HAL
open science

Invariants topologiques des orbites périodiques d'un champ de vecteurs

Pierre Dehornoy

To cite this version:

Pierre Dehornoy. Invariants topologiques des orbites périodiques d'un champ de vecteurs. Mathématiques générales [math.GM]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2011. Français. NNT : 2011ENSL0626 . tel-00656900

HAL Id: tel-00656900

https://theses.hal.science/tel-00656900v1

Submitted on 5 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 626

N° attribué par la bibliothèque : __ENSL626

THÈSE

en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Lyon – École Normale Supérieure de Lyon

Spécialité : Mathématiques

Unité de Mathématiques Pures & Appliquées - UMR 5669 - UMPA

École Doctorale Informatique & Mathématiques

présentée et soutenue publiquement le 23 juin 2011 par

M. Pierre DEHORNOY

Titre :

Invariants topologiques des orbites périodiques d'un champ de vecteurs

---

Directeur de thèse :

M. Étienne GHYS

Après avis de :

M. Sebastian BAADER

M. Michel BOILEAU

Devant la commission d'examen formée de :

M. Norbert A'CAMPO,	*membre*
M. Sebastian BAADER,	*membre/rapporteur*
M. Michel BOILEAU,	*membre/rapporteur*
M. Étienne GHYS (directeur de thèse),	*membre*
M. Emmanuel GIROUX,	*membre*

One picture is worth a thousand words, provided one uses another thousand words to justify the picture.

Harold Stark, 1970

Remerciements

En premier, je remercie chaleureusement Étienne Ghys. Depuis mon arrivée à Lyon il y a cinq ans, c'est lui qui a guidé mes explorations mathématiques. Sa disponibilité malgré ses nombreuses responsabilités, son enthousiasme communicatif, et sa vision panoramique m'ont permis d'apprendre de belles mathématiques, et m'ont souvent remotivé dans les moments de doute. Nos discussions ont aiguisé à la fois ma curiosité et mon sens critique. Il restera un modèle pour moi.

J'ai rencontré Sebastian Baader et Michel Boileau en même temps, à Toulouse en 2007, et j'ai depuis apprécié les rencontres avec chacun d'eux. Michel Boileau est un spécialiste des orbifolds, lesquels sont au centre de la première partie de ma thèse. Quant aux travaux de Sebastian Baader sur les invariants asymptotiques, ils ont été une source de motivation pour la seconde partie. C'est un grand honneur qu'ils me font en rapportant cette thèse. Je les remercie particulièrement pour leur relecture attentive qui a permis d'améliorer le manuscrit.

Je suis très heureux que ce jury soit complété par :

- Norbert A'Campo, dont les articles sur les nœuds fibrés ont été une révélation mathématique qui a directement inspiré les premiers chapitres de cette thèse ;

- Emmanuel Giroux, dont les travaux sur les livres ouverts ont aussi été déterminants, et dont le soutien scientifique et moral m'a été précieux.

Mathématiquement, plusieurs rencontres ont suscité, l'une en trois jours, l'autre en trois ans, différentes parties. Hugh Morton m'a invité au début de ma thèse à Liverpool ; son accueil m'a marqué, et ce qu'il m'a appris sur les sommes de Murasugi et les polynômes d'Alexander a amené les chapitres 6 et 7, que je lui dédie. Patrick Massot a été un animateur dynamique du groupe des thésards de l'UMPA ; ses explications des travaux de Van Horn Morris sont à l'origine du chapitre 3. J'ai rencontré Tali Pinski lors d'une école d'été il y a quatre ans ; nos discussions et nos essais pour construire des patrons n'ont pas fonctionné, mais ont inspiré, trois ans plus tard, les chapitres 4 et 5.

Je remercie vivement Maxime, Michele, Romain et Patrick pour avoir chacun relu des parties de ce manuscrit, et Rémi pour avoir partagé son style de thèse LaTeX.

Par sa culture, sa disponibilité et son humour, Maxime a été un ami, un compagnon de bureau et un grand frère mathématique exceptionnel. Cette thèse lui doit beaucoup. Je remercie aussi particulièrement Thomas et Michele, pour la bonne humeur permanente dans le bûro.

Un grand merci à tous les membres de l'UMPA, où l'ambiance est si agréable. À Magalie et Virginia pour s'occuper de ce que nous ne savons pas faire. À Boubou, Emmanuel, Bruno et Jean-Claude pour les mathématiques qu'ils m'ont apprises. À Aurélien, Claude, Agnès, Séverine, Hélène, Antonin, Viktor, Gérard, Paul, Ana L., Floriane, Camille, Sébastien, Patrick, Marco, Klaus, Pierre, Rémi, Ana R., Romain, Lara, Mathieu, Maxime Z., Ghani. Aux machines à café et à la salle Passerelle.

Au-delà, merci à Fred pour les longues nuits à faire du bison. À Michele pour le vélo et les pizzas. À Thomas pour le ski. À Claudia, Esteban, Diego, Roberto et tout Tango de soie pour la danse. À Baba et Mama pour la cuisine et le Mah-Jong. À Charlotte et Julien pour m'avoir laissé tranquille pendant leurs nombreux conflits. À maman pour neuf mois bien agréables, et pour les années qui ont suivies. À papa un merci spécial, pour m'avoir fait découvrir et aimer la géométrie, pour m'avoir tant appris.

Enfin et surtout, merci à Chen, pour les rires et le soutien quotidiens.

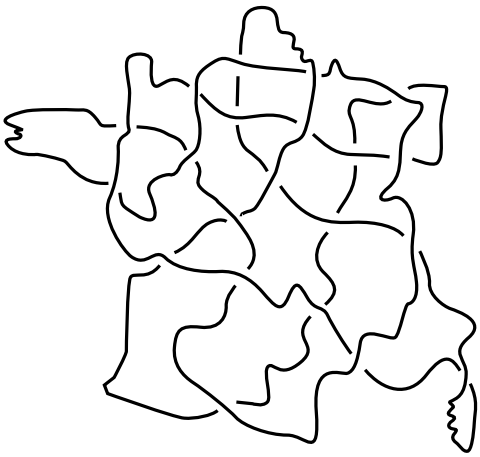

Table des matières

Remerciements **iii**

Présentation de la thèse **vii**

I Enlacement du flot géodésique **1**

1 Généralités, constructions d'A'Campo et de Giroux **2**

1.1 Définitions et notations 2

1.2 Les divides d'A'Campo et Ishikawa 6

1.3 Les livres ouverts de Giroux 9

2 Sections de Birkhoff pour le flot géodésique sur le tore plat **11**

2.1 Géodésiques périodiques et polygone affine associé 11

2.2 Analyse du problème 13

2.3 Classification 17

3 Patrons et enlacement des géodésiques sur les orbifaces à un cusp **21**

3.1 Préliminaires 22

3.2 Un patron pour le flot géodésique sur une orbiface unicuspidale 26

3.3 Patrons pour le flot géodésique dans les orbifaces de type (p, q, ∞) 33

3.4 Enlacement avec le cusp dans les orbifaces de type (p, q, ∞) 41

3.5 Enlacement entre géodésiques périodiques de $T^1\Sigma_{2,q,\infty}$ 42

4 Patrons et enlacement sur les orbifaces à courbure négative **49**

4.1 Discrétisation des géodésiques et multi-patrons 50

4.2 Enlacement des géodésiques sur les surfaces compactes 55

4.3 Quotients et orbiface $\Sigma_{2,3,7}$ 64

Intermède **69**

5 Un billard contenant tous les entrelacs **70**

II Polynôme d'Alexander des nœuds de Lorenz **74**

6 Nœuds de Lorenz et sommes de Murasugi **75**

6.1 Description combinatoire des nœuds de Lorenz 75

6.2 Somme de Murasugi, nœuds fibrés et monodromie 85

7 Racines du polynôme d'Alexander des nœuds de Lorenz **95**

7.1 Préliminaires : le jardin des Dehn 96

7.2 Combinatoire de la monodromie d'un entrelacs de Lorenz : premier passage 100

7.3 D'autres surfaces de Seifert pour les nœuds positifs 105

7.4 Combinatoire de la monodromie d'un entrelacs de Lorenz : second passage 108

7.5 Bornes sur le rayon spectral de la monodromie 112

III Nœuds, dynamique, et théorie des nombres **115**

8 Nœuds de Lorenz, nœuds modulaires, et corps quadratiques **116**

8.1 Classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. 116

8.2 Classes d'idéaux et classes de conjugaison 118

8.3 La surface modulaire 121

8.4 Flot modulaire, nœuds modulaires, et classes de conjugaison 123

8.5 Nœuds modulaires et nœuds de Lorenz 124

8.6 Nœuds de Lorenz et classes d'idéaux 125

8.7 Deux résultats nouveaux 126

Bibliographie **129**

Présentation de la thèse

Cette thèse se situe à l'interface entre théorie des nœuds et théorie des systèmes dynamiques. Nées à une trentaine d'années d'intervalle vers la fin du XIXe siècle, ces deux théories se sont développées parallèlement, et leurs interactions sont nombreuses. Un thème récurrent consiste, étant donné un champ de vecteurs dans une variété de dimension 3, à considérer ses orbites périodiques, voire quasi-périodiques, et à s'interroger sur les informations qu'elles donnent sur le champ de vecteurs et la variété initiaux.

Dans ce travail, on prolonge cette idée dans deux directions principales. Premièrement, on s'intéresse au problème de trouver des sections de Birkhoff pour les flots tridimensionnels, en particulier pour les flots d'Anosov. Ici l'intervention des nœuds se fait à travers les surfaces qu'ils bordent et leur caractère fibré. Deuxièmement, on s'intéresse à la définition d'invariants asymptotiques de flots, ici sur l'exemple du flot de Lorenz et du polynôme d'Alexander. Dans un intermède on étudie les types de nœuds qui apparaissent comme orbites périodiques d'un billard tridimensionnel. Enfin dans un dernier chapitre, on évoque un lien avec la théorie des nombres avec l'étude des nœuds dits modulaires.

Sections de Birkhoff et flots d'Anosov

La théorie des systèmes dynamiques est née avec les travaux d'Henri Poincaré sur les équations différentielles [77] et sur la stabilité du système solaire [78]. Le but général est d'étudier les solutions d'une équation différentielle sans résoudre celle-ci, soit parce qu'il est impossible de l'intégrer, soit parce que son intégration est trop imprécise et dépendante des conditions initiales pour être significative.

Pour étudier un flot, c'est-à-dire l'ensemble des trajectoires décrivant les solutions d'une équation différentielle, une idée importante est de chercher des sections, c'est-à-dire des hypersurfaces transverses au flot, et d'étudier l'application de premier retour. C'est ce que fait Poincaré en 1881 dans [77] sur une sphère et sur un tore, et en 1888 dans [78] en dimension supérieure. Lorsqu'elle peut être appliquée, cette idée permet de réduire un problème de dynamique continue en dimension n à un problème de dynamique discrète en dimension $n-1$, dont on espère qu'il sera plus simple à étudier. Le cas idéal est celui où, partant d'un flot non singulier sur une variété, on trouve une section globale, c'est-à-dire une hypersurface transverse au flot, et qui coupe toute orbite une infinité de fois. Dans ce cas l'étude du flot se ramène à celle d'un difféomorphisme en dimension inférieure.

Malheureusement ce cas idéal se présente rarement. D'une part, un flot peut avoir des singularités, correspondant au cas où l'équation différentielle sous-jacente admet des solutions constantes. D'autre part, même si le flot est non-singulier, il n'est pas toujours possible de construire des sections globales. Par exemple dans la sphère $\mathbb{S}^3$, n'importe quelle surface orientable S sépare $\mathbb{S}^3$ en un intérieur et un extérieur. Dans ce cas un flot transverse à S est prisonnier d'un côté de S, et chaque orbite coupe la surface au plus une fois. L'application de premier retour sur S n'est pas définie, et la surface n'aide pas à étudier la dynamique du flot. Poincaré remarque que les orbites périodiques sont des auxiliaires utiles qui permettent une application partielle de son idée. En effet, étant donné un point sur une orbite périodique

d'un flot, il est possible de construire localement une petite hypersurface transverse au flot pour laquelle l'application de premier retour est bien définie. C'est le premier exemple historique d'interaction entre l'étude des orbites périodiques d'un système et l'étude des sections.

En dimension 3, une observation importante est qu'utiliser une section à bord, pourvu que ce dernier soit composé d'orbites du flot, est aussi utile qu'une section sans bord. Une *section de Birkhoff* pour un flot est une surface plongée, compacte, à bord, dont le bord est constitué d'orbites périodiques du flot, dont l'intérieur est partout transverse à la direction du flot, et telle que toute orbite coupe la surface une infinité de fois. Le premier exemple est dû à Poincaré [79, chap. 27] en 1899 avec l'utilisation d'un anneau. En 1917, Birkhoff formalise cette notion dans [13]. De telles sections à bord sont plus faciles à construire que des sections sans bord, et elles offrent quasiment les mêmes avantages ; en particulier elle permettent de réduire la dynamique du flot à celle de l'application de premier retour sur la section. Pour obtenir une représentation la plus simple possible de la dynamique, on cherche naturellement à estimer le genre des sections de Birkhoff.

Question. Étant donné un flot dans une variété de dimension trois, admet-il des sections de Birkhoff ? Si oui, de quel genre ? quelles sont les collections d'orbites périodiques qui bordent des sections de Birkhoff ? ♢

Dans [14], Birkhoff répond à cette question pour le flot géodésique sur une surface de genre 2 en construisant une section torique. Sa très jolie construction a été ensuite étendue par É. Ghys [42], N. Hashiguchi [51, 52] et M. Brunella [20] sur des surfaces quelconques.

Une classe de flots qui se prête bien à la construction de sections est celle des flots d'Anosov. En 1983, David Fried montre que tout flot d'Anosov en dimension 3 admet des sections de Birkhoff [35]. Sa construction repose sur l'existence de partitions de Markov. Elle a l'inconvénient de ne pas contrôler le genre des sections ainsi construites.

Sections de Birkhoff, livres ouverts et flots lévogyres

Supposons construite une section de Birkhoff pour un flot donné sur une variété. Alors en poussant la section le long du flot, son bord est préservé puisque, par définition, il est constitué d'orbites périodiques du flot, et son intérieur décrit toute la variété : on a affaire à un *livre ouvert*, dont le genre est celui de la section de Birkhoff. Ainsi, l'étude des sections de Birkhoff est incluse dans celle des livres ouverts, c'est-à-dire des nœuds fibrés, dont la reliure est composée d'orbites périodiques du flot.

Dans sa thèse [34], D. Fried relie la construction de sections et de sections de Birkhoff à des propriétés de direction asymptotique du flot en homologie. Ses résultats impliquent en particulier plusieurs avatars d'un principe selon lequel, pour les flots d'Anosov, il existe de nombreuses sections, et une collection d'orbites borde une section de Birkhoff si elle s'enlace toujours dans le même sens avec un certain nombre fini d'orbites du flot.

À partir des exemples des flots de Hopf et de Lorenz, É. Ghys propose d'étudier les flots dits *lévogyres* [45], à savoir les flots sur des sphères d'homologie dont deux orbites périodiques quelconques s'enlacent toujours négativement [*]. Il montre que cette propriété est équivalente à l'existence d'une forme de Gauß, c'est-à-dire une biforme différentielle fermée dont l'intégrale calcule l'enlacement entre deux courbes, qui soit de signe constant le long du flot. Les formes en Gauß existent en général, mais

[*]. Il existe deux conventions opposées d'orientation des croisements des nœuds, utilisées respectivement par les théoriciens des nœuds et les dynamiciens. Dans ce travail, nous avons suivi la convention des noueurs, et avons donc des croisements et des enlacements négatifs. La convention importe peu, pourvu que tous les croisements soient toujours de même signe.

leur construction explicite n'est pas facile, voir [29] pour des constructions sur la sphère $\mathbb{S}^3$ ou l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. Étant donné un flot particulier, il n'existe pour le moment pas de critère naturel garantissant l'existence d'une forme de Gauß de signe constant sur le flot.

Fibré unitaire tangent et flot géodésique

Le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent à une surface, ou à une orbiface [†], à courbure négative est un exemple typique de flot d'Anosov. Contrôler le genre des sections de Birkhoff semble une première étape pour aborder le cas d'un flot d'Anosov quelconque. Des constructions de livres ouverts sur les fibrés unitaires tangents de surfaces ont été proposées par Masaharu Ishikawa dans [53] (généralisant une construction de Norbert A'Campo dans [2]), et par Emmanuel Giroux dans [47]. Ces deux constructions montrent que toute famille *symétrique* de géodésiques, c'est-à-dire constituée des relevés de géodésiques parcourues dans les deux sens, borde une surface de section.

D'autre part, dans le cas (non négativement courbé) du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent à la sphère ronde, le flot géodésique est un quotient du flot de Hopf sur $\mathbb{S}^3$, et donc toute collection homologiquement nulle borde une section de Birkhoff.

En 2006, É. Ghys a montré que le flot géodésique sur la surface modulaire $\mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ coïncide avec le flot de Lorenz dans $\mathbb{R}^3$ [43, 44]. Comme les nœuds de Lorenz sont fibrés et que deux orbites quelconques s'enlacent toujours négativement [17], on déduit que toute collection d'orbites périodiques du flot géodésique sur la surface modulaire borde une section de Birkhoff. Toutes ces observations accréditent la conjecture suivante.

Conjecture A (É. Ghys)**.** *Soit $T^1\Sigma$ le fibré unitaire tangent à une surface ou à une orbiface Σ à courbure négative ou nulle.*

(i) *L'enlacement entre deux collections homologiquement nulles d'orbites périodiques du flot géodésique sur $T^1\Sigma$ est négatif ou nul.*

(ii) *Si une collection de géodésiques coupe n'importe quelle autre géodésique de Σ, alors son relevé dans $T^1\Sigma$ borde une section de Birkhoff du flot géodésique.*

Autrement dit, on conjecture que le flot géodésique sur toute orbiface négativement courbée est lévogyre. La première partie de cette thèse est consacrée à cette question. Les paragraphes précédents montrent que la conjecture A est vraie dans les cas de la sphère ronde et de la surface modulaire.

Dans sa thèse [94], Jeremy Van Horn Morris étudie les livres ouverts sur les fibrés en tores sur le cercle. Le fibré unitaire tangent au tore plat est un tel fibré. À l'aide de ses travaux et d'une notion supplémentaire, à savoir celle de *polygone associé* à une famille homologiquement nulle de géodésiques, on obtient une démonstration élémentaire de la conjecture A dans le cas particulier du tore plat, ainsi qu'un contrôle explicite du genre des sections et de l'enlacement entre deux familles de géodésiques.

Théorème B. *Toute collection homologiquement nulle Γ d'orbites périodiques du flot géodésique sur $T^1(\mathbb{T}^2)$ borde une surface transverse au flot géodésique. La caractéristique d'Euler de n'importe quelle telle surface est l'aire $A(\Gamma)$ d'un certain polygone $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ associé, et son genre le nombre de points entiers à l'intérieur de $\mathrm{Poly}(\Gamma)$. La surface est une section de Birkhoff si et seulement si son genre est strictement positif. De plus l'enlacement entre deux collections homologiquement nulles de géodésiques est la différence des aires $A(\Gamma) + A(\Gamma') - A(\Gamma \cup \Gamma')$, c'est toujours un nombre négatif.*

[†]. Dans ce texte, une *orbiface* désigne une orbifold orientable de dimension 2. Le terme orbiface rappelle qu'il s'agit d'une généralisation de la notion standard de surface.

Ensuite, on se tourne vers les orbifaces de type $\Sigma_{2,q,\infty}$. Le fibré unitaire tangent est alors une variété de dimension 3 non compacte. Il admet une compactification pour chaque choix de classe d'Euler. La variété compacte obtenue est un espace lenticulaire dans lequel la fibre du cusp est un nœud torique situé dans un tore médian. Nous montrons que, pour chaque choix, le flot géodésique peut être déformé sur un *patron*, un objet bidimensionnel qui en capture toutes les propriétés topologiques. Dans sa thèse [76], Tali Pinsky démontre exactement la même propriété, mais avec des choix différents qui aboutissent à une présentation différente du patron. Plus précisément, elle voit le fibré unitaire tangent comme obtenu à partir de chirurgies autour d'un entrelacs de $\mathbb{S}^3$, tandis qu'on le voit ici comme un fibré de Seifert obtenu en recollant des tores. Nos deux démonstrations permettent en particulier de retrouver le théorème de Ghys d'égalité entre nœuds modulaires et nœuds de Lorenz, qui correspond au cas $q = 3$. Ensuite, on utilise cette construction, d'abord pour calculer l'enlacement entre une collection de géodésiques et la fibre du cusp, et ensuite pour démontrer la conjecture A pour les orbifaces de type $(2, q, \infty)$.

Théorème C. *Soit q un entier supérieur ou égal à 3. Soit $\Sigma_{2,q,\infty}$ l'orbiface de type $(2, q, \infty)$, et $T^1\overline{\Sigma_{2,q,\infty}}$ la compactification associée à la classe d'Euler nulle de son fibré unitaire tangent. Alors l'enlacement entre deux collections quelconques d'orbites périodiques du flot géodésique dans $T^1\overline{\Sigma_{2,q,\infty}}$ est négatif.*

La démonstration repose sur une détermination précise de la forme et de la position du patron, qui contient ici $q-1$ rubans, afin d'estimer l'enlacement entre deux collections d'orbites du patron. On peut espérer que la méthode se généralise aux orbifaces de type (p, q, ∞) pour $p \geqslant 3$, mais le patron contient dans ce cas $(p-1)(q-1)$ rubans, et le calcul de l'enlacement s'avère plus difficile.

Enfin, on passe à des orbifaces compactes et on généralise les constructions du cas $(2, q, \infty)$, en déformant le flot géodésique sur un *multi-patron*. Après un essai pédagogique, bien que non victorieux, sur les surfaces compactes, on démontre la conjecture A pour l'orbiface triangulaire $\Sigma_{2,3,7}$, à savoir le quotient du plan hyperbolique par le sous-groupe préservant l'orientation du groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle hyperbolique d'angles $\pi/2, \pi/3, \pi/7$.

Théorème D. *L'enlacement entre deux collections quelconques d'orbites périodiques du flot géodésique dans $T^1\Sigma_{2,3,7}$ est strictement négatif.*

Comme le fibré unitaire tangent $\Sigma_{2,3,7}$ est une sphère d'homologie, on a ici un exemple nouveau de flot lévogyre.

On peut s'interroger sur la nature de ces résultats. Le flot géodésique est le flot de Reeb pour la forme de contact de Liouville canonique sur le fibré unitaire tangent. Le fait d'être un flot de Reeb implique-t-il la négativité de l'enlacement ? Non, puisque d'après un théorème d'Etnyre et Ghrist [32], il existe une structure de contact sur $\mathbb{S}^3$ et un flot de Reeb pour celle-ci qui admet n'importe quel nœud comme orbite périodique, en particulier des nœuds non fibrés. Trouver une démonstration générale et directe de la conjecture A, en termes de forme de contact, de Liouville ou de propriété d'Anosov est un objectif que n'a pas été atteint dans ce travail. En particulier, il est naturel de se demander s'il existe sur le fibré unitaire tangent de toute surface une forme de Gauß naturelle qui soit strictement négative le long du flot géodésique ? L'existence d'une telle forme démontrerait directement la conjecture A.

Invariants asymptotiques des nœuds dans les flots

La seconde partie de cette thèse est consacrée à un autre type d'interaction entre théorie des nœuds et systèmes dynamiques.

Question. Étant donné un flot dans un espace à trois dimensions, admet-il des orbites périodiques ? Si oui, quels nœuds apparaissent ainsi ? Réciproquement, quelles informations sur le flot peut-on extraire du type des nœuds qu'il contient ? $\diamondsuit$

On ne s'intéresse qu'à la seconde partie de la question. Un premier exemple de réponse a été donné par Sol Schwartzmann [84] en 1957. Étant donnée une variété M de dimension 3 compacte, sans bord, munie d'un flot Φ, pour tout point x et pour tout temps t dans $\mathbb{R}_+$, on clôt l'orbite de x à $\Phi^t(x)$ par un arc géodésique afin d'obtenir un lacet fermé. On le note $k(x,t)$, et $[k(x,t)]$ désigne sa classe d'homologie. Le théorème de Schwartzmann affirme que pour toute mesure invariante μ, la limite $\lim\limits_{t\to\infty}[k(x,t)]/t$ existe pour μ-presque tout point. On la note $\mathrm{Sch}(\Phi,x)$. La moyenne $\displaystyle\int_M \mathrm{Sch}(\Phi,x)d\mu(x)$ ne dépend alors que du flot Φ et de la mesure μ, et est appelée *cycle asymptotique de Schwartzmann*.

L'hélicité $\mathrm{Hel}(X)$ d'un champ de vecteurs X est une quantité décrivant la capacité du champ à tourner, et fournit une borne inférieure sur l'énergie. En 1973, Vladimir Arnold a montré que l'hélicité, quantité invariante sous l'action des difféomorphismes de la variété, admet une définition en termes d'orbites du flot [6]. Pour presque tous x_1, x_2 dans M et pour presque tous t_1, t_2 positifs, les lacets $k(x_1,t_1)$ et $k(x_2,t_2)$ sont disjoints, on peut donc considérer leur nombre d'entrelacement $\mathrm{Enl}(x_1,x_2,t_1,t_2)$. Arnold a montré que, pour presque tous x_1, x_2 dans M, la quantité $\mathrm{Enl}(x_1,x_2,t_1,t_2)/(t_1t_2)$ admet une limite, notée $\mathrm{Enl}^\infty(x_1,x_2)$, quand t_1 et t_2 tendent vers $+\infty$. De plus, l'hélicité du champ de vecteurs engendrant le flot est égale à $\displaystyle\iint_{M\times M}\mathrm{Enl}^\infty(x_1,x_2)d\mu(x_1)d\mu(x_2)$. En particulier, si le flot est ergodique, pour presque tous x_1, x_2, l'hélicité est égale à $vol(M)^2\mathrm{Enl}^\infty(x_1,x_2)$. Ainsi l'hélicité, invariant dynamique du champ de vecteurs, est directement reliée à l'enlacement, quantité issue de la théorie des nœuds.

Les signatures sont des invariants de nœuds d'origine géométrique. Elles fournissent une infinité d'invariants, notés Sign_ω, paramétrés par le cercle-unité. En 2001, Jean-Marc Gambaudo et Étienne Ghys ont montré que les signatures admettent également un comportement asymptotique quadratique [38]. Plus précisément, ils ont montré que pour tout ω dans $\mathbb{U}^1$ et pour presque tout x dans M, la quantité $\mathrm{Sign}_\omega(k(x,t))/t^2$ admet une limite, notée $\mathrm{Sign}_\omega^\infty(x)$, quand t tend vers $+\infty$. De plus, si le flot est ergodique, la limite est la même pour presque tout x. On la note $\mathrm{Sign}_\omega^\infty(X)$. Enfin, pour tout ω, il existe alors une constante c_ω telle que $\mathrm{Sign}_\omega^\infty(X) = c_\omega\mathrm{Hel}(X)$.

Ainsi, même si l'enlacement et la famille des signatures forment une famille riche d'invariants de nœuds (en particulier de dimension infinie), leur comportement asymptotique ne fournit qu'un unique invariant. Le point culminant dans cette direction a été démontré par Sebastian Baader et Julien Marché en 2008 [9]. Les invariants de type finis sont des invariants de nœuds introduits en 1989 par Vassiliev [95]. Ils forment une famille très large et très riche d'invariants, puisque selon une conjecture toujours ouverte, deux nœuds différents seraient distingués par au moins un invariant de type fini. Néanmoins, Baader et Marché ont montré que, pour tout invariant a de type fini n et pour presque tout x dans M, la quantité $a(k(x,t))/t^{2n}$ admet une limite, notée $a^\infty(x)$, quand t tend vers $+\infty$. Si le flot est ergodique, la limite est la même pour presque tout x, on la note $a^\infty(X)$, et il existe alors une constante c_a telle que $a^\infty(X) = c_a\mathrm{Hel}(X)$.

Tous ces beaux résultats ont pourtant un aspect décevant, puisque tous les invariants de flots qu'ils définissent se trouvent être proportionnels.

Le polynôme d'Alexander d'un nœud est un des plus vieux invariants de nœud. Il a été généralisé de plusieurs façons (polynôme HOMFLY, crochet de Kauffman, homologie de Khovanov). Des calculs numériques réalisés à l'aide du logiciel Mathematica et du paquet KnotAtlas de Dror Bar-Natan suggèrent

que le degré du polynôme d'Alexander des orbites d'un flot admet un comportement asymptotique quadratique, et que celui-ci diffère de tous les invariants asymptotiques précédents. D'autre part, ces calculs montrent que le polynôme d'Alexander est relativement simple : petits coefficients, racines réparties au voisinage du cercle unité. Ces observations accréditent l'idée de *degré-limite*, voire de *polynôme-limite* du polynôme d'Alexander.

Flot de Lorenz et polynôme d'Alexander

Le flot de Lorenz est un exemple très riche pour l'étude des flots en dimension 3, et la nature topologique de ses orbites périodiques a été l'objet d'intenses études [17, 48, 49, 97, 96, 11, 30, 31, 16, 27, 46]. Ce flot est structurellement stable, et il est un exemple typique de flot chaotique. Sa relative simplicité, une description combinatoire de ses orbites périodiques, et un algorithme de calcul du polynôme d'Alexander pour les nœuds fibrés permettent ici d'arriver au résultat suivant :

Théorème E. *Soit K un nœud de Lorenz de genre g et d'indice de tresse b. Alors les racines du polynôme d'Alexander de K sont incluses dans l'anneau*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (2g)^{-8/(2b-1)} \leqslant |z| \leqslant (2g)^{8/(2b-1)} \right\}.$$

Pour presque tout point x de départ et pour presque tout t, le genre et l'indice de tresse du nœud de Lorenz $k(x,t)$ associé croissent asymptotiquement comme t^2 et t respectivement. Par conséquent, le théorème E implique que, pour presque tout x, les racines du polynôme d'Alexander de $k(x,t)$ tendent vers le cercle-unité quand t tend vers l'infini.

Évidemment, ce théorème ne démontre pas l'existence d'un polynôme-limite. Mais si on contrôlait en plus la répartition des racines sur le cercle-unité, on toucherait un tel objet. Nous conjecturons que ce résultat s'étend à d'autres flots, par exemple aux flots lévogyres auxquelles on pourraient appliquer le même genre de méthodes. Il pourrait même s'étendre à des flots quelconques si on disposait d'une présentation du polynôme d'Alexander comme polynôme caractéristique d'un avatar de la monodromie, dans le cas de nœuds non fibrés.

Ce résultat a un autre intérêt, complètement disjoint de la discussion précédente : il donne un exemple de propriété des nœuds de Lorenz qui n'est pas une conséquence directe de leur caractère fibré ou de leur primalité.

Nœuds de Lorenz et nœud modulaires

L'ensemble des géodésiques périodiques sur la surface modulaire $\mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, qui coïncide avec l'orbiface de type $(2,3,\infty)$, est naturellement énuméré par les classes de conjugaison de matrices de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, lesquelles sont également en bijection avec certains ordres dans des corps quadratiques. Une conséquence du lien inattendu entre nœuds de Lorenz et géodésiques périodiques sur la surface modulaire est de transporter sur les nœuds de Lorenz l'ensemble des structures existantes sur les nœuds modulaires. En particulier il existe une structure de groupe sur les ordres dans les corps quadratiques, c'est le *groupe des classes*. Par la correspondance de Ghys, on en déduit une structure de produit sur certains sous-ensembles des orbites périodiques du flot de Lorenz. En explicitant toutes les bijections mises en jeu, on démontre d'une part une propriété sur le comportement des nœuds de Lorenz triviaux dans le pendant du groupe des classes.

Théorème F. *Soit $t > 2$ un entier, α une racine du polynôme $x^2 - tx + 1$, et G le groupe des classes associé à l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$. L'ensemble des éléments de G associés à un nœud de Lorenz trivial forme un*

sous-groupe G_0 de G qui est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{d-1}$ où d est le nombre de diviseurs premiers de $t-2$. Soit X la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et Y la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors les matrices correspondant aux éléments de G_0 sont de la forme $X^m Y^{m'}$ avec $mm' = t-2$ et $m \wedge m' = 1$. Exprimée en termes de matrices, la multiplication de G_0 est donnée par la formule

$$X^{m_1} Y^{(t-2)/m_1} \cdot X^{m_2} Y^{(t-2)/m_2} = X^{m_3} Y^{(t-2)/m_3}, \text{ avec } m_3 = \frac{m_1 \vee m_2}{m_1 \wedge m_2}.$$

D'autre part, à l'aide des nœuds modulaires, on démontre que certains nœuds de Lorenz, qui *a priori* n'avaient rien à voir, coïncident en fait.

Théorème G. *Pour tout mot de Lyndon w, les orbites du flot de Lorenz correspondant à w et à son miroir sont isotopes.*

Plan

Dans le premier chapitre, on définit la plupart des notions utilisées : nœuds, sections, flots, patrons, nœuds fibrés, *etc.* avant de rappeler les constructions de Birkhoff, A'Campo-Ishikawa et de Giroux de livres ouverts dans les fibrés unitaires tangents. Notre présentation souligne en particulier que, à partir d'une fonction de Morse sur la surface, ces dernières constructions donnent le même livre ouvert.

Dans le deuxième chapitre, on étudie le flot géodésique sur le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Nous utilisons les boîtes hélicoïdales introduites par Jeremy Van Horn Morris dans sa thèse [94], nous associons à toute famille de géodésiques un polygone entier, et nous démontrons le théorème B, qui contient une caractérisation des sections de Birkhoff, une formule pour leur genre, et une autre pour l'enlacement entre collections de géodéosiques.

Dans le troisième chapitre, on passe aux orbifaces en courbure négative. On construit un patron pour le flot géodésique sur les orbifaces à un cusp. Cette construction a été réalisée parallèlement par Tali Pinsky dans sa thèse [76]. De là, on donne une formule simple pour l'enlacement des géodésiques avec le cusp. Ensuite nous établissons le théorème C qui affirme que, dans les fibrés unitaires tangents aux orbifaces de type $\Sigma_{2,q,\infty}$, deux collections de géodésiques périodiques ont un enlacement négatif.

Dans le quatrième chapitre, on adapte les idées du troisième chapitre aux surfaces, puis aux orbifaces compactes, et on montre le théorème D sur le flot géodésique sur l'orbiface $\Sigma_{2,3,7}$. Cette partie repose beaucoup sur des calculs réalisés avec un ordinateur programmé sous Sage [‡]. En effet, pour les surfaces, on réduit le problème de l'enlacement à la négativité d'une forme quadratique sur un cône dans un espace vectoriel de grande dimension, problème que nous avons étudié ensuite informatiquement.

Dans un intermède, on présente une construction d'un billard tridimensionnel dont les orbites périodiques représentent tous les nœuds possibles. C'est une courte note [28] issue d'une question posée sur le site Mathoverflow [§] [73].

Le sixième chapitre sert d'introduction aux deux suivants. On y introduit les nœuds de Lorenz, en rappelant en particulier leur origine et certaines de leurs propriétés. On démontre également leur caractère fibré à l'aide de la notion de somme de Murasugi, et on donne un algorithme de calcul de la monodromie. Ce chapitre est en partie tiré de l'article [27].

[‡]. `www.sagemath.org/`
[§]. `mathoverflow.net`

Dans le septième chapitre, on utilise les informations récoltées auparavant pour démontrer le théorème E. L'idée est de voir les racines du polynôme d'Alexander d'un nœud fibré comme les valeurs propres de la monodromie homologique. On suit alors l'algorithme de calcul de la monodromie du chapitre 6, et on contrôle la croissance des cycles quand la monodromie est itérée, afin de borner ses valeurs propres. Ici aussi, des calculs par ordinateurs ont été utilisés, pas pour démontrer les résultats eux-mêmes, mais pour rechercher les formules à démontrer d'une part, et pour vérifier leur validité d'autre part.

Dans le dernier chapitre, on reprend la construction de Ghys [44] qui met en correspondance nœuds de Lorenz et nœuds modulaires, et on la prolonge pour en déduire les deux théorèmes F et G. Ce chapitre est entièrement tiré de [27].

Première partie

Enlacement du flot géodésique

Chapitre 1

Généralités, constructions d'A'Campo et de Giroux

Ce premier chapitre est consacré à des définitions, conventions et rappels sur les objets que nous utilisons dans toute la suite : nœuds, nœuds fibrés, flots, patrons, sections de Birkhoff. De plus, nous exposons deux constructions classiques d'entrelacs fibrés, dûes à Emmanuel Giroux [47] pour l'une et à Norbert A'Campo [2] et Masaharu Ishikawa [53] pour l'autre. Ces deux constructions sont une motivation pour les chapitres suivants. En effet, elles montrent en particulier que toute famille *symétrique* de géodésiques orientées sur une surface (c'est-à-dire les familles contenant les relevés des géodésiques parcourues selon les deux orientations possibles) se relève en un entrelacs fibré dans le fibré unitaire tangent. C'est cette propriété que nous généralisons dans les trois chapitres suivants en enlevant l'hypothèse de symétrie sur les familles de géodésiques.

Bien que toutes deux de présentations différentes, les constructions d'A'Campo-Ishikawa et de Giroux partent d'une fonction de Morse sur une surface, définissent un entrelacs associé dans le fibré unitaire tangent, et montrent que celui-ci est fibré. Il se trouve que les entrelacs associés à une même fonction de Morse coïncident, et que ces deux constructions aboutissent à la même fibration. Nous montrons la raison de cette coïncidence.

1.1 Définitions et notations

1.1.a Nœuds et nœuds fibrés

Nous renvoyons à [71, 82, 21] pour des introductions générales à la théorie des nœuds.

1.1.1 Définition. Soit M^3 une variété orientée de dimension 3. Un *nœud* de M^3 est une classe d'isotopie de plongement du cercle $\mathbb{S}^1$ orienté dans la variété M^3 orientée. Un *entrelacs* de M^3 est une classe d'isotopie de plongements de plusieurs cercles dans M^3. $\diamondsuit$

1.1.2 Définition. Soit K un entrelacs orienté dans une variété M^3 de dimension 3. On appelle *surface de Seifert* pour K une surface orientée de M^3 dont le bord orienté est K. On appelle *genre* de K le genre minimal d'une surface de Seifert pour K. $\diamondsuit$

Remarquons qu'un nœud dans $\mathbb{S}^3$ est trivial si et seulement si il borde un disque, donc si et et seulement si son genre est nul.

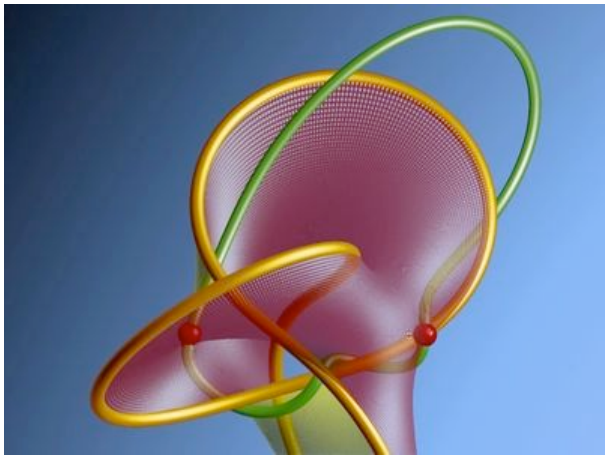

FIGURE 1.1.1 – Un nœud trivial et un nœud de trèfle dans $\mathbb{S}^3$. Une surface de Seifert bordée par le trèfle, coupée en deux points par le nœud trivial. L'enlacement entre les deux nœuds vaut alors 2 ou -2, selon les orientations respectives des nœuds.

Étant donnés deux nœuds orientés disjoints K_1, K_2 dans $\mathbb{S}^3$, leur *enlacement* $\mathrm{Enl}(K_1, K_2)$ est défini comme le nombre d'intersection algébrique $K_1 \cdot S_2$, où S_2 est une surface orientée de bord K_2. Ce nombre ne dépend pas du choix de S_2. En effet, pour tout autre choix S_2', la 2-chaîne $S_2 \cup -S_2'$ n'a pas de bord. Comme la classe $[K_1]$ est nulle, on a $K_1 \cdot (S_2 \cup -S_2') = 0 \cdot (S_2 \cup -S_2') = 0$, d'où $K_1 \cdot S_2' = K_1 \cdot S_2$. Modulo certaines restrictions, on peut définir l'enlacement dans d'autres variétés. En effet, dans une variété M^3 quelconque, si la classe $[K_2]$ dans $H_1(M^3, \mathbb{Q})$ est nulle, alors un certain multiple de K_2 borde une surface, c'est-à-dire que K_2 borde une 2-chaîne rationnelle $[S_2]$. On peut alors compter l'intersection entre $[K_1]$ et $[S_2]$. Et si la classe $[K_1]$ est nulle dans $H_1(M^3, \mathbb{Q})$, alors cette intersection ne dépend pas de S_2.

1.1.3 Définition. Soit M^3 une variété de dimension 3, et K_1, K_2 deux entrelacs orientés dont les classes d'homologie rationnelles sont nulles. Soit S_2 une 2-chaîne rationnelle de bord K_2. Alors l'enlacement $\mathrm{Enl}(K_1, K_2)$ est défini comme l'intersection entre les chaînes rationnelles $[K_1]$ et $[S_2]$. $\diamondsuit$

Autrement dit, quitte à multiplier les chaînes K_1 et K_2 par deux entiers q_1 et q_2, leurs classes d'homologie entière sont nulles, et l'enlacement $\mathrm{Enl}(K_1, K_2)$ est le nombre d'intersection entre les chaînes entières $q_1 K_1$ et $q_2 S_2$, divisé par le produit $q_1 q_2$.

1.1.4 Définition. Soit K un entrelacs orienté dans une variété M^3 de dimension 3. Alors K est dit *fibré* si son complémentaire *fibre* sur le cercle $\mathbb{S}^1$, c'est-à-dire s'il existe une surface de Seifert Σ_K pour K et un difféomorphisme h de Σ_K égal à l'identité près du bord tels que le complémentaire de K dans M^3 soit isomorphe à $\Sigma_K \times [-\pi, \pi]/_{(h(x),-\pi)\sim(x,\pi)}$. $\diamondsuit$

On remarque que, via l'isomorphisme de la définition 1.1.a, la projection θ sur le deuxième facteur définit une fonction de $\mathbb{S}^3 \smallsetminus K$ sur $\mathbb{S}^1 = [-\pi, \pi]/_{-\pi\sim\pi}$ qui possède les propriétés suivantes :

(i) θ est lisse et sans point critique ;

(ii) sur un voisinage tubulaire $N(K)$ du nœud homéomorphe à un tore plein $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$, la fonction θ s'identifie à la fonction argument sur le facteur $\mathbb{D}^2$.

On dit alors que couple (K, θ) est un *livre ouvert* dont K est la *reliure* et les fibres $\theta^{-1}(t)$ sont les *pages*.

Le nœud trivial est un exemple de nœud fibré. On part d'un cercle en métal que l'on trempe dans du savon liquide ; quand on ressort le cercle, le savon forme un disque bordé par le nœud en métal, lequel

est topologiquement trivial. En soufflant sur la pellicule de savon pour la gonfler jusqu'à son éclatement, on définit une fibration sur l'intervalle $[0, \pi[$. En refaisant la même opération en soufflant de l'autre côté, on définit une fibration sur $]-\pi, 0]$.

L'application h de la définition n'est pas définie de façon unique, mais sa classe d'isotopie l'est.

1.1.5 Définition. Soit K un entrelacs orienté fibré dans une variété M^3 de dimension 3. La classe de l'application h de la définition 1.1.a dans le mapping class group $MCG(\Sigma_K, \partial\Sigma_K)$ est appelée *monodromie géométrique* de K associée à Σ_K. ♢

Les éléments du groupe $MCG(\Sigma_K, \partial\Sigma_K)$ agissent sur les classes d'isotopie de courbes de Σ_K dont le bord est dans $\partial\Sigma_K$. Cette action induit une action sur les éléments du groupe $H_1(\Sigma_K, \partial\Sigma_K; \mathbb{Z})$. On appelle *monodromie homologique* l'action induite par l'homologie géométrique, on la note $[\cdot]$.

1.1.b Flots et patrons

L'origine des patrons est l'article [17] de Birman et Williams. Une référence complète est par exemple [40].

1.1.6 Définition. Soit M une variété et X un champ de vecteurs défini sur M, on appelle *flot* de X l'application Φ de $\mathbb{R} \times M$ dans M dont la dérivée en $t = 0$ coïncide avec X et qui, pour tout point P de M, vérifie

$$\Phi(t_1 + t_2, P) = \Phi(t_1, \Phi(t_2, P)),$$

c'est-à-dire que $\Phi(t, P)$ décrit l'orbite partant de P le long du champ X, lorsqu'une telle application existe.

Un *semi-flot* est une application semblable, mais définie seulement sur $\mathbb{R}_+ \times M$. ♢

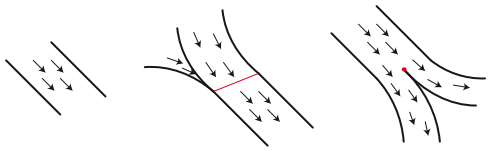

FIGURE 1.1.2 – Ce à quoi ressemble un patron. Un point générique, un segment de convergence et un point de séparation.

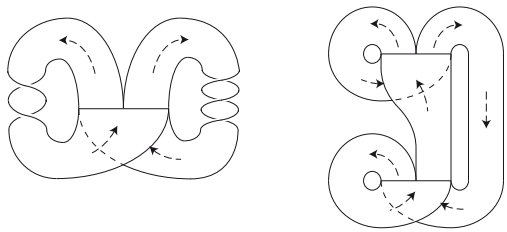

FIGURE 1.1.3 – Deux exemples de patrons complets : un patron de Lorenz généralisé et le patron de Ghrist.

1.1.7 Définition (voir figures 1.1.2 et 1.1.3)**.** Soit M une variété de dimension 3, un *patron* dans M est une surface S lisse, fermée, branchée, plongée, composée d'un nombre fini de rubans Rub_r, chacun muni d'un champ de vecteur X_r, de sorte que

(i) chaque ruban Rub_r est difféomorphe au carré $[0, 1]^2$ muni du champ horizontal $\dfrac{\partial}{\partial x}$,

(ii) deux rubans $\mathrm{Rub}_{r_1}, \mathrm{Rub}_{r_2}$ distincts ne peuvent se rencontrer qu'en leurs côtés verticaux, le long de segments dits de *branchement*, où les champs X_{r_1} et X_{r_2} coïncident,

(iii) en tout point P d'un segment de branchement, soit il y a au plus un ruban sortant, soit il y a deux rubans sortants et alors P est un coin de chacun des deux rubans.

Un point d'un segment de branchement d'où partent deux rubans est appelé *point de séparation*. Une *orbite* du patron est une immersion de la droite $\mathbb{R}$ partout tangente au champ de vecteurs. Un patron est dit *complet* si pour tout point sur un segment de branchement, il y a au moins un ruban sortant. ♢

D'après la propriété (iii), il n'y a pas forcément une unique orbite passant par n'importe quel point du patron : une orbite a le choix entre deux rubans si elle arrive à un point de séparation. Sur un patron complet et hors des préimages des points de séparation, il n'y a pas de tel choix, et donc le champ du patron induit un semi-flot.

1.1.c Sections de Birkhoff

Comme mentionné dans l'introduction, les sections de Birkhoff ont été introduites par Poincaré dans un cas particulier, puis par Birkhoff qui a dégagé leur définition dans [13].

1.1.8 Définition. Soit M^3 une variété compacte de dimension 3 munie d'un flot Φ. Une surface à bord S orientée est une *section de Birkhoff* pour Φ si

(i) le bord de S est la réunion d'orbites périodiques de Φ,
(ii) le flot Φ est transverse à S en son intérieur,
(iii) toute orbite de Φ rencontre S une infinité de fois dans le futur et dans le passé. $\diamondsuit$

Une section de Birkhoff S d'un flot Φ induit un livre ouvert, dont la reliure est le bord ∂S, et la page l'intérieur de la surface S. En effet, quitte à renormaliser Φ, on peut supposer que partant d'un point de S, le temps de premier retour sur S est constant égal à 2π. L'application qui à un point quelconque de $M^3 \smallsetminus \partial S$ associe le temps de retour sur S induit une fibration sur $[0, 2\pi[$.

Les flots géodésiques sur les orbifaces à courbure négative sont des exemples importants de flots de type Anosov [5, 63]. Une propriété des flots d'Anosov est qu'ils sont markoviens [80], c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini de rectangles transverses au flot dont la réunion coupe chaque orbite une infinité de fois. Une orbite du flot est alors caractérisée de façon unique par la suite bi-infinie des rectangles qu'elle coupe, et l'ensemble des suites admissibles est un décalage de type fini. Une orbite périodique est dite *minimale* si elle coupe au plus une fois chaque rectangle. Deux résultats importants de D. Fried caractérisent l'existence de sections de Birkhoff pour les flots d'Anosov en terme d'enlacement. Le premier traite de sections pour les variétés à bord. Étant donnée une surface dans une variété, elle définit par intersection une classe de cohomologie entière.

1.1.9 Théorème (théorème H de [34])**.** *Soit Φ un flot d'Anosov sur une variété compacte M transverse au bord de M, et soit v dans $H^1(M, \mathbb{Z})$. Alors il existe une section de Φ de classe v si et seulement si pour toute orbite périodique γ minimale, $v(\gamma)$ est positif.* $\clubsuit$

Le second théorème permet de ramener l'existence de sections de Birkhoff à l'existence de sections sur une variété à bord.

1.1.10 Théorème (un cas particulier du théorème M de [34])**.** *Soit K un entrelacs dans une variété M^3 de dimension 3 constitué d'orbites périodiques du flot Φ. Alors il existe une surface de section de Birkhoff S pour Φ de bord K si et seulement si il existe u dans $H^1(M \smallsetminus K, \mathbb{Z})$ tel que*

(i) *on a $u(\gamma) = \pm 1$ pour tout lacet γ méridien d'une composante de K,*
(ii) *il existe une section pour $\Phi|_{M \smallsetminus K}$ de classe u.* $\clubsuit$

De ces deux théorèmes, on tire le résultat suivant qui nous s'appliquera à nos énoncés :

1.1.11 Corollaire. *Soit M^3 une sphère d'homologie de dimension 3 munie d'un flot d'Anosov Φ. Supposons que l'enlacement entre deux collections quelconques d'orbites périodiques est négatif. Alors toute collection d'orbites périodiques borde une section de Birkhoff de Φ et forme un entrelacs fibré.* $\clubsuit$

Démonstration. Soit Γ une collection d'orbites périodiques. On considère la forme v dans $H^1(M \smallsetminus \Gamma, \mathbb{Z})$ définie par $v(\Gamma') = -\mathrm{Enl}(\Gamma, \Gamma')$. Le flot Φ sur le complémentaire de Γ est toujours un flot d'Anosov. Alors la condition (i) du théorème M est vérifiée, et la condition (ii) est vérifiée d'après le théorème H. Par conséquent, Γ borde bien une section de Birkhoff pour Φ. ♠

1.2 Les divides d'A'Campo et Ishikawa

La notion de divide a été introduite par N. A'Campo sur le disque [2], et généralisée sur les surfaces par M. Ishikawa [53]. Ce qui nous intéresse ici, ce sont les divides sur les surfaces sans bord.

1.2.1 Définition. Soit Σ une surface sans bord. Un *divide* D est l'image d'une famille générique finie d'immersions lisses $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ du cercle $\mathbb{S}^1$ dans Σ. L'*entrelacs associé* à D dans $T^1\Sigma$ est l'ensemble $L(D)$ des vecteurs tangents au divide, soit

$$L(D) = \left\{ \left(\gamma_i(t), \pm \frac{\gamma_i'(t)}{\|\gamma_i'(t)\|} \right) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, t \in \mathbb{S}^1 \right\}.$$

♢

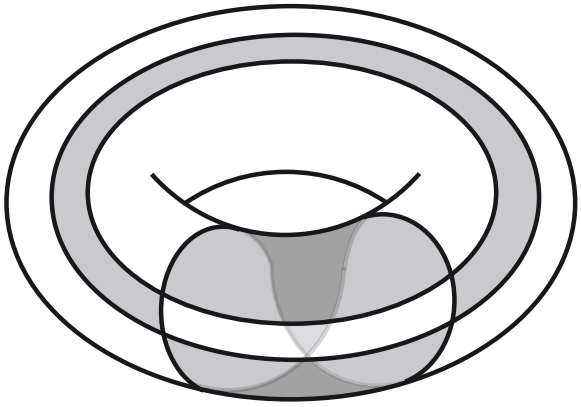

FIGURE 1.2.1 – Un exemple de divide omniprésent sur un tore.

Par « générique », on entend que les images de deux cercles ne se coupent qu'en un nombre fini de points, et transversalement, et que les images de trois cercles ne se coupent jamais en un même point.

Si un divide est composé de plongements géodésiques du cercle, c'est-à-dire de géodésiques périodiques sur la surface, alors l'entrelacs associé est composé d'orbites périodiques du flot géodésique. Cet entrelacs est particulier puisque ses composantes sont appariées : s'il contient le relevé d'une géodésique orientées, alors il contient le relevé de la même géodésique avec l'orientation opposée.

Un intérêt des divides, remarqué par A'Campo dans le cas du disque, et généralisé par Ishikawa pour les surfaces, est que, sous des hypothèses faibles, les entrelacs associés sont fibrés.

1.2.2 Définition. Soit Σ une surface. Un divide D sur Σ est dit *omniprésent* si

(i) l'ensemble D est connexe,
(ii) le complémentaire de D dans Σ est constituée de régions $R_1, \ldots, R_n$ simplement connexes,
(iii) l'ensemble des régions $R_1, \ldots, R_n$ est bicoloriable. ♢

En gros, un divide est omniprésent s'il visite toute la surface, et ne néglige aucune part de sa topologie. La troisième condition semble plus cosmétique, mais elle est nécessaire pour le théorème suivant. Elle est toujours vérifiée sur un disque ou une sphère.

1.2.3 Théorème. *Soit Σ une surface et D un divide omniprésent sur Σ. Alors l'entrelacs $L(D)$ associé est fibré dans $T^1\Sigma$.* ♣

Nous proposons une première preuve dans le cas particulier où le divide est composé d'arcs géodésiques. C'est le premier exemple de construction générale par Birkhoff de section du flot géodésique [13]. C'est cette approche que nous généraliserons à des familles non symétriques dans les chapitres ultérieurs.

Démonstration d'après Birkhoff pour un divide géodésique. Soit D un divide géodésique. Par définition, les composantes de $L(D)$ sont des orbites périodiques du flot géodésique sur $T^1\Sigma$. On va montrer que l'enlacement entre $L(D)$ et n'importe quelle collection de géodésique périodique est négatif. Il suffira d'appliquer le corollaire 1.1.11 pour en déduire que $L(D)$ borde une section de Birkhoff du flot géodésique, et est par conséquent la reliure d'un livre ouvert.

Soit d un arc de D. On considère la surface immergée S_d composée des vecteurs basés en d, orientée de sorte que son bord soit la 1-chaîne $2(T^1d)$, c'est-à-dire le double du relevé de l'arc d, parcouru dans les deux sens (voir figure 1.2.2). Alors, vue l'orientation du fibré unitaire tangent, les relevés des géodésiques coupant d traversent toujours S_d négativement. Par conséquent, pour toute géodésique γ dans $T^1\Sigma$, l'enlacement de γ avec chacun des entrelacs $L(d)$, pour d dans D, est négatif ou nul. Comme la projection de γ coupe au moins un arc de D, l'enlacement de γ avec $L(D)$ est strictement négatif. ♠

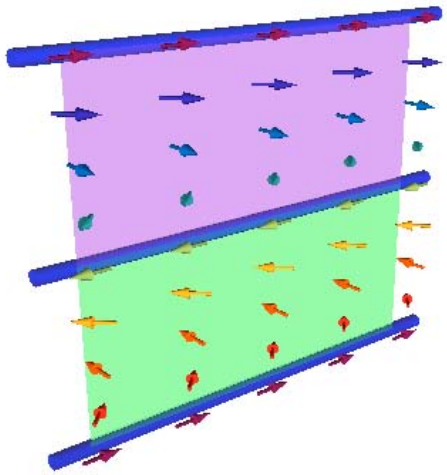

FIGURE 1.2.2 – La 2-chaine S_d associée à un arc d d'un divide géodésique, orientée de sorte que son bord soit $2L(d)$. Avec l'orientation naturelle du fibré unitaire tangent, toute géodésique coupe S_d négativement.

En fait, Birkhoff ne disposait pas du corollaire 1.1.11, et construisit une véritable surface de section en lissant aux voisinage des croisements avec l'aide de la surface montrée sur la figure 1.2.4. Nous proposons maintenant la démonstration d'A'Campo qui ne se restreint pas au cas d'un divide géodésique.

Esquisse de démonstration. L'idée principale est qu'un divide omniprésent est le lieu des zéros d'une fonction de Morse dont les points critiques d'indice 1 sont les intersections entre branches du divide.

Soit D un divide omniprésent. Colorions l'ensemble des régions complémentaires de D en deux couleurs $+$ et $-$ de sorte que deux régions partageant une arête soient de couleurs différentes. Comme chaque région est homéomorphe à un disque dont les coins sont exactement les intersections entre

branches de D, il existe une fonction de Morse f positive (*resp.* négative) sur les régions coloriées positivement (*resp.* négativement), et admettant un unique maximum (*resp.* minimum) par région positive (*resp.* négative). Les points critiques d'indice 1 sont alors exactement les intersections entre branches du divide. Soit χ une fonction lisse auxiliaire qui vaut 1 au voisinage des points critiques de f, et 0 loin des points critiques, et η une constante positive supposée petite. On pose alors

$$F(x,u) = f(x) + i\,\eta\, df(x)(u) + \eta^2\,\chi(x)\, d^2 f(x)(u,u). \tag{1.2.1}$$

La fonction F s'annule uniquement sur $L(D)$. Un calcul facile montre que, pour η suffisamment petit, la fonction F n'a pas de point critique. L'argument de F induit alors une fibration du complémentaire de $L(D)$ sur $\mathbb{S}^1$. ♠

Notons pour la suite que la preuve précédente utilise principalement une fonction de Morse sur la surface, ainsi qu'une fonction accessoire pour lisser la construction au voisinage des fibres des points critiques.

Décrivons la page $\{(x,u) \mid \arg(F(x,u)) = 0\}$. Il s'agit de l'ensemble des vecteurs (x,u) tels que $df(x)(u) = 0$ et $f(x) + \eta^2\,\chi(x)\, d^2 f(x)(u,u) > 0$. Hors du voisinage des points critiques d'indice $(1,1)$, il s'agit des vecteurs tangents aux niveaux de f dans les régions où f est positive. Au voisinage d'un maximum de f, cette nappe forme donc une double hélice. Au voisinage des points critiques d'indice $(1,1)$, il s'agit des nappes figurées sur la figure 1.2.3. De même la page $\{(x,u) \mid \arg(F(x,u)) = \pi\}$ correspond aux vecteurs tangents aux niveau de f dans les régions où f est négative, à des doubles hélices au voisinage des minima de f_0, et aux nappes de la figure au voisinage des points-selles.

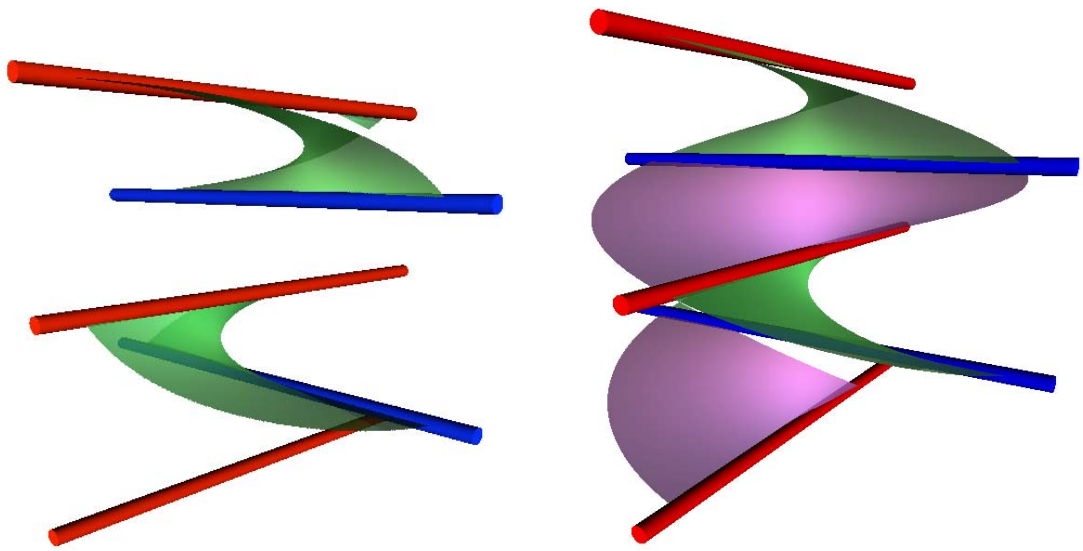

FIGURE 1.2.3 – À gauche, la nappe correspondant à $\arg(F(x,u)) = 0$ au voisinage de la fibre d'un point-selle de f dans la construction d'A'Campo. À droite, on a ajouté la nappe correspondant à $\arg(F(x,u)) = \pi$.

Quant à la page $\{(x,u) \mid \arg(F(x,u)) = \pi/2\}$, il s'agit de l'ensemble des vecteurs (x,u) tels que $df(x)(u) > 0$ et $f(x) + \eta^2\,\chi(x)\, d^2 f(x)(u,u) = 0$. Hors du voisinage des points critiques d'indice $(1,1)$, il s'agit des vecteurs basés sur $f^{-1}(0)$ et pointant vers les régions positives. Cette nappe ne passe pas au voisinage des extrema de f. Au voisinage des points critiques d'indice $(1,1)$, il s'agit d'une des deux nappes figurées sur la figure 1.2.4. De même la page $\{(x,u) \mid \arg(F(x,u)) = 3\pi/2\}$ correspond aux vecteurs tangents basés sur $f^{-1}(0)$ et pointant vers les régions négatives.

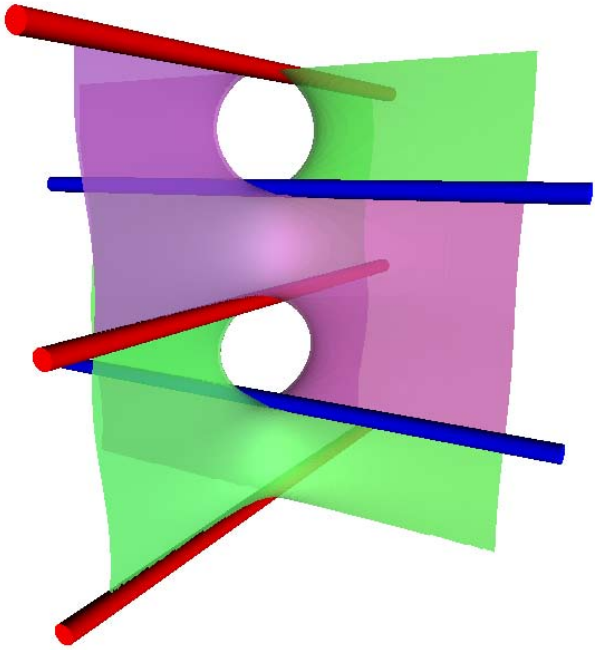

FIGURE 1.2.4 – Les nappes correspondant à $\arg(F(x,u)) = \pi/2$ et $\arg(F(x,u)) = 3\pi/2$ au voisinage de la fibre d'un point-selle de f dans la construction d'A'Campo. Elles correpondent également au lissage proposé par Birkhoff dans [13] pour connecter les nappes représentées sur la figure 1.2.2.

1.3 Les livres ouverts de Giroux

Dans [47, exemple 4.8], E. Giroux propose une construction de livre ouvert sur le fibré des éléments de contact d'une variété en toute dimension. Nous décrivons maintenant cette construction dans le cas des surfaces, et avec le revêtement d'ordre 2 du fibré des éléments de contact qu'est le fibré unitaire tangent, pour remarquer que la construction coïncide avec celle d'A'Campo et Ishikawa.

Le point de départ est presque le même que dans la section précédente : une surface Σ et une fonction de Morse f_0 lisse auto-indexée sur Σ. L'objectif aussi : montrer que l'entrelacs obtenu en relevant dans T^1M les vecteurs tangents à $f_0^{-1}(1)$ est fibré.

On considère le gradient ∇f_0, et quitte à modifier f_0 localement, on suppose que les valeurs propres de df_0 aux points critiques sont réelles et distinctes. Le linéarisé du champ ∇f_0 agit sur les vecteurs tangents à M, et donc ∇f_0 se relève en un champ X_0 sur TM. Comme les valeurs propres de f_0 sont distinctes, le champ X_0 a des singularités isolées dans les fibres au-dessus des points critiques de f_0 correspondant aux vecteurs propres de la Hessienne de f_0. On considère le champ X sur T^1M obtenu en projetant dans chaque fibre le champ X_0 sur T^1M.

On construit à présent une fonction de Morse f auto-indexée sur T^1M de sorte que le champ X soit transverse aux niveaux de f et que les points critiques de f soient les points singuliers de X. Au voisinage des singularités de f_0, le champ linéarisé de X agit sur chaque fibre, et donc il existe sur toute fibre $\pi^{-1}(x)$ une fonction de Morse auto-indexée f_x dont le gradient est le linéarisé de X. Il suffit alors de poser $f = \pi \circ f_0 + 1/2 + 2\chi(x)f_x$, où χ est une fonction plateau non nulle au voisinage des singularités de f_0. Les points critiques de f sont alors dans les fibres au-dessus des points critiques de f_0, et coïncident avec les singularités de X.

On introduit alors deux surfaces particulières. D'une part on considère la surface médiane $S_m =$

$f^{-1}(3/2)$. Loin des singularités, celle-ci correspond aux fibres des points de $f_0^{-1}(1)$. Au voisinage des fibres singularités d'indice $(1,1)$, elle correspond à la surface lisse de la partie gauche de la figure 1.3.1. Elle sépare T^1M en deux parties, et le flot X lui est transverse.

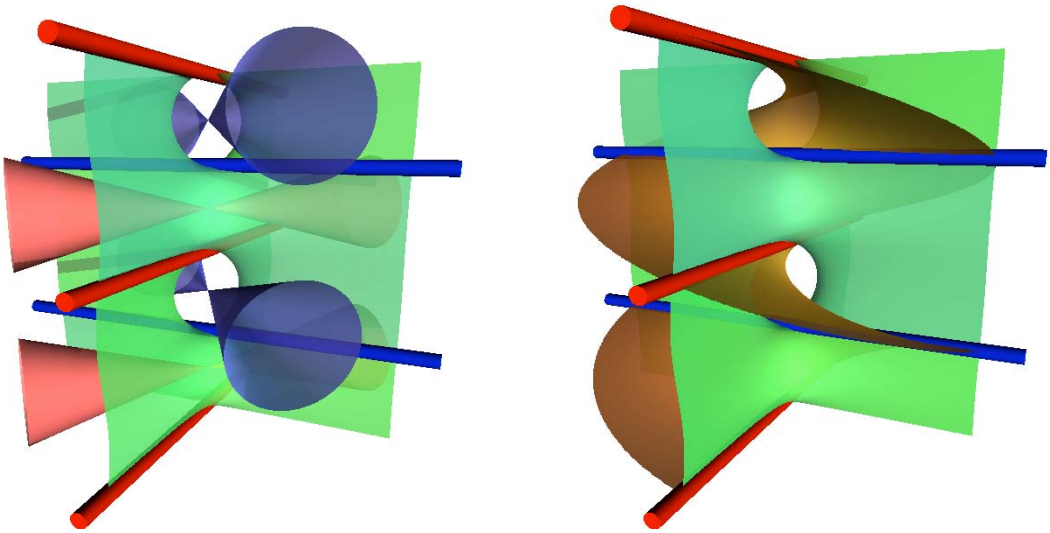

FIGURE 1.3.1 – À gauche, l'allure de la nappe $f^{-1}(3/2)$ dans la construction de Giroux, elle est coupée en deux par $L(f_0)$. On a aussi représenté les morceaux des nappes $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(2)$, qui contiennent des points critiques d'indice 1 et 2 respectivement. À droite, les nappes $f^{-1}(3/2)$ et S_c de la construction de Giroux, au voisinage de la fibre d'un point critique d'indice 1. Elles se coupent transversalement le long de l'entrelacs $L(f_0)$. Elles se trouvent coïncider avec les quatre nappes particulières des figures 1.2.3 et 1.2.4 de la construction de A'Campo.

D'autre part, on considère la surface S_c formée des vecteurs orthogonaux au champ X_0. Cette surface contient en particulier les fibres des points critiques pour f_0, et deux vecteurs par fibre régulière. Au voisinage d'une fibre critique, elle a l'allure d'une double-hélice. Elle a donc l'allure de la nappe représentée sur la figure 1.2.3.

En tout point régulier pour f_0, le champ ∇f_0 est orthogonal aux niveaux de f_0, et donc en particulier en tout point de $f_0^{-1}(1)$, le champ ∇f_0 est orthogonal à $f^{-1}(1)$. D'autre part, pour tout point x dans $f_0^{-1}(1)$, la fonction f_x s'annule sur les vecteurs tangents à $f_0^{-1}(1)$. Par conséquent l'intersection des deux surfaces S_m et S_c est l'ensemble des vecteurs tangents à $f_0^{-1}(1)$. On le note $L(f_0)$.

La construction de Giroux d'un livre ouvert se termine comme suit : le flot X est transverse à la surface S_m. On pousse celle-ci le long de X_0 en gardant $L(f_0)$ fixe. Alors comme le champ X n'a pas de singularités hors de S_c, la surface S_m vient s'accumuler sur S_c, et on a décrit la moitié de la fibration qui se déroule dans $f^{-1}([3/2,3])$. La moitié qui se déroule dans $f^{-1}([0,3/2])$ s'obtient en remontant le champ X.

On termine ce chapitre en remarquant qu'étant donnée une fonction de Morse auto-indexée f_0 sur Σ, les constructions d'A'Campo-Ishikawa et Giroux mettent en jeu le même entrelacs constitué des vecteurs tangents à $f_0^{-1}(1)$, et montrent qu'il est fibré. Comme les livres ouverts construits ont les mêmes quatre pages particulières en commun, les fibrations coïncident.

Chapitre 2

Sections de Birkhoff pour le flot géodésique sur le tore plat

Dans ce chapitre, nous caractérisons et construisons toutes les sections de Birkhoff pour le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent au tore plat $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (théorème 2.3.1). Plus précisément, nous montrons que toute collection homologiquement nulle de géodésiques périodiques borde une surface transverse au flot, et que dans la plupart des cas, que nous déterminons, cette surface coupe toutes les orbites. C'est alors une section de Birkhoff. De plus, notre approche permet de décrire les classes d'isotopie de sections, et de calculer quelques invariants topologiques associés, à savoir leur genre, dont nous montrons qu'il ne dépend que du bord de la section et non de sa classe d'isotopie, et l'enlacement entre familles homologiquement nulles de géodésiques.

La stratégie est la suivante. À toute famille homologiquement nulle Γ d'orbites périodiques du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent au tore, on associe un polygone convexe $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ dans le réseau affine $\mathbb{Z}^2$ (un réseau sans origine privilégiée). Ensuite, étant donnée une surface F transverse au flot et de bord Γ, on montre que les contraintes sur sa position permettent de tronçonner la surface F en briques élémentaires, appelées ici *boîtes hélicoïdales*, et que la caractéristique d'Euler de la surface F est l'opposé du nombre de boîtes hélicoïdales. Ce nombre coïncide avec l'aire du polygone $\mathrm{Poly}(\Gamma)$, et donc ne dépend que de la famille Γ. De plus, on montre que F est déterminée à isotopie près par le choix d'une origine pour le réseau affine contenant le polygone $\mathrm{Poly}(\Gamma)$, autrement dit par un plongement de $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ dans le réseau vectoriel $\mathbb{Z}^2$, ce qui permet de classer les sections à isotopie près. Quant à l'enlacement entre deux familles de géodésiques, on le détermine en comptant les points d'intersection entre la première famille et une surface bordée par la seconde.

L'existence, pour toute famille homologiquement nulle, d'une section de Birkhoff est établie, sous l'angle de la géométrie de contact et des livres ouverts, dans la thèse de Jeremy Van Horn Morris [94]. En particulier, les boîtes hélicoïdales figurent dans son travail. La nouveauté ici est l'introduction du polygone $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ qui permet une présentation concise et élémentaire, et des formules simples pour le genre et l'enlacement.

2.1 Géodésiques périodiques et polygone affine associé

Dans tout le chapitre, on note $\mathbb{T}^2$ le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ avec la métrique euclidienne et l'orientation standards. Son fibré unitaire tangent, noté $T^1(\mathbb{T}^2)$, est trivial. On l'identifie à $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$, où le cercle $\mathbb{S}^1$ est orienté trigonométriquement. Étant donné un point de coordonnées (x, y) de $\mathbb{T}^2$, on note (x, y, θ) les

coordonnées du vecteur unitaire tangent faisant un angle $\theta \in [0, 2\pi[$ avec la direction x. Pour tout θ, on appelle *niveau* le tore orienté $N_\theta = \{(x, y, \theta) | (x, y) \in \mathbb{T}^2\}$. Le flot géodésique sur $T^1(\mathbb{T}^2)$ est engendré par le champ de vecteurs $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Si γ est une orbite périodique du flot, alors γ est le relevé d'une géodésique périodique, notée $\pi(\gamma)$, sur $\mathbb{T}^2$, et la courbe γ vit dans un unique niveau, noté N_{θ_γ}. Si on note (p, q) les coordonnées du cycle $[\pi(\gamma)]$ dans la base canonique de $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$, alors p et q sont premiers entre eux et on a $\tan(\theta_\gamma) = p/q$. Dans la base canonique de $H_1(T^1(\mathbb{T}^2), \mathbb{Z})$, le cycle $[\gamma]$ a pour coordonnées $(p, q, 0)$.

Dans toute la suite, si Γ désigne une famille finie d'orbites périodiques du flot géodésique sur $T^1(\mathbb{T}^2)$, alors on suppose que Γ contient $n_1 + \cdots + n_k$ orbites notées $\{\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{kn_k}\}$ vivant dans les niveaux $N_{\theta_1}, \ldots, N_{\theta_k}$ respectivement, avec $0 \leqslant \theta_1 < \cdots < \theta_k < 2\pi$. Ces niveaux sont appelés *niveaux critiques*, et les autres niveaux sont dits *génériques*. On note $I_1, \ldots, I_k$ les intervalles $]\theta_1, \theta_2[, \ldots,]\theta_{k-1}, \theta_k[,]\theta_k, \theta_1[$. Les classes d'homologie des projections des courbes γ_{ij} sur $\mathbb{T}^2$ sont naturellement notées $(p_{11}, q_{11}), \ldots, (p_{kn_k}, q_{kn_k})$. Comme toutes les orbites dans un même niveau sont parallèles et appartiennent donc à la même classe d'homologie, on simplifie cette dernière notation en $(p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k)$. Et comme la troisième coordonnée de la classe d'homologie des orbites périodiques est toujours nulle, on a la caractérisation suivante :

2.1.1 Lemme. *Une famille Γ de géodésiques périodiques dans $T^1(\mathbb{T}^2)$ est homologiquement nulle si et seulement si les classes d'homologie $\{(p_{11}, q_{11}), \ldots, (p_{kn_k}, q_{kn_k})\}$ des projections des éléments de Γ sur $\mathbb{T}^2$ ont une somme nulle, c'est-à-dire si on a*

$$\sum_{i,j} (p_{ij}, q_{ij}) = 0, \tag{2.1.1}$$

soit, avec les notations simplifiées,

$$\sum_{i=1}^{k} n_i (p_i, q_i) = 0. \tag{2.1.2}$$

♣

2.1.2 Définition (voir la figure 2.1.1)**.** Étant donné une famille Γ homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique, on appelle *polygone associé* le polygone convexe $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ dans le réseau affine $\mathbb{Z}^2$ dont la frontière orientée est constituée dans l'ordre des vecteurs de coordonnées $(p_{11}, q_{11}), \ldots, (p_{kn_k}, q_{kn_k})$, c'est-à-dire de n_1 vecteurs (p_1, q_1), suivis de n_2 vecteurs (p_2, q_2), et ainsi de suite. On désigne par v_{ij} l'origine du côté (p_{ij}, q_{ij}). ♢

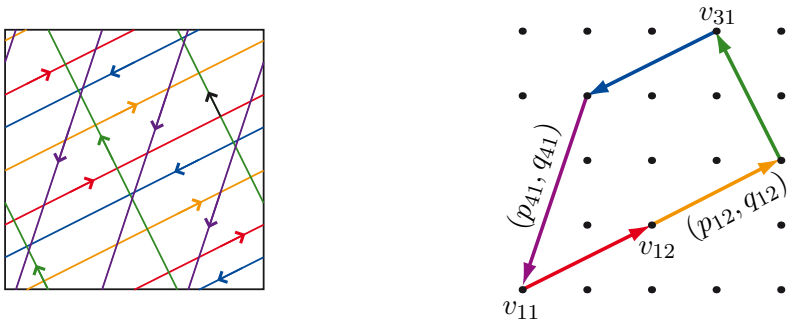

FIGURE 2.1.1 – Une famille homologiquement nulle Γ de géodésiques périodiques du tore, et le polygone $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ associé.

Comme les coordonnées p_i et q_i des cycles $[\pi(\gamma_{ij})]$ sont toujours des entiers premiers entre eux, les seuls points entiers sur la frontière de $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ sont les points v_{ij}. De plus, les sommets de $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ sont les points v_{i1} pour i entre 1 et n, c'est-à-dire que les points $v_{i2}, v_{i3}, \ldots$ sont à l'intérieur des côtés de $\mathrm{Poly}(\Gamma)$.

Le lemme 2.1.1 et la définition 2.1.2 donnent une bijection naturelle entre polygones convexes à sommets entiers dans le plan affine et familles de géodésiques homologiquement nulles dans $T^1(\mathbb{T}^2)$.

2.2 Analyse du problème

Dans cette section, Γ désigne une collection homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique et $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ désigne le polygone associé. On considère une surface lisse F dans $T^1\mathbb{T}^2$ dont le bord orienté ∂F est la famille Γ, et qui est transverse en son intérieur au flot géodésique. Si F coupait toutes les orbites, on parlerait d'une section de Birkhoff, mais on ne le suppose pas pour le moment. La surface F est dite *positive* si le flot coupe positivement F, et *négative* sinon [*]. Pour tout θ dans $[0, 2\pi[$, on note F_θ l'intersection entre F et le niveau N_θ.

2.2.1 Lemme. *Soient Γ une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique, et F une surface de bord Γ. Si N_θ est un niveau générique pour F, alors l'intersection F_θ entre la surface F et N_θ est une union de cercles disjoints.* ♣

Démonstration. Comme le flot géodésique est tangent au niveau N_θ et que F est transverse au flot, les surfaces F et N_θ sont transverses. Par conséquent leur intersection est une sous-variété fermée de N_θ, c'est-à-dire une union de cercles disjoints. ♠

La courbe F_θ est naturellement coorientée dans N_θ par le flot géodésique. Par convention, on l'oriente de sorte que le repère de N_θ formé par l'orientation choisie et par la coorientation (c'est-à-dire par la direction du flot) soit direct. D'autre part, pour tous θ, θ', les tores N_θ et $N_{\theta'}$ sont isotopes, et les groupes $H_1(N_\theta, \mathbb{Z})$ et $H_1(N_{\theta'}, \mathbb{Z})$ sont canoniquement identifiés.

2.2.2 Lemme. *Si θ et θ' sont dans le même intervalle I_i, alors les courbes orientées F_θ et $F_{\theta'}$ sont homologues.* ♣

Démonstration. La famille $\{F_t\}_{t\in[\theta,\theta']}$ détermine une isotopie entre F_θ et $F_{\theta'}$, qui sont par conséquent homologues. ♠

2.2.a Mise en boîtes

Dans sa thèse [94], J. Van Horn Morris construit des décompositions en livres ouverts des fibrés en tores sur le cercle. Sa construction consiste à empiler des boîtes hélicoïdales, et à contrôler les recollements.

2.2.3 Définition. Une *boîte hélicoïdale positive* (*resp. négative*) est un cube contenant la surface orientée, notée S_+ (*resp.* S_-), montrée sur la figure 2.2.1. Le bord ∂S_+ (*resp.* ∂S_-) est constitué de sept segments orientés, notés dans l'ordre $s_1, \ldots, s_7$, inclus dans les faces du cube et coupant les arêtes en leur milieu, et d'un segment, appelé *reliure*, intérieur au cube et reliant les centres de deux faces opposées. ♢

Dans une boîte hélicoïdale positive (*resp.* négative), la direction x est positivement (*resp.* négativement) transverse à l'intérieur de la surface S_+ (*resp.* S_-). Les boîtes hélicoïdales sont les briques de

[*]. On oriente l'intersection à l'aide du bonhomme d'Ampère, c'est-à-dire que l'intersection est positive si le repère formé par la direction du flot suivie d'un repère de F est direct.

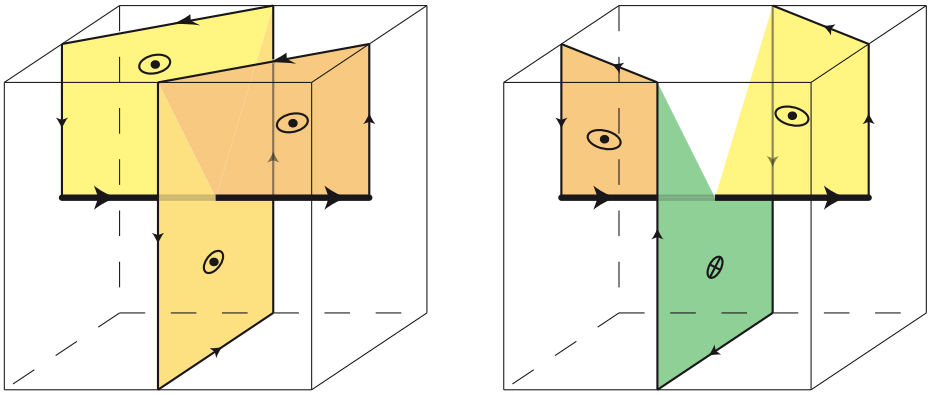

FIGURE 2.2.1 – À gauche une boîte hélicoïdale positive, à droite une boîte négative. Les surfaces S_+ et S_- sont chacune un lissage d'une réunion des segments joignant la reliure aux segments $s_1, \ldots, s_7$ du bord. Les ronds pointés ou croisés représentent l'orientation de la surface. Celle-ci est transverse à la direction de la reliure, positivement ou négativement selon le signe de la boîte.

base pour construire des surfaces transverses. La reliure sera un bout d'une orbite du flot géodésique et appartiendra au bord de la section tandis que les segments s_i seront recollés entre eux ou avec des courbes F_θ génériques.

2.2.4 Lemme (voir les figures 2.2.1 et 2.2.2)**.** *Soient Γ une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique, F une surface de bord Γ transverse au flot, et γ_{ij} une géodésique de la famille Γ vivant dans le niveau N_{θ_i}. Si l'intérieur de F ne rencontre pas N_{θ_i}, alors F est négativement transverse au flot géodésique et localement homéomorphe à $\gamma_{ij} \times [\theta_i, \theta_i + \eta[$ ou à $\gamma_{ij} \times]\theta_i - \eta, \theta_i]$. Sinon $\overset{\circ}{F}$ coupe N_{θ_i}, et alors il existe un voisinage de γ_{ij}, noté V_{ij}, tel que*

- (i) *V_{ij} est à section carrée, c'est-à-dire de la forme $]\gamma_{ij} - \varepsilon, \gamma_{ij} + \varepsilon[\times]\theta_i - \eta, \theta_i + \eta[$,*
- (ii) *V_{ij} est la réunion d'un nombre entier strictement positif, noté t_{ij}, de boîtes hélicoïdales, positives si F est positive, négatives sinon, avec γ_{ij} identifié à la réunion des reliures, F identifié à la réunion des surfaces S_+ ou S_-, et les faces horizontales (resp. verticales) de V_{ij} identifiées aux faces horizontales (resp. verticales) des boîtes.* ♣

Démonstration. Soit p un point de γ_{ij}. On note $\vec{n_p}$ l'unique vecteur unitaire normal à γ_{ij} et tangent à F. Pour ε, η réels, on note $V_{\varepsilon,\eta}$ le voisinage $]\gamma_{ij} - \varepsilon, \gamma_{ij} + \varepsilon[\times]\theta_i - \eta, \theta_i + \eta[$ de γ_{ij}. Si ε et η sont suffisamment petits, l'intersection de F avec $V_{\varepsilon,\eta}$ est isotope à la surface décrite par $p + t\vec{n_p}$, pour p dans γ_{ij} et t positif. La surface décrite par le niveau N_{θ_i} induit une trivialisation du fibré unitaire normal de γ_{ij}. On note ψ_p l'angle entre le vecteur $\vec{n_p}$ et le niveau N_{θ_i}, et t_{ij} le degré de l'application $\psi : \gamma_{ij} \simeq \mathbb{S}^1 \to \nu_p(\gamma_{ij}) \simeq \mathbb{S}^1$.

Si F est positivement transverse au flot géodésique, alors ψ_p est strictement croissante lorsque p parcourt γ_{ij}, et en particulier son degré t_{ij} est strictement positif. On obtient alors les boîtes hélicoïdales en tronçonnant V par des tranches verticales à chaque point p où le vecteur $\vec{n_p}$ pointe vers le haut. Ceci arrive exactement t_{ij} fois.

Si F est négativement transverse au flot géodésique, alors ψ_p est décroissante lorsque p parcourt γ_{ij}, mais seulement au sens large. En effet comme le flot géodésique n'est pas parallèle à γ_{ij} mais décalé dans les niveaux voisins, le vecteur $\vec{n_p}$ peut être constant et l'application ψ de degré 0 (voir la figure 2.2.2). Si c'est le cas, alors F est d'un seul côté de N_{θ_i}, et alors nécessairement homéomorphe à $\gamma_{ij} \times [\theta_i, \theta_i + \eta[$ ou à $\gamma_{ij} \times]\theta_i - \eta, \theta_i]$. Sinon, ψ est de degré strictement négatif, et la situation semblable au cas positif. ♠

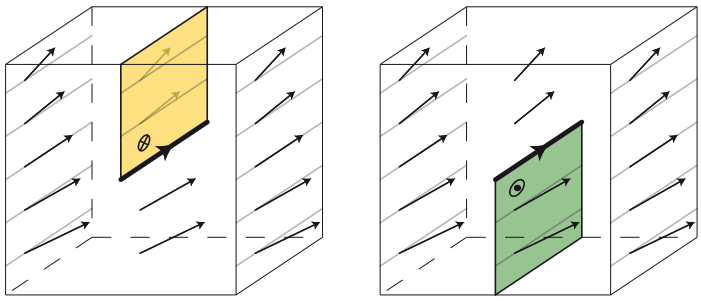

FIGURE 2.2.2 – Deux cas où F négativement transverse au flot géodésique, et l'angle ψ_p constant. La composante de ∂F est en gras.

2.2.5 Définition. Soient Γ une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique, F une surface de bord Γ transverse au flot, et γ_{ij} une géodésique de la famille Γ vivant dans le niveau N_{θ_i}. Le tore V_{ij} donné par le lemme 2.2.4 est appelé un *voisinage produit* de γ_{ij}. Si l'intérieur de F rencontre le niveau N_{θ_i}, le voisinage produit V_{ij} est supposé tronçonné en t_{ij} boîtes hélicoïdales. $\diamondsuit$

2.2.6 Lemme. *Soient Γ une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique, et F une surface de bord Γ transverse au flot. Soient N_{θ_i} un niveau critique pour F contenant n_i géodésiques $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in_i}$ de Γ, et $V_{i1}, \dots, V_{in_i}$ des voisinages produit pour chacune d'elles. Alors*

(i) *toutes les courbes $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in_i}$ sont parallèles de direction θ_i, et tous les nombres $t_{i1}, \dots, t_{in_i}$ sont égaux à un même nombre, noté t_i ;*

(ii) *si t_i est non nul, il existe un voisinage de N_{θ_i} de la forme $]N_{\theta_i-\eta}, N_{\theta_i+\eta}[$ qui est pavé par $n_i \times t_i$ boîtes hélicoïdales, de sorte que dans chaque boîte F coïncide avec la surface S_+ ou S_-,*

(iii) *si F est négativement transverse au flot géodésique, les classes d'homologie des courbes $F_{\theta_i-\eta}$ et $F_{\theta_i+\eta}$ sont reliées par la relation*

$$[F_{\theta_i+\eta}] = [F_{\theta_i-\eta}] + n_i(p_i, q_i) \; ; \tag{2.2.1}$$

en revanche si F est positivement transverse, on a

$$[F_{\theta_i+\eta}] = [F_{\theta_i-\eta}] - n_i(p_i, q_i). \tag{2.2.2}$$

$\clubsuit$

Démonstration. Par définition du flot, toutes les orbites dans le niveau N_{θ_i} suivent la direction θ_i, donc elles sont parallèles, d'où (i).

Pour tout j entre 1 et n_i, choisissons un voisinage produit V_{ij} de γ_{ij}. Quitte à en restreindre certains, on peut supposer tous ces tores à section rectangulaire de même hauteur 2η. Le complémentaire de la réunion $V_{i1} \cup \dots \cup V_{in_i}$ dans $]N_{\theta_i-\eta}, N_{\theta_i+\eta}[$ est la réunion de n_i tores à section rectangulaire, notés $W_{i1}, \dots, W_{in_i}$. On peut aussi supposer que, pour tout j, la numérotation place W_{ij} entre les voisinages carrés V_{ij} et V_{ij+1}. Comme F est transverse au flot, son intersection avec W_{ij} l'est également. Par conséquent c'est la réunion d'un certain nombre, noté u_{ij}, de disques, dont les bords sont des cercles méridiens de W_{ij}. Or la frontière commune entre V_{ij} et W_{ij} est composée de t_{ij} segments verticaux, d'où l'égalité $u_{ij} = t_{ij}$. De la même façon, on obtient $u_{ij} = t_{ij+1}$. Par récurrence, tous les entiers t_{ij} pour i entre 1 et n_i sont égaux. Enfin, comme l'intersection de F et de W_{ij} ne consiste qu'en des disques disjoints, on peut élargir les tores V_{ij} pour que leur réunion recouvre tout le voisinage $]N_{\theta_i-\eta}, N_{\theta_i+\eta}[$ de N_{θ_i}, d'où (ii).

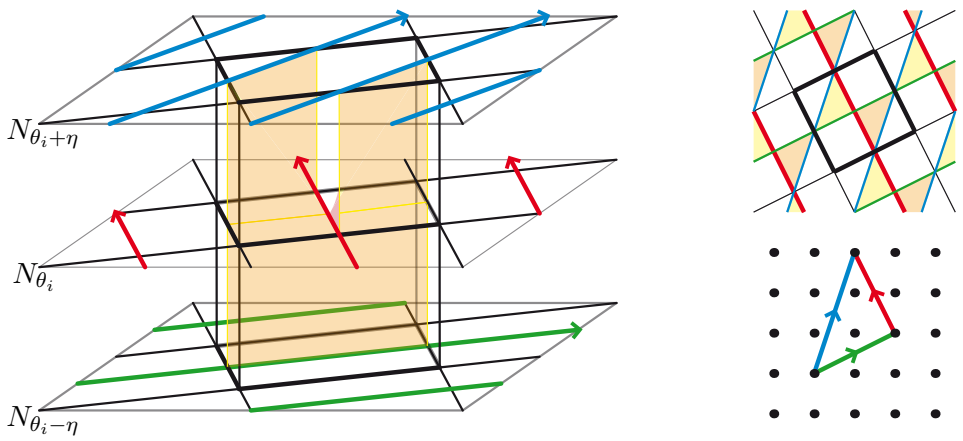

FIGURE 2.2.3 – Un voisinage du niveau N_{θ_i} de la forme $]N_{\theta_i}-\eta, N_{\theta_i}+\eta[$, pavé par cinq boîtes hélicoïdales négatives. Les flèches (rouges) dans le niveau N_{θ_i} représentent l'orbite γ_{i1}, qui est ici seule dans son niveau. La partie de F à l'intérieur d'une des cinq boîtes est dessinée. Son bord est composé d'un cinquième de γ_{i1}, d'un cinquième de $F_{\theta_i+\eta}$ (en bleu, avec l'orientation définie avant le lemme 2.2.2), d'un cinquième de $F_{\theta_i-\eta}$ (en vert), et de montants verticaux qui sont recollés aux quatre autres boîtes. En haut à droite, la même figure projetée depuis le ciel sur $\mathbb{T}^2$. En bas à droite, la relation homologique entre $n_i(p_i,q_i)$, $[F_{\theta_i-\eta}]$ et $[F_{\theta_i+\eta}]$, ici avec $n_i=1$, $(p_i,q_i)=(-1,2)$, $[F_{\theta_i-\eta}]=(2,1)$ et $[F_{\theta_i+\eta}]=(1,3)$. Conformément au lemme 2.2.7 (ii), l'aire de ce triangle homologique (5/2) est la moitié du nombre de boîtes utilisées pour paver N_{θ_i}.

Si F est négativement transverse au flot géodésique et si t_i est non nul, l'équation (2.2.1) se déduit des figures 2.2.1 et 2.2.3 (avec les explications de la légende). Si t_i est nul et F localement au-dessus de N_{θ_i}, alors on a $F_{\theta_i+\eta}$ est isotope à la réunion des γ_{ij} pour j entre 1 et n_i, donc on a $[F_{\theta_i+\eta}]=n_i(p_i,q_i)$ et $[F_{\theta_i-\eta}]=0$, d'où l'équation (2.2.1). Si t_i est nul et F est localement sous N_{θ_i}, on a de même $[F_{\theta_i+\eta}]=0$ et $[F_{\theta_i-\eta}]=-n_i(p_i,q_i)$, d'où (2.2.1). Enfin, si F est positivement transverse au flot, on obtient l'équation (2.2.2) en regardant la figure 2.2.3 dans un miroir. ♠

2.2.b Surfaces de section et polygone homologique associé

Comme précédemment, on suppose données une famille $\Gamma=\{\gamma_{11},\dots,\gamma_{kn_k}\}$ homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique sur $T^1(\mathbb{T}^2)$ et une surface orientée F de bord Γ transverse au flot géodésique en son intérieur. Quitte à changer de base pour $\mathbb{T}^2$, on peut supposer que le niveau N_0 est générique pour F. On note $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ le polygone affine associé à Γ.

Muni de sa base canonique, le groupe $H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Si F est négativement transverse au flot, plongeons $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ dans $H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z})$ de sorte que le sommet v_{11} coïncide avec la classe $[F_0]$ (qui est bien définie puisqu'on a supposé le niveau N_0 générique). On note $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ le polygone ainsi plongé. Si F est positivement transverse, alors l'objet à considérer est le polygone symétrique $-\mathrm{Poly}(\Gamma)$: on le plonge dans $H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z})$ de sorte que le sommet $-v_{11}$ coïncide avec $[F_0]$, et on note $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ le résultat. La raison d'être du polygone associé arrive.

2.2.7 Lemme. *Soient Γ une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques du flot géodésique, F une surface de bord Γ transverse au flot, et $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ le polygone associé plongé dans $H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z})$. Alors*

(i) *pour tout i entre 1 et k, et pour tout θ entre θ_{i-1} et θ_i, la classe $[F_\theta]$ dans $H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z})$ coïncide avec le sommet v_{i1} du polygone plongé $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$,*

(ii) *pour tout i entre 1 et k, le nombre de boîtes utilisées pour paver le niveau N_{θ_i} est égal à l'aire de paralléllogramme engendré par les vecteurs $[F_{\theta_i-\eta}]$ et $[F_{\theta_i+\eta}]$.* ♣

Démonstration. Démontrons (i) par récurrence sur i. Pour θ entre θ_{i-1} et θ_i, la classe $[F_\theta]$ est constante. Quand θ franchit θ_i, la classe $[\pm F_{\theta_i-\eta}]$ est remplacée par $[\pm F_{\theta_i-\eta}] + n_i(p_i, q_i)$, selon le signe F, en vertu des équations (2.2.1) et (2.2.2). Or par construction du plongement du polygone, on a $v_{i+11} = v_{i1} + n_i(p_i, q_i)$.

Passons à (ii). Le nombre de boîtes utilisées pour paver N_{θ_i} est égal au nombre de points d'intersection entre la courbe $F_{\theta_i-\eta}$ et la famille de courbes $\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{in_i}$, voir figure 2.2.3. Comme tous les points d'intersection sont de même signe, ce nombre est la norme du produit vectoriel entre $[F_{\theta_i-\eta}]$ et $n_i(p_i, q_i)$. Or ce dernier est égal au produit vectoriel entre $[F_{\theta_i-\eta}]$ et $[F_{\theta_i+\eta}]$, donc sa norme à l'aire du paralléllogramme qu'ils engendrent. ♠

2.3 Classification

Le travail des parties précédentes permet à présent de classer les surfaces de section pour le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent du tore, et de calculer élémentairement leur genre. L'énoncé est le suivant, correspondant au théorème B annoncé dans l'introduction.

2.3.1 Théorème. (i) *L'application $F \mapsto \mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ induit une bijection entre surfaces à bord négativement transverse au flot, à difféomorphisme préservant les niveaux près, et polygones convexes de $\mathbb{Z}^2$ contenant $(0,0)$ en leur intérieur ou sur leur frontière.*

(ii) *L'application $F \mapsto \mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ induit une bijection entre sections de Birkhoff négatives du flot géodésique, à difféomorphisme préservant les niveaux près, et les polygones convexes de $\mathbb{Z}^2$ contenant $(0,0)$ en leur intérieur (strict).*

(iii) *Il n'y a pas de surface à bord positivement transverse au flot géodésique sur $T^1(\mathbb{T}^2)$.*

(iv) *Soit Γ une collection homologiquement nulle de géodésiques périodiques de $T^1(\mathbb{T}^2)$. Si on note $A(\Gamma)$ l'aire du polygone $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ et $I(\Gamma)$ le nombre de points entiers à l'intérieur de $\mathrm{Poly}(\Gamma)$, alors pour toute surface F de bord Γ transverse au flot géodésique, la caractéristique d'Euler de F est $-2A(\Gamma)$ et son genre $I(\Gamma)$.*

(v) *Soit Γ, Γ' deux collections homologiquement nulles de géodésiques périodiques de $T^1(\mathbb{T}^2)$. Alors l'enlacement entre les entrelacs Γ et Γ' est la différence $A(\Gamma) + A(\Gamma') - A(\Gamma \cup \Gamma')$.* ♣

Démonstration. (i) (voir la figure 2.3.1) Supposons donnée une surface à bord F négativement transverse au flot en son intérieur. Soit θ une direction générique, et I_i l'intervalle qui la contient. Alors par le lemme 2.2.7, la classe d'homologie de F_θ coïncide avec le sommet v_{i1} du polygone $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$. Si F_θ est non vide, alors comme F_θ est négativement transverse au flot, donc à la direction θ, le repère $\{v_{i1}, \theta\}$ est direct. En particulier, en faisant tendre θ vers θ_i, on en déduit que le repère vectoriel $\{v_{i1}, (p_i, q_i)\}$ est direct. Comme le polygone $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ est orienté trigonométriquement, la classe $(0,0)$ est du même côté de l'arête (p_i, q_i) de $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ que le polygone lui-même. Ceci étant vrai pour tout i, on en déduit que $(0,0)$ est à l'intérieur du polygone. Si pour un certain θ appartenant à un intervalle I_i, la courbe F_θ est vide, alors v_{i1} est nul, et 0 appartient au bord du polygone. Par conséquent, l'image de l'application $F \mapsto \mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ est bien incluse dans l'ensemble des polygones contenant $(0,0)$ en leur intérieur ou sur leur frontière.

Pour la surjectivité, il suffit de suivre l'analyse à rebours en partant d'une courbe F_0 coïncidant avec le sommet v_{n1}, et d'empiler des boîtes hélicoïdales à chaque niveau critique. Concernant l'injectivité, la courbe F_θ est déterminée, à difféomorphisme de N_θ près, par sa classe d'homologie, donc par $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$.

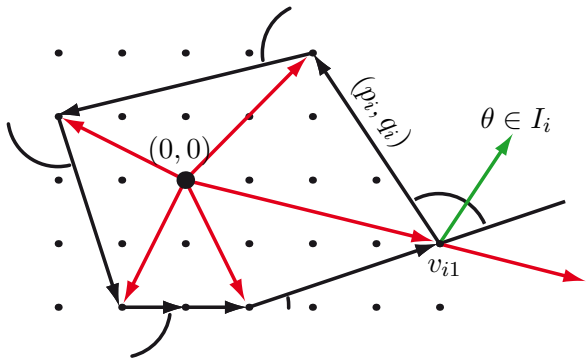

FIGURE 2.3.1 – Le polygone homologique $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ pour une surface F négativement transverse au flot géodésique. Si θ est dans l'intervalle I_i, la classe du niveau F_θ coïncide avec le sommet v_{i1}. Comme F_θ est négativement transverse à la direction θ, le repère $\{v_i, (p_i, q_i)\}$ est direct. Par conséquent le point $(0,0)$ est à gauche du côté (p_i, q_i) du polygone, et ce pour tout i, donc à l'intérieur de $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$.

(ii) Soit F une section de Birkhoff négative. Comme F est transverse au flot, le raisonnement précédent s'applique et le polygone $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ contient $(0,0)$ en son intérieur (large). De plus, la surface F coupe toutes les orbites, donc toutes les courbes F_θ sont non vides, ce qui exclut le cas où $(0,0)$ appartient à la frontière du polygone homologique.

(iii) Le raisonnement de (i) est valide dans le cas positif, sauf que la positivité implique que le repère $\{v_{i1}, \theta\}$ est direct, et donc que le point $(0,0)$ est à l'extérieur de $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$, de l'autre côté de (p_i, q_i) par rapport au polygone. Ceci est vrai pour tout i, et on a une contradiction.

(iv) La surface S_- dans une boîte hélicoïdale est composée d'un disque topologique, de huit arêtes, dont sept sur la frontière qui sont communes à deux boîtes, et de huit sommets, dont deux sont communs à deux boîtes, et six à quatre boîtes. Par conséquent, la contribution d'une boîte hélicoïdale à la caractéristique d'Euler vaut $1 - (1 + 7/2) + (2/2 + 6/4)$, soit -1. Or, d'après le lemme 2.2.7, le nombre de boîtes hélicoïdales contribuant à une surface transverse F est $2A(F)$, d'où $\chi(F) = -2A(F)$. Comme le genre de F est donné par la formule $\chi(F) = 2 - 2g(F) - \sum n_i$, la formule de Pick [75] sur l'aire d'un polygone entier donne la formule du genre.

(v) L'enlacement entre deux familles Γ et Γ' est le nombre d'intersection entre une surface de bord Γ et la famille Γ'. Choisissons pour surface une section F construite précédemment. Alors l'intersection entre F et une courbe $\gamma'_{i'j'}$ de la famille Γ est l'opposé de l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs v_{i1} et $(p_{i'}, q_{i'})$, où i est choisi tel que $\theta_{i'}$ est entre θ_i et θ_{i+1}. Le puzzle de la figure 2.3.2 montre que la somme des aires de ces parallélogrammes est la différence $A(\Gamma \cup \Gamma') - A(\Gamma) - A(\Gamma')$. ♠

Le théorème 2.3.1 implique par exemple que trois géodésiques de pentes $(1,0), (0,1)$ et $(-1,-1)$ bordent des surfaces transverses au flot géodésique, mais aucune section de Birkhoff, puisque le polygone affine associé est un triangle ne contenant aucun point entier en son intérieur.

2.3.2 Corollaire. *Le flot géodésique sur $T^1(\mathbb{T}^2)$ ne contient aucune section de Birkhoff de genre* 0. ♣

Comme les boîtes hélicoïdales contribuent pour -1 à la caractéristique d'Euler et qu'elles mettent en jeu une géodésique de bord, les sections de Birkhoff de genre 1 sont très particulières.

2.3.3 Corollaire. *Une section de Birkhoff de genre 1 du flot géodésique sur $T^1(\mathbb{T}^2)$ contient exactement une boîte hélicoïdale par composante du bord.* ♣

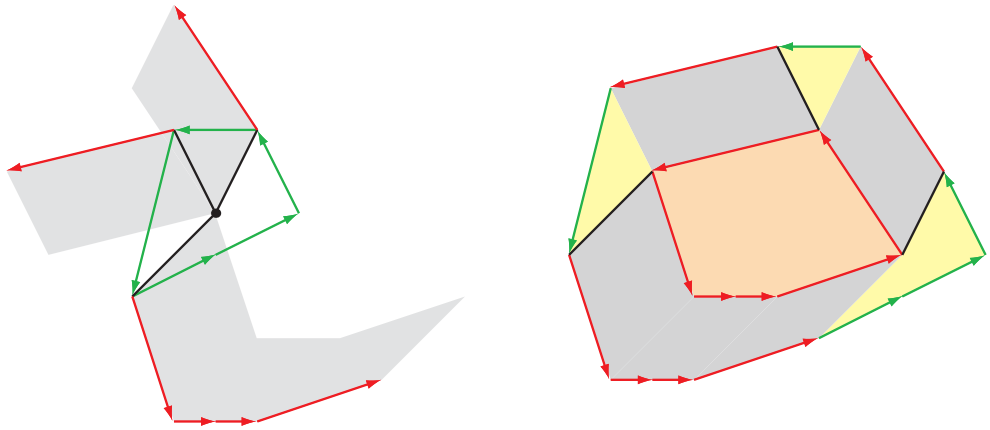

FIGURE 2.3.2 – À gauche, le polygone associé à une section de Birkhoff F s'appuyant sur une famille Γ de géodésiques périodiques, et les membres d'une autre famille Γ, chacun placé au sommet de $\mathrm{Poly}_F(\Gamma)$ correspondant à la classe de la courbe F_θ intersectée. En gris, les paralléllogrammes dont la somme des aires est le nombre d'intersection entre la surface F et la famille Γ. À droite, le polygone associé à $\Gamma \cup \Gamma'$ est décomposé en trois parties dont les aires sont celles de la zone grise, celle de $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ et celle de $\mathrm{Poly}(\Gamma')$.

A'Campo et Ishikawa d'une part [2, 53] et Giroux d'autre part [47] construisent des livres ouverts sur $T^1(\mathbb{T}^2)$ à partir de n'importe quelle (multi-)courbe dessinée sur $\mathbb{T}^2$. Dans le cas particulier où la courbe considérée est une famille de géodésiques, leurs constructions correspondent à la nôtre, où on choisit pour Γ les relevés des géodésiques, parcourus dans les deux sens. Le polygone affine $\mathrm{Poly}(\Gamma)$ est alors symétrique. La page qu'ils construisent correspond au placement de l'origine au centre du polygone.

Chapitre 3

Patrons et enlacement des géodésiques sur les orbifaces à un cusp

Dans ce chapitre, nous poursuivons l'étude topologique des géodésiques périodiques sur les surfaces. Après les cas du tore plat, nous passons à des exemples en courbure négative, pour lesquels nous allons montrer que l'enlacement entre deux collections homologiquement nulles de géodésiques périodiques est toujours négatif (théorème 3.5.1 et théorème C de l'introduction).

Il est plus difficile d'obtenir une description et un paramétrage explicites des géodésiques périodiques en courbure négative, une raison étant peut-être que leur nombre est bien plus important — le nombre de géodésiques périodiques de longueur inférieure à n croit exponentiellement avec n —, une autre raison étant que la topologie des variétés rencontrées est plus compliquée que celle du tore $\mathbb{T}^3$ ou du quotient $\mathrm{SO}(3)$ de la sphère $\mathbb{S}^3$. Pour contourner cette difficulté, d'une part nous déformons le fibré unitaire tangent et le flot géodésique pour les amener sur un patron et obtenir ainsi une description utilisable. D'autre part les fibrés unitaires tangents des orbifaces sont des *fibrés de Seifert*, et sont donc obtenues par recollement de tores pleins. Nous allons alors travailler dans chacun de ces tores séparément, et ne les recoller que le plus tard possible.

À l'aide de ces deux idées, nous construisons d'abord un patron pour le flot géodésique sur les *orbifaces unicuspidales* (théorème 3.2.10), l'avantage de ces orbifaces étant que la déformation qu'on exhibe est assez facile à décrire. Ensuite, nous précisons la construction sur les orbifaces de type (p, q, ∞), les orbifaces associées à un pavage du plan hyperbolique par des triangles rectangles ayant un sommet à l'infini, pour y démontrer des propriétés d'enlacement des géodésiques périodiques. D'une part nous exhibons une formule simple pour l'enlacement des géodésiques périodiques avec le cusp (théorème 3.4.1). D'autre part, dans le cas d'une orbiface de type $(2, q, \infty)$, et avec une compactification naturelle du fibré unitaire tangent, nous démontrons que deux collections de géodésiques périodiques s'enlacent toujours négativement (théorème 3.5.1).

La surface modulaire est l'orbiface de type $(2, 3, \infty)$. C'est l'orbiface obtenue en quotientant le plan hyperbolique par l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Autrement dit, c'est l'orbiface obtenue en partant d'un triangle hyperbolique d'angles $\pi/2, \pi/3, 0$ et en le recollant bord à bord avec son image miroir. Elle a deux singularités coniques d'angles π et $2\pi/3$ et un cusp. La présence de singularités n'empêche pas de définir sur cette orbiface le flot géodésique, dont les propriétés sont liées entre autres à des questions arithmétiques [72, 85]. Dans [43], É. Ghys a étudié la topologie du flot géodésique sur (le fibré unitaire tangent à) la surface modulaire. Ce travail présente plusieurs facettes. D'une part il montre que les géodésiques périodiques coïncident avec une classe de nœuds par ailleurs bien étudiée, les nœuds

de Lorenz, et permet donc directement de déduire plusieurs propriétés topologiques des géodésiques périodiques, à savoir le fait que l'enlacement d'une géodésique périodique avec le trèfle est la fonction de Rademacher, et que les collections de géodésiques périodiques forment des entrelacs fibrés. D'autre part, le schéma de preuve est très topologique, et appelle une généralisation. C'est ce que nous proposons ici. Une différence notable dans notre travail par rapport au cas de la surface modulaire est que nous ne travaillons pas dans le complémentaire d'un nœud de trèfle dans $\mathbb{S}^3$ comme dans le cas modulaire, mais dans le complémentaire d'un entrelacs dans un fibré de Seifert. Cependant, cette complication ne représente pas d'obstacle autre que technique.

Enfin, comme le flot géodésique sur une orbiface hyperbolique est un exemple typique de flot d'Anosov, les propriétés topologiques du flot géodésique sont susceptibles de s'étendre aux flots d'Anosov.

Le plan détaillé est le suivant. Dans une première partie, nous introduisons les acteurs principaux : orbifaces, fibrés unitaires tangents et flot géodésique. Dans une deuxième partie, nous expliquons la construction d'un patron pour le flot géodésique sur une orbiface unicuspidale. Dans une troisième partie, nous précisons la construction pour les orbifaces de type (p, q, ∞), en décrivant leur fibré unitaire tangent et la position du patron dans celui-ci. Dans une quatrième partie, nous démontrons le théorème 3.4.1 sur l'enlacement des géodésiques avec le cusp, et dans une cinquième partie, nous démontrons le théorème 3.5.1 sur l'enlacement entre deux familles de géodésiques sur les orbifaces de type $(2, q, \infty)$.

Comme mentionné dans l'introduction, les trois premières parties de ce chapitre recouvrent une part du travail de thèse Tali Pinsky [76] qui construit également des patrons pour le flot géodésique sur les orbifaces de type $(2, q, \infty)$. D'autre part, les liens avec les fonctions modulaires et les formes automorphes ont été étudiés par Valdemar Tsanov dans [91]. Ces deux textes détaillent en particulier la structure topologique du fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$.

Des références détaillées sont [10, 54] pour la géométrie hyperbolique et les groupes fuchsiens, [18, 67, 90] pour les orbifolds, [65] pour les groupes triangulaires, et [18, 67] pour la topologie des fibrés unitaires tangents.

3.1 Préliminaires

Nous commençons par rappeler quelques généralités sur les objets en jeu ici : orbifaces, fibrés unitaires tangents et flot géodésique. Nous ne donnons pas de preuve dans cette partie, mais renvoyons à la bibliographie pour des démonstrations détaillées.

3.1.a Groupes fuchsiens et orbifaces

La notion d'orbifold est une généralisation de celle de variété étroitement liée à l'étude des pavages et des revêtements. Le cas qui nous intéresse ici est celui des orbifolds métriques orientables en dimension 2.

3.1.1 Définition. Une *orbiface orientable* Σ *modelée sur une surface riemannienne* X est un espace métrique Σ muni d'un atlas de cartes (U_i, f_i, p_i), où les U_i sont des ouverts simplement connexes de X invariants par une rotation d'angle $2\pi/p_i$ et les $f_i : U_i \to \Sigma$ sont des revêtements ramifiés locaux d'ordre p_i tels que le quotient $(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})\backslash U_i \to \Sigma$ est un homéomorphisme sur son image et dont les images recouvrent Σ, et tels que les changements de cartes $f_i^{-1} \circ f_j$ sont des isométries de X.

Quand X est une sphère à courbure constante (*resp.* le plan euclidien, *resp.* le plan hyperbolique), on parle d'*orbiface sphérique* (*resp. euclidienne*, *resp. hyperbolique*). $\diamondsuit$

Par exemple, le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est une orbisurface euclidienne. En effet, on peut choisir pour les ouverts U_i des ouverts de $\mathbb{R}^2$, pour les f_i la projection naturelle $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, et pour les indices p_i la valeur 1. Les changements de cartes sont alors des translations.

Autre exemple, le quotient de la sphère $\mathbb{S}^2$ par n'importe quel sous-groupe discret G de $\mathrm{SO}(3)$ agissant à gauche est une orbiface sphérique. On choisit pour les U_i des ouverts de la sphère, pour les cartes la projection $\mathbb{S}^2 \to G\backslash\mathbb{S}^2$. Les indices p_i correspondent alors aux ordres des rotations du groupe G. Les changements de cartes sont alors des rotations de la sphère.

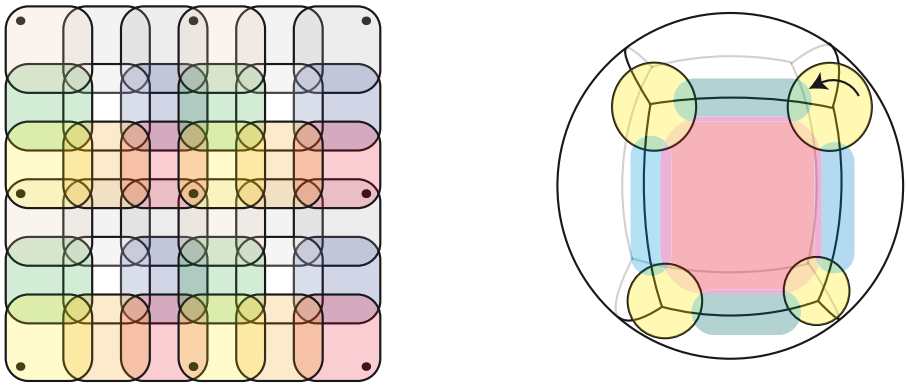

FIGURE 3.1.1 – Deux exemples d'orbifaces. À gauche le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ recouvert par neuf cartes. La figure représente le plan recouvert par un ensemble $\mathbb{Z}^2$-équivariant de cartes ; le réseau $\mathbb{Z}^2$ est figuré par des points. À droite le quotient de la sphère $\mathbb{S}^2$ par le groupe des isométries directes du cube. Les sommets du cube admettent des voisinages décrit par des cônes $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\backslash U$.

Une orbiface riemannienne est analogue à une surface, sauf au voisinage de certains points isolés, appelés *singularités coniques*, que l'on peut imaginer comme un cône dont l'angle au sommet vaut $2\pi/p_i$.

Soit $\mathbb{H}^2$ le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z > 0\}$ dit de Poincaré, muni de la métrique hyperbolique standard $ds^2 = dz^2/\Im z$, et soit $T^1\mathbb{H}^2$ son fibré unitaire tangent. On rappelle que le groupe des isométries directes de $\mathbb{H}^2$ est $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et que l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}^2$ est propre et simplement transitive. On peut donc identifier $T^1\mathbb{H}^2$ et $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Topologiquement, il n'y a pas grand chose à dire puisque $T^1\mathbb{H}^2$ est isomorphe à $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$. En revanche, si on quotiente $\mathbb{H}^2$ par un sous-groupe *fuchsien* agissant à gauche, c'est-à-dire un sous-groupe discret G de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agissant proprement sur $\mathbb{H}^2$, on obtient des surfaces ou des orbifaces $G\backslash\mathbb{H}^2$ ayant une topologie non triviale, et des flots géodésiques plus compliqués sur le fibré unitaire tangent $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$. La propriété importante pour notre étude est l'existence de domaines fondamenteux polygonaux pour les groupes fuchsiens.

3.1.2 Définition. (voir [10, p. 204]) Soit G un groupe fuchsien. On appelle *domaine fondamental polygonal* pour l'action de G sur $\mathbb{H}^2$ une partie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{H}^2$ telle que

(i) l'union des $g\mathcal{F}$ pour g dans G est $\mathbb{H}^2$,
(ii) pour g, g' distincts dans G, les intérieurs des ensembles $g\mathcal{F}$ et $g'\mathcal{F}$ sont disjoints,
(iii) la frontière de $\mathcal{F}$ dans la compactification $\mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty\mathbb{H}^2$ est constituée d'un nombre fini c de segments, qui sont soit géodésiques, soit inclus dans $\partial_\infty\mathbb{H}^2$. $\diamondsuit$

Un domaine fondamental a des propriétés supplémentaires liées à la structure du groupe fuchsien.

3.1.3 Proposition. *(voir [10, pp. 214, 220, 221]) Soit G un groupe fuchsien et $\mathcal{F}$ un domaine fondamental pour l'action de G sur $\mathbb{H}^2$. On note $V_1, \dots, V_c$ les sommets de $\mathcal{F}$, et pour tout V_i dans $\mathbb{H}^2$, on note θ_i l'angle entre les côtés $]V_{i-1}V_i[$ et $]V_iV_{i+1}[$ de $\mathcal{F}$. Alors*

- (i) *quitte à subdiviser les côtés, pour tout côté $]V_iV_{i+1}[$ de $\mathcal{F}$ non inclus dans $\partial_\infty\mathbb{H}^2$, il existe un côté $]V_{j+1}V_j[$ (avec éventuellement $i = j$) et un élément g_{ij} de G tel que $g_i(]V_iV_{i+1}[) =]V_{j+1}V_j[$,*
- (ii) *le groupe G est engendré par les éléments g_{ij} qui apparient ainsi les côté finis de $\mathcal{F}$,*
- (iii) *l'appariement des côtés s'étend en un regroupement des sommets (par groupe d'éventuellement plus que deux), et si les sommets $V_{i_1}, \dots V_{i_k}$ sont regroupés, il existe p_i entier ou infini tel que $\theta_{i_1} + \cdots + \theta_{i_k} = 2\pi/p_i$.* ♣

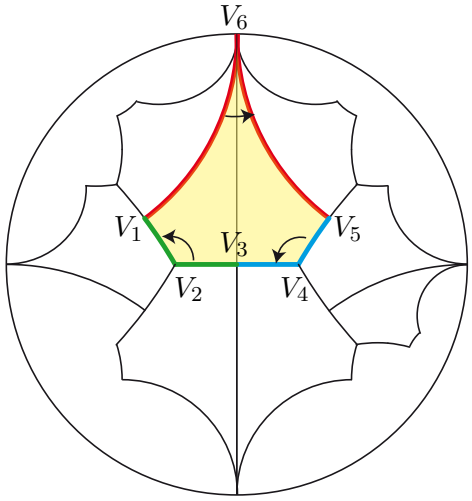

FIGURE 3.1.2 – Un exemple de domaine fondamental pour un groupe fuchsien G. Les côtés de même couleur sont appariés par G. Cet appariement regroupe les sommets V_1, V_3 et V_5, et laisse V_2, V_4 et V_6 isolés. La somme des angles dans ces quatre groupes vaut respectivement $2\pi, 2\pi/3, 2\pi/3$ et 0. Le quotient $G\backslash\mathbb{H}^2$ est une orbiface, les points V_2 et V_4 sont projetés sur des singularités coniques.

Pour tout point V de $\mathbb{H}^2$, on note $B(V, \varepsilon)$ la boule de centre V et de rayon ε, et pour tout segment $]VV'[$ dans $\mathbb{H}^2$, on note $B(]VV'[, \varepsilon/2)$ le $\varepsilon/2$-voisinage tubulaire du segment $[VV']$, privé des boules $\overline{B}(V, \varepsilon/2)$ et $\overline{B}(V', \varepsilon/2)$. La proposition 3.1.3 permet de déduire une structure d'orbiface sur le quotient $G\backslash\mathbb{H}^2$.

3.1.4 Proposition. *Soit G un groupe fuchsien et $\mathcal{F}$ un domaine fondamental polygonal pour l'action de G sur $\mathbb{H}^2$. Soit $V_1, \dots, V_c$ les sommets de $\mathcal{F}$, et $p_1, \dots, p_c$ les entiers associés par la proposition 3.1.3 (iii). Soit $\varepsilon < \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant c}(d(V_i, V_{i+1}))$. Alors*

- (i) *le quotient $G\backslash\mathbb{H}^2$ est une orbiface hyperbolique admettant un atlas constitué des cartes $(B(V_i, \varepsilon), \mathrm{id}, p_i)$ si V_i est dans $\mathbb{H}^2$, $(B(]V_iV_{i+1}[, \varepsilon/2), \mathrm{id}, 1)$ si $]V_iV_{i+1}[$ n'est pas dans $\partial_\infty\mathbb{H}^2$, et $(Int(F), \mathrm{id}, 1)$,*
- (ii) *les changements de cartes sont l'identité quand deux cartes se coupent, et les éléments g_{ij} de la proposition 3.1.3 (ii) pour les cartes recouvrant des côtés appariés ou des sommets regroupés par G.* ♣

Pour la suite, étant donné un domaine fondamental $\mathcal{F}$, on note r_i le nombre de sommets de $\mathcal{F}$ regroupés avec V_i (y compris V_i), et on note P_i leur image commune dans $G\backslash\mathbb{H}^2$. Dans le pavage de $\mathbb{H}^2$ par des copies de $\mathcal{F}$, le nombre de faces adjacentes à V_i est alors p_ir_i, tandis que le stabilisateur G_{V_i} est $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$.

3.1.b Le fibré unitaire tangent d'une orbiface

Nous nous intéressons maintenant au fibré unitaire tangent. Commençons par deux cas simples. Étant donné un disque $\mathbb{D}^2$ paramétré polairement par (r, θ), son fibré unitaire tangent est l'ensemble des vecteurs de norme 1 tangents à $\mathbb{D}^2$. Notons φ l'angle d'un vecteur tangent avec la direction horizontale $\theta = 0$. Alors $T^1\mathbb{D}^2$ est paramétré par r, θ et φ ; c'est donc un tore plein $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

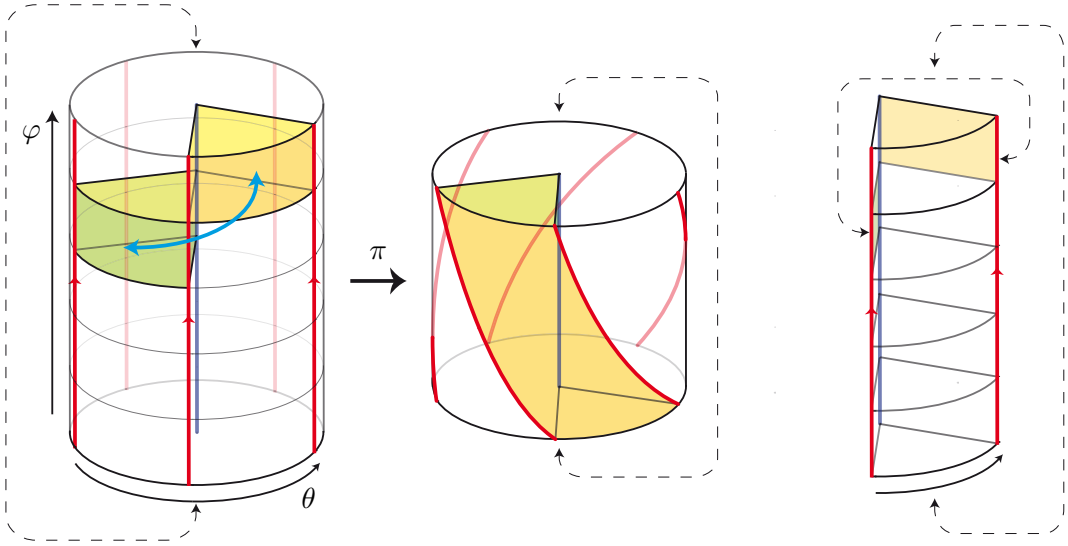

FIGURE 3.1.3 – À gauche : le fibré unitaire tangent à un disque $\mathbb{D}^2$ est un tore plein. L'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est figurée par une flèche, c'est un vissage. Un étage de la tour est un domaine fondamental, l'espace compris entre deux murs verticaux en est un autre. Au centre : le modèle de l'étage pour le quotient, obtenu en identifiant plancher et plafond d'un étage via une rotation d'angle $-2\pi/p$. C'est par définition un modèle du fibré unitaire tangent à $\mathbb{D}^2_p$. Toutes les fibres à part la fibre centrale coupent p fois le disque méridien. À droite : un autre modèle du quotient, le modèle de la part de gâteau, obtenu en identifiant deux murs verticaux de la tour via une translation d'un p-ième de la hauteur totale.

Supposons le disque $\mathbb{D}^2$ muni d'une métrique telle que la rotation d'angle $2\pi/p$ est une isométrie. Alors le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit par isométries sur $\mathbb{D}^2$. L'action n'est pas libre car le centre du disque est fixé. C'est en fait le seul point à stabilisateur non trivial. Le quotient de $\mathbb{D}^2$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est donc une orbiface, notée $\mathbb{D}^2_p$. On note π la projection de $\mathbb{D}^2$ sur $\mathbb{D}^2_p$. L'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ étant par isométries, elle s'étend au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{D}^2$, et un élément $\bar{k}$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit par $\bar{k} \cdot (r, \theta, \varphi) = (r, \theta + 2k\pi/p, \varphi + 2k\pi/p)$. L'action sur $T^1\mathbb{D}^2$ est alors libre, puisque les vecteurs tangents au centre tournent d'un angle $2k\pi/p$. Le quotient $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\backslash T^1\mathbb{D}^2$ est donc une variété, que l'on définit comme le fibré unitaire tangent à $\mathbb{D}^2_p$, noté $T^1\mathbb{D}^2_p$. C'est également un tore plein (voir figure 3.1.3).

Remarquons que le tore $T^1\mathbb{D}^2$ est naturellement feuilleté par les cercles $T^1\{x\} = \{x\} \times \mathbb{S}^1$ qui coupent $+1$ fois chaque disque méridien $\mathbb{D}^2 \times \{\varphi\}$. Le tore $T^1\mathbb{D}^2_p$ est également feuilleté par les cercles $T^1\{x\}$. Si x est le sommet du cône, alors $T^1\{x\}$ est l'âme du tore plein et coupe +1 fois chaque disque méridien. En revanche, si x est un autre point de $\mathbb{D}^2_p$, le cercle $T^1\{x\}$ coupe $+p$ fois chaque disque méridien, les intersections se succédant avec un angle $-2\pi/p$.

Comme tout point d'une orbiface admet un voisinage du type $\mathbb{D}^2_p$, on peut définir le fibré unitaire tangent à toute orbiface. Plus formellement :

3.1.5 Définition. Soit Σ une orbiface modelée sur une surface riemanienne X et décrite par un at-

las $\{(U_i, f_i, p_i)\}$. Alors le *fibré unitaire tangent* $T^1\Sigma$ *à* Σ est la variété modelée sur T^1X et définie par l'atlas $\{(V_i, g_i)\}$, où, pour tout i,

(i) l'ouvert V_i est le fibré unitaire tangent $T^1((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\backslash U_i)$,
(ii) la carte $g_i : V_i \to T^1X$ est définie par $g_i(x, v) = (f_i(x), Df_i(x)(v))$. $\diamondsuit$

Soit f_{ij} un changement de cartes de la forme $f_i^{-1} \circ f_j$ de Σ. Alors g_{ij} défini par $g_{ij}(x, v) = (f_{ij}(x), Df_{ij}(x)(v))$ est un changement de cartes de $T^1\Sigma$.

Dans le cas des groupes fuchsiens [*], on a une définition équivalente du fibré unitaire tangent : comme G agit proprement sur $\mathbb{H}^2$ par isométries, l'action de G sur $\mathbb{H}^2$ s'étend en une action libre sur $T^1\mathbb{H}^2$. Le quotient $G\backslash(T^1\mathbb{H}^2)$ est donc une variété. Elle coïncide avec le fibré unitaire tangent déjà défini $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$.

3.1.c Le flot géodésique sur une orbiface

Soit G un groupe fuchsien. En tant qu'orbiface métrique, $G\backslash\mathbb{H}^2$ porte un flot géodésique $\Phi : \mathbb{R} \times T^1(G\backslash\mathbb{H}^2) \to T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ défini comme suit. Étant donné un point (x, v) de $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$, il passe par x une unique géodésique orientée γ dirigée par v ; alors $\Phi^t(x, v)$ est l'unique point (x', v') de $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ tel que x' est sur γ, on a $\overline{xx'} = t$, et v' dirige également γ.

Une autre façon de construire Φ est de partir du flot géodésique $\widetilde{\Phi}$ sur $T^1\mathbb{H}^2$. Comme G agit par isométries sur $\mathbb{H}^2$, son action sur $T^1\mathbb{H}^2$ commute avec le flot géodésique, et donc celui-ci se projette sur le quotient $G\backslash T^1\mathbb{H}^2$ en un flot, lequel coïncide avec Φ.

3.2 Un patron pour le flot géodésique sur une orbiface unicuspidale

Dans toute cette partie, on suppose fixé G un groupe fuchsien *unicuspidal*, c'est-à-dire tel que le quotient $G\backslash\mathbb{H}^2$ a un unique cusp, et $\mathcal{F}$ un domaine fondamental pour l'action de G sur $\mathbb{H}^2$ ayant un unique sommet sur $\partial_\infty\mathbb{H}^2$ (comme l'exemple de la figure 3.1.2). On note V_∞ le sommet de $\mathcal{F}$ situé sur $\partial_\infty\mathbb{H}^2$ et $V_1, \ldots, V_c$ les sommets de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{H}^2$.

Le but est de réduire la dynamique tridimensionnelle du flot géodésique Φ sur $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ à une dynamique bidimensionelle (et même unidimensionelle) sur un patron (propositions 3.2.8 et 3.2.10). Pour cela, on construit une déformation F^s de $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ de sorte que F^0 est l'identité et F^1 contracte $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ sur un patron. Cette déformation n'est pas une isotopie globale, mais, sa restriction aux orbites périodiques du flot géodésique l'est, la propriété cruciale étant qu'une géodésique périodique, au contraire d'une géodésique générique, est caractérisée par sa direction à l'infini dans le revêtement universel. Ainsi, tant la dynamique que la topologie des orbites périodiques sont intactes sur le patron $F^1(T^1(G\backslash\mathbb{H}^2))$. L'idée sous-jacente pour construire F^s est de déchirer le domaine fondamental $\mathcal{F}$ afin de pousser tous les points de $G\backslash\mathbb{H}^2$ sur la frontière $\partial\mathcal{F}$, et donc tous les vecteurs tangents à $G\backslash\mathbb{H}^2$ sur des vecteurs basés en $\partial\mathcal{F}$. Au niveau du revêtement universel, cela revient à pousser tous les points de G sur le graphe $G.\partial\mathcal{F}$ plongé dans $\mathbb{H}^2$.

Dans toute la suite, on travaille dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ de façon G-équivariante. Sauf mention du contraire, les figures sont dessinées dans le modèle du disque de Poincaré $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < 1\}$ muni de la métrique $ds = dz/(1 - |z|^2)$. Les géodésiques sont toujours paramétrées à vitesse constante 1, une origine étant arbitrairement fixée lorsque le contexte la réclame. Étant donné une géodésique orientée γ,

[*]. et en fait pour tous les *bons* orbifolds, c'est-à-dire ceux qui admettent un revêtement universel

on note γ_- et γ_+ ses extrémités sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Pour tout point (x, v) de $T^1\mathbb{H}^2$, on définit sa *direction à l'infini* comme l'extrémité positive de la géodésique passant par x et dirigée par v.

3.2.a Discrétisation et lissage

On associe maintenant à toute géodésique de $\mathbb{H}^2$ une *discrétisée*, à savoir une courbe ayant les mêmes extrémités et vivant dans l'orbite du bord du domaine fondamental choisi.

3.2.1 Définition. Le *bord borné* $\partial_b\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ désigne la réunion de ses côtés bornés $[V_1V_2]\cup\cdots\cup[V_{c-1}V_c]$. On appelle *arbre associé à* $\mathcal{F}$ l'orbite $G.\partial\mathcal{F}$ du bord de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{H}^2$, et *arbre réduit* l'orbite $G.\partial_b F$ du bord borné de $\mathcal{F}$. ♢

Le nom d'*arbre* est justifié puisque les graphes $G.\partial F$ est $G.\partial_b F$ sont des arbres.

3.2.2 Lemme. *Soit γ une géodésique de $\mathbb{H}^2$ et soit γ_+ et γ_- ses extrémités dans $\partial_\infty\mathbb{H}^2$. Alors on a l'alternative suivante.*

(i) *Soit γ_+ (resp. γ_-) est dans l'orbite $G.V_\infty$. Alors il existe g dans G tel que $\gamma(t)$ est dans le pavé $g(\mathcal{F})$ pour tout t assez grand (resp. assez petit), et il existe une infinité de courbes injectives dans l'arbre $\partial\mathcal{F}$ ayant les mêmes extrémités que γ. De plus, la projection de γ dans $G\backslash\mathbb{H}^2$ n'est pas périodique.*

(ii) *Soit γ_+ et γ_- n'appartiennent pas à l'orbite $G.V_\infty$. Alors il existe une unique courbe injective $a(\gamma)$ dans l'arbre $\partial\mathcal{F}$ associé à $\mathcal{F}$ ayant les mêmes extrémités γ_+ et γ_- que γ. De plus la courbe $a(\gamma)$ vit dans l'arbre réduit $\partial_b\mathcal{F}$.* ♣

Démonstration. Il est clair que les deux situations envisagées forment une alternative.

Comme $\mathcal{F}$ n'a qu'un sommet à l'infini, le bord à l'infini de $G.\partial\mathcal{F}$ est tout $\partial_\infty\mathbb{H}^2$, et par conséquent il existe toujours une courbe injective dans $G.\mathcal{F}$ ayant les mêmes extrémités que γ. Soit $a(\gamma)$ une telle courbe.

S'il existe g dans G tel que $a(\gamma)$ emprunte l'arc $g([V_1V_\infty[)$, alors comme cet arc n'est pas borné, $a(\gamma)$ a $g(V_\infty)$ pour extrémité, et donc γ aussi. On est alors dans la première situation. Soit g' dans G tel que $g'(V_\infty) = g(V_\infty)$. Comme $G.\partial\mathcal{F}$ est connexe par arc, on peut modifier $a(\gamma)$ pour lui faire emprunter l'arc $g'([V_1V_\infty[)$. Comme il y a une infinité de tels g', il y a une infinité de choix pour $a(\gamma)$. Enfin, si la projection de γ dans $G\backslash\mathbb{H}^2$ était périodique, alors il existerait g'' non trivial dans G tel que γ soit g''-invariante. En particulier on aurait $g''(g(V_\infty)) = g(V_\infty)$, et donc $g''(g(\mathcal{F}))$ serait un pavé partageant avec $g(\mathcal{F})$ le même sommet $g(V_\infty)$. Par conséquent g'' serait une isométrie parabolique. Or une isométrique parabolique ne fixe que les géodésiques dirigée vers le point fixe, d'où une contradiction.

Si γ n'emprunte aucun arc de la forme $g([V_1V_\infty[)$, alors γ vit dans l'arbre $G.\partial_b\mathcal{F}$. Comme le bord de cet arbre est un ensemble de Cantor de $\partial_\infty\mathbb{H}^2$, il y a un unique chemin dans $G.\partial_b\mathcal{F}$ reliant deux points du bord de l'arbre, et on est dans la seconde situation. ♠

Comme on ne s'intéresse qu'aux géodésiques périodiques, on exclut désormais les géodésiques pointant dans le cusp, c'est-à-dire dont une extrémité est dans $G.V_\infty$. On pourrait ne pas les exclure, faire des choix arbitraires les concernant, et construire un patron gardant des informations sur leur topologie ; mais ce serait au prix d'une certaine lourdeur, pour finalement ne rien démontrer sur elles.

3.2.3 Définition. Soit γ une géodésique de $\mathbb{H}^2$ dont les extrémités n'appartiennent pas à $G.V_\infty$. On appelle *discrétisée* de γ l'unique chemin injectif dans $G.\partial F$ ayant les mêmes extrémités que γ. ♢

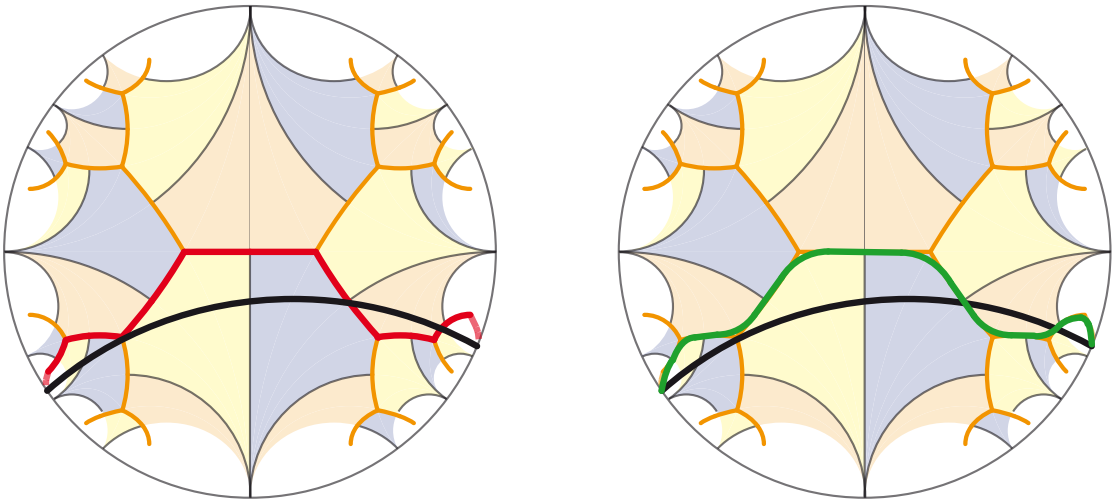

FIGURE 3.2.1 – Discrétisée (à gauche) et lissée (à droite) d'une géodésique. Le graphe $G.\partial_b\mathcal{F}$ est figuré en épaissi et en orange, les arêtes à ajouter pour le graphe $G.\partial\mathcal{F}$ sont en fin et en gris.

Afin d'obtenir ensuite un patron à la fois lisse et flexible, on modifie un peu les courbes discrétisées. Étant donnée une géodésique ne pointant pas dans un cusp, elle parcourt une suite bi-infinie d'arêtes du graphe $G.\partial_b\mathcal{F}$, et passe en particulier par une infinité de milieux d'arêtes. Soit e, e' deux arêtes de $G.\partial_b\mathcal{F}$ ayant un sommet commun, et soit M, M' leurs milieux respectifs. Alors on fixe une courbe lisse reliant les points M et M', et tangente en ces points aux arêtes e et e' (voir figure 3.2.2). On effectue cette construction pour tout coupe d'arête adjacentes de $G.\partial_b\mathcal{F}$ de façon G-équivariante, et on note $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ le graphe qui est la réunion des courbes ainsi construites.

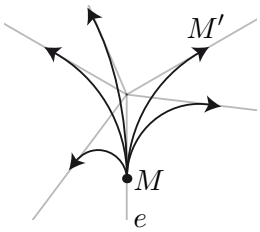

FIGURE 3.2.2 – Le graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ au voisinage d'un sommet de $G.\partial_b\mathcal{F}$. En clair sont figurées les arêtes de $G.\partial_b\mathcal{F}$, et en foncé les arêtes de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ issues du milieu M de e.

3.2.4 Définition. Soit γ une géodésique de $\mathbb{H}^2$ dont les extrémités n'appartiennent pas à $G.V_\infty$, et $a(\gamma)$ sa discrétisée. On note $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ la suite bi-infinie de milieux d'arêtes de $G.\partial_b\mathcal{F}$ traversés par $a(\gamma)$. Alors on appelle *lissée* de γ la courbe vivant dans le graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ et traversant les points $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. On la note $b(\gamma)$. $\diamondsuit$

Toute la discussion précédente étant G-équivariante, on a $b(g(\gamma)) = g(b(\gamma))$ pour toute géodésique γ et tout g dans G.

3.2.b Déchirure

On a associé à toute géodésique de $\mathbb{H}^2$ évitant le cusp une unique lissée qui vit dans le graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$. Maintenant, on relève les géodésiques dans $T^1\mathbb{H}^2$, et on montre que l'application de lissage est le

temps 1 d'une application, appelée *déchirure*, qui, projetée sur $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ et restreinte aux orbites périodiques, est une isotopie (proposition 3.2.8). Ainsi toutes les propriétés topologiques des géodésiques périodiques dans $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ sont préservées dans $G\backslash T^1\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$. L'idée-clé de la construction est que les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ qui sont G-périodiques sont définies, et ce de manière unique, par leur direction positive à l'infini.

3.2.5 Lemme. *Il existe une famille $\{f_\gamma\}$ d'isotopies : $[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{H}^2$ paramétrée par les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ ne pointant pas vers $G.V_\infty$ telle que*

(i) *on a $f^0_\gamma(\mathbb{R})=\gamma$ et $f^1_\gamma(\mathbb{R})=b(\gamma)$,*
(ii) *pour tout g dans G, on a $f_{g(\gamma)}=g\circ f_\gamma$.* ♣

Démonstration. Pour chaque géodésique γ, la courbe $b(\gamma)$ est une courbe lisse sans point double, par conséquent, il existe une isotopie lisse entre γ et $b(\gamma)$. Qu'on puisse la choisir G-équivariante est une conséquence de l'axiome du choix. ♠

3.2.6 Remarque. Pousser la courbe $b(\gamma)$ selon sa normale et proportionnellement à sa courbure a un effet régularisant. Il semble possible que, quitte à reparamétrer pour forcer la convergence en temps fini, ce flot induise une famille d'isotopie satisfaisant les conclusions du lemme 3.2.5. ♡

Une famille d'isotopie satisfaisant les conclusions du lemme 3.2.5 est dite *rugueuse*. On relève maintenant les isotopies dans $T^1\mathbb{H}^2$.

3.2.7 Définition. Soit $\{f_\gamma\}$ une famille rugueuse d'isotopies. La *déchirure* associée $F:[0,1]\times T^1\mathbb{H}^2\to T^1\mathbb{H}^2$ est définie comme suit : soit (x,v) un vecteur unitaire tangent à $\mathbb{H}^2$ et γ la géodésique passant par x et dirigée par v, alors $F^s(x,v)$ est le vecteur (x',v') tel que

(i) on a $x'=f^s_\gamma(x)$,
(ii) le vecteur v' pointe vers l'extrémité γ_+. ♢

Comme tout a été défini de façon G-équivariante, une déchirure de $T^1\mathbb{H}^2$ se projette en une déchirure du quotient $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$.

Une déchirure n'est définie que pour des vecteurs pointant dans le futur et dans le passé hors de $G.V_\infty$. Si on avait choisi une lissée pour les géodésiques pointant dans le cusp, on aurait pu définir une déchirure partout, mais ça n'est pas nécessaire pour l'usage que nous en ferons. Remarquons qu'une déchirure est une application continue. En revanche, ça n'est pas une application injective. En effet son temps 1 contracte l'intersection d'un horocycle et d'un pavé quelconques. Pour cette raison, une déchirure n'est pas une isotopie. Néanmoins

3.2.8 Proposition. *Soit G un groupe fuchsien unicuspidal et $\mathcal{F}$ un domaine fondamental pour l'action de G sur $\mathbb{H}^2$. Soit $\{f_\gamma\}$ une famille rugueuse d'isotopies pour $\mathcal{F}$ et F la déchirure associée. Alors la restriction de F aux orbites G-périodiques du flot géodésique est une isotopie.* ♣

Démonstration. Supposons $F^s(x_1,v_1)=F^s(x_2,v_2)$ pour un certain s dans $[0,1]$. Comme les vecteurs $F^s(x_1,v_1)$ et $F^s(x_2,v_2)$ pointent vers $(\gamma_1)_+$ et $(\gamma_2)_+$ respectivement, leur égalité implique $(\gamma_1)_+=(\gamma_2)_+$. Par conséquent les géodésiques γ_1 et γ_2 se rapprochent exponentiellement en $+\infty$. Or elles sont toutes deux G-périodiques, donc compactes dans le quotient $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$, et par conséquent confondues. L'égalité $F^s(x_1,v_1)=F^s(x_2,v_2)$ implique par définition $f^s_{\gamma_1}(x_1)=f^s_{\gamma_1}(x_2)$, et comme f_{γ_1} est une isotopie, on en déduit $x_1=x_2$. Enfin, les vecteurs v_1 et v_2 pointent vers $(\gamma_1)_+$, donc ils coïncident. ♠

3.2.c Épure

Le fibré unitaire tangent au plan hyperbolique ayant été déchiré de façon G-équivariante sans modifier la topologie des géodésiques périodiques, nous allons examiner les lambeaux. Le reste de cette partie est consacré à montrer qu'une déchirure envoie le fibré unitaire tangent à $G\backslash\mathbb{H}^2$, muni du flot géodésique, sur un certain patron (proposition 3.2.10), et à obtenir des représentations de ce patron (figures 3.2.6 et 3.2.7).

Soit e une arête orientée du graphe $G.\partial_b\mathcal{F}$. Par définition, e sépare deux pavés, qu'on écrit sous la forme $g_1(\mathcal{F})$ pour le pavé de gauche et $g_2(\mathcal{F})$ pour celui de droite, avec g_1, g_2 dans G. Soit γ une géodésique de $\mathbb{H}^2$ ne pointant pas dans un cusp. Par définition, la discrétisée de γ emprunte l'arête e si et seulement si l'extrémité γ_- appartient à l'intervalle $]g_2(V_\infty), g_1(V_\infty)[$ et l'extrémité γ_+ à l'intervalle $]g_1(V_\infty), g_2(V_\infty)[$. On appelle ce dernier intervalle l'*intervalle visuel de* e, et on le note Vis_e. Encore une fois, la construction est G-équivariante, et on a $\mathrm{Vis}_{g(e)} = g(\mathrm{Vis}_e)$ pour toute arête orientée e de $G.\partial_b\mathcal{F}$ et pour tout g dans G.

On rappelle que le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$ est paramétré par $\mathbb{H}^2 \times \partial_\infty\mathbb{H}^2$ selon la direction pointée par les vecteurs tangents.

3.2.9 Définition. Soit e, e' deux arêtes orientées consécutives de $G.\partial_b\mathcal{F}$, et c l'arc du graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ reliant le milieu de e à celui de e'. L'*intervalle visuel de* c, noté Vis_c est l'intervalle visuel $\mathrm{Vis}_{e'}$. Le *ruban-produit associé à* c, noté Rub_c, est le produit $c \times \mathrm{Vis}_c$ dans $T^1\mathbb{H}^2$. Il est muni du champ de vecteur X_c dont le flot suit les courbes $c \times \{\gamma_+\}$, pour γ_+ dans Vis_c, à vitesse constante 1.

La réunion des rubans-produits Rub_c pour c dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ est notée $\widetilde{\mathcal{E}}_{G,\mathcal{F}}$.

L'*épure* de $G\backslash\mathbb{H}^2$, notée $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$, est la surface branchée dans $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ obtenue comme quotient de $\widetilde{\mathcal{E}}_{G,\mathcal{F}}$ par l'action de G. ♢

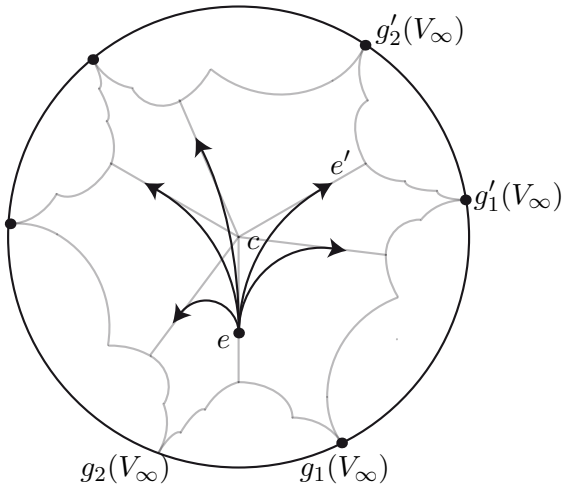

FIGURE 3.2.3 – Les intervalles visuels associés aux arêtes de $G.\partial_b\mathcal{F}$ et de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$. Le cercle est orienté trigonométriquement. L'intervalle visuel Vis_e est $]g_1(V_\infty)g_2(V_\infty)[$, tandis que les intervalles $\mathrm{Vis}_{e'}$ et Vis_c sont tous deux $]g_1'(V_\infty)g_2'(V_\infty)[$.

On rappelle qu'un flot φ est dit semi-conjugué à un flot ψ s'il existe une application p telle que, pour tout point x et pour tout temps t, on a $p \circ \varphi^t(x) = \psi^t(x)$. Dans le cas des semi-flots, on ne requiert l'égalité que pour des temps positifs.

3.2.10 Théorème (Pi. D., T. Pinsky)**.** *Soit G un groupe fuchsien unicuspidal et $\mathcal{F}$ un domaine fondamental pour l'action de G sur $\mathbb{H}^2$. Soit F une déchirure de $T^1\mathbb{H}^2$. Alors*

(i) *l'épure $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$ est un patron,*
(ii) *la projection de F^1 sur $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ envoie $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ sur l'épure $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$ et semi-conjugue le flot géodésique au flot de $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$.* ♣

Démonstration. (i) Considérons deux courbes du graphe $G\backslash\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ dont on suppose qu'elles se coupent. Comme $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ est G-équivariant, ces deux courbes admettent des relevés c_1, c_2 dans le graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ qui se coupent. Par construction, il existe alors quatre arêtes orientées e_1, e_1', e_2, e_2' du graphe $G.\partial_b\mathcal{F}$ partageant un sommet, et telles que c_1 relie le milieu de e_1 à celui de e_1', et c_2 le milieu de e_2 à celui de e_2' (voir figure 3.2.4). Les deux arêtes e_1' et e_2' ne coïncident pas, et sont donc séparées par au moins un pavé $g(\mathcal{F})$. Par conséquent les intervalles visuels $\mathrm{Vis}_{e_1'}$ et $\mathrm{Vis}_{e_2'}$ sont séparés au moins par le point $g(V_\infty)$, et donc les intervalles visuels Vis_{c_1} et Vis_{c_2} ne se rencontrent pas.

Soit x un point de $\mathbb{H}^2$ et (x, v) un élément de la fibre $T^1\{x\}$. Alors par définition (x, v) appartient à un ruban Rub_c si x appartient à c et v pointe dans l'intervalle visuel Vis_c. D'après ce qui précède, si x n'est pas le milieu d'une arête, (x, v) appartient donc à au plus un ruban. Par conséquent les rubans ne se rencontrent qu'au-dessus des milieux des arêtes de $G.\partial\mathcal{F}$.

Soit M le milieu d'une arête orientée e de $G.\partial\mathcal{F}$. Comme toutes les courbes de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ ayant M pour extrémité sont tangentes à e, et comme les champs de vecteur de tous les rubans de l'épure sont horizontaux, les champs de tous les rubans s'appuyant sur T^1M et orientés comme e coïncident. De plus, les intervalles visuels des différents rubans issus de M sont disjoints, donc il y a au plus un ruban sortant en chaque point de la fibre T^1M. Par conséquent l'épure P est bien un patron.

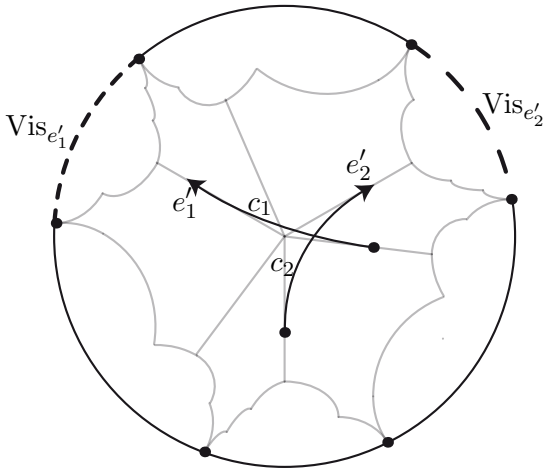

FIGURE 3.2.4 – Les intervalles visuels associés à deux courbes c_1, c_2 de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ qui se coupent. Comme les intervalles $\mathrm{Vis}_{e_1'}$ et $\mathrm{Vis}_{e_2'}$ sont disjoints, les rubans Rub_{c_1} et Rub_{c_2} dans les fibres au-dessus de c_1 et c_2 ne se rencontrent pas.

(ii) Pour toute géodésique γ de $\mathbb{H}^2$ ne pointant pas dans un cusp, l'image de f_γ^1 est incluse dans le graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$, donc l'image de F^1 est incluse dans les fibres au-dessus de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$. De plus, si la lissée $b(\gamma)$ emprunte la courbe c de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$, alors l'extrémité γ_+ appartient à l'intervalle visuel Vis_c, et par conséquent le relevé de $b(\gamma)$ dans $T^1\mathbb{H}^2$ emprunte le ruban Rub_c, en visant γ_+. Ainsi $F^1(\gamma)$ est une orbite du patron $\widetilde{\mathcal{E}}_{G,\mathcal{F}}$. Par conséquent la projection de $F^1(\gamma)$ sur $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$ est une orbite de l'épure $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$. ♠

Si e et e' sont deux arêtes consécutives du graphe $G.\partial_b\mathcal{F}$, alors l'intervalle visuel Vis_e contient $\mathrm{Vis}_{e'}$. Réciproquement, l'intervalle Vis_e est la réunion des intervalles $\mathrm{Vis}_{e'}$ pour toutes les arêtes e'

consécutives à e et des directions des cusps visibles depuis le sommet commun V à e et e'. Par conséquent, à part quelques points isolés (deux de moins que la valence de V), tous les points du segment de branchement au-dessus de e ont un flot positif.

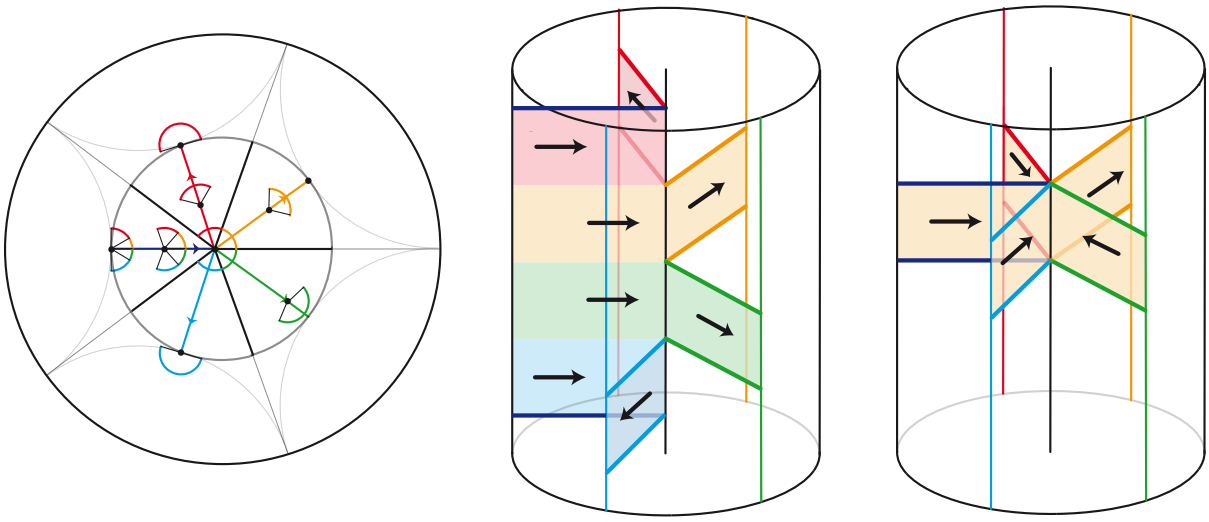

FIGURE 3.2.5 – Des morceaux de la pseudo-épure qu'on aurait obtenue si on n'avait pas lissé les courbes discrétisées, à savoir les images par la déchirure F^1 des vecteurs tangents aux géodésiques entrant dans le domaine fondamental par l'ouest (figure du centre), et les images des vecteurs tangents aux géodésiques sortant par le nord-est (figure de droite). Cette pseudo-épure n'est pas lisse au-desus des sommets du graphe $G.\partial_b\mathcal{F}$.

3.2.d Déformation de l'épure

L'épure introduite par la définition 3.2.9 contient toute l'information topologique sur les orbites périodiques du flot géodésique comme en attestent les propositions 3.2.8 et 3.2.10. Autour d'un sommet du graphe $G.\partial_b\mathcal{F}$ dont le stabilisateur dans G est trivial, la figure 3.2.6 permet d'appréhender l'épure. Par contre, autour d'un sommet à stabilisateur non trivial, il faut quotienter le tore plein de la figure 3.2.6 par un vissage ; l'épure est alors plus difficile à appréhender. Dans cette dernière sous-partie, nous allons utiliser la flexibilité donnée par l'épure, qui est un objet topologique, pour la placer dans une position plus agréable.

Pour ce faire, nous modifions les intervalles visuels associés aux arêtes du graphe $G.\partial_b\mathcal{F}$. Soit η un angle, supposé petit, e une arête de $G.\partial_b\mathcal{F}$ et e_∞ sa direction. Cette direction appartient à l'intervalle visuel Vis_e. On rétracte alors continûment Vis_e sur l'intervalle $]e_\infty-\eta, e_\infty+\eta[$. Faisons cette rétraction pour toutes les arêtes de $G.\partial_b\mathcal{F}$. On perd alors la propriété d'attachement des rubans, puisque Vis_e ne contient alors plus $\mathrm{Vis}_{e'}$ pour deux arêtes consécutives e et e'. Néanmoins, si au cours de cette rétraction, on bouge aussi les rubans pour les laisser attachés aux segments de branchements qui se rétractent, alors on déforme $\widetilde{\mathcal{E}}_{G,\mathcal{F}}$ et l'épure $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$ sans que les rubans ne se croisent, donc sans en changer la topologie.

Cette transformation est locale au voisinage des sommets de $G.\partial_b\mathcal{F}$, l'épure $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$ ainsi déformée est donc toujours obtenue en recollant des tores pleins, qui contiennent un certain nombre de rubans, le long de leur frontière. La figure 3.2.7 montre le résultat. Pour la suite, nous utiliserons ces épures modifiées.

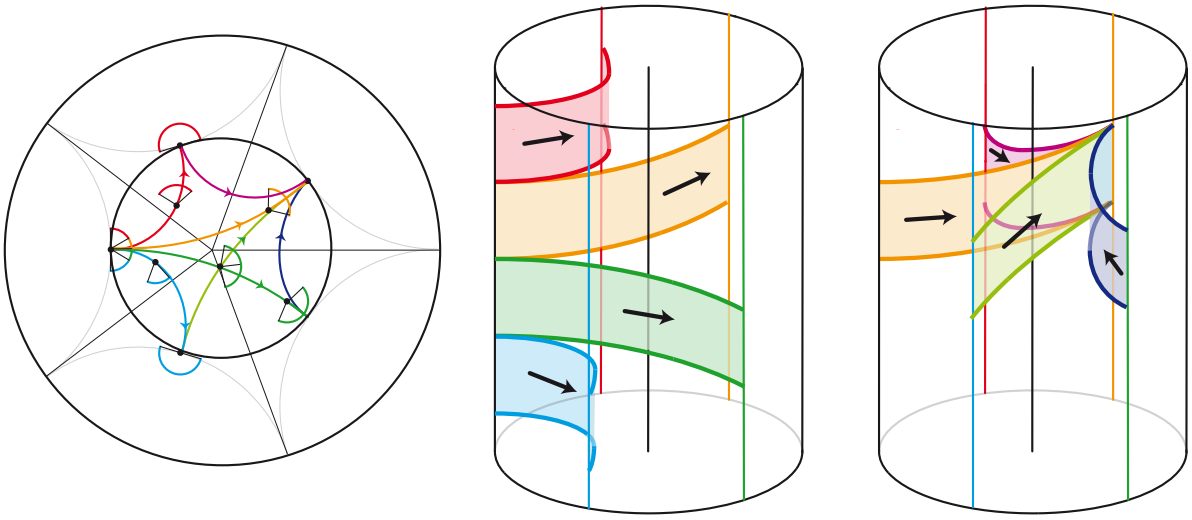

FIGURE 3.2.6 – Un morceau de l'épure $\widetilde{\mathcal{E}}_{G,\mathcal{F}}$ au voisinage d'un sommet V de valence 5 du graphe $G.\partial_b\mathcal{F}$. Au centre, les rubans issus de l'arête de l'ouest, correspondant aux vecteurs aux images par F^1 des géodésiques entrant dans le voisinage par l'ouest. À droite, les rubans sortant par l'arête nord-est. Pour obtenir un morceau de l'épure $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$, il faut quotienter par l'action de G. Ici, si G_V est d'ordre 5, il faut alors quotienter par un vissage du tore plein d'ordre 5.

3.3 Patrons pour le flot géodésique dans les orbifaces de type (p, q, ∞)

Dans cette partie, nous précisons la construction précédente dans le cas des groupes de type $G_{p,q,\infty}$ et des orbifaces associées. Après avoir introduits ces groupes, nous choisissons des domaines fondamentaux particuliers, et en déduisons une présentation de l'épure pour le flot géodésique. Cela permettra dans les deux dernières parties de démontrer quelques propriétés d'enlacement.

Étant donné un triangle hyperbolique PQR d'angles $\pi/p, \pi/q$ et π/r, avec p, q, r dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $1/p + 1/q + 1/r < 1$, on considère le groupe $G^*_{(p,q,r)}$ engendré par les symétries (hyperboliques) par rapport aux côtés de PQR, et son sous-groupe $G_{(p,q,r)}$ d'indice 2 constitué des éléments préservant l'orientation. Le groupe $G_{(p,q,r)}$ agit alors proprement sur $\mathbb{H}^2$, et un domaine fondamental pour cette action est donné par la réunion de PQR avec son image $\overline{PQR}$ par la symétrie par rapport à l'un quelconque de ses côtés, disons $[PQ]$. L'action n'est pas libre puisque les éléments des orbites de P, Q et R par $G_{(p,q,r)}$ ont des stabilisateurs d'ordre p, q et r respectivement. Tout point du quotient $G_{(p,q,r)}\backslash\mathbb{H}^2$ admet donc un voisinage isométrique à un disque, hormis les orbites des sommets qui admettent des voisinages isométriques à des disques quotientés par des rotations d'ordre respectifs p, q et r. Ce sont des singularités coniques où l'angle total vaut $2\pi/p, 2\pi/q$ et $2\pi/r$ respectivement. Par conséquent le quotient est une orbiface hyperbolique.

3.3.1 Définition. Soit p, q, r dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ avec $1/p + 1/q + 1/r < 1$, et $G_{(p,q,r)}$ le groupe associé. Alors l'orbiface-quotient $G_{(p,q,r)}\backslash\mathbb{H}^2$ est appelé orbiface de type (p, q, ∞). On la note $\Sigma_{p,q,r}$. $\diamondsuit$

Désormais et jusqu'à la fin du chapitre, nous nous intéressons au cas $r = +\infty$. Partons d'un triangle hyperbolique $PM_1^p\infty_1^p$ d'angles $\pi/p, \pi/2, 0$ (voir la figure 3.3.1). On note $\mathcal{F}_p$ la réunion du triangle $PM_1^p\infty_1^p$ et de son image par la symétrie par rapport au côté $[P\infty_1^p[$. Soit $M_2^p, \ldots, M_p^p$ les images successives de M_1^p par la rotation de centre P et d'angle $2\pi/p$, notée $\rho(P, 2\pi/p)$, et $\infty_2^p, \ldots, \infty_p^p$ les images successives de ∞_1^p par $\rho(P, 2\pi/p)$. Notons Λ_p^2 le polygone idéal à p côtés et p sommets à l'infini $\infty_1^p, \ldots, \infty_p^p$ qui est la réunion des images successives de $\mathcal{F}_p$ par $\rho(P, 2\pi/p)$. En quotientant Λ_p^2

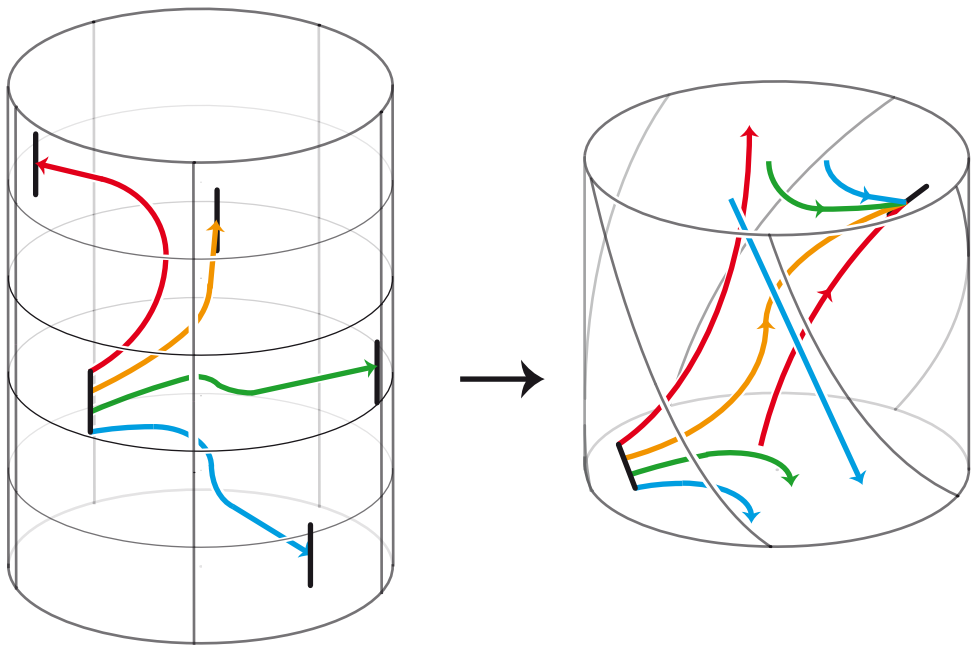

FIGURE 3.2.7 – À gauche, le patron $\widetilde{\mathcal{E}}_{G,\mathcal{F}}$ au voisinage de la fibre d'un sommet V de $G.\partial_b\mathcal{F}$ dont le stabilisateur dans G est d'ordre 5. Pour plus de clarté, on ne représente que le squelette du patron, soit une orbite par ruban. Pour obtenir les rubans entiers, il faut épaissir ces orbites dans la direction des fibres. Le reste de $\widetilde{\mathcal{E}}_{G,\mathcal{F}}$ s'obtient en faisant agir de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ par vissage (figure 3.1.3). À droite, le squelette du patron $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$ au voisinage de la fibre de la projection de V dans $G\backslash\mathbb{H}^2$, dans le modèle de l'étage. C'est le quotient de la figure de gauche par l'action de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

par $\rho(P, 2\pi/p)$, ou de manière équivalente en identifiant les deux côtés semi-infinis de $\mathcal{F}_p$, on obtient un orbifold hyperbolique, noté Δ_p^2, avec un cusp et muni d'un atlas à une carte $\mathbb{Z}_p\backslash\Lambda_p^2 \to \Delta_p^2$.

L'orbiface $\Sigma_{p,q,\infty}$ est obtenue en collant deux telles orbifaces Δ_p^2 et Δ_q^2 le long de leurs cercles-frontière, avec identification des cups ∞_1^p et ∞_1^q d'une part, et des points M_1^p et M_1^q d'autre part. Ce collage donne un atlas à deux cartes pour $\Sigma_{p,q,\infty}$. On note respectivement ∞ et M les résultats de ces identifications. Il est utile pour la suite d'avoir en tête la structure du revêtement universel.

3.3.2 Proposition. *Soit $\Sigma_{p,q,\infty}$ une orbiface de type (p, q, ∞). Alors le revêtement universel de $\Sigma_{p,q,\infty}$ est le plan hyperbolique pavé par des copies des polygones idéaux Λ_p^2 et Λ_q^2, de sorte que chaque pavé Λ_p^2 touche p copies de Λ_q^2 et chaque Λ_q^2 touche q copies de Λ_p^2. L'orbite du segment $[PQ]$ par le groupe $G_{p,q,\infty}$ est un arbre, noté $A_{p,q}$, dont les sommets sont les centres des copies de Λ_p^2 et Λ_q^2, chacun étant relié au centre des polygones voisins.* ♣

L'arbre $A_{p,q}$ est l'arbre $G.\partial_b\mathcal{F}$ de la partie 3.2.a associé au domaine fondamental $\mathcal{F}_{p,q}$. Le graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ connecte tout point M_i^p sur le bord d'une copie Λ_p^2 aux points M_j^p avec $j \neq i$, et tout point M_i^q aux autres points M_j^q.

3.3.a Compactification

L'orbiface $\Sigma_{p,q,\infty}$ est ouverte puisqu'elle a un cusp. Elle admet une compatification naturelle obtenue en bouchant le cusp, c'est-à-dire en rajoutant le sommet ∞ du domaine fondamental qui est dans $\partial_\infty\mathbb{H}^2$. On note $\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$ cette compactification. Le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$ est également

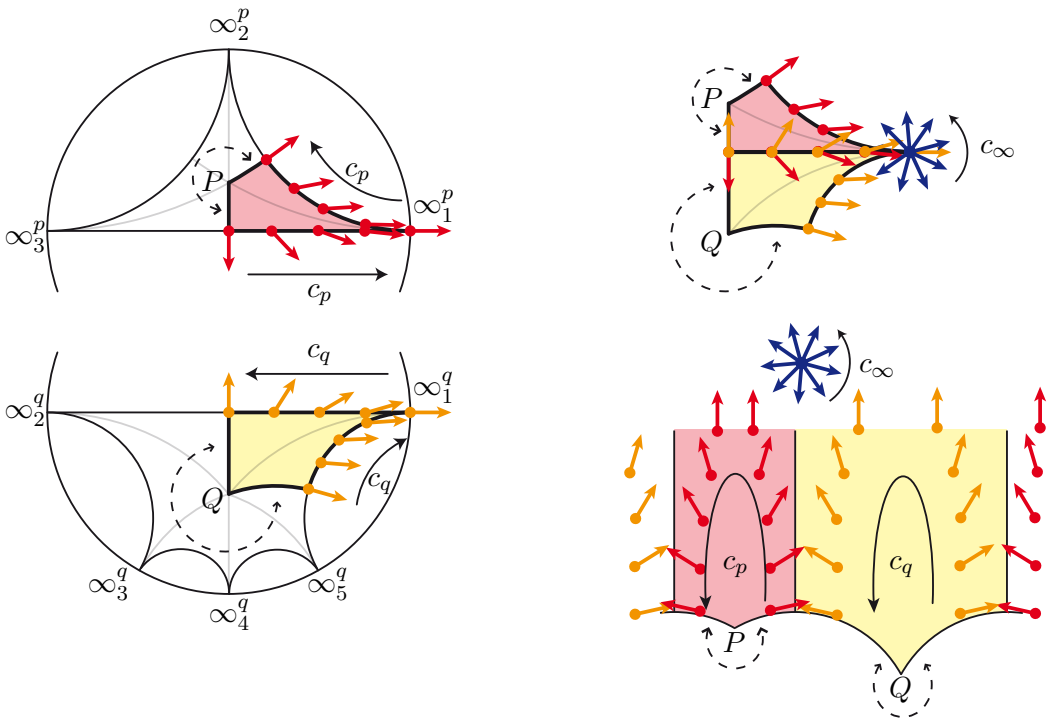

FIGURE 3.3.1 – L'orbiface $\Sigma_{p,q,\infty}$ avec $p = 3$ et $q = 5$. À gauche, les orbifaces Δ_p^2 et Δ_q^2 avec leurs domaines fondamentaux $\mathcal{F}_p$ et $\mathcal{F}_q$. À droite, la réunion de $\mathcal{F}_p$ et $\mathcal{F}_q$ en un pentagone n'ayant qu'un sommet à l'infini. C'est un domaine fondamental $\mathcal{F}_{p,q}$ pour $\Sigma_{p,q,\infty}$, dans le modèle du disque en haut, dans le modèle du demi-plan en bas. Les courbes c_p, c_q et c_∞ (définition 3.3.3) sont également représentées. Elles vivent sur la frontière commune T^2_{front} des deux tores pleins $T^1\overline{\Delta_p^2}$ et $T^1\overline{\Delta_q^2}$.

ouvert, et est naturellement compactifié en rajoutant la fibre du sommet à l'infini. On note $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$ cette compactification.

Ce choix n'est pas anodin. Il implique par exemple que pour tout horocycle h centré sur le point ∞_1 de $\partial_\infty\mathbb{H}^2$, l'image des vecteurs basés sur h et pointant vers ∞_1 borde un disque dans $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$. En effet, soit d_h l'horodisque bordé par h. Alors la réunion de l'ensemble des vecteurs de l'horodisque bordé par h et pointant vers ∞_1 avec le vecteur basé en ∞_1 et pointant vers l'extérieur du disque est un disque.

Pour comprendre les compactifications possibles, on peut couper le voisinage du cusp pour un horocycle. La frontière de l'orbiface obtenue est alors un cercle, la frontière de son fibré unitaire tangent un tore. Compactifier l'orbiface par un point revient à reboucher le cercle-frontière par un disque. Au niveau du fibré unitaire tangent, cela impose de refermer le tore-frontière par un tore plein, c'est-à-dire choisir une direction méridienne sur la frontière. Pour que les fibres du tore-frontière se projettent sur les points du cercle-frontière, les méridiens doivent couper une fois chaque fibre. L'ensemble des compactifications possibles est donc indexé par les entiers, et donc par exemple par la classe d'Euler du fibré obtenu.

3.3.b Topologie de $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$

Notre but est à présent de décrire topologiquement la variété $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$. Puisque le compactifié $\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$ est obtenu en recollant deux cônes, son fibré unitaire tangent est obtenu en recollant deux tores pleins le long de leurs frontières qui sont deux surfaces toriques. C'est donc un espace lenticulaire. Le

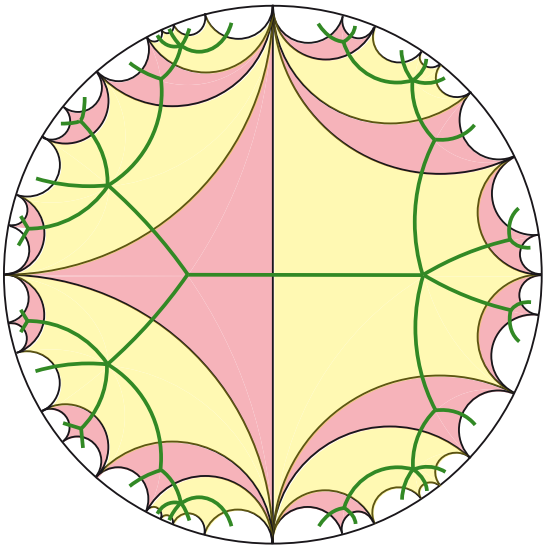

FIGURE 3.3.2 – Le plan hyperbolique pavé par des copies de Λ_p^2 et Λ_q^2, et l'arbre dual $A_{p,q}$. Ici $p = 3$ et $q = 5$.

schéma de recollement dépend évidemment de la façon dont on a compactifié, donc l'espace lenticulaire aussi. Pour le décrire, fixons quelques notations.

3.3.3 Définition. Soit $\Sigma_{p,q,\infty}$ une orbiface de type (p, q, ∞). On considère la variété $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$, vue comme réunion des tores pleins $T^1\overline{\Delta_p^2}$ et $T^1\overline{\Delta_q^2}$.

On note T^2_{front} le résultat de l'identification dans $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$ des tores-frontière $T^1(\partial\Delta_p^2)$ et $T^1(\partial\Delta_q^2)$. On note ∞ l'identification des deux cusps dans $\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$, et c_∞ la courbe décrivant la fibre $T^1\{\infty\}$ orientée trigonométriquement. On note c_p la courbe de T^2_{front} décrite par les vecteurs tangents basés en des points de la frontière $\partial\Delta_p^2$ et dirigés par des géodésiques issues de P (voir figure 3.3.1). On définit c_q de même.

On considère l'ensemble $\hat{D}_p$ des vecteurs tangents à $\overline{\Lambda_p^2}$ pointant vers ∞_p^1 avec l'orientation de la base, on note D_p son image par la projection de $T^1\overline{\Lambda_p^2}$ sur $T^1\overline{\Delta_p^2}$, et ∂D_p le bord orienté de D_p, qui est une courbe de T^2_{front}. On définit D_q et ∂D_q de même. ♢

Toutes les courbes sont orientées comme sur la figure 3.3.1.

3.3.4 Lemme. (i) *L'ensemble D_p est un disque méridien du tore plein $T^1\overline{\Delta_p^2}$.*
(ii) *Les classes d'homologie $[c_p]$ et $[c_q]$ forment une base de $H_1(T^2_{front}, \mathbb{Z})$ dans laquelle on a $[c_\infty] = (1, 1)$, $[\partial D_p] = (p-1, -1)$ et $[\partial D_q] = (-1, q-1)$.* ♣

Démonstration. (i) Le disque $\hat{D}_p$ est contractile dans $T^1\overline{\Lambda_p^2}$ et son bord appartient à la frontière $T^1(\partial\overline{\Lambda_p^2})$. Par conséquent son quotient Λ_p^2 est également contractile dans $T^1\overline{\Delta_p^2}$. Le bord ∂D_p appartient alors à la frontière $T^1(\partial\overline{\Delta_p^2})$ qui est par définition le tore T^2_{front}, et il n'y est pas contractile car sa projection sur la base $\partial\overline{\Delta_p^2}$ ne l'est pas. Donc D_p est un disque méridien de $T^1\overline{\Delta_p^2}$.

(ii) On note $\cdot$ la forme d'intersection sur $H_1(T^2_{front}, \mathbb{Z})$. Par définition, et comme indiqué sur la figure 3.3.1, les trois courbes c_p, c_q, c_∞ ont un unique point commun : le vecteur tangent basé en ∞ et dirigé par les géodésiques sortantes. Par conséquent, on a $\big|[c_p] \cdot [c_q]\big| = \big|[c_\infty] \cdot [c_p]\big| = \big|[c_\infty] \cdot [c_q]\big| = 1$, et donc les classes $[c_p]$ et $[c_q]$ forment une base de $H_1(T^2_{front})$. On oriente T^2_{front} de sorte que la base $([c_p], [c_q])$ soit positive. Les signes des intersections $[c_\infty] \cdot [c_p]$ et $[c_\infty] \cdot [c_q]$ sont difficiles à

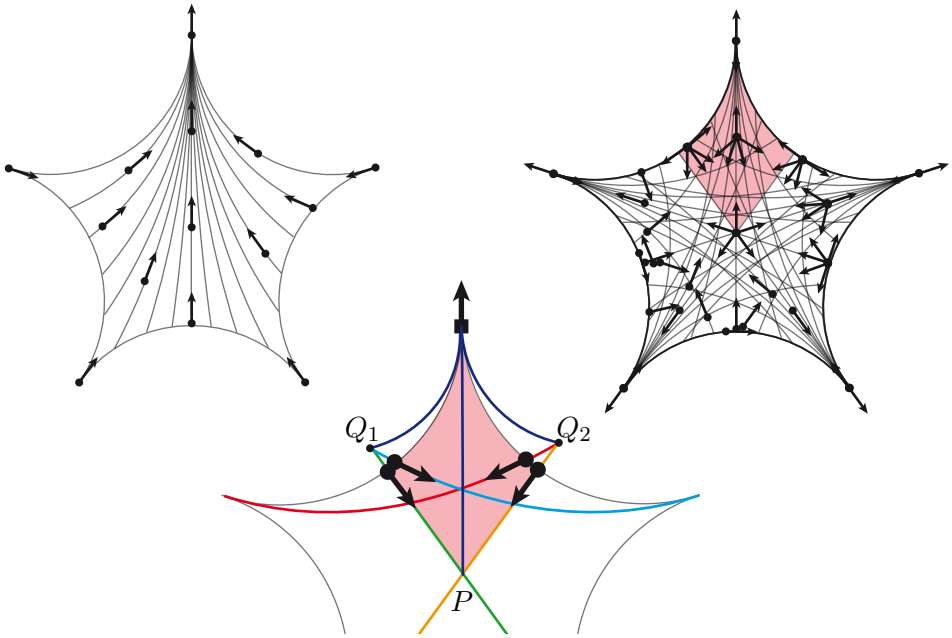

FIGURE 3.3.3 – À gauche, le disque méridien $\hat{D}_p$ de $T^1\overline{\Lambda_p^2}$, avec $p = 5$. À droite, la réunion de ses images successives par les rotation $\rho(P, 2\pi/p)$, à savoir l'ensemble des vecteurs pointant vers un des sommets à l'infini du polygone Λ_p^2. On obtient le disque méridien D_p de $T^1\overline{\Delta_p^2}$ (lemme 3.3.4) en se restreignant au domaine fondamental $\mathcal{F}_p$, c'est-à-dire à la partie teintée. En bas, les $p-1$ points d'intersection entre les courbes c_q et ∂D_p (les vecteurs portés par les segments $[Q_1P]$ et $[Q_2P]$ sont identifiés dans $T^1\overline{\Lambda_p^2}$). Le vecteur dont l'origine est carrée est aussi l'unique point d'intersection entre les courbes c_p et ∂D_p.

déterminer sur la figure puisqu'il faut tenir compte de l'orientation sur T^2_{front}. Néanmoins, la succession des courbes c_p et c_q est isotope à la courbe c_∞, donc dans la base $([c_p], [c_q])$, on a $[c_\infty] = (1, 1)$.

Pour déterminer les coordonnées de $[\partial D_p]$, on calcule son intersection avec les vecteurs de base. Pour l'intersection entre $[c_p]$ et $[\partial D_p]$, il suffit de compter sur la figure 3.3.3 (en bas) le nombre de vecteurs dessinés sur la frontière de $\overline{\Delta_p^2}$ qui sont issus de P (donc appartenant à c_p) et qui pointent vers un sommet ∞_i^p (donc appartenant à ∂D_p). Il n'y en a qu'un, le vecteur basé en ∞ et dirigé par les géodésiques sortantes. Il est représenté sur la figure par un vecteur d'origine carrée. Pour l'intersection entre $[c_q]$ et $[\partial D_p]$, il faut compter les vecteurs issus de Q (donc appartenant à c_q) et qui pointent vers un sommet ∞_i^p (donc appartenant à ∂D_p). Il y en a $p-1$, ce sont les vecteurs marqués sur la figure 3.3.3. Encore une fois, déterminer les signes demande du soin. On remarque que la courbe orientée ∂D_p est isotope à la courbe c_p suivie p fois, suivie de la courbe c_∞ prise à l'envers, d'où $[\partial D_p] = (p-1, -1)$.

On détermine de la même façon les coordonnées de $[\partial D_q]$. ♠

On en déduit la topologie de $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$, illustrée par la figure 3.3.4 :

3.3.5 Proposition. *Soit $\Sigma_{p,q,\infty}$ une orbiface de type (p, q, ∞). Alors le fibré unitaire tangent au compactifié $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$ de $\Sigma_{p,q,\infty}$ est homéomorphe à l'espace lenticulaire $L_{pq-p-q,p-1}$. Le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$ est homéomorphe au complémentaire du nœud torique $K_{p,q}$ dessiné sur le tore médian de $L_{pq-p-q,p-1}$.* ♣

Démonstration. Vues leurs coordonnées dans la base $[c_p, c_q]$, les cercles méridiens $[\partial D_p]$ et $[\partial D_q]$ ont pour intersection $\begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ -1 & q-1 \end{vmatrix} = pq - p - q$. La courbe c_q est un choix de parallèle pour le tore plein

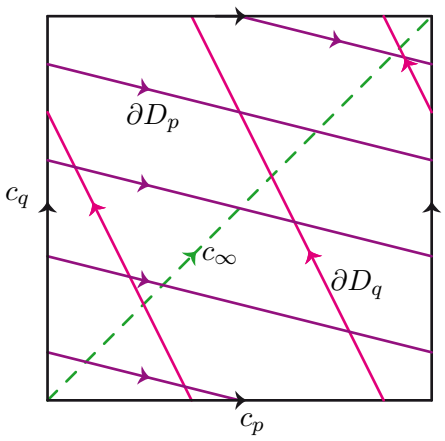

FIGURE 3.3.4 – Le tore médian T^2_{front} dans la base (c_p, c_q), avec ici $p = 5$ et $q = 3$. Le fibré unitaire tangent $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$ est la réunion de deux tores pleins, ayant pour méridiens respectifs les courbes ∂D_p et ∂D_q, le long de T^2_{front}. Les fibres des points du cercle-frontière $\partial\overline{\Delta^2_p}$, lequel est identifié avec $\partial\overline{\Delta^2_q}$, sont les courbes sur T^2_{front} qui sont parallèles à c_∞.

$T^1\Delta^2_q$ puisqu'elle coupe une fois ∂D_q. Comme elle coupe $p-1$ fois ∂D_p, la variété $T^1\overline{\Sigma_{p,pq,\infty}}$ est l'espace lenticulaire $L_{pq-p-q,p-1}$.

Pour obtenir $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$, il suffit de retirer la fibre du point à l'infini, c'est-à-dire la courbe c_∞. Celle-ci est tracée sur le tore médian T^2_{front}. La figure 3.3.4 montre qu'elle coupe p fois ∂D_p et q fois ∂D_q, donc c'est le nœud torique $K_{p,q}$. ♠

3.3.6 Remarque. Puisque $(p-1)(q-1) \equiv 1 \mod pq-p-q$, le théorème de Brody affirme que $L_{pq-p-q,p-1}$ et $L_{pq-p-q,q-1}$ sont homéomorphes. Dans la situation actuelle, le résultat correspond à échanger les rôles de p et q dans la preuve précédente. ♡

3.3.7 Remarque. Au niveau du tore-frontière, on vérifie que changer de compactification pour $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$ revient à effectuer une transvection parallèle à la fibre c_∞ pour la frontière d'un des deux tores pleins, disons $T^1\overline{\Delta^2}_p$. Cela change la variété obtenue, voir [76] pour plus de détails. ♡

3.3.c Position de l'épure

Maintenant qu'on a analysé et paramétré le fibré unitaire tangent à une orbiface (p, q, ∞), on peut y ajouter l'épure $\mathcal{E}_{G_{p,q,\infty},\mathcal{F}_{p,q}}$ construite dans la partie 3.2.

3.3.8 Définition. Soit p, q deux entiers satisfaisant $1/p + 1/q < 1$. On appelle *épure* (p, q, ∞), l'épure $\mathcal{E}_{G_{(p,q,\infty)},\mathcal{F}_{p,q}}$ associée au groupe $G_{(p,q,\infty)}$ et au domaine fondamental $\mathcal{F}_{p,q}$ par la définition 3.2.9, et contractée suivant le processus de la partie 3.2.d. On la note $\mathcal{E}_{p,q}$. ♢

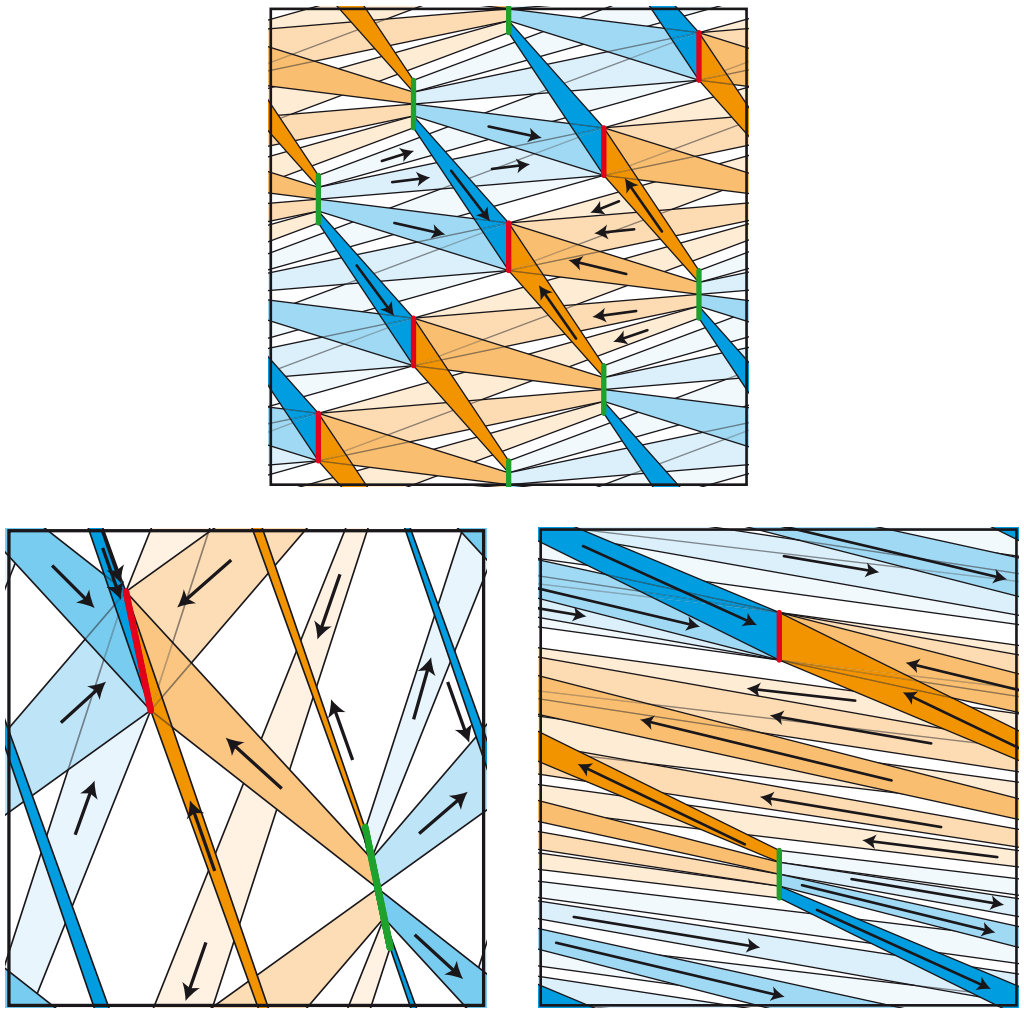

FIGURE 3.3.5 – Un voisinage d'un sommet P de valence 5 de l'arbre $G.\partial_b\mathcal{F}$ dont le stabilisateur dans G est $\mathbb{Z}_5$. En haut, les projections du patron $\widetilde{\mathcal{E}}_{G,\mathcal{F}}$ sur la frontière du tore $T^1\overline{\Lambda^2}_p$ entourant la fibre de P dans $T^1\overline{\mathbb{H}^2}$. Selon qu'on pousse les rubans vers leur droite ou vers leur gauche, on obtient sur la frontière les bandes bleues ou les bandes orangées. En bas à gauche, le quotient par l'action de $\mathbb{Z}_5$ par vissage dans le modèle de l'étage, c'est-à-dire la projection de $\mathcal{E}_{G,\mathcal{F}}$ sur la frontière T^2_{front} du tore $T^1\overline{\Delta^2}_p$ de la fibre $T^1\{P\}$ dans $T^1(G\backslash\mathbb{H}^2)$. En bas à droite, le même quotient dans le modèle de la part de gâteau. Pour mémoire (voir figure 3.1.3), les fibres des points de la base sont les segments verticaux, refermés en cercle, sur les tores du haut et du bas à droite, tandis que sur le tore de gauche, ce sont les réunions de p segments de pente $-p$, ici avec $p = 5$.

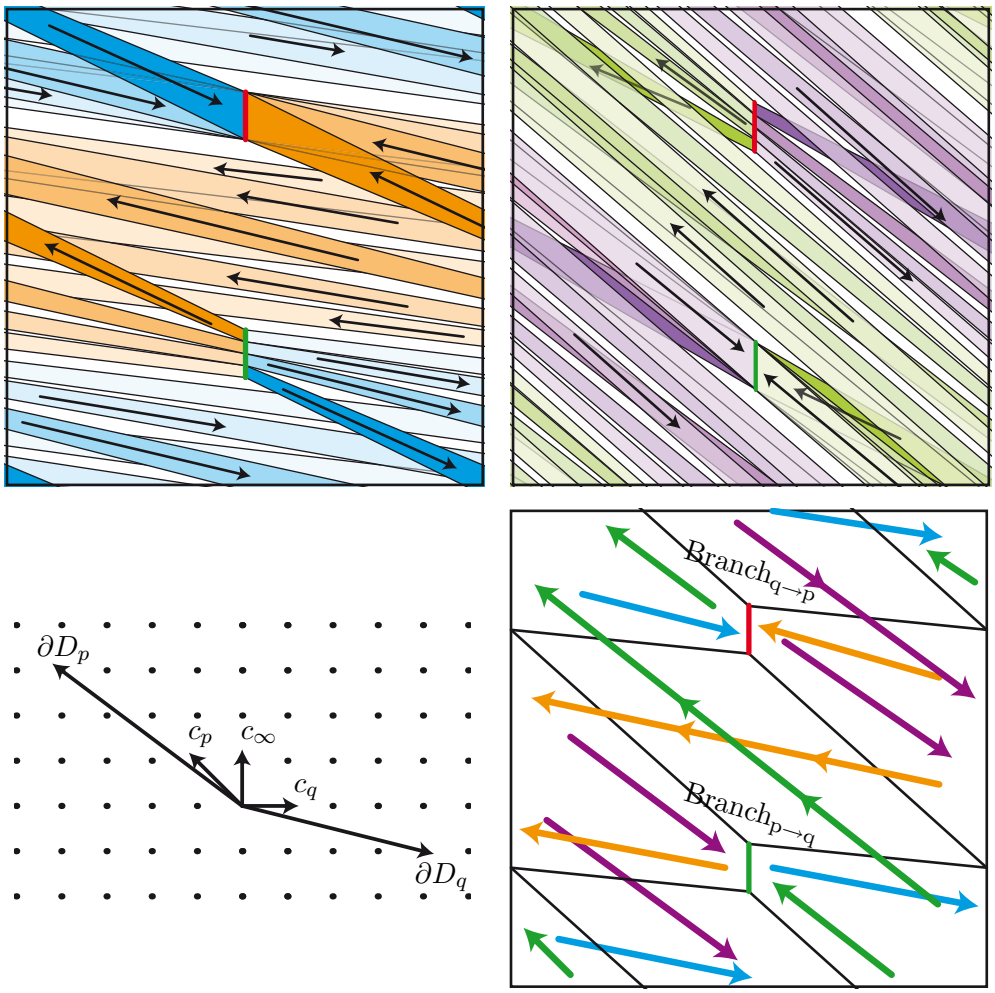

FIGURE 3.3.6 – Les projections de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$ sur le tore T^2_{front}, avec ici $p = q = 4$, vues depuis l'intérieur du tore plein $T^1\overline{\Delta^2_p}$. En haut à gauche, la partie de $\mathcal{E}_{p,q}$ qui est dans $T^1\overline{\Delta^2_q}$. En haut à droite, la partie qui est dans $T^1\overline{\Delta^2_p}$. Premièrement l'orientation est inversée par rapport à la figure de gauche puisque les deux tores pleins sont recollés normale entrante avec normale sortante. Deuxièmement les rubans qui apparaissaient devant sont passés derrière puisqu'on regarde depuis l'intérieur et non l'extérieur de $T^1\overline{\Delta^2_p}$. Troisièmement, la figure a subi une transvection verticale afin que les deux tores pleins soient recollés par l'identité le long de leur frontière commune ; cette transvection est dictée par la compactification choisie du fibré unitaire tangent. En bas à gauche, les coordonnées des vecteurs $c_p, c_q, c_\infty, \partial D_p$ et ∂D_q dans la base (c_q, c_∞) de T^2_{front}. On remarque en particulier que c_p a pour pente -1, ce qui explique la transvection de la figure en haut à droite. En bas à droite, un schéma des directions des projections des différents rubans de $\mathcal{E}_{p,q}$. Les quatre couleurs correspondent aux quatre types $\mathrm{Rub}^p_{i,g}$, $\mathrm{Rub}^p_{i,d}$, $\mathrm{Rub}^q_{i,g}$ et $\mathrm{Rub}^q_{i,d}$. Le point-clé pour démontrer la négativité de l'enlacement (théorème 3.5.1) est que dans chacun des deux intervalles verticaux séparant les deux segments de recollement, tous les rubans vont dans le même sens.

Puisque le sommet P de l'arbre $A_{p,q}$ est de valence p, la partie de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$ qui est dans le tore $T^1\overline{\Delta^2}_p$ est la réunion de $p-1$ rubans, notés $\mathrm{Rub}^p_0, \ldots, \mathrm{Rub}^p_{p-2}$, correspondant aux $p-1$ arêtes du graphe $\mathrm{Gr}_{\text{lisse}}$ qu'on peut suivre au point M — rappelons que M désigne l'intersection du segment $[PQ]$ avec la frontière entre les deux domaines Λ^2_p et Λ^2_q — quand on rentre dans Δ^2_p. Les extrémités de tous les rubans dans $T^1\overline{\Delta^2}_p$ coïncident, et sont deux segments de branchement inclus dans la fibre du point M. On note $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$ le segment correspondant aux orbites entrant dans $T^1\overline{\Delta^2_q}$ et $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$ celui correspondant à l'entrée dans $T^1\overline{\Delta^2_p}$. Chaque ruban Rub^p_i peut être déformé par une isotopie sur la frontière du tore plein $T^1\overline{\Delta^2_p}$ — qu'on a appelée T^2_{front} — en gardant ses extrémités $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$

et $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$ fixes, et ce de deux façons : soit en poussant le ruban vers la droite, c'est-à-dire en poussant l'arête correspondante du graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ vers la droite jusqu'à rencontrer le bord de Λ_p^2, soit vers la gauche. Pour chacun des $p-1$ rubans Rub_i, on fixe deux représentants, notés $\mathrm{Rub}_{i,g}^p$ et $\mathrm{Rub}_{i,d}^p$, de ces deux classes d'isotopie de déformations de Rub_i^p sur le tore T^2_{front}. Ces projections sont représentées sur la figure 3.3.5.

Dans chacun des tores pleins $T^1\overline{\Delta_p^2}$ et $T^1\overline{\Delta_q^2}$, l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$ est positionnée comme sur la figure 3.2.7, et les projections de la partie de l'épure dans $T^1\overline{\Delta_p^2}$ sur le tore T^2_{front} sont schématisées en bas de la figure 3.3.5, dans la base $(\partial D_p, (c_\infty + \partial D_p)/p)$ sur la figure de gauche, et dans la base (c_p, c_∞) sur la figure de droite. La même chose a lieu pour la partie de l'épure qui est dans $T^1\overline{\Delta_q^2}$. Comme l'espace contenant l'épure est un espace lenticulaire, on n'en a pas de projection naturelle sur une feuille planaire, mais par contre, on peut obtenir une projection sur le tore T^2_{front}, et représenter ce tore sur une feuille, c'est la figure 3.3.6.

3.4 Enlacement avec le cusp dans les orbifaces de type (p, q, ∞)

L'enlacement est l'invariant des entrelacs à deux composantes le plus simple. Il est facile à la fois à définir et à calculer (définition 1.1.3). Les deux dernières parties de ce chapitre sont consacrées à deux propriétés de l'enlacement pour les géodésiques périodiques sur les orbifaces $\Sigma_{p,q,\infty}$.

D'après la proposition 3.2.8, les orbites périodiques du flot géodésique peuvent être déformées par isotopie sur les orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$ vivant dans l'espace $\overline{T^1\Sigma_{p,q,\infty}}$. Comme la courbe c_∞ est un nœud ne coupant pas $\mathcal{E}_{p,q}$, on peut calculer l'enlacement de toute géodésique périodique avec c_∞. Ce calcul a été mené dans le cas de la surface modulaire $\Sigma_{2,3,\infty}$ par Ghys dans la partie 3.3 de [44]. On trouve alors la fonction de Rademacher. Nous menons ici ce calcul dans le cas général, à partir de la présentation du patron $\mathcal{E}_{p,q}$ donnée dans la section 3.3.c.

Soit γ une géodésique de $\Sigma_{p,q,\infty}$. On choisit relevé arbitraire de γ dans $\mathbb{H}^2$ et on note (abusivement) $b(\gamma)$ sa lissée. Alors γ est déterminée par son code, c'est-à-dire la suite des embranchements suivis par la lissée $b(\gamma)$ quand elle passe d'une copie de Λ_p^2 à une copie de Λ_q^2, et inversement. Dans le cas présent, c'est un mot bi-infini $\ldots u^{i_0}v^{j_0}u^{i_1}v^{j_1}\ldots$, où u^i indique que $b(\gamma)$ prend la i-ième arête en partant de la droite à l'entrée dans une copie de Λ_p^2. Comme il y a $p-1$ arêtes possibles, on a $1 \leqslant i_k \leqslant p-1$, et de même on a $1 \leqslant j_k \leqslant q-1$. Si γ est périodique, le code de $b(\gamma)$ l'est également, il est donc de la forme $w(\gamma)^{\mathbb{Z}}$, où $w(\gamma)$ est un mot fini $u^{i_1}v^{j_1}\ldots v^{j_m}$ qu'on peut supposer ne pas être une puissance. Pour avoir une expression plus symétrique, et une meilleure interprétation géométrique, on pose $i'_k = i_k - p/2$ et $j'_k = j_k - q/2$. La discrétisée $a(\gamma)$ tourne alors d'un angle $2\pi i'_k/p$ dans Λ_p^2 et $2\pi j'_k/q$ dans Λ_q^2. On définit alors le *tour de volant* $\Theta_{\mathrm{volant}}(\gamma)$ de γ comme le rationnel $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} i'_k/p + j'_k/q$.

On peut maintenant énoncer le théorème qui décrit l'enlacement des géodésiques avec le cusp.

3.4.1 Théorème. *Soit γ le relevé dans $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$ d'une géodésique périodique de $\Sigma_{p,q,\infty}$. Alors l'enlacement de γ avec la fibre du cusp c_∞ est égal à* $\dfrac{pq}{pq-p-q}\Theta_{\mathrm{volant}}(\gamma)$. ♣

Démonstration. On pose $r = pq - p - q$. L'idée est de construire une 2-chaîne de bord $r.\gamma$ transverse à c_∞, puis de calculer son nombre d'intersection avec c_∞.

On note h l'orbite de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$ de code $(u^1v^1)^{\mathbb{Z}}$. Remarquons que h n'est pas homologue à une géodésique, mais à un horocycle. Notons a_p l'âme du tore plein $T^1\overline{\Delta^2}_p$ et a_q sa consœur. ♠

3.4.2 Lemme. *Dans $T^1\Sigma_{p,q,\infty}$, la géodésique périodique γ est homologue au cycle*

$$\sum_{k=1}^{m}\Big([h]+(i_k-1)[a_p]+(j_k-1)[a_q]\Big). \qquad \clubsuit$$

Démonstration. Si γ emprunte successivement les branches de droite à son entrée dans Λ_p^2 et dans Λ_q^2, alors elle est homologue à $[h]$ pendant une période. Sinon, il faut lui ajouter les cycles consistant à suivre la i-ième branche en P à rebours puis la $i+1$-ième sans le bon sens pour i allant de 1 à i_k-1, c'est-à-dire suivre a_p pendant i_k-1 tours. De même pour a_q. ♠

Fin de la démonstration du théorème 3.4.1. D'après le lemme 3.4.2, il suffit de calculer l'enlacement dans $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$ des courbes h, a_p et a_q avec c_∞.

Dans $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$, le cycle $[h]$ borde un disque coupé -1 fois par c_∞. En effet puisque h est homologue à un horocycle, celui-ci borde un horodisque d_h, naturellement feuilleté par des horocyles h^t parallèles à h. Les vecteurs tangents à la famille $\{h^t\}$ forment un disque dans $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$, qui n'intersecte c_∞ qu'en un point : le vecteur limite de tous les $\{h^t\}$. Par conséquent, on a $\mathrm{Enl}(h,c_\infty)=-1/r$.

Passons à a_p. Notons $c_p^+, \partial D_p^+$ et ∂D_q^+ les courbes $c_p, \partial D_p$ et ∂D_q poussées légèrement vers l'intérieur du tore plein $T^1\overline{\Delta^2}_p$ de sorte qu'elles n'intersectent pas c_∞. Comme c_p est un choix de parallèle pour le tore plein $T^1\overline{\Delta^2}_p$, le cycle $r.[a_p]$ est homologue dans $T^1\overline{\Sigma_{p,q,\infty}}$ à $r.[c_p^+]$, de coordonnées $(pq-p-q,0)$ dans la base $([c_p],[c_q])$ de $H_1(T^2_{front})$. D'après le lemme 3.3.4, les cycles $[\partial D_p^+]$ et $[\partial D_q^+]$ ont pour coordonnées respectives $(p-1,-1)$ et $(1,q-1)$, donc $r.[c_p^+]$ est égal à $(1-q)[\partial D_p^+]-[\partial D_q^+]$. Or ∂D_p^+ borde un disque méridien pour $T^1\overline{\Delta^2}_p$ qui ne coupe pas c_∞. Comme ∂D_q et c_∞ se coupent $-q$ fois sur T^2_{front}, la courbe ∂D_q^+ borde un disque méridien pour $T^1\overline{\Delta^2}_q$ qui coupe $-q$ fois c_∞. Par conséquent, on a $\mathrm{Enl}(a_p,c_\infty)=q/r$. On obtient de la même façon l'égalité $\mathrm{Enl}(a_q,c_\infty)=p/r$. ♠

3.5 Enlacement entre géodésiques périodiques de $T^1\Sigma_{2,q,\infty}$

On s'intéresse maintenant à l'enlacement entre deux collections quelconques de géodésiques d'une orbiface de type $(2,q,\infty)$. Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

3.5.1 Théorème. *Soit q un entier supérieur ou égal à 3. Soient $\Sigma_{2,q,\infty}$ l'orbiface de type $(2,q,\infty)$ associée, et $T^1\overline{\Sigma_{2,q,\infty}}$ la compactification naturelle de son fibré unitaire tangent. Soient Γ,Γ' deux collections de géodésiques périodiques dans $T^1\overline{\Sigma_{2,q,\infty}}$. Alors l'enlacement entre Γ et Γ' est négatif.* ♣

Démonstration. L'idée est la suivante : d'après la proposition 3.2.8, il suffit de montrer la négativité de l'enlacement pour deux familles Γ,Γ' d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}_{2,q}$. Pour cela, on construit une 2-chaîne S dans $T^1\overline{\Sigma_{2,q,\infty}}$ de bord $(q-2)\Gamma$ — le facteur $q-2$ assure la nullité homologique — et transverse à l'épure $\mathcal{E}_{2,q}$, puis on montre que l'intersection entre S et Γ' est négative.

Pour construire une telle 2-chaîne S, on ne peut comme dans la partie 3.4 se ramener au 1-squelette de l'épure, car la famille Γ' vit aussi dans l'épure. On simplifie néanmoins la tâche en se ramenant à un problème sur le tore T^2_{front}. La 2-chaîne S qu'on construit est constituée de trois parties : une partie S^2_Γ dans l'intérieur du tore plein $T^1\Delta^2_2$, une partie S^q_Γ dans l'intérieur de $T^1\Delta^2_q$, et une partie S^∂_Γ sur le tore médian T^2_{front}. Ensuite, on majore l'intersection entre les chaînes $S^2_\Gamma, S^q_\Gamma, S^\partial_\Gamma$ et la collection d'orbites Γ'. Plus précisément, on montre que l'intersection entre S^2_Γ et Γ' est nulle, que l'intersection entre S^q_Γ et Γ' est légèrement positive, et que l'intersection entre S^∂_Γ est très négative.

On a vu dans la partie 3.3.c que chaque ruban de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$ peut être déformé de deux façons différentes sur le tore T^2_{front}. On choisit maintenant pour tout morceau d'orbite parcourant un ruban de l'épure une combinaison de ces deux projections qui assure qu'une orbite homologiquement nulle de l'épure se projette sur une courbe homologiquement nulle du tore T^2_{front}. La spécificité de la valeur $p = 2$ est qu'il n'y a qu'un ruban de l'épure dans le tore plein $T^1\overline{\Delta^2_p}$, à savoir le ruban Rub^2_0.

3.5.2 Définition (voir la figure 3.5.1). (i) Soit i entre 0 et $q-2$, et Rub^q_i le ruban de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$ associé. Soit γ un morceau d'une orbite de l'épure composé d'un segment γ^q traversant Rub^q_i de bord en bord, d'un point noté A_0 du segment de branchement $\mathrm{Branch_{p\to q}}$ à un point noté A_1 de $\mathrm{Branch_{q\to p}}$, et d'un segment γ^2 traversant le ruban Rub^2_0 de A_1 à un point de $\mathrm{Branch_{q\to p}}$ noté A_2. On note γ^q_g et γ^q_d les segments du tore T^2_{front} reliant A_0 à A_1 et inclus dans les rubans $\mathrm{Rub}^q_{i,g}$ et $\mathrm{Rub}^q_{i,d}$ respectivement, et de même on note γ^2_g et γ^2_d les deux projections de γ^2 dans les rubans $\mathrm{Rub}^2_{0,g}$ et $\mathrm{Rub}^2_{0,d}$ respectivement. Alors on appelle *projection canonique* de γ sur T^2_{front} la courbe γ^π composée de i fois γ^q_g, de $q-2-i$ fois γ^q_d, de i fois γ^2_g et de $q-2-i$ fois γ^2_d.

(ii) Pour chaque tel segment γ, on note S^q_γ la réunion des i disques orientés chacun bordé par γ^q et $-\gamma^q_g$ et des $q-2-i$ disques bordés par γ^q et $-\gamma^q_d$. De même, on note S^2_γ la réunion des i disques bordés par γ^2 et $-\gamma^2_g$ et des $q-2-i$ disques bordés par γ^2 et $-\gamma^2_d$.

(iii) Soit Γ une collection d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$. On tronçonne Γ le long du segment de branchement $\mathrm{Branch_{p\to q}}$ en une réunion de segments $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ qui sont tous de la forme du segment γ de (i). On appelle *projection canonique* de Γ la courbe du tore T^2_{front}, notée Γ^π, qui est la réunion des courbes $\gamma^\pi_1, \ldots, \gamma^\pi_n$ associées. On définit S^2_Γ comme la réunion $S^2_{\gamma_1} \cup S^2_{\gamma_2} \cup \ldots$, et S^q_Γ comme la réunion $S^q_{\gamma_1} \cup S^q_{\gamma_2} \cup \ldots$ ♢

Pour tout segment γ, sa projection canonique γ^π est la réunion de $q-2$ courbes dont les extrémités sont sur $\mathrm{Branch_{p\to q}}$. Par conséquent, pour toute collection Γ d'orbites périodiques de l'épure, la projection Γ^π est la réunion de $q-2$ courbes fermées de T^2_{front}. On remarque que, par définition, en tout point d'intersection entre Γ et le segment de branchement $\mathrm{Branch_{q\to p}}$, il y a autant de brins de Γ^π qui arrivent par la gauche que de brins qui repartent par la gauche (à savoir $q-2-i$ si Γ arrive par le ruban Rub^q_i), et autant de brins qui arrivent par la droite que de brins qui repartent par la droite (à savoir i).

3.5.3 Lemme. *Soit Γ une collection d'orbites périodiques de l'épure T^2_{front}. Alors sa projection canonique Γ^π est une courbe homologiquement nulle du tore T^2_{front}.* ♣

Démonstration. Travaillons dans la base (c_q, c_∞) de T^2_{front}. Alors les rubans $\mathrm{Rub}^q_{i,g}$, $\mathrm{Rub}^q_{i,d}$, $\mathrm{Rub}^2_{0,g}$ et $\mathrm{Rub}^2_{0,d}$ sont positionnés comme sur la figure 3.5.1. En particulier, pour tout segment γ empruntant d'abord un ruban Rub^q_i puis le ruban Rub^q_0, on peut calculer l'intersection de sa projection canonique γ^π sur le tore avec les courbes c_q et c_∞, avec l'orientation de la figure. Le ruban Rub^2_0 se projette sur le ruban $\mathrm{Rub}^2_{0,g}$, qui monte de $\mathrm{Branch_{q\to p}}$ à $\mathrm{Branch_{p\to q}}$, et sur le ruban $\mathrm{Rub}^2_{0,d}$, qui descend.

On voit alors que le ruban $\mathrm{Rub}^2_{0,d}$ (en vert sur la figure) coupe -1 fois c_∞ et $+1$ fois c_q, que $\mathrm{Rub}^2_{0,g}$ (en violet) coupe $+1$ fois c_∞ et ne coupe pas c_q, et que pour tout i, le ruban $\mathrm{Rub}^q_{i,d}$ (en bleu) coupe $i+1$ fois c_∞ et -1 fois c_q, tandis que $\mathrm{Rub}^q_{i,g}$ (en orange) coupe $q-1-i$ fois c_∞ et ne coupe pas c_q. Le nombre d'intersection entre la combinaison de i fois $\mathrm{Rub}^2_{0,g}$, i fois $\mathrm{Rub}^2_{i,g}$, $q-2-i$ fois $\mathrm{Rub}^q_{0,d}$ et $q-2-i$ fois $\mathrm{Rub}^q_{i,d}$ et la courbe c_∞ vaut alors $i + i(q-1-i) + (q-2-i)(-1) + (q-2-i)(i+1) = 0$. De même, le nombre d'intersection avec c_q vaut $0 + 0 + (q-2-i) + (q-2-i)(-1) = 0$. ♠

La courbe Γ^π découpe le tore T^2_{front} en un certain nombre de régions, notées $R_1, R_2, \ldots$ Comme Γ^π est homologiquement nulle, elle borde une 2-chaîne simpliciale, qu'on peut représenter comme une

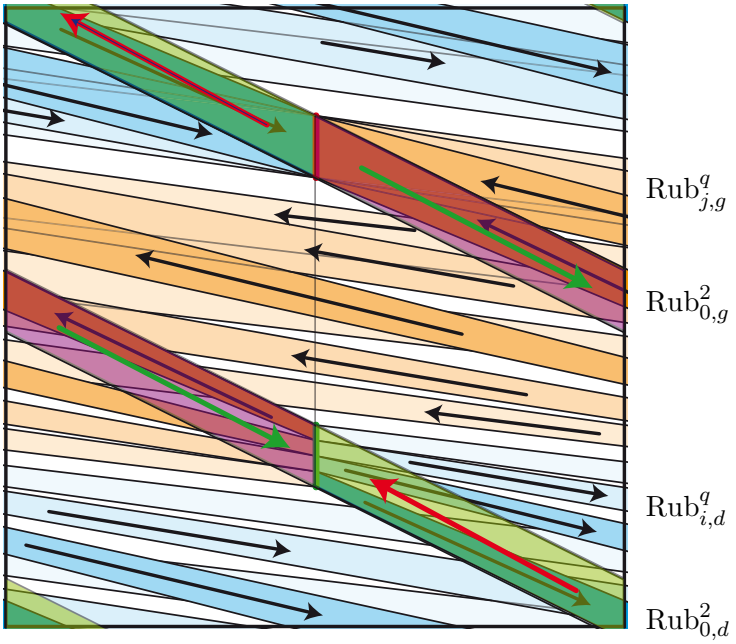

FIGURE 3.5.1 – Les projections de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$ depuis l'intérieur de $T^1\overline{\Delta^2_p}$, avec $p = 2$ et $q = 4$. Le segment de branchement $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$ est en haut, et $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$ en bas. Le ruban $\mathrm{Rub}^2_{0,d}$ cache le ruban $\mathrm{Rub}^q_{0,d}$ qui est juste derrière lui. De même, $\mathrm{Rub}^2_{0,g}$ cache $\mathrm{Rub}^2_{q-2,g}$.

somme formelle $\sum \lambda_i[R_i]$, la règle étant que si deux régions voisines sont séparées par un segment emprunté k fois par Γ^π, les coefficients doivent différer de k. La nullité homologique (lemme 3.5.3) assure la cohérence des niveaux. On rappelle qu'en tout point du segment $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$, il y a autant de segments de Γ^π qui arrivent par chaque côté que de segments qui repartent. Par conséquent les coefficients de toutes les régions coupant le segment $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$ sont égaux.

3.5.4 Définition. Soit Γ une collection d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$, et Γ^π sa projection canonique sur le tore T^2_{front}. Alors on note S^∂_Γ la 2-chaîne de T^2_{front} bordée par Γ^π et telle que le coefficient de toutes les régions coupant le segment $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$ soit nul. On appelle *niveau d'une région* son coefficient dans S^∂_Γ. ♢

On a maintenant constuit une 2-chaîne bordée par Γ. Pour toute autre collection Γ' d'orbites périodiques de l'épure, nous allons estimer les nombres d'intersections entre les 2-chaînes $S^2_\Gamma, S^q_\Gamma, S^\partial_\Gamma$ et la famille Γ' (vue comme une 1-chaîne). Pour cela, on introduit des quantités combinatoires : le nombre de passages des collections Γ et Γ' par chaque ruban de l'épure.

3.5.5 Définition. Soit Γ (*resp.* Γ') une collection d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$. Pour i entre 0 et $q-2$, on note b_i (*resp.* b'_i) le nombre de segments d'orbites de Γ (*resp.* Γ') empruntant le ruban Rub^q_i. ♢

3.5.6 Lemme. *Soient Γ, Γ' deux collections d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$. Soient S^2_Γ et S^q_Γ les 2-chaînes associées à Γ par la définition 3.5.2. Alors*

(i) *la famille Γ' ne coupe pas la 2-chaîne S^2_Γ,*

(ii) *le nombre d'intersection entre Γ' et S^q_Γ est au plus*

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant q-2}\left(\left\lfloor\frac{j-i}{2}\right\rfloor+1\right) i\, b_i b'_j + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant q-2}\left(\left\lfloor\frac{i-j}{2}\right\rfloor+1\right)(q-2-i)\, b_i b'_j. \tag{3.5.1}$$

♣

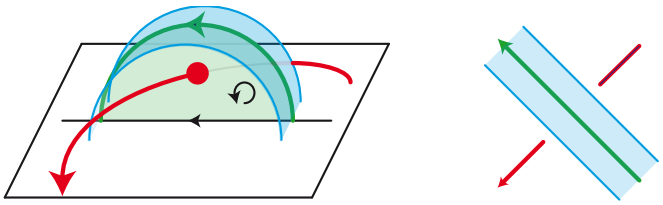

FIGURE 3.5.2 – Une orbite γ' (en rouge) ne coupe la 2-chaîne S^q_Γ (en vert) que si elle est sur un brin du patron sous celui de γ (en bleu). Comme la projection de ce croisement est un croisement de tresse positif (voir figure 3.5.1), l'intersection vaut $+1$.

Démonstration. (voir figures 3.5.2 et 3.5.1) Les points d'intersection entre Γ' et les chaînes S^2_Γ, S^q_Γ apparaissent lorsque le disque bordé par un bout d'orbite γ et une de ses deux projections coupe un bout d'orbite γ', c'est-à-dire lorsque le cercle qui est la réunion de γ et d'une de ses projections enserre γ'. Dans ce cas et comme le montre la figure 3.5.2, les rubans portant γ et γ' se projettent sur un point double, avec le ruban de γ plus éloigné du tore T^2_{front} que celui de γ'.

(i) Comme les deux projections $\mathrm{Rub}^2_{0,g}$ et $\mathrm{Rub}^2_{0,d}$ ne se coupent pas, ni n'ont d'auto-intersection, aucun point double entre deux brins de Γ et Γ' ne peut apparaître, d'où $S^2_\Gamma \cdot \Gamma' = 0$.

(ii) Pour tous i, j, les projections $\mathrm{Rub}^q_{i,g}$ et $\mathrm{Rub}^q_{j,d}$ ne se coupent pas, donc les seuls points doubles apparaissent entre deux projections $\mathrm{Rub}^q_{i,g}$ et $\mathrm{Rub}^q_{j,g}$, ou deux projections $\mathrm{Rub}^q_{i,d}$ et $\mathrm{Rub}^q_{j,d}$. De plus, aucune projection de ruban ne se coupe elle-même, donc deux brins ne se croisent que s'ils appartiennent à des rubans différents. Enfin, comme un point d'intersection n'apparaît que si le ruban contenant γ est plus éloigné de T^2_{front} que celui de γ', il n'y a intersection que si la projection de γ passe sous celle de γ' (avec les conventions d'orientation de la figure 3.5.1). On remarque sur la figure que tous les croisements qui apparaissent ainsi sont positifs, puisque le brin qui est derrière vient toujours de droite. On remarque également que deux projections $\mathrm{Rub}^q_{i,g}$ et $\mathrm{Rub}^q_{j,g}$ se coupent $\lfloor |i-j|/2 \rfloor$ fois de manière franche, et se recouvrent avant de se recoller le long du segment de branchement $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$.

Les nombres b_i ne suffisent pas à déterminer la position de l'orbite Γ sur l'épure. En particulier, on ne sait rien sur la hauteur d'arrivée sur $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$ d'un brin γ de Γ empruntant un ruban donné. On ne peut donc savoir en général si les projections deux brins γ, γ' se croisent juste avant l'arrivée sur le segment de branchement $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$. Comme tous les croisements sont positifs, on majore l'intersection entre S^q_Γ et Γ' en supposant que deux brins quelconques se croisent toujours avant $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$ — c'est évidemment faux, mais la majoration est néanmoins suffisante pour notre démonstration.

D'après la définition 3.5.2 (i), il y a $i\, b_i$ segments de Γ^π qui empruntent le ruban $\mathrm{Rub}^q_{i,g}$, et $(q-2-i)\, b_i$ qui empruntent $\mathrm{Rub}^q_{i,d}$. Chacun des premiers donne alors lieu à au plus $(\lfloor (j-i)/2 \rfloor + 1) b'_j$ points d'intersection avec les segments de Γ' qui empruntent Rub^q_j si on a $j > i$, et zéro si $j \leqslant i$. Chacun des seconds donne lieu à au plus $(\lfloor i - j/2 \rfloor + 1) b'_j$ points d'intersection, et ce si on a $i > j$, d'où la majoration (3.5.1). ♠

On a montré que la chaîne S^q_Γ donnait lieu à des points d'intersection positifs. Comme on veut montrer que l'intersection totale est négative, il faut maintenant montrer que la 2-chaîne S^∂_Γ contre-balance la contribution de S^q_Γ.

3.5.7 Lemme. *Soient Γ, Γ' deux collections d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$. Soit S^∂_Γ la 2-chaîne de T^2_{front} associée à Γ par la définition 3.5.4. Posons $\Delta = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q-2} i(q-2-i)\, b_i$. Alors le nombre*

d'intersection entre S^{∂}_{Γ} et Γ' est majoré par

$$\sum_{j\leqslant(q-2)/2}(-\Delta+\sum_{k\leqslant j}k\,b_k)b'_j+\sum_{j>(q-2)/2}(-\Delta+\sum_{k>j}(q-2-k)\,b_k)b'_j, \tag{3.5.2}$$

♣

Démonstration. Puisque Γ' ne coupe T^2_{front} qu'en des points des segments de branchement $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$ et $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$, il faut estimer les niveaux des régions contenant ces segments. Par définition de S^{∂}_{Γ}, le niveau de toutes les régions contenant $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$ est nul. Comme Γ' coupe le segment $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$ toujours en sortant du tore plein $T^1\overline{\Delta^2_q}$, le nombre d'intersection entre S^{∂}_{Γ} et Γ' est exactement la somme des niveaux de points d'intersection de Γ' avec $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$. Découpons le segment $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$ en $q-1$ segments $[M_iM_{i+1}]$, correspondant aux origines des rubans Rub_i pour i entre 0 et $q-2$ respectivement.

Nous affirmons que le niveau des points M_0 et M_{q-1} est $-\Delta$. En effet, en partant du point M_{q-1} (qui sur la figure 3.5.1 est en haut du segment $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$) et en remontant la fibre de M jusqu'au segment $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$, on coupe des projections de rubans, toujours positivement, et on coupe $q-2-i$ fois la projection $\mathrm{Rub}^q_{i,g}$. Comme celle-ci contient $i\,b_i$ segments de Γ^{π}, la différence de niveau est bien Δ. Le même raisonnement tient de l'autre côté, en descendant de M_0 jusqu'à $\mathrm{Branch}_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}$, et on trouve la même valeur Δ.

Maintenant, nous affirmons que pour $i\leqslant(q-2)/2$, le niveau en un point quelconque du segment $[M_iM_{i+1}]$ est au plus $-\Delta+\sum_{k\leqslant i}k\,b_k$. En effet, quand on parcourt $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$ depuis M_0, le niveau change si on traverse un point d'intersection de Γ avec $\mathrm{Branch}_{\mathrm{p}\to\mathrm{q}}$. Soit B un tel point. Alors en B arrivent $q-2$ segments de Γ^{π}, certains par la gauche, d'autres par la droite, selon le dernier ruban, noté Rub^q_l, emprunté par Γ avant d'arriver en B. De la même façon $q-2$ segments de Γ^{π} partent de B selon la répartition : i à gauche et $q-2-i$ à droite. Ainsi, la différence de niveau ressentie en traversant B est $i-l$. En particulier, elle est d'au plus i. Par conséquent, le niveau est d'au plus $-\Delta+\sum_{k\leqslant i}k\,b_k$ en M_{i+1}, et *a fortiori* en chaque point du segment $[M_iM_{i+1}]$. Le même raisonnement montre que pour $i>(q-2)/2$, le niveau en un point quelconque du segment $[M_iM_{i+1}]$ est au plus $-\Delta+\sum_{k\geqslant i}(q-2-k)\,b_k$.

On en déduit que l'intersection entre S^{∂}_{Γ} et Γ' est majorée par

$$\sum_{j\leqslant(q-2)/2}(-\Delta+\sum_{k\leqslant j}k\,b_k)b'_j+\sum_{j>(q-2)/2}(-\Delta+\sum_{k>j}(q-2-k)\,b_k)b'_j, \tag{3.5.3}$$

c'est l'équation (3.5.2). ♠

Fin de la démonstration du théorème 3.5.1. On peut maintenant conclure. Soit Γ une collection finie d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}_{p,q}$. Alors on construit les trois 2-chaînes S^2_{Γ}, S^q_{Γ} et S^{∂}_{Γ} selon les définitions 3.5.2 et 3.5.4. Par construction, chacune est transverse au complémentaire de Γ dans l'épure, et leur réunion est une 2-chaîne S de bord Γ. Soit Γ' une collection disjointe de Γ d'orbites périodiques de l'épure. Alors on note b_i et b'_i le nombre de segments des deux collections qui empruntent chacun des rubans Rub^q_i. D'après le lemme 3.5.6, le nombre d'intersection entre S^2_{Γ} et Γ' est nul et le nombre d'intersection entre S^q_{Γ} et Γ' est majoré par

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant q-2}\left(\left\lfloor\frac{j-i}{2}\right\rfloor+1\right)i\,b_ib'_j+\sum_{0\leqslant j<i\leqslant q-2}\left(\left\lfloor\frac{i-j}{2}\right\rfloor+1\right)(q-2-i)\,b_ib'_j, \tag{3.5.4}$$

tandis que d'après le lemme 3.5.7, le nombre d'intersection entre S_Γ^∂ et Γ' est majoré par (3.5.2), qu'on peut développer en

$$\begin{aligned}
&- \sum_{1\leqslant j\leqslant (q-2)/2} \Big(\sum_{i\leqslant j} i(q-3-i)\, b_i + \sum_{i>j} i(q-2-i)\, b_i\Big) b'_j \\
&- \sum_{(q-2)/2<j\leqslant q-2} \Big(\sum_{i<j} i(q-2-i)\, b_i + \sum_{i\geqslant j} (i-1)(q-2-i)\, b_i\Big) b'_j.
\end{aligned}$$

La somme des deux termes vaut alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant j\leqslant (q-2)/2} \Big(\sum_{i<j} -i\big(q-3-i-\lfloor (j-i)/2\rfloor -1\big)\, b_i \\
&\qquad\qquad + \sum_{i>j} -(q-2-i)\big(i-\lfloor (i-j)/2\rfloor -1\big)\, b_i \quad \Big) \quad b'_j \\
+ &\sum_{(q-2)/2<j\leqslant q-2} \Big(\sum_{i<j} -i\big(q-2-i-\lfloor (j-i)/2\rfloor -1\big)\, b_i \\
&\qquad\qquad + \sum_{i>j} -(q-2-i)\big(i-1-\lfloor (i-j)/2\rfloor -1\big)\, b_i \quad \Big) \quad b'_j,
\end{aligned}$$

plus des termes en $b_i b'_i$ dont les coefficients sont négatifs. On a donc une forme quadratique, dont tous les coefficients sont négatifs, et par conséquent elle est négative sur le cône $\mathbb{N}^{(q-2)(q-3)/2}$. Ainsi, l'enlacement entre les deux collections Γ et Γ' est toujours négatif. ♠

On conjecture que l'énoncé du théorème 3.5.1 est vrai pour toute orbiface. En particulier, il est probable que le schéma de preuve que nous proposons s'étende au cas p, q, ∞ avec $p \geqslant 3$, mais cela nécessiterait une version plus fine de la définition 3.5.2 et du lemme 3.5.3 que nous n'avons pas trouvés.

Chapitre 4

Patrons et enlacement sur les orbifaces à courbure négative

Dans le chapitre précédent, on a montré qu'une certaine famille d'orbifaces est lévogyre. Dans ce chapitre, on essaie de prolonger cette approche vers la conjecture A de l'introduction, que nous rappelons.

4.0.1 Conjecture. *Soit Σ une orbiface à courbure strictement négative. Alors les relevés de deux collections homologiquement nulles de géodésiques de Σ dans le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma$ s'enlacent négativement.* ♣

Telle qu'énoncée, la conjecture semble s'appliquer à un continuum de flots géodésiques puisqu'elle traite de n'importe quelle métrique à courbure négative sur une surface. En fait il n'en est rien puisque, par un théorème de Ghys (proposition 1.1 de [41]), les flots géodésiques sur deux surfaces de même genre sont topologiquement équivalents, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme entre les fibrés unitaires tangents des surfaces envoyant les orbites du premier flot sur celles du second, tout en préservant l'orientation de ces orbites. Il suffit donc de démontrer la conjecture pour une métrique judicieuse pour chaque genre.

Si la plupart des outils du chapitre précédent s'étendent sans problème à un cadre plus général, en particulier la déformation du flot géodésique, la construction de patrons, et la majoration de l'enlacement entre deux familles quelconques de géodésiques périodiques passent très bien au cas général, la dernière étape de la preuve ne fonctionne pas : la forme quadratique obtenue n'est pas négative sur le cône des vecteurs à coefficients positifs. Néanmoins, on peut montrer la négativité de l'enlacement sur des familles ayant assez de symétries. À l'aide d'une propriété d'invariance par quotient de la négativité, nous arrivons au résultat suivant :

4.0.2 Théorème. *On considère l'orbiface triangulaire $\Sigma_{2,3,7}$. Alors les relevés de deux collections homologiquement nulles de géodésiques de $\Sigma_{2,3,7}$ dans le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{2,3,7}$ s'enlacent négativement.* ♣

Comme le fibré $T^1\Sigma_{2,3,7}$ est une sphère d'homologie entière, on a ici un exemple d'un flot lévogyre sur une sphère d'homologie. La preuve que nous proposons est assistée par ordinateur. En effet on réduit le problème à la négativité d'une forme bilinéaire sur un cône dans $\mathbb{R}^{13}$. Pour la vérifier, on la teste par ordinateur sur tous les couples de droites extrémales, qui sont environ 2^{26} [∗].

[∗]. Des simplifications seraient possibles, mais 2^{26} n'est pas un si grand nombre pour un ordinateur.

Notre preuve s'étend vraisemblablement à d'autres orbifaces, en particulier aux orbifaces $\Sigma_{p,q,r}$, et donc à d'autres sphères d'homologie entières. La propriété importante pour notre approche est que le groupe fondamental de l'orbiface n'admet pas de sous-groupe sans torsion de petit indice. Concernant $\Sigma_{2,3,7}$, son groupe fondamental est le groupe simple d'ordre 168, il n'admet donc pas de sous-groupe sans torsion d'indice inférieur à 168.

Le plan est le suivant. D'abord nous expliquons comment généraliser les notions du chapitre précédent pour construire un patron pour le flot géodésique sur tout quotient du plan hyperbolique par un groupe fuchsien ; en particulier, nous introduisons la notion de multi-patron qui semble nécessaire pour étudier les orbifaces compactes (proposition 4.1.7). Puis nous adaptons le calcul de l'enlacement du chapitre précédent au cas des surfaces. Nous expliquons pourquoi la stratégie ne peut pas marcher en général, puis donnons une piste pour l'affiner et contourner la difficulté [†]. Enfin nous démontrons l'invariance de la propriété de tourner à gauche par quotient (proposition 4.3.1), et nous utilisons les informations sur l'enlacement sur les surfaces de genre 3 pour démontrer le théorème 4.0.2 (théorème D de l'introduction).

4.1 Discrétisation des géodésiques et multi-patrons

Le but de cette section et de la suivante est de contracter le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma$ d'une orbiface générale sur un patron, sans modifier la topologie des géodésiques périodiques (proposition 4.1.4). Comme tout vecteur unitaire tangent est sur une unique géodésique, on va déformer individuellement les géodésiques, sur un graphe, et on utilisera la troisième coordonnée (la fibre) pour assurer le caractère isotopique de la déformation globale. Le choix du graphe importe peu, pourvu qu'il capture toute l'homologie de Σ. De même, une fois le graphe choisi, le chemin dans celui-ci associé à une géodésique donnée a peu d'importance, pourvu qu'il lui soit librement homotope, et que les chemins associés à deux géodésiques distinctes ne se coupent pas plus d'une fois. Cette section généralise la section 3.2 du chapitre précédent. Elle se déroule dans un cadre un peu plus général, et on y remplace les patrons par des multi-patorns.

4.1.a Discrétisée et lissée

Soit G un groupe fuchsien, soit Σ l'orbiface $G\backslash\mathbb{H}^2$ et soit $\mathcal{F}$ un domaine fondamental polygonal pour l'action de G sur $\mathbb{H}^2$. On considère l'ensemble $\partial_b\mathcal{F}$ des côtés bornés de $\mathcal{F}$. Si cet ensemble n'est pas connexe, ce qui arrive par exemple si Σ a plusieurs cusps, on lui ajoute un nombre fini d'arêtes pour le connecter, et on note $\partial_e\mathcal{F}$ le résultat. Le polygone $\mathcal{F}$ est alors découpé en un nombre fini de pièces polygonales, notées $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_c$. On considère l'orbite Gr de $\partial_e\mathcal{F}$ par G, c'est un graphe plongé dans $\mathbb{H}^2$, appelé *primal*. Contrairement au chapitre précédent, ce graphe n'est pas toujours un arbre.

Pour associer à toute géodésique de $\mathbb{H}^2$ une unique courbe du primal Gr, on introduit un pavage dual G-équivariant : pour chaque pavé $\mathcal{F}_i$, on choisit un point P_i à l'intérieur et pour tout g dans G, on choisit le point $g(P_i)$ dans le pavé $g(\mathcal{F}_i)$. On relie deux tels points par un segment si les pavés qui les contiennent sont adjacents. On note Gr^* le graphe obtenu, appelé *dual*. Il sépare le plan hyperbolique en cellules, chacune contenant un unique sommet du primal Gr.

Soit γ une géodésique orientée du plan hyperbolique. Alors la *discrétisée* de γ est définie comme la courbe, notée $a(\gamma)$, du primal Gr traversant la même suite de cellules du complémentaire du dual Gr^*

[†]. C'est une tâche que nous n'avons pas surmontée pour le moment

que γ. Si γ passe par un sommet du dual, on pousse localement γ vers sa gauche de sorte que deux cellules traversées consécutivement partagent une arête.

Soit V un sommet du primal Gr et $M_1, \ldots, M_v$ les intersections des arêtes issues de V dans Gr avec les arêtes du dual Gr^*. Alors on fixe $v(v-1)/2$ courbes lisses reliant chaque paire de points M_i, M_j et orthogonales aux arêtes de Gr^*. On fait cette construction pour tous les sommets de Gr de façon G-équivariante, et note $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ la réunion de toutes les courbes construites, c'est un graphe de $\mathbb{H}^2$ dont les sommets sont les intersections entre les arêtes de Gr et celles de Gr^*.

Soit γ une géodésique orientée du plan hyperbolique. Alors la *lissée* de γ est la courbe de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ passant par la même suite de points de $\mathrm{Gr} \cap \mathrm{Gr}^*$ que la discrétisée de γ. On la note $b(\gamma)$.

Comme les pavés ont un diamètre fini, la discrétisée d'une géodésique reste à distance bornée de celle-ci, et a en particulier les mêmes extrémités à l'infini. La propriété importante pour nous est que la construction précédente est G-équivariante : pour toute géodésique γ et pour tout g dans G, on a $b(g(\gamma)) = g(b(\gamma))$.

En particulier, soit γ_Σ une géodésique de Σ et γ un relevé quelconque dans $\mathbb{H}^2$. Si γ_Σ est périodique, il existe g dans G tel que γ est g-invariante. Donc $b(\gamma)$ est également g-invariante, et sa projection dans Σ est périodique.

4.1.b Isotopie

On a associé à toute géodésique de $\mathbb{H}^2$ une unique discrétisée qui vit dans le graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$, et ce de manière G-équivariante. Maintenant, on relève les géodésiques dans $T^1\mathbb{H}^2$. On montre que l'application de lissage est le temps 1 d'une application, appelée *déchirure*, qui, projetée sur $T^1\Sigma$ et restreinte aux orbites périodiques, est une isotopie (proposition 4.1.4). Ainsi toutes les propriétés topologiques des géodésiques périodiques dans $T^1\Sigma$ sont poussées dans $T^1\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$. L'idée-clé de la construction est que les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ qui sont G-périodiques sont définies, et ce de manière unique, par leur direction positive à l'infini.

Cette section est un écho de la section 3.2.b, mais comme les énoncés sont plus généraux, on ne peut s'en passer.

4.1.1 Lemme. *Soit G un groupe fuchsien, soit $\mathcal{F}$ un domaine fondamental pour l'action de G sur $\mathbb{H}^2$, soit Gr et Gr^* les graphes primal et dual associés. Il existe une famille $\{f_\gamma\}$ d'isotopies de $[0,1] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}^2$ paramétrée par les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ telle que*

(i) *on a $f^0_\gamma(\mathbb{R}) = \gamma$ et $f^1_\gamma(\mathbb{R}) = b(\gamma)$,*
(ii) *pour tout g dans G, on a $f_{g(\gamma)} = g \circ f_\gamma$.* ♣

Démonstration. Pour chaque géodésique γ, la courbe $b(\gamma)$ est une courbe lisse sans point double, par conséquent, il existe une isotopie entre γ et $b(\gamma)$. Qu'on puisse la choisir G-équivariante est une conséquence de l'axiome du choix. ♠

4.1.2 Remarque. Pousser la courbe $b(\gamma)$ selon sa normale et proportionnellement à sa courbure a un effet régularisant. Il semble possible que, quitte à reparamétrer pour forcer la convergence en temps fini, ce flot induise une famille d'isotopie satisfaisant les conclusions du lemme 4.1.1. ♡

Une famille d'isotopie satisfaisant les conclusions du lemme 4.1.1 est dite *rugueuse*. On relève maintenant les isotopies dans $T^1\mathbb{H}^2$.

4.1.3 Définition. Soit $\{f_\gamma\}$ une famille rugueuse d'isotopie. La *déchirure* associée $F : [0,1] \times T^1\mathbb{H}^2 \to T^1\mathbb{H}^2$ est définie comme suit : soit (x, v) un vecteur unitaire tangent à $\mathbb{H}^2$ et γ la géodésique passant par x et dirigée par v, alors $F^s(x, v)$ est le vecteur (x', v') tel que

(i) on a $x' = f^s_\gamma(x)$,
(ii) le vecteur v' pointe vers l'extrémité γ_+. ♢

Remarquons qu'une déchirure n'est pas une application continue. En effet si γ passe par un sommet du dual, une géodésique proche de γ mais passant à droite dudit sommet a une discrétisée éloignée de celle de γ. D'autre part, une déchirure est injective pour un temps s proche de 0, mais son temps 1 contracte tous les horocycles. Pour ces deux raisons, une déchirure est loin d'être une isotopie. Néanmoins

4.1.4 Proposition. *Soit $\{f_\gamma\}$ une famille rugueuse d'isotopies. Alors, restreinte aux orbites G-périodiques du flot géodésique, la déchirure F associée est une isotopie.* ♣

Démonstration. Supposons $F^s(x_1, v_1) = F^s(x_2, v_2)$ pour un certain s dans $[0, 1]$. Comme les vecteurs $F^s(x_1, v_1)$ et $F^s(x_2, v_2)$ pointent vers $(\gamma_1)_+$ et $(\gamma_2)_+$ respectivement, leur égalité implique $(\gamma_1)_+ = (\gamma_2)_+$. Par conséquent les géodésiques γ_1 et γ_2 se rapprochent exponentiellement en $+\infty$. Or elles sont toutes deux G-périodiques, donc compactes dans le quotient $T^1\Sigma$, et par conséquent confondues. L'égalité $F^s(x_1, v_1) = F^s(x_2, v_2)$ implique par définition $f^s_{\gamma_1}(x_1) = f^s_{\gamma_1}(x_2)$, et comme f_{γ_1} est une isotopie, on en déduit $x_1 = x_2$. Enfin, les vecteurs v_1 et v_2 pointent vers γ_{1+}, donc ils coïncident. ♠

4.1.c Multi-patrons

Le fibré unitaire tangent au plan hyperbolique ayant été déchiré de façon G-équivariante, et la topologie des géodésiques périodiques étant intacte, nous allons examiner les lambeaux. Le reste de cette partie est consacré à montrer qu'une déchirure envoie le fibré unitaire tangent à Σ, muni du flot géodésique, sur un certain patron généralisé.

4.1.5 Définition (voir figure 4.1.1)**.** Soit M une variété de dimension 3, un *multipatron* dans M est une surface lisse, fermée, branchée, plongée S, composée d'un nombre fini de rubans Rub_r, chacun muni d'un champ de vecteur X_r, de sorte que

(i) chaque ruban Rub_r est difféomorphe au carré $[0, 1]^2$ muni du champ horizontal $\dfrac{\partial}{\partial x}$,
(ii) deux rubans distincts $\mathrm{Rub}_{r_1}, \mathrm{Rub}_{r_2}$ ne peuvent se rencontrent qu'en leurs côtés verticaux, le long de segments dits de branchement,
(iii) en tout point d'un segment de branchement, les champs X_{r_i} des différents rubans coïncident.

Une orbite du multipatron est une injection de la droite $\mathbb{R}$ partout tangente au champ de vecteur. ♢

La différence avec la notion usuelle de patron est qu'il n'y a pas de flot défini de façon unique, mais un multi-flot : en effet, en un point d'un segment de branchement, il peut y avoir plusieurs rubans sortant, et donc plusieurs futurs possibles. S'il y avait au plus un ruban quittant chaque point de branchement, on aurait affaire à un patron. Remarquons aussi que, pour un point donné du multipatron, il n'y a pas forcément d'orbite passant par ce point. C'est par exemple le cas si, en un point d'un segment de branchement, tous les rubans arrivent mais aucun ne part.

4.1.6 Définition. Soient G un groupe fuchsien, $\mathcal{F}$ un domaine fondamental, Gr un graphe primal associé, Gr^* un graphe dual et $\mathrm{Gr}_{\text{lisse}}$ le graphe lissé du primal. Soit $\mathcal{F}^*$ une cellule de complémentaire de Gr^* dans $\mathbb{H}^2$. Soient e^*_i et e^*_j deux arêtes bord de $\mathcal{F}^*$, et $c_{i,j}$ l'arête du graphe $\mathrm{Gr}_{\text{lisse}}$ les reliant. Alors

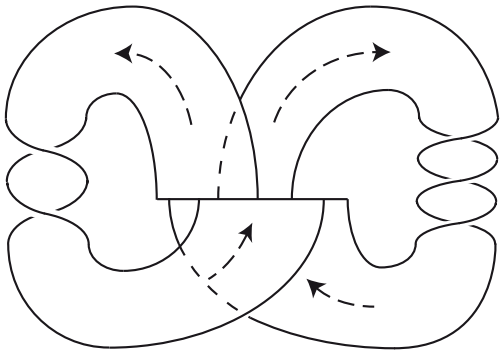

FIGURE 4.1.1 – Un multipatron. Le long du segment de branchement, il y a, de gauche à droite, 1, 2, 1, puis 0 rubans quittant l'axe.

l'*intervalle visuel* associé à $c_{i,j}$, noté $\mathrm{Vis}_{i,j}$, est l'ensemble dans $\partial\mathbb{H}^2$ des extrémités de géodésiques reliant un point de e_i^* à un point de e_j^*. Le *ruban produit* associé, noté $\mathrm{Rub}_{i,j}$, est le produit $c_{i,j} \times \mathrm{Vis}_{i,j}$ dans $T^1\mathbb{H}^2$, vu comme $\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$. Il est muni du champ de vecteur X_{ij} horizontal dont le flot suit les courbes $c_{i,j} \times \{\gamma_+\}$ à vitesse constante 1.

L'*épure* de Σ, notée $\mathcal{E}_\Sigma$, est la surface branchée dans $T^1\Sigma$ obtenue comme réunion des rubans produit $\mathrm{Rub}_{i,j}$ associés à chaque paire d'arêtes de $\mathcal{F}^*$. $\diamondsuit$

L'introduction de ces objets permet d'énoncer une propriété importante pour nous.

4.1.7 Proposition. *Soient G un groupe fuchsien, Σ l'orbiface $G\backslash\mathbb{H}^2$, et $\mathcal{F}$ un domaine fondamental. Soient* Gr *un graphe primal associé,* Gr^* *un graphe dual,* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ *un lissage de* Gr*, et $\mathcal{E}_\Sigma$ l'épure associée.*

(i) *Alors l'épure $\mathcal{E}_\Sigma$ est un multipatron.*

(ii) *Soit F une déchirure de $T^1\Sigma$. Alors F envoie $T^1\Sigma$ sur l'épure $\mathcal{E}_\Sigma$ et semi-conjugue le flot géodésique au multiflot de l'épure.* ♣

Démonstration. (i) Montrons que deux rubans distincts de l'épure $\mathcal{E}_\Sigma$ sont disjoints. Soit $c_{i,j}$ et $c_{k,l}$ deux courbes du graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ (voir figure 4.1.2) dans une même cellule $\mathcal{F}^*$ du complémentaire du dual. On suppose que $c_{i,j}$ et $c_{k,l}$ se coupent à l'intérieur de $\mathcal{F}^*$. Montrons que les intervalles visuels $\mathrm{Vis}_{i,j}$ et $\mathrm{Vis}_{k,l}$ ne se rencontrent pas. En effet, quitte à échanger $c_{i,j}$ et $c_{k,l}$, et quitte à effectuer une symétrie, on peut supposer i, j, k, l cycliquement ordonnés selon $i < k < j < l$. Soit $\gamma_{i,j}^g$ la géodésique reliant l'extrémité droite de e_i à l'extrémité gauche de e_j et $\gamma_{i,j}^d$ celle qui relie l'extrémité gauche de e_i à l'extrémité droite de e_j. Comme, par convention, les géodésiques passant par les sommets sont décalées vers la gauche, l'intervalle visuel $\mathrm{Vis}_{i,j}$ est l'intervalle $[(\gamma_{i,j}^d)_+, (\gamma_{i,j}^g)_+]$ de $\partial\mathbb{H}^2$. Les géodésiques $\gamma_{i,j}^g$ et $\gamma_{k,l}^d$ se coupent dans $\mathcal{F}$, voire en un sommet si $l = k+1$ ou $j = i+1$, donc $(\gamma_{k,l}^d)_+$ est à gauche de $(\gamma_{i,j}^g)_+$ sur $\partial\mathbb{H}^2$. Par conséquent les intervalles $\mathrm{Vis}_{i,j}$ et $\mathrm{Vis}_{k,l}$ sont disjoints.

Soient x un point à l'intérieur de $\mathcal{F}$ et (x, v) un élément de la fibre $T^1\{x\}$. Alors (x, v) appartient à un ruban Rub_{ij} si x appartient à $c_{i,j}$ et v pointe dans l'intervalle visuel Vis_{ij}. D'après ce qui précède, (x, v) appartient donc à au plus un ruban. Par conséquent les rubans ne se rencontrent qu'au-dessus du bord de $\mathcal{F}$, dans les fibres T^1M, où M est un point de $\mathrm{Gr} \cap \mathrm{Gr}^*$. Comme toutes les courbes c_{ij} sont orthogonales aux côtés de $\mathcal{F}$, et que les champs de vecteur des rubans sont horizontaux, ils coïncident tous dans les fibres T^1M. Par conséquent l'épure $\mathcal{E}_\Sigma$ est bien un multipatron.

(ii) Pour toute géodésique γ de $\mathbb{H}^2$, l'image de f_γ^1 est incluse dans le graphe $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$, donc l'image

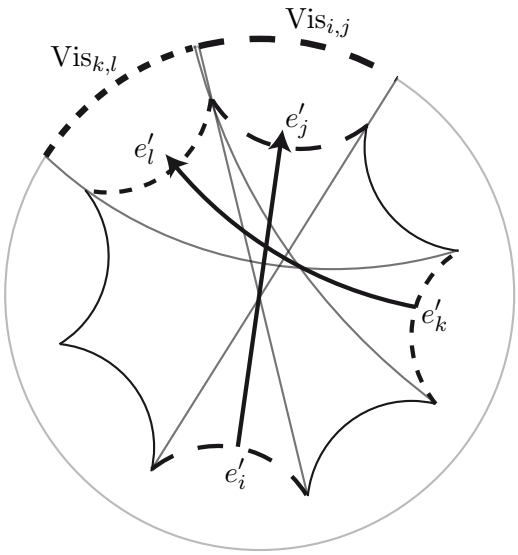

FIGURE 4.1.2 – Les intervalles visuels associés à deux courbes $c_{i,j}, c_{k,l}$ de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$ qui se coupent. Comme les intervalles $\mathrm{Vis}_{i,j}$ et $\mathrm{Vis}_{k,l}$ sont disjoints, les rubans $\mathrm{Rub}_{i,j}$ et $\mathrm{Rub}_{k,l}$ dans les fibres au-dessus de $c_{i,j}$ et $c_{k,l}$ ne se rencontrent pas. Le pavé dessiné est une copie de $\mathcal{F}^*$.

de F^1 est incluse dans les fibres au-dessus de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{lisse}}$. De plus, si la discrétisée $a(\gamma)$ emprunte la courbe c_{ij}, alors l'extrémité γ_+ appartient à l'intervalle visuel Vis_{ij}, et par conséquent le relevé de $b(\gamma)$ dans $T^1\Sigma$ emprunte le ruban Rub_{ij}, en visant γ_+. Ainsi $F(\gamma)$ vit dans l'épure, et suit une orbite du multiflot. ♠

La proposition 4.1.7 permet de ramener les questions sur la topologie des orbites périodiques du flot géodésiques à des questions sur les orbites périodiques de l'épure. Comme dans le chapitre précédent, on utilise la flexibilité de l'épure pour rétrécir ses rubans.

4.1.8 Lemme. *Soient G un groupe fuchsien, Σ l'orbiface $G\backslash\mathbb{H}^2$, Gr et Gr^* deux graphes primal et dual associés, et $\mathcal{E}_\Sigma$ l'épure correspondante. Alors $\mathcal{E}_\Sigma$ est isomorphe à l'épure $\mathcal{E}'_\Sigma$ représentée sur la figure 4.1.4, où les deux segments de branchement correspondent aux vecteurs au-dessus des points de $\mathrm{Gr} \cap \mathrm{Gr}^*$ et qui pointent dans une direction ε-proche de celle de l'arête de Gr correspondante.* ♣

Démonstration. Soit e et e^* des arêtes de Gr et Gr^* dont on suppose qu'elles se coupent en un point M. On note R_1 et R_2 les deux cellules du complémentaire de Gr^* dans $\mathbb{H}^2$ séparées par e^*, et on note e^*_+ et e^*_- les deux extrémités de e^* dans $\partial\mathbb{H}^2$. Les géodésiques traversant e^* de R_1 à R_2 pointent toutes dans l'intervalle $]e^*_-, e^*_+[$ et les géodésiques traversant e^* de R_1 à R_2 pointent vers $]e^*_+, e^*_-[$. Ces deux segments sont des segments de branchement de l'épure disjoints qui contiennent chacun une extrémité de l'arête e. On peut donc les déformer par isotopie sur des segments plus petits, par exemple sur $]e_+ - \varepsilon, e_+ + \varepsilon[$ et $]e_- - \varepsilon, e_- + \varepsilon[$ respectivement. Le reste des rubans est déformé, sans en changer les positions relatives, c'est-à-dire sans que deux rubans distincts se croisent. ♠

4.1.d Une remarque sur les segments de branchement.

Soit G un groupe fuchsien et Σ l'orbiface $G\backslash\mathbb{H}^2$. Après un certain nombre de choix, on a construit une épure $\mathcal{E}_\Sigma$ dans $T^1\Sigma$, qui est un multi-patron et qui contient toutes les classes d'isotopies de géodésiques périodiques. En fait, l'épure contient plus d'orbites périodiques, dont certaines ne sont les classes

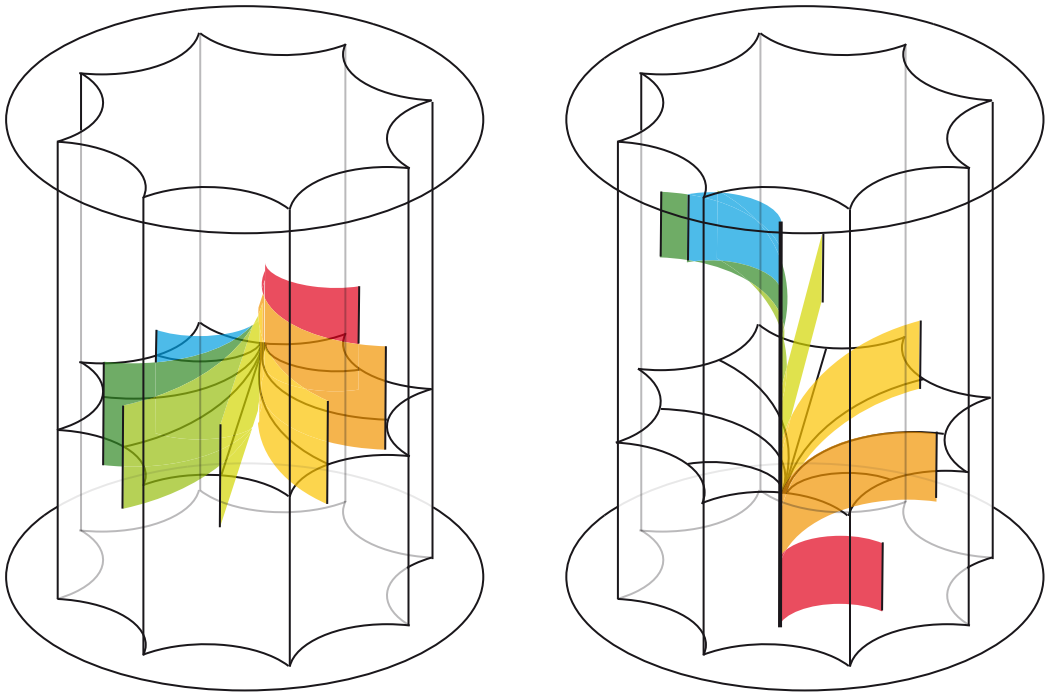

FIGURE 4.1.3 – L'épure $\mathcal{E}_\Sigma$, vue dans le fibré $T^1\mathcal{F}$ identifié à $\mathcal{F} \times \partial\mathbb{H}^2$. Pour avoir l'épure dans $T^1\Sigma$, il faut appareiller les faces verticales par des homographies dans les fibres. On remarque sur la figure de droite qu'il y a recouvrement entre différents rubans issus d'un même segment de branchement.

d'isotopies d'aucune géodésique périodique de $T^1\Sigma$. En particulier, l'épure contient des couples d'orbites qui s'enlacent selon le schéma de la figure 4.1.5. Nous montrons ici que ceci ne peut arriver quand on s'intéresse aux image de géodésiques périodiques par une déchirure. En une phrase, cela correspond au fait que deux géodésiques de $\mathbb{H}^2$ se coupent au plus une fois.

4.1.9 Lemme. *Soient G un groupe fuchsien, Σ l'orbiface associée, et $\mathcal{F}$ un domaine fondamental. Soient Gr un graphe primal associé, Gr^* un graphe dual, F la déchirure associée, et $\mathcal{E}'_\Sigma$ l'épure déformée fournie par le lemme 4.1.8. Soient γ, γ' deux géodésiques de $T^1\Sigma$. Si le long d'un segment de branchement de l'épure, l'orbite $F^1(\gamma)$ arrive par un ruban Rub_i à droite du ruban Rub_j par lequel arrive $F^1(\gamma')$ — c'est-à-dire que la projection de Rub_i sur Σ est à droite de celle de Rub_j — et que $F^1(\gamma)$ coupe le segment de branchement au-dessous de $F^1(\gamma')$, alors $F^1(\gamma)$ quitte le segment de branchement par un ruban Rub_k à droite du ruban Rub_l par lequel part $F^1(\gamma')$.* ♣

Démonstration. Démontrons plutôt la contraposée, à savoir que si Rub_i est à droite de Rub_j et si Rub_k est à droite de Rub_l, alors γ coupe le segment de branchement au-dessus de γ'. En effet, les positions relatives des rubans impliquent que les relevés des géodésiques γ, γ' dans $\mathbb{H}^2$ se coupent, et que leurs extrémités sont ordonnées cycliquement selon $\gamma'_- < \gamma_+ < \gamma'_+ < \gamma_-$. Par conséquent, le long du segment de branchement, γ passe bien sous γ'. ♠

4.2 Enlacement des géodésiques sur les surfaces compactes

Le fibré unitaire tangent à une surface compacte de genre g est un fibré en cercles de classe d'Euler $2-2g$. Son premier groupe d'homologie entière est $\mathbb{Z}^{2g} \times \mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z}$, où le facteur $\mathbb{Z}^{2g}$ correspond

FIGURE 4.1.4 – L'épure $\mathcal{E}_\Sigma$ déformée en $\mathcal{E}'_\Sigma$, de sorte que les segments de branchement soient de hauteur 2ε.

au H_1 de la base. En particulier, le relevé de toute famille de géodésiques qui bordent une 2-chaîne sur la surface borde une 2-chaîne dans le fibré unitaire tangent, quitte à le multiplier par $2g-2$. Par conséquent, et comme au chapitre précédent, on peut définir l'enlacement entre les relevés de familles de géodésiques homologiquement nulles. Dans cette partie, nous présentons une stratégie pour démontrer que cet enlacement est toujours négatif, et nous en expliquons le point d'achoppement. On expliquera dans la partie suivante comment utiliser cette stratégie pour traiter le cas de certaines orbifaces.

Dans toute cette partie, on suppose fixée une surface Σ_g de genre g. On note G son groupe fondamental. On choisit un domaine fondamental polygonal $\mathcal{F}_g$ à $4g$ côtés, appariés par G. On choisit un point V^* à l'intérieur de $\mathcal{F}_g$, et on construit le domaine dual $\mathcal{F}_g^*$ associé à $\mathcal{F}_g$. Les graphes primal et dual associés Gr et Gr^* sont alors deux graphes réguliers de degré $4g$ découpant chacun le plan hyperbolique en $4g$-gones, qui sont des copies de $\mathcal{F}_g$ et $\mathcal{F}_g^*$ respectivement. On ne précise pas l'appariement des côtés par G, puisque selon le domaine choisi, celui-ci peut varier, et cet appariement n'a pas d'importance dans nos calculs. Tous les sommets de Gr sont identifiés par G en un unique point de Σ_g noté V. De la même façon, les sommets de Gr^* sont identifiés en un point de Σ_g qu'on note abusivement V^*. Soit F une déchirure (définition 4.1.3) et $\mathcal{E}'_g$ l'épure associée modifiée (définition 4.1.6 et lemme 4.1.8).

4.2.a Topologie de $T^1\Sigma_g$ et plongement de l'épure

On note $e_1^*, \dots, e_{4g}^*$ les côtés du domaine $\mathcal{F}_g^*$. Si on retire un voisinage fermé $N(V^*)$ du point V^* de la surface Σ_g, le fibré unitaire tangent $T^1(\Sigma_g \smallsetminus N(V^*))$ est un fibré en cercle sur une surface à bord, il est donc isomorphe au fibré trivial $(\Sigma_g \smallsetminus N(V^*)) \times \mathbb{S}^1$, dont le bord est le tore $\partial(N(V^*)) \times \mathbb{S}^1$. Si on paramètre les fibres des points de $\mathcal{F}^*$ par le cercle $\partial\mathbb{H}^2$, alors on obtient $T^1(\Sigma_g \smallsetminus N(V^*))$ en partant du produit $(\mathcal{F}^* \smallsetminus N(V^*)) \times \partial\mathbb{H}^2$, et en identifiant les fibres au-dessus des côtés par des homographies : si e_i^* et e_j^* sont identifiés par un élément $g_{i,j}$ de G, alors les fibres de deux points x et $g(x)$ sont identifiées par l'action de $g_{i,j}$ sur $\partial\mathbb{H}^2$.

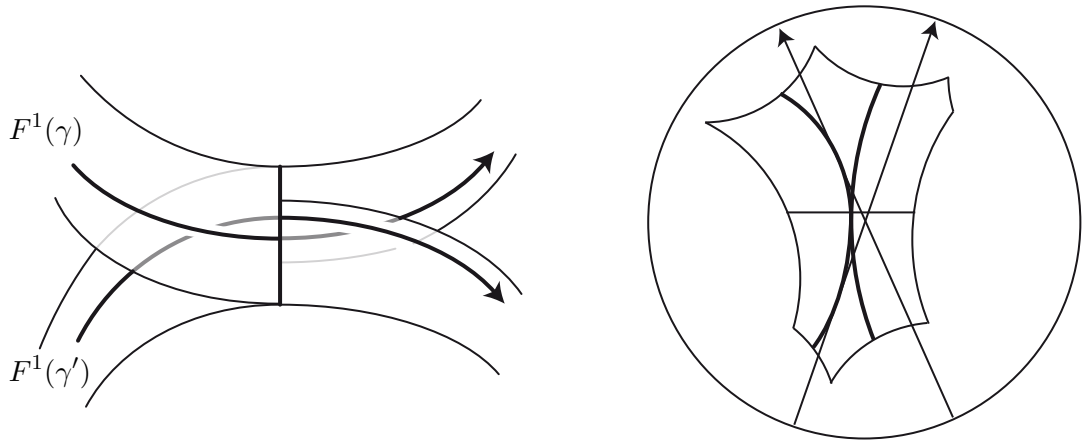

FIGURE 4.1.5 – À gauche, les projections verticales de deux orbites d'un multi-patron donnant lieu à un double croisement. À droite, la raison pour laquelle cette situation n'arrive pas pour les orbites issues du flot géodésique : si une orbite arrive de droite (sur la surface) et repart à gauche, alors son extrémité est à gauche, et donc elle croise le segment de branchement au-dessus de l'autre orbite. Il n'y a alors pas de croisement entre les projections des deux orbites près du segment de branchement.

Comme dans la partie précédente, pour obtenir le fibré complet, il faut recoller le fibré $T^1(N(V^*))$, qui est un tore plein, à $T^1(\Sigma_g \smallsetminus N(V^*))$, fibre contre fibre. Comme chacune des deux parties est un fibré trivial, elles admettent des sections, et le recollement est spécifié par l'intersection entre les restrictions de deux telles sections au tore $T^1(\partial N(V^*))$. Ce nombre est la caractéristique d'Euler de la surface, soit $2-2g$.

Maintenant, plongeons l'épure $\mathcal{E}'_\Sigma$ dans $T^1\Sigma_g$. Dans le tore $T^1\mathcal{F}^*$, l'épure est la réunion de $4g(4g-1)$ rubans dont les extrémités sont dans les fibres du bord de $\mathcal{F}^*$. Chaque ruban peut être déformé sur le bord du tore $T^1\mathcal{F}^*$ de deux façons, à savoir en poussant vers la droite ou vers la gauche (voir figure 4.2.1). On note $\mathcal{E}^\pi_\Gamma$ la réunion de ces rubans ; c'est une surface branchée munie d'un multi-flot incluse dans $T^1(\partial\mathcal{F}^*)$. Quand on apparie les côtés de $\mathcal{F}^*$ par G, les extrémités des rubans sont également appariées.

Pour regarder ce qu'il reste de $\mathcal{E}^\pi_\Gamma$ sur le bord de la variété $T^1(\Sigma \smallsetminus N(V^*))$, il faut d'abord épaissir les anneaux gris de la figure 4.2.1 jusqu'à faire disparaître les bandes blanches, puis permuter les anneaux gris pour les mettre dans l'ordre selon lesquels on les voit en tournant autour de V^*. Comme les bandes grises sont toutes semblables, cette opération ne change pas la figure à étiquetage des rubans près.

Il reste à reboucher le trou $N(V^*)$, c'est-à-dire à recoller un tore plein le long des anneaux gris de la figure 4.2.1. Comme le méridien de ce tore plein coupe $2-2g$ fois la section de $T^1(\Sigma_g \smallsetminus N(V^*))$, le reboucher revient à faire une transvection de direction verticale et de rapport $2-2g$ sur $T^1(\partial N(V^*))$. On obtient ainsi sur la figure 4.2.2 les deux projections de l'épure $\mathcal{E}'_\Sigma$ sur le tore $T^1(\partial N(V^*))$.

On peut vérifier la cohérence de la figure en remarquant que la déformation vers la droite du ruban le plus à droite a pour coordonnées $(1,-1)/4g$. Or si on considère le bord droit de l'épure $\mathcal{E}'_\Sigma$, on fait un tour complet autour de V^*, en empruntant $4g$ rubans, chacun tournant le plus à droite possible. Quand on fait un tour autour de V^* en tournant à droite, le point base fait un tour dans le sens horaire autour de V^*, tandis que le vecteur tangent décrit tour de $\partial\mathbb{H}^2$ dans le sens horaire. Comme on regarde sur la figure depuis l'intérieur de $T^1N(V^*)$, l'orientation de la base est inversée, tandis que celle de la fibre ne

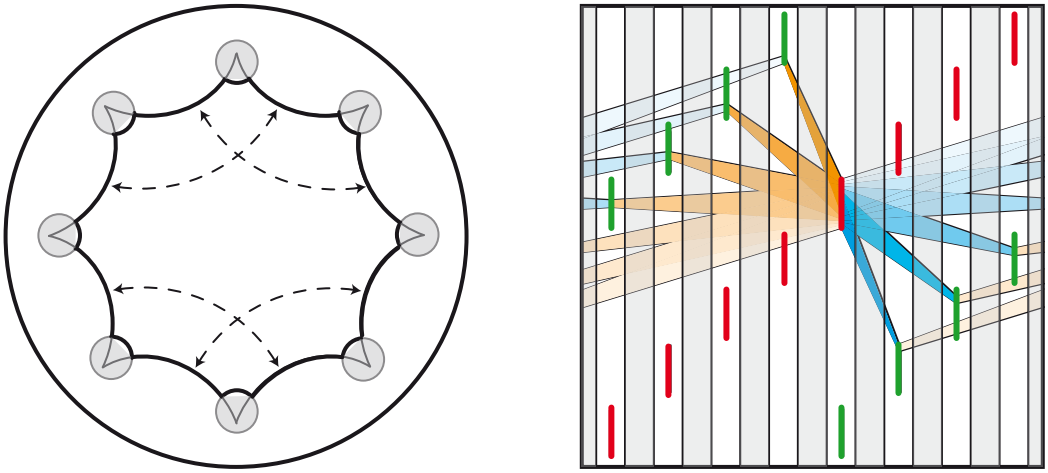

FIGURE 4.2.1 – Le fibré unitaire tangent à une surface à bord, hors du voisinage d'un point V^*. À droite, le tore $T^1(\partial(\mathcal{F}^* \setminus N(V^*)))$. Les anneaux blancs verticaux sont appariés par des homographies dans chaque fibre, tandis que les anneaux noirs forment le tore $T^1\partial N(V^*)$. Comme on peut modifier le champ des vecteurs pointant en une direction donnée pour en faire un champ orthogonal aux côtés et cohérent avec les recollements, on en déduit que la direction horizontale sur la figure de droite est la trace d'une section de $T^1(\Sigma_g \setminus N(V^*))$. En arrière-plan, les deux déformations possibles de la partie de l'épure $\mathcal{E}'_\Sigma$ arrivant sur une arête e_j^* donnée. Comme la direction horizontale du tore borde, les deux projections d'un ruban donné diffèrent d'un facteur horizontal ± 1.

change pas. On en déduit donc qu'en suivant les $4g$ rubans copies du ruban orange, on décrit une courbe de classe $(1, -1)$ sur $T^1(\partial N(V^*))$.

4.2.b Construction d'une chaîne

Soit Γ une collection homologiquement nulle quelconque d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}'_g$. Le but est maintenant de construire une 2-chaîne S_Γ lisse par morceaux, dont le bord est la réunion de la famille $(2g-2)\Gamma$, vue comme une 1-chaîne, et d'un multiple de la fibre $T^1\{V^*\}$, et qui est transverse à toutes les autres orbites du patron. On construit S_Γ en collant deux chaînes. La première, notée S_Γ^π, vit au-dessus de l'intérieur du domaine fondamental $\mathcal{F}^*$. Son bord est la réunion de la 1-chaîne $(2g-2)\Gamma$ et d'une 1-chaîne, notée Γ_π, qui est dans les fibres au-dessus du graphe Gr^*. La seconde, notée S_Γ^∂, vit exclusivement dans les fibres au-dessus de $\partial\mathcal{F}^*$. Son bord est la réunion de $-\Gamma_\pi$ et d'un multiple k_Γ de la fibre $T^1\{V^*\}$ du sommet du polygone $\mathcal{F}$. Dans le même temps on estime (en fait on majore) le nombre d'intersection entre S_Γ et n'importe quelle autre orbite Γ' de l'épure. Il restera dans la sous-partie suivante à estimer l'enlacement entre la composante de bord de S_Γ dans la fibre $T^1\{V^*\}$ et la famille Γ'.

Pour la suite fixons quelques notations. On rappelle qu'on note $\mathrm{Rub}_{i,j}$ le ruban reliant le segment de branchement entrant dans $\mathcal{F}^*$ au-dessus de e_i^* au segment de branchement sortant au-dessus de e_j^*. On désigne par $b_{i,j}$ le nombre de fois où la famille Γ emprunte ce ruban. L'idée pour la suite consiste, pour toute famille Γ' homologiquement nulle d'orbites de l'épure, à majorer l'intersection algébrique entre Γ' et S_Γ par une forme bilinéaire en b_{ij} et b'_{ij}.

4.2.1 Lemme. *Soit Γ une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques de $\mathcal{E}'_\Sigma$ et*

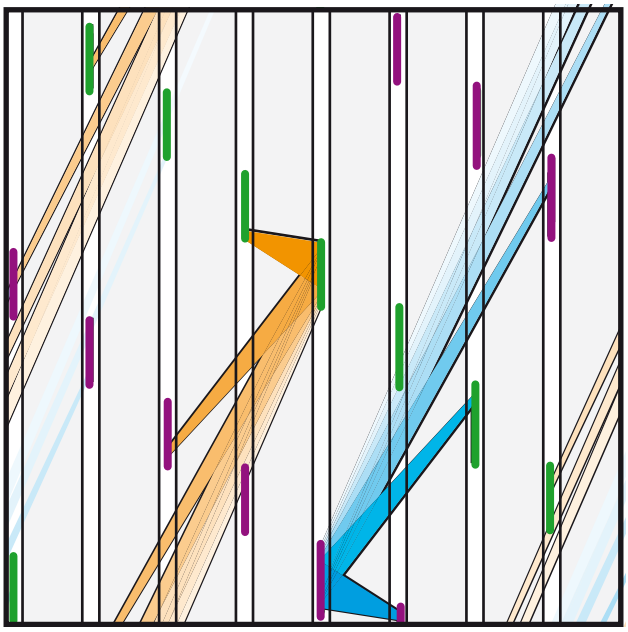

FIGURE 4.2.2 – Les deux déformations possibles des rubans de l'épure $\mathcal{E}'_\Sigma$ sur le tore $T^1(\partial N(V^*))$ dans une base telle que la direction horizontale est méridienne pour le tore plein $T^1N(V^*)$. La déformation vers la droite du ruban qui tourne le plus à droite (en orange) est un ruban de coordonnées $(1,-1)/4g$.

$(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4g, i\neq j}$ *les coefficients associés. Alors pour toute paire de côtés* $(e_i^*, e_{\bar{i}}^*)$ *de* $\mathcal{F}^*$ *appariés par G, on a* $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 4g, k\neq i} b_{i,k} = \sum_{1\leqslant k\leqslant 4g, k\neq i} b_{k,i} = \sum_{1\leqslant k\leqslant 4g, k\neq \bar{i}} b_{\bar{i},k} = \sum_{1\leqslant k\leqslant i, k\neq \bar{i}} b_{k,\bar{i}}$. ♣

Démonstration. Toute orbite de l'épure sortant de $\mathcal{F}^*$ par $e_{\bar{i}}^*$ rentre par e_i^*, d'où $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 4g, k\neq i} b_{i,k} = \sum_{1\leqslant k\leqslant 4g, k\neq \bar{i}} b_{k,\bar{i}}$. De même, on a l'égalité entre les deux termes du milieu. Comme la famille Γ est homologiquement nulle, l'intersection algébrique entre Γ et n'importe quelle courbe fermée est nulle. Or l'identification des arêtes e_i^* et $e_{\bar{i}}^*$ dans Σ est une courbe fermée. Le nombre d'orbites coupant cette courbe dans un sens est $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 4g, k\neq i} b_{i,k} + \sum_{1\leqslant k\leqslant 4g, k\neq \bar{i}} b_{k,\bar{i}}$, tandis que le nombre d'orbites la coupant dans l'autre sens est $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 4g, k\neq \bar{i}} b_{\bar{i},k} + \sum_{1\leqslant k\leqslant 4g, k\neq i} b_{k,i}$. On en déduit la dernière égalité. ♠

4.2.2 Définition. Soit Γ une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}'_\Gamma$. On note Γ_π sa double projection sur l'épure de $\mathcal{E}^\pi_\Gamma$, et S^π_Γ la 2-chaine réalisant l'isotopie entre $(2g-2)\Gamma$ et $(g-1)\Gamma_\pi$. ♢

Par convention, on oriente l'ensemble des côtés de $\mathcal{F}^*$ trigonométriquement, et les signes $<$ et $\leqslant$ renvoient à l'ordre cyclique sur les indices des côtés. Soit P une propriété, on adopte la convention de Knuth en notant $\{P\}$ la fonction caractéristique de la propriété P.

4.2.3 Lemme. *Soit* Γ *et* Γ' *deux familles homologiquement nulles disjointes d'orbites de* $\mathcal{E}'_\Sigma$*, et* $(b_{i,j})_{i\neq j}, (b_{k,l})_{k\neq l}$ *les familles de coefficients associées. Alors la 2-chaîne* S^π_Γ *et la famille* Γ' *sont transverses et leur intersection est majorée par*

$$\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant 4g} 2(g-1)^2\big(\{i<k<l\leqslant j\}+\{k<i<j\leqslant l\}\big)\, b_{i,j}b'_{k,l}. \tag{4.2.1}$$

♣

Démonstration. (voir figure 4.2.1) Au voisinage de Γ, la 2-chaîne S_Γ^π est obtenue en poussant la famille Γ horizontalement et n'intersecte donc pas l'épure. Au-delà du voisinage de Γ, les intersections apparaissent lorsque les projections de deux rubans de $\mathcal{E}'_\Sigma$ se coupent : cela signifie qu'au cours de l'isotopie le ruban dont la projection passe derrière a traversé celui dont l'image est devant. Le signe de l'intersection est donné par la position relative des deux projections : on voit sur la figure 4.2.1 que le ruban du dessous arrive toujours par la droite, ce qui correspond à des croisements positis. Par conséquent, chaque intersection complète entre les projections de deux rubans $\mathrm{Rub}_{i,j}, \mathrm{Rub}_{k,l}$ ajoute $(g-1)b_{i,j}b'_{k,l}$ à l'intersection entre S_Γ^π et Γ'. Or les projections de deux tels rubans sur $T^1\partial\mathcal{F}^*$ se croisent si et seulement si on a $i < k < l < j$ ou $k < i < j < l$.

Autres possibilités, il y a recouvrement entre deux rubans $\mathrm{Rub}_{i,j}, \mathrm{Rub}_{k,l}$ si on a $j = l$ ou $i = k$. Dans le premier cas, la partie correspondante de Γ peut couper Γ' lors de sa déformation sur Γ^π ou non, selon que Γ coupe le segment de branchement de sortie au-dessus de e_j^* au-dessus ou au-dessous de Γ' et selon le signe de $k - i$. L'équation (4.2.1) fait comme si il y avait toujours intersection. Dans le second cas où on a $i = k$, deux brins de Γ et Γ' empruntant respectivement $\mathrm{Rub}_{i,j}$ et $\mathrm{Rub}_{k,l}$ peuvent ou non se croiser. Mais le lemme 4.1.9 assure que si deux brins se croisent à la sortie de e_i^*, ils ne se sont pas croisés avant d'être réunis sur le même ruban, puisqu'il ne peut y avoir double croisement. Quitte à compter le croisement avant la rencontre avec l'axe de branchement et non après, on peut donc supposer qu'il n'y a pas intersection dans ce cas.

En ajoutant toutes les contributions des intersections entre projections de rubans, on obtient l'équation (4.2.1). ♠

La famille Γ^π est isotope à la famille Γ, et donc en particulier elle est homologiquement nulle. Elle vit dans l'ensemble des fibres au-dessus du quotient de Gr^* par G, qui est un bouquet de $4g$ cercles dans Σ. La nullité homologique de Γ^π entraîne donc que sa projection sur la base $G\backslash\mathrm{Gr}^*$ est homologiquement nulle, et donc qu'elle suit autant de fois chacun des $4g$ cercles dans un sens que dans l'autre. En relevant chaque morceau de la projection dans le fibré $T^1\mathrm{Gr}^*$, on en déduit que la famille Γ^π borde une chaîne de $H_2(\mathrm{Gr}^*, T^1\{V^*\}, \mathbb{Z})$. Comme $T^1\{V^*\}$ est un cercle, cela revient à dire qu'il existe un entier, noté k_Γ, tel que la 1-chaîne $\Gamma^\pi - k_\Gamma T^1\{V^*\}$ borde.

4.2.4 Définition. Soit Γ une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques de l'épure $\mathcal{E}'_\Gamma$ et Γ_π sa double projection sur l'épure de $\mathcal{E}_\Gamma^\pi$. Alors k_Γ désigne l'entier tel que $\Gamma^\pi - k_\Gamma T^1\{V^*\}$ borde et S_Γ^∂ désigne une 2-chaîne de $T^1\mathrm{Gr}^*$ de bord $\Gamma^\pi - k_\Gamma T^1\{V^*\}$. ♢

Soit e_i^* un côté de $\mathcal{F}^*$, alors il existe $\bar{i}$ tel que G apparie e_i^* et $e_{\bar{i}}^*$.

4.2.5 Lemme. *Soit Γ et Γ' deux familles homologiquement nulles disjointes d'orbites de $\mathcal{E}'_\Sigma$, et $(b_{i,j})_{i\neq j}, (b_{k,l})_{k\neq l}$ les familles de coefficients associées. Alors la 2-chaîne S_Γ^∂ et la famille Γ' sont transverses et leur intersection vaut*

$$-\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant 4g} \frac{(g-1)^2}{2}\big(\{k\neq i,j\} + \{\bar{k}\neq i,j\}\big)\, b_{i,j}b'_{k,l} \tag{4.2.2}$$

♣

Démonstration. Considérons l'ensemble F_k^* des fibres au-dessus des arêtes e_k^* et $e_{\bar{k}}^*$ réunies en un cercle dans Σ. Un ruban $\mathrm{Rub}_{i,j}$ de l'épure $\mathcal{E}'_\Sigma$ est déformé en deux rubans dont on va maintenant déterminer la trace sur F_k^*. Si $k = i$ ou $\bar{k} = i$, alors l'origine de $\mathrm{Rub}_{i,j}$ est sur F_k^*, et les deux projections de $\mathrm{Rub}_{i,j}$

sur F_k^* partent chacune de part et d'autre du segment de branchement. De même si $k = j$ ou $\bar{k} = j$, l'extrémité de $\mathrm{Rub}_{i,j}$ est sur F_k^*, et les deux projections de $\mathrm{Rub}_{i,j}$ sur F_k^* arrivent chacune de part et d'autre du segment de branchement. Comme chaque orbite de Γ' qui arrive sur F_k^* repart à la même hauteur, toutes ces contributions s'annulent.

Si k est différent des quatre (ou deux) nombres $i, \bar{i}, j, \bar{j}$, alors le ruban $\mathrm{Rub}_{i,j}$ se projette en un ruban de $\mathcal{E}_\Gamma^\pi$ qui traverse F_k^* d'un bord à l'autre. La propriété importante est que tous les rubans qui traversent en suivant l'arête e_k^* trigonométriquement le font au-dessus du segment de branchement des orbites sortant de $T^1\mathcal{F}^*$ par e_k^*, tandis que tous les rubans qui traversent en suivant l'arête en sens horaire le font au-dessus du segment de branchement des orbites entrant dans $T^1\mathcal{F}^*$ par e_k^*.

Ainsi, la 1-chaîne Γ^π découpe la face F_k^* en un nombre fini de régions $R_1, R_2, \ldots$. On peut représenter la 2-chaîne S_Γ^∂ comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des 2-chaînes associées à ces régions, la règle étant que le coefficient de deux régions diffère varie quand on traverse Γ_π. La 2-chaîne S_Γ^∂ est unique à ajout de cycles dont le bord est dans $T^1\{V^*\}$, c'est-à-dire à ajout de la classe $[F_k^*]$ près. Comme en tout point d'un axe de branchement, il y a autant d'orbites qui arrivent par la droite que par la gauche, et autant qui repartent de chaque côté, le niveau le long des deux segments de branchement est constant. Seule compte donc la différence Δ_k entre les deux niveaux sur les deux axes, et on peut supposer que les coefficients sont nuls sur le segment des orbites entrant dans $T^1\mathcal{F}^*$ par F_k^*. D'après le paragraphe précédent, chaque orbite sur un ruban $\mathrm{Rub}_{i,j}$ contribue à la différence de niveau à hauteur de $1/2$ si $k \neq i$ et $k \neq j$, et un autre $1/2$ si $\bar{k} \neq i$ et $\bar{k} \neq j$.

Comme le nombre d'orbites de Γ' qui traversent la face F_k^* dans chaque sens est $\sum_l b'_{k,l}$, et que la chaîne de Γ^π est faite de $g-1$ projections sur chaque ruban, l'intersection de S_Γ^∂ avec Γ' est donnée par la formule (4.2.2). ♠

Vu qu'on peut factoriser la somme sur l et qu'on a $\sum_{k,l} b'_{k,l} = \sum_{k,l} b'_{l,k}$, la formule (4.2.2) peut être mise sous la forme plus symétrique suivante :

$$-\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant 4g} \frac{(g-1)^2}{4}\big(\{k \neq i,j\} + \{k \neq \bar{i},\bar{j}\} + \{l \neq i,j\} + \{l \neq \bar{i},\bar{j}\}\big)\, b_{i,j} b'_{k,l}. \tag{4.2.3}$$

Il reste à calculer l'entier k_Γ, à construire une 2-chaîne bordée par $k_\Gamma T^1\{V^*\}$, et à calculer son intersection avec Γ'. On adopte la convention qu'un nombre modulo $4g$ est un entier compris entre 0 et $4g-1$.

4.2.6 Lemme. *Soit Γ une famille de géodésiques périodiques de $\mathcal{E}'_\Sigma$. Alors l'entier k_Γ de la définition 4.2.4 est égal à*

$$\frac{(g-1)(2g-1)}{2g} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 4g} ((j-i)[4g] - 2g)\, b_{i,j}. \tag{4.2.4}$$

♣

Démonstration. On a vu que la collection $(2g-2)\Gamma$ se projette sur le tore $T^1(\partial N(V^*))$ selon le schéma de la figure 4.2.2. Par conséquent, k_Γ est la coordonnée verticale de la projection de $(2g-2)\Gamma$ selon ce schéma. Or la contribution d'un brin de Γ qui emprunte le ruban $\mathrm{Rub}_{i,j}$ ne dépend que de la différence $j-i$. Lorsque $j-i$ est égal à $\pm 2g$, alors les contributions des deux projections s'annulent. D'autre part, si on augmente la différence $j-i$ de 1, la contribution de chaque brin de chacune des deux projections est augmentée de $(2g-1)/4g$, donc le coefficient de $b_{i,j}$ est bien égal à $\dfrac{(g-1)(2g-1)}{2g}((j-i)[4g] - 2g)$. ♠

4.2.c Enlacement avec une fibre

Pour majorer l'enlacement entre deux familles d'orbites de l'épure $\mathcal{E}'_g$, il reste à estimer l'enlacement entre un multiple k_Γ de la fibre $T^1\{V^*\}$ et une famille Γ' quelconque. Contrairement aux autres contributions de S^π_Γ et S^∂_Γ, on ne construit pas directement une 2-chaîne bordée par $T^1\{V^*\}$, mais plutôt par Γ', et on estime son intersection avec $T^1\{V^*\}$. Pour cela on choisit une base du tore $T^1\partial(N(V^*))$ en notant $[f]$ la direction d'une fibre quelconque de ce tore, et $[m]$ la direction de son méridien, c'est-à-dire la classe du bord d'une section de $T^1N(V^*)$, orientée horairement quand on tourne autour de V^*.

4.2.7 Définition. Soit Γ une famille de géodésiques périodiques de $\mathcal{E}'_\Sigma$. On pose

$$l_\Gamma = -\frac{g-1}{2g} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 4g} ((j-i)[4g]-2g)\, b_{i,j}. \tag{4.2.5}$$

$\diamondsuit$

4.2.8 Lemme. *Soit Γ' une famille de géodésiques périodiques de $\mathcal{E}'_\Sigma$. Alors dans le complémentaire du tore $T^1N(V^*)$, la famille $(2g-2)\Gamma'$ est homologue à la famille $-l_{\Gamma'}[m]-k_{\Gamma'}[f]$.* ♣

Démonstration. Que la coordonnée verticale soit $-k_\Gamma$ est une traduction du lemme 4.2.6. Pour ce qui est de la coordonnée horizontale, il faut observer les figures 4.2.1 et 4.2.2. On y lit que la contribution horizontale, c'est-à-dire ce qu'il reste quand on oublie la composante dans les fibres, de chaque morceau d'orbite sur un ruban $\mathrm{Rub}_{i,j}$ est $2((j-i)[4g]-2g)$. ♠

4.2.9 Lemme. *Soit Γ' une famille homologiquement nulle d'orbites périodiques de $\mathcal{E}'_\Sigma$. Alors l'enlacement entre $T^1\{V^*\}$ et $(2g-2)\Gamma'$ est $l_{\Gamma'}/(2g-2)$.* ♣

Démonstration. Par définition, le méridien m du tore $T^1N(V^*)$ borde un disque qui coupe -1 fois la fibre $T^1\{V^*\}$. D'autre part, comme la classe d'Euler du fibré $T^1\Sigma_g$ est $2-2g$, la chaîne $[m]+(2g-2)[f]$ borde une 2-chaîne dans le complémentaire $T^1(\Sigma\smallsetminus N(V^*))$, par conséquent, l'intersection entre $[m]+(2g-2)[f]$ et la fibre $T^1\{V^*\}$ est nulle.

D'après le lemme 4.2.8, la famille Γ' est homologue à la chaîne $-l_{\Gamma'}([m]+(2g-1)[f])$ dans le complémentaire de $T^1\{V^*\}$. Comme on a $(1,2g-1)=\dfrac{2g-1}{2g-2}(1,2g-2)-\dfrac{1}{2g-2}(1,0)$, on en déduit que $2g-2$ copies de $(2g-2)\Gamma'$ bordent la réunion d'une 2-chaîne dans $T^1(\Sigma\smallsetminus N(V^*))$ et d'un disque méridien de $T^1N(V^*)$, d'où la formule. ♠

On peut résumer et additionner les différentes contributions.

4.2.10 Proposition. *Soit Γ et Γ' deux familles homologiquement nulles disjointes d'orbites de $\mathcal{E}'_\Sigma$, et $(b_{i,j})_{i\neq j}, (b_{k,l})_{k\neq l}$ les familles de coefficients associées. Alors l'enlacement entre $(2g-2)\Gamma$ et $(2g-2)\Gamma'$ est inférieur ou égal à $q_{\mathrm{Enl}}(b_{i,j},b_{k,l})$, où q_{Enl} est la forme bilinéaire sur $\mathbb{N}^{4g(4g-1)}$ dont le coefficient en position $((i,j),(k,l))$, avec $1\leqslant i\neq j\leqslant 4g$ et $1\leqslant k\neq l\leqslant 4g$, vaut*

$$\begin{aligned}
& 2(g-1)^2\big(\{i<k<l\leqslant j\}+\{k<i<j\leqslant l\}\big)\\
- \quad & \frac{(g-1)^2}{4}\big(\{k\neq i,j\}+\{k\neq \bar{i},\bar{j}\}+\{l\neq i,j\}+\{l\neq \bar{i},\bar{j}\}\big)\\
+ \quad & \frac{(g-1)(2g-1)}{8g^2}((j-i)[4g]-2g)((k-l)[4g]-2g).
\end{aligned}$$

♣

Démonstration. On construit les deux chaînes S_Γ^π et S_Γ^∂ conformément aux définitions 4.2.2 et 4.2.4. Alors le bord de $S_\Gamma^\pi \cup S_\Gamma^\partial$ est la réunion de $(2g-2)\Gamma$ et de $-k_\Gamma$ fois la fibre $T^1\{V^*\}$. Par conséquent l'enlacement entre $(2g-2)\Gamma$ et $(2g-2)\Gamma'$ est égal la somme de l'intersection entre $S_\Gamma^\pi \cup S_\Gamma^\partial$ et Γ' et $-k_\Gamma$ fois l'enlacement entre $T^1\{V^*\}$ et Γ'. D'après les lemmes 4.2.3 et 4.2.5, le premier terme donne les deux premières lignes de la formule, et d'après les lemmes 4.2.6 et 4.2.9 le second terme la troisième ligne. ♠

Sur des exemples numériques, on constate que le premier et le second termes sont souvent dominants. Le troisième terme corrige des écarts si les deux familles de géodésiques tournent chacune plus dans un sens que dans l'autre. Le premier terme est toujours positif, le second toujours négatif. Le troisième a un signe variable, mais on observe qu'il est négatif lorsque le premier terme est grand. Ainsi, l'enlacement semble être majoré par des nombres toujours négatifs.

4.2.d Achoppement

Étant donné une surface de genre g, on a majoré l'enlacement entre deux familles homologiquement nulles de géodésiques périodiques par la forme bilinéaire q_{Enl} en les coordonnées associées, qui est d'ailleurs symétrique. Malheureusement, cette forme quadratique n'est pas définie positive. Par exemple, un calcul, que nous avons effectué à l'aide du logiciel Sage, montre que sa signature dans le cas $g = 2$ est $(23, 33)$. Néanmoins, les coordonnées associées à une famille sont des entiers positifs, et donc on ne s'intéresse à la forme q_{Enl} que sur le cône $\mathbb{N}^{4g(4g-1)}$. Mais la restriction de q_{Enl} ne prend pas de valeurs que positives puisque certains coefficients de q_{Enl} sont négatifs.

On peut cependant réduire le cône des valeurs à étudier. En effet, les coordonnées $b_{i,j}$ des familles étudiées vérifient des contraintes données par le lemme 4.2.1, et donc on peut se restreindre aux familles respectant ces contraintes. Ces familles correspondent aux familles d'orbites de l'épure qui sont homologiquement nulles. L'ensemble de ces familles est un cône dans $\mathbb{N}^{4g(4g-1)}$ dont on peut déterminer les points extrémaux. C'est un analogue du théorème de Birkhoff-Von Neumann selon lequel les points extrémaux des matrices bistochastiques sont les matrices de permutation.

Étant donné un domaine fondamental $\mathcal{F}^*$ de Σ_g. Une matrice M de taille $4g \times 4g$ est dite de *sous-permutation dérangée* si

(i) les coefficients de M sont dans $\{0, 1\}$ et les coefficients diagonaux sont nuls,

(ii) il existe $i_1, \ldots, i_k$ tel que M a un et un seul coefficient non nul dans chacune des lignes et des colonnes d'indices $i_1, \bar{i}_1, \ldots, i_k, \bar{i}_k$,

4.2.11 Proposition. *L'ensemble des matrices à coefficients positifs vérifiant les équations du lemme 4.2.1 est l'enveloppe convexe des matrices de sous-permutation dérangées.* ♣

La preuve est analogue à celle du théorème de Birkoff-Von Neumann (voir [15]) que nous ne détaillons pas puisque nous n'utilisons pas ce résultat. En fait, les points extrémaux vérifient la contrainte supplémentaire qu'aucun sous-ensemble des paires d'indices n'est stable par la permutation associée.

Cette proposition ne résout pas nos problèmes, car elle n'est pas assez discriminante. En effet, elle n'exclut pas les matrices de décalage $D_+ = \delta_i^{i+1[4g]}$ et $D_- = \delta_i^{i-1[4g]}$ qui correspondent à l'orbite la plus droite γ_+ et l'orbite la plus à gauche γ_- de l'épure. Chacune de ces deux orbites ne correspond pas à une géodésique, puisque leurs projections sur Σ_g font un tour du sommet V^*, dans les sens horaire et trigonométrique respectivement. Or l'enlacement entre γ_+ et une copie parallèle de γ_+ est strictement positif. La stratégie ne peut donc aboutir.

Une piste pour contourner cette difficulté est de réduire encore l'ensemble de définition pour les matrices $(b_{i,j})$, par exemple en étudiant les codes possibles des géodésiques. En effet, le flot géodésique est markovien, ce qui signifie qu'une géodésique a un code associé. Celui-ci obéit à un certain nombre de contraintes markoviennes, qui sont l'objet des travaux de Rufus Bowen et Caroline Series [19] et surtout de Robert Adler et Leonart Flatto [3]. Par exemple, une géodésique ne peut suivre des rubans de type $\mathrm{Rub}_{i,i+1}$ plus de $2g$ fois consécutives, et donc la matrice $(b_{i,j})$ ne peut par exemple pas être nulle partout hors de la sur-diagonale. Néanmoins, nous n'avons pas réussi à restreindre suffisamment les ensembles de définition des matrices $(b_{i,j})$ pour faire fonctionner cette stratégie.

4.3 Quotients et orbiface $\Sigma_{2,3,7}$

Dans l'esprit du paragraphe précédent, nous appliquons notre stratégie pour montrer la négativité du flot géodésique sur $T^1\Sigma_{2,3,7}$. Pour ce faire, nous montrons que la propriété de négativité d'un flot est préservée par quotient. Comme l'orbiface $\Sigma_{2,3,7}$ est le quotient d'une surface Σ_3 de genre 3, nous étudions alors des contraintes sur les relevés dans Σ_3 des géodésiques de $\Sigma_{2,3,7}$ et montrons que la restriction de la forme q_{Enl} aux familles vérifiant ces contraintes est négative. On en déduit le théorème 4.0.2.

4.3.a Flots lévogyres et quotients

4.3.1 Proposition. *Soient M une variété de dimension 3 munie d'un flot Φ et $f : \tilde{M} \to M$ un revêtement fini non singulier de M muni du flot $\tilde{\Phi}$ obtenu en tirant Φ en arrière. Si pour toutes familles homologiquement nulles Γ, Γ' d'orbites périodiques de Φ, les relevés $f^{-1}(\Gamma), f^{-1}(\Gamma')$ s'enlacent négativement, alors le flot Φ est lévogyre.* ♣

Démonstration. Notons d le degré de f. Soit Γ et Γ' deux familles homologiquement nulles disjointes de géodésiques périodiques de Φ. Soit S une 2-chaîne singulière bordée par Γ. Quitte à modifier S, on peut la supposer transverse à Γ'. Alors $f^{-1}(S)$ est une 2-chaîne bordée par $f^{-1}(\Gamma)$. Comme $f^{-1}(\Gamma)$ et $f^{-1}(\Gamma')$ s'enlacent négativement, le nombre d'intersection entre $f^{-1}(S)$ et $f^{-1}(\Gamma')$ est strictement négatif. Tout point d'intersection entre S et Γ' est la projection de d points d'intersection entre $f^{-1}(S)$ et $f^{-1}(\Gamma')$, avec la même orientation. Par conséquent l'enlacement entre Γ et Γ' est égal à $\mathrm{Enl}(f^{-1}(\Gamma), f^{-1}(\Gamma'))/d$. Il est aussi négatif. Par le théorème M de Fried [34], le flot Φ est lévogyre. ♠

Le résultat précédent est un énoncé général sur les flots lévogyres, qui s'applique par exemple aux cas des orbifaces sphériques ou euclidiennes. Il montre ainsi que le flot géodésique sur tout quotient orientable de la sphère ronde ou du tore plat est lévogyre.

4.3.b Le revêtement $\Sigma_3 \to \Sigma_{2,3,7}$

La figure 4.3.1 montre que $\Sigma_{2,3,7}$ admet un revêtement $f : \Sigma_3 \to \Sigma_{2,3,7}$ d'ordre 168 par une surface de genre 3 (voir [83]). Comme les deux orbifaces sont des quotients du plan hyperbolique, le flot géodésique est préservé. Notre but est d'appliquer la proposition 4.3.1 à ce revêtement. Pour cela il faut caractériser les préimages par f des familles homologiquement nulles de géodésiques de $\Sigma_{2,3,7}$. Comme le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{2,3,7}$ est une sphère d'homologie (voir [65]), il faut déterminer les préimages de n'importe quelle collection d'orbites périodiques. L'idée est que les préimages d'une

géodésique se répartissent équitablement sur $\Sigma_{2,3,7}$, et donc que les phénomènes extrêmes mentionnés à la fin de la partie 4.2 ne peuvent apparaître.

On note G_{168} le quotient du groupe fondamental de $\Sigma_{2,3,7}$ par le sous-groupe de $G_{2,3,7}$ associé au revêtement f, c'est un groupe d'ordre 168. Pour tout arc γ de géodésique dans le domaine fondamental $\mathcal{F}_{14}$ à 14 côtés de la figure 4.3.1, on note γ_s l'indice du côté par lequel γ sort de $\mathcal{F}_{14}$, γ_e l'indice du côté par lequel γ entre dans $\mathcal{F}_{14}$, δ_γ la différence entre les deux modulo 14, et λ_γ le nombre de pavés fondamentaux de $\Sigma_{2,3,7}$ traversés entre l'entrée et la sortie dans $\mathcal{F}_{14}$.

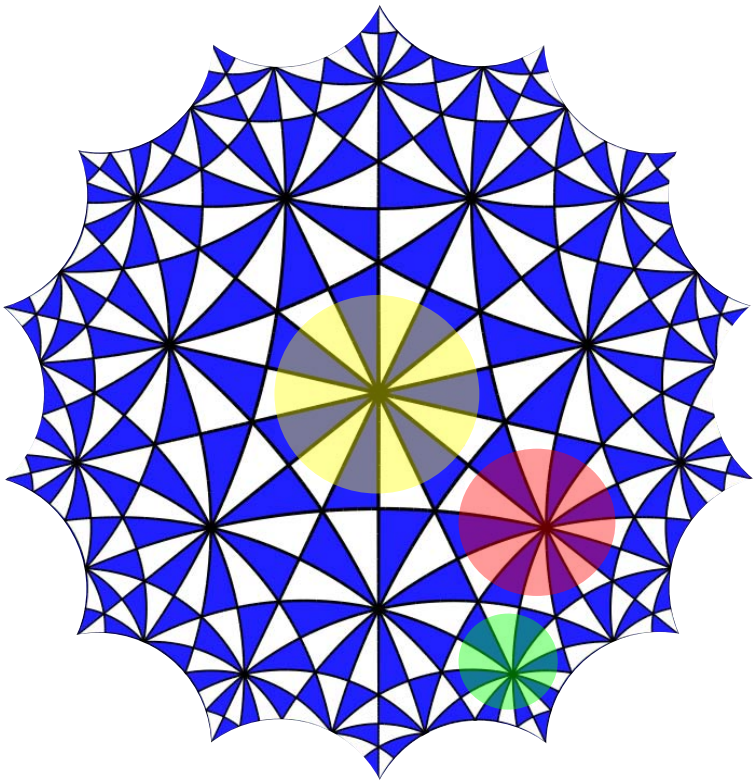

FIGURE 4.3.1 – Le revêtement d'ordre 168 de $\Sigma_{2,3,7}$ par une surface de genre 3, dont le domaine fondamental $\mathcal{F}_{14}$ a 14 côtés. C'est la réunion de 15 heptagones, plus des triangles isolés.

4.3.2 Lemme. *Soient P un point de $\mathcal{F}_{14}$, et γ un arc de géodésique de $\Sigma_{2,3,7}$ passant par P. Alors parmi les 168 images de γ par G_{168},*

- *7 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 4$ et $12 \leqslant \lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *7 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 8$ et $6 \leqslant \lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *14 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 6$ et $6 \leqslant \lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *14 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 2$ et $6 \leqslant \lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *7 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 2$ et $6 \leqslant \lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *7 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 1$ et $6 \leqslant \lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *14 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 10$ et $12 \leqslant \lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *7 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 4$ et $4 \leqslant \lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *7 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 3$ et $4 \leqslant \lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *7 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 2$ et $2 \leqslant \lambda_\gamma$,*
- *14 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 1$ et $2 \leqslant \lambda_\gamma$,*
- *28 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 8$ et $\lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *14 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 6$ et $\lambda_\gamma \leqslant 17$,*
- *21 d'entre elles vérifient $\delta_\gamma \geqslant 1$ et $1 \leqslant \lambda_\gamma$.*

♣

Démonstration. (voir figure 4.3.1) Supposons que P appartient à un triangle blanc. Alors les 168 images de P appartiennent à chacun des 168 triangles blancs de la figure 4.3.1. Pour chaque point, il y a peu de contraintes sur les valeurs possibles de δ_γ et λ_γ associées à des géodésiques passant par ce point. En revanche, si sept triangles blancs partagent un sommet, les différentes images de γ passant dans les sept triangles sont obtenues les unes à partir des autres par rotation autour du sommet. Par conséquent, les valeurs de δ_γ et λ_γ associées sont liées.

La première ligne de l'énoncé correspond aux 7 triangles autour du centre de $\mathcal{F}_{14}$. Alors même en le poussant le plus à l'extérieur de l'heptagone possible, l'arc γ vérifie $\delta_\gamma \geqslant 4$. Quant à λ_γ, il faut remarquer qu'un arc géodésique quelconque dans $\mathcal{F}_{14}$ traverse au plus 17 triangles blancs. Et ceux qui traversent un triangle central en coupent au moins 12.

Les cinq lignes suivantes correspondent aux triangles appartenant à un heptagone touchant l'heptagone central (en rouge sur la figure 4.3.1). Si γ traverse l'un de ces triangles, alors les copies traversant les 6 autres triangles de l'heptagone sont obtenues par rotation autour du centre de l'heptagone. Les inégalités s'obtiennent en considérant les cas extrêmes. Les cinq lignes suivantes concernent les 7 heptagones complets adjacents aux côtés de $\mathcal{F}_{14}$ (en vert sur la figure). Les trois dernières lignes correspondent aux triangles restants. Les encadrements ne sont pas optimaux. ♠

Preuve du théorème 4.0.2. D'après la proposition 4.3.1, il suffit de montrer que l'enlacement dans $T^1\Sigma_3$ de deux familles G_{168}-équivariantes est négatif. Soient Γ, Γ' deux telles familles, et $(b_{i,j}), (b'_{i,j})$ les coordonnées associées. Le domaine fondamental choisi ici n'est pas un dodécagone, mais a 14 côtés. Après identification des côtés de en sept paires, il a deux sommets, qu'on note V_1, V_2. Nous allons adapter à ce cas toute l'analyse de la partie 4.2. Les lemmes 4.2.3 et 4.2.5 sur les contributions des chaînes S^π_Γ et S^∂_Γ sont inchangés. Comme la famille Γ est G_{168}-équivariante, le bord de S^∂_Γ est de la forme $k_\Gamma(T^1\{V_1\} + T^1\{V_2\})$, où k_Γ est donné par une formule analogue à celle du lemme 4.2.6 : on a $k_\Gamma = \dfrac{5}{196} \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 14} ((j-i)[7]-14)\, b_{i,j}$. L'enlacement entre les deux chaînes 4Γ et $4\Gamma'$ est alors égal à

$$\begin{aligned} & 8\big(\{i<k<l\leqslant j\} + \{k<i<j\leqslant l\}\big) \\ - \quad & \big(\{k\neq i,j\} + \{k\neq \bar{i},\bar{j}\} + \{l\neq i,j\} + \{l\neq \bar{i},\bar{j}\}\big) \\ + \quad & \frac{5}{49}((j-i)[7]-14)((k-l)[7]-14). \end{aligned}$$

Comme Γ et Γ' sont invariantes par rotation autour du centre de $\mathcal{F}_{14}$, on a $b_{i,i+k} = b_{i',i'+k}$ pour tous i, i', k. On pose alors $b_k = \displaystyle\sum_i b_{i,i+k}$ et $b'_k = \displaystyle\sum_i b'_{i,i+k}$ pour k compris entre 0 et 13. L'enlacement est alors minoré par une forme bilinéaire q_{14} de $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant 13}$ et $\{b'_k\}_{1\leqslant k\leqslant 13}$, dont les coefficients sont indiqués sur la figure 4.3.2. On voit que ceux-ci ne sont pas tous négatifs. En effet, la remarque de 4.2.d est toujours valide et deux familles tournant presque toujours à droite s'enlacent positivement.

Néanmoins le lemme 4.3.2 nous permet d'éviter cette situation. En effet, on peut renormaliser les coefficients b_i de sorte que leur somme soit 1. Pour chaque arc de Γ on considère ses 168 images par G_{168}. D'après le lemme 4.3.2, au plus 42 parmi ces arcs induisent une différence δ_γ de 1. Parmi les 132 arcs restants, la plupart sont comptés de multiples fois, car les arcs correspondants traversent divers triangles. Dans le pire cas, ils sont comptés 17 fois. À l'opposé les arcs tels que $\delta_\gamma = 1$ sont comptés, pour 7 d'entre eux, avec multiplicité au moins 6, pour 14 d'entre eux avec multiplicité au moins 2, et pour 21 d'entre eux avec multiplicité au moins 1. Ainsi, on obtient $0 \leqslant b_1 \leqslant \dfrac{5/3}{5/3 + 18/17} \approx 0.62$.

48	40	32	24	16	8	0	-8	-16	-24	-32	-40	-48
40	-172	-160	-148	-136	-124	-112	-100	-88	-76	-64	-52	-40
32	-160	-352	-320	-288	-256	-224	-192	-160	-128	-96	-64	-32
24	-148	-320	-492	-440	-388	-336	-284	-232	-180	-128	-76	-24
16	-136	-288	-440	-592	-520	-448	-376	-304	-232	-160	-88	-16
8	-124	-256	-388	-520	-656	-560	-468	-376	-284	-192	-100	-8
0	-112	-224	-336	-448	-560	-672	-560	-448	-336	-224	-112	0
-8	-100	-192	-284	-376	-468	-560	-656	-520	-388	-256	-124	8
-16	-88	-160	-232	-304	-376	-448	-520	-592	-440	-288	-136	16
-24	-76	-128	-180	-232	-284	-336	-388	-440	-492	-320	-148	24
-32	-64	-96	-128	-160	-192	-224	-256	-288	-320	-352	-160	32
-40	-52	-64	-76	-88	-100	-112	-124	-136	-148	-160	-172	40
-48	-40	-32	-24	-16	-8	0	8	16	24	32	40	48

FIGURE 4.3.2 – Les coefficients de la forme bilinéaire q_{14} en $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant 13}$ et $\{b'_k\}_{1\leqslant k\leqslant 13}$ majorant l'enlacement entre deux familles de géodésiques de Σ_3 invariantes par rotation du polygone fondamental.

En bornant ainsi tous les indices b_k, on restreint les valeurs possibles de b_k à un cône produit dans $\mathbb{R}_+^{13}$. Un programme, écrit dans le langage Sage, permet alors de vérifier que la forme q_{14} est négative sur tous les couples de droites extrémales du cône — il y en a $(2^{13})^2$ — et donc sur tout le cône. Par conséquent on a bien $\mathrm{Enl}(\Gamma, \Gamma') \leqslant 0$ pour toutes familles Γ, Γ' de géodésiques périodiques.

♠

Cette méthode semble pouvoir être généralisée à d'autres orbifaces. Néanmoins, il faudrait pour cela contrôler le genre du revêtement, et surtout la façon dont les géodésiques se relèvent, c'est-à-dire trouver un analogue du lemme 4.3.2. Nous n'avons pas réussi pour l'instant.

Intermède

Chapitre 5

Un billard contenant tous les entrelacs

Dans cet intermède, on construit un billard tridimensionnel réalisant tout entrelacs fini comme collection d'orbites périodiques. Plus généralement, étant donné un patron, c'est-à-dire une surface branchée munie d'un semi-flot, on construit un billard dont la collection des orbites périodiques contient celle du patron. R. Ghrist a construit un tel patron contenant tous les entrelacs. On obtient le billard souhaité en appliquant notre construction à son exemple. Ce chapitre est directement tiré d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [28]. Elle répond à une question posée par J. O'Rourke sur le site Mathoverflow [73]. La note étant en anglais, nous la laissons ici dans la langue de Jolitorax.

For every compact domain of $\mathbb{R}^3$ with a smooth boundary, one can play *billiard* inside it, with the rule that rays reflect perfectly on the boundary, see [89]. If the boundary has corners, the reflection is not defined, and we only consider orbits avoiding them. Thus a periodic orbit with no self-intersection point yields a knot in $\mathbb{R}^3$ and one can wonder about the relation between the shape of the billiard and the knots arising in this way. In a cube, the latter correspond to the so-called *Lissajous knots*, see [55]. In a cylinder the situation is more intricate, see [57]. It is asked in [69] and [73] whether there exists a billiard containing all knots as periodic orbits. In this note, we provide a positive answer to this question.

5.0.3 Definition. A *template* (see figures 1, 2) is a smooth compact surface S with boundary embedded in $\mathbb{R}^3$ and equipped with a non-vanishing vector field V so that :

(i) V is tangent to the surface S and to its boundary,

(ii) there exist finitely many branching segments – called *convergence segments* – transverse to V, where three pages P^+, P^- and P^o of the surface meet, with V leaving P^+ and P^- and entering P^o,

(iii) there exist finitely many branching points – called *separation points* – on the boundary of S whose neighbourhood is diffeomorphic to an open disc cut along the bottom vertical radius and equipped with the top-bottom vector field. $\diamondsuit$

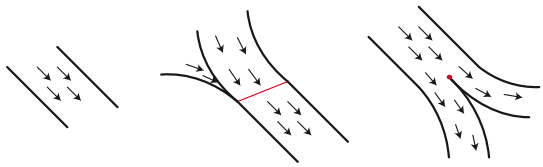

FIGURE 1 – How does a template look like. A generic point, a convergence segment and a separation point.

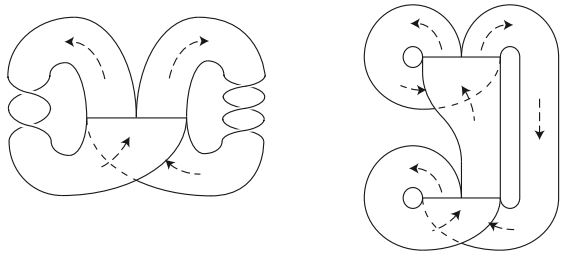

FIGURE 2 – A generalised Lorenz' template, and the Ghrist's template.

First suppose we are given a template T_0 that can be immersed into the plane (for example Ghrist's template works, but not the generalized Lorenz')[*]. Distort it into T_1 in such a way that the projection of T_1 on the horizontal plane is obtained by gluing ribbons with slopes $(\pm 1, 0)$ or $(0, \pm 1)$ for generic points, isosceles-rectangular triangles for changes of direction, ribbons with slope $(0, -1)$ for convergence segments, and parabolic church shapes.

These patterns are depicted on figures 3 and 4. Note that they fit well into the integer lattice $\mathbb{Z}^2$. Now we associate a billiard B_1 to T_1 by lifting it in $\mathbb{R}^3$ so that ribbons are 1 unit thick along the vertical direction and match with each other. Convergence segments deserve a special treatment depicted on figure 6. There could be level gaps, but these can be settled using vertical double bends, see figure 7.

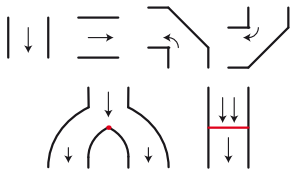

FIGURE 3 – Patterns for the template T_1.

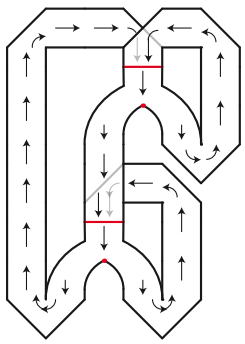

FIGURE 4 – Ghrist's template distorted into a T_1-like template.

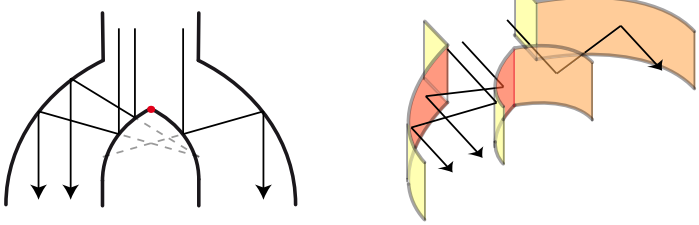

FIGURE 5 – How to realize a separation point using billiards : on the left side a horizontal cut. The left two curves are confocal parabolæ, the exterior one being homothetic to the interior one by a factor 2. In this way, vertical entering rays go out vertically and their mutual distances are doubled. The same thing holds on the right of the separation point.

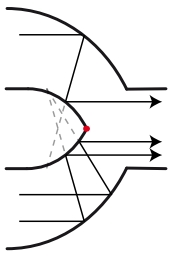

FIGURE 6 – How to realize a convergence segment by billiards : a vertical cut. The shape is the same as for separation points, but the flow is reversed, and the shape turned $90°$ along the y-direction.

[*]. For orientable templates, the so-called *belt trick* can do the job.

Our claim is the following

5.0.4 Theorem. *For every template T_0 embedded in $\mathbb{R}^3$, every finite collection of periodic orbits of T_0 is isotopic to a finite colletion of periodic orbits of the billiard B_1 constructed above.* ♣

Applying this to Ghrist's template yields

5.0.5 Corollary. *There exists a domain in $\mathbb{R}^3$ with a piecewise smooth boundary (see figure 9) so that any link appears as a family of periodic billiard trajectories.* ♣

Proof of the theorem. We only prove the theorem for knots, the case of links being similar.

Let γ_0 be a periodic orbit on T_0. Since the templates T_0 and T_1 are isotopic, there exists a periodic orbit γ_1 of T_1 isotopic to γ_0. Let p be an arbitrary point on γ_1. One associates an infinite periodic word $w^{\mathbb{N}}_{\gamma_1,p}$ on the alphabet $\{0,1\}$ so that when one follows γ_1, the sequence of left/right-choices at separation points is described by the letters of $w^{\mathbb{N}}_{\gamma_1,p}$.

Let q be a point inside B_1, and suppose that it projects to T_1 on a point where the flow is parallel to the y-direction. Call (x_q, y_q) the horizontal coordinates of q and z_q the vertical one (along which the projection is performed). Playing billiard in B_1 along the y-direction does not change (x_q, z_q), unless one crosses corners, churches or convergence boxes. In the first case, the restrictions we imposed on possible shapes force a second corner to follow the first one, and the x, z-coordinates mod 1 are not affected by two consecutive changes of direction. When crossing a church, the x-coordinate is doubled mod 1. Similarly, crossing a convergence box backwards doubles the z-coordinate. In other words, if we play billiard along the y-direction, the future is encoded in the x-coordinate, while the past is encoded in the z-coordinate. In particular, if q lies on a periodic orbit in the y-direction, the dyadic expansions of x_q mod 1 and z_q mod 1 are both periodic and the associated patterns are mirrors one of the other.

It is therefore natural to compare the orbit γ_1 on T_1 passing through p and the orbit $\tilde{\gamma}_1'$ on B_1 passing through $(0.w^{\mathbb{N}}_{\gamma_1,p}, 0, 0.\bar{w}^{\mathbb{N}}_{\gamma_1,p})$ and going along the y-direction. Since $\tilde{\gamma}_1'$ is horizontal except in convergence boxes, it is the lift of a periodic orbit γ_1' in the planar template T_1 considered as a planar billiard. Therefore a knot-diagram of $\tilde{\gamma}_1'$ is obtained from γ_1' by removing the ambiguities at crossings.

A crossing of γ_1' may arise in three situations only. Either it arises in a corner with two strands in the same box, in which case the previous-or-next corner provides another crossing for the same pair of strands, so that the pair will disappear with a Reidemeister-II-move, see figure 7. Or it arises when different ribbons cross, in which case the same ribbons cross in T_1. Or it arises at a corner when two ribbons become parallel just before a convergence box, in which case the crossing already exists in γ_1 when the two ribbons of T_1 overlap. Therefore, the horizontal projection of $\tilde{\gamma}_1'$ can be distorted to γ_1 using Reidemeister-II-moves only, and so the two knots are isotopic.

We still have to address the case of a half-twist on a non-orientable template. This can be fixed with the billiard of figure 8. So the proof is complete. ♠

Note that our construction can be smoothed so that the boundary of the billiard becomes a smooth surface. On the other hand the parabolæ are crucial in order to double the coordinates, preventing us to construct a billiard with piecewise-linear boundary. We are left with these two questions :

(i) Is it possible to construct a *polygonal* billiard containing all links as periodic orbits ?

(ii) Is it possible to construct a *convex* billiard containing all links as periodic orbits ?

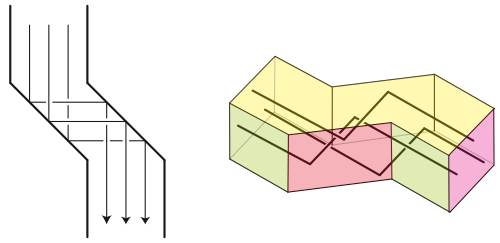

FIGURE 7 – A horizontal double-bend. At each corner some crossings which were not on the template T_0 may appear. Nevertheless, since corners come in pairs, these extra-crossings disappear with a Reidemeister-II-move. Level gaps are solved with this pattern turned vertically.

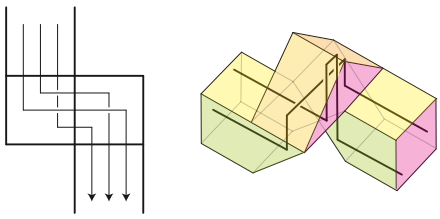

FIGURE 8 – How to realize a half-twist. Note on the left picture that the projections of any two strands cross exactly once, and that horizontal strands go above vertical ones. Since a braid in which any two strands cross exactly once and positively is half-turn Δ_n, this billiard realizes a half-twist.

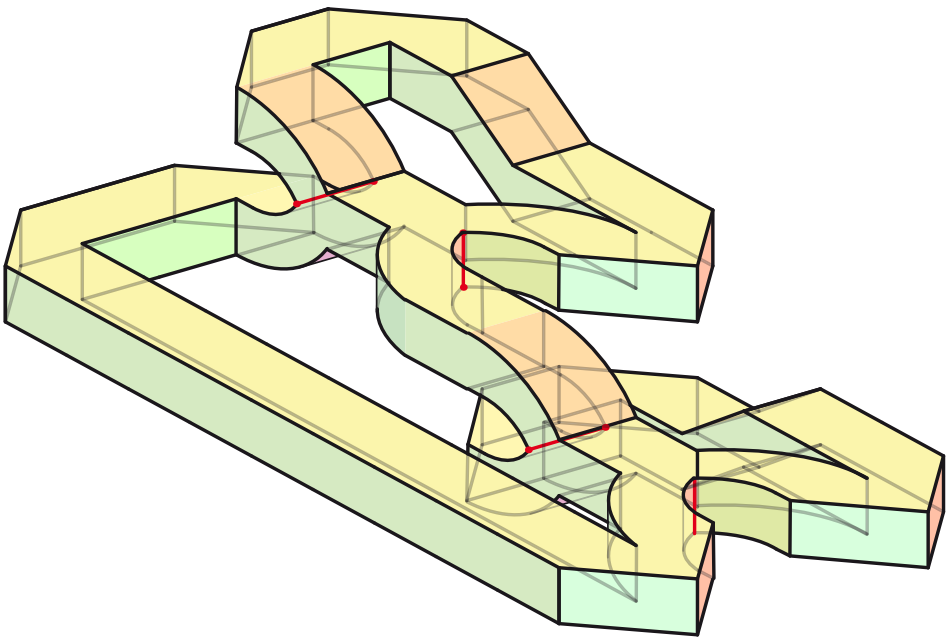

FIGURE 9 – The billiard associated to Ghrist's template.

Deuxième partie

Polynôme d'Alexander des nœuds de Lorenz

Chapitre 6

Nœuds de Lorenz et sommes de Murasugi

Dans ce chapitre, on présente les nœuds de Lorenz, les tresses de Lorenz associées, et on les décrit à l'aide de diagrammes de Young. Ensuite, on montre que tout entrelacs qui est clôture d'une tresse positive est fibré, avec une description explicite de la monodromie associée. Ce chapitre sert de base pour les calculs du chapitre suivant. Il reprend principalement le début de l'article [27]. Les nœuds de Lorenz ont été introduits et initialement étudiés par Birman et Williams [17]. Le caractère fibré des tresses positives a été démontré par Stallings [87], mais notre présentation s'inspire plutôt de celle de Gabai [36]. La décomposition de la monodromie en produit de twists de Dehn à partir d'une présentation comme somme de Murasugi semble faire partie du folklore, mais nous ne l'avons trouvée écrite nulle part. La présentation qui est donnée ici a été suggérée par Hugh Morton.

6.1 Description combinatoire des nœuds de Lorenz

Cette première partie est une introduction aux nœuds de Lorenz et leur codage par des mots de Lyndon et des diagrammes de Young. Dans la section 6.1.a, on rappelle le contexte du système différentiel chaotique de Lorenz, puis, dans la section 6.1.b, on introduit le patron de Lorenz qui permet de modéliser géométriquement le comportement des solutions du système de Lorenz. La section 6.1.c est un intermède introduisant la théorie des patrons, qui a été dérivée de l'étude des nœuds de Lorenz. La section 6.1.d est consacrée au codage des orbites périodiques du flot de Lorenz, donc des nœuds de Lorenz, à l'aide de mots de Lyndon. Dans la section 6.1.e, nous montrons que tout nœud de Lorenz est clôture d'une tresse de permutation particulière. Enfin, dans la section 6.1.f, on montre comment réduire la redondance du codage en introduisant les mots de Lyndon dits minimaux, puis, dans la section 6.1.g, on passe au langage des diagrammes de Young.

6.1.a Le système de Lorenz, Guckenheimer et Williams

En 1963, le météorologiste E. N. Lorenz a exhibé un système dynamique aux propriétés remarquables [59]. Issu d'un modèle simplifié de convection atmosphérique, il est décrit par les équations différentielles

$$\dot{x} = -10x + 10y, \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -8/3z + xy, \tag{6.1.1}$$

où r est un paramètre réel proche de 24. Ce système induit un flot déterministe sur $\mathbb{R}^3$: le passé et le futur d'un point de $\mathbb{R}^3$ sont déterminés par sa seule position. Par contre, (6.1.1) est un système chaotique, au sens où une petite perturbation du point de départ change l'allure globale de l'orbite qui en est issue.

Bien avant Lorenz, l'existence de systèmes chaotiques avait été observée par H. Poincaré dans le cadre du problème des trois corps [78] et par J. Hadamard pour le flot géodésique sur des surfaces à courbure négative [50]. Pourtant, l'exemple de Lorenz, peut-être à cause de son origine météorologique, ou peut-être à cause de la simplicité des équations qui le décrivent, a suscité un grand engouement, se trouvant même à l'origine du populaire effet papillon [60].

Quand on effectue des simulations numériques des équations de Lorenz (6.1.1), on observe le phénomène suivant : l'orbite issue de presque tout point semble plonger très vite vers une surface branchée, puis, une fois au voisinage de celle-ci, l'orbite décrit une suite de tours autour de deux points critiques, dans un ordre apparemment aléatoire (figure 6.1.1). Ayant observé ce phénomème, J. Guckenheimer a suggéré un modèle géométrique simple pour décrire les orbites de ce système [48], à savoir une surface de $\mathbb{R}^3$ munie d'un semi-flot imitant la dynamique observée numériquement et le long de laquelle s'enroulent les orbites. Ce modèle de Guckenheimer a ensuite été étudié et enrichi dans des travaux communs avec R. Williams [49, 96], où il est notamment établi que le modèle est *persistant*, c'est-à-dire qu'une perturbation de classe C^0 du champ de vecteurs mène à un système du même type que celui de Lorenz. La corrélation entre les modèles de Lorenz et de Guckenheimer, et en particulier le fait que les orbites de Lorenz s'accumulent effectivement le long du patron étudié par Guckenheimer et Williams n'a été prouvée qu'en 1999 par W. Tucker [92, 93].

Le flot géométrique de Guckenheimer et Williams contient une infinité dénombrable d'orbites périodiques. Au début des années 1980, J. Birman et R. Williams ont débuté l'étude de ces dernières du point de vue de la théorie des nœuds [17]. Cette approche exploite l'idée, attribuée à Poincaré, d'étudier un système dynamique *via* ses orbites périodiques. Pour le moment, il est trop tôt pour décider si cette tâche a été réalisée. Par contre, nous allons voir que les nœuds de Lorenz sont une famille riche du point de vue de la théorie des nœuds.

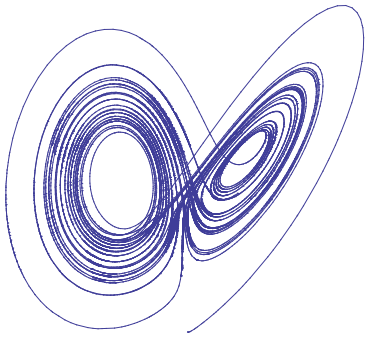

FIGURE 6.1.1 – Une simulation numérique des équations de Lorenz (6.1.1). Partant d'un point générique, le flot s'accumule sur une surface et tourne autour de deux points critiques.

6.1.b Le patron de Lorenz

Dans la suite de cet article, nous délaissons les systèmes différentiels et repartons du modèle géométrique suggéré par Lorenz, Guckenheimer et Williams.

6.1.1 Définition. (Voir figure 6.1.2.) (i) Le *patron de Lorenz* est le patron de $\mathbb{R}^3$ obtenu comme suit. On part de quatre rubans rectangulaires fermés $\mathrm{Rub}_1, \ldots, \mathrm{Rub}_4$, munis chacun d'un champ de vecteurs parallèle à deux côtés opposés. Ces rubans sont déformés et recollés le long de trois axes A, A_1 et A_2 comme montré sur la figure.

(ii) On appelle *semi-flot de Lorenz* le semi-flot engendré par le champ de vecteurs du patron de Lorenz. L'axe A est identifié au segment $[0, 1]$ de sorte que l'abscisse du point M où la surface se sépare soit $1/2$, et que l'application de premier retour sur l'axe A en suivant le flot, qu'on note pr, soit identifiée à la fonction $t \mapsto 2t \mod 1$. $\diamondsuit$

Par construction, le patron de Lorenz est une surface fermée, branchée le long de A. Le champ de vecteurs est défini en tout point, mais il y a deux possibilités pour une orbite passant par M : suivre la branche de gauche, ou celle de droite. Par conséquent, le semi-flot est défini sur toute la surface privée des préorbites du point M. En particulier, il n'est pas défini pour les points de A dont l'abscisse est de la forme $m/2^n$ pour m et n entiers. En suivant le semi-flot à partir d'un point P de A différent de M, on recoupe A après un temps fini. Par contre, le passé n'est pas défini : le long de A, chaque point a deux préorbites, on a donc bien affaire à un semi-flot. Néanmoins, par habitude autant que par commodité, nous utilisons ici l'appellation *flot*.

Dans la suite, on s'intéresse aux orbites du flot de Lorenz, et particulièrement aux orbites *périodiques*. Considérons par exemple l'orbite issue du point A d'abscisse $1/7$. En suivant le semi-flot, elle fait le tour de la boucle gauche du patron, passe par le point $2/7$, suit la boucle gauche, arrive au point $4/7$, suit la boucle droite, et, enfin, revient au point $1/7$. On a donc une orbite périodique qui coupe trois fois l'axe du patron. Sur la figure 6.1.2 sont représentées les orbites passant par les points d'abscisses $1/7$ et $3/7$. On verra que le flot de Lorenz contient une infinité d'orbites périodiques. On appelle *période* d'une telle orbite le nombre d'intersections de celle-ci avec l'axe du patron. Ce qui nous intéresse ici est le fait que de telles orbites périodiques peuvent former des nœuds non triviaux.

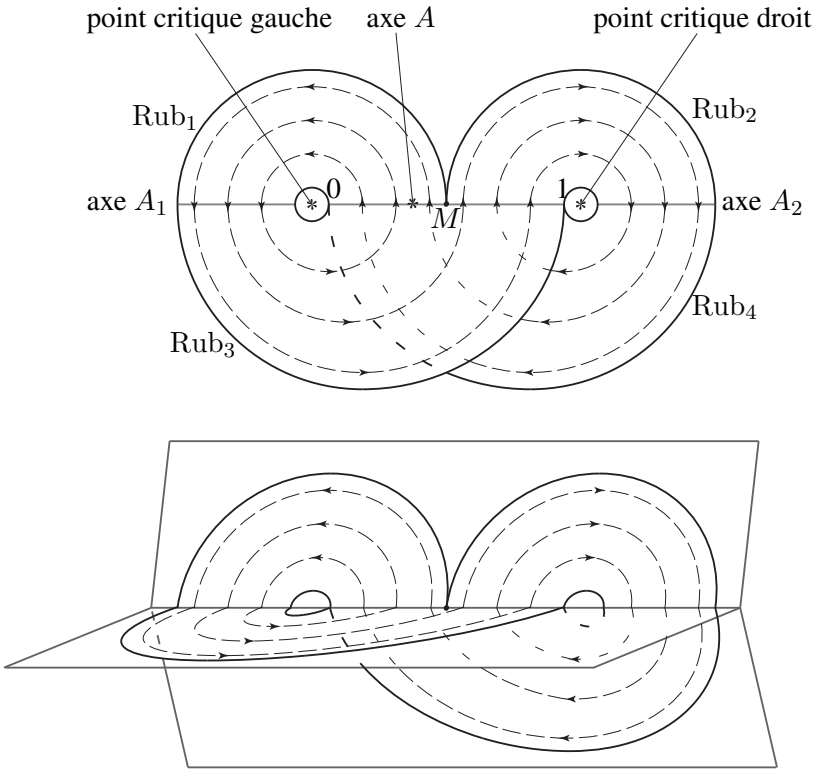

FIGURE 6.1.2 – Le patron de Lorenz. Le dessin du haut représente le patron projeté sur un plan horizontal. Les segments A, A_1 et A_2 sont les axes de recollement des bandes $\mathrm{Rub}_1, \ldots, \mathrm{Rub}_4$, le segment A étant l'axe de branchement du patron. Le flot de Lorenz est figuré en pointillés. L'abscisse du point M est $1/2$, la surface s'y sépare et le flot n'y est pas défini. Le dessin du bas montre le patron sous la forme d'un livre à trois pages.

6.1.2 Définition. Un nœud K est appelé *nœud de Lorenz* s'il existe une orbite périodique γ du flot de Lorenz sur le patron de Lorenz représentant K, c'est-à-dire dont K est la classe d'isotopie. $\diamondsuit$

À partir d'un nœud K, on obtient naturellement le nœud *opposé* $\tilde{K}$ en renversant l'orientation de $\mathbb{S}^1$, et deux nœuds *miroirs* par symétrie de K et $\tilde{K}$ par rapport à un plan. En général, ces quatre nœuds ne sont pas isotopes. Dans le cas des nœuds e Lorenz, il se trouve que tout nœud de Lorenz est isotope à son opposé. Par contre, leurs images-miroir ne sont pas des nœuds de Lorenz, en particulier, elles ne leurs sont pas isotopes.

6.1.c Intermède : la théorie des patrons et le patron universel de Ghrist

Après l'introduction du patron géométrique de Lorenz par Guckenheimer, et l'étude de ses orbites périodiques initiée par Birman et Williams, une *théorie des patrons* (*templates* en anglais) a été développée, en tant que branche de la théorie des nœuds, en particulier par R. Ghrist, Ph. Holmes et M. Sullivan [40]. Le but est de relier des propriétés des orbites périodiques d'un patron à la seule forme du patron et à son plongement dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple, un analogue du théorème d'Alexander selon lequel tout entrelacs peut être réalisé comme clôture d'une tresse existe pour les patrons, ainsi que des analogues des mouvements de Reidemeister.

Notons que la classe d'isotopie d'une orbite périodique du flot géométrique de Lorenz dépend du plongement du patron dans $\mathbb{R}^3$. On obtient une infinité de plongements différents en ajoutant un nombre arbitraire de tours sur chacune des deux branches du patron. Plus précisément, on associe à chaque couple d'entiers relatifs (p, q) un patron $L(p, q)$ obtenu à partir du patron de Lorenz en rajoutant p demi-tours sur la branche gauche, et q demi-tours sur la branche droite, comme sur la figure 6.1.3. [*] Les nœuds associés à des orbites périodiques du flot défini sur ces attracteurs de Lorenz généralisés dépendent fortement des entiers p et q. Cependant, à l'aide d'arguments visuels de déformations et de découpages, M. Sullivan montre que pour tout n entier, tout entrelacs réalisé par une collection finie d'orbites périodiques de $L(0, n)$ l'est également par une collection d'orbites de $L(0, n-2)$ [88]. Ainsi, rajouter des tours négatifs sur une des deux branches du patron de Lorenz ne peut qu'enrichir la famille des nœuds réalisés.

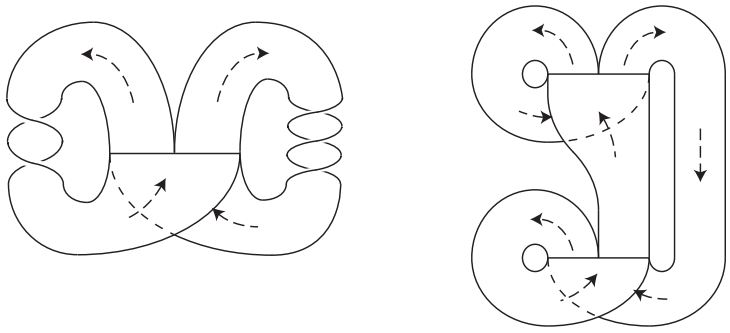

FIGURE 6.1.3 – À gauche, un patron de Lorenz généralisé $L(-2, 3)$. À droite, le patron universel de Ghrist.

En 1996, Ghrist [39] a exhibé un patron *universel* U, au sens où tout entrelacs est réalisé par un ensemble d'orbites périodiques de U. En fait, on retrouve U comme *sous-patron* de $L(0, -1)$ et de $L(0, -2)$, impliquant que les patrons $L(0, -n)$ sont universels pour tout entier n strictement positif. Signalons que si tout nœud est réalisé par une orbite périodique de U, il n'est pas facile, pour un nœud

[*]. Si p ou q est impair, on obtient ainsi un patron non orientable.

donné, de prédire la longueur minimale d'une telle orbite. Par exemple, on ne sait pas si le nœud de huit est réalisé par une orbite périodique de U coupant moins de 11.358.338 fois [40] un des axes de U !

Dans cet article, et plus généralement quand on parle de nœuds de Lorenz, on ne s'intéresse qu'au plongement $L(0,0)$ du patron de Lorenz montré sur la figure 6.1.2 qui, lui, n'est pas universel.

6.1.d Codage des orbites

On cherche maintenant à décrire l'ensemble des orbites périodiques du flot de Lorenz. Pour cela, on associe à toute orbite du flot de Lorenz un mot sur un alphabet à deux lettres. Restreinte aux orbites périodiques et aux mots dits de Lyndon [†] , la correspondance ainsi définie est bijective.

6.1.3 Définition. Soit γ une orbite du flot de Lorenz. En suivant γ à partir d'un point P de l'axe A et en notant L chaque fois que γ coupe l'axe A après avoir fait un tour de l'attracteur gauche du patron, et R chaque fois que γ coupe l'axe A après un tour de l'attracteur droit, on associe à γ un mot infini en les lettres L et R, appelé *code* de γ et noté $\mathrm{c}(\gamma, P)$. ♢

Une orbite γ est périodique de période n si et seulement si le code de γ est lui-même *périodique de période* n, au sens où il existe un (unique) mot w de longueur n tel que $\mathrm{c}(\gamma, P)$ est le mot infini $wwww\ldots$. On dit alors que w est un *code réduit* de γ *relativement à* P, et on le note $\mathrm{cr}(\gamma, P)$.

Le code d'une orbite γ dépend du choix du point de départ P : par exemple, si on part du point de premier retour $\mathrm{pr}(P)$, le code associé $\mathrm{c}(\gamma, \mathrm{pr}(P))$ est le mot obtenu à partir de $\mathrm{c}(\gamma, P)$ en effaçant la première lettre. Pour associer à chaque orbite périodique du flot de Lorenz un code réduit indépendant du point de départ, on fixe un ordre lexicographique sur les mots en L et R et on choisit comme représentant distingué celui des divers codes réduits de l'orbite, qui est le plus petit vis-à-vis de cet ordre. Ceci revient à attribuer un rang aux lettres successives d'un code, correspondant à l'ordre selon lequel on rencontre les points d'intersection de l'orbite avec l'axe du patron de Lorenz quand on le parcourt de gauche à droite.

6.1.4 Définition. Soit w un mot de longueur n sur l'alphabet $\{L, R\}$. On appelle *décalé* de w le mot obtenu en déplaçant la première lettre de w en queue de mot. On le note déc(w). Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on déclare que i est *avant* j dans l'*ordre de Lyndon* associé à w si déc$^{i-1}(w)$ précède déc$^{j-1}(w)$ dans l'ordre lexicographique étendant $L < R$. On note alors $i <_w j$. ♢

Par exemple, si w est le mot $LLRLR$, on a $1 <_w 4$ car le mot déc$^3(LLRLR)$ est $LRLLR$, qui est plus grand lexicographement que $LLRLR$. On trouverait de même $1 <_w 4 <_w 2 <_w 5 <_w 3$.

6.1.5 Lemme. *Soit γ une orbite périodique de période n du flot de Lorenz issue d'un point P de l'axe A. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, le point $\mathrm{pr}^{i-1}(P)$ est à gauche du point $\mathrm{pr}^{j-1}(P)$ sur l'axe A si et seulement si on a $i <_{\mathrm{cr}(\gamma,P)} j$.* ♣

Démonstration. Notons w le mot $\mathrm{cr}(\gamma, P)$ et x l'abscisse du point P. Par construction, pr est l'application $t \mapsto 2t \mod 1$; comme l'orbite γ est périodique, elle ne passe jamais par le point M d'abscisse $1/2$, donc x admet un développement en base 2 unique. De plus, la position de $\mathrm{pr}^{i-1}(P)$ dans la moitié gauche ou droite de l'axe A détermine le i-ième chiffre du développement dyadique de x, le

[†]. Les mots de Lyndon apparaissent dans un tout autre contexte comme codes d'une base de l'algèbre de Lie libre [12, 22, 62]. Cependant, [81] rappelle qu'ils énumèrent naturellement les classes de formes quadratiques et les classes de conjugaison du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Comme les nœuds de Lorenz, à travers leur correspondance avec les nœuds dits modulaires, admettent une énumération similaire, nous utilisons l'appellation *mot de Lyndon*.

cas ambigü étant justement exclu. Par conséquent, si on remplace les L par des 0 et les R par des 1 dans w, l'abscisse de $\mathrm{pr}^{i-1}(P)$ est $\overline{0, w_i w_i w_i \ldots}$, où w_i désigne le mot $\text{déc}^{i-1}(w)$. Or l'ordre canonique sur les réels correspond à l'ordre lexicographique étendant $0 < 1$ sur le développement dyadique, donc $\mathrm{pr}^{i-1}(P)$ est à gauche de $\mathrm{pr}^{j-1}(P)$ si et seulement si w_i précède w_j dans l'ordre lexicographique. ♠

6.1.6 Remarque. Soit P un point d'intersection de γ avec A et x son abscisse. Alors la condition $\mathrm{pr}^n(P) = P$ se reformule en $2^n x = x \mod 1$, soit $x = m/(2^n - 1)$ pour un certain m entier. Les abscisses des points d'intersection de γ avec A sont alors les rationnels $2^i m/(2^n - 1) \mod 1$. Inversement, on vérifie que l'orbite issue tout point d'abscisse de cette forme est périodique [‡]. ♡

6.1.7 Définition. Un mot w de longueur n sur l'alphabet $\{L, R\}$ est dit *de Lyndon* si w est *primitif*, c'est-à-dire s'il n'est pas de la forme u^k avec $k \geqslant 2$, et si w précède lexicographiquement $\text{déc}^i(w)$ pour tout $1 \leqslant i < n$. ♢

Par exemple, les mots $L, R, LR, LLR, LRR, LLLR, LLRR, LRRR, LLRLR$ sont des mots de Lyndon. Par contre LRL n'est pas de Lyndon puisque sont décalé LLR le précède lexicographiquement. Comme tout mot primitif admet un unique décalé qui soit de Lyndon, on déduit que le nombre ℓ_n de mots de Lyndon de longeur n vérifie $\ell_n = \dfrac{1}{n}\left(2^n - \sum_{k|n} k\ell_k\right)$, d'où $\ell_n \sim 2^n/n$.

6.1.8 Proposition ([17]). *Pour chaque orbite périodique γ de période n du flot de Lorenz, il existe un et un seul mot de Lyndon de longueur n codant γ, et, inversement, tout mot de Lyndon de longueur n est code réduit d'une orbite périodique de période n du flot de Lorenz.* ♣

Démonstration. Soit γ une orbite périodique de période n et P l'intersection de γ avec l'axe A la plus proche du point critique de gauche. Alors le code réduit $\mathrm{cr}(\gamma, P)$ est un mot de Lyndon. En effet, si $\mathrm{cr}(\gamma, P)$ est de la forme u^k, alors le point $\mathrm{pr}^{|u|}(P)$ est confondu avec P, donc on a $k = 1$, et par conséquent le mot $\mathrm{cr}(\gamma, P)$ est primitif. D'autre part, d'après le lemme 6.1.5, les codes réduits associés à d'autres points d'intersection de γ avec A sont après $\mathrm{cr}(\gamma, P)$ dans l'ordre lexicographique.

L'application ainsi construite est injective, car l'application pr de premier retour sur A est dilatante, donc les orbites issues de deux points distincts de A ne peuvent coïncider sur un nombre infini de tours consécutifs autour de l'attracteur, et donc leurs codes non plus. Elle est surjective, puisque pour tout mot infini w sur l'alphabet $\{L, R\}$ non ultimement constant, et en particulier pour tout mot périodique de période au moins 2, w est le code de l'orbite issue du point d'abscisse $\overline{0, w}$, où on a remplacé les lettres L par des 0 et les R par des 1. ♠

Désormais, on appelle *code de Lyndon* d'une orbite périodique l'unique mot de Lyndon qui la code. Par exemple, le code de Lyndon de l'orbite issue du point d'abscisse $1/7$ est le mot de Lyndon LLR. De même, celui de l'orbite issue de $5/31$ est le mot de Lyndon $LLRLR$.

6.1.9 Remarque. L'hypothèse que l'application pr est identifiée à $t \mapsto 2t \mod 1$ est cruciale. Si, par exemple, les deux bandes Rub_1 et Rub_2 du patron de Lorenz de la figure 6.1.2 sont collées, non avec les parties $]0, 1/2[$ et $]1/2, 1[$ de l'axe A, mais avec les parties $]0, k_0[$ et $]k_1, 1[$, avec $k_0 < 1/2 < k_1$, alors tous les mots possibles sur l'alphabet $\{L, R\}$ ne sont pas réalisables comme suite des tours d'une orbite du système de Lorenz modifié. On a alors un système L_{k_0,k_1} dont l'ensemble des orbites est un sous-ensemble de celui qu'on vient de décrire. Les nœuds de Lorenz correspondent au cas le plus général, où tous les mots sont réalisés par une orbite [§]. ♡

[‡]. Si k est impair, d'après le théorème d'Euler, k divise $2^{\varphi(k)} - 1$, donc tout nombre rationnel à dénominateur impair est de la forme $\dfrac{m}{2^n - 1}$.

[§]. Guckenheimer et Williams montrent dans [49] que, si le flot géométrique de Lorenz n'est pas *structurellement stable*,

6.1.e Tresses de Lorenz

D'après un théorème célèbre d'Alexander [4], tout nœud est clôture d'une tresse [¶]. Pour toute orbite périodique γ du flot de Lorenz, on décrit maintenant une tresse particulière dont la clôture est γ.

On rappelle qu'à toute tresse b à n brins on associe une permutation π de $\{1, \ldots, n\}$ en appelant $\pi(k)$ la position finale du brin initialement en position k. Chaque permutation π est associée à une infinité de tresses. Par contre, il en existe une et une seule dont tous les croisements sont orientés positivement, c'est-à-dire que le brin venant d'en haut à droite passe au-dessus de celui venant de gauche, et telle que deux brins quelconques se croisent au plus une fois. Cette tresse est appelée *tresse de permutation associée à* π.

6.1.10 Théorème ([17], voir figure 6.1.4)**.** *Soit γ une orbite périodique du flot de Lorenz coupant n fois l'axe A et coupant p fois la partie $]0, 1/2[$ de cet axe. Alors γ est la clôture d'une (unique) tresse de permutation à n brins. La permutation π associée est un cycle, et elle vérifie*

$$1 < \pi(1) < \pi(2) < \ldots < \pi(p) = n > \pi(n) > \pi(n-1) > \ldots > \pi(p+1) = 1. \tag{6.1.2}$$

Réciproquement, toute tresse de permutation telle qu'il existe une permutation π qui est un cycle et qui vérifie (6.1.2) *se referme en un nœud de Lorenz.* ♣

Dans le contexte ci-dessus, la tresse de permutation associée à γ est appelée la *tresse de Lorenz* de γ, et la permutation π est appelée la *permutation de Lorenz* de γ.

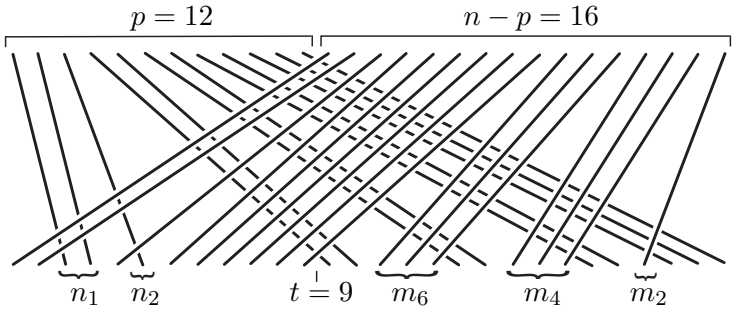

FIGURE 6.1.4 – Un exemple de tresse de Lorenz. Les p premiers brins vont vers la droite et les $n-p$ derniers vont vers la gauche en passant par-dessus les premiers. L'indice n_i (définition 6.1.14) est le nombre de brins du premier groupe qui passent par-dessous $i+1$ brins du second groupe, l'indice m_j est le nombre de brins du second groupe qui passent par-dessus $j+1$ brins du premier groupe. Le nombre noté t est la taille maximale d'un carré inclus dans le tableau de Young associé. Par un théorème de Franks et Williams [33], c'est aussi le nombre minimal de brins d'une tresse dont la clôture est le nœud de Lorenz considéré.

Démonstration. Il s'agit de décrire en termes de tresses la partie centrale du patron de Lorenz tel qu'il est représenté sur la figure 6.1.2. On obtient une tresse de la forme de celle de la figure 6.1.4. Comme l'application pr est croissante sur $]0, 1/2[$, deux brins quelconques parmi les p premiers ne se coupent pas et on a $1 < \pi(1) < \pi(2) < \ldots < \pi(p)$. Comme pr est aussi croissante sur $]1/2, 1[$, deux brins parmi les $n-p$ derniers ne se coupent pas non plus et on a $\pi(p+1) < \pi(p+2) < \ldots < \pi(n) < n$. Qu'un brin du premier groupe passe sous un brin du deuxième découle du plongement du patron montré

au sens où une petite perturbation du champ de vecteur le définissant ne le transforme pas en un champ conjugué, ce flot est néanmoins *persistant*, au sens où une petite perturbation l'envoie sur un champ définissant un flot de type L_{k_0,k_1}.

[¶]. voir [21] pour une introduction à la théorie des tresses

sur la figure 6.1.2. On a alors bien une tresse de permutation vérifiant (6.1.2). Comme on s'intéresse à un nœud et non à un entrelacs, la permutation a un unique cycle.

Réciproquement, une tresse b de permutation, associée à une permutation π_b vérifiant (6.1.2) et n'ayant qu'un cycle, détermine un mot de Lyndon w_b à n lettres comme suit : la i-ème lettre de w_b est un L si $\pi^{i-1}(1) \leqslant p$ et un R sinon. On vérifie alors que la clôture de b est le nœud de Lorenz admettant w_b pour code de Lyndon. ♠

6.1.11 Exemple. La tresse de Lorenz associée à l'orbite issue du point d'abscisse $1/7$ est la tresse $\sigma_2\sigma_1$ dont la clôture est un nœud trivial, et la permutation de Lorenz associée est le cycle (123). En revanche, la tresse de Lorenz associée au point $5/31$ est $\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_4\sigma_3\sigma_2$ dont la clôture est un nœud de trèfle, la permutation de Lorenz associée est le cycle (13524).

♡

6.1.f Stabilisation

La proposition 6.1.8 fournit une énumération de toutes les orbites périodiques de l'attracteur de Lorenz. Cependant, des orbites différentes peuvent être isotopes, c'est-à-dire représenter le même nœud, et donc plusieurs mots de Lyndon peuvent coder le même nœud de Lorenz. Pour réduire la redondance du codage, on introduit maintenant la notion de stabilisation d'une orbite et du mot de Lyndon associé.

Une *transformation de Markov* à droite sur une tresse b à n brins consiste à ajouter un $n+1$-ième brin et un croisement $\sigma_n^{\pm 1}$ (voir figure 6.1.5). Elle ne change pas la classe d'isotopie de la clôture de la tresse. On remarque que, si b est une tresse de Lorenz à n brins, alors $b\sigma_n$ est encore une tresse de Lorenz, cette fois-ci à $n+1$ brins. On peut de même introduire une transformation de Markov à gauche : si on note $\tilde{b}$ la tresse b où tous les indices des générateurs σ_i ont été augmentés de 1, alors la tresse $\tilde{b}\sigma_1$ est une tresse à $n+1$ brins dont la clôture est la même que celle de b. Comme dans le cas de la transformation à droite, si b est de Lorenz, alors $\tilde{b}\sigma_1$ est aussi de Lorenz. En termes d'orbites sur le patron de Lorenz, les transformations de Markov reviennent à ajouter une petite boucle faisant le tour d'un des deux points critiques de l'attracteur de Lorenz à la partie de l'orbite passant le plus près de celui-ci. La période est alors augmentée de un [||].

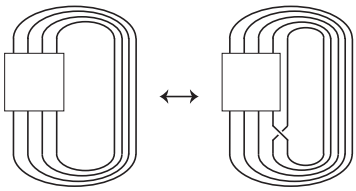

FIGURE 6.1.5 – Une transformation de Markov : la tresse b de B_n est remplacée par la tresse $b\sigma_n^{\pm 1}$ de B_{n+1}.

Il est alors facile de traduire l'invariance des nœuds par transformations de Markov en termes de mots de Lyndon.

[||]. En termes de permutations de Lorenz, une transformation de Markov à droite correspond à modifier le motif $n \mapsto i$ en $n \mapsto n+1 \mapsto i$, et une transformation de Markov à gauche à augmenter d'une unité tous les indices supérieurs à 1 et à remplacer le motif $1 \mapsto i+1$ en tête par $1 \mapsto 2 \mapsto i+1$.

6.1.12 Proposition. *Soit w un mot de Lyndon, w_L le mot obtenu en ajoutant une lettre L en tête de w et w_R le mot obtenu en insérant une lettre R après la i-ème lettre de w, où i est maximal pour l'ordre de Lyndon $<_w$. Alors les orbites périodiques du flot de Lorenz ayant w, w_L, et w_R pour codes de Lyndon respectifs sont isotopes.* ♣

Démonstration. Soit γ, γ_L et γ_R les orbites ayant pour codes de Lyndon les mots w, w_L et w_R. Alors, par définition du code, ajouter un L en tête de w revient à ajouter une boucle faisant le tour de point critique gauche à l'orbite γ, soit, en termes de la tresse de Lorenz, à effectuer une transformation de Markov à gauche. Donc γ_L est isotope à γ.

De même, si i est maximal pour l'ordre de Lyndon associé à w, ajouter un R après la i-ème lettre de w revient à effectuer une transformation de Markov, à droite cette fois, car, d'après le lemme 6.1.5, la i-ème lettre de w correspond à l'intersection de γ avec l'axe A située au plus près de l'attracteur droit. Donc γ_R est isotope à γ. ♠

Avec les notations de la proposition 6.1.12, on dira que γ_L est obtenue par *stabilisation* à gauche à partir de γ, et que γ_R est obtenue par *stabilisation* à droite. De même, on dira que w_L est obtenu par *stabilisation* à gauche à partir de w, et que w_R est obtenu par *stabilisation* à droite.

Par exemple, les mots $LLLRLR$, $LLLLRLR$, $LLRRLR$, et $LLLLRRRLR$ sont tous obtenus par stabilisation à partir du mot $LLRLR$. Les orbites associées sont donc toutes isotopes (en l'occurrence, elles représentent toutes des nœuds de trèfle).

Comme on peut stabiliser indéfiniment un mot de Lyndon sans changer le nœud correspondant, nous déduisons :

6.1.13 Corollaire. *Tout nœud de Lorenz apparaît comme classe d'isotopie d'une infinité d'orbites périodiques du flot de Lorenz.* ♣

6.1.g Diagrammes de Young

Lorsqu'on le représente comme sur la figure 6.1.4, le diagramme d'une tresse de Lorenz évoque un diagramme de Young. On peut rendre cette correspondance formelle et, alors, les transformations de Markov correspondent à une opération simple sur les diagrammes associés.

On définit une correspondance entre tresses de Lorenz et diagrammes de Young comme suit. Soit b une tresse de Lorenz. Dans le diagramme en segments de b, on efface des fragments des brins de façon à ne garder que les portions qui se trouvent entre deux croisements, voir figure 6.1.6. En tournant et déformant la figure pour donner à chaque segment une orientation horizontale ou verticale, on obtient un diagramme de Young, éventuellement complété par deux segments, l'un vers la droite sur l'axe horizontal, l'autre vers le haut sur l'axe vertical.

6.1.14 Définition. Soit γ une orbite périodique de Lorenz, b la tresse de Lorenz à n brins associée, π la permutation de Lorenz et p le nombre de brins de b allant vers la droite, c'est-à-dire l'unique p tel que $\pi(p) = n$. Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on définit

$$n_i = \operatorname{card}\{j \mid \pi(j) - j = i + 1 \text{ et } \pi(j) < \pi^2(j)\} \tag{6.1.3}$$

$$m_i = \operatorname{card}\{j \mid j - \pi(j) = i + 1 \text{ et } \pi(j) > \pi^2(j)\}. \tag{6.1.4}$$

Le *diagramme de Young augmenté associé à b* est le diagramme de Young ayant un mât gauche de hauteur n_0, une base horizontale de longueur m_0, et n_i colonnes de hauteur i. [*] ♢

[*]. On dit que le diagramme est *augmenté* en raison du mât et de la base non standards qu'on lui a ajoutés.

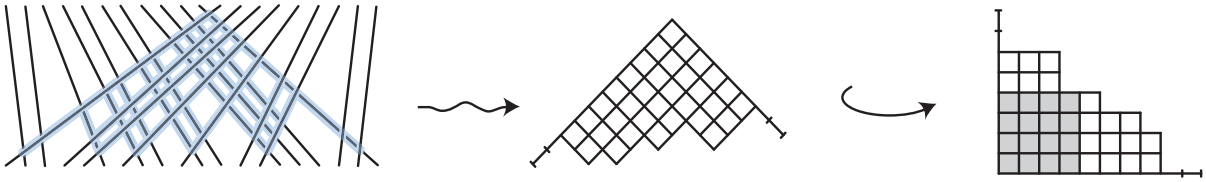

FIGURE 6.1.6 – À une tresse de Lorenz on associe un diagramme de Young, augmenté ici de deux segments à gauche et à droite, en ne gardant que la partie épaissie de la tresse de Lorenz. Pour tout $i > 0$, il y a alors n_i colonnes de hauteur i et m_i lignes de largeur i.

Les entiers n_i (*resp.* m_i) correspondent au nombre de brins du premier (*resp.* second) groupe passant par-dessous (*resp.* par-dessus) $i + 1$ brins de l'autre groupe (voir figure 6.1.4).

Par exemple, le diagramme de Young complété associé à l'orbite de code de Lyndon LLR est un segment horizontal d'une unité de long. Le diagramme de Young associé au code de Lyndon $LLLRLR$ est un diagramme à deux cases avec un segment additionnel □□_.

6.1.15 Proposition. *La correspondance ci-dessus établit une bijection entre les tresses de Lorenz et les diagrammes de Young augmentés.* ♣

Démonstration. Partons d'un diagramme de Young augmenté de largeur $p - 1$ et de hauteur $q - 1$. On oriente le diagramme convenablement, on prolonge les segments, et on fait de chaque intersection un croisement de tresse positif. La tresse ainsi obtenue est une tresse de permutation dont ni les p brins de gauche, ni les q brins de droite ne se coupent entre eux. D'après la réciproque dans le théorème 6.1.10, c'est une tresse de Lorenz. Il est clair que la correspondance ainsi définie est la réciproque de celle décrite dans le chapeau de cette section. ♠

6.1.16 Proposition. *Tout nœud de Lorenz peut être obtenu comme clôture d'une tresse de Lorenz associée à un diagramme de Young standard (c'est-à-dire non augmenté).* ♣

Démonstration. Soit K un nœud de Lorenz, et b une tresse de Lorenz dont la clôture est K. D'après la proposition 6.1.15, la tresse b correspond à un diagramme T, *a priori* augmenté. Vue la description de la correspondance entre tresses de Lorenz et diagrammes de Young, supprimer un segment additionnel horizontal dans un diagramme complété revient à effectuer une déstabilisation gauche sur la tresse associée, tandis que supprimer un segment vertical revient à effectuer une déstabilisation droite. Partant du diagramme T, on arrive en un nombre fini d'étapes du type précédent à un diagramme standard. Par construction, celui-ci est associé au nœud initial K. ♠

Par exemple, le nœud de trèfle est associé au tableau □□. Zérologiquement, le nœud trivial est associé au tableau n'ayant aucune case.

6.1.17 Remarque. En termes de mot de Lyndon, un diagramme de Young non augmenté correspond à un mot w qui est *minimal* au sens où, quand on ôte à w la première lettre L, alors le mot w' obtenu n'est pas un mot de Lyndon et, quand on ôte à w la lettre R dont la position i est maximale dans l'ordre de Lyndon $<_w$, alors i n'est pas maximal dans $<_{w'}$. On déduit alors directement de la proposition 6.1.16 que tout nœud de Lorenz peut être représenté par une tresse de Lorenz codée par un mot de Lyndon minimal.

Par exemple, le mot de Lyndon $LLLRLR$ n'est pas minimal, puisque, si on lui ôte le premier L, on obtient le mot $LLRLR$, qui est un mot de Lyndon. De même, le mot de Lyndon $LLRRLR$ n'est

pas minimal. En effet, l'entier maximal dans l'ordre de Lyndon associé est 3 et, quand on ôte la lettre R en position 3, on obtient $LLRLR$, et 3 reste maximal dans l'ordre de Lyndon associé à ce dernier mot. Par contre, $LLRLR$ est minimal, puisque, d'une part, $LRLR = (LR)^2$ n'est pas un mot de Lyndon et, d'autre part, l'entier maximal dans l'ordre de Lyndon associé à $LLRLR$ est 3, alors que l'entier maximal dans l'ordre de Lyndon associé à $LLLR$ est 4. ♡

À ce point, on a donc une application qui associe à tout diagramme de Young un nœud de Lorenz, et tout nœud de Lorenz est représenté par au moins un diagramme de Young (standard, c'est-à-dire non augmenté). La question de la redondance du codage ainsi obtenu se repose naturellement :

Question. Un nœud de Lorenz donné peut-il être représenté par plusieurs diagrammes standards ? par une infinité de diagrammes standards ? ♢

Il est facile de voir que la réponse à la première question est positive : le nœud de trèfle est représenté par chacun des deux diagrammes de Young $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ et $\square\square$, correspondant aux deux mots de Lyndon minimaux $LLRLR$ et $LRLRR$. Ce fait est un cas particulier d'un résultat plus général. On appelle *transposé* d'un diagramme le diagramme obtenu par symétrie autour de la première diagonale, c'est-à-dire en échangeant lignes horizontales et verticales.

6.1.18 Proposition. *Les orbites de Lorenz associées à un diagramme de Young et à son transposé sont isotopes.* ♣

Démonstration. Le patron de Lorenz est invariant par la rotation autour d'une droite horizontale passant par le milieu M de l'axe et échangeant les deux points critiques. Une orbite codée par un diagramme de Young est alors envoyée sur l'orbite codée par le diagramme transposé. ♠

Par contre, on établira une réponse négative à la seconde question avec le calcul du genre du corollaire 6.2.14 : un nœud de Lorenz ne peut être représenté que par un nombre fini de diagrammes de Young non augmentés.

6.2 Somme de Murasugi, nœuds fibrés, et monodromie

Le théorème 6.1.10 énonce une propriété capitale des nœuds de Lorenz, à savoir qu'ils peuvent être réalisés comme clôtures de tresses positives. Une conséquence notable est le fait qu'ils sont fibrés.

6.2.1 Théorème ([17, 87])**.** *Tout entrelacs qui est clôture d'une tresse positive est fibré.* ♣

Dans cette partie, nous démontrons le théorème 6.2.1 à l'aide d'une opération géométrique simple : la somme de Murasugi. Pour nous, cette démonstration a l'avantage de fournir également un algorithme de calcul de la monodromie des nœuds de Lorenz, que nous utiliserons dans le chapitre suivant pour étudier le polynôme d'Alexander.

Plus précisément, nous montrons que la somme de deux entrelacs fibrés est un entrelacs fibré, et que la monodromie de la somme s'exprime simplement à partir des monodromies de chaque facteur. Ensuite nous appliquons ces résultats aux clôtures de tresses positives, pour montrer qu'elles sont sommes de Murasugi itérées d'entrelacs de Hopf et calculer leur monodromie. L'idée de la démonstration que nous présentons est de construire de proche en proche une fibration pour chaque tresse positive en ajoutant un à un les croisements. Comme l'entrelacs de Hopf à deux composantes est fibré, on l'utilise comme brique élémentaire. D'autre part, on peut recoller certaines fibrations dans $\mathbb{S}^3$ si elles sont non triviales

sur des ensembles suffisamment disjoints. La notion de somme de Murasugi formalise cette idée, et on va l'utiliser comme ciment de la construction.

Pour la suite du chapitre et pour plus de commodités, nous identifions la sphère $\mathbb{S}^3$ avec $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, et plongeons tous les nœuds considérés dans $\mathbb{S}^3$.

6.2.a Briques élémentaires

Regardons $\mathbb{S}^3$ comme la sphère unité de $\mathbb{C}^2$, c'est-à-dire comme l'ensemble des couples (z_1, z_2) de nombres complexes vérifiant $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Pour tout λ dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $\{(z_1, z_2) \mid z_1 = \lambda z_2\}$ est un nœud trivial dans $\mathbb{S}^3$. Un entrelacs constitué par une union quelconque de tels nœuds triviaux est un entrelacs dit *de Hopf* : deux composantes distinctes ont un nombre d'enlacement égal à $+1$. Par exemple, l'ensemble $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \mid z_1 = \pm z_2\}$ est un entrelacs de Hopf à deux composantes.

6.2.2 Proposition ([64]). *Tout entrelacs de Hopf est fibré.* ♣

Démonstration. Soit $\mathcal{H}_n$ un entrelacs de Hopf à n composantes. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $\mathcal{H}_n$ défini comme l'intersection dans $\mathbb{R}^4$ de $\mathbb{S}^3$ et du lieu d'annulation du polynôme

$$P_n(z_1, z_2) = \prod_{k=1}^{n} (z_1 - kz_2). \tag{6.2.1}$$

Pour tout θ dans $[-\pi, \pi]$, l'ensemble $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \mid \arg(P_n(z_1, z_2)) = \theta\}$ est une surface dont le bord est $\mathcal{H}_n$. L'argument du polynôme P est alors une fibration de $\mathbb{S}^3 \smallsetminus \mathcal{H}_n$ sur $\mathbb{S}^1$. ♠

La démonstration précédente peut être adaptée pour montrer que tout entrelacs algébrique est fibré [64]. Ce qui nous intéresse c'est l'entrelacs à deux composantes et sa monodromie. Notons que la surface de Seifert exhibée est définie par l'équation $\arg(z_1 - z_2)(z_1 - 2z_2) = 0$, c'est un anneau.

6.2.3 Définition. (i) On note $\mathbb{S}^1$ le cercle de longueur 1. On appelle *twist de Dehn positif* la classe d'isotopie de l'application τ_+ de $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$ dans lui-même définie par $\tau_+(r, \theta) = (r, \theta + r)$. On appelle *twist de Dehn négatif* la classe de l'application $\tau_-(r, \theta) = (r, \theta - r)$.

(ii) Soit Σ une surface et γ une courbe lisse plongée dans Σ. Soit A un voisinage annulaire de γ dans Σ paramétré par $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$ de sorte que l'orientation de γ coïncide avec celle du cercle $\mathbb{S}^1$ et que celle de Σ coïncide avec celle de $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$. On appelle *twist de Dehn* positif (*resp.* négatif) la classe de l'application de Σ dans Σ qui coïncide avec un twist de Dehn positif (*resp.* négatif) de l'anneau positif sur A et qui est l'identité en dehors. ♢

6.2.4 Proposition. *Soit $\mathcal{H}_2$ un entrelacs de Hopf à deux composantes dans $\mathbb{S}^3$. Alors son complémentaire fibre sur l'anneau, et la monodromie est un twist de Dehn positif.* ♣

Démonstration. On peut supposer que $\mathcal{H}_2$ est l'ensemble $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \mid z_1 = \pm z_2\}$, et découper $\mathbb{S}^3$ en deux tores pleins $T_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \mid |z_1| \leqslant |z_2|\}$ et $T_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \mid |z_1| \geqslant |z_2|\}$. L'entrelacs $\mathcal{H}_2$ sépare le tore médian $\{(z_1, z_2) \mid |z_1| = |z_2| = \sqrt{2}/2\}$ en deux anneaux $A_1 = \{\sqrt{2}/2(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \mid \theta_1 - \theta_2 \in [0, \pi]\}$ et $A_2 = \{\sqrt{2}/2(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \mid \theta_1 - \theta_2 \in [\pi, 2\pi]\}$. Alors on peut pousser l'anneau A_1 vers l'intérieur du tore plein T_1 jusqu'à arriver sur A_2. L'application induite de A_1 sur A_2 est alors $\sqrt{2}/2(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \mapsto \sqrt{2}/2(e^{i\theta_1}, e^{i(2\theta_1 - \theta_2)})$. En faisant la même chose dans le tore T_2, on obtient une application de premier retour de A_1 sur A_1 de la forme $\sqrt{2}/2(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \mapsto \sqrt{2}/2(e^{i(3\theta_1 - 2\theta_2)}, e^{i(2\theta_1 - \theta_2)})$, c'est un twist de Dehn. ♠

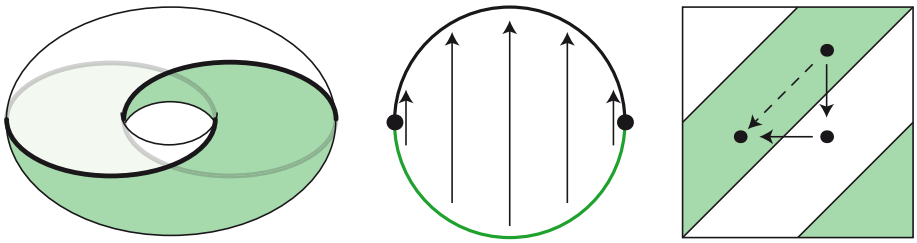

FIGURE 6.2.1 – À gauche, un entrelacs de Hopf à deux composantes et le ruban de Hopf qu'il borde. Au centre, la moitié de la monodromie située dans le tore plein est obtenu en tronçonnant ce tore en disque méridien. À droite, la monodromie associée.

6.2.b Ciment

6.2.5 Définition. (voir figure 6.2.2) Soit Σ_1 et Σ_2 deux surfaces orientées plongées dans $\mathbb{S}^3$ de bords respectifs K_1 et K_2. Soit Π une sphère (que l'on voit comme un plan horizontal dans $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$) séparant $\mathbb{S}^3$ en deux boules ouvertes B_1 et B_2. On suppose que

(i) Σ_1 est incluse dans l'adhérence de B_1 et Σ_2 dans l'adhérence de B_2 ;
(ii) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est un $2n$-gone P contenu dans Π avec la même orientation ;
(iii) K_1 et K_2 sont deux entrelacs se coupant uniquement aux sommets $x_1, \ldots, x_{2n}$ de P.

On définit alors la *somme de Murasugi* $\Sigma_1 \#_P \Sigma_2$ *des surfaces* Σ_1 *et* Σ_2 *le long de* P comme leur réunion $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Par extension, on définit la *somme de Murasugi* $K_1 \#_P K_2$ *de* K_1 *et* K_2 *le long de* P comme le nœud $K_1 \cup K_2 \setminus \bigcup]x_i, x_{i+1}[$ ♢

Plus généralement, on définit la somme de Murasugi de surfaces $\Sigma_i, i = 1, 2$ le long de deux polygones P_i dont un côté sur deux est dans le bord $\partial\Sigma_i$ comme la classe d'isotopie dans $\mathbb{S}^3$ de la somme de deux surfaces $\widehat{P}_i$ isotopes à P_i et vérifiant les critères (i), (ii) et (iii), le résultat ne dépendant alors pas du choix des $\widehat{P}_i$ dans leur classe d'isotopie. On la note $\Sigma_1 \#_{P_1 \sim P_2} \Sigma_2$.

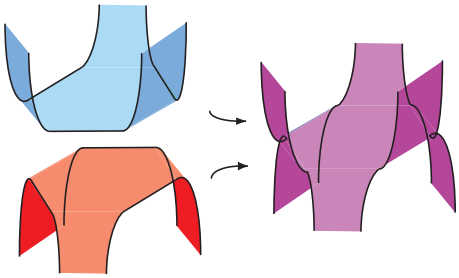

FIGURE 6.2.2 – La somme de Murasugi de deux surfaces à bord.

La somme de Murasugi généralise la somme connexe, qui correspond au cas $n = 1$ dans la définition. Elle généralise également le plombage, qui correspond au cas $n = 2$. La somme de Murasugi est une opération géométrique naturelle pour les surfaces (et pour les entrelacs qu'elles bordent), à savoir qu'elle conserve plusieurs propriétés importantes [36, 37], comme par exemple le fait d'être une surface incompressible, le fait d'être une surface de Seifert de genre minimal, ou encore le fait d'être un entrelacs fibré, comme nous allons le voir.

6.2.c Maçonnerie

L'idée fondamentale pour montrer que la somme de Murasugi de deux entrelacs fibrés est fibrée consiste à déformer préalablement les fibrations associées pour qu'elle soient non triviales sur des ensembles disjoints, d'où la définition suivante.

6.2.6 Définition. Soit K un entrelacs fibré, $\theta : \mathbb{S}^3 \smallsetminus K \mapsto \mathbb{S}^1$ définissant la fibration associée et Π une sphère divisant $\mathbb{S}^3$ en deux boules B_1 et B_2. Soit $N(K)$ un voisinage tubulaire de K. On dit que la fibration θ est *tangente inférieurement* (resp. *supérieurement*) à Π si

(i) il existe un polygone P de sommets $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ sur Π tel que K rencontre Π le long des côtés $[x_1x_2], [x_3x_4], \dots, [x_{2n-1}x_{2n}]$ (*resp.* $[x_2x_3], \dots, [x_{2n}x_1]$) de P et K ne rencontre pas B_2 (*resp.* B_1) ;

(ii) $N(K) \cap \Pi$ consiste en un ε-voisinage des côtés $[x_1x_2], \dots, [x_{2n-1}x_{2n}]$ de P (*resp.* $[x_2x_3], \dots$) ;

(iii) à l'extérieur du ε-voisinage $N(\partial P)$ du bord du polygone P dans Π, la fonction θ vaut 0 à l'intérieur de P et π à l'extérieur ;

(iv) à l'intérieur de $N(\partial P) \smallsetminus N(K)$, la fonction θ prend ses valeurs dans l'intervalle $]0, \pi[$ (*resp.* $]-\pi, 0[$). ♢

Si on voit une fibration comme le déplacement continu d'une fibre qui remplit tout le complémentaire d'un nœud, alors une fibration est tangente supérieurement à un plan si, sous ce plan, la fibre se déplace comme la bulle de savon décrite pour la fibration du nœud trivial. Le résultat suivant assure qu'étant donné un entrelacs fibré et un polygône P inclus dans une fibre, on peut supposer la fibration tangente à une petite sphère épaississant P.

6.2.7 Lemme. *Soit K un entrelacs fibré et $\theta : \mathbb{S}^3 \smallsetminus K \to \mathbb{S}^1$ la fibration associée. Soit P un polygone à $2n$ côtés inclus dans une fibre $\theta^{-1}(t)$, et rencontrant K le long des côtés $[x_1x_2], \dots, [x_{2n-1}x_{2n}]$* (resp.$[x_2x_3], \dots, [x_{2n}x_1]$)*. Alors il existe une sphère Π dans $\mathbb{S}^3$ contenant P, rencontrant K uniquement le long des arcs $[x_1x_2], \dots, [x_{2n-1}x_{2n}]$* (resp.$[x_2x_3], \dots, [x_{2n}x_1]$)*, et telle que K soit contenu dans une seule des deux boules fermées délimitées par Π. De plus, on peut reparamétrer θ de sorte que θ soit tangente inférieurement* (resp. *supérieurement) à Π.* ♣

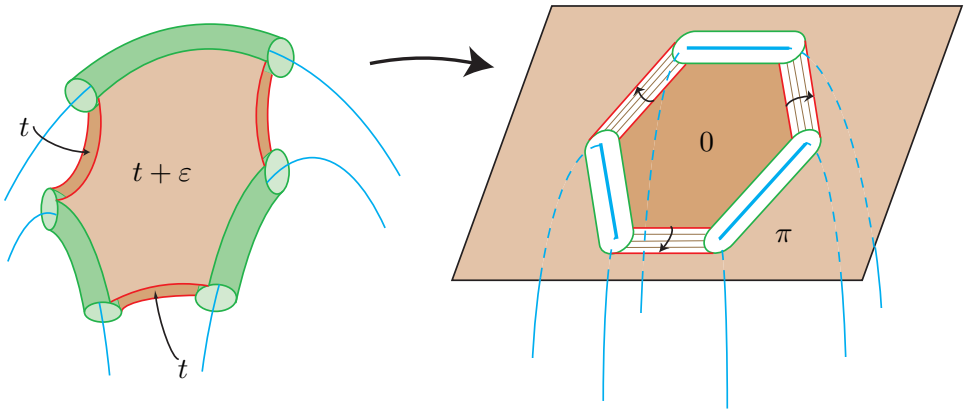

FIGURE 6.2.3 – Déformation de la fibration pour obtenir une fibration triviale dans le demi-espace supérieur.

Démonstration. (voir figure 6.2.3) Comme P est contractile, au voisinage de celui-ci, la fibration θ est isomorphe à la projection sur le second facteur $P \times [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \to [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$. Soit B_2 l'image réciproque de $P \times [t, t+\varepsilon]$ et Π son bord. La sphère Π consiste alors en deux copies de P, l'une dans la fibre $\theta^{-1}(t)$ et l'autre dans une fibre $\theta^{-1}(t+\varepsilon)$, et un anneau $\partial P \times]0, \varepsilon[$, comme sur la partie gauche de la figure 6.2.3.

Composons θ à gauche par un difféomorphisme du cercle envoyant l'intervalle $[t, t+\varepsilon]$ sur $[0, \pi]$. Si on pense au paramètre de la fibration comme à un temps, cela revient à ralentir le temps pour passer un temps π dans la (petite) boule B_2. La fibration obtenue est tangente inférieurement à Π. En effet, si on zoome sur B_2 pour lui faire remplir tout le demi-espace supérieur, la fibration est alors semblable à celle qui est représentée sur la partie droite de la figure 6.2.3, laquelle est tangente inférieurement au plan horizontal. ♠

Ces préliminaires nous permettent de montrer le résultat-clé suivant.

6.2.8 Théorème ([36]). *Soit K_1 et K_2 deux entrelacs fibrés dans $\mathbb{S}^3$ admettant pour fibres respectives deux surfaces Σ_1 et Σ_2. On note h_1 et h_2 des représentants des monodromies géométriques associées. Soit P_1 (resp. P_2) un polygone à $2n$ côtés sur Σ_1 (resp. Σ_2) dont les côtés pairs (resp. impairs) sont inclus dans le bord K_1 (resp. K_2) de Σ_1 (resp. Σ_2). Alors*

(i) *la somme de Murasugi $K_1 \#_{P_1 \sim P_2} K_2$ est fibrée de fibre $\Sigma_1 \#_{P_1 \sim P_2} \Sigma_2$,*

(ii) *la monodromie de l'entrelacs $K_1 \#_{P_1 \sim P_2} K_2$ est la classe de la composée $h_1 \circ h_2$, où h_1 (resp. h_2) est étendue en une application de $\Sigma_1 \#_{P_1 \sim P_2} \Sigma_2$ par l'identité hors de Σ_1 (resp. Σ_2).* ♣

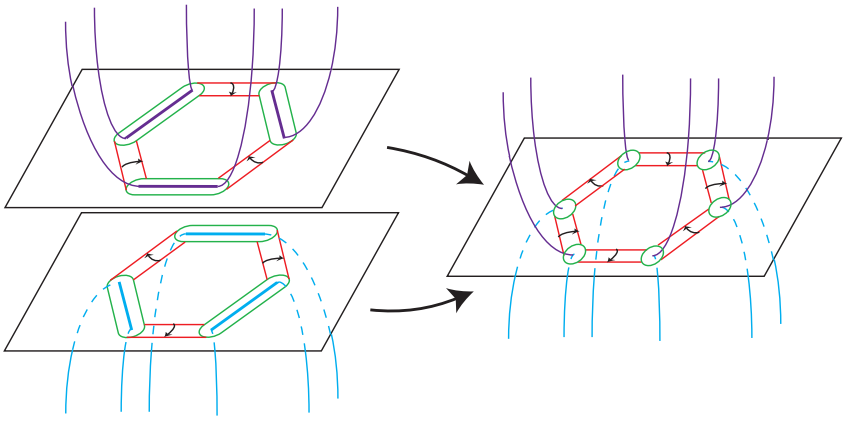

FIGURE 6.2.4 – Le collage de deux fibrations pour obtenir une fibration de la somme de Murasugi de deux nœuds.

Démonstration. (voir figure 6.2.4) (i) Soit Π le plan horizontal dans $\mathbb{R}^3$. Pour $i = 1, 2$, soit θ_i une fibration associée à K_i avec Σ_i pour fibre. D'après le lemme 6.2.7, on peut déformer K_1 et θ_1 de sorte que θ_1 soit tangente inférieurement à Π, et de même on peut déformer K_2 et θ_2 de sorte que θ_2 soit tangente supérieurement à Π. La somme de Murasugi $K_1 \#_{P_1 \sim P_2} K_2$ est alors obtenue en recollant le demi-espace inférieur associé à K_1 et le demi-espace supérieur associé à K_2, et en supprimant les arcs formant le bord du polygône $P = x_1 \dots x_{2n}$ dans Π.

On définit une nouvelle fonction θ, dont nous montrerons par la suite qu'elle induit une fibration. Sur le demi-espace inférieur, θ coïncide avec θ_1, sauf sur un voisinage tubulaire des arcs $[x_1, x_2], \dots, [x_{2n-1} x_{2n}]$ (où θ_1 est supposée du type fonction-argument). De même, sur le demi-espace supérieur, θ coïncide avec θ_2, sauf sur un voisinage tubulaire des arcs $[x_2, x_3], \dots, [x_{2n} x_1]$.

Au voisinage des arcs $[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2n-1} x_{2n}]$, la fonction θ est définie sur le demi-espace supérieur, et varie de π à 2π quand on se déplace de l'extérieur vers l'intérieur du polygône. Elle est également définie sur le demi-espace inférieur jusqu'à la frontière d'un voisinage tubulaire de ces arcs, et varie également de π à 2π quand on se déplace de l'extérieur vers l'intérieur sur cette frontière. Il reste donc à prolonger θ sur n cylindres disjoints, sachant que, sur le bord de ces cylindres, θ varie de π

à 2π comme indiqué sur la gauche de la figure 6.2.5. On le fait à l'aide de la fonction hauteur indiquée à droite de la figure 6.2.5. De même, on prolonge θ avec des valeurs dans l'intervalle $[0, \pi]$ dans le demi-plan supérieur au voisinage des arcs $[x_2, x_3], \ldots, [x_{2n}x_1]$.

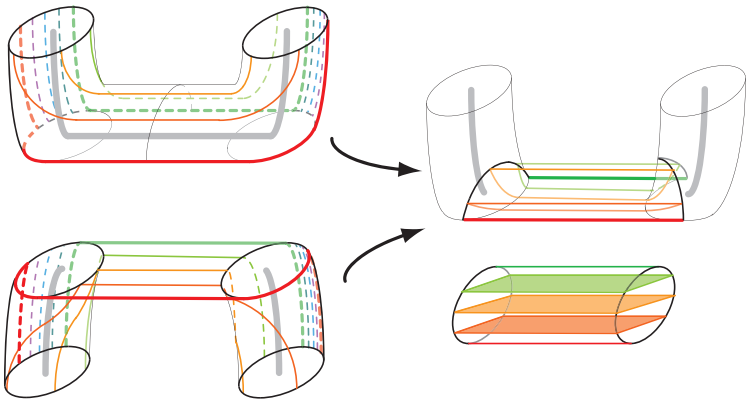

FIGURE 6.2.5 – Complétion de la fibration d'une somme de Murasugi à partir de la réunion des fibrations associées à chacun des demi-espaces. À gauche, la fibration au voisinage d'un arc de type $]x_i, x_{i+1}[$ pour chacun des deux nœuds K_1 (en bas) et K_2 (en haut). Les arcs représentent les niveaux de la fonction θ, et plus précisément l'intersection des fibres avec un voisinage tubulaire de K_1 et K_2 respectivement, sur la partie du bas, on a également ajouté les niveaux de θ dans le plan Π de recollement. En haut à droite, la partie sur laquelle il faut définir de nouvelles valeurs pour la fonction θ, qui est un cylindre. Les conditions au bord sont alors fixées. En bas à droite, un feuilletage d'un cylindre remplissant ces contraintes de bord.

La fonction θ est alors définie sur tout $\mathbb{S}^3 \smallsetminus N(K_1 \# K_2)$, et à valeurs dans $\mathbb{S}^1$.

Pour vérifier que θ est une fibration, établissons que la fonction θ n'a pas de singularité. Comme les fonctions θ_1 et θ_2 sont tangentes au plan Π de recollement hors de $N(\partial P)$, et sans singularité, et comme θ coïncide partout hors de $N(P)$ avec l'une de ces deux fonctions, la fonction θ y est sans singularité. Au voisinage des arcs $]x_i x_{i+1}[$, c'est-à-dire à l'intérieur de la différence symétrique $N(K_1)\Delta N(K_2)$, le prolongement de θ a été justement choisi pour ne pas faire apparaître de singularité.

Pour compléter la démonstration, il reste à vérifier que θ est bien un argument au voisinage des sommets $x_1, \ldots x_{2n}$ du polygone P. La figure 6.2.4 montre que la fonction θ y est bien de la forme désirée.

(ii) Soit x un point de $\Sigma_1 \#_{P_1 \sim P_2} \Sigma_2$. En suivant la fibration θ sur l'intervalle $[0, \pi]$, le point x est envoyé sur $h_2(x)$. En effet, si x est dans le demi-espace inférieur (strict), x ne bouge pratiquement pas. Et si x est dans le demi-espace supérieur (ou dans le polygone P de recollement), x est sur Σ_2 et suit donc h_2. Ensuite, en suivant la fibration θ sur l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, le point $h_2(x)$ est envoyé sur $h_1 \circ h_2(x)$ selon le même principe. Comme θ est une fibration, l'application $h_1 \circ h_2$ est donc un représentant de la monodromie. ♠

On applique maintenant aux tresses les résultats généraux qui précèdent.

6.2.9 Lemme. *Pour tout entier n strictement positif, la clôture de la tresse σ_1^n est un entrelacs fibré.* ♣

Démonstration. Le cas $n = 1$ correspond au nœud trivial, tandis que le cas $n = 2$ correspond à l'entrelacs de Hopf à deux composantes. Sinon, on obtient la surface de Seifert standard Σ^n pour la clôture de σ_1^n en collant les surfaces standards Σ^{n-1} et Σ^2 comme montré sur la figure 6.2.6. Le théorème 6.2.8 assure alors qu'à chaque itération, l'entrelacs est fibré avec Σ^n pour fibre. ♠

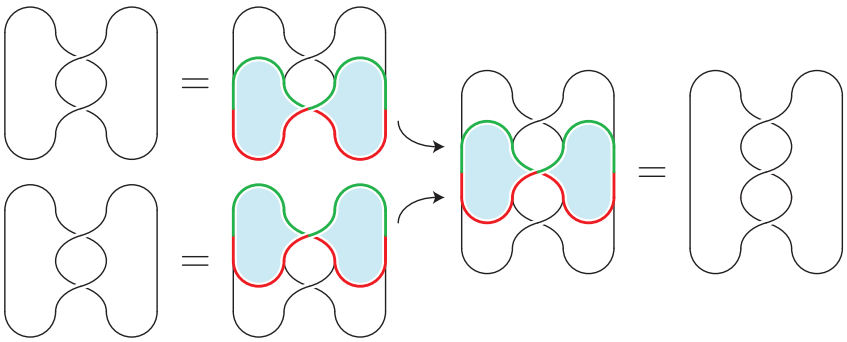

FIGURE 6.2.6 – Construction itérative d'une surface de Seifert pour la clôture de σ_1^n.

On est maintenant prêt pour démontrer que la clôture de toute tresse positive est un entrelacs fibré.

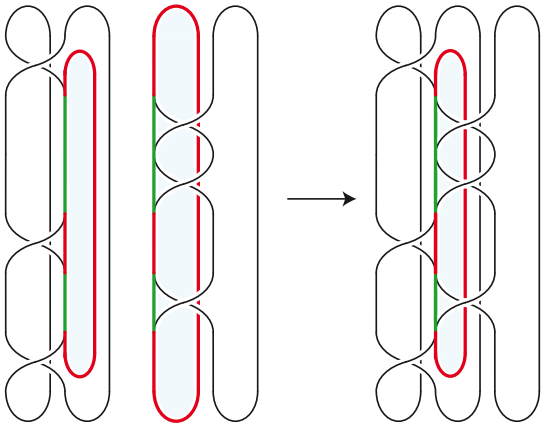

FIGURE 6.2.7 – Collage de deux tresses l'une à côté de l'autre. En bleu, le polygone de collage.

Démonstration du théorème 6.2.1. D'après le lemme 6.2.9, la clôture d'une tresse-colonne σ_i^n est un entrelacs fibré. La figure 6.2.7 montre comment juxtaposer une à une les surfaces standards associées à chaque colonne par somme de Murasugi, afin d'ainsi obtenir la surface standard associée à la clôture de n'importe quelle tresse positive. D'après le théorème 6.2.8, l'entrelacs obtenu est fibré, avec la surface standard pour fibre. ♠

6.2.10 Remarque. On a utilisé la positivité de b de manière cruciale en affirmant que chaque colonne élémentaire est fibrée avec la surface standard pour fibre. En effet, si la tresse b a un croisement positif et un croisement négatif consécutifs dans une même colonne, celle-ci peut néanmoins être fibrée, mais la surface standard ne sera pas une fibre. Le théroème 6.2.8 ne s'applique alors plus dans la construction par récurrence, et donc la preuve s'effondre.

Par contre, l'argument peut être étendu au cas d'une tresse *homogène*, définie comme une tresse possédant une décomposition dans laquelle, pour chaque i, l'un au plus des générateurs σ_i ou σ_i^{-1} apparaît. Ceci montre par exemple que le nœud de huit, clôture de la tresse $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$, est fibré. ♡

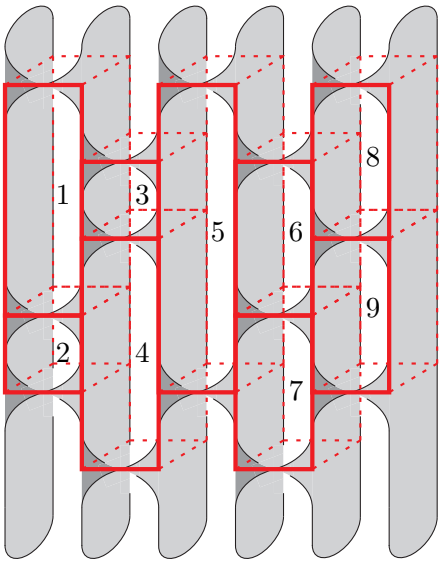

FIGURE 6.2.8 – Construction itérative de la fibration associée à la clôture d'une tresse positive. Chaque brique correspond à un entrelacs de Hopf à deux composantes. En les empilant dans l'ordre prescrit, on s'assure que la somme de Murasugi fibre à chaque étape de la construction.

6.2.d Genre

Dans la sous-partie précédente, on a montré qu'un nœud qui est clôture d'une tresse positive est fibré. La technique utilisée a également permis de construire une fibre pour la fibration associée. Nous utilisons maintenant ces informations pour calculer le genre des nœuds de Lorenz et en déduire un critère simple permettant de montrer qu'un nœud donné n'est pas un nœud de Lorenz.

6.2.11 Proposition. *Soit b une tresse positive, K sa clôture et Σ la surface de Seifert standard. Alors Σ est une surface de Seifert de genre minimal pour K.* ♣

Démonstration. Soit g le genre de la surface Σ. Reprenons les notations de la section précédente. On a vu que le nœud K admet une fibration définie par une fonction θ telle que $\Sigma = \theta^{-1}(0)$. Comme θ définit une fibration de $\mathbb{S}^3 \smallsetminus K$, le revêtement cyclique infini du complémentaire de K est isomorphe à $\theta^{-1}(0) \times \mathbb{R}$, et donc son π_1 est un groupe libre de rang $2g$. De plus, le lacet horizontal $\partial\Sigma \times \{0\}$ dans $\Sigma \times \mathbb{R}$ est le produit de g commutateurs dans $\pi_1(\mathbb{S}^3 \smallsetminus K)$, et pas moins.

Soit Σ' une surface de Seifert quelconque pour K de genre g'. En passant au revêtement universel, on plonge Σ' dans $\Sigma \times \mathbb{R}$, et en particulier son groupe fondamental $\pi_1(\Sigma')$ se plonge dans $\pi_1(\Sigma \times \mathbb{R})$. Le lacet $\partial\Sigma'$ est, dans $\pi_1(\Sigma')$, le produit de g' générateurs. Or il est isotope dans $\Sigma \times \mathbb{R}$ au lacet $\partial\Sigma \times \{0\}$, qui est le produit de g commutateurs et pas moins. On en déduit l'inégalité $g \leqslant g'$, comme voulu. ♠

6.2.12 Proposition. *Soit γ une orbite périodique de période n du flot de Lorenz, K le nœud associé et c le nombre de croisements de la tresse de Lorenz associée. Alors le genre g de K est donné par la formule $2g = 1 + c - n$.* ♣

Démonstration. La fibre $\theta^{-1}(0)$ exhibée dans la preuve du théorème 6.2.1 est une surface de Seifert de genre minimal. Or, il s'agit de la surface de Seifert standard, qui par conséquent est de genre minimal. On vérifie facilement que sa caractéristique d'Euler est $n - c$ et qu'elle n'a qu'une composante de bord, donc son genre est $(1 + c - n)/2$. ♠

On a vu dans le corollaire 6.1.13 que tout nœud de Lorenz est réalisé par une infinité d'orbites du flot de Lorenz, et, par conséquent, est associé à une infinité de tresses de Lorenz. La proposition 6.2.12 implique que, pour toutes ces tresses, la quantité $n - c$, différence entre le nombre de brins et le nombre de croisements, prend la même valeur.

La proposition 6.2.12 se reformule directement en termes de diagrammes de Young.

6.2.13 Corollaire. *Le genre d'un nœud de Lorenz associé à un diagramme de Young est la moitié du nombre de cases de ce diagramme.* ♣

Ce résultat implique qu'un diagramme de Young associé à un nœud Lorenz a un nombre pair de cases. Cette remarque se démontre plus facilement en considérant la permutation π associée par le théorème 6.1.10, et en notant que π ne peut être un cycle que si le diagramme a un nombre pair de cases.

Nous avons vu avec la proposition 6.1.18 que deux diagrammes de Young distincts peuvent coder le même nœud de Lorenz. Par contre, nous pouvons maintenant borner supérieurement le défaut d'injectivité de ce codage.

6.2.14 Proposition. *Pour tout nœud de Lorenz K, il n'y a qu'un nombre fini de diagrammes de Young standards associés à K.* ♣

Démonstration. Si K a pour genre g, tout diagramme de Young associé K a $2g$ cases en vertu du corollaire 6.2.13. Or il n'existe qu'un nombre fini de diagrammes de Young ayant $2g$ cases. ♠

Ce résultat fournit un moyen de démontrer qu'un nœud donné n'est pas un nœud de Lorenz. Par exemple, le nœud de huit n'est pas un nœud de Lorenz, car son genre est 1, et les seuls diagrammes de Young à deux cases sont tous deux associés au nœud de trèfle.

6.2.15 Proposition. *Parmi tous les nœuds admettant un représentant planaire ayant au plus seize croisements, exactement vingt sont des nœuds de Lorenz.* ♣

Démonstration. Dans [26], nous avons déterminé les polynômes d'Alexander et de Jones de tous les nœuds de Lorenz de période au plus 21. Cette liste inclut en particulier tous les nœuds de Lorenz de genre au plus 9. Or elle ne compte que vingt nœuds ayant au plus seize croisements. Si on s'intéresse à la question de savoir quels nœuds ayant au plus seize croisements sont de Lorenz, cette liste est suffisante puisqu'un nœud ayant au plus $2g + 1$ croisements est de genre au plus g. Par conséquent, les nœuds ayant au plus seize croisements sont de genre au plus 8, et donc ont été recensés dans la liste de [26]. ♠

Chapitre 7

Racines du polynôme d'Alexander des nœuds de Lorenz

Dans ce chapitre, on montre que plus un nœud de Lorenz est long, plus les racines de son polynôme d'Alexander sont proches du cercle unité (théorème E de l'introduction).

7.0.1 Théorème. *Soit K un nœud de Lorenz de genre g et dont l'indice de tresse*[*] *est b. Alors les racines du polynôme d'Alexander de K sont incluses dans l'anneau*

$$\left\{ z \,\middle|\, (2g)^{-8/(2b-1)} \leqslant |z| \leqslant (2g)^{8/(2b-1)} \right\}. \tag{7.0.1}$$

♣

Rappelons les motivations pour un tel résultat. D'une part, c'est une nouvelle propriété des nœuds de Lorenz, qui permet en particulier de montrer qu'un nœud donné n'est pas de Lorenz si ses racines ont un module trop important, ou de tester certaines propriétés sur les nœuds de Lorenz si elles s'expriment en terme de polynôme d'Alexander. D'autre part, on sait (voir [38]) que les ω-signatures – des invariants de nœuds aussi associés aux surfaces de Seifert – des orbites quasi-périodiques d'un champ de vecteurs ergodique dans la sphère $\mathbb{S}^3$ ont un comportement quadratique par rapport à la longueur, et on sait (voir [9]) que les coefficients d'une variante du polynôme d'Alexander ont également un comportement asymptotique précis. Comme les ω-signatures sont des invariants qui s'expriment en fonction des racines du polynôme d'Alexander, il est naturel de se demander si la position et la répartition des racines admettent un comportement asymptotique. De ce point de vue, notre travail n'est qu'une première étape.

L'idée de la démonstration est la suivante. Les résultats du chapitre précédent permettent de décomposer la monodromie comme produit de twists de Dehn. On suit alors l'image d'un certain nombre de courbes sur la surface pour montrer que la monodromie ne les fait pas grandir trop vite. Au niveau homologique, cela permet de montrer que les valeurs propres de la monodromie ne sont pas trop grandes. On utilise alors une définition géométrique du polynôme d'Alexander comme polynôme caractéristique de la monodromie homologique pour conclure.

Dans une première partie, on réécrit les résultats généraux du chapitre précédent sur les sommes de Murasugi pour les adapter aux nœuds de Lorenz. Dans une seconde partie, on décrit la monodromie homologique en termes de données combinatoires issues de la surface de Seifert standard. Cette partie ne sert pas pour la démonstration du résultat principal, mais elle introduit les idées importantes qui sont utilisées ensuite. Dans la troisième partie, on introduit de nouvelles surfaces de Seifert pour les nœuds

[$*$]. à savoir le nombre minimal de brins d'une tresse dont la clôture est K

de Lorenz, et certaines données combinatoires associées. Dans la quatrième partie, on transforme les résultats de la deuxième partie pour les adapter aux données de la troisième partie. Cette partie est la plus calculatoire, mais elle ne contient pas d'idée nouvelle par rapport aux deux précédentes. Enfin, dans la dernière partie, on démontre le résultat principal (théorème 7.0.1).

Certains lemmes de ce chapitre reposent sur des calculs relativement lourds. Pour vérifier les démonstrations, nous avons utilisé un ordinateur de la façon suivante. Les propositions 7.1.7 et 7.3.4 fournissent un algorithme pour calculer la monodromie des nœuds de Lorenz. Nous l'avons programmé et calculé ainsi les monodromies pour plusieurs milliers de nœuds de Lorenz. D'autre part, nous avons utilisé le logiciel Mathematica [†] et le package KnotAtlas [‡] écrit par Dror Bar-Natan pour calculer les polynômes d'Alexander de ces nœuds. Ensuite nous avons comparé les valeurs propres fournies par notre algorithme avec les racines des polynômes d'Alexander calculée par Mathematica et vérifié qu'elles coïncidaient. Enfin, pour vérifier chacun des lemmes des parties 7.2 et 7.4, nous avons utilisé les procédures de notre programme sur des milliers d'exemples pour vérifier les expressions calculées dans ce texte. En fait, l'informatique a même joué un rôle plus important : chacun des lemmes de ce chapitre, et le choix même de la surface Σ_D^σ utilisée dans la partie 7.4 ont été suggéré par des calculs numériques.

Nous utilisons les définitions et notations du chapitre précédent.

7.1 Préliminaires : le jardin des Dehn

7.1.a Sommes de Murasugi itérées

7.1.1 Définition. Un anneau dont le bord est un entrelacs de Hopf positif est appelé un *ruban de Hopf*.

Une surface à bord orientée Σ est une *somme de Murasugi itérée* s'il existe des rubans de Hopf $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$, une suite emboîtée de surfaces à bord $\mathcal{H}_1 = \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_n = \Sigma$, et deux suites d'octogones $\Omega_1 \subset \Sigma_1, \ldots, \Omega_{n-1} \subset \Sigma_{n-1}$ et $\widetilde{\Omega}_2 \subset \mathcal{H}_2, \ldots, \widetilde{\Omega}_n \subset \mathcal{H}_n$ tels que la surface Σ_{i+1} est la somme de Murasugi $\mathcal{H}_{i+1} \, {}_{\widetilde{\Omega}_{i+1}}\#_{\Omega_i} \, \Sigma_i$ pour i entre 1 et $n-1$. La suite $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_n = \Sigma$ est appelée une *réalisation de Murasugi* de Σ. ♢

Toutes les surfaces à bord ne sont pas des sommes de Murasugi itérées. En effet, le bord d'une telle surface est un entrelacs fibré pour lequel la surface est une fibre. C'est donc une situation tout à fait particulière.

7.1.2 Lemme. *Soit Σ une surface admettant une réalisation de Murasugi $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_n = \Sigma$ le long des octogones $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. Si deux octogones Ω_i, Ω_{i+1} sont disjoints dans Σ_{i+1}, alors on peut échanger l'ordre dans lequel les rubans $\mathcal{H}_{i+1}$ et $\mathcal{H}_{i+2}$ sont ajoutés à la réalisation sans en changer le type.* ♣

Démonstration. Comme les octogones Ω_i, Ω_{i+1} sont disjoints, les plongements des rubans $\mathcal{H}_{i+1}$ et $\mathcal{H}_{i+2}$ dans Σ_{i+2} sont disjoints. Par conséquent, on peut coller d'abord $\mathcal{H}_{i+2}$ le long de Ω_{i+1}, puis $\mathcal{H}_{i+1}$ le long de Ω_i, et obtenir à nouveau la surface Σ_{i+2}. ♠

Ainsi, étant donnée une surface Σ qui est la somme de Murasugi itérée de rubans de Hopf, il existe différents ordres possibles sur ces rubans pour réaliser Σ, certains rubans pouvant être collés avant, ou

[†]. `www.wolfram.com/Mathematica`
[‡]. `katlas.org`

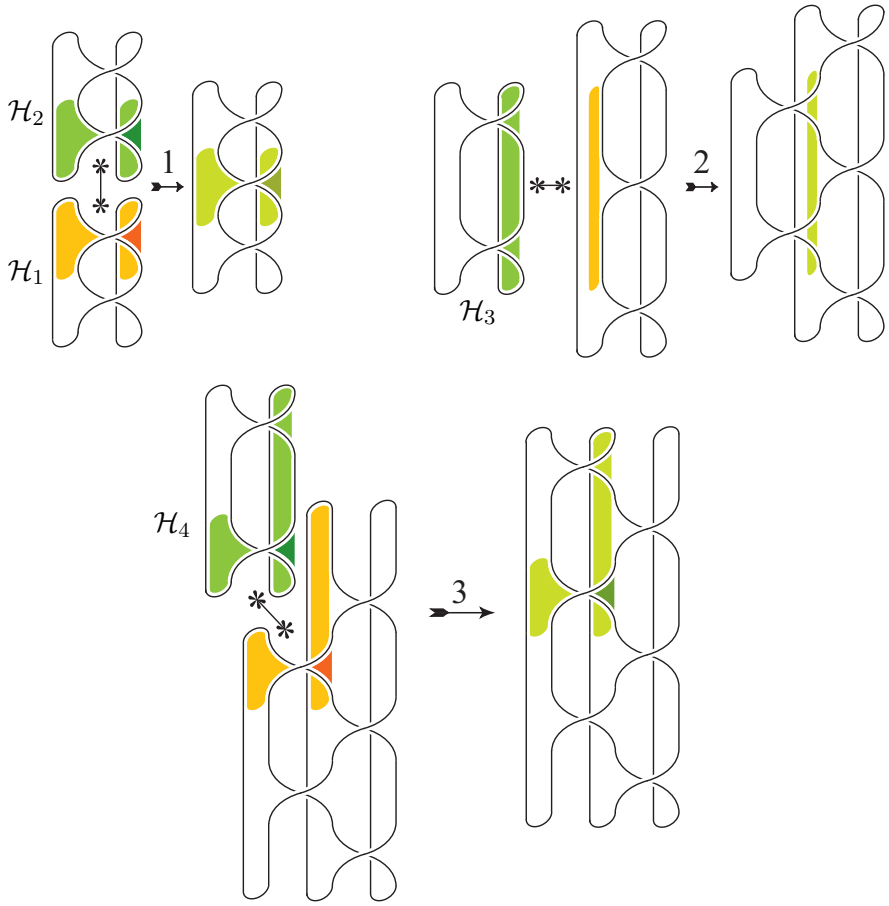

FIGURE 7.1.1 – Une réalisation de la surface de Seifert standard pour le nœud torique $T(4,3)$. À chaque étape, on prend le résultat de l'étape précédente, et on lui colle un anneau de Hopf le long des octogones qui sont coloriés. L'ordre de Murasugi associé à cette réalisation (définition 7.1.3) est $\mathcal{H}_1 \prec \mathcal{H}_2 \prec \mathcal{H}_3 \prec \mathcal{H}_4$. Par exemple, l'anneau $\mathcal{H}_1$ est le premier de la construction, et vient sous tous les autres.

après d'autre. Néanmoins, si l'octogone de collage Ω_j coupe le ruban $\mathcal{H}_i$, alors le ruban $\mathcal{H}_{j+1}$ doit être ajouté après $\mathcal{H}_i$.

7.1.3 Définition. Soit Σ une surface à bord qui est la somme de Murasugi itérée de n rubans de Hopf $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$. On dit que le ruban $\mathcal{H}_i$ *précède* le ruban $\mathcal{H}_j$ dans l'*ordre de Murasugi associé à* Σ si pour toute réalisation de Murasugi de Σ, le ruban $\mathcal{H}_i$ est collé avant $\mathcal{H}_j$. On note $\mathcal{H}_i \prec \mathcal{H}_j$. ♢

L'ordre de Murasugi est par définition un ordre partiel sur les rubans de Hopf qui constituent la surface.

7.1.4 Proposition. *Soit K un entrelacs orienté et Σ_K une surface de Seifert pour K qui est une somme de Murasugi itérée de rubans de Hopf $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$. Soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des courbes faisant un tour (positivement) dans chaque anneau respectivement. Alors*

- (i) *l'entrelacs K est fibré avec Σ_K pour fibre,*
- (ii) *pour toute permutation π de $\{1, \ldots, n\}$ respectant l'ordre de Murasugi, c'est-à-dire telle que $\mathcal{H}_i \prec \mathcal{H}_j$ implique $\pi(i) < \pi(j)$, la monodromie de K est la classe du produit de twists de Dehn positifs $\tau_{\gamma_{\pi(n)}} \circ \ldots \circ \tau_{\gamma_{\pi(1)}}$.* ♣

Démonstration. Par définition, la suite $\mathcal{H}_{\pi(1)}, \ldots, \mathcal{H}_{\pi(n)}$ induit une réalisation de Murasugi de Σ. Comme la monodromie de chaque anneau $\mathcal{H}_{\pi(i)}$ est $\tau_{\gamma_{\pi(i)}}$, d'après le théorème 6.2.8, le nœud K est fibré et sa monodromie est le produit $\tau_{\gamma_{\pi(n)}} \circ \ldots \circ \tau_{\gamma_{\pi(1)}}$. ♠

7.1.b Entrelacs de Lorenz

On repart de la bijection entre entrelacs de Lorenz et diagrammes de Young établie dans le chapitre précédent. On commence par numéroter les cases selon l'horizontale et la verticale quand le diagramme est placé comme sur la figure 7.1.2

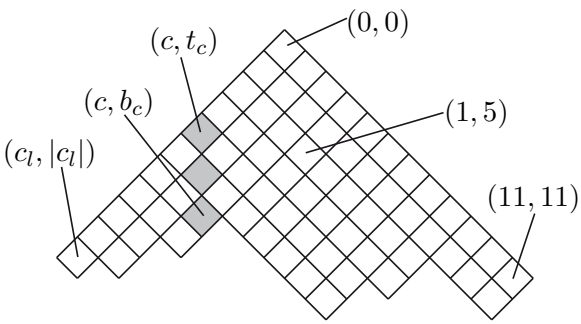

FIGURE 7.1.2 – Les coordonnées de Lorenz. Les cases grisées sont celles de la c-ième colonne avec $c = -4$.

7.1.5 Définition. Soit D un diagramme de Young en position standard. Pour toute case de coordonnées (a, b), où a désigne la colonne et b la ligne, on définit ses *coordonnées de Lorenz* comme le couple $(a - b, a + b - 2)$. Pour c un entier, on appelle c-ième colonne l'ensemble des cases dont la première coordonnée est c. On note (c, b_c) les coordonnées de sa case du bas, et (c, t_c) celles de sa case du haut. On note c_l le numéro de la colonne la plus à gauche de D et c_r celui de la colonne la plus à droite. ♢

Pour toute colonne c, on a $t_c = |c|$. Remarquons également que les coordonnées de n'importe quelle case sont toujours congrues modulo 2.

7.1.6 Définition (voir figure 7.1.3)**.** Soit D un diagramme de Young de Lorenz et K le nœud de Lorenz associé. La surface de Seifert obtenue en ajoutant un disque derrière chaque brin et un ruban à chaque croisement est appelée *surface de Seifert standard associée à* D. On la note Σ_D. ♢

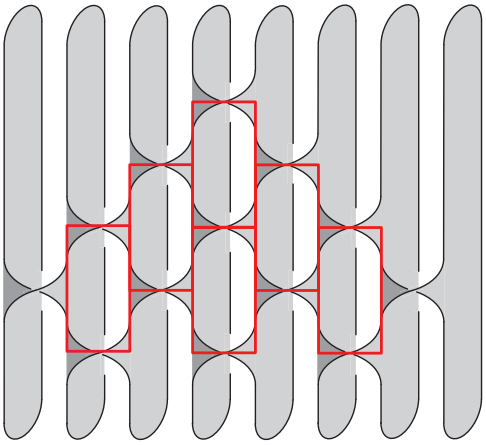

FIGURE 7.1.3 – La surface de Seifert standard associée au diagramme de Young $[3, 2, 1]$. On a aussi dessiné les âmes des six rubans de Hopf qui forment une décomposition de Murasugi de la surface.

7.1.7 Proposition. *Soit D un diagramme de Young à n cases et K le nœud de Lorenz associé.*

(i) *La surface de Seifert standard Σ_D est la somme de Murasugi itérée de n anneaux de Hopf $\mathcal{H}_{i,j}$ associés aux n cases (i, j) de D.*

(ii) *L'anneau $\mathcal{H}_{i_1,j_1}$ précède $\mathcal{H}_{i_2,j_2}$ dans l'ordre de Murasugi si et seulement si on a $i_1 \geqslant i_2$, $i_1+j_1 \geqslant i_2 + j_2$, et $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$.*

(iii) *Pour toute case de coordonnées (i, j) dans D, on choisit une courbe $\gamma_{i,j}$ qui fait un tour de l'anneau $\mathcal{H}_{i,j}$. Alors les classes $\{[\gamma_{i,j}]\}_{(i,j)\in D}$ forment une base de $H_1(\Sigma_K, \mathbb{Z})$, vu comme $\mathbb{Z}$-module. Le nombre d'intersection algébrique entre courbes $\langle \gamma_{i_1,j_1} \,|\, \gamma_{i_2,j_2} \rangle$ vaut*

$$\begin{array}{lll} +1 & \text{si} & (i_2, j_2) = (i_1{+}1, j_1{+}1),\ (i_1, j_1{-}2),\ \textit{ou}\ (i_1{-}1, j_1{+}1), \\ -1 & \text{si} & (i_2, j_2) = (i_1{+}1, j_1{-}1),\ (i_1, j_1{+}2),\ \textit{ou}\ (i_1{-}1, j_1{-}1), \\ 0 & \text{sinon.} & \end{array}$$

(iv) *Pour toute suite $\mathcal{H}_{i_1,j_1} \preceq \ldots \preceq \mathcal{H}_{i_n,j_n}$ respectant l'ordre de Murasugi, la monodromie géométrique de K associée à la surface standard est la classe du produit $\tau_{\gamma_{i_n,j_n}} \circ \ldots \circ \tau_{\gamma_{i_1,j_1}}$.* ♣

Démonstration. (i) et (ii) La figure 7.1.1 montre comment empiler n anneaux de Hopf pour obtenir la surface Σ_D. On voit que l'anneau $\mathcal{H}_{i,j}$ est collé le long d'un octogone qui est inclus dans la réunion des trois anneaux $\mathcal{H}_{i+1,j-1}$, $\mathcal{H}_{i+1,j+1}$ et $\mathcal{H}_{i,j+2}$, donc ces trois anneaux doivent être collés avant d'ajouter $\mathcal{H}_{i,j}$. On obtient le résultat par récurrence.

(iii) Pour toute case (i, j) de D, l'homologie de l'anneau $\mathcal{H}_{i,j}$ est engendrée par la classe $[\gamma_{i,j}]$. Comme la surface Σ_D est la réunion des anneaux de Hopf, son homologie est engendrée par $\{[\gamma_{i,j}]\}_{(i,j)\in D}$. On voit sur la figure 7.1.3 que deux courbes $\gamma_{i_1,j_1}, \gamma_{i_2,j_2}$ ne se coupent que si les cases (i_1, j_1) et (i_2, j_2) de D sont proches. La règle des signes est montrée sur la figure 7.1.4.

(iv) découle directement de (i) et de la proposition 7.1.4. ♠

On arrive à la version combinatoire de la monodromie que nous utiliserons dans la suite.

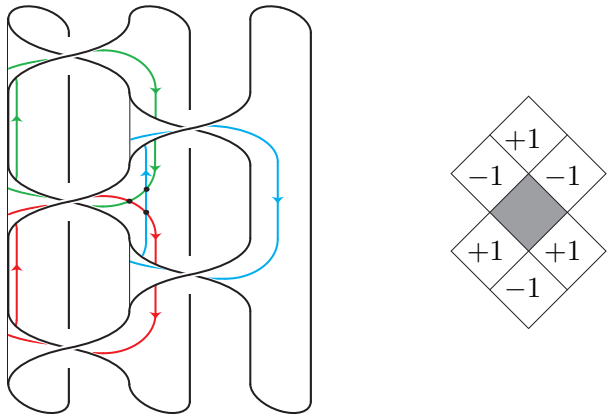

FIGURE 7.1.4 – À gauche, les courbes $[i,j]$, $[i,j+2]$ et $[i+1,j+1]$ sur la surface Σ_D. Les points marquent les seuls points d'intersection entre ces courbes. À droite, les signes des intersections entre $[i,j]$ et les courbes associées aux cases voisines.

7.1.8 Corollaire (voir figure 7.1.5)**.** *Soit D un diagramme de Young et K l'entrelacs de Lorenz associé. Alors la monodromie géométrique associée à la surface standard est égale au produit* [§]

$$\prod_{c=c_l}^{c_r} \prod_{j=t_c}^{b_c} \tau_{\gamma_{c,j}}. \tag{7.1.1}$$

♣

Démonstration. Par la proposition 7.1.7 (ii), on a $\mathcal{H}_{c_r,c_r} \preceq \cdots \preceq \mathcal{H}_{c,b_c} \preceq \mathcal{H}_{c,b_c-2}, \preceq \cdots \preceq \mathcal{H}_{c,t_c} \preceq \mathcal{H}_{c-1,b_{c-1}} \ldots$ L'énoncé découle alors de la proposition 7.1.7 (iv). ♠

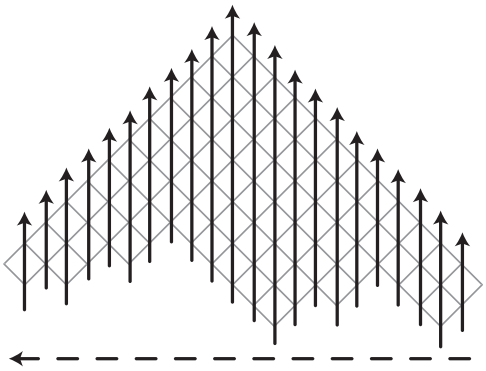

FIGURE 7.1.5 – Un ordre de Murasugi pour la monodromie d'un entrelacs de Lorenz : on effectue les twists de Dehn de droite à gauche, et dans chaque colonne de bas en haut.

7.2 Combinatoire de la monodromie d'un entrelacs de Lorenz : premier passage

Dans toute cette partie, on suppose fixé un diagramme de Young D. On note K l'entrelacs de Lorenz associé, Σ_D la surface de Seifert pour K standard associée, vue comme somme de Murasugi itérée de n anneaux de Hopf. Pour toute case de coordonnées (i,j) dans D, on choisit une courbe $\gamma_{i,j}$ qui fait un tour

[§]. Se rappeler que, à cause du sens d'écriture des compositions, la première fonction appliquée est la dernière du produit.

de l'anneau de Hopf $\mathcal{H}_{i,j}$, plongé dans Σ_D. Alors par la proposition 7.1.7 (iii), les classes $\{[\gamma_{i,j}]\}_{(i,j)\in D}$ forment une base de $H_1(\Sigma_K,\mathbb{Z})$. On note h_D la monodromie homologique associée à Σ_D, c'est-à-dire l'endomorphisme de $H_1(\Sigma_K,\mathbb{Z})$ induit par la monodromie. On adopte la convention que si (i,j) ne sont les coordonnées de Lorenz d'aucune case de D, alors la courbe $[i,j]$ est vide et le twist $\tau_{[i,j]}$ est l'identité sur Σ_D. Par commodité et pour éviter les petits caractères, on note $[i,j]$ le cycle $[\gamma_{i,j}]$, et on note $\tau[i,j]$ le twist de Dehn le long de la courbe $\gamma_{i,j}$.

7.2.1 Lemme. *Soit γ une courbe de Σ_D. On suppose que sa classe dans $H_1(\Sigma_D,\mathbb{Z})$ s'écrit $[\gamma] = \sum_{k,l} x_{k,l}[k,l]$. Alors pour toute case (i,j) de D, on a*

$$\begin{aligned}\tau[i,j]\,([\gamma]) &= [\gamma] + \langle \gamma \,|\, [i,j]\rangle\,[i,j]\\ &= [\gamma] + (-x_{i+1,j+1} + x_{i,j+2} - x_{i-1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i,j-2} + x_{i+1,j-1})\,[i,j].\end{aligned}$$ ♣

Démonstration. La première ligne découle de la définition d'un twist de Dehn. La seconde découle des nombres d'intersection calculés dans la proposition 7.1.7 (iii). ♠

Pour la plupart des cases du diagramme D, l'effet de la monodromie h_D sur le cycle associé se trouve être très simple : il est juste envoyé sur le cycle associé à une case voisine. Les cellules ayant cette propriété sont celles qui ont un voisin en bas à droite.

7.2.2 Définition. Une case de D de coordonnées (i,j) est dite *interne* si D contient une case de coordonnées $(i+1,j+1)$, elle est dite *externe* sinon. ♢

7.2.3 Lemme. *Pour tout case interne (i,j) de D, on a*

$$h_D([i,j]) = [i{+}1,j{+}1]. \tag{7.2.1}$$

♣

Démonstration. En suivant la décomposition de h_D en produit de twists de Dehn donnée par le corollaire 7.1.8 et les formules du lemme 7.2.1, l'image du cycle $[i,j]$ par les twists successifs est donnée par

$$[i,j] \overset{\tau[c_r,c_r]}{\longmapsto} [i,j] \overset{\tau[c_r-1,b_{c_r-1}]}{\longmapsto} \dots \overset{\tau[i+1,j+2]}{\longmapsto} [i,j] \tag{7.2.2}$$

$$\overset{\tau[i+1,j+1]}{\longmapsto} [i,j]{+}[i{+}1,j{+}1] \tag{7.2.3}$$

$$\overset{\tau[i+1,j-1]}{\longmapsto} ([i,j]-[i{+}1,j{-}1]) + ([i{+}1,j{+}1]+[i{+}1,j{-}1]) \tag{7.2.4}$$

$$= [i,j]+[i{+}1,j{+}1] \tag{7.2.5}$$

$$\overset{\tau[i+1,j-3]}{\longmapsto} [i,j]+[i{+}1,j{+}1] \overset{\tau[i+1,j-5]}{\longmapsto} \dots \overset{\tau[i,j+4]}{\longmapsto} [i,j]+[i{+}1,j{+}1] \tag{7.2.6}$$

$$\overset{\tau[i,j+2]}{\longmapsto} ([i,j]-[i,j{+}2]) + ([i{+}1,j{+}1]+[i,j{+}2]) \tag{7.2.7}$$

$$= [i,j]+[i{+}1,j{+}1] \tag{7.2.8}$$

$$\overset{\tau[i,j]}{\longmapsto} [i,j] + ([i{+}1,j{+}1]-[i,j]) = [i{+}1,j{+}1] \tag{7.2.9}$$

$$\overset{\tau[i,j-2]}{\longmapsto} [i{+}1,j{+}1] \overset{\tau[i,j-4]}{\longmapsto} \dots \overset{\tau[c_l,|c_l|]}{\longmapsto} [i{+}1,j{+}1]. \tag{7.2.10}$$

La relation (7.2.2) vient de ce que pour $i' > i{+}1$ et pour tout j', et pour $i' = i{+}1$ et $j' > j{+}1$, l'intersection $\langle [i,j] \,|\, [i',j'] \rangle$ est nulle. De même, pour $i' < i$ et pour tout j', et pour $i' = i$ et $j' < j$, on a $\langle [i{+}1,j{+}1] \,|\, [i',j'] \rangle = 0$, d'où (7.2.10). La relation (7.2.3) vient de l'égalité $\langle [i,j] \,|\, [i{+}1,j{+}1] \rangle = 1$ de la proposition 7.1.7 (iii) et du lemme 7.2.1. Les relations suivantes viennent de considérations semblables. ♠

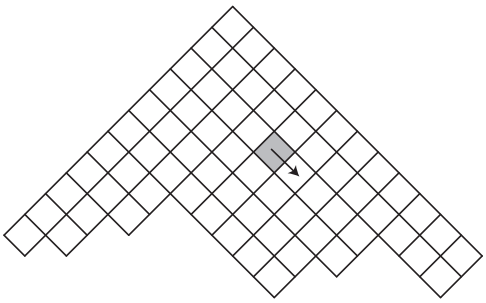

FIGURE 7.2.1 – L'image du cycle associé à une case interne par la monodromie.

Passons aux cases externes, c'est-à-dire les cases (i, j) telles que $(i+1, j+1)$ n'est pas une case de D.

7.2.4 Définition. Soit (i_1, j_1) et (i_2, j_2) deux cases du diagramme D satisfaisant $i_1 \leqslant i_2$ et $i_1+j_1 \geqslant i_2+j_2$ — géométriquement, cela signifie que la case (i_2, j_2) est dans l'octant en position NNE par rapport à la case (i_1, j_1). Alors le *rectangle* $R_{i_1,j_1}^{i_2,j_2}$ est défini comme l'ensemble de cases

$$\left\{ \quad (k,l) \quad \middle| \quad i_1 \leqslant k \leqslant i_2 \quad \text{et} \quad i_1 + j_1 \geqslant k + l \geqslant i_2 + j_2 \quad \right\}. \tag{7.2.11}$$

Dans ce cas les cases (i_1, j_1) et (i_2, j_2) sont appelés les coins SO et NE du rectangle respectivement, et sont notés $SO(R)$ et $NE(R)$. ♢

7.2.5 Définition (voir figure 7.2.2)**.** Soit (i, j) une case externe du diagramme D. Pour $m = 1, 2, \ldots$, on définit récursivement les *rectangles accessibles* $A_m(i, j)$ comme suit :

- $A_1(i, j) = R_{i+1,j-1}^{i+1,|i+1|} = \{(i + 1, j - 1), (i + 1, j - 3), \ldots, (i + 1, |i + 1|)\}$,
- si $NO(A_m(i, j))+(-1, -1)$ est une case du diagramme D, alors $A_{m+1}(i, j)$ est le rectangle dont le coin SE est la case $NO(A_m(i, j)) + (-1, -1)$, et dont les coins NE et SO sont sur le bord du diagramme D, c'est-à-dire que les cases $NE(A_{m+1}(i, j))+(0, -2)$ et $SO(A_{m+1}(i, j))+(-1, 1)$ ne sont pas dans le diagramme ; sinon la construction s'arrête et le rectangle $A_{m'}(i, j)$ est vide pour tout $m' > m$. ♢

Remarquons que la définition implique que pour toute colonne c, soit aucune case de la colonne n'est dans aucun rectangle accessible, soit il y en a et elles sont consécutives, c'est-à-dire de la forme $(c, t), (c, t + 2), \ldots, (c, b)$, et appartiennent toutes au même rectangle accessible.

7.2.6 Lemme. *Soit D un diagramme de Young, K l'entrelacs de Lorenz associé et h_D la monodromie associée. Soit (i, j) une case externe du diagramme D. Alors on a*

$$h_D([i, j]) = \sum_{m \geqslant 1} \sum_{(k,l) \in A_m(i,j)} (-1)^m [k, l]. \tag{7.2.12}$$

♣

Démonstration. Pour toute indice de colonne c du diagramme D, introduisons un produit tronqué h_D^c défini par

$$h_D^c = \prod_{k=c}^{c_r} \prod_{l=t_k}^{b_k} \tau[k, l]; \tag{7.2.13}$$

on rappelle que c_r désigne l'indice de la colonne la plus à droite de D, tandis que pour toute colonne d'indice c, les indices b_c et t_c désignent les hauteurs des cases du bas et du haut de la colonne respectivement. Par définition, pour tout c, on a $h_D^c = \prod_{l=t_c}^{b_c} \tau[c, l] \circ h_D^{c-1}$, et d'après le corollaire 7.1.8,

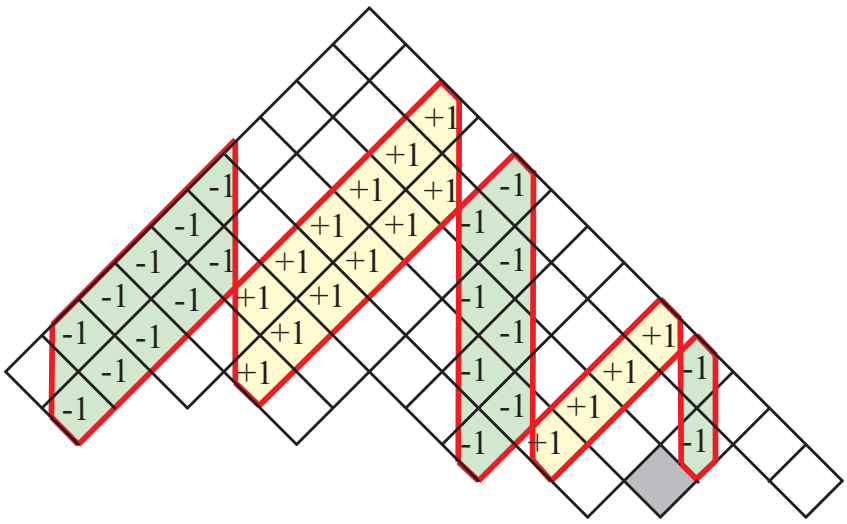

FIGURE 7.2.2 – L'image du cycle associé à une case externe par la monodromie.

on a $h_D = h_D^{c_l}$. Nous allons donc évaluer les uns après les autres chacun des termes $h_D^c([i,j])$ pour c décrivant (en descendant) tous les indices de c_r à c_l.

Supposons d'abord $c > i+1$. Alors pour tout $k \geqslant c$ et pour tout l, l'intersection $\langle [i,j] \,\big|\, [k,l] \rangle$ est nulle, et on obtient simplement $h_D^c([i,j]) = [i,j]$.

À présent supposons $c = i+1$. Grâce à la décomposition $h_D^c = \prod_{l=t_c}^{b_c} \tau[c,l] \circ h_D^{c-1}$, on trouve

$$\begin{aligned}
[i,j] \overset{\tau[i+1,j-1]}{\longmapsto} [i,j] - [i{+}1,j{-}1] \overset{\tau[i+1,j-3]}{\longmapsto} [i,j] - ([i{+}1,j{-}1] + [i{+}1,j{-}3]) \\
\overset{\tau[i+1,j-5]}{\longmapsto} [i,j] - [i{+}1,j{-}1] - ([i{+}1,j{-}3] + [i{+}1,j{-}3]) \\
\overset{\tau[i+1,j-7]}{\longmapsto} \dots \overset{\tau[i+1,|i|+1]}{\longmapsto} [i,j] - [i{+}1,j{-}1] - [i{+}1,j{-}3] - \dots - [i{+}1,|i|{+}1],
\end{aligned}$$

d'où $h_D^{i+1}([i,j]) = [i,j] + \sum_{(k,l)\in A_1(i,j)} -[k,l]$.

Maintenant passons à $c = i$. Par des considérations semblables, on trouve

$$\begin{aligned}
[i,j] - [i{+}1,j{-}1] - [i{+}1,j{-}3] - \dots - [i{+}1,|i|{+}1] \\
\overset{\tau[i,j]}{\longmapsto} [i,j] - ([i{+}1,j{-}1] + [i,j]) - [i{+}1,j{-}3] - \dots - [i{+}1,|i|{+}1] \\
= -[i{+}1,j{-}1] - [i{+}1,j{-}3] - \dots - [i{+}1,|i|{+}1] \\
\overset{\tau[i,j-2]}{\longmapsto} -([i{+}1,j{-}1] - [i,j{-}2]) - ([i{+}1,j{-}3] + [i,j{-}2]) - \dots - [i{+}1,|i|{+}1] \\
= -[i{+}1,j{-}1] - [i{+}1,j{-}3] - \dots - [i{+}1,|i|{+}1] \\
\overset{\tau[i,j-4]}{\longmapsto} \dots \overset{\tau[i,|i|+2]}{\longmapsto} -[i{+}1,j{-}1] - [i{+}1,j{-}3] - \dots - [i,|i|{+}2] - ([i{+}1,|i|{+}1] + [i,|i|{+}2]) \\
= -[i{+}1,|i|{+}1] - [i{+}1,j{-}1] - [i{+}1,j{-}3] - \dots - [i{+}1,|i|{+}1] \\
\overset{\tau[i,|i|]}{\longmapsto} -[i{+}1,j{-}1] - [i{+}1,j{-}3] - \dots - [i{+}1,|i|{+}1] - ([i{+}1,|i|{+}1] - [i,|i|]) = [i,|i|] + \sum_{(k,l)\in A_1(i,j)} -[k,l],
\end{aligned}$$

d'où $h_D^i([i,j]) = [i,|i|] + \sum_{(k,l)\in A_1(i,j)} -[k,l]$. Cette dernière expression se réécrit sous la forme $\sum_{m\geqslant 1}\sum_{(k,l)\in A_m(i,j),k\geqslant i}(-1)^m[k,l]$.

On considère maintenant le cas $c<i$. Imitant la dernière expression, montrons que pour tout $c<i$, on a

$$h_D^c([i,j]) = \sum_{m\geqslant 1}\sum_{(k,l)\in A_m(i,j),k>c}(-1)^m[k,l]. \tag{7.2.14}$$

Nous utilisons une récurrence, où c décroît de $i-1$ à c_l. Deux cas se produisent.

Cas 1. Il existe r tel qu'au moins une case de la $c+1$-ième colonne est dans le rectangle $A_r(i,j)$. Soit $(c{+}1,t_r),(c{+}1,t_r{+}2),\ldots,(c{+}1,b_r)$ les cases de cette colonne qui sont dans $A_r(i,j)$. Pour passer de $h_D^{c+1}([i,j])$ à $h_D^c([i,j])$, on fait des twists de Dehn autour des courbes associées à la c-ième colonne. Comme seuls les cycles de la forme $[c{+}1,l]$ parmi ceux qui apparaissent dans $h_D^{c+1}([i,j])$ ont une intersection non nulle avec les courbes de la c-ième colonne, ce sont les seuls qui se trouvent modifiés quand on passe de $h_D^{c+1}([i,j])$ à $h_D^c([i,j])$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$h_D^{c+1}([i,j]) = \sum_{m\geqslant 1}\sum_{(k,l)\in A_m(i,j),k>c+1}(-1)^m[k,l] + \sum_{l=t_r}^{b_r}(-1)^r[c{+}1,l]. \tag{7.2.15}$$

Appelons S^c le premier terme de la somme (7.2.15). On vient de montrer que les twists de Dehn autour des courbes de la c-ième colonne ne modifient pas S^c, et donc qu'il suffit de considérer l'action du produit $\prod_{l=t_c}^{b_c}\tau[c,l]$ sur le cycle $\sum_{l=t_r}^{b_r}[c{+}1,l]$. Pour évaluer ce résultat, on sépare de nouveau deux cas, selon que les cycles en questions sont sur le côté ouest d'un rectangle ou non.

Sous-cas 1.1. Les cases $(c{+}1,t_r),(c{+}1,t_r{+}2),\ldots,(c{+}1,b_r)$ ne sont pas sur le côté ouest du rectangle $A_r(i,j)$. Alors, en appliquant successivement les twists de Dehn associés aux cases de la c-ième colonne, on obtient

$$\begin{aligned}
&[c{+}1,b_r]+[c{+}1,b_r{-}2]+\ldots+[c{+}1,t_r] \overset{\tau[c,b_c]}{\longmapsto} [c{+}1,b_r]+[c{+}1,b_r{-}2]+\ldots+[c{+}1,t_r] \overset{\tau[c,b_c-2]}{\longmapsto} \ldots\\
&\overset{\tau[c,b_r+1]}{\longmapsto} ([c{+}1,b_r]+[c,b_r{+}1])+[c{+}1,b_r{-}2]+\ldots+[c{+}1,t_r] = [c{+}1,b_r]+[c{+}1,b_r{-}2]+\ldots+[c{+}1,t_r]+[c,b_r{+}1]\\
&\overset{\tau[c,b_r-1]}{\longmapsto} ([c{+}1,b_r]-[c,b_r{-}1])+([c{+}1,b_r{-}2]+[c,b_r{-}1])+\ldots+[c{+}1,t_r]+([c{+}1,b_r{+}1]+[c,b_r{-}1])\\
&\qquad = [c{+}1,b_r]+[c{+}1,b_r{-}2]+\ldots+[c{+}1,t_r]+[c,b_r{+}1]+[c,b_r{-}1]\\
&\overset{\tau[c,b_r-3]}{\longmapsto} [c{+}1,b_r]+([c{+}1,b_r{-}2]-[c,b_r{-}3])+([c{+}1,b_r{-}4]+[c,b_r{-}3])+\ldots+[c{+}1,t_r]+[c,b_r{+}1]\\
&+([c,b_r{-}1]+[c,b_r{-}3]) = [c{+}1,b_r]+[c{+}1,b_r{-}2]+\ldots+[c{+}1,t_r]+[c,b_r{+}1]+[c,b_r{-}1]+[c,b_r{-}3]\\
&\overset{\tau[c,b_r-5]}{\longmapsto}\ldots\overset{\tau[c,t_r-1]}{\longmapsto} [c{+}1,b_r]+[c{+}1,b_r{-}2]+\ldots+[c{+}1,t_r]+[c,b_r{+}1]+[c,b_r{-}1]+\ldots+[c,t_r{+}1]\\
&\overset{\tau[c,t_r-1]}{\longmapsto} [c+1,b_r]+[c+1,b_r-2]+\ldots+([c+1,t_r]-[c,t_r-1])+[c,b_r+1]+[c,b_r-1]+\ldots\\
&+([c,t_r{+}1]+[c,t_r{-}1]) = [c{+}1,b_r]+[c{+}1,b_r{-}2]+\ldots+[c{+}1,t_r]+[c,b_r{+}1]+[c,b_r{-}1]+\ldots+[c,t_r{+}1]\\
&\overset{\tau[c,t_r-3]}{\longmapsto}\ldots\overset{\tau[c,|c|]}{\longmapsto} [c{+}1,b_r]+[c{+}1,b_r{-}2]+\ldots+[c{+}1,t_r]+[c,b_r{+}1]+[c,b_r{-}1]+\ldots+[c,t_r{+}1].
\end{aligned}$$

En incorporant le terme S^c qui est inchangé, on obtient la valeur (7.2.14) comme voulu.

Sous-cas 1.2. Les cases $(c{+}1,t_r),(c{+}1,t_r{+}2),\ldots,(c{+}1,b_r)$ sont sur le côté ouest du rectangle $A_r(i,j)$. Alors, la case (c,b_c) est dans le rectangle $A_{r-1}(i,j)$, et donc d'après la définition de $A_r(i,j)$

le diagramme D ne contient aucune case en position $(c{+}1, b_c{+}1)$, ce qui implique $b_r > b_c$. Les cases de la c-ième colonne qui soit dans $A_{r+1}(i,j)$ sont de la forme $(c, b_{r+1}), (c, b_{r+1}+2), \ldots, (c, t_{r+1})$, avec par définition de $A_{r+1}(i,j)$ les égalités $b_{r+1} = t_r + 1$ et $t_{r+1} = |c|$. On en déduit

$$\begin{aligned}
&[c{+}1, b_r] + [c{+}1, b_r{-}2] + \ldots + [c{+}1, t_r] \overset{\tau[c,b_c]}{\longmapsto} [c{+}1, b_r] + [c{+}1, b_r{-}2] + \ldots + ([c{+}1, b_c{+}1] - [c, b_c]) \\
&+ ([c{+}1, b_c{-}1] + [c, b_c]) + \ldots + [c{+}1, t_r] = [c{+}1, b_r] + [c{+}1, b_r{-}2] + \ldots + [c{+}1, t_r] \overset{\tau[c,b_c-2]}{\longmapsto} \ldots \\
&\overset{\tau[c,b_{r+1}+2]}{\longmapsto} [c{+}1, b_r] + [c{+}1, b_r{-}2] + \ldots + ([c{+}1, t_r{+}2] - [c, b_{r+1}{+}2]) + ([c{+}1, t_r] + [c, b_{r+1}{+}2]) \\
&= [c{+}1, b_r] + [c{+}1, b_r{-}2] + \ldots + [c{+}1, t_r] \overset{\tau[c,b_{r+1}]}{\longmapsto} [c{+}1, b_r] + [c{+}1, b_r{-}2] + \ldots + ([c{+}1, t_r] - [c, b_{r+1}]) \\
&= [c{+}1, b_r] + [c{+}1, b_r - 2] + \ldots + [c{+}1, t_r] - [c, b_{r+1}] \\
&\overset{\tau[c,b_{r+1}-2]}{\longmapsto} [c+1, b_r] + [c{+}1, b_r{-}2] + \ldots + [c{+}1, t_r] - ([c, b_{r+1}] + [c, b_{r+1}{-}2]) \overset{\tau[c,b_{r+1}-4]}{\longmapsto} \ldots \\
&\overset{\tau[c,t_c]}{\longmapsto} [c{+}1, b_r] + [c{+}1, b_r{-}2] + \ldots + [c{+}1, t_r] - [c, b_{r+1}] - [c, b_{r+1}{-}2] - \ldots - ([c, t_c{+}2] + [c, t_c]) \\
&= [c{+}1, b_r] + [c{+}1, b_r{-}2] + \ldots + [c{+}1, t_r] - [c, b_{r+1}] - [c, b_{r+1}{-}2] - \ldots - [c, t_c],
\end{aligned}$$

et en incorporant le terme S^c, on obtient de nouveau la valeur (7.2.14).

Cas 2. Aucune case de la $c{+}1$-ième colonne n'est dans un rectangle accessible. Dans ce cas, les twists de Dehn associés à des cases de la c-ième colonne ne touchent pas les cycles qui apparaissent dans la formule de $h_K^{c+1}([i,j])$, et donc $h_K^c([i,j])$ lui est égal, comme voulu.

La récurrence est alors complète. Comme l'expression de $h_D^{c_l}([i,j])$ coïncide avec l'expression voulue pour $h_D([i,j])$, la preuve est complète. ♠

7.3 D'autres surfaces de Seifert pour les nœuds positifs

Soit D un diagramme de Young à n cases dont le plus petit côté a p cases, et K le nœud de Lorenz associé à D. La stratégie pour borner les valeurs propres de la monodromie homologique h_D est de borner la vitesse de croissance de la norme des éléments de $H_1(\Sigma_K, \mathbb{Z})$ quand on itère l'endomorphisme h_D. À partir des informations combinatoires sur h_D données par les lemmes 7.2.3 et 7.2.6, on peut imaginer le plan suivant. La norme ℓ^1 d'un cycle grandit sous l'action de h_D seulement s'il a des coordonnées non nulles correspondant à des cases externes, auquel cas la norme est multipliée par au plus n. Par conséquent, si on minore uniformément le temps nécessaire pour l'apparition de la première case externe dans les itérés $h_D^k(c)$, par exemple par p, alors on déduit que la norme ℓ^1 grandit asymptotiquement comme $n^{t/p}$, ce qui implique que les valeurs propres de h_D ont une norme inférieure à $n^{1/p}$. Comme on a $p \geqslant \sqrt{n}$, la norme des valeurs propres est majorée par $n^{1/\sqrt{n}}$. Malheureusement, nous ne pouvons déduire une minoration de ce type du « temps de retour dans une case externe » à partir des informations que nous avons sur la monodromie.

Le but des deux parties suivantes est d'utiliser une certaine flexibilité dans le choix de la surface de Seifert — en fait dans le choix de la présentation de la surface — pour obtenir une autre présentation de la monodromie où notre stratégie peut être menée à son terme.

Soit b une tresse et K sa clôture. L'entrelacs K est souvent représenté en connectant les extrémités des brins de b par des brins qui passent derrière b. Un autre moyen de représenter K est de fermer les brins en passant devant b. En fait, on peut même décider pour chaque brin de faire passer la clôture

devant ou derrière b. Ces choix ne changent pas la classe d'isotopie de la clôture, puisque qu'on peut déplacer un brin de devant à derrière par isotopie. À chaque tel choix est associé une surface de Seifert, voir la figure 7.3.1. Celle-ci est toujours une somme de Murasugi itérée, mais l'ordre d'ajout des rubans de Hopf dépend du choix des brins qui passent devant ou derrière, et donc la décomposition de la monodromie de K aussi.

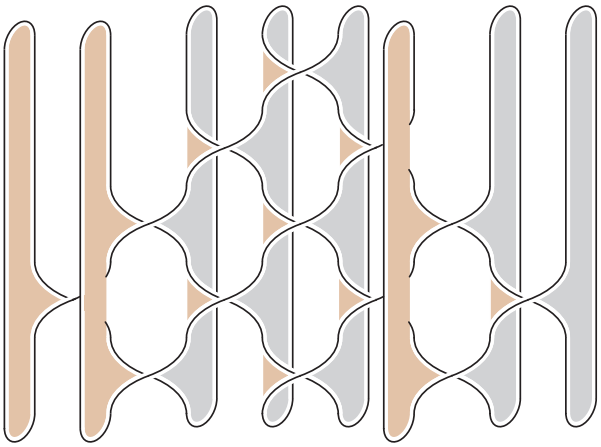

FIGURE 7.3.1 – La surface associée au diagramme $[3, 2, 1]$ et au choix $\sigma = \{+, +, -, -, -, +, -, -\}$.

7.3.1 Définition. Soit b une tresse à s brins, et σ un élément de $\{+, -\}^s$. On définit $\hat{b}^\sigma$ comme la diagramme obtenu en ajoutant à b des fils joignant les extrémités des brins de b, de sorte que le i-ième fil passe devant b si $\sigma = +$, et derrière si $\sigma = -$. On définit Σ_b^σ comme la surface de Seifert pour la clôture $\hat{b}$ obtenue en appliquant l'algorithme de Seifert au diagramme $\hat{b}^\sigma$ (également représenté sur la figure 7.3.1). ♢

Le nœud défini par le diagramme $\hat{b}^\sigma$ ne dépend évidemment pas de σ mais il n'y a pas de raison de que la surface Σ_b^σ soit la même pour tout choix σ. Néanmoins, dans le cas des tresses positives dont la clôture est un nœud, la surface est indépendante de σ.

7.3.2 Proposition. *Soit b une tresse positive à n brins dont la clôture est un nœud. Alors pour tous σ, σ' dans $\{+, -\}^n$, les surfaces Σ_b^σ et $\Sigma_b^{\sigma'}$ sont isotopes dans $\mathbb{R}^3$.* ♣

Démonstration. Les surfaces Σ_b^σ et $\Sigma_b^{\sigma'}$ sont de même genre, et on a vu dans le chapitre précédent que ce genre est minimal parmi les surfaces de Seifert pour $\hat{b}$. Or il n'y a qu'une classe d'isotopie de surface de Seifert de genre minimal pour un nœud fibré. L'énoncé s'en déduit. ♠

Pour tout choix σ, la surface Σ_b^σ est une somme de Murasugi itérée de rubans de Hopf, et on a donc une combinatoire semblable — mais différente — à celle associé à la surface standard pour la monodromie du nœud. Le choix suivant engendre une combinatoire qui permettra ensuite de faire marcher notre stratégie de majoration des valeurs propres.

7.3.3 Définition (voir figure 7.3.2)**.** Soit D un diagramme de Young, soit b la tresse de Lorenz associée, s son nombre de brins, et soit K sa clôture. On rappelle qu'on note c_l (*resp.* c_r l'indice de la colonne de gauche (*resp.* de droite) de D. Soit σ_D l'élément $(+, +, \ldots, -, -, \ldots)$ de $\{+, -\}^s$, où il y a c_l+1 signes $+$ et c_r+1 signes $-$. On définit la *surface de Seifert mixte de K* comme la surface $\Sigma_b^{\sigma_D}$. On la note Σ_D^σ. ♢

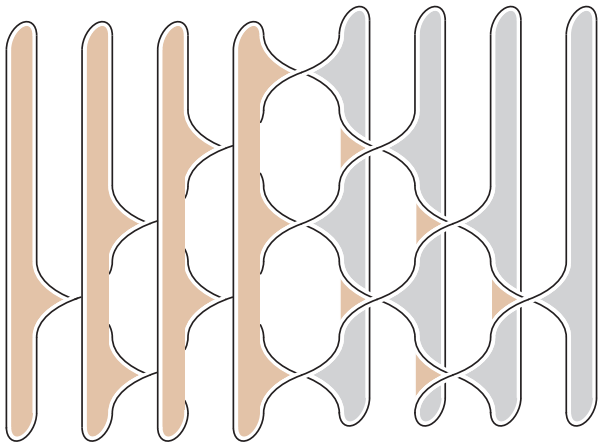

FIGURE 7.3.2 – La surface de Seifert mixte associée au diagramme $[3, 2, 1]$.

L'analogue de la proposition 7.1.7 pour la surface de Seifert mixte est

7.3.4 Proposition. *Soit D un diagramme de Young à n cases et K le nœud de Lorenz associé.*

(i) *La surface de Seifert mixte Σ_D^σ est la somme de Murasugi itérée de n anneaux de Hopf $\mathcal{H}_{i,j}$ associés aux n cases de D.*

(ii) *L'anneau $\mathcal{H}_{i_1,j_1}$ précède $\mathcal{H}_{i_2,j_2}$ dans l'ordre de Murasugi si et seulement si on a*

$$\begin{aligned} & i_1, i_2 \geqslant 0, \quad i_1 \geqslant i_2, \quad i_1 + j_1 \geqslant i_2 + j_2, \quad \text{et} \quad (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2) \\ \text{ou} \quad & i_1, i_2 \leqslant 0, \quad |i_1| \geqslant |i_2|, \quad |i_1| + j_1 \geqslant |i_2| + j_2, \quad \text{et} \quad (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2). \end{aligned}$$

(iii) *Pour chaque case (i, j) de D, on choisit une courbe $\gamma_{i,j}$ qui fait un tour de l'anneau $\mathcal{H}_{i,j}$. Alors les classes $\{[\gamma_{i,j}]\}_{(i,j)\in D}$ forment une base de $H_1(\Sigma_D^\sigma, \mathbb{Z})$. Le nombre d'intersection algébrique entre courbes $\langle \gamma_{i_1,j_1} \mid \gamma_{i_2,j_2} \rangle$ vaut*

$$\begin{array}{ll} +1 & \text{si} \quad (i_2, j_2) = (i_1 + 1, j_1 + 1),\ (i_1, j_1 - 2),\ \textit{ou}\ (i_1 - 1, j_1 + 1), \\ -1 & \text{si} \quad (i_2, j_2) = (i_1 + 1, j_1 - 1),\ (i_1, j_1 + 2),\ \textit{ou}\ (i_1 - 1, j_1 - 1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

(iv) *La monodromie géométrique h_D de K associée à la surface mixte vérifie*

$$h_D = \prod_{j=t_0}^{b_0} \tau[0, j]_\sigma \circ \prod_{c=1}^{c_r} \prod_{j=t_c}^{b_c} \tau[c, j]_\sigma \circ \prod_{c=-1}^{c_l} \prod_{j=t_c}^{b_c} \tau[c, j]_\sigma, \tag{7.3.1}$$

$$h_D^{-1} = \prod_{c=c_l}^{-1} \prod_{j=b_c}^{t_c} \tau[c, j]_\sigma{}^{-1} \circ \prod_{c=c_r}^{1} \prod_{j=b_c}^{t_c} \tau[c, j]_\sigma{}^{-1} \circ \prod_{j=b_0}^{t_0} \tau[0, j]_\sigma{}^{-1}. \tag{7.3.2}$$

♣

Démonstration. La preuve de (i), (ii), (iii) est analogue à celle de la proposition 7.1.7. Pour (iv), l'ordre d'éxécution des twists de Dehn choisi est montré sur la figure 7.3 ; il est cohérent avec l'ordre de Murasugi donné en (ii). D'après la proposition 7.1.4, il donne donc une expression de h_D. Noter que, à chaque ligne, les deux doubles produits commutent. ♠

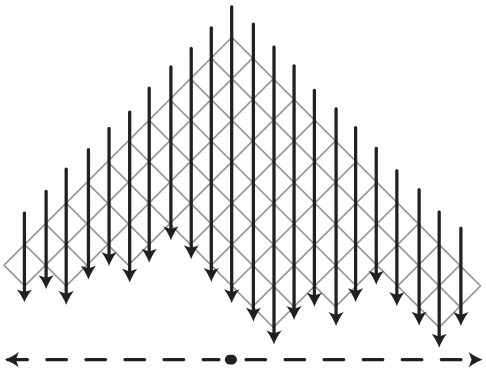

FIGURE 7.3.3 – L'ordre dans lequel sont effectués les twists de Dehn pour le calcul de l'inverse h_D^{-1} de la monodromie K. Cet ordre est cohérent avec l'ordre de Murasugi associé à la surface mixte.

7.4 Combinatoire de la monodromie d'un entrelacs de Lorenz : second passage

Tous les résultats de la section 7.2 peuvent être reformulés dans le contexte de la surface de Seifert mixte. Les cases du tableau ne sont plus séparées en cases internes et externes, mais en cinq types (illustrés sur la figure 7.5.1). D'autre part, il est plus simple d'obtenir des formules combinatoires pour l'inverse h_D^{-1} de la monodromie.

Dans toute cette partie, on suppose donné un diagramme de Young D à n cases. On note K le nœud de Lorenz associé, Σ_D^σ la surface se Seifert mixte pour K associée, vue comme somme de Murasugi itérée de n rubans de Hopf. On suppose choisie une famille $\{[\gamma_{i,j}]\}_{(i,j)\in D}$ de courbes faisant chacune le tour d'un ruban de Hopf. On note $[i,j]_\sigma$ la classe de $\gamma_{i,j}$ dans $H_1(\Sigma_D^\sigma, \mathbb{Z})$.

L'analogue du lemme 7.2.1 est

7.4.1 Lemme. *Soit γ une courbe de Σ_D^σ. On suppose que sa classe dans $H_1(\Sigma_D^\sigma, \mathbb{Z})$ s'écrit $[\gamma]_\sigma = \sum_{k,l} x_{k,l}[k,l]_\sigma$. Alors pour toute case (i,j) de D, on a*

$$\begin{aligned} \tau[i,j]_\sigma^{-1}([\gamma]_\sigma) &= [\gamma]_\sigma - \left\langle [h]_\sigma \,\middle|\, [i,j]_\sigma \right\rangle [i,j]_\sigma \\ &= [\gamma]_\sigma + (x_{i+1,j+1} - x_{i,j+2} + x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j-1} + x_{i,j-2} - x_{i+1,j-1})\,[i,j]_\sigma. \end{aligned}$$

♣

L'analogue des cases internes, c'est-à-dire les cases dont l'image par h_D^{-1} est une case voisine, sont les cases *périphériques*.

7.4.2 Définition. Une case de coordonnées (i,j) de D est dite *centrale* si $i=0$, *radicale droite* si $i=1$, *radicale gauche* si $i=-1$, *périphérique droite* si $i>1$, et *périphérique gauche* si $i<-1$. ♢

7.4.3 Lemme. *Soit (i,j) une case périphérique droite (resp. gauche) de D. Alors on a*

$$h_D^{-1}([i,j]_\sigma) = [i-1, j-1]_\sigma \quad (\textit{resp. } [i+1, j-1]_\sigma).$$

♣

La preuve est une copie de celle du lemme 7.2.3.

On cherche maintenant à déterminer l'image par h_D^{-1} des cases centrales, centrales gauches et centrales droites. En fait, plutôt que les cases centrales, on étudie une autre famille de cycles, dont l'image est plus simple.

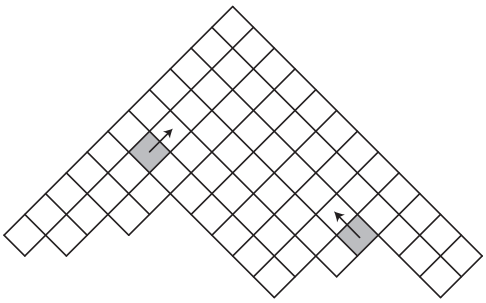

FIGURE 7.4.1 – Les images de cellules périphériques par l'inverse de la monodromie.

7.4.4 Définition. Soit $(0,j)$ une case centrale de D, on appelle *équerre* l'ensemble E_j des cases $\big\{(0,j),(-1,j-1),(1,j-1),(-2,j-2),(2,j-2),\dots(-j/2,j/2),(j/2,j/2)\big\}$. ♢

7.4.5 Lemme. *Pour toute équerre E_j, on a*

$$h_D^{-1}\Big(\sum_{(k,l)\in E_j}[k,l]_\sigma\Big)=\sum_{(k,l)\in E_{j-1}}[k,l]_\sigma. \tag{7.4.1}$$

♣

Démonstration. Le lemme 7.4.3 décrit les images de toutes les cases de l'équerre E_j par h_D^{-1}, à part les cases $(0,j),(-1,j-1)$ et $(1,j-1)$. Il est par conséquent suffisant de montrer l'égalité $h_D^{-1}\big([0,j]_\sigma+[-1,j-1]_\sigma+[1,j-1]_\sigma\big)=[0,j-2]_\sigma$. À l'aide de l'expression de la proposition 7.3.4 (iv), et en ne considérant que les twists qui modifient le cycle qu'on considère, on obtient

$$\begin{aligned}
& [0,j]_\sigma+[-1,j-1]_\sigma+[1,j-1]_\sigma\\
\overset{\tau^{[0,j-2]_\sigma}}{\longmapsto}\ & ([0,j]_\sigma-[0,j-2]_\sigma)+([-1,j-1]_\sigma+[0,j-2]_\sigma)+([1,j-1]_\sigma+[0,j-2]_\sigma)\\
=\ & [0,j-2]_\sigma+[0,j]_\sigma+([-1,j-1]_\sigma+[1,j-1]_\sigma\\
\overset{\tau^{[0,j]_\sigma}}{\longmapsto}\ & ([0,j-2]_\sigma+[0,j]_\sigma)+[0,j]_\sigma+[-1,j-1]_\sigma-[0,j]_\sigma)+([1,j-1]_\sigma-[0,j]_\sigma)\\
=\ & [0,j-2]_\sigma+[-1,j-1]_\sigma+[1,j-1]_\sigma\\
\overset{\tau^{[1,j-3]_\sigma}}{\longmapsto}\ & ([0,j-2]_\sigma+[1,j-1]_\sigma)+[-1,j-1]_\sigma+([1,j-1]_\sigma-[1,j-3]_\sigma)\\
=\ & [0,j-2]_\sigma+[-1,j-1]_\sigma+[1,j-1]_\sigma\\
\overset{\tau^{[1,j-1]_\sigma}}{\longmapsto}\ & ([0,j-2]_\sigma-[1,j-1]_\sigma)+[-1,j-1]_\sigma+[1,j-1]_\sigma=[0,j-2]_\sigma+[-1,j-1]_\sigma\\
\overset{\tau^{[-1,j-1]_\sigma}}{\longmapsto}\ & [0,j-2]_\sigma
\end{aligned}$$

comme attendu. ♠

La notion de rectangle accessible a un analogue : les rayons accessibles.

7.4.6 Définition. Soit (i,j) une case du diagramme de Young D. Alors le *rayon gauche* $R^{\nwarrow}_{i,j}$ désigne l'ensemble de cases $\big\{(k,l)\ \big|\ k\leqslant i \text{ et } k+l=i+j\big\}$, le *rayon droit* $R^{\nearrow}_{i,j}$ désigne l'ensemble $\big\{(k,l)\ \big|\ k\geqslant i \text{ et } k-l=i-j\big\}$, et le *rayon vertical* $R^{\downarrow}_{i,j}$ l'ensemble $\big\{(k,l)\ \big|\ l\geqslant j \text{ et } k=i\big\}$. Les cases du haut et du bas d'un rayon sont définies de façon évidente, et sont notées $t(R^{\nwarrow}_{i,j})$ et $b(R^{\nwarrow}_{i,j})$ respectivement. ♢

7.4.7 Lemme. *Soit $(1,j)$ une case centrale droite du diagramme D. Alors on définit récursivement les ensembles accessibles $A_m(1,j)$ comme suit :*

- *l'ensemble* $A_0(1, j)$ *est le rayon* $R^{\nwarrow}_{0,j-1}$,
- *l'ensemble* $A_1(1, j)$ *est le rayon* $R^{\downarrow}_{t(A_0(1,j))+(-1,1)}$,
- *tant que* $b(A_{2m-1}(1, j)) + (-1, 1)$ *est une case de* D*, on pose* $A_{2m}(1, j) = R^{\nwarrow}_{b(A_{2m-1}(1,j))+(-1,1)}$, *sinon la construction s'arrête,*
- *l'ensemble* $A_{2m+1}(1, j)$ *est le rayon* $R^{\downarrow}_{t(A_{2m}(1,j))+(-1,1)}$.

Alors on a

$$h_D^{-1}([1, j]_\sigma) = \sum_{m \geqslant 0} \sum_{(k,l) \in A_m(1,j)} (-1)^m [k, l]_\sigma. \tag{7.4.2}$$

On définit de façon symétrique les ensembles accessibles pour une case centrale droite $(-1, j)$*, et on a*

$$h_D^{-1}([-1, j]_\sigma) = \sum_{m \geqslant 0} \sum_{(k,l) \in A_m(1,j)} (-1)^m [k, l]_\sigma. \tag{7.4.3}$$

♣

La preuve est un calcul semblable à celui du lemme 7.2.6 et on ne le répète pas.

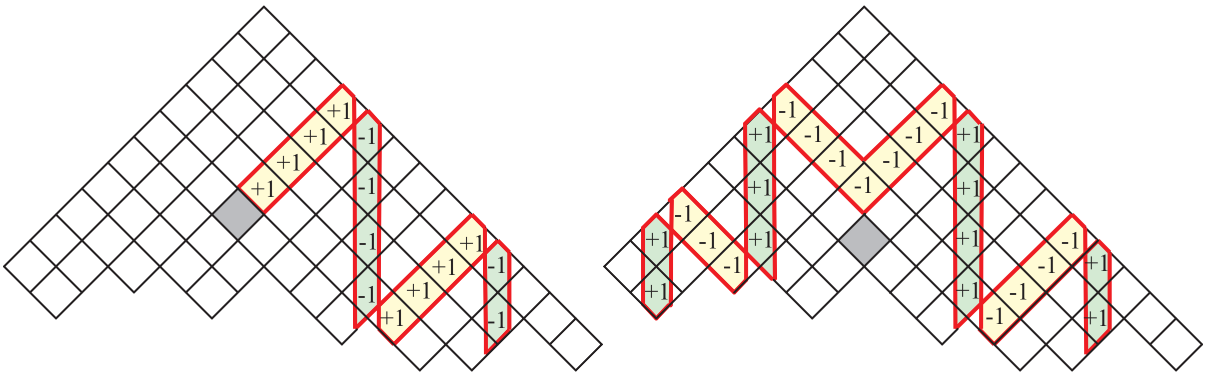

FIGURE 7.4.2 – À gauche, l'image d'une case centrale gauche par l'inverse de la monodromie. À droite, l'image d'une case centrale.

Toujours dans le même veine, on a

7.4.8 Lemme. *Soit* $(0, j)$ *une case centrale de* D *avec* $j > 0$*. Pour tout* $m \geqslant 1$*, on définit l'ensemble accessible* $A_m(0, j)$ *comme la réunion* $A_m(1, j-1) \cup A_m(-1, j-1)$*. Alors on a*

$$h_D^{-1}([0, j]_\sigma) = -\sum_{(k,l) \in E_{j-2}} [k, l]_\sigma + \sum_{m \geqslant 1} \sum_{(k,l) \in A_m(0,j)} (-1)^{m+1} [k, l]_\sigma. \tag{7.4.4}$$

♣

Le point-clé qui n'a pas d'équivalent dans le cas de la surface de Seifert standard est le suivant.

7.4.9 Lemme. *Soit* $(1, j)$ *une case centrale droite du diagramme* D*. On rappelle que* n *est le nombre de cases de* D *et* $b_{-j/2}$ *la coordonnée verticale de la case du bas de la colonne d'abscisse* $-j/2$*. Alors le cycle* $h_D^{-2}([1, j]_\sigma)$ *est la somme d'au plus* n *cycles élémentaires* $[k, l]_\sigma$ *qui satisfont tous l'inégalité* $k + l \leqslant -j/2 - b_{-j/2}$. ♣

Démonstration. À l'aide de l'équation 7.4.2, on obtient

$$h_D^{-1}([1, j]_\sigma) = [0, j-1]_\sigma + [-1, j-2]_\sigma + \sum_{(k,l) \in A_0(-1,j), k \leqslant -2} [k, l]_\sigma$$
$$- \sum_{(k,l) \in A_1(-1,j)} [k, l]_\sigma + \sum_{m \geqslant 2} \sum_{(k,l) \in A_m(-1,j)} (-1)^m [k, l]_\sigma.$$

En comparant les équations 7.4.2 et 7.4.4 — et en regardant la figure 7.4.2 — on voit que la partie de $h_D^{-1}([0,j-1]_\sigma)$ qui se trouve dans les colonnes de droite coïncide avec $-h_D^{-1}([-1,j-2]_\sigma)$. Par conséquent les deux contributions s'annulent, et on obtient

$$\begin{aligned}
h_D^{-2}([1,j]_\sigma) &= h_D^{-1}([0,j-1]_\sigma + [-1,j-2]_\sigma) + \sum_{(k,l)\in A_0(1,j),k\geqslant 2} h_D^{-1}([k,l]_\sigma) \\
&\quad - \sum_{(k,l)\in A_1(1,j)} h_D^{-1}([k,l]_\sigma) + \sum_{m\geqslant 2}\sum_{(k,l)\in A_m(1,j)} (-1)^m h_D^{-1}([k,l]_\sigma) \\
&= \left(- \sum_{(k,l)\in A_0(1,j-2),k\leqslant -1} [k,l]_\sigma + \sum_{(k,l)\in A_1(1,j-2)} [k,l]_\sigma + \sum_{m\geqslant 2}\sum_{(k,l)\in A_m(1,j-2)} (-1)^{m+1}[k,l]_\sigma \right) \\
&\quad + \sum_{(k,l)\in A_0(1,j),k\leqslant -2} h_D^{-1}([k,l]_\sigma) - \sum_{(k,l)\in A_1(1,j)} h_D^{-1}([k,l]_\sigma) \\
&\quad + \sum_{m\geqslant 2}\sum_{(k,l)\in A_m(1,j)} (-1)^m h_D^{-1}([k,l]_\sigma).
\end{aligned}$$

Comme on a $h_D^{-1}([k,l]_\sigma) = [k+1,l-1]_\sigma$ pour tout $k \leqslant -2$, les deux premiers termes dans la parenthèse annulent le premier en dehors, d'où

$$h_D^{-2}([1,j]_\sigma) = \sum_{m\geqslant 2}\sum_{(k,l)\in A_m(1,j-2)} (-1)^{m+1}[k,l]_\sigma + \sum_{m\geqslant 2}\sum_{(k,l)\in A_m(1,j)} (-1)^m [k+1,l-1]_\sigma. \tag{7.4.5}$$

Selon le moment auquel les constructions itératives des ensembles $A^m(1,j-2)$ et $A_m(1,j)$ s'arrêtent, d'autres termes peuvent s'annuler. Dans tous les cas, il reste au plus n cycles $[k,l]_\sigma$, qui sont tous dans la partie en bas à gauche de $A_m(1,j-2)$, et donc satisfaisant $k+l \leqslant -j/2 - b_{-j/2}$, ce qui termine la preuve. ♠

Il reste une case dont on n'a pas déterminé l'image : la case $(0,0)$. C'est l'objet du dernier lemme de cette partie.

7.4.10 Lemme. *On définit récursivement les ensembles accessibles $B_m(0,0)$ et $C_m(0,0)$ comme suit :*

- *on pose $B_0(0,0) = C_0(0,0) = R^{\downarrow}_{0,0}$,*
- *tant que $b(B_{2m-2}(0,0)) + (-1,1)$ est une case de D, on pose $B_{2m-1}(0,0) = R^{\nwarrow}_{b(B_{2m-2}(0,0))+(-1,1)}$, sinon la construction s'arrête,*
- *on pose $B_{2m}(0,0) = R^{\downarrow}_{t(A_{2m-1}(0,0))+(-1,1)}$,*
- *de même, tant que $b(C_{2m-2}(0,0)) + (1,1)$ est dans D, on pose $C_{2m-1}(0,0) = R^{\nearrow}_{b(C_{2m-2}(0,0))+(1,1)}$, sinon la construction s'arrête,*
- *on pose $A_{2m}(0,0) = R^{\downarrow}_{t(A_{2m-1}(0,0))+(1,1)}$.*

Alors on a $h_D^{-1}([0,0]_\sigma) =$

$$\sum_{(k,l)\in B_0(0,0)} [k,l]_\sigma + \sum_{m\geqslant 1}\sum_{(k,l)\in B_m(0,0)} (-1)^m [k,l]_\sigma + \sum_{m\geqslant 1}\sum_{(k,l)\in C_m(0,0)} (-1)^m [k,l]_\sigma, \tag{7.4.6}$$

et $h_D^{-2}([0,0]_\sigma) =$

$$-\sum_{(k,l)\in E_{b_0}} [k,l]_\sigma + \sum_{m\geqslant 2}\sum_{(k,l)\in B_m(0,0)} (-1)^m [k+1,l-1]_\sigma + \sum_{m\geqslant 2}\sum_{(k,l)\in C_m(0,0)} (-1)^m [k-1,l-1]_\sigma. \tag{7.4.7}$$

♣

Encore une fois, la preuve est un calcul semblable à celui du lemme 7.2.6.

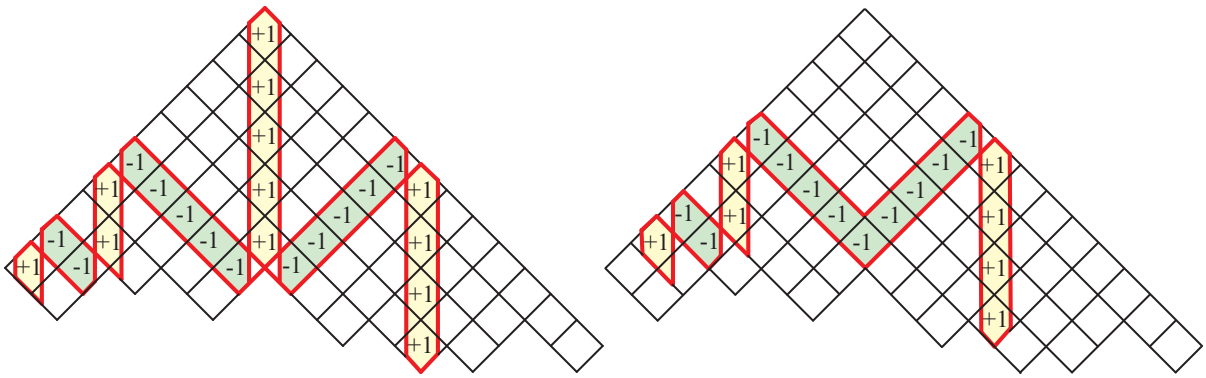

FIGURE 7.4.3 – À gauche, l'image du cycle $[0,0]_\sigma$ par l'inverse de la monodromie. À droite, l'image par le carré de l'inverse.

7.5 Bornes sur le rayon spectral de la monodromie

Dans cette dernière partie, on rassemble les informations de la partie 7.4 pour montrer que la norme ℓ^1 de l'inverse de la monodromie est majorée. Ceci permet de borner les valeurs propres de la monodromie, qui dans le cas d'un nœud fibré sont les racines du polyôme d'Alexander.

7.5.1 Définition. Soit D un diagramme de Young à n cases. On rappelle que la colonne centrale a $b_0/2+1$ cases. Alors le cycle $[i,j]_\sigma$ associé à la case (i,j) est dit

- de type I_α si la case (i,j) est centrale, avec $j \leqslant b_0/2$,
- de type I_β si la case (i,j) est centrale, avec $j > b_0/2$,
- de type II_α si la case (i,j) est radicale (gauche ou droite), avec $j \leqslant b_0/2$,
- de type II_β si la case (i,j) est radicale (gauche ou droite), avec $j > b_0/2$,
- de type III si on a $|i| > b_0/4$,
- de type IV si on a $|i| \leqslant b_0/4$ et $j - |i| > b_0/2$,
- de type X sinon.

Un cycle correspondant à une équerre E_j est dit
- de type V_α si $j \leqslant b_0/2$,
- de type V_β si $j > b_0/2$. ♢

7.5.2 Lemme. *Soit D un diagramme de Young, K le nœud de Lorenz associé et Σ_D^σ la surface de Seifert mixte associée. Alors les cycles de type $II_\alpha, II_\beta, III, IV, X, V_\alpha$ et V_β forment une base de $H_1(\Sigma_D^\sigma, \mathbb{Z})$.* ♣

Démonstration. D'après la proposition 7.3.4, les cycles de type $I_\alpha, I_\beta, II_\alpha, II_\beta, III, IV$ et X forment une base de $H_1(\Sigma_D^\sigma, \mathbb{Z})$. On garde alors une base en remplaçant les cycles de type I_α par les cycles de type V_α correspondant, et les cycles de type II_β par ceux de type V_β. ♠

On rassemble maintenant les propriétés des différents types de cycles.

7.5.3 Lemme (voir figure 7.5.2)**.** *Soit D un diagramme de Young, K le nœud de Lorenz associé et Σ_D^σ la surface de Seifert mixte associée. Soit c un cycle de base de $H_1(\Sigma_D^\sigma, \mathbb{Z})$.*

- *Si c est de type III, alors il existe un temps $t_c \geqslant b_0/4$ tel que $h_D^{-t_c}(c)$ est de type II_α ou II_β.*
- *Si c est de type IV, alors il existe $t_c \leqslant b_0/4$ tel que $h_D^{-t_c}([c])$ est de type II_β.*

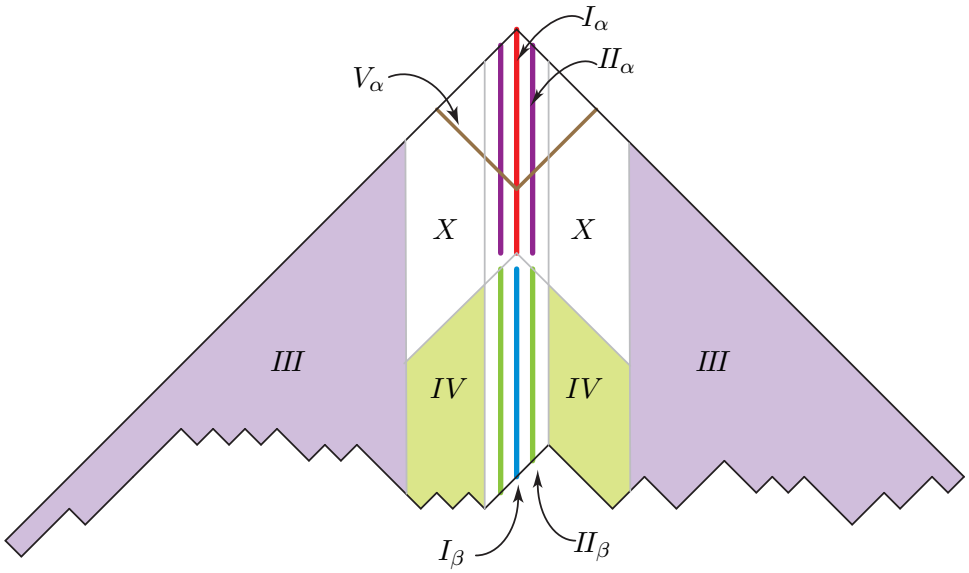

FIGURE 7.5.1 – Types des cases dans un diagramme de Young.

- *Si c est de type V_α, alors il existe $t_c \leqslant b_0/4$ tel que $h_D^{-t_c}([c])$ est le cycle $[0,0]_\sigma$.*
- *Si c est de type V_β, alors il existe $t_c \geqslant b_0/4$ tel que $h_D^{-t_c}([c])$ est le cycle $[0,0]_\sigma$.*
- *Si c est de type II_α, alors le cycle $h_D^{-2}(c)$ est la somme d'au plus n cycles chacuns de type III ou IV.*
- *Si c est de type II_β, alors le cycle $h_D^{-2}(c)$ est la somme d'au plus n cycles de type III.*

Le cycle $h_D^{-2}([0,0]_\sigma)$ est la somme d'un cycle de type V_β et d'au plus n cycles de type III. ♣

Démonstration. Si c est de type III ou IV, alors c correspond à une case périphérique et le lemme 7.4.3 implique que les images itérées de c par h_D^{-1} se rapprochent case par case du centre du diagramme D. Le temps nécessaire est donc dicté par la distance entre la case de départ et les trois colonnes centrales de D. Si c est de type V_α ou V_β, alors le lemme 7.4.5 décrit ses images itérées, qui sont aussi de type V, et le temps d'arrivée au cycle $[0,0]_\sigma$ est dicté par la hauteur de l'équerre initiale. Si c est de type II, alors le lemme-clé 7.4.7 décrit son image par h_D^{-2} qui est du type annoncé. Enfin le lemme 7.4.10 décrit l'image de $[0,0]_\sigma$. ♠

On peut maintenant énoncer le résultat principal.

7.5.4 Proposition. *Soit D un diagramme de Young à n cases et dont la colonne centrale a $b_0/2$ cases. Soit K le nœud de Lorenz associé et Σ_D^σ la surface de Seifert associée. Alors les valeurs propres de la monodromie homologique h_D^{-1} sont dans l'anneau $\left\{z \mid n^{-8/b_0} \leqslant |z| \leqslant n^{8/b_0}\right\}$.* ♣

Démonstration. (voir figure 7.5.2) Soit c un cycle de base de $H_1(\Sigma_D^\sigma, \mathbb{Z})$. D'après le lemme 7.5.3, l'application h_D^{-1} ne peut augmenter la norme ℓ^1 de c que si c est de type II_α, II_β, ou si c est le cycle $[0,0]_\sigma$. La figure 7.5.2 montre que ça n'arrive pas souvent : après deux itérations, le cycle $[0,0]_\sigma$ ou n'importe quel cycle de type II_β est transformé en au plus n cycles de type III dont la norme ne va pas changer au cours des $b_0/4$ itérations suivantes. Si c est de type II_α, alors il peut y avoir deux étapes qui augmentent la norme, mais le résultat est le même : tous les cycles obtenus sont de type III. Par conséquent, la croissance de la norme de n'importe quel cycle est bornée car la norme ne peut être multipliée par plus

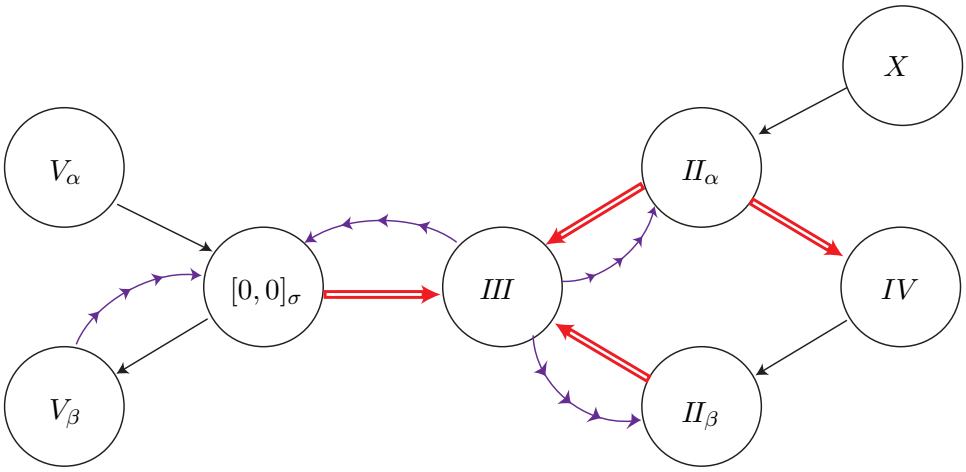

FIGURE 7.5.2 – Croissance de la norme ℓ^1 des cycles quand on itère la monodromie. Les flèches grasses signifient que le nombre de cycles peut être multiplié, mais au plus par n. Les petites flèches consécutives signifient qu'il faut au moins $b_0/4$ itérations pour atteindre la case d'arrivée. Le point-clé est qu'aucun chemin ne contient trois flèches grasses sans que deux d'entre elles ne soient séparées par des petites flèches consécutives.

de n^2 en un temps inférieur à $b_0/4$: il existe une constante K telle que pour tout cycle de base c et pour tout temps t positif on a

$$\left| \log \left(\|h_D^{-t}(c)\|_1 \right) \right| \leqslant \frac{8 \log n}{b_0} t + K. \tag{7.5.1}$$

Par conséquent, le spectre de l'application h_D^{-1} est dans le disque $\left\{ z \mid |z| \leqslant n^{8/b_0} \right\}$. Comme l'application h_D préserve la forme d'intersection sur Σ_D^σ, et comme celle-ci est symplectique, le spectre de h_D est symétrique par rapport au cercle unité. On en déduit que le spectre est dans l'anneau $\left\{ z \mid n^{-8/b_0} \leqslant |z| \leqslant n^{8/b_0} \right\}$. ♠

On peut maintenant démontrer le théorème 7.0.1

Démonstration du théorème 7.0.1. Les nœuds de Lorenz sont fibrés, donc les racines de leur polynôme d'Alexander sont les valeurs propres de la monodromie homologique. Comme le diagramme de Young d'un nœud de genre g a $2g$ cases, le théorème découle de la proposition 7.5.4 avec $n = 2g$ et $b_0 = 2b-1$. ♠

Troisième partie

Nœuds, dynamique, et théorie des nombres

Chapitre 8

Nœuds de Lorenz, nœuds modulaires, et corps quadratiques

Cette partie est consacrée au lien entre nœuds de Lorenz et nœuds modulaires. On y explique l'origine arithmétique de ces derniers à partir des classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on décrit la correspondance de Ghys, et on établit les résultats nouveaux annoncés dans l'introduction. Dans la section 8.1, nous déterminons des représentants des classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. La section 8.2 est centrée sur la correspondance classique entre les classes de conjugaison précédentes et les classes d'idéaux dans un ordre d'un corps quadratique. Nous introduisons la surface modulaire et les nœuds modulaires dans les sections 8.3 et 8.4. C'est dans la section 8.5 que nous décrivons la correspondance de Ghys proprement dite. Puis, dans la section 8.6, nous rappelons la définition du groupe des classes. Enfin, c'est dans la section 8.7 que nous établissons les résultats sur les orbites triviales et inverses.

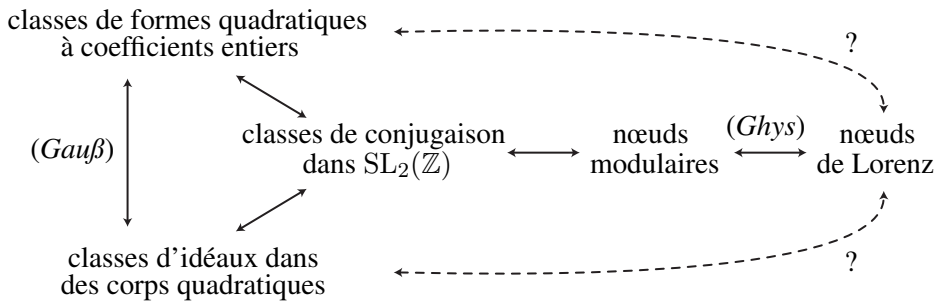

FIGURE 1 – Liens entre les nœuds de Lorenz et la théorie des nombres. L'existence d'un lien direct entre les nœuds de Lorenz et les classes de formes quadratiques d'une part, et les classes d'idéaux d'autre part, reste hypothétique.

8.1 Classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Nous commençons par un résultat préparatoire sur les éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, à savoir la détermination des classes de conjugaison de matrices hyperboliques. On rappelle qu'une matrice est dite *hyperbolique* si la valeur absolue de sa trace est strictement plus grande que 2.

Dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, les classes de conjugaison sont faciles à déterminer, puisque, à trace t fixée, il y a

une classe de conjugaison si $|t| > 2$ et deux classes si $|t| \leqslant 2$ (les matrices de rotation $\mathrm{rot}(\theta)$ et $\mathrm{rot}(-\theta)$ ne sont pas conjuguées dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$).

8.1.1 Proposition (voir [56], chap. 3.5)**.** *Dans* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$*, on note* a *la classe contenant les deux matrices* $\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* b *la classe contenant* $\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*. Alors le groupe* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ *est engendré par* a *et* b*, avec les relations* $a^2 = b^3 = 1$*.* ♣

Appelons *mot réduit* un mot en les lettres a et b ne contenant aucun sous-mot a^2 ou b^3. La proposition 8.1.1 implique que tout élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est représenté par un unique mot réduit [*].

8.1.2 Lemme. *Tout élément de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ *qui n'est conjugué ni à* a*, ni à* b*, ni à* b^2*, est conjugué, dans* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$*, à un élément dont le représentant réduit commence par* b *et finit par* a*.* ♣

Démonstration. Soit g dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Par conjugaison, on peut permuter cycliquement l'ordre des lettres du mot réduit associé. Si g a un représentant réduit contenant des lettres a et b, alors on peut en permuter les facteurs afin que b soit en tête, et a en queue. Sinon, les seuls mots réduits qui ne comportent pas à la fois des a et des b sont a, b et b^2. ♠

Passons au groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et posons $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On déduit du lemme 8.1.2 une caractérisation des classes de conjugaison hyperboliques de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

8.1.3 Proposition. *Toute matrice hyperbolique de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *est conjuguée, dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*, à un produit de matrices* X *et* Y *contenant au moins un facteur* X *et au moins un facteur* Y*, et ce produit est unique à permutation circulaire des facteurs près.* ♣

Démonstration. Soit M une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de trace > 2. La classe de X dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est ba et celle de Y est b^2a. Par conséquent, d'après le lemme 8.1.2, il existe un produit P de matrices X et Y tel que M est conjuguée à $\pm P$. Or les traces de M et P sont positives, donc M est conjuguée à P.

D'autre part, pour tous m et n entiers, on a $tr(X^m) = tr(Y^n) = 2$. Or on a supposé $tr(M) > 2$. Donc P ne peut être ni de la forme X^m, ni de la forme Y^n, et il contient donc au moins un facteur X et au moins un facteur Y.

Si P' est obtenu à partir de P par permutation cyclique des lettres, P' est conjugué à P, et donc à M.

Enfin, l'unicité de P découle de l'unicité du représentant réduit du lemme 8.1.2. ♠

En rapprochant la proposition 8.1.3 de la proposition 6.1.8 affirmant que les orbites périodiques du flot de Lorenz sont représentées par les mots en deux lettres L et R, uniques à permutation cyclique des lettres près, on peut entrevoir un lien entre classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et nœuds de Lorenz. C'est ce lien qui sera explicité et approfondi dans la section 8.5. Dans un groupe, on dit qu'un élément g est *primitif* si l'égalité $g = h^k$ implique $k = \pm 1$. C'est une propriété invariante par conjugaison.

8.1.4 Corollaire. *Les classes de conjugaison de matrices de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *hyperboliques et primitives sont indexées par les mots de Lyndon.* ♣

[*]. Autrement dit, le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

8.1.5 Exemple. Des tests rapides permettent de vérifier qu'il n'y a que trois mots de Lyndon associés à des classes de conjugaison de matrices de trace 10 et de déterminant 1, à savoir les mots X^8Y, X^4Y^2 et X^2YXY. D'après le résultat précedent, toute matrice primitive de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de trace 10 est donc conjuguée à l'un de ces produits.

Considérons par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. L'algorithme d'Euclide appliqué à la première colonne de M permet de décomposer celle-ci en le produit $Y^{-2}X^3Y^{-2}$. Dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ la classe de ce produit est $(b^2a)^{-2}(ba)^3(b^2a)^{-2} = (ab)^2(ba)^3(ab)^2 = abab^2abab^2ab$. Une permutation cyclique des éléments de ce produit montre qu'il est conjugué à $(ba)^2(b^2a)(ba)(b^2a)$, qui est la classe du produit X^2YXY. On en déduit que la matrice M est conjuguée à X^2YXY. Le même procédé permet de déterminer le mot de Lyndon représentant la classe de conjugaison de n'importe quelle matrice primitive hyperbolique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. ♡

Dans la suite, nous allons considérer des classes un peu plus grosses que les classes de conjugaison par des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de déterminant ± 1. On s'intéresse maintenant à la conjugaison par des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

8.1.6 Proposition. *Toute matrice hyperbolique et de trace positive de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *est conjuguée, dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$*, à un produit de X et de Y contenant au moins un facteur X et au moins un facteur Y, et ce produit est unique à permutation circulaire des facteurs près et à interversion des caractères X et Y près.* ♣

Démonstration. Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe (d'indice 2) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, si deux matrices sont conjuguées via des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, elles le sont via des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. D'autre part, toute matrice de déterminant -1 est le produit d'une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc il suffit de connaître le résultat de l'action de la matrice T par conjugaison sur X et Y pour adapter la proposition 8.1.3. Or on a $TXT^{-1} = Y$ et $TYT^{-1} = X$, donc conjuguer par T revient à intervertir les lettres X et Y. ♠

8.2 Classes d'idéaux et classes de conjugaison

Nous allons maintenant établir une correspondance classique en théorie des nombres entre classes d'idéaux d'un ordre dans un corps quadratique et classes de conjugaison de déterminant non nul dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Les résultats s'étendent à des corps de degré supérieur et des matrices de taille supérieure. Cependant, ils s'énoncent plus facilement dans le cas de la taille 2 qui nous intéresse ici.

Un *corps quadratique* est un corps de la forme $\mathbb{Q}[\alpha]$ avec α nombre algébrique de degré 2. L'*anneau des entiers* $\mathcal{O}$ de $\mathbb{Q}[\alpha]$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}[\alpha]$ admettant un polynôme minimal unitaire à coefficients entiers. Un *ordre* de $\mathcal{O}$ est un sous-anneau de $\mathcal{O}$ contenant l'élément 1 et non isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Un résultat classique affirme que $\mathcal{O}$ est un réseau de $\mathbb{Q}[\alpha]$, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2 dans $\mathbb{Q}[\alpha]$. Un ordre est alors un sous-réseau de $\mathcal{O}$ contenant 1.

8.2.1 Exemple. Dans le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, l'anneau des entiers est $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$. Deux exemples d'ordres sont $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, qui est d'indice 2, et $\mathbb{Z}[\frac{1+3\sqrt{5}}{2}]$, qui est d'indice 3. ♡

Un *idéal* $\mathcal{I}$ d'un ordre o est un sous-groupe additif de o stable par multiplication par les éléments de o. Si $\{\omega_1, \omega_2\}$ est une $\mathbb{Z}$-base de o, alors tout idéal $\mathcal{I}$ de o admet une $\mathbb{Z}$-base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ où α_1 et α_2 sont deux éléments du réseau engendré par ω_1 et ω_2.

Un idéal $\mathcal{I}$ d'un ordre o est dit *principal* s'il existe un élément a dans $\mathcal{I}$ tel que $\mathcal{I}$ est exactement l'ensemble des multiples de a par des éléments de o. On note alors $\langle a \rangle$ cet idéal. Soit $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ deux idéaux de o. On dit que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ sont dans la même *classe* s'il existe a, a' non nuls dans o vérifiant $\langle a \rangle \mathcal{I} = \langle a' \rangle \mathcal{I}'$. Il s'agit d'une relation d'équivalence entre idéaux. Par exemple, la classe de l'idéal $\langle 1 \rangle$ est l'ensemble des idéaux principaux de o. Le résultat principal de cette section est le suivant.

8.2.2 Proposition (voir [24]). *Soit t et d deux entiers tels que $t^2 > 4d > 0$. Soit $P(x)$ le polynôme $x^2 - tx + d$ et soit α une racine de P. Alors il existe une bijection entre les classes de conjugaison sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de matrices A de $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $P(A) = 0$ d'une part, et les classes d'idéaux de l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$ d'autre part.* ♣

Démonstration. Soit A dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $P(A) = 0$. Alors A admet α et d/α pour valeurs propres et P pour polynôme caractéristique. Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre α. Le vecteur v est unique à multiplication par un scalaire près et peut être choisi dans $\mathbb{Z}[\alpha]^2$. On le note alors $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Par définition, on a $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Par conséquent, pour tout polynôme Q à coefficients entiers, on a $Q(A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = Q(\alpha) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Donc $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ est une $\mathbb{Z}$-base d'un certain idéal $\mathcal{I}_v$ de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Si v' est un autre vecteur propre associé à la valeur propre α dont les coordonnées sont dans $\mathbb{Z}[\alpha]$, alors on a $v' = \lambda v$ pour un certain λ dans $\mathbb{Z}[\alpha]$, et donc l'idéal associé est $\langle \lambda \rangle \mathcal{I}_v$. La classe de $\mathcal{I}_v$ ne dépend donc que de A. On note cette classe $\Phi(A)$.

Si A' est conjuguée à A par une matrice M de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, alors le vecteur $M^{-1}v$ est un vecteur propre associé à la valeur propre α de A'. Comme M est de déterminant ± 1, l'idéal $\mathcal{I}_{M^{-1}v}$ est égal à $\mathcal{I}_v$, mais la base associée est différente. La classe $\Phi(A)$ ne dépend donc que de la classe de conjugaison de A sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Donc Φ induit une application bien définie, également notée Φ dans la suite, de l'ensemble des classes de conjugaison de matrices A vérifiant $P(A) = 0$ vers les classes d'idéaux de l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Dans l'autre direction, soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{Z}[\alpha]$ et $\{\beta_1, \beta_2\}$ une base de $\mathcal{I}$. Comme $\mathcal{I}$ est stable par multiplication par α, il existe une matrice B dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$. Par conséquent, B admet α pour valeur propre et $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre associé. Comme la trace de B est entière, l'autre valeur propre α' de B est égale à $n - \alpha$, pour un certain n dans $\mathbb{Z}$. On a alors

$$\det B = \alpha(n - \alpha) = n\alpha - \alpha^2 = n\alpha - (t\alpha - d).$$

Or $\det B$ est entier, ce qui entraîne $n - t = 0$, et donc α' est le conjugué de α. Par conséquent, la matrice B vérifie $P(B) = 0$.

Si on choisit une autre base $\{\beta_1', \beta_2'\}$ de $\mathcal{I}$, alors il existe T dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} =$

$T\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$. La matrice associée est alors TBT^{-1}. La classe de conjugaison de B ne dépend donc que de $\mathcal{I}$. On note cette classe de conjugaison $\Psi(\mathcal{I})$.

Si on choisit un autre idéal $\mathcal{I}'$ dans la classe de $\mathcal{I}$, on vérifie également que la matrice associée à toute base de $\mathcal{I}'$ est dans $\Psi(\mathcal{I})$.

On a ainsi construit deux applications Φ et Ψ entre classes de conjugaison dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et classes d'idéaux dans des corps quadratiques. La définition de Ψ montre immédiatement que Φ et Ψ sont inverses l'une de l'autre. ♠

La question est maintenant de calculer effectivement la bijection Φ de la proposition 8.2.2, à savoir, à partir des matrices, de calculer des éléments des classes d'idéaux correspondants. Une notion adaptée à cette fin est la suivante.

8.2.3 Définition (voir [24])**.** Soit o un ordre dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ et $\mathcal{I}$ un idéal de o. Une matrice M dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ est dite *idéale* pour $\mathcal{I}$ s'il existe une base $\{\omega_1, \omega_2\}$ de o et une base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ de $\mathcal{I}$ telles que $M\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$. ♢

8.2.4 Proposition. *Soit $P(x) = x^2 - tx + d$ un polynôme unitaire irréductible et α une racine de P. Alors toute matrice A dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $P(A) = 0$ est de la forme $X_{\mathcal{I}}C_PX_{\mathcal{I}}^{-1}$, où $X_{\mathcal{I}}$ est une matrice idéale pour un idéal $\mathcal{I}$ appartenant à $\Phi(A)$ et où C_P est la matrice compagnon $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -d & t\end{pmatrix}$ du polynôme P. Réciproquement, toute matrice X dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $X^{-1}AX = C_P$ est la matrice idéale d'un idéal appartenant à $\Phi(A)$.* ♣

Noter que la relation $A = X_{\mathcal{I}}C_PX_{\mathcal{I}}^{-1}$ n'implique pas que la matrice A est conjuguée à C_P dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, car en général, la matrice $X_{\mathcal{I}}$ n'est pas de déterminant ± 1.

Démonstration. Par définition de α, on a $\alpha\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ t\alpha - d\end{pmatrix}$, donc, par la démonstration de la proposition 8.2.2, la matrice C_P est la matrice de $\Psi(\langle 1\rangle)$ associée à la base $\{1, \alpha\}$ de l'idéal $\langle 1\rangle$.

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ annulant P. On lui a associé dans la démonstration de la proposition 8.2.2 une base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ d'un idéal $\mathcal{I}$ appartenant à $\Phi(A)$. Par définition, la matrice idéale $X_{\mathcal{I}}$ correspondante, relativement aux bases $\{1, \alpha\}$ de $\mathbb{Z}[\alpha]$ et $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ de $\mathcal{I}$, vérifie $X_{\mathcal{I}}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$. On a donc $X_{\mathcal{I}}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$, d'où $C_PX_{\mathcal{I}}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = C_P\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$, et donc

$$X_{\mathcal{I}}C_PX_{\mathcal{I}}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \alpha X_{\mathcal{I}}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a $A = X_{\mathcal{I}}C_PX_{\mathcal{I}}^{-1}$, comme annoncé.

Pour la réciproque, soit $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ une base de l'idéal correspondant à A. On a alors $A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$. Soit X vérifiant $X^{-1}AX = C$. On a donc $XCX^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, d'où

$CX^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \alpha X^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$. Comme α est une valeur propre simple de C, le vecteur $X^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ est propre, et donc il existe p, q dans $\mathbb{Q}(\alpha)$ vérifiant $X^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \frac{p}{q}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$, soit $X^{-1}\begin{pmatrix}q\alpha_1\\ q\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\ p\alpha\end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix}q\alpha_1\\ q\alpha_2\end{pmatrix} = X\begin{pmatrix}p\\ p\alpha\end{pmatrix}$. Par conséquent, X est la matrice idéale de l'idéal $\langle q\alpha_1, q\alpha_2\rangle$, lequel appartient à la classe $\Phi(A)$. ♠

La démonstration de la proposition 8.2.4 montre en particulier que la classe des idéaux principaux de $\mathbb{Z}[\alpha]$ correspond à la classe de matrices contenant la matrice compagnon C_P du polynôme caractéristique P de α. Dans le cas $P(x) = x^2 - tx + 1$, la classe des idéaux principaux correspond également à la classe de matrices engendrée par la matrice $X^{t-2}Y$, puisque $X^{t-2}Y$ est conjuguée à C_P par la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, qui est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

8.2.5 Exemple. Revenons aux matrices de trace 10 et de déterminant 1. Le polynôme minimal correspondant est $P(x) = x^2 - 10x + 1$, dont les racines sont $5+2\sqrt{6}$ et $5-2\sqrt{6}$. Le corps quadratique associé est $\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$, dont l'anneau des entiers est $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$; en revanche, nous nous intéressons ici à l'ordre $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$ et à ses classes d'idéaux. Nous avons vu dans l'exemple 8.1.5 que toute matrice de trace 10 et de déterminant 1 est conjuguée à l'un des trois produits X^8Y, X^4Y^2 ou X^2YXY, c'est-à-dire à l'une des matrices $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix}$. Par la propriété 8.2.2, il y a donc trois classes d'idéaux dans l'ordre $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$.

On vient de voir que la classe de la matrice $X^8Y = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 8 & 9\end{pmatrix}$ correspond à la classe des idéaux principaux, donc $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix}$ correspondent aux deux classes d'idéaux non principaux. Comme les matrices conjuguant ces deux éléments à C_P sont $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, et que la base de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$ associée à C_P est $\{1, \alpha\} = \{1, 5 + 2\sqrt{6}\}$, on en déduit au passage que les idéaux $\left\langle 2, 4 + 2\sqrt{6}\right\rangle$ et $\left\langle 3, 4 + 2\sqrt{6}\right\rangle$ sont représentants des deux classes d'idéaux non principaux de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$. ♡

8.3 La surface modulaire

Dans [44] et [43], É. Ghys démontre, et illustre visuellement, que les nœuds de Lorenz apparaissent comme orbites périodiques du flot modulaire défini sur la variété $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Afin d'expliquer ce résultat, nous allons d'abord donner plusieurs descriptions de la variété modulaire, et décrire le flot en termes de réseaux du plan.

Le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ par homographie :

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.\, z = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{8.3.1}$$

l'action étant transitive et fidèle. Un domaine fondamental $\mathcal{D}$ pour cette action est donné par

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0, -1/2 \leqslant \Re z \leqslant 1/2, |z| \geqslant 1\}. \tag{8.3.2}$$

La restriction de l'action à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est discrète, elle n'est pas libre car certains points, en fait les orbites des points i et j, ont des stabilisateurs non triviaux. Le quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ est alors une orbiface, c'est-à-dire une surface avec deux points singuliers (correspondant aux orbites des points i et j) au voisinage desquels l'angle total n'est pas 2π mais respectivement $2\pi/2$ et $2\pi/3$. Cette orbiface, qui n'est donc pas une surface à proprement parler, est traditionnellement appelé *surface modulaire* et noté Σ_{mod} dans la suite. Il s'identifie naturellement à $\mathcal{D}$ modulo les recollements $-\dfrac{1}{2}+iy \sim \dfrac{1}{2}+iy$ pour $y \geqslant \sqrt{3}/2$ et $e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)} \sim e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ pour $0 < \alpha \leqslant \pi/6$. Il hérite de la métrique hyperbolique de $\mathbb{H}^2$.

Comme le jacobien d'une homographie vaut toujours 1, l'action s'étend au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$. Elle devient alors transitive et libre, par conséquent, les variétés $T^1\mathbb{H}^2$ et $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sont isomorphes. Comme l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $T^1\mathbb{H}^2$ est discrète, les variétés quotients $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash T^1\mathbb{H}^2 = T^1\Sigma_{mod}$ sont isomorphes. Le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{mod}$ à la surface modulaire est alors une variété de dimension 3, naturellement munie d'une métrique riemannienne g. Il s'identifie de manière canonique à $\mathcal{D} \times \mathbb{S}^1$ modulo les recollements sur les bords $(-\dfrac{1}{2}+iy,\theta) \sim (\dfrac{1}{2}+iy,\theta)$ d'une part, et $(e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)},\theta-\alpha) \sim (e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)},\pi+\theta+\alpha)$ d'autre part, qui se prolongent aux coins en $(i,\theta) \sim (i,\theta+\pi)$ et $(j,\theta) \sim (j,\theta+\dfrac{2\pi}{3})$.

Un réseau du plan est dit *de covolume* 1 s'il admet une maille d'aire 1. Un tel réseau est déterminé par les coordonnées des vecteurs d'une base, donc par une matrice A de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. De plus, changer la base (ordonnée) du réseau revient à multiplier à gauche A par un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On obtient ainsi un isomorphisme h entre l'espace des réseaux de covolume 1 et la variété $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Ainsi, les trois variétés $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, $T^1\Sigma_{mod}$ et l'espace des réseaux de covolume 1 sont canoniquement isomorphes. Détaillons le lien entre les deux dernières (voir également la figure 8.3.1).

Soit Λ un réseau de covolume 1 dans le plan, identifié à $\mathbb{C}$. Nous allons lui associer un point $f(\Lambda)$ de $T^1\Sigma_{mod}$, c'est-à-dire un point de Σ_{mod} et un vecteur unitaire tangent en ce point. L'idée est de passer par un réseau semblable $\rho e^{i\theta}\Lambda$ ayant une base de la forme $\{1,z\}$, où z est un point de $\mathcal{D}$.

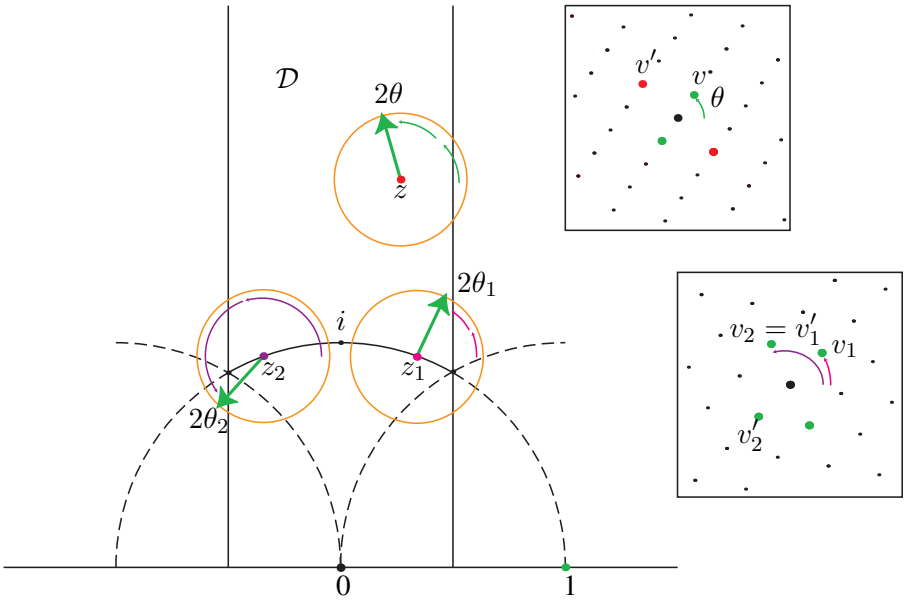

FIGURE 8.3.1 – Comment associer un point de $T^1\Sigma_{mod}$ à un réseau de covolume 1. Les deux vecteurs tangents représentés en z_1 et z_2 correspondent au même réseau, représenté à droite, et sont donc identifiés.

Supposons d'abord que Λ n'a que deux plus courts vecteurs que nous nommons v et $-v$. Supposons ensuite que Λ n'a que deux plus courts vecteurs non colinéaires à v, nous les nommons v' et $-v'$ de sorte que la base (v, v') soit directe. Il existe une unique simillitude directe envoyant v en 1. On désigne par z l'image de v' et par θ l'angle de la simillitude. Remarquons que, si θ dépend du choix de v que nous avons fait, ni z, ni 2θ n'en dépendent. Il se trouve que z est à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$, et on définit alors sans ambiguïté $f(\Lambda)$ par la formule $f(\Lambda) = (z, 2\theta)$.

Dans la construction précédente, s'il y a deux choix possibles pour v', alors ces options fournissent deux points z de $\mathcal{D}$ de la forme $-\frac{1}{2}+iy$ et $\frac{1}{2}+iy$, qui correspondent au même point de Σ_{mod}. Comme la simillitude ne dépend pas du choix de v', ces deux choix possibles de z dans $\mathcal{D}$ mènent au même angle θ, et donc au même point de $T^1\Sigma_{mod}$. On peut alors définir $f(\Lambda)$ par la même formule sans ambiguïté.

S'il y a plus de deux choix possibles pour v, alors soit Λ est à maille carrée, soit à maille triangulaire équilatérale, soit à maille triangulaire isocèle non équilatérale. Dans le dernier cas (illustré sur la figure 8.3.1), il y a quatre choix possibles pour v, menant à deux points z de $\mathcal{D}$ de la forme $e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$ et $e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$, qui correspondent encore au même point de Σ_{mod}. Les angles des simillitudes correspondantes diffèrent de $\frac{\pi}{2}+\alpha$, dont le double est exactement la différence dûe au recollement de $\mathcal{D}$. Par conséquent, on peut encore définir $f(\Lambda)$ sans ambiguïté.

De même , dans le cas d'une maille carrée, le point z associé est le point i, et les différents choix du plus court vecteur v sont compensés par l'identification $(i, \theta) \sim (i, \theta + \pi)$. Et dans le cas d'une maille triangulaire, les différents choix possibles, à la fois pour v et pour v' sont compensés par les identifications $(j, \theta) \sim (j, \theta + \frac{2\pi}{3}) \sim (j+1, \theta)$. On a alors

8.3.1 Proposition. *L'application f établit un isomorphime entre l'espace des réseaux de covolume 1 et le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{mod}$.* ♣

8.4 Flot modulaire, nœuds modulaires, et classes de conjugaison

Soit Λ un réseau de $\mathbb{R}^2$ de covolume 1 et (b_1, b_2) une base de Λ. Pour tout t, les vecteurs $b_1^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} b_1$ et $b_2^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} b_2$ forment encore une base d'un réseau de covolume 1, lequel ne dépend que de Λ. On définit $\varphi^t(\Lambda)$ comme le réseau engendré par les vecteurs b_1^t et b_2^t. Le flot φ est appelé *flot modulaire* sur l'espace des réseaux de covolume 1. Par la proposition 8.3.1, il induit un flot sur la variété $T^1\Sigma_{mod}$. Il se trouve que ce dernier est le flot géodésique associé à la métrique g sur $T^1\Sigma_{mod}$.

Si les vecteurs $b_1^{t_0}$ et $b_2^{t_0}$ appartiennent au réseau Λ et sont minimaux, alors on a $\varphi^{t_0}(\Lambda) = \Lambda$ et l'application $t \mapsto \varphi^t(\Lambda)$ restreinte à l'intervalle $[0, t_0]$ définit un lacet fermé dans $T^1\Sigma_{mod}$, et donc un nœud dans ce même espace. Le résultat suivant décrit les circonstances où un tel événement se produit et annonce la correspondance de Ghys.

8.4.1 Proposition. *Les orbites périodiques du flot modulaire sont indexées par les classes de conjugaison de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. ♣

Schéma de la démonstration. Comme le flot modulaire coïncide avec le flot géodésique sur le quotient de $\mathbb{H}^2$ par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, une orbite modulaire périodique provient d'une géodésique λ de $\mathbb{H}^2$ qui est invariante sous l'action d'un certain élément hyperbolique A de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Quand on passe au quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$, cette géodésique λ devient invariante sous l'action de toute la classe de conjugaison

de A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Réciproquement, les seuls éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ fixant λ sont les conjuguées des puissances de A. Une orbite modulaire périodique est donc naturellement associée à une classe de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, à savoir la classe de A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ou de sa plus petite racine si A n'est pas primitive. Or le corollaire 8.1.4 fournit une bijection entre les mots de Lyndon et les classes de conjugaison de matrices primitives hyperboliques. ♠

8.4.2 Corollaire. *Les orbites périodiques du flot modulaire sont indexées par les mots de Lyndon.* ♣

On a maintenant obtenu de manière naturelle des nœuds sur le fibré unitaire tangent à la surface modulaire. Or celui-ci se trouve être isomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3$ privée d'un nœud de trèfle. On peut le voir soit à l'aide de la discussion du chapitre 3 et la proposition 3.3.5, soit *via* les coordonnées suivantes, introduites par Gauss, pour les réseaux de $\mathbb{R}^2$. Identifions $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, et posons

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{z\in\Lambda\smallsetminus\{0\}} z^{-4} \quad \text{et} \quad g_3(\Lambda) = 140 \sum_{z\in\Lambda\smallsetminus\{0\}} z^{-6}.$$

Les sommes g_2 et g_3 convergent et il se trouve que l'application $\Lambda \mapsto (g_2(\Lambda), g_3(\Lambda))$ est injective, c'est-à-dire que le réseau Λ est entièrement déterminé par les valeurs des fonctions g_2 et g_3. De plus, la non-dégénérescence de Λ correspond à la condition $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Enfin, le fait que Λ est de covolume 1 impose une condition de renormalisation sur $g_2(\Lambda)$ et $g_3(\Lambda)$. Quitte à changer de renormalisation, on peut supposer

$$|g_2(\Lambda)|^2 + |g_3(\Lambda)|^2 = 1. \tag{8.4.1}$$

Cette dernière condition permet d'identifier l'image de (g_2, g_3) à une partie de la sphère $\mathbb{S}^3$, qui est le complémentaire d'un nœud de trèfle, noté $\mathcal{T}$, dans $\mathbb{S}^3$. On a ainsi un isomorphisme entre $\mathbb{S}^3\smallsetminus\mathcal{T}$ et la variété modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, qui nous permet de plonger les nœuds modulaires de manière naturelle dans $\mathbb{S}^3$ [†].

8.4.3 Définition. Un nœud est dit *modulaire* s'il peut être réalisé comme orbite périodique du flot modulaire sur l'espace des réseaux de covolume 1, plongé dans $\mathbb{S}^3$ via l'application (g_2, g_3). ♢

8.5 Nœuds modulaires et nœuds de Lorenz

À ce point, nous avons introduits deux familles de nœuds, les nœuds de Lorenz et les nœuds modulaires, dont les éléments sont naturellement en bijection avec les mots de Lyndon. Le résultat de Ghys affirme que ces familles coïncident.

8.5.1 Théorème ([44, 43])**.** *Plongeons $T^1\Sigma_{mod}$ dans $\mathbb{S}^3$ à l'aide de l'application $(g_2, g_3) \circ f^{-1}$. Alors, pour tout mot de Lyndon w, le nœud modulaire et le nœud de Lorenz associés à w coïncident.* ♣

C'est ce théorème que nous avons généralisé avec le théorème 3.2.10.

Schéma de la démonstration. Les nœuds modulaires coïncident avec les orbites périodiques du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{mod}$. L'idée principale est de déformer continûment la métrique sur Σ_{mod} et $T^1\Sigma_{mod}$ pour amener tout le flot géodésique au voisinage du segment reliant les images des points i et j de $\mathbb{H}^2$. En contractant la direction stable du flot, les orbites viennent alors s'accumuler sur un patron, qui se trouve être le patron géométrique de Lorenz. ♠

[†]. Consulter aussi [74, p. 83] pour une preuve plus visuelle détaillant la topologie de $T^1\Sigma_{mod}$.

Pour plus de détails, nous renvoyons à [44] et à [43] où l'on trouvera des représentations animées très spectaculaires.

8.5.2 Exemple. Revenons au cas des idéaux de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$. On a vu qu'il y a trois classes d'idéaux, dont trois représentants sont $\left\langle 1, 5+2\sqrt{6} \right\rangle$, $\left\langle 2, 4+2\sqrt{6} \right\rangle$ et $\left\langle 3, 4+2\sqrt{6} \right\rangle$. Les trois nœuds modulaires associés sont les nœuds correspondants aux mots X^8Y, X^4Y^2 et X^2YXY. Notre étude des nœuds de Lorenz et la correspondance de Ghys montrent que ceux-ci sont respectivement un nœud trivial, un nœud trivial, et un nœud de trèfle. ♡

8.6 Nœuds de Lorenz et classes d'idéaux

On a maintenant une application naturelle associant à une classe d'idéaux dans un ordre d'un corps quadratique une unique classe de mots en X et Y, définis à permutation circulaire des lettres et à échange des caractères X et Y près. Or on ne change pas un nœud de Lorenz en échangeant tous les caractères L et R dans le mot de Lyndon associé : cela correspond à une rotation autour de l'axe horizontal passant par le centre du patron et échangeant les deux attracteurs, ou encore à une rotation de $180°$ de la tresse de Lorenz autour d'un axe vertical. On a donc une bijection entre classes d'idéaux dans certains corps quadratiques et nœuds de Lorenz, modulo symétrie du patron. La question est alors de savoir si l'existence de cette bijection a des conséquences intéressantes.

Celles-ci pourraient venir de la structure de groupe qui existe naturellement sur les classes d'idéaux dans un corps quadratique. Précisément, soit $\mathbb{Q}[\alpha]$ un corps quadratique, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, o un ordre d'indice n dans $\mathcal{O}$, et $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ deux idéaux de o. Alors la classe de l'idéal $\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ dans leurs classes respectives. Par conséquent, l'opération de multiplication est bien définie sur les classes d'idéaux. On vérifie facilement que la classe des idéaux principaux est un élément neutre pour cette opération, donc l'ensemble des classes d'idéaux forme un monoïde. De plus, toute classe contenant au moins un idéal $\mathcal{I}$ dont la norme $N(\mathcal{I})$ est première avec l'indice n admet un inverse pour la multiplication, c'est-à-dire qu'il existe $\mathcal{I}'$ tel que $\mathcal{I}\mathcal{I}'$ est un idéal principal, voir [25, page 122]. L'ensemble de ces classes est stable par produit, par conséquent l'ensemble des classes contenant au moins un idéal $\mathcal{I}$ dont la norme est première avec n forme un groupe, appelé *groupe des classes* de l'ordre o.

8.6.1 Exemple. Revenons une dernière fois aux idéaux de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$. L'idéal $\left\langle 1, 5+2\sqrt{6} \right\rangle$ est principal, c'est donc un représentant de la classe des idéaux principaux. Pour ce qui est de $\left\langle 2, 4+2\sqrt{6} \right\rangle$, on vérifie facilement que tout élément de sa classe a une norme qui est multiple de 2. Or l'indice de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ est 2, donc la classe de $\left\langle 2, 4+2\sqrt{6} \right\rangle$ n'appartient pas au groupe des classes de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$. De fait, on vérifie l'égalité $\left\langle 2, 4+2\sqrt{6} \right\rangle^2 = \langle 2 \rangle \left\langle 2, 4+2\sqrt{6} \right\rangle$, donc, si cette classe était dans le groupe des classes, elle en serait l'élément neutre. Or cette position est déjà occupée par la classe des idéaux principaux. Quant à $\left\langle 3, 4+2\sqrt{6} \right\rangle$, sa norme est 3, qui est premier à 2, donc sa classe appartient au groupe des classes. Le groupe des classes de $\mathbb{Z}[2\sqrt{6}]$ est donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Notons que, dans la correspondance de Ghys, le nœud associé à l'élément neutre est le nœud trivial et le nœud associé à l'autre élément est le nœud de trèfle.

Pour un autre exemple, considérons les matrices de trace 22 et de déterminant 1. L'ordre associé est $\mathbb{Z}[2\sqrt{30}]$, qui compte six classes d'idéaux, correspondant aux matrices $X^{20}Y$, $X^{10}Y^2$, X^5Y^4, X^6YXY, X^4YX^2Y et $X^2YX^2Y^2$. Les nœuds associés sont le nœud trivial pour les trois premières classes, le nœud de trèfle pour les deux suivantes, et le nœud torique $T(5,2)$ pour la dernière. Le groupe des classes de $\mathbb{Z}[2\sqrt{30}]$ a quatre éléments, car les classes correspondant aux mots $X^{10}Y^2$ et X^4YX^2Y

ne sont pas inversibles. Ce groupe est le groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Vis-à-vis de la correspondance de Ghys, l'élément neutre a pour nœud associé le nœud trivial, et les trois autres éléments du groupe sont associés respectivement au nœud trivial, au nœud de trèfle et au nœud $T(5,2)$. ♡

8.7 Deux résultats nouveaux

Comme on a associé à chaque classe d'idéaux un nœud de manière canonique, la question se pose naturellement de savoir si la multiplication du groupe des classes d'idéaux a un pendant du côté des nœuds, c'est-à-dire si on peut définir directement une opération de multiplication des nœuds et, par exemple, mieux comprendre les observations de l'exemple 8.6.1. Les seules réponses connues à ce jour, très partielles, sont les résultats suivants, qui semblent nouveaux.

Le premier résultat décrit complètement le sous-groupe du groupe des classes d'idéaux formé par les classes associées au nœud trivial. On note $\wedge$ l'opération de pgcd de deux entiers et $\vee$ leur ppcm.

8.7.1 Théorème. *Soit $t > 2$ un entier, α une racine du polynôme $x^2 - tx + 1$, et G le groupe des classes associé à l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$. L'ensemble des éléments de G associés au nœud trivial forme un sous-groupe G_0 de G qui est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{d-1}$ où d est le nombre de diviseurs premiers de $t-2$. Les matrices correspondant aux éléments de G_0 sont de la forme $X^m Y^{m'}$ avec $mm' = t-2$ et $m \wedge m' = 1$. Exprimée en termes de matrices, la multiplication de G_0 est donnée par la formule*

$$X^{m_1} Y^{(t-2)/m_1} \cdot X^{m_2} Y^{(t-2)/m_2} = X^{m_3} Y^{(t-2)/m_3}, \text{ avec } m_3 = \frac{m_1 \vee m_2}{m_1 \wedge m_2}.$$

♣

Démonstration. Par un théorème de J. Franks, H. Morton et R. Williams [33], l'indice de tresse d'un nœud de Lorenz, c'est-à-dire le nombre minimal de brins d'une tresse dont la clôture est ce nœud, est égal au nombre de syllabes XY dans n'importe quel mot de Lyndon associé (voir aussi la figure 6.1.4). Le nœud trivial étant le seul nœud obtenu comme clôture d'une tresse à un brin, c'est le seul nœud de Lorenz de d'indice de tresse 1. Par conséquent, les orbites triviales du flot de Lorenz sont exactement celles qui sont associées aux mots de la forme $X^m Y^{m'}$.

Comme inverser dans le groupe des classes revient à transposer la matrice, les classes correspondant aux mots $X^m Y^{m'}$ et $X^{m'} Y^m$ sont inverses l'une de l'autre. Or ces classes coïncident, puisqu'au niveau des idéaux l'échange des caractères X et Y et la permutation circulaire des lettres ne modifient pas la classe. Par conséquent, ces classes sont d'ordre 2 dans le groupe des classes G.

L'ordre associé aux matrices de trace t est $\mathbb{Z}[\alpha]$, où $\alpha = \dfrac{-t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}$, et l'idéal associé à la matrice $X^m Y^{m'}$, qui vaut $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m' & 1 + mm' \end{pmatrix}$, est $\langle m, \alpha - 1 \rangle$. D'après [23, page 220], la forme quadratique associée est $mx^2 + mm'xy + m'y^2$, et, d'après la proposition 5.2.5 de [23], la condition pour qu'un idéal soit inversible est que les coefficients de la forme quadratique associée soient premiers entre eux, soit, dans le cas présent, $m \wedge m' = 1$. Les nœuds triviaux apparaissant dans le groupe des classes correspondent donc aux mots de la forme $X^m Y^{m'}$, avec $mm' = t - 2$ et $m \wedge m' = 1$.

Il reste à vérifier la stabilité par produit des éléments associés à des nœuds triviaux, et la forme

explicite du produit annoncée. Calculant au niveau des idéaux, on trouve

$$\begin{aligned}
&\langle m_1, \alpha - 1\rangle \cdot \langle m_2, \alpha - 1\rangle \\
&\qquad = \left\langle m_1 m_2, m_1(\alpha-1), m_2(\alpha-1), \alpha^2 - 2\alpha + 1\right\rangle \\
&\qquad = \langle (m_1 \wedge m_2)(m_1 \vee m_2), (m_1 \wedge m_2)(\alpha - 1), (t-2)\alpha\rangle \\
&\qquad = (m_1 \wedge m_2)\left\langle m_1 \vee m_2, \alpha - 1, \frac{t-2}{m_1 \wedge m_2}\alpha\right\rangle.
\end{aligned}$$

Les diviseurs de $t-2$ se divisent en quatre catégories : ceux qui ne divisent ni m_1 ni m_2 dont nous noterons le pgcd p_{--}, ceux qui divisent m_1 et pas m_2 dont nous noterons le pgcd p_{+-}, ceux qui divisent m_2 et pas m_1 dont nous noterons le pgcd p_{-+}, et ceux qui divisent m_1 et m_2 dont nous noterons le pgcd p_{++}. On a alors

$$m_1 \vee m_2 = p_{-+}p_{+-}p_{++} \quad \text{et} \quad \frac{t-2}{m_1 \wedge m_2} = p_{--}p_{-+}p_{+-},$$

d'où $(m_1 \vee m_2) \wedge \dfrac{t-2}{m_1 \wedge m_2} = p_{-+}p_{+-} = \dfrac{m_1 \wedge m_2}{m_1 \vee m_2}$. On en déduit

$$(m_1 \wedge m_2)\left\langle m_1 \vee m_2, \alpha - 1, \frac{t-2}{m_1 \wedge m_2}\alpha\right\rangle = (m_1 \wedge m_2)\left\langle \frac{m_1 \wedge m_2}{m_1 \vee m_2}, \alpha - 1\right\rangle.$$

Ce dernier idéal est dans la même classe que $\left\langle \dfrac{m_1 \wedge m_2}{m_1 \vee m_2}, \alpha - 1\right\rangle$, dont la matrice idéale est

$$X^{\frac{m_1 \vee m_2}{m_1 \wedge m_2}} Y^{(t-2)/\frac{m_1 \vee m_2}{m_1 \wedge m_2}}.$$

♠

Notre seconde observation est un résultat de symétrie très simple. Si w est un mot (de Lyndon), on appelle *miroir* de w le mot obtenu en renversant l'ordre des lettres de w.

8.7.2 Théorème. *Pour tout mot de Lyndon w, les nœuds de Lorenz correspondants à w et à son miroir sont les mêmes.* ♣

Démonstration. Transposé en termes de nœuds modulaires, l'énoncé devient : les nœuds sur le fibré unitaire tangent à la surface modulaire $T^1\Sigma_{mod}$ qui correspondent au parcours dans un sens et dans l'autre d'une géodésique périodique de la surface modulaire Σ_{mod} sont les mêmes. Or, vis-à-vis de la métrique riemannienne g introduite au début de la section, l'involution de $T^1\Sigma_{mod}$ qui associe au vecteur tangent v de $T^1_x\Sigma_{mod}$ le vecteur $-v$ de $T^1_x\Sigma_{mod}$ est une isométrie de $T^1\Sigma_{mod}$ [‡], qui préserve l'orientation. Par conséquent, elle envoie tout lacet sur un lacet isotope, et les nœuds associés coïncident. ♠

Ce résultat montre l'intérêt de la correspondance de Ghys et du lien entre nœuds de Lorenz et nœuds modulaires. Sur le patron de Lorenz, une seule involution naturelle apparaît, à savoir la symétrie par rapport à l'axe du patron, qui correspond à la symétrie par rapport à la première diagonale sur les diagrammes de Young associés. Le théorème 8.7.2 révèle une autre symétrie sur les orbites du flot de Lorenz, naturelle dans le langage du fibré tangent $T^1\Sigma_{mod}$ à la surface modulaire, mais cachée sur le patron de Lorenz. Par exemple, elle montre que les orbites associées aux mots de Lyndon $LLRRLRRR$ et $LLRRRLRR$, correspondant aux tableaux complétés et , sont isotopes.

[‡]. En fait, c'est même une rotation d'angle π par rapport à l'axe constitué des vecteurs tangents au point i.

8.7.3 Exemple. Comme dernière illustration, considérons les nœuds associés à des matrices de trace 40. L'ordre associé est $\mathbb{Z}[-20+3\sqrt{11}]$. Un logiciel de calcul algébrique, comme par exemple PARI/GP [§], fournit la structure du groupe des classes associé, ici $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et des représentants des classes associées à chaque élément. En termes de matrices, les huit éléments du groupe des classes d'idéaux de l'ordre $\mathbb{Z}[-20+3\sqrt{11}]$ sont les suivants.

$G=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$(\cdot,\bar{0})$	$(\cdot,\bar{1})$	$(\cdot,\bar{2})$	$(\cdot,\bar{3})$
$(\bar{0},\cdot)$	$X^{38}Y$	$X^3Y^3X^2Y$	$XYXY^{12}$	$X^3YX^2Y^3$
$(\bar{1},\cdot)$	$X^{19}Y^2$	X^2Y^7XY	X^5YX^4Y	X^2YXY^7

Traduit en termes de nœuds de Lorenz *via* la correspondance de Ghys, ce tableau devient :

$G=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$(\cdot,\bar{0})$	$(\cdot,\bar{1})$	$(\cdot,\bar{2})$	$(\cdot,\bar{3})$
$(\bar{0},\cdot)$				
$(\bar{1},\cdot)$				

On peut y voir illustrés les résultats des théorèmes 8.7.1 et 8.7.2. D'abord, comme 38 admet deux diviseurs premiers distincts, les nœuds triviaux forment un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui correspond à la colonne $(\cdot,\bar{0})$ du tableau. Par ailleurs, les colonnes $(\cdot,\bar{1})$ et $(\cdot,\bar{3})$ correspondent à des éléments opposés dans le groupe, et on voit que, sur chaque ligne, les nœuds correspondants sont en effet les mêmes. ♡

[§]. `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`

Bibliographie

[1] N. A'CAMPO, *Generic immersions of curves, knots, monodromy and gordian number*, Publ. Math. IHÉS **88** (1998), 152–169.

[2] N. A'CAMPO, *Real deformations and complex topology of plane curves singularities*, Ann. Fac. Sc. Toulouse **8** (1999), 5–23.

[3] R. ADLER, L. FLATTO, *Geodesic flows, interval maps, and symbolic dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. **25** (2) (1991), 229–334.

[4] J. W. ALEXANDER, *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Amer. Sci. U. S. A. **9** (1923), 93–95.

[5] D. V. ANOSOV, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Mathematics. **90** (1967).

[6] V. I. ARNOLD, *The asymptotic Hopf invariant and its applications*, Selected translations, Selecta Math. Soviet. **5** (1986), 327–345.

[7] V. I. ARNOLD, B. KHESIN, *Topological methods in hydrodynamics*, Appl. Math. Sci. **125**, Springer-Verlag, New York (1998).

[8] S. BAADER, *Asymptotic concordance invariants for ergodic vector fields*, Comment. Math. Helv. **86** (1), (2011) 1–12.

[9] S. BAADER, J. MARCHÉ, *Asymptotic Vassiliev invariants for vector fields*, arXiv:0810.3870.

[10] A. F. BEARDON, *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics **91**, Springer-Verlag, New York. xii+337 pp. (1983).

[11] R. BEDIENT, *Classifying 3-trip Lorenz knots*, Topology Appl. **20** (1985), 89–96.

[12] J. BERSTEL, D. PERRIN, *The origins of combinatorics on words*, European J. Combinatorics **28** (2007), 996–1022.

[13] G. BIRKHOFF, *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Trans. of the Amer. Math. Soc., **18** (2) (1917), 199–300.

[14] G. BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, AMS Collog. Publ. IX, Providence (1927, rééd. 1966).

[15] G. BIRKHOFF, *Tres observaciones sobre el algebra lineal*, Univ. Nac. Tucumán Rev, Ser. A, **5** (1946), 147–151.

[16] J. S. BIRMAN, I. KOFMAN, *A new twist on Lorenz knots*, arXiv:0707.4331v3.

[17] J. S. BIRMAN, R. F. WILLIAMS, *Knotted periodic orbits in dynamical systems–I : Lorenz's Equations* Topology **22** (1) (1983), 47–82. (erratum à `http://www.math.columbia.edu/~jb/bw-KPO-I-erratum.pdf`)

[18] F. BONAHON, L.C. SIEBENMANN, *The classification of Seifert fibred 3-orbifolds*, dans *Low-dimensional topology*, London Math. Soc. Lecture Note **95**(1985), Cambridge Univ. Press, 19–85.

[19] R. BOWEN, C. SERIES, *Markov maps associated with Fuchsian groups*, Publ. Math. IHÉS **50** (1979), 401–418.

[20] M. BRUNELLA, *On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flow*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, Sér. 6, **3** (3) (1994), 335–344.

[21] G. BURDE, H. ZIESCHANG, *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics **5**, Walter de Gruyter & Co (1985).

[22] K. CHEN, R. FOX, R. LYNDON, *Free differential calculus IV : The quotient groups of the lower central series*, Annals of Math. **58** (1958), 81–95.

[23] H. COHEN, *A Course in computational algebraic number theory*, GTM **138**, Springer Verlag (1993).

[24] H. COHN, *A classical invitation to algebraic numbers and class fields*, Universitext, Springer Verlag (1978).

[25] H. COHN, *Advanced number theory*, Dover Publications (1980).

[26] PI. DEHORNOY, *Atlas of Lorenz knots*,
`http://www.umpa.ens-lyon.fr/~pdehorno/atlaslorenz.txt`

[27] PI. DEHORNOY, *Les nœuds de Lorenz*, accepté pour publ. à L'Enseignement Mathématique.

[28] PI. DEHORNOY, *A billiard containing all links*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1, **349** (2011), 575–578.

[29] D. DETURCK, H. GLUCK, *The Gauss linking integral on the 3-sphere and in hyperbolic 3-space*, arXiv:math.GT/0406276.

[30] E. A. EL RIFAI, *Positive braids and Lorenz links*, PhD. Thesis, Univ. Liverpool (1988).

[31] E. A. EL RIFAI, *Necessary and sufficient condition for Lorenz knots to be closed under satellite construction*, Chaos, Solitons and Fractals **10** (1) (1999), 137–146.

[32] J. ETNYRE, R. W. GHRIST, *Contact topology and hydrodynamics. III. Knotted orbits.*, Trans. Amer. Math. Soc. 352, **12** (electronic) (2000), 5781–5794.

[33] J. FRANKS, R. F. WILLIAMS, *Braids and the Jones polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1) (1987), 97–108.

[34] D. FRIED, *The geometry of cross sections to flows*, Topology **21** (4) (1982), 353–371.

[35] D. FRIED, *Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps*, Topology **22** (1983), 299–303.

[36] D. GABAI, *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Cont. Math. **20** (1983), 131–143.

[37] D. GABAI, *Detecting fibred links in* $\mathbb{S}^3$, Comment. Math. Helv. **61** (1986), 519–555.

[38] J.M. GAMBAUDO, É. GHYS, *Signature asymptotique d'un champ de vecteurs en dimension 3*, Duke Math. J. **106** (1) (2001), 41-79.

[39] R. W. GHRIST, *Branched two-manifolds supporting all links*, Topology **36** (2) (1997), 423–488.

[40] R. W. GHRIST, PH. J. HOLMES, M. C. SULLIVAN, *Knots and links in three-dimensional flows*, Lect. Notes Math. **1654**, Springer Verlag (1997).

[41] É. GHYS, *Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **4** (1984), 67–80.

[42] É. GHYS, *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables*, Ann. Sc. de l'ÉNS, Sér. 4, **20** (2) (1987), 251–270.

[43] É. GHYS, J. LEYS, *Lorenz and the modular flow : a visual introduction*, Feature Column Amer. Math. Soc. (2006).

[44] É. GHYS, *Knots and dynamics*, Proc. of the International Congress of Mathematicians **I**, Eur. Math. Soc., Zürich (2007), 247–277.

[45] É. GHYS, *Right-handed vector fields and the Lorenz attractor*, Japan. J. Math. **4** (2009), 47–61.

[46] É. GHYS, *L'attracteur de Lorenz : paradigme du chaos*, Séminaire Poincaré XIV (2010), 1–42.

[47] É. GIROUX, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helvetici **66** (1991), 637–677.

[48] J. GUCKENHEIMER, *A strange, strange attractor*, The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications, Springer-Verlag (1976), 368–381.

[49] R. GUCKENHEIMER, R. F. WILLIAMS, *Structural stability of Lorenz attractors*, Publ. Math. IHÉS **50** (1979), 59–72.

[50] J. HADAMARD, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.

[51] N. HASHIGUCHI, *On the Anosov diffeomorphisms corresponding to geodesic flows on negatively curved closed surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **37** (1990), 485–494.

[52] N. HASHIGUCHI, *PL-representations of Anosov foliations*, Ann. Inst. Fourier **42** (4) (1992), 937–965.

[53] M. ISHIKAWA, *Tangent circle bundles admit positive open book decompositions along arbitrary links*, Topology **43** (2004), 215–232.

[54] B. IVERSON, *Hyperbolic geometry*, London Mathematical Society Student Texts **25**, Cambridge University Press, Cambridge, xiv+298 pp. (1992).

[55] V. F. R. JONES AND J. H. PRZYTYCKI, *Lissajous knots and billiard knots*, Banach center Publications **42** (1998), 145–163.

[56] S. KATOK, *Fuchsian groups*, Chicago Lect. Math. (1992).

[57] C. LAMM, D. OBERMEYER, *Billiard knots in a cylinder*, J. Knot Theory Ramifications **8** (3) (1999), 353–366.

[58] W. B. R. LICKORISH, *An introduction to knot theory*, GTM **175**, Springer Verlag, (1997).

[59] E. N. LORENZ, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmospheric Sci. **20** (1963), 130–141.

[60] E. N. LORENZ, *Predictability : does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?*, 139th Meeting of the AAAS (1972).

[61] M. T. LOZANO, J. M. MONTESINOS-AMILIBIA, *Geodesic flows on hyperbolic orbifolds, and universal orbifolds*, Pac. J. Math. **177** (1) (1997), 109–147.

[62] R. LYNDON, *On Burnside's problem I*, Trans. AMS **77** (1954), 202–215.

[63] A. MANNING, *Dynamics of geodesic and horocycle flows on surfaces of constant negative curvature*, appearing as Chapter 3 in Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces, Tim Bedford, Michael Keane and Caroline Series, Eds. Oxford University Press, Oxford (1991).

[64] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Studies **61**, Princeton University Press (1968).

[65] J. MILNOR, *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p,q,r)$*, in Knots, groups, and 3-manifolds, Papers dedicated to the memory of R. H. Fox, Ann. of Math. Stud. **84** (L. P. Neuwirth, ed.), (1975).

[66] J. MILNOR, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967) 115–133 Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass. (1968).

[67] J. M. MONTESINOS, *Classical tesselations and three-manifolds*, Universitext, 230 pp. (1987).

[68] H. MORTON, *Seifert circles and knot polynomials*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **99** (1986), 107–109.

[69] H. MORTON, *Problems* in *Knots in Hellas '98*, Vol. 2. Proceedings of the International Conference on Knot Theory and its Ramifications held in Delphi, August 7–15 (1998), 547–559.

[70] K. MURASUGI, *On a certain subgroup of the group of an alternating link*, Amer. J. Math. **85** (1963), 544–550.

[71] K. MURASUGI, *Knot theory and its applications*, Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita. Birkhäuser Boston, Inc., Boston (1996).

[72] A. OGG, *Modular Forms and Dirichlet Series*, W. A. Benjamin Inc., New York (1969).

[73] J. O'ROURKE, *Tying knots with reflecting lightrays*, http ://mathoverflow.net/questions/38813/ (2010).

[74] F. DAL'BO, F. PAULIN, G. COURTOIS, *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*, Journées mathématiques X-UPS 2007.

[75] G. PICK, *Geometrisches zur Zahlentheorie*, Sitzenber. Lotos (Prague) **19** (1899), 311–319.

[76] T. PINSKY, *Templates for geodesic flows*, phD. Thesis (2011).

[77] H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, Œuvres Vol. 1, Paris (1892).

[78] H. POINCARÉ, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta. Math. **13** (1890), 1–270.

[79] H. POINCARÉ, *Nouvelles méthodes de la mécanique céleste, tome III*, Gauthiers-Villard, Paris (1899).

[80] M. RATNER, *Markov partitions for anosov flows on n-dimensional manifolds*, Israel J. of Math. **15** (1) (1973), 92–114.

[81] C. REUTENAUER, *Free Lie algebras*, Clarendon Press, Oxford (1993).

[82] D. ROLFSEN, *Knots and links*, Corrected reprint of the 1976 original. Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish, Inc., Houston, TX (1990).

[83] H. P. DE SAINT-GERVAIS, *Uniformisation des surfaces de Riemann, retour sur un théorème centenaire*, ÉNS Éditions (2011).

[84] S. SCHWARTZMANN, *Asymptotic cycles*, Ann. of Math. **66** (2) (1957), 270–284.

[85] J.-P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, PUF, Paris (1970).

[86] C. SPARROW, *The Lorenz equations : bifurcation, chaos and strange attractors*, Applied Mathematical Science **41**, Springer Verlag (1982).

[87] J. STALLINGS, *Constructions of fibered knots and links*, Symp. in Pure math. Am. Math. Soc. **32** (2) (1978), 55–59.

[88] M. C. SULLIVAN, *The prime decomposition of knotted periodic orbits in Lorenz-like templates*, J. Knot Thy. and Ram. **3** (1) (1994), 83–120.

[89] S. TABACHNIKOV, *Billiards*, Panor. Synth. No. 1, vi+142 pp. (1995).

[90] W. THURSTON, *The topology and geometry of three-manifolds*, (1980), disponible en ligne à `library.msri.org/books/gt3m/`

[91] V. TSANOV, *Triangle groups, automorphic forms, and torus knots*, arxiv:1011.0461v1 (2010).

[92] W. TUCKER, *The Lorenz attractor exists*, PhD. Thesis, Univ. Uppsala (1998).

[93] W. TUCKER, *A rigorous ODE solver and Smale's* 14*th problem*, Found. Comput. Math. **2** (2002), 53–117.

[94] J. VAN HORN MORRIS, *Constructions of Open Book Decompositions*, Ph.D thesis, University of Texas, Austin (2007).

[95] V. A. VASSILIEV, *Cohomology of knot spaces*, Theory of Singularities and Its Applications (ed. V. I. Arnold), Advances in Soviet Math. **1** (1990), 23–69.

[96] R. F. WILLIAMS, *The structure of Lorenz attractors*, Publ. Math. IHES **50** (1979), 73–99.

[97] R. F. WILLIAMS, *Lorenz knots are prime*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **4** (1983), 147–163.