Identification et commande pour l'atténuation des vibrations du robot parallèle Par2

Luiz Ricardo Douat

▶ **To cite this version:**

Luiz Ricardo Douat. Identification et commande pour l'atténuation des vibrations du robot parallèle Par2. Automatique / Robotique. INSA de Toulouse, 2011. Français. NNT : . tel-00660338

HAL Id: tel-00660338
https://theses.hal.science/tel-00660338

Submitted on 16 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA Toulouse)

Discipline ou spécialité :
Automatique et robotique

Présentée et soutenue par :
Luiz Ricardo DOUAT

le : 30 Novembre 2011

Titre :

Identification et commande pour l'atténuation des vibrations du robot parallèle Par2

JURY

Edouard Laroche (PU UNISTRA, LSIIT) - Président
Cédric Baradat (Ingénieur Tecnalia)
François Pierrot (DR CNRS, LIRMM)

Ecole doctorale :
Systèmes (EDSYS)

Unité de recherche :
LAAS-CNRS

Directeur(s) de Thèse :
Germain Garcia (PU INSA, LAAS)
Isabelle Queinnec (DDR CNRS, LAAS)

Rapporteurs :
Christine Chevallereau (DR CNRS, IRCCyN)
Alain Richard (PU UHP, CRAN)

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu mes encadrants, Isabelle Queinnec et Germain Garcia, qui ont joué un rôle fondamental dans ma formation académique. Ils ont su m'apporter les bons conseils aux bons moments, respectant mon rythme de travail et me motivant dans les moments les plus difficiles de la thèse. Isa et Germain, pour vos compétences techniques, objectivité sur le plan profesionnel et sensibilité sur le plan personnel, disponibilité, compréhension et, avant tout, amitié (que peut-on vouloir de plus ?), je vous suis infiniment reconnaissant. Sincèrement, sans aucun bémol, vous avez toujours été présents.

Je remercie les rapporteurs de cette thèse Christine Chevallereau et Alain Richard pour la rapidité avec laquelle ils ont lu mon manuscrit et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Merci également aux autres membres du jury qui ont accepté de juger ce travail : François Pierrot, Cédric Baradat et Edouard Laroche. À François et à Cédric, un grand merci aussi pour le libre accès au robot Par2 sur lequel j'ai pu faire toutes les manips.

Je tiens à remercier les directeurs successifs du LAAS pendant les (presque) trois ans et demi de thèse, Raja Chatila, Jean-Louis Sanchez et Jean Arlat, pour m'avoir accueilli au sein de ce laboratoire. De la même manière, je suis très reconnaissant à toute l'équipe administrative du laboratoire, spécialement à Christèle Mouclier et à Camille Cazeneuve pour leurs compétences à la fois professionnelle et humaine.

J'ai eu également le plaisir de collaborer avec la société Tecnalia et le LIRMM de Montpellier. Je pense en premier lieu à Micaël Michelin (Tecnalia), extrêmement compétent dans l'instrumentation de terrain, qui m'apporté beaucoup de soutien pour les manips sur Par2. Pour leur amitié, mes vifs remerciements vont aussi à Guilherme (et sa femme Flavinha) et à Lotfi.

Mes remerciements vont naturellement à l'ensemble des membres du groupe MAC ; permanents, doctorants et stagiaires avec lesquels j'ai partagé mon séjour : Sophie, Lucie, Christophe, Denis, Didier, Dimitri, Fred, Jean, Luca, Mirko, Vincent, Georgia, Akin, Bogdan, Carlos, Cristiano, Florian, Frank, Giorgio, Jeff, Josep, Mathieu, Mounir, Razvan, Thomas, Cordelia, Adrian, Mauricio, Eduardo, Lucas, Guilherme, Gustavo, Fernando... Particulièrement, à mes collègues (et aussi amis) de bureau Sandy, Tung, Ix, Yoshio et Wilfried.

Un grand merci à mes amis du LAAS, pour les moments de décontraction en

dehors du bureau : Rodrigo, Juan Pablo, David, Layale, Ali, Mathieu, Roxana, ...

À l'Agence Nationale de la Recherche et à l'Agence de Défense Européenne pour leur soutien financier, un grand merci.

Finalement, ce travail n'aurait pas été possible sans la compréhension et le soutien de ma femme, Ana Paula. Paulinha, cette thèse est à toi et à notre "petit Luiz".

Table des matières

Introduction **1**

1 Le Problème des Vibrations **7**
1.1 Introduction . . . 7
1.2 Contrôle des vibrations . . . 8
1.2.1 Vibrations de structures . . . 8
1.2.2 Contrôle passif et contrôle actif . . . 11
1.2.3 Les matériaux intelligents . . . 12
1.2.4 Phénomène de *spillover* . . . 14
1.2.5 Colocalisation . . . 16
1.3 Les manipulateurs flexibles . . . 19
1.3.1 Chaîne cinématique ouverte (robots sériels) . . . 19
1.3.2 Chaîne cinématique fermée (robots parallèles) . . . 20
1.4 Le robot Par2 . . . 21
1.4.1 Description du robot . . . 21
1.4.2 Matériel (*hardware*) et logiciel (*software*) . . . 23
1.4.3 Analyse du spectre des perturbations . . . 25
1.5 Formulation du problème . . . 29
1.6 Conclusion du chapitre . . . 31

2 Identification de Systèmes **33**
2.1 Introduction . . . 33
2.2 Concepts fondamentaux . . . 34
2.2.1 La densité spectrale de puissance . . . 34
2.2.2 La méthode des moindres carrés . . . 35
2.2.3 Le filtre de Kalman pour les systèmes LTI . . . 37
2.3 L'identification non-paramétrique fréquentielle . . . 38
2.4 L'identification paramétrique . . . 40

2.4.1 Estimation de modèle paramétrique en erreur de sortie 41
2.4.2 Estimation de modèle paramétrique en erreur de prédiction . . 43
2.4.3 Classes de modèles spécifiques pour les systèmes SISO 45
2.5 L'identification basée sur les sous-espaces 47
2.6 Aspects pratiques de l'identification de systèmes 55
2.6.1 Génération des signaux d'entrée 55
2.6.2 Prétraitement des signaux 56
2.6.3 Choix de la méthode d'identification 57
2.7 Identification du modèle de l'actionneur piézoélectrique du robot en boucle ouverte 58
2.7.1 Robot avec 2,5 kg de charge sur la nacelle 60
2.7.2 Robot avec plusieurs conditions de charge sur la nacelle 65
2.7.3 Modèle Discret et Continu 66
2.8 Conclusion du chapitre 67

3 Commande $\mathcal{H}_\infty$ à Sensibilité Mixte 69
3.1 Introduction 69
3.2 Incertitudes 70
3.2.1 Incertitudes non-structurées 71
3.2.2 Transformation linéaire fractionnaire 72
3.3 Stabilisation et Performance Robustes 74
3.3.1 Le théorème du faible gain 75
3.3.2 Les filtres de pondération 76
3.4 La méthode $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte 79
3.4.1 La solution sous-optimale 82
3.5 Résultats Expérimentaux 85
3.5.1 Charge de 2,5 kg et trajectoire de 18 g 85
3.5.2 Charge de 2,5 kg et trajectoires de 15 g et 10 g 90
3.5.3 Sensibilité du contrôleur au changement de pondération des filtres 92
3.5.4 Charge de 1,5 kg et trajectoire de 18 g 93
3.6 Conclusion du chapitre 93

4 Commande $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping* 97
4.1 Introduction 97
4.2 Incertitude sous la forme de facteur premier 98
4.3 Stabilisation robuste 99
4.4 La méthode de $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping* 101

4.5 Résultats expérimentaux dans le cas nominal 103
4.5.1 Charge de 2,5 kg et trajectoire de 18 g 103
4.5.2 Charge de 2,5 kg et trajectoires de 15 g et 10 g 108
4.5.3 Sensibilité du contrôleur au changement de pondération des filtres 108
4.6 Résultats expérimentaux sur tout l'espace de travail 110
4.6.1 Robustesse à des variations de charge et de trajectoire 111
4.6.2 Analyse du contrôleur nominal 114
4.6.3 Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping* "doux" 117
4.6.4 Modification du contrôleur nominal par ajout d'un contrôleur anti-windup 121
4.7 Conclusion du chapitre 124

Conclusion Générale **125**

A Réduction équilibrée **129**
A.1 Réalisation équilibrée 129
A.2 Réduction par la méthode de perturbations singulières 130

B Modèles pour les synthèses des contrôleurs **133**

C Sur l'analyse et la synthèse de contrôleurs anti-windup pour les systèmes saturés **135**

Bibliographie **140**

Table des figures

1.1 Contrôle actif 13
1.2 Mécanisme du *spillover* 15
1.3 Configuration colocalisée - diagramme de Bode 16
1.4 Configuration colocalisée - lieu d'Evans 17
1.5 Configuration non-colocalisée - diagramme de Bode 18
1.6 Configuration non-colocalisée - lieu d'Evans 18
1.7 Robot Parallèle - Par2 22
1.8 Positions d'arrêt 22
1.9 Schéma d'interconnexion matériel (*hardware*) et logiciel (*software*) . . 24
1.10 Perturbations *Pert 1* et *Pert 2* - Nacelle avec 2,5 kg de charge et trajectoire de 18 g - Domaine temporel 26
1.11 Perturbations *Pert 1* et *Pert 2* - Nacelle avec 2,5 kg de charge et trajectoire de 18 g - Domaine fréquentiel 26
1.12 Perturbation *Pert 1* - Nacelle avec 2,5 kg de charge et trajectoire de 18 g - Domaine fréquentiel (échelle logarithmique) 27
1.13 Perturbations *Pert 1* et *Pert 2* - Nacelle avec 2,5 kg de charge et trajectoire de 18 g - Domaine temporel - Détail 28
1.14 Espace de travail - Trajectoires et conditions de charge étudiées . . . 28
1.15 Robot Par2 à vide pour plusieurs trajectoires - Domaine fréquentiel . 29
1.16 Robot Par2 avec trajectoire de 10 g pour plusieurs conditions de charge - Domaine fréquentiel 30
1.17 Schéma-bloc des étapes expérimentales (modèle flexible) 30

2.1 Modèle obtenu en minimisant l'erreur en sortie 42
2.2 Modèle obtenu en minimisant l'erreur de prédiction 45
2.3 Distribution des piézo-actionneurs sur les bras du robot Par2 59
2.4 Distribution pôles-zéros pour *mod ctrl vide* échantillonné à 2 kHz . . 60
2.5 Modèle *mod ctrl 2,5kg* - Entrée (Piézo $P1P2$) - Sortie (Accel Y) . . . 61

2.6 Données pour *mod ctrl 2,5kg* et *mod sim 2,5kg* dans le domaine fréquentiel 62
2.7 Modèles *mod ini ctrl 2,5kg* dans le domaine fréquentiel obtenus avec l'algorithme N4SID pour les ordres 10, 20, 30 et 40 62
2.8 Valeurs singulières de Hankel pour le modèle partiellement réduit *mod ini ctrl 2,5kg* d'ordre 22 63
2.9 Distribution pôles-zéros pour *mod ctrl 2,5kg* échantillonné à 1 kHz . . 64
2.10 Modèles *mod ctrl 2,5kg*, d'ordre 14, et *mod sim 2,5kg*, d'ordre 30 . . . 65
2.11 Modèles de simulation (*mod sim*) pour différentes conditions de charge 66
2.12 Modèle *mod ctrl 2,5kg* en temps discret et continu 67

3.1 Formes de représentations des incertitudes non-structurées 72
3.2 Interconnection de $P(s)$ et $\Delta(s)$ sous forme ULFT 73
3.3 Interconnection de $P(s)$ et $K(s)$ sous forme LLFT 74
3.4 Système générique en boucle fermée 75
3.5 Modèle nominal plus incertitude additive en boucle fermée avec un contrôleur 76
3.6 Configuration en boucle fermée 77
3.7 Configuration en boucle fermée avec les filtres de pondération 78
3.8 Filtres de pondération 86
3.9 Contrôleur d'ordre complet et réduit 87
3.10 Modes dominants en boucle ouverte et boucle en fermée 87
3.11 Fonction de sensibilité S_{SM} avec le modèle *mod sim 2,5kg* et le contrôleur réduit K_{SMr} 88
3.12 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoire de 18 g - Spectre de puissance 89
3.13 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoire de 18 g - Réponse simulée et réponse expérimentale 89
3.14 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoire de 18 g - Effort de commande 90
3.15 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoire de 18 g dans les directions X et Z - Spectres de puissance 90
3.16 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoires de 15 g et de 10 g - Spectres de puissance 91

3.17 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoires de 15 g et de 10 g - Réponses temporelles 91
3.18 Effet des filtres de pondération sur la fonction de sensibilité 92
3.19 Modèle *mod sim 1,5kg* avec contrôleur réduit K_{SMr} - Spectre de puissance 94
3.20 Modèle *mod sim 1,5kg* bouclé avec le contrôleur réduit K_{SMr} - Réponse simulée 94

4.1 Incertitude sur les facteurs premiers 100
4.2 Schéma LSDP 102
4.3 Pondération de la boucle ouverte pour le LSDP 104
4.4 Contrôleurs d'ordres complet et réduit 105
4.5 Modes dominants en boucle ouverte et boucle fermée 106
4.6 Fonction de sensibilité S_{LS} - modèle *mod sim 2,5kg* avec le contrôleur réduit K_{LSr} 106
4.7 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoire de 18 g - Spectre de puissance 107
4.8 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoire de 18 g - Réponses simulées et réponses expérimentales 107
4.9 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoire de 18 g - Effort de commande 108
4.10 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoires de 15 g et 10 g - Spectre de puissance . . . 109
4.11 Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoires de 15 g et 10 g - Réponse temporelle . . . 109
4.12 Effet des filtres de pondération sur la fonction de sensibilité 110
4.13 Résultats expérimentaux - Pourcentage de réduction d'accélération RMS durant les 2 premières secondes - Système en boucle fermée avec K_{LSr} par rapport à la boucle ouverte 111
4.14 Fonction de sensibilité - modèle *mod sim 2kg* avec le contrôleur réduit K_{LSr} 112
4.15 Résultats expérimentaux - Robot avec 2 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoires de 10 g, 15 g, 18 g et 20 g - Réponse temporelle . 113
4.16 Résultats expérimentaux - Robot avec 3,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoire de 15 g - Réponse temporelle et effort de commande 113

4.17 Résultats expérimentaux - Robot à vide, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoires de 10 g, 20 g et 30 g - Réponse temporelle et effort de commande 114
4.18 Schéma-bloc du système bouclé saturé 115
4.19 Fonction de sensibilité - modèle *mod sim 2,5kg* avec le contrôleur réduit K_{LSdr} 118
4.20 Résultats expérimentaux - Pourcentage de réduction d'accélération RMS durant les 2 premières secondes - Système en boucle fermée avec K_{LSdr} par rapport à la boucle ouverte 119
4.21 Résultats expérimentaux - Robot avec 3,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSdr} - Trajectoire de 15 g - Réponse temporelle et effort de commande 119
4.22 Résultats expérimentaux - Robot à vide, contrôleur réduit K_{LSdr} - Trajectoires de 10 g, 20 g et 30 g (avec détails entre 0,1 s et 0,6 s) - Réponse temporelle 120
4.23 Résultats expérimentaux - Robots avec 3,5 kg de charge, contrôleur $K_{LS_r}+$ anti-windup - Trajectoire de 15 g - Réponse temporelle et effort de commande 122
4.24 Résultats expérimentaux - Robot à vide, contrôleur $K_{LS_r}+$ anti-windup - Trajectoire de 10 g, 20 g et 30 g - Réponse temporelle et effort de commande 123

Liste des tableaux

4.1 Analyse du système saturé bouclé avec le contrôleur K_{LS_r} 116
4.2 Analyse du système saturé bouclé avec le contrôleur K_{LSd_r} 120
4.3 Analyse du système saturé bouclé avec le contrôleur K_{LS_r} et son anti-windup statique 123

Table des notations

Symboles

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$j\mathbb{R}$	axe des imaginaires
$Re(\alpha)$	partie réelle de $\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$	fonctions bornées à $Re(s)$=0
$\mathcal{RL}_\infty$	sous-espace réel rationnel de $\mathcal{L}_\infty$
$\mathcal{H}_\infty$	ensemble des fonctions $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$ analytiques dans $Re(s)$>0
$\mathcal{RH}_\infty$	sous-espace réel rationnel de $\mathcal{H}_\infty$
$\mathbf{Ric}(H)$	solution stabilisante pour les équations algébriques de Riccati
$\min_x f(x)$	valeur minimale pour $f(x)$ dans le domaine x
$\parallel G(s) \parallel_\infty$	pic d'amplitude du diagramme de Bode de $\lvert G(jw)\rvert$, avec $G(s) \in \mathcal{RL}_\infty$
X_N	transformée de Fourier discrète du signal x pour un nombre N de points
$\hat{\Phi}_N^x$	périodogramme du signal x pour un nombre N de points
I_n	matrice identité d'ordre $n \times n$
A^{-1}	inverse de la matrice A
det(A)	déterminant de la matrice A
A^T	transposée de la matrice A
$\sigma_n(A)$	n-ième valeur singulière de la matrice A
$\overline{\sigma}(A)(\underline{\sigma}(A))$	la plus grande (plus petite) valeur singulière de la matrice A
$A \otimes B$	produit de Kronecker entre les matrices A et B
$E[x]$	espérance mathématique de x
R_x	fonction d'autocorrélation de x
Φ^x	spectre de puissance de x
$W[x^2]$	énergie totale du signal x
$\hat{x}(t+1\lvert t)$	estimation de $\hat{x}$ à l'instant $t+1$, avec les données jusqu'à l'instant t
$\Delta(t)$	fonction de Dirac à l'instant t
$\Delta(s)$	fonction de transfert stable, inconnue et bornée en norme
g	accélération de la pesanteur à la surface de la Terre ($\approx$ 9,81 m/s^2)

Acronymes

DFT	*Direct Fourier Transform* (Transformée de Fourier discrète)
ETFE	*Empirical Transfer Function Estimate* (Estimation de la fonction de transfert)
FFT	*Fast Fourier Transform* (Transformée de Fourier rapide)
LFT	*Linear Fractional Transform* (Transformation linéaire fractionnaire)
LLFT	*Lower Linear Fractional Transform* (Transf. linéaire fractionnaire inférieure)
LTI	*Linear Time Invariant* (Linéaire invariant dans le temps)
LQG	*Linear Quadratic Gaussian* (Commande linéaire quadratique gaussienne)
LQR	*Linear Quadratic Regulator* (Commande linéaire quadratique)
LSDP	*Loop Shaping Design Procedure*
MIMO	*Multiple-Input Multiple-Output* (Plusieurs entrées et plusieurs sorties)
N4SID	*Numerical algorithm for Subspace IDentification*
ULFT	*Upper Linear Fractional Transform* (Transf. linéaire fractionnaire supérieure)
SISO	*Single-Input Single-Output* (Une entrée et une sortie)
SVD	*Singular Value Decomposition* (Décomposition en valeurs singulières)
WSS	*Wide Sense Stationary* (Stationnaire au sens faible)

Introduction Générale

Contexte général

La révolution industrielle, dont les origines remontent à la deuxième moitié du -XVIIIème siècle, en Angleterre, puis qui ont disséminé au fil des années à tous les pays du globe, a été un processus majeur de transformations économiques, sociales, politiques et culturelles [61]. L'apparition des premières usines au sens moderne du terme, entérinant le passage d'une société agraire et artisanale à une société commerciale et industrielle, définit un nouveau rapport entre le capital et le travail, entre l'homme et la machine. Témoins d'innombrables découvertes, d'inventions et de changements de paradigmes, les siècles suivants ont favorisé un grand essor créatif : du charbon et de la machine à vapeur à l'acier et l'électricité, de la filature mécanique du coton à la ligne de montage de voitures. Productivité devient le mot d'ordre.

De nos jours, le résultat de ce processus historique, allié à une demande croissante d'amélioration des conditions de travail, exige que les opérations industrielles soient faites, d'un coté, de manière toujours plus rapide et plus précise, et d'un autre coté, avec plus de respect de l'intégrité physique et psychique des travailleurs. Une alternative qui conquiert de plus en plus d'espace dans les usines et qui offre les moyens de traiter à la fois de ces deux besoins est la robotique industrielle.

Bien que les automates aient vu le jour à l'époque des anciennes civilisations grecques et arabes [63], ce n'est, pourtant, que dans les années cinquante du siècle dernier que le robot industriel est créé. Incorporant dans une seule structure les caractéristiques de dextérité du téléopérateur et de programmabilité des machines-outils, George Devol développe, en 1954, le premier manipulateur robotique programmé [78]. À partir des années soixante-dix et quatre-vingt les robots commencent à prendre définitivement leur place dans les usines, éveillant un intérêt scientifique croissant pour ce nouveau domaine, traduit par de nombreuses publications spécialisées [29].

Les robots industriels peuvent, selon leur architecture mécanique, se décliner en

robots sériels, aussi appelés à chaîne cinématique ouverte, et robots parallèles, dont la chaîne cinématique est dite fermée. Les robots parallèles, plus légers que les robots sériels, peuvent atteindre des vitesses beaucoup plus élevées [74].

Actuellement, parmi les applications industrielles les plus courantes, les opérations de prise et dépose (*pick-and-place*) occupent une position importante. Pour ce genre d'application, les fortes accélérations et décélérations subies par la nacelle font que les robots parallèles sont fortement susceptibles de vibrer en arrivant aux points d'arrêt. Ces vibrations résiduelles, par conséquent, peuvent dégrader les temps nécessaires pour que la nacelle atteigne une précision minimale souhaitée, augmentant ainsi le temps du cycle d'opération et se traduisant par une perte en productivité.

Plusieurs stratégies peuvent être envisagées pour minimiser ces vibrations :

- Construction d'architectures mécaniques dynamiquement équilibrées permettant de répartir les efforts de commande et de réduire les phénomènes vibratoires lors des déplacements. L'objectif est aussi de développer des mécanismes légers, permettant des déplacements à haute vitesse, mais suffisamment rigides pour éviter les vibrations lors des accélérations brutales [19] [69] [26] ;
- Optimisation de la trajectoire de prise et dépose. Il existe de nombreux travaux dans la littérature qui se sont intéressés à ce problème de planification de la trajectoire de prise en dépose [102] [21] [40]. Différentes fonctions d'optimisation sont considérées, principalement en transformant les critères classiques de type temps minimum en des critères de temps minimum sous contrainte cinématique (vitesse, accélération et dynamiques d'ordre supérieur, en particulier le jerk, de façon à éviter les points d'inflexion sur les dérivations successives de la position du robot). Des fonctions *spline* cubiques peuvent être utilisées pour construire la trajectoire [84] [50]. La trajectoire de prise et dépose peut aussi être modifiée à travers un filtre. L'approche ZVC (*Zero Vibration Control*) [92] en est un exemple, mais dont l'inconvénient majeur est que le temps de parcours du robot est augmenté ;
- Contrôle actif des vibrations pendant la trajectoire, à travers les moments magnétiques des moteurs [68] [22]. Dans ce cadre, la synthèse des contrôleurs s'appuie sur un modèle du robot incluant à la fois les dynamiques rigides et les dynamiques flexibles. Une stratégie peut alors être de contrôler les modes rigides sans exciter les modes flexibles [23]. Une autre stratégie consiste à considérer, par dessus le contrôle de la position de l'effecteur, un contrôle rapide chargé d'atténuer les vibrations [8]. Lorsqu'une stratégie de type *feedforward* est utilisée, elle peut être assimilée, d'une certaine manière, à la stratégie d'optimisation

de la trajectoire à travers un filtre.

- Contrôle actif des vibrations pendant le déplacement, à travers des actionneurs indépendants de la trajectoire. Cette stratégie a surtout été utilisée dans le cas de bras flexibles, en utilisant des actionneurs piézoélectriques [47] [48]. Ce problème doit être envisagé essentiellement dans le cas où la structure vibre de manière dangereuse pour l'intégrité du robot. Elle est peut-être moins pertinente dans le cas des architectures considérées dans cette thèse car le problème des vibrations est surtout associé au temps d'arrêt lorsque la nacelle atteint le point de prise ou dépose.
- Contrôle actif des vibrations en arrivant aux points d'arrêt, à travers des actionneurs indépendants de ceux chargés du contrôle de la trajectoire, typiquement des actionneurs piézoélectriques. Diverses architectures piézoélectriques peuvent être envisagées, soit en considérant des actionneurs/capteurs localisés en certains points de l'architecture [97] [89] [56] [88], soit en utilisant des "peaux" distribuées sur une surface plus importante [2].

Dans le cadre de cette thèse, nos travaux ont pour support expérimental le robot Par2, robot parallèle à deux degrés de liberté, conçu dans le cadre d'une collaboration entre le LIRMM et la société Fatronik[1] pour des applications de prise et dépose à haute cadence [7] [20]. Il s'agit d'une architecture mécanique parallèle innovante à deux degrés de liberté permettant deux translations dans le plan vertical, tout en garantissant une bonne raideur dans l'axe transversal au moyen des deux chaînes passives. Cela signifie que le robot a été imaginé selon la première stratégie de réduction des vibrations, à savoir une architecture mécanique performante pour rigidifier le robot tout en maintenant sa légèreté. Il n'en demeure pas moins qu'à haute vitesse, des vibrations résiduelles aux points d'arrêt doivent encore être traitées.

L'objectif de ce travail s'inscrit dans le cadre de la cinquième stratégie proposée. Il s'agit d'utiliser des actionneurs piézoélectriques collés autour les bras du robot Par2 pour atténuer les vibrations aux points d'arrêt, pour différents points d'opérations (différentes charges, différents temps de cycle). Pour calculer des lois de commande permettant la réduction des vibrations aux points d'arrêt, des modèles mathématiques dynamiques représentant les résonances du système s'avèrent nécessaires. Ces modèles sont obtenus à partir des techniques d'identification de systèmes. Les contributions principales de la thèse concernent :

[1] La société s'appelle désormais Tecnalia.

- L'étude des modes de vibration du robot Par2 lors des déplacements à haute vitesse [30] ;
- La modélisation de l'effet des actionneurs piézoélectriques sur l'accélération de la nacelle [30],[31] ;
- La synthèse de commandes robustes pour l'atténuation des vibrations aux points d'arrêt et la discussion des avantages et inconvénients des méthodes utilisées [31],[32],[33] ;
- L'analyse de l'effet des saturations des actionneurs sur les performances des contrôleurs et la proposition de différentes pistes pour en traiter les effets négatifs.

Organisation de la thèse

Dans le premier chapitre, les aspects liés aux vibrations des structures et, plus particulièrement, les contrôles passif et actif de vibrations, sont présentés. Ensuite, le robot Par2 est introduit avec ses composants en termes de matériel et de logiciel. Les caractéristiques des vibrations résiduelles à la fin d'une trajectoire de prise et dépose pour le robot Par2 sont analysées et la problématique du travail est posée de manière plus détaillée.

Le deuxième chapitre précise, d'abord, quelques concepts fondamentaux de la théorie de l'identification de systèmes. Par la suite, les méthodes classiques d'identification de systèmes, ainsi que les techniques modernes d'identification, et en particulier celle basée sur les sous-espaces, sont présentées. Après une discussion sur quelques aspects pratiques de l'identification, les résultats expérimentaux d'identification basée sur les sous-espaces pour le robot Par2 sont analysés.

La méthode $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte est présentée dans le troisième chapitre. Des notions de base sur les incertitudes et leur représentation sont discutées. Utilisant les connaissances du spectre des vibrations (premier chapitre) et du modèle du robot Par2 (deuxième chapitre), des filtres de pondération pour la boucle fermée sont choisis, permettant qu'un contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte réduit soit calculé dans un point d'opération nominal, visant à réduire l'effet des vibrations sur la nacelle. Des résultats en simulations et expérimentaux permettent d'analyser le comportement du système en boucle fermée dans le point d'opération nominal, ainsi que la robustesse du contrôleur à des variations des points d'opération (variations de charge et de temps de cycle).

Comme alternative à la méthode de sensibilité mixte, le quatrième chapitre traite

de la méthode $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping*. Contrairement aux démarches effectuées dans le chapitre précédent, les filtres dans la technique *Loop Shaping* servent à pondérer le modèle en boucle ouverte. Utilisant cette technique, un contrôleur réduit (dit "fort") est synthétisé pour un point d'opération nominal. Le contrôleur *Loop Shaping* "fort" est comparé avec le contrôleur à sensibilité mixte. Des résultats en simulation et expérimentaux montrent le comportement de la boucle fermée avec le contrôleur "fort", pour le point nominal et pour des variations des points d'opération. Avec la même méthode, un contrôleur moins énergique (dit "faible") est aussi calculé, ayant pour objectif d'élargir le domaine de validité du contrôleur au détriment de la performance. Les deux contrôleurs $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping*, "fort" et "faible", sont comparés. Considérant la présence de saturation des actionneurs piézoélectriques, une technique d'anti-windup, complémentaire au contrôleur "fort", est mise en place pour conserver la performance tout en élargissant le domaine de validité du contrôleur.

Le mémoire termine par une conclusion générale avec l'analyse des résultats obtenus et des perspectives pour des travaux futurs.

*

Chapitre 1

Le Problème des Vibrations

1.1 Introduction

Dans le cadre des opérations industrielles de manipulation et d'assemblage, la demande croissante de productivité impose, de plus en plus, les temps de cycle de production. Dans ce contexte, plus légers que les robots sériels, les robots parallèles peuvent accomplir des trajectoires à plus haute vitesse et avec plus de précision, réduisant ainsi les temps de cycle. Pour les opérations de prise et dépose, un problème qui découle de la réalisation de ce type de trajectoire à haute vitesse est le fait que, en arrivant à un point d'arrêt, la nacelle subit de fortes décélérations. Ces décélérations se traduisent par des vibrations qui peuvent compromettre le temps pour atteindre la précision souhaitée, augmentant donc le temps de cycle. Comme solution pour ce problème, le contrôle actif de vibrations est envisagé.

Le chapitre commence avec une présentation des apports théoriques sur la discipline de contrôle des vibrations. D'abord les aspects plus généraux de vibration de structure sont considérés, comme par exemple les formulations des modèles nodaux et modaux. Ensuite, la différence entre le contrôle actif et passif est discutée, suivie par une présentation sur les matériaux intelligents, souvent utilisés pour le contrôle actif de vibrations. Le phénomène de *spillover* et la colocalisation entre capteurs et actionneurs sont aussi traités.

Une discussion sur le contrôle actif des vibrations pour les manipulateurs flexibles à chaîne cinématique ouverte et fermée vient ensuite.

Par la suite, le robot Par2 est présenté, d'abord d'une manière générale, puis en termes de matériel et de logiciel. Les vibrations subies par le robot après une trajectoire de prise et dépose sont analysées en fonction de leur réponse temporelle et de leur spectre de fréquences.

Dans la dernière section, l'objectif principal de cette thèse est présenté, c'est-à-dire l'atténuation des vibrations au niveau de la nacelle du robot parallèle Par2.

1.2 Contrôle des vibrations

Le contrôle des vibrations est une discipline qui est née de la confluence de deux savoirs scientifiques : la théorie de la commande et la dynamique des structures. Ses applications englobent notamment les domaines industriels (machines en général), la robotique, l'aérospatial et la construction civile. L'objectif de cette section est de tracer un panorama du contrôle de vibrations des aspects les plus fondamentaux jusqu'à leur application aux robots parallèles.

1.2.1 Vibrations de structures

Les modèles mathématiques pour les systèmes vibratoires sont généralement divisés en deux grands groupes : discrets (modèles à paramètres localisés) et continus (modèles à paramètres distribués) [72].

Une structure continue est un système à paramètres distribués régi par des équations différentielles partielles. Ses propriétés vibratoires peuvent être représentées par l'équation d'onde généralisée [101]

$$M(p)\frac{\delta^2 w(p,t)}{\delta t^2} + Lw(p,t) = u(p,t) \tag{1.1}$$

où $w(p,t)$ définit la trajectoire du point p le long du corps, $M(p)$ est la masse distribuée du système, L est un opérateur différentiel linéaire autoadjoint défini positif et $u(p,t)$ est le vecteur de contrôle distribué (une force externe distribuée).

Dû à la difficulté de trouver les solutions analytiques pour les problèmes complexes liés aux équations différentielles partielles[1], celles-ci peuvent être approximées par un ensemble fini[2] d'équations différentielles ordinaires à l'aide des techniques de discrétisation spatiale, parmi lesquelles les méthodes de troncature modale, Rayleigh-Ritz-Galerkin et des éléments finis sont les plus courantes [51]. Les modèles obtenus

[1]Les solutions, correspondant à une infinité des modes de vibrations, sont normalement bien connues pour des problèmes s'appuyant sur l'uniformité de la distribution paramétrique et avec des conditions aux limites simples [72].

[2]Comme les actionneurs et capteurs possèdent une bande passante limitée, les modes de vibration correspondant aux fréquences les plus élevées ne sont pas ni excités ni mesurés lors d'une identification du système. Cette considération liée au fait que, le plus souvent, certains modes n'influencent pas beaucoup la dynamique du système, justifie donc l'hypothèse d'un ensemble fini de n modes pour le modèle [101].

peuvent, dans certains cas, avoir non seulement des modes vibratoires, mais aussi des modes rigides dont la fréquence naturelle est zéro et les déplacements structuraux se font sans déformation flexible [42]. Ces modes sont essentiels lorsque l'objectif de la commande est le suivi d'une consigne donnée [101], comme par exemple le positionnement d'un télescope, la trajectoire d'un manipulateur ou l'attitude d'un satellite.

Deux systèmes de coordonnées souvent employés pour la description des dynamiques des structures sont les modèles nodaux et modaux, représentés chacun soit en termes des degrés de liberté à travers des modèles du second ordre, soit par des modèles en variables d'état [41].

– **Modèles nodaux**

Les modèles nodaux, normalement obtenus à partir de la méthode des éléments finis, sont souvent utilisés pour l'analyse des structures flexibles. Considérant n degrés de liberté, m entrées et l sorties, un système vibratoire à paramètres localisés peut être représenté par les équations différentielles du second ordre

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = B_o u \tag{1.2a}$$

$$y = C_{oq} q + C_{ov} \dot{q} \tag{1.2b}$$

avec q, $\dot{q}$ et $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs de déplacement, vitesse et accélération nodaux, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^l$ le vecteur de sortie, $B_o \in \mathbb{R}^{(n\times m)}$ la matrice d'entrée, C_{oq} et $C_{ov} \in \mathbb{R}^{(l\times n)}$ les matrices de sortie, $M \in \mathbb{R}^{(n\times n)}$ la matrice définie positive d'inertie et K et $D \in \mathbb{R}^{(n\times n)}$ les matrices semi-définies positives de raideur et d'amortissement.

Ce système peut aussi être représenté sous la forme d'un système linéaire d'équations différentielles du premier ordre

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.3a}$$

$$y = Cx \tag{1.3b}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{(2n\times 2n)}$, $B \in \mathbb{R}^{(2n\times m)}$ et $C \in \mathbb{R}^{(l\times 2n)}$ données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}B_o \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{oq} & C_{ov} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

– **Modèles modaux**

Alternativement, les modèles modaux, obtenus à partir d'une analyse modale [36] ou d'une représentation nodale après un changement de coordonnées, sont bien adaptés à l'analyse et à la synthèse de lois de commande pour les structures flexibles.

L'équation (1.2) pour une situation sans amortissement (D=0) et sans excitation externe (u=0) donne

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \tag{1.5}$$

et admet pour solution $q = \phi e^{jwt}$. Remplaçant la solution q dans (1.5) nous obtenons l'ensemble des équations homogènes

$$(K - w^2 M)\phi e^{jwt} = 0 \tag{1.6}$$

pour lequel une solution non triviale existe si

$$det(K - w^2 M) = 0 \tag{1.7}$$

Les n solutions w_i sont les fréquences naturelles du système, chacune correspondant à un mode naturel[3] (*mode shape*) ϕ_i (le vecteur propre associé à w_i).

Définissons les matrices Ω et $\Phi \in \mathbb{R}^{(n\times n)}$ comme

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_n \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

et

$$\Phi = [\phi_1 \ \dots \ \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1n} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

avec ϕ_{ij} le j-ème déplacement du i-ème mode.

L'équation (1.2) peut être transformée de la base nodale vers une base modale

[3] En realité la correspondance n'est pas unique puisque les modes naturels peuvent être arbitrairement dimensionnés.

q_m à partir de la relation

$$q = \Phi q_m \tag{1.10}$$

La matrice de transformation Φ possède la propriété de diagonaliser les matrices de masse et de raideur. La matrice d'amortissement est normalement la plus difficile à évaluer dans les modèles analytiques et une correction *a posteriori* basée sur des données expérimentales s'avère nécessaire dans les cas pratiques [36]. Une hypothèse initiale souvent prise en compte est l'*amortissement de Rayleigh* [87] où la matrice d'amortissement est représentée comme une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur, étant par conséquent elle aussi orthogonale par rapport à Φ. Les matrices modales diagonalisées de masse, raideur et amortissement sont définies comme

$$M_m = \Phi^T M \Phi, \quad K_m = \Phi^T K \Phi, \text{ et } \quad D_m = \Phi^T D \Phi \tag{1.11}$$

Le système (1.2) transformé en coordonnées modales s'exprime

$$\ddot{q}_m + M_m^{-1} D_m \dot{q}_m + M_m^{-1} K_m q_m = M_m^{-1} \Phi^T B_o u \tag{1.12a}$$

$$y = C_{oq} \Phi q_m + C_{ov} \Phi \dot{q}_m \tag{1.12b}$$

Définissant une matrice diagonale Z d'amortissements modaux ξ_i, les matrices modales d'entrée B_m, de sortie C_{mq} et C_{mv} et le vecteur colonne u_m des forces de contrôle modales, le système d'équations (1.12) peut être réécrit comme

$$\ddot{q}_m + 2Z\Omega \dot{q}_m + \Omega^2 q_m = B_m u \tag{1.13a}$$

$$y = C_{mq} q_m + C_{mv} \dot{q}_m \tag{1.13b}$$

Comme le système dans les coordonnées modales présente un découplage interne de ses modes, la propriété linéaire de superposition est vérifiée. Différentes représentations en espace d'état peuvent être envisagées pour ce modèle, les plus utilisées étant détaillées dans [41].

1.2.2 Contrôle passif et contrôle actif

Une structure mécanique est souvent planifiée, dès la phase de conception, pour minimiser les effets de possibles vibrations qui pourraient compromettre son bon fonctionnement. Dans la mesure où ces précautions initiales s'avèrent inefficaces et

que les vibrations restent quand même importantes, une solution possible repose sur l'utilisation d'éléments externes permettant d'interagir avec la structure de manière à atténuer les vibrations, caractérisant de ce fait une *structure intelligente* [101]. Cela peut se faire de deux manières, par contrôle passif ou contrôle actif[4].

Dans le contrôle passif, l'objectif est la modification des caractéristiques mécaniques de la structure à partir de son intégration avec des amortisseurs, des ressorts et/ou des masses additionnelles [101]. Dû au fait de ne pas injecter d'énergie dans le système, le contrôle passif ne risque pas de déstabiliser les modes de vibration de la structure.

Le contrôle actif, de son coté, fait usage d'éléments capteurs et actionneurs pour la réduction des vibrations. Dans certaines situations, les structures actives peuvent être plus legères ou encore atteindre des performances bien supérieures à celles envisageables avec la configuration passive [87]. Le contrôle actif peut être classé entre contrôle à rétroaction (*feedback*) et contrôle par anticipation (*feedforward*)[5], comme cela est montré sur la Figure 1.1. Dans le premier cas, la réponse mesurée à la sortie de la structure est utilisée par le contrôleur pour changer le système en boucle fermée. Pour le contrôle par anticipation, considérant la possibilité de mesurer un signal corrélé avec les vibrations, cette information rentre dans le contrôleur qui essaie de générer un signal opposé pour contrecarrer la perturbation [87]. Un avantage important du contrôle par rétroaction est la robustesse conférée au système en boucle fermée, tel que cela sera expliqué dans le chapitre 3.

1.2.3 Les matériaux intelligents

Du point de vue mécanique, deux grandeurs physiques peuvent décrire complètement les matériaux structuraux classiques : la constante élastique, qui établit le rapport entre la déformation (*strain*) et la contrainte (*stress*), et le coefficient d'expansion thermique, qui rélie la déformation à la température. Les matériaux intelligents (*smart materials*) sont des matériaux pour lesquels la déformation peut se produire par d'autres mécanismes comme par exemple les champs électriques (matériaux piézoélectriques) ou magnétiques (matériaux magnétorestrictifs et fluides magnéto-

[4]Une troisième solution, bien popularisée dans les domaines automobiles (pour les amortisseurs) et de la construction civile (pour empêcher les dégâts causés par les séismes dans les bâtiments) est appelée le contrôle semi-actif. Moins cher que le contrôle actif dû à sa puissance réduite, le contrôle semi-actif peut être défini comme un contrôle passif dont les propriétés (raideur, amortissement) sont modifiées en temps réel [87].

[5]Une stratégie n'exclut pas l'autre et très souvent les contrôleurs ont une correction par rétroaction associée à un contrôleur par anticipation.

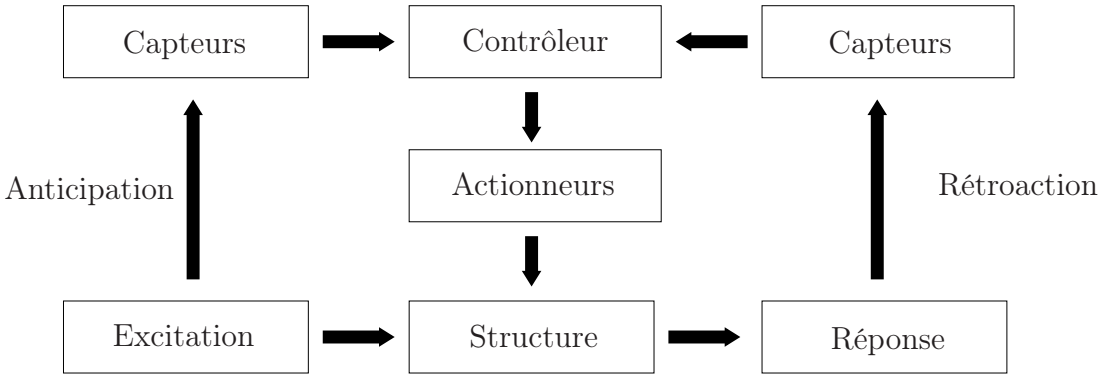

FIG. 1.1 – Contrôle actif

rhéologiques) [87]. Les matériaux piézoélectriques, souvent employés pour le contrôle actif de vibrations, et qui seront utilisés dans la suite de cette thèse, sont brièvement présentés ici.

L'effet piézoélectrique[6] est dit *direct* quand une charge électrique est générée proportionnellement à une force externe appliquée sur le matériau (capteur), et *indirect* quand un champ électrique provoque une expansion du matériau (actionneur). Les directions d'expansion par rapport aux directions du champ électrique dépendent des constantes (définies lors de la manufacture du matériau) dans ses équations constitutives.

Les matériaux piézoélectriques sont classés en céramiques et polymères. Les piézo-polymères, dont l'exemple le plus célèbre est le polyfluorure de vinylidène (*polyvinylidene fluoride* - $PVDF$ ou PVF_2), sont utilisés plutôt comme capteurs à cause de leur capacité de contrôle limitée, pendant que les piézo-céramiques, comme le titano-zirconate de plomb (*Lead Zirconate Titanate* - LZT[7], sont largement employés comme actionneurs et/ou capteurs pour une large bande des fréquences, y compris dans les applications ultrasoniques et de précision (échelle nanométrique) [87].

Les équations régissant le comportement des matériaux piézoélectriques, données en termes de lois électriques et mécaniques couplées sont

$$S = s^E T + d_1 E \quad \text{(actionneur)} \tag{1.14a}$$

$$D = d_2 T + \epsilon^T E \quad \text{(capteur)} \tag{1.14b}$$

avec S la déformation, D le déplacement électrique, T la contrainte, E le champ

[6] L'effet piézoélectrique a été découvert par Pierre et Jacques Curie en 1880.
[7] Appelé aussi PZT.

électrique, d_1 le rapport entre la déformation et le champ électrique en l'absence de contrainte, d_2 le rapport entre le déplacement électrique et la contrainte sous un champ électrique nul, s^E la complaisance d'élasticité (l'inverse du module de Young) sous un champ électrique constant et ϵ^T la constante diélectrique sous une contrainte constante. L'équation (1.14a) décrit le principe d'un actionneur piézoélectrique, tandis que l'équation (1.14b) représente le fonctionnement d'un capteur piézoélectrique.

Les actionneurs piézoélectriques peuvent être classés en piézo *stack* ou piézo *patch* [81]. Les actionneurs piézos *stacks* génèrent typiquement de larges forces (de l'ordre des kN) avec de très faibles déformations (quelques microns). Les actionneurs piézo *patches*, de leur coté, génèrent des forces inférieures à celles des *stacks*. Ils possèdent, cependant, l'avantage d'être flexibles et de se conformer à des surfaces en courbes.

1.2.4 Phénomène de *spillover*

Les modèles mathématiques discrétisés obtenus pour les systèmes flexibles sont des simplifications d'un système à paramètres distribués comptant une infinité de modes de vibrations. Souvent, même les modes du modèle discrétisé sont encore trop nombreux pour être tous pris en compte par un contrôleur à retour d'état basé sur un observateur d'ordre complet[8]. En gardant seulement les modes les plus observables et les plus contrôlables (les modes à contrôler), une étape de réduction de modèle est généralement effectuée (annexe A). Tous les modes non-modélisés et non-contrôlés sont considérés comme des modes résiduels. Le phénomène de *spillover* de contrôle est observé quand une part de l'énergie censée aller vers les modes contrôlés est dirigée vers les modes résiduels, tandis que le *spillover* d'observation se produit quand les modes contrôlés sont contaminés par les modes résiduels [101].

Considérons la Figure 1.2 représentant le système vibratoire stable (1.15) en boucle fermée avec le contrôleur à retour d'état (1.16), où les états sont estimés par l'observateur d'ordre complet (1.17). Les indices c et r désignent les modes contrôlés et résiduels, respectivement.

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u + w \tag{1.15a}$$

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r u \tag{1.15b}$$

$$y = C_c x_c + C_r x_r + v \tag{1.15c}$$

[8] Dans ce cas le contrôleur aura le même ordre que le modèle.

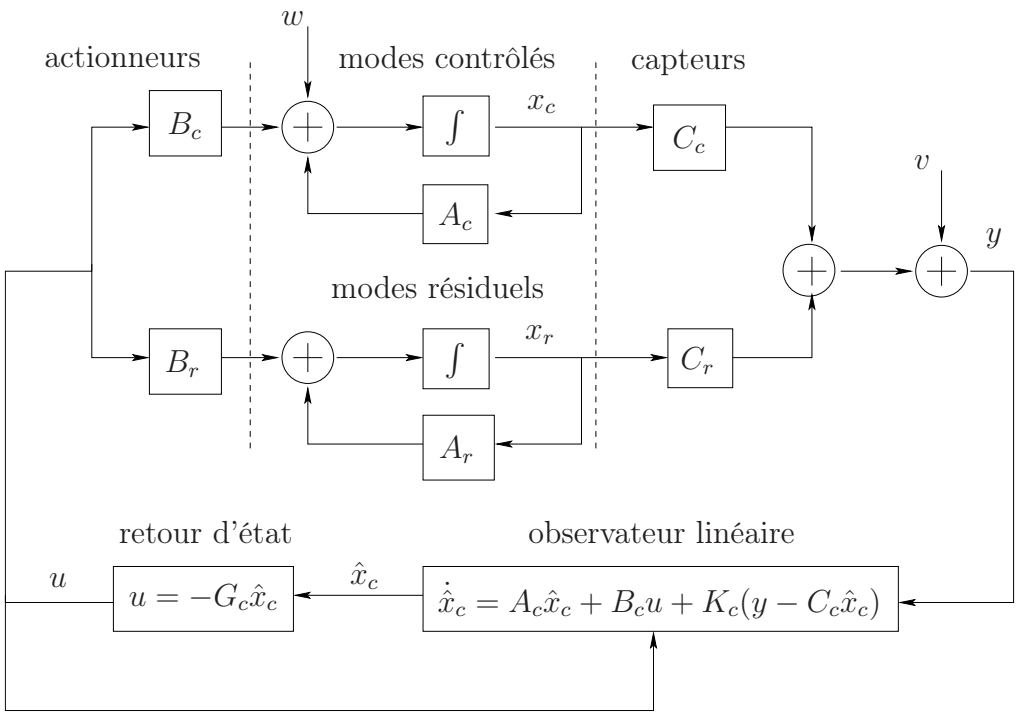

FIG. 1.2 – Mécanisme du *spillover*

$$u = -G_c\hat{x}_c \tag{1.16}$$

$$\dot{\hat{x}}_c = A_c\hat{x}_c + B_cu + K_c(y - C_c\hat{x}_c) \tag{1.17}$$

Considérant $e_c = x_c - \hat{x}_c$, le système en boucle fermée s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{e}_c \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c - B_cG_c & B_cG_c & 0 \\ 0 & A_c - K_cC_c & -K_cC_r \\ -B_rG_c & B_rG_c & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ e_c \\ x_r \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

Le terme résiduel C_r contamine l'entrée des capteurs dans C_rx_r (*spillover* d'observation) tandis que le terme B_r est excité par l'actionneur dans B_ru (*spillover* de contrôle). Dans le cas où C_r ou B_r sont égaux à zéro, le système en boucle fermée reste découplé et stable. Comme les modes résiduels d'un système flexible sont proches de l'axe imaginaire, dans le cas où C_r et B_r sont différents de zéro, même une petite réallocation des pôles peut mener le système à l'instabilité (instabilité par *spillover*) [87].

1.2.5 Colocalisation

Quand un actionneur et un capteur sont placés dans une même position, la configuration est dite colocalisée. L'avantage de la colocalisation réside dans le fait que la dynamique entre les actionneurs et les capteurs conduit à une séquence alternée de pôles complexes (résonances) et de zéros complexes (anti-résonances), de manière à ce que la phase du système ne dépasse jamais les -180 degrés et que la stabilité soit, donc, assurée[9] [101]. Considérons, à titre d'illustration, un modèle (sans incertitude) d'une structure avec deux modes rigides (deux pôles en zéro[10]) et deux paires de modes flexibles (pôles complexes conjugués) dans une configuration colocalisée, représenté par son diagramme de Bode sur la Figure 1.3. Nous pouvons remarquer que le système sera stable en boucle fermée pour n'importe quelle valeur de gain positif, du fait que la phase est toujours inférieure à 180 degrés.

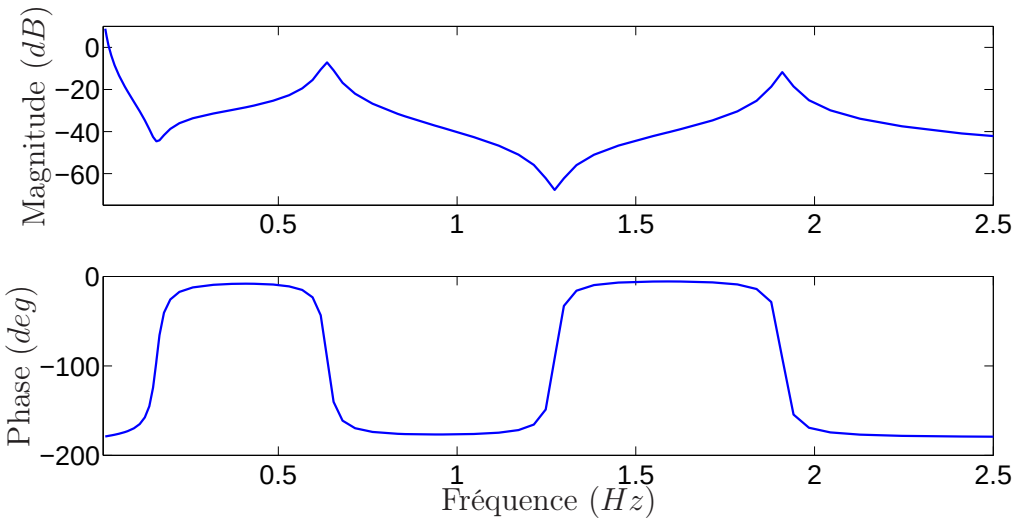

FIG. 1.3 – Configuration colocalisée - diagramme de Bode

Les modes du système sont, cependant, peu amortis, puisque proches de l'axe imaginaire. Un contrôleur par avance de phase permet d'augmenter l'amortissement de tous les modes du système, d'après la représentation dans le lieu d'Evans sur la Figure 1.4[11]. Un contrôleur par avance de phase rajoute un terme dissipatif dans l'équation

[9] Cette hypothèse est valable lorsque nous considérons une dynamique parfaite des actionneurs et capteurs.

[10] Dans les équations de la mécanique pour les systèmes rigides, les déplacements linéaires (respectivement angulaires) d'un corps sous l'action d'une force (respectivement d'un couple moteur) sont reliés à cette force (respectivement couple moteur) au moyen d'une double intégrale.

[11] La garantie de stabilité ne signifie pas une bonne performance en terme de dynamique. L'optimisation de la position des actionneurs et capteurs [64],[97] pour permettre un plus grand éloignement

caractéristique de la boucle fermée (la loi de commande fonctionne comme un amortissement visqueux [87]). La litérature sur la régulation des systèmes colocalisés en se basant sur l'augmentation de l'amortissement (*active damping*) est très vaste et dépend des types de capteurs et actionneurs utilisés. Quelques exemples classiques de lois de commande [87] sont le *Direct Velocity Feedback* (entrée en force et sortie en vitesse), le *Acceleration Feedback* (entrée en force et sortie en accélération), le *Positive Position Feedback* (entrée en déformation et sortie en déformation) et le *Integral Force Feedback* (entrée en déformation et sortie en force).

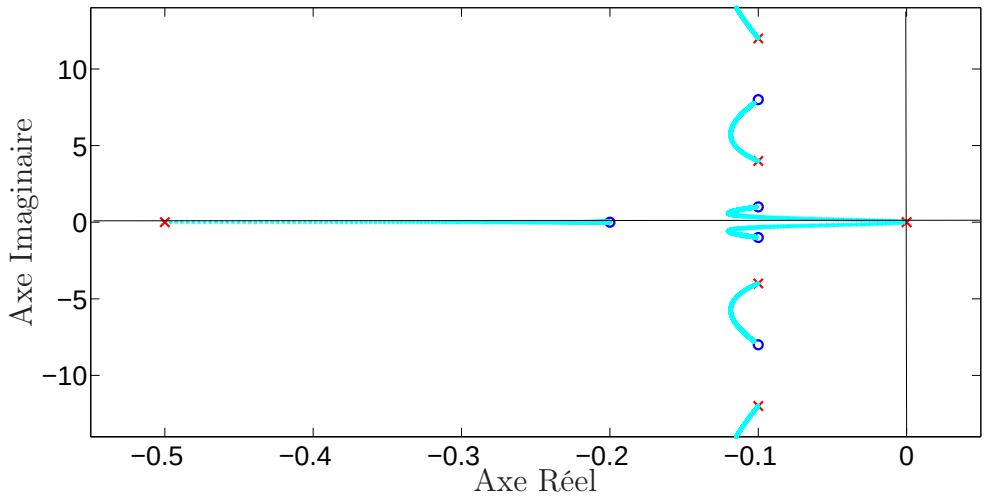

FIG. 1.4 – Configuration colocalisée - lieu d'Evans

Considérons à présent le cas d'une configuration non-colocalisée, c'est-à-dire, le cas où le système perd l'alternance entre ses pôles et ses zéros. Nous observons sur la Figure 1.5 que la phase du système dépasse les -180 degrés et le système en boucle fermée peut être destabilisé.

Le lieu d'Evans dans la Figure 1.6 nous montre l'effet d'un contrôleur par avance de phase sur le système non-colocalisé. Nous observons que la stabilisation est atteinte seulement pour des faibles valeurs de gain (*gain stabilization*).

L'effet illustré d'inversion d'une paire de pôles et de zéros complexes (occasionnant la perte d'alternance) peut se produire de deux manières [87] :

– Par le contrôleur, quand ses zéros sont proches des pôles du modèle[12]. S'il existe

entre les pôles et les zéros colocalisés (bonne observabilité et commandabilité) assure une plus importante incursion des pôles en boucle fermée dans le demi-plan stable, ce qui permet d'augmenter la performance [87].

[12]Ce cas correspond à un filtre rejet-de-bande (*notch filter*), souvent généré lors de la synthèse de contrôleurs optimaux [87].

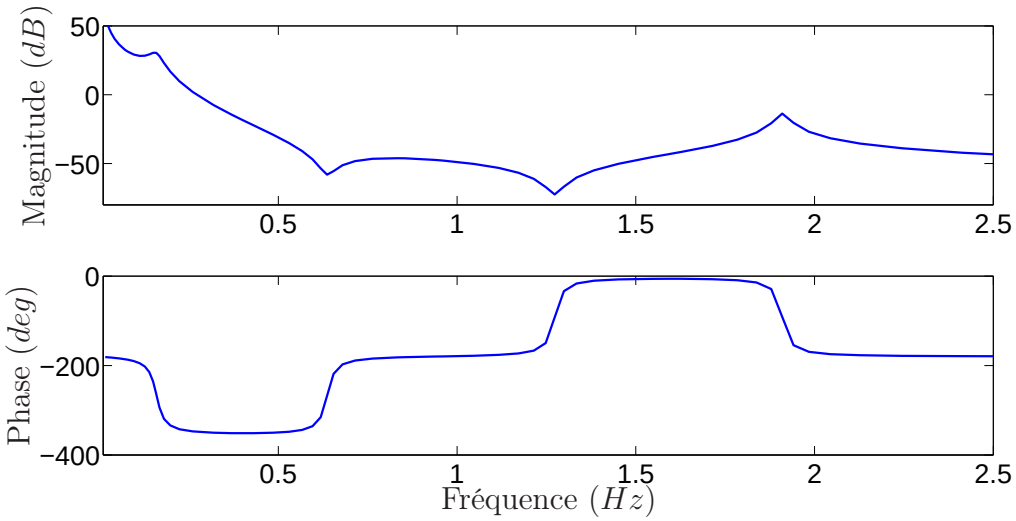

FIG. 1.5 – Configuration non-colocalisée - diagramme de Bode

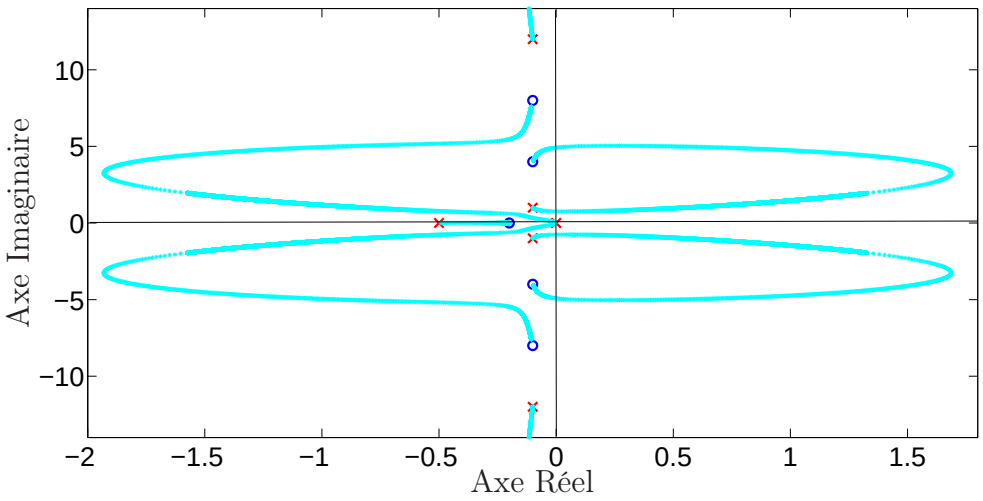

FIG. 1.6 – Configuration non-colocalisée - lieu d'Evans

une incertitude par rapport à ces derniers cela peut engendrer une configuration non-colocalisée ;

– D'une manière structurelle, quand une petite variation des paramètres provoque l'inversion des pôles et zéros du système due à une configuration de capteurs et actionneurs pour laquelle on perd la commandabilité ou l'observabilité.

Le choix d'une configuration non-colocalisée est fait quand une colocalisation est difficile vis-à-vis de l'endroit où la performance doit être évaluée. En effet, d'après [101], "un pêcheur regarde le crochet (capteur) et pas ses propres mains (actionneur).

La commande d'un système non-colocalisé est plus difficile, mais la performance peut être meilleure".

1.3 Les manipulateurs flexibles

Il n'existe pas de structure mécanique parfaitement rigide. La plupart des robots manipulateurs existants sont conçus de manière à maximiser la raideur de leur structure pour essayer de minimiser les vibrations au niveau de l'effecteur[13] [35]. Cela implique l'utilisation de matériel lourd qui, par conséquent, augmente la consommation d'énergie et limite les vitesses d'opération. Dans certains domaines, comme par exemple pour les applications industrielles de manipulation, l'exigence de performance en termes d'économie d'énergie et d'augmentation de vitesse du cycle de production impose l'utilisation de matériaux plus légers. Le problème de vibrations apparaît[14].

Du point de vue de la modélisation, la flexibilité d'un manipulateur peut être considérée soit concentrée au niveau des articulations, soit distribuée le long des liens. Pour les deux cas, différents modèles (Euler-Bernoulli, élements finis, Rayleigh-Ritz-Galerkin, matrices de transfert) et stratégies de contrôle (PID, *computed torque*, *command shaping*, *input shaping*, commande adaptative par modèle de référence, commande par réseau de neurones, modes glissants, optimale et robuste, etc) sont présentés dans [28],[35] et [68], pour les manipulateurs à un, deux et plusieurs liens.

1.3.1 Chaîne cinématique ouverte (robots sériels)

De nombreux travaux ont traité, par différentes approches, de la commande active de vibrations pour les robots à chaîne cinématique[15] ouverte, aussi appelés robots sériels[16].

Pour les robots à un lien flexible (*flexible single link*), la technique dite "*computed torque*" a été utilisée dans [60] et [67], la commande adaptative dans [73] et [37], les modes glissants dans [103], la commande basée sur la théorie de Lyapunov dans [91] et [25] et la commande robuste dans [17] et [54].

[13] Un objectif important pendant la phase de conception d'un manipulateur est d'essayer, si possible, de laisser les modes flexibles en dehors de la bande passante du contrôle de suivi de trajectoire pour que les modes ne soient pas excités [101].

[14] Les problèmes de flexibilité sont aussi présents dans les applications en environnements hostiles où des longs bras robotiques sont nécessaires, comme par exemple dans les domaines nucléaire, sous-marin et spatial [28].

[15] Assemblage d'éléments et de liaisons [59].

[16] Leur nom vient du fait que les moteurs et les différentes membrures sont en série [27].

Pour les robots à deux liens flexibles, la technique de "*computed torque*" a été employée dans [4], la commande adaptative dans [16], un contrôleur PD dans [104] et la commande optimale dans [77].

Dans les travaux [58],[43] et [98], les techniques de "*computed torque*", contrôleur PD et modes glissants ont été, respectivement, appliquées pour un robot à plusieurs liens.

1.3.2 Chaîne cinématique fermée (robots parallèles)

"Un robot parallèle est un mécanisme en chaîne cinématique fermée, dont l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes" [74]. Dû à leur vitesse, précision et rigidité, les robots parallèles constituent une option intéressante pour des opérations industrielles de prise et dépose à haute cadence, particulièrement dans les secteurs alimentaire, pharmaceutique et d'assemblage électronique [15]. L'histoire des robots parallèles est généralement découpée en deux moments : l'ère des hexapodes, avec les plateformes de Gough (dans les années 50) et Stewart (années 60), respectivement pour les tests des pneumatiques et la création des simulateurs de vol, et l'ère des robots parallèles légers, dont le premier représentant est le robot Delta développé par Clavel dans les années 80, permettant d'atteindre des vitesses de déplacement très élevées[17] [79].

Les principaux avantages des robots parallèles par rapport aux robots sériels sont la capacité de charge élevée, la possibilité de mouvements à haute vitesse, la rigidité mécanique élevée, la faible masse mobile, le peu d'erreur de répétabilité, la facilité d'intégration de capteurs, la construction mécanique modulaire, la simplicité de fabrication et la possibilité de positionner les actionneurs directement sur la base fixe ou très proche de celle-ci, rendant donc possible un grand choix de moteurs et de réducteurs, ainsi que la simplification des problèmes de liaisons entre moteurs, capteurs et contrôleur (cablage plus simple et plus fiable), la facilité de refroidissement des actionneurs (diminution des problèmes de précision dus aux dilatations et puissance potentielle élevée) et la facilité d'isoler les moteurs de l'espace de travail pour des activités en atmosphère propre ou avec risque de déflagration ou encore pour les applications nécessitant des lavages à grande eau [18]. Parmi leurs inconvénients nous pouvons citer le volume de travail limité en regard du volume total du mécanisme, des

[17] Une remarquable évolution pour les robots légers est le robot Par4 (à nacelle articulée et avec quatte pattes identiques à celles du robot Delta), développé par Vincent Nabat et François Pierrot dans le cadre d'une coopération entre le LIRMM et FATRONIK. Il est plus léger que le Delta, avec un espace de travail plus grand, une charge utile deux fois supérieure et un temps de cycle 50% plus court [12].

modèles géométriques directs parfois difficiles à déterminer, un fort couplage entre le mouvement des différentes chaînes cinématiques (coordination plus difficile des moteurs), un couplage fortement variable entre les différentes chaînes cinématiques (compliquant souvent le réglage) et la présence de singularités qui conduisent à une perte de contrôle de la structure mobile (voire à une détérioration de la mécanique) [59].

Le fait d'avoir des membrures plus légères et d'atteindre des accélérations plus élevées fait que les robots parallèles sont plus susceptibles de vibrer. Une alternative souvent utilisée pour minimiser les vibrations est l'utilisation d'un contrôle actif. Dans [109], un modèle analytique d'une structure parallèle planaire avec des modes rigides et flexibles a été contrôlé en simulation par une loi robuste H_∞ avec des éléments piézoélectriques (capteurs et actionneurs). Utilisant un modèle de Rayleigh-Ritz-Galerkin pour un manipulateur parallèle, [52] compare en simulation l'effet des actionneurs piézoélectriques PZT et PVDF avec une loi de commande *Direct Velocity Feedback*. Dans [108], un manipulateur planaire parallèle est contrôlé en termes de réduction des vibrations avec une stratégie de contrôle modal indépendant et avec des actionneurs et capteurs colocalisés. Un robot parallèle à 3 degrés de liberté[18] est considéré dans [105], avec un modèle en équation de Lagrange dans une configuration non-colocalisée d'actionneur piézoélectrique et d'une combinaison d'accéléromètre et capteur de déplacement à laser. Une loi de contrôle LQR est validée en simulation. Dans [3],[2] un contrôleur par *gain-scheduling* robuste est utilisé pour amortir les vibrations dans l'effecteur d'un robot parallèle à 2 degrés de liberté dont le modèle a été obtenu par identification de sous-espaces et, dans [1], une extension à un robot à 4 degrés de liberté est considérée.

1.4 Le robot Par2

1.4.1 Description du robot

Le robot Par2, réalisé par la société Fatronik[19] en coopération avec le LIRMM et représenté dans la Figure 1.7, est une architecture mécanique parallèle innovante à deux degrés de liberté permettant deux translations dans le plan vertical, tout en garantissant une bonne raideur dans l'axe transversal au moyen des deux chaînes passives liées à la structure par des articulations rotoïdes couplées [20]. Grâce à sa rigidité et légèreté, Par2 a déjà atteint des accélérations supérieures à 50 g (500 m/s^2).

[18] Nombre de coordonnées indépendantes nécessaires pour définir la configuration d'une chaîne cinématique ou d'un mécanisme [59].

[19] La société s'appelle désormais Tecnalia.

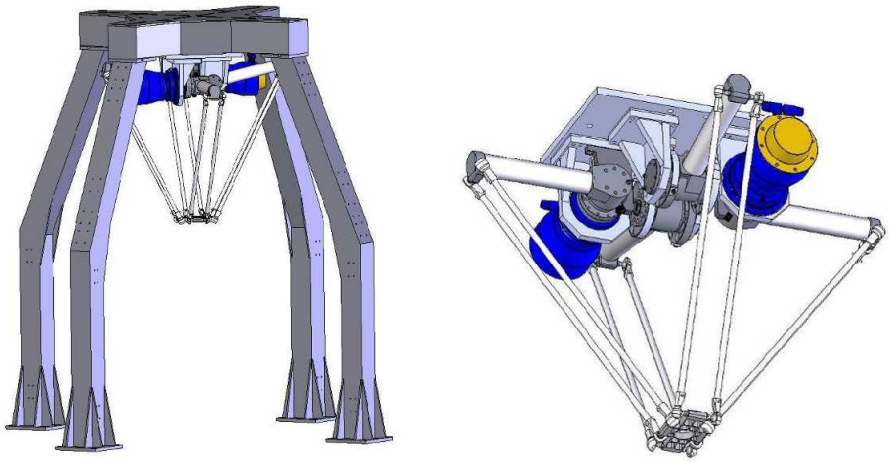

FIG. 1.7 – Robot Parallèle - Par2

Les trajectoires du manipulateur évoluent dans le plan xz, entre les positions d'arrêt données en mètres Pos1 (x=0,35, z=-0,925) et Pos2 (x=-0,35, z=-0,925), comme décrit dans la Figure 1.8. Ces déplacements sont commandés par les bras actifs (ceux directement liés aux moteurs, Fig. 1.7), tandis que les bras passifs servent à empêcher, autant que possible, les mouvements perpendiculaires (hors plan xz).

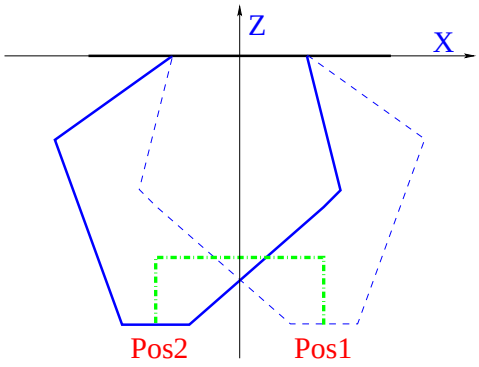

FIG. 1.8 – Positions d'arrêt

Le fait que Par2 peut avoir des temps de déplacement très courts engendre cependant des vibrations importantes aux points d'arrêt, mesurées par trois accéléromètres placés orthogonalement sur la nacelle. Les vibrations résiduelles sont considérées comme des perturbations, conséquences des importantes décélérations subies au niveau de la nacelle en arrivant aux points d'arrêt à la fin de chaque trajectoire. L'effet de ces vibrations se traduit par une augmentation du temps nécessaire pour atteindre la précision souhaitée, augmentant par conséquent le temps de cycle opérationnel.

Comme solution pour l'atténuation des vibrations au niveau de la nacelle, l'utilisation d'actionneurs piézoélectriques répartis (*patches*[20]) sur les bras du robot est proposée [2], de manière à intervenir sur la rigidité du manipulateur à travers une commande active. Cependant, pour calculer la commande, un bon modèle du comportement dynamique de l'effet de l'entrée piézoélectrique (tension en volts) sur les accéléromètres s'avère nécessaire. Ce modèle sera appelé modèle flexible, par opposition au modèle rigide, dont le comportement dynamique est pris en compte des moteurs jusqu'aux codeurs. Dans le cadre de ce travail nous nous intéressons à la commande du modèle flexible, la commande du modèle rigide étant l'objet des recherches au LIRMM [80].

1.4.2 Matériel (*hardware*) et logiciel (*software*)

Les matériels et logiciels utilisés pour toute la partie expérimentale du travail et présentés ci-dessous se trouvent au LIRMM. Comme déjà mentionné dans 1.4.1, les études menées sur la commande du robot Par2 sont divisées en deux problèmes séparés : le contrôle rigide, qui s'occupe de la génération et du suivi de trajectoire à haute vitesse, et le contrôle flexible, intervenant pour minimiser les vibrations dès que la nacelle arrive à une position d'arrêt (à la fin de chaque trajectoire).

Pour le contrôle rigide, le robot Par2 est équipé de deux servomoteurs TPM 050 (Wittenstein) de puissance nominale de 1 kW, de couple maximal à la sortie de 500 Nm et de vitesse maximale à la sortie de 238,1 tr/min. Chaque servomoteur est actionné par un variateur numérique ServoStar 600 (Danaher) qui est, à son tour, coordonné par le contrôleur de mouvement sMI6 (Adept Technology).

Une illustration schématique de l'interconnexion entre les différents équipements est montrée sur la Figure 1.9. La partie matérielle est composée par le robot parallèle Par2, les capteurs accéléromètres avec leur amplificateur de charge, les piézo-actionneurs collés autour des bras du robot avec leur amplificateur haute-tension et une armoire électrique contenant les deux variateurs numériques pour l'actionnemment des servomoteurs et le contrôleur sMI6, responsable des contrôles à la fois rigide (coordination des variateurs, représenté par les lignes bleues claires sur la Figure 1.9) et flexible (lecture des accéléromètres et action sur les piézo-actionneurs, représenté par les lignes violettes) en temps réel. Le logiciel CIDE permet la programmation du contrôleur sMI6.

– **Accéléromètres**

[20] Voir sous-section 1.2.3

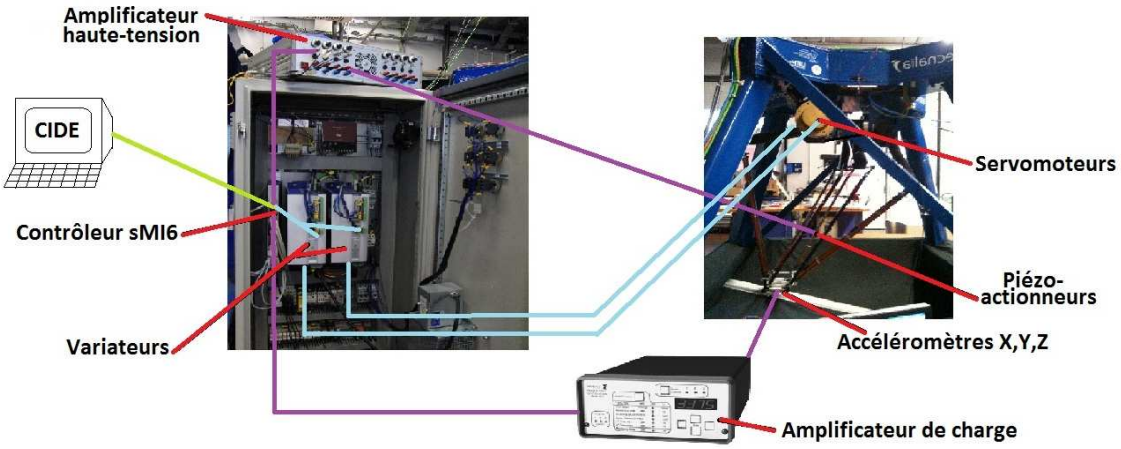

FIG. 1.9 – Schéma d'interconnexion matériel (*hardware*) et logiciel (*software*)

Les accéléromètres utilisés pour mesurer les accélérations dans les directions X, Y et Z sont des capteurs piézo-électriques de la famille DeltaTron - type 4506 (Brüel&Kjaer). Ils peuvent fournir des mesures linéaires jusqu'à 70 g avec une sensibilité de 100 mV/g. Les fréquences peuvent varier de 0,3 Hz jusqu'à 3 kHz dans la direction X et de 0,6 Hz jusqu'à 3 kHz dans les directions Y et Z.

– **Amplificateur de charge**
L'amplificateur de charge Model 133 (Endevco) permet le conditionnement des signaux provenants des accéléromètres, avec un filtre passe-bas à fréquence de coupure ajustable et un gain de sortie fixé entre 0 et 1000. Sa bande passande est de 100 kHz. Les signaux d'accélération mesurés et traités sont envoyés au contrôleur sMI6.

– **Piézo-actionneurs**
Les piézo-actionneurs DuraAct P-876.A12 (Physik Instrumente) collés autour des bras du robot sont des actionneurs PZT qui reçoivent de l'amplificateur haute-tension des tensions variant entre 0 et 400 V. Ces tensions permettent de déformer le matériel piézo-électrique et donc d'en changer sa raideur.

– **Amplificateur haute-tension**
L'amplificateur haute-tension HVA-400-100-ISO (Walcher Elektronik) reçoit du contrôleur sMI6 des signaux de tension entre -10 V et + 10 V et les amplifie de 0 à 400 V pour qu'ils soient envoyés aux piézo-actionneurs. Sa bande passante est de 8 kHz.

– **Contrôleur sMI6**
Avec un processeur PowerPC de 200 MHz, 6 sorties analogiques de +/- 10

V et 16 bits (deux pour les variateurs et quatre pour les piézos), 6 entrées codeurs (seulement deux sont utilisées pour les codeurs des servomoteurs), 4 entrées analogiques 16 bits (trois sont utilisées pour les accéléromètres) et des fréquences d'échantillonnage pour les boucles de régulation jusqu'à 8 kHz, le contrôleur sMI6 permet le contrôle simultané et en temps réel des variateurs (rigide) et des piézo-actionneurs (flexible).

– **Logiciel CIDE**
Le CIDE est un logiciel pour PC avec boite à outils pour le réglage des boucles d'asservissement (oscilloscope), paramétrage, diagnostic et développement de l'application. Le programme d'application est mis en oeuvre à partir d'une bibliothèque de fonctions logicielles écrites en langage C (c'est ici qu'on écrit le code pour les contrôleurs). Il est embarqué sur le sMI6 et s'exécute sur le système d'exploitation temps réel. Les contrôleurs flexibles qui seront synthétisés dans les chapitres 3 et 4 sont des contrôleurs dynamiques linéaires d'ordre 4 et peuvent donc être très facilement programmés dans le logiciel CIDE.

1.4.3 Analyse du spectre des perturbations

Nous avons mentionné, dans la sous-section 1.4.1, que la haute dynamique des déplacements du robot Par2 engendrent des vibrations aux points d'arrêt. Ici nous nous intéressons aux spectres fréquentiels des signaux enregistrés par les accéléromètres dans les directions X, Y et Z, au moment où la nacelle arrive à la position d'arrêt $Pos2$[21], pour plusieurs trajectoires et conditions de charge sur la nacelle.

Considérons initialement, à titre d'exemple, le cas du robot avec 2,5 kg de charge, pour lequel les vibrations sont engendrées par une trajectoire de 18 g[22]. À la fin d'une trajectoire de prise et dépose de la position $Pos1$ à la position $Pos2$, les accélérations mesurées par les accéléromètres placés sur la nacelle sont enregistrées. Ces données correspondent à des vibrations dans les directions X, Y et Z, causées par les fortes décélérations des moteurs (nécessaires pour que la nacelle arrive vite à sa position d'arrêt), caractérisant les perturbations pour le système. Les Figures 1.10 et 1.11 montrent, dans les domaines temporel et fréquentiel, respectivement, les résultats enregistrés sur deux expériences (*Pert 1* et *Pert 2*).

La comparaison entre les perturbations *Pert 1* et *Pert 2* permet de vérifier une

[21] Dû à la symétrie entre les positions $Pos1$ et $Pos2$, tous les résultats dans la thèse sont développés seulement pour la position $Pos2$, l'extension à la position $Pos1$ étant immédiate.

[22] Tout au long de la thèse, ce cas à 2,5 kg de charge et une trajectoire de 18 g sera considéré comme le cas nominal. Les autres conditions de charge et de trajectoire seront traitées comme des incertitudes/perturbations et serviront à évaluer la robustesse des contrôleurs.

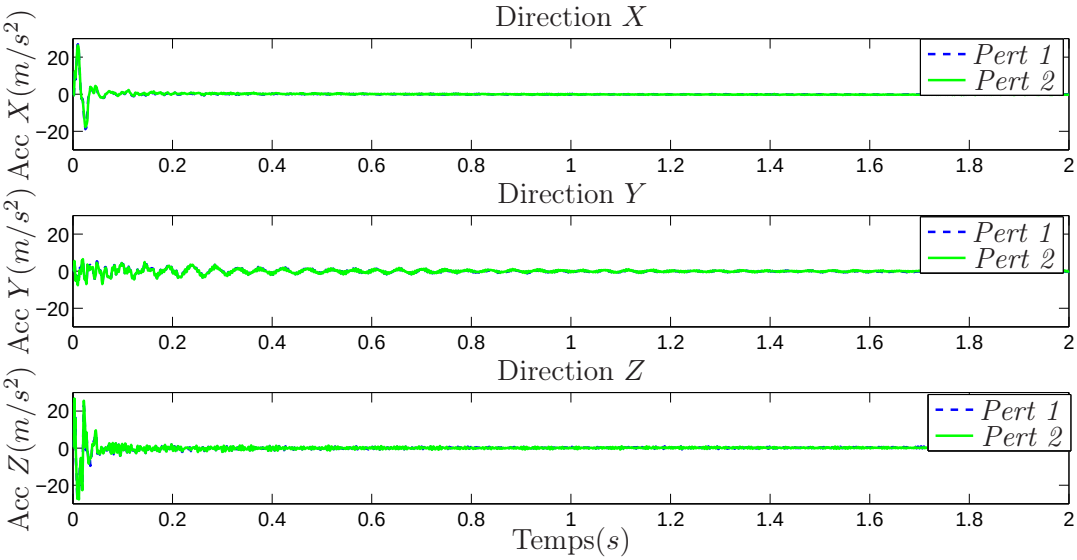

FIG. 1.10 – Perturbations *Pert 1* et *Pert 2* - Nacelle avec 2,5 kg de charge et trajectoire de 18 g - Domaine temporel

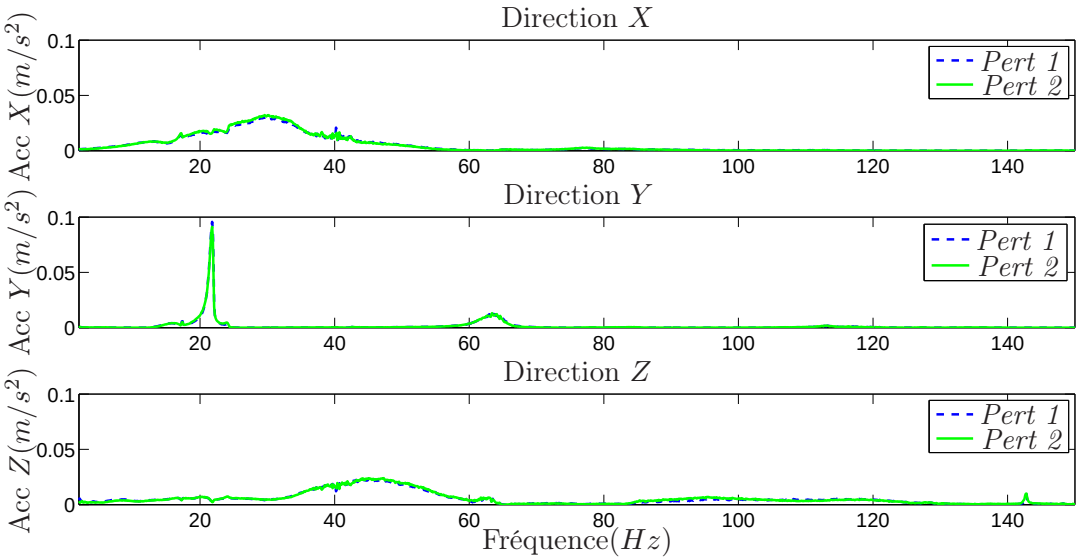

FIG. 1.11 – Perturbations *Pert 1* et *Pert 2* - Nacelle avec 2,5 kg de charge et trajectoire de 18 g - Domaine fréquentiel

bonne reproductibilité des résultats[23]. En regardant la Figure 1.11, nous pouvons

[23]Pour toutes les trajectoires et conditions de charge considérées par la suite, la reproductibilité des perturbations a toujours été verifiée.

constater que l'amortissement est beaucoup plus faible dans la direction Y que dans les deux autres directions. En effet, d'après la Figure 1.10, la vibration des signaux mesurés par les accéléromètres X et Z reste concentrée dans les premières 50 ms d'expérimentation. Pour Y, par contre, les effets des vibrations sont répercutés plus longtemps, comme nous pouvons le voir sur le détail (entre 0,05 s et 1 s) dans la Figure 1.13. La Figure 1.11 nous montre aussi que le spectre de fréquences dû à la perturbation dans la direction Y est concentré autour de 21,7 Hz. Par ailleurs, la Figure 1.12, représentée en échelle logarithmique, suggère une relation harmonique entre les modes de vibration. Mis à part le mode autour de 113 Hz, les modes indiqués sur la figure sont des multiples entiers du mode fondamental (entre 21 et 22 Hz). Étant beaucoup plus energétique que les harmoniques d'ordre supérieur, seul l'atténuation du mode fondamental sera considérée.

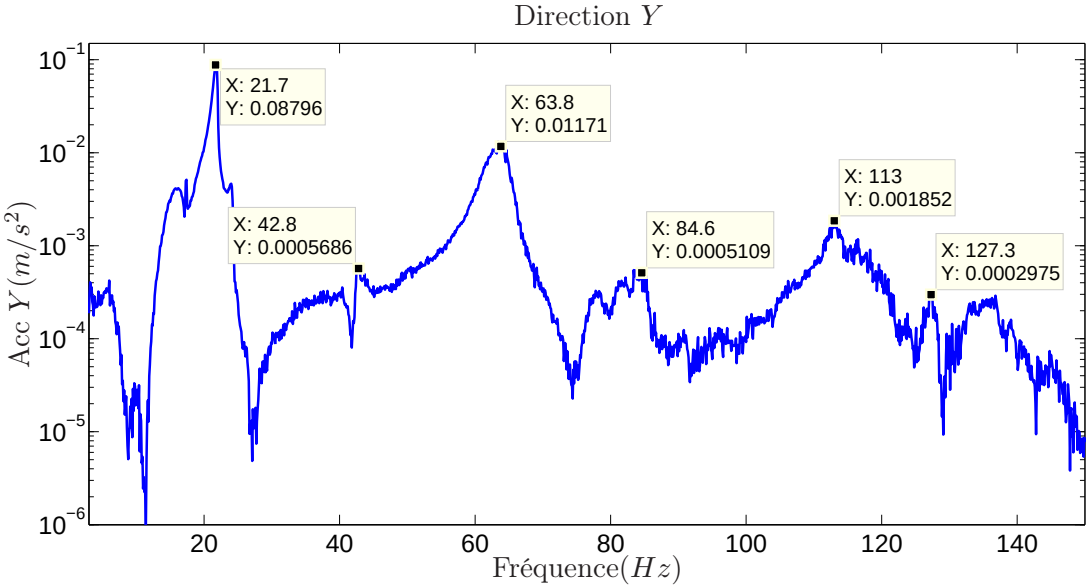

FIG. 1.12 – Perturbation *Pert 1* - Nacelle avec 2,5 kg de charge et trajectoire de 18 g - Domaine fréquentiel (échelle logarithmique)

Nous pouvons "capturer" (approximer) la plage des fréquences de la perturbation dans la direction Y avec un filtre de Butterworth passe-bande du deuxième ordre et fréquence de coupure entre 21 Hz et 23 Hz. Ce filtre, designé comme $W_d(s)$, sera utilisé dans le chapitre 3.

La Figure 1.14[24] montre toutes les trajectoires et conditions de charge pour lesquelles les perturbations ont été enregistrées. Dans tous les cas, à l'exemple de ce qui

[24]Pour toutes les conditions de charge, l'augmentation des accélérations se traduit par une augmentation des courants des moteurs. Les cercles en rouge sur la Figure 1.14 représentent les accéléra-

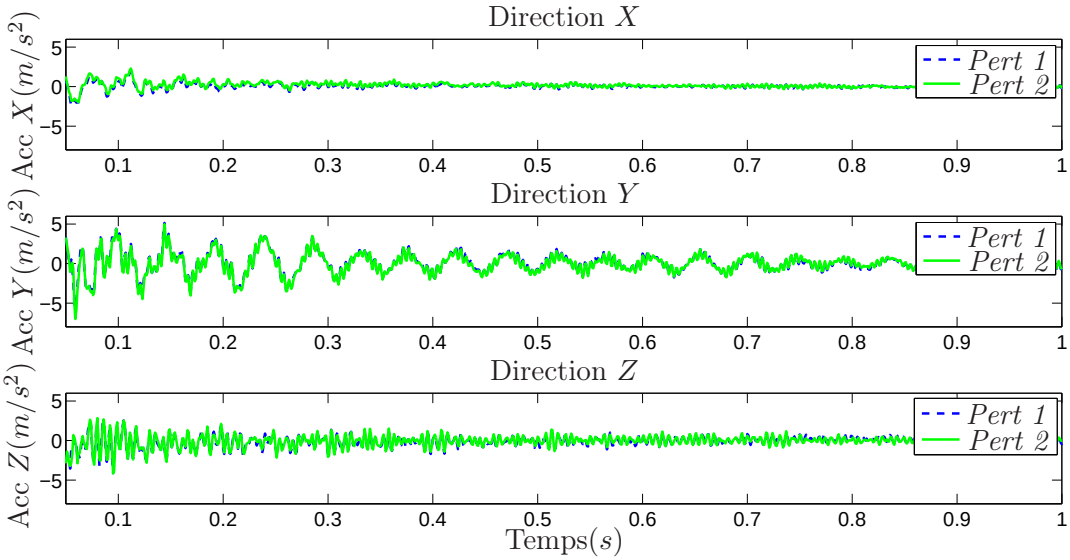

FIG. 1.13 – Perturbations *Pert 1* et *Pert 2* - Nacelle avec 2,5 kg de charge et trajectoire de 18 g - Domaine temporel - Détail

a été illustré sur les Figures 1.11 et 1.13, les vibrations sont beaucoup plus amorties dans les directions X et Z que dans la direction Y.

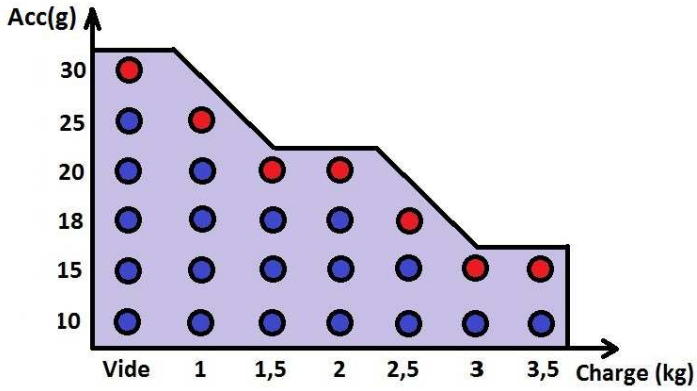

FIG. 1.14 – Espace de travail - Trajectoires et conditions de charge étudiées

A titre illustratif, considérons, pour le robot à vide (sans charge sur la nacelle), l'effet du changement de trajectoire sur l'accélération mesurée dans la direction Y (Figure 1.15). Nous pouvons remarquer que, même si l'amplitude varie[25], la fréquence

tions limites pour chaque condition de charge, c'est-à-dire, pour lesquelles les courants des moteurs atteignent 25 A à 30 A (les moteurs peuvent opérer avec des courants jusqu'à 30 A).

[25]L'amplitude mesurée dans la direction Y pour la trajectoire de 20 g ne s'accorde pas avec l'en-

de résonance reste toujours autour de 33 Hz.

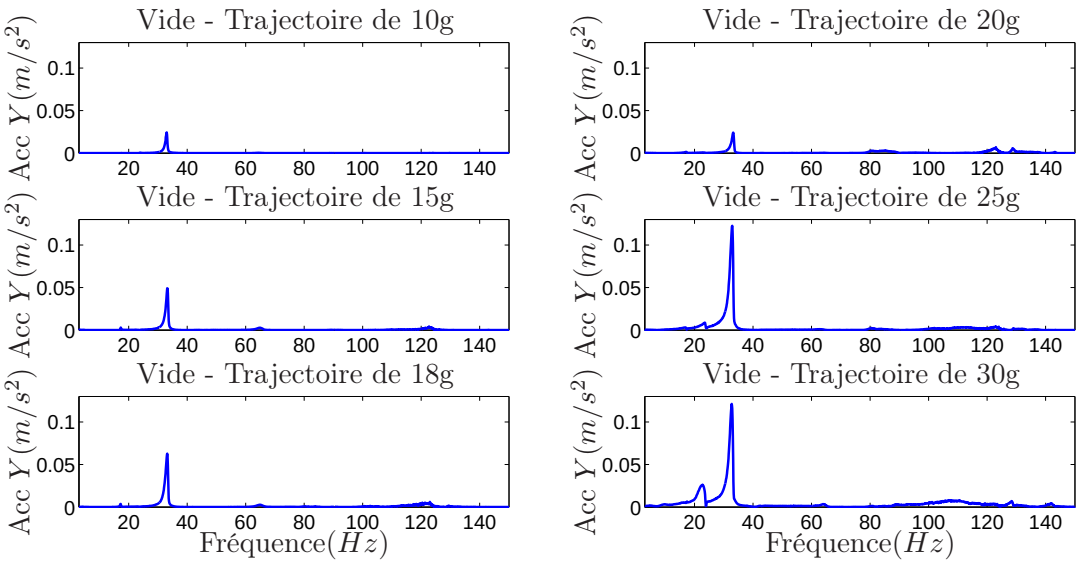

FIG. 1.15 – Robot Par2 à vide pour plusieurs trajectoires - Domaine fréquentiel

Sur la Figure 1.16 nous avons représenté, pour une trajectoire de 10 g, l'effet du changement de charge sur l'accélération mesurée dans la direction Y. Au fur et à mesure que la charge sur la nacelle augmente (dès le cas à vide jusqu'à la nacelle avec 3,5 kg de charge), les fréquences de résonance diminuent.

1.5 Formulation du problème

Au moment où la nacelle atteint la position d'arrêt $Pos2$, pour toutes les trajectoires et conditions de charge étudiées (Figure 1.14), des modes du bras du robot sont excités, provoquant les vibrations considérées comme des perturbations pour notre système. Dans tous les cas expérimentaux, la vibration dans la direction Y est prédominante. Pour cette raison, nous nous intéressons à minimiser les perturbations dans cette direction.

Considérons le schéma-bloc sur la Figure 1.17.

Pour aboutir à l'atténuation des perturbations, quatre étapes sont considérées :

semble des résultats (les amplitudes augmentent au fur et à mesure que les accélérations augmentent, tandis que pour les cas à 20 g l'amplitude est plus petite que celle à 10 g). Ce résultat, bien reproductible expérimentalement, est dû au fait que l'énergie des vibrations à la fin de la trajectoire de 20 g est davantage redistribué dans les directions X et Z. Néanmoins, leur effet reste concentré seulement dans les premières 50 ms.

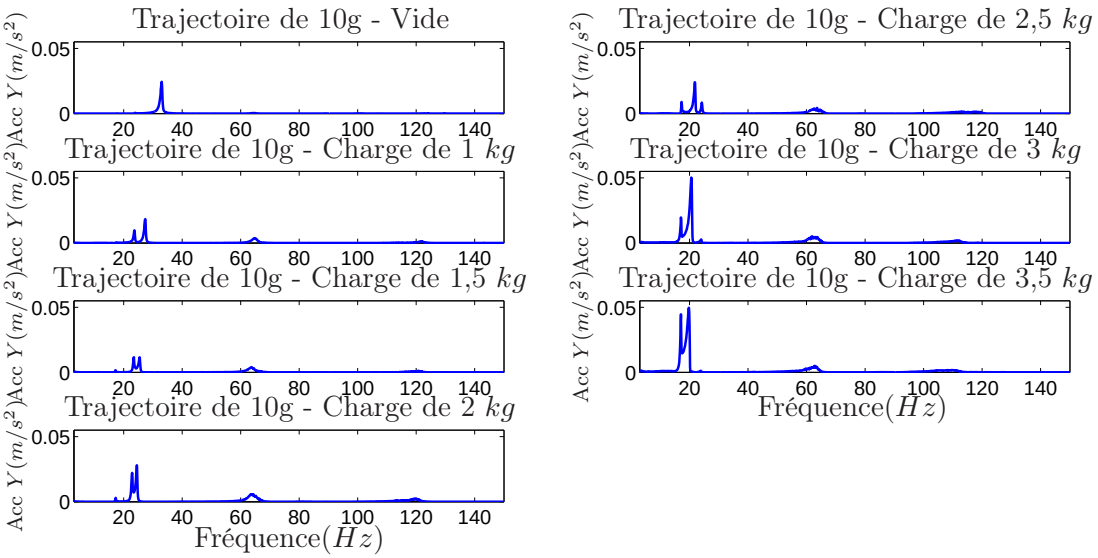

FIG. 1.16 – Robot Par2 avec trajectoire de 10 g pour plusieurs conditions de charge - Domaine fréquentiel

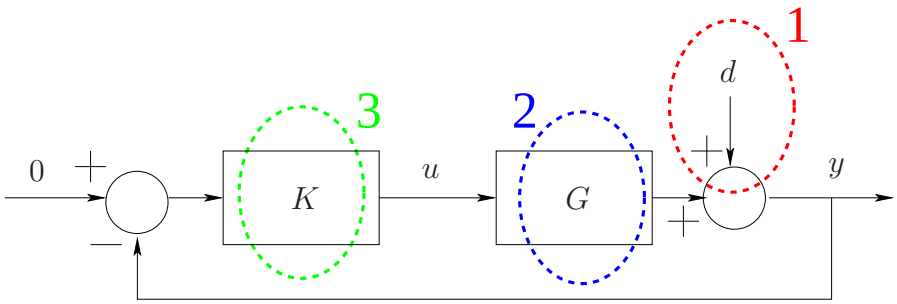

FIG. 1.17 – Schéma-bloc des étapes expérimentales (modèle flexible)

1. **Analyse du spectre des perturbations** : cette étape d'évaluation du contenu spectral des vibrations, expliquée dans la sous-section 1.4.3, montre dans quelles directions et sur quelles fréquences les perturbations d sont les plus concentrées ;

2. **Identification du modèle en boucle ouverte** : cette étape correspond à l'identification du modèle (G) (pour une condition de charge spécifique et dans la position $Pos2$) entre les entrées en tension sur les piézo-actionneurs et la sortie mesurée par l'accéléromètre Y. Deux modèles distincts sont obtenus, l'un servant de base à la synthèse d'un contrôleur, l'autre pour une validation postérieure en termes de simulation. Ces modèles sont obtenus à partir des techniques d'identification dont les détails sont expliqués dans le chapitre 2 ;

3. **Régulation en boucle fermée** : Au moment où la nacelle atteint la position d'arrêt $Pos2$, des modes du bras du robot sont excités, provoquant les vibrations considérées comme des perturbations pour notre système. C'est à ce moment là que le contrôleur intervient pour minimiser les vibrations[26]. La troisième étape concerne la synthèse de contrôleurs qui stabilisent le système nominal (2,5 kg de charge, trajectoire de 18 g) en boucle fermée, toute en réduisant les vibrations résiduelles. Deux méthodes de synthèse de contrôleurs sont considérées dans les chapitres 3 et 4.
4. **Analyse de robustesse** : la quatrième étape est la vérification de l'efficacité du contrôleur obtenu pour des variations dans les perturbations et conditions de charge. Cette étape est aussi présentée dans les chapitres 3 et 4.

Le but du travail est, alors, de réaliser la synthèse d'une loi de commande K (étape 3) qui minimise l'effet d'une perturbation d (étape 1) à la sortie (accéléromètre Y) du modèle identifié G (étape 2) au moment où la nacelle arrive à la position d'arrêt $Pos2$. En plus de ça, le même contrôleur K doit être capable d'atténuer toutes les perturbations d représentées sur la Figure 1.14, correspondant aux différents conditions de charge et de trajectoire (étape 4).

1.6 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis de contextualiser le problème des vibrations et de suggérer quelques stratégies pour le traiter, comme par exemple les contrôles passif et actif des vibrations.

Le manipulateur parallèle Par2 a été présenté comme une alternative pour les opérations industrielles de prise et dépose. Dû à ses accélérations élevées, un important niveau de vibration est observé à la fin de chaque trajectoire, surtout dans la direction hors plan (Y). Pour atténuer les vibrations, un contrôle actif robuste est envisagé avec des éléments piézoélectriques comme actionneurs.

Concernant les expériences qui permettront de vérifier l'efficacité de l'approche adoptée, une division en quatre étapes est proposée. D'abord une analyse du spectre des vibrations a été effectuée dans ce chapitre 1. Elle doit être suivie d'une étape d'identification des deux modèles en boucle ouverte (de l'entrée des actionneurs piézoélectriques jusqu'à l'accéléromètre Y), un pour la synthèse d'un contrôleur et un autre pour une validation du contrôleur en simulation. La troisième étape concerne

[26] Ceci justifie que l'identification de nos modèles en boucle ouverte soit effectuée aux positions d'arrêt, et que la commande soit activée en arrivant au point d'arrêt.

la synthèse d'une loi de commande qui minimise une perturbation pour un modèle nominal avec une condition de charge spécifique. La dernière étape est la validation du contrôleur (en termes d'atténuation de vibration) pour différentes trajectoires et conditions de charge sur la nacelle.

Chapitre 2

Identification de Systèmes

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons discuté, dans 1.2.1, des modèles mathématiques représentatifs du comportement dynamique des structures flexibles. D'après [42], les modèles pour les structures flexibles peuvent être classés en modèles analytiques et modèles expérimentaux, selon la manière dont ils sont obtenus.

Les modèles analytiques sont basés sur les lois de la physique ou encore obtenus à partir d'une discrétisation spatiale, comme par exemple la méthode des éléments finis. Les modèles modaux présentés en 1.2.1 en sont l'exemple le plus typique. Explicitant non seulement les amortissements et fréquences propres, mais aussi les vecteurs propres (les "modes" de vibration), ils sont adaptés à l'analyse et au contrôle des vibrations. Un point faible de ce type de modèle est cependant que, en plus d'une laborieuse étape d'obtention d'un modèle analytique, il reste nécessaire de réaliser des expériences pratiques pour la validation des paramètres du modèle[1] (*model updating*) [51],[36].

Un modèle analytique permet certes l'analyse des modes de vibration des structures flexibles, néanmoins, quand il s'agit uniquement d'un problème de contrôle, un modèle alternatif peut être envisagé. Les modèles expérimentaux sont obtenus à partir des vecteurs des données entrée-sortie en s'appuyant sur les techniques dites d'identification de systèmes [66]. Ces techniques sont simples d'utilisation et une nouvelle identification du système peut se faire facilement dans le cas d'un changement de paramètres ou de conditions d'opération[2]. Il existe plusieurs manières de valider

[1] C'est particulièrement le cas pour les amortissements dont les valeurs ne peuvent pas être bien précisées de manière théorique [36].

[2] Cette considération est valable pour les systèmes linéaires et, dans le cadre de ce travail, seules

un modèle expérimental [66]. Une manière souvent utilisée est la comparaison dans le domaine fréquentiel avec un modèle non-paramétrique [42],[5],[1],[90]. Pour un problème de contrôle, les principaux avantages des modèles expérimentaux par rapport aux modèles analytiques sont la simplicité et rapidité d'obtention et de validation du modèle. De nombreux travaux ont été menés utilisant des techniques différentes d'identification de systèmes pour l'obtention d'un modèle expérimental destiné au contrôle actif des vibrations. Des exemples concernant différents techniques et différents systèmes flexibles sont décrits, par exemple, dans [41],[42],[24],[6],[5],[1],[2],[3] et [90].

Le chapitre s'articule autour de quatre axes principaux. D'abord, dans la section 2.2, quelques concepts qui servent de base à la théorie d'identification des systèmes sont rappelés. Ensuite, respectivement dans les sections 2.3, 2.4 et 2.5, les modèles non-paramétriques, paramétriques et basés sur les sous-espaces sont présentés. Les aspects pratiques liés à l'identification sont le sujet de la section 2.6. Finalement, dans la section 2.7, les résultats expérimentaux d'identification basée sur les sous-espaces réalisés sur le robot Par2 sont présentés. Ces résultats correspondent à la deuxième étape expérimentale évoquée dans la section 1.5 du chapitre 1 ("Identification du modèle en boucle ouverte").

2.2 Concepts fondamentaux

La densité spectrale de puissance, la méthode des moindres carrés et le filtre de Kalman pour les systèmes LTI sont succinctement traités dans cette section. Ce sont les outils de base qui permettent le développement de la théorie d'identification de systèmes utilisée dans la suite de cette thèse.

2.2.1 La densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance d'un signal, défini pour les séquences temporelles stationnaires au sens large[3] (*wide sense stationary* - WSS), représente la distribution de la puissance du signal sur toutes les fréquences. Soit $x(t)$ une séquence WSS à temps discret de moyenne nulle avec période d'échantillonnage T, son spectre de puissance correspondant est donné par

les techniques linéaires d'identification des systèmes sont considérées.

[3]Un signal aléatoire est dit stationnaire au sens faible si sa moyenne ne dépend pas du temps et sa fonction d'autocorrélation dépend seulement de l'écart temporel $R_x(\tau) = E[x(k)x(k-\tau)]$ [100].

$$\Phi^x(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau T} \tag{2.1}$$

où $R_x(\tau)$ représente la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.

La relation de Parseval

$$W[x(t)^2] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi^x(\omega) d\omega \tag{2.2}$$

montre que l'énergie totale du signal $x(t)$, donnée par $W[x(t)^2]$, est distribuée sur toutes les bandes des fréquences $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$. Le spectre de puissance a été utilisé dans la section 1.4.3 pour montrer la prédominance énergétique mesurée par l'accéléromètre Y dans la première étape expérimentale ("Analyse du spectre des perturbations").

2.2.2 La méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés[4] linéaire trouve une importante application dans la résolution d'un système surdéterminé inconsistant[5] d'équations linéaires. Soit le système d'équations linéaires donné par

$$Fx = y \tag{2.3}$$

avec $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de données, $y \in \mathbb{R}^m$ un vecteur d'observation et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de paramètres inconnus. Si le système est inconsistant, il n'existe pas de solution exacte, et dans ce cas nous pouvons admettre la présence d'un vecteur résiduel $\epsilon \in \mathbb{R}^m$ représentant l'écart entre les observations y et le produit Fx pour chaque x donné. L'objectif de la méthode consiste à trouver la valeur de x qui minimise le carré de cet écart, de manière à ce que $y \approx Fx$. En termes mathématiques nous pouvons écrire cela comme

$$\min_x \epsilon^T \epsilon \;\text{ sujet à }\; y = Fx + \epsilon \quad \equiv \quad \min_x \parallel Fx - y \parallel_2^2 \tag{2.4}$$

La fonction objectif de la minimisation (2.4) peut être développée comme

[4] La méthode de moindres carrés a été développée par Carl Friedrich Gauss à la fin du XVIIIe siècle. Elle peut être divisée en deux catégories, linéaire (admettant une solution analytique) et non-linéaire (solution par itération numérique), suivant que les résidus sont linéaires ou pas par rapport aux variables du problème [100].

[5] Un système tel que (2.3) est dit inconsistant si le vecteur y n'appartient pas à l'espace colonne de la matrice F.

$$f(x) = x^T F^T F x - x^T F^T y - y^T F x - y^T y \tag{2.5}$$

et son gradient est

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2F^T F x - 2F^T y \tag{2.6}$$

La solution optimale est obtenue en imposant que le gradient $\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}$ soit égal à zéro. Cela donne

$$F^T F \hat{x} = F^T y \tag{2.7}$$

et, dans le cas où $F^T F$ est inversible, la solution optimale est

$$\hat{x} = (F^T F)^{-1} F^T y \tag{2.8}$$

Si $F^T F$ n'est pas inversible, la solution de (2.7) n'est pas unique. Pour avoir une solution unique des contraintes additionnelles sont nécessaires. Typiquement une telle contrainte peut être la minimisation de la norme 2 de x [100]

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \| x \|_2^2 \quad \text{avec} \quad \mathcal{X} = \{x : x = arg \min_z \| Fz - y \|_2^2\} \tag{2.9}$$

La solution à ce problème est donnée par [100]

$$\hat{x} = V_1 \Sigma^{-1} U_1^T y \tag{2.10}$$

où les matrices V_1, U_1 et Σ s'obtiennent à partir de la décomposition en valeurs singulières[6] (*Singular Value Decomposition* - SVD) suivante

$$F = [U_1 \;\; U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma V_1^T \tag{2.11}$$

[6]**Décomposition en valeurs singulières** : Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ peut être décomposée comme $A = U \Sigma V^T$ avec les matrices orthogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que les seuls éléments non nuls sont disposés le long de la diagonale. Ces éléments, appelés les valeurs singulières, sont ordonnés, soit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_k = 0$, où r=rang(A) et k=min(m, n).

Une généralisation de la méthode, appelée des moindres carrés pondérés, est donnée dans [100]

$$\min_x W \text{ sujet à } y = Fx + L\epsilon \equiv \min_x (Fx - y)^T W (Fx - y) \tag{2.12}$$

avec $W = (LL^T)^{-1}$. Dans le cas où W est inversible, la solution de (2.12) est donnée par

$$\hat{x} = (F^T W F)^{-1} F^T W y \tag{2.13}$$

2.2.3 Le filtre de Kalman pour les systèmes LTI

Le filtre de Kalman est un observateur optimal qui, étant donnés la structure du système dans l'espace d'état, les propriétés statistiques des signaux stochastiques intervenant dans le système et les vecteurs des données entrée-sortie, permet d'obtenir une estimation du vecteur d'état non-biaisée et minimale en terme de variance [7][100].

Soit le système linéaire invariant à temps discret décrit par

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \tag{2.14}$$

avec $w(t)$ et $v(t)$ des séquences aléatoires de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$E \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} [w(j)^T \quad v(j)^T] = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \Delta(t-j) \tag{2.15}$$

où

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0, \quad , \quad R > 0 \tag{2.16}$$

et Δ représente une impulsion unitaire.

[7] Pendant le développement des équations, nous utiliserons la notation de probabilité conditionnelle $\hat{x}(t+1|t)$, signifiant l'estimation de la variable $\hat{x}$ à l'instant $t+1$, connaissant les données jusqu'à l'instant t.

Si la paire (A, C) est observable et la paire $(A, Q^{1/2})$ est contrôlable, la solution P satisfaisant l'équation algébrique de Riccati

$$P = APA^T + Q - (S + APC^T)(CPC^T + R)^{-1}(S + APC^T)^T \tag{2.17}$$

où P est la matrice de covariance de l'erreur sur les états, donnée par

$$P(t|t-1) = E[(x(t) - \hat{x}(t|t-1))(x(t) - \hat{x}(t|t-1))^T] \tag{2.18}$$

avec $\hat{x}(t|t-1) = E[x(t)]$ et $P(0|-1) > 0$, satisfait

$$\lim_{t\to\infty} P(t|t-1) = P > 0 \tag{2.19}$$

La solution P permet par la suite de trouver le gain du filtre de Kalman

$$K = (S + APC^T)(CPC^T + R)^{-1} \tag{2.20}$$

qui rend la matrice $A - KC$ stable asymptotiquement.
On a la représentation, dite sous la forme d'innovations, donnée par

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = A\hat{x}(t|t-1) + Bu(t) + Ke(t) \\ y(t) = C\hat{x}(t|t-1) + e(t) \end{cases} \tag{2.21}$$

où l'entrée stochastique $e(t)$ est un bruit blanc

$$e(t) = y(t) - C\hat{x}(t|t-1) \tag{2.22}$$

À partir de cette représentation, le prédicteur d'état à un pas est donné par

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t) \\ y(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{2.23}$$

2.3 L'identification non-paramétrique fréquentielle

Cette classe de méthodes d'identification reçoit la dénomination de "non-paramétrique" car elle fournit une représentation entrée-sortie d'un système sans se préoccuper de la structure pour le modèle. Comme exemples de modèles non-paramétriques nous pouvons citer, dans le domaine temporel, la réponse impulsionnelle et la ré-

ponse à un échelon. Dans le domaine fréquentiel, nous pouvons citer l'estimation de la réponse en fréquence d'un système linéaire. Les modèles non-paramétriques servent, d'un côté, à dévoiler les caractéristiques dynamiques importantes d'un système (comme par exemple les fréquences de résonance), et d'un autre côté, ils sont utilisés pour la validation des modèles (par exemple la comparaison du diagramme de Bode d'un modèle paramétrique avec l'estimation de la réponse en fréquence du modèle non-paramétrique). Dans le contexte de ce travail, comme il s'agit d'un système à modes flexibles avec plusieurs fréquences de résonance, les modèles non-paramétriques fréquentiels seront utilisés dans l'étape de validation de modèles. Commençant par quelques définitions de base associées au traitement du signal dans le domaine fréquentiel, nous finissons cette section par la présentation d'une technique d'estimation d'une fonction de réponse en fréquence pour un système LTI à partir d'un vecteur des données entrée-sortie expérimental.

La transformée de Fourier discrète (*discret Fourier transform* - DFT) d'un signal $x(t)$ pour $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ est donnée par

$$X_N(\omega_n) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-j\omega_n tT} \tag{2.24}$$

pour $\omega_n = \frac{2\pi n}{NT}[rad/s], n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ et la période d'échantillonnage $T \in \mathbb{R}$. Elle permet d'obtenir une représentation spectrale discrète d'un signal échantillonné sur une fenêtre de temps finie. Son calcul selon la formule (2.24) pour un nombre N de points nécessite N^2 opérations. Il existe cependant, des algorithmes appelés de transformée de Fourier rapide (*fast Fourier transform* - FFT) qui permettent de largement réduire cette complexité [11].

L'équation (2.1) montre que le calcul du spectre d'un signal nécessite la connaissance d'un nombre infini d'échantillons. Dans le cas pratique, le spectre peut être approximé par une relation basée sur une DFT, appelée "périodogramme du signal" et donnée par

$$\hat{\Phi}_N^x(\omega_n) = \frac{1}{N}|X_N(\omega_n)|^2 \tag{2.25}$$

avec $\omega_n = \frac{2\pi n}{NT}$ et $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Le périodogramme est une estimation non biaisée calculée sur les points ω_n, mais avec une importante variance autour de la moyenne. Comme les valeurs du périodogramme dans les fréquences voisines sont asymptotiquement décorrélées, il y a des techniques (découpage en bloc ou "fenêtrage" [100]) qui permettent de réduire cette

variance. La réduction de la variance entraîne, cependant, une réduction de la résolution fréquentielle [8].

Considérons le système LTI asymptotiquement stable

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \tag{2.26}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$ et $v(t) \in \mathbb{R}$, où $v(t)$ est une perturbation WSS additive inconnue et non-correlée avec $u(t)$. La fonction de transfert correspondante est donnée par

$$y(t) = (C(qI - A)^{-1}B + D)u(t) + v(t) = G(q)u(t) + v(t) \tag{2.27}$$

où la multiplication par l'opérateur q symbolise la translation temporelle du signal d'une période d'échantillonnage.

Le modèle non-paramétrique dans le domaine fréquentiel associé à la partie déterministe de (2.27), c'est-à-dire $G(e^{j\omega T})$, peut être estimé par la ETFE (*Empirical Transfer Function Estimate*)

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_n}) = \frac{Y_N(\omega_n)}{U_N(\omega_n)} \tag{2.28}$$

où $Y_N(\omega_n)$ et $U_N(\omega_n)$ sont les transformées de Fourier discrètes de $y(t)$ et $u(t)$ respectivement. La ETFE présente les mêmes propriétés que le périodogramme, étant donc non biaisée et avec une importante variance. Les techniques pour la réduction de la variance (en dépit de la résolution fréquentielle) proposées pour le périodogramme sont valables aussi pour l'ETFE. Dans le contexte de ce travail, cette estimation sera utilisé pour la validation des modèles.

2.4 L'identification paramétrique

Quoique les méthodes d'identification non-paramétrique servent bien à l'analyse des propriétés dynamiques des systèmes, il y a des applications qui nécessitent des modèles avec une représentation plus compacte, comme par exemple la synthèse de contrôleur basée modèle ou le développement des simulateurs pour les systèmes dynamiques. Les méthodes d'identification paramétrique permettent alors l'estimation

[8] La résolution des fréquences est inversement proportionnelle à la séparation des fréquences dans le périodogramme.

des paramètres d'un modèle compact à partir d'une optimisation (normalement d'une fonction coût d'erreur quadratique). Nous présentons deux classes de méthodes paramétriques : l'estimation fondée sur la minimisation de l'erreur de sortie, où les incertitudes dues aux perturbations additives sur la sortie sont représentées par un bruit blanc, et l'estimation fondée sur la minimisation de l'erreur de prédiction, avec les parties déterministe et stochastique approximées à partir d'un prédicteur exprimé sous la forme d'innovations (2.21).

2.4.1 Estimation de modèle paramétrique en erreur de sortie

Considérons le système LTI

$$y(t) = G(q)u(t) + v(t) \tag{2.29}$$

avec $v(t)$ un bruit blanc de mesure (statistiquement indépendant de l'entrée $u(t)$). Considérons aussi les vecteurs des signaux d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ obtenus à partir du système (2.29), ainsi que le prédicteur associé

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.30}$$

d'ordre n connu (ou fixé). L'objectif est d'estimer les matrices A, B, C et D de manière à ce que la sortie $\hat{y}(t)$ du prédicteur soit proche de la sortie $y(t)$ du système.

Pour traiter ce problème, nous supposons que les matrices du prédicteur dépendent du vecteur de paramètres θ, résultant en un modèle du prédicteur paramétré comme suit

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1,\theta) = A(\theta)\hat{x}(t,\theta) + B(\theta)u(t) \\ \hat{y}(t,\theta) = C(\theta)\hat{x}(t,\theta) + D(\theta)u(t) \end{cases} \tag{2.31}$$

La méthode d'estimation paramétrique est illustrée dans la Figure 2.1.

Le processus d'estimation peut être divisé en quatre étapes [100] :

– Détermination d'une paramétrisation : c'est la spécification de la dépendance des matrices du prédicteur par rapport au vecteur de paramètres θ. La fonction de transfert d'un système d'ordre n (2.31) peut être représentée par

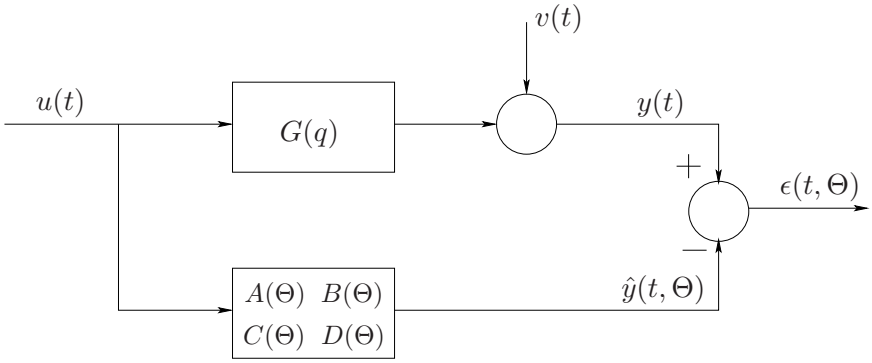

FIG. 2.1 – Modèle obtenu en minimisant l'erreur en sortie

$$G(q,\theta) = D(\theta) + C(\theta)(qI_n - A(\theta))^{-1}B(\theta) \tag{2.32}$$

Pour chaque valeur de θ une nouvelle fonction de transfert est définie. La sensibilité numérique par rapport à un vecteur de paramètres θ peut varier énormement[9]. Dans certaines paramétrisations, pour des modèles d'ordres élevés, une variation très faible (de l'ordre de la précision numérique de l'ordinateur) d'un paramètre conditionne la stabilité du modèle correspondant [100].

– Sélection d'un critère qui permet de juger de la qualité d'un vecteur de paramètres θ en particulier. Nous nous intéressons au critère d'erreur quadratique donné par

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} \parallel y(t) - \hat{y}(t,\theta) \parallel_2^2 \tag{2.33}$$

avec $\hat{y}(t,\theta)$ donné par (2.31).

– Minimisation numérique du critère : trouver le vecteur optimal $\hat{\theta}_N$ qui minimise la fonction coût (2.33), donnée par

$$\hat{\theta}_N = \quad \arg\min \quad J_N(\theta) \tag{2.34}$$

Pour le modèle dans l'espace d'état (2.31), la fonctionnelle $J_N(\theta)$ (2.33) peut s'écrire de la manière suivante [100]

[9] Une matrice compagne [86], par exemple, est une forme de représentation sensible à des petites variations paramétriques, tandis que les formes *tridiagonale* et *normal de sortie* sont numériquement plus robustes [100][65].

$$J_N(\theta_{AC}, \theta_{BD}) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \| \, y(t) - \phi(t, \theta_{AC})\theta_{BD} \, \|_2^2 \tag{2.35}$$

où θ_{AC} (respectivement θ_{BD}) est le vecteur qui paramétrise les matrices A et C (respectivement B et D). Différemment de la variante linéaire (2.4), le problème de moindres carrés est beaucoup plus difficile à résoudre puisque ϕ est en général une fonction non linéaire des paramètres. Dès lors, il n'y a pas de solution analytique, le problème est résolu de manière itérative et recquiert un choix de conditions initiales pour θ_{AC} et θ_{BD}. De plus, il n'y a pas de garantie de convergence en temps fini vers la valeur optimale de $J_N(\theta_{AC}, \theta_{BD})$. Différentes méthodes numériques existent pour résoudre ce problème d'optimisation, comme par exemple l'algorithme de Gauss-Newton et l'algorithme du gradient [10].

– Analyse de la qualité de l'estimateur $\hat{\theta}_N$: une fois que les mesures $y(t)$ sont représentées comme des processus stochastiques, le vecteur de paramètres $\hat{\theta}_N$ estimé à partir de (2.34) sera un vecteur aléatoir (avec biais et covariance) passible d'analyse statistique. Dans le cas où le vrai système peut être bien décrit par (2.29), le prédicteur (2.31) avec le critère d'optimisation (2.33) fournit sous certaines hypothèses une estimation non biaisée et consistante[10] des paramètres.

D'après la Figure 2.1 et l'équation (2.31) du prédicteur paramétré, la sortie $\hat{y}(t, \theta)$ est estimée uniquement à partir de l'entrée $u(t)$, ce qui rend le prédicteur incapable de traiter les problèmes où la perturbation $v(t)$ n'est pas un bruit blanc (sauf dans le cas où la covariance de $v(t)$ est connue au préalable [100]). La méthode d'estimation basée sur l'erreur de prédiction, présentée par la suite, permet de traiter le cas général d'une perturbation colorée avec un prédicteur qui utilise les informations de l'entrée et de la sortie, assurant une variance minimale pour les estimations paramétriques.

2.4.2 Estimation de modèle paramétrique en erreur de prédiction

Considérons le système LTI

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \tag{2.36}$$

[10] Considérons que θ_0 est le vrai vecteur de paramètres du système. Une estimation est dite non biaisée si $E[\hat{\theta}_N - \theta_0] = 0$. L'estimation est consistante si la matrice de covariance de l'estimateur converge asymptotiquement vers zero lorsque le nombre de données croît indéfiniment, soit $E[\hat{\theta}_N - \theta_0][\hat{\theta}_N - \theta_0]^T = 0$ quand $N \to \infty$ [100].

avec $e(t)$ un bruit blanc de mesure (statistiquement indépendant de l'entrée $u(t)$), $G(q)$ la partie déterministe et $H(q)$ la partie stochastique du système. Considérons aussi les vecteurs des signaux d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ obtenus à partir du système (2.36), ainsi que le prédicteur associé

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.37}$$

d'ordre n connu (ou fixé). L'objectif est d'estimer les matrices A, B, C, D et K telles que la sortie $\hat{y}(t)$ du prédicteur soit proche de la sortie $y(t)$ du système.

Le prédicteur (2.37) est un observateur et, sous l'hypothèse que ses matrices dépendent d'un vecteur de paramètres θ, peut alors être réécrit comme un prédicteur paramétré sous la forme d'innovation

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t,\theta) = A(\theta)\hat{x}(t|t-1,\theta) + B(\theta)u(t) + K(\theta)\epsilon(t,\Theta) \\ y(t) = C(\theta)\hat{x}(t|t-1,\theta) + D(\theta)u(t) + \epsilon(t,\Theta) \end{cases} \tag{2.38}$$

avec l'innovation $\epsilon(t,\Theta)$ représentant l'erreur entre la mesure réelle $y(t)$ et la mesure prédite $\hat{y}(t)$.

Le rapport entre (2.38) et (2.36) permet de conclure que les fonctions de transfert associées sont données par

$$\begin{aligned} G(q,\theta) &= D(\theta) + C(\theta)(qI - A(\theta))^{-1}B(\theta) \\ H(q,\theta) &= I + C(\theta)(qI - A(\theta))^{-1}K(\theta) \end{aligned} \tag{2.39}$$

avec un polynôme caractéristique (déterminé par $A(\theta)$) commun aux parties déterministe et stochastique.

La méthode d'estimation paramétrique est illustrée sur la Figure (2.2).

Considérant la représentation sous forme d'innovation (2.38), la paramétrisation pour le prédicteur (2.37) à un pas (*one step-ahead predictor*) est donnée par

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t,\theta) = (A(\theta) - K(\theta)C(\theta))\hat{x}(t|t-1,\theta) + (B(\theta) - K(\theta)D(\theta))u(t) + K(\theta)y(t) \\ \hat{y}(t|t-1,\theta) = C(\theta)\hat{x}(t|t-1,\theta) + D(\theta)u(t) \end{cases} \tag{2.40}$$

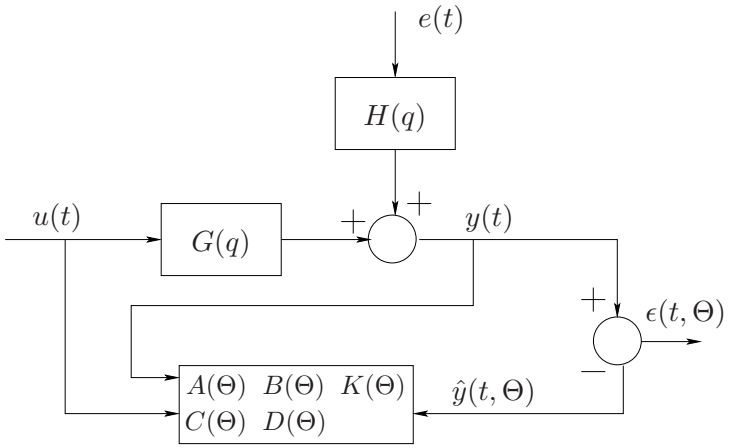

FIG. 2.2 – Modèle obtenu en minimisant l'erreur de prédiction

Cette paramétrisation est équivalente à celle du modèle en erreur de sortie avec la matrice A remplacée par $A - KC$, la matrice B remplacée par $[B - KD, K]$ et l'entrée du système étant $[u(t), y(t)]^T$.

Le critère d'erreur quadratique est donné par

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \| \, y(t) - \hat{y}(t|t-1, \theta) \, \|_2^2 \tag{2.41}$$

avec $\hat{y}(t|t-1, \theta)$ obtenu par (2.40). Nous pouvons observer ici que, contrairement au critère pour le modèle en erreur de sortie (2.33), la fonction coût est calculée par rapport à une prédiction de la sortie $y(t|t-1, \theta)$. Pourtant, les mêmes algorithmes utilisés pour la minimisation numérique du critère peuvent être employés ici.

Dans le cas où le vrai système peut être bien décrit par (2.36), le prédicteur (2.40) avec le critère d'optimisation (2.41) fournit une estimation non biaisée et consistante des paramètres.

2.4.3 Classes de modèles spécifiques pour les systèmes SISO

Pour les systèmes SISO, des paramétrisations souvent utilisées dans la pratique sont présentées dans ce qui suit sous la forme de fonctions de transfert discrètes. Elles sont toutes des particularisations du cas général donné par le prédicteur (2.40) [100].

– **ARMAX**

Les modèles appartenant à la classe ARMAX (*AutoRegressive Moving Average with eXogeneous variables* - Autorégressive à moyenne mobile et avec variable exogène) peuvent être représentés par la fonction de transfert

$$y(t) = \frac{b_1 q^{-1} + \ldots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{na} q^{-na}} u(t) + \frac{1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_{nc} q^{-nc}}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{na} q^{-na}} e(t) \quad (2.42)$$

où les ordres na, nb et nc sont connus et le problème est de trouver les paramètres a_i, b_i et c_i à partir de l'ensemble des données entrée-sortie. En définissant

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{na} q^{-na} \\ B(q) &= b_1 q^{-1} + \ldots + b_{nb} q^{-nb} \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_{nc} q^{-nc} \end{aligned} \quad (2.43)$$

le modèle ARMAX peut s'écrire comme

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)} u(t) + \frac{C(q)}{A(q)} e(t) \quad (2.44)$$

et son prédicteur à un pas est donné par

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{B(q)}{C(q)} u(t) + \frac{C(q) - A(q)}{C(q)} y(t) \quad (2.45)$$

– **ARX**

Le modèles ARX représentent un cas particulier des modèles ARMAX et sont donnés par

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)} u(t) + \frac{1}{A(q)} e(t) \quad (2.46)$$

avec pour prédicteur

$$\hat{y}(t|t-1) = B(q) u(t) + [1 - A(q)] y(t) \quad (2.47)$$

– **Box-Jenkins**

La paramétrisation des modèles de Box-Jenkins est donnée par

$$y(t) = \frac{b_1 q^{-1} + \ldots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{na} q^{-na}} u(t) + \frac{1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_{nc} q^{-nc}}{1 + d_1 q^{-1} + \ldots + d_{nd} q^{-nd}} e(t) \quad (2.48)$$

où les ordres na, nb, nc et nd sont connus et le problème est de trouver les paramètres a_i, b_i, c_i et d_i à partir de l'ensemble des données entrée-sortie. En définissant

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{na} q^{-na} \\ B(q) &= b_1 q^{-1} + \ldots + b_{nb} q^{-nb} \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_{nc} q^{-nc} \\ D(q) &= 1 + d_1 q^{-1} + \ldots + d_{nd} q^{-nd} \end{aligned} \tag{2.49}$$

le modèle de Box-Jenkins peut encore s'écrire comme

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)} u(t) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t) \tag{2.50}$$

et son prédicteur à un pas est

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{D(q)}{C(q)} \frac{B(q)}{A(q)} u(t) + \frac{C(q) - D(q)}{C(q)} y(t) \tag{2.51}$$

– **Erreur en sortie**
En prenant c_i et d_i égaux à 1 dans (2.48) nous retrouvons la structure du modèle en erreur de sortie (2.29).

Pour les méthodes d'identification en erreur de prédiction aussi bien que pour celles en erreur de sortie, l'ordre de tous les polynômes doit être fourni *a priori*. Comme normalement l'ordre n'est pas connu au préalable, une grande quantité d'essais doit être faite quand les systèmes possèdent des ordres importants. En plus, dans l'étape d'estimation paramétrique pour les deux méthodes, les problèmes d'optimisation sont souvent non convexes et les solutions trouvées assurent seulement des minima locaux. La classe de méthodes présentée dans la section suivante, basée sur les sous-espaces, permet de contourner ces problèmes. En plus de dispenser d'une paramétrisation au préalable, elle permet de trouver, à partir d'un vecteur des données entrée-sortie, un modèle dans l'espace d'état de manière non-itérative, évitant ainsi les problèmes liés à l'optimisation de fonctionnelles non-linéaires.

2.5 L'identification basée sur les sous-espaces

Les techniques basées sur les sous-espaces s'appuient sur les méthodes d'analyse statistique multivariable, notamment l'analyse en composantes principales et l'analyse canonique des corrélations, développés dans les années 30 [55]. Ce n'est, pourtant, que dans les années 80 et 90 que les techniques basées sur les sous-espaces commencent à se consolider en incorporant les décompositions QR et SVD [62],[76],[83],[99]. Contrai-

rement aux méthodes d'identification paramétrique classiques, les méthodes basées sur les sous-espaces permettent de trouver une représentation du système dans l'espace d'état à partir d'une estimation de certains sous-espaces (espace colonne de la matrice d'observabilité et espace ligne de la séquence d'état d'un filtre de Kalman) formés avec les vecteurs des données entrée-sortie.

Considérons le système LTI comme une réalisation minimale dans l'espace d'état

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ke(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + e(t) \end{cases} \tag{2.52}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ et $e(t) \in \mathbb{R}^l$ un signal du type bruit blanc ergodique[11] décorrélé de $u(t)$.

Utilisant le système (2.52) pour un nombre s d'échantillons temporels nous pouvons écrire

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(s-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}_s} x(0) + \underbrace{\begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2}B & CA^{s-3}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_s} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(s-1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} I_l & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CK & I_l & 0 & \dots & 0 \\ CAK & CK & I_l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2}K & CA^{s-3}K & \dots & CK & I_l \end{bmatrix}}_{\mathcal{S}_s} \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(s-1) \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

où $\mathcal{O}_s$[12] est appelée la matrice d'observabilité étendue.

Considérons maintenant les représentations matricielles suivantes

[11] L'hypothèse d'ergodicité admet que l'évolution d'un signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations. Cette hypothèse permet de prouver que pour un signal aléatoire stationnaire $x(t)$, la moyenne temporelle converge asymptotiquement avec une probabilité de 1 vers l'espérance mathématique $E[x(t)]$ (lois des grandes nombres) [66].

[12] Le rang($\mathcal{O}_s$)=n puisque le système (2.52) est une réalisation minimale.

$$Y_{i,s,N} = \begin{bmatrix} y(i) & y(i+1) & \dots & y(i+N-1) \\ y(i+1) & y(i+2) & \dots & y(i+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(i+s-1) & y(i+s) & \dots & y(i+N+s-2) \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

et

$$X_{i,N} = \begin{bmatrix} x(i) & x(i+1) & \dots & x(i+N-1) \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

La représentation (2.54)[13] qui permet de former la matrice $Y_{i,s,N}$ pour un nombre $N+s-1$ de données de sortie peut aussi être utilisée pour former les matrices d'entrée $U_{i,s,N}$ et de bruits $E_{i,s,N}$ du système. Avec cette notation l'équation (2.53) peut être étendue à

$$Y_{i,s,N} = \mathcal{O}_s X_{i,N} + \mathcal{T}_s U_{i,s,N} + \mathcal{S}_s E_{i,s,N} \tag{2.56}$$

appelée l'équation des données.

Dans l'équation (2.56) seules les matrices $U_{i,s,N}$ et $Y_{i,s,N}$ (données enregistrées d'entrée et de sortie du système) sont connues. L'objectif de la méthode des sous-espaces est de trouver, à partir de (2.56) avec $s > n$ et $N >> s$, une matrice dont l'espace colonne est le même que celui de la matrice d'observabilité $\mathcal{O}_s$, ce qui permettra par la suite d'estimer les matrices A, B, C, D et K.

Nous commençons par l'élimination du terme en $\mathcal{T}_s$. Comme la matrice $U_{i,s,N}$ est connue, nous pouvons trouver une projection ortogonale $\Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}}$ [14] telle que $U_{i,s,N}\Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}} = 0$. Cette projection est donnée par

$$\Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}} = I_N - U^T_{i,s,N}(U_{i,s,N}U^T_{i,s,N})^{-1}U_{i,s,N} \tag{2.57}$$

La multiplication de l'équation (2.56) par $\Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}}$ donne

$$Y_{i,s,N}\Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}} = \mathcal{O}_s X_{i,N}\Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}} + \mathcal{S}_s E_{i,s,N}\Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}} \tag{2.58}$$

[13] Cette représentation est appelée une matrice de Hankel.

[14] D'après (2.57), $\Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}}$ peut être trouvée seulement si $U_{i,s,N}U^T_{i,s,N}$ est de rang complet. Cette condition équivaut à ce que l'entrée possède la propriété de persistance d'excitation, cette propriété est expliquée dans la section suivante.

Le pas suivant est l'élimination du terme en $\mathcal{S}_s$. Pour cela nous utilisons le concept de variable instrumentale [66]. Nous voulons trouver une matrice qui ne soit pas correlée avec $\mathcal{S}_s E_{i,s,N} \Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}}$ et telle que le rang$(\mathcal{O}_s)$ soit préservé. Nous cherchons donc la variable instrumentale $Z_N \in \mathbb{R}^{sz \times N}$ telle que

$$\begin{cases} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} E_{i,s,N} \Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}} Z_N^T = 0 \\ \text{rang } (\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} X_{i,N} \Pi^{\perp}_{U_{i,s,N}} Z_N^T) = n \end{cases} \tag{2.59}$$

Pour cela, considérant la notation (2.54), les matrices des données sont divisées en deux groupes. Le premier groupe, de l'instant 0 jusqu'à $N+s-2$, est utilisé pour la construction des matrices $U_{0,s,N}$ et $Y_{0,s,N}$, appelées respectivement les matrices d'entrée et de sortie passées. Le deuxième groupe, de l'instant s jusqu'à $N+2s-2$, est utilisé pour la construction de matrices $U_{s,s,N}$ et $Y_{s,s,N}$, appelées respectivement les matrices d'entrée et de sortie futures. Les matrices passées seront par la suite utilisées pour l'élimination du terme en $\mathcal{S}_s$, pendant que les matrices futures seront utilisées pour l'estimation des matrices du système (2.52). Cela signifie que l'instant initial i est désormais fixé comme $i = s$.

Considérons le choix de la variable instrumentale $Z_N \in \mathbb{R}^{s(m+l)\times N}$ basée sur les matrices d'entrée et de sortie passées comme

$$Z_N = \begin{bmatrix} U_{0,s,N} \\ Y_{0,s,N} \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

Avec ce choix de Z_N, il peut être démontré [100], sous certaines hypothèses, que les équations (2.59) sont asymptotiquement verifiées[15] (dans la pratique il nous faut N le plus grand possible). À partir de l'équation (2.58) et avec Z_N donné par (2.60) nous avons maintenant (avec $i = s$)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} Y_{s,s,N} \Pi^{\perp}_{U_{s,s,N}} Z_N^T = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathcal{O}_s X_{s,N} \Pi^{\perp}_{U_{s,s,N}} Z_N^T \tag{2.61}$$

[15] La démonstration est valable lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\text{rang } (\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} X_{s,N} \\ U_{s,s,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{0,s,N}^T & U_{0,s,N}^T & U_{s,s,N}^T \end{bmatrix}) = n + sm$$

$$\text{rang } (\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} X_{0,N} \\ U_{0,2s,N} \end{bmatrix}) = n + 2sm$$

Ce deux conditions sont presque toujours vérifiées, néanmoins la démonstration formelle de leur validité est facile seulement pour certains types d'entrée et de bruit [100].

Sachant que (2.59) est vérifiée, l'inegalité de Sylvester[16] appliquée à (2.61) permet de conclure que

$$\text{rang}(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}Y_{s,s,N}\Pi^{\perp}_{U_{s,s,N}}Z_N^T) = n \tag{2.62}$$

et par conséquent

$$\text{rang}(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}Y_{s,s,N}\Pi^{\perp}_{U_{s,s,N}}Z_N^T) = \text{rang}(\mathcal{O}_s) \tag{2.63}$$

Comme le premier membre de l'équation (2.63) est connu (formé entièrement par les données d'entrée et de sortie mesurées), nous avons donc un espace colonne équivalent à celui de la matrice $\mathcal{O}_s$, c'est à dire, l'estimation de la matrice d'observabilité représentée dans une base quelconque. Comme le calcul de $Y_{s,s,N}\Pi^{\perp}_{U_{s,s,N}}Z_N^T$ est souvent laborieux, un calcul équivalent plus "léger" peut être réalisé à partir d'une factorisation RQ[17].

Considérons la factorisation RQ suivante

$$\begin{bmatrix} U_{s,s,N} \\ Z_N \\ Y_{s,s,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

où $R_{11} \in \mathbb{R}^{sm\times sm}$, $R_{22} \in \mathbb{R}^{sz\times sz}$ et $R_{33} \in \mathbb{R}^{sl\times sl}$.

À partir de (2.57), (2.64) et de la propriété d'orthogonalité de la matrice Q[18] nous pouvons écrire

$$\Pi^{\perp}_{U_{s,s,N}} = I_N - Q_1^T R_{11}^T (R_{11}Q_1Q_1^T R_{11}^T)^{-1} R_{11}Q_1 = I_N - Q_1^T Q_1 = Q_2^T Q_2 + Q_3^T Q_3 \tag{2.65}$$

et par conséquent

[16] **Inegalité de Sylvester** : Pour deux matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, nous avons

$$\text{rang}(A) + \text{rang}(B) - n \leq \text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$$

[17] **Factorisation RQ** : Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ peut être factorisée comme $A = RQ$ avec une matrice triangulaire inférieure $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et une matrice orthogonale $Q \in R^{n\times n}$.

[18] L'orthogonalité de la matrice Q implique les relations suivantes :

$$\begin{cases} Q_1^T Q_1 + Q_2^T Q_2 + Q_3^T Q_3 = I_N \\ Q_i Q_j^T = 0 \ \text{ pour } \ i \neq j \\ Q_i Q_i^T = I \end{cases}$$

$$\lim_{N\to\infty} Y_{s,s,N}\Pi^{\perp}_{U_{s,s,N}} Z_N^T = \tag{2.66}$$

$$(R_{31}Q_1 + R_{32}Q_2 + R_{33}Q_3)(Q_2^TQ_2 + Q_3^TQ_3)(Q_1^TR_{21}^T + Q_2^TR_{22}^T) = R_{32}R_{22}^T$$

Dans [100] il est démontré que $\lim\limits_{N\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{N}}R_{22})$ est inversible. À partir de (2.61), (2.66) et par application de l'inégalité de Sylvester nous avons

$$\text{rang}(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{O}_s X_{s,N}\Pi^{\perp}_{U_{s,s,N}} Z_N^T) = \text{rang}(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}R_{32}) = n \tag{2.67}$$

et donc

$$\text{rang}(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}R_{32}) = \text{rang}(\mathcal{O}_s) \tag{2.68}$$

Utilisant la factorisation RQ nous avons mis en évidence avec l'équation (2.68) une alternative plus simple pour estimer le rang de $\mathcal{O}_s$. Comme l'espace colonne de la matrice d'observabilité peut être estimé de manière asymptotiquement non-biaisée avec l'espace colonne de R_{32}, une simplification est encore possible à partir d'une décomposition en valeur singulière (SVD).

Considérons la SVD de R_{32}

$$R_{32} = U_n\Sigma_n V_n^T \tag{2.69}$$

avec $\Sigma_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et rang(Σ_n)=n. Comme l'espace colonne de U_n est le même que celui de R_{32}, à partir de (2.68) nous avons

$$U_n = \mathcal{O}_s T = \begin{bmatrix} C_T \\ C_T A_T \\ \vdots \\ C_T A_T^{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CT(T^{-1}AT)^{s-1} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

pour une transformation de similarité T. Les estimations $\hat{C}_T$ et $\hat{A}_T$ peuvent être trouvées à travers des relations[19]

[19]Notations de $MATLAB^{®}$.

$$\begin{cases} \hat{C}_T = U_n(1:l,:) \\ U_n(1:(s-1)l,:)\hat{A}_T = U_n(l+1:sl,:) \end{cases} \tag{2.71}$$

L'équation (2.52) dans la base T peut être représentée de manière linéaire en B_T, D_T et $x_T(0) = T^{-1}x(0)$ comme[20]

$$y(t) = C_T A_T^t x_T(0) + (\sum_{\tau=0}^{t-1} u(\tau)^T \otimes C_T A_T^{t-\tau-1}) vec(B_T) + (u^T(t) \otimes I_l) vec(D_T) \tag{2.73}$$

Les matrices B_T, D_T et $x_T(0) = T^{-1}x(0)$ peuvent être estimées à partir de la solution du problème de moindres carrés linéaires

$$\min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \| \, y(t) - \phi^T(t)\theta \, \|_2^2 \tag{2.74}$$

avec

$$\phi^T(t) = [\; \hat{C}_T \hat{A}_T^t \quad (\textstyle\sum_{\tau=0}^{t-1} u(\tau)^T \otimes \hat{C}_T \hat{A}_T^{t-\tau-1}) \quad (u^T(t) \otimes I_l) \;] \tag{2.75}$$

et

$$\theta = \begin{bmatrix} x_T(0) \\ vec(B_T) \\ vec(D_T) \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

La méthode d'identification par les sous-espaces développée jusqu'à présent permet de retrouver à partir des données entrée-sortie les matrices d'une représentation dans l'espace d'état dans une base quelconque T, utilisant pour cela une estimation de l'espace colonne de la matrice d'observabilité. Cette méthode est appelée PO-MOESP

[20] **Opérateur** *vec* : Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $A = [a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n]$, $a_i \in R^m$. L'opérateur *vec* est défini comme

$$vec(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

(*Past Outputs - Multivariable Output Error State sPace*).

Une technique alternative d'identification basée sur les sous-espaces permet de retrouver la matrice d'observabilité dans une base T et une séquence d'états d'un filtre de Kalman dans cette même base, avant même d'avoir trouvé les matrices de (2.52). Le vecteur de la séquence d'états est alors utilisé pour résoudre un problème de moindres carrés linéaires dont la solution correspond à une estimation des matrices de la représentation en espace d'état de (2.52) dans la base T. Cette deuxième méthode, appelée N4SID (*Numerical algorithm for Subspace IDentification*) est brièvement présentée à présent.

Respectant les mêmes conditions qui vérifient l'existence de (2.59) et utilisant la variable instrumentale (2.60) et la factorisation RQ (2.64), l'estimation des matrices du système (2.52) peut être réalisée en s'appuyant sur la SVD suivante (voir [100])

$$R_{32}R_{22}^{-1}Z_N = U_n\Sigma_n V_n^T \tag{2.77}$$

où l'espace colonne de $\mathcal{O}_s$ peut être approximé par celui de U_n. L'espace ligne d'une séquence d'état $X_{s,N}$, obtenue d'un filtre de Kalman représenté dans la même base de U_n, est donné par

$$\hat{X}_{s,N} = \Sigma_n^{1/2}V_n^T \tag{2.78}$$

Les matrices A_T, B_T, C_T et D_T peuvent être alors estimées à partir de la solution du problème de moindres carrés suivant

$$\min_{A_T,B_T,C_T,D_T} \left\| \begin{bmatrix} \hat{X}_{s+1,N} \\ Y_{s,1,N-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{s,N-1} \\ U_{s,1,N-1} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \tag{2.79}$$

Les résultats de l'estimation (2.79) donnés par $\hat{A}_T$, $\hat{B}_T$, $\hat{C}_T$ et $\hat{D}_T$ sont ensuite utilisés pour trouver les résidus du problème de moindres carrés comme

$$\begin{bmatrix} \hat{W}_{s,1,N-1} \\ \hat{V}_{s,1,N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{s+1,N} \\ Y_{s,1,N-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{A}_T & \hat{B}_T \\ \hat{C}_T & \hat{D}_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{s,N-1} \\ U_{s,1,N-1} \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

qui permettent d'estimer les matrices de covariance des bruits sur le système

$$\begin{bmatrix} \hat{Q} & \hat{S} \\ \hat{S}^T & \hat{R} \end{bmatrix} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \hat{W}_{s,1,N} \\ \hat{V}_{s,1,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{W}^T_{s,1,N} & \hat{V}^T_{s,1,N} \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

2.6 Aspects pratiques de l'identification de systèmes

Jusqu'à présent dans ce chapitre, trois grandes classes de méthodes d'identification ont été étudiées d'un point de vue théorique. Les modèles non-paramétriques, les modèles paramétriques et les modèles obtenus avec des techniques basées sur les sous-espaces ont tous besoin d'un ensemble de données entrée-sortie. L'obtention et le traitement de ces données fait l'objet de cette section. Les aspects des choix de génération des signaux d'entrée (fréquence d'échantillonnage, durée et type de signal) et de prétraitement des signaux (élimination des composantes continues et pré-filtrage) sont discutés.

2.6.1 Génération des signaux d'entrée

Les signaux générés à l'entrée du système à identifier doivent être suffisamment riches en termes fréquentiels de manière à exciter toute la plage des fréquences dans laquelle nous souhaitons que le modèle soit valable. Le choix du signal d'entrée englobe la fréquence d'échantillonnage, la durée et le type du signal.

– **Fréquence d'échantillonnage**
  La fréquence d'échantillonnage doit respecter le théorème de Shannon, d'après lequel un signal dont les fréquences sont comprises dans une plage de $[-w_B, w_B]$ (rad/s) peut être parfaitement reconstitué à partir de ses échantillons si la fréquence d'échantillonnage est au moins de $w_S = 2w_B$ (rad/s) [82]. Toutes les fréquences d'un signal qui dépassent la moitié de la fréquence d'échantillonnage $w_N = w_S/2$, appelée la fréquence de Nyquist, sont repliées à partir d'une ligne verticale en w_N dans la plage de fréquences de $[-w_N, w_N]$, ce que caractérise le phénomène de repliement (*aliasing*). Pour éviter ce phénomène, avant l'échantillonnage le signal doit être filtré par un filtre anti-repliement (*anti-aliasing filter*). Normalement le filtre anti-repliement est un filtre passe-bas de type Butterworth ou Tschebychev [49] avec sa fréquence de coupure égale à la fréquence de Nyquist w_N. Comme règle générale[21] la fréquence d'échantillonnage peut être

[21] L'identification des systèmes est une procédure itérative et toutes les "règles pratiques" servent seulement comme un choix initial sensé être retravaillé jusqu'à ce qu'un résultat satisfaisant soit trouvé.

choisie comme $w_S = 10w_B$ [100].

– **Durée du signal**

La matrice de covariance d'un estimateur tend à décroître asymptotiquement au fur et à mesure que la quantité d'échantillons augmente, ce qui permet de conclure que le signal d'entrée doit être le plus long possible [100].

– **Type du signal**

Différents types de séquences d'entrée peuvent être utilisés pour exciter le système, comme par exemple l'échelon, l'impulsion, les signaux sinusoïdaux, les bruit blancs, les signaux SBPA[22] et les signaux du type *chirp*[23] [85]. Une propriété importante pour les signaux d'entrée est la "richesse d'information" qu'ils peuvent transmettre au système, indiquée par la notion de persistance d'excitation (*persistency of excitation*). Une séquence $u(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, N$ est persistante d'ordre n si et seulement s'il existe un entier N tel que la matrice

$$U_{0,n,N} = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \ldots & u(N-1) \\ u(1) & u(2) & \ldots & u(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(n) & u(n+1) & \ldots & u(N+n-1) \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

est de rang complet n [100].

2.6.2 Prétraitement des signaux

Le prétraitement des signaux est une étape qui a lieu après l'acquisition des signaux d'entrée-sortie et avant leur utilisation par une méthode d'identification. L'objectif du prétraitement est de mettre en forme les signaux, de manière qu'ils soient utilisés de la manière la plus efficace possible par l'algorithme d'identification. Nous considérons dans ce paragraphe l'élimination de la composante continue et le préfiltrage des données.

– **Élimination de la composante continue**

Un modèle résultant d'une linéarisation d'une dynamique non-linéaire autour

[22] Soit une séquence binaire avec N bits donnée par a_j pour $j = 0, 1, ..., N-1$. Le signal de type SBPA (Séquence Binaire Pseudo Aléatoire) est une séquence binaire avec fonction d'autocorrélation $C(v) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j a_{j+v}$, où $C(v)$ est égal soit à m si $v = 0$, soit à mc si $v \neq 0$, avec $c = \frac{m-1}{N-1}$.

[23] Le signal périodique de type *chirp* peut être défini par $u(t) = Asin((at + b)t)$, $0 \leq t < T_0$, avec T_0 la période, $a = \pi(k_2 - k_1)f_0^2$, $b = 2\pi k_1 f_0^2$, $f_0 = 1/T_0$, $k_2 > k_1 \in \mathbb{N}$ et k_1 (respectivement k_2) la plus petite (respectivement plus grande) fréquence.

d'un point d'équilibre peut être représenté dans l'espace d'état par

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1) &= A\tilde{x}(t) + B(u(t) - \overline{u}) \\ y(t) &= C\tilde{x}(t) + \overline{y} \end{aligned} \tag{2.83}$$

avec $\overline{u}(t)$ et $\overline{y}(t)$ respectivement l'entrée et la sortie autour du point d'équilibre, et $\tilde{x}(t)$ l'écart de l'état par rapport à sa valeur autour du point d'équilibre $\overline{x}(t)$. En plus de l'*offset* (inconnu) dû à $\overline{u}(t)$ et $\overline{y}(t)$, les données sont affectées par une dérive (*drift*). Pour traiter ces effets, on les élimine des données obtenues au moyen d'une estimation par moindres carrés (*data detrending*).

– **Préfiltrage**
Le préfiltrage est réalisé pour réduire l'énergie des bruits qui sont en dehors de la plage de fréquences d'intérêt pour l'identification. Considérons le système LTI donné par

$$y(t) = G(q)u(t) + v(t) \tag{2.84}$$

L'application d'un filtre $F(q)$ sur les vecteurs d'entrée et de sortie donne les valeurs filtrées de l'entrée (u_F) et de la sortie (y_F)

$$\begin{aligned} u_F(t) &= F(q)u(t) \\ y_F(t) &= F(q)y(t) \end{aligned} \tag{2.85}$$

La relation entrée-sortie après le préfiltrage est alors donnée par

$$y_F(t) = G(q)u_F(t) + F(q)v(t) \tag{2.86}$$

Nous pouvons observer que la partie deterministe $G(q)$ du rapport entrée-sortie reste (presque[24]) inaltérée.

2.6.3 Choix de la méthode d'identification

La méthode d'identification basée sur les sous-espaces a été choisie pour l'obtention des modèles en boucle ouverte pour le robot Par2 pour les raisons suivantes :

– La qualités de modèles est comparable à celle obtenue avec les techniques clas-

[24]La présence du filtre rentre dans la fonction coût de l'estimation paramétrique et influence la qualité de l'estimation de $G(q)$ [100].

siques d'identification paramétrique ;
- Les modèles sont obtenus de manière largement plus rapide que pour les techniques classiques, puisque seul l'ordre de la représentation du système en espace d'état est fourni au préalable ;
- Contrairement aux cas d'identification paramétrique, il n'y a pas de problèmes d'optimisation non-linéaire ;
- La méthode peut être naturellement étendue au cas de systèmes multivariables.

2.7 Identification du modèle de l'actionneur piézoélectrique du robot en boucle ouverte

L'objectif principal de ce travail est l'atténuation des vibrations au niveau de la nacelle du robot parallèle Par2 lorsqu'il arrive au point d'arrêt $Pos2$. Pour atteindre cet objectif, dans le chapitre précédent quatre étapes expérimentales ont été proposées. La première étape concerne l'obtention et l'analyse du spectre de vibrations pour plusieurs conditions opératoires distinctes. Dans ce chapitre, nous avons jusqu'à présent développé quelques aspects de la théorie et pratique de l'identification de systèmes avec un accent particulier sur les méthodes basées sur les sous-espaces. Cette section traite de la deuxième étape expérimentale, c'est-à-dire, de l'obtention des modèles de l'actionneur piézoélectrique du robot en boucle ouverte. Ces modèles permettront, dans les prochains chapitres, la synthèse des contrôleurs et leur validation en simulation et sur le robot Par2 (troisième étape expérimentale), ainsi que la vérification des propriétés de robustesse en boucle fermée à des variations dans les conditions opératoires (quatrième étape expérimentale). Les modèles sont tous obtenus avec la technique d'identification N4SID (basée sur les sous-espaces), comme dans [1],[42],[90] et [2]. Pour l'identification du modèle de l'actionneur piézoélectrique, la trajectoire n'importe pas car les expériences sont faites avec la nacelle initialement au repos à la position d'arrêt $Pos2$. Seules les conditions de charge ont de l'influence sur le modèle. Pour chaque condition de charge, deux modèles *mod ctrl* et *mod sim* sont identifiés, le premier pour l'élaboration d'un contrôleur, le deuxième pour la validation des résultats. Ces deux modèles sont obtenus à partir de modèles initiaux, *mod ini ctrl* et *mod ini sim* respectivement, après une étape de réduction de modèles.

Une vue supérieure de la nacelle est illustrée sur la Figure 2.3 où les bras piézoactionneurs sont labellisés avec les lettres A et P données, respectivement, par rapport à la caractéristique active ou passive du bras.

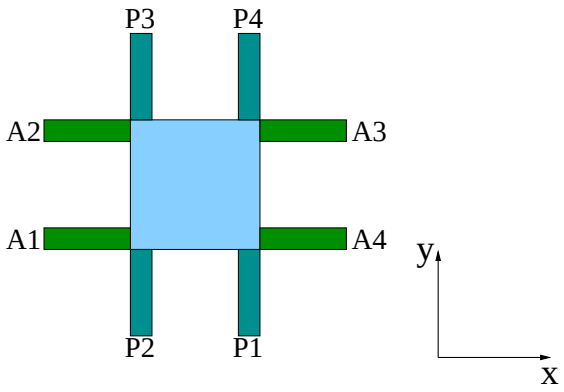

FIG. 2.3 – Distribution des piézo-actionneurs sur les bras du robot Par2

Dans le chapitre précédent, nous avons souligné le fait que les vibrations sont répercutées plus longtemps dans la direction Y, ce qui a motivé notre choix pour réaliser l'identification et, dans les chapitres suivants, la commande, dans cette direction. Pour des raisons géométriques (importante composante d'action orientée dans la direction Y), conformément à la Figure 2.3, nous avons sélectionné les piézo-actionneurs positionnés sur les bras $P1$ et $P2$ pour minimiser les vibrations dans notre système. La paire $P1P2$ sera désormais considérée comme un seul élément puisque actionnée simultanément par un même signal de contrôle.

Pour pouvoir envisager un contrôleur capable d'atténuer les vibrations en Y, il nous faut d'abord caractériser l'effet du piézo-actionneur $P1P2$ sur le système en construisant une représentation de la dynamique entre son entrée de tension (en $volts$) et la sortie mesurée par l'accéléromètre Y (en m/s^2). Cette représentation est faite au moyen d'un modèle mathématique identifié avec la technique N4SID. Comme la commande sera activée au moment où la nacelle arrive à la position $Pos2$, toutes les identifications sont réalisées à cette position, la seule différence en termes matériel, étant les conditions de charge.

Par la suite le cas du système avec 2,5 kg de charge sur la nacelle est illustré, à titre d'exemple, résultant dans l'obtention de deux modèles en boucle ouverte, l'un pour la synthèse de contrôleur et l'autre pour la validation en simulation. L'effet de la variation de charge sur les modèles identifiés est illustré. Une discussion sur la transformation des modèles du temps discret vers le temps continu finit le chapitre.

2.7.1 Robot avec 2,5 kg de charge sur la nacelle

Des signaux d'entrée de type *chirp*[25] à une période d'échantillonage de 1 kHz sont utilisés pour l'identification[26]. Les signaux *chirp* utilisés sont appliqués pendant 100 s, variant linéairement entre 0 et 150 Hz[27]. Deux modèles sont initialement obtenus, *mod ini ctrl 2,5kg* et *mod ini sim 2,5kg*. Après une étape de réduction de modèle, ils deviendront, respectivement, *mod ctrl 2,5kg*, pour la synthèse d'un contrôleur, et *mod sim 2,5kg*, pour la simulation en boucle fermée.

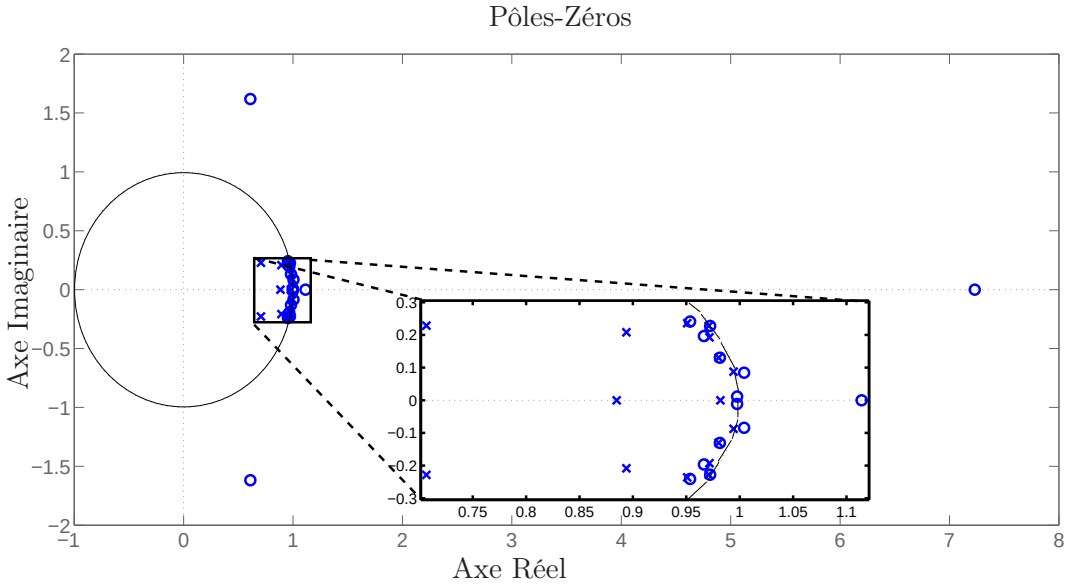

FIG. 2.4 – Distribution pôles-zéros pour *mod ctrl vide* échantillonné à 2 kHz

[25]Différents signaux d'excitation ont été initialement essayés. Parmi eux le signal de type *chirp* a fourni les meilleurs résultats.

[26]Dans un premier essai, un taux d'échantillonage de 2 kHz a été utilisé (pour l'obtention d'un modèle pour le cas du système à vide). La distribution pôles-zéros du modèle obtenu est représentée sur la Figure 2.4. D'après [100], si tous les modes identifiés se trouvent concentrés autour du point 1 sur l'axe réel (comme c'est le cas des pôles sur la Figure 2.4), la fréquence d'échantillonnage peut être réduite. Avec une fréquence d'échantillonnage de 1 kHz des résultats satisfaisants ont été obtenus et c'est cette fréquence de 1 kHz qui a été retenue pour le reste de l'étude.

[27]Dans le précédent chapitre nous avons montré à travers l'étude du spectre de puissance que les principaux modes de vibrations liés aux perturbations dans la direction Y étaient en dessous d'environ 30 Hz pour toutes les trajectoires et conditions de charge analysées. Cette raison a motivé notre critère empirique de travailler avec les fréquences jusqu'à 150 Hz, soit une plage de fréquences cinq fois supérieure. Toutes les fréquences au délà de 150 Hz sont considérées comme des bruits haute fréquence. Quant à la durée du signal, il fallait que l'effet du transitoire dû au balayage en fréquence du signal *chirp* soit faible. Le choix d'une durée de 100 s pour une plage de fréquence de 0 à 150 Hz a été fait ayant pour base l'expérience réalisée dans l'article [2], ainsi que le respect de la limite maximale de données admissibles par le *buffer* dans le logiciel CIDE (voir la sous-section 1.4.2 du chapitre précédent).

L'entrée pour le piézo-actionneur $P1P2$ et la sortie de l'accéléromètre Y pour le modèle *mod ctrl 2,5kg* sont représentées dans la Figure 2.5, après filtrage avec un filtre digital de Butterworth de 5^{eme} ordre[28] et fréquence de coupure de 150 Hz. La même procédure de filtrage est utilisée aussi pour *mod sim 2,5kg*. Les deux ensembles de données expérimentales dans le domaine fréquentiel sont comparés sur la Figure 2.6 (modèles non-paramétriques), ce qui permet de mettre en évidence une bonne reproductibilité de résultats.

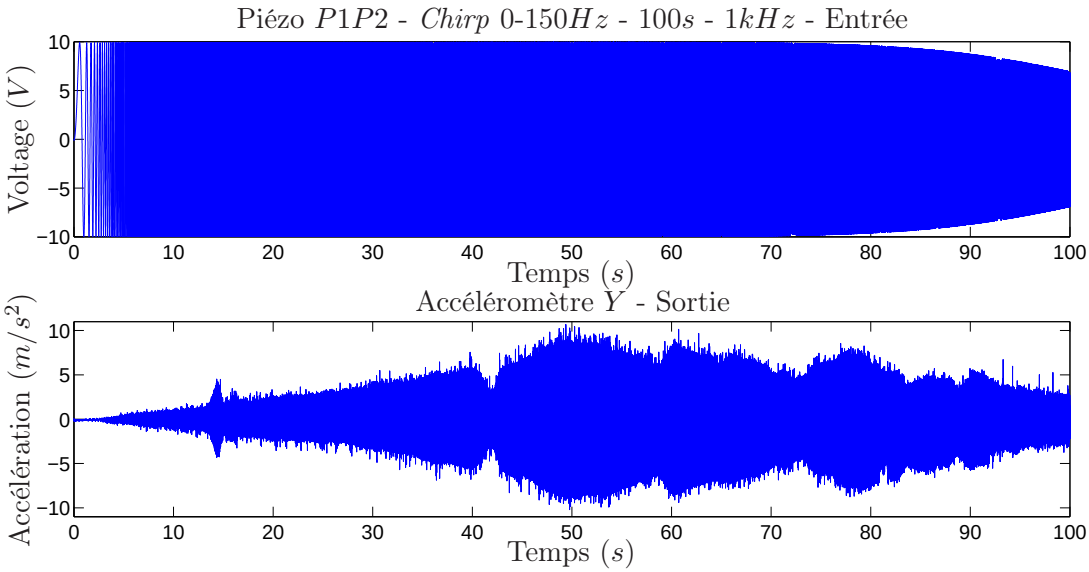

FIG. 2.5 – Modèle *mod ctrl 2,5kg* - Entrée (Piézo $P1P2$) - Sortie (Accel Y)

Un avantage important des techniques basées sur les sous-espaces par rapport aux techniques paramétriques de complexité équivalente (ARMAX, par exemple) est la quantité d'informations initiales fournies. Pour chaque modèle ARMAX (voir (2.42)) au moins[29] 3 ordres doivent être définis (n_a, n_b et n_c), alors que pour N4SID seul l'ordre n (section 2.5) souhaité pour la matrice d'état est fourni. Cela permet de rapidement trouver un ordre initial pour un modèle qui comporte à peu près les principaux modes de résonance du système. En utilisant l'algorithme N4SID[30] pour l'identification en boucle ouverte, nous avons essayé plusieurs ordres pour le modèle

[28] Un filtre de 5^{eme} ordre a été utilisé parce que, malgré l'utilisation du filtre analogique passe-bas de l'amplificateur de charge (avec fréquence de coupure de 500 Hz) pour les signaux des accéléromètres, les signaux obtenus ont un niveau de bruit trop important.

[29] Quelquefois, l'ordre n_k dû au retard peut être aussi fourni.

[30] L'utilisation de l'algorithme permet un choix de pondération en fréquence. Sachant que la fréquence de 0 Hz ne peut pas être utilisée, des fréquences entre 1 Hz et 150 Hz ont été priorisées au moyen d'un filtre passe-bande d'ordre 5.

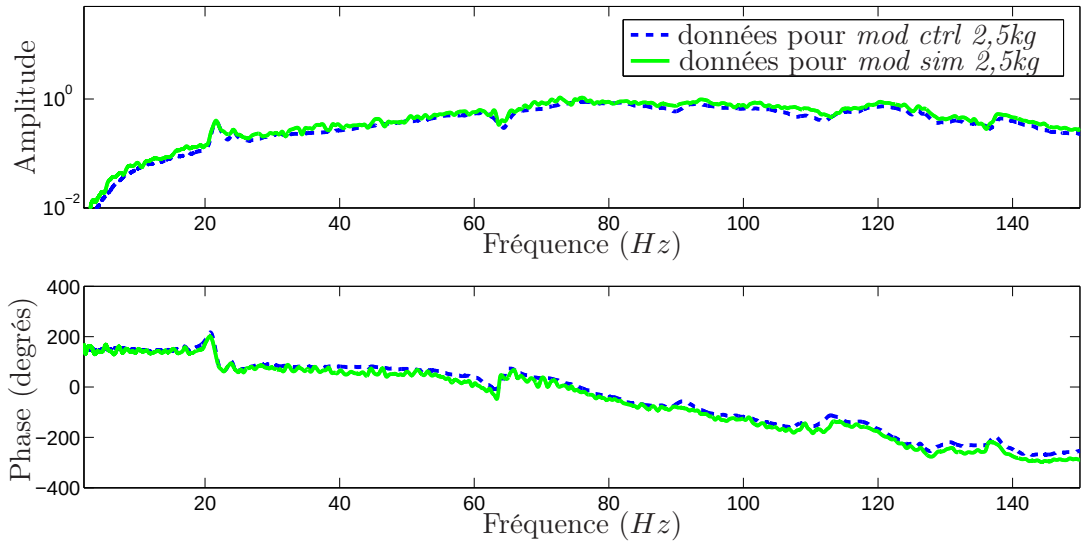

FIG. 2.6 – Données pour *mod ctrl 2,5kg* et *mod sim 2,5kg* dans le domaine fréquentiel

mod ini ctrl 2,5kg, comme nous pouvons le voir sur la Figure 2.7[31].

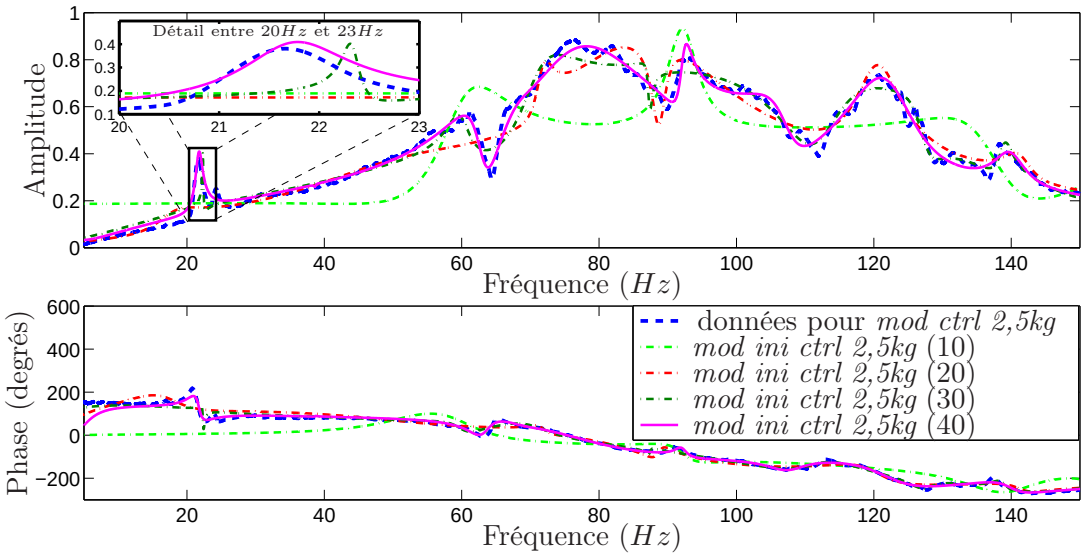

FIG. 2.7 – Modèles *mod ini ctrl 2,5kg* dans le domaine fréquentiel obtenus avec l'algorithme N4SID pour les ordres 10, 20, 30 et 40

[31]Dans la Figure 2.7, l'amplitude et la phase sont représentées. Il est important de souligner, cependant, que tous les contrôleurs utilisés dans les chapitres suivants sont basés sur un critère de pire cas en termes d'amplitude pour toutes les fréquences (sans aucun égard à la phase). Pour cette raison, seule l'amplitude des gains harmoniques sera desormais considérée dans la suite du document.

D'après la Figure 2.7, le modèle d'ordre 40 est déjà bien proche du modèle non-paramétrique obtenu avec les données expérimentales et sera donc retenu pour la suite. Comme cet ordre reste cependant élevé et donc peu adapté pour une synthèse de contrôleur, une réduction du modèle est effectuée en deux étapes.

Dans la première étape, les modes en hautes fréquences sont supprimés. Le système étant echantillonné à 1 kHz, des fréquences jusqu'à 500 Hz (fréquence de Nyquist) peuvent être en principe traitées. Le signal *chirp* d'entrée n'excite pourtant des fréquences que jusqu'à 150 Hz. Sous l'hypothèse de linéarité, toutes les fréquences au delà de la plage d'excitation sont dues au bruit et ne comportent aucune information sur le système. Une grande partie des pôles et des zéros trouvés pour le modèle *mod ini ctrl 2,5kg* sont pourtant au dessus de la limite fréquentielle de l'excitation et doit être éliminée. En enlevant les pôles et zéros au dessus de 150 Hz, le modèle est réduit à un modèle d'ordre 22.

La seconde étape de réduction consiste à réécrire le système résultant dans une nouvelle base, appelée équilibrée, où les gramiens d'observabilité et de commandabilité sont égaux et diagonaux. Cette réalisation permet d'isoler les états qui contribuent peu à la dynamique de la sortie. Une fois le modèle équilibré, nous pouvons le réduire avec la méthode des perturbations singulières (annexe A).

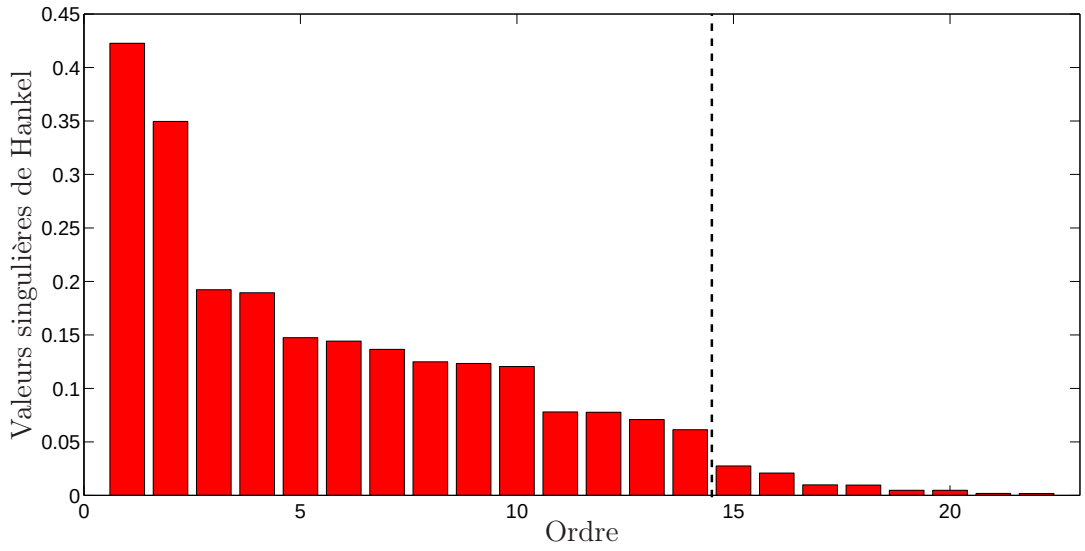

FIG. 2.8 – Valeurs singulières de Hankel pour le modèle partiellement réduit *mod ini ctrl 2,5kg* d'ordre 22

Après une analyse des valeurs singulières de Hankel, Figure 2.8, nous gardons

les 14 modes les plus importants du modèle réduit *mod ini ctrl 2,5kg* (d'ordre 22), devenant désormais le modèle *mod ctrl 2,5kg*. Cela correspond à 96% de l'énergie du modèle. La distribution pôles-zéros du modèle *mod ctrl 2,5kg* est représentée sur la Figure 2.9.

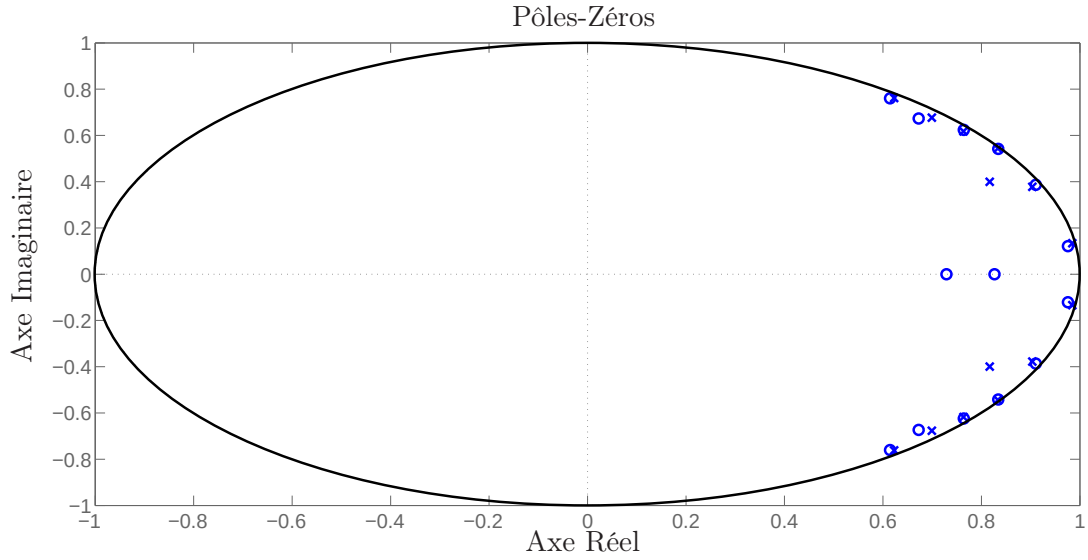

FIG. 2.9 – Distribution pôles-zéros pour *mod ctrl 2,5kg* échantillonné à 1 kHz

Comparant la Figure 2.9 avec la Figure 2.4, nous pouvons constater que les modes sont maintenant plus distants du point 1 sur l'axe réel, ce qui confirme qu'il fallait réduire la fréquence d'échantillonnage.

Le modèle *mod ctrl 2,5kg* est alors donné par la fonction de transfert $G_{ctrl2,5kg}(z)$ (2.87).

$$G_{ctrl2,5kg}(z) = \frac{\begin{array}{c}0.313(z-0.83)(z-0.73)\\(z^2-1.95z+0.97)(z^2-1.82z+0.98)(z^2-1.67z+0.99)\\(z^2-1.53z+0.97)(z^2-1.35z+0.91)(z^2-1.23z+0.96)\end{array}}{\begin{array}{c}(z^2-1.97z+0.99)(z^2-1.81z+0.96)\\(z^2-1.63z+0.83)(z^2-1.66z+0.98)\\(z^2-1.53z+0.96)(z^2-1.4z+0.95)(z^2-1.24z+0.97)\end{array}} \tag{2.87}$$

La même procédure d'identification et de réduction de modèle est aussi appliquée pour le modèle *mod sim 2,5kg*. Considérant que le modèle destiné à la simulation est censé être le plus riche possible en termes d'information, la méthode N4SID est

alors utilisée pour trouver *mod ini sim 2,5kg* avec un ordre empirique (et conservatif) de 80. Les modes hautes fréquences sont supprimés et le modèle est réduit à un ordre 43. Après une transformation vers une base équilibrée, les valeurs singulières de Hankel les plus importantes sont gardées et le modèle est réduit avec la méthode des perturbations singulières à un modèle *mod sim 2,5kg* d'ordre 30. Cela correspond à 98% de l'énergie du modèle réduit *mod ini sim 2,5kg* (d'ordre 43).

Les données expérimentales, ainsi que le modèles *mod ctrl 2,5kg*, pour la synthèse de contrôleur, et *mod sim 2,5kg*, pour la validation en simulation, peuvent être visualisés sur la Figure 2.10.

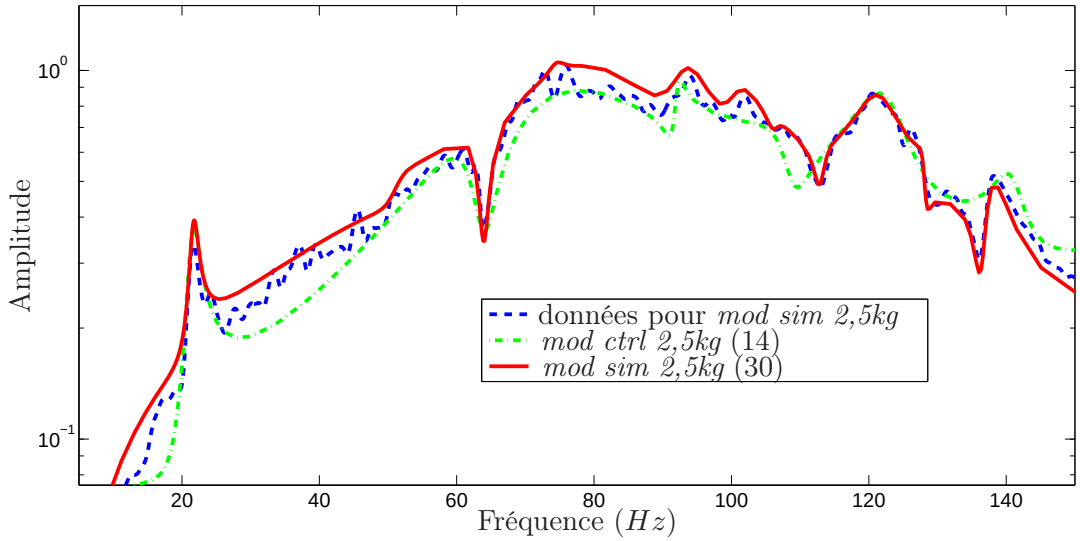

FIG. 2.10 – Modèles *mod ctrl 2,5kg*, d'ordre 14, et *mod sim 2,5kg*, d'ordre 30

2.7.2 Robot avec plusieurs conditions de charge sur la nacelle

Sur la Figure 2.11 nous pouvons observer l'effet du changement de charge sur les modes de vibration du système en boucle ouverte.

Après un démontage et remontage des bras du robot, les modes de vibration peuvent présenter de petites variations. Le premier mode de vibration, cependant, reste toujours très bien reproductible. Il diminue au fur et à mesure que la charge augmente, se déplaçant de 33 Hz, pour le modèle à vide, jusqu'à 20 Hz, pour le modèle avec 3,5 kg de charge.

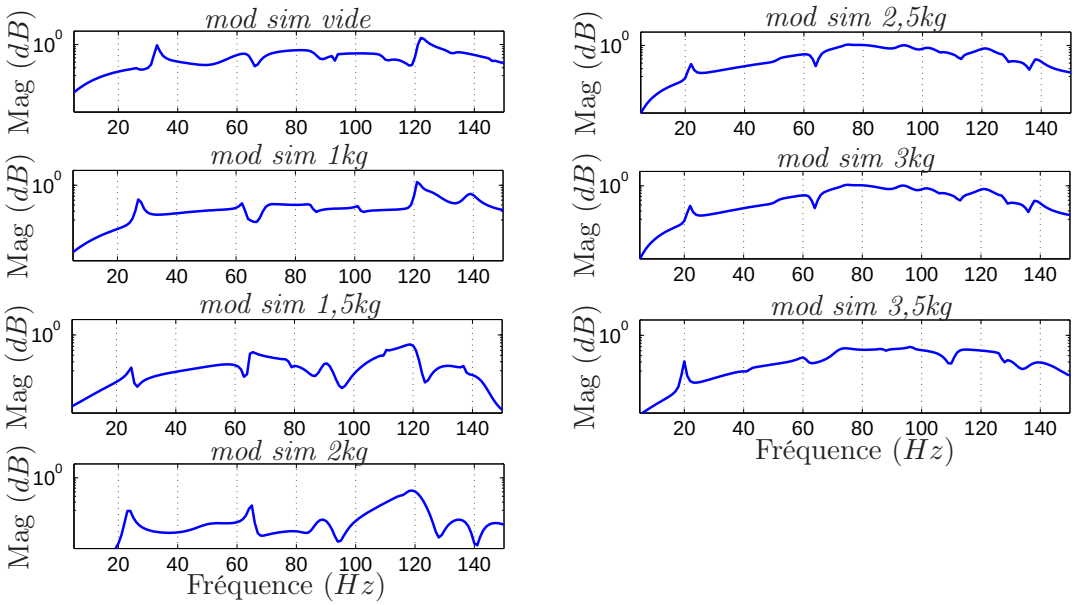

FIG. 2.11 – Modèles de simulation (*mod sim*) pour différentes conditions de charge

2.7.3 Modèle Discret et Continu

Pour les synthèses de contrôleurs qui seront présentés dans le chapitre 4, une fonction de $MATLAB^{®}$[32] permettant de faire la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ exclusivement pour les cas de systèmes en temps continu a été utilisée. Pour être en accord avec les implémentations pratiques et pour des raisons de cohérence de l'ensemble du travail, les résultats présentés dans les chapitres 3 et 4 ont été obtenus ayant pour base une synthèse en temps continu. De plus, l'analyse visuelle des pôles et des zéros pour les systèmes dynamiques est généralement plus facile dans le domaine continue. Le passage du système en temps discret vers le temps continu et vice-versa est fait au moyen d'une transformation bilinéaire de Tustin[33]. La Figure 2.12, comparant le modèle *mod ctrl 2,5kg* en temps discret et continu, montre que l'approximation est valide.

Le modèle *mod ctrl 2,5kg* en temps continu est alors donné par la fonction de transfert $G_{ctrl2,5kg}(s)$ (2.88).

[32] *hinfsyn* de la *Robust Control Toolbox*.

[33] La transformation de Tustin est une approximation des fonctions de transfert du domaine discret z vers le domaine continu s et vice-versa donnée par $z = e^{sT} \approx \frac{1+sT/2}{1-sT/2}$ avec T la période d'échantillonnage [82].

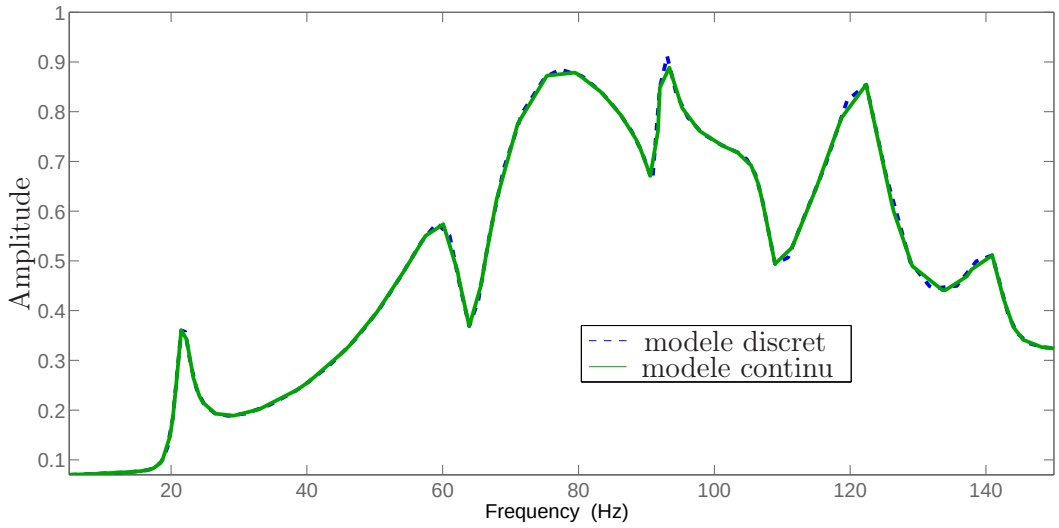

FIG. 2.12 – Modèle *mod ctrl 2,5kg* en temps discret et continu

$$G_{ctrl2,5kg}(s) = \frac{\begin{array}{c}0.266(s+316)(s+190.5)\\(s^2+34s+1.56e4)(s^2+22.2s+1.6e5)(s^2+10.7s+3.32e5)\\(s^2+27.2s+4.67e5)(s^2+99s+6.2e5)(s^2+45.6s+7.95e5)\end{array}}{\begin{array}{c}(s^2+12.8s+1.83e4)(s^2+42s+1.57e5)\\(s^2+190s+2.16e5)(s^2+10.3s+3.34e5)\\(s^2+36s+4.63e5)(s^2+54.1s+5.93e5)(s^2+32.5s+7.84e5)\end{array}} \tag{2.88}$$

Quelques modèles continus obtenus pour la synthèse de contrôleur (*mod ctrl*) pour différentes conditions de charge sont fournis dans l'annexe B. Ce sont les modèles qui seront utilisés dans la suite de la thèse.

2.8 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques aspects théoriques et pratiques de l'identification de systèmes. Les techniques d'identification basées sur les sous-espaces donnent des résultats intéressants, normalement de manière beaucoup plus rapide que les techniques classiques d'identification paramétrique, puisque seulement une valeur (l'ordre souhaité pour la représentation du système en espace d'état) doit être fournie au préalable et, de plus, les problèmes d'optimisation non-linéaires (typiquement pré-

sents dans le cas d'identification paramétrique) sont évités. Deux méthodes basées sur sous-espaces ont été présentées : PO-MOESP et N4SID. Pour la première méthode, l'estimation des matrices d'état est faite à partir du sous-espace colonne d'une matrice d'observabilité similaire à celle du système linéaire source des données entrée-sortie obtenues expérimentalement. Dans la méthode N4SID, en plus de l'espace colonne de la matrice d'observabilité, l'espace ligne d'une séquence d'état d'un filtre de Kalman est obtenu, permettant l'obtention des matrices du système à partir de la résolution d'un problème de moindres carrés. La méthode N4SID a été utilisée pour l'identification des modèles de l'actionneur piézoélectrique du robot à partir des données entrée-sortie obtenues expérimentalement pour plusieurs conditions de charge sur la nacelle (les détails étant présentés, à titre d'exemple, pour une charge de 2,5 kg), toujours à la position d'arrêt $Pos2$. Ces modèles représentent la relation dynamique entre l'entrée du piézo-actionneur $P1P2$ et la sortie mesurée par l'accéléromètre Y. Pour chaque condition de charge, un modèle pour la synthèse d'un contrôleur et un autre pour la validation en simulation ont été obtenus. Les prochains chapitres seront dédiés à la synthèse des contrôleurs et à leur validation en boucle fermée (en simulation et de manière expérimentale), avec comme objectif la réduction des vibrations générées par la trajectoire (dont le spectre de puissance a été analysé dans le chapitre 1) dans la direction Y, lorsque la nacelle arrive à la position $Pos2$.

Chapitre 3

Commande $\mathcal{H}_\infty$ à Sensibilité Mixte

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un aperçu théorique sur les outils méthodologiques permettant de construire des représentations mathématiques du comportement dynamique d'un système réel en s'appuyant sur des informations à l'entrée et à la sortie du système. Le mot "représentation" porte en soi une charge intrinsèquement relative, dans la mesure où ses qualités se font évaluer par rapport à un objectif préalablement stipulé. Un modèle, pour être considéré comme "valable", doit satisfaire à un minimum de prérequis établis dans un cahier de charge conçu *a priori*. À l'écart entre la représentation du système et le vrai système, nous donnons le nom d'incertitude. Les lois de commande qui prennent explicitement en compte les incertitudes sont génériquement classées sous la dénomination de "commande robuste", où par robustesse s'entend la capacité d'un système en boucle fermée avec un correcteur de respecter certains objectifs en dépit des incertitudes du modèle.

Dans ce chapitre nous montrerons, tout d'abord, quelques alternatives pour considérer la présence des incertitudes dans un modèle donné. L'idée est d'adopter une posture pessimiste, en choisissant des bornes conservatives qui permettent d'assurer que les incertitudes y soient comprises. Pour faciliter cette tâche, une représentation particulière nommée transformation linéaire fractionnaire (*Linear Fractional Transformation* - LFT) sera présentée, rendant possible la réécriture du modèle sous une forme adaptée à la commande robuste.

Ensuite, la question posée est de savoir comment traiter les aspects concernant la stabilisation et la performance de systèmes LTI dans le cadre de la commande robuste. Le théorème du faible gain et les filtres de pondérations seront discutés.

Le problème d'atténuation de vibration est naturellement posé, dans le cadre de

l'automatique, comme un problème de rejet de perturbation dans le domaine fréquentiel. C'est pour cette raison que la suite du chapitre porte sur une stratégie de commande adaptée à la minimisation d'un critère de pire cas, pondéré en fréquence, la commande $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte.

Le chapitre s'achève avec la synthèse d'un contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte qui utilise un modèle en boucle ouverte identifié selon la méthodologie des sous-espaces, présentée dans le chapitre précédent. Ce contrôleur est discuté au travers de résultats en simulation et expérimentaux.

3.2 Incertitudes

Dès les années 50 jusqu'aux années 70, la théorie de la commande optimale de Wiener-Hopf-Kalman (*Linear Quadratic Gaussian* - LQG) a donné un grand essor à la recherche aérospatiale, particulièrement dû au fait que les modèles requis s'appuyaient sur des dynamiques balistiques linéaires (éventuellement variant dans les temps) bien connues et sur l'hypothèse valable que les signaux stochastiques perturbateurs possédaient des caractéristiques de bruits blancs gaussiens [45]. La tentative de transposition de cette technologie à des applications industrielles, manquant généralement d'un modèle précis et dont les propriétés stochastiques des perturbations externes n'étaient pas bien connues, a conduit à un échec. La constatation de son inefficacité a renouvelé l'intérêt pour la recherche en robustesse. Le travail pionnier de George Zames [107] a fondé, dans un cadre entrée-sortie, les bases de la théorie de la commande optimale $\mathcal{H}_\infty$ [111]. Son traitement dans le cadre espace d'état permettant de trouver une famille de contrôleurs basés sur des observateurs, explicitant les connexions entre inégalités dans le domaine fréquentiel, équations de Riccati et factorisation spectrale a fait l'objet de l'article de 1989 connu par l'initiale de ses auteurs - DGKF [34]. La trentaine d'années qui se sont ensuite écoulées ont, d'un côté, vu l'adaptation de cette technique à des outils mathématiques puissants tels que les inégalités matricielles linéaires (*Linear Matrix Inequalities* - LMI) [14] [38] et, d'un autre côté, ont permis la formalisation, dans plusieurs ouvrages, des concepts mathématiques difficiles, rendant la théorie un peu plus abordable à la communauté scientifique en général [46].

Quand nous parlons d'un modèle incertain il faut avoir à l'esprit qu'il ne s'agit pas d'une seule application des entrées vers les sorties, mais d'un ensemble d'applications. Cet ensemble doit permettre d'envelopper toute la variabilité due à la méconnaissance de la réalité. Il faut, néanmoins, respecter un compromis entre simplicité et adéquation

à un propos. Un modèle adéquat pour une synthèse de lois de commande doit être suffisamment simple pour ne pas trop "complexifier" le contrôleur[1] et, en même temps, être suffisamment riche pour qu'il puisse être utilisé avec assurance [110].

Les incertitudes peuvent, selon leur nature, être classées soit en termes des signaux exogènes affectant de manière additive le système, comme des signaux de perturbation à l'entrée (et/ou sortie) du système et les bruits sur les capteurs (et/ou actionneurs), soit en termes des différences de dynamique (perturbations dynamiques) entre le système et son modèle, comme des dynamiques hautes fréquences non modélisées, des non-linéarités négligées dans le modèle, des dynamiques non prises en compte après une réduction des modèles et des variations paramétriques du système réel [46].

En fonction de la manière avec laquelle les incertitudes sont représentées dans le modèle, elles peuvent être divisées en incertitudes non-structurées et structurées[2] (ou paramétriques). Les incertitudes non-structurées sont modélisées par une fonction de transfert stable inconnue $\Delta(z)$, bornée en amplitude $\| \Delta \|_\infty < M$. Dans le cas d'incertitudes structurées (paramétriques), leur représentation est faite par une structure connue, dont quelques paramètres internes ne sont pas précisément maîtrisés et peuvent varier entre certaines bornes.

3.2.1 Incertitudes non-structurées

Dans le chapitre précédent, nous avons mentionné la différence entre modélisation (où le système obtenu est normalement motivé par des fondements des lois de la physique) et identification de systèmes (le modèle étant vu comme une boîte noire dont les propriétés dynamiques doivent être estimées à partir des données entrée-sortie). Dans le premier cas, la structure du modèle est relativement bien connue et dépend éventuellement de paramètres qui varient entre certaines limites. La représentation convenable pour ce cas serait de traiter les incertitudes comme étant structurées. Le deuxième cas, l'identification de système, dû au fait d'admettre non seulement une mais plusieurs structures distinctes pour l'établissement d'un lien entre les données entrée-sortie, se prête mieux à une représentation sous la forme d'incertitudes non-structurées. C'est pour cette raison que nous développons ici un peu plus cette deuxième approche.

Les perturbations dynamiques, normalement hautes fréquences et agissant sur différentes parties du système, sont encapsulées dans une fonction de transfert stable

[1] La dimension du contrôleur est généralement liée à la dimension du modèle du système.

[2] L'incertitude est nommée également structurée dans le cas où sa représentation comporte des incertitudes non-structurées et paramétriques.

inconnue mais bornée en norme. L'interaction de cette fonction avec le modèle nominal compose le modèle dit incertain. Cette interaction peut se produire de manière additive ou multiplicative, donnant lieu à une représentation des erreurs (entre modèles nominal et incertain) absolue ou relative, respectivement.

Dans la Figure 3.1, sont illustrées quelques représentations des incertitudes non-structurées pour les systèmes SISO[3], considérant $G_p(s)$, le modèle incertain (qui est sensé englober le pire cas possible du système réel), $G_0(s)$, son modèle nominal et $\Delta(s)$ une fonction de transfert stable inconnue.

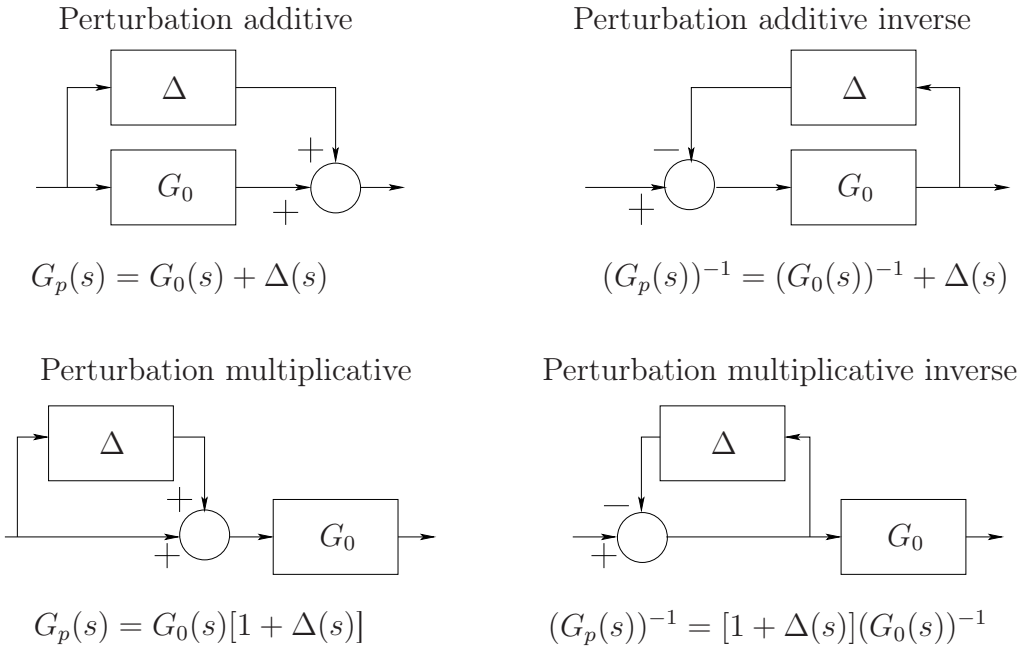

FIG. 3.1 – Formes de représentations des incertitudes non-structurées

3.2.2 Transformation linéaire fractionnaire

Une transformation linéaire fractionnaire (*Linear Fractional Transform* - LFT[4]) est une fonction matricielle qui permet de représenter une grande variété de problèmes d'analyse et de synthèse en commande sous une forme généralisée bien adaptée à la commande robuste.

[3]Pour le cas MIMO, les perturbations multiplicatives ont une représentation différente à l'entrée et à la sortie du modèle [93].

[4]L'utilisation des LFTs a été introduite dans le domaine d'analyse et de synthèse de lois de commande par Doyle en 1984 [93].

Considérons une matrice P de dimension $(p_1 + p_2) \times (m_1 + m_2)$ et la partition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Une transformation linéaire fractionnaire supérieure (*Upper Linear Fractional Transformation* - ULFT) est définie par [93]

$$F_u(P, \Delta) \triangleq P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \tag{3.2}$$

avec Δ une matrice de dimension $m_1 \times p_1$. Les ULFTs sont traditionnellement utilisées en commande pour représenter les incertitudes $\Delta(s)$ sur un modèle $P(s)$ (pouvant être en boucle fermée avec un contrôleur $K(s)$). Dans un problème d'analyse, nous pouvons représenter l'ULFT de $P(s)$ en terme de $\Delta(s)$ (3.2) selon la Figure 3.2,

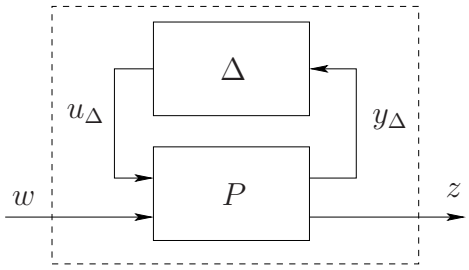

FIG. 3.2 – Interconnection de $P(s)$ et $\Delta(s)$ sous forme ULFT

avec w les entrées exogènes (consignes, perturbations et bruits) et z les sorties exogènes (signaux d'erreur devant être minimisés). Cela peut s'écrire comme

$$z = P_{21}u_\Delta + P_{22}w \quad y_\Delta = P_{11}u_\Delta + P_{12}w \quad u_\Delta = \Delta y_\Delta \tag{3.3}$$

Après élimination de u_Δ et y_Δ, l'équation (3.3) dévient

$$z = R_1 w = F_u(P, \Delta)w = [P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}]w \tag{3.4}$$

De la même manière, une transformation linéaire fractionnaire inférieure (*Lower Linear Fractional Transformation* - LLFT) est définie par

$$F_l(P, K) \triangleq P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \tag{3.5}$$

avec K une matrice de dimension $m_2 \times p_2$. Les LLFTs sont traditionnellement utilisées en commande pour représenter un contrôleur $K(s)$ en boucle avec un modèle $P(s)$ (pouvant être incertain avec incertitude $\Delta(s)$). Dans un problème de synthèse, nous pouvons représenter la LLFT de $P(s)$ en terme de $K(s)$ (3.5) selon la Figure 3.3

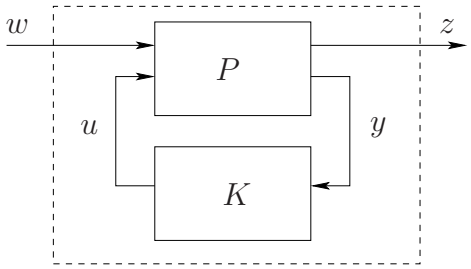

FIG. 3.3 – Interconnection de $P(s)$ et $K(s)$ sous forme LLFT

À partir de la Figure 3.3 nous pouvons écrire

$$z = P_{11}w + P_{12}u \quad y = P_{21}w + P_{22}u \quad u = Ky \tag{3.6}$$

Après élimination de u et y, l'équation (3.6) s'écrit

$$z = R_2 w = F_l(P, K)w = [P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]w \tag{3.7}$$

Une propriété importante des LFTs est qu'une interconnexion de LFTs est aussi une LFT.

3.3 Stabilisation et Performance Robustes

Deux mots clés permettent de préciser les caractéristiques souhaitables pour un système en boucle fermée. Il s'agit de la stabilité et de la performance [111]. Comme nous l'avons signalé précédemment, un contrôleur basé sur un modèle incertain doit être suffisamment robuste pour compenser la présence des incertitudes. Maintenant nous rentrons un peu plus dans les détails pour pouvoir traduire l'expression "suffisamment robuste" en termes des concepts de "stabilité robuste" et "performance robuste".

La stabilité robuste peut être comprise à partir de la définition du théorème du faible gain[5] [57], tandis que la performance robuste sera discutée dans son rapport

[5]George Zames, en plus d'être le père de la commande $\mathcal{H}_\infty$, est connu pour avoir developpé le

avec les filtres de pondérations.

3.3.1 Le théorème du faible gain

Le théorème du faible gain, conçu sur un point de vue entrée-sortie, permet de juger de la stabilité robuste en examinant la manière avec laquelle les normes de signaux évoluent (augmentent ou diminuent) en traversant un système en boucle fermée [57]. Le théorème fournit une condition suffisante de stabilité robuste dans le cas général. Cette condition peut être étendue à nécessaire et suffisante lorsque les opérateurs sont décrits au travers de la norme $\mathcal{H}_\infty$ [46].

Soient $G_1(s)$ et $G_2(s)$ des matrices de transfert LTI stables ($G_1, G_2 \in \mathcal{RH}_\infty$). Le système en boucle fermée (Figure 3.4) est stable de manière interne[6] si et seulement si

$$\| G_1 G_2 \|_\infty < 1 \quad \text{et} \quad \| G_2 G_1 \|_\infty < 1 \tag{3.8}$$

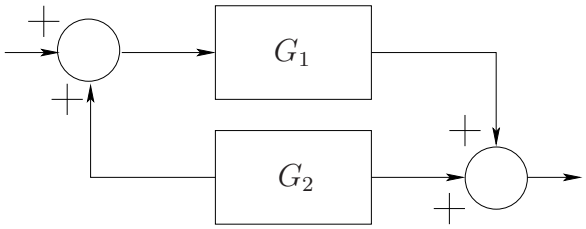

FIG. 3.4 – Système générique en boucle fermée

Pour apprécier le lien entre (3.8) et un problème de stabilisation robuste, considérons un modèle nominal $G_0(s)$ comportant une incertitude non-structurée additive stable $\Delta(s)$, formant le modèle incertain $G_p(s)$. $G_p(s)$ est en boucle fermée avec un contrôleur $\overline{K}(s)$, tel que représenté sur la Figure 3.5. Le système bouclé est robustement stable si la stabilité est conservée pour toutes les variations possibles de $\Delta(s)$, y compris pour le cas nominal avec $\Delta(s) = 0$.

À partir de la Figure 3.5, la matrice de transfert entre v et u s'écrit $T_{uv}(s) = -\overline{K}(s)(I + G_0(s)\overline{K}(s))^{-1}$. La matrice $T_{uv}(s)$ en boucle fermée avec $\Delta(s)$ est robustement stable si et seulement si $\overline{K}(s)$ stabilise le modèle nominal $G_0(s)$ et

théorème du faible gain, le théorème de la passivité et le critère du cercle au sens entrée-sortie [75].

[6] Un système est stable de manière interne si, pour des matrices de transfert stables $G_1(s)$ et $G_2(s)$, $\begin{bmatrix} I & -G_1 \\ -G_2 & I \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty$ [110].

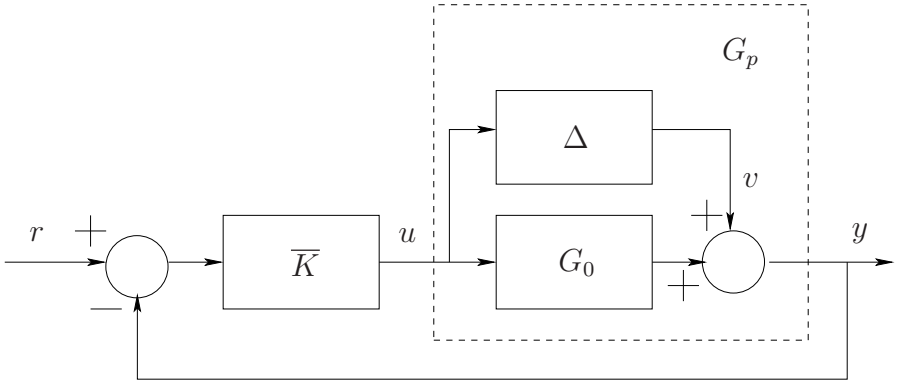

FIG. 3.5 – Modèle nominal plus incertitude additive en boucle fermée avec un contrôleur

$$\| \Delta\overline{K}(I + G_0\overline{K})^{-1} \|_\infty < 1 \quad \text{et} \quad \| \overline{K}(I + G_0\overline{K})^{-1}\Delta \|_\infty < 1 \tag{3.9}$$

La condition (3.9) peut être représentée sous la forme [46]

$$\| \overline{K}(I + G_0\overline{K})^{-1} \|_\infty < \frac{1}{\| \Delta \|_\infty} \tag{3.10}$$

Ayant pour objectif de trouver le contrôleur $\overline{K}(s)$ qui stabilise le plus grand ensemble d'incertitudes $\Delta(s)$, (3.10) revient à

$$\min_{\overline{K}\text{stabilisant}} \| \overline{K}(I + G_0\overline{K})^{-1} \|_\infty \tag{3.11}$$

Supposons maintenant que l'incertitude $\Delta(s)$ en (3.10) est bornée par une matrice de transfert $W(s)$ tel que $\overline{\sigma}(\Delta(jw)) \leq \overline{\sigma}(W(jw))$ pour tout $w \in \mathbb{R}$. L'incertitude peut alors être écrite comme $\Delta(s) = \tilde{\Delta}(s)W(s)$, avec $\tilde{\Delta}(s)$ l'ensemble d'incertitudes de norme unitaire. En considérant à présent l'incertitude $\tilde{\Delta}(s)$, la condition de stabilité (3.10) et le problème d'optimisation (3.11) deviennent, respectivement

$$\| W\overline{K}(I + G_0\overline{K})^{-1} \|_\infty < 1 \quad \text{et} \quad \min_{\overline{K}\text{stabilisant}} \| W\overline{K}(I + G_0\overline{K})^{-1} \|_\infty \tag{3.12}$$

3.3.2 Les filtres de pondération

Nous avons vu que le théorème du faible gain fournit des conditions de stabilité robuste pour un système incertain en boucle fermée. Par la suite, les questions traitées sont les performances nominale et robuste du système en boucle fermée, caractérisées

en terme fréquentiel au moyen des filtres de pondération.

Considérons le système illustré sur la Figure 3.6, avec les vecteurs r, y, u, e, d et n représentant, respectivement, la consigne, la sortie, l'effort de commande, le signal d'erreur, une perturbation à la sortie et le bruit de mesure.

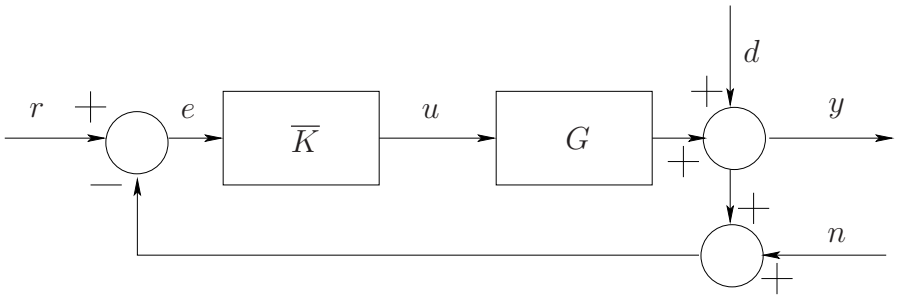

FIG. 3.6 – Configuration en boucle fermée

Définissant les matrices de sensibilité à la sortie S[7] et de sensibilité complémentaire à la sortie T[8] comme

$$S = (I + G\overline{K})^{-1} \quad \text{et} \quad T = G\overline{K}(I + G\overline{K})^{-1} \tag{3.13}$$

les signaux y, u et e peuvent être écrits comme

$$\begin{cases} y = Tr + Sd - Tn \\ u = \overline{K}Sr - \overline{K}Sd - \overline{K}Sn \\ e = Sr - Sd + Tn \end{cases} \tag{3.14}$$

L'équation (3.14) met en évidence les principaux indicateurs de performance associés au système défini par la Figure 3.6. Nous pouvons observer, par exemple, que l'influence d'une perturbation d sur la sortie du système y peut être mesurée par rapport à la "taille" de la sensibilité S, tandis que son effet sur l'effort de commande u est mesuré par la "taille" du produit $\overline{K}S$. La notion de "taille" d'une matrice de transfert par rapport à la fréquence peut être explicitée au moyen de ses valeurs singulières [110]. Ainsi, par exemple, l'inéquation $\overline{\sigma}(S) < 1$ dans une certaine plage des fréquences indique que, en boucle fermée, l'effet de la perturbation d sur y sera plus faible qu'en boucle ouverte. Pour prendre en compte l'effet des perturbations en basses

[7] Il existe aussi les fonctions de sensibilité à l'entrée $S^* = (I + \overline{K}G)^{-1}$ et de sensibilité complémentaire à l'entrée $T^* = \overline{K}G(I + \overline{K}G)^{-1}$.

[8] T est appelé sensibilité complémentaire dû au fait que $S + T = I$.

fréquences, il est normalement désirable de trouver un contrôleur $\overline{K}$ qui rend S petite dans ces fréquences. À partir de l'équation de S en (3.13) nous pouvons noter que plus le gain $\overline{K}$ est grand, plus la sensibilité S sera petite. Il y a, pourtant, des effets secondaires dans l'augmentation de $\overline{K}$. D'après les équations (3.14), l'augmentation de $\overline{K}$ peut entrainer aussi une croissance du produit $\overline{K}S$, augmentant donc l'effort de commande u. L'effort de commande ne doit pas être important dans les fréquences où la commande ne s'avère pas nécessaire (normalement, les hautes fréquences[9]). En plus, d'après la relation $S + T = I$, une diminution de S provoque une augmentation de T, amplifiant l'effet des bruits de mesure sur la sortie y.

Pour pouvoir discriminer les critères de performance dans des plages de fréquences distinctes, des filtres de pondération sont utilisés. La Figure 3.7 montre le système augmenté avec une configuration possible pour les filtres de pondération W_1, W_2 et W_d. Cette configuration permet de bien représenter le compromis fréquentiel entre réduction de perturbation à la sortie (en jouant sur W_1) et utilisation de l'effort de commande (en jouant sur W_2), critères primordiaux dans le cadre d'un problème de rejet de perturbation.

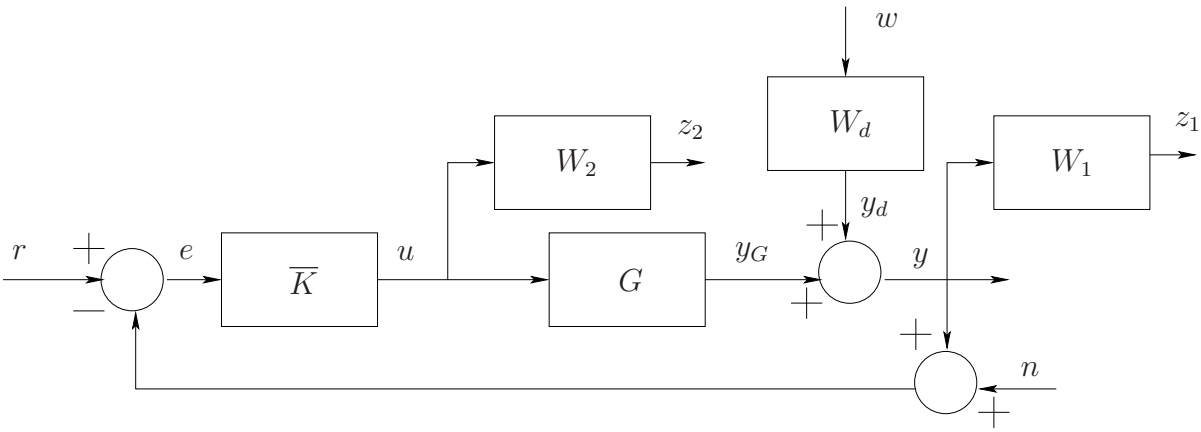

FIG. 3.7 – Configuration en boucle fermée avec les filtres de pondération

W_d essaie de reproduire la vraie perturbation de sortie d (représentée sur la Figure 3.6). Dans la pratique, W_d est normalement choisi comme un filtre passe-bande qui, à partir d'une impulsion unitaire w génère un signal y_d en tenant compte du spectre fréquentiel excité par la perturbation d. W_1, associé au critère de performance z_1,

[9]Cette constatation est valable pour les systèmes en général afin de prévenir, autant que possible, la saturation de la commande. Pour les systèmes flexibles, cela permet aussi d'éviter que d'éventuels modes flexibles non modélisés soient excités, ce qui peut compromettre la stabilité du système. Ce phénomène est appelé *spillover* [13].

sert à pondérer la fonction de sensibilité S dans les basses fréquences où l'effet de la perturbation d par rapport à la sortie y doit être faible. Ainsi, normalement W_1 est choisi avec les caractéristiques d'un filtre passe-bas. W_2, associé à z_2, doit assurer une decroissance suffisamment rapide de l'effort de commande en hautes fréquences, étant donc d'habitude choisi comme un filtre passe-haut.

La performance nominale d'un système est atteinte quand, en boucle fermée, les critères de performance (dans le cas en question, z_1 et z_2) sont vérifiés avec G dans la Figure 3.7 égal au modèle nominal[10]. Si les critères de performance sont aussi vérifiés pour tout l'ensemble des modèles d'une représentation incertaine donnée, la performance sera dite robuste. La méthode d'optimisation $\mathcal{H}_\infty$ permet de résoudre, en général, les problèmes de stabilisation robuste et de performance nominale. Pour une synthèse prenant en compte la performance robuste, des techniques de μ-synthèse sont disponibles, comme les méthodes itératives $D-K$ et $\mu-K$. Ces méthodes sont basées sur le concept de la valeur singulière structurée (*Structured Singular Values* - SSV) et sont bien adaptées aux problèmes faisant intervenir des incertitudes structurées [46]. Cependant, dans notre formulation, les incertitudes sont considérées non-structurées. L'objectif sera donc de trouver un controlêur $\overline{K}$ qui assure la stabilité robuste et la performance nominale de la boucle fermée, cette dernière étant associée à la fonction de sensibilité S, c'est-à-dire, à la capacité du contrôleur d'atténuer les vibrations dans la plage de fréquences d'intérêt.

3.4 La méthode $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte

Dans la section précédente, nous avons discuté les objectifs contradictoires qui apparaissent typiquement dans les critères d'optimisation $\mathcal{H}_\infty$. Ces objectifs sont établis en utilisant la fonction de sensibilité (où la sensibilité complémentaire), donnant le nom de "sensibilité mixte" à la technique de synthèse robuste présentée dans cette section.

À partir de la Figure 3.7, définissons les représentations en espace d'état des matrices du modèle nominal G et des filtres de pondération W_d, W_1 et W_2 comme

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) = A_G x_G(t) + B_G u(t) \\ y_G(t) = C_G x_G(t) + D_G u(t) \end{cases} \tag{3.15}$$

[10] Dorénavant G correspondra au modèle nominal, sauf mention du contraire.

$$\begin{cases} \dot{x}_{wd}(t) = A_{wd}x_{wd}(t) + B_{wd}w(t) \\ y_d(t) = C_{wd}x_{wd}(t) + D_{wd}w(t) \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{w1}(t) = A_{w1}x_{w1}(t) + B_{w1}y(t) \\ z_1(t) = C_{w1}x_{w1}(t) + D_{w1}y(t) \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{w2}(t) = A_{w2}x_{w2}(t) + B_{w2}u(t) \\ z_2(t) = C_{w2}x_{w2}(t) + D_{w2}u(t) \end{cases} \tag{3.18}$$

Définissant les vecteurs $x(t) = [x_G(t)\ x_{wd}(t)\ x_{w1}(t)\ x_{w2}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ et $z(t) = [z_1(t)\ z_2(t)]^T \in \mathbb{R}^{p_z}$, les sous-systèmes peuvent être composés sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \tag{3.19}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{wd} & 0 & 0 \\ B_{w1}C_G & B_{w1}C_{wd} & A_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{w2} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{wd} \\ B_{w1}D_{wd} \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_G \\ 0 \\ B_{w1}D_G \\ B_{w2} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{bmatrix} D_{w1}C_G & D_{w1}C_{wd} & C_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{w2} \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} C_G & C_{wd} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= \begin{bmatrix} D_{w1}D_{wd} \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_{12} = \begin{bmatrix} D_{w1}D_G \\ D_{w2} \end{bmatrix} \\ D_{21} &= D_{wd} \qquad\qquad D_{22} = D_G \end{aligned} \tag{3.23}$$

et les vecteurs $w \in \mathbb{R}^{m_w}$, $u \in \mathbb{R}^{m_u}$ et $y \in \mathbb{R}^{p_y}$.

Le système représenté sur la Figure 3.7 peut être mis sous une forme LFT telle que montrée sur la Figure 3.3, avec $K = -\overline{K}$ et P en (3.1) formé par

$$P_{11} = \begin{bmatrix} W_1W_d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} W_1G \\ W_2 \end{bmatrix}, \quad P_{21} = W_d \quad \text{et} \quad P_{22} = G \tag{3.24}$$

Appliquant la relation (3.7), les critères de performance nominale en boucle fermée (z_1 et z_2) par rapport à la perturbation w deviennent

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1SW_d \\ W_2KSW_d \end{bmatrix} w = T_{zw}w \tag{3.25}$$

En utilisant un bon choix de filtres, le problème de la commande $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte consiste à trouver un contrôleur qui rend T_{zw} stable et avec une norme infinie la plus petite possible, considérant le compromis, dans le domaine fréquentiel, entre d'un côté, un bon rejet de perturbation et de l'autre, la minimisation des efforts de commande. La norme $\mathcal{H}_\infty$, définie comme le pic maximal de la plus grande valeur singulière de la matrice de transfert, est une mesure pertinente de l'amplitude de T_{zw}. L'objectif de la commande $\mathcal{H}_\infty$ est alors donné par

$$\min_{K\text{stabilisant}} \| T_{zw} \|_\infty := \gamma_0 \tag{3.26}$$

Il est important de noter que l'ordre du correcteur, solution du problème, est l'ordre du modèle plus l'ordre des filtres de pondération. Dans le cas où cet ordre est

trop important, on peut recourir aux techniques de réduction de modèles (annexe A).

3.4.1 La solution sous-optimale

D'une manière générale, il n'y a pas de solution analytique pour le problème (3.26) et, dans la pratique, on recherche une solution sous-optimale, c'est-à-dire, un contrôleur K stabilisant tel que

$$\| T_{zw} \|_\infty < \gamma \tag{3.27}$$

avec $\gamma > \gamma_0$. Il existe un contrôleur K respectant l'inégalité (3.27) et paramétré en fonction d'une matrice de transfert stable de norme infinie inférieure à γ si et seulement si les solutions stabilisantes (uniques) de deux équations algébriques de Riccati sont semi-définies positives et le rayon spectral de leur produit est inférieur à γ^2 [34]. Une minimisation récursive de γ permet de s'approcher de la solution optimale γ_0[11].

Considérons la représentation suivante pour le système (3.19)

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{3.28}$$

À partir d'une décomposition en valeur singulière (SVD) nous trouvons des matrices orthonormales U_{12}, V_{12}, U_{21} et V_{21} telles que

$$U_{12} D_{12} V_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad U_{21} D_{21} V_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{21} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$U_{12} = \begin{bmatrix} U_{121} \\ U_{122} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V_{21} = \begin{bmatrix} V_{211} \\ V_{212} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

avec $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$, $\Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{p_y \times p_y}$ non singulières et $U_{121} \in \mathbb{R}^{(p_z - m_u) \times p_z}$, $U_{122} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_z}$, $V_{211} \in \mathbb{R}^{(m_w - p_y) \times m_w}$ et $V_{212} \in \mathbb{R}^{p_y \times m_w}$.

[11] Il faut remarquer, cependant, qu'en se rapprochant de la solution optimale le problème devient numériquement mal conditionné, ce qui peut compromettre la fiabilité de la solution [46].

Définissons les matrices hamiltoniennes[12]

$$H := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -C_1^T D_{1*} \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} D_{1*}^T C_1 & B^T \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

et

$$J := \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T \\ -B_1 D_{*1}^T \end{bmatrix} \tilde{R}^{-1} \begin{bmatrix} D_{*1} B_1^T & C \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

avec

$$D_{1*} := \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad D_{*1} := \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$R := D_{1*}^T D_{1*} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{R} := D_{*1} D_{*1}^T - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Considérons aussi les hypothèses suivantes [46] :

– **A1.** (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable ;

– **A2.** D_{12} est de rang colonne complet et D_{21} est de rang ligne complet ;

– **A3.** $\begin{bmatrix} A - jwI & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ est de rang colonne complet pour tout w ;

– **A4.** $\begin{bmatrix} A - jwI & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ est de rang ligne complet pour tout w.

Si $P(s)$ satisfait les hypothèses (**A1-A4**) :

(a) Il existe un contrôleur $K(s)$ stabilisant de manière interne la boucle fermée tel que $\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$ si et seulement si

(i) $\gamma > \max\{\overline{\sigma}(U_{121} D_{11}), \overline{\sigma}(D_{11} V_{211}^T)\}$ et

(ii) il existe des solutions $X = X^T \geq 0$ et $Y = Y^T \geq 0$ satisfaisant $X = \mathbf{Ric}(H)$ et $Y = \mathbf{Ric}(J)$ pour les équations de Riccati (3.31) et (3.32), telles que

[12] Une matrice hamiltonienne $H = \begin{bmatrix} E & -W \\ -Q & -E^T \end{bmatrix}$ avec $W = W^T$ et $Q = Q^T$ correspond de manière unique à une equation de Riccati de la forme $E^T X + XE - XWX + Q = 0$ dont la solution X, si elle existe, est une matrice symétrique qui rend $E - WX$ stable. La solution stabilisante est représentée par $X := \mathbf{Ric}(H)$ [110].

$$\rho(XY) < \gamma^2 \tag{3.35}$$

(b) Considérant satisfaites les conditions de la partie **(a)**, le contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ sous-optimal central[13] pour $P(s)$ sera donné par

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{\tilde{K}} - B_{\tilde{K}} D_{22}(I + D_{\tilde{K}} D_{22})^{-1} C_{\tilde{K}} & B_{\tilde{K}}(I + D_{22} D_{\tilde{K}})^{-1} \\ \hline (I + D_{\tilde{K}} D_{22}^{-1}) C_{\tilde{K}} & D_{\tilde{K}}(I + D_{22} D_{\tilde{K}})^{-1} \end{array}\right] \tag{3.36}$$

avec

$$\tilde{K}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{\tilde{K}} & B_{\tilde{K}} \\ \hline C_{\tilde{K}} & D_{\tilde{K}} \end{array}\right] \tag{3.37}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} D_{\tilde{K}} = -\gamma^2 (U_{122} D_{12})^{-1} U_{122} (\gamma^2 I - D_{11} V_{211}^T V_{211} D_{11}^T U_{121}^T U_{121})^{-1} D_{11} V_{212}^T (D_{21} V_{212}^T)^{-1} \\ B_{\tilde{K}} = -Z[L_2 - (B_2 + L_1 D_{12}) D_{\tilde{K}}] \\ C_{\tilde{K}} = F_2 - D_{\tilde{K}}(C_2 + D_{21} F_1) \\ A_{\tilde{K}} = A + BF - B_{\tilde{K}}(C_2 + D_{21} F_1) \end{array}\right. \tag{3.38}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} Z = (I - \gamma^2 YX)^{-1} \\ F = -R^{-1}(D_{1*}^T C_1 + B^T X) := \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array}\right] \\ L = -(B_1 D_{*1}^T + Y C^T)\tilde{R}^{-1} := \left[\begin{array}{cc} L_1 & L_2 \end{array}\right] \end{array}\right. \tag{3.39}$$

Nous avons présenté une technique de synthèse robuste qui fournit un contrôleur $K(s)$ (3.36) stabilisant un système incertain en boucle fermée dont la norme $\mathcal{H}_\infty$ est minimisée et la performance nominale dépend du choix des filtres de pondération. Ces filtres peuvent être regardés comme des paramètres de réglage sans aucune inter-

[13] D'une manière générale le controlêur K possède un paramètre libre $Q(s)$ sous la forme d'une matrice de transfert stable de norme inférieure à γ. Le contrôleur central, présenté ici, est obtenu pour le cas où $Q(s) = 0$ [46].

prétation physique [111]. Dans la section suivante, quelques résultats expérimentaux illustrent la théorie mise en pratique.

3.5 Résultats Expérimentaux

Dans cette section nous présentons les résultats pratiques de synthèse de contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte pour le cas du robot avec 2,5 kg de charge. L'objectif est de minimiser les vibrations dans la direction Y, mesurées au niveau de la nacelle du robot à partir de l'instant où la nacelle arrive au point d'arrêt $Pos2$, tel que cela a été décrit dans le chapitre 1. La synthèse du contrôleur est faite dans le but de réduire les vibrations dues à une trajectoire de 18 g. Dans un premier temps, les résultats en simulation et expérimentaux pour une trajectoire de 18 g sont comparés. Pour vérifier la robustesse à des variations de trajectoire, l'efficacité du contrôleur obtenu est testée expérimentalement sur les trajectoires de 15 g et 10 g. La sensibilité du contrôleur par rapport à des variations dans les valeurs des filtres de pondération est ensuite analysée. Pour conclure, la robustesse du contrôleur à des variations de charge est examinée en simulation pour le robot avec une charge de 1,5 kg.

3.5.1 Charge de 2,5 kg et trajectoire de 18 g

Le modèle *mod ctrl 2,5kg*, présenté dans le chapitre 2, est utilisé maintenant pour la synthèse d'un contrôleur $K_{SM}(s)$ avec la méthode $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte décrite dans la section 3.4. En utilisant la commande $\mathcal{H}_\infty$, des filtres doivent être fixés pour pondérer l'action de commande de manière convenable dans le spectre des fréquences d'intérêt.

Le filtre $W_d(s)$ est fixé tel que décrit dans la section 1.4.3 du chapitre 1. Après des essais, les filtres passe-bas $W_1(s)$ et passe-haut $W_2(s)$, tracés sur la Figure 3.8, sont fixés comme

$$W_1 = \frac{6 \times 10^{-4}(s+1600)^4}{(s+160)^4} \tag{3.40}$$

$$W_2 = \frac{20(s+475)^3}{(s+1600)^3} \tag{3.41}$$

Nous résolvons le problème de sensibilité mixte et obtenons le correcteur stabilisant $K_{SM}(s)$ (conformément à (3.36)). Une réduction basée sur une réalisation équilibrée

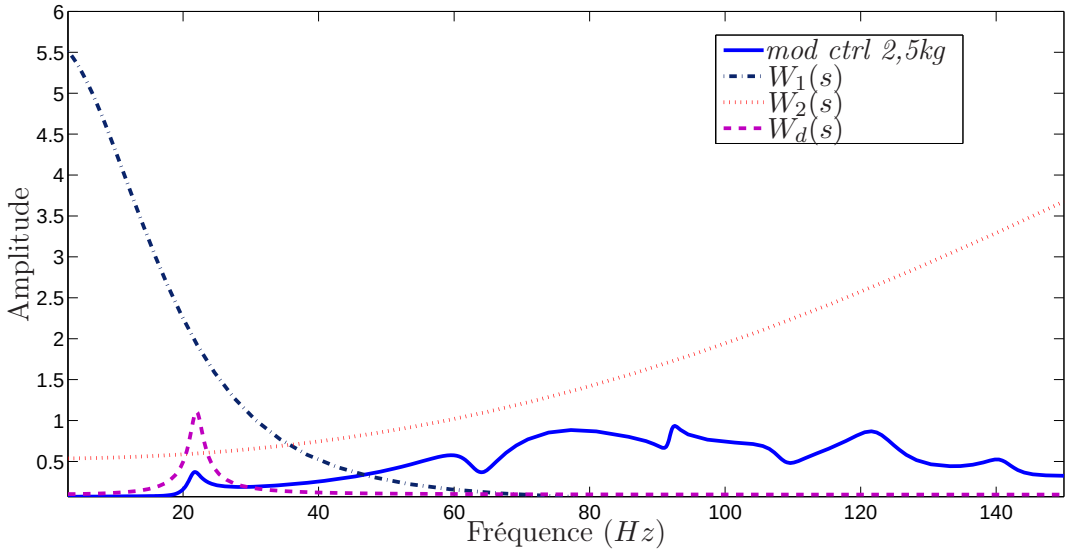

FIG. 3.8 – Filtres de pondération

du correcteur est effectuée, ce qui permet de réduire le correcteur de l'ordre 23 à un correcteur $K_{SMr}(s)$ d'ordre 4 (3.42). La Figure 3.9 montre que les deux correcteurs ont pratiquement le même comportement dans la plage de fréquence d'intérêt.

$$K_{SMr} = \frac{-0.044066(s^2 + 112.6s + 1.68e04)(s^2 - 1292s + 1.74e06)}{(s^2 + 210.6s + 1.18e04)(s^2 + 122.2s + 2.62e04)} \tag{3.42}$$

Dans la Figure 3.10, les modes dominants en boucle ouverte, en bleu, et en boucle fermée, en vert, sont comparés, considérant le modèle *mod sim 2,5kg* et le controlêur réduit. Les paires (en boucle ouverte et fermée) des modes avec fréquences de résonance autour de 21,7 Hz (dans la région entourée par le cercle pointillé) augmentent leur amortissement de 0,032 (en boucle ouverte) à 0,045 (en boucle fermée). Cela traduit une réduction des vibrations liées au premier mode de résonance du système.

L'effet de la perturbation (les vibrations) sur la sortie du système est donnée par l'amplitude de la fonction de sensibilité à chaque fréquence. La fonction de sensibilité $S_{SM} = (1 - GK_{SMr})^{-1}$, avec G le modèle *mod sim 2,5kg*, est représentée sur la Figure 3.11. Nous pouvons observer que pour les fréquences proches de 21,7 Hz l'atténuation est maximale. Cela était attendu puisque c'est dans cette gamme de fréquence qu'intervient la perturbation que l'on souhaite atténuer. A l'inverse, la Figure 3.11 montre une augmentation du niveau des perturbations pour les fréquences comprises entre

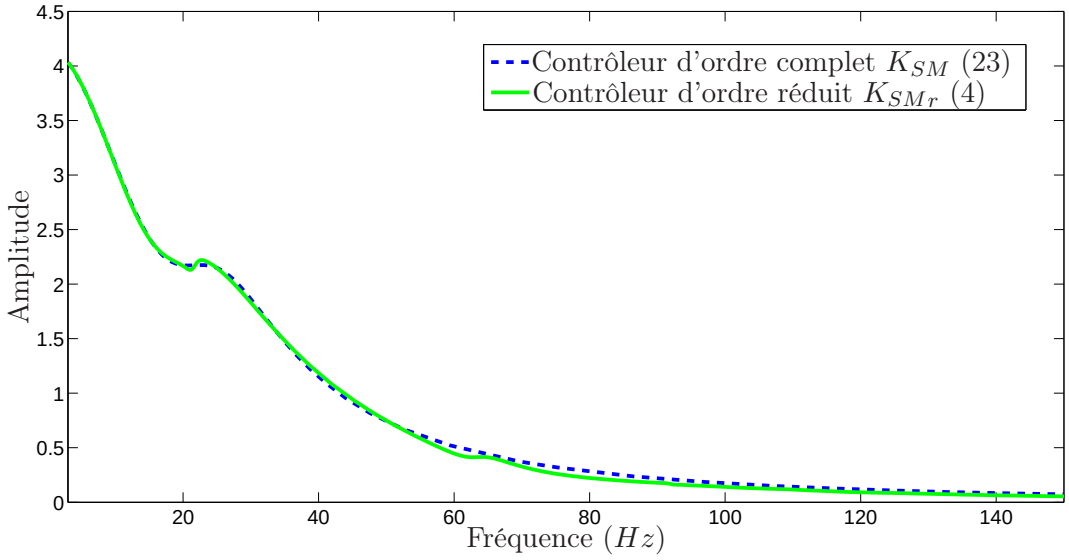

FIG. 3.9 – Contrôleur d'ordre complet et réduit

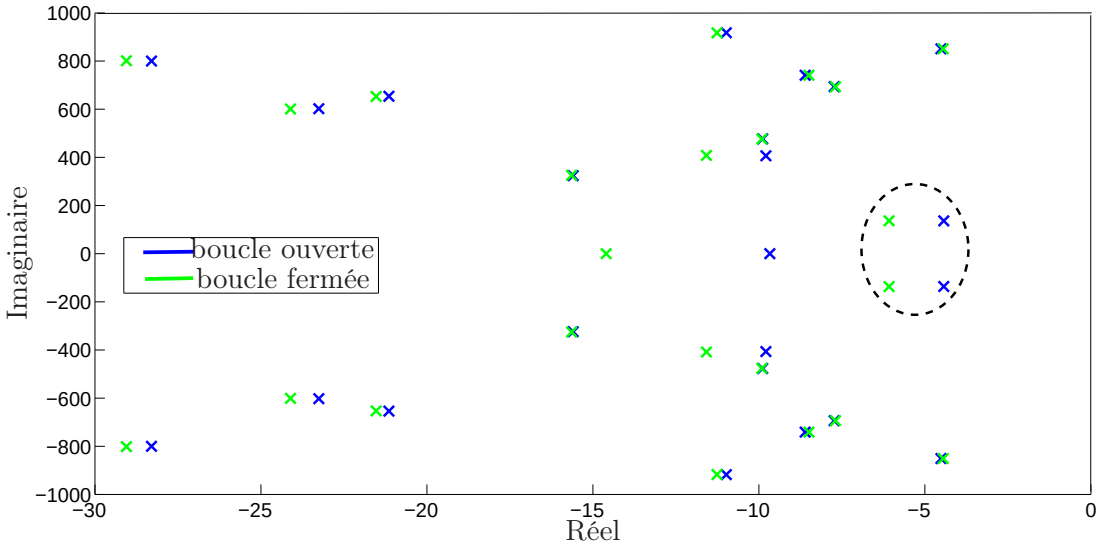

FIG. 3.10 – Modes dominants en boucle ouverte et boucle en fermée

30 Hz et 76 Hz. Cela traduit aussi le compromis nécessaire qui fait qu'en diminuant la sensibilité dans une zone de fréquence, on l'augmente nécessairement ailleurs.

La simulation du système en boucle fermée avec le modèle *mod sim 2,5kg* et le correcteur réduit K_{SMr}, ainsi que la vraie perturbation d (données expérimentales issues d'expériences en boucle ouverte) et la réponse du système physique, bouclé avec

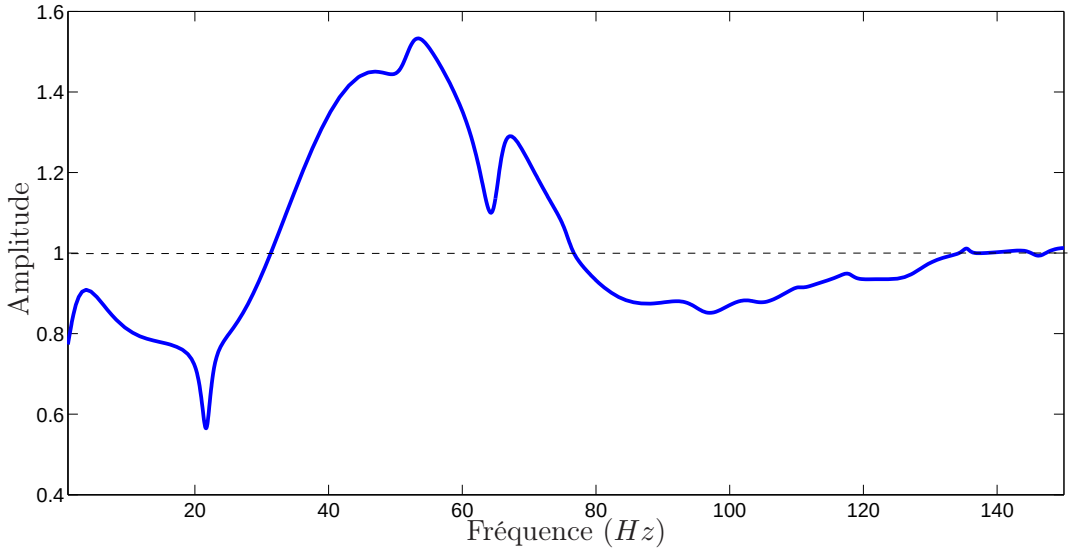

FIG. 3.11 – Fonction de sensibilité S_{SM} avec le modèle *mod sim 2,5kg* et le contrôleur réduit K_{SMr}

K_{SMr} (données expérimentales en boucle fermée), dont les spectres de fréquences sont représentés dans la Figure 3.12 (montrés en détail entre 17 Hz et 23 Hz), montrent bien l'atténuation que le contrôleur a apporté au système en boucle fermée. Les perturbations dans les fréquences entre 55 Hz et 70 Hz sont par contre amplifiées, tel que nous l'avions prévu.

La réponse dans le domaine temporel (montrée en détail pour l'intervalle de temps entre 0,1 s et 0,6 s) et l'effort de commande sont représentés dans les Figures 3.13 et 3.14, respectivement.

D'après la Figure 3.15, nous pouvons également voir que le correcteur synthétisé pour l'atténuation des vibrations dans la direction Y n'affecte pratiquement pas les directions X et Z, ce qui permet de confirmer que le problème d'atténuation des vibrations peut être traité de manière découplée dans les différentes directions, au moins dans un premier temps.

Considérant la présence d'une incertitude non-structurée additive stable $\Delta(s)$ telle que représentée sur la Figure 3.5 avec G le modèle *mod sim 2,5kg*, et sachant que $u = K_{SMr}S_{SM}y_d = T_{uy_d}y_d$, à partir du théorème du faible gain, nous obtenons un système en boucle fermée stable de manière robuste si et seulement si

$$\| T_{uy_d} \|_\infty = \frac{1}{\| \Delta \|_\infty} \tag{3.43}$$

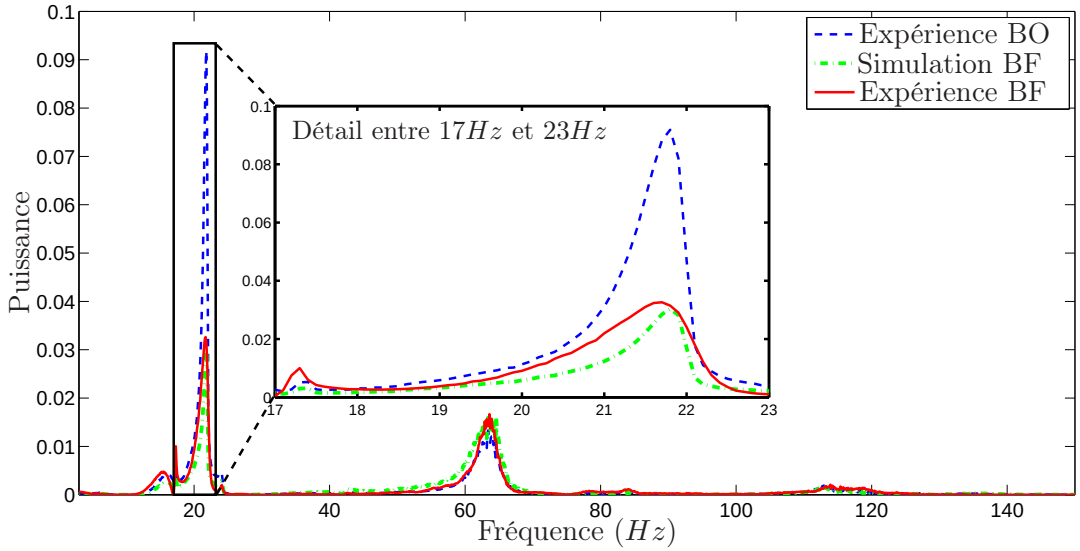

FIG. 3.12 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoire de 18 g - Spectre de puissance

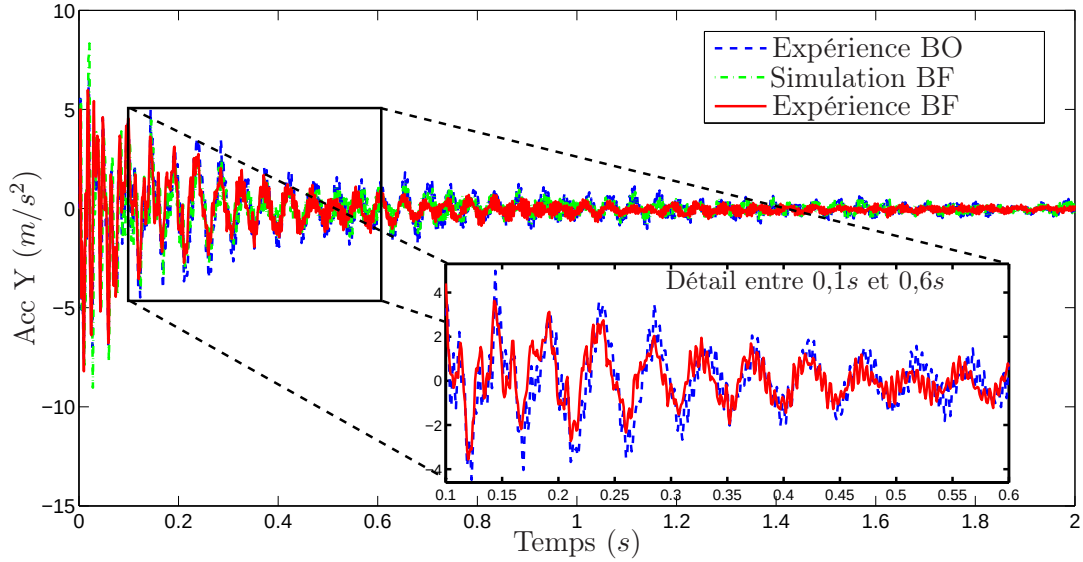

FIG. 3.13 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoire de 18 g - Réponse simulée et réponse expérimentale

Les calculs des $\| T_{uy_d} \|_\infty$ et $\| G \|_\infty$ nous donnent 3,62 et 1,05, respectivement, ce qui nous mène à la conclusion que la stabilite robuste est assurée pour $\dfrac{\| \Delta \|_\infty}{\| G \|_\infty} < 0,26$, c'est-à-dire, pour 26% d'incertitude non-structurée.

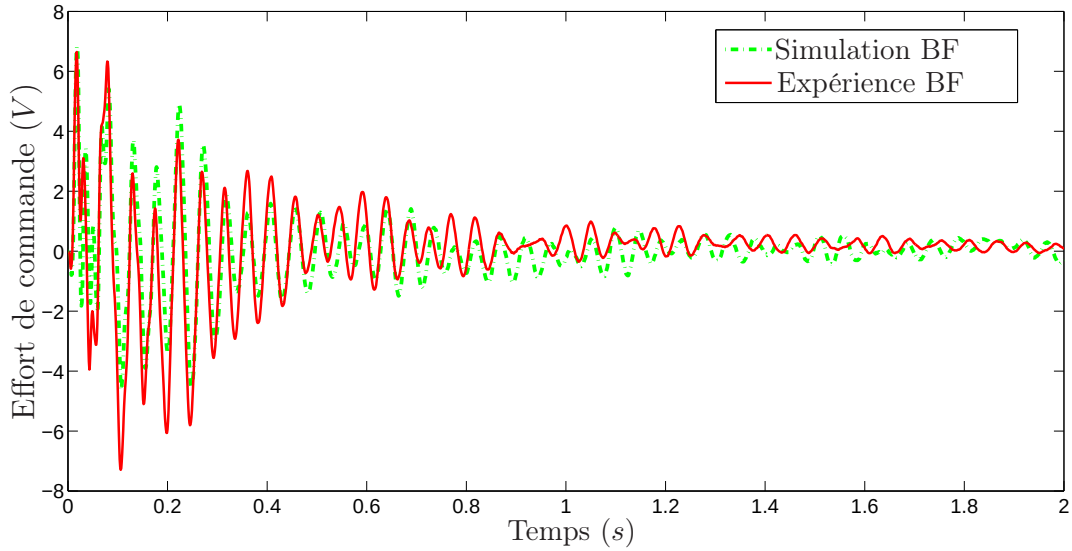

FIG. 3.14 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoire de 18 g - Effort de commande

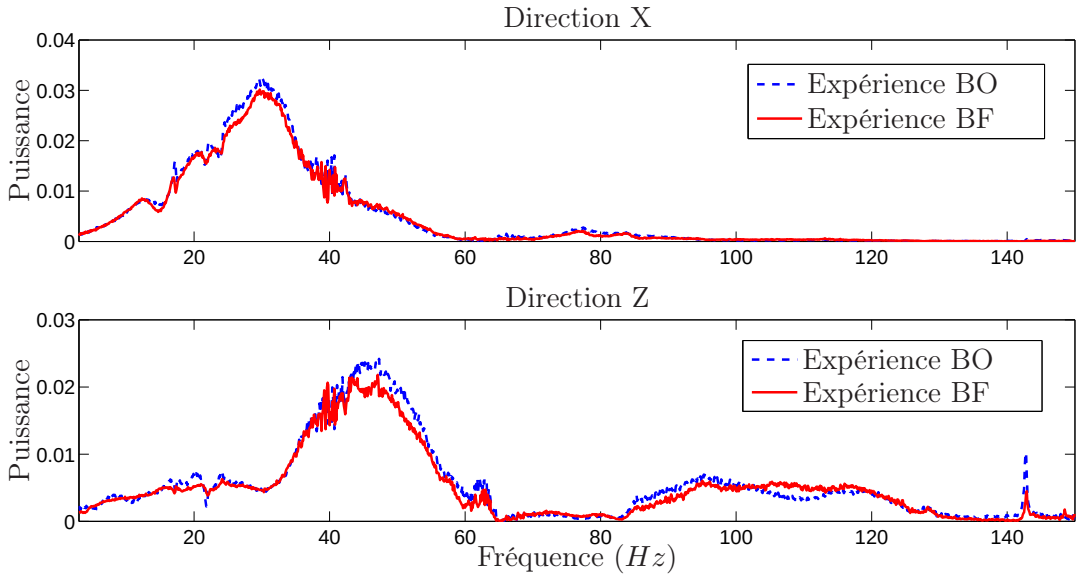

FIG. 3.15 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoire de 18 g dans les directions X et Z - Spectres de puissance

3.5.2 Charge de 2,5 kg et trajectoires de 15 g et 10 g

Nous voulons connaître l'effet du contrôleur K_{SMr} à un changement de trajectoire, ce qui entraîne par conséquent une variation dans les vibrations au point d'arrêt.

Au lieu de 18 g, les trajectoires choisies sont maintenant de 15 g et 10 g. Dans les Figures 3.16 et 3.17 nous pouvons observer, dans les domaines fréquentiel et temporel, respectivement, l'atténuation obtenue expérimentalement pour ces deux trajectoires.

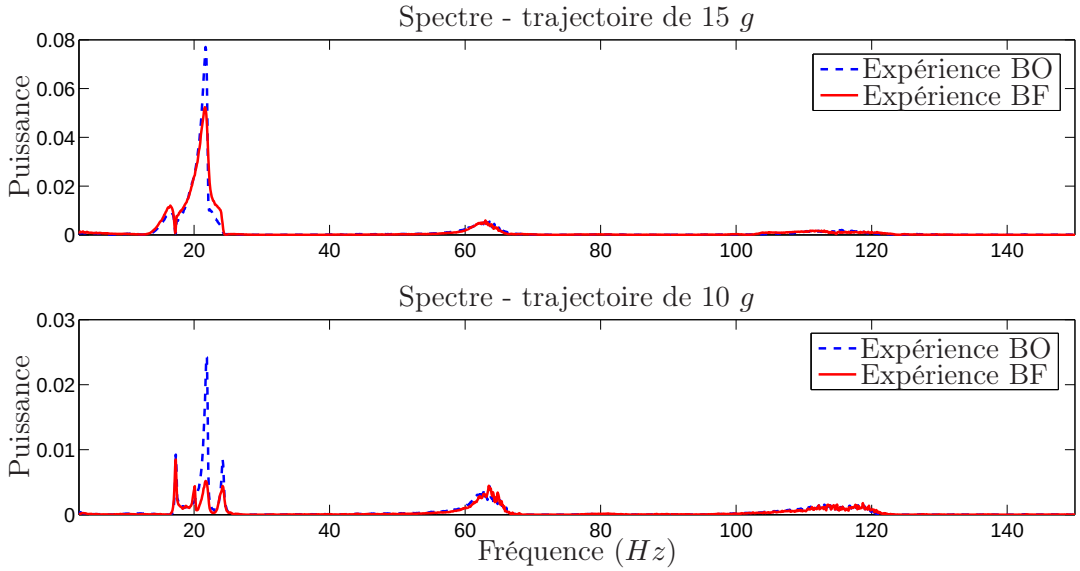

FIG. 3.16 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoires de 15 g et de 10 g - Spectres de puissance

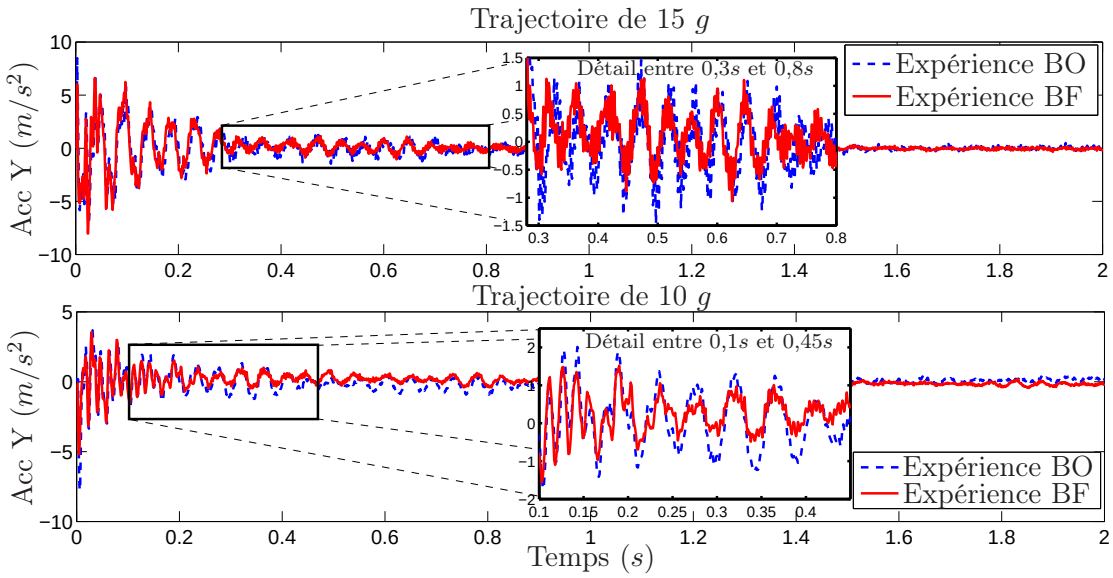

FIG. 3.17 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{SMr} - Trajectoires de 15 g et de 10 g - Réponses temporelles

L'atténuation obtenue était attendue puisque le système est toujours le même et le principal mode de vibration engendré par les trajectoires de 15 g et 10 g reste lui aussi centré en 21,7 Hz. D'après la Figure 3.17, nous pouvons vérifier que les vibrations pour la trajectoire de 15 g sont atténuées seulement à partir de 0,3 s d'expérience, tandis que pour la trajectoire de 10 g, la réduction se vérifie déjà entre 0,1 s et 0,15 s.

3.5.3 Sensibilité du contrôleur au changement de pondération des filtres

Le choix des filtres de pondération pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte n'est pas un problème facile. Pour donner des exemples justifiant cette affirmation, nous montrons ici, dans la Figure 3.18, l'effet du changement des paramètres des filtres sur la fonction de sensibilité S_{SM}.

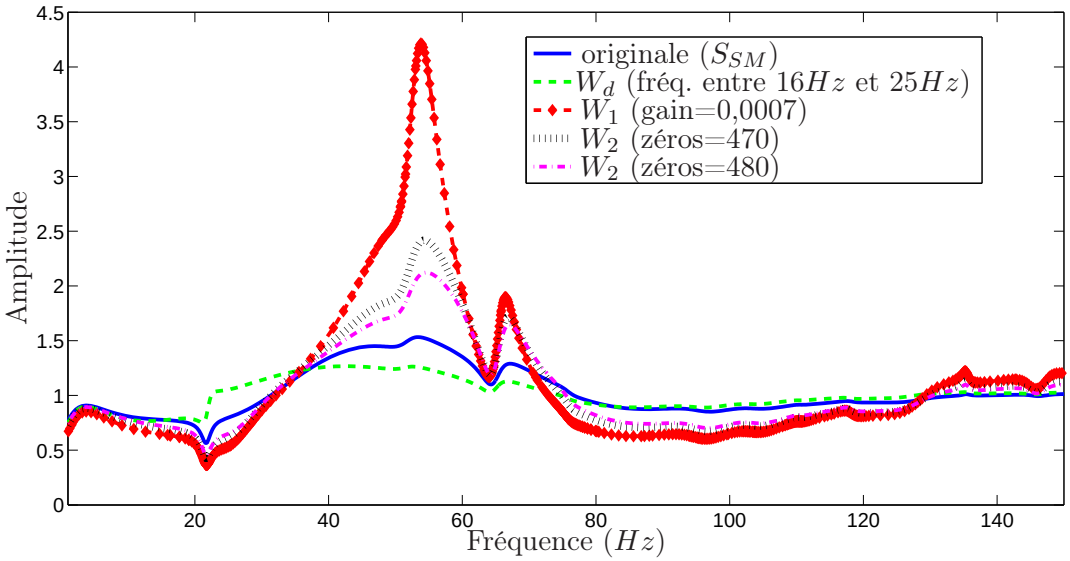

FIG. 3.18 – Effet des filtres de pondération sur la fonction de sensibilité

La courbe en bleu est la courbe originale S_{SM}, déjà représentée sur la Figure 3.11. Le filtre de pondération W_d pour cette courbe a été choisi en fonction des vibrations résultant d'une trajectoire de 18 g, dont les fréquences sont bien concentrées autour de 21,7 Hz. Nous pouvons remarquer sur la Figure 3.16 que, pour une trajectoire de 10 g, le spectre de fréquence s'étend entre 16 Hz et 25 Hz. Considérons maintenant la synthèse faite ayant pour base cette perturbation. Le changement de la bande passante

du filtre de pondération W_d de 21 Hz à 23 Hz vers une nouvelle bande passante de 16 Hz à 25 Hz conduit à une réduction significative de l'atténuation dans la plage des fréquences d'intérêt, comme nous pouvons le constater sur la courbe en vert dans la Figure 3.18.

Toujours à partir de la courbe originale, on augmente le gain du filtre de pondération W_1 (3.40) de 0,0006 à 0,0007. La fonction de sensibilité résultante est représentée par la courbe en rouge. De manière prévisible, en augmentant le gain de W_1, on améliore l'atténuation des vibrations dans la gamme de fréquence de W_d. L'importante augmentation de puissance autour de 55 Hz mène cependant le système à l'instabilité dans les expériences pratiques.

Les zéros du filtre de pondération W_2 (3.41) sont variés de -475 à -470 (courbe en noir) et -480 (courbe en violet). L'augmentation de puissance autour de 55 Hz est moins importante que dans le cas antérieur (courbe rouge), mais encore suffisante pour rendre instable la réponse du système.

3.5.4 Charge de 1,5 kg et trajectoire de 18 g

La robustesse du contrôleur K_{SMr} à une variation de trajectoire a été étudiée dans le paragraphe 3.5.2. Considérons maintenant la robustesse à une variation de charge. Le spectre de puissance et la réponse temporelle obtenus en simulation pour une trajectoire de 18 g avec le contrôleur K_{SMr} et le modèle *mod sim 1,5kg* sont illustrés sur les Figures 3.19 et 3.20, respectivement.

Nous pouvons constater que la réponse, au lieu d'être atténuée, présente une augmentation de ses vibrations. Le contrôleur K_{SMr} n'est donc pas robuste à cette variation de charge. Cela signifie qu'il faudrait envisager, si on applique cette approche de commande $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte, d'effectuer une synthèse de contrôleurs pour chaque charge envisagée, ce qui ne faciliterait pas sa mise en oeuvre pratique.

3.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons initialement traité les aspects théoriques concernant la commande $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte, une loi de commande robuste vis-à-vis des incertitudes non-structurées (mais bornées en norme) affectant un modèle nominal. La théorie est ensuite évaluée au travers de simulations et d'expériences sur le robot Par2 où la commande est appliquée au rejet des perturbations (vibrations) mesurées sur la nacelle d'un robot parallèle en arrivant à un point d'arrêt. L'objectif est de

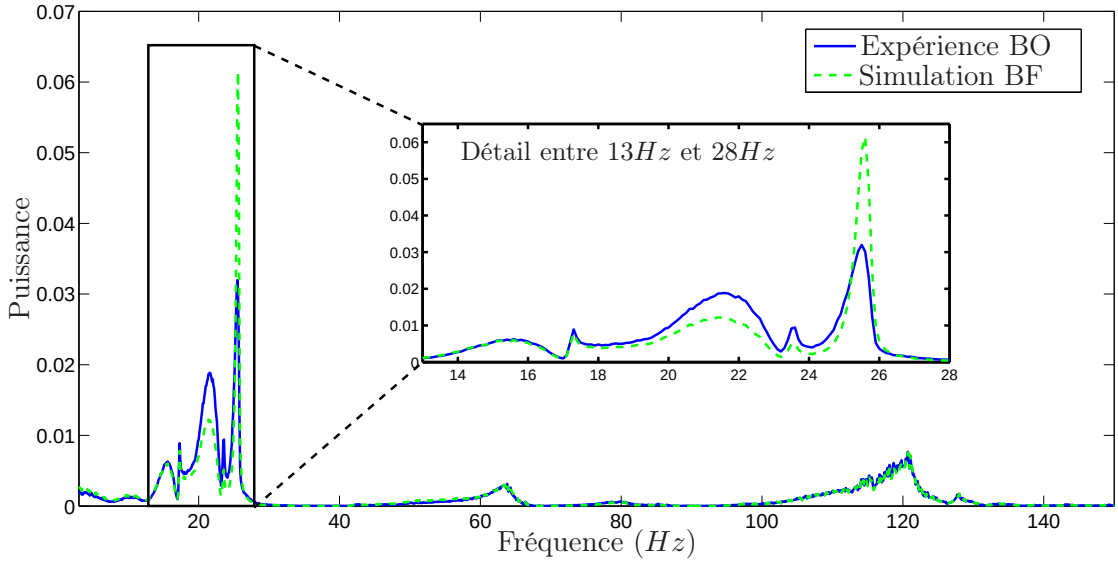

FIG. 3.19 – Modèle *mod sim 1,5kg* avec contrôleur réduit K_{SMr} - Spectre de puissance

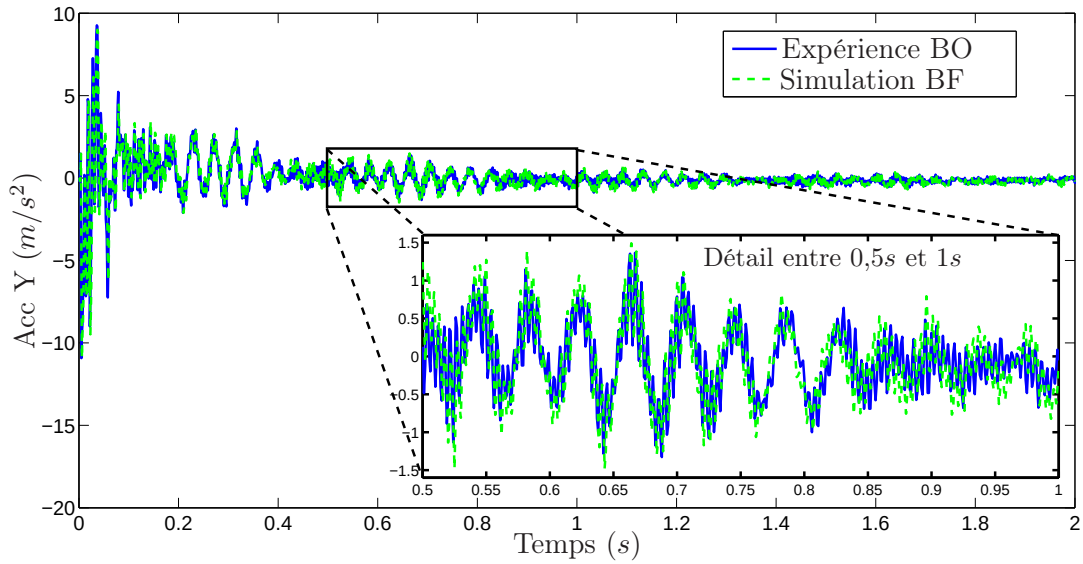

FIG. 3.20 – Modèle *mod sim 1,5kg* bouclé avec le contrôleur réduit K_{SMr} - Réponse simulée

minimiser le pire cas possible de vibration, à partir d'un choix convenable de filtres qui servent à gérer, en boucle fermée, l'action de la commande sur certaines plages fréquentielles. Le choix des filtres est réalisé en respectant quelques règles de base (la fonction de sensibilité et l'effort de commande doivent être faibles en basses et hautes

fréquences, respectivement), mais son application au cas pratique reste difficile. La difficulté vient du fait que des ordres importants sont nécessaires pour les filtres de pondération dans le but d'atteindre un niveau d'atténuation convenable. Par ailleurs, la fonction de sensibilité montre un haut degré de sensibilité par rapport à de petits changements des paramètres des filtres. Tout cela fait qu'un temps considérable doit être consacré à la recherche de filtres appropriés. Si les filtres de pondération sont difficiles à choisir, l'automatisation de la procédure est compromise. Il n'en demeure pas moins que cette première stratégie de contrôle de vibration par l'action d'éléments piézo-électriques placés le long des bras de la nacelle a montré le bénéfice que l'on pouvait espérer de ce type de contrôle.

Chapitre 4

Commande $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping*

4.1 Introduction

La méthode $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte, dont les concepts ont été introduits dans le précédent chapitre, a prouvé son efficacité lors de son application pratique sur le problème concret de la réduction des vibrations du robot Par2 par un actionneur piézoélectrique. Néanmoins, la technique s'appuie fondamentalement sur un choix adéquat des filtres de pondération. Envisageant un certain automatisme pour la procédure qui commence par l'identification du système et qui mène jusqu'à la synthèse d'un contrôleur assurant la stabilisation robuste de la boucle fermée, il s'avère que la recherche des filtres demande un temps considérable, et qu'il faut généralement prendre des filtres d'ordre élevé ce qui rend d'autant plus difficile leur sélection.

Alternativement, bien qu'appartenant aussi à la catégorie de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$, le contrôleur proposé dans ce chapitre renonce à l'utilisation des pondérations fréquentielles en boucle fermée en faveur d'une démarche indirecte, basée sur le principe classique de *loop shaping* [93], où les objectifs pour le système en boucle fermée sont spécifiés en termes des valeurs singulières du système en boucle ouverte [70]. Cette méthode, appelée $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping Design Procedure* (LSDP) et originalement présentée en [71], suppose la réécriture du modèle nominal sous une forme dite de représentation en facteurs premiers normalisés [111], avec les incertitudes associées affectant, par conséquence, ses facteurs premiers.

La technique LSDP, présentée par la suite dans ce chapitre, est basée sur le fait que les objectifs souhaités pour la boucle fermée sont obtenus à partir des caractéristiques d'un modèle en boucle ouverte fictif, façonné à partir de la multiplication du modèle nominal original avec des filtres de pondération. Ce modèle fictif est ensuite soumis à une représentation en facteurs premiers normalisés incertains, menant à une procédure

de synthèse de contrôleur sous-optimale stabilisant la boucle fermée et minimisant une norme $\mathcal{H}_\infty$.

Pour montrer l'applicabilité de la technique, deux contrôleurs sont synthétisés et utilisés pour des simulations et expériences en laboratoire. Une stratégie anti-windup est utilisée pour élargir le domaine de validité d'un des contrôleurs $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping*, modifiant son action lorsque des saturations sont présentes. Les résultats sont discutés en insistant sur les avantages et les faiblesses de ce type d'approche $\mathcal{H}_\infty$ basé sur le façonnage de la boucle ouverte. L'influence des saturations de l'actionneur sur les performances du système bouclé est ensuite mise en avant, et des approches alternatives sont envisagées pour éviter les problèmes de dégradation de performance ou de perte de stabilité liés à ces saturations. En particulier, l'utilisation d'un contrôleur anti-windup, actif uniquement lorsque la saturation est effective, est envisagée.

4.2 Incertitude sous la forme de facteur premier

Les matrices $(M,N) \in \mathcal{RH}_\infty$ constituent une factorisation première à gauche[1] pour un modèle nominal G[2], représentée par $G = M^{-1}N$, si et seulement si [46], [110]

(i) M est carrée avec $\det(M) \neq 0$ et

(ii) il existe des matrices $(V,U) \in \mathcal{RH}_\infty$ telles que

$$MV + NU = I, \quad \forall s \tag{4.1}$$

La factorisation est dite normalisée si et seulement si

$$NN^- + MM^- = I, \quad \forall s \tag{4.2}$$

avec $N^-(s) = N^T(-s)$ et $M^-(s) = M^T(-s)$.

Considérant une réalisation minimale de $G(s)$

$$G(s) := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{4.3}$$

une factorisation première à gauche normalisée de G est donnée par [46]

[1] Cette dénomination est due à l'algorithme d'Euclide pour lequel deux polynômes $m(s)$ et $n(s)$ sont premiers si et seulement si il existe des polynômes $x(s)$ et $y(s)$ tel que $xm + yn = 1$ (identité de Bezout)[110].

[2] Pour faciliter la lisibilité du document la référence à l'opérateur de Laplace s dans les fonctions de transfert est généralement omise et $G(s)$ est dénoté G.

$$[N\ M] := \left[\begin{array}{c|cc} A+HC & B+HD & H \\ \hline R^{-1/2}C & R^{-1/2}D & R^{-1/2} \end{array}\right] \tag{4.4}$$

où

$$R := I + DD^T \tag{4.5}$$

et

$$H = -(ZC^T + BD^T)R^{-1} \tag{4.6}$$

avec $Z \geq 0$ la solution stabilisante unique de l'équation algébrique généralisée de Riccati

$$\begin{aligned}(A - BD^TR^{-1}C)Z + Z(A - BD^TR^{-1}C)^T - ZC^TR^{-1}CZ \\ +B(I - D^TR^{-1}D)B^T = 0\end{aligned} \tag{4.7}$$

La factorisation coprime à droite ($G = \tilde{N}\tilde{M}^{-1}$) est définie de manière analogue avec $S := I+D^TD$ et $X \geq 0$ est la solution stabilisante unique de l'équation algébrique généralisée de Riccati

$$\begin{aligned}(A - BS^{-1}D^TC)^TX + X(A - BS^{-1}D^TC) - XBS^{-1}B^TX \\ +C^T(I - DS^{-1}D^T)C = 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

Les facteurs premiers trouvés en (4.4) sont ensuite soumis à des incertitudes non-structurées (Δ_M, Δ_N), caractérisées par des matrices de transfert stables inconnues mais bornées en norme, telles que représentées dans la Figure 4.1.

4.3 Stabilisation robuste

Pour que le contrôleur K (Figure 4.1) soit capable d'atteindre la spécification de stabilité robuste, il doit rendre stable, en plus du modèle nominal, l'ensemble des modèles incertains donné par

$$\mathcal{G}_\epsilon = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N), \quad \| [\Delta_M, \Delta_N] \|_\infty < \epsilon \tag{4.9}$$

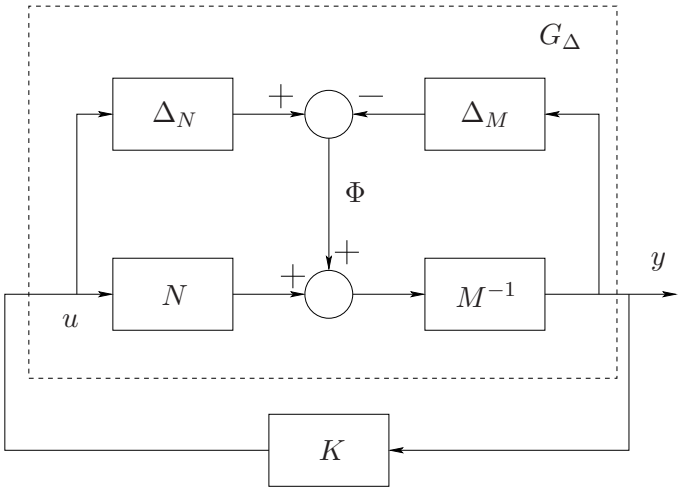

FIG. 4.1 – Incertitude sur les facteurs premiers

avec $\epsilon > 0$ la marge de stabilité. À partir du théorème du faible gain, le système en boucle fermée sera stable de manière robuste si et seulement si le modèle nominal (G, K) est stable de manière interne et

$$\left\| \begin{array}{c} K(I-GK)^{-1}M^{-1} \\ (I-GK)^{-1}M^{-1} \end{array} \right\|_\infty \leq \epsilon^{-1} \tag{4.10}$$

D'après (4.10), la maximisation de la stabilité robuste pour un contrôleur K stabilisant peut être obtenue à partir de la minimisation de

$$\gamma := \left\| \left[\begin{array}{c} K \\ I \end{array} \right] (I-GK)^{-1}M^{-1} \right\|_\infty \tag{4.11}$$

Pour une factorisation première à gauche générique d'une matrice de transfert $G(s)$, la minimisation de γ en (4.11) s'effectue normalement par une procédure itérative [70]. Cependant, si la factorisation est normalisée, la solution non-itérative optimale γ_0 du problème est donnée par

$$\gamma_0 = (1 - \| \, N \; M \, \|_H^2)^{-1/2} \tag{4.12}$$

avec $\| \cdot \|_H$ la norme de Hankel.

D'après [46]

$$\| N \; M \|_H^2 = \lambda_{\max}(ZX(I+ZX)^{-1}) \tag{4.13}$$

et l'équation (4.12) peut s'écrire comme

$$\gamma_0 = (1+\lambda_{\max}(ZX))^{1/2} \tag{4.14}$$

Un controlêur sous-optimal central[3] $\gamma > \gamma_0$ est donné par [46]

$$K := \left[\begin{array}{c|c} A+BF+\gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T(C+DF) & \gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T \\ \hline B^TX & -D^T \end{array}\right] \tag{4.15}$$

avec

$$F = -S^{-1}(D^TC+B^TX) \tag{4.16}$$

et

$$L = (1-\gamma^2)I + XZ \tag{4.17}$$

Dans le cas où $\gamma = \gamma_0$, L dans (4.15) ne peut pas être inversée puisque $L = XZ - \lambda_{\max}(XZ)I$ est singulière. Cependant, une solution alternative en forme de système descripteur pour $\gamma \geq \gamma_0$ est donnée par

$$K := \left[\begin{array}{c|c} -L^Ts + L^T(A+BF) + \gamma^2 ZC^T(C+DF) & \gamma^2 ZC^T \\ \hline B^TX & -D^T \end{array}\right] \tag{4.18}$$

4.4 La méthode de $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping*

La méthode LSDP propose une combinaison des caractéristiques propres aux synthèses *loop-shaping* et $\mathcal{H}_\infty$, en résolvant un problème de stabilisation robuste avec des incertitudes sur les facteurs premiers normalisés [70], en accord avec ce qui a été décrit dans les sections 4.2 et 4.3.

En ce que concerne la synthèse $\mathcal{H}_\infty$, la sélection des filtres de pondération pour la boucle fermée n'est pas immédiate et doit normalement être refaite pour chaque

[3]Tous les contrôleurs optimisant γ sont donnés par $K = UV^{-1}$, avec U et V des factorisations premières stables de K, et $\left\| \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right\|_\infty = \| [N \; M] \|_H$, ce qui peut être résolu avec un algorithme développé par Glover [46].

cas particulier. De plus, les spécifications de boucle fermée peuvent être déterminées sans considérer les propriétés du modèle nominal, ce qui peut entraîner l'annulation des pôles stables du modèle nominal par les zéros du contrôleur [70].

Dans la méthode traditionnelle de façonnage de la boucle, des objectifs souhaités pour le comportement d'un système en boucle fermée sont spécifiés en termes de prérequis sur les valeurs singulières en boucle ouverte du système. Ainsi, pour les fréquences où $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$, les approximations suivantes sont valables :

$$\overline{\sigma}((I - GK)^{-1}) \approx 1/\underline{\sigma}(GK) \tag{4.19a}$$

$$\overline{\sigma}((I - GK)^{-1}G) \approx 1/\underline{\sigma}(K) \tag{4.19b}$$

De la même manière, pour les fréquences où $\overline{\sigma}(GK) \ll 1$, nous obtenons :

$$\overline{\sigma}(K(I - GK)^{-1}) \approx \overline{\sigma}(K) \tag{4.20a}$$

$$\overline{\sigma}(GK(I - GK)^{-1}) \approx \overline{\sigma}(GK) \tag{4.20b}$$

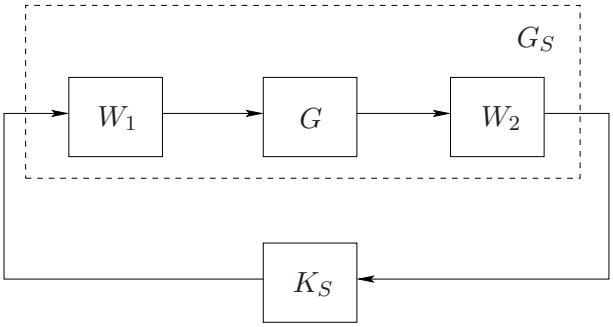

FIG. 4.2 – Schéma LSDP

D'après les considérations ci-dessus et prenant en compte le schéma de la Figure 4.2, la synthèse par LSDP consiste en les étapes suivantes [46] :

1. Choisir les filtres W_1 et/ou W_2 pour former le système en boucle ouverte souhaité G_S à partir du système en boucle ouverte nominal identifié G ($G_S = W_2GW_1$) en utilisant les approximations (4.19) et (4.20) dans les plages de fréquence appropriées. Il faut que W_1 et W_2 soient tels que G_S ne possède pas de modes cachés[4] ;
2. Après une factorisation première du système fictif G_S (4.4), faire la synthèse

[4]Tous les modes doivent être commandables et observables.

du contrôleur K_S qui rend la boucle fermée de K_S avec G_S stable de manière robuste. K_S est calculé comme étant le K dans (4.15) ou (4.18) ;

3. Le contrôleur K correspondant pour le système original G sera alors donné par $K = W_1 K_S W_2$.

En ce que concerne la marge de stabilité ϵ (4.9), c'est à la fois une mesure de la stabilité robuste mais aussi un indicateur que les spécifications données par le *loop-shaping* ont été atteintes [110]. Pour un ϵ supérieur à 0,2, la réponse fréquentielle de $K_S W_2 G W_1$ est similaire à celle de $W_2 G W_1$, tandis que la stabilité robuste est obtenue pour la plus grande partie des applications typiques de commande [46].

4.5 Résultats expérimentaux dans le cas nominal

Conformément à ce qui a été fait dans le chapitre 3, nous commençons par montrer les résultats pratiques de synthèse de contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping* pour le cas du robot avec 2,5 kg de charge, considéré comme le cas nominal. Une vérification expérimentale de la robustesse du système en boucle fermée pour des trajectoires différentes (temps de cycle différents) est ensuite réalisée. La sensibilité du contrôleur obtenu vis-à-vis de variations des paramètres des filtres de pondération est analysée.

4.5.1 Charge de 2,5 kg et trajectoire de 18 g

Pour utiliser la technique LSDP développée dans la section 4.4, les filtres de pondération W_1 et W_2, permettant la construction d'un modèle en boucle ouverte G_S représentant la fonction de transfert fictive souhaitée (à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte originale *mod ctrl 2,5kg*), ont été choisis comme

$$W_1 = \frac{0.055(s+300)(s+1600)^2}{(s+100)^3} \tag{4.21}$$

$$W_2 = 1 \tag{4.22}$$

En comparaison avec les filtres de pondération des fonctions de sensibilité en boucle fermée choisis dans le chapitre précédent pour la technique $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte, les filtres sont ici d'ordre plus faible permettant que leur choix se fasse d'une manière beaucoup plus rapide.

La Figure 4.3 montre le modèle *mod sim 2,5kg* utilisé en simulation pour valider le contrôleur, ainsi que le modèle en boucle ouverte *mod ctrl 2,5kg* et sa version pondérée

G_S, utilisée pour la synthèse du correcteur par la méthode LSDP. La fonction G_S est construite de manière à obtenir des gains plus élevés en basses fréquences, pour que la fonction de sensibilité en boucle fermée (déterminant l'influence des perturbations sur la sortie du système), soit plus petite dans ces fréquences. Un autre aspect également important pour G_S est que, aux hautes fréquences, ses gains décroissent en même temps que la fréquence augmente, pour éviter le phénomène de *spillover*.

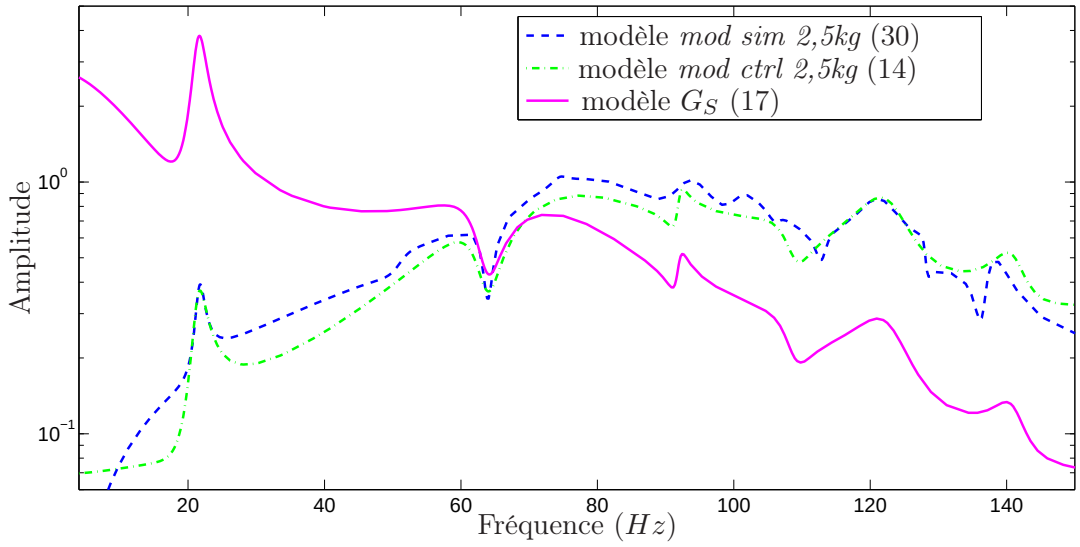

FIG. 4.3 – Pondération de la boucle ouverte pour le LSDP

Suivant la procédure de synthèse LSDP décrite dans la section 4.4, le système fictif G_S est alors soumis à une factorisation première avec des incertitudes sur les facteurs premiers associés, ce qui permet par la suite de trouver le contrôleur K_S rendant stable de manière robuste la boucle fermée. Le contrôleur K_{LS} pour le modèle original *mod ctrl 2,5kg* est retrouvé à partir de la multiplication $K_{LS} = W_1 K_S W_2$, en accord avec la Figure 4.2. D'un ordre initial 19, il est réduit à un contrôleur K_{LSr} d'ordre 4, après avoir été transformé en une réalisation équilibrée. La fonction de transfert du contrôleur réduit K_{LSr} trouvé est

$$K_{LSr} = \frac{-0.44(s^2 + 9s + 1.32e4)(s^2 - 232s + 4.2e5)}{(s^2 + 159s + 6987)(s^2 + 29.6s + 1.48e4)} \tag{4.23}$$

Dans la Figure 4.4 nous pouvons voir que la réponse fréquentielle du contrôleur réduit est très proche de celle du contrôleur d'ordre complet.

Dans la Figure 4.5, les modes dominants en boucle ouverte, en bleu, et en boucle

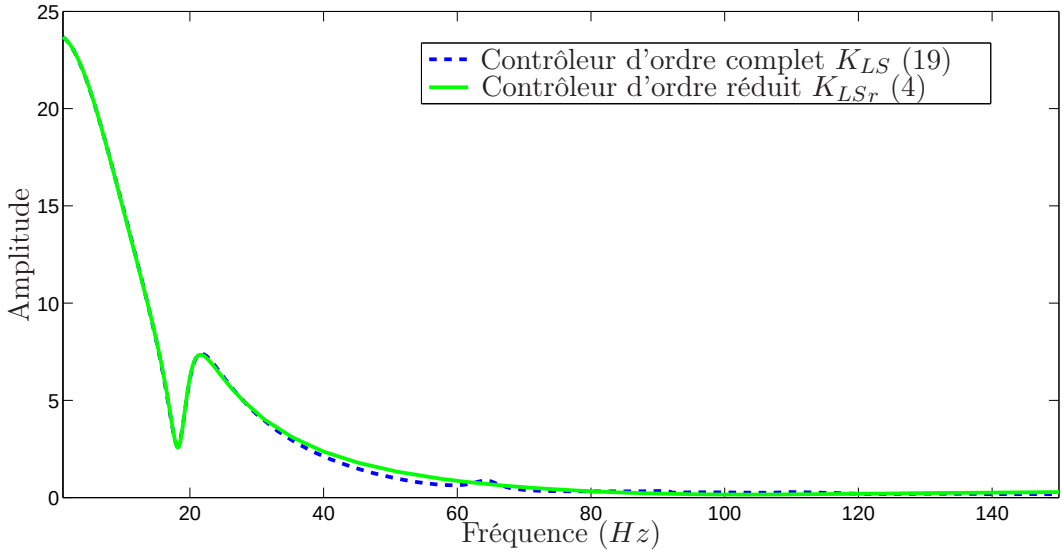

FIG. 4.4 – Contrôleurs d'ordres complet et réduit

fermée, en vert, sont comparés, considérant le modèle *mod sim 2,5kg* et le contrôleur réduit. Les paires (en boucle ouverte et fermée) des modes avec fréquences de résonance autour de 21,7 Hz (dans la région entourée par le cercle pointillé) augmentent leur amortissement de 0,032 (en boucle ouverte) à 0,06 (en boucle fermée). Cela traduit une réduction des vibrations liées au premier mode de résonance du système supérieure à celle obtenue pour le contrôleur K_{SMr} (dans le chapitre 3), où l'amortissement en boucle fermée était de 0,045.

La fonction de sensibilité pour le modèle *mod sim 2,5kg* avec le contrôleur réduit K_{LSr}, $S_{LS} = (1 - GK_{LSr})^{-1}$, est représentée sur la Figure 4.6. Nous pouvons observer que pour les fréquences autour de 21,7 Hz les perturbations sont bien atténuées. Tel que cela était attendu, la comparaison de la Figure 4.6 avec la Figure 3.11 met en évidence que l'atténuation en basse fréquence dans le cas de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par *Loop Shaping* est plus importante que celle obtenue avec la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte.

Les spectres de fréquence de la simulation du système en boucle fermée avec le modèle *mod sim 2,5kg* et le contrôleur réduit K_{LSr}, de la vraie perturbation d (données expérimentales en boucle ouverte) et de la réponse du système physique, bouclé avec K_{LSr} (données expérimentales en boucle fermée), sont représentés dans la Figure 4.7 (en détail entre 17 Hz et 23 Hz). Ils montrent bien l'atténuation que le correcteur a apporté au système en boucle fermée autour de 21,7 Hz.

La réponse dans le domaine temporel (en détail pour l'intervalle de temps entre

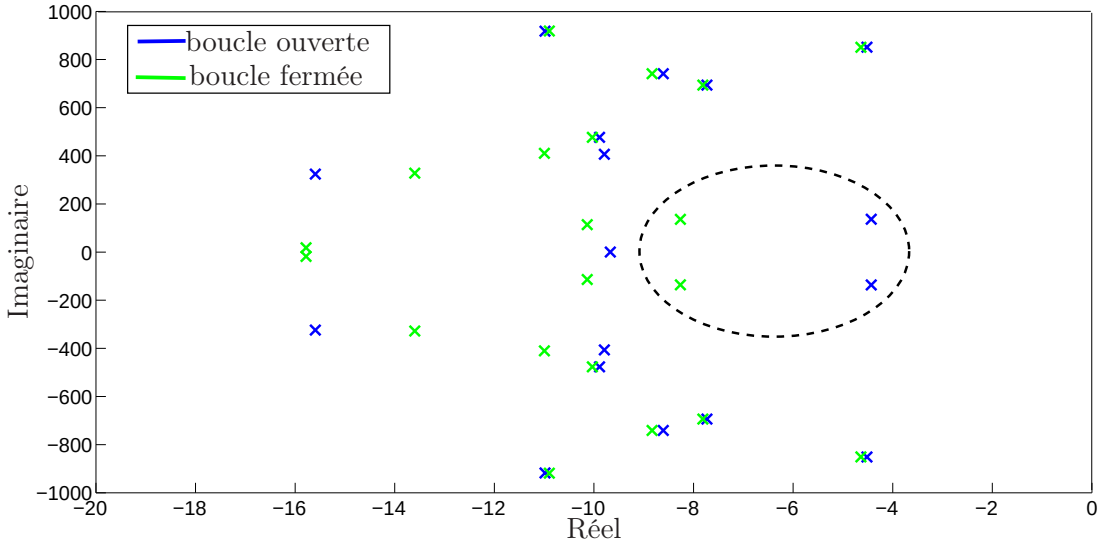

FIG. 4.5 – Modes dominants en boucle ouverte et boucle fermée

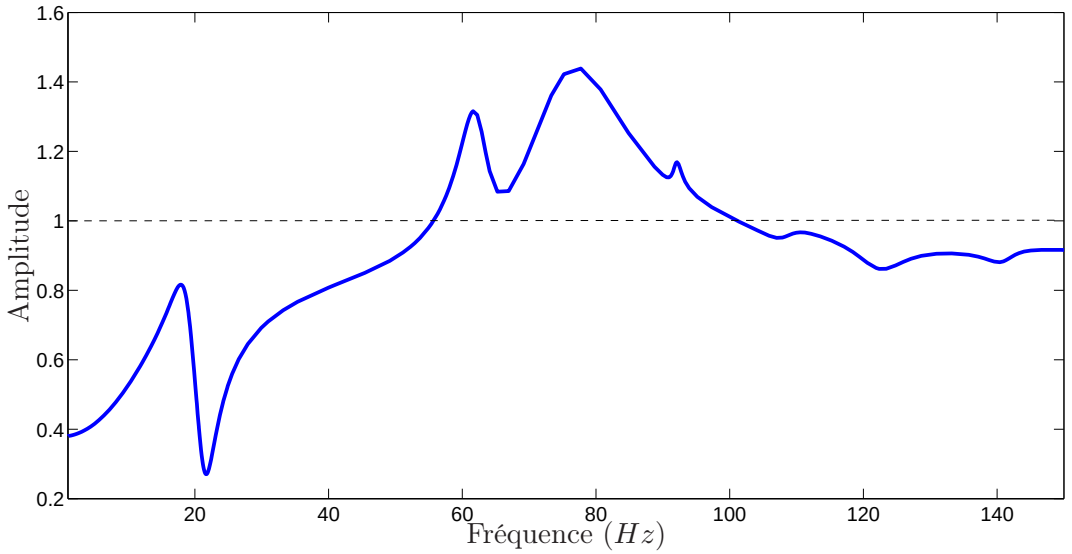

FIG. 4.6 – Fonction de sensibilité S_{LS} - modèle *mod sim 2,5kg* avec le contrôleur réduit K_{LSr}

0,1 s et 0,6 s) et l'effort de commande sont montrés dans les Figures 4.8 et 4.9, respectivement.

La valeur de ϵ (4.9) trouvée pour la synthèse du contrôleur est 0,767. Tel que mentionné à la fin de la section 4.4, cette valeur de ϵ supérieure à 0,2 indique nor-

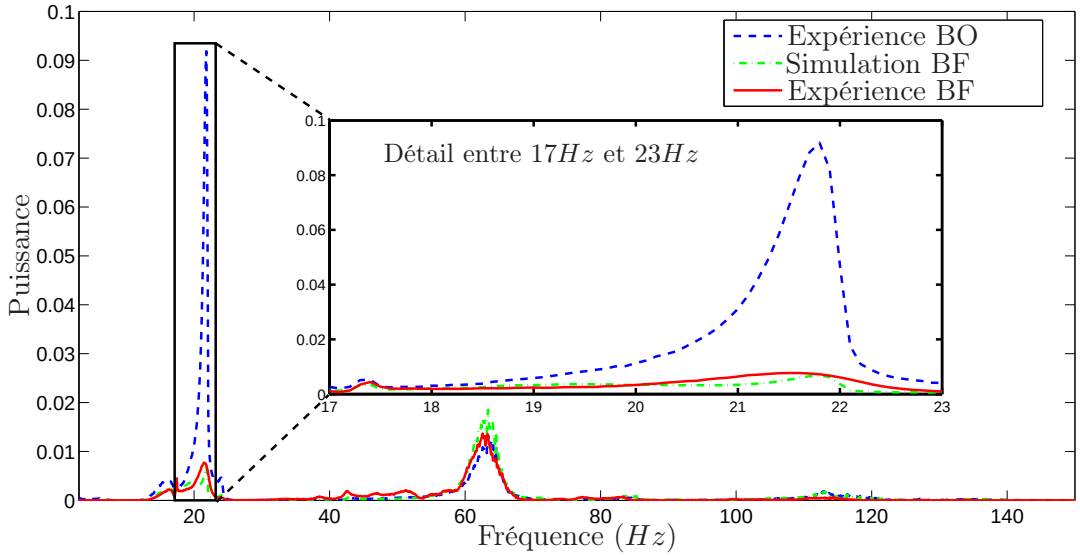

FIG. 4.7 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoire de 18 g - Spectre de puissance

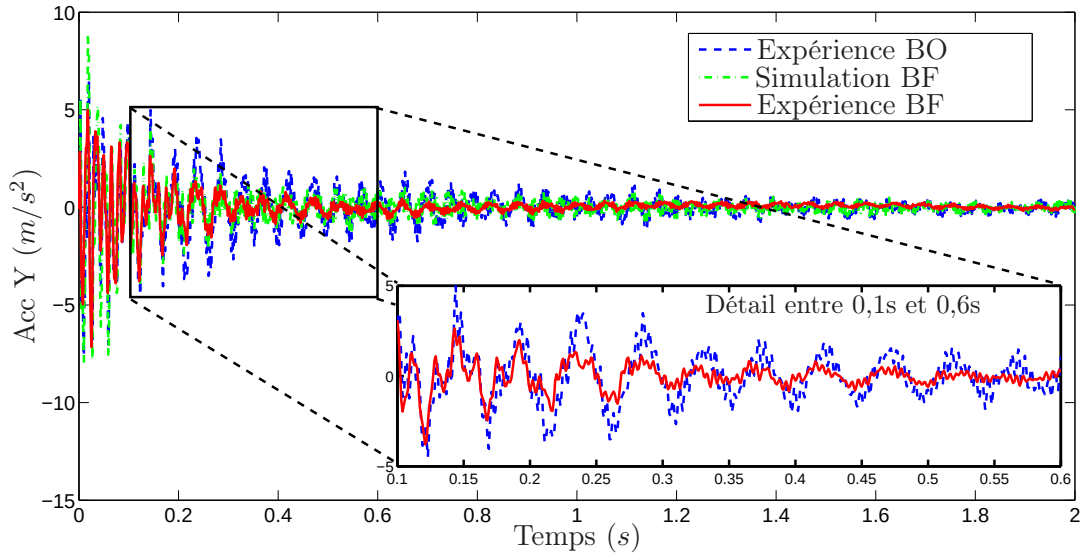

FIG. 4.8 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoire de 18 g - Réponses simulées et réponses expérimentales

malement une bonne marge de stabilité et le respect des spécifications établies par le *loop-shaping*.

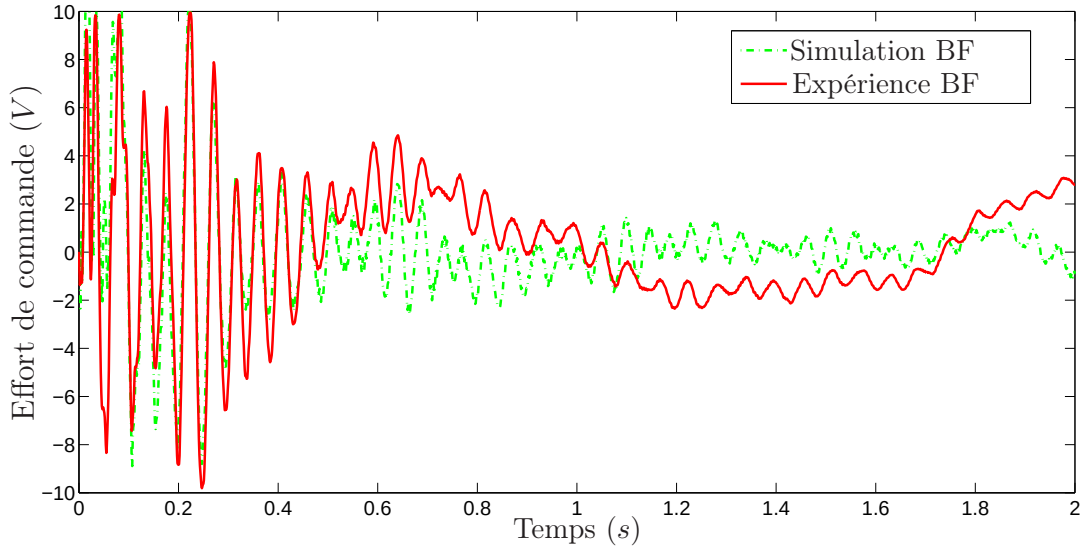

FIG. 4.9 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoire de 18 g - Effort de commande

4.5.2 Charge de 2,5 kg et trajectoires de 15 g et 10 g

Vérifions maintenant la robustesse du contrôleur K_{LSr} pour les situations où la trajectoire change à 15 g et à 10 g. Dans les Figures 4.10 et 4.11 nous pouvons observer, dans les domaines fréquentiel et temporel, respectivement, l'atténuation obtenue expérimentalement pour ces deux trajectoires.

De manière prévisible puisque le système n'a pas changé et le principal mode de vibration engendré par les trajectoires de 15 g et 10 g reste centré en 21,7 Hz le système bouclé atténue les vibrations. La Figure 4.11 indique que les vibrations pour les trajectoire de 15 g et 10 g sont atténuées à partir de 0,1 s.

4.5.3 Sensibilité du contrôleur au changement de pondération des filtres

Le choix des filtres de pondération pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping* a été réalisé de manière beaucoup plus simple et rapide que celle de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte. En plus de l'obtention de résultats satisfaisants avec des filtres d'ordre plus faible, l'effet de changement des valeurs des filtres sur la fonction de sensibilité S_{LS} est nettement plus faible que dans le cas de sensibilité mixte (Figure 3.18), comme nous pouvons l'observer sur la Figure 4.12.

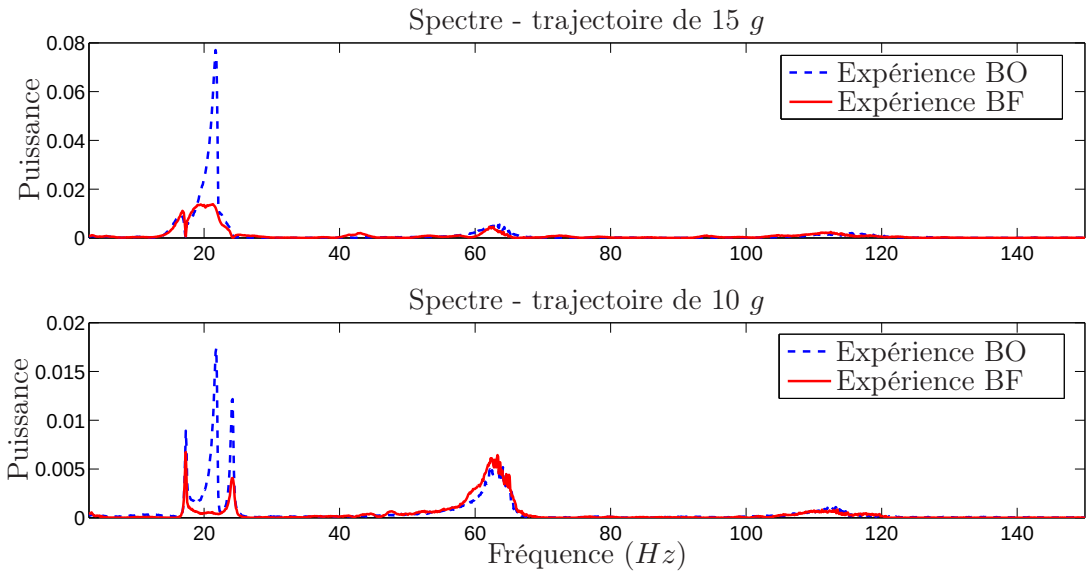

FIG. 4.10 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoires de 15 g et 10 g - Spectre de puissance

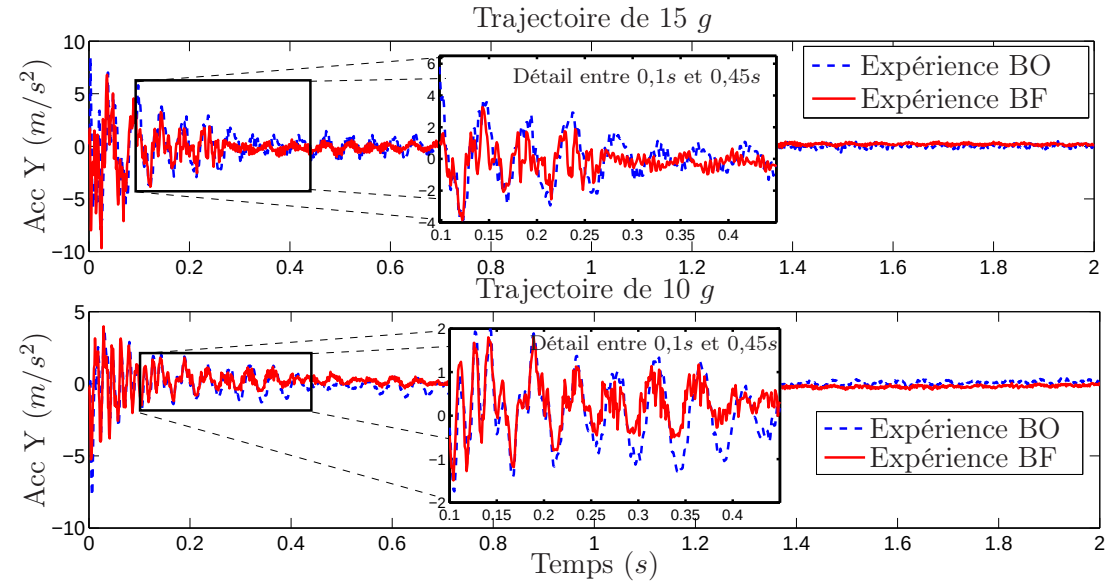

FIG. 4.11 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoires de 15 g et 10 g - Réponse temporelle

La courbe en bleu est la courbe originale S_{LS}, déjà représentée sur la Figure 4.6. Jouant sur les paramètres du filtre W_1 (4.21), les courbes qui suivent correspondent, respectivement, à la variation du gain de 0,055 à 0,06 et 0,05, aux changements du

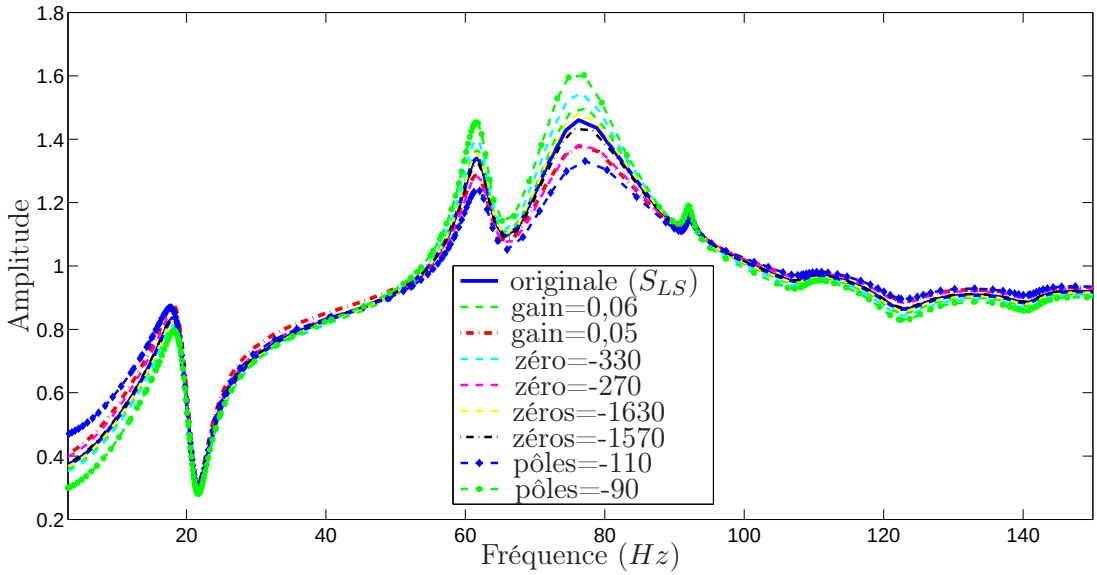

FIG. 4.12 – Effet des filtres de pondération sur la fonction de sensibilité

zéro simple de -300 à -330 et -270 et du zéro double de -1600 à -1630 et -1570 et, finalement, à la variation du pôle triple de -100 à -110 et -90. Nous pouvons constater que la fonction de sensibilité S_{LS} s'avère beaucoup plus robuste que la fonction S_{SM} au changement de paramètres de filtres de pondération, ce qui contribue à rendre la méthode $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping* plus simple.

4.6 Résultats expérimentaux sur tout l'espace de travail

Dans certains cas particuliers, on constate que pour une variation de charge et/ou de trajectoire, le correcteur synthétisé ne permet pas d'atténuer les vibrations et engendre même des saturations de la commande. Pour couvrir toute l'enveloppe de conditions opératoires desirée, deux stratégies sont envisagées. La première est basée sur la synthèse d'un nouveau contrôleur, tandis que la deuxième consiste à rajouter au contrôleur K_{LSr} un terme additionnel qui n'intervient qu'à l'instant où l'action de commande est saturée.

4.6.1 Robustesse à des variations de charge et de trajectoire

Dans cette section nous nous intéressons à la validation expérimentale du contrôleur K_{LSr} dans les situations où, à la fois la charge et la trajectoire varient. Tel que cela a été fait dans [5], nous utilisons la valeur RMS[5] de l'accélération mesurée dans la direction Y comme indice de performance. Les pourcentages de réduction d'accélération RMS dans les deux premières secondes d'expérience du système en boucle fermée avec le contrôleur K_{LSr} par rapport au système en boucle ouverte, pour différentes trajectoires et conditions de charge sur la nacelle, sont représentés sur la Figure 4.13.

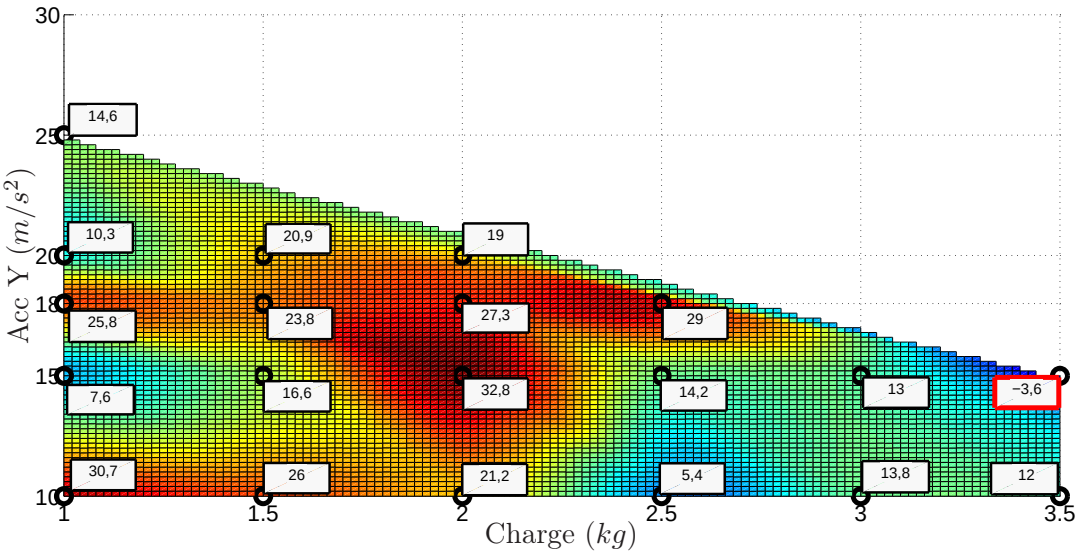

FIG. 4.13 – Résultats expérimentaux - Pourcentage de réduction d'accélération RMS durant les 2 premières secondes - Système en boucle fermée avec K_{LSr} par rapport à la boucle ouverte

D'après la Figure 4.13 nous pouvons remarquer que, pour l'indice de performance considéré, la réponse expérimentale du système en boucle fermée avec le contrôleur K_{LSr} est supérieure à celle de la boucle ouverte pour presque toutes les situations de charge et trajectoires considerées, les exceptions étant le système avec 3,5 kg de charge et trajectoire de 15 g, représenté dans un rectangle rouge, et les situations

[5]La valeur efficace (dite aussi valeur RMS, de l'anglais *Root Mean Square*) d'un signal périodique ou d'un signal aléatoire ergodique, est la racine carré du moment d'ordre deux du signal

$$RMS = \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt} \tag{4.24}$$

.

à vide. Ce dernières ne sont pas représentées sur le tableau car elles ont présenté un comportement instable (ces deux cas particuliers seront traités dans la suite du chapitre).

Nous pouvons constater, à titre d'exemple, la grande réduction au niveau des réponses RMS pour toutes les trajectoires du système avec 2 kg de charge. Avec 2 kg de charge, les trajectoires engendrent, au moment où la nacelle arrive au point d'arrêt, des perturbations concentrées autour de 23 Hz. En analysant la fonction de sensibilité obtenue à partir du modèle *mod sim 2kg* avec le contrôleur K_{LSr}, Figure 4.14, on constate que l'amortissement le plus important est justement prévu pour les fréquences autour de 23 Hz. Les réponses temporelles du système avec 2 kg de charge et trajectoires de 10 g, 15 g, 18 g et 20 g sont représentées sur la Figure 4.15.

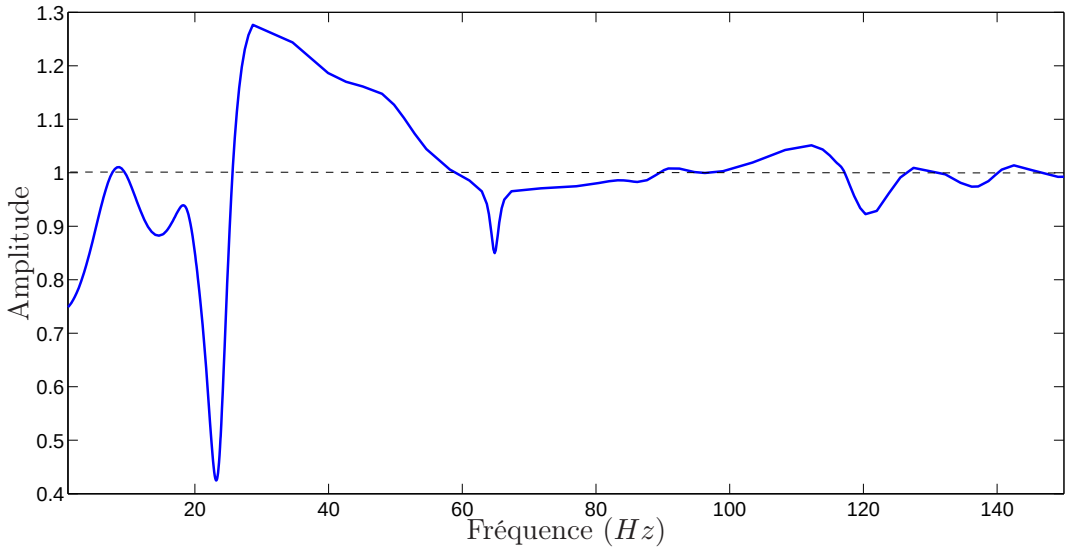

FIG. 4.14 – Fonction de sensibilité - modèle *mod sim 2kg* avec le contrôleur réduit K_{LSr}

Pour le cas de la nacelle chargée avec 3,5 kg et une trajectoire de 15 g, l'expérience pratique a montré que l'accélération RMS en boucle fermée augmente de 3,6% par rapport à celle de la boucle ouverte (Figure 4.13). La réponse temporelle et l'effort de commande associés à cette situation sont illustrés sur la Figure 4.16. Ce n'est qu'après 0,55 s que les oscillations de la réponse temporelle en boucle fermée commencent à avoir des amplitudes plus faibles que celles de la boucle ouverte. L'effort de commande, quant à lui, présente des saturations jusqu'à peu près 0,35 s.

L'autre cas déjà cité où le système en boucle fermée avec le contrôleur K_{LSr}

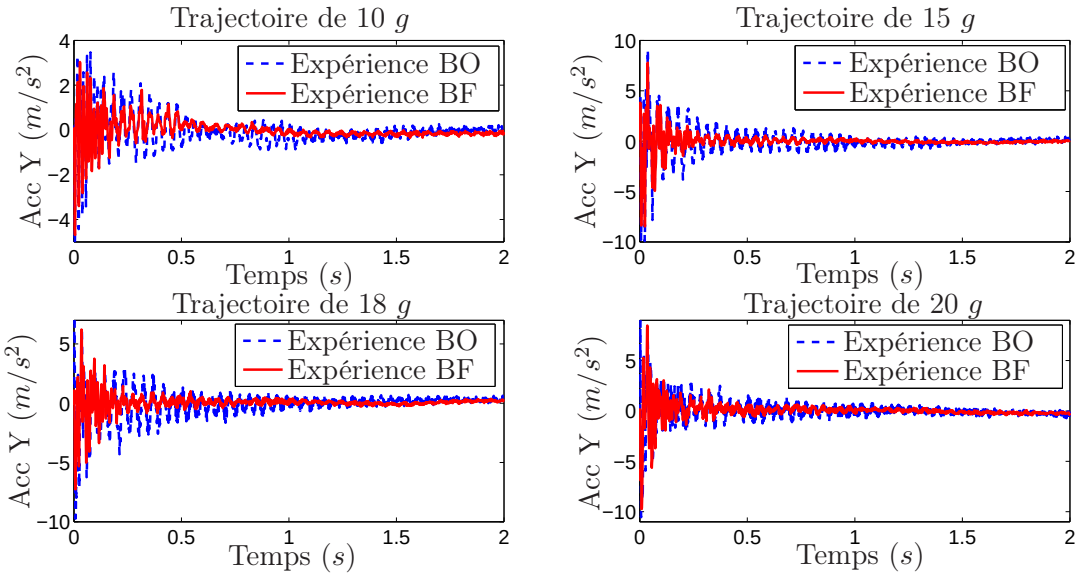

FIG. 4.15 – Résultats expérimentaux - Robot avec 2 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoires de 10 g, 15 g, 18 g et 20 g - Réponse temporelle

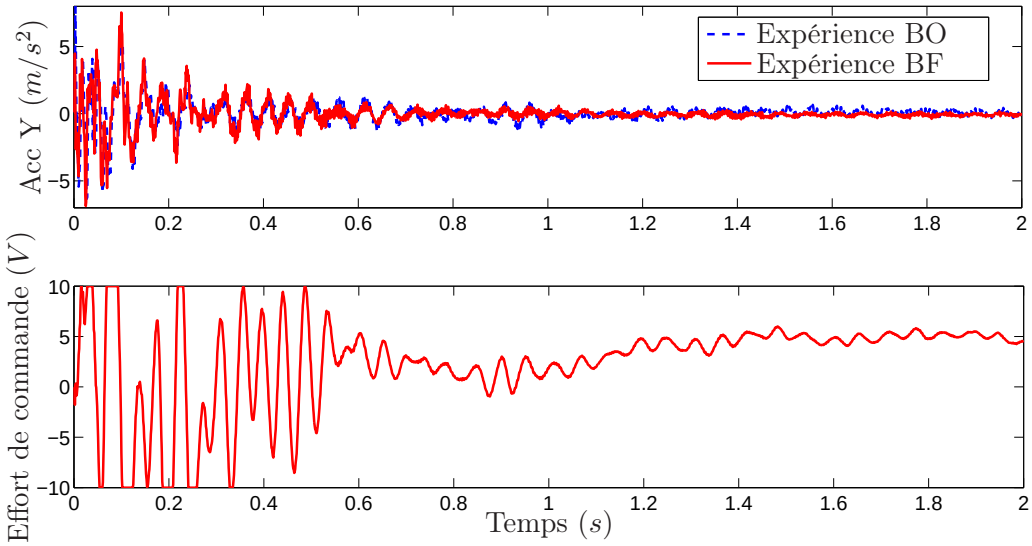

FIG. 4.16 – Résultats expérimentaux - Robot avec 3,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSr} - Trajectoire de 15 g - Réponse temporelle et effort de commande

n'arrive pas à améliorer la performance par rapport à celle de la boucle ouverte se produit lorsque la nacelle est à vide. Dans cette situation, la réponse temporelle du système en boucle fermée, pour toutes les trajectoires testées (10 g, 15 g, 18 g, 20 g,

25 g et 30 g), présente qualitativement le même comportement. Il est illustré sur la Figure 4.17 pour les trajectoires de 10 g, 20 g et 30 g.

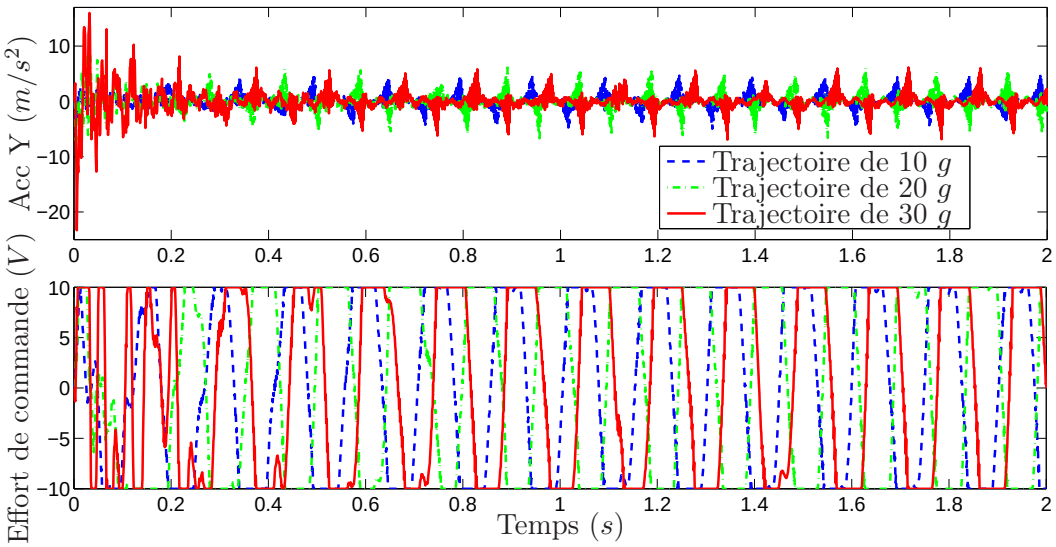

FIG. 4.17 – Résultats expérimentaux - Robot à vide, contrôleur réduit K_{LS_r} - Trajectoires de 10 g, 20 g et 30 g - Réponse temporelle et effort de commande

4.6.2 Analyse du contrôleur nominal

Les résultats expérimentaux présentés dans les Figures 4.16 et 4.17 mettent en évidence l'influence de la saturation de l'actionneur piézo-électrique sur le comportement du système bouclé avec le contrôleur nominal K_{LS_r}. En effet, la synthèse du contrôleur K_{LS_r} a été effectuée non seulement sur le système nominal (robot avec 2,5 kg de charge), mais aussi sans se préoccuper explicitement de la présence des limitations de l'actionneur[6]. Dans la réalité, le schéma-bloc initialement présenté dans le chapitre 1 sur la Figure 1.17 doit ainsi être modifié tel que présenté sur la Figure 4.18.

Ainsi, la mise en oeuvre de contrôleurs conçus sans prendre en compte ces limitations peut avoir des conséquences indésirables ou même catastrophiques pour le système [9] [95] [94] [53] [44] [96]. En particulier la saturation du signal de commande peut conduire à des dégradations de performances (c'est le cas du robot avec 3,5 kg de charge pour une trajectoire de 15 g, illustré sur la Figure 4.16) ou même à la perte

[6]Elles sont implicitement prises en compte dans le choix des pondérations qui façonnent la boucle ouverte G_s, ou dans le choix de la pondération W_2 de la commande $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte (Chapitre 3).

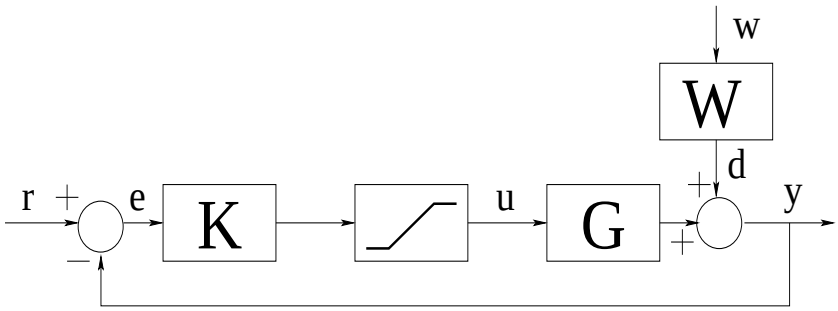

FIG. 4.18 – Schéma-bloc du système bouclé saturé

de la stabilité (c'est le cas du robot à vide, illustré sur la Figure 4.17). La motivation et l'intérêt pour l'analyse et la synthèse de contrôleurs pour les systèmes avec saturations sont d'ailleurs directement issus de ces problèmes pratiques.

Il existe ainsi des méthodes d'analyse *a posteriori* du comportement d'un système bouclé lorsque l'interconnexion entre le contrôleur et le système à commander est effectuée à travers un élément non-linéaire de type saturation. Ces méthodes permettent généralement de déterminer des domaines de fonctionnement sûr convexes[7] ou des bornes sur les perturbations admissibles. Leur mise en oeuvre numérique ne pose généralement pas de problèmes, mais les domaines de fonctionnement sûrs et/ou de perturbation admissibles peuvent, dans certains cas, être relativement conservatifs. Ces méthodes n'en demeurent pas moins très utiles pour évaluer les risques de déstabilisation du système bouclé et permettent d'éviter d'effectuer des campagnes de test par simulation, très coûteuses en temps.

En l'occurrence, la proposition C.0.1 décrite dans l'annexe C peut être utilisée pour analyser la stabilité du système bouclé avec le contrôleur K_{LS_r}, dans le cas d'une limitation des l'actionneur piézo-électrique $u_0 = 10$ volts.

Différents modèles de la nacelle, à vide, avec 2 kg de charge, avec 2,5 kg de charge (cas pour lequel le contrôleur K_{LS_r} a été calculé) et avec 3,5 kg de charge sont évalués. Pour chacun de ces modèles, le filtre $W(s)$ (conférer modèle (C.1)) concentre la perturbation sur la plage fréquentielle du pic de résonance associé à la charge, tel que décrit dans le Chapitre 1 (Section 1.4.3).

Dans un premier temps, l'analyse du système bouclé est effectuée en considérant un niveau de perturbation borné a priori $\delta = 0,2$[8], et en minimisant la borne γ sur le

[7] On parle dans ce cas de stabilité locale, par opposition au cas global, pour lequel la stabilité est garantie dans tout l'espace.

[8] δ^{-1} correspond à la borne $\mathcal{L}_2$ du signal w limité en énergie : $\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w(t)'w(t)dt \leq \delta^{-1}$.

transfert de la perturbation vers l'accélération de la nacelle[9]. La borne γ obtenue dans ce cas (colonne 3 du Tableau 4.1) est à comparer avec la performance du contrôleur (toujours en terme de γ) que l'on obtiendrait si l'actionneur n'était pas limité à ± 10 volts (colonne 2 du Tableau 4.1).

Le deuxième cas traité consiste à rechercher le plus petit δ (la plus grande perturbation admissible) pour lesquelles les conditions de la Proposition C.0.1 sont satisfaites, avec comme condition supplémentaire que le transfert de la perturbation sur l'accélération de la nacelle $\gamma \leq 0,9$ dans le problème d'optimisation (colonne 4 du Tableau 4.1). Ce cas correspond à la recherche de la plus grande perturbation admissible telle que le contrôleur piézo-électrique, du fait des saturations, ne se traduira pas par des vibrations pires que la boucle ouverte, même si les performances attendues en terme de rejet sont très limitées (10 % de réduction de la vibration).

TAB. 4.1 – Analyse du système saturé bouclé avec le contrôleur K_{LS_r}

modèle	borne γ sans limitation	borne min γ ($\delta = 0,2$)	borne min δ ($\gamma = 0,9$)
à vide	165,27	non faisable	non faisable
2kg de charge	0,52	1,98	0,75
2,5kg de charge	0,08	1,00	0,22
3,5kg de charge	0,80	1,97	1,12

Les résultats obtenus présentés dans le Tableau 4.1 mettent en évidence que le contrôleur K_{LS_r}, construit sur le modèle *mod ctrl 2,5kg*, n'est absolument pas adapté au système à vide (γ très élevé sans limitation et aucune garantie de stabilité pour le niveau de perturbation requis en présence de saturation), et mal adapté aux systèmes à 2 et 3,5 kg de charge, même dans le cas sans limitation de l'actionneur (colonne 2 du Tableau). Sans limitation de l'actionneur, les performances attendues sont environ 10 fois meilleures pour le cas nominal (2,5 kg) que pour les cas à 2 et 3,5 kg. Avec limitation de l'actionneur, seul le cas nominal est garanti ne pas amplifier les vibrations ($\gamma = 1$), mais les performances sont très dégradées par rapport au cas sans limitation. Cette analyse permet cependant de confirmer que le contrôleur K_{LS_r} est bien adapté au modèle *mod ctrl 2,5kg*.

Trois options peuvent être envisagées pour résoudre les cas où la boucle fermée

Selon la charge et la trajectoire, δ est généralement compris entre 0,5 et 0,15.

[9] le gain $\mathcal{L}_2$, γ, entre la perturbation et l'accélération de la nacelle est défini par $\int_0^T y_G(t)' y_G(t)\, dt \leq \gamma \int_0^T w(t)' w(t)\, dt, \forall T \geq 0$.

avec le contrôleur K_{LS_r} ne permet pas d'amortir les accélérations RMS :

- La première option consiste à effectuer une synthèse de contrôleur pour les différents cas de charge (robot à vide, robot à faible charge, robot à moyenne charge, robot à charge élevée...). L'avantage de cette approche est de pouvoir disposer de contrôleurs "optimisés" pour ces différents cas de figure. L'inconvénient est de ne pas disposer d'un contrôleur unique sur tout l'espace de travail, ce qui rend plus compliquée leur implémentation sur le dispositif expérimental. C'est pour cette raison que cette approche n'est pas retenue dans ce travail.
- La deuxième option consiste à reprendre la synthèse du contrôleur nominal pour construire un contrôleur plus "doux" qui sollicitera moins l'actionneur et diminuera les risques de saturations et par là même de détérioration des performances d'atténuation des vibrations. Cette approche fait l'objet de la section 4.6.3.
- La troisième option consiste à modifier le contrôleur *a posteriori*. C'est en particulier le cas des méthodes anti-windup. Le principe de base de ces méthodes de retouche de contrôleurs est de ne modifier le contrôleur que lorsque les saturations sont actives. Ainsi les performances obtenues sans tenir compte des saturations restent valables dans la zone de fonctionnement linéaire, et seul le comportement du système lorsque l'actionneur sature est modifié. Cette approche, dont les principes sont décrits brièvement dans l'annexe C fait l'objet de la section 4.6.4.

4.6.3 Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping* "doux"

Pour obtenir un contrôleur unique réduisant les vibrations sur toute l'enveloppe de conditions opératoires désirée, en particulier aussi dans les cas non résolus avec le contrôleur K_{LS_r}, une deuxième synthèse de contrôleur est effectuée. Un nouveau contrôleur plus "doux" K_{LSd} est donc conçu, en reduisant le gain du filtre de pondération W_1 de 0,2 à 0,1.

D'un ordre initial 19, il est réduit à un contrôleur K_{LSdr} d'ordre 4, après avoir été transformé en une réalisation équilibrée. La fonction de transfert du contrôleur réduit K_{LSdr} trouvé est

$$K_{LSdr} = \frac{-0.15(s^2 + 0.44s + 1.21e4)(s^2 - 187s + 4.9e5)}{(s^2 + 162s + 7169)(s^2 + 28.7s + 1.41e4)} \tag{4.25}$$

La valeur de ϵ (4.9) trouvée pour la synthèse du contrôleur est 0,861, indiquant une

bonne marge de stabilité et le respect des spécifications établies par le *loop-shaping*.

La Figure 4.19 montre la fonction de sensibilité pour le modèle *mod sim 2,5kg* avec le contrôleur K_{LSdr}.

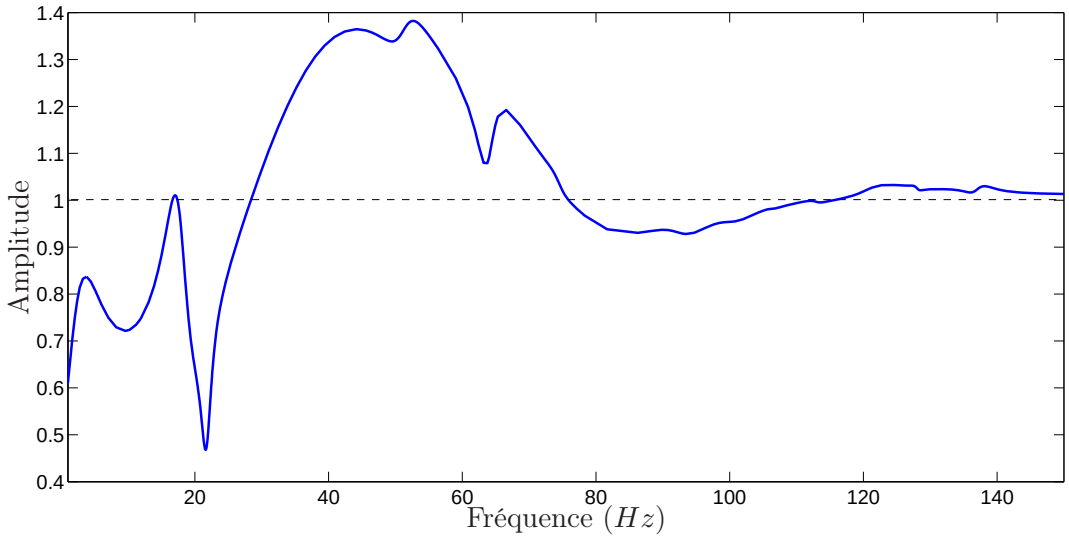

FIG. 4.19 – Fonction de sensibilité - modèle *mod sim 2,5kg* avec le contrôleur réduit K_{LSdr}

Comparant la Figure 4.19, obtenue pour le contrôleur K_{LSdr}, avec la Figure 4.6, obtenue pour le contrôleur K_{LSr}, nous pouvons remarquer que l'atténuation attendue pour les fréquences autour de 21,7 Hz est plus faible dans le cas du contrôleur "doux". Cela est vrai aussi pour toutes les autres conditions de charge essayées. La conséquence est visible dans la Figure 4.20, où les réductions (en pourcentage) des accélérations RMS pour le système en boucle fermée avec le contrôleur K_{LSdr} par rapport au système en boucle ouverte sont presque toutes plus petites que celles obtenues avec le contrôleur K_{LSr} (Figure 4.13).

L'avantage, pourtant, est que maintenant, par rapport à la boucle ouverte, pour toutes les conditions de charge et trajectoires testées les résultats sont améliorés en terme du critère de performance choisi, y compris pour le cas de la nacelle avec 3,5 kg de charge avec trajectoire de 15 g et de la nacelle à vide pour toutes les trajectoires.

La Figure 4.21 montre la réponse temporelle et l'effort de commande avec le contrôleur K_{LSdr} pour le cas de la nacelle chargé avec 3,5 kg et une trajectoire de 15 g. Même si l'atténuation est remarquable surtout à partir de 0,5 s, déjà à partir de 0,1 s le système en boucle fermée présente une performance légèrement supérieure à

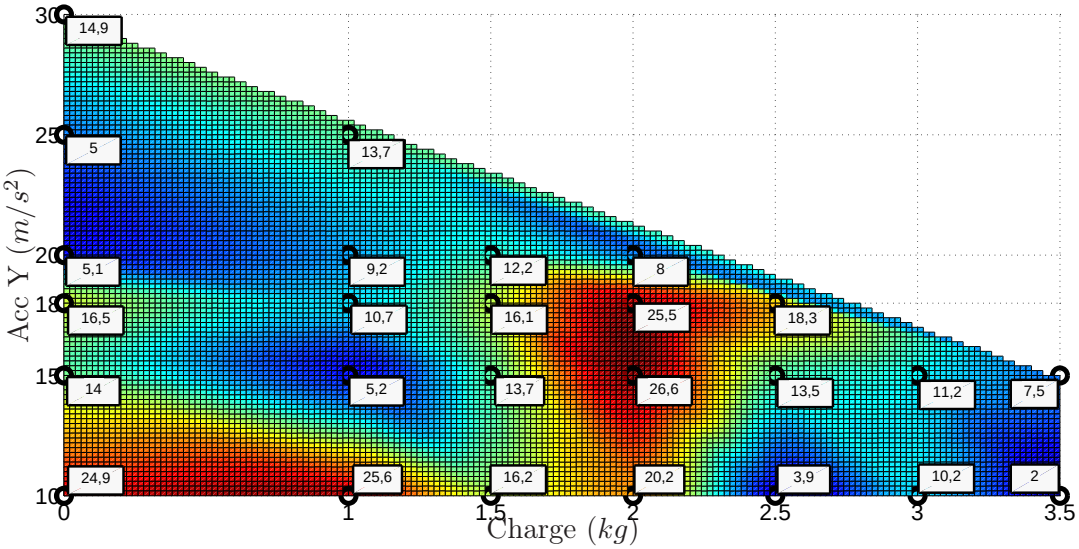

FIG. 4.20 – Résultats expérimentaux - Pourcentage de réduction d'accélération RMS durant les 2 premières secondes - Système en boucle fermée avec K_{LSdr} par rapport à la boucle ouverte

celle de la boucle ouverte. Comme espéré, le contrôleur "doux", K_{LSdr}, produit des efforts de commande plus faibles que le contrôleur K_{LSr}.

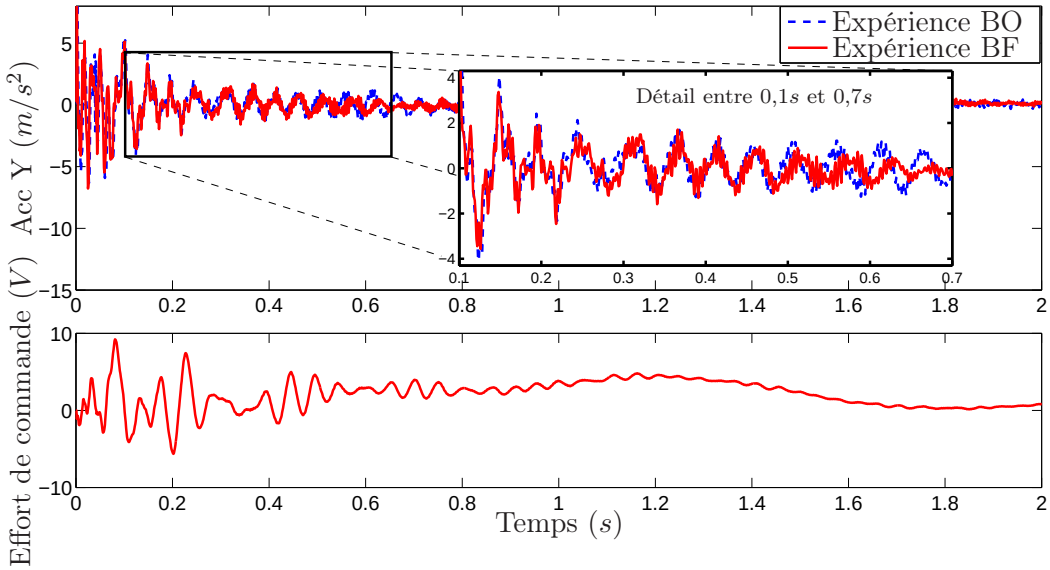

FIG. 4.21 – Résultats expérimentaux - Robot avec 3,5 kg de charge, contrôleur réduit K_{LSdr} - Trajectoire de 15 g - Réponse temporelle et effort de commande

La Figure 4.22 illustre la réponse temporelle avec le contrôleur K_{LSdr} pour le cas de la nacelle à vide et les trajectoires de 10 g, 20 g et 30 g. Dans les trois expériences la réponse temporelle en boucle fermée est meilleure (en terme de niveau de vibration) que celle de la boucle ouverte.

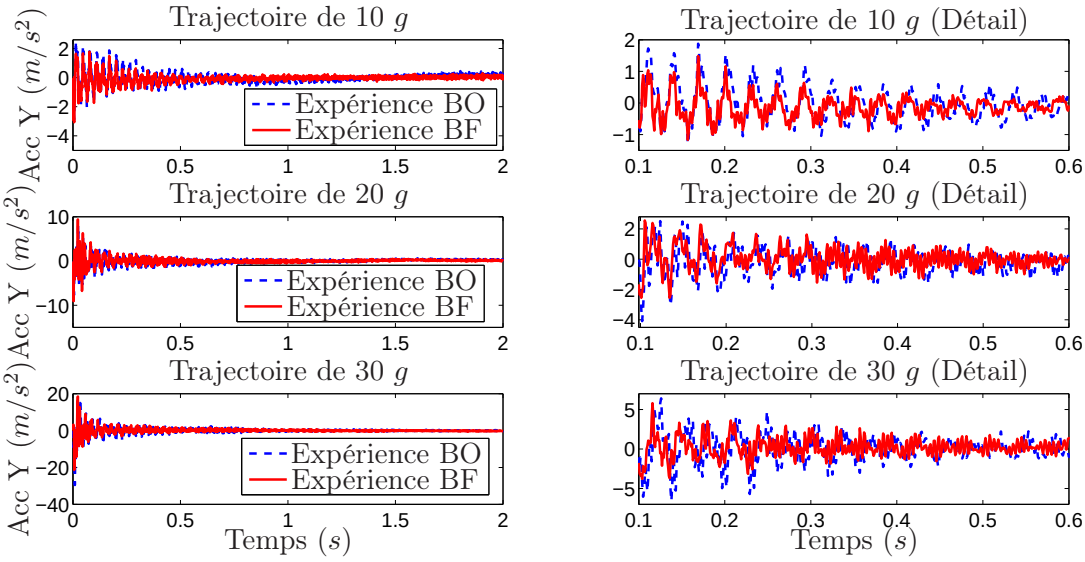

FIG. 4.22 – Résultats expérimentaux - Robot à vide, contrôleur réduit K_{LSdr} - Trajectoires de 10 g, 20 g et 30 g (avec détails entre 0,1 s et 0,6 s) - Réponse temporelle

Comme précédemment, l'analyse du contrôleur K_{LSd_r}, dans les cas sans limitation (colonne 2) et lorsque la saturation est prise en compte (colonnes 3 et 4) est résumée dans le Tableau 4.2.

TAB. 4.2 – Analyse du système saturé bouclé avec le contrôleur K_{LSd_r}

modèle	borne γ sans saturation	borne min γ ($\delta = 0{,}2$)	borne min δ ($\gamma = 0,9$)
à vide	77,72	non faisable	non faisable
2kg de charge	0,77	0,91	0,21
2,5kg de charge	0,23	0,35	0,04
3,5kg de charge	1,02	1,02	non faisable

De manière attendue, les performances de ce contrôleur sont légèrement dégradées, lorsque les limitations ne sont pas prises en compte, par rapport à celles du contrôleur K_{LS_r} (colonne 2 des Tableaux 4.1 et 4.2) pour les cas à 2, 2,5 et 3,5 kg de charge.

A l'inverse, en tenant compte de la présence des saturations, pour un niveau de perturbation d'énergie donnée (δ fixé, colonne 3 des deux Tableaux), on obtient de meilleures performances avec ce contrôleur plus "doux". On peut aussi vérifier qu'avec ce contrôleur la stabilité est préservée pour des niveaux plus élevés de perturbations (δ plus petits, colonne 4 des deux Tableaux) que dans le cas du contrôleur K_{LS_r}, pour les cas à 2 et 2,5 kg de charge. Le cas à 3,5 kg de charge, $\gamma < 0,9$, est inévitablement "non faisable" car on ne peut pas espérer, en présence de la non-linéarité de l'actionneur vérifier une contrainte sur γ plus petite que la valeur optimale obtenue sans limitation ($\gamma > 1$). Enfin, pour le cas à vide, même si la performance optimale (sans limitation) a été significativement améliorée, aucune garantie de réduction des vibrations ($\gamma < 1$) ne peut être obtenue. Ceci illustre d'ailleurs que la Proposition C.0.1 ne fournit qu'une condition suffisante et peut parfois être relativement conservative puisque la réponse temporelle en boucle fermée avec K_{LSd_r} réduit significativement la vibration par rapport à la réponse en boucle ouverte (Figure 4.22).

4.6.4 Modification du contrôleur nominal par ajout d'un contrôleur anti-windup

De manière alternative à la synthèse d'un contrôleur "doux", la synthèse d'un correcteur anti-windup peut être envisagée pour mieux amortir les vibrations RMS. Cette synthèse est faite pour le cas du robot à 3,5 kg de charge. Un anti-windup statique n'agissant que sur la dynamique du contrôleur (version la plus simple de la synthèse d'un anti-windup) est construit, en s'appuyant sur le modèle *mod ctrl 3,5kg* bouclé avec le contrôleur K_{LS_r}, et considérant une perturbation w d'énergie bornée par $\delta = 0,1$. Le contrôleur obtenu est

$$D_{aw} = \begin{bmatrix} -0,3032 \\ -0,1134 \\ -0,0368 \\ -0,1694 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

La Figure 4.23 montre la réponse temporelle et l'effort de commande avec le contrôleur $K_{LS_r}+$ le terme anti-windup pour le cas de la nacelle chargée avec 3,5 kg et une trajectoire de 15 g. La présence du terme anti-windup fait que l'effort de commande sature moins que celui obtenu avec le contrôleur K_{LS_r} seul (Figure 4.16). A partir 0,5 s, le comportement des deux systèmes bouclés est très proche puisque l'anti-

windup n'est plus actif. Par ailleurs, le comportement du système bouclé avec $K_{LS_r}+$ anti-windup est très comparable à celui obtenu avec le contrôleur K_{LSd_r} (Figure 4.21), montrant bien que ces deux stratégies sont des alternatives convenables pour mieux gérer la présence des limitations des actionneurs.

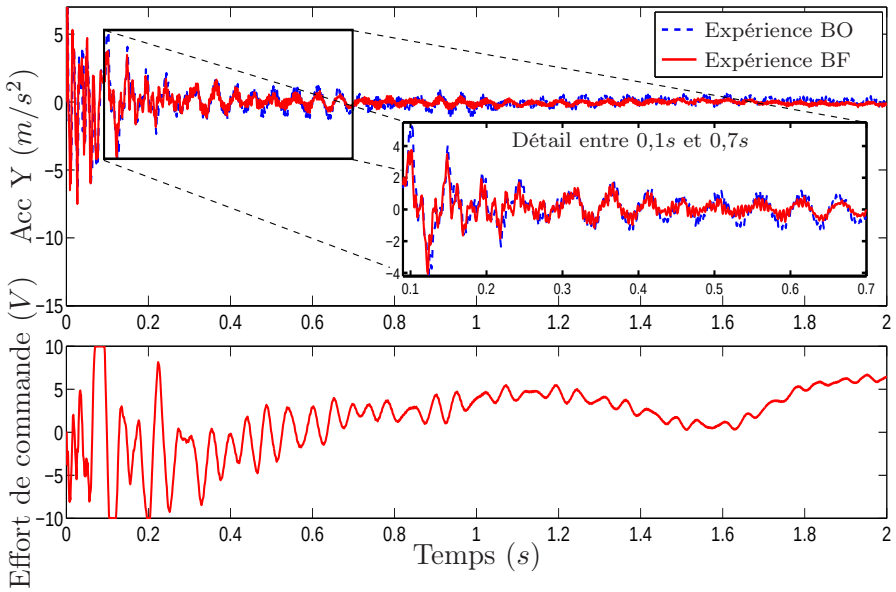

FIG. 4.23 – Résultats expérimentaux - Robots avec 3,5 kg de charge, contrôleur $K_{LS_r}+$ anti-windup - Trajectoire de 15 g - Réponse temporelle et effort de commande

La Figure 4.24 illustre la réponse temporelle avec le contrôleur $K_{LS_r}+$ le terme anti-windup pour le cas de la nacelle à vide et les trajectoires de 10 g, 20 g et 30 g. Dans les trois expériences la réponse temporelle en boucle fermée est inférieure à celle de la boucle ouverte. Non seulement le système bouclé avec le correcteur anti-windup reste stable (contrairement à l'expérience présentée sur la figure 4.17), mais aussi les vibrations sont significativement diminuées.

Comme précédemment, l'analyse du contrôleur $K_{LS_r}+$ anti-windup est résumée dans le Tableau 4.3. Le contrôleur anti-windup permet, pour le cas à 3,5 kg de charge pour lequel il a été synthétisé, d'améliorer les performances en termes d'atténuation γ (pour un niveau de perturbation fixé à $\delta = 0,2$), ainsi qu'en termes de niveau de perturbation δ acceptable. Il améliore aussi les performances pour la nacelle chargée à 2 et 2,5 kg, bien qu'il n'ait pas été établi spécifiquement pour ces cas. La comparaison entre cette stratégie avec anti-windup et le contrôleur "doux" confirme que les deux approches permettent de réduire les risques liés aux saturations de l'actionneur, en accord avec ce qui a été obtenu expérimentalement.

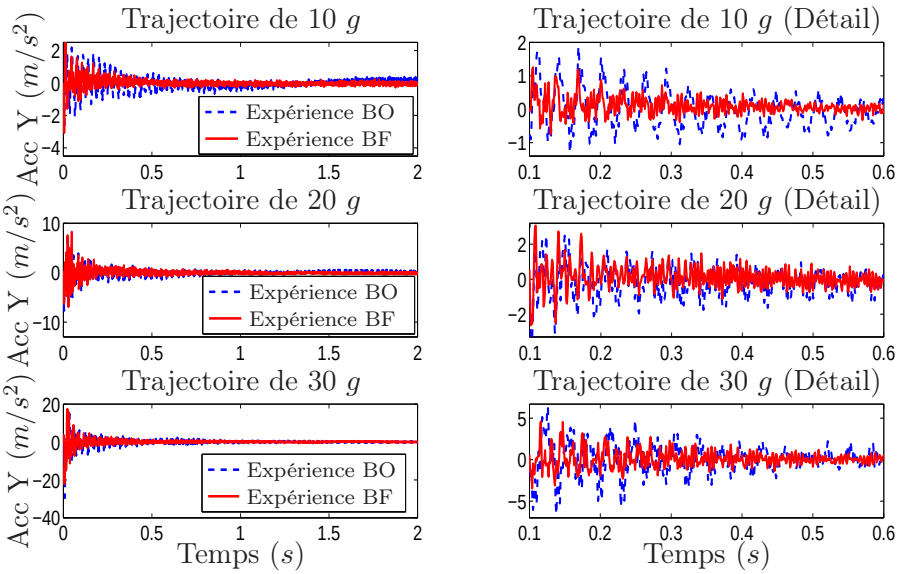

FIG. 4.24 – Résultats expérimentaux - Robot à vide, contrôleur $K_{LS_r}+$ anti-windup - Trajectoire de 10 g, 20 g et 30 g - Réponse temporelle et effort de commande

TAB. 4.3 – Analyse du système saturé bouclé avec le contrôleur K_{LS_r} et son anti-windup statique

modèle	borne minimum γ ($\delta = 0{,}2$)	borne minimum δ ($\gamma = 0,9$)
à vide	non faisable	non faisable
2kg de charge	1,09	0,30
2,5kg de charge	0,75	0,18
3,5kg de charge	1,45	0,58

Le cas de la nacelle à vide est à considérer à part. Même sans tenir compte des limites de l'actionneur (colonne 2 des Tableaux 4.1 et 4.2), les deux contrôleurs manipulés semblent peu adaptés à ce cas, et les problèmes d'optimisation évalués restent non faisables, même en présence de l'action anti-windup, alors que les expériences ont montré la capacité des contrôleurs K_{LSd_r} et $K_{LS_r}+$ anti-windup à atténuer les perturbations. L'analyse, bien que conservative, de la stabilité et des performances de rejet de perturbation des contrôleurs en présence des limitations de l'actionneur, souligne qu'il est certainement préférable d'envisager une stratégie à deux contrôleurs, l'un pour le cas des déplacements de la nacelle à vide, l'autre pour le déplacement en charge. A l'inverse, il peut être envisagé un contrôleur unique, préférablement associé

à un terme anti-windup, pour toutes les opérations en charge.

4.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode de commande robuste constituant une alternative à la commande $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte. D'abord, une fonction de transfert nominale est façonnée au moyen de filtres de pondération en boucle ouverte de manière à ce que ses valeurs singulières en basses et en hautes fréquences impliquent des comportements souhaités pour la fonction de sensibilité en boucle fermée. La fonction fictive façonnée est ensuite mise sous une représentation en facteurs premiers singuliers affectés par des incertitudes non-structurées et bornées en norme. Une procédure permettant de trouver un contrôleur assurant la minimisation du pire cas possible de vibration pour le modèle original est présentée sous le nom de $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping* (LSDP).

L'ordre plus faible, ainsi que la robustesse, des filtres de pondération donnant un résultat satisfaisant a permis, dans la pratique, de trouver des contrôleurs de manière beaucoup plus rapide en comparaison avec la méthode proposée dans le précédent chapitre, rendant possible un certain systématisme de la procédure de synthèse.

La procédure LSDP a été illustrée pour la synthèse de deux contrôleurs. Le premier est plus performant d'une manière générale, mais n'est par contre pas admissible pour les cas limites de l'enveloppe de fonctionnement, à savoir pour les cas de 3,5 kg de charge pour une trajectoire de 15 g et à vide pour toutes les trajectoires. L'analyse du système bouclé a permis de mettre en évidence que la dégradation des performances était due à la présence des saturations de l'actionneur piézoélectrique. Le deuxième, plus "doux", présente généralement des performances moins bonnes, mais arrive à réduire les vibrations même dans les situations où le premier contrôleur échoue. Associé à une stratégie anti-windup, le premier contrôleur arrive lui aussi à atténuer les vibrations pour tous les points d'opération, tout en conservant des performances légèrement supérieures à celles obtenues avec le contrôleur "doux".

Conclusion Générale

Ce travail présente les résultats obtenus pour l'identification et la commande des modes de vibration d'un robot parallèle pour des opérations industrielles de prise et dépose à haute cadence, dans un domaine opératoire considérant des variations de charge de 0 (nacelle à vide) à 3,5 kg et des accélérations comprises entre 10 g et 15 à 25 g selon la charge. Seule la direction hors plan de déplacement du robot a été considérée dans cette étude, car c'est dans cette direction Y que les vibrations étaient les plus importantes, et cela bien que l'architecture du robot ait été pensée pour les éviter au maximum (présence de chaînes passives dans l'axe transversal).

Le système flexible a d'abord été identifié avec une méthode basée sur les sous-espaces qui permet que l'identification soit faite sans paramétrisation préalable. Cette méthode a permis l'estimation des modes flexibles du robot Par2 de manière rapide, pour plusieurs conditions de charge sur la nacelle, prenant en compte comme donnée initiale seulement l'ordre souhaité pour le modèle. Les modèles ont ensuite été réduits à des modèles d'ordre plus faible, tout en conservant leurs caractéristiques dynamiques dans la plage de fréquence d'intérêt. Dans [66], visant à optimiser le modèle obtenu, il est préconisé d'utiliser les modèles obtenus à partir d'une identification basée sur les sous-espaces comme étant une estimation initiale pour une identification postérieure fondée sur la minimisation de l'erreur de prédiction. Cette stratégie n'a pas, pourtant, apporté à nos modèles des changements remarquables et, pour cette raison, n'a pas été mentionnée dans le corps du travail. Deux types de modèles ont été extraits de cette phase d'identification. Le premier, d'un ordre plus petit, est utilisé pour la synthèse des contrôleurs et, le deuxième, plus complet, pour les validations en simulations.

Une fois les modèles identifiés, la méthode de commande $\mathcal{H}_\infty$ à sensibilité mixte a été employée dans le cas du robot avec 2,5 kg de charge sur la nacelle et pour une trajectoire de 18 g. Utilisant la connaissance du spectre de vibration pour les perturbations à ce point d'opération, des filtres de pondération ont été choisis pour l'obtention du contrôleur réduit K_{SMr}. Une analyse a montré que le contrôleur est très sensible à des variations dans les valeurs des filtres de pondération, ce qui fait que

le processus de choix de filtre est long. Il faut, aussi, tenir compte du fait que le robot Par2 a été mécaniquement conçu pour que les vibrations résiduelles soient très faibles et que, par conséquent, les contrôleurs obtenus essaieront de gagner une petite marge de réduction sur un système déjà optimisé. Malgré ces difficultés, le contrôleur K_{SMr} a pu réduire les vibrations dans la direction Y pour le cas nominal, ainsi que pour les trajectoires de 15 g et 10 g. Cependant, des résultats en simulation ont montré un manque de robustesse à des variations de charge sur la nacelle.

Une deuxième méthode de commande, synthétisée aussi pour le système nominal de 2,5 kg et trajectoire de 18 g, a été la commande $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping*. Cette méthode a permis de trouver des contrôleurs de manière beaucoup plus rapide que la méthode précédente, entre autres car les contrôleurs obtenus sont peu sensibles à des variations des valeurs des filtres de pondération. Le contrôleur obtenu, K_{LSr}, en plus d'amortir les vibrations pour le système nominal et pour les variations de trajectoires de 15 g et 10 g, s'est aussi montré efficace pour presque toutes les trajectoires et conditions de charge correspondant au domaine opératoire. Néanmoins, dans deux cas limites, le contrôleur K_{LSr} a été inefficace pour atténuer les perturbations. Dans le premier cas, avec 3,5 kg de charge et une trajectoire de 15 g, la performance du système en boucle fermée était dégradée par rapport à celle en boucle ouverte. Pour le deuxième cas, avec la nacelle à vide et pour toutes les trajectoires, la situation était encore pire, le système en boucle fermée avec le contrôleur K_{LSr} devenant instable (vibrations persistantes). Une même raison est à l'origine du manque de robustesse pour les deux situations mentionnées : la saturation des actionneurs piézoélectriques. Deux solutions ont été mises en oeuvre pour faire face à ce problème de saturation des actionneurs.

La première solution consistait en un nouveau choix des filtres de pondération, permettant l'obtention d'un contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ *Loop Shaping* plus "doux", nommé K_{LSdr}. Contrairement à l'effort de commande dont les saturations ont été vérifiées en utilisant le contrôleur K_{LSr}, le contrôleur K_{LSdr} ne présente que peu ou pas de saturation pour les cas limites. Cependant, dû au fait d'être moins énergétique, ses performances dans les autres points d'opération sont légèrement dégradées.

L'autre solution adoptée a été la modification du contrôleur K_{LSr} avec l'inclusion d'un terme anti-windup. Ce terme ne change l'action du contrôleur que lorsque l'actionneur est saturé. Pour le cas limite du système à 3,5 kg de charge et trajectoire de 15 g, la réduction des vibrations utilisant le contrôleur K_{LSr} avec anti-windup a été comparable à celle obtenue en utilisant le contrôleur K_{LSdr}. Le contrôleur K_{LSr} avec anti-windup a fourni une performance légèrement supérieure à celle du contrôleur K_{LSdr} dans les cas du système à vide. Considérant que, en l'absence de saturation,

l'action anti-windup reste inactive, les performances du contrôleur K_{LSr} avec anti-windup dans les autres points d'opération ne devraient pas être modifiées par rapport au cas sans anti-windup. Considérer le contrôleur K_{LSr} avec le terme anti-windup semble être la meilleure des deux solutions envisagées.

Cependant, même si les résultats expérimentaux ont montré une réponse satisfaisante, les résultats d'analyse du système à vide utilisant les contrôleurs K_{LSdr} et K_{LSr} avec anti-windup ne permettent pas de garantir la performance en boucle fermée. Cette conclusion suggère d'envisager l'adoption d'autres configurations pour la commande du système. Considérant que, traditionnellement dans les applications de prise et dépose, l'alternance successive entre les situations "nacelle à vide" et "nacelle chargée" est vérifiée, nous pourrions considérer la synthèse de deux contrôleurs, un optimisé pour la nacelle à vide, l'autre pour toutes les autres conditions de charge. Dans les deux cas, l'addition des termes anti-windup servirait à corriger des problèmes lors d'éventuelles saturations.

Perspectives pour des travaux futurs

Cette thèse a montré que l'utilisation d'actionneurs piézoélectriques pouvait effectivement permettre de réduire les vibrations aux points d'arrêt d'un robot parallèle pour des opérations de prise et dépose à haute vitesse. C'était un objectif majeur de ce travail et il a été atteint. Il n'en demeure pas moins que cela reste un travail préliminaire et qu'il pourrait être prolongé dans plusieurs directions :

- Utilisation d'une méthode d'identification en continu, tel que la toolbox CONTSID (CONtinuous-Time System IDentification) [39] de $MATLAB^{®}$, permettant l'identification des modèles paramétriques à temps continu directement à partir des données expérimentales échantillonnées. Ce type de méthode possède, entre autres avantages, une sensibilité aux problèmes de mauvais conditionnement numérique beaucoup plus faible que les approches discrètes.
- Prise en compte des incertitudes structurées considérant, en plus de l'incertitude non-paramétrique à haute fréquence, des variations autour des valeurs identifiées pour les modes de résonance du modèle flexible. Dans ce mémoire, les analyses de stabilité et de performance robustes ont été réalisées *a posteriori* (en simulation numérique puis de manière expérimentale) car la seule garantie lors de la synthèse du contrôleur était la stabilité des fonctions de transfert comprises dans une borne conservative autour du modèle nominal. Le conservatisme pourrait être réduit en rajoutant plus d'informations sur le modèle, comme par

exemple en définissant des bornes réalistes sur les variations potentielles d'un ou de plusieurs modes de résonance du système. Cela permettrait, par exemple, d'essayer de trouver un contrôleur unique pour toutes les charges (à vide jusqu'à 3,5 kg), considérant que le premier mode de résonance varie entre 19 Hz et 34 Hz. Il n'est cependant pas sûr qu'un tel contrôleur puisse être obtenu. Dans le cas positif, la stabilité serait assurée *a priori* pour toutes les conditions de charge. De plus, en utilisant les techniques de μ-synthèse, la performance robuste pourrait aussi être assurée au préalable [46].

- Exploiter des stratégies anti-windup plus élaborées, tel que les anti-windup dynamiques [96], [106]. En effet, la stratégie anti-windup mise en oeuvre dans cette thèse avait pour but principal d'étudier la faisabilité d'une telle approche. Autant l'analyse du système bouclé saturé que la synthèse des contrôleurs anti-windup méritent d'être étendues pour mieux prendre en compte les spécificités du problème : modèle de perturbation considéré, modèle de l'actionneur utilisé pour l'analyse ou la synthèse, couplage entre les performances du contrôleur nominal et l'impact de l'anti-windup...
- Etendre la synthèse des contrôleurs au cas multi-variable. La commande dans la direction Y avec l'actionneur piézoélectrique $A1A2$ a été efficace sans trop affecter les directions X et Z. Cependant, considérant que les techniques utilisées pour l'identification et la commande du robot peuvent être naturellement étendues au cas multivariable, on peut envisager l'utilisation des actionneurs piézoélectriques collés autour des autres bras du robot comme entrées de commande, avec les trois directions de l'espace comme sortie. Un des problèmes à résoudre sera de convenablement choisir les entrées de commande, sachant que les limitations matérielles permettent jusqu'à quatre entrées de commande indépendantes, et que les huit actionneurs piézoélectriques collés sur les huit éléments des bras sont couplés.

Annexe A

Réduction équilibrée

Dans certaines situations, lorsque l'ordre d'un modèle est trop élevé, une approximation peut être envisagée au moyen d'une technique de réduction de modèles. Il existe de nombreuses stratégies pour la réduction de modèles, comme par exemple la troncature modale, l'approximation rationnelle de la norme de Hankel et la méthode des perturbations singulières [46]. Cette dernière possède l'avantage de bien approximer les gains aux basses fréquences. Dans toutes les stratégies de réduction, il faut d'abord réécrire le système sous la forme d'une réalisation équilibrée, de manière à égaliser les poids des grammiens de commandabilité et d'observabilité sur les modes du système [110].

Considérons un système représenté par

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{A.1}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ et $[A, B, C]$ une réalisation minimale.

A.1 Réalisation équilibrée

Le système (A.1) est une réalisation équilibrée [46] si les solutions P et Q des équations de Lyapunov

$$\begin{cases} AP + PA^T + BB^T = 0 \\ A^TQ + QA + C^TC = 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

sont telles que $P = Q = diag[1](\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) := \Sigma$, avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. P et Q sont appelés les grammiens de commandabilité et d'observabilité, respectivement, tandis que les σ_i, $i = 1, \ldots, n$, sont les valeurs singulières de Hankel. Pour un système équilibré, les grammiens sont égaux et diagonaux.

Le système (A.1) dans une base quelconque peut être réécrit sous la forme d'une réalisation équilibrée en utilisant l'algorithme suivant [46] :

- Calculer les grammiens P et Q à travers des équations (A.2) ;
- À partir de Q, calculer une factorisation de Cholesky R, c'est-à-dire, $Q = R^T R$;
- Former la matrice définie positive RPR^T et la diagonaliser, telle que $RPR^T = U\Sigma^2 U^T$, avec U une matrice orthonormale et $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$;
- Soit T une transformation de similarité donnée par $T = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T R$. Le système $[TAT^{-1}, TB, CT^{-1}]$ est une réalisation équilibrée.

A.2 Réduction par la méthode de perturbations singulières

Considérons que le système (A.1) est une réalisation équilibrée avec $\Sigma = diag(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $\Sigma_1 = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $\Sigma_2 = diag(\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n)$ et $\sigma_r > \sigma_{r+1}$. Les matrices A, B et C peuvent être partitionnées par rapport à Σ comme

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad et \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Définissons

$$\begin{cases} A_r = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\ B_r = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ C_r = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \\ D_r = D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{cases} \tag{A.4}$$

Le système réduit $G_r(s)$ donné par

$$G_r(s) = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r \tag{A.5}$$

[1] $diag(a_1, \ldots, a_n)$ représente une matrice diagonale d'ordre n avec a_i son i-ème élément diagonal.

est une approximation par perturbations singulières de $G(s)$. Seules les r premières valeurs singulières de Hankel du système original $G(s)$ sont conservées. Ces sont les valeurs qui représentent le mieux la dynamique du système[2], étant en même temps les plus commandables et les plus observables.

[2]Les valeurs singulières de Hankel sont utilisées comme une mesure de l'énergie du système [93].

Annexe B

Modèles pour les synthèses des contrôleurs

Cette annexe fournit les modèles continus utilisés dans les chapitres 3 et 4 pour la synthèse des contrôleurs (*mod ctrl*).

– *mod ctrl vide*

$$G_{ctrlvide}(s) = \frac{\begin{array}{c}-0.07(s-1140)(s+32.22)(s^2+30.12s+4.63e4)(s^2+7.12s+1.75e5)\\(s^2+19.74s+3.22e5)(s^2+19.88s+5.58e5)(s^2+65.33s+9.97e5)\\(s^2-1518s+1.64e6)(s^2+5.04s+1.35e6)(s^2+31.06s+1.54e6)(s^2-517.6s+1.92e6)\end{array}}{\begin{array}{c}(s^2+10.24s+4.42e4)(s^2+778.2s+2.45e5)(s^2+16.28s+1.75e5)\\(s^2+31.46s+3.18e5)(s^2+489.2s+4.74e5)(s^2+19.64s+5.85e5)\\(s^2+77.21s+1.07e6)(s^2+148.7s+1.34e6)(s^2+7.74s+1.37e6)(s^2+16.19s+1.55e6)\end{array}}$$

– *mod ctrl 2kg*

$$G_{ctrl2kg}(s) = \frac{\begin{array}{c}-0.28(s-893.3)(s^2+5.87s+8224)(s^2+62.45s+1.93e5)(s^2-407.1s+2.46e5)\\(s^2+33.14s+3.49e5)(s^2-19.71s+7.19e5)(s^2-15.52s+8.92e5)(s^2+122.5s+1.02e6)\end{array}}{\begin{array}{c}(s+2655)(s^2+18.34s+2.2e4)(s^2+14.43s+1.69e5)(s^2+25.56s+3.28e5)\\(s^2+98.88s+6.08e5)(s^2+76.43s+6.75e5)(s^2+24.3s+8.9e5)(s^2+206.8s+1.29e6)\end{array}}$$

– *mod ctrl 3,5kg*

$$G_{ctrl3,5kg}(s) = \frac{\begin{array}{c}-0.012(s-722.9)(s+74.46)(s^2+27.41s+1.55e4)\\(s^2+26.05s+1.75e5)(s^2+14.31s+3.38e5)(s^2+25.8s+5.33e5)(s^2+61.79s+6.9e5)\\(s^2-699.5s+1.01e6)(s^2+36.76s+9.14e5)(s^2+16s+1.67e6)(s^2-3025s+4.27e6)\end{array}}{\begin{array}{c}(s^2+5.74s+1.58e4)(s^2+255.5s+1.52e5)(s^2+46.1s+1.8e5)\\(s^2+23.9s+3.41e5)(s^2+221.2s+3.98e5)(s^2+25.49s+5.49e5)\\(s^2+36.89s+6.77e5)(s^2+22.41s+9.04e5)(s^2+307.8s+1.44e6)(s^2+7.18s+1.71e6)\end{array}}$$

Annexe C

Sur l'analyse et la synthèse de contrôleurs anti-windup pour les systèmes saturés

Cette annexe précise les conditions utilisées dans les sections 4.6.2 et 4.6.4 pour l'analyse et la synthèse de contrôleurs anti-windup dans le contexte de systèmes linéaires bouclés à travers une saturation en position de l'actionneur. Ces conditions sont directement issues de [96], mais particularisées au cas de l'étude. En effet, la perturbation n'affecte que la sortie du système piézo-électrique (G), mais est issue d'un filtre W avec une perturbation d'énergie finie en entrée, permettant de préciser le spectre de fréquences excitant le système.

Soit le système linéaire invariant dans le temps décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) = A_G x_G(t) + B_G u(t) \\ y_G(t) = C_G x_G(t) + D_G u(t) + D_D d(t) \end{cases} \tag{C.1}$$

avec $x_G \in \Re^{n_G}$, $u \in \Re^{m_u}$, et $y_G \in \Re^{p_y}$. L'entrée de perturbation $d \in \Re^{m_d}$ est la sortie d'un filtre décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}_W(t) = A_W x_W(t) + B_W w(t) \\ d(t) = C_W x_W(t) + D_W w(t) \end{cases} \tag{C.2}$$

avec $x_W \in \Re^{n_W}$ et $w \in \Re$ est un bruit blanc. Le système (C.1) est interconnecté avec le contrôleur K de dimension n_K décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K u_K(t) + v_x(t) \\ y_K(t) = C_K x_K(t) + D_K u_K(t) + v_y(t) \end{cases} \tag{C.3}$$

Dans ce système, les entrées v_x et v_y permettent d'introduire les termes d'anti-windup qui seront utilisés lors de le retouche du contrôleur. En absence de saturation, l'interconnexion de G et K est telle que

$$u_K(t) = y_G(t)\ , \qquad u(t) = y_K(t)\ , \qquad v_x(t) = 0\ , \qquad v_y(t) = 0 \tag{C.4}$$

Sous l'hypothèse de bien-posé, la matrice dynamique du système bouclé non contraint,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_G + B_G\Delta^{-1}D_KC_G & B_G\Delta^{-1}C_K & B_G\Delta^{-1}D_KD_DC_W \\ B_K(I_{p_y} + D_G\Delta^{-1}D_K)C_G & A_K + B_KD_G\Delta^{-1}C_K & B_K(I_{p_y}+ \\ & & D_G\Delta^{-1}D_K)D_DC_W \\ 0 & 0 & A_W \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

avec

$$\Delta = I_{m_u} - D_KD_G$$

est asymptotiquement stable. Considérant à présent que l'entrée du système est soumise à des limitations en amplitude

$$-u_{0(i)} \leq u_{(i)}(t) \leq u_{0(i)}, \quad u_{0(i)} > 0,\ i = 1, \cdots, m_u \tag{C.6}$$

l'entrée du système commandé G est interconnectée avec la sortie du contrôleur K à travers la non-linéarité

$$u(t) = sat(y_K(t)) \tag{C.7}$$

avec la fonction saturation définie classiquement, $\forall\ i = 1, \cdots, m_u$, par

$$sat(y_{K(i)}) = sign(y_{K(i)}) \min(|y_{K(i)}|, u_{0(i)}). \tag{C.8}$$

Pour la synthèse anti-windup, on considère une stratégie directe statique dans laquelle les signaux v_x et v_y sont définis de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} = D_{aw}(sat(y_K(t)) - y_K(t)) \tag{C.9}$$

En notant $x(t) = \begin{bmatrix} x_G(t) \\ x_K(t) \\ x_W(t) \end{bmatrix}$ et $\phi(y_K(t)) = (sat(y_K(t)) - y_K(t))$, le système s'ex-

prime en boucle fermée sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \mathcal{A}x(t) + (\mathcal{B}_\phi + \mathcal{B}_v D_{aw})\phi(y_K(t)) + \mathcal{B}_w w(t) \\ y_K(t) & = & \mathcal{C}_y x(t) + (\mathcal{D}_y + \mathcal{D}_{yv} D_{aw})\phi(y_K(t)) + \mathcal{D}_{yw} w(t) \\ z(t) = y_G(t) & = & \mathcal{C}_z x(t) + (\mathcal{D}_z + \mathcal{D}_{zv} D_{aw})\phi(y_K(t)) + \mathcal{D}_{zw} w(t) \end{array}\right. \tag{C.10}$$

avec

$$\mathcal{B}_\phi = \begin{bmatrix} B_G(I_{m_u} + \Delta^{-1} D_K D_G) \\ B_K D_G (I_{m_u} + \Delta^{-1} D_K D_G) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_v = \begin{bmatrix} B_G \Delta^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_{m_u} \end{bmatrix} \\ B_K D_G \Delta^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_{m_u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{n_K} & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_w = \begin{bmatrix} B_G \Delta^{-1} D_K D_D D_w \\ B_K (D_G \Delta^{-1} D_K + I_{p_y}) D_D D_w \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_y = \begin{bmatrix} \Delta^{-1} D_K C_G & \Delta^{-1} C_K & \Delta^{-1} D_K D_D C_W \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}_y = \Delta^{-1} D_K D_G$$

$$\mathcal{D}_{yv} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_{m_u} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}_{yw} = \Delta^{-1} D_K D_D D_w$$

$$\mathcal{C}_z = \begin{bmatrix} (I_{p_y} + D_G \Delta^{-1} D_K) C_G & D_G \Delta^{-1} C_K & (D_D + D_G \Delta^{-1} D_K D_D) C_W \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}_z = D_G (I_{m_u} + \Delta^{-1} D_K D_G)$$

$$\mathcal{D}_{zv} = D_G \Delta^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}_{zw} = (D_D + D_G \Delta^{-1} D_K D_D) D_w$$

La proposition suivante permet de donner une solution tout autant au problème d'analyse de la stabilité du système bouclé (avec ou sans anti-windup) que de synthèse d'un contrôleur anti-windup statique, dans le cas local[1, 2].

Proposition C.0.1. *Si il existe une matrice symétrique définie positive* $W \in \Re^{(n_G+n_K)\times(n_G+n_K)}$, *une matrice* $Z \in \Re^{m_u \times (n_G+n_K)}$, *une matrice diagonale positive* $S \in \Re^{m_u \times m_u}$, *une ma-*

[1] "Local" signifie qu'on ne vérifie la stabilité que localement, dans un ensemble invariant et contractif.

[2] Le cas global peut être directement étendu en considérant $Z = 0$ et en enlevant l'inégalité (C.12).

trice $E \in \Re^{(n_K+m_u)\times m_u}$ *et un scalaire positif* γ *tels que les conditions*

$$\begin{bmatrix} W\mathcal{A}' + \mathcal{A}W & \mathcal{B}_\phi S + \mathcal{B}_v E - W\mathcal{C}_y' - Z' & \mathcal{B}_w & W\mathcal{C}_z' \\ \star & -2S - \mathcal{D}_y S - S\mathcal{D}_y' & -\mathcal{D}_{yw} & S\mathcal{D}_z' + E'\mathcal{D}_{zv}' \\ & -\mathcal{D}_{yv}E - E'\mathcal{D}_{yv}' & & \\ \star & \star & -I & \mathcal{D}_{zw}' \\ \star & \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \qquad \text{(C.11)}$$

$$\begin{bmatrix} W & Z_{(i)}' \\ \star & \delta u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, ..., m_u \qquad \text{(C.12)}$$

sont satisfaites, alors, le contrôleur statique anti-windup $D_{aw} = ES^{-1}$ *est tel que, pour* $x_G(0) = 0$, $x_K(0) = 0$, $w(t)$ *borné en énergie* ($\|w\|_2^2 \leq \delta^{-1}$), *les trajectoires du système bouclé (C.10) restent dans l'ensemble*

$$\mathcal{E}(W^{-1}, \delta) = \left\{ \begin{bmatrix} x_G \\ x_K \\ x_W \end{bmatrix} \in \Re^{n_G+n_K+n_W}; [x_G' \; x_K' \; x_W'] W^{-1} \begin{bmatrix} x_G \\ x_K \\ x_W \end{bmatrix} \leq \delta^{-1} \right\}$$

et le transfert de w *vers* y_G *est de gain* $\mathcal{L}_2$ *fini avec*

$$\int_0^T y_G(t)' y_G(t)\, dt \leq \gamma \int_0^T w(t)' w(t)\, dt, \forall T \geq 0.$$

De plus, lorsque $w(t) = 0$, *l'ensemble* $\mathcal{E}(W^{-1}, \delta)$ *est une région de stabilité asymptotique pour le système saturé (C.10).*

Preuve : La preuve est donnée dans [96] dans un cas plus général (Proposition 7.4, pages 294-295).

Pour l'analyse du système saturé sans anti-windup ($D_{aw} = 0$), on considère les conditions (C.11)-(C.12) avec $E = 0$. On peut résoudre un simple problème de faisabilité (le contrôleur est-il stabilisant pour le niveau de perturbation envisagé décrit à travers δ ?) ou résoudre des problèmes d'optimisation : quelle est la borne maximum sur le niveau d'atténuation ($\min \gamma$) pour un δ borné ? Quelle est la plus grande perturbation admissible ($\min \delta$) pour laquelle la stabilité du système saturé est préservée (avec un gain $\mathcal{L}_2$ maximum du transfert de la perturbation vers la sortie contrôlée fixé a priori) ?

Par extension, dans le cas de la synthèse saturé avec anti-windup (D_{aw} fixé), on considère les conditions (C.11)-(C.12) avec $E = D_{aw}S$. Enfin, dans le cas de la

synthèse anti-windup, on pourra s'intéresser à la synthèse d'un contrôleur anti-windup statique D_{aw} pour lequel le niveau de perturbation admissible sera optimisé ($\min \delta$).

Les conditions données dans la Proposition C.0.1 peuvent être étendues en considérant que la perturbation w (à travers la sortie du filtre d) agit aussi sur la dynamique du système et/ou du contrôleur, sur la sortie du contrôleur. Elles peuvent aussi être étendues dans le cas de la synthèse (ou de l'analyse) d'un contrôleur anti-windup dynamique [96]. D'autres méthodes de synthèse sont aussi disponibles dans [106].

Bibliographie

[1] S. Algermissen. *Selbsteinstellende, robuste Regelung von Strukturschwingungen an Parallelrobotern*. PhD thesis, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt - Institut für Faservervundleichtbau und Adaptronik - Braunschweig, 2007.

[2] S. Algermissen, R. Keimer, M. Rose, E. Breitbach, and E. Monner. Applied robust control for vibration suppression in parallel robots. In *Proceedings of 22nd International Symposium on Automation and Robotics in Construction (ISARC)*, pages 1–8, 2005.

[3] S. Algermissen, M. Rose, R. Keimer, and E. Breitbach. High-speed parallel robots with integrated vibration-suppression for handling and assembly. In *11th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials*, 2004.

[4] Y. Aoustin and A. Formalsky. On the feedforward torques and reference trajectory for a flexible two-link arm. *Multibody System Dynamics*, 3(3) :241–265, 1999.

[5] G. J. Balas. *Robust Control of Flexible Structures : Theory and Experiments*. PhD thesis, California Institut of Technology, 1990.

[6] G. J. Balas and J. C. Doyle. Identification of flexible structures for robust control. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 51–58, 1989.

[7] C. Baradat, V. Nabat, O. Company, S. Krut, and F. Pierrot. Par2 : a spatial mechanism for fast planar, 2-dof, pick-and-place applications. In *Proceedings of the Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pages 1–10, 2008.

[8] L. Bascetta and P. Rocco. End-point vibration sensing of planar flexible manipulators through visual servoing. *Mechatronics*, 16(3-4) :221–232, 2006.

[9] D. S. Bernstein and A. N. Michel (Eds.). Special issue : saturating actuator. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5 :375–515, 1995.

[10] J. T. Betts. *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. SIAM, 2001.

[11] G. M. Blair. A review of the discrete fourier transform. part 1 : manipulating the powers of two. *IEEE Electronics & Communication Engineering Journal*, 7(4) :169–177, 1995.

[12] I. A. Bonev. Les robots parallèles : de la recherche vers les applications. Jounées Nationales de la Recherche en Robotique, Obernai, France, 2007.

[13] J. Bontsema and R. F. Curtain. A note on spillover and robustness for flexible systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(6) :567–569, 1988.

[14] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Apllied Mathematics*. SIAM, 1994.

[15] S. Briot, V. Arakelian, and S. Guégan. Paminsa : A new family of partially decoupled parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 2009.

[16] W. J. Cao and J. X. Xu. Dynamic modeling and adaptive vsc of two-link flexible manipulator using a hybrid sliding surface. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5143–5148, 2000.

[17] R. Caracciolo, D. Richiedei, A. Trevisani, and V. Zanotto. Robust mixed-norm position and vibration control of flexible link mechanisms. *Mechatronics*, 15(7) :767–791, 2005.

[18] R. Clavel. Robots parallèles. *Techniques de l'Ingénieur*, Vol. S.(Art. 7710), 1994.

[19] O. Company and F. Pierrot. Modelling and preliminary design issues of a 3-axis parallel machine-tool. *Mechanisms and Machine Theory*, 3737 :1325–1345, 2002.

[20] O. Company, F. Pierrot, S. Krut, C. Baradat, and V. Nabat. Par2 : a spatial mechanism for fast planar two-degree-of-freedom pick-and-place applications. *Meccanica*, 46(1) :239–248, 2011.

[21] D. Constantinescu and E. A. Croft. Smooth and time optimal trajectory planning for industrial manipulators along specified paths. *Journal of Robotic Systems*, 17(5) :233249, 2000.

[22] M. M. da Silva. *Computer-aided integrated design of mechatronic systems*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2009.

[23] M. M. da Silva, L. P. R. de Oliveira, O. Brüls, M. Michelin, C. Baradat, O. Tempier, J. De Caigny, J. Swevers, W. Desmet, and H. Van Brussel. Integrating structural and input design of a 2-dof high-speed parallel manipulator : A

flexible model-based approach. *Mechanisms and Machine Theory*, 45 :15091519, 2010.

[24] J. Daafouz, G. Garcia, and J. Bernussou. Robust control of a flexible robot arm using the quadrqtic d-stqbility approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(4) :524–533, 1998.

[25] M. Dadfarnia, N. Jalili, B. Xian, and D. M. Dawson. A lyapunov-based piezoelectric controller for the flexible cartesian robot manipulator. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 126 :347–358, 2004.

[26] B. R. de Jong, D. M. Brouwer, M. J. de Boer, H. V. Jansen, H. M. J. R. Soemers, and G. J. M. Krijnen. Design and fabrication of a planar three-dofs mems-based manipulator. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 19(5) :1116–1130, 2010.

[27] Laboratoire de Robotique de l'Université Laval. *Introduction aux mécanismes parallèles*. http ://robot.gmc.ulaval.ca/fr/recherche/theme101.html.

[28] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, and G. Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer, 1996.

[29] E. Dombre. *Analyse et modélisation des robots manipulateurs*. Lavoisier, 2001.

[30] L. R. Douat, I. Queinnec, G. Garcia, M. Michelin, and F. Pierrot. Flexible model identification of the parallel robot par2. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots ans Systems*, pages 6175–6180, 2010.

[31] L. R. Douat, I. Queinnec, G. Garcia, M. Michelin, and F. Pierrot. Identification et commande des modes flexibles du robot par2. In *JDMACS*, 2011.

[32] L. R. Douat, I. Queinnec, G. Garcia, M. Michelin, and F. Pierrot. $\mathcal{H}_\infty$ control applied to the vibration minimization of the parallel robot par2. In *IEEE Multi-conference on Systems and Control (MSC 2011)*, 2011.

[33] L. R. Douat, I. Queinnec, G. Garcia, M. Michelin, and F. Pierrot. Piezo-actuated vibration attenuation of the parallel robot par2. In *(soumis à) American Control Conference*, 2012.

[34] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8) :831–847, 1989.

[35] S. K. Dwivedy and P. Ebehard. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and Machine Theory*, 41 :749–777, 2006.

[36] D. J. Ewins. *Modal Testing - theory, practice and application*. Research Studies Press LTD., 2000.

[37] G. Feng and M. Palaniswami. Adaptive control of partially known single-link flexible manipulators. In *Fifth International Conference on Advanced Robotics*, pages 1784–1787, 1991.

[38] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4) :421–448, 1994.

[39] H. Garnier, M. Mensler, and A. Richard. Continuous-time model identification from sampled data : implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76(13) :1337–1357, 2003.

[40] A. Gasparetto, A. Lanzutti, R. Vidoni, and V. Zanotto. Experimental validation and comparative analysis of optimal time-jerk algorithms for trajectory planning. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2011 (to appear).

[41] W. Gawronski. *Dynamics and Control of Structures - A Modal Approach*. Springer, 1998.

[42] W. Gawronski. *Modeling and Control of Antennas and Telescopes*. Springer, 2008.

[43] S. S. Ge, T. H. Lee, and G. Zhu. Asymptotically stable end-point regulation of a flexible scara/cartesian robot. *Mechatronics*, 3(2) :138–144, 1998.

[44] A. H. Glattfelder and W. Schaufelberger. *Control systems with input and output constraints*. Springer-Verlag, 2003.

[45] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice Hall, 1995.

[46] D.-W. Gu, P. Hr. Petkov, and M. M. Konstantinov. *Robust Control Design with $MATLAB^{®}$*. Prentice Hall, 1995.

[47] K. Gurses, B. J. Buckham, and E. J. Park. Vibration control of a single-link flexible manipulator using an array of fiber optic curvature sensors and pzt actuators. *Mechatronics*, 19(2) :167–177, 2009.

[48] M. Hassan, R. Dubay, C. Li, and R. Wang. Active vibration control of a flexible one-link manipulator using a multivariable predictive controller. *Mechatronics*, 17(6) :311–323, 2007.

[49] S. Haykin and B. V. Veen. *Sinais e Sistemas*. Bookman, Porto Alegre, 2001.

[50] J. Hu, X. Zhang, and J. Zhan. Trajectory planning of a novel 2-dof high-speed planar parallel robot. *Intelligent Robotic and Applications*, 1 :199–207, 2008.

[51] D. J. Inman. *Vibration with Control*. Wiley, 2006.

[52] B. Kand and J. K. Mills. Study on piezoelectric actuators in vibration control of a planar parallel manipulator. In *International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 1268–1273, 2003.

[53] V. Kapila and K. Grigoriadis. *Actuator saturation control*. Marcel Dekker, Inc., 2002.

[54] M. Karkoub and K. Tamma. Modelling and μ synthesis control of flexible manipulators. *Computers and Structures*, 79 :543–551, 2001.

[55] T. Katayama. *Subspace Methods for System Identification*. Springer, 2005.

[56] M. R. Kermani, R. V. Patel, and M. Moallem. Flexure control using piezostack actuators : Design and implementation. *IEEE Trans. on Mechatronics*, 10(2) :181–188, 2005.

[57] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.

[58] W. Khalil and F. Boyer. An efficient calculation of computed torque control of flexible manipulators. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 609–614, 1995.

[59] S. Krut. *Contribution à l'étude des robots parallèles légers, 3T-1R et 3T-2R, à forts débattements angulaires*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2003.

[60] D. S. Kwon and W. J. Booj. A time-domain inverse dynamic tracking control of a single-link flexible manipulator. *ASME Journal od Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 116. :193–200, 1994.

[61] D. S. Landes. *The Unbound Prometheus - Technological Change and Industrial Development in Western Europe from 1750 to the Present*. Cambridge University Press, 2003.

[62] W. E. Larimore. System identification, reduced-order filtering and modeling via canonical variate analysis. In *Proc. 1983 American Control Conference*, pages 445–451, 1983.

[63] N. Lazaric. Origines et développement de la robotique. *Revue d'économie industrielle*, 61(3) :54–67, 1992.

[64] S. Leleu, H. Abou-Kandil, and Y. Bonnassieux. Actuators and sensors placement for active vibration control in flexible structures. In *IFAC/IEE 1st Conference on Mechatronics*, pages 1003–1008, 2000.

[65] G. Li and M. Gevers. *Parametrization in Control, Estimation and Filtering Problems*. Springer Verlag, 1993.

[66] L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. Prentice Hall, New Jersey, 1987.

[67] T. D. Looke, M. M. Bayoumi, and M. Farooq. Simulation of computed torque controller for flexible manipulators. In *Proceedings of the 34th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, pages 505–508, 1991.

[68] A. De Luca and W. Book. *Springer Handbook of Robotics*, chapter Robots with Flexible Elements, pages 287–319. Springer, 2008.

[69] F. Marquet, O. Company, S. Krut, and F. Pierrot. Enhancing parallel robots accuracy with redundant sensors. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA'02)*, pages 4114–4119, 2002.

[70] D. McFarlane and K. Glover. A loop shaping design procedure using $\mathcal{H}_\infty$ synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :759–769, 1992.

[71] D. McFarlane, K. Glover, and M. Noton. Robust stabilization of a flexible space-platform : An $\mathcal{H}_\infty$ coprime factorization approach. In *International Conference on Control*, pages 677–682, 1988.

[72] L. Meirovitch. *Principles and Techniques of Vibrations*. Prentice Hall, 1997.

[73] C. H. Menq and J. S. Chen. Dynamic modeling and payload adaptive control of a flexible manipulator. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 488–493, 1988.

[74] J.-P. Merlet. *Parallel Robots*. Kluwer Academis Publishers, 2000.

[75] S. Mitter and A. Tannenbaum. The legacy of george zames. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5) :590–595, 1998.

[76] M. Moonen, B. De Moor, L. Vandenberghe, and J. Vandewalle. On- and off-line state-space identification. *Int. J. Control*, 49(1) :219–232, 1989.

[77] A. S. Morris and A. Madani. Quadratic optimal control of a two-flexible-link robot manipulator. *Robotica*, 16 :97–108, 1998.

[78] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulators*. CRC Press, 1994.

[79] V. Nabat. *Robots parallèles à nacelle articulée - Du concept à la solution industrielle pour le pick-and-place*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2007.

[80] G. Sartori Natal, A. Chemori, F. Pierrot, and O. Company. Nonlinear dual mode adaptive control of par2 : a 2-dof planar parallel manipulator, with real-time experiments. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots ans Systems*, pages 2114–2119, 2009.

[81] J. Nuffer and T. Bein. Application of piezoelectric materials in transportation industry. Global Symposium on Innovative Solutions for the Advancement of the Transport Industry, 2006.

[82] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and I. T. Young. *Signals and Systems*. Prentice Hall, 1983.

[83] P. Van Overschee and B. De Moor. N4sid - subspace algorithms for the identification of combined deterministic - stochastic systems. *Automatica*, 30(1) :75–93, 1994.

[84] A. Piazzi and A. Visioli. Global minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 47(1) :140–149, 2000.

[85] R. Pintelon and J. Schoukens. *System Identification - A Frequency Domain Approach*. IEEE Press, 2001.

[86] B. Pradin and G. Garcia. *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Pour l'ingénieur. Presses Universitaires Mirail, 2010.

[87] A. Preumont. *Vibration Control of Active Structures - An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[88] A. C. Qiu, J. D. Han, X. M. Zhang, Y. C. Wang, and Z. W. Wu. Active vibration control of a flexible beam using a non-collocated acceleration sensor and piezoelectric patch actuator. *Journal of Sound and Vibration*, 326 :438455, 2009.

[89] B. Robu, V. Budinger, L. Baudouin, C. Prieur, and D. Arzelier. Simultaneous hinfinite vibration control of fluid/plate system via reduced-order controller. In *IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2010)*, pages 3146–3151, 2010.

[90] V. Sethi and G. Song. Optimal vibration control of a model frame structure using piezoceramic sensors and actuators. *Journal of Vibration and Control*, 1(11) :671–684, 2005.

[91] J. J. Shiffman. Lyapunov functions and the control of the euler-bernoulli beam. *International Journal of Control*, 57(4) :971–990, 1993.

[92] W. Singhose. Trajectory planning for flexible robots. CRC Robotics and Automation Handbook, 2004.

[93] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. Wiley, 2005.

[94] A. A. Stoorvogel and A. Saberi (Eds.). Special issue : Control problems with constraints. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9 :583–734, 1999.

[95] S. Tarbouriech and G. Garcia (Eds.). Control of uncertain systems with bounded inputs. LNCIS, 1997.

[96] S. Tarbouriech, G. Garcia, J. M. Gomes da Silva Jr., and I. Queinnec. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer-Verlag, 2011.

[97] S. Tliba, H. Abou-Kandil, and C. Prieur. Active vibration damping of a smart flexible structure using piezoelectric transducers : H-infinity design and experimental results. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, 2005.

[98] V. A. Utkin. Control of elastic multi-link manipulators based on the dynamic compensation method. In *Proceedings of the 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages 594–597, 1998.

[99] M. Verhaegen. Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica*, 30(1) :61–74, 1994.

[100] M. Verhaegen and V. Verdult. Filtering and system identification : An introduction. Lecture Notes for the Course SC4040 (ET4094), 2003.

[101] S. L. H. Verhoeven. Robust control of flexible motion systems : A literature study. DCT Report 2009.006, APT536-6288, 2009.

[102] H. Wu, F. Sun, Z. Sun, and L. Wu. Optimal trajectory planning of a flexible dual-arm space robot with vibration reduction. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 40(2), 2004.

[103] K. S. Yeung Y. P. Chen. Regulation of a one link flexible robot arm using sliding mode technique. *International Journal of Control*, 49 :1965–1978, 1989.

[104] A. S. Yigit. On the pd control for a two-link rigid-flexible manipulator. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 116 :179–185, 1994.

[105] Y. Yun and Y. Li. Active vibration control based on a 3-dof dual compliant parallel robot using lqr algorithm. In *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 775–780, 2009.

[106] L. Zaccarian and A. R. Teel. *Modern Anti-windup Synthesis : Control Augmentation for Actuator Saturation*. Princeton University Press, 2011.

[107] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :301–320, 1981.

[108] X. Zhang, J. K. Mills, and W. L. Cleghorn. Multi-mode vibration control and position error analysis of parallel manipulator with multiple flexible links. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 34(2) :197–213, 2010.

[109] X. Zhang, C. Shao, S. Li, and D. Xu. Robust H_∞ control for flexible linkage mechanism systems with piezoelectric sensors and actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 243(1) :145–155, 2001.

[110] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1999.

[111] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.

Titre

Identification et commande pour l'atténuation des vibrations du robot parallèle Par2

Résumé

Le robot parallèle Par2, conçu pour des opérations industrielles de prise et dépôt à haute vitesse et haute précision, subit des vibrations importantes à la fin d'un déplacement. Pour minimiser ces vibrations, l'utilisation d'éléments piézo-électriques autour des bras du robot est proposée. L'identification en boucle ouverte des modes flexibles du robot, à 2,5kg de charge sur la nacelle et à la position d'arrêt, est faite en utilisant une technique basée sur les sous-espaces. Deux modèles sont identifiés, un pour la synthèse des contrôleurs et un autre pour leur validation en simulation. Des contrôleurs stabilisant la boucle fermée sont obtenus et comparés pour deux stratégies de commande: H_∞ à sensibilité mixte et H_∞ Loop Shaping. La robustesse des contrôleurs est ensuite testée pour différentes trajectoires et conditions de charge. Une stratégie anti-windup est mise en place pour corriger l'action d'un contrôleur lorsqu'il ne s'avère pas robuste pour certaines situations limites. Des résultats en simulations et expérimentaux permettent de comparer l'efficacité des contrôleurs.

Mot-clés

Robotique, commande robuste, vibrations, actionneurs piézo-électriques, saturation, anti-windup

---

Title

Identification and control for vibration damping of parallel robot Par2

Abstract

The parallel robot Par2, conceived for high-speed and high-accuracy industrial pick-and-place operations, is subject to severe vibrations at the end of a trajectory. In order to minimize these vibrations, the use of piezoelectric patches wrapped around the robot arms is proposed. The open loop identification of the flexible modes of the robot, charged with 2,5kg and at the stop position, is performed by means of a subspace-based technique. Two models are identified, one for the controller synthesis and another one for validation in simulation. Some stabilizing controllers are obtained and compared for two control strategies: mixed H_∞ sensitivity and H_∞ Loop Shaping. The robustness of the controllers is tested for different trajectory and charge conditions. An anti-windup strategy is employed to correct the action of a controller when it shows no robustness to some limit situations. Some simulation and experimental results allow comparing the effectiveness of the controllers.

Keywords

Robotics, robust control, vibrations, piezo-electric actuators, saturation, anti-windup