



HAL
open science

Identification passive des milieux de propagation élastiques. Application à la reconstruction géométrique des réseaux de capteurs et au diagnostic des structures

Mikael Carmona

► **To cite this version:**

Mikael Carmona. Identification passive des milieux de propagation élastiques. Application à la reconstruction géométrique des réseaux de capteurs et au diagnostic des structures. Autre. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENT057 . tel-00656412

HAL Id: tel-00656412

<https://theses.hal.science/tel-00656412>

Submitted on 4 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Signal, Image, Parole et Télécoms**

Arrêté ministériel : 03 Septembre 2008

Présentée par

Mikael CARMONA

Thèse dirigée par **Olivier MICHEL**

préparée au sein du **CEA-Léti**
et de l'**Ecole Doctorale EEATS**

**Identification passive des milieux
de propagation élastiques.**

Application à la reconstruction de géométries
dans les réseaux de capteurs et au diagnostic
des structures.

Thèse soutenue publiquement le **20 Septembre 2011**,
devant le jury composé de :

M. Bernard CASTAING

Professeur, ENS Lyon, Président

M. Cédric RICHARD

Professeur, Université de Nice, Rapporteur

M. Julien De ROSNY

Chargé de Recherche, CNRS Paris, Rapporteur

M. Philippe ROUX

Chargé de Recherche, ISTERRE, Examineur

M. Frédéric BOURQUIN

Ingénieur en chef, IFSTTAR, Examineur

M. Jean-Louis LACOUME

Professeur, Gipsa-Lab/CEA-Léti, Examineur

Mme Barbara NICOLAS

Chargé de Recherche, Gipsa-Lab, Examinatrice

M. Olivier MICHEL

Professeur, GIPSA-Lab, Directeur de thèse

Mme Nathalie SPRYNSKI

Ingénieur chercheur, CEA-Léti, Invitée



Résumé

L'identification passive d'un système réside dans l'estimation des paramètres qui décrivent ce système uniquement à l'aide de sollicitations ambiantes. Dans le génie civil, cette discipline est appliquée pour le suivi de l'état de santé des structures, on parle de SHM (Structural Health Monitoring) passif. Le SHM passif est généralement réalisé à l'aide d'une instrumentation déployée en surface. La thèse s'est intéressée aux possibilités offertes par une instrumentation qui serait enfouie.

Dans une première partie, on établit les résultats associés à l'identification passive des milieux visco-élastiques. L'originalité de ces travaux réside dans la prise en compte d'un modèle de dissipation réaliste, la viscosité, ainsi que du caractère vectoriel des ondes élastiques. Ces résultats théoriques sont validés expérimentalement et démontrent la portabilité du SHM passif en surface au SHM passif en volume.

Dans une deuxième partie, on s'intéresse à deux problèmes attachés à l'enfouissement de capteurs : l'estimation passive de leur position (problème SNL, Sensor Network Location problem) et de leur attitude (problème SNA, Sensor Network Attitude problem). Ces problèmes sont résolus grâce à l'identification passive qui fournit, en plus d'information physique sur le milieu, des informations géométriques sur le réseau. En particulier, on peut estimer des distances et des attitudes relatives entre capteurs. A l'aide de ces informations partielles et bruitées, des algorithmes de résolution des problèmes SNL et SNA ont été développés puis validés expérimentalement.

Enfin, on synthétise l'apport de la thèse et on identifie les verrous technologiques à lever afin de justifier la faisabilité de l'enfouissement d'un réseau de capteurs dans le but de faire du SHM passif.

Mots-Clés : *identification passive, milieux visco-élastiques, fonction de Green, corrélation de Green, identité de Ward, surveillance des structures, localisation de capteurs, estimation d'attitudes, instrumentation.*

Abstract

Passive identification of a system relies on the estimation of the parameters which describe that system only by using ambient sources. In civil engineering, we can apply this technique to monitor the state of health of structures. This is called passive SHM (Structural Health Monitoring). Passive SHM is generally realised by using an instrumentation distributed on the surface. This thesis focuses on the possibility given by the use of an embedded instrumentation.

In the first part, we establish new results associated to passive identification in visco-elastic media. The originality of this work relies on the consideration of a realistic dissipation model, the viscosity, and the vectorial aspect of elastic waves. Those theoretical results, which are experimentally validated, prove the portability of surface passive SHM to volume passive SHM.

In the second part, we focus on two problems related to an embedded sensors network : the passive estimation of sensors position (SNL problem - Sensor Network Location problem) and attitude (SNA problem - Sensor Network Attitude problem). Those problems are solved by using passive identification which gives, besides physical information on the medium, geometrical information on the network. In particular, we can estimate the distances and relative attitudes between sensors. With that partial and noisy information we have developed algorithms solving SNL and SNA problems and we have validated them experimentally.

At last, we synthesize the contribution of the thesis and we identify the technological locks to release in order to justify the feasibility of passive SHM using an embedded instrumentation.

Keywords : *passive identification, visco-elastic media, Green function, Green correlation, Ward identity, structural health monitoring, sensors localisation, attitude estimation, instrumentation.*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury : M. Castaing, M. De Rosny, M. Richard, M. Bourquin et M. Roux pour avoir accepté de présider, de rapporter et d'examiner ce travail.

Je souhaite remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Olivier Michel. Pendant ces trois ans, j'ai pu profiter de sa pluridisciplinarité, de sa patience et de ses conseils. Je lui dois en grande partie l'expérience que j'ai pu acquérir pendant cette thèse. Je tiens à remercier Jean-Louis Lacoume pour être l'initiateur du sujet et m'avoir permis de bénéficier de son expérience. Je remercie Nathalie Sprynski pour son suivi constant et consciencieux dans cette thèse. Je remercie Barbara Nicolas pour ses analyses fines et rigoureuses. Merci aussi à François Frassati avec qui j'ai pu échanger et apprendre dès mon arrivée dans le laboratoire LCFE.

Je remercie Dominique Vicard pour m'avoir fait confiance en tant que doctorant et désormais en tant qu'ingénieur-chercheur. Merci également à Roland Blanpain de rendre cette suite possible.

Je remercie Philippe Klein pour son aide précieuse en électronique. Merci à Angelo Guiga pour sa disponibilité. Je remercie également Patrick Schermesser et Laurent Jouanet pour tout ce qu'ils m'ont appris et continuent à m'apprendre. Merci à Christophe Villien pour ces discussions sur la théorie de l'estimation qui se poursuivent encore. Avec un peu de retard mais avec toute ma sincérité, je remercie Andréa Vassilev pour m'avoir fait découvrir le CEA-Léti en tant que stagiaire et pour son enseignement pendant ce stage. Cette expérience a été en effet initiatrice de ma volonté à continuer en thèse au CEA-Léti. Merci à l'ensemble des agents CEA avec qui j'ai pu échanger et apprendre pendant ces trois années.

Je souhaite remercier Rim, Bertrand, Anne-Cécile, Nawres, Mathieu et Saifedine à titre de "collègues doctorants" et à qui je souhaite bonne chance pour la fin de leur doctorat.

Enfin, je remercie ma femme, ma famille et mes amis pour leur soutien pendant mes études et notamment pendant ma thèse.

Merci à tous,

Mikael

Table des matières

Remerciements	5
Introduction.	9
I Identification passive des milieux de propagation dissipatifs. Approche système et utilisation de la corrélation de Green.	12
1 Une vue d'ensemble.	13
1.1 Terminologie de l'identification passive.	14
1.2 Modélisation des milieux élastiques.	20
1.3 État de l'art sur l'identification passive.	22
1.4 Conclusion.	28
2 Identification passive des milieux visco-élastiques.	29
2.1 Identité de Ward générale.	31
2.2 Propagation visco-élastique.	36
2.3 Corrélations de Green et identités de Ward visco-acoustique et visco-élastique.	42
2.4 Expérimentations en acoustique.	46
2.5 Expérimentations en sismique.	70
2.6 Conclusion.	72
II Estimation de positions et d'attitudes dans les réseaux de capteurs via des données partielles	73
3 Estimation de positions dans les réseaux de capteurs via une matrice de distances.	74
3.1 Terminologie et formalisation du problème.	76
3.2 Résolution du cas complet.	83
3.3 Un nouvel algorithme pour le cas incomplet et bruité.	90
3.4 Conclusion.	104
4 Estimation d'attitudes dans les réseaux de capteurs via une matrice d'attitudes relatives.	105
4.1 Terminologie et formalisation du problème SNA.	107
4.2 Résolution du problème SNA complet et bruité.	110
4.3 Performances.	115

4.4	Validation expérimentale.	117
4.5	Conclusion.	121
III	Perspectives d'application.	123
5	Vers une application au diagnostic des structures.	124
5.1	Applications des travaux au SHM.	126
5.2	Verrous techniques et technologiques : les perspectives.	131
5.3	Conclusion.	135
	Conclusion.	137
	Bibliographie	141
	Annexes.	150
A	Identification passive des milieux bornés.	150
A.1	Introduction	150
A.2	Propagation dans un milieu borné.	151
A.3	Corrélation de Green et identités de Ward exactes et approchées.	155
B	Recherche d'une clique localisable de fiabilité maximale.	158

Introduction.

Le diagnostic des ouvrages d'art est un domaine essentiel du génie civil. Ces structures subissent des contraintes continues et se dégradent au cours du temps. Le suivi de leur état de santé (SHM, Structural Health Monitoring) permet d'intervenir sur l'ouvrage pour le réparer ou le mettre hors service afin d'éviter des dysfonctionnements aux conséquences humaines et écologiques graves : chute d'un pont, effondrement d'un barrage, faille dans un pétrolier, etc.

Initialement actives, les méthodes de SHM utilisent désormais les énergies ambiantes (vent, pluie, vagues, trafic routier, trafic ferroviaire, activité humaine, etc.) pour obtenir de l'information sur la structure [Cremona04]. Ces techniques, dites de SHM passif, sont basées sur une instrumentation déployée en surface. Elles offrent un suivi de l'état de santé global performant dans la détection de défauts, mais elles restent peu fiables pour les localiser et les identifier.

La thèse s'inscrit dans un vaste projet amorcé par le Département Système et Intégration Systèmes du CEA Grenoble qui consiste à développer une solution de SHM à partir d'une instrumentation enfouie dans la structure. L'intérêt réside dans la possibilité d'extraire des informations locales inaccessibles par une instrumentation qui serait en surface.

La considérable réduction de l'encombrement des composants électroniques permet la conception de systèmes de dimensions micrométriques. On peut alors envisager de disperser des micro-systèmes dans un ouvrage, pendant son édification, autonomes en énergie et capables de dialoguer avec un système de réception extérieur à la structure. Les énergies ambiantes seraient, d'une part, récupérées pour alimenter le réseau, et d'autre part, mesurées puis traitées pour obtenir de l'information sur l'état de santé de l'ouvrage.

Le projet est encore à l'état expérimental. En effet, le packaging, l'alimentation et la communication d'un réseau de capteurs enfouis mènent à des verrous techniques et technologiques qu'il faut encore étudier pour qu'un tel projet soit faisable. Cette thèse intervient, en amont, dans la recherche d'une méthodologie envisageable pour le SHM passif via une instrumentation en volume.

Les études bibliographiques du SHM montrent que ce domaine relève d'un domaine plus général, l'identification des milieux de propagation élastiques. L'idée consiste à déployer un réseau de capteurs autour, en surface ou dans le milieu. Les champs générés par les sources d'excitation du milieu sont mesurés. Les données sont ensuite traitées pour obtenir de l'information sur le milieu, par exemple son état de santé, et sur l'instrumentation elle-même, par exemple sa géométrie. Lorsque les sources d'excitation sont non contrôlées, on parle d'identification passive.

L'identification passive a fait l'objet de nombreuses études théoriques [Lobkis01, Lacoume07, Gouedard08, ColinDeVerdiere09] et expérimentales en acoustique [Lobkis01, Derode03, Sabra05], en sismologie [Campillo03, Wapenaar04, Snieder07] et en mécanique des structures [Farrar99, Snieder09, Prieto10]. Cependant, les résultats bibliographiques sont basés sur un modèle de dissipation constant qui n'est pas adapté pour la description de la propagation dans les solides [Landau90].

La thèse s'est intéressée à l'adaptation des techniques classiques d'identification passive aux cas des milieux visco-élastiques solides instrumentés en volume par un réseau de capteurs mono-composante (microphones, par exemple) et/ou multi-composantes (accéléromètres tri-axiaux, par exemple). L'approche développée est basée sur l'estimation de la corrélation de Green d'un milieu, définie comme l'auto-corrélation d'un bruit blanc propagé. Cette méthodologie, introduite dans [Lacoume07], s'est révélée être adaptée à l'étude des milieux visco-élastiques. On montre que c'est une alternative à la méthodologie classique qui consiste à reconstruire la fonction de Green du milieu via une identité de Ward [Lobkis01, Wapenaar04, Snieder07, Gouedard08, Weaver08].

L'enfouissement d'une instrumentation dans une structure, pendant son édification, ajoute une difficulté sur le contrôle de la position des capteurs. Il est pourtant fondamental que chaque

capteur soit localisé pour interpréter les mesures qu'il enregistre. La localisation passive du réseau est donc une étape préliminaire au SHM passif. Elle peut aussi être réalisée grâce à l'identification passive en estimant les temps de vol entre des paires de capteurs. Sous certaines conditions que nous rappellerons dans ce mémoire, ces temps donnent accès aux distances euclidiennes entre les capteurs que l'on stocke généralement dans une matrice : la matrice de distances euclidiennes du réseau. La localisation d'un réseau de capteurs via une matrice de distances est alors un problème classique appelé problème SNL (Sensor Network Location problem).

Il existe une vaste bibliographie concernant le problème SNL [Torgerson52, Kruskal64, Platt05, Patwari05, Costa06, Honeine09, Krislock09]. Cependant, lorsque la matrice de distances est incomplète (toutes les distances ne sont pas accessibles), la complexité NP-difficile du problème implique le développement d'algorithmes spécifiques à chaque application, notamment avec un a priori sur la structure de la matrice de distances. L'enfouissement de capteurs déployés aléatoirement ne laisse envisager aucune information a priori sur la matrice de distances. Un algorithme de résolution a alors été développé, caractérisé et validé.

Lorsque les capteurs enfouis sont multi-composantes, un paramètre autre que la position doit être connu pour interpréter la mesure dans son intégralité : l'attitude du capteur *i.e.* son orientation par rapport à un repère absolu. Dans ce cadre, une étape d'estimation passive de l'attitude des capteurs est nécessaire.

L'identification passive de milieux de propagation d'ondes vectorielles, comme le champ de déplacement dans les solides, révèle que l'on peut estimer passivement l'attitude relative entre des paires de capteurs multi-composantes. Le principe réside alors dans l'utilisation d'une matrice d'attitudes relatives pour estimer l'attitude (absolue) des capteurs. Nous appellerons ce problème SNA (Sensor Network Attitude problem).

Le problème SNA est analogue au problème SNL. Cependant, aucune bibliographie sur ce problème n'a été identifiée. Il a alors fait l'objet d'une étude complète : formalisation, développement d'un algorithme de résolution, caractérisation et validation de cet algorithme.

Les travaux de cette thèse montrent théoriquement et expérimentalement la portabilité de l'identification passive à des milieux solides instrumentés en volume. Ils montrent aussi la possibilité de reconstruire, en passif, la géométrie du réseau (positions et attitudes). Dans le but d'appliquer ces résultats dans un cadre de SHM passif réel, une étude d'identification des verrous techniques et technologiques à lever a été menée. Cette étude permet de discuter de l'apport et des perspectives des travaux de thèse dans la faisabilité du projet global décrit en début de cette introduction.

Organisation du mémoire

La [partie 1](#) concerne l'identification passive des milieux élastiques. Elle est constituée de deux chapitres dont le premier, le [chapitre 1](#), introduit la terminologie de ce domaine et présente un état de l'art des méthodes existantes.

Le [chapitre 2](#) relate les résultats obtenus dans le cadre de l'identification passive des milieux visco-élastiques. On y établit une identité de Ward générale qui prend en compte des phénomènes de dissipation et de propagation plus complexes et réalistes que le modèle de dissipation constante. On établit des expressions de la corrélation de Green dans différents domaines de représentation qui montrent que cette fonction est un outil incontournable de l'identification passive. Les résultats théoriques sont confortés par des expérimentations qui valident sur des données réelles l'approche développée. En particulier, on montre que l'identité de Ward obtenue dans le cas d'une faible atténuation visqueuse est plus précise que l'identité de Ward classique

en acoustique.

On trouvera dans l'[annexe A](#) des développements théoriques sur l'identité de Ward générale et le rôle de la corrélation de Green dans l'identification des milieux linéaires autres que les milieux visco-élastiques.

La [partie 2](#) traite des problèmes d'estimation de positions et d'attitudes dans les réseaux de capteurs à partir de données géométriques partielles et relatives issues de l'identification passive.

Le [chapitre 3](#) concerne le problème SNL avec une matrice de distances éventuellement incomplète et bruitée. La terminologie et un état de l'art sont présentés. On décrit ensuite l'algorithme de localisation de capteurs enfouis qui a été développé. Cet algorithme est une méthode de complétion de la matrice de distances. Elle est basée sur l'algorithme de résolution du cas complet de W.S. Torgerson [[Torgerson52](#)] dont on propose une étude de stabilité et robustesse originale. L'algorithme est ensuite adapté pour intégrer de nouvelles observations (matrices de distances) dans sa recherche de la position des capteurs. Cet algorithme est validé par des simulations. La méthode de complétion est généralisée en fin de chapitre dans la description d'un procédé générique. Ce procédé est aussi applicable au problème SNA.

Le [chapitre 4](#) concerne le problème d'estimation d'attitudes absolues à partir d'attitudes relatives. Ce problème, nouveau, est introduit et résolu. Le formalisme utilisé est celui de la paramétrisation des attitudes par des quaternions unitaires. Cette approche permet d'obtenir une solution analytique du problème SNA dans le cas d'une matrice d'attitudes relatives complète. Une étude de stabilité a été menée pour prouver l'applicabilité de l'algorithme sur des données réelles donc bruitées. Enfin, l'algorithme est validé par des simulations puis expérimentalement.

La [partie 3](#) et son unique chapitre, le [chapitre 5](#), envisagent l'application des résultats obtenus dans les deux parties précédentes au SHM passif. Les problématiques techniques et les verrous technologiques associés à l'enfouissement d'une instrumentation sont présentés. Un lien entre les résultats expérimentaux et les contraintes technologiques est établi. Cette partie doit être appréhendée comme la proposition d'une perspective des travaux de thèse dans le SHM passif.

Première partie

**Identification passive des milieux
de propagation dissipatifs.
Approche système et utilisation
de la corrélation de Green.**

Chapitre 1

Une vue d'ensemble.

Sommaire

1.1 Terminologie de l'identification passive.	14
1.1.1 Identification de milieux de propagation.	14
1.1.2 Champs et milieux.	15
1.1.3 Fonction de Green d'un milieu linéaire.	16
1.1.4 Inter-corrélation, bruit blanc et corrélation de Green.	18
1.2 Modélisation des milieux élastiques.	20
1.2.1 Acoustique.	20
1.2.2 Sismique.	21
1.2.3 Mécanique des structures.	21
1.3 État de l'art sur l'identification passive.	22
1.3.1 Prémices.	23
1.3.2 Modèles et identités de Ward.	23
1.3.3 Bruit ambiant : propriétés et influence.	26
1.4 Conclusion.	28

Ce chapitre est une introduction à l'identification passive des milieux de propagation. Il a pour objectif de situer les travaux réalisés pendant la thèse lesquels sont présentés au [chapitre 2](#). La [section 1](#) introduit les concepts, la terminologie et les notations utilisées. L'approche système qui est adoptée dans la description de l'identification passive est une originalité des travaux de thèse. Elle présente l'avantage de faciliter la généralisation des concepts et donc d'élargir le spectre des applications. La [section 2](#) rappelle les équations de propagation de l'acoustique, de la sismique et de la mécanique des structures. Ces trois domaines sont étudiés car ils sont à la base des résultats développés dans la thèse pour les milieux visco-élastiques ainsi que pour des milieux plus généraux. L'état de l'art est présenté dans la [section 3](#). Les méthodes existantes et les résultats classiques sont discutés afin de justifier la méthodologie mise en place dans le chapitre suivant.

1.1 Terminologie de l'identification passive.

Cette section est consacrée à l'introduction des concepts de l'identification passive. L'analogie systèmes/milieux est présentée afin d'appréhender l'identification passive via une approche système. On introduit ensuite la fonction de Green d'un milieu et on présente son rôle dans les méthodes d'identification. Un opérateur classique du traitement du signal et fondamental en identification passive, l'inter-corrélation, est ensuite présenté. Cet opérateur introduit la notion de bruit blanc, essentiel en identification passive. Enfin, l'interprétation de l'inter-corrélation comme un champ propagé, mène à la notion de corrélation de Green. Nous montrerons dans le chapitre suivant que cette fonction est une alternative à la fonction de Green dans le cadre de l'identification passive.

1.1.1 Identification de milieux de propagation.

1.1.1.1 Identification de systèmes.

Un système est décrit par : une entrée, une sortie et un ensemble de lois qui lient l'entrée et la sortie. Par abus de langage, on confond le système et l'ensemble de ses lois. L'identification paramétrique d'un système est l'estimation des paramètres d'un modèle qui représentent la relation entrée-sortie [Eykhoff74]. Le principe est d'observer la sortie du système perturbé en entrée. Les connaissances sur l'entrée et la sortie donnent de l'information sur les paramètres (observables, identifiables) du modèle.

On parle d'identification active lorsque la perturbation en entrée est connue et générée par l'utilisateur, par exemple une impulsion. Si la perturbation du système provient de perturbations ambiantes également appelées "bruit ambiant" et par définition non contrôlées, on parle d'identification passive. Le terme passif provient du fait qu'aucune énergie n'a été volontairement apportée par l'expérimentateur.

1.1.1.2 Précisions sur la notion de "bruit ambiant".

Il est important de préciser la notion de perturbations ambiantes ou bruit ambiant. Cette terminologie peut en effet prêter à confusion car le terme "bruit" est utilisé dans d'autres contextes. On considère généralement trois types de bruits : le bruit de modèle, le bruit de mesure et le bruit ambiant. Le bruit de modèle est une incertitude sur la modélisation du système, c'est un indicateur de l'erreur entre le modèle théorique et la réalité physique. Le bruit de mesure est l'incertitude liée à tout appareil de mesure qui n'enregistre qu'une image de la réalité [Max96]. Enfin, on appellera bruit ambiant toute source non contrôlée excitant un milieu. Par exemple, le vent, la pluie, le trafic routier, des travaux de rénovation, sont des sources de bruit ambiant pour un pont.

1.1.1.3 Applications et apports du caractère passif.

L'identification des milieux de propagation a des applications principalement en médecine (tomographie médicale), en télécommunications (déconvolution de canal), en géophysique (tomographie de la terre, prospection des sols) et en génie civil (tomographie et diagnostic des ouvrages d'art). Dans ces applications, l'identification est un outil qui fournit des informations partielles sur le milieu de propagation. Le recueil de ces informations, associé à des connaissances a priori, permet d'obtenir une image du milieu (tomographie) ou de suivre l'évolution de ses propriétés pour, par exemple, détecter une anomalie chez un patient ou dans un ouvrage

d'art (diagnostic).

Les techniques d'identification passive permettent aussi d'obtenir des informations sur l'instrumentation : géométrie, dérives d'horloge, synchronisation ou encore dysfonctionnement de capteurs. Cela est possible car les paramètres estimés dépendent à la fois du milieu et de l'instrumentation. Par exemple, un temps de trajet direct entre deux capteurs dépend de la vitesse de propagation du milieu et de la position des capteurs.

En termes d'apports, l'identification passive ne nécessite pas l'introduction d'énergie supplémentaire à celle environnant le milieu. Le gain est conséquent, notamment dans des expérimentations à grande échelle comme la tomographie sismique qui nécessite, en actif, de générer des explosions puissantes afin d'établir une image du sol étudié. En passif, l'utilisation du bruit ambiant sismique permet d'obtenir des résultats comparables [Shapiro04]. Au delà de l'économie des moyens, l'identification passive ne dégrade pas davantage le milieu et demeure une méthode plus discrète. Ce dernier point est important dans le génie civil où les méthodes d'identification actives imposent la mise hors service de l'ouvrage. Lorsque l'identification est réalisée à l'aide des sources ambiantes, l'ouvrage peut rester dans un mode fonctionnel et l'identification peut s'opérer en continu.

En contre-partie, l'identification passive est conditionnée par les propriétés du bruit ambiant (puissance, fréquence, répartition spatiale). Pour une application donnée, cela implique une concordance entre les spécifications attendues de l'identification et les propriétés des sources de bruit ambiant.

1.1.2 Champs et milieux.

1.1.2.1 Champ et mesure d'un champ.

Un champ est une grandeur physique qui dépend du temps et de l'espace. On note $\underline{u}(t, \underline{x})$ ¹ la valeur à l'instant t et à la position $\underline{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ du champ \underline{u} , où n est la dimension du milieu X dans lequel le champ se propage. Généralement, n vaut 1, 2 ou 3. Si \underline{u} a p composantes, on parle de champ $nD-pC$. Par exemple, la température dans un fluide est un champ 3D-1C et le déplacement d'une particule dans un solide est un champ 3D-3C. Un champ à une composante est dit scalaire, sinon il est dit vectoriel.

Il est important de noter que la mesure d'un champ est une représentation discrète et distordue du champ réel. En effet, afin de stocker dans une mémoire de capacité finie les valeurs du champ à différents instants, ce dernier doit être filtré passe-bas (respect des conditions de Nyquist-Shannon), échantillonné (discrétisation du temps) et quantifié (discrétisation des valeurs du champ) [Max96]. Ajoutons enfin que la capture d'une grandeur physique est toujours associée à une incertitude propre au système d'acquisition, c'est le bruit de mesure [Max96]. Ces considérations sont importantes dans l'étude de la robustesse de toute méthode d'identification.

1.1.2.2 Milieux et analogie systèmes/milieux.

Un milieu de propagation est une entité physique dans lequel se propagent des ondes. Par exemple, les fluides et les solides sont des milieux de propagation d'ondes mécaniques. Un milieu est excité par des champs que l'on appelle sources. Le champ généré par une source excitant un milieu est appelé onde propagée ou simplement onde. D'une manière générale, on peut formaliser

1. Dans cette partie, seules les quantités scalaires ne sont pas soulignées.

le lien entre le milieu, la source $\underline{\mathbf{f}}$ et l'onde $\underline{\mathbf{u}}$ par la relation :

$$\underline{\mathbf{u}} = \mathfrak{G}(\underline{\mathbf{f}}) \quad (1.1)$$

\mathfrak{G} est un opérateur générique associé à la propagation dans le milieu. Il contient des informations *a priori* sur le milieu : conditions aux bords, invariance par translation du temps, densité, etc.

A l'aide de la relation (1.1), on peut établir une analogie avec les systèmes où la source est l'entrée du système, l'onde générée est la sortie du système et \mathfrak{G} est la modélisation de l'ensemble des lois qui mettent en relation l'entrée et la sortie. Cette analogie permet d'appréhender l'identification des milieux de propagation comme un cas particulier de l'identification des systèmes.

Il est important de préciser, qu'en général, les lois de la physique ne donnent pas directement l'expression du champ propagé pour une source donnée. En effet, les équations de propagation qui lient la source et l'onde, sont souvent de la forme suivante :

$$\mathfrak{E}(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{f}} \quad (1.2)$$

où \mathfrak{E} est l'opérateur d'ondes du milieu.

Exemple. On illustre cette notion lorsque le milieu est une corde vibrante (corde fixée à ses deux extrémités) de longueur L i.e. $X = [0, L]$. On considère le champ déplacement vertical de la corde $\underline{\mathbf{u}}$ généré par une source d'excitation $\underline{\mathbf{f}}$. On montre, grâce au principe fondamental de la dynamique, que l'on a la relation suivante :

$$\forall(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X, \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \underline{\mathbf{u}}(t, x) = \underline{\mathbf{f}}(t, x) \quad (1.3)$$

où $v = (\mu/T)^{1/2}$ avec μ la masse linéique de la corde et T la tension exercée à ses extrémités. Cette équation, appelée équation de d'Alembert, donne l'expression de l'opérateur d'ondes $\mathfrak{E} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ pour cet exemple. Il dépend du paramètre v qui correspond à la vitesse de propagation des ondes dans la corde.

L'opérateur \mathfrak{G} , défini dans l'équation (1.1), est l'inverse de l'opérateur \mathfrak{E} . Comme \mathfrak{G} , l'opérateur \mathfrak{E} contient des informations *a priori* sur le milieu. Toutefois, l'étude de la propagation dans un milieu est difficile via l'opérateur \mathfrak{E} . En effet, dans l'équation (1.2), $\underline{\mathbf{u}}$ apparaît comme la cause et $\underline{\mathbf{f}}$ comme l'effet. Or en réalité, le champ mesuré est l'effet du champ source à travers le milieu. Pour interpréter la mesure, il est nécessaire d'inverser l'équation (1.2), ce qui revient à déterminer \mathfrak{G} à partir de \mathfrak{E} . Cette opération est dans le cas général très difficile et nécessite souvent l'ajout d'hypothèses *a priori* sur le milieu.

1.1.3 Fonction de Green d'un milieu linéaire.

1.1.3.1 Définitions et interprétations.

Un milieu linéaire est un milieu tel que pour toute combinaison linéaire de sources $\underline{\mathbf{f}} := \sum_i \alpha_i \underline{\mathbf{f}}_i$, le champ généré $\underline{\mathbf{u}} := \mathfrak{G}(\underline{\mathbf{f}})$ peut s'écrire : $\underline{\mathbf{u}} = \sum_i \alpha_i \underline{\mathbf{u}}_i$ où $\underline{\mathbf{u}}_i := \mathfrak{G}(\underline{\mathbf{f}}_i)$. Mathématiquement, cela implique la linéarité de l'opérateur \mathfrak{G} .

2. La notation $:=$ est utilisée pour définir une quantité par une équation.

Un milieu X qui relève du théorème de superposition est tel que la quantité $\mathbf{u}(t, \underline{x})$ soit la somme de toutes les contributions des sources élémentaires $\mathbf{f}(t', \underline{x}') dt' d\underline{x}'$ émises à l'instant t' pendant une durée dt' au volume centré en \underline{x}' et de dimensions $d\underline{x}'$, pour tous les instants t' et les points \underline{x}' . Un tel milieu est linéaire. Mathématiquement, cela implique, en plus de la linéarité de l'opérateur \mathfrak{G} , l'existence d'un noyau nommé fonction de Green du milieu. Cette propriété s'écrit :

$$\mathbf{u}(t, \underline{x}) = \int_{\mathbb{R} \times X} \underline{\mathbf{G}}(t, \underline{x}, t', \underline{x}') \mathbf{f}(t', \underline{x}') dt' d\underline{x}' \quad (1.4)$$

Avec ces considérations, l'égalité (1.1) peut se réécrire :

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{G}} \otimes_T \otimes_S \mathbf{f} \quad (1.5)$$

où \otimes_T et \otimes_S sont les convolutions généralisées temporelles et spatiales. Dans ce mémoire, on considère uniquement les milieux linéaires qui admettent une fonction de Green. Cette hypothèse est peu restrictive en pratique.

On peut préciser l'interprétation de la fonction de Green en associant au milieu un repère \mathfrak{R} d'origine O et d'axes dirigés par $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$. Supposons que la source soit une impulsion dans la direction dirigée par \mathbf{e}_i à l'instant t' en \underline{x}' i.e. $\mathbf{f}_i(t, \underline{x}) = \delta(t - t') \delta(\underline{x} - \underline{x}') \mathbf{e}_i$ où δ est la distribution de Dirac. La relation (1.5) montre alors que le champ observé est la i -colonne de $\underline{\mathbf{G}}$. Cela signifie que le coefficient situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de $\underline{\mathbf{G}}(t, \underline{x}, t', \underline{x}')$ est la réponse sur la composante i du champ observé à l'instant t en \underline{x} d'une source impulsionnelle dirigée par l'axe j émise à l'instant t' en \underline{x}' . Selon la terminologie de la théorie des systèmes, la fonction de Green est la réponse impulsionnelle du milieu.

1.1.3.2 Rôle de la fonction de Green dans l'identification des milieux.

La fonction de Green est fondamentale en identification active et passive car elle contient de l'information sur les paramètres du milieu. Le processus d'identification, schématisé en figure 1.1, consiste à comparer (via un critère défini selon l'application) la fonction de Green théorique, calculée à partir du modèle du milieu, et la fonction de Green estimée grâce aux données enregistrées par l'instrumentation. Les paramètres estimés sont ceux qui optimisent ce critère.

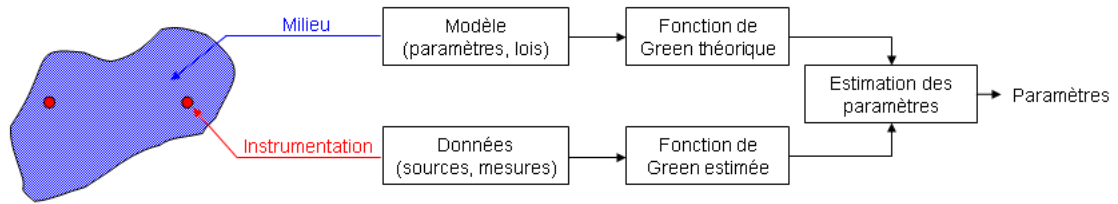


FIGURE 1.1 – Illustration du processus d'identification via la fonction de Green.

1.1.4 Inter-corrélation, bruit blanc et corrélation de Green.

1.1.4.1 Inter-corrélation de deux champs aléatoires.

Les connaissances partielles sur les excitations ambiantes d'un milieu, ainsi que leur complexité, imposent de considérer les sources et les champs générés comme des champs aléatoires. D'autre part, l'identification passive implique l'absence d'émetteur localisé, tout est établi à partir des récepteurs dont il faut confronter les données. L'inter-corrélation est donc un outil adapté pour effectuer cette confrontation dans le sens où c'est une mesure de "ressemblance" entre deux champs aléatoires. L'inter-corrélation de deux champs aléatoires $\underline{\mathbf{u}}$ et $\underline{\mathbf{v}}$ est définie par :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, t', \underline{\mathbf{x}}') := \mathbb{E} [\underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}})\underline{\mathbf{v}}(t', \underline{\mathbf{x}}')^T] \quad (1.6)$$

où \mathbb{E} est l'espérance mathématique. On notera $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}}}$ l'auto-corrélation du champ $\underline{\mathbf{u}}$.

Un champ est stationnaire à l'ordre deux si son auto-corrélation est invariante par translation du temps *i.e.* $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, t', \underline{\mathbf{x}}') = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}}}(t - t', \underline{\mathbf{x}}, 0, \underline{\mathbf{x}}')$. Cela signifie que les propriétés statistiques à l'ordre deux du champ ne changent pas au cours du temps. Pour des champs stationnaires et ergodiques, on peut remplacer l'espérance mathématique dans la définition de l'inter-corrélation par une moyenne temporelle *i.e.* :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\mathbf{u}}(s, \underline{\mathbf{x}})\underline{\mathbf{v}}(t + s, \underline{\mathbf{x}}')^T ds \quad (1.7)$$

où on supprime la deuxième variable temporelle dans l'expression de $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}}}$. Sous ces conditions, on peut, en pratique, estimer l'auto-corrélation du champ $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}')$ en deux points $\underline{\mathbf{x}}$ et $\underline{\mathbf{x}}'$ du milieu via l'inter-corrélation des signaux numériques enregistrés en ces points [Max96].

1.1.4.2 Propagation des champs d'inter-corrélation.

On présente ici des relations vérifiées par les champs d'inter-corrélation $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{f}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{f}}}$ utiles en identification active et passive, où on rappelle que $\underline{\mathbf{u}}$ correspond au champ propagé dans le milieu excité par $\underline{\mathbf{f}}$.

On suppose que le milieu ne fluctue pas, c'est-à-dire que seul le champ source, et par conséquent le champ observé, sont aléatoires. Cette hypothèse est vérifiée pour les milieux invariants par translation du temps. Avec les calculs établis ci-dessous, la combinaison des équations (1.5) et (1.6) mènent aux relations :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{f}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \otimes_T \otimes_S \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{f}}} \quad (1.8)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \otimes_T \otimes_S \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{f}}} \otimes_T \otimes_S \underline{\underline{\mathbf{G}}}^- \quad (1.9)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^-$ est définie par $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^-(t, \underline{\mathbf{x}}, t', \underline{\mathbf{x}}') := \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t', \underline{\mathbf{x}}', t, \underline{\mathbf{x}})^T$.

Calculs. On montre uniquement la relation (1.9), la relation (1.8) s'établit par des calculs similaires. On a :

$$\underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}})\underline{\mathbf{u}}(t', \underline{\mathbf{x}}')^T = \int_{\mathbb{R} \times X} \int_{\mathbb{R} \times X} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, s, \underline{\mathbf{z}})\underline{\mathbf{f}}(s, \underline{\mathbf{z}})\underline{\mathbf{f}}(s', \underline{\mathbf{z}}')^T \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t', \underline{\mathbf{x}}', s', \underline{\mathbf{z}}')^T ds ds' d\underline{\mathbf{z}} d\underline{\mathbf{z}}'$$

En prenant l'espérance de cette équation et en rappelant que le milieu ne fluctue pas, il vient :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}, t', \mathbf{x}') = \int_{\mathbb{R} \times X} \int_{\mathbb{R} \times X} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{z}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\mathbf{f}}(s, \mathbf{z}, s', \mathbf{z}') \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t', \mathbf{x}', s', \mathbf{z}')^T ds ds' d\mathbf{z} d\mathbf{z}'$$

On retrouve bien (1.9).

La relation (1.8) montre que l'inter-corrélation entre le champ et la source peut être vue, d'après (1.5), comme le champ propagé dans le milieu excité par l'auto-corrélation de la source. La relation (1.9) est l'analogie de (1.5) "à l'ordre 2". Elle sera utilisée pour déterminer une expression la corrélation de Green définie plus bas.

1.1.4.3 Bruit blanc et corrélation de Green.

Un bruit blanc est un champ dont la valeur à un instant, une position et une direction donnés est décorrélée des valeurs de ce champ à tous les autres instants, positions et directions. Cela est équivalent à dire que son auto-corrélation est une impulsion spatiale, temporelle et isotrope *i.e.* :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, t', \mathbf{x}') = \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \quad (1.10)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{I}}}_p$ est la matrice identité de taille $p \times p$ et p est le nombre de composantes des champs \mathbf{u} et \mathbf{f} .

Le bruit blanc est un outil théorique, fondamental en identification des systèmes, mais qui n'a pas de réalité physique puisqu'il est d'énergie infinie. Nous indiquons dans l'état de l'art en [section 3](#) comment on peut approcher ce type de bruit en pratique.

La fonction de Green étant la réponse du milieu à une source impulsionnelle, on définit par analogie la corrélation de Green $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ comme l'auto-corrélation du champ propagé pour une source d'auto-corrélation impulsionnelle. La corrélation de Green apparaît donc naturellement dans l'identification passive des milieux puisque c'est l'auto-corrélation d'un bruit blanc propagé.

L'équation (1.9) appliquée à une source blanche, permet d'obtenir une expression de la corrélation de Green :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \otimes_T \otimes_S \underline{\underline{\mathbf{G}}}^- \quad (1.11)$$

L'équation (1.11) montre que la connaissance de la corrélation de Green apporte de l'information sur le milieu. Pour les milieux de propagation classiques, on montrera dans le [chapitre 2](#) et l'[annexe A](#) que la corrélation de Green contient autant d'information que la fonction de Green. Ainsi, le bruit blanc et la corrélation de Green sont à l'identification passive ce que sont respectivement la source impulsionnelle et la fonction de Green à l'identification active.

Précisons que les sources blanches sont aussi importantes en identification active. En effet, en considérant l'équation (1.8) lorsque la source est un bruit blanc, il vient que la fonction de Green peut être estimée par l'inter-corrélation champ-source si la source est effectivement connue, ce qui est la différence majeure entre les techniques actives et passives. On parle, dans ce cas, d'identification (active) en bruit blanc [[Anderson05](#)].

1.1.4.4 Rôle de la corrélation de Green dans l'identification passive. Identité de Ward.

La corrélation de Green est une grandeur récente en identification passive. Elle a été introduite en 2007 par J-L. Lacoume dans [Lacoume07] où il montre que la corrélation de Green apparaît naturellement dans la modélisation des techniques d'identification passive en acoustique. Généralement, l'identification des paramètres passe par la reconstruction de la fonction de Green via une identité qui la relie à l'auto-corrélation d'un bruit blanc propagé (la corrélation de Green). Cette relation est appelée l'identité de Ward (terminologie empruntée à la mécanique quantique [Weaver08]).

L'estimation de la corrélation de Green est une alternative à la reconstruction de la fonction de Green via une identité de Ward. Cependant, l'interprétation et l'exploitation de la corrélation de Green est difficile à partir de l'équation (1.11). L'identité de Ward permet d'obtenir une relation plus simple entre la fonction de Green et la corrélation de Green, laissant ainsi envisager une exploitation plus aisée de cette dernière. L'identité de Ward apparaît alors comme un outil de calcul utile à la compréhension de la corrélation de Green mais elle n'intervient plus dans l'identification.

1.2 Modélisation des milieux élastiques.

Dans cette thèse, on s'intéresse aux milieux élastiques. Cette section a pour but de présenter les équations classiques de la mécanique dans les domaines de l'acoustique, de la sismique et de la mécanique des structures. Ces domaines sont étudiés car ils sont à la base des méthodologies développées dans le chapitre suivant.

1.2.1 Acoustique.

Soit X un milieu à 3 dimensions et \mathbf{p} le champ 3D-1C de pression. On note $\rho(\underline{x})$ et $v(\underline{x})$ respectivement la densité et la célérité du milieu au point \underline{x} . On suppose que le milieu est excité par une force volumique \mathbf{f} causale (nulle aux temps négatifs). Le théorème de Newton et l'équation d'état adiabatique mènent à l'équation suivante [Royer00] :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}(t, \underline{x})}{\partial t^2} - v(\underline{x})^2 \Delta \mathbf{p}(t, \underline{x}) + \frac{v(\underline{x})^2}{\rho(\underline{x})} (\nabla \rho(\underline{x}))^T \nabla \mathbf{p}(t, \underline{x}) = \mathbf{f}(t, \underline{x}) \quad (1.12)$$

où Δ est l'opérateur de Laplace et ∇ le gradient. A cette équation, il faut ajouter la causalité du champ de pression et de sa première dérivée, ainsi que les conditions aux limites. Précisons que l'équation (1.12) est vraie pour les milieux non dissipatifs. On reviendra sur les modèles de dissipation acoustique au chapitre 2.

Pour un milieu supposé homogène (densité constante), et à température constante, on déduit de l'équation (1.12), l'équation de propagation simplifiée :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}(t, \underline{x})}{\partial t^2} - v_0^2 \Delta \mathbf{p}(t, \underline{x}) = \mathbf{f}(t, \underline{x}) \quad (1.13)$$

Dans ce cas, la vitesse de propagation dans le milieu est constante, égale à v_0 . L'équation (1.13) est vérifiée par d'autres champs comme le champ de déplacement 1D-1C d'une corde vibrante, le champ de déplacement 2D-1C de la surface d'une plaque, et toutes les composantes du champ électromagnétique 3D-3C dans le vide.

1.2.2 Sismique.

Soit X un milieu élastique solide. On suppose le milieu homogène et non dissipatif. On note (λ, μ) les paramètres de Lamé et ρ la densité du milieu. Soit $\underline{\mathbf{f}}$ une force vectorielle volumique causale et soit $\underline{\mathbf{u}}$ le champ de déplacement 3D-3C propagé dans le milieu. La loi de Hooke, combinée au théorème de Newton, mène à l'équation de propagation, dite de Navier ou de Navier-Lamé, suivante [Royer00] :

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}})}{\partial t^2} - \frac{\lambda + \mu}{\rho} \nabla \nabla^T \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}}) - \frac{\mu}{\rho} \Delta \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{f}}(t, \underline{\mathbf{x}}) \quad (1.14)$$

La propagation est totalement déterminée en ajoutant les conditions initiales et aux limites.

On peut montrer que $\underline{\mathbf{u}}$ est la contribution d'une onde scalaire 3D-1C de compression, dite onde P, et d'une onde 3D-2C de cisaillement, dite onde S [Royer00]. Les ondes P et S vérifient l'équation d'onde acoustique (1.13) et se propagent respectivement aux vitesses $v_P := \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ et $v_S := \sqrt{\mu/\rho}$.

Dans un milieu solide qui admet une surface libre, on peut prouver l'existence de deux types d'ondes se propageant sur cette surface : les ondes de Rayleigh et les ondes de Love. Les ondes de Rayleigh sont des ondes 3D-2C de polarisation elliptique dans le plan orthogonal à l'interface. Les ondes de Love sont des ondes 3D-1C, transversales aux ondes de Rayleigh [Royer00]. La figure 1.2 schématise la propagation des ondes de volume et de surface. Les ondes de Rayleigh et Love sont très utilisées en sismique.

Il existe d'autres types d'ondes dans les solides : Scholte aux interfaces solide-liquide et Stoneley aux interfaces solide-solide. Nous ne reviendrons pas sur ces types d'ondes dans ce mémoire.

1.2.3 Mécanique des structures.

La propagation dans les structures est décrite par l'équation d'ondes dans les solides. On trouve deux approches majoritaires dans la littérature qui se distinguent par la considération de la structure comme continue ou discrète. Dans le premier cas, l'étude est ramenée à l'équation (1.14) (avec les conditions initiales et aux limites associées) avec éventuellement un modèle de dissipation.

La discrétisation de la structure par des méthodes comme les éléments finis transforme l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle [Gmur97] :

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}(t)}{\partial t^2} + \underline{\mathbf{D}} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}(t)}{\partial t} + \underline{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{u}}(t) = \underline{\mathbf{f}}(t) \quad (1.15)$$

où $\underline{\mathbf{D}}$ est la matrice d'amortissement, $\underline{\mathbf{L}}$ est la matrice de raideur, $\underline{\mathbf{u}}$ et $\underline{\mathbf{f}}$ sont des vecteurs dépendant uniquement du temps et qui sont associés respectivement aux déplacements générés et aux sources volumiques.

Une hypothèse souvent posée, rarement justifiée, est la commutation des deux matrices qui décrivent l'équation (1.15). Dans ce cas, les matrices, symétriques car le milieu est supposé isotrope, sont diagonalisables dans une même base orthonormée. Une telle base est une base de modes propres associée à des fréquences propres qui sont complexes en cas de dissipation. Ces notions rejoignent parfaitement celles employées pour les structures continues. On discutera de ce point plus en détail dans l'annexe A.

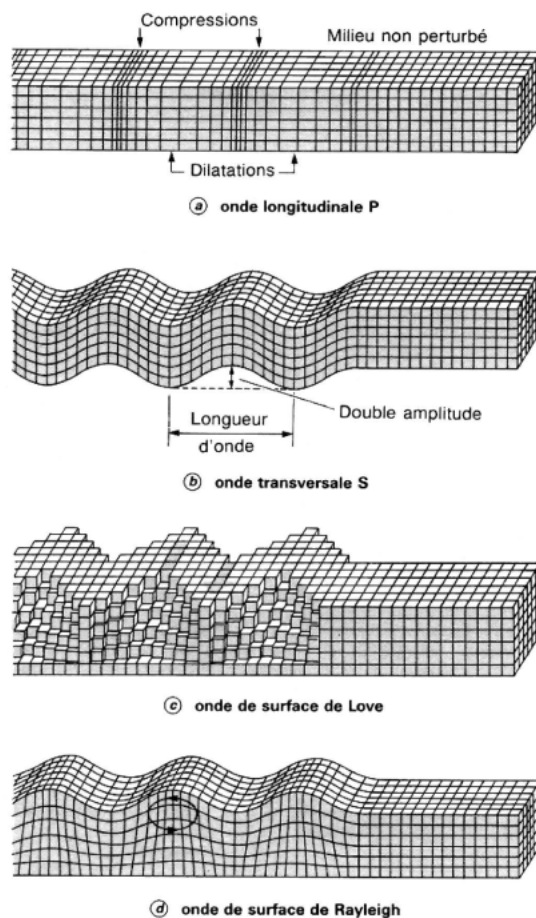


FIGURE 1.2 – Propagation et polarisation des ondes de volume et des ondes de surface.

1.3 État de l'art sur l'identification passive.

Dans cette section, on propose un état de l'art de l'identification passive des milieux de propagation. Les résultats bibliographiques sont présentés en deux sous-sections. La première concerne la modélisation de l'identification passive et les identités de Ward qui en découlent dans les domaines de l'acoustique, de la sismique et de la mécanique des structures. Les validations expérimentales associées à ces théories sont aussi présentées. La deuxième sous-section traite de l'influence des propriétés du bruit ambiant (spectre, répartition spatiale) et de l'instrumentation (synchronisation, bruit propre) sur la qualité de l'identification.

Auparavant, on présente dans une sous-section indépendante les résultats de la littérature qui, selon nous, sont les prémices de l'identification passive.

1.3.1 Prémices.

En premier lieu, rappelons que l'identification passive de milieux intervient dans le cadre plus général qu'est l'identification de systèmes. Un résultat classique dans ce domaine est que la réponse impulsionnelle d'un système peut s'interpréter comme la réponse à un bruit blanc [Eykhoff74]. Ce résultat est clairement une pierre angulaire dans la naissance de l'identification passive des milieux de propagation.

On peut trouver une origine à l'identification passive de milieux par corrélations dans les travaux de Van Cittert (1934) et de Zernicke (1938) rassemblés dans le théorème de Zernicke-Van Cittert [Born99]. En effet, ce théorème prouve la possibilité de déterminer la géométrie d'une pupille à partir de la cohérence (l'inter-corrélation) des signaux enregistrés générés par une source aléatoire qu'est la lumière blanche éclairant la pupille. L'utilisation de sources stochastiques à l'époque est justifiée par l'absence de sources de lumière contrôlées comme les lasers.

Le théorème de fluctuation-dissipation établi par H. B. Callen et T. A. Welton en 1951 [Callen51] peut être considéré comme un résultat pionnier de l'identification passive des systèmes temporels (pas de considérations spatiales) scalaires. Ce théorème relie l'auto-corrélation d'un bruit temporel blanc à la susceptibilité du système, c'est-à-dire sa réponse impulsionnelle. Il établit un lien entre le bruit ambiant thermique et la dissipation du milieu.

1.3.2 Modèles et identités de Ward.

1.3.2.1 Acoustique.

En acoustique, l'identité de Ward établie par de nombreux auteurs, et par des approches différentes, relie la dérivée temporelle de la corrélation de Green et la partie impaire de la fonction de Green :

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \propto \text{Imp } \mathbf{G} \quad (1.16)$$

où \propto est l'opérateur de proportionnalité et $\text{Imp } \mathbf{G}$ est la partie impaire de la fonction de Green³ *i.e.* $\text{Imp } \mathbf{G}(t, \underline{x}, \underline{x}') := 1/2(\mathbf{G}(t, \underline{x}, \underline{x}') - \mathbf{G}(-t, \underline{x}, \underline{x}'))$. L'identité (1.16) est un résultat intéressant à deux titres. Elle exprime la corrélation de Green comme une primitive de la partie impaire de la fonction de Green, ce qui simplifie son interprétation. D'autre part, l'identité montre que la fonction de Green peut être déduite de la corrélation de Green, ce qui est souvent utilisé en identification passive.

Dans [Lobkis01, Weaver01], qui sont les articles pionniers de l'identification passive en acoustique, l'identité (1.16) est démontrée via une approche modale. La décomposition en modes propres du champ fait intervenir des coefficients stochastiques significatifs de la complexité de la source. La décorrélation de ces coefficients à chaque instant et à chaque position permet d'établir l'identité.

J-L. Lacoume dans [Lacoume07] établit une équation de propagation pour l'inter-corrélation du champ propagé. Il en déduit alors une expression de la corrélation de Green dans le domaine des fréquences temporelles et spatiales. Par inversion de Fourier, il obtient (1.16).

Enfin, Y. Colin de Verdière et P. Gouédard dans [Gouédard08] et [ColinDeVerdiere09] utilisent le formalisme des noyaux de Schwartz des opérateurs linéaires. L'équation d'ondes acoustiques

3. La fonction de Green $\mathbf{G}(t, \underline{x}, t', \underline{x}')$ d'un milieu invariant par translation du temps ne dépend que de la différence des temps $t - t'$, par conséquent une seule variable temporelle suffit à la paramétrer.

considérée est plus générale que l'équation classique (1.13), l'opérateur de propagation Δ est remplacé par un opérateur linéaire quelconque. Ce formalisme permet, par exemple, de considérer des milieux hétérogènes décrits par l'équation (1.12). En transformant l'équation d'ondes en un problème de Cauchy [Engel00], les auteurs obtiennent l'identité (1.16).

Indépendamment de l'approche utilisée, une discussion sur la dissipation apparaît inévitable pour établir (1.16). En d'autres termes, l'identité de Ward serait vérifiée uniquement pour les milieux dissipatifs. Cela est conforté par exemple dans [Lacoume07, Weaver08, Guedard08, ColinDeVerdiere09], où il est démontré que le coefficient de proportionnalité est de la forme σ/a où a est un coefficient d'amortissement, effet de la dissipation, et σ est la puissance du bruit ambiant. Mathématiquement, a et σ sont indépendants, impliquant une divergence de l'identité (1.16) pour une dissipation nulle. Cependant, le théorème de fluctuation-dissipation établit une dépendance entre les quantités a et σ lorsque le bruit ambiant provient du milieu lui-même (bruit thermique, par exemple), ceci prouve les limites du modèle décrit par l'équation (1.1) dans lequel la source et le milieu apparaissent comme indépendants. Bien que le théorème de fluctuation-dissipation ne prouve pas que le rapport σ/a tende vers une limite finie pour une faible dissipation, il amène une question importante sur la validité de l'identité de Ward pour les milieux non dissipatifs. Ceci ne sera pas étudié dans ce mémoire.

La dissipation est donc fondamentale en identification passive. Le modèle le plus utilisé est une dissipation constante [Lacoume07, Weaver08, Guedard08, ColinDeVerdiere09], c'est-à-dire, l'ajout d'un terme de la forme $a\partial/\partial t$ dans l'équation de propagation. Cependant, ce modèle a peu de réalité physique selon [Landau90] qui classe les dissipations dans les milieux élastiques.

Au niveau expérimental, l'identité de Ward (1.16) a été validée dans des configurations différentes en termes de milieux, de provenance de bruits et de fréquences.

Dans [Lobkis01], l'identité est validée par écoute du bruit thermique enregistré dans la plage 100 kHz - 900 kHz par deux sondes piézoélectriques à l'interface d'un bloc d'aluminium. La validation est obtenue par comparaison avec la fonction de Green estimée par pulse-echo.

L'identité est validée dans [Derode03] pour un milieu hétérogène excité par un ensemble de sources ponctuelles rayonnant autour de 3.1 MHz.

On peut également citer l'article [Sabra05], qui valide la relation avec une instrumentation immergée dans l'océan pacifique et qui écoute le bruit de poissons migrateurs rayonnant dans la bande 350 Hz - 700 Hz.

On trouve dans la littérature d'autres validations expérimentales, par exemple dans l'état de l'art de [Larose06]. De ces résultats, il faut retenir la robustesse de l'identité (1.16) vis-à-vis du type de milieux et du type de bruit. Sur ce dernier point, la discussion sera poursuivie dans la sous-section suivante.

1.3.2.2 Sismique.

L'approche de l'identification passive en sismique est identique à celle de l'acoustique. Le principe consiste à retrouver la fonction de Green via une identité de Ward et l'inter-corrélation d'un bruit ambiant assimilable à un bruit blanc. On trouve toutefois un article antécédent à cette approche dans lequel des temps de vol sont reconstruits à partir du bruit héliosismométrique [Duvall93]. Cet article est un pionnier de l'identification passive de paramètres dans les milieux mécaniques.

La bibliographie est riche en identification passive des milieux sismiques, nommée aussi in-

terférométrie sismique par analogie avec l'optique. Le formalisme utilisé, tout d'abord pour un milieu non dissipatif [Wapenaar04] puis adapté pour des milieux dont la propagation est décrite par une équation très générale [Snieder07], permet d'établir une identité de Ward pour des milieux linéaires complexes. L'équation de propagation est formulée ainsi :

$$\left[\sum_{i=1}^N a_i(t, \underline{x}) \otimes_T \frac{\partial^i}{\partial t^i} - H(t, \underline{x}) \otimes_T \right] \mathbf{u}(t, \underline{x}) = \mathbf{f}(t, \underline{x}) \quad (1.17)$$

Cette équation traduit la linéarité du milieu, non nécessairement invariant par translation du temps. Le théorème de réciprocité spatiale [Aki02] est assuré par le caractère auto-adjoint de l'opérateur H [Snieder07]. L'équation (1.17) est aussi valide pour des ondes vectorielles.

L'identité de Ward établie dans [Snieder07] décrit rigoureusement la contribution de la corrélation de Green (non mentionnée ainsi par les auteurs) au sein et à la surface du volume dans la reconstruction de la fonction de Green. Les autres articles de K. Wapenaar et R. Snieder sont basés sur le même modèle (1.17) et le même principe : la réciprocité spatiale (cf. [Aki02] pour les milieux élastiques solides). L'analogie avec le théorème optique, établi en mécanique quantique pour les milieux diffus [Wapenaar10-1], permet de conforter les résultats obtenus par les auteurs.

Le formalisme développé par les équipes de R. Snieder et K. Wapenaar a permis d'appliquer les techniques d'interférométrie sismique à l'interférométrie électromagnétique [Slob07]. On trouvera dans [Wapenaar10-2] et [Wapenaar10-3] un état de l'art complet des techniques et des applications de l'interférométrie sismique.

Une approche pionnière en sismologie [Campillo03] basée sur la décomposition d'une onde se propageant dans un solide en une contribution d'ondes P et S, permet de réutiliser les résultats établis en acoustique par R. Weaver et O. Lobkis [Lobkis01, Weaver01] dans le cadre sismique. En revanche, contrairement à l'acoustique, l'instrumentation en sismique est généralement en surface du milieu étudié. La difficulté provient de l'enfouissement de l'instrumentation : dureté du matériau, profondeur d'étude, etc.

Indépendamment des ondes d'intérêt : surfaciques [Roux05] ou volumiques [Campillo03], les techniques d'interférométrie sismique basées sur les résultats obtenus en acoustique nécessitent préalablement de séparer la contribution de différents types ondes.

L'article [Campillo03] suggère de calculer l'inter-corrélation des signaux numérisés uniquement sur 1-bit. L'intérêt est d'éviter que les corrélations de bruits ambiants puissants (premières arrivées de séismes) dominant dans l'accumulation des corrélations de bruits ambiants moins puissants (bruit sismique, codas sismiques). Ce résultat a l'avantage de minimiser l'information à stocker et à transmettre.

F.J. Sanchez-Sesma et M. Campillo dans [SanchezSesma06] établissent des identités de Ward pour les ondes élastiques pour toutes les dimensions : 1, 2 et 3. Le modèle est l'équation de propagation classique des ondes de pression (1.12) et de déplacement (1.14) sans amortissement. La contribution de tous les bruits ambiants est vue comme la contribution d'ondes planes non corrélées provenant de toutes les directions. Le théorème d'équipartition permet de relier l'énergie des ondes P à l'énergie des ondes S via l'étude de la densité des modes propres pour les deux types d'ondes. Ce résultat est utilisé par les auteurs dans leur calcul de l'identité de Ward.

1.3.2.3 Mécanique des structures.

En identification passive des structures, les longueurs d'ondes sont grandes vis-à-vis de la taille des structures. Cela est la conséquence de la rapidité de propagation des ondes dans les solides

[Royer00] et des basses fréquences d'excitations ambiantes : vent qq Hz - 100 Hz [Mitsuyasu74], vagues qq Hz - 20 Hz [Daniell99], le trafic routier qq Hz - 100 Hz [Cremona04], trafic ferroviaire 4 Hz - qq kHz [Eitzenberger08], bruit sismique qq Hz - 1 kHz [Walkinshaw05]. Il faut ajouter à ces bruits l'activité humaine : marche, cyclisme, travaux de rénovation, etc. moins puissante mais qui peut couvrir la bande qq Hz - qq kHz [Larose06]. La propagation modale⁴ est alors adaptée pour étudier les propriétés mécaniques d'un ouvrage, on parle d'analyse modale. Le suivi des paramètres modaux (modes propres, fréquences propres et amortissements propres) est en effet significatif de l'évolution globale de la structure.

Selon ce modèle, C.R. Farrar et G.H. James III établissent dans [Farrar99] l'expression de l'inter-corrélation entre deux capteurs situés sur la structure discrétisée mesurant la propagation d'un bruit blanc. C'est en fait la corrélation de Green pour un système temporel décrit par l'équation (1.15). Les auteurs montrent que les pulsations propres sont les pôles de la corrélation de Green de ce système. Il est alors aisé d'estimer les éléments modaux de la structure avec des signaux numérisés. Cette technique a été validée avec succès en simulations, par exemple dans [Yang04], et sur des structures réelles [Farrar99] (pont I-40 au-dessus de Rio Grande aux Etats-Unis), [Cremona04] (pont de Avesnes-Sur-Helpes en France), ou encore [Siringoringo08] (pont Hakucho au Japon).

On trouvera dans [Snieder09] et [Prieto10] une deuxième approche de l'utilisation du bruit ambiant dans la surveillance des immeubles (assimilés à des poutres verticales unidimensionnelles). Ces travaux sont basés sur les résultats de l'identification passive en sismologie présentés plus haut.

1.3.3 Bruit ambiant : propriétés et influence.

1.3.3.1 Du bruit ambiant au bruit blanc.

L'approche classique [Campillo06] pour justifier que le bruit ambiant converge vers une source blanche temporelle, spatiale et isotrope est de voir le milieu comme un système dynamique chaotique. En effet, selon le théorème d'équipartition, il existe un temps après lequel toute source cohérente piégée dans le milieu devient blanche. Ce temps, appelé temps de mélange en acoustique [Polack88] ou plus généralement temps de Thouless [Chabanov01], dépend de la bande de fréquence, de la géométrie du milieu et des hétérogénéités. Avec ces considérations, le bruit ambiant est assimilé à un bruit blanc lorsque l'on moyenne ses contributions pendant un temps suffisamment long [Lobkis01, Campillo06, Guedard08].

L'argument d'équipartition pour justifier l'obtention d'un bruit blanc à partir de bruits ambiants ne fait pas autorité dans toute la communauté de l'identification passive. En effet, il a été montré dans [Snieder10] que l'équipartition pouvait ne pas être suffisante pour obtenir un bruit blanc. En revanche, elle peut suffire à l'identification du milieu. Cela montre la difficulté à déterminer les propriétés du bruit ambiant et du milieu nécessaires et suffisantes à l'identification passive.

1.3.3.2 Répartition spectrale et spatiale du bruit ambiant.

L'identification passive est basée sur l'inter-corrélation de bruit ambiant qui approche un bruit blanc. Nous avons déjà précisé qu'un bruit blanc au sens strict n'avait pas de réalité physique

4. La propagation modale est l'effet des interférences entre les ondes propagées et réfléchies aux interfaces du milieu.

(puisque'il est d'énergie infinie). En pratique, la blancheur temporelle est seulement nécessaire dans la bande de fréquence d'intérêt, limitée par l'instrumentation et surtout par le spectre du bruit ambiant.

En plus de la répartition spectrale, la répartition spatiale du bruit influence l'estimation de la fonction ou de la corrélation de Green. Lorsque que les sources de bruit ambiant ne sont pas parfaitement réparties, ce qui est le cas en pratique (cf. [Sabra05-3] par exemple), les champs estimés sont distordus et l'identification à partir de ces champs peut être difficile, voire impossible. Il a été observé en simulation et expérimentalement [Derode03, Larose06], qu'une répartition spatiale lacunaire des sources pouvait être compensée par la complexité du milieu. En effet, plus un milieu est complexe, plus il va mélanger et "isotropiser" les ondes propagées. Les interfaces et les hétérogénéités engendrent des sources virtuelles qui contribuent à l'homogénéisation de la répartition des sources. Cet argument est fondamental en sismique où l'instrumentation est généralement en surface [Larose06] et non en volume.

En pratique, on observe souvent des dissymétries dans l'inter-corrélation du bruit ambiant estimée, par exemple dans [Sabra05-3] où un réseau de capteurs est immergé dans la côte sud de la Californie et dont la répartition des sources de bruit ambiant (vagues et poissons migrateurs) est limitée par les parois de la falaise. Ce défaut d'isotropie du bruit, attribué à une répartition imparfaite des sources, affecte souvent uniquement l'amplitude des parties causale et anti-causale de la fonction de Green reconstruite, ce qui permet tout de même de faire l'identification du milieu [Sabra05, Sthely07, Guedard08].

De nombreux travaux actuels portent sur l'estimation de la répartition spatiale du bruit afin de corriger la fonction de Green reconstruite par corrélations de bruit ambiant. R. Weaver [Weaver11] nomme ce phénomène "ponderosity", que nous traduirons par "pondérosité", ce qui se comprend bien en observant la formule (1.9). En effet, lorsque la source \underline{f} n'est pas parfaitement blanche, alors $\underline{\underline{C}}_{\underline{f}}$ pondère les corrélations généralisées et distord la corrélation de Green estimée.

1.3.3.3 Temps de convergence et erreur d'estimation.

La qualité d'un estimateur peut être jugée sur le temps de convergence et sur l'erreur entre le paramètre estimé et théorique. Or, comme il a déjà été précisé, l'obtention des valeurs théoriques des paramètres du milieu, ou de la fonction et de la corrélation de Green, est difficile. L'estimation est généralement validée par comparaison avec une estimation active ou un modèle. La validation est donc relative aux méthodes employées pour la comparaison.

Le temps de convergence des méthodes d'identification passive dépend de la répartition spectrale du bruit ambiant et du temps de mélange du milieu [Campillo06]. Les bruits de mesures, comme les bruits électroniques, contribuent à l'erreur d'estimation [Lobkis01]. De même, les répartitions spatiales du bruit ambiant et de l'instrumentation [Derode03, Sabra05, Larose06, Guedard08] ont une influence significative sur la qualité de l'estimation. On retrouve ici l'effet du phénomène de pondérosité.

On trouvera une étude complète de l'erreur dans l'estimation de temps de trajet par identification passive dans [Sthely07]. En plus des propriétés spectrales et spatiales du bruit, cet article prend en compte des problèmes de dérive d'horloge, de désynchronisation et de modification du milieu au cours du temps. Ces trois points, supposés maîtrisés en théorie, peuvent ne pas l'être en pratique.

On montrera dans le chapitre suivant que l'erreur d'estimation peut aussi provenir d'une erreur dans l'identité de Ward. En effet, l'identité (1.16) est souvent considérée comme un principe et par conséquent est utilisée pour tout type de milieux. On montrera que pour les milieux visco-élastiques, l'identité de Ward est différente de l'identité (1.16).

1.4 Conclusion.

Ce premier chapitre a introduit les concepts et les applications de l'identification passive (sections 1.1 et 1.2). L'étude bibliographique présentée à la section 1.3 montre que seul le modèle de dissipation constante a été considéré dans l'établissement d'une identité de Ward. Cependant, cette forme de dissipation n'a pas de réalité physique [Landau90] dans les milieux élastiques. En pratique et pour ces milieux, la dissipation visqueuse joue un rôle important dans la propagation dans la bande de fréquence considérée (de quelques Hz à quelques kHz) [Lide97]. Le chapitre suivant propose alors d'établir une expression de la corrélation de Green et une identité de Ward associées aux champs de pression et de déplacement pour les milieux visco-élastiques. Ces résultats seront fondamentaux pour justifier la portabilité des méthodes d'identification passive pour le SHM à partir d'une instrumentation enfouie.

D'autre part, l'étude bibliographique montre un dénominateur commun dans l'approche de l'identification passive pour des domaines a priori différents : acoustique, sismique d'une part et génie civil d'autre part. Les équations de propagation présentent en effet une forme commune :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} + \mathcal{L} \right] \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.18)$$

où \mathcal{L} et \mathcal{D} sont des opérateurs spatiaux respectivement de dissipation et de propagation. Le chapitre 2 démontre, dans sa première section, une identité de Ward générale associée à l'équation (1.18) pour des opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{D} linéaires. Cette identité de Ward à l'avantage de prendre en compte l'aspect vectoriel des ondes (s'il existe) et d'intégrer un modèle de dissipation plus complexe et plus réaliste que le modèle classiquement utilisé *i.e.* le modèle constant.

Chapitre 2

Identification passive des milieux visco-élastiques.

Sommaire

2.1	Identité de Ward générale.	31
2.1.1	Notions sur les opérateurs linéaires.	31
2.1.2	Opérateur d'ondes général.	32
2.1.3	Identité de Ward.	34
2.2	Propagation visco-élastique.	36
2.2.1	Équations et interprétations.	36
2.2.2	Matrice de dispersion et relation de dispersion.	38
2.2.3	Fonctions de Green visco-acoustique et visco-élastique dans des milieux libres.	39
2.3	Corrélations de Green et identités de Ward visco-acoustique et visco-élastique.	42
2.3.1	Calculs dans le domaine fréquentiel.	42
2.3.2	Calculs dans le domaine fréquence-espace.	43
2.3.3	Approximations dans le domaine temps-espace.	45
2.3.4	Bilan sur les résultats théoriques.	46
2.4	Expérimentations en acoustique.	46
2.4.1	Instrumentation.	47
2.4.2	Estimation active de la fonction de Green.	48
2.4.3	Estimation passive de la corrélation de Green : méthode.	50
2.4.4	Estimation passive de la corrélation de Green : caractérisation.	55
2.4.5	Exploitation de la corrélation de Green.	60
2.5	Expérimentations en sismique.	70
2.5.1	Instrumentation et modèle de mesure.	70
2.5.2	Modèle d'inter-corrélation et attitudes relatives.	71
2.6	Conclusion.	72

L'étude des milieux élastiques solides est essentielle pour le SHM (Structural Health Monitoring). Dans ces milieux, le modèle de dissipation constante ne s'applique pas et l'équation de propagation vérifiée par le champ de déplacement est vectorielle. Ce chapitre propose une adaptation des résultats existants en identification passive qui prend en compte un modèle de dissipation pour les champs de pression et de déplacement réaliste : la viscosité. La formalisation proposée prend en compte la polarisation des ondes dans l'étude du champ de déplacement, ce qui permettra d'obtenir une corrélation de Green et une identité de Ward vectorielle. L'objectif est de montrer la faisabilité du SHM passif avec une instrumentation enfouie qu'elle soit scalaire (réseau de microphones, par exemple) ou vectorielle (réseau d'accéléromètres tri-axiaux, par exemple).

On établit au préalable (section 2.1) une identité de Ward pour une équation de propagation linéaire générale. Ces développements, inspirés de [ColinDeVerdiere09], montrent le rôle fondamental de la dissipation en identification passive et justifient la robustesse des estimations dans les applications expérimentales.

On rappelle dans la section 2.2 les lois de propagation des champs de pression et de déplacement dans les milieux visco-élastiques. On décrit aussi les fonctions de Green associées dans différents domaines de représentation. On explicite ensuite la corrélation de Green visco-élastique pour les deux types d'ondes (pression et déplacement) dans la section 2.3.

L'identité de Ward visco-élastique, obtenue à l'aide de l'identité de Ward générale établit dans la section 2.2, fait apparaître une difficulté dans la reconstruction de la fonction de Green à partir de la corrélation de Green. Cette difficulté provient de la forme de l'opérateur de dissipation visqueuse pour les champs de pression et de déplacement. Elle est contournée dans la section 2.3 à l'aide de l'approximation d'une faible atténuation et d'un champ lointain (pour le déplacement).

La section 2.4 concerne la validation expérimentale des résultats théoriques développés dans les sections précédentes en acoustique et en sismique. On montre que l'identité de Ward établie pour les milieux visqueux donne des meilleurs résultats que l'identité de Ward classique (1.16) en comparant la fonction de Green du milieu, estimée par une méthode active, à la corrélation de Green estimée par des méthodes passives. Cette observation est renforcée avec une étude approfondie de l'estimation de temps de vol. Ces résultats expérimentaux, en plus de valider l'approche développée et relatée précédemment, permettent de caractériser les erreurs d'estimation sur les paramètres reconstruits. Cela est fondamental pour les chapitres suivants qui utilisent ces paramètres pour la reconstruction de géométrie de réseaux de capteurs (chapitres 3 et 4) et le SHM (chapitre 5).

2.1 Identité de Ward générale.

On démontre dans cette section une identité de Ward générale qui permet de prendre en compte des modèles de dissipation et de propagation complexes. Cette identité fait intervenir la théorie des opérateurs linéaires dont nous rappelons les notions nécessaires en début de section. Le formalisme utilisé permet d'approfondir l'interprétation de la corrélation de Green ainsi que son rôle dans la propagation.

2.1.1 Notions sur les opérateurs linéaires.

2.1.1.1 Norme et produit scalaire sur les champs.

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un milieu de propagation à n dimensions. On définit la norme pour les champs $\underline{\mathbf{u}}$ du milieu à p composantes (champ $nD-pC$) :

$$\|\underline{\mathbf{u}}\| := \left(\int_{\mathbb{R} \times X} \|\underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}})\|_2^2 dt d\underline{\mathbf{x}} \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^p . On note L^2 l'espace des champs de norme finie. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induit par la norme $\|\cdot\|$ est :

$$\langle \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \rangle := \int_{\mathbb{R} \times X} \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}})^T \underline{\mathbf{v}}(t, \underline{\mathbf{x}}) dt d\underline{\mathbf{x}} \quad (2.2)$$

Dans toute la suite de ce chapitre, les champs considérés seront dans L^2 .

2.1.1.2 Opérateur linéaire sur les champs.

Un opérateur linéaire \mathcal{A} est un opérateur tel que pour tous champs $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) \in D(\mathcal{A})^2$ et tout réel λ :

$$\mathcal{A}(\underline{\mathbf{u}} + \lambda \underline{\mathbf{v}}) = \mathcal{A}(\underline{\mathbf{u}}) + \lambda \mathcal{A}(\underline{\mathbf{v}}) \quad (2.3)$$

$D(\mathcal{A})$ est le domaine de \mathcal{A} , c'est l'ensemble des champs qui ont une image par \mathcal{A} . Le domaine $D(\mathcal{A})$ contient en particulier les conditions initiales et aux limites. On notera désormais $\mathcal{A}\underline{\mathbf{u}}$ l'action de \mathcal{A} sur tout champ $\underline{\mathbf{u}}$.

L'adjoint \mathcal{A}^* d'un opérateur linéaire \mathcal{A} , lorsqu'il existe, est défini par :

$$\forall (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) \in D(\mathcal{A}) \times D(\mathcal{A}^*), \langle \mathcal{A}\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \rangle = \langle \underline{\mathbf{u}}, \mathcal{A}^*\underline{\mathbf{v}} \rangle \quad (2.4)$$

Un opérateur est normal s'il commute avec son adjoint. Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ (resp. $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$), \mathcal{A} est auto-adjoint (resp. anti-auto-adjoint).

2.1.1.3 Opérateurs intégraux.

Un opérateur intégral ou opérateur à noyau de Schwartz est un opérateur linéaire \mathcal{A} tel qu'il existe une fonction notée $[[\mathcal{A}]]$ qui vérifie pour tout champ $\underline{\mathbf{u}} \in D(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{A}\underline{\mathbf{u}} = [[\mathcal{A}]] \otimes \underline{\mathbf{u}} := \int [[\mathcal{A}]](\underline{\xi}, \underline{\xi}') \underline{\mathbf{u}}(\underline{\xi}') d\underline{\xi}' \quad (2.5)$$

$[[\mathcal{A}]]$ est une fonction de deux variables à valeurs dans l'espace des matrices de taille $p \times p$ où p est le nombre de composantes de $\underline{\mathbf{u}}$, c'est le noyau de Schwartz de \mathcal{A} . Les noyaux de Schwartz généralisent la représentation d'un opérateur linéaire par une matrice en dimension finie.

Exemple. En dimension finie, pour toute matrice $\underline{\mathbf{A}}$ de taille $n \times p$ et pour tout vecteur $\underline{\mathbf{u}}$ à p composantes, le i -ème coefficient du vecteur image est : $[\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{u}}]_i = \sum_{k=1}^p [\underline{\mathbf{A}}]_{i,k} [\underline{\mathbf{u}}]_k$. On retrouve bien une expression similaire à (2.5), la différence réside dans la variable de sommation qui est toujours discrète et finie dans le cas de la dimension finie.

Les équations (1.1)¹ et (1.5)² montrent que la fonction de Green d'un milieu linéaire est le noyau de l'opérateur \mathfrak{G} . Son existence est justifiée par le théorème de superposition supposé vérifié par les milieux étudiés.

Pour un opérateur intégral \mathcal{A} qui admet un adjoint, on a la relation suivante :

$$\forall(\underline{\xi}, \underline{\xi}'), [[\mathcal{A}^*]](\underline{\xi}, \underline{\xi}') = [[\mathcal{A}]](\underline{\xi}', \underline{\xi})^T \quad (2.6)$$

Cette égalité sera utilisée dans la section suivante pour traduire l'hypothèse de réciprocité spatiale d'un milieu sur l'opérateur d'ondes.

2.1.2 Opérateur d'ondes général.

2.1.2.1 Expression.

On considère un milieu de propagation d'ondes scalaires ou vectorielles. On suppose que la propagation est décrite par l'opérateur d'ondes suivant :

$$\mathcal{N} := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{I} + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} + \mathcal{L} \quad (2.7)$$

\mathcal{L} et \mathcal{D} sont des opérateurs linéaires spatiaux. \mathcal{L} est l'opérateur de propagation et \mathcal{D} est l'opérateur de dissipation. \mathcal{I} est l'opérateur identité. Les conditions aux limites sont contenues dans les domaines des opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{D} . En plus des conditions aux limites, on impose que les champs du domaine de \mathcal{N} soient causaux et nuls au voisinage du temps infini. Ce formalisme englobe toutes les équations de propagation classiques pour des milieux linéaires et invariants par translation du temps.

La partie temporelle de l'opérateur d'ondes \mathcal{N} est un opérateur différentiel à coefficients constants. Cela traduit l'invariance par translation du temps du milieu associé.

2.1.2.2 Propriétés et fonction de Green.

Soit $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ la fonction de Green de l'opérateur \mathcal{N} . \mathcal{N} étant invariant par translation du temps, $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ est uniquement paramétrée par les triplets $(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') \in \mathbb{R} \times X \times X$. Si le milieu vérifie le théorème de réciprocité spatiale, comme les milieux élastiques [Aki02], alors pour tout triplet $(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') \in \mathbb{R} \times X \times X$, on a :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') = \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{\mathbf{x}}', \underline{\mathbf{x}})^T \quad (2.8)$$

-
1. $\underline{\mathbf{u}} = \mathfrak{G}(\underline{\mathbf{f}})$
 2. $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \otimes_T \otimes_S \underline{\mathbf{f}}$

Cette égalité implique, selon l'équation (2.6), que l'opérateur d'ondes \mathcal{N} est spatialement auto-adjoint. En conséquence de ce résultat, les opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{D} sont auto-adjoints.

On fait l'hypothèse que les opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{D} commutent. Cette hypothèse, vérifiée pour toutes les équations d'ondes classiques, est fondamentale dans les développements présentés dans ce chapitre. Une perspective intéressante, non abordée dans ce mémoire, serait de relier si possible la commutation des opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{D} et un principe physique.

2.1.2.3 Opérateur adjoint.

On déduit des propriétés sur l'opérateur \mathcal{N} évoquées ci-dessus, l'expression de son adjoint, noté dans ce cadre \mathcal{N}^- :

$$\mathcal{N}^- = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{I} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} + \mathcal{L} \quad (2.9)$$

La différence entre l'opérateur d'ondes et son adjoint provient de l'opérateur $\partial/\partial t$ qui est anti-auto-adjoint pour des champs causaux et nuls au voisinage du temps infini.

\mathcal{N}^- peut s'interpréter comme l'opérateur des ondes renversées temporellement. En effet, soit $\underline{\mathbf{u}}^-(t, \underline{\mathbf{x}}) := \underline{\mathbf{u}}(-t, \underline{\mathbf{x}})$ et $\underline{\mathbf{f}}^-(t, \underline{\mathbf{x}}) := \underline{\mathbf{f}}(-t, \underline{\mathbf{x}})$ les champs d'onde et source renversés temporellement. On a alors la relation de propagation :

$$\mathcal{N}^- \underline{\mathbf{u}}^- = \underline{\mathbf{f}}^- \quad (2.10)$$

Cette égalité permet d'obtenir la fonction de Green anti-causale $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^-$ de l'opérateur \mathcal{N}^- , en fonction de $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^-(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') = \underline{\underline{\mathbf{G}}}(-t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') \quad (2.11)$$

pour tout triplet $(t, \underline{\mathbf{x}}', \underline{\mathbf{x}})$. En utilisant la relation (2.8), on retrouve l'expression de fonction $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^-$ déjà introduite au chapitre 1 :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^-(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') = \underline{\underline{\mathbf{G}}}(-t, \underline{\mathbf{x}}', \underline{\mathbf{x}})^T \quad (2.12)$$

L'expression de $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^-$ dans (2.11) facilite l'interprétation de cette fonction en tant que version retournée temporellement de la fonction de Green.

2.1.2.4 Équations de propagation de la fonction et de la corrélation de Green.

Selon l'équation (1.5), la fonction de Green est la réponse impulsionnelle du milieu. Elle vérifie donc l'équation de propagation définie par \mathcal{N} lorsque que la source est une impulsion temporelle, spatiale et isotrope :

$$\mathcal{N} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') = \delta(t) \delta(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}') \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \quad (2.13)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{I}}}_p$ est la matrice identité de taille $p \times p$.

De l'équation de propagation vérifiée par la fonction de Green (2.13) et de l'expression (1.11)³, on déduit (cf. calculs ci-dessous) une équation de propagation vérifiée par la corrélation de Green :

$$\mathcal{N}^- \mathcal{N} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') = \delta(t) \delta(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}') \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \quad (2.14)$$

3. $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \otimes_T \otimes_S \underline{\underline{\mathbf{G}}}^-$

Calculs. En utilisant l'expression (1.11) de la corrélation de Green, on a :

$$\mathcal{N}^- \mathcal{N} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') = \mathcal{N}^- \left[\int_{\mathbb{R} \times X} (\mathcal{N} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t-s, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}})) \underline{\underline{\mathbf{G}}}^-(s, \underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{x}}') ds d\underline{\mathbf{z}} \right] \quad (2.15)$$

En injectant dans cette expression l'équation (2.13) appliquée au triplet $(t-s, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}})$, il vient :

$$\mathcal{N}^- \mathcal{N} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') = \mathcal{N}^- \underline{\underline{\mathbf{G}}}^-(t, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}') \quad (2.16)$$

En rappelant que $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^-$ vérifie l'équation (2.10) pour la source $\underline{\underline{\mathbf{f}}}^-(t, \underline{\mathbf{x}}) := \delta(-t)\delta(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}')$, on retrouve bien l'équation (2.14).

L'équation (2.14) montre que la corrélation de Green peut être vue comme une réponse impulsionnelle (non causale) du milieu virtuel dont $\mathcal{N}^- \mathcal{N}$ est l'opérateur d'ondes. Autrement dit, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ est le noyau de l'opérateur $(\mathcal{N}^- \mathcal{N})^{-1}$.

L'opérateur $\mathcal{N}^- \mathcal{N}$ est souvent interprété par une analogie avec le retournement temporel [Gouedard08] car l'opérateur \mathcal{N} propage la source puis \mathcal{N}^- propage l'onde reçue et retournée temporellement. En fait, $\mathcal{N}^- \mathcal{N}$ décrit la propagation de l'inter-corrélation du champ :

$$\mathcal{N}^- \mathcal{N} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\underline{\mathbf{f}}} \quad (2.17)$$

Cette équation, établie identiquement à l'équation (2.14), est une généralisation de l'équation proposée dans [Born99] pour l'équation de d'Alembert sans source puis dans [Lacoume07] pour l'équation de d'Alembert avec source. Elle permet d'interpréter l'opérateur $\mathcal{N}^- \mathcal{N}$ comme un opérateur d'ondes d'un milieu virtuel, celui où les inter-corrélations se propagent.

2.1.3 Identité de Ward.

2.1.3.1 Un lemme fondamental.

On énonce et démontre ici un lemme vérifié par certains opérateurs linéaires et qui sera à la base de l'identité de Ward établie plus bas.

Pour un opérateur linéaire \mathcal{A} , on note $\text{Imp } \mathcal{A} := 1/2(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ la partie impaire de \mathcal{A} . On peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 2.1. Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire normal, inversible et de partie imaginaire inversible. On a alors l'égalité suivante :

$$(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1} = -(\text{Imp } \mathcal{A})^{-1} \text{Imp } (\mathcal{A}^{-1}) \quad (2.18)$$

Preuve. L'égalité (2.18) est équivalente à l'égalité $(\text{Imp } \mathcal{A}) (\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1} = -\text{Imp } (\mathcal{A}^{-1})$. Le développement du membre de gauche utilisant la définition de la partie impaire d'un opérateur, la normalité de l'opérateur \mathcal{A} ainsi que l'égalité $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A}^{*-1}$ mène aisément au membre de droite.

Pour un opérateur intégral \mathcal{A} qui vérifie les hypothèses du [lemme 2.1](#), on peut déduire l'égalité vérifiée par les noyaux :

$$[[(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1}]] = -(\text{Imp } \mathcal{A})^{-1} (\text{Imp } [[\mathcal{A}^{-1}]]) \quad (2.19)$$

où la partie impaire du noyau d'un opérateur \mathcal{A} est définie par $\text{Imp } [[\mathcal{A}]] := 1/2 ([[\mathcal{A}]] - [[\mathcal{A}^*]])$.

2.1.3.2 Application à l'opérateur d'ondes.

L'opérateur d'ondes \mathcal{N} vérifie les hypothèses du [lemme 2.1](#). L'inversibilité est justifiée par l'argument physique qui attribue à toute source d'excitation une unique onde propagée. Les propriétés admises de commutativité des opérateurs de propagation et de dissipation, ainsi que les expressions [\(2.7\)](#) et [\(2.9\)](#) montrent que \mathcal{N} est normal *i.e.* qui commute avec son adjoint. Enfin, la partie impaire de \mathcal{N} est $\partial \mathcal{D} / \partial t$ qui est bien inversible pour les milieux dissipatifs isotropes.

La fonction de Green est le noyau de \mathcal{N}^{-1} et la corrélation de Green est le noyau de $(\mathcal{N}^{-1} \mathcal{N})^{-1}$. Ainsi, en appliquant l'égalité [\(2.19\)](#) avec $\mathcal{A} = \mathcal{N}$, on établit l'identité de Ward :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}}{\partial t} = -\mathcal{D}^{-1} \text{Imp } \underline{\underline{\mathbf{G}}} \quad (2.20)$$

Cette identité de Ward est générale et importante pour de nombreux points que nous exposons maintenant.

Tout d'abord, elle montre le rôle fondamental de la dissipation dans la relation entre la fonction de Green et la corrélation de Green. Cela implique que pour une dissipation non constante (comme la dissipation visqueuse, cf. section suivante), la dérivée de l'auto-corrélation d'un bruit blanc propagé n'est pas proportionnelle à la partie impaire de la fonction de Green.

D'autre part, l'identité de Ward [\(2.20\)](#) est vraie pour tout milieu linéaire qu'il soit borné ou non borné, homogène ou hétérogène. Elle ne dépend que de l'opérateur de dissipation à l'opposé de la fonction de Green et de la corrélation de Green dont l'expression change en fonction des expressions des opérateurs de dissipation et de propagation et de leur domaine.

L'identité de Ward [\(2.20\)](#) est un outil de calcul qui permet en particulier de linéariser l'expression de la corrélation de Green, qui peut être vue comme le "carré" de la fonction de Green à l'aide de l'équation [\(1.11\)](#).

Enfin, l'identité [\(2.20\)](#) permet de retrouver le résultat classique en acoustique qui établit une relation de proportionnalité entre la dérivée temporelle de la corrélation de Green et la partie impaire de la fonction de Green pour une dissipation constante [[Lacoume07](#), [Weaver08](#), [Gouedard08](#), [ColinDeVerdiere09](#)].

On notera que l'exploitation directe de l'identité [\(2.20\)](#) est difficile pour un opérateur de dissipation quelconque. Seule une discrétisation ou l'ajout d'hypothèses sur cet opérateur de dissipation permettront une exploitation plus aisée (analytique, par exemple) de cette identité. Ceci sera illustré dans les sections suivantes qui concernent les milieux élastiques où on utilisera l'hypothèse d'une faible atténuation pour simplifier l'identité de Ward [\(2.20\)](#).

Par transformée de Fourier sur la variable temporelle, on établit la version fréquentielle de l'identité de Ward [\(2.20\)](#) :

$$\omega \underline{\underline{\check{\mathbf{C}}}} = -\mathcal{D}^{-1} \text{Im } \underline{\underline{\check{\mathbf{G}}}} \quad (2.21)$$

où ω est la pulsation, et, où les variables chapeautées du symbole \vee sont les transformée de Fourier de ces variables par rapport à la variable temporelle t . Les remarques établies précédemment sur l'identité (2.20) sont identiques pour l'identité de Ward (2.21).

2.2 Propagation visco-élastique.

Dans cette section, on rappelle les équations de propagation des champs de pression et de déplacement dans les milieux visco-élastiques solides [Royer00]. On rappelle aussi les fonctions de Green visco-acoustique⁴ et visco-élastique⁵ dans différents domaines de représentation. Le formalisme utilisé est adapté à l'étude du couplage entre les ondes P et S, et, permet de considérer le cas visco-acoustique comme un cas particulier du cas visco-élastique. Tous les résultats sont revisités sous l'hypothèse d'un amortissement visqueux faible et d'un champ lointain (uniquement pour le cas solide). Ces approximations seront en particulier utiles pour établir, dans la section suivante, une identité de Ward plus exploitable que l'identité de Ward générale (2.20).

2.2.1 Équations et interprétations.

2.2.1.1 Milieu visco-acoustique.

Soit un milieu (fluide ou solide) homogène, isotrope, de température constante et visqueux. On s'intéresse au champ 3D-1C de pression \mathbf{p} dans le milieu généré par une force volumique \mathbf{f} . On note v la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans le milieu, exprimée en m.s^{-1} , et α^2 le coefficient de viscosité, exprimé en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$. L'équation de propagation s'écrit [Royer00] :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}(t, \underline{x})}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta \frac{\partial \mathbf{p}(t, \underline{x})}{\partial t} - v^2 \Delta \mathbf{p}(t, \underline{x}) = \mathbf{f}(t, \underline{x}) \quad (2.22)$$

Il est important de préciser que cette équation est encore valable pour des milieux faiblement hétérogènes (approximation de Born).

On trouvera dans [Lide97] les valeurs de v et α en fonction de la température, du taux d'humidité, de la fréquence et du matériau (milieu). L'étude de ces valeurs dans la bande qq. Hz - qq. kHz justifie l'ajout du modèle de la dissipation visqueuse dans l'équation de propagation (2.22).

On remarquera que les opérateurs de propagation et de dissipation de l'équation (2.22) sont proportionnels au laplacien Δ . Ils vérifient donc le jeu d'hypothèse pour que l'identité de Ward générale (2.20) soit valable. L'inverse de l'opérateur de dissipation est $-\alpha^{-2} \Delta^{-1}$. Cette expression laisse l'identité (2.20) difficile à exploiter. Dans l'hypothèse d'une faible atténuation⁶, on établira dans la section 2.3 une identité de Ward plus exploitable.

2.2.1.2 Milieu visco-élastique.

On considère un milieu élastique, homogène, isotrope et linéaire. Soit (λ, μ) les paramètres de Lamé exprimés en N.m^{-2} , (χ, η) les atténuations visqueuses, respectivement pour les ondes P et S, exprimées en N.s.m^{-2} . On note ρ la densité du milieu exprimée en kg.m^{-3} . Soit \mathbf{f} une force volumique à trois composantes et causale, et, soit $\underline{\mathbf{u}}$ le champ de déplacement 3D-3C généré. La

4. Cette terminologie sera employée lorsque que l'on considère le champ de pression.

5. Cette terminologie sera employée lorsque que l'on considère le champ de déplacement.

6. On précisera plus loin dans cette section comment cette hypothèse est traduite mathématiquement.

combinaison du théorème de Newton et de la loi de Hooke mène à l'équation de propagation dans les solides élastiques avec amortissement visqueux [Royer00] :

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}})}{\partial t^2} + \mathcal{D} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}})}{\partial t} + \mathcal{L} \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{f}}(t, \underline{\mathbf{x}}) \quad (2.23)$$

avec :

$$\mathcal{L} := -\frac{\lambda + \mu}{\rho} \nabla \nabla^T - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathcal{I}_3 \quad (2.24)$$

$$\mathcal{D} := -\frac{\chi + \eta}{\rho} \nabla \nabla^T - \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathcal{I}_3 \quad (2.25)$$

Cette équation est encore valable pour des milieux faiblement hétérogènes.

L'expression des opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{D} montre qu'ils sont auto-adjoints et qu'ils commutent. La commutativité provient de la loi de Hooke qui lie le tenseur des contraintes \mathbb{T} aux tenseurs des déformations \mathbb{S} par une équation différentielle temporelle d'ordre 1 : $\mathbb{T} = a\mathbb{S} + b d\mathbb{S}/dt$ [Royer00]. Dans cette équation, \mathbb{S} est la "raideur" du milieu et $d\mathbb{S}/dt$ un frottement. La dissipation a la même forme que la propagation mais n'est pas affectée des mêmes coefficients.

Les opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{D} commutent en milieu libre et si le champ est suffisamment régulier. En effet, le théorème de Schwartz montre que la commutation d'opérateurs différentiels est liée à la régularité du champ auquel s'appliquent ces opérateurs. Pour un milieu borné ou partiellement borné (guides d'ondes), il faudrait s'assurer de la commutation aux bornes du milieu. Ce point est supposé acquis dans ce chapitre.

2.2.1.3 Décomposition ondes P - ondes S.

Le théorème de Helmholtz-Hodge [Arfken05], permet d'exprimer le champ de déplacement $\underline{\mathbf{u}}$ satisfaisant l'équation (2.23) en l'absence de source *i.e.* $\underline{\mathbf{f}} = 0$, selon la décomposition suivante : $\underline{\mathbf{u}} = \nabla \phi_P + \nabla \wedge \underline{\psi}_S$, où \wedge est le produit vectoriel. ϕ_P est un champ scalaire 3D-1C et $\underline{\psi}_S$ est un champ 3D-2C, qui vérifient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_P^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta - v_P^2 \Delta \right] \phi_P = 0 \quad (2.26)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{I}_2 - \alpha_S^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta - v_S^2 \Delta \right] \underline{\psi}_S = 0 \quad (2.27)$$

avec $v_P^2 := \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $v_S^2 := \frac{\mu}{\rho}$, $\alpha_P^2 := \frac{\chi + 2\eta}{\rho}$, $\alpha_S^2 := \frac{\eta}{\rho}$ et \mathcal{I}_2 l'opérateur identité des champs 3D-2C.

Cette décomposition montre que le champ de déplacement qui se propage dans les solides est la contribution de deux types d'ondes. ϕ_P est une onde de pression, appelée onde P, de vitesse v_P et d'atténuation α_P . $\underline{\psi}_S$ est une onde de cisaillement, appelée onde S, de vitesse v_S et d'atténuation α_S . Les ondes de compression vérifient l'équation de propagation des ondes dans les fluides avec amortissement visqueux (2.22). Grâce à cette considération, les résultats pour les milieux visco-acoustiques seront obtenus dans les sections suivantes comme cas particuliers des milieux visco-élastiques.

2.2.2 Matrice de dispersion et relation de dispersion.

2.2.2.1 Transformées de Fourier d'un champ déterministe.

Soit $\underline{\mathbf{u}}$ un champ, on peut définir les transformées de Fourier de ce champ par rapport à la variable temporelle et/ou par rapport à la variable spatiale :

$$\underline{\check{\mathbf{u}}}(\omega, \underline{\mathbf{x}}) := \int_{\mathbb{R}} \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}}) e^{-i\omega t} dt \quad (2.28)$$

$$\underline{\hat{\mathbf{u}}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) := \int_{\mathbb{R} \times X} \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}}) e^{-i(\omega t - \underline{\mathbf{k}}^T \underline{\mathbf{x}})} dt d\underline{\mathbf{x}} \quad (2.29)$$

Le domaine $(\omega, \underline{\mathbf{k}})$ sera souvent utilisé comme intermédiaire de calcul. En effet, dans ce domaine, les relations décrivant la propagation sont algébriques donc plus simples à manipuler. Les domaines $(\omega, \underline{\mathbf{x}})$ et $(t, \underline{\mathbf{x}})$ sont importants en identification passive car ils sont accessibles à partir de mesures enregistrées par des capteurs. La transformée de Fourier continue selon ω est remplacée par l'opérateur DFT (Discrete Fourier Transform) pour les signaux numériques [Max96].

Selon le théorème de Plancherel [Rudin98], les expressions (2.28) et (2.29) sont inversibles pour un champ de L^2 :

$$\underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \underline{\check{\mathbf{u}}}(\omega, \underline{\mathbf{x}}) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.30)$$

$$\underline{\mathbf{u}}(t, \underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \underline{\hat{\mathbf{u}}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) e^{i(\omega t - \underline{\mathbf{k}}^T \underline{\mathbf{x}})} d\omega d\underline{\mathbf{k}} \quad (2.31)$$

ces relations seront utiles dans les sections suivantes.

2.2.2.2 Matrice, relation et variété de dispersion.

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (2.23) par rapport aux variables temporelle et spatiale, il vient :

$$\underline{\underline{\mathcal{D}}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) \underline{\hat{\mathbf{u}}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\hat{\mathbf{f}}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) \quad (2.32)$$

où :

$$\underline{\underline{\mathcal{D}}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) := (\mathbf{v}_P^2(\omega) - \mathbf{v}_S^2(\omega)) \underline{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{k}}^T + (\mathbf{v}_S^2(\omega) k^2 - \omega^2) \underline{\mathbf{I}}_3 \quad (2.33)$$

avec : $\mathbf{v}_P^2(\omega) := v_P^2 + i\omega\alpha_P^2$ et $\mathbf{v}_S^2(\omega) := v_S^2 + i\omega\alpha_S^2$, $k^2 := \underline{\mathbf{k}}^T \underline{\mathbf{k}}$. La matrice de dispersion est une représentation algébrique de l'opérateur d'ondes \mathcal{N} dans le domaine $(\omega, \underline{\mathbf{k}})$.

La relation de dispersion est l'équation suivante :

$$\det \underline{\underline{\mathcal{D}}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = 0 \quad (2.34)$$

La variété de dispersion \mathbb{V} est l'ensemble des couples $(\omega, \underline{\mathbf{k}})$ qui vérifient la relation de dispersion (2.34).

A partir de l'expression (2.33), il vient que $(\omega, \underline{k}) \in \mathbb{V}$ si et seulement si :

$$k^2 = k_P^2(\omega) := \frac{\omega^2}{\mathbf{v}_P^2(\omega)} \text{ ou } k^2 = k_S^2(\omega) := \frac{\omega^2}{\mathbf{v}_S^2(\omega)} \quad (2.35)$$

On observe bien que la variété de dispersion est l'union des variétés de dispersion associées à chaque type d'ondes : $\mathbb{V} = \mathbb{V}_P \cup \mathbb{V}_S$. \mathbb{V}_P est également la variété de dispersion des ondes visco-acoustiques.

2.2.2.3 Approximations en présence d'une faible atténuation.

On considère ici le cas où l'atténuation est faible. Cette hypothèse se traduit par les propriétés suivantes : $\omega \alpha_P^2 / v_P^2 \ll 1$ et $\omega \alpha_S^2 / v_S^2 \ll 1$, où \ll signifie être "négligeable". Ainsi, de (2.35) on déduit :

$$k_P(\omega) \approx \frac{\omega}{v_P} ; k_S(\omega) \approx \frac{\omega}{v_S} \quad (2.36)$$

Ces approximations de $k_P(\omega)$ et $k_S(\omega)$ seront utiles pour obtenir des expressions de la fonction et de la corrélation de Green, ainsi que des identités de Ward dans le domaine (t, \underline{x}) .

2.2.3 Fonctions de Green visco-acoustique et visco-élastique dans des milieux libres.

Dans cette section, on donne l'expression de la fonction de Green dans les domaines de Fourier d'intérêt. Ces résultats en dissipation visqueuse font partie de l'originalité de nos travaux.

On précise au préalable qu'un milieu libre homogène et isotrope est invariant par translation de l'espace. Par conséquent, la fonction de Green peut être paramétrée par un seul paramètre spatial, ce que nous ferons jusqu'à la fin de ce chapitre.

2.2.3.1 Fonction de Green dans le domaine fréquentiel.

La transformée de Fourier par rapport aux variables temporelle et spatiale de l'équation (2.13) montre que $\hat{\underline{\underline{G}}}(\omega, \underline{k})$ est l'inverse de la matrice de dispersion dans ce domaine. Ainsi, de l'équation (2.33) on déduit :

$$\hat{\underline{\underline{G}}}(\omega, \underline{k}) = \hat{\underline{\underline{G}}}_P(\omega, \underline{k}) \tilde{\underline{k}} \tilde{\underline{k}}^T + \hat{\underline{\underline{G}}}_S(\omega, \underline{k}) \left(\underline{\underline{I}}_3 - \tilde{\underline{k}} \tilde{\underline{k}}^T \right) \quad (2.37)$$

avec $\tilde{\underline{k}} := \underline{k} / \|\underline{k}\|$ et :

$$\hat{\underline{\underline{G}}}_a(\omega, \underline{k}) := \frac{\omega^{-2} k_a^2(\omega)}{k_a^2(\omega) - k^2} ; a \in \{P, S\} \quad (2.38)$$

On peut observer dans l'équation (2.37) le découplage entre les ondes P et S dans ce domaine. On remarquera que $\hat{\underline{\underline{G}}}_P(\omega, \underline{k})$ est la fonction de Green d'un milieu visco-acoustique libre et homogène.

2.2.3.2 Fonction de Green dans le domaine fréquence-espace.

La fonction de Green dans ce domaine peut être déduite par transformée de Fourier de l'équation (2.37) par rapport à la variable \underline{k} . Les calculs, établis ci-dessous mènent à :

$$\check{\underline{\underline{G}}}(\omega, \underline{x}) = \check{\underline{\underline{G}}}_P(\omega, \underline{x}) \check{\underline{x}} \check{\underline{x}}^T + \check{\underline{\underline{G}}}_S(\omega, \underline{x}) \left(\underline{\underline{I}}_3 - \check{\underline{x}} \check{\underline{x}}^T \right) + \check{\underline{\underline{G}}}_{P,S}(\omega, \underline{x}) \left(\underline{\underline{I}}_3 - 3\check{\underline{x}} \check{\underline{x}}^T \right) \quad (2.39)$$

où :

$$\check{\mathbf{G}}_a(\omega, \underline{x}) = \frac{e^{-i\|\underline{x}\|k_a(\omega)}}{4\pi\|\underline{x}\|\mathbf{v}_a^2(\omega)} ; a \in \{P, S\} \quad (2.40)$$

et :

$$\check{\mathbf{G}}_{P,S}(\omega, \underline{x}) = \frac{\mathbf{i}\|\underline{x}\|k_P(\omega) - 1}{\|\underline{x}\|^2k_P^2(\omega)}\check{\mathbf{G}}_P(\omega, \underline{x}) + \frac{-\mathbf{i}\|\underline{x}\|k_S(\omega) + 1}{\|\underline{x}\|^2k_S^2(\omega)}\check{\mathbf{G}}_S(\omega, \underline{x}) \quad (2.41)$$

avec $\tilde{\underline{x}} := \underline{x}/\|\underline{x}\|$.

Calculs. Nous utilisons un lemme qui sera utile pour le calcul de la fonction et de la corrélation de Green dans le domaine (ω, \underline{x}) :

Lemme 2.2. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $Y(a, \cdot) : \underline{k} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{k^2 - a^2}$. On note $\check{Y}(a, \cdot)$ la transformée de Fourier inverse par rapport à la deuxième variable de Y . On a :

$$\check{Y}(a, \underline{x}) := \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} Y(a, \underline{k}) e^{i\mathbf{k}^T \underline{x}} d\underline{k} = \frac{e^{-i\mathbf{a}\|\underline{x}\|}}{4\pi\|\underline{x}\|} \quad (2.42)$$

$$\nabla\nabla^T \check{Y}(a, \underline{x}) = \check{Y}(a, \underline{x}) \left[-a^2 \tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T + \frac{\mathbf{i}\mathbf{a}\|\underline{x}\| - 1}{\|\underline{x}\|^2} \left(\mathbf{I}_3 - 3\tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T \right) \right] \quad (2.43)$$

De plus, $a \mapsto \check{Y}(a, \cdot)$ peut être prolongée analytiquement à \mathbb{C} .

On trouve une preuve de (2.42) dans [Gradshteyn07]. L'équation (2.43) s'obtient par le calcul direct du membre de gauche et via l'expression (2.42). Soulignons que la preuve de (2.42) utilise le théorème des résidus et le fait que la transformée de Fourier d'une fonction radiale (qui ne dépend que de la norme de leur paramètre) est aussi radiale. Avec les notations du lemme 2.2, l'équation (2.37) s'écrit :

$$\underline{\hat{\mathbf{G}}}(\omega, \underline{k}) = -\omega^{-2} Y(k_P(\omega), \underline{k}) \underline{k} \underline{k}^T - \omega^{-2} Y(k_S(\omega), \underline{k}) \left(k_S^2(\omega) \mathbf{I}_3 - \underline{k} \underline{k}^T \right) \quad (2.44)$$

Pour calculer la transformée de Fourier inverse de cette équation par rapport à la variable \underline{k} , on remarque que la matrice $\underline{k} \underline{k}^T$ qui apparaît dans le domaine (ω, \underline{k}) correspond à l'opérateur $\nabla\nabla^T$ dans le domaine (ω, \underline{x}) . Avec ces considérations, on a :

$$\underline{\hat{\mathbf{G}}}(\omega, \underline{x}) = \omega^{-2} \nabla\nabla^T \check{Y}(k_P(\omega), \underline{x}) + \omega^{-2} \left(k_S^2(\omega) \mathcal{I}_3 - \nabla\nabla^T \right) \check{Y}(k_S(\omega), \underline{x}) \quad (2.45)$$

Enfin, on retrouve bien (2.39) en simplifiant l'expression (2.45) à l'aide de l'équation (2.43) du lemme 2.2.

Les équations (2.40) et (2.39) sont des expressions exactes des fonctions de Green visco-acoustique et visco-élastique dans le domaine (ω, \underline{x}) . Cette dernière fait apparaître un couplage entre les ondes P et S.

2.2.3.3 Décomposition champ proche - champ lointain.

$\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ peut être décomposée en la contribution d'un terme en champ proche : $\check{\mathbf{G}}_{P,S} = O(\|\underline{x}\|^{-2})$ et deux termes en champ lointain : $\check{\mathbf{G}}_P$ et $\check{\mathbf{G}}_S = O(\|\underline{x}\|)$, où O est la notation de Landau pour les fonctions dominées. En champ proche, c'est le terme de couplage entre les ondes P et S qui domine l'expression de la fonction de Green :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(\omega, \underline{x}) \approx \check{\mathbf{G}}_{P,S}(\omega, \underline{x}) \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_3 - 3\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T \right) \quad (2.46)$$

En champ lointain, les ondes P et S sont découplées :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(\omega, \underline{x}) \approx \check{\mathbf{G}}_P(\omega, \underline{x})\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T + \check{\mathbf{G}}_S(\omega, \underline{x}) \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_3 - \tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T \right) \quad (2.47)$$

On peut remarquer que l'on retrouve uniquement la contribution du champ lointain en considérant la trace de la fonction de Green *i.e.* $\text{Tr}(\underline{\underline{\mathbf{G}}}) = \check{\mathbf{G}}_P + 2\check{\mathbf{G}}_S$. Cette propriété est vraie dans tous les domaines de représentation.

2.2.3.4 Hypothèse de faible atténuation.

Pour une faible atténuation visqueuse, l'équation (2.40) et les approximations (2.36) permettent d'écrire :

$$\check{\mathbf{G}}_a(\omega, \underline{x}) \approx \frac{e^{-i\omega \frac{\|\underline{x}\|}{v_a}}}{4\pi\|\underline{x}\|v_a^2} ; a \in \{P, S\} \quad (2.48)$$

Cette expression donne une approximation de la fonction de Green visco-acoustique en présence d'une faible atténuation.

A l'aide de l'expression (2.39) et de l'approximation (2.48), on obtient une expression approchée de la fonction de Green visco-élastique dans le domaine (ω, \underline{x}) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\omega, \underline{x}) &\approx \frac{e^{-i\omega \frac{\|\underline{x}\|}{v_P}}}{4\pi\|\underline{x}\|v_P^2}\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T + \frac{e^{-i\omega \frac{\|\underline{x}\|}{v_S}}}{4\pi\|\underline{x}\|v_S^2} \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_3 - \tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T \right) \\ &+ \left[\left(\frac{\mathbf{i}\|\underline{x}\|\omega}{v_P} - 1 \right) e^{-\frac{i\omega\|\underline{x}\|}{v_P}} + \left(-\frac{\mathbf{i}\|\underline{x}\|\omega}{v_S} + 1 \right) e^{-\frac{i\omega\|\underline{x}\|}{v_S}} \right] \frac{\underline{\underline{\mathbf{I}}}_3 - 3\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T}{4\pi\|\underline{x}\|^3\omega^2} \end{aligned} \quad (2.49)$$

L'expression (2.49) est la fonction de Green classique pour les milieux élastiques non dissipatifs [Aki02]. Cette approximation de la fonction de Green est aisée à interpréter. En effet, on observe des déphasages dus à la propagation dans la contribution en champ lointain pour les deux types d'ondes. Leur estimation permet d'obtenir des informations sur les paramètres $\|\underline{x}\|$, v_P and v_S . Cette information peut être complétée via la contribution en champ proche.

2.2.3.5 Approximation dans le domaine temps-espace pour une faible atténuation.

L'obtention d'une expression générale pour $\underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{x})$ et $\mathbf{G}_P(t, \underline{x})$ à partir des équations (2.39) et (2.48) est difficile. Pour une faible atténuation, l'équation (2.48) mène à [Aki02] :

$$\mathbf{G}_a(\omega, \underline{x}) \approx \frac{\delta(t - t_a)}{4\pi v_a^2 \|\underline{x}\|} ; a \in \{P, S\} \quad (2.50)$$

où $t_a := \|\underline{x}\|/v_a$. (2.50) est la fonction de Green acoustique classique dans le domaine (t, \underline{x}) pour des milieux non dissipatifs. Elle s'interprète comme un retard pur (de temps t_a) atténué géométriquement (terme $1/\|\underline{x}\|$). t_a est le temps de vol entre deux points A et B du milieu tel que $\overrightarrow{AB} = \underline{x}$. Il représente le temps de trajet d'une impulsion émise en A et reçue en B .

Concernant la fonction de Green visco-élastique, l'expression (2.49) et de l'approximation (2.50) mènent à :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{x}) \approx \frac{\delta(t - t_P)}{4\pi v_P^2 \|\underline{x}\|} \tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T + \frac{\delta(t - t_S)}{4\pi v_S^2 \|\underline{x}\|} (\underline{\mathbb{I}}_3 - \tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T) - \frac{t \Pi_{[t_P, t_S]}(t)}{4\pi \|\underline{x}\|^3} (\underline{\mathbb{I}}_3 - 3\tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T) \quad (2.51)$$

où $\Pi_{[t_P, t_S]}(t) = 1$ si $t \in [t_P, t_S]$ et $\Pi_{[t_P, t_S]}(t) = 0$ sinon. (2.51) est la fonction de Green classique dans le domaine (t, \underline{x}) pour des milieux solides non dissipatifs.

La contribution en champ lointain correspond aux temps d'arrivée des ondes P puis des ondes S. On retrouve un résultat classique : le déplacement des particules des ondes P est selon l'axe de propagation (ondes longitudinales) et le déplacement des particules des ondes S est selon le plan orthogonal à l'axe de propagation (ondes transversales). En champ proche, le terme de couplage contrôle l'évolution de $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$, et fournit aussi des informations sur les paramètres $\|\underline{x}\|$, v_P et v_S .

2.3 Corrélations de Green et identités de Ward visco-acoustique et visco-élastique.

Dans cette section, on calcule à partir des résultats de la section précédente des expressions exactes de la corrélation de Green visco-acoustique et visco-élastique dans les domaines (ω, \underline{k}) et (ω, \underline{x}) . Ces expressions vont montrer que l'on peut estimer les paramètres du milieu uniquement avec la corrélation de Green.

On établit parallèlement des identités de Ward exactes (domaine (ω, \underline{k})) et approchées (domaines (ω, \underline{x}) et (t, \underline{x})) pour les cas visco-acoustique et visco-élastique. Les identités de Ward obtenues remettent en cause l'identité de Ward classique en acoustique (1.16) qui relie proportionnellement la dérivée première de la corrélation de Green à la partie impaire de la fonction de Green.

2.3.1 Calculs dans le domaine fréquentiel.

2.3.1.1 Corrélation de Green dans le domaine fréquentiel.

On applique la transformée de Fourier par rapport aux variables temporelle et spatiale à l'équation (1.11)⁷ où les convolutions temporelle et spatiale sont des convolutions classiques car $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ est invariante par translation du temps et de l'espace :

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}(\omega, \underline{k}) = \hat{\underline{\underline{\mathbf{G}}}}(\omega, \underline{k}) \hat{\underline{\underline{\mathbf{G}}}}(\omega, \underline{k})^* \quad (2.52)$$

où $*$ transpose et conjugue. En injectant dans cette expression l'équation (2.37), il vient :

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}(\omega, \underline{k}) = \hat{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}_P(\omega, \underline{k}) \tilde{\underline{k}} \tilde{\underline{k}}^T + \hat{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}_S(\omega, \underline{k}) (\underline{\mathbb{I}}_3 - \tilde{\underline{k}} \tilde{\underline{k}}^T) \quad (2.53)$$

7. $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \otimes_T \otimes_S \underline{\underline{\mathbf{G}}}^-$

avec :

$$\hat{\mathbf{C}}_a(\omega, \underline{k}) = |\hat{\mathbf{G}}_a(\omega, \underline{k})|^2 ; a \in \{P, S\} \quad (2.54)$$

L'expression (2.53) montre que les pôles de la corrélation de Green visco-élastique et de la fonction de Green visco-élastique sont confondus (et égaux à $k_P^2(\omega)$ et $k_S^2(\omega)$). L'estimation de ces pôles à partir de l'une de ces deux fonctions donne de l'information sur les paramètres du milieu : v_P , v_S , α_P et α_S .

On peut établir une conclusion similaire pour le cas acoustique avec l'expression (2.54) (le pôle concerné est $k_P^2(\omega)$ et les paramètres concernés sont v_P et α_P).

2.3.1.2 Identité de Ward dans le domaine fréquentiel.

On applique la transformée de Fourier, par rapport à la variable spatiale, à l'identité de Ward générale (2.21). On obtient alors une identité de Ward exacte dans le domaine (ω, \underline{k}) :

$$\omega \hat{\mathbf{C}}(\omega, \underline{k}) = -\hat{\mathbf{D}}(\underline{k})^{-1} \text{Im} \hat{\mathbf{G}}(\omega, \underline{k}) \quad (2.55)$$

avec :

$$\hat{\mathbf{D}}(\underline{k})^{-1} = -\alpha_P^{-2} k^{-2} \tilde{\underline{k}} \tilde{\underline{k}}^T - \alpha_S^{-2} k^{-2} \left(\underline{\mathbf{I}}_3 - \tilde{\underline{k}} \tilde{\underline{k}}^T \right) \quad (2.56)$$

$\hat{\mathbf{D}}$ est la transformée de Fourier de l'opérateur de dissipation visqueuse \mathcal{D} . Notons que la relation (2.55) est valable pour tout opérateur de dissipation différentiel linéaire, non nul et inversible.

En conservant uniquement la contribution des ondes P dans l'identité (2.55), on obtient l'identité de Ward pour les milieux visco-acoustiques :

$$\omega \hat{\mathbf{C}}_P(\omega, \underline{k}) = \frac{1}{\alpha_P^2 k^2} \text{Im} \hat{\mathbf{G}}_P(\omega, \underline{k}) \quad (2.57)$$

Dans ce domaine, la corrélation de Green visco-acoustique est proportionnelle à la partie imaginaire de la fonction de Green visco-acoustique. Le terme de proportionnalité $1/(\alpha_P^2 k^2)$ est l'opposé de l'inverse de la transformée de Fourier de $-\alpha_P^2 \Delta$ qui est l'opérateur de dissipation visqueuse pour le champ de pression (cf. équation (2.22)).

2.3.2 Calculs dans le domaine fréquence-espace.

2.3.2.1 Corrélation de Green dans le domaine fréquence-espace.

L'inversion de Fourier des équations (2.53) et (2.54) par rapport \underline{k} mène, selon les calculs établis ci-dessous, à l'expression suivante :

$$\check{\mathbf{C}}(\omega, \underline{x}) = \check{\mathbf{C}}_P(\omega, \underline{x}) \tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T + \check{\mathbf{C}}_S(\omega, \underline{x}) \left(\underline{\mathbf{I}}_3 - \tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T \right) + \check{\mathbf{C}}_{P,S}(\omega, \underline{x}) \left(\underline{\mathbf{I}}_3 - 3\tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T \right) \quad (2.58)$$

où :

$$\check{\mathbf{C}}_a(\omega, \underline{x}) = \text{Im} \left[\frac{\check{\mathbf{G}}_a(\omega, \underline{x})}{\alpha_a^2 \omega k_a^2(\omega)} \right] ; a \in \{P, S\} \quad (2.59)$$

et :

$$\check{\mathbf{C}}_{P,S}(\omega, \underline{x}) = \text{Im} \left[\frac{\mathbf{i} \|\underline{x}\| k_P(\omega) - 1}{\|\underline{x}\|^2 \alpha_P^2 \omega} \check{\mathbf{G}}_P(\omega, \underline{x}) \right] + \text{Im} \left[\frac{-\mathbf{i} \|\underline{x}\| k_S(\omega) + 1}{\|\underline{x}\|^2 \alpha_S^2 \omega} \check{\mathbf{G}}_S(\omega, \underline{x}) \right] \quad (2.60)$$

Calculs. Avec les notations du [lemme 2.2](#) utilisé pour obtenir l'expression [\(2.39\)](#), l'équation [\(2.53\)](#) s'écrit :

$$\hat{\underline{\mathbf{C}}}(\omega, \underline{k}) = \text{Im} \left[\frac{Y(k_P(\omega), \underline{k})}{\alpha_P^2 \omega^3 k_P^2(\omega)} \underline{k} \underline{k}^T \right] + \text{Im} \left[\frac{Y(k_S(\omega), \underline{k})}{\alpha_S^2 \omega^3 k_S^2(\omega)} \left(k_S^2(\omega) \mathbb{I}_3 - \underline{k} \underline{k}^T \right) \right] \quad (2.61)$$

La transformée de Fourier inverse de cette équation par rapport à la variable \underline{k} est :

$$\check{\underline{\mathbf{C}}}(\omega, \underline{x}) = \text{Im} \left[\nabla \nabla^T \frac{\check{Y}(k_P(\omega), \underline{x})}{\alpha_P^2 \omega^3 k_P^2(\omega)} \right] + \text{Im} \left[\left(k_S^2(\omega) \mathcal{I}_3 - \nabla \nabla^T \right) \frac{\check{Y}(k_S(\omega), \underline{x})}{\alpha_S^2 \omega^3 k_S^2(\omega)} \right] \quad (2.62)$$

On retrouve alors l'équation [\(2.58\)](#) en utilisant la formule [\(2.43\)](#) du [lemme 2.2](#).

L'équation [\(2.58\)](#) est une expression complète et exacte de la corrélation de Green visco-élastique dans le domaine (ω, \underline{x}) . Elle montre la possibilité d'extraire de la corrélation de Green les paramètres physiques et géométriques du milieu et de l'instrumentation.

La décomposition en champ proche - champ lointain qui apparaît dans [\(2.58\)](#) est similaire à celle de $\check{\underline{\mathbf{C}}}$ exprimée dans [\(2.39\)](#). On retrouve aussi uniquement la contribution du champ lointain en prenant la trace *i.e.* $\text{Tr}(\check{\underline{\mathbf{C}}}) = \check{\mathbf{C}}_P + 2\check{\mathbf{C}}_S$. Cette propriété est vraie dans tous les domaines de représentation.

Enfin, il est important de remarquer que l'équation [\(2.59\)](#) est une identité de Ward pour un milieu visco-acoustique. Grâce à cette expression, on voit que la corrélation de Green n'est pas proportionnelle à la partie imaginaire de la fonction de Green dans ce domaine car $k_P^2(\omega)$ est complexe dans le cas dissipatif, quelque soit le modèle de dissipation \mathcal{D} (même constant).

2.3.2.2 Approximations en champ lointain et en faible atténuation.

Pour une faible atténuation, la corrélation de Green visco-acoustique [\(2.59\)](#) admet la forme simplifiée suivante :

$$\check{\mathbf{C}}_P(\omega, \underline{x}) \approx \frac{\sin(\omega t_P)}{4\pi \|\underline{x}\| \alpha_P^2 \omega^3} \quad (2.63)$$

où on rappelle que $t_P := \|\underline{x}\|/v_P$. Cette équation montre que $\check{\mathbf{C}}_P$ est une fonction de ω pseudo-périodique, de pseudo-période $t_P/(2\pi)$, atténuée par le terme ω^3 .

Pour le cas visco-élastique en champ lointain et pour une faible atténuation, on déduit de [\(2.58\)](#) et [\(2.63\)](#), la forme simplifiée suivante :

$$\check{\underline{\mathbf{C}}}(\omega, \underline{x}) \approx \frac{\sin(\omega t_P)}{4\pi \|\underline{x}\| \alpha_P^2 \omega^3} \tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T + \frac{\sin(\omega t_S)}{4\pi \|\underline{x}\| \alpha_S^2 \omega^3} \left(\mathbb{I}_3 - \tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^T \right) \quad (2.64)$$

Cette expression montre que t_P et t_S peuvent être estimés via l'équation [\(2.64\)](#) et à l'aide d'un estimateur de pseudo-période.

2.3.2.3 Identités de Ward en champ lointain et en faibles atténuations.

En utilisant les relations (2.48) et (2.64), on obtient dans cette situation l'identité de Ward approchée suivante :

$$\omega^3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega, \underline{\mathbf{x}}) \approx \underline{\underline{\mathbf{d}}}(\underline{\mathbf{x}})^{-1} \text{Im } \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\omega, \underline{\mathbf{x}}) \quad (2.65)$$

où :

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}}(\underline{\mathbf{x}})^{-1} = \frac{v_P^2}{\alpha_P^2} \tilde{\underline{\mathbf{x}}} \tilde{\underline{\mathbf{x}}}^T + \frac{v_S^2}{\alpha_S^2} \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_3 - \tilde{\underline{\mathbf{x}}} \tilde{\underline{\mathbf{x}}}^T \right) \quad (2.66)$$

L'identité (2.65) fait apparaître une proportionnalité spatiale matricielle entre la corrélation de Green visco-élastique approchée et la partie imaginaire de la fonction de Green visco-élastique approchée. Le terme de proportionnalité $\omega^{-3} \underline{\underline{\mathbf{d}}}(\underline{\mathbf{x}})^{-1}$ est l'effet de l'inverse l'opérateur $\partial \mathcal{D} / \partial t$ présent dans l'équation d'ondes (2.23) et des relations de dispersion (2.36). En effet, ω^{-1} est la contribution de l'inverse de l'opérateur $\partial / \partial t$ dans le domaine $(\omega, \underline{\mathbf{x}})$. $\omega^{-2} \underline{\underline{\mathbf{d}}}(\underline{\mathbf{x}})^{-1}$ est l'analogie de $\underline{\underline{\mathbf{D}}}(k)^{-1}$ (2.56) dans le domaine $(\omega, \underline{\mathbf{x}})$: le terme k^{-2} dans (2.55) est converti en le terme ω^{-2} dans (2.65) via les relations de dispersion approchées (2.36) qui relie proportionnellement k^2 et ω^2 pour les ondes P et S.

En conservant uniquement la contribution des ondes P dans l'équation (2.65), il vient :

$$\omega^3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_P(\omega, \underline{\mathbf{x}}) \approx \frac{v_P^2}{\alpha_P^2} \text{Im } \underline{\underline{\mathbf{G}}}_P(\omega, \underline{\mathbf{x}}) \quad (2.67)$$

Dans ce domaine, l'identité de Ward approchée indique une proportionnalité spatiale entre la corrélation de Green visco-acoustique approchée et la partie imaginaire de la fonction de Green visco-acoustique approchée.

2.3.3 Approximations dans le domaine temps-espace.

2.3.3.1 Expressions approchées des corrélations Green visco-acoustique et visco-élastique.

Pour une faible atténuation, la corrélation de Green visco-acoustique dans le domaine $(\omega, \underline{\mathbf{x}})$ admet, par transformée de Fourier inverse de l'équation (2.63), la forme suivante :

$$\mathbf{C}_P(t, \underline{\mathbf{x}}) \approx \frac{(t + t_P)^2 H(-(t + t_P)) - (t - t_P)^2 H(t - t_P)}{4\pi \|\underline{\mathbf{x}}\| \alpha_P^2} \quad (2.68)$$

où on rappelle que H est la distribution de Heaviside. Cette équation montre que \mathbf{C}_P est théoriquement nulle pour $t \in] -t_P, t_P[$. t_P et $-t_P$ sont les instants pour lesquels les parties causales et anti-causales de \mathbf{C}_P deviennent non nul.

Pour le cas visco-élastique en champ lointain et pour une faible atténuation, on déduit de (2.64) et (2.68), la forme suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{\mathbf{x}}) &\approx \frac{(t + t_P)^2 H(-(t + t_P)) - (t - t_P)^2 H(t - t_P)}{4\pi \|\underline{\mathbf{x}}\| \alpha_P^2} \tilde{\underline{\mathbf{x}}} \tilde{\underline{\mathbf{x}}}^T \\ &+ \frac{(t + t_S)^2 H(-(t + t_S)) - (t - t_S)^2 H(t - t_S)}{4\pi \|\underline{\mathbf{x}}\| \alpha_S^2} \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_3 - \tilde{\underline{\mathbf{x}}} \tilde{\underline{\mathbf{x}}}^T \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Cette expression montre que l'on peut théoriquement estimer les temps t_P et t_S en localisant les temps pour lesquels la corrélation de Green est discontinue.

2.3.3.2 Identités de Ward approchées.

Pour un champ lointain en présence d'une faible atténuation, l'équation (2.65) devient :

$$\frac{\partial^3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{\mathbf{x}})}{\partial t^3} \approx \underline{\underline{\mathbf{d}}}(\underline{\mathbf{x}})^{-1} \text{Imp } \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{\mathbf{x}}) \quad (2.70)$$

La dérivée troisième en temps est issue du terme ω^3 dans l'identité (2.65). Finalement, dans le cas visco-élastique en champ lointain et en présence d'une faible atténuation, la dérivée troisième de la corrélation de Green est matriciellement proportionnelle à la partie impaire de la fonction de Green.

En conservant uniquement la contribution des ondes P, l'identité (2.70) mène à :

$$\frac{\partial^3 \mathbf{C}_P(t, \underline{\mathbf{x}})}{\partial t^3} \approx \frac{v_P^2}{\alpha_P^2} \text{Imp } \mathbf{G}_P(t, \underline{\mathbf{x}}) \quad (2.71)$$

A nouveau, on peut faire l'analogie avec les identités classiques obtenues en acoustique pour une dissipation constante. Dans ce cas et dans ce domaine, on rappelle que la dérivée première de la corrélation de Green acoustique est proportionnelle à la partie impaire de la fonction de Green acoustique où le terme de proportionnalité est l'inverse du coefficient d'atténuation. Dans le cas faiblement visqueux, c'est la dérivée troisième qui est directement reliée à la partie impaire de la fonction de Green dans le domaine $(t, \underline{\mathbf{x}})$. La différence dans l'ordre de dérivation provient du modèle de dissipation.

2.3.4 Bilan sur les résultats théoriques.

Cette section a démontré le potentiel théorique des corrélations de Green visco-acoustique et visco-élastique pour l'identification passive. Ceci est mis en relief par les expressions exactes (2.53), (2.54), (2.58), (2.59) et approchées (2.64), (2.63), (2.69), (2.68) de la corrélation de Green dans lesquelles apparaissent les paramètres du milieu. Ces paramètres peuvent être aisément estimés car, selon le domaine de représentation, ce sont des pôles ou des temps caractéristiques (atténuation, pseudo-période, discontinuité) de la corrélation de Green.

D'autre part, dans le cas d'un faible amortissement visqueux et d'un champ lointain (pour le cas élastique), on a établi une identité de Ward visco-acoustique (2.67), (2.71) et visco-élastique (2.65), (2.70) qui relie proportionnellement (dans l'ensemble des matrices 3×3 pour le cas élastique) la dérivée temporelle troisième de la corrélation de Green à la partie impaire de la fonction de Green, dans le domaine temps-espace. Ce résultat est important dans le sens où il prend en compte un phénomène de dissipation réaliste ainsi que la polarisation des ondes (pour le cas élastique).

On montre dans l'annexe A que les résultats exacts et approchés de cette section concernant les corrélations de Green et les identités de Ward visco-acoustique et visco-élastique sont aussi valides pour une propagation dans un milieu borné.

2.4 Expérimentations en acoustique.

Cette section concerne la validation expérimentale des développements théoriques établis précédemment en acoustique. L'objectif de ces expérimentations est, d'une part, de valider (sous-section 2.4.3) et de caractériser (sous-section 2.4.4) la reconstruction passive de la corrélation de

Green, et d'autre part, de quantifier l'apport de la corrélation de Green en identification passive (sous-section 2.4.5). On validera en particulier l'identité de Ward (2.71) dans l'étude de la reconstruction passive du temps de vol et de la fonction de Green entre deux capteurs.

Les résultats présentés dans cette section concernent majoritairement un milieu aérien. Ce milieu permet en effet d'étudier la corrélation de Green sans les difficultés associées à l'enfouissement de capteurs. En fin de section, on présente une expérimentation avec une instrumentation enfouie dans du ciment afin de montrer la portabilité des méthodes développées dans les solides, et plus particulièrement dans les matériaux utilisés par le génie civil.

On présente au préalable l'instrumentation utilisée (sous-section 2.4.1) ainsi que sa mise en oeuvre dans l'estimation active de la fonction de Green (sous-section 2.4.2).

2.4.1 Instrumentation.

2.4.1.1 Instrumentation et modèle de mesure.

Les expérimentations en acoustique ont été menées avec des microphones à électret. La figure 2.1 indique les spécifications d'un des capteurs utilisés et donne un exemple de signal enregistré. Un microphone mesure le champ de pression \mathbf{p} qui est un champ 3D-1C. Dans un fluide, \mathbf{p} vérifie l'équation de propagation des ondes élastiques scalaires (1.13) sans amortissement et (2.26) avec amortissement visqueux.

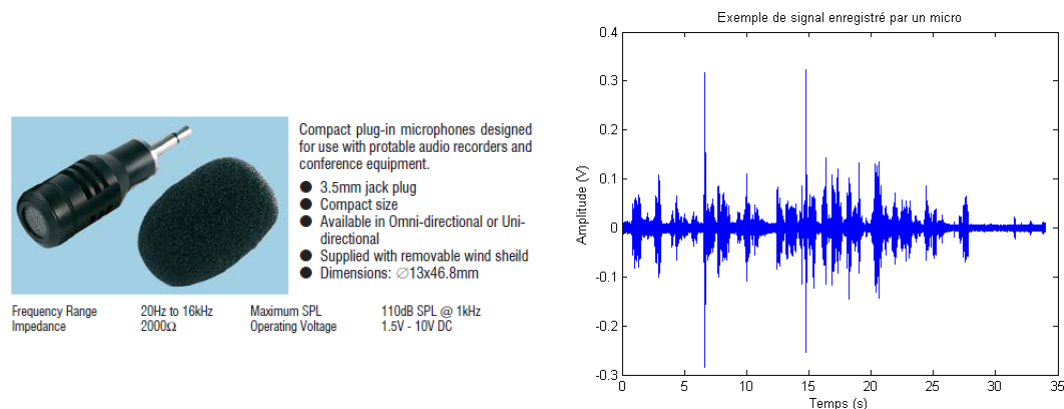


FIGURE 2.1 – Gauche : Spécifications d'un des microphones à électret. Droite : Exemple de signal enregistré par le capteur.

En acoustique, le modèle de mesure est simple puisqu'il est scalaire et il ne fait pas intervenir l'attitude du capteur comme c'est le cas en sismique (cf. sous-section 2.5). Soit \mathbf{f} une source d'excitation d'un milieu visco-acoustique et \mathbf{s} le signal enregistré par un microphone situé en un point du milieu. Le modèle de mesure est :

$$\mathbf{s}(t) = (\mathbf{h} \otimes_{T,S} \mathbf{f})(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.72)$$

avec $\mathbf{h}(t, \underline{x}) := \mathbf{G}(t, \underline{y}, \underline{x})$ où \mathbf{G} est la fonction de Green du milieu, \underline{y} est la position du microphone et \mathbf{b} est le bruit de mesure.

2.4.1.2 Protocoles.

On considère deux microphones, m_1 et m_2 , mesurant le champ de pression dans la bande de fréquence 5 Hz -15 kHz. On rappelle que dans cette plage de fréquences le phénomène de dissipation visqueuse est présent [Lide97]. Chaque mesure est échantillonnée à 44.1 kHz et quantifiée sur 16 bits. On donne un exemple de configuration dans la figure 2.2. Toutes les expérimentations menées admettent une configuration similaire *i.e.* seuls le milieu (la pièce) et la distance inter-capteurs changent.



FIGURE 2.2 – Exemple de configuration expérimentale.

2.4.2 Estimation active de la fonction de Green.

2.4.2.1 Méthode.

L'estimation active de la fonction de Green est réalisée par filtrage adapté [Anderson05]. Cette méthode consiste à générer un signal \mathbf{s}_1 au point \underline{x}_1 où est localisé le microphone m_1 . La source \mathbf{f} s'écrit alors $\mathbf{f}(t, \underline{x}) = \mathbf{s}_1(t)\delta(\underline{x}, \underline{x}_1)$. Selon le modèle de mesure (2.72), le signal \mathbf{s}_2 enregistré par m_2 localisé en \underline{x}_2 vérifie :

$$\mathbf{s}_2(t) = (\mathbf{h}_{1,2} \otimes_T \mathbf{s}_1)(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.73)$$

où $\mathbf{h}_{1,2}(t) := \mathbf{G}(t, \underline{x}_1, \underline{x}_2)$ est la réponse impulsionnelle du milieu vu comme un système dont l'entrée est localisée en \underline{x}_1 et la sortie en \underline{x}_2 . Le filtre adapté donne une estimation $\hat{\mathbf{h}}$ de $\mathbf{h}_{1,2}$ connaissant les signaux \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 . Pour notre étude, la recherche s'établit sur les filtres numériques à réponse impulsionnelle finie et à l'aide des signaux discrétisés :

$$\hat{\mathbf{h}} := \underset{\mathbf{h}}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^{N_e} (\mathbf{s}_2(k t_e) - (\mathbf{h} \star \mathbf{s}_1)(k t_e))^2 \quad (2.74)$$

où N_e est le nombre d'échantillons, t_e est la période d'échantillonnage et \star est la convolution temporelle discrète. C'est une minimisation au sens des moindres carrés que l'on effectue à l'aide d'un algorithme classique de moindres carrés récursifs [Anderson05].

2.4.2.2 Un exemple d'exploitation pour l'identification.

On trace en figure 2.3 la réponse impulsionnelle estimée par filtrage adapté pour la configuration représentée en figure 2.2 (les signaux utilisés pour la reconstruction sont aussi tracés). On peut estimer la vitesse de propagation à l'aide du temps de première arrivée $t_{1,2}$ obtenu à partir du maximum de la réponse impulsionnelle : $t_{1,2} = 2.63$ ms. Les capteurs étant espacés de $d_{1,2} = 91$ cm, alors $v = d_{1,2}/t_{1,2} = 346 \text{ m.s}^{-1}$. Cette valeur est acceptable pour une température de 20° C [Lide97] et une précision sur la position des capteurs de l'ordre du centimètre.

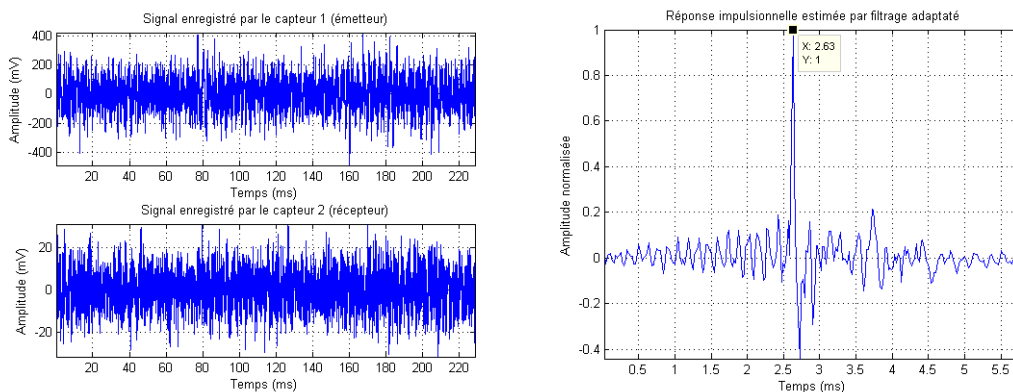


FIGURE 2.3 – Exemple de reconstruction d'une réponse impulsionnelle entre deux capteurs. Les signaux des capteurs 1 et 2 sont respectivement les signaux émis et reçus.

L'estimation du temps de vol par une méthode active est associée à une erreur non biaisée dont on connaît une borne minimale sur sa variance : la borne de Cramer-Rao. Nous décrivons cette borne car elle sera utile pour la suite. On rappelle que dans le cas actif, l'estimateur optimal (au sens des moindres carrés) du temps de vol, noté τ , est [Ziv69] :

$$\hat{\tau} = \operatorname{argmax}_{\tau \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{s}_1(\tau + t) \mathbf{s}_2(t) dt \quad (2.75)$$

où \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 vérifient le modèle :

$$\mathbf{s}_2(t) = \mathbf{s}_1(t - \tau) + \mathbf{b}(t) \quad (2.76)$$

avec \mathbf{b} un processus blanc gaussien centré de puissance $\sigma_{\mathbf{b}}^2$ et indépendant de \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 . On a alors l'inégalité de Cramer-Rao suivante [Ziv69] :

$$\mathbb{E}[(\hat{\tau} - \tau)^2]^{1/2} \geq \frac{2\sigma_{\mathbf{b}}}{E^{1/2}\beta} \quad (2.77)$$

où $E := \int_{\mathbb{R}} |\hat{\mathbf{s}}_1(\omega)|^2 d\omega$ est l'énergie du signal et $\beta := \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{\mathbf{s}}_1(\omega)|^2 d\omega / E$ est la largeur de bande du signal. En identification en bruit blanc active, \mathbf{s}_1 est blanc de puissance $\sigma_{\mathbf{s}}^2$ dans la bande de fréquence B . Dans ce cas, l'inégalité de Cramer-Rao s'écrit :

$$\mathbb{E}[(\hat{\tau} - \tau)^2]^{1/2} \geq \frac{2\sigma_{\mathbf{b}}}{\sigma_{\mathbf{s}} B^{3/2}} \quad (2.78)$$

Ainsi, plus la bande de fréquence est élevée et plus le rapport bruit-à-signal est faible alors plus la borne est faible.

2.4.2.3 Distorsion due à la numérisation.

La numérisation des signaux entraînent une distorsion des signaux continus. Cette distorsion se retrouve sur la fonction de Green reconstruite. On peut par exemple observer sur la [figure 2.3](#) des fluctuations entre le temps nul et le temps de première arrivée (2.63 ms), et, entre ce temps et le premier écho (3.70 ms). L'identification des paramètres via la fonction de Green doit donc prendre en compte cet effet.

Pour illustrer davantage ce propos, on compare la fonction de Green estimée et simulée numériquement entre deux capteurs espacés de 63 cm (cf. [figure 2.4](#)). Le modèle de la fonction de Green continue sur l'intervalle de temps 0 s - 5.8 s (soit 256 points à 44.1 kHz) est constitué du trajet direct à 1.8 ms (63 cm à 343 m.s^{-1}) et de la réflexion sur le sol à 3.1 ms (107 cm à 343 m.s^{-1} où 107 cm est la distance entre le premier microphone et le symétrique du deuxième par rapport au sol). On simule alors numériquement la fonction de Green comme la somme de deux sinus cardinaux retardés⁸. La comparaison des deux fonctions de Green montrent que les extrema qui apparaissent dans la fonction de Green estimée ne sont pas uniquement liés aux propriétés physiques et géométriques du milieu et de l'instrumentation.

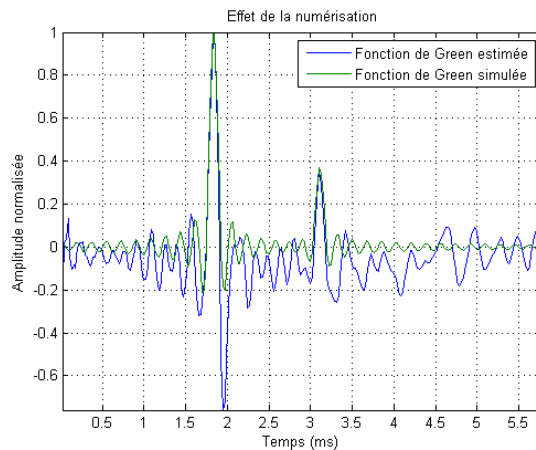
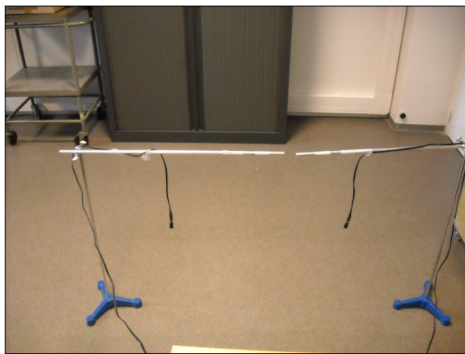


FIGURE 2.4 – (Gauche) Configuration expérimentale. (Droite) Comparaison entre la fonction de Green estimée (courbe bleue) et la fonction de Green numérique simulée (courbe verte).

2.4.3 Estimation passive de la corrélation de Green : méthode.

2.4.3.1 Bruits ambiants.

L'estimation passive de la corrélation de Green réside, en théorie, en l'inter-corrélation entre deux points de mesure d'un bruit blanc propagé. En pratique, nous avons discuté au [chapitre 1](#) que ce type de bruit n'avait pas de réalité physique mais qu'il existait des bruits ambiants qui s'en approchaient. On distingue deux types de bruits ambiants qui contribuent à la reconstruction de la corrélation de Green que nous décrivons maintenant.

⁸. Le sinus cardinal est la transformée de Fourier inverse d'une porte qui correspond au spectre passe-bas d'une impulsion.

Le premier type de bruit ambiant est le bruit qui excite en "continu" le milieu : bruit sismique, bruit thermique, perceuse à percussion (pendant une durée significative), vent, etc. Ce type de bruit peut être vu comme un bruit de fond. L'excitation illumine souvent tout le milieu et selon toutes les directions, c'est une bonne approximation d'un bruit blanc spatial et isotrope. Cependant, la blancheur temporelle n'est pas garantie.

On représente sur les figures 2.5 et 2.6 deux exemples de bruits ambiants (signaux et spectres) enregistrés par un microphone et générés respectivement par une perceuse à percussion et un moteur de climatisation. Le spectre du bruit associé à la perceuse à percussion montre que les fréquences de la bande 6 kHz - 16 kHz ont une énergie du même ordre de grandeur. En revanche, le moteur de climatisation admet un spectre discret. Les bruits ambiants de type "continu" ne sont donc pas tous utiles à la reconstruction de la corrélation de Green. Afin de ne pas dégrader le rapport signal-à-bruit, il faut avoir une information a priori sur le spectre du bruit ambiant "continu" pour décider de l'intégrer dans les inter-corrélations calculées.

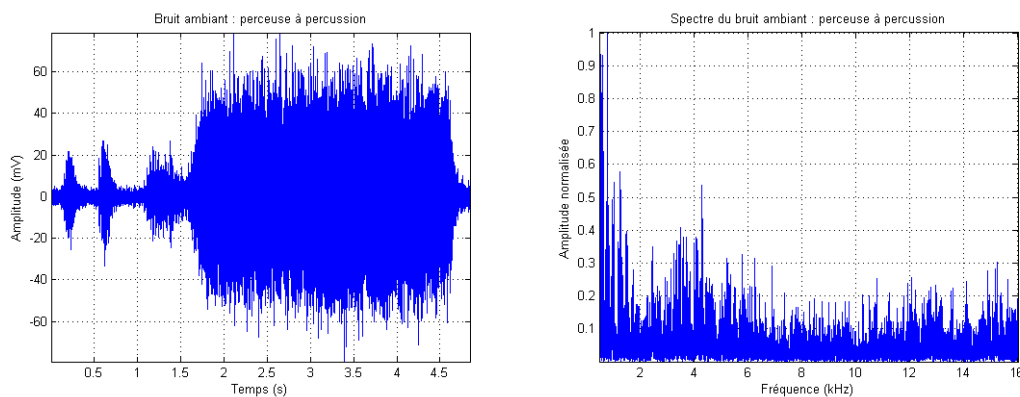


FIGURE 2.5 – Exemple de bruit "continu" : perceuse à percussion. (Gauche) Le signal enregistré. (Droite) Le spectre du signal entre 2 s et 4.5 s.

Le deuxième type de bruit ambiant considéré est le bruit "événementiel". Un événement est une source d'excitation que l'on peut assimiler à une source quasi-impulsionnelle, par exemple un claquement de doigts ou un pas. La coda d'un événement est la série temporelle qui succède aux temps d'arrivée des premières réflexions. La terminologie "coda" provient de la géophysique où la coda d'un événement sismique, comme les séismes, est l'effet de la diffusion des ondes propagées dans la croûte terrestre [Aki02]. Les ondes qui contribuent à la coda sont celles qui ont subi des multiples réflexions sur les interfaces et les diffuseurs du milieu. Ces ondes ont "scruté" tout le milieu et ont "oublié" la source qui les a générées. L'intérêt est que l'inter-corrélation des codas enregistrées entre deux points est une approximation de l'inter-corrélation d'un bruit blanc propagé. Ce résultat peut s'appréhender à l'aide de l'existence des temps de Heisenberg⁹ [Chabanov01] et de Thouless¹⁰ [Chabanov01] qui "justifie" que toute onde enregistrée après un certain temps, que nous noterons $t_{\text{coda}}^{\text{deb}}$ et qui dépend de la géométrie et de l'hétérogénéité du milieu, peut être considérée comme la contribution d'un bruit blanc. En acoustique, ce temps

9. Le temps de Heisenberg, classique en théorie du chaos, est le temps après lequel deux rais issues d'une même source ne soient plus corrélées.

10. Le temps de Thouless, classique en physique mésoscopique, est le temps nécessaire pour que des particules explorent ergodiquement une cavité.

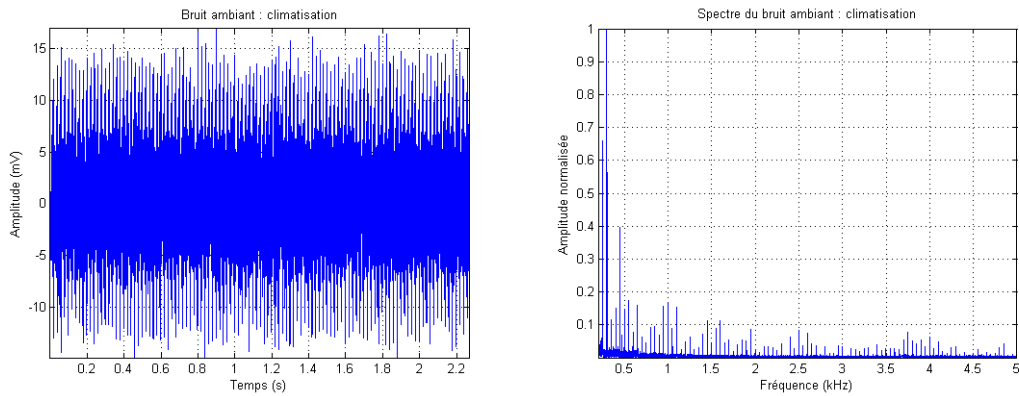


FIGURE 2.6 – Exemple de bruit "continu" : moteur de climatisation. (Gauche) Le signal enregistré. (Droite) Le spectre du signal.

est appelé temps de mélange [Polack88]. On montre en figure 2.7 un exemple de bruit ambiant "évènementiel". Le spectre n'est pas représenté car c'est le cumul des inter-corrélations de ce type de bruit qui émule un bruit blanc propagé, pas le signal lui-même.

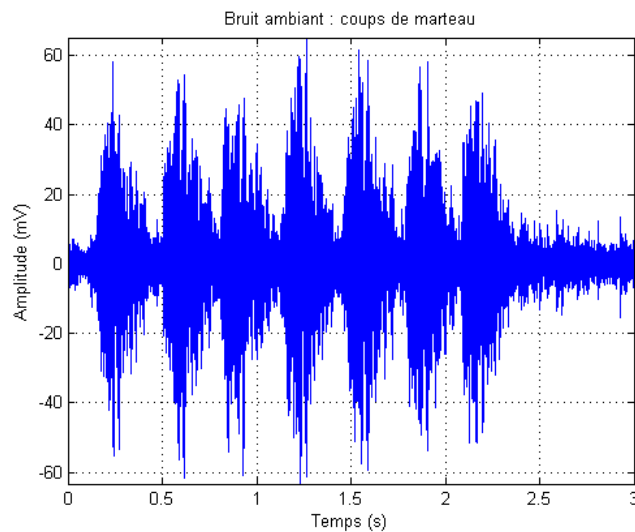


FIGURE 2.7 – Exemple de bruit "évènementiel" : coup de marteau.

Les validations expérimentales qui suivent s'établiront avec des bruits ambiants évènementiels. Les raisons sont doubles. Ce type de bruit est significatif des bruits ambiants dans les structures : pas, claquement de portes, travaux de rénovation, etc. D'autre part, ces bruits contiennent des plus hautes fréquences que les bruits ambiants "continus". Ce dernier point est important car la largeur de bande d'un signal est liée à la précision de l'estimation des paramètres : plus cette

dernière est élevée, plus l'estimation est précise.

2.4.3.2 Extraction d'une coda.

Dans le contexte où il existe des sources ambiantes au milieu qui soient quasi-impulsionnelles, l'identification passive s'établit en trois étapes pour chaque évènement : détecter l'évènement, conserver la partie du signal pour $t \in [t_{\text{coda}}^{\text{deb}}, t_{\text{coda}}^{\text{fin}}]$, accumuler les inter-corrélations des deux signaux sur cet intervalle.

La première étape est réalisée en considérant la puissance instantanée des signaux enregistrés. La détection de l'évènement réside dans l'estimation du temps à partir duquel la puissance instantanée est supérieure à un certain seuil fixé dans l'application.

La deuxième étape est la plus délicate. Il est en effet difficile d'explicitier théoriquement une valeur de $t_{\text{coda}}^{\text{deb}}$. Si le temps de début de la coda est estimé trop tôt, alors l'inter-corrélation sera plus significative de la source que de la coda, ce qui diminue le rapport signal à bruit¹¹. Si le temps de début de la coda est estimé trop tard, alors la coda ayant une enveloppe décroissante exponentiellement, les signaux reçus seront fortement atténués et moins riches spectralement (puisque plus la fréquence augmente plus l'atténuation est forte). Cela aura pour effet de distordre la corrélation de Green estimée comme si la distribution des sources était imparfaite. En pratique, il existe une approximation du temps de mélange $t_{\text{coda}}^{\text{deb}}$, exprimé en ms, où seul le volume de la pièce (exprimé en m³) intervient [Polack88] :

$$t_{\text{coda}}^{\text{deb}} \approx \sqrt{V} \quad (2.79)$$

Cette formule empirique donne le temps caractéristique d'un système auditif *i.e.* ce qui correspond à 10 retours captés en 24 ms. Nous utiliserons cette relation car les expérimentations sont réalisées avec des capteurs dont la bande de fréquence est incluse dans la bande audible 20 Hz - 20 kHz.

Le temps de fin de coda $t_{\text{coda}}^{\text{fin}}$ est l'instant qui précède "le retour" au bruit ambiant non évènementiel. En pratique, on considère que l'on est encore dans la coda tant que la puissance instantanée est supérieure à un seuil fixé par l'application, ce qui détermine $t_{\text{coda}}^{\text{fin}}$. Précisons que si $t_{\text{coda}}^{\text{fin}}$ est trop faible alors on perd des échantillons qui contiennent de l'information utile pour l'estimation de la corrélation de Green. Si $t_{\text{coda}}^{\text{fin}}$ est trop élevé alors certaines inter-corrélations contiendront la contribution du bruit ambiant non évènementiel ou du bruit instrumental (si le bruit ambiant est trop faible) qui peuvent nuire à l'estimation de la corrélation de Green.

On représente en [figure 2.8](#) un signal provenant d'une source quasi-impulsionnelle (frappement de mains), sa puissance instantanée et sa coda estimée via la description précédente. Précisons qu'en réalité la coda est estimée en utilisant les signaux des deux capteurs en prenant l'intersection des intervalles $[t_{\text{coda}}^{\text{deb}}, t_{\text{coda}}^{\text{fin}}]$ estimés pour chaque capteur.

2.4.3.3 Calcul et accumulation d'inter-corrélations.

On décrit maintenant l'algorithme utilisé pour estimer la corrélation de Green. Soit \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 les signaux enregistrés par les microphones m_1 et m_2 . Les inter-corrélations s'effectuent sur

11. Le contexte passif amène à une situation remarquable : le rapport signal à bruit est défini comme le rapport du "bruit acoustique" dû aux multiples réflexions et du "signal acoustique" qui correspond aux temps de premières arrivées qui, par leur cohérence, sont néfastes à la reconstruction de la corrélation de Green.

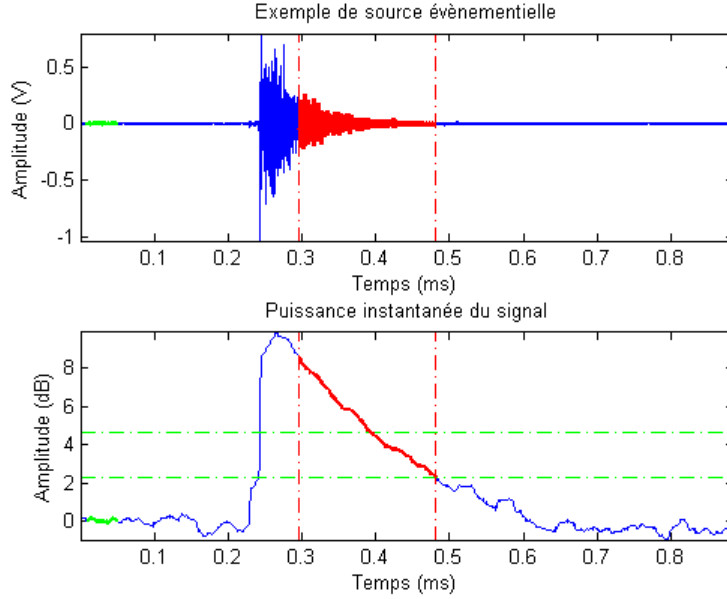


FIGURE 2.8 – Une source quasi-impulsionnelle et sa puissance instantanée. La partie surlignée en vert correspond au sous-signal utilisé pour calculer la puissance du bruit ambiant P_0 hors sources évènementielles. La puissance instantanée est calculée en dB avec P_0 comme valeur de référence. Les traits horizontaux (pointillés verts) représentent les seuils de détection d'un évènement ($P = 100P_0$ i.e. seuil à $\log(100) \approx 4.61$) et de détection de fin de coda ($P = 10P_0$ i.e. seuil à $\log(10) \approx 2.30$). Les traits verticaux (pointillés rouges) délimitent le sous-signal correspondant à la coda. Le temps de début de coda est déterminé à partir de la relation (2.79) avec un volume $V \approx 75 \text{ m}^3$.

des sous-signaux de \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 de N points extraits des codas. Soit $\mathbf{C}_{1,2}^{(n)}$ l'accumulation de n inter-corrélations de sous-signaux de \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 . Par convention, $\mathbf{C}_{1,2}^{(0)}$ est le vecteur nul. Avec ces notations, l'algorithme s'écrit :

$$\mathbf{C}_{1,2}^{(n+1)}(p) = \frac{1}{n+1} \left(n\mathbf{C}_{1,2}^{(n)}(p) + \sum_{k=-N}^{k=N} \mathbf{s}_1^{(n)}(k+p)\mathbf{s}_2^{(n)}(p) \right) \quad (2.80)$$

pour tout $p \in [-(N-1), N-1]$, et, où $\mathbf{s}_1^{(n)}$ et $\mathbf{s}_2^{(n)}$ sont les n -ièmes sous-signaux extraits.

Il existe deux variantes à cet algorithme. La première consiste à inter-corréler les signaux codés uniquement sur 1 bit (le bit de signe). L'intérêt est double : l'information à stocker et à manipuler est minimale, et, l'amplitude des bruits ambiants, qui peuvent être de nature différente, est homogénéisée afin que le calcul d'inter-corrélation ne subisse pas l'effet de différences d'amplitudes trop élevées. Nous discuterons plus bas de l'effet de cette opération.

La deuxième variante, qui peut être appliquée en plus de la première, est de blanchir les signaux en inversant la transformée de Fourier de la série fréquentielle obtenue en normalisant chaque valeur de leur transformée de Fourier du signal. L'intérêt réside dans l'amélioration de la convergence de l'inter-corrélation du bruit ambiant propagé vers l'inter-corrélation d'un

bruit blanc propagé. Cependant, les résultats associés à cette variante, et obtenus sur plusieurs expérimentations, ne seront pas montrés car ils s'en trouvent dégradés. Cette méthode n'a donc pas été retenue.

2.4.4 Estimation passive de la corrélation de Green : caractérisation.

2.4.4.1 Phénomène de pondérosité.

L'algorithme d'estimation de la corrélation de Green à partir de sources événementielles, dont on n'a aucune information a priori, a été testé sur plusieurs configurations. On présente sur la [figure 2.9](#) le signal mesuré par un des deux microphones, espacés de 35 cm, pendant une expérimentation dans laquelle 11 événements ont été générés.

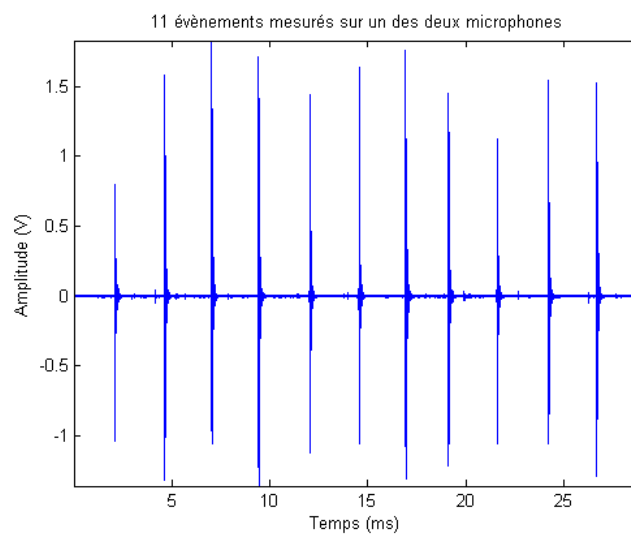


FIGURE 2.9 – *Signal enregistré par un des deux capteurs. 11 événements ont été générés (claquement de doigts, pas, frappement de main, impulsions sur une table, etc.).*

La [figure 2.10](#) représente la corrélation de Green estimée sur les 11 événements entre les deux capteurs. On peut remarquer que la symétrie n'est pas parfaite. Cela peut être justifié par le fait que les sources réelles et virtuelles (dues aux réflexions sur les interfaces du milieu) n'ont pas éclairé les capteurs selon toutes les directions et toutes les fréquences. Ce phénomène est celui de la "pondérosité" déjà observé dans des cas pratiques [[Sabra05-3](#)]. Il justifie en plus les distorsions observées principalement sur les extrema de la corrélation de Green reconstruite qui disparaissent en intégrant de nouveaux événements dans l'estimation. On notera que la convergence de la corrélation de Green estimée vers la corrélation de Green théorique est subjective puisque cette dernière n'est pas connue.

On formalise le phénomène de pondérosité en écrivant :

$$\mathbf{C}_F(t, \underline{x}, \underline{x}') = \kappa(\underline{x}, \underline{x}')\delta(t) \quad (2.81)$$

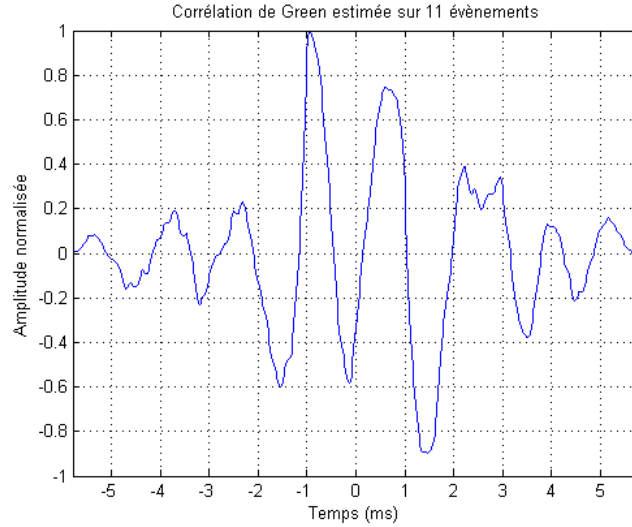


FIGURE 2.10 – *Corrélation de Green estimée sur tous les évènements.*

où κ est la "cohérence" spatiale de la source. Dans le cas idéal où la source est blanche spatialement, on a $\kappa(\underline{x}, \underline{x}') = \delta(\underline{x} - \underline{x}')$. A l'aide de l'équation (1.9)¹², la corrélation de Green estimée $\hat{\mathbf{C}}_{1,2}$ entre les deux capteurs s'écrit :

$$\hat{\mathbf{C}}_{1,2}(t) = \kappa(\underline{x}_1, \cdot) \otimes_S \mathbf{C}(t, \cdot, \underline{x}_2) \quad (2.82)$$

où on rappelle que \underline{x}_1 et \underline{x}_2 sont les positions des capteurs m_1 et m_2 , et, où \mathbf{C} est la corrélation de Green du milieu. L'équation (2.82) montre que la corrélation de Green estimée est la corrélation de Green théorique pondérée par la fonction $\underline{x} \mapsto \kappa(\underline{x}_1, \underline{x})$, d'où le nom de phénomène de pondérosité. Ceci justifie que la fonction κ influe à la fois sur la convergence vers la corrélation de Green théorique, et, sur la dissymétrie de la corrélation de Green reconstruite.

Pour étudier plus en détail le phénomène de pondérosité, on réalise une expérimentation qui favorise le mélange des ondes : un milieu confiné. Avec ce milieu, on va montrer que la convergence est améliorée et on va illustrer l'effet de la pondérosité sur un exemple.

On représente en figure 2.11 la configuration expérimentale et en figure 2.12 la corrélation de Green estimée par le même procédé que ci-dessus. Les fluctuations ont disparu et, bien qu'elle ne soit pas parfaite, la symétrie est grandement améliorée.

On représente maintenant en figure 2.13 les corrélations de Green estimées pour des évènements générés dans l'alignement des capteurs sur chacun des côtés (gauche et droite). On observe bien la dissymétrie causée par la provenance des sources qui favorisent l'un des deux côtés. On peut remarquer que l'évènement généré à gauche retourne une meilleure approximation (au sens des moindres carrés) de la corrélation de Green estimée sur tous les évènements pour les temps négatifs. A l'opposé, l'évènement généré à droite retourne une meilleure approximation (au sens des moindres carrés) de la corrélation de Green estimée sur tous les évènements pour les temps positifs. Cela permet d'appréhender le fait que l'accumulation des inter-corrélations des codas enregistrées tend vers la corrélation de Green théorique.

12. $\mathbf{C}_u = \mathbf{G} \otimes_T \otimes_S \mathbf{C}_f \otimes_T \otimes_S \mathbf{G}^-$.

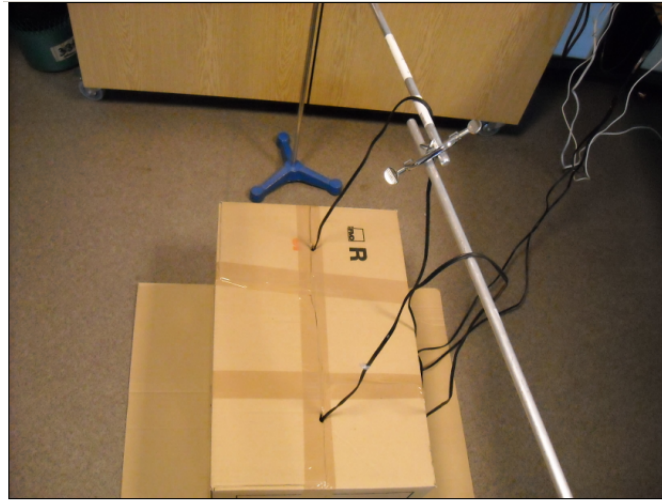


FIGURE 2.11 – Configuration expérimentale. Deux microphones sont placés dans un carton vide (légèrement troué pour laisser passer les fils des deux capteurs).

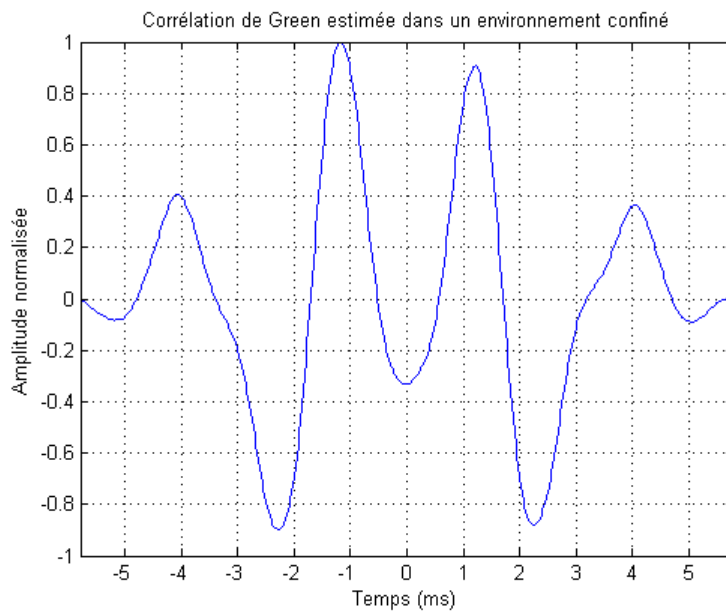


FIGURE 2.12 – Corrélation de Green estimée pour le milieu confiné.

Finalement, c'est bien le phénomène de pondérosité qui introduit des distorsions sur la corrélation de Green estimée. Si κ change significativement au cours du temps, alors les distorsions seront différentes. Dans le cas contraire, il sera possible d'utiliser la corrélation de Green pour établir un diagnostic du milieu comme cela sera montré plus bas.

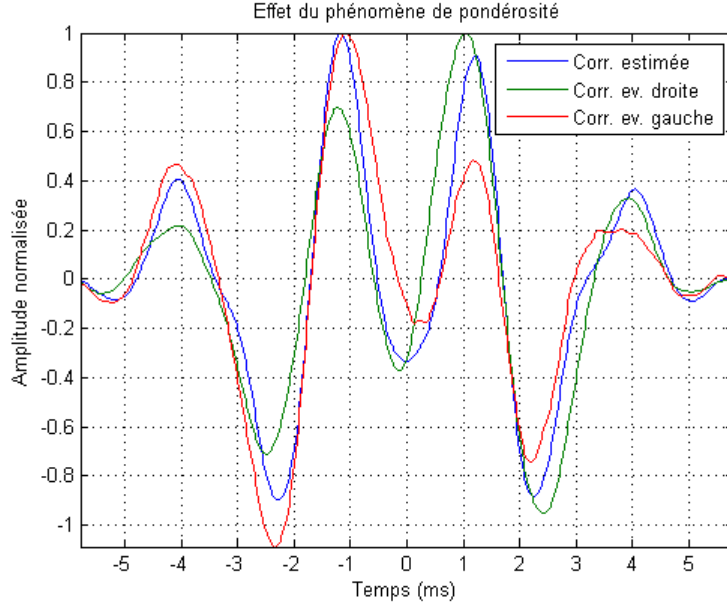


FIGURE 2.13 – *Effet de la pondérosité. La corrélation de Green estimée sur tous les évènements est représentée par la courbe bleue. Les courbes verte et rouge représentent la corrélation de Green estimée sur un évènement généré à droite et à gauche de l'instrumentation. Les amplitudes ont été normalisées afin de rendre compte uniquement de la dissymétrie par rapport à l'axe des temps.*

2.4.4.2 Vitesse de convergence.

On s'intéresse ici à la vitesse de convergence de la méthode vers la corrélation de Green. Il est difficile d'aborder la précision de l'algorithme puisque l'on ne dispose pas de la corrélation de Green théorique. En perspective, cela peut être pallié par des simulations en modélisant numériquement le milieu dans lequel on mène l'expérimentation.

Pour caractériser la vitesse de convergence, on utilise un artifice qui consiste à considérer que la corrélation de Green qui accumule toutes les inter-corrélations est la référence. Par convention et selon l'équation (2.80), on la notera formellement $\mathbf{C}_{1,2}^\infty$. Par définition, un ordre de convergence de l'algorithme est, s'il existe, un réel α tel que :

$$\|\mathbf{C}_{1,2}^{n+1} - \mathbf{C}_{1,2}^\infty\|_2 = O(\|\mathbf{C}_{1,2}^n - \mathbf{C}_{1,2}^\infty\|_2^\alpha) \quad (2.83)$$

où la suite $(\mathbf{C}_{1,2}^n)_{n>0}$ est définie en (2.80).

La figure 2.14 représente pour deux expérimentations (milieu confiné et non confiné) les valeurs de la suite $(\|\mathbf{C}_{1,2}^n - \mathbf{C}_{1,2}^\infty\|_2 / \|\mathbf{C}_{1,2}^\infty\|_2)_{n>0}$ dont chaque terme correspond à l'erreur d'estimation euclidienne relative pour chaque sous-signal. On notera que pour le milieu confiné, il existe peu de sous-signaux qui dégradent la convergence de l'algorithme. L'étude de la vitesse de convergence montre qu'elle est linéaire *i.e.* l'ordre de convergence α est égal à 1. Pour le milieu non confiné, certains sous-signaux dégradent significativement la convergence de l'algorithme même si cette dernière est asymptotiquement linéaire.

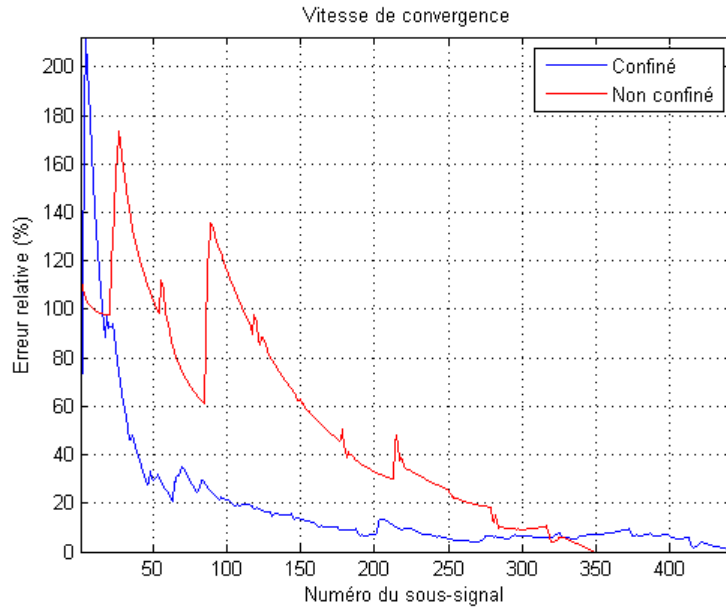


FIGURE 2.14 – *Vitesse de convergence pour deux configurations : milieu confiné et milieu non confiné. L'erreur sur les 10 premiers sous-signaux n'est pas représentée.*

La convergence linéaire est un résultat qui a été observé sur toutes les autres configurations testées, ce qui en fait une conjecture. Une perspective directe de cette étude est d'établir un critère sur les sous-signaux utilisés pour l'estimation de la corrélation de Green qui accepte ou qui rejette le sous-signal s'il dégrade la convergence.

2.4.4.3 Quantification sur 1 bit.

On étudie maintenant l'effet de la quantification des signaux sur un seul bit dans la reconstruction de la corrélation de Green. On représente en [figure 2.15](#) la comparaison de la corrélation de Green estimée avec des signaux codés sur $Q = 16$ bits et sur $Q = 1$ bit. On observe que la dissymétrie a disparu. Cela peut se justifier par le fait que la quantification sur 1 bit homogénéise les amplitudes du bruit ambiant inter-corrélé. Cela a pour effet de ne favoriser aucune source réelle ou virtuelle. Les sources réelles et les sources virtuelles associées aux premières réflexions sont généralement plus puissantes et, par conséquent, ont un effet de pondération sur les inter-corrélations calculées si l'amplitude est codée sur plusieurs bits.

2.4.4.4 Estimation passive de la corrélation de Green : premier bilan.

Les résultats précédents ont montré que la pondérosité, due à une répartition spatiale et directionnelle imparfaite, était une source de distorsion dans l'estimation passive de la corrélation de Green. A ce phénomène on peut ajouter les distorsions liées à la numérisation (identiquement à l'estimation active de la fonction de Green décrite plus haut) et aux bruits de mesure. On peut montrer que ce dernier phénomène intervient peu significativement dans la reconstruction.

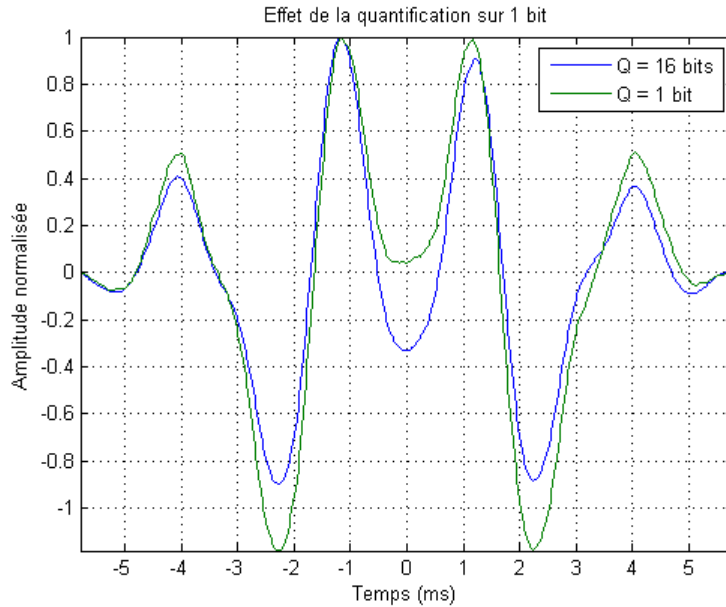


FIGURE 2.15 – Comparaison entre les corrélations de Green estimées avec des signaux codés sur $Q = 16$ bits et sur $Q = 1$ bit. Les amplitudes ont été normalisées.

Enfin, l'extraction d'une coda liée à un évènement est aussi une source d'erreur. Cependant, la détermination des seuils à partir de la configuration expérimentale mène à une estimation robuste des sous-signaux à inter-corréler.

Les perspectives dans l'amélioration de la convergence sont nombreuses. La plus significative est de décrire un test d'hypothèse qui permette de considérer ou de rejeter la contribution d'un sous-signal extrait d'une coda. On pourra par exemple utiliser le résultat qui démontre l'existence de régions du milieu telles que les sources localisées dans ces zones contribuent significativement à l'estimation de la corrélation de Green [Roux05-2]. A chaque évènement, la partie cohérente peut être utilisée pour localiser la source, ou du moins sa direction, et déterminer si elle appartient à cette zone. Cela suppose que les zones sont connues ce qui implique une forte connaissance a priori sur le milieu et la géométrie de l'instrumentation.

2.4.5 Exploitation de la corrélation de Green.

2.4.5.1 Validation de l'identité de Ward et reconstruction de la fonction de Green.

On étudie maintenant l'identité de Ward (2.71) obtenue dans la section 2.3 qui relie proportionnellement la dérivée troisième de la corrélation de Green et la partie impaire de la fonction de Green pour un milieu visco-acoustique avec un faible amortissement visqueux. Les résultats sont confrontés à ceux donnés par l'identité de Ward pour un amortissement constant (1.16) qui relie proportionnellement la dérivée première de la corrélation de Green et la partie impaire de la fonction de Green¹³. Cette étude est menée pour plusieurs configurations instrumentales

13. On remarquera que les coefficients de proportionnalité dans (2.71) et (1.16) sont de signes opposés

différentes *i.e.* modification de la distance inter-capteurs.

Les figures 2.16 et 2.17 comparent la partie impaire de la fonction de Green¹⁴ aux dérivées première et troisième de la corrélation de Green pour deux configurations différentes. Il apparaît sur ces figures que la dérivée troisième est une "meilleure" approximation de la partie impaire de la fonction de Green que la dérivée première. Pour quantifier cela, on utilise un indice de ressemblance entre deux signaux qui est le maximum du module de leur inter-corrélation. La convergence n'étant pas, en général, identique entre les parties anti-causale et causale de la corrélation de Green estimée, l'indice est calculé sur chacune des parties. Le tableau 2.1 indique les valeurs de cet indice pour différentes configurations.

d	22 cm	23 cm	35 cm	63 cm	91 cm
R_1^+	34 %	35 %	30 %	26 %	26 %
R_1^-	27 %	33 %	32 %	33 %	25 %
R_3^+	58 %	45 %	32 %	28 %	28 %
R_3^-	53 %	43 %	43 %	45 %	32 %

TABLE 2.1 – *Indice de ressemblance (R) en fonction de la distance (d), de l'ordre de la dérivée (1 ou 3) et du demi-axe des temps (causal + ou anti-causal -). Par exemple, R_1^- correspond à l'indice de ressemblance entre la fonction de Green et la partie anti-causale de la dérivée première de la corrélation de Green.*

Bien que la dérivée troisième de la corrélation de Green approche mieux, au sens de l'indice proposé, la partie impaire de la fonction de Green que la dérivée première, la reconstruction est dégradée à cause de nombreuses distorsions. La première source de distorsion provient de l'estimation de la corrélation de Green, cela a été détaillé dans la sous-section précédente. Une autre source de distorsion est la dérivation numérique d'ordre 3 qui est une opération qui diminue fortement le rapport signal-à-bruit car elle amplifie les hautes fréquences qui sont plus significatives du bruit que du signal. Enfin, la numérisation des signaux introduit une distorsion dans l'estimation de la fonction de Green ainsi que de la corrélation de Green. Par conséquent, la comparaison de ces deux quantités (via des dérivations numériques) est compromise par cet effet.

Ces expérimentations confortent les résultats théoriques des sections et chapitres précédents. On vient de prouver que l'identité de Ward est un facteur important dans la reconstruction de la fonction de Green. L'identité classique utilisée en acoustique (1.16) est ici remise en cause puisque l'on observe que la prise en compte d'un modèle de dissipation réaliste mène à de meilleurs résultats. Cependant, la nouvelle identité de Ward nécessite des opérations numériques difficiles à réaliser sans dégrader le résultat.

2.4.5.2 Estimation du temps de vol.

On utilise maintenant la reconstruction de la corrélation de Green pour l'estimation de temps de vol entre deux capteurs. Cette étude est importante dans le sens où elle fait un lien avec les chapitres suivants et, plus généralement, elle illustre l'intérêt de reconstruire une fonction connue et caractéristique du milieu pour en extraire des paramètres utiles pour une application donnée.

Pour un milieu homogène, le temps de vol est porteur d'une information géométrique (la

14. La partie impaire de la fonction de Green est obtenue à partir de la partie causale de la fonction de Green estimée en actif.

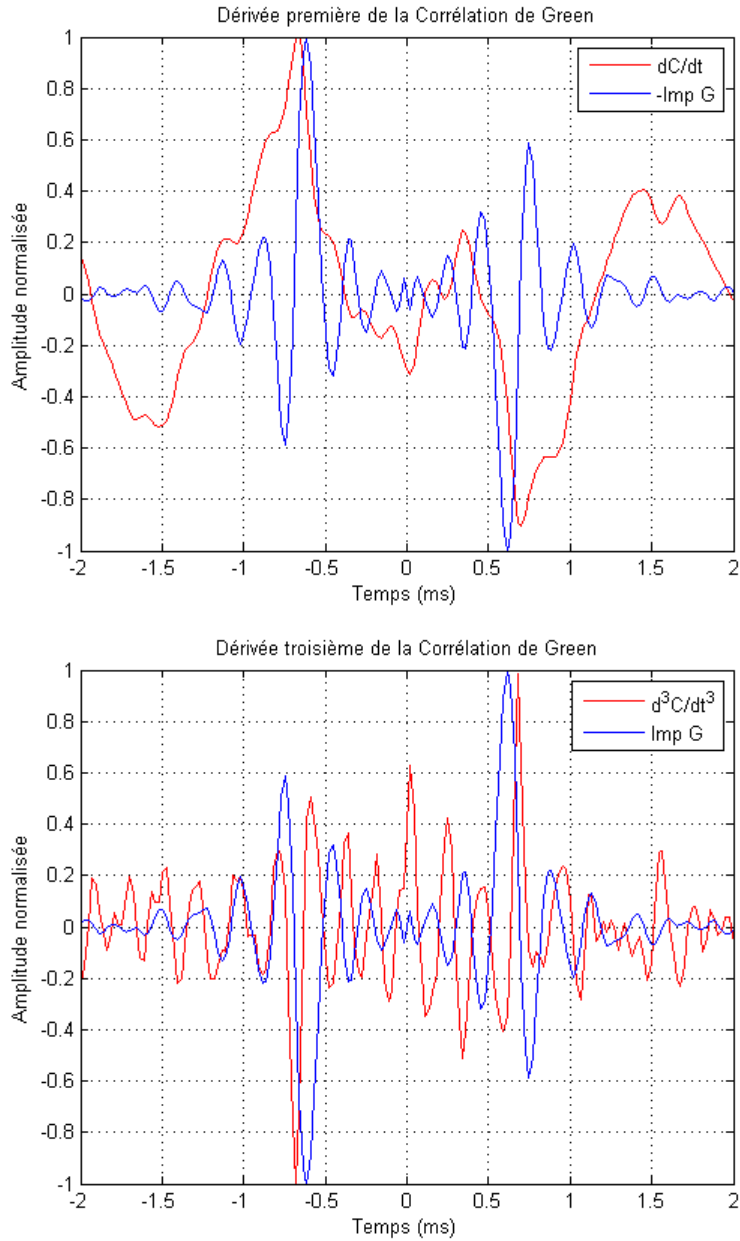


FIGURE 2.16 – *En haut : comparaison entre la dérivée première de la corrélation de Green et l'opposé de la partie impaire de la fonction de Green. En bas : comparaison entre la dérivée troisième de la corrélation de Green et la partie impaire de la fonction de Green. Les capteurs sont espacés de 23 cm.*

distance entre capteurs) et physique (la vitesse de propagation du milieu). L'estimation de ces paramètres est une étape importante pour la localisation de capteurs et le diagnostic des struc-

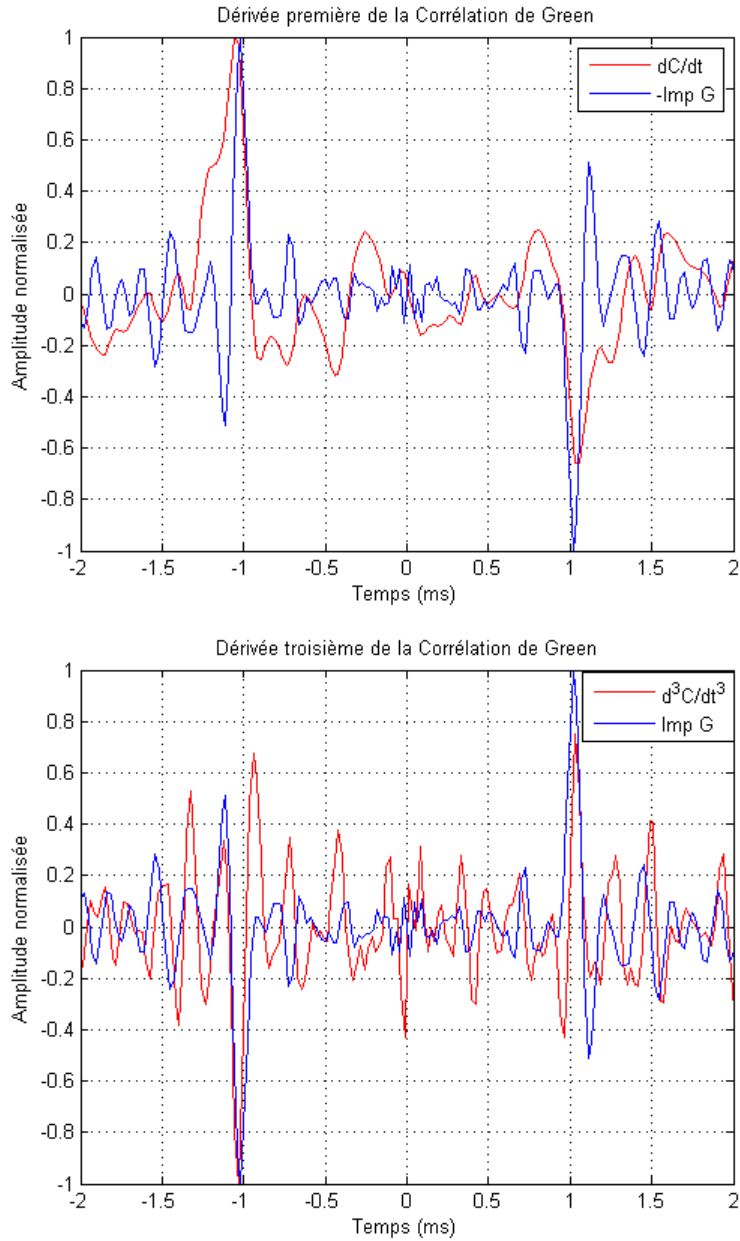


FIGURE 2.17 – En haut : comparaison entre la dérivée première de la corrélation de Green et l'opposé de la partie impaire de la fonction de Green. En bas : comparaison entre la dérivée troisième de la corrélation de Green et la partie impaire de la fonction de Green. Les capteurs sont espacés de 35 cm.

tures. Nous reviendrons sur ces aspects dans les parties suivantes.

L'étude précédente, concernant la vérification de l'identité de Ward, indique que les arguments

maximaux des dérivées première et troisième de la corrélation de Green sont des estimateurs du temps de vol. Cela se justifie théoriquement pour chacun des cas à l'aide des identités de Ward (1.16) (pour la dérivée première) et (2.71) (pour la dérivée troisième) et de l'expression de la fonction de Green (2.50). L'estimation des temps de vol est étudiée pour ces deux estimateurs.

Enfin, à cause de la dissymétrie de la corrélation de Green estimée, l'estimation du temps de vol est réalisée sur la partie anti-causale ou causale la plus énergétique. Cette considération (empirique) peut s'entendre par le fait (empirique) que l'énergie de l'accumulation des inter-corrélations augmente si les inter-corrélations contribuent à l'estimation de la corrélation de Green, sinon elle diminue.

L'erreur sur le temps de vol estimé est calculée en comparant, en module, l'argument maximal de la fonction de Green et l'argument maximal de la partie anti-causale ou causale la plus énergétique de la corrélation de Green dérivée une ou trois fois¹⁵. Sur toutes les expérimentations menées, l'estimation du temps via les dérivées première ou troisième de la corrélation de Green sont précises à l'ordre du centimètre. On pourra s'en convaincre à l'aide du tableau 2.2 qui indique l'erreur obtenue pour des configurations différentes. L'erreur est multipliée par la vitesse de propagation théorique (343 m.s^{-1} [Lide97]) pour convertir l'erreur sur les temps en une erreur sur les distances.

Après observations des résultats sur plusieurs configurations (en particulier ceux du tableau 2.2), il apparaît que l'estimation du temps de vol via la dérivée troisième de la corrélation est plus précise que la dérivée première mais moins robuste. Cela se justifie avec la dérivation numérique d'ordre 3 qui diminue considérablement le rapport signal-à-bruit.

d	22 cm	23 cm	35 cm	63 cm	91 cm
e_1	1.9 cm	1.9 cm	1.16 cm	0.38 cm	3.5 cm
e_3	2.7 cm	2.7 cm	0.38 cm	0.38 cm	0.39 cm

TABLE 2.2 – Erreurs, en centimètres, sur les distances estimées via la dérivée première de la corrélation de Green (e_1) et la dérivée troisième de la corrélation de Green (e_3).

On s'intéresse maintenant à la distribution des temps de vol estimés (avec la dérivée première et troisième de la corrélation de Green) pour une configuration donnée. Le principe consiste à estimer le temps de vol en utilisant uniquement un évènement et d'observer la distribution du temps de vol estimé pour plusieurs évènements.

La figure 2.18 donne la distribution des valeurs des vitesses estimées avec la première et la troisième dérivée de la corrélation de Green sur 36 évènements (pour la même configuration *i.e.* $d_{1,2} = 35 \text{ cm}$). On compare la distribution des valeurs estimées à une loi normale qui, avec un test d'hypothèse (test du χ^2 qui accepte une hypothèse avec 5% de confiance), s'avère judicieuse pour les deux courbes. On peut déduire de cette étude que l'estimateur optimal du temps de vol utilisant la dérivée première ou troisième de la corrélation de Green est simplement la moyenne des estimées à chaque évènement.

A partir des données observées sur l'ensemble des expérimentations établies, on peut modéliser les erreurs d'estimation sur les temps de vol utilisant la première ou la troisième dérivée de la corrélation de Green suivent une loi normale centrée. Il est difficile d'obtenir une expression théorique de la variance de ces lois puisqu'elles dépendent de nombreux paramètres : ca-

15. On précise que la corrélation de Green est estimée sur une trentaine d'évènements.

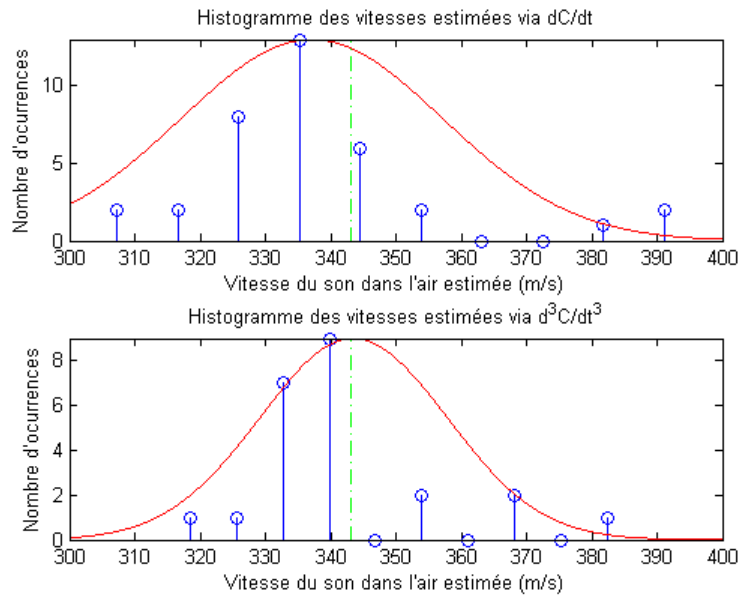


FIGURE 2.18 – *En haut* : Histogramme des vitesses estimées via la dérivée première de la corrélation de Green. L’enveloppe (trait continu rouge) est la densité d’une loi normale de même moyenne et variance que la vitesse estimée. Le trait vertical (discontinu vert) est la vitesse théorique de 343 m.s^{-1} . *En bas* : idem qu’en haut pour les vitesses estimées via la dérivée troisième de la corrélation de Green. Pour les deux figures, les vitesses $v \notin [300, 400]$ ne sont pas représentées.

ractéristiques de l’instrumentation (bande de fréquences), de la modélisation du milieu (identité de Ward) et la répartition spectrale et spatiale des sources (phénomène de pondérosité).

Une perspective intéressante est de décrire une borne de Cramer-Rao de l’estimation de temps de vol dans le cas passif. Ce cadre est plus complexe que le cadre actif où le paramètre τ apparaît simplement dans le modèle d’observation (2.76). On peut cependant conjecturer que la borne de Cramer-Rao de l’identification passive du temps vol est supérieure ou égale à celle du cas actif (2.78).

2.4.5.3 Suivi de la corrélation pour la détection de changement.

La corrélation de Green $\mathbf{C}(t, \underline{x}_1, \underline{x}_2)$ entre deux points du milieu est une fonction qui dépend uniquement du milieu et des positions \underline{x}_1 et \underline{x}_2 . Le suivi de cette fonction dans le temps, comme celui de la fonction de Green, est donc significatif de l’évolution du milieu et de la géométrie de l’instrumentation.

A titre d’exemple, on considère l’expérimentation dont la configuration est représentée en figure 2.19 et qui consiste à reconstruire la corrélation de Green entre les deux microphones sans et avec un obstacle entre les capteurs (bloc de béton). La comparaison des corrélations de Green estimées dans les deux configurations est représentée en figure 2.20. On a uniquement représenté la partie anti-causale retournée temporellement (car la plus énergétique) de la corrélation de

Green. A titre comparatif, on a aussi tracé sur cette figure les fonctions de Green estimées dans les deux configurations.

Pour la corrélation de Green et la fonction de Green on remarque un changement en suivant l'argument maximal (méthode locale *i.e.* prend en compte un seul échantillon) ou en détectant une distorsion (méthode globale *i.e.* prend en compte tout les échantillons) en suivant l'indice de ressemblance. Le [tableau 2.3](#) ci-dessous donne la valeur de l'évolution relative du temps de vol et l'indice de ressemblance pour la fonction et la corrélation de Green. On observera la similarité de l'évolution de ces deux paramètres pour la fonction et la corrélation de Green. Ce résultat indique une méthode de diagnostic passif du milieu en suivant ces deux paramètres dans le temps. Il sera conforté dans l'expérimentation présentée dans la sous-section suivante.

Paramètres	Argument maximal	Indice de ressemblance
Fonction de Green	87 %	1.2 %
Corrélation de Green	86 %	1.9 %

TABLE 2.3 – *Évolution relative de l'argument maximal (différence des temps d'arrivée avec et sans obstacle divisé par le temps d'arrivée sans obstacle) et indice de ressemblance pour la fonction et la corrélation de Green sans et avec obstacle. Toutes les quantités sont exprimées en pour cent.*

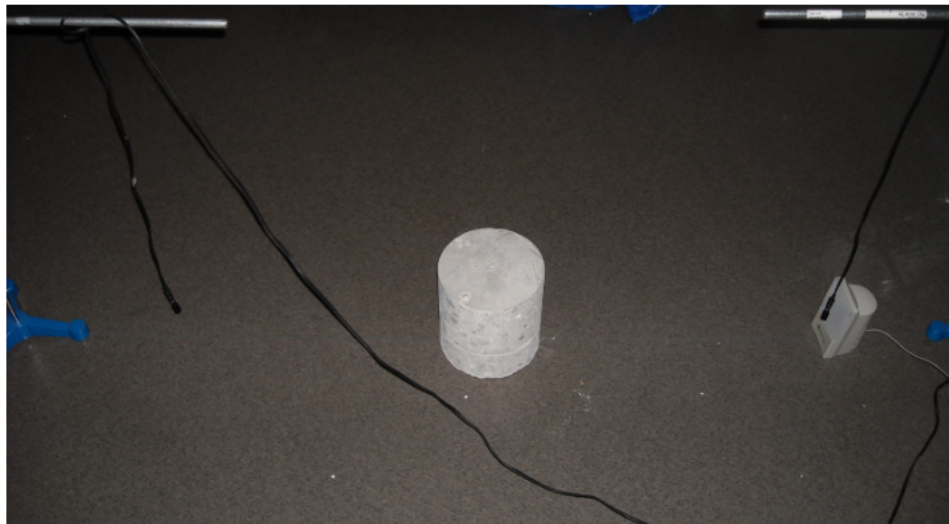


FIGURE 2.19 – *Configuration expérimentale avec l'obstacle. Les capteurs sont à la même hauteur du sol et espacés de 1.22 m.*

Des expérimentations similaires ont été menées pour le même milieu mais avec une distance entre capteurs modifiée. Les résultats (non montrés par souci d'alléger la rédaction) sont identiques à ceux décrits au paragraphe précédent : on observe un déplacement de l'argument maximal (identique pour la fonction et la corrélation de Green) ainsi qu'un changement dans l'allure globale de la corrélation de Green.

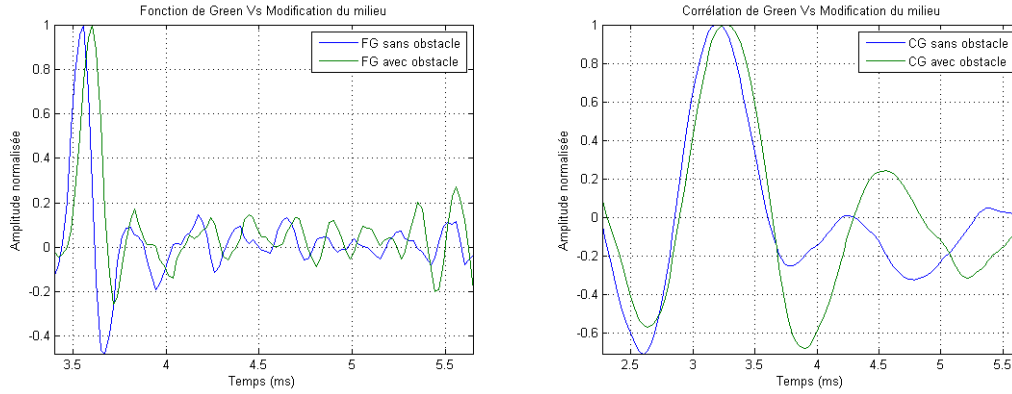


FIGURE 2.20 – A gauche : comparaison des fonctions de Green (FG) estimées sans et avec obstacle. A droite : comparaison des parties anti-causales retournées temporellement des corrélations de Green (CG) estimées sans et avec obstacle. Les intervalles de temps considérés ne contiennent pas les temps proches du temps nul.

Ces expérimentations valident l'utilisation de la corrélation de Green elle-même (sans dérivation ou autres opérations numériques) pour la détection d'un changement dans le milieu et/ou dans l'instrumentation. Cette utilisation doit être davantage approfondie en utilisant les outils de la détection de rupture de modèle [Basseville93] dont le principe consiste à déterminer un test d'hypothèse qui indique la présence d'un changement dans le modèle associé à un paramètre. Ce paramètre peut être scalaire (argument maximal, vitesse de propagation, distance entre capteurs) ou fonctionnelle (la fonction de Green et/ou la corrélation de Green elles-mêmes, par exemple).

Une fois détecté, le changement doit être identifié. Pour le modèle de fonction de Green acoustique (2.48), une modification de l'argument maximal correspond à une évolution de temps de vol que l'on peut relier aux perturbations sur la vitesse du milieu et la distance entre capteurs. Pour la corrélation de Green, il reste un travail à effectuer pour relier l'expression théorique (2.63) aux observations afin de dégager un paramètre physique à estimer directement à partir de la corrélation de Green. Pour pallier cela, on peut utiliser les identités de Ward théoriques (2.20) et approchées (2.71) obtenues pour quantifier l'effet d'une perturbation du milieu sur la corrélation de Green en fonction de l'effet sur la fonction de Green qui lui est plus directement exploitable. Ceci est une perspective de ces travaux.

2.4.5.4 Expérimentation dans le ciment.

On présente ici une dernière expérimentation qui concerne une instrumentation enfouie. Deux microphones ont été enfouis dans un bloc de ciment (cf. figure 2.21). La corrélation de Green a été estimée à plusieurs temps pendant le séchage du bloc et une fois sec. L'objectif est de montrer que le suivi de la corrélation de Green est une méthode pour établir un diagnostic du matériau.

La figure 2.22 représente les parties anti-causales, retournées dans le temps, des corrélations de Green estimées pour quatre temps différents. Aucune expérimentation n'a pu être menée entre les jours 1 et 5, ce qui explique la grande différence des dates d'estimation entre la deuxième (courbe verte) et la troisième (courbe rouge) corrélation de Green.

Pour quantifier l'évolution de la corrélation de Green, on observe en plus de l'argument

maximal de la partie de la corrélation de Green, l'indice de ressemblance (maximum de l'inter-corrélation prise en valeur absolue) entre deux corrélations de Green (parties anti-causale) pour deux dates différentes dont les valeurs sont reportées dans le [tableau 2.5](#). Les valeurs du tableau sont en parfait accord avec ce que nous observons sur la [figure 2.22](#) et la configuration expérimentale. En effet, l'indice de ressemblance évolue pendant le séchage du béton de sorte que plus les dates sont espacées plus l'indice de ressemblance diminue. Une fois séchée, l'indice est presque constant, le milieu n'évolue plus.



FIGURE 2.21 – Configuration expérimentale : deux microphones enfouis dans un bloc de ciment et espacés de 25 cm.

Date	00j00h00min	00j02h20min	04j10h59min	04j18h58min
00j00h00min	*	72 %	67 %	65 %
00j02h20min	*	*	87 %	84 %
04j10h59min	*	*	*	99 %
04j18h58min	*	*	*	*

TABLE 2.4 – Indice de ressemblance, exprimé en pour cent, entre deux corrélations de Green estimées à des dates différentes.

Ces résultats confirment dans un cadre proche du SHM réel deux points importants : la méthode d'estimation passive de corrélation de Green via une instrumentation enfouie fonctionne et cette méthode peut être utilisée pour le monitoring du milieu. Le monitoring peut être réalisé en suivant l'argument maximal et l'indice de ressemblance de la corrélation de Green à différentes

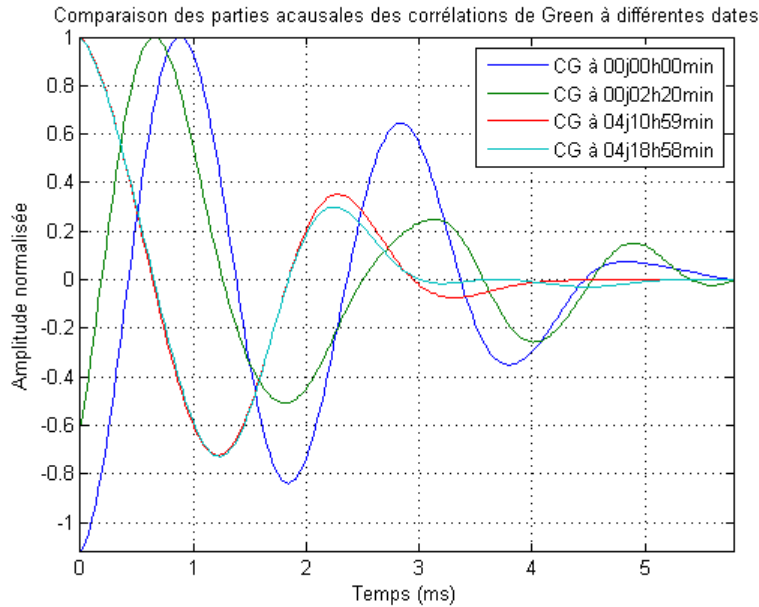


FIGURE 2.22 – Comparaison des parties anti-causales des corrélations de Green estimées à différentes dates.

Date	00j02h20min	04j10h59min	04j18h58min
Évolution relative	22 %	99 %	100 %

TABLE 2.5 – Évolution relative de l'argument maximal de la corrélation de Green.

dates. Il est important de noter que des capteurs scalaires (une composante) suffisent au SHM passif.

2.4.5.5 Étude du spectre de la corrélation de Green.

Le spectre de la corrélation peut se calculer explicitement à l'aide des relations exacte (2.59) et approchée (dans le cadre d'une faible atténuation) (2.64) de la corrélation de Green dans le domaine fréquentiel. Ce spectre peut être comparé avec celui de la fonction de Green via les identités de Ward exacte (2.21) et approchée (dans le cadre d'une faible atténuation) (2.67).

Avec les expérimentations menées, l'étude des spectres n'a pas encore aboutie. En effet, dans le domaine fréquentiel des signaux numérisés, on ne retrouve pas les identités de Ward et les expressions théoriques. Bien que la détection de changement est toujours possible via les techniques décrites à la sous-section précédente, une perspective intéressante serait d'estimer le temps de vol directement à partir du spectre de la corrélation de Green car ce dernier dépend explicitement du temps de vol selon l'équation (2.67).

2.4.5.6 Bilan sur l'exploitation de la corrélation de Green.

Ces expérimentations ont démontré que la corrélation de Green était un outil intéressant pour le monitoring du milieu étudié et de l'instrumentation utilisée. L'identité de Ward établie à la [section 2.3](#) mène à des meilleurs résultats que l'identité de Ward classique qui prend en compte un modèle de dissipation constante. Cependant, la reconstruction expérimentale de la fonction de Green via une identité de Ward est compromise par les nombreuses distorsions qui proviennent du cadre numérique, des approximations dans les modèles ainsi que des imperfections dans l'estimation de la corrélation de Green (pondérosité). Toutefois, l'estimation passive de temps de vol a démontré que les arguments maximaux des dérivées première et troisième de la corrélation permettait d'obtenir une estimation précise du temps de vol. Cette estimation est plus précise en considérant la dérivée troisième, ce qui conforte le modèle de dissipation visqueuse pris en compte ainsi que l'identité de Ward établie [\(2.67\)](#).

Les perspectives d'exploitation de la corrélation de Green sont nombreuses et ont été discutées plus haut. Ces expérimentations sont les prémices de nouvelles campagnes de mesure et développements théoriques qui visent à mieux interpréter la corrélation de Green et améliorer son estimation en passif. L'objectif est de s'affranchir de l'identité de Ward et d'établir l'estimation des paramètres et leur monitoring directement à partir de cette fonction.

2.5 Expérimentations en sismique.

Les résultats théoriques concernant les milieux visco-élastiques obtenus dans la [section 2.3](#) montrent la possibilité d'extraire des paramètres supplémentaires au cas acoustique comme la vitesse et l'atténuation des ondes de cisaillement.

L'enregistrement des ondes qui se propagent dans de tels milieux doit être multi-composantes si l'on souhaite capturer toute l'information. Les expérimentations avec une instrumentation multi-composante n'ont pas pu être menées pendant la thèse et représentent une perspective très intéressante. On détaille dans cette section l'instrumentation qui sera mise en jeu ainsi que les perspectives d'applications de ces expérimentations. On précisera notamment comment intervient l'attitude absolue des capteurs qui est un paramètre à déterminer si l'on souhaite interpréter la mesure dans son intégralité.

2.5.1 Instrumentation et modèle de mesure.

En sismique, les capteurs utilisés sont des accéléromètres tri-axiaux. La [figure 2.23](#) représente un des capteurs utilisés et donne un exemple de signal enregistré. En fonction de la technologie, le capteur mesure aussi le champ de pesanteur¹⁶. Le champ mesuré est l'accélération $\underline{\mathbf{a}}$ qui est un champ 3D-3C. Pour un milieu solide, le champ $\underline{\mathbf{a}}$ vérifie l'équation de propagation [\(1.14\)](#) sans amortissement et [\(2.23\)](#) avec amortissement visqueux. Les résultats de ce chapitre sont donc applicables.

Pour écrire le modèle de mesure d'un accéléromètre tri-axial, il faut introduire son attitude. L'attitude d'un capteur est l'orientation de son repère propre, noté \mathfrak{R} , par rapport à un repère absolu (ou de référence) noté \mathfrak{R}_0 . On note $\underline{\mathbf{R}}$ la matrice de rotation qui transforme \mathfrak{R}_0 en \mathfrak{R} , elle

16. Les accéléromètres capacitifs sont des exemples de tels capteurs. L'accélération mesurée provient d'une masse en mouvement qui subit aussi le champ de gravité. A l'opposé, les accéléromètres piézorésistifs mesurent uniquement la conversion en tension d'une variation de contraintes, ce qui filtre la composante continue (le champ de gravité)

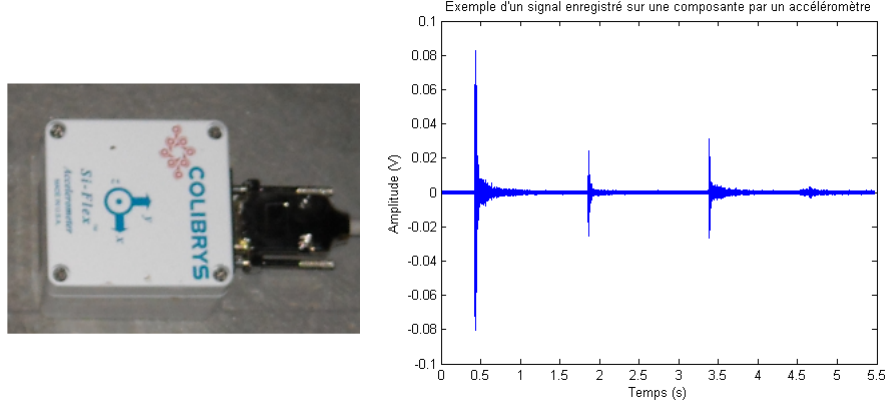


FIGURE 2.23 – Gauche : Représentation d'un des accéléromètres utilisé. Droite : Exemple de signal enregistré sur une composante par le capteur de trois pas.

représente l'attitude du capteur. Soit \underline{y} le point où se situe le capteur et \underline{s} le signal enregistré. On suppose que la composante continue du capteur est nulle. Le modèle de mesure est :

$$\underline{s}(t) = \underline{\mathbf{R}} (\underline{\mathbf{h}} \otimes_{T,S} \underline{\mathbf{f}})(t) + \underline{\mathbf{b}}(t) \quad (2.84)$$

où $\underline{\mathbf{h}}(t, \underline{x}) := \underline{\mathbf{G}}(t, \underline{y}, \underline{x})$ avec $\underline{\mathbf{G}}$ la fonction de Green du milieu. $\underline{\mathbf{b}}$ désigne le bruit de mesure.

2.5.2 Modèle d'inter-corrélation et attitudes relatives.

On décrit à partir du modèle de mesure (2.84), le modèle de l'inter-corrélation calculée. Considérons deux capteurs C_1 et C_2 , situés respectivement en \underline{x}_1 et \underline{x}_2 d'un milieu élastique X , et de repère respectifs \mathfrak{R}_1 et \mathfrak{R}_2 . On suppose que \mathfrak{R}_1 est le repère de référence et on note $\underline{\mathbf{R}}_1^2$ la matrice de rotation qui transforme respectivement \mathfrak{R}_1 en \mathfrak{R}_2 . Soit $\underline{\mathbf{f}}$ une source d'excitation du milieu et, $\underline{\mathbf{s}}_1$ et $\underline{\mathbf{s}}_2$ les signaux enregistrés respectivement par C_1 et C_2 . Selon le modèle de mesure (2.84), le modèle de l'inter-corrélation calculée s'écrit :

$$\underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{s}}_1, \underline{\mathbf{s}}_2}(t) = (\underline{\mathbf{h}}_1 \otimes_{T,S} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{f}}} \otimes_{T,S} \underline{\mathbf{h}}_2^T)(t) (\underline{\mathbf{R}}_1^2)^T \quad (2.85)$$

où on a supposé que les bruits sur les capteurs et $\underline{\mathbf{f}}$ étaient mutuellement indépendants.

La relation (2.85) fait apparaître la matrice $(\underline{\mathbf{R}}_1^2)^T$ qui est l'attitude relative du capteur C_2 relativement au capteur C_1 . L'inter-corrélation d'un bruit blanc propagé, est alors une version tournée de la corrélation de Green :

$$\underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{s}}_1, \underline{\mathbf{s}}_2}(t) = \underline{\mathbf{C}}(t, \underline{x}_1, \underline{x}_2) (\underline{\mathbf{R}}_1^2)^T \quad (2.86)$$

Ainsi, la comparaison entre les corrélations de Green théorique et estimée permet, en théorie, d'estimer en plus des paramètres physiques et de la distance entre capteurs, l'attitude relative entre les capteurs.

2.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, on a établi l'expression de la corrélation de Green pour des milieux visco-acoustiques et visco-élastiques. On a montré qu'il était théoriquement possible d'estimer les paramètres physiques (vitesses et atténuations) du milieu et les paramètres géométriques (distance et attitudes relatives) à partir de la corrélation de Green et de l'identité de Ward approchée (2.70).

L'originalité et l'intérêt de ces travaux portent sur l'obtention des identités de Ward (2.70) et (2.71). En effet, elles montrent qu'en présence de dissipation visqueuse, l'identité classique (1.16) n'est plus valide. Cette dernière peut encore être utilisée pour estimer le temps de vol entre deux capteurs dans un milieu homogène ou pour le monitoring du milieu. En effet, on a déjà discuté que ce dernier point pouvait être réalisé par n'importe quelle fonction qui soit caractéristique du milieu. En revanche, la reconstruction de la fonction de Green est bien plus précise avec un modèle de dissipation plus réaliste, comme le modèle visqueux ici, que le modèle constant.

Ces développements ont été complètement validés dans le cadre de l'acoustique par des expérimentations. On a établi une méthode d'estimation de temps de vol basé sur l'extraction de coda d'événements acoustiques. La distribution de l'erreur de l'estimateur, qui utilise la dérivée troisième de l'inter-corrélation calculée sur chaque coda, apparaît être une loi normale centrée. Ces résultats seront un point d'entrée des chapitres 3 et 5 qui concernent la localisation des réseaux de capteurs et le monitoring des structures.

Les expérimentations ont montré que la corrélation de Green était un outil important pour le diagnostic d'un milieu. Cela a été validé dans l'air et dans le ciment avec une instrumentation enfouie. Ce point est essentiel car il démontre la faisabilité, en laboratoire, du SHM passif d'un milieu instrumenté en volume.

Une perspective importante est d'extraire les paramètres du milieu et de l'instrumentation (vitesse de propagation des ondes de compression et distance entre capteurs) à l'aide de la corrélation de Green sans utiliser de dérivations numériques. Les expérimentations et les expressions théoriques de la corrélation de Green mènent à conjecturer qu'il existe une relation simple entre ces paramètres et les extrema (selon les expérimentations) et/ou les zéros (selon l'expression (2.68)) et les fréquences caractéristiques (selon l'expression (2.63)) de la corrélation de Green.

Enfin, les développements théoriques concernant les instrumentations vectorielles n'ont pas pu être validés expérimentalement. Ceci est une perspective majeure de ces travaux de thèse. Toutefois, on propose une exploitation de ces résultats dans les chapitres 4 et 5.

Deuxième partie

Estimation de positions et d'attitudes dans les réseaux de capteurs via des données partielles

Chapitre 3

Estimation de positions dans les réseaux de capteurs via une matrice de distances.

Sommaire

3.1 Terminologie et formalisation du problème.	76
3.1.1 Modélisation par l’algèbre linéaire. Interprétations.	76
3.1.2 Estimation au sens du maximum de vraisemblance.	80
3.1.3 Exemples de contextes.	82
3.2 Résolution du cas complet.	83
3.2.1 État de l’art.	83
3.2.2 Algorithme MDS : description et performances.	85
3.3 Un nouvel algorithme pour le cas incomplet et bruité.	90
3.3.1 État de l’art.	91
3.3.2 Nouvel algorithme : terminologie, description et performances.	93
3.3.3 Prise en compte de nouvelles observations.	97
3.3.4 Généralisation du procédé de localisation.	102
3.4 Conclusion.	104

La localisation de capteurs est un problème classique dans le domaine des réseaux déployés. La position d’un noeud doit être connue pour interpréter les données qu’il mesure. Lorsque les noeuds sont mobiles (téléphones portables) ou difficiles d’accès (systèmes enfouis), la position n’est plus une donnée mais devient un paramètre à estimer.

On s’intéresse au problème SNL (Sensor Network Location problem) de localisation via des informations relatives *i.e.* des distances entre noeuds du réseau. Cette distinction s’oppose aux méthodes de localisation ”directes” dont le problème est de localiser un noeud indépendamment des autres. On approfondira au [chapitre 5](#) l’intérêt fondamental de la localisation dans le cadre

du diagnostic des structures.

Le problème SNL, dont la terminologie et la formalisation sont présentées en [section 3.1](#), est un problème d'optimisation difficile à résoudre dans de nombreuses configurations. La matrice de distances est en effet généralement bruitée et incomplète. La difficulté peut être contournée en ajoutant de l'information propre à l'application.

On présente dans la [section 3.2](#) un état de l'art des méthodes de résolution pour le cas complet. Cette étude permettra d'identifier un algorithme performant qui sera utilisé dans la nouvelle méthode proposée pour le cas incomplet. Cet algorithme est l'algorithme MDS de W.S. Torgerson [[Torgerson52](#)] dont on trouvera dans la [section 3.2](#) une description ainsi qu'une étude détaillée de la stabilité et la robustesse aux bruits sur les distances.

La [section 3.3](#) concerne le problème SNL pour une matrice de distances incomplète. Un état de l'art des solutions existantes et des applications associées est présenté. Il montre l'absence d'un algorithme de résolution générique *i.e.* sans a priori sur la structure de la matrice de distances. Cela rend inapplicable les algorithmes existants dans le cadre du SHM via une instrumentation enfouie où aucun contrôle sur les positions n'est envisageable.

On présente ensuite l'algorithme de résolution développé pendant la thèse adapté au réseau de capteurs enfoui. L'apport de la thèse se mesure principalement dans la méthode de complétion qui utilise une mise à jour basée sur la fiabilité des distances. Cet algorithme est amélioré lorsque plusieurs observations (matrices de distances) sont disponibles. On établit un critère à minimiser via des approches classiques issues de la théorie de l'estimation et de l'optimisation non linéaire.

On trouvera en fin de cette section, une généralisation de la méthode de complétion pour des paramètres absolus autres que les positions. Cette généralisation sera notamment utile dans le chapitre suivant concernant l'estimation d'attitudes via une matrice d'attitudes relatives.

3.1 Terminologie et formalisation du problème.

On introduit dans cette section la terminologie et le formalisme utilisés pour ce problème. Les données sont classiquement représentées sous forme matricielle. Cela est utile pour la formalisation du problème et aussi pour sa résolution via les outils de l'algèbre linéaire. En fin de section, on interprète le problème de localisation comme un problème inverse et on présente quelques contextes dans lesquels il intervient.

3.1.1 Modélisation par l'algèbre linéaire. Interprétations.

3.1.1.1 Matrice des positions et matrice des références.

On considère un réseau de N capteurs dans un espace (vectoriel) de dimension n . Généralement, $n = 1, 2$ ou 3 . On fixe un repère absolu de cet espace dans lequel les coordonnées de chaque point seront exprimées. Les positions des capteurs sont rangées dans la matrice des positions, notée $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times n}$, et telle que $[\mathbf{X}]_{i,j}$ corresponde à la j -ième coordonnée de la position du i -ième capteur.

Exemple. On introduit ici un exemple qui sera utilisé tout au long de ce chapitre. On considère un réseau de cinq capteurs C_1, \dots, C_5 déployés dans un plan. On a $N = 5$ et $n = 2$. Les coordonnées de chaque capteur sont respectivement $(-1, 1)$, $(-2, -3)$, $(4, 5)$, $(-1, 2)$ et $(3, -3)$. La matrice de position s'écrit alors :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Un capteur sera dit de référence si sa position est connue. On note R le nombre de références et $\mathbf{X}_r \in \mathbb{R}^{R \times n}$ la sous-matrice de \mathbf{X} qui contient la position des capteurs de référence. \mathbf{X}_r est la matrice des références. Notons que dans la littérature, les termes "ancres" et "balises" peuvent aussi être utilisés pour désigner une référence.

Exemple. On suppose que les capteurs C_1, C_2 et C_4 sont des capteurs de référence. On a $R = 3$ et :

$$\mathbf{X}_r = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les capteurs C_3 et C_5 sont à localiser. Les positions des capteurs de référence et des capteurs à localiser sont représentées en [figure 3.1](#).

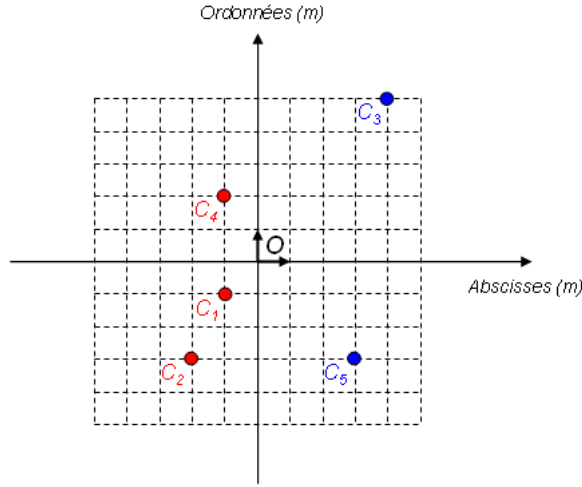


FIGURE 3.1 – Positions des capteurs dans le plan. Les capteurs en rouge sont les références. Les capteurs en bleus sont les capteurs à localiser.

3.1.1.2 Matrice de distances euclidienne.

La matrice de distances euclidienne d'un réseau de N capteurs est une matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ définie par : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, $[\mathbf{D}]_{i,j} = \|\mathbf{X}_{i,:} - \mathbf{X}_{j,:}\|_2$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne¹ et, pour tout $k = 1 \dots N$, $\mathbf{X}_{k,:}$ désigne la k -ième ligne de la matrice des positions.

Exemple. La matrice de distances euclidiennes du réseau C_1, \dots, C_5 est :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2.23 & 7.81 & 3 & 4.47 \\ 2.23 & 0 & 10 & 5.1 & 5 \\ 7.81 & 10 & 0 & 5.83 & 8.06 \\ 3 & 5.1 & 5.83 & 0 & 6.4 \\ 4.47 & 5 & 8.06 & 6.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Les distances ont été approchées au dixième par excès.

On notera \mathcal{D} l'application qui à une matrice de positions associe sa matrice de distances² *i.e.* $\mathcal{D}(\mathbf{X}) = \mathbf{D}$. Le problème de localisation via une matrice de distances consiste à déterminer \mathbf{X} connaissant \mathbf{D} . La forme de l'opérateur \mathcal{D} montre que ce problème est un problème non linéaire (quadratique) en les coefficients de la matrice des positions. De plus, \mathcal{D} n'est pas injective *i.e.* deux réseaux de capteurs différents peuvent avoir la même matrice de distances. Plus précisément, on montre que deux réseaux de capteurs ont la même matrice de distances euclidiennes si et seule-

1. Notons que la matrice de distances d'un réseau peut être définie pour toute autre métrique que la norme euclidienne, par exemple la norme infinie.

2. Désormais, on ne précisera plus le caractère euclidien des distances considérées.

ment s'il existe une isométrie affine³ qui permet d'échanger le premier réseau en le deuxième [Cox01].

La matrice de distances d'un réseau est symétrique, à diagonale nulle, à coefficients positifs et vérifie l'ensemble des inégalités triangulaires suivantes :

$$\forall(i, j, k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^3, [\mathbf{D}]_{i,j} \leq [\mathbf{D}]_{i,k} + [\mathbf{D}]_{k,j} \quad (3.1)$$

Ces quatre propriétés ne sont pas suffisantes pour qu'une matrice qui les satisfait soit une matrice de distances associée à un réseau de capteurs. Le théorème de Schoenberg, décrit plus bas, donne une caractérisation des matrices de distances. En pratique, la matrice de distances estimée a la forme suivante :

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{B}_D \quad (3.2)$$

où $\hat{\mathbf{D}}$ est la matrice de distances estimée, \mathbf{D} est la matrice de distances théorique et \mathbf{B}_D est la matrice des bruits d'estimation. $\hat{\mathbf{D}}$ est bien symétrique (par construction), de diagonale nulle (par construction) et à coefficients positifs (par définition). Cependant, les inégalités triangulaires peuvent ne pas être respectées à cause des erreurs commises représentées par \mathbf{B}_D .

3.1.1.3 Matrice de Gram.

La matrice de Gram $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ d'un réseau de N capteurs est la matrice des produits scalaires *i.e.* $\forall(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, [\mathbf{G}]_{i,j} = \mathbf{X}_{i,:} \mathbf{X}_{j,:}^T$, où T désigne la transposition matricielle.

Exemple. La matrice de Gram du réseau C_1, \dots, C_5 est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -9 & -1 & 0 \\ 5 & 13 & -23 & -4 & 3 \\ -9 & -23 & 41 & 6 & -3 \\ -1 & -4 & 6 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & -9 & 18 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que deux réseaux de capteurs ont la même matrice de Gram si et seulement s'il existe une isométrie euclidienne⁴ qui permet d'échanger le premier réseau en le deuxième [Cox01].

Pour un réseau dont l'isobarycentre coïncide avec l'origine du repère absolu, la matrice de Gram peut être déduite de la matrice de distances par la relation suivante⁵ [Cox01] :

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \mathbf{H} \quad (3.3)$$

où \otimes est le produit de Hadamard⁶ et $\mathbf{H} := \mathbf{I}_N - N^{-1} \mathbf{J}_{N,N}$ avec $\mathbf{J}_{N,N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matrice identité d'ordre N . \mathbf{H} peut

3. Une isométrie affine est une application affine \mathbf{f} qui conserve la distance euclidienne *i.e.* pour tous points P et Q de \mathbb{R}^n alors $d(\mathbf{f}(P), \mathbf{f}(Q)) = d(P, Q)$ où d est la distance euclidienne.

4. Une isométrie euclidienne est une isométrie affine \mathbf{f} qui fixe l'origine du repère O *i.e.* $\mathbf{f}(O) = O$.

5. Cette relation se démontre aisément à partir de l'égalité : $[\mathbf{D}]_{i,j}^2 = \|X_{i,:}\|_2^2 - 2X_{i,:}^T X_{j,:} + \|X_{j,:}\|_2^2$. L'idée est de supprimer les carrés pour isoler le terme contenant le produit scalaire, qui est en fait $[\mathbf{G}]_{i,j}$.

6. Le produit de Hadamard de deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} est la matrice qui contient les produits terme à terme des éléments de \mathbf{A} et \mathbf{B} .

s'interpréter comme une matrice de centrage *i.e.* pour toute matrice de positions \mathbf{X} associée à un réseau de capteurs, la matrice $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X}$ est une matrice de positions associée au même réseau de capteurs mais translaté de sorte que l'isobarycentre coïncide avec l'origine.

La relation (3.3) est utile dans de nombreux algorithmes de résolution (voir par exemple dans [Torgerson52] ou [Drineas06]). Elle est, de plus, à l'origine du [théorème de Schoenberg](#) [Dattoro06] qui caractérise les matrices de distances à l'aide de la matrice de Gram associée :

Théorème de Schoenberg (1935). Soit $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ une matrice symétrique, à coefficients positifs et à diagonale nulle, alors \mathbf{D} est une matrice de distances associée à un réseau de capteurs si et seulement si la matrice de Gram \mathbf{G} définie par l'équation (3.3) est symétrique positive et est de rang égal à n , dimension de l'espace euclidien dans lequel sont déployés les capteurs.

Pour des matrices de distances issues d'un processus d'estimation, la matrice de Gram estimée ne sera pas de rang n en général. En effet, en utilisant la décomposition (3.2) et l'équation (3.3), la matrice de Gram calculée à partir de la matrice de distances estimées a la forme suivante :

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \mathbf{B}_{\mathbf{G}} \quad (3.4)$$

où :

$$\mathbf{B}_{\mathbf{G}} = -\frac{1}{2}\mathbf{H}(2\mathbf{B}_{\mathbf{D}} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B}_{\mathbf{D}} \otimes \mathbf{B}_{\mathbf{D}})\mathbf{H} \quad (3.5)$$

La décomposition (3.4) montre que le spectre de $\hat{\mathbf{G}}$ peut être vu comme le spectre de \mathbf{G} , qui contient n valeurs propres non nulles (car \mathbf{G} est de rang n et diagonalisable) "perturbé" par la matrice de bruit $\mathbf{B}_{\mathbf{G}}$. Le théorème de Schoenberg indique alors que $\hat{\mathbf{D}}$ n'est pas toujours une matrice de distances associée à un réseau de capteurs. Cependant, on montrera que l'algorithme de résolution utilisé qui prend en entrée la matrice $\hat{\mathbf{D}}$ est robuste même si le théorème de Schoenberg n'est pas vérifié.

3.1.1.4 Graphe d'un réseau, matrices d'adjacence et de fiabilité.

On peut associer un graphe à toute matrice de distances dont les sommets correspondent aux capteurs. Deux sommets sont voisins si la distance entre les capteurs associés est connue. La matrice d'adjacence \mathbf{A} du réseau est la matrice symétrique de taille $N \times N$ telle que $[\mathbf{A}]_{i,j} = 1$ si $[\mathbf{D}]_{i,j}$ est connue, 0 sinon. Par convention, les termes diagonaux de \mathbf{A} sont nuls.

Le taux de complétion d'une matrice de distances est le ratio entre le nombre de distances connues, hors distances référence-référence, sur le nombre de distances totales, toujours hors distances référence-référence. Ce dernier nombre peut s'écrire : $(N - R)(N + R + 1)/2$ (cf. [figure 3.2](#) où ce nombre correspond au nombre de distances d'un des deux secteurs délimités par les pointillés bleus).

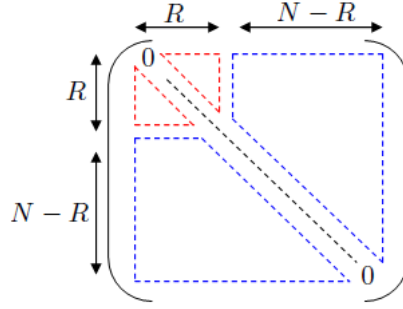


FIGURE 3.2 – Partition d’une matrice de distances dont les R références sont les R premiers capteurs. Les traits en pointillés rouges délimitent l’ensemble des distances référence-référence. Les traits en pointillés bleus délimitent l’ensemble des distances référence-capteur (à localiser) et capteur-capteur.

Exemple. Considérons à nouveau le réseau C_1, \dots, C_5 , dont C_1, C_2 et C_4 sont les références. Supposons connues les distances entre : C_1 et C_3 , C_2 et C_5 , et, C_4 et C_5 . Les autres distances sont supposées inconnues. Les matrices de distances et d’adjacence sont :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2.23 & 7.81 & 3 & \times \\ 2.23 & 0 & \times & 5.1 & 5 \\ 7.81 & \times & 0 & \times & \times \\ 3 & 5.1 & \times & 0 & 6.4 \\ \times & 5 & \times & 6.4 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où \times indique que la distance est inconnue. Le nombre de distances connues hors distances références-références est 3. Le taux de complétion est de 6%. On trouvera la représentation du graphe associé à \mathbf{D} en [figure 3.3](#).

Lorsque les incertitudes sur les distances sont prises en compte, on peut pondérer chaque arête par une fiabilité, nulle si la distance est inconnue, significative de la qualité de l’estimation. On précisera dans la [sous-section 3.1.3](#) comment obtenir les fiabilités à partir d’information sur les incertitudes *i.e.* sur la matrice \mathbf{B}_D définie dans l’équation (3.2). On notera \mathbf{F} la matrice de fiabilité.

3.1.2 Estimation au sens du maximum de vraisemblance.

Lorsque l’on connaît la loi de probabilité des incertitudes sur les distances, on peut déduire, via le théorème de Bayes, des estimateurs de la matrice des positions qui prend en compte ces incertitudes. On s’intéresse ici à l’estimateur du maximum de vraisemblance.

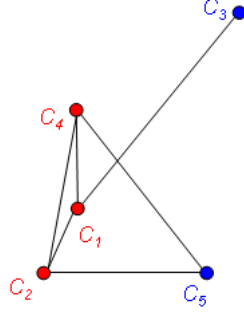


FIGURE 3.3 – Graphe associé la matrice de distances incomplète disponible.

3.1.2.1 Information a priori et incertitudes.

On note $p_{\mathbf{D}|\mathbf{X}}$, $p_{\mathbf{X}|\mathbf{D}}$ et $p_{\mathbf{X}}$ les densités de probabilités respectives de \mathbf{D} conditionnellement à \mathbf{X} , de \mathbf{X} conditionnellement à \mathbf{D} et de \mathbf{X} . Le théorème de Bayes s'écrit alors :

$$p_{\mathbf{X}|\mathbf{D}} \propto p_{\mathbf{D}|\mathbf{X}} p_{\mathbf{X}} \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) exprime la distribution cherchée ($p_{\mathbf{X}|\mathbf{D}}$) en fonction de la distribution a priori sur les positions ($p_{\mathbf{X}}$) et de la distribution des distances entre capteurs de matrice des positions connue \mathbf{X} ($p_{\mathbf{D}|\mathbf{X}}$). Cette dernière distribution contient les incertitudes sur les distances.

L'information a priori $p_{\mathbf{X}}$ contient en particulier les bornes sur les positions des éléments du réseau. Si l'unique information dont on dispose est l'appartenance des capteurs à un domaine Ω , alors $p_{\mathbf{X}} \propto \chi_{\Omega}$ où χ_{Ω} est la fonction caractéristique de Ω .

On supposera que le bruit d'estimation sur les distances est gaussien, centré et de matrice de covariance \mathbf{V} i.e. $\mathbf{B}_{\mathbf{D}} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V})$. Dans ce cas, $p_{\mathbf{D}|\mathbf{X}}$ s'exprime ainsi :

$$p_{\mathbf{D}|\mathbf{X}}(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \Delta(\mathbf{d}, \mathbf{x})^T \mathbf{V}^{-1} \Delta(\mathbf{d}, \mathbf{x})\right) \quad (3.7)$$

avec :

$$\Delta(\mathbf{d}, \mathbf{x}) := \text{Vect}(\mathbf{A} \otimes (\mathcal{D}(\mathbf{x}) - \mathbf{d})) \quad (3.8)$$

où l'opérateur Vect transforme une matrice en un vecteur par concaténation des colonnes.

3.1.2.2 Maximum de vraisemblance.

L'estimation de la matrice des positions \mathbf{X} par maximum de vraisemblance consiste à déterminer la valeur $\hat{\mathbf{X}}$ qui maximise la densité $p_{\mathbf{X}|\mathbf{D}}$ sachant que $\mathbf{D} = \mathbf{d}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{x} \in E}{\text{argmax}} p_{\mathbf{X}|\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (3.9)$$

E est l'ensemble de recherche. Il contient les informations a priori sur les positions, notamment des bornes et la contrainte $\mathbf{x}_r = \mathbf{X}_r$ qui indique que la position des références est figée. La maximisation de la vraisemblance est équivalente à la minimisation de l'anti-log de la vraisemblance :

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{x} \in E}{\operatorname{argmin}} -\log p_{\mathbf{X}|\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (3.10)$$

Lorsque les incertitudes sur les distances sont gaussiennes et centrées de matrice de covariance \mathbf{V} , alors la relation (3.7) permet de réécrire le critère (3.10) par :

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{x} \in E}{\operatorname{argmin}} \Delta(\mathbf{d}, \mathbf{x})^T \mathbf{V}^{-1} \Delta(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \quad (3.11)$$

Ce problème d'optimisation est très difficile à résoudre par sa forme (non linéarité) et ses contraintes : bornes, références, etc. Afin de pallier ce problème, on montre dans l'état de l'art de la section suivante que des méthodes sous-optimales et dépendant de l'application visée ont été développées.

3.1.2.3 Borne de Cramer-Rao et matrice d'information de Fisher.

L'inégalité de Cramer-Rao donne une borne matricielle minimale, au sens des matrices définies positives, de la matrice de covariance d'un estimateur non biaisé⁷. Soit $\hat{\mathbf{X}}$ une estimation de la matrice des positions \mathbf{X} . Alors :

$$\mathbb{E} \left[(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X})(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X})^T \right] \geq \mathbf{F}(\mathbf{X})^{-1} \quad (3.12)$$

où $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ est la matrice d'information de Fisher *i.e.* la matrice de covariance du gradient de la log-vraisemblance :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{V} \left[\frac{\partial \log p_{\mathbf{D}, \mathbf{X}}(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \log p_{\mathbf{D}, \mathbf{X}}(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \quad (3.13)$$

Un algorithme est efficace s'il vérifie le cas d'égalité de Cramer-Rao *i.e.* la variance de l'estimateur atteint la borne (cf. membre de droite de l'inégalité (3.12)).

Dans l'hypothèse d'un bruit gaussien centré, on peut expliciter la matrice d'information de Fisher :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{A}, \mathcal{D}}(\mathbf{x})^T \mathbf{V}^{-1} J_{\mathbf{A}, \mathcal{D}}(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

où $J_{\mathbf{A}, \mathcal{D}}(\mathbf{x})$ est la jacobienne de $\operatorname{Vect}(\mathbf{A} \otimes \mathcal{D}(\mathbf{x}))$.

3.1.3 Exemples de contextes.

3.1.3.1 Deux contextes "actifs".

Ce problème inverse se retrouve en localisation des réseaux déployés, comme la téléphonie mobile, dans le cas où l'on ne peut pas utiliser une localisation globale via un GPS (Global Positioning System). L'obtention des distances systèmes-systèmes s'établit par deux méthodes

⁷ L'inégalité de Cramer-Rao est valable si la loi conjointe $p_{\mathbf{D}, \mathbf{X}}$ est dérivable par rapport à \mathbf{X} et si le support de \mathbf{X} ne dépend pas de \mathbf{X} . Ces hypothèses seront supposées vérifiées.

classiques : TOA (Time Of Arrival) et RSS (Radio Signal Strength) [Patwari05].

Dans la méthode TOA, un système 1 émet, à un instant t_a , un signal \mathbf{s}_1 reçu par un système 2. Ce dernier émet à son tour un signal \mathbf{s}_2 reçu par le système 1 à l'instant t_r . Pour un milieu de propagation, mécanique ou électromagnétique, homogène et de vitesse connue v , le temps d'aller-retour $t_{ar} := t_r - t_a$ ⁸ est relié à la distance $d_{1,2}$ entre les deux systèmes par la relation : $vt_{ar} = 2d_{1,2}$. Cette relation, la connaissance de v et l'estimation t_{ar} permettent d'estimer $d_{1,2}$.

La méthode RSS est basée sur un modèle qui exprime la différence entre la puissance émise et reçue (ΔP) en fonction de la distance émetteur-récepteur ($d_{1,2}$). On trouve généralement un modèle du type $\Delta P(r) = br^{-c}$. La comparaison entre la quantité $\Delta P(r)$ calculée et théorique permet d'estimer la distance $r = d_{1,2}$. On trouvera un exemple de localisation via une matrice de distances estimée par RSS dans [Costa06].

3.1.3.2 Un contexte "passif".

Dans le cadre de l'identification passive, l'estimation de la distance s'établit grâce à l'interprétation de la fonction de Green ou de la corrélation de Green reconstruite. Pour un milieu quasi-homogène, le temps d'arrivée peut être isolé de la fonction ou de la corrélation de Green estimée entre deux capteurs. A vitesse de propagation connue, la distance peut être déduite du temps d'arrivée. Cette méthode est une version passive de la méthode TOA. Elle a été appliquée avec succès dans [Sabra05-3] pour la localisation passive d'un réseau de capteurs immergé.

Dans le [chapitre 2](#), on a montré via des expérimentations en acoustique que l'on pouvait modéliser la densité de probabilité de l'erreur par une loi gaussienne et centrée. La variance peut être estimée expérimentalement car une expression théorique est difficile étant donné qu'elle dépend à la fois des caractéristiques de l'instrumentation (bande de fréquences), de la modélisation du milieu (identité de Ward) et la répartition spectrale et spatiale des sources (approximation du bruit blanc).

3.2 Résolution du cas complet.

Dans cette section, on présente en premier lieu les algorithmes existants de résolution du problème SNL pour une matrice de distances complète. On dégagera de l'état de l'art une méthode performante : l'algorithme MDS, aussi nommé Isomap. Cette méthode est une pierre angulaire de l'algorithme de résolution du cas incomplet proposé dans la section suivante. On trouvera dans cette section sa description ainsi qu'une étude complète de ses performances : complexités temporelle et spatiale, robustesse, stabilité et efficacité.

3.2.1 État de l'art.

3.2.1.1 Méthode analytique.

Lorsque toutes les distances sont connues, le problème de localisation s'apparente à un problème classique et beaucoup plus large dans le domaine de l'analyse de données : le multidimensional scaling (MDS). W.S. Torgerson propose dans [Torgerson52] une méthode de résolution analytique que nous décrivons brièvement ici mais que nous présenterons plus en détail en [section](#)

8. En réalité $t_{ar} = t_r - t_a + t_\varepsilon$ où t_ε est la différence de temps entre la réception du signal 1 et l'émission du signal 2 par le système 2.

3.2.2 car elle sera utile pour la suite.

La méthode de W.S. Torgerson est basée sur la relaxation du problème (3.11) par une résolution en deux étapes. La première consiste à déterminer une représentation du réseau dans un repère quelconque en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{Y}} = \arg \min_{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times n}} \|\hat{\mathbf{D}} - \mathcal{D}(\mathbf{Y})\|_F^2 \quad (3.15)$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius⁹. On peut remarquer que la solution du problème (3.15) est aussi la solution du problème (3.11) lorsque toutes les distances sont connues et les incertitudes sont gaussiennes, indépendantes et de même variance *i.e.* la matrice $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ est proportionnelle à l'identité. On a alors $\Delta(\hat{\mathbf{D}}, \mathbf{Y})^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \Delta(\hat{\mathbf{D}}, \mathbf{Y}) \propto \|\hat{\mathbf{D}} - \mathcal{D}(\mathbf{Y})\|_F^2$.

Le vecteur $\hat{\mathbf{Y}}$ est estimé via la décomposition en valeurs singulières de la matrice de Gram. Les références ne sont pas prises en compte dans l'estimation de $\hat{\mathbf{Y}}$ qui est une représentation du réseau cherché dans un repère inconnu. Ce repère est estimé dans une deuxième étape en utilisant cette fois-ci les références \mathbf{X}_r .

Bien que cet algorithme ne permette pas d'intégrer des informations sur la matrice de bruit (sauf si sa covariance est proportionnelle à la matrice identité, ce qui est peu réaliste), il a l'avantage d'être analytique dans le sens où la solution est exprimée en fonction des paramètres d'entrée ($\hat{\mathbf{D}}$ et $\hat{\mathbf{X}}_r$). Cela lui confère l'avantage d'être rapide et permet de contrôler toute les étapes de la résolution. C'est, selon la littérature étudiée, l'algorithme le plus utilisé lorsque la matrice de distances est complète et que l'on dispose de peu d'information sur la matrice de bruit.

3.2.1.2 Critère STRESS.

Afin de prendre en compte les incertitudes sur les données, J.B. Kruskal introduit dans [Kruskal64], toujours dans le cadre du multidimensional scaling, le critère "STRESS" (ou "RAW STRESS") suivant :

$$\text{STRESS}(\mathbf{Y}) := \|\mathbf{W} \otimes (\mathbf{D} - \mathcal{D}(\mathbf{Y}))\|_F^2, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times n} \quad (3.16)$$

où $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est une matrice de pondération qui joue le rôle de la matrice de fiabilité. La minimisation du critère STRESS correspond exactement au critère (3.11) lorsque toutes les distances sont connues et les incertitudes sont gaussiennes et indépendantes *i.e.* la matrice $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ est diagonale. On a alors $\Delta(\hat{\mathbf{D}}, \mathbf{Y})^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \Delta(\hat{\mathbf{D}}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{W} \otimes (\mathbf{D} - \mathcal{D}(\mathbf{Y}))\|_F^2$ où les éléments de \mathbf{W} sont les éléments diagonaux de $\mathbf{\Gamma}^{-1/2}$.

En pratique, l'hypothèse de bruit indépendant n'est pas vérifiée puisque chaque capteur contribue plusieurs fois à l'estimation de la matrice de distances. Cela ne signifie pas que l'estimation de $\hat{\mathbf{Y}}$ par minimisation du critère STRESS par un algorithme d'optimisation non linéaire (Levenberg-Marquart, gradient conjugué, descente de gradient, etc.) est complètement erronée mais qu'elle n'intègre pas toute l'information disponible a priori sur les distances. Notons que quelque soit l'algorithme d'optimisation utilisé, l'initialisation est souvent réalisée à l'aide de la méthode analytique de Torgerson.

9. La norme de Frobenius d'une matrice \mathbf{A} est : $\|\mathbf{A}\|_F := \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{1/2}$

Le critère STRESS peut être utilisé pour une matrice de distances qui n'est pas complète [Costa06]. Il suffit de remplacer la matrice de pondération \mathbf{W} par $\mathbf{A} \otimes \mathbf{W}$ dans l'expression (3.16) où on rappelle que \mathbf{A} est la matrice d'adjacence.

3.2.1.3 Résolution par programmation semi-définie.

On trouve une autre approche basée sur la programmation semi-définie qui consiste à minimiser un critère quadratique avec des éventuelles contraintes linéaires [Dattoro06]. Dans le cadre de la localisation via une matrice de distances, la programmation semi-définie intervient dans la minimisation du critère quadratique suivant [Ding08] :

$$\text{SDP}(\mathbf{Y}) := \|\mathbf{W} \otimes (\mathbf{G} - \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)\|_F, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times n} \quad (3.17)$$

La minimisation de ce critère est équivalente à la maximisation de la vraisemblance $p_{\mathbf{X}|\mathbf{G}}$ lorsque les erreurs sur le modèle d'observation ($\mathbf{B}_{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{X}\mathbf{X}^T$) sont gaussiennes centrées et indépendantes. On rappelle que $\hat{\mathbf{G}}$ est obtenue à l'aide de la relation (3.3) lorsque $\hat{\mathbf{D}}$ est complète.

La minimisation de ce critère est une alternative à la minimisation du critère STRESS. La différence réside sur le modèle d'observation qui porte respectivement sur la matrice de distances et sur la matrice de Gram. L'avantage de travailler avec la matrice de Gram est qu'elle est théoriquement semi-définie. Cette propriété donne accès à des algorithmes d'optimisation appelés programmes semi-définis [Mittelmann03] dont la convergence doit être établie pour chaque problème, en particulier pour la minimisation du critère SDP. En pratique, on a rappelé que la matrice de Gram n'est pas en général semi-définie à cause de la présence du bruit qui perturbe son spectre. Il faut appliquer une transformation à \mathbf{G} qui translate son spectre dans \mathbb{R}^+ pour pouvoir appliquer les méthodes de programmation semi-définie.

3.2.2 Algorithme MDS : description et performances.

3.2.2.1 Pourquoi lui ?

Selon la littérature étudiée et présentée à la sous-section précédente, la méthode de Torgerson demeure la plus fiable et la plus rapide. Elle n'intègre pas l'information sur le bruit, ce qui est un inconvénient. Il sera contourné dans l'algorithme de résolution du cas incomplet développé pendant la thèse et décrit dans la section suivante.

3.2.2.2 Description.

La résolution du cas complet et non bruité utilise la relation (3.3) qui estime la matrice de Gram \mathbf{G} à partir de la matrice de distances du réseau \mathbf{D} . La complétude de \mathbf{G} est nécessaire pour utiliser cette relation. \mathbf{G} étant réelle, symétrique et positive, il existe une matrice orthogonale $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et une matrice diagonale $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, \dots, 0)$ telle que :

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T \quad (3.18)$$

$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ sont les valeurs propres non nulles (et positives) de \mathbf{G} rangées par ordre décroissant.

A partir de la décomposition (3.18), on peut obtenir une matrice des positions \mathbf{Y} associée à un réseau de capteurs qui a la même matrice de distances que le réseau cherché :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}_{:,1:n} \mathbf{\Lambda}_{1:n,1:n}^{1/2} \quad (3.19)$$

où $\mathbf{P}_{:,1:n}$ est la sous matrice de \mathbf{P} constituée des n premières colonnes de P et $\mathbf{\Lambda}_{1:n,1:n}$ est la sous matrice de $\mathbf{\Lambda}$ constituée des n premières lignes et colonnes de $\mathbf{\Lambda}$. On dira que \mathbf{Y} est une solution particulière au problème SNL.

On a rappelé que des matrices de positions associées à la même matrice de distances peuvent être échangées par une isométrie affine. Il existe donc une telle isométrie qui transforme \mathbf{Y} en la matrice des positions cherchée \mathbf{X} . Pour trouver cette isométrie, qui est la composition d'une translation et d'une isométrie vectorielle, on considère \mathbf{Y}_r la sous-matrice de \mathbf{Y} associée aux références. Trouver l'isométrie affine revient à minimiser le critère :

$$\mathcal{I}(\mathbf{O}, \mathbf{T}) = \|\mathbf{X}_r - \mathbf{Y}_r \mathbf{O} - \mathbf{J}_{N,n} \mathbf{T}\|_F^2 \quad (3.20)$$

avec $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que $\mathbf{O} \mathbf{O}^T = \mathbf{I}_n$ et $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. \mathbf{O} correspond à l'isométrie vectorielle (rotation ou symétrie par rapport à un plan en 3D) et \mathbf{T} correspond à la translation. La solution qui minimise \mathcal{I} admet la forme analytique suivante [Ding08] :

$$\mathbf{J}_{N,n} \mathbf{T} = \mathbf{H}_N (\mathbf{X}_r - \mathbf{Y}_r \mathbf{O}) ; \mathbf{O} = \mathbf{V} \mathbf{U}^T \quad (3.21)$$

où $\mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V} = \mathbf{X}_r^T \mathbf{H}_N \mathbf{Y}_r$ est la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{X}_r^T \mathbf{H}_N \mathbf{Y}_r$. Les équations (3.21) sont valides si la matrice \mathbf{X}_r est de rang n . Géométriquement, cela se traduit par la nécessité d'avoir au moins $n+1$ références non hypercoplanaires (non appartenance à un même hyperplan).

On peut maintenant estimer la solution du problème en utilisant la matrice \mathbf{Y} et le couple (\mathbf{O}, \mathbf{T}) :

$$\mathbf{X}_{nr} = \mathbf{Y}_{nr} \mathbf{O} - \mathbf{J}_{N-R,n} \mathbf{T} \quad (3.22)$$

où \mathbf{X}_{nr} et \mathbf{Y}_{nr} sont les sous-matrices des matrices des positions \mathbf{X} et \mathbf{Y} associées aux capteurs à localiser *i.e.* qui ne sont pas des références.

L'algorithme ci-dessus, synthétisé dans le paragraphe suivant, peut être appliqué pour des entrées $(\mathbf{D}, \mathbf{X}_r)$ bruitées. Dans ce cas, les valeurs propres $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_N$ de la matrice de Gram \mathbf{G} ne seront pas nulles en général. L'algorithme est alors adapté en considérant les n plus grandes valeurs propres de \mathbf{G} . Les autres étapes de l'algorithme sont exactement les mêmes. La stabilité et la robustesse de cette adaptation sont discutées plus bas dans cette sous-section.

3.2.2.3 Synthèse.

Voici une synthèse de l'algorithme MDS qui prend en entrée une matrice de distances complète bruitée \mathbf{D} et la matrice des références \mathbf{X}_r :

- 1) Déterminer la matrice de Gram \mathbf{G} à partir de \mathbf{D} via la relation (3.3).
- 2) Déterminer les n valeurs propres de \mathbf{G} de plus grands modules ainsi que n vecteurs propres orthonormés associés à chaque valeur propre.
- 3) Former la matrice \mathbf{Y} à l'aide de la relation (3.19).
- 4) Extraire la sous-matrice \mathbf{Y}_r de \mathbf{Y} qui correspond aux indices des références.

5) Estimer l'isométrie affine (le couple (\mathbf{O}, \mathbf{T})) qui échange \mathbf{Y}_r et \mathbf{X}_r à l'aide de la relation (3.21).

6) Former \mathbf{X} via \mathbf{Y} , (\mathbf{O}, \mathbf{T}) et l'équation (3.22).

On peut d'ores et déjà remarquer que la complexité temporelle est en $O(N^3)$ où N est le nombre de capteurs. Cette complexité est justifiée par les décompositions en valeurs singulières opérées pendant l'algorithme et qui sont en $O(N^3)$. La complexité spatiale est clairement en $O(N^2)$. Enfin, notons que lorsque les bruits sont centrés, gaussiens et indépendants, l'algorithme est efficace, c'est-à-dire qu'il atteint la borne de Cramer-Rao (3.12), puisque c'est un estimateur du maximum de la vraisemblance $p_{\mathbf{D}|\mathbf{X}}$.

3.2.2.4 Stabilité de l'estimation d'une solution particulière.

On étudie ici la stabilité de l'estimation d'une solution particulière vis-à-vis des bruits sur les distances. C'est l'étape la plus importante de l'algorithme MDS. On entend par stabilité d'un algorithme la propriété qui assure que l'erreur sur la sortie de l'algorithme est bornée si l'erreur sur l'entrée est bornée. Ici, l'erreur sur une variable théorique Θ dont $\hat{\Theta}$ est une estimation est définie par :

$$e(\Theta) := \|\hat{\Theta} - \Theta\|_F \quad (3.23)$$

On établit le théorème suivant :

Théorème de stabilité. Soit $\mathbf{G} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T$ et $\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{P}}^T$ les diagonalisations de \mathbf{G} et $\hat{\mathbf{G}}$ dans une base orthonormée. On a :

$$e(\mathbf{\Lambda}_{1:n,1:n}) \leq \sqrt{n}e(\mathbf{G}) \quad (3.24)$$

Si de plus :

$$\lambda_n > 2e(\mathbf{G}) \quad (3.25)$$

où λ_n est la valeur propre de \mathbf{G} non nulle et de module le moins élevé, alors on a aussi l'inégalité suivante :

$$e(\mathbf{P}_{:,1:n}) \leq \frac{e(\mathbf{G})}{\lambda_n - 2e(\mathbf{G})} \quad (3.26)$$

Preuve. Pour démontrer ce théorème, on utilise deux théorèmes fondamentaux de la théorie de la perturbation en dimension finie :

Théorème de Weyl [Weyl12, Nakatsukasa09] : Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ et $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \delta\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ deux matrices réelles symétriques de valeurs propres $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_N|$ et $|\hat{a}_1| \geq |\hat{a}_2| \geq \dots \geq |\hat{a}_N|$. Alors, $\forall k \in [1, N]$, $|\hat{a}_k - a_k| \leq \|\delta\mathbf{A}\|_F$.

Théorème de Davis-Kahan [Davis69] : On reprend les notations du théorème de Weyl. Soit \mathbf{V} et $\hat{\mathbf{V}}$ les matrices de $\mathbb{C}^{N \times n}$ qui contiennent des vecteurs propres normés associés respectivement aux valeurs propres a_1, \dots, a_n et $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n$. Si l'eigengap $d := \hat{a}_n - \hat{a}_{n+1} > 0$ alors on a

l'inégalité : $|\sin(\hat{\mathbf{V}}, \mathbf{V})| \leq d^{-1} \|\delta \mathbf{A}\|_F$ où $|\sin(\hat{\mathbf{V}}, \mathbf{V})| := \|\hat{\mathbf{V}} - \mathbf{V}\|_F$.

Le [théorème de Davis-Kahan](#) fournit une inégalité qui assure la stabilité de la diagonalisation d'une matrice perturbée. Pour appliquer ce théorème, il faut vérifier que l'eigengap $d := \hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_{n+1}$ soit strictement positif. On va tout d'abord utiliser le [théorème de Weyl](#) afin d'obtenir une condition suffisante pour que la condition $d > 0$ soit vérifiée.

En appliquant le [théorème de Weyl](#) à \mathbf{G} et $\hat{\mathbf{G}}$ et en rappelant que \mathbf{G} est de rang n , on a :

$$\forall i \in [[1, n]], |\hat{\lambda}_i - \lambda_i| \leq e(\mathbf{G}) ; \forall i \in [[n+1, N]], |\hat{\lambda}_i| \leq e(\mathbf{G}) \quad (3.27)$$

Avec ces inégalités et par définition de $e(\mathbf{A}_{1:n, 1:n})$, on obtient [\(3.24\)](#).

De plus, d'après [\(3.27\)](#), on a :

$$\hat{\lambda}_n \geq \lambda_n - e(\mathbf{G}) \quad (3.28)$$

$$\hat{\lambda}_{n+1} \leq e(\mathbf{G}) \quad (3.29)$$

Par conséquent, si on a la condition [\(3.25\)](#) alors $d \geq \lambda_n - 2\|\hat{\mathbf{G}} - \mathbf{G}\|_F > 0$. Dans ce cas, on peut appliquer le [théorème de Davis-Kahan](#) aux matrices \mathbf{G} et $\hat{\mathbf{G}}$ et obtenir [\(3.26\)](#).

L'inégalité [\(3.24\)](#) assure la stabilité de l'estimation des valeurs propres de \mathbf{G} associées aux positions quelque soit l'erreur $e(\mathbf{G})$. L'inégalité [\(3.25\)](#) est une condition suffisante de robustesse de l'algorithme. Lorsqu'elle est vérifiée, le [théorème de stabilité](#) prouve la stabilité de l'estimation des vecteurs propres de \mathbf{G} associés aux positions des capteurs via l'inégalité [\(3.24\)](#). Finalement, lorsque la condition [\(3.25\)](#) est vérifiée, la combinaison des inégalités [\(3.24\)](#) et [\(3.26\)](#) assure la stabilité de l'algorithme.

Il est important de préciser que l'estimation de l'isométrie qui échange une solution particulière avec la solution estimée est aussi sujet aux instabilités. En théorie, la méthode est stable lorsque les capteurs de références ne sont pas hyper-coplanaires. Cette condition peut se vérifier numériquement sur le rang de la matrice des références qui dénombre les valeurs singulières non nulles¹⁰. L'unique source d'instabilité identifiée provient du réglage de la tolérance sur les valeurs singulières. Si elle est trop lâche, on peut avoir numériquement un rang strictement supérieur à n et une erreur $e(\mathbf{X})$ sur la matrice des positions trop élevée par rapport à l'erreur en entrée. Une fois ce réglage effectué, la stabilité de l'algorithme est assurée dans son ensemble.

3.2.2.5 Robustesse, rapport signal-à-bruit et géométrie.

On présente ici une étude de la condition de robustesse [\(3.25\)](#) pour un cas particulier mais représentatif de nombreux cas pratiques. On se place dans le cadre où les capteurs sont uniformément répartis autour de l'origine du repère et que l'erreur relative sur les distances est faible et constante *i.e.* :

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \alpha \mathbf{D} \quad (3.30)$$

où $\alpha > 0$ et $N\alpha^2 \ll 1$. Cette dernière condition traduit le fait que l'erreur relative est faible. L'hypothèse d'une répartition uniforme est peu restrictive pour la localisation passive de capteurs

10. C'est le cas de l'algorithme *rank* de Matlab

déployés aléatoirement. D'autre part, le modèle d'erreur relative constante s'avère vérifié si les distances sont estimées via l'identification passive (cf. chapitre précédent).

α peut s'interpréter comme l'inverse d'un rapport signal-à-bruit puisque l'on a :

$$\alpha = \frac{\|\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{D}\|_F}{\|\mathbf{D}\|_F} \quad (3.31)$$

On va montrer que l'on peut relier ce rapport bruit-à-signal, la robustesse de l'algorithme de W.S. Torgerson et la géométrie du réseau.

En utilisant le modèle de bruit relatif constant et la relation (3.3), l'erreur sur la matrice de Gram $\mathbf{B}_{\mathbf{G}} := \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{G}$ s'écrit :

$$\mathbf{B}_{\mathbf{G}} = -\frac{1}{2}\mathbf{H}(2\alpha\mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \alpha^2(\mathbf{J}_{N,N} - \mathbf{I}_N))\mathbf{H} \quad (3.32)$$

En utilisant l'inégalité $\|\mathbf{AB}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F\|\mathbf{B}\|_2$ vraie pour toutes matrices complexes \mathbf{A} et \mathbf{B} et l'égalité $\|\mathbf{H}\|_2 = 1$, on a :

$$\mathbf{B}_{\mathbf{G}} \leq \frac{1}{2}\|2\alpha\mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \alpha^2(\mathbf{J}_{N,N} - \mathbf{I}_N)\|_F \leq \|\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}\|_F \alpha + \frac{N}{2}\alpha^2 \approx \|\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}\|_F \alpha \quad (3.33)$$

L'avant-dernière inégalité provient de l'inégalité triangulaire vérifiée par toute norme. La dernière approximation utilise l'hypothèse de faible erreur relative.

L'étude précédente (cf. (3.25)) a montré que l'inégalité $\lambda_n > 2\|\mathbf{B}_{\mathbf{G}}\|_F$ était une condition suffisante de robustesse. D'après l'inégalité (3.33), on obtient une nouvelle condition suffisante de robustesse dans laquelle intervient α :

$$\lambda_n > 2\|\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}\|_F \alpha \quad (3.34)$$

On cherche maintenant à substituer λ_n par des quantités qui dépendent uniquement de \mathbf{D} .

L'hypothèse de réseau uniformément distribué permet d'écrire $n\lambda_n \approx \text{Tr}(\mathbf{G})$. D'autre part, en faisant agir l'opérateur trace sur les deux membres de l'égalité (3.3), il vient que $\text{Tr}(\mathbf{G}) = \|\mathbf{D}\|_F^2/(2N)$. Avec ces considérations, on a :

$$\lambda_n \approx \frac{\|\mathbf{D}\|_F^2}{2nN} \quad (3.35)$$

En injectant cette expression dans (3.34), on obtient la condition suffisante de robustesse de l'algorithme suivante :

$$\alpha^{-1} > 4nN \frac{\|\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}\|_F}{\|\mathbf{D}\|_F^2} \quad (3.36)$$

Cette inégalité montre que la robustesse est assurée si le rapport signal-à-bruit (α^{-1}) est supérieur à une quantité qui dépend uniquement de la géométrie du réseau *i.e.* la distribution des distances.

Pour interpréter plus en détail le membre de droite de l'inégalité (3.36), on suppose que chaque carré des distances de \mathbf{D} est la réalisation d'une variable aléatoire \mathbf{d}^2 . Dans ce cas :

$$\mathbb{E}[\mathbf{d}^2] = \frac{\|\mathbf{D}\|_F^2}{N(N-1)} \quad (3.37)$$

$$\mathbb{V}[\mathbf{d}^2] = \frac{\|\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}\|_F^2}{N(N-1)} - \mathbb{E}[\mathbf{d}^2]^2 \quad (3.38)$$

Finalement, à l'aide de ces égalités, l'inégalité (3.36) devient :

$$\alpha^{-1} > 4n \sqrt{1 + \frac{\mathbb{V}[\mathbf{d}^2]}{\mathbb{E}[\mathbf{d}^2]}} \quad (3.39)$$

où on a utilisé l'approximation $\sqrt{N-1} \approx \sqrt{N}$ valide pour des réseaux denses.

L'inégalité (3.39) montre alors que plus la variance relative des distances ($\mathbb{V}[\mathbf{d}^2]/\mathbb{E}[\mathbf{d}^2]$) augmente, c'est-à-dire plus la dispersion des capteurs augmente¹¹, plus le rapport signal-à-bruit doit être élevé pour assurer la robustesse de l'algorithme. Il faudra donc limiter cette dispersion pour ne pas exiger un rapport signal-à-bruit incompatible avec le bruit d'estimation en entrée *i.e.* sur les distances.

3.2.2.6 Distribution des erreurs.

Dans ce dernier paragraphe, on étudie par simulation numérique la distribution des erreurs sur les positions reconstruites. Pour chaque simulation, une matrice des positions d'un réseau est générée aléatoirement dans un carré (de côté unitaire). On calcule à l'aide de cette matrice des positions la matrice de distances théorique. A chaque test, on génère une matrice de bruits gaussiens centrés et de même variance que l'on vient ajouter à la matrice de distances théoriques pour former la matrice de distances bruitée. On estime alors la position des points du réseau via cette matrice et les coordonnées des références, qui elles sont non bruitées. La figure 3.4 représente un exemple de reconstruction de positions pour un réseau de 100 points dans le plan avec 3 références et pour 1000 réalisations de la matrice de bruit.

Sur la figure 3.4, la répartition de l'erreur semble gaussienne et centrée pour chaque position. Ce résultat a été confirmé pour plusieurs simulations via le test du χ^2 ¹². On a donc montré (en simulations) qu'un bruit gaussien centré sur les distances était transformé par l'algorithme par un bruit gaussien centré sur les positions.

On retrouve ce résultat pour une distribution uniforme des bruits sur les distances. On peut alors émettre la conjecture que c'est le théorème central limite [Ouvrard07] qui permet de justifier la distribution de l'erreur sur les positions. Notons que ces observations sont valides lorsque les bruits générés en entrée sont indépendants.

3.3 Un nouvel algorithme pour le cas incomplet et bruité.

Dans cette section, on présente un algorithme de localisation via une matrice de distances incomplète et bruitée quelconque et on étudie ses performances. Son originalité réside dans la première étape qui propose une nouvelle méthode de complétion. Cette méthode a fait l'objet d'un brevet [Carmona10]. La méthode utilise la théorie des graphes et l'algorithme de Torgerson de résolution du cas complet [Torgerson52].

Lorsque l'on dispose de plusieurs observations, on combine ce nouvel algorithme de complétion et la théorie de l'estimation optimale non linéaire pour écrire un estimateur qui prend en compte

11. Attention à ne pas confondre la répartition des capteurs qui est supposée ici uniforme et la dispersion des capteurs qui est en fait liée à la répartition des distances.

12. Les tests du χ^2 réalisés rejettent une hypothèse en dessous de 95% de confiance.

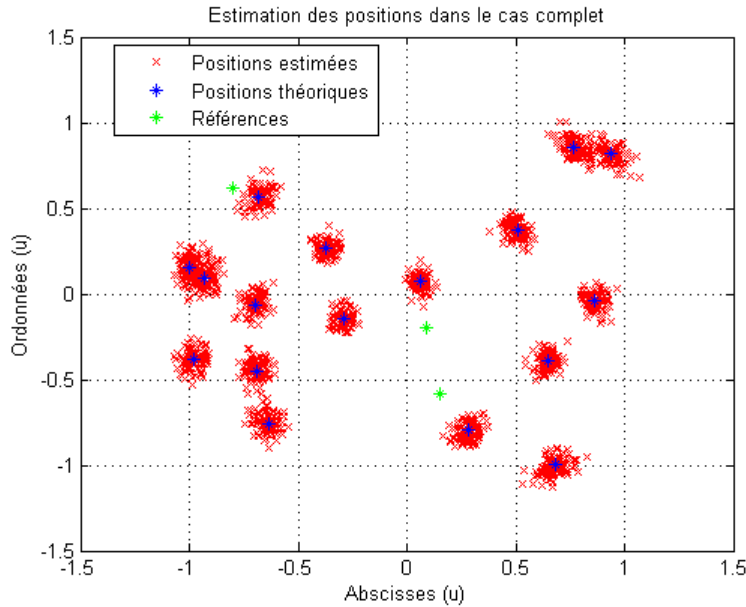


FIGURE 3.4 – *Erreur d'estimation pour un réseau de 20 capteurs dans le plan avec 3 références. Les positions théoriques sont représentées par une étoile bleue pour les capteurs à localiser et une étoile verte pour les références. Les croix rouges représentent la position estimée des capteurs pour chacun des 1000 tests.*

toutes les informations disponibles. La description et les performances de cet algorithme sont l'objet de la [sous-section 3.3.4](#).

Enfin, on propose un cadre d'application plus général de ce nouvel algorithme. Cette étude trouve une application directe dans l'estimation d'attitudes pour les réseaux de capteurs distribués. Ceci est décrit plus en détail dans le chapitre suivant.

3.3.1 État de l'art.

3.3.1.1 Un problème NP-difficile.

La minimisation du critère défini en (3.16) ou (3.17) est NP-difficile [Krislock09]. Cela justifie l'existence de nombreuses méthodes de résolution dont chacune relaxe le problème à l'aide d'informations supplémentaires spécifiques à l'application. Ces méthodes ne sont pas applicables aux cas des réseaux enfouis où aucune information sur la structure de la matrice de distances, estimée via une identification passive, n'est disponible. En effet, dans ce cadre, l'estimation de distances est réalisée par mesure de temps de première arrivée entre deux capteurs. La bande de fréquence des bruits ambiants, différente en chaque endroit de la structure car de nature différente (vent au sommet d'un bâtiment, pas au niveau des étages, vibrations des machines au sous-sol, etc.), détermine la plage des distances estimables *i.e.* hautes fréquences \rightarrow petites distances, ..., basses fréquences \rightarrow grandes distances. Ces plages sont donc variables en fonction des parties de la structure et du temps. Ceci justifie l'absence totale, en général, d'information a

priori sur la structure de la matrice de distances. Ainsi, les motivations se sont concentrées sur l'établissement d'un algorithme de résolution du cas général.

On trouvera dans [Dattoro06] une illustration, via des exemples, de la complexité du problème SNL lorsque la matrice de distances est incomplète. Ces exemples sont importants car ils montrent qu'en général tout algorithme de minimisation des critères (3.16) et (3.17) ne convergera pas, ou convergera vers une solution qui n'est pas une solution particulière (*i.e.* une matrice des positions isométrique à la matrice des positions cherchée), si aucune information a priori est ajoutée sur les positions cherchées.

Afin de compléter l'état de l'art, on trouvera un récapitulatif des nombreuses méthodes de résolution du cas incomplet avec information a priori dans la thèse [Patwari05] et l'article [Costa06]. Il est important de noter que les tentatives de minimisation des critères (3.16) ou (3.17) sans ajout d'information sont très peu fiables car ils peuvent ne pas converger. On trouvera une critique des méthodes de programmation semi-définie dans la résolution du problème incomplet dans l'introduction de [Krislock09]. On notera que quelques algorithmes récents se "rapprochent" du cas général *i.e.* sans information a priori. On peut citer notamment deux exemples. L'algorithme SVD-Reconstruct [Drineas06], basé sur le rang de la matrice de distances. L'hypothèse de départ est la connaissance de $p_{\mathbf{D}|\mathbf{X}}$ lorsque \mathbf{D} est complète. Autrement dit, on a connaissance de l'erreur sur toutes les distances, même si certaines sont inaccessibles. Enfin, le deuxième exemple est décrit plus en détail ci-dessous.

3.3.1.2 Une méthode de résolution dans le cas radio.

Une méthode quasi-générique (*i.e.* sans information a priori sur la structure de la matrice de distances) est développée dans [Krislock09]. L'idée consiste à identifier des sous-graphes complets du graphe, appelés cliques, associé à la matrice de distances. Les capteurs associés à ces cliques peuvent être localisés dans un repère relatif à chaque clique. Les références permettent de recaler ces repères dans un repère absolu. La difficulté de cet algorithme itératif est que la recherche de cliques maximales (*i.e.* qui ne sont strictement contenues dans aucune autre clique), minimisant le nombre d'itérations, est NP-difficile. N. Krislock et H. Wolkowicz dans [Krislock09] pallient ce problème en ajoutant une hypothèse sur le réseau. Ils supposent l'existence d'un paramètre radio R tel que toute distance inférieure à R est connue. Cette hypothèse fait référence aux communications radio où pour un réseau dont les noeuds sont quasi-identiques, la portée de communication entre deux noeuds est sensiblement la même pour chaque paire. Cette hypothèse atteint tout de même rapidement ses limites, car la présence d'obstacles entre deux capteurs a priori proches peut empêcher la communication.

3.3.1.3 Cas semi-complet.

La description du cas semi-complet utilise les décompositions des matrices de distances et de Gram suivantes :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{r,r} & \mathbf{D}_{r,c} \\ \mathbf{D}_{c,r} & \mathbf{D}_{c,c} \end{pmatrix} ; \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{r,r} & \mathbf{G}_{r,c} \\ \mathbf{G}_{c,r} & \mathbf{G}_{c,c} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

où $\mathbf{D}_{r,r} \in \mathbb{R}^{R \times R}$ et $\mathbf{G}_{r,r} \in \mathbb{R}^{R \times R}$ sont les matrices associées respectivement aux distances et produits scalaires référence-référence, $\mathbf{D}_{r,c} = \mathbf{D}_{c,r}^T \in \mathbb{R}^{R \times (N-R)}$ et $\mathbf{G}_{r,c} = \mathbf{G}_{c,r}^T \in \mathbb{R}^{R \times (N-R)}$ sont les matrices associées respectivement aux distances et produits scalaires référence-capteur (sous-entendu capteur à localiser), et, où $\mathbf{D}_{c,c} \in \mathbb{R}^{(N-R) \times (N-R)}$ et $\mathbf{G}_{c,c} \in \mathbb{R}^{(N-R) \times (N-R)}$ sont

les matrices associées respectivement aux distances et produits scalaires capteur-capteur. Cette décomposition impose de ré-indexer les capteurs de sorte que tous les capteurs de référence soient en première position.

La matrice de distances est dite semi-complète si toutes les distances référence-capteur sont connues. Cette hypothèse est validée pour des réseaux dont les références sont en fait des balises qui communiquent avec tous les capteurs déployés. Elle se traduit par la connaissance des matrices $\mathbf{D}_{r,r}$, $\mathbf{D}_{r,c}$ (et donc $\mathbf{D}_{c,r}$) dans la décomposition (3.40).

La particularité du cas semi-complet, qui est un sous-cas du cas incomplet, est qu'il existe des méthodes de résolution analytiques. Dans ce cadre, la matrice $\mathbf{D}_{c,c}$ peut être obtenue analytiquement à l'aide des matrices $\mathbf{D}_{r,r}$ et $\mathbf{D}_{r,c}$ [Rangarajan08]. La matrice de distances est alors complétée et on peut utiliser un des nombreux algorithmes de résolution du cas complet.

On trouve une deuxième approche basée sur une régression linéaire de la matrice de Gram obtenue par projection dans un espace de Hilbert à noyaux auto-reproduisants [Honeine09]. L'idée est de trouver une transformation linéaire qui échange $\mathbf{D}_{r,r}$ en $\mathbf{G}_{r,r}$. $\mathbf{G}_{r,r}$ est aussi connue car on rappelle que c'est la matrice de Gram associée aux références. La transformation obtenue permet de trouver analytiquement la position des capteurs sans complétion préalable de la matrice de distances. L'article [Honeine09] propose aussi une approche distribuée de cet algorithme.

On retrouve deux approches de type MDS (MDS-like) dans [Platt05] et [Amar10]. La première approche, décrite dans [Platt05], unifie les algorithmes déjà existants : FastMap [Faloustos95], MetricMap [Wang99], et Landmark MDS [DeSilva03] que nous ne présentons pas car ils sont généralisés dans cet article comme des cas d'applications de l'algorithme de Nyström [Platt05]. Ce dernier est une méthode numérique de résolution de problème aux valeurs propres vu comme une équation intégrale discrète. En plus de l'unification des méthodes existantes, l'article de J.C. Platt propose une amélioration en terme de complexité temporelle et de précision de la résolution du cas semi-complet via une approche de type MDS.

Cette première approche est comparée dans [Amar10] avec une nouvelle méthode basée sur la projection de la matrice de distances semi-complète et la minimisation d'un critère du type (3.16) dans l'espace projeté. L'approche développée dans [Amar10] est proposée dans le cadre de bruits sur les distances tous indépendants, gaussiens, centrés et de même variance. Dans ce cadre, les résultats sont plus satisfaisants que dans [Platt05].

3.3.2 Nouvel algorithme : terminologie, description et performances.

On décrit maintenant le nouvel algorithme de complétion qui a fait l'objet du brevet [Carmona10]. On introduit au préalable les notions de capteurs localisables et de sous-réseaux localisables de fiabilités maximales utiles à la compréhension de l'algorithme. On trouvera ensuite la présentation de l'algorithme et de ses performances testées en simulation.

3.3.2.1 Capteurs localisables : définition et caractérisation.

Un capteur localisable est un capteur dont on peut estimer la position uniquement à partir de la matrice de distances \mathbf{D} et de la matrice des références \mathbf{X}_r .

On dira qu'un algorithme de résolution du problème de localisation est total s'il estime la position de tous les points localisables. Afin d'étudier la totalité d'un algorithme, il est nécessaire

de connaître tous les points localisables à partir de \mathbf{D} et \mathbf{X}_r . Pour cela, il faut remarquer deux points :

- Tout capteur localisable qui a été localisé peut devenir une nouvelle référence. \mathbf{D} peut alors être complétée en ajoutant les distances entre nouvelles et anciennes références qui n'étaient pas connues.
- Tout capteur C qui a au moins $n+1$ voisins de référence non hypercoplanaires est localisable où n est la dimension de l'espace dans lequel les capteurs sont déployés. En effet, la sous-matrice de \mathbf{D} associée aux capteurs $\{C\} \cup R_C$, où R_C est l'ensemble des capteurs de références voisins avec C , est complète. Réciproquement, tout capteur localisable à partir d'une matrice de distances complète admet au moins $n+1$ voisins de référence (anciens ou nouveaux) non hypercoplanaires.

On utilise ces deux remarques pour déterminer récursivement l'ensemble des capteurs localisables, que nous noterons \mathcal{L} . Soit la suite d'ensembles (\mathcal{L}_i) telle que \mathcal{L}_0 soit l'ensemble des capteurs de référence et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{L}_i est l'union de \mathcal{L}_{i-1} et de l'ensemble des points qui ont au moins $n+1$ voisins non hyper-coplanaires dans \mathcal{L}_{i-1} . Alors, on notant N_I le plus petit entier k tel que $\mathcal{L}_{k+1} = \mathcal{L}_k$ ¹³, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{N_I}$.

Exemple. Soit un réseau plan de 8 capteurs C_1, \dots, C_8 dont C_1, C_2 et C_3 sont les références que l'on suppose non alignées. Afin de simplifier l'exemple, on supposera qu'il n'existe aucun triplet de capteurs qui soit aligné. On suppose que la matrice de distances disponibles est associée à la matrice d'adjacence suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\mathcal{L}_0 = \{C_1, C_2, C_3\}$. Le capteur C_8 est le seul capteur qui soit adjacent à trois éléments de \mathcal{L}_0 non alignés, d'où $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 \cup \{C_8\}$. C_6 est l'unique capteur adjacent à trois éléments de \mathcal{L}_1 non alignés (C_1, C_3 et C_8), donc $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup \{C_6\}$. Puis, les capteurs C_4 et C_5 sont adjacents à trois éléments de \mathcal{L}_2 , on a alors $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 \cup \{C_4, C_5\}$. Le capteur C_7 est adjacent à un seul élément de \mathcal{L}_3 , il n'est pas localisable : $\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_3$. Finalement, $N_I = 3$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}_3 = \{C_1, \dots, C_6, C_8\}$.

3.3.2.2 Capteurs non localisables.

Pour un capteur non localisable, on peut tout de même déterminer une région de l'espace plus ou moins fine à laquelle appartient le capteur. En effet, soit Ω la région n dimensionnelle qui contient les capteurs et soit $v \leq n$ le nombre de voisins localisables de C . Alors C est à l'intersection de Ω et de v sphères de centres (positions des voisins localisables) et de rayons (distances) connus. Si, de plus, on dispose d'autres informations a priori sur la position du capteur, celles-ci peuvent directement être utilisées pour affiner les régions.

13. On remarquera que $N_I < +\infty$.

3.3.2.3 Sous-réseaux localisables.

On rappelle qu'un sous-réseau complet est un ensemble de capteurs dont la distance entre chaque paire de capteurs est connue. Ces sous-réseaux correspondent aux cliques (sous-graphes complets) du graphe associée à la matrice de distances incomplète. Un sous-réseau complet est localisable s'il contient au moins $n + 1$ références non hypercoplanaires. On notera qu'un sous-réseau localisable contient des capteurs localisables. En revanche, un sous-réseau de capteurs localisables n'est pas nécessairement localisable. On introduit maintenant deux types de sous-réseaux particuliers utiles pour la suite.

Un sous-réseau localisable est maximal si tout autre sous-réseau localisable à un nombre inférieur ou égal de capteurs que ce sous-réseau. La recherche d'un sous-réseau localisable maximal est équivalent au problème de recherche de clique maximale célèbre en théorie des graphes et qui est NP-difficile [Krislock09]. Par conséquent, il n'existe pas d'algorithme de recherche de tels sous-réseaux de complexité polynômiale *i.e.* il n'existe pas d'entier d tel que la complexité soit en $O(N^d)$ où on rappelle que N est le nombre de capteurs.

La fiabilité d'un sous-réseau localisable est, par définition, la somme des fiabilités associées aux distances de chaque paire. Un sous-réseau localisable est de fiabilité maximale s'il n'existe aucun autre sous-réseau localisable de fiabilité supérieure à celle de ce sous-réseau. La recherche de sous-réseau de fiabilité maximale est NP-difficile, et on doit soit se contenter d'une solution sous-optimale en utilisant un algorithme en temps polynômial, soit disposer d'un algorithme exact mais qui tente de diminuer la complexité en élaguant le plus de cas possible.

3.3.2.4 Description de l'algorithme de complétion.

L'algorithme de complétion développé est itératif. A chaque itération, on localise un sous-réseau de capteurs localisable via l'algorithme MDS. Ces capteurs deviennent des nouvelles références. On complète la matrice de distances avec les distances entre les anciennes et les nouvelles références qui étaient inconnues. On réitère le processus jusqu'à ce que tout les capteurs localisables aient été localisés.

A une itération donnée, le réseau peut contenir plusieurs sous-réseaux localisables. L'algorithme développé choisit le sous-réseau localisable de fiabilité maximale. Ce choix répond au compromis de minimiser le nombre d'itérations et de minimiser l'erreur d'estimation dans la localisation de ce sous-réseau via MDS. On précise que l'on souhaite minimiser le nombre d'itérations car la localisation de capteurs à une itération donnée utilise des références dont une partie est déjà issue d'estimations successives. On notera que la minimisation du nombre d'itérations revient à chercher un sous-réseau localisable maximal à chaque étape. Ainsi, un sous-réseau localisable de fiabilité maximale permet à la fois d'intégrer de nombreux capteurs dans la clique tout en prenant en compte la qualité des distances associées.

On a déjà discuté de la complexité NP-difficile de la recherche d'un sous-réseau localisable de fiabilité maximale. Il existe dans la littérature de nombreux algorithmes de recherche de tels sous-réseaux exacts, ou, approchés mais en temps polynômial. L'algorithme que nous utilisons est une adaptation de la méthode exacte de P. Ostergard [Ostergard99] de recherche de cliques de poids maximal dans un graphe. L'adaptation porte sur le fait que les cliques cherchées contiennent $n + 1$ capteurs de références non hyper-coplanaires. On trouvera la description de cette adaptation en [annexe B](#).

Lorsqu'un sous-réseau localisable de fiabilité maximale a été identifié puis localisé via MDS,

on complète la matrice de distances comme précisé au premier paragraphe. On associe à ces nouvelles distances la fiabilité $\alpha f_{max}/N_{clique}$ avec α arbitraire dans $]0, 1[$, N_{clique} est le nombre de capteurs du sous-réseau et f_{max} sa fiabilité. Cette pondération par α (constant pendant tout l'algorithme) permet de favoriser les anciennes distances dans les itérations suivantes.

On trouvera ci-dessous une synthèse de l'algorithme de complétion développé dont les entrées sont la matrice de distances, la matrice des fiabilités et la matrice des références :

1) Déterminer un sous-réseau localisable de fiabilité maximale à l'aide de l'algorithme décrit en [annexe B](#).

2) Estimer la position des capteurs de ce sous-réseau via MDS et ajouter à la matrice des références les positions des capteurs localisés, ces derniers sont des nouvelles références.

3) Compléter la matrice de distances par les distances entre les nouvelles références et les anciennes références qui n'étaient pas connues. Compléter la matrice des fiabilités telle que la fiabilité de chaque nouvelle arête du graphe est α fois (par exemple $\alpha = 1/2$) la fiabilité moyenne du sous-réseau *i.e.* la fiabilité du sous-réseau divisée par le nombre de capteurs.

4) Répéter les étapes **1**, **2** et **3** tant qu'il reste des capteurs localisables.

5) Déterminer si, parmi les capteurs non localisables, la prise en compte d'informations supplémentaires permet de les localiser.

A la fin de l'algorithme, la matrice de distances est éventuellement incomplète mais contient une sous-matrice de distances complète qui est maximale dans le sens où on ne peut trouver aucune autre sous-matrice de distances de taille supérieure sans nouvelles informations. Notons que cet algorithme est total et qu'il fournit une estimation de la matrice des positions. Cette matrice sera utilisée pour initialiser un algorithme d'optimisation pour la prise en compte de plusieurs observations dans la sous-section suivante.

3.3.2.5 Performances.

La complexité algorithmique est dominée par l'algorithme de recherche d'un sous-réseau localisable de fiabilité maximale. On peut diminuer cette complexité si nécessaire avec un algorithme de recherche en temps polynômial. L'inconvénient est que le nombre d'itérations risque d'augmenter, ce qui augmentera l'erreur sur les nouvelles distances et les nouvelles positions.

Les performances de l'algorithme ont été étudiées en simulation. Les erreurs propagées étant gaussiennes on s'intéresse uniquement à l'ellipsoïde de l'erreur en chaque capteur défini par son centre (moyenne) et la longueur de ses axes (écarts types selon chaque direction). La [figure 3.5](#) représente les ellipses obtenues sur 1000 réalisations du bruit pour un réseau déployé dans un plan de 20 capteurs dont 3 de références. Pour chaque point deux ellipses sont représentées : celle obtenue avec une matrice de distances complète bruitée et celle obtenue avec la matrice de distance à laquelle on a retiré aléatoirement 30 % des distances connues. On pourra noter que chaque ellipse obtenue par résolution du cas incomplet contient la position du capteur théorique et contient naturellement l'ellipse obtenue par résolution du cas complet. L'aire des ellipses est différente pour chaque capteur. Elle est d'autant plus grande qu'il a fallu d'itérations de l'algorithme de complétion pour localiser le capteur associé, ce qui est un résultat attendu.

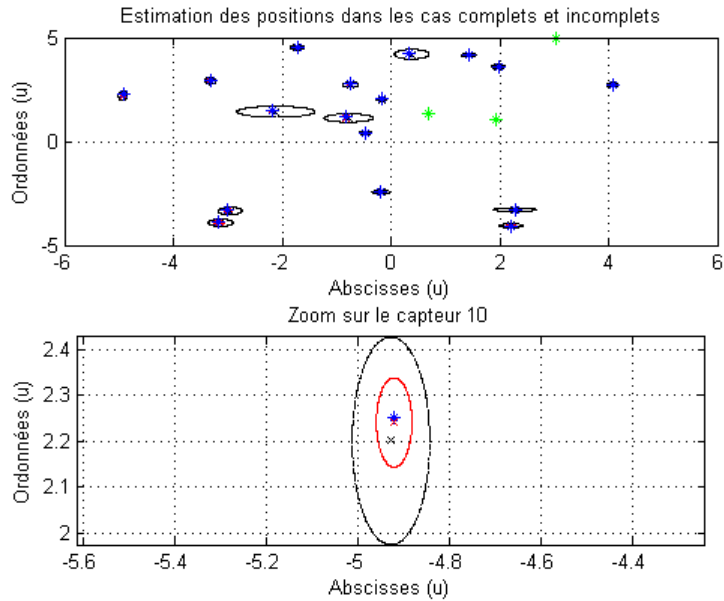


FIGURE 3.5 – Erreur d'estimation sur 1000 tests pour un réseau de 20 capteurs dans le plan avec 3 références. Les positions théoriques sont représentées par une étoile bleue pour les capteurs à localiser et une étoile verte pour les références. Les ellipses rouges et leur centre (croix rouges) représentent les ellipses d'erreurs pour le cas complet. Les ellipses noires et leur centre (croix noires) représentent les ellipses d'erreurs pour le cas incomplet. La figure du bas est un zoom autour de la position d'un capteur.

De nombreux tests ont été simulés pour des configurations diverses : nombre de capteurs, rapport signal-à-bruit sur les distances, dimension du réseau, nombre de références et taux de complétion. Pour chaque cas, l'algorithme est stable et retourne une ellipse (de confiance) en accord avec les observations établies dans les exemples du paragraphe précédent. Cette stabilité, qui est assurée par la condition de robustesse (3.25), est en fait vérifiée pour des niveaux de bruit moins strictes en pratique.

Finalement, l'algorithme développé est théoriquement et numériquement stable. On rappelle que cet algorithme a l'avantage d'être complètement générique dans le sens où il ne nécessite aucune information sur la structure de la matrice de distances. La complexité temporelle peut être polynomiale si on accepte une recherche approchée de sous-réseau localisable de fiabilité maximale avec pour conséquence des ellipses de confiances d'aire plus élevée. Cet algorithme peut donc être utilisé pour la localisation passive d'un réseau de capteurs enfoui.

3.3.3 Prise en compte de nouvelles observations.

On présente dans cette sous-section un algorithme qui prend en compte les nouvelles observations de la matrice de distances. Le principe consiste à écrire un modèle d'état et d'observation

pour la matrice de distances complétée à l'aide de l'algorithme décrit dans la sous-section suivante. Cela permet ensuite d'appliquer les résultats classiques de la théorie de l'estimation non linéaire qui établissent implicitement l'expression de l'estimateur optimal comme l'argument minimal d'une fonction non linéaire.

3.3.3.1 Estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance.

On s'intéresse ici à l'estimation optimale, au sens du maximum de vraisemblance, de la matrice des positions pour $k > 1$ observations données $\mathcal{Y}_k := (\tilde{\mathbf{D}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{D}}_k)$. Ce problème peut s'écrire sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{X}}_k := \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} p_{\mathcal{Y}_k|\mathbf{x}}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}) \quad (3.41)$$

On suppose que les observations sont indépendantes. Cette hypothèse permet de simplifier l'expression de la densité des observations conditionnellement à l'état :

$$p_{\mathcal{Y}_k|\mathbf{x}}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^k p_{\mathbf{D}_i|\mathbf{x}}(\mathbf{d}_i, \mathbf{x}) \quad (3.42)$$

A l'aide de l'équation (3.7), il vient :

$$p_{\mathcal{Y}_k|\mathbf{x}}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}) = C \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \|\Delta(\mathbf{d}_i, \mathbf{x})\|_{\mathbf{V}_i}^2 \right) \quad (3.43)$$

où C est une constante de normalisation, et, où pour toute matrice inversible \mathbf{C} et tout vecteur \mathbf{B} : $\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{C}} := \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}$. A l'aide de cette expression, on déduit que l'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{X}}_k := \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^k \|\Delta(\mathbf{d}_i, \mathbf{x})\|_{\mathbf{V}_i}^2 \quad (3.44)$$

Ce critère est difficile à minimiser puisqu'il correspond au critère STRESS (3.16) pour plusieurs observations. Il fait en effet l'objet de nombreuses études pour une seule observation (cf. état de l'art la sous-section 3.2.1).

Afin de pallier ce problème, on propose de déterminer un critère au sens Bayésien en ajoutant une incertitude sur l'état. On décrit ci-après une équation d'état et une équation d'observation qui serviront à donner une expression de l'estimateur optimal dans ce nouveau cadre.

3.3.3.2 Équation d'état.

Une équation d'état traduit l'évolution dans le temps de la variable d'état. Dans le cadre de la localisation, l'état est la matrice des positions du réseau. Lorsque le réseau est immobile et si on note $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{N \times n}$ la matrice des positions pour $k > 0$ observations, l'équation d'état s'écrit simplement :

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{M}_k \quad (3.45)$$

où \mathbf{M}_k est l'incertitude sur le modèle que nous choisirons de loi normale centrée et de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}_N$. Cette incertitude permet de considérer l'état comme une variable aléatoire.

3.3.3.3 Équation d'observation.

Une équation d'observation exprime la k -ième mesure (ce que l'on observe) en fonction des états $(\mathbf{X}_i)_{i=0\dots k}$ et du bruit de mesure à l'instant k . Dans le cadre du problème SNL, l'observation à un instant k est la matrice de distances $\tilde{\mathbf{D}}_k$ et dépend uniquement de la position des capteurs au même instant k *i.e.* \mathbf{X}_k . L'équation d'observation admet alors la forme suivante :

$$\mathbf{A}_k \otimes \tilde{\mathbf{D}}_k = \mathbf{A}_k \otimes (\mathcal{D}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{B}_k^{\text{Inc}}) \quad (3.46)$$

où \mathbf{A}_k est la matrice d'adjacence du graphe à l'instant k , $\mathbf{B}_k^{\text{Inc}}$ est l'erreur d'estimation associée à la matrice $\tilde{\mathbf{D}}_k$. On supposera toujours les erreurs sur les distances gaussiennes et centrées *i.e.* $\mathbf{B}_k^{\text{Inc}} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V}_k^{\text{Inc}})$. L'équation (3.46) est non linéaire (car \mathcal{D} est non linéaire) et implicite puisque la matrice de distances observées est pondérée par la matrice d'adjacence qui masque les distances non observées.

Notons que la dépendance en k de la matrice d'adjacence dans (3.46) est justifiée dans le cadre du SHM passif. En effet, une structure est sollicitée par des excitations différentes qui fournissent une matrice de temps de vol propre à l'éclairage de chaque source. Par exemple, considérons un immeuble instrumenté. La pluie et les pas sont des sources d'excitations qui n'éclaireront pas la même partie du réseau. La matrice d'adjacence associée à chaque sollicitation via l'identification passive est donc différente.

Pour définir un estimateur, on décide de pallier l'aspect implicite de l'équation d'observation en utilisant l'algorithme de complétion développé. A partir de la matrice $\tilde{\mathbf{D}}_k$ et de la matrice des références $\tilde{\mathbf{X}}_r$, on obtient une matrice complète $\hat{\mathbf{D}}_k$ qui vérifie l'équation d'observation suivante :

$$\hat{\mathbf{D}}_k = \mathcal{D}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{B}_k \quad (3.47)$$

où \mathbf{B}_k est une version complétée de $\mathbf{B}_k^{\text{Inc}}$ où les fiabilités associées aux distances initialement inconnues correspondent aux fiabilités calculées par l'algorithme de complétion. On a montré dans la sous-section précédente que si $\mathbf{B}_k^{\text{Inc}} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V}_k^{\text{Inc}})$ alors $\mathbf{B}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V}_k)$ *i.e.* l'algorithme de complétion conserve la distribution normale centrée de la matrice de bruit. On rappelle que la complétion de la matrice de distances $\tilde{\mathbf{D}}_k$ fournit une estimation de la matrice des positions que nous noterons $\hat{\mathbf{X}}_k^{\text{loc}}$ et qui sera utilisée par la suite.

3.3.3.4 Estimateur optimal au sens des moindres carrés.

On s'intéresse ici à l'estimation optimale au sens des moindres carrés de la matrice des positions pour $k > 1$ observations données $\mathcal{Y}_k := (\hat{\mathbf{D}}_1, \dots, \hat{\mathbf{D}}_k)$. Ce problème peut s'écrire sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{X}}_k := \underset{\mathbf{Z}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}[\|\mathbf{Z} - \mathbf{X}_k\|_F^2] \quad (3.48)$$

Il est classique (et démontré ci-dessous) que la solution de ce problème d'optimisation est l'espérance de l'état conditionnellement aux observations :

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbb{E}[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k] \quad (3.49)$$

Preuve. Soit $\varphi(\mathcal{Y}_k)$ un estimateur quelconque de \mathbf{X} . On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|\varphi(\mathcal{Y}_k) - \mathbf{X}_k\|_F^2] &= \mathbb{E}[\|\varphi(\mathcal{Y}_k) - \mathbf{Z} + \mathbf{Z} - \mathbf{X}_k\|_F^2] \\ &= \mathbb{E}[\|\varphi(\mathcal{Y}_k) - \mathbf{Z}\|_F^2] + 2\text{Tr}(\mathbb{E}[(\varphi(\mathcal{Y}_k) - \mathbf{Z})^T(\mathbf{Z} - \mathbf{X}_k)]) + \mathbb{E}[\|\mathbf{Z} - \mathbf{X}_k\|_F^2]\end{aligned}$$

où $\mathbf{Z} := \mathbb{E}[\mathbf{X}_k|\mathcal{Y}_k]$. De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\varphi(\mathcal{Y}_k) - \mathbf{Z})^T(\mathbf{Z} - \mathbf{X}_k)] &:= \int_{\mathbb{R}^{N \times n}} \int_{\mathbb{R}^{N \times N}} (\varphi(\mathbf{y}_k) - \mathbf{Z}(\mathbf{y}_k))^T (\mathbf{Z}(\mathbf{y}_k) - \mathbf{x}_k) p_{\mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) d\mathbf{x}_k d\mathbf{y}_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N \times N}} (\varphi(\mathbf{y}_k) - \mathbf{Z}(\mathbf{y}_k))^T \left[\int_{\mathbb{R}^{N \times n}} (\mathbf{Z}(\mathbf{y}_k) - \mathbf{x}_k) p_{\mathbf{X}_k|\mathcal{Y}_k=\mathbf{y}_k}(\mathbf{x}_k) \right] p_{\mathcal{Y}_k}(\mathbf{y}_k) d\mathbf{y}_k\end{aligned}$$

Or, par définition $\mathbf{Z}(\mathbf{y}_k) = \mathbb{E}[\mathbf{X}_k|\mathcal{Y}_k = \mathbf{y}_k]$ donc l'intégrale entre crochet du membre de droite de l'équation ci-dessus est nul. Par conséquent, le membre de gauche est aussi nul. Finalement :

$$\mathbb{E}[\|\varphi(\mathcal{Y}_k) - \mathbf{X}_k\|_F^2] = \mathbb{E}[\|\varphi(\mathcal{Y}_k) - \mathbf{Z}\|_F^2] + \mathbb{E}[\|\mathbf{Z} - \mathbf{X}_k\|_F^2]$$

La fonction φ qui minimise cette expression vérifie alors $\varphi(\mathcal{Y}_k) = \mathbf{Z}$. Ceci justifie l'expression (3.49) de l'estimateur optimal (au sens des moindres carrés).

Le calcul de l'espérance conditionnelle qui apparaît dans l'expression (3.49) de l'estimateur optimal est difficile. On approche alors cet estimateur en choisissant de maximiser la vraisemblance $p_{\mathcal{Y}_k|\mathbf{X}_k}$, proportionnelle à $p_{\mathbf{X}_k|\mathcal{Y}_k}$ d'après le théorème de Bayes. Remarquons que cette approximation n'en est plus une lorsque la densité $p_{\mathbf{X}_k|\mathcal{Y}_k}$ est unimodale. Dans ce cas, l'espérance conditionnelle et l'argument maximum de la vraisemblance sont confondus [Jazwinski08].

3.3.3.5 Expression de la vraisemblance et critère.

A l'aide du théorème de Bayes ainsi que des équations d'état (3.45) et d'observation (3.47), on montre ci-dessous que la densité de l'état conditionnellement aux k observations complétées $\mathcal{Y}_k := (\hat{\mathbf{D}}_1, \dots, \hat{\mathbf{D}}_k)$ admet l'expression suivante :

$$p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\mathcal{Y}_k} = \frac{p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\hat{\mathbf{X}}_{k-1}} p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\mathbf{D}_k}}{p_{\hat{\mathbf{D}}_k}} \quad (3.50)$$

Preuve. D'après le théorème de Bayes, on a :

$$p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\mathcal{Y}_k} = \frac{p_{\hat{\mathbf{X}}_k, \mathcal{Y}_k}}{p_{\mathcal{Y}_k}} \quad (3.51)$$

L'hypothèse d'indépendance des observations permet d'écrire le dénominateur :

$$p_{\mathcal{Y}_k} = p_{\hat{\mathbf{D}}_k} \times p_{\mathcal{Y}_{k-1}} \quad (3.52)$$

On explicite le numérateur à l'aide du théorème de Bayes puis de l'équation d'observation (3.47) :

$$\begin{aligned}p_{\hat{\mathbf{X}}_k, \mathcal{Y}_k} &= p_{\hat{\mathbf{X}}_k, \mathcal{Y}_{k-1}, \hat{\mathbf{D}}_k} = p_{\hat{\mathbf{D}}_k|\hat{\mathbf{X}}_k, \mathcal{Y}_{k-1}} \times p_{\hat{\mathbf{X}}_k, \mathcal{Y}_{k-1}} = p_{\hat{\mathbf{D}}_k|\hat{\mathbf{X}}_k} \times p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\mathcal{Y}_{k-1}} \times p_{\mathcal{Y}_{k-1}} \\ &= p_{\hat{\mathbf{D}}_k|\hat{\mathbf{X}}_k} \times p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\hat{\mathbf{D}}_{k-1}} \times p_{\mathcal{Y}_{k-1}}\end{aligned} \quad (3.53)$$

On utilise maintenant l'équation de Fokker-Planck [Jazwinski08] qui, à l'aide de l'équation d'état (3.45), permet d'écrire :

$$p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\hat{\mathbf{D}}_{k-1}} = p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\hat{\mathbf{X}}_{k-1}} \quad (3.54)$$

Finalement, en injectant les expressions (3.54), (3.53) et (3.52) dans l'équation (3.51), on obtient bien (3.50).

On peut maintenant expliciter complètement la densité $p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\mathcal{Y}_k}$ à l'aide des connaissances sur les bruits d'état et d'observation. D'après l'équation d'état (3.45), on a :

$$p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\hat{\mathbf{X}}_{k-1}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = p_{\mathbf{M}_k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_{\sigma^2\mathbf{I}_N}^2\right) \quad (3.55)$$

D'après l'équation d'observation (3.47), on a :

$$p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\hat{\mathbf{D}}_k}(\hat{\mathbf{X}}_k, \mathbf{d}_k) = p_{\mathbf{V}_k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{d}_k) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{d}_k - \mathcal{D}(\mathbf{x}_k)\|_{\mathbf{V}_k}^2\right) \quad (3.56)$$

Finalement, en injectant les expressions (3.55) et (3.56) dans l'équation (3.50), il vient ;

$$p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\mathcal{Y}_k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{d}_k) = C \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_{\sigma^2\mathbf{I}_N}^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{d}_k - \mathcal{D}(\mathbf{x}_k)\|_{\mathbf{V}_k}^2\right) \quad (3.57)$$

où C est une constante de normalisation qui contient la contribution de $p_{\mathbf{D}_k}(\mathbf{d}_k)$.

Finalement, la maximisation de la vraisemblance, proportionnelle à $p_{\hat{\mathbf{X}}_k|\mathcal{Y}_k}$ d'après le théorème de Bayes, revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \underset{\mathbf{x}_k}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}\|_{\sigma^2\mathbf{I}_N}^2 + \|\hat{\mathbf{D}}_k - \mathcal{D}(\mathbf{x}_k)\|_{\mathbf{V}_k}^2 \quad (3.58)$$

On notera \mathcal{C}_k le critère à minimiser (membre de droite de l'équation ci-dessus).

Le problème d'optimisation (3.55) est résolu à l'aide du théorème de Levenberg-Marquart car c'est un algorithme classique de minimisation de fonctionnelle quadratique comme c'est le cas ici. Il est important de remarquer que rien n'assure que l'algorithme converge puisque la minimisation du terme de droite (minimisation de l'erreur entre l'observation et l'état a priori) est déjà difficile en elle-même puisque c'est la solution du problème SNL dans le cas complet et avec une information sur la matrice des bruits. Pour assurer de manière empirique la convergence, on initialise l'algorithme (qui est itératif) avec :

$$\hat{\mathbf{X}}_k^0 = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{X}}_{k-1} + \hat{\mathbf{X}}_k^{\text{loc}} \right) \quad (3.59)$$

Cette initialisation correspond au milieu du segment dont les extrémités sont définies par l'estimation de la matrice des positions avant la nouvelle mesure ($\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$) et la matrice des positions estimée en complétant la nouvelle mesure ($\hat{\mathbf{X}}_k^{\text{loc}}$).

3.3.3.6 Synthèse de l'algorithme et performances.

On présente maintenant une synthèse de l'algorithme de résolution du cas incomplet et bruité en présence de plusieurs observations :

1) Initialisation : On construit la matrice des positions $\hat{\mathbf{X}}_0 \in \mathbb{R}^{N \times n}$. Elle contient la position des R capteurs de références, les autres positions sont générées aléatoirement et uniformément dans la structure ou dans une région a priori.

2) Pour toute nouvelle observation $\tilde{\mathbf{D}}_k$ avec $k > 0$:

2.1) Compléter $\tilde{\mathbf{D}}_k$ pour former $\hat{\mathbf{D}}_k^{(\text{comp})}$ avec l'algorithme de complétion développé.

2.2) Estimer $\hat{\mathbf{X}}_k$ en minimisant \mathcal{C}_k via l'algorithme de Levenberg-Marquart initialisé à l'aide de $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ et $\hat{\mathbf{X}}_k^{\text{loc}}$ via l'équation (3.59).

2.3) Répéter l'étape 2 tant qu'il y a de nouvelles observations.

3) Finalisation : L'algorithme s'arrête lorsqu'il n'y a plus de nouvelles observations.

Les performances de cet algorithme sont maintenant étudiées. Tout d'abord, la complexité temporelle de l'algorithme global à chaque étape est la combinaison des complexités temporelles de l'algorithme de Levenberg-Marquart et de l'algorithme de complétion. Ce dernier est la résultante des complexités temporelles de l'algorithme de résolution du cas complet, de la recherche de clique de fiabilité maximale et du nombre d'itérations pour déterminer l'ensemble des capteurs localisables. On illustre sur la [figure 3.6](#) les résultats obtenus sur un exemple simulé qui illustre la convergence de l'algorithme.

L'algorithme a été testé sur plusieurs exemples montrant qu'il est robuste. Une perspective est de vérifier son efficacité, au moins asymptotique, en calculant la borne de Cramer-Rao de l'estimateur.

3.3.4 Généralisation du procédé de localisation.

Le procédé développé pour résoudre le problème de localisation consiste à disposer d'un algorithme de résolution pour une configuration particulière, par exemple les sous-réseaux localisables. Puis, cette résolution est utilisée pour localiser de nouveaux capteurs, et elle est répétée jusqu'à localiser tous les points possibles. Ce procédé peut se généraliser pour tout ensemble d'objets que l'on cherche à disposer via des informations relatives. Ce sera notamment le cas dans le [chapitre 4](#) où on estime les attitudes absolues de capteurs multi-composantes à partir d'attitudes relatives.

3.3.4.1 Paramètres de disposition.

Soient N objets dont on cherche les paramètres de disposition absolues p_1, \dots, p_N rangés dans le vecteur \mathbf{p} . On note \mathbf{K} l'ensemble des objets déjà disposés. On considère connus des paramètres de dispositions relatifs rangés dans la matrice \mathbf{R} . Chaque paramètre de disposition relatif est associé à une fiabilité. Les fiabilités sont rangées dans une matrice \mathbf{F} .

Par exemple, p_1, \dots, p_N sont les positions de N capteurs et \mathbf{R} est la matrice de distances, ou encore, p_1, \dots, p_N sont les attitudes de N capteurs et \mathbf{R} est la matrice des attitudes relatives (cf. [chapitre 4](#)).

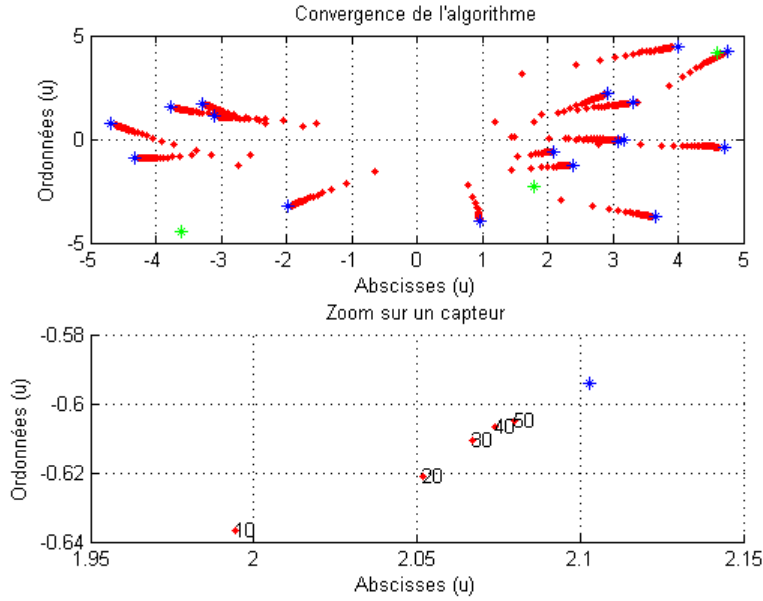


FIGURE 3.6 – Illustration de la convergence pour un réseau de 20 capteurs dans le plan avec 3 références. Les positions théoriques sont représentées par une étoile bleue pour les capteurs à localiser et une étoile verte pour les références. Les points rouges représentent la position estimée des capteurs pour chacun des 50 observations. Un zoom sur un capteur est représenté sur la figure du bas où on a tracé uniquement la position estimée tous les 10 tests.

3.3.4.2 Sous-ensembles disponibles.

Soit \mathcal{P} l'ensemble des propriétés qu'un sous-ensemble des N objets doit vérifier pour être disponible *i.e.* dont on peut disposer tous les objets de ce sous-ensemble à partir de \mathbf{K} et \mathbf{R} . Soit $\mathbb{A}(\mathcal{P})$ un algorithme qui permet de disposer un sous-ensemble qui satisfait les propriétés de \mathcal{P} . On note φ la fonction qui associe à tout sous-ensemble des N objets un réel, nommé fiabilité du sous-ensemble, à partir de la sous-matrice de \mathbf{F} associée aux objets de ce sous-ensemble. Enfin, on note α un réel de l'ensemble $]0, 1[$.

Dans le cadre du problème de localisation via une matrice de distances euclidiennes, \mathcal{P} est par exemple la propriété "sous-réseau localisable", $\mathbb{A}(\mathcal{P})$ est l'algorithme de résolution du cas complet MDS, φ est la fonction qui moyenne les fiabilités du sous-réseau et $\alpha = 1/2$. On peut aussi définir \mathcal{P} la propriété "sous-réseau semi-complet" *i.e.* sous-réseau pour lequel la matrice des distance est semi-complète, dans ce cas $\mathbb{A}(\mathcal{P})$ est par exemple l'algorithme qui utilise une régression de la matrice de Gram décrit dans [Honeine09]. Ou encore, la sous-section 3.2.2.5 a montré que moins la dispersion des capteurs (*i.e.* la variance relative des distances) était élevée plus la robustesse de l'algorithme MDS était assurée. On peut donc choisir \mathcal{P} la propriété "sous-réseau localisable de dispersion minimale".

3.3.4.3 Algorithme de disposition.

L'algorithme de disposition est alors identique à celui détaillé pour la localisation. Pour une observation de la matrice des dispositions relatives, on la complète à l'aide de l'algorithme $\mathbb{A}(\mathcal{P})$

et d'un algorithme de recherche des sous-ensembles qui vérifient \mathcal{P} . La mise à jour des fiabilités s'établit à l'aide la fonction φ et α .

Si l'on dispose aussi d'information sur les bruits des modèles d'état et d'observation, on peut utiliser l'estimation non linéaire pour prendre en compte les nouvelles observations comme cela a été présenté dans le cadre de la localisation.

3.4 Conclusion.

Ce chapitre a permis de présenter un nouvel algorithme de localisation via une matrice de distances incomplète et bruitée. Cette méthode trouve un intérêt dans le SHM passif où le contrôle des positions des capteurs est difficile et où le manque de structure a priori sur la matrice de distances implique que les algorithmes de résolution existants, présentés dans l'état de l'art, ne sont pas applicables. Les performances de ce nouvel algorithme, basé sur la recherche de cliques de fiabilité maximale et la résolution du cas complet, sont satisfaisant en terme de complexité et robustesse vis-à-vis des bruits en entrée. Soulignons, qu'une étude précise de l'algorithme de résolution du cas complet de W.S. Torgerson [[Torgerson52](#)] a été établie. Cette étude a permis de justifier son utilisation dans l'algorithme de résolution du cas incomplet et justifie la robustesse de ce dernier.

Un algorithme de résolution du cas incomplet qui prend en compte plusieurs observations a été présenté et testé en simulation. Il est basé sur la minimisation d'un critère établi rigoureusement à l'aide de la théorie de Bayes et de l'estimation non linéaire. L'algorithme breveté est utilisé pour compléter les nouvelles observations et pour initialiser l'algorithme de minimisation du critère qui prend en compte toute l'information disponible.

La méthode de complétion développée peut s'appliquer à tout réseau de capteurs dont on cherche un paramètre de disposition autre que la position. Il faut pour cela disposer d'un algorithme de résolution pour une configuration particulière. Il trouve une application directe dans le problème d'estimation d'attitudes dans les réseau de capteurs, étudié au chapitre suivant.

Enfin, en plus de l'interprétation des mesures qui nécessitent la connaissance de la position des capteurs, la localisation est fondamentale dans l'étape même de diagnostic d'une structure. Ce point sera détaillé au [chapitre 5](#).

Chapitre 4

Estimation d'attitudes dans les réseaux de capteurs via une matrice d'attitudes relatives.

Sommaire

4.1 Terminologie et formalisation du problème SNA.	107
4.1.1 Quaternions et rotations.	107
4.1.2 Formalisation.	109
4.2 Résolution du problème SNA complet et bruité.	110
4.2.1 Cas non bruité.	110
4.2.2 Cas bruité.	111
4.3 Performances.	115
4.3.1 Complexités spatiale et temporelle.	115
4.3.2 Robustesse.	115
4.4 Validation expérimentale.	117
4.4.1 Configuration.	117
4.4.2 Estimation des attitudes relatives.	118
4.4.3 Estimation de l'attitude des capteurs.	120
4.5 Conclusion.	121

La mesure du champ de déplacement (ou de vitesse, ou encore, d'accélération) dans un milieu visco-élastique doit être réalisée avec une instrumentation à trois composantes (géométriquement indépendantes). Le [chapitre 2](#) a montré que l'identification passive de tels milieux instrumentés en volume par des capteurs multi-composantes permettait de reconstruire d'autres paramètres que ceux estimés via le champ de pression (polarisation, vitesses et atténuation des ondes de cisaillement).

Pour interpréter la mesure d'un champ 3D-3C enregistré par un capteur triaxial, il faut connaître son attitude. Lors de l'enfouissement de capteurs dans une structure, l'attitude de

chaque capteur est difficile à contrôler. Une étape préliminaire d'estimation des attitudes est donc nécessaire.

L'identification active ou passive des milieux solides, présentée au [chapitre 2](#), donne accès à l'attitude relative entre des paires de capteurs. Ce chapitre concerne l'utilisation de ces attitudes relatives pour estimer l'attitude (absolue) des capteurs. Nous appellerons ce problème le problème SNA (Sensor Network Attitude problem).

Le problème SNA n'est pas sans rappeler le problème SNL. Le procédé générique présenté au [chapitre 3](#) montre que la résolution du cas complet, comme pour le problème SNL, suffit à obtenir un algorithme pour le cas incomplet. Les travaux de thèse se sont concentrés sur le développement d'une méthode de résolution du cas complet.

Le formalisme des quaternions, rappelé en [section 4.1](#), est un outil utilisé dans les domaines concernés par l'estimation d'attitudes : vision par ordinateur [[Faugeras93](#)], biomédical [[Mayagoitia02](#)], robotique [[Kuipers02](#)], navigation [[Markley04](#)]. Il existe en effet une correspondance entre les rotations 3D et les quaternions unitaires. Cette représentation des rotations 3D par des quaternions permet de manipuler algébriquement des rotations et résoudre analytiquement des problèmes inverses.

Ce formalisme a été adopté pour la résolution du problème SNA présentée en [section 4.2](#). L'approche est inspirée de l'algorithme MDS de résolution du problème SNL dans le cas complet. La résolution est établie analytiquement à partir de la solution du problème non bruité. Les performances de l'algorithme sont étudiées en [section 4.3](#). On établit des bornes d'erreurs sur les paramètres estimés afin d'évaluer la robustesse de l'algorithme. Enfin, l'algorithme est testé sur des signaux réels ([section 4.3](#)) issus de centrales d'attitudes.

4.1 Terminologie et formalisation du problème SNA.

Cette section introduit l'ensemble des quaternions et leur lien avec les rotations de l'espace. On présente ensuite les matrices de quaternions et quelques règles algébriques associées. Enfin, on utilise les quaternions unitaires pour formaliser le problème SNA.

4.1.1 Quaternions et rotations.

4.1.1.1 Ensemble des quaternions.

Un quaternion \mathbf{q} est un nombre à quatre composantes $\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ où q_0, q_1, q_2, q_3 sont des réels et où $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vérifient $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$. L'ensemble des quaternions est noté \mathbb{H} et peut s'interpréter comme une généralisation de l'ensemble des nombres complexes. Le produit défini sur \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} induit un produit sur \mathbb{H} généralisant le produit complexe. Muni de ce produit, de l'addition, et de la multiplication par un réel, \mathbb{H} est une \mathbb{R} -algèbre et un corps. Notons que les quaternions qui commutent avec tous les quaternions sont les réels.

Soit $\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ un quaternion. q_0 est la partie réelle de \mathbf{q} . Un quaternion pur est un quaternion de partie réelle nulle. On note $|\mathbf{q}| := (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}$ la norme euclidienne de \mathbf{q} . $|\cdot|$ est une norme multiplicative. $\bar{\mathbf{q}} := q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$ est le quaternion conjugué de \mathbf{q} . On a les propriétés suivantes : $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{p}}$ et $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = |\mathbf{q}|^2$.

Exemple. Considérons le quaternion $\mathbf{q} = 1 - 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Alors $\bar{\mathbf{q}} = 1 + 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ et $|\mathbf{q}|^2 = 15$.

4.1.1.2 Quaternions unitaires et rotations.

Un quaternion unitaire est un quaternion de norme 1. L'ensemble des quaternions unitaires est noté \mathbb{S} . Tout quaternion unitaire \mathbf{q} peut être paramétré par un angle $\theta \in [0; 2\pi[$ et un vecteur unitaire à trois composantes $\mathbf{u} := [\alpha \beta \gamma]^T \in \mathbb{R}^3$ par $\mathbf{q} = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\mathbf{u}$ où $\mathbf{u} := \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ est le quaternion pur et unitaire déduit de \mathbf{u} . Cette paramétrisation permet d'associer à chaque matrice de rotation de l'espace d'angle θ et d'axe dirigé par \mathbf{u} , exprimée dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , un quaternion unitaire $\mathbf{q} = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\mathbf{u}$ via la transformation suivante [Kuipers02] :

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Pour tout quaternion \mathbf{q} , $\mathcal{R}(\mathbf{q})$ est donc une matrice de rotation, et on a : $\mathcal{R}(\bar{\mathbf{q}}) = \mathcal{R}(\mathbf{q})^T = \mathcal{R}(\mathbf{q})^{-1}$. Cette égalité indique que l'inverse d'une matrice de rotation paramétrée par \mathbf{q} est paramétrée par $\mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}}$. De plus, pour tous quaternions unitaires \mathbf{p} et \mathbf{q} , on a : $\mathcal{R}(\mathbf{p}\mathbf{q}) = \mathcal{R}(\mathbf{p})\mathcal{R}(\mathbf{q})$. Cette propriété montre que la composition de rotations dans l'espace revient à multiplier les quaternions associées. Il est important de noter que la transformation \mathcal{R} n'est pas injective puisque $\mathcal{R}(\mathbf{q}) = \mathcal{R}(-\mathbf{q})$.

Exemple. Fixons un repère (O, Ox, Oy, Oz) . Soit la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe Oy . Cette rotation est paramétrée par le quaternion unitaire $\mathbf{q} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ et la matrice de cette rotation dans la

base canonique est :

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

On montre à l'aide du théorème ci-dessous qu'il y a exactement deux quaternions unitaires qui sont associés à une même rotation, et ils sont opposés :

Théorème 4.1. $\forall(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S}^2$, $\|\mathcal{R}(\mathbf{p}) - \mathcal{R}(\mathbf{q})\|_2 = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \sqrt{4 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2}$, où $\|\cdot\|_2$ est la norme matricielle euclidienne.

Preuve. On a : $\|\mathcal{R}(\mathbf{p}) - \mathcal{R}(\mathbf{q})\|_2 = \|\mathbf{I}_3 - \mathcal{R}(\mathbf{r})\|_2$ où \mathbf{I}_3 est la matrice identité d'ordre 3 et $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{p}}\mathbf{q}$. \mathbf{p} est un quaternion unitaire, on note η et \mathbf{v} l'angle et le quaternion unitaire de partie réelle nulle associés à \mathbf{r} . On rappelle que le spectre d'une matrice de rotation 3D est $1, e^{i\eta}, e^{-i\eta}$ où η est l'angle de la rotation. Comme $\mathbf{I}_3 - \mathcal{R}(\mathbf{r})$ est une matrice normale (qui commute avec son adjoint), sa norme euclidienne est égale à son rayon spectral : $\max\{0, |1 - e^{i\eta}|, |1 - e^{-i\eta}|\} = 2|\sin(\eta/2)|$. On calcule maintenant $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| = |1 - \mathbf{r}|$. Comme $\mathbf{r} = \cos(\eta/2) + \sin(\eta/2)\mathbf{v}$, alors $|1 - \mathbf{r}| = 2|\sin(\eta/4)|$ et $\sqrt{4 - |1 - \mathbf{r}|^2} = 2|\cos(\eta/4)|$. Finalement, $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \sqrt{4 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2} = 2|\sin(\eta/2)| = \|\mathcal{R}(\mathbf{p}) - \mathcal{R}(\mathbf{q})\|_2$.

On remarque alors aisément à l'aide du [théorème 4.1](#) que $\mathcal{R}(\mathbf{p}) = \mathcal{R}(\mathbf{q})$ si et seulement si $\mathbf{p} = \pm\mathbf{q}$.

4.1.1.3 Attitude et quaternion unitaire.

L'attitude d'un capteur est relative à un repère. Soit \mathfrak{R}_0 un repère et \mathfrak{R} le repère d'un capteur à trois composantes. L'attitude du capteur relativement à \mathfrak{R}_0 est la rotation 3D qui transforme \mathfrak{R} en \mathfrak{R}_0 . Lorsque \mathfrak{R}_0 est un repère de référence, on parle uniquement d'attitude.

Comme toute rotation 3D peut être paramétrée par un quaternion unitaire, l'attitude d'un capteur est alors aussi paramétrée par ce quaternion. Dans la suite, on ne fera pas de distinction entre l'attitude, la rotation et le quaternion associé.

4.1.1.4 Matrices de quaternions.

Soit $\mathbb{H}^{M \times N}$ l'ensemble des matrices de quaternions de taille $M \times N$. Tr est l'opérateur trace et $*$ l'opérateur de transposition-conjugaison. Une matrice \mathbf{A} est hermitienne si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$. Enfin, la norme de Frobenius de $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{M \times N}$ est $\|\mathbf{A}\|_F := \text{Tr}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{1/2}$.

La non commutativité de l'algèbre des quaternions implique une définition des valeurs propres des matrices de quaternions à gauche et à droite. Dans ce mémoire, uniquement les valeurs propres à droite sont considérées et le sens ne sera donc plus mentionné dans la suite.

Exemple. On illustre sur un exemple la complexité ajoutée par la non commutativité des quaternions dans l'étude des éléments propres d'une matrice. On remarquera en effet que la matrice :

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^{2 \times 2} \quad (4.3)$$

admet pour spectre à gauche : $\left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \right\}$ et pour spectre à droite : $\{ \lambda \in \mathbb{H}, \lambda^4 + 1 = 0 \}$. Les spectres d'une matrice nécessitent, en général, une étude spécifique pour chaque sens [Zhang98].

On peut montrer que toute matrice hermitienne de quaternions $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times N}$ a uniquement des valeurs propres réelles et est diagonalisable dans une base orthonormée *i.e.* il existe une matrice de quaternions $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{N \times N}$ unitaire *i.e.* $\mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{I}_N$ telle que : $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^*$ où $\mathbf{\Lambda} := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de \mathbf{A} [Zhang98].

Toute matrice de quaternions \mathbf{M} peut se décomposer sous la forme : $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{j} \mathbf{M}_2$ où \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 sont des matrices complexes de $\mathbb{C}^{N \times N}$. Cette décomposition permet d'associer à toute matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{H}^{N \times N}$ une matrice complexe $\chi(\mathbf{M}) \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ définie par :

$$\chi(\mathbf{M}) := \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & -\overline{\mathbf{M}_2} \\ \mathbf{M}_2 & \overline{\mathbf{M}_1} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

On montre que $\chi(\mathbf{M})$ est hermitienne si et seulement si \mathbf{M} est hermitienne. Dans ce cas, le spectre de $\chi(\mathbf{M})$ est égal à celui \mathbf{M} où la multiplicité de chaque valeur propre est doublée [Zhang98]. Enfin, si $\mathbf{V} := \mathbf{V}_1 + \mathbf{j} \mathbf{V}_2$ est un vecteur propre de \mathbf{M} associé à une valeur propre λ alors $\chi(\mathbf{V}) := [\mathbf{V}_1 \ \mathbf{V}_2]^T$ est un vecteur propre de $\chi(\mathbf{M})$ associée à λ .

4.1.2 Formalisation.

4.1.2.1 Vecteur des attitudes et matrices d'attitudes relatives.

Soit N capteurs à trois composantes S_1, \dots, S_N de repères respectifs $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_N$ et d'attitudes respectives $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$. Ces attitudes sont rangées dans le vecteur $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N]^T \in \mathbb{S}^N$, nommé vecteur des attitudes. Un capteur dont l'attitude est connue est une référence. On note \mathbf{Q}_r le sous-vecteur de \mathbf{Q} contenant les quaternions associés aux références, c'est le vecteur des références.

On appelle attitude relative entre le capteur i et le capteur j la rotation qui transforme \mathfrak{R}_i en \mathfrak{R}_j . Cette rotation est paramétrée par le quaternion $\mathbf{q}_{ij} := \mathbf{q}_i \overline{\mathbf{q}_j}$. Ces attitudes relatives sont rangées dans la matrice notée \mathbf{O} et nommée matrice d'attitudes relatives.

Le problème SNA consiste à estimer le vecteur des attitudes à partir d'une matrice d'attitudes relatives incomplète et bruitée et un vecteur des références. Comme il a été précisé en introduction de ce chapitre, on traite ici uniquement le cas complet puisque ce dernier cas fournit un algorithme pour le cas incomplet en utilisant les résultats du chapitre précédent.

Pour le cas complet, le problème SNA peut être vu comme un problème inverse où le problème direct consiste à retrouver la matrice d'attitudes relatives (\mathbf{O}) à partir du vecteur des attitudes (\mathbf{Q}). Ce problème peut être résolu grâce à l'équation suivante :

$$\mathbf{O} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^* \quad (4.5)$$

qui est une conséquence directe de la définition de la matrice d'attitudes relatives. Cette équation permet de faire une analogie avec le problème SNL, où \mathbf{O} joue le rôle de la matrice de Gram du réseau de capteurs.

4.2 Résolution du problème SNA complet et bruité.

On décrit dans cette section un algorithme de résolution du problème SNA basé sur la théorie des quaternions et des matrices de quaternions. On résout dans un premier temps le problème dans le cas non bruité. La solution analytique obtenue est ensuite appliquée au cas bruité. Les performances de cet algorithme sont étudiées dans la section suivante.

4.2.1 Cas non bruité.

4.2.1.1 Solution particulière : définition et estimation.

On commence par démontrer que tout vecteur $\mathbf{R} \in \mathbb{S}^N$ vérifiant $\mathbf{R}\mathbf{R}^* = \mathbf{O}$ est unitairement colinéaire à droite au vecteur des attitudes \mathbf{Q} . Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 4.2. $\forall \mathbf{R} \in \mathbb{S}^N, \mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = \mathbf{R}\mathbf{R}^* \Leftrightarrow \exists \mathbf{s} \in \mathbb{S}, \mathbf{Q} = \mathbf{R}\mathbf{s}$.

Preuve. La preuve de la réciproque est immédiate. Soit $\mathbf{R} \in \mathbb{S}^N$ vérifiant les hypothèses du [théorème 4.2](#) et soit $\mathbf{s} = \frac{1}{N}\mathbf{R}^*\mathbf{Q} \in \mathbb{H}$. En multipliant à droite par \mathbf{Q} l'égalité $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = \mathbf{R}\mathbf{R}^*$ on obtient $\mathbf{Q} = \mathbf{R}\mathbf{s}$. De plus, cette dernière égalité implique que \mathbf{s} est unitaire car \mathbf{Q} et \mathbf{R} contiennent des quaternions unitaires.

Le [théorème 4.2](#) montre que si on dispose d'une solution particulière de l'équation (4.5) alors on peut déduire le vecteur des attitudes à l'aide d'au moins une référence. En effet, chaque composante de la solution particulière est unitairement proportionnelle à droite à la composante du vecteur des attitudes.

On explicite maintenant un algorithme d'estimation d'une solution particulière. \mathbf{O} est une matrice hermitienne, elle est donc diagonalisable à droite dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont réelles [[Zhang98](#)]. L'équation (4.5) montre que \mathbf{O} est de rang 1 dans \mathbb{H} . On a de plus $\text{Tr } \mathbf{O} = N$. Ceci implique que \mathbf{O} a deux valeurs propres : 0 d'ordre $N - 1$ et N d'ordre 1. Pour tout vecteur $\mathbf{R} \in \mathbb{S}^N$ vérifiant les hypothèses du [théorème 4.2](#), on a $\mathbf{O}\mathbf{R} = N\mathbf{R}$. \mathbf{R} est donc un vecteur propre de \mathbf{O} associé à la valeur propre N . Réciproquement, tout vecteur propre $\mathbf{R} \in \mathbb{S}^N$ de \mathbf{O} associé à N vérifie les hypothèses du [théorème 4.2](#). Finalement, estimer une solution particulière de l'équation (4.5) revient à estimer un vecteur propre de \mathbf{O} associé à N *i.e.* la plus grande valeur propre en module de \mathbf{O} .

L'estimation d'un vecteur propre d'une matrice de quaternions n'est pas un problème numérique classique. Cependant, il peut être rapidement résolu via la transformation χ définie en (4.4) qui convertit une matrice de quaternions en une matrice de complexes. Cette transformation permet d'appliquer les algorithmes classiques d'estimation de vecteurs propres notamment l'algorithme de puissance itérée ou l'algorithme SVD [[Watkins02](#)]. Notons que la transformation χ est utilisée dans [[LeBihan04](#)] pour déterminer la décomposition en valeurs singulières de la matrice de quaternions associée. Le théorème suivant propose une variante de l'algorithme de puissance itérée pour les matrices de quaternions hermitiennes :

Théorème 4.3. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times N}$ une matrice hermitienne de valeurs propres (à droite) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N|$. Soit $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N$ une base propre (à droite) de \mathbb{H}^N associée à \mathbf{A} . Soit

$\mathbf{X}_0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i \mathbf{a}_i$ un vecteur de \mathbb{H}^N avec $\mathbf{a}_1 \neq 0$. La suite définie par : $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{X}_k$ vérifie $\|\mathbf{X}_{k+1}\|/\|\mathbf{X}_k\| \rightarrow \lambda_1$ et \mathbf{X}_k tend vers un vecteur propre de \mathbf{A} associé à λ_1 quand $k \rightarrow +\infty$.

Preuve. Pour tout entier k , $\mathbf{X}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{X}_0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i \lambda_i^k \mathbf{a}_i$, et donc $\lambda_1^{-k} \mathbf{X}_k$ tend vers $\mathbf{U}_1 \mathbf{a}_1$ quand $k \rightarrow +\infty$. Il est aisé de conclure avec cette limite.

Il est intéressant de noter que la méthode de la puissance itérée s'étend aux matrices de quaternions hermitiennes car elles sont diagonalisables et toutes leurs valeurs propres commutent avec tous les quaternions (car elles sont réelles). On notera de plus que même si \mathbf{U}_1 est inconnu, la condition $\mathbf{a}_1 \neq 0$ est toujours vérifiée "grâce" aux incertitudes numériques. Enfin, comme dans le cas complexe [Watkins02], on améliore la convergence en considérant les suites $\mathbf{V}_k = \mathbf{X}_k/\|\mathbf{X}_k\|$ et $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{V}_k$ qui vérifient $\|\mathbf{X}_{k+1}\|/\|\mathbf{X}_k\| \rightarrow \lambda_1$ et \mathbf{V}_k tend vers un vecteur propre de \mathbf{A} associé à λ_1 quand $k \rightarrow +\infty$.

4.2.1.2 Estimation du vecteur des attitudes.

On décrit ici l'algorithme d'estimation du vecteur des attitudes \mathbf{Q} à partir d'une solution particulière \mathbf{R} et du vecteur des références \mathbf{Q}_r . S'il n'y a pas de référence, alors \mathbf{R} peut être considérée comme la solution mais il restera une ambiguïté liée à l'existence de la rotation \mathbf{s} reliant \mathbf{R} et \mathbf{Q} . Ce cas est maintenant écarté.

Soit \mathbf{R}_r le sous-vecteur de \mathbf{R} associé aux références. D'après le [théorème 4.1](#), il existe un quaternion unitaire \mathbf{s} tel que $\mathbf{Q}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{s}$. En multipliant à gauche les deux membres de cette égalité par \mathbf{R}_r^* , on déduit un estimateur exact de \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} = (\mathbf{R}_r^* \mathbf{R}_r)^{-1} (\mathbf{R}_r^* \mathbf{Q}_r) \quad (4.6)$$

Cette relation permet de prendre en compte toute l'information contenue dans le vecteur des références. La solution peut finalement être estimée par $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \mathbf{s}$.

4.2.2 Cas bruité.

La matrice d'attitudes relatives et le vecteur des références sont maintenant considérés bruités et notés respectivement $\tilde{\mathbf{O}}$ et $\tilde{\mathbf{Q}}_r$. On notera $\tilde{\mathbf{R}}$ l'estimée de la solution particulière et $\tilde{\mathbf{Q}}$ l'estimée du vecteur des attitudes. On suppose que $\tilde{\mathbf{O}}$ est encore hermitienne dont les coefficients sont des quaternions unitaires et les éléments diagonaux égaux à 1. Ces hypothèses sont respectées en pratique.

4.2.2.1 Modélisation du bruit : une difficulté.

La modélisation du bruit est une étape importante dans tout algorithme d'estimation. En effet, la théorie de Bayes montre que la densité de probabilité $p_{\tilde{\mathbf{Q}}|\tilde{\mathbf{O}}}$, du vecteur des attitudes sachant la matrice d'attitudes relatives, est complètement déterminée par les densités de probabilité $p_{\tilde{\mathbf{O}}|\tilde{\mathbf{Q}}}$ et $p_{\tilde{\mathbf{Q}}}$. La modélisation du bruit revient à obtenir des informations sur $p_{\tilde{\mathbf{O}}|\tilde{\mathbf{Q}}}$. La densité $p_{\tilde{\mathbf{Q}}}$ est souvent assimilée à une loi uniforme sur l'ensemble d'intérêt, ici, les vecteurs de quaternions unitaires.

La connaissance de $p_{\tilde{\mathbf{O}}|\hat{\mathbf{Q}}}$ résulte de l'équation d'observation à laquelle on ajoute un terme de bruit $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{N \times N}$. La contribution de ce terme est classiquement additive ou multiplicative. Dans le cas additif, on a : $\tilde{\mathbf{O}} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Q}}^* + \mathbf{B}$ et donc $p_{\tilde{\mathbf{O}}|\hat{\mathbf{Q}}} = p_{\mathbf{B}}$. Tous les coefficients des matrices $\tilde{\mathbf{O}}$ et $\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Q}}^*$ sont des quaternions unitaires. Ceci impose des conditions sur les coefficients de \mathbf{B} de sorte qu'on ne peut assimiler sa densité de probabilité à une loi classique (Gauss, Poisson, etc.). Ce point sera illustré dans la [section 4.4](#). Pour un bruit multiplicatif, on a : $\tilde{\mathbf{O}} = (\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Q}}^*)\mathbf{B}$. Les remarques établies pour le cas additif sont valides pour ce cas multiplicatif avec, de plus, une difficulté supplémentaire pour exprimer explicitement la densité $p_{\tilde{\mathbf{O}}|\hat{\mathbf{Q}}}$.

Finalement, l'établissement d'un modèle de bruit est une étape difficile pour le problème SNA. La difficulté provient de la complexité de la représentation des attitudes. Il est important de noter que la difficulté ne réside pas dans le formalisme des quaternions. En effet, on peut aisément observer que l'autre formalisme classique basé sur les angles d'Euler [[Kuipers02](#)] mène aux mêmes conclusions.

4.2.2.2 Critère.

L'absence de considération des statistiques du bruit ne permet pas de définir rigoureusement un critère via la théorie de Bayes. On s'intéresse alors au critère \mathcal{C}_1 qui consiste à minimiser l'écart (au sens des moindres carrés) entre les mesures théoriques et observées. Mathématiquement, cela revient à chercher un vecteur $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^{N \times 1}$ de quaternions unitaires, tel que $\mathbf{P}_r = \tilde{\mathbf{Q}}_r$ où \mathbf{P}_r désigne le sous-vecteur de \mathbf{P} associé aux références, et qui minimise l'expression suivante :

$$\mathcal{C}_1(\mathbf{P}) := \frac{\|\tilde{\mathbf{O}} - \mathbf{P}\mathbf{P}^*\|_F^2}{\|\tilde{\mathbf{O}}\|_F^2} \quad (4.7)$$

Le critère est normalisé par $\|\tilde{\mathbf{O}}\|_F^2 = N^2$ pour que $\mathcal{C}_1(\mathbf{P})$ puisse s'interpréter comme une erreur relative.

La minimisation du critère \mathcal{C}_1 dans $\mathbb{S}^{N \times 1}$ est un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes. Il n'est pas sans rappeler le problème SNL dans le cas complet et en l'absence d'information sur le bruit d'observation. La comparaison des critères (3.15)¹ et (4.7) montre que la minimisation de \mathcal{C}_1 est encore plus difficile car il faut ajouter les contraintes de normalité. Il faut noter qu'une paramétrisation des attitudes par les angles d'Euler éliminerait ces contraintes mais ajouterait des difficultés liées aux fonctions trigonométriques, comme le phénomène de Gimbal Lock [[Kuipers02](#)].

La démarche proposée, décrite ci-dessous, consiste à utiliser la solution analytique du problème non bruité. Une étude de robustesse est nécessaire pour justifier l'application de cet algorithme au cas bruité. Cela sera établi en [section 4.3](#).

4.2.2.3 Estimation d'une solution particulière.

Dans le cas non bruité, la méthode décrite dans la sous-section précédente estime une solution particulière par estimation du vecteur propre de la matrice d'attitudes relatives associée à la valeur propre N . Dans le cas bruité, N n'est pas, en général, une valeur propre de $\tilde{\mathbf{O}}$. Ainsi, l'algorithme recherche la plus grande valeur propre $\hat{\lambda}_1$ de $\tilde{\mathbf{O}}$ et un vecteur propre associé $\hat{\mathbf{R}}$. La

1. $\|\tilde{\mathbf{D}} - \mathcal{D}(\mathbf{Y})\|_F^2$ où \mathcal{D} est la fonction qui à la matrice de positions associe la matrice de distances euclidiennes associée.

robustesse de cette étape est discutée dans la section suivante.

On peut préciser parmi les vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{O}}$ associés à $\hat{\lambda}_1$ ceux qui minimisent la valeur du critère. Cela est l'objet du théorème suivant :

Théorème 4.4. \mathcal{C}_1 admet un minimum sur l'ensemble des vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{O}}$ associés à $\hat{\lambda}_1$. Ce minimum est atteint pour les vecteurs propres $\hat{\mathbf{R}}$ tels que $\|\hat{\mathbf{R}}\|_F^2 = \hat{\lambda}_1$. La valeur minimale est :

$$\mathcal{C}_1(\hat{\mathbf{R}}) = 1 - \frac{\hat{\lambda}_1^2}{N^2} \quad (4.8)$$

Preuve. Soit $\hat{\mathbf{V}}_1, \dots, \hat{\mathbf{V}}_N$ une base orthonormée de $\tilde{\mathbf{O}}$ où pour tout $p = 1 \dots N$, $\hat{\mathbf{V}}_p$ est associé à $\hat{\lambda}_p$, la p -ième valeur propre de $\tilde{\mathbf{O}}$. Les $\hat{\lambda}_p$ sont indexés par module décroissant. On a :

$$\tilde{\mathbf{O}} = \sum_{p=1}^N \hat{\lambda}_p \hat{\mathbf{V}}_p \hat{\mathbf{V}}_p^* \quad (4.9)$$

On sait que $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{V}}_1 \mathbf{a}$ avec $\mathbf{a} \in \mathbb{H}$. D'où :

$$\mathcal{C}_1(\hat{\mathbf{R}}) = N^{-2} \left(\sum_{p=2}^N \hat{\lambda}_p^2 + (\hat{\lambda}_1 - |\mathbf{a}|_2^2)^2 \right) \quad (4.10)$$

Cette expression est minimale pour $|\mathbf{a}|_2^2 = \hat{\lambda}_1$. On peut donc choisir \mathbf{a} réel égal à $\hat{\lambda}_1^{1/2}$. Enfin, en substituant $\hat{\mathbf{R}}$ par $\hat{\lambda}_1^{1/2} \hat{\mathbf{V}}_1$ dans l'expression de \mathcal{C}_1 , on retrouve bien l'équation (4.8).

En corollaire de ce théorème, on retrouve le résultat intuitif qui indique que le minimum du critère tend vers 0 si λ_1 tend vers N . Dans ce cas limite, on a : $\lambda_2 = \dots = \lambda_N = 0$ et on retrouve le cas non bruité.

4.2.2.4 Estimation de la rotation.

Comme dans le cas non bruité, on cherche à estimer la rotation qui échange $\hat{\mathbf{R}}$ et $\hat{\mathbf{Q}}$ en utilisant les références.

L'estimation de la rotation $\hat{\mathbf{s}}$ est établie par minimisation du critère des moindres carrés suivant :

$$\mathcal{C}_2(\mathbf{t}) := \frac{\|\tilde{\mathbf{Q}}_r - \hat{\mathbf{R}}_r \mathbf{t}\|_F^2}{\|\tilde{\mathbf{Q}}_r\|_F^2} \quad (4.11)$$

où $\mathbf{t} \in \mathbb{H}$. A nouveau, le critère est normalisé pour être interprété comme une erreur relative. Le théorème suivant donne l'expression de $\hat{\mathbf{s}}$ qui minimise \mathcal{C}_2 sur \mathbb{H} :

Théorème 4.5. \mathcal{C}_2 admet un unique minimum sur \mathbb{H} . Ce minimum est atteint en :

$$\hat{\mathbf{s}} = \left(\hat{\mathbf{R}}_r^* \hat{\mathbf{R}}_r \right)^{-1} \left(\hat{\mathbf{R}}_r^* \tilde{\mathbf{Q}}_r \right) \quad (4.12)$$

et vaut :

$$\mathcal{C}_2(\hat{\mathbf{s}}) = 1 - \frac{\|\hat{\mathbf{R}}_r^* \tilde{\mathbf{Q}}_r\|_F^2}{\|\hat{\mathbf{R}}_r\|_F^2 \|\tilde{\mathbf{Q}}_r\|_F^2} \quad (4.13)$$

Preuve. Pour tout quaternion \mathbf{t} , on introduit la notation $\mathbf{t} = \sum_{p=0}^3 t_p \mathbf{e}_p$ où t_0, \dots, t_3 sont les coefficients (réels) de \mathbf{t} et $\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ et $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Cette notation sera utile pour le calcul du gradient du critère \mathcal{C}_2 . Remarquons que \mathcal{C}_2 est polynômial en les coefficients de \mathbf{t} . On peut alors rechercher ses extrema par recherche des zéros de son gradient. L'expression du critère sous forme développée est :

$$\mathcal{C}_2(\mathbf{t}) = 1 - 2\|\tilde{\mathbf{Q}}_r\|_F^{-2} \operatorname{Re} \left(\tilde{\mathbf{Q}}_r^* \hat{\mathbf{R}}_r \mathbf{t} \right) + \|\tilde{\mathbf{Q}}_r\|_F^{-2} \|\hat{\mathbf{R}}_r\|_F^2 \|\mathbf{t}\|_2^2 \quad (4.14)$$

Cette expression permet d'obtenir les dérivées du critère par rapport aux coefficients de sa variable. En effet, pour tout $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on a :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_2(\mathbf{t})}{\partial t_p} = 2\|\tilde{\mathbf{Q}}_r\|_F^{-2} \left(\|\hat{\mathbf{R}}_r\|_F^2 t_p - \operatorname{Re} \left(\tilde{\mathbf{Q}}_r^* \hat{\mathbf{R}}_r \mathbf{e}_p \right) \right) \quad (4.15)$$

Le gradient est nul en \mathbf{t} si et seulement si $t_p = \|\hat{\mathbf{R}}_r\|_F^{-2} \operatorname{Re} \left(\tilde{\mathbf{Q}}_r^* \hat{\mathbf{R}}_r \mathbf{e}_p \right)$ pour tout $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, ce qui correspond bien au quaternion défini par l'expression (4.12) (pour le voir, on peut utiliser l'égalité $\|\hat{\mathbf{R}}_r\|_F^2 = \hat{\mathbf{R}}_r^* \hat{\mathbf{R}}_r$). Finalement, $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{s}}$ est l'unique zéro du gradient de \mathcal{C}_2 . On prouve maintenant qu'il s'agit bien d'un argument minimal.

La matrice hessienne de \mathcal{C}_2 peut être calculée via l'égalité (4.15). On remarque que c'est une matrice constante (indépendante de \mathbf{t}) et égale à $\|\tilde{\mathbf{Q}}_r\|_F^{-2} \|\hat{\mathbf{R}}_r\|_F^2 \mathbf{I}_4$. La hessienne est donc définie positive, par conséquent, \mathcal{C}_2 est bien minimal en $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{s}}$ défini par (4.12). Pour trouver l'expression du minimum (4.13), il suffit d'injecter l'expression de $\hat{\mathbf{s}}$ dans l'équation (4.11).

Le [théorème 4.5](#) montre que l'expression (4.6) obtenue dans le cas non bruité est aussi la solution qui minimise \mathcal{C}_2 . La valeur minimale du critère (4.15) montre que plus $\hat{\mathbf{R}}_r$ est colinéaire à droite à $\tilde{\mathbf{Q}}_r$, plus le critère tend vers 0 et donc l'estimation est précise.

A cette étape, on ne peut retourner directement $\hat{\mathbf{Q}} := \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{s}}$ puisque, en général, chaque composante ne sera pas un quaternion unitaire. Chaque composante est alors normalisée.

4.2.2.5 Synthèse.

Finalement, l'algorithme de résolution du problème SNA peut se synthétiser à l'aide de la liste d'étapes suivante :

1. Calculer un vecteur propre $\hat{\mathbf{R}}$ de $\tilde{\mathbf{O}}$ associé à sa plus grande valeur propre λ_1 . Cette opération est réalisée via l'algorithme de puissance itérée adapté pour les matrices de quaternions hermitiennes.
2. Calculer $\hat{\mathbf{s}}$ à l'aide des vecteurs $\tilde{\mathbf{Q}}_r$ et $\hat{\mathbf{R}}_r$ ainsi que l'équation normale (4.12).

3. Calculer $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{s}}$.

4. Normaliser chaque composante de $\hat{\mathbf{Q}}$ et le retourner.

On étudie maintenant les performances de cet algorithme.

4.3 Performances.

Cette section étudie les performances de l'algorithme décrit plus haut en termes de complexités spatiale et temporelle ainsi qu'en termes de robustesse vis-à-vis du bruit sur les entrées. Des bornes sur les erreurs d'estimation sont établies et les résultats sont validés en simulation.

4.3.1 Complexités spatiale et temporelle.

Tout d'abord, remarquons que les complexités spatiale et temporelle des étapes 2, 3 et 4 sont clairement négligeables devant celles de l'étape 1 (estimation de la solution particulière). Toutes étapes comprises, la complexité spatiale est en $O(N^2)$ où on rappelle que N est le nombre de capteurs dans le réseau et O la notation de Landau pour les fonctions dominées. La complexité temporelle est évaluée en simulations à $O(N^3)$. Ce résultat est classique dans l'estimation de vecteurs propres.

4.3.2 Robustesse.

Dans ce chapitre, pour toute variable Θ on notera :

$$e(\Theta) := \frac{\|\hat{\Theta} - \Theta\|_F}{\|\Theta\|_F} \quad (4.16)$$

l'erreur relative obtenue pour l'estimation de Θ par $\hat{\Theta}$.

4.3.2.1 Robustesse et bornes pour l'étape 1.

L'étude de la robustesse de l'étape 1 est similaire à celle de l'algorithme MDS étudié au [chapitre 3](#). On montre le théorème suivant :

Théorème 4.6. Si $e(\mathbf{O}) < \sqrt{2}/4$ alors l'algorithme est robuste. Dans ce cas, pour tout vecteur propre normé \mathbf{R} de \mathbf{O} associé à sa plus grande valeur propre on a la borne d'erreur suivante :

$$e(\mathbf{R}) \leq \frac{e(\mathbf{O})}{\sqrt{2} - 4e(\mathbf{O})} \quad (4.17)$$

Preuve. Soit $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N$ les valeurs propres de $\tilde{\mathbf{O}}$ indexées par ordre de module décroissant. Comme \mathbf{O} et $\tilde{\mathbf{O}}$ sont des matrices hermitiennes, $\chi(\mathbf{O})$ et $\chi(\tilde{\mathbf{O}})$ le sont aussi. Les valeurs propres de $\chi(\mathbf{O})$ sont : N d'ordre 2 et 0 d'ordre $2(N-1)$. Les valeurs propres de $\chi(\tilde{\mathbf{O}})$ sont : $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N$ où chaque valeur propre est d'ordre 2. $\chi(\mathbf{O})$ et $\chi(\tilde{\mathbf{O}})$ vérifient les hypothèses du [théorème de Weyl](#), rappelé dans le [chapitre 3](#), qui mène aux inégalités suivantes :

$$|\hat{\lambda}_1 - N| \leq \sqrt{2} \|\tilde{\mathbf{O}} - \mathbf{O}\|_F ; \forall i \in [2, N], |\hat{\lambda}_i| \leq \sqrt{2} \|\tilde{\mathbf{O}} - \mathbf{O}\|_F \quad (4.18)$$

Pour établir ces inégalités, on a aussi utilisé la \mathbb{R} -linéarité de χ et l'égalité $\|\chi(\mathbf{M})\|_F = \sqrt{2} \|\mathbf{M}\|_F$ vraie pour toute matrice de quaternions \mathbf{M} . En divisant chaque inégalité de (4.18) par $\|\mathbf{O}\|_F = N$, il vient :

$$\left| 1 - \frac{\hat{\lambda}_1}{N} \right| \leq \sqrt{2} e(\mathbf{O}) ; \forall i \in [2, N], \frac{|\hat{\lambda}_i|}{N} \leq \sqrt{2} e(\mathbf{O}) \quad (4.19)$$

On remarquera que la première inégalité donne une borne sur l'erreur d'estimation de la valeur propre puisque le membre de gauche n'est autre que $e(\lambda_1)$. De ces inégalités, on déduit :

$$\hat{\lambda}_1 \geq (1 - \sqrt{2} e(\mathbf{O})) N \quad (4.20)$$

$$\hat{\lambda}_2 \leq \sqrt{2} e(\mathbf{O}) N \quad (4.21)$$

Ces inégalités montrent bien que si $e(\mathbf{O}) < \sqrt{2}/4$ alors l'eigengap $d := \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2$ vérifie $d \geq N(1 - 2\sqrt{2}e(\mathbf{O})) > 0$, ce qui assure la robustesse de l'algorithme.

Sous la condition $e(\mathbf{O}) < \sqrt{2}/4$, on peut alors appliquer le [théorème de Davis-Kahan](#), rappelé dans le [chapitre 3](#), pour $\chi(\mathbf{O})$ et $\chi(\tilde{\mathbf{O}})$. En notant \mathbf{R} et $\hat{\mathbf{R}}$ des vecteurs propres normés de $\chi(\mathbf{O})$ et $\chi(\tilde{\mathbf{O}})$ associés respectivement à N et $\hat{\lambda}_1$, il vient :

$$\left| \sin(\chi(\hat{\mathbf{R}}), \chi(\mathbf{R})) \right| \leq \frac{e(\mathbf{O})}{1 - 2\sqrt{2}e(\mathbf{O})} \quad (4.22)$$

Enfin, on retrouve bien l'inégalité (4.17) en remarquant que $\left| \sin(\chi(\hat{\mathbf{R}}), \chi(\mathbf{R})) \right| = \sqrt{2} \|\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}\|_F$.

On peut approcher la borne fournie par ce théorème par une borne plus simple pour de faibles niveaux de bruit :

$$\frac{e(\mathbf{O})}{\sqrt{2} - 4e(\mathbf{O})} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} e(\mathbf{O}) \quad (4.23)$$

Cette borne a l'avantage d'être linéaire par rapport à l'erreur sur la matrice d'attitudes relatives.

4.3.2.2 Robustesse des étapes 2, 3 et 4.

Il est difficile d'expliciter des bornes pour les erreurs $e(\mathbf{s})$ et $e(\mathbf{Q})$. Cependant, la robustesse des étapes 2 et 3 est assurée car ce sont des opérations continues. La normalisation qui apparaît à l'étape 4 impacte seulement l'angle du quaternion estimé. En effet, normaliser revient à multiplier par l'inverse de la norme qui est un réel et donc ne change pas la direction de la rotation associée. Finalement, l'algorithme de résolution du problème SNA est robuste vis-à-vis du bruit sur ses paramètres d'entrées $\tilde{\mathbf{O}}$ et $\hat{\mathbf{Q}}_r$.

4.3.2.3 Simulations.

On étudie l'erreur en sortie $e(\mathbf{Q})$ en fonction de l'erreur en entrée $e(\mathbf{O})$. L'erreur en sortie en fonction de $e(\mathbf{Q}_r)$ n'est pas représentée ici, mais la robustesse est toutefois assurée. La courbe $e(\mathbf{Q}) = f(e(\mathbf{O}))$ est représentée en [figure 4.1](#) avec $e(\mathbf{Q})$ et $e(\mathbf{O})$ exprimées en pour cent et limitées à $[0\%, 10\%]$. Cette simulation s'est effectuée pour un réseau de $N = 1000$ capteurs dont un de référence. L'évolution est comparée à une évolution linéaire via une régression linéaire uniquement pour indiquer l'évolution moyenne de l'erreur sur les attitudes absolues. Ces résultats confortent expérimentalement la stabilité de l'algorithme.

On trace aussi en [figure 4.1](#) l'évolution du critère en fonction de l'erreur en entrée (pour le même jeu de données). L'évolution linéaire du critère montre que c'est un indicateur de la qualité de l'estimation. Il est important de noter que cet indicateur est calculable uniquement à partir des données d'entrée.

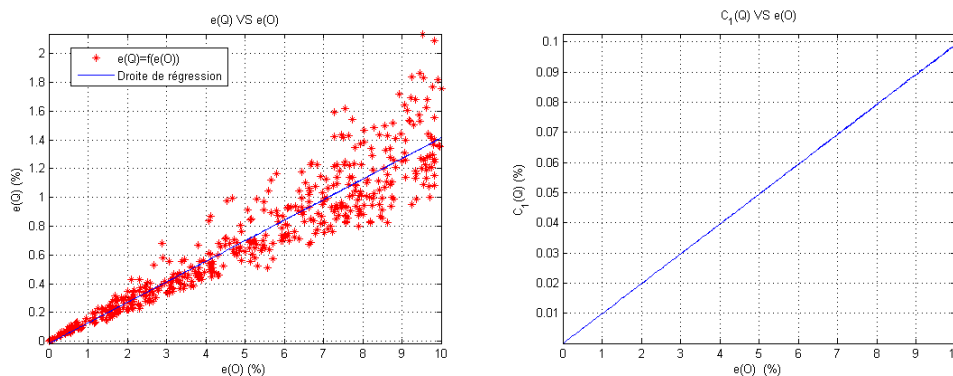


FIGURE 4.1 – *Gauche* : représentation de l'erreur sur les attitudes absolues ($e(\mathbf{Q})$) en fonction de l'erreur sur les attitudes relatives ($e(\mathbf{O})$) pour un réseau de 1000 capteurs dont un de référence. *Droite* : représentation des valeurs du critère $C_1(\mathbf{Q})$ en fonction de l'erreur sur les attitudes relatives.

4.4 Validation expérimentale.

4.4.1 Configuration.

Pour valider expérimentalement l'algorithme de résolution du problème SNA, on utilise des systèmes développés par le CEA-Léti appelés Star Watch (cf. [figure 4.2](#)). Chaque Star Watch contient un accéléromètre triaxial, un magnétomètre triaxial, une batterie, un processeur et un module de communication sans fil. Les données analogiques sont numérisées à 200 Hz sur 12 bits par le système et envoyées à un système d'acquisition.

9 Star Watch ont été disposées sur un rhombicuboctaèdre représenté en [figure 4.3](#). On fixe un repère absolu qui est celui du capteur disposé sur la face supérieure du rhombicuboctaèdre. Grâce à la géométrie connue de ce solide d'Archimède, on calcule avec précision l'attitude de chaque capteur que l'on range dans le vecteur des attitudes théoriques \mathbf{Q} . A l'aide de ce vecteur



FIGURE 4.2 – Une Star Watch.

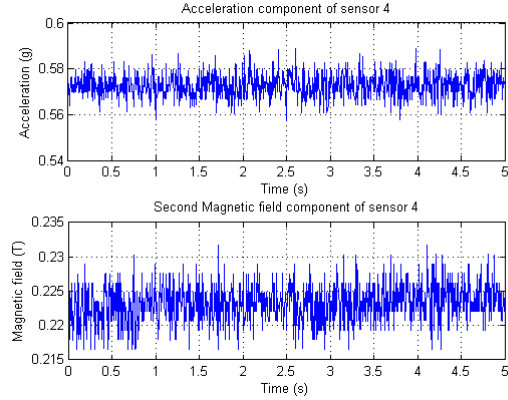
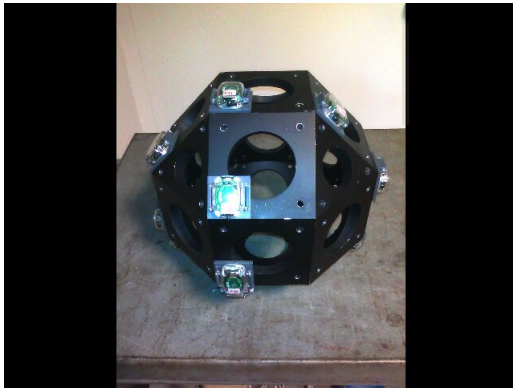


FIGURE 4.3 – Gauche : rhombicuboctaèdre instrumenté par 9 Star Watch. Droite : mesures d’une composante de l’accéléromètre et du magnétomètre du capteur 4.

on calcule la matrice d’attitudes relatives théoriques \mathbf{O} .

Les mesures des 9 capteurs immobiles ont été enregistrées pendant 5 secondes à 200 Hz. Une composante de l’accéléromètre et une composante du magnétomètre du capteur 4 sont représentées en figure 4.3. Chaque signal enregistré est stationnaire, centré et gaussien. On conserve uniquement la moyenne de ces signaux qui est l’estimateur optimal de la composante continue au sens des moindres carrés. On a donc 6 données pour chaque capteur : les trois composantes de l’accéléromètre et les trois composantes du magnétomètre.

4.4.2 Estimation des attitudes relatives.

On présente dans cette sous-section la méthode utilisée pour estimer les attitudes relatives à partir de mesures accélérométriques et magnétométriques. La méthode est ensuite appliquée aux signaux issus des 9 Star Watch.

4.4.2.1 Algorithme.

Soit \mathcal{R} un repère quelconque et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur. On notera alors $[\mathbf{u}]_{\mathfrak{A}}$ le vecteur de \mathbb{R}^3 qui contient les coordonnées du vecteur \mathbf{u} exprimées dans le repère \mathfrak{A} .

Pour chaque capteur i , on note $[\mathbf{g}]_{\mathfrak{R}_i}$ la mesure de l'accéléromètre qui est le champ de pesanteur local et $[\mathbf{h}]_{\mathfrak{R}_i}$ la mesure du magnétomètre qui le champ magnétique terrestre local (on suppose les deux champs constants). Les deux mesures sont donc exprimées dans le repère \mathfrak{R}_i du capteur i . Soit \mathfrak{R}_j le repère du capteur j . On a :

$$[\mathbf{g}]_{\mathfrak{R}_j} = \mathcal{R}(\mathbf{q}_{ij})[\mathbf{g}]_{\mathfrak{R}_i} \quad (4.24)$$

$$[\mathbf{h}]_{\mathfrak{R}_j} = \mathcal{R}(\mathbf{q}_{ij})[\mathbf{h}]_{\mathfrak{R}_i} \quad (4.25)$$

où \mathcal{R} est défini en (4.1) et \mathbf{q}_{ij} est le quaternion unitaire associé à l'attitude relative entre les capteurs i et j .

Il est classique, en capture de mouvements, qu'à partir des équations (4.24) et (4.25), où $[\mathbf{g}]_{\mathfrak{R}_i}$, $[\mathbf{g}]_{\mathfrak{R}_j}$, $[\mathbf{h}]_{\mathfrak{R}_i}$ et $[\mathbf{h}]_{\mathfrak{R}_j}$ sont connues grâce aux mesures, on peut estimer \mathbf{q}_{ij} [Kuipers02]. Pour cette estimation, on utilise une méthode classique basée sur la transformation du système d'équations (4.24), (4.25) en un système d'équations linéaire :

$$\mathbf{H}_{i,j} \mathbf{q} = 0 \quad (4.26)$$

avec $\mathbf{H}_{i,j} = [\mathbf{H}_{i,j}^{\mathbf{g}} \ \mathbf{H}_{i,j}^{\mathbf{h}}] \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$ où pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{H}_{i,j}^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & -(\mathbf{u}_{i,j}^-)^T \\ \mathbf{u}_{i,j}^- & -[\mathbf{u}_{i,j}^+]^\times \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

où $\mathbf{u}_{i,j}^\pm = [\mathbf{u}]_{\mathfrak{R}_j} \pm [\mathbf{u}]_{\mathfrak{R}_i}$ et pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $[\mathbf{v}]^\times$ est la matrice du produit vectoriel à gauche par \mathbf{v} . Le système linéaire (4.26) est résolu par l'algorithme SVD [Watkins02] qui recherche un vecteur normé du noyau de la matrice $\mathbf{H}_{i,j}^T \mathbf{H}_{i,j}$.

4.4.2.2 Application à l'expérimentation.

L'algorithme décrit ci-dessus est appliqué pour les 36 paires de capteurs. Les attitudes relatives estimées sont rangées dans la matrice $\hat{\mathbf{O}}$. La figure 4.4 trace les erreurs pour chaque attitude relative calculée à partir des attitudes relatives estimées et des attitudes relatives théoriquement obtenues grâce à la géométrie connues du rhombicuboctaèdre.

L'erreur en entrée $e(\mathbf{O})$, définie en section 4.3, est de $2 \times 10^{-4}\%$, ce qui est de l'ordre de la précision des accéléromètres et des magnétomètres.

4.4.2.3 Remarques sur l'erreur d'estimation des attitudes.

Ici, on discute brièvement de la difficulté de modéliser le bruit d'estimation sur les attitudes via l'algorithme présenté ci-dessus et un modèle de bruit sur les capteurs connu.

On peut vérifier aisément que l'hypothèse de bruit stationnaire gaussien et centré est une bonne approximation pour les accéléromètres et les magnétomètres utilisés dans les Star Watch. Par conséquent, cherche à déterminer, en simulation, la densité de probabilité de l'erreur d'estimation d'un quaternion unitaire à partir de données accélérométriques et magnétométriques bruitées par des processus stationnaires gaussiens et centrés.

Pour cela, on fixe un quaternion unitaire \mathbf{q} et deux vecteurs unitaires \mathbf{g}_0 et \mathbf{h}_0 qui correspondent respectivement au champ de gravité et au champ de pesanteur dans le repère absolu.

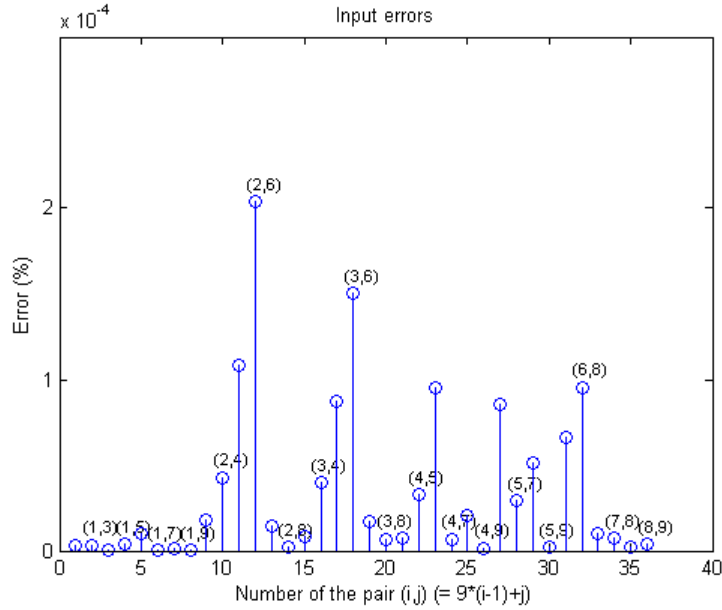


FIGURE 4.4 – Erreurs sur les attitudes relatives.

On génère les signaux de l'accéléromètre $\mathbf{a}(t)$ et du magnétomètre $\mathbf{m}(t)$ selon le modèle suivant :

$$\mathbf{a}(t) = \mathcal{R}(\mathbf{q})\mathbf{g}_0 + \mathbf{b}_a(t) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{m}(t) = \mathcal{R}(\mathbf{q})\mathbf{h}_0 + \mathbf{b}_m(t) \quad (4.29)$$

où \mathbf{b}_a et \mathbf{b}_m sont les bruits sur les capteurs simulés gaussiens et centrés. A chaque instant t , on estime \mathbf{q} avec l'algorithme décrit plus haut, on note $\hat{\mathbf{q}}(t)$ le quaternion obtenu.

On remarquera que l'erreur quadratique pour un modèle de bruit additif et multiplicatif est la même, puisque $e(\mathbf{q})(t) := |\hat{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{q}| = |1 - \overline{\hat{\mathbf{q}}(t)}\mathbf{q}|$. La figure 4.5 représente les signaux simulés et leur distribution (à gauche) et la distribution de chaque composante de l'erreur additive *i.e.* les composantes de $\hat{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{q}$ (à droite). Après plusieurs simulations et tests du χ^2 aucune structure ne semble apparaître dans la distribution de l'erreur additive. Cela a aussi été observé sur l'erreur multiplicative ainsi que sur deux autres paramétrisation d'une rotation, à savoir les angles d'Euler [Kuipers02], et, l'angle et l'axe de la rotation. On trouvera une discussion plus détaillée sur la distribution de l'erreur d'estimation d'un quaternion via des données bruitées dans [Markley04].

4.4.3 Estimation de l'attitude des capteurs.

A partir de la matrice $\tilde{\mathbf{O}}$ on applique l'algorithme de résolution du problème SNA avec uniquement le capteur 1 comme référence. Le résultat est stocké dans le vecteur des attitudes estimées $\hat{\mathbf{Q}}$. L'erreur en sortie $e(\hat{\mathbf{Q}})$ est de $1.8 \times 10^{-4}\%$. La valeur du critère pour la solution estimée est $\mathcal{C}_1(\hat{\mathbf{Q}}) = 1.7 \times 10^{-5}\%$. Ces résultats prouvent l'applicabilité de l'algorithme à des situations pratiques. Les erreurs sur les attitudes reconstruites sont représentées en figure 4.6.

On observe en figure 4.6 que l'erreur la plus forte est sur le capteur 6. Cela est cohérent avec

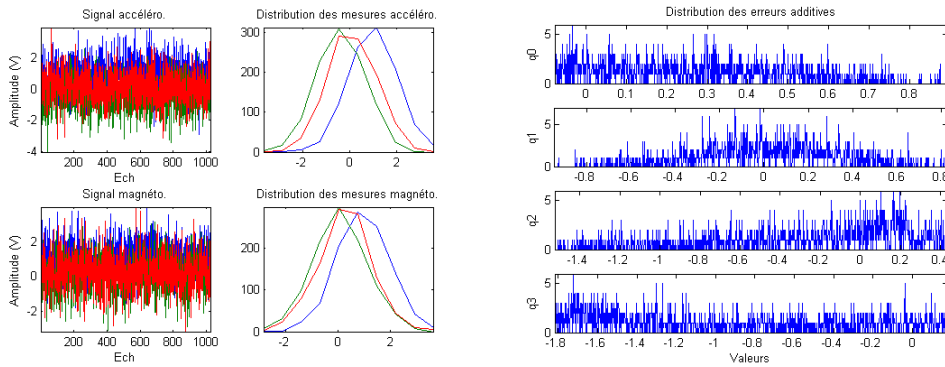


FIGURE 4.5 – Gauche : signaux simulés et leur distribution. Droite : distribution de l'erreur additive d'estimation sur chaque composante.

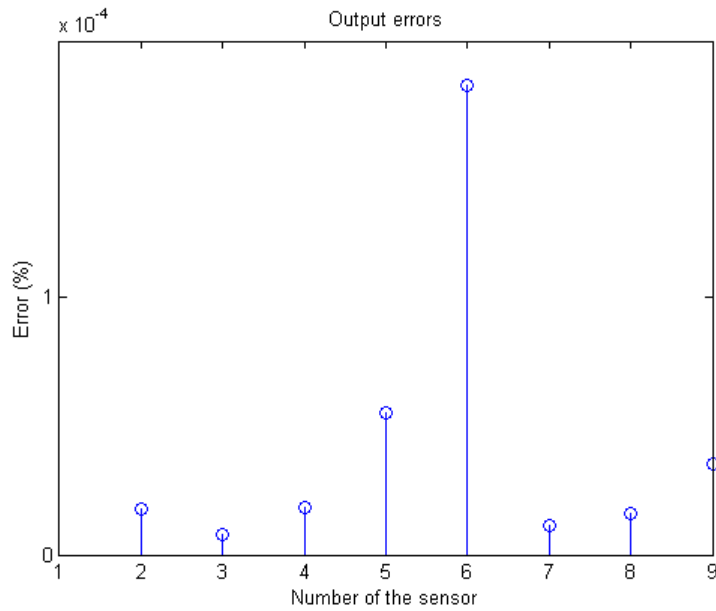


FIGURE 4.6 – Erreurs sur les attitudes estimées.

la figure 4.4 où les erreurs les plus fortes sont sur les paires qui contiennent le capteur 6. Cela indique que l'algorithme conserve la répartition des erreurs.

4.5 Conclusion.

Ce chapitre a montré que le formalisme des quaternions était très bien adapté à la formalisation et la résolution du problème SNA. L'algorithme développé dans le cas complet est en effet basé sur la réduction des matrices de quaternions hermitiennes. Les performances théoriques de

cet algorithme ont été étudiées et validées en simulation. On retient ainsi une complexité spatiale en $O(N^2)$, une complexité temporelle en $O(N^3)$, et une robustesse vis-à-vis du bruit sur les paramètres en entrée.

Les simulations ont permis d'obtenir l'évolution de l'erreur en entrée en fonction des erreurs en sortie. L'algorithme a été testé dans une situation pratique via l'utilisation de centrales d'attitudes (Star Watch). Les résultats valident la robustesse de l'algorithme à des situations concrètes.

Le cas incomplet peut être résolu grâce à cet algorithme et au procédé générique présenté au chapitre précédent. Dans ce cas, les paramètres de configuration sont les attitudes des capteurs et les paramètres relatifs sont les attitudes relatives.

Il sera intéressant, en perspective, d'améliorer l'algorithme de résolution lorsque les statistiques de bruit sont connues. Une borne de Cramer-Rao pourra alors être obtenue. D'autre part, il est important d'étudier une version distribuée de l'algorithme proposé afin d'en améliorer l'efficacité dans des situations réelles où de grands réseaux sont déployés.

On rappelle que la résolution du problème SNA trouve un intérêt dans l'interprétation de données vectorielles issues d'un réseau de capteurs. Le chapitre suivant propose une autre application dans le diagnostic des structures, notamment la tomographie et la détection de rupture de modèles.

Troisième partie
Perspectives d'application.

Chapitre 5

Vers une application au diagnostic des structures.

Sommaire

5.1 Applications des travaux au SHM.	126
5.1.1 Tomographie.	126
5.1.2 Détection de micro-cracks.	129
5.1.3 Suivi de paramètres.	129
5.1.4 Analyse modale.	131
5.2 Verrous techniques et technologiques : les perspectives.	131
5.2.1 Systèmes autonomes communicants.	131
5.2.2 Les "problèmes" technologiques associés à l'enfouissement d'un réseau de capteurs.	133
5.3 Conclusion.	135

Le diagnostic des structures s'intéresse à la détection, la localisation et l'identification de défauts qui apparaissent au cours du temps au sein des structures [Breysse05]. L'intérêt de suivre l'état de santé d'un ouvrage est majeur lorsqu'il s'agit d'éviter des dégâts humains, écologiques et économiques. Un diagnostic précis permet d'anticiper des dégâts futurs plus importants et d'améliorer l'intervention qui visera à réparer ou à mettre hors service l'ouvrage.

Les résultats du [chapitre 2](#) ont montré la portabilité des techniques d'identification passive aux milieux solides utilisant une instrumentation enfouie. Ils trouvent une application directe dans le SHM passif des structures instrumentées en volume.

L'objectif de ce chapitre est de montrer, en combinant un état de l'art des techniques de SHM et les résultats établis dans les chapitres précédents, les possibilités offertes par une instrumentation enfouie ([section 5.1](#)). D'autre part, bien que les résultats existants et obtenus soient encourageants, la faisabilité du projet d'instrumentation des structures en volume pour le SHM passif est loin d'être établie. De nombreux verrous technologiques, détaillés en [section 5.2](#), sont

encore à lever : alimentation, communication, packaging, etc. Cette étude permettra de dégager les perspectives des travaux de thèse présentés dans ce mémoire.

5.1 Applications des travaux au SHM.

Cette section présente un état de l'art des techniques de SHM existantes. Ces techniques sont regroupées en quatre grandes classes : la tomographie, la détection de défauts, la détection de ruptures de modèle et l'analyse modale. Pour chacune d'elles, on indique les avantages et inconvénients du caractère passif ainsi que l'apport des travaux de thèse dans leur adaptation, voire leur amélioration, pour le SHM passif des structures instrumentées en volume. Cet état de l'art cible majoritairement les techniques qui utilisent les ondes mécaniques. On trouvera dans [Breysse05] une description complète des méthodes de diagnostic utilisées dans le génie civil.

5.1.1 Tomographie.

5.1.1.1 Description.

La tomographie d'une structure consiste à reconstruire la carte d'un paramètre physique (densité, vitesse de propagation, atténuation, etc.) à partir de "coupes" du milieu, c'est-à-dire des informations partielles sur le paramètre entre deux points du milieu. Ce paramètre physique doit être représentatif de l'état de santé du milieu. Cela est par exemple le cas pour la vitesse de propagation des ondes P dans les ouvrages d'art, et le béton en particulier, qui décroît si le matériau se dégrade (perte de rigidité mécanique). Le diagnostic d'un milieu est établi grâce au suivi dans le temps de la carte de ce paramètre. La présence, la position et les spécificités d'un défaut sont rapidement identifiées avec ces techniques puisqu'elles offrent, à chaque reconstruction, une vision complète et précise du milieu étudié.

Il existe plusieurs types de tomographie : rayon X [Baruchel00], électrique [Holder04], sismique [Naulet08], etc., chacune étant basée sur des principes physiques spécifiques à la quantité mesurée. Pour les milieux élastiques, comme les ouvrages d'art, on distingue principalement les tomographies de vitesse et d'amplitude. La "coupe" pour ces tomographies est respectivement l'obtention des vitesses $v_{A,B}$ et des atténuations $\alpha_{A,B}$ du milieu pour une paire de points (A, B) . La deuxième étape consiste à reconstruire la carte des vitesses et des atténuations *i.e.* connaître leur valeur en tous les points du milieu à partir de la collecte des vitesses $v_{A,B}$ et des atténuations $\alpha_{A,B}$, respectivement, pour un nombre fini de paires de points (A, B) du milieu. A titre d'exemple, on détaille ci-dessous le processus complet de la tomographie des vitesses par mesure de temps de première arrivée.

5.1.1.2 Tomographie par temps de premières arrivées.

Soit un milieu élastique instrumenté par N_s sources et N_c capteurs. La tomographie par temps de première arrivée est basée sur le lien existant entre le temps de propagation d'une onde émise en un point et reçue par l'autre et la vitesse de propagation entre ces deux points. La connaissance de ce lien fait intervenir la théorie des rais. En général, on partitionne le milieu en cellules dans lesquelles la vitesse de propagation est supposée constante. Le rai qui lie un point A à un point B est alors une somme de rais rectilignes. Ceci est illustré en figure 5.1 où on a représenté trois types de partitionnement. La première partition est un maillage qui ne prend aucune information a priori sur le milieu et l'instrumentation. Il est "posé" sur le milieu. Le deuxième maillage correspond au diagramme de Voronoï¹ associé à l'instrumentation. Ce maillage, uniquement défini par l'instrumentation et les interfaces du milieu, ne prend pas en

1. Le diagramme de Voronoï d'un ensemble M_1, \dots, M_N de N points de \mathbb{R}^n est une partition de \mathbb{R}^n en N cellules (pouvant être de volume non fini). La cellule i est l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $j \neq i$: $d(M, M_i) < d(M, M_j)$ où d est la distance Euclidienne.

compte d'information a priori sur les propriétés physiques du milieu. Enfin, le dernier maillage repose sur un modèle a priori du milieu. Ici, c'est le modèle en couche, classique en géophysique et plus particulièrement en prospection des sols.

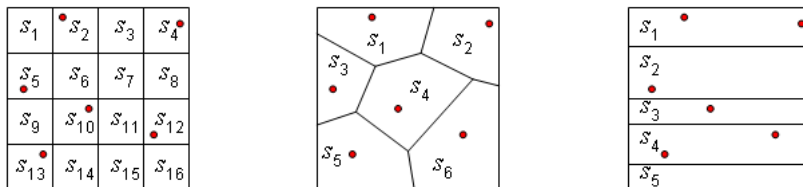


FIGURE 5.1 – Trois types de maillage pour un même milieu. Les points rouges représentent des capteurs enfouis dans le milieu, ils ont la même position sur les trois configurations. A gauche, le maillage est régulier et indépendant du milieu. Au centre, le maillage est le diagramme de Voronoï du milieu. A droite, le maillage est issu d'un modèle en couche du milieu.

Pour un maillage donné, soit n_c le nombre de cellules et soit, pour $k \in [1, n_c]$, s_k la lenteur (l'inverse de la vitesse de propagation) associée à la cellule k . On note \underline{s} le vecteur contenant l'ensemble des lenteurs. Soit A et B deux points du milieu. Le temps de trajet du rai issu de A se dirigeant en B , s'écrit :

$$t_{A,B} = \sum_{k=1}^{n_c} l_k(\underline{s}) s_k = l_{A,B}(\underline{s}) \underline{s} \quad (5.1)$$

où pour tout $k \in [1, n_c]$, l_k est la longueur de l'intersection entre le rai et la k -ième cellule et $l_{A,B} = [l_1 \dots l_{n_c}]$ est la ligne des rais. Chaque longueur l_k dépend du vecteur des lenteurs.

Supposons que l'on dispose de n_t temps de trajets obtenus entre plusieurs paires de points du milieu grâce à l'instrumentation. Tous les temps de trajet sont rangés dans le vecteur \underline{t} et les lignes de rais sont rangées dans la matrice des rais $\underline{\underline{L}}(\underline{s})$. On a :

$$\underline{t} = \underline{\underline{L}}(\underline{s}) \underline{s} \quad (5.2)$$

Dans cette relation, la matrice des temps de trajet \underline{t} et la matrice des rais $\underline{\underline{L}}$ sont connues. L'objectif est d'estimer \underline{s} . Pour de faibles variations de \underline{s} , on fait l'hypothèse que la matrice des rais ne dépend pas de \underline{s} . Dans ce cas, l'équation (5.2) est un système linéaire qu'il faut inverser pour trouver le vecteur \underline{s} est en déduire une carte des lenteurs dans tout le milieu.

Notons que la matrice $\underline{\underline{L}}$ est généralement creuse et singulière et que, par conséquent, l'inversion du problème (5.2) est difficile. On parle de problème "mal-posé". Cela provient du fait que des cellules peuvent ne pas être traversées par des rais ne donnant ainsi aucune information sur les lenteurs qui leur sont associées. On trouvera un exemple de résolution de ce problème pour la tomographie de temps de premières arrivées dans [Taillandier08].

5.1.1.3 Tomographie passive et active.

En tomographie, l'aspect passif ou actif concerne uniquement la première étape du processus, c'est-à-dire l'estimation d'un paramètre physique entre des paires de points du milieu. Outre le critère économique (énergie, moyens matériels, etc.), la différence entre ces deux aspects concerne

principalement le spectre des sources (provoquées en actif et ambiantes en passif). Les propriétés spectrales des sources influent directement sur la précision, la robustesse et la complexité des algorithmes d'inversion utilisés en tomographie.

Afin d'illustrer le propos du paragraphe précédent, reconsidérons l'exemple de la tomographie par temps de premières arrivées. Dans le cas actif, la fréquence et la puissance des sources sont maîtrisées. Mais les moyens matériels limitent la précision de l'estimation, liée à la fréquence maximale des sources, et la distance d'estimation, liée à la puissance des sources et l'atténuation du milieu. Dans le cas passif, les séismes sont des exemples de sources de bruit ambiant qui peuvent rayonner sur des très grandes distances et sur des bandes de fréquences très larges. Cependant, le bruit ambiant étant par définition non maîtrisé, rien ne garantit la présence de sources ambiantes ayant les bonnes propriétés spectrales pour assurer une tomographie précise du milieu. L'utilisation de la tomographie passive, comme toutes les techniques passives, est conditionnée par l'environnement du milieu étudié. Il est important de noter que l'on peut combiner techniques actives et passives.

5.1.1.4 Apports de la thèse.

L'apport de la thèse pour le SHM via des techniques de tomographie peut se mesurer tout d'abord grâce aux expressions exactes et approchées de la corrélation de Green et des identités de Ward obtenues pour les milieux élastiques dans le [chapitre 2](#) et dans l'[annexe A](#). Ces résultats montrent que, pour de nombreux milieux linéaires, toute technique de tomographie active basée sur la reconstruction de la réponse impulsionnelle du milieu est portable au cas passif avec les avantages et inconvénients que cela impose et qui ont été discutés plus haut.

Le deuxième apport de la thèse concerne la localisation des capteurs enfouis. Que l'on soit en actif ou en passif, les algorithmes de tomographie prennent en entrée la position des capteurs et des sources (uniquement en actif). Si ces éléments sont enfouis, il est nécessaire de les localiser au préalable pour pouvoir ensuite appliquer des techniques de reconstruction. Dans ce cas, la localisation du réseau s'apparente à la tomographie elle-même. En effet, on effectue des "coupes géométriques" du milieu pour obtenir des distances entre capteurs. Puis, ces distances sont utilisées pour reconstruire la géométrie du réseau (cf. [chapitre 3](#)).

Pour un milieu homogène, ces "coupes" peuvent être obtenues par estimation des temps de première arrivée $t_V = r/v$ où r la distance capteur-capteur ou source-capteur et v la vitesse de propagation dans le milieu. Si v est connu alors r est obtenu aisément via t_V . Cependant, v est souvent un paramètre inconnu. On voit sur cet exemple simple, qu'il faut en général fusionner les étapes de localisation et de tomographie.

Enfin, le dernier apport de la thèse sur les techniques de tomographie appliquées au SHM est l'introduction des considérations vectorielles dans le formalisme de l'identification passive (cf. [chapitre 2](#)). En effet, les ondes P et S qui se propagent dans les solides sont polarisées. Une instrumentation multi-composantes permet de séparer l'effet des deux ondes et d'en estimer les propriétés géométriques (direction, polarisation) et physiques (vitesse, atténuation, etc.). Ces informations sont utilisables pour fournir des cartes complémentaires à une carte des vitesses des ondes P, ou pour améliorer la résolution de cette dernière, par exemple.

5.1.2 Détection de micro-cracks.

5.1.2.1 Description.

La fissuration dans le béton est une pathologie fréquente. Les causes de la formation d'une fissure sont multiples : retrait (perte de volume), fluence (pression, contraintes), cycle thermique, variations d'humidité, dépassivation des aciers (perte de la couche protectrice des aciers) [Breysse05]. La formation d'une fissure est précédée par la création d'un réseau de micro-fissures qui génèrent des micro-cracks [Baillon02].

Le spectre de rayonnement des micro-cracks est centré autour de 1 MHz sur une bande de quelques kHz [Baillon02]. A ces fréquences, l'atténuation dans le béton est de plus de 1000 dB.m⁻¹ [Gaydecki92]. Compte tenu du spectre de ces sources, la propagation a lieu sur quelques centimètres [Baillon02]. Les réseaux enfouis apparaissent alors comme un outil intéressant dans la détection de micro-fissures par écoute des micro-cracks. Chaque système enfoui devra comporter un système de mesure capable de détecter la formation de micro-fissures. Pour chaque détection, la faible distance de propagation des micro-cracks assure que la source est à quelques centimètres du capteur.

La détection des micro-cracks est très utile en diagnostic des structures puisqu'elle permet d'intervenir sur l'ouvrage avant la formation de pathologies plus graves. Les réseaux enfouis offrent la possibilité de détecter ces micro-cracks dans tout le volume. Cependant, le diagnostic ne peut se baser uniquement sur cette approche. En effet, la distance de propagation de ces événements étant faible, il est possible qu'ils soient détectés trop tard. Le sous-système d'écoute doit être combiné à un autre système de mesures qui permettrait de faire une tomographie, par exemple, afin d'offrir un diagnostic extrêmement précis qui combine des reconstructions globales (tomographie) à des informations recueillies localement (écoute de micro-cracks).

5.1.2.2 Apports de la thèse.

L'apport de la thèse dans cette approche se mesure plus à la considération des réseaux enfouis que des résultats relatés dans les chapitres précédents. Cependant, la localisation du réseau est nécessaire pour localiser un micro-crack qui a été détecté. Pour les réseaux enfouis, où l'accès à la position des capteurs est difficile, on pourra utiliser la localisation passive qui combine les résultats des chapitres 2 et 3.

Enfin, cette approche peut s'appliquer à d'autres événements que la formation de micro-cracks. En effet, on peut imaginer un sous-système du système enfoui qui mesure la température (cf. [Nassiopoulos08] pour la reconstruction du champ de température dans une structure à partir d'un réseau de capteurs déployé), la présence de chlore, le pH, etc. Le principe est alors identique, le réseau détecte la présence d'un tel événement. Cette information est utilisée a posteriori pour améliorer ou compléter le diagnostic.

5.1.3 Suivi de paramètres.

5.1.3.1 Détection de rupture de modèles.

Grossièrement, la détection de rupture de modèle consiste à détecter l'instant à partir duquel un système a été significativement modifié pour que son modèle change [Basseville93]. On se

limite ici au modèle d'état suivant :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \varepsilon_k + \theta_k \quad (5.3)$$

où \mathbf{X}_k est la valeur du paramètre que l'on suit (état) à l'instant d'indice k , ε_k est l'incertitude sur la valeur de l'état à cet instant, et θ_k est le paramètre de changement. Ce dernier est initialement nul, et devient non nul en présence d'un changement.

Dans le cadre du SHM passif, la détection de rupture du modèle d'état peut s'établir sur des paramètres physiques (atténuation, vitesse de propagation, etc.) et géométriques (distances, positions, attitudes relatives, attitudes absolues, etc.) qui vérifient tous l'équation d'état (5.3) si la structure ne s'est pas dégradée. La détection d'une rupture de modèle sur un sous-ensemble des paramètres observés va permettre de détecter le défaut. Selon les paramètres concernés et la nature de la rupture, il sera possible de localiser et même identifier le défaut. On pourra trouver dans [BenZion11] un exemple de combinaison de méthodes actives et passives dans le suivi de vitesse de propagation en sismologie pour la détection et la localisation de faille sismique.

5.1.3.2 Suivi de fonction de Green et de corrélation de Green.

Une autre approche du diagnostic via la détection de rupture du modèle (5.3) consiste à considérer la fonction de Green ou la corrélation de Green comme état. Cette méthode, complémentaire à celle décrite plus haut, permet de suivre une fonction qui représente complètement le milieu. L'intérêt réside dans le fait qu'une modification peut être détectée sur toute la fonction contrairement à une méthode qui se base uniquement sur les temps de premières arrivées [Hadziioannou11], par exemple. Cet avantage permet alors d'améliorer l'identification du défaut [Sens-Schonfelder06].

On trouvera dans l'article [Larose10] une méthode de détection et de localisation de petits défauts (millimétriques) dans le béton à partir du suivi de la fonction de Green du milieu estimée entre plusieurs capteurs déployés à la surface d'une éprouvette. Pour les fréquences considérées dans l'article (50 kHz - 400 kHz), l'hétérogénéité du béton influe grandement sur la propagation de sorte que le milieu est considéré comme complexe. Dans cette configuration, il est difficile d'avoir un modèle de la fonction de Green dans lequel apparaissent explicitement les paramètres du milieu et de l'instrumentation. Un intérêt fondamental de la méthode est qu'elle utilise toute la fonction de Green pour détecter et localiser un défaut. Ces résultats sont importants dans le cadre du SHM puisqu'ils montrent que la reconstruction (active ou passive) de la fonction de Green elle-même permet d'établir un diagnostic du milieu sans modèle a priori.

5.1.3.3 Apports de la thèse.

Un apport de la thèse dans ce domaine est la perspective de suivre des paramètres géométriques et physiques vectoriels. En effet, on a montré que l'introduction d'une instrumentation multi-composantes dans une structure permettait, via l'identification passive des milieux élastiques, d'estimer les attitudes relatives ainsi que la polarisation des ondes balistiques entre deux capteurs. Le suivi de ces paramètres entre chaque paire, en plus des paramètres scalaires (distance, vitesse, atténuation, etc.) enrichit les paramètres observables et améliore la fiabilité du diagnostic.

Un deuxième apport important est la généralisation des techniques d'identification passive à des milieux généraux via l'identité de Ward générale établie au chapitre 2. D'autre part, les expérimentations menées dans le béton ont montré que le suivi de la corrélation de Green offrait

les mêmes résultats que le suivi de la fonction de Green. Une perspective est d'adapter les résultats de [Larose10] à la corrélation de Green, ce qui permettrait de s'affranchir de l'utilisation de l'identité de Ward.

5.1.4 Analyse modale.

L'analyse modale a déjà été abordée dans les chapitres 1 et 2. Elle consiste à estimer puis suivre les paramètres modaux (modes, fréquences et amortissement) d'une structure. Les résultats du chapitre 2 ont montré la possibilité d'estimer, par une approche passive, les modes propres, les fréquences propres et les amortissements propres de tout milieu de propagation borné.

L'analyse modale est une technique de diagnostic global, elle suit l'évolution du milieu dans sa totalité (cf. introduction de [Cremona04, Cremona08] pour une comparaison entre l'analyse modale et la compression de données). Par exemple, les fréquences propres d'une structure diminuent si cette dernière se dégrade, cependant, cela n'indique pas où apparaissent les dégradations. Des tentatives de localisation des défauts ont été menées [Cremona04] en utilisant les modes propres. La technique peut fonctionner mais elle reste peu fiable, notamment à cause de l'apparition de nombreux défauts fantômes. L'estimation des modes propres par un réseau enfoui tiendra mieux compte de la géométrie de la structure plutôt qu'une instrumentation en surface.

5.2 Verrous techniques et technologiques : les perspectives.

Dans la section précédente, on a donné une vue d'ensemble des méthodes de SHM existantes. On a montré, à travers les résultats des chapitres précédents, qu'il était possible d'adapter ces techniques aux structures instrumentées en volume. Ces développements ont été exposés en supposant que l'on avait accès aux signaux issus du réseau. En réalité, rien ne prouve qu'il est possible de récupérer les données d'un réseau enfoui dans une structure. Les questions sont d'ordre technologique et nous les exposons dans cette dernière sous-section.

L'objectif est d'une part de rendre compte de la chaîne complète de processus de SHM : de l'instrumentation aux algorithmes en passant par l'enregistrement et l'acheminement des données. D'autre part, cette étude permet d'identifier les verrous technologiques qu'il faudra lever pour concrétiser ce projet.

On rappelle dans la sous-section 5.2.1 les notions attachées aux systèmes communicants et on présente quelques applications dans lesquels ils s'illustrent. La sous-section 5.2.2 est consacrée aux "thèmes" technologiques qu'il faut aborder pour rendre compte de la faisabilité de l'instrumentation en volume des ouvrages d'art pour leur monitoring.

5.2.1 Systèmes autonomes communicants.

5.2.1.1 Description.

Un système autonome communicant est un dispositif électronique qui contient un élément de mesure (capteur), un module d'alimentation (pour l'autonomie en énergie), un module de communication (pour émettre/recevoir des données) et une intelligence (processeur + mémoire) pour gérer les différents modules du système et l'accès à la mémoire.

Ces composants sont montés sur une carte électronique qui contient aussi des composants passifs (capacités, résistances, etc.) pour conditionner les signaux entrants et sortants des différents modules. Enfin, le tout est packagé dans un matériau dont la forme et les propriétés sont choisies

en fonction de l'application.

Un système est conçu pour capturer des données au sein d'un environnement et transmettre ces données à une unité qui les traitera pour dégager une information pertinente dans le contexte où le système intervient. On a donné un exemple d'un tel système au [chapitre 4](#) avec la Star Watch (cf. [figure 4.2](#)). On rappelle que ce système est composé d'un accéléromètre triaxial, d'un magnétomètre triaxial, d'une alimentation, d'un module de communication, et d'un processeur. Il a été développé pour des applications en capture de mouvements.

La réduction des composants électroniques et l'amélioration des performances des matériaux rend possible la conception de systèmes de dimensions micro-métriques. Ceci facilite leur intégration dans un environnement mais impose une faible capacité de stockage d'énergie. Ce compromis est déterminé par l'application visée.

5.2.1.2 Réseaux.

Un réseau est un ensemble de systèmes pouvant communiquer entre eux. Les réseaux de systèmes/capteurs se sont fortement développés en ce début de siècle à l'aide des progrès dans les technologies de communications sans fil et dans la démocratisation de l'utilisation des protocoles/technologies de communication (IP, 3G, Bluetooth, etc.).

Le déploiement des réseaux est justifié par la nécessité de décentraliser les échanges de données. Les limitations technologiques d'un système de réception imposent des contraintes sur la quantité de données qu'il peut recevoir et la vitesse à laquelle il peut les traiter et/ou les transmettre à un autre noeud du réseau. Lorsque le réseau est dense, comme le réseau des téléphones portables, il faut déployer des passerelles dont le rôle est d'acheminer les requêtes ou les données émises par un noeud à destination d'un autre.

Les réseaux de capteurs ont des applications dans les domaines où l'on cherche à mesurer un paramètre physique sur de grandes distances et en temps réels : sismologie, météorologie, prévention des feux de forêts, etc. Dans le cadre de la sismologie, les réseaux de capteurs sismiques sont des réseaux de vélocimètres et d'accéléromètres déployés sur toute la surface du globe. Les données enregistrées par ce réseau mondial sont utiles pour établir des tomographies de parties de la Terre ou dans l'étude des séismes.

5.2.1.3 Application à la fonctionnalisation des matériaux.

Les réseaux de capteurs trouvent une application dans la fonctionnalisation des matériaux. Ce domaine, dont le CEA Grenoble, par le biais du Laboratoire Capteur Fonctionnalisation et Environnement (LCFE), est un acteur majeur, consiste à instrumenter des matériaux, des objets et des environnements afin d'ajouter ou de créer de nouvelles fonctionnalités. L'instrumentation du béton pour le monitoring des structures en est un exemple.

Le projet d'instrumenter les matériaux cimentaires a été amorcé au LCFE par la thèse de B. Lebental [[Lebental10](#)] qui s'intéresse à l'instrumentation des micro-pores du béton pour la détection de présence de gaz nocifs à la durabilité de l'ouvrage. L'instrumentation développée est basée sur les nano-technologies (nanotubes de carbones, précisément).

La thèse [[Lebental10](#)] initie donc au concept d'instrumentation en volume des ouvrages d'art pour leur monitoring. Une deuxième approche pour ce projet a été proposée dans cette thèse par l'utilisation de l'identification passive pour localiser les systèmes enfouis et établir un diagnostic

du milieu principalement à l'aide de ces propriétés mécaniques.

Les méthodologies pour le diagnostic des structures instrumentées en volume ont donc émergé. Cependant, leur réalisation pratique est encore à ces débuts. L'accès à des données de tout réseau de capteurs enfouis passe par la résolution de trois problèmes majeurs : l'alimentation, la communication et le packaging. Le traitement des données est plus simple car il est généralement réalisé par des centrales de calculs peu limitées en moyens matériels et technologiques. On détaille dans la sous-section suivante, ces "problèmes" technologiques avec plus de précision et on décrit leur influence sur la réalisation du projet.

5.2.2 Les "problèmes" technologiques associés à l'enfouissement d'un réseau de capteurs.

5.2.2.1 Alimentation d'un réseau enfoui.

L'alimentation d'un système est conditionnée par l'ensemble des autres modules qu'il alimente : communication, intelligence et mesure. Une fois le besoin énergétique de ces modules quantifié, le système d'alimentation peut être dimensionné.

L'alimentation d'un système enfoui est un point délicat puisque le système n'est pas accessible physiquement par un opérateur. Il existe majoritairement deux méthodes d'alimentation sans fil envisageables² : la télé-alimentation et l'auto-alimentation.

La télé-alimentation consiste à utiliser la propagation des ondes électromagnétiques ou acoustique dans un milieu pour alimenter le récepteur. C'est une méthode active dans le sens où il faut fournir l'énergie.

La deuxième alternative est l'auto-alimentation du système, c'est une méthode passive. Le principe réside dans la récupération, par le système lui-même, d'énergies ambiantes [Despesse05]. Cette technologie séduisante est cependant dépendante de l'environnement. Il faut donc s'assurer que les sollicitations ambiantes sont suffisamment puissantes pour fournir l'énergie nécessaire.

L'énergie requise pour assurer la fonctionnalité d'un système est déterminée par l'application dans son ensemble. Pour illustrer ce point, on se place dans le cadre de l'identification passive et on démontre, à l'aide de deux exemples, que la technologie qui capture les données et les algorithmes qui exploitent ces données ne sont pas indépendants.

Il a été montré au [chapitre 2](#) sur un exemple d'instrumentation enfouie, que des signaux quantifiés sur un seul bit suffisaient à reconstruire la corrélation de Green du milieu utile pour le diagnostic et la localisation des capteurs. Cette observation est essentielle d'un point de vue technologique. En effet, la possibilité d'utiliser qu'un bit des données mesurées influe fortement sur la capacité de stockage et le débit des communications, et par conséquent, l'énergie à fournir. Ainsi, les algorithmes qui exploitent les données en aval doivent intégrer des considérations énergétiques.

D'autre part, la possibilité d'utiliser les codas d'évènements dans l'identification passive permet de décrire un critère pour "réveiller" les capteurs du réseau. En effet, il n'est pas envisageable pour des raisons énergétiques et de stockage, que chaque système du réseau enregistre les données mesurées par le capteur. La possibilité d'écouter uniquement lorsque les éléments détectent un évènement (avec la mise en place d'un seuil par exemple) permet de conserver uniquement le signal qui sera utile dans le traitement en aval.

2. L'alimentation filaire n'est pas envisageable à cause de sa complexité de mise en oeuvre sur un ouvrage réel.

5.2.2.2 Communication des données.

La communication dans le béton est une étude difficile puisque c'est un milieu complexe à de nombreuses échelles en termes de propriétés mécaniques et électromagnétiques. Le béton est en effet fortement atténuant [Gaydecki92], hétérogène et parfois humide. Ce dernier point est nuisible pour la propagation des ondes électromagnétiques. La communication dans le béton via la propagation d'ondes mécaniques (acoustiques ou élastiques) et électromagnétiques est un problème fondamental dans la réalisation de tout projet d'enfouissement de capteurs dans une structure. Il représente une perspective technique et technologique de ces travaux de thèse.

Sous l'hypothèse que les capteurs puissent communiquer dans le béton avec d'autres éléments enfouis ou extérieurs, il demeure des problèmes concernant le protocole de communication qui doit prendre en compte la capacité de stockage et l'alimentation des systèmes.

Quand cela est possible, les noeuds d'un réseau communiquent avec un unique noeud. Les données sont alors centralisées et il est possible de réveiller chaque noeud pour récupérer ces données et les synchroniser avec celles des autres noeuds. Cela permet de diminuer la capacité de stockage à embarquer et donc la dimension du système ainsi que sa consommation.

Cependant, la centralisation des données est rarement envisageable. Cela provient du facteur de déploiement du réseau qui peut s'étendre sur de grandes distances et du facteur atténuant du milieu dans lequel le réseau est enfoui. Pour un matériau comme le béton, incontournable en génie civil, l'atténuation des ondes acoustiques et électromagnétiques est élevée, ce qui impose des fortes consommations pour la communication.

La solution classique est de distribuer les échanges de données. Chaque système joue le rôle d'émetteur et de récepteur afin de faire remonter les données à une entité de calcul peu contrainte en consommation d'énergie et en stockage de données (centrale de calculs). Pour ce type de communication, le réveil des systèmes et la synchronisation des données est une problématique à part entière.

Enfin, des études sont actuellement menées sur la compression de données embarquée sur les systèmes d'un réseau déployé [Coppa12]. L'objectif est, d'une part, de compresser les données qui sont communiquées dans et par le réseau. D'autre part, les algorithmes qui interviennent dans toute la chaîne de traitement peuvent être appliqués directement dans l'espace des données compressées. Les calculs embarqués sont alors simplifiés et consomment donc moins d'énergie.

5.2.2.3 Packaging des systèmes.

La surveillance des ouvrages d'art doit s'établir sur de longues durées. La durée de vie des systèmes enfouis est donc un paramètre fondamental car ils ne peuvent pas être remplacés ou réparés. Les facteurs de dégradation du système sont principalement causés par l'environnement dans lequel le système est enfoui : acidité, basicité, humidité, contraintes, etc.

Le packaging des systèmes doit être étudié pour garantir une durée de vie moyenne adaptée à la surveillance des ouvrages. De plus, le packaging d'un système influe sur les mesures et la communication des données. En effet, selon les fréquences, le packaging est une interface entre le milieu et le dispositif de mesure. Il doit donc être complètement caractérisé pour traiter les distorsions qu'ils crée. Enfin, un corps étranger enfoui dans un ouvrage introduit un point de faiblesse mécanique. Le packaging doit être choisi pour s'adapter au mieux au milieu. L'ensemble de ces travaux est l'objet d'un sujet de thèse lancé par le CEA Grenoble. Par ailleurs, on trouvera dans l'article [Inaudi99] un exemple de packaging de fibres optiques enfouies dans le béton et utilisées pour le diagnostic des structures.

Une étude préliminaire de l'effet de l'enfouissement a été menée en enfouissant une balle de pingpong dans un bloc de béton (cf. [figure 5.2](#)). L'objectif est d'observer si le béton s'adapte au corps étranger ou si la balle est écrasée par les contraintes infligées par le béton. Sur cet exemple, la première option semble être validée. Cela est un premier résultat encourageant qui assure un couplage "parfait" pour un capteur enfoui. Il faut encore étudier les paramètres qui influent sur ce couplage : forme, matériau, etc.

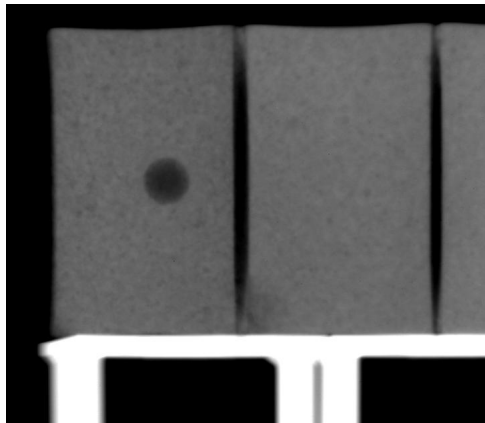


FIGURE 5.2 – Tomographie de densité par rayons X d'un bloc de béton (bloc de gauche) dans lequel a été enfoui une balle de pingpong.

5.3 Conclusion.

Ce chapitre a proposé un kaléidoscope des méthodes de SHM actives et passives. On a montré les apports de la thèse dans ce domaine, notamment pour un réseau de capteurs enfouis où la portée est importante dans l'amélioration du diagnostic. On a discuté aussi de l'étape fondamentale de la localisation du réseau pour l'interprétation des données mais aussi pour le diagnostic.

La deuxième sous-section a introduit les "paramètres" technologiques majeurs qui entrent en jeu dans l'application des méthodes décrites à un cadre réel, à savoir l'alimentation, la communication et le packaging. Pour chacun d'entre eux, on a explicité les besoins nécessaires à la faisabilité de l'enfouissement d'un réseau de capteurs dans un matériau. On a dégagé des perspectives techniques et technologiques qui font directement suite à ces travaux de thèse pour justifier de leur faisabilité dans un contexte réel.

Conclusion.

La thèse s'est intéressée à l'adaptation des techniques d'identification passive aux structures instrumentées en volume. On a introduit au [chapitre 1](#) la terminologie et un état de l'art de ce domaine. Cette étude a montré la nécessité de développer une théorie qui prend en compte l'aspect vectoriel des ondes se propageant dans les solides ainsi qu'un modèle de dissipation réaliste (donc non constant).

Le [chapitre 2](#) a présenté des résultats nouveaux dans l'identification passive des milieux visco-acoustiques et visco-élastiques.

Un premier point important de ce chapitre est la démonstration d'une identité de Ward générale ([2.20](#)) qui relie linéairement la fonction de Green à la corrélation de Green. Cette formule mène à une interprétation plus aisée de la corrélation de Green et indique comment reconstruire la fonction de Green à partir d'inter-corrélations de bruits ambiants. Sur ce dernier point, il a été souligné que la dissipation jouait un rôle fondamental à sa réalisation. En effet, le modèle de dissipation intervient explicitement dans l'identité de Ward ([2.20](#)). Cela est d'une importance capitale en pratique car il justifie les distorsions observées dans la reconstruction passive de la fonction de Green pour un modèle de dissipation trop simple et peu réaliste comme le modèle constant. Ce nouvel effet identifié vient s'ajouter à l'effet classique de "pondérosité" qui justifie les dissymétries déjà observées.

Une identité de Ward ([2.65](#)) a été établie dans le cadre de milieux élastiques faiblement visqueux et en champ lointain (pour les solides). Cette identité est différente de l'identité classique établie dans la littérature pour un amortissement constant ([1.16](#)). Ces résultats ont fait l'objet de validations expérimentales en acoustique dans l'air (milieu élastique fluide) et dans le béton (milieu élastique solide).

L'identification passive de milieux élastiques utilisant une instrumentation multi-composantes met en jeu l'attitude des capteurs. Ce paramètre doit être estimé pour des réseaux dont on ne contrôle pas la configuration géométrique (comme l'instrumentation en volume des ouvrages d'art). Les résultats de ce chapitre ont montré que ce paramètre pouvait être estimé en reconstruisant la corrélation de Green visco-élastique.

Enfin, ce chapitre a mis en évidence le rôle de la corrélation de Green dans l'identification des milieux de propagation. Les développements théoriques et expérimentaux ont montré que cet outil était une alternative à la fonction de Green pour la détection d'un changement dans le milieu. Ce résultat a été conforté à l'aide d'une expérimentation utilisant une instrumentation enfouie. Le [chapitre 2](#) est donc une preuve théorique et "de laboratoire" de la portabilité des techniques classiques d'identification passive au SHM passif des structures instrumentées en volume.

La deuxième partie de ce mémoire s'est intéressée à la reconstruction de positions et d'attitudes dans les réseaux de capteurs à partir de données relatives, incomplètes et bruitées.

Le [chapitre 3](#) a décrit une méthode de résolution au problème de localisation, via une matrice des distances incomplète et bruitée, qui ne nécessite aucun a priori sur la structure de cette matrice. Ce manque d'information est significatif des milieux solides instrumentés en volume où il est difficile d'avoir un accès aux noeuds du réseau.

L'algorithme développé est basé sur l'algorithme MDS [[Torgerson52](#)] et sur la recherche de cliques de fiabilité maximale dans un graphe pondéré. La robustesse de cet algorithme a fait l'objet d'une preuve théorique et expérimentale. Enfin, une version adaptative de l'algorithme a été développée et validée en simulation.

Le [chapitre 4](#) a introduit et résolu le problème d'estimation d'attitudes dans les réseaux de capteurs à partir d'une matrice d'attitudes relatives. Ce nouveau problème est propre aux réseaux déployés dont les noeuds sont des capteurs multi-composantes.

La méthode développée est inspirée de l'algorithme MDS. C'est une méthode analytique dont la robustesse a été prouvée théoriquement et en simulation. Elle a été de plus mise en oeuvre avec succès sur des mesures réelles issues de centrales d'attitudes Star Watch développées par le CEA-Léti. Ce chapitre est une application originale de l'identification passive de milieux de propagation d'ondes vectorielles.

Enfin, le [chapitre 5](#) a proposé un bref état de l'art des techniques de SHM actives et passives. Les apports des travaux de thèse dans ce domaine ont été discutés. On a montré qu'il y avait un réel intérêt à instrumenter une structure en volume d'une part, et, d'autre part, on a dégagé les possibilités offertes par une instrumentation multi-composantes. Ces aspects théoriques ont été complétés par des considérations technologiques en identifiant les contraintes et verrous à lever pour que ces méthodes théoriques et expérimentales soient encore fonctionnelles, fiables et robustes dans un cadre réel qu'est l'instrumentation des ouvrages d'art pour le suivi de leur état de santé.

Perspectives.

Outre les perspectives d'ordre technologique déjà évoquées au [chapitre 5](#), nous pouvons dégager de ces travaux de thèse un ensemble de perspectives qu'il serait intéressant de poursuivre. Ces projets de travaux sont déclinés en trois classes : théorique, numérique et expérimentale.

D'un point de vue théorique, les résultats bibliographiques et de cette thèse ont montré que l'identification passive d'un milieu de propagation était réalisable avec des connaissances a priori sur les statistiques d'ordre deux des sources ambiantes. Une perspective est d'étudier les possibilités offertes par une connaissance *a priori* sur les statistiques d'ordre supérieur [[Lacoume97](#)] des sources ambiantes. On pourra alors définir de nouvelles "fonctions" de Green (comme la fonction de Green classique et la corrélation de Green) et les identités de Ward (généralisées) associées.

D'autre part, un travail essentiel est à fournir pour exprimer les extrema, les zéros et/ou les fréquences caractéristiques de la corrélation de Green en fonction des paramètres du milieu. Cela permettrait de réaliser l'identification passive sans utiliser une identité de Ward qui dépend du modèle utilisé et qui dégrade les estimations.

Dans cette thèse, l'étape de simulation qui est souvent un pont entre la théorie et les expérimentations, a été court-circuitée. Une perspective d'ordre numérique est de modéliser des milieux élastiques complexes et de vérifier la validité des identités de Ward établies pour le cas général (2.20) et en particulier une faible atténuation visqueuse en acoustique (2.71) et en sismique (2.70) (avec l'hypothèse de champ lointain pour ce cas).

La discrétisation des opérateurs linéaires et différentiels est une méthode classique de l'analyse numérique (différences finies, éléments finis, etc.). Cette perspective offrirait un outil de test des résultats établis dans ce mémoire en terme de convergence, de robustesse vis-à-vis des différents bruits ambiants et milieux. Ces études sont précieuses pour interpréter des résultats expérimentaux dont on ne maîtrise pas toute la configuration (par exemple en sismologie où les sources sismiques sont non contrôlées et non localisées).

Les perspectives expérimentales sont vastes. La validation des développements établis pour les ondes vectorielles est un travail futur porteur pour de multiples raisons dont nous exposons les deux principales. D'une part, l'identification passive de polarisation d'ondes de volume n'est pas, à notre connaissance, encore abordée dans la littérature et est une étude prometteuse pour améliorer les techniques de SHM. D'autre part, l'estimation active et passive d'attitudes

de capteurs par des mesures sismiques contrôlées ou ambiantes est aussi un domaine nouveau et riche en application dans les réseaux déployés. Ajoutons que cette étude fournirait un modèle de bruit, au moins numérique, sur l'estimation d'attitudes relatives. Cette information est importante dans l'amélioration des algorithmes d'estimation d'attitudes absolues qui prennent pour le moment uniquement des considérations déterministes.

Une dernière perspective identifiée (en cours de réalisation), est la mise en place d'un réseau de microphones enfouis dans une structure "test". L'objectif est double : valider l'étape de localisation et de diagnostic sur une structure réelle où les bruits ambiants sont générés par l'activité humaine, et, confronter les réalités technologiques avec les résultats "de laboratoire". Cette étape est fondamentale dans l'avancée vers le concept de structure "intelligente" car elle permet d'identifier les améliorations à apporter pour que les méthodes expérimentales soient portables à un cadre concret et applicatif.

Bibliographie

- [Aki02] **K. Aki, P.G. Richards**, Quantitative Seismology, *University Science Books*, 2002.
- [Amar10] **A. Amar et al.**, Extending the Classical Multidimensional Scaling Algorithm Given Partial Pairwise Distance Measurements, *IEEE Signal Processing Letters* 17, 2010.
- [Anderson05] **B. Anderson, S. John**, Optimal Filtering, *Dover Publications Inc.*, 2005.
- [Arfken05] **G.B. Arfken, H.J. Weber**, Mathematical Methods for Physicist, *Elsevier*, 6th edition, 2005.
- [Baillon02] **L. Baillon**, Applications des Techniques d'Émissions Acoustiques au Suivi de Fissuration dans le Béton, *Thèse EPFL*, 2002.
- [Baruchel00] **J. Baruchel**, X-Ray Tomography in Material Science, *Hermès*, 2000.
- [Basseville93] **M. Basseville, I.V. Niforov**, Detection of Abrupt Changes : Theory and Application, *Prentice Hall*, 1993.
- [BenZion11] **Y. BenZion**, Spatio-Temporal Variations of Seismic Velocities Near Large Earthquake Faults (in the brittle crust), *Summer School of Carygèse*, 2011.
- [Born99] **M. Born, E. Wolf**, Principle of Optics, *Cambridge University Press*, 1999.
- [Breysse05] **D. Breysse, O. Abraham**, Méthodologie d'Évaluation Non Destructive de l'État d'Altération des Ouvrages en Béton, *Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*, 2005.
- [Callen51] **H.B. Callen, T.A. Welton**, Irreversibility and Generalized Noise, *Physical Review* 83, 1951.
- [Campillo03] **M. Campillo, A. Paul**, Long-Range Correlations in the Diffuse Seismic Coda, *Science* 299, 2003.
- [Campillo06] **M. Campillo**, Phase and Correlation in Random Seismic Fields and the Reconstruction of the Green Function, *Pure and Applied Geophysics* 163,

2006.

- [Carmona10] **M. Carmona, O. Michel**, Procédé de détermination de paramètres de disposition absolue d'objets, programme d'ordinateur associé et installation de contrôle, *Brevet PB0097US*, 2010.
- [Chabanov01] **A.A. Chabanov, A.Z. Genack**, Statistics of Dynamics of Localized Waves, *Physical Review Letters* 87, 2001.
- [Chanvillard99] **G. Chanvillard**, Connaissances Générale sur le Matériau Béton, *ENTPE Aléas*, 1999 .
- [Cohen-Tannoudji97] **C. Cohen-Tannoudji et al.**, Mécanique Quantique I, *Hermann*, 1997.
- [ColinDeVerdiere09] **Y. Colin de Verdiere**, Semi-Classical Analysis and Passive Imaging, *Non Linearity* 22, 2009.
- [Coppa12] **B. Coppa**, Utilisation du Codage Parcimonieux pour la Réduction de Débit dans les Réseaux de Capteurs, *Thèse CEA*, 2012.
- [Costa06] **J.A. Costa et al.**, Distributed Weighted-Multidimensional Scaling for Node Localization in Sensor Networks, *ACM Transactions on Sensor Networks* 2, 2006.
- [Cox01] **T.F. Cox, M.A.A. Cox**, Multidimensional Scaling, *Chapman and Hall*, 2001.
- [Cremona04] **C. Cremona**, Évaluation Dynamique des Ponts, *Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*, 2004.
- [Cremona08] **C. Cremona**, Évaluation Structurale des Ponts, *Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*, 2008.
- [Daniell99] **W.E. Daniell, C.A. Taylor**, Effective Ambient Vibration testing for Validating Numerical Models of Concrete Dams, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 28, 1999.
- [Dattoro06] **J. Dattoro**, Convex Optimization and Euclidean Distance Geometry, *Meboo publishing*, 2006.
- [Davis69] **C. Davis, W.M. Kahan**, Some New Bounds on Perturbation of Subspaces, *Bulletin of American Mathematical Society* 75, 1969.
- [DeSilva03] **V. De Silva et J. B. Tenenbaum**, Global Versus Local Methods in Nonlinear Dimensionality Reduction, *Advances in Neural Information Processing Systems* 15, 2003.

- [Despesse05] **G. Despesse**, Étude des Phénomènes Physiques Utilisables pour Alimenter en Energie Electrique des Micro-systèmes Communicants, *Thèse INPG*, 2005.
- [Derode03] **A. Derode**, How to Estimate the Green's Function of a Heterogeneous Medium Between Two Passive Sensors? Application to Acoustic Waves, *Applied Physics Letters 83*, 2003.
- [Ding08] **Ding et al.**, Sensor Network Localization, Euclidean Distance Matrix, Completion And Graph Realization, *Linear Algebra and its Applications*, 2008.
- [Drineas06] **P. Drineas et al.**, Distance Matrix Reconstruction from Incomplete Distance Information for Sensor Network Localization, *ENALAB Technical Report*, 2006.
- [Duvall93] **T.L. Duvall et al.**, Time-Distance Helioseismology, *Nature 362*, 1993.
- [Eitzenberger08] **A. Eitzenberger**, Train-Induced Vibrations in Tunnels : A review, *Technical report Lulea University of Technology*, 2008.
- [Engel00] **K.J. Engel, R. Nagel**, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, *Springer*, 2000.
- [Eykhoff74] **P. Eykhoff**, System Identification Parameter and State Estimation, *John Wiley & Sons*, 1974.
- [Faloutsos95] **C. Faloutsos, K. Lin**, FastMap : A Fast Algorithm for Indexing, Datamining, and Visualization, *ACM SIGMOD*, 1995.
- [Farrar99] **C.R. Farrar, G.H. James III**, System Identification from Ambient Vibration Measurements on a Bridge, *Journal Sound and Vibration 1*, 1999.
- [Faugeras93] **O. Faugeras**, Three-Dimensional Computer Vision : A Geometric ViewPoint, *The MIT Press*, 1993.
- [Gaydecki92] **P.A. Gaydecki et al.**, The Propagation and Attenuation of Medium-Frequency Ultrasonic Waves in Concrete : a Signal Analytical Approach, *Measurement Science and Technololgy 3*, 1992.
- [Gmur97] **T. Gmür**, Dynamique des Structures : Analyse Modale Numérique, *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, 1997.
- [Gouedard08] **P. Gouedard et al.**, Cross-correlation of Random Fields : Mathematical Approach and Applications, *Geophysical Prospecting 56*, 2008.

- [Gradshteyn07] **I.S. Gradshteyn et al.**, Table of Integrals, Series, and Products, *Academic Press*, 2007.
- [Hadziioannou11] **C. Hadziioannou**, Ondes Sismiques en Milieu Complexe : Mesure des Variations Temporelles des Vitesses, *Thèse UJF*, 2011.
- [Holder04] **D.S. Holder**, Electrical Impedance Tomography : Methods, History And Applications, *Institute of Physics Publishing*, 2004.
- [Honeine09] **P. Honeine et al.**, Auto-Localisation dans les Réseaux de Capteurs Sans Fil par Régression de Matrices de Gram, *GRETSI*, 2009.
- [Inaudi99] **D. Inaudi et al.**, Packaging Interferometric Sensors for Civil Structural Monitoring, *13th International Conference on Optical Fiber Sensors in Korea*, 1999.
- [Jazwinski08] **A.H. Jazwinski**, Stochastic Processes and Filtering Theory, *Dover Publications*, 1998.
- [Krislock09] **N. Krislock, H. Wolkowicz**, Explicit Sensor Network Localization Using Semidefinite Representations and Facial Reductions, *SIAM Journal on Optimisation* 20, 2009.
- [Kruskal64] **J.B. Kruskal**, Multidimensional Scaling by Optimizing Goodness of Fit to a Nonmetric Hypothesis, *Psychometrika* 29, 1964.
- [Kuipers02] **J.B. Kuipers**, Quaternions and Rotations Sequences, *Princeton University Press*, 2002.
- [Lacoume97] **J.L. Lacoume**, Statistiques d'Ordre Supérieur pour le Traitement du Signal, *Dunod*, 1997.
- [Lacoume07] **J.L. Lacoume**, Tomographie Passive : Observer avec du Bruit, *GRETSI*, 2007.
- [Landau90] **L. Landau et al.**, Physique Théorique : Théorie de l'Elasticité, *Editions MIR*, 1990.
- [Larose06] **E. Larose et al.**, Correlation of Random Wavefields : An Interdisciplinary Review, *Geophysics* 71, 2006.
- [Larose10] **E. Larose et al.**, Locating a Small Change in a Multiple Scattering Environment, *Applied Physics Letters* 96, 2010.
- [Lebental10] **B. Lebental**, Instrumentation Immersée des Matériaux Cimentaires par des Micro-Transducteurs Ultrasoniques à Membrane de Nanotubes de

Carbone, *Thèse CEA-LCPC*, 2010.

- [LeBihan04] **N. Le Bihan, J. Mars**, Singular Value Decomposition of Quaternion Matrices : A New Tool for Vector-Sensor Signal Processing, *Signal Processing* 84, 2004.
- [Lide97] **D.R. Lide, H.P.R. Frederikse**, Handbook of Chemistry and Physics, *CRC Press - 78th edition*, 1997.
- [Lobkis01] **O.I. Lobkis, R.L. Weaver**, On the Emergence of the Green Function in the Correlations of a Diffuse Field, *Journal of the Acoustical Society of America* 110, 2001.
- [Max96] **J. Max, J-L. Lacoume**, Méthodes et Techniques de Traitement du Signal, *Masson*, 1996.
- [Markley04] **F.L. Markley**, Attitude Estimation or Quaternion Estimation ?, *Journal of Astronautical Sciences* 52, 2004.
- [Mayagoitia02] **R.E. Mayagoitia et al.**, Accelerometer and Rate Gyroscope Measurement of Kinematics : An Inexpensive Alternative to Optical Motion Analysis Systems, *Journal of Biomechanics* 35, 2002.
- [Mittelmann03] **H.D. Mittelmann**, An Independent Benchmarking of SDP and SOCP Solvers, *Mathematical Programming.*, 2003.
- [Mitsuyasu74] **H. Mitsuyasu, T. Honda**, The High Frequency Spectrum of Wind-Generated Waves, *Journal of the Oceanographical Society of Japan* 30, 1974.
- [Miyazawa08] **M. Miyazawa et al.**, Application of Seismic Interferometry to Extract P- and S-wave Propagation and Observation of Shear-Wave Splitting from Noise Data at Cold Lake, Alberta, Canada, *Geophysics* 73, 2008.
- [Nakatsukasa09] **Y. Nakatsukasa**, Absolute and Relative Weyl Theorems for Generalized Eigenvalue Problems, *Linear Algebra and its Applications* 432, 2009.
- [Naulet08] **G. Naulet** A Breviary of Seismic Tomography : Imaging the Interior of the Earth and Sun, *Cambridge University Press*, 2008.
- [Nassiopoulos08] **A. Nassiopoulos**, Identification Rapide de la Température dans les Structures du Génie Civil, *Thèse LCPC*, 2008.
- [Ostergard99] **P.R.J. Ostergard**, A New Algorithm for the Maximum-Weight Clique Problem, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 3, 1999.

- [Ouvrard07] **J-Y. Ouvrard**, Probabilités, *Cassini*, 2007.
- [Patwari05] **N. Patwari**, Location Estimation in Sensor Networks, *PhD. University of Michigan*, 2005.
- [Platt05] **J.C. Platt**, FastMap, MetricMap, and Landmark MDS are all Nyström Algorithm, *10th Int. Workshop on Artificial Intelligence and Statistics*, 2005.
- [Polack88] **J-D. Polack**, La Transmission de l'Energie Sonore dans les Salles, *Thèse de l'Université du Maine*, 1988.
- [Prieto10] **G. Prieto**, Impulse Response of Civil Structures from Ambient Noise Analysis, *Bulletin of the Seismological Society of America 100*, 2010.
- [Rangarajan08] **R. Rangarajan et al.**, Euclidean Matrix Completion Problems In Tracking And Geo-Localization, *ICASP*, 2008.
- [Roux05] **P. Roux et al.**, P-waves from Cross Correlation of Seismic Noise, *Geophysical Research Letters 32*, 2005.
- [Roux05-2] **P. Roux et al.**, Ambient Noise Cross Correlation in Free Space : Theoretical approach, *Journal of Acoustical Society of America 117*, 2005.
- [Royer00] **D. Royer, E. Dieulesaint**, Elastic Waves in Solids, *Springer*, 2000.
- [Rudin98] **W. Rudin**, Analyse Réelle et Complexe : Cours et Exercices, *Dunod - Troisième édition*, 1998.
- [Sabra05] **K.G. Sabra and al.**, Extracting Time-domain Green's Function Estimates from Ambient Seismic Noise, *Geophysical Research Letters 32*, 2005.
- [Sabra05-2] **K.G. Sabra and al.**, Surface Wave Tomography from Microseisms in Southern California, *Geophysical Research Letters 32*, 2005.
- [Sabra05-3] **K.G. Sabra and al.**, Using Ocean Ambient Noise for Array Self-Localization and Self-Synchronization, *IEEE Journal Of Oceanic Engineering 30*, 2005.
- [SanchezSesma06] **F.J. Sanchez-Sesma, M. Campillo**, Retrieval of the Green Function from Cross Correlation : the Canonical Elastic Problem, *Bulletin of the Seismological Society of America 96*, 2006.
- [Sens-Schonfelder06] **C. Sens-Schonfelder, U. Wegler**, Passive Image Interferometry and Seasonal Variations of Seismic Velocities at Merapi Volcano, Indonesia, *Geophysical Research Letters 33*, 2006.

- [Shapiro04] **N.M. Shapiro, M. Campillo**, Emergence of Broadband Rayleigh Waves from Correlations of the Ambient Seismic Noise, *Geophysical Research Letters* 31, 2004.
- [Siringoringo08] **D.M. Siringoringo, Y. Fujino**, System Identification of Suspension Bridge from Ambient Vibration Response, *Engineering Structures* 30, 2008.
- [Slob07] **E. Slob, K. Wapenaar**, Electromagnetic Green's Functions Retrieval by Cross-Correlation and Cross-Convolution in Media with Losses, *Geophysical Research Letters* 34, 2007.
- [Snieder07] **R. Snieder et al.**, Unified Green function Retrieval by Cross-Correlation : Connection with Energy Principles, *Physical Review E* 75, 2007/
- [Snieder09] **R. Snieder**, Extracting the Time-Domain Building Response from Random Vibrations, *Coupled site and soil-structure interaction effects with application to seismic risk mitigation - Springer*, 2009.
- [Snieder10] **R. Snieder et al.**, Equipartitioning is not Sufficient for Green's Function Extraction, *Earthquake Science* 23, 2010.
- [Sthely07] **L. Sthely et al.**, Travel Time Measurements from Noise Correlation : Stability and Detection of Instrumental Time Shifts, *Geophysical Journal International* 171, 2007.
- [Taillandier08] **C. Taillandier**, 2008, Formulation de la Tomographie des Temps de Première Arrivée à partir d'une Méthode de Gradient : Un pas vers une Tomographie Interactive, *Thèse de MINES-ParisTech*.
- [Torgerson52] **W.S. Torgerson**, MultiDimensional Scaling : Theory and Method, *Psychometrika* 17, 1952.
- [Wahba65] **G. Wahba**, A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude, *SIAM Review* 7, 1965.
- [Walkinshaw05] **H. Walkinshaw**, Measurements of Ambient Noise Spectra in the South Norwegian Sea, *IEEE Journal Of Oceanic Engineering* 30, NO, 2005.
- [Wang99] **J.T. Wang et al.**, Evaluating a Class of Distance-Mapping Algorithms for Data Mining and Clustering, *ACM SIGKDD*, 1999.
- [Wapenaar04] **K. Wapenaar**, Retrieving the Elastodynamic Green function of an Arbitrary Inhomogeneous Medium by Cross Correlation, *Physical Review Letters* 93, 2004.

- [Wapenaar10-1] **K. Wapenaar et al.**, On Seismic Interferometry, the Generalized Optical Theorem, and the Scattering Matrix of a point Scatterer, *Geophysics* 75, 2010.
- [Wapenaar10-2] **K. Wapenaar et al.**, Tutorial on Seismic Interferometry : Part 1 - Basic Principles and Applications, *Geophysics* 75, 2010.
- [Wapenaar10-3] **K. Wapenaar et al.**, 2010, Tutorial on Seismic Interferometry : Part 2 - Underlying Theory and New Advances, *Geophysics* 75.
- [Watkins02] **D.S. Watkins**, Fundamentals of Matrix Computations, *Wiley-Interscience*, 2002.
- [Weaver01] **R.L. Weaver, O.I. Lobkis**, On the Emergence of the Green's Function in the Correlations of a Diffuse Field, *Ultrasonics* 40, 2001.
- [Weaver08] **R.L. Weaver**, Ward Identities and the Retrieval of Green's Functions in the Correlations of a Diffuse Field, *Wave Motion* 45, 2008.
- [Weaver11] **R.L. Weaver**, Equipartition and the Retrieval of Green's Function from Correlations of Noise, *Summer School of Cargèse*, 2011.
- [Weyl12] **H. Weyl**, Das Asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte Linearer Partieller Differentialgleichungen, *Mathematische Annalen* 71, 1912.
- [Yang04] **Y.B. Yang et al.**, Extracting Bridge Frequencies from the Dynamic Response of a Passing Vehicle, *Journal of Sound and Vibration* 272, 2004.
- [Zhang98] **F. Zhang**, Quaternions and Matrix of Quaternions, *Linear Algebra And Its Applications* 251, 1998.
- [Ziv69] **J. Ziv, M. Zakai**, Some Lower Bounds on Signal Parameter Estimation, *IEEE Transactions on Information Theory* 15, 1998.

Annexes.

Annexe A

Identification passive des milieux bornés.

Sommaire

A.1 Introduction	150
A.2 Propagation dans un milieu borné.	151
A.2.1 Modèle de propagation et fonction de Green associée.	151
A.3 Corrélation de Green et identités de Ward exactes et approchées.	155
A.3.1 Corrélation de Green pour un milieu borné.	155
A.3.2 Identités de Ward.	155

A.1 Introduction

On présente dans cette annexe une étude de la corrélation de Green et de l'identité de Ward associée pour un milieu de propagation borné (homogène ou hétérogène). Ces développements sont un complément à ceux présentés au [chapitre 2](#) pour des milieux visco-acoustique et visco-élastique homogènes et libres *i.e.* non bornés.

La [section A.2](#) est une description de la propagation dans un milieu borné. Les expressions de la fonction de Green dans les domaines fréquentiel et temporel sont rappelées. L'expression exacte de la corrélation de Green et de l'identité de Ward associée sont présentées en [section A.3](#). On établit ensuite des identités de Ward approchées à l'aide d'hypothèses sur l'opérateur de dissipation.

Trois exemples sont utilisés pour illustrer les résultats théoriques obtenus : la corde vibrante, le cube acoustique et le cube élastique. Ils permettront de retrouver, dans le cas d'un milieu borné, les identités de Ward obtenues au [chapitre 2](#) pour le cas général (2.20), acoustique faiblement visqueux (2.71) et élastique en champ lointain et faiblement visqueux (2.70), ainsi que l'identité de Ward classique en acoustique pour une dissipation constante (1.16).

A.2 Propagation dans un milieu borné.

A.2.1 Modèle de propagation et fonction de Green associée.

A.2.1.1 Milieux bornés et champs.

On rappelle qu'un milieu de propagation n -dimensionnel X est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On s'intéresse ici aux milieux bornés *i.e.* qui admettent des interfaces selon toutes les directions. Un champ nD - pC est une fonction à p composantes qui dépend du temps et de l'espace où la variable spatiale appartient à X .

Exemples. La corde vibrante est une corde fixée à ses deux extrémités. Dans ce milieu, on étudie le déplacement vertical \mathbf{y} *i.e.* $\mathbf{y}(t, x)$ est la hauteur de la corde à l'instant t et à la position $x \in X = [0, L]$ où L est la longueur de la corde. \mathbf{y} est un champ 1D-1C.

Le cube acoustique est un cube de côté L constitué uniquement de ciment. Dans ce milieu, on considère le champ de pression \mathbf{p} *i.e.* $\mathbf{p}(t, \underline{x})$ est la pression à l'instant t et à la position $\underline{x} \in X = [0, L]^3$. \mathbf{p} est un champ 3D-1C.

Le cube élastique correspond au cube acoustique mais dans lequel on étudie le champ de déplacement $\underline{\mathbf{d}}$ *i.e.* $\underline{\mathbf{d}}(t, \underline{x})$ est le déplacement à l'instant t à la position $\underline{x} \in X = [0, L]^3$. $\underline{\mathbf{d}}$ est un champ 3D-3C.

A.2.1.2 Équation de propagation.

Soit X un milieu de propagation borné. Soit $\underline{\mathbf{f}}$ une source d'excitation du milieu et soit $\underline{\mathbf{u}}$ le champ généré. On suppose que la loi de propagation à la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{x})}{\partial t^2} + \mathcal{D} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{x})}{\partial t} + \mathcal{L} \underline{\mathbf{u}}(t, \underline{x}) = \underline{\mathbf{f}}(t, \underline{x}), \forall (t, \underline{x}) \in \mathbb{R} \times X \quad (\text{A.1})$$

à laquelle il faut ajouter les conditions de causalité du champ et de sa convergence vers 0 au voisinage du temps infini, ainsi que les conditions aux limites.

Exemples. Pour une corde vibrante excitée par une force linéique \mathbf{f} , le déplacement vertical \mathbf{y} vérifie :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}(t, x)}{\partial t^2} + a \frac{\partial \mathbf{y}(t, x)}{\partial t} - v^2 \Delta \mathbf{y}(t, x) = \mathbf{f}(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, L] \quad (\text{A.2})$$

où Δ est le laplacien, v est la vitesse de propagation d'une onde dans la corde, a est le coefficient de frottement dans l'air. Les conditions aux limites sont : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{y}(t, 0) = \mathbf{y}(t, L) = 0$.

Pour un cube visco-acoustique excité par une force volumique \mathbf{f} , le champ de pression \mathbf{p} vérifie :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}(t, \underline{x})}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta \frac{\partial \mathbf{p}(t, \underline{x})}{\partial t} - v^2 \Delta \mathbf{p}(t, \underline{x}) = \mathbf{f}(t, \underline{x}), \forall (t, \underline{x}) \in \mathbb{R} \times [0, L]^3 \quad (\text{A.3})$$

où α est le coefficient d'amortissement visqueux et v est la vitesse de propagation d'une onde dans le ciment. Les conditions aux limites sont : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{p}(t, \underline{x}) = 0$ si \underline{x} appartient à la surface du cube.

Dans un cube visco-élastique excité par une force volumique $\underline{\mathbf{f}}$, le champ de déplacement $\underline{\mathbf{d}}$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{d}}(t, \underline{\mathbf{x}})}{\partial t^2} - \left(\frac{\chi + \eta}{\rho} \nabla \nabla^T + \frac{\eta}{\rho} \Delta \right) \frac{\partial \underline{\mathbf{d}}(t, \underline{\mathbf{x}})}{\partial t} - \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho} \nabla \nabla^T + \frac{\mu}{\rho} \Delta \right) \underline{\mathbf{d}}(t, \underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{f}}(t, \underline{\mathbf{x}}), \quad \forall (t, \underline{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R} \times [0, L]^3 \quad (\text{A.4})$$

où ∇ est le gradient, ρ est la densité du ciment, (λ, μ) sont les coefficients de Lamé et (χ, η) et sont les coefficients de viscosité dans le ciment. Les conditions aux limites s'écrivent $\forall t \in \mathbb{R}, \underline{\mathbf{d}}(t, \underline{\mathbf{x}}) = 0$ si $\underline{\mathbf{x}}$ appartient à la surface du cube.

A.2.1.3 Modes.

On suppose que \mathcal{L} et \mathcal{D} sont des opérateurs qui commutent, et, qu'ils sont diagonalisables. Il existe alors une base orthonormée $(\underline{\mathbf{m}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ propres pour \mathcal{L} et \mathcal{D} dont on notera respectivement $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les valeurs propres. L'orthonormalité de la famille $(\underline{\mathbf{m}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie pour le produit scalaire suivant :

$$\langle \underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}} \rangle := \int_X \underline{\mathbf{p}}(\underline{\mathbf{x}})^T \underline{\mathbf{q}}(\underline{\mathbf{x}}) d\underline{\mathbf{x}} \quad (\text{A.5})$$

$(\underline{\mathbf{m}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'ensemble des modes propres du milieu. Ils sont associés aux pulsations propres $(\omega_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont, par définition et pour tout entier positif n , les solutions de la relation de dispersion :

$$-\omega^2 + i d_n \omega + l_n = 0 \quad (\text{A.6})$$

Les pulsations propres peuvent être explicitées en résolvant l'équation ci-dessous :

$$\omega_n^\pm = \pm q_n - \frac{i d_n}{2} \quad (\text{A.7})$$

où $q_n = \sqrt{l_n - \frac{d_n^2}{4}}$.

En mécanique des structures, l'analyse modale porte sur l'étude des modes et des pulsations propres. Lorsque l'opérateur d'ondes a été discrétisée, la structure est vue comme un milieu avec un nombre fini de degrés de liberté. Les champs d'onde et source vérifient une équation du type (A.1) où les opérateurs de dissipation et de propagation sont des matrices. Par conséquent, tous les résultats de cette annexe sont applicables à ces milieux. La différence avec les structures continues est que les éléments modaux sont en nombre fini.

Exemples. Les modes propres de la corde vibrante sont les vecteurs propres 1D-C du laplacien Δ nuls pour $x = 0$ et $x = L$:

$$\mathbf{m}_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (\text{A.8})$$

$$l_n = \frac{n^2 \pi^2 v^2}{L^2} \quad (\text{A.9})$$

$$d_n = a \quad (\text{A.10})$$

Les modes propres du cube acoustique sont les vecteurs propres 3D-1C du laplacien Δ nuls à la surface du cube :

$$\mathbf{m}_n(\underline{x}) = \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi x_3}{L}\right) \quad (\text{A.11})$$

$$l_n = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \frac{\pi^2 v^2}{L^2} \quad (\text{A.12})$$

$$d_n = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \frac{\pi^2 \alpha^2}{L^2} \quad (\text{A.13})$$

où $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ et n est le numéro du triplet $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ pour l'ordre lexicographique.

Les modes propres du cube élastique sont les vecteurs propres 3D-3C du laplacien Δ nuls à la surface du cube. Il y en a deux classes, associée à chaque type d'onde (P et S) :

$$\underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x})^{(P)} = \frac{\pi}{L} \begin{bmatrix} -n_1 \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi x_3}{L}\right) \\ n_2 \cos\left(\frac{n_1\pi x_1}{L}\right) \cos\left(\frac{n_2\pi x_2}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi x_3}{L}\right) \\ n_3 \cos\left(\frac{n_1\pi x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L}\right) \cos\left(\frac{n_3\pi x_3}{L}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$l_n^{(P)} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \frac{\pi^2 v_P^2}{L^2} \quad (\text{A.15})$$

$$d_n^{(P)} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \frac{\pi^2 \alpha_P^2}{L^2} \quad (\text{A.16})$$

$$\underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x})^{(S)} = \frac{\pi}{L} \begin{bmatrix} n_2 \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi x_3}{L}\right) \\ n_1 \cos\left(\frac{n_1\pi x_1}{L}\right) \cos\left(\frac{n_2\pi x_2}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi x_3}{L}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

ou

$$\underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x})^{(S)} = \frac{\pi}{L} \begin{bmatrix} n_3 \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi x_3}{L}\right) \\ 0 \\ n_1 \cos\left(\frac{n_1\pi x_1}{L}\right) \cos\left(\frac{n_2\pi x_2}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi x_3}{L}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$l_n^{(S)} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \frac{\pi^2 v_S^2}{L^2} \quad (\text{A.19})$$

$$d_n^{(S)} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \frac{\pi^2 \alpha_S^2}{L^2} \quad (\text{A.20})$$

où $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ et n est le numéro du triplet $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ pour l'ordre lexicographique.

A.2.1.4 Décomposition modale de la fonction de Green.

On décrit ici la décomposition modale de la fonction de Green. Pour cela, on introduit sa transformée de Fourier :

$$\hat{\underline{\mathbf{G}}}(\omega, \underline{x}, \underline{x}') := \int_{\mathbb{R}} \underline{\mathbf{G}}(t, \underline{x}, \underline{x}') e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.21})$$

On montre ci-dessous que la décomposition modale de $\hat{\underline{\mathbf{G}}}$ est :

$$\hat{\underline{\mathbf{G}}}(\omega, \underline{x}, \underline{x}') = \sum_{n \geq 0} \frac{\underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}) \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}')}{(\omega - \omega_n^+)(\omega - \omega_n^-)} \quad (\text{A.22})$$

Preuve. $\hat{\underline{\mathbf{G}}}$ est solution de l'équation suivante :

$$-\omega^2 \hat{\underline{\mathbf{G}}} + \mathbf{i}\omega \mathcal{D} \hat{\underline{\mathbf{G}}} + \mathcal{L} \hat{\underline{\mathbf{G}}} = \delta(\underline{x}, \underline{x}') \underline{\mathbf{I}}_p \quad (\text{A.23})$$

On projette cette équation sur chaque espace propre engendré par le vecteur propre $\underline{\mathbf{m}}_n$ i.e. cela revient à multiplier à droite par $\underline{\mathbf{m}}_n$ les deux membres de l'équation (A.23) et à intégrer selon la variable spatiale. Il vient :

$$-\omega^2 \langle \check{\underline{\mathbf{G}}}, \underline{\mathbf{m}}_n \rangle + \mathbf{i}\omega \langle \mathcal{D} \check{\underline{\mathbf{G}}}, \underline{\mathbf{m}}_n \rangle + \langle \mathcal{L} \check{\underline{\mathbf{G}}}, \underline{\mathbf{m}}_n \rangle = \langle \delta(\underline{x}, \underline{x}') \underline{\mathbf{I}}_p, \underline{\mathbf{m}}_n \rangle \quad (\text{A.24})$$

où pour toute matrice de fonctions $\underline{\mathbf{A}}(t, \underline{x}, \underline{x}')$ et tout champ spatial (pas de dépendance en temps) $\underline{\mathbf{w}}$, $\langle \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{w}} \rangle$ est un vecteur colonne dont les composantes sont :

$$\langle \underline{\mathbf{A}}_i, \underline{\mathbf{w}} \rangle := \int_X \underline{\mathbf{A}}_i(t, \underline{x}, \underline{x}') \underline{\mathbf{w}}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (\text{A.25})$$

avec $(\underline{\mathbf{A}}_i)$ la i -ème colonne de $\underline{\mathbf{A}}$. \mathcal{L} et \mathcal{D} étant auto-adjoints, on a :

$$\langle \mathcal{L} \check{\underline{\mathbf{G}}}, \underline{\mathbf{m}}_n \rangle = \langle \check{\underline{\mathbf{G}}}, \mathcal{L}^* \underline{\mathbf{m}}_n \rangle = \langle \check{\underline{\mathbf{G}}}, \mathcal{L} \underline{\mathbf{m}}_n \rangle \quad (\text{A.26})$$

$$\langle \mathcal{D} \check{\underline{\mathbf{G}}}, \underline{\mathbf{m}}_n \rangle = \langle \check{\underline{\mathbf{G}}}, \mathcal{D}^* \underline{\mathbf{m}}_n \rangle = \langle \check{\underline{\mathbf{G}}}, \mathcal{D} \underline{\mathbf{m}}_n \rangle \quad (\text{A.27})$$

En utilisant ces égalités et le fait que $\mathcal{L} \underline{\mathbf{m}}_n = l_n \underline{\mathbf{m}}_n$ et $\mathcal{D} \underline{\mathbf{m}}_n = d_n \underline{\mathbf{m}}_n$ dans l'équation (A.24), on obtient le n -ième coefficient de $\check{\underline{\mathbf{G}}}$:

$$\langle \check{\underline{\mathbf{G}}}, \underline{\mathbf{m}}_n \rangle = \frac{\underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}')^*}{-\omega^2 + \mathbf{i}\omega d_n + l_n} \quad (\text{A.28})$$

où * transpose et conjugue. Le dénominateur du membre de droite de l'équation (A.28) peut se factoriser sous la forme $-\omega^2 + \mathbf{i}\omega d_n + l_n = -(\omega - \omega_n^+)(\omega - \omega_n^-)$. En considérant la décomposition de $\check{\underline{\mathbf{G}}}$ dans la base des modes propres on obtient bien (A.22).

On peut maintenant déterminer la décomposition modale de $\underline{\mathbf{G}}$ à l'aide de l'équation (A.22) et du théorème des résidus :

$$\underline{\mathbf{G}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = H(t) \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(q_n t) e^{-\frac{d_n}{2} t}}{q_n} \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}) \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}') \quad (\text{A.29})$$

A.3 Corrélation de Green et identités de Ward exactes et approchées.

A.3.1 Corrélation de Green pour un milieu borné.

A.3.1.1 Décomposition modale de la corrélation de Green.

En appliquant la transformée de Fourier à (1.11)¹ par rapport à la variable temporelle, on obtient :

$$\underline{\hat{\mathbf{C}}} = \underline{\hat{\mathbf{G}}} \otimes_S \underline{\hat{\mathbf{G}}}^* \quad (\text{A.30})$$

où * transpose et conjugue. En injectant l'expression (A.22) dans cette équation et utilisant les propriétés d'orthonormalité des modes $(\mathbf{m}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il vient :

$$\underline{\hat{\mathbf{C}}}(\omega, \underline{x}, \underline{x}') = \sum_{n \geq 0} \frac{\underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}) \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}')}{|\omega - \omega_n^+|^2 |\omega - \omega_n^-|^2} \quad (\text{A.31})$$

On pourra observer que la corrélation de Green a les mêmes pôles que la fonction de Green. L'identification du milieu par estimation des pulsations propres peut être réalisée identiquement avec ces deux fonctions.

En appliquant le théorème des résidus à l'équation (A.31), on obtient l'expression de la corrélation de Green suivante :

$$\underline{\mathbf{C}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \sum_{n \geq 0} \frac{(q_n \cos(q_n t) + d_n \sin(q_n |t|)) e^{-\frac{d_n}{2} |t|}}{d_n q_n (d_n^2 + q_n^2)} \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}) \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}') \quad (\text{A.32})$$

A.3.2 Identités de Ward.

A.3.2.1 Cas général.

Dans le cas général, on retrouve l'identité de Ward (2.20) obtenue au chapitre 2 à l'aide des expressions (A.32) et (A.29) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{C}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = -\mathcal{D}^{-1} \text{Imp } \underline{\mathbf{G}}(t, \underline{x}, \underline{x}') \quad (\text{A.33})$$

Ce résultat confirme le fait que l'identité de Ward dépend uniquement de l'opérateur de dissipation et pas des conditions aux limites.

On déjà discuté au chapitre 2 de la difficulté d'utiliser cette identité de Ward pour un opérateur de dissipation quelconque. Les sous-sections suivantes étudient des identités de Ward simplifiées ou approchées à l'aide d'hypothèses sur la dissipation.

A.3.2.2 Dissipation constante.

Pour une dissipation constante *i.e.* $\mathcal{D} = a\mathcal{I}$ où a est un réel positif et \mathcal{I} est l'opérateur identité, l'équation (A.33) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{C}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = -a^{-1} \text{Imp } \underline{\mathbf{G}}(t, \underline{x}, \underline{x}') \quad (\text{A.34})$$

1. $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{G}} \otimes_T \otimes_S \underline{\mathbf{G}}^-$

Dans ce cas, on a une relation de proportionnalité entre la dérivée temporelle première de la corrélation de Green et la partie impaire de la fonction de Green. On retrouve l'identité de Ward classiquement utilisée dans l'identification passive en acoustique (1.16).

Exemple. La corde vibrante est exemple de milieu où l'atténuation est constante. Pour ce milieu l'identité de Ward s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C}(t, x, x') = -\frac{1}{a} \text{Imp } \mathbf{G}(t, x, x') \quad (\text{A.35})$$

A.3.2.3 Cas d'une faible atténuation et d'une dissipation proportionnelle à la dissipation.

On suppose que le milieu est faiblement atténué. Cette hypothèse se traduit ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n \approx 0 \quad (\text{A.36})$$

Dans ce cas, la fonction de Green et la corrélation de Green admettent les expressions suivantes :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = H(t) \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(\sqrt{l_n} t)}{\sqrt{l_n}} \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}) \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}') \quad (\text{A.37})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(\sqrt{l_n} t)}{d_n l_n} \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}) \underline{\mathbf{m}}_n(\underline{x}') \quad (\text{A.38})$$

On suppose aussi que les opérateurs de dissipation et de propagation sont proportionnels *i.e.* il existe un réel λ tel que $\mathcal{D} = \lambda \mathcal{L}$. Cette hypothèse se traduit sur les valeurs propres par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \lambda l_n \quad (\text{A.39})$$

Avec cette approximation et les expressions (A.37) et (A.38), on obtient l'identité de Ward suivante :

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \lambda^{-1} \text{Imp } \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') \quad (\text{A.40})$$

Dans ce cadre, c'est la dérivée troisième qui est proportionnelle à la partie impaire de la fonction de Green.

Exemple. Les milieux visco-acoustiques sont des exemples de milieu où les opérateurs de propagation sont proportionnels puisqu'ils sont proportionnels au laplacien (cf. équation (A.3)). Le coefficient de proportionnalité est $\lambda := \alpha^2/v^2$. Dans ce cas et pour une dissipation est faible, l'identité de Ward (A.40) s'écrit :

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \mathbf{C}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \frac{v^2}{\alpha^2} \text{Imp } \mathbf{G}(t, \underline{x}, \underline{x}') \quad (\text{A.41})$$

On retrouve l'identité de Ward approchée obtenue au chapitre 2 pour les milieux visco-acoustiques libres et faiblement amortie. Ce résultat ne fait que confirmer que l'identité de Ward dépend uniquement de l'opérateur de dissipation, et, ne dépend donc pas des conditions aux limites.

A.3.2.4 Approximations pour le cube visco-élastique en faible atténuations et en champ lointain.

On s'intéresse ici au visco-cube solide en champ lointain et pour une faible atténuation. La première hypothèse indique que l'on peut ne pas prendre en compte l'effet du couplage entre les ondes P et S. On écrit alors :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{x}, \underline{x}')^{(P)} + \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{x}, \underline{x}')^{(S)} \quad (\text{A.42})$$

où :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(R)}(t, \underline{x}, \underline{x}') = H(t) \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(\sqrt{l_n^{(R)}} t)}{\sqrt{l_n^{(R)}}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_n^{(R)}(\underline{x}) \underline{\underline{\mathbf{m}}}_n^{(R)}(\underline{x}') ; R \in \{P, S\} \quad (\text{A.43})$$

et,

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{x}, \underline{x}')^{(P)} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{x}, \underline{x}')^{(S)} \quad (\text{A.44})$$

où :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(R)}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(\sqrt{l_n^{(R)}} t)}{d_n^{(R)} l_n^{(R)}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_n^{(R)}(\underline{x}) \underline{\underline{\mathbf{m}}}_n^{(R)}(\underline{x}') ; R \in \{P, S\} \quad (\text{A.45})$$

D'après l'identité de Ward (A.40) appliquée aux ondes P qui vérifient bien l'équation de propagation visco-acoustique (A.3), on a :

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(R)}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \frac{v_R^2}{\alpha_R^2} \text{Imp} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(R)}(t, \underline{x}, \underline{x}') ; R \in \{P, S\} \quad (\text{A.46})$$

Finalement :

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \left(\frac{v_P^2}{\alpha_P^2} \text{Proj}_P + \frac{v_S^2}{\alpha_S^2} \text{Proj}_S \right) \text{Imp} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') \quad (\text{A.47})$$

où Proj_R projette sur l'espace associée aux ondes de types R .

Ce résultat permet de retrouver celui obtenu pour un milieu visco-élastique solide en milieu infini (2.70). En effet, dans ce cas, Proj_P projette sur l'axe défini par le vecteur $\underline{x}' - \underline{x}$ et Proj_S projette sur le plan orthogonal. On alors d'après (A.47) :

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') = \left(\frac{v_P^2}{\alpha_P^2} \underline{z} \underline{z}^T + \frac{v_S^2}{\alpha_S^2} (\mathbf{I}_3 - \underline{z} \underline{z}^T) \right) \text{Imp} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t, \underline{x}, \underline{x}') \quad (\text{A.48})$$

où $\underline{z} := (\underline{x}' - \underline{x}) / \|\underline{x}' - \underline{x}\|$.

Annexe B

Recherche d'une clique localisable de fiabilité maximale.

L'algorithme de complétion que nous décrivons au [chapitre 3](#) nécessite un algorithme de recherche de sous-réseaux localisables de fiabilité maximale. On présente dans cette annexe une adaptation de la méthode de P. Ostergard [[Ostergard99](#)] de recherche de cliques de poids maximal dans un graphe pour, qu'en plus, les cliques cherchées contiennent $n+1$ capteurs de références non hyper-coplanaires. Cet algorithme a été choisi car il est possible de l'adapter à notre problème, il est exact et performant. On décrit maintenant la version utilisée. Pour plus de clarté, on trouvera les codes Matlab utilisés pour son implémentation ci-après.

Soit $G = (\mathbf{S}, \mathbf{A}, \mathbf{F})$ un graphe de N sommets dont $\mathbf{S} = \{s_1, \dots, s_N\}$ est l'ensemble des sommets, \mathbf{A} la matrice d'adjacence du graphe et \mathbf{F} la matrice de fiabilité du graphe. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note v_i l'ensemble des voisins de s_i *i.e.* $V_i = \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket, [\mathbf{A}]_{i,j} = 1\}$ et on note f_i la fiabilité de s_i définie comme la somme des fiabilités des arêtes dont s_i est une extrémité *i.e.* $f_i = \sum_{j \in V_i} [\mathbf{F}]_{i,j}$. L'algorithme est basé sur les deux étapes suivantes :

1. La première étape consiste à ré-indexer les sommets afin d'optimiser la recherche. La permutation optimale est difficile à expliciter, on utilise alors l'indexation heuristique proposée dans [[Ostergard99](#)] et que nous décrivons ici. On cherche s'_1 le sommet de fiabilité maximale (si plusieurs sommets sont de fiabilité maximale on choisit le premier trouvé par l'algorithme de recherche de maximum). Puis, on cherche s'_2 le sommet de fiabilité maximale dans $\mathbf{S} \setminus \{s'_1\}$. On applique cette méthode récursivement *i.e.* une fois s'_1, \dots, s'_{k-1} déterminés pour $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$, on choisit s'_k en réitérant la même procédure sur le sous-graphe de sommets $\mathbf{S} \setminus \{s'_1, \dots, s'_{k-1}\}$.

2. La deuxième étape est l'étape de recherche de clique de fiabilité maximale. On initialise la fiabilité maximale F_{\max} à 0 et la clique de fiabilité maximale \mathbf{C}_{\max} à la liste vide. La méthode réside dans le calcul de la suite $(F_k)_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ qui est la fiabilité maximale du sous-graphe défini par les sommets $\{s'_k, \dots, s'_N\}$. La suite $(F_k)_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est déterminée par indices décroissants (on détermine F_N puis F_{N-1} jusqu'à F_1). On remarquera que $F_N = f_N$ et que pour tout $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$, $F_{k-1} > F_k$ si la clique associée existe et contient s'_k . Sinon, $F_{k-1} = F_k$. On décrit maintenant les sous-étapes pour déterminer F_k une fois $F_N, F_{N-1}, \dots, F_{k+1}$ déterminés.

A chaque sous-étape, on utilise un espace de travail $\mathbf{E} = \{e_1, \dots, e_p\}$ adjacent à tous les sommets de l'ensemble \mathbf{G} des sommets fixés aux sous-étapes précédentes, et, adjacent à au moins $n + 1$ sommets de références non hyper-coplanaires. On parcourt l'ensemble des sommets de \mathbf{E} . Pour chaque sommet e_i de \mathbf{E} , l'ensemble $\mathbf{G}^{\text{nouv}} := \mathbf{G} \cup \{e_i\}$ est une clique localisable. Si la fiabilité F de \mathbf{G}^{nouv} est strictement supérieure à F_{max} alors $\mathbf{C}_{\text{max}} \leftarrow \mathbf{G}^{\text{nouv}}$ et $F_{\text{max}} \leftarrow F$.

On définit maintenant le nouvel espace de travail \mathbf{E}^{nouv} comme l'intersection des voisins de e_i qui ont au moins $n + 1$ voisins de références non hyper-coplanaires aussi voisins de e_i , et, des sommets de \mathbf{E} d'indices supérieurs à celui de e_i . Le fait de conserver les éléments de \mathbf{E} d'indices supérieurs permet d'éviter les répétitions dans la recherche. On retourne maintenant à la sous-étape décrite au paragraphe précédent avec le nouvel espace de travail $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E}^{\text{nouv}}$ et la nouvelle clique localisable $\mathbf{G} \leftarrow \mathbf{G}^{\text{nouv}}$. Afin d'élaguer de nombreux cas de recherche, on calcul la fiabilité de l'ensemble $P_{\mathbf{E},\mathbf{G}} = \mathbf{E} \cup \mathbf{G}$. Si $P_{\mathbf{E},\mathbf{G}} \leq P_{\text{max}}$ cela signifie que même si on ajoute tous les sommets de \mathbf{E} à ceux de la clique localisable \mathbf{G} pour former une clique localisable, elle ne sera pas maximale. On fait alors "marche arrière" ("backtrack" [Ostergard99]) en continuant le parcours de l'ancien espace de travail (dont le sommet suivant est e_{i+1} avec les notations utilisées).

On trouvera dans [Ostergard99] les performances de cet algorithme sans la notion de localisabilité d'une clique. La prise en compte de la localisabilité accélère l'algorithme car les espaces de travail contiennent nécessairement moins de sommets que dans le cas où elle n'est pas prise en compte. On donne ci-dessous un exemple d'implémentation Matlab de cet algorithme. Au vu de sa description, on remarque que l'implémentation récursive est favorisée. Une autre difficulté qui apparaît dans l'implémentation est le fait que la clique localisable de fiabilité maximale peut être l'ensemble des sommets de références qui contient aucun capteur à localiser. L'implémentation proposée ci-dessous permet d'écarter ce cas dans la recherche.

Codes. On présente ici les codes utilisés pour la recherche d'une clique localisable de fiabilité maximale. La syntaxe utilisée celle de Matlab. On représente en rouge les modifications apportées sur l'algorithme de P. Ostergard afin d'ajouter la condition de localisabilité sur l'espace de travail. Afin de ne pas alourdir le code présenté ci-dessous, le test de non hyper-coplanarité n'apparaît pas car il n'apporte rien à la compréhension de l'algorithme recherche d'une clique localisable de fiabilité maximale. Il apparaît bien sûr dans le code utilisé en pratique.

function Cmax=FindCmax()

% Liste des variables déclarées en global

% A : Matrice d'adjacence du graphe (N*N int)

% F : Matrice de fiabilité du graphe (N*N float)

% R : Indices des références (r*1 int)

% N : Nombres de sommets du graphe (int)

% n : Dimension du réseau (int)

% r : Nombre de références (int)

% Réarrangement des sommets

global Atmp; **%** Matrice d'adjacence temporaire

S=SortVert(setdiff(1:N,R)); **%** S contient les sommets réarrangés

clear Atmp; **%** Désallocation de mémoire

% Déclaration et initialisation Cmax et Wmax


```

global Cmax; % Déclaration de Cmax
Cmax=[]; % Initialisation de Cmax
global Wmax; % Déclaration de Wmax
Wmax=0; % Initialisation de Wmax

% Recherche de la clique de fiabilité maximale
for i=N-r-1 :-1 :1 % Boucle décroissante sur les sommets à localiser
    E=intersect(VoisLoc(S(i)),S); % Initialisation de l'espace de travail
    FindCliq(E,S(i)); % Recherche sur les sommets i à N
end

% Ajout des voisins de références
VoisRef=R((sum(A(Cmax,R),1)==length(Cmax))); % Voisins de références de la clique
Cmax=sort([VoisRef Cmax]); % Clique de fiabilité maximale

% Sous fonction : recherche de cliques
function FindCliq(E,G)

% Variables d'entrée :
% E : Espace de travail
% G : Sommets fixés

% Variables globales utilisées :
global Wmax; % Fiabilité maximale en cours
global Cmax; % Clique de fiabilité maximale en cours
global F; % Matrice de fiabilité du graphe

WEG=1/2*sum(sum(F([E G],[E G]))); % Poids maximal atteignable

if WEG>Wmax % Il peut exister une clique de fiabilité supérieure à Wmax
    for i=E % Parcours de l'espace de travail
        Gi=[i G]; % Nouveau point fixé
        WGi=1/2*sum(sum(F(Gi,Gi))); % Fiabilité de la clique
        if WGi>Wmax % G est de fiabilité supérieure
            Cmax=Gi; % Mise à jour de Cmax
            Wmax=WGi; % Mise à jour de Wmax
        end
        Vi=VoisLoc(i); % Voisins de i
        Ei=intersect(Vi,E((find(E==i,1)+1):end)); % Nouvel espace de travail
        FindCliq(Ei,Gi); % Recherche la clique de fiabilité maximale associée à Ei
    end
end

% Sous fonction : recherche de voisins localisables
function Vi=VoisLoc(i)

% Variables d'entrée et de sortie :
% i : Sommet dont on cherche les voisins localisables
% Vi : Sommets voisins de i ayant n + 1 voisins de référence aussi voisins de i

```

```

% Variables globales utilisées :
global A ; % Matrice d'adjacence du graphe
global R ; % Indices des références
global n ; % Dimension du réseau

Vois=find(A(i, :)==1) ; % Voisins de i
VoisRef=intersect(Vois,R) ; % Voisins de références de i
Vi=union(Vois(sum(A(VoisRef,Vois),1)>n),VoisRef) ; % Voisins de i qui ont au moins
n + 1 voisins de références aussi voisins de i. Il faudrait aussi tester la non hyper-coplanarité.
Cela est réalisé dans le code utilisé en pratique.

% Sous fonction : Réarrangement des sommets
function S=SortVert(V)

% Variables d'entrée et de sortie :
% V : Sommets à réarranger
% S : Sommets réarrangés

% Variables globales utilisées :
global Atmp ; % Matrice d'adjacence temporaire
global N ; % Nombre de sommets du graphe

if length(V)==1 % Conditionnelle sur la taille de V
    S=V ; % Cas trivial
else
    imax=MaxWeightVert(V) ; % Sommet de poids maximal
    V=setdiff(V,imax) ; % Nouvel ensemble de sommets
    Atmp(imax, :)=zeros(1,N) ; % Mise à jour de la ligne imax de Atmp
    Atmp( :,imax)=zeros(N,1) ; % Mise à jour de la colonne imax de Atmp
    S=[imax SortVert(V)] ; % Mise à jour du vecteur des sommets réarrangés
end

% Sous fonction : Argument maximal des poids des sommets
function imax=MaxWeightVert(V)

% Variables d'entrée et de sortie :
% V : Sommets
% imax : Indice du sommet de poids maximal

% Variables globales utilisées :
global Atmp ; % Matrice d'adjacence temporaire
global F ; % Matrice de fiabilité du graphe

W=zeros(length(V),1) ; % Vecteur des poids de chaque sommet
cpt=0 ; % Initialisation d'un compteur

for i=V % Boucle sur les sommets de V
    cpt=cpt+1 ; % Incrémentatation du compteur

```

```
W(cpt)=sum(F(i,(Atmp(i, :)==1))); % Poids du sommet i  
end
```

```
[Wmax,imax]=max(W); % imax : sommet de poids maximal dans le sous-graphe défini par V  
imax=V(imax); % Sommet de poids maximal dans le graphe global Atmp
```
