(v).$$

On va ensuite ordonner les $S_\sigma^c(v)$. Pour $1 \leq r \leq d-1$ fixé, l'union

$$S_r(v) = \bigcup_{g \in W} R_{g\varpi_r}^c(v) = W \cdot R_{\varpi_r}^c(v)$$

peut être ordonné par l'inverse de l'ordre de Bruhat-Tits de $g \in W$. Donc il reste à ordonner les $S_r(v)$. on distingue entre deux cas.

(1) $v_1 > v_2 = \cdots = v_{d-1} \geq v_d$ et $v_2 < c < v_2 + 1$.

Pour $1 \leq r \leq d-1$ tel que $v_1 - v_r \geq r$, on note

$$v^{(r)} = (v_1 - r + 1,\ v_2 + 1, \cdots,\ v_r + 1,\ v_{r+1}, \cdots,\ v_d).$$

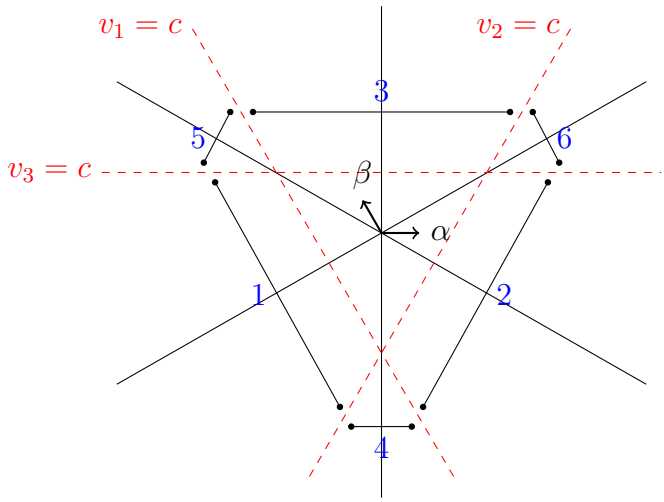

FIGURE 1 – L'ordre de pavage pour GL_3–premier cas.

Lemme 2.14. *Pour $1 \leq r \leq d-1$ tel que $v_1 - v_r \leq r-1$, $R^c_{\varpi_r}(v)$ est vide. Pour r tel que $v_1 - v_r \geq r$, on a*

$$R^c_{\varpi_r}(v) = \{v' \in X_*(T) \mid v' \prec v^{(r)};\ \varpi_r(v') = \varpi_r(v^{(r)})\}.$$

Démonstration. Pour r tel que $v_1 - v_r \leq r-1$, $R^c_{\varpi_r}(v)$ est vide. Sinon, prenons un élément w dedans, alors $w_i > c > v_i$ et donc $w_i \geq v_i + 1$ pour $i = 2, \cdots, r$. Parce que $v_1 \leq v_r + r - 1 < c + r - 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{r} w_i > c + \sum_{i=2}^{r}(v_i + 1) \geq c + r - 1 + \sum_{i=2}^{r} v_i \geq \sum_{i=1}^{r} v_i,$$

contradiction à l'hypothèse que $w \prec v$.

Pour r tel que $v_1 - v_r \geq r$. On a l'égalité dans la proposition car $v^{(r)}$ est le plus longue élément dans $R^c_{\varpi_r}(v)$. □

Donc, on a l'égalité

$$\mathrm{Sch}(\bar{v}) \cup \bigcup_{i=r}^{d-1} S_i(v) = \mathrm{Sch}(v^{(r)}),$$

ce qui donne l'ordre entre les $S_i(v)$ et donc finit ordonner les $S^c_\sigma(n)$. Pour l'ordre de pavage pour GL_3 dans ce cas, voir la figure 1.

(2) $v_1 \geq v_2 = \cdots = v_{d-1} > v_d$ et $v_{d-1} - 1 < c < v_{d-1}$.

Pour $1 \leq r \leq d-1$ tel que $v_{r+1} - v_d \geq d - r$, on note

$$v_{(r)} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1} - 1, \cdots, v_{d-1} - 1, v_d + d - r - 1).$$

Lemme 2.15. *Pour $1 \leq r \leq d-1$ tel que $v_{r+1} - v_d < d - r$, $R^c_\sigma(v)$ est vide. Pour r tel que $v_{r+1} - v_d \geq d - r$, on a*

$$R^c_{\varpi_r}(v) = \{v' \in X_*(T) \mid v' \prec v_{(r)};\ \varpi_r(v') = \varpi_r(v_{(r)})\}.$$

La démonstration est similaire à celle du lemme précédent.

Donc, on a l'égalité

$$\mathrm{Sch}(\bar{v}) \cup \bigcup_{i=1}^{r} S_i(v) = \mathrm{Sch}(v_{(r)}),$$

ce qui donne l'ordre entre les $S_i(v)$ et donc finit ordonner les $S_\sigma^c(n)$. Pour l'ordre de pavage pour GL_3 dans ce cas, voir la figure 2.

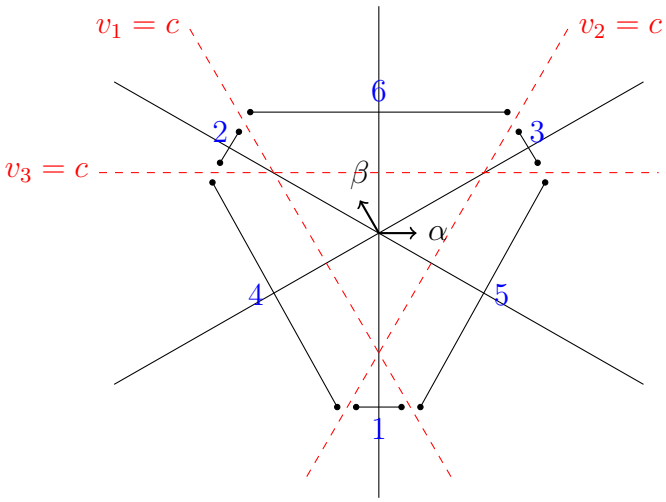

FIGURE 2 – L'ordre de pavage pour GL_3–deuxième cas.

Finalement, étant donné $\mathbf{a}_\sigma \in \mathbf{Z}^d$ pour tout $\sigma \in \Delta^1$ tel que $\mathbf{a}_\sigma$ est négatif par rapport à P_σ, on peut paver $S_\sigma^c(v)$ en espaces affines avec l'Iwahori $I_{\mathbf{a}_\sigma}$ d'après la proposition 2.11. De cette manière, on construit un pavage non standard de $S(v)$. Comme on a remarqué, cette processus peut être continué sur $\mathrm{Sch}(\bar{v})$ avec autres paramètres $c \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ adaptés à $\bar{v}$. Par récurrence, on construit un pavage non standard de $\mathrm{Sch}(v)$, on l'appelle *le pavage en tranches* de $\mathrm{Sch}(v)$.

3 Application aux pavages de la fibre de Springer affine

3.1 Rappel sur les fibres de Springer affines

Les fibres de Springer affines ont été introduites par Kazhdan et Lusztig dans [KL]. Étant donné un élément $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ semi-simple régulier, la fibre de Springer affine $\mathscr{X}_\gamma$ est par définition le sous-ind-k-schéma fermé de la grassmannienne affine $\mathscr{X}$ défini par

$$\mathscr{X}_\gamma = \{g \in G(F)/K \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}\gamma \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})\}.$$

Il est évident que $\mathscr{X}_\gamma$ ne dépend que la classe de conjugaison de γ et que $\mathscr{X}_\gamma = \mathscr{X}_{\gamma + a\mathrm{Id}}$, $\forall a \in \mathcal{O}$.

On note $T_\gamma = Z_{G_F}(\gamma)$, A_γ le sous-tore non-ramifié sur F maximal de T_γ. On note Λ le groupe abélien engendré par $\chi(\varepsilon) \in A_\gamma(F)$, $\chi \in X_*(A_\gamma)$.

Définition 3.1. Un élément semi-simple régulier $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ est dit *entier* si ses valeurs propres sont entières dans $\overline{F}$.

Proposition 3.1 (Kazhdan-Lusztig)**.** *Soit $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier, le ind-k-schéma $\mathscr{X}_\gamma$ est en fait un schéma localement de type fini et de dimension finie. Il est non-vide si et seulement si γ est entier.*

Le groupe discret Λ agit librement et proprement sur $\mathscr{X}_\gamma$. Le quotient $\mathscr{X}_\gamma/\Lambda$ est représenté par un k-schéma projectif et le k-morphisme quotient $\mathscr{X}_\gamma \to \mathscr{X}_\gamma/\Lambda$ est un revêtement étale galoisien.

Dorénavant, on suppose que $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ est un élément semi-simple régulier entier.

Proposition 3.2 (Bezrukavnikov-Kazhdan-Lusztig)**.** *La dimension de $\mathscr{X}_\gamma$ est donnée par la formule*

$$\dim(\mathscr{X}_\gamma) = \frac{1}{2}(\delta_\gamma - c_\gamma),$$

où

$$\delta_\gamma = \mathrm{val}(\det(\mathrm{ad}(\gamma);\, \mathfrak{g}/\mathfrak{t}_\gamma)), \quad c_\gamma = \dim(T_\gamma) - \dim(A_\gamma).$$

On renvoie à [Be] pour la démonstration.

3.2 Formes minimales des valuations radicielles non-ramifiées

Les valuations radicielles ont été introduites par Goresky, Kottwitz et Macpherson dans [GKM4]. Dans la suite, on propose une classification des valuations radicielles non-ramifiées pour GL_d.

3.2.1 Classes de $G(F)$-conjugaison des tores maximaux de G_F

Rappelons que k est algébriquement clos de caractéristique p tel que $p = 0$ ou $p > d$. On note F^s la clôture séparable de F dans $\overline{F}$ et on note $F^t = \bigcup_{n\in\mathbf{N},\, p\nmid n} F(\varepsilon^{1/n})$ l'extension modérément ramifiée maximale de F. En fixant un système (ζ_n) de racines n-ièmes de l'unité, tel que $\zeta_{mn}^n = \zeta_m$, $\forall m,\, n \in \mathbf{N}$, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Gal}(F^t/F) = \prod_{l\neq p} \mathbf{Z}_l.$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(F^s/F)$ admet une filtration

$$1 \to I^p \to \mathrm{Gal}(F^s/F) \to \prod_{l\neq p} \mathbf{Z}_l \to 1,$$

où $I^p = \mathrm{Gal}(F^s/F^t)$ est le sous-groupe pro-p maximal de $\mathrm{Gal}(F^s/F)$.

Soit G un groupe réductif sur k, T un tore maximal de G, $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl. On va rappeler la classification des classes de $G(F)$-conjugaison des F-tores maximaux de G_F.

Soit S un F-tore maximal de G_F, il existe $g \in G(F^s)$ tel que $S = \mathrm{Ad}(g)T$. Pour $\tau \in \mathrm{Gal}(F^s/F)$, on note $x_\tau = g^{-1}\tau(g)$. On a $x_\tau \in N_G(T)$, et il est facile de vérifier que $\tau \in \mathrm{Gal}(F^s/F) \to x_\tau \in N_G(T)$ est un 1-cocycle, qui définit un élément de $H^1(F,\, N_G(T))$ indépendant du choix de g. Cette construction nous donne une bijection entre les classes de $G(F)$-conjugaison des tores maximaux de G_F et

$$\ker\{H^1(F,\, N_G(T)) \to H^1(F,\, G)\}.$$

Utilisant la suite exacte $0 \to T \to N_G(T) \to W \to 0$, et le fait que $H^1(F,\, T) = H^2(F, T) = 1$(essentiellement le théorème 90 de Hilbert et la théorie de corps de classe locale, voir [Se], page 159 et page 189), on a

$$H^1(F,\, N_G(T)) = H^1(F,\, W) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(F^s/F),\, W)^W,$$

où W agit sur $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(F^s/F),\, W)$ par conjugaison sur W. On a donc une bijection entre les classes de $G(F)$-conjugaison des tores maximaux de G_F et

$$\ker\{\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(F^s/F),\, W)^W \to H^1(F,\, G)\}.$$

Pour $G = \mathrm{GL}_d$, on a $W = \mathfrak{S}_d$ et $H^1(F,\, \mathrm{GL}_d) = 0$. Les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_d$ sont en bijection avec les partitions de d. Par une *partition* de d, on entend un r-uplet $(n_1, \cdots, n_r) \in \mathbf{N}^r$, $r = 1, \cdots, d$ quelconque, tel que $\sum_{i=1}^r n_i = d$ et $n_1 \geq \cdots \geq n_r \geq 1$.

Par hypothèse, on a $p = 0$ ou $p > d$ et donc $(p,\, d!) = 1$. L'ensemble

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(F^s/F),\, W)^W = \mathrm{Hom}\Big(\prod_{l \neq p} \mathbf{Z}_l,\, \mathfrak{S}_d\Big)^{\mathfrak{S}_d}$$

est en bijection avec l'ensemble des partitions $(n_1, \cdots, n_r)$ de d. Remarquons que $(n_i, p) = 1$ car $n_i \leq d < p$.

Étant donnée une partition $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_r)$ de d, on note $F_{n_i} = F(\varepsilon^{\frac{1}{n_i}}) = k((\varepsilon^{\frac{1}{n_i}}))$ et $F_{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^r F_{n_i}$, c'est un algèbre semi-simple de degrée d sur F. La multiplication de $F_{\mathbf{n}}$ sur lui-même nous permet de le plonger dans $\mathrm{End}(F_{\mathbf{n}}) \cong \mathfrak{gl}_d(F)$. On note $T_{\mathbf{n}}$ l'image de $F_{\mathbf{n}}^\times$; c'est un tore maximal de $\mathrm{GL}_{d,F}$. Le résultat des paragraphes précédents nous dit que tous les tores maximaux de $\mathrm{GL}_{d,F}$ à $\mathrm{GL}_d(F)$-conjuguaison près s'obtiennent de cette manière.

Définition 3.2. Un tore maximal de GL_d est dit *elliptique* s'il correspond à la partition (d), il est dit *non-ramifié* s'il correspond à la partition $(1, \cdots, 1)$ de d.

Définition 3.3. Un élément semi-simple régulier $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ est dit *elliptique* si son centralisateur T_γ est elliptique, et *non-ramifié* si T_γ l'est.

3.2.2 Valuations radicielles pour GL_d

Soit $G = \mathrm{GL}_d$, $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier. On note $\gamma' \in \mathfrak{t}(F^t)$ un élément qui est $G(\overline{F})$-conjugué à γ. On associe à γ' un couple (w, r) de la manière suivante : soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(F^t/F)$ l'élément tel que $\sigma(\varepsilon^{1/n}) = \zeta_n \varepsilon^{1/n}$, alors $w \in W$ est l'unique élément tel que $w\sigma(\gamma') = \gamma'$, et $r : \Phi(G, T) \to \mathbf{Q}$ est la fonction $r(\alpha) =$

$\mathrm{val}(\alpha(\gamma'))$. En choisissant un autre $\gamma'' \in \mathfrak{t}(F^t)$ conjugué à γ, on a $\gamma'' = w'(\gamma')$ pour certain $w' \in W$. Soit (w'', r'') le couple associé à γ'', alors $w'' = w'ww'^{-1}$ et $r'' = r \circ w'^{-1}$. Dans ce cas, on dit que (w, r) et (w'', r'') sont équivalents et on appelle cette classe d'équivalence de (w, r), *la valuation radicielle* associée à γ.

Lemme 3.3. *Soit $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier, (w, r) la valuation radicielle de γ, alors la classe de $G(F)$-conjugaison du tore maximal T_γ correspond à la classe de conjugaison de $w \in W$.*

Démonstration. Choisissons $\gamma' \in \mathfrak{t}(F^t)$ tel que $\gamma = g\gamma' g^{-1}$, $g \in G(\overline{F})$. On a $T_\gamma = \mathrm{Ad}(g)T_F$ puisque γ est régulier. On note (w, r) le couple associé à γ' et $x = g^{-1}\sigma(g)$. On a l'égalité

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(x)\sigma(\gamma') &= g^{-1}\sigma(g)\sigma(\gamma')\sigma(g^{-1})g = g^{-1}\sigma(\mathrm{Ad}(g)\gamma')g \\ &= g^{-1}\sigma(\gamma)g = g^{-1}\gamma g = \gamma', \end{aligned}$$

donc $w \equiv x$ dans $N(T)/T = W$, d'où le lemme. □

Définition 3.4. La valuation radicielle est dit *équivaluée* si pour un de ses représentants (w, r) (et donc pour tous), la fonction r est constante. Elle est dite *non-ramifiée* si $w = 1$.

Pour γ non-ramifié, sa valuation radicielle l'est aussi. Dans la suite, on va classifier les valuations radicielles non-ramifiées pour GL_d ; c'est équivalent à mettre γ sous une forme favorable.

Définition 3.5. L'élément $\gamma \in \mathfrak{t}(F)$ est dit *en forme minimale* s'il satisfait à la condition

$$\mathrm{val}(\alpha_{i,j}(\gamma)) = \min_{i \le l \le j-1} \{\mathrm{val}(\alpha_l(\gamma))\}, \quad \forall i, j = 1, \cdots, d,\ i < j.$$

Dans ce cas, le $(d-1)$-uplet $(\mathrm{val}(\alpha_1(\gamma)), \cdots, \mathrm{val}(\alpha_{d-1}(\gamma)))$ est aussi appelé la valuation radicielle de γ.

Proposition 3.4. *Tout élément $\gamma \in \mathfrak{t}(F)$ est conjugué à au moins un élément en forme minimale.*

Démonstration. On va montrer la proposition par récurrence. Pour $G = \mathrm{GL}_2$, le résultat est évident. On suppose que pour $G = \mathrm{GL}_n$, $n < d$, la proposition est démontrée.

Soit $\gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \cdots, \gamma_d)$, soit $v = \max\{\mathrm{val}(\alpha_{i,j}(\gamma)), i \neq j\}$. Soit $\gamma'_1 = \mathrm{diag}(\gamma_{\tau(1)}, \cdots, \gamma_{\tau(a)})$ l'une des sous-matrices équivaluées de valuation v de γ qui est de taille maximale. On note $\gamma'_2 = \mathrm{diag}(\gamma_{\tau(a+1)}, \cdots, \gamma_{\tau(d)})$, et $\gamma' = \mathrm{diag}(\gamma'_1, \gamma'_2)$.

Lemme 3.5. *Pour $a + 1 \le i \le d$ fixé et $1 \le j \le a$, les valuations $\mathrm{val}(\alpha_{i,j}(\gamma')) = \mathrm{val}(\alpha_{j,i}(\gamma'))$ sont toutes les mêmes et strictement plus petites que v.*

Démonstration. S'il existe $a + 1 \le i_0 \le d$, $1 \le j_0 \le a$ tel que $\mathrm{val}(\alpha_{i_0,j_0}(\gamma')) = v$, alors pour tout $1 \le j \le a$, les inégalités

$$v \ge \mathrm{val}(\alpha_{i_0,j}(\gamma')) \ge \min\{\mathrm{val}(\alpha_{i_0,j_0}(\gamma')), \mathrm{val}(\alpha_{j_0,j}(\gamma'))\} = v$$

entrainent que $\mathrm{val}(\alpha_{i_0,j}(\gamma')) = v$, i.e. que la matrice $\mathrm{diag}(\gamma_{\tau(1)}, \cdots, \gamma_{\tau_{(a)}}, \gamma'_{i_0,i_0})$ est équivaluée de valuation v, contradiction à l'hypothèse que γ'_1 est de taille maximale. Donc $\mathrm{val}(\alpha_{i,j}(\gamma')) < v$, pour tout $a+1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq a$.

Par conséquent, pour tout $1 \leq k, l \leq a$, on a

$$\mathrm{val}(\alpha_{i,k}(\gamma')) = \min\{\mathrm{val}(\alpha_{i,l}(\gamma')),\ \mathrm{val}(\alpha_{l,k}(\gamma')) = v\} = \mathrm{val}(\alpha_{i,l}(\gamma')).$$

□

Donc on peut "contracter" γ'_1 en un élément $\delta_1 \in F$ tel que $\mathrm{val}(\delta_1) = v$ et les valuations radicielles ne changent pas à l'extérieure de γ'_1. On note $\delta = (\delta_1, \gamma'_2)$. On observe que la matrice γ'_1 est toujours de taille strictement plus grande que 1, donc δ est de taille strictement plus petite que $d-1$. Par l'hypothèse de récurrence, δ admet une forme minimale $\tau'(\delta)$. En remplaçant l'élément δ_1 dans $\tau'(\delta)$ par γ'_1, on trouve une forme minimale de γ. □

Remarque 3.1. En général, un élément γ peut être conjugué à plusieurs éléments en forme minimale. Par exemple, pour GL_4, $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$, les éléments

$$\mathrm{diag}(\varepsilon^m - \varepsilon^n,\ -\varepsilon^m - \varepsilon^n,\ -\varepsilon^m + \varepsilon^n,\ 2\varepsilon^m + 2\varepsilon^n)$$

et

$$\mathrm{diag}(\varepsilon^m - \varepsilon^n,\ 2\varepsilon^m + 2\varepsilon^n,\ -\varepsilon^m + \varepsilon^n,\ -\varepsilon^m - \varepsilon^n)$$

sont en formes minimales et conjugués.

3.3 La conjecture de pureté

3.3.1 Pureté de ind-k-schéma

Soit X une variété algébrique projective sur k, on note $H^* = H^*(X, \mathbf{C})$ si $k = \mathbf{C}$, et $H^* = H^*(X, \mathbf{Q}_l)$ pour un nombre premier $l \neq p$ si $k = \overline{\mathbf{F}}_p$. D'après Deligne dans [D1], il existe une filtration croissante $W_\bullet$ par le poids sur H^* tel que pour $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques projectives sur k, le morphisme induit $f^* : H^*(Y) \to H^*(X)$ est strictement compatible à la filtration par le poids. La cohomologie de X est dit *pure* si

$$\mathrm{Gr}_m^W(H^i) = W_m(H^i)/W_{m-1}(H^i) = 0, \qquad \text{pour } m \neq i.$$

Exemple 3.1. Soit X une variété algébrique projective sur k, on suppose que X admet un pavage en espaces affines, i.e. qu'il existe une filtration croissante exhaustive $X_0 \subset X_1 \subset \cdots$ de X telle que X_i est fermé et $X_i \backslash X_{i-1}$ est isomorphe à un espace affine standard, $\forall i$. Alors X est pur.

Le théorème suivant joue un rôle central dans la géométrie algébrique, voir [Weil I].

Théorème 3.6 (Deligne)**.** *Soit X une variété algébrique* projective *et* lisse *sur k, alors X est pur.*

Passant par dualité à l'homologie $H_*(X) := (H^*(X))^*$, on obtient une filtration croissante $W_\bullet$ sur H_*,

$$W_m(H_i) = (H^i/W_{-m-1}H^i)^*.$$

Pour $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques projectives sur k, le morphisme $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ est strictement compatible à la filtration par le poids.

On suppose maintenant que X est un ind-k-schéma, i.e. qu'il existe des variétés algébriques projectives X_i sur k et des immersions fermées $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ telles que $X = \lim_{i\to+\infty} X_i$. Puisque les immersions sont strictement compatibles avec la filtration par le poids, l'homologie $H_*(X) = \lim_{i\to+\infty} H_*(X_i)$ hérite d'une filtration par le poids $W_\bullet$ induisant celle de $H_*(X_i)$ pour chaque i. Cette filtration ne dépend que de X à cause de la stricte compatibilité avec les morphimes. On dit que X est *pur* si $\mathrm{Gr}^W_m(H_i(X)) = 0$ pour $m \neq i$. Par définition, si X_n est pur pour tout n, alors X est pur. C'est le cas si tous les X_n admettent des pavages en espaces affines.

3.3.2 Conjecture de Goresky, Kottwitz et Macpherson

Conjecture 3.1 (Goresky-Kottwitz-Macpherson)**.** Pour tout élément $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ semi-simple régulier entier, la fibre de Springer affine $\mathscr{X}_\gamma$ est pure.

Remarque 3.2. Parce que la cohomologie ne dépend que la structure réduite du schéma, dorénavant on travaille avec la structure réduite de la fibre de Springer affine.

Théorème 3.7 (Goresky-Kottwitz-Macpherson)**.** *Pour tout élément $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ semi-simple régulier entier* équivalué*, la fibre de Springer affine $\mathscr{X}_\gamma$ est pure.*

Pour la démonstration, voir [GKM1]. On rappelle ici rapidement leur pavage pour $G = \mathrm{GL}_d$.

Définition 3.6. Soit $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier équivalué de valuation $s \in \mathbf{Q}$. On dit que γ est *sous forme normale* si $\gamma \in \mathfrak{g}_{x_0,s}$ et son image $\bar{\gamma}$ sous l'application $\mathfrak{g}_{x_0,s} \to \mathfrak{g}_{x_0,s}/\mathfrak{g}_{x_0,s+} \cong \mathfrak{g}(x_0, s) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ est semi-simple régulière dans $\mathfrak{g}$, où $x_0 \in \mathfrak{t}$ a été défini dans l'exemple 2.1

Lemme 3.8. *Soit $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier équivalué entier, alors γ est conjugué à un élément $a + \gamma'$, avec $a \in \mathcal{O}$ et γ' sous forme normale.*

Remarque 3.3. Puisque $\mathscr{X}_\gamma$ ne dépend que de la classe de conjugaison de γ et que $\mathscr{X}_\gamma = \mathscr{X}_{\gamma+a}$, $\forall a \in \mathcal{O}$, pour comprendre la géométrie de $\mathscr{X}_\gamma$ on peut toujours supposer que γ est sous forme normale si γ est équivalué.

Démonstration. Premièrement, considérons un élément $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ elliptique équivalué de valuation $n + \frac{r}{d}$, $r \in \mathbf{N}$, $0 \leq r \leq d-1$. Par la classification des tores maximaux, on peut supposer que $F(\gamma) = F_d = k((\varepsilon^{1/d}))$.

Lemme 3.9. *On peut écrire $\gamma = a + u\varepsilon^{n+\frac{r}{d}}$, avec $a \in \mathcal{O}$, $u \in \mathcal{O}^\times_{F_d}$ et $(r, d) = 1$.*

Démonstration. Parce que γ est elliptique, les valeurs propres de $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ sont les conjugués galoisiens de γ dans $\overline{F}$. On écrit $\gamma = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\varepsilon^{i/d}$, $a_i \in k$. Soit i_0 le plus petit

entier tel que $a_{i_0} \neq 0$ et $d \nmid i_0$. Puisque $\mathrm{val}(\tau(\gamma) - \tau'(\gamma)) = i_0/d, \forall \tau, \tau' \in \mathrm{Gal}(F_d/F)$, on a $i_0 = nd + r$ et $(r, d) = 1$.

□

On prend $\gamma' = u\varepsilon^{n+\frac{r}{d}}$. On identifie $\mathrm{End}_F(F_d) \cong \mathfrak{g}_F$ à l'aide de la base

$$\{\varepsilon^{\frac{d-1}{d}}, \varepsilon^{\frac{d-2}{d}}, \cdots, 1\}$$

de F_d sur F, et on plonge F_d dans $\mathfrak{g}_F$ par multiplication sur lui même, alors γ' a la forme

$$\gamma' \equiv u_0 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon^n \mathrm{Id}_{d-r} \\ \varepsilon^{n+1}\mathrm{Id}_r & 0 \end{bmatrix} \mod \mathfrak{g}_{x,n+\frac{r+1}{d}}, \tag{3}$$

où $u_0 \in k^\times$, $u_0 \equiv u \mod \varepsilon^{1/d}\mathcal{O}_{F_d}$. On voit que γ' est sous forme normale.

En cas général, pour γ équivalué de valuation $n+\frac{r}{d'}$, $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq r \leq d'-1$, $(r, d') = 1$, T_γ est conjugué soit à $T_{(d',\cdots,d')}$ soit à $T_{(d',\cdots,d',1)}$. Dans le premier cas, γ est conjugué à une matrice diagonale par blocs, $\mathrm{diag}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{d/d'})$, telle que chaque bloc $\gamma_i \in T_{(d')}$ est elliptique dans $\mathrm{GL}_{d'}$. Par le lemme au dessus, on peut supposer que $\gamma_i = a_i + \gamma_i'$, $a_i \in \mathcal{O}$ et que γ_i' est sous forme normale. Par l'hypothèse "équivalué", on a $a_1 = \cdots = a_{d/d'} = a$, de sorte que γ est conjugué à $a + (\gamma_1', \cdots, \gamma_{d/d'}')$, qui est sous forme normale. L'argument est le même pour le deuxième cas. □

Théorème 3.10 (Goresky-Kottwitz-Macpherson)**.** *Pour $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ équivalué sous forme normale, l'intersection $IwK/K \cap \mathscr{X}_\gamma$ est isomorphe à un espace affine pour tout $w \in X_*(T)$. La décomposition $\mathscr{X}_\gamma = \bigsqcup_{w \in X_*(T)} IwK/K \cap \mathscr{X}_\gamma$ donne un pavage de $\mathscr{X}_\gamma$ en espaces affines.*

3.4 Une proposition technique

Prenons un sous-groupe parabolique maximal $P = MN$. Soit $\gamma \in \mathfrak{m}(F) \subset \mathfrak{gl}_d(F)$ un élément semi-simple régulier entier. Soit $U \subset N_F$ un sous-groupe ouvert et fermé.

Lemme 3.11. *Considérons la rétraction*

$$f_P : U\mathscr{X}_\gamma^M \cap \mathscr{X}_\gamma \to \mathscr{X}_\gamma^M.$$

Soit $gK^M \in \mathscr{X}_\gamma^M$, alors $f_P^{-1}(gK^M)$ est isomorphe canoniquement à

$$\ker\left\{\mathrm{ad}(\gamma) : \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \to \frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})}\right\},$$

Démonstration. Pour $gK^M \in \mathscr{X}_\gamma^M$, soit $u \in \mathfrak{u}$, alors

$$\begin{aligned} (1+u)gK \in \mathscr{X}_\gamma &\iff \mathrm{Ad}(1+u)^{-1}\gamma \in \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \\ &\iff \gamma - [u, \gamma] \in \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \\ &\iff [u, \gamma] \in \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}), \end{aligned}$$

d'ou le lemme (dans le deuxième ligne on utilise le fait que P est maximal). □

Proposition 3.12. *Soient $P = MN \in \mathcal{F}(T)$ maximal, $U \subset N_F$ un sous-groupe ouvert et fermé. Soit X une sous-variété de $\mathscr{X}_\gamma^M$. On suppose que les dimensions*

$$\dim_k \left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \right), \quad \dim \left(\frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \right),$$

sont indépendantes de g pour tout $gK \in X$. Alors la rétraction

$$f_P : UX \cap \mathscr{X}_\gamma \to X$$

est une fibration en espaces affines.

Démonstration. D'après le corolaire 2.9, les $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$, $gK \in X$, s'organisent en un fibré vectoriel $\tilde{\mathfrak{u}}/\tilde{\mathfrak{u}} \cap \mathcal{K}$. Il en est de même pour $\mathfrak{u}' := \mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$. Donc le noyau

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{u},\gamma} := \ker \left\{ \mathrm{ad}(\gamma) : \frac{\tilde{\mathfrak{u}}}{\tilde{\mathfrak{u}} \cap \mathcal{K}} \to \frac{\tilde{\mathfrak{u}}'}{\tilde{\mathfrak{u}}' \cap \mathcal{K}} \right\}$$

est un fibré vectoriel sur X car le morphisme est surjectif. D'après le lemme 3.11, la rétraction en question est un $\mathcal{K}_{\mathfrak{u},\gamma}$-torseur, donc elle est une fibration en espaces affines. □

Remarque 3.4. La condition que la dimension de $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ est indépendante de g pour tout $gK \in X$ est équivalent à la condition que la rétraction

$$f_P : UX \to X$$

est une fibration en espaces affines. Dans la suite, on utilise aussi cette condition alternative.

Lemme 3.13. *Soient $P = MN \in \mathcal{F}(T)$ maximal, $H \subset M_F$, $U \subset N_F$ des sous-groupes ouverts et fermés. On suppose que H normalise U. Soit X une H-orbite dans $\mathscr{X}^M$, alors la dimension $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ est indépendante de g pour $gK \in X$.*

Démonstration. Fixe $gK^M \in X$, pour tout $h \in H$, on a

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(hg)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car H normalise U, d'où le lemme. □

Corollaire 3.14. *Soient $P = MN \in \mathcal{F}(T)$ maximal, $H \subset M_F$, $U \subset N_F$ des sous-groupes ouverts et fermés. On suppose que H normalise les algèbres de Lie $\mathfrak{u}$ et $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$. Soit X une H-orbite dans $\mathscr{X}^M$. Alors la rétraction*

$$f_P : UX \cap \mathscr{X}_\gamma \to X \cap \mathscr{X}_\gamma^M$$

est une fibration en espaces affines.

Démonstration. D'après le lemme 3.13, la dimension de $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$, est indépendante de g pour $gK \in X$. Il en est de même pour les $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$. Donc le corolaire se déroule de la proposition 3.12. □

3.5 Pavage pour GL_d dans un cas particulier

On suppose que $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in (\mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_{d-1})(F) \subset \mathfrak{gl}_d(F)$ tel que $\alpha_{1,i}(\gamma) = n_1$, $i = 2, \cdots, d$ et $\gamma_2 \in \mathfrak{gl}_{d-1}(F)$ est équivalué de valuation $n_2 + r$, $r \in \mathbf{Q}$, $0 \leq r < 1$, $n_1 \leq n_2$, $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$. On peut supposer que $\gamma_2 \in \mathfrak{gl}_{d-1}(F)$ est sous forme normale sans perte de généralité.

Théorème 3.15. *Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, la variété $\mathscr{X}_{\geq -m} \cap \mathscr{X}_\gamma$ admet un pavage en espaces affines, donc $\mathscr{X}_\gamma$ est pur.*

Démonstration. On pave $\mathscr{X}_{\geq -m}$ avec l'Iwahori $I' = \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(\varepsilon^{dm}, 1, \cdots, 1))I$. Pour $w \in \mathscr{X}^T_{\geq -m}$, on note $C(w) = \mathscr{X}_{\geq -m} \cap I'wK/K$. Par la proposition 2.2, on a un pavage en espaces affines

$$\mathscr{X}_{\geq -m} = \bigsqcup_{w \in \mathscr{X}^T_{\geq -m}} C(w)$$

et

$$C(w) = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & & & \\ \mathfrak{p}^{m_w} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{p}^{m_w} & \mathfrak{p} & \cdots & \mathcal{O} \end{bmatrix} wK/K, \quad m_w = -m - w_1.$$

On note

$$P = P_{s_{1d}\varpi_{d-1}} = \begin{bmatrix} * & & & \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

Soit $P = MN$ sa factorisation de Levi standard. D'après le corolaire 3.14, la rétraction

$$f_{s_{1d}\varpi_{d-1}} : C(w) \cap \mathscr{X}_\gamma \to I^M wK^M/K^M \cap \mathscr{X}^M_\gamma$$

est une fibration en espaces affines. En effet, on prend

$$U = N(\mathfrak{p}^{m_w}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \mathfrak{p}^{m_w} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathfrak{p}^{m_w} & & & 1 \end{bmatrix},$$

alors $C(w) = UI^M wK/K$. Il est évident que I^M normalise $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U)$ et $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$.

De plus, l'intersection $I^M wK^M/K^M \cap \mathscr{X}^M_\gamma$ est isomorphe à un espace affine par le théorème 3.10 puisque $\gamma \in \mathfrak{m}(F) = (\mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_{d-1})(F)$ est équivalué et sous forme normale, donc $C(w) \cap \mathscr{X}_\gamma$ est aussi isomorphe à un espace affine.

□

3.6 Pavage pour GL_3

Soit $G = \mathrm{GL}_3$, on fixe un élément $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ semi-simple régulier entier. Parce que $\mathrm{char}(k) = p > 3$, par la classification des tores maximaux, T_γ est conjugué soit à $T_{(1,1,1)}$, soit à $T_{(1,2)}$, soit à $T_{(3)}$.

Pour γ non-ramifié, Lucarelli a montré dans [Lu] :

Théorème 3.16 (Lucarelli)**.** *Soit $\gamma \in \mathfrak{t}_{(1,1,1)}(\mathcal{O})$ un élément régulier sous forme minimale avec valuation radicielle (n_1, n_2), où $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, $n_1 \leq n_2$. Alors $\mathscr{X}_\gamma$ admet un pavage en espaces affines.*

Pour γ elliptique, un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}_\gamma$ a été construit par Goresky, Kottwitz et Macpherson.

Lemme 3.17. *Tout élément $\gamma \in \mathfrak{t}_{(3)}(F)$ est équivalué.*

Démonstration. Parce que $F(\gamma) = k((\varepsilon^{1/3}))$ est une extension galoisienne de F, les valeurs propres de γ sont des conjuguées galoisiennes. Soit γ_1 l'une des valeurs propres de γ, on écrit $\gamma_1 = \sum_{i \in \mathbf{N}} a_i \varepsilon^{i/3}$. Soit i_0 l'entier minimal tel que $a_{i_0} \neq 0$ et $3 \nmid i_0$, alors $\mathrm{val}(\alpha(\gamma)) = i_0/3$, $\forall \alpha \in \Phi(G, T)$, i.e. γ est équivalué. □

Donc pour γ elliptique, $\mathscr{X}_\gamma$ est pur par le théorème 3.10 de Goresky, Kottwitz et Macpherson.

Pour $\gamma \in \mathfrak{t}_{(1,2)}(F)$, s'il est équivalué, $\mathscr{X}_\gamma$ est pur par le théorème 3.10. Sinon, on a

$$\mathrm{val}(\alpha_{1,2}(\gamma)) = \mathrm{val}(\alpha_{1,3}(\gamma)) = n_1, \quad \mathrm{val}(\alpha_{2,3}(\gamma)) = n_2 + \frac{1}{2},$$

pour certain $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, $n_1 \leq n_2$. Dans ce cas, $\mathscr{X}_\gamma$ est pur par le théorème 3.15.

En conclusion, on a

Théorème 3.18. *Pour tout $\gamma \in \mathfrak{gl}_3(F)$ semi-simple régulier entier, $\mathscr{X}_\gamma$ est pur.*

Dans la suit, on va utiliser les pavages non standard en tranches de la grassmannienne affine tronquée que l'on a construit dans §2.3.3, pour paver les fibres de Springer affines $\mathscr{X}_\gamma$, γ non-ramifié. Ce pavage est plus "flexible" que celui de Lucarelli, et il est indisponible pour paver la fibre de Springer affine pour GL_4 dans le cas non-ramifié.

On fixe un élément $c \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Z}$ et on utilise les notations de §2.3.2.

Théorème 3.19. *Soit $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$ un élément régulier sous forme minimale avec valuation radicielle (n_1, n_2), où $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, $n_1 \leq n_2$. Soit $\mathbf{a} = (n_1, n_2, n_2)$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a*

1. *Pour $w \in R^c_{\varpi_1}(n) \cup R^c_{s_{13}\varpi_2}(n)$, l'intersection $IwK/K \cap \mathscr{X}_\gamma$ est isomorphe à un espace affine standard.*
2. *Pour $i = 2, 3$, $w \in R^c_{s_{1i}\varpi_1}(n)$, l'intersection $S^c_{s_{1i}\varpi_1}(n) \cap I_{-\mathbf{a}} wK/K \cap \mathscr{X}_\gamma$ est isomorphe à un espace affine standard.*
3. *Pour $i = 2, 3$, $w \in R^c_{s_{3i}\varpi_2}(n)$, l'intersection $S^c_{s_{3i}\varpi_2}(n) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K \cap \mathscr{X}_\gamma$ est isomorphe à un espace affine standard.*

   En conclusion, les intersections $S^c_\sigma(n) \cap \mathscr{X}_\gamma$ sont purs, pour tout $\sigma \in \Delta^1$.

Démonstration. 1. On montre que le cas $w \in R^c_{\varpi_1}(n)$, l'autre cas étant pareil.
Rappelons que

$$R^c_{\varpi_1}(n) = \{w \in X_*(T) \mid w_1 > c;\ w_i < c,\ i = 2, 3;\ \varpi_1(w) = n\}.$$

On note

$$P = P_{\varpi_1} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & * & * \end{bmatrix}.$$

Soit $P = MN$ sa factorisation de Levi standard. Soit $U = N(\mathcal{O})$, alors on a $IvK/K = UI^M wK/K$. Parce que I^M normalise $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U)$ et $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$, la rétraction

$$f_P : IwK/K \cap \mathscr{X}_\gamma \to I^M wK^M/K^M \cap \mathscr{X}_\gamma^M$$

est une fibration en espaces affines d'après le corolaire 3.14.
L'intersection $I^M wK^M/K^M \cap \mathscr{X}_\gamma^M$ est isomorphe à un espace affine par le théorème 3.10 puisque $\gamma \in \mathfrak{m}(F) = (\mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_2)(F)$ est équivalué et sous forme normale. L'intersection $IwK/K \cap \mathscr{X}_\gamma$ est donc isomorphe à un espace affine.

2. On montre que le cas $w \in R^c_{s_{13}\varpi_1}(n)$, l'autre cas étant pareil.
Rappelons que

$$R^c_{s_{13}\varpi_1}(n) = \{w \in X_*(T) \mid w_3 > c;\ w_i < c,\ i = 1, 2;\ (s_{13}\varpi_1)(w) = n\}.$$

On note

$$P = P_{s_{13}\varpi_1} = \begin{bmatrix} * & * & \\ * & * & \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Soit $P = MN$ sa factorisation de Levi. On note $U = N(\mathfrak{p})$. Soit $m_w = -\lfloor c \rfloor + w_2$, on note

$$H = I^M_{-\mathbf{a}} \cap \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(1, \varepsilon^{m_w}, \varepsilon^{m_w}))K^M.$$

qui est un groupe de Lie. D'après la proposition 2.11, on a

$$S^c_{s_{13}\varpi_1}(n) \cap I_{-\mathbf{a}} wK/K = UHwK/K.$$

Et par le corolaire 2.12, la rétraction

$$f_P : UHwK/K \to HwK^M/K^M$$

est une fibration en espaces affines.
On prend $x = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \in \mathfrak{t}$ et $y = x + (n_1, n_2, 0)$. Alors $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U) = \mathfrak{n}_{x,0}$ et $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} = \mathfrak{n}_{y,0}$. Puisque $H \subset \mathbf{M}_y = I^M_{-\mathbf{a}}$, il normalise $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$. Le lemme 3.13 et la proposition 3.12 impliquent que la rétraction

$$f_P : UHwK/K \cap \mathscr{X}_\gamma \to HwK^M/K^M \cap \mathscr{X}_\gamma^M$$

est une fibration en espaces affines. Puisque γ est équivalué par rapport à $M = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1$, l'intersection $HwK^M/K^M \cap \mathscr{X}_\gamma^M$ est isomorphe à un espace affine. Par conséquent, $S^c_{s_{13}\varpi_1}(n) \cap I_{-\mathbf{a}} wK/K \cap \mathscr{X}_\gamma$ est isomorphe à un espace affine.

3. On montre que le cas $w \in R^c_{\varpi_2}(n)$, l'autre cas étant pareil.
   Rappelons que

$$R^c_{\varpi_2}(n) = \{w \in X_*(T) \mid w_3 < c;\ w_i > c,\ i = 1, 2;\ \varpi_2(w) = n\}.$$

   On note

$$P = P_{\varpi_2} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ & & * \end{bmatrix}.$$

   Soit $P = MN$ sa factorisation de Levi. On note $U = N(\mathcal{O})$. Soient $m_w = \lceil c \rceil - w_2$, et

$$H = I^M_{\mathbf{a}} \cap \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(\varepsilon^{m_w}, 1, 1))K^M,$$

   qui est un groupe de Lie. D'après la proposition 2.11, on a

$$S^c_{\varpi_2}(n) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K = UHwK/K.$$

   Et par le corolaire 2.12, la rétraction

$$f_P : UHwK/K \to HwK^M/K^M$$

   est une fibration en espaces affines.
   On prend $x = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \in \mathfrak{t}$ et $y = x - (n_1, n_2, 0)$. Alors $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U) = \mathfrak{n}_{x,0}$ et $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} = \mathfrak{n}_{y,0}$. Puisque $H \subset \mathbf{M}_y = I^M_{\mathbf{a}}$, il normalise $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$. Le lemme 3.13 et la proposition 3.12 impliquent que la rétraction

$$f_P : UHwK/K \cap \mathscr{X}_\gamma \to HwK^M/K^M \cap \mathscr{X}^M_\gamma$$

   est une fibration en espaces affines. Puisque γ est équivalué par rapport à $M = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1$, l'intersection $HwK^M/K^M \cap \mathscr{X}^M_\gamma$ est isomorphe à un espace affine. Par conséquent, $S^c_{\varpi_2}(n) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K \cap \mathscr{X}_\gamma$ est isomorphe à un espace affine.

□

En utilisant le pavage en tranches de la grassmannienne tronquée que l'on a construit dans §2.3.3, on obtient

Corollaire 3.20. *Pour tout $w \in X^+_*(T)$, la sous-variété fermée $\mathrm{Sch}(w) \cap \mathscr{X}_\gamma$ de $\mathscr{X}_\gamma$ admet un pavage en espaces affines. En particulier, elle est pure.*

3.7 Pavage pour GL_4 dans le cas nonramifié

Soit $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$ un élément régulier entier, le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.21. *Pour tout $m \in \mathbf{N}$, l'intersection $\mathscr{X}_{\geq -m} \cap \mathscr{X}_\gamma$ admet un pavage en espaces affines. Par conséquent, la cohomologie de $\mathscr{X}_\gamma$ est pure.*

Le reste de la section est consacré à la démonstration du théorème. D'abord on fait certains simplifications. Puisque on peut toujours translater le pavage de la composante neutre $\mathscr{X}_\gamma^{(0)}$ vers les autres composantes par des éléments dans $T_\gamma(F)$, il suffit donc de paver la composante neutre. Pour simplifier les notations, on néglige l'exposante $^{(0)}$. Puis, quitte à conjuguer par le groupe de Weyl, on peut supposer que $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$ est en forme minimale avec valuation radicielle l'un des deux types suivants :

1. (n_1, n_2, n_3), $n_1 \leq n_2 \leq n_3$,
2. $(n_1,\ n,\ n_2)$, $n \leq n_1 \leq n_2$.

Pour les deux types, on commence par paver $\mathscr{X}_{\geq -m}$ avec

$$I' = \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(\varepsilon^{4m}, 1, 1, 1))I.$$

On note $C(w) = \mathscr{X}_{\geq -m} \cap I'wK/K$. D'après la proposition 2.2, on a un pavage en espaces affines

$$\mathscr{X}_{\geq -m} = \bigsqcup_{w \in \mathscr{X}^T_{\geq -m}} C(w)$$

et

$$C(w) = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & & & \\ \mathfrak{p}^{m_w} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{p}^{m_w} & \mathfrak{p} & \cdots & \mathcal{O} \end{bmatrix} wK/K, \quad m_w = -m - w_1.$$

Pour $-m \leq b \leq 3m$, $b \in \mathbf{Z}$, on note

$$R_b = \{w \in \mathscr{X}^T_{\geq -m},\ w_1 = b\}, \quad V_b = \bigsqcup_{w \in R_b} C(w).$$

Alors $\mathscr{X}_{\geq -m} = \bigcup_{b=-m}^{3m} V_b$ et

$$\overline{V}_b = \bigcup_{i=b}^{3m} V_i.$$

Voir la figure 3 pour ce découpage. Pour démontrer le théorème 3.21, il suffit donc de paver chaque $V_b \cap \mathscr{X}_\gamma$.

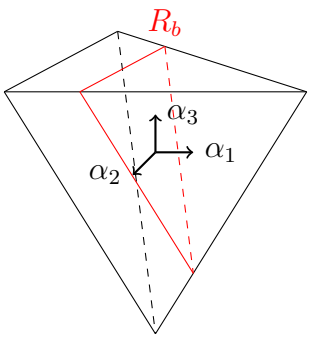

FIGURE 3 – Découpage de $\mathscr{X}^T_{\geq -m}$ en R_b.

On note

$$P = P_{s_{14}\varpi_3} = \begin{bmatrix} * & & & \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Soit $P = MN$ sa factorisation de Levi. On note

$$U = N(\mathfrak{p}^{-m-b}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \mathfrak{p}^{-m-b} & 1 & & \\ \mathfrak{p}^{-m-b} & & 1 & \\ \mathfrak{p}^{-m-b} & & & 1 \end{bmatrix},$$

alors $C(w) = UI^M wK/K$.

Lemme 3.22. *La rétraction*

$$f_P : V_b \to V_b \cap \mathscr{X}^M$$

est une fibration en espaces affines.

Démonstration. On montre d'abord que la dimension de $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ est indépendante de g pour $gK \in V_b \cap \mathscr{X}^M$. Pour $g \in I^M$, $w \in R_b$, on a

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(gw)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(w)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car I^M normalise $\mathfrak{u}$. Et la dimension du dernier terme est

$$\sum_{i=2}^{4} [(w_i - w_1) - (-m - w_1)] = 3m - w_1 = 3m - b.$$

Donc les $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ s'organisent en un fibré vectoriel $\tilde{\mathfrak{u}}/\tilde{\mathfrak{u}} \cap \mathcal{K}$ sur $V_b \cap \mathscr{X}^M$. La rétraction en question est un torseur sous ce fibré vectoriel, d'où le lemme. □

De plus, puisque $M = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_3$, la projection vers le deuxième facteur donne un isomorphisme

$$V_b \cap \mathscr{X}^M \cong \mathscr{X}^{\mathrm{GL}_3,(-b)}_{\geq -m}.$$

Dans la suite, on distingue entre les deux types.

3.7.1 Premier type

On va couper V_b en parties localement fermées telles que la restriction de la fibration

$$f_P : \mathscr{X}_\gamma \cap V_b \to \mathscr{X}_\gamma^M \cap V_b$$

sur chaque partie est une fibration en espaces affines.

On fixe $c \in \mathbf{R}$ tel que

$$-m + n_1 - 1 < c < -m + n_1.$$

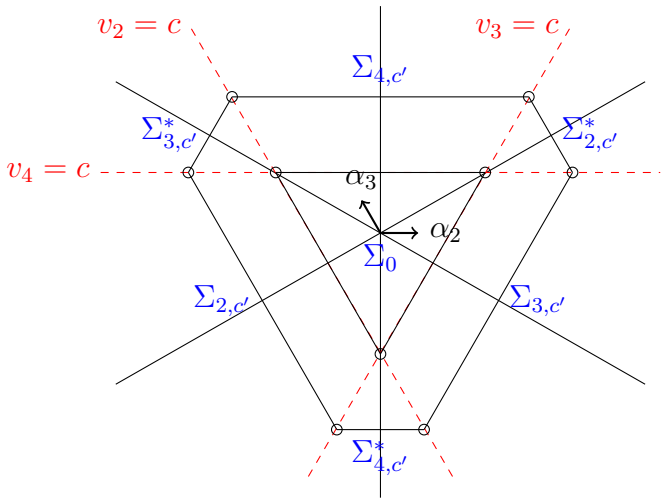

FIGURE 4 – Découpage de R_b pour $c < \left[\frac{-b}{3}\right]$.

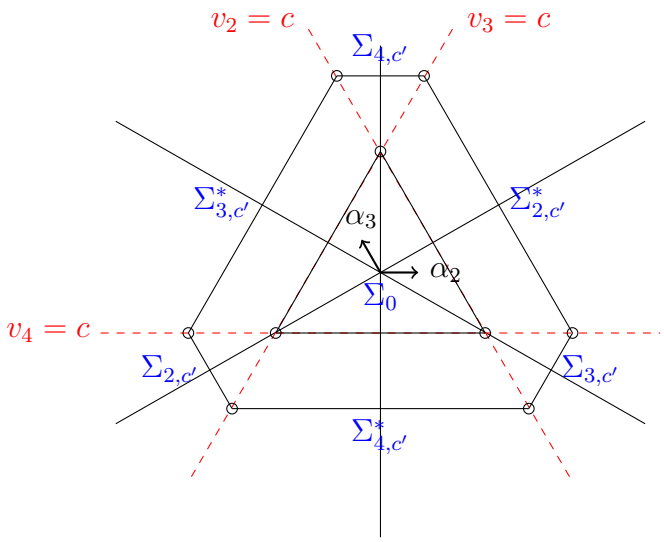

FIGURE 5 – Découpage de R_b pour $c > \left[\frac{-b}{3}\right]$.

Pour $i = 2, 3, 4$, on note

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= \{w \in R_b \mid w_i < c;\ w_j > c,\ \forall j \neq 1, i\}, \\ \Sigma_i^* &= \{w \in R_b \mid w_i > c;\ w_j < c,\ \forall j \neq 1, i\}, \end{aligned}$$

et on note

$$\Sigma_0 = \begin{cases} \{w \in R_b \mid w_j > c,\ \forall j \neq 1\}, & \text{si } c < \left[\frac{-b}{3}\right], \\ \{w \in R_b \mid w_j < c,\ \forall j \neq 1\}, & \text{si } c > \left[\frac{-b}{3}\right]. \end{cases}$$

Alors $R_b = \Sigma_0 \cup \bigcup_{i=2}^4 (\Sigma_i \cup \Sigma_i^*)$. Pour tout c', $c'' \in \mathbf{Z}$, on note

$$\Sigma_{i,c'} = \{w \in \Sigma_i \mid w_i = c'\}, \quad \Sigma^*_{i,c''} = \{w \in \Sigma_i^* \mid w_i = c''\}.$$

Les figures 4 et 5 donnent les images pour les découpages dans les deux cas.

Lemme 3.23. *La rétraction*

$$f_P : \mathscr{X}_\gamma \cap V_b \to \mathscr{X}_\gamma^M \cap V_b$$

induite une fibration en espaces affines

$$f_P : \mathscr{X}_\gamma \cap \bigcup_{w\in\Sigma_0} C(w) \to \mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w\in\Sigma_0} C(w),$$

et de même quand on remplace Σ_0 *par* $\Sigma_{i,c'}$, $\Sigma^*_{i,c''}$.

Démonstration. Puisque on a déjà le lemme 3.22, d'après la proposition 3.12, il suffit de montrer que la dimension de

$$\frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}\cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})}$$

est indépendante de g pour gK dans $\mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w\in\Sigma_0} C(w)$. Même argument si on remplace Σ_0 par $\Sigma_{i,c'}$, $\Sigma^*_{i,c''}$.

Pour $w \in R_b$, on a $C(w) \cap \mathscr{X}^M = I^M wK/K$. Pour $g \in I^M$, on a

$$\frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}\cap \mathrm{Ad}(gw)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}\cap \mathrm{Ad}(w)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car I^M normalise $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$. La dimension du dernier terme est

$$\sum_{i=2}^{4} \max\{w_i + m - n_1,\, 0\}.$$

1. Pour $c > \left[\frac{-b}{3}\right]$, $w \in \Sigma_0$, la dimension est 0.
2. Pour $c < \left[\frac{-b}{3}\right]$, $w \in \Sigma_0$, la dimension est

   $$\sum_{j=2}^{4} (w_j + m - n_1) = 3(m - n_1) - b,$$

   constante sur Σ_0.
3. Pour $w \in \Sigma_{i,c'}$, la dimension de la fibre est

   $$\sum_{j=2,\, j\neq i}^{4} (w_j + m - n_1) \;=\; 2(m - n_1) - b - c',$$

   constante sur $\Sigma_{i,c'}$.
4. Pour $w \in \Sigma^*_{i,c''}$, la dimension de la fibre est

   $$w_i + m - n_1 = c'' + m - n_1,$$

   constante sur $\Sigma^*_{i,c''}$.

□

Puisque $M = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_3$, d'après le théorème 3.19 et le corolaire 3.20, les intersections

$$\mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w \in \Sigma_0} C(w), \quad \mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w \in \Sigma_{i,c'}} C(w), \quad \mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w \in \Sigma_{i,c''}^*} C(w),$$

admettent des pavages en espaces affines, et on a vu comment les ordonner pour en déduire un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}_\gamma^M \cap V_b$. D'après le lemme précédent, les intersections

$$\mathscr{X}_\gamma \cap \bigcup_{w \in \Sigma_0} C(w), \quad \mathscr{X}_\gamma \cap \bigcup_{w \in \Sigma_{i,c'}} C(w), \quad \mathscr{X}_\gamma \cap \bigcup_{w \in \Sigma_{i,c''}^*} C(w),$$

admettent aussi des pavages en espaces affines, et en utilisant le même ordre que leurs analogues ci-dessus, on en déduit un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}_\gamma \cap V_b$. Le théorème est donc démontré pour ce type.

3.7.2 Deuxième type

On pave V_b avec l'Iwahori $I'_{\mathbf{a}} = \mathrm{Ad}(\varepsilon^{\mathbf{a}})I'$, où

$$\mathbf{a} = (n_1 - n, n_1 - n, 0, 0) \in \mathbf{N}^4.$$

On note $C_{\mathbf{a}}(w) = V_b \cap I'_{\mathbf{a}} wK/K$. Soit

$$H = I'^M_{\mathbf{a}} \cap \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(1, 1, \varepsilon^{m'_w}, \varepsilon^{m'_w}))K^M,$$

où $m'_w = -m - w_2$. Alors les mêmes arguments que ceux dans la démonstration de la proposition 2.11 et du corolaire 2.12 montrent que

Lemme 3.24. *On a un pavage en espaces affines*

$$V_b = \bigsqcup_{w \in R_b} C_{\mathbf{a}}(w),$$

où $C_{\mathbf{a}}(w) = UHwK/K$*, et la rétraction*

$$f_P : UHwK/K \to HwK^M/K^M$$

est une fibration en espaces affines.

Lemme 3.25. *La rétraction*

$$f_P : \mathscr{X}_\gamma \cap C_{\mathbf{a}}(w) \to \mathscr{X}_\gamma^M \cap HwK^M/K^M$$

est une fibration en espaces affines.

Démonstration. D'après la proposition 3.12 et le lemme 3.24, il suffit de montrer que la dimension

$$\frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})}$$

est indépendante de g pour $gK \in HwK^M/K^M$. D'après le lemme 3.13, il suffit de montrer que H normalise $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$. Soit

$$x = (1, 3/4, 2/4, 1/4) \in \mathfrak{t}, \quad y = x - (0, n_1, n, n).$$

Alors $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U) = \mathfrak{n}_{x,-m-b-1}$ et $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} = \mathfrak{n}_{y,-m-b-1}$, et donc $H \subset \mathbf{M}_y = I'^M_{\mathbf{a}}$ normalise $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$. $\square$

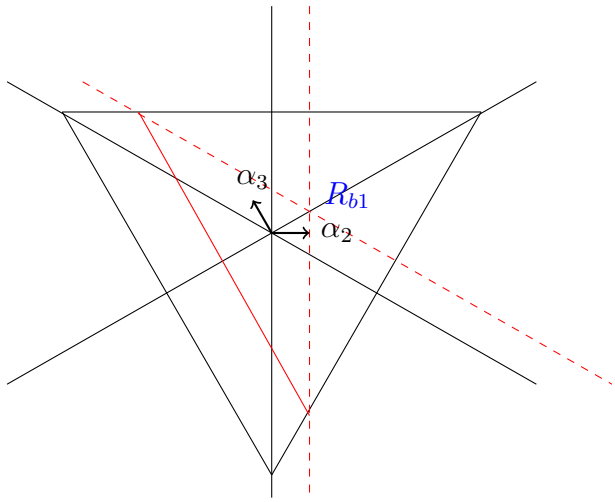

FIGURE 6 – R_{b1} dans R_b.

On note

$$R_{b1} = \{w \in R_b \mid w_2 \geq -m + n_1 - n\}, \quad V_{b1} = \bigsqcup_{w \in R_{b1}} C_{\mathbf{a}}(w).$$

C'est une sous-variété fermée de V_b. Voir le figure 6 pour avoir une idée de R_{b1}. Dans les lemmes 3.26, 3.27, on va paver $(V_b \backslash V_{b1}) \cap \mathscr{X}_\gamma$ et $V_{b1} \cap \mathscr{X}_\gamma$ en espaces affines. La réunion de ces deux pavages nous donnera un pavage en espaces affines de $V_b \cap \mathscr{X}_\gamma$, ce qui terminera la démonstration pour le deuxième type.

Lemme 3.26. *La sous-variété ouverte $(V_b \backslash V_{b1}) \cap \mathscr{X}_\gamma$ de $V_b \cap \mathscr{X}_\gamma$ admet un pavage en espaces affines. Plus précisément, pour $w \in R_b \backslash R_{b1}$, l'intersection $C_{\mathbf{a}}(w) \cap \mathscr{X}_\gamma$ est isomorphe à un espace affine.*

Démonstration. D'après le lemme 3.25, il suffit de montrer que $HwK^M/K^M \cap \mathscr{X}_\gamma^M$ est isomorphe à un espace affine. Puisque

$$w_2 - w_j \leq w_2 - (-m) < n_1 - n, \quad j = 3, 4,$$

on a

$$HwK^M/K^M = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & & & \\ & \mathcal{O} & & \\ & \mathfrak{p}^{m'_w} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ & \mathfrak{p}^{m'_w} & \mathfrak{p} & \mathcal{O} \end{bmatrix} wK^M/K^M.$$

On note

$$H' = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & & & \\ & \mathcal{O} & & \\ & & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ & & \mathfrak{p} & \mathcal{O} \end{bmatrix}, \quad U' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \mathfrak{p}^{m'_w} & 1 & \\ & \mathfrak{p}^{m'_w} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ce sont des groupes de Lie et on a $HwK^M/K^M = U'H'wK^M/K^M$, $\forall w \in R_b \backslash R_{b1}$. On note

$$P' = \begin{bmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & * & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix},$$

et $P' = M'N'$ sa factorisation de Levi. Parce que H' normalise $\mathfrak{u}'$ et $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}'$, le corolaire 3.14 implique que la rétraction

$$f_{P'} : U'H'wK^M/K^M \cap \mathscr{X}_\gamma^M \to H'wK^{M'}/K^{M'} \cap \mathscr{X}_\gamma^{M'}$$

est une fibration en espaces affines. De plus, l'intersection $H'wK^{M'}/K^{M'} \cap \mathscr{X}_\gamma^{M'}$ est isomorphe à un espace affine car $M' = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$.

Pour terminer le pavage, il reste à préciser l'ordre entre les $C_{\mathbf{a}}(w)$, $w \in R_b \backslash R_{b1}$. C'est donné par l'ordre $\prec_{I_{\mathbf{a}}}$.

□

Lemme 3.27. *L'intersection* $V_{b1} \cap \mathscr{X}_\gamma$ *admet un pavage en espaces affines.*

Démonstration. En utilisant le lemme 3.25, on va déduire un pavage de $V_{b1} \cap \mathscr{X}_\gamma$ d'un pavage de $V_{b1} \cap \mathscr{X}_\gamma^M$.

Pour $w \in R_{b1}$, on a

$$C_{\mathbf{a}}(w) = HwK^M/K^M = I_{\mathbf{a}}'^M wK^M/K^M.$$

La composition de la translation sur $\mathscr{X}^M$ par $\varepsilon^{-\mathbf{a}}$ et la projection à la facteur GL_3 de $M = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_3$ donne un isomorphisme

$$V_{b1} \cap \mathscr{X}^M \cong \mathscr{X}_{\geq -m}^{\mathrm{GL}_3,(-b+n-n_1)}. \tag{4}$$

Avec cet isomorphisme, on peut translater le pavage pour GL_3 à un pavage pour $V_{b1} \cap \mathscr{X}_\gamma^M$. On fixe $c \in \mathbf{R}$ tel que

$$n - m - 1 < c < n - m.$$

On note $w_2' = w_2 - (n_1 - n)$ et $w_j' = w_j$, $j = 3, 4$. Pour $i = 2, 3, 4$, on note

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= \{w \in R_{b1} \mid w_i' < c,\ w_j' > c,\ \forall j \neq 1, i\}, \\ \Sigma_i^* &= \{w \in R_{b1} \mid w_i' > c,\ w_j' < c,\ \forall j \neq 1, i\}, \end{aligned}$$

et on note

$$\Sigma_0 = \begin{cases} \{w \in R_{b1} \mid w_j' > c,\ \forall j \neq 1\}, & \text{si } c < \left[\frac{-b+n-n_1}{3}\right], \\ \{w \in R_{b1} \mid w_j' < c,\ \forall j \neq 1\}, & \text{si } c > \left[\frac{-b+n-n_1}{3}\right]. \end{cases}$$

Alors $R_{b1} = \Sigma_0 \cup \bigcup_{i=2}^4 (\Sigma_i \cup \Sigma_i^*)$. Pour tout c', $c'' \in \mathbf{Z}$, on note

$$\Sigma_{i,c'} = \{w \in \Sigma_i \mid w_i' = c'\}, \quad \Sigma_{i,c''}^* = \{w \in \Sigma_i^* \mid w_i' = c''\}.$$

Ce découpage est analogue de celui indiqué dans les figures 4 et 5.

Lemme 3.28. *La rétraction*

$$f_P : \mathscr{X}_\gamma \cap V_{b1} \to \mathscr{X}_\gamma^M \cap V_{b1}$$

induite une fibration en espaces affines

$$f_P : \mathscr{X}_\gamma \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w) \to \mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w),$$

et de même si on remplace Σ_0 *par* $\Sigma_{i,c'}$, $\Sigma_{i,c''}^*$.

Démonstration. Par le lemme 3.22, la rétraction $f_P : V_{b1} \to V_{b1} \cap \mathscr{X}^M$ est une fibration en espaces affines. D'après la proposition 3.12, il suffit de montrer que la dimension de

$$\frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})}$$

est indépendante de g pour gK dans $\mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w\in\Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w)$. Même argument si on remplace Σ_0 par $\Sigma_{i,c'}$, $\Sigma^*_{i,c''}$.

Pour $w \in R_{b1}$, on a $C_{\mathbf{a}}(w) \cap \mathscr{X}^M = HwK/K$. Pour $g \in H$, on a

$$\frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(gw)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(w)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car H normalise $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$. La dimension du dernier terme est

$$\max\{w_2 + m - n_1,\, 0\} + \sum_{i=3}^{4} \max\{w_i + m - n,\, 0\}.$$

1. Pour $c < \left[\frac{-b+n-n_1}{3}\right]$, soit $w \in \Sigma_0$, la dimension est

$$\begin{aligned}&(w_2 + m - n_1) + \sum_{j=3}^{4}(w_j + m - n)\\ &= 3m - b - n_1 - 2n,\end{aligned}$$

   donc constante sur Σ_0.
2. Pour $c > \left[\frac{-b+n-n_1}{3}\right]$, soit $w \in \Sigma_0$, la dimension est 0.
3. Pour $w \in \Sigma_{i,c'}$, la dimension de la fibre est

$$\begin{cases} 2(m-n) - b - c' & \text{si } i = 2,\\ 2m - n_1 - n - b - c' & \text{si } i = 3, 4,\end{cases}$$

   donc constante sur $\Sigma_{i,c'}$.
4. Pour $w \in \Sigma^*_{i,c''}$, la dimension de la fibre est

$$\begin{cases} c'' + m - n_1 & \text{si } i = 2,\\ c'' + m - n & \text{si } i = 3, 4,\end{cases}$$

   donc constante sur $\Sigma^*_{i,c''}$.

□

Par l'isomorphisme (4), les intersections

$$\mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w\in\Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w), \quad \mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w\in\Sigma_{i,c'}} C_{\mathbf{a}}(w), \quad \mathscr{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w\in\Sigma^*_{i,c''}} C_{\mathbf{a}}(w)$$

admettent des pavages en espaces affines d'après le théorème 3.19 et le corolaire 3.20. Comme expliqué dans la construction de §2.3.3, on peut les ordonner pour en déduire un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}_\gamma^M \cap V_{b1}$. D'après le lemme précédent, les intersections

$$\mathscr{X}_\gamma \cap \bigsqcup_{w\in\Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w), \quad \mathscr{X}_\gamma \cap \bigsqcup_{w\in\Sigma_{i,c'}} C_{\mathbf{a}}(w), \quad \mathscr{X}_\gamma \cap \bigsqcup_{w\in\Sigma^*_{i,c''}} C_{\mathbf{a}}(w)$$

admettent aussi des pavages en espaces affines. En utilisant le même ordre que leurs analogues ci-dessus, on en déduit un pavage de $\mathscr{X}_\gamma \cap V_{b1}$ en espaces affines. □

Remarque 3.5.

1. Avec des pavages similaires, on peut montrer : pour $c \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$, les sous-variétés localement fermées $\mathscr{X}_\gamma \cap S^c_{\varpi_\sigma}(n)$ admettent un pavage en espaces affines pour les ϖ_σ conjugués à ϖ_1, ϖ_3.
2. La méthode que l'on a développé pour paver les fibres de Springer affines pour GL_4 peut être généralisée aux groupes classiques de rang 2 et 3 sans grandes difficultés. Pour $\gamma \in \mathfrak{gl}_5$ non-ramifié de valuation radicielle minimale (n_1, n_2, n_3, n_3), $n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{N}$, $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, on peut aussi construire un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}_\gamma$ par des méthodes similaires.
3. La difficulté principale pour généraliser cette méthode à GL_d, $d \geq 5$ est due au fait que les intersections $\mathscr{X}_\gamma \cap S_\sigma(v)$ ne sont pas pure si ϖ_σ n'est pas conjugué à ϖ_1 ou ϖ_{d-1} sous l'action de W.

Deuxième partie

Sur une notion de ξ-stabilité sur la grassmannienne affine

Sommaire

4 La notion de ξ-stabilité **51**
4.1 La notion de ξ-stabilité sur la grassmannienne affine 51
4.2 Rappel sur la théorie géométrique des invariantes de Mumford 52
4.3 Comparaison de deux notions de stabilité 56

5 La réduction d'Arthur-Kottwitz **57**

6 Séries de Poincaré de $\mathscr{X}^{\xi}/T$ **58**
6.1 Séries de Poincaré de la grassmannienne affine 59
6.2 $\mathscr{X}^{\xi}/T$ est homologiquement lisse 60
6.3 Séries de Poincaré 63

7 Domain fondamental de la fibre de Springer affine **66**

Références **68**

On va introduire une notion de ξ-stabilité sur la grassmannienne affine $\mathscr{X}$, c'est un analogue local d'une notion de stabilité introduite par Chaudouard et Laumon dans [CL]. On montre d'abord que le quotient $\mathscr{X}^{\xi}/T$ existe comme un ind-k-schéma par une comparaison de la notion de ξ-stabilité et la stabilité en théorie géométrique des invariants de Mumford. En utilisant la filtration de Harder-Narasimhan, la partie non-ξ-stable peut être réduite aux parties ξ^M-stables de $\mathscr{X}^M$, $M \in \mathcal{L}(T)$, ce que on l'appellera la réduction d'Arthur-Kottwitz. Enfin, on calcule la séries de Poincaré du quotient $\mathscr{X}^{\xi}/T$.

Dans cette section, on se restreint à la composante connexe neutre $\mathscr{X}^{(0)}$. Pour simplifier les notations, on la note encore $\mathscr{X}$.

4 La notion de ξ-stabilité

4.1 La notion de ξ-stabilité sur la grassmannienne affine

Soit $P \in \mathcal{F}^G(T)$, on rappelle que l'on a une rétraction $f_P : \mathscr{X} \to \mathscr{X}^M$. Plus généralement, pour M, $L \in \mathcal{L}(T)$, $M \subset L$, $P \in \mathcal{P}^L(M)$, on définit la rétraction $f_P^L : \mathscr{X}^L \to \mathscr{X}^M$ comme la restriction de f_P à $\mathscr{X}^L$.

Pour $M \in \mathcal{L}(T)$, on note $\Lambda_M = \mathrm{Hom}(X^*(M), \mathbf{Z})$. On définit l'application

$$\mathrm{ind}^M : \mathscr{X}^M \to \Lambda_M$$

comme la composition de $f_{B'}^M$ et du plongement $X_*(T) \to \mathrm{Hom}(X^*(M), \mathbf{Z})$ en identifiant $\mathscr{X}^T$ et $X_*(T)$, où $B' \in \mathcal{P}^M(T)$ est arbitraire. Les composants connexes de $\mathscr{X}^M$ sont les $\mathrm{ind}^{M,-1}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_M$.

Définition 4.1. On définit l'application $H_P : \mathscr{X} \to \mathfrak{a}_M^G$ comme la composition de $\mathrm{ind}^M \circ f_P$ et la projection naturelle $\Lambda_M \to \mathfrak{a}_M^G$.

Proposition 4.1 (Arthur)**.** *Soient $B', B'' \in \mathcal{P}(T)$ deux sous-groupes de Borel adjacents, on note $\alpha^{\vee}_{B',B''}$ la co-racine qui est positive pour B' et négative pour B''. Alors pour tout $x \in \mathscr{X}$, on a*

$$H_{B'}(x) - H_{B''}(x) = n(x, B', B'') \cdot \alpha^{\vee}_{B',B''},$$

avec $n(x, B', B'') \in \mathbf{N}$.

Pour la démonstration, on s'envoie à [A], page 221, lemme 3.6.

Définition 4.2. Pour $x \in \mathscr{X}$, on note $\mathrm{Ec}(x)$ l'envelope convexe dans $\mathfrak{a}_T^G$ des $H_{B'}(x)$, $B' \in \mathcal{P}(T)$.

Définition 4.3. Soit $\xi \in \mathfrak{a}_T^G$, on dit que ξ est *générique* si $\alpha(\xi) \notin \mathbf{Z}$, $\forall \alpha \in \Phi(G, T)$.

Dans la suite, on suppose toujours que $\xi \in \mathfrak{a}_T^G$ est générique.

Définition 4.4. Pour $x \in \mathscr{X}$, on dit que x est *ξ-stable* si $\xi \in \mathrm{Ec}(x)$.

Proposition 4.2. *Soit $\xi \in \mathfrak{t}$ tel que $\sum_{i=1}^d \xi_i = 0$. Soit $E_i = Fe_i$, un réseau $L \in \mathscr{X}$ d'indice 0 est ξ-stable si et seulement si pour tout permutation $\tau \in \mathfrak{S}_d$, on a*

$$\xi_{\tau(1)} + \cdots + \xi_{\tau(i)} \leq \mathrm{ind}(L \cap (E_{\tau(1)} \oplus \cdots \oplus E_{\tau(i)})), \quad i = 1, \cdots, d.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour $B' = \tau B$, $f_{B'}(L) = \mathfrak{p}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}^{n_d}$, on a

$$n_{\tau(1)} + \cdots + n_{\tau(i)} = \mathrm{ind}(L \cap (E_{\tau(1)} \oplus \cdots \oplus E_{\tau(i)})), \quad \forall i.$$

□

On note $\mathscr{X}^\xi$ le sous ind-k-schéma ouvert des points ξ-stables de $\mathscr{X}$. Il est invariant sous l'action du tore maximal T. Puisque ξ est générique, l'action de $T/\mathbb{G}_m$ sur $\mathscr{X}^\xi$ est libre, où $\mathbb{G}_m$ est le tore central de GL_d. Pour ξ, $\xi' \in \mathfrak{a}_T^G$, il existe $\lambda \in X_*(T)$ tel que $\mathscr{X}^\xi = \lambda(\varepsilon)\mathscr{X}^{\xi'}$. Donc le "quotient" $\mathscr{X}^\xi/T$ ne dépend pas du choix de ξ (le sens du quotient sera donné dans §4.3).

4.2 Rappel sur la théorie géométrique des invariantes de Mumford

Soient H un groupe réductif sur k, X une variété algébrique sur k, $\sigma : H \times X \to X$ une action de H sur X. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample H-équivariant sur X.

Définition 4.5. Une paire (Y, ϕ) formée d'une variété algébrique Y sur k et d'un morphisme $\phi : X \to Y$ est appelée un *quotient catégorique* de X par H si

1. le diagramme
$$\begin{tikzcd} H \times X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$
est commutatif.
2. pour toute paire (Z, ψ) formée d'une variété algébrique Z sur k et d'un morphisme $\psi : X \to Z$ tel que $\psi \circ \sigma = \psi \circ p_2$, il existe un morphisme unique $\varphi : Y \to Z$ tel que $\psi = \varphi \circ \phi$.

Si un quotient catégorique de X par H existe, alors il est unique à isomorphisme unique près. On le note $X//H$.

Définition 4.6. Une paire (Y, ϕ) formée d'une variété algébrique Y sur k et un morphisme $\phi : X \to Y$ est appelée un *quotient géométrique* de X par H si

1. elle est le quotient catégorique de X par H,
2. ϕ est surjectif, et pour tout point géométrique $y \in Y$, $\phi^{-1}(y)$ consiste d'une seule H-orbite.

Si le quotient géométrique existe, on le note X/H .

Définition 4.7. Soit x un point géométrique de X,

1. on dit que x est *semi-stable* s'il existe une section $s \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ pour certain $n \in \mathbf{N}$ tel que $s(x) \neq 0$ et l'ouvert X_s est affine et H-invariante.
2. on dit que x est *stable* s'il est semi-stable et l'action de H sur X_s est fermé, i.e. pour tout point géométrique $y \in X_s$, la H-orbite de y est fermée dans X_s.

On note X^{ss}, X^{st} les sous-variétés ouvertes des points semi-stables et stables respectivement.

Théorème 4.3 (Mumford)**.** *Soient H un groupe réductif sur k et X une variété algébrique sur k munie d'une action de H. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample H-équivariant sur X. Alors*

1. *le quotient catégorique de X^{ss} par H existe, c'est une variété quasi-projective,*
2. *le quotient géométrique de X^{st} par H existe, c'est une sous-variété ouverte de $X^{ss}//H$.*

Pour la démonstration, on s'envoie dans [M], page 38, théorème 1.10.

Corollaire 4.4. *Soient H un groupe réductif sur k et X une variété algébrique sur k munie d'une action de H. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample H-équivariant sur X. On suppose que X est projectif et que $X^{ss} = X^{st}$, alors le quotient géométrique X^{st}/H est projectif.*

Démonstration. Par l'hypothèse, on a $X^{st}/H = X^{ss}//H$. Parce que X est projectif, on a $X^{ss}//H = \mathrm{Proj}(R(X)^H)$, où $R(X) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Donc X est propre, il est ainsi projectif car il est quasi-projectif.

□

Dans la suite, on suppose de plus que X est projectif sur k. Soit x un point géométrique sur X, soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to H$ un homomorphisme de groupes algébriques. Le groupe $\mathbb{G}_m$ agit sur X par λ. Puisque X est projectif, le point $\lim_{t\to 0} \lambda(t)x$ existe, on le note x_0. C'est un point fixe de $\mathbb{G}_m$. Parce que $\mathcal{L}$ est H-équivariant sur X, $\mathbb{G}_m$ agit sur la fibre $\mathcal{L}_{x_0}$. Evidement l'action est donnée par un caractère de $\mathbb{G}_m$, $\alpha : t \to t^r$, $r \in \mathbf{Z}$. On note $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) = -r$.

Théorème 4.5 (Hilbert, Mumford)**.** *Soit H un groupe réductif sur k, soit X une variété algébrique projective sur k admettant une action de H, soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample H-équivariant sur X. Alors pour tout point géométrique x de X, on a*

1. *$x \in X^{ss}$ si et seulement si $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, H)$.*
2. *$x \in X^{st}$ si et seulement si $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, H)$.*

Exemple 4.1. Soient $V_1, \cdots, V_d$ des espaces vectoriels sur k de dimension $\dim(V_i) = N_i$. On note X la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension n dans

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_d.$$

On a le plongement de Plücker $\iota : X \to \mathbf{P}^M$, $M = \binom{N_1+\cdots+N_d}{n} - 1$ et $\mathcal{L} = \iota^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^M}(1)$ est muni d'une $\mathrm{Aut}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_d)$-linéarisation naturelle.

Considérons l'action du tore $T = \mathbb{G}_m^d$ sur X tel que le i-ième facteur de T agit sur V_i par homothétie. Étant donné $r_i, s_i \in \mathbf{N}$, $i = 1, \cdots, d-1$, considérons le sous tore $S \subset T$ défini par

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} t_1^{r_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_{d-1}^{r_{d-1}} & \\ & & & t_1^{-s_1} \cdots t_{d-1}^{-s_{d-1}} \end{bmatrix} ;\ t_i \in k^\times \right\}. \tag{5}$$

On va expliciter la condition de stabilité (resp. semistabilité) sur X sous l'action de S par rapport au fibré en droites $\mathcal{L}$.

Lemme 4.6. *On a $W \in X^S$ si et seulement si*

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_d,$$

où $W_i \subset V_i$ est un sous-espace vectoriel.

Soit $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_{d-1}) \in \mathbf{Z}^{d-1}$, on note $\lambda_{\mathbf{n}} \in X_*(S)$ le co-caractère

$$\lambda_{\mathbf{n}}(t) = \begin{bmatrix} t^{n_1 r_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & t^{n_{d-1} r_{d-1}} & \\ & & & t^{-\sum_{i=1}^{d-1} n_i s_i} \end{bmatrix}.$$

La condition de stabilité est équivalente à la condition que $-\mu^{\mathcal{L}}(W, \lambda_{\mathbf{n}}) < 0$ pour tout $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^{d-1}$. À permutation près, on peut supposer que

$$n_1 r_1 < \cdots < n_i r_i < -\sum_{j=1}^{d-1} n_j s_j < n_{i+1} r_{i+1} < \cdots < n_{d-1} r_{d-1}. \tag{6}$$

Si

$$\lim_{t \to 0} \lambda_{\mathbf{n}}(t) W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_d,$$

où $W_i \subset V_i$ est un sous-espace vectoriel de dimension a_i, on a les relations

$$\begin{aligned} a_1 &= \dim(W) - \dim(W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_d)), \qquad (7) \\ &\vdots \\ a_i &= \dim(W \cap (V_i \oplus \cdots \oplus V_d)) - \dim(W \cap (V_{i+1} \oplus \cdots \oplus V_d)), \\ a_d &= \dim(W \cap (V_{i+1} \oplus \cdots \oplus V_d)) - \dim(W \cap (V_{i+1} \oplus \cdots \oplus V_{d-1})), \\ a_{i+1} &= \dim(W \cap (V_{i+1} \oplus \cdots \oplus V_{d-1})) - \dim(W \cap (V_{i+2} \oplus \cdots \oplus V_{d-1})) \\ &\vdots \\ a_{d-1} &= \dim(W \cap V_{d-1}). \end{aligned}$$

Ainsi la condition de stabilité s'explique en

$$\begin{aligned} -\mu^{\mathcal{L}}(W, \lambda_{\mathbf{n}}) &= \sum_{i=1}^{d-1} a_i n_i r_i - a_d \sum_{j=1}^{d-1} n_j s_j \\ &= \sum_{i=2}^{d-1} a_i (n_i r_i - n_1 r_1) - a_d \left(n_1 r_1 + \sum_{j=1}^{d-1} n_i s_i \right) + n n_1 r_1 < 0, \qquad (8) \end{aligned}$$

(on utilise la relation $n = a_1 + \cdots + a_d$ dans la deuxième égalité.)

L'inégalité (8) est une question de valeur maximale d'une fonctionnelle linéaire sur une région convexe, il suffit de considérer la condition sur le bord, i.e.

$$n_1 r_1 = \cdots = n_{i_0} r_{i_0} < n_{i_0+1} r_{i_0+1} = \cdots = -\sum_{j=1}^{d-1} n_j s_j = \cdots = n_{d-1} r_{d-1}, \tag{9}$$

pour $1 \leq i_0 \leq i$, ou

$$n_1 r_1 = \cdots = -\sum_{j=1}^{d-1} n_j s_j = \cdots = n_{i_0} r_{i_0} < n_{i_0+1} r_{i_0+1} = \cdots = n_{d-1} r_{d-1}, \tag{10}$$

pour $i+1 \leq i_0 \leq d-1$.

L'inégalité (9) nous donne

$$n_1 < 0, \quad n_{i_0+1} r_{i_0+1} (1 + \sum_{j=i_0+1}^{d-1} s_j/r_j) = -n_1 r_1 \sum_{j=1}^{i_0} s_j/r_j,$$

et donc l'inégalité (8) implique que

$$a_{i_0+1} + \cdots + a_d < \frac{n(1 + \sum_{j=i_0+1}^{d-1} s_j/r_j)}{1 + \sum_{j=1}^{d-1} s_j/r_j}, \ 1 \leq i_0 \leq i. \tag{11}$$

L'inégalité (10) nous donne

$$n_1 < 0, \quad n_{i_0+1} r_{i_0+1} \sum_{j=i_0+1}^{d-1} s_j/r_j = -n_1 r_1 (1 + \sum_{j=1}^{i_0} s_j/r_j),$$

et donc l'inégalité (8) implique que

$$a_{i_0+1} + \cdots + a_{d-1} < \frac{n(\sum_{j=i_0+1}^{d-1} s_j/r_j)}{1 + \sum_{j=1}^{d-1} s_j/r_j}, \ i+1 \leq i_0 \leq d-1. \tag{12}$$

On peut exprimer les inégalités (11) et (12) comme des inégalités sur $\dim(W \cap (V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_r}))$ à l'aide de la relation de dimension (7).

On note $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathfrak{t}$, avec

$$x_d = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{d-1} s_i/r_i}, \quad x_i = \frac{s_i/r_i}{1 + \sum_{i=1}^{d-1} s_i/r_i}, \ i = 1, \cdots, d-1.$$

On remarque que $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$. Les calculs ci-dessus peuvent être reformulés comme suit :

Proposition 4.7. *Un sous-espace vectoriel $W \subset V_1 \oplus \cdots \oplus V_d$ est S-stable si et seulement si, pour tout permutation $\tau \in \mathfrak{S}_d$, on a*

$$\dim(W)(x_{\tau(1)} + \cdots + x_{\tau(i)}) < \dim(W \cap (V_{\tau(1)} \oplus \cdots \oplus V_{\tau(i)})), \quad i = 1, \cdots, d-1.$$

On a le même résultat pour la condition d'être S-semi-stable avec "$<$" remplacé par "$\leq$".

4.3 Comparaison de deux notions de stabilité

On rappelle que

$$\mathscr{X} = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{X}_{\leq n},$$

où

$$\mathscr{X}_{\leq n} = \{L \text{ est un réseau dans } F^d \text{ d'indice } 0,\ L \supset \varepsilon^n L_0\}$$

Lemme 4.8. *La variété $\mathscr{X}_{\leq n}$ est une fibre de Springer.*

Démonstration. Pour $L \in \mathscr{X}_{\leq n}$, on a automatiquement l'inclusion $L \subset \varepsilon^{(1-d)n} L_0$. On note Gr_{nd,nd^2} la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension nd dans k^{nd^2}. On plonge la variété $\mathscr{X}_{\leq n}$ dans Gr_{nd,nd^2} par le morphisme injectif $\rho_n : \mathscr{X}_{\leq n} \to \mathrm{Gr}_{nd,nd^2}$ défini par

$$\rho_n(L) = L/\varepsilon^n L_0 \subset \varepsilon^{(1-d)n} L_0/\varepsilon^n L_0.$$

L'image de ρ_n est la fibre de Springer

$$Y_n = \{V \in \mathrm{Gr}_{nd,nd^2},\ NV \subset V\},$$

où $N \in \mathrm{End}(\varepsilon^{(1-d)n} L_0/\varepsilon^n L_0)$ est l'endomorphisme défini par multiplication par ε. □

Pour la raison de dimension, on utilise une autre immersion $\rho_n^\perp : \mathscr{X}_{\leq n} \to \mathrm{Gr}_{nd(d-1),nd^2}$. On définit une forme bilinéaire sur $k^{nd^2} = \varepsilon^{(1-d)n} L_0/\varepsilon^n L_0$ tel que

$$(\varepsilon^{(1-d)n+i} e_j, \varepsilon^{n-1+i'} e_{j'}) = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}, \quad i, i' = 0, \cdots, dn-1;\ j, j' = 1, \cdots, d,$$

Pour un sous espace vectoriel $V \subset k^{nd^2}$, on note $V^\perp$ pour le complément orthogonal de V par rapport à cette forme bilinéaire. Il induit un isomorphism $^\perp : \mathrm{Gr}_{nd,nd^2} \to \mathrm{Gr}_{nd(d-1),nd^2}$. Soit $\rho_n^\perp(L) = \rho_n(L)^\perp$, $\forall\, L \in \mathscr{X}_{\leq n}$. On note encore Y_n pour l'image de $\mathscr{X}_{\leq n}$ dans $\mathrm{Gr}_{nd(d-1),nd^2}$ sous $\rho_n^\perp$.

Proposition 4.9. *Le quotient $\mathscr{X}^\xi_{\leq n}/T$ est une k-variété projective.*

Démonstration. Puisque le quotient $\mathscr{X}^\xi/T$ ne dépend pas du choix de ξ, on peut supposer que $\xi \in X_*(T) \otimes \mathbf{Q}$, $\sum_{i=1}^d \xi_i = 0$, et que ξ_i est positif et assez petit pour $i = 1, \cdots, d-1$.

On note $V_i = \mathfrak{p}^{(1-d)n} e_i/\mathfrak{p}^n e_i$. On note $W = \rho_n^\perp(L) \in Y_n \subset \mathrm{Gr}_{nd(d-1),nd^2}$. Pour $\tau \in \mathfrak{S}_d$, on a l'égalité

$$\dim(W \cap (V_{\tau(1)} \oplus \cdots \oplus V_{\tau(i)})) = \mathrm{ind}(L \cap (E_{\tau(1)} \oplus \cdots \oplus E_{\tau(i)})) + n(d-1)i. \tag{13}$$

On note $x_i = \frac{\xi_i + n(d-1)}{nd(d-1)}$. L'hypothèse sur ξ entraine que $x_i \in \mathbf{Q}$, $x_i > 0$ et $\sum_{i=1}^d x_i = 1$.

Prenons $r_i, s_i \in \mathbf{N}$, tel que

$$x_d = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{d-1} s_i/r_i}, \quad x_i = \frac{s_i/r_i}{1 + \sum_{i=1}^{d-1} s_i/r_i},\ i = 1, \cdots, d-1.$$

On introduit $S_n \subset T$ comme dans (5) pour les r_i, s_i ci-dessus.

D'après l'égalité (13), on a

$$\xi_{\tau(1)} + \cdots + \xi_{\tau(i)} < \mathrm{ind}(L \cap (E_{\tau(1)} \oplus \cdots \oplus E_{\tau(i)})), \tag{14}$$

si et seulement si

$$\dim(W)(x_{\tau(1)} + \cdots + x_{\tau(i)}) < \dim(W \cap (V_{\tau(1)} \oplus \cdots \oplus V_{\tau(i)})). \tag{15}$$

Utilisant la proposition 4.2 et la proposition 4.7, on a

$$L \in \mathscr{X}^{\xi}_{\leq n} \Longleftrightarrow W \in Y^{st}_n.$$

Puisque ξ est supposé d'être générique et que ξ_i est positive et assez petit pour $i = 1, \cdots, d-1$, le "$<$" dans l'inégalité (15) est équivalent à "$\leq$". C'est à dire que la condition de stabilité sur Y_n coïncide avec celle de semi-stabilité, et donc le quotien Y^{st}_n/S_n est une k-variété projective d'après le corolaire 4.4. Ainsi $\mathscr{X}^{\xi}_{\leq n}/T = \mathscr{X}^{\xi}_{\leq n}/S_n$ est une k-variété projective. □

Définition 4.8. On définit le quotient $\mathscr{X}^{\xi}/T$ comme le ind-k-schéma

$$\mathscr{X}^{\xi}/T = \lim_{n \to +\infty} \mathscr{X}^{\xi}_{\leq n}/T.$$

5 La réduction d'Arthur-Kottwitz

Soit $P \in \mathcal{F}(T)$, $P = MN_P$ la factorisation de Levi standard. On note $\Phi_P(G, M)$ l'image de $\Phi(N_P, T)$ dans $(\mathfrak{a}^G_M)^*$. Pour un élément $a \in \mathfrak{a}^G_M$, on définit un cône dans $\mathfrak{a}^G_M$,

$$D_P(a) = \left\{ y \in \mathfrak{a}^G_M \,|\, \alpha(y - a) \geq 0, \forall \alpha \in \Phi_P(G, M) \right\}.$$

Définition 5.1. Soit $x \in \mathscr{X}$, on définit une demi-cylindre $C_P(x)$ dans $\mathfrak{a}^G_T$ par

$$C_P(x) = \pi^{M,-1}(\mathrm{Ec}^M(f_P(x))) \cap \pi^{-1}_M(D_P(H_P(x))).$$

Par définition, on a la partition

$$\mathfrak{a}^G_T = \mathrm{Ec}(x) \cup \bigcup_{\substack{P \in \mathcal{F}(T) \\ P \neq G}} C_P(x).$$

et les intérieurs de ces parties sont deux à deux disjoints. La figure 7 donne une idée du découpage de $\mathfrak{a}^G_T$ en $\mathrm{Ec}(x)$ et $C_P(x)$ pour $G = \mathrm{GL}_3$.

Par conséquent, pour $x \notin \mathscr{X}^{\xi}$, il existe qu'un seul sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{F}(T)$ tel que $\xi \in C_P(x)$ car ξ est générique. Dans ce cas, $f_P(x) \in \mathscr{X}^M$ est ξ^M-stable, où $\xi^M = \pi^M(\xi) \in \mathfrak{a}^M_T$.

On définit

$$S_P = \{x \in \mathscr{X} \,|\, \xi \in C_P(x)\}.$$

Lemme 5.1. *On a la stratification de la grassmannienne affine*

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}^{\xi} \sqcup \bigsqcup_{P \in \mathcal{F}(T),\, P \neq G} S_P.$$

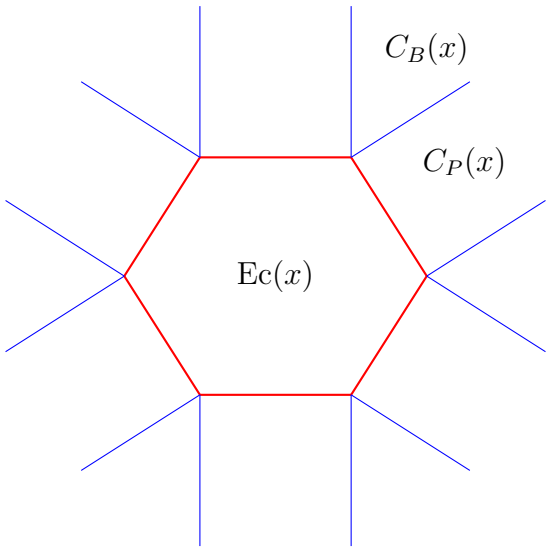

FIGURE 7 – $\mathrm{Ec}(x)$ et $C_P(x)$ pour GL_3.

Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, on note P^- le sous-groupe parabolique opposé de P par rapport à M. On note $\Lambda_{M,P} = D_{P^-}(\xi_M) \cap \Lambda_M$, où $\xi_M = \pi_M(\xi) \in \mathfrak{a}_M^G$. On a la partition disjoint

$$\Lambda_M = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}(M)} \Lambda_{M,P}.$$

On définit

$$\mathscr{X}_P^M = \mathrm{ind}^{M,-1}(\Lambda_{M,P}), \quad \mathscr{X}_P^{M,\xi^M} = \mathscr{X}^{M,\xi^M} \cap \mathscr{X}_P^M.$$

On rappelle que $\mathscr{X}^M$ se plonge naturellement dans $\mathscr{X}$ par le morphisme injectif $gK^M/K^M \to gK/K$, $\forall g \in M(F)$. De cette manière, $\mathscr{X}_P^{M,\xi^M}$ se plonge naturellement dans S_P.

Proposition 5.2. *On a* $S_P = N_P(F)\mathscr{X}_P^{M,\xi^M}$.

Démonstration. Par définition, on a $f_P(S_P) \subset \mathscr{X}_P^{M,\xi^M}$, donc $S_P \subset N_P(F)\mathscr{X}_P^{M,\xi^M}$.

Pour l'inclusion inverse, soient $x \in \mathscr{X}_P^{M,\xi^M} \subset S_P$, $u \in N_P(F)$, alors $f_P(ux) = f_P(x)$ et donc $H_P(ux) = H_P(x)$. Ceux-ci impliquent que $C_P(ux) = C_P(x)$, donc $ux \in S_P$. □

En conclusion, le lemme 5.1 et la proposition 5.2 nous permettent de réduire la partie non-ξ-stable de la grassmannienne affine $\mathscr{X}$ aux parties ξ^M-stable de $\mathscr{X}^M$, $M \in \mathcal{L}(T)$. On appelle cette processus *la reduction d'Arthur-Kottwitz.*

6 Séries de Poincaré de $\mathscr{X}^{\xi}/T$

Dans cette section, on fixe un nombre premier $l \neq p$.

6.1 Séries de Poincaré de la grassmannienne affine

Comme dans §3.3.1, pour un schéma séparé X de type fini sur k, on note

$$H_i(X) = (H^i(X, \overline{\mathbf{Q}}_l))^*, \quad H_{i,c}(X) = (H^i_c(X, \overline{\mathbf{Q}}_l))^*,$$

et son polynôme de Poincaré

$$P_X(t) = \sum_{i=0}^{2\dim(X)} \dim(H_i(X))t^i.$$

Soit X un ind-k-schéma, $X = \lim_{n\to\infty} X_n$, on a définit

$$H_i(X) = \lim_{n\to\infty} H_i(X_n),$$

Si $\dim(H_i(X)) < +\infty$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, on note

$$P_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim(H_i(X))t^i.$$

sa séries de Poincaré de X.

Pour la grassmannienne affine, on a $\dim(H_i(\mathscr{X})) < +\infty$, $\forall i \in \mathbf{N}$. C'est à cause de la décomposition de Bruhat-Tits et du fait que le cardinal de l'ensemble

$$\{v \in X_*(T),\ \mathrm{ind}(v) = 0,\ \ell(v) = l\}$$

est fini pour tout $l \in \mathbf{N}$, ici $\ell(v)$ est le longeur de $v \in X_*(T) \subset \widetilde{W}$ par rapport à l'Iwahori standard. Sa séries de Poincaré a été calculé par Bott dans [B] par des méthodes topologiques. Une démonstration plus combinatoire se trouve dans [IM]. Nous donnons ici une démonstration élémentaire.

Proposition 6.1 (Bott)**.** *La séries de Poincaré de la grassmannienne affine est*

$$P_{\mathscr{X}}(t) = \prod_{i=1}^{d-1}(1 - t^{2i})^{-1}.$$

Démonstration. On montre par récurrence. Pour $d = 2$, on a

$$P_{\mathscr{X}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} = (1 - t^2)^{-1}.$$

On suppose que la proposition est démontrée pour $d' < d$. On note $P_d = P_{\mathscr{X}^{\mathrm{GL}_d}}$.

On pave $\mathscr{X}_{\geq -n}$ avec le sous groupe de Borel B. Par la proposition 2.2, on a le pavage en espace affine

$$\mathscr{X}_{\geq -n} = \bigsqcup_{v \in \mathscr{X}^T_{\geq -n}} \mathscr{X}_{\geq -n} \cap BvK/K$$

et

$$\mathscr{X}_{\geq -n} \cap BvK/K = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \mathfrak{p}^{a_{ij}} \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{bmatrix} vK/K,$$

où $a_{ij} = -n - v_j$.

On note $A_{d,n}(v) = |\mathscr{X}_{\geq -n}^{\mathrm{GL}_d,(0)} \cap BvK/K(\mathbf{F}_q)|$. On compte $\mathscr{X}_{\geq -n}^{\mathrm{GL}_d}(\mathbf{F}_q)$ de la manière suivante :

1. L'application $v \to v' = v + (-d+1, 1, \cdots, 1)$ donne une bijection entre l'ensemble $\{v \in X_*(T) \cap \mathscr{X}_{\geq -n},\ v_1 \geq -n+d\}$ et l'ensemble $X_*(T) \cap \mathscr{X}_{\geq -n+1}$. De plus, on a
$$A_{d,n}(v) = q^{d(d-1)} A_{d,n-1}(v').$$
2. Pour $v \in X_*(T) \cap \mathscr{X}_{\geq -n}$ tel que $-n \leq v_1 \leq -n+d-1$, on note $\bar{v} = (v_2, \cdots, v_d)$. On note $\bar{B} = B^{\mathrm{GL}_{d-1}}$, $\bar{K} = K^{\mathrm{GL}_{d-1}}$, alors
$$A_{d,n}(v) = q^{(d-1)(n+v_1)} |\mathscr{X}_{\geq -n}^{\mathrm{GL}_{d-1},(-v_1)} \cap \bar{B}\bar{v}\bar{K}/\bar{K}(\mathbf{F}_q)|.$$

En conclusion, on a

$$\begin{aligned} |\mathscr{X}_{\geq -n}^{\mathrm{GL}_d}(\mathbf{F}_q)| &= q^{d(d-1)} |\mathscr{X}_{\geq -n+1}^{\mathrm{GL}_d}(\mathbf{F}_q)| + \\ &\quad \sum_{v_1=-n}^{-n+d-1} q^{(d-1)(n+v_1)} |\mathscr{X}_{\geq -n}^{\mathrm{GL}_{d-1},(-v_1)}(\mathbf{F}_q)| \end{aligned}$$

Utilisant l'égalité $|\mathscr{X}_{\geq -n}(\mathbf{F}_q)| = P_{\mathscr{X}_{\geq -n}}(q^{1/2})$, et passant n à l'infini dans l'égalité ci-dessus, on trouve l'équation

$$\begin{aligned} P_d(t) &= t^{2d(d-1)} P_d(t) + \sum_{i=0}^{d-1} t^{2i(d-1)} P_{d-1}(t) \\ &= t^{2d(d-1)} P_d(t) + \frac{1 - t^{2d(d-1)}}{1 - t^{2(d-1)}} \prod_{i=1}^{d-2} (1 - t^{2i})^{-1}, \end{aligned}$$

donc $P_d(t) = \prod_{i=1}^{d-1} (1 - t^{2i})^{-1}$. □

6.2 $\mathscr{X}^{\xi}/T$ est homologiquement lisse

Le but de cette section est de démontrer le lemme suivant :

Lemme 6.2. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la variété $\mathscr{X}_{\geq -n}^{\xi}/T$ est homologiquement lisse. En particulier, elle est pure et satisfait à la dualité de Poincaré.*

La stratégie est d'utiliser une comparaison des singularités de $\mathscr{X}_{\geq -n}$ et celles du cône nilpotent $\mathcal{N}$, qui a été observée par Lusztig dans [L] et généralisé par Mirkovic et Vybornov dans [MVy].

On fait une petit rappel de [Weil II]. Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbf{F}_q$, $f : X \to \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q)$ le morphisme structurel, on a le complexe dualisant

$$K_X = f^!\overline{\mathbf{Q}}_l.$$

Si X est une variété lisse irréductible de dimension d, alors

$$K_X = \overline{\mathbf{Q}}_l(d)[2d].$$

Pour $K \in D_c^b(X)$, on note $D(K) = \mathcal{RH}om(K,\, K_X)$.

Définition 6.1 (Deligne). 1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X.

(a) On dit que $\mathcal{F}$ est *ponctuellement pur* s'il existe un entier $n \in \mathbf{Z}$, *le poids* de $\mathcal{F}$, tel que pour tout point fermé $x \in |X|$, toute valeur propre a de le frobenius F_x^* sur $\mathcal{F}_x$ soit pure de poids n, i.e. $|\iota(a)| = q^{n/2}$ pour tout isomorphisme $\iota : \overline{\mathbf{Q}}_l \cong \mathbf{C}$.

(b) $\mathcal{F}$ est *mixte* s'il admet une filtration finie de quotients successifs des faisceaux ponctuellement purs. Les poids de ces quotients sont les poids ponctuels de $\mathcal{F}$.

2. Un complexe K est *mixte de poids* $\leq n$ si le faisceau $\mathcal{H}^i(K)$ est mixte de poids $\leq i + n$ pour tout i.
3. Un complexe K est *pur de poids* n si K est mixte de poids $\leq n$ et $D(K)$ est mixte de poids $\leq -n$.

Le résultat principal de [Weil II] est le suivante.

Théorème 6.3 (Deligne). *Soient $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques sur $\mathbf{F}_q$, $\mathcal{F}$ un faisceau sur X mixte de poids $\leq n$. Alors $R^i f_!\mathcal{F}$ est mixte de poids $\leq n + i$.*

Corollaire 6.4 (Deligne). *Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de variétés algébriques sur $\mathbf{F}_q$, $K \in D_c^b(X)$ un complexe pur. Alors $Rf_*\mathcal{F}$ est pur du même poids.*

Soit X une variété algébrique purement de dimension d sur $\mathbf{F}_q$, soit U une sous-variété ouverte dense lisse de X, soit $j : U \to X$ l'inclusion naturel. On note le complexe d'intersection de X

$$\mathcal{IC}_X^\bullet = j_{!*}\overline{\mathbf{Q}}_l[d].$$

Théorème 6.5 (Gabber). *Soit X une variété algébrique purement de dimension d sur $\mathbf{F}_q$, alors $\mathcal{IC}_X^\bullet$ est pur de poids d.*

Le théorème a été montré dans [BBD], page 135, corolaire 5.3.2.

Définition 6.2. Soit X une variété algébrique purement de dimension d sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q)$, on dit que X est *homologiquement lisse* si

$$\mathcal{IC}_X^\bullet = \overline{\mathbf{Q}}_l[d].$$

Corollaire 6.6. *Soit X une variété algébrique homologiquement lisse sur* $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q)$, *alors X est pur et satisfait à la dualité de Poincaré.*

Pour $\mu \in X_*^+(T)$, on a $\mathrm{Sch}(\mu) = \overline{I\mu K/K} = \overline{K\mu K/K}$ et on a la stratification en K-orbites

$$\mathrm{Sch}(\mu) = \bigsqcup_{\lambda \prec \mu} K\lambda K/K.$$

Donc $\mathrm{Sch}(\mu)$ est equisingulier le long de $K\lambda K/K$. Ainsi, pour comprendre les singularités de $\mathrm{Sch}(\mu)$ le long de $K\lambda K/K$, il suffit d'étudier celles d'une "slice" transverse à $K\lambda K/K$.

On note $L^{<0}G = \{g \in \mathrm{GL}_d(k[[\varepsilon^{-1}]]),\ g \equiv 1 \mod \varepsilon^{-1}\}$. On note $L_\lambda = \mathfrak{p}^{\lambda_1} e_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}^{\lambda_d} e_d$.

Lemme 6.7. *Pour $\lambda \in X_*^+(T)$, l'orbite $L^{<0}G \cdot L_\lambda$ est une slice transverse à $K\lambda K/K$ passant par le point L_λ dans la grassmannienne affine $\mathscr{X}$.*

Pour la démonstration, on s'envoie dans [BL].

Soit $N \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{N}$ le cône nilpotent dans $\mathfrak{gl}_N$. Une propriété importante du cône nilpotent est

Théorème 6.8 (Borho-Macpherson)**.** *Le cône nilpotent $\mathcal{N}$ est homologiquement lisse.*

On s'envoie dans [BM] pour la démonstration.

On note $p(N)$ l'ensemble de partitions de N. Pour $\lambda \in p(N)$, on note u_λ la matrice de Jordan de type λ et $\mathcal{O}_\lambda$ l'orbite de u_λ sous l'action de conjugaison de GL_N. Pour $\mu \in p(N)$, on a la stratification en GL_N-orbites

$$\overline{\mathcal{O}_\mu} = \bigsqcup_{\lambda \prec \mu,\, \lambda \in p(N)} \mathcal{O}_\lambda.$$

Donc $\overline{\mathcal{O}_\mu}$ est equisingulier le long de $\mathcal{O}_\lambda$. Ainsi, pour comprendre les singularités de $\overline{\mathcal{O}_\mu}$ le long de $\mathcal{O}_\lambda$, il suffit d'étudier celles d'une slice transverse à $\mathcal{O}_\lambda$ dans $\overline{\mathcal{O}_\mu}$.

Dans [MVy], Mirkovic et Vybornov ont construit une slice transverse à $\mathcal{O}_\lambda$ dans $\overline{\mathcal{O}_\mu}$, rappelons leur construction. Soit $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$, on note $\{e_{i,j},\ i = 1, \cdots, \lambda_j;\ j = 1, \cdots, r\}$ la base standard de k^N telle que

$$u_\lambda e_{1,j} = 0, \quad \text{et} \quad u_\lambda e_{i,j} = e_{i-1,j},\ i = 2, \cdots, \lambda_j;\ j = 1, \cdots, r.$$

On note $V_j = \bigoplus_{i=1}^{\lambda_j} k e_{i,j}$, $j = 1, \cdots, r$. À l'aide de cette base, on identifie

$$\mathfrak{gl}_N = \bigoplus_{i,j=1,\cdots,r} \mathrm{Hom}(V_i, V_j).$$

On note $u_i = u_\lambda|_{V_i}$, et

$$C = \bigoplus_{i,j=1,\cdots,r} \mathrm{Hom}(\ker(u_i^{\lambda_j}),\, \ker(u_j^t)),$$

où u_j^t est la transposée de u_j.

Lemme 6.9 (Mirkovic-Vybornov)**.** *La sous-variété $(u_\lambda + C) \cap \overline{\mathcal{O}_\mu}$ est une slice transverse de $\mathcal{O}_\lambda$ à u_λ dans $\overline{\mathcal{O}_\mu}$.*

La démonstration est un calcul de l'image de $\mathrm{ad}(u_\lambda) : \mathfrak{gl}_N \to \mathfrak{gl}_N$. On s'envoie dans [MVy] pour plus de détails.

Mirkovic et Vybornov font l'observation suivante : pour $\lambda \in X_*^+(T)$, et $m \in \mathbf{N}$, $m \geq \lambda_1$, on note $\mathbf{m} - \lambda = (m, \cdots, m) - \lambda$; alors

$$K\lambda K/K = \{L \in \mathscr{X},\ \varepsilon^m L_0 \subset L,\ \varepsilon \in \mathrm{End}(L/\varepsilon^m L_0) \text{ est nilpotent de type } \mathbf{m} - \lambda\},$$

On peut voir $\mathbf{m} - \lambda$ comme une partition de dm.

Théorème 6.10 (Mirkovic-Vybornov)**.** *Pour $\lambda, \mu \in X_*^+(T)$, $\lambda \prec \mu$, il existe un isomorphisme*

$$(u_{\mathbf{m}-\lambda} + C) \cap \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{m}-\mu} \cong (L^{<0}G \cdot L_\lambda) \cap \mathrm{Sch}(\mu).$$

Pour la démonstration, on s'envoie dans [MVy].

Par conséquent, les singularités de $\mathrm{Sch}(\mu)$ le long de $K\lambda K/K$ sont les mêmes que celles de $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{m}-\mu}$ le long de $\mathcal{O}_{\mathbf{m}-\lambda}$. En particulier, on a

Corollaire 6.11. *Pour $n \in \mathbf{N}$, la variété $\mathscr{X}_{\leq n}$ est homologiquement lisse. Donc la variété $\mathscr{X}_{\geq -n} = \mathscr{X}_{\leq n}^\vee$ l'est aussi.*

Démonstration. Prenons $\mu = (n, \cdots, n, -(d-1)n) \in X_*^+(T)$, on a $\mathscr{X}_{\leq n} = \mathrm{Sch}(\mu)$ et $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{n}-\mu}$ est le cône nilpotent de $\mathfrak{gl}_{dn}$. Le corolaire résulte du théorème 6.8. □

Démonstration du lemme 6.2. Parce que $\mathscr{X}_{\geq -n}^\xi$ est ouvert dans $\mathscr{X}_{\geq -n}$, $\mathscr{X}_{\geq -n}^\xi$ est homologiquement lisse. Il est un $T/\mathbb{G}_m$-torseur sur $\mathscr{X}_{\geq -n}^\xi/T$ car l'action de $T/\mathbb{G}_m$ est libre. En particulier, la projection naturelle $\mathscr{X}_{\geq -n}^\xi \to \mathscr{X}_{\geq -n}^\xi/T$ est un morphisme lisse surjectif. D'après [G], corolaire 17.16.3, localement elle admet une section étale. Donc le torseur est trivial localement pour la topologie étale. Ceci implique que $\mathscr{X}_{\geq -n}^\xi/T$ est homologiquement lisse car $\mathscr{X}_{\geq -n}^\xi$ l'est. □

6.3 Séries de Poincaré

Lemme 6.12. *Soit $\xi \in \mathfrak{t}$ tel que $\sum_{i=1}^d \xi_i = 0$, $0 < \alpha(\xi) < 1$, $\forall \alpha \in \Phi_B(G,T)$. On a $\dim(\mathscr{X}_{\geq -n}) = nd(d-1)$, et la sous-variété fermée $\mathscr{X}_{\geq -n} \backslash \mathscr{X}_{\geq -n}^\xi$ est de dimension au plus $n(d-1)^2$, i.e. sa codimension est au moins $(d-1)n$ dans $\mathscr{X}_{\geq -n}$.*

Démonstration. On note $v = ((d-1)n, -n, \cdots, -n) \in X_*(T)$, alors $\dim(\mathscr{X}_{\geq -n}) = \dim(IvK/K) = nd(d-1)$ car $\mathscr{X}_{\geq -n} = \overline{IvK/K}$.

La dimension dans le lemme est

$$\max\{\dim(S_P \cap \mathscr{X}_{\geq -n}),\ P \in \mathcal{F}(T),\ P \neq G\}.$$

Il suffit de regarder les S_P où P est un sous-groupe parabolique maximal standard. Soit $P = P_{\varpi_r}$, $1 \leq r \leq d-1$. Soit $P = MN$ la factorisation de Levi. Alors $M = \mathrm{GL}_r \times \mathrm{GL}_{d-r}$.

On identifie Λ_M et $\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{Z}^2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 0\}$ avec le morphisme

$$\mathrm{val} \circ \det : M(F) \to \mathbf{Z}^2.$$

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_{M,P}$, alors $\lambda_1 \leq 0$. On note $X^\lambda = H_P^{-1}(\lambda) \cap \mathscr{X}_{\geq -n}$, alors $S_P^\lambda = S_P \cap X^\lambda$, $\lambda \in \Lambda_{M,P}$, sont des composants connexes de $S_P \cap \mathscr{X}_{\geq -n}$. Donc il suffit de majorer la dimension de X^λ.

On pave $\mathscr{X}_{\geq -n}$ avec le sous-groupe de Borel B. Pour $w \in \mathscr{X}_{\geq -n}^T$, on note $C(w) = \mathscr{X}_{\geq -n} \cap BwK/K$. Puisque $B \subset P$, on a

$$X^\lambda = \bigsqcup_{w \in (X^\lambda)^T} C(w).$$

D'après la proposition 2.11, on a

$$C(w) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \mathfrak{p}^{a_{i,j}} \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{bmatrix} wK/K,$$

où $a_{i,j} = -n - w_j$. Donc il est de dimension

$$\sum_{i=1}^{d-1} (d-i)(w_i + n) = \sum_{i=1}^{r} (d-i)(w_i + n) + \sum_{i=r+1}^{d-1} (d-i)(w_i + n).$$

La question est de majorer cette dimension sous les conditions que $w_i \geq -n$ et que

$$\sum_{i=1}^{r} w_i = \lambda_1 \leq 0, \quad \sum_{i=r+1}^{d} w_i = -\lambda_1 \geq 0.$$

Elle prend la valeur maximale quand

$$\begin{aligned} &w_1 = \lambda_1 + (r-1)n,\ w_2 = \cdots = w_r = -n; \\ &w_{r+1} = -\lambda_1 + (d-r-1)n,\ w_{r+2} = \cdots = w_d = -n. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} \dim(X^\lambda) &\leq (d-1)((r-1)n + \lambda_1 + n) + (d-r-1)((d-r-1)n - \lambda_1 + n) \\ &= (d-1)rn + (d-r-1)(d-r)n + r\lambda_1 \leq (d-1)^2 n \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Codim}(\mathscr{X}_{\geq -n} \backslash \mathscr{X}_{\geq -n}^{\xi}) \geq nd(d-1) - (d-1)^2 n = (d-1)n.$$

□

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note τ_n l'opérateur de troncature sur $k[[t]]$ défini par

$$\tau_n\left(\sum_{i=i_0}^{+\infty} a_i t^i\right) = \sum_{i=i_0}^{n} a_i t^i.$$

Théorème 6.13. *La séries de Poincaré de $\mathscr{X}^\xi/T$ est*

$$P_{\mathscr{X}^\xi/T}(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} (1-t^{2i})^{-1}.$$

De plus, on a

$$H_{2i+1}(\mathscr{X}^\xi/T) = 0,$$

et le frobenius agit sur $H_{2i}(\mathscr{X}^\xi/T)$ par q^{-i}, $\forall i \geq 0$.

Démonstration. On a la suite exacte

$$\cdots \to H_i(\mathscr{X}_{\geq -n} \backslash \mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) \to H_i(\mathscr{X}_{\geq -n}) \to H_{i,c}(\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) \to H_{i-1}(\mathscr{X}_{\geq -n} \backslash \mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) \to \cdots$$

D'après le lemme 6.12, $\dim(\mathscr{X}_{\geq -n} \backslash \mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) \leq n(d-1)^2$, donc on a

$$H_i(\mathscr{X}_{\geq -n} \backslash \mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) = 0, \quad i \geq 2n(d-1)^2 + 1,$$

et

$$H_{i,c}(\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) = H_i(\mathscr{X}_{\geq -n}), \quad i \geq 2n(d-1)^2 + 2.$$

Parce que $\mathscr{X}_{\geq -n}$ et $\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}$ sont homologiquement lisses, ils satisfont à la dualité de Poincaré, ce qui entraine

$$H_i(\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) = H_i(\mathscr{X}_{\geq -n}), \quad 0 \leq i \leq 2n(d-1) - 2, \tag{16}$$

car $\dim(\mathscr{X}_{\geq -n}) = \dim(\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) = nd(d-1)$.

Parce que $T/\mathbb{G}_m$ agit librement sur $\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}$, on a

$$\begin{aligned} H_i(\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}/T) &= H_{i,T/\mathbb{G}_m}(\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) \\ &= \bigoplus_{i_1+i_2=i} H_{i_1}(\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}) \otimes H_{i_2}(B(T/\mathbb{G}_m)), \end{aligned} \tag{17}$$

où $B(T/\mathbb{G}_m)$ est l'espace classifiant des $T/\mathbb{G}_m$-torseurs.

Combinant les égalités (16) et (17), on obtient que

$$\tau_{2(d-1)n-2}[P_{\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}/T}(t)] = \tau_{2(d-1)n-2}[(1-t^2)^{1-d} P_{\mathscr{X}_{\geq -n}}(t)], \tag{18}$$

et

$$H_{2i+1}(\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}/T) = 0, \quad 0 \leq i \leq (d-1)n - 2,$$

et le frobenius agit sur $H_{2i}(\mathscr{X}^\xi_{\geq -n}/T)$ par q^{-i}, $0 \leq i \leq (d-1)n-1$, parce qu'il agit ainsi sur $H_*(\mathscr{X}_{\geq -n})$ et $H_*(B(T/\mathbb{G}_m))$.

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_{2(d-1)n}(P_{\mathscr{X}_{\geq -n}}(t)) = P_{\mathscr{X}}(t) = \prod_{i=1}^{d-1}(1-t^{2i})^{-1},$$

on peut prendre la limite de deux côtés de l'égalité (18), et obtient :

$$P_{\mathscr{X}^\xi/T}(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1}(1-t^{2i})^{-1}.$$

Ceci entraine que on peut prendre la limite de deux côtés des égalités (16) et (17), et obtient

$$H_i(\mathscr{X}^\xi/T) = \bigoplus_{i_1+i_2=i} H_{i_1}(\mathscr{X}) \otimes H_{i_2}(B(T/\mathbb{G}_m))$$

Par conséquent, on a

$$H_{2i+1}(\mathscr{X}^\xi/T) = 0,$$

et le frobenius agit sur $H_{2i}(\mathscr{X}^\xi/T)$ par q^{-i}, $\forall i \geq 0$.

□

Remarque 6.1. Le tore pivotant $\mathbb{G}_m$ agit sur le quotient $\mathscr{X}^\xi/T$. Ceci entraine un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}^\xi/T$ pour GL_2, mais pour GL_d, $d \geq 3$, les points fixes $(\mathscr{X}^\xi/T)^{\mathbb{G}_m}$ ne sont pas discrets.

7 Domain fondamental de la fibre de Springer affine

On considère de nouveau les fibres de Springer affines. Soit $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$ un élément régulier. Étant donné un point $x = gK \in \mathscr{X}_\gamma$, on dit qu'il est *régulier* si l'image de $\mathrm{Ad}(g^{-1})\gamma$ sous la projection naturelle $\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{g}(k)$ est un élément nilpotent régulier dans $\mathfrak{g}$. On note $\mathscr{X}_\gamma^{reg}$ la sous-variété ouverte des points réguliers sur $\mathscr{X}_\gamma$.

Proposition 7.1 (Bezrukavnikov)**.** *Le groupe $T(\mathcal{O})$ agit transitivement sur $\mathscr{X}_\gamma^{reg}$.*

En particulier, le groupe abélien Λ engendré par $\chi(\varepsilon) \in T(F)$, $\chi \in X_*(T)$ agit librement et transitivement sur les composantes connexes de $\mathscr{X}_\gamma^{reg}$. Pour la démonstration, on s'envoie dans [Be].

Dans [GKM3], Goresky, Kottwitz et Macpherson ont donné une description des points réguliers de $\mathscr{X}_\gamma$. Pour $B', B'' \in \mathcal{P}(T)$ deux sous-groupes de Borel adjacents, on note

$$n(\gamma, B', B'') = \mathrm{val}(\alpha_{B',B''}(\gamma)).$$

D'après la proposition 4.1, pour tout $x \in \mathscr{X}$, on a

$$H_{B'}(x) - H_{B''}(x) = n(x, B', B'') \cdot \alpha^\vee_{B',B''},$$

avec $n(x, B', B'') \in \mathbf{N}$.

Théorème 7.2 (Goresky-Kottwitz-Macpherson)**.** *Soit $x \in \mathscr{X}_\gamma$.*

1. *Pour tout couple $B', B'' \in \mathcal{P}(T)$ de sous-groupes de Borel adjacents, on a*

$$n(x, B', B'') \leq n(\gamma, B', B'').$$

2. *Le point x est régulier si et seulement si pour tout couple $B', B'' \in \mathcal{P}(T)$ de sous-groupes de Borel adjacents, on a l'égalité*

$$n(x, B', B'') = n(\gamma, B', B'').$$

On fixe un point $x_0 \in \mathscr{X}_\gamma^{reg}$.

Définition 7.1. On note D_γ la sous-variété de $\mathscr{X}_\gamma$ formée des points x tel que

$$\mathrm{Ec}(x) \subset \mathrm{Ec}(x_0).$$

Par le théorème 7.2, D_γ est une sous-variété fermée de $\mathscr{X}_\gamma$. Par la proposition 7.1, D_γ ne dépend pas du choix de x_0 et

$$\mathscr{X}_\gamma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \lambda D_\gamma.$$

Donc on obtient

Proposition 7.3. *La sous-variété fermée D_γ est un domaine fondamental de $\mathscr{X}_\gamma$ sous l'action de Λ.*

Remarque 7.1. On espère que la pureté de la fibre de Springer affine peut être ramené à la pureté de son domaine fondamental.

Références

[A] J. Arthur, *The characters of discrete series as orbital integrals*, Invent. math. **32**(1976), 205-261.

[B] R. Bott, *An application of the Morse theory to the topology of Lie groups*, Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), p.251-281.

[BBD] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque 100, SMF, 1982

[Be] R. Bezrukavnikov, *The dimension of the fixed point set on affine flag manifolds*, Math. Res. Lett. 3 (1996), 185–189.

[BL] A. Beauville, Y. Laszlo, *Conformal blocks and generalized theta functions*, Commun. Math. Phys. 164, 385-419 (1994).

[BM] W. Borho, R. Macpherson, *Partial resolutions of nilpotent varieties*, Analysis and topology on singular spaces II, III. 23-74, Astérisque, 101-102. Soc. Math. France, Paris, 1983

[Bour] N. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Chap. 4-6, Hermann, (1968).

[CL] P-H. Chaudouard, G. Laumon, *Le lemme fondamental pondéré I : constructions géométriques*, Compos. Math. 146 (2010), no. 6, 1416-1506.

[D1] P. Deligne, *Poids dans la cohomologie des variétés algébriques*, Proc. Int. Cong. Math. 1974 (Vancouver), Canadian Math. Congress, 1975, 79-85

[G] A. Grothendieck, *Élément de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV.* Publ. Math. IHES. 32, 1967, 5-361.

[GKM1] M. Goresky, R. Kottwitz, R. Macpherson, *Purity of equivalued affine Springer fibers*, Represent. Theory 10 (2006), 130-146.

[GKM2] M. Goresky, R. Kottwitz, R. Macpherson, *Homology of affine Springer fibers in the unramified case*, Duke Math. J. 121 (2004), no. 3, 509-561.

[GKM3] M. Goresky, R. Kottwitz, R. Macpherson, *Regular points in affine Springer fibers*, Michigan Math. J. 53 (2005), no. 1, 97-107.

[GKM4] M. Goresky, R. Kottwitz, R. Macpherson, *Codimensions of root valuation strata*, Pure. Appl. Math. Q. 5 (2009), no. 4, 1253-1310.

[GM] M. Goresky, R. Macpherson, *Intersection homology II*, Invent. math. 72 (1983), no. 1, 77-129.

[IM] N. Iwahori, H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups*, Publ. Math. IHES, 25 (1965), 5-48.

[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Fixed point varieties on affine flag manifolds*, Israel. J. Math. **62**(1988), 129-168.

[MP] A. Moy, G. Prasad, *Unrefined minimal K-types for p-adic groups*, Invent. Math. 116 (1994), 393–408.

[L] G. Lusztig, *Green polynomials and singularities of unipotent classes*, Adv. in Math. 42, (1981), 169-178.

[Lu] V. Lucarelli, *Affine pavings for affine Springer fibers for split elements in* PGL_3, http ://arxiv.org/abs/math/0309132

[M] D. Mumford, Geometric invariant theory, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1965.

[MVi] I. Mirkovic, K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. (2) 166 (2007), no.1, 95-143.

[MVy] I. Mirkovic, M. Vybornov, *Quiver varieties and Beilinson-Drinfeld Grassmannian of type A*, http ://arxiv.org/abs/0712.4160

[Se] J-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[Weil I] P. Deligne, *La conjecture de Weil, I*, Publ. Math. IHES, 43, 1974, 273-308.

[Weil II] P. Deligne, *La conjecture de Weil, II*, Publ. Math. IHES, 52, 1980, 137-252.