



Résolution numérique des équations de Maxwell harmoniques par une méthode d'éléments finis discontinus

Philippe Helluy

► To cite this version:

Philippe Helluy. Résolution numérique des équations de Maxwell harmoniques par une méthode d'éléments finis discontinus. Analyse numérique [math.NA]. Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 1994. Français. NNT : . tel-00657828

HAL Id: tel-00657828

<https://theses.hal.science/tel-00657828>

Submitted on 9 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Philippe HELLUY

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL
HARMONIQUES PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS**

Soutenue le 18 janvier 1994 devant la Commission d'Examen :

MM.	P.	DEGOND	Président
	J.	AUDOUNET	Rapporteur
	P.	CHARRIER	Rapporteur
	D.	KALFON	
	Y.	LEROUX	
	P.	MAZET	Directeur de thèse

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Philippe HELLUY

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL
HARMONIQUES PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS**

Soutenue le 18 janvier 1994 devant la Commission d'Examen :

MM.	P.	DEGOND	Président
	J.	AUDOUNET	Rapporteur
	P.	CHARRIER	Rapporteur
	D.	KALFON	
	Y.	LEROUX	
	P.	MAZET	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du groupe d'analyse numérique de l'ONERA-CERT

Remerciements

Mes remerciements s'adressent avant tout à Pierre Alain Mazet. Sans ses intuitions, sa disponibilité exceptionnelle, sa patience et ses encouragements, cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Je n'oublie pas Monique, Olivier, Aude et Guilhem Mazet, qui m'ont à plusieurs reprises accueilli chez eux avec beaucoup de gentillesse.

Daniel Kalfon dirige avec tact et dévouement le Groupe d'Analyse Numérique du C.E.R.T. Son cours est à l'origine de mon goût pour cette matière, et je le remercie de l'intérêt constant qu'il a porté à mon travail.

J'ai beaucoup apprécié les nombreuses discussions que j'ai eues avec Philippe Villedieu. De nombreux résultats de cette thèse ont été obtenus en collaboration avec lui, pendant le D.E.A. Je lui témoigne ma reconnaissance amicale, ainsi qu'à Dominique Volpert, Patricia Klotz et Osmain Brocard pour leur grande disponibilité.

Pierre Leca m'a accueilli pendant quelques mois au sein de son service à l'O.N.E.R.A. Châtillon. J'ai pu profiter des compétences de son équipe de recherche. Merci en particulier à François Rogier, Frank Choukroun et François Xavier Roux pour leur aide sympathique.

Pierre Degond me fait l'honneur de présider le Jury, et je lui exprime toute ma gratitude. Merci également à Monsieur Leroux d'avoir accepté de participer au Jury.

Pierre Charrier et Jacques Audounet ont bien voulu être rapporteurs de ce mémoire. Je les remercie de leur lecture attentive et bienveillante du manuscrit, ainsi que de leurs conseils pertinents.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

Sommaire

Sommaire	i
Introduction.....	iii
A.Rappels d'électromagnétisme.....	1
A.1.Les équations du champ électromagnétique.....	1
A.1.1.Forme intrinsèque	1
A.1.2.Ecriture en coordonnées locales.....	2
A.1.3.Mise sous forme matricielle	2
A.2.Relations phénoménologiques.....	3
A.2.1.Loïs de comportement linéaires	3
A.2.2.Compatibilité avec la thermodynamique	3
A.3.Matrice des flux	5
A.3.1.Matrice des flux et relations de compatibilité	5
A.3.2.Matrice des flux et formule de Stokes, énergie.....	6
A.3.3.Matrice des flux et formule de Green.....	7
B.Le problème de la diffraction	9
B.1.Equations du champ diffracté.....	9
B.1.1.Champ total, champ diffracté.....	9
B.1.2.Problème d'évolution pour le champ diffracté	10
B.1.3.Introduction au problème asymptotique.....	11
B.2.Conditions aux limites.....	14
B.2.1.Obstacle métallique	15
B.2.2.Conditions aux limites d'impédance:.....	15
B.2.3.Introduction aux conditions transparentes	15
B.3.Formulation abstraite des problèmes précédents	16
B.3.1.Opérateurs maximaux monotones	16
B.3.2.Absence de condition aux limites, lemme de Friedrichs	19
B.3.3.Formulation du problème aux limites	20
C.Une méthode de décomposition des flux pour l'approximation des équations de Maxwell harmoniques.....	23
C.1.Décomposition de la matrice des flux.....	23
C.1.1.Calcul de la décomposition	23
C.1.2.Décomposition des flux et autres travaux.....	24
C.2.Formulation variationnelle	25
C.2.1.Définition des différentes formes linéaires et bilinéaires	25
C.2.2.Équivalence de la formulation variationnelle et des équations de Maxwell prises au sens des distributions.....	27
C.3.Approximation	28
C.3.1.Espace d'approximation	28
C.3.2.Cas des fonctions constantes par élément.....	29
D.Discrétisation des équations de Maxwell harmoniques	31
D.1.Existence et unicité de la solution du problème discret	31
D.1.1.Cas d'un ouvert Ω borné.	31
D.1.2.Existence et unicité si $\Omega = \mathbb{R}^n$	34
D.2.Décomposition de domaine	37

E.Convergence de l'approximation	41
E.1.Préliminaires.....	42
E.2.Propriétés de la forme bilinéaire B :	44
E.3.Convergence de l'approximation :	46
F.Conditions aux limites non réfléchissantes.....	48 bis
F.1.Condition aux limites discrète	48 bis
F.1.1.Inverse de convolution de l'opérateur de Maxwell discret	49
F.1.2.Formulation intégrale discrète	53
F.1.3.Nécessité d'une meilleure condition transparente	56
F.2.Condition aux limites transparente continue.	56
F.2.1.Formulation intégrale du premier ordre avec décomposition des flux	56
F.3.Annexe: Rappels sur les équations de convolution.....	59
F.3.1.Algèbres de convolution de distributions à support dans un cône:.....	60
F.3.2.Algèbre de convolution des distributions à décroissance rapide.....	65
G.Aspects algorithmiques.....	69
G.1.Algorithme de couplage adapté au calcul de la SER des cibles bidimensionnelles	69
G.2.Résolution du problème discret sur un ordinateur parallèle à mémoire distribuée	72
G.2.1.Description de l'IPSC 860	72
G.2.2.Programmation parallèle de l'algorithme de Jacobi par blocs.....	73
G.2.3.Second parallélisme de la méthode	74
H.Résultats numériques.....	75
H.1.Condition aux limites transparente discrète.....	75
H.1.1.Résultat d'un programme test.....	75
H.1.2.SER d'un cylindre métallique de rayon $0,5 \lambda$	81
H.1.3.Conclusion	84
H.2.Condition transparente continue	85
H.2.1.Cylindre métallique de rayon $0,5 \lambda$	85
H.2.2.Cylindre métallique de rayon $3,18 \lambda$	86
H.2.3.Triangle métallique	87
H.2.4.Triangle inhomogène.....	89
Conclusion.....	99

Introduction

Il est important, aussi bien pour l'ingénieur que pour le physicien, de disposer d'outils efficaces et généraux pour l'approximation numériques des phénomènes électromagnétiques. Mais malgré la puissance toujours accrue des ordinateurs scientifiques, il est encore difficile aujourd'hui de pouvoir calculer les champs électromagnétiques autour de géométries complexes, constituées de matériaux quelconques. En général, la stratégie de résolution est la suivante. On commence par découper la géométrie en plusieurs domaines. Un domaine (I) où les dimensions caractéristiques des objets sont grandes devant les longueurs d'ondes caractéristiques et où l'approximation de l'optique géométrique est envisageable. Des domaines (dont fait partie le domaine extérieur) de type (II) où les caractéristiques électromagnétiques du milieu sont constantes et où le problème peut être ramené, par équation intégrale, à un problème sur une surface finie. Enfin, un domaine (III) où les caractéristiques du milieu sont variables et où une discrétisation par éléments finis doit être réalisée.

La mise en oeuvre informatique est encore plus compliquée si le problème est instationnaire. La dimension supplémentaire (le temps) peut conduire rapidement à une saturation des ordinateurs les plus puissants à l'heure actuelle.

Dans cette thèse nous allons proposer une approximation utilisable dans les zones (II) et (III) et dans le cadre fréquentiel. Il s'agira donc d'un couplage éléments finis -équation intégrale.

Afin d'être le plus général possible nous travaillerons à la fois en champ électrique et en champ magnétique. En effet, habituellement, on élimine une de ces deux variables afin de réduire la taille des problèmes. Mais certains matériaux ont des lois de comportement couplant à la fois E , D , B et H , et cette élimination n'est pas toujours possible.

Dans la zone (III), le maillage en éléments finis d'une structure complexe et le calcul numérique sont grandement facilités s'il est permis à la triangulation d'être totalement déstructurée (non coïncidence des sommets des éléments). Nous avons ainsi été conduits à étudier une méthode d'éléments finis discontinus, basée sur une

décomposition des flux. Cette méthode est une adaptation au cadre fréquentiel de schémas classiques utilisés dans l'approximation des problèmes hyperboliques en temps.

Cette approche originale a nécessité de préciser certains résultats théoriques (notamment le lien qui existe entre le problème temporel et le problème fréquentiel) et de tenter de montrer la convergence de l'approximation obtenue, qui est non conforme.

Par ailleurs une équation intégrale adaptée à la méthode est décrite pour la résolution du problème dans la zone (II).

Enfin, depuis quelques années, on assiste à un développement du calcul scientifique sur des ordinateurs à architecture parallèle. Nous décrirons donc des algorithmes de résolution adaptés à de telles architectures.

A. Rappels d'électromagnétisme

Résumé:

Dans ce chapitre, on rappelle les propriétés élémentaires du champ électromagnétique: équations, énergie, lois de comportement, relations de compatibilité. En considérant des lois de comportement de matériaux parfaits, les équations de Maxwell prennent la forme d'un système hyperbolique symétrique linéaire, ou système de Friedrichs. Souvent, ce qui sera dit par la suite sera donc généralisable à de tels systèmes. L'étude des systèmes de Friedrichs est importante car ce type d'équations aux dérivées partielles intervient souvent en physique dans la modélisation des phénomènes de propagation linéaires. Ils peuvent également servir d'outil théorique pour l'étude des systèmes hyperboliques non linéaires (voir Alinhac [2], Payne [30]).

A.1. Les équations du champ électromagnétique

A.1.1. Forme intrinsèque

La forme intrinsèque des équations de Maxwell fait intervenir des dérivées extérieures faibles de formes différentielles. Elle est plus générale que l'écriture en terme d'équations aux dérivées partielles, car elle permet de prévoir le comportement des grandeurs physiques dans un changement de repère. Sur l'espace-temps $\mathbb{R}^4$, nous considérons donc un référentiel d'inertie, lié au système de coordonnées (x_0, x_1, x_2, x_3) . $x_0 = t$ permet de repérer le temps et (x_1, x_2, x_3) la position spatiale. Les équations de Maxwell relient entre elles diverses grandeurs physiques que nous supposerons dans la suite être des distributions sur $\mathbb{R}^4$ à valeurs complexes. Dans le repère considéré, la densité de charge électrique est notée ρ , le courant électrique, $j = (j_1, j_2, j_3)$. Le champ et l'induction magnétique sont notés respectivement $H = (H_1, H_2, H_3)$ et $B = (B_1, B_2, B_3)$. Le champ et l'induction électrique sont notés respectivement $E = (E_1, E_2, E_3)$ et $D = (D_1, D_2, D_3)$. Considérons alors les formes différentielles (ou plus généralement les courants):

$$F = (E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3) \wedge dx_0 +$$

$$B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$$

$$G = -(H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3) \wedge dx_0 +$$

$$D_1 dx_2 \wedge dx_3 + D_2 dx_3 \wedge dx_1 + D_3 dx_1 \wedge dx_2$$

$$\gamma = (j_1 dx_2 \wedge dx_3 + j_2 dx_3 \wedge dx_1 + j_3 dx_1 \wedge dx_2) \wedge dx_0 - \rho dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors (au sens des courants):

$$(A.1.1.1) \quad dF = 0$$

$$(A.1.1.2) \quad dG + \gamma = 0$$

Pour l'établissement de ces équations voir Choquet -Bruhat [11] et Mazet [28].

A.1.2. Ecriture en coordonnées locales

En coordonnées locales, les composantes des formes F , G et γ sont solutions des équations aux dérivées partielles suivantes (à prendre au sens des distributions):

$$(A.1.2.1) \quad \operatorname{div} j + \partial_t \rho = 0 \quad (\text{équation de conservation de la charge})$$

$$(A.1.2.2) \quad \operatorname{div} D = \rho$$

$$(A.1.2.3) \quad \operatorname{rot} H = j + \partial_t D \quad (\text{loi d'Ampère})$$

$$(A.1.2.4) \quad \operatorname{div} B = 0 \quad (\text{absence de charge magnétique libre})$$

$$(A.1.2.5) \quad \operatorname{rot} E + \partial_t B = 0 \quad (\text{loi de Faraday})$$

A ce stade, il y a plus d'inconnues que d'équations. Des relations phénoménologiques, décrivant le comportement du milieu où sont vérifiées (A.1.2.1)-(A.1.2.5), vont permettre de fermer le système. Ces relations sont issues de l'expérience, et sont moins universelles que les équations précédentes. Elles seront décrites au § A.2.

A.1.3. Mise sous forme matricielle

Dans la suite, il sera commode de réécrire les équations (A.1.2.3) et (A.1.2.5) sous forme matricielle. En effet, introduisons les matrices symétriques:

$$A^1 = \begin{bmatrix} & & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} & & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} & & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

alors les lois d'Ampères et Faraday s'écrivent (avec la règle de sommation sur les indices répétés):

$$(A.1.3.1) \quad \partial_t \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} + A^i \partial_i \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (i=1..3)$$

Nous écrirons également:

$$f(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = f(\partial) = A^i \partial_i = \begin{bmatrix} 0 & -\nabla \wedge \\ \nabla \wedge & 0 \end{bmatrix}$$

A.2. Relations phénoménologiques

A.2.1. Lois de comportement linéaires

Nous n'envisagerons dans la suite que des lois de comportement de matériaux parfaits (cf Bouix [7] et Petit [32]). Nous supposons donc qu'il existe des matrices réelles $\epsilon(t, x)$, $\mu(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ ($(t, x) \in \mathbb{R}^4$) appelées respectivement permittivité électrique, perméabilité magnétique et conductivité électrique du milieu, telles que dans le repère choisi:

$$(A.2.1.6) \quad D = \epsilon E$$

$$(A.2.1.7) \quad B = \mu H$$

$$(A.2.1.8) \quad j = \sigma E \quad (\text{loi d'Ohm})$$

Ces "lois" sont issues de l'expérience et sont assez précises dans la plupart des matériaux. Mais elles sont parfois insuffisantes. Ainsi, pour le fer, la loi d'Ohm s'avère mauvaise.

A.2.2. Compatibilité avec la thermodynamique

Les matrices $\epsilon(t, x)$, $\mu(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ ne sont pas quelconques. Leurs propriétés sont déduites de quelques principes physiques.

En particulier $\epsilon(t, x)$, $\mu(t, x)$ sont des matrices réelles symétriques définies positives et $\sigma(t, x)$ est réelle positive. Dans le vide $\epsilon = \mu = 1$ (les équations sont adimensionnées et la vitesse de la lumière est supposée égale à 1) et $\sigma = 0$.

Dans un matériau, ϵ et μ sont des matrices supérieures ou égales à l'identité, au sens où les produits $\langle \epsilon X, X \rangle$ et $\langle \mu X, X \rangle$ sont supérieurs ou égaux à $\langle X, X \rangle$ pour tout vecteur X de $\mathbb{C}^3$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit hermitien usuel, sesqui-linéaire par rapport à la seconde variable).

A présent, les équations (A.1.2.1)-(A.1.2.5) se réduisent donc à:

$$(A.2.2.1) \quad \partial_t (\epsilon E) - \text{rot } H = -\sigma E$$

$$(A.2.2.2) \quad \partial_t (\mu H) - \text{rot } E = 0$$

système de 6 équations à 6 inconnues qui entraînent notamment (il suffit d'appliquer l'opérateur divergence à ces équations):

$$(A.2.2.3) \quad \text{div}(\epsilon E) = \text{div}(\epsilon E)_{t=0} = c_1(x) \quad (\text{dans tout ouvert spatial où } \sigma \text{ est identiquement nul au cours du temps})$$

$$(A.2.2.4) \quad \text{div}(\mu H) = \text{div}(\mu H)_{t=0} = c_2(x)$$

où c_1 et c_2 sont des distributions indépendantes du temps.

Afin d'écrire les équations (A.2.2.1)-(A.2.2.2) sous forme matricielle, introduisons encore:

$$\Phi = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}, A^0 = \begin{bmatrix} \epsilon(t,x) & 0 \\ 0 & \mu(t,x) \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \sigma(t,x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nous obtenons alors:

$$(A.2.2.5) \quad \partial_t A^0(t,x) \Phi + A^i \partial_i \Phi + B(t,x) \Phi = 0$$

Cette écriture permet d'envisager des lois de comportements plus générales, de la forme $D=D(E,H)$ et $B=B(E,H)$. La matrice A^0 n'est alors plus diagonale par blocs.

Dans la suite, toute solution de (A.2.2.5) sera désignée par champ électromagnétique total (on exprime ainsi que le second membre des équations de Maxwell est nul).

Sous la forme (A.2.2.5), les équations de Maxwell entrent dans une classe bien connue d'équations aux dérivées partielles: celle des systèmes hyperboliques symétriques du premier ordre ou systèmes de Friedrichs. Ces systèmes permettent de modéliser la plupart des phénomènes hyperboliques linéaires de la physique. Donnons en la définition générale.

définition (A.2.2.6):

Un opérateur aux dérivées partielles défini sur $D'(\mathbb{R}^n)^p$ de la forme

$$G\phi = \partial_k A^k(t,x)\phi + B(t,x)\phi \quad (k=0..n)$$

est un système de Friedrichs ssi

(A.2.2.7) les matrices complexes $p \times p$ $(A^k(t,x))_{k=0..n}$ sont (assez) régulières en (t,x) et hermitiennes

(A.2.2.8) A^0 est uniformément définie positive

(A.2.2.9) B est assez régulière.

Si de plus:

(A.2.2.10) $B + {}^t \overline{B}$ est positive

le système est alors dit dissipatif

Tout ce qui suit est adaptable, moyennant des modifications mineures, aux systèmes de Friedrichs dissipatifs.

A.3. Matrice des flux

Soit $n=(n_1,n_2,n_3)$, un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$, la matrice des flux $f(n) = A^i n_i$ est définie par:

$$f(n_1,n_2,n_3) = f(n) = A^i n_i = \begin{bmatrix} 0 & -n^\wedge \\ n^\wedge & 0 \end{bmatrix}$$

Elle intervient de façon fondamentale dans les relations de compatibilité entre milieux, formule de Green et formule de Stokes. Nous détaillons ici ces propriétés. Le schéma numérique décrit plus loin est basé sur une décomposition de celle-ci en partie positive et négative.

A.3.1. Matrice des flux et relations de compatibilité

Soit Σ , une surface spatio-temporelle régulière, orientée par une normale $N = (n_t, n_1, n_2, n_3) = (n_t, n)$, séparant $\mathbb{R}^4$ en deux ouverts Ω_1 et Ω_2 , et soit Φ une distribution appartenant à $C^1(\overline{\Omega_i})$ pour $i=1,2$. Supposons que Φ soit solution des équations de Maxwell (A.2.2.5) écrites au sens des distributions:

$$\partial_t A^0(x) \Phi + A^i \partial_i \Phi + B(x) \Phi = 0$$

Par conséquent, dans Ω_1 et Ω_2 , où Φ est C^1 , l'équation ci-dessus est vérifiée au sens des fonctions, et sur la discontinuité Σ , Φ vérifie la relation de saut

$$(A.3.1.1) \quad n_t A^0(x)_e \Phi_e + A^i n_i \Phi_e = n_t A^0(x)_d \Phi_d + A^i n_i \Phi_d$$

Les indices (e) (comme extérieur) et (d) (comme dedans) sont relatifs respectivement au côté de N et au côté de -N sur Σ . Dans le cas où n_t est nul (la discontinuité est purement spatiale) (A.3.1.1) se réduit à:

$$(A.3.1.2) \quad (n \wedge E)_e = (n \wedge E)_d \text{ et } (n \wedge H)_e = (n \wedge H)_d$$

Les composantes tangentielles de E et H sont donc continues. Afin d'estimer le saut des composantes normales, il faut appliquer l'opérateur divergence à (A.2.2.1)-(A.2.2.2) ainsi, si σ est identiquement nul (cf (A.2.2.3)-(A.2.2.4)):

$$\text{div}(\epsilon E) = \text{div}(\epsilon E)_{t=0}$$

$$\text{div}(\mu H) = \text{div}(\mu H)_{t=0}$$

Ces deux équations supplémentaires entraînent alors:

$$(A.3.1.3) \quad \langle n, \epsilon E \rangle_e - \langle n, \epsilon E \rangle_d = (\langle n, \epsilon E \rangle_e - \langle n, \epsilon E \rangle_d) \Big|_{t=0}$$

$$\text{et } \langle n, \mu H \rangle_e - \langle n, \mu H \rangle_d = (\langle n, \mu H \rangle_e - \langle n, \mu H \rangle_d) \Big|_{t=0}$$

(ici $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire usuel ou le produit hermitien, semilinéaire par rapport à la deuxième variable).

On voit sur l'exemple des équations de Maxwell que le noyau de la matrice des flux joue un rôle important. Afin d'estimer le saut des composantes de ϕ qui sont dans le noyau de $f(n)$, il faut faire "quelque chose en plus". Pour des systèmes de Friedrichs généraux, une matrice des flux non inversible correspond à l'existence de solutions de (A.2.2.5) stationnaires.

A.3.2. Matrice des flux et formule de Stokes, énergie

C'est la définition d'une énergie qui permet de faire intervenir les grandeurs électromagnétiques dans d'autres théories physiques (mécanique, thermodynamique...). Effectuons le produit hermitien de l'équation (A.2.2.5) par Φ , et prenons en la partie réelle (on obtient ainsi un produit scalaire réel):

$$\text{Re} (\langle \partial_t A^0 + f(\partial) + B \rangle \Phi, \Phi) = 0 \quad \text{soit:}$$

$$(A.3.2.1) \quad \partial_t \langle A^0 \Phi, \Phi \rangle + \partial_i \langle A^i \Phi, \Phi \rangle = -2 \text{Re} \langle B \Phi, \Phi \rangle$$

$W = \langle A^0 \Phi, \Phi \rangle = \langle \epsilon E, E \rangle + \langle \mu H, H \rangle$ représente la densité volumique d'énergie.

$\partial_i \langle A^i \Phi, \Phi \rangle$ s'écrit encore $\text{div} (\overline{E} \wedge H + E \wedge \overline{H})$, et $\overline{E} \wedge H + E \wedge \overline{H}$ est appelé vecteur de Pointing.

De plus $-\text{Re} \langle B \Phi, \Phi \rangle = -\text{Re} \langle \sigma E, E \rangle \leq 0$, ainsi (A.3.2.1) devient:

$$(A.3.2.2) \quad \partial_t W + \text{div} (\overline{E} \wedge H + E \wedge \overline{H}) = -2\text{Re} \langle \sigma E, E \rangle$$

(A.3.2.2) est l'équation de conservation de l'énergie. Le terme au second membre traduit la dissipation par effet Joule. Notons également pour mémoire que (A.2.2.5) est un système hyperbolique écrit sous forme symétrique et que W est une entropie de Lax pour ce système (voir Lax [24], Mazet [8]).

Considérons maintenant un domaine spatio-temporel D de frontière ∂D et de normale N sortante à D sur ∂D . N a pour composantes $(n_t, n_1, n_2, n_3) = (n_t, n)$. Supposons que Φ soit $C^1(\Omega)$ et intégrons (A.3.2.2) sur D , alors la formule de Stokes conduit à:

$$(A.3.2.3) \quad \int_D \partial_t \langle A^0 \Phi, \Phi \rangle + \partial_i \langle A^i \Phi, \Phi \rangle = \int_{\partial D} n_t \langle A^0 \Phi, \Phi \rangle + n_i \langle A^i \Phi, \Phi \rangle \\ = -2 \int_D \text{Re} \langle B \Phi, \Phi \rangle$$

$\langle (A^0 n_t + A^i n_i) \Phi, \Phi \rangle$ est le flux d'énergie de Φ à travers ∂D . $\langle (A^i n_i) \Phi, \Phi \rangle = \langle f(n) \Phi, \Phi \rangle$ est le flux d'énergie spatial.

A.3.3. Matrice des flux et formule de Green

Dans le paragraphe A.3.2, nous avons défini l'énergie électromagnétique en prenant la partie réelle du produit hermitien de l'équation (A.2.2.5) par Φ et en utilisant la formule de Stokes. L'égalité $\text{Re} \langle A^i \partial_i \Phi, \Phi \rangle = \frac{1}{2} \partial_i \langle A^i \Phi, \Phi \rangle$ est également très importante. Il est en effet bien connu des physiciens que lorsqu'on travaille avec des grandeurs complexes, le flux d'énergie est la partie réelle d'un produit hermitien.

La formule de Green, elle, s'utilise de la façon suivante. Considérons le même domaine spatio-temporel $\underline{D}$ de frontière ∂D et de normale N sortante à D sur ∂D . Supposons que Φ et Ψ soient $C^1(\Omega)$. Effectuons le produit hermitien de (A.2.2.5) par Ψ et intégrons sur D , alors:

$$\begin{aligned}
 \text{(A.3.3.1)} \quad \int_D < \partial_t A^0 \Phi, \Psi > + < \partial_i A^i \Phi, \Psi > = \int_{\partial D} n_t < A^0 \Phi, \Psi > + n_i < A^i \Phi, \Psi > \\
 + \int_D < \Phi, -\partial_t A^0 \Psi > + < \Phi, -\partial_i A^i \Psi > = \int_D - < B \Phi, \Psi >
 \end{aligned}$$

B. Le problème de la diffraction

Introduction:

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la fois aux équations de Maxwell temporelles et fréquentielles. Curieusement, ces deux études sont souvent présentées de façons indépendantes, et les conditions de rayonnement qui interviennent dans les équations fréquentielles sont parfois difficiles à appréhender. Nous préférons interpréter ici les solutions fréquentielles comme des comportements asymptotiques de solutions temporelles en admettant le principe dit d'amplitude limite (étudié par exemple par Vainberg [47] et Rauch [38]). Un intermédiaire pratique est d'étudier un problème fréquentiel perturbé, transformé de Laplace du problème instationnaire, plus facile à résoudre, en envisageant des fréquences complexes de partie imaginaire < 0 et de faire tendre la partie imaginaire vers 0. C'est la méthode d'absorption-limite.

Par ailleurs, il s'avère que le concept d'opérateur maximal-monotone permet de bien poser d'un coup le problème temporel et le problème fréquentiel perturbé. Nous passons donc un certain temps à montrer que la partie spatiale de l'opérateur de Maxwell est un opérateur maximal-monotone. Dans le cas du problème aux limites cette démonstration n'est pas simple et repose sur des résultats fondamentaux de Friedrichs, Lax, Philipps ([16], [17], [25]) et Rauch [37]. La présentation adoptée ne prétend pas à l'originalité (voir Petkov [34] par exemple). Elle a l'avantage d'être valable pour une classe assez vaste de systèmes de Friedrichs.

B.1. Equations' du champ diffracté

B.1.1. Champ total, champ diffracté

Les équations (A.2.2.5) sont très générales et permettent de décrire les phénomènes électromagnétiques (électrostatiques ou électrodynamiques) dans la plupart des milieux. Nous allons nous restreindre ici à un problème plus particulier, dit de la diffraction: un corps dont les caractéristiques électromagnétiques ϵ , μ , σ sont connues, est plongé à l'instant $t=0$ dans le vide où règne une onde incidente, en général purement propagative (absence de charge électrique ou magnétique). Il s'agit de déterminer la perturbation du champ incident induite par le corps: le champ diffracté. Le champ diffracté est donc la différence $\Phi_{\text{tot}} - \Phi_{\text{inc}}$, où Φ_{tot} est le champ électromagnétique total en présence de l'obstacle et Φ_{inc} le champ incident qui régnerait dans l'espace en l'absence de celui-ci. Φ_{inc} est donc solution de:

$$(B.1.1.1) \quad \left| \begin{array}{l} \partial_t \Phi_{inc} + f(\partial) \Phi_{inc} = 0 \\ \text{div } E_{inc} = \text{div } H_{inc} = 0 \text{ (si absence de charges)} \end{array} \right.$$

Φ_{tot} est dû à l'apparition du corps. Pour les temps négatifs, il s'identifie donc à Φ_{inc} . Introduisons $Y(t)$, l'échelon de Heavyside afin de modéliser l'apparition brusque de l'obstacle, et posons:

$$A^0(t,x) = I + Y(t) (A^0(x) - I) \text{ et}$$

$$B(t,x) = Y(t) B(x)$$

Φ_{tot} est alors solution de:

$$(B.1.1.2) \quad \partial_t A^0(t,x) \Phi_{tot} + f(\partial) \Phi_{tot} + B(t,x) \Phi_{tot} = 0$$

Nous allons supposer que l'obstacle est inclus dans un compact K . Par conséquent d'après le § A.2.2, $A^0 \geq I$, $B \geq 0$ et dans le complémentaire de K , $A^0 = I$ et $B = 0$.

B.1.2. Problème d'évolution pour le champ diffracté

Dans le passé ($t < 0$) le champ total est connu ($\Phi_{tot} = \Phi_{inc}$) ainsi que le champ diffracté Φ ($\Phi = 0$). Le problème de la diffraction va donc se mettre sous la forme d'un problème de Cauchy (problème d'évolution en temps avec condition initiale à $t=0$) vérifié par Φ . La dérivation du premier terme de (B.1.1.2) au sens des distributions conduit à:

$$[A^0(x) \Phi_{tot}] (t=0^+) - [\Phi_{inc}] (t=0^-) = 0$$

et permet de préciser la donnée initiale de Cauchy. De plus, pour $t > 0$,

$$\partial_t A^0(x) (\Phi + \Phi_{inc}) + f(\partial) (\Phi + \Phi_{inc}) + B(x) (\Phi + \Phi_{inc}) = 0$$

et nous obtenons ainsi le problème de Cauchy du champ diffracté pour les temps positifs:

$$(B.1.2.1) \quad \left| \begin{array}{l} \partial_t A^0(x) \Phi + f(\partial) \Phi + B(x) \Phi = -B \Phi_{inc} + (I - A^0) \partial_t \Phi_{inc} = S(\Phi_{inc}) \\ \text{avec la condition initiale: } \Phi(t=0^+) = (A^0(x) - I) \Phi_{inc}(t=0^-) \end{array} \right.$$

D'après les propriétés de A^0 et B , la condition initiale ainsi que le second membre $S(\Phi_{inc})$ sont à support dans K . Le problème (B.1.2.1) est encore écrit de façon formelle (nous n'avons pas justifié l'existence des traces sur le plan $t=0$). Le cadre mathématique correct sera décrit au § B.3.

B.1.3. Introduction au problème asymptotique

Lorsque le champ incident est sinusoïdal en temps:

$$\Phi_{\text{inc}}(t, x) = \Phi_{\text{inc}}(x) e^{i\omega t},$$

le problème asymptotique consiste à déterminer le comportement asymptotique en temps (t tend vers $+\infty$) du champ diffracté. Notre hypothèse de travail fondamentale sera que le principe dit d'amplitude limite est vrai, c'est à dire que $\Phi(t, x)$ peut se mettre sous la forme:

$$(B.1.3.1) \quad \Phi(t, x) = \Phi(x) e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^m \Phi_k(x) e^{i\omega_k t} + u(t, x) \quad \text{où} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0$$

avec $\omega_k \neq \omega$ et la limite étant prise en un sens à définir. Cette décomposition exprime que le champ diffracté est superposition de plusieurs types d'ondes: une onde harmonique de pulsation ω correspondant à la pulsation du champ incident, des ondes harmoniques (en nombre fini) correspondant à des fréquences propres du problème, et d'une onde évanescente.

On connaît des situations où ce principe est vrai (voir Rauch [38], Vainberg [47]) pour des systèmes de Friedrichs généraux, pour les équations de Maxwell, ou pour des systèmes d'ordre plus élevé (équation des ondes). Des hypothèses géométriques jouent un rôle fondamental dans ces travaux. Il suffit par exemple que toutes les singularités de la condition initiale (transportées par les bicaractéristiques nulles du système) s'échappent de tout compact spatial en un temps fini; l'obstacle est alors dit non captif.

Mais il existe aussi des cas où ce principe est faux: dans une cavité métallique, par exemple, quand ω est fréquence propre.

Si le principe d'amplitude limite est vrai, on peut montrer que les Φ_k (les modes propres) sont à support compact (voir Rauch [38]), donc invisibles pour un observateur éloigné. L'inconnue du problème asymptotique est donc la distribution $\Phi(x)$. Dans la suite de ce travail, nous nous contentons de supposer la décomposition (B.1.3.1) acquise et nous montrons comment le problème asymptotique (déterminer $\Phi(x)$) peut être alors naturellement défini via la transformée de Laplace en temps.

Définition (B.1.3.2):

Soit Ω un ouvert borné contenant K (le corps inhomogène). Soit $u(t,x)$ un élément de $C([0, +\infty[; L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, +\infty[; L^2(\Omega))$ (espace naturel d'appartenance des solutions du problème d'évolution: cf plus loin). Soit p un complexe de partie réelle strictement positive. La transformée de Laplace partielle par rapport au temps de u au point p est:

$$L_p(u) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t, \cdot) dt$$

c'est une fonction holomorphe par rapport à p , à valeur dans $L^2(\Omega)$ sur l'ouvert $\text{Re}(p) > 0$.

Posons $p = i\omega + \nu$ avec $\nu > 0$ et $M_\nu(u) = \nu L_{i\omega + \nu}(u)$. Le théorème suivant montre que l'opérateur limite M_{0+} permet d'isoler dans (B.1.3.1) le terme essentiel, c'est à dire $\Phi(x)$.

Théorème (B.1.3.3):

supposons que $\Phi(t,x)$ soit de la forme (B.1.3.1):

$$\Phi(t,x) = \Phi(x) e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^m \Phi_k(x) e^{i\omega_k t} + u(t,x)$$

avec $\Phi, \Phi_k \in L^2(\Omega)$, $u(t,x) \in C([0, +\infty[; L^2(\Omega))$,

$$\omega_k \neq \omega \text{ et (B.1.3.4): } \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = 0$$

alors $\lim_{\nu \rightarrow 0^+} M_\nu(\Phi(t,x)) = \Phi(x)$ dans $L^2(\Omega)$

remarque:

La convergence de $\|u(t,x)\|^2$ vers 0 dans $L^2(\Omega)$ quand $t \rightarrow +\infty$ entraîne bien sûr la convergence de cette même quantité vers 0 en moyenne temporelle quand $t \rightarrow +\infty$. L'hypothèse (B.1.3.4) n'est donc qu'un moyen d'avoir un énoncé plus général. De plus, cette hypothèse joue un rôle important dans certains travaux de théorie du scattering des problèmes hyperboliques (cf. Petkov [33], [34], Stefanov et Georgiev [46]).

preuve:

Par linéarité de la transformée de Laplace, on peut calculer M_ν de chaque terme de la somme séparément:

$$M_\nu(\Psi(x)e^{i\eta t}) = \nu \Psi(x) L_{\nu+i\omega}(e^{i\eta t}) = \nu \Psi(x) \frac{1}{\nu + i(\omega - \eta)} \quad (\nu > 0)$$

$$\rightarrow 0 \text{ si } \omega \neq \eta$$

$$\rightarrow \Psi(x) \text{ si } \omega = \eta$$

Il reste donc à montrer que $M_\nu(u)$ tend vers 0 quand ν tend vers 0^+ . Or, par application de l'inégalité de Jensen ($x \rightarrow x^2$ est une fonction convexe et $\nu e^{-\nu t}$ une mesure positive de masse 1 sur $\mathbb{R}$), on a:

$$\left\| \nu \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} u(t, \cdot) dt \right\|^2 \leq \nu \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} \|u(t, \cdot)\|^2 dt$$

et par une intégration par partie, le deuxième terme de l'inéquation précédente devient

$$\nu^2 \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} t f(t) dt, \text{ avec } f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|^2 d\tau$$

Puisque $f(t)$ tend vers 0 en $+\infty$, elle peut être majorée par $g(t)$ régulière, décroissante, tendant vers 0 en $+\infty$. Alors

$$\begin{aligned} \nu^2 \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} t f(t) dt &\leq \nu^2 \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} t g(t) dt = \nu^2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\nu}}} e^{-\nu t} t g(t) dt \\ &\quad + \nu^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{\nu}}}^{+\infty} e^{-\nu t} t g(t) dt \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est majoré par $\nu g(0)$ et le second par $g(\frac{1}{\sqrt{\nu}})$. Par

conséquent $M_\nu(u)$ tend bien vers zéro quand ν tend vers 0^+ . ♦

L'application de M_ν aux équations (B.1.2.1) conduit aux équations harmoniques perturbées, comme le montre le théorème suivant:

Théorème (B.1.3.5):

$M_v(\Phi(t,x)) = \Phi_v(x)$ ($v > 0$) vérifient les équations suivantes (dites harmoniques perturbées):

$$(B.1.3.6) \quad p A^0(x) \Phi_v + f(\partial) \Phi_v + B(x) \Phi_v = -B \Phi_{inc}(x) + (I - A^0) p \Phi_{inc}(x) = S_v(\Phi_{inc})$$

preuve: immédiate, sachant que $L_p(\partial_t v) = p L_p(v) - v(0^+)$. ♦

D'après ce qui précède, l'inconnue du problème asymptotique est la limite dans $L^2(\Omega)$ de $M_v(\Phi(t,x)) = \Phi_v(x)$ quand v tend vers 0^+ . Cette limite sera notée indifféremment $\Phi(x)$ ou Φ_{0^+} . Φ_v sera également notée Φ lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre. En prenant la limite au sens des distributions de l'équation (B.1.3.6), on voit que $\Phi(x)$ est solution des équations dites harmoniques:

$$(B.1.3.7) \quad i\omega A^0(x) \Phi(x) + f(\partial) \Phi(x) + B(x) \Phi(x) = -B \Phi_{inc}(x) + (I - A^0) i\omega \Phi_{inc}(x)$$

Le problème (B.1.3.7) est en général mal posé sans condition sur Φ à l'infini (condition de rayonnement), et admet une infinité de solutions. En revanche, notre définition du problème asymptotique assure existence et unicité de la solution si le principe d'amplitude limite est vrai.

Par ailleurs, nous verrons dans la suite que (B.1.3.6) est un problème bien posé dans L^2 . Sans admettre le principe d'amplitude limite, on pourrait se demander si la limite de Φ_v quand v tend vers 0^+ existe (procédé d'absorption-limite). On définit ainsi un nouveau problème bien posé au moins en unicité (par unicité de la limite).

Dans Abboud Nédelec [1], sont montrées l'existence et l'unicité du problème harmonique avec condition de rayonnement. Le matériau inhomogène est supposé analytique par morceau sans conducteur parfait. Voir Bendali [4] pour une application du procédé d'absorption limite à l'équation de Helmholtz.

B.2. Conditions aux limites

Il peut arriver qu'il faille adjoindre à (B.1.2.1) ou (B.1.3.6) des conditions aux limites sur $\partial\Omega$. Nous distinguerons les conditions aux limites locales sur $\partial\Omega$ qui expriment l'appartenance de Φ à $N(x)$, espace vectoriel dépendant de $x \in \partial\Omega$, des conditions aux limites globales qui lient entre elles toutes les valeurs de Φ sur $\partial\Omega$. Les conditions transparentes sont nécessairement globales. Donnons quelques exemples dans le cas de l'électromagnétisme.

B.2.1. Obstacle métallique

Supposons qu'une partie de $\partial\Omega$, notée $\partial\Omega_{\text{met}}$ soit une interface entre le domaine de calcul Ω et un métal infiniment conducteur (c'est à dire un matériau parfait ohmique de conductivité σ infinie). En un point x de $\partial\Omega_{\text{met}}$ le champ électrique total vérifie $n \wedge E_{\text{tot}} = 0$, n étant la normale à $\partial\Omega_{\text{met}}$. L'obstacle métallique a la propriété de réfléchir l'énergie, c'est à dire qu'au point x , le flux d'énergie du champ total est nul, en effet:

$$\Phi_{\text{tot}} = \begin{bmatrix} E_{\text{tot}} \\ H_{\text{tot}} \end{bmatrix} \text{ et } A^j n_j \Phi_{\text{tot}} = \begin{bmatrix} 0 & -n \wedge \\ n \wedge & 0 \end{bmatrix} \Phi_{\text{tot}} = \begin{bmatrix} -n \wedge H_{\text{tot}} \\ n \wedge E_{\text{tot}} \end{bmatrix}$$

donc

$$\langle f(n) \Phi_{\text{tot}}, \Phi_{\text{tot}} \rangle = \langle -n \wedge H_{\text{tot}}, E_{\text{tot}} \rangle = 0 \text{ car } E_{\text{tot}} \text{ est tangent à } \partial\Omega.$$

B.2.2. Conditions aux limites d'impédance:

Elles sont de la forme

$n \wedge E_{\text{tot}} = \alpha n \wedge n \wedge H_{\text{tot}}$ α étant une fonction de $x \in \partial\Omega$ de partie réelle positive (resp négative). Le flux d'énergie est alors:

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle f(n) \Phi_{\text{tot}}, \Phi_{\text{tot}} \rangle &= \text{Re} \langle -n \wedge H_{\text{tot}}, E_{\text{tot}} \rangle + \text{Re} \langle n \wedge E_{\text{tot}}, H_{\text{tot}} \rangle \\ &= \text{Re} \langle n \wedge E_{\text{tot}}, H_{\text{tot}} \rangle + \text{Re} \langle \alpha n \wedge n \wedge H_{\text{tot}}, H_{\text{tot}} \rangle \text{ (produit mixte)} \\ &= 2 \text{Re} (\alpha) \langle n \wedge n \wedge H_{\text{tot}}, H_{\text{tot}} \rangle = -2 \text{Re} (\alpha) (H_{\text{tot}}^T)^2 \end{aligned}$$

où H_{tot}^T désigne la composante tangentielle de H_{tot} c'est à dire $H_{\text{tot}}^T = H_{\text{tot}} - \langle H_{\text{tot}}, n \rangle n$

Par conséquent, le flux d'énergie est rentrant (resp sortant).

B.2.3. Introduction aux conditions transparentes

Pour l'analyse numérique du problème de la diffraction, il est nécessaire de se restreindre à un domaine borné Ω , le domaine de calcul, contenant le corps inhomogène K . La frontière de Ω est appelée frontière artificielle. Il s'agit de trouver sur $\partial\Omega$ une condition aux limites qui assure l'existence et l'unicité de la solution de (B.1.2.1) ou (B.1.3.6) et d'autre part est telle que cette solution est bien la restriction de la solution du problème de la diffraction en domaine non borné. Souvent, cette condition (dite transparente) a la forme d'une équation intégrale:

$$\int_{\partial\Omega} M(x-y) \Phi(y) d\sigma(y) = 0, \text{ pour tout } x \text{ de } \partial\Omega$$

C'est une condition globale. Signalons qu'il existe des conditions aux limites locales approximativement transparentes. Celles-ci sont en général d'autant plus précises que $\partial\Omega$ est loin du corps inhomogène.

B.3. Formulation abstraite des problèmes précédents

B.3.1. Opérateurs maximaux monotones

Le concept d'opérateur maximal monotone va nous permettre de résoudre aussi bien le problème harmonique perturbé (B.1.3.6) que le problème d'évolution (B.1.2.1) grâce au théorème de Hille-Yosida. Commençons par en rappeler la définition (voir Brézis [9] et [10] pour un exposé plus complet):

Définition (B.3.1.1):

Soit H un espace de Hilbert complexe, et A un opérateur linéaire de domaine $D(A) \subset H$ et d'image $R(A) \subset H$. A est dit maximal-monotone ssi:

$$(B.3.1.2) \quad \forall x \in D(A), \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle = [Ax, x] \geq 0 \quad (\text{monotonie})$$

$$(B.3.1.3) \quad (I+A) \text{ est surjectif de } D(A) \text{ sur } H \quad (\text{maximalité})$$

La définition entraîne en particulier les propriétés suivantes:

$$(B.3.1.4) \quad D(A) \text{ est dense dans } H \text{ et } A \text{ est un opérateur fermé.}$$

$$(B.3.1.5) \quad \forall p \in \mathbb{C} \text{ de partie réelle } \operatorname{Re}(p) > 0, (pI+A) \text{ est bijectif de } D(A) \text{ sur } H \text{ et}$$

$$\|(pI+A)^{-1}\|_{L(H)} = \sup_{|x|=1} \|(pI+A)^{-1}(x)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(p)} \quad (L(H) \text{ est l'espace des opérateurs}$$

bornés de H dans H , muni de la norme habituelle).

A cette classe d'opérateur, le théorème de Hille-Yosida est applicable. De plus, dans une certaine mesure, certaines propriétés des opérateurs auto-adjoints s'étendent à ces opérateurs (en particulier la possibilité d'un calcul fonctionnel, voir par exemple Maslov [27]). Nous rappelons le théorème de Hille-Yosida.

Théorème de Hille-Yosida (B.3.1.6):

Soit A un opérateur maximal monotone de l'espace de Hilbert H.

Pour tout u_0 dans $D(A)$, $\exists ! u$ dans $C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ solution du problème d'évolution:

$$\frac{du}{dt} + A u = 0$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{de plus,}$$

$$\|u(t)\| \leq \|u_0(t)\| \quad \text{et} \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0(t)\|$$

Ainsi, la propriété (B.3.1.5) assurera l'existence et l'unicité dans L^2 du problème harmonique perturbé (B.1.3.6), tandis que le problème d'évolution (B.1.2.1) sera bien posé dans $C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ grâce au théorème de Hille-Yosida. Avant de démontrer la maximale-monotonie de

$$G = (A^0)^{-1} (f(\partial) + B),$$

nous rappelons quelques résultats:

Définition (B.3.1.7):

Soit A un opérateur de H dans H à domaine dense. $A^\#$ de H dans H à domaine dense est dit adjoint formel de A ssi:

$$\forall u \in D(A) \text{ et } \forall v \in D(A^\#), \langle Au, v \rangle = \langle u, A^\#v \rangle$$

Alors A et $A^\#$ sont fermables

preuve: Notons $G(A)$ le graphe de A, inclus dans $H \times H$.

Il suffit de montrer que $\overline{G(A)}$ et $\overline{G(A^\#)}$ définissent des opérateurs univoques. Soient donc (u, f^1) et $(u, f^2) \in \overline{G(A)}$. Il existe (u_n^1, f_n^1) et $(u_n^2, f_n^2) \in G(A)$ tendant respectivement vers (u, f^1) et (u, f^2) dans $H \times H$. $\forall v \in D(A^\#)$, on a donc:

$$\langle f_n^1, v \rangle = \langle u_n^1, A^\#v \rangle \rightarrow \langle f^1, v \rangle = \langle u, A^\#v \rangle \text{ et}$$

$$\langle f_n^2, v \rangle = \langle u_n^2, A^\#v \rangle \rightarrow \langle f^2, v \rangle = \langle u, A^\#v \rangle$$

Par conséquent $\langle f^1, v \rangle = \langle f^2, v \rangle \forall v \in D(A^\#)$. Donc $f^1 = f^2$ car $D(A^\#)$ est dense dans H et $\overline{G(A)}$ définit bien un opérateur $\overline{A}$ univoque. Il en est de même pour $A^\#$. ♦

En général l'adjoint de A , noté A^* , est différent de la fermeture de l'adjoint formel. Ce fait nous amène donc à la définition suivante.

Définition (B.3.1.8):

u élément de H est dit solution forte de $Au = f \in H$ ssi $\overline{A} u = f$

u élément de H est dit solution faible de $Au = f \in H$ ssi $\forall u \in D(A)$ et $\forall v \in D(A^\#)$,

$$\langle f, v \rangle = \langle u, A^\# v \rangle$$

Il est facile de voir que toute solution forte est faible. Si la réciproque est vraie, il est alors possible d'identifier l'adjoint de A et la fermeture de l'adjoint formel $A^\#$:

Théorème (B.3.1.9):

si A et $A^\#$ sont adjoints formels dans H (donc à domaines denses par définition) et si $\forall f \in H$, toute solution faible de $Au=f$ est forte, alors:

$$\overline{A^\#} = \overline{A}^* \quad \text{et}$$

$$\overline{A} = (A^\#)^*$$

preuve: en effet, dire que $(u, f) \in G(A^{\#*})$ est équivalent à u est solution faible de $Au = f$. Donc u est solution forte, donc $(u, f) \in G(\overline{A})$. Mais on a a fortiori $\langle u, A^\# v \rangle = \langle f, v \rangle \Rightarrow f = \overline{A} u$ donc $G(\overline{A})$ est aussi égal à $G(\overline{A^{\#*}})$. On a donc $\overline{A} = (A^\#)^* = \overline{A^{\#*}}$ et comme un espace de Hilbert est réflexif, l'adjoint de l'adjoint d'un opérateur fermé dense est égal à lui même et $A^\# = \overline{A}^* \quad \blacklozenge$

Le théorème suivant est fondamental pour la suite:

Théorème (B.3.1.10):

Si A et $A^\#$ sont adjoints formels, monotones, et si $\forall f \in H$, toute solution faible de $Au=f$ est solution forte, alors:

$\overline{A}$ et $\overline{A^\#}$ sont maximaux monotones

preuve: pour tout u de $D(A)$, $[(I+A)u, u] \geq u^2$. Par définition de $\overline{A}$ on a aussi $[(I+\overline{A})u, u] \geq u^2$ et d'après l'inégalité de Schwartz

$$(B.3.1.11) \quad |(I+\overline{A})u| \geq |u| \quad \forall u \in D(\overline{A})$$

De même,

$$(B.3.1.12) \quad \left| (I + \overline{A^\#})u \right| \geq |u| \quad \forall u \in D(\overline{A^\#})$$

Mais on a aussi $\overline{A^\#} = \overline{A}^*$. Ainsi, les estimations (B.3.1.11) et (B.3.1.12) sont valables pour $\overline{A}$ et son adjoint. Par application d'un théorème classique, on déduit que $I + \overline{A}$ et $I + \overline{A^\#}$ sont surjectifs. ♦

B.3.2. Absence de condition aux limites, lemme de Friedrichs

Afin d'illustrer de façon simple les théorèmes précédents, nous nous plaçons ici dans le cas de l'espace entier. H est donc ici $L^2(\mathbb{R}^3)$ muni du produit scalaire:

$$\langle u, v \rangle = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle A^0(x) u(x), v(x) \rangle dx \right)$$

$G = (A^0)^{-1} (A^i \partial_i + B)$ $D(G) = C_0^1(\mathbb{R}^3)$ (champs C^1 à support compact) est bien dense dans H

$$G^\# = (A^0)^{-1} (-A^i \partial_i + B^*) \quad (\text{le } * \text{ désigne la transconjuguée}) \quad D(G^\#) = C_0^1(\mathbb{R}^3)$$

Nous voulons montrer que toute solution faible de $G(u) = f$ est forte, c'est à dire que: $\forall f \in H, \forall u \in D(G)$ et $\forall v \in D(G^\#), (f, v) = (u, G^\# v) \Rightarrow \exists (u_n) \in D(G)$ telle que $u_n \rightarrow u$ et $G u_n \rightarrow G u$

La suite u_p est construite par régularisation. Soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ positive telle que: $\int \varphi dx = 1$

et $\varphi_p = p^n \varphi(px)$. Alors, il est bien connu que $u_p = \varphi_p * u \rightarrow u$ dans H . Le lemme suivant a été démontré par Friedrichs [16]

lemme de Friedrichs (B.3.2.1):

$$\left| (G u) * \varphi_p - G(u * \varphi_p) \right| \text{ tend vers } 0 \text{ dans } H \text{ quand } p \text{ tend vers l'infini}$$

Il est alors simple de prouver le théorème suivant:

théorème (B.3.2.2):

$$\left| \overline{G} \text{ et } \overline{G^\#} \text{ sont maximaux monotones} \right|$$

B.3.3. Formulation du problème aux limites

Nous considérons ici les équations (B.1.3.6) dans un ouvert Ω (pas nécessairement borné pour pouvoir envisager des problèmes extérieurs) de frontière $\partial\Omega$ régulière auxquelles on adjoint des conditions aux limites locales.

Le problème aux limites est plus délicat. Il faut en effet définir les traces sur $\partial\Omega$ des solutions éventuelles. De plus la régularisation ne peut plus se faire simplement par convolution puisque Ω possède à priori une forme quelconque. Lax et Philipps dans [25] ont résolu le problème en utilisant une partition de l'unité (q_i) sur Ω et un opérateur de régularisation tangentielle sur les q_i frontière. Les démonstrations ont été étendues et simplifiées par Rauch dans [37]. Commençons par introduire les notations.

$$G = (A^0)^{-1} (A \cdot \partial_j + B)$$

La condition aux limite va être exprimée dans la définition des domaines de G et $G^\#$.

$$D(G) = \{ u \in C_0^1(\overline{\Omega}) \text{ tels que } u \in N(x) \text{ sur } \partial\Omega \}$$

$C_0^1(\overline{\Omega})$ étant l'ensemble des fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$ à support compact pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3$ sur $\overline{\Omega}$ (donc $C_0^1(\overline{\Omega}) = C^1(\overline{\Omega})$ si Ω est borné).

$$G^\# = (A^0)^{-1} (-A \cdot \partial_j + B^*)$$

$$D(G^\#) = \{ u \in C_0^1(\overline{\Omega}) \text{ tels que } u \in N^\#(x) \text{ sur } \partial\Omega \} \text{ avec } N^\#(x) = (f(n(x))N(x))^\perp$$

La condition aux limites $u \in N^\#(x)$ sur $\partial\Omega$ sera appelée la condition adjointe de $u \in N(x)$ sur $\partial\Omega$. Elle permet d'assurer que G et $G^\#$ sont adjoints formels. En effet, la formule de Green donne:

$$\forall (u, v) \in D(G) \times D(G^\#)$$

$$(B.3.3.1) \quad (Gu, v) = (u, G^\#v) + \int_{\partial\Omega} (f(n)u, v)$$

soit $(Gu, v) = (u, G^\#v)$ par définition de $N^\#$.

Avant de donner l'analogie du lemme de Friedrichs dans le cas d'un problème aux limites, rappelons quelques résultats concernant les traces.

$H_G = \{ u \in L^2(\Omega) \text{ tels que } Gu \in L^2(\Omega) \}$ est l'espace naturel d'appartenance des solutions de $(p+Gu) = f \in L^2(\Omega)$. Il est muni de la norme du graphe de G :

$$|u|_{H_G}^2 = |u|_H^2 + |Gu|_H^2$$

Il est bien connu que sur $\partial\Omega$, il est possible de définir la trace des composantes de u qui sont dans l'image de $f(n)$. Cette trace est dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Ainsi pour $v \in H^1(\Omega)$ et $u \in H_G$, la formule de Green (B.3.3.1) a bien encore un sens. Le théorème suivant montre qu'il est possible de l'étendre à $v \in H_{G^\#}$:

Théorème (Rauch) (B.3.3.2):

L'application bilinéaire qui a $(u,v) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$ associe $\langle f(n)u, v \rangle$ admet un prolongement unique et continu de $H_G \times H_{G^\#}$ dans $\text{Lip}(\partial\Omega)'$ et (B.3.3.1) est valable.

remarque:

$\text{Lip}(\partial\Omega)'$ est le dual de l'espace des fonctions Lipschitziennes sur la frontière. Il est inclus dans $D'(\partial\Omega)$ mais n'a pas de représentation utile. De plus, $\int_{\partial\Omega} \langle f(n)u, v \rangle$ s'interprète comme l'action de $(f(n)u, v)$ sur la fonction lipschitzienne constante égale à 1 sur $\partial\Omega$.

Voici alors l'analogie du théorème de Friedrichs pour les problèmes aux limites:

Théorème (Rauch) (B.3.3.3):

(B.3.3.4) si $\dim \text{Ker } f(n(x)) = \text{cste}$ sur chaque composante connexe de $\partial\Omega$.

(B.3.3.5) si $\text{Ker } f(n(x)) \subset N(x)$ sur $\partial\Omega$

(B.3.3.6) si $u \in H_G$ et $u \in N(x)$ sur $\partial\Omega$

alors, il existe $u_k \in C_0^1(\overline{\Omega})$ telle que $u_k \in N(x)$ sur $\partial\Omega$ et $u_k \rightarrow u$ dans H_G

Ce théorème exprime exactement (sous certaines hypothèses vérifiées par l'opérateur spatial de Maxwell) que faible implique fort puisque $u_k \rightarrow u$ dans H_G est équivalent à $u_k \rightarrow u$ dans L^2 et $Gu_k \rightarrow Gu$ dans L^2 . Il ne reste alors plus qu'à déterminer les conditions aux limites assurant à la fois la monotonie de G et de $G^\#$. De telles conditions sont dites maximales positives.

Définition (B.3.3.7):

la condition aux limites $u \in N(x)$ est maximale positive ssi:

$$(B.3.3.8) \quad u \in N(x) \Rightarrow \langle f(n(x))u(x), u(x) \rangle \geq 0$$

(B.3.3.9) $\dim N(x)$ = nombre des valeurs propres positives de $f(n(x))$ en comptant leur multiplicité.

La condition (B.3.3.9) exprime aussi qu'il n'existe pas de plus grand espace vectoriel contenant $N(x)$ et vérifiant (B.3.3.8) (d'où le mot maximal). Regroupons ces résultats dans le théorème suivant:

Théorème (B.3.3.10):

Sous les hypothèses du théorème (B.3.3.3) et de la définition (B.3.3.7) les fermatures de G et $G^\#$ sont maximales monotones.

Remarque: On montre facilement que les conditions aux limites métal (B.2.1) et impédance (B.2.2) sont maximales positives.

C. Une méthode de décomposition des flux pour l'approximation des équations de Maxwell harmoniques

Introduction:

Dans ce chapitre est introduite la méthode de décomposition des flux dont on étudiera les propriétés dans les chapitres suivants. Cette méthode est une adaptation au cadre fréquentiel des méthodes classiques de décomposition des flux utilisées pour les systèmes hyperboliques. A ce sujet, on peut citer les travaux de Van Leer, Harten, Lax, Mazet [8], Croisille [13] mais la liste est loin d'être exhaustive !

Nous présentons une formulation variationnelle, introduite par Lesaint et Raviart [25'] et [25''], pour l'approximation par éléments finis des systèmes de Friedrichs. Cette formulation, connue dans la littérature sous le nom de méthode de Galerkin discontinue, est équivalente aux équations de Maxwell harmoniques, moyennant une hypothèse de régularité sur la solution. Sa restriction à un espace de dimension finie de fonctions discontinues, permet d'obtenir le schéma de décomposition des flux.

Nous étudierons plus particulièrement l'approximation par éléments finis P_0 . Le schéma de décomposition des flux est alors équivalent à une approximation par volumes finis cell-center du premier ordre, mais l'approche variationnelle sera utilisée dans toutes les démonstrations. Les résultats des chapitres suivants s'étendent donc sans difficulté majeure à des éléments finis d'ordre plus élevé.

C.1. Décomposition de la matrice des flux

C.1.1. Calcul de la décomposition

La matrice des flux intervient aussi bien dans la formule de Green (A.3.3.1) que dans l'équation de conservation de l'énergie (A.3.2.2). C'est une décomposition de celle-ci en partie positive et négative qui va donner à la méthode toutes ses propriétés. Soit $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$ un vecteur unitaire, la matrice des flux $\mathbf{f}(\mathbf{n})=\mathbf{A}^i \mathbf{n}_i$, est une matrice symétrique réelle. Appelons Π^+ (respectivement Π^-) la projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de $\mathbf{f}(\mathbf{n})$ associés à des valeurs propres positives (respectivement négatives). $\mathbf{f}(\mathbf{n})^-$ (respectivement $\mathbf{f}(\mathbf{n})^+$) est la partie négative (respectivement positive) de la matrice des flux, c'est le produit $\mathbf{f}(\mathbf{n})\Pi^-$ (respectivement $\mathbf{f}(\mathbf{n})\Pi^+$). Dans le cas de l'opérateur de Maxwell, $\mathbf{f}(\mathbf{n})$ est une matrice 6×6 . Ses valeurs

propres sont 1, -1, 0, toutes de multiplicité 2. Les espaces propres associés seront notés V_1 , V_{-1} et V_0 . La projection orthogonale sur V_0 est notée Π^0 .

Soit $\Phi = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$, les projections de Φ sur les espaces propres V_1 , V_{-1} et V_0 sont alors:

$$\Pi^0 \Phi = \begin{bmatrix} E_n \\ H_n \end{bmatrix}, \Pi^+ \Phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_t - n \wedge H_t \\ H_t + n \wedge E_t \end{bmatrix}, \Pi^- \Phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_t + n \wedge H_t \\ H_t - n \wedge E_t \end{bmatrix}$$

E_n et H_n sont les composantes de E et H suivant n , c'est à dire $\langle E, n \rangle = n$ et $\langle H, n \rangle = n$. E_t et H_t sont les composantes tangentielles, $E_t = E - E_n$ et $H_t = H - H_n$. Les matrices $f(n)^+$ et $f(n)^-$, symétriques, définissent des formes quadratiques respectivement positive et négative. On définit également $|f(n)| = f(n)^+ - f(n)^-$. C'est une matrice symétrique, positive. De plus, la décomposition vérifie de façon évidente:

$$f(n) = f(n)^+ + f(n)^-$$

$$f(-n)^+ = - f(n)^-$$

C.1.2. Décomposition des flux et autres travaux...

D'après ce qui précède, écrire $f(n)^- \Phi = 0$ est équivalent à $E_t + n \wedge H_t = 0$ et $H_t - n \wedge E_t = 0$. En fait, ces deux dernières égalités sont équivalentes, car elles se déduisent l'une de l'autre par application du produit vectoriel par n . Elles sont également équivalentes à:

$$(C.1.2.1) \quad n \wedge E + n \wedge n \wedge H = 0$$

Il s'agit d'une condition d'impédance (cf § B.2.2) avec $\alpha = -1$. Employée comme condition aux limites, la relation $f(n)^- \Phi = 0$ est en fait une condition aux limites approximativement transparente (cf Bendali, Halpern [5] et Rauch, Halpern [19]).

On peut également envisager des conditions aux limites inhomogènes du type $n \wedge E + n \wedge n \wedge H = s$. On reconnaît alors le terme d'interface utilisé par Després et al [15], qui joue un rôle fondamental dans leur méthode de décomposition de domaine.

Enfin, la décomposition des flux induit une décomposition formelle du symbole (différentiel) de l'opérateur spatial en deux symboles pseudo-différentiels. Cette décomposition suivant le signe des valeurs propres du symbole est à la base de la méthode de Enss en théorie du scattering (voir Stefanov, Georgiev [46] et Vodev [49], par exemple). Les estimations qui s'en déduisent permettent de montrer l'existence des opérateurs des ondes et de scattering.

C.2. Formulation variationnelle

Dans la suite, Ω sera un ouvert de $\mathbb{R}^3$ où nous chercherons à approcher (B.1.3.6). Deux cas seront envisagés:

Ω est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ régulière. Dans ce cas Φ vérifiera la condition aux limites $\Phi \in \text{Ker } f(n)^- \text{ sur } \partial\Omega$.

$\Omega = \mathbb{R}^3$. Dans ce cas il n'y aura pas de conditions aux limites.

Dans ces deux cas, le problème (B.1.3.6) est bien posé d'après le § B.3.

Habituellement, les formulations variationnelles des problèmes d'électromagnétisme sont écrites au second ordre: par application de l'opérateur rotationnel aux équations, les équations, dites du double rotationnel, sont obtenues. En multipliant par une fonction test et en intégrant, cette méthode conduit à des approximations conformes dans H_{rot} . Dans la suite, nous allons conserver les équations écrites au premier ordre, et décrire une approximation non conforme de celles-ci au moyen d'éléments finis discontinus. La décomposition des flux conduira à une forme bilinéaire positive dans le cas continu et coercive dans le cas discret. Ainsi l'existence et l'unicité du problème discret sont assurées. D'autres propriétés importantes découleront également de cette formulation positive.

C.2.1. Définition des différentes formes linéaires et bilinéaires

Dans la suite, nous n'envisagerons que des solutions de (B.1.3.6) H^1 par morceaux dans Ω , afin d'éviter les difficultés liées à la définition des traces. $H_m^1(\Omega)$ désignera l'ensemble de tels champs. Plus précisément, nous dirons que $\Phi \in H_m^1(\Omega)$ ssi il existe une famille d'ouverts $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tels que:

(C.2.1.1) Les R_i sont connexes et disjoints deux à deux, de mesure de Lebesgue supérieure ou égale à $\alpha > 0$

$$(C.2.1.2) \quad \overline{\cup R_i} = \overline{\Omega}$$

(C.2.1.3) Les frontières ∂R_i des R_i sont assez régulières (par exemple C^1 par morceaux, de dimension 2, R_i étant localement d'un seul côté de ∂R_i)

(C.2.1.4) Pour tout i , la restriction de Φ à R_i est dans $H^1(R_i)$

$D\Phi$ sera l'ensemble des discontinuités de Φ , c'est à dire $\cup \partial R_i \setminus \partial\Omega$. $R\Phi$ est le complémentaire de $D\Phi$ dans Ω . $D\Phi$ est une surface orientée par une normale n arbitraire. Sur $\partial\Omega$, la normale n est orientée vers l'extérieur de Ω . Comme au § A.3, l'indice (e) sera relatif au côté de n et l'indice (d) au côté de $-n$.

Lorsque ν est strictement positif, une norme plus fine que la norme L^2 va jouer un rôle important dans la suite. Elle sera notée $|| \cdot ||$, tandis que la norme L^2 sera notée $|\cdot|$. E est alors l'espace des éléments de $H_m^1(\Omega)$ de norme "double barre" finie:

$$E = \left\{ \Phi \in H_m^1(\Omega), ||\Phi||^2 = \int_{\Omega} \langle \nu A^0 \Phi, \Phi \rangle + \int_{D\Phi} \langle \Phi_e - \Phi_d, \frac{|f(n)|}{2} (\Phi_e - \Phi_d) \rangle + \int_{\partial\Omega} \langle \Phi_d, \frac{|f(n)|}{2} \Phi_d \rangle < +\infty \right\}$$

(Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^3$, le dernier terme doit être supprimé de la définition ci-dessus)

Il est clair que la définition ne dépend pas de l'orientation de la normale sur $D\Phi$, de plus, $|| \cdot ||$ est une norme issue d'un produit scalaire. E est donc un espace préhilbertien (nous n'avons pas étudié son complété. Peut-être possède-t-il des propriétés intéressantes).

Introduisons maintenant les deux formes bilinéaires suivantes, qui interviendront dans la formulation variationnelle:

$$B^{\sim}(\Phi, \Psi) = \int_{R\Phi \cap R\Psi} \langle (pA^0 + f(\partial) + B) \Phi, \Psi \rangle + \int_{D\Phi \cup D\Psi} \langle f(n)^-(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_d \rangle + \int_{D\Phi \cup D\Psi} \langle f(n)^+(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_e \rangle + \int_{\partial\Omega} \langle -f(n)^- \Phi_d, \Psi_d \rangle$$

$B(\Phi, \Psi)$ sera la partie réelle de $B^{\sim}(\Phi, \Psi)$.

p est un complexe tel que $p = i\omega + \nu$ avec $\nu > 0$.

Les formes bilinéaires précédentes ne dépendent pas de l'orientation de la normale sur $D\Phi$, car $f(-n)^+ = -f(n)^-$

Enfin, comme auparavant, l'intégrale sur $\partial\Omega$ doit être supprimée si $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Les formes linéaires de la formulation variationnelle seront $A^{\sim}(\Psi)$ et $A(\Psi) = \text{Re } A^{\sim}(\Psi)$ avec:

$$A^{\sim}(\Psi) = \int_{\Omega} \langle S(\Phi_{\text{inc}}), \Psi \rangle$$

Considérons alors les problèmes linéaires suivants:

Problème (C.2.1.5):

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Phi \in E, \text{ tel que:} \\ p A^0(x) + f(\partial) + B(x) \Phi = S(\Phi_{\text{inc}}) \\ \Phi \in \text{Ker } f(n)^- \text{ sur } \partial\Omega \text{ (si } \Omega \neq \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Problème (C.2.1.6):

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Phi \in E, \text{ tel que: } \forall \Psi \in E \\ B^{\sim}(\Phi, \Psi) = A^{\sim}(\Psi) \end{cases}$$

Problème (C.2.1.7):

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Phi \in E, \text{ tel que: } \forall \Psi \in E \\ B(\Phi, \Psi) = A(\Psi) \end{cases}$$

Le problème (C.2.1.5) n'est autre que le problème évoqué au § B.3, avec une hypothèse de régularité supplémentaire sur la solution.

Il est immédiat que les problèmes (C.2.1.7) et (C.2.1.6) sont équivalents. Il suffit de changer Ψ en $i\Psi$. Nous allons maintenant montrer que les problèmes (C.2.1.5), (C.2.1.6) et (C.2.1.7) sont équivalents.

C.2.2. Équivalence de la formulation variationnelle et des équations de Maxwell prises au sens des distributions.

Théorème (C.2.2.1):

$$\left| \text{Les problèmes (C.2.1.5), (C.2.1.6) et (C.2.1.7) sont équivalents} \right.$$

preuve: il suffit de montrer, d'après la remarque qui précède, que (C.2.1.5) et (C.2.1.6) sont équivalents.

(C.2.1.5) $\Rightarrow$ (C.2.1.6): soit Φ , solution de (C.2.1.5). Sur $R\Phi$, Φ vérifie

$$p A^0(x) + f(\partial) + B(x) \Phi = S(\Phi_{\text{inc}}) \quad \text{au sens des fonctions.}$$

Sur $D\Phi$, $f(n) \Phi_e = f(n) \Phi_d$ donc $f(n)^- \Phi_e = f(n)^- \Phi_d$ et $f(n)^+ \Phi_e = f(n)^+ \Phi_d$. Sur $\partial\Omega$ (s'il y a lieu), $f(n)^- \Phi = 0$. En multipliant par une fonction test et en intégrant, on retrouve bien (C.2.1.6).

(C.2.1.6) $\Rightarrow$ (C.2.1.5): soit Φ , solution de (C.2.1.6). En prenant pour fonctions tests des Ψ à support dans $R\Phi$, on voit que:

$$p A^0(x) + f(\partial) + B(x) \Phi = S(\Phi_{\text{inc}})$$

partout où Φ est régulière, donc: $\forall \Psi$,

$$\begin{aligned} B^-(\Phi, \Psi) = & \int_{D\Phi} \langle f(n)^-(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_d \rangle + \int_{D\Phi} \langle f(n)^+(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_e \rangle \\ & + \int_{\partial\Omega} \langle -f(n)^- \Phi_d, \Psi_d \rangle = 0 \end{aligned}$$

en choisissant des fonctions tests dans $D(\Omega)$, on a $\Psi_e = \Psi_d$ sur $D\Phi$ et $\Psi = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc $f(n) (\Phi_e - \Phi_d) = 0$ sur $D\Phi$, donc Φ est solution de $p A^0(x) + f(\partial) + B(x) \Phi = S(\Phi_{\text{inc}})$ au sens des distributions dans Ω . Enfin, en prenant Ψ à support sur Ω , on peut conclure que $f(n)^- \Phi = 0$ sur $\partial\Omega$. ♦

C.3. Approximation

C.3.1. Espace d'approximation

Soit un maillage $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Les ouverts q_i vérifient les propriétés suivantes, analogues aux propriétés des ouverts R_i du § C.2.1.

(C.3.1.1) Les q_i sont des ouverts bornés et disjoints deux à deux de mesure de Lebesgue supérieure ou égale à αh^3 ($\alpha > 0$) et de diamètre inférieur ou égal à h (cette hypothèse exprime que les éléments ne sont pas trop "aplatis").

$$(C.3.1.2) \quad \overline{\cup q_i} = \overline{\Omega}$$

(C.3.1.3) Les frontières ∂q_i des q_i sont des variétés de classe C^1 par morceaux de dimension 2, q_i étant localement d'un seul côté de ∂q_i .

Nous supposons également dans la suite que les discontinuités éventuelles des matrices A^0 et B coïncident avec des morceaux de frontières d'éléments. En effet, on peut montrer que si le second membre S est assez régulier, les discontinuités de Φ sont localisées sur les discontinuités des coefficients diélectriques. La contrainte n'est alors pas gênante sur le plan théorique dans la mesure où l'on peut envisager des éléments finis courbes, et où les discontinuités sont connues a priori. Bien sûr, en pratique, les éléments utilisés seront des polyèdres. L'erreur due à la discrétisation de la géométrie ne sera pas étudiée.

L'approximation de Φ sera notée ϕ . Dans chaque élément q_i , la restriction de ϕ à q_i sera prise dans un espace vectoriel $V(q_i)$ de dimension finie de champs définis sur q_i (dit espace élémentaire). H sera l'espace d'approximation, c'est à dire l'espace vectoriel des champs ϕ de norme "double barre" finie et tel que la restriction de ϕ à q_i est dans $V(q_i)$. L'approximation choisie est donc discontinue, aucune relation de compatibilité n'est imposée a priori à l'interface de deux éléments. Si l'espace élémentaire associé à q_i est l'espace vectoriel des champs polynomiaux de degré inférieur ou égal à m dans q_i , il sera alors noté $P^m(q_i)$. Nous détaillerons le cas $m=0$, et signalerons les propriétés qui persistent si $m \geq 1$. L'approximation étudiée est alors obtenue en restreignant la formulation variationnelle (C.2.1.7) à H :

Problème (C.3.1.4):

Trouver $\phi \in H$ tel que $\forall \psi \in H$:

$$B(\phi, \psi) = A(\phi, \psi)$$

C.3.2. Cas des fonctions constantes par élément

Une méthode d'éléments finis discontinus permet d'envisager le cas des fonctions constantes par élément. Le problème (C.3.1.4) devient alors particulièrement simple à étudier, et le schéma numérique qui en découle très facile à programmer. L'inconvénient majeur est la lenteur de la convergence de l'approximation. Cette difficulté sera envisagée plus loin. Commençons par trouver une formulation plus simple de (C.3.1.4):

Proposition (C.3.2.1):

si pour chaque élément q , $V(q) = P^0(q)$, alors (C.3.1.4) est équivalent à

trouver $\phi \in H$ tel que pour tout élément q du maillage:

$$(C.3.2.2) \quad \int_q (pA^0 + B) \phi_d + \int_{\partial q \cap \Omega} f(n)^- (\phi_e - \phi_d) + \int_{\partial q \cap \partial \Omega} f(n)^- (0 - \phi_d) = \int_q S$$

$\mathbf{n}$ est la normale sortante à q sur ∂q . L'indice (e) (comme extérieur) est relatif à l'extérieur de q , et l'indice (d) (comme dedans) est relatif à l'intérieur.

preuve:

$\Rightarrow$ immédiat en considérant des champs test à support dans q .

$\Leftarrow$ immédiat en multipliant (C.3.2.2) par des champs test à support dans q et en sommant sur les éléments. ♦

Dans le chapitre suivant, nous étudions en détail les propriétés de (C.3.2.2) et plus généralement de (C.3.1.4).

D. Discrétisation des équations de Maxwell harmoniques

Introduction:

Nous allons maintenant étudier les propriétés élémentaires du schéma décrit précédemment dans le cas d'éléments finis de type P_0 (approximation constante par élément). On prouve l'existence et l'unicité de la solution du problème discret, qui est classiquement équivalent à résoudre un système linéaire, ainsi que la convergence d'un algorithme itératif de résolution par sous domaines, utile pour la programmation de la méthode sur un ordinateur parallèle. Cet algorithme s'interprète comme une méthode de Jacobi par bloc sur la matrice associée au problème discret.

En vue de la description de conditions aux limites non réfléchissantes, nous envisagerons deux cas: celui d'un maillage infini de l'espace, régulier en dehors du domaine de calcul, et celui, plus classique, d'un maillage fini.

Toutes les propriétés du schéma proviennent de la coercivité de la forme bilinéaire introduite au chapitre C, quand celle-ci est restreinte à l'espace d'approximation.

D.1. Existence et unicité de la solution du problème discret

La démonstration d'existence et d'unicité de la solution du problème discret (C.3.2.2) est plus simple lorsque Ω est borné. En effet, l'espace d'approximation est alors un espace vectoriel de dimension finie. Nous commençons donc par envisager ce cas.

D.1.1. Cas d'un ouvert Ω borné.

estimation (D.1.1.1):

Si Ω est un ouvert borné et si φ est solution de

$$\forall q, \int_q (pA^0 + B) \varphi_d + \int_{\partial q \cap \Omega} f(n)^- (\varphi_e - \varphi_d) + \int_{\partial q \cap \partial \Omega} f(n)^- (\varphi_e - \varphi_d) = 0$$

(rien n'est supposé sur $w = f(n)^- \varphi_e$ sur $\partial \Omega$), alors φ vérifie les estimations

$$\begin{aligned}
 & \text{(D.1.1.2)} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(n)^- \varphi_e, \varphi_e \rangle + \langle f(n)^+ \varphi_d, \varphi_d \rangle \\
 &= - \int_{\Omega} \langle (B + \nu A^0) \varphi_d, \varphi_d \rangle - \int_{D\varphi \cap \Omega} \langle \frac{|f(n)|}{2} (\varphi_e - \varphi_d), (\varphi_e - \varphi_d) \rangle \\
 & \quad + \int_{\partial\Omega} \langle \frac{f(n)^-}{2} (\varphi_e - \varphi_d), (\varphi_e - \varphi_d) \rangle
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \text{(D.1.1.3)} \quad \int_{\Omega} \langle i\omega A^0 \varphi_d, \varphi_d \rangle + \int_{D\varphi \cap \Omega} \langle \frac{f(n)}{2} \varphi_e, \varphi_d \rangle - \langle \frac{f(n)}{2} \varphi_d, \varphi_e \rangle \\
 & \quad + \int_{\partial\Omega} \langle \frac{f(n)^-}{2} \varphi_e, \varphi_d \rangle - \langle \frac{f(n)^-}{2} \varphi_d, \varphi_e \rangle = 0
 \end{aligned}$$

preuve:

Effectuons le produit hermitien de l'équation

$$\forall q, \int_q (pA^0 + B) \varphi_d + \int_{\partial q \cap \Omega} f(n)^- (\varphi_e - \varphi_d) + \int_{\partial q \cap \partial\Omega} f(n)^- (\varphi_e - \varphi_d) = 0$$

par φ_d

$$\forall q, \int_q \langle (pA^0 + B) \varphi_d, \varphi_d \rangle + \int_{\partial q \cap \Omega} \langle f(n)^- (\varphi_e - \varphi_d), \varphi_d \rangle + \int_{\partial q \cap \partial\Omega} \langle f(n)^- (\varphi_e - \varphi_d), \varphi_d \rangle = 0$$

La partie réelle de cette égalité est :

$$\begin{aligned}
 & \int_q \langle (\nu A^0 + B) \varphi_d, \varphi_d \rangle + \int_{\partial q} \langle \frac{f^-}{2} \varphi_e, \varphi_e \rangle - \langle \frac{f^-}{2} \varphi_d, \varphi_d \rangle \\
 & \quad + \int_{\partial q} \langle \frac{-f^-}{2} (\varphi_e - \varphi_d), \varphi_e - \varphi_d \rangle = 0
 \end{aligned}$$

et en sommant sur les éléments, on obtient:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{R\varphi} \langle (vA^0 + B)\varphi_d, \varphi_d \rangle + \int_{D\varphi \cap \Omega} \langle \frac{f}{2}\varphi_e, \varphi_e \rangle - \langle \frac{f}{2}\varphi_d, \varphi_d \rangle \\
&+ \int_{\partial\Omega} \langle \frac{f}{2}\varphi_d, \varphi_d \rangle - \langle \frac{f}{2}\varphi_d, \varphi_d \rangle + \int_{D\varphi \cap \Omega} \langle \frac{|f|}{2}(\varphi_e - \varphi_d), \varphi_e - \varphi_d \rangle \\
&+ \int_{\partial\Omega} \langle \frac{-f}{2}(\varphi_e - \varphi_d), \varphi_e - \varphi_d \rangle + \int_{\partial\Omega} \langle \frac{f}{2}\varphi_e, \varphi_e \rangle - \langle \frac{f}{2}\varphi_d, \varphi_d \rangle
\end{aligned}$$

de plus,

$$\begin{aligned}
&\int_{D\varphi \cap \Omega} \langle \frac{f}{2}\varphi_e, \varphi_e \rangle - \langle \frac{f}{2}\varphi_d, \varphi_d \rangle + \int_{\partial\Omega} - \langle \frac{f}{2}\varphi_d, \varphi_d \rangle = \\
&\sum_q \int_{\partial q} - \langle \frac{f}{2}\varphi_d, \varphi_d \rangle = \sum_q \int_q - \partial_i \langle \frac{A^i}{2}\varphi_d, \varphi_d \rangle = 0
\end{aligned}$$

car φ est constant par élément. Ainsi, la première estimation est prouvée.

Quant à la partie imaginaire, elle s'écrit:

$$\int_q \langle i\omega A^0 \varphi_d, \varphi_d \rangle + \int_{\partial q} \langle \frac{f}{2}\varphi_e, \varphi_d \rangle - \langle \frac{f}{2}\varphi_d, \varphi_e \rangle = 0$$

après sommation sur les éléments, on obtient sans difficulté la seconde estimation. ♦

théorème (D.1.1.2):

si Ω est un ouvert borné, le problème discret (C.3.2.2) admet une solution et une seule.

preuve: le problème discret (C.3.2.2) étant un problème linéaire carré, il suffit de montrer que si $S=0$ et $f^-(n)\varphi_e=0$ sur $\partial\Omega$, nécessairement $\varphi=0$. Or d'après la première estimation du théorème (D.1.1.1), φ vérifie alors:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \langle \frac{|f(n)|}{2}\varphi_d, \varphi_d \rangle \\
&= - \int_{\Omega} \langle (B+vA^0)\varphi_d, \varphi_d \rangle - \int_{D\varphi \cap \Omega} \langle \frac{|f(n)|}{2}(\varphi_e - \varphi_d), (\varphi_e - \varphi_d) \rangle
\end{aligned}$$

chaque terme de l'égalité est donc nul. En particulier, si v est strictement positif ou si B est coercif, $\int_{\Omega} \langle (B+vA^0) \varphi_d, \varphi_d \rangle$ est le carré d'une norme et donc nécessairement $\varphi = 0$. Sinon, on peut simplement dire que sur $D\varphi \cap \Omega$, $f(n)^+ \varphi_e = f(n)^+ \varphi_d$ et $f(n)^- \varphi_e = f(n)^- \varphi_d$ et que sur $\partial\Omega$, $f(n)^+ \varphi_d = f(n)^- \varphi_e = 0$. En injectant ces égalités dans la seconde estimation du théorème (D.1.1.1) on obtient $\int_{\Omega} \langle i\omega A^0 \varphi_d, \varphi_d \rangle = 0$, et donc $\varphi = 0$. ♦

D.1.2. Existence et unicité si $\Omega = \mathbb{R}^n$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, il est commode de faire une hypothèse supplémentaire sur le maillage afin de simplifier les démonstrations. Nous supposons qu'en dehors d'un compact K , le maillage est composé d'éléments cubiques identiques. Cette condition sera reprise au chapitre F afin d'obtenir des conditions aux limites transparentes discrètes. Alors, on peut montrer que les solutions de (C.3.2.2) sont nécessairement à décroissance rapide à l'infini (cf chapitre F). Les difficultés de convergence d'intégrales sont ainsi évitées. L'estimation du paragraphe précédent devient donc:

estimation (D.1.2.1):

Si $\Omega = \mathbb{R}^3$ et si φ est à décroissance rapide et solution de

$$\forall q, \int_q (pA^0 + B) \varphi_d + \int_{\partial q} f(n)^- (\varphi_e - \varphi_d) = 0$$

alors φ vérifie les estimations

$$(D.1.2.2) \quad 0 = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle (B+vA^0) \varphi_d, \varphi_d \rangle - \int_{D\varphi} \langle \frac{|f(n)|}{2} (\varphi_e - \varphi_d), (\varphi_e - \varphi_d) \rangle$$

et

$$(D.1.2.3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \langle i\omega A^0 \varphi_d, \varphi_d \rangle + \int_{D\varphi} \langle \frac{f(n)}{2} \varphi_e, \varphi_d \rangle - \langle \frac{f(n)}{2} \varphi_d, \varphi_e \rangle = 0$$

preuve: elle est en tout point identique à celle qui précède. Les intégrales ont bien un sens car φ est à décroissance rapide. ♦

théorème (D.1.2.2):

si $\Omega = \mathbb{R}^3$, le problème discret (C.3.2.2) admet une solution et une seule qui soit à décroissance rapide.

preuve:

1) unicité: la démonstration est la même que ci-dessus.

2) existence: nous allons considérer la suite récurrente suivante,

$\varphi^0 = 0$ et φ^n calculé en résolvant le schéma suivant:

$$(D.1.2.4) \quad \forall q, \int_q (i\omega A^0 + B) \varphi_d^n + \int_{\partial q} f^-(n) (\varphi_e^{n-1} - \varphi_d^n) = \int_q S$$

(à chaque itération, la valeur de φ dans l'élément q est calculée à partir du flux rentrant de φ dans les éléments voisins à l'itération précédente). D'après le résultat d'existence et d'unicité précédent, la suite φ^n existe (on résout à chaque itération le schéma sur un maillage à un élément). Si une suite extraite converge sur tout compact, c'est nécessairement vers la solution du problème global.

Il suffit donc de montrer que φ^n est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. A cette fin, multiplions (D.1.2.4) par φ_d^n et sommons sur les éléments, on obtient:

$$\left| \sum_q \int_q (i\omega A^0 + B) \varphi_d^n \varphi_d^n + \int_{\partial q} -f(n)^- \varphi_d^n \varphi_d^n \right| = \left| \sum_q \int_q S \varphi_d^n + \int_{\partial q} -f(n)^- \varphi_e^{n-1} \varphi_d^n \right|$$

par l'inégalité de Schwartz et après réarrangement des termes:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\sum_q \int_q \omega \varphi_d^n \varphi_d^n \right)^2 + \left(\sum_q \int_{\partial q} -f(n)^- \varphi_d^n \varphi_d^n \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq |S| |\varphi^n| + \\ & \left(\sum_q \int_{\partial q} -f(n)^- \varphi_d^n \varphi_d^n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_q \int_{\partial q} f(n)^+ \varphi_d^{n-1} \varphi_d^{n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

puisque $\int_q f(n) = 0$, on a: $\int_q -f(n)^- = \int_q f(n)^+$

D'autre part, sur l'espace élémentaire $P^0(q)$, $\int_q \langle -f(n)^- u, u \rangle$ est le carré d'une semi-norme issue de la forme semilinéaire positive $\int_q \langle -f(n)^- u, v \rangle$. Montrons que cette forme est définie.

En effet, $\int_q \langle -f(n)^- u, u \rangle = 0$ implique aussi $\int_q \langle f(n)^+ u, u \rangle = 0$. Donc sur chaque facette de q , $|f(n)| u = 0$. En particulier, les composantes tangentielles de E et H sur chaque facette sont nulles (voir C.1.1). Puisque les éléments sont non dégénérés, nous en déduisons donc que $E = H = 0$. Et puisqu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, et qu'en dehors du compact K , tous les éléments sont identiques, il existe deux constantes β_1 et β_2 telles que $\forall q$:

$$\beta_2 \int_q \langle -f(n)^- u, u \rangle \geq \int_q \langle u, u \rangle \geq \beta_1 \int_q \langle -f(n)^- u, u \rangle$$

donc il existe $C > 0$ telle que:

$$(1+C) \sum_q \int_{\partial q} \langle -f(n)^- \varphi_d^n, \varphi_d^n \rangle \leq |S| |\varphi^n| + \left(\sum_q \int_{\partial q} \langle -f(n)^- \varphi_d^n, \varphi_d^n \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_q \int_{\partial q} \langle f(n)^+ \varphi_d^{n-1}, \varphi_d^{n-1} \rangle \right)^{\frac{1}{2}}$$

et donc:

$$\sqrt{\sum_q \int_q \langle -f(n)^- \varphi_d^n, \varphi_d^n \rangle} \leq K + \frac{1}{1+C} \sqrt{\sum_q \int_q \langle -f(n)^- \varphi_d^n, \varphi_d^n \rangle}$$

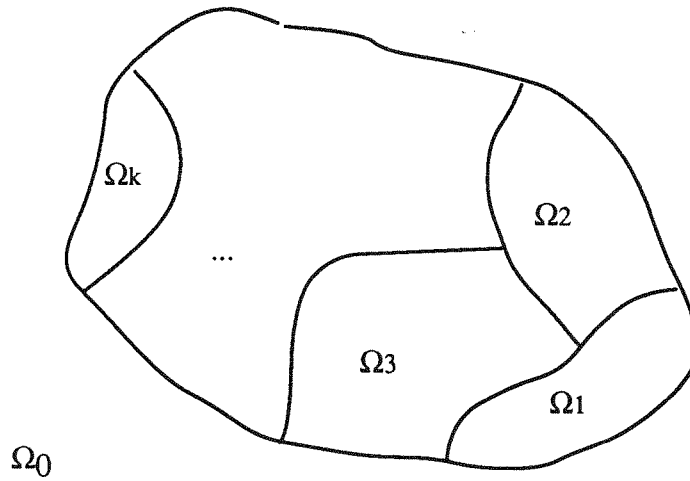
en réutilisant l'équivalence des normes ci-dessus, on en déduit qu'il existe K' telle que $|\varphi^n| \leq K'$

Par ailleurs, les bornés de $L^2(\mathbb{R}^3)$ étant faiblement compacts, on peut extraire de φ^n une suite qui converge faiblement vers φ , élément de L^2 . Mais sur tout compact, la convergence a lieu en norme puisque la restriction de φ^n à ce compact appartient à un espace de dimension finie. Par conséquent φ vérifie le schéma sur tout compact et donc sur le maillage entier. De plus φ est à décroissance rapide comme nous le montrerons dans le chapitre F. ♦

Remarque: on aurait aussi bien pu montrer la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire B , et utiliser le théorème de Lax-Milgram.

D.2. Décomposition de domaine

L'estimation (D.1.1.1) va maintenant nous permettre de démontrer la convergence d'un algorithme itératif par sous-domaine permettant de résoudre numériquement le problème discret (C.3.2.2). Supposons en effet ici que Ω soit partitionné en plusieurs domaines $(\Omega_i)_{i=0..k}$, Ω_0 étant le seul domaine infini ($K \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega_0$). Si Ω est borné, on supprime l'indice 0.



$\cup \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$ sera désignée par Γ et supposée coïncider avec des morceaux de frontières d'éléments du maillage.

$\varphi^0 \in H$ est choisi arbitrairement et nous considérons la suite φ^n d'éléments de H solution de

$$\begin{aligned} \forall q, \int_q (pA^0 + B) \varphi_d^n + \int_{\partial q \cap (\Omega \setminus \Gamma)} f(n)^- (\varphi_e^n - \varphi_d^n) \\ + \int_{\partial q \cap \Gamma} f(n)^- (\varphi_e^{n-1} - \varphi_d^n) + \int_{\partial q \cap \partial\Omega} f(n)^- (0 - \varphi_d^n) = \int_q S \end{aligned}$$

(dans chaque sous-domaine, le schéma est résolu en φ^n avec le flux rentrant de φ^{n-1} utilisé comme terme source sur la frontière). D'après ce qui précède, la suite φ^n existe et est unique. De plus, elle converge vers φ solution de (C.3.2.2), comme le montre le théorème suivant:

théorème (D.2.1):

la suite φ^n converge vers l'unique solution de (C.3.2.2)

preuve: afin de simplifier la présentation, on considère le cas d'un ouvert borné Ω et d'une décomposition de Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . L'algorithme itératif s'écrit donc dans ce cas pour $i=1,2$:

$$\begin{aligned} \forall q \subset \Omega_i, \int_q (pA^0 + B) \varphi_d^n + \int_{\partial q \cap \Omega_i} f(n)^- (\varphi_e^n - \varphi_d^n) \\ + \int_{\partial q \cap \Gamma} f(n)^- (\varphi_e^{n-1} - \varphi_d^n) + \int_{\partial q \cap (\partial \Omega_i \setminus \Gamma)} -f(n)^- \varphi_d^n = 0 \end{aligned}$$

En soustrayant à φ^n la solution du problème dans Ω , on s'est ramené au cas où $S=0$. Il faut donc montrer que φ^n tend vers 0. L'interface Γ est orientée par une normale N (dirigée par exemple de Ω_1 vers Ω_2). L'indice (E) désignera le côté de la normale N à l'interface et l'indice (D) le côté de $-N$. Appliquons l'estimation (C.1.1.2) dans le domaine Ω_1 :

$$\int_{\Gamma} \left\langle \frac{-f^-(N)}{2} \varphi_E^{(n-1)}, \varphi_E^{(n-1)} \right\rangle \geq \int_{\Gamma} \left\langle \frac{f^+(N)}{2} \varphi_D^{(n)}, \varphi_D^{(n)} \right\rangle$$

De même, en appliquant cette même estimation dans Ω_2 , on obtient:

$$\int_{\Gamma} \left\langle \frac{f^+(N)}{2} \varphi_D^{(n-1)}, \varphi_D^{(n-1)} \right\rangle \geq \int_{\Gamma} \left\langle \frac{-f^-(N)}{2} \varphi_E^{(n)}, \varphi_E^{(n)} \right\rangle$$

soit:

$$\int_{\Gamma} \left\langle \frac{-f^-(N)}{2} \varphi_E^{(n-2)}, \varphi_E^{(n-2)} \right\rangle \geq \int_{\Gamma} \left\langle \frac{-f^-(N)}{2} \varphi_E^{(n)}, \varphi_E^{(n)} \right\rangle$$

et

$$\int_{\Gamma} \left\langle \frac{f^+(N)}{2} \varphi_D^{(n-2)}, \varphi_D^{(n-2)} \right\rangle \geq \int_{\Gamma} \left\langle \frac{f^+(N)}{2} \varphi_D^{(n)}, \varphi_D^{(n)} \right\rangle$$

Il y a donc décroissance des flux rentrants dans chaque domaine au cours des itérations. L'inégalité large est cependant insuffisante pour démontrer la convergence de la suite. Comme auparavant, nous allons utiliser un résultat d'unicité et les propriétés des systèmes linéaires de dimension finie afin de montrer qu'il y a contraction stricte.

1) La donnée d'un flux rentrant à Ω_1 (resp Ω_2) sur Γ détermine φ de façon unique dans Ω_1 (resp Ω_2): c'est une application directe du théorème (D.1.1.2). Ceci prouve l'existence de la suite φ^n . De plus, il suffit de montrer la convergence des flux rentrants puisque nous sommes en dimension finie.

2) Supposons maintenant qu'au cours d'une itération l'inégalité large ci-dessus est une égalité:

$$\int_{\Gamma} \left\langle \frac{-f^-(N)}{2} \varphi_E^{(n-1)}, \varphi_E^{(n-1)} \right\rangle = \int_{\Gamma} \left\langle \frac{f^+(N)}{2} \varphi_D^{(n)}, \varphi_D^{(n)} \right\rangle$$

nous allons montrer alors que $\varphi^{(n)}=0$ dans Ω_1 .

preuve:

l'estimation (D.1.1.2) s'écrit dans ce cas:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\langle f(n)^- \varphi_e^{(n-1)}, \varphi_e^{(n-1)} \right\rangle + \left\langle f(n)^+ \varphi_d, \varphi_d \right\rangle \\ = & - \int_{\Omega_1} \left\langle (B + \nu A^0) \varphi_d, \varphi_d \right\rangle - \int_{D\varphi \cap \Omega_1} \left\langle \frac{|f(n)|}{2} (\varphi_e - \varphi_d), (\varphi_e - \varphi_d) \right\rangle \\ & + \int_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma} \left\langle \frac{f(n)^-}{2} \varphi_d, \varphi_d \right\rangle + \int_{\Gamma} \left\langle \frac{f(n)^-}{2} (\varphi_e^{(n-1)} - \varphi_d), (\varphi_e^{(n-1)} - \varphi_d) \right\rangle \end{aligned}$$

(lorsque l'itération n'est pas précisée, il s'agit de l'étape n). Par conséquent:

$$f(n)\varphi_e = f(n)\varphi_d \text{ sur } D\varphi \cap \Omega_1, f^-(N)\varphi_E^{(n-1)} = f^-(N)\varphi_D \text{ sur } \Gamma \text{ et } f^-(N)\varphi_D = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma$$

L'estimation (D.1.1.3) donne:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \left\langle i\omega A^0 \varphi_d, \varphi_d \right\rangle + \int_{D\varphi \cap \Omega_1} \left\langle \frac{f(n)}{2} \varphi_e, \varphi_d \right\rangle - \left\langle \frac{f(n)}{2} \varphi_d, \varphi_e \right\rangle \\ & + \int_{\Gamma} \left\langle \frac{f(n)^-}{2} \varphi_e^{(n-1)}, \varphi_d \right\rangle - \left\langle \frac{f(n)^-}{2} \varphi_d, \varphi_e^{(n-1)} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

En injectant les égalités ci-dessus dans cette estimation, on obtient comme dans le théorème (C.1.1.4) que $\varphi = 0$ dans Ω_1 .

Considérons alors l'application linéaire λ_1 qui à $f^-(N)\varphi_E^{(n-1)}$ sur Γ associe $f^+(N)\varphi_E$ sur Γ , par résolution du schéma dans Ω_1 . λ_1 peut être considérée comme une application

linéaire d'un espace V_1 de dimension finie dans V_2 de dimension finie. Puisqu'il est inutile de tenir compte des composantes de φ_E suivant le noyau de $f^-(N)$ et de φ_D suivant le noyau de $f^+(N)$ on peut supposer que:

$$\dim V_1 = \sum_{\text{facettes composant } \Gamma} \dim \text{Im}(f^-(N)) \text{ sur la facette}$$

et

$$\dim V_2 = \sum_{\text{facettes composant } \Gamma} \dim \text{Im}(f^+(N)) \text{ sur la facette}$$

Ainsi,

$$\int_{\Gamma} \langle \frac{-f^-(N)}{2} \varphi_E, \varphi_E \rangle \text{ est une norme sur } V_1 \text{ notée } |v|_1 \text{ et } \int_{\Gamma} \langle \frac{f^+(N)}{2} \varphi_D, \varphi_D \rangle \text{ est une}$$

norme sur V_2 notée $|v|_2$. Pour tout v dans V_1 , on a $|\lambda_1(v)|_2 \leq |v|_1$ et $\lambda_1(v) = v$ implique $v=0$. Il est alors facile de montrer qu'il existe une constante $k_1 < 1$ telle que $|\lambda_1(v)|_2 \leq k_1 |v|_1$.

De même, on peut introduire une application linéaire λ_2 qui à $f^+(N)\varphi_D$ associe $f^-(N)\varphi_E$ sur Γ , par résolution du schéma dans Ω_2 . Et de même il existe $k_2 < 1$ telle que $|\lambda_2(v)|_1 \leq k_2 |v|_2$. La contraction stricte entraîne alors la convergence des flux rentrants et donc de toute la suite vers 0 ♦

E. Convergence de l'approximation

Introduction:

Nous étudions ici la convergence de la solution du problème discret vers la solution du problème asymptotique quand le plus grand diamètre h des éléments du maillage tend vers 0. Les deux difficultés majeures sont:

1) L'approximation n'est pas conforme dans H_{rot} , espace naturel d'appartenance des solutions. Nous verrons que la convergence de l'approximation a lieu dans une norme plus fine que la norme L^2 , contrôlant le saut de $f(n)\phi$ aux interfaces des éléments (norme double barre). Elle est cependant moins fine que la norme H_{rot} , et a la désagréable propriété de dépendre du maillage sur lequel on l'écrit.

2) Il faut tenir compte d'une façon ou d'une autre d'une condition de type rayonnement, puisque les équations harmoniques sont mal posées. Nous nous contenterons donc ici d'étudier le taux de convergence de ϕ vers Φ lorsque ν est strictement positif. Le résultat à montrer est le suivant: si Φ est H^1 par morceaux et de norme H^1 bornée, il existe une constante C , indépendante de h telle que:

$$\|\Phi - \phi\| \leq C \sqrt{h} \|\Phi\|_1 + \frac{C}{\sqrt{\nu}} h \|\Phi\|_1$$

La norme de convergence (norme "double barre") est définie par:

$$\|\Phi\| = \operatorname{Re} \left(\int_{R\Phi} \langle \nu A^0 \Phi, \Phi \rangle + \int_{D\Phi} \langle \frac{|f|}{2} (\Phi_e - \Phi_d), \Phi_e - \Phi_d \rangle \right)$$

(avec un terme frontière si Ω est borné).

Malheureusement, dans la plupart des applications, $\nu=0$. Nous n'avons pas été en mesure d'étendre la démonstration de convergence de ϕ vers Φ_{0+} dans ce cas. Une meilleure connaissance du problème continu serait utile (entre autres une preuve d'existence de Φ_{0+} !). Dans [3], Bardos, Lebeau et Rauch établissent la décroissance uniforme et exponentielle en temps des solutions de l'équation des ondes avec conditions aux limites absorbante, à condition que l'obstacle soit non captif (voir p.11). Une propriété de ce type devrait permettre d'étendre la démonstration de ce chapitre au cas $\nu=0$.

La technique de démonstration est adaptée de Johnson et al [22], [23] et Croisille [13] utilisée respectivement dans le cas d'une équation scalaire hyperbolique linéaire, et des systèmes de Friedrichs temporels à coefficients constants.

E.1. Préliminaires

Afin d'alléger l'écriture de ce qui suit, on introduit les notations suivantes

$$(\Psi, \Phi) = \operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} \langle \Psi, \Phi \rangle \right)$$

Soient deux vecteurs $G(n, x)$ et $H(n, x)$ définis sur $D\Phi$, dépendant de la normale n à $D\Phi$ et de x sur $D\Phi$. Nous emploierons les notations:

$$\begin{aligned} [G(n, x), H(n, x)]^+ &= \operatorname{Re} \left(\int_{D\Phi} \langle G(n(x), x), H(n(x), x) \rangle d\sigma(x) \right) \\ [G(n, x), H(n, x)]^- &= \operatorname{Re} \left(\int_{D\Phi} \langle G(-n(x), x), H(-n(x), x) \rangle d\sigma(x) \right) \end{aligned}$$

et

$$[G(n, x), H(n, x)] = [G(n, x), H(n, x)]^- + [G(n, x), H(n, x)]^+$$

ainsi:

$$[f(n)^-(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_d]^+ = \operatorname{Re} \left(\int_{D\Phi} \langle f(n)^-(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_d \rangle \right)$$

(intégration pour une orientation de la normale)

$$\begin{aligned} [f(n)^-(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_d]^- &= \operatorname{Re} \left(\int_{D\Phi} \langle f(-n)^-(\Phi_d - \Phi_e), \Psi_e \rangle \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_{D\Phi} \langle f(n)^+(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_e \rangle \right) \end{aligned}$$

(intégration pour l'autre orientation)

$$[f(n)^-(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_d] = [f(n)^-(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_d]^- + [f(n)^-(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_d]^+$$

enfin, nous aurons aussi:

$$\{ \Phi, \Psi \} = \operatorname{Re} \left(\int_{\partial\Omega} \langle \Phi, \Psi \rangle \right)$$

(si Ω est borné)

$P = (i\omega + \nu)A^0 + B$ représentera la partie multiplicative de l'opérateur.

et $D = A^i \partial_i$ la partie différentielle.

$M\varphi=0$ sur $\partial\Omega$ sera la condition aux limites éventuelle et ici, $M=-f(n)^-$

Avec ces notations, la forme bilinéaire de la formulation variationnelle devient:

$$B(\Phi, \Psi) = ((P+D) \Phi, \Psi) + [f^-(\Phi_e - \Phi_d), \Psi_d] + \{ M \Phi, \Psi \} = (S, \Psi)$$

Nous supposons dans la suite que les discontinuités de Φ et Ψ , H^1 par morceaux, sont constituées de morceaux de frontières d'éléments.

On effectue une triangulation du domaine de calcul Ω . L'espace d'approximation sera noté H et sera défini de la façon suivante (cf § C.3):

$H = \Pi_q P^0(q) \cap L^2$, avec $P^0(q)$ espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions vectorielles de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}^6$, constantes et à support dans q .

L'espace H est donc constitué de fonctions vectorielles de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}^6$, constantes par morceaux, discontinues aux frontières ∂q des éléments. Ceci autorise les maillages totalement déstructurés, c'est à dire que les sommets d'un élément ne coïncident pas forcément avec les sommets des éléments voisins. Cette propriété est très utile pour simplifier le raffinement local des maillages.

Γ est la surface formée par la réunion des facettes internes des éléments du maillage (donc $\Gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$ et pour tout φ dans H , on a $D\varphi = \Gamma$). En se donnant une normale n arbitraire sur Γ , on peut définir les "traces e et d" d'une fonction $\Phi \in C^1$ par morceaux en un point x de Γ :

$\Phi_e = \lim (\Phi + \varepsilon n)$ quand ε tend vers 0 par valeurs positives

$\Phi_d = \lim (\Phi + \varepsilon n)$ quand ε tend vers 0 par valeurs négatives

H est un sous espace vectoriel de dimension finie (ou dénombrable si $\Omega = \mathbb{R}^3$) de $L^2(\Omega)$.

On peut définir $p\Phi$ projection orthogonale au sens L^2 d'un élément Φ de $L^2(\Omega)$ sur H .

Par définition de $p\Phi$, on a la propriété suivante :

$$(E.1.1) \quad \text{Pour tout } \psi \text{ dans } H, (\Phi - p\Phi, \psi) = 0$$

Si $q \subset \Omega$ est l'intérieur d'un polyèdre de $\mathbb{R}^3$ de frontière ∂q et de diamètre h , pour Φ dans $H^1(q)$, on dispose des deux estimations classiques (cf. Raviart – Thomas [39]) :

$$(E.1.2) \quad \|\Phi - p\Phi\|_{L^2(q)} \leq C h \|\Phi\|_{H^1(q)}$$

$$(E.1.3) \quad \|\Phi - p\Phi\|_{L^2(\partial q)} \leq C \sqrt{h} \|\Phi\|_{H^1(q)}$$

où la constante C ne dépend pas de h .

Ces estimations deviennent lorsque Φ est H^1 par morceaux (par recollement des morceaux):

$$(E.1.4) \quad \|\Phi - p\Phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C h \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}$$

$$(E.1.5) \quad \|\Phi_{e \text{ ou } d} - p\Phi_{e \text{ ou } d}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \sqrt{h} \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}$$

C'est à ce stade qu'intervient l'hypothèse selon laquelle les discontinuités de Φ sont constituées de morceaux de frontières d'éléments. En effet, si une discontinuité de Φ traverse q , les estimations (E.1.2) et (E.1.3) ne sont plus valables.

L'approximation de type "Galerkin discontinu" s'écrit à l'ordre 0:

Trouver $\varphi \in H$ tel que $\forall \psi \in H$,

$$(E.1.6) \quad B(\varphi, \psi) = A(\psi)$$

E.2. Propriétés de la forme bilinéaire B :

En appliquant la formule de Green à chaque élément du maillage, on a:

$$(D\Phi, \Psi) = (\Phi, -D\Psi) + [f\Phi_d, \Psi_d] + \{f\Phi, \Psi\}$$

La formule de Stokes donne:

$$(D\Phi, \Phi) = \frac{1}{2} [f\Phi_d, \Phi_d] + \frac{1}{2} \{f\Phi, \Phi\}$$

D' autre part:

$$(E.2.1) \quad [f - (\Phi_e - \Phi_d), \Phi_d] \\ = [f - (\Phi_e - \Phi_d), \Phi_d]^+ + [f - (\Phi_e - \Phi_d), \Phi_d]^-$$

$$(E.2.2) \quad \frac{1}{2} [f\Phi_d, \Phi_d] = \frac{1}{2} [f\Phi_d, \Phi_d]^+ - \frac{1}{2} [f\Phi_e, \Phi_e]^+$$

$$(E.2.1) + (E.2.2) = \frac{1}{2} [|f|(\Phi_e - \Phi_d), (\Phi_e - \Phi_d)]^+$$

Donc:

$$B(\Phi, \Phi) = ((\nu A^0 + B)\Phi, \Phi) + \frac{1}{2} [|f|(\Phi_e - \Phi_d), (\Phi_e - \Phi_d)]^+ + \left\{ \frac{f+M+M^*}{2} \Phi, \Phi \right\}$$

Lorsque $\nu > 0$ $\sqrt{B(\Phi, \Phi)} = \|\Phi\|$ est une norme issue du produit scalaire (M^* désigne la transconjugée de M).

$$\frac{B(\Phi, \Psi) + B(\Psi, \Phi)}{2} = ((\nu A^0 + B)\Phi, \Psi) + \frac{1}{2} [|f|(\Phi_e - \Phi_d), (\Psi_e - \Psi_d)]^+ + \left\{ \frac{f+M+M^*}{2} \Phi, \Psi \right\}$$

Nous aurons besoin dans la suite de la forme de la partie antisymétrique de B :

$$\frac{B(\Phi, \Psi) - B(\Psi, \Phi)}{2} = -(\Phi, D\Psi) - (i\omega A^0 \Psi, \Phi) + \frac{1}{2} [f(\Psi_d - \Psi_e), (\Phi_e + \Phi_d)]^+ + \left\{ \frac{f+M-M^*}{2} \Phi, \Psi \right\}$$

On va maintenant établir la relation de consistance habituelle.

Relation de consistance:

Si Φ solution du problème continu est H^1 par morceaux et si ϕ est la solution du problème discret (E.1.6) alors :

$$(E.2.3) \quad \forall \psi \in H, B(\Phi - \phi, \psi) = 0$$

Preuve:

Comme Φ est solution du problème continu perturbé, Φ est solution du problème (C.2.1.7) (formulation variationnelle).

On voit donc sur la définition de B que : $\forall \psi \in H$,

$$B(\Phi, \psi) = B(\phi, \psi) = (S, \psi) \diamond$$

E.3. Convergence de l'approximation :

Le but de ce paragraphe est de montrer que la solution ϕ du problème approché tend en norme $\|\cdot\|$ vers la solution Φ du problème continu perturbé (ici, $v > 0$), lorsque h tend vers 0.

Nous allons établir le théorème suivant :

Théorème (E.3.1):

Soit Φ la solution du problème continu (B.1.3.6) avec $v > 0$. Si Φ est H^1 par morceaux, alors il existe une constante C , indépendante de h (mais dépendante de v) telle que, pour h assez petit:

$$\|\Phi - \phi\| \leq C(v) \sqrt{h} \|\Phi\|_1 \text{ (convergence)}$$

preuve: supposons que le problème continu (B.1.3.6) admette une solution Φ , H^1 par morceaux, et soit ϕ la solution du problème (E.1.6).

$$B(p\Phi - \phi, p\Phi - \phi) = \|p\Phi - \phi\|^2$$

Or : $B(p\Phi - \phi, p\Phi - \phi) = B(p\Phi - \Phi, p\Phi - \phi)$ d'après la relation de consistance.

La partie symétrique de B est un produit scalaire positif pour lequel on peut appliquer l'inégalité de Schwartz. Il reste donc à majorer la partie antisymétrique de B:

$$\begin{aligned} |B(p\Phi - \Phi, p\Phi - \phi)| &\leq \|p\Phi - \Phi\| \|p\Phi - \phi\| \\ &+ |-(i\omega A^0 \Delta \Psi, \Delta \Phi) + \frac{1}{2} [f(\Delta \Psi_d - \Delta \Psi_e), (\Delta \Phi_e + \Delta \Phi_d)]^+ \\ &\quad + \left\{ \frac{f+M-M^*}{2} \Delta \Phi, \Delta \Psi \right\}| \end{aligned}$$

où $\Delta \psi = p\Phi - \phi$ et $\Delta \Phi = p\Phi - \Phi$, alors:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2} [f(\Delta\psi_d - \Delta\psi_e), (\Delta\Phi_e + \Delta\Phi_d)]^+ \right| &\leq \\
 \sqrt{\left| f(\Delta\psi_d - \Delta\psi_e), (\Delta\psi_d - \Delta\psi_e) \right|^+} & \\
 \sqrt{\left| f(\Delta\Phi_e + \Delta\Phi_d), (\Delta\Phi_e + \Delta\Phi_d) \right|^+} &
 \end{aligned}$$

D'après (E.1.5), il existe donc une constante C, indépendante de h et de v telle que:

$$\left| \frac{1}{2} [f(\Delta\psi_d - \Delta\psi_e), (\Delta\Phi_e + \Delta\Phi_d)]^+ \right| \leq \|p\Phi - \phi\| C \sqrt{h} |\Phi|_1$$

De même:

$$\left| -(i\omega A^0 \Delta\Psi, \Delta\Phi) \right| \leq \|p\Phi - \phi\| \frac{C}{\sqrt{v}} h |\Phi|_1 \quad \text{par (E.1.4):}$$

Par ailleurs, $f+M+M^* = |f|$ et $f+M-M^* = f$, ainsi on obtient:

$$(E.3.2) \quad \left\{ \frac{f+M-M^*}{2} \Delta\Phi, \Delta\psi \right\}^2 \leq \left\{ \frac{f+M+M^*}{2} \Delta\Phi, \Delta\Phi \right\} \left\{ \frac{f+M+M^*}{2} \Delta\Psi, \Delta\psi \right\}$$

et:

$$\left| \left\{ \frac{f+M+M^*}{2} \Delta\Phi, \Delta\psi \right\} \right| \leq \|p\Phi - \phi\| C \sqrt{h} |\Phi|_1$$

soit finalement, en regroupant les inégalités précédentes:

$$\|p\Phi - \phi\| \leq C \sqrt{h} |\Phi|_1 + \frac{C}{\sqrt{v}} h |\Phi|_1 \quad \text{et par (E.1.4) et (E.1.5) :}$$

$$\|\Phi - \phi\| \leq C \sqrt{h} |\Phi|_1 + \frac{C}{\sqrt{v}} h |\Phi|_1 \quad \blacklozenge$$

Remarques:

-Plus généralement, lorsque Φ est H^{k+1} par morceaux, et pour des éléments finis d'ordre k, on peut montrer une convergence du type:

$$\|\Phi - \phi\| \leq C(v) h^{k+1/2} |\Phi|_1$$

ce résultat est une amélioration du résultat initial de Lesaint, qui montre uniquement que la norme L^2 de l'erreur est d'ordre h^k . C'est également une amélioration des résultats de

Johnson et Croisille, qui supposent Φ dans H^{k+1} , et les coefficients du système de Friedrichs constants.

-quand $v=0$ $\| \cdot \|$ n'est plus une norme (le terme L^2 disparaît). On ne peut plus démontrer par cette méthode la convergence de φ vers Φ directement.

-la démonstration s'étend à des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ du type $\Phi \in N(x)$, autres que la condition $\Phi \in \text{Ker } f(n)^-$. Il suffit par exemple de construire une matrice M vérifiant:

$$(E.3.3) \quad \text{Ker } M = \text{Ker } N(x) \text{ sur } \partial\Omega$$

$$(E.3.4) \quad \frac{M+M^*+f}{2} \geq 0 \text{ (ainsi, } B(\Phi, \Phi) \text{ est positif)}$$

$$(E.3.5) \quad \text{L'inégalité (E.3.2) est vraie}$$

De tels matrices M existent pour des conditions aux limites d'impédance (voir §B.2.2) avec $\text{Re}(\alpha) < 0$. On peut également construire des matrices M , associées à la condition aux limites métal (qui correspond à $\alpha=0$), vérifiant (E.3.3) et (E.3.4) mais pas (E.3.5). Nous n'avons donc pas pu montrer la convergence de l'approximation dans le cas de la condition aux limites métal. On est confronté à une difficulté du type absorption-limite avec $-\alpha$ comme analogue de v .

F. Conditions aux limites non réfléchissantes

Introduction:

Nous n'avons pour l'instant envisagé que des schémas peu utiles dans la pratique: une discrétisation écrite sur un maillage infini (comment la résoudre?) convergeant probablement sur tout compact spatial en norme double barre vers la solution du problème asymptotique; et une discrétisation en domaine borné, jointe à une condition aux limites locale, approximativement transparente, mais peu précise.

Nous montrons d'abord ici comment résoudre numériquement le problème discret sur maillage infini en le ramenant à un problème de dimension finie. La méthode employée repose sur des équations de convolution et des fonctions de Green discrètes. Malheureusement, elle s'avère peu précise numériquement.

Nous verrons alors comment, par analogie, construire des conditions aux limites non réfléchissantes plus précises, adaptées à la discrétisation sur maillage borné. Cette dernière partie, bien qu'assez formelle, finit de montrer qu'il existe une alternative cohérente aux formulations au second ordre des problèmes d'électromagnétisme.

Enfin, dans une annexe en fin de chapitre, nous précisons un cadre algébrique pour le calcul symbolique des inverses de convolution des systèmes de Friedrichs à coefficients constants, dans le cadre temporel ou harmonique perturbé.

F.1. Condition aux limites discrète

Rappelons qu'un maillage du domaine de calcul Ω (un ouvert borné) étant donné, nous allons rechercher une approximation du champ diffracté, constante par élément de ce maillage, que nous noterons φ . Le problème discret à résoudre est le suivant:

Trouver φ tel que pour tout élément q du maillage, de frontière ∂q , de normale n à ∂q sortante, d'intérieur (d) (comme dedans) et d'extérieur (e), on ait:

$$\int_q (p A^0 + B) \varphi_d + \int_{\partial q} f(n) \cdot (\varphi_e - \varphi_d) = \int_q S$$

Si q est un élément frontière une partie de φ_e ne peut pas être connue à partir de valeurs de φ dans d'autres éléments. Les inconnues du problème sont donc φ dans le maillage et le flux rentrant de φ sur $\partial\Omega$. Sur les éléments frontières, un couplage liant le flux rentrant de

φ sur les facettes frontière du maillage ($f(n)^-\varphi_e$ sur $\partial\Omega$) et le flux sortant de φ sur ces mêmes facettes ($f(n)^+\varphi_d$ sur $\partial\Omega$), serait utile. Ce sera précisément notre condition aux limites transparente. Résumons l'idée que nous avons en tête (les flèches signifient "permet de calculer" et les cadres décrivent les moyens de calcul):

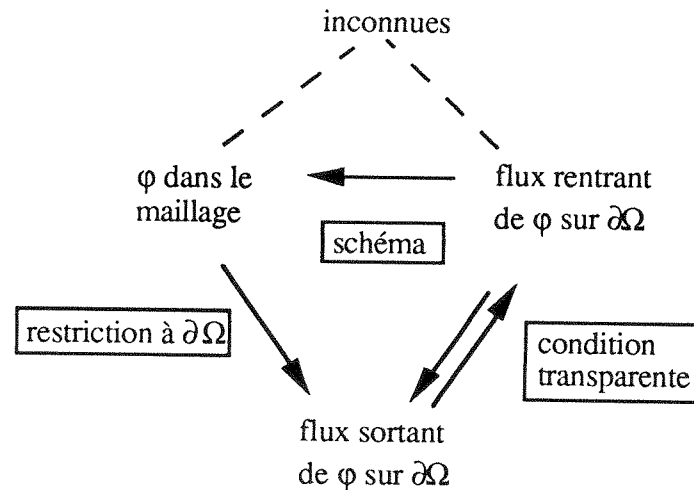


figure (F.1.1)

Cette figure suggère plusieurs méthodes de résolution que nous détaillerons après avoir décrit le moyen d'obtention de la condition transparente.

En fait, nous allons décrire deux conditions aux limites. La première est transparente vis à vis du problème discret. Elle assure que φ est la restriction à Ω de la solution d'un problème discret analogue à (C.3.2.2), mais écrit sur un maillage infini. La seconde est transparente pour le problème continu (B.1.3.6), mais sera construite par analogie avec la première. Nous commençons donc par détailler le cas discret.

F.1.1. Inverse de convolution de l'opérateur de Maxwell discret

Une méthode de volumes finis est plus générale qu'une méthode de différences finies puisqu'elle permet l'utilisation de maillages quelconques. Néanmoins il peut être intéressant, afin de prédire les propriétés du schéma, de l'étudier dans le cas où le maillage est une grille régulière et où les équations de Maxwell sont à coefficients constants. L'étude est simplifiée car il est possible d'utiliser convolution et transformée de Fourier. Supposons donc ici que le maillage sur lequel est écrit (C.3.2.2) est composé de cubes q de côtés h repérés par un tri-indice d'entiers relatifs (k,l,m) , le centre du cube ayant pour coordonnées (kh, lh, mh) . $\varphi_{k,l,m}$ sera bien sûr la valeur de φ dans l'élément (k,l,m) . L'intérêt de l'utilisation d'un maillage infini (fictif) apparaîtra plus loin. φ n'est donc pas dans un espace de dimension finie et nous introduisons H_0 l'espace des champs

constants par élément de la grille et d'énergie finie (la valeur de φ dans l'élément q est notée φ_q). H_0 est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(.,.)$ défini par:

$$(\varphi, \psi) = \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle \varphi, \psi \rangle \right) = \sum_q \operatorname{volume}(q) \operatorname{Re} (\langle \varphi_q, \psi_q \rangle)$$

$\langle ., . \rangle$ est le produit hermitien usuel sur $\mathbb{C}^6$, semi-linéaire par rapport à la seconde variable. (φ, φ) est l'énergie de φ qui définit une norme par:

$$|\varphi| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$$

H_0 s'identifie également à $L^2(\mathbb{Z}^3)$, l'espace des suites à triple indice, de carré sommable, sur lequel est définie l'opération de convolution discrète. Pour u et v dans H_0 , $u * v$ s'écrit:

$$\forall K \in \mathbb{Z}^3, u * v(K) = \sum_{K' \in \mathbb{Z}^3} u(K-K') v(K')$$

en général, $u * v$ n'est pas dans $L^2(\mathbb{Z}^3)$ mais dans $L^\infty(\mathbb{Z}^3)$. H_0 n'est donc pas une algèbre de convolution. L'algèbre de convolution naturelle sera dans notre cas S , l'ensemble des u de $L^2(\mathbb{Z}^3)$ à décroissance rapide:

$$u \in S \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, \exists C(p) > 0, |u_k| \leq C(p) (1 + |k|)^{-p}$$

La transformée de Fourier est un isomorphisme entre $L^2(\mathbb{Z}^3)$ et $L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3)$, l'espace des fonctions 1-périodiques de carré sommable sur $[0,1]$. Elle est définie par la formule usuelle:

$$u^\wedge(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} u_k e^{-2i\pi \langle k, x \rangle}$$

La co-transformée de Fourier est l'isomorphisme inverse, défini par:

$$v^\vee(k) = \int_0^1 v(x) e^{2i\pi \langle k, x \rangle}$$

La transformée de Fourier échange convolution et multiplication. De plus, nous avons l'équivalence classique entre la régularité de $u^\wedge$ et la décroissance à l'infini de u . Il est ainsi possible d'affirmer que S est une algèbre de convolution (S est stable par convolution). De plus, $L^2(\mathbb{Z}^3)$ est un module sur cette algèbre (la convolution d'un élément de S et de $L^2(\mathbb{Z}^3)$ est dans $L^2(\mathbb{Z}^3)$). La démonstration de cette propriété est

également immédiate par transformée de Fourier puisque $L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3)$ est stable par la multiplication par un élément de $C^\infty((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3)$. Nous avons donc démontré:

Théorème (F.1.1.1):

L'ensemble S des suites de $L^2(\mathbb{Z}^3)$ à décroissance rapide est une algèbre de convolution et $L^2(\mathbb{Z}^3)$ est un module sur cette algèbre.

Avant d'utiliser l'outil algébrique décrit ci-dessus, il s'agit de réécrire (C.3.2.2) dans le cas de la grille régulière. Rappelons que l'on cherche φ dans $L^2(\mathbb{Z}^3) \equiv H_0$ tel que pour tout élément $q=(k,l,m)$ dans $\mathbb{Z}^3$ (les éléments du maillage s'identifient désormais à des éléments de $\mathbb{Z}^3$) on ait:

$$\int_q i\omega \varphi_d + \int_{\partial q} f(n)^- [\varphi_e - \varphi_d] = \int_q S = s_{k,l,m}$$

Soit:

$$\begin{aligned} i\omega h^3 \varphi_{k,l,m} &+ h^2 f(1,0,0)^- (\varphi_{k+1,l,m} - \varphi_{k,l,m}) \\ &+ h^2 f(-1,0,0)^- (\varphi_{k-1,l,m} - \varphi_{k,l,m}) \\ &+ h^2 f(0,1,0)^- (\varphi_{k,l+1,m} - \varphi_{k,l,m}) \\ &+ h^2 f(0,-1,0)^- (\varphi_{k,l-1,m} - \varphi_{k,l,m}) \\ &+ h^2 f(0,0,1)^- (\varphi_{k,l,m+1} - \varphi_{k,l,m}) \\ &+ h^2 f(0,0,-1)^- (\varphi_{k,l,m-1} - \varphi_{k,l,m}) = h^3 s_{k,l,m} \end{aligned}$$

Des calculs longs mais sans difficultés (il faut diagonaliser $f(n)$ afin d'en déterminer les parties positive et négative) montrent que l'équation ci-dessus est équivalente à:

$$(F.1.1.2) \quad L^* \varphi = s \quad \text{avec:}$$

$$A = \begin{pmatrix} i\omega\delta + \frac{2}{h} - \frac{y^+ + y^-}{2h} - \frac{z^+ + z^-}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & i\omega\delta + \frac{2}{h} - \frac{x^+ + x^-}{2h} - \frac{z^+ + z^-}{2h} & 0 \\ 0 & 0 & i\omega\delta + \frac{2}{h} - \frac{y^+ + y^-}{2h} - \frac{x^+ + x^-}{2h} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{z^+ - z^-}{2h} & -\frac{y^+ - y^-}{2h} \\ -\frac{z^+ - z^-}{2h} & 0 & \frac{x^+ - x^-}{2h} \\ \frac{y^+ - y^-}{2h} & -\frac{x^+ - x^-}{2h} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & A \end{pmatrix}$$

Les suites x^+ , x^- , y^+ , y^- , z^+ , z^- sont des translatées de la suite unité δ (élément neutre pour la convolution):

$$\delta_{k,l,m} = 0 \text{ sauf si } k=l=m=0 \text{ auquel cas } \delta_{k,l,m}=1$$

$$x^+_{k,l,m} = \delta_{k+1,l,m}$$

$$x^-_{k,l,m} = \delta_{k-1,l,m}$$

$$y^+_{k,l,m} = \delta_{k,l+1,m}$$

$$y^-_{k,l,m} = \delta_{k,l-1,m}$$

$$z^+_{k,l,m} = \delta_{k,l,m+1}$$

$$z^-_{k,l,m} = \delta_{k,l,m-1}$$

Les convolutions par ces suites sont les opérateurs de translation de $+$ ou -1 dans les directions x , y ou z .

Nous sommes maintenant en mesure d'inverser explicitement le schéma via la transformée de Fourier, en effet, il est possible d'écrire (au moins formellement):

$$L * \varphi = s \text{ équivalent à } L^\wedge \varphi^\wedge = s^\wedge \text{ soit } \varphi^\wedge = (L^\wedge)^{-1} s^\wedge \text{ et } \varphi = ((L^\wedge)^{-1})^\vee * s$$

Pour justifier ce calcul, remarquons que L est une matrice de convolution dont les éléments sont dans S (ils sont à support compact, donc à décroissance rapide). Si le déterminant au sens des convolutions de cette matrice est inversible dans S , alors le problème (F.1.1.2) admet une solution unique, et cette solution s'exprime au moyen du calcul habituel dans les algèbres et les modules: L'inverse de L est le produit de convolution de l'inverse de son déterminant par la transposée de sa comatrice. Par ailleurs, afin de prouver l'appartenance de l'inverse du déterminant à S , il suffit d'examiner sa transformée de Fourier. Or, des calculs pénibles montrent que $\det L^\wedge$ est C^∞ et ne s'annule pas sur $[0,1]$. Par conséquent, L est bien inversible dans S et la

solution de (F.1.1.2) est unique. Dans la suite, l'inverse de L sera noté M . Ainsi, la solution de (F.1.1.2) peut encore s'écrire:

$$(F.1.1.3) \quad \varphi(k) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}^3} M(k-k') s(k')$$

F.1.2. Formulation intégrale discrète

La formule (F.1.1.3) va maintenant être exploitée afin d'obtenir une condition transparente discrète. Désormais, il n'est plus nécessaire de supposer le schéma écrit sur une grille régulière partout, ni que l'opérateur est à coefficients constants. Néanmoins, ces deux propriétés seront supposées vraies en dehors d'un ouvert borné Ω dont la frontière $\partial\Omega$ est composée de facettes d'éléments de la partie régulière du maillage (ceci impose à Ω d'être parallélépipédique, ou plus généralement "en escalier"). Il est alors naturel d'introduire H , l'espace des champs de $L^2(\mathbb{R}^3)$ constants par élément du nouveau maillage. La notation H_0 est conservée pour l'espace des champs de $L^2(\mathbb{R}^3)$ constants par élément de la grille régulière (celle-ci est alors prolongée à tout l'espace). La figure (F.1.2.1) résume cette situation. Seule une partie des maillages (infinis!) est représentée.

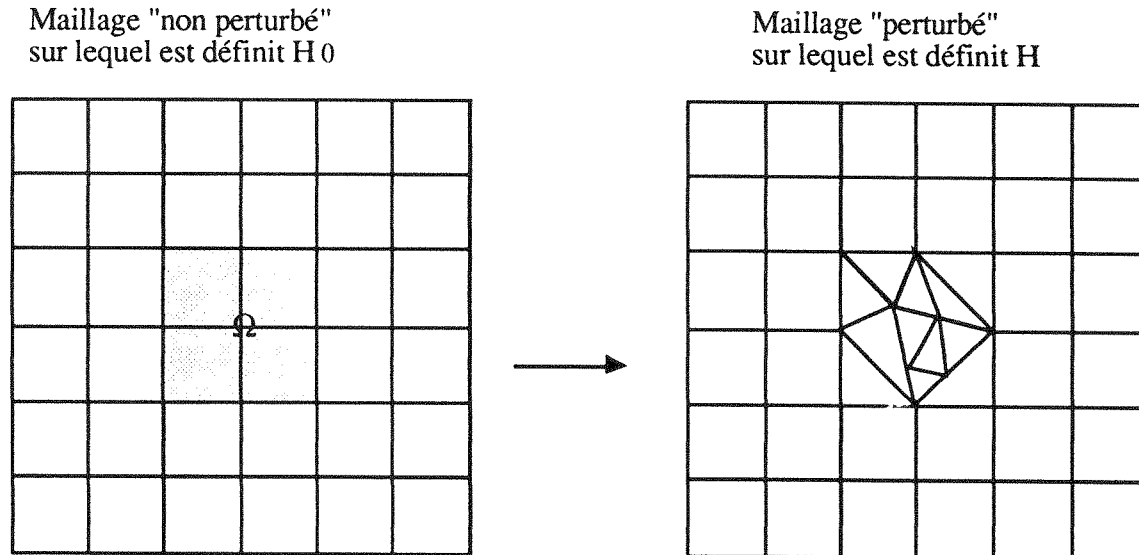


figure (F.1.2.1)

$\varphi \in H$ étant la solution du schéma (C.3.2.2) écrit sur le maillage irrégulier, définissons alors $\psi \in H_0$ de la façon suivante: $\psi = 0$ dans Ω et $\psi = \varphi$ ailleurs. Ainsi, ψ et φ coïncident sur la partie régulière des deux maillages.

L'idée est alors de chercher un second membre $g(\varphi)$ dans H_0 , dépendant de φ tel que $L*\psi = g(\varphi)$. A la différence de φ , ψ est défini sur la grille régulière, et le calcul symbolique précédent lui est applicable:

$$(F.1.2.2) \quad \psi(k) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}^3} M(k-k') g(\varphi)(k')$$

A ce stade, il est important de se rappeler que g dépend de φ , solution de (C.3.2.2). De plus, par définition de ψ , pour tout élément k de la grille régulière inclus dans Ω , on doit avoir

$$(F.1.2.3) \quad 0 = \sum_{k' \in \mathbb{Z}^3} M(k-k') g(\varphi)(k')$$

Avant de bien comprendre la signification de (F.1.2.3), il est nécessaire de détailler la structure du second membre $g(\varphi)$. Soit k un élément de la grille régulière. Dans le calcul de $g(\varphi)(k)$, quatre cas peuvent se présenter:

1) k est extérieur à Ω et sans facette commune avec $\partial\Omega$. Les éléments voisins de k font donc également partie de la grille régulière. Ainsi, sur k et ses voisins, $\varphi = \psi$. Par ailleurs, φ est solution de (C.3.2.2):

$$\int_k C \varphi_d + \int_k f(n)^- [\varphi_e - \varphi_d] = \int_k S \quad \text{avec } C = pA^0 + B$$

qui devient ici, puisque S est à support dans Ω et $C = i\omega I$ dans le complémentaire de Ω :

$$(L*\psi)(k) = 0 = g(\varphi)(k)$$

2) k est intérieur à Ω et sans facette commune avec $\partial\Omega$. Les éléments voisins de k font donc également partie de Ω . Ainsi, sur k et ses voisins, $\psi = 0$. L'égalité suivante est donc immédiate:

$$\int_k i\omega\psi_d + \int_{\partial k} f(n)^- [\psi_e - \psi_d] = (L*\psi)(k) = 0 = g(\varphi)(k)$$

3) k est élément de la grille régulière, extérieur à Ω (donc $\varphi_k = \psi_k$), et possède une ou plusieurs facettes en commun avec $\partial\Omega$. Ainsi, sur certains voisins de k , $\psi = 0$, et sur d'autres, $\psi = \varphi$. Ecrivons que φ est solution de (C.3.2.2):

$$\int_k i\omega\varphi_d + \int_{\partial k} f(n)^- [\varphi_e - \varphi_d] = 0$$

soit encore:

$$\int_k i\omega\varphi_d + \int_{\partial k \cap \partial\Omega} f(n)^- [\varphi_e - \varphi_d] + \int_{\partial k \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)} f(n)^- [\varphi_e - \varphi_d] = 0$$

et finalement:

$$\int_k i\omega\psi_d + \int_{\partial k} f(n)^- [\psi_e - \psi_d] = - \int_{\partial k \cap \partial\Omega} f(n)^- \varphi_e = g(\varphi)(k)$$

4) k est élément de la grille régulière, extérieur à Ω (donc $0 = \psi_k$), et possède une ou plusieurs facettes en commun avec $\partial\Omega$. Calculons $(L^*\psi)(k)$:

$$(L^*\psi)(k) = \int_k i\omega\psi_d + \int_{\partial k} f(n)^- [\psi_e - \psi_d] = 0 + \int_{\partial k \cap \partial\Omega} f(n)^- \varphi_e = g(\varphi)(k)$$

Il apparaît donc que $g(\varphi)$ est à support sur deux couches d'éléments de part et d'autre de $\partial\Omega$. De plus, $g(\varphi)$ est uniquement fonction du flux rentrant et du flux sortant de φ sur $\partial\Omega$. Soit en effet N , la normale sortante à Ω sur $\partial\Omega$, et k , un élément voisin de $\partial\Omega$. Lorsque k est intérieur à Ω , N et n coïncident sur $\partial k \cap \partial\Omega$. En revanche, si k est extérieur, $N = -n$ sur $\partial k \cap \partial\Omega$. Dans ce cas, en notant (D) l'intérieur de Ω :

$$\int_{\partial k \cap \partial\Omega} -f(n)^- \varphi_e = \int_{\partial k \cap \partial\Omega} f(N)^+ \varphi_D$$

c'est bien le flux sortant de φ sur $\partial\Omega$.

Afin de résumer le calcul précédent, nous numérotions de 1 à m les facettes frontière qui constituent $\partial\Omega$. Si p est un numéro de facette, p^+ (respectivement p^-) est l'élément extérieur (respectivement intérieur) à Ω qui possède la facette p en commun avec $\partial\Omega$. Ainsi ψ vérifie (l'indice (E) étant, bien sûr, relatif à l'extérieur de Ω):

$$(F.1.2.4) \quad \psi(k) = \sum_{p=1}^m M(k-p^+) \int_{\partial p^+ \cap \partial\Omega} f(N)^+ \varphi_D + M(k-p^-) \int_{\partial p^- \cap \partial\Omega} f(N)^- \varphi_E$$

Si k est intérieur à Ω , $\psi(k)=0$ et (F.1.2.4) n'est autre que la formule (F.1.2.3) dans laquelle $g(\varphi)$ a été explicité. Ainsi, écrire que $\psi(k)=0$ pour tout k dans Ω fournit une

relation implicite entre les flux rentrant et sortant de ϕ sur $\partial\Omega$. De plus, si cette relation est inversible (nous ne l'avons pas montré mais c'est toujours le cas numériquement: voir chapitre suivant), résoudre le schéma (C.3.2.2) dans Ω avec la relation de compatibilité (F.1.2.4) assure que ϕ est bien la restriction à Ω de la solution du même schéma écrit sur le maillage infini sous-jacent à H . Cette dernière propriété exprime que (F.1.2.4) est une condition aux limites transparente pour le problème discret.

F.1.3. Nécessité d'une meilleure condition transparente

Nous avons donc ramené le problème initial de dimension infini (résoudre un schéma sur maillage infini) à un problème de dimension finie (schéma dans Ω couplé à la condition transparente (F.1.2.4) sur les flux). Le procédé conduit à des résultats numériques médiocres (voir chapitre H). Ceci n'est pas tout à fait étonnant car le schéma tire ses qualités et ses défauts de sa dissipativité (elle même due à la coercivité de l'opérateur discret). C'est en effet celle-ci qui assure l'existence et l'unicité de la solution ainsi que sa décroissance correcte à l'infini. Elle est également à la base de la stabilité du schéma et de la méthode de résolution du problème discret via un algorithme itératif entre sous-domaines. Ceci se paye par une convergence assez lente de la solution discrète vers la solution continue.

Afin de mieux comprendre l'influence de cette dissipation nous avons étudié le même schéma, appliqué aux équations de Maxwell monodimensionnelles sur une grille régulière de pas h . Nous avons alors pu constater que le schéma aux différences obtenu est consistant à l'ordre h avec les équations, et consistant à l'ordre h^2 avec les équations perturbées par $-h \frac{d^2}{dx^2}$. La dissipation peut donc s'interpréter intuitivement comme la conséquence d'une perturbation par un opérateur coercif du second ordre.

Il est donc tentant de modifier la condition transparente (F.1.2.4), afin de la rendre plus exacte. Ainsi, la dissipation n'agira plus que sur le compact Ω .

F.2. Condition aux limites transparente continue.

F.2.1. Formulation intégrale du premier ordre avec décomposition des flux

Le procédé que nous avons utilisé pour obtenir la condition discrète peut être généralisé pour le problème continu. En effet, dans le vide, l'opérateur de Maxwell est un opérateur de convolution. Comme dans la partie précédente, nous allons commencer par inverser l'équation $L*\Phi=S$ avec

$$L = \begin{pmatrix} p & -\nabla \wedge \\ \nabla \wedge & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \delta_z & -\delta_y \\ -\delta_z & 0 & \delta_x \\ \delta_y & -\delta_x & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ sont les dérivées de la masse de Dirac par rapport à x, y ou z (que dans la suite nous noterons x, y et z) et $p = i\omega + \nu$ avec $\nu > 0$.

Le terme $\nu > 0$ introduit une dissipation artificielle indispensable afin de justifier le calcul des convolutions. Nous serons amenés par la suite à faire tendre ν vers 0. C'est le procédé "d'absorption limite", qui remplace la condition de rayonnement (voir annexe à la fin du chapitre). Calculons l'inverse formel de L :

$$L^{-1} = \frac{1}{p(x^2 + y^2 + z^2 - p^2)} \begin{pmatrix} x^2 - p^2 & yx & zx & 0 & pz & -py \\ yx & y^2 - p^2 & zy & -pz & 0 & px \\ zx & zy & z^2 - p^2 & py & -px & 0 \\ 0 & -pz & py & x^2 - p^2 & yx & zx \\ pz & 0 & -px & yx & y^2 - p^2 & zy \\ -py & px & 0 & zx & zy & z^2 - p^2 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de savoir calculer l'inverse de convolution de $D = x^2 + y^2 + z^2 - p^2$, si l'on veut connaître L^{-1} . Or D n'est autre que l'opérateur de Helmholtz $\Delta - p^2$ écrit sous forme convolutive. Inverser D , c'est chercher E , solution de $D * E = \delta$. Tant que l'algèbre de convolution n'a pas été précisée, cette équation admet une infinité de solutions combinaisons linéaires de E_1 et E_2 :

$$E_1(x, y, z) = -\frac{e^{-pr}}{4\pi r} \quad \text{et} \quad E_2(x, y, z) = -\frac{e^{+pr}}{4\pi r}$$

$E = t E_1 + (1-t) E_2$ avec t complexe.

Nous allons donc nous restreindre à O'_c , l'ensemble des distributions à décroissance rapide (voir annexe à la fin du chapitre). Cet ensemble est une algèbre de convolution et S' , l'ensemble des distributions tempérées, est un module sur cette algèbre. Alors, nécessairement $E = E_1$. Ainsi, si S est une distribution tempérée, l'équation $L^*\Phi = S$, admet une unique solution tempérée donnée par le calcul symbolique et en prenant $D^{-1} = E_1$. Comme dans le cas discret, nous notons M l'inverse de convolution de L . Ainsi,

$$(F.2.1.1) \quad \Phi(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}^3} M(x-x',y-y',z-z') S(x',y',z') = M*S$$

La matrice M présente une singularité à l'origine et l'intégrale dans (F.2.1.1) doit parfois être interprétée comme une partie finie. Néanmoins, si S est régulier et si (x,y,z) n'appartient pas au support de S , l'intégrale s'interprète classiquement et de plus, Φ est régulier en (x,y,z) . Nous pouvons désormais nous dispenser de l'hypothèse $v > 0$ et poser $p=i\omega$. Comme dans le cas discret, nous définissons une distribution Ψ nulle dans Ω (Ω n'a plus besoin d'être "en escalier"), égale dans son complémentaire à la solution Φ des équations de Maxwell, et nous calculons $L^*\Psi$. Dans Ω , $L^*\Psi=0$ puisque Ψ est nul. En un point extérieur à Ω et n'appartenant pas à $\partial\Omega$, $L^*\Psi=0$, puisque $\Psi=\Phi$ et Φ est solution au sens des distributions de (B.1.3.6). Le support de $L^*\Psi$ est donc concentré sur $\partial\Omega$. Un résultat classique montre alors que si Φ se trace sur $\partial\Omega$:

$$L^*\Psi = f(n)\Phi \delta_{\partial\Omega}$$

où $\delta_{\partial\Omega}$ est la masse de Dirac portée par $\partial\Omega$. L'analogue continu de la formule intégrale discrète est alors:

$$\Psi(x,y,z) = \int_{\partial\Omega} M(x-x',y-y',z-z') f(n(x',y',z')) \Phi(x',y',z') dS(x',y',z') = M*G(\Phi)$$

$n(x',y',z')$ est la normale sortante à Ω sur $\partial\Omega$. Soit alors une surface Γ incluse dans Ω et voisine de $\partial\Omega$. Une condition transparente est par exemple obtenue en écrivant que pour tout point (x,y,z) de Γ , on a:

$$(F.2.1.2) \quad 0 = \int_{\partial\Omega} M(x-x', y-y', z-z') f(n(x', y', z')) \Phi(x', y', z') dS(x', y', z') = M * G(\Phi)$$

Ainsi, le problème, évoqué plus haut, de l'interprétation de l'intégrale (F.2.1.1) est contourné. Cependant, dans (F.2.1.2), n'apparaissent pas directement les flux entrants et sortants de Φ sur $\partial\Omega$. En effet, dans le cas continu, Φ est généralement régulier sur $\partial\Omega$ et donc $\Phi_e = \Phi_d$. Mais comme $f(n) = f(n)^+ + f(n)^-$, il est toujours possible d'écrire $f(n)\Phi = f(n)^+\Phi_d + f(n)^-\Phi_e$. Ainsi, l'analogie avec le cas discret devient frappante

$$(F.2.1.3) \quad \forall X \in \Gamma, 0 = \int_{\partial\Omega} M(X-Y) f(n)^+ \Phi_d(Y) dY + \int_{\partial\Omega} M(X-Y) f(n)^- \Phi_e(Y) dY$$

(F.2.1.3) sera notre condition aux limites transparente. C'est celle-ci qui sera discrétisée, par exemple de la façon suivante. m_Γ points $(X_k)_{k=1..m_\Gamma}$ sont choisis sur la surface Γ . Comme dans le cas de la condition transparente discrète, les facettes frontière sont numérotées de 1 à m et les points $(Y_j)_{j=1..m}$ sont les barycentres des facettes correspondantes. On écrira que pour tout point X_k , $k=1..m_\Gamma$, on doit avoir:

$$(F.2.1.4) \quad 0 = \sum_{p=1}^m M(X_k - Y_p) \text{aire}(p) \left(f(n)^+ \varphi_d(p) + f(n)^- \varphi_e(p) \right)$$

Remarquons que suivant le choix de m_Γ , le nombre d'équations peut être aussi grand que l'on veut. Cette caractéristique permet d'envisager de résoudre (F.2.1.4) au sens des moindres carrés afin d'améliorer la méthode sur le plan numérique.

F.3. Annexe: Rappels sur les équations de convolution

Il est bien connu que les problèmes hyperboliques à coefficients constants peuvent être résolu de façon symbolique par des équations de convolution.

L'existence et l'unicité de la solution sont liées au fait algébrique suivant: l'ensemble des distributions à support dans le cône d'évolution futur est une algèbre de convolution, et l'ensemble des distributions à support dans les temps positifs, un module sur cette algèbre.

Dans le cas d'un système de Friedrichs, la résolution du problème d'évolution est donc ramenée au calcul de l'inverse d'une matrice de convolution.

Dans cette annexe, nous montrons que pour le problème harmonique perturbé à coefficients constants, l'algèbre et le module de convolution naturels sont respectivement

l'ensemble des distributions à décroissance rapide et l'ensemble des distributions tempérées. Cette structure algébrique est obtenue, comme au chapitre B, par transformée de Laplace de la structure instationnaire.

Dans la suite, $X=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ sera un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$. La variable temporelle sera notée également $t = x_0$ et la variable spatiale $x = (x_1, \dots, x_n)$.

La convolution de S et $T \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ est habituellement définie par la formule: $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+1})$

$$(F.3.1) \quad (S*T)_x(\varphi(x)) = S_x \otimes T_y(\varphi(x+y))$$

où le $\otimes$ désigne le produit tensoriel des distributions.

Cette définition n'a pas toujours de sens car $\varphi(x+y)$ n'est pas nécessairement un élément de $D(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$. Il suffit par exemple d'adjoindre la condition suivante sur les supports de S et T afin de donner un sens à (F.3.1).

$$(F.3.2) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+1}), \text{supp}(S_x \otimes T_y) \cap \text{supp}(\varphi(x+y)) \text{ est compact}$$

alors $S*T$ existe dans $D'(\mathbb{R}^{n+1})$ (cf. Schwartz [45]).

Dans l'exemple suivant (fondamental et bien connu), la condition (F.3.2) est vérifiée.

F.3.1. Algèbres de convolution de distributions à support dans un cône:

Dans la suite, C désigne le cône d'évolution futur et $T^+ = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}, t \geq 0 \}$

$$C = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}, t \geq |x| \}$$

P est l'ensemble des distributions à support parabolique, c'est à dire les distributions à support dans T^+ et H l'ensemble des distributions à support hyperbolique, c'est à dire à support dans C .

H' (respt P') est l'ensemble des distributions tempérées qui sont dans H (respt P). Le théorème suivant est une version modifiée d'un résultat classique:

théorème (F.1.1.1):

$$\left| \begin{array}{l} H(+, *) \text{ et } H'(+, *) \text{ sont des algèbres commutatives} \\ P(+, *) \text{ et } P'(+, *) \text{ sont des modules respectifs pour } H \text{ et } H'. \end{array} \right.$$

preuve: Il est bien connu que H est une algèbre de convolution et que P est un module sur cette algèbre. Puisque S' est inclus dans D' , il nous suffit donc de montrer que la convolution d'un élément de H' et d'un élément de P' appartient à P' . Nous allons procéder par prolongement de la forme linéaire $S*T$, continue sur $D(\mathbb{R}^{n+1})$:

Soient $S \in H'$ et $T \in P'$. Alors $S \in H$ et $T \in P$, donc $S*T \in P$. $S*T$ est donc une forme linéaire continue sur $D(\mathbb{R}^{n+1})$. Nous allons montrer qu'elle est également continue sur $D(\mathbb{R}^{n+1})$ pour la topologie de $S(\mathbb{R}^{n+1})$, et par densité de $S(\mathbb{R}^{n+1})$ dans $D(\mathbb{R}^{n+1})$, le résultat sera prouvé.

Comme $S*T = \tau_{-2a} (\tau_a S * \tau_a T)$ où τ_a est l'opérateur de translation temporel de a , continu sur $S'(\mathbb{R}^{n+1})$, on peut supposer que $\text{supp } S \subset \tau_a C$ et $\text{supp } T \subset \tau_a T^+$. Le produit $S*T$ est défini par:

$$\langle S*T, \varphi(t, x) \rangle = \langle S \otimes T, \varphi(t+t', x+x') \rangle \text{ où } \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+1})$$

Soit alors une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$ comprise entre 0 et 1 telle que:

$\text{supp } \chi \subset C \times T^+$, $\chi = 1$ sur $\text{supp } S \times \text{supp } T$ et $D^\alpha \chi \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ pour tout multi-indice α de $\mathbb{N}^{n+1}$.

$$\text{On a alors: } \langle S*T, \varphi(t, x) \rangle = \langle S \otimes T, \chi(t, t', x, x') \varphi(t+t', x+x') \rangle$$

dans la suite, nous noterons $(t, x) = u$ et $(t', x') = v$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\beta = (\beta_1 \dots \beta_n)$, un multi-indice de $\mathbb{N}^{n+1} \times \mathbb{N}^{n+1}$, posons

$$q_{k, \beta}(\psi(u, v)) = \sup_{(u, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}} |(1+u^2+v^2)^k D^\beta \psi(u, v)|$$

$(q_{k, \beta})$ est une famille de semi-normes définissant la topologie de $S'(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$.

D'après la règle de dérivation d'un produit, il existe $C(\beta)$ telle que:

$$q_{k, \beta}(\chi \varphi(u+v)) \leq C(\beta) \sup_{\substack{(u, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \\ |\beta_1 + \beta_2| \leq |\beta|}} |(1+u^2+v^2)^k D^{\beta_1} \chi D^{\beta_2} \varphi(u+v)|$$

Et par construction de χ , il existe $K(\beta, \chi)$ telle que:

$$q_{k, \beta}(\chi \varphi(u+v)) \leq K(\beta, \chi) \sup_{\substack{(u, v) \in C \times T^+ \\ |\beta_2| \leq |\beta|}} |(1+u^2+v^2)^k D^{\beta_2} \varphi(u+v)|$$

Soit:

$$q_{k,\beta}(\chi\varphi(u+v)) \leq K'(\beta,\chi) \sup_{(u,v) \in CxT^+} \left| \frac{1+u^2+v^2}{1+(u+v)^2} \right|^k \sup_{\substack{w \in \mathbb{R}^{n+1} \\ |\beta_3| \leq |\beta|}} |(1+w^2)^k D^{\beta_3} \varphi(w)|$$

β_3 étant ici un multi-indice de $\mathbb{N}^{n+1}$

or

$$\sup_{(u,v) \in CxT^+} \left| \frac{1+u^2+v^2}{1+(u+v)^2} \right|^k = \left(\sup_{(u,v) \in CxT^+} \left| \frac{1+u^2+v^2}{1+(u+v)^2} \right| \right)^k$$

et par ailleurs, puisque $(u,v) \in CxT^+$:

$$uv = |u| |v| \cos(u,v) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} |u| |v| \text{ donc:}$$

$$\frac{1+u^2+v^2}{1+(u+v)^2} = \frac{1}{1 + \frac{2uv}{1+u^2+v^2}}$$

$$\frac{1+u^2+v^2}{1+(u+v)^2} \leq \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2} |u| |v|}{u^2+v^2}} \leq 2+\sqrt{2} \quad \text{et donc:}$$

$$q_{k,\beta}(\chi\varphi(u+v)) \leq K''(k,\beta,\chi) \sup_{|\gamma| \leq |\beta|} q'_{k,\gamma}(\varphi(w))$$

$(q'_{k,\gamma})$ est une famille de semi-normes définissant la topologie de $S(\mathbb{R}^{n+1})$. Ainsi, si $\varphi(w)$ tend vers 0 dans $S(\mathbb{R}^{n+1})$, $\chi\varphi(u+v)$ tend vers 0 dans $S(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$. De plus, $S \otimes T$ est dans $S'(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$. Par composition des limites, on a donc $\langle S \otimes T, \chi\varphi(u+v) \rangle$ tend vers 0 et donc $S * T \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$. ♦

remarques:

(F.3.1.2) La masse de Dirac δ et ses dérivées $(\delta_i)_{i=1..n+1}$ appartiennent à H et H' .

Soit le système linéaire de convolution:

(F.3.1.3) $A * Z = B$ avec A matrice $k \times k$ à éléments dans H (resp H'), Z et B vecteurs de P^k (resp P'^k).

Supposons que le déterminant de A au sens des convolutions soit inversible dans H (resp H'). Alors le système (F.3.1.3) admet une solution et une seule dans P^k (resp P'^k) et cette solution est donnée par la formule habituelle de résolution des systèmes linéaires:

$$(F.3.1.4) \quad Z = (\det A)^{-1} \tilde{A}^t B$$

C'est la structure algébrique qui assure ici l'unicité de la solution car l'inverse du déterminant est choisi a priori dans H ou H' (problème d'évolution dans le futur).

Désormais se pose donc le problème de l'existence de l'inverse du déterminant de A . Dans le cas général des systèmes de Friedrichs à coefficients constants, l'existence de l'inverse est la conséquence d'un théorème de Hörmander [21] tome II. Pour le cas particulier du système de Maxwell, nous verrons qu'il suffit de savoir inverser l'équation des ondes.

définition:

Un polynôme P de degré m , de partie principale P_m est dit hyperbolique par rapport à $N \in \mathbb{R}^{n+1}$ ssi:

$$(F.2.1.1) \quad P_m(N) \neq 0$$

$$(F.2.1.2) \quad \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, P(\xi + izN) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(z) > a$$

Le cône d'évolution de P par rapport à N est alors par définition le cône adjoint de:

$$\Gamma(P, N) = \{ \theta \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tels que } P_m(\theta + tN) = 0 \text{ implique } t < 0 \}, \text{ c'est à dire}$$

$$\Gamma^*(P, N) = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tels que } \langle x, \theta \rangle \geq 0 \text{ quand } \theta \in \Gamma(P, N) \}.$$

On peut montrer que le cône d'évolution est intrinsèque. Plus précisément, si $N' \in \Gamma^*(P, N)$ alors P est hyperbolique par rapport à N' et $\Gamma^*(P, N) = \Gamma^*(P, N')$.

théorème (de Hörmander) (F.2.1.3):

Si P est hyperbolique par rapport N , $P(D) = P(-i\partial)$ admet un inverse dans $D'(\mathbb{R}^{n+1})$ à support dans $\Gamma^*(P, N)$.

Ce théorème montre que tout polynôme de dérivation hyperbolique P admet un inverse (unique) dans l'algèbre de convolution des distributions à support dans $\Gamma^*(P, N)$.

théorème (F.2.1.4):

le déterminant de convolution d'un système de Friedrichs à coefficients constants est hyperbolique par rapport à $(1, 0 \dots, 0)$.

preuve: le déterminant de convolution d'un système de Friedrichs à coefficients constants quelconque s'écrit $P = \det (A^i \xi_i + A^0 \xi_0 - iB)$. P_{n+1} désigne la partie principale du polynôme P :

$$P_{n+1}(\xi) = \det (A^\alpha \xi_\alpha) \quad \alpha=0..n$$

d'où $P_{n+1}(N) = \det A^0 > 0$ car A^0 est définie > 0

soit $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, alors, $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$P(\xi + i z N) = \det (A^\alpha \xi_\alpha + i z A^0 - i B)$$

Pour tout complexe z , définissons la matrice $K = A^\alpha \xi_\alpha + i z A^0 - i B$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\det (K) = 0$, et soit donc un vecteur complexe non nul X tel que $KX = 0$.

On impose

$${}^t \overline{X} K X = 0 = {}^t \overline{X} A^\alpha \xi_\alpha X - \text{Im}(z) {}^t \overline{X} A^0 X + i \text{Re}(z) {}^t \overline{X} A^0 X - {}^t \overline{X} B X$$

Ce qui implique, en écrivant que la partie imaginaire est nulle que:

$$\text{Re}(z) {}^t \overline{X} A^0 X = {}^t \overline{X} B X$$

$$\text{d'où: } |\text{Re}(z)| \leq \frac{|\lambda_{\max}(B)|}{|\lambda_{\min}(A^0)|} \Rightarrow \text{Re}(z) \geq - \frac{|\lambda_{\max}(B)|}{|\lambda_{\min}(A^0)|} = a$$

a est bien indépendant de ξ , donc par définition, P est hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$. ♦

Jusqu'ici nous n'avons utilisé que les propriétés des systèmes de Friedrichs, nous particularisons maintenant à l'opérateur de Maxwell, ce qui permettra d'avoir des formules explicites. L'opérateur de Maxwell à coefficients constants dans le vide s'écrit:

$$L = \begin{pmatrix} t & -\nabla \wedge \\ \nabla \wedge & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \delta_z & -\delta_y \\ -\delta_z & 0 & \delta_x \\ \delta_y & -\delta_x & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{matrix} \end{pmatrix}$$

L'inverse formel de L s'écrit:

$$L^{-1} = \frac{1}{t(x^2+y^2+z^2-t^2)} \begin{pmatrix} x^2-t^2 & yx & zx & 0 & pz & -py \\ yx & y^2-t^2 & zy & -pz & 0 & px \\ zx & zy & z^2-t^2 & py & -px & 0 \\ 0 & -pz & py & x^2-t^2 & yx & zx \\ pz & 0 & -px & yx & y^2-t^2 & zy \\ -py & px & 0 & zx & zy & z^2-t^2 \end{pmatrix}$$

et son déterminant formel s'écrit $t^2 (x^2+y^2+z^2-t^2)^2$. Nous voyons donc qu'il suffit de savoir inverser l'opérateur de dérivation temporel ainsi que l'opérateur des ondes $\square$ dans H' afin de pouvoir inverser l'opérateur complet. Or (cf. par exemple Schwartz [45] ou Vo-Khac Khoan [48]):

$$(\partial_t)^{-1} = Y(t) \otimes \delta(x) \text{ et}$$

$$\square^{-1} = \frac{1}{4\pi|x|} \delta(t-|x|)$$

qui sont bien des distributions tempérées à support hyperbolique.

Applications: ce calcul symbolique permet de retrouver par exemple la formule des potentiels retardés.

F.3.2. Algèbre de convolution des distributions à décroissance rapide.

Dans ce paragraphe, les équations harmoniques perturbées à coefficients constant sont résolues via la transformée de Laplace partielle par rapport au temps (ce qui explique les efforts faits pour généraliser le calcul symbolique à S'). Nous verrons que l'algèbre de convolution naturelle dans ce cas est l'ensemble des distributions à décroissance rapide, $O'_C(\mathbb{R}^n)$.

définition (F.3.3.1):

pour p complexe, $\text{Re}(p) > 0$ (ce sera toujours le cas dans la suite) et $T \in P'$, la transformée de Laplace partielle par rapport au temps de T est définie par:

$$\langle L_p T, \varphi \rangle_x = \langle T, e^{-pt} \varphi \rangle_{t,x} \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

$L_p T$ appartient à S'

preuve: Donnons auparavant un sens plus précis au crochet $\langle T, e^{-pt} \varphi \rangle_{t,x}$. Soit $\chi(t) \in C^\infty$, à support dans $\{t, t \geq -\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, et telle que $\chi=1$ pour $t \geq 0$, $0 \leq \chi \leq 1$:

$$\langle T, e^{-pt} \varphi \rangle = \langle T, \chi e^{-pt} \varphi \rangle$$

La définition ne dépend pas du choix de χ car T est à support parabolique.

Par ailleurs:

pour tout (α, β) de $\mathbb{N}^{n+1}$, $\beta = (\beta_0 \dots \beta_n)$, $\beta' = (\beta_1 \dots \beta_n)$, on a:

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u \in \mathbb{R}^{n+1} \\ u=(t,x)}} |u^\alpha D^\beta (\chi(t) e^{-pt} \varphi(x))| &\leq \sup_{\substack{u \in \mathbb{R}^{n+1} \\ u=(t,x)}} |u^{\alpha_0} \partial_t^{\beta_0} (\chi(t) e^{-pt}) u^{\alpha'} D^{\beta'} \varphi(x)| \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u^{\alpha'} D^{\beta'} \varphi(x)| \end{aligned}$$

Et donc $L_p T$ appartient à S' . ♦

théorème (F.3.3.2):

si $T \in H'$, alors $L_p T$ est une distribution à décroissance rapide et si S appartient à P' ,

$$L_p(S * T) = L_p(T) * L_p(S)$$

preuve: la première partie du théorème se démontre en deux étapes. Dans un premier temps, on montre que la transformée de Laplace d'un élément de H' est le produit d'un élément de $S(\mathbb{R}^n)$ et d'un élément de $S'(\mathbb{R}^n)$. Dans un second temps, on montre que ce produit est dans $O'_c(\mathbb{R}^n)$.

a) soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ telle que $0 \leq f(x) \leq \|x\|$ et $f(x) = \|x\|$ en dehors d'un voisinage borné de l'origine. Pour $S \in H'$, on définit $\tau_{-f(x)} S$ par:

$$\langle \tau_{-f(x)} S, \varphi(t, x) \rangle = \langle S, \varphi(t - f(x), x) \rangle$$

Ainsi, $\tau_{-f(x)}S$ définit un élément de P' . En effet, commençons par montrer la continuité sur $S(\mathbb{R}^{n+1})$. Puisque S est continue sur $S(\mathbb{R}^{n+1})$, il suffit de montrer que $\varphi(t,x) \rightarrow \varphi(t-f(x),x)$ est continue sur $S(\mathbb{R}^{n+1})$. C'est immédiat en posant $u=t-f(x)$ et par dérivation de fonctions composées. De plus, $\tau_{-f(x)}S$ est bien à support parabolique par construction.

La transformée de Laplace de S , peut alors s'écrire:

$$\begin{aligned} \langle L_p S, \varphi(x) \rangle &= \langle S, e^{-pt} \varphi \rangle = \langle e^{-pf(x)} S, e^{-p(t-f(x))} \varphi \rangle \\ &= \langle \tau_{-f(x)} e^{-pf(x)} S, e^{-pt} \varphi \rangle = \langle L_p(\tau_{-f(x)} e^{-pf(x)} S), \varphi \rangle \\ &= \langle e^{-pf(x)} L_p(\tau_{-f(x)} S), \varphi \rangle \end{aligned}$$

Donc $L_p(S) = e^{-pf(x)} L_p(\tau_{-f(x)} S) = e^{-pf(x)} T = g(x) T(x)$ avec $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in S(\mathbb{R}^n)$

b) Montrons que $g(x) T(x)$ est un convoleur (élément de O'_c). On peut également montrer grâce aux propriétés de la transformée de Fourier que $g^\vee * T^\vee$ est un multiplicateur (élément de O_M). $g^\vee * T^\vee$ doit donc être C^∞ à croissance lente (caractérisation des multiplicateurs: cf. Vo-Khac Khoan [48]). $T^\vee$ est une distribution tempérée, c'est donc la dérivé à un ordre β d'une fonction continue h à croissance lente. Par conséquent:

$$g^\vee * T^\vee = D^\beta(g^\vee) * h = \alpha * h \quad \text{avec } \alpha \in S(\mathbb{R}^n)$$

$\alpha * h$ est C^∞ et $\alpha * h(x) = \int h(x-u) \alpha(u) du$ donc il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que:

$$|\alpha * h(x)| \leq M \int (1+|x-u|)^{k/2} |\alpha(u)| du \leq K(k, \alpha) (1+|x|)^{k/2}$$

et gT est bien un convoleur.

La démonstration formelle de la deuxième partie du théorème est immédiate. L'existence des produits de convolutions est assurée d'après ce qui précède. ♦

Le théorème (F.3.3.2) permet de transporter le calcul symbolique aux équations harmoniques perturbées via la transformée M_ε (cf 2.1.3), ce que nous résumons dans:

théorème (F.3.3.3):

Le couple $(M_\varepsilon, L_{\varepsilon+i\omega})$ est un morphisme de $H' \times P'$ dans $O'_c(\mathbb{R}^n) \times S'(\mathbb{R}^n)$ (pour $\varepsilon > 0$)

preuve: il suffit d'utiliser la formule $L_p(S *_{t,x} T) = L_p(S) *_x L_p(T)$ pour S dans H' et T dans P' . ♦

G. Aspects algorithmiques

Introduction:

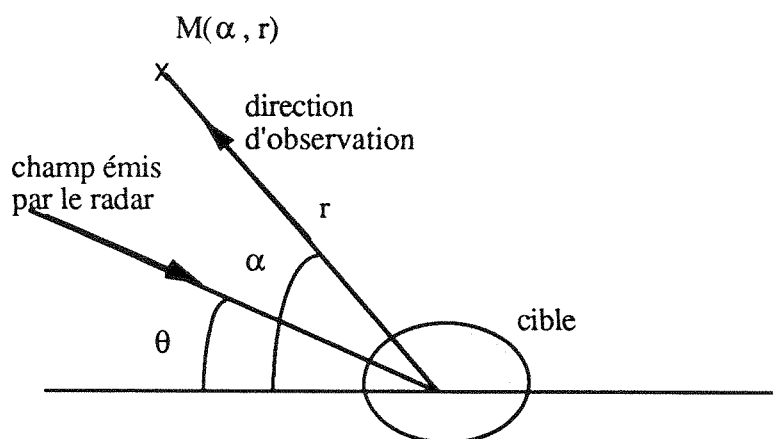
Dans ce court chapitre, on décrit un algorithme (méthode de fonctions de base frontière) pour coupler la condition aux limites transparente avec le problème intérieur. Cet algorithme permet de calculer rapidement le champ diffracté associé à un nombre important de champs incidents différents dans les problèmes bidimensionnels.

Par ailleurs, on décrit l'implémentation de cet algorithme sur un ordinateur parallèle à mémoire distribuée.

Rien ne s'oppose en théorie à l'adaptation de cette méthode en tridimensionnel. Elle nous semble cependant difficile sans modification, car le nombre de fonctions de base, ainsi que la taille du problème intérieur sont dans ce cas nettement plus importants.

G.1. Algorithme de couplage adapté au calcul de la SER des cibles bidimensionnelles

Pour les radaristes, la grandeur caractérisant un corps est sa surface équivalente radar (ou SER) définie de la façon suivante: soit un radar, situé loin de l'objet inhomogène (appelé "cible"), émettant une onde incidente plane sinusoïdale, de pulsation ω , à l'incidence θ (voir figure).



Dans le cas d'un corps bidimensionnel, on appelle $SER(\omega, \alpha, \theta)$ le nombre:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \left(\frac{|H_{\text{diff}}(r, \alpha)|}{|H_{\text{inc}}(r, \alpha)|} \right)^2$$

(dans un cadre plus général, $\text{SER}(\omega, \alpha, \theta)$ est aussi le carré de l'amplitude de scattering: voir Petkov, Stoyanov [35]).

H_{inc} et H_{diff} étant respectivement les champs magnétiques incident et diffracté.

Pour calculer $\text{SER}(\omega, \theta, \alpha)$, il suffit en fait de connaître H_{diff} et E_{diff} sur une courbe entourant la cible, le champ magnétique lointain étant calculé par équation intégrale.

La courbe de SER monostatique est alors la courbe $\text{SER}(\omega, \alpha, \alpha)$ en fonction de α (on regarde dans la direction opposée au vecteur d'onde du champ incident).

La courbe de SER bistatique est la courbe $\text{SER}(\omega, 0, \alpha)$ (le radar étant fixe, on mesure l'énergie renvoyée par la cible dans toutes les directions α).

Nous allons présenter un algorithme de résolution du problème discret couplé à la condition transparente continue. Cet algorithme (dit des fonctions de base frontière) permet de calculer rapidement le champ diffracté pour un grand nombre de champs incidents différents. Il est donc particulièrement adapté au tracé de la SER monostatique.

Il apparaît alors commode de rechercher une approximation du champ total plutôt que du champ diffracté. Le champ total est solution des équations de Maxwell homogènes et le champ diffracté est la différence du champ total Φ^t et du champ incident Φ_{inc} . Le champ incident est, bien sûr, solution de $L^* \Phi_{\text{inc}} = 0$.

La condition transparente pour le champ total est alors obtenue en remplaçant dans (F.2.1.4) Φ par $\Phi^t - \Phi_{\text{inc}}$. Soit

$$\begin{aligned} \text{(G.1.1)} \quad \forall X \in \Gamma, \quad & \int_{\partial\Omega} M(X-Y) \left(f(n)^+ \Phi_d^t(Y) + f(n)^- \Phi_e^t(Y) \right) dY \\ & = \int_{\partial\Omega} M(X-Y) f(n) \Phi_{\text{inc}}(Y) dY = -\Phi_{\text{inc}}(X) \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient par les mêmes techniques que dans F.2.1 en considérant un champ Ψ égal à Φ_{inc} dans Ω et nul ailleurs.

La méthode de résolution est alors la suivante: l'approximation du champ total est notée ϕ^t . Supposons qu'une bonne approximation du flux rentrant de ϕ^t sur $\partial\Omega$ puisse être

obtenue comme une combinaison linéaire finie de fonctions indépendantes, définies sur $\partial\Omega$. Les fonctions en question sont appelées fonctions de base, et peuvent être a priori n'importe quel type de fonctions utilisées en interpolation (dans notre cas, il s'agira de fonctions "chapeau"). Les inconnues du problème deviennent alors les coefficients de la combinaison linéaire:

$$(G.1.2) \quad f(n)^-\varphi_e^t(Y) = \sum_{i=1}^{n_b} \alpha_i g_i(Y)$$

Supposons par ailleurs que les problèmes intérieurs suivants soient résolus:

Trouver $\varphi^{(i)}$ tel que pour tout élément q du maillage, on ait:

$$\int_q C \varphi_d^t + \int_{\partial q \cap \Omega} f(n)^- [\varphi_e^{(i)} - \varphi_d^{(i)}] + \int_{\partial q \cap \partial\Omega} -f(n)^- \varphi_d^{(i)} = \int_{\partial q \cap \partial\Omega} -g_i$$

Par combinaison linéaire de ces problèmes, on voit que $\varphi^t = \sum \alpha_i \varphi^{(i)}$ est solution de

$$\forall q \quad \int_q C \varphi_d^t + \int_{\partial q} f(n)^- [\varphi_e^t - \varphi_d^t] = 0$$

Par ailleurs, le flux sortant de φ^t sur $\partial\Omega$ est combinaison linéaire des flux sortants des $\varphi^{(i)}$.

$$(G.1.3) \quad f(n)^+ \varphi^t = \sum \alpha_i f(n)^+ \varphi^{(i)}$$

Afin de déterminer les α_i , il ne reste plus qu'à injecter (G.1.2) et (G.1.3) dans (G.1.1), ce qui donne:

$$(G.1.4) \quad \forall X \in \Gamma, \quad \int_{\partial\Omega} M(X-Y) \sum_{i=1}^{n_b} \alpha_i (f(n)^+ \varphi_d^{(i)}(Y) + g_i(Y)) dY = -\Phi^{inc}(X)$$

Une discrétisation de (G.1.4) conduit alors à un système linéaire (éventuellement surdéterminé) permettant de calculer les α_i . Notons que la matrice à "inverser" ne dépend pas du champ incident, ce qui permet de calculer très rapidement les α_i associés à un grand nombre de champs incidents différents, une fois les $\varphi^{(i)}$ obtenus.

La méthode proposée ici est une variante de la méthode des moments, largement utilisée par les électromagnéticiens numériques. Elle a été reprise de façon plus rigoureuse par Cadilhac, Petit [10'] et Kalfon, Volpert [23'], mais de nombreuses questions restent ouvertes: convergence de la méthode, influence du choix de Γ ...

G.2. Résolution du problème discret sur un ordinateur parallèle à mémoire distribuée

Nous montrons maintenant comment les $\varphi^{(i)}$ peuvent être calculés par la méthode de décomposition de domaine décrite en D.2. Le problème initial, qui était de résoudre un schéma à l'intérieur de Ω couplé à une condition transparente, est en effet maintenant ramené à la résolution de plusieurs problèmes intérieurs (avec conditions aux limites inhomogènes données par les g_i):

$$(G.2.1) \quad \int_q C \varphi_d^{(i)} + \int_{\partial q \cap \Omega} f(n)^- [\varphi_e^{(i)} - \varphi_d^{(i)}] + \int_{\partial q \cap \partial \Omega} g_i - f(n)^- \varphi_d^{(i)} = 0$$

Chacun de ses problèmes peut, bien sûr, être résolu en assemblant et factorisant la matrice associée au schéma. Mais si le problème intérieur est trop gros, ceci peut conduire à des difficultés d'encombrement mémoire. Une méthode classique pour se tirer de ce mauvais pas est d'effectuer une décomposition de domaine. Dans chaque sous-domaine, la matrice à décomposer est plus petite. Le couplage entre les domaines est alors réalisé par une méthode itérative. Ce procédé est un bon compromis entre méthode directe (encombrante) et méthode itérative (dont la convergence peut être lente et chaotique).

Décrivons plus précisément cet algorithme. Nous supposons que Ω est partitionné en plusieurs domaines $(\Omega_i)_{i=1..K}$ dont les frontières sont composées de facettes d'éléments du maillage. Σ est la surface $\cup \partial \Omega_i \setminus \partial \Omega$ (composée des facettes internes du maillage d'après ce qui précède). Considérons alors l'algorithme suivant, engendrant une suite ψ^n .

$$(G.2.2) \quad \forall q, \quad \int_q C \psi_d^{(n)} + \int_{\partial q \cap (\Omega \setminus \Sigma)} f(n)^- [\psi_e^{(n)} - \psi_d^{(n)}] + \int_{\partial q \cap \Sigma} f(n)^- [\psi_e^{(n-1)} - \psi_d^{(n)}] \\ + \int_{\partial q \cap \partial \Omega} g_i - f(n)^- \psi_d^{(n)} = 0$$

qui exprime que dans chaque domaine Ω_i , ψ^n est calculé en résolvant le schéma restreint à Ω_i , et en utilisant le flux rentrant de ψ^{n-1} comme condition aux limites inhomogène sur $\partial \Omega_i$. On a montré au chapitre D que ψ^n converge vers $\varphi^{(i)}$. Il suffit donc de factoriser un système linéaire associé à chaque domaine, puis d'itérer les descentes-remontées en balayant successivement tous les domaines, jusqu'à convergence numérique de ψ^n vers la solution globale du problème inhomogène considéré.

G.2.1. Description de l'IPSC 860

Nous allons maintenant décrire l'implémentation de ces méthodes sur un ordinateur massivement parallèle, l'IPSC 860 d'Intel. Une brève présentation des architectures d'ordinateurs massivement parallèle à mémoire distribuée s'impose avant d'aborder les détails de programmation et les résultats obtenus.

Pour le programmeur, l'IPSC 860 se présente en fait comme un réseau de processeurs indépendants numérotés de 1 à N (dans le cas de l'IPSC 860, $N=128$). Chaque processeur a sa propre mémoire et ne peut accéder à la mémoire des autres que par échange de messages. Les échanges de messages sont, dans notre cas, gérés par appels à des sous-programmes d'une bibliothèque fournie par le constructeur. Bien que le réseau soit rapide, comparé par exemple à un réseau de stations de travail, il est bien sûr recommandé de limiter le nombre et la longueur des messages afin de ne pas grèver les temps de calcul.

G.2.2. Programmation parallèle de l'algorithme de Jacobi par blocs

La programmation de l'algorithme (G.2.2) est alors simple:

Nous avons commencé par décomposer le maillage en N sous-domaines Ω_i . L'algorithme de décomposition consiste à se donner N points associés aux N domaines et à distribuer les éléments dans leur domaine respectif suivant leur proximité par rapport à ces points. Cette méthode permet d'obtenir, en général, des domaines convexes et connexes avec des interfaces petites (afin de limiter la longueur des messages). En revanche, il faut procéder de façon empirique pour obtenir la répartition de points optimale, conduisant à des domaines équilibrés (même nombre d'éléments dans chaque domaine).

A chaque domaine Ω_i est associé un processeur chargé, dans une première phase, de l'assemblage et de la factorisation du système linéaire à résoudre dans Ω_i . Cette première phase ne nécessite pas d'échange de messages. Le temps de factorisation pour K domaines est donc le même que pour le domaine le plus grand.

La méthode de factorisation que nous avons utilisée est une décomposition LU de la matrice de chaque sous-domaine. L'algorithme, communiqué par F.X. Roux (cf. [40] et [41]), est adapté aux matrices non symétriques complexes. Il est basé d'abord sur une renumérotation des éléments par l'algorithme de Cuthill Mac Knee, transformant la matrice initiale en une matrice tri-diagonale par bloc, chaque bloc étant creux. Ensuite, un algorithme de pivot de Gauss par bloc est exécuté, de sorte que seuls les blocs diagonaux

de la décomposition soient remplis et stockés. Un jeu astucieux de pointeurs est également construit, permettant un calcul rapide des descentes-remontées.

Dans un second temps, ont lieu les itérations proprement dites. ψ est d'abord initialisé de manière arbitraire. A chaque itération, les processeurs commencent par calculer le flux qu'ils doivent transmettre à leurs voisins. Puis a lieu la phase d'échange de messages: envois des flux sortants et attentes des flux rentrants pour chaque domaine. Les systèmes linéaires locaux sont alors résolus par descente-remontée dans chaque domaine avant la nouvelle itération... Là aussi le temps de calcul est dicté par le domaine le plus gros, d'où l'importance d'avoir construit au départ des domaines équilibrés.

Après un nombre fixe d'itérations (précisé dans l'initialisation), toutes les données sont alors rapatriées vers le processeur 1 qui calcule le résidu et sauvegarde la solution. Si le résidu est trop important, on peut refaire un bloc d'itérations en initialisant avec le résultat du calcul précédent.

G.2.3. Second parallélisme de la méthode

Par ailleurs, un autre parallélisme de la méthode peut être exploité.

En effet, l'algorithme (G.2.2) doit être utilisé pour le calcul de chaque $\phi^{(i)}$. Ces calculs étant indépendants, ils peuvent être réalisés en même temps sur plusieurs groupes de K processeurs. Par exemple, si Ω est partitionné en $K=4$ domaines, et si l'on souhaite décomposer le flux rentrant de ϕ sur $n_b=16$ fonctions de base, le calcul des $\phi^{(i)}$ peut être réalisé en un seul coup sur 64 processeurs. Le gain en temps de calcul est important (et particulièrement simple à obtenir!) et montre combien la méthode des fonctions de base est adaptée au calcul parallèle.

En revanche, la résolution de (G.1.4) n'a pas été parallélisée. Bien que ce soit possible (surtout en ce qui concerne l'assemblage de la matrice), ceci n'est pas très important dans notre cas, les calculs sur station SUN restant modestes.

H. Résultats numériques

Introduction:

Dans ce chapitre sont exposées quelques expériences numériques réalisées avec le schéma de décomposition des flux. Les résultats théoriques obtenus dans les chapitres précédents sont en général valables pour des systèmes de Friedrichs en dimension quelconque, bien que souvent, pour simplifier la présentation, nous ayons particularisé aux équations de Maxwell en dimension 3. La méthode est donc très générale.

Son défaut majeur est sa lenteur de convergence: l'expérience a montré que si λ est la longueur d'onde du champ incident, le pas du maillage doit être au plus de l'ordre de $\lambda/80$ si l'on désire obtenir une précision acceptable. Des tests tridimensionnels ne sont pas envisageables sans amélioration de la précision, et nous présentons exclusivement ici des résultats numériques bidimensionnels (en mode TE).

Dans ce cadre, nous avons pu valider les propriétés de la méthode: convergence de l'approximation, conditions aux limites discrètes et continues, méthode de sous-domaines...

H.1. Condition aux limites transparente discrète

H.1.1. Résultat d'un programme test

Dans le chapitre F, nous avons supposé que la condition aux limites transparente discrète définissait bien une relation bijective entre les flux entrants et les flux sortants sur $\partial\Omega$. Rappelons que celle-ci est obtenue en écrivant que:

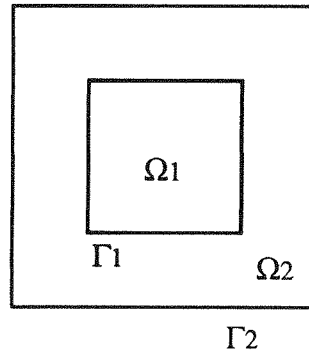
$$0 = \psi(k) = \sum_{p=1}^m M(k-p^+) \int_{\partial p^+ \cap \partial\Omega} f(N)^+ \varphi_D + M(k-p^-) \int_{\partial p^- \cap \partial\Omega} f(N)^- \varphi_E$$

pour tout élément k du maillage régulier inclus dans Ω (voir les notations du chapitre F). Elle a donc la forme d'une relation implicite entre le flux entrant et le flux sortant de φ sur $\partial\Omega$. Il s'agit donc de vérifier qu'elle permet de calculer $f(n)^- \varphi_D$ connaissant $f(n)^+ \varphi_E$ et vice-versa.

En fait, nous avons vérifié expérimentalement qu'il suffit d'imposer $f(n)^+ \psi(p^-) = 0$ (ou $f(n)^- \psi(p^+) = 0$) pour toute facette frontière p , afin d'obtenir une relation bijective. Dans ce

cas, le système linéaire à résoudre est un système carré, et l'équation ci-dessus est alors automatiquement vérifiée pour tout élément k dans Ω .

Le test était le suivant:



Considérons le maillage régulier d'un carré Ω_2 de frontière Γ_2 . A l'intérieur de ce carré, est défini un autre carré Ω_1 , de frontière Γ_1 constituée d'arêtes du maillage. Le schéma a d'abord été résolu sur Ω_1 avec la condition aux limites discrètes sur Γ_1 (et un second membre arbitraire à support dans Ω_2). Nous avons pu vérifier au passage l'inversibilité de la condition transparente. Les résultats, en terme d'énergie, sont représentés figure (H.1.1.1).

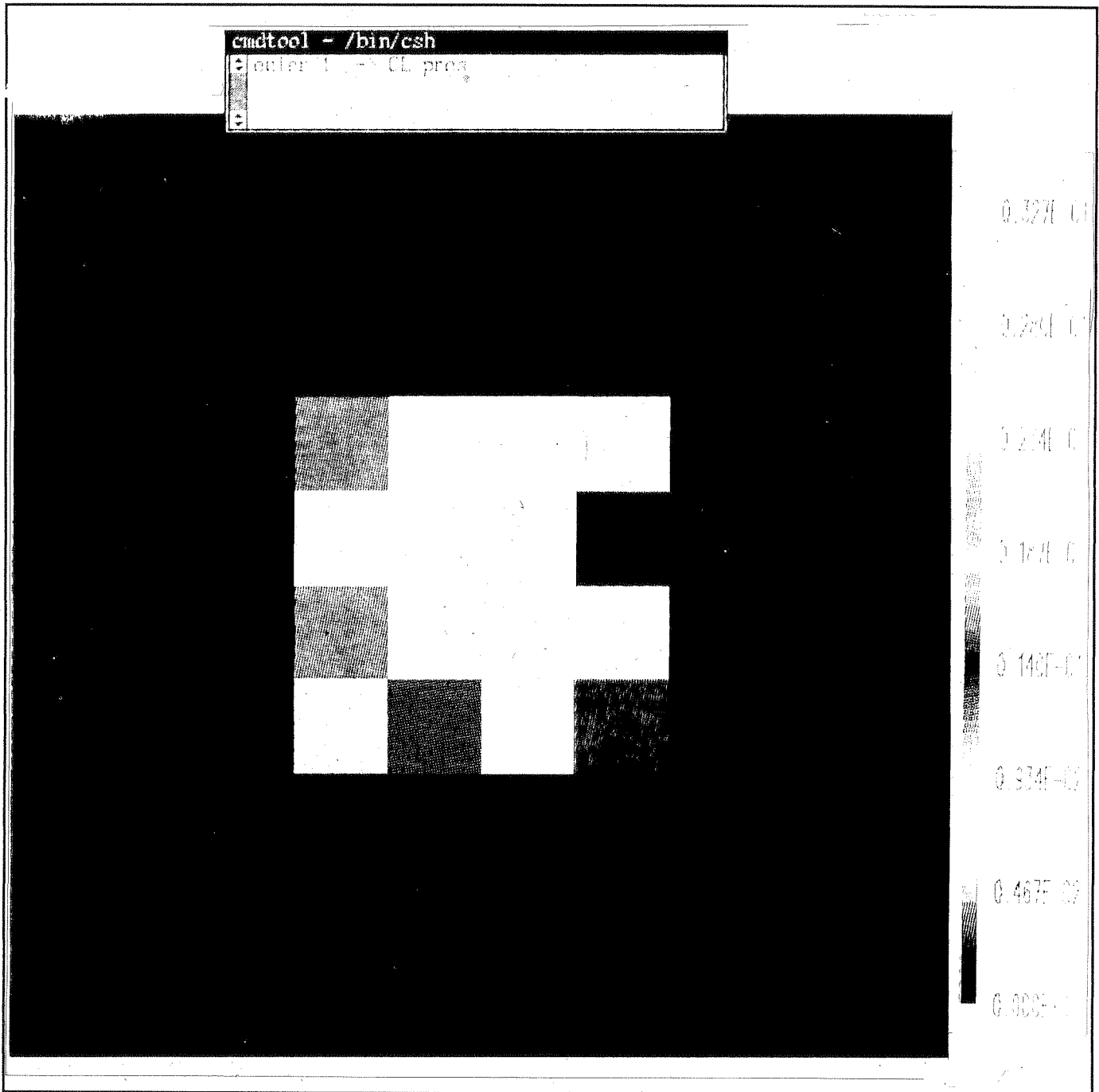


figure (H.1.1.1)

Lors de cette résolution, le second membre $g(\varphi)$ a été calculé. Nous avons donc pu appliquer l'inverse de l'opérateur discret L^{-1} à $g(\varphi)$, afin de vérifier que l'on trouve bien ψ . C'est bien le cas sur la figure (H.1.1.2).

4
.....

5
.....
6
.....

7
.....

8
.....
9
.....

10
.....

11
.....

12
.....

13
.....

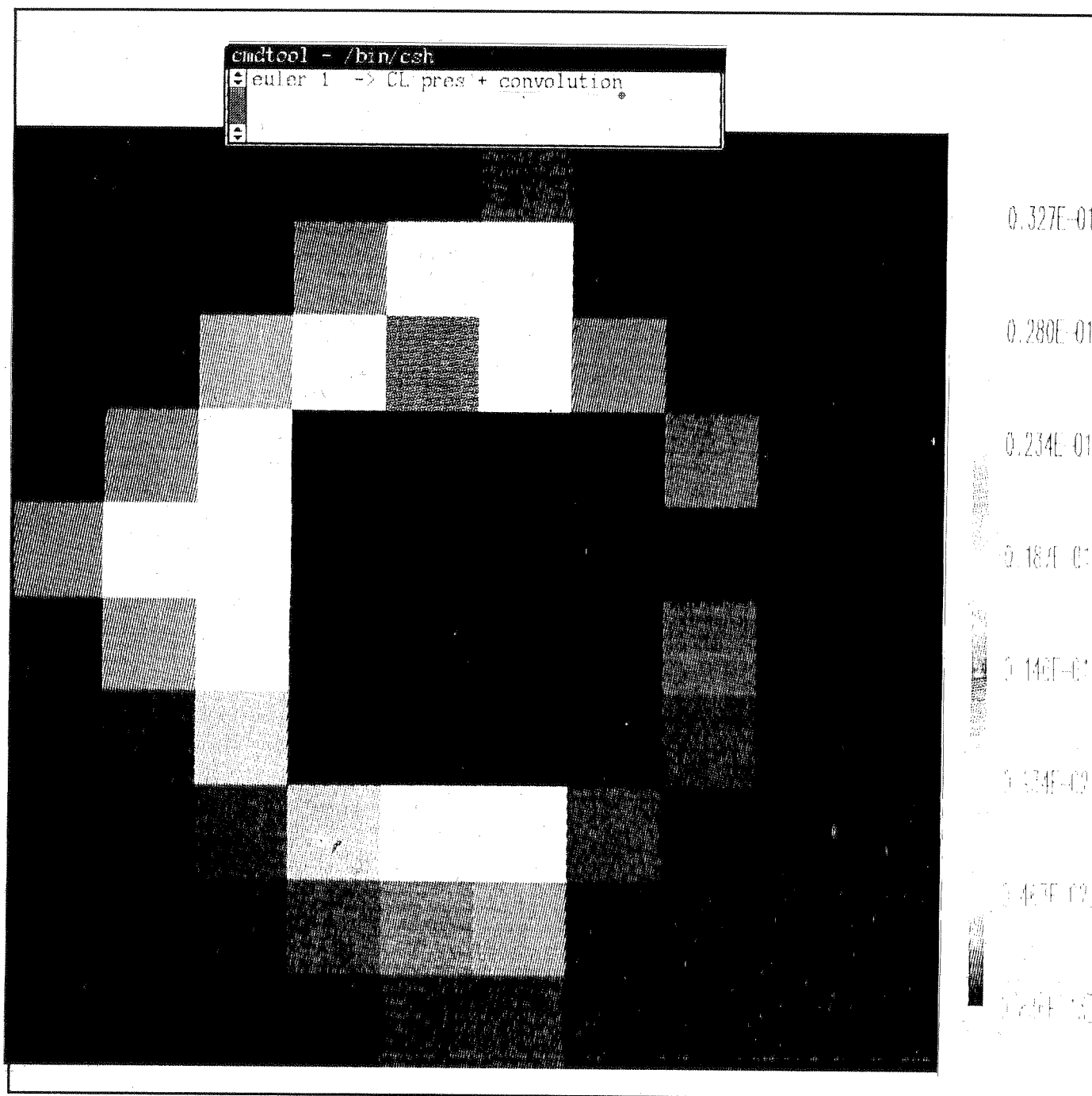


figure (H.1.1.2)

Sur la figure (H.1.1.3), les deux calculs précédents ont été recollés. Notons φ_1 le résultat du collage. φ_1 est donc une approximation numérique de φ , solution du problème discret écrit sur le maillage infini régulier prolongeant celui de Ω_1 .

1

2

3

4

5

6

7

8

9

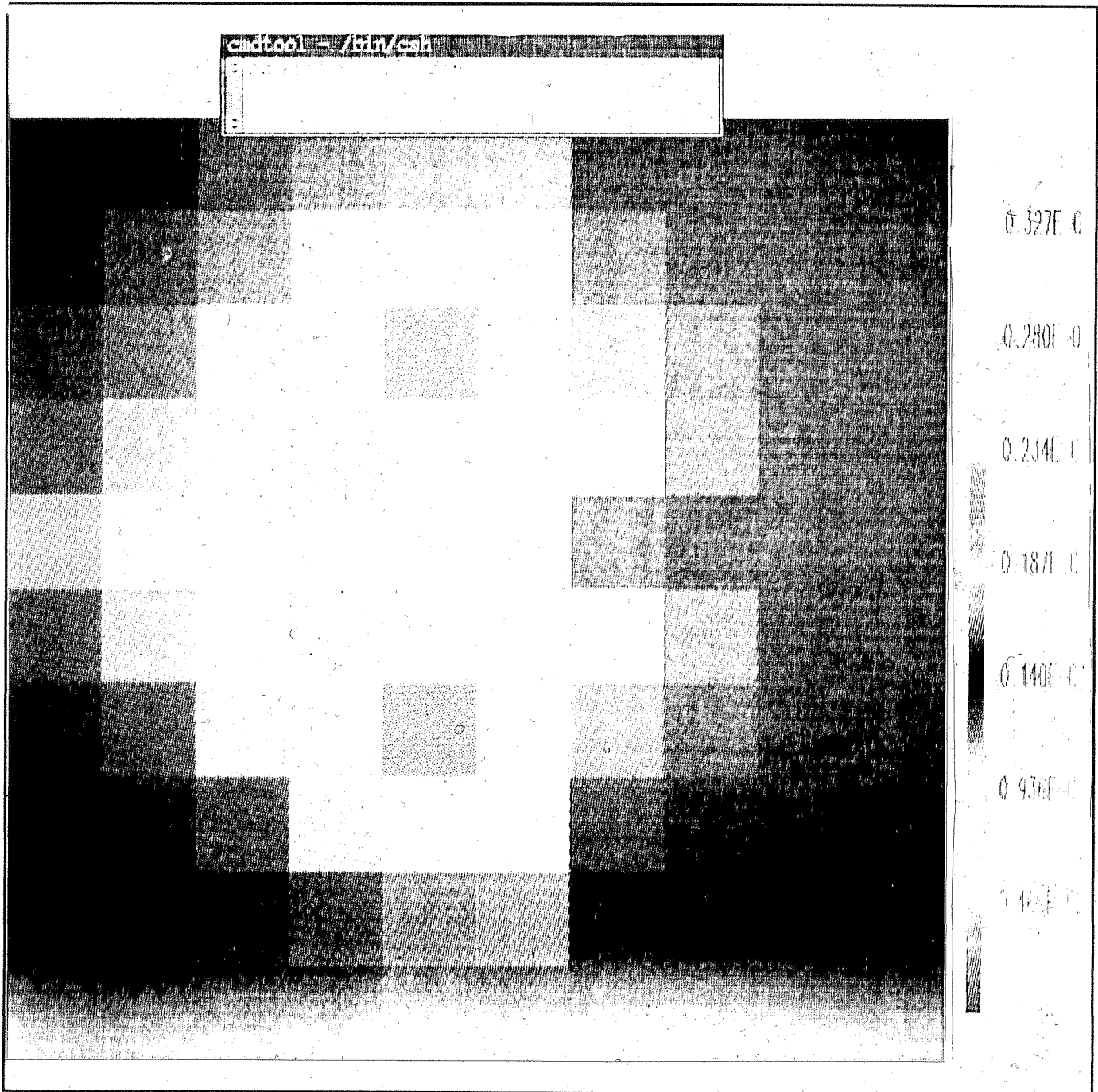


figure (H.1.1.3)

Théoriquement, la résolution du problème discret dans Ω_1 , couplé à la condition transparente discrète sur Γ_1 , doit conduire à une solution $\varphi_2 = \varphi_1$. φ_2 est représenté figure (H.1.1.4).

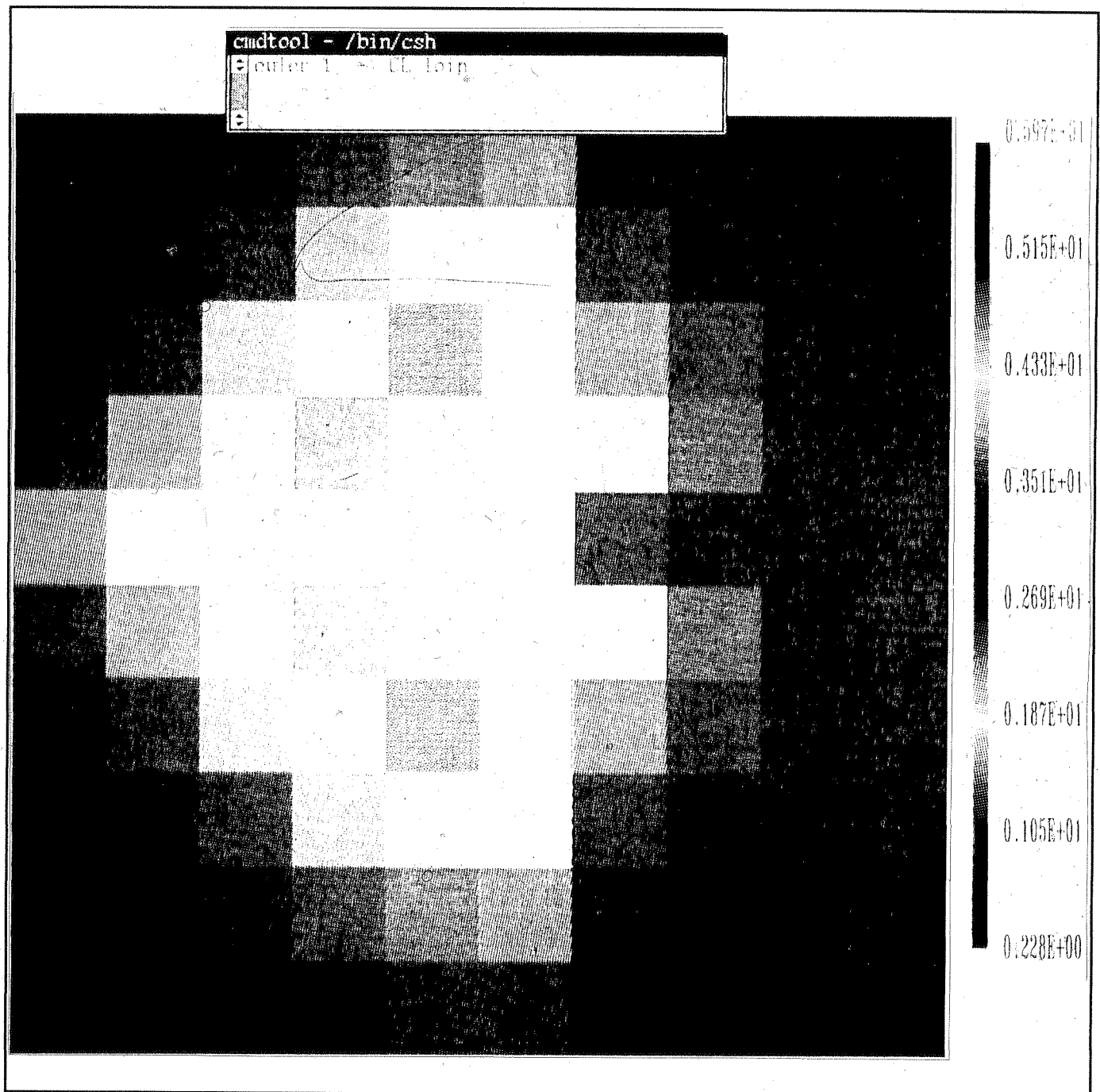


figure (H.1.1.4)

Sur la figure (H.1.1.5) est tracée l'erreur relative entre φ_1 et φ_2 (étant donné que sur de nombreux éléments φ_1 est voisin de 0, c'est un critère exigeant):

$$E_{rel} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1}$$

On a partout $E_{rel} < 2 \times 10^{-2}$ et donc φ_1 et φ_2 sont bien numériquement égaux.

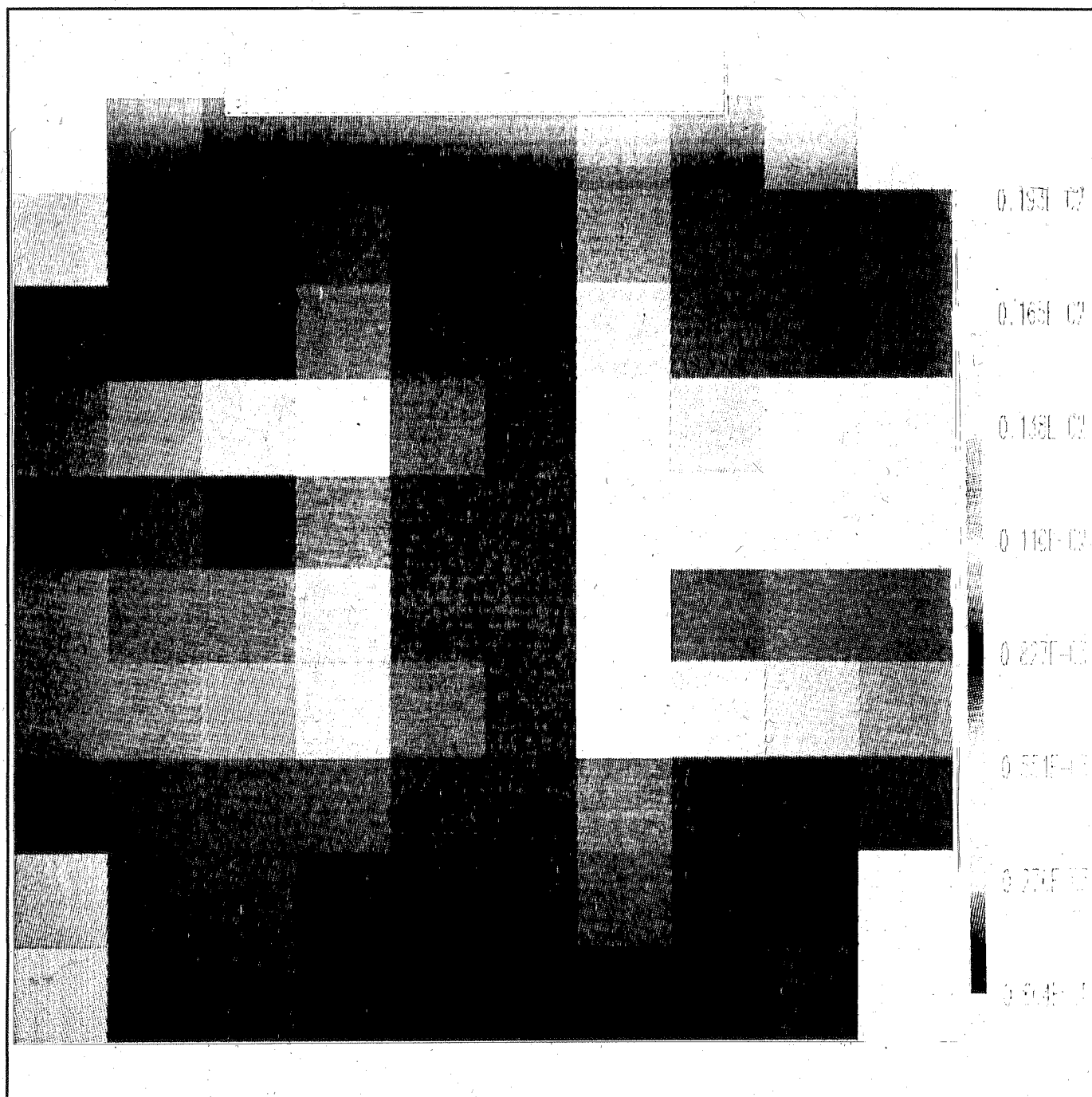
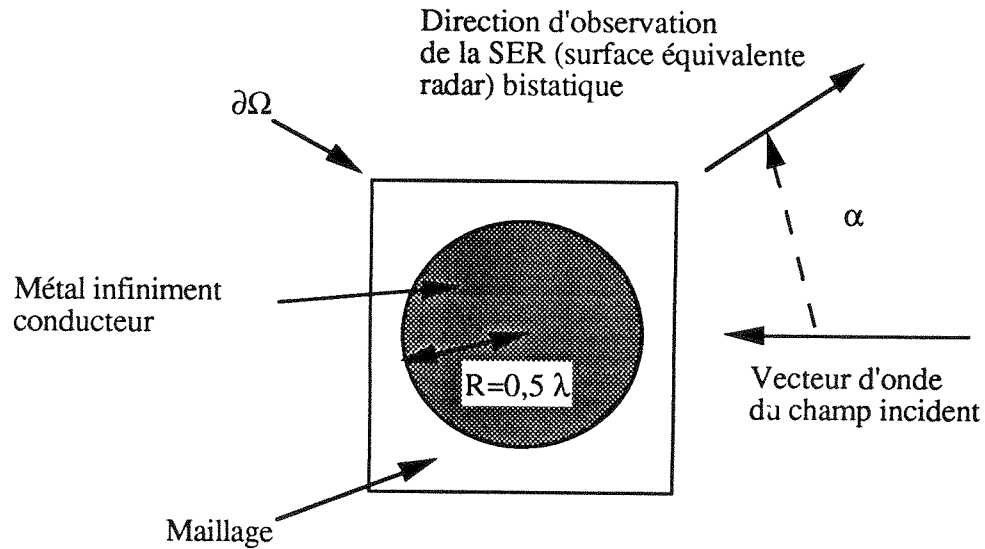


figure (H.1.1.5)



H.1.2. SER d'un cylindre métallique de rayon $0,5 \lambda$

La condition non réfléchissante discrète a été testée sur le cas d'un cylindre métallique infiniment conducteur de rayon $0,5 \lambda$ (λ est la longueur d'onde du champ incident).



On constate sur la figure (H.1.2.1) la convergence de la courbe de SER bistatique vers la courbe théorique lorsque le pas du maillage tend vers 0. Cependant, cette convergence est assez lente.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

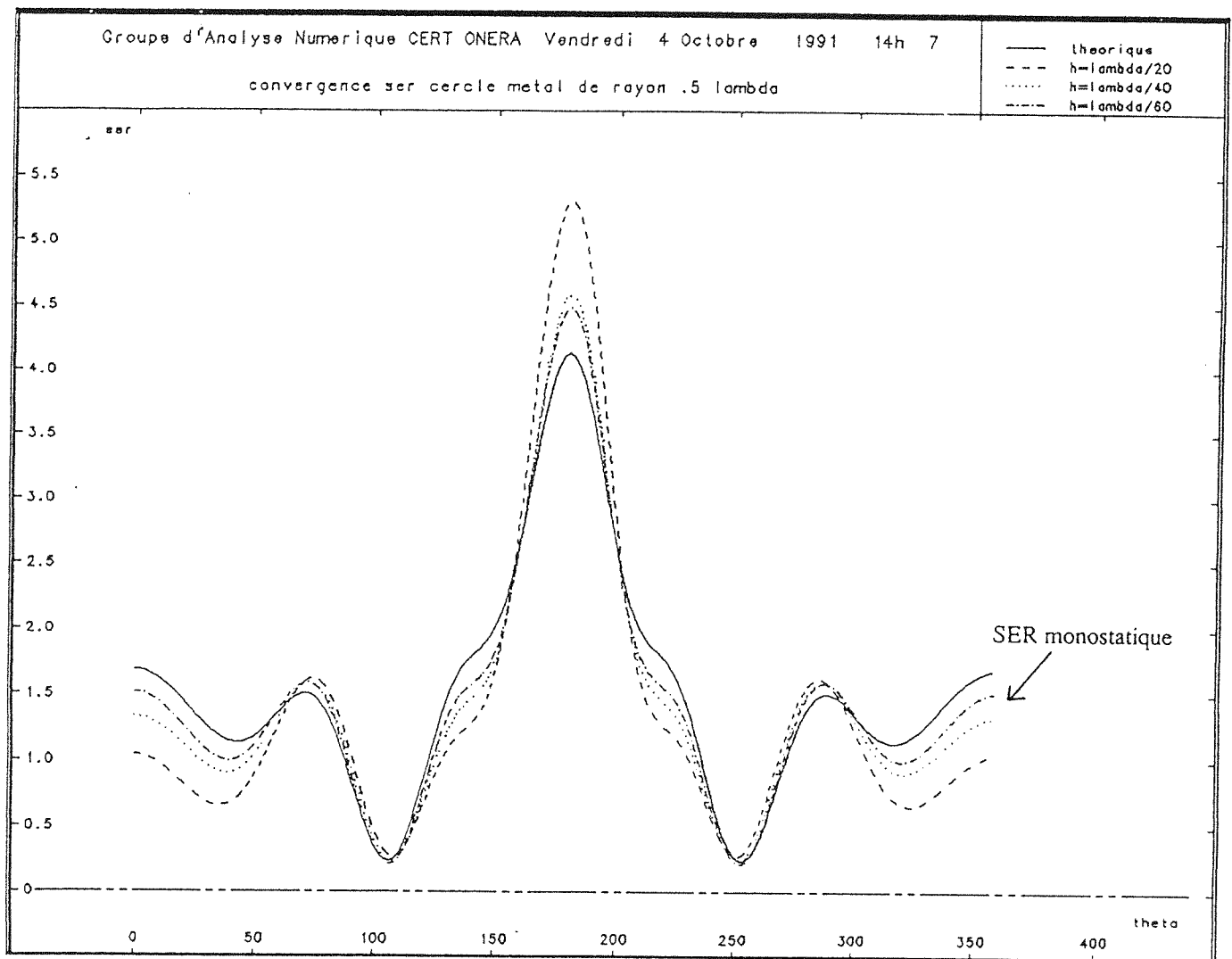


figure (H.1.2.1)

La figure (H.1.2.2) est une comparaison des courbes de SER obtenues avec la condition transparente discrète et la condition $f(n) - \varphi = 0$.

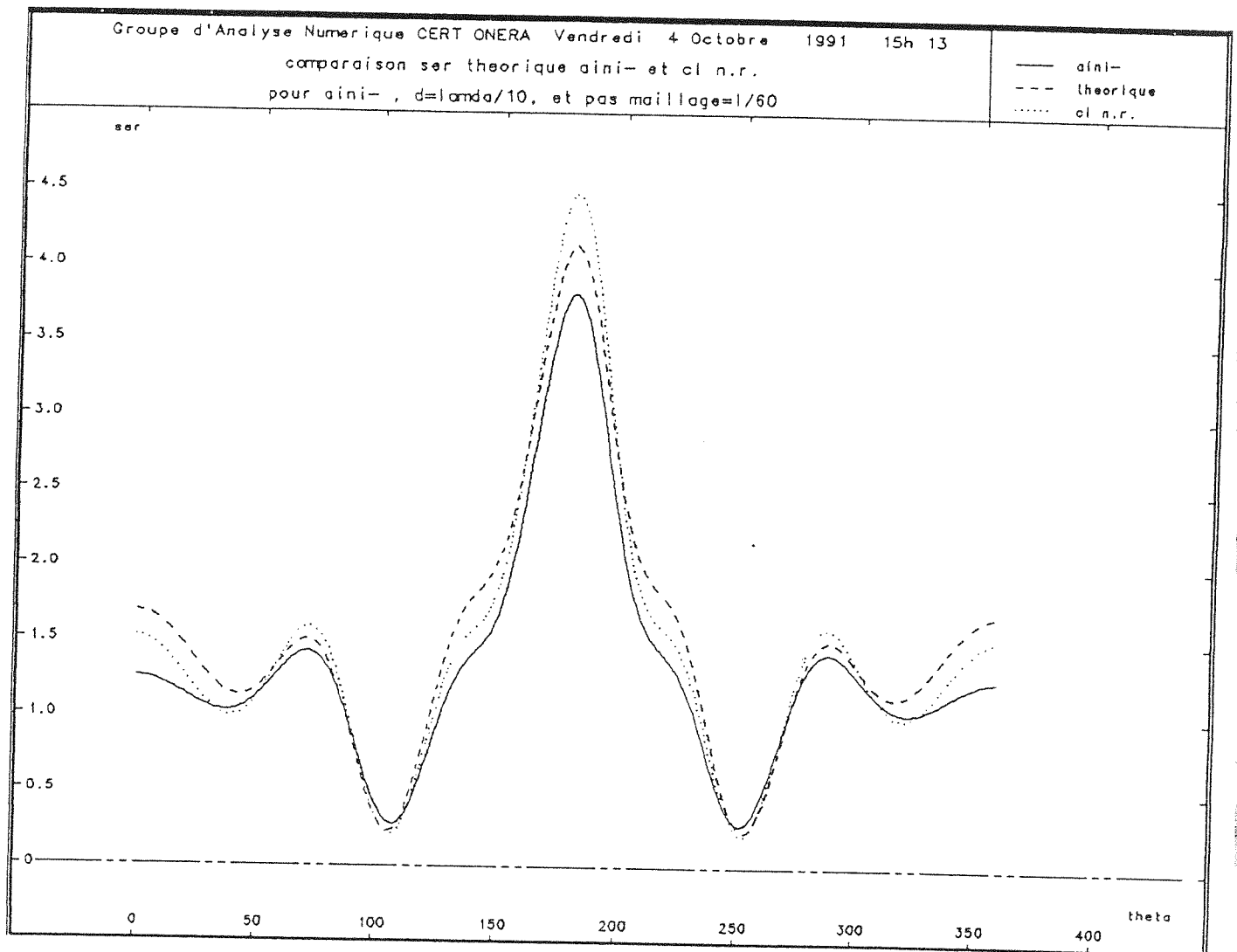


figure (H.1.2.2)

H.1.3. Conclusion

La précision obtenue avec la condition transparente discrète est insuffisante et ne justifie pas de pousser plus loin son algorithmique. En revanche, son rôle théorique est moins négligeable. Elle a permis de montrer qu'une condition non réfléchissante naturelle pour le schéma de décomposition des flux devait fournir une relation bijective entre le flux sortant et le flux rentrant de la solution sur $\partial\Omega$.

H.2. Condition transparente continue

H.2.1. Cylindre métallique de rayon $0,5 \lambda$

Nous reprenons le cas traité en (H.1.2) avec la condition discrète. On constate sur la figure (H.2.1.1) l'excellente précision de la SER bistatique obtenue grâce à la nouvelle condition aux limites. En abscisse se trouve l'angle α et en ordonnée $10 \log_{10}(\text{SER})$. Les problèmes intérieurs étant modestes, ils ont pu être résolus sur station SUN (voir le maillage figure (H.2.1.2)). Ici, $h \approx \frac{\lambda}{40}$. On constate de plus la stabilisation de la courbe de SER lorsque le nombre de fonctions de base $\varphi^{(i)}$ croît (nbas = nombre de fonctions de base). En pratique, nbas=10 suffit.

Ici, la courbe Γ où est écrit $\psi=0$ est un cercle de rayon $0,4 \lambda$.

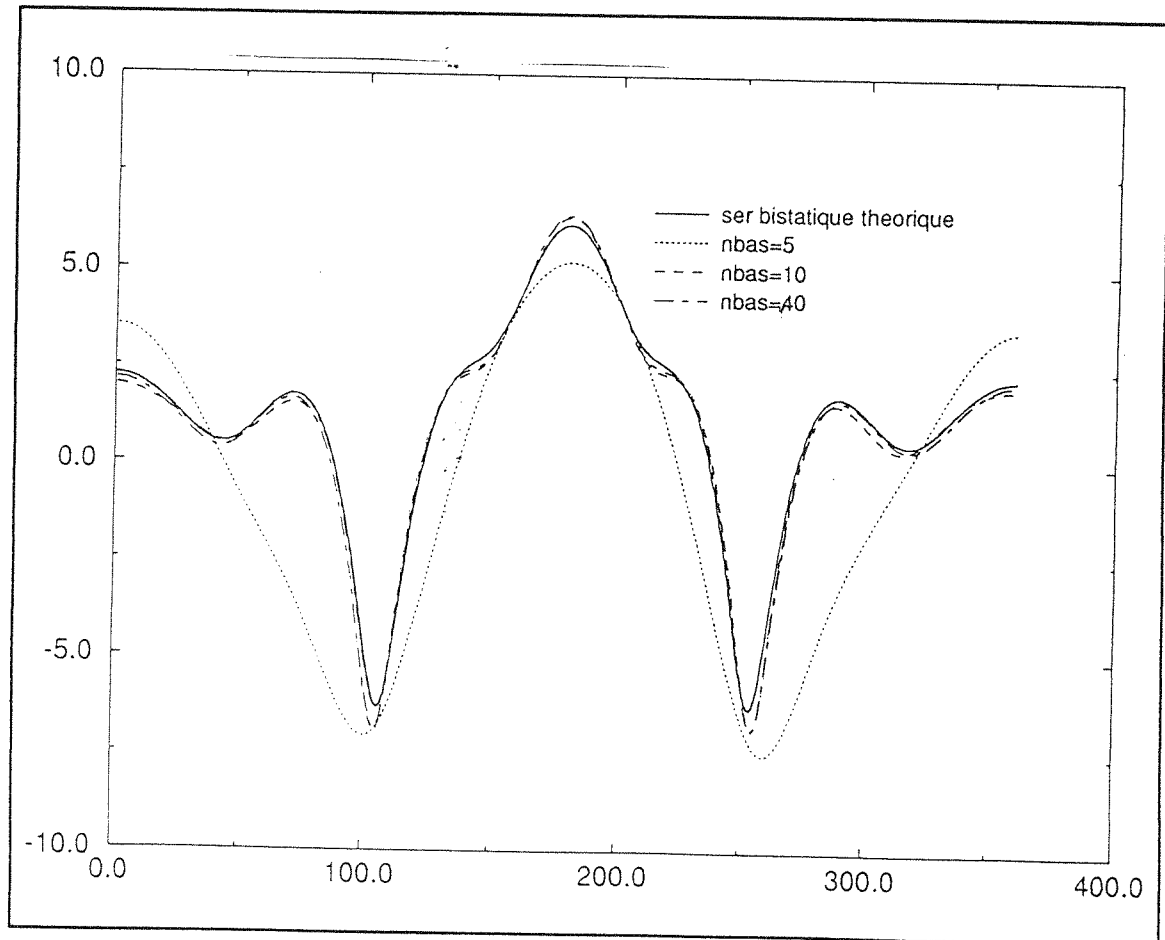


figure (H.2.1.1)

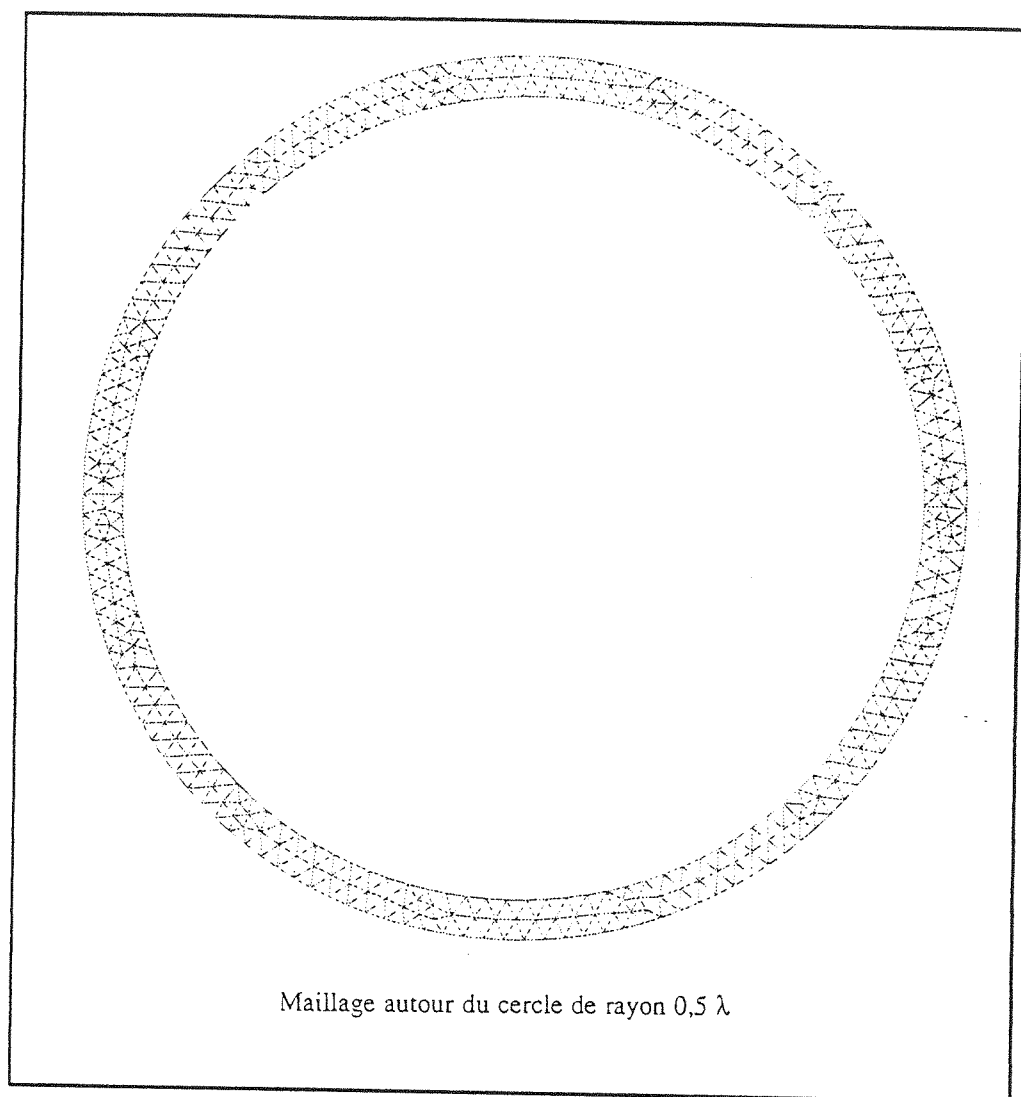


figure (H.2.1.2)

H.2.2. Cylindre métallique de rayon $3,18 \lambda$

Le cas est analogue au précédent avec $R=3,18 \lambda$. Voir figure (H.2.2.1) où la courbe théorique et la courbe calculée sont exactement superposées.

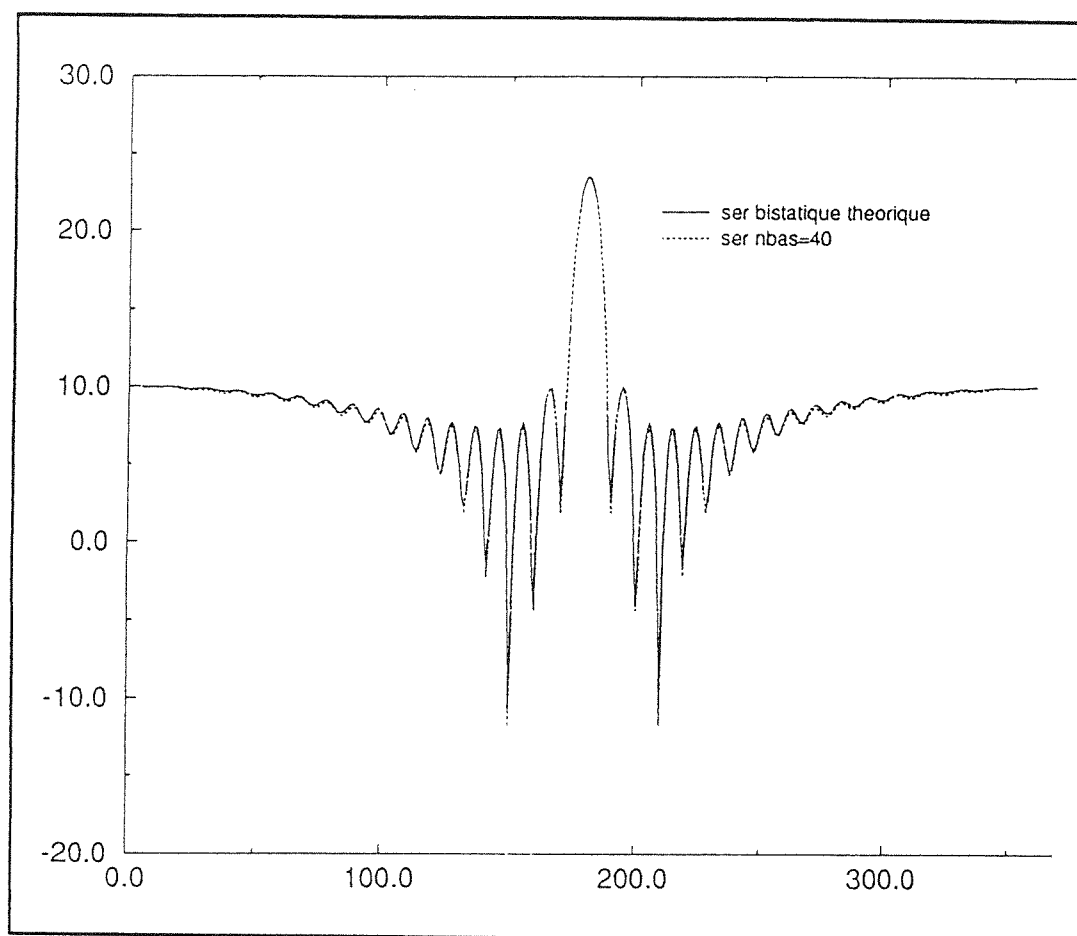
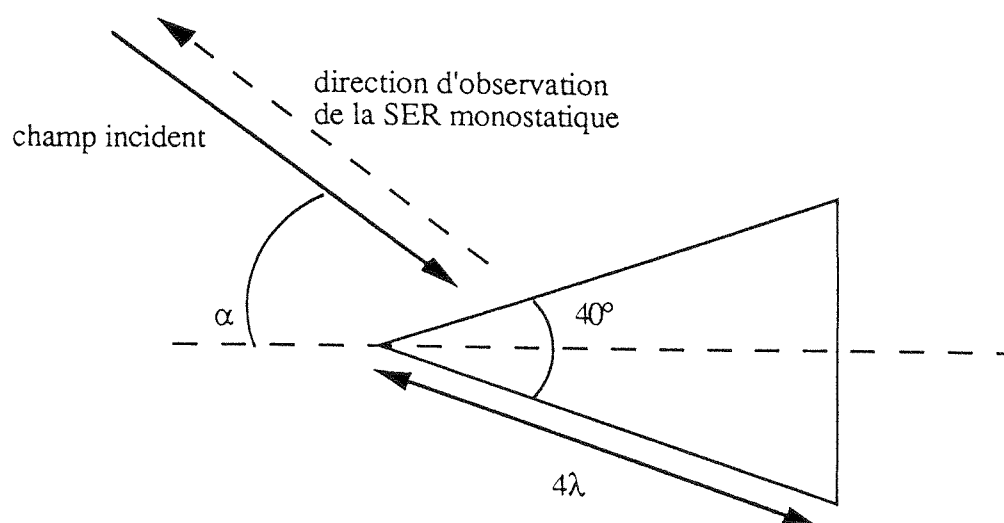


figure (H.2.2.1)

H.2.3. Triangle métallique



La figure (H.2.3.1) est une courbe de SER monostatique (on regarde dans la direction opposée au radar en balayant toutes les directions possibles). La courbe est comparée

avec les résultats d'une autre méthode développée par Dominique Volpert. On constate la bonne coïncidence des courbes.

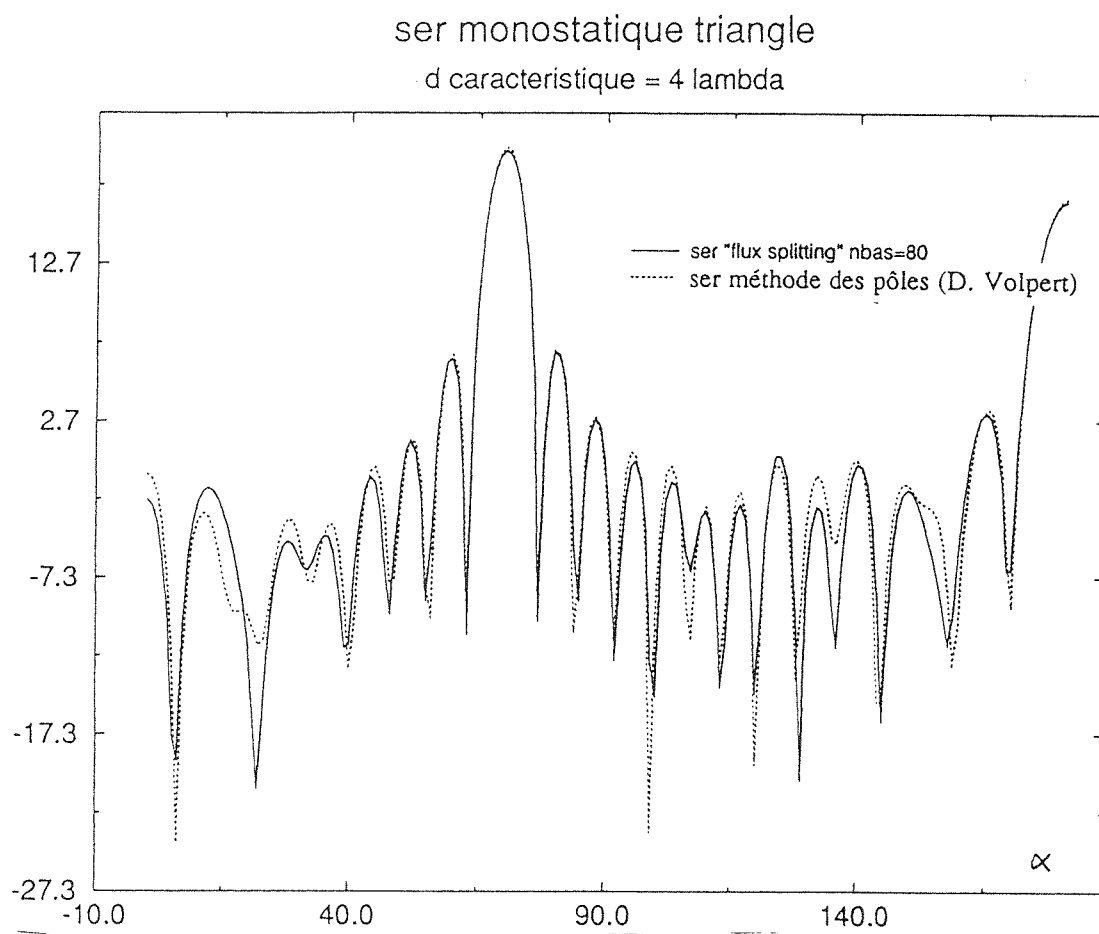


figure (H.2.3.1)

Nous avons également constaté sur ce cas que la courbe Γ ne doit pas être placée trop loin de $\partial\Omega$ (distance de l'ordre de $\lambda/50$). Ce paramètre a moins d'importance pour le cercle (ce fait est sans doute dû aux symétries existantes ainsi qu'à l'absence de pointe). Une fois cette contrainte respectée nous avons cependant vérifié la stabilité des courbes sous des variations des autres paramètres.

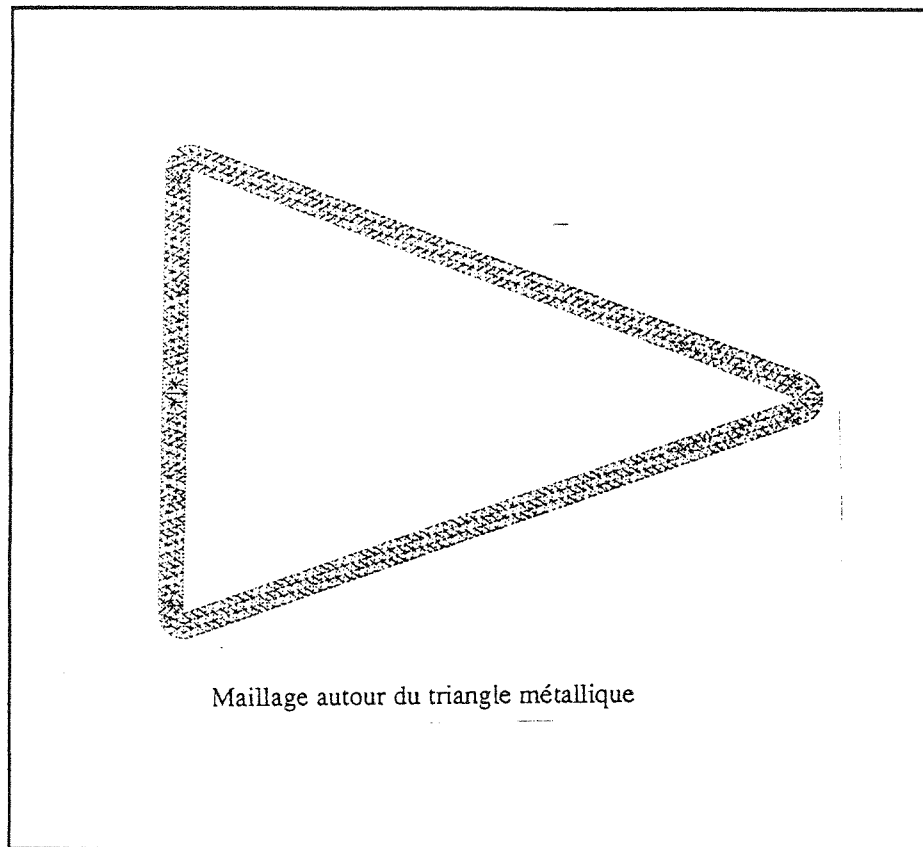


figure (H.2.3.2)

H.2.4. Triangle inhomogène

Le cas de calcul suivant, proposé dans l'atelier RCS Marseille 1992, a été traité sur IPSC 860. L'objet est un triangle composé de 2 matériaux diélectriques et d'un métal parfait. Deux maillages de finesses différentes ont été réalisés (figures (H.2.4.1) et (H.2.4.2)).

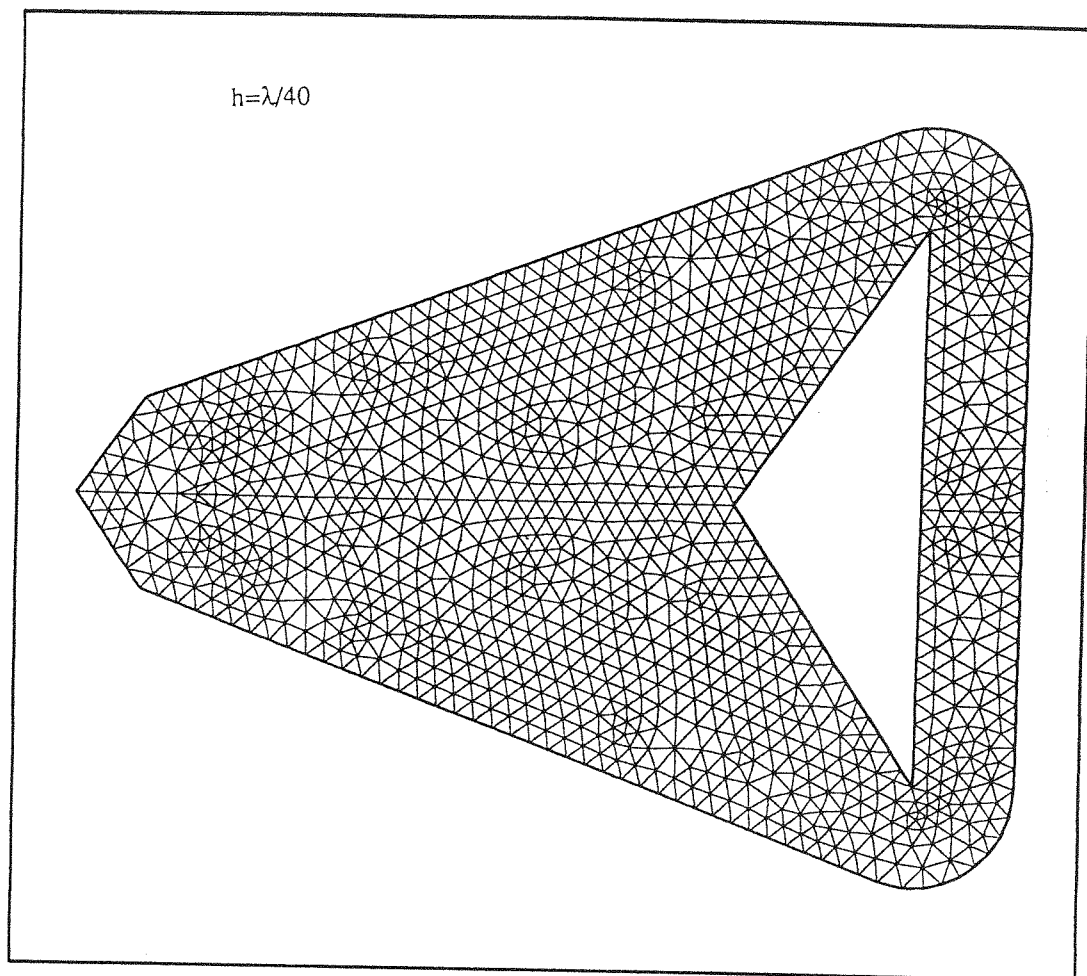


figure (H.2.4.1)

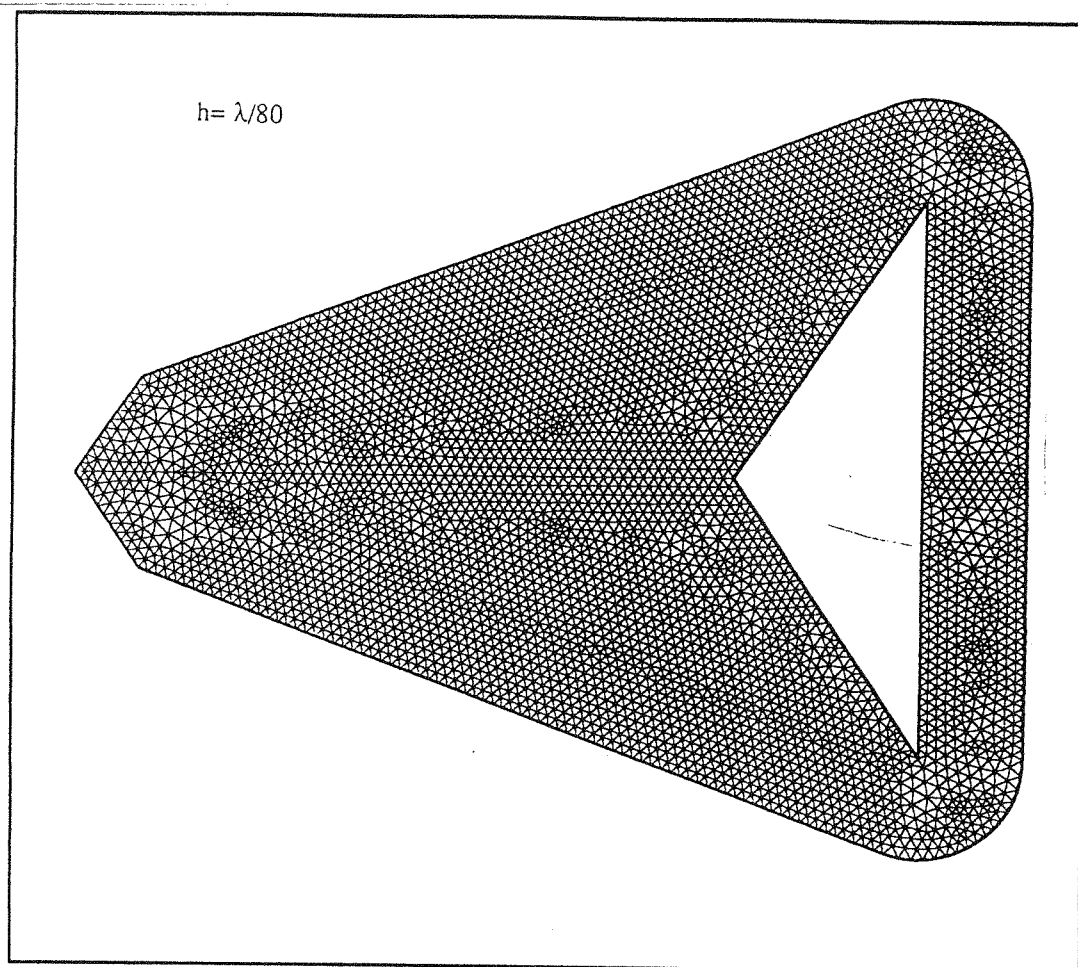
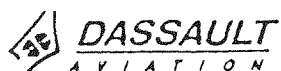


figure (H.2.4.2)

La géométrie est décrite figure (H.2.4.3). Sur cette même figure se trouve les résultats corrects, exprimés en terme de SER monostatique, d'un participant à l'atelier.



DIVISION DES ETUDES AVANCEES

Code SPECTRE

WORKSHOP R.C.S. Marseille 1992

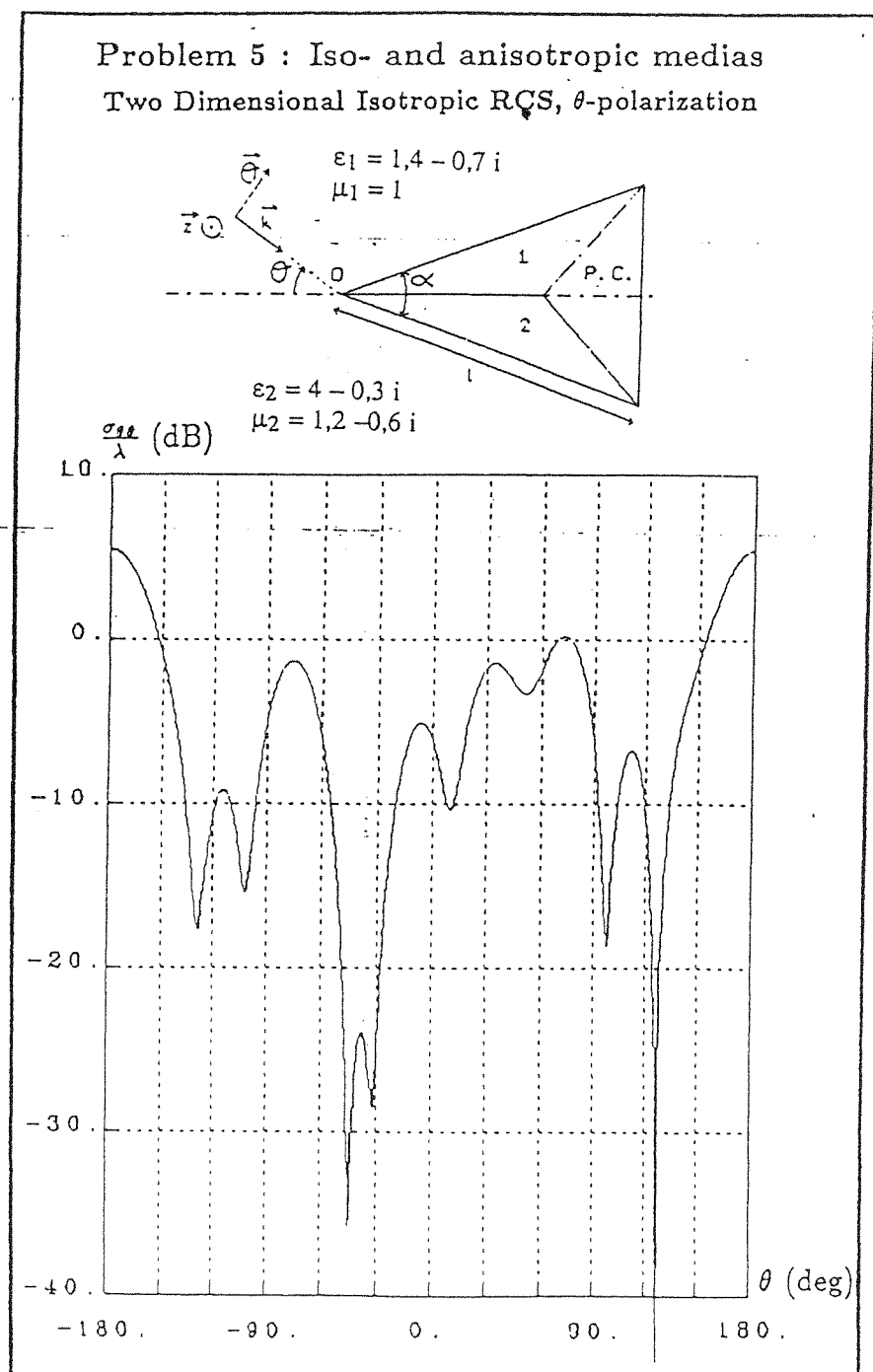


figure (H.2.4.3)

Ci-dessous, nous présentons un tableau récapitulatif des cas envisagés. Les temps donnés correspondent à la résolution de $n_{bas}=16$ problèmes intérieurs.

	maillage 1 ($h=\lambda/40$)	maillage 2 ($h=\lambda/80$)
nbre d'éléments	2324	8912
nbre d'arêtes	3582	13562
nbre d'elts domaine 1	609	2362
nbre d'elts domaine 2	553	2094
nbre d'elts domaine 3	609	2362
nbre d'elts domaine 4	553	2094
nbre d'arêtes dom. 1	960	3637
nbre d'arêtes dom. 2	868	3218
nbre d'arêtes dom. 3	960	3637
nbre d'arêtes dom. 4	868	3218
temps facto. dom. 1	32 s	552 s
temps facto. dom. 2	43 s	596 s
temps facto. dom. 3	32 s	554 s
temps facto. dom. 4	41 s	602 s
temps 100 iter (nproc=32)	20 s	80 s
temps 200 iter (nproc=32)	35 s	144 s
temps 400 iter (nproc=32)	66 s	
temps 800 iter (nproc=32)	124 s	
temps 1600 iter (nproc=32)	242 s	1031 s
temps 1600 iter (nproc=64)		515 s
temps 3200 iter (nproc=64)		1045 s
residu max 100 iter	3,3 E-4	1,5 E-4
residu max 200 iter	1,6 E-4	1,2 E-4
residu max 400 iter	4,4 E-5	
residu max 800 iter	4,2 E-6	
residu max 1600 iter	7,4 E-8	9,9 E-6
residu max 3200 iter		6,5 E-7

Précisons que le grand nombre d'itérations de la méthode de Jacobi par blocs effectué n'a servi qu'à montrer la stabilité de l'algorithme, ainsi qu'à vérifier sa convergence. En pratique, 100 à 200 itérations entre sous-domaines suffisent largement. D'autres tests, réalisés par ailleurs sur l'algorithme de Jacobi élément par élément, montre que le gain en temps apporté par la méthode de sous-domaines est très important. Les résultats du tableau indiquent que la convergence est d'autant plus lente que le maillage est fin. Ceci semble montrer que le module d'une des valeurs propres de la matrice d'itération s'approche de 1. Des méthodes d'accélération de convergence type Tchebyshev sont donc envisageables.

Sur la figure (H.2.4.4) sont tracés nos résultats de SER (à la même échelle que sur la figure (H.2.4.3)). On constate la coïncidence de la position des "pics" et des "creux". Néanmoins, la précision numérique de ces mêmes "pics" et "creux" laisse à désirer.

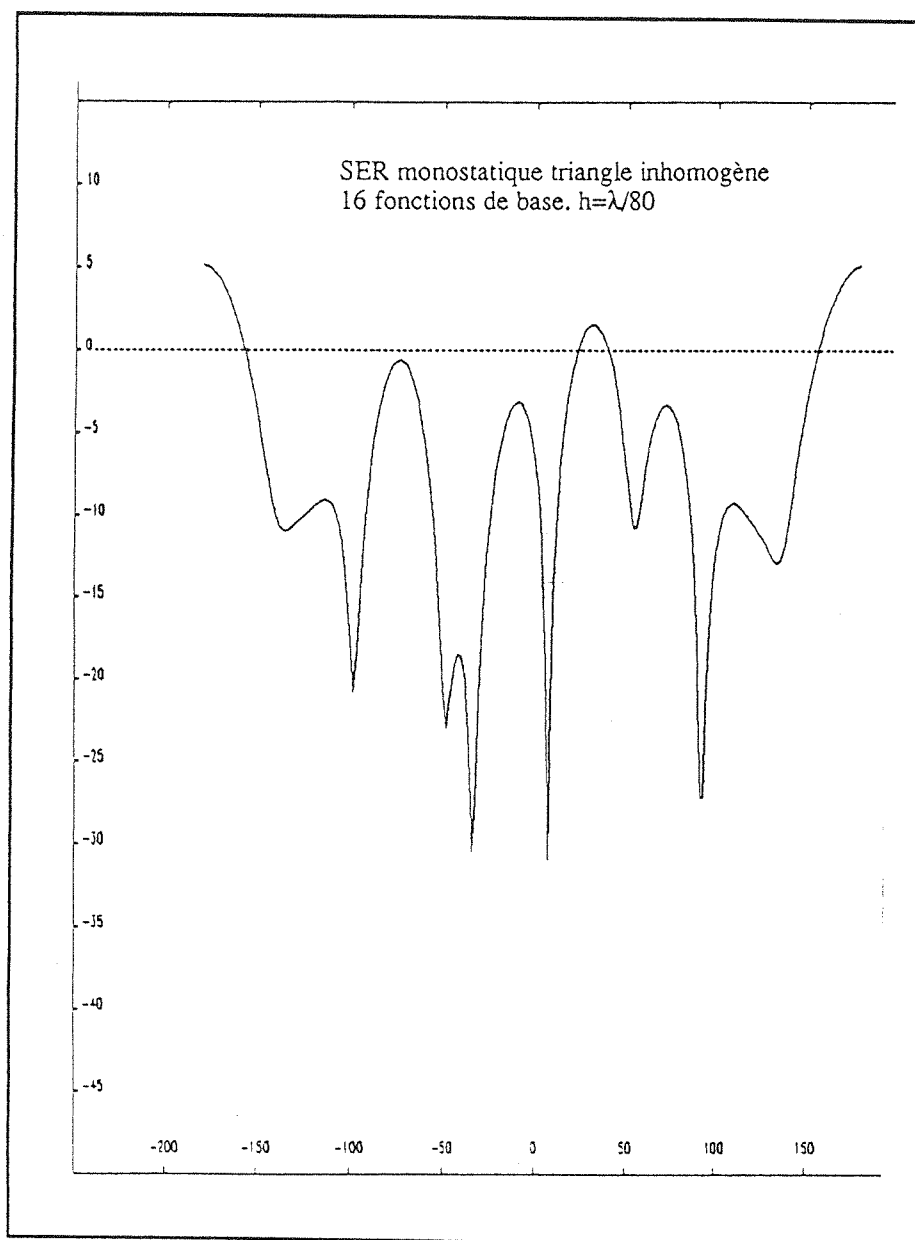


figure (H.2.4.4)

La finesse du maillage n'est pas en cause, mais l'insuffisance du nombre de fonctions de base ($n_b=16$).

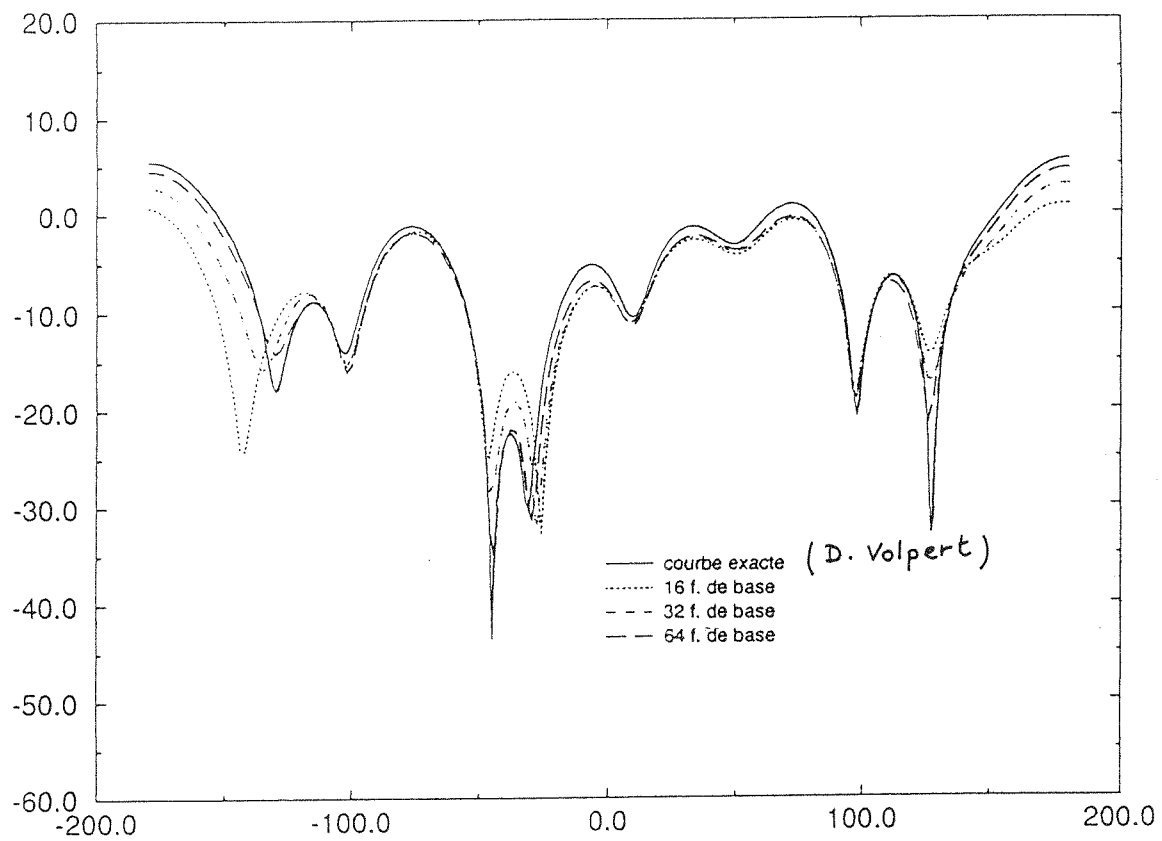


figure (H.2.4.5)

Les calculs ont été refaits, sur ordinateur conventionnel, pour évaluer l'influence de ce paramètre. Les résultats sont représentés figure (H.2.4.5), et le nouveau maillage figure (H.2.4.6).

Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps de réaliser une étude numérique sérieuse du gain en temps apporté par la parallélisation. Seule la faisabilité est démontrée.

La figure (H.2.4.7) est un tracé d'iso-énergies. La dissymétrie de la répartition d'énergie est due à la dissymétrie de la géométrie. L'éclairage a lieu par la pointe. L'effet de pointe (champ intense) est visible sur les points anguleux du triangle parfaitement conducteur.

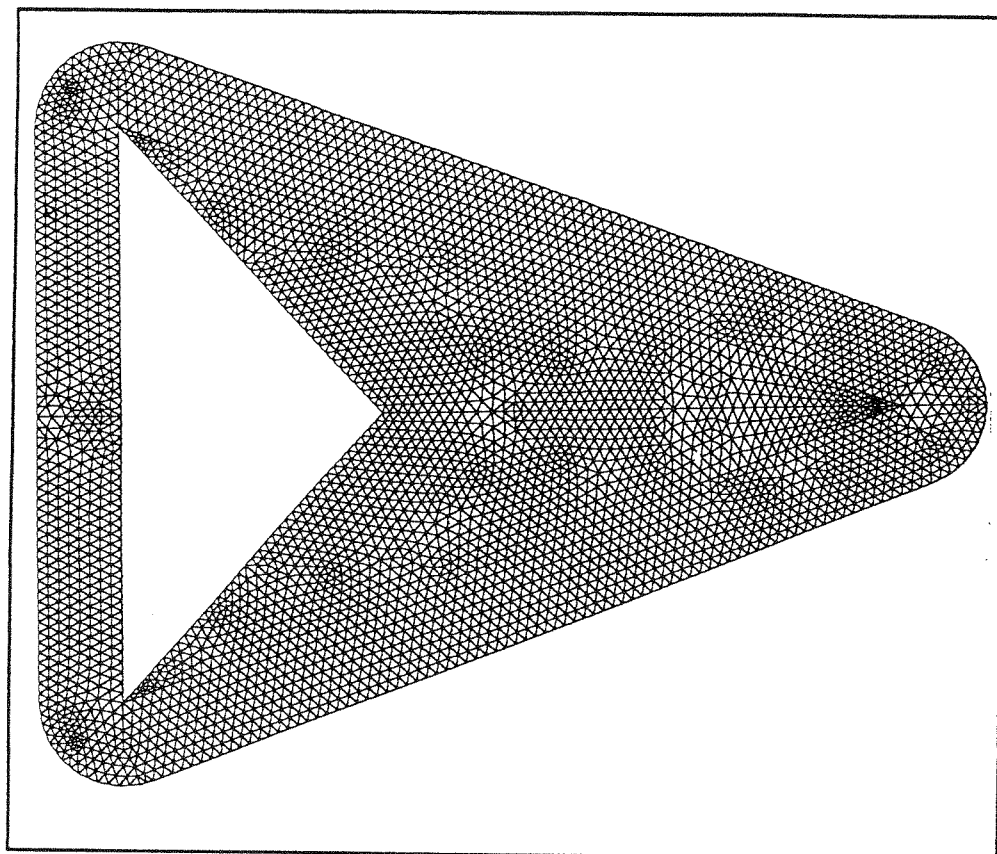


figure (H.2.4.6)

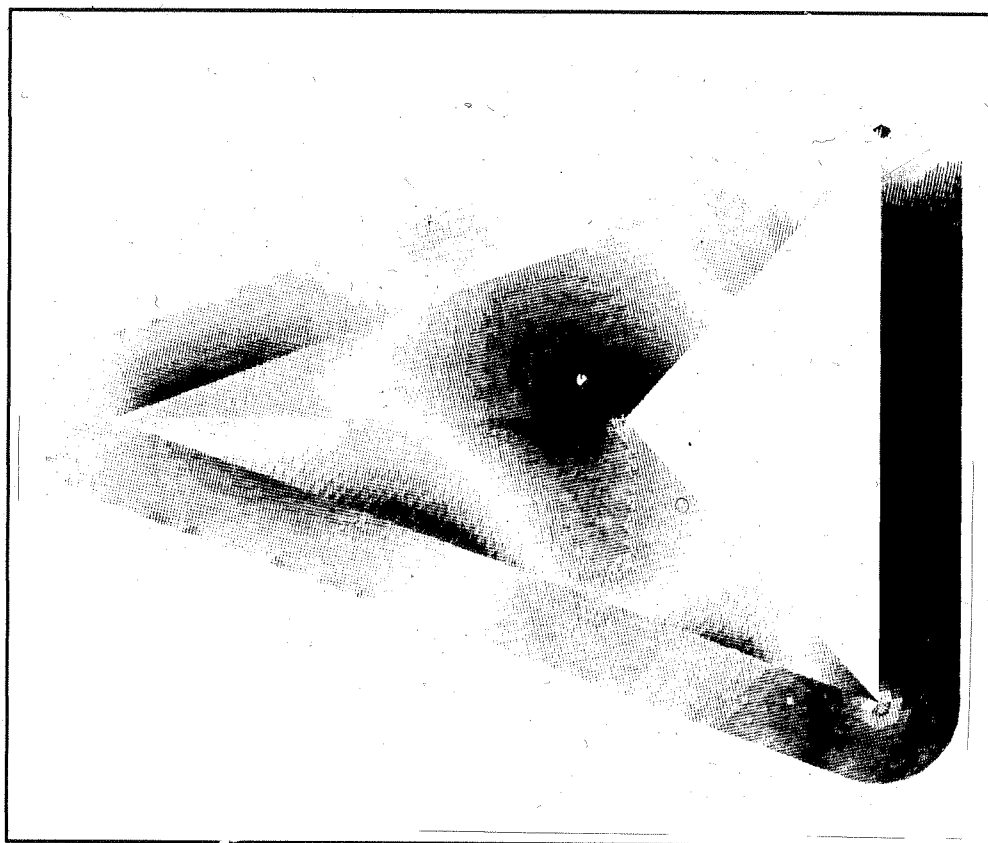


figure (H.2.4.7)

Conclusion

Nous avons présenté une approximation originale des équations de Maxwell harmoniques. Le schéma numérique qui en découle possède des propriétés pratiques sur le plan algorithmique:

- problème discret bien posé en existence et unicité.
- existence d'un algorithme itératif par sous-domaine convergeant vers la solution discrète.
- possibilité de maillages totalement déstructurés, permettant des raffinages locaux.

Ces propriétés ont été testées numériquement dans le cas d'éléments finis P_0 . De plus, elles restent théoriquement valables, pour des éléments finis d'ordre plus élevé.

Au passage, nous avons tenté d'exhiber certains liens entre la théorie du problème continu et celle de l'approximation. En particulier, il semble que la propagation des singularités de la solution instationnaire, le principe d'absorption-limite, la structure du problème harmonique, et la convergence de l'approximation sont intimement liés.

A l'avenir, nous souhaiterions élucider ces liens. Nous envisageons de plus d'améliorer l'ordre du schéma, grâce à la possibilité, déjà envisagée, d'éléments finis plus précis, afin que la méthode soit adaptable aux objets tridimensionnels. De plus, de nombreux problèmes théoriques intéressants restent posés autour de la condition transparente (F.1.2.3).

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

Bibliographie

- [1] Abboud T. & Nédélec J.C.: Electromagnetic waves in an inhomogeneous medium; Rapport du Centre Math. Appl. Polytechnique; n° 203; 1989
- [2] Alinhac S. & Gérard P.: Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser; InterEditions/Editions du CNRS; 1991
- [3] Bardos C., Lebeau G. & Rauch J.: Sharp sufficient conditions for the observation; control and stabilization of waves from the boundary; SIAM journal on control and optimization; vol 30:5; 1992; pp 1024-1065
- [4] Bendali: Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques; Thèse de doctorat école Polytechnique.
- [5] Bendali, Halpern: Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell en dimension 3; C.R.A.S.
- [6] Beylkin G., Coifman R. & Rokhlin V.: Fast wavelets transforms and numerical algorithm I; Comm. Pure Appl. Math.; vol XLIV; 1991; pp 141-183
- [7] Bouix M.: Les discontinuités du rayonnement électromagnétique; Dunod; 1965
- [8] Bourdel, Croisille, Delorme & Mazet: Sur l'approximation par éléments finis des systèmes hyperboliques K-diagonalisables. Applications aux équations d'Euler et aux mélanges de gaz.; La recherche aérospatiale; vol 5; 1989; pp 15-34
- [9] Brézis H.: Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert; North Holland; 1973
- [10] Brézis H.: Analyse fonctionnelle; Masson; 1983
- [10'] Cadilhac Petit:
- [11] Choquet Bruhat Y.: Géométrie différentielle
- [12] Courant & Hilbert: Methods of mathematical physics vol. II; Interscience Publishers; 1962

- [13] Croisille J.P.: Contribution à l'étude théorique et à l'approximation par éléments finis du système hyperbolique de la dynamique des gaz multidimensionnelle et multi-espèces.; Thèse de doctorat université Paris VI; 1990
- [14] Daubechies I.: Orthonormal bases of compactly supported wavelets; Comm. Pure Appl. Math.; vol XLI; 1988; pp 909-996
- [15] Després B., Joly P. & Roberts J.E.: A domain decomposition method for the harmonic Maxwell equations; Iterative method in linear algebra (North Holland); vol 11; 1992; pp 475-484
- [16] Friedrichs K.O.: The identity of weak and strong extension of differential operators
- [17] Friedrichs K.O. & Lax P.D.: Boundary value problems for first order operators; Comm. Pure Appl. Math.; vol XVIII; 1965; pp 355-388
- [18] Gel'fand I.M. & Retakh V.S.: Determinants of matrices over noncommutative rings; Plenum; 1991; pp 91-102
- [19] Halpern L. & Rauch J.: Error analysis for absorbing boundary conditions; Rapport du Centre Math. Appl. Polytechnique; n°152; 1986
- [20] Harten A.: Multi-resolution analysis for ENO schemes; NASA; NASA Report 189043-Icase report N° 91-77; 1991
- [21] Hörmander: The analysis of linear partial differential operators tome II et III
- [22] Johnson C. & Szepessy A.: On the convergence of a finite element method for a nonlinear hyperbolic conservation law; Math. of Comp.; 49 n°180; 1987; pp 427-444
- [23] Johnson C., Nävert U. & Pitkäranta J.: Finite element methods for linear hyperbolic problems; Comp. Methods in Appl. Mech. & Engin.; vol 45; 1984; pp 285-312
- [23'] Kalfon D., Volpert D.: couplage éléments finis conformes-méthode des pôles pour l'approximation des problèmes de signature radar. Rapport CERT.
- [24] Lax P.D.; Hyperbolic systems of conservations laws and the mathematical theory of shock waves

- [25] Lax P.D. & Phillips R.S.: Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators; Comm. Pure Appl. Math.; vol XIII; 1960; pp 427-455
- [25'] Lesaint P., Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis, Thèse, rapport CEA -R -4731, 1976
- [25''] Lesaint P., Raviart P.A., On a finite element method for solving the neutrons transport equation, Mathematical aspects of finite elements in P.D.E. (C. de Boor ed.) Acad. Press. New York, 1974, 89-123
- [26] Majda A.: Coercive inequalities for nonelliptic symmetric systems; Comm. Pure Appl. Math.; vol XXVIII; 1975; pp 49-89
- [27] Maslov: méthodes opératorielles
- [28] Mazet P.A.: cours de DEA
- [29] Nédelec J.C.: A new family of mixed finite element in $\mathbb{R}^3$; Rapport du Centre Math. Appl. Polytechnique; R.I.132; 1985
- [30] Payne K.R.: Smooth tame Fréchet algebras and Lie groups of pseudodifferential operators; Comm. Pure Appl. Math.; vol XLIV; 1991; pp 309-337
- [31] Perthame B. & Tadmor E.: A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws
- [32] Petit: Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique.
- [33] Petkov M. & Georgiev V.S.: RAGE Theorem for power bounded operators and decay of local energy for moving obstacle; Ann. Inst. Henri Poincaré; 51 n°2; 1989; pp 155-185
- [34] Petkov V.: Scattering theory for hyperbolic operators; North Holland; 1989
- [35] Petkov V.M. & Stoyanov L.N.: Geometry of reflecting rays and inverse spectral problems; Wiley & sons; 1992
- [36] Rauch J.: B.V. estimates fail for most quasilinear hyperbolic systems in dimension greater than one; Rapport du Centre Math. Appl. Polytechnique
- [37] Rauch J.: Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant

- multiplicity; Trans. American math. soc.; vol 291:1; 1985; pp 167-187
- [38] Rauch J.: Asymptotic behavior of solutions to hyperbolic partial differential equations with zero speeds; Comm. Pure Appl. Math.; vol 31; 1978; pp 431-480
- [39] Raviart P.A. & Thomas J.M.: Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles; Masson
- [40] Roux F.X.: Méthode de décomposition de domaine à l'aide de multiplicateurs de Lagrange et application à la résolution en parallèle des équations de l'élasticité linéaire; Thèse de doctorat de l'université Paris VI; 1989
- [41] Roux F.X.: Programmation des super-calculateurs scientifiques vectoriels et parallèles; ONERA; note technique 1991-11; 1991
- [42] Samuelides M. & Touzillier L.: Analyse harmonique; Cepadues-Editions; 1990
- [43] Samuelides M. & Touzillier L.: Analyse fonctionnelle; Cepadues; 1989
- [44] Schwab C. & Wendland W.L.: On numerical cubatures of singular surface integrals in boundary elements methods; Numer. Math.; n°62; 1992; pp 343-369
- [45] Schwartz L.: Théorie des distributions; Hermann; 1966
- [46] Stefanov P. & Georgiev V.: Existence of the scattering operator for dissipative hyperbolic systems with variable multiplicities; J. Operator Theory; vol 19; 1988; pp 217-241
- [47] Vainberg B.R.: On the short wave asymptotic behavior of solutions of stationary problems and the asymptotic behavior as $t \rightarrow +\infty$ of solutions of non-stationary problems; Russian Math. Surveys; 30:2; 1975; pp 1-58
- [48] Vo-Khac Khoan: Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles (tomes I et II); Vuibert; ; 1972
- [49] Vodev G.: Scattering for dissipative hyperbolic systems of non constant deficit; J. operator theory; vol 24; 1990; pp 277-299

1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{2}$

5. $\frac{1}{2}$

6. $\frac{1}{2}$

7. $\frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{2}$

Page 1 of 1

Page 2 of 2

Page 3 of 3

Page 4 of 4

Page 5 of 5

Page 6 of 6

Page 7 of 7

Page 8 of 8

Résumé: Cette thèse porte sur la résolution théorique et numérique des équations de Maxwell dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Dans une première partie, on démontre l'existence et l'unicité mathématique de la solution du problème d'évolution. On s'intéresse également au comportement asymptotique en temps de cette solution lorsque le second membre des équations est sinusoïdal en temps. L'approche utilisée fait appel à la théorie des systèmes hyperboliques linéaires du premier ordre, au théorème de Hille-Yosida, aux principes d'amplitude-limite et d'absorption-limite, ainsi qu'à des théorèmes de traces (dans le cas du problème aux limites).

Dans un second temps, on développe une approximation par éléments finis discontinus du problème fréquentiel, basée sur une décomposition de la matrice des flux en partie positive et négative (méthode de flux-splitting). Cette approche autorise l'utilisation de maillages totalement déstructurés. Une étude d'erreur lorsque le pas h du maillage tend vers zéro est proposée.

Un algorithme itératif de résolution du problème discret, basé sur une décomposition de domaine sans recouvrement, est ensuite décrit. On démontre sa convergence vers l'unique solution discrète. L'implémentation sur un ordinateur à architecture massivement parallèle (IPSC 860) a été réalisée.

Enfin, on construit une équation intégrale adaptée à la méthode, pour la résolution des problèmes en domaine non borné.

Des expériences numériques sont décrites dans le cas d'éléments finis de type P_0 (approximation constante par élément).

Mots clés: éléments finis, électromagnétisme, calcul parallèle, équation intégrale, comportement asymptotique, raffinement de maillage, décomposition de domaine, approximation non conforme.

Summary: This work is devoted to the theoretic and numerical resolution of Maxwell equations in the time or frequency domain.

In a first part, we prove that the time problem is well posed. We also deal with the asymptotic behavior of the solution when the right hand side of the equations is sinusoidal in time. In our approach we use the following tools: the theory of linear first order hyperbolic systems, the Hille-Yosida theorem, the limiting amplitude principle, the limiting absorption principle, and some trace theorems (in the boundary problem).

Then, we develop a discontinuous finite elements method for the numerical resolution of the frequency problem, based on a flux splitting. This method is well adapted to unstructured meshes, and local refinements are simplified. An error estimate is proved.

An iterative algorithm is then described to solve the discrete problem. It is based on a domain decomposition without covering. It is shown to be convergent towards the unique discrete solution, and it has been implemented on a parallel computer (IPSC 860).

An integral equation is also built, for the resolution of the problem in an unbounded domain.

Numerical experiments are described in the case of a piecewise constant approximation.

Keywords: finite elements, electromagnetism, parallel calculus, integral equation, limiting amplitude principle, mesh refinement, domain decomposition, non conforming approximation

