# Influence du spectre électronique et de l'effet paramagnétique sur les propriétés des hétérostructures supraconductrices.

Xavier Montiel

▶ **To cite this version:**

Xavier Montiel. Influence du spectre électronique et de l'effet paramagnétique sur les propriétés des hétérostructures supraconductrices.. Supraconductivité [cond-mat.supr-con]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2011. Français. NNT : . tel-00660954

**HAL Id: tel-00660954**

**https://theses.hal.science/tel-00660954**

Submitted on 18 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre :4378

# THÈSE

PRÉSENTÉE À

# L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

PAR **Xavier MONTIEL**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : Lasers, Matière et Nanoscience

# Influence du spectre électronique et de l'effet paramagnétique sur les propriétés des hétérostructures supraconductrices.

Thèse dirigée par Alexandre BOUZDINE

Soutenue le : 09/12/2011

Devant la commission d'examen formée de :

| | | |
|---|---|---|
| **M. BOUZDINE Alexandre** | LOMA - U. Bordeaux 1 - Professeur- Membre de l'IUF | Directeur de thèse |
| **M. CHAMPEL Thierry** | LPMMC- U. Grenoble - Chargé de recherche | Examinateur |
| **M. HOUZET Manuel** | INAC - SPSMS - CEA Grenoble- Chercheur CEA | Rapporteur |
| **M. RODITCHEV Dimitri** | INSP - U. Paris 6 - Directeur de recherche | Rapporteur |
| **M. TAMARAT Philippe** | LPNN - U. Bordeaux 1 - Professeur - Membre de l'IUF | Président du jury |

# Remerciements

Je remercie très chaleureusement Sacha Bouzdine pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe « Nanophysique et transition de phase » et dirigé ma thèse pendant trois ans. J'ai pu profiter de votre savoir et de votre jovialité pour progresser dans la recherche dans la bonne humeur et l'ambiance studieuse. J'ai beaucoup apprécié votre disponibilité pour discuter des difficultés pendant ma thèse. J'admire encore votre sens physique et votre goût inné et inestimable pour comprendre les phénomènes que vous étudiez ainsi que la rigueur avec laquelle vous menez vos recherches.

Je remercie Sébastien Burdin qui fut mon sherpa pendant les deux dernières années de ma thèse. J'ai toujours pu compter sur votre disponibilité et votre grand sens de l'écoute pour parvenir à avancer dans tous les domaines, recherches comme enseignements. J'apprécie particulièrement l'aide que vous m'avez apporté pour mes enseignements et mes futurs choix de carrière.

Je remercie également Jérôme Cayssol, qui partit trop tôt aux Etats-Unis mais qui su m'apporter son écoute et sa bienveillance pendant ma première année de thèse.

Je remercie les « anciens » de l'équipe : François, Daria, Marine, Vu Hung pour leur bonne humeur qui a contribué à la réussite de mes trois années de thèse. Une pensée également pour Michel, qui m'a apporté toute son aide pour ma première étude et mon premier article.

Je remercie Manuel Houzet et Dimitri Roditchev pour avoir pris le temps de lire mon manuscript et d'écrire le rapport de thèse. Je remercie également Thierry Champel et Philippe Tamarat pour avoir participé à mon jury de thèse.

Je remercie la direction du CPMOH, et plus particulièrement son directeur Eric Freysz pour m'avoir accueilli dans le laboratoire. Et je remercie également la direction du LOMA et son directeur Jean-Pierre Delville pour son attention et sa liberté de pensée.

J'adresse mes remerciements au personnel du LOMA, les administratrices Isabelle, Laurette, Suzanne et Annie pour leur disponibilité, leur bonne humeur et leur patience. Pouvoir dialoguer avec vous sur les démarches administratives fut toujours un plaisir.
J'associe à mes remerciements, Bernadette Bergeret, ou l'âme de la bibliothèque de l'IPF, pour sa patience, sa bonne humeur et son dévouement, il lui en fallut faire usage à mainte reprise pour gérer les errements réguliers de mes emprunts « à la volée ».

Spéciale dédicace à Jean-Christophe Delagnes pour son sens physique et ses conseils en pédagogie.

Merci à Joseph, Hassan et Richard pour subvenir aux besoins informatiques du laboratoire. Les grand débats avec Joseph me manqueront.

Et ce travail ne peut se concevoir sans le soutien permanent et sans faille des amis. Je pense à Laure et Philippe, Clarisse et Arnaud, Nicolas, David et Marine, Alice et Patrick, Sam et Matthieu (et Malena) et ceux que j'oublie. Je remercie aussi mes parents et mes frères (et Delphine et Mareva) pour leur patience et leur soutien.

J'adresse tout mon amour et ma tendresse à Pauline pour avoir supporté le sacrifice de plusieurs soirées à cause d'un rapport à rédiger ou d'un exposé à terminer.

De manière générale, ce manuscript est dédicacé à toutes les personnes qui, de prés ou de loin, ont contribué, par leurs ondes positives, à faire de mes trois années de thèse une expérience aussi diverse, amusante et ludique qu'enrichissante.

# Table des matières

**Introduction générale** **3**

**1 Effets du spectre électronique sur les tricouches F/S/F et les jonctions S/F/S.** **9**

1.1 Effet de proximité Supraconducteur-Ferromagnétique . . . . . 10
1.1.1 Théorie du ferromagnétisme : l'interaction d'échange . . . . . 10
1.1.2 Théorie microscopique de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) . . . . . 11
1.2 Les réflexions d'Andreev . . . . . 13
1.3 Effet de vanne de spin dans les tricouches F/S/F . . . . . 16
1.3.1 Principaux résultats expérimentaux . . . . . 16
1.3.2 Modélisation d'une multicouche : modèle du hamiltonien tunnel . . 18
1.3.3 Modélisation de la tricouche F/S/F . . . . . 20
1.3.4 Effet d'une dépendance en spin de l'énergie de transfert . . . . . 24
1.3.5 L'inversion de courbure d'une branche de spin : cas d'un "presque" demi-métal. . . . . 27
1.3.6 Conclusion . . . . . 34
1.4 La transition de phase $0-\pi$ dans les tricouches S/F/S . . . . . 34
1.4.1 Modélisation de la tricouche S/F/S . . . . . 35
1.4.2 Effet d'un décalage des spectres . . . . . 36
1.4.3 Effet de l'anisotropie des spectres . . . . . 38
1.4.4 Effet pair-impair dans les multicouches S/F/../F/S . . . . . 39
1.4.5 Conclusion . . . . . 39

**2 Supraconductivité induite par champ magnétique dans les bicouches S/N et S/S : effets du désordre.** **41**

2.1 Formalisme quasi-classique et transition de phase S-N . . . . . 43
2.1.1 Formalisme d'Eilenberger . . . . . 43
2.1.2 Le diagramme de phase $(H_{c2}, T)$ . . . . . 45
2.2 Modèle de la bicouche S/N . . . . . 49
2.2.1 Formalisme de Gorkov . . . . . 50
2.2.2 Formalisme d'Eilenberger et prise en compte des impuretés . . . . . 51
2.3 La réentrance dans la bicouche S/N dans le cas propre ($\tau \longrightarrow \infty$) . . . . . 51
2.3.1 La température critique en fonction du couplage intercouche . . . . 52
2.3.2 Le gap supraconducteur à température nulle en fonction du couplage intercouche . . . . . 54
2.3.3 Les diagrammes de phase de la bicouche S/N . . . . . 54
2.4 L'influence des impuretés sur la supraconductivité induite par champ magnétique dans les bicouches S/N et S/S . . . . . 60
2.4.1 Influence des impuretés dans la bicouche S/N . . . . . 60
2.4.2 Influence des impuretés dans la bicouche S/S . . . . . 62

2.5 Conclusion . . . . . 65

**3 L'effet de proximité dans les multicouches S/N/.../N et les jonctions S/N/.../N/S 67**
3.1 Théorie de Gorkov appliquée aux multicouches. . . . . 68
3.1.1 Fonction de Gorkov dans la multicouche S/N/.../N . . . . . 70
3.1.2 Fonctions de Gorkov dans la jonction S/N/.../N/S . . . . . 70
3.2 Etude de la multicouche S/N/.../N . . . . . 71
3.2.1 Introduction aux densités d'états dans les structures S/N . . . . . 71
3.2.2 Etude des densités d'états dans la bicouche S/N . . . . . 72
3.2.3 Etude de la tricouche S/N/N . . . . . 75
3.2.4 Effet d'un décalage d'énergie sur les propriétés des bicouches S/N . 78
3.2.5 Densité d'états dans la multicouche S/N/.../N à faible couplage. . . 84
3.3 Etude de la jonction S/N/.../N/S . . . . . 90
3.3.1 Etude de la jonction S/N/S . . . . . 90
3.3.2 Modélisation de la jonction S/N/.../N/S . . . . . 96
3.4 Conclusion . . . . . 101

**Conclusion générale 103**

**A Fonctions de Green de Gorkov dans les multicouches S/N/.../N et les jonctions S/N.../N/S 107**

**Bibliographie 113**

# Introduction générale

La supraconductivité,découverte en 1911 par Kammerling-Onnes et Gilles Holtz dans le Mercure à 4,2K [1],[2], est la propriété de certains matériaux à conduire le courant électrique sans aucune résistance à basse température. De nos jours, la supraconductivité est notamment très utilisée pour produire des champs magnétiques très forts. Ainsi, on retrouve des éléments supraconducteurs dans les trains à lévitation, l'imagerie à résonance magnétique nucléaire et dans les accélérateurs de particules. Le transport du courant électrique sans perte, le stockage secondaire de l'électricité dans d'immenses anneaux supraconducteurs ou encore les moteurs électriques plus économes et plus puissants sont d'autres applications possibles de la supraconductivité. Toutes les difficultés de la mise en oeuvre de ces applications tiennent aux propriétés supraconductrices qui n'existent qu'à très basses température, qui résistent peu aux champs magnétiques et qui disparaissent lorsque le courant circulant à l'intérieur du matériau supraconducteur est trop élevé. Depuis une vingtaine d'année, on utilise également des matériaux supraconducteurs dans le domaine de la physique mésoscopique. On envisage leur utilisation pour la constitution de bit quantique. La compréhension de la supraconductivité, et ses interactions avec son environnement, est donc un enjeux important pour la recherche de nouveaux matériaux supraconducteurs qui permettront la mise en oeuvre, à grande échelle, de ces applications. Dans cette introduction, je présente les principales avancées dans le domaine théorique et expérimental de la supraconductivité et je présenterai le cadre dans lequel cette thèse s'inscrit.

En 1933, Meissner et Oschenfeld découvrent que les matériaux dans l'état supraconducteur rejettent les lignes de champ magnétiques [3]. C'est la découverte de l'effet Meissner qui donne le point de départ de la première description phénoménologique de la supraconductivité avec la théorie des frères London [4], [5] qui postulent en 1935 la pénétration du champ magnétique dans le supraconducteur sur un longueur $\lambda_L$ appelée longueur de pénétration.

Pour expliquer ce nouvel état de la matière, Ginzburg et Landau supposent en 1950 [6] un paramètre d'ordre supraconducteur $\Psi$ complexe. Il correspond à la fonction d'onde des électrons supraconducteurs dont le module au carré, $|\Psi|^2$ correspond à la densité d'électrons supraconducteurs et dont la phase conditionne la circulation du courant. Ce paramètre est nul lorsque le métal est dans sa phase résistive (qui par la suite sera nommée phase normale et désignée par la lettre N), et non-nul lorsqu'il est dans sa phase supraconductrice (notée S). La théorie de Ginzburg-Landau (GL) permet de déterminer le comportement critique des supraconducteurs en bon accord avec les expériences. Cependant, cette théorie n'est valable qu'à proximité de la transition de phase S-N et ne permet pas de décrire l'ensemble du diagramme de phase des matériaux supraconducteurs.

Il faut attendre 1957 et la théorie de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [7],[8] pour donner une explication microscopique à la supraconductivité. La théorie BCS permet encore de prédire un grand nombre de phénomènes liés à la supraconductivité, ses propriétés thermodynamiques et magnétiques. BCS postulent l'existence d'un couplage entre

les électrons d'un métal en paire, appelées paires de Cooper [9]. L'appariement d'électrons s'explique par l'existence d'une force attractive qui compense la répulsion coulombienne entre électrons. Les ions positifs qui constituent le réseau cristallin du métal, interagissent avec le gaz électronique, chargé négativement. Au passage d'un électron, les ions sont légèrement attirés et se déplacent, donnant naissance à un phonon. Ainsi, il se crée localement une zone chargée positivement qui persiste dans le temps du fait de l'inertie des ions. Cette zone électriquement positive ralentit légèrement l'électron qui vient de passer et attire un autre électron, qui se trouve alors apparié au premier électron. L'appariement des électrons est donc produit par l'intermédiaire d'un phonon. L'agitation thermique détruit cet équilibre précaire, notamment par l'émergence de phonons thermiques, ce qui explique que la supraconductivité n'existe qu'à basse température. Une paire de Cooper est un état cohérent entre deux électrons dont l'énergie est plus faible que celle de deux électrons non appariés au sein d'un métal normal. La paire de Cooper est un boson constitué de deux électrons d'impulsions et de spin opposés. Les paires de Cooper peuvent condenser à basse température dans l'état de plus basse énergie de manière analogue à un condensat de bosons [10] [1]. Le spectre énergétique d'un composé supraconducteur montre une différence d'énergie entre le premier état excité et l'état fondamental supraconducteur appelée gap d'énergie et notée $\Delta$. Ce gap énergétique détermine l'énergie nécessaire pour passer de l'état supraconducteur à l'état normal en cassant une paire de Cooper. Cette énergie tend vers zéro lorsque la température augmente vers la température critique de la transition de phase S-N, $T_c$. Cette énergie de paire définie une longueur caractéristique sur laquelle la cohérence supraconductrice existe, et que l'on nomme longueur de cohérence noté $\xi_0$ et environ égale à $\frac{v_F}{\Delta}$ [2].

La supraconductivité disparaît pour un champ magnétique supérieur à une valeur nommée champ critique et notée $H_c$. La théorie BCS et la théorie GL fournissent deux explications à l'existence de cette limite en champ magnétique.

Le premier effet qui détruit la supraconductivité lorsqu'elle est soumise à un champ magnétique est l'effet orbital. Le champ magnétique induit une force de Lorentz qui s'exerce en sens opposé sur chaque électron (à cause de leurs impulsions opposées). Cette force étire la paire de Cooper ce qui finit par la détruire. Cet effet permet d'expliquer la présence de l'effet Meissner. En 1957, Abrikosov trouve une autre solution aux équations de Ginzburg-Landau selon laquelle le champ magnétique peut pénétrer sous forme de filament dans le supraconducteur [12]. Cette effet, directement produit par l'effet orbital, permet de distinguer deux types de supraconducteurs. Les supraconducteurs de type 1 ( la plupart des métaux purs $Pb$, $Al$, $Hg$...) qui expulsent totalement le champ magnétique dans l'état supraconducteur jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur du champ critique. Les supraconducteurs de type 2 (notamment les supraconducteurs à haute température critique) dans lesquels il existe deux champs critiques $H_{c1}$ et $H_{c2}$, avec $H_{c1} < H_{c2}$. Dans ce type de supraconducteur, si le champ magnétique $H$ est en dessous de $H_{c1}$, le matériau est supraconducteur et présente l'effet Meissner [3]. Pour $H_{c1} < H < H_{c2}$, alors le matériaux est supraconducteur mais le champ magnétique pénètrent dans le matériaux sous forme de filaments dont l'organisation s'explique grâce à l'effet orbital (observés en réseau tri-

[1] Il est important de remarquer qu'on parle dans ce cas de condensat "BCS". Cette différence est à l'origine de la théorie "Bose-BCS crossover". Pour plus d'information, voir la référence [11].

[2] Dans la suite, on se place dans un système de coordonnées dans lequel $\hbar = k_B = \mu_B = 1$.

[3] Dans l'effet Meissner, il existe un supra-courant qui tourne sur le bord du matériaux. Ce supra-courant tournant produit une aimantation dans le sens opposé au champ magnétique externe ce qui écrante le champ magnétique dans le matériaux. Ce supra-courant existe sur la longueur caractéristique de London $\lambda_L$.

angulaire par exemple dans [13],[14],[15])[4]. Ces filaments sont appelés vortex d'Abrikosov [5].

Le second effet qui détruit la supraconductivité lorsqu'elle est soumise à un champ magnétique est l'effet paramagnétique. Cette effet s'explique par la levée de dégénérescence entre les niveaux de spin due à l'effet Zeeman. Ainsi, les spins ont tendance à s'aligner dans le sens du champ magnétique. Cet alignement de spin entraîne la destruction immédiate de la paire de Cooper. Cet effet se produit lorsque l'énergie d'appariement des électrons dans la paire de Cooper $N(0)\frac{\Delta_0^2}{2}$ est égale à l'énergie de polarisation des spins $\chi(0)\frac{B^2}{2}$ (avec $\chi(0) = 2N(0)\mu_B^2$, la susceptibilité magnétique du spin électronique). Cela défini la limite paramagnétique de Clogston-Chandrasekar [16], [17] où le champ magnétique critique à température nulle est égal à $H_P = \Delta_0/\sqrt{2}$.

D'une manière générale, l'effet orbital est plus limitatif que l'effet paramagnétique. Cependant, dans certaines dispositions, l'effet orbital est fortement réduit et c'est l'effet paramagnétique qui régit l'interaction entre le champ magnétique et le supraconducteur. C'est le cas dans les composés de basse dimensionnalité, qui sont d'un grand intérêt, à la fois sur le plan fondamental que sur le plan technologique par leurs applications en nanoélectronique. Dans le présent rapport, nous nous placerons dans le cas ou l'on peut négliger l'effet orbital.

L'effet paramagnétique peut être compensé par un état supraconducteur particulier. En 1964, Larkin et Ovchinikov [18] et Fulde et Ferrell [19] (FFLO) démontrèrent indépendamment qu'une modulation spatiale du paramètre d'ordre permet de conserver la supraconductivité dans un domaine du diagramme de phase où, en l'absence de modulation, la phase normale est plus stable. Cette phase est désignée par le terme phase FFLO dans la littérature. Nous reviendrons plus en détail sur le mécanisme à l'origine de la phase FFLO dans la section 2.1.2 du deuxième chapitre.

Lorsqu'un supraconducteur est juxtaposé à un autre matériaux non supraconducteur, les paires de Cooper peuvent migrer vers le matériaux non supraconducteur. Le matériau non supraconducteur devient supraconducteur sur de faibles distances [20]. En contrepartie, une fraction des électrons du matériau non supraconducteur passent sur une faible longueur dans le supraconducteur, modifiant les propriétés de ce dernier proche de l'interface [21]. Cette influence entre un matériau non supraconducteur et un matériaux supraconducteur proche de l'interface est appelée effet de proximité. Cet effet se manifeste sur des longueurs différentes selon les composés. La longueur caractéristique dans le supraconducteur est la longueur de cohérence $\xi_0$. Si le matériaux en contact est un métal (ferromagnétique, isolant) [6], on note cette longueur de cohérence $\xi_{N(F,I)}$ qui peut dépendre de la pureté de ce dernier et de son aimantation. L'effet de proximité a notamment été observé en 1959 par H. Meissner [22] et en 1961 par Smith [23] où ils observèrent que le paramètre d'ordre supraconducteur ne s'annule pas à l'interface entre un supraconducteur et un métal mais décroît sur une distance dite de cohérence $\xi_N$ de l'ordre d'une dizaine de nanomètre. A l'interface S/N, on observe un phénomène de réflexion particulier appelé réflexion d'Andreev [24]. Un électron incident sur la surface S/N est retro-réfléchi en trou

[4] L'autre critère pour déterminer le type de supraconducteur est basé sur la comparaison entre la longueur de cohérence $\xi_0$ et la longueur de pénétration de London $\lambda_L$ via un paramètre noté $\kappa = \lambda_L/\xi_0$. Pour $\kappa < 1/\sqrt{2}$, le supraconducteur est de type I. Pour $\kappa > 1/\sqrt{2}$, le supraconducteur est de type II.

[5] La dénomination de vortex est donné en raison des courants tournants présents dans le matériaux. Ces courants tournants écrantent le supra-courant tournant sur les bords du matériaux supraconducteurs et ainsi permettent la pénétration du champ magnétique dans le supraconducteur. Chaque vortex permet de faire rentrer un quanta de flux magnétique $\phi_0 = \frac{hc}{2e}$ à travers le matériaux supraconducteur.

[6] Dans la suite, le matériaux ferromagnétique sera noté F, le matériaux isolant sera noté I et le matériaux métallique sera noté N (métal normal).

de spin opposé et transmis sous forme de paire de Cooper (nous reviendrons en détails sur ce phénomène dans la section 1.2 du premier chapitre).

L'effet de proximité entre supraconducteur et ferromagnétique a été étudié depuis les années 80 et a donné lieu à des résultats surprenants, comme l'oscillation du paramètre d'ordre supraconducteur avec l'épaisseur du matériaux ferromagnétique où la coexistence, entre deux matériaux mais également au sein du même matériaux, d'un ordre ferromagnétique et d'un ordre supraconducteur [25]. Les hétérostructures F/S/F sont, en physique mésoscopique, un exemple des propriétés inattendues produites par l'effet de proximité S/F. Dans ces structures, la température critique de la couche S est directement influencée par l'orientation relative des aimantations des couches F. Cet effet, dit de "vanne de spin" (spin-valve ou spin-switch en anglais) a été découvert par Deutscher et Meunier en 1968 [26]. Il se caractérise par une température critique, lorsque les aimantations des couches F sont parallèles, $T_c^P$, qui est plus faible que la température critique lorsque les aimantations des couches F sont antiparallèles, $T_c^{AP}$. On a $T_c^P < T_c^{AP}$. Dans la configuration parallèle, les aimantations des ferromagnétiques produisent un champ magnétique résiduel qui déstabilise le supraconducteur. Cet effet de vanne de spin est directement dépendant de l'effet de proximité S/F.

Si on relie deux supraconducteurs par un matériaux non supraconducteur dont l'épaisseur est plus petite que la longueur de cohérence dans ce matériaux, alors il s'établit un courant de paire de Cooper entre les deux supraconducteurs à travers le matériaux non supraconducteur. Cette hétérojonction donne naissance à la physique de l'effet Jospehson [27]. Le courant issue de l'effet Josephson est directement relié à la différence de phase entre les deux condensats de paire de Cooper des deux supraconducteurs par la formule $I = I_c \sin(\Delta\chi)$ où $I_c$ est le courant Josephson critique et $\Delta\chi$ la différence de phase entre les deux supraconducteurs. Les premières observations d'un courant tunnel de type Josephson ont été effectuées par Giaever en 1961 [28]. Dans les jonctions S/F/S, il a été démontré l'existence d'un changement de signe du courant critique Josephson [29]. Ce changement de signe a été interprété comme l'existence d'une différence de phase $\pi$ supplémentaire, à la différence de phase initiale entre les deux supraconducteurs. On distingue alors deux phases dans la jonctions S/F/S. La phase 0 qui se caractérise par le fait que les gaps supraconducteurs des deux couches S sont de même signe. La phase $\pi$ qui se caractérise par le fait que les gaps supraconducteurs des deux couches S sont de signes opposés. Cette phase doit exister dans les hétérostructures supraconductrices-ferromagnétiques. L'observation d'une transition de phase $0 - \pi$ gouvernée par les propriétés de la couche ferromagnétique est théoriquement possible [30].

**Dans le premier chapitre**, nous étudions l'influence des spectres électroniques sur les propriétés des tricouches F/S/F et des jonctions S/F/S. En particulier dans la tricouche F/S/F, nous proposons une explication de l'effet inverse de vanne de spin dans lequel $T_c^{AP} < T_c^P$, en se basant sur un inversion du spectre électronique d'une des sous-bande électronique. Dans les jonctions S/F/S , nous proposons de compléter le diagramme de phase $0 - \pi$ en tenant compte des particularités des spectres électroniques et des surfaces de Fermi.

Les hétérostructures S/F existent à l'état naturels. Dans ces matériaux quasi-2D, un plan atomique supraconducteur est juxtaposé à des plans atomiques non-supraconducteur. Ces matériaux présentent des propriétés particulières comme une forte anisotropie du champ magnétique critique $H_{c2}$. Cette propriété a été découverte dans des supraconducteurs quasi 2D de métal intercalé par des couches de dichalcogénoïdes [31] puis dans du graphite intercalé [32],[33]. Cette propriété étonnante existe également dans les supraconducteurs à hautes températures critiques. Découvert en 1986 par J.G. Bednorz et K.

A. Muller dans un matériau lamellaire à base d'oxydes de cuivre, il apparaît une phase supraconductrice dont la température critique $T_c = 35K$ dépasse tout ce qui était attendu [34]. Depuis, plusieurs matériaux à $T_c > 100K$ ont été découverts et le record actuel est détenu par des composés à base de mercure sous pression ($T_c = 164K$) [35] [7]. La structure en couche de ces composés à base d'oxyde de cuivre, peut être décrite comme des hétérojonctions naturelles où la supraconductivité n'existe que dans les plan atomique de $CuO_2$. La modélisation de ces hétérostructures, en utilisant la physique de l'effet de proximité, permet de comprendre les propriétés étonnantes de ces structures.

**Ainsi, dans le deuxième chapitre**, nous étudions en détail le diagramme de phase champ magnétique-température $(H_{c2}, T)$ des bicouches S/N et S/S afin de mieux appréhender les propriétés des supraconducteurs quasi 2D en général. En particulier, nous prévoyons l'apparition d'une phase supraconductrice induite par champ magnétique. Cette étude permet également d'étudier l'influence de la force du couplage intercouche et la présence d'impuretés sur cette nouvelle phase.

Afin de comprendre les propriétés développées dans les multicouches, nous étudions dans **le dernier chapitre** l'effet de proximité dans les multicouches S/N/.../N et les jonctions S/N/.../N/S à l'aide d'un formalisme qui va nous permettre de prendre en compte les effets de cohérence entre les couches. Ainsi, nous nous intéressons aux densités d'états, au courant Josephson dans les multicouches. Nous déterminons également l'effet du nombre de couche métallique et d'un décalage du spectre électronique sur les propriétés de la couche supraconductrice.

[7] Il existe d'autres propriétés singulières dans les supraconducteurs à haute température critique. L'une des hypothèses de la théorie BCS repose sur un appariement singulet de deux électrons autour d'une surface de Fermi sphérique, formant la supraconductivité conventionnelle ou supraconductivité de type $s$. Or, dans les matériaux supraconducteurs à haute température critique, il a été démontré qu'il peut exister des appariements singulets avec une symétrie complexe de type $d$ [36]. Cette symétrie $d$ a été découverte par l'observation directe d'un demi quantum de flux magnétique piégé au centre d'un anneau supraconducteur réalisé avec trois monocristaux d'$YBa_2Cu_3O_{7-x}$ orientés dans des directions différentes [37].

# Chapitre 1

# Effets du spectre électronique sur les tricouches F/S/F et les jonctions S/F/S.

Dans ce chapitre, nous étudions les caractéristiques de l'effet de proximité à l'échelle nanométrique. Dans ces systèmes, l'ordre supraconducteur et l'ordre ferromagnétique alternent sur une période de l'ordre de la longueur de cohérence du ferromagnétique.

Dans les années 80 et 90, des composés furent synthétisés au sein desquels l'ordre ferromagnétique et l'ordre supraconducteur coexistent sur des longueurs de l'ordre de la longueur d'onde de Fermi. Ces systèmes, à haute température critique posent la question de la coexistence à l'échelle atomique de deux ordres antagonistes. Dans les Ruthénocuprates, basés sur $RuSr_2GdCu_2O_8$, la supraconductivité existe dans le plan atomique $CuO_2$ et l'ordre ferromagnétique dans les plans atomiques $RuO_2$ adjacents [38],[39]. Ils constituent un exemple de cette coexistence. Dans ce matériaux, l'ordre magnétique existe si la température est inférieure à la température de Curie du matériau, $T_{Curie} \simeq 130 - 140K$ alors que la phase supraconductrice existe pour des températures inférieures à $T_c = 30 - 50K$. Dans la phase supraconductrice, les ruthénocuprates sont également ordonnés magnétiquement. La nature exacte du ferromagnétisme dans ces matériaux a été longtemps discutée. Des mesures d'aimantation démontrent la présence d'un ordre ferromagnétique dans les couches de $RuO_2$ alors que des mesures par diffusion de neutron révèlent la présence d'un ordre antiferromagnétique dans les trois dimensions de l'espace [40]. D'autres mesures par diffusions de neutrons dans les composés $RuSr_2YCu_2O_8$ ont bien confirmé la présence d'un ordre ferromagnétique au sein même des couches [41]. Cette coexistence ferromagnétique-supraconducteur au sein d'un même matériau demeure mal comprise à ce jour.

L'effet de proximité supraconducteur-ferromagnétique s'étudie également sur des systèmes où les deux ordres sont spatialement séparés. Ce type de structure permet d'étudier l'effet de proximité S/F à l'échelle nanométrique. Ces systèmes peuvent être obtenus par des techniques de nanofabrication produisant des épaisseurs de couches de quelques nanomètres, en conservant le caractère supraconducteur et ferromagnétique de chaque couche. Il peut se former à l'interface S/F une couche magnétiquement morte, qui apparaît selon les techniques de synthèse utilisées [42]. L'existence de cette couche entraîne la nécessité d'utiliser des ferromagnétiques forts pour ne pas perdre le caractère ferromagnétique des couches F. Néanmoins, le progrès des techniques de nanofabrication permet de synthétiser des nanosystèmes S/F de plus en plus petit avec un meilleure contrôle du taux d'impuretés. Les nanosystèmes S/F sont aujourd'hui étudiés pour leurs applications possibles

en spintronique et dans les ordinateurs quantiques [25], [43], [44]. Par exemple, les jonctions Josephson S/F/S sont de bonnes candidates pour élaborer le système de base de l'ordinateur quantique, le q-bit [70].

Nous allons étudier les caractéristiques de deux systèmes S/F très étudiés, les tricouches F/S/F et les jonctions S/F/S. Le but est de comprendre l'influence du spectre électronique sur les propriétés de ces tricouches. On s'intéresse à l'effet de l'anisotropie du spectre électronique et l'effet d'un décalage de fond de bande entre les différents spectre sur les propriétés des tricouches. Ainsi, dans une première partie, nous présentons l'ensemble des outils théoriques qui vont nous permettre d'étudier en détail l'effet de proximité S/F dans les systèmes quasi-2D.

Puis, dans la tricouche F/S/F, nous proposons une explication à l'inversion de l'effet vanne de spin. Nous étudions en détails deux hypothèses : la dépendance en spin du transfert électronique intercouche et l'existence d'un spectre électronique presque demi-métallique dans le ferromagnétique.

Enfin, dans la jonction S/F/S, nous établissons de nouvelles conditions pour l'observation de la transition de phase $0-\pi$. Ces nouvelles conditions sont basées sur l'existence possible de décalage d'énergie entre les spectres électroniques du supraconducteur et du ferromagnétique. Nous nous intéressons également à l'effet de l'anisotropie des surfaces de Fermi sur la transition de phase $0-\pi$.

## 1.1 Effet de proximité Supraconducteur-Ferromagnétique

### 1.1.1 Théorie du ferromagnétisme : l'interaction d'échange

La description de structures hybrides S/F nécessite une modélisation simple du ferromagnétisme. L'objet de cette section est de donner, à partir des éléments à l'origine du ferromagnétisme, le cadre dans lequel cette thèse va traiter des interactions supraconducteur-ferromagnétique [46],[47].

Le ferromagnétisme provient essentiellement des interactions électrostatiques électron-électron associées au principe de Pauli. Si l'on considère un système à deux électrons, on peut établir quatre états, combinaisons linéaires des états de spin, qui décrivent l'aimantation du système. Ces quatre états se divisent en un état singulet (antisymétrique par permutation des spins), et trois états triplets (symétrique par permutation des spins). Le principe de Pauli exige que la fonction d'onde totale $\Psi$ change de signe par permutation simultanée des coordonnées spatiales et des coordonnées de spin. Or, la fonction d'onde totale est le produit de la fonction d'onde orbitale (dépendantes des coordonnées d'espace) et de la fonction d'onde de spin. Ainsi, les fonctions d'ondes orbitales symétriques (antisymétriques) par permutation des coordonnées d'espace sont nécessairement associées à l'état de spin singulet (triplet). De plus, nous constatons que l'orientation des spins est préférable dans la configuration parallèle. La différence d'énergie entre les états triplets et l'état singulet est appelé énergie d'échange, notée $J$. Dans le cas où $J$ est petite devant les autres énergies d'excitation du système, l'hamiltonien à deux électrons possède, dans le sous espace des 4 états de spins $(\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow)$, les mêmes valeurs propres que le hamiltonien simplifié d'Heisenberg :

$$\widehat{H} = -J\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \tag{1.1}$$

où $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ sont les opérateurs de spin des deux électrons. Dans le système à deux électrons, $J > 0$ donc l'orientation parallèle des spins est favorisée et le composé est ferromagnétique.

L'antiferromagnétisme est également décrit par l'hamiltonien (1.1), mais dans ce cas $J < 0$ et c'est l'orientation antiparallèle qui est favorable. L'interaction d'échange $J$ dépend fortement de la distance entre les deux électrons.

Dans un métal, l'interaction d'échange est de manière similaire gouvernée par le recouvrement des fonctions d'onde électroniques. Il peut donc exister de nombreux types d'échange : entre deux électrons localisés sur deux ions magnétiques, voisins ou séparés par un ion non magnétique, entre un électron localisé et un électron de conduction voire même entre deux électrons de conduction. Dans ce dernier cas, on parle d'échange itinérant.

En généralisant le problème à $N$ électrons, on s'aperçoit qu'il apparaît un agencement de moments magnétiques locaux qui produisent un champ magnétique en tout point du métal. Un électron interagit localement avec ce champ et avec les électrons voisins. On utilise alors l'approximation de champ moléculaire (introduite par P. Weiss) qui consiste à remplacer le champ magnétique local par sa valeur moyenne uniforme d'équilibre thermodynamique [1]. Cette valeur moyenne doit alors se retrouver en calculant la configuration d'équilibre thermodynamique des spins : c'est une théorie auto-cohérente. Ce champ est alors appelé champ d'échange et sera noté $h$ dans la suite. Il est à l'origine de la levée de dégénérescence de spin au sein du matériau considéré.

### 1.1.2 Théorie microscopique de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

L'intêret de la théorie BCS est de donner une description microscopique de la supraconductivité. En partant de l'hamiltonien de Frölich [48], qui décrit l'interaction électron-phonon, BCS propose l'hamiltonien suivant [7],[8] :

$$\widehat{H} = \int d^3r \left[ \sum_{\sigma=\downarrow,\uparrow} \Psi_\sigma^\dagger (r)\, \widehat{H}_0 \Psi_\sigma (r) + g(r)\, \Psi_\uparrow^\dagger (r)\, \Psi_\downarrow^\dagger (r)\, \Psi_\downarrow (r)\, \Psi_\uparrow (r) \right] \tag{1.2}$$

qui contient un hamiltonien à un corps $\widehat{H}_0 = \widehat{\xi} + V(r)$ regroupant les termes d'énergie cinétique $\widehat{\xi}$ et d'énergie potentielle $V(r)$ :

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \boldsymbol{\nabla}_r - q\mathbf{A}(r) \right)^2 - \mu \tag{1.3}$$

où $\mathbf{A}(r)$ est le potentiel vecteur, $\mu = E_F$ le potentiel chimique ou énergie de Fermi et $r$ la position de l'électron. Il contient également une interaction effective attractive de contact véhiculée par l'échange de phonons entre les électrons. Dans un système inhomogène, l'amplitude $g(r) \leq 0$ de cette interaction varie avec la position. En particulier, elle est nulle ou positive dans les parties de l'échantillon constituées de métal normal.

Le modèle BCS suppose que l'interaction entre électron peut être traitée en champ moyen en considérant que les amplitudes de paire du type $\left\langle \Psi_\uparrow^\dagger (r)\, \Psi_\downarrow^\dagger (r) \right\rangle$ ou $\langle \Psi_\downarrow (r)\, \Psi_\uparrow (r) \rangle$ peuvent être non nulles. L'hamiltonien BCS dans l'approximation de champ moyen s'écrit :

$$\widehat{H}_{BCS} = \int d^3r \sum_{\sigma=\downarrow,\uparrow} \Psi_\sigma^\dagger (r)\, \widehat{H}_0 \Psi_\sigma (r) - \int d^3r \left[ \Delta(r)\, \Psi_\uparrow^\dagger (r)\, \Psi_\downarrow^\dagger (r) + \Delta^* (r)\, \Psi_\downarrow (r)\, \Psi_\uparrow (r) \right] \tag{1.4}$$

complété par la condition d'autocohérence :

$$\Delta(r) = |g(r)| \langle \Psi_\downarrow (r)\, \Psi_\uparrow (r) \rangle = -|g(r)| \langle \Psi_\uparrow (r)\, \Psi_\downarrow (r) \rangle . \tag{1.5}$$

[1] On parle aussi d'approximation de champ moyen.

Les crochets $\langle ... \rangle$ désignent une moyenne sur l'état fondamental du système à $T = 0K$ et une moyenne statistique sur la distribution de Gibbs grand-canonique à température non nulle.

La présence d'une interaction attractive produit un état fondamental corrélé dans lequel les amplitudes de paires $\left\langle \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r)\,\Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r)\right\rangle$ ou $\langle \Psi_{\downarrow}(r)\,\Psi_{\uparrow}(r)\rangle$ sont effectivement non nulles [2] L. P. Gorkov a reformulé la théorie BCS en utilisant le formalisme des fonctions de Green [3]. Nous présentons les principes et les résultats usuels de ce formalisme.

**Formalisme de Gorkov**

Le formalisme de Gorkov est la formulation de la théorie BCS due à Gorkov [49],[50],[51]. Il permet d'étudier la supraconductivité en utilisant le formalisme des fonctions de Green. Les propagateurs de Gorkov s'écrivent

$$G(x_1,x_2) = \left\langle T_\tau \Psi_{\uparrow}(x_1)\,\Psi_{\uparrow}^{\dagger}(x_2)\right\rangle \tag{1.6}$$

$$\overline{G}(x_1,x_2) = -\left\langle T_\tau \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(x_1)\,\Psi_{\downarrow}(x_2)\right\rangle = -G(x_1,x_2) \tag{1.7}$$

$$F^{\dagger}(x_1,x_2) = \left\langle T_\tau \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(x_1)\,\Psi_{\uparrow}^{\dagger}(x_2)\right\rangle \tag{1.8}$$

$$F(x_1,x_2) = \langle T_\tau \Psi_{\uparrow}(x_1)\,\Psi_{\downarrow}(x_2)\rangle \tag{1.9}$$

où $x = (\mathbf{r},\tau)$ repère un événement par ses coordonnées d'espace $r$ et de temps imaginaire $\tau$. Les fonctions de Green (1.6) et (1.7) sont appelées fonctions de Green normales. Les fonctions de Green (1.8) et (1.9) sont appelées fonctions de Green anomales. Elles peuvent s'écrire de manière matricielle dans le formalisme de Nambu sous la forme

$$\widehat{G}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} G(x_1,x_2) & F(x_1,x_2) \\ -F^{\dagger}(x_1,x_2) & \overline{G}(x_1,x_2) \end{pmatrix}.$$

Les équations du mouvement de fonctions de Green à été obtenu par Gorkov à partir de celle concernant les opérateurs $\Psi_{\sigma}^{\dagger}$ et $\Psi_{\sigma}$, et elle s'écrivent :

$$\widehat{H}_{BCS}.\widehat{G}(x_1,x_2) = I.\delta(x_1 - x_2) \tag{1.10}$$

où $\widehat{H}_{BCS}$ s'écrit

$$\widehat{H}_{BCS} = \begin{pmatrix} \partial_\tau + \widehat{H}_0 & \Delta(r) \\ -\Delta^*(r) & \partial_\tau - \widehat{H}_0^* \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'un supraconducteur uniforme, propre et infini, on peut résoudre simplement les équations de Gorkov par une transformation de Fourier

$$G(x_1,x_2) = T\sum_{\omega}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} G_{i\omega}(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{p}.(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)-i\omega(\tau_1-\tau_2)}$$

[2] Il faut noter que l'amplitude de paire de Cooper existante dans un métal normal, via l'effet de proximité ne contredit pas la théorie BCS. En effet, dans le métal normal, l'interaction $g(r)$ est bien nulle.

[3] Bogoliubov-de Gennes ont reformulés la théorie BCS en utilisant le formalisme de quasiparticules. Le formalisme de Bogoliubov-de Gennes consiste à diagonaliser l'hamiltonien (1.4) dans sa base d'excitations propres (les quasiparticules). Cette diagonalisation due à Bogoliubov-Valantin-de Gennes [53],[54] s'opère au moyen d'une transformation unitaire des opérateurs création annihilation de particules.

où $\omega = (2n+1)\pi T$ sont les fréquences de Matsubara fermioniques [51]. On obtient :

$$\begin{array}{ll} G_\omega(\mathbf{p}) = \frac{\xi_p + i\omega}{\xi_p^2 + \Omega^2} & \overline{G}_\omega(\mathbf{p}) = \frac{\xi_p - i\omega}{\xi_p^2 + \Omega^2} \\ F_\omega(\mathbf{p}) = \frac{\Delta}{\xi_p^2 + \Omega^2} & F_\omega^\dagger(\mathbf{p}) = \frac{\Delta^*}{\xi_p^2 + \Omega^2} \end{array} \tag{1.11}$$

avec $\Omega^2 = |\Delta|^2 + \omega^2$ et $\xi_p = p^2/2m - \mu$.

Les fonctions (1.11) permettent de calculer toutes les propriétés thermodynamiques d'un supraconducteur massif en champ nul. Une étude de la prise en compte d'impuretés paramagnétique dans le supraconducteur a été effectuée par Abrikosov et Gorkov en 1961 [51],[52] .

## 1.2 Les réflexions d'Andreev

Un électron (ou un trou) qui a une énergie inférieure au gap supraconducteur ne peut pas se propager dans le supraconducteur. Ainsi, lorsqu'un supraconducteur est juxtaposé à un métal, un électron du métal ne peut pas entrer directement dans le supraconducteur si son énergie est inférieure au gap supraconducteur. Andreev [24] et Saint-James [55] montrèrent indépendamment que cela est possible via un processus inélastique nommé réflexion d'Andreev. Supposons que l'on mette en contact un métal normal et un supraconducteur : un électron d'énergie inférieure au gap ne peut être transmis du métal normal vers le supraconducteur que sous la forme d'une paire de Cooper [56].

La conservation de la charge totale impose qu'un trou de spin opposé à celui de l'électron se forme dans le métal. En utilisant la théorie de Bogoliubov-de Gennes, appliquée à une interface supraconducteur-métal, on voit que le trou formé est rétro-réfléchi. L'impulsion normale du trou diffère de celle de l'électron incident de $\delta k = k_F \frac{\delta E}{E_F}$ où $\delta E$ est la différence entre l'énergie de l'électron incident et le niveau de Fermi (voir figure 1.1). Le mécanisme microscopique se traduit par le fait qu'un électron de spin $\uparrow$ qui arrive à l'interface S/N passe dans le supraconducteur en s'appariant avec un électron $\downarrow$ de même énergie. L'électron $\downarrow$ qui passe "de force" dans le supraconducteur, laisse derrière lui un trou de spin $\downarrow$. L'électron incident et le trou réfléchi constituent un état corrélé et forment une paire d'Andreev qui transmet les corrélations supraconductrices dans le métal normal. La cohérence de phase se transmet dans le matériau non supraconducteur sur une longueur appelée longueur de cohérence et qui constitue la longueur caractéristique sur laquelle se manifeste l'effet de proximité.

La cohérence de phase étant très sensible aux processus de diffusion, même élastique, il est manifeste que l'effet de proximité dépend fortement de la densité des centres diffuseurs.

Dans un métal propre (en régime ballistique), le temps de parcours est donné par $t = \xi_n / v_F$ ou $v_F$ est la vitesse des électrons au niveau de Fermi tandis que l'énergie d'excitation électronique due à l'agitation thermique à la température $T$ est $\varepsilon = k_B T$. La longueur de décroissance caractéristique des corrélations supraconductrices dans la limite pure est donc donnée par $\xi_n \approx \frac{\hbar v_F}{k_B T}$. Par exemple, à 1 K, $\xi_n$ est de l'ordre de $10\mu$m pour une vitesse de Fermi de $10^6 m.s^{-1}$.

Dans le régime diffusif, c'est à dire lorsque l'électron diffuse sur les impuretés du réseau, le temps caractéristique entre deux collisions élastiques avec les impuretés est donné par la relation $t = L_d^2/D$, ou $D$ est le coefficient de diffusion de la couche métallique. Dans ce cas, la longueur de pénétration caractéristique des corrélations supraconductrices s'écrit comme $L_d \approx \sqrt{\frac{D\hbar}{k_B T}}$. A 1 K, $L_d$ est de l'ordre de 30 nm pour un coefficient de diffusion de $1 cm^2.s^{-1}$.

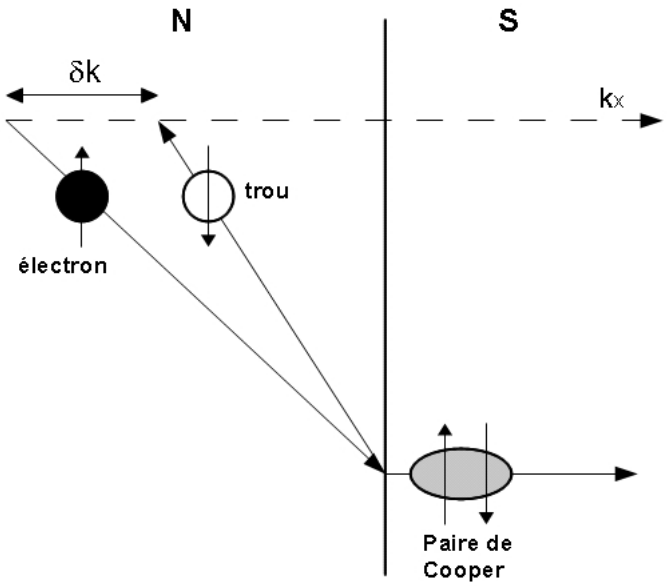



FIG. 1.1: Mécanisme de la réflexion d'Andreev représenté ici dans l'espace des vitesses. On remarque que l'électron et le trou ont la même projection de vecteur d'onde parallèlement à l'interface S/N en $x = 0$. En revanche, l'impulsion selon l'axe $x$ diffère de $\delta k$ qui est l'impulsion de la paire de Cooper dans le supraconducteur. Dans ce processus, on voit que le spin total et la charge totale sont conservés.

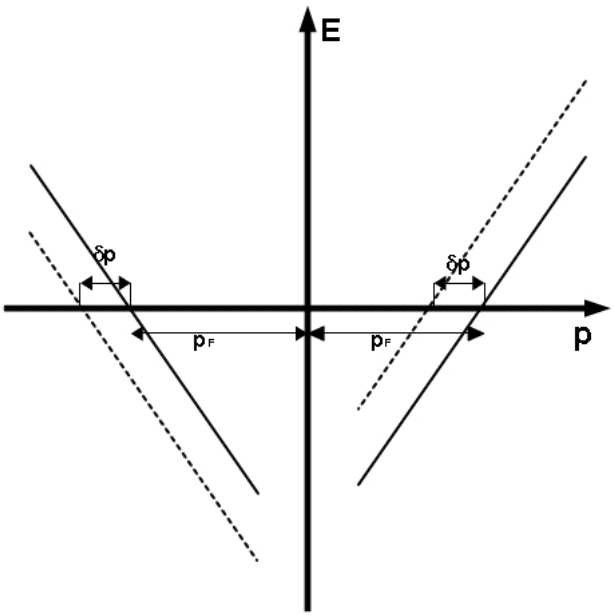



FIG. 1.2: Décalage associé au champ magnétique dans la limite d'une loi de dispersion linéarisée proche de l'énergie de Fermi. Chaque branche en trait plein correspond à une orientation de spin. Une paire de Cooper est formée de deux électrons d'impulsion et de spin opposés $(+p_F, \uparrow; -p_F, \downarrow)$. Si l'on ajoute un effet paramagnétique, les deux branches sont décalées (trait pointillés) et les paires de Cooper sont formées avec l'impulsion $2\delta p$ dûe à ces décalages respectifs.

Dans le cas des systèmes de petite taille, l'énergie caractéristique des excitations est le gap supraconducteur. Ainsi, l'épaisseur de la zone de métal normal sur laquelle les corrélations supraconductrices sont transmises devient $L_\Delta = \sqrt{\frac{D}{\Delta}}$ dans la limite diffusive. $L_\Delta$ est de l'ordre de 10nm pour $\Delta = 1meV$. On voit que $L_d$ et $L_\Delta$ sont très petites par rapport à $L_T$.

La théorie permet également de démontrer que la densité de probabilité de présence de paires de Cooper est non nulle dans le métal normal. Cette densité de paire de Cooper décroît exponentiellement en fonction de la distance sur une échelle caractéristique de la longueur de cohérence [21],[56] .

Dans les hétérojonctions SNS, Kulic [57] et Saint James [55] ont démontré qu'il existait une quantification des niveaux d'énergie que l'on appelle niveaux d'Andreev. Ces niveaux d'énergie permettent de remonter au courant qui traverse ses structures [58]. Le formalisme des niveaux d'Andreev permet également de prendre en compte les interactions dans le calcul du courant Josephson [59].

Dans le ferromagnétique, la décroissance de la fonction d'onde se présente sous forme d'oscillations amorties exponentiellement. Elles sont la conséquence de la levée de dégénérescence de spin au niveau de Fermi par effet Zeeman à cause du champ d'échange présent naturellement dans le ferromagnétique. Cette levée de dégénérescence entraîne une différence d'impulsion entre électron $\uparrow$ et $\downarrow$ au niveau de Fermi égale à $\delta p = v_F/h$ (voir figure 1.2). De ce fait, la paire de Cooper acquiert une impulsion non nulle $2\delta p$ qui entraîne des oscillations de la fonction d'onde dans le ferromagnétique à partir de l'interface.

Dans le ferromagnétique, la longueur de cohérence des paires d'Andreev induites par effet de proximité est généralement réduite par le champ d'échange ferromagnétique (noté $h$) . En effet, si ce dernier est grand devant $k_BT$, l'énergie caractéristique responsable de la décorrélation des paires d'Andreev est donc l'énergie d'échange, et ainsi la longueur de cohérence devient quasiment indépendante de la température, et sera notée $\xi_f$. Elle vaut $L_f = \hbar v_F/h$ dans la limite ballistique et $L_{fd} = \sqrt{\frac{D}{2h}}$ dans la limite diffusive. Ce comportement oscillatoire a largement été étudié [25],[43], [44] et observé ces dix dernières années [60],[61],[62],[63] dans les oscillations du courant Josephson d'une jonction S/F/S. Des ocsillations de la densité d'états [64] ou de la température critique [65] dans les structures S/F ont également été observées.

Des expériences récentes font état de l'existence de réflexion d'Andreev spéculaire dans le graphène [66],[67] ou dans les jonctions métal normal- Supraconducteur à symétrie $d$ [68]. Les réflexions d'Andreev spéculaires sont définies par le fait que le trou réfléchi à une composante de son vecteur d'onde selon l'interface qui est opposée à celle de l'électron. Ces réflexions sont identiques à la réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir.

D'autres champ de recherche prévoient de chercher des réflexions d'Andreev croisées dans des hétérostructures complexes [69],[70],[71].

## 1.3 Effet de vanne de spin dans les tricouches F/S/F

### 1.3.1 Principaux résultats expérimentaux

Les tricouches F/S/F ont un comportement particulier dépendant du spin électronique. Dans cette configuration, le condensat de paire de Cooper est soumis à l'aimantation des deux ferromagnétiques adjacents. Dans ces structures, il a été prédit que la température critique du supraconducteur dépend de l'orientation relative des deux aimantations des couches ferromagnétiques [72],[73],[74]. Cet effet des aimantations sur les propriétés du supraconducteur est appelé l'effet vanne de spin. Ces études prédisent que la couche supraconductrice a une température critique plus faible (forte) lorsque les aimantations des deux ferromagnétiques sont parallèles (antiparallèles) (que nous appelons désormais la configuration parallèle ou P (antiparallèles ou AP)). Mathématiquement, cela se traduit par la condition $T_c^P < T_c^{AP}$ qui désigne l'effet de vanne de spin dit "normal". L'explication avancée est que dans la configuration P, le champ magnétique a une résultante non-nulle dans le supraconducteur ce qui le déstabilise. En revanche, dans la configuration AP, le champ magnétique induit dans le supraconducteur s'annule en moyenne ce qui rend la supraconductivité plus stable que dans la configuration P. Cet effet a d'abord été observé par Deutscher et Meunier en 1968 dans des tricouches $FeNi/In/Ni$ [26]. Dans ce système, ils observent l'effet de vanne de spin normal en mesurant la résistance du supraconducteur en fonction de la température. Ils observent une différence entre $T_c^P$ et $T_c^{AP}$ de l'ordre de $0.25K$. L'échantillon compte un couche $FeNi$ d'environ 150nm d'épaisseur, une couche d'indium $In$ de 250nm et un autre couche de Nickel $Ni$ de 150nm. La couche supraconductrice est séparée des couches ferromagnétiques par une fine couche d'oxyde isolant ce qui limite la transmission entre les couches F et S. La même année, Hauser obtient les mêmes résultats sur une couche d'indium de 300nm entourée d'oxyde de fer $Fe_3O_4$ de 200nm [75]. Les couches S et F sont séparés par une couche d'oxyde d'aluminium $Al_2O_3$ de 50nm. Dans ces systèmes de grandes tailles, on ne peut pas mesurer l'effet de la propagation des corrélations supraconductrices dans les ferromagnétiques. En revanche, l'étude de systèmes de tailles atomique le permet. En 2006, Gu *et al.* observent

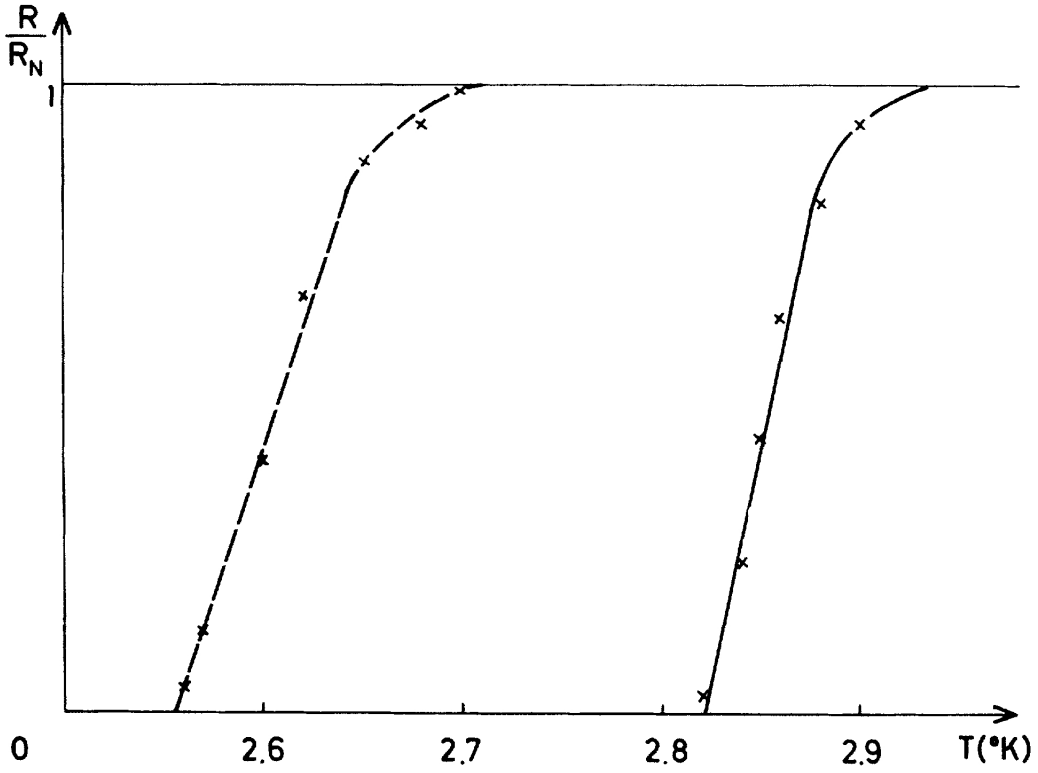



FIG. 1.3: Différence de température critique observée par Deutscher et Meunier [26] sur les systèmes $FeNi/In/Ni$. Ils mesurent la résistance du supraconducteur $R$ normalisée par rapport à la résistance du même métal dans l'état normal $R_N$.Cette résistance normalisée décroît à zéro lorsque le métal devient supraconducteur. On voit ici que $T_c^P$ est inférieure de $T_c^{AP}$ d'environ $0,25K$.

l'effet de vanne de spin dans des systèmes $Cu_{0.47}Ni_{0.53}/Nb/Cu_{0.47}Ni_{0.53}$ où les couches font respectivement 5nm, 18nm et 5nm [76]. La aussi, ils observent que $T_c^P$ est inférieur à $T_c^{AP}$. D'autres expériences au cours des années 2000 ont permis de confirmer les résultats obtenus sur des tricouches minces [77],[78],[79].

Cependant, en 2006, Rusanov *et al.* observent un effet de vanne de spin "inverse" dans lequel la température critique dans la configuration P est plus élevée que la température critique dans la configuration AP [80]. Ce résultat est obtenu dans des systèmes $Py/Nb/Py$ (où $Py$ désigne l'alliage ferromagnétique appelé Permalloy $Ni_{0,80}Fe_{0,20}$) de taille nanométrique. Ce résultat est cependant controversé à cause de l'observation par Moraru *et al.* de l'effet de vanne de spin normal dans le même système [81]. En revanche, l'effet inverse a bien été observé dans les systèmes $Co/Nb/Fe$ [82] et sur des systèmes plus complexes à base de niobium [83] ou de tricouche manganite/cuprate/manganite [84]. Pour expliquer cette inversion, Zhu et al. propose l'existence de champ magnétique de fuite dans la configuration AP [85]. Ce champ magnétique de fuite déstabiliserait la couche S en configuration AP par effet orbital. Cet effet expliquerait l'inversion de l'effet vanne de spin dans les systèmes décrit dans [82],[83] et [84]. En revanche, Singh *et al.* ont observé l'effet de vanne de spin inverse dans des tricouches $[Co/Pt]/Nb/[Co/Pt]$ [86] où $[Co/Pt]$ désigne des multicouches Cobalt-Platine. Dans ces multicouches, l'aimantation est perpendiculaire au plan des couches et par conséquent le champ magnétique de fuite est négligeable, ainsi que l'effet orbital. Les auteurs de la référence [86] ont proposés une explication de l'inversion de l'effet vanne de spin par une différence de mobilité des porteurs de charges selon leurs spins ce qui déstabiliserait davantage la couche S dans le configuration antiparallèle par rapport à la configuration parallèle. Cette hypothèse est équivalente à une intégrale de transfert (ou une transparence) entre les couches F et S dépendant du spin.

Un effet inverse de vanne de spin a été prédit dans les structures F/S/F dans plusieurs travaux. Mélin *et al.* [71] ont prédit l'inversion de l'effet de vanne de spin en donnant les conditions d'apparition pour lesquelles on doit observer que la gap supraconducteur à température nulle en configuration AP et plus faible que dans la configuration P. Cet effet a été confirmé par les études de Daumens [88] et Tollis [90],[89]. En revanche, aucun de ces travaux n'expliquent l'inversion de température critique.

### 1.3.2 Modélisation d'une multicouche : modèle du hamiltonien tunnel

Cette section permet d'introduire le formalisme général de modélisation d'une multicouche via la théorie du hamiltonien tunnel. La théorie du hamiltonien tunnel a été introduite dans les supraconducteurs pour la première fois par Bardeen [91],[92]. Ce formalisme est très utilisée pour décrire la dynamique d'une jonction S/S [93] où des systèmes quasi-$2D$ notamment dans les multicouches S/F [30]. En se basant sur le modèle décrit dans [30], on va développer le formalisme nécessaire à la description des tricouches F/S/F. Dans ce formalisme, on suppose que les différentes couches parfaitement bidimensionnelles sont couplées par une énergie que l'on notera $t$ et que l'on nommera énergie de transfert ou intégrale de transfert ou couplage intercouche. Cette énergie $t$ décrit le couplage entre les couches et définie l'énergie cinétique des électrons dans la direction perpendiculaire aux couches. Ainsi, on décrit le système de multicouches avec les hamiltoniens suivants :

$$\widehat{H}_0 = \sum_{n,\sigma,\mathbf{k}} \left[ \xi_\sigma^n \psi_{\sigma,n}^\dagger (\mathbf{k}) \, \psi_{\sigma,n} (\mathbf{k}) \right], \tag{1.12}$$

où $\widehat{H}_0$ est l'hamiltonien décrivant l'énergie cinétique $\xi_\sigma^n$ d'un électron de spin $\sigma$ dans la couche $n$ [4]et où $\psi_{\sigma,n}^\dagger(\mathbf{k})$ $\left(\psi_{\sigma,n}(\mathbf{k})\right)$ est l'opérateur création (annihilation) d'un électron de spin $\sigma$ et de moment $\mathbf{k}$ dans la couche $n$. L'hamiltonien de couplage décrivant la supraconductivité s'écrit :

$$\widehat{H}_{BCS} = \sum_{n,\mathbf{k}} \left[ \Delta_n^* \psi_{\downarrow,n}^\dagger(\mathbf{k}) \psi_{\uparrow,n}^\dagger(-\mathbf{k}) + \Delta_n \psi_{\uparrow,n}(\mathbf{k}) \psi_{\downarrow,n}(-\mathbf{k}) \right], \tag{1.13}$$

où $\Delta_n$ est le gap supraconducteur qui sera considéré nul dans les couches non supraconductrices. Enfin, l'hamiltonien de couplage entre couches s'écrit :

$$\widehat{H}_t = t \sum_{n,\sigma,\mathbf{k}} \left[ \psi_{\sigma,n+1}^\dagger(\mathbf{k}) \psi_{\sigma,n}(\mathbf{k}) + \psi_{\sigma,n}^\dagger(\mathbf{k}) \psi_{\sigma,n+1}(\mathbf{k}) \right], \tag{1.14}$$

qui couple les couche $n$ avec les couches $n+1$. A partir de ces trois hamiltoniens, on peut faire apparaître les fonctions de Green de Gorkov $G_{\sigma,\sigma'}^{n,m} = -\left\langle T_\tau \left( \psi_{\sigma,n}(\mathbf{k}) \psi_{\sigma',m}^\dagger(\mathbf{k}) \right) \right\rangle$ et $F_{\sigma,\sigma'}^{\dagger n,m} = \left\langle T_\tau \left( \psi_{\sigma,n}^\dagger(\mathbf{k}) \psi_{\sigma',m}^\dagger(\mathbf{k}) \right) \right\rangle$. Le système général d'équation de Gorkov dans les systèmes multicouches s'écrit :

$$\begin{cases} \left(i\omega - \xi_\sigma^n\right) G_{\sigma,\sigma'}^{n,m} - t G_{\sigma,\sigma'}^{n-1,m} - t G_{\sigma,\sigma'}^{n+1,m} + \Delta_n^* F_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n,m} = \delta_{nm}\delta_{\sigma\sigma'} \\ \left(i\omega + \xi_{-\sigma}^n\right) F_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n,m} + t F_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n-1,m} + t F_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n+1,m} + \Delta_n G_{\sigma,\sigma'}^{n,m} = 0 \end{cases}, \tag{1.15}$$

où $\delta_{nm}$ $(\delta_{\sigma\sigma'})$ est le symbole de Kronëcker qui est nul pour $n \neq m$ $(\sigma \neq \sigma')$ et égal à 1 sinon. Par simplicité, on a posé $\xi = \xi(\mathbf{k})$. L'équation d'auto-cohérence dans la couche $n$ supraconductrice s'écrit :

$$\Delta_n^* = |\lambda| T \sum_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} F_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n,n} d\xi_s \tag{1.16}$$

où $\xi_s$ est le spectre dans le supraconducteur. La modélisation des structures par la technique du hamiltonien tunnel permet de prendre en compte le fait que la longueur de cohérence des couches supraconductrices dépend fortement de la direction cristallographique choisie. C'est notamment le cas dans les structures quasi-2D des supraconducteurs à haute température critique de type $YBa_2Cu_3O_7$ [94]. Dans ces structures, la longueur de cohérence supraconductrice entre les couches est inférieure à la distance entre les couches ce qui empêche la formation de paire de Cooper "à cheval" entre les couches. Cette condition est respectée tant que l'énergie de couplage entre couche $t$ est inférieure à l'énergie de Fermi $E_F$, $t \ll E_F$ [95]. La supraconductivité se développe donc uniquement dans les couches supraconductrices, le passage des électrons se faisant uniquement par effet tunnel.

Dans les systèmes où la supraconductivité est uniquement bidimensionnelle, la transition S/N est infiniment élargie par les fluctuations de phase [96]. Cela implique que le couplage tunnel $t$ doit être suffisamment important. Si $t \gg T_c\sqrt{T_c/E_F}$, les fluctuations sont limitées à une petite partie du diagramme de phase, au voisinage de la ligne critique [97]. Dans l'approximation inverse, on atteint le régime de Kosterlitz-Thouless prés de $T_c$ mais la supraconductivité est restaurée en dehors du voisinage de la ligne critique [98] définie par la condition

$$(T_c - T)/T_c = (T_c/E_F) \ln\left(T_c^2/t^2\right).$$

[4]Ne pas confondre $\xi(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}) - E_F$ qui est le spectre des électrons centré sur l'énergie de Fermi avec $\xi_0$ qui est la longueur de cohérence dans le supraconducteur. Sauf mention contraire, à partir de maintenant, $\xi$ représentera le spectre électronique.

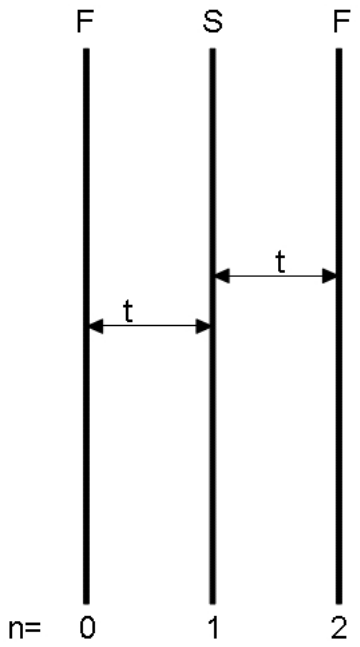



FIG. 1.4: Représentation de la tricouche F/S/F dans la modélisation de l'hamiltonien tunnel. Ici, les couche F portent les indices $n = 0, 2$ et la couche S l'indice $n = 1$.

Cette faible divergence logarithmique des fluctuations quand $t \to 0$ indique qu'un couplage inférieur à $T_c$ de plusieurs ordre de grandeur sera suffisant pour que la théorie BCS reste valable.

### 1.3.3 Modélisation de la tricouche F/S/F

Grâce à la théorie du hamiltionien tunnel présentée dans la section précédente, on peut utiliser les équations (1.15) à la tricouche F/S/F [88]. Dans le modèle les couches F portent l'indice de couche $n = 0, 2$ et la couche S porte l'indice $n = 1$ (voir figure 1.4). De plus, afin de prendre en compte l'hypothèse émise dans l'article [86], nous supposons que l'intégrale de transfert dépend de l'orientation du spin $\uparrow$ où $\downarrow$ de l'électron. L'hamiltonien tunnel (1.14) doit tenir compte de l'orientation parallèle ou antiparallèle des orientations des aimantations dans les couches ferromagnétiques.

#### Modélisation du système dans le cas d'une orientation parallèle

Dans cette condition, l'hamiltonien (1.14) s'écrit dans la configuration P :

$$\widehat{H}_t^P = \sum_{\sigma,\mathbf{k}} t_\uparrow \left[\psi_{\uparrow,1}^\dagger \left(\psi_{\uparrow,0} + \psi_{\uparrow,2}\right) + \left(\psi_{\uparrow,0}^\dagger + \psi_{\uparrow,2}^\dagger\right) \psi_{\uparrow,1}\right] + t_\downarrow \left[\psi_{\downarrow,1}^\dagger \left(\psi_{\downarrow,0} + \psi_{\downarrow,2}\right) + \left(\psi_{\downarrow,0}^\dagger + \psi_{\downarrow,2}^\dagger\right) \psi_{\downarrow,1}\right]. \tag{1.17}$$

De plus, dans la configuration P, les électrons majoritaires dans chaque couche F ont le même spin. Les spectres d'énergie s'écrivent alors de la manière suivantes $\xi_\uparrow = \xi_\uparrow^0 = \xi_\uparrow^2$ et

$\xi_\downarrow = \xi_\downarrow^0 = \xi_\downarrow^2$. Le système d'équation correspondant s'écrit

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_s)\, G_{\uparrow\uparrow}^{1,1} - t_\uparrow \left(G_{\uparrow\uparrow}^{0,1} + G_{\uparrow\uparrow}^{2,1}\right) + \Delta_1^* F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} = 1 \\ \left(i\omega - \xi_\uparrow\right) G_{\uparrow\uparrow}^{0,1} - t_\uparrow G_{\uparrow\uparrow}^{1,1} = 0 \\ \left(i\omega - \xi_\uparrow\right) G_{\uparrow\uparrow}^{2,1} - t_\uparrow G_{\uparrow\uparrow}^{1,1} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} + t_\downarrow \left(F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 0,1} + F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 2,1}\right) + \Delta_1 G_{\uparrow\uparrow}^{1,1} = 0 \\ \left(i\omega + \xi_\downarrow\right) F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 0,1} + t_\downarrow F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} = 0 \\ \left(i\omega + \xi_\downarrow\right) F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 2,1} + t_\downarrow F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

Afin de connaître les propriétés thermodynamiques du supraconducteur (notamment la température critique dans la configuration parallèle $T_c^P$), on va s'intéresser uniquement à la fonction de Green anomale dans le supraconducteur $F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1}$. Le système (1.18) admet pour solution :

$$F_{P,\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} = \frac{\Delta^*}{a_P b_P^* + |\Delta|^2} \text{ et } G_{P,\uparrow\uparrow}^{1,1} = \frac{b_P^*}{a_P b_P^* + |\Delta|^2} \tag{1.19}$$

avec $a_P = (i\omega - \xi_s) - \frac{2t_\uparrow^2}{(i\omega - \xi_\uparrow)}$ et $b_P = i\omega - \xi_s - \frac{2t_\downarrow^2}{(i\omega - \xi_\downarrow)}$.

Il n'y a pas de composante triplet qui apparaît dans la configuration P et la configuration AP. Dans le cas d'une orientation arbitraire, la composante triplet est nulle telle que démontrée par Tollis *et al.* [90],[89]. De plus, Fominov *et al.* ont démontré que la composante triplet des fonctions anomales disparaît le long de l'axe de symétrie miroir d'un système F/S/F d'épaisseur grande devant la distance intercouche [99]. Dans la tricouche F/S/F que nous étudions, le plan S entier joue le rôle d'axe de symétrie miroir.

**Modélisation du système dans le cas d'une orientation antiparallèle**

Dans cette condition, l'hamiltonien (1.14) s'écrit dans la configuration AP :

$$\widehat{H}_t^{AP} = \sum_{\sigma,\mathbf{k}} t_\uparrow \left[\psi_{\uparrow,1}^\dagger \psi_{\uparrow,0} + \psi_{\uparrow,0}^\dagger \psi_{\uparrow,1} + \psi_{\downarrow,2}^\dagger \psi_{\downarrow,1} + \psi_{\downarrow,1}^\dagger \psi_{\downarrow,2}\right] \tag{1.20}$$

$$+ \sum_{\sigma,\mathbf{k}} t_\downarrow \left[\psi_{\downarrow,1}^\dagger \psi_{\downarrow,0} + \psi_{\downarrow,0}^\dagger \psi_{\downarrow,1} + \psi_{\uparrow,1}^\dagger \psi_{\uparrow,2} + \psi_{\uparrow,2}^\dagger \psi_{\uparrow,1}\right]. \tag{1.21}$$

Dans cette configuration antiparallèle, les électrons $\uparrow$ ($\downarrow$) qui passent de la couches 1 vers la couche 2 voient un couplage intercouche $t_\downarrow$ ($t_\uparrow$) différent des électrons $\uparrow$ ($\downarrow$) qui passent de la couches 1 vers la couche 0 qui voient une énergie de transfert $t_\uparrow$ ($t_\downarrow$). De plus, dans la configuration AP, les électrons majoritaires de chaque couche F sont de spin opposé et ainsi les spectres d'énergie s'écrivent de la manière suivantes $\xi_\uparrow = \xi_\uparrow^0 = \xi_\downarrow^2$et $\xi_\downarrow = \xi_\downarrow^0 = \xi_\uparrow^2$. Le système d'équation correspondant s'écrit

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_s)\, G_{\uparrow\uparrow}^{1,1} - t_\uparrow G_{\uparrow\uparrow}^{0,1} - t_\downarrow G_{\uparrow\uparrow}^{2,1} + \Delta_1^* F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} = 1 \\ \left(i\omega - \xi_\uparrow\right) G_{\uparrow\uparrow}^{0,1} - t_\uparrow G_{\uparrow\uparrow}^{1,1} = 0 \\ \left(i\omega - \xi_\downarrow\right) G_{\uparrow\uparrow}^{2,1} - t_\downarrow G_{\uparrow\uparrow}^{1,1} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} + t_\downarrow F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 0,1} + t_\uparrow F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 2,1} + \Delta_1 G_{\uparrow\uparrow}^{1,1} = 0 \\ \left(i\omega + \xi_\downarrow\right) F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 0,1} + t_\downarrow F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} = 0 \\ \left(i\omega + \xi_\uparrow\right) F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 2,1} + t_\uparrow F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

Afin de connaître les propriétés thermodynamiques du supraconducteur (notamment la température critique dans la configuration parallèle $T_c^{AP}$), on s'intéresse uniquement à la fonction de Green anomale dans le supraconducteur $F_{\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1}$. Le système (1.22) admet pour solution :

$$F_{AP,\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} = \frac{\Delta^*}{|a_{AP}|^2 + |\Delta|^2} \text{ et } G_{AP,\uparrow\uparrow}^{1,1} = \frac{a_{AP}^*}{|a_{AP}|^2 + |\Delta|^2} \tag{1.23}$$

avec $a_{AP} = (i\omega - \xi_s) - \frac{t_\uparrow^2}{(i\omega - \xi_\uparrow)} - \frac{t_\downarrow^2}{(i\omega - \xi_\downarrow)}$. Dans la configuration AP également il n'y a pas d'appariement triplet des électrons. Afin de déterminer la différence de température critique, on va utiliser l'équation d' autocohérence (2.5) appliquée aux fonctions anomales dans la configuration P et la configuration AP. Le résultat donne

$$\ln\left(\frac{T_c^P}{T_c^{AP}}\right) \simeq \frac{\Delta T_c}{T_c^{AP}} = 2\pi T_{c0} \sum_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_s \left(\frac{1}{a_P b_P^*} - \frac{1}{|a_{AP}|^2}\right), \tag{1.24}$$

avec $\Delta T_c = T_c^P - T_c^{AP}$ et $T_{c0}$ la température de la couche supraconductrice isolée ($t = 0$) [5].

La formule (1.24) nous permet de déterminer si l'on observe l'effet de vanne de spin normal ou inverse. Si le terme de droite est négatif, alors $T_c^P < T_c^{AP}$ et l'effet de vanne de spin est normal. En revanche, dans le cas où le terme de droite est positif, alors $T_c^P > T_c^{AP}$ et l'effet de vanne de spin est inversé.

Nous nous intéressons aux propriétés du supraconducteur proche de la température critique. Par voie de conséquence, on pourra négliger le paramètre d'ordre supraconducteur dans la formule (1.24). De plus, les transparences sont considérées petites devant l'énergie d'appariement des électrons dans le supraconducteur isolé $\Delta_0$, $t_\uparrow \ll \Delta_0$ et $t_\downarrow \ll \Delta_0$, on effectue alors le développement limité de $F_{P,\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} - F_{AP,\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1}$ selon $t_\uparrow$ et $t_\downarrow$ qui devient :

$$\begin{aligned} F_{P,\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} - F_{AP,\downarrow\uparrow}^{\dagger 1,1} &= \frac{1}{\omega^2+\xi_s^2}\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^2}\left(\frac{t_\uparrow^2}{i\omega+\xi_\uparrow} - \frac{t_\downarrow^2}{i\omega+\xi_\downarrow}\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)^2}\left[\frac{t_\uparrow^4}{\left(\omega^2+\xi_\uparrow^2\right)} + \frac{t_\downarrow^4}{\left(\omega^2+\xi_\downarrow^2\right)} + \frac{2t_\uparrow^2 t_\downarrow^2}{\left(i\omega-\xi_\uparrow\right)\left(i\omega+\xi_\downarrow\right)}\right]. \end{aligned} \tag{1.25}$$

On remarque que dans le cas $t_\uparrow = t_\downarrow$ et $\xi_\uparrow = \xi_\downarrow = \xi_s$, la différence (1.25) est nulle. On remarque également que cette différence n'existe qu'à partir de l'ordre 4. L'effet de vanne de spin n'apparaît que par le transport de paires de Cooper à travers deux interfaces.

De plus, il convient de rappeler la forme des spectres électroniques usuels. La relation de dispersion classique qui caractérise le spectre électronique dans un supraconducteur est la relation de type quadratique $\xi_s = \frac{p^2}{2m} - E_F$. La relation de dispersion est parfaitement quadratique. Dans le cas d'un métal ferromagnétique classique, le champ d'échange $h$ présent en permanence dans le matériaux entraine par effet Zeeman un décalage entre les niveaux d'énergie des électrons $\uparrow$ et $\downarrow$. La relation dans un ferromagnétique devient $\xi_\uparrow = \xi_s - h$ et $\xi_\downarrow = \xi_s + h$ (voir figure 1.5 a)) [6]. Ce décalage induit que la bande électronique de spin up est plus remplie que la bande électronique de spin down. Le matériaux global est magnétisé. Dans le cas où une sous bande de spin est remplie et l'autre complétement vide, on parle de demi-métal. Dans ce dernier cas, l'une des deux orientations de spin n'est pas accessible (voir figure 1.5 b)).

[5] Dans ce cas, on considère que la différence de température $T_c^P - T_c^{AP}$ est suffisamment petite pour remplacer dans le second terme $T_c^P$ et $T_c^{AP}$ par leur valeur moyenne $T_{c0}$.

[6] On retrouve le spectre d'un métal normal pour $h \longrightarrow 0$.

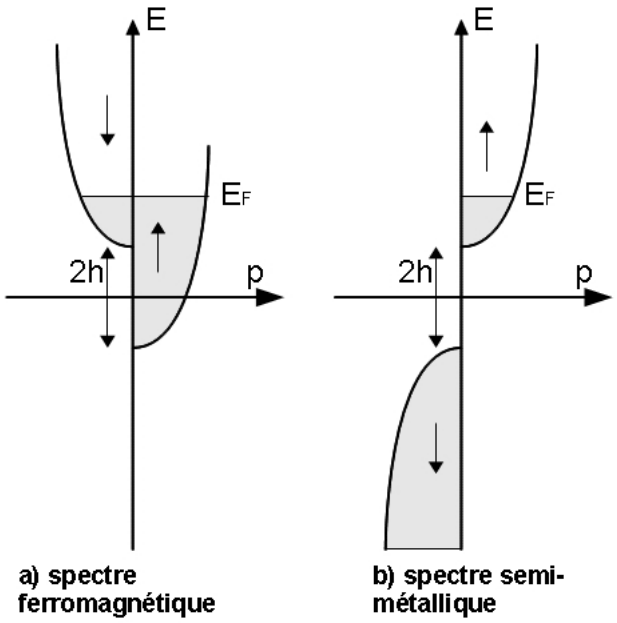



FIG. 1.5: Représentation des spectres électroniques des bandes électroniques de conduction. La partie grisée des spectres représente le remplissage électronique. Sur la figure a), le spectre électronique est décalé à cause du champ d'échange $h$. Il s'agit du spectre d'un métal ferromagnétique. Sur la figure b), la couche électronique des électrons $\downarrow$ est remplie et ne peut donc plus participer à la conduction. Il s'agit donc d'un demi-métal, isolant pour l'orientation de spin $\downarrow$ et métallique pour l'orientation de spin $\uparrow$.

### 1.3.4 Effet d'une dépendance en spin de l'énergie de transfert

Afin de vérifier l'hypothése de Singh *et al.* [86], nous supposons que l'énergie de transfert intercouche dépend du spin de l'électron. Mathématiquement, cette condition se traduit par $t_\uparrow \neq t_\downarrow$. Dans les prochaines discussions, on posera $t_\uparrow = t_0(1+\beta)$ et $t_\downarrow = t_0(1-\beta)$ avec $-1 < \beta < 1$. Si $\beta = 0$, alors $t_\uparrow = t_\downarrow$. Si $\beta = +1$, alors $t_\uparrow = 2t_0$ et $t_\downarrow = 0$ (et l'inverse si $\beta = -1$) [7]. Cette ré-écriture de $t_\uparrow$et $t_\downarrow$ permet de se concentrer uniquement sur la différence entre les deux énergies de transfert. Cela revient à écrire (1.25) comme

$$\begin{aligned} F^{\dagger 1,1}_{P,\downarrow\uparrow} - F^{\dagger 1,1}_{AP,\downarrow\uparrow} &= \frac{t_0^4}{\omega^2+\xi_s^2}\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^2}\left(\frac{(1+\beta)^2}{i\omega+\xi_\uparrow} - \frac{(1-\beta)^2}{i\omega+\xi_\downarrow}\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{t_0^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)^2}\left[\frac{(1+\beta)^4}{\left(\omega^2+\xi_\uparrow^2\right)} + \frac{(1-\beta)^4}{\left(\omega^2+\xi_\downarrow^2\right)} + \frac{2\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(i\omega-\xi_\uparrow\right)\left(i\omega+\xi_\downarrow\right)}\right]. \end{aligned} \tag{1.26}$$

**Cas limite d'un métal normal** ($h \to 0$)

En prenant un champ d'échange nul, la tricouche F/S/F devient une tricouche N/S/N. L'intérêt de cette étude est de vérifier si une dépendance en spin du paramètre de couplage peut, à elle seule, provoquer l'effet de vanne de spin inverse. Les spectres électroniques des couches deviennent $\xi_\uparrow = \xi_s$ et $\xi_\downarrow = \xi_s$. Dans cette configuration, la différence (1.26) s'écrit

$$F^{\dagger 1,1}_{P,\downarrow\uparrow} - F^{\dagger 1,1}_{AP,\downarrow\uparrow} = \frac{16 t_0^4 \beta^2}{\omega^2+\xi_s^2}\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^4} - \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)^2}\right] \tag{1.27}$$

et ainsi, la différence de température critique devient :

$$\frac{T_c^P - T_c^{AP}}{T_c^{AP}} = -\frac{31}{4}\zeta(5)\frac{t_0^4\beta^2}{\pi^4 T_{c0}^4}. \tag{1.28}$$

où $\zeta(5) = 1.0369277551$ la fonction zeta de Riemann évaluée en $n = 5$. On voit immédiatement que $\Delta T_c$ est toujours négatif. Dans ce cas, l'effet de vanne de spin est toujours normal dans les jonctions N/S/N. La dépendance en spin des transparences ne permet pas l'apparition de l'effet de vanne de spin inverse dans des structures constituées de métal normal. Pour voir si la différence d'énergie de transfert joue un rôle dans des structures avec d'autres types de matériaux, on étudie un autre cas limite, celui d'un demi-métal.

**Cas limite du demi-métal**

La tricouche F/S/F devient un tricouche $DM/S/DM$ ( où $DM$ symbolise le demi-métal). Le spectre électronique des couches devient $\xi_\uparrow = \xi_s$ et $\xi_\downarrow = \Delta E \gg T_c$. Ici, $\Delta E$ symbolise un décalage de fond de bande entre le spectre du supraconducteur et le spectre des électrons $\downarrow$ du demi métal. Cette condition assure que les électrons de spin $\downarrow$ sont accessibles pour des énergies très grandes devant l'énergie du supraconducteur. Dans notre problème, on peut les considérer comme isolant car ils sont beaucoup plus énergétiques que les électrons pouvant rentrer dans le supraconducteur. Enfin, ce décalage de fond de bande est suffisamment important pour négliger la forme de la relation de dispersion.

[7] Cela revient à écrire $t_0 = \frac{t_\uparrow + t_\downarrow}{2}$ et $\beta = \frac{t_\uparrow - t_\downarrow}{t_\uparrow + t_\downarrow}$.

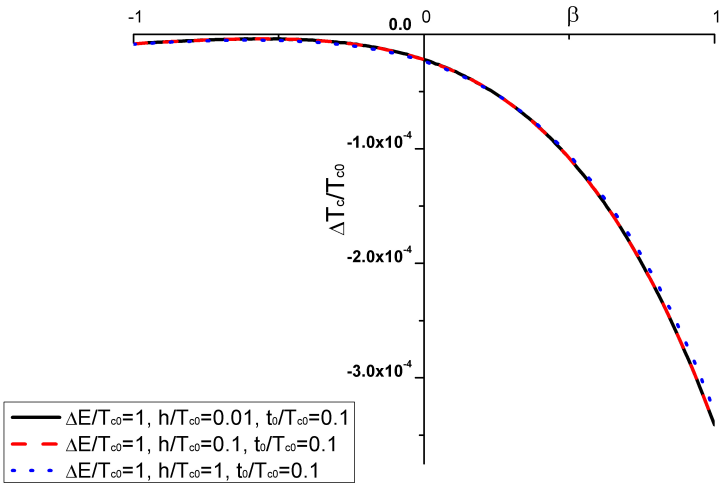



FIG. 1.6: Graphe de $\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}$ en fonction de $\beta$. Dans ce cas, on voit plusieurs valeurs de $\frac{\Delta E}{T_{c0}}$, $\frac{h}{T_{c0}}$ et $\frac{t_0}{T_{c0}}$. Dans ces cas, on voit que $\Delta T_c$ est toujours négative. L'effet de vanne de spin est normal.

Dans ce cas, la différence (1.25) s'écrit

$$\begin{aligned} F^{\dagger 1,1}_{P,\downarrow\uparrow} - F^{\dagger 1,1}_{AP,\downarrow\uparrow} &= \frac{1}{\omega^2+\xi_s^2}\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^2}\left(\frac{t_0^2(1+\beta)^2}{i\omega+\xi_s} - \frac{t_0^2(1-\beta)^2}{\Delta E}\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)^2}\left[\frac{t_0^4(1+\beta)^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)} + \frac{t_0^4(1-\beta)^4}{(\Delta E)^2} + \frac{2t_0^4\left(1-\beta^2\right)^2}{(i\omega-\xi_s)\Delta E}\right] \end{aligned} \tag{1.29}$$

et la différence de température devient :

$$\frac{\Delta T_c}{T_c^{AP}} = -\frac{t_0^4}{64}\frac{31\left(1+\beta\right)^4\zeta\left(5\right)\left(\Delta E\right)^2 + 112\zeta\left(3\right)\left(1-\beta\right)^4\pi^2 T_{c0}^2}{\pi^4 T_{c0}^4\left(\Delta E\right)^2}. \tag{1.30}$$

où $\zeta\left(3\right) = 1.2020569032$ la fonction zeta de Riemann évaluée en $n = 3$. La différence de température critique $\Delta T_c$ est toujours négative. L'effet de vanne de spin est toujours normal si les couches ferromagnétiques sont des demi-métaux.

Si on se place dans le cas, plus réaliste, où $\xi_\uparrow = \xi_s - h$ et $\xi_\downarrow = \Delta E \gg T_c$. Les électrons de spin $\uparrow$ sont légèrement décalés par rapport à l'énergie du supraconducteur (voir figure 1.8 b)). La différence (1.25) s'écrit

$$\begin{aligned} F^{\dagger 1,1}_{P,\downarrow\uparrow} - F^{\dagger 1,1}_{AP,\downarrow\uparrow} &= \frac{t_0^4}{\omega^2+\xi_s^2}\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^2}\left(\frac{(1+\beta)^2}{i\omega+\xi_s-h} - \frac{(1-\beta)^2}{\Delta E}\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{t_0^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)^2}\left[\frac{(1+\beta)^4}{\left(\omega^2+(\xi_s-h)^2\right)} + \frac{(1-\beta)^4}{(\Delta E)^2} + \frac{2\left(1-\beta^2\right)^2}{(i\omega-\xi_s+h)\Delta E}\right] \end{aligned} \tag{1.31}$$

La différence de température critique est toujours négative dans ce cas également. Sur la figure 1.6, on a tracé $\Delta T_c$ pour plusieurs valeurs de $\frac{\Delta E}{T_{c0}}, \frac{h}{T_{c0}}$ et $\frac{t_0}{T_{c0}}$. On voit que l'effet de vanne de spin est normal puisque $\Delta T_c$ est toujours négatif. On remarque également les valeurs relatives de $\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}$ sont de l'ordre de $10^{-4}$. Cette différence relative paraît faible mais correspond tout de même à une différence de température critique de l'ordre de $8mK$

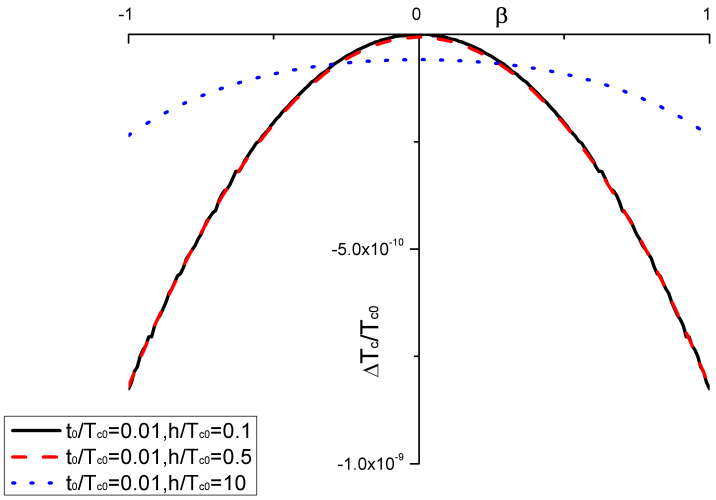



FIG. 1.7: Graphe de $\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}$ en fonction de $\beta$. Ici le décalage est représenté pour une tricouche F/S/F dans le cas d'un couplage $t_0/T_{c0}$ égal à 0.01 et trois valeurs du champ d'échange.

dans le cas où le supraconducteur est du niobium. Comparativement à l'expérience dans [78], on voit que l'ordre de grandeur reste correct. On peut remarquer également que si $h$ devient très grand, cette différence de température devient de plus en plus petite tout en restant négative. Sur la figure 1.6 apparaît une dissymétrie dans la relation entre $\Delta T_c$ et $\beta$. Quand $t_\uparrow < t_\downarrow$, ($\beta < 1$), la courbe est proche de 0. Cette dissymétrie provient directement du spectre électronique. En effet, les électrons de spin $\downarrow$ sont alors peu nombreux et ils contribuent donc peu aux propriétés électroniques de la tricouche. Cet effet s'accentue si ils ont la possibilté de passer d'une couche à l'autre plus facilement que les électrons de spin $\uparrow$.

### Cas standard de couche ferromagnétique

Les spectres d'énergie sont décalés d'une énergie $h$. Cela revient à poser $\xi_\uparrow = \xi_s - h$ et $\xi_\downarrow = \xi_s + h$. La différence (1.26) s'écrit

$$\begin{aligned} F^{\dagger 1,1}_{P,\downarrow\uparrow} - F^{\dagger 1,1}_{AP,\downarrow\uparrow} &= \frac{t_0^4}{\omega^2+\xi_s^2}\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^2}\left(\frac{(1+\beta)^2}{i\omega+\xi_s-h} - \frac{(1-\beta)^2}{i\omega+\xi_s+h}\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{t_0^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)^2}\left[\frac{(1+\beta)^4}{\left(\omega^2+(\xi_s-h)^2\right)} + \frac{(1-\beta)^4}{\left(\omega^2+(\xi_s+h)^2\right)} + \frac{2\left(1-\beta^2\right)^2}{(i\omega-\xi_s+h)(i\omega+\xi_s+h)}\right] \end{aligned} \quad (1.32)$$

On représente sur la figure 1.7, les différentes valeurs de ce décalage.

Quelque soit la valeur du champ d'échange, on voit que le décalage en température est toujours négatif. On peut en conclure que l'effet de vanne de spin est normal dans une tricouche F/S/F quelque soit la dépendance en spin du couplage entre couche. On remarque que la relation $\Delta T_c$ en fonction de $\beta$ est symétrique (voir figure 1.7). Dans ce cas également le spectre électronique joue un rôle important par sa symétrie intrinsèque.

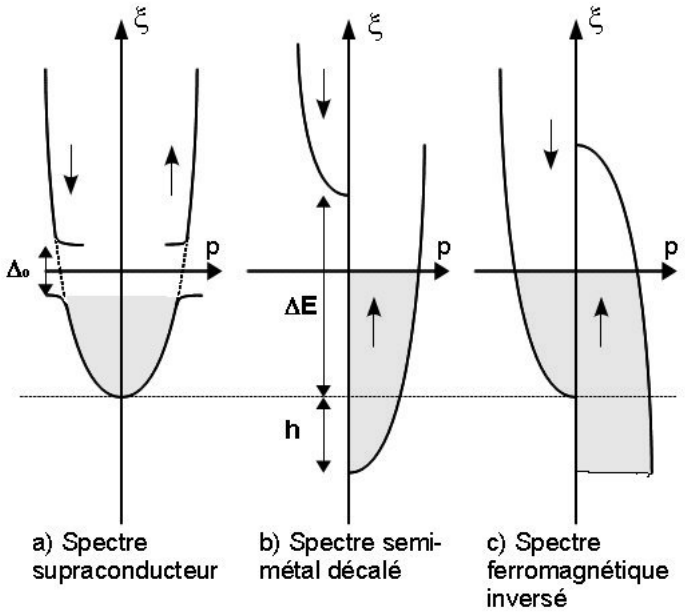



FIG. 1.8: Spectre électronique $\xi_s$ en fonction de $p$. a) Dans le cas d'un supraconducteur, on voit une ouverture de gap, $\Delta_0$ à l'énergie de Fermi. b) Dans le cas d'un semi métal décalé avec $\xi_\uparrow = \xi_s - h$ et $\xi_\downarrow = \xi_s + \Delta E$. c) Dans le cas d'un "presque" semi métal où $\xi_\uparrow = -\xi_s$ et $\xi_\downarrow = \xi_s$.

**Conclusion**

L'hypothèse d'une dépendance en spin du couplage intercouche, proposée par [86], ne permet pas d'expliquer l'effet de vanne de spin inverse. On teste cette hypothèse en tenant compte de plusieurs spectres électroniques. Dans les cas successifs d'une tricouche N/S/N, DM/S/DM ou F/S/F classique, il n'y a pas d'inversion de l'effet vanne de spin. En revanche, on remarque que la différence entre $t_\uparrow$ et $t_\downarrow$ influe grandement sur la valeur absolue de la différence de température $T_c^P - T_c^{AP}$. Cette dépendance en spin de l'intégrale de transfert a été étudiée dans les nanostructures S/F diffusives. Il est démontré qu'elle influe sur la densité d'états ou sur la température critique des structures S/F [100],[101],[102].

### 1.3.5 L'inversion de courbure d'une branche de spin : cas d'un "presque" demi-métal.

Nous allons étudier le cas limite d'un presque demi métal. On peut trouver cette configuration sur la figure 1.8 c). Dans ce cas, l'une des orientations de spin est en situation de bande "faiblement" remplie alors que l'autre orientation de spin est "quasiment" remplie (voir figure 1.8 c)). De cette situation naît la dénomination de "presque" demi-métal [103]. Mathématiquement, la bande d'électron quasiment remplie se comporte comme une bande "type-trou" dans laquelle le spectre électronique est inversé par rapport au spectre quadratique classique ; soit $\xi_\uparrow = -\xi_s$ [104]. Dans cette partie, nous allons étudier différents cas utilisant le spectre de bande inversé.

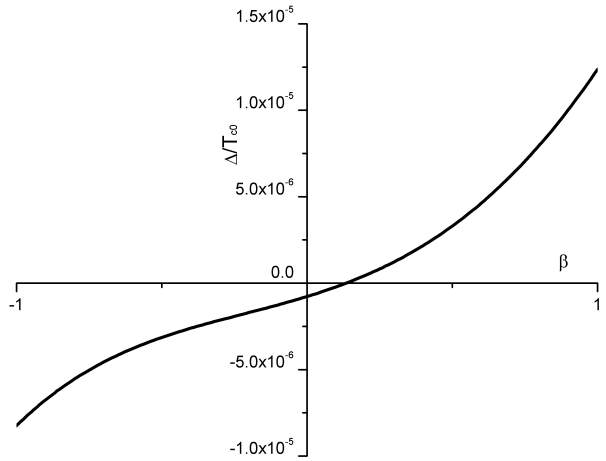



FIG. 1.9: Tracé de $\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}$ pour $t_0 = 0.1T_{c0}$. On voit l'apparition de l'effet de vanne de spin inverse pour $\beta > 0.135$.

**Cas limite $h \longrightarrow 0$**

Quand le champ d'échange s'annule, les spectres électroniques sont représentés par $\xi_\uparrow = -\xi_s$ et $\xi_\downarrow = \xi_s$. La différence entre les fonctions anomales dans la configuration P et la configuration AP (1.25) devient :

$$\begin{aligned} F^{\dagger 1,1}_{P,\downarrow\uparrow} - F^{\dagger 1,1}_{AP,\downarrow\uparrow} &= \frac{t_0^4}{\omega^2+\xi_s^2}\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^2}\left(\frac{(1+\beta)^2}{i\omega-\xi_s} - \frac{(1-\beta)^2}{i\omega+\xi_s}\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{t_0^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)^2}\left[\frac{(1+\beta)^4+(1-\beta)^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)} + \frac{2\left(1-\beta^2\right)^2}{(i\omega+\xi_s)^2}\right]. \end{aligned} \tag{1.33}$$

et ainsi la différence de température critique devient :

$$\frac{\Delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{31}{128}\zeta(5)\frac{t_0^4}{\pi^4 T_{c0}^4}\left(3 - 20\beta - 14\beta^2 - 20\beta^3 + 3\beta^4\right). \tag{1.34}$$

Le résultat (1.34) est présenté sur la figure 1.9.

On définit le paramètre $\beta_0$ qui correspond à la valeur de $\beta$ pour laquelle $\Delta T_c$ change de signe, passant de négatif à positif. Ce paramètre $\beta_0$ dépend des différents paramètres constituant le spectre électronique. Il peut prendre n'importe quelle valeur entre $-1$ et 1. On voit immédiatement que pour $\beta > \beta_0$, la différence de température critique $\Delta T_c$ devient positive. L'effet de vanne de spin s'inverse. De la formule (1.34), on trouve que $\beta_0 \simeq 0.135$. L' inversion de courbure entre les électrons de spin $\uparrow$ et les électrons de spin $\downarrow$ entraîne l'inversion de l'effet de vanne de spin. En effet, lorsque $t_\uparrow \lesssim 1.135t_0$, ($\beta \lesssim 0.135$), alors les électrons de spin $\downarrow$ qui profitent d'une courbure normale, sont plus mobiles que les électrons de spin $\uparrow$. Par voie de conséquence, les propriétés de la structure F/S/F sont majoritairement gouvernées par les propriétés des électrons $\downarrow$ et leurs spectres de courbure normale. En revanche, pour $t_\uparrow \geq 1.135t_0$ ($\beta \geq 0.135$), les électrons de spin $\uparrow$ qui ont une relation de dispersion type trou sont plus mobiles que leurs homologues de spin opposé. Par conséquent, les propriétés de la structure F/S/F sont gouvernées par les électrons

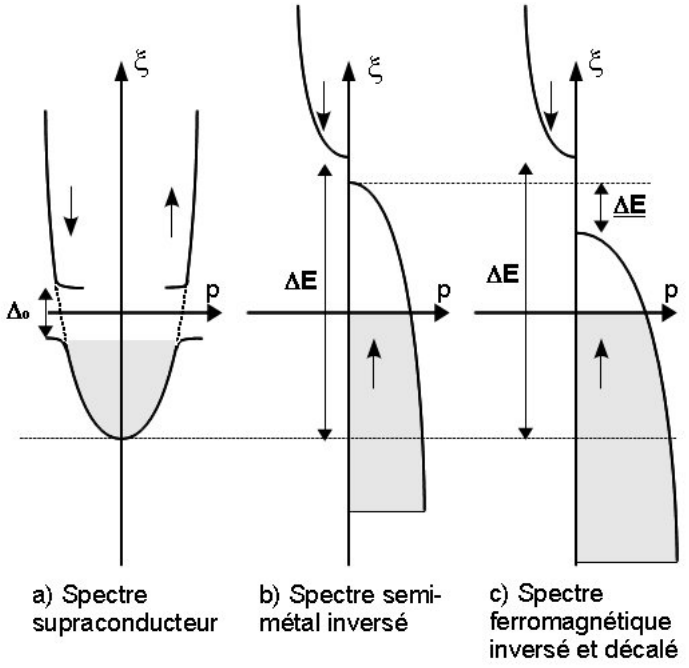



FIG. 1.10: Spectre électronique $\xi_s$ en fonction de $p$. a) Spectre d'un supraconducteur, on voit une ouverture de gap à l'énergie de Fermi $\Delta_0$. b) Spectre d'un demi métal inversé avec $\xi_\uparrow = -\xi_s$ et $\xi_\downarrow = \Delta E \gg \Delta_0$. c) Spectre d'un demi métal inversé et décalé où $\xi_\uparrow = -\alpha\xi_s + \widetilde{\Delta E}$ et $\xi_\downarrow = \Delta E \gg \Delta_0$. Attention, sur la figure $\widetilde{\Delta E} = \underline{\Delta E}$.

dont la relation de dispersion est inversée. Ce graphe démontre alors que l'inversion de la relation de dispersion, présentée sur la figure 1.8 c) est une explication importante de l'effet de vanne de spin inverse.

On remarque que lorsque $t_\uparrow = t_\downarrow$, l'effet de vanne de spin est normal ($\Delta T_c < 0$). L'explication avancée dans [104] est qu'il y a un effet de moyenne entre les deux types d'électron qui contribuent aux propriétés de la structure. Cet effet de moyenne est en faveur des électrons dont la relation de dispersion est normale car ils ont accès à un nombre plus important de niveau dans leurs bandes électroniques ce qui les rend plus mobile.

### Cas d'un demi-métal inversé

Le spectre d'un demi métal inversé est présenté sur la figure 1.10 b). Dans ce cas, les électrons $\uparrow$ ont une relation de dispersion type-trou et les électrons $\downarrow$ sont fortement décalé par rapport au spectre supraconducteur.

Le spectre des électrons s'écrit $\xi_\uparrow = -\xi_s$ et $\xi_\downarrow = \xi_s + \Delta E$. La différence entre les fonctions anomales dans la configuration P et la configuration AP (1.25) s'écrit :

$$\begin{aligned} F^{\dagger 1,1}_{P,\downarrow\uparrow} - F^{\dagger 1,1}_{AP,\downarrow\uparrow} &= \frac{t_0^4}{\omega^2+\xi_s^2}\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^2}\left(\frac{(1+\beta)^2}{i\omega-\xi_s} - \frac{(1-\beta)^2}{i\omega+\xi_s+\Delta E}\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{t_0^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)^2}\left[\frac{(1+\beta)^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)} + \frac{(1-\beta)^4}{\left(\omega^2+(\xi_s+\Delta E)^2\right)} + \frac{2\left(1-\beta^2\right)^2}{(i\omega+\xi_s)(i\omega+\xi_s+\Delta E)}\right]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

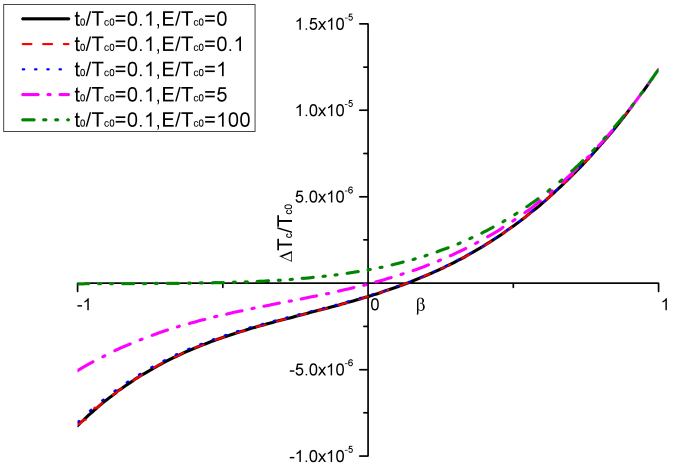



FIG. 1.11: Graphe de $\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}$ en fonction de $\beta$ pour différentes valeurs de $\frac{\Delta E}{T_{c0}}$ dans le cas où $\frac{t_0}{T_{c0}} = 0.1$.

La différence de température est représentée sur la figure 1.11 en fonction de $\beta$ pour différentes valeurs de $\Delta E$ et sur la figure 1.12 en fonction de $\Delta E$ pour différentes valeurs de $\beta$. On remarque sur la figure 1.11, que pour toutes les valeurs de $\Delta E$, il existe une plage de valeur de $\beta$ pour laquelle l'effet de vanne de spin s'inverse. Pour $\Delta E \gg \Delta_0$, $\beta_0$ est négatif, En revanche, dans ce régime, on constate qu'il existe toujours une valeur de $\beta$ pour laquelle $\Delta T_c$ est négative. Cet effet s'explique par le fait que pour $\beta \simeq -1$, les électrons type-trou sont très peu mobiles entre les couches et ne contribuent presque pas à l'effet de vanne de spin. Pour $\beta = -1$, on constate sur la figure 1.12 que $\Delta T_c$ est négatif quelquesoit $\Delta E$. A cette valeur de $\beta$, les électrons de type-trou sont confinés dans les couches ferromagnétiques sans pouvoir en sortir (car $t_\uparrow$ est nul). Dans ce cas, l'effet de vanne de spin est normal. En revanche, $\Delta T_c$ tend vers zéro lorsque $\Delta E$ augmente car dans ce cas, les électrons avec la dispersion normale sont de moins en moins nombreux. Pour $\beta = -1$, lorsque $\Delta E \longrightarrow \infty$, alors $\Delta T_c = 0$ et l'effet de vanne de spin disparaît. On remarque également que l'effet de $\Delta E$ est identique quelquesoit son signe. Cela s'explique par le fait que $\Delta E$ est de l'ordre de $\Delta_0$ indépendamment de la place de la couche électronique dans le spectre. Dans le régime $\Delta E \gg T_{c0}$, la différence $\Delta T_c$ s'écrit :

$$\frac{\Delta T_c}{T_{c0}} = \frac{93}{128}\frac{\zeta(5)}{\pi^4 T_{c0}^4} t_\uparrow^4 - \frac{7\zeta(3)}{4(\Delta E)^2 \pi^2 T_{c0}^2} t_\downarrow^4 \tag{1.36}$$

où on voit que pour $\Delta E > T_{c0}$, alors l'effet de vanne de spin est inversé. Il est intéressant de noter que le terme positif de la relation (1.36) est directement proportionnel à $t_\uparrow$. Cette dépendance est logique compte tenu du fait que ce sont les électrons de spin $\uparrow$ qui ont un spectre type trou.

Pour $t_\uparrow = t_\downarrow$, on peut démontrer à partir de la formule (1.36) que $\Delta T_c$ s'annule pour $\frac{\Delta E}{T_{c0}} = \sqrt{\frac{224\pi^2}{93}\frac{\zeta(3)}{\zeta(5)}} = 5.25$ ce qui équivaut à $\Delta E \simeq 3\Delta_0$. Dans le cas où $t_\uparrow = t_\downarrow$, l'effet de vanne de spin est normal pour $\Delta E < 3\Delta_0$ et inverse pour $\Delta E > 3\Delta_0$. Cette valeur limite définie le cas où le spectre électronique de type électron est trés décalé par rapport au spectre électronique inversé et ne peut plus contribuer à l'effet de vanne de spin.

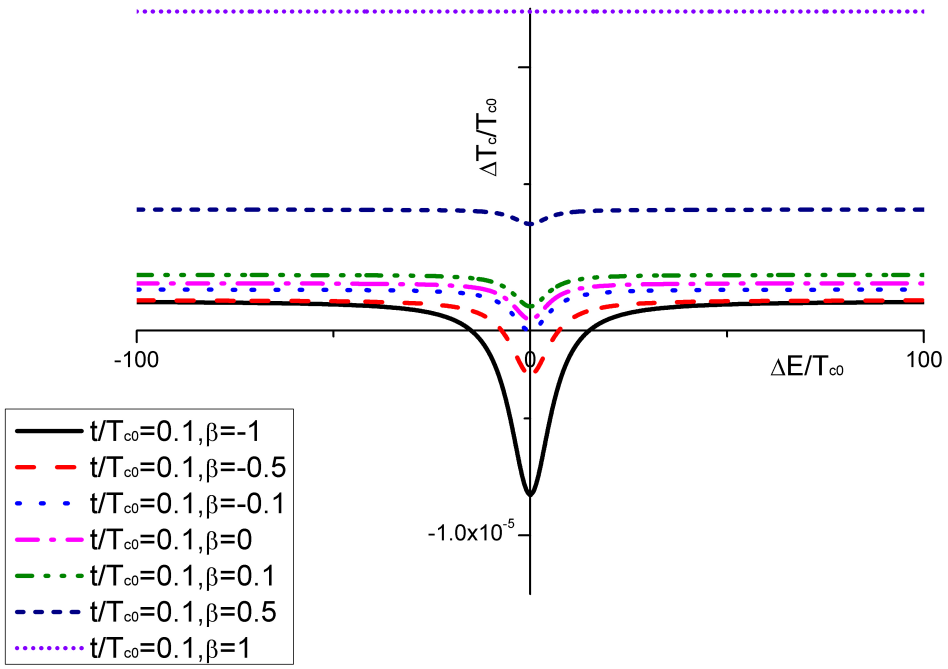



FIG. 1.12: Graphe de $\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}$ en fonction de $\frac{\Delta E}{T_{c0}}$ pour différentes valeurs de $\beta$ dans le cas où $\frac{t_0}{T_{c0}} = 0.1$.

**Cas d'un demi-métal inversé : robustesse de l'effet de vanne de spin inverse**

Le cas étudié dans la section précédente est intéressant, et apporte beaucoup d'information sur le mécanisme de l'inversion de l'effet de vanne de spin. En revanche, le spectre étudié s'avère être un cas particulier dans la réalité. En effet, il est peu probable en réalité que le spectre électronique soit inversé sans être décalé par rapport au spectre du supraconducteur. Dans cette partie, nous allons nous intéresser à un spectre électronique plus réaliste qui prendra la forme $\xi_\uparrow = -\alpha\xi_s + \widetilde{\Delta E}$ et $\xi_\downarrow = \xi_s + \Delta E$ où $\alpha$ est une constante réelle et positive qui caractérise une différence de masse effective entre le matériaux supraconducteur et le matériaux ferromagnétique, et $\Delta E$ et $\widetilde{\Delta E}$ sont des décalages de fond de bande des spectres électroniques normaux et inversés respectivement. Dans ce cas, la différence entre les fonctions anomales dans la configuration P et la configuration AP (1.25) s'écrit :

$$\begin{aligned} F^{\dagger 1,1}_{P,\downarrow\uparrow} - F^{\dagger 1,1}_{AP,\downarrow\uparrow} &= \frac{t_0^4}{\omega^2+\xi_s^2}\left\{\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^2}\left(\frac{(1+\beta)^2}{i\omega-\alpha\xi_s+\widetilde{\Delta E}} - \frac{(1-\beta)^2}{i\omega+\alpha\xi_s+\Delta E}\right)^2\right] - \left[\frac{(1+\beta)^4}{\left(\omega^2+\left(\widetilde{\Delta E}-\alpha\xi_s\right)^2\right)}\right] \right. \\ &\left. - \left[+\frac{(1-\beta)^4}{\left(\omega^2+(\alpha\xi_s+\Delta E)^2\right)} + \frac{2\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(i\omega-\left(-\alpha\xi_s+\widetilde{\Delta E}\right)\right)(i\omega+\alpha\xi_s+\Delta E)}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

et s'avère difficile à manipuler. En ce basant sur l'étude précédente, on va étudier cette relation dans le cas où le décalage $\Delta E$ est grand devant le gap supraconducteur soit $\Delta E \gg T_{c0}$. En effet, dans cette approximation, on voit clairement que l'effet de vanne de spin inverse est clairement favorisé, notamment dans le cas où $t_\uparrow = t_\downarrow$. Ce cas est intéressant à étudier car le cas $t_\uparrow = t_\downarrow$ est le plus couramment observable. Dans ce cas, $\Delta E \gg T_{c0}$, la formule précédente se simplifie en

$$\begin{aligned} F^{\dagger 1,1}_{P,\downarrow\uparrow} - F^{\dagger 1,1}_{AP,\downarrow\uparrow} &= \frac{t_0^4}{\omega^2+\xi_s^2}\left[\frac{2}{(i\omega+\xi_s)^2}\left(\frac{(1+\beta)^2}{i\omega-\alpha\xi_s+\widetilde{\Delta E}} - \frac{(1-\beta)^2}{\Delta E}\right)^2\right] \\ &- \frac{t_0^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)^2}\left[\frac{(1+\beta)^4}{\left(\omega^2+\left(-\alpha\xi_s+\widetilde{\Delta E}\right)^2\right)} + \frac{(1-\beta)^4}{(\Delta E)^2} + \frac{2\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(i\omega+\alpha\xi_s-\widetilde{\Delta E}\right)\Delta E}\right]. \end{aligned} \tag{1.38}$$

A partir de la formule (1.38), on va pouvoir étudier la différence de température dans le cas où $\Delta E = 100T_{c0}$ car l'effet de vanne de spin est inversé pour le cas plus simple $t_\uparrow = t_\downarrow$. Ainsi, on étudie l'influence de la masse effective et l'influence d'un décalage du spectre inversé $\widetilde{\Delta E}$ sur l'effet de vanne de spin inverse. Cette étude va permettre de tester la robustesse de l'effet de vanne de spin inverse.

L'étude de l'influence de la masse effective est représenté sur la figure 1.13 pour différentes valeurs de $\widetilde{\Delta E}$ . On voit qu'il existe un $\alpha_0$ pour lequel $\Delta T_c$ est maximal. Cela signifie que l'effet de vanne de spin inverse est plus efficace lorsque les masses effectives sont proches. Dés que les masses effectives sont différentes, on revient à l'effet vanne de spin normal. De plus, $\alpha_0$ est environ égal à 1 pour $\widetilde{\Delta E}$ proche de 0 et augmente avec $\widetilde{\Delta E}$. Cela signifie que l'effet de vanne de spin normal est sensible au décalage d'énergie. La valeur de $\alpha_0$ augmente avec $\widetilde{\Delta E}$, ce qui signifie que l'affaiblissement de l'effet inverse de vanne de spin est compensé par le décalage de masse effective. Enfin, la valeur maximale diminue avec $\widetilde{\Delta E}$ car l'effet de vanne de spin est sensible au décalage d'énergie.

On voit la sensibilité de l'effet de vanne de spin au décalage d'énergie pour différentes valeurs de $\alpha$ sur la figure 1.14. $\Delta T_c$ devient négative pour une valeur de $\widetilde{\Delta E}$ qui est égale à environ 2 fois la valeur du gap supraconducteur. La fonction n'est pas symétrique selon que $\widetilde{\Delta E}$ soit positif où négatif. Cette dissymétrie s'explique par la différence de masse effective.

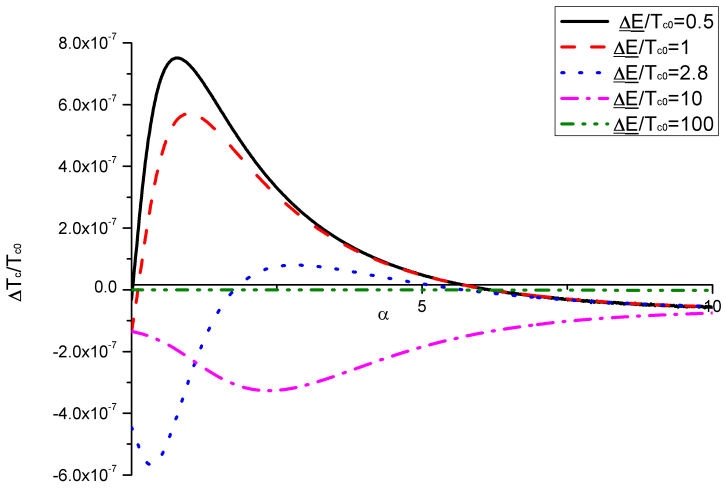



FIG. 1.13: Graphe de $\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}$ en fonction de $\alpha$ pour différentes valeurs de $\frac{\widetilde{\Delta E}}{T_{c0}}$ avec $\beta = 0$, $\frac{t_0}{T_{c0}} = 0.1$ et $\frac{\Delta E}{T_{c0}} = 100$. Attention, sur la figure $\widetilde{\Delta E}$ est noté $\underline{\Delta E}$.

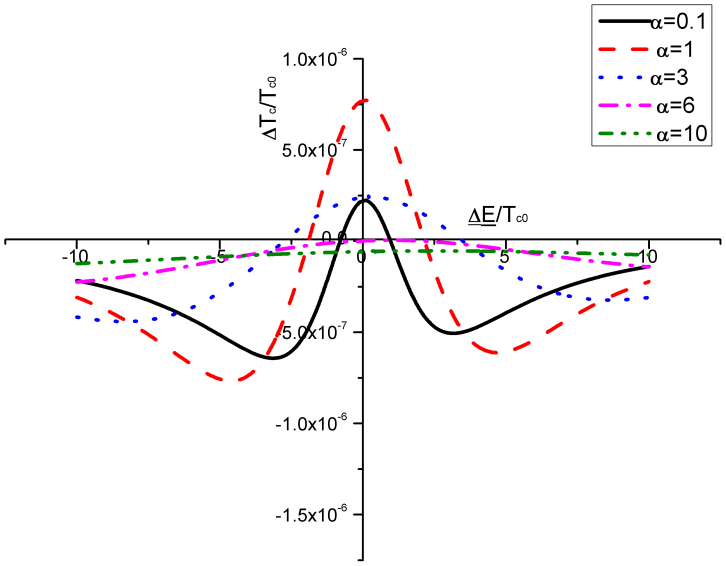



FIG. 1.14: Graphe de $\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}$ en fonction de $\frac{\widetilde{\Delta E}}{T_{c0}}$ pour différentes valeurs de $\alpha$ avec $\beta = 0$, $\frac{t_0}{T_{c0}} = 0.1$ et $\frac{\Delta E}{T_{c0}} = 100$. Attention, sur la figure $\widetilde{\Delta E}$ est noté $\underline{\Delta E}$.

### 1.3.6 Conclusion

Dans cette partie nous proposons une explication de l'effet vanne de spin inverse dans les tricouches F/S/F. Nous étudions en détail l'hypothèse proposée dans la référence [86], d'une dépendance en spin du couplage intercouche. Nous démontrons que cette hypothèse n'est pas suffisante pour expliquer l'inversion de l'effet vanne de spin. En revanche, cette dépendance permet d'influencer la valeur absolue de la différence de température critique $\left|T_c^P - T_c^{AP}\right|$ mais pas son changement de signe.

En plus de cette hypothèse, nous considérons les couches ferromagnétiques comme des presque demi métaux. Cette hypothèse implique que l'une des bandes de spin est quasiment remplie alors que l'autre est quasiment vide. Cette configuration des sous-bandes de spin implique que la relation de dispersion entre les électrons de spin différents est inversée. Cette situation peut se retrouver dans des ferromagnétiques très fort, où le champ d'échange décale très fortement les bandes de spin. On peut supposer que des matériaux sous champ magnétique trés fort pourraient obtenir ce type de configuration. En rajoutant cette hypothèse à la précédente, nous démontrons la possibilité d'obtenir un effet de vanne de spin inverse. cette inversion de spectre électronique permet d'expliquer l'apparition de l'effet de vanne de spin inverse.

L'étude de cette inversion de l'effet de vanne de spin avec des spectres électroniques plus complexes permet la mise en évidence de la sensibilité de l'effet de vanne de spin inverse aux décalages d'énergies et aux différences de masse effective. Si le décalage énergétique entre le spectre électronique inversé et le spectre électronique du supraconducteur est supérieur à $2\Delta$, alors l'effet de vanne de spin redevient normal. La faible échelle énergétique et cette sensibilité rend la recherche de matériaux susceptibles de présenter l'inversion de l'effet vanne de spin inverse plus difficile.

Enfin, il reste à déterminer le comportement du gap supraconducteur dans la configuration parallèle et antiparallèle $\Delta^{P(AP)}$. Les études menées par Tollis *et al.* [88],[89] ont en effet démontrées l'existence de température d'inversion dans la dépendance en température de $\Delta^P$ et $\Delta^{AP}$. Une étude approfondie des gaps supraconducteurs dans le cadre d'un spectre inversé reste à effectuer.

## 1.4 La transition de phase $0 - \pi$ dans les tricouches S/F/S

Dans cette partie, nous allons étudier la jonction S/F/S. Dans les jonctions S/F/S, il peut s'établir un courant Josephson dont l'intensité et la phase sont gouvernées par le ferromagnétique. En étudiant le courant Josephson d'une jonction S/I/S dont l'isolant est suffisamment dopé par des impuretés magnétiques, Bulaevskii, Kuzii et Sobyanin remarquèrent que le courant critique associé à un transfert tunnel des paires de Cooper pouvait devenir négatif [29]. Un courant critique négatif n'étant pas physique, cet état doit être interprété comme un décalage de phase de $\pi$ dans la relation courant-phase du courant Josephson. On parle alors de phase $\pi$, ou de jonction $\pi$. Utilisant le modèle des jonctions S/F/S, Bulaevskii *et al.* démontrèrent danss les années 80 que le courant critique oscille entre les états 0 et $\pi$ en fonction de la longueur de la jonction magnétique [105],[106]. L'observation de la phase $\pi$ a été réalisée dans les années 2000 avec l'observation de l'annulation du courant critique dans une jonction S/F/S [63]. De nombreuses observations de la phase $\pi$ ont été réalisées par la suite [25], [43]. La phase $\pi$ se manifeste par exemple dans beaucoup de propriétés de cohérences quantiques. Par exemple, il a été observé des

décalages dans la réponse du SQUID[8] dans le cas où chaque jonction normale étaient associées à une jonction $\pi$ [107],[108]. D'autres travaux sur la phase $\pi$ dans des supraconducteurs à symétrie de type $d$ [109], sur des jonctions S/N/S hors-équilibre [111],[110] ont été effectuées ces vingts dernières années. Il est à noter que des systèmes de multicouches ferromagnétiques peuvent générer des phases $\pi$ par la création d'un réseaux de vortex et d'anti-vortex [112].

Dans les supraconducteurs à haute température critique, dont certains peuvent être considérés comme des multicouches S/F, il a été prédit la possibilité d'observer l'établissement de la phase $\pi$ [30],[113]. Cette description est pertinente pour les Ruthénocuprates $RuSr_2GdCu_2O_8$ qui se comportent comme des multicouches S/F naturelles [38]. Il a été observé en 2004 qu'il existe un effet Josephson intrinsèque à l'intérieur de ces matériaux [114]. En revanche, l'existence d'une phase $\pi$ dans ces matériaux n'a pas pu être établi formellement [115].

Dans cette partie, nous proposons une explication basée sur l'anisotropie des spectres électronique et sur les décalages d'énergie pouvant exister entre les spectres des couches supraconductrices et ferromagnétiques pour expliquer l'absence de phase $\pi$ dans ces composés.

### 1.4.1 Modélisation de la tricouche S/F/S

En utilisant les hamiltoniens de la théorie de l'hamiltonien tunnel (1.12),(1.13) et (1.14), on trouve les équations de Gorkov généralisées pour l'étude des multicouches (1.15). Dans le cas S/F/S, les couches portent les indices $n = 0$ et $n = 2$ et la couche F porte l'indice $n = 1$. En appliquant les équations (1.15) au cas S/F/S, on trouve les équations de Gorkov de la forme :

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_s)\, G^{0,0}_{\uparrow\uparrow} - tG^{1,0}_{\uparrow\uparrow} + \Delta_0 F^{\dagger 0,0}_{\downarrow\uparrow} = 1 \\ \left(i\omega - \xi_\uparrow\right) G^{1,0}_{\uparrow\uparrow} - tG^{0,0}_{\uparrow\uparrow} - tG^{2,0}_{\uparrow\uparrow} = 0 \\ (i\omega - \xi_s)\, G^{2,0}_{\uparrow\uparrow} - tG^{1,0}_{\uparrow\uparrow} + \Delta_2 F^{\dagger 2,0}_{\downarrow\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{\dagger 0,0}_{\downarrow\uparrow} + tF^{\dagger 0,1}_{\downarrow\uparrow} + \Delta^*_0 G^{0,0}_{\uparrow\uparrow} = 0 \\ \left(i\omega + \xi_\downarrow\right) F^{\dagger 1,0}_{\downarrow\uparrow} + tF^{\dagger 0,0}_{\downarrow\uparrow} + tF^{\dagger 2,0}_{\downarrow\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{\dagger 2,0}_{\downarrow\uparrow} + tF^{\dagger 1,0}_{\downarrow\uparrow} + \Delta^*_2 G^{2,0}_{\uparrow\uparrow} = 0 \end{cases} . \tag{1.39}$$

La résolution du système d'équation (1.39) donne la fonction anomale dans le supraconducteur 0 :

$$F^{\dagger 0,0}_{\downarrow\uparrow} = \frac{\left[|\Delta_2|^2\Omega_\uparrow\Omega^*_\downarrow + \left[\Omega^*_\uparrow\Omega^*_s - t^2\right]\left[\Omega_\downarrow\Omega_s - t^2\right]\right]\Delta^*_0 + t^4\Delta^*_2}{\left(|\Omega_s|^2 + \left|\Delta^2_2\right|\right)\left(|\Omega_s|^2 + \left|\Delta^2_0\right|\right)\Omega^*_\uparrow\Omega_\downarrow - t^2\left(2|\Omega_s|^2 + \left|\Delta^2_2\right| + \left|\Delta^2_0\right|\right)\left(\Omega^*_s\Omega_\uparrow + \Omega_s\Omega^*_\downarrow\right) + t^4\left(4|\Omega_s|^2 + \left|\Delta^2_2\right| + \left|\Delta^2_0\right| + \Delta_0\Delta^*_2 + \Delta^*_0\Delta_2\right)}. \tag{1.40}$$

où $\Omega_\uparrow = \left(i\omega + \xi_\uparrow\right)$, $\Omega_\downarrow = \left(i\omega + \xi_\downarrow\right)$ et $\Omega_s = (i\omega + \xi_s)$. Dans le cas où la jonction est dans l'état 0, alors $\Delta^*_2 = \Delta^*_0$ et $\Delta_2 = \Delta_0$ et la fonction (1.40) devient :

$$F^{\dagger 0,0}_{\downarrow\uparrow,0} = \frac{\left[|\Delta_0|^2\Omega_\uparrow\Omega^*_\downarrow + \left[\Omega^*_\uparrow\Omega^*_s - t^2\right]\left[\Omega_\downarrow\Omega_s - t^2\right]\right]\Delta^*_0 + t^4\Delta^*_0}{\left(|\Omega_s|^2 + \left|\Delta^2_0\right|\right)^2\Omega^*_\uparrow\Omega_\downarrow - 2t^2\left(|\Omega_s|^2 + \left|\Delta^2_0\right|\right)\left(\Omega^*_s\Omega_\uparrow + \Omega_s\Omega^*_\downarrow\right) + 4t^4\left(|\Omega_s|^2 + \left|\Delta^2_0\right|\right)}. \tag{1.41}$$

Quand la jonction est dans l'état $\pi$, alors $\Delta^*_2 = -\Delta^*_0$ et $\Delta_2 = -\Delta_0$ et la fonction (1.40) devient :

$$F^{\dagger 0,0}_{\downarrow\uparrow,\pi} = \frac{\left[|\Delta 0|^2\Omega_\uparrow\Omega^*_\downarrow + \left[\Omega^*_\uparrow\Omega^*_s - t^2\right]\left[\Omega_\downarrow\Omega_s - t^2\right]\right]\Delta^*_0 + t^4\Delta^*_0}{\left(|\Omega_s|^2 + \left|\Delta^2_0\right|\right)^2\Omega^*_\uparrow\Omega_\downarrow - 2t^2\left(|\Omega_s|^2 + \left|\Delta^2_0\right|\right)\left(\Omega^*_s\Omega_\uparrow + \Omega_s\Omega^*_\downarrow\right) + 4t^4|\Omega_s|^2}. \tag{1.42}$$

[8] Superconducting Quantum Interference Device

Afin d'étudier la transition de phase $0-\pi$, on compare la température critique dans l'état 0, $T_c^{(0)}$, et dans l'état $\pi$, $T_c^{(\pi)}$. Si $T_c^{(0)} > T_c^{(\pi)}$, alors la transition de phase métal normal-supraconducteur a lieu vers l'état de supraconductivité 0. Si $T_c^{(\pi)} > T_c^{(0)}$, alors la transition de phase métal normal-supraconducteur a lieu vers l'état de supraconductivité $\pi$. Pour comparer les deux températures critiques, on va utiliser la relation d'autocohérence (1.5) dans l'état 0 et dans l'état $\pi$ qui devient

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{T_c^{(0)}}{T_{c0}}\right) &= 2\pi T_c^{(0)} \sum_{\omega} \mathrm{Re}\left(\int d\xi_s f_{\downarrow\uparrow,0}^{\dagger 0,0}\right) \\
\ln\left(\frac{T_c^{(\pi)}}{T_{c0}}\right) &= 2\pi T_c^{(0)} \sum_{\omega} \mathrm{Re}\left(\int d\xi_s f_{\downarrow\uparrow,\pi}^{\dagger 0,0}\right)
\end{aligned}$$

avec $f = \lim_{\Delta \longrightarrow 0} \frac{F^\dagger}{\Delta^*}$. Ainsi, ces relations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\tfrac{T_c^{(0)}}{T_{c0}}\right) &= 2\pi T_c^{(0)} \sum_{\omega} \mathrm{Re}\left(\int d\xi_s \tfrac{\left[\Omega_\uparrow^*\Omega_s^* - t^2\right]\left[\Omega_\downarrow \Omega_s - t^2\right] + t^4}{|\Omega_s|^4 \Omega_\uparrow^* \Omega_\downarrow - 2t^2|\Omega_s|^2\left(\Omega_s^*\Omega_\uparrow + \Omega_s \Omega_\downarrow^*\right) + 4t^4|\Omega_s|^2}\right) \\
\ln\left(\tfrac{T_c^{(\pi)}}{T_{c0}}\right) &= 2\pi T_c^{(\pi)} \sum_{\omega} \mathrm{Re}\left(\int d\xi_s \tfrac{\left[\Omega_\uparrow^*\Omega_s^* - t^2\right]\left[\Omega_\downarrow \Omega_s - t^2\right] - t^4}{|\Omega_s|^4 \Omega_\uparrow^* \Omega_\downarrow - 2t^2|\Omega_s|^2\left(\Omega_s^*\Omega_\uparrow + \Omega_s \Omega_\downarrow^*\right) + 4t^4|\Omega_s|^2}\right)
\end{aligned}$$

soit en effectuant la différence des deux

$$\ln\left(\tfrac{T_c^{(\pi)}}{T_c^{(0)}}\right) \simeq \tfrac{\Delta T_c}{T_{c0}} = \tfrac{T_c^{(\pi)} - T_c^{(0)}}{T_{c0}} = 2\pi T_{c0} \sum_{\omega} \mathrm{Re}\left(\int d\xi_s \tfrac{-2t^4}{|\Omega_s|^2\left(|\Omega_s|^2 \Omega_\uparrow^* \Omega_\downarrow - 2t^2\left(\Omega_s^*\Omega_\uparrow + \Omega_s \Omega_\downarrow^*\right) + 4t^4\right)}\right) \tag{1.43}$$

où l'on considère $T_c^{(0)} \simeq T_c^{(\pi)} \simeq T_{c0}$ dans le second membre de l'équation. D'après l'équation (1.43), si le second membre est positif, alors la phase de la jonction est $\pi$. Si le second membre est négatif, alors la phase de la jonction est 0. L'étude de signe du second membre de l'équation (1.43) nous renseigne sur la possibilité d'observer ou non la phase $\pi$.

### 1.4.2 Effet d'un décalage des spectres

La transition de phase $0-\pi$ d'une jonction S/F/S où le ferromagnétique est considéré comme ayant un décalage de bande symétrique, $\xi_{\uparrow(\downarrow)} = \xi_s \pm h$, a été étudiée par Houzet *et al.* [113]. Nous allons étudier le cas plus général où chaque sous bande de spin a un décalage de bande différent l'un de l'autre, $\xi_\uparrow = \xi_s + E_\uparrow$ et $\xi_\downarrow = \xi_s + E_\downarrow$ où $E_{\uparrow(\downarrow)}$ est l'énergie de décalage entre chaque sous-bande de spin et la bande du supraconducteur. Dans ce cas, on peut considérer que l'énergie $E_{\uparrow(\downarrow)} = \Delta E \pm h$ où $\Delta E$ est le décalage entre le spectre supraconducteur et le spectre métallique et $h$ le champ d'échange. La variation de $\Delta T_c$ est représenté sur la figure 1.15 en fonction de $E_\uparrow$ pour différentes valeurs de $E_\downarrow$ dans la limite $t \ll T_{c0}$. On peut remarquer que la variation de $\Delta T_c$ est symétrique par rapport à $E_\uparrow$ selon la valeur de $E_\downarrow$. Pour $E_\downarrow = 100 T_{c0}$ alors $\Delta T_c$ est antisymétrique par rapport au signe de $E_\downarrow$. Cette propriété n'étant valable que dans ce cas. D'ailleurs, dans le cas où $E_\downarrow \gg T_{c0}$ et $\xi_\uparrow$ proche de la surface de Fermi du supraconducteur, la fonction peut s'écrire dans la limite $t \ll T_{c0}$ :

$$\frac{\Delta T_c}{T_{c0}} = \frac{7t^4\zeta(3)}{8E_\uparrow E_\downarrow \pi^2 T_{c0}^2} - \frac{t^4}{8E_\uparrow^2 E_\downarrow \pi T_{c0}} \mathrm{Im}\left(\Psi'\left(\frac{1}{2} - \frac{iE_\uparrow}{4\pi T_{c0}}\right)\right)$$

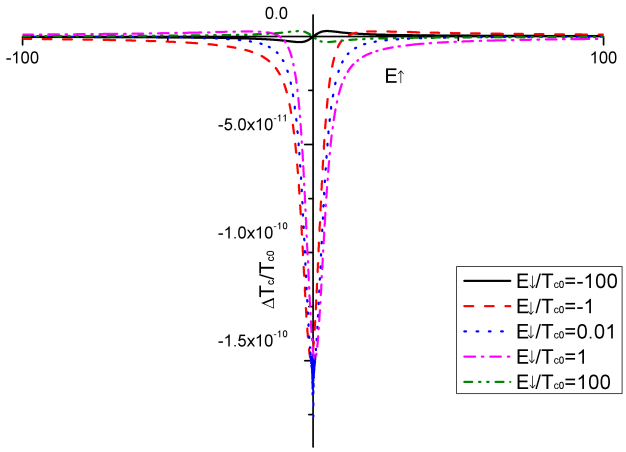



FIG. 1.15: Tracé de $\Delta T_c$ en fonction de $E_\uparrow$ pour différentes valeurs de $E_\downarrow$ dans le cas où $\frac{t}{T_{c0}} = 0.01$. Pour $E_\downarrow \gg T_{c0}$, $\Delta T_c$ devient positif si $E_\downarrow$ et $E_\uparrow$ sont de signe opposé. En revanche, quand $E_\downarrow \ll T_{c0}$, le changement de signe a lieu pour des valeurs toujours de signe opposé mais différentes de zéro.

où $\Psi'$ est la dérivée première de la fonction digamma. On en déduit de suite que $\Delta T_c$ est négatif et la jonction S/F/S dans l'état 0 si $E_\uparrow$ et $E_\downarrow$ ont tous les deux le même signe. En revanche, si $E_\uparrow$ et $E_\downarrow$sont de signe opposés, alors $\Delta T_c$ est positif et la jonction S/F/S est dans l'état $\pi$. L'existence de la phase $\pi$ dépend alors du saut d'énergie entre le spectre ferromagnétique et le spectre supraconducteur. Si on échange les rôles de $E_\uparrow$ et $E_\downarrow$, la conclusion est la même.

Dans le cas où $E_\downarrow \gg T_{c0}$ et $E_\uparrow \gg T_{c0}$ , la différence de température critique s'écrit

$$\frac{\Delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{7t^4\zeta(3)}{8E_\uparrow E_\downarrow \pi^2 T_{c0}^2}$$

et la conclusion reste la même, la phase $\pi$ n'apparaît que lorsque $E_\uparrow$ et $E_\downarrow$ sont de signe opposé. Le dernier cas de figure est la cas où $E_\downarrow \gg T_{c0}$ et $E_\uparrow \ll T_{c0}$. La différence de température critique vaut

$$\frac{\Delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{31E_\downarrow t^4\zeta(5)}{64E_\uparrow \pi^4 T_{c0}^4}$$

mais la conclusion reste inchangée. En revanche, on voit une dépendance linéaire de $\Delta T_c$ par rapport à $E_\downarrow$ ce qui signifie que quand $E_\downarrow$ tend vers zéro alors $T_c^{(0)} = T_c^{(\pi)}$ et pour déterminer le type de l'état fondamental dans ce cas, il faut calculer $\Delta T_c$ en prenant en compte un ordre plus élevé en $t$.

Cette étude démontre des conditions plus restrictives pour observer la transition de phase $0 - \pi$ dans les multicouches S/F que le diagrammes de phase proposé dans la référence [113]. En revanche, dans notre étude, nous démontrons que la formation de la phase $\pi$ est assujettie au signe relatif des décalages énergétiques qui existent entre les deux bandes de spin de la couche F avec la couche S. En effet, si ces décalages ont de même signe, alors la phase $\pi$ ne peut pas apparaître. Cette hypothèse pourrait expliquer la difficulté d'observation de ces phases dans les ruthénocuprates.

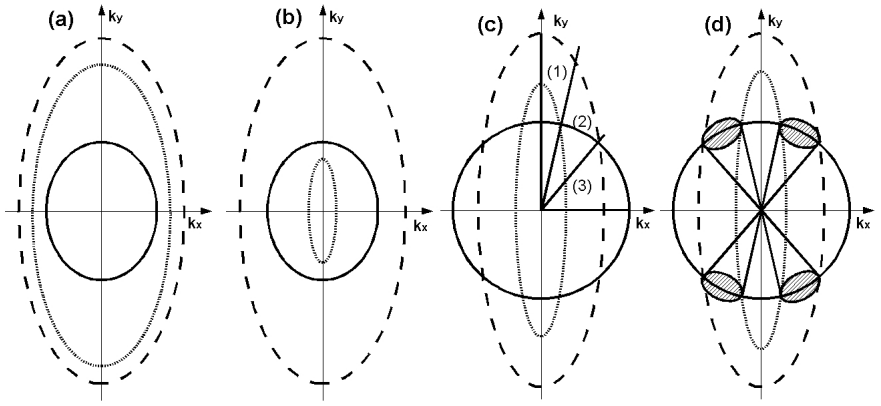



FIG. 1.16: Surface de Fermi $2D$ du supraconducteur $\xi_s$ (en trait plein) et pour les bandes électroniques majoritaires $\xi_\uparrow$ et minoritaires $\xi_\downarrow$ du ferromagnétique (en tiret et en pointillet respectivement). Dans a) est décrite la situation $\xi_s < \xi_\downarrow < \xi_\uparrow$. Dans b) est décrite la situation $\xi_\downarrow < \xi_s < \xi_\uparrow$. Dans la figure c), sont représenté les différentes aires d'intégrations. Dans l'aire (1), $\xi_s < \xi_\downarrow < \xi_\uparrow$, dans l'aire (2), $\xi_\downarrow < \xi_s < \xi_\uparrow$et dans l'aire (3), $\xi_\uparrow < \xi_\downarrow < \xi_s$. En d) est représenté le signe de $\ln\left(T_c^{(\pi)}/T_c^{(0)}\right)$dans les différentes aires. Dans les aires hachurée, l'intégrale est positive et dans les autres elle est négative. A la frontière, l'intégrale est nulle.

### 1.4.3 Effet de l'anisotropie des spectres

Dans les composés réels, le résultat dépend des détails de la forme exacte de la surface de Fermi des ferromagnétiques et des supraconducteurs. Ainsi, l'anisotropie des spectres devrait avoir une forte influence sur la transition de phase $0-\pi$. Pour illustrer ce cas, on choisit une surface de Fermi elliptique de la couche F. Les spectres électroniques majoritaires et minoritaires $\xi_\uparrow(\theta)$ et $\xi_\downarrow(\theta)$ dépendent de l'angle polaire $\theta$ dans le plan $(k_x, k_y)$ (voir figure 1.16).

Dans le cas d'un fort décalage d'énergie entre les bandes électroniques du ferromagnétique et du supraconducteur, les spectres d'électrons majoritaires (minoritaires) du ferromagnétique peuvent s'écrire $\xi_{\uparrow(\downarrow)}(\theta) = \xi_s + E_{\uparrow(\downarrow)}(\theta)$, où $\xi_s$ est le spectre du supraconducteur considéré comme isotrope.

Dans le cas de la figure 1.16 a) et b), on peut donner le signe de $\Delta T_c$ sans tenir compte de la dépendance en $\theta$. Les conclusions sont donc les mêmes que dans le cas isotrope. Le cas de la figure 1.16 a) montre que $E_\uparrow(\theta)$ et $E_\downarrow(\theta)$ sont tous les deux positifs, alors la tricouche est dans la phase 0. Pour les surfaces de Fermi de la figure 1.16 b), $E_\uparrow(\theta)$ et $E_\downarrow(\theta)$ sont de signe opposé, alors la tricouche est dans la phase $\pi$. L'anisotropie de la surface de Fermi de la couche F n'influence pas la phase de la jonction. Pour cela, il faut étudier le cas où il y a intersection des surfaces de Fermi de la couche F et des couches S.

Le cas décrit dans le figure 1.16 c) montre que les surfaces de Fermi des couches S et de la couche F sont en intersection. Les intersections des surfaces délimitent les régions où $\Delta T_c$ est positif et négatif. Pour savoir si $\Delta T_c$ est positif ou négatif, on délimite les surfaces de Fermi en trois régions. En fonction de la taille des régions "positives" et "négatives", on pourra déterminer la phase qui est réalisée au final. Dans les régions (1) et (3), $E_\uparrow(\theta)$ et $E_\downarrow(\theta)$ sont de même signe (positif en (1) et négatif en (3)). Par conséquent, $\Delta T_c$ est négatif et la jonction S/F/S est dans la phase 0. Dans la région (2), $E_\uparrow(\theta)$ et $E_\downarrow(\theta)$ sont de signe opposé ($E_\uparrow(\theta) > 0$ et $E_\downarrow(\theta) < 0$) donc $\Delta T_c$ est positif et la jonction S/F/S réalise la phase $\pi$ dans ces régions. Le signe de $\Delta T_c$ est représenté sur la figure 1.16 d). Si la taille totale des régions où la phase $\pi$ est réalisée est plus importante que la taille totale

des régions ou la phase 0 est réalisée, alors on peut en conclure que la phase globale de la jonction pourra être de $\pi$. Dans le cas contraire, la phase de la jonction S/F/S restera de 0. On en conclut que l'anisotropie des surface de Fermi a un rôle important dans la détermination de la phase globale de la jonction S/F/S.

### 1.4.4 Effet pair-impair dans les multicouches S/F/../F/S

Les multicouches S/F/S peuvent être constituées par un nombre arbitraire de couche F entre les deux couches S. Andersen *et al.* ont démontrés que la transition de phase $0-\pi$ d'une jonction Supraconducteur/Antiferromagnétique(AF)/Supraconducteur dépend du nombre de couche magnétique entre les deux couches S [116]. La couche AF est constituée d'un nombre pair ou impair de couche F où chaque couche adjacente a une aimantation opposée à l'autre. A basse température, la jonction S/AF/S est une jonction 0 ou $\pi$ selon que la couche AF est constituée d'un nombre pair ou impair de couche F.

Grâce au formalisme développé précédemment pour les jonctions S/F/S, on démontre que cet effet de parité ne dépend que du nombre de couche ferromagnétique entre les deux couches S sans dépendre de l'aimantation relative entre deux couches adjacentes. Dans notre modèle, les couches S porte les indices $n = 0$ et $n = N$. Pour simplifier, on considère que le spectre du ferromagnétique est très décalé par rapport à celui du supraconducteur et que les spectres électronique peuvent s'écrire $\xi_\uparrow = E_\uparrow \gg T_{c0}$ et $\xi_\downarrow = E_\downarrow \gg T_{c0}$ où $E_\uparrow$ et $E_\downarrow$ sont de signe opposé. Dans la limite $t \ll E_{\uparrow(\downarrow)}$, la différence de température critique s'écrit :

$$\frac{\Delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{7t^2\zeta(3)}{8\pi^2 T_{c0}^2}\prod_{n=1}^{n=N-1}\frac{t^2}{E_{n,\uparrow}E_{n,\downarrow}} \tag{1.44}$$

Il s'ensuit de la relation (1.44) que l'insertion d'une couche F supplémentaire conduit à un décalage de phase $\pi$. Par conséquent, la différence de phase résultante (0 ou $\pi$) est déterminée par le nombre de couche ferromagnétique entre les deux couches supraconductrices. Si le nombre de couche F est pair, la différence de phase totale $\phi_t$ induite par les couches F est $\phi_t = 2n\pi$ ce qui correspond à la phase 0. Si le nombre de couche F est impair, la différence de phase totale $\phi_t$ induite par les couche F est $\phi_t = (2n+1)\pi$ ce qui correspond à la phase $\pi$. On voit alors que l'aimantation relative de deux couches F adjacentes n'a aucune influence sur la phase totale du système S/F/../F/S multicouche.

### 1.4.5 Conclusion

La transition de phase $0-\pi$ est sensible aux différences de spectre électronique entre la couche S et la couche F. Cette sensibilité s'étend également aux possibles anisotropies des surfaces de Fermi.

Dans le cas d'un décalage en énergie entre le spectre électronique de la couche F et de la couche S, $\Delta E$, inférieur au champ d'échange $h$ de la couche F, alors la phase $\pi$ peut apparaître dans la jonction S/F/S. En revanche, si le décalage $\Delta E$ est supérieur au champ d'échange $h$ alors la phase $\pi$ ne peut pas s'établir dans la jonction S/F/S. Cette condition restreint la possibilité d'observer une phase $\pi$ dans les jonctions S/F/S car elle limite le nombre de matériaux S et F "compatibles".

L'anisotropie de la surface de Fermi influe si la surface de Fermi de la couche S et de la couche F sont en intersection. Pour observer une phase $\pi$, il faut que la surface "favorable" à l'établissement de la phase $\pi$ soit plus grande que la surface "favorable" à l'établissement de la phase 0. Si la situation inverse est réalisée, alors la phase $\pi$ ne

peut pas apparaître. Cette restriction entraîne une impossibilité topologique d'observer des transition de phase $0 - \pi$.

Ces deux effets permettent de donner une explication possible à l'impossibilité d'observer des transition de phase $0 - \pi$ dans les ruthénocuprates [114]. Cette condition restreint le diagramme de phase $0-\pi$ présenté dans la référence [113], au cas où les décalages d'énergie sont de signes opposés. Ainsi, la physique de la jonction Josephson S/F/S s'enrichit de considérer le détail des spectres d'énergie des matériaux en contact. La détermination du spectre des matériaux est donc primordiale pour prévoir les propriétés des jonctions S/F/S.

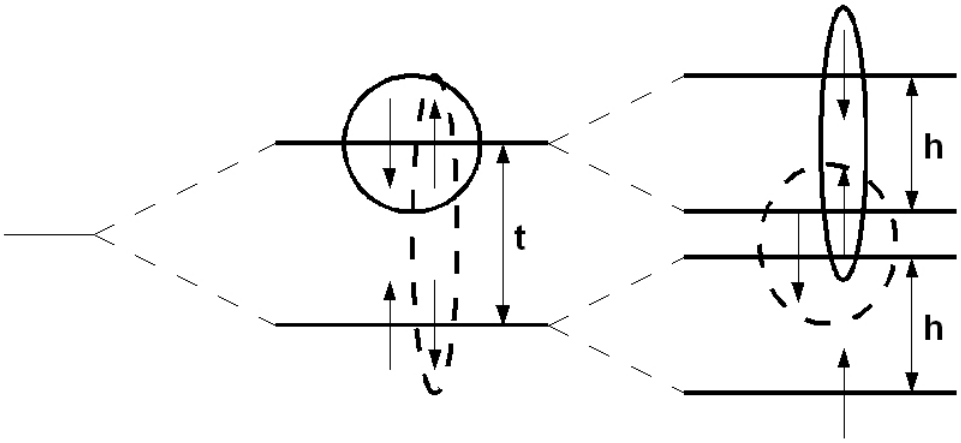
# Chapitre 2

# Supraconductivité induite par champ magnétique dans les bicouches S/N et S/S : effets du désordre.

Les supraconducteurs quasi-$2D$ sont beaucoup étudiés depuis une cinquantaine d'années. Dans ces composés, le champ magnétique critique $H_{c2}$ se révèle fortement anisotrope. Cette anisotropie a été observée dans les cristaux lamellaires de dichalcognéïdes de métaux de transition [31]. Dans ces composés, $H_{c2}$ est plus important dans le plan des couches (plan $a-b$) que dans la direction perpendiculaire aux couches (axe $c$). Cette anisotropie a été observée dans les graphites intercalés comme $C_8K$ [32],[33], $C_6Ca$ [148],[149] et dans $C_6Y_b$ [149], dans les supraconducteurs organiques [150], dans les supraconducteurs à haute température critique basés sur des oxydes de cuivre (cuprates) [151],[152],[153],[154] et dans les hétérostructures artificielles de type supraconducteur-supraconducteur (S/S') $YBa_2Cu_3O_7/DyBa_2Cu_3O_7$ [155] et supraconducteur-isolant (S/I) $(YBa_2Cu_3O_7)_n$ / $(\mathrm{Pr}\,Ba_2Cu_3O_7)_m$ [156]. Les supraconducteurs à haute température critique ont une structures lamellaires [151] et une forte anisotropie électronique [94],[115],[151],[157],[158],[159]. Leur longueurs de cohérence le long de l'axe $c$, $\xi_c$, est plus petite que la distance entre deux couches $d$. Par conséquent, ils peuvent être considérés comme des hétérostructures naturelles. Dans les cuprates supraconducteurs à haute température critique, la supraconductivité existe dans les plans de $CuO_2$ et sont juxtaposés à deux plans non supraconducteur [94],[160].

Le modèle de Ginzburg-Landau (dans le cas de faible anisotropie, $\xi_c \lesssim d$ [161]) et le modèle de Lawrence-Doniach (dans le cas de forte anisotropie, $\xi_c \ll d$ [162]) donne une description de l'anisotropie de $H_{c2}$ dans les supraconducteurs en couches. Pour remonter au diagramme de phase $(H_{c2}, T)$ de ses composés, il est plus commodee d'utiliser la théorie BCS et de l'hamiltonien tunnel.

Certains cuprates supraconducteurs peuvent être considérés comme des empilement de bicouches S/N, S/S' [89],[163] où S/F [30] faiblement couplées. Les bicouches S/N, S/S' et S/F constituent alors les cellules élémentaires des multicouches. Comme les propriétés des bicouches S/N, S/S' et S/F différent des propriétés des monocouches N, S où F, les propriétés des multicouches basées sur des monocouches élémentaires doivent différer de celle basées sur des bicouches élémentaires. Le cas des multicouches S/F a été étudié dans les références [30], [90],[164],[165]. Dans les bicouches S/S', Buzdin *et al.* ont démontré la possibilité de dépasser la limite paramagnétique classique à basse température pour un fort champ magnétique parallèle aux plans de la bicouche [166],[167]. La supraconductivité induite par le champ magnétique doit apparaître lorsque l'énergie de couplage intercouche $t$ est plus importante que $T_{c0}$. De plus, dans cette phase, la bicouche S/S est dans la




1

FIG. 2.1: Mécanisme de compensation du décalage d'énergie entre les niveaux liants et anti-liants par l'effet Zeeman. Les corrélations supraconductrices existent au sein d'un même niveaux électronique (trait plein) où entre deux niveaux électroniques (trait pointillé). La dégénérescence des niveaux liants et anti-liants détruit les corrélations supraconductrices inter-niveaux. La levée de dégénérescence due à l'effet Zeeman compense le décalage d'énergie produit par le couplage intercouche et renforce les corrélations supraconductrices inter-niveaux. Cette compensation explique la réapparition de la supraconductivité à fort champ magnétique.

phase $\pi$. L'apparition de cette supraconductivité à fort champ magnétique est dûe au fait que l'effet Zeeman compense le décalage d'énergie due aux états liants et anti-liants provoqués par le couplage entre couche (voir figure 2.1). Une idée similaire basée sur les supraconducteurs à deux bandes a été introduite par Kulic et Hoffmann [168].

Dans ce chapitre nous étudions le diagramme de phase $(H_{c2}, T)$ d'une bicouche S/N soumise à un champ magnétique parallèle aux couches. Aprés avoir présenté le formalisme quasi-classique, nous étudions, dans le formalisme d'Eilenberger, l'influence des impuretés sur le diagramme de phase $(H_{c2}, T)$ de la bicouche S/N et S/S.

# 2.1 Formalisme quasi-classique et transition de phase S-N

## 2.1.1 Formalisme d'Eilenberger

La manipulation des fonctions de Gorkov est mathématiquement compliquée. En 1968, Eilenberger [117] et Larkin-Ovchinikov [118] ont développé une théorie qui réalise une approximation semi-classique de la théorie de Gorkov fondée sur la séparation des échelles d'énergie, puisque $\Delta \ll E_F$ [1]. Cette simplification est pratique pour étudier la supraconductivité inhomogène sans s'affranchir des effets de cohérence, comme l'effet Josephson. Dans un supraconducteur conventionnel, les propriétés des paires de Cooper, donc de la supraconductivité, varient sur la longueur de cohérence $\xi_0$ qui est beaucoup plus grande que la longueur de Fermi $\lambda_F$. Les propagateurs de Gorkov dépendent donc d'une coordonnée relative $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ consistant principalement en des oscillations de périodes $\lambda_F$ et d'une coordonnée d'ensemble $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}$ correspondant à l'échelle de ${\xi_0}^2$. Comme $\lambda_F \ll \xi_0$, on peut négliger les détails de tailles inférieures à $\xi_0$. Cela revient à "lisser" les propagateurs sur la coordonnée relative $\boldsymbol{\rho}$ en tenant compte que de la coordonnée d'ensemble $\mathbf{R}$. Dit autrement, l'approximation d'Eilenberger consiste à considérer la paire de Cooper comme une particule unique dont le seul mouvement visible à l'échelle mésoscopique est la position de son centre de masse.

De plus, les observables telles que le courant ou le nombre de particules s'expriment à partir de propagateurs de Gorkov pris en des points identiques $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. On peut donc se satisfaire des fonctions de Green prises en des points coïncidents $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.

Afin de lisser les fonctions de Green de Gorkov, on doit l'intégrer par rapport au vecteur d'onde "rapide" $\mathbf{p}$ conjugué de $\boldsymbol{\rho}$. Cela revient à intégrer sur l'énergie cinétique $\xi_p = p^2/2m - \mu$. correspondant au vecteur d'onde $\mathbf{p}$ et mesuré le long d'un rayon $\mathbf{v}_F$

[1] Dans les supraconducteurs conventionnels, $\Delta/E_F \simeq 10^{-4} - 10^{-5}$. Cette hypothèse est donc toujours vérifiée dans les supraconducteurs BCS.

[2] Cette transformation de coordonnées correspond à la transformée de Wigner. Cette transformation effectue le changement

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 &\rightarrow \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2},\ \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ t_1, t_2 &\rightarrow T = \frac{t_1 + t_2}{2}, t = t_1 - t_2 \end{aligned}$$

ce qui transforme les propagateurs :

$$\widehat{G}\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2\right) \rightarrow \widehat{G}\left(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}, t\right).$$

où $T$ disparaît par invariance des fonctions par translation temporelle et $t_1$,$t_2$ et $t$ sont des temps réels ou imaginaires.

de la surface de Fermi. Ainsi, la fonction de la théorie semi classique s'obtient par la transformation :

$$g\left(\mathbf{R},\mathbf{v}_F\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_p}{i\pi}G\left(\mathbf{R},\mathbf{p}\right) \tag{2.1}$$

et ne dépend que d'un seul vecteur position $\mathbf{R}$, d'une direction $\mathbf{v}_F$ et de l'énergie $\omega$.

Dans le cas d'un supraconducteur uniforme (où $\Delta$ ne dépend pas de la position), on prend les fonctions (1.11) que l'on intègre de la manière de (2.1) et on obtient :

$$\begin{array}{ll} g_\omega=\frac{\omega}{\Omega} & \overline{g}_\omega=-\frac{\omega}{\Omega} \\ f_\omega=\frac{\Delta}{i\Omega} & f_\omega^\dagger=\frac{\Delta^*}{i\Omega} \end{array} \tag{2.2}$$

Après avoir défini les nouvelles fonctions de Green d'Eilenberger, il faut établir leurs équations d'évolution. Comme les fonctions quasi classiques représentent la limite $\rho\longrightarrow 0$ des fonctions de Green-Gorkov [119], leurs équations d'évolution sont données par

$$\widehat{H}\left(x_1\right).G\left(x_1,x_2\right)-G\left(x_1,x_2\right).\widehat{H}\left(x_1\right)=0$$

écrit ici dans l'espace de Nambu.

Lorsque l'on ne considère qu'une dimension d'espace (le long de l'axe $x$) pour un gaz d'électrons sans interaction autre que l'interaction BCS (ce qui équivaut dans le cas $3D$ à une surface de Fermi sphérique), les équations d'Eilenberger s'écrivent [117], [120] :

$$\left\{\begin{array}{c} \hbar v_F\partial_x f+2\omega f-2\Delta g+\frac{1}{\tau}\left(\langle g\rangle_\theta f-g\langle f\rangle_\theta\right)=0 \\ \hbar v_F\partial_x f^\dagger-2\omega f^\dagger+2\Delta^* g-\frac{1}{\tau}\left(\langle g\rangle_\theta f^\dagger-g\left\langle f^\dagger\right\rangle_\theta\right)=0 \\ \hbar v_F\partial_x g-\Delta^* f+\Delta f^\dagger+\frac{1}{\tau}\left(\langle f\rangle_\theta f^\dagger-f\left\langle f^\dagger\right\rangle_\theta\right)=0 \end{array}\right. \tag{2.3}$$

où la notation $\langle\rangle_\theta$ signifie $\langle g\rangle_\theta=\int g\left(v,x\right)\frac{d\Omega}{4\pi}$ et représente la moyenne angulaire de la fonction de Green correspondante.

On voit que dans le formalisme d'Eilenberger, les fonctions répondent également à la relation d'autocohérence de fonctions de Green-Gorkov. Ainsi, il y a toujours une relation implicite qui relie les fonctions $f$ et $f^\dagger$ à $\Delta$ et $\Delta^*$. Cette autocohérence ne pose pas de problème particulier. En revanche, il existe un autre niveau d'autocohérence qui relie les moyennes angulaires des fonctions via la quantité $\tau=l_e/v_F$ qui représente le temps de collision moyen dans l'approximation de Born [120]. Dés qu'il existe des impuretés, les fonctions d'Eilenberger sont plus difficiles à trouver à cause de ce niveau d'autocohérence. Si la condition $l_e\gg\lambda_F$ est vérifiée, l'effet des impuretés peut être décrit par une sorte de potentiel de diffusion, variant tout aussi lentement dans l'espace que les fonctions de Green quasi classique. L'intégration de ce potentiel d'impuretés est décrit dans [120]. Il revient à effectuer le changement suivant dans les équations d'Eilenberger

$$\omega\longrightarrow\omega+\frac{\langle g\rangle_\theta}{2\tau}\ et\ \Delta\longrightarrow\Delta+\frac{\langle f\rangle_\theta}{2\tau}.$$

Les fonctions d'Eilenberger correspondent à la limite $x_1\longrightarrow x_2$ des fonctions $G\left(x_1-x_2,R\right)$. On perd alors l'information contenue dans les fonctions de Green pour $\rho=x_1-x_2$ petit mais non nul. Cette information est réinjectée dans les expressions des fonctions quasi-classiques sous la forme d'une condition de normalisation

$$g^2-ff^\dagger=1$$

qui se déduit par un calcul direct du système (1.6) [120].

Les fonctions d'Eilenberger obéissent à la relation d'autocohérence de la théorie de Gorkov, adaptée au formalisme d'Eilenberger.

Pour un supraconducteur propre de taille infinie, le système d'équation s'écrit

$$i\hbar v_x \partial_x \begin{pmatrix} g \\ f \\ f^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta^* & \Delta \\ 2\Delta & -2i\omega & 0 \\ -2\Delta & 0 & 2i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ f \\ f^\dagger \end{pmatrix}$$

et la solution s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} g(x,\omega) \\ f(x,\omega) \\ f^\dagger(x,\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{i\Omega} \begin{pmatrix} i\omega \\ \Delta \\ \Delta^* \end{pmatrix} + A_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{i(\omega+\Omega)} \\ \frac{\Delta^*}{i(\omega-\Omega)} \end{pmatrix} e^{k_S x} + A_- \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{i(\omega-\Omega)} \\ \frac{\Delta^*}{i(\omega+\Omega)} \end{pmatrix} e^{-k_S x} \quad (2.4)$$

où $A_\pm$ sont des constantes données par les conditions aux limites des problèmes et où on a $k_S = 2\Omega/(\hbar v_x)$ et $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \Delta^2}$. La solution est donc composée d'un partie constante et de deux parties qui sont des ondes évanescentes (puisque $k_S$ est positif) propageantes et contrapropageantes. On est effectivement sous le gap supraconducteur dans lequel il n'y a pas de propagation d'onde possible. Les excitations électroniques qui rentrent dans le supraconducteur sont assimilées dans le gap sur une longueur caractéristique $k_S^{-1}$. On voit aussi qu'à l'infini, les solutions sont les fonctions d'un supraconducteur homogène et infini. Les fonctions (2.4) décrivent un supraconducteur homogène avec des excitations qui existe sur le bord sur une longueur caractéristique $k_S^{-1}$. Enfin, on constate que $k_S^{-1}$ tend vers $\infty$ quand $i\omega \longrightarrow \Delta$. Ainsi, lorsque l'énergie des quasiparticules s'approche du gap, les excitations associées peuvent se propager librement dans le supraconducteur.

Dans le cas diffusif, dans lequel le libre parcours moyen entre impuretés $l$ et inférieur à la longueur de cohérence $\xi_0$, les équations d'Eilenberger se simplifient pour devenir les équations d'Usadel [121]. Ces équations de type équation de transport à la Boltzmann doivent être complétées par des conditions aux limites caractéristiques calculées par Zaitsev [122].

### 2.1.2 Le diagramme de phase $(H_{c2}, T)$

Dans cette partie nous considérons un supraconducteur conventionnel en présence d'un champ magnétique externe $H$. Nous nous plaçons dans la limite de Pauli, c'est-à-dire que nous négligeons tout effet orbital du champ magnétique. On pose que l'énergie produite par le décalage Zeeman dans le supraconducteur s'écrit $h = \mu_B H$ ou $\mu_B$ est le magnéton de Bohr . Nous étudions tout d'abord la transition de phase S vers N qui passe du second ordre pour $T^* < T < T_c$ à une transition de phase du premier ordre pour $0 < T < T^*$ ou $T^*$ est la température du point critique. Si la quantité d'impuretés n'est pas trop élevée, la transition de phase du premier ordre peut être remplacée par une transition de phase du second ordre de N vers l'état non uniforme FFLO. Nous étudions rapidement ces différentes transitions de phase en commentant l'effet de la dimensionnalité et des impuretés sur la transition de phase N/FFLO.

#### Transition du second ordre et du premier ordre : le point critique

Lorsque la phase supraconductrice se produit avec un paramètre d'ordre uniforme $\Delta$, il est possible de résoudre exactement les équations de Gorkov . Pour un supraconducteur

conventionnel, l'équation d'autocohérence s'écrit :

$$1 = |\lambda| T \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(\omega + ih)^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} = 2\pi |\lambda| TN(0) \operatorname{Re} \sum_{\omega} \frac{1}{\sqrt{(\omega + ih)^2 + \Delta^2}}$$

où $\lambda$ est la constante d'interaction électron-électron et $\omega = (2n+1)\pi T$ sont les fréquences de Matsubara à la température $T$. Cette équation est de la forme $1 = K(T, h, \Delta)$, où $K$ est appelé le noyau de la supraconductivité [123]. Cette équation est divergente mais on se renormalise en remarquant que $K(T_c, 0, 0) = 1$. On forme alors l'équation équivalente

$$K(T, h, \Delta) - K(T, 0, 0) = K(T_c, 0, 0) - K(T, 0, 0)$$

avec

$$K(T_c, 0, 0) - K(T, 0, 0) = |\lambda| N(0) \ln\left(\frac{T}{T_c}\right).$$

L'équation d'autocohérence s'écrit alors

$$\ln\left(\frac{T}{T_c}\right) = 2\pi T \operatorname{Re} \sum_{\omega} \frac{1}{\sqrt{(\omega + ih)^2 + \Delta^2}} - \frac{1}{\omega}. \tag{2.5}$$

Pour la transition de phase du second ordre où le paramètre d'ordre devient infiniment petit ($\Delta \longrightarrow 0$), l'équation (2.5) fournit la valeur du champ critique $h_c(T)$ :

$$\ln\left(\frac{T}{T_c}\right) = \operatorname{Re}\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{h_c(T)}{2\pi T}\right)\right].$$

Le diagramme de phase correspondant est représenté sur la figure 2.2 en trait plein. Quand $T \to T_c$, l'effet du champ est très faible et ne modifie pas la température critique

$$h_c = \sqrt{\frac{4\pi^2 T_c (T_c - T)}{7\zeta(3)}}.$$

Même quand l'effet de Pauli est important pour la plupart des températures, cela signifie qu'il est souvent dominé par l'effet orbital qui produit une dépendance linéaire en température au voisinage de $T_c$. Cette courbe de transition de phase présente deux difficultés. Tout d'abord, lorsque $T \longrightarrow 0$, on effectue la transformation $2\pi T \sum \longrightarrow \int d\omega$ dans l'équation (2.5) et on trouve le gap à température nulle $\Delta_0 = 2\omega_D e^{-\frac{1}{|\lambda| N(0)}}$. Ce gap définit la limite paramagnétique pour la transition du second ordre $H_P^{(2)}(0) = \frac{\Delta_0}{2\mu_B}$ ( en prenant le rapport gyromagnétique égal à 2). Or $H_P^{(2)}(0)$ est inférieure à la limite paramagnétique définie par CLogston-Chandrasekhar [17],[16] . De plus la forme exotique de la courbe sous entend une supraconductivité moins stable aux basses températures. Ces deux difficultés ont entraîné une analyse plus détaillée où l'on considère une transition de phase du premier ordre avec un paramètre d'ordre qui chute brutalement à la transition [123].

Pour déterminer la transition de phase du premier ordre, il faut calculer la différence d'énergie libre entre les phases N et S. On trouve que

$$F_S - F_N = -2\pi TN(0) \operatorname{Re} \sum_{\omega > 0} \frac{2(\omega + ih)^2 + \Delta^2 - 2(\omega + ih)\sqrt{(\omega + ih)^2 + \Delta^2}}{\sqrt{(\omega + ih)^2 + \Delta^2}}$$

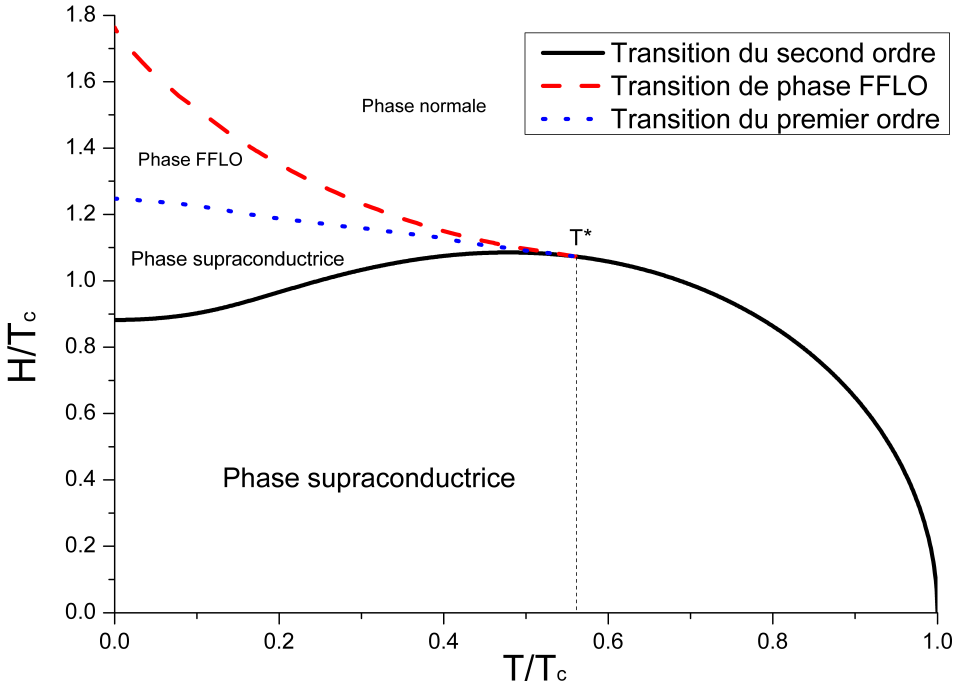



FIG. 2.2: Diagramme de phase $(H, T)$ [123]. La ligne de transition phase supraconductrice-phase normale du second ordre est représentée en trait plein. La phase de transition S/N du premier ordre est représentée en pointillés. La phase de transition FFLO/N est représentée en tirets.Le point d'intersection entre ces deux lignes définit le point tricritique pour $T^* = 0.561T_c$ et $H^* = 1.07T_c$. Pour $0 < T < T^*$, la transition de phase st du premier ordre ou FFLO. Pour $T^* < T < T_c$, la transition de phase est du second ordre.

où le paramètre d'ordre $\Delta(h,t)$ est calculé à partir de (2.5) .

La ligne d'annulation de la différence d'énergie libre et la valeur du gap à la transition sont évaluées numériquement (figure 2.2 en ligne hachurée) . Cette analyse montre que le diagramme de phase présente un point critique à la température $T^* = 0.561T_c$ et au champ critique $B^* = H_c(T^*) = 0.608\Delta_0$ avec une transition du second ordre pour $T^* < T < T_c$ et du premier ordre pour $0 < T < T^*$ observé dans des film minces en champ parallèle (condition pour supprimer l'effet orbital) d'Aluminium et de Bérylium [124],[125]. A température nulle on retrouve la limite de Pauli indépendamment de la dimensionnalité du supraconducteur.

**La phase non uniforme**

Il est encore possible de rehausser la limite paramagnétique avec un paramètre d'ordre supraconducteur modulé spatialement. C'est le cas dans la phase FFLO [19],[18].

L'existence de cette phase repose sur un principe simple. Pour l'expliquer, on va se placer dans le cas d'un modèle unidimensionnel à température nulle. La transition de phase vers l'état supraconducteur provient du gain d'énergie dans l'appariement de deux électrons de conductions de spin opposés $\uparrow$ et $\downarrow$ et de quantité de mouvement opposés $p_F$ et $-p_F$ sur la surface de Fermi. La paire de Cooper ainsi formée a une quantité de mouvement totale nulle. En présence d'un champ magnétique, l'effet Zeeman déplace les niveaux de Fermi de l'électron de spin $\downarrow$ de $p_F$ à $p_F + \delta p$ où $\delta p = H/v_F$ et l'électron de spin $\uparrow$ de $-p_F$ à $-p_F + \delta p$. L'appariement des électrons $\uparrow$ et $\downarrow$ à la surface de Fermi sous la forme d'une paire de Cooper est toujours possible mais la paire de Cooper a une quantité de mouvement non nulle égale à $2\delta p$ (voir figure 1.2). Le paramètre d'ordre présente alors lui aussi une modulation dont le vecteur est égal à $2h/v_F$.

Pour déterminer le champ critique, en présence de la modulation FFLO, on va supposer que la transition de phase métal normal/ phase FFLO est du second ordre. De plus, on supposera que le gap supraconducteur s'écrit de la manière suivante [3] $\Delta(x) = \Delta_q e^{iq.x}$.

L'équation d'autocohérence (2.5) s'écrit :

$$1 = K(T, h_c, 0, q) \tag{2.6}$$

où le noyau de la supraconductivité dépend de la norme du vecteur modulation [4]. Afin de déterminer le champ critique, il faut trouver la modulation $q_0$ qui maximise le champ critique. Pour calculer $q_0$, il faut résoudre simultanément l'équation :

$$\left.\frac{\partial K(T, h_c, 0, q)}{\partial q}\right|_{q=q_0} = 0. \tag{2.7}$$

La résolution du système d'équation (2.6) et (2.7) donne le couple de solution $(q_0(T), h_c(T))$, où à chaque modulation $q_0$ correspond un champ critique $h_c$. La résolution de ce système à température nulle donne la limite paramagnétique qui dépend de la dimensionnalité du supraconducteur.

A une dimension, l'étude a montré qu'il n'y a pas de limite paramagnétique. A température nulle, en présence de modulations FFLO, le supraconducteur à un champ critique infini et la période des modulations est infiniment petite [127].

[3] Notons qu'il existe d'autres types de modulations spatiale du gap supraconducteur. Ces modulations peuvent influencer le diagrammes de phase $(H,T)$ [123],[126].

[4] Dans le cas d'une transition de phase du second ordre, le paramètre d'ordre $\Delta$ est nul à la transtion. En revanche, il reste des termes dans le noyau qui depend de la modulation $q$.

A deux dimensions, les études ont montré que la limite paramagnétique s'établissait à $h_c^{2D,FFLO} = \Delta_0$. La période des modulations est de $q = 2\Delta_0/v_F$ (soit $\xi_0^{-1}$) [128], [129] à température nulle.

Dans les système quasi 2D, il y a des modulations dans chaque plan $q_{\|}$ et entre chaque plan $q_{\perp}$. Or dans le cas de couplage faible ($t \ll T_c$), ceux sont les modulations intraplans qui sont favorisées. La raison étant que le couplage faible ne permet pas, ou peu, la transmission de paire de Cooper entre les couches et ainsi favorise les modulations dans le plan. Dans le cas d'un couplage fort, ($t \gg T_c$), le cas bidimensionnel est également favorable aux modulations le long des couches. Les supraconducteurs quasi bidimensionnels sont équivalents aux supraconducteurs bidimensionnels [130].

Dans les systèmes à trois dimensions, la limite paramagnétique a été calculée à $h_c^{3D,FFLO} = 0.755\Delta_0$. La période des modulations est de $q = 2.38\Delta_0/v_F$ (environ $\xi_0^{-1}$).

L'état FFLO est très difficile à observer. Actuellement, il est régulièrement proposé d'observer l'état FFLO dans le composé à Fermions lourds $CeCoIn_5$ [131],[132],[133], et certains composés quasi-bidimensionnels organiques à base de BETS [134],[135]. Ces matériaux, réputés très purs et présentant de forts effets magnétiques intrinsèques [136], présentent également certaines caractéristiques relatives à l'effet paramagnétiques, comme la présence d'une transition de phase du premier ordre à fort champ magnétique signalant que l'on a atteint la limite de Pauli [137] ou encore la présence d'oscillations du champ critique $H_{c2}$ [142]. Néanmoins, l'observation est souvent limitée par la présence d'impuretés dans les structures supraconductrices. Une preuve de l'existence de la phase FFLO semble avoir était détectée dans le composé $CeCoIn_5$ grâce à la résonance magnétique nucléaire [138]. Des phases FFLO on été prédites dans les domaines de la chromodynamique quantique comme une description de l'état inhomogène dans les étoiles à neutrons [139]. Cette phase FFLO est attendue dans les gaz d'atomes fermioniques ultrafroids [140] où elle affecterait les fluctuations de densité du condensat [141].

Le théorème d'Anderson stipule que la supraconductivité est insensible aux processus de diffusion élastique (impuretés non magnétiques) pour un champ magnétique nul [51],[120]. En revanche, la phase FFLO est très sensible aux impuretés quels que soient leurs types [143],[144],[145]. Les impuretés brisent les modulations FFLO. L'influence des impuretés sur le diagrammes de phase est plus subtile.

Pour de faibles taux d'impuretés, le champ magnétique critique à température nulle, $h_c^{FFLO}(0)$, décroît avec la présence des impuretés. Pour une valeur critique du taux d'impuretés, quand $l = l_c \simeq \xi_0$ (où $l$ est le libre parcours moyen d'un électron entre deux collisions élastiques), $h_c^{FFLO}(0)$ devient plus faible que le champ magnétique critique de la transition du premier ordre dans l'état uniforme. C'est l'état uniforme qui devient l'état d'équilibre. $h_c^{FFLO}(0)$ joue le rôle de champ de sur-refroidissement pour la phase normale. Dans cette situation, la phase modulée peut apparaître comme un état métastable pour les champs inférieurs à $h_c^{FFLO}(0)$. Dans le cas $l_c < \xi_0$, le point d'intersection entre la transition de phase FFLO et la transition de phase du premier ordre est décalé vers les basses températures. Cette température devient nulle pour $l = l_c$. Tous ces résultats ont été confirmés par l'analyse [146],[147].

## 2.2 Modèle de la bicouche S/N

On utilise également la théorie de l'hamiltonien tunnel présenté dans le chapitre précédent. Dans cette partie, l'énergie de couplage entre couche sera notée $t$, l'énergie de décalage provoquée par l'effet Zeeman dû au champ extérieur $H$ sera notée $h$, et la constante de couplage dans le supraconducteur sera noté $\lambda$. Dans ce système bicouche dont le champ

FIG. 2.3: Une bicouche S/N soumise à un champ magnétique $H$ parallèle aux plans.

est parallèle aux couches (voir figure 2.3), on pourra négliger l'effet orbital. Le supraconducteur portera l'indice $n = 0$ et le métal normal l'indice $n = 1$. Si on se place dans le cas où $t \ll E_F$, on pourra considérer que les paires de Cooper sont localisées dans chaque plan. L'hamiltonien de couplage entre couches utilisé sera (1.14). L'hamiltonien cinétique utilisé sera celui de l'équation (1.12) dans lequel on posera $\xi_{n,\sigma}(\mathbf{k}, h_n) = \xi_n(\mathbf{k}) - \sigma h_n$ avec $\xi_n(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2/2m - E_F$ où $n$ est l'indice de couche. Ici, on considérera que le spectre du métal et du supraconducteur sont rigoureusement les mêmes. De même, on considérera que l'énergie de décalage Zeeman sera la même dans le supraconducteur et dans le métal ($h_0 = h_1 = h$). Afin de prendre en compte la phase non homogène FFLO dans les calculs, on posera l'hamiltonien BCS égal à

$$\widehat{H}_{BCS} = \widehat{H}_0 + \sum_{n,\mathbf{k}} \left[\Delta_n^*(\mathbf{q})\,\Psi_{n,\downarrow}^+(\mathbf{k})\,\Psi_{n,\uparrow}^+(-\mathbf{k}) + \Delta_n(\mathbf{q})\,\Psi_{n,\uparrow}(-\mathbf{k})\,\Psi_{n,\downarrow}(\mathbf{k})\right] + \frac{1}{|\lambda|}\int d^2\mathbf{r}\boldsymbol{\Delta}_n^2(\mathbf{r})$$

où $r$ est la coordonnées bidimensionnelle dans chaque couche et $\lambda$ la constante de couplage électron-électron présente uniquement dans la couche S. Le paramètre d'ordre supraconducteur $\Delta_n$ est non nul uniquement dans la couche S et nul dans la couche N. Dans ce cas, le paramètre d'ordre présente la modulation suivante

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta e^{i\mathbf{q}.\mathbf{r}}$$

où $\mathbf{q}$ est le vecteur d'onde de la modulation FFLO.

### 2.2.1 Formalisme de Gorkov

En utilisant le formalisme de Gorkov, les fonctions de Green peuvent s'écrire alors

$$\begin{aligned} G_{j,l}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{q})\, G_{j,l}(\mathbf{k}) \\ F_{j,l}^\dagger(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\, F_{j,l}^\dagger(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Depuis les équations du mouvement décrites dans [51], le système de fonction de Green, dans la représentation de Fourier s'écrivent

$$\begin{pmatrix} i\omega - \xi_{0,\uparrow}(\mathbf{k}+\mathbf{q}) & -t & \Delta_0 & 0 \\ -t & i\omega - \xi_{1,\uparrow}(\mathbf{k}+\mathbf{q}) & 0 & 0 \\ \Delta_0^* & 0 & i\omega + \xi_{0,\downarrow}(\mathbf{k}) & t \\ 0 & 0 & t & i\omega + \xi_{1,\downarrow}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G_{0,0}^\omega(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \\ G_{1,0}^\omega(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \\ F_{0,0}^{\dagger\omega}(\mathbf{k}) \\ F_{1,0}^{\dagger\omega}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Dans les supraconducteurs quasi $2D$, le module maximal du vecteur d'onde de modulation est de l'ordre de $(\xi_{ab})^{-1}$, $\xi_{ab}$ étant la longueur de cohérence typique dans le supraconducteur. Puisque $\xi_{ab} \gg \frac{1}{k_F}$ est de l'ordre de la distance inter-atomique, on peut considérer que

$\xi_{n,\uparrow}(\mathbf{k}+\mathbf{q}) = \xi(\mathbf{k}) - h + \mathbf{v}_F.\mathbf{q}$ où $\mathbf{v}_F$ est la vitesse de Fermi dans le plan. Puisque nous nous intéressons aux propriétés thermodynamiques du supraconducteur, on ne va s'intéresser qu'à la fonction de Green anomale du supraconducteur. Dans ce cas, elle s'écrit :

$$F_{0,0}^{\dagger\omega} = \frac{-\Delta_0^* A}{-\alpha_0 A - \beta t^2 + t^4},$$

ou $A = [i\omega - \xi(\mathbf{k}) + h - v_F.q][i\omega + \xi(\mathbf{k}) + h]$, $\alpha_0 = |\Delta_0|^2 - [i\omega - \xi(\mathbf{k}) + h - v_F.q][i\omega + \xi(\mathbf{k}) + h]$ et $\beta = [i\omega - \xi(\mathbf{k}) + h - v_F.q]^2 + [i\omega + \xi(\mathbf{k}) + h]^2$. Cette fonction va nous permettre de déterminer le gap supraconducteur en fonction du couplage intercouche.

### 2.2.2 Formalisme d'Eilenberger et prise en compte des impuretés

Afin de prendre en compte les impuretés et la phase FFLO, il est plus facile d'utiliser le formalisme d'Eilenberger. Ainsi, en appliquant la méthode de [120], les équations du mouvement des fonctions d'Eilenberger deviennent :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\omega} - i\mathbf{v}_F.\mathbf{q} & -i\frac{t}{2} & 0 & i\frac{t}{2} \\ -i\frac{t}{2} & \widetilde{\omega} - i\mathbf{v}_F.\mathbf{q} & i\frac{t}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{t}{2} & \widetilde{\omega} - i\mathbf{v}_F.\mathbf{q} & -i\frac{t}{2} \\ i\frac{t}{2} & 0 & -i\frac{t}{2} & \widetilde{\omega} - i\mathbf{v}_F.\mathbf{q} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{0,0}^{\dagger}(\omega,\mathbf{q}) \\ f_{1,0}^{\dagger}(\omega,\mathbf{q}) \\ f_{1,1}^{\dagger}(\omega,\mathbf{q}) \\ f_{0,1}^{\dagger}(\omega,\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_0^* + \frac{\left\langle f_{0,0}^{\dagger}(\omega,\mathbf{q})\right\rangle_{\phi}}{2\tau} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

où $\widetilde{\omega} = \omega + ih + (1/2\tau)$, $f_{n,m}^{\dagger}(\omega,\mathbf{q}) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi F_{n,m}^{\dagger\omega}(\xi,\mathbf{q})\, d\xi$ est la fonction de Green anomale dans le formalisme d'Eilenberger et $\tau$ le temps de libre parcours moyen électronique entre deux impuretés. On écrit $\mathbf{v}_F.\mathbf{q} = \mathbf{v}_F q\cos(\phi)$ ou $\phi$ est l'angle polaire $(\mathbf{v}_F, \mathbf{q})$ et $\langle ... \rangle_{\phi}$ est la moyenne sur l'angle $\phi$. On supposera que la diffusion des impuretés est un processus intra-couche et qu'il n'y a aucun basculement de spin durant l'interaction électron-impureté. En résolvant le système (2.9), les fonctions de Green d'Eilenberger pour la couche S indexé $n = 0$ sont :

$$f_{0,0}^{\dagger} = \frac{\Delta_0^*}{2\left\{1 - \frac{(1/2\tau)[\Omega_1\Omega_3 + \Omega_2\Omega_3 + 2\Omega_1\Omega_2]}{4\Omega_1\Omega_2\Omega_3}\right\}} \left\{\frac{1}{\omega_3} + \frac{1}{2\omega_1} + \frac{1}{2\omega_2}\right\} \tag{2.10}$$

ou $\Omega_{1,2}^2 = \widetilde{\omega}_{\pm}^2 + v_F^2.q^2, \Omega_3^2 = \widetilde{\omega}^2 + v_F^2.q^2$ avec $\widetilde{\omega} = \omega + ih + (1/2\tau)$, $\widetilde{\omega}_{\pm} = \omega + ih + (1/2\tau) \pm it$, $\omega_3 = \widetilde{\omega} - iv_F.q\cos(\phi)$ et $\omega_{1,2} = \omega_3 \pm it = \widetilde{\omega}_{\pm} - iv_F.q\cos(\phi)$. La solution moyennée sur l'angle $\phi$ de (2.10) s'écrit :

$$\left\langle f_{0,0}^{\dagger}\right\rangle_{\phi} = \frac{\Delta_0^*}{2\left\{1 - \frac{(1/2\tau)[\Omega_1\Omega_3 + \Omega_2\Omega_3 + 2\Omega_1\Omega_2]}{4\Omega_1\Omega_2\Omega_3}\right\}} \left\{\frac{1}{\Omega_3} + \frac{1}{2\Omega_1} + \frac{1}{2\Omega_2}\right\}.$$

On remarque déjà que plusieurs termes apparaissent où l'on remarque une compétition explicite entre les énergies de Zeeman et le couplage intercouche. On voit apparaître ces termes dans les fréquences réduites $\Omega_1$ et $\Omega_2$.

## 2.3 La réentrance dans la bicouche S/N dans le cas propre $(\tau \longrightarrow \infty)$

Dans cette partie, nous allons étudier la bicouche S/N au travers de ces différentes propriétés thermodynamiques, en cas d'absence d'impuretés $(\tau \longrightarrow \infty)$. Afin de déter-

miner les différentes propriétés thermodynamiques, l'équation d'auto-cohérence générale s'écrit :

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = 2\pi T_c \sum_{\omega} \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{F^{\dagger}_{0,0}}{\Delta_0^*} - \frac{1}{\omega^2+\xi_s^2}\right) d\xi_s\right). \tag{2.11}$$

où $T_c$ est la température de la couche S dans la bicouche S/N, $T_{c0} = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi}\exp\left(\frac{-2\pi^2}{|\lambda| m k_F}\right)$ est la température critique d'une couche S isolée avec $m$ la masse d'un électron, $k_F$ le vecteur d'onde de Fermi, $\gamma = 0.577215$ la constante d'Euler et $\omega_D$ la fréquence de Debye.

### 2.3.1 La température critique en fonction du couplage intercouche

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence de l'effet de proximité sur la température critique de la couche S dans le cas d'un champ magnétique nul ($h = q = 0$) et d'une bicouche parfaitement pure ($\tau \longrightarrow \infty$). Dans ce cas, la fonction (2.10) se simplifie en

$$f^{\dagger}_{0,0} = \frac{\Delta_0^*\left(t^2+2\omega^2\right)}{2\omega\left(t^2+\omega^2\right)}.$$

Pour déterminer la température critique de la couche S dans la bicouche S/N, l'équation d'autocohérence (2.11) se simplifie pour devenir

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = 2T_c \sum_{\omega} \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\left\langle f^{\dagger}_{0,0}\right\rangle_{\phi}}{\Delta_0^*} - \frac{\pi}{\omega}\right) d\xi_s\right). \tag{2.12}$$

Dans le cas considéré, l'équation (2.12) donne

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = -\frac{1}{4}\left[2\gamma + 4\ln(2) + \Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{it}{2\pi T_c}\right) + \Psi\left(\frac{1}{2}-\frac{it}{2\pi T_c}\right)\right]$$

où $\Psi(x)$ est la fonction digamma. La variation de température critique en fonction du couplage intercouche est représentée sur la figure 2.4 ou l'on voit que la température critique de la couche S décroît globalement avec le couplage intercouche. A faible énergie de couplage $t \ll T_{c0}$, la température critique supraconductrice varie comme $\frac{T_c}{T_{c0}} = 1 - \frac{7}{8}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{t}{T_{c0}}\right)^2$. Dans ce régime, la température critique décroît quadratiquement avec l'énergie de tranfert. L'état supraconducteur n'est pas influencé qualitativement par la présence de la couche métallique et peut être considéré comme une couche S isolée.

En revanche, à fort couplage entre les couches S et N (dans le cas $t \gg T_{c0}$ mais dans limite $t \ll \omega_D$), la température supraconductrice varie comme $\frac{T_c}{T_{c0}} = \frac{\pi e^{-\gamma}}{2}\frac{T_{c0}}{t}$. La température critique est inversement proportionnelle au couplage intercouche. Les paires de Cooper sont délocalisées entre la couche S et N. Les propriétés supraconductrices dans les couches S et N sont pratiquement les mêmes et la bicouche peut être considérée comme une couche S avec une constante de couplage $\widetilde{\lambda}$ où $\widetilde{\lambda} < \lambda$ . Dans le cas $t \gg \omega_D$, la bicouche S/N peut être considérée comme une couche S ayant une constante de couplage $\widetilde{\lambda}$ égale à $\lambda/2$ comme l'ont prédit Bulaevskii et Zyskin dans la référence [95].

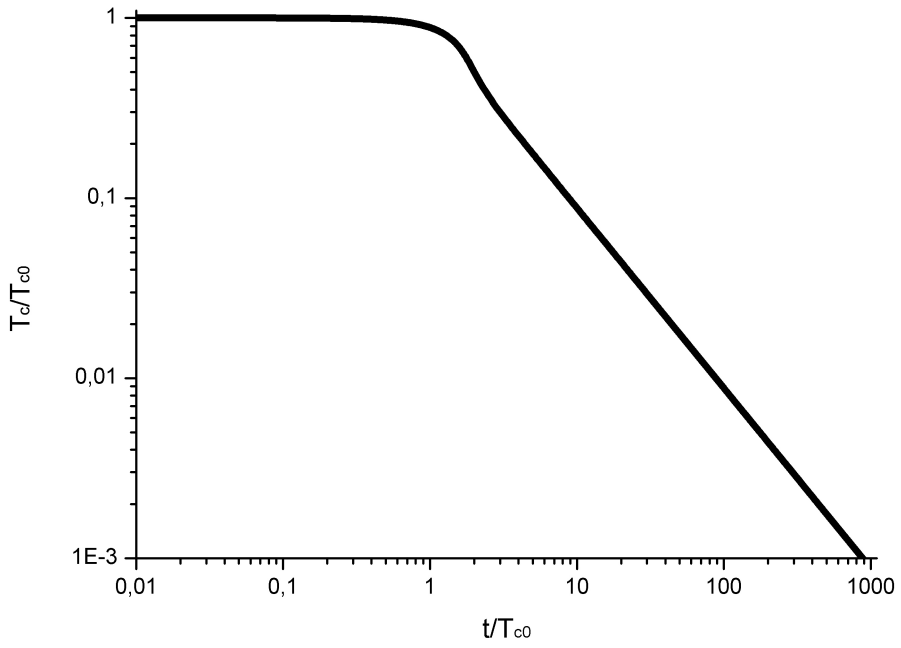



FIG. 2.4: Graphe de $T_c/T_{c0}$ par rapport à $t/T_{c0}$en échelle logarithmique. Dans le régime, $t \ll T_{c0}$, la température critique du supraconducteur décroît très peu avec le couplage intercouche. Dans le régime, $t \gg T_{c0}$, la température critique du supraconducteur est inversement proportionnelle au couplage intercouche.

### 2.3.2 Le gap supraconducteur à température nulle en fonction du couplage intercouche

Afin d'étudier le gap supraconducteur de la couche S en fonction du couplage intercouche, on va utiliser la fonction de Green de Gorkov décrivant la supraconductivité dans la couche S. On va étudier le gap supraconducteur de la couche S à température nulle $\Delta(0)$ afin de pouvoir définir la relation existante entre $T_c$ et $\Delta(0)$ pour toutes les valeurs du couplage intercouche à champ magnétique nul ($h = q = 0$). La fonction de Green de Gorkov s'écrit alors :

$$F_{0,0}^{\dagger\omega} = \frac{\Delta^* \left(\omega^2 + \xi_s^2\right)}{t^4 + 2t^2 \left(\omega^2 - \xi_s^2\right) + \left(\omega^2 + \xi_s^2 + |\Delta|^2\right) \left(\omega^2 + \xi_s^2\right)}$$

La relation d'autocohérence (2.11) s'écrit alors

$$\ln\left(\frac{\Delta(0)}{\Delta_0}\right) = \frac{1}{\pi} \int d\xi_s \int d\omega \left( \frac{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)}{t^4+2t^2\left(\omega^2-\xi_s^2\right)+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2\right)} - \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)} \right)$$

où $\Delta_0$ est le gap supraconducteur à température nulle pour un couplage nul entre les couches. Si on effectue le changement de variable $\xi_s = \sqrt{\rho}\cos(\phi)$ et $\omega = \sqrt{\rho}\sin(\phi)$, la relation d'autocohérence précédente devient :

$$\ln\left(\frac{\Delta(0)}{\Delta_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \left( \frac{\rho}{t^4+2\rho t^2\left(\sin^2(\phi)-\cos^2(\phi)\right)+\rho\left(\rho+|\Delta|^2\right)} - \frac{1}{\rho+|\Delta|^2} \right) \quad (2.13)$$

A faible couplage, $t \ll T_{c0}$, on trouve que le gap supraconducteur varie selon la forme $\frac{\Delta(0)-\Delta_0}{\Delta_0} \simeq \frac{4t^4}{|\Delta(0)|^4} \ln\left(\frac{t}{|\Delta_0|}\right)$. La variation du gap supraconducteur en fonction du couplage intercouche est représentée sur la figure 2.5. On remarque que la variation de $\Delta(0)$ suit la même variation que la température critique du supraconducteur. En revanche, sur la figure 2.6, on voit que le coefficient de la relation de proportionnalité entre le gap supraconducteur à température nulle et la température critique évolue avec le couplage entre couches. En effet, ce coefficient prévu par la théorie BCS est $\gamma = 1.76$, augmente avec le couplage intercouche pour se stabiliser autour de $\gamma = 3.52$. Ce nouveau coefficient de proportionnalité indique que la prédiction de [95] pour les forts couplages s'avère vérifiée. Ces prédictions ont toutefois été effectuées initialement par Buzdin *et al.* dans le but d'étudier les densités d'états dans les multicouches S/N [169].

### 2.3.3 Les diagrammes de phase de la bicouche S/N

On étudie les diagrammes de phase $(h_c, t)$ et $(h_c, T)$ de la bicouche S/N dan le cas propre. Dans la monocouche S bidimensionnelle, on peut définir trois champs critiques à température nulle. Le champ critique de la limite paramagnétique dans le cas d'un transition de phase du second ordre vaut $h_0 = \Delta_0/2$. $h^I = \Delta_0/\sqrt{2}$ est le champ critique dan le cas de la transition de phase du premier ordre et correspond à la limite de Clogston-Chandrasekhar [17],[16]. Enfin, $h^{FFLO} = \Delta_0$ est le champ magnétique critique en présence de modulation FFLO. On voit que $h^{FFLO} > h^I > h_0$. Dans notre cas, et par souci de simplicité, on étudiera les champs critiques dans le cas d'une modulation FFLO et d'une transition de phase du second ordre. En effet, on voit que la limite paramagnétique due à la transition du premier ordre sera toujours entre les champs $h^{FFLO}$ et $h_0$.

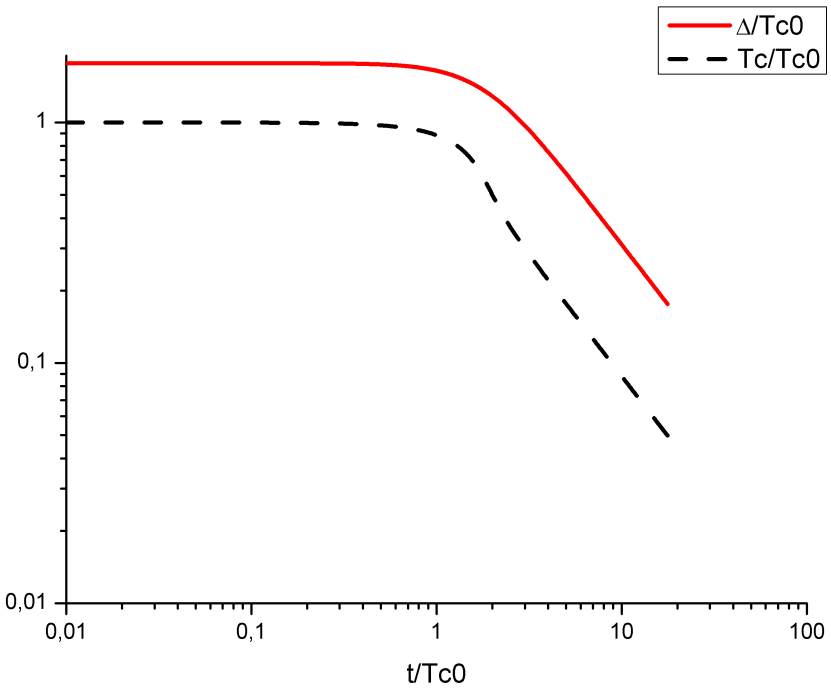



FIG. 2.5: Graphe de $\Delta(0)/T_{c0}$ (en trait plein) et $T_c/T_{c0}$ (en trait hachuré) par rapport à $t/T_{c0}$en échelle logarithmique. Dans le régime, $t \ll T_{c0}$, le gap supraconducteur décroît très peu avec le couplage intercouche. Dans le régime, $t \gg T_{c0}$, le gap supraconducteur est inversement proportionnel au couplage intercouche.

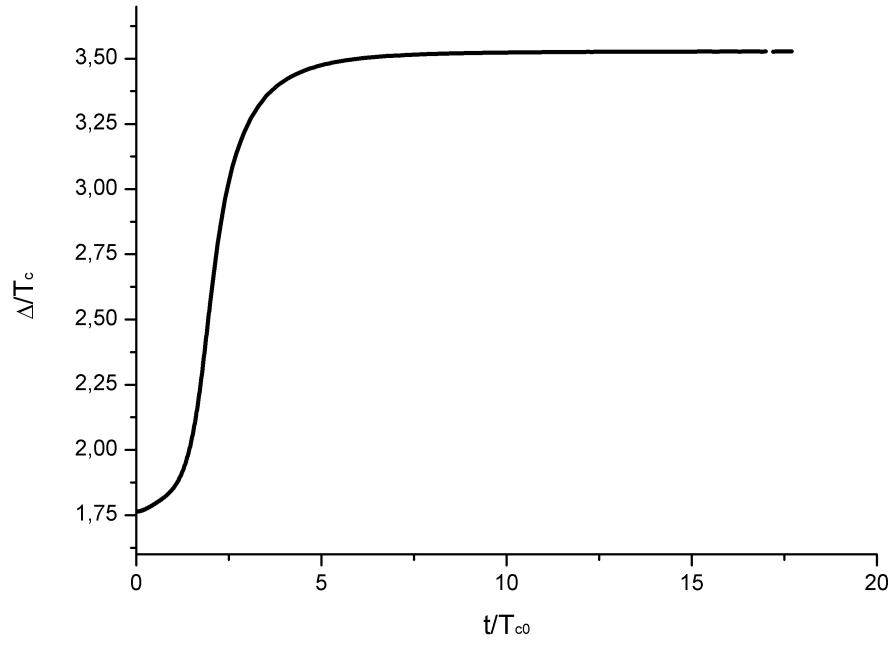



FIG. 2.6: Graphe de $\Delta(0)/T_c$ en fonction de $t/T_{c0}$ en échelle logarithmique. Dans le régime, $t \ll T_{c0}$, le rapport des deux est de 1.76 comme prévu par la théorie BCS. Dans le régime, $t \gg T_{c0}$, le coefficient de proportionnalité évolue vers la valeur de 3.52.

Dans le cas étudié, la fonction anomale pour un couplage $t$ d'une bicouche S/N dans le cas propre est

$$f^{\dagger}_{0,0} = \frac{\Delta^*}{2}\left[\frac{1}{\omega + ih + i\mathbf{v}_F\mathbf{q}} + \frac{1}{2\left(\omega - it + ih + i\mathbf{v}_F\mathbf{q}\right)} + \frac{1}{2\left(\omega + it + ih + i\mathbf{v}_F\mathbf{q}\right)}\right] \quad (2.14)$$

où on voit apparaître trois échelles d'énergie distinctes $E_3 = v + \mathbf{v}_F\mathbf{q}$ et $E_{1,2} = v + \mathbf{v}_F\mathbf{q} \pm t$. Ces trois échelles d'énergie vont jouer un rôle prépondérant dans la détermination des champs critiques dans le cas d'un réentrance de la supraconductivité.

### Le diagramme de phase $(h_c, t)$ à température nulle

Pour déterminer le champ magnétique à température nulle, l'équation d'autocohérence (2.11) devient

$$\ln\left(\frac{h}{h_0}\right) = \frac{2T_c}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{\left\langle f^{\dagger}_{0,0}\right\rangle_{\phi}}{\Delta_0^*} - \frac{\pi}{\omega + ih_0}\right) d\omega. \quad (2.15)$$

En combinant la fonction (2.14) avec l'équation d'autocohérence (2.15), le champ magnétique critique à température nulle est la solution de l'équation

$$\left|h_c - t + \sqrt{(h_c - t)^2 - (v_F q)^2}\right| . \left|h_c + t + \sqrt{(h_c + t)^2 - (v_F q)^2}\right| \left|h_c + \sqrt{h_c^2 - (v_F q)^2}\right|^2 = h_0^4 \quad (2.16)$$

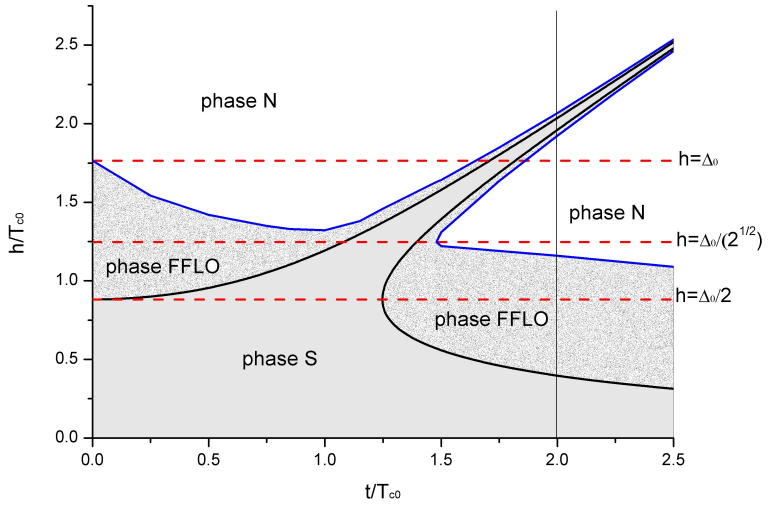



FIG. 2.7: Diagramme de phase $(h,t)$d'une bicouche S/N dans la limite propre. L'état uniforme est représenté en gris. L'état non uniforme est la région en pointillé. La ligne $h = \Delta_0/2$ présente la limite paramagnétique pour une transition de phase du second ordre d'une monocouche S. La ligne $h = \Delta_0/\sqrt{2}$ présente la limite paramagnétique pour une transition de phase du premier ordre d'une monocouche S. La ligne $h = \Delta_0$ présente la limite paramagnétique pour une transition de phase entre l'état normal et l'état FFLO d'une monocouche S.

où l'on doit trouver la valeur de $q$ qui maximise le champ critique $h_c$. Si la phase supraconductrice induite par champ est uniforme dans chaque plan atomique, i.e. si $q = 0$, l'équation (2.16) se réduit à

$$|h_c - t| \,.\, |h_c + t| \, |h_c|^2 = h_0^4. \tag{2.17}$$

Le nombre de solutions qui ont un sens physique de l'équation (2.17) diffère avec la valeur de $t$ (voir figure 2.7). On définit l'énergie de transfert critique $t_c = \sqrt{2}h_0 = 1.2473T_{c0}$ qui détermine le nombre de solutions physiques.

Si $t < t_c$, alors l'équation (2.17) n'a qu'une seule solution. Le champ magnétique critique à température nulle peut s'écrire $h_{c1} = \frac{1}{2}\left[2t^2 + 2\left(t^4 + 4h_0^4\right)^{1/2}\right]^{1/2}$. Dans la limite $t \ll T_{c0}$,de faible couplage, la solution peut s'écrire $h_{c1} = \frac{\Delta_0}{2}\left(1 + \frac{t^2}{\Delta_0^2}\right)$. On remarque alors que le champ magnétique critique augmente avec le couplage $t$.

Dans le cas $t > t_c$, l'équation (2.17) donne trois solutions qui ont un sens physique. Ces trois solutions correspondent à l'apparition de la phase de supraconductivité à fort champ magnétique. La première solution est $h_{c1}$. Les deux autres solutions sont $h_{c2} = \frac{1}{2}\left[2t^2 + 2\left(t^4 - 4h_0^4\right)^{1/2}\right]^{1/2}$ et $h_{c3} = \frac{1}{2}\left[2t^2 - 2\left(t^4 - 4h_0^4\right)^{1/2}\right]^{1/2}$. Dans la limite $t \gg T_{c0}$ de fort couplage, les trois solutions peuvent s'écrire comme $h_{c1,2} = t \pm \frac{\Delta_0^4}{32t^3}$ et $h_{c3} = \frac{\Delta_0^2}{4t}$. On remarque que dans la limite des forts couplages, $T_c$ est de l'ordre de $T_{c0}^2/t$ et par voie de conséquence, $h_{c3}$ est de l'ordre de $T_c$. Par conséquent, $h_{c3}$ définit le champ magnétique critique le plus faible des trois et $h_{c1,2}$ définissent les champs critiques présents dans la réentrance.

Dans le cas $t = t_c$, les champs $h_{c2}$ et $h_{c3}$ deviennent égaux.

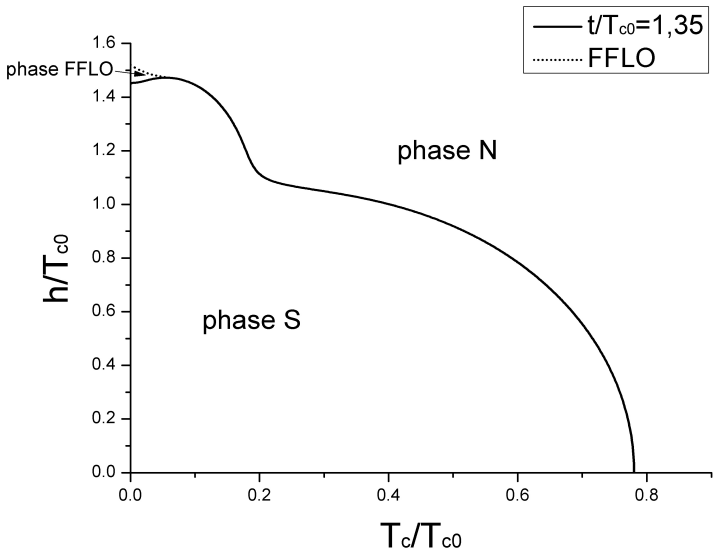



FIG. 2.8: Diagramme de phase $(h, T)$ d'une bicouche S/N dans la limite propre pour $t = 1.35T_{c0}$ pour une transition de phase du second ordre (trait plein) et dans le cas de la transition de phase FFLO/N (trait hachuré). On voit qu'en dessous de $T_c \simeq 0.2T_{c0}$ la ligne de transition est déformée. La compensation entre l'effet Zeeman et le décalage d'énergie entre les niveaux liants et anti-liants deviennent pertinents à basse température.

Ainsi, une phase supraconductrice induite par champ magnétique apparaît pour $t > t_c$. Cette phase existe entre les champs $h_{c1}$ et $h_{c2}$. La nouvelle limite paramagnétique à température nulle $h_{c1}$ peut être très élevée par rapport à la limite usuelle $h^{FFLO} = \Delta_0$ en augmentant le couplage intercouche.

L'étude de l'équation (2.16) démontre que cette limite peut être encore relevée en considérant la modulation FFLO (voir figure 2.7).

La limite paramagnétique FFLO de la bicouche S/N dépend du couplage intercouche (voir figure 2.7). La phase supraconductrice à fort champ magnétique peut être observée à température nulle que si $h_{c2}$ et $h_{c3}$ sont distinguables. En prenant en compte la modulation FFLO, $h_{c2}$ et $h_{c3}$ sont clairement séparés pour $t \gtrsim 1.5T_{c0}$. En dessous de cette valeur, on verra que le diagramme de phase $(h_c, T)$ est fortement déformé (voir figure 2.8).

**Le diagramme de phase** $(h_{c_2}, T)$

Dans cette partie, on va étudier le diagramme de phase $(h_c, T)$ en prenant en compte la modulation FFLO. L'équation d'auto-cohérence (2.12) devient

$$\begin{aligned} \ln\left(\tfrac{T_c}{T_{c0}}\right) &= -2\int_0^{2\pi}\tfrac{d\phi}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\gamma + 2\ln(2) + \tfrac{1}{4}\Psi\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i(h+v_F q\cos(\phi))}{2\pi T_c}\right)\right. \\ &\left. +\tfrac{1}{8}\Psi\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i(h+t+v_F q\cos(\phi))}{2\pi T_c}\right) + \tfrac{1}{8}\Psi\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i(h-t+v_F q\cos(\phi))}{2\pi T_c}\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.18}$$

L'analyse du cas général ne peut être menée à bien que numériquement. Une phase supraconductrice induite par champ magnétique apparaît comme on le voit sur la figure 2.9 et la figure 2.10. Pour $h \simeq t$, l'effet Zeeman qui détruit la supraconductivité est compensé par le levée de dégénérescence des niveaux liant et anti-liants crée par l'effet de proximité entre les couches S et N (voir figure 2.1). Les champs magnétiques supérieur et

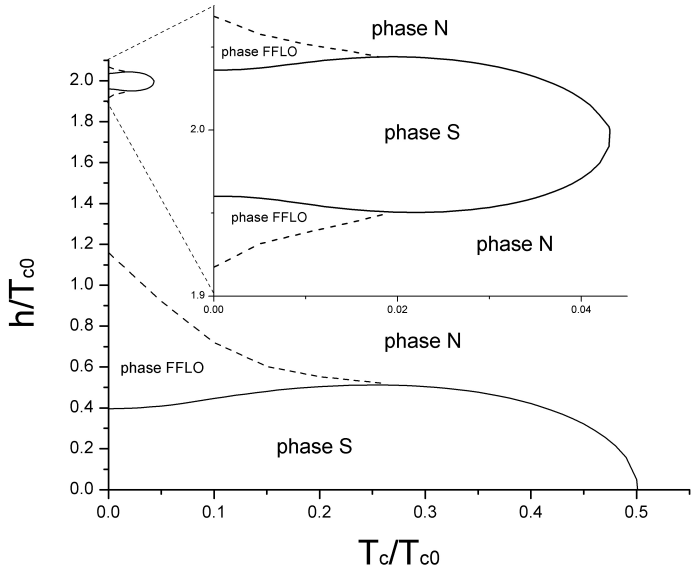



FIG. 2.9: Diagramme de phase $(h, T)$ d'une bicouche S/N dans la limite propre pour $t = 2T_{c0}$ pour une transition de phase du second ordre (trait plein) et dans le cas de la transition de phase FFLO/N (trait hachuré).

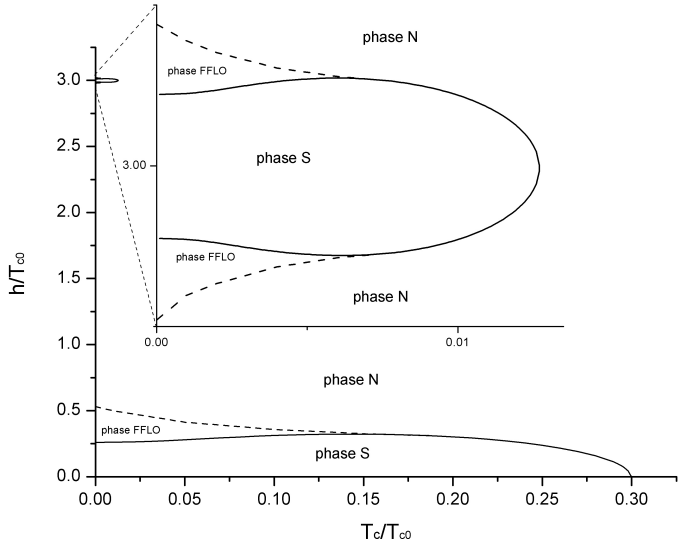



FIG. 2.10: Diagramme de phase $(h, T)$ d'une bicouche S/N dans la limite propre pour $t = 3T_{c0}$ pour une transition de phase du second ordre (trait plein) et dans le cas de la transition de phase FFLO/N (trait hachuré).

inférieur de la phase réentrante se rejoignent pour $h = t$ et la phase de supraconductivité induite par champ est confinée sous la température maximale $T_M = \pi e^{-\gamma} T_{c0}^2/8t$ évaluée dans limite $t \gg T_{c0}$. Ces résultats sont obtenus pour des couplages relativement élevés. Pour des couplages plus faibles, ($t \simeq T_{c0}$), on a vu que le diagramme de phase usuel est fortement déformé (voir figure 2.8) et disparaît pour $t$ plus faible que $T_{c0}$.

D'un point de vue expérimental, on devra choisir une couplage $t$ intermédiaire, suffisamment grand pour observer sans ambiguïté la séparation entre les deux phases mais pas trop élevé pour ne pas trop baisser la température d'observation de cette phase de ré-entrance.

## 2.4 L'influence des impuretés sur la supraconductivité induite par champ magnétique dans les bicouches S/N et S/S

Afin de déterminer la robustesse de la phase de supraconductivité induite par champ à la présence de désordre dans le matériau, on introduit la présence d'un terme de diffusion sur les impuretés dans la théorie initiale.

### 2.4.1 Influence des impuretés dans la bicouche S/N

#### L'influence des impuretés sur la température critique de la bicouche S/N

Tout d'abord, on va étudier l'influence du désordre sur la température critique de la couche S dans la bicouche S/N. Ainsi, la fonction (2.10) se simplifie en

$$f_{0,0}^{\dagger} = \frac{\Delta^* \left( t^2 + 2 \left( \omega + \frac{1}{2\tau} \right)^2 \right)}{\left( 2\omega + \frac{1}{2\tau} \right) t^2 + 2\omega \left( \omega + \frac{1}{2\tau} \right)^2} \tag{2.19}$$

en accord avec le modèle développé par Bulaevskii et Zyskin [95]. L'équation d'autocohérence (2.12) s'écrit alors :

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = 2\pi T_c \sum_{\omega=0}^{\infty} \left( \frac{t^2 + 2\left(\omega + \frac{1}{2\tau}\right)^2}{\left(2\omega + \frac{1}{2\tau}\right) t^2 + 2\omega \left(\omega + \frac{1}{2\tau}\right)^2} - \frac{1}{\omega} \right). \tag{2.20}$$

Dans le cas d'un faible effet de proximité ($t \ll T_{c0}$), la décroissance de la température critique se déduit de l'équation (2.20) qui s'écrit :

$$\frac{T_c - T_{c0}}{T_{c0}} = \frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{1}{2} (\tau t)^2 \left[ \frac{\pi}{2\tau T_{c0}} + 4\Psi\left(\frac{1}{2}\right) - 4\Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\tau\pi T_{c0}}\right) \right].$$

Dans la limite propre, $\left(T_{c0} \gg t \gg \frac{1}{2\tau}\right)$, la température critique de la couche S varie comme $\frac{T_c}{T_{c0}} = 1 - \left( \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} - \frac{\pi}{192} \frac{1}{\tau T_{c0}} \right) \frac{t^2}{T_{c0}^2}$. On en conclut que les impuretés dans les couches décroît l'effet de proximité. Dans le régime sale, $\left(T_{c0} \gg \frac{1}{2\tau} \gg t\right)$, la température critique supraconductrice varie comme $\frac{T_c}{T_{c0}} = 1 - \frac{\pi\tau t^2}{2T_{c0}}$. La présence d'impuretés renforce l'état supraconducteur et $T_c$ décroît plus faiblement que dans le cas propre (voir figure 2.11). Cependant, à fort couplage ($t \gg T_{c0}$) et ($1/2\tau \ll T_c$), la fonction de Green anomale de la couche S devient $f_{0,0}^{\dagger} = \frac{\Delta^*\left(t^2+2\omega^2\right)}{2\omega(t^2+\omega^2)} \left[ 1 + \frac{t^2\left(2\omega^2 - t^2\right)}{2\omega(t^2+\omega^2)(t^2+2\omega^2)} \left(\frac{1}{2\tau}\right) \right]$ donc la température critique varie

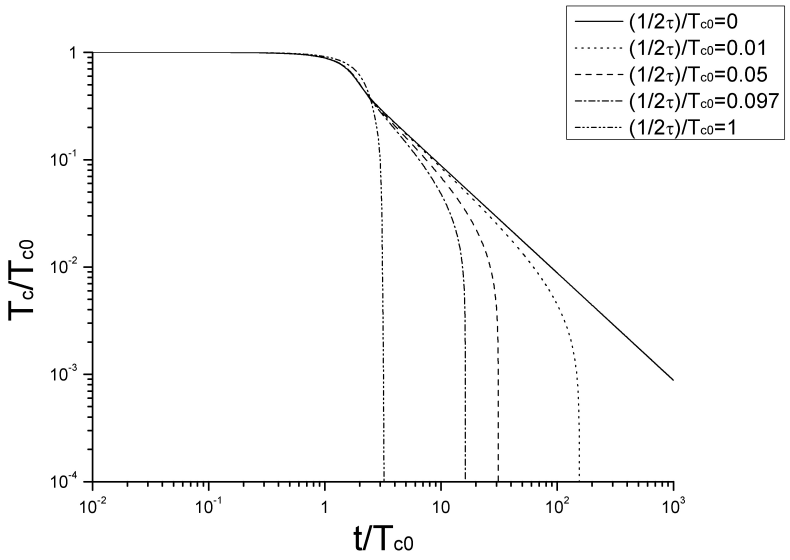



FIG. 2.11: Graphe de $T_c/T_{c0}$ en fonction de $t/T_{c0}$ pour différentes valeurs de potentiel de diffusion sur les impuretés $(1/2\tau)/T_{c0}$. On voit que les impuretés réduisent la baisse de température critique à faible couplage intercouche. En revanche, cette décroissance est accélérée à fort couplage.

comme $\frac{T_c}{T_{c0}} = \frac{\pi e^{-\gamma}}{2}\frac{T_{c0}}{t}\left(1-\frac{1}{8}\frac{t}{\tau T_{c0}^2}\right)$. Cela signifie que la diffusion sur les impuretés font fortement décroître $T_c$ pour un fort couplage comme vu sur la figure 2.11. Dans le régime $t \gg T_{c0}$, le mélange entre l'état supraconducteur dans la couche S et l'état normal de la couche N est très fort. La bicouche est proche du régime $\widetilde{\lambda} \to \lambda/2$ où la bicouche S/N peut être considérée comme une couche S isolée avec une constante de couplage effective $\widetilde{\lambda} < \lambda$. Il faut remarquer que la température critique de la couche S dépend de la présence d'impuretés non magnétique dans le système. Ce résultat n'est cependant pas surprenant puisque le système est non-uniforme.

**L'influence des impuretés sur le diagramme de phase** $(h_c, t)$

Dans les deux prochaines sous-sections, on va étudier l'influence des impuretés sur les diagrammes de phase $(h_c, t)$ et $(h_c, T)$ de la bicouche S/N. La présence d'impuretés a déjà été discutée dans la partie 3.2 du premier chapitre, ainsi que dans les références [146],[147]. Ici, nous n'étudierons l'influence des impuretés uniquement sur le champ magnétique de la transition de phase du second ordre, qui constitue la limite paramagnétique minimale. Il peut constituer le champ de sur-refroidissement de la transition de phase métal normal-supraconducteur. Dans ce cas, la fonction de Green anomale s'obtient par substitution de $\omega$ par $\omega + ih$ dans la formule (2.19) qui devient

$$f_{0,0}^{\dagger} = \frac{\Delta^* \left(t^2 + 2\left(\omega + ih + \frac{1}{2\tau}\right)^2\right)}{\left(2\left(\omega + ih\right) + \frac{1}{2\tau}\right) t^2 + 2\left(\omega + ih\right)\left(\omega + ih + \frac{1}{2\tau}\right)^2} \tag{2.21}$$

Les impuretés changent la forme du diagramme de phase à $T = 0K$ (voir figure 2.12). Le diagramme de phase $(h_c, t)$ a été calculé numériquement. Le couplage intercouche critique $t_c$ croît avec le potentiel de diffusion $1/2\tau$. La valeur maximale de $h_{c1}$ et $h_{c2}$ décroît avec le potentiel de diffusion $1/2\tau$ contrairement à $h_{c3}$. Les variations de $h_{c1}$, $h_{c2}$ et $h_{c3}$ révélent

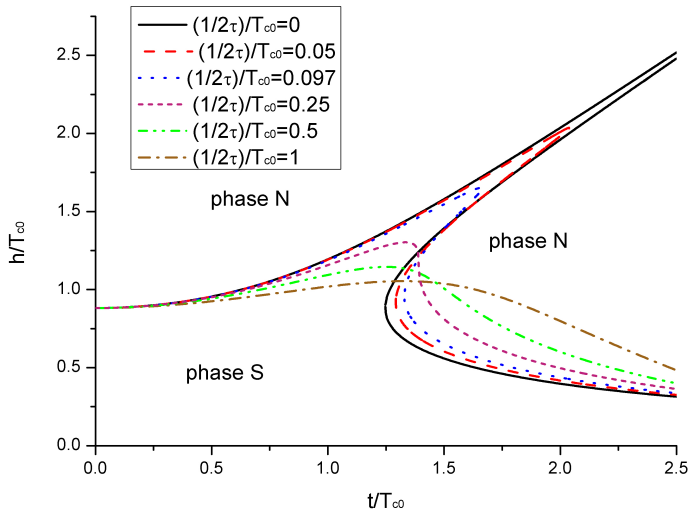



FIG. 2.12: Graphe de $h_c/T_{c0}$ en fonction de $t/T_{c0}$ pour différentes valeurs de potentiel de diffusion sur les impuretés $(1/2\tau)/T_{c0}$.

que la phase supraconductrice dans la couche S est renforcée par la présence des impuretés alors que la phase induite par champ magnétique est détruite par les impuretés.

**L'influence des impuretés sur le diagramme de phase** $(h_c, T)$

Le diagramme de phase $(h_c, T)$ a été calculé numériquement. La phase réentrante est fortement influencée par la présence d'impuretés (voir figure 2.13). La température critique maximale, sous laquelle on peut observer la phase ré-entrante, décroît avec la présence d'impuretés. De plus, les champs magnétiques supérieur et inférieur de la phase réentrante ($h_{c1}$ *et* $h_{c2}$) deviennent de plus en plus proche avec l'augmentation du potentiel de diffusion. Dans le cas, $t = 2T_{c0}$, la phase ré-entrante disparaît totalement pour un potentiel de diffusion supérieur à $0.097T_{c0}$. Sur la figure 2.13, le champ magnétique critique de la phase à faible champ, $h_{c3}$ est aussi influencé par la présence d'impuretés. Le champ magnétique critique $h_{c3}$ et la température critique en champ nul $T_c$ augmentent avec le potentiel de diffusion. L'énergie de couplage effective diminue en présence d'impuretés et cela renforce la phase supraconductrice à faible champ.

### 2.4.2 Influence des impuretés dans la bicouche S/S

Dans cette section, on va reprendre le travail de Tollis *et al.* [163] dans lequel ils ont prédit une ré-entrance de la phase supraconductrice à fort champ magnétique dans le cas d'un couplage $\pi$ entre les deux couches supraconductrices. Nous compléterons leur approche en étudiant l'influence des impuretés sur le diagramme de phase de la bicouche S/S. En utilisant le modèle d'Eilenbeger développé au début de ce chapitre, le système

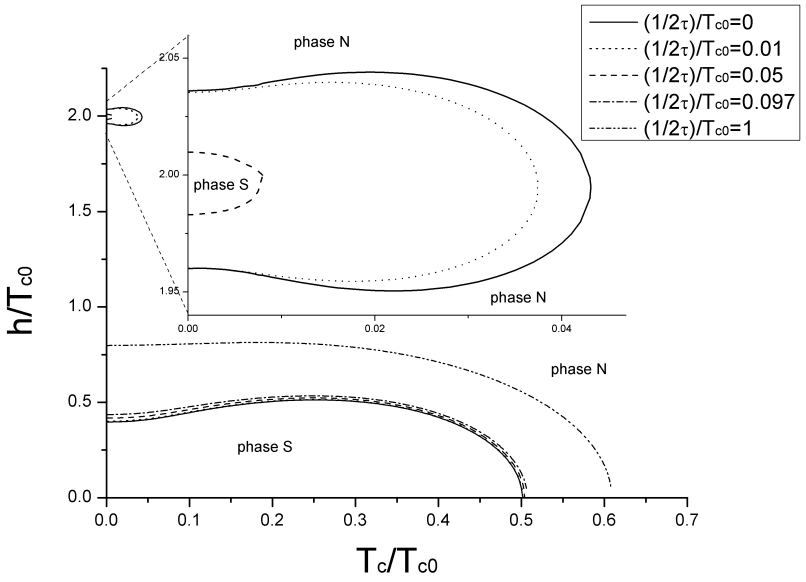



FIG. 2.13: Graphe de $h_c/T_{c0}$ en fonction de $T_c/T_{c0}$ pour différentes valeurs de potentiel de diffusion sur les impuretés $(1/2\tau)/T_{c0}$ à $t = 2T_{c0}$.

d'équation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\omega} - i\mathbf{v}_F.\mathbf{q} & -i\frac{t}{2} & 0 & i\frac{t}{2} \\ -i\frac{t}{2} & \widetilde{\omega} - i\mathbf{v}_F.\mathbf{q} & i\frac{t}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{t}{2} & \widetilde{\omega} - i\mathbf{v}_F.\mathbf{q} & -i\frac{t}{2} \\ i\frac{t}{2} & 0 & -i\frac{t}{2} & \widetilde{\omega} - i\mathbf{v}_F.\mathbf{q} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f^{\dagger}_{0,0}(\omega,\mathbf{q}) \\ f^{\dagger}_{1,0}(\omega,\mathbf{q}) \\ f^{\dagger}_{1,1}(\omega,\mathbf{q}) \\ f^{\dagger}_{0,1}(\omega,\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_0^* + \frac{\left\langle f^{\dagger}_{0,0}(\omega,\mathbf{q})\right\rangle_{\phi}}{2\tau} \\ 0 \\ \Delta_1^* + \frac{\left\langle f^{\dagger}_{1,1}(\omega,\mathbf{q})\right\rangle_{\phi}}{2\tau} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

où $\Delta_1^*$ est le gap supraconducteur dans la couche S portant l'indice $n = 1$.

Dans la phase $\pi$, alors $\Delta_0^* = -\Delta_1^*$, et la solution du système précédent s'écrit :

$$f^{\dagger}_{0,0} = \frac{\Delta_0^*}{2\left(1 - \frac{1}{2\tau}\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2\Omega_1\Omega_2}\right)}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)$$

et $f^{\dagger}_{0,0} = -f^{\dagger}_{1,1}$ dont la solution moyenné sur l'angle $\phi$ s'écrit

$$\left\langle f^{\dagger}_{0,0}\right\rangle_{\phi} = \frac{(\Omega_1+\Omega_2)\,\Delta_0^*}{2\Omega_1\Omega_2\left(1 - \frac{\Omega_1+\Omega_2}{2\tau}\right)}$$

Dans la limite propre ($\tau \to \infty$), à température nulle, la phase supraconductrice $\pi$ apparaît au dessus d'un champ critique $h_{low} = t - \Delta_0^2/8t$ et en dessous de $h_{up} = t + \Delta_0^2/8t$ dans la limite $t \gg \Delta_0$. Comme prédit dans [163], la phase modulée FFLO apparaît à basse température et maximise le champ magnétique critique. Ainsi, dans l'état FFLO, les champs magnétiques s'écrivent $h_{low,up} = t \mp \Delta_0^2/4t$ dans la limite $t \gg \Delta_0$. La phase supraconductrice ré-entrante est renforcée à basse température par les modulations FFLO. La présence des impuretés devraient détruire l'état FFLO et la phase ré-entrante. La ligne de transition FFLO va rapidement se confondre avec la ligne de transition de phase du premier ordre. Par conséquent, on étudiera seulement l'influence des impuretés dans le cas homogène où $q = 0$.

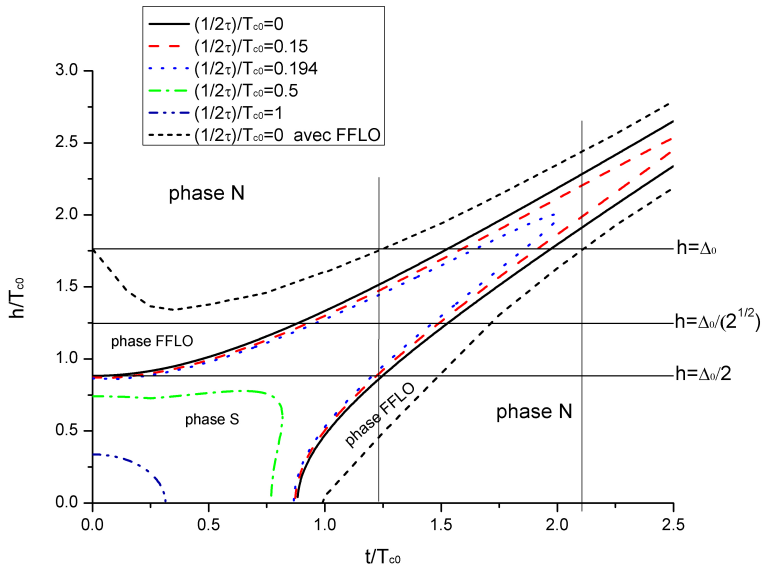



FIG. 2.14: Graphe de $h_c/T_{c0}$ en fonction de $t/T_{c0}$ pour différentes valeurs de potentiel de diffusion sur les impuretés $(1/2\tau)/T_{c0}$ dans une bicouche S/S.

**L'influence sur le diagramme de phase** $(h_c, t)$

A température nulle dans l'état $\pi$ sans modulation FFLO, l'équation d'auto-cohérence (2.11) devient

$$\left[4\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2+\left(2h+\sqrt{\left|-4t^2+\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right|}\right)^2\right]\left[4\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2+\left(2h-\sqrt{\left|-4t^2+\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right|}\right)^2\right]=16h_0^2. \tag{2.23}$$

Les solutions de l'équation (2.23) s'écrivent :

$$h_{up,low}^{imp}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|-4t^2+\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right|-4\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\pm 4\sqrt{-\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\left|-4t^2+\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right|+h_0^4}}$$

ou $h_{up,low}^{imp}$ sont les champs critiques de la bicouche S/S en présence d'impuretés (voir figure 2.14). L'état supraconducteur induit par champ magnétique est détruite en présence d'impuretés et ne peut pas être observé si $h_{low}^{imp}=h_{up}^{imp}$. On définit un temps de diffusion d'impuretés critiques $\tau_c=1/2\left[2t^2-(4t^4-h_0^4)^{1/2}\right]^{1/2}$ au dessus duquel la phase ré-entrante disparaît totalement. Dans le cas $t=2T_{c0}$ et $h_0=0.882T_{c0}$, alors $\tau_c\simeq 0.194T_{c0}$.

Le champ magnétique critique en présence de modulations FFLO est également représenté sur la figure 2.14 dans la limite propre. En présence de modulations FFLO, le champ magnétique est la limite supérieure du champ magnétique critique.

On peut voir que $h_{up}^{FFLO}$, le champ magnétique supérieur en présence de modulations FFLO, croise la ligne $h=\Delta_0$ pour $t\simeq 1.25T_{c0}$. Cela signifie que la phase supraconductrice à bas champ est déformée pour $t>1.25T_{c0}$ à température nulle. La phase ré-entrante devient alors observable. Cette phase ré-entrante devient parfaitement distingable de la

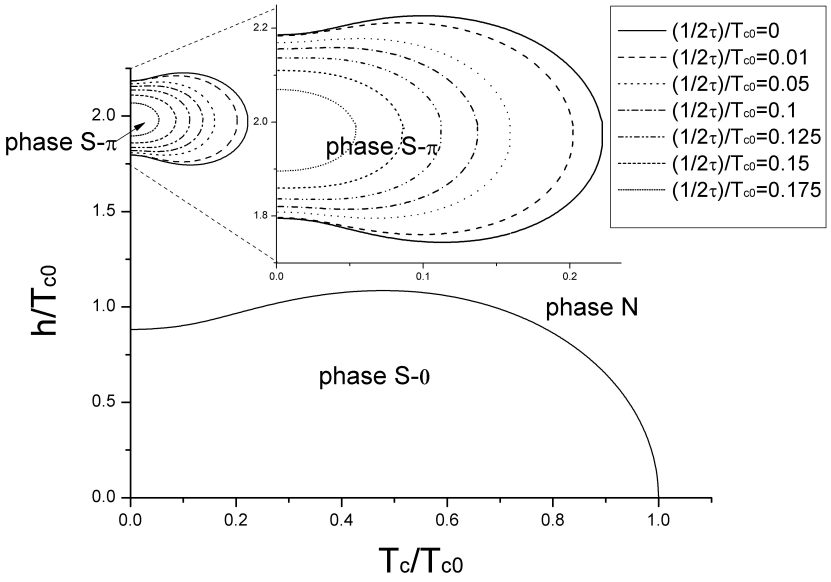



FIG. 2.15: Graphe de $h_c/T_{c0}$ en fonction de $T_c/T_{c0}$ pour différente valeurs de potentiel de diffusion sur les impuretés $(1/2\tau)/T_{c0}$ dans une bicouche S/S à $t = 2T_{c0}$.

phase à bas champ quand $h_{low}^{FFLO}$, la limite inférieure du champ en présence de modulations FFLO, croise également la ligne $h = \Delta_0$ pour $t \simeq 2.1T_{c0}$.

Dans le cas uniforme, on devrait considérer la ligne de transition du premier ordre. Pour la bicouche S/S, la ligne de transition du premier ordre est entre la ligne de transition du second ordre et la ligne de transition FFLO. La ré-entrance devrait apparaître quand $h_{up}^{I}$, le champ magnétique critique supérieur de la transition du premier ordre, est supérieur à $h^I = \Delta_0/\sqrt{2}$ et serait distinguable si la limite inférieure dans le cas de la transition du premier ordre est supérieur à $h^I$.

**L'influence sur le diagramme de phase** $(h_c, T)$

Dans l'état $\pi$, les paires de Cooper sont formées par deux électrons de deux états (liants et anti-liants) distincts. La phase supraconductrice standard à faible champ dans l'état 0 n'est alors pas influencée par la présence d'impuretés comme prédit par le théorème d'Anderson. Les lignes de transition de phase supérieure et inférieure se rencontrent pour le champ $h = t$ à la température $T_M = \pi e^{-C} T_{c0}^2/(4t)$ dans la limite $t \gg T_{c0}$. La phase ré-entrante supraconductrice $\pi$ est confinée sous la température $T_M$. Sur le diagramme de phase, on voit que la phase ré-entrante diminue avec l'augmentation du potentiel d'impuretés (voir figure 2.15). La phase ré-entrante disparaît totalement pour $1/2\tau = 0.194T_{c0}$ dans le cas $t = 2T_{c0}$. L'existence de la transition de phase du premier ordre dans la phase ré-entrante change un peu ce résultat. $h_{up,low}^{I}$ sont supérieurs (inférieurs) à $h_{up,low}$. Par conséquent, le temps critique de diffusion sur les impuretés devrait être plus élevé que dans le cas d'une transition de phase du second ordre.

## 2.5 Conclusion

Pour conclure, l'effet de proximité joue un rôle crucial dans les bicouches S/N et S/S. La température critique et le champ magnétique critique à température nulle dans les

bicouches S/N et S/S dépendent fortement du couplage inter-couche. Nous avons démontré qu'à basse température, une phase supraconductrice apparaît à fort champ magnétique parallèle au plan dans la bicouche S/N. Cette phase est produite par la compensation de l'effet Zeeman par le décalage énergétique entre les états liants et anti-liants dus à l'effet de proximité. Cette phase ré-entrante permet de dépasser la limite paramagnétique usuelle et cela pourrait avoir des conséquence sur les applications à fort champ magnétique. De plus, cette étude est pertinente pour la modélisation et la compréhension des supraconducteurs à haute température critique où certains sont des multicouches S/N.

Dans les bicouches S/S et S/N , la présence d'impuretés non magnétiques rend la phase ré-entrante plus difficile à observer. Les impuretés produisent un élargissement des niveaux énergétiques sur une échelle d'énergie de $1/\tau$ qui empêche la compensation exacte. Il est possible de définir un temps de libre parcours moyen au dessus duquel la phase ré-entrante n'existe pas. Dans les bicouches S/S et S/N, ce temps $\tau_c$ dépend uniquement du couplage intercouche. Dans la bicouche S/S, dans le cas où $t \simeq \Delta_0$ alors $\tau_c^{-1} \simeq 0.25\Delta_0$, au dessus duquel il est impossible d'observer la phase S à fort champ magnétique. D'un point de vue expérimental, il est possible de contrôler le taux d'impuretés par des techniques d'épitaxie par jets moléculaires.

Bien que nous ayons traité uniquement l'effet Zeeman comme destructeur des paires de Cooper, on doit discuter de l'effet orbital. Dans les cas des multicouches sous champ magnétique parallèle aux plans cristallins, la condition pour négliger l'effet orbital s'écrit $tH\xi_{ab}d/\Phi_0 < \Delta_0$ ou $\Phi_0 = h/2e$ est le quantum de flux magnétique dans un supraconducteur. Dans le cas $t \simeq \Delta_0$, on doit avoir un champ magnétique $H$ inférieur à $H_{orb} \simeq \Phi_0/(\xi_{ab}d)$. Aux valeurs typiques, $d = 1nm$, $\xi_{ab} = 10nm$, le champ magnétique $H_{orb}$ est très grand puisqu'il vaut environ $200T$ et n'est pas restrictif d'autant plus que le champ magnétique constant maximal est d'environ $60T$. L'effet orbital devient important dans les systèmes multicouches si $t \gg \Delta_0$, quand la limite de Pauli doit être dépassée plusieurs fois. Néanmoins, dans la référence [170], il a été démontré que l'effet orbital ne détruit pas les paires de Cooper dans les systèmes multicouches et que la supraconductivité doit être restaurée. Nous espérons observer cet effet dans les bicouches S/S et S/N.
L'existence de décalage énergétique entre les spectres électroniques du supraconducteur et de métal normal peut compliquer l'observation de la phase réentrante. En effet, la présence d'un décalage énergétique $\Delta E$ va décaler les niveaux énergétiques et rendre la compensation entre les niveaux Zeeman et les niveaux liant et antiliants plus difficile. Pour de faibles décalages énergétiques, la phase ré-entrante doit être seulement déformée et la compensation a lieu autour du champ magnétique $h \simeq t + \frac{\Delta E}{2}$. En revanche, si $\Delta E \gtrsim t/2$, alors la compensation exacte n'est plus possible et la phase de ré-entrance n'apparaît plus. Cet effet indique le rôle important des spectres électroniques dans les propriétés intrinsèques des hétérostructures.
Enfin, la prise en compte d'une multicouche $(S/N)_n$ dont la cellule élémentaire est une bicouche S/N est intéressante pour savoir comment persiste cette phase ré-entrante. Cette étude a été effectué sur des multicouches $(S/S)_n$ basées sur les bicouches S/S [89]. Le résultats est que l'addition d'un taux de transfert supplémentaire, entre les bicouches, détruit très rapidement la phase de ré-entrance. Nous nous attendons au même effet dans les multicouches $(S/N)_n$.

# Chapitre 3

# L'effet de proximité dans les multicouches S/N/.../N et les jonctions S/N/.../N/S

L'effet de proximité se manifeste à l'interface entre un supraconducteur et un matériau non supraconducteur. Il se définit comme la pénétration des corrélations supraconductrices dans le matériau non supraconducteur sur une longueur appelée longueur de cohérence. Dans ce chapitre, nous étudions l'effet de proximité dans les structures en couche incluant un nombre arbitraire de couches. Les structures lamellaires constituent la structures cristallines de la plupart des supraconducteurs à haute température critique [94]. A base d'oxyde de cuivre, ces supraconducteurs présentent des propriétés inattendues. Par exemple, l'effet de proximité développé par les supraconducteurs à haute température critique existe sur des longueurs plus importantes que celles attendues théoriquement. Ainsi, dans les systèmes $Bi_2Sr_2CuO_6/Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$, R. Yasua *et al.* ont observé un effet de proximité pouvant atteindre plus de 300nm [171]. Cette longueur s'avère plus grande que la longueur théoriquement prédite. Cet effet de proximité à longue portée a également été observé dans d'autres structures S/N où S est un supraconducteur à haute température critique [172],[173],[174],[175],[176],[177]. Afin d'expliquer cet effet de proximité à longue portée, K.A. Delin et A.W. Kleinsasser ont recalculé les longueurs de cohérence et le courant Josephson traversant une jonction S/N'/S où N' est un métal supraconducteur pris au dessus de sa température critique [178]. Ils ont conclu que l'effet de proximité à longue portée intervenant dans les systèmes expérimentaux doit provenir de l'existence de ponts supraconducteurs nanométriques entre les deux électrodes S ou par l'existence de flaques de supraconductivité dans le matériau N'. Kresin *et al.* ont démontré que l'effet de proximité à longue portée pouvait s'expliquer par l'existence de flaques de supraconductivité dans le matériau non supraconducteur [179]. Cette hypothèse permet d'expliquer l'effet de proximité dans les hétérostructures précédemment présentées. Néanmoins, Bozovic *et al.* ont observé l'existence de cet effet de proximité à longue portée dans des hétérostructures supraconductrices epitaxiées dans lesquelles l'existence de flaques de supraconductivité est fortement improbable [180]. Des théories basées sur un appariement triplet de la supraconductivité sont envisagées pour expliquer l'effet de proximité à longue portée dans des systèmes supraconducteur-ferromagnétique [181].

Dans les systèmes S/N, différentes recherches ont démontré que la densité d'états du matériaux métallique change avec la distance à l'interface S/N [182]. Cette propriété a été étudiée par Courtois *et al.* sur des systèmes Nb/Au de différentes épaisseurs. Ils ont observé que la densité d'états dans la couche métallique varie avec son épaisseur.

En revanche, ils ont également démontré l'existence de pseudo-gap qui ne se retrouve pas par la théorie quasi-classique d'Usadel [183]. La prise en compte de la structure intrinsèquement lamellaire des matériaux supraconducteurs et des hétérostructures S/N pourrait nous aider à comprendre ces phénomènes.

Le but de ce chapitre est donc d'étudier les multicouches S/N/.../N et les jonctions S/N/.../N/S comprenant un nombre arbitraire de couches en utilisant la théorie de Gorkov et de l'hamiltonien tunnel. L'utilisation de la théorie de Gorkov permet de ne pas négliger les corrélations supraconductrices présentes dans la structure.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'utilisation de la théorie de Gorkov sur deux systèmes multicouches très étudiés, les multicouches S/N/.../N et les jonctions S/N/.../N/S. Nous cherchons les fonctions de Green qui nous permettent de remonter aux propriétés, aux densités d'états et au courant Josephson.

Dans la seconde partie, nous étudions les propriétés et les densités d'états des multicouches S/N/.../N. Nous étudions d'abord les cas de la bicouches S/N et de la tricouche S/N/N. Puis nous discutons de l'influence d'un décalage énergétique entre le spectre électronique du supraconducteur et du métal normal sur les propriétés et les densités d'états dans les bicouches S/N. Enfin, nous étudions la densité d'états dans la multicouche S/N dans le cas d'un couplage intercouche faible en tenant compte d'éventuelles différences de spectre électronique.

Dans la troisième partie, nous étudions les propriétés thermodynamiques et le courant Josephson critique dans les jonction S/N/.../N/S. Nous commençons par discuter le cas simple de la jonction S/N/S. Ensuite nous étudions le gap supraconducteur, l'énergie libre et le courant Josephson critique des multicouches S/N/.../N/S dans la limite des faibles couplages.

## 3.1 Théorie de Gorkov appliquée aux multicouches.

Le but de cette section est de déterminer les fonctions de Green de Gorkov dans les multicouches S/N/.../N et S/N/.../N/S. La difficulté de la résolution des équations de Gorkov de tels systèmes est que le nombre d'équation est égal à deux fois le nombre de couche composant la multicouche. On cherche à résoudre ce système dans le cas d'un nombre arbitraire de couche, $L$. Il faut trouver une astuce pour remonter aux solutions du système. Le modèle utilisé est équivalent à celui utilisé dans la référence [30]. Dans ce cas, on considère un l'hamiltonien d'énergie cinétique (1.12), l'hamiltonien décrivant le couplage BCS (1.4) et l'hamiltonien tunnel (1.14). Le système général d'équation de Gorkov dans les systèmes multicouches s'écrit :

$$\begin{cases} \left(i\omega - \xi_\sigma^n\right) G_{\sigma,\sigma'}^{n,m} - tG_{\sigma,\sigma'}^{n-1,m} - tG_{\sigma,\sigma'}^{n+1,m} + \Delta_n^* F_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n,m} = \delta_{nm}\delta_{\sigma\sigma'} \\ \left(i\omega + \xi_{-\sigma}^n\right) F_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n,m} + tF_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n-1,m} + tF_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n+1,m} + \Delta_n G_{\sigma,\sigma'}^{n,m} = 0 \end{cases}, \tag{3.1}$$

où $\delta_{nm}$ ($\delta_{\sigma\sigma'}$) est le symbole de Kronëcker, qui est nul pour $n \neq m$ ($\sigma \neq \sigma'$) et égal à 1 sinon, $\Delta_n$ le gap supraconducteur dans la couche $n$ et $\xi_\sigma^n$ le spectre électronique dans la couche $n$. L'équation d'autocohérence s'écrit dans ce cas

$$\Delta_n^* = |\lambda|\, T \sum_\omega \int F_{-\sigma,\sigma'}^{\dagger n,n} d\xi_s. \tag{3.2}$$

Afin de résoudre le problème d'une multicouche avec un nombre arbitraire de couche

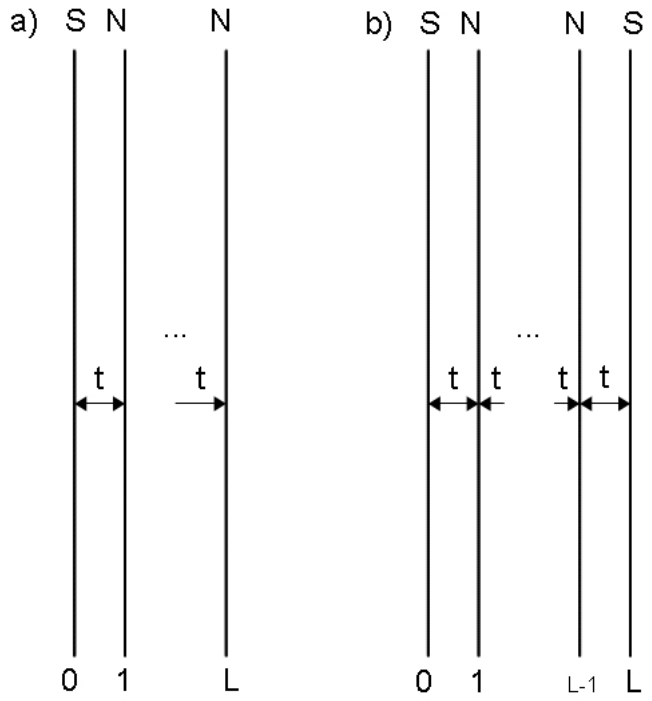



FIG. 3.1: a) Multicouche S/N/.../N de L couches avec un couplage $t$ entre chaque couche. b) Multicouche S/N/.../N/S de L couches avec un couplage $t$ entre chaque couche.

L, on cherche des fonctions de Green sous la forme

$$\begin{aligned} G^{n,m}_{\sigma,\sigma'} &= \left[Ae^{qn} + Be^{-qn}\right]\delta_{\sigma\sigma'} \\ F^{\dagger n,m}_{-\sigma,\sigma'} &= \left[Ce^{\widetilde{q}n} + De^{-\widetilde{q}n}\right]\delta_{\sigma\sigma'} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ceux sont des fonctions de type propageante et contra-propageante le long de l'axe perpendiculaire aux couches. Cette écriture est similaire à celle utilisée pour simplifier les fonctions d'ondes dans le cas d'un puit de potentiel périodique. $q$ et $\widetilde{q}$ représentent les vecteurs propagations des corrélations le long de l'axe perpendiculaire aux couches. Les constantes $A$, $B$, $C$ et $D$ sont des constantes qui dépendent des autres paramètres du problèmes et qui vont dépendre de la géométrie du système considéré. Nous travaillons dans un système où il n'y a pas d'interaction qui transforme le spin. Il y une invariance par rotation dans l'espace des spins. Ainsi, nous pouvons considérer uniquement le cas $\sigma = \uparrow$ et $\sigma' = \uparrow$. On considère que le spectre de la couche supraconductrice est $\xi_s$ et que celui des couches métalliques est différent de celui de la couche supraconductrice et noté $\xi_n$.

Les systèmes multicouches étudiés sont représentés sur la figure 3.1. Pour mesurer expérimentalement les propriétés des multicouches, il est plus simple d'accéder à la première et à la dernière couche de la multicouche. Les fonctions de Green intéressantes sont donc les fonctions de Green de la couche supraconductrice et de la dernière couche métallique (ou supraconductrice) d'indice $L$. Le formalisme que nous utilisons nous permet de déterminer les fonctions $G^{0,0}_{\sigma,\sigma'}$ et $F^{\dagger 0,0}_{-\sigma,\sigma'}$ de la première couche supraconductrice (voir figure 3.1) et les fonctions $G^{L,L}_{\sigma,\sigma'}$ et $F^{\dagger L,L}_{-\sigma,\sigma'}$ de la dernière couche metallique (ou supraconductrice). A partir de ces fonctions, il est possible de déterminer toutes les propriétés des multicouches en fonction du nombre de couches métalliques $L$.

### 3.1.1 Fonction de Gorkov dans la multicouche S/N/.../N

On étudie le système S/N/.../N où la couche S porte l'indice $n = 0$ et les couches métalliques portent les indices $n = 1$ à $n = L$ (voir figure 3.1 a)). La résolution exacte du système d'équations de Gorkov permettant de remonter aux fonctions de Green est détaillée dans l'annexe A. Les fonctions de Green dans la couche métallique d'indice $L$ s'écrivent :

$$G_{\uparrow,\uparrow}^{L,L} = \frac{t^2 a_{L-1}\widetilde{a}_L - t[(i\omega-\xi_s)a_L\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_{L-1}\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_L\widetilde{a}_{L+1}}{t\left(t^2 a_L\widetilde{a}_L - t[(i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}\right)} \tag{3.4}$$

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger L,L} = \frac{\Delta_0^* a_1\widetilde{a}_1}{\left(t^2 a_L\widetilde{a}_L - t[(i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}\right)} \tag{3.5}$$

avec $a_n = \sinh(qn)$ et $\widetilde{a}_n = \sinh(\widetilde{q}n)$. Les fonctions de Green dans la couche supraconductrice s'écrivent

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0} = \frac{\Delta_0^* a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1} - t[(i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+t^2 a_L\widetilde{a}_L} \tag{3.6}$$

$$G_{\uparrow,\uparrow}^{0,0} = \frac{-a_{L+1}[(i\omega+\xi_s)\widetilde{a}_{L+1}+t\widetilde{a}_L]}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1} - t[(i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+t^2 a_L\widetilde{a}_L} \tag{3.7}$$

.

A partir de la fonction de Green (3.6), il est théoriquement possible de remonter aux propriétés de la couche S en fonction du nombre total de couche $L$ présent dans la multicouche. La dépendance des fonctions de Green par rapport au nombre de couche $L$ n'est pas triviale. Il est possible de transformer les coefficients $a_L$ et $\widetilde{a}_L$ par leurs formes explicites. Cette forme explicite comprend les formes exponentielles des sinus hyperbolique. Cette forme explicite est détaillée dans l'annexe A avec la formule $(A.5)$. En revanche, il est possible de remonter explicitement aux fonctions de Green des systèmes en explicitant le nombre de couche $L$. Dans la deuxième section, nous étudions les cas simples des bicouches ($L = 1$) et des tricouches ($L = 2$). La multicouche avec un nombre de couche arbitraire est étudiée dans le cas d'un faible couplage intercouche, $t \ll T_{c0}$.

### 3.1.2 Fonctions de Gorkov dans la jonction S/N/.../N/S

Nous nous intéressons directement à l'étude des corrélations Josephson à travers une jonction S/N/S d'épaisseur arbitraire. Dans de système S/N/.../N/S, les couches supraconductrices portent les indices $n = 0$ et $n = L$ alors que les couches métalliques portent tous les indices compris entre $n = 1$ et $n = L - 1$ (voir figure 3.1 b)). L'établissement et la résolution du système d'équation permettant de déterminer les fonctions de Green de Gorkov est effectué en détail dans l'annexe A. Les fonctions de Green normale et anomale dans la dernière couche supraconductrices qui s'écrivent :

$$G_{\uparrow,\uparrow}^{L,L} = \frac{-t^3 S_{L-1}^{L-2} - t^2\left[\widetilde{\omega}^* S_L^{L-2} + 2\widetilde{\omega} S_{L-1}^{L-1}\right] - t\left[S_L^{L-1}\left(|\widetilde{\omega}|^2+\Omega_0^2\right)+\widetilde{\omega}^2 S_{L-1}^L\right] - \widetilde{\omega}\Omega_0^2 S_L^L}{t^4 S_{L-2}^{L-2} + 2t^3 X_{L-2}^{L-1} + t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2+\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)S_{L-1}^{L-1} + 2\Delta_0\Delta_L S_1^1 + \widetilde{\omega}^{*2} S_{L-2}^L + \widetilde{\omega}^2 S_{L-2}^L\right] + t\left(\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)X_{L-1}^L + S_L^L\Omega_L^2\Omega_0^2} \tag{3.8}$$

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger L,L} = \frac{t^2\Delta_0^* S_1^1 + \Delta_L^*\left\{\Omega_0^2 S_L^L + t^2 S_L^{L-1} - t\widetilde{\omega}^* S_{L-1}^L - t\widetilde{\omega} S_{L-1}^L\right\}}{t^4 S_{L-2}^{L-2} + 2t^3 X_{L-2}^{L-1} + t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2+\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)S_{L-1}^{L-1} + 2\Delta_0\Delta_L S_1^1 + \widetilde{\omega}^{*2} S_{L-2}^L + \widetilde{\omega}^2 S_{L-2}^L\right] + t\left(\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)X_{L-1}^L + S_L^L\Omega_L^2\Omega_0^2} \tag{3.9}$$

où on pose $a_n = \sinh(qn)$ et $\widetilde{a}_n = \sinh(\widetilde{q}n)$, $S_N^M = \widetilde{a}_M a_N$, $\widetilde{\omega} = i\omega + \xi_s$, $\widetilde{\omega}^* = -i\omega + \xi_s = -(i\omega - \xi_s)$, $\Omega_0^2 = |\widetilde{\omega}|^2 + \Delta_0^2$, $\Omega_L^2 = |\widetilde{\omega}|^2 + \Delta_L^2$ et $X_M^N = \widetilde{\omega} S_M^N + \widetilde{\omega}^* S_N^M$. De la même

manière, on peut remonter aux fonctions de Green normale et anomale de la première couche supraconductrice qui s'écrivent :

$$G_{\uparrow,\uparrow}^{0,0} = \frac{-t^3 S_{L-1}^{L-2} - t^2\left[\widetilde{\omega}^* S_L^{L-2} + 2\widetilde{\omega} S_{L-1}^{L-1}\right] - t\left[S_L^{L-1}\left(|\widetilde{\omega}|^2 + \Omega_L^2\right) + \widetilde{\omega}^2 S_{L-1}^L\right] - \widetilde{\omega}\Omega_L^2 S_L^L}{t^4 S_{L-2}^{L-2} + 2t^3 X_{L-2}^{L-1} + t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2 + \Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) S_{L-1}^{L-1} + 2\Delta_0\Delta_L S_1^1 + \widetilde{\omega}^{*2} S_{L-2}^L + \widetilde{\omega}^2 S_{L-2}^L\right] + t\left(\Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) X_{L-1}^L + S_L^L \Omega_L^2 \Omega_0^2} \tag{3.10}$$

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0} = \frac{t^2 \Delta_L^* S_1^1 + \Delta_0^*\left\{\Omega_L^2 S_L^L + t^2 S_L^{L-1} - t\widetilde{\omega}^* S_{L-1}^L - t\widetilde{\omega} S_{L-1}^L\right\}}{t^4 S_{L-2}^{L-2} + 2t^3 X_{L-2}^{L-1} + t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2 + \Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) S_{L-1}^{L-1} + 2\Delta_0\Delta_L S_1^1 + \widetilde{\omega}^{*2} S_{L-2}^L + \widetilde{\omega}^2 S_{L-2}^L\right] + t\left(\Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) X_{L-1}^L + S_L^L \Omega_L^2 \Omega_0^2} \tag{3.11}$$

avec $a_n = \sinh(qn)$ et $\widetilde{a}_n = \sinh(\widetilde{q}n)$.

Comme pour le cas précédent, la dépendance de la fonction de Green en fonction du nombre total de couche $L$ est complexe. Il est possible d'utiliser les relations $(A.5)$ pour remonter aux formes explicites des fonctions de Green. Dans la troisième section, nous utilisons ces fonctions de Green dans le cas simple de la jonction S/N/S ($L = 2$) puis nous effectuons une analyse du courant Josephson pour le cas d'un nombre arbitraire de couche $L$ dans la limite des faibles couplages intercouches, $t \ll T_{c0}$.

## 3.2 Etude de la multicouche S/N/.../N

### 3.2.1 Introduction aux densités d'états dans les structures S/N

Dans la suite, la densité d'états de la couche d'indice $L$ est calculé par la formule

$$\rho(E) = -2\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\delta\to 0} G_{\uparrow,\uparrow}^{L,L}(E + i\delta, \xi)\, d\xi. \tag{3.12}$$

où $G_{\uparrow,\uparrow}^{L,L}(E + i\delta, \xi)$ est la fonction de Green normale de la couche $L$ avec $\xi$ le spectre du supraconducteur et $\omega = E + i\delta$. Dans un supraconducteur classique, la densité d'états vaut

$$\begin{cases} \rho(E) = 0 & \text{pour } |E| < \Delta \\ \rho(E) = \rho_0 \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} & \text{pour } |E| < \Delta \end{cases}$$

où $\rho_0$ est la densité d'états dans un métal. La densité d'états peut se mesurer directement par la mesure du courant tunnel entre un supraconducteur et un métal normal. En effet la conductance différentielle d'une jonction tunnel est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{dI}{dV} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(E)\, \frac{d}{dV}\left[n_F(E) - n_F(E + eV)\right] dE$$

où $n_F(E)$ est la fonction de Fermi. Or, à température nulle, la dérivée de la distribution de Fermi est simplement la fonction de Dirac et la conductance est égale à la densité d'états à température nulle. A température non nulle, la dérivée de la distribution de Fermi est une fonction en forme de cloche de largeur d'environ $4k_BT$. La mesure de la conductance tunnel intègre donc les contributions de la densité d'états sur cette largeur et limite la résolution en énergie.

Dans les jonctions S/F et S/N, les matériaux N et F acquièrent une partie des propriétés du matériaux supraconducteur par effet de proximité. Des mesures de densités d'états

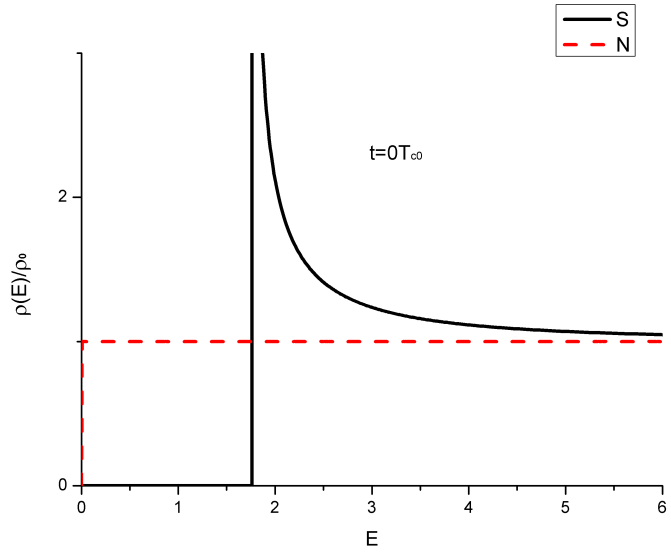



FIG. 3.2: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 0$.

induite dans un métal normal ont été réalisées par mesure de conductance tunnel dans des contacts cuivre-aluminum [184]. D'autres mesures sur des bicouches Niobium/Cuivre ont été effectuées avec un microscope à effet tunnel à balayage. Ces expériences ont mis en évidence le passage continu d'un gap supraconducteur très développé proche du gap BCS pour de larges épaisseurs de Niobium, à une densité d'états très proche de la densité d'états du métal normal pour des épaisseurs de Nb très faibles [185].On observe aussi la réduction du gap induit en fonction de la distance à l'interface [182].

La densités d'états permet de remonter à des propriétés fondamentales dans les supraconducteurs non conventionnels comme $MgB_2$ [186] et dans les nouveaux supraconducteurs comme $CaC_6$ [187].

### 3.2.2 Etude des densités d'états dans la bicouche S/N

L'étude des propriétés de la bicouche S/N a été effectuée dans le chapitre précédent. Pour résumer, on a démontré qu'il existait deux régimes de décroissance de la température critique. Pour un paramètre de couplage intercouche $t$ inférieur à $T_{c0}$, la température critique décroît faiblement. Pour un paramètre de couplage $t$ supérieur à $T_{c0}$, le température critique est inversement proportionnelle au paramètre $t$ (voir figure 2.5). La relation entre le gap supraconducteur à température nulle et la température critique est présenté sur la figure 2.6. On voit que pour le coefficient de proportionnalité $\gamma$ entre le gap à température nulle $\Delta(0)$ est la température critique $T_c$ évolue de $\gamma = 1.764$ pour un couplage intercouche nul à $\gamma = 3.52$ pour un paramètre de couplage supérieur à $T_{c0}$. Ce comportement s'explique par le fait qu'à fort couplage, la bicouche se comporte comme une couche supraconductrice unique ayant une constante d'appariement $\lambda$ qui tend vers $\lambda/2$ [95].

Les densités d'états dans la bicouches S/N évoluent en fonction du paramètre de couplage intercouche $t$, et sont représentées sur les figures 3.2 à 3.7. Les densité d'états dépendent de manière compliquée du couplage intercouche. En revanche, il existe des pics de densité d'états pour chaque couche qui composent la bicouche. D'un point de vue théorique, chaque pics représentent la supraconductivité de la couche S et la supraconductivité

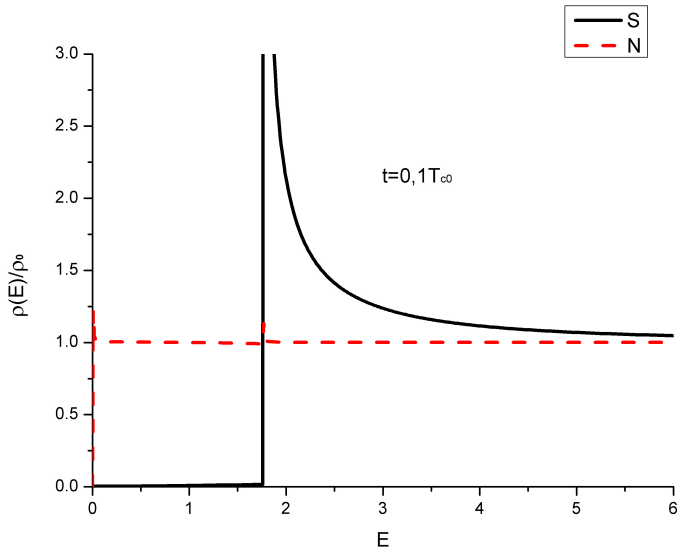



FIG. 3.3: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 0.1T_{c0}$.

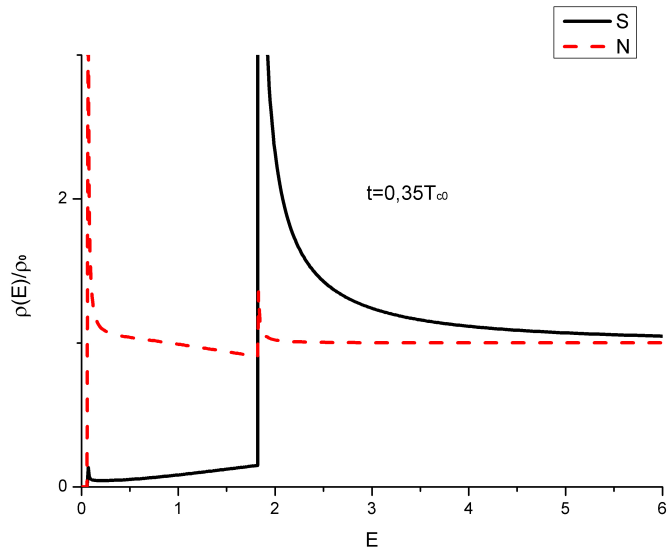



FIG. 3.4: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 0.35T_{c0}$.

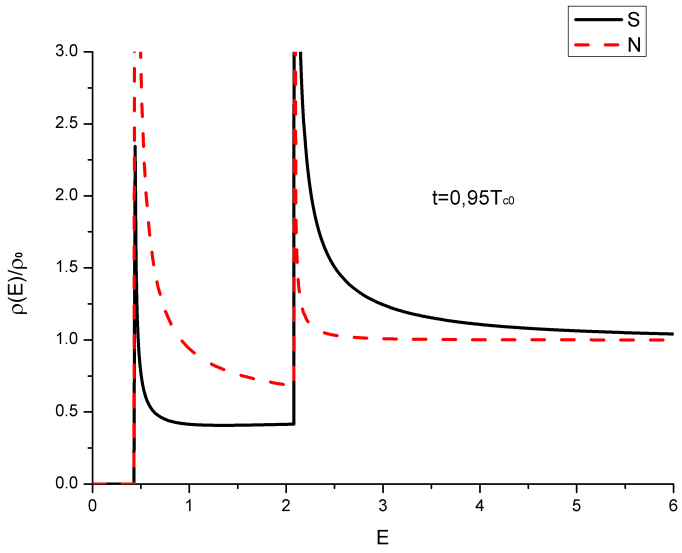



FIG. 3.5: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 0.95T_{c0}$.

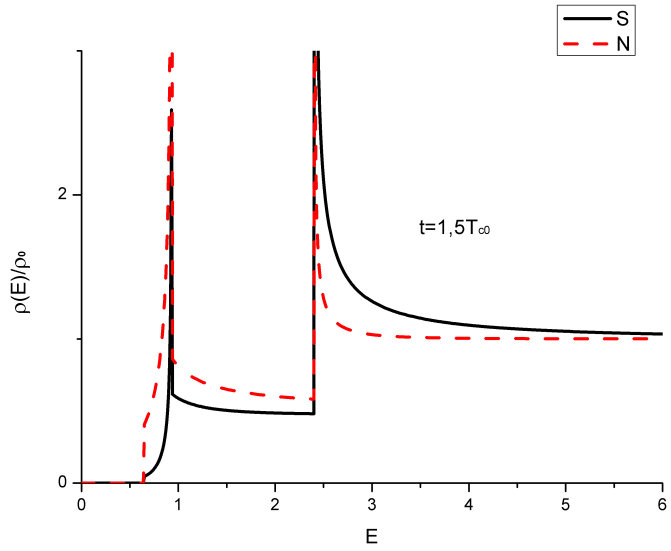



FIG. 3.6: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 1.5T_{c0}$.

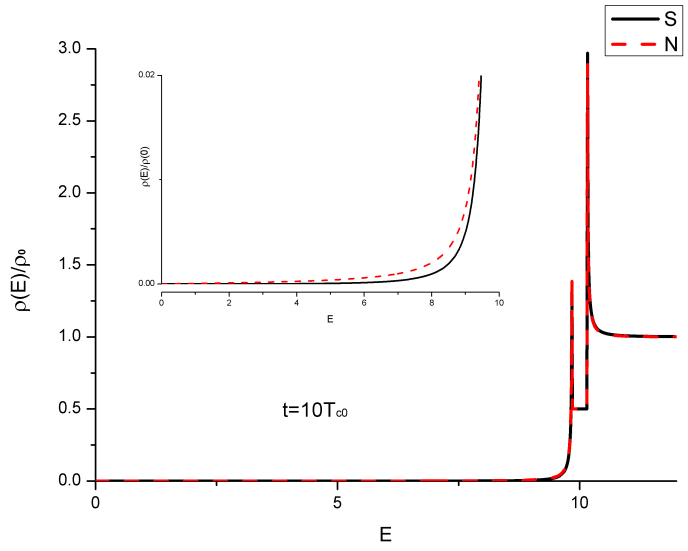



FIG. 3.7: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 10T_{c0}$.

induite dans la couche N par l'effet de proximité. En étudiant les propriétés des multicouches S/N, Simonov et Buzdin ont effectué une étude plus approfondie de ces densités d'états dans la référence [169]. Ils démontrent notamment que les deux pics de densité d'états sont séparés d'un énergie égale au gap supraconducteur $\Delta$. Il est possible de considérer qu'à fort couplage intercouche, il se crée entre les couches des niveaux d'énergie hybrides de type liant et anti-liant. Ces niveaux d'énergie pourraient expliquer l'existence de pics de densités d'états.

### 3.2.3 Etude de la tricouche S/N/N

De la même manière, afin de comprendre le mécanisme de l'effet de proximité dans les multicouches, nous allons étudier les propriétés thermodynamiques de la couche S inclue dans une tricouche S/N/N. Dans ce cas, on utilise la théorie de l'hamiltonien tunnel, définie dans la section 1.3.2 du premier chapitre, afin de déterminer le système des fonctions de Gorkov qui décrivent le système. Ainsi, il s'écrit :

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_n)\, G^{2,2}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{1,2}_{\uparrow,\uparrow} = 1 \\ (i\omega - \xi_n)\, G^{1,2}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{2,2}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{0,2}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega - \xi_s)\, G^{0,2}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{1,2}_{\uparrow,\uparrow} + \Delta_0 F^{+0,2}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{+0,2}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{+1,2}_{\downarrow,\uparrow} + \Delta_0 G^{0,2}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_n)\, F^{+1,2}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{+0,2}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{+2,2}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_n)\, F^{+2,2}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{+1,2}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \end{cases}$$

qui permet de remonter à la fonction de Green normale dans la couche métallique d'indice $n = 2$. La fonction de Green de Gorkov s'écrit :

$$G^{2,2}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{\left((i\omega+\xi)^2-t^2\right)(i\omega-\xi)\Delta^2-\left((i\omega-\xi)^2-t^2\right)\left((i\omega+\xi)^2-2t^2\right)(i\omega+\xi)}{\left((i\omega+\xi)^2-t^2\right)\left((i\omega-\xi)^2-t^2\right)\Delta^2+\left(\omega^2+\xi^2\right)\left((i\omega+\xi)^2-2t^2\right)\left((i\omega-\xi)^2-2t^2\right)} \tag{3.13}$$

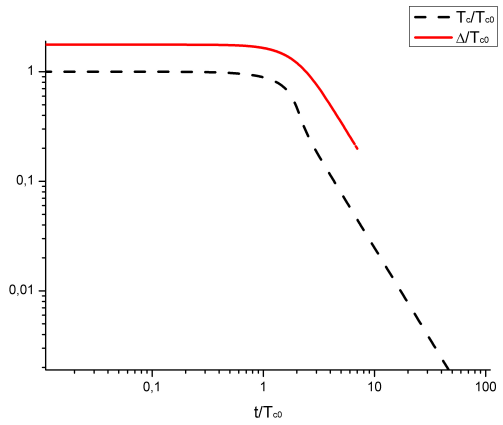



FIG. 3.8: Graphe de $T_c/T_{c0}$ et $\Delta/T_{c0}$ par rapport à $t/T_{c0}$ (ligne pleine). Pour $t \gg T_{c0}$, la température critique de la couche supraconductrice et le gap supraconducteur à température nulle diminuent avec le couplage intercouche.

Cette fonction se déduit directement de la fonction (3.4) en posant $L = 2$. Dans la couche supraconductrice d'indice $n = 0$, la fonction de Green normale s'écrit :

$$G^{0,0}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{-\left((i\omega-\xi)^2-t^2\right)\left((i\omega+\xi)^2-2t^2\right)(i\omega+\xi)}{\left((i\omega+\xi)^2-t^2\right)\left((i\omega-\xi)^2-t^2\right)\Delta^2+\left(\omega^2+\xi^2\right)\left((i\omega+\xi)^2-2t^2\right)\left((i\omega-\xi)^2-2t^2\right)} \tag{3.14}$$

qui peut se déduire de la fonction (3.7) en posant $L = 2$. La fonction de Green anormale dans la couche S est :

$$F^{+0,0}_{\downarrow,\uparrow} = \frac{-\left((i\omega+\xi_s)^2-t^2\right)\left((i\omega-\xi_s)^2-t^2\right)\Delta^*}{\left((i\omega+\xi)^2-t^2\right)\left((i\omega-\xi)^2-t^2\right)\Delta^2+\left(\omega^2+\xi^2\right)\left((i\omega+\xi)^2-2t^2\right)\left((i\omega-\xi)^2-2t^2\right)} \tag{3.15}$$

qui peut se déduire de la fonction (3.6) en posant $L = 2$. Afin de faire une étude approfondie des densités d'états dans la tricouche S/N/N , on peut calculer la fonction de Green normale dans la couche métallique d'indice $n = 1$. Cette dernière s'écrit :

$$G^{1,1}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{\left(\left(\omega^2+\xi^2\right)\left((i\omega+\xi)^2-2t^2\right)+\Delta^2\left((i\omega+\xi)^2-t^2\right)\right)(i\omega-\xi)}{\left((i\omega+\xi)^2-t^2\right)\left((i\omega-\xi)^2-t^2\right)\Delta^2+\left(\omega^2+\xi^2\right)\left((i\omega+\xi)^2-2t^2\right)\left((i\omega-\xi)^2-2t^2\right)} \tag{3.16}$$

Il est important de noter que la fonction (3.16) ne peut pas se déduire des fonctions de Green du système d'équation de la multicouche. Ce système permet seulement de remonter à la fonction de Green de la première et de la dernière couche. Ici, nous rajoutons cette fonction à l'étude de la tricouche S/N/N car sa détermination est simple.

### Température critique de la couche S en fonction de $t$

A partir de la fonction de Green (3.15), on peut remonter à la variation de la température critique en fonction du couplage intercouche. En injectant la fonction (3.15) dans l'équation d'autocohérence (3.2), on trouve une variation de température critique égale à :

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = -\frac{1}{4}\left[\frac{5}{2}\gamma + 5\ln(2) + \frac{1}{4}\Psi\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{2}t}{\pi T_c}\right) + \frac{1}{4}\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{2}t}{\pi T_c}\right) + \Psi\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{2}t}{4\pi T_c}\right) + \Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{2}t}{4\pi T_c}\right)\right].$$

La variation de température critique est représentée sur la figure 3.8 en trait plein. Cette

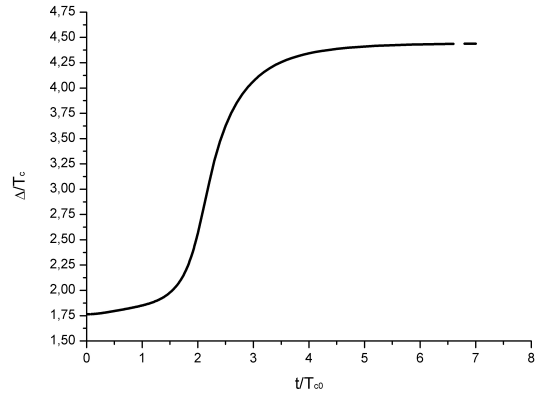



FIG. 3.9: Graphe de $\Delta/T_c$ par rapport à $t/T_{c0}$. On voit qu'il existe un plateau pour les forts couplages intercouches ou le rapport $\Delta^0/T_c$ est égal à 4.51.

variation pour un taux de transmission faible s'écrit $\frac{T_c}{T_{c0}} = 1 - \frac{7}{8}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{t}{T_{c0}}\right)^2$ qui est identique à la décroissance constatée dans la bicouche S/N. En revanche, dans le cas d'un fort couplage intercouche, la température critique décroît de la manière suivante $\frac{T_c}{T_{c0}} = \left(\frac{e^{-\gamma}\pi T_{c0}}{4\sqrt{2}t}\right)^{\frac{5}{3}}$. Cette décroissance en loi de puissance est plus importante que la décroissance observée pour la bicouche S/N. Cette différence s'explique par le fait qu'à fort couplage, la couche supraconductrice subit l'influence des deux couches métalliques ce qui déstabilise la supraconductivité d'autant plus vite.

### Gap supraconducteur à température nulle

La dépendance du gap supraconducteur à température nulle s'obtient à partir de la fonction de Green anomale de la couche supraconductrice (3.15). En effectuant le même changement de variable que dans la partie 2.3.2 du chapitre 2 , l'équation d'autocohérence s'écrit :

$$\ln\left(\frac{\Delta(0)}{\Delta_0}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \left( \frac{t^4+2\rho\big(\sin^2(\phi)-\cos^2(\phi)\big)t^2+\rho^2}{(4\rho+\Delta^2)t^4+2\rho\big(\sin^2(\phi)-\cos^2(\phi)\big)(2\rho+\Delta^2)t^2+\rho^2(\rho+\Delta^2)} - \frac{1}{\rho+|\Delta|^2}\right) \tag{3.17}$$

La variation du gap supraconducteur est représentée sur la figure 3.8 en trait pointillé. On voit que le gap supraconducteur à température nulle suit la même variation que la température critique. Ce constat n'est pas surprenant puisque le gap supraconducteur à température nulle est directement relié à la température critique. En revanche, le coefficient de proportionnalité entre le gap supraconducteur et la température critique évolue avec le couplage intercouche.

Comme on le voit sur la figure 3.9, la constante de proportionnalité pour un fort taux de couplage est environ égal à 4.5. Ce coefficient dépend donc du nombre de couche constituant la multicouche. Plus le nombre de couche est élevé, plus ce coefficient de proportionnalité est élevé. La supraconductivité transmise vers les différentes couches de la multicouche affaiblissent la supraconductivité de la couche supraconductrice plus rapidement. La tricouche S/N/N peut être alors considérée comme une couche supraconductrice unique dont la constante de couplage passe de $\lambda$ à $\widetilde{\lambda} < \lambda$.

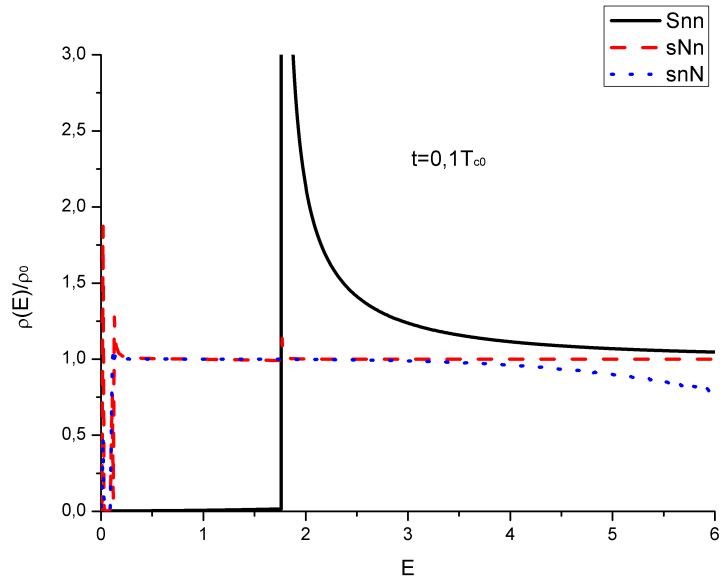



FIG. 3.10: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice d'indice 0 (trait plein), dans la couche métallique d'indice 1 (trait court) et pour la couche métallique d'indice 2 (trait pointillé) pour $t = 0,1T_{c0}$.

**Densités d'états dans les couches de la tricouche S/N/N**

Dans cette partie, nous allons étudier les densités d'états dans les différentes couches constituant la tricouche SNN. A partir de la formule (3.12), on utilise les trois fonctions de Green normales, 3.14,3.16 et 3.13 afin de remonter aux densités d'états dans chaque couches de la tricouche pour un coupage intercouche fixé. On voit que pour de faible couplage, les densités d'états dans les couches métalliques sont globalement les mêmes. On remarque l'existence de deux pics de densité d'états qui apparaissent dans la densité d'états métallique et du supraconducteur pour de faibles énergies (voir figure 3.10 et 3.11). Pour des couplages intercouches intermédiaires, il apparaît plusieurs plateaux de densité d'états qui pourraient correspondre au remplissage de plusieurs niveaux hybridés entre les multicouches. On remarque distinctement trois pics de densité d'états (voir figure 3.12 et 3.13). Enfin pour un couplage intercouche très élevé, alors la densité d'états est très faible à petite énergie et apparaît distinctement à forte énergie. L'interprétation est complexe car les niveaux liants et anti-liants dans la tricouche sont plus difficiles à distinguer (voir figure 3.14). Pour résumer, la densité d'états est très complexe, cependant on retrouve trois pics qui sont caractéristiques des trois couches. La supraconductivité induite dans chacune des trois couches ont chacune leur gap qui peut s'observer sur chacune des densités d'états. Si l'étude de la tricouche S/N/N permet de remonter aux propriétés de chacune des couches, l'analyse d'un système multicouche comprenant une nombre arbitraire de couche métallique peut s'avérer plus difficile.

### 3.2.4 Effet d'un décalage d'énergie sur les propriétés des bicouches S/N

L'influence d'un décalage énergétique a déjà été étudiée dans les hétérostructures F/S/F et S/F/S dans le chapitre 1. On voit qu'un décalage énergétique entre le spectre

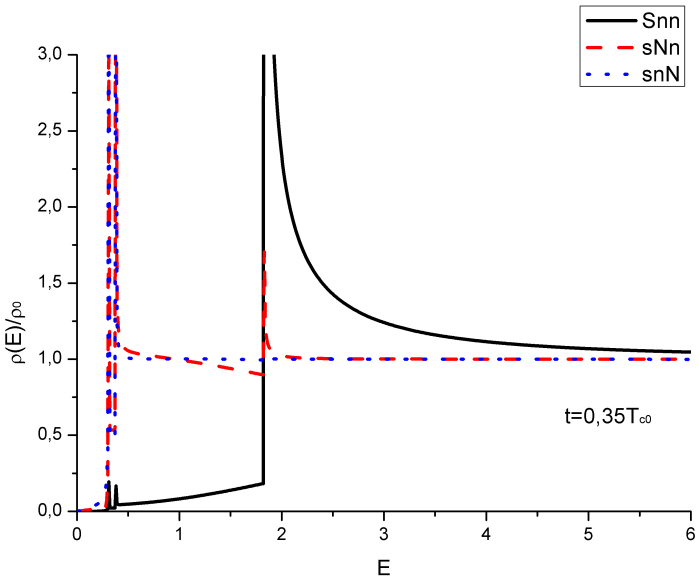



FIG. 3.11: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice d'indice 0 (trait plein), dans la couche métallique d'indice 1 (trait court) et pour la couche métallique d'indice 2 (trait pointillé) pour $t = 0,35T_{c0}$.

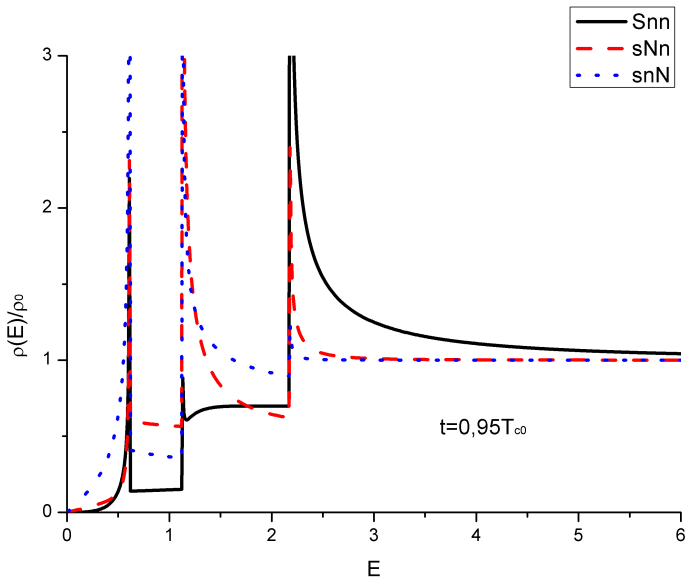



FIG. 3.12: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice d'indice 0 (trait plein), dans la couche métallique d'indice 1 (trait court) et pour la couche métallique d'indice 2 (trait pointillé) pour $t = 0,95T_{c0}$.

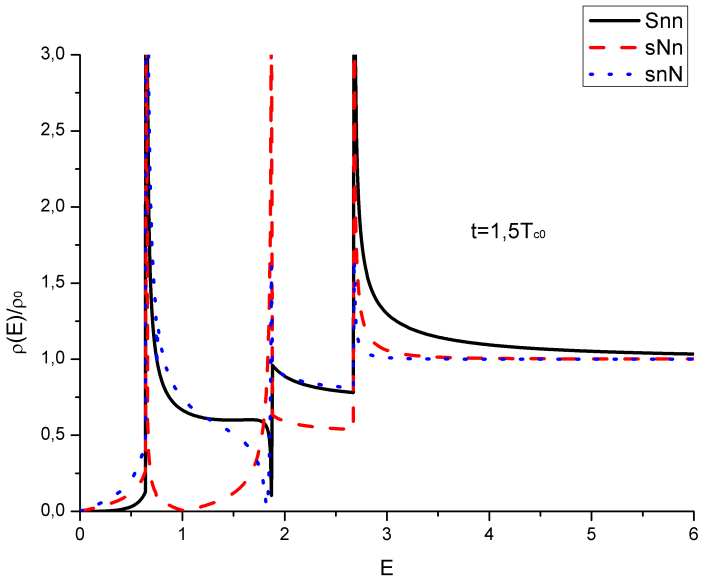



FIG. 3.13: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice d'indice 0 (trait plein), dans la couche métallique d'indice 1 (trait court) et pour la couche métallique d'indice 2 (trait pointillé) pour $t = 1.5T_{c0}$.

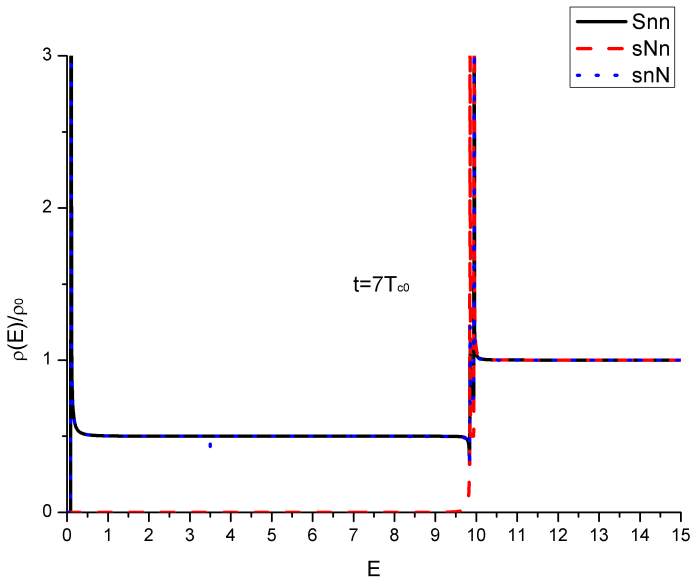



FIG. 3.14: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice d'indice 0 (trait plein), dans la couche métallique d'indice 1 (trait court) et pour la couche métallique d'indice 2 (trait pointillé) pour $t = 7T_{c0}$.

électronique du supraconducteur et du matériaux en contact pouvait influencer qualitativement les propriétés des multicouches. Afin de compléter l'étude des multicouches S/N, nous considérons un décalage énergétique entre les spectres électronique des couches S et N. Le spectre du supraconducteur est noté $\xi_s$ alors que le spectre du métal est noté $\xi_n = \xi_s + \Delta E$. Par simplicité, nous allons étudier l'influence d'un décalage d'énergie uniquement sur les propriétés de la bicouche S/N. Les comportements observés nous donneront des informations susceptibles de comprendre l'effet d'un décalage d'énergie sur les propriétés des multicouches. Les fonctions de Green normale et anomale de la couche S se déduisent des relations (3.6) et (3.7) en posant $L = 1$ et s'écrivent :

$$G^{0,0}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{(i\omega-\xi_s-\Delta E)\left((i\omega+\xi_s+\Delta E)(i\omega-\xi_s)-t^2\right)}{t^4+\left(2\omega^2-2\xi_s(\xi_s+\Delta E)t^2+\left(\omega^2+(\xi_s+\Delta E)^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)\right)} \tag{3.18}$$

$$F^{+0,0}_{\downarrow,\uparrow} = -\frac{\Delta^*\left(\omega^2+(\xi_s+\Delta E)^2\right)}{t^4+\left(2\omega^2-2\xi_s(\xi_s+\Delta E)t^2+\left(\omega^2+(\xi_s+\Delta E)^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)\right)} \tag{3.19}$$

La fonction de Green normale de la couche métallique se deduit de la fonction (3.4) en posant $L = 1$ et donne

$$G^{1,1}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{-(i\omega-\xi_s-\Delta E)(i\omega-\xi_s)t^2+\left(\omega^2+(\xi_s+\Delta E)^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)}{(i\omega-\xi_s-\Delta E)\left(t^4+\left(2\omega^2-2\xi_s(\xi_s+\Delta E)t^2+\left(\omega^2+(\xi_s+\Delta E)^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)\right)\right)} \tag{3.20}$$

Nous allons étudier les propriétés de la couche S puis sur les densités d'états dans le cas d'un décalage $\Delta E$ quelconque.

**Température critique de la couche S en fonction de $t$ et de $\Delta E$**

On utilise la fonction de Green (3.19) et l'équation d'autocohérence (3.2) pour remonter à la variation de température critique qui s'écrit :

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = -\frac{t^2}{\Delta E^2+4t^2}\left[2\gamma + 4\ln(2) + \Psi\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{\Delta E^2+4t^2}}{4\pi T_c}\right) + \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{\Delta E^2+4t^2}}{4\pi T_c}\right)\right].$$

La variation de température critique est représentée sur la figure 3.15 pour différentes valeurs de $\Delta E$. On remarque que pour un fort décalage d'énergie entre le spectre supraconducteur et le spectre du métal normal , il y a trois régimes de décroissance de la température critique.

La variation de la température critique répond désormais à trois échelles d'énergie : $t$, $\Delta E$ et $T_{c0}$. Pour un faible couplage intercouche $t \ll \Delta E \ll T_{c0}$, la température varie comme $\frac{T_c-T_{c0}}{T_{c0}} = -\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{t}{T_{c0}}\right)^2\left(7\zeta(3) - \frac{31}{\pi^2}\zeta(5)\left(\frac{\Delta E}{T_{c0}}\right)^2\right)$. On remarque que le décalage d'énergie $\Delta E$ ralentit la décroissance de $T_c$. Si le couplage intercouche est plus important que le décalage d'énergie, $\Delta E \ll t \ll T_{c0}$, alors $\frac{T_c-T_{c0}}{T_{c0}} = -\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\left(\frac{t}{T_{c0}}\right)^2$ qui correspond au cas précédemment étudié. Dans la situation intermédiaire $t \ll T_{c0} \ll \Delta E$, la variation de température critique s'écrit $\frac{T_c-T_{c0}}{T_{c0}} = -\left(\frac{t/T_{c0}}{\Delta E/T_{c0}}\right)^2\left[2\gamma + \ln\left(\frac{\Delta E}{4\pi^2}\right)\right]$. La variation de température dans ce cas est également très faible. Dans ce dernier cas, la décroissance de la température critique intervient pour des couplages intercouches plus élevés. En effet, l'effet du décalage d'énergie rend le couplage intercouche effectif $t_{eff}$ plus faible que le couplage intercouche imposé.

Pour un fort couplage intercouche , la température critique $T_c$ décroît. Dans le cas $T_{c0} \ll t \simeq \Delta E$, la variation de température s'écrit $\frac{T_c}{T_{c0}} \simeq \frac{\pi e^{-\gamma}}{\sqrt{\Delta E^2+4t^2}}$. On voit que la température critique n'est pas directement inversement proportionnelle au couplage intercouche.

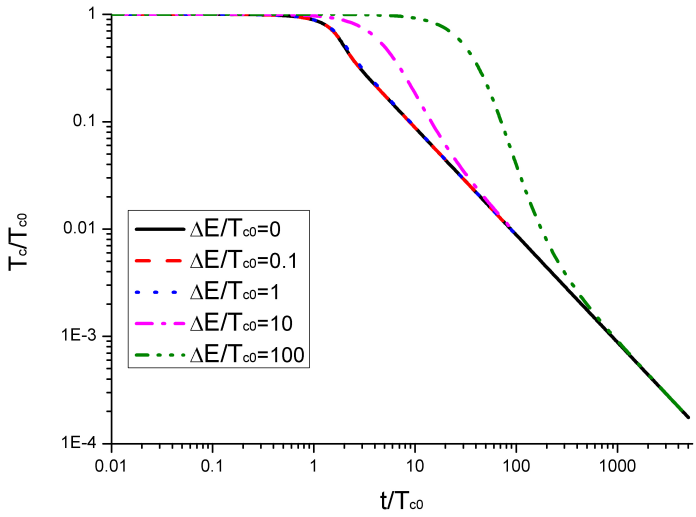



FIG. 3.15: Graphe de $T_c/T_{c0}$ et $\Delta/T_{c0}$ par rapport à $t/T_{c0}$ . Pour $t \ll \Delta E \ll T_{c0}$, la température critique décroît peu avec le couplage intercouche. Pour $T_{c0} \ll t \lesssim \Delta E$, le température critique diminue avec le couplage intercouche avec un coefficient différent que dans le cas $T_{c0} \ll \Delta E \ll t$.

Le couplage effectif entre couche $t_{eff}$ est plus élevé que le couplage $t$ réel, et la décroissance est plus rapide. Pour $T_{c0} \ll \Delta E \ll t$, on revient au cas précédemment étudié où $\frac{T_c}{T_{c0}} = \frac{\pi e^{-\gamma}}{2t}$. Il faut remarquer que le cas $\Delta E \ll T_{c0} \ll t$ est similaire au cas où $\Delta E \simeq 0$. Il n'existe alors que deux régimes de décroissance.

Le décalage énergétique limite le passage des paires de Cooper vers la couche N. Dans ce cas, il faut un couplage intercouche très fort pour espérer développer l'effet de proximité dans la couche N.

### Densité d'états dans les couches S et N en fonction de $t$ et de $\Delta E$

Un décalage énergétique entre le spectre électronique S et N influe sur la densité d'états dans les couches S et N. A partir de la formule

$$\rho(E) = -2\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\delta\to 0} G^{L,L}_{\uparrow,\uparrow}(E + i\delta, \xi)\, d\xi. \tag{3.21}$$

on peut calculer la densité d'états dans différentes configurations. Le décalage d'énergie doit influencer la densité d'états, en privant la bicouche d'état disponible pour une énergie $E$ comprise entre 0 et $\Delta E$. comme on le voit sur les figures 3.16 et 3.17 où sont représentées les densités d'états des couches S et N dans le cas où $\Delta E < \Delta_0$. La densité d'états est nulle pour des énergies $E$ qui sont inférieure à $\Delta E$. Dans le cas d'un couplage faible, on peut prendre $\Delta_0 \simeq 1.764 T_{c0}$. En, revanche, sur la figure 3.18, dans le cas où $\Delta E > \Delta_0$, on remarque que la densité d'états est nulle dans les couches jusqu'au saut caractéristique au niveau du gap supraconducteur, $E < \Delta_0$. En revanche, pour $\Delta_0 < E < \Delta E$, la densité d'états de la couche S est celle d'une couche S seule. Néanmoins, il existe une densité d'états non-nulle, quoique négligeable, dans la couche N. En revanche, dans le cas où $E > \Delta E$, la densité d'états redevient celle de la couche métallique normale. Il est crucial de noter que le gap d'énergie $\Delta E$ est différent du gap supraconducteur. La zone de densité d'états nulle observée dans la couche métallique est directement produite par le

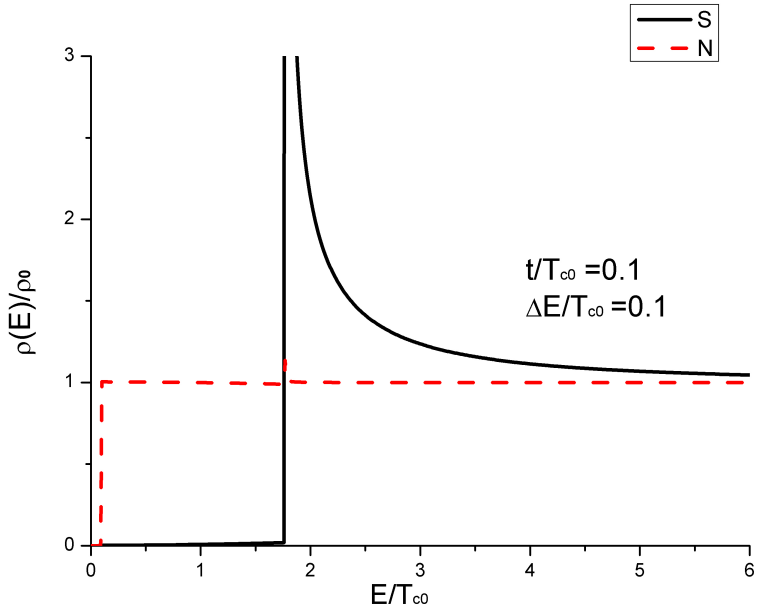



FIG. 3.16: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 0.1T_{c0}$ et un décalage énergétique $\Delta E/T_{c0} = 0.1T_{c0}$.

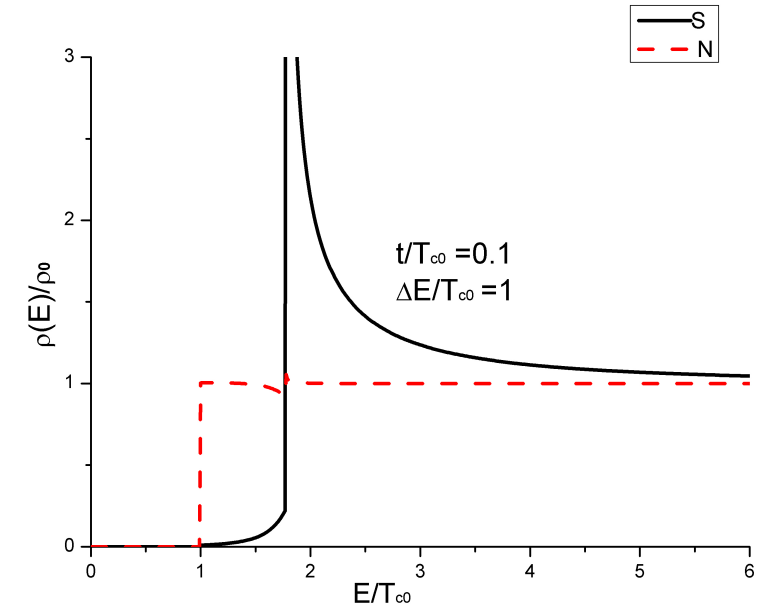



FIG. 3.17: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 0.1T_{c0}$ et un décalage énergétique $\Delta E/T_{c0} = T_{c0}$.

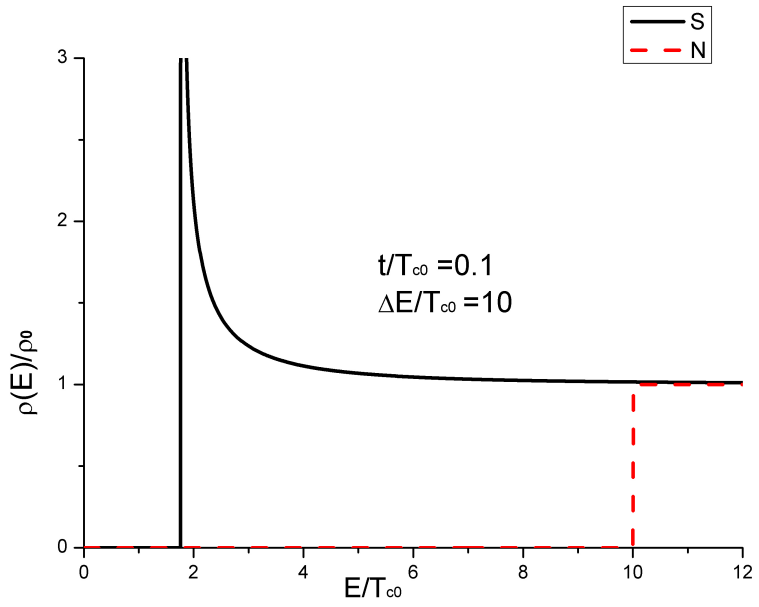



FIG. 3.18: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 0.1T_{c0}$ et un décalage énergétique $\Delta E/T_{c0} = 10T_{c0}$.

décalage énergétique $\Delta E$ entre le spectre supraconducteur et le spectre métallique. Dans le cas de la figure 3.19, on calcule la densité d'états pour $t = 100T_{c0}$ et $\Delta E = 100T_{c0}$. On voit que le comportement de la densité d'états est compliqué, mais qu'il est régit par les ordres de grandeurs du couplage intercouche et du décalage d'énergie. Dans ce cas, on peut calculer le gap supraconducteur $\Delta_0 = 0.93T_{c0}$. On observe deux plateaux de densités d'états qui pourraient être la signature de niveaux hybrides entre les couche S et N. Pour un couplage faible, on suppose que l'influence du décalage énergétique est le même sur les multicouches S/N/.../N que sur la bicouche S/N. A faible énergie $E < \Delta E$, le spectre des couches métallique n'est pas accessible, la densité d'états dans la couche métallique est nulle. Dans le cas où $E > \Delta E$, la densité dans les couches métallique redevient égale à $\rho_0$. En revanche, pour les forts couplages, il peut apparaître des différences directement produites par des niveaux hybrides entre les $L$ couches de la multicouche.

### 3.2.5 Densité d'états dans la multicouche S/N/.../N à faible couplage.

Dans la section précédente, nous avons constaté la dépendance complexe de la densité d'états avec l'énergie $E$. La présence de niveaux liants et anti-liants pourrait expliquer la forme de ces densités d'états. La dépendance des fonctions de Green de Gorkov dans les multicouches S/N par rapport au nombre de couche $L$ entraîne une étude la densité d'états dans les multicouches S/N dans le cas d'un faible couplage intercouche. Cette étude est pertinente pour les systèmes multicouches artificiels pour lesquels le couplage intercouche est souvent faible.

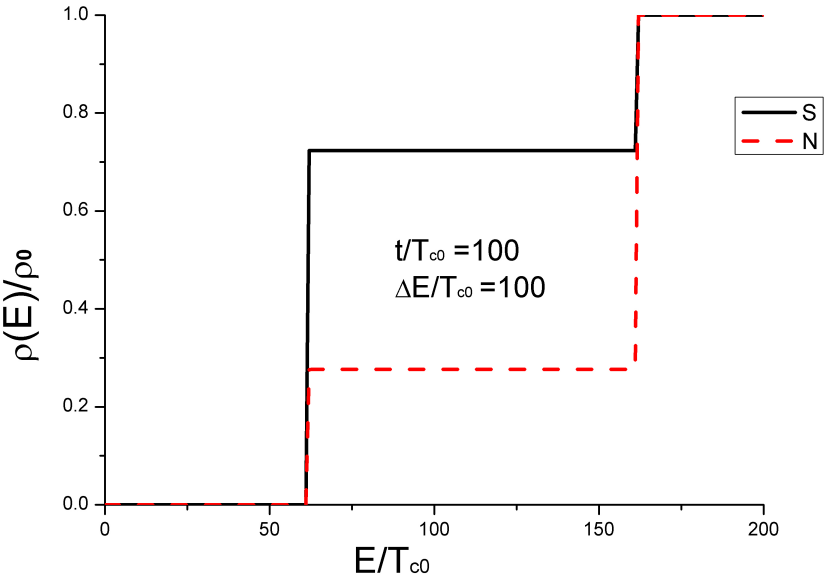



FIG. 3.19: Graphe de la densité d'état $\rho(E)/\rho_0$ dans la couche supraconductrice (ligne pleine) et dans la couche normale (ligne pointillé) pour $t = 100T_{c0}$ et un décalage énergétique $\Delta E/T_{c0} = 100T_{c0}$.

**Température critique de la couche supraconductrice incluse dans la multicouche S/N/.../N**

Afin de remonter aux propriétés de la couche S, il faut manipuler la fonction de Green anomale de la couche S. Cette fonction de Green s'écrit :

$$F^{\dagger 0,0}_{\downarrow,\uparrow} = \frac{\Delta_0^* a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}}{\left(\omega^2+\xi^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}-t((i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1})+t^2a_L\widetilde{a}_L} \quad (3.22)$$

$$G^{0,0}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{-a_{L+1}[(i\omega+\xi_s)\widetilde{a}_{L+1}+t\widetilde{a}_L]}{\left(\omega^2+\xi^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}-t((i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1})+t^2a_L\widetilde{a}_L} \quad (3.23)$$

avec $a_n = \sinh(qn)$ et $\widetilde{a}_n = \sinh(\widetilde{q}n)$.

On ne peut pas déterminer les propriétés de la couche S aussi facilement que dans les cas précédents. La raison est que le nombre arbitraire de couches métalliques composant la multicouche S/N/.../N rend la résolution exacte des équations d'autocohérence difficile. En revanche, on peut déterminer le comportement de la température critique dans le cas d'un faible couplage intercouche $t \ll T_{c0}$.

Dans le régime de faible couplage intercouche, la transmission des corrélations supraconductrices dans les couches N adjacentes est fortement limitée et devient rapidement très faible. Par conséquent, la température critique de la couche S varie très peu avec le couplage intercouche. Pour calculer la température critique dans le cas de faible couplage, on doit remonter à la forme explicite de fonction de Green anomale dans la couche 0. Dans le cas de faible couplage, $t \ll T_{c0}$, on remplace les sinus hyperbolique par leurs valeurs approchées qui s'écrivent

$$\begin{aligned} a_1 &= \sinh(q) \simeq \tfrac{(i\omega-\xi_n)}{t} \\ \widetilde{a}_1 &= \sinh(\widetilde{q}) \simeq -\tfrac{(i\omega+\xi_n)}{t} \end{aligned} \quad (3.24)$$

La fonction de Green anomale $F^{\dagger 0,0}_{\downarrow,\uparrow}$ s'écrit alors

$$F^{\dagger 0,0}_{\downarrow,\uparrow}=\frac{\Delta_0^*}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)}\left[1-\frac{2t^2}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)}\frac{\left(\omega^2-\xi_s^2\right)}{\omega^2+\xi_s^2}-\frac{t^4}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2\right)}\left(1-\frac{4}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)}\frac{\left(\omega^2-\xi_s^2\right)^2}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)}\right)\right] \tag{3.25}$$

La température critique s'écrit, à partir de l'équation d'autocohérence (2.12), $\frac{T_c}{T_{c0}}=1-\frac{7}{8}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{t}{T_{c0}}\right)^2$ ce qui est une variation absolument identique à celle de la bicouche S/N et la tricouche S/N/N. Le faible couplage entre couche atténue considérablement l'effet des couches métalliques lointaines sur la couche supraconductrice. Dans ce régime, le nombre de couche $L$ (donc l'épaisseur de la couche métallique) n'influe pas qualitativement sur la température critique de la couche supraconductrice.

De la même manière que dans la partie précédente, on peut déterminer le gap supraconducteur à température nulle pour un faible couplage intercouche. On part de la forme de la fonction (3.25) et à partir de la relation d'autocohérence (2.13), le gap supraconducteur s'écrit $\frac{\Delta(0)-\Delta_0}{\Delta_0}=\frac{4t^4}{|\Delta(0)|^4}\ln\left(\frac{t}{|\Delta_0|}\right)$. Cette variation est typique des faibles couplages où on voit apparaître une dépendance logarithmique. Pour les mêmes raisons que pour la température critique, le gap supraconducteur à température nulle varie de manière identique à faible couplage quelque soit le nombre de couche.

### Densité d'états dans la dernière couche de la multicouche S/N/.../N

A partir du formalisme développé dans la section précédente, on a déterminé la fonction de Green dans la couche S dans dans la dernière couche métallique d'indice $L$. On s'intéresse à la densité d'états lorsque le spectre du supraconducteur et du métal normal sont les mêmes. Dans un deuxième temps, nous nous intéressons au cas où les spectres supraconducteurs et métalliques sont décalés.

Si on se place à couplage très faible, $t \ll T_{c0}$, on voit que les propriétés de la couche S sont les mêmes que celle d'une couche S d'une bicouche S/N. La fonction de Green normale $G^{0,0}_{\uparrow,\uparrow}$ se simplifie dans cette approximation, et devient égale à la fonction de Green de la couche S d'une bicouche. De la même manière, la fonction de Green normale de la dernière couche métallique $G^{L,L}_{\uparrow,\uparrow}$ devient égale à une fonction de Green d'une couche métallique isolée. Afin d'étudier la transmission des corrélations supraconductrices dans l'approximation de faible couplage intercouche, il convient de transformer les fonctions de Green normale du système. Les corrélations supraconductrices sont transportées par le gap supraconducteurs. Ainsi, on va effectuer un développement en $\Delta^2$ des fonctions de Green pour étudier l'influence des corrélations supraconductrices sur les propriétés de la dernière couche métallique.

**Cas $\xi_n=\xi_s$** Dans ce cas, la fonction de Green (3.4) s'écrit :

$$G^{L,L}_{\uparrow\uparrow}=\frac{\sinh((L+2)\widetilde{q})\sinh((L+1)q)t^2+\sinh((L+1)\widetilde{q})\sinh(Lq)\Delta_0^2}{t\Delta_0^2\sinh((L+1)\widetilde{q})\sinh((L+1)q)+t^3\sinh((L+2)\widetilde{q})\sinh((L+2)q)}$$

On peut developper cette fonction en $\Delta^2$ pour obtenir :

$$G^{L,L}_{\uparrow\uparrow}=\frac{\sinh((L+1)q)}{t\sinh((L+2)q)}-\frac{\Delta_0^2}{t^3}\frac{\sinh((L+1)\widetilde{q})}{(\sinh((L+2)q))^2\sinh((L+2)\widetilde{q})}\left(\sinh\left(q\right)\right)^2 \tag{3.26}$$

En se plaçant dans la limite de faibles couplages, pour $t \ll T_{c0}$, on peut remplacer les sinus hyperboliques par leur formes explicite approchée de la formule (3.24). Ainsi, la fonction

de Green $G^{L,L}_{\uparrow\uparrow}$ de la formule (3.26) devient :

$$G^{L,L}_{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{i\omega-\xi_s} + \Delta_0^2 \frac{1}{(i\omega-\xi_s)^2(i\omega+\xi_s)} \left(\frac{t}{i\omega-\xi_s}\right)^{2L}$$

On remarque immédiatement que les corrélations supraconductrices dépendent directement du couplage intercouche à la puissance $2L$. Dans ce cas, on confirme que pour un nombre de couche très élevé $L > 100$, dans le cas d'un couplage intercouche faible $t \ll T_{c0}$, les corrélations supraconductrices induites dans la dernière couche métallique sont quasiment nulles. A partir de la relation (3.12) ,on trouve la densité d'états dans la couche métallique $L$ égale à :

$$\rho^L(E) = \rho_0 \left[1 + \frac{\Delta_0^2}{2E^2}\left(\frac{t}{2E}\right)^{2L}\right] \tag{3.27}$$

qui reste valide pour des énergies $E$ supérieures à $t$. On remarque immédiatement que la densité d'états est influencée par les corrélations supraconductrices à l'ordre $2L$ du couplage intercouche. Cette dépendance est logique car les corrélations supraconductrices concernent 2 électrons qui sont transmis sur $L$ couche. De la même manière, l'influence de la couche S sur la densité d'états de la couche $L$ est très faible.

**Cas $\xi_n \neq \xi_s$** En effectuant le développement en $\Delta^2$ de la fonction de Green $G^{L,L}_{\uparrow\uparrow}$ de la formule (3.4) s'écrit :

$$G^{L,L}_{\uparrow\uparrow} = \frac{t\sinh((L-1)q)-(i\omega-\xi_s)\sinh(Lq)}{t(t\sinh(Lq)-(i\omega-\xi_s)\sinh((L+1)q))} + \Delta_0^2 \frac{\sinh((L+1)\widetilde{q})(\sinh(q))^2}{((i\omega+\xi_s)\sinh((L+1)\widetilde{q})-t\sinh(L\widetilde{q}))(t\sinh(Lq)-(i\omega-\xi_s)\sinh((L+1)q))^2} \tag{3.28}$$

En se plaçant dans la limite de faibles couplages, pour $t \ll T_{c0}$, alors les sinus hyperboliques se simplifient (voir relation (3.24)) et la fonction (3.28) devient :

$$G^{L,L}_{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{(i\omega-\xi_n)} + \frac{\Delta_0^2}{(i\omega+\xi_s)(i\omega-\xi_s)^2}\left(\frac{t}{i\omega-\xi_n}\right)^{2L}$$

Le décalage énergétique entre les spectres électroniques du supraconducteur et du métal normal entraîne que les surfaces de Fermi sont fortement décalées. Il y a alors deux contributions principales aux propriétés de la multicouche S/N. Il y a une contribution autour de la surface de Fermi du supraconducteur. Le métal normal est considéré comme fortement décalé par rapport à lui. Il y a également une contribution autour de la surface de Fermi du métal, le supraconducteur étant considéré comme fortement décalé par rapport au métal. Le but de cette partie est donc d'évaluer la contribution autour de la surface de Fermi de S et de N et de déterminer, en fonction du nombre de couches $L$, laquelle des deux contributions est la plus importante. Ainsi, en fonction du nombre de couches, nous pourrons déterminer si les propriétés de la multicouches sont régies par les propriétés du supraconducteur ou par les propriétés du métal normal.

**Contribution des états proches de la surface de Fermi de la couche S :** Dans la situation où l'on effectue l'intégration proche de la surface de Fermi du supraconducteur, les spectres d'énergie peuvent être exprimer de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\xi_s &= \frac{p^2}{2m_S} - E_F \simeq v_{F_S}(p - p_{F_s}) \\
\xi_n &= \frac{p^2}{2m_n} - E_F \simeq \frac{p_{F_S}^2}{2m_n} - E_F = \frac{p_{F_S}^2 - p_{F_n}^2}{2m_n} = \Delta E \gg T_{c0}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

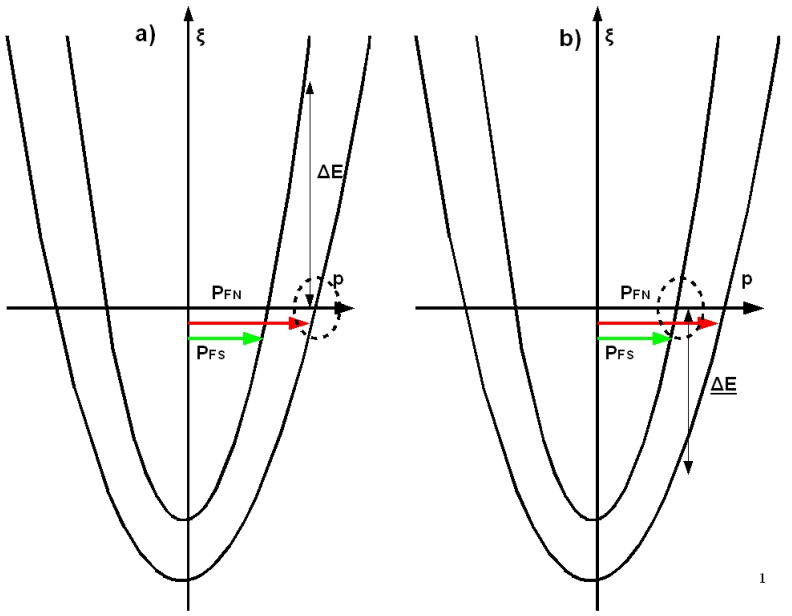



FIG. 3.20: Spectre électronique des couches S et N dans les deux cas d'intégrations. Dans le cas a), l'intégration se fait proche de la surface de Fermi du métal. Dans le cas b), l'intégration se fait proche de la surface de Fermi du supraconducteur. Le cercle en pointillé indique l'endroit où se déroule l'intégration.

où $v_{F_{S(n)}}$ est le vitesse de Fermi dans le supraconducteur (le métal normal), $p_{F_{S(n)}}$ l'impulsion de Fermi dans le supraconducteur (le métal normal) et $\Delta E$ est la différence d'énergie entre le spectre métallique et le spectre supraconducteur pour une impulsion égale à $p_{F_S}$. L'intégrale $\int dp$ devient $\int \frac{d\xi_s}{v_{F_s}}$. Ainsi la fonction de Green $G^{L,L}_{\uparrow\uparrow}$ devient :

$$G^{L,L}_{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{(i\omega - \xi_n)} + \frac{\Delta_0^2}{(i\omega+\xi_s)(i\omega-\xi_s)^2}\left(\frac{t}{i\omega-\xi_n}\right)^{2L}$$

et, à partir de la formule (3.12), la densité d'états s'écrit

$$\rho^L(E) = \rho_0\left(1 + \frac{\Delta^2}{2E^2}\left(\frac{t^2}{4E^2+(\Delta E)^2}\right)^L\right) \tag{3.30}$$

qui est valable dans la limite $E > t$. On voit que le terme dépendant du nombre de couche est le rapport entre le couplage intercouche et le décalage énergétique entre les spectres électroniques S et N. Proche de la surface de Fermi, $\rho^L(E)$ est limité par ce décalage énergétique. Dans l'approximation d'un fort décalage énergétique $\Delta E \gg T_{c0}$, la densité d'états s'écrit :

$$\rho^L(E) = \rho_0\left(1 + \frac{\Delta^2}{2E^2}\left(\frac{t}{\Delta E}\right)^{2L}\right).$$

On voit que la contribution à la densité d'états des corrélations supraconductrices est toujours très faible.

**Contribution des états proches de la surface de Fermi de la couche N :** Dans la situation où l'on effectue l'intégration proche de la surface de Fermi du métal

normal, les spectres d'énergie peuvent être exprimer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \xi_s &\simeq \frac{p_{F_n}^2}{2m_S} - E_F = -\frac{m_n}{m_S}\Delta E = \xi_n + \widetilde{\Delta E} \gg T_c \\ \xi_n &= v_{F_n}\left(p - p_{F_s}\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ainsi, la fonction de Green $G_{\uparrow\uparrow}^{L,L}$ s'écrit :

$$G_{\uparrow\uparrow}^{L,L} = \frac{1}{(i\omega - \xi_n)} + \frac{\Delta_0^2}{\left(i\omega + \xi_n + \widetilde{\Delta E}\right)\left(i\omega - \xi_n - \widetilde{\Delta E}\right)^2}\left(\frac{t}{i\omega - \xi_n}\right)^{2L}\left(1 - \frac{t^2[(i\omega-\xi_s)(i\omega-\xi_n)+2(i\omega+\xi_s)(i\omega+\xi_n)]}{(i\omega-\xi_s)(i\omega-\xi_n)(i\omega+\xi_s)(i\omega+\xi_n)}\right)$$

la densité d'états s'écrit

$$\rho^L(E) = \rho_0\left(1 + \frac{\Delta_0^2}{2E^2}\left(\frac{t^2}{4E^2 + \left(\widetilde{\Delta E}\right)^2}\right)^L\right) \tag{3.32}$$

qui est valable dans la limite $E > t$. On voit que le terme dépendant du nombre de couche est le rapport entre le couplage intercouche et le décalage énergétique entre les spectres électroniques S et N. Dans l'approximation d'un fort décalage énergétique $\widetilde{\Delta E} \gg T_{c0}$, la densité d'états s'écrit :

$$\rho^L(E) = \rho_0\left(1 + \frac{\Delta^2}{2E^2}\left(\frac{t}{\widetilde{\Delta E}}\right)^{2L}\right).$$

On voit que la contribution de densité d'états des corrélations supraconductrices est de nouveau trés faible. En revanche, la présence de $\widetilde{\Delta E}$ au dénominateur induit un différence dans la contribution des surfaces de Fermi du supraconducteur et du métal. En effet, $\widetilde{\Delta E}$ dépend du rapport de masse effective du métal et du supraconducteur.

**Conclusion**

Les corrélations supraconductrices sont fortement atténuées dans la dernière couche métallique et interviennent à l'ordre $2L$ par rapport au couplage intercouche. Ainsi, plus le nombre de couche est élevé, plus la transmission des paires de Cooper, et donc l'effet de proximité est faible dans la dernière couche métallique.

Si les spectres électroniques du supraconducteur et du métal normal sont décalés alors la densité d'états dans la dernière couche métallique varie selon que l'on considère les états proches de la surface de Fermi du métal où du supraconducteur. Ainsi, on voit que la contribution à la densité d'états de la couche $L$ des états proches de la surface de Fermi du supraconducteur ou ceux proche de la surface de Fermi du métal va dépendre du rapport de masse effective $m_n/m_s$. Si $m_n < m_s$, alors la contribution est plus importante pour les états proches de la surface de Fermi du métal. Cela signifie que les propriétés de la multicouche sont essentiellement dirigées par les couches métalliques. Le nombre de couche $L$ diminue fortement la transmission des corrélations supraconductrices. Si $m_n > m_s$, alors la contribution est plus importante pour les états proches de la surface de Fermi du supraconducteur. La densité d'états est gouvernée par les propriétés de la couche $S$. Si $m_n = m_s$, les propriétés sont indépendamment gouvernée par les couches métalliques et par la couche $S$.

On voit que les propriétés intrinsèques des matériaux en contact jouent un rôle prépondérant dans les propriétés des multicouches. Ainsi, une différence de masse effective peut déterminer quelles couches contribuent le plus aux propriétés de la multicouches S/N/.../N. Une étude de ces effets pour un fort couplage intercouche permettrait de préciser le rôle joué par chacune des surfaces de Fermi.

## 3.3 Etude de la jonction S/N/.../N/S

L'étude de l'effet d'épaisseur d'une jonction sur le courant Josephson a été étudié dans les jonctions S/N/S [188]. Les auteurs démontre une dépendance en température du courant critique Josephson différente selon l'épaisseur de la jonction. Dans les tricouches S/F/S, l'état 0 où $\pi$ de la jonction peut dépendre de l'épaisseur de la jonction [64]. Dans les multicouches S/N/S, l'étude du nombre de couche va permettre d'appréhender le rôle de l'épaisseur du métal et du spectre métallique sur les propriétés de la multicouche S/N/.../N/S.

### 3.3.1 Etude de la jonction S/N/S

Avant d'étudier le cas de la multijonction S/N/S, nous allons étudier le cas de la tricouche S/N/S où $L = 2$. Nous savons que l'état de la tricouche S/N/S est la phase 0. En effet, la phase $\pi$ n'apparaît que pour un décalage significatif de spectre entre les sous bandes d'électrons de spin. Cependant, nous étudions les propriétés de la tricouche dans l'état $\pi$ car on démontre que le gap supraconducteur dans l'état $\pi$ est supérieur au gap supraconducteur dans l'état 0 à température nulle. Pour cette jonction, les couches supraconductrices portent les indices $n = 0$ et $n = 2$ et la couche de métal porte l'indice $n = 1$. A partir de la théorie de l'hamiltonien tunnel, explicitée dans la section 1.3.2 du chapitre 1, le système d'équation à résoudre dans le cadre de la tricouche S/N/S s'écrit :

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_s)\, G^{0,0}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{1,0}_{\uparrow,\uparrow} + \Delta_0 F^{+0,0}_{\downarrow,\uparrow} = 1 \\ (i\omega - \xi_s)\, G^{1,0}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{0,0}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{2,0}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega - \xi_s)\, G^{2,0}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{1,0}_{\uparrow,\uparrow} + \Delta_2 F^{+2,0}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{+2,0}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{+1,0}_{\downarrow,\uparrow} + \Delta^*_2 G^{2,0}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{+1,0}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{+0,0}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{+2,0}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{+0,0}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{+1,0}_{\downarrow,\uparrow} + \Delta^*_0 G^{0,0}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \end{cases}$$

où $\Delta_0$ est le gap supraconducteur de la couche 0 et $\Delta_2$ celui de la couche 2. De ce système, on remonte à la fonction de Green anomale de la jonction S/N/S :

$$F^{+0,0}_{\downarrow,\uparrow} = \frac{\left(\left(\omega^2+\xi_s^2\right)|\Delta_2|^2+\left(t^2+\omega^2+\xi_s^2+2t\xi_s\right)\left(t^2+\omega^2+\xi_s^2-2t\xi_s\right)\right)\Delta_0^*+t^4\left(\Delta_2^*\right)}{\left(4\omega^2+4\xi_s^2+|\Delta_2|^2+|\Delta_0|^2+\Delta_0\Delta_2^*+\Delta_2\Delta_0^*\right)t^4+2\left(\omega^2-\xi_s^2\right)\left(2\omega^2+2\xi_s^2+|\Delta_2|^2+|\Delta_0|^2\right)t^2+\left(\omega^2+\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_2|^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)}.$$

Lorsque l'on se trouve dans l'état 0, c'est à dire lorsque $\Delta_0^{(*)} = \Delta_2^{(*)}$, la fonction de Green s'écrit :

$$F^{+0,0}_0 = \frac{\left(\left(\omega^2+\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)+2t^2\left(\omega^2-\xi_s^2\right)+2t^4\right)\Delta^*}{4\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)t^4+4\left(\omega^2-\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)t^2+\left(\omega^2+\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)^2} \tag{3.33}$$

en posant $\Delta_0^{(*)} = \Delta^{(*)}$. Lorsque l'on se trouve dans l'état $\pi$, c'est à dire lorsque $\Delta_0^{(*)} = -\Delta_2^{(*)}$, la fonction de Green s'écrit :

$$F^{+0,0}_\pi = \frac{\left(\left(\omega^2+\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)+2t^2\left(\omega^2-\xi_s^2\right)\right)\Delta^*}{4\left(\omega^2+\xi_s^2\right)t^4+4\left(\omega^2-\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)t^2+\left(\omega^2+\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)^2} \tag{3.34}$$

en posant $\Delta_0^{(*)} = \Delta^{(*)}$. A partir de la fonctions (3.33) (ou (3.34)), on peut remonter à la température critique et au gap supraconducteur de la jonction dans la phase 0 (ou $\pi$).

**Température critique dans les phase 0 et $\pi$**

La différence de température critique dans l'état 0 et dans l'état $\pi$ s'obtient en combinant les fonctions anomales (3.33) et (3.34) avec la relation d'autocohérence (3.2). Ainsi, la variation de température critique dans l'état 0 et dans l'état $\pi$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{T_c^0}{T_{c0}}\right) &= T_c^0 \sum_\omega \int d\xi_s \left(\frac{F_0^{+0,0}}{\Delta^*} - \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)}\right) \\
\ln\left(\frac{T_c^\pi}{T_{c0}}\right) &= T_c^\pi \sum_\omega \int d\xi_s \left(\frac{F_\pi^{+0,0}}{\Delta^*} - \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donnent comme résultat

$$\ln\left(\frac{T_c^0}{T_{c0}}\right) = -\tfrac{1}{4}\gamma - \tfrac{1}{2}\ln(2) - \tfrac{1}{8}\Psi\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{it\sqrt{2}}{2\pi T_c^0}\right) - \frac{1}{8}\Psi\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{it\sqrt{2}}{2\pi T_c^0}\right) \quad (3.35)$$

$$\ln\left(\frac{T_c^\pi}{T_{c0}}\right) = -\gamma - 2\ln(2) - \tfrac{1}{2}\Psi\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{it\sqrt{2}}{4\pi T_c^\pi}\right) - \tfrac{1}{2}\Psi\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{it\sqrt{2}}{4\pi T_c^\pi}\right) \quad (3.36)$$

La variation de température critique dans l'état 0 et $\pi$ est représentée sur les figures 3.21 et 3.22 en trait plein. Dans le cas d'un faible couplage intercouche $t \ll T_{c0}$, la variation de la température critique dans l'état 0 s'écrit $\frac{T_c^0}{T_{c0}} = 1 - \frac{7}{8}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{t}{T_{c0}}\right)^2$. La variation est identique pour la température critique dans l'état $\pi$. En réalité, la température critique est plus faible dans l'état $\pi$ que dans l'état 0. Cette différence ne s'apprécie qu'à l'ordre supérieur en $t$. Cela corrobore que l'on ne peut observer que l'état 0. Cette variation quasi identique s'explique par le fait qu'à faible couplage, les corrélations supraconductrices entre les deux couches S sont très faibles également.

Dans le cas d'un fort couplage intercouche, $t \gg T_{c0}$, la variation de la température dans l'état 0 s'écrit $\frac{T_c^0}{T_{c0}} = \left(\frac{\pi e^{-\gamma}}{2\sqrt{2}}\frac{1}{t/T_{c0}}\right)^{1/3}$. La température critique est inversement proportionnelle au couplage intercouche avec une loi de puissance de 1/3. Cette variation est plus faible que dans le cas de la tricouche S/N/N mais cette différence s'explique par la présence de deux couches supraconductrices. En revanche, on voit que la température critique dans l'état $\pi$ n'est pas définie pour les fort couplages (voir figure 3.22). A fort couplage intercouche, la jonction S/N/S doit être considérée comme une couche unique dans laquelle la notion de phase $\pi$ perd son sens.

**Gap supraconducteur à température nulle pour les phase 0 et $\pi$**

Pour s'intéresser au gap supraconducteur à température nulle de la jonction dans la phase 0 et $\pi$, il faut utiliser les fonctions (3.33) et (3.34) avec la relation d'autocohérence (3.2). En effectuant le changement de variable introduit dans la section 2 du chapitre 2, la relation d'autocohérence donne la variation du gap supraconducteur à température nulle

$$\ln\left(\frac{\Delta^0}{\Delta_0}\right) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{d\rho}{4\pi}\left(\frac{\rho\left(\rho+|\Delta|^2\right)-2t^2\rho\cos(2\phi)+2t^4}{4t^4\left(\rho+|\Delta|^2\right)-4t^2\rho\left(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi)\right)\left(\rho+|\Delta|^2\right)+\rho\left(\rho+|\Delta|^2\right)^2} - \frac{1}{\rho+|\Delta|^2}\right) \quad (3.37)$$

$$\ln\left(\frac{\Delta^\pi}{\Delta_0}\right) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{d\rho}{4\pi}\left(\frac{\rho\left(\rho+|\Delta|^2\right)-2t^2\rho\cos(2\phi)}{4\rho t^4-4t^2\rho\left(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi)\right)\left(\rho+|\Delta|^2\right)+\rho\left(\rho+|\Delta|^2\right)^2} - \frac{1}{\rho+|\Delta|^2}\right). \quad (3.38)$$

où $\xi_s = \sqrt{\rho}\cos(\phi)$, $\omega = \sqrt{\rho}\sin(\phi)$ et $\Delta^{0(\pi)}$ le gap supraconducteur dans la phase zéro ($\pi$). Le gap supraconducteur à température nulle en fonction du couplage intercouche est re-

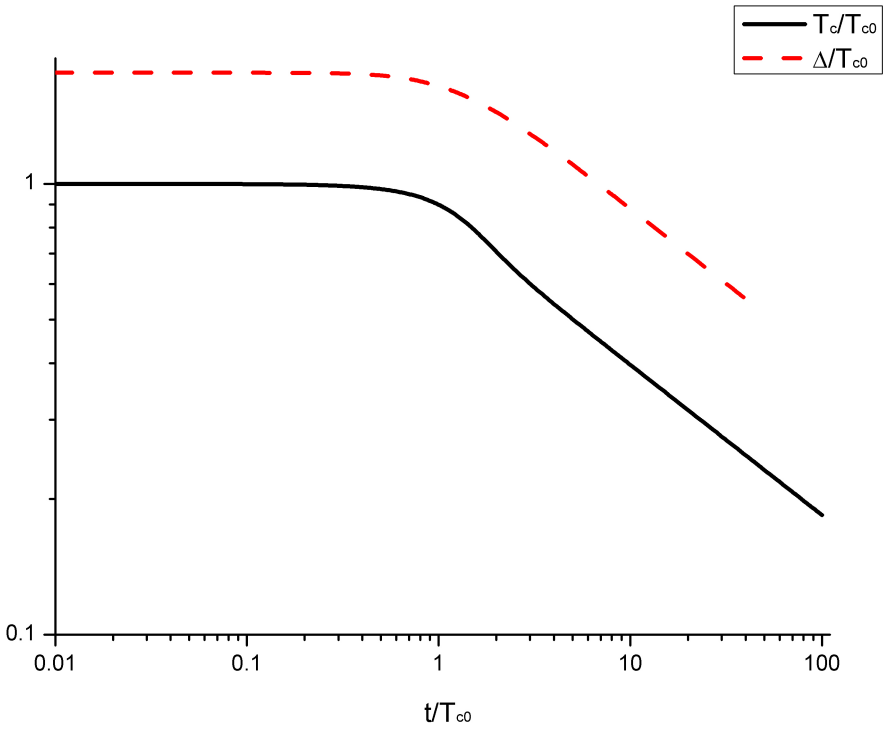



FIG. 3.21: Graphe de $T_c^0/T_{c0}$ (trait plein) et de $\Delta^0/T_{c0}$ (trait pointillé) en fonction de $t/T_{c0}$. On voit que la température critique et le gap supraconducteur décroissent en fonction du couplage intercouche. Pour $t > T_{c0}$, la température critique et le gap supraconducteur sont inversement proportionnels au couplage intercouche à la puissance $\frac{1}{3}$.

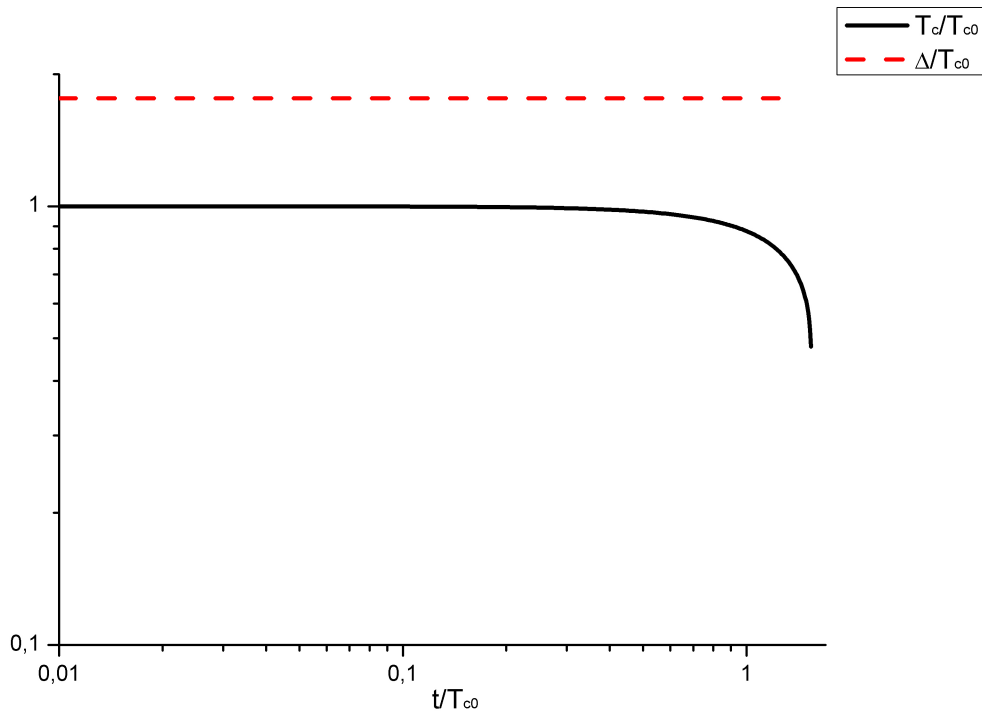



FIG. 3.22: Graphe de $T_c^\pi/T_{c0}$ (trait plein) et de $\Delta^\pi/T_{c0}$ (trait pointillé) en fonction de $t/T_{c0}$. Le gap supraconducteur en phase $\pi$ reste constant quelque soit le couplage intercouche. Pour $t > T_{c0}$, le couplage intercouche et la température critique disparaissent. La notion de phase $\pi$ n'est plus pertinente si le couplage intercouche est trop grand.

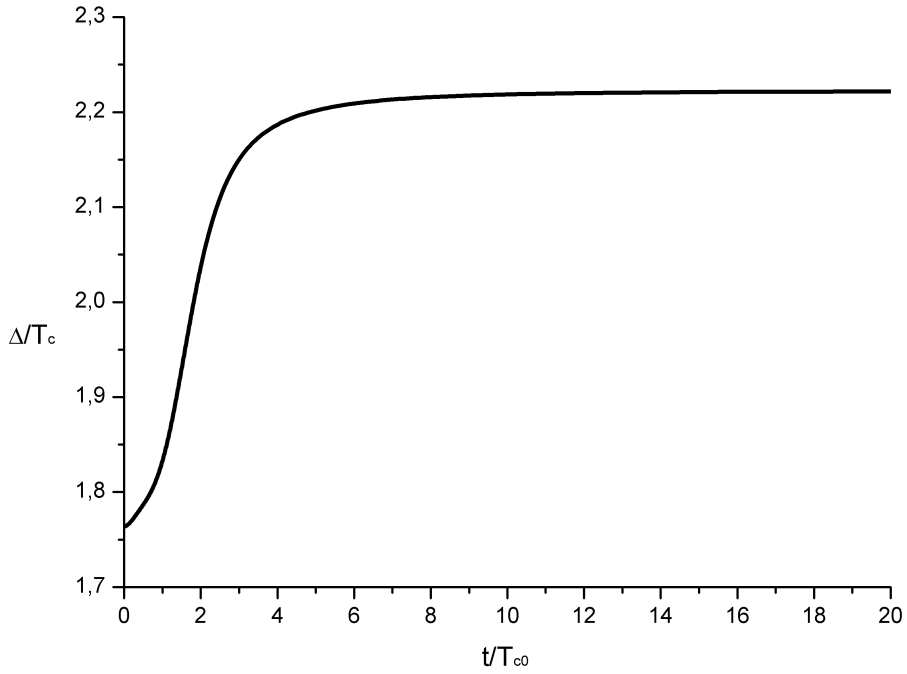



FIG. 3.23: Graphe de $\Delta^0/T_c$ en fonction de $t/T_{c0}$. On voit qu'il existe un plateau pour les fort couplage intercouche ou le rapport $\Delta^0/T_c$ est égal à 2.21.

présenté sur les figures 3.21 et 3.22. On remarque que la variation du gap supraconducteur suit la variation de la température critique dans le cas de la jonction dans la phase 0. La relation de proportionnalité entre le gap et la température critique en fonction de l'effet de proximité est représentée sur la figure 3.23. On remarque que le coefficient est moins élevé que pour la tricouche S/N/N. La présence d'une deuxième couche supraconductrice renforce la supraconductivité à fort couplage intercouche. La relation entre $\Delta(0)$ et $T_c$ devient alors plus proche que dans le cas S/N/N. Pour la phase $\pi$, le gap supraconducteur reste constant.

On voit que $\Delta^0$ est inférieur à $\Delta^\pi$. Ce constat est surprenant car on sait que la phase $\pi$ est moins stable que la phase 0. Pour de faibles couplages, la différence entre $\Delta^0$et $\Delta^\pi$ s'écrit :

$$\frac{\Delta^0-\Delta^\pi}{\Delta^\pi}=T\sum_\omega\int_0^{+\infty}\left[\frac{4t^4\left[\omega^2+\xi_s^2-\Delta^2\right]}{\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)^3\left(\omega^2+\xi_n^2\right)}\right]d\xi_s$$

qui confirme qu'à température nulle, $\Delta^0 < \Delta^\pi$. Cette différence est écrite ici dans le cas général où le spectre des couches métalliques est différent du spectre de la couche supraconductrice. Si $\Delta^0$ est inférieur à $\Delta^\pi$, cela ne signifie pas que la phase $\pi$ est plus stable que la phase 0. On voit d'ailleurs que la température critique de la phase 0 est toujours supérieure à celle de la phase $\pi$. Cette différence n'implique pas une changement radical dans la compréhension de la jonction S/N/S. Elle démontre en outre la relation complexe entre le gap supraconducteur à température nulle et la température critique.

**Courant Josephson dans les tricouches S/N/S**

**Courant Josephson à température nulle** Pour le calcul direct du courant Josephson, on aura besoin des fonctions de Green normales intercouches qui s'écrivent :

$$G^{1,0}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{(i\omega+\xi_s)^2\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)t+\left(-2\omega^2-2\xi_s^2-|\Delta|^2-\Delta_0^*\Delta_2\right)t^3}{\left(4\omega^2+4\xi_s^2+2|\Delta|^2+\Delta_0\Delta_2^*+\Delta_2\Delta_0^*\right)t^4+4\left(\omega^2-\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)t^2+\left(\omega^2+\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)^2}$$

et

$$G^{0,1}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{(i\omega+\xi_s)^2\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)t+\left(-2\omega^2-2\xi_s^2-|\Delta|^2-\Delta_0\Delta_2^*\right)t^3}{\left(4\omega^2+4\xi_s^2+2|\Delta|^2+\Delta_0\Delta_2^*+\Delta_2\Delta_0^*\right)t^4+4\left(\omega^2-\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)t^2+\left(\omega^2+\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)^2}.$$

Le courant Josephson se calcul par la formule

$$j_\perp = i\frac{2eN_{2D}\left(0\right)}{\hbar}tT\sum_{n=0}^{\infty}\int d\xi_s\left(G^{10}_{\uparrow,\uparrow}-G^{01}_{\uparrow,\uparrow}\right). \tag{3.39}$$

où $N_{2D}$ est la densité d'états électronique en deux dimensions, $e$ est la charge de l'électron et $\hbar$ la constante de Planck normalisée. Ainsi, de la formule (3.39), on peut déterminer le courant Josephson dans la jonction S/N/S, en posant $\Delta_0 = |\Delta_0|\, e^{i\chi_0}$ et $\Delta_2 = |\Delta_0|\, e^{-i\chi_2}$ où $\chi_{0(2)}$ est la phase du supraconducteur 0 et 2. Le courant Josephson s'écrit alors :

$$j_\perp = -\frac{4eN_{2D}(0)|\Delta|^2t^4}{\hbar}T\sum_{n=0}^{\infty}\int d\xi_s\left(\frac{\sin(\chi)}{\left(4\omega^2+4\xi_s^2+2|\Delta|^2(1+\cos(\chi))\right)t^4+4\left(\omega^2-\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)t^2+\left(\omega^2+\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)^2}\right)$$

où $\chi = \chi_2 - \chi_0$ est la différence de phase entre le supraconducteur 0 et 2. On peut calculer le courant critique Josephson dans la jonction S/N/S à température nulle qui s'écrit :

$$j_\perp = -\frac{4e|\Delta|^2N_{2D}(0)t^4}{\hbar}\int d\rho\left(\frac{\sin(\chi)}{\sqrt{\left(2t^4(2\rho+\alpha\Delta^2)+4t^2\rho(\rho+\Delta^2)+\rho(\rho+\Delta^2)^2\right)\left(2t^4(2\rho+\alpha\Delta^2)-4t^2\rho(\rho+\Delta^2)+\rho(\rho+\Delta^2)^2\right)}}\right)$$

avec $\alpha = (1+\cos(\chi))$. On remarque un terme dépendant de $\cos(\chi)$ qui introduit une anharmonicité dans la dépendance courant-phase. Proche de la température critique, on peut considérer que le gap tend vers zéro, et on trouve une dépendance courant-phase parfaitement harmonique. Le calcul exact du courant Josephson $j_\perp$ met en évidence une saturation du courant Josephson pour la température nulle.

**Courant Josephson à toute température** Pour calculer le courant critique Josephson à toutes températures, on calcule l'énergie libre de la jonction S/N/S dans l'état 0 et l'état $\pi$ à partir de la formule

$$\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n = \int_0^{\Delta(0)}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\partial\Delta}\Delta^2\right)d\Delta$$

établit dans la référence [51]. La différence d'énergie, dans le cas de faible couplage $t \ll T_{c0}$, s'écrit

$$\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0 = 4t^4N\left(0\right)\Delta^2T\sum_\omega\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\left(\omega^2+\xi_n^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)^2}\right]d\xi_s$$

où l'on voit que cette différence est toujours positive ce qui signifie que l'état $\pi$ est toujours moins stable que l'état 0. A partir de cette différence d'énergie, on peut définir le courant

critique Josephson à partir de la formule établit dans la référence [160], $\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0 = \left(\frac{\hbar}{e}\right) I_c$ où $e$ est la charge électronique et $\hbar$ la constante de Planck normalisée. Le courant critique s'écrit dans le cas où $\xi_n = \xi_s$ :

$$I_c = \frac{4et^4 N(0)\,\Delta^2 T}{\hbar} \sum_\omega \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)^2} \right] d\xi_s$$

Si on se place proche de la température critique du supraconducteur, alors $\Delta$ peut être considérer comme nul et le courant critique est égal à

$$I_c = \frac{et^4 N(0)\,\Delta^2}{\hbar} \frac{93}{128} \frac{\zeta(5)}{T_c^4 \pi^4}.$$

On remarque que le courant Josephson est directement proportionnel au gap supraconducteur au carré. Dans l'approximation utilisée, on remarque que le courant Josephson est également proportionnel à $t^4$. Cette dépendance est directement reliée à la nature du courant Josephson. Ce dernier est constitué d'un courant de paire Cooper ici à travers deux interfaces. De plus, il est inversement proportionnel à la température critique $T_c^4$.

### 3.3.2 Modélisation de la jonction S/N/.../N/S

Pour trouver les fonctions de Green de Gorkov d'une jonction S/N/.../N/S, on va utiliser la forme des fonctions de Green (3.3) présentée dans la section précédente. La résolution du système d'équation de la jonction multicouche va nous permettre d'évaluer le gap supraconducteur dans l'état 0 et dans l'état $\pi$ de la première couche supraconductrice dans le cas d'un faible couplage intercouche. De ce résultat, nous en déduirons l'énergie libre de la jonction et le courant critique Josephson qui traverse la jonction.

En se plaçant dans le cas d'un faible couplage $t \ll T_{c0}$, la fonction de Green anomale (3.11) de la première couche supraconductrice s'écrit :

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0} = \frac{\Delta_L^*\left(\omega^2+\xi_n^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta_0^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta_L^2\right)} \left(\frac{t^2}{\omega^2+\xi_n^2}\right)^L + \frac{\Delta_0^*}{\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta_0^2\right)} - \frac{2\Delta_L^*|\Delta_0|^2\left(\omega^2+\xi_n^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta_0^2\right)^2\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta_L^2\right)} \left(\frac{t^2}{\omega^2+\xi_n^2}\right)^L$$

en gardant uniquement les termes à l'ordre $2L$. Si l'on ne conserve que les termes susceptibles de changer de signe lors de la transition de phase $0-\pi$, alors la fonction de Green s'écrit :

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0} = \frac{\Delta_0^*}{\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta_0^2\right)} + \frac{\Delta_L^*\left(\omega^2+\xi_n^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2-\Delta_0^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta_0^2\right)^2\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta_L^2\right)} \left(\frac{t^2}{\omega^2+\xi_n^2}\right)^L \tag{3.40}$$

On constate immédiatement que le terme de couplage intercouche est directement relié au spectre énergétique du métal. Cela signifie que l'effet de proximité qui se propage dans la jonction S/N/S multicouche est fortement influencé par la forme du spectre électronique des couches métalliques. Lorsque la jonction est dans la phase 0 $\left(\Delta_0^{(*)} = \Delta_L^{(*)}\right)$, la fonction (3.40) s'écrit :

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0} = \frac{\Delta^{0*}}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta^0|^2\right)} + \frac{\Delta^{0*}\left(\omega^2+\xi_n^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2-\left|\Delta^0\right|^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta^0|^2\right)^3} \left(\frac{t^2}{\omega^2+\xi_n^2}\right)^L. \tag{3.41}$$

où $\Delta^0$ est le gap supraconducteur lorsque la jonction est dans la phase 0. Dans la phase $\pi$, $\left(\Delta_0^{(*)} = -\Delta_L^{(*)}\right)$, la fonction (3.40) s'écrit :

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0} = \frac{\Delta^{\pi^*}}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta^\pi|^2\right)} - \frac{\Delta^{\pi^*}\left(\omega^2+\xi_n^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2-|\Delta^\pi|^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta^\pi|^2\right)^3}\left(\frac{t^2}{\omega^2+\xi_n^2}\right)^L$$

où $\Delta^\pi$ est le gap supraconducteur lorsque la jonction est dans la phase $\pi$. L'équation d'autocohérence dans la phase 0 et $\pi$ peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\Delta}{\Delta^0}\right) &= \pi T\sum_\omega \int d\xi_s \left[-\frac{\left(\omega^2+\xi_n^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2-\left|\Delta^0\right|^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta^0|^2\right)^3}\left(\frac{t^2}{\omega^2+\xi_n^2}\right)^L - \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)}\right] \\
\ln\left(\frac{\Delta}{\Delta^\pi}\right) &= \pi T\sum_\omega \int d\xi_s \left[\frac{\left(\omega^2+\xi_n^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2-|\Delta^\pi|^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta^\pi|^2\right)^3}\left(\frac{t^2}{\omega^2+\xi_n^2}\right)^L - \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)}\right]
\end{aligned}$$

où l'on remarque que le terme de gauche est évalué à température nulle.

Pour un faible couplage intercouche, on peut considérer que la différence entre les gaps supraconducteurs dans les phases 0 et $\pi$ est la même à température nulle qu'à température finie mais faible. En effet, la différence $\Delta^0 - \Delta^\pi$ est très petite à faible couplage comme l'étude de la jonction S/N/S nous l'a précédemment montré. Ici, on voit que cette différence va évoluer en puissance $2L$ du couplage intercouche. La relation directe entre $\Delta^0$ et $\Delta^\pi$ s'écrit :

$$\ln\left(\frac{\Delta^0}{\Delta^\pi}\right) = \pi T\sum_\omega \int d\xi_s \left[\frac{\left(\omega^2+\xi_n^2\right)\left(\omega^2+\xi_s^2-|\Delta|^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta|^2\right)^3}\left(\frac{t^2}{\omega^2+\xi_n^2}\right)^L\right] \tag{3.42}$$

où l'on considère $\Delta$ comme le gap supraconducteur moyen $\frac{\Delta_0+\Delta_\pi}{2}$. La différence $\Delta^0 - \Delta^\pi$ étant très faible, on peut considérer $\Delta$ comme le gap supraconducteur d'une monocouche $S$ isolée $\Delta_0$. Ces approximations multiples permettent néanmoins de remonter à la différence $\Delta^0$ et $\Delta^\pi$ avec une bonne approximation.

**Gap supraconducteur dans les phases 0 et $\pi$**

A partir de l'équation d'autocohérence (3.42), on peut trouver assez simplement la différence $\Delta^0 - \Delta^\pi$, qui s'écrit dans le cas multicouche :

$$\frac{\Delta^0 - \Delta^\pi}{\Delta^\pi} = \pi T\sum_\omega \int_0^{+\infty} \left[\frac{t^{2L}\left(\omega^2+\xi_s^2-\Delta^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_n^2\right)^{L-1}\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)^3}\right] d\xi_s. \tag{3.43}$$

On voit qu'à basse température, cette différence est négative ce qui entraîne que le gap supraconducteur dans l'état 0 est plus faible que le gap dans l'état $\pi$. On remarque également que cette différence dépend explicitement du nombre de couche, et donc de l'épaisseur de la jonction S/N/S.

Dans le cas limite ou $\xi_n = \xi_s$, la différence de gap supraconducteur est égal à

$$\frac{\Delta^0 - \Delta^\pi}{\Delta^\pi} = \frac{-T^4\zeta(2L-3)}{\Delta^4 2^{L-1}\pi^{2L-4}(L-2)!}\frac{2^{2L-3}-1}{2^{2L-3}}\left(\frac{t}{T}\right)^{2L} \tag{3.44}$$

ou l'on voit que cette différence est négative à basses températures. Pour passer de la relation (3.43) à la relation (3.44), on effectue une intégration sur les résidus en ne gardant que les termes de plus haute puissances. Les termes divergents, qui dépendent notamment

de $\Delta$ vont s'éliminer. Cette différence est négative ce qui signifie que le gap supraconducteur pour une jonction $\pi$ est supérieur au gap supraconducteur pour une jonction 0. Ce résultat est le même que le résultat trouvé pour la jonction S/N/S, dans le cas où $L = 2$.

De la même manière que pour la multicouche S/N/.../N, nous étudions l'influence d'une différence de spectre électronique sur les propriétés des jonctions S/N/.../N/S. Dans ce cas, nous allons calculer les contributions d'états proche de la surface de Fermi du supraconducteur et proche de la surface de Fermi du métal.

**Contribution des états proches de la surface de Fermi du supraconducteur** On a un spectre métallique très décalé par rapport au gap supraconducteur. En tenant compte des conditions (3.29), on pose $\xi_n = \Delta E \gg T_c$. La différence des gaps supraconducteurs (3.43) devient :

$$\frac{\Delta^0 - \Delta^\pi}{\Delta^\pi} = \frac{4t^{2L}T}{\Delta E^{2L-2}} \sum_\omega \int_0^{+\infty} \left[ \frac{\left(\omega^2+\xi_s^2-\Delta^2\right)}{\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)^3} \right] d\xi_s. \tag{3.45}$$

et proche de la température critique, on peut faire un développement limité de $\Delta$ et la différence de gap supraconducteur devient :

$$\frac{\Delta^0 - \Delta^\pi}{\Delta^\pi} = \left(\frac{t}{\Delta E}\right)^{2L} \frac{\Delta E^2 \left(56\zeta\left(3\right)\pi^2 T_c^2 - 31\Delta^2\zeta\left(5\right)\right)}{32\pi^4 T_c^4}$$

On remarque que la différence $\Delta^0 - \Delta^\pi$ est positive quelque soit le gap supraconducteur. Ce qui signifie que la contribution des états proches de la surface de Fermi du supraconducteur entraîne que le gap supraconducteur dans la phase 0 , $\Delta^0$ est supérieur au gap supraconducteur dans la phase $\pi$, $\Delta^\pi$ proche de la température critique. Cette différence est fortement atténuée par l'existence de décalage d'énergie entre les spectres supraconducteurs et métalliques. A température nulle, cette différence est nulle.

**Contribution des états proches de la surface de Fermi du métal normal** En tenant compte des conditions (3.31), on pose $\xi_s = -\frac{m_n}{m_S}\Delta E \gg T$. La différence des gaps supraconducteurs (3.43) devient :

$$\frac{\Delta^0 - \Delta^\pi}{\Delta^\pi} = 4t^{2L}T \frac{\left(\left(\frac{m_n}{m_S}\Delta E\right)^2-\Delta^2\right)}{\left(\left(\frac{m_n}{m_S}\Delta E\right)^2+\Delta^2\right)^3} \sum_\omega \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_n^2\right)^{L-1}} \right] d\xi_n.$$

s'écrit

$$\frac{\Delta^0 - \Delta^\pi}{\Delta^\pi} = \frac{2^{2L-3}-1}{2^{2L-3}} \frac{\zeta\left(2L-3\right)T^4}{\pi^{2L-4}2^{L-3}\left(L-2\right)!} \frac{\left(\left(\frac{m_n}{m_S}\Delta E\right)^2-\Delta^2\right)}{\left(\left(\frac{m_n}{m_S}\Delta E\right)^2+\Delta^2\right)^3} \left(\frac{t}{T}\right)^{2L}$$

dans le cas $\Delta \gg T$ et $t \ll T$. On remarque également qu'à basse température, la différence $\Delta^0 - \Delta^\pi$ est négative dans le cas où $\frac{m_n}{m_S}\Delta E$ est plus petit que $\Delta$. Dans le cas d'un très grand décalage d'énergie $\frac{m_n}{m_S}\Delta E \gg \Delta$, alors la différence $\Delta^0 - \Delta^\pi$ est toujours positive. On voit que l'influence des états proches de la surface de Fermi du métal peut entraîner cette inversion dans les gaps supraconducteurs en phase 0 et $\pi$.

**Conclusion** Il est difficile de comparer les deux dépendances. On remarque surtout que cette différence est toujours proportionnelle au couplage intercouche $t$ à la puissance $2L$. Comme $t \ll T_{c0}$, il y a une forte décroissance de ces différences avec l'épaisseur de la jonction. Les deux dépendances décroissent avec la température, plus rapidement si l'on regarde la contribution proche de la surface de Fermi du métal. Cela signifie, que cette contribution détruit plus rapidement les corrélations supraconductrices dans le système. En revanche, un décalage d'énergie est fatal à la contribution proche de la surface de Fermi supraconductrice. Cette contribution ne semble limitée que par ce paramètre. En réalité, pour des décalage d'énergie plus modeste, la température doit réapparaître à côté de cette échelle d'énergie.

### Courant critique dans la jonction S/N/.../N/S

On peut calculer l'énergie libre dans le cas de faible couplage intercouche ce qui donne

$$\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0 = 4t^{2L} N(0) \Delta^2 T \sum_\omega \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_n^2\right)^{L-1}\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)^2} \right] d\xi_s > 0 \tag{3.46}$$

ou l'on voit que l'énergie libre de l'état $\pi$ est plus élevée que l'énergie libre dans l'état 0. Une fois de plus, nous constatons que la phase $\pi$ ne peut pas apparaître dans la jonction S/N/.../N/S. Dans le cas où $\xi_n = \xi_s$, alors la différence d'énergie libre est égale à

$$\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0 = \frac{4\pi\rho(0)(2L-4)!}{((L-2)!)^2} \frac{\left(2^{(2L-3)}-1\right)}{\Delta^2 2^{2L-3}(2\pi)^{2L-3}} \zeta(2L-3) T^4 e^{-\frac{La}{\xi}}$$

En introduisant la longueur de cohérence supraconductrice intercouche $\xi_c$,

$$\xi_c = \frac{a}{2\ln\left(\frac{T}{t}\right)}$$

ou $a$ est la distance intercouche. On a $\xi \longrightarrow 0$ si $T \longrightarrow \infty$. De plus, on a $\xi \longrightarrow \infty$ si $T \longrightarrow t$. Le problème de cette méthode repose sur le fait que nous n'avons pas accès aux très basse température. Nous sommes limités par le développement limité qui entraîne que une longueur de cohérence intercouche infinie pour des température proche de $t/k_B$. Dans ce cas, cette divergence pourrait être rattrapée en considérant des termes aux ordres supérieurs. A partir de cette différence d'énergie libre, on peut déterminer le courant Josephson critique qui est égal à $\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0 = \left(\frac{\hbar}{e}\right) I_c$. Le courant critique Josephson s'écrit alors

$$I_c = \frac{e}{\hbar} \frac{4\pi\rho(0)(2L-4)!}{((L-2)!)^2} \frac{\left(2^{(2L-3)}-1\right)}{\Delta^2 2^{2L-3}(2\pi)^{2L-3}} \zeta(2L-3) T^4 e^{-\frac{x}{\xi}}$$

où $x = L.a$ est la distance dans la multicouche. On constate alors une décroissance exponentielle du courant Josephson dans les couches métalliques. Cet effet est caractéristique d'une décroissance de la corrélation supraconductrice dans les milieux métalliques établie par la théorie de la supraconductivité [20],[178].

On effectue la même étude que précédemment, en considérant des spectres supraconducteur et métallique décalés.

**Cas $\xi_s \ll \xi_n$, proche de la surface de Fermi du supraconducteur** Ainsi, en tenant compte des conditions (3.29), la différence des gaps supraconducteurs (3.43) devient :

$$\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0 = \frac{2t^{2L}\rho(0)\Delta^2 T}{(\Delta E)^{2L-2}} \sum_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\omega^2+\xi_s^2+\Delta^2\right)^2} d\xi_s.$$

et qui s'écrit, dans le cas où l'on considère $\Delta$ négligeable (proche de $T_c$) :

$$\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0 = \frac{\rho(0)(\Delta E)^2 \Delta^2}{\pi^2 T^2} \frac{7}{4}\zeta(3) \left(\frac{t}{\Delta E}\right)^{2L}$$

On remarque que la différence $\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0$ est toujours positive pour tout décalage $\Delta E$. Le courant Josephson critique s'écrit :

$$I_c = \frac{e}{\hbar}\frac{\rho(0)(\Delta E)^2 \Delta^2}{\pi^2 T^2} \frac{7}{4}\zeta(3) \left(\frac{t}{\Delta E}\right)^{2L}$$

Dans le cas où le spectre du supraconducteur et du métal normal sont fortement décalés, on voit que le courant critique est inversement proportionnel à ce décalage. Le courant Josephson critique est très faible, et dépend des caractéristiques du métal normal. Proche de la surface de Fermi du supraconducteur, la limitation la plus générale du courant critique est le décalage d'énergie entre les spectres énergétiques du supraconducteur et du métal normal.

**Cas $\xi_n \ll \xi_s$, proche de la surface de Fermi du métal normal** Ainsi, en tenant compte des conditions (3.31), la différence des gaps supraconducteurs (3.43) devient :

$$\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0 = \frac{\rho(0)\Delta^2\zeta(2L-3)T^4}{2^{L-1}\pi^{2L-4}(L-2)!\left(\left(\frac{m_n}{m_S}\Delta E\right)^2+\Delta^2\right)^2} \frac{2^{2L-3}-1}{2^{2L-3}} \left(\frac{t}{T}\right)^{2L}.$$

On remarque que la différence $\mathcal{F}_\pi - \mathcal{F}_0$ est toujours positive pour tout décalage $\Delta E$. Le courant Josephson critique s'écrit :

$$I_c = \frac{e}{\hbar}\frac{\rho(0)\Delta^2\zeta(2L-3)T^4}{2^{L-1}\pi^{2L-4}(L-2)!\left(\left(\frac{m_n}{m_S}\Delta E\right)^2+\Delta^2\right)^2} \frac{2^{2L-3}-1}{2^{2L-3}} \left(\frac{t}{T}\right)^{2L}.$$

Le courant critique ne dépend que de la température. La dépendance en température résulte de l'approximation $t \ll T$. En réalité, le courant Josephson sature à température nulle. La limitation la plus importante, lorsque l'on considère la contribution des états proches de la surface de Fermi du métal, est la température. Le courant Josephson décroit en loi de puissance avec la température.

**Conclusion** Dans le cas que nous venons d'étudier, on voit que les contributions des états proches de la surface de Fermi du supraconducteur ou du métal normal sont différentes. Il est délicat de déterminer quelle contribution est la plus importante. On peut supposer que pour un nombre de couches élevé, et dans le cas où la température est basse, ou pour un décalage énergétique $\Delta E$ trés grand devant $t$, alors la contribution la plus élevée est celle des états proches de la surface de Fermi du métal. En revanche,

pour une température élevée, ou pour un nombre de couches faible, alors la contribution la plus élevée est celle des états proches de la surface de Fermi du supraconducteur. Le courant Josephson d'une jonction S/N/.../N/S épaisse dépend explicitement du nombre de couches métalliques et du décalage énergétique entre le spectre du métal et du supraconducteur. On remarque que plus la jonction est épaisse, plus la décroissance du courant critique avec la température est rapide, comme observé dans la référence [188].

## 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la physique des multicouches S/N/.../N et des jonction S/N/.../N/S épaisses. Grâce à notre modèle, il est possible de remonter aux fonctions de Green de Gorkov des premières et dernières couches de ces multicouches. La détermination des fonctions de Green de Gorkov dans ces couches permet de ne négliger aucun effet de cohérence qui pourraient apparaître dans ces multicouches. Elle permettent de remonter aux densités d'états de la première et de la dernière couche, au courant Josephson de la jonction S/N/.../N/S et à la température critique des couches S.

Nous avons déterminé les densités d'états dans les bicouches S/N et les tricouches S/N/N pour différents paramètres intercouches. On remarque plusieurs pics et plateaux de densités d'états pour des énergies définies dont les caractéristiques différent selon les paramètres du système. A très fort couplage intercouche, on voit que les pics de densité d'états disparaissent en faveur de plusieurs plateaux de densité d'états. Ces plateaux pourraient s'expliquer par la présence d'états d'hybridation entre les couches.

L'annulation de la densité d'états dans les bicouches S/N, lorsqu'un décalage énergétique $\Delta E$ existe entre spectre électronique S et N s'avère assez attendu. Néanmoins, si cette annulation est logique à faible couplage, la présence de plateaux de densités d'états à très fort couplage suscite des interrogations. Il pourrait être la preuve indirecte de l'existence de niveaux hybridés dans les bicouches S/N. L'étude des multicouches S/N à fort couplage intercouche devrait confirmer l'existence de telle hybridation de niveaux énergétiques.

L'étude à faible couplage des densités d'états dans les multicouche S/N/.../N assure que les corrélations supraconductrices sont très faiblement transmises dans la dernière couche métallique. On remarque que les contributions à proximité de la surface de Fermi du supraconducteur et du métal normal donnent des résultats similaires dépendant de la différence de masse effective entre la couche S et les couches N. La contribution des états autour de la surface de Fermi de S est plus importante si $m_n > m_s$ et inversement si $m_n < m_s$.

Enfin, nous étudions le courant Josephson au sein d'une tricouche S/N/S. Nous mettons en évidence que le gap supraconducteurs lorsque la jonction est dans l'état 0 est plus faible que lorsque la jonction est dans l'état $\pi$. Cette différence n'est pas intuitive car la phase $\pi$ est moins stable que la phase 0. Cette différence ne permet cependant pas de contester la stabilité de la phase 0. L'énergie libre de la jonction 0 est bien inférieure à celle de la jonction $\pi$. En calculant le courant critique Josephson dans les jonctions S/N/.../N/S, on remarque que les propriétés de la jonction sont gouvernées par les propriétés du métal pour un nombre de couche métallique très élevé. Le calcul du courant critique Josephson tend à suivre les observations expérimentales de la référence [188] . Néanmoins, une étude à fort couplage des caractéristiques des multicouches devrait nous en apprendre plus sur la transmission des corrélations supraconductrices au sein des multicouches S/N/.../N et des jonctions S/N/.../N/S.

# Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à divers aspects de l'effet de proximité entre un supraconducteur, un métal normal et un métal ferromagnétique. Nous avons étudié en détail l'influence de la forme des spectres électroniques sur les propriétés des tricouches F/S/F et S/F/S. Puis nous nous sommes penchés sur l'étude de l'effet paramagnétique sur les propriétés des bicouches S/N fortement couplées. Enfin, nous avons étudié les densités d'états, le courant Josephson et les propriétés dans les multicouches S/N et les jonctions S/N/S épaisses avec le formalisme de Gorkov.

Dans le premier chapitre, nous nous sommes concentrés sur l'influence d'une différence de spectre électronique sur l'effet de proximité S/F dans les tricouches F/S/F et les jonctions S/F/S. Pour les tricouches F/S/F nous avons d'abord étudié l'influence d'un couplage intercouche dépendant du spin sur l'effet de vanne de spin. Nous avons démontré que cette différence influe sur les écarts de températures critiques parallèle et antiparallèle $T_c^P - T_c^{AP}$, mais ne permet pas d'expliquer l'inversion de l'effet vanne de spin. Pour expliquer l'inversion de l'effet de vanne de spin, il a été nécessaire d'introduire l'inversion d'un spectre électronique. On obtient alors un ferromagnétique de type "presque" demi-métal. Le spectre électronique d'une des orientations de spin est inversé par rapport à l'autre. Les spectres étudiés peuvent s'écrire $\xi_\uparrow = -\alpha\xi_s + \widetilde{\Delta E}$ et $\xi_\downarrow = \xi_s + \Delta E$ où les électron $\uparrow$ ont une relation de dispersion type trou. Ce type de matériaux a été synthétisé récemment dans les matériaux $CuCr_2Se_4$ [103]. Ces matériaux pourraient avoir des applications intéressantes en spintronique [189]. L'obtention de ces matériaux peut s'expliquer par un fort décalage Zeeman dû à un fort champ d'échange. L'effet de vanne de spin inverse est fortement sensible aux décalages d'énergie entre les spectres des couches S et F. Il disparaît si les décalages d'énergie sont plus important que $2\Delta$ où $\Delta$ est le gap supraconducteur de la couche $S$. L'effet de vanne de spin est donc très dépendant des propriétés intrinsèques des matériaux.

Ces décalages d'énergie et l'anisotropie des surfaces de Fermi ont une influence sur la transition de phase $0-\pi$ dans les jonctions S/F/S. Caractérisée par une différence de signe entre les gaps supraconducteurs des couches S, la phase $\pi$ est très sensible à l'existence de décalages énergétiques $\Delta E$, entre les spectres électroniques des couches S et F. Si le décalage énergétique $\Delta E$ est supérieur au champ d'échange $h$ de la couche F, $\Delta E > h$, alors il est impossible d'observer une phase $\pi$ dans la jonction S/F/S. L'anisotropie des surfaces de Fermi peut également jouer un rôle de limitation dans l'observation de la phase $\pi$,en fixant une contrainte topologique à son observation. Ces contraintes peuvent expliquer l'impossibilité d'observer la phase $\pi$ dans les ruthénocuprates [115].

Ainsi, nous avons démontré que la compréhension de l'effet de proximité S/F dépend des propriétés intrinsèques des matériaux comme le spectre électronique et l'anisotropie des surfaces de Fermi. Ces paramètres peuvent alors conditionner les propriétés des hétérostructures S/F. La mise en évidence du spectre d'un "presque" demi métal sur l'effet de vanne de spin est un exemple de cette influence. A l'interface supraconducteur/"presque" demi-métal , il reste à comprendre les conséquences de cette inversion de spectre sur les

réflexions d'Andreev. Nous espérons que ce travail motivera des expériences autour de ces problématiques.

Dans le second chapitre, nous avons établi l'existence d'une phase supraconductrice à fort champ magnétique dans les bicouches S/N. L'étude de l'effet paramagnétique combiné à l'effet de proximité dans les bicouches S/N nous a permis de démontrer la possibilité de repousser la limite paramagnétique usuelle dans des matériaux hybrides.

L'existence de la phase de supraconductivité ré-entrante a été observée dans $URhGe$ [190] dans lequel observe une phase supraconductrice induite par champ magnétique plus stable que la phase supraconductrice à champ nul. Le mécanisme exact à l'origine de cette phase supraconductrice induite par champ magnétique n'est pas encore connu. Il pourrait s'agir d'une signature de la supraconductivité avec une appariement triplet des électrons composant la paire de Cooper. Cette phase de ré-entrance a également été observée dans le supraconducteur organique $\lambda-(BETS)_2 FeCl_4$ [134]. Dans ce composé, la ré-entrance de la supraconductivité à fort champ magnétique est due à une compensation du champ externe par le champ d'échange crée par les moments magnétiques des ions $Fe^{3+}$ (effet Jacobino-Peter). La simplicité du processus de compensation de l'effet paramagnétique dans la bicouche laisse penser que ce rehaussement devrait également s'observer dans les grains supraconducteur faiblement couplés.

De plus l'étude du désordre sur la stabilité de telle phase nous a permis de constater la difficulté que va représenter l'observation de cet effet sur les bicouches usuelles. Dans les bicouches S/S, le taux d'impuretés au delà duquel on n'oberve plus de phase induite par champ est $\tau^{-1} \simeq \Delta_0/4$ pour un couplage intercouche $t = \Delta_0$. Par conséquent l'observation de cette phase nécessite des échantillons encore plus purs que pour observer la phase FFLO qui disparaît pour un taux d'impureté $\tau$ supérieur à $\Delta_0$ [146]. De plus, l'autre difficulté est d'établir un système dans lequel il est possible de changer facilement le couplage intercouche. Cette possibilité est très attendue car elle permettrait de changer complétement les propriétés des bicouches S/N et par exemple de contrôler l'existence de cette poche de supraconductivité à fort champ magnétique.

Cette étude ouvre une voie dans la recherche de supraconducteurs, où de structures, encore plus résistants aux champs magnétiques. Le champ magnétique, comme le courant, s'oppose à l'établissement de la supraconductivité. Il est possible que cet effet ait de nombreuses applications technologiques dans le domaine de l'électronique à l'échelle atomique.

Enfin, dans le dernier chapitre, l'étude des multicouches S/N/.../N et des jonctions Josephson S/N/.../N/S épaisses grâce au formalisme de Gorkov a permis d'étudier les corrélations supraconductrices dans les multicouches. Nous trouvons ainsi la solution exacte du système d'équation de Gorkov qui décrit les propriétés et l'effet de proximité dans les multicouches.

Dans les multicouches S/N/.../N, les propriétés des multicouches sont fortement influencées par le décalage relatif des spectres S et N. Ces corrélations sont fortement atténuées dans la multicouche S/N/.../N. Les propriétés de la couche S sont fortement dépendantes des décalages d'énergie $\Delta E$ et du nombre total de couche $L$. La relation entre $\Delta(0)$ et $T_c$ est fortement dépendante du nombre de couche $L$ ce qui implique que l'épaisseur de la couche de métal influence les propriétés de la couche supraconductrice.

En cas de décalage énergétique, on voit que la couche supraconductrice contribue plus au transport des corrélations supraconductrices si la masse effective de l'électron dans le métal $m_n$ est supérieure à celle dans le supraconducteur $m_s$. Ce transport des corrélations supraconductrices est gouverné par le métal si l'on se place la situation inverse. On remarque les relations complexes entre les propriétés de la multicouche S/N/.../N et

les propriétés des couches S et N.

Dans la jonction S/N/.../N/S, on a démontré que le gap supraconducteur à $T = 0$ est plus important dans la phase $\pi$ que dans la phase 0. Cette différence interpelle car elle suppose que la phase $\pi$ est plus stable que la phase 0. Cette différence très faible décroit avec le nombre de couche $L$.

Le calcul de l'énergie libre de la jonction S/N/.../N/S confirme que la phase $\pi$ reste moins stable que la phase 0. En revanche, le courant Josephson critique $I_c$ est très dépendant des contributions des états proches des surfaces de Fermi de $S$ et $N$. Il est difficile de déterminer quelle contribution est la plus importante. La contribution proche de la surface de Fermi de S est plus sensibles aux décalages énergétiques alors que la contribution proche de la surface de Fermi de S dépend plus fortement de la température. En revanche, les deux dépendent du nombre de couche $L$ composant la multicouche.

Très présentes dans la recherche pour leurs possibles applications aux systèmes quantiques de demain, la compréhension de la dynamiques des multicouches est un enjeux important. Notre travail ouvre la voie à la compréhension des propriétés globales des multicouches en tenant compte des effets intrinsèques de chaque couche. Ainsi, notre étude est une introduction à la compréhension des paramètres intrinsèques, comme le décalage d'énergie entre spectre électronique, sur les propriétés des multicouches. Ces travaux pourront trouver des applications dans l'électronique à l'échelle atomique.

Le chapitre 1 et 2 de ces travaux ont fait l'objet de deux publications qui sont :

X. Montiel, D. Gusakova, M. Daumens and A. I. Buzdin, *Proximity effect in atomic-scaled hybrid superconductor/ferromagnet structures : Crucial role of electron spectra.* Europhys. Lett. 89, 67002 (2009).

et

X. Montiel and A. I. Buzdin, *Field-induced superconducting phase in superconductor–normal metal and superconductor-superconductor bilayers.* Phys. Rev. B **84**, 054518 (2011)

.

# Annexe A

# Fonctions de Green de Gorkov dans les multicouches S/N/.../N et les jonctions S/N.../N/S

Le but de cette annexe est de détailler les calculs des fonctions de Green dans les multicouches S/N/.../N et les jonctions S/N/.../N/S.

## Conditions de propagation

Cette condition de propagation intervient de la même manière sur les systèmes multicouches S/N/.../N et S/N/.../N/S. Elle rend possible la résolution exacte du système d'équation comprenant les couches métalliques. A partir des équations générale des multicouches (3.3), on écrit les équations des fonctions de Green d'une couche métallique arbitraire (qui ne peut pas être la dernière couche), et qui s'écrit :

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_n)\, G^{n,m}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{n-1,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{n+1,m}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_n)\, F^{\dagger n,m}_{\downarrow,\uparrow} - tF^{\dagger n-1,m}_{\downarrow,\uparrow} - tF^{\dagger n+1,m}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \end{cases} . \tag{A.1}$$

Pour résoudre le système $(A.1)$, on utilise la forme des fonctions de Gorkov données en (3.3) ce qui revient à écrire $(A.1)$ comme

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_n - 2t\cosh(q))\,(A + Be^{2qn}) = 0 \\ (i\omega + \xi_n + 2t\cosh(\widetilde{q}))\,\left(C + De^{2\widetilde{q}n}\right) = 0 \end{cases} . \tag{A.2}$$

qui nous permet de trouver la condition de propagation, qui relie les vecteurs d'ondes aux spectres d'énergies :

$$\cosh(q) = \frac{(i\omega - \xi_n)}{2t} \tag{A.3}$$

$$\cosh(\widetilde{q}) = -\frac{(i\omega + \xi_n)}{2t} \tag{A.4}$$

où l'on peut constater que $\widetilde{q} = q^*$.

De plus, à partir des relations $(A.3)$ et $(A.4)$, on a :

$$\begin{aligned} e^{\widetilde{q}} &= -\left(\tfrac{i\omega+\xi_n}{2t}\right) + \tfrac{\sqrt{(i\omega+\xi_n)^2-4t^2}}{2t} \\ e^{-\widetilde{q}} &= -\left(\tfrac{i\omega+\xi_n}{2t}\right) - \tfrac{\sqrt{(i\omega+\xi_n)^2-4t^2}}{2t} \\ e^{q} &= \left(\tfrac{i\omega-\xi_n}{2t}\right) + \tfrac{\sqrt{(i\omega-\xi_n)^2-4t^2}}{2t} \\ e^{-q} &= \left(\tfrac{i\omega-\xi_n}{2t}\right) - \tfrac{\sqrt{(i\omega-\xi_n)^2-4t^2}}{2t} \end{aligned} \tag{A.5}$$

qui permettent de remonter à la forme explicite des fonctions de Green.

# Fonction de Gorkov dans la multicouche S/N/.../N

On étudie le système S/N/.../N où la couche S porte l'indice $n = 0$ et les couches métalliques portent les indices $n = 1$ à $n = L$ (voir figure 3.1 a)). Afin de déterminer la densité d'états de la dernière couche métallique, portant l'indice $L$, on doit déterminer la fonction de Green $G^{L,L}_{\uparrow,\uparrow}$. Si on s'intéresse alors aux équations de Gorkov dans la couche métallique indexée $n = L$, alors on trouve

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_n)\, G^{L,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{L-1,L}_{\uparrow,\uparrow} = 1 \\ (i\omega + \xi_n)\, F^{\dagger L,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger L-1,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \end{cases}. \tag{A.6}$$

dans lequel on injecte les fonctions de la forme (3.3), pour pouvoir écrire dans ce cas les constantes $B$ et $D$ en fonction des constantes $A$ et $C$. Ainsi, les fonctions de Green de Gorkov par rapport à la couche métallique d'indice $L$ de la multicouche S/N s'écrivent :

$$G^{n,L}_{\uparrow,\uparrow} = A\left(e^{qn} - e^{2qL}e^{-q(n-2)}\right) + \frac{e^{q(L-n)}}{(i\omega - \xi_n - te^{q})} \tag{A.7}$$

et

$$F^{\dagger n,L}_{\downarrow,\uparrow} = C\left(e^{\widetilde{q}n} - e^{2\widetilde{q}L}e^{-\widetilde{q}(n-2)}\right). \tag{A.8}$$

Pour trouver les fonctions de Green, il suffit désormais de trouver les constantes $A$ et $C$. De plus, à partir des fonctions $(A.7)$ et $(A.8)$, on peut trouver toutes les fonctions de Green calculées tant que le deuxième indice reste égal à $L$.

On établit alors le système d'équation de Gorkov de la couche S $(n = 0)$ qui s'écrit :

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_n)\, G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{1,L}_{\uparrow,\uparrow} + \Delta_0 F^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_n)\, F^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger 1,L}_{\downarrow,\uparrow} + \Delta_0^* G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \end{cases}.$$

et pour la couche métallique d'indice $(n = 1)$

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_n)\, G^{1,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{2,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_n)\, F^{\dagger 1,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger 2,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \end{cases}.$$

La synthèse des deux derniers systèmes, en intégrant les conditions de propagations $(A.7)$ et $(A.8)$, le système devient :

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_s)\, G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} + 2tAe^{q(L+1)}\sinh(qL) + \Delta_0 F^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} = e^{qL} \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} - 2tCe^{\widetilde{q}(L+1)}\sinh(\widetilde{q}L) + \Delta_0^* G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ 2tAe^{q(L+1)}\sinh(q(L+1)) - tG^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} = e^{q(L+1)} \\ -2tCe^{\widetilde{q}(L+1)}\sinh(\widetilde{q}(L+1)) + tF^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \end{cases}$$

Dont la solution est

$$A = \frac{1}{2}\frac{\widetilde{a}_{L+1}\left(\mathrm{e}^{q(L+1)}\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)-t\mathrm{e}^{qL}(i\omega+\xi_s)\right)+t\widetilde{a}_L\left(t\mathrm{e}^{qL}+(i\omega-\xi_s)\mathrm{e}^{q(L+1)}\right)}{t\mathrm{e}^{q(L+1)}\left(t^2a_L\widetilde{a}_L-t[(i\omega-\xi_s)\widetilde{a}_La_{L+1}-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}\right)}$$

$$C = -\frac{1}{2}\frac{\Delta_0^* a_1}{\mathrm{e}^{\widetilde{q}(L+1)}\left(t^2a_L\widetilde{a}_L-t[(i\omega-\xi_s)\widetilde{a}_La_{L+1}-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}\right)}$$

$$G_{\uparrow,\uparrow}^{0,L} = \frac{\sinh(q)((i\omega+\xi_s)\widetilde{a}_{L+1}-t\widetilde{a}_L)}{t^2a_L\widetilde{a}_L-t[(i\omega-\xi_s)\widetilde{a}_La_{L+1}-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}}$$

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,L} = -\frac{\Delta_0^* a_1\widetilde{a}_{L+1}}{t^2a_L\widetilde{a}_L-t[(i\omega-\xi_s)\widetilde{a}_La_{L+1}-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}}$$

où on pose $a_n = \sinh(qn)$ et $\widetilde{a}_n = \sinh(\widetilde{q}n)$. Ainsi, les fonctions de Green s'écrivent :

$$\begin{aligned} G_{\uparrow,\uparrow}^{n,L} &= \frac{1}{2}\frac{\left[\widetilde{a}_{L+1}\left(\mathrm{e}^{q(L+1)}\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)-t\mathrm{e}^{qL}(i\omega+\xi_s)\right)+t\widetilde{a}_L\left(t\mathrm{e}^{qL}+(i\omega-\xi_s)\mathrm{e}^{q(L+1)}\right)\right]\left(e^{qn}-e^{2qL}e^{-q(n-2)}\right)}{t\mathrm{e}^{q(L+1)}\left(t^2a_L\widetilde{a}_L-t[(i\omega-\xi_s)\widetilde{a}_La_{L+1}-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_L\widetilde{a}_{L+1}\right)} + \frac{e^{q(L-n)}}{(i\omega-\xi_n-te^q)} \\ F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger n,L} &= -\frac{1}{2}\frac{\Delta_0^* a_1\left(e^{\widetilde{q}n}-e^{2\widetilde{q}L}e^{-\widetilde{q}(n-2)}\right)}{\mathrm{e}^{\widetilde{q}(L+1)}\left(t^2a_L\widetilde{a}_L-t[(i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}\right)} \end{aligned}$$

Si $n = L$ alors la fonction de Green de la couche $L$ s'écrit :

$$\begin{aligned} G_{\uparrow,\uparrow}^{L,L} &= \frac{t^2a_{L-1}\widetilde{a}_L-t[(i\omega-\xi_s)a_L\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_{L-1}\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_L\widetilde{a}_{L+1}}{t\left(t^2a_L\widetilde{a}_L-t[(i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}\right)} \\ F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger L,L} &= \frac{\Delta_0^* a_1\widetilde{a}_1}{\left(t^2a_L\widetilde{a}_L-t[(i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}\right)} \end{aligned}$$

Pour déterminer les fonctions de Green dans la couche supraconductrice, les fonctions de Green se simplifient comme suit :

$$\begin{aligned} G_{\uparrow,\uparrow}^{n,0} &= A\left(e^{qn}-e^{2qL}e^{-q(n-2)}\right) \\ F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger n,0} &= C\left(e^{\widetilde{q}n}-e^{2\widetilde{q}L}e^{-\widetilde{q}(n-2)}\right) \end{aligned}$$

et le système d'équation s'écrit

$$\begin{cases} (i\omega-\xi_s)G_{\uparrow,\uparrow}^{0,0}-tG_{\uparrow,\uparrow}^{1,0}+\Delta_0F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0}=1 \\ (i\omega+\xi_s)F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0}+tF_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 1,0}+\Delta_0^*G_{\uparrow,\uparrow}^{0,0}=0 \\ (i\omega-\xi_n)G_{\uparrow,\uparrow}^{1,0}-tG_{\uparrow,\uparrow}^{0,0}-tG_{\uparrow,\uparrow}^{2,0}=0 \\ (i\omega+\xi_n)F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 1,0}+tF_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0}+tF_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 2,0}=0 \end{cases}$$

et se transforme, en injectant les relations de propagations $(A.7)$ et $(A.8)$ comme :

$$\begin{cases} (i\omega-\xi_s)G_{\uparrow,\uparrow}^{0,0}+2tAe^{q(L+1)}\sinh(qL)+\Delta_0F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0}=1 \\ (i\omega+\xi_s)F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0}-2tCe^{\widetilde{q}(L+1)}\sinh(\widetilde{q}L)+\Delta_0^*G_{\uparrow,\uparrow}^{0,0}=0 \\ 2tAe^{q(L+1)}\sinh(q(L+1))-tG_{\uparrow,\uparrow}^{0,0}=0 \\ 2tCe^{\widetilde{q}(L+1)}\sinh(\widetilde{q}(L+1))+tF_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0}=0 \end{cases}$$

et ainsi, la fonction de Green dans la couche supraconductrice s'écrit

$$\begin{aligned} F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger 0,0} &= \frac{\Delta_0^*a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}-t[(i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+t^2a_L\widetilde{a}_L} \\ G_{\uparrow,\uparrow}^{0,0} &= \frac{-a_{L+1}[(i\omega+\xi_s)\widetilde{a}_{L+1}+t\widetilde{a}_L]}{\left(\omega^2+\xi_s^2+|\Delta_0|^2\right)a_{L+1}\widetilde{a}_{L+1}-t[(i\omega-\xi_s)a_{L+1}\widetilde{a}_L-(i\omega+\xi_s)a_L\widetilde{a}_{L+1}]+t^2a_L\widetilde{a}_L} \end{aligned}$$

.

A partir de la fonction de Green (3.5), il est théoriquement possible de remonter aux propriétés de la couche S en fonction du nombre total de couche $L$ présent dans la multicouche.

# Fonctions de Gorkov dans la jonction S/N/.../N/S

Dans le système S/N/.../N/S, les couches supraconductrices portent les indices $n = 0$ et $n = L$ alors que les couches métalliques portent tous les indices compris entre $n = 1$ et $n = L - 1$. Pour établir le système d'équation de Gorkov qui correspond à la jonction S/N/.../N/S, on effectue les mêmes étapes que celle présentées dans la section précédente. On doit établir les équations dans les couches d'indice $n = 0$, $n = 1$, $n = L - 1$ et $n = L$ (voir figure 3.1 b)). Ainsi, pour déterminer les fonctions de Green normale et anomale dans la couche supraconductrice d'indice $n = L$, le système d'équation s'écrit :

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_s)\, G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{1,L}_{\uparrow,\uparrow} + \Delta_0^* F^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger 1,L}_{\downarrow,\uparrow} + \Delta_0 G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega - \xi_n)\, G^{1,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{2,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_n)\, F^{\dagger 1,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger 2,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega - \xi_n)\, G^{L-1,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{L-2,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{L,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_n)\, F^{\dagger L-1,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger L-2,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger L,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega - \xi_s)\, G^{L,L}_{\uparrow,\uparrow} - tG^{L-1,L}_{\uparrow,\uparrow} + \Delta_L^* F^{\dagger L,L}_{\downarrow,\uparrow} - 1 = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{\dagger L,L}_{\downarrow,\uparrow} + tF^{\dagger L-1,L}_{\downarrow,\uparrow} + \Delta_L G^{L,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \end{cases}$$

avec

$$\left[ \begin{array}{c} \cosh q = \frac{(i\omega - \xi_n)}{2t} \\ \cosh \widetilde{q} = -\frac{(i\widetilde{\omega} + \xi_n)}{2t} \end{array} \right]$$

où on voit que $\widetilde{q} = q^*$. Ainsi le système d'équation s'écrit

$$\begin{cases} (i\omega - \xi_s)\, G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} - t\left(Ae^{q} + Be^{-q}\right) + \Delta_0^* F^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} + t\left(Ce^{\widetilde{q}} + De^{-\widetilde{q}}\right) + \Delta_0 G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ A + B - G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ C + D - tF^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ Ae^{qL} + Be^{-qL} - G^{L,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \\ Ce^{\widetilde{q}L} + De^{-\widetilde{q}L} - F^{\dagger L,L}_{\downarrow,\uparrow} = 0 \\ (i\omega - \xi_s)\, G^{L,L}_{\uparrow,\uparrow} - t\left(Ae^{(L-1)q} + Be^{-(L-1)q}\right) + \Delta_L^* F^{\dagger L,L}_{\downarrow,\uparrow} - 1 = 0 \\ (i\omega + \xi_s)\, F^{\dagger L,L}_{\downarrow,\uparrow} + t\left(Ce^{\widetilde{q}(L-1)} + De^{-\widetilde{q}(L-1)}\right) + \Delta_L G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} = 0 \end{cases} \tag{A.9}$$

La solution du système $(A.9)$ s'écrivent :

$$G^{L,L}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{-t^3 S^{L-2}_{L-1} - t^2\left[\widetilde{\omega}^* S^{L-2}_{L} + 2\widetilde{\omega} S^{L-1}_{L-1}\right] - t\left[S^{L-1}_{L}\left(|\widetilde{\omega}|^2 + \Omega_0^2\right) + \widetilde{\omega}^2 S^{L}_{L-1}\right] - \widetilde{\omega}\Omega_0^2 S^{L}_{L}}{t^4 S^{L-2}_{L-2} + 2t^3 X^{L-1}_{L-2} + t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2 + \Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) S^{L-1}_{L-1} + 2\Delta_0\Delta_L S^{1}_{1} + \widetilde{\omega}^{*2} S^{L}_{L-2} + \widetilde{\omega}^2 S^{L}_{L-2}\right] + t\left(\Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) X^{L}_{L-1} + S^{L}_{L}\Omega_L^2\Omega_0^2}$$

$$F^{\dagger L,L}_{\downarrow,\uparrow} = \frac{t^2\Delta_0^* S^{1}_{1} + \Delta_L^*\left\{\Omega_0^2 S^{L}_{L} + t^2 S^{L-1}_{L} - t\widetilde{\omega}^* S^{L}_{L-1} - t\widetilde{\omega} S^{L}_{L-1}\right\}}{t^4 S^{L-2}_{L-2} + 2t^3 X^{L-1}_{L-2} + t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2 + \Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) S^{L-1}_{L-1} + 2\Delta_0\Delta_L S^{1}_{1} + \widetilde{\omega}^{*2} S^{L}_{L-2} + \widetilde{\omega}^2 S^{L}_{L-2}\right] + t\left(\Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) X^{L}_{L-1} + S^{L}_{L}\Omega_L^2\Omega_0^2}$$

$$G^{0,L}_{\uparrow,\uparrow} = \frac{-t^3 S^{L-2}_{1} - 2t^2\widetilde{\omega} S^{L-1}_{1} - t\left[S^{L}_{1}\widetilde{\omega}^2 + \Delta_0^*\Delta_2^* S^{1}_{L}\right]}{t^4 S^{L-2}_{L-2} + 2t^3 X^{L-1}_{L-2} + t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2 + \Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) S^{L-1}_{L-1} + 2\Delta_0\Delta_L S^{1}_{1} + \widetilde{\omega}^{*2} S^{L}_{L-2} + \widetilde{\omega}^2 S^{L}_{L-2}\right] + t\left(\Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) X^{L}_{L-1} + S^{L}_{L}\Omega_L^2\Omega_0^2}$$

$$F^{\dagger 0,L}_{\downarrow,\uparrow} = \frac{t^2\left[\Delta_0^* S^{L-1}_{1} + \Delta_2^* S^{1}_{L-1}\right] + t\Delta_0^* S^{L}_{1}\widetilde{\omega} - t\Delta_2^*\widetilde{\omega}^* S^{1}_{L}}{t^4 S^{L-2}_{L-2} + 2t^3 X^{L-1}_{L-2} + t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2 + \Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) S^{L-1}_{L-1} + 2\Delta_0\Delta_L S^{1}_{1} + \widetilde{\omega}^{*2} S^{L}_{L-2} + \widetilde{\omega}^2 S^{L}_{L-2}\right] + t\left(\Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) X^{L}_{L-1} + S^{L}_{L}\Omega_L^2\Omega_0^2}$$

$$A = \frac{-t^3 e^{-q}\widetilde{a}_{L-2} + t^2\left[2\widetilde{\omega}e^{q} - \widetilde{\omega}^* e^{-\widetilde{q}}\right]\widetilde{a}_{L-1} + t\left[-\Delta_2^*\Delta_0^* e^{-qL}\widetilde{a}_1 + e^{-q}\widetilde{a}_L\widetilde{\omega}^2 + \left(\xi_s^2 - \omega^2\right)e^{-\widetilde{q}(L-1)} + |\widetilde{\omega}|^2 e^{\widetilde{q}(L-1)}\widetilde{a}_{L-1} - \Omega_0^2\widetilde{a}_{L-1}\right] + \widetilde{a}_L\widetilde{\omega}\Omega_0^2}{2\left[t^4 S^{L-2}_{L-2} + 2t^3 X^{L-1}_{L-2} + t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2 + \Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) S^{L-1}_{L-1} + 2\Delta_0\Delta_L S^{1}_{1} + \widetilde{\omega}^{*2} S^{L}_{L-2} + \widetilde{\omega}^2 S^{L}_{L-2}\right] + t\left(\Omega_0^2 + \Omega_L^2\right) X^{L}_{L-1} + S^{L}_{L}\Omega_L^2\Omega_0^2\right]}$$

$$B=\frac{-t^3e^{-q}\widetilde{a}_{L-2}-t^2\left[2\widetilde{\omega}e^{-q}-\widetilde{\omega}^*e^{\widetilde{q}}\right]\widetilde{a}_{L-1}+t\left[-\Delta_2^*\Delta_0^*e^{qL}\widetilde{a}_1+e^q\widetilde{a}_L\widetilde{\omega}^2+\left(\xi_s^2-\omega^2\right)e^{\widetilde{q}(L-1)}+|\widetilde{\omega}|^2e^{-\widetilde{q}(L-1)}\widetilde{a}_{L-1}-\Omega_0^2\widetilde{a}_{L-1}\right]-\widetilde{a}_L\widetilde{\omega}\Omega_0^2}{2\left[t^4S_{L-2}^{L-2}+2t^3X_{L-2}^{L-1}+t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2+\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)S_{L-1}^{L-1}+2\Delta_0\Delta_LS_1^1+\widetilde{\omega}^{*^2}S_{L-2}^L+\widetilde{\omega}^2S_{L-2}^L\right]+t\left(\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)X_{L-1}^L+S_L^L\Omega_L^2\Omega_0^2\right]}$$

$$C=\frac{-t^2\left(\Delta_2^*e^{-\widetilde{q}}a_{L-1}+\Delta_0^*e^{-\widetilde{q}(L-1)}a_1\right)+t\left[-\Delta_0^*\widetilde{\omega}e^{-L\widetilde{q}}a_1+\Delta_2^*\widetilde{\omega}^*e^{-\widetilde{q}}a_L+\widetilde{\omega}\Delta_2^*a_{L-1}\right]-\Delta_2^*a_L\Omega_0^2}{2\left[t^4S_{L-2}^{L-2}+2t^3X_{L-2}^{L-1}+t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2+\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)S_{L-1}^{L-1}+2\Delta_0\Delta_LS_1^1+\widetilde{\omega}^{*^2}S_{L-2}^L+\widetilde{\omega}^2S_{L-2}^L\right]+t\left(\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)X_{L-1}^L+S_L^L\Omega_L^2\Omega_0^2\right]}$$

$$D=\frac{-t^2\left(\Delta_2^*e^{-\widetilde{q}}a_{L-1}+\Delta_0^*e^{-\widetilde{q}(L-1)}a_1\right)+t\left[\Delta_0^*\widetilde{\omega}^*e^{-L\widetilde{q}}a_1-\Delta_2^*\widetilde{\omega}^*e^{\widetilde{q}}a_L-\widetilde{\omega}\Delta_2^*a_{L-1}\right]+\Delta_2^*a_L\Omega_0^2}{2\left[t^4S_{L-2}^{L-2}+2t^3X_{L-2}^{L-1}+t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2+\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)S_{L-1}^{L-1}+2\Delta_0\Delta_LS_1^1+\widetilde{\omega}^{*^2}S_{L-2}^L+\widetilde{\omega}^2S_{L-2}^L\right]+t\left(\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)X_{L-1}^L+S_L^L\Omega_L^2\Omega_0^2\right]}$$

où on pose $a_n=\sinh(qn)$ et $\widetilde{a}_n=\sinh(\widetilde{q}n)$, $S_N^M=\widetilde{a}_Ma_N$, $\widetilde{\omega}=i\omega+\xi_s$, $\widetilde{\omega}^*=-i\omega+\xi_s=-(i\omega-\xi_s)$, $\Omega_0^2=|\widetilde{\omega}|^2+\Delta_0^2$, $\Omega_L^2=|\widetilde{\omega}|^2+\Delta_L^2$ et $X_M^N=\widetilde{\omega}S_M^N+\widetilde{\omega}^*S_N^M$. De la même manière, on peut remonter aux fonctions de Green normale et anomale de la première couche supraconductrice qui s'écrivent :

$$G_{\uparrow,\uparrow}^{0,0}=\frac{-t^3S_{L-1}^{L-2}-t^2\left[\widetilde{\omega}^*S_L^{L-2}+2\widetilde{\omega}S_{L-1}^{L-1}\right]-t\left[S_L^{L-1}\left(|\widetilde{\omega}|^2+\Omega_L^2\right)+\widetilde{\omega}^2S_{L-1}^L\right]-\widetilde{\omega}\Omega_L^2S_L^L}{t^4S_{L-2}^{L-2}+2t^3X_{L-2}^{L-1}+t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2+\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)S_{L-1}^{L-1}+2\Delta_0\Delta_LS_1^1+\widetilde{\omega}^{*^2}S_{L-2}^L+\widetilde{\omega}^2S_{L-2}^L\right]+t\left(\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)X_{L-1}^L+S_L^L\Omega_L^2\Omega_0^2}$$

$$F_{\downarrow,\uparrow}^{\dagger0,0}=\frac{t^2\Delta_L^*S_1^1+\Delta_0^*\left\{\Omega_L^2S_L^L+t^2S_L^{L-1}-t\widetilde{\omega}^*S_{L-1}^L-t\widetilde{\omega}S_{L-1}^L\right\}}{t^4S_{L-2}^{L-2}+2t^3X_{L-2}^{L-1}+t^2\left[\left(2|\widetilde{\omega}|^2+\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)S_{L-1}^{L-1}+2\Delta_0\Delta_LS_1^1+\widetilde{\omega}^{*^2}S_{L-2}^L+\widetilde{\omega}^2S_{L-2}^L\right]+t\left(\Omega_0^2+\Omega_L^2\right)X_{L-1}^L+S_L^L\Omega_L^2\Omega_0^2}$$

avec $a_n=\sinh(qn)$ et $\widetilde{a}_n=\sinh(\widetilde{q}n)$.

# Bibliographie


[1] H. Kammerling Onnes, *Futher experiments with liquid helium. C. on the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures, etc. IV. The resistance of pure mercury at helium temperatures.* KNAW/ Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **14 I**, 1274-1276, Comm. 120b (1911).

[2] H. Kammerling Onnes, *Futher experiments with liquid helium. C. on the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures, etc. V. The disappearance of resistance of mercury.* KNAW/ Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **14 I**, 115-122, Comm. 122b (1911).

[3] W. Meissner and R. Ochsenfeld, *Ein neuer effekt bei Eintritt des Supraleitfähigheit.* Naturwissenschaften **21**, 787 (1933).

[4] F. London and H. London, *Supraleitung und diamagnetismus.* Physica 2, 341 (1935).

[5] F. London and H. London, *The electromagnetic equations of supraconductors.* Proc. Roy. Soc. Lond. **A 149**, 71-88 (1935)

[6] V. L Ginzburg and L. D. Landau, *On the theory of superconductivity.* Sov. Phys. JETP **20**, 1064 (1950).

[7] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Microscopic theory of superconductivity.* Phys. Rev. **106**, 162-164 (1957).

[8] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Theory of superconductivity.* Phys. Rev. **108**, 1175-1204 (1957).

[9] L. N. Cooper, *Bounds electron pairs in degenerate Fermi gas.* Phys. Rev. **104**, 1189-1190 (1956).

[10] M. R. Schafroth, *Superconductivity of charged ideal Bose gas.* Phys. Rev. **100**(2), 463-475 Oct (1955).

[11] S. K. Adhikari, M. De Llano, J. F. Sevilla, M.A. Solís and J.J. Valencia, *The BCS-Bose crossover theory.* Physica C superconductivity 453, 37-45 (2007).

[12] A. A. Abrikosov, *Magnetic properties of superconductors of the second group.* Sov. Phys. JETP **5**, 1174-1182 (1957).

[13] U. Essmann and H. Träuble, *The direct observation of individual flux lines in type II superconductors.* Phys. Lett. **24A**(10), 526-527 (1967).

[14] A. Seeger, Comments Solid State Phys. **3**, 97 (1970).

[15] U. Essmann, *Intermediate state of superconducting niobium.* Phys. Lett. **41A**(5), 477 (1972).

[16] B. S. Chandrasekhar, *A note on the maximal critical field of high-field superconductors.* Appl. Phys. Lett. **1**,7-8 (1962).

[17] A. M. Clogston, *Upper limit for the critical field in hard superconductors.* Phys. Rev. Lett. **9**, 266-267 (1962).

[18] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, *Inhomogeneous state of supercondcutors.* Sov. Phys. JETP **20**, 762-769 (1965).

[19] P. Fulde and R. A. Ferrell, *Superconductivity in a strong exchange field.* Phys. Rev. **135**, A550-A563 (1964).

[20] P. G. de Gennes, *Superconducting metals and alloys.* Advanced Book Classics. Westview Press (1999).

[21] P. G. de Gennes, *Boundary effects in supercondcutors.* Rev. Mod. Phys. **36**(1), 225-237 Jan (1964).

[22] H. Meissner, *Superconductivity of Contacts with Interposed Barriers.* Phys. Rev. **117**, 672 (1960).

[23] P. H. Smith, S. Shapiro, J. L. Miles and J. Nicol, *Superconducting Characteristics of Superimposed Metal Films.* Phys. Rev. Lett. **6**,686 (1961).

[24] A. Andreev, *The thermal conductivity of the intermediate state in superconductors.* Sov. Phys. JETP **19**, 1228-1231 (1964).

[25] A. I. Buzdin, *Proximity effect in superconductor-ferromagnet heterostructures.* Rev. Mod. Phys. **77**, 935-976 (2005).

[26] G. Deutscher and F. Meunier, *Coupling Between Ferromagnetic Layers Through a Superconductor.* Phys. Rev. Lett. **22**, 395 (1969).

[27] B. D. Josephson, *Possible new effects in superconductive tunneling.* Phys. Lett. **1**, 251-253 (1964).

[28] I. Giaever and K. Megerle, *Study of Superconductors by Electron Tunneling.* Phys. Rev. **122**, 1101-1111 (1961).

[29] L. N. Bulaevskii, V. V. Kuzii and S. V. Sobyanin. *Superconducting system with weak coupling to the current in the ground state.* JETP. Lett. **25**, 290 (1977).

[30] A. V. Andreev, A. I. Buzdin and R. M. Osgood III, $\pi$ *phase in magnetic-layered superconductors.* Phys. Rev. B **43**, 10124 (1991).

[31] L.N. Bulaevskii, *Superconductivity and electronic properties of layered compounds.* Sov. Phys.Usp., **18**, 514-532 (1976)

[32] N. B. Hannay, T. H. Geballe, B. T. Matthias, K. Andres, P. Schmidt and D. MacNair, *Superconductivity in Graphitic Compounds.* Phys. Rev. Lett., **14**, 225-226 (1965).

[33] Y. Koike, S. Tanuma, H. Suematsu and K. Higuchi, Physica B+C, *Superconductivity in graphite-alkali metal intercalation compounds.* **99**, 503-508 (1980).

[34] J. Bednorz and K. Mueller, *Possible highTc superconductivity in the Ba-La-Cu-O system.* Zeitschrift für Physik B **64**, 189-193 (1986).

[35] L. Gao, Y.Y. Xue, F. Chen, Q. Xiong, R.L. Meng, D. Rameriz, C.W. Chu, J. Eggert, and H.K. Mao, *Universal enhancement of Tc under high pressure in* $HgBa_2Ca_{m-1}Cu_mO_{2m+2+\delta}$. Physica C **235-240**, 1493-1494 (1994).

[36] D. J. Van Harlingen, *Phase-sensitive tests of the symmetry of the pairing state in the high-temperature superconductors—Evidence for dx2-y2 symmetry.* Rev. Mod. Phys. **67**(2), 515-535 (1995).

[37] J. R. Kirtley, C. C. Tsuei, J. Z. Sun, C. C. Chi, Lock See Yu-Jahnes, A. Gupta, M. Rupp and M. B. Ketchen, *Symmetry of the order parameter in the high-Tc superconductor* $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$. Nature **373**, 225-228 (1995).

[38] A. C. McLaughlin, W. Zhou, J. P. Attfield, A. N. Fitch and J. L. Tallon, *Structure and microstructure of the ferromagnetic superconductor* $RuSr_2GdCu_2O_8$. Phys. Rev. B **60**, 7512 (1966).

[39] C. Bernhard, J. L. Tallon, Ch. Niedermayer, Th. Blasius, A. Golnik, E. Brücher, R. K. Kremer, D.R. Noakes and C. E. Stronach and E. J. Ansaldo, *Coexistence of ferromagnetism and superconductivity in the hybrid ruthenate-cuprate compound RuSr2GdCu2O8 studied by muon spin rotation and dc magnetization.* Phys. Rev. B **59**, 14099–14107 (1999).

[40] J. W. Lynn, B. Keimer, C. Ulrich, C. Bernhard and J. L. Tallon. *Antiferromagnetic ordering of Ru and Gd in superconducting* $RuSr_2YCu_2O_8$. Phys. Rev. B **61**, R14964–R14967 (2000).

[41] Y. Tokunaga, H. Kotegawa, K. Ishida, Y. Kitaoka, H. Takagiwa, and J. Akimitsu, *NMR Evidence for Coexistence of Superconductivity and Ferromagnetic Component in Magnetic Superconductor* $RuSr_2YCu_2O_8$ *:* $^{99,101}Ru$ *and* $^{63}Cu$ *NMR.* Phys. Rev. Lett. **86**, 5767–5770 (2001).

[42] Th. Mühge, N. N. Garif'yanov, Yu. V. Goryunov, G. G. Khaliullin, L. R. Tagirov, K. Westerholt, I. A. Garifullin and H. Zabel. *Possible Origin for Oscillatory Superconducting Transition Temperature in Superconductor/Ferromagnet Multilayers.* Phys. Rev. Lett. **77**, 1857–1860 (1996).

[43] A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov and E. Il'Chev, *The current-phase relation in Josephson junctions.* Rev. Mod. Phys. **76**, 411-469 (2004).

[44] F. S. Bergeret, A. F. Volkov and K. B. Efetov, *Odd triplet superconductivity and related phenomena in superconductor-ferromagnet structures.* Rev. Mod. Phys. **77**(4), 1321 (2005).

[45] T. Yamashita, K. Tanikawa, S. Takahashi, and S. Maekawa, *Superconducting* $\Pi$ *Qubit with a Ferromagnetic Josephson Junction.* Phys. Rev. Lett. **95**, 097001 (2005).

[46] N. W. Ashcroft et D. Mermin , *Physique des solides*, traduit par F. Biet et H. Kachkachi ( EDP Sciences, Les Ulis, 2002).

[47] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer and B. Roulet, *Physique statistique* (Hermann, Paris, 2001).

[48] H. Frölich, Phys. Rev **79**, *Theory of the Superconducting State. I. The Ground State at the Absolute Zero of Temperature.* 845-856 (1950).

[49] L. P. Gorkov. *On the energy spectrum of superconductors.* Sov. Phys. JETP 7, 505-508 (1958).

[50] L. P. Gorkov. *Microscopic derivation of the Ginzbug-Landau equations in the theory of superconductivity.* Sov. Phys. JETP 9, 1364-1367 (1959).

[51] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of quantum field theory in statistical physics* (Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1963).

[52] A. A. Abrikosov and L. P. Gorkov, *Contribution to the theory of superconductiviting alloys with paramagnetic impurities.* Sov. Phys. JETP **12**, 1243 (1961).

[53] N. N. Bogoliubov, *New method in the theory of superconductivity.* III. Sov. Phys. JETP **7**, 51-55 (1968).

[54] J. G. Valatin, *Comment on the theory of superconductivity.* Nuovo Cim. **7**, 843-857 (1958).

[55] D. Saint-James, *Excitations élémentaires au voisinage de la surface de séparation d'un métal normal et d'un métal supraconducteurs.* J. Phys. (Paris) **25**, 899-905 (1964).

[56] G. E. Blonder, M. Tinkham and T. M. Klapwijk, *Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions : Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion.* Phys. Rev. B. **25**(7), 4515-4532 (1982).

[57] I. O. Kulik, *Macroscopic quantization and the proximity effect in SNS junctions.* Sov. Phys. JETP **30**, 944 (1970).

[58] C. W. J. Beenakker. *Special effects in superconductivity* chapter three "universal" mesoscopic Josephson effects. H. Fukuyama and T. Ando (Springer, Berlin, 1992).

[59] C. W. J. Beenakker, *Random-matrix theory of quantum transport.* Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).

[60] Ya. V. Fominov, N. M. Chtchelkatchev and A. A. Golubov, *Critical temperature of superconductor/ferromagnet bilayers.* JETP Lett. **74**, 96 (2001).

[61] L. R. Tagirov, I.A. Garifullinc, N.N Garif'yanovc, S.Ya. Khlebnikov, D.A. Tikhonov, K. Westerholt and H. Zabel, *Re-entrant superconductivity in the V/Fe superconductor/ferromagnet layered system.* J. Magn. Magn. Mater. **240**, 577 (2002).

[62] L. Lazar, K. Westerholt, H. Zabel, L. R. Tagirov, Yu. V. Goryunov, N. N. Garif'yanov and I. A. Garifullin, *Superconductor/ferromagnet proximity effect in Fe/Pb/Fe trilayers.* Phys. Rev. B **61**, 3711 (2000).

[63] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Yu. Rusanov, A. V. Veretennikov, A. A. Golubov and J. Aarts, *Coupling of two superconductors through a ferromagnet : Evidence for a $\pi$ junctions.* Phys. Rev. Lett. **86**(11), 2427-2430 (2001).

[64] T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, F. Genêt, B. Stephanidis, and R. Boursier, *Josephson junction through a thin ferromagnetic layer : Negative coupling.,* Phys. Rev. Lett. **89**(13), 137007 (2002).

[65] J. S. Jiang, D. Davidović, Daniel H. Reich and C. L. Chien. *Oscillatory Superconducting Transition Temperature in Nb/Gd Multilayers.* Phys. Rev. Lett. **74**, 314–317 (1995).

[66] C. W. J. Beenakker, *Specular Andreev Reflection in Graphene.* Phys. Rev. Lett. **97**, 067007 (2006).

[67] Chunxu Bai, Yanling Yang and Xiangdong Zhang, *Specular Andreev reflection and magnetoresistance in graphene-based ferromagnet-superconductor double junctions.* Appl. Phys. Lett. **92**(10), 102513 (2008).

[68] Y. Asano and Y. Tanaka, *Correlation between specular Andreev reflection and zero-energy states in normal-metal/d-wave-superconductor junctions.* Phys. Rev. B **65**, 064522 (2002).

[69] D. Beckmann, H. B. Weber and H. v. Löhneysen, *Evidence for Crossed Andreev Reflection in Superconductor-Ferromagnet Hybrid Structures.* Phys. Rev. Lett **93**, 197003 (2004).

[70] T. Yamashita, S. Takahashi and S. Maekawa, *Crossed Andreev reflection in structures consisting of a superconductor with ferromagnetic leads.* Phys. Rev. B **68**, 174504 (2003).

[71] R. Mélin and S. Peysson, *Crossed Andreev reflection at ferromagnetic domain walls.* Phys. Rev. B **6**8, 174515 (2003).

[72] P. G. de Gennes, *Coupling between ferromagnets through a superconducting layer.* Phys. Lett. **23**, 10 (1966).

[73] A. I. Buzdin, A. V. Vedyayev and N. V. Ryzhanova, *Spin-orientation-dependent superconductivity in F/S/F structures.* Europhys. Lett., **48** 686 (1999).

[74] L. R. Tagirov, *Low-Field Superconducting Spin Switch Based on a Superconductor /Ferromagnet Multilayer.* Phys. Rev. Lett. **83**, 2058 (1999).

[75] J. J. Hauser, *Coupling Between Ferrimagnetic Insulators Through a Superconducting Layer.* Phys. Rev. Lett. **23**, 374 (1969).

[76] J. Y. Gu, C.-Y. You, J. S. Jiang, J. Pearson, Ya. B. Bazaliy, and S. D. Bader, *Magnetization-Orientation Dependence of the Superconducting Transition Temperature in the Ferromagnet-Superconductor-Ferromagnet System : CuNi/Nb/CuNi.* Phys. Rev. Lett. **89**, 267001 (2002).

[77] A. Yu. Rusanov, M. Hesselberth, J. Aarts and A. I. Buzdin, *Enhancement of the Superconducting Transition Temperature in Nb/Permalloy Bilayers by Controlling the Domain State of the Ferromagnet.* Phys. Rev. Lett. **93**, 057002 (2004).

[78] I. C. Moraru, W. P. Pratt, Jr. and N. O. Birge, *Magnetization-Dependent Tc Shift in Ferromagnet/Superconductor/Ferromagnet Trilayers with a Strong Ferromagnet.* Phys. Rev. Lett. **96**, 037004 (2006).

[79] Guo-Xing Miao, KapSoo Yoon, T. S. Santos, *Influence of Spin-Polarized Current on Superconductivity and the Realization of Large Magnetoresistance.* Phys. Rev. Lett. **98**, 267001 (2007).

[80] A. Yu. Rusanov, S. Habraken, and J. Aarts, *Inverse spin switch effects in ferromagnet-superconductor-ferromagnet trilayers with strong ferromagnets.* Phys. Rev. B **73**, 060505(R) (2006).

[81] I. C. Moraru, W. P. Pratt, Jr., and N. O. Birge, *Observation of standard spin-switch effects in ferromagnet/superconductor/ferromagnet trilayers with a strong ferromagnet.* Phys. Rev. B **74**, 220507(R) (2006).

[82] R. Steiner and P. Ziemann, *Magnetic switching of the superconducting transition temperature in layered ferromagnetic/superconducting hybrids : Spin switch versus stray field effects.* Phys. Rev. B **74**, 094504 (2006).

[83] D. Stamopoulos, E. Marios and M. Pissas, *Enhancement of superconductivity by exchange bias.* Phys. Rev. B **75**, 014501 (2007).

[84] N. M. Nemes, M. García-Hernández, S. G. E. te Velthui, A. Hoffmann, C. Visani, J. Garcia-Barriocanal, V. Peña, D. Arias, Z. Sefrioui, C. Leon and J. Santamaría , *Origin of the inverse spin-switch behavior in manganite/cuprate/manganite trilayers.* Phys. Rev. B **78**, 094515 (2008).

[85] J. Zhu, X. Cheng, C. Boone and I. N. Krivorotov, *Origin of the Inverse Spin Switch Effect in Superconducting Spin Valves.* Phys. Rev. Lett. **103**, 027004 (2009).

[86] A. Singh, C. Sürgers, and H. v. Löhneysen, *Superconducting spin switch with perpendicular magnetic anisotropy.* Phys. Rev. B **75**, 024513 (2007).

[87] H. Jirari, R. Mélin and N. Stefanakis, *Proximity effect in multiterminal hybrid structures.* Eur. Phys. J. B **31**, 125-139 (2003).

[88] A. I. Buzdin and M. Daumens, *Inversion of the proximity effect in hybrid ferromagnet-superconductor-ferromagnet structures.* Europhys. Lett. 64, 510 (2003).

[89] S. Tollis. *Contributions à la théorie des hétérostructures supraconducteur-ferromagnétique nanométriques.* Thése de l'université Bordeaux 1 (n° d'ordre 3609) (2005).

[90] S. Tollis, M. Daumens, and A. Buzdin, *Inversion of the proximity effect in atomic-scale ferromagnet/superconductor/ferromagnet trilayers.* Phys. Rev. B **71**, 024510 (2005).

[91] J. Bardeen, *Tunnelling from a Many-Particle Point of View.* Phys. Rev. Lett. **6**, 57–59 (1961).

[92] J. Bardeen, *Tunneling Into Superconductors.* Phys. Rev. Lett. **9**, 147–149 (1962).

[93] V. Ambegaokar and A. Baratoff, *Tunneling between superconductors.* Phys. Rev. Lett. **10**, 486-489 (1963).

[94] M. Cyrot and D. Pavuna, *Introduction to superconductivity and High $T_c$ materials.* (World Scientific, 1995).

[95] L. N. Bulaevshii and M. V. Zyskin, *Energy gap in layered superconductors.* Phys. Rev. B **42**, 10230 (1990).

[96] T. M. Rice, *Superconductivity in One and Two Dimensions.* Phys. Rev. **140**, A1889–A1891 (1965).

[97] A. I. Larkin and A. A. Varlamov, p95 in *The physics of Superconductors*, by K. H. Bennemann and J. B. Ketterson (Springer, 2003).

[98] L. I. Glazman and A. E. Koshelev, Sov. Phys. JETP **70**(4), 774 (1990).

[99] Ya. V. Fominov, A. A. Golubov and M. Yu. Kupriyanov, JETP Lett. 77, 510 (2003).

[100] A. Cottet and W. Belzig, *Superconducting proximity effect in a diffusive ferromagnet with spin-active interfaces.* Phys. Rev. B **72**, 180503 (2005).

[101] A. Cottet, *Spectroscopy and critical temperature of diffusive superconducting/ferromagnet hybrid structure with spin-active interfaces.* Phys. Rev. B. **76**, 224505 (2007).

[102] A. Cottet and J. Linder, *Superconducting/Ferromagnetic diffusive bilayer with spin-active interface : A numerical study.* Phys. Rev. B **79**, 054518 (2009).

[103] S Bordács, I Kézsmárki1, K Ohgushi and Y Tokura, *Experimental band structure of the nearly half-metallic CuCr2Se4 : an optical and magneto-optical study.* New Journal of Physics **12**, 053039 (2010).

[104] X. Montiel, D. Gusakova, M. Daumens and A. I. Buzdin, *Proximity effect in atomic-scaled hybrid superconductor/ferromagnet structures : Crucial role of electron spectra.* Europhys. Lett. 89, 67002 (2009).

[105] A. I. Buzdin, L. N. Bulaevskii and S. V. Panjukov. *Critical-current oscillations as a function of exchange field and thickness of the ferromagnetic metal (F) in an S-F-S Josephson junction.* Sov. Phys. JETP **35**,178 (1982).

[106] A. I. Buzdin, L. N. Bulaevskii and S. V. Panjukov. *The oscillation dependence of the critical-current on the exchange field of ferromagnetic metal (F) in Josephson junction S-F-S.* Solid. State Comm. **44**, 539 (1982).

[107] A. Bauer, J. Bentner, M. Aprili, M. L. Della Rocca, M. Reinwald, W. Wegscheider and C. Strunk, *Spontaneaous supercurrent induced by ferromagnetic $\pi$ junctions.* Phys. Rev. Lett **92**, 217001 (2004).

[108] H. Sellier, C. Baraduc, F. Lefloch and Roberto Calemczuk, *Half integer Shapiro steps at the $0-\pi$ crossover of a ferromagnetic Josephson junction.* Phys. Rev. Lett. **92**, 257005 (2004).

[109] C.C. Tsuei and J. R. Kirtley. *Pairing symetry in cuprate superconductors.* Rev. Mod. Phys. **72**, 969 (2000).

[110] J. J. A. Baselmans, A. F. Morpurgo, B. J. van Wees and T. M. Klapwijk. *Reversing the direction of supercurrent in a controllable Josephson junction.* Nature **397**, 43 (1999).

[111] J. J. A. Baselmans, B. J. van Wees and T. M. Klapwijk. *Controllable $\pi$ SQUID.* Appl. Phys. Lett. **79**, 2940 (2001).

[112] A. F. Volkov and A. Anishchanka. *Alternative mechanism for the sign-reversal effect in superconductor-ferromagnet-superconductor Josephson junctions.* Phys. Rev. B **71**, 024501 (2005).

[113] M. Houzet, A. Buzdin and M. Kulic, *Decoupling of superconducting layers in the magnetic superconductor $RuSr_2GdCu_2O_8$.* Phys. Rev. B **64**, 184501 (2001).

[114] T. Nachtrab, D. Koelle R. Kleiner, C. Bernhard and C. T. Lin, *Intrinsic Josephson Effects in the Magnetic Superconductor $RuSr_2GdCu_2O_8$.* Phys. Rev. Lett. **92**, 117001 (2004).

[115] T. Nachtrab, C. Bernhard, C. Lin, D. Koelle and R. Kleiner, *The ruthenocuprates : natural superconductor–ferromagnet multilayers, Les ruthenocuprates : des multicouches supraconducteurs–ferromagnétiques naturelles.* C. R. Phys. **7**, 68 (2006).

[116] B. M. Andersen, I. V. Bobkova, P. J. Hirschfeld and Yu. S. Barash, $0-\pi$ T*ransitions in Josephson Junctions with Antiferromagnetic Interlayers*, Phys. Rev. Lett. **96**, 117005 (2006).

[117] G. Eilenberger, *Transformation of Gorkov's equations for type II superconductors into transport-like equations.* Z. Phys **214**,195-213 (1968).

[118] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, *Quasiclassical method in the theory of superconductivity.* Sov. Phys. JETP **28**, 1200-1205 (1969).

[119] A. L. Shelankov, *On the derivation of quasiclassical equations for superconductors.* J. Low. Temp. Phys. **60**, 29-44 (1985).

[120] N. B. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity* (Oxford University Press Inc., New York, 2001).

[121] K. D. Usadel, *Generalized diffusion equation for superconducting alloys.* Phys. Rev. Lett. **25**, 507-509 (1970).

[122] A. V. Zaitsev, *Quasiclassical equations of the theory of superconductivity for contiguous metals and the properties of constricted microcontacts.* Sov. Phys. JETP **59**, 1015-1024 (1984).

[123] D. Saint-James, D. Sarma and E. J. Thomas, *Type II superconductivity*, Pergamon, New York (1969).

[124] P. M. Tedrow, R. Meservey and B. B. Schwartz, *Experimental Evidence for a First-Order Magnetic Transition in Thin Superconducting Aluminum Films.* Phys. Rev. Lett **24**, 1004-1007 (1970).

[125] P. W. Adams, P. Herron and E. I. Meletis, *First-order spin-paramagnetic transition and tricritical point in ultrathin Be films.* Phys. Rev. B **58**, R2952 (1998).

[126] Y. Matsuda and H. Shimahara, *Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state in heavy fermion superconductors.* J. Phys. Soc. Jap. **76**, 051005 (2007).

[127] A. I. Buzdin and V. V. Tugushev, Sov. Phys. JETP **58**, 428 (1983).

[128] L. N. Bulaevskii, *Magnetic properties of layered superconductors with weak interaction between layers.* Sov. Phys. JETP **37**, 1133, (1973).

[129] L. N. Bulaevskii, *Inhomogeneous state and the anisotropy of the upper critical fields in layered superconductors with Josephson coupling interaction.* Sov. Phys. JETP **38**, 634, (1974).

[130] M. Houzet, A. I. Buzdin, L. Bulaevskii and M. Maley, *New Superconducting Phases in Field-Induced Organic Superconductor* $\lambda-(BETS)_2FeCl_4$. Phys. Rev. Lett. **88**, 227001 (2003).

[131] L. Balicas, J. S. Brooks, K. Storr, S. Uji, M. Tokumoto, H. Tanaka, H. Kobayashi, A. Kobayashi, V. Barzykin and L. P. Gorkov, *Superconductivity in an organic insulator at very high magnetic field.* Phys. Rev. Lett. **87**, 067002 (2001).

[132] A. Bianchi, R. Movshovich, N. Oeschler, P. Gegenwart, F. Steglich, J. D. Thompson, P. G. Pagliuso and J. L. Sarrao, *First-order superconductivity phase transition in* $CeCoIn$. Phys. Rev. Lett. **89**, 137002 (2002).

[133] A. Bianchi, R. Movshovich, C. Capan, P. G. Pagliuso and J. L. Sarrao, *Possible Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconducting state in* $CeCoIn$. Phys. Rev. Lett. **91**, 187004 (2003).

[134] S. Uji, T. Terashima, N. Nishimura, Y. Takahide1, T. Konoike, K. Enomoto, H. Cui, H. Kobayashi, A. Kobayashi, H. Tanaka, M. Tokumoto, E. S. Choi, T. Tokumoto, D. Graf and J. S. Brooks, *Vortex dynamics and the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state in a magnetic-field-induced organic superconductors.* Phys. Rev. Lett. **97**, 157001 (2006).

[135] R. Lortz, Y. Wang, A. Demuer, P. H. M. Böttger, B. Bergk, G. Zwicknagl, Y. Nakazawa and J. Wosnitza, *Calorimetric evidence for a Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconducting state in layered organic superconductors* $\kappa-(BEDT-TTF)_2Cu(NCS)_2$. Phys. Rev. Lett. **99**, 187002 (2007).

[136] A. Bianchi, R. Movshovich, I. Vekhter, P. G. Pagliuso and J. L. Sarrao, *Avoided antiferromagnetic order an quantum critical point in* $CeC0In_5$. Phys. Rev. Lett. **91**, 257001 (2003).

[137] K. Izawa, H. Yamaguchi, Y. Matsuda, H. Shishido, R. Settai and Y. Onuki, *Angular position of nodes in the superconducting gap of quasi-2D heavy fermion superconductor CeCoIn.* Phys. Rev. Lett. **87**, 057002 (2001).

[138] K. Kumagai, K. Kakuyanagi, M. Saitoh, S. Takashima, M. Nohara, H. Takagi and Y. Matsuba, *Microscopic evidence of the FFLO state in* $CeC0In_5$ *probed byy NMR.* Physica B 378-380, 347-350 (2006).

[139] R. Casalbuoni and G. Nardulli. *Inhomogeneous superconductivity in condensed matter and QCD.* Rev. Mod. Phys. 76, 263-320 (2004).

[140] D. E. Sheevy and L. Radzihonovsky. *BCS-BEC crossover, phase transitions and phase separation in polarized resonantly-paired superfluids.* ann. Phys. **322**, 1790-1924 (2007).

[141] G. Orso. *Attractive Fermi gases with unequal spin populations in highly elongated traps.* Phys. Rev. Lett. **98**, 070402 (2007).

[142] H. A. Radovan, N. A. Fortune, T. P. Murphy, S. T. Hannahs, E. C. Palm, S. W. Tozer and D. Hall, *Magnetic enhancement of superconductivity from electron spin domain.* Nature **425**, 51 (2003).

[143] M. Houzet and V. P. Mineev, *Interplay of paramagnetic, orbital, and impurity effects on the phase transition of a normal metal to the superconducting state.* Phys. Rev. B **74**, 144522 (2006).

[144] N. R. Whertamer, E. Helfand and P. C. Hohenberg, *Temperature and Purity Dependence of the Superconducting Critical Field, Hc2. III. Electron Spin and Spin-Orbit Effects.* Phys. Rev. **147**, 295 (1966).

[145] L. W. Gruenberg and L. Gunther, *Fulde-Ferrell Effect in Type-II Superconductors.* Phys. Rev. Lett. **16**, 996 (1966).

[146] L. G. Aslamasov, *Influence of impurities on the existence of an inhomogeneous state in a ferromagnetic superconductor.* Sov. Phys. JETP **28**, 773 (1969).

[147] D. F. Agterberg and K. Yang, *The effect of impurities on Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconductors.* J. Phys. : Condens. Matter **13**, 9259 (2001).

[148] E. Jobiliong, H. D. Zhou, J. A. Janik, Y.-J. Jo, L. Balicas J. S. Brooks and C. R. Wiebe, *Anisotropic superconductivity in bulk $CaC_6$.*Phys. Rev. B **76**, 052511 (2007).

[149] T. E. Weller, M. Ellerby, S. S. Saxena, R. P. Smith and N. T. Skipper, *Superconductivity in the intercalated graphite compounds $C_6Yb$ and $C_6Ca$.* Nature Phys. **1**, 39 - 41 (2005).

[150] A. Buzdin and L. N. Bulaevskii, *Organic superconductors.* Sov. Phys. Usp. **27**, 830 (1984).

[151] U. Welp, W. K. Kwok, G. W. Crabtree, K. G. Vandervoort and J. Z. Liu, *Magnetic measurements of the upper critical field of $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ single crystals.* Phys. Rev. Lett. **62**, 1908 (1989).

[152] Y. Iye, T. Terashima, T. Sakakibaraa, T. Goto, N. Miura, H. Takeya and H. Takei, *The anisotropic superconductivity of $RBa_2Cu_3O_{7-x}$ (R : Y, Gd and Ho) single crystals.* Physica C **153-155**, 26-31 (1988).

[153] M. Oda, Y. Hidaka, M. Suzuki and T. Murakami , *Anisotropic superconducting properties of $Ba_2YCu_3O_{7-y}$.* Phys. Rev. B **38**, 252 (1988).

[154] M. Tuominen, A. M. Goldman, Y. Z. Chang and P. Z. Jiang, *Magnetic anisotropy of high-$T_c$ superconductors.* Phys. Rev. B **42**, 412 (1990).

[155] J.M. Triscone, M. G. Karkut, L. Antognazza, O. Brunner and Ø. Fischer, *$Y-Ba-Cu-O/Dy-Ba-Cu-O$ superlattices : A first step towards the artificial construction of high-Tc superconductors.* Phys. Rev. Lett. **63**, 1016 (1989).

[156] J.M. Triscone, O. Fischer, L. Antognazza, O. Brunner, A. D. Kent and M. G. Karkut, *$YBa_2Cu_3O_7/PrBa_2Cu_3O_7$ superlattices : Properties of Ultrathin superconducting layers separated by insulating layers.* Phys. Rev. Lett. **64**, 804 (1990).

[157] J. R. Cooper, L. Forró and B. Keszeit. *Direct evidence for a very large penetration depth in superconducting $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ single crystals.*Nature (London) **343**, 444 (1990).

[158] S. Martin, A. T. Fiory, R. M. Fleming, , L. F. Schneemeyer, and J. V. Waszczak, *Temperature Dependence of the Resistivity Tensor in Superconducting $Bi_2Sr_{2.2}Ca_{0.8}Cu_2O_8$ Crystals.* Phys. Rev. Lett. **60**, 2194 (1988).

[159] Y. Hidaka, Y. Enomoto, M. Suzuki, M. Oda and T. Murakami, *Anisotropie Properties of Superconducting Single-Crystal* $(La_{1-x}Sr_x)_2CuO_4$. Jpn. J. Appl. Phys. **26,** L377-L379 (1987).

[160] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity,* (Dover Publications, 1996).

[161] V. L. Ginzburg, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **23**, 236 (1952).

[162] W. E. Lawrence and S. Doniach in *Proceedings of the Twelfth International Conference on Low Temperature Physics*, Kyoto, 1970, edited by E. Kanda (Keigaku, Tokyo, 1970), p. 361.

[163] S. Tollis, J. Cayssol, and A. Buzdin, *Competition between $\pi$-coupling and Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov modulation in a periodic array of ferromagnetic-superconducting bilayers of atomic thickness.* Phys. Rev. B **73**, 174519 (2006).

[164] M. Houzet and A. I. Buzdin, *Nonuniform superconducting phases in a layered ferromagnetic superconductor.* Europhys. Lett. **58**, 596 (2002).

[165] V. Prokić, A. I. Buzdin and L. Dobrosavljević-Grujić, *Theory of the $\pi$ junctions formed in atomic-scale superconductor/ferromagnet superlattices.* Phys. Rev. B **59**, 587 (1999).

[166] A. Buzdin, S. Tollis, and J. Cayssol, *Field-Induced Superconductivity with an Enhanced and Tunable Paramagnetic Limit.* Phys. Rev. Lett. **95**, 167003 (2005).

[167] A. Buzdin, S. Tollis, and J. Cayssol, *Anomalous (H, T) phase diagram in bilayered superconducting systems.* Physica C **460-462**, 1028 (2007).

[168] M. L. Kulic and U. Hoffmann, *Inhomogeneous superconducting phase in absence of paramagnetic effect.* Solid State Commun. **77**, 717 (1991).

[169] A. I. Buzdin, V. P. Damjanović and A. Yu. Simonov, *Thermodynamic properties of atomic superconductor–normal-metal multilayers.* Phys. Rev. B **45**, 7499–7502 (1992).

[170] A. G. Lebed and K. Yamaji, *Restoration of Superconductivity in High Parallel Magnetic Fields in Layered Superconductors.* Phys. Rev. Lett. 80, 2697 (1998).

[171] R. Yuasa, M. Nemeto, S. Fujiwara, H. Furukawa, H. Mukaida, S. Tokunaga and M. Nakao, *Long-range Josephson soupling in planar SNS junctions.* Physica(Amsterdam)C, **185-189**, 2587-2588 (1991).

[172] Y. Tarutani, T. Fukazawa, U. Kabasawa, A. Tsukamoto,M. Hiratani and K. Takagi, *Superconducting characteristics of planar-type $HoBa_2Cu_3O_{7-x}$ – $La_{1.5}Ba_{1.5}Cu_3O_{7-y}$ – $HoBa_2Cu_3O_{7-x}$ junction.* Appl. Phys. Lett. **58**(23), 2707 (1991).

[173] J. B. Barner, C. T. Rogers, A. Inam, R. Ramesh, S. Bersey, *All a-axis oriented $YBa_2Cu_3O_{7-y}$ – $PrBa_2Cu_3O_{7-z}$ – $YBa_2Cu_3O_{7-y}$ Josephson devices operating at 80 K.* Appl. Phys. Lett. **59**(6), 742 (1991).

[174] M. Kasai, Y. Kanke, T. Ohno and Y. Kozono, *Possible mechanism of proximity effect coupled to spin fluctuation in $YBa_2Cu_3O_y$/magnetic manganese oxide/$YBa_2Cu_3O_y$ junctions.* J. Appl. Phys. **72**(11), 5344 (1992).

[175] A. C. Meltzow, S. Hu, J. HollKott, J. Auge, B. Spangenberg, H. Kurz, N.D. Zakharov and D. Hesse, *Doped-type coplanar junctions in $Bi_2Sr_2Ca_1Cu_2O_{8+x}$ system.* IEEE **7**(2), 2852 (1997).

[176] R. S. Decca, H. D. Drew, E. Osquiguil, B. Maiorov, and J. Guimpel, *Anomalous proximity effect in underdoped $YBa_2Cu_3O_{6+x}$ Josephson junction.* Phys. Rev. Lett **85**(17), 3708 (2000).

[177] Z. Sefrioui, D. Arias, V. Peña, J. E. Villegas, M. Varela, P. Prieto, C. León, J. L. Martinez and J. Santamaria, *Ferromagnetic/superconducting proximity effect in* $La_{0.7}Ca_{0.3}MnO_3/YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ *superlattices.* Phys. Rev. B **67**, 214511 (2003).

[178] K. A. Delin and A. W. Kleinsasser, *Stationary properties of high-critical-temperature proximity effect Josephson junctions.* Supercond. Sci. Technol. **9**, 227-269 (1996).

[179] Y. Kresin, Yu. Ovchinikov and S. Wolf, *"Giant" Josephson proximity effect*, Appl. Phys. Lett. **83**, 722 (2003).

[180] I. Bozovic, G. Logvenov, M. A. J. Verhoeven, P. Caputo, E. Goldobin and M. R. Beasley, *Giant proximity effect in Cuprate Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **93**, 157002 (2004).

[181] F. S. Bergeret, A. F. Volkov and K. B. Efetov, *Long-Range Proximity Effects in Superconductor-Ferromagnet Structures*, Phys. Rev. Lett. 86, 4096–4099 (2001).

[182] W. Belzig, C. Bruder and G. Schön, *Local density of state in a dirty normal metal connected to a superconductor.* Phys. Rev. B **54**, 9443 (1996).

[183] A.K. Gupta, L. Crétinon, N. Moussy, B. Pannetier, and H. Courtois, *Anomalous density of state in a metallic film in proximity with a superconductor.* Physical Review B **69**, 104514 (2004).

[184] S.Gueron, H. Pothier, N. O. Birge, D. Esteve and M. H. Devoret, *Superconducting Proximity Effect Probed on a Mesoscopic Length Scale.* Phys. Rev. Lett **77**, 3025 (1996)

[185] N. Moussy, H. Courtois and B. Pannetier, *Local spectroscopy of a proximity superconductor at very low temperature.*, Europhys. Lett. **55**, 861 (2001).

[186] F. Giubileo, D. Roditchev, X. Sacks, R. Lamy, D.X. Thanh, J. Klein, S. Miraglia, D. Fruchart, J. Marcus and Ph. Monod. *Two-gap state density in* $MgB_2$ *: A true bulk property or a proximity effect ?* Phys. Rev. Lett **87**, 177008 (2001).

[187] N. Bergeal, V.Dubost, Y.Noat, W.Sacks, D. Roditchev, N. Emery, C. Hérold, J-F Marêché, P. Lagrange and G. Loupias. *Scanning Tunneling spectroscopy on the Novel Superconductor* $CaC_6$. Phys. Rev. Lett. **87**, 077003 (2006).

[188] T. Y. Hsiang and D. K. Finnemore, *Superconducting critical currents for thick, clean superconductor-normal metal-superconductor junctions.* Phys. Rev. B **22**, 154 (1980).

[189] M. Liberati, J. Neulinger, R. Chopdekar, E. Arenholz, Y. Suzuki, A. Stacy and Y. Idzerda. *New materials for spintronics :* $CuCr_2Se_4$. Magnetics Conference, 2006. INTERMAG 2006. IEEE International. 382 (2006).

[190] A. Miyake, D. Aoki and J. Flouquet. *Field Re-entrant Superconductivity Induced by the Enhancement of Effective Mass in URhGe.* J. Phys. Soc. Jpn. **77**, 094709 (2008).