



**HAL**  
open science

# **Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité**

Stéphane Meo

## ► To cite this version:

Stéphane Meo. Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2000. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-00661661⟩

**HAL Id: tel-00661661**

**<https://theses.hal.science/tel-00661661v1>**

Submitted on 20 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II  
ECOLE SUPERIEURE DE MECANIQUE DE MARSEILLE

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MECANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**Stéphane MEO**

le Premier Décembre 2000

Titre :

**MODELISATION NUMERIQUE DU  
COMPORTEMENT MECANIQUE DE  
STRUCTURES EN ELASTOMERE : DE  
L'ELASTICITE A LA  
THERMO-VISCO-HYPERELASTICITE**

---

**Directeurs de thèse :**

Olivier DEBORDES – Adnane BOUKAMEL

---

**JURY**

Mr K. SAANOUNI,	Professeur, Université de Technologie de Troyes	Président
Mr B. PESEUX,	Professeur, Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
Mr F. SIDOROFF	Professeur, Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
Mr T. DESOYER	Professeur, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille	Examineur
Mr P. LEGENDRE	Ingénieur EUROCOPTER, Etablissement de Marignane	Examineur
Mr A. BOUKAMEL	Enseignant-Chercheur, Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille	
Mr O. DEBORDES	Professeur, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille	



UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II  
ECOLE SUPERIEURE DE MECANIQUE DE MARSEILLE

*THESE*

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MECANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**Stéphane MEO**

le Premier Décembre 2000

Titre :

**MODELISATION NUMERIQUE DU  
COMPORTEMENT MECANIQUE DE  
STRUCTURES EN ELASTOMERE : DE  
L'ELASTICITE A LA  
THERMO-VISCO-HYPERELASTICITE**

---

**Directeurs de thèse :**

Olivier DEBORDES – Adnane BOUKAMEL

---

**JURY**

Mr K. SAANOUNI,	Professeur, Université de Technologie de Troyes	Président
Mr B. PESEUX,	Professeur, Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
Mr F. SIDOROFF	Professeur, Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
Mr T. DESOYER	Professeur, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille	Examineur
Mr P. LEGENDRE	Ingénieur EUROCOPTER, Etablissement de Marignane	Examineur
Mr A. BOUKAMEL	Enseignant-Chercheur, Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille	
Mr O. DEBORDES	Professeur, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille	



*A mes parents,  
mon frère*

...



## Remerciements

Ce travail de thèse, réalisé au sein de l'équipe Modèles Numériques du laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille, a constitué une réelle aventure, pratiquement une vie en raccourci avec ses joies et, bien sûr, ses doutes.

Rien n'est facile ; ce travail en témoigne et doit son accomplissement à de nombreuses rencontres. Je remercie ici l'ensemble des personnes qui par un mot, une oreille attentive m'ont rendu la tâche plus facile.

Pour commencer, mes parents et mon frère pour m'avoir supporté dans les moments sombres évoqués précédemment et m'avoir soutenu durant ces trois dernières années et toutes les autres. Mes directeurs de thèse, Olivier Débordes pour la liberté d'action qu'il m'a donnée témoignant d'une confiance certaine ; Adnane Boukamel pour son goût pour la recherche qu'il a su me transmettre et surtout son amitié.

L'ensemble des interlocuteurs que j'ai eus chez Eurocopter et qui ont pu apporter des réponses à toutes mes questions, en particulier sur le plan expérimental.

L'intégralité de l'équipe Modèles Numériques, en rendant un hommage particulier aux thésards : Vincent, Sébastien et Vincent avec qui j'ai partagé une maison ... heu?! un bureau (eh! on est chez nous!) et les autres en vrac Stéphane, Christine, Isabelle, Jérôme, Sameh. J'associe à ces derniers mes amis marseillais : Séverine, Céline, Vincent, Céline, Yann et Christine.

Une dédicace à part pour Christine Bertolotti pour son soutien inestimable sur tous les plans et son incroyable sens de l'orthographe qui a fait de ce manuscrit soit autre chose qu'un recueil de fautes (...).

Enfin, ma reconnaissance va naturellement à tous les membres du jury, à savoir Monsieur K. Saanouni à qui incomba la lourde responsabilité de présider ma soutenance, Messieurs B. Peseux et F. Sidoroff qui ont accepté de rapporter sur mes travaux, Monsieur P. Legendre pour sa gentillesse, sa compréhension et sa disponibilité et, enfin, à Monsieur T. Désoyer qui par sa présence durant cette soutenance et des tas d'autres choses m'a offert bien plus qu'il ne croit.

Je conclurai simplement avec cette phrase qui peut résumer une vie et *a fortiori* une thèse : "ce qui compte, c'est pas l'issue mais c'est le combat!".



# SOMMAIRE

Glossaire	xiii
Introduction	
<b>Chapitre I Grandes Déformations et Cadre Thermodynamique</b>	<b>5</b>
I.1 Introduction . . . . .	7
I.2 Formalisme et grandes déformations . . . . .	7
I.2.1 Définitions et description du mouvement . . . . .	7
I.2.2 Mesure des déformations . . . . .	9
I.2.3 Vitesse de déformation . . . . .	11
I.2.4 Description des efforts . . . . .	12
I.2.5 Equations d'équilibre . . . . .	14
I.3 Cadre thermodynamique . . . . .	17
I.3.1 Principes fondamentaux . . . . .	17
I.3.2 Variables thermodynamiques et loi de comportement . . . . .	19
I.4 Lois de comportement . . . . .	23
I.4.1 Généralités . . . . .	23
I.4.2 Principe d'objectivité . . . . .	23
I.4.3 Isotropie du matériau . . . . .	25
I.4.4 Lois d'évolution et potentiel de dissipation . . . . .	25
I.5 Notion d'état intermédiaire . . . . .	29
I.5.1 Introduction . . . . .	29
I.5.2 Généralisation à un phénomène quelconque . . . . .	30
I.5.3 Principe d'invariance des fonctions constitutives . . . . .	31
I.5.4 Cas des matériaux isotropes . . . . .	32
I.5.5 Conséquences thermodynamiques . . . . .	33
I.5.6 Etats intermédiaires et modèles rhéologiques . . . . .	35
I.5.7 Milieux incompressibles . . . . .	37
I.6 Conclusion . . . . .	39

<b>Chapitre II Comportement et Modélisation des Elastomères</b>	<b>41</b>
II.1 Etat de l'art . . . . .	43
II.1.1 Introduction et généralité sur les élastomères . . . . .	43
II.1.2 Comportement hyperélastique . . . . .	44
II.1.3 Comportement viscoélastique . . . . .	49
II.1.4 Effet MULLINS et endommagement . . . . .	54
II.2 Choix du modèle . . . . .	59
II.2.1 Essais expérimentaux . . . . .	59
II.2.2 Détermination du modèle . . . . .	60
II.2.3 Identification du modèle et des paramètres mécaniques . . . . .	65
II.3 Mise en oeuvre numérique . . . . .	73
II.3.1 Formulation variationnelle . . . . .	73
II.3.2 Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis . . . . .	74
II.3.3 Discrétisation temporelle . . . . .	75
II.3.4 Intégration locale . . . . .	77
II.3.5 Choix des éléments finis . . . . .	79
II.3.6 Validation . . . . .	84
II.4 Conclusion . . . . .	89
<b>Chapitre III Couplages thermo-mécaniques des élastomères</b>	<b>91</b>
III.1 Introduction . . . . .	93
III.2 Présentation des résultats expérimentaux . . . . .	93
III.3 Aspects théoriques du couplage . . . . .	97
III.3.1 Equations générales pour un milieu à $n$ configurations intermédiaires incompressibles . . . . .	97
III.3.2 Particularisation du modèle . . . . .	100
III.4 Identification des paramètres mécaniques en fonction de la température . . . . .	103
III.4.1 Introduction et présentation de la démarche . . . . .	103
III.4.2 Résultats d'identification . . . . .	103
III.5 Traitement et résolution numérique . . . . .	105
III.5.1 Cas général . . . . .	105
III.5.2 Cas particulier d'une sollicitation mécanique périodique . . . . .	107
III.5.3 Analyse du modèle . . . . .	113
III.6 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux . . . . .	119
III.6.1 Essais de type 2, température d'enceinte à $27^{\circ}C$ . . . . .	119
III.7 Conclusion . . . . .	125

<b>Chapitre IV Assemblage de structures une à une invariantes dans une direction</b>	<b>127</b>
IV.1 Introduction . . . . .	129
IV.2 Méthodes de sous structuration . . . . .	129
IV.2.1 Méthode classique . . . . .	130
IV.2.2 Méthode de sous structuration multi-niveaux . . . . .	132
IV.3 Assemblage de structures une à une invariantes par translation . . . . .	137
IV.3.1 Introduction . . . . .	137
IV.3.2 Organisation des calculs . . . . .	137
IV.4 Modélisation du bras élastomérique . . . . .	139
IV.4.1 Présentation de la pièce et des cas de chargement étudiés . . . . .	139
IV.4.2 Choix des sous structures et des discrétisations spatiales . . . . .	140
IV.4.3 Résultats sur les différents cas de chargement . . . . .	141
IV.4.4 Facteur de perte de la structure dans le cas d'un chargement de traînée . . . . .	157
IV.5 Conclusion . . . . .	161
<b>Chapitre V Détermination d'un terme de dissipation à partir des résultats de sous structuration</b>	<b>163</b>
V.1 Introduction et motivations de l'étude . . . . .	165
V.2 Choix du modèle . . . . .	165
V.2.1 Cas d'une sollicitation monodimensionnelle . . . . .	165
V.2.2 Identification des caractéristiques du modèle de POYNTING-THOMSON en petites perturbations en fonctions d'un jeu de paramètres identifiés en grandes déformations . . . . .	167
V.3 Cas d'un chargement de traction harmonique . . . . .	171
V.4 Conclusion . . . . .	173
<b>Conclusion</b>	<b>175</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>179</b>
<b>Table des figures</b>	<b>185</b>
<b>Annexes</b>	<b>191</b>
<b>Annexe A Inégalité de Clausius-Duhem dans les différentes descriptions</b>	<b>191</b>
<b>Annexe B Etats intermédiaires et Inégalité de Clausius-Duhem</b>	<b>195</b>
<b>Annexe C Milieux incompressibles, calculs annexes</b>	<b>199</b>

---

Annexe D Isotropie de la fonction énergie libre élastique par rapport aux variables d'état	201
Annexe E Equations régissant les modèles rhéologiques choisis	207
Annexe F Courbes contrainte - déformation	213
Annexe G Mise en oeuvre d'éléments finis thermiques	215
Annexe H Validation 2D de l'effet tonneau sous chargement de traction	221

# GLOSSAIRE

## ◇ NOTATIONS TENSORIELLES

$a$	grandeur scalaire	$\otimes$	produit tensoriel des tenseurs d'ordre 2
$\bar{a}$	tenseur d'ordre 1	$\boxtimes$	$\bar{a} \boxtimes \bar{b} = a_{ik} b_{mj} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$
$\bar{\bar{a}}$	tenseur d'ordre 2	$\cdot$	produit tensoriel contracté
$\bar{\bar{\bar{a}}}$	tenseur d'ordre 4	$:$	produit tensoriel doublement contracté
$\bar{\bar{\bar{\bar{1}}}}$	tenseur unité d'ordre 2	$\bar{a}^T$	transposée tenseur d'ordre 2
$\bar{\bar{\bar{\bar{1}}}}$	tenseur unité d'ordre 4	det	déterminant
$\bar{a}^d$	partie déviatorique de $\bar{a}$	cof	tenseur des cofacteurs
$\bar{a}^s$	partie sphérique de $\bar{a}$	tr	trace d'un tenseur d'ordre 2
$\bar{a}^{sym}$	partie symétrique de $\bar{a}$	$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\bar{a}^{ant}$	partie anti-symétrique de $\bar{a}$		
$\bullet$	produit contracté sur un nombre d'indice suffisant pour que le résultat soit un scalaire		
$\nabla_X$ ou $\text{grad}_X$	gradient dans la configuration $C_0$		
$\nabla_x$ ou $\text{grad}_x$	gradient dans la configuration $C_t$		
$\nabla$ ou $\text{grad}$	gradient sous l'hypothèse des petites perturbations		
$\text{div}_X$	divergence dans la configuration $C_0$		
$\text{div}_x$	divergence dans la configuration $C_t$		
$\text{div}$	divergence sous l'hypothèse des petites perturbations		

## ◇ NOTATIONS MATRICIELLES

$[b], \mathbf{b}$	matrice ou sous matrice	$[1]_n, \mathbf{1}_n$	matrice unité de dimension $n$
$\{c\}, \mathbf{c}$	vecteur colonne ou sous vecteur colonne	$[0]_{nm}, \mathbf{0}_{nm}$	matrice nulle de dimension $nm$
$\langle c \rangle$	vecteur ligne	$[b]^T, \mathbf{b}^T$	transposée matricelle

## ◇ NOTATION COMPLEXE

$x^* = x_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$  nombre complexe associé au réel  $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$



# Introduction

La demande sans cesse croissante du monde industriel pour des pièces mécaniques élaborées répondant à la fois à des critères de faible coût d'entretien, de performance en termes de légèreté, de résistance, de sécurité en conditions extrêmes d'utilisation, induit la mise en oeuvre, combinés ou non, de matériaux au comportement complexe et ce, à leurs limites mécaniques. Cette escalade technologique conduit à la mise au point de pièces et de matériaux performants pour l'utilisation à laquelle ils sont destinés, mais peut avoir, par des propriétés non attendues en réponse à une sollicitation non étudiée, des conséquences fâcheuses.

Les matériaux élastomères n'échappent pas à cette règle. En effet, par leur élaboration de plus en plus complexe – et relevant bien souvent du secret industriel – en vue d'accroître leurs propriétés intrinsèques (haut pouvoir de déformation et pour bon nombre un caractère amortissant), ils ne présentent plus un comportement dominant, mais bien souvent des comportements faisant intervenir à la fois hyperélasticité, plasticité, viscosité, endommagement (par rupture de chaînes ou réarrangement), et présentant de plus une forte sensibilité aux conditions de pression et de température. De plus, possédant un point de fusion assez bas, il est tentant de les allier à d'autres matériaux aux propriétés mécaniques différentes et d'ainsi obtenir un assemble mécanique présentant simultanément les avantages de ses différents constituants. Cependant, le prix à payer pour de telles pièces est souvent élevé, car elles présentent les caractéristiques inhérentes aux assemblages fortement hétérogènes.

C'est dans ce cadre que s'inscrit ce manuscrit qui présente une étude réalisée au sein de l'Equipe Modèles Numériques du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique en partenariat avec la société EUROCOPTER. Il porte, d'une part, sur la caractérisation du comportement d'un élastomère et le développement du modèle numérique correspondant et, d'autre part, sur l'étude d'une pièce composite complexe, le Bras Elastomérique, chargé de lier la pale au mât rotor d'un hélicoptère et dont les différentes matrices sont partiellement ou entièrement constituées d'élastomère.

Les trois premiers chapitres sont consacrés à l'identification et la mise en oeuvre du modèle de comportement viscoélastique en grandes déformations en tenant compte d'un certain nombre de phénomènes thermiques. Les deux derniers, à vocation plus appliquée, ont trait à la modélisation

d'assemblage de structures une à une invariante dans une même direction. L'originalité de cette démarche tient dans la mise en place d'une technique de sous structuration permettant une description fine de la pièce.

De manière plus précise, l'organisation de ce mémoire de thèse est la suivante :

- Le chapitre I introduit, dans un premier temps, la notion de grandes déformations et leur implication dans les différentes équations de la mécanique. Puis, on définit le cadre thermodynamique de l'étude, qui est ensuite particularisé aux descriptions à plusieurs configurations intermédiaires incompressibles [SIDOROFF, 1973]. Via les travaux de SIDOROFF [1977], on montre que sous certaines hypothèses, de telles descriptions peuvent être vues comme une généralisation aux grandes déformations de modèles rhéologiques.
- Le deuxième chapitre s'articule autour de trois points. Le premier d'entre eux établit un état de l'art, non exhaustif, sur le comportement des élastomères. Puis, s'appuyant sur les résultats du premier chapitre, trois modèles rhéologiques à un état intermédiaire sont généralisés aux grandes déformations. Les différentes composantes élastiques sont affectées de potentiels hyperélastiques et on associe aux branches visqueuses des formes simples de pseudo-potentiels de dissipation. A partir de résultats expérimentaux et d'une formulation monodimensionnelle résolue par un logiciel de calcul formel, on établit le modèle rhéologique, ainsi que ses composantes, décrivant au mieux le matériau. On présente enfin, la mise en oeuvre éléments finis du modèle. Une attention particulière est apportée quant au choix du type d'éléments finis – notamment en accord avec le critère L.B.B. [BABUŠKA et NARASIMHAN, 1997] – et de la discrétisation spatiale à adopter.
- Un algorithme de couplage thermo-mécanique est présenté dans le chapitre III. Il consiste en une succession de calculs mécaniques en accord avec le modèle défini dans le chapitre précédent et de calculs thermiques basés sur les travaux de BÉRARDI [1995]. La sensibilité de l'algorithme est étudiée en termes de discrétisation géométrique et temporelle. En vue d'une comparaison des résultats expérimentaux et numériques, on adapte l'algorithme au cas particulier des sollicitations mécaniques périodiques.
- Comme il est précisé plus haut, le chapitre IV concerne la modélisation par la méthode des éléments finis du Bras Elastomérique. L'hétérogénéité de la pièce et les singularités des résultats recherchés – dues à de fortes discontinuités géométriques et/ou matérielles –, contraignent à réaliser une discrétisation spatiale très fine (environ 8 millions de degrés de liberté). On réalise le couplage d'une méthode classique de sous structuration [IMBERT, 1979 ; ESCAIG, 1992 ; ESCAIG *et al.*, 1994] de sous structuration et d'une méthode dite multi-niveau [DELORME, 1997]. Ceci permet, dans le cas d'un comportement choisi linéaire élastique, d'accéder ainsi aux champs de contraintes, de déformations et de déplacements sur l'ensemble de la pièce. L'utilisation d'une méthode énergétique permet, à partir des résultats élastiques énoncés pré-

cédemment et du seul angle de perte du matériau, le calcul de l'amortissement de la pièce sous une sollicitation harmonique.

- Enfin dans le chapitre V, on propose une étude de faisabilité à l'évaluation, toujours à partir des grandeurs élastiques émanant du calcul de sous structuration, de la répartition de dissipation sur des zones du Bras Elastomérique, identifiées comme particulièrement sollicitées (sites de fortes discontinuités géométriques et/ou matérielles par exemple). Ceci est rendu possible par l'étude en petites perturbations d'un des modèles rhéologiques proposés au chapitre II et par l'établissement de relations entre les coefficients du modèle en petites et grandes déformations.



# CHAPITRE I

## Grandes Déformations et Cadre Thermodynamique

oOo

**C**e chapitre a pour but, dans un premier temps, d'introduire le formalisme induit par les grandes transformations. Le cadre thermodynamique dans lequel s'inscrit notre étude est ensuite posé.

- Sont donc présentées, les différentes grandeurs nécessaires à la formulation d'un problème en grandes déformations.
- Puis nous écrivons, dans ce cadre, les deux principes fondamentaux de la thermodynamique.
- Enfin, nous introduisons la notion d'état intermédiaire, notion majeure dans le reste de ce travail. Un certain nombre de lois, dont la validité est vérifiée par des critères d'objectivité, sont alors déduites.

En résumé, ce chapitre explicite les hypothèses de travail et délimite le cadre de cette étude.

oOo

## PLAN DU CHAPITRE I

---

<b>I.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>I.2</b>	<b>Formalisme et grandes déformations</b>	<b>7</b>
I.2.1	Définitions et description du mouvement	7
I.2.2	Mesure des déformations	9
I.2.2.a	Définition directe	9
I.2.2.b	Invariant de la transformation	10
I.2.2.c	Décomposition polaire	10
I.2.3	Vitesse de déformation	11
I.2.4	Description des efforts	12
I.2.4.a	Description eulérienne	13
I.2.4.b	Description mixte	13
I.2.4.c	Description lagrangienne	14
I.2.5	Equations d'équilibre	14
<b>I.3</b>	<b>Cadre thermodynamique</b>	<b>17</b>
I.3.1	Principes fondamentaux	17
I.3.1.a	Premier principe (conservation de l'énergie)	17
I.3.1.b	Second principe (inégalité de CLAUSIUS-DUHEM)	18
I.3.2	Variables thermodynamiques et loi de comportement	19
I.3.2.a	Variables d'état	19
I.3.2.b	Potentiel thermodynamique	19
I.3.2.c	Forces et flux thermodynamiques	21
I.3.2.d	Découplage de la dissipation	22
<b>I.4</b>	<b>Lois de comportement</b>	<b>23</b>
I.4.1	Généralités	23
I.4.2	Principe d'objectivité	23
I.4.2.a	Enoncé	23
I.4.2.b	Conséquence	24
I.4.3	Isotropie du matériau	25
I.4.4	Lois d'évolution et potentiel de dissipation	25
<b>I.5</b>	<b>Notion d'état intermédiaire</b>	<b>29</b>
I.5.1	Introduction	29
I.5.2	Généralisation à un phénomène quelconque	30
I.5.3	Principe d'invariance des fonctions constitutives	31
I.5.3.a	Enoncé	31
I.5.3.b	Conséquence sur l'énergie libre	32
I.5.4	Cas des matériaux isotropes	32
I.5.5	Conséquences thermodynamiques	33
I.5.6	Etats intermédiaires et modèles rhéologiques	35
I.5.7	Milieux incompressibles	37
<b>I.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

---

## I.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la mise en place d'un cadre thermodynamique, qui servira de référence tout au long de ce travail. Les formulations qui en résultent, doivent être suffisamment générales pour prendre en compte divers phénomènes mécaniques tels que l'hyperélasticité, la plasticité, l'incompressibilité ou l'endommagement et ce, en grandes déformations.

Pour cela, le formalisme dû aux grandes déformations est d'abord introduit. Sont ainsi définis les tenseurs classiques de déformation, de contrainte et de vitesse de déformation.

Puis, partant des deux principes fondamentaux de la thermodynamique et sous certaines hypothèses classiques, un cadre thermodynamique général est proposé.

Par la suite, ce cadre est particularisé au cas des milieux à configurations intermédiaires. Ces milieux sont souvent ramenés à une généralisation aux grandes déformations de modèles rhéologiques dont SIDOROFF [1977] propose une forme générale. Une extension de cette forme est proposée et démontrée dans le cas isotrope. Enfin, le cas particulier de l'incompressibilité est étudié.

## I.2 Formalisme et grandes déformations

### I.2.1 Définitions et description du mouvement

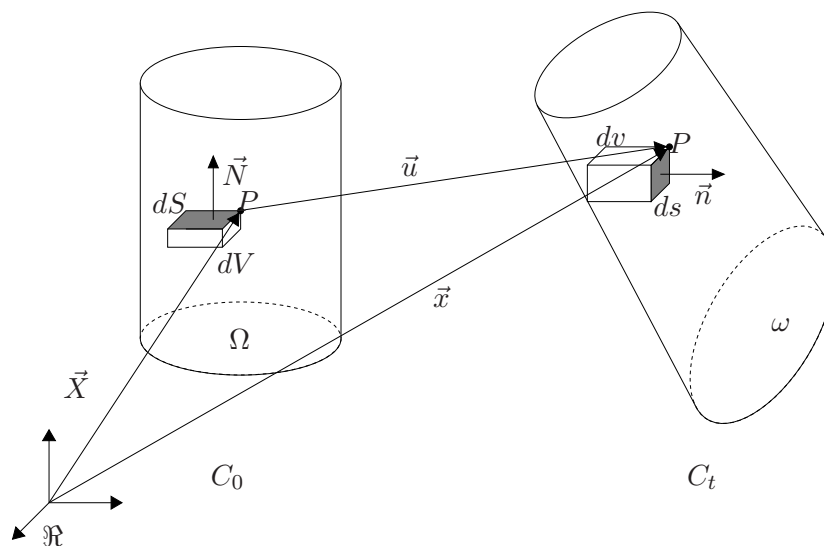


FIGURE I.1 – *Système de configurations.*

Soit un solide  $S$  évoluant dans un référentiel  $\mathfrak{R}$ . Il occupe le domaine  $\Omega$  dans la configuration  $C_0$  que nous considérons comme la configuration initiale. Il occupera à l'instant  $t$  le domaine  $\omega$  dans la configuration  $C_t$  (FIG. I.1).

On peut définir une fonction  $\phi$ , qui à la position  $\vec{X}$  d'une particule  $P$  dans  $C_0$ , associe  $\vec{x}$  sa position dans  $C_t$ :

$$\phi : \begin{cases} C_0 & \longrightarrow & C_t \\ \vec{X} & \longmapsto & \vec{x} = \phi(\vec{X}, t) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

En introduisant  $\vec{u}$ , le vecteur déplacement, (I.1) peut se mettre sous une forme équivalente:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t). \quad (\text{I.2})$$

En vue de définir la transformation locale au voisinage de la particule  $P$ , on introduit classiquement l'application linéaire tangente  $\bar{\bar{F}}$  associée à la fonction  $\phi$ . Considérant un vecteur  $d\vec{X}$  dans la configuration initiale, son image  $d\vec{x}$  dans la configuration actuelle s'obtient par la relation:

$$d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}, \quad (\text{I.3})$$

et de manière indicielle, en utilisant (I.2):

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij}. \quad (\text{I.4})$$

$\bar{\bar{F}}$  (appelé aussi gradient de la transformation) traduit le "transport" de  $C_0$  vers  $C_t$ . L'application linéaire tangente est localement inversible et conserve l'orientation, par conséquent:

$$J = \det(\bar{\bar{F}}) > 0. \quad (\text{I.5})$$

Au niveau local, les lois de transformation, liant un élément de volume  $dV$  ou de surface  $\vec{N}dS$  de  $C_0$  à leurs images respectives  $dv$  et  $\vec{n}ds$  dans  $C_t$ , se déclinent comme suit:

$$\text{pour un élément de volume:} \quad dv = JdV, \quad (\text{I.6})$$

$$\text{pour un élément de surface:} \quad \vec{n}ds = \begin{cases} (\text{cof}\bar{\bar{F}}) \cdot \vec{N}dS \\ J\bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

### REMARQUE I.1

D'après (I.6), la condition d'**incompressibilité** du matériau (*i.e.* de conservation de volume) peut être traduite par:

$$\det(\bar{\bar{F}}) = 1. \quad (\text{I.8})$$

Cette condition est couramment utilisée dans la modélisation de matériaux tels que les élastomères. □

**REMARQUE I.2**

Pour un changement de référentiel d'observation, pouvant être vu comme la superposition d'un mouvement de corps rigide – c'est-à-dire la superposition au mouvement d'une rotation  $\bar{\bar{Q}}(t)$ <sup>(1)</sup> et d'une translation  $\bar{c}(t)$  – suivant que l'observateur reste ou non attaché au référentiel d'observation, le gradient de la transformation devient  $\bar{F}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{F}$ . Nous reviendrons ultérieurement sur ce résultat en abordant des considérations d'objectivité (§ I.4.2).  $\square$

**I.2.2 Mesure des déformations**

Le mouvement local du solide peut être décrit par l'application linéaire tangente. Mais, comme nous l'avons vu en remarque I.2, ce tenseur diffère de l'identité pour des mouvements de corps rigide et ne peut donc décrire les "déformations" de ce dernier, une mesure des déformations convenable devant être indépendante des rotations. Tenant compte de cette considération, deux classes de définition peuvent être distinguées.

**I.2.2.a Définition directe**

- Description lagrangienne (configuration  $C_0$ )

On considère  $d\vec{X}$  et  $d\vec{Y}$  deux vecteurs de la configuration  $C_0$ , devenant  $d\vec{x}$  et  $d\vec{y}$  après déformation (dans  $C_t$ ). On a :

$$\begin{aligned} d\vec{x} \cdot d\vec{y} &= (\bar{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\bar{F} \cdot d\vec{Y}) \\ &= d\vec{X} \cdot \bar{F}^T \cdot \bar{F} \cdot d\vec{Y} \\ &= d\vec{X} \cdot \bar{C} \cdot d\vec{Y}. \end{aligned}$$

On définit ainsi le tenseur des dilatations ou tenseur de CAUCHY-GREEN droit :

$$\bar{C} = \bar{F}^T \cdot \bar{F}. \quad (\text{I.9})$$

Considérant les déformations comme une variation de produit scalaire entre deux vecteurs de la configuration actuelle et leurs antécédents dans la configuration initiale, on définit  $\bar{E}$  le tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE par :

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\bar{C} - \bar{1}) \quad \backslash \quad d\vec{x} \cdot d\vec{y} - d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{X} \cdot \bar{E} \cdot d\vec{Y}. \quad (\text{I.10})$$

- Description eulérienne (configuration  $C_t$ )

De la même manière on définit dans la configuration actuelle le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche comme étant :

$$\bar{B} = \bar{F} \cdot \bar{F}^T \quad \backslash \quad d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{x} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot d\vec{y}. \quad (\text{I.11})$$

---

(1).  $\bar{\bar{Q}}$  est un tenseur orthogonal,  $\bar{\bar{Q}}^T \cdot \bar{\bar{Q}} = \bar{1}$

Une mesure des déformations, dans  $C_t$ , peut être caractérisée par  $\bar{\bar{A}}$  le tenseur d'EULER-ALMANZI :

$$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{B}}^{-1}) \quad \backslash \quad d\vec{x} \cdot d\vec{y} - d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{x} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot d\vec{y}. \quad (\text{I.12})$$

### REMARQUE I.3

Si l'on se ramène dans le cadre des petites perturbations, c'est à dire dans le cas où  $\bar{\bar{F}}$  tend vers le tenseur unité d'ordre 2, la déformation est alors caractérisée, à des termes du second ordre près, par :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}((\nabla u)^T + \nabla u) \\ \bar{\bar{C}} \simeq \bar{\bar{B}} \simeq \bar{\bar{1}} + 2\bar{\bar{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{E}} \simeq \bar{\bar{A}} \simeq \bar{\bar{\varepsilon}} \end{aligned}$$

□

#### I.2.2.b Invariant de la transformation

On rappelle ici la définition des trois invariants d'un tenseur  $\bar{\bar{X}}$  :

$$I_1 = \text{tr} \bar{\bar{X}} \quad (\text{I.13a})$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr} \bar{\bar{X}})^2 - \text{tr} \bar{\bar{X}}^2) \quad (\text{I.13b})$$

$$I_3 = \det \bar{\bar{X}} \quad (\text{I.13c})$$

#### I.2.2.c Décomposition polaire

Une autre manière d'introduire la notion de déformation est d'utiliser l'unique décomposition polaire de  $\bar{\bar{F}}$  :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{U}}, \quad (\text{I.14})$$

avec  $\bar{\bar{V}}$ ,  $\bar{\bar{U}}$  respectivement les tenseurs des déformations pures droit et gauche – tous deux sont symétriques définis positifs – et  $\bar{\bar{R}}$  le tenseur (orthogonal) de rotation. La transformation est ainsi décomposée en deux étapes. Le passage de  $C_0$  à  $C_t$  s'effectue par une rotation puis une déformation, ou l'inverse (FIG. I.2). La symétrie des tenseurs des déformations pures nous permet d'écrire :

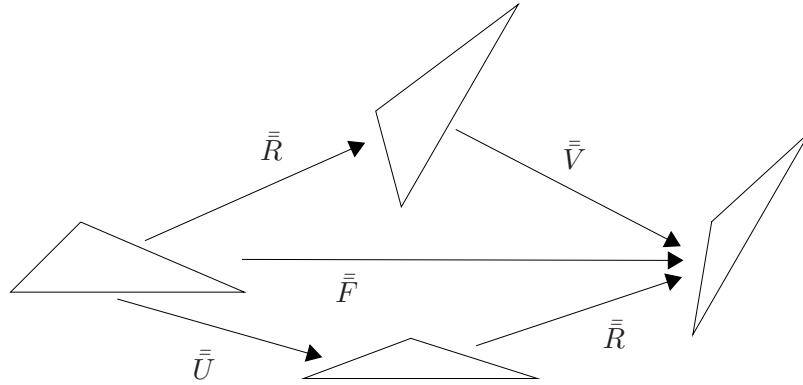
$$\bar{\bar{U}}^2 = \bar{\bar{C}}, \quad (\text{I.15a})$$

$$\bar{\bar{V}}^2 = \bar{\bar{B}}, \quad (\text{I.15b})$$

$\bar{\bar{C}}$  et  $\bar{\bar{B}}$  étant symétriques définis positifs, on a :

$$\bar{\bar{U}} = \bar{\bar{C}}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{I.16a})$$

$$\bar{\bar{V}} = \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I.16b})$$

FIGURE I.2 – *Décomposition polaire.*

De plus étant tous deux égaux à  $\bar{\mathbb{1}}$  pour un déplacement de corps rigide, il est possible de définir les deux familles de mesures de déformation suivantes :

- dans la configuration de référence

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha}(\bar{U}^\alpha - \bar{\mathbb{1}}) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \log \bar{U} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

- dans la configuration actuelle

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha}(\bar{V}^\alpha - \bar{\mathbb{1}}) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \log \bar{V} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

On constate que pour  $\alpha = 2$ , on retrouve dans  $C_0$  le tenseur de GREEN-LAGRANGE et dans  $C_t$  celui d'EULER-ALMANSI.

### I.2.3 Vitesse de déformation

On définit le vecteur vitesse  $\vec{v}$  comme étant la dérivée par rapport au temps de  $\vec{x}(\vec{X}, t)$ . Pour  $\vec{dx}$  de  $C_t$ , il vient :

$$\begin{cases} \vec{dv} = \dot{\vec{dx}} = \dot{\bar{F}} \cdot d\vec{X} = \bar{L} \cdot \vec{dx} \\ \bar{L} = \dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^{-1} = \bar{D} + \bar{W}. \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

$\bar{D}$  et  $\bar{W}$  définissent respectivement les parties symétrique et antisymétrique de  $\bar{L}$ . le tenseur  $\bar{D}$  représente la vitesse de déformation et  $\bar{W}$ , le rotationnel du champ des vitesses. Ce sont respectivement les taux de déformation et de rotation de la transformation.

Si  $\vec{dx}$  et  $\vec{dy}$  sont deux vecteurs de  $C_t$ , il nous faut exprimer la dérivée par rapport au temps de leur produit scalaire.

- Configuration  $C_t$

On a, en configuration eulérienne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) &= \dot{\vec{dx}} \cdot \vec{dy} - \vec{dx} \cdot \dot{\vec{dy}} \\ &= \bar{\bar{L}} \cdot \vec{dx} \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{dy} \text{ d'après (I.19)} \\ &= \vec{dx} \cdot \bar{\bar{L}}^T \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{dy}. \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) = 2\vec{dx} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \vec{dy}. \quad (\text{I.20})$$

- Configuration  $C_0$

On obtient de même en configuration lagrangienne :

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) = 2d\vec{X} \cdot \dot{\bar{\bar{E}}} \cdot d\vec{Y}. \quad (\text{I.21})$$

On vérifie que  $\dot{\bar{\bar{E}}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{F}}$ , confirmant que  $\dot{\bar{\bar{E}}}$  et  $\bar{\bar{D}}$  sont les transportés l'un de l'autre.

#### I.2.4 Description des efforts

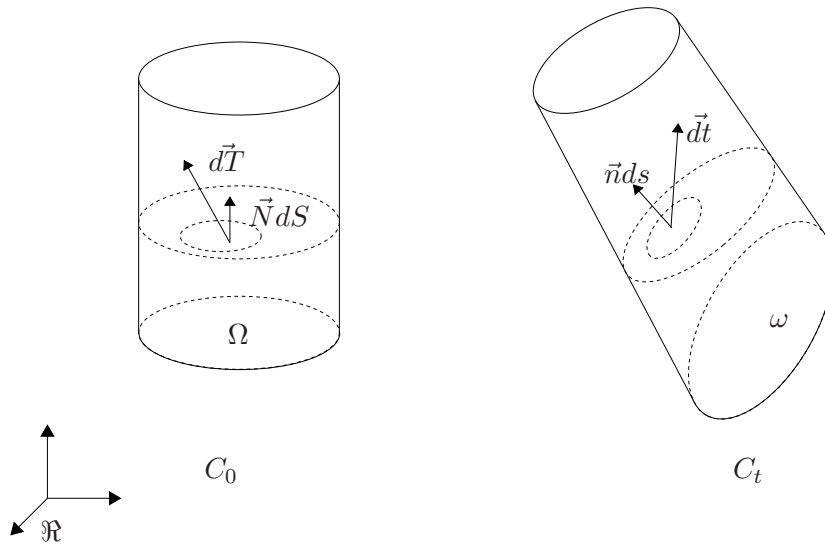


FIGURE I.3 – *Etat de contrainte dans les différentes configurations.*

Trois descriptions peuvent être utilisées pour définir l'état de contrainte dans un solide, suivant que l'on considère :

- les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle ( $\vec{dt}$ , voir FIG. I.3) à travers un élément de surface déformé ( $\vec{n}ds$ ),
- les mêmes efforts à travers un élément de surface non déformé ( $\vec{N}dS$ ),

- ou encore le transport des effort de cohésion ( $d\vec{T}$ ) à travers un élément de surface non déformé ( $\vec{n}ds$ ).

Ces approches définissent respectivement les descriptions **eulérienne**, **mixte** et **lagrangienne**.

#### I.2.4.a Description eulérienne

Comme nous l'avons expliqué précédemment, on considère les efforts intérieurs de cohésion exercés par une partie du solide sur l'autre, à travers un élément de surface  $\vec{n}ds$ . On définit  $\bar{\sigma}$  le tenseur des contraintes de CAUCHY de façon analogue aux petites déformations comme étant :

$$\vec{dt} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}ds. \quad (\text{I.22})$$

$\bar{\sigma}$  représente donc les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée et par unité de surface déformée. En l'absence de densité de couple, il est symétrique.

$$\bar{\sigma} : \begin{cases} C_t & \longrightarrow C_t \\ \vec{n}ds & \longmapsto \vec{dt} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}ds \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

#### I.2.4.b Description mixte

Il peut être utile de pouvoir raisonner sur la configuration de référence, par exemple pour l'application de conditions aux limites. Le transport de l'élément de surface  $\vec{n}ds$  dans cette configuration par (I.7), permet d'obtenir :

$$\vec{dt} = \bar{\sigma} \cdot J\bar{F}^{-T} \cdot \vec{N}dS,$$

soit, en définissant  $\bar{\pi}$  le premier tenseur de PIOLA-KIRCHOFF :

$$\begin{cases} \bar{\pi} = J\bar{\sigma} \cdot \bar{F}^{-T}, \\ \vec{dt} = \bar{\pi} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

$\bar{\pi}$  est non symétrique. On parle de description mixte des contraintes car  $\bar{\pi}$ , tout comme  $\bar{F}$ , n'est ni lagrangien, ni eulérien, il définit une application de  $C_0$  dans  $C_t$ . Physiquement, il représente les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée par unité de surface non déformée.

$$\bar{\pi} : \begin{cases} C_0 & \longrightarrow C_t \\ \vec{N}dS & \longmapsto \vec{dt} = \bar{\pi} \cdot \vec{N}dS \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

### I.2.4.c Description lagrangienne

L'obtention d'une description complètement lagrangienne de l'état de contrainte nécessite le transport de l'effort réel de cohésion  $\vec{d}t$  dans la configuration de référence :

$$\begin{aligned} \vec{d}T &= \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \vec{d}t = J\bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}dS \\ &= \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{N}dS. \end{aligned}$$

On introduit ainsi  $\bar{\bar{S}}$  le second tenseur de PIOLA-KIRCHOFF tel que :

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}} = J\bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\pi}}, \\ \vec{d}T = \bar{\bar{S}} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

$\bar{\bar{S}}$  n'a pas de signification physique mais présente la particularité d'être symétrique.

$$\bar{\bar{S}} : \begin{cases} C_0 & \longrightarrow C_0 \\ \vec{N}dS & \longmapsto \vec{d}T = \bar{\bar{S}} \cdot \vec{N}dS \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

### I.2.5 Equations d'équilibre

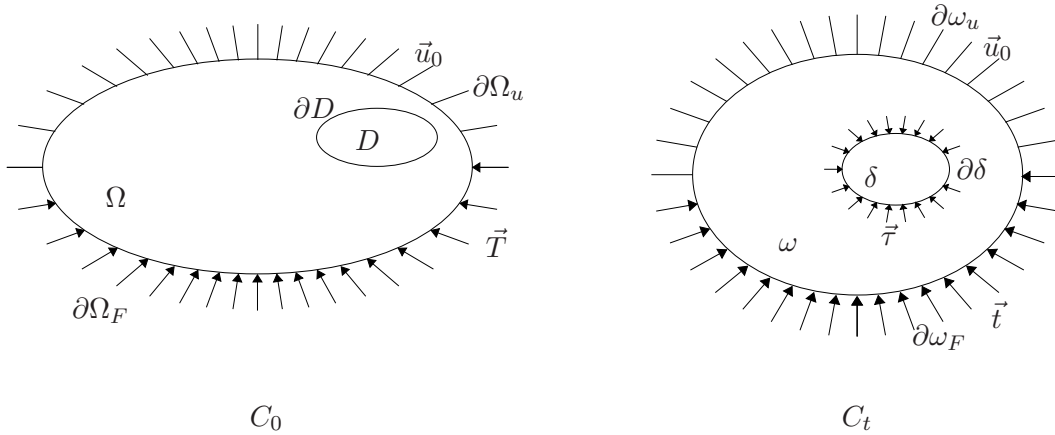


FIGURE I.4 – Conditions limites dans les configurations de référence et actuelle.

On définit dans la configuration actuelle (FIG. I.4) :

- $\omega$ , le domaine occupé par le solide dans cette configuration ;
- $\partial\omega$ , sa surface ;
- $\partial\omega_u$  et  $\partial\omega_F$  respectivement les sous domaines de  $\partial\omega$  sur lesquels on applique un déplacement imposé  $\vec{u}_0$  ou une densité surfacique de force par unité de surface déformée  $\vec{t}$  ( $\partial\omega_u \cup \partial\omega_F = \partial\omega$  et  $\partial\omega_u \cap \partial\omega_F = \emptyset$ ) ;
- $\delta$  un élément de volume dans la configuration déformée ;
- et  $\vec{\tau}$  les efforts de cohésion exercés à travers l'élément de surface  $\partial\delta$ .

Dans la configuration de référence,  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_u$ ,  $\partial\Omega_F$ ,  $D$  et  $\partial D$  sont respectivement les transportés de  $C_t$  vers  $C_0$  par l'intermédiaire de  $\bar{F}^{-1}$  de  $\omega$ ,  $\partial\omega$ ,  $\partial\omega_u$ ,  $\partial\omega_F$ ,  $\delta$  et  $\partial\delta$ .  $\vec{T}$  est la densité surfacique de force exprimée dans  $C_0$ .

**REMARQUE I.4**

On peut remarquer que le déplacement imposé reste le même dans  $C_0$  et  $C_t$ . Quant aux densités surfaciques de force, elles doivent vérifier :

$$\vec{t}ds = \vec{T}dS. \quad (\text{I.28})$$

Il sera plus commode d'utiliser une formulation lagrangienne (resp. eulérienne) dans le cas d'une densité surfacique de force par unité de surface dans  $C_0$  (resp.  $C_t$ ).  $\square$

• Equation d'équilibre et conditions aux limites en configuration instantanée

L'écriture de la **conservation de la quantité de mouvement**, traduisant dans la configuration actuelle, l'équilibre du sous domaine  $\delta$ , donne :

$$\int_{\partial\delta} \vec{\tau}ds + \int_{\delta} \rho \vec{f}dv = \vec{0}, \quad (\text{I.29})$$

où  $\rho$  est la densité de masse par unité de volume dans la configuration actuelle et  $\vec{f}$  la densité massique de force.

On obtient dans la configuration actuelle, en utilisant le théorème de la divergence et après avoir injecté (I.22) dans (I.29) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \vec{\sigma} + \rho \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \omega \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{t} & \text{sur } \partial\omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\omega_u \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

• Equation d'équilibre et conditions limites en configuration de référence

Si on note  $\rho_0$  la densité de masse par unité de volume dans la configuration de référence, l'équation de la **conservation de la masse** et (I.6) nous donne :

$$\rho dv = \rho_0 dV \text{ soit } \rho_0 = J\rho. \quad (\text{I.31})$$

En se servant des lois de transformation (I.6) et (I.7) pour changer les domaines d'intégration de (I.29), il est alors possible d'écrire dans la configuration  $C_0$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_X \bar{\pi} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \bar{\pi} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

**REMARQUE I.5**

Dans le cas des petites perturbations,  $\bar{F}$  tendant vers l'unité, les expressions dans  $C_0$  et  $C_t$  des différents domaines (volumiques ou surfaciques) se confondent et de plus  $\bar{\sigma} \simeq \bar{\pi} \simeq S$ . Les contraintes sont alors généralement désignées par le tenseur de CAUCHY vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites (I.30). □

## I.3 Cadre thermodynamique

### I.3.1 Principes fondamentaux

De manière analogue à l'approche en petites perturbations, on traduit dans un premier temps la conservation de l'énergie par le biais du premier principe, puis nous aboutirons à partir de l'expression du second principe à l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM. Ces deux résultats seront exprimés en configurations eulérienne, lagrangienne et mixte.

#### I.3.1.a Premier principe (conservation de l'énergie)

D'après GERMAIN [1986], si l'on considère le solide  $S$  (FIG. I.1) occupant  $\Omega$  (resp.  $\omega$ ) en configuration  $C_0$  (resp.  $C_t$ ), et si l'on appelle  $\mathcal{E}$  et  $e$  son énergie interne et son énergie interne spécifique,  $\mathcal{P}_{int}$  la puissance des efforts intérieurs et  $\mathcal{Q}$  le taux de chaleur reçu, on a :

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{Q}. \quad (\text{I.33})$$

Dés lors, il est possible d'exprimer chaque terme de (I.33) en configuration initiale ou instantanée :

- $\mathcal{E}$  s'exprime à partir de sa valeur spécifique :

$$\mathcal{E} = \int_{\omega} \rho e dv = \int_{\Omega} \rho_0 e dV. \quad (\text{I.34})$$

- La puissance des efforts intérieurs est obtenue par intégration de sa valeur massique. Cette dernière est déduite de l'écriture du principe des puissances virtuelles et est égale au produit d'une grandeur cinématique avec son dual en contrainte<sup>(2)</sup>. Il vient alors :

$$-\mathcal{P}_{int} = \int_{\omega} \bar{\sigma} : \bar{D} dv = \int_{\Omega} \bar{S} : \dot{\bar{E}} dV = \int_{\Omega} \bar{\pi} : \dot{\bar{F}} dV. \quad (\text{I.35})$$

- Enfin, le taux de chaleur peut être décomposé en un apport massique  $r$  et une perte surfacique  $\vec{q}$  (resp.  $\vec{Q}$ ) au travers de la frontière  $\partial\omega$  (resp.  $\partial\Omega$ ) ;  $\vec{n}$  (resp.  $\vec{N}$ ) représente la normale sortante à  $\partial\omega$  (resp.  $\partial\Omega$ )

$$\mathcal{Q} = \int_{\omega} \rho r dv - \int_{\partial\omega} \vec{q} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} \rho_0 r dV - \int_{\partial\Omega} \vec{Q} \cdot \vec{N} dS, \quad (\text{I.36})$$

en considérant  $\vec{Q}$  l'expression lagrangienne du flux de chaleur :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} ds = \vec{Q} \cdot \vec{N} dS. \quad (\text{I.37})$$

Ceci permet d'obtenir trois expressions de la conservation de l'énergie :

- formulation eulérienne :

$$\rho \dot{e} = \bar{\sigma} : \bar{D} + \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (\text{I.38})$$

---

(2). les tenseurs duaux des grandeurs cinématiques  $\bar{D}$ ,  $\dot{\bar{E}}$  et  $\dot{\bar{F}}$  sont obtenus par écriture du théorème des puissances virtuelles.

– formulation lagrangienne :

$$\rho_0 \dot{e} = \bar{\bar{S}} : \dot{\bar{E}} + \rho_0 r - \operatorname{div}_X \bar{Q}, \quad (\text{I.39})$$

– formulation mixte :

$$\rho_0 \dot{e} = \bar{\bar{\pi}} : \dot{\bar{F}} + \rho_0 r - \operatorname{div}_X \bar{Q}. \quad (\text{I.40})$$

### I.3.1.b Second principe (inégalité de CLAUSIUS-DUHEM)

$\mathcal{S}$  définit l'entropie du système,  $\eta$  sa densité massique ;  $\mathcal{T}_{ext}$  est le taux de chaleur reçu par le système, divisé par la température  $T$ . Dès lors, l'inégalité fondamentale pour un système non adiabatique s'écrit :

$$\dot{\mathcal{S}} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0, \quad (\text{I.41})$$

$$\text{où } \mathcal{S} = \int_{\omega} \rho \eta dv = \int_{\Omega} \rho_0 \eta dV \quad (\text{I.42})$$

$$\text{et } \mathcal{T}_{ext} = \int_{\omega} \frac{\rho r}{T} dv - \int_{\partial\omega} \frac{\bar{q} \cdot \bar{n}}{T} ds = \int_{\Omega} \frac{\rho_0 r}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{Q} \cdot \bar{N}}{T} dS. \quad (\text{I.43})$$

Il vient alors localement dans  $C_t$  et  $C_0$  :

$$\underbrace{\rho \dot{\eta} - \frac{\rho r}{T} + \bar{q} \cdot \operatorname{grad}_x \frac{1}{T}}_{\phi : \text{dissipation dans } C_t} \geq 0, \quad (\text{I.44})$$

$$\underbrace{\rho_0 \dot{\eta} - \frac{\rho_0 r}{T} + \bar{Q} \cdot \operatorname{grad}_X \frac{1}{T}}_{\phi_0 : \text{dissipation dans } C_0} \geq 0. \quad (\text{I.45})$$

En introduisant (I.38) dans (I.44) et (I.39) ou (I.40) dans (I.45), trois expressions du second principe (ou inégalité de CLAUSIUS-DUHEM) sont obtenues :

– formulation eulérienne :

$$\phi = -\rho(\dot{e} - T\dot{\eta}) - \frac{1}{T} \bar{q} \cdot \operatorname{grad}_x T + \bar{\sigma} : \bar{D} \geq 0, \quad (\text{I.46})$$

– formulation lagrangienne :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} - T\dot{\eta}) - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \operatorname{grad}_X T + \bar{\bar{S}} : \dot{\bar{E}} \geq 0, \quad (\text{I.47})$$

– formulation mixte :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} - T\dot{\eta}) - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \operatorname{grad}_X T + \bar{\bar{\pi}} : \dot{\bar{F}} \geq 0. \quad (\text{I.48})$$

## I.3.2 Variables thermodynamiques et loi de comportement

### I.3.2.a Variables d'état

De manière générale, la connaissance de l'état en un point d'un matériau dépend de l'histoire de la transformation en tout point. Cette description est bien souvent trop générale pour être appliquée. Pour cette raison, nous choisissons de limiter notre étude au cadre défini par l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . I.1.

#### HYPOTHÈSE I.1

Dans ce qui suit, nous adoptons la méthode de l'**état local**, telle qu'elle est exposée dans [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1985] : la connaissance en un point d'un certain nombre de variables permet de complètement déterminer l'état thermodynamique en ce point. Les dérivées par rapport au temps de ces variables n'interviennent pas dans la définition de l'état, l'évolution sera donc considérée comme une succession d'états d'équilibre.

Sous cette hypothèse, deux types de variables sont distinguées :

- Les **variables observables** qui sont directement accessibles par la mesure. Par la suite nous considérerons comme variable thermodynamique observable, le couple ("mesure de déformation" + température). Ce choix équivaut à considérer le couple  $(\bar{F}, T)$ , car les mesures de déformation sont uniquement des fonctions du gradient de la transformation ;
- Les **variables internes** qui sont introduites pour décrire les phénomènes complexes tels que la plasticité, l'endommagement ou encore la viscosité. Suivant la complexité du phénomène auquel elles se rapportent, ces variables seront de différents types, scalaire ou tensoriel. On pourra montrer que l'introduction de variables internes scalaires sera quelquefois insuffisante pour la description de phénomènes complexes tels que la viscosité non linéaire [SIDOROFF, 1974], obligeant la mise en place de variables cachées de type tensoriel.

#### REMARQUE I.6

Il paraît évident que, plus le nombre de variables internes est important, plus le modèle est complexe d'un point de vue thermodynamique et plus son implantation numérique est difficile (nous reviendrons sur ce dernier point dans les chapitres suivants). Il faut donc identifier les phénomènes prépondérants dans le comportement du matériau, afin d'introduire un nombre de variables suffisant mais non excessif vis-à-vis de la précision désirée.  $\square$

### I.3.2.b Potentiel thermodynamique

On postule l'existence d'un potentiel thermodynamique énergie libre spécifique de HELMHOLTZ dépendant des variables thermodynamiques introduites § I.3.2.a. L'existence d'une telle

énergie libre est discutée par MOREAU [1979] dans le cas élastique. Pour notre part, nous supposons que les conditions mises en avant dans cette étude sont vérifiées et généralisables aux descriptions avec variables internes.

$$\psi = e - \eta T. \quad (\text{I.49})$$

Si l'on introduit (I.49) dans (I.46), (I.47) et (I.48), trois nouvelles formes de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM sont mises en exergue :

– formulation eulérienne :

$$\phi = -\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{q} \cdot \text{grad}_x T + \bar{\sigma} : \bar{D} \geq 0, \quad (\text{I.50})$$

– formulation lagrangienne :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{\psi} + \eta\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{grad}_X T + \bar{S} : \dot{\bar{E}} \geq 0, \quad (\text{I.51})$$

– formulation mixte :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{\psi} + \eta\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{grad}_X T + \bar{\pi} : \dot{\bar{F}} \geq 0. \quad (\text{I.52})$$

On note  $\mathcal{A}_i$  les variables internes dans  $C_0$  et  $\alpha_i$ , leurs homologues dans  $C_t$ . On rappelle que " $\bullet$ " désigne le produit contracté sur le nombre d'ordre suffisant pour que le résultat obtenu soit un scalaire. On montre en annexe A que (I.50), (I.51) et (I.52) prennent la forme :

– formulation eulérienne

$$\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}}) : \bar{L}^T - \rho(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \bullet \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T}\vec{q} \cdot \text{grad}_x T \geq 0 \quad (\text{I.53})$$

– formulation lagrangienne

$$\phi_0 = (\bar{S} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{E}}) : \dot{\bar{E}} - \rho_0(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.54})$$

– formulation mixte

$$\phi_0 = \bar{F}^{-1} \cdot (\bar{\pi} - 2\rho_0\bar{F} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{C}}) : \dot{\bar{E}} - \rho_0(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.55})$$

### REMARQUE I.7

L'introduction de  $h$ , l'enthalpie libre volumique de GIBBS, permet de substituer un tenseur des contraintes ( $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\pi}$  ou  $\bar{S}$ ) à une mesure de déformation. Le passage de  $h$  à  $\psi$  s'effectue par une transformée de LEGENDRE-FENCHEL.  $\square$

## I.3.2.c Forces et flux thermodynamiques

**HYPOTHÈSE I.2**

On suppose que la dissipation ( $\phi$  ou  $\phi_0$ ) résulte uniquement des déformations totales, des variables internes et de la conduction thermique. Ceci conduit à la relation :

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial T}. \quad (\text{I.56})$$

Cette hypothèse nous conduit à réécrire (I.53), (I.54) et (I.55) sous les formes suivantes :

– formulation eulérienne

$$\phi = \bar{\sigma}_v : \bar{L}^T + w_i \bullet \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T} \bar{q} \cdot \text{grad}_x T \geq 0 \quad (\text{I.57})$$

$$\text{avec} \begin{cases} \bar{\sigma}_v = \bar{\sigma} - 2\rho \bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial \bar{B}}, \\ w_i = -\rho \frac{\partial\psi}{\partial \alpha_i}. \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

– formulation lagrangienne

$$\phi_0 = \bar{S}_v : \dot{\bar{E}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.59})$$

$$\text{avec} \begin{cases} \bar{S}_v = \bar{S} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial \bar{E}}, \\ \mathcal{W}_i = -\rho \frac{\partial\psi}{\partial \mathcal{A}_i}. \end{cases} \quad (\text{I.60})$$

– formulation mixte

$$\phi_0 = \bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v : \dot{\bar{E}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.61})$$

$$\text{avec} \begin{cases} \bar{\pi}_v = \bar{\pi} - 2\rho_0 \bar{F} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial \bar{C}}, \\ \mathcal{W}_i = -\rho \frac{\partial\psi}{\partial \mathcal{A}_i}. \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

Les relations (I.58), (I.60) et (I.62) constituent les **lois d'état** du matériau.

La dissipation est donc la somme des produits **forces / flux thermodynamiques** définis ci-après :

	description eulérienne			description mixte			description lagrangienne		
force	$\bar{\sigma}_v$	$w_i$	$\frac{-\text{grad}_x T}{T}$	$\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v$	$\mathcal{W}_i$	$\frac{-\text{grad}_X T}{T}$	$\bar{S}_v$	$\mathcal{W}_i$	$\frac{-\text{grad}_X T}{T}$
flux	$\bar{L}^T$	$\dot{\alpha}_i$	$\vec{q}$	$\dot{\bar{E}}$	$\dot{\mathcal{A}}_i$	$\vec{Q}$	$\dot{\bar{E}}$	$\dot{\mathcal{A}}_i$	$\vec{Q}$

TABLEAU I.1 – Forces et flux thermodynamiques.

### I.3.2.d Découplage de la dissipation

$\phi$  (resp.  $\phi_0$ ) la dissipation dans  $C_t$  (resp.  $C_0$ ) peut être décomposée en une contribution purement thermique  $\phi^{ther}$  (resp.  $\phi_0^{ther}$ ) et une contribution purement mécanique, notée  $\phi^{int}$  (resp.  $\phi_0^{int}$ ) et appelée **dissipation intrinsèque** :

$$\phi = \underbrace{\bar{\sigma}_v : \bar{L}^T + w_i \bullet \dot{\alpha}_i}_{\phi^{int}} - \underbrace{\frac{1}{T} \vec{q} \cdot \text{grad}_x T}_{\phi^{ther}} \geq 0, \quad (\text{I.63})$$

$$\phi_0 = \underbrace{\bar{S}_v : \dot{\bar{E}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i}_{\phi_0^{int}} - \underbrace{\frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T}_{\phi_0^{ther}} \geq 0, \quad (\text{I.64})$$

$$\phi_0 = \underbrace{\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v : \dot{\bar{E}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i}_{\phi_0^{int}} - \underbrace{\frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T}_{\phi_0^{ther}} \geq 0. \quad (\text{I.65})$$

#### HYPOTHÈSE I.3

On suppose que les dissipations intrinsèque et thermique sont séparément positives et ce, indépendamment de la configuration [GERMAIN, 1973].

$$\phi^{int} \geq 0 \text{ et } \phi^{ther} \geq 0 \quad (\text{I.66})$$

$$\phi_0^{int} \geq 0 \text{ et } \phi_0^{ther} \geq 0 \quad (\text{I.67})$$

Cette dernière hypothèse est classiquement utilisée. On pourra notamment citer les travaux fondamentaux de SIDOROFF [1975a,b, 1976] pour lesquels elle est un des postulats de base.

## I.4 Lois de comportement

### I.4.1 Généralités

Dans le cas général, une loi de comportement prend la forme [SIDOROFF, 1982] :

$$\bar{\bar{X}}(t) = \mathcal{F}(\bar{\bar{F}}(\tau)),$$

où  $\mathcal{F}$  est une fonctionnelle "histoire des déformations" traduisant que la contrainte en un point à l'instant  $t$  dépend de l'ensemble des déformations subies par le matériau en tout point jusqu'à cet instant.

Or dans un but simplificateur, l'hypothèse de l'état local (cf. § I.3.2.a,  $\mathcal{H}$ . I.1) a précédemment été postulée. Sous cette hypothèse, on a pu voir que le milieu est entièrement défini – la connaissance des contraintes en tout point et sans distinction de description – par la connaissance de l'état des déformations, de la température et des variables internes. On peut résumer ceci par :

$$\bar{\bar{X}} = \mathcal{F}(\bar{\bar{F}}, T, \mathcal{K}_i), \quad (\text{I.68})$$

$\bar{\bar{X}}$ ,  $\mathcal{K}_i$  représentant suivant la description des efforts :

Description	$\bar{\bar{X}}$	$\mathcal{K}_i$
eulérienne	$\bar{\bar{\sigma}}$	$\alpha_i$
lagrangienne	$\bar{\bar{S}}$	$\mathcal{A}_i$
mixte	$\bar{\bar{\pi}}$	$\mathcal{A}_i$

Seront distinguées dans (I.68), les  $M$  variables internes de type scalaire  $k_m$  (invariantes dans tout changement de référentiel) et les  $N$  variables tensorielles  $\bar{\bar{K}}_n$ . Ceci implique pour (I.68) :

$$\bar{\bar{X}} = \mathcal{F}(\bar{\bar{F}}, T, k_1, \dots, k_M, \bar{\bar{K}}_1, \dots, \bar{\bar{K}}_N). \quad (\text{I.68b})$$

### I.4.2 Principe d'objectivité

#### I.4.2.a Enoncé

Par respect du **principe d'objectivité** ou d'**indifférence matérielle**, une formulation de loi de comportement ne doit dépendre que du matériau et en aucun cas du référentiel d'observation (en particulier dans le cas de mouvement de corps rigide, cf. remarque I.2).

Le symbole "\*" désigne une variable après changement de référentiel, la nouvelle description étant obtenue par une rotation  $\bar{\bar{Q}}$  et une translation  $\bar{\bar{c}}(t)$  si bien que :

$$\bar{\bar{F}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{F}} \quad (\text{I.69})$$

et que les tenseurs  $\bar{\bar{X}}$  de (I.68) sont donnés par :

Description	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}}^*$
eulérienne	$\bar{\bar{\sigma}}$	$\bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T$
lagrangienne	$\bar{\bar{S}}$	$\bar{\bar{S}}$
mixte	$\bar{\bar{\pi}}$	$\bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{\pi}}$

Le tableau ci-dessus montre que les grandeurs eulériennes et mixtes ne sont pas indépendantes du référentiel de description.

De manière générale, on dira :

- qu'un tenseur  $\bar{\bar{a}}$  eulérien est objectif si et seulement si il se transforme comme  $\bar{\bar{\sigma}}$  :

$$\bar{\bar{a}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T,$$

- qu'un tenseur  $\bar{\bar{a}}$  mixte est objectif si et seulement si il se transforme comme  $\bar{\bar{\pi}}$  :

$$\bar{\bar{a}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{a}},$$

- qu'un tenseur  $\bar{\bar{a}}$  lagrangien est objectif si et seulement si il se transforme comme  $\bar{\bar{S}}$  :

$$\bar{\bar{a}}^* = \bar{\bar{a}}.$$

La loi de comportement (I.68) sera dite objective si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{K}}_i \text{ est objectif } \forall i \in 1 \dots n \\ \mathcal{F}(\bar{\bar{F}}, T, k_1, \dots, k_M, \bar{\bar{K}}_1, \dots, \bar{\bar{K}}_N) = \mathcal{F}^*(\bar{\bar{F}}^*, T, k_1, \dots, k_M, \bar{\bar{K}}_1^*, \dots, \bar{\bar{K}}_N^*) \end{array} \right. \quad (\text{I.70})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{F}^* = \bar{\bar{Q}}^T \cdot \mathcal{F} \cdot \bar{\bar{Q}} & \text{si } \bar{\bar{X}} \text{ est eulérien} \\ \mathcal{F}^* = \bar{\bar{Q}}^T \cdot \mathcal{F} & \text{si } \bar{\bar{X}} \text{ est mixte} \\ \mathcal{F}^* = \mathcal{F} & \text{si } \bar{\bar{X}} \text{ est lagrangien} \end{array} \right.$$

### REMARQUE I.8

Il peut arriver que  $\mathcal{F}$  soit fonction de dérivées temporelles de tenseurs objectifs. Généralement, ces dernières grandeurs ne sont pas objectives ( $\frac{d}{dt}\bar{\bar{a}}^* \neq \bar{\bar{Q}} \cdot \frac{d}{dt}\bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T$ ). Dans ce cas, il faudra s'efforcer de faire intervenir des dérivées objectives telles que les dérivées de TRUSDELL ou de JAUMANN.  $\square$

### I.4.2.b Conséquence

De manière générale, la fonction énergie libre spécifique est fonction du gradient de la transformation et des variables internes (lagrangiennes ou eulériennes). Une condition nécessaire à la

vérification du principe d'objectivité est l'invariance de  $\psi$  par la transformation (I.69) :

$$\psi(\bar{F}, T, \mathcal{K}_i) = \psi(\bar{Q} \cdot \bar{F}, T, \mathcal{K}_i^*). \quad (\text{I.71})$$

On considère des variables internes lagrangiennes et objectives ( $\mathcal{K}_i^* = \mathcal{K}_i$ ). La propriété (I.71) devant être vérifiée quelque soit  $\bar{Q}$ , elle l'est en particulier pour  $\bar{R}$ , le tenseur des rotations (cf. (I.14)). La grandeur  $\psi$  peut donc être considérée fonction de  $\bar{U}$  ou encore de  $\bar{C}$  d'après (I.16a) :

$$\psi = \psi(\bar{C}, T, \mathcal{K}_i). \quad (\text{I.72})$$

### I.4.3 Isotropie du matériau

L'**isotropie** matérielle se traduit par une invariance des différentes lois constitutives par toute rotation de la configuration de référence, c'est-à-dire une invariance par la transformation :

$$\begin{cases} \bar{F}^\diamond = \bar{F} \cdot \bar{P}^T \\ \text{avec } \bar{P} \text{ tenseur orthogonal indépendant du temps.} \end{cases} \quad (\text{I.73})$$

$\psi$  doit vérifier :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{C}, T, \mathcal{K}_i) &= \psi(\bar{C}^\diamond, T, \mathcal{K}_i) \\ &= \psi(\bar{P} \cdot \bar{C} \cdot \bar{P}^T, T, \mathcal{K}_i) \quad \forall \bar{P} \text{ orthogonal.} \end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

Cette dernière égalité entraîne la condition nécessaire suivante : si un matériau est isotrope, alors sa fonction énergie libre est une fonction scalaire isotrope de la variable  $\bar{C}$ <sup>(3)</sup>. Par conséquent, la dépendance de  $\psi$  par rapport à  $\bar{C}$  se fait par l'intermédiaire de ces invariants (cf. (I.13)).

De plus, en utilisant la décomposition polaire de  $\bar{F}$ , on remarque que :

$$\bar{R} \cdot \bar{C} \cdot \bar{R}^T = \bar{B}, \quad (\text{I.75})$$

$\bar{R}$  étant un tenseur orthogonal et  $\psi$  une fonction isotrope de  $\bar{C}$ , on a :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{C}, T, \mathcal{K}_i) &= \psi(\bar{R} \cdot \bar{C} \cdot \bar{R}^T, T, \mathcal{K}_i) \\ &= \psi(\bar{B}, T, \mathcal{K}_i). \end{aligned} \quad (\text{I.76})$$

Dans le cas d'un matériau isotrope,  $\psi$  peut donc être considérée comme une fonction scalaire isotrope de la variable  $\bar{B}$ .

### I.4.4 Lois d'évolution et potentiel de dissipation

#### HYPOTHÈSE I.4

On considère le cas d'un matériau isotrope dont la description nécessite l'introduction de variables internes qui n'entraîne aucune contradiction d'objectivité et d'isotropie.

(3). une fonction scalaire  $f$  est isotrope de  $\bar{C} \Leftrightarrow f(\bar{Q}^T \cdot \bar{C} \cdot \bar{Q}) = f(\bar{C}) \quad \forall \bar{Q}$  orthogonal.

En vue de formuler les **lois complémentaires** des **lois d'état** (I.58), (I.60) et (I.62), l'existence d'un pseudo-potential de dissipation est postulée. L'introduction de cette fonction est en fait une généralisation non linéaire des relations d'ONSAGER<sup>(4)</sup> [SIDOROFF, 1977]. Ce pseudo-potential de dissipation est fonction des variables flux définies TAB. I.1, à valeur scalaire, continu, convexe, non-négatif et nul à l'origine. Les lois complémentaires relient les forces thermodynamiques aux variables flux. Dans le cadre des **modèles standards généralisés** [HALPHEN et NGUYEN QUOC SON, 1975], chacune des forces thermodynamiques suit un principe de normalité par rapport au potential de dissipation :

– description eulérienne<sup>(5)</sup>

$$\bar{\sigma}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{D}}, \quad (\text{I.77a})$$

$$w_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_i} \quad (\text{I.77b})$$

$$-\frac{\text{grad}_x T}{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{q}} \quad (\text{I.77c})$$

– description lagrangienne

$$\bar{S}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{E}}, \quad (\text{I.78a})$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{A}_i} \quad (\text{I.78b})$$

$$-\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{Q}} \quad (\text{I.78c})$$

– description mixte

$$\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{E}}, \quad (\text{I.79a})$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{A}_i} \quad (\text{I.79b})$$

$$-\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{Q}} \quad (\text{I.79c})$$

L'hypothèse d'indépendance des phénomènes mécanique et thermique ( $\mathcal{H}$ . I.3), faite précédemment pour justifier le découplage de la dissipation, permet de distinguer un pseudo-potential purement thermique,  $\varphi^{ther}$ , ne dépendant que des "flux thermiques" et un autre purement méca-

(4). reliant de manière linéaire forces et flux

(5). D'après la forme de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM établit sous l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . I.4 (voir annexe A).

nique,  $\varphi^{int}$ , ne dépendant que des "flux mécaniques". Découlent alors de (I.77), (I.78) et (I.79) :

– description eulérienne

$$\bar{\sigma}_v = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{D}} \quad (\text{I.80a})$$

$$w_i = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\alpha}_i}, \quad (\text{I.80b})$$

$$-\frac{\text{grad}_x T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{q}}, \quad (\text{I.80c})$$

$$\text{avec } \varphi(\bar{D}, \dot{\alpha}_i, \vec{q}) = \varphi^{int}(\bar{D}, \dot{\alpha}_i) + \varphi^{ther}(\vec{q}). \quad (\text{I.80d})$$

– description lagrangienne

$$\bar{S}_v = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{E}} \quad (\text{I.81a})$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\mathcal{A}}_i}, \quad (\text{I.81b})$$

$$-\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{Q}}, \quad (\text{I.81c})$$

$$\text{avec } \varphi(\dot{E}, \dot{\mathcal{A}}_i, \vec{Q}) = \varphi^{int}(\dot{E}, \dot{\mathcal{A}}_i) + \varphi^{ther}(\vec{Q}). \quad (\text{I.81d})$$

– description mixte

$$\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{E}} \quad (\text{I.82a})$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\mathcal{A}}_i}, \quad (\text{I.82b})$$

$$-\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{Q}}, \quad (\text{I.82c})$$

$$\text{avec } \varphi(\dot{E}, \dot{\mathcal{A}}_i, \vec{Q}) = \varphi^{int}(\dot{E}, \dot{\mathcal{A}}_i) + \varphi^{ther}(\vec{Q}). \quad (\text{I.82d})$$

### HYPOTHÈSE I.5

Le cadre des matériaux standards généralisés sera adopté dans tous les modèles présentés par la suite.

### REMARQUE I.9

De manière analogue à la formulation en contraintes du potentiel thermodynamique (cf. remarque I.7), il est possible de définir un potentiel  $\varphi^*$ , fonction des variables forces thermodynamiques, obtenu à partir de  $\varphi$  par une transformée de LEGENDRE-FENCHEL et ayant les mêmes propriétés que  $\varphi$ , à savoir la règle de normalité et la décomposition en une somme de potentiels thermique  $\varphi^{ther*}$  et mécanique  $\varphi^{int*}$ . □



## I.5 Notion d'état intermédiaire

### I.5.1 Introduction

Comme nous avons pu le voir dans le paragraphe § I.3.2, la modélisation d'un comportement complexe nécessite la mise en place d'une ou plusieurs variables internes. Ce choix – ainsi que celui du pseudo-potentiel de dissipation qui gouverne l'évolution des différentes variables cachées – va conditionner pour une bonne part tout le reste de l'étude comportementale. C'est pourquoi il est quelquefois plus sage de se ramener à des variables ayant un sens physique. Pour ce faire, une des solutions possibles est de postuler l'existence d'un état intermédiaire ( $C_i$ ) pour passer d'un état de référence  $C_0$ , à un état actuel  $C_t$  (FIG. I.5).

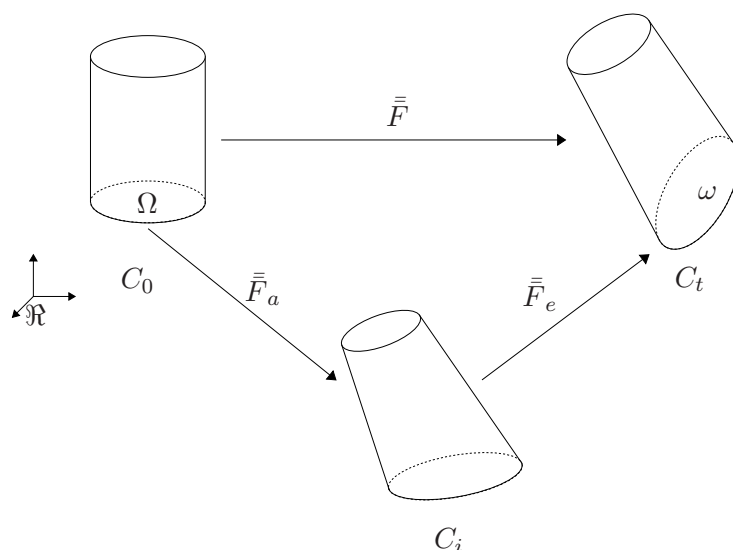


FIGURE I.5 – Milieu avec une configuration intermédiaire.

Cette démarche, couramment utilisée dans la description du comportement élastoplastique en grandes transformations, considère la transformation élastoplastique comme la composition d'une transformation purement plastique et d'une autre purement élastique. Dans le cas d'une élasticité instantanée (hypothèse classique en élastoplasticité), la configuration intermédiaire est obtenue à partir de la configuration actuelle par relâchement élastique. En notant  $\bar{\bar{F}}_p$  et  $\bar{\bar{F}}_e$  respectivement les gradients des transformations plastique et élastique,  $\bar{\bar{F}}$  se décompose multiplicativement comme suit :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_p. \quad (\text{I.83})$$

### I.5.2 Généralisation à un phénomène quelconque

- Application à un état intermédiaire quelconque

La notion introduite précédemment peut être, dans un premier temps, généralisée à un phénomène dissipatif quelconque. Mais l'état intermédiaire introduit ne peut plus être automatiquement considéré comme une relaxation locale des contraintes. Seule la loi de comportement peut (ou non) imposer une telle propriété.

En notant  $\bar{\bar{F}}_a$  le gradient de la transformation anélastique, on décompose  $\bar{\bar{F}}$  de manière analogue à (I.83) :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_a. \quad (\text{I.84})$$

Il est alors possible de redéfinir pour chaque transformation, des tenseurs cinématiques spécifiques. On définira, par exemple, les tenseurs de CAUCHY-GREEN droits anélastique et élastique :

$$\bar{\bar{C}}_a = \bar{\bar{F}}_a^T \cdot \bar{\bar{F}}_a, \quad (\text{I.85a})$$

$$\bar{\bar{C}}_e = \bar{\bar{F}}_e^T \cdot \bar{\bar{F}}_e = \bar{\bar{F}}_a^{-T} \cdot C \cdot \bar{\bar{F}}_a^{-1}. \quad (\text{I.85b})$$

Par définition (cf. § I.3.2.a), un matériau élastique (*i.e.* non dissipatif) ne nécessite pas l'introduction de variables internes [BOUKAMEL, 1988], si bien que les contraintes peuvent être considérées comme une fonction des uniques variables d'état  $\bar{\bar{F}}$  et  $T$ , ce qui implique pour l'énergie libre spécifique :

$$\psi = \psi(\bar{\bar{F}}, T). \quad (\text{I.86})$$

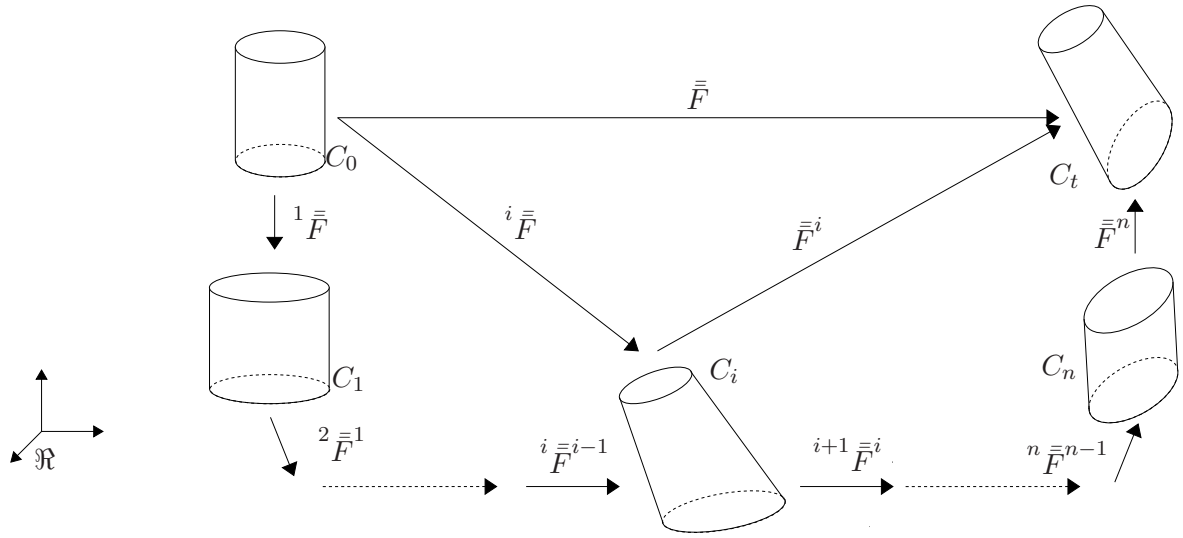
La prise en compte d'un caractère dissipatif par le biais d'un état intermédiaire, entraîne, par rapport à un modèle élastique, l'introduction d'une nouvelle variable interne, dans le cas le plus général  $\bar{\bar{F}}_a$  ou  $\bar{\bar{F}}_e$ , si bien que :

$$\psi = \psi(\bar{\bar{F}}, \bar{\bar{F}}_a, T). \quad (\text{I.87})$$

- Milieu à plusieurs configurations

Dans le cas d'un comportement couplant plusieurs phénomènes tels que l'élasto-visco-plasticité par exemple, ou simplement pour l'étude de milieux nécessitant plus d'une variable interne, il peut être utile d'introduire plusieurs états intermédiaires. SIDOROFF [1976] expose une telle description dans le cas de la viscoélasticité non linéaire. La démarche, bien que plus lourde, reste, au moins dans sa mise en place, la même que dans la précédente description.

Soient  $d\bar{\bar{X}}$  un vecteur de la configuration  $C_0$ ,  $d\bar{\bar{x}}_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) et  $d\bar{\bar{x}}$  ses images dans les  $n$  configurations intermédiaires  $C_i$  et finale  $C_t$ . On définit ainsi les différents gradients de

FIGURE I.6 – Milieu avec  $n$  configurations intermédiaires.

transformation :

$$d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X} = \bar{\bar{F}}^i \cdot d\vec{x}_i, \quad (\text{I.88a})$$

$$d\vec{x}_i = {}^i\bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}, \quad (\text{I.88b})$$

$$d\vec{x}_{i+1} = {}^{i+1}\bar{\bar{F}}^i \cdot d\vec{x}_i \text{ pour } i \in 1, \dots, n-1. \quad (\text{I.88c})$$

Par un raisonnement analogue au cas à un seul état intermédiaire, le modèle sera complètement défini par la connaissance d'un des trois jeux de  $n+2$  variables suivants:  $(\bar{\bar{F}}, T, \bar{\bar{F}}^1, \dots, \bar{\bar{F}}^n)$ ,  $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, \dots, {}^n\bar{\bar{F}})$ ,  $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, {}^1\bar{\bar{F}}^2, \dots, {}^{n-1}\bar{\bar{F}}^n, \bar{\bar{F}}^n)$ .  $\psi$  dépendra donc d'un de ces trois choix de variables d'état. La notion de tenseur de CAUCHY-GREEN droit et gauche est introduite pour chaque état comme étant :

$${}^i\bar{\bar{C}} = {}^i\bar{\bar{F}}^T \cdot {}^i\bar{\bar{F}}, \quad \bar{\bar{C}}^i = \bar{\bar{F}}^{iT} \cdot \bar{\bar{F}}^i, \quad (\text{I.89a})$$

$${}^i\bar{\bar{B}} = {}^i\bar{\bar{F}} \cdot {}^i\bar{\bar{F}}^T, \quad \bar{\bar{B}}^i = \bar{\bar{F}}^i \cdot \bar{\bar{F}}^{iT}. \quad (\text{I.89b})$$

Il en va de même pour les taux de déformation :

$${}^i\bar{\bar{D}} = ({}^i\dot{\bar{\bar{F}}} \cdot {}^i\bar{\bar{F}}^{-1})_{sym}, \quad (\text{I.90a})$$

$$\bar{\bar{D}}^i = (\dot{\bar{\bar{F}}}^i \cdot \bar{\bar{F}}^{i-1})_{sym}. \quad (\text{I.90b})$$

### I.5.3 Principe d'invariance des fonctions constitutives

#### I.5.3.a Enoncé

D'après SIDOROFF [1973, 1974, 1976], chaque état intermédiaire n'étant défini qu'à une rotation près, nous devons vérifier la **Principe d'Invariance des Fonctions Constitutives**

(**P.I.F.C.**) qui se traduit par une invariance des lois de comportement par tout  $\Gamma$ -**changement** de référentiel :

$$\begin{cases} \bar{\bar{F}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{F}}, \\ {}^i \bar{\bar{F}}^* = \bar{\bar{Q}}_i \cdot {}^i \bar{\bar{F}} \text{ pour } \{i \in 1, \dots, n\}, \\ \text{avec } \{\bar{\bar{Q}}, \bar{\bar{Q}}_1, \dots, \bar{\bar{Q}}_n\} \text{ } n+1 \text{ tenseurs orthogonaux dépendant du temps.} \end{cases} \quad (\text{I.91})$$

A partir de cet énoncé, on définit deux familles de grandeurs :

- les tenseurs  $\Gamma$ -**invariants**, respectant la loi de transformation :

$$\bar{\bar{X}}^* = \bar{\bar{X}}, \quad (\text{I.92})$$

- les tenseurs  $\Gamma$ -**objectifs**, respectant la loi de transformation :

$$\bar{\bar{X}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T. \quad (\text{I.93})$$

Une loi (de comportement ou complémentaire) vérifie le P.I.F.C. si et seulement si elle peut être réduite à une forme ne faisant intervenir que des grandeurs qui appartiennent à l'une de ces deux familles [SIDOROFF, 1973].

### I.5.3.b Conséquence sur l'énergie libre

En portant le choix des variables internes sur  $(\bar{\bar{F}}, {}^1 \bar{\bar{F}}, \dots, {}^n \bar{\bar{F}}, T)$ , puis par un raisonnement similaire à celui mené § I.4, l'énergie libre spécifique se doit d'être invariante pour tout  $\Gamma$ -changement de référentiel. Par conséquent, le P.I.F.C entraîne pour  $\psi$  :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\bar{F}}, {}^1 \bar{\bar{F}}, \dots, {}^n \bar{\bar{F}}, T) &= \psi(\bar{\bar{F}}^*, {}^1 \bar{\bar{F}}^*, \dots, {}^n \bar{\bar{F}}^*, T) \\ &= \psi(\bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{F}}, \bar{\bar{Q}}_1 \cdot {}^1 \bar{\bar{F}}, \dots, \bar{\bar{Q}}_n \cdot {}^n \bar{\bar{F}}, T). \end{aligned}$$

Les tenseurs  $\bar{\bar{Q}}_i$  étant orthogonaux, une démarche analogue à celle menée § I.4.2.b nous conduit à :

$$\psi = \psi(\bar{\bar{C}}, {}^1 \bar{\bar{C}}, \dots, {}^n \bar{\bar{C}}, T). \quad (\text{I.94})$$

#### REMARQUE I.10

On remarque que vérifier le principe d'objectivité revient à vérifier le P.I.F.C. dans le cas particulier  $\bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{Q}}_1 = \dots = \bar{\bar{Q}}_n$ . □

### I.5.4 Cas des matériaux isotropes

Dans le cas de variables internes entièrement déterminées par le biais d'états intermédiaires, l'isotropie du matériau doit se traduire par l'invariance des lois constitutives pour toute rotation

de la configuration de référence :

$$\begin{cases} \bar{\bar{F}}^\diamond = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{P}}^T, \\ {}^i \bar{\bar{F}}^\diamond = {}^i \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{P}}^T \text{ pour } \{i \in 1, \dots, n\}, \\ \text{avec } \bar{\bar{P}} \text{ un tenseur orthogonal indépendant du temps.} \end{cases} \quad (\text{I.95})$$

On doit en particulier vérifier l'invariance de l'énergie libre par une telle transformation :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\bar{C}}, {}^1 \bar{\bar{C}}, \dots, {}^n \bar{\bar{C}}, T) &= \psi(\bar{\bar{C}}^\diamond, {}^1 \bar{\bar{C}}^\diamond, \dots, {}^n \bar{\bar{C}}^\diamond, T) \\ &= \psi(\bar{\bar{P}} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{P}}^T, \bar{\bar{P}} \cdot {}^1 \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{P}}^T, \dots, \bar{\bar{P}} \cdot {}^n \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{P}}^T, T) \quad \forall \bar{\bar{P}} \text{ orthogonal.} \end{aligned}$$

Par conséquent, si un matériau est isotrope, alors sa fonction énergie libre spécifique est une **fonction scalaire isotrope** des variables  $(\bar{\bar{C}}, {}^1 \bar{\bar{C}}, \dots, {}^n \bar{\bar{C}})$  et peut donc être entièrement définie par ses invariants.

Dans le cas élastique, on a :

$$\psi(\bar{\bar{C}}) = \tilde{\psi}(I_1, I_2, I_3), \quad (\text{I.96})$$

où  $(I_1, I_2, I_3)$  sont les trois invariants de  $\bar{\bar{C}}$ .

Dans un cas à un état intermédiaire (et par conséquent à une seule variable interne) ; on a :

$$\psi(\bar{\bar{C}}, \bar{\bar{C}}_a) = \tilde{\psi}(I_1, I_2, I_3, I_1^a, I_2^a, I_3^a, K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}), \quad (\text{I.97})$$

$I_1^a, I_2^a, I_3^a$  désignant les trois premiers invariants de  $\bar{\bar{C}}_a$ ,  $K_{11} = \text{tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_a)$ ,  $K_{12} = \text{tr}(\bar{\bar{C}}_a^2 \cdot \bar{\bar{C}})$ ,  $K_{21} = \text{tr}(\bar{\bar{C}}^2 \cdot \bar{\bar{C}}_a)$  et  $K_{22} = \text{tr}(\bar{\bar{C}}^2 \cdot \bar{\bar{C}}_a^2)$  les quatre invariants mixtes.

Par ailleurs, en utilisant la décomposition polaire de  $\bar{\bar{F}}$  (I.14), on remarque que

$$\bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T = \bar{\bar{B}}, \quad (\text{I.98a})$$

$$\bar{\bar{R}} \cdot {}^i \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T = \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{\bar{B}}^{i-1} \cdot \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I.98b})$$

$\bar{\bar{R}}$  étant une matrice de rotation et  $\psi$  une fonction isotrope de  $(\bar{\bar{C}}, {}^i \bar{\bar{C}}, T)$ , on a :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\bar{C}}, {}^1 \bar{\bar{C}}, \dots, {}^n \bar{\bar{C}}, T) &= \psi(\bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T, \bar{\bar{R}} \cdot {}^1 \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T, \dots, \bar{\bar{R}} \cdot {}^n \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T, T) \\ &= \psi(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{\bar{B}}^{1-1} \cdot \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}}, \dots, \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{\bar{B}}^{n-1} \cdot \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à avoir  $\psi$  fonction isotrope de  $(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^i, T)$ .

### I.5.5 Conséquences thermodynamiques

Ayant introduit un certain nombre de variables internes, il est maintenant possible d'écrire l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM de manière plus concrète.

Dans ce paragraphe, seuls les matériaux isotropes et qui vérifient le P.I.F.C. sont étudiés.

- formulations lagrangienne et mixte

On entend ici traiter le cas où  $\psi$  est fonction scalaire isotrope des tenseurs  $(\bar{\bar{C}}, {}^i\bar{\bar{C}})$  et de la température  $T$ . On a dans ce cas :

$$\phi_0 = (\bar{\bar{S}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{E}}}) : \dot{\bar{\bar{E}}} - \rho_0 (\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{\bar{C}}} : {}^i\dot{\bar{\bar{C}}} - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.99})$$

ou

$$\phi_0 = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot (\bar{\bar{\pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{F}}}) : \dot{\bar{\bar{E}}} - \rho_0 (\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{\bar{C}}} : {}^i\dot{\bar{\bar{C}}} - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0. \quad (\text{I.100})$$

Le principe de normalité ( $\mathcal{H}$ . I.5), nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{S}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{E}}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{E}}}} \text{ ou } \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{C}}} + \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{E}}}} \\ \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \\ -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{\bar{C}}} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial {}^i\dot{\bar{\bar{C}}}} \\ -\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{Q}} \end{array} \right. \quad (\text{I.101})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi(\bar{\bar{C}}, {}^k\bar{\bar{C}}) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{\bar{C}}, {}^k\dot{\bar{\bar{C}}}) \\ \varphi^{ther} = \varphi^{ther}(\vec{Q}) \end{array} \right. \quad (\text{I.102})$$

D'après § I.5.3, les deux formulations de la loi de comportement (I.101a,b) vérifient le P.I.F.C. Il en est de même pour la loi complémentaire (I.101d) qui ne fait intervenir que des grandeurs  $\Gamma$ -invariantes.

- formulation eulérienne

Dans le cas isotrope, l'énergie libre spécifique est fonction isotrope des variables  $(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^i)$  et de  $T$ . D'après (A.7) on a :

$$\phi = (\bar{\bar{\sigma}} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}}) : \bar{\bar{D}} - \rho (\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i} : \dot{\bar{\bar{B}}^i} - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \text{grad}_x T \geq 0. \quad (\text{I.103})$$

Une démarche analogue à celle menée précédemment nous conduirait à l'expression d'une loi de comportement vérifiant le P.I.F.C. ( $\bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{D}}}$ ), mais à une expression erronée des lois complémentaires. En effet, ces dernières feraient intervenir  $\dot{\bar{\bar{B}}^i}$  qui n'est ni  $\Gamma$ -invariant, ni  $\Gamma$ -objectif. Une solution est de décomposer  $\bar{\bar{B}}^i$  comme suit :

$$\dot{\bar{\bar{B}}^i} = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{B}}^i + \bar{\bar{B}}^i \cdot \bar{\bar{L}}^T - 2\bar{\bar{F}}^i \cdot {}^i\dot{\bar{\bar{D}}} \cdot \bar{\bar{F}}^{iT}, \quad (\text{I.104})$$

ce qui entraîne une nouvelle expression de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM ( cf Annexe B) :

$$\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} - 2\rho\bar{\bar{B}}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}^i}) : \bar{\bar{D}} - \rho(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} + 2\rho\bar{\bar{V}}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}^i} \cdot \bar{\bar{V}}^i : {}^i\bar{\bar{D}}^o, \quad (\text{I.105})$$

où

$${}^i\bar{\bar{D}}^o = \bar{\bar{R}}^i \cdot {}^i\bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{R}}^{iT}.$$

(I.105) ne fait apparaître que des variables  $\Gamma$ -objectives et l'ensemble des lois qui en découlent, vérifie le P.I.F.C.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} + 2\rho\bar{\bar{B}}^i \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}^i} + \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\bar{\bar{D}}} \\ \eta = -\frac{\partial\psi}{\partial T} \\ 2\rho\bar{\bar{V}}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}^i} \cdot \bar{\bar{V}}^i = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial {}^i\bar{\bar{D}}^o} \\ -\frac{\text{grad}_x T}{T} = \frac{\partial\varphi^{ther}}{\partial\vec{q}} \end{array} \right. \quad (\text{I.106})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi(\bar{\bar{B}}, {}^k\bar{\bar{B}}) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{\bar{D}}, {}^k\bar{\bar{D}}^o) \\ \varphi^{ther} = \varphi^{ther}(\vec{q}) \end{array} \right. \quad (\text{I.107})$$

### I.5.6 Etats intermédiaires et modèles rhéologiques

Pour un modèle à une seule configuration intermédiaire, la décomposition du gradient de transformation (I.84) ramenée au cadre des petites déformations, entraîne une décomposition additive du tenseur des déformations  $\bar{\bar{\varepsilon}}$  (introduit en remarque I.3) :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}_e + \bar{\bar{\varepsilon}}_a \quad (\text{I.108})$$

$\varepsilon_a$  pouvant être une déformation plastique ou visqueuse.

A titre d'exemple, les modèles de MAXWELL, de POYNTING-THOMSON et de ZENER suivent une telle décomposition. Une description complète de ces derniers est donnée par LE TALLEC [1990]

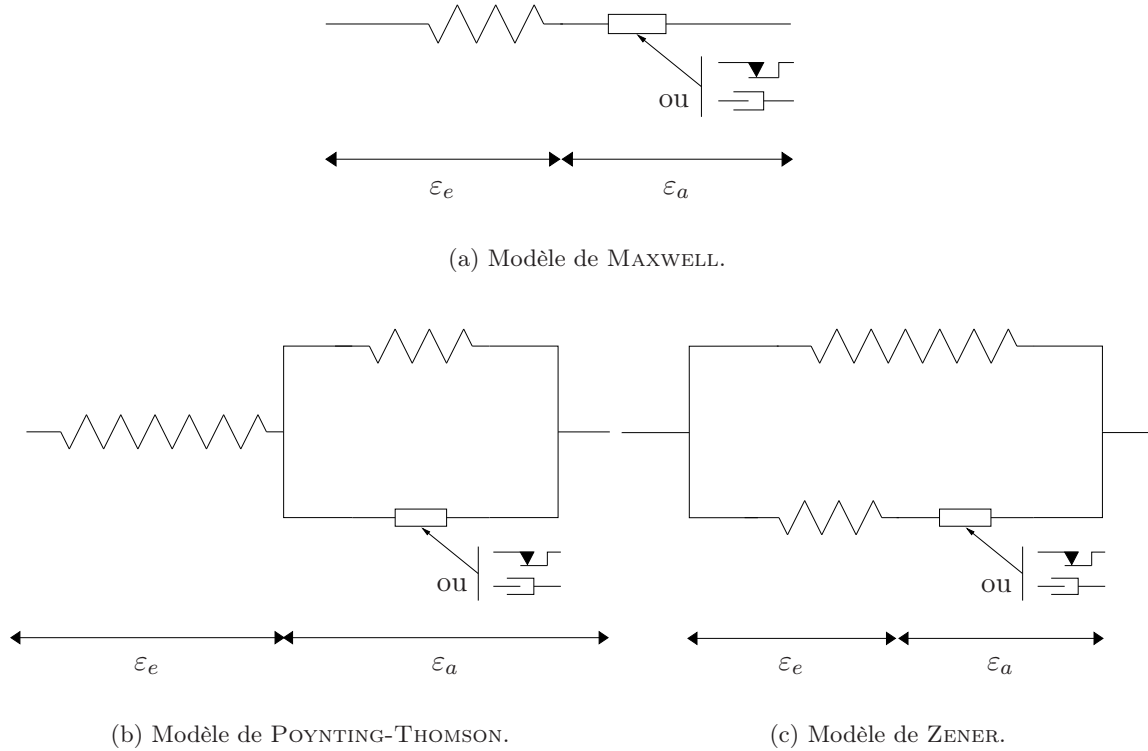


FIGURE I.7 – Modèles à un seul état intermédiaire.

SIDOROFF [1977] montre que dans le cas isotrope et d'une décomposition de l'énergie libre analogue à celle adoptée dans le cas des petites déformations, *i.e.*

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\mathbb{C}}) + \psi_1^i({}^i\bar{\mathbb{C}}) \\ \psi_0, \psi_1^i \text{ étant } n+1 \text{ fonctions scalaires isotropes} \end{cases} \quad (\text{I.109})$$

le système (I.106) peut être vu comme la généralisation aux grandes déformations du modèle rhéologique présenté FIG. I.8(a).

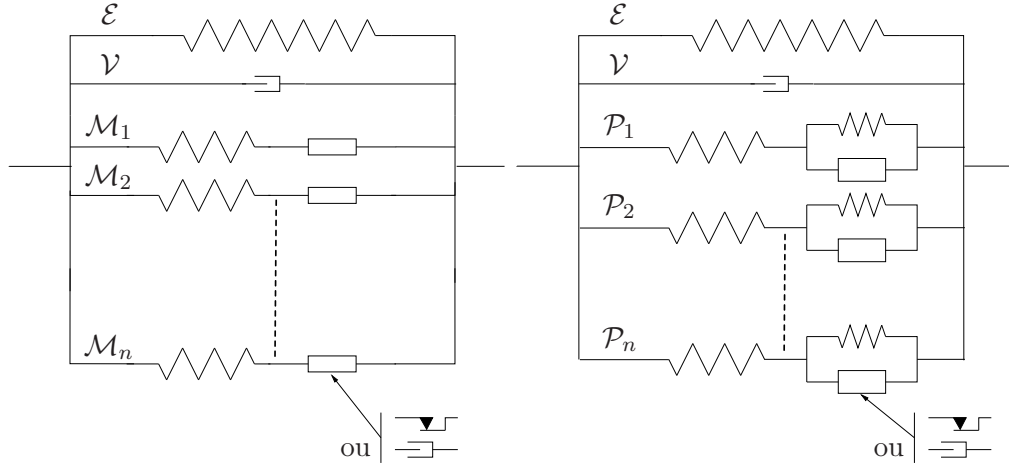
En poussant plus loin l'analogie, on suppose l'énergie libre de la forme :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\mathbb{C}}) + \psi_1^i({}^i\bar{\mathbb{C}}) + \psi_2^i(\bar{\mathbb{C}}^i) \\ \psi_0, \psi_1^i, \psi_2^i \text{ étant } 2n+1 \text{ fonctions scalaires isotropes} \end{cases} \quad (\text{I.110})$$

Ce choix n'est possible que si aucune contradiction n'est introduite dans les considérations d'isotropies mises en avant § I.5.4 et celles résultant du P.I.F.C (§ I.5.3), c'est-à-dire si la fonction  $\psi$  reste une fonction isotrope des tenseurs  $\bar{\mathbb{C}}$  et  ${}^i\bar{\mathbb{C}}$  ou encore que les fonctions  $\psi_2^i$  sont isotropes de  $\bar{\mathbb{C}}$  et  ${}^i\bar{\mathbb{C}}$ . Ceci est démontré en annexe D par le biais de la démonstration de la propriété :

$$\boxed{\text{Si } \psi_2^i(\bar{\mathbb{C}}^i) = \tilde{\psi}_2^i(I_1^i, I_2^i, I_3^i) \text{ alors } \psi_2^i(\bar{\mathbb{C}}^i) = \tilde{\psi}_2^i(I_1, I_2, I_2, {}^iI_1, {}^iI_2, {}^iI_3, K_{11}, K_{12}, K_{21})} \quad (\text{I.111})$$

La forme (I.110) permet alors l'extension du modèle rhéologique proposé par SIDOROFF [1977] au modèle présenté FIG. I.8(b).



(a) Modèle rhéologique généralisé de SIDOROFF [1977].

(b) Modèle rhéologique généralisé étendu.

FIGURE I.8 – Généralisations à un modèle rhéologique.

### I.5.7 Milieux incompressibles

La transformation totale étant décomposée en une succession d'états, il est possible de distinguer l'**incompressibilité** globale du matériau qui d'après (I.8), se traduit par :

$$\det \bar{\bar{F}} = 1, \quad (\text{I.112})$$

et l'incompressibilité d'une des transformations intermédiaires :

$$\det {}^i \bar{\bar{F}} = 1 \quad \text{pour } i \in \{1 \dots n\}. \quad (\text{I.113})$$

L'annexe C conduit à l'équivalence des équations (I.112) et (I.113) avec respectivement :

$$\text{tr} \bar{\bar{D}} = 0 \quad \text{tr} {}^i \bar{\bar{D}} = \text{tr} {}^i \bar{\bar{D}}^0 = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad (\text{I.114a})$$

$$\Leftrightarrow \dot{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{C}}^{-1} = 0 \quad {}^i \dot{\bar{\bar{C}}} : {}^i \bar{\bar{C}}^{-1} = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}. \quad (\text{I.114b})$$

Si l'on se place dans le cadre de l'égalité (I.105), la particularisation de  $\bar{\bar{D}}$ , par (I.114a), autorise l'application du principe de normalité sur la seule partie déviatorique de  $\bar{\sigma}_v$  :

$$\bar{\sigma}_v^D = (\bar{\sigma} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} - 2\rho \bar{\bar{B}}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i})^D = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{D}}}. \quad (\text{I.115})$$

On est alors amené à introduire  $p$  une fonction scalaire homogène à une pression hydrostatique telle que :

$$\bar{\sigma} = 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} + 2\rho\bar{B}^{\bar{i}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^{\bar{i}}} + p\bar{1}. \quad (\text{I.116})$$

Il en va de même pour les termes  $2\rho\bar{V}^{\bar{i}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^{\bar{i}}} \cdot \bar{V}^{\bar{i}}$  de (I.105). C'est donc sur les parties déviatoriques de ces dernières que le principe de normalité est appliqué, ce qui conduit à la prise en compte de  $n$  scalaires  $q_i$  tels que :

$$2\rho\bar{V}^{\bar{i}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^{\bar{i}}} \cdot \bar{V}^{\bar{i}} = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial^{\bar{i}}\bar{D}^o} + q_i\bar{1}. \quad (\text{I.117})$$

Dans le cas des descriptions mixte et lagrangienne, les conditions d'incompressibilité (I.114b) ne permettent l'écriture de  $\bar{S}_v$  et  $\bar{F} \cdot \bar{\pi}_v$  qu'à un multiple de  $\bar{C}^{-1}$  près :

$$\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v = \bar{S}_v = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\dot{\bar{E}}} + p\bar{C}^{-1}, \quad (\text{I.118})$$

si bien que :

$$\bar{S} = \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{E}} + \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\dot{\bar{E}}} + p\bar{C}^{-1}, \quad (\text{I.119})$$

et

$$\bar{\pi} = 2\rho_0\bar{F} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{C}} + \bar{F} \cdot \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\dot{\bar{E}}} + p\bar{F}^{-T}. \quad (\text{I.120})$$

Dans le cas où la  $i$ -ème transformation intermédiaire est incompressible, la détermination complète du terme  $\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial^i\bar{C}}$  passe par l'introduction d'un réel  $q_i$  tel que :

$$-\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial^i\bar{C}} = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial^i\dot{\bar{C}}} + q_i \bar{C}^{-1}. \quad (\text{I.121})$$

## I.6 Conclusion

Ce chapitre présente les outils nécessaires à une formulation en grandes déformations d'un problème. C'est ainsi que sont définis les différentes mesures de déformation et les trois différentes descriptions de l'état de contrainte (eulérienne, lagrangienne et mixte).

Par la suite, l'écriture des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, nous conduit aux équations d'équilibre dans chacune des trois descriptions.

D'un point de vue thermodynamique, la combinaison de l'équation de conservation de l'énergie et du second principe permet d'aboutir à l'expression de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM. Afin de rendre cette dernière exploitable, le cadre de l'état local est adopté ( $\mathcal{H}$ . I.1). Il repose sur la définition de variables d'état, observables ou cachées, qui par leur connaissance en un point, à un instant donné, définit complètement le matériau en ce point à cet instant.

Admettant, de manière classique, l'existence d'un potentiel thermodynamique énergie libre de HELMOLTZ qui dépend des variables précédemment définies, nous aboutissons à une expression de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM propre à chacune des descriptions sthéniques. Il est alors possible de factoriser ces dernières sous une forme de produit flux\forces thermodynamiques, ces grandeurs étant elles même reliées entre elles par le biais des différentes lois d'état.

L'hypothèse d'une dépendance unique de la dissipation vis à vis des phénomènes thermique et mécanique ( $\mathcal{H}$ . I.2) puis celle d'un découplage des effets de ces derniers ( $\mathcal{H}$ . I.3) sont postulées. Par la suite, une description des matériaux standards généralisés ( $\mathcal{H}$ . I.5) permet de d'écrire que les forces thermodynamiques mécaniques et thermiques suivent une règle de normalité par rapport à un potentiel de dissipation respectivement mécanique ou thermique. Les lois complémentaires ainsi obtenues expriment l'évolution des différentes variables internes.

Enfin, on introduit la notion d'état intermédiaire. Cette dernière constitue pour une bonne partie, les bases du modèle mécanique utilisé par la suite. Le cas particulier des matériaux isotropes et incompressibles est exhibé puisque représentatif du comportement des élastomères étudiés dans le chapitre suivant. Un découplage de l'énergie libre permet de rapprocher un modèle s'appuyant sur la notion d'état intermédiaire à une généralisation non linéaire de modèles rhéologiques.



## CHAPITRE II

# Comportement et Modélisation des Elastomères

————— oOo —————

**T**rois principaux points sont développés dans ce chapitre. Dans un premier temps, une revue de l'état de l'art sur les différents phénomènes qui caractérisent le comportement des élastomères est présentée. Puis les différentes théories prenant en compte ces phénomènes seront exposées. On passera ainsi en revue les comportements hyperélastiques, les différentes formulations visco-élastiques, ainsi qu'un certain nombre de travaux ayant trait à la prise en compte de l'endommagement. Par la suite sera décrite la démarche mise en place en vue du choix et de la validation d'une formulation thermodynamique adéquate et ce à partir de considérations expérimentales. Enfin seront présentés les travaux de mise en place et de validation d'un modèle éléments finis incorporant la formulation thermodynamique préalablement identifiée.

————— oOo —————

## PLAN DU CHAPITRE II

---

<b>II.1 Etat de l'art</b> . . . . .	<b>43</b>
II.1.1 Introduction et généralité sur les élastomères . . . . .	43
II.1.2 Comportement hyperélastique . . . . .	44
II.1.2.a Energie libre . . . . .	45
II.1.2.b Incompressibilité et quasi-incompressibilité . . . . .	47
II.1.3 Comportement viscoélastique . . . . .	49
II.1.3.a formulations intégrales . . . . .	49
II.1.3.b Formulations différentielles . . . . .	53
II.1.4 Effet MULLINS et endommagement . . . . .	54
II.1.4.a Approche micro-mécanique . . . . .	54
II.1.4.b Approches phénoménologiques . . . . .	56
<b>II.2 Choix du modèle</b> . . . . .	<b>59</b>
II.2.1 Essais expérimentaux . . . . .	59
II.2.1.a Description des essais . . . . .	59
II.2.1.b Dispositif expérimental . . . . .	59
II.2.2 Détermination du modèle . . . . .	60
II.2.2.a Constatations expérimentales . . . . .	60
II.2.2.b Modèles rhéologiques . . . . .	61
II.2.2.c Eléments du modèle . . . . .	64
II.2.3 Identification du modèle et des paramètres mécaniques . . . . .	65
II.2.3.a Présentation de la démarche . . . . .	65
II.2.3.b Algorithme d'identification . . . . .	65
II.2.3.c Choix du modèle rhéologique et résultats d'identification . . . . .	67
II.2.3.d Choix de l'énergie libre principale . . . . .	70
<b>II.3 Mise en oeuvre numérique</b> . . . . .	<b>73</b>
II.3.1 Formulation variationnelle . . . . .	73
II.3.2 Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis . . . . .	74
II.3.3 Discrétisation temporelle . . . . .	75
II.3.4 Intégration locale . . . . .	77
II.3.4.a Intégration de la loi complémentaire et détermination de la variable interne . . . . .	77
II.3.4.b Calcul de la matrice tangente élémentaire . . . . .	78
II.3.5 Choix des éléments finis . . . . .	79
II.3.5.a Rappels sur les instabilités numériques des éléments mixtes . . . . .	79
II.3.5.b Choix et test des éléments . . . . .	79
II.3.5.c Choix de $\varepsilon$ . . . . .	83
II.3.6 Validation . . . . .	84
II.3.6.a Présentation du problème numérique et choix des discrétisations . . . . .	84
II.3.6.b Comparaisons des résultats . . . . .	85
<b>II.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>89</b>

---

## II.1 Etat de l'art

### II.1.1 Introduction et généralité sur les élastomères

Les élastomères appartiennent à la famille des **hauts polymères**, c'est-à-dire qu'ils sont constitués de chaînes macromoléculaires plus ou moins longues, avec ou sans ramifications. Ceci leur confère un **point de fusion** assez bas permettant une mise en forme aisée, une **faible rigidité** et une **grande déformabilité**. Ces propriétés font qu'il sont de plus en plus présents dans les industries aéronautique, automobile, du bâtiment... Ils sont utilisés sous forme de caoutchoucs (*i.e.* pratiquement sous forme brute), matières plastiques, vernis...

Pour se restreindre à des utilisations mécaniques, on pourra citer leur emploi :

- dans des pièces se substituant à des ensembles mécaniques complets, tels que les bras élastomériques développés dans l'industrie aéronautique, composés de baguettes de composites noyées dans une matrice élastomérique dont le rôle est, sur un hélicoptère, de remplacer les trois articulations d'une pale ;
- en tant que matrice de multimatériaux ; cette technologie est notamment utilisée dans la fabrication de lamifiés métal-élastomère, ou encore dans les pneumatiques ;
- dans des pièces qui mettent à profit leur grande déformabilité telles que les DIAS d'Ariane V chargés de transmettre les charges de poussée à la structure en l'isolant des oscillations ;
- sur de nombreux mécanismes exploitant le pouvoir amortissant de certains d'entre eux.

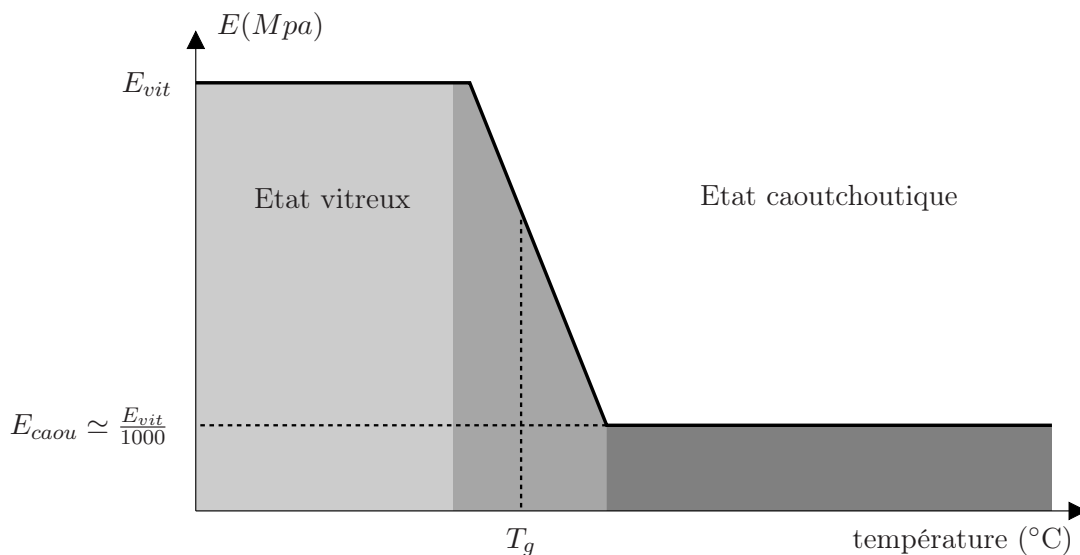


FIGURE II.1 – Evolution du module d'YOUNG en fonction de la température.

Il est possible de distinguer deux grandes familles d'élastomères, les **caoutchoucs à usage général** et ceux **à usage spécifique**. A l'état initial, l'élastomère est dans un **état caoutchoutique**, c'est-à-dire que les chaînes macromoléculaires peuvent glisser les unes sur les autres (c'est

l'état, entre autre, du caoutchouc naturel). Ces libertés de déplacement permettent au matériau de subir de grandes déformations sans rupture. Cependant, les macromolécules étant indépendantes les unes des autres, le retour à l'état initial ne peut se faire sans une intervention extérieure, en vue d'augmenter ou d'établir son pouvoir de recouvrement élastique. Des liaisons entre les chaînes sont mises en place, créant ainsi un réseau tridimensionnel qui solidarise les chaînes entre elles. C'est ce qu'on appelle la **vulcanisation** ou **réticulation** des élastomères.

Ce traitement confère alors à notre matériau trois plages de comportement, dépendant de la température d'utilisation. FIG. II.1 est représentée l'évolution du module d'YOUNG en fonction de la température. Bien que schématisées, les transitions brutales d'un état à l'autre sont assez représentatives de la réalité.

A des températures assez basses, on est en présence d'un palier de comportement *i.e.* les caractéristiques du matériau sont pratiquement indépendantes de la température. L'élastomère ne possède pas encore ses propriétés de haute déformabilité et de faible rigidité : il est en **état vitreux**, le module d'YOUNG est de l'ordre du  $Gpa$  et a un comportement **fragile**.

Une augmentation de la température conduit le matériau dans une **zone de transition vitreuse** que l'on a l'habitude de centrer (à  $\pm 25\%$ ) autour de la **température de transition**  $T_g$ . Dans cette zone, une partie des liaisons commence à rompre, ce qui permet ainsi un glissement d'une partie des chaînes les unes par rapport aux autres. Le comportement de l'élastomère est alors **viscoélastique** et les coefficients matériau sont fortement dépendants de la température. Enfin, si la température est bien au dessus de  $T_g$ , le matériau se trouve alors dans un **état caoutchoutique**. Le comportement en début de zone s'apparente à de l'**hyperélasticité** ou de la **visco-hyperélasticité** avec un module de YOUNG égal à environ  $1/1000^e$  de celui de l'état vitreux. En fin de zone, on est en présence d'un **écoulement**.

Il est évident que les propriétés de l'élastomère vont dépendre de sa vulcanisation, de sa composition mais aussi en grande partie, de la nature des adjonctions qui vont y être incorporées. Ces **charges** seront, dans la plupart des cas, des **noirs de carbone** ou des **silices**. Une description plus approfondie de leurs effets sera faite au § II.1.4 concernant les approches micromécaniques du comportement.

### II.1.2 Comportement hyperélastique

Les élastomères sont souvent utilisés pour leur grande faculté de déformation. Cependant, ces chargements importants font apparaître plusieurs problèmes, en particulier la non-linéarité des déformations par rapport aux contraintes et le dépassement du cadre des petites perturbations ( $\nabla_X \vec{u} \neq \mathcal{O}(\bar{F} - \bar{1})$ ). Une manière de contourner ces difficultés, est d'utiliser une énergie libre de type hyperélastique. On obtient, à partir des résultats du chapitre I, pour un matériau isotrope, non dissipatif, dans le cas isotherme et sous les hypothèses  $\mathcal{H}$ . I.1,  $\mathcal{H}$ . I.2,  $\mathcal{H}$ . I.3 et  $\mathcal{H}$ . I.5, les

lois de comportement (I.80a),(I.81a) et (I.82a) qui, avec les équations d'équilibre (I.30) et (I.32), définiront complètement l'évolution du matériau. Les équations locales sont les suivantes, en configuration mixte par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- équation d'équilibre} \\ \operatorname{div}_X \bar{\pi} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} \quad \text{sur } \Omega, \\ \text{- conditions limites} \\ \bar{\pi} \cdot \vec{N} = \bar{T} \quad \text{sur } \partial\Omega_F, \vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_u, \\ \text{- loi de comportement} \\ \bar{\pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{F}} \quad \text{sur } \Omega. \\ \text{ou, dans le cas incompressible} \\ \bar{\pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{F}} + p \bar{F}^{-1} \quad \text{sur } \Omega \\ \text{et} \\ J(\vec{u}) = \det \bar{F} = 1 \quad \text{sur } \Omega \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

On voit que le comportement du matériau ne dépend que du choix de l'énergie libre.

Ce type de formulation peut être utilisé notamment pour des caoutchoucs naturels éventuellement chargés avec des particules de noir de carbone.

### II.1.2.a Energie libre

La littérature présente principalement deux catégories d'énergies libres (et par conséquent deux modèles, le comportement étant complètement déterminé par son choix). On distingue donc les approches statistiques et phénoménologiques.

De nombreuses formes de l'énergie ont été proposées, des revues plus complètes sont proposées par BOUKAMEL [1988] ; JAZZAR [1993]. Ici ne seront présentées que les plus utilisées.

- Approches statistiques

Ces approches ont pour fondement des considérations de structures moléculaires. Une des principales, réalisée par TRELOAR [1943], est basée sur une étude thermodynamique et statistique d'un élastomère réticulé. Elle suppose une distribution gaussienne de la distance entre les extrémités des chaînes, l'équirépartition des points de réticulation, la prise en compte de l'entropie comme la somme des entropies élémentaires des chaînes et une transformation isochore (**incompressibilité** du matériau). Sous ces hypothèses, cette approche permet d'aboutir à une expression de l'énergie libre spécifique dite de NÉOHOKE :

$$\psi = \frac{1}{2} N k T (I_1 - 3), \quad (\text{II.2})$$

avec  $N$ , le nombre de chaînes moléculaires par unité de volume,  $T$  la température absolue, et  $k$  la constante de BOLTZMANN. Le domaine de validité de cette description est d'environ 50% de déformation locale.

D'autres études, modifiant l'une ou l'autre des hypothèses du modèle néohookéen, conduisent à des théories quelque peu modifiées.

- Approches phénoménologiques

Ces théories s'appuient sur des démarches purement mathématiques et expérimentalement corrélées [TRELOAR, 1957]. On expose ci-dessous les principaux modèles couramment utilisés pour des matériaux à transformation isochore :

– Modèle de MOONEY-RIVLIN :

$$\psi = a_1(I_1 - 3) + a_2(I_2 - 3). \quad (\text{II.3})$$

Cette expression peut être considérée comme valide pour des plages de déformation pouvant aller jusqu'à 100%.

– Modèle de MOONEY :

$$\psi = \sum_{\substack{0 \leq m \leq \infty \\ 0 \leq n \leq \infty}} a_{mn}(I_1 - 3)^n (I_2 - 3)^m, \quad (\text{II.4})$$

Le domaine de validité de la généralisation du modèle précédent dépend du degré du polynôme choisi.

– Modèle de GENT-THOMAS [GENT et THOMAS, 1973]

$$\psi = a_1(I_1 - 3) + a_3 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (\text{II.5})$$

Cette description permet une modélisation correcte pour des déformations inférieures à 200%.

– Modèle de HART-SMITH [HART-SMITH, 1966]

$$\psi = a_1 \int \exp(a_2(I_1 - 3)^2) dI_1 + a_3 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (\text{II.6})$$

Cette énergie libre spécifique décrit correctement le matériau pour des déformations inférieures à 500%.

– Modèle de OGDEN [OGDEN, 1972]

L'auteur de ce modèle choisit de faire intervenir les dilatations principales<sup>(1)</sup> ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ )

---

(1). valeurs propres

de  $\bar{C}$ :

$$\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3). \quad (\text{II.7})$$

La performance de ce modèle, tout comme celui de MOONEY dépend du degré de développement choisi. Le choix des couples de paramètres  $(\mu_i, \alpha_i)$  peut s'avérer délicat car conduisant à des violations du critère de HILL<sup>(2)</sup>.

- LAMBERT-DIANI et REY [1998] proposent pour le cas de matériaux incompressibles, une forme générale de densité d'énergie ainsi qu'une méthodologie d'identification des coefficients associés.

### REMARQUE II.1

L'ensemble des expressions proposées ci-dessus, décrit des matériaux isotropes incompressibles. le cas compressible peut être traité par extension de l'écriture des modèles de OGDEN ou MOONEY-RIVLIN, *i.e.*

$$\psi = \sum_{\substack{0 \leq m \leq \infty \\ 0 \leq n \leq \infty \\ 0 \leq p \leq \infty}} a_{mn} (I_1 - 3)^n (I_2 - 3)^m (I_3 - 3)^p. \quad (\text{II.8})$$

□

#### II.1.2.b Incompressibilité et quasi-incompressibilité

La solution d'un problème hyperélastique peut être déduite de la résolution des équations locales. Une autre approche consiste à chercher le champ minimisant l'énergie potentielle du système sur l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles  $\mathcal{V}$ , en imposant ou non une contrainte d'incompressibilité. Le problème se ramène à :

$$\mathcal{M}: \text{Trouver}(\vec{u}) \in \mathcal{V} \setminus \vec{u} \text{ minimise } \int_{\Omega} \rho_0 \psi(I_1, I_2, I_3) dV - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{\partial\Omega_F} \vec{T} \cdot \vec{v} dS, \quad (\text{II.9})$$

auquel il est possible de rajouter la condition d'incompressibilité :

$$J = \det \bar{F} = 1. \quad (\text{II.10})$$

De manière plus générale, dans le cas d'un matériau hyperélastique, isotrope, incompressible ou quasi-incompressible, il est commode de considérer l'énergie libre spécifique sous la forme [OGDEN, 1972 ; CHEN *et al.*, 1997] :

$$\psi = \bar{\psi}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + \frac{1}{\varepsilon} G(J), \quad (\text{II.11})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \bar{I}_1 = I_1 I_3^{-1/3}, \\ \bar{I}_2 = I_2 I_3^{-2/3}, \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

---

(2). les tenseurs  $\bar{S}$  et  $\bar{E}$  (dans une description eulérienne) ne sont plus définis positifs [LARABA-ABBES, 1998]

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre positif décrivant le degré d'incompressibilité du matériau.

Le cas où  $\varepsilon = 0$  correspond au cas incompressible,  $G(J)$  étant nulle aussi, on décline alors  $\psi$  sous la forme :

$$\psi = \bar{\psi}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \bar{\psi}(I_1, I_2). \quad (\text{II.13})$$

Dès lors, un problème incompressible ou quasi-incompressible se décline comme le problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{M}_\varepsilon : \text{Trouver } \bar{\vec{u}} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{\vec{u}}) = \inf_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \mathcal{L}_\varepsilon(\vec{v}), \quad (\text{II.14})$$

$$\text{avec : } \mathcal{L}_\varepsilon : \begin{cases} \mathcal{V} & \longrightarrow \mathcal{R} \\ \vec{v} & \longmapsto \int_{\Omega} \left[ \rho_0 \bar{\psi}(\bar{I}_1(\vec{v}), \bar{I}_2(\vec{v})) + \frac{1}{\varepsilon} G(J(\vec{v})) \right] dV - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{\partial\Omega_F} \vec{T} \cdot \vec{v} dS, \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

La mise en oeuvre numérique de ce type de formulation cause de nombreux problèmes tels que

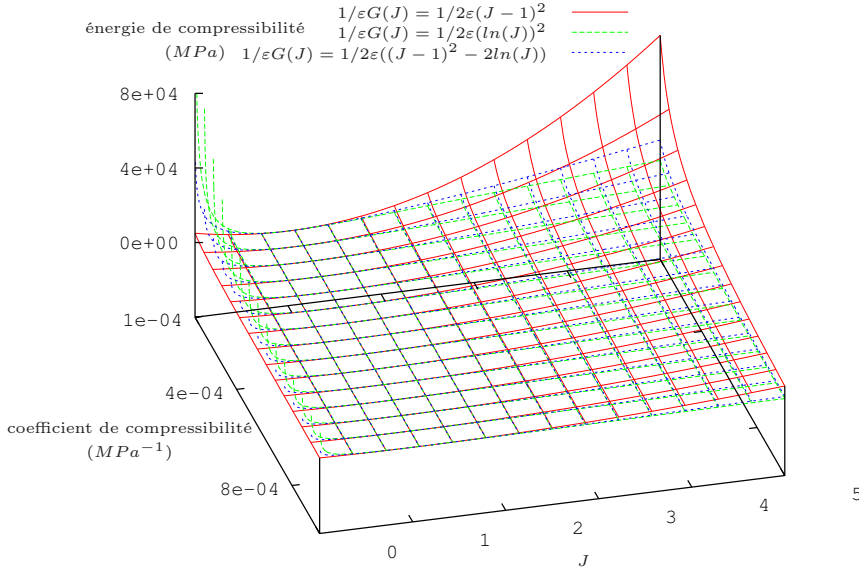


FIGURE II.2 – Evolution des différentes formes d'énergie de compressibilité.

des phénomènes de verrouillages. Une formulation en **lagrangien perturbé** permet de palier ces difficultés. On définit  $G^*$  la fonction conjuguée de  $G$  telle que :

$$\forall J > 0 \quad \frac{1}{\varepsilon} G(J) = \sup_{p \in \mathcal{R}} (p(J-1) - G^*(p)). \quad (\text{II.16})$$

Le problème  $\mathcal{M}_\varepsilon$  devient un problème de détermination de point selle :

$$\boxed{\mathcal{M}'_\varepsilon : \text{Trouver } (\vec{u}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}_\varepsilon(\vec{u}, p) = \inf_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \sup_{p \in \mathcal{R}} \mathcal{L}'_\varepsilon(\vec{v}, p)} \quad (\text{II.17})}$$

$$\text{avec : } \mathcal{L}'_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \\ (\vec{v}, p) \longmapsto \int_{\Omega} [\rho_0 \bar{\psi}(\bar{I}_1(\vec{v}), \bar{I}_2(\vec{v})) + p(J-1) - G^*(p)] dV \\ \qquad \qquad \qquad - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{\partial\Omega_F} \vec{T} \cdot \vec{v} dS. \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

En FIG. II.2 sont représentées trois fonctions d'énergie classiques. On voit que la première permet de ramener le matériau à un volume nul ( $J = 0$ ) pour une énergie finie. C'est pour éviter ce contresens physique que les deux autres ont été définies. Cependant, pour des matériaux peu compressibles (le domaine d'étude de ce paragraphe), ces trois fonctions sont équivalentes et peuvent être indifféremment utilisées [CHEN *et al.*, 2000].

### II.1.3 Comportement viscoélastique

Les modèles hyperélastiques présentés ci-dessus ne rendent pas compte de la sensibilité de certains matériaux à la vitesse de chargement, d'un caractère dissipatif ou d'un éventuel décalage de la réponse par rapport à la sollicitation. Ces phénomènes relèvent du caractère **viscoélastique** des élastomères.

Même si ce phénomène est assez bien maîtrisé dans le cadre des petites déformations (combinaison des lois d'**élasticité linéaire**, de la théorie de la **viscosité de NEWTON** et le principe de **superposition de BOLTZMANN** [CHRISTENSEN, 1971]), il n'en va pas de même pour les grandes transformations, où la viscoélasticité demeure un important domaine d'investigation.

Dans ce cadre, deux grandes approches se détachent :

- les **formulations intégrales** qui considèrent les contraintes comme une fonction de l'histoire des contraintes,
- les **formulations différentielles**, qui sont principalement axées sur la théorie de l'**état associé** (cf.  $\mathcal{H}$ . I.1), des **matériaux standards généralisés** ou des **relations d'ONSAGER**.

Cette approche est pour une grande part basée sur les équations présentées au chapitre I.

#### II.1.3.a formulations intégrales

Un certain nombre d'études a mis en évidence que la réponse d'un élastomère, soumis à une sollicitation de traction simple, obéit à la loi monodimensionnelle :

$$\sigma(\lambda, t, T) = E(t, T)H(\lambda), \quad (\text{II.19})$$

où  $\sigma$  représente la contrainte uniaxiale,  $\lambda$  la sollicitation en déformation,  $t$  le temps,  $T$  la température.  $E$  est le module de relaxation et  $H$  une fonction (éventuellement non linéaire) de  $\lambda$ . Cette loi de comportement met en évidence le découplage de l'influence de la température et de la déformations sur la contrainte et que la non-linéarité de cette dernière est entièrement due à l'éventuelle non linéarité de  $H$ .

Partant de ces constatations et d'une généralisation du principe de superposition de BOLTZMANN, de nombreuses formulations ont élaborées :

- Modèle F.L.V. (Finite Linear Viscoelasticity)

COLEMAN et NOLL [1961] partent de l'équation de comportement générale d'un matériau simple incompressible [TRUESDELL et NOLL, 1973] :

$$\bar{R}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{R} = -p\bar{1} + f(\bar{E}) + \int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}(\bar{E}, \bar{E}_d(s)) \quad (\text{II.20})$$

où  $\bar{\sigma}$  le tenseur des contraintes de CAUCHY,  $\bar{R}$  le tenseur des rotations issu de la décomposition polaire de  $\bar{F}$ ,  $p$  la pression hydrostatique due à l'incompressibilité,  $\bar{E}$  le tenseur de GREEN-LAGRANGE et  $\bar{E}_d(s) = \bar{E}(t-s) - \bar{E}$ .

Les auteurs postulent que l'histoire des températures et des déformations a une influence sur les grandeurs actuelles inversement proportionnelle à leur éloignement dans le temps. C'est ce qu'on appelle **la mémoire évanescence** des élastomères. Ceci permet un développement asymptotique de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  conduisant à :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{1} + \bar{R} \cdot f(\bar{E}) \cdot \bar{R}^T + \bar{R} \cdot \left[ \int_0^{\infty} \dot{\bar{K}}(\bar{E}, s) : \bar{E}_d(s) ds + \mathcal{O}(\|\bar{E}_d(s)\|^2) \right] \cdot \bar{R}^T. \quad (\text{II.21})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs ou égaux à 2, en choisissant le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche pour mesure des déformations et en introduisant l'énergie libre spécifique  $\psi$ , (II.21) nous donne :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{1} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_1}(I_1, I_2) \bar{B} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2}(I_1, I_2) \bar{B}^{-1} \int_0^{\infty} 2 \dot{\bar{\Phi}}(\bar{B}, s) : \bar{J}(s) ds, \quad (\text{II.22})$$

avec  $I_1$  et  $I_2$  les deux premiers invariants de  $\bar{B}$

$$\text{et } \bar{J}(s) = \bar{F}^{-T} \cdot (2\bar{E}(t-s) + \bar{1}) \cdot \bar{F}^{-1} - \bar{1} = \bar{C}_t(t-s) - \bar{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Phi}}(\bar{B}, s) &= \frac{1}{2} (\bar{R} \boxtimes \bar{F}) : (\dot{\bar{K}}(\bar{E}, s) - \dot{\bar{K}}(\bar{E}, \infty)) : (\bar{F}^T \boxtimes \bar{R}^T) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 2}} \phi_{\max(i,j)}(s) (\bar{B}^i \boxtimes \bar{B}^j) + \sum_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 2}} \phi_{ij}(s) (\bar{B}^i \otimes \bar{B}^j) \text{ dans le cas isotrope.} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Il est à noter que l'hypothèse de mémoire évanescence entraîne :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_i = \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_{ij} = 0 \quad (\text{II.24})$$

**REMARQUE II.2**

Ramenée au cadre des petites perturbations, la relation (II.22) donne :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = -p\bar{1} + \bar{\bar{K}}_0(0) : \bar{\varepsilon}(t) + \int_0^\infty \bar{\dot{K}}_0(s) : \bar{\varepsilon}(t-s) ds \\ \bar{\bar{K}}_0(s) = K(s)(\bar{1} \otimes \bar{1}) + 2G(s)(\bar{1} \boxtimes \bar{1} - \frac{1}{3}\bar{1} \otimes \bar{1}). \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

□

- Modèle M.F.L.V. (Modified Finite Linear Viscoelasticity)

Ce modèle développé par MORMAN [1988], introduit une mesure généralisée des déformations :

$$\begin{cases} \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}), \\ \text{avec } \bar{\bar{H}}(\bar{0}) = \bar{0}, \\ \text{et } \left. \frac{\partial \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}})}{\partial \bar{\bar{E}}} \right|_{\bar{\bar{E}}=0} = \bar{1} \boxtimes \bar{1}. \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

De même que pour le modèle F.L.V., un développement asymptotique de  $\mathcal{F}$  est réalisé, considérant  $\mathcal{F}$  fonction de la mesure généralisée des déformations. L'auteur postule alors que le premier terme de ce développement est égal au module de relaxation défini pour le précédent modèle sous l'hypothèse des petites perturbations (II.25) :

$$\bar{\bar{R}}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\bar{R}} = -p\bar{1} + f(\bar{\bar{E}}) + \int_0^\infty \bar{\dot{K}}_0(s) : \underbrace{(\bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}(t-s)) - \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}))}_{\bar{\bar{H}}_d(s)} ds. \quad (\text{II.27})$$

En considérant la séparation temps \ déformation et en intégrant les différentes contributions sphériques, les auteurs déduisent :

$$\bar{\bar{R}}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\bar{R}} = -p\bar{1} + \frac{2}{3}E_e \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}) + \frac{2}{3} \int_0^\infty \dot{E}(s)(\bar{1} \boxtimes \bar{1}) : \bar{\bar{H}}_d(s) ds, \quad (\text{II.28})$$

où  $E(s)$  est la contribution déviatorique de  $G(s)$  dans l'expression de  $\bar{\dot{K}}_0(s)$  et  $E_e$ , sa limite à l'infini.

- Modèle B.K.Z. [Bernstein, Kearsley, et Zapas, 1963]

Les auteurs partent d'une approche monodimensionnelle en viscoélasticité linéaire, sous une sollicitation de cisaillement  $\Delta\gamma$ , pour laquelle la réponse en contrainte  $\Delta\tau(t)$  suit la loi :

$$\Delta\tau(t) = G(t-t')\Delta\gamma, \quad (\text{II.29})$$

avec  $G$ , le module de cisaillement du matériau. Le principe de superposition de BOLTZMANN

donne alors pour une sollicitation continue :

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \int_{-\infty}^t G(t-t') d\gamma(t') \\
&= \int_{-\infty}^t G(t-t') \frac{d\gamma}{dt'}(t') dt' \\
&= [G(t-t')\gamma(t')]_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t \frac{dG}{dt'}(t-t')\gamma(t') dt'.
\end{aligned} \tag{II.30}$$

Choisissant une description eulérienne des efforts, prenant  $\tau_0(t)$  ( $= G(0)\gamma(0)$ ) nul et considérant un module de cisaillement tendant vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , les auteurs obtiennent :

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t m(t-t')\gamma(t') dt' \tag{II.31}$$

$$\text{en posant } m = \frac{dG}{dt}.$$

Ils supposent alors l'existence d'un potentiel  $W(\gamma, t)$  dont dérive  $m$ , si bien que :

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial W}{\partial \gamma}(\gamma(t'), t-t')\gamma(t') dt'. \tag{II.32}$$

Il est alors possible de généraliser cette relation en trois dimensions, en définissant préalablement les tenseurs cinématiques permettant le passage de la configuration  $C(t')$  à  $C(t)$  :

$$\bar{\bar{F}}(t, t') = \frac{\partial x(t)}{\partial x(t')}, \tag{II.33a}$$

$$\bar{\bar{C}}(t, t') = \bar{\bar{F}}^T(t, t') \cdot \bar{\bar{F}}(t, t'), \tag{II.33b}$$

$$\bar{\bar{E}}(t, t') = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}}(t, t') - \bar{\bar{1}}). \tag{II.33c}$$

Dans le cas d'un matériau incompressible, on a alors :

$$\bar{\bar{\sigma}}(t) = -p\bar{\bar{1}} + \int_{-\infty}^t \bar{\bar{F}}(t, t') \cdot \frac{\partial W}{\partial E(t, t')} \cdot \bar{\bar{F}}^T(t, t') dt' \tag{II.34}$$

La mise en place du tenseur de FINGER :

$$\bar{\bar{F}}(t') = \frac{\partial x(t')}{\partial x(t)} = \bar{\bar{F}}^{-1}(t, t'), \tag{II.35}$$

permet la description complète du tenseur de CAUCHY :

$$\bar{\bar{\sigma}}(t) = -p\bar{\bar{1}} + \int_{-\infty}^t \bar{\bar{F}}^{-1}(t') \cdot \frac{\partial W}{\partial E(t, t')} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T}(t') dt' \tag{II.36}$$

Ce type d'approche a connu de nombreux succès dans les années 70-80. Cependant, se pose le problème de l'identification des différentes fonctionnelles de réponse qui sont liées à un matériau et difficilement généralisables à un autre. Une fois cette fonctionnelle déterminée, le stockage de l'histoire des déformations peut se révéler être un problème numérique assez restrictif. L'utilisation des formulations différentielles semble conduire à des modèles beaucoup plus maniables, en particulier sur ces deux derniers points.

### II.1.3.b Formulations différentielles

C'est sous l'hypothèse de l'état local ( $\mathcal{H}$ . I.1) que se déclinent ces modélisations. Les différents travaux de SIDOROFF [1974, 1975a,b, 1976, 1977] ont en grande partie contribué à leur mise en place. Outre ces derniers, qui sont largement décrits dans le Chapitre I, d'autres auteurs ont abordé ce type de formulation.

LEONOV [1992] présente une généralisation du modèle de MAXWELL (FIG. I.7(a)). Le formalisme eulérien est adopté ce qui permet l'expression de la contrainte comme suit :

$$\bar{\sigma} = 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}}, \quad (\text{II.37})$$

tandis que la dissipation se met sous la forme :

$$\phi = \bar{\sigma} : \bar{D}^v. \quad (\text{II.38})$$

Les relations d'ONSAGER permettent ensuite de relier linéairement  $\bar{D}^v$  et  $\bar{\sigma}$ .

LE TALLEC et RAHIER [1994] obtiennent une description lagrangienne d'un matériau isotrope et incompressible en mettant en oeuvre une généralisation du modèle de ZENER (FIG. I.7(c)). Dans le cadre des matériaux standards généralisés ( $\mathcal{H}$ . I.5), sous l'hypothèse de découplage de l'énergie libre du paragraphe § I.5.6 et en choisissant  $(\bar{C}, \bar{C}_v)$  pour variables internes, on obtient pour loi de comportement et loi complémentaire :

$$\begin{cases} \bar{S} = 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{C}} + p\bar{C}^{-1} = 2\rho_0 \left( \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{C}} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\bar{C}} \right) + p\bar{C}^{-1} \\ \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\bar{C}}_v} - \rho_0 \bar{C}_v^{-1} \cdot \frac{\partial\psi_2}{\partial\dot{\bar{C}}_v} \right)_D = 0. \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Par la suite, les auteurs orientent leur choix sur une forme hyperélastique simple des énergies libres et quadratique du potentiel de dissipation :

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{K_1}{4} \text{tr}\bar{C} \\ \psi_2 = \frac{K_2}{4} \text{tr}\bar{C}_e = \frac{K_2}{4} \text{tr}(\bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C}) \\ \varphi = \frac{\nu}{2} \text{tr}\bar{D}_v^2 = \frac{\nu}{8} \text{tr}(\bar{C}_v^{-1} \cdot \dot{\bar{C}}_v \cdot \bar{C}_v^{-1} \cdot \dot{\bar{C}}_v), \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \bar{S} = \frac{K_1}{2} \bar{1} + \frac{K_2}{2} \bar{C}_v^{-1} + p\bar{C}^{-1} \\ \nu \bar{C}_v^{-1} + K_2 \left( \frac{\text{tr}(\bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C})}{3} \cdot \bar{C}_v - \bar{C} \right) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Le même modèle est étudié par SEUNG *et al.* [1997] : les énergies libres utilisées sont aussi de type hyperélastique (MOONEY-RIVLIN), mais la loi complémentaire est directement obtenue à l'aide d'une loi d'écoulement déduite d'analyses expérimentales.

Ces deux derniers modèles corrèlent convenablement l'expérience.

### REMARQUE II.3

L'ensemble des modèles présentés précédemment (intégrales ou différentiels) négligent les effets thermiques et considèrent donc une transformation isotherme.  $\square$

#### II.1.4 Effet MULLINS et endommagement

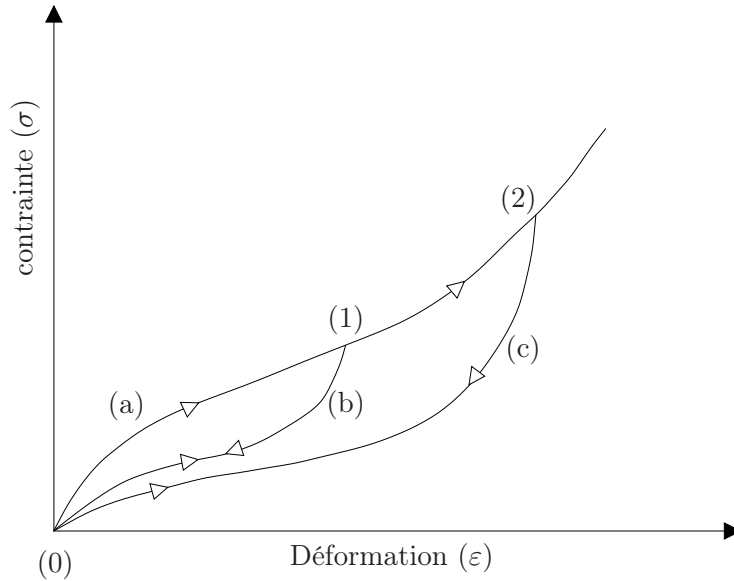


FIGURE II.3 – *Chargement cyclique d'un élastomère.*

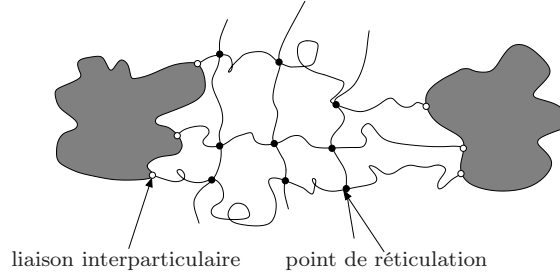
L'effet MULLINS peut être mis en évidence par un essai de traction cyclique (FIG. II.3) [GOVINDJEE et SIMO, 1991]. Partant d'un état initial (0), considéré comme vierge de sollicitations, la courbe de premier chargement suit le chemin (a). Si l'on décharge le matériau arrivé à l'état (1), la courbe de premier déchargement est le chemin (b). Si un deuxième chargement est ensuite appliqué, le chemin suivi sera alors (b) jusqu'à atteindre l'état (1), puis la courbe de chargement se confond à nouveau avec le chemin (a). Si l'on décharge le matériau une fois arrivé à un état (2) ( $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$ ), la décharge suit (c). En cas de nouveau chargement, le chemin est (c) tant que  $\varepsilon \leq \varepsilon_2$  et redevient (a) par la suite.

La plupart des auteurs s'accorde pour attribuer ce caractère spécifique des élastomères à un phénomène d'**endommagement**. De même que pour les modèles hyperélastiques, on distingue les approches micro-mécaniques des approches phénoménologiques.

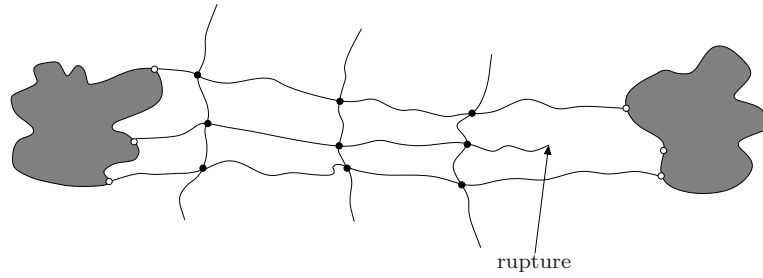
##### II.1.4.a Approche micro-mécanique

- Modèle de GOVINDJEE et SIMO [GOVINDJEE et SIMO, 1991, 1992]

Les auteurs attribuent l'effet MULLINS à une rupture des chaînes interparticulaires au delà



(a) Configuration vierge.



(b) Configuration déformée.

FIGURE II.4 – *Modèle d'endommagement: rupture des liaisons interparticulaires* [GOVINDJEE et SIMO, 1991].

d'une longueur maximale. Dans une approche purement micro-mécanique, l'élastomère est vu comme un composite constitué d'une matrice élastomérique dans laquelle sont dispersées de fines particules de carbone. L'étude d'un VER (Volume Élémentaire Représentatif), où les inclusions sont supposées rigides, amène une expression de l'énergie libre :

$$\psi(\lambda_a) = (1 - \nu_p)(\psi_{cc}(\lambda_a^m) + \psi_{pp}(\lambda_a^m, \mu)), \quad (\text{II.42})$$

avec  $\nu_p$  la fraction volumique de carbone,  $\mu$  la variable d'endommagement qui est directement reliée à l'élongation maximum sur toute l'histoire des déformations,  $\lambda_a$  les élongations macroscopiques,  $\lambda_a^m$  leurs analogues dans la matrice élastomère :

$$\lambda_a \text{ valeurs propres de } \bar{\bar{F}} \quad a \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{II.43})$$

$$\lambda_a^m \text{ valeurs propres de } \bar{\bar{R}} \cdot \frac{\bar{\bar{U}} - \nu_p \bar{\bar{1}}}{1 - \nu_p} \quad a \in \{1, 2, 3\}. \quad (\text{II.44})$$

$\psi_{pp}$  représente l'énergie libre spécifique des chaînes interparticulaires :

$$\begin{cases} \psi_{pp}(\lambda_a^m, \mu) = \frac{N_{pp}}{3} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{A}_X} P(n, R) w(n, \lambda_a^m R) dR dn, \\ \mathcal{A}_X = \{(n, R) \mid n a \phi > \mu R\} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

où  $N_{pp}$  est le nombre de ces chaînes par unité de volume,  $P(n, R)$  la probabilité d'en trouver une en  $X$ , de longueur  $R$  et constituée de  $n$  monomères de longueur moyenne  $a$ .  $\mathcal{A}_X$  est l'ensemble des couples de caractéristiques  $(n, R)$  d'une chaîne n'ayant pas été étirée au delà de  $\phi$  fois leur extension maximum.

L'énergie libre des chaînes joignant les points de réticulation ( $\psi_{cc}$ ) peut, par des considérations phénoménologiques, être choisie de type OGDEN [GOVINDJEE et SIMO, 1992].

#### II.1.4.b Approches phénoménologiques

- modèle de SIMO

SIMO [1987] associe à un modèle viscoélastique standard, une variable d'endommagement  $\Theta^m$ . Se plaçant dans une configuration lagrangienne, l'énergie libre se décline :

$$\psi(\bar{\bar{E}}, \bar{\bar{Q}}, \Theta^m) = g(\Theta^m)\psi^0(\bar{\bar{E}}) - \bar{\bar{Q}} : \bar{\bar{E}} + \psi^l(\bar{\bar{Q}}) \quad (\text{II.46})$$

$$(\text{II.47})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_t^m = \max_{s \in ]-\infty, t]} \sqrt{2\psi^0(\bar{\bar{E}}(s))} \\ g(x) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}, \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ deux coefficients réels liés au matériau} \\ \bar{\bar{E}} \text{ le tenseur de GREEN-LAGRANGE} \\ \bar{\bar{Q}} \text{ un tenseur associé au caractère visqueux du matériau} \\ \psi^l(\bar{\bar{Q}}) \text{ une énergie libre associée à la viscosité.} \end{array} \right.$$

Ceci mène alors, en introduisant  $K(t)$  la fonction de relaxation du matériau, à l'expression du second tenseur de PIOLA-KIRCHOFF :

$$\bar{\bar{S}} = \int_0^\infty K(t-s) \frac{d}{ds} \left( g(\Theta^m) \frac{\partial \psi^0}{\partial \bar{\bar{E}}} \left( \bar{\bar{E}}(s) \right) \right) ds. \quad (\text{II.48})$$

- modèle de MIEHE

Pour MIEHE [1995], relier l'endommagement à l'allongement maximal ou à un maximum d'énergie libre sont des concepts simplifiés car ils ne tiennent pas compte d'un éventuel cumul d'endommagement. Ce phénomène peut être constaté expérimentalement sur un essai cyclé, pour lequel le matériau subit un assouplissement permanent et ce, pour des élongations n'excédant pas l'élongation maximale vue par l'élastomère au cours de son histoire des déformations.

Se basant sur des travaux classiques [CHABOCHE, 1988 ; LEMAÎTRE, 1984] ayant trait à l'endommagement dans le cas général, l'auteur propose d'enrichir le modèle de SIMO, donnant lieu à un endommagement discontinu et un apport continu traduisant l'accumulation de ce dernier.

La mise en place de cette formulation passe par la considération d'une variable interne d'endommagement de type scalaire  $d$  telle que :

$$\psi = (1 - d)\psi_0, \quad (\text{II.49})$$

où  $\psi_0$  représente l'énergie libre spécifique du matériau vierge de tout endommagement et  $d \in [0, 1]$ . Si l'on se limite au seul phénomène d'endommagement d'un matériau isotrope au cours d'une transformation isotherme, (I.53) nous donne pour une description eulérienne :

$$\phi = \left( \bar{\sigma} - 2\rho\bar{B} \cdot (1 - d) \frac{\partial\psi_0}{\partial\bar{B}} \right) : \bar{D} + \psi_0\dot{d} \geq 0. \quad (\text{II.50})$$

Si l'on suppose que seul le phénomène d'endommagement est dissipatif, on arrive à :

$$\bar{\sigma} = 2\rho(1 - d)\bar{B} \frac{\partial\psi_0}{\partial\bar{B}} = (1 - d)\bar{\sigma}_0, \quad (\text{II.51a})$$

$$\phi = \psi_0\dot{d} \geq 0 \quad (\text{II.51b})$$

La loi de comportement (II.51a) est complétée par deux lois d'évolution indépendantes gouvernant respectivement l'endommagement continu et l'endommagement discontinu :

$$d = d_\alpha(\alpha) + d_\beta(\beta). \quad (\text{II.52})$$

Les fonctions  $d_\alpha$  et  $d_\beta$  vérifient les conditions suivantes qui traduisent respectivement un état initial non endommagé, une évolution croissante et irréversible de l'endommagement et la limite de ce dernier :

$$\begin{cases} d_\alpha(0) = d_\beta(0) = 0 \\ \dot{d}_\alpha \geq 0 \\ \dot{d}_\beta \geq 0 \\ d_\alpha(\infty) + d_\beta(\infty) \in [0, 1] \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

Les variables  $\alpha$  et  $\beta$  gouvernent respectivement l'endommagement discontinu de type MULLINS et celui d'accumulation continu :

$$\alpha(t) = \max_{s \in [0, t]} \psi_0(s), \quad (\text{II.54a})$$

$$\beta(t) = \int_0^t |\dot{\psi}_0(s)| ds. \quad (\text{II.54b})$$

Ces variables suivent les lois d'évolution :

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \dot{\psi}_0 & \text{si } \psi - \alpha = 0 \text{ et } \dot{\psi}_0 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.55a})$$

$$\dot{\beta} = |\dot{\psi}_0|. \quad (\text{II.55b})$$

L'auteur propose deux expressions des fonctions  $d_\alpha$  et  $d_\beta$ :

$$d_\alpha(\alpha) = d_\alpha^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\eta_\alpha}\right) \right], \quad (\text{II.56a})$$

$$d_\beta(\beta) = d_\beta^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\eta_\beta}\right) \right], \quad (\text{II.56b})$$

avec  $d_\alpha^\infty, d_\beta^\infty, \eta_\alpha$  et  $\eta_\beta$  quatres paramètres dépendant du matériau.

**REMARQUE II.4**

La partie discontinue de ce modèle est très proche de celle du modèle de SIMO. Seules les descriptions – eulérienne pour SIMO, lagrangienne pour MIEHE – diffèrent. Le passage du second au premier est donc très facile. □

**REMARQUE II.5**

ANDRIEUX *et al.* [1997] se sont attachés à prendre en compte une compressibilité induite par l'endommagement dans le cas de matériaux initialement incompressibles. □

## II.2 Choix du modèle

### II.2.1 Essais expérimentaux

#### II.2.1.a Description des essais

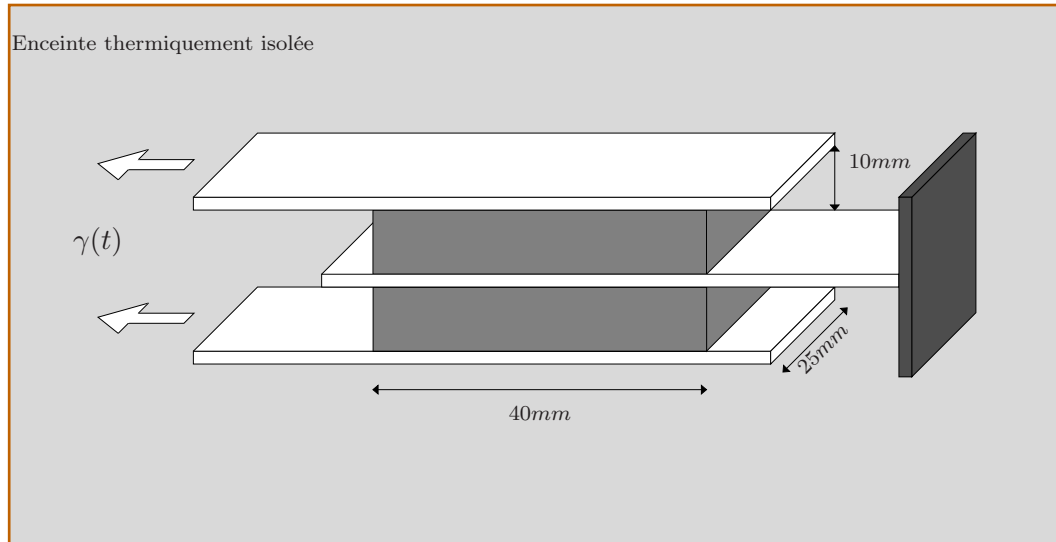


FIGURE II.5 – *Éprouvette de double cisaillement.*

L'ensemble des essais expérimentaux présentés ci-dessous est réalisé sur des éprouvettes bi-couches élastomère/métal, plus communément appelées **éprouvettes de double cisaillement** (FIG. II.5). L'armature centrale de cette dernière est fixe tandis que les deux armatures extérieures sont animées d'un déplacement sinusoïdal, de fréquence  $f$  et d'amplitude  $\Gamma$  :

$$\gamma(t) = \Gamma \sin(2\pi ft). \quad (\text{II.57})$$

Avant de commencer les mesures, trois cycles d'accommodation sont réalisés, afin de limiter l'apparition de l'effet MULLINS décrit § II.1.4. Ces exemples présentent l'avantage de posséder une solution semi-analytique sous une hypothèse de cisaillement globale homogène.

Par ailleurs, ces essais sont relativement simples à mettre en oeuvre. De plus, ce type de sollicitations mécaniques est couramment rencontré dans des parties vitales d'ensembles mécaniques ou ayant trait à la sécurité telles que les pièces de liaison entre le moyeu rotor et la pale.

#### II.2.1.b Dispositif expérimental

L'élastomère utilisé pour ces expériences est du **diméthyl-vinyl-siloxan vulcanisé** ; les armatures sont en acier. La campagne expérimentale a été menée par la Société EUROCOPTER. L'éprouvette est montée dans une enceinte thermostatée, refroidie par une circulation d'azote et

éventuellement réchauffée par une résistance.

Le déplacement est imposé par un vérin hydraulique. La mesure des réactions est réalisée à l'aide d'un capteur de force situé dans le mors mobile.

## II.2.2 Détermination du modèle

### II.2.2.a Constatations expérimentales

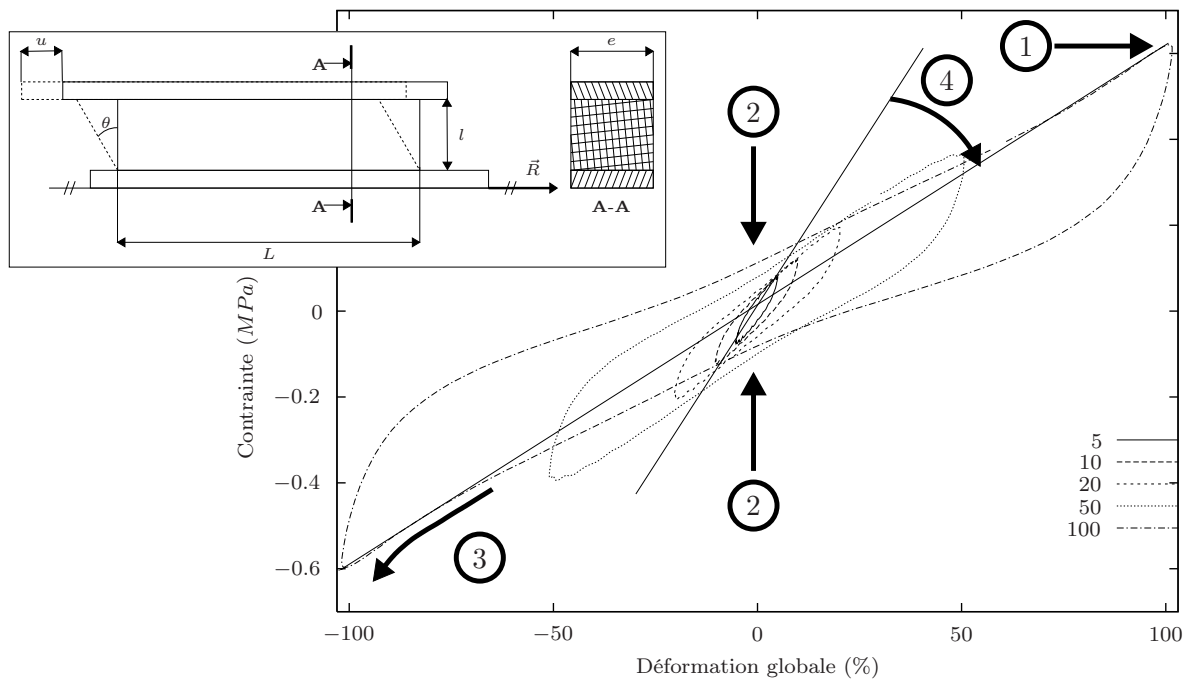


FIGURE II.6 – Essais expérimentaux, Contrainte ( $\frac{R}{e \times L}$ , MPa) - Déformation globale ( $\tan \theta = \frac{u}{l}$ , %),  $T = 23 \text{ }^\circ\text{C}$ .

La figure FIG. II.6 représente des résultats d'essais de cisaillement cyclique pour différentes amplitudes de sollicitations.

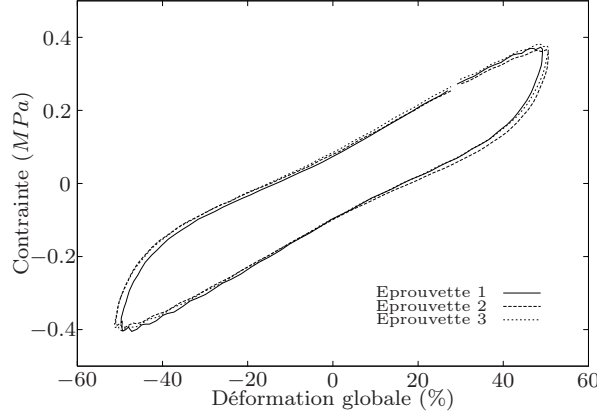
Plusieurs phénomènes sont mis en évidence. En particulier, on note :

- la présence d'un **point anguleux** (①) au changement du signe de la sollicitation.
- l'existence d'un **étranglement** de l'hystérésis au passage à l'origine (②).
- un **raidissement** pour les amplitudes de sollicitations importantes (③).
- Enfin, un **raidissement global** du matériau (④) pour les faibles amplitudes du taux de cisaillement.

#### REMARQUE II.6

Les seuls essais réalisés et présentés dans ce paragraphe sont des cycles stabilisés. Ceci est assez

limitant car on ne peut mettre en évidence l'effet MULLINS ou un quelconque autre endommagement. Pratiquement, l'expérimentateur réalise quelques cycles préliminaires pour éliminer tout phénomène de ce type, car ils ne sont pas représentatifs des conditions de vol.  $\square$



### REMARQUE II.7

Ces résultats sont à traiter avec précautions. En effet, on constate FIG. II.7 qu'il peut y avoir une dispersion relative des résultats expérimentaux qui exige une certaine prudence dans l'identification des paramètres ou la comparaison avec des résultats numériques.  $\square$

FIGURE II.7 – *Dispersion des résultats sur trois éprouvettes de double cisaillement, amplitude de 50%,  $T = 25^{\circ}C$ .*

#### II.2.2.b Modèles rhéologiques

Nous adoptons une approche différentielle du comportement viscoélastique. Le cadre thermodynamique est celui introduit dans le premier chapitre de ce manuscrit, à savoir :

- une formulation en grandes déformations basée sur l'état local  $\mathcal{H}$ . I.1,
- une dissipation résultant uniquement de la déformation globale, des variables internes et de la conduction thermique ( $\mathcal{H}$ . I.2),
- un découplage des effets thermiques et mécaniques dans la dissipation ( $\mathcal{H}$ . I.3),
- l'introduction d'une variable interne par le biais d'un état intermédiaire de type visqueux ( $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_v$ ),
- le cadre des matériaux standards généralisés postulant l'existence d'un pseudo-potential de dissipation ( $\mathcal{H}$ . I.5),
- un matériau isotrope,
- un découplage de l'énergie libre en une somme de fonctions isotropes des variables d'états (§ II.2.2.b),
- l'incompressibilité globale et visqueuse du matériau.

A ce jeu d'hypothèses vient s'ajouter la suivante :

#### HYPOTHÈSE II.1

On suppose les phénomènes mécaniques indépendants des effets thermiques. Ceci nous permet de considérer l'énergie libre et le pseudo-potential fonction des uniques grandeurs mécaniques.

**REMARQUE II.8**

Cette hypothèse restreint fortement le domaine de validité de notre modèle. En effet, pour des essais cyclés, présentés au paragraphe § II.2.1.a, il est possible d'observer une variation de température à coeur de l'élastomère pouvant aller jusqu'à plusieurs dizaines de degrés, variation qui peut modifier considérablement le comportement du matériau (FIG. II.1). Le modèle découlant des hypothèses précédentes ne sera donc considéré valide que sur les premiers cycles de l'essai.  $\square$

D'après (I.110), (I.120), (I.121), (I.112), (I.112), le modèle est gouverné par<sup>(3)</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{tot} = \psi(\bar{\bar{C}}) + \psi_v(\bar{\bar{C}}_v) + \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) \\ \varphi = \varphi(\dot{\bar{\bar{C}}}, \dot{\bar{\bar{C}}}_v) \\ \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{\bar{C}}} + \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}} + p \bar{\bar{C}}^{-1} \\ \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = -\rho_0 \left( \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} \right) \\ \det \bar{\bar{F}} = 1 \\ \det \bar{\bar{F}}_v = 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.58})$$

Nous explicitons les équation précédentes, à l'aide des modèles rhéologiques de MAXWELL, POYNTING-THOMSON et ZENER, ces derniers étant des modèles classiquement utilisés dans la modélisation en petites perturbations de la viscoélasticité.

- MAXWELL

Ce modèle est un des plus simples rencontrés dans la littérature. Il met en jeu un ressort en série avec un amortisseur. Il est obtenu à partir du modèle global présenté dans le premier chapitre en figure FIG. I.8(b), en considérant uniquement la branche  $\mathcal{P}_1$  (*i.e.* un seul état intermédiaire) et en prenant nulle la rigidité du ressort parallèle.

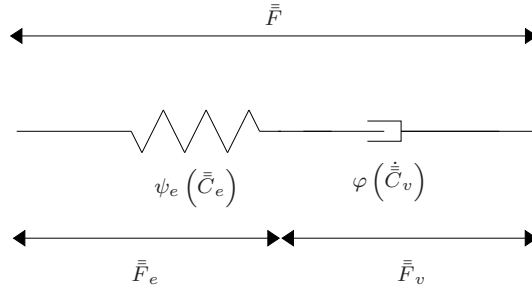


FIGURE II.8 – Modèle de MAXWELL.

(3). On se placera dans un cadre de description mixte, mais il aurait été cependant possible de choisir une description eulérienne ou lagrangienne

Ce modèle conduit aux formes suivantes de l'énergie libre et du potentiel de dissipation :

$$\begin{cases} \psi^{tot} = \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) & \psi_e \text{ isotrope} \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{\bar{C}}_v). \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

En annexe E est présentée la forme développée des équations (II.58c) et (II.58d) :

$$\begin{cases} \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + p \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{C}}_v} - \rho_0 \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

- POYNTING-THOMSON

Le modèle présenté FIG. V.1 est obtenu en considérant l'unique branche  $\mathcal{P}_1$  du modèle général FIG. I.8(b).

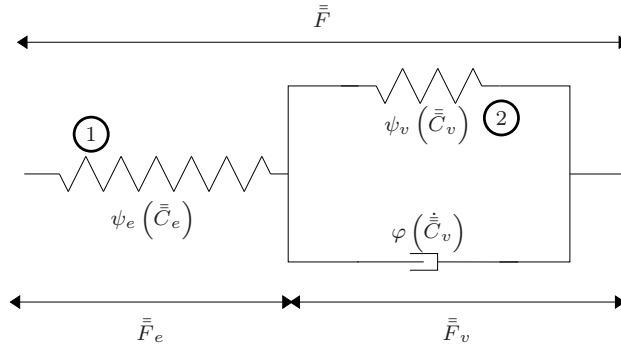


FIGURE II.9 – Modèle de POYNTING-THOMSON.

$$\begin{cases} \psi^{tot} = \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) + \psi_v(\bar{\bar{C}}_v) & \psi_e, \psi_v \text{ isotropes} \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{\bar{C}}_v). \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

Le modèle est alors régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + p \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{C}}_v} - \rho_0 \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) \\ \quad + \left( \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} I_1^v \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{\bar{C}}_v + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

- ZENER

L'obtention de ce dernier modèle se fait une fois de plus à partir du modèle général FIG. I.8(b). On considère, dans ce cas, l'assemblage en parallèle des branches  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{P}_1$  avec, pour cette dernière, une coupure (ressort à énergie libre nulle) à la place du ressort en parallèle.

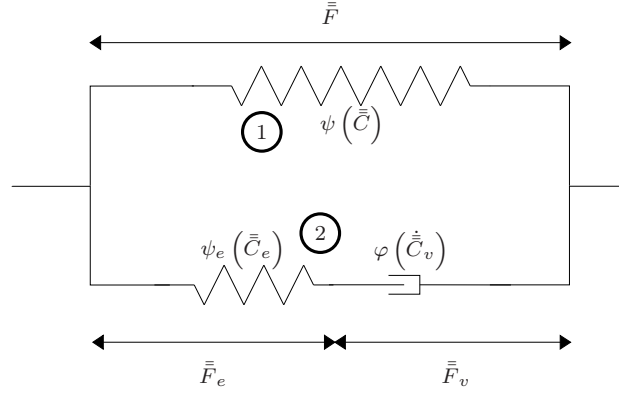


FIGURE II.10 – Modèle de ZENER.

$$\begin{cases} \psi^{tot} = \psi_e(\bar{C}_e) + \psi(\bar{C}) & \psi_e, \psi \text{ isotropes} \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{C}_v). \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

Le comportement du matériau est alors régi par :

$$\begin{cases} \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \bar{C} \\ \quad + \bar{C}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} I_1^e \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) + p \bar{F}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{C}}_v} - \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) + q \bar{C}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

### II.2.2.c Eléments du modèle

Afin de complètement définir les modèles précédents, on affecte aux différentes parties élastiques des formes hyperélastiques d'énergie libre (§ II.1.2.a). On observe en particulier les formes de NÉO-HOOKE, GENT-THOMAS, HART-SMITH et MOONEY-RIVLIN.

Le pseudo-potentiel de dissipation est choisi, par analogie aux modèles rhéologiques sous l'hypothèse des petites perturbations, comme une fonction quadratique de la forme [BOUKAMEL *et al.*, 1997]:

$$\varphi(\dot{\bar{C}}_v) = \frac{\nu}{2} \dot{\bar{C}}_v : \dot{\bar{C}}_v = \frac{\nu}{2} \text{tr} \dot{\bar{C}}_v^2. \quad (\text{II.65})$$

Ce dernier choix permet la réécriture de l'équation complémentaire (II.58d) sous la forme :

$$\dot{\bar{C}}_v + q \bar{C}_v^{-1} = -\rho_0 \left( \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{C}_v} \right). \quad (\text{II.66})$$

### II.2.3 Identification du modèle et des paramètres mécaniques

**Avertissement :** ce travail fait l'objet d'une collaboration avec A. BOUKAMEL et donnera lieu à une publication qui est actuellement en cours de rédaction [BOUKAMEL et MÉO, 2000].

#### II.2.3.a Présentation de la démarche

Nous présentons, dans un premier temps, un algorithme d'identification de paramètres, utilisable pour tous les modèles présentés § II.2.2.b et ce quelle que soit les formes d'énergies libres affectées aux composants élastiques de ces modèles.

Par la suite, nous choisissons la forme de l'énergie libre, afin de nous consacrer uniquement à l'identification du modèle rhéologique.

Enfin, une fois le modèle rhéologique adopté, nous nous attachons à déterminer une forme adéquate d'énergie libre et ce en terme de coût d'identification et de validité des résultats.

#### II.2.3.b Algorithme d'identification

En vue d'identifier les paramètres des différents modèles, nous disposons des courbes expérimentales présentées FIG. II.6. Nous choisissons un essai avec une amplitude de déformation de 50% à une fréquence de  $3.5Hz$ .

L'identification se fait semi-analytiquement à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA<sup>©</sup>. Nous prenons en compte les hypothèses suivantes :

- la rigidité de l'acier étant très supérieure à celle de l'élastomère, la déformations des mors est négligée,
- le cisaillement de l'élastomère est uniforme :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.67})$$

- le pseudo gradient visqueux est de la forme :

$$\bar{\bar{F}}_v = \begin{bmatrix} \gamma_{v11} & \gamma_v & 0 \\ 0 & \gamma_{v22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{v33} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.68})$$

On définit les points expérimentaux par les  $2 \times N$  couples  $(\gamma_i, \tau_i)$ <sup>(4)</sup>, avec :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1 \dots N\} \\ \dot{\gamma}_i < 0 \quad \forall i \in \{N \dots 2N\} \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

---

(4). déformation/contraainte

L'hystérésis définie par ces  $2 \times N$  couples n'étant pas bijective, il est préférable de décomposer les résultats expérimentaux en deux parties bijective. On adopte les définitions suivantes (FIG. II.11) :

- la courbe moyenne entre la descente ( $\dot{\gamma} < 0$ ) et la montée ( $\dot{\gamma} \geq 0$ ) :

$$t_i = \frac{\tau_i + \tau_{2N-i}}{2} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}, \quad (\text{II.70})$$

- et l'écart entre ces deux courbes est :

$$d_i = \tau_i - \tau_{2N-i} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}. \quad (\text{II.71})$$

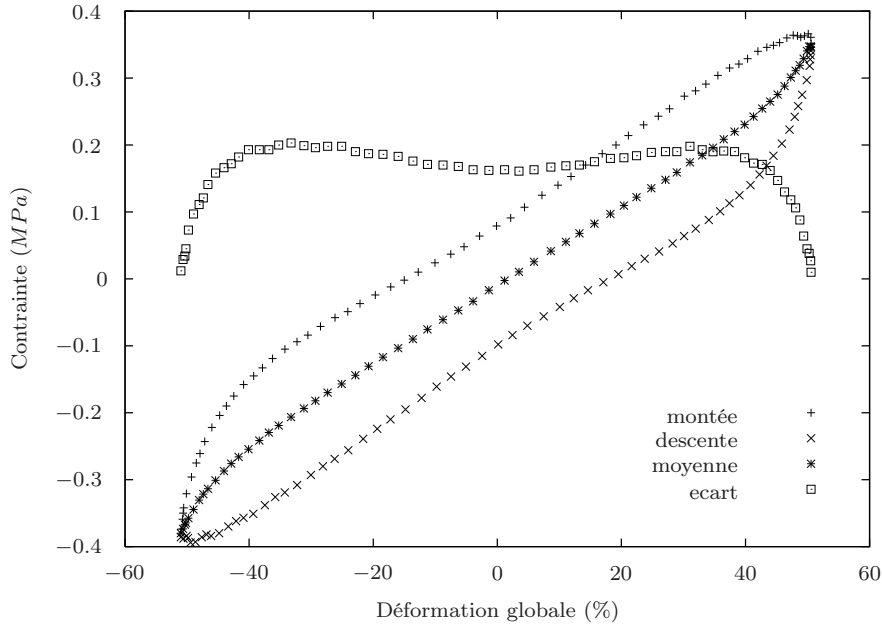
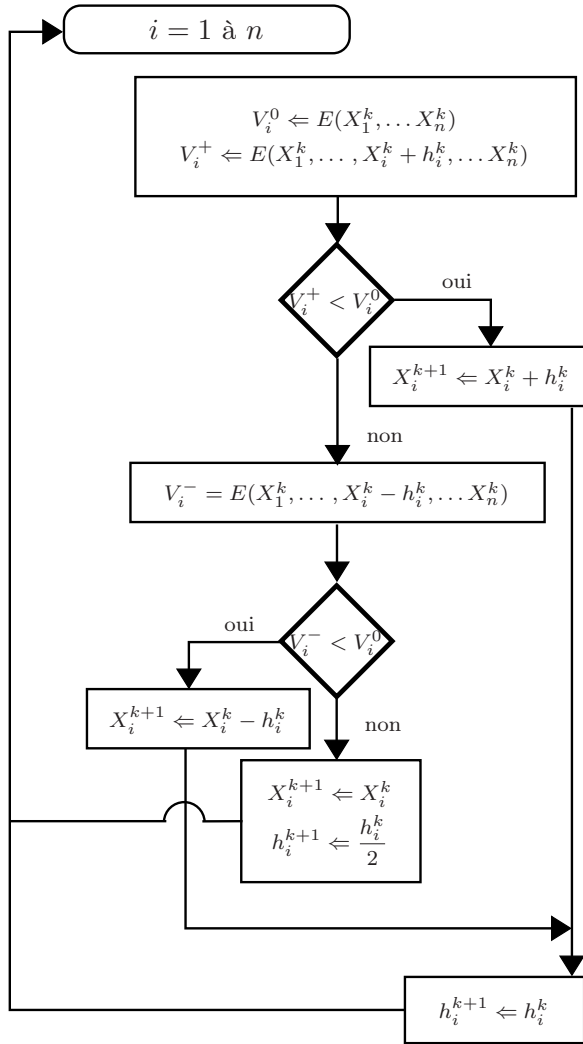


FIGURE II.11 – *Découplage des courbes expérimentales.*

L'identification des paramètres du matériau  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1 \dots \tilde{X}_n)$  peut se ramener à la minimisation de l'écart entre les courbes expérimentales  $(\gamma_i, t_i)$ ,  $(\gamma_i, d_i)$  et leurs homologues théoriques. Cet écart peut être caractérisé par la **distance des moindres carrés** :

$$E(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - t(X)|_{\gamma_i})^2 + \sum_{i=1}^n (d_i - d(X)|_{\gamma_i})^2} \quad (\text{II.72})$$

On adopte l'algorithme de minimisation II.1.




---

**Algorithme II.1** Algorithme d'identification des paramètres matériaux

---

**requis :**  $X^0 = (X_1^0, \dots, X_n^0)$

**requis :**  $H^0 = (h_1^0, \dots, h_n^0)$

**requis :** Précision sur  $E$  :  $\varepsilon$

**tant que**  $E(X) > \varepsilon$  **faire**

**pour**  $i = 1$  à  $n$  **faire**

$V_i^0 \leftarrow E(X_1^k, \dots, X_n^k)$

$V_i^+ \leftarrow E(X_1^k, \dots, X_i^k + h_i^k, \dots, X_n^k)$

**si**  $V_i^+ < V_i^0$  **alors**

$X_i^{k+1} \leftarrow X_i^k + h_i^k$

$h_i^{k+1} \leftarrow h_i^k$

**sinon**

$V_i^- = E(X_1^k, \dots, X_i^k - h_i^k, \dots, X_n^k)$

**si**  $V_i^- < V_i^0$  **alors**

$X_i^{k+1} \leftarrow X_i^k - h_i^k$

$h_i^{k+1} \leftarrow h_i^k$

**sinon**

$X_i^{k+1} \leftarrow X_i^k$

$h_i^{k+1} \leftarrow \frac{h_i^k}{2}$

**fin si**

**fin si**

**fin pour**

**fin tant que**

---

### II.2.3.c Choix du modèle rhéologique et résultats d'identification

L'objet de ce chapitre est d'identifier le modèle le plus adapté à modéliser le comportement de notre matériau (FIG. II.11). Les énergies libres choisies sont définies TAB. II.1. Le pseudo-potential de dissipation est choisi de la forme (II.65). Les ressorts ① et ② (cf. FIG. V.1 et FIG. II.10) sont respectivement définis par des formes de GENT-THOMAS et NÉOHOOKE.

L'identification porte donc pour les modèles de ZENER et POYNTING-THOMSON, sur les 2 coefficients  $c_1$  et  $c_2$  de l'énergie libre de GENT-THOMAS, le coefficient  $a_1$  de la loi de NÉOHOOKE et le coefficient de viscosité  $\nu$ , c'est-à-dire sur 4 coefficients.

	ZENER	POYNTING-THOMSON
$\psi_e$ ou $\psi^a$	GENT-THOMAS	GENT-THOMAS
$\psi_v$	NÉOHOOKE	NÉOHOOKE

TABLEAU II.1 – *Energies libres élastiques et visqueuses des différents modèles.*

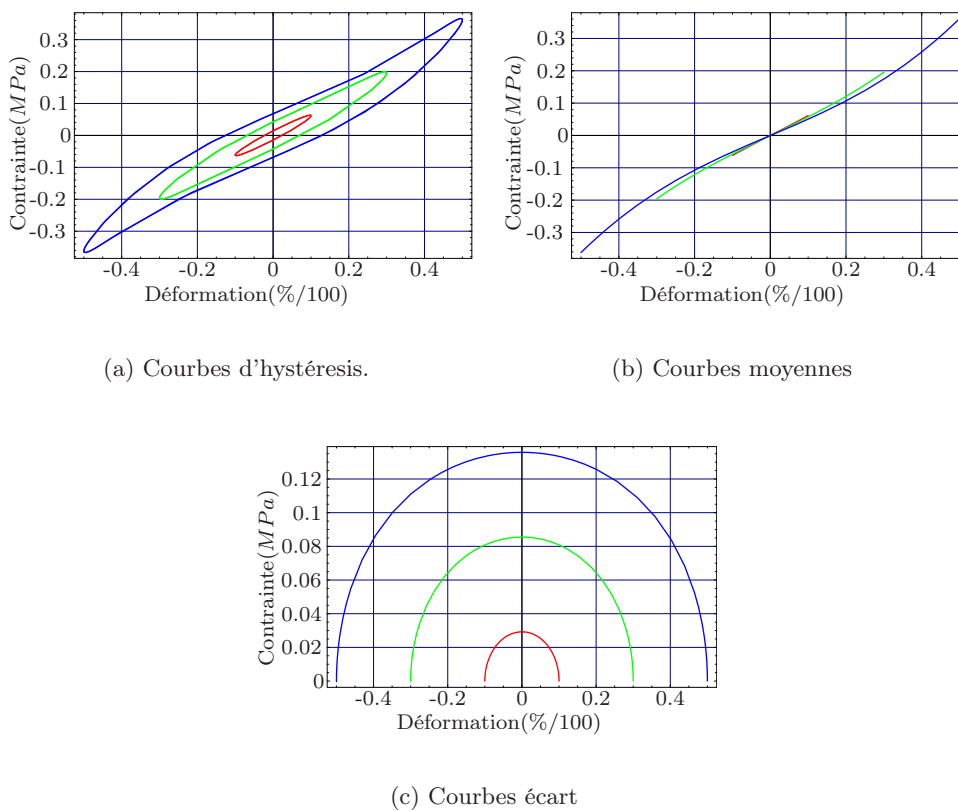
<sup>a</sup> respectivement pour les modèles de POYNTING-THOMSON et ZENER

Le modèle de MAXWELL pouvant être obtenu à partir des modèles de POYNTING-THOMSON et ZENER par la suppression de l'une des deux composantes de l'énergie libre, il n'est pas nécessaire de le tester. En effet si ce modèle est repressatif du matériau alors l'algorithme II.1 convergera vers un jeu de caractéristiques correspondant au modèle de MAXWELL, *i.e.*  $c_1 = c_2 = 0$  pour ZENER ou  $a_1 = 0$  pour POYNTING-THOMSON.

On obtient les résultats suivant pour **400** itérations de l'algorithme II.1 :

- Modèle de ZENER

Les caractéristiques identifiées du modèle de ZENER sont données TAB. II.2. Sur les figures FIG. II.12 sont représentées les homologues numériques des courbes expérimentales définies FIG. II.11 et ce pour des sollicitations de cisaillement allant de 10% à 50% de cisaillement global.

FIGURE II.12 – *Résultats d'identification sur le modèle de ZENER (cisaillement 10%, 20%, 50%).*

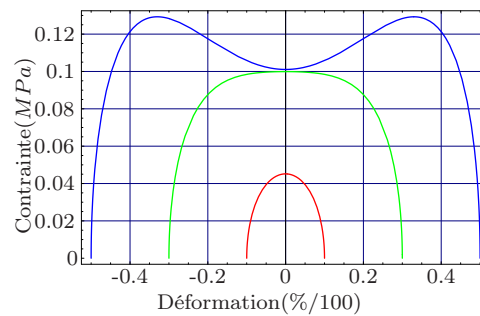
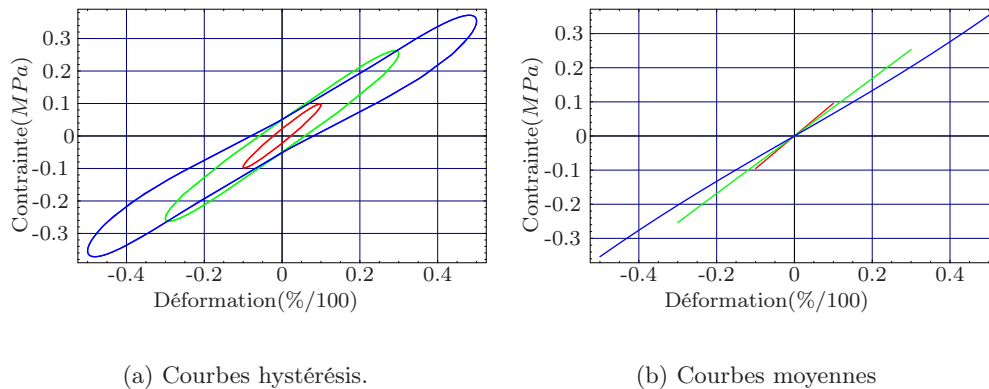
	GENT-THOMAS		NÉOHOKE	$\varphi$
	$c_1$ (MPa)	$c_2$ (Mpa)	$a_1$ (Mpa)	$\nu$ (MPa.s)
identification	1,02	-4,52577	0.790917	0.29898

TABLEAU II.2 – Résultats d'identification - modèle de ZENER

Deux des phénomènes attendus (cf. § II.2.2.a) sont observés, à savoir un point anguleux au changement de signe de la sollicitation, ainsi qu'un raidissement dans la zone de sollicitation maximum. En revanche, ni étranglement, ni raidissement global pour des faibles valeurs de cisaillement ne sont constatés.

- Modèle de POYNTING-THOMSON

A l'instar de celui de ZENER, le modèle de POYNTING-THOMSON présente deux des phénomènes que l'on cherche à modéliser (cf. FIG. II.6), à savoir le raidissement général de l'hystérésis pour les faibles taux de cisaillement global et l'étranglement de la courbe dans les zones de sollicitation proche de zéro. On constate de plus, un léger raidissement de la courbe au changement de signe de la sollicitation.



(c) Courbes d'ecart

FIGURE II.13 – Résultats d'identification sur le modèle de POYNTING-THOMSON (cisaillement 10%, 20%, 50%).

	GENT-THOMAS		NÉOHOKE	$\varphi$
	$c_1$ (MPa)	$c_2$ (MPa)	$a_1$ (MPa)	$\nu$ (MPa.s)
identification	1.65851	-3.42677	0.0300972	0.0751336

TABLEAU II.3 – Résultats d'identification - modèle de POYNTING-THOMSON

Le point anguleux n'est vraiment marqué que pour des essais d'amplitude supérieure à 50% de déformation (FIG. II.6). **Il paraît donc raisonnable d'adopter le modèle de POYNTING-THOMSON pour le reste de l'étude.**

### REMARQUE II.9

La restriction de l'identification aux uniques modèles de ZENER et POYNTING-THOMSON, se justifie *a posteriori*, par la non-convergence vers des identifications qui les rendraient équivalents à un modèle de MAXWELL. □

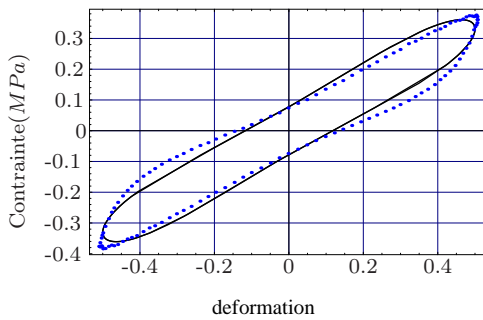


FIGURE II.14 – Comparaison des résultats semi-analytiques sur le modèle POYNTING-THOMSON et expérimentaux sur un essai d'amplitude de cisaillement 50%.

La comparaison des résultats semi-analytiques menés sur le POYNTING-THOMSON avec les résultats expérimentaux obtenus pour une amplitude de sollicitation de 50% (cf. FIG. II.14) donne des résultats assez bons. Les écarts peuvent être dus naturellement au modèle, mais aussi à l'hypothèse de cisaillement uniforme prise en compte pour le calcul semi-analytique. Cette approximation ne sera naturellement plus présente dans la mise en oeuvre élément finis présentée § II.3.

#### II.2.3.d Choix de l'énergie libre principale

Maintenant que le modèle rhéologique est déterminé, il faut postuler une forme acceptable de l'énergie libre. Cette dernière doit à la fois être suffisamment riche pour ne pas déprécier le modèle en le linéarisant, et de forme peu complexe pour ne pas introduire trop de coefficients matériau dont la détermination par l'algorithme des moindres carrés deviendrait trop imprécise. Une énergie libre de forme NÉOHOKE est affectée au potentiel  $\psi_v$  (FIG. V.1, ressort ②) et les formes de type MOONEY-RIVLIN, GENT-THOMAS et HART-SMITH sont comparées pour le potentiel élastique  $\psi_e$  (FIG. V.1, ressort ①).

Les coefficients identifiés du modèle incluant une énergie libre de GENT-THOMAS sont donnés TAB. II.3 tandis que les caractéristiques des modèles faisant intervenir le potentiel de HART-SMITH ou MOONEY-RIVLIN sont données respectivement TAB. II.4 et TAB. II.4. La stabilisation de l'algorithme II.1 est obtenue par environ 4000 itérations, soit 1000 fois plus que pour la détermination du modèle faisant intervenir le potentiel de GENT-THOMAS.

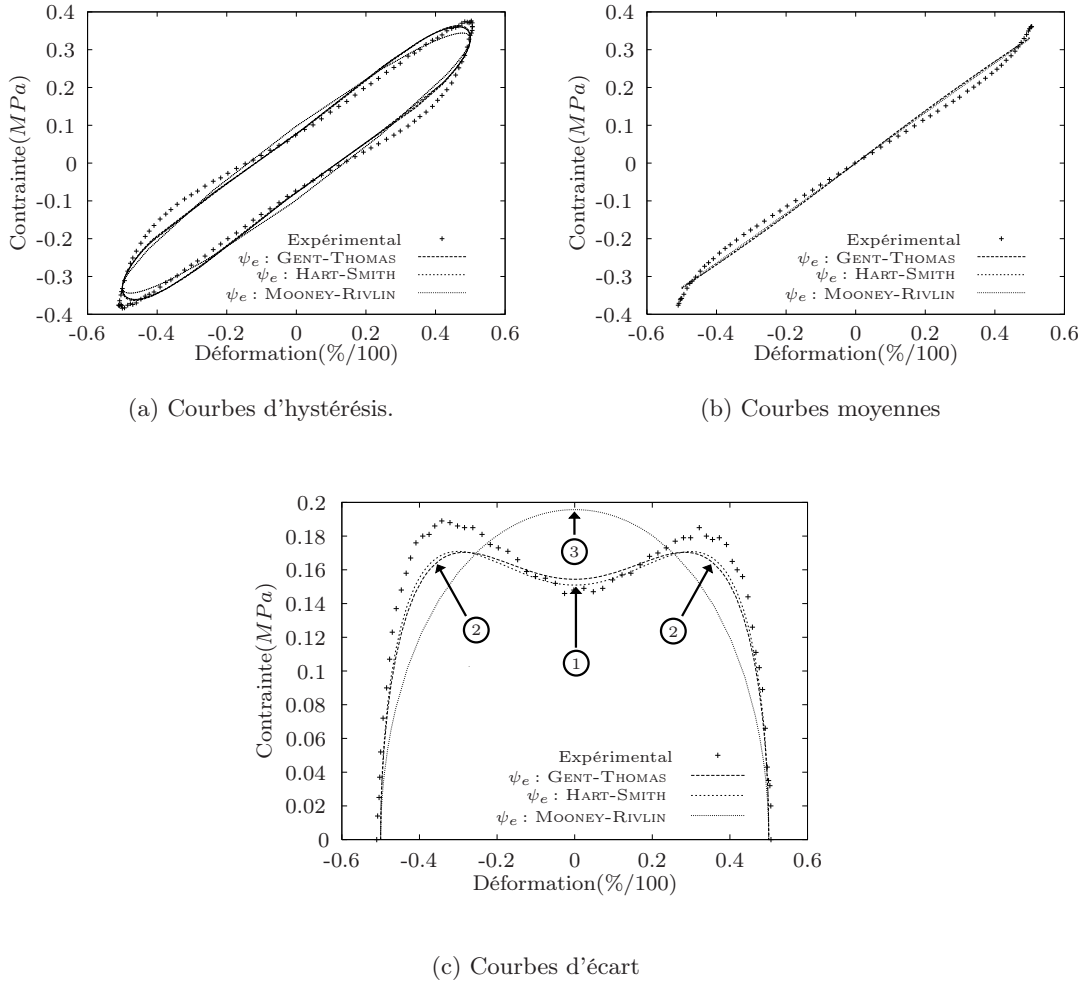


FIGURE II.15 – Comparaison des formulations basées sur le modèle de POYNTING-THOMSON et faisant intervenir les formes de potentiel de GENT-THOMAS de sc Hart-Smith ou de MOONEY-RIVLIN.

D'après la figure FIG. II.15(c), il semble évident que le modèle de MOONEY-RIVLIN soit à exclure. Sa forme, trop linéaire, ne rend pas possible la modélisation de l'étranglement de l'hystérésis ③. L'apport de la forme de POYNTING-THOMSON par rapport au modèle de GENT-THOMAS est surtout visible sur les courbes d'écart FIG. II.15(c). Une minimisation globale de la distance entre la courbe numérique donnée par le modèle employant la forme de HART-SMITH,

	HART-SMITH			NÉOHOOKE	$\varphi$
	$c_1$ (MPa)	$c_2$ (Mpa)	$c_3$	$a_1$ (Mpa)	$\nu$ (MPa.s)
identification	1.65982	-3.44561	0.23147	0.022071	0.075062

TABLEAU II.4 – Résultats d'identification - modèle de POYNTING-THOMSON incluant une énergie libre principale de type HART-SMITH

	MOONEY-RIVLIN		NÉOHOOKE	$\varphi$
	$c_1$ (MPa)	$c_2$ (MPa)	$a_1$ (MPa)	$\nu$ (MPa.s)
identification	0.18853	0.19072	0.015537	0.06886

TABLEAU II.5 – Résultats d'identification - modèle de POYNTING-THOMSON incluant une énergie libre principale de type MOONEY-RIVLIN

est observée. Ce phénomène est d'autant plus accentué sur les maxima ② et le minimum ①, ce qui témoigne d'un rétrécissement de l'hystérésis plus réaliste.

Cependant, la dispersion des résultats expérimentaux (cf. remarque II.7) ne justifie pas nécessairement une telle précision, d'autant que le coût d'identification du modèle de HART-SMITH est nettement supérieur à celui de GENT-THOMAS. Le choix de ce dernier semble donc être un bon compromis entre validité des résultats numériques et coût d'identification.

## II.3 Mise en oeuvre numérique

### II.3.1 Formulation variationnelle

On rappelle le problème à traiter :

- comportement du matériau (modèle de POYNTING-THOMSON)

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{tot} = \psi_v(\bar{\bar{C}}_v) + \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) = a_1 (I_1^v - 3) + c_1 (I_1^e - 3) + c_2 \ln\left(\frac{I_1^e}{3}\right) \\ \varphi = \varphi(\dot{\bar{\bar{C}}}_v) = \frac{\nu}{2} \dot{\bar{\bar{C}}}_v : \dot{\bar{\bar{C}}}_v \\ \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{\bar{C}}} + \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}} + p \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = -\rho_0 \left( \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{\bar{C}}_v} \right) \\ \det \bar{\bar{F}} = 1 \\ \det \bar{\bar{F}}_v = 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.73})$$

- équation d'équilibre

$$\operatorname{div}_X \bar{\bar{\pi}} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{II.74})$$

- conditions aux limites

$$\bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{N} = \vec{T} \quad \text{sur } \partial\Omega_F. \quad (\text{II.75})$$

Le problème d'équilibre est équivalent à celui présenté (II.17).

#### HYPOTHÈSE II.2

On considère le cas d'un matériau "fortement" quasi-incompressible, si bien que  $J$  est très proche de 1.

Cette hypothèse permet de justifier :

- les formes de  $G$  et  $G^*$  définies § II.1.2.b :

$$G(J) = \frac{1}{2}(J - 1)^2 \Leftrightarrow G^*(p) = \frac{\varepsilon}{2} p^2, \quad (\text{II.76})$$

- et d'après JAZZAR [1993], les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = I_1 \\ \bar{I}_2 = I_2. \end{cases} \quad (\text{II.77})$$

La transformation visqueuse est considérée comme totalement incompressible, il n'est donc nul besoin d'introduire un champ annexe homologue à  $p$ . La condition  $\det \bar{\bar{C}}_v$  permettra l'élimination du réel  $q$  introduit par l'incompressibilité visqueuse.

Le problème (II.17) peut alors être découpé en deux parties dépendant respectivement des variations de déplacement et de pression :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_\varepsilon^u = \int_\Omega \left( \rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{F}} + p \frac{\partial J}{\partial \bar{F}} \right) : \delta \bar{F}(\delta \bar{u}) dV - \int_\Omega \bar{f} \cdot \delta \bar{u} dV - \int_{\partial \Omega_F} \bar{T} \cdot \delta \bar{u} dS = 0 \quad \forall \delta \bar{u} \in \mathcal{V} \\ \mathcal{W}_\varepsilon^p = \int_\Omega (J - 1 - \varepsilon p) \delta p dV = 0 \quad \forall \delta p \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (\text{II.78})$$

auxquelles on rajoute les équations (II.73).

### II.3.2 Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis

La résolution du système intégrale (II.78), par la méthode des éléments finis, passe par une discrétisation des formes intégrales à l'aide d'une somme des formes élémentaires  $\mathcal{W}_\varepsilon^{ue}$  et  $\mathcal{W}_\varepsilon^{pe}$  fonctions de  $\bar{u}_e, p_e$  respectivement le champ de déplacement élémentaire et le champ de pression élémentaire et de  $\delta \bar{u}_e, \delta p_e$  leurs homologues virtuels :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_\varepsilon^u(\bar{u}, p, \delta \bar{u}, \delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \mathcal{W}_\varepsilon^{ue}(\bar{u}_e, p_e, \delta \bar{u}_e, \delta p_e), \\ \mathcal{W}_\varepsilon^p(\bar{u}, p, \delta \bar{u}, \delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \mathcal{W}_\varepsilon^{pe}(\bar{u}_e, p_e, \delta \bar{u}_e, \delta p_e). \end{cases} \quad (\text{II.79})$$

Puis, en introduisant (II.58c) et en adoptant une notation vectorielle pour les différentes grandeurs tensorielles, on explicite les formes intégrales élémentaires :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_\varepsilon^{ue}(\bar{u}_e, p_e, \delta \bar{u}_e, \delta p_e) = \int_{\Omega_e} \langle \delta \bar{F} \rangle \langle \bar{\pi} \rangle dV - \int_{\Omega_e} \langle \delta \bar{u}_e \rangle \langle \bar{f} \rangle dV - \int_{\Omega_e^F} \langle \delta \bar{u}_e \rangle \langle \bar{T} \rangle dS \\ \mathcal{W}_\varepsilon^{pe}(\bar{u}_e, p_e, \delta \bar{u}_e, \delta p_e) = \int_{\Omega_e} \delta p^e (J - 1 - \varepsilon p) dV \end{cases} \quad (\text{II.80})$$

On introduit alors les fonctions classiques d'interpolation des éléments finis [ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 1991] :

- en notant  $[N_u^e]$ , les fonctions d'interpolation en déplacement relatives à l'élément  $e$  que nous supposons isoparamétrique<sup>(5)</sup> et  $\{U^e\}$  les déplacements nodaux, on a :

$$\bar{u}_e = [N_u^e] \{U^e\}. \quad (\text{II.81})$$

- $[B]$  désigne la matrice de déformation construite à partir des dérivées des fonctions d'interpolation. Cette grandeur permet l'évaluation du gradient de la transformation sur un élément :

$$\{\bar{F}\} = [B] \{U^e\}. \quad (\text{II.82})$$

(5). Les noeuds géométriques et d'interpolation sont confondus



On obtient alors au niveau global :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_\varepsilon^u(\vec{u} + \Delta\vec{u}, p + \Delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \langle \delta U^e \rangle \left( [k_t] \{ \Delta U^e \} + [g] \{ \Delta P^e \} + \{ r \} - \{ f_{ext} \} \right) = 0 \\ \mathcal{W}_\varepsilon^p(\vec{u} + \Delta\vec{u}, p + \Delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \langle \delta P^e \rangle \left( [g]^T \{ \Delta U^e \} - \varepsilon [m_p] \{ \Delta P^e \} + \{ i \} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.86})$$

Les grandeurs élémentaires<sup>(6)</sup> sont :

– la matrice tangente élémentaire :

$$[k_t] = \int_{\Omega_e} \{ B \}^T \frac{\partial \{ \bar{\pi} \}}{\partial \{ \vec{u} \}} dV; \quad (\text{II.87})$$

– la matrice d'incompressibilité :

$$[g] = \int_{\Omega_e} \{ B \}^T \frac{\partial J}{\partial \{ \bar{F} \}} \langle N_p^e \rangle dV; \quad (\text{II.88})$$

– le terme de perturbation :

$$\varepsilon [m_p] = \int_{\Omega_e} \varepsilon \{ N_p^e \} \langle N_p^e \rangle dV; \quad (\text{II.89})$$

– le résidu élémentaire :

$$\{ r \} = \int_{\Omega_e} \{ B \}^T \{ \bar{\pi} \} dV; \quad (\text{II.90})$$

– les sollicitations élémentaires :

$$\{ f_{ext} \} = \int_{\Omega_e} [N_u^e] \{ \vec{f} \} - \int_{\Omega_e^F} [N_u^e] \{ \vec{T} \} dS; \quad (\text{II.91})$$

– le résidu d'incompressibilité

$$\{ i \} = \int_{\Omega_e} \{ N_p^e \} (J - 1 - \varepsilon p) dV. \quad (\text{II.92})$$

Enfin les éléments finis mis en oeuvre sont discontinus en pression<sup>(7)</sup>, si bien que l'annulation de (II.80b) passe par l'annulation de chacun des termes élémentaires, *i.e.*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varepsilon^{p_e}(\vec{u}_e + \Delta\vec{u}_e, p_e + \Delta p_e) &= 0 \forall \{ \delta P_e \} \\ \Leftrightarrow \{ \Delta P_e \} &= \frac{1}{\varepsilon} [m_p]^{-1} ([g]^T \{ \Delta U_e \} + \{ i \}) \end{aligned} \quad (\text{II.93})$$

(6). Dépendant exclusivement des champs de déplacement et de pression aux points d'intégration

(7). Les motivations de ce choix sont données § II.3.5 qui concerne le type d'élément fini mis en oeuvre.

Cette opération de **condensation statique** de la pression permet ensuite d'exprimer (II.80a) sous la forme :

$$\mathcal{W}_\varepsilon^u(\vec{u} + \Delta\vec{u}, p + \Delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \langle \delta U^e \rangle \left( \left( [k_t] + \frac{1}{\varepsilon} [g] [m_p]^{-1} [g]^T \right) \{ \Delta U^e \} + \frac{1}{\varepsilon} [g] [m_p]^{-1} + \frac{1}{\varepsilon} [g] [m_p]^{-1} + \{ r \} - \{ f_{ext} \} \right) = 0, \quad \forall \langle \delta U \rangle = \frac{Nel}{A} \langle \delta U_e \rangle, \quad (\text{II.94})$$

avec  $\frac{Nel}{A}$  l'opérateur classique d'assemblage.

Soit au niveau global :

$$\begin{aligned} \langle \delta U \rangle ([K_t] \{ \Delta U \} - \{ R \}) &= 0 \quad \forall \langle \delta U \rangle \\ \Leftrightarrow [K_t] \{ \Delta U \} &= \{ R \}, \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

où

$$\begin{cases} [K_t] = \frac{Nel}{A} \left( [k_t] + \frac{1}{\varepsilon} [g] [m_p]^{-1} [g]^T \right), \\ \{ R \} = \frac{Nel}{A} \left( \{ f_{ext} \} - \{ r \} - [g] [m_p]^{-1} \{ i \} \right). \end{cases} \quad (\text{II.96})$$

### II.3.4 Intégration locale

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont en grandes partie issus des travaux de thèse de C. GABRIELI [1995].

#### HYPOTHÈSE II.3

Les problèmes modélisés par la suite suivront une cinématique plane ( déformations planes ou contraintes planes). La variable interne peut être considérée comme suivant cette cinématique, *i.e.*

$$\bar{C}_v \quad \setminus \quad C_{v_{13}} = C_{v_{23}} = C_{v_{31}} = C_{v_{32}} = 0 \quad (\text{II.97})$$

#### II.3.4.a Intégration de la loi complémentaire et détermination de la variable interne

La cinématique plane, l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . II.3 ainsi que l'incompressibilité de la transformation intermédiaire permettent d'exprimer la composante  $C_{v_{33}}$  et  $\dot{C}_{v_{33}}$  en fonction des autres composantes non nulles de  $\bar{C}_v$  et de leurs dérivées :

$$C_{v_{33}} = \frac{1}{C_{v_{11}} C_{v_{22}} - C_{v_{12}}^2}, \quad (\text{II.98a})$$

$$\dot{C}_{v_{33}} = - \frac{\dot{C}_{v_{11}} C_{v_{22}} + C_{v_{11}} \dot{C}_{v_{22}} - 2 \dot{C}_{v_{12}} C_{v_{12}}}{(C_{v_{11}} C_{v_{22}} - C_{v_{12}}^2)^2} \quad (\text{II.98b})$$

La forme de l'équation complémentaire (II.58d) :

$$\frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{C}}_v} + q \bar{C}_v - 1 = -\rho_0 \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{C}_v},$$

permet d'isoler le réel  $q$  résultant la condition d'incompressibilité intermédiaire :

$$q = - \left( \dot{C}_{v33} + \rho_0 \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial C_{v33}} \right) \quad (\text{II.99})$$

En utilisant les résultats (II.98) et (II.99), l'équation complémentaire (II.58d) peut être mise sous la forme<sup>(8)</sup> :

$$\boxed{\dot{\bar{C}}_v(t) = \mathcal{G} \left( t, \bar{C}_v(t) \right)} \quad (\text{II.100})$$

Cette équation est ensuite résolue en chaque point d'intégration de l'élément à l'aide du schéma classique d'EULER implicite.

### II.3.4.b Calcul de la matrice tangente élémentaire

Comme le montre l'équation (II.87), le calcul de la matrice tangente élémentaire passe par la détermination en chaque point d'intégration de la grandeur matricielle  $\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \bar{u}}$ . Or il est possible d'écrire ce terme sous la forme :

$$\frac{\partial \{\bar{\pi}\}}{\partial \{\bar{u}\}} = \underbrace{\frac{\partial \{\bar{\pi}\}}{\partial \{\bar{F}\}}}_{\textcircled{1}} [B] + \underbrace{\frac{\partial \{\bar{\pi}\}}{\partial \{\bar{C}_v\}} \frac{\partial \{\bar{C}_v\}}{\partial \{\bar{F}\}}}_{\textcircled{2} \textcircled{3}} [B]. \quad (\text{II.101})$$

Les termes  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$  de l'équation (II.101) sont calculés analytiquement. Quant au terme  $\textcircled{3}$ , il est déterminé par une résolution grâce au schéma implicite de CRANK-NICHOLSON de l'équation :

$$\frac{\partial \{\dot{\bar{C}}_v\}}{\partial \{\bar{F}\}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \{\bar{F}\}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \{\bar{C}_v\}} \frac{\partial \{\bar{C}_v\}}{\partial \{\bar{F}\}}. \quad (\text{II.102})$$

cette dernière est obtenue par la différentiation de l'équation (II.100).

#### REMARQUE II.10

La résolution de l'équation (II.102) par la méthode implicite de CRANK-NICHOLSON nécessite la connaissance de  $\{\bar{C}_v\}$  à chaque itération de calcul. Par conséquent le pas de temps choisi pour cette détermination doit être le même que celui choisi pour la résolution par le schéma itératif d'EULER implicite de l'équation (II.100). □

(8). Ceci est réalisé grâce au logiciel de calcul formel Mathematica<sup>©</sup>

## II.3.5 Choix des éléments finis

### II.3.5.a Rappels sur les instabilités numériques des éléments mixtes

La formulation proposée dans les paragraphes § II.3.3-II.3.2 nécessite le développement d'éléments finis mixtes [MALKUS et HUGHES, 1978 ; MALKUS, 1980]. La technique de condensation statique des degrés de liberté en pression exposée § II.3.3 est rendue possible par l'association de fonctions de forme discontinues [NAGTEGALL *et al.*, 1974]. Bien que pratique pour des raisons évidentes de taille de problème, ces discontinuités introduisent de nombreux problèmes d'instabilités numériques tels que des effets damier ou des modes sablier<sup>(9)</sup> [ODEN, 1978 ; ODEN et KIKUCHI, 1982]

Ces instabilités qui sont d'autant plus accentuées que le problème est proche de l'incompressibilité ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) ou que le maillage est irrégulier, sont attribuées par Oden, Kikuchi, et Song [1982] au non respect du critère discret LBB (LADYSZHENSKAYA, BABUŠKA, BREZZI). L'application numérique de ce critère a grandement été étudié en élasticité petites perturbations par CHAPELLE et BATHE [1993] et en élasticité grandes déformations par LE TALLEC [1981]. Des applications, autres que la mécanique des solides, sont données par BATHE [2001].

La condition LBB n'est qu'une condition suffisante à la non-apparition d'instabilité numérique. De nombreux auteurs ont mis en exergue le cas d'éléments finis mixtes ne vérifiant pas la condition LBB mais donnant tout de même des résultats acceptables [CRISFIELD et NORRIS, 2000]. Ainsi, sont apparus de nombreux "patch-tests" visant à valider un élément, ces tests sont souvent moins exigeants d'un point vue numérique que la condition LBB. On citera en particulier les travaux de ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997] ; BABUŠKA et NARASIMHAN [1997].

### II.3.5.b Choix et test des éléments

Quatre éléments sont mis en oeuvre :

	interpolation		LBB	Patch-test <sup>a</sup>
	déplacement	pression		
Q8-P1	quadratique (8 noeuds)	uniforme (1 noeud)	oui	oui
Q8-P4	quadratique (8 noeuds)	bilinéaire	non	non
T6-P1	quadratique (6 noeuds)	uniforme (1 noeud)	non	oui
T6-P3	quadratique (6 noeuds)	bilinéaire	non	non

TABLEAU II.6 – *Éléments finis mis en oeuvre.*

<sup>a</sup> Au sens de ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997]

Pour chacun des éléments présentés dans le tableau TAB. II.6, on réalise le test FIG. II.22, sous (9). Modes de déformation à énergie nulle.

l'hypothèse des déformations planes et pour un déplacement de 7 mm, *i.e.* 70% de déformation globale.

Les caractéristiques des problèmes à résoudre sont données TAB. II.7.

Ce test nous permet de vérifier d'une part la qualité de la formulation en grandes déformations et d'autre part la rigueur de la prise en compte de la quasi-incompressibilité. D'autres tests sont disponibles, mais ne sont adaptés qu'aux formulations en petites perturbations [CRISFIELD et NORRIS, 2000].

Nous retenons les deux critères de vérification suivants :

- la régularité de la pression dans le solide ;
- la conservation de l'énergie qui s'écrit sous l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . I.2 et dans le cadre isotherme défini par  $\mathcal{H}$ . II.1 comme suit :

$$\left( \bar{\pi} - p\bar{F}^{-T} \right) : \dot{\bar{F}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}} : \dot{\bar{C}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v} : \dot{\bar{C}}_v = 0. \quad (\text{II.103})$$

	Degrés de liberté du problème	
	déplacement	pression
Q8-P1	550	64
Q8-P4	550	256
T6-P1	578	128
T6-P3	578	384

TABLEAU II.7 – Taille du problème suivant le type d'élément adopté.

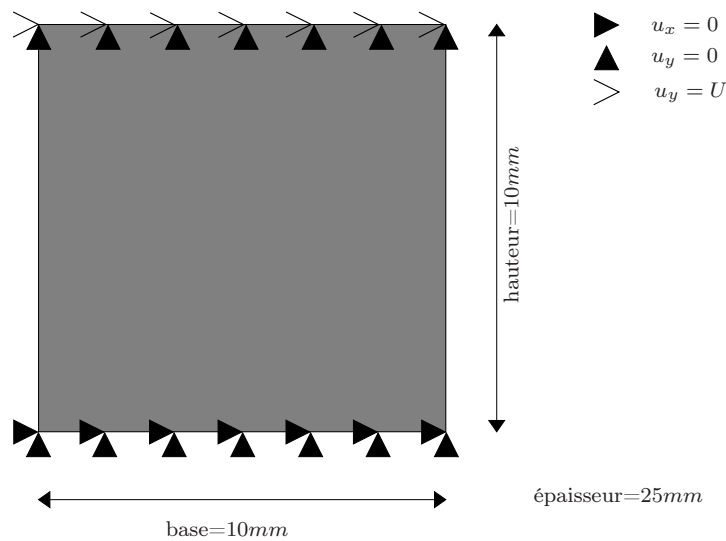


FIGURE II.16 – Patch test.

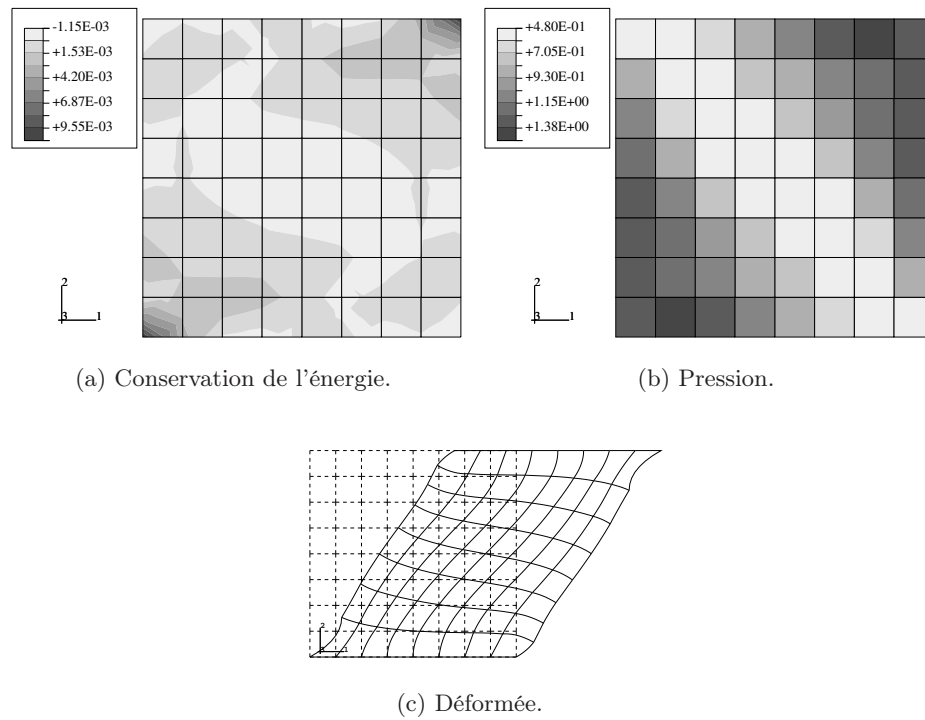


FIGURE II.17 – Test de validité de l'élément Q8P1.

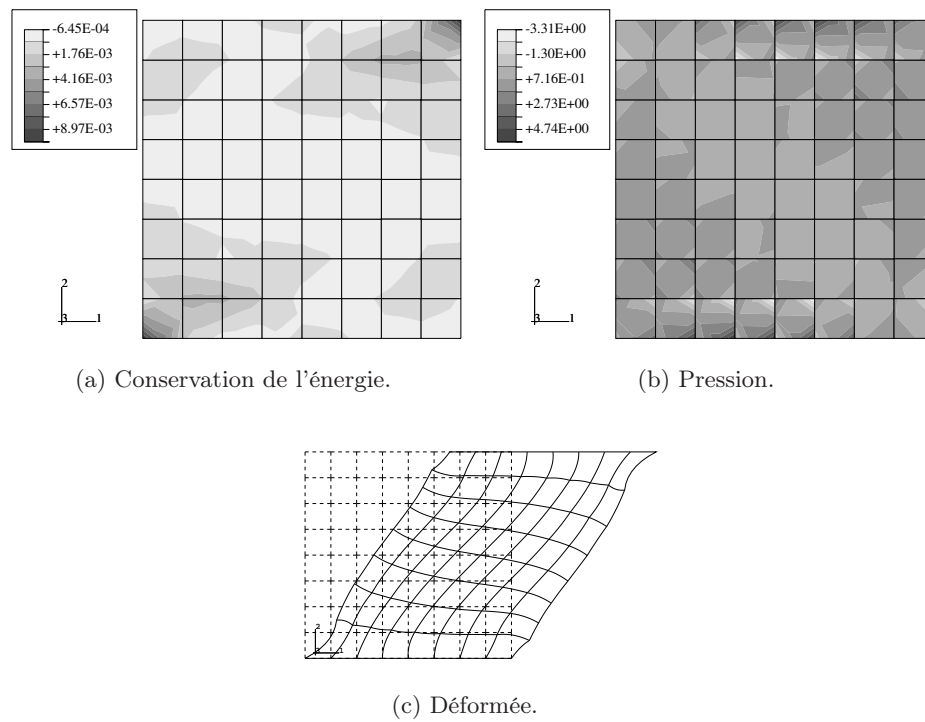
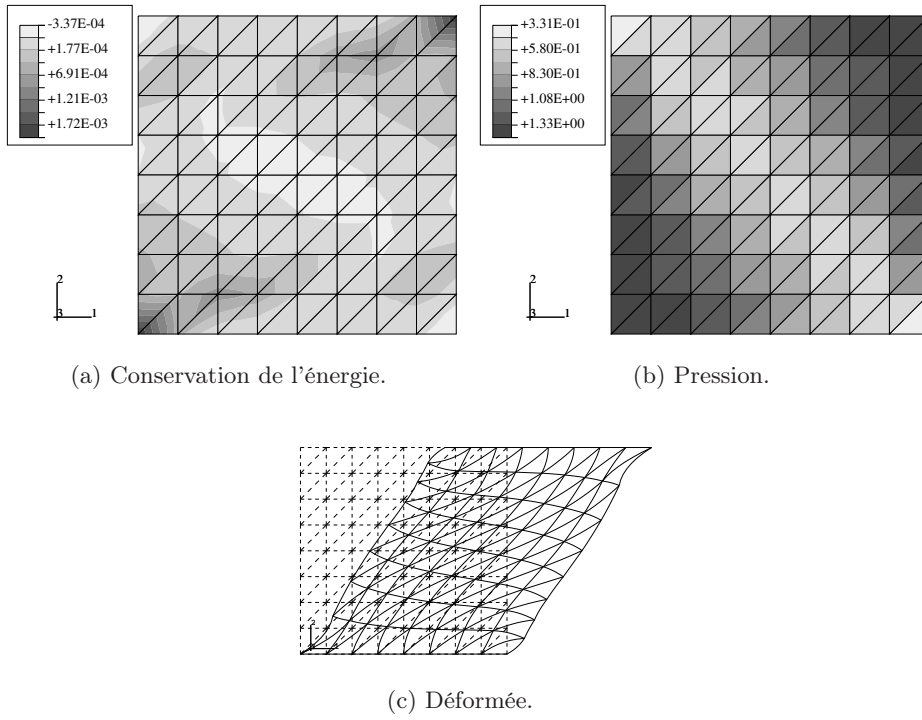
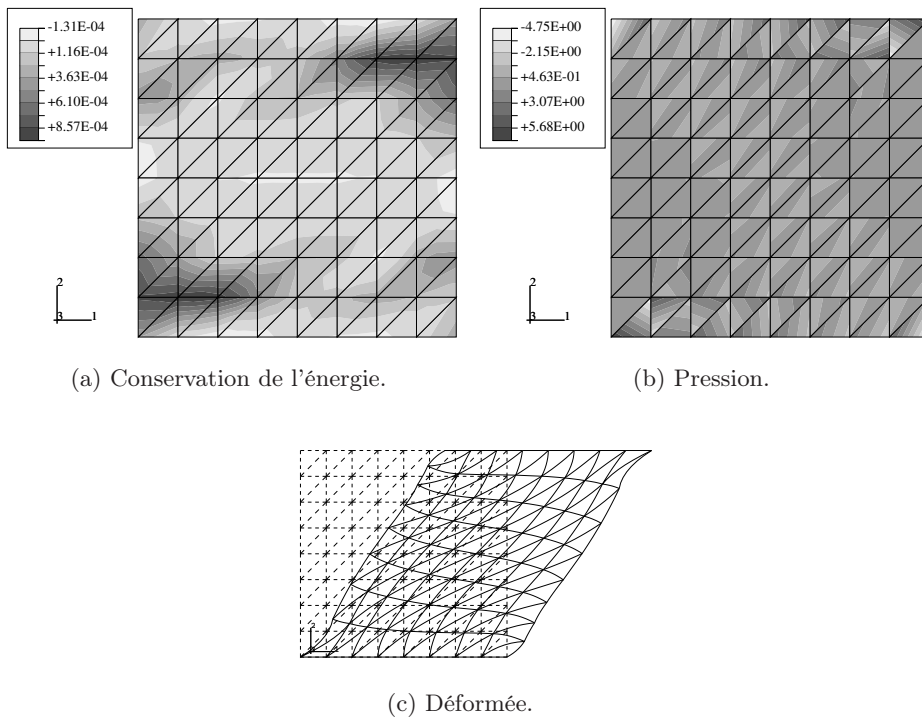


FIGURE II.18 – Test de validité de l'élément Q8P4.

FIGURE II.19 – Test de validité de l'élément *T6P1*.FIGURE II.20 – Test de validité de l'élément *T6P3*.

Du point de vue de la pression, les résultats présentés FIG. II.17(b), FIG. II.18(b), FIG. II.19(b) et FIG. II.20(b) sont tout à fait en accord avec la théorie. A savoir les éléments ne vérifiant ni la condition LBB, ni le patch-test au sens de ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997] (Q8-P4, T6-P3), présentent d'importantes discontinuités de pression, ce qui témoigne de la forte instabilité numériques de ces éléments. Les discrétisations spatiales obtenues à partir des éléments T6-P1 et Q8-P1 présentent une répartition de pression régulières et sont pratiquement équivalentes en termes de répartition et d'extrema.

Sur le plan énergétique, la discrétisation utilisant les éléments triangulaires vérifie jusqu'à 10 fois mieux la conservation de l'énergie (II.103). Cependant, les éléments triangulaires peuvent conduire à des discrétisations anisotropes qui peuvent induire des écarts dans les résultats. En effet, ces éléments laissent un grand nombre de choix quant au motif du maillage (FIG. II.21). Il est souhaitable de choisir des motifs isotropes tels que les motifs "croix" ou "drapeau anglais".

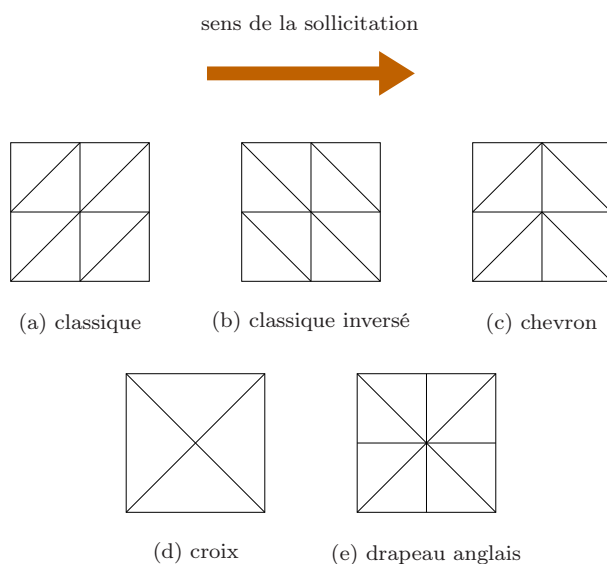


FIGURE II.21 – *Différents motifs de maillage utilisant des éléments triangulaires.*

Ces essais numériques, nous conduisent à éliminer les éléments Q8-P4 et T6-P3 des discrétisations éléments finis à venir. Seuls les éléments à déplacement quadratique et à pression constante seront utilisés, en ayant une attention particulière sur le motif utilisé dans le cas d'un découpage spatial faisant intervenir des éléments triangulaires de type T6-P1.

### II.3.5.c Choix de $\varepsilon$

Les tests précédents faisant principalement intervenir du cisaillement, l'incompressibilité du matériau n'a que peu d'influence. Cependant, si l'on veut mettre en oeuvre des essais faisant intervenir cette dernière (compression, traction ...), il nous faut déterminer le coefficient  $\varepsilon$  permettant de traiter l'hypothèse de quasi-incompressibilité global du matériau. Pour ce faire on met en

oeuvre, l'essai décrit FIG. II.22(a) pour le modèle POYNTING-THOMSON, les coefficients du modèle étant donnés TAB. II.3. On fait varier  $\varepsilon$  de 0.1 à  $0.0001 \text{ MPa}^{-1}$ . La réaction (FIG. II.22(b))

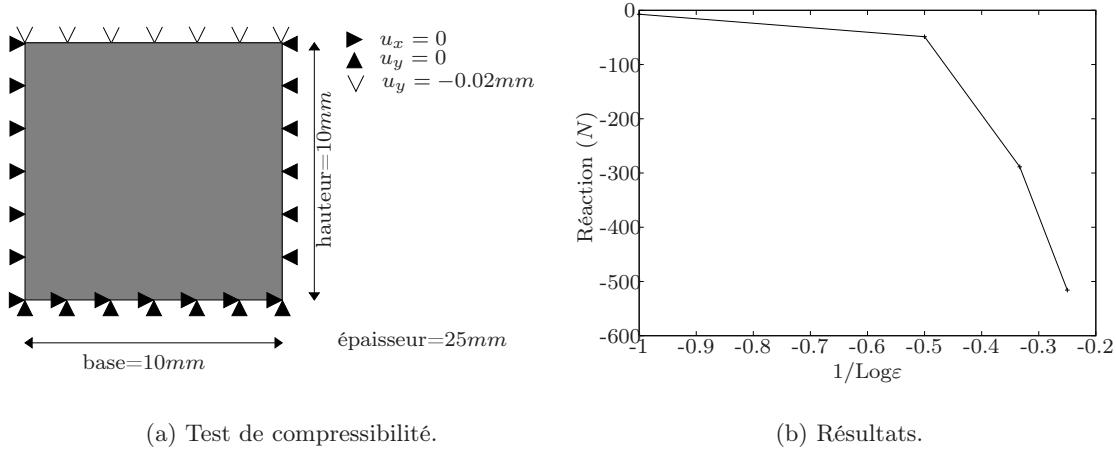


FIGURE II.22 – Description et résultat du test sur le coefficient de compressibilité.

semble tendre, pour  $1/\text{Log}\varepsilon$  tendant vers 0 (*i.e.* pour des valeurs de  $\varepsilon$  faibles), vers une asymptote verticale qui peut être assimilée à la limite de compressibilité. Pour des valeurs de  $\varepsilon$  supérieures à  $0.001 \text{ MPa}^{-1}$  le problème ne peut être considéré comme quasi-incompressible. Les calculs présentés par la suite sont effectués avec :

$$\varepsilon = 0.0005 \text{ MPa}^{-1}$$

## II.3.6 Validation

### II.3.6.a Présentation du problème numérique et choix des discrétisations

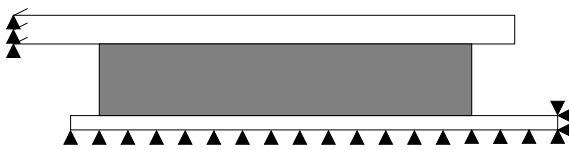


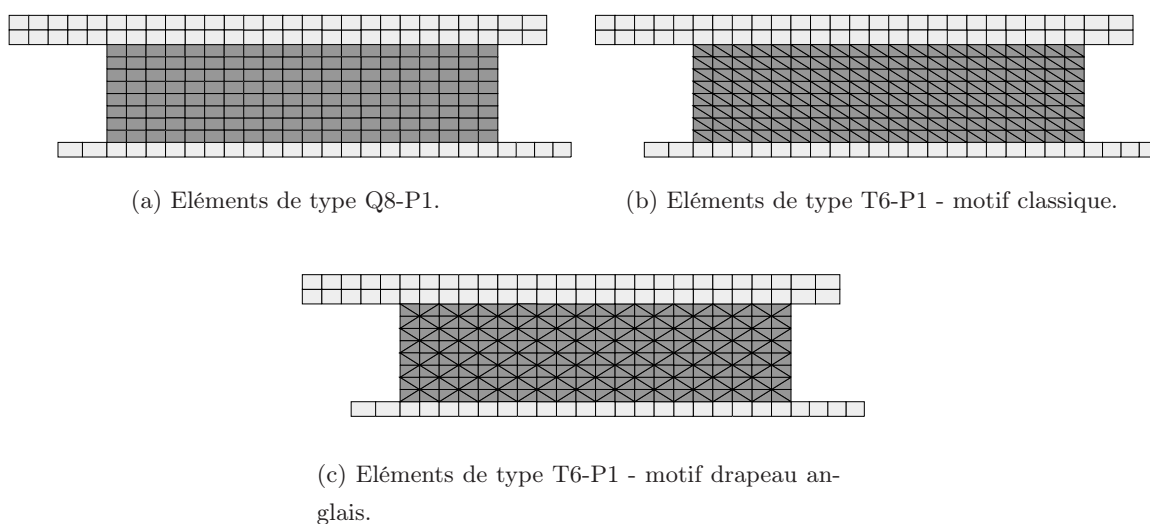
FIGURE II.23 – Conditions aux limites du problème

L'objet est ici de confronter notre modèle au résultats expérimentaux exposés FIG. II.6.

On choisit de ne modéliser qu'une demi éprouvette pour des raisons de symétrie, on fait l'hypothèse des déformations planes. Le modèle de POYNTING-THOMSON est affecté des énergies libres de GENT-THOMAS et NÉO-HOOKE respectivement pour les potentiels  $\psi_e$  et  $\psi_v$ . La forme du pseudo-potential de dissipation est donnée (II.65). Les caractéristiques de l'élastomère sont alors données TAB. II.3 ; les caractéristiques d'un acier classique est adoptés pour les mors, à savoir un module d'YOUNG de  $210000 \text{ MPa}$  et un coefficient de POISSON de 0.3.

Sur le plan de la discrétisation spatiale, trois maillages sont adoptés. Les caractéristiques de ces dernier sont donnés TAB. II.8

	type d'élément	Nombre de degrés de liberté		motifs
		déplacement	pression	
Maillage ①	Q8-P1	809	240	
Maillage ②	T6-P1	969	400	classique
Maillage ③	T6-P1	969	400	drapeaux anglais

TABLEAU II.8 – *Caractéristiques des différentes discrétisations spatiales d'une demi éprouvette.*FIGURE II.24 – *Discrétisations spatiales d'une demi éprouvette.*

### II.3.6.b Comparaisons des résultats

Les résultats obtenus sur les trois maillages présentés FIG. II.24 sont présentés FIG. II.25 en terme de courbes contrainte/déformation.

Il est possible de constater, dans un premier temps, que les trois discrétisations spatiales donnent des résultats pratiquement identiques. On constate qu'il faut au minimum trois cycles de sollicitations pour obtenir une stabilisation de la réponse numérique. Ce phénomène est souvent constaté expérimentalement et peut être associé :

- à de l'effet MULINS (cf. § II.1.4 au cours du premier cycle si le matériau est vierge),
- à un endommagement continu [MIEHE, 1995]
- à un arrangement des chaînes moléculaires pouvant créer une viscosité.

Pour notre modèle numérique, seul le phénomène de viscosité – puis qu’il est le seul pris en compte dans le modèle présenté – peut expliquer cette stabilisation retardée.

Les résultats présentés, bien que relativement proches de la courbe expérimentale, ne correspondent cependant pas à l’allure générale des courbes obtenues au court de l’identification (cf FIG. II.15(a) ou FIG. II.14). Deux explications peuvent être données. Dans un premier temps, il semble que l’hypothèse de cisaillement uniforme des couches d’élastomère qui est faite lors de l’identification pour ramener le problème a un problème monodimensionnel, ne soit pas vérifiée. En effet, on constate FIG. II.26(a) et FIG. II.26(b) que les composantes  $E_{11}$  et  $E_{22}$  du tenseur de GREEN-LAGRANGE ne sont pas uniformes dans l’élastomère. De plus, il est possible de remarquer FIG. II.26(c) que l’armature métallique supérieure subit, en plus du déplacement imposé suivant  $\vec{x}$ , un déplacement suivant  $\vec{y}$  pouvant amener une compression supplémentaire dans le matériau élastomérique.

Par conséquent l’identification sur un modèle monodimensionnel, bien que relativement bonne, devra être appréhendée avec prudence et nécessitera une vérification sur un calcul élément finis.

Il est en outre possible de vérifier sur le présent calcul l’influence du motif de maillage sur les

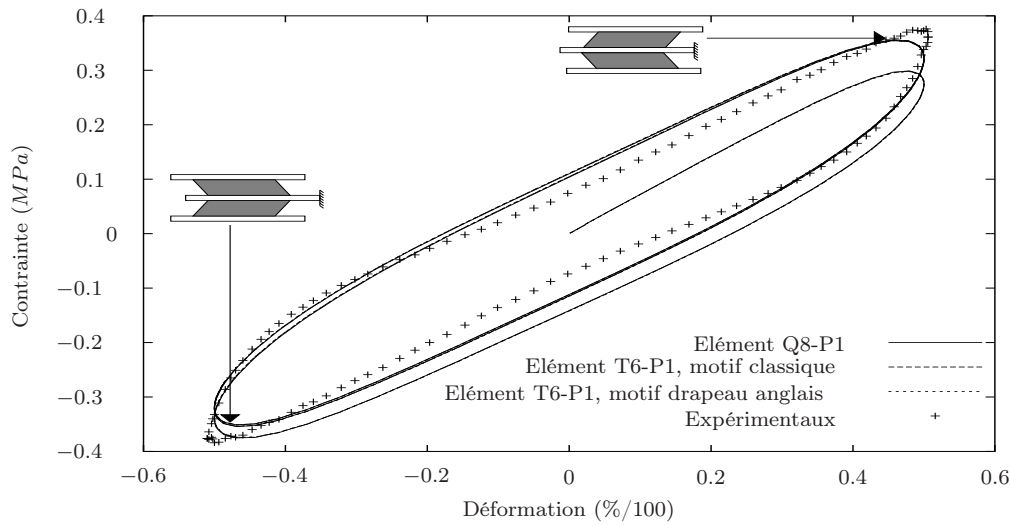


FIGURE II.25 – Comparaison des résultats expérimentaux (amplitude cisaillement 50% - fréquence 3.1 Hz) et des résultats éléments finis.

résultats. Sur la figure FIG. II.27 est reporté en abscisse le temps de l’essai numérique (trois cycles) et en ordonnée la grandeur :

$$\left| \frac{\pi_{xy}^{ang} - \pi_{xy}^{cla}}{(\pi_{xy}^{ang} + \pi_{xy}^{cla})/2} \right|, \quad (\text{II.104})$$

où  $\pi_{xy}^{ang}$  et  $\pi_{xy}^{cla}$  sont les contraintes obtenues pour des discrétisations utilisant des éléments T6-P1 et ce, respectivement, pour des motifs en drapeau anglais ou classique.

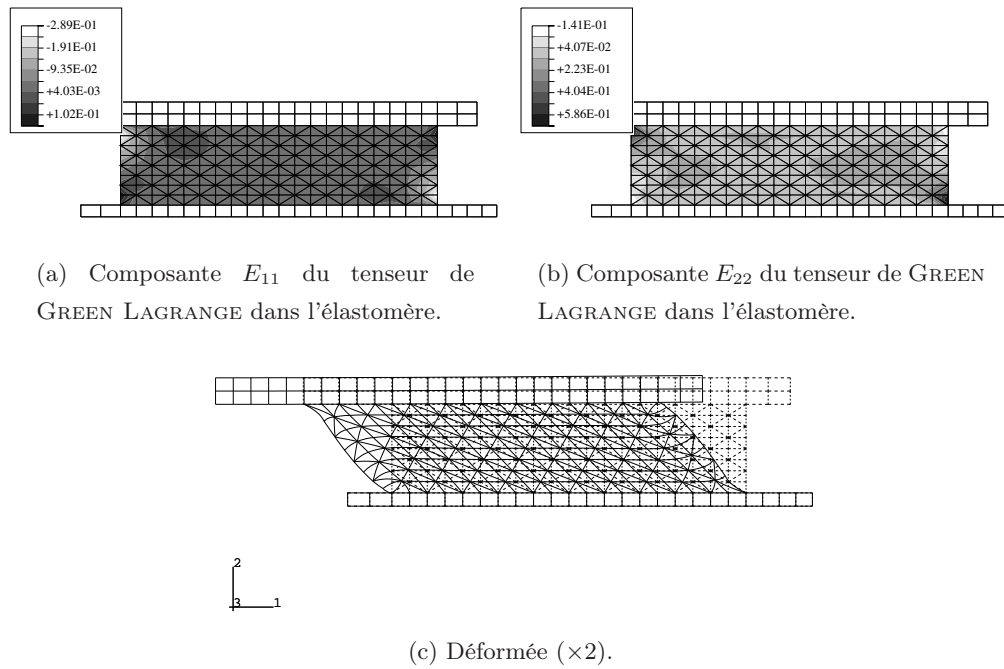


FIGURE II.26 – Résultats d'un calcul éléments finis sur un maillage utilisant des éléments T6-P1 et un motif en drapeau anglais, amplitude du cisaillement 50% (troisième cycle).

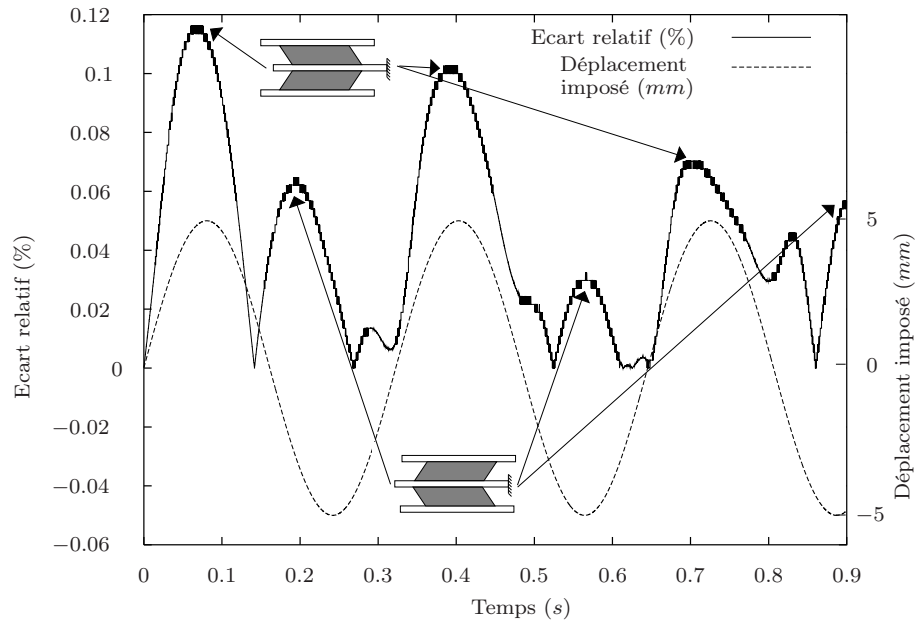


FIGURE II.27 – Comparaison des réponses en contrainte obtenues à partir des maillages faisant intervenir des éléments T6-P1, organisés en motifs classiques ou drapeaux anglais.

Les maxima des écarts sont rencontrés aux extrema de sollicitation et sont plus importants pour les extrema négatifs de déplacement. Ceci confirme l'influence de l'anisotropie du maillage faisant intervenir un motif classique. On constate cependant que cet écart relatif est relativement peu important et que, au moins sur ce type de modélisation, l'une ou l'autre des discrétisation peut être utilisée.

## II.4 Conclusion

Suite à une étude bibliographique décrivant les principaux phénomènes qui caractérisent le comportement mécanique des élastomères, à savoir hyperélasticité, viscoélasticité ou endommagement, une formulation thermodynamique est choisie et présentée. Celle-ci se plaçant dans le cadre de l'état local, une variable interne est introduite par le biais d'un état intermédiaire.

De manière plus concrète, on présente les équations qui régissent cette formulation dans le cadre de la généralisation aux grandes déformations des modèles rhéologiques de MAXWELL, ZENER et POYNTING-THOMSON.

Un algorithme d'identification des paramètres des modèles est mis en exergue. Ce dernier est basé sur une minimisation de la distance au sens des moindres carrés entre des résultats expérimentaux et semi-analytiques obtenus sous une hypothèse de cisaillement homogène et par le biais d'un logiciel de calcul formel. Ceci nous permet de privilégier le modèle de POYNTING-THOMSON. On affecte à ce dernier un pseudo-potentiel quadratique fonction de la dérivée temporelle de la variable interne  $\bar{C}_v$ . Le choix de l'énergie libre fait l'objet d'une étude permettant de mettre en avant une forme de type hyperélastique de GENT-THOMAS pour l'énergie libre principale du modèle. Ce choix est principalement motivé par un rapport qualité des résultats, coût d'identification.

Une fois le modèle fixé, il est possible de réaliser son implantation dans le code éléments finis S.I.C. On réalise ce passage aux éléments finis en se basant sur une formulation variationnelle obtenue dans le cadre des matériaux quasi-incompressibles. La formulation éléments finis ainsi obtenue fait alors intervenir en plus du champ de déplacement, un champ additionnel de pression. Ce dernier est choisi discontinu d'un élément à un autre. Ces formulations permettent entre autre d'éviter les phénomènes de "locking" mais peuvent être numériquement instables. Afin d'éviter ces problèmes, seuls des éléments vérifiant le critère LBB [CHAPELLE et BATHE, 1993] ou un "patch test" proposé par ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997] seront utilisés. Un test supplémentaires est proposé en vue de vérifier la stabilité des éléments choisis dans le cadre des grandes déformations.

Enfin, le modèle éléments finis est confronté aux essais expérimentaux. Trois différentes discrétisations spatiales sont adoptées. Il ressort de ces essais numériques que notre modèle est peu ou pas sensible au motif de discrétisation et au type d'éléments – dans la mesure où ils vérifient le critère LBB [CHAPELLE et BATHE, 1993 ; LE TALLEC, 1981] ou un patch test au sens de ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997].

Ces essais numériques montrent, en outre, les limites du modèle monodimensionnel utilisé dans l'algorithme d'identification. Par la suite, les différentes caractéristiques de nos modèles pourront être identifiées par le biais de cet algorithme, mais devront obligatoirement faire l'objet d'une vérification éléments finis.



## CHAPITRE III

# Couplages thermo-mécaniques des élastomères

oOo

**C**e chapitre présente la prise en compte dans les modélisations, de l'évolution de la température ainsi que l'influence de la température initiale dans le comportement mécanique d'un élastomère. Pour ce faire, un algorithme faible de couplage thermo-mécanique est mis en place. Il tient compte, en particulier, de l'évolution des caractéristiques mécaniques en fonction de la température ainsi que d'un terme source de chaleur d'origine mécanique dans les différentes équations induites par la thermique.

On réalise une analyse de la sensibilité du modèle à l'organisation des calculs mécaniques et thermiques, ainsi qu'à la discrétisation spatiale.

Une confrontation de résultats numériques et expérimentaux est effectuée. Elle permet, dans un premier temps, de réajuster l'algorithme de couplage, puis de le valider.

oOo

## PLAN DU CHAPITRE III

---

<b>III.1 Introduction</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>III.2 Présentation des résultats expérimentaux</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>III.3 Aspects théoriques du couplage</b> . . . . .	<b>97</b>
III.3.1 Equations générales pour un milieu à $n$ configurations intermédiaires incompressibles . . . . .	97
III.3.1.a Equations comportementales . . . . .	97
III.3.1.b Equations constitutives . . . . .	97
III.3.2 Particularisation du modèle . . . . .	100
<b>III.4 Identification des paramètres mécaniques en fonction de la température</b> .	<b>103</b>
III.4.1 Introduction et présentation de la démarche . . . . .	103
III.4.2 Résultats d'identification . . . . .	103
<b>III.5 Traitement et résolution numérique</b> . . . . .	<b>105</b>
III.5.1 Cas général . . . . .	105
III.5.1.a Découplage des problèmes thermique et mécanique . . . . .	105
III.5.1.b Stratégie de résolution . . . . .	106
III.5.2 Cas particulier d'une sollicitation mécanique périodique . . . . .	107
III.5.2.a Sollicitations mécaniques et couplages thermo-mécaniques dans la littérature . . . . .	107
III.5.2.b Algorithme adopté . . . . .	108
III.5.2.c Validation . . . . .	110
III.5.3 Analyse du modèle . . . . .	113
III.5.3.a Influence du temps caractéristique thermique . . . . .	113
III.5.3.b Influence de la discrétisation géométrique . . . . .	115
<b>III.6 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux</b> . . . . .	<b>119</b>
III.6.1 Essais de type 2, température d'enceinte à $27^{\circ}C$ . . . . .	119
III.6.1.a Calcul préliminaire . . . . .	119
III.6.1.b Recalage du modèle . . . . .	120
III.6.1.c Essais de type 2 sur le modèle recalé, température d'enceinte à $27^{\circ}C$ .	121
III.6.1.d Essais de type 2 sur le modèle recalé, température d'enceinte à $27^{\circ}C$ .	123
<b>III.7 Conclusion</b> . . . . .	<b>125</b>

---

### III.1 Introduction

Les élastomères possèdent des caractéristiques mécaniques fortement dépendantes de la température, ceci est illustré FIG. II.1. La prise en compte des effets thermiques dans la modélisation de leur comportement s'avère donc nécessaire. L'objet de ce chapitre est l'élaboration et la mise en place d'un couplage thermo-mécanique. Ceci permettra de modéliser l'évolution du comportement due à une variation de température qui résulte, soit d'échanges avec le milieu extérieur, soit d'une production interne de chaleur [LION, 1996].

En premier lieu sont présentés les différents résultats expérimentaux dont on dispose, à savoir ceux portant sur l'influence de la température globale sur le comportement du matériau et ceux concernant l'évolution de la température au cours du temps lors d'essais cyclés. La première série de tests est utilisée afin de caractériser l'évolution en fonction de la température des différents coefficients mécaniques, tandis que la seconde sert de confrontation aux résultats numériques.

Ensuite, un modèle thermo-mécanique est proposé. Le cadre thermodynamique est celui d'un matériau à  $n$  états intermédiaires incompressibles (cf. chapitre I). Afin de mettre en évidence les différents termes de couplage, l'équation de la chaleur est écrite dans ce cadre. Par analogie au chapitre II, on particularise le modèle en passant du cas général à  $n$  états intermédiaires incompressibles à un seul état intermédiaire visqueux incompressible.

Enfin, un algorithme de couplage faible est mis en place, et est résolu par la méthode des éléments finis. Une simplification dans le cas d'essais périodiques est proposée. Cette modification de l'algorithme permet la modélisation d'essais sur de longues périodes et de confronter ainsi les résultats numériques aux différents résultats expérimentaux présentés en début de chapitre.

### III.2 Présentation des résultats expérimentaux

Les essais présentés dans ce paragraphe ont été réalisés grâce au dispositif expérimental décrit § II.2.1.a. Une éprouvette de double cisaillement est soumise à un chargement mécanique cyclique dans une enceinte pouvant être thermiquement isolée. Sept thermocouples sont positionnés sur l'éprouvette (cf. FIG. III.2) afin d'enregistrer les variations de température pendant les différentes sollicitations mécaniques. Deux types d'essais sont réalisés.

- La première série de tests est réalisée à température constante de l'enceinte. On suppose qu'au moins en début d'essai, le champ de température dans l'élastomère est uniforme et égal à la température de l'enceinte. La figure FIG. II.5 présente les réponses de l'éprouvette de double cisaillement soumise à la même sollicitation sinusoïdale pour différentes températures d'essais :  $-55^{\circ}C$ ,  $-45^{\circ}C$ ,  $23^{\circ}C$ ,  $70^{\circ}C$ ,  $100^{\circ}C$ . L'ensemble des résultats expérimentaux de ce type est présenté dans l'annexe F. On constate FIG. III.2 un accroissement général de la rigidité du matériau (①) avec l'abaissement de la température. Outre ce phénomène

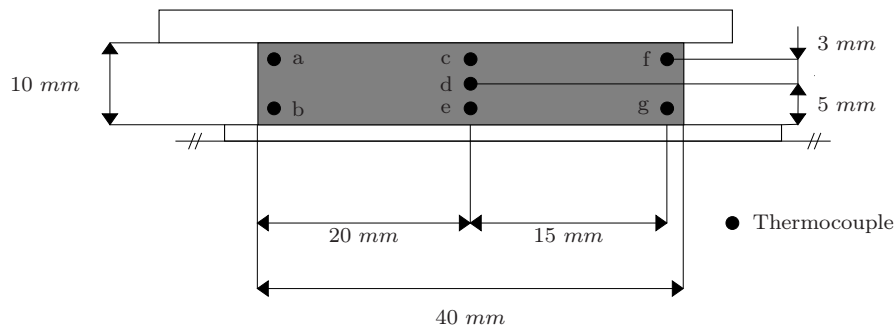


FIGURE III.1 – Positionnement des thermocouples sur la demi éprouvette supérieure.

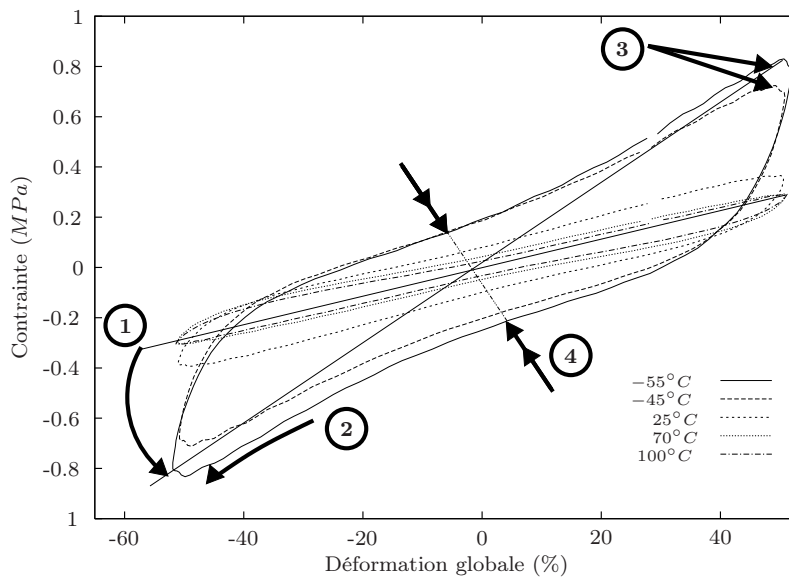


FIGURE III.2 – Courbes contrainte déformation obtenues à différentes températures d'essais sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50 % et de fréquence 3.1 Hz.

attendu, on peut voir aussi une augmentation de l'aire des hystérésis avec la diminution de la température (④), une accentuation du point anguleux au changement de signe de la sollicitation (③) ainsi qu'un raidissement pour les grandes amplitudes de cisaillement (②)

- L'autre série d'essais consiste à solliciter l'éprouvette sans régulation thermique autre que celle de l'enceinte. Les graphiques FIG. III.3 et FIG. III.4 représentent les évolutions temporelles de la température en deux points (thermocouples d et b, FIG. III.2) de l'éprouvette lors d'essais à des températures ambiantes de 27 °C et 60 °C.

On dégage trois remarques principales :

- l'évolution initiale de la température est rapide et pratiquement linéaire aux deux points de mesure ;

- la température tend vers une asymptote horizontale en fin d'essai ;
- en début d'essai, la température en coin (thermocouple b) est plus élevée qu'au centre (thermocouple d). Ce phénomène est plus accentué pour une température d'enceinte de  $27^{\circ}\text{C}$ .

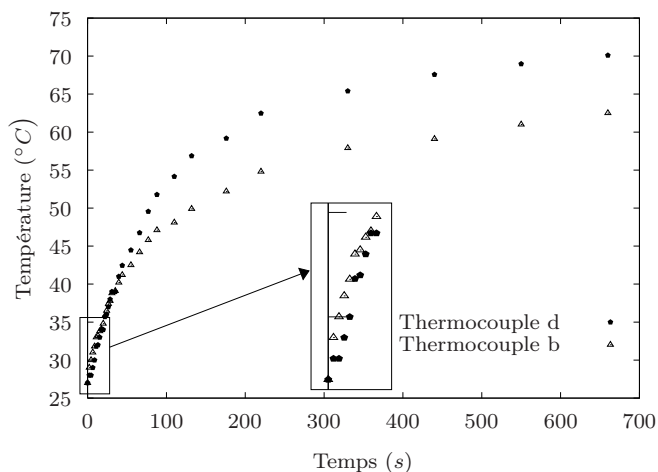


FIGURE III.3 – Evolution de la température aux thermocouples b et d à une température extérieure de  $27^{\circ}\text{C}$  et sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50% et de fréquence 3.1Hz.

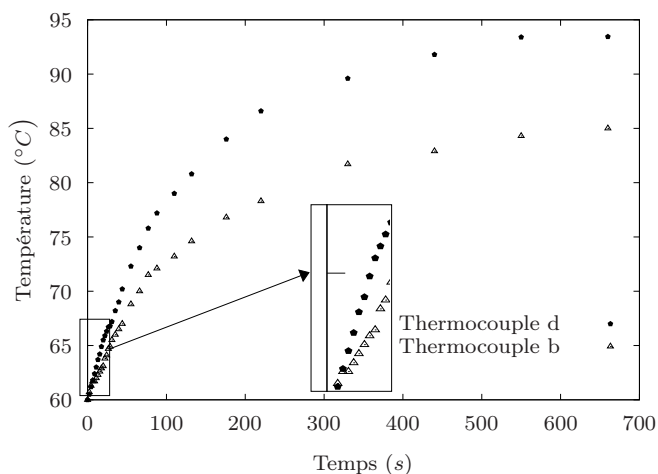


FIGURE III.4 – Evolution de la température aux thermocouples b et d à une température extérieure de  $60^{\circ}\text{C}$  et sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50% et de fréquence 3.1Hz.



### III.3 Aspects théoriques du couplage

#### III.3.1 Equations générales pour un milieu à $n$ configurations intermédiaires incompressibles

##### III.3.1.a Equations comportementales

Le chapitre II présente une particularisation des équations obtenues au chapitre I à certains modèles rhéologiques et sous l'hypothèse forte d'indépendance des phénomènes mécaniques et thermiques ( $\mathcal{H}$ . II.1). Au vu des résultats expérimentaux présentés § III.2, il paraît évident que le champ de validité de cette hypothèse est assez restreint et exclut tout essai étendu dans le temps. On se propose dans ce qui va suivre de prendre en compte une certaine forme de couplage entre les phénomènes mécaniques et thermiques.

L'équation (I.101) du chapitre I nous permet d'écrire, en configuration lagrangienne et dans le cadre d'un matériau isotrope et incompressible :

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{- Comportement mécanique} \\
 \text{- Comportement thermique} \\
 \text{- Comportement général}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}} + \bar{F} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{C}}} \\
 -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}^i} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{C}}^i} \\
 \det \bar{F} = 1 \\
 \det {}^i \bar{F} = 1 \\
 -\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{Q}} \\
 \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}
 \end{array}
 \end{array} \quad (III.1)$$

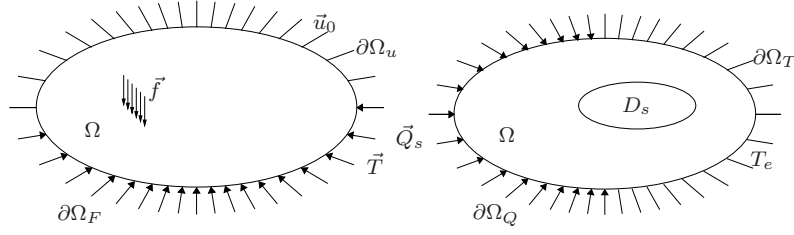
Contrairement aux équations du chapitre II, ces équations prennent maintenant en compte la dépendance en température du potentiel énergie libre  $\psi$  et du pseudo-potentiel de dissipation mécanique  $\varphi^{int}$ .

##### III.3.1.b Equations constitutives

On rappelle que  $\vec{T}$  et  $\vec{u}_0$  (FIG. III.5(a)) sont respectivement dans la configuration de référence les valeurs imposées de  $\bar{\pi} \cdot \vec{N}$  sur  $\partial\Omega_F$  et de  $\vec{u}$  sur  $\partial\Omega_u$ .

Les grandeurs thermiques  $\vec{Q}_s$  et  $T_e$  (FIG. III.5(b)) sont respectivement les valeurs de  $\vec{Q}$  le flux de chaleur (de type conductif ou convectif) en configuration lagrangienne sur la fraction de contour  $\partial\Omega_Q$  et de celles de  $T$ , la température sur la fraction de contour  $\partial\Omega_T$ .

Les équations constitutives du modèle sont obtenues à partir de l'écriture lagrangienne de la conservation de la quantité de mouvement et des conditions limites (I.32) pour l'aspect mécanique. L'aspect thermique quant à lui est obtenu par l'écriture de l'**équation de la chaleur**.



(a) Problème mécanique et conditions limites mécaniques. (b) Problème thermique et conditions limites thermiques.

FIGURE III.5 – Définition du problème thermo-mécanique.

L'établissement de cette dernière suit une démarche analogue à celle utilisée sous l'hypothèse des petites perturbations [CHRYSOCHOOS et PEYROUX, 1997].

Partant de l'égalité (I.49)

$$e = \psi + T\eta,$$

on a :

$$\dot{e} = \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathbf{C}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} + \frac{\partial\psi}{\partial^i\bar{\mathbf{C}}} : {}^i\dot{\bar{\mathbf{C}}} + \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T} + \dot{T}\eta}_{=0 \text{ d'après } \mathcal{H. I.2}} + T\dot{\eta}. \quad (\text{III.2})$$

Par ailleurs en configuration lagrangienne, l'équation de conservation de l'énergie se met sous la forme :

$$\rho_0\dot{e} = \bar{\pi} : \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \rho_0r - \text{div}_X\vec{Q}. \quad (\text{III.3})$$

La combinaison des équations (III.2) et (III.3) permet d'écrire :

$$\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\mathbf{C}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} + \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial^i\bar{\mathbf{C}}} : {}^i\dot{\bar{\mathbf{C}}} + \rho_0T\dot{\eta} = \bar{\pi} : \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \rho_0r - \text{div}_X\vec{Q}. \quad (\text{III.4})$$

La loi de comportement (III.1a) et les  $n$  lois de comportement (III.1b) ont pour conséquence de transformer comme suit (III.4) :

$$\frac{1}{2} \left[ \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \bar{\pi} - \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\dot{\bar{\mathbf{C}}}} - p\bar{\mathbf{C}}^{-1} \right] : \dot{\bar{\mathbf{C}}} + \left[ -\frac{\partial\varphi^{int}}{\partial^i\dot{\bar{\mathbf{C}}}} - q_i\bar{\mathbf{C}}^{-1} \right] : {}^i\dot{\bar{\mathbf{C}}} + \rho_0T\dot{\eta} = \bar{\pi} : \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \rho_0r - \text{div}_X\vec{Q}. \quad (\text{III.5})$$

On simplifie l'écriture de l'équation (III.5) par le biais des relations d'incompressibilité<sup>(1)</sup> et de l'égalité  $\bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \bar{\pi} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} = \bar{\pi} : \dot{\bar{\mathbf{F}}}$  :

$$\rho_0T\dot{\eta} = \underbrace{\frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\dot{\bar{\mathbf{C}}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} + \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial^i\dot{\bar{\mathbf{C}}}} : {}^i\dot{\bar{\mathbf{C}}}}_{=\phi_0^{int} \text{ d'après (I.78c)}} + \rho_0r - \text{div}_X\vec{Q}. \quad (\text{III.6})$$

(1).  $\bar{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} = 0$ ,  ${}^i\bar{\mathbf{C}}^{-1} : {}^i\dot{\bar{\mathbf{C}}} = 0$

Grâce à l'égalité

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial T},$$

on a :

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial T} \\ &= -\frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial t} \\ &= -\frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial\bar{C}} : \dot{\bar{C}} - \frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial^i\bar{C}} : {}^i\dot{\bar{C}} - \frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}\dot{T}.\end{aligned}$$

En réinjectant ce dernier résultat dans (III.6) puis en introduisant la chaleur spécifique :

$$C_\varepsilon = T\frac{\partial\eta}{\partial T}, \quad (\text{III.7})$$

on arrive à :

$$\boxed{\underbrace{\rho_0 C_\varepsilon \dot{T}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\text{div}_X \vec{Q}}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\rho_0 r}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\phi_0^{int}}_{\textcircled{4}} - \underbrace{\rho_0 T \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial\bar{C}} : \dot{\bar{C}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial^i\bar{C}} : {}^i\dot{\bar{C}} \right)}_{\textcircled{5}}}. \quad (\text{III.8})$$

L'analyse des différents termes de cette équation reste la même que sous l'hypothèse des petites déformations, à savoir :

- les composantes  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$  de (III.8) correspondent respectivement aux termes d'absorption et de fuite de chaleur,
- la grandeur  $\rho_0 r$  ( $\textcircled{3}$ ) représente tout échange volumique réalisé avec l'extérieur,
- en  $\textcircled{4}$  on retrouve la dissipation intrinsèque (mécanique) qui est homogène à une source volumique de chaleur interne,
- et enfin les termes de couplage ( $\textcircled{5}$ ) qui traduisent la dépendance entre les problèmes mécanique et thermique.

L'ensemble des équations constitutives se résume alors sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{- Equations constitutives mécaniques} \\ \text{- Equations constitutives thermiques} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_X \vec{\pi} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \vec{\pi} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \text{div}_X \vec{Q} = \rho_0 r + \phi_0^{int} \\ \quad - \rho_0 T \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial\bar{C}} : \dot{\bar{C}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial^i\bar{C}} : {}^i\dot{\bar{C}} \right) & \text{sur } \Omega \\ \vec{Q} = \vec{Q}_s & \text{sur } \partial\Omega_Q \\ T = T_e & \text{sur } \partial\Omega_T \end{array} \right. \quad (\text{III.9})$$

### III.3.2 Particularisation du modèle

Une fois de plus, il faut simplifier le modèle afin de pouvoir d'une part mieux appréhender les phénomènes (en particulier mécaniques) et d'autre part faciliter son implantation numérique.

Sur le plan thermique, on considère que le matériau diffuse de manière isotrope, ce qui permet de postuler la forme suivante du pseudo-potential de dissipation thermique :

$$\varphi^{ther} = \frac{1}{2T} \left( \bar{\bar{K}}_L^{-1} \cdot \vec{Q} \right) \cdot \vec{Q}, \quad (\text{III.10})$$

qui débouche sur un comportement thermique obéissant à la loi de FOURIER :

$$\vec{Q} = -\bar{\bar{K}}_L \text{grad}_X T, \quad (\text{III.11})$$

où  $\bar{\bar{K}}_L$  est le tenseur des conductivités exprimé en configuration lagrangienne [BÉRARDI, 1995].

#### HYPOTHÈSE III.1

Les termes de couplage de l'équation de la chaleur (⑤, III.8) sont supposés nuls.

Par le biais des équations (III.1a,b), les grandeurs  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{C}}$  et  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{C}^i}$  sont homogènes à des dérivées de contraintes mécaniques par rapport à la température. Ainsi, l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . III.1, nous amène à considérer les contraintes mécaniques comme des fonctions indépendantes de la température ou variant peu avec la température. Cette hypothèse restreint le domaine de validité du modèle à des zones éloignées de la zone de transition vitreuse.

Au niveau mécanique, on adopte la généralisation aux grandes déformations du modèle de POYNTING-THOMSON (voir chapitre II) dont les caractéristiques mécaniques sont choisies dépendantes de la température [BÉRARDI, 1995 ; GABRIELI, 1995 ; HOLZAPFEL et SIMO, 1996].

Certains auteurs [LION, 1997 ; HOLZAPFEL et SIMO, 1996] choisissent de décomposer la transformation en une partie purement thermique ( $\bar{\bar{F}}_T$ ) et une autre purement mécanique ( $\bar{\bar{F}}_M$ ), cette dernière pouvant être de nature élastique, viscoélastique, élastoplastique ou viscoélastoplastique. On introduit ainsi un état intermédiaire purement thermique FIG. III.6.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_M \cdot \bar{\bar{F}}_T \\ \text{avec } \bar{\bar{F}}_T = (f(T - T_0))^{1/3} \bar{\bar{1}} \text{ où } T_0 \text{ est la température initiale et } f(0) = 1. \end{array} \right. \quad (\text{III.12})$$

#### HYPOTHÈSE III.2

Aucune dilatation n'ayant été constatée au cours des essais expérimentaux de type 2 (température de matériau non régulée), ce phénomène est donc négligé dans le cadre de notre modèle, *i.e.* :

$$\bar{\bar{F}}_T = \bar{\bar{1}}.$$

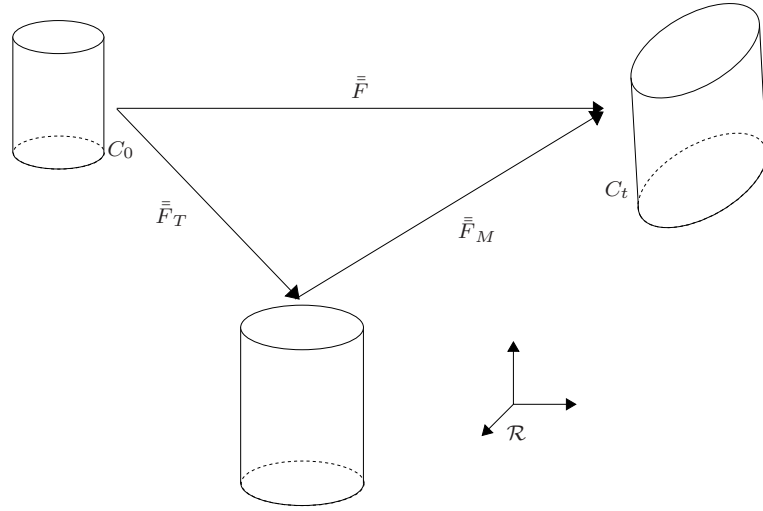


FIGURE III.6 – Etat intermédiaire thermique.

Le modèle thermo-mécanique peut alors être ainsi décliné :

Comportement mécanique :	$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi_v(\bar{C}_v) + \psi_e(\bar{C}_e) \\ \quad = a_1(T)(I_1^v - 3) + c_1(T)(I_1^e - 3) + c_2(T) \ln\left(\frac{I_1^e}{3}\right) \\ \varphi = \varphi(\dot{\bar{C}}_v) = \frac{\nu(T)}{2} \bar{C}_v : \dot{\bar{C}}_v \\ \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}} + p \bar{F}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{C}}_v} + q \bar{C}_v^{-1} = -\rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v} \right) \\ \det \bar{F} = 1 \\ \det \bar{F}_v = 1 \end{array} \right.$
Comportement thermique :	$\vec{Q} = -\bar{K}_L \text{grad}_X T$
Equations constitutives mécaniques :	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_X \bar{\pi} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \bar{\pi} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{array} \right.$
Equations constitutives thermiques :	$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \text{div}_X \vec{Q} = \rho_0 r + \phi_0^{int} & \text{sur } \Omega \\ \vec{Q} = \vec{Q}_s & \text{sur } \partial\Omega_Q \\ T = T_e & \text{sur } \partial\Omega_T \end{array} \right.$

(III.13)



## III.4 Identification des paramètres mécaniques en fonction de la température

### III.4.1 Introduction et présentation de la démarche

La résolution du problème mécanique nécessite la connaissance de l'évolution, en fonction de la température, des quatre coefficients mécaniques définissant le comportement de l'élastomère :  $a_1(T)$ ,  $c_1(T)$ ,  $c_2(T)$ ,  $\nu(T)$ .

L'idée générale est d'identifier ces grandeurs sur les trois essais de type 1 (enceinte et matériau thermostatés) à températures positives ( $23^\circ C$ ,  $70^\circ C$ ,  $100^\circ C$ ) d'amplitude et de fréquence de cisaillement respectivement de 50% et  $3.1Hz$  et ce, par le biais de l'algorithme d'identification présenté § II.2.3. Ces résultats sont alors extrapolés par l'intermédiaire de lois linéaires ou exponentielles.

#### REMARQUE III.1

L'identification des coefficients matériaux est volontairement limitée à une plage de températures positives pour :

- d'une part s'assurer de ne pas englober la température de transition vitreuse qui impliquerait des évolutions trop rapides des coefficients mécaniques et donc une contradiction avec l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . III.1,
- d'autre part pour des températures négatives, viennent se superposer au comportement visqueux, des comportements plastiques et/ou fragiles. Il semble donc ambitieux de considérer que le modèle mécanique adopté, purement viscoélastique, puisse rester valide pour des plages de températures négatives.

□

### III.4.2 Résultats d'identification

Les résultats d'identification sur les trois essais sont présentés dans le tableau TAB. III.1.

	$c_1$	$c_2$	$a_1$	$\nu$
$T_1 = 23^\circ C$	1.65851	-3.42677	0.030097	0.075134
$T_2 = 70^\circ C$	0.99445	-1.91776	0.060934	0.080358
$T_3 = 100^\circ C$	0.9584	-1.83532	0.0802291	0.0991952

TABLEAU III.1 – Résultats d'identification pour les trois essais de type 1 à température positive.

Les grandeurs  $c_1$  et  $c_2$  sont extrapolées par une loi exponentielle de type

$$a \exp(-cT) + b, \quad (\text{III.14})$$

tandis que les évolutions de  $a_1$  et  $\nu$  sont considérées linéaires. Les lois obtenues sont présentées FIG. III.7.

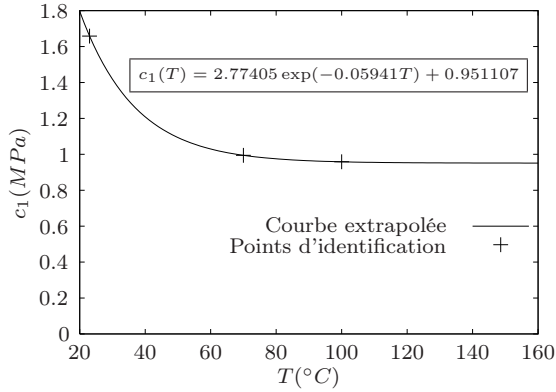
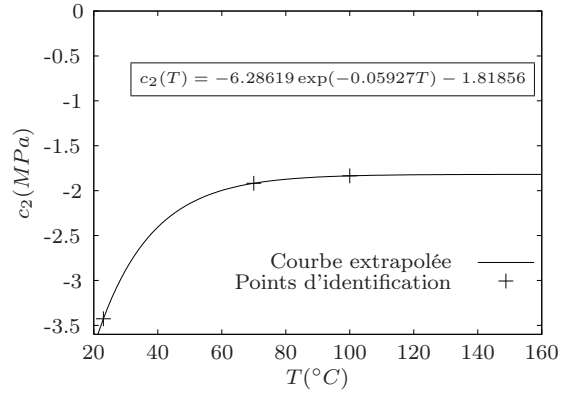
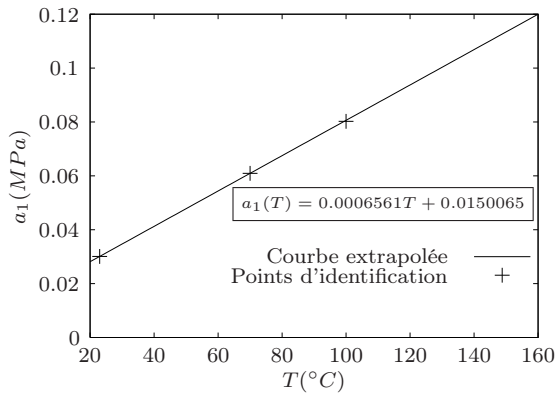
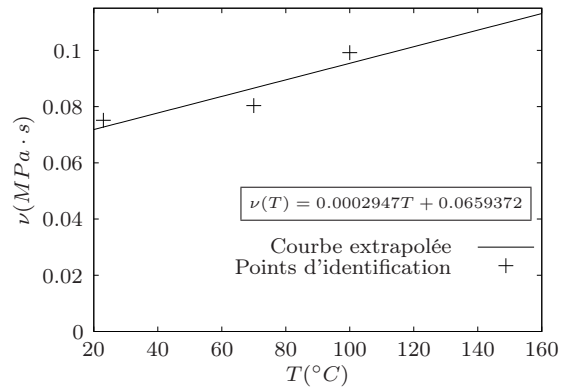
(a)  $c_1(T)$  (MPa).(b)  $c_2(T)$  (MPa).(c)  $a_1(T)$  (MPa).(d)  $\nu(T)$  (MPa).

FIGURE III.7 – Evolution en fonction de la température des différents paramètres matériaux.

### REMARQUE III.2

Le coefficient  $a_1$  du potentiel énergie libre  $\psi_v$  suit, tout comme dans le cas d'une forme purement hyperélastique de néohooke (II.58), une évolution linéaire de la température.  $\square$

## III.5 Traitement et résolution numérique

### III.5.1 Cas général

#### III.5.1.a Découplage des problèmes thermique et mécanique

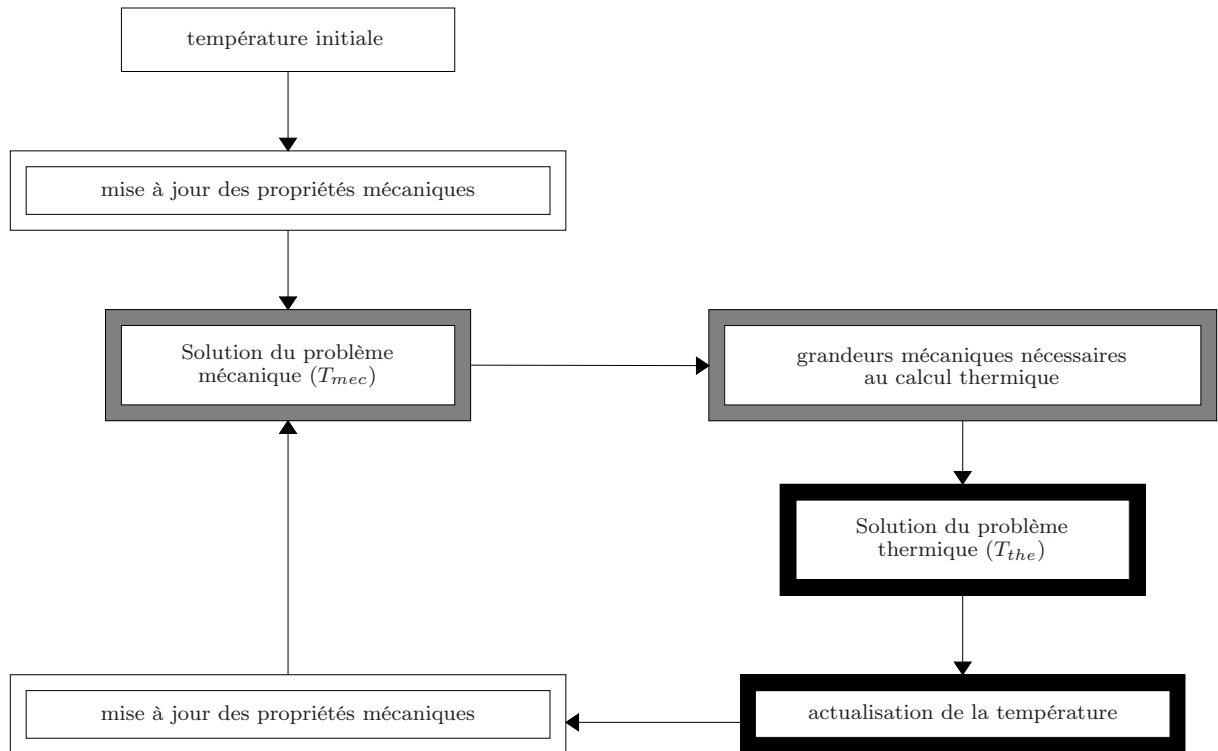


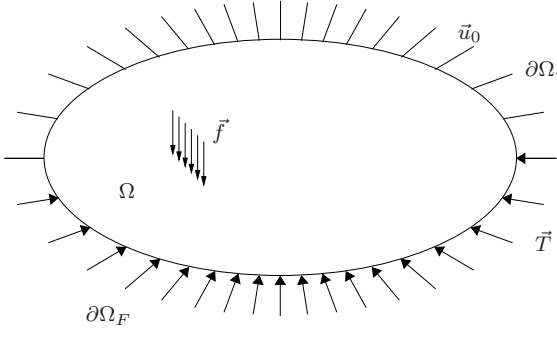
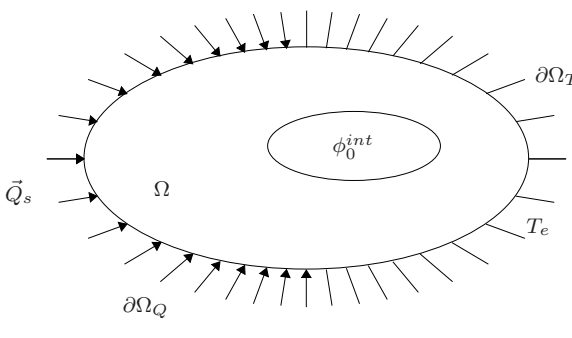
FIGURE III.8 – *Algorithme de couplage thermo-mécanique.*

Grâce en particulier aux hypothèses  $\mathcal{H}$ . III.1 et  $\mathcal{H}$ . III.2, il est possible d'adopter l'algorithme de couplage "faible" décrit FIG. III.8 qui consiste en un découplage des calculs thermiques et mécaniques [BÉRARDI, 1995 ; GABRIELI, 1995 ; HOLZAPFEL et SIMO, 1996]. Au cours de la modélisation, est réalisée une succession de calculs mécaniques et thermiques. Les calculs mécaniques sont supposés **isothermes**, tandis que les calculs thermiques sont réalisés sur **la géométrie déformée à vitesse de déformation nulle** et en considérant **la dissipation intrinsèque comme source volumique de chaleur**<sup>(2)</sup>.

Une telle description du couplage nécessite la réalisation d'essais numériques mécaniques et thermiques sur un même temps de modélisation :

$$T_{mec} = T_{the}. \quad (\text{III.15})$$

(2). D'après (III.8) sous l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . III.1.

<div style="text-align: center; border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px;">Problème mécanique</div> $\dot{T} = 0$  <p style="text-align: center;"><u>Comportement mécanique</u></p> $\left\{ \begin{array}{l} \psi = a_1(T) (I_1^v - 3) + c_1(T) (I_1^e - 3) \\ \quad \quad \quad + c_2(T) \ln \left( \frac{I_1^e}{3} \right) \\ \varphi = \varphi(\dot{\bar{C}}_v) = \frac{\nu}{2} \bar{C}_v : \bar{C}_v \\ \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}} + p \bar{F}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{C}}_v} + q \bar{C}_v^{-1} = -\rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v} \right) \\ \det \bar{F} = 1 \\ \det \bar{F}_v = 1 \end{array} \right.$ <p style="text-align: center;"><u>Equations constitutives</u></p> $\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_X \bar{\pi} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \bar{\pi} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{array} \right.$	<div style="text-align: center; border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px;">Problème thermique</div> $\dot{\bar{F}} = 0$  <p style="text-align: center;"><u>Comportement thermique</u></p> $\vec{Q} = -\bar{K}_L \operatorname{grad}_X T$ <p style="text-align: center;"><u>Equations constitutives</u></p> $\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \operatorname{div}_X \vec{Q} = \rho_0 r + \phi_0^{int} & \text{sur } \Omega \\ \vec{Q} = \vec{Q}_s & \text{sur } \partial\Omega_Q \\ T = T_e & \text{sur } \partial\Omega_T \end{array} \right.$
--	--

### III.5.1.b Stratégie de résolution

D'un point de vue mécanique, on adopte la formulation éléments finis présentée au chapitre II. On rappelle que cette dernière est basée sous l'hypothèse d'une cinématique plane. Sur le plan thermique, la formulation éléments finis développée par BÉRARDI [1995] est utilisée. Une rapide présentation en est faite dans l'annexe G. Cette même annexe justifie l'utilisation d'un modèle 2D par comparaison avec une modélisation 3D sur un problème type.

A priori, rien n'oblige les discrétisations spatiales thermiques et mécaniques à être identiques.

Cependant, dans un souci de simplicité, sont utilisés, par la suite, les mêmes découpages géométriques, seuls les degrés d'interpolation des éléments pourront différer. Ceci est, en particulier, utile afin d'éviter le comportement instable de certains éléments thermiques à interpolation quadratique tels que les éléments triangulaires à 6 noeuds.

Dans le cas d'un même découpage géométrique, seuls les sommets des éléments thermiques et mécaniques sont confondus, si bien qu'il faut :

- d'une part évaluer la température en chaque point de GAUSS mécanique
- et d'autre part déterminer la dissipation intrinsèque en chaque point de GAUSS thermique ainsi que le gradient de transformation sur le maillage thermique permettant un calcul sur la géométrie déformée.

Pour deux éléments homologues dont les caractéristiques sont données TAB. III.2, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(PG_{ig}^u) = \sum_{j=1}^{n^T} N_j^T(PG_{ig}^u) T(P_j^T) \\ \bar{F}(PG_{jg}^T) = [B^u(PG_{jg}^T)] \left\{ \begin{array}{l} U_x(P_1^u) \\ U_y(P_1^u) \\ \vdots \\ U_x(P_n^u) \\ U_y(P_n^u) \end{array} \right\} \\ \phi_0^{int}(PG_{jg}^T) = \sum_{i=1}^{n^u} N_i^u(PG_{jg}^T) \phi_0^{int}(P_i^u) \end{array} \right. \quad (III.16)$$

	Elément mécanique	Elément thermique
Noeuds	$P_i^u, i \in \{1 \dots n^u\}$	$P_j^T, j \in \{1 \dots n^T\}$
Points de GAUSS	$PG_{ig}^u, ig \in \{1 \dots n_{pg}^u\}$	$PG_{jg}^T, jg \in \{1 \dots n_{pg}^T\}$
Fonctions de formes	$N_i^u, i \in \{1 \dots n^u\}$	$N_j^T, j \in \{1 \dots n^T\}$

TABLEAU III.2 – Caractéristiques de deux éléments homologues.

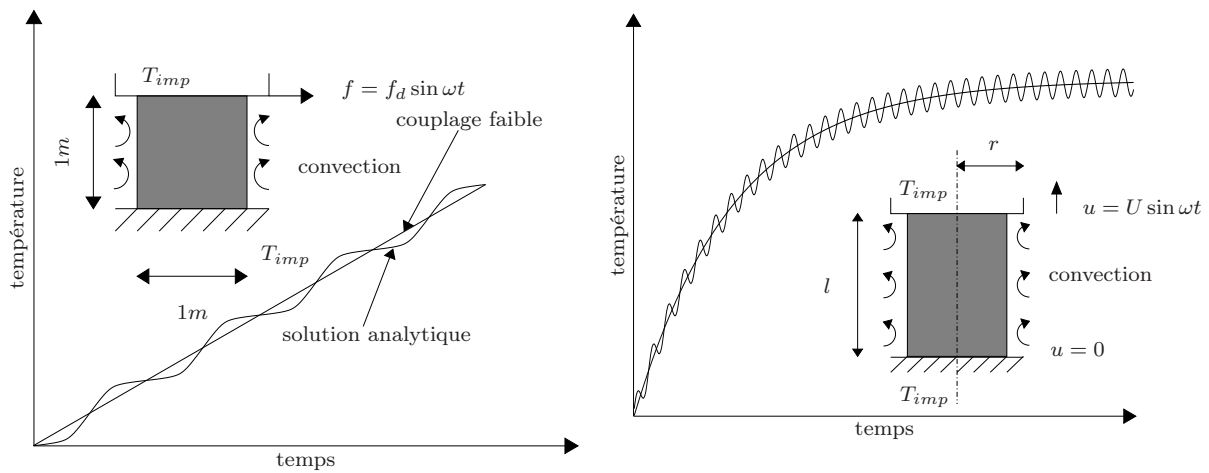
### III.5.2 Cas particulier d'une sollicitation mécanique périodique

#### III.5.2.a Sollicitations mécaniques et couplages thermo-mécaniques dans la littérature

Dans le cas de sollicitations cycliques, la méthode de couplage présentée ci-dessus, demande des temps de calculs très importants et ce, en particulier à cause du calcul mécanique fortement non linéaire.

Quelques auteurs se sont intéressés à ce problème. Dans le cas du cisaillement périodique à faible fréquence d'un bloc d'élastomère, HOLZAPFEL et SIMO [1996] montrent que la solution analytique d'un problème de couplage thermo-mécanique oscille autour d'une valeur moyenne. Cette dernière peut être obtenue à partir d'un unique calcul thermique pour lequel on affecte comme terme source de chaleur, la valeur analytique moyenne de la dissipation. Ils appliquent ensuite cette méthode sur une structure complexe (FIG. III.9(a)).

LION [1996] obtient des résultats similaires pour un essai de traction cyclique. Il met en évidence que dans la partie stationnaire de l'évolution de la température, la période des oscillations est celle de la sollicitation mécanique (FIG. III.9(b)).



(a) Evolution de la température au centre d'un bloc rectangulaire d'élastomère soumis à une sollicitation de cisaillement sinusoïdale [HOLZAPFEL et SIMO, 1996].

(b) Evolution de la température au centre d'un bloc cylindrique d'élastomère soumis à une sollicitation de traction sinusoïdale [LION, 1996].

FIGURE III.9 – Comparaison de solutions analytiques (ou obtenues par calcul complet) de problèmes thermo-mécaniques et de solutions résultant de couplage faible.

### III.5.2.b Algorithme adopté

En utilisant la propriété de **périodicité** de la dissipation intrinsèque obtenue pour une sollicitation cyclique, il est possible de considérer le problème numérique global à résoudre comme une succession de couples de problèmes (*i.e.* un problème mécanique + un problème thermique). Le problème mécanique, dont les coefficients matériau ont été identifiés à partir du champ de température résultant de la partie thermique du couple précédent, est mené jusqu'à stabilisation

de la dissipation intrinsèque. La moyenne temporelle de cette grandeur,

$$\bar{\phi}_0^{int}(t) = \frac{\int_0^t \phi_0^{int}(s) ds}{t}, \quad (\text{III.17})$$

est alors considérée comme terme source du calcul thermique<sup>(3)</sup> qui est réalisé sur la géométrie non déformée. Ce calcul est mené jusqu'à obtention d'une évolution raisonnable<sup>(4)</sup> de la température globale de la structure. Le champ de température ainsi obtenu peut alors être utilisé pour réidentifier les champs spatiaux des différents paramètres mécaniques du couple de problème suivant.

L'algorithme décrit est identique à celui mis en place dans le paragraphe § III.5.1, avec :

$$T_{mec} \neq T_{ther}, \quad (\text{III.18})$$

et en considérant non plus la dissipation intrinsèque instantanée comme terme source thermique, mais la moyenne temporelle de cette grandeur.

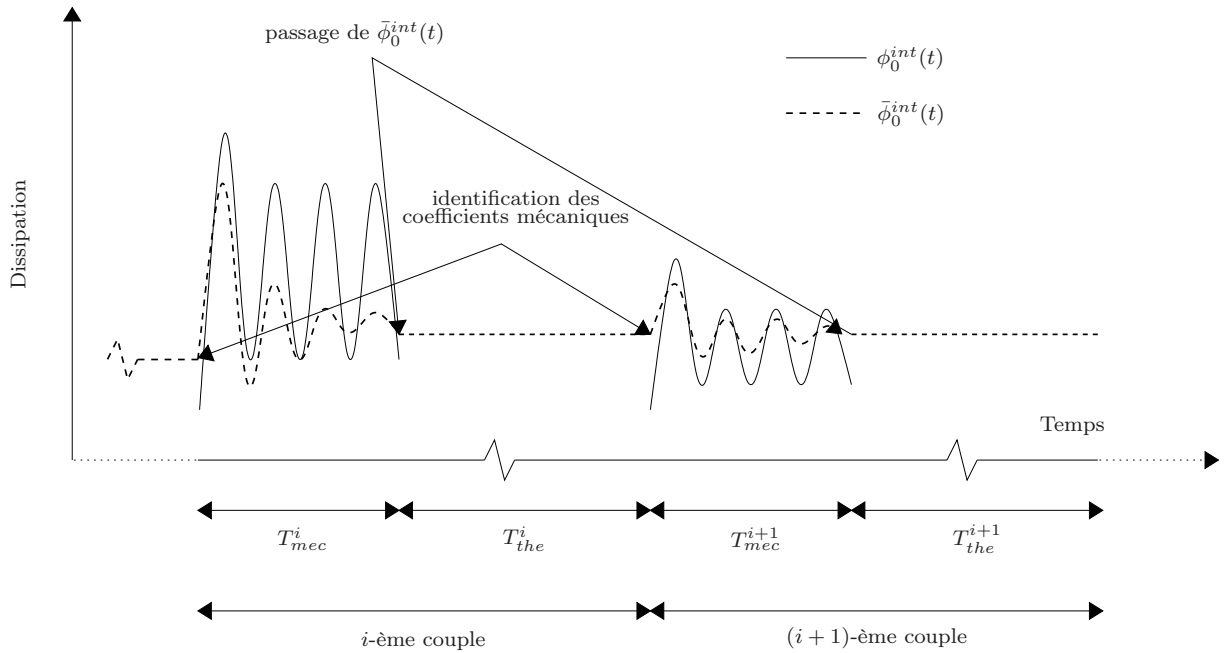


FIGURE III.10 – Représentation schématique de la dissipation et de sa moyenne temporelle au cours de deux couples de calcul.

(3). La grandeur  $\bar{\phi}_0^{int}(t)$  est extrapolée sur le maillage thermique par (III.16c).

(4). Voir paragraphe § III.5.3.a

### III.5.2.c Validation

- Problème physique

On se propose, dans ce paragraphe, de valider l'algorithme précédent. Le test décrit FIG. III.11 est réalisé. La fréquence  $f$  est de  $3.1\text{ Hz}$  et le taux de déformation globale de  $50\%$  (*i.e.*  $U_0 = 5\text{ mm}$ ). Deux configurations différentes sont adoptées pour la répartition des calculs mécaniques et thermiques.

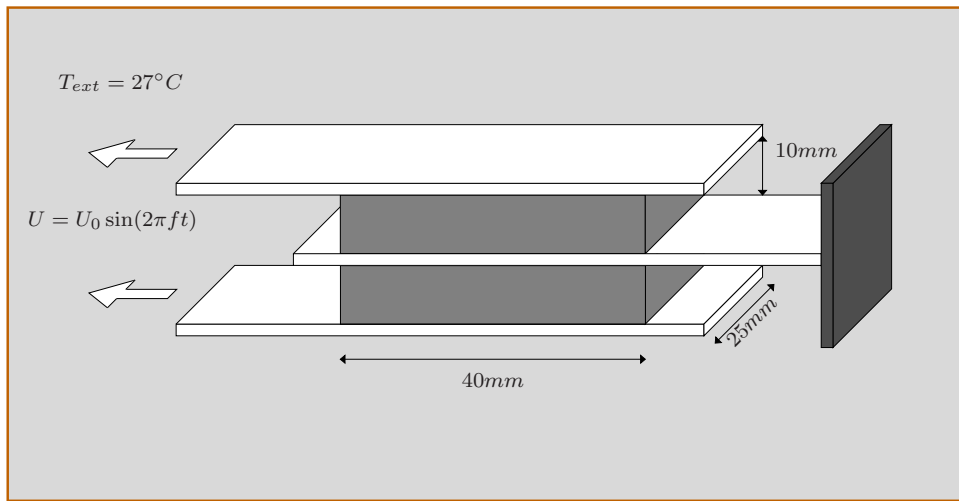


FIGURE III.11 – Description du test de validation de l'algorithme adopté dans le cas de sollicitations cycliques

- Configurations adoptées de l'algorithme de couplage

- Première configuration : couplage complet<sup>(5)</sup>.

$$T_{mec} = T_{ther} = 0.02s.$$

La dissipation intrinsèque instantanée est considérée comme terme source du calcul thermique.

Le calcul thermique est réalisé sur la géométrie déformée.

- Seconde configuration : calcul simplifié.

On réalise un seul calcul mécanique jusqu'à stabilisation de la dissipation *i.e.* :

$$T_{mec} = 0.93s(\text{ Trois cycles de chargement}).$$

(5). Attention la désignation "complet" signifie que les calculs mécaniques et thermiques sont réalisés sur un temps de modélisation identique et non de manière simultanée.

Le calcul thermique est alors réalisé sur un temps de modélisation :

$$T_{the} = 15s,$$

avec un terme source mécanique ramené à la moyenne temporelle de la dissipation intrinsèque (III.17).

Le problème thermique est résolu sur la géométrie non déformée.

• Modèles numériques

Un aperçu de la discrétisation géométrique est donné FIG. III.13. Les caractéristiques des discrétisations mécanique et thermique sont détaillés TAB. III.3 La symétrie du problème permet

Problème mécanique			Problème thermique	
Eléments	d.d.l. (déplacement.)	d.d.l. (pression)	Eléments	d.d.l. (température)
400	1938	320	459	285

TABLEAU III.3 – *Caractéristiques des maillages adoptés pour les problèmes mécaniques et thermique*

de ne modéliser qu’une demi éprouvette. Les problèmes numériques sont donnés FIG. III.12.

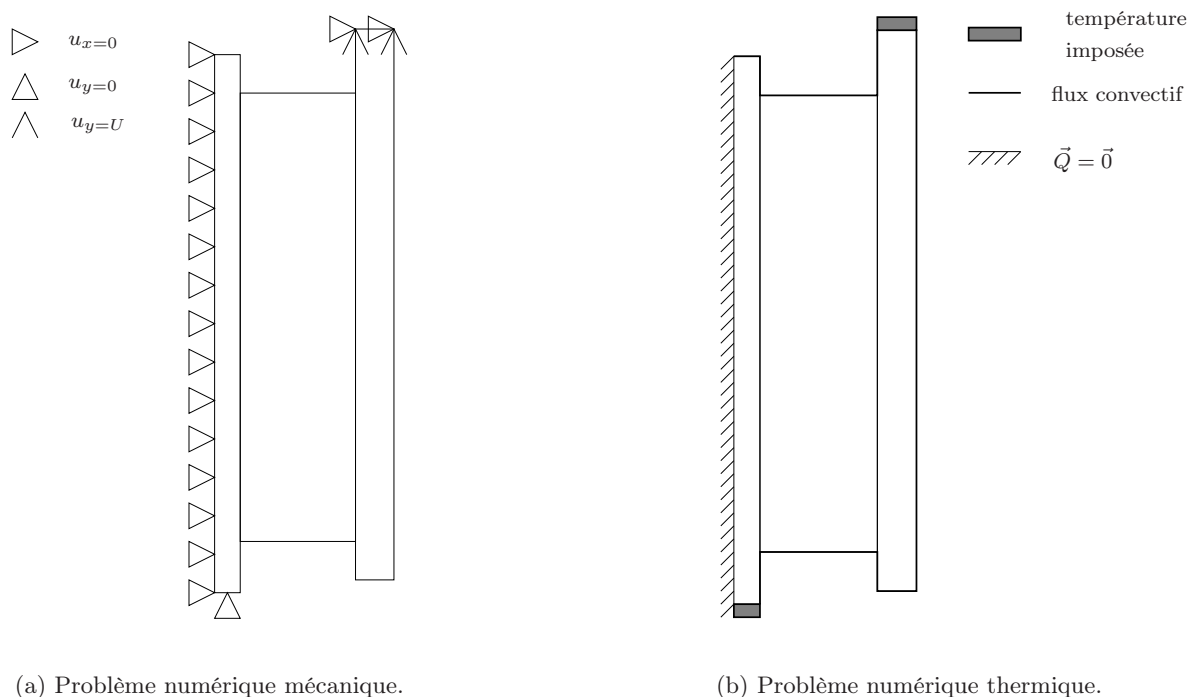


FIGURE III.12 – *Problèmes numériques.*

Les caractéristiques mécaniques de l’acier sont classiques, à savoir un module de YOUNG de 210000 MPa et un coefficient de POISSON de 0.3, les caractéristiques mécaniques de l’élastomère

ont été déterminées § III.4. Les différentes caractéristiques thermiques des matériaux ont été déterminées par BÉRARDI [1995] :

	Elastomère	Acier
$K$ ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )	0.127	45
$\rho_0 C_\varepsilon$ ( $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ )	$1.88 \cdot 10^6$	$3.5 \cdot 10^6$
$h$ ( $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ )	17	30

TABLEAU III.4 – Caractéristiques thermiques de l'acier et de l'élastomère

• Comparaison et résultats

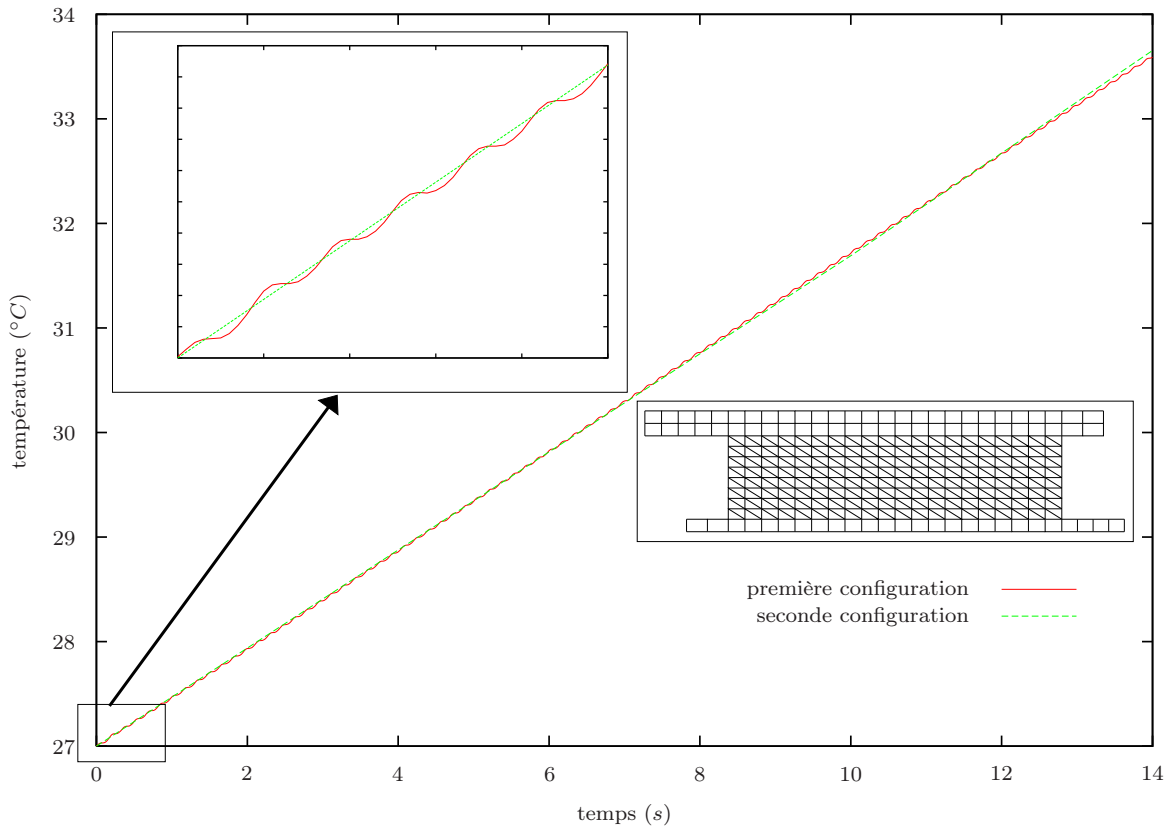


FIGURE III.13 – Evolution de la température au coeur d'une des couches d'élastomères. Comparaison des résultats obtenus pour les deux configurations.

On constate FIG. III.13 que les deux configurations donnent des résultats très proches. De manière plus précise, on peut voir sur un zoom de ces mêmes courbes, une oscillation de l'évolution obtenue par la configuration 1 autour des résultats donnés par la configuration 2. La fréquence

de ces oscillations est égale à deux fois celle de la sollicitation mécanique, *i.e.*  $f = 6.2Hz$ . Ce résultat était attendu, la dissipation (et par conséquent le terme source mécanique de l'équation de la chaleur) passant par un maximum pour les maxima et minima de la sollicitation mécanique.

L'écart entre ces deux évolutions n'excède pas le  $1/100^e$  de degré. Or, il semble évident que les différentes hypothèses simplificatrices  $\mathcal{H}$ . III.1 et  $\mathcal{H}$ . III.2 ainsi que le mode de résolution alternatif (enchaînement de calculs mécaniques et thermiques) induit par l'algorithme de couplage "faible" ne laissent pas espérer une telle précision.

De plus, le temps de calcul requis par la configuration 1 est de l'ordre de 15 fois celle nécessaire à la résolution de la configuration 2 (*i.e.*  $\approx 2$  heures CPU sur un IBM SP2 bi-processeurs). Par conséquent la modélisation d'essais de type 2 (cf. § III.2) sur 600 secondes par une configuration de type 1 demanderait environ **1290 heures CPU**.

Pour ces deux dernières raisons et à l'instar de HOLZAPFEL et SIMO [1996], il est adopté, par la suite, une généralisation de la configuration 2. Ainsi la résolution reste la même que pour un calcul de type 1, en considérant un temps mécanique ( $T_{mec}$ , cf. FIG. III.8) pour obtenir une stabilisation de la dissipation. Quant au problème thermique, un temps de résolution ( $T_{the}$ , cf. FIG. III.8) raisonnable doit être adopté pour ne pas induire de trop fortes évolutions du champ de température. Ce dernier point fait l'objet du paragraphe § III.5.3.a consacré à l'organisation et à l'enchaînement des différents calculs.

### III.5.3 Analyse du modèle

#### III.5.3.a Influence du temps caractéristique thermique

La généralisation de la configuration 2 proposée dans le paragraphe précédent, se doit de faire intervenir une répartition cohérente des problèmes thermiques et mécaniques. En effet, il semble évident que le problème thermique nécessite une prise en compte plus fine en début d'essai de par la forte variation de température.

Deux répartitions entre calculs mécaniques et thermiques sont étudiées, le problème modélisé est celui proposé dans le paragraphe précédent, mais on cherche maintenant à modéliser ce dernier complètement, c'est à dire sur un temps total de 660 secondes.

##### – Répartition 1

Cette répartition est des plus basiques. On considère trois couples identiques de problèmes :

$$\text{Répartition 1} \quad \left[ 3 \times \left( \begin{array}{l} 1 \quad \text{calcul mécanique sur trois cycles de chargement, } T_{mec} = 0.93s \\ +1 \quad \text{calcul thermique, } T_{the} = 200s \end{array} \right) \right]$$

##### – Répartition 2

Afin de mieux cerner les problèmes de départ, les 200 premières secondes sont raffinées de

manière à obtenir la répartition suivante :

$$\text{Répartition 2} \left\{ \begin{array}{l} 4 \times \left\{ \begin{array}{l} (1 \text{ calcul mécanique sur trois cycles de chargement, } T_{mec} = 0.93s \\ +1 \text{ calcul thermique, } T_{the} = 50s) \end{array} \right. \\ + \\ 2 \times \left\{ \begin{array}{l} (1 \text{ calcul mécanique sur trois cycles de chargement, } T_{mec} = 0.93s \\ +1 \text{ calcul thermique, } T_{the} = 200s) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

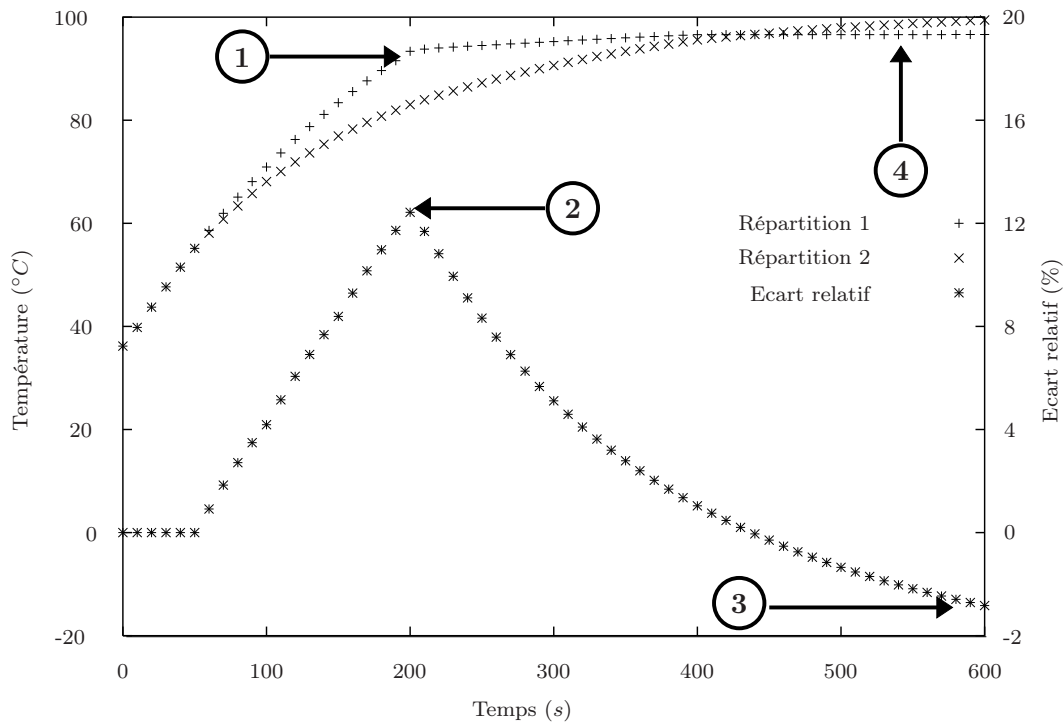


FIGURE III.14 – Evolutions de la température au centre d'une des deux couches d'élastomère obtenues par les répartitions 1 et 2 - Ecart relatif.

La figure FIG. III.14 compare les évolutions numériques de la température, au centre de la couche d'élastomère modélisée, obtenues par les répartitions 1 et 2. On constate une forte divergence initiale des évolutions. Cette divergence est corrigée à la première réidentification mécanique sur la répartition 1, mais ceci a pour conséquence les discontinuités ① et ②. A la suite de cette réidentification, l'écart relatif entre les deux évolutions tend à diminuer puis à se stabiliser à une valeur peu élevée ③ (températures asymptotiques peu différentes ④).

Cet essai met en évidence, d'une part la nécessité d'une répartition assez fine des calculs thermiques en début d'essai afin d'éviter des discontinuités non réalistes de type ① et ② et, d'autre part, la possibilité d'adopter un découpage thermique assez lâche sur la partie asymptotique de la courbe d'évolution ④.

Pour la suite de ce manuscrit, la répartition suivante est adoptée :

Répartition adoptée	$\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ i^{eme} \text{ couple} \\ \vdots \end{array} \right] \left  \begin{array}{l} (1 \text{ calcul mécanique sur trois cycles de chargement, } T_{mec} = 0.93s \\ +1 \text{ calcul thermique, } T_{the} = 10 \times 2^{i-1}s) \end{array} \right.$
---------------------	--

### III.5.3.b Influence de la discrétisation géométrique

Une fois l'organisation temporelle déterminée, on s'intéresse à l'influence du découpage géométrique. Les trois discrétisations adoptées sont décrites FIG. III.16, leurs caractéristiques sont données TAB. III.5.

	Problème mécanique			Problème thermique	
	Eléments	d.d.l. (dépl.)	d.d.l. (pres)	Eléments	d.d.l. (temp.)
raffinement (a)	130	742	80	171	121
raffinement (b)	400	1938	320	459	285
raffinement (c)	1420	6250	1280	1515	853

TABLEAU III.5 – Nombre d'éléments et de degrés de liberté des différentes discrétisations géométriques.

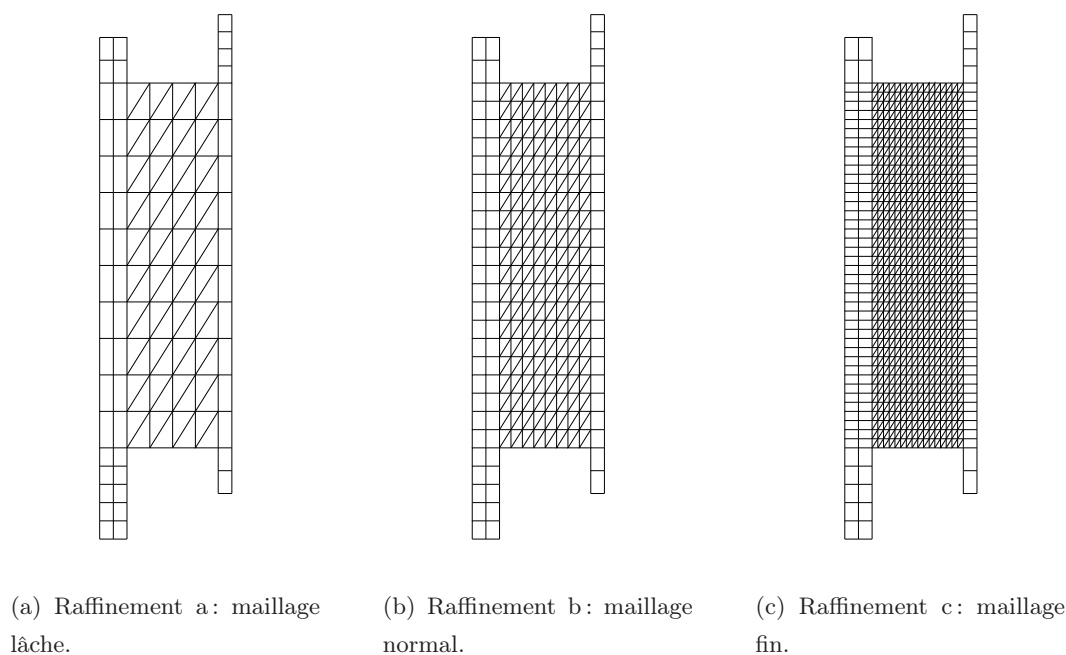


FIGURE III.15 – Différents raffinements testés.

Deux critères mécaniques et deux critères thermiques sont examinés :

- la quantité  $\frac{p-p_0}{p_0}$  au centre de l'élastomère, où  $p$  est la contrainte due à l'incompressibilité (cf (I.116) et  $p_0$  sa valeur analytique dans le cas d'un cisaillement homogène,
- le maximum de la valeur absolue de la réaction au cours de l'essai,
- le rapport des moyennes spatiales de la dissipation intrinsèque et de la puissance des efforts intérieurs sur la couche d'élastomère modélisée,
- et enfin la température atteinte au centre de l'élastomère après 200 secondes.

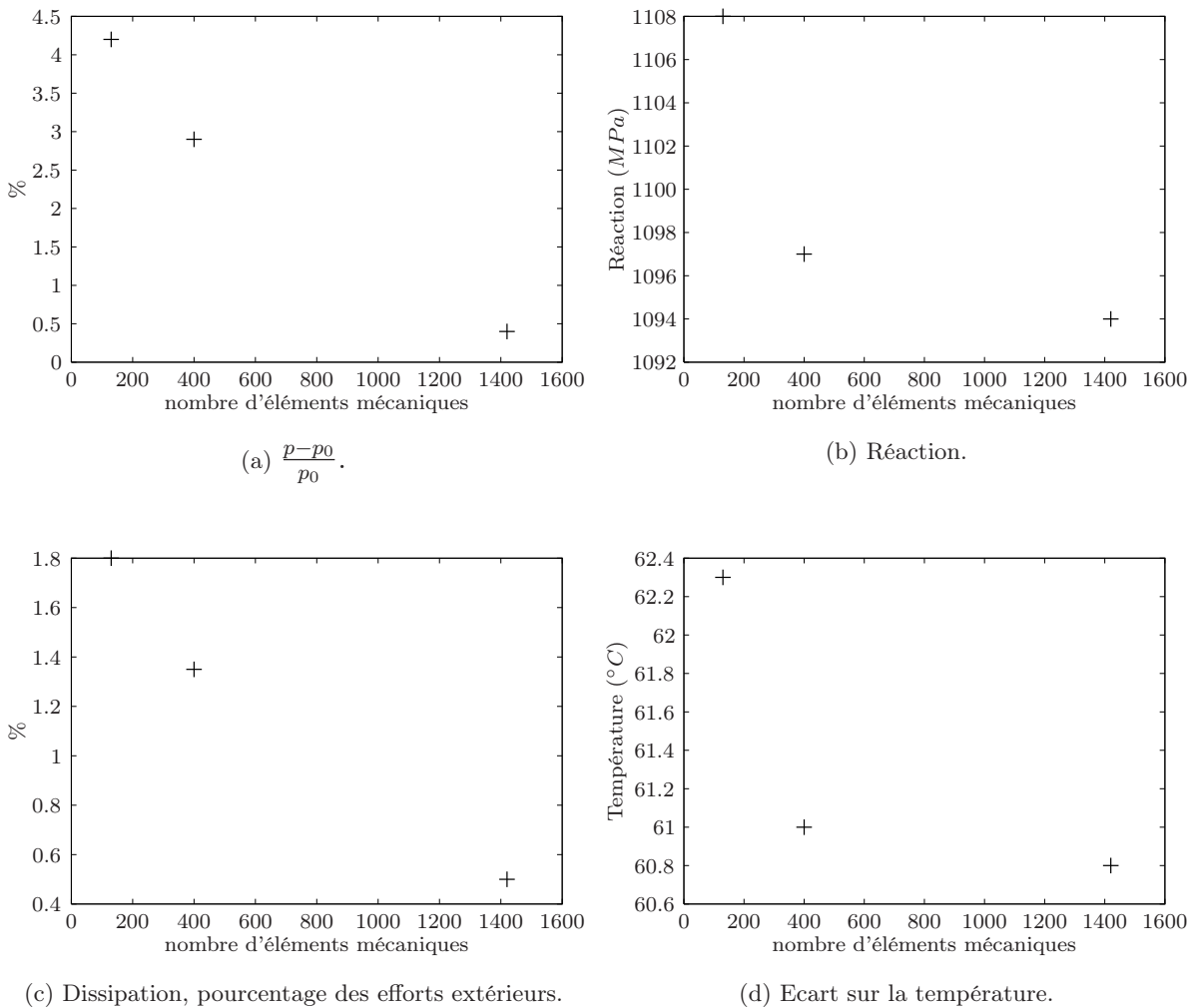


FIGURE III.16 – Influence du maillage.

Une convergence est constatée sur les 4 critères. Les graphiques en réactions et températures donnent des résultats stabilisés pour un raffinement de type b (cf. FIG. III.16), tandis que les autres semblent nécessiter un raffinement fin de type c. Cependant, ces deux critères présentent des écarts assez faibles quel que soit le type de discrétisation. Il est bien évident que pour

---

éviter tout problème, il faudrait adopter la discrétisation la plus fine, cependant le découpage géométrique  $b$  semble être un bon compromis entre temps de CPU et qualité des résultats. Pour cette raison, les études numériques présentées par la suite seront réalisées sur ce raffinement.



## III.6 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

### III.6.1 Essais de type 2<sup>(6)</sup>, température d'enceinte à 27°C

#### III.6.1.a Calcul préliminaire

L'ensemble des calculs présenté dans cette section, fait intervenir une discrétisation spatiale de type **b** (FIG. III.16) et TAB. III.5. Les couples de problèmes suivent la dernière répartition introduite § III.5.3.a. Les conditions aux limites et les problèmes à traiter sont décrits FIG. III.12.

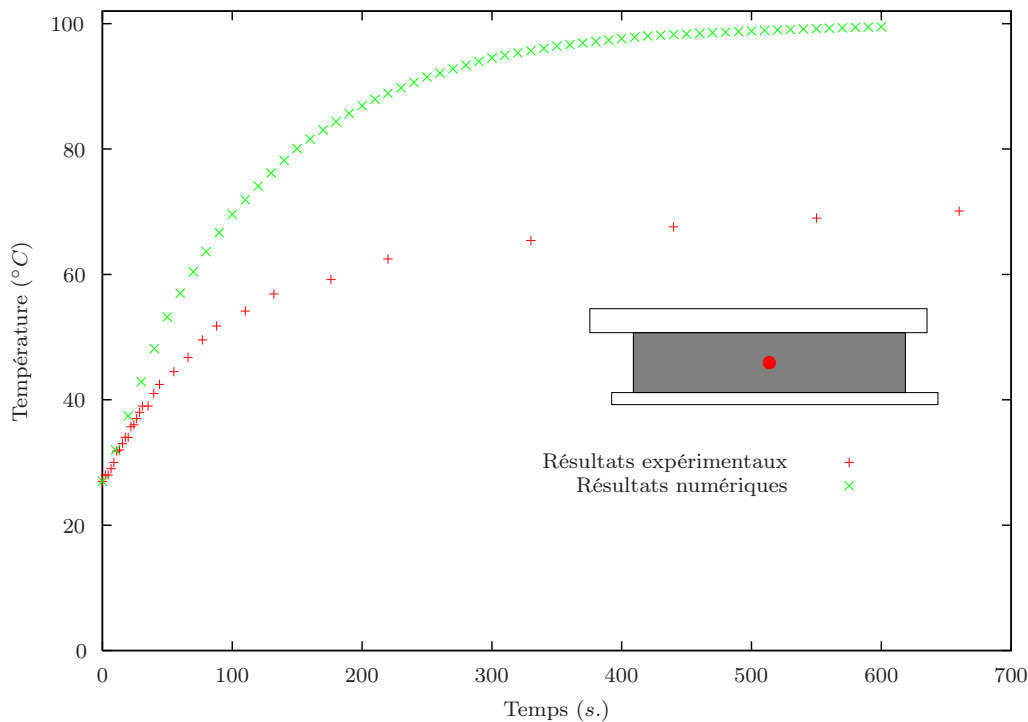


FIGURE III.17 – Essai de type 2, Température d'enceinte = 27°C. Evolution de la température au centre de l'élastomère. Comparaison des résultats expérimentaux et numérique.

Une description de l'évolution numérique et expérimentale au centre d'une des deux couches d'élastomère est donnée FIG. III.17. Malgré une allure de courbe assez physique (*i.e.* une évolution rapide en début d'essai puis une stabilisation asymptotique cohérente en temps), la constatation principale est que l'évolution numérique de la température est nettement surévaluée par rapport à la température expérimentale. Ceci témoigne sans doute d'un apport volumique de chaleur trop important. Deux hypothèses peuvent être avancées :

- une hypothèse purement numérique : le modèle mécanique de par ses fondements théoriques et numériques, dissipe trop,

---

(6). voir § III.2

- et une hypothèse plus "physique" : la prise en compte de la dissipation intrinsèque complète comme terme de source est erronée, c'est-à-dire qu'une partie de cette énergie est stockée par le biais de phénomènes tels que le réarrangement des macro-molécules ou l'endommagement.

### III.6.1.b Recalage du modèle

Dans ce paragraphe on se propose de recaler le modèle présenté ci-dessus de façon à obtenir une température asymptotique numérique au centre de l'élastomère égale à celle obtenue expérimentalement.

On rappelle l'équation de la chaleur dans le cas où seul un terme source volumique de type mécanique est pris en compte :

$$\rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \operatorname{div}_X \vec{Q} = \bar{\phi}_0^{int}. \quad (\text{III.19})$$

Sur la partie asymptotique de la courbe, il est possible de considérer :

$$\dot{T} = 0, \quad (\text{III.20})$$

si bien que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_X \vec{Q} &= \bar{\phi}_0^{int} \\ -\operatorname{div}_X \left( \bar{\bar{K}}_L \cdot \operatorname{grad}_X T \right) &= \bar{\phi}_0^{int} \text{ d'après la loi de FOURIER (III.11)} \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

en notant  $\alpha$  le rapport entre les températures expérimentale ( $T^{exp}$ ) et numériques ( $T^{num}$ ) au centre de la couche de l'élastomère

$$\alpha = \boxed{\frac{T^{exp}}{T^{num}} = \frac{70.1}{99.51} = 0.704} \quad (\text{III.22})$$

Or  $T^{num}$  est solution de (III.21) au centre de l'élastomère et sur la partie asymptotique de l'évolution :

$$-\operatorname{div}_X \left( \bar{\bar{K}}_L \cdot \operatorname{grad}_X T^{num} \right) = \bar{\phi}_0^{int}. \quad (\text{III.23})$$

Soit en remplaçant  $T^{num}$  par  $\frac{T^{exp}}{\alpha}$  dans (III.23) :

$$-\operatorname{div}_X \left( \bar{\bar{K}}_L \cdot \operatorname{grad}_X T^{exp} \right) = \alpha \bar{\phi}_0^{int}. \quad (\text{III.24})$$

Le recalage du modèle passe donc par la prise en compte de 70.4% de la dissipation comme terme source volumique dans l'équation de la chaleur.

Les conséquences de cette correction ne peuvent, a priori, être anticipées en d'autres points que le coeur de la couche d'élastomère et ce, sur la partie asymptotique de l'évolution.

## III.6.1.c Essais de type 2 sur le modèle recalé, température d'enceinte à 27°C

Le calcul présenté dans ce paragraphe est identique à celui présenté § III.6.1, mais en considérant seulement 70.4% de la dissipation intrinsèque comme terme source. Les figures FIG. III.18

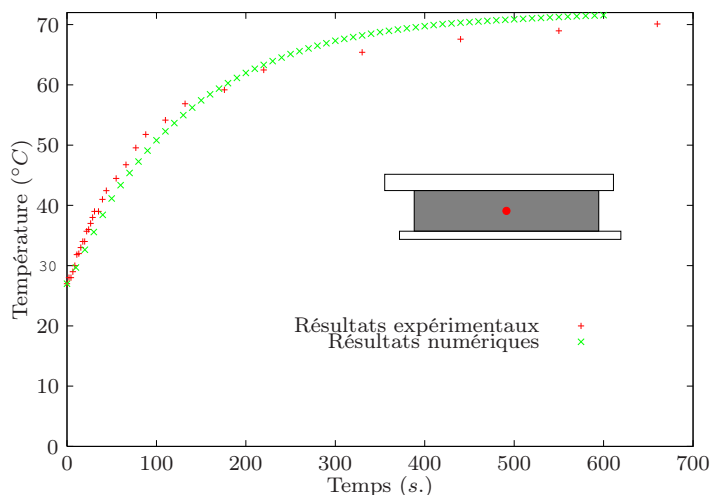


FIGURE III.18 – Essai de type 2, Température d'enceinte = 27°C. Evolution de la température au centre de l'élastomère. Comparaison des résultats expérimentale et numérique ( $\alpha = 0.704$ ).

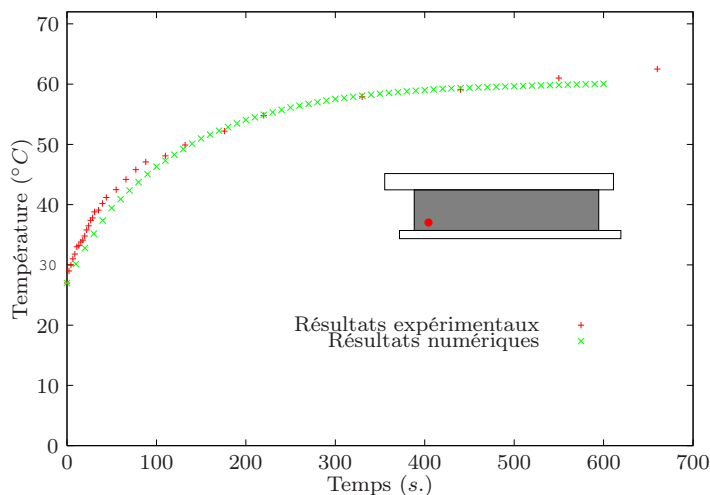


FIGURE III.19 – Essai de type 2, Température d'enceinte = 27°C. Evolution de la température au thermocouple b. Comparaison des résultats expérimentale et numérique ( $\alpha = 0.704$ ).

et FIG. III.19 représentent les évolutions de température respectivement au centre (thermocouple d) et en coin (thermocouple b). Comme attendu, on constate pour le thermocouple central, un comportement asymptotique correct. On obtient de plus, une bonne corrélation en début d'essai. Les résultats au thermocouple b recourent de manière correcte les résultats expérimentaux.

D'autre part, on constate FIG. III.20 que le modèle donne en début d'essai une température

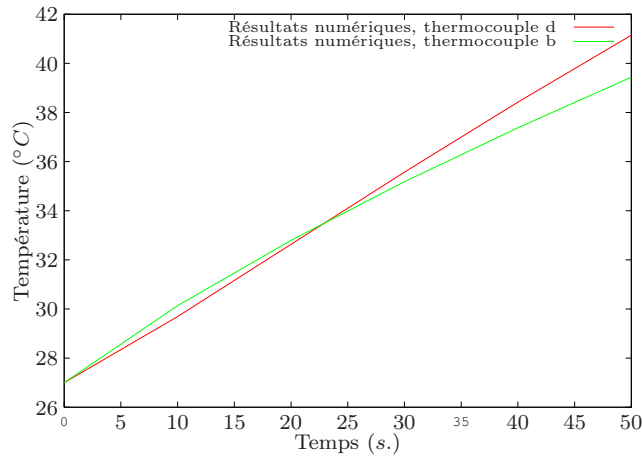


FIGURE III.20 – Essai de type 2, Température d'enceinte = 27°C. Comparaison des évolution numérique ( $\alpha = 0.704$ ) de la température au thermocouple b et d.

supérieure au thermocouple b. On rappelle que ce phénomène est expérimentalement constaté. Ceci est observé de manière plus visuelle sur le champ de température à  $t = 10s$ . (FIG. III.21(a)) avec l'apparition de deux zones de température élevée réparties de part et d'autre du centre et résultant d'une prédominance des effets mécaniques. Puis peu à peu la répartition tend vers la solution stabilisée classiquement obtenue par un calcul purement thermique en considérant un terme source constant et uniforme.

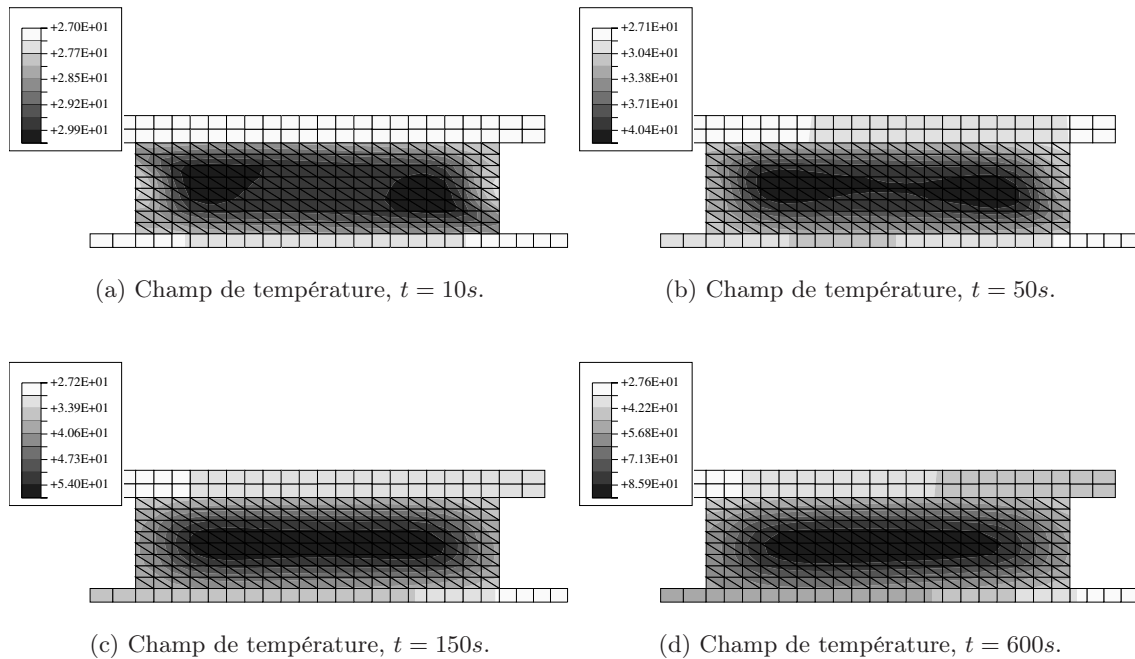


FIGURE III.21 – Evolution du champ de température.

III.6.1.d Essais de type 2 sur le modèle recalé, température d'enceinte à  $60^{\circ}\text{C}$ 

L'essai précédent est repris en considérant une température d'enceinte de  $60^{\circ}\text{C}$ . On applique le même coefficient de recalage (*i.e.*  $\alpha = 0.704$ ). On constate une bonne corrélation temporelle et spatiale des résultats numériques et expérimentaux.

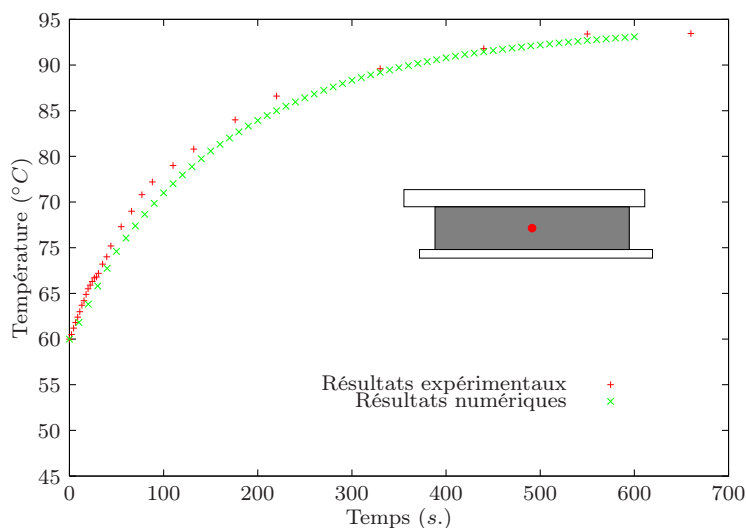


FIGURE III.22 – Essai de type 2, Température d'enceinte =  $60^{\circ}\text{C}$ . Evolution de la température au centre de l'élastomère. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques ( $\alpha = 0.704$ ).

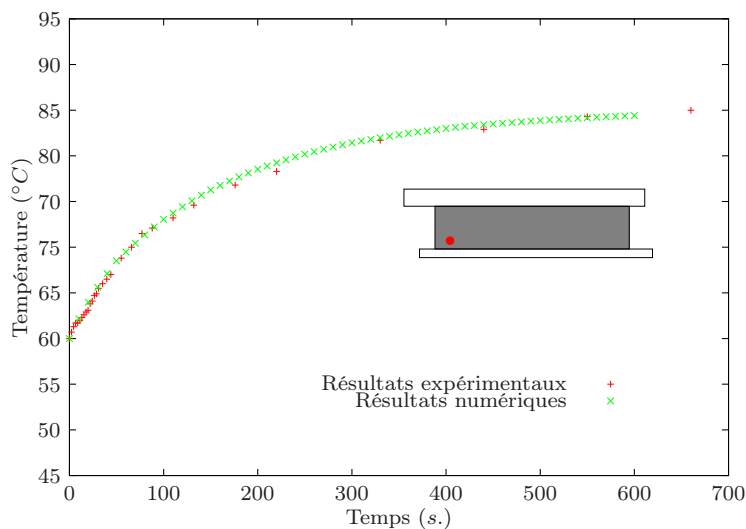


FIGURE III.23 – Essai de type 2, Température d'enceinte =  $60^{\circ}\text{C}$ . Evolution de la température au thermocouple b. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques ( $\alpha = 0.704$ ).



### III.7 Conclusion

Après la présentation des résultats expérimentaux à notre disposition, la mise en place d'une formulation thermo-mécanique est présentée. Elle se base sur le cadre thermodynamique du chapitre I, à savoir l'écriture des différentes équations pour un matériau à  $n$  configurations intermédiaires, chacune des transformations étant considérée incompressible. On rajoute aux différentes équations obtenues dans ce cadre, l'équation de la chaleur qui permet, d'une part, de complètement définir les équations constitutives du modèle et, d'autre part, de mettre en évidence les différents termes du couplage.

Le modèle est alors particularisé. Sur le plan mécanique, par analogie au chapitre II, un unique état intermédiaire de type visqueux est pris en considération. Sur le plan thermique une écriture lagrangienne de la loi de FOURIER est adoptée. La mise en oeuvre de ces équations passe alors par la résolution séparée et alternative par la méthode des éléments finis de problèmes mécaniques dont les caractéristiques sont considérées dépendantes de la température et de problèmes thermiques résolus sur une géométrie déformée et pour lesquels la dissipation intrinsèque est traitée comme une source volumique de chaleur.

Le cas particulier d'une sollicitation mécanique cyclique est étudié dans un souci de gain de temps de calcul pour la modélisation d'essais sur de longues périodes. La périodicité de la sollicitation conduit à une simplification du problème thermo-mécanique qui est encore vu comme la succession de couples de problèmes mécanique et thermique mais le premier étant mené jusqu'à stabilisation de la dissipation intrinsèque et le deuxième étant résolu sur la géométrie initiale, en considérant comme terme source la moyenne temporelle de la dissipation plutôt que sa valeur instantanée. Cette méthode est numériquement validée.

Une première comparaison des évolutions thermiques numérique et expérimentale met en évidence une surévaluation de la contribution mécanique. Ce phénomène peut traduire l'approche simpliste consistant à considérer que toute la dissipation mécanique est transformée en chaleur, ignorant ainsi les phénomènes d'endommagement et/ou de réorganisation moléculaire responsables d'un stockage d'énergie mécanique. Un calcul de recalage, en un point de l'éprouvette à une température d'enceinte donnée et sur la partie asymptotique de l'évolution thermique, permet la détermination d'un taux de transfert de la dissipation mécanique. On obtient alors, sur ce même essai, une cohérence numérique et expérimentale sur la totalité de l'évolution et en plusieurs points de l'éprouvette. Une modélisation prenant en compte le même taux de transfert mais à une température d'enceinte différente donne des résultats satisfaisants.



## CHAPITRE IV

# Assemblage de structures une à une invariantes dans une direction

oOo

**C**e chapitre traite de la modélisation par la méthode des éléments finis d'un assemblage de structures invariantes dans une direction. On applique cette méthode au Bras Elastomérique, pièce développée par la Société EUROCOPTER. Les deux principales difficultés résident dans l'hétérogénéité de la pièce et dans la prise en compte d'une non-linéarité géométrique due à la force centrifuge.

Une combinaison de deux types de sous structuration est utilisée. La première est une sous structuration multi-niveaux [DELORME, 1997] et la seconde, une méthode classique de sous structuration [ESCAIG, 1992]. Cette étude permet d'obtenir la solution complète en déplacements, le champ de contraintes complet ainsi que l'amortissement global (par une méthode énergétique) de la structure.

oOo

## PLAN DU CHAPITRE IV

---

<b>IV.1 Introduction</b>	<b>129</b>
<b>IV.2 Méthodes de sous structuration</b>	<b>129</b>
IV.2.1 Méthode classique	130
IV.2.2 Méthode de sous structuration multi-niveaux	132
IV.2.2.a Introduction	132
IV.2.2.b Propriété des structures invariantes dans une direction	132
IV.2.2.c Calcul de la matrice de rigidité condensée aux extrémités d'une structure composée de $n$ structures identiques	134
IV.2.2.d Détermination de la solution complète sur la structure	135
IV.2.2.e Prise en compte des non linéarités géométriques dues à la force centrifuge	136
<b>IV.3 Assemblage de structures une à une invariantes par translation</b>	<b>137</b>
IV.3.1 Introduction	137
IV.3.2 Organisation des calculs	137
<b>IV.4 Modélisation du bras élastomérique</b>	<b>139</b>
IV.4.1 Présentation de la pièce et des cas de chargement étudiés	139
IV.4.2 Choix des sous structures et des discrétisations spatiales	140
IV.4.3 Résultats sur les différents cas de chargement	141
IV.4.3.a Dispositif expérimental	141
IV.4.3.b Force centrifuge	142
IV.4.3.c Traînée	149
IV.4.3.d Torsion	155
IV.4.4 Facteur de perte de la structure dans le cas d'un chargement de traînée	157
IV.4.4.a Introduction	157
IV.4.4.b Equations de la viscoélasticité (modèle rhéologique de KELVIN-VOIGT)	157
IV.4.4.c Régime harmonique	157
IV.4.4.d Caractérisation de l'amortissement	158
IV.4.4.e Facteur de perte du bras élastomérique sous chargement de traînée	159
<b>IV.5 Conclusion</b>	<b>161</b>

---

## IV.1 Introduction

Le Bras Elastomérique, ou encore E.F.B. <sup>(1)</sup>, est développé dans l'industrie aéronautique par la société EUROCOPTER. Il est composée d'une centaines de baguettes en composite (carbone unidirectionnel ou verre unidirectionnel) noyées dans différentes matrices et doit assurer la liaison entre le moyeu rotor et la pale d'un hélicoptère. Cette pièce remplace les trois articulations des moyeux classiques dans le but de diminuer les forces aérodynamiques ainsi que les coûts d'entretien.

Les écarts entre les différentes caractéristiques des matériaux constitutifs font qu'il apparaît de nombreux problèmes mécaniques tels que la fissuration, des concentrations de contraintes ou encore des problèmes de fatigue exigeant une connaissance précise de certains résultats mécaniques comme les champs de contraintes et de déplacements [AÉROSPATIALE, 1997]. On s'attache aussi à déterminer l'amortissement global de la pièce .

La détermination de grandeurs à la fois globales telles que l'amortissement, mais aussi locales comme la détermination précise d'une discontinuité ou d'une concentration du champ des contraintes obligent à une modélisation complète et fine de la pièce. Numériquement, le nombre insuffisant de baguettes et la trop grande hétérogénéité entre les différents matériaux rendent difficile et peu fiable un calcul par homogénéisation [DELORME, 1997]. On est donc amené à résoudre le problème 3D complet par la méthode des éléments finis et ce en tenant compte des non-linéarités géométriques imputables à la force centrifuge. Ce problème qui nécessite plusieurs millions de degrés de libertés, est résolu par la combinaison de différentes méthodes de sous structuration.

On présente, dans un premier temps, les deux différentes méthodes de sous structurations utilisées.

Puis est présenté l'algorithme mis en place de façon à combiner ces deux méthodes.

On étudie par la suite, trois cas de chargement rencontrés en condition de vol par le Bras Elastomérique.

Enfin, on détermine l'amortissement de la pièce sous une sollicitation de traînée.

## IV.2 Méthodes de sous structuration

Les techniques de sous structurations sont de plus en plus utilisées. Elles présentent en effet de nombreux avantages comme notamment :

- la préparation et la vérification des modèles de sous-structures indépendamment les uns des autres,
- la modification d'une sous structure indépendamment des autres,

---

(1). Elastomeric Flex Beam

- la possibilité de résoudre un problème présentant un nombre important de degrés de liberté en le ramenant à plusieurs calculs de tailles raisonnables,
- la minimisation de la préparation des données et du temps de calcul dans le cas de structures constituées de sous-ensembles identiques
- la compatibilité avec les résolutions parallèles.

### IV.2.1 Méthode classique<sup>(2)</sup>

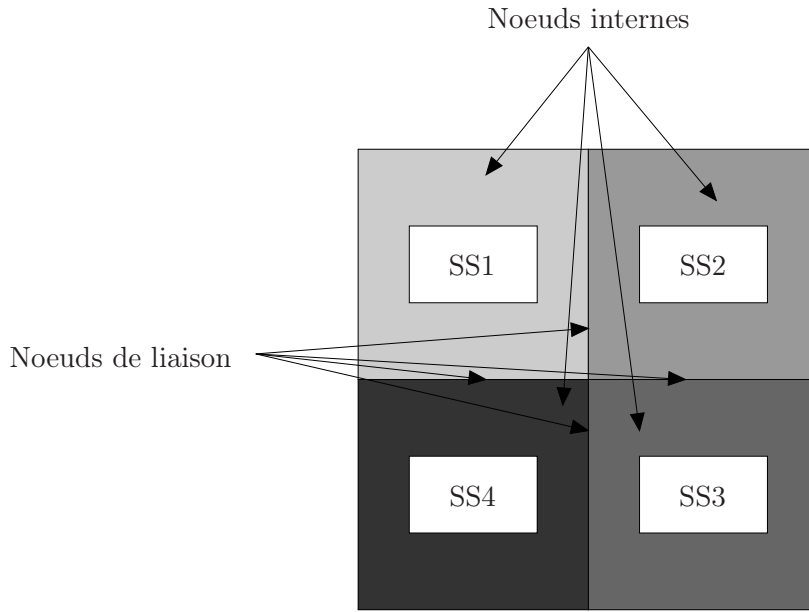


FIGURE IV.1 – Exemple de sous structures de niveau 1.

On se place dans le cas d'une d'une structure divisée en sous structures de niveau 1 (FIG. IV.1).

On distingue, pour chaque sous structure  $s$ , les degrés de liberté internes ( $\mathbf{q}_i^s$ ) et ceux de liaison ( $\mathbf{q}_j^s$ ). Le système classique d'équilibre peut dès lors être décomposé de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^s & \mathbf{K}_{ij}^s \\ \mathbf{K}_{ji}^s & \mathbf{K}_{jj}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^s \\ \mathbf{q}_j^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i^s \\ \mathbf{F}_j^s \end{Bmatrix}. \quad (\text{IV.1})$$

On définit alors la matrice de rigidité condensée et le vecteur second membre condensé, par :

$$\bar{\mathbf{K}}_{jj}^s = \mathbf{K}_{jj}^s - \mathbf{K}_{ji}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ij}^s, \quad (\text{IV.2})$$

$$\bar{\mathbf{F}}_j^s = \mathbf{F}_j^s - \mathbf{K}_{ji}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{F}_i^s, \quad (\text{IV.3})$$

(2). Voir [IMBERT, 1979 ; ESCAIG, 1992]

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}}_{jj}^s \mathbf{q}_j^s = \bar{\mathbf{F}}_j^s} \quad (\text{IV.4})$$

Si l'on note  $\bar{\mathbf{q}}_j$  les degrés de liberté de liaison de la structure complète, ils peuvent être reliés à  $(\mathbf{q}_j^s)$  par  $\beta^s$  la matrice de localisation de la sous structure  $s$  :

$$\mathbf{q}_j^s = \beta^s \bar{\mathbf{q}}_j. \quad (\text{IV.5})$$

L'assemblage des équations (IV.4) donne la matrice condensée globale et le vecteur second membre condensé global tels que :

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}}_{jj} \bar{\mathbf{q}}_j - \bar{\mathbf{F}}_j = \mathbf{0}} \quad (\text{IV.6})$$

et définis par :

$$\bar{\mathbf{K}}_{jj} = \sum_{s=1}^{N_s} \beta^{sT} \bar{\mathbf{K}}_{jj}^s \beta^s, \quad (\text{IV.7})$$

$$\bar{\mathbf{F}}_j = \sum_{s=1}^{N_s} \beta^{sT} \bar{\mathbf{F}}_j^s, \quad (\text{IV.8})$$

où  $N_s$  est le nombre de sous structures. On obtient alors la solution complète par :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_j^s = \beta^s \bar{\mathbf{q}}_j \\ \mathbf{q}_i^s = \Phi_{ij}^s \mathbf{q}_j^s + \mathbf{q}_{i0}^s \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

où

$$\begin{cases} \Phi_{ij}^s = -\mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ij}^s \\ \mathbf{q}_{i0}^s = \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{F}_i \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

L'algorithme peut être schématisé de la façon suivante :

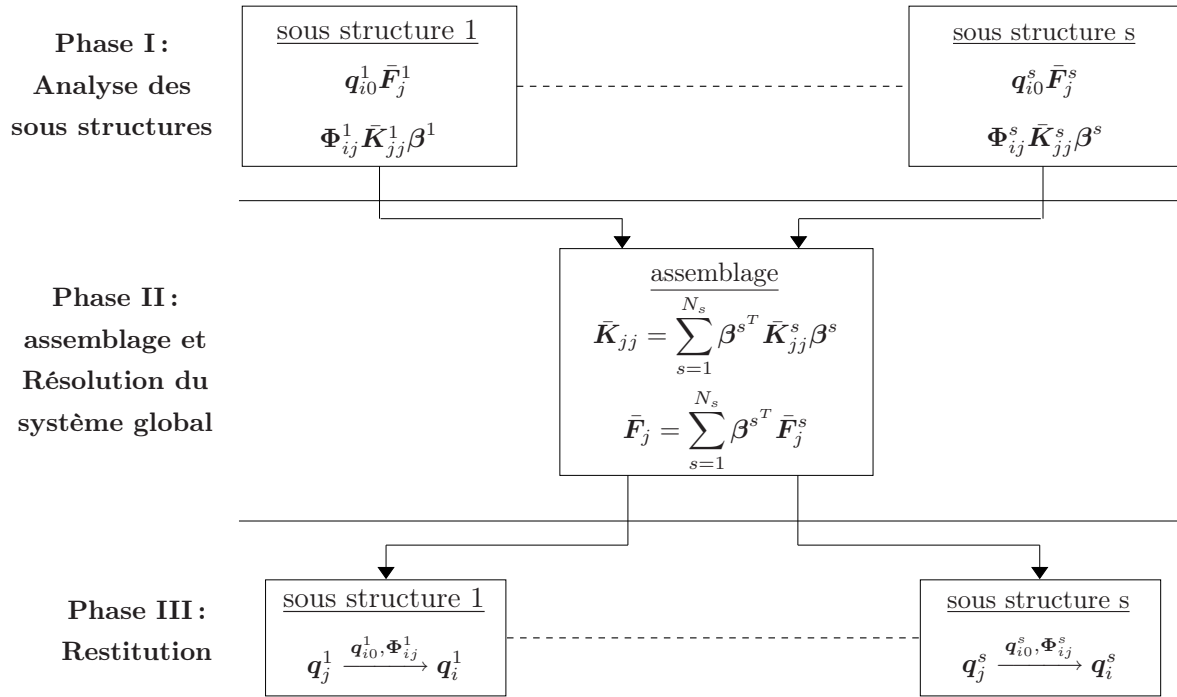


FIGURE IV.2 – Méthode de sous structuration classique.

## IV.2.2 Méthode de sous structuration multi-niveau

### IV.2.2.a Introduction

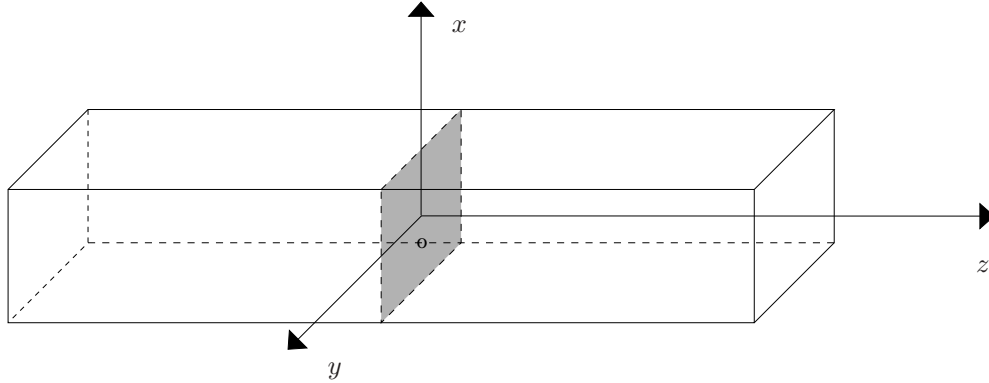
Cette méthode, développée par DELORME [1997], peut être appliquée à toute structure invariante dans une direction. L'idée générale est d'assembler deux couches identiques d'éléments et d'éliminer les noeuds milieux. la première couche ayant un seul élément dans la direction d'invariance et étant de longueur  $L_0$ , après  $n$  pas de cette méthode, on obtient la matrice de rigidité, condensée aux extrémités, d'une structure de longueur  $2^n L_0$  et composée de  $2^n$  éléments dans suivant l'axe d'invariance (voir FIG. IV.4).

### IV.2.2.b Propriété des structures invariantes dans une direction

#### HYPOTHÈSE IV.1

- Seules des structures possédant une propriété d'invariance dans la direction  $z$  sont prises en compte,
- on considère le plan  $(O, x, y)$  comme un plan de symétrie de la structure,
- le comportement est considéré élastique linéaire (cf remarques I.3 et I.5),

Les degrés de libertés d'une telle structure son associés à des points géométriques appelés noeuds et répartis de manière symétrique par rapport au plan  $(O, x, y)$ . Les d.d.l. mesurés suivant la

FIGURE IV.3 – Structure invariante suivant la direction  $z$  et symétrique par rapport à  $(O, x, y)$ .

direction  $z$  sont affectés de l'exposant " $z$ ", ceux associés à  $x$  et  $y$  sont indifféremment affectés de l'exposant " $p$ ". On différencie enfin les degrés de liberté situés à droite ( $z \geq 0$ ) et à gauche ( $z \leq 0$ ) du plan de symétrie par respectivement " $d$ " et " $g$ ". Les mêmes notations sont adoptées pour les forces nodales. Ainsi, si  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur de la structure,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{u}$  respectivement ses vecteurs forces nodales et degrés de liberté, on a :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{gz} \\ \mathbf{F}^{gp} \\ \mathbf{F}^{dz} \\ \mathbf{F}^{dp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{gzgz} & \mathbf{K}^{gzgp} & \mathbf{K}^{gzdz} & \mathbf{K}^{gzdp} \\ \text{sym.} & \mathbf{K}^{gppp} & \mathbf{K}^{gpdz} & \mathbf{K}^{gppd} \\ \text{sym.} & \text{sym.} & \mathbf{K}^{dzdz} & \mathbf{K}^{dzdp} \\ \text{sym.} & \text{sym.} & \text{sym.} & \mathbf{K}^{dppd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{gz} \\ \mathbf{u}^{gp} \\ \mathbf{u}^{dz} \\ \mathbf{u}^{dp} \end{Bmatrix}. \quad (\text{IV.11})$$

On montre sous les hypothèses  $\mathcal{H}$ . IV.1 que les sous matrices de  $\mathbf{K}$  vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{dzdz} &= \mathbf{K}^{gzgz} & \mathbf{K}^{dzdp} &= \mathbf{K}^{gzgp} \\ \mathbf{K}^{gzdz} &= \mathbf{K}^{gzdz}^T & \mathbf{K}^{gzdp} &= -\mathbf{K}^{gpdz}^T \\ \mathbf{K}^{dzdp} &= -\mathbf{K}^{gzdp} & \mathbf{K}^{dppd} &= \mathbf{K}^{gppd} \\ \mathbf{K}^{gpdz} &= -\mathbf{K}^{gzdp}^T & \mathbf{K}^{gppd} &= \mathbf{K}^{gzdp}^T \end{aligned} \quad \text{et} \quad (\text{IV.12})$$

Si bien que  $\mathbf{K}$  se met sous la forme :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^g & \mathbf{S}^{gd} \\ \mathbf{S}^{gd} & \mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^g & \mathbf{Q}^{gd} \\ -\mathbf{Q}^{gd} & -\mathbf{Q}^g \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.13})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^g &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{gzgz} & \mathbf{0}_{n,2n} \\ \mathbf{0}_{2n,n} & \mathbf{K}^{gppp} \end{bmatrix} & \mathbf{S}^{gd} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{gzdz} & \mathbf{0}_{n,2n} \\ \mathbf{0}_{n,2n} & \mathbf{K}^{gppd} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}^g &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,2n} & \mathbf{K}^{gzgp} \\ \mathbf{K}^{gzgp}^T & \mathbf{0}_{n,2n} \end{bmatrix} & \mathbf{G}^{gd} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,2n} & \mathbf{K}^{gzdp} \\ -\mathbf{K}^{gzdp}^T & \mathbf{0}_{n,2n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De plus, la symétrie de  $\mathbf{K}$  permet d'obtenir la symétrie de  $\mathbf{S}^g$ ,  $\mathbf{S}^{gd}$  et  $\mathbf{Q}^g$ , ainsi que l'antisymétrie de  $\mathbf{Q}^{gd}$ .

#### IV.2.2.c Calcul de la matrice de rigidité condensée aux extrémités d'une structure composée de $n$ structures identiques

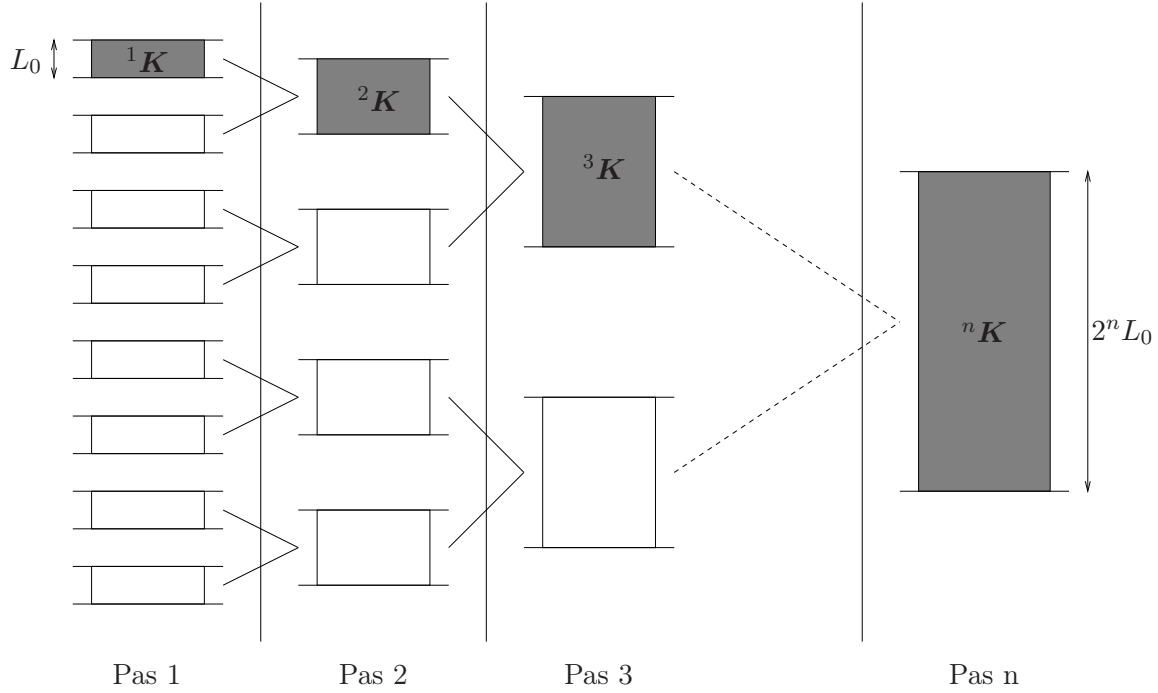


FIGURE IV.4 – Méthode de sous structuration multi-niveaux.

On veut maintenant calculer la matrice de rigidité condensée aux extrémités d'une structure invariante dans une direction. Comme, il a été dit en introduction, on assemble deux couches identiques, comportant un seul élément suivant l'axe d'invariance, puis on élimine par condensation statique les noeuds milieux. La matrice de rigidité de ces deux couches d'éléments est notée  ${}^0\mathbf{K}$ . Les deux entités vérifiant l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . IV.1,  ${}^0\mathbf{K}$  prend la forme :

$${}^0\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{S}^g & {}^0\mathbf{S}^{gd} \\ {}^0\mathbf{S}^{gd} & {}^0\mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{Q}^g & {}^0\mathbf{Q}^{gd} \\ -{}^0\mathbf{Q}^{gd} & -{}^0\mathbf{Q}^g \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.14})$$

La matrice de rigidité  ${}^1\mathbf{H}$  qui résulte de l'assemblage de ces deux couches est définie par :

$${}^1\mathbf{H} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{S}^g & {}^1\mathbf{S}^{gd} & \mathbf{o}_{3n,3n} \\ {}^1\mathbf{S}^{gd} & {}^2\mathbf{S}^g & {}^1\mathbf{S}^{gd} \\ \mathbf{o}_{3n,3n} & {}^1\mathbf{S}^{gd} & {}^1\mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{Q}^g & {}^1\mathbf{S}^{gd} & \mathbf{o}_{3n,3n} \\ -{}^1\mathbf{S}^{gd} & \mathbf{o}_{3n,3n} & {}^1\mathbf{S}^{gd} \\ \mathbf{o}_{3n,3n} & -{}^1\mathbf{S}^{gd} & -{}^1\mathbf{S}^g \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

On élimine alors les noeuds milieux (FIG. IV.4, pas 1),  ${}^1\mathbf{K}$  la matrice condensée ainsi obtenue se met sous la forme :

$${}^1\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{S}^g & {}^1\mathbf{S}^{gd} \\ {}^1\mathbf{S}^{gd} & {}^1\mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{Q}^g & {}^1\mathbf{Q}^{gd} \\ -{}^1\mathbf{Q}^{gd} & -{}^1\mathbf{Q}^g \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.16})$$

avec

$${}^1\mathbf{S}^g = {}^0\mathbf{S}^g - \frac{1}{2} {}^0\mathbf{S}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{S}^{gd} - {}^0\mathbf{Q}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.17a})$$

$${}^1\mathbf{Q}^g = {}^0\mathbf{Q}^g - \frac{1}{2} {}^0\mathbf{Q}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{S}^{gd} - {}^0\mathbf{S}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.17b})$$

$${}^1\mathbf{S}^{gd} = -\frac{1}{2} {}^0\mathbf{S}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{S}^{gd} - {}^0\mathbf{Q}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.17c})$$

$${}^1\mathbf{Q}^{gd} = -\frac{1}{2} {}^0\mathbf{Q}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{S}^{gd} - {}^0\mathbf{S}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.17d})$$

On montre par récurrence qu'il est possible de mettre  ${}^i\mathbf{K}$ , la matrice de rigidité condensée aux extrémités après  $i$  pas (*i.e.* la matrice de rigidité condensée aux extrémités d'une structure de longueur  $2^i$  fois la longueur de la couche initiale) sous la forme :

$${}^i\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{S}^g & {}^i\mathbf{S}^{gd} \\ {}^i\mathbf{S}^{gd} & {}^i\mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{Q}^g & {}^i\mathbf{Q}^{gd} \\ -{}^i\mathbf{Q}^{gd} & -{}^i\mathbf{Q}^g \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

avec

$${}^i\mathbf{S}^g = {}^{i-1}\mathbf{S}^g - \frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} - {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.19a})$$

$${}^i\mathbf{Q}^g = {}^{i-1}\mathbf{Q}^g - \frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} - {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.19b})$$

$${}^i\mathbf{S}^{gd} = -\frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} - {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.19c})$$

$${}^i\mathbf{Q}^{gd} = -\frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} - {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.19d})$$

On peut donc considérer qu'après  $n$  pas de sous structuration multi-niveaux, on est en présence d'un "super-élément" au sens de [ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 1991] ayant pour longueur  $2^n L_0$  – si  $L_0$  est la longueur de la sous structure génératrice (cf FIG. IV.4) – et dont la matrice de rigidité est  ${}^n\mathbf{K}$  ; ses seuls noeuds se situant aux extrémités.

#### IV.2.2.d Détermination de la solution complète sur la structure

L'obtention de la solution complète s'obtient de manière récursive (FIG. IV.5) à partir de la solution sur le super-élément, c'est à dire aux extrémités de la structure. En effet, on remarque que si l'on connaît  $({}^i\mathbf{u}_g, {}^i\mathbf{u}_d)$ , les déplacements aux extrémités du tronçon de l'étape  $i$  (FIG. IV.5), il est possible par la relation (IV.20) d'accéder aux déplacements des noeuds localisés sur le plan de symétrie de ce même tronçon, ces déplacements devenant à leur tour les déplacements extrêmes des tronçons de l'étape  $i - 1$ .

$$\boxed{{}^i\mathbf{u}_m = \frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{S}^g \left( (-{}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} + {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd}) {}^i\mathbf{u}_d - ({}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} + {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd}) {}^i\mathbf{u}_g \right)} \quad (\text{IV.20})$$

Cette étape de restitution nécessite le stockage des  $n$  matrices  ${}^i\mathbf{K}$ .

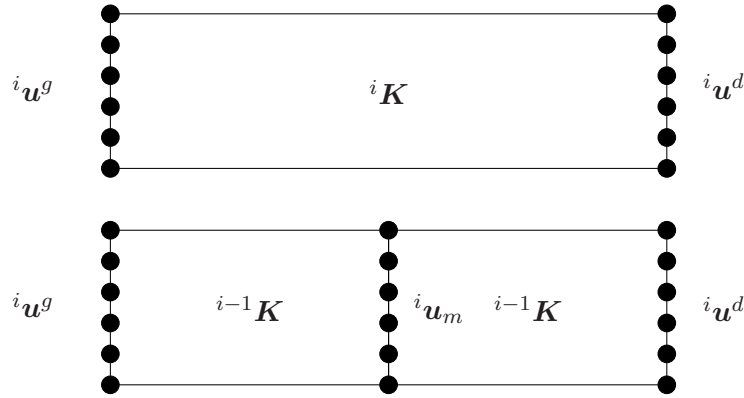


FIGURE IV.5 – Dédution des degrés de liberté milieux.

#### IV.2.2.e Prise en compte des non linéarités géométriques dues à la force centrifuge

En accord avec ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1991] on décompose  ${}^i\mathbf{K}$  de la manière suivante :

$${}^i\mathbf{K} = {}^i\mathbf{K}_0 + {}^i\mathbf{K}_\sigma + {}^i\mathbf{K}_L \quad (\text{IV.21})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^i\mathbf{K}_0, \text{ la matrice de rigidité classique en petits déplacements,} \\ {}^i\mathbf{K}_\sigma, \text{ une matrice symétrique dépendant des pré-contraintes,} \\ {}^i\mathbf{K}_L, \text{ la matrice résultant des grandes déformations.} \end{array} \right. \quad (\text{IV.22})$$

Si les déplacements sont suffisamment petits (hypothèse vérifiée a posteriori),  ${}^i\mathbf{K}_L$  peut être négligée. La force centrifuge considérée comme une pré-contrainte, est prise en compte dans  ${}^i\mathbf{K}_\sigma$ . DELORME [1997] démontre que  ${}^i\mathbf{K}_\sigma$  admet une décomposition analogue à  ${}^i\mathbf{K}_0$ , *i.e.* :

$${}^i\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{S}_\sigma^g & {}^i\mathbf{S}_\sigma^{gd} \\ {}^i\mathbf{S}_\sigma^{gd} & {}^i\mathbf{S}_\sigma^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{Q}_\sigma^g & {}^i\mathbf{Q}_\sigma^{gd} \\ {}^i-\mathbf{Q}_\sigma^{gd} & {}^i-\mathbf{Q}_\sigma^g \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

La prise en compte de la non-linéarité géométrique ne modifie donc pas la méthode précédemment exposée.

## IV.3 Assemblage de structures une à une invariante par translation

### IV.3.1 Introduction

On traite maintenant le cas d'une structure pouvant être vue comme un assemblage de  $s$  sous structures, chacune de ces entités étant invariante par une translation de même direction (l'axe  $z$ ).

L'idée est ici de remplacer ces sous structures par leur super-élément équivalent obtenu par la méthode de sous structuration multi-niveau présentée § IV.2.2. La structure complète est alors vue comme un assemblage de super-éléments sur lesquels, il est alors possible d'appliquer la méthode de sous structuration classique décrite § IV.2.1.

### IV.3.2 Organisation des calculs

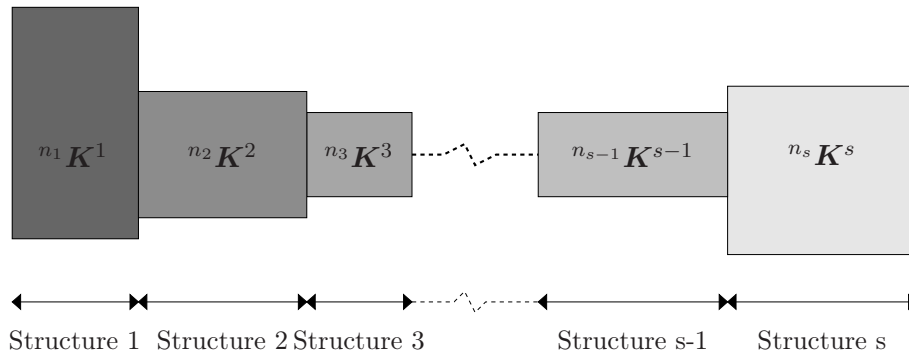


FIGURE IV.6 – Structure composée de  $s$  structures une à une invariante dans une direction.

L'organisation des calculs s'articule autour de cinq étapes. La première et la dernière correspondent aux deux étapes de la sous structuration multi-niveau et les trois autres se rapportent aux 3 étapes d'une sous structuration classique. De manière plus détaillée :

1. On détermine les  $s$  matrices de rigidité  $n_k \mathbf{K}^k$  ( $k \in 1 \dots s$ ) condensées aux extrémités de chacune des  $s$  structures, en accord avec les notations de (IV.18), on a :

$$n_k \mathbf{K}^k = \begin{bmatrix} n_k \mathbf{S}g^k & n_k \mathbf{S}gd^k \\ n_k \mathbf{S}gd^k & n_k \mathbf{S}g^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_k \mathbf{Q}g^k & n_k \mathbf{Q}gd^k \\ -n_k \mathbf{Q}gd^k & -n_k \mathbf{Q}g^k \end{bmatrix} \quad k \in \{1 \dots s\}, \quad (\text{IV.24})$$

avec  $n_k$  est le nombre de pas de la méthode multi-niveau utilisé pour la  $k$ -ième sous structure.

2. On détermine les différentes grandeurs condensées à la frontière des super-éléments, que l'on a préalablement déterminée.

$$n_k \bar{\mathbf{K}}_{jj}^s, n_k \bar{\mathbf{F}}_{jj}^s \quad k \in \{1 \dots s\}. \quad (\text{IV.25})$$

3. On assemble les différentes grandeurs condensées après avoir déterminé les matrices de localisation.
4. on résoud afin d'obtenir la solution à la frontière ( ${}^{ns}\bar{\mathbf{u}}_s^j$ ), ce qui permet par le biais des équation (IV.9) et (IV.10) la déduction de la solution sur les  $s$  super-éléments.
5. Enfin, on obtient les déplacements sur l'ensemble des couches de chaque sous structure (c'est-à-dire sur l'intégralité de la structure) grâce à la restitution récursive détaillée par l'équation (IV.20).

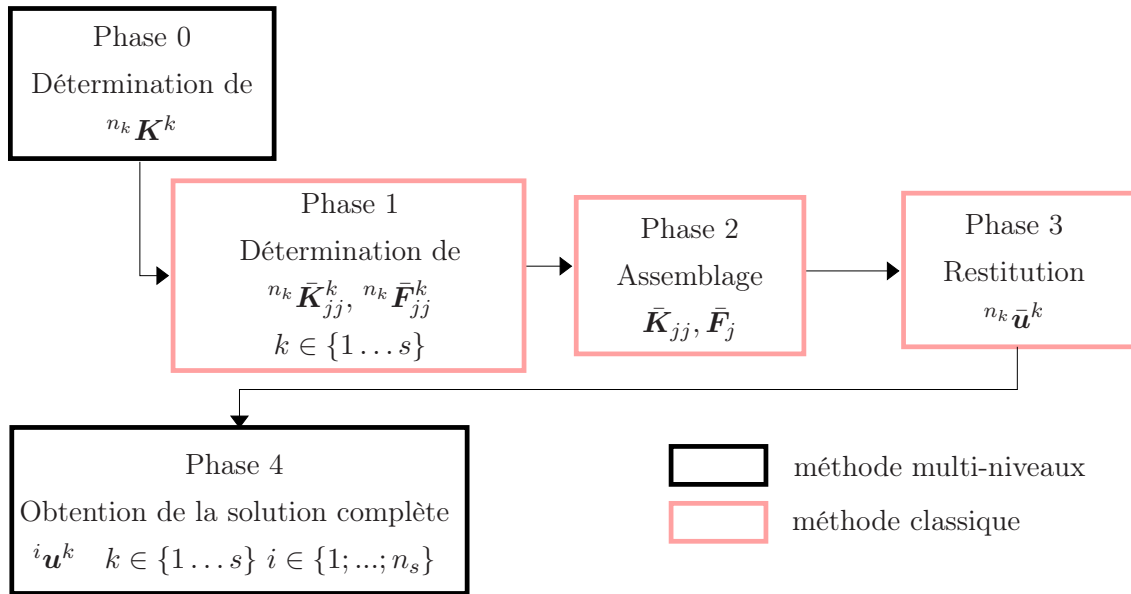


FIGURE IV.7 – Combinaison des méthodes de sous structuration.

## IV.4 Modélisation du bras élastomérique

### IV.4.1 Présentation de la pièce et des cas de chargement étudiés

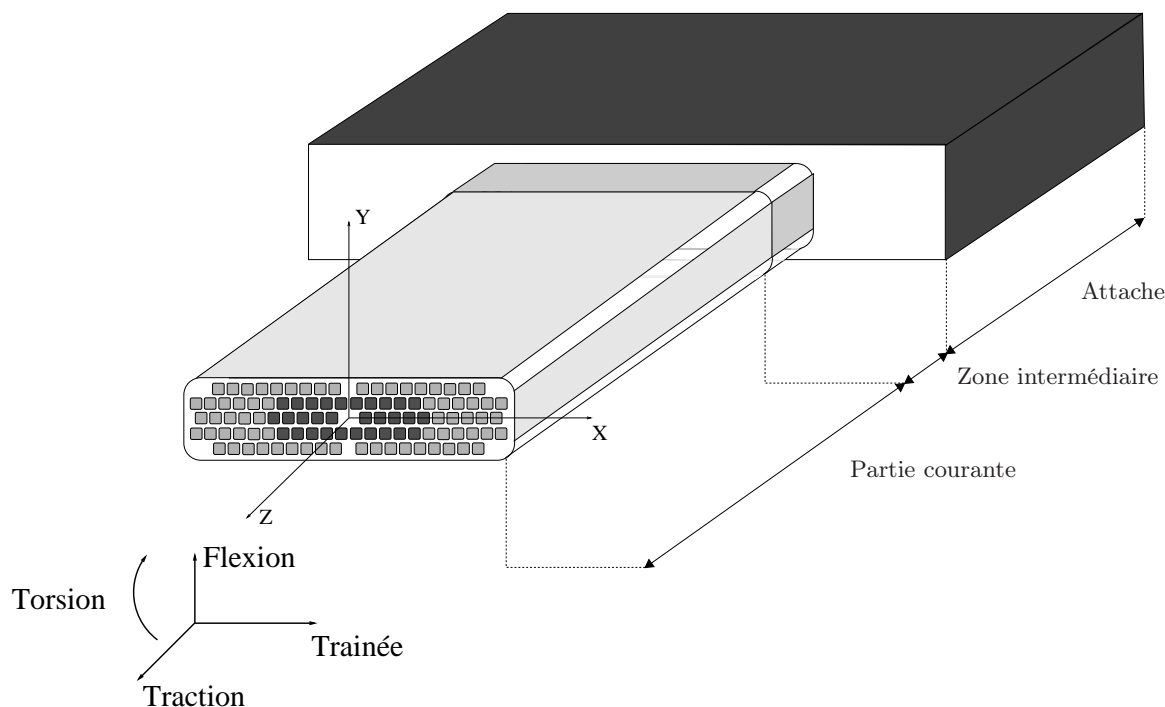


FIGURE IV.8 – *Bras élastomérique et chargements.*

Le bras élastomérique est composé de 70 baguettes en verre unidirectionnel et de 28 baguettes en carbone unidirectionnel. Ces baguettes sont noyées dans trois matrices différentes permettant de distinguer trois entités :

- l'**attache** dont la matrice est un assemblage de couches d'élastomère et de verre unidirectionnel (voir FIG. IV.9),
- la **zone intermédiaire** qui possède une matrice en élastomère,
- et la **partie courante** dont la matrice est aussi en élastomère. Ce dernier est cependant plus souple que celui utilisé dans la zone intermédiaire.

Ces deux dernières zones définissent la partie torsible du bras.

Trois cas de sollicitation sont étudiés dans la suite de ce paragraphe :

- un chargement de **traction**, simulant uniquement les efforts centrifuges,
- un chargement de **trainée** sous force centrifuge,
- et un cas de **torsion** sous force centrifuge

Ces chargements sont illustrés FIG. IV.8.

**Avertissement :** pour des raisons de confidentialité, aucune dimension n'est reportée dans le présent chapitre. Pour les mêmes raisons, les graphiques et courbes présentés sont adimensionnés.

#### IV.4.2 Choix des sous structures et des discrétisations spatiales

On constate FIG. IV.8 que les trois entités définissant le bras, sont une à une invariante (géométriquement et matériellement) dans la direction  $z$ . Il est donc possible d'appliquer l'algorithme présenté § IV.3.

Afin de bien cerner les différents phénomènes, des maillages fins sont adoptés pour les trois différentes parties du bras. La figure FIG. IV.9 décrit les sections de maillages adoptés pour la zone torsible (partie courante et la zone intermédiaire) et pour l'attache.

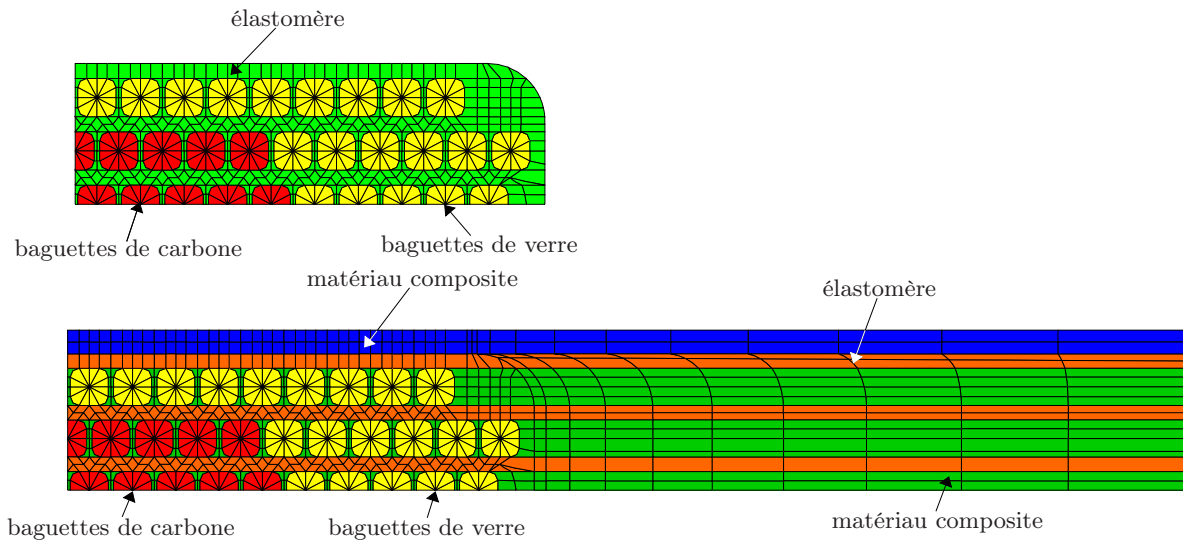


FIGURE IV.9 – Sections des maillages adoptés pour la partie courante et l'attache.

Les chargements précédemment décrits en introduction pouvant être décomposés en parties symétrique et antisymétrique, l'étude est réduite à un quart de structure et ce en utilisant des conditions limites appropriées. On adopte respectivement 64, 16 et 256 couches d'éléments (*i.e.* nombre de pas de l'algorithme de sous structuration multi-niveau) pour l'attache, la zone intermédiaire et la partie courante. Sachant qu'une couche d'éléments (de type 3D iso-paramétrique) représente **10406** degrés de liberté pour les zones intermédiaire et courante et **14754** degrés de liberté pour l'attache, le problème 3D complet équivalent représenterait environ 2 millions de degrés de liberté et ce en tenant compte des symétries et antisymétries (*i.e.* : 4 fois plus sans ces simplifications). La méthode de sous structuration permet de passer outre cette difficulté, car n'est traitée qu'une couche d'éléments à la fois, soit au maximum 14754 équations.

### IV.4.3 Résultats sur les différents cas de chargement

#### IV.4.3.a Dispositif expérimental

Les résultats expérimentaux présentés au cours de ce chapitre ont été obtenus par EURO-COPTER. Le dispositif utilisé est présenté sur la figure FIG. IV.10.

Le bras élastomérique (FIG. IV.10, ③) est fixé au bâti via l'attache rotor (①). L'attache coté pale (pièce non prise en compte dans la modélisation) est, quant à elle, liée aux vérins et aux câbles qui imposent les différentes sollicitations.

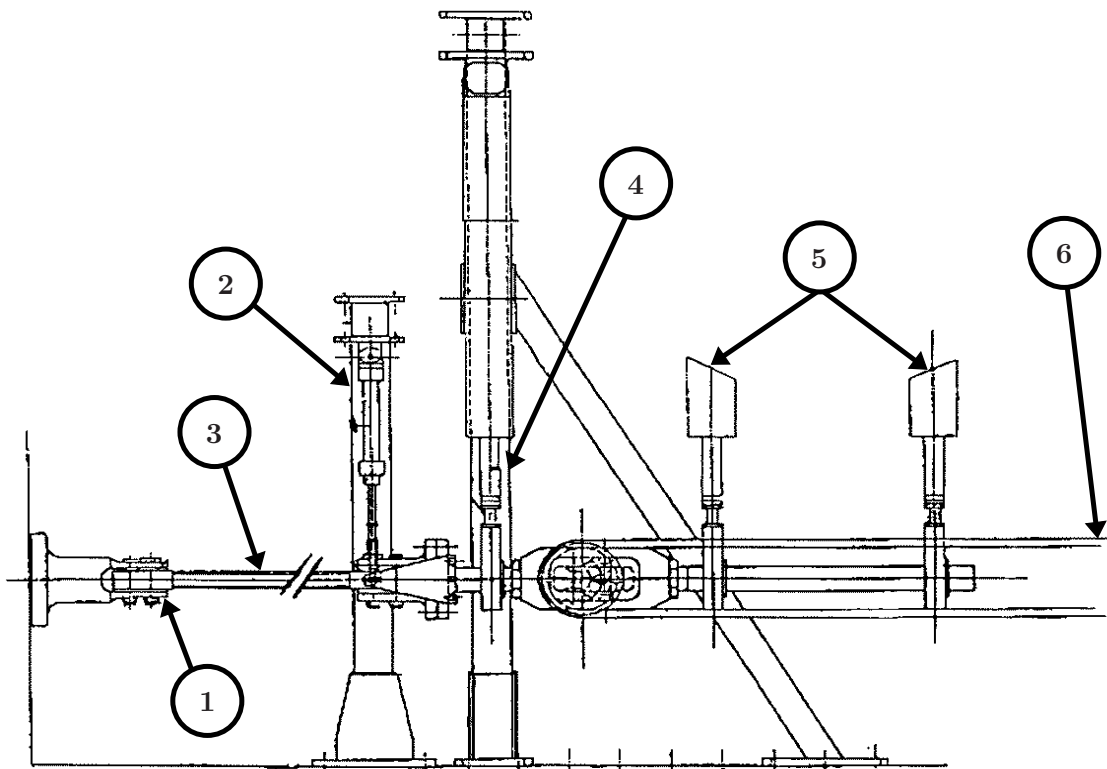


FIGURE IV.10 – Bras élastomérique et dispositif expérimental.

Les efforts centrifuges sont imposés longitudinalement par rapport au bras par l'intermédiaire de deux câbles de précontraintes ⑥.

Le vérin ②, par son excentrage, permet d'imposer un chargement de torsion, tandis que le vérin ④, centré sur l'axe neutre du bras, impose la flexion. Afin de pouvoir imposer des flexion avec différents rapports entre le moment fléchissant et l'effort tranchant, il peut prendre différentes positions (⑤).

Enfin, afin de mesurer les déformations locales (et donc les contraintes locales par le biais d'une loi de comportement élastique), des jauges de déformations locales sont disposées sur quatre

baguettes (FIG. IV.11) à un douzième, un sixième et à la moitié de la partie torsible.

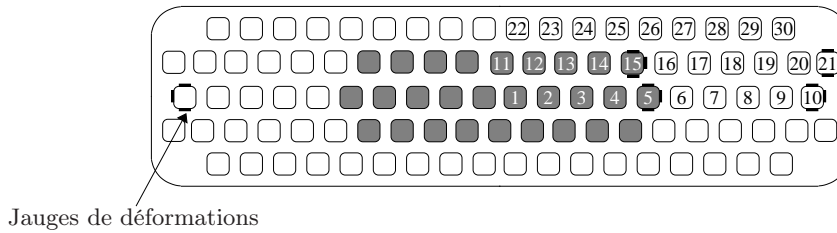


FIGURE IV.11 – Section du bras élastomérique et positions des jauges de déformations.

#### IV.4.3.b Force centrifuge

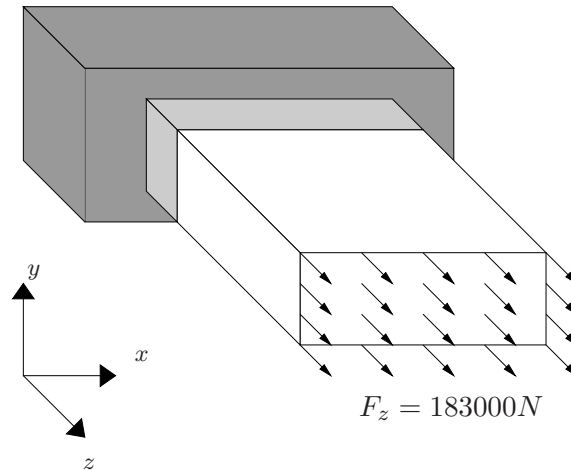


FIGURE IV.12 – Chargement de traction pure – force centrifuge.

On impose un déplacement uniforme (rigide) suivant  $z$  sur la section extrême de la partie courante (FIG. IV.12) dont la réaction est égale à 183000 N.

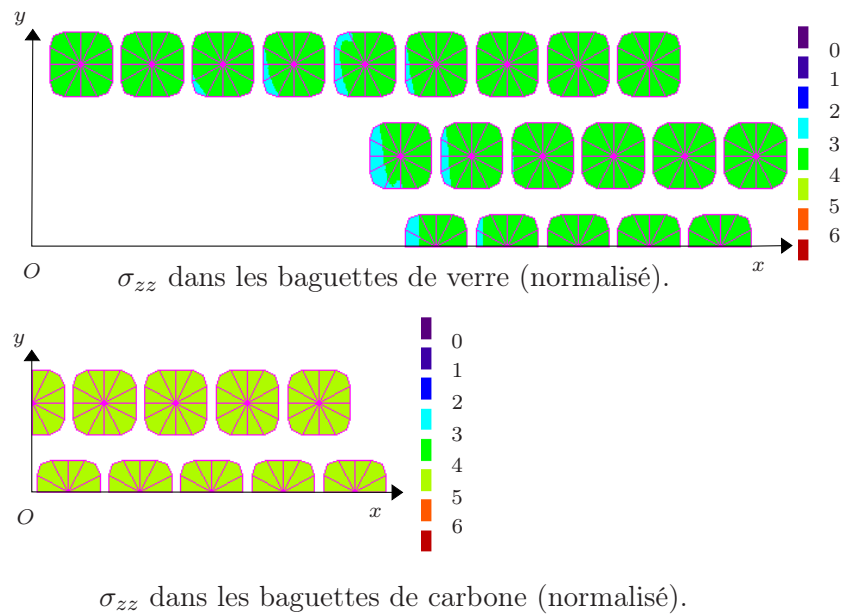
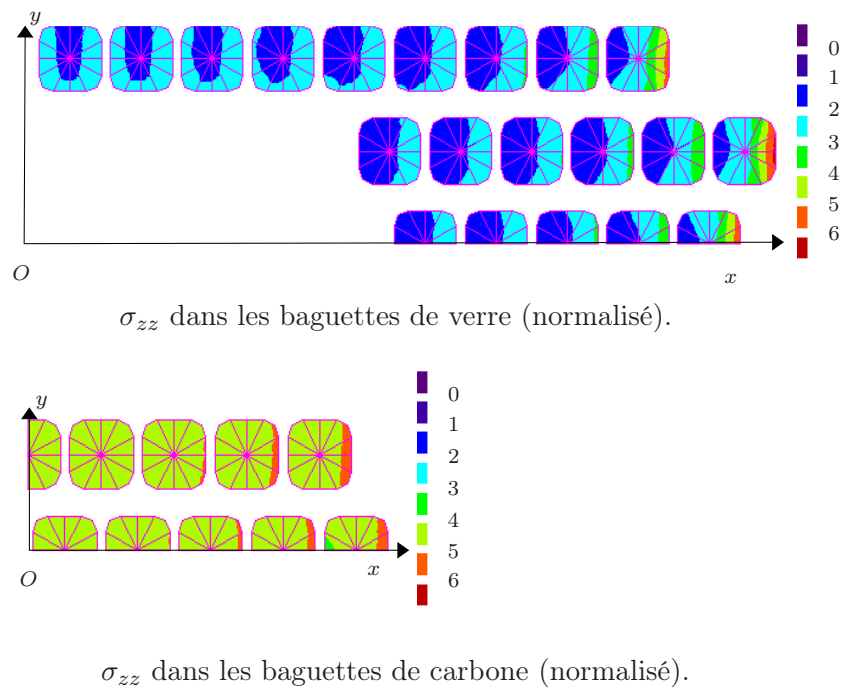
On s'intéresse dans un premier temps à la répartition de la composante normale ( $\sigma_{zz}$ ) du champ des contraintes et ce, aux deux frontières définies par les trois sous structures. L'hétérogénéité des matériaux dans ces deux zones risquent de créer de fortes singularités de contraintes.

- Répartition des contraintes sur les baguettes aux frontières

#### REMARQUE IV.1

Les échelles des champs de contraintes présentés FIG. IV.14 et FIG. IV.13, sont normées par une même valeur. Cette valeur est adoptée pour tous les résultats en contraintes présentés par la suite.

□

FIGURE IV.13 – Champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la frontière côté pale sous chargement de traction.FIGURE IV.14 – Champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la frontière côté rotor sous chargement de traction.

Une approche simple d'une structure telle que le bras élastomérique serait de négliger les effets de l'élastomère et de ne considérer cette pièce que comme un réseau de poutre. Mais, une telle hypothèse donnerait une composante  $\sigma_{zz}$  constante. Or, on constate que si un tel résultat

est vérifié à la frontière entre la zone intermédiaire et la partie courante (cf. FIG. IV.13), il n'en va pas de même lors de la transition entre l'attache et la zone intermédiaire. En effet, la figure FIG. IV.14 montre qu'il n'y a ni uniformité de  $\sigma_{zz}$  d'une baguette à une autre (il semble que la contrainte moyenne d'une baguette augmente avec son éloignement de l'axe  $Oy$ ), ni, d'ailleurs sur une même baguette (la composante  $\sigma_{zz}$  va du simple au double sur la baguette en verre la plus excentrée FIG. IV.14). Une modélisation trop simple du bras ne mettrait pas en évidence les différents phénomènes singuliers décrits précédemment.

- Répartition aux frontières des déformations dans l'élastomère

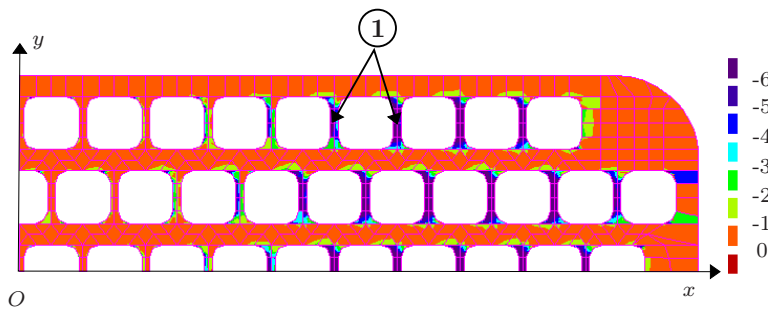


FIGURE IV.15 – Répartition du second invariant sur la frontière côté pale sous chargement de traction.

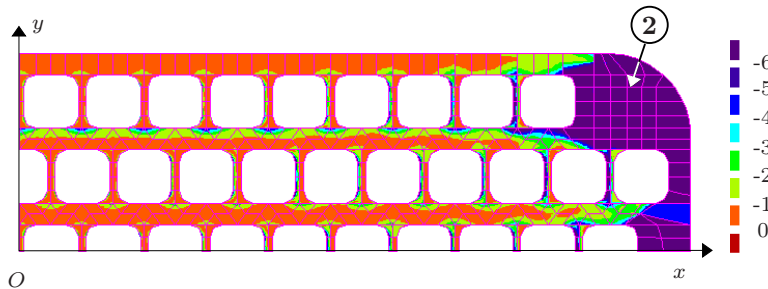


FIGURE IV.16 – Répartition du second invariant sur la frontière côté rotor sous chargement de traction.

Afin d'essayer d'appréhender l'état de déformation de l'élastomère, on choisit de s'intéresser à la répartition du deuxième invariant des déformations dans les deux sections de frontière (FIG. IV.15, IV.16). Une première constatation visuelle indique que le comportement des deux frontières est complètement différents. En effet, sur la frontière côté pale, les déformations se localisent de manière préférentielle entre les baguettes en verre (①, FIG. IV.15), alors que, côté rotor, le second invariant est plus important à l'extérieur du quart de pièce modélisé (②, FIG. IV.16).

Le premier phénomène est plus endommageant pour le matériau, l'épaisseur de ce dernier étant moindre entre les baguettes. Il peut témoigner d'un écrasement de l'élastomère entre les baguettes. Le second comportement semblerait plutôt traduire un simple effet POISSON de l'élastomère.

Afin de mieux comprendre et de valider le phénomène d'écrasement avancé pour d'expliquer la répartition visualisée sur la figure FIG. IV.15, on s'intéresse maintenant au comportement des baguettes numérotées 15 et 21 (cf. FIG. IV.11) et qui sont particulièrement sollicitées. Ces baguettes étant de plus instrumentées, il est possible de comparer et d'éventuellement valider notre modélisation.

- Comportement des baguettes les plus sollicitées

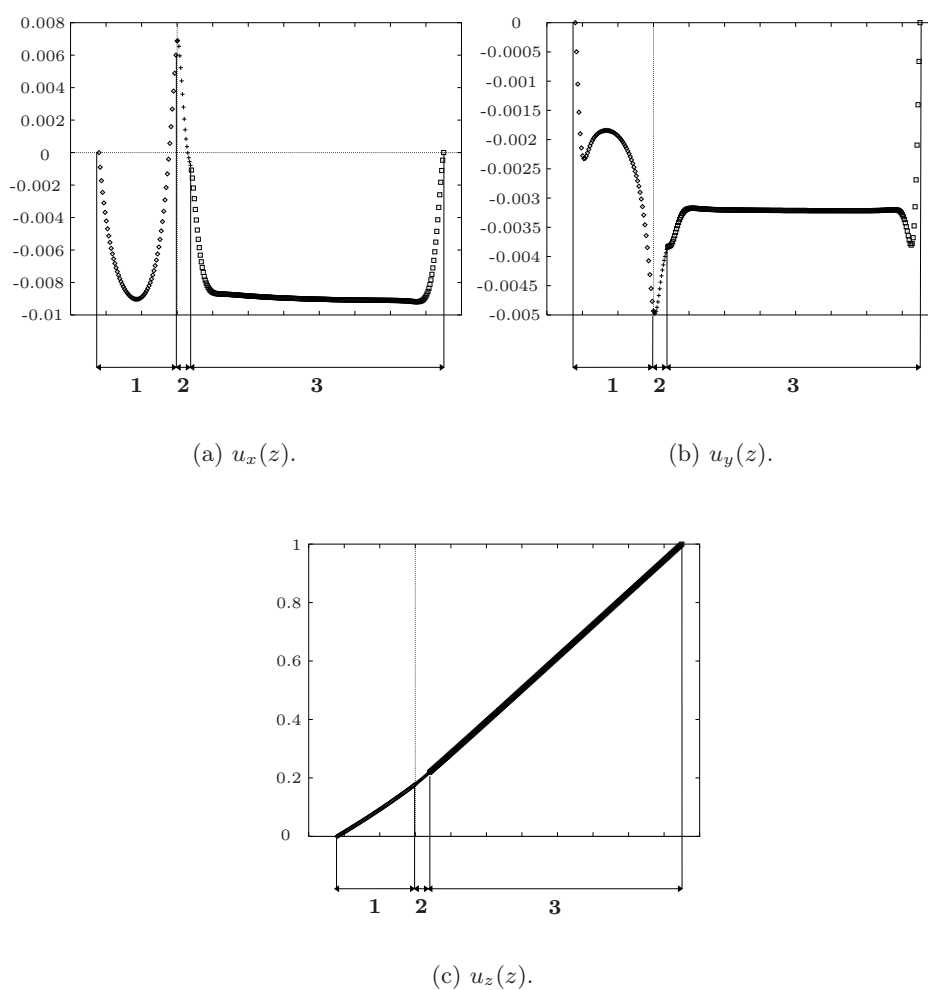


FIGURE IV.17 – Déplacements normalisés moyens de la baguette 15 sous chargement de traction.

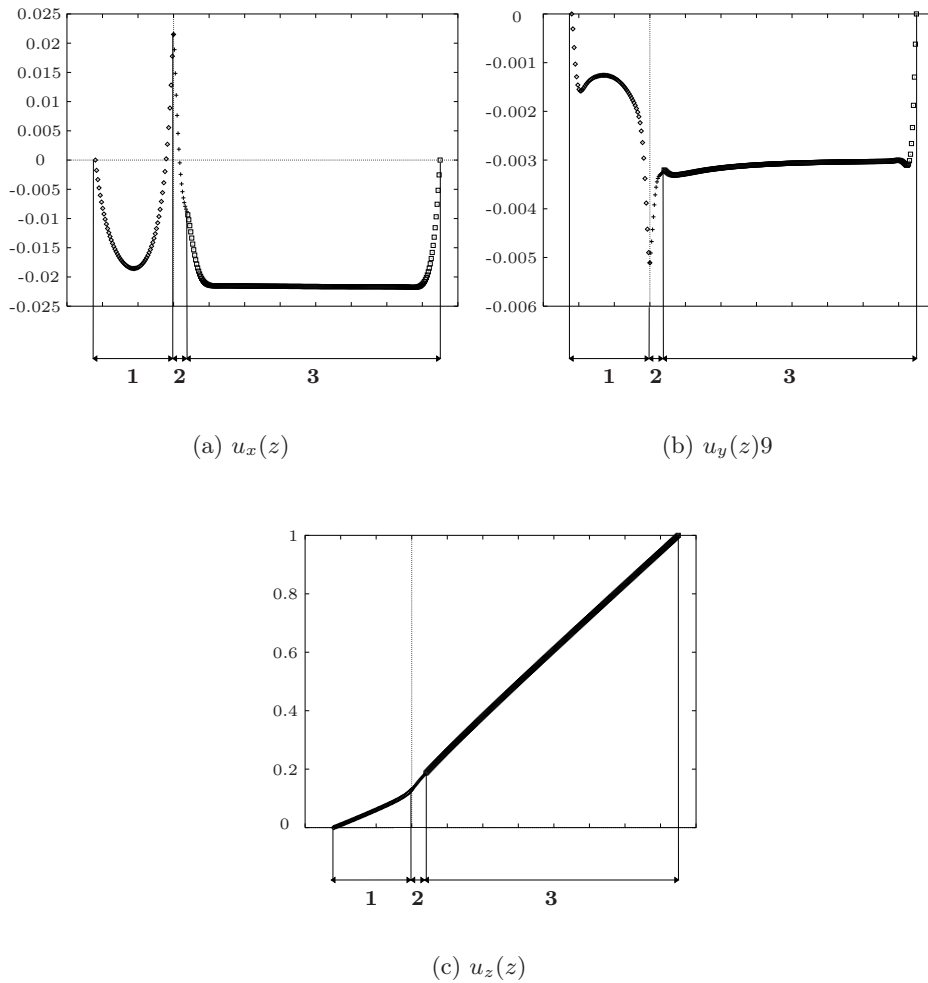


FIGURE IV.18 – Déplacements normalisés moyens de la baguette 21 sous chargement de traction

On s'intéresse dans un premier temps, au champ de déplacements des baguettes 15 et 21 (voir FIG. IV.11).

#### REMARQUE IV.2

Les valeurs de déplacements présentées sont normalisées par le déplacement imposé suivant l'axe  $z$  afin d'obtenir une résultante en force équivalente à celle due aux efforts centrifuges. Les repères **1**, **2** et **3** indiquent respectivement, dans les graphiques à venir, l'attache, la zone intermédiaire et la partie courante. □

Les déplacements moyens des baguettes 15 et 21 (FIG. IV.17 et IV.18) montrent, dans les deux cas, une forte discontinuité des composantes  $u_x$  et  $u_y$  à la frontière entre l'attache et la zone intermédiaire. Ceci est dû à la discontinuité à la fois géométrique et matérielle dans cette partie du bras. Une discontinuité moindre est constatée au niveau de la zone intermédiaire et de la partie courante car cette zone ne présente qu'une faible discontinuité matérielle et une continuité

géométrique (sections identiques). On remarque, pour la composante  $u_z$ , une discontinuité faible à la jonction entre la partie torsible et l'attache (quelque peu plus marquée pour la baguette de verre 21) et pratiquement aucune variation due à l'écart de rigidité entre les matrices élastomériques de la zone intermédiaire et de la partie courante.

La deuxième remarque, se dégageant des graphiques FIG. IV.17(a) et FIG. IV.18(a), concerne la composante  $u_x$  qui prend des valeurs positives dans l'attache et la zone intermédiaire. Un phénomène similaire semble s'initier sur la composante  $u_y$  (FIG. IV.17(b) et IV.18(b)) sans pour autant contraindre celle-ci à prendre des valeurs positives. Ceci ne témoigne pas de coefficients de POISSON négatifs, mais d'une déformation de la structure en tonneau due à l'encastrement de l'attache du côté rotor et au déplacement rigide imposé à l'extrémité de la partie torsible. Les figures FIG. IV.19 et IV.20 illustrent ce phénomène. De telles déformations des baguettes créent, comme avancé lors de l'analyse de la répartition du second invariant, un pincement de l'élastomère amenant ce dernier à des taux de déformations importants entre les baguettes.

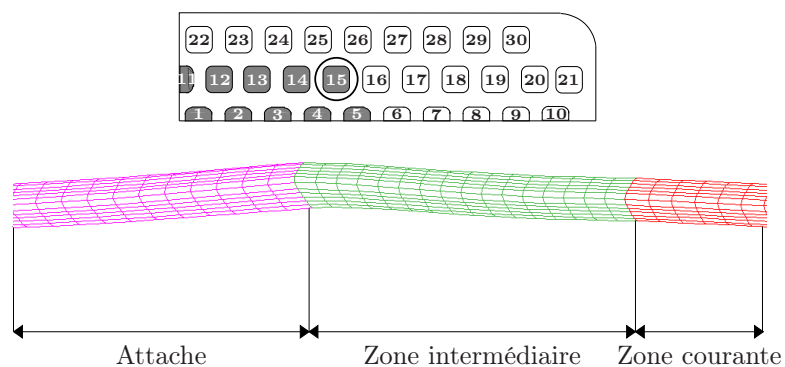


FIGURE IV.19 – *Détail de la déformée de la baguette 15 sous chargement de traction.*

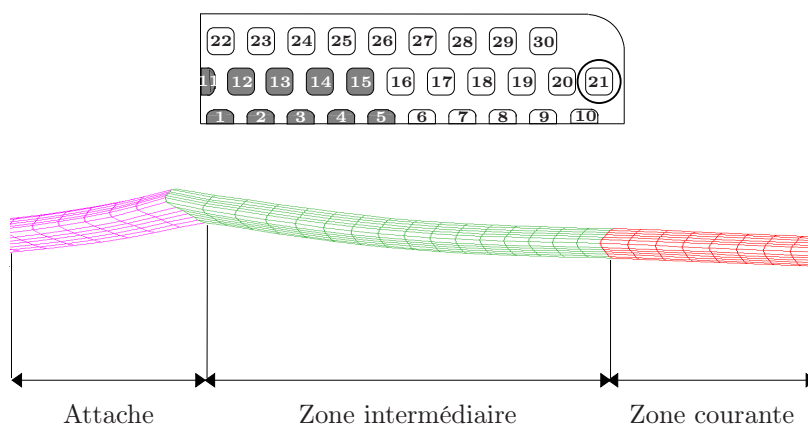


FIGURE IV.20 – *Détail de la déformée de la baguette 21 sous chargement de traction.*

**REMARQUE IV.3**

Dans le but de valider la déformation en tonneau du bras élastomérique, on réalise, à partir d'une structure simplifiée, un calcul complet sous l'hypothèse des contraintes planes. Les résultats obtenus (voir annexe H) montrent, et ce quel que soit le degré d'interpolation des éléments, une déformée présentant les mêmes caractéristiques que celles énoncées précédemment.

□

Enfin, on s'intéresse à l'évolution de la composante normale du tenseur des contraintes ( $\sigma_{zz}$ ) le long des baguettes 15 et 21. Une corrélation correcte existe entre les résultats numériques et expérimentaux.

L'évolution donnée par le calcul numérique (cf. FIG. IV.21) permet de constater que le tenseur des contraintes n'est pas constant le long d'une baguette. Ceci appuie donc l'impossibilité de modéliser le bras par un assemblage de poutres en parallèle sous un chargement de traction.

De plus, il semble que la baguette de verre présente une forte concentration de contraintes localisée entre l'attache et la zone intermédiaire. Cette singularité n'existe pas sur la baguette de carbone.

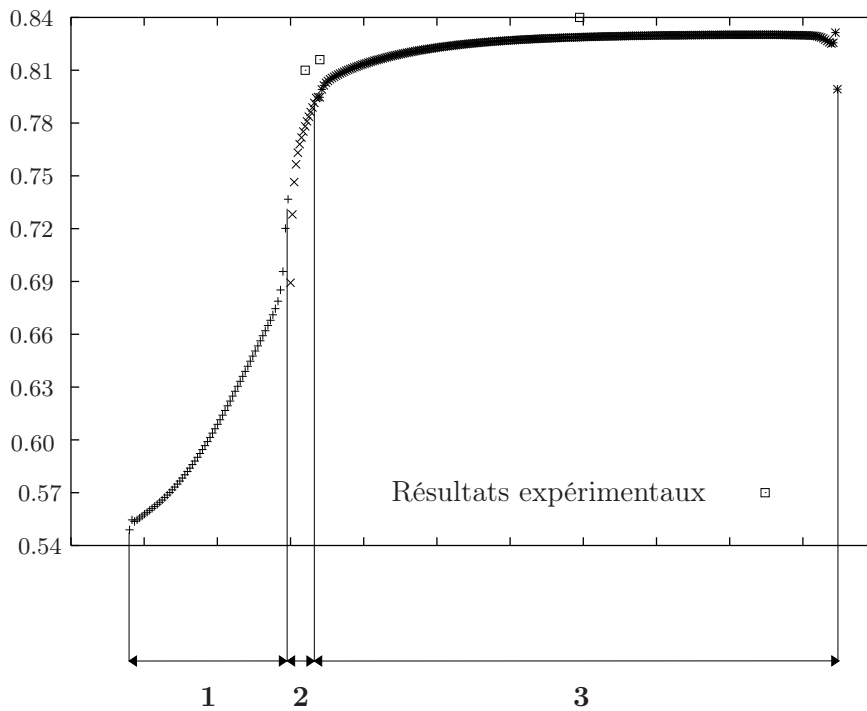


FIGURE IV.21 – Evolution, sous chargement de traction, de  $\sigma_{zz}$  (normalisé) le long de la baguette 15.

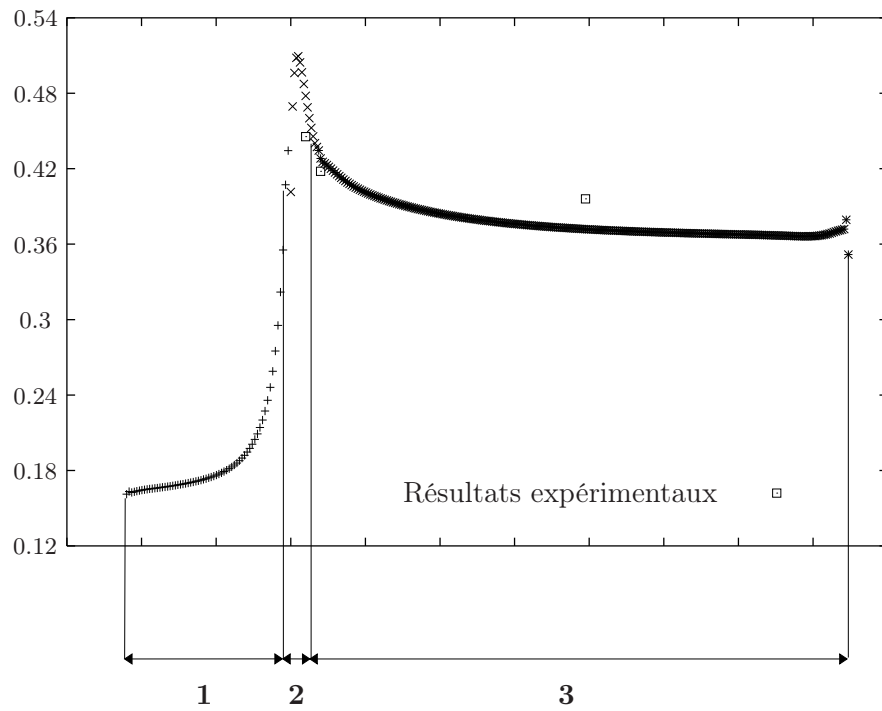


FIGURE IV.22 – Evolution, sous chargement de traction, de  $\sigma_{zz}$  (normalisé) le long de la baguette 21.

#### IV.4.3.c Traînée

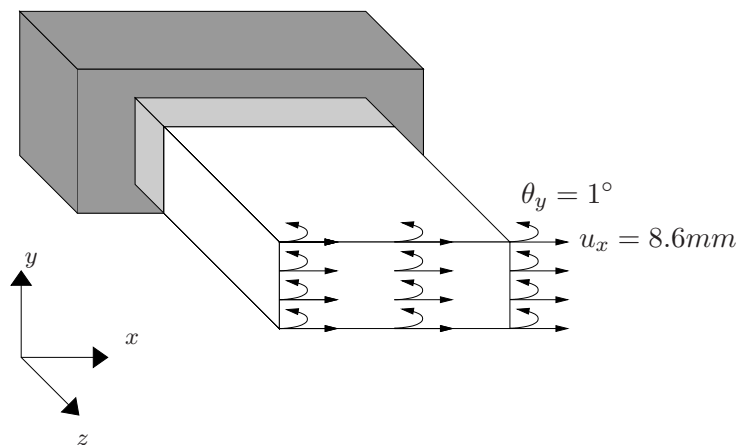
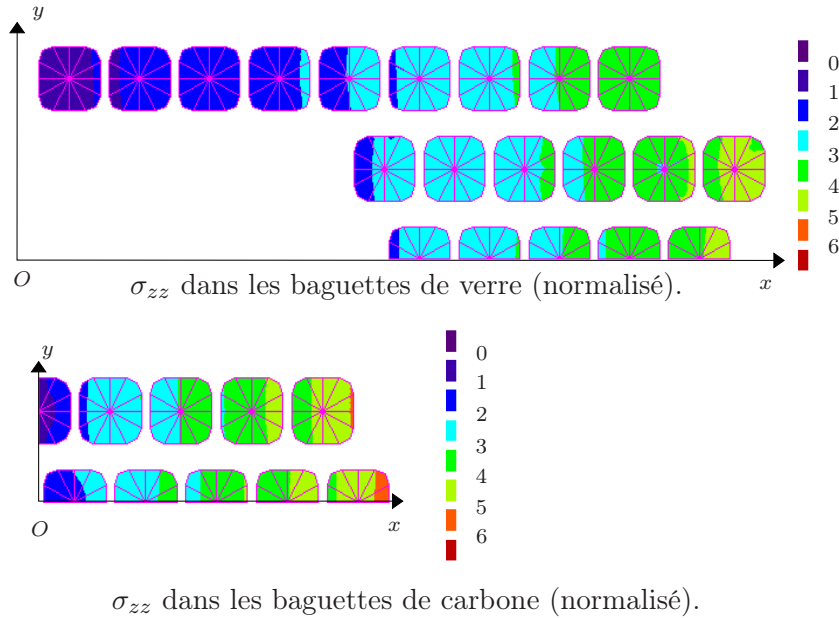
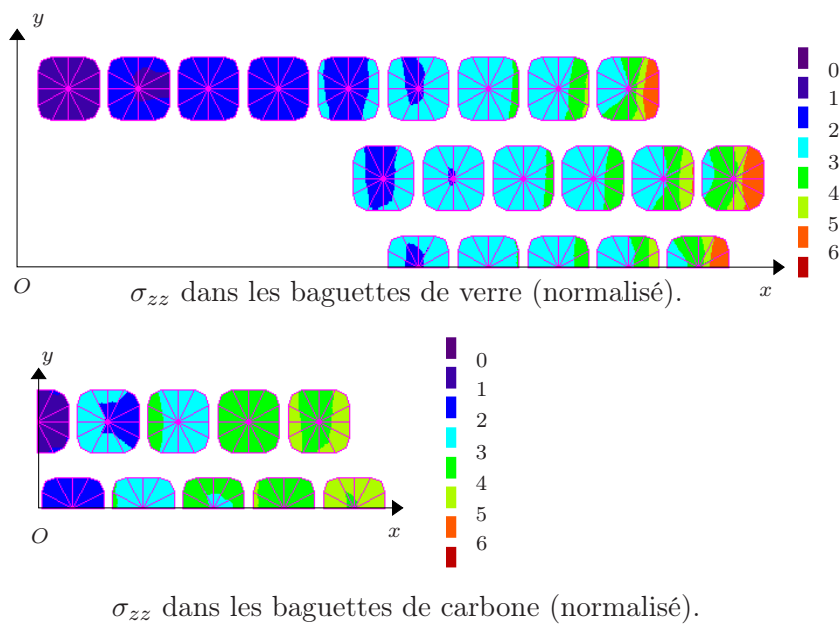


FIGURE IV.23 – Chargement de traînée.

On aborde à présent un cas de sollicitation de traînée sous force centrifuge. Trois composantes peuvent être isolées :

- les efforts centrifuges,

- un mouvement de translation rigide suivant l'axe  $x$  appliqué à l'extrémité de la zone torsible,
- et une rotation rigide autour de  $y$  de cette même section.
- Répartition des contraintes sur les baguettes aux frontières

FIGURE IV.24 – Champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la frontière côté pale sous chargement de traînée.FIGURE IV.25 – Champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la frontière côté rotor sous chargement de traînée.

Ce cas de chargement donne une répartition de contrainte normale assez différente de celle résultant d'un effort de traction pure. En effet, on constate une répartition assez peu homogène sur une même baguette et une réponse assez disparate d'une baguette à l'autre. Les baguettes excentrées par rapport à l'axe  $Oy$  sont les plus sollicitées. La zone de transition entre l'attache et la zone intermédiaire constitue une fois de plus un site privilégié aux concentrations de contraintes et donc à l'endommagement.

- Répartition aux frontières des déformations dans l'élastomère

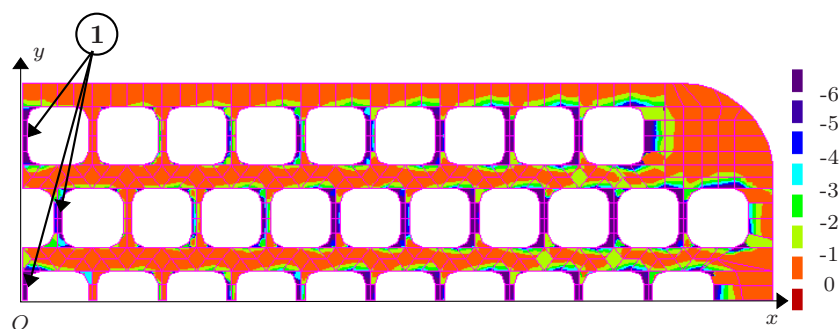


FIGURE IV.26 – Répartition du second invariant sur la frontière côté pale sous chargement de traînée.

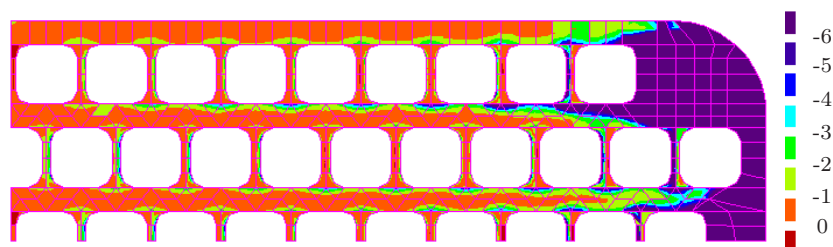


FIGURE IV.27 – Répartition du second invariant sur la frontière côté rotor sous chargement de traînée.

La répartition du second invariant des déformations à la frontière côté rotor est sensiblement la même que celle obtenue sous chargement de traction, à savoir une valeur plus importante sur l'extérieur du quart de pièce modélisé (voir FIG. IV.27). A la frontière des zones de même section, on retrouve une localisation des déformations entre les baguettes en verres, à laquelle vient se superposer, par rapport au chargement de traction, un phénomène analogue entre les baguettes de carbone situées près de l'axe  $Oy$  (①, FIG. IV.27).

- comportement des baguettes les plus sollicitées

Les figures FIG. IV.28 et IV.29 donnent les déformations des baguettes 15 et 21 à proximité des

zones de discontinuités géométriques et/ou matérielles.

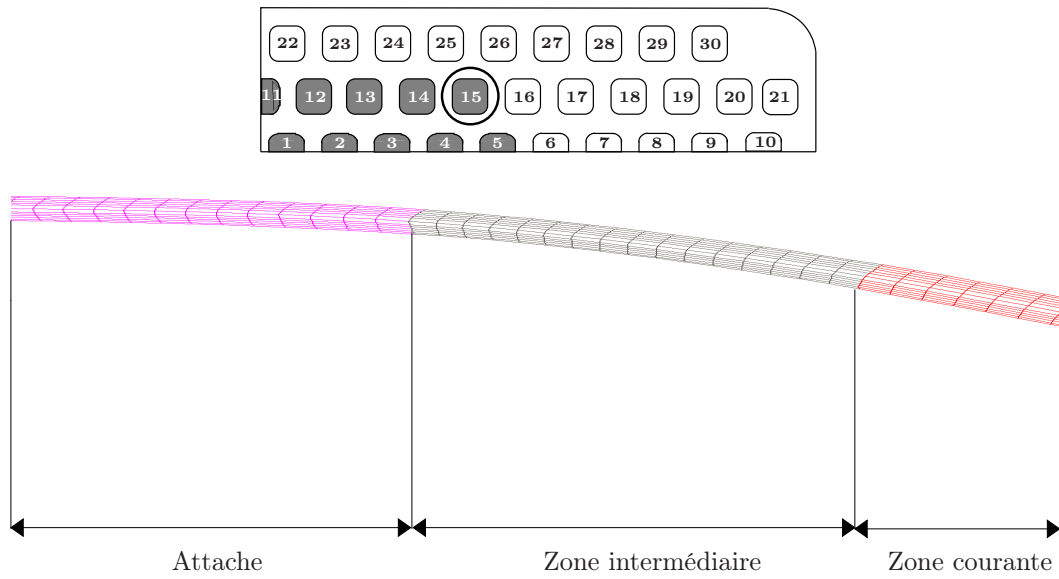


FIGURE IV.28 – *Détail de la déformée de la baguette 15*

On constate sur FIG. IV.28 que l'effet "tonneau" est très atténué sur la baguette 15. Il ne réside plus qu'une très légère discontinuité à la frontière entre l'attache feuilletée et la zone intermédiaire.

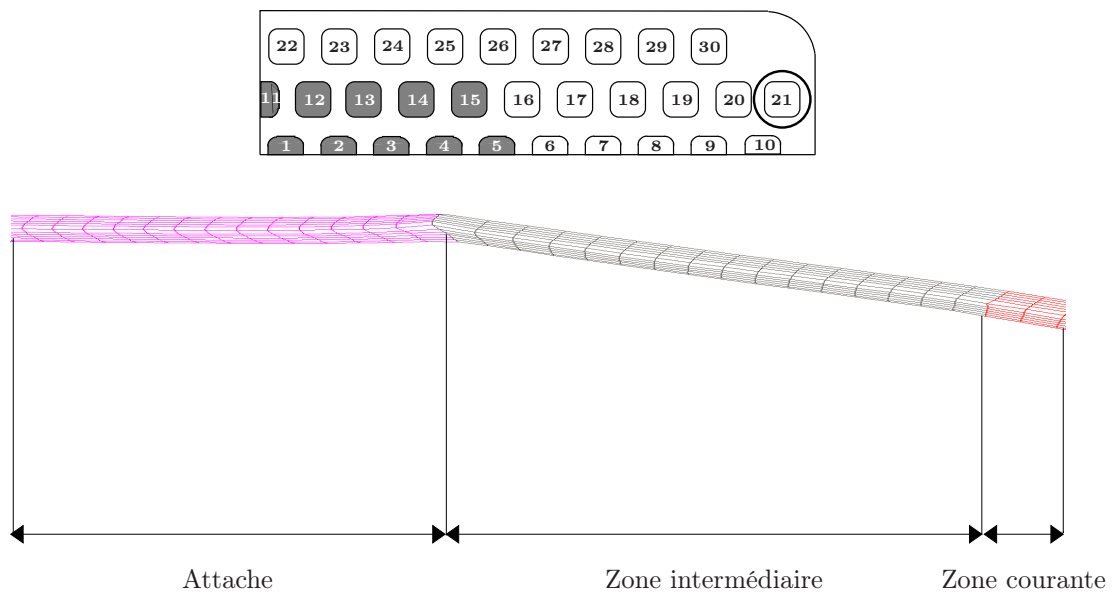


FIGURE IV.29 – *Détail de la déformée de la baguette 21*

La figure FIG. IV.29 montre, sur la baguette 21, la présence toujours marquée de l'effet "tonneau" du au efforts centrifuges, ainsi qu'une forte discontinuité à la frontière entre l'attache et la zone intermédiaire.

L'existence de ces singularités sur la baguette 21 et leur atténuation sur la baguette 15 explique le comportement moins homogène des baguette en verre, dans les sections frontières, constaté sur les figure FIG. IV.24 et IV.25.

On s'intéresse maintenant à la répartition de la composante normale des contraintes le long de ces deux baguettes. Les graphiques FIG. IV.21 et IV.22 présentent la valeur normalisée de la composante  $\sigma_{zz}$  due aux seuls effets de traînée<sup>(3)</sup>.

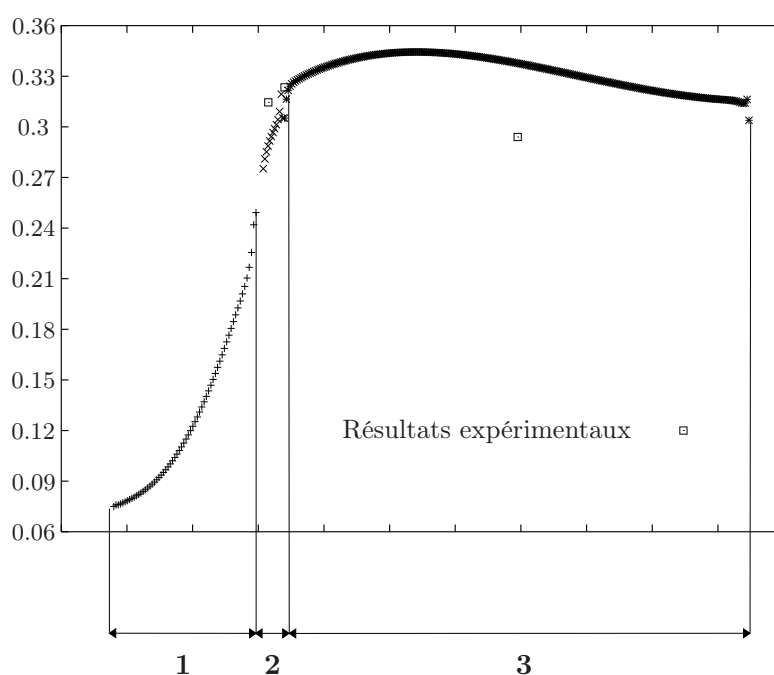


FIGURE IV.30 – Evolution, sous chargement de traînée, de  $\sigma_{zz}$  (normalisé) le long de la baguette 15.

La comparaison des résultats numériques et expérimentaux donne une moins bonne cohérence que pour le cas du chargement de traction (cf.FIG. IV.21 et IV.22). En effet, la contrainte est surévaluée dans la partie courante respectivement de 15% et 20% pour les baguettes 15 et 21. Cependant, même si les niveaux de contraintes ne présentent pas la qualité espérée, l'évolution globale le long des baguettes semble assez cohérente. Cette dernière met en évidence une répartition assez régulière de la contrainte normale le long de la baguette de carbone (FIG. IV.30). L'excentrage important de la baguette 21 fait que celle ci est fortement sollicitée en traction suivant l'axe  $z$ . Ceci explique, d'une part le niveau de contrainte normale plus élevé que dans la

(3). Le zéro des jauges de déformations a été fait après application des efforts centrifuges.

baguette de carbone et ce malgré un module de YOUNG du verre deux fois moins important et, d'autre part, la présence de la déformation en tonneau constatée FIG. IV.29 et qui témoigne d'une sollicitation en traction (voir § IV.4.3.b). On met en évidence sur cette même baguette deux singularités, respectivement situées à  $10\text{mm}$  du début de la zone intermédiaire (①, FIG. IV.31) et à  $8.4\text{mm}$  de la partie courante (②, FIG. IV.31). Il est intéressant de voir que ces deux phénomènes bien qu'induits par les discontinuités géométriques et/ou matérielles sont décalés par rapport aux frontières.

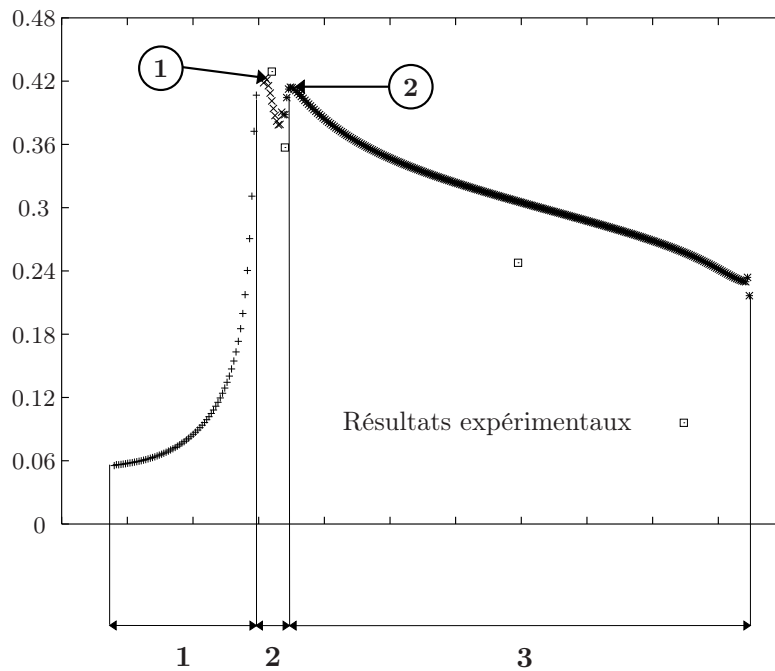


FIGURE IV.31 – Evolution, sous chargement de traînée, de  $\sigma_{zz}$  (normalisé) le long de la baguette 21.

La figure donne la répartition du second invariant sur une section située à  $10\text{mm}$  de l'attache<sup>(4)</sup>.

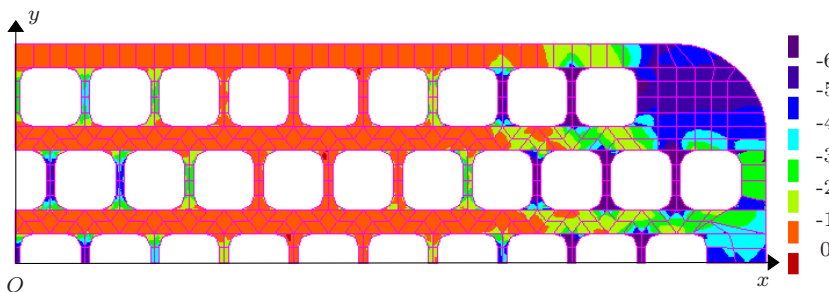


FIGURE IV.32 – Répartition du second invariant à  $10\text{mm}$  de l'attache sous chargement de traînée.

(4). zone présentant la singularité en  $\sigma_{zz}$  dans les baguettes en verre.

La répartition du second invariant des déformations présente un couplage des comportements rencontrés sur les frontières attache / zone intermédiaire (cf. FIG. IV.27) et zone intermédiaire / partie courante (cf. FIG. IV.26, à savoir une forte localisation des déformations entre les baguettes ainsi que sur l'extérieur du quart de pièce modélisé). On en déduit donc une forte sollicitation de l'élastomère dans cette section pouvant amener une détérioration.

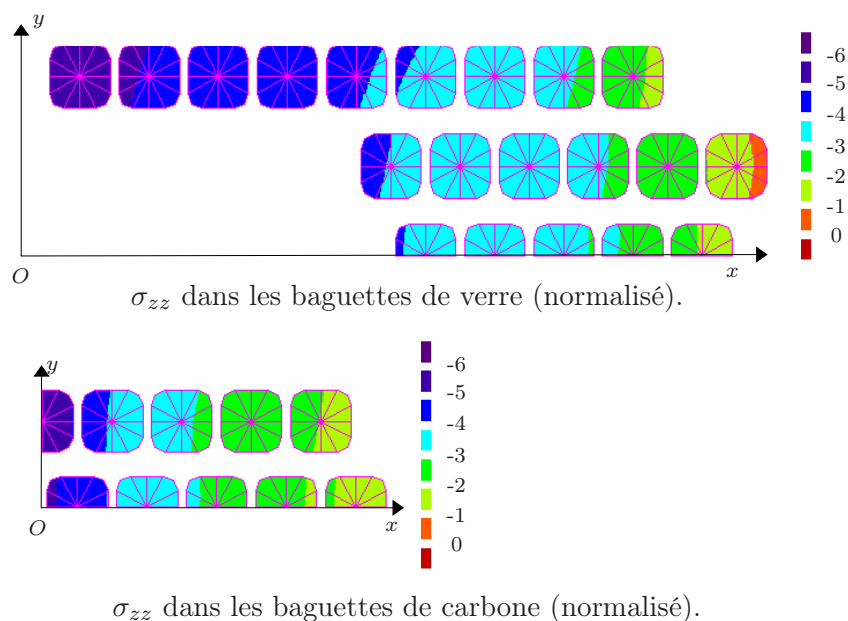


FIGURE IV.33 – Répartition du second invariant à 10mm de l'attache sous chargement de traînée.

#### IV.4.3.d Torsion

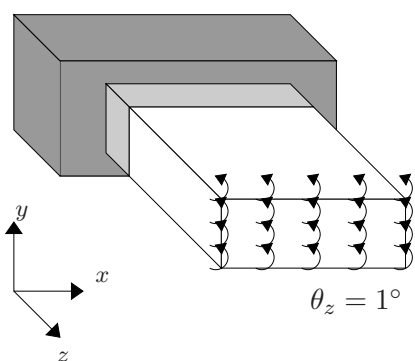


FIGURE IV.34 – Chargement de torsion.

Ce chargement consiste à imposer une rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) de  $1^\circ$  sur la section extrême de l'E.F.B. (cf FIG. IV.34). On tient compte de la non-linéarité due à la force centrifuge.

La part de contrainte normale due au chargement de rotation est faible par rapport à celle induite par les efforts centrifuges. Ce résultat est en accord avec les résultats expérimentaux.

On s'intéresse aux déformations induites par ce chargement dans l'élastomère.

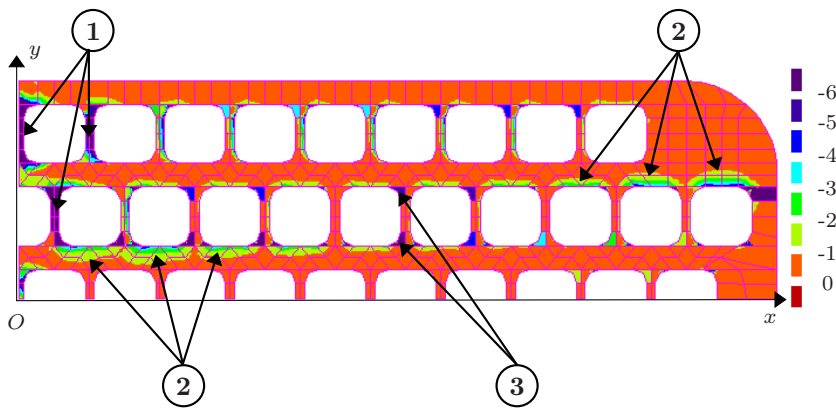


FIGURE IV.35 – Répartition du second invariant sur la frontière côté pale sous chargement de torsion.

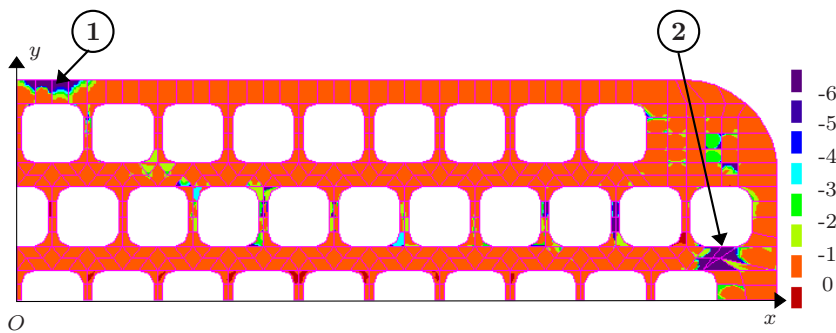


FIGURE IV.36 – Répartition du second invariant sur la frontière côté rotor sous chargement de torsion.

La figure FIG. IV.36 montre une répartition constante (si l'on omet les singularités ① et ②) et pratiquement nulle du second invariant à la frontière entre l'attache et la zone intermédiaire. La répartition du second invariant à la seconde frontière (FIG. IV.35) fait apparaître trois comportements distincts :

- une concentration des déformations sur les faces latérales des baguettes situées à proximité de l'axe ( $Oy$ ) (①),
- un phénomène analogue mais sur les faces supérieures et inférieures des baguettes (②),
- et, enfin, une concentration dans les angles des baguettes (③).

Certaines zones présentent les trois phénomènes simultanément, créant ainsi un risque de décollement des baguettes.

#### IV.4.4 Facteur de perte de la structure dans le cas d'un chargement de traînée<sup>(5)</sup>

##### IV.4.4.a Introduction

On veut déterminer, dans un cas d'un chargement de traînée supposé harmonique, le facteur de perte du bras élastomérique. Cette grandeur est à rapprocher de l'amortissement de la structure, à savoir sa capacité à transformer une partie de son énergie élastique sous forme d'énergie dissipée. Les différents matériaux composites constituant le bras élastomérique sont supposés **élastiques orthotropes linéaires**, les élastomères sont supposés **viscoélastiques linéaires isotropes**.

La démarche présentée ci-dessous se place dans un cadre monodimensionnel, qui se généralise aisément au cas tridimensionnel.

##### IV.4.4.b Equations de la viscoélasticité (modèle rhéologique de KELVIN-VOIGT)

On choisit d'apoter le modèle rhéologique de KELVIN-VOIGT constitué d'un ressort et d'un amortisseur en série (voir FIG. IV.4.4.b).

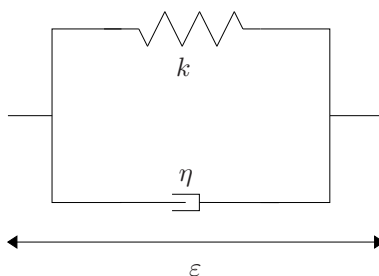


FIGURE IV.37 – *Modèle de KELVIN-VOIGT.*

De manière classique, on définit  $\sigma$  la contrainte dans les deux branches du modèle et  $\varepsilon$  la déformation. On obtient :

$$\boxed{\sigma = k\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}} \quad (\text{IV.26})$$

##### IV.4.4.c Régime harmonique

Dans le cas de la rotation d'un rotor à vitesse constante, on considère le matériau soumis à une sollicitation harmonique. On adopte une notation complexe. L'indice "\*" indique une grandeur complexe. Les déformations peuvent se mettre sous la forme :

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad \text{avec } \varepsilon_0 \in \mathcal{R}^+. \quad (\text{IV.27})$$

(5). [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1985 ; CHRISTENSEN, 1971]

Le tenseur des contraintes se met, par le biais de (IV.26), sous la forme :

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t + \varphi}, \quad (\text{IV.28})$$

avec

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 \sqrt{k^2 + \eta^2 \omega^2} \quad (\text{IV.29a})$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\eta \omega}{k} \right) \quad (\text{IV.29b})$$

$\varphi$  est appelé **angle de perte du matériau** et  $\tan \varphi$  **facteur de perte**.

Le retour en notation réelle donne alors :

$$\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.30})$$

#### IV.4.4.d Caractérisation de l'amortissement

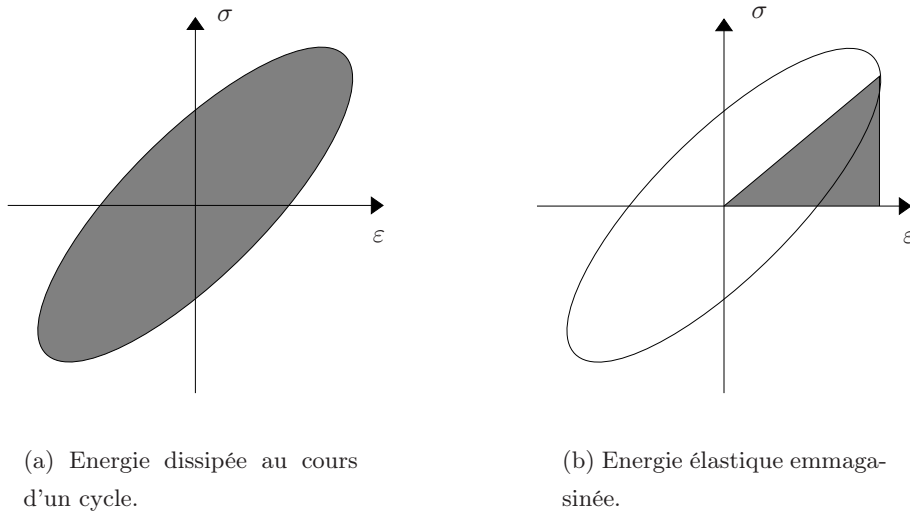


FIGURE IV.38 – *Caractérisation de l'amortissement.*

L'**amortissement** d'un matériau est la part d'énergie élastique dissipée. Si les grandeurs  $\Delta W$  et  $W$  représentent respectivement l'**énergie locale dissipée** par le matériau et l'**énergie locale élastique**, on a, pour une déformation d'amplitude  $\varepsilon_0$ , de pulsation  $\omega$  et de déphasage nul [MAHERI et ADAMS, 1995] :

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \dot{\varepsilon} dt = \frac{\pi}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \varphi, \quad (\text{IV.31a})$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \cos \varphi, \quad (\text{IV.31b})$$

si bien que le facteur de perte se met sous la forme :

$$\frac{\Delta W}{W} = \pi \tan \varphi = \pi \eta \quad (\text{IV.32})$$

Dans le cas d'une structure constituée de  $n$  matériaux, d'après MAHERI et ADAMS [1995], l'énergie locale dissipée est vue comme la somme des énergies dissipées par chacun des matériaux :

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i, \quad (\text{IV.33})$$

avec  $\Delta W_i$  l'énergie dissipée par le  $i$ -ème matériau.

En notant  $\eta_i$  et  $W_i (= \frac{\Delta W_i}{\pi \eta_i})$  le facteur perte et l'énergie emmagasinée par ce  $i$ -ème matériau, l'équation (IV.32) devient :

$$\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{W_i}{W}. \quad (\text{IV.34})$$

Dans le cas où  $\eta_i \ll 1$ , on montre que l'énergie de déformation du problème viscoélastique est équivalente à celle du problème élastique associé [VANTOMME, 1995 ; DELORME, 1997]. Ceci permet de définir le facteur de perte de la structure complète à partir d'une unique modélisation élastique et d'aboutir à l'expression du facteur de perte suivante :

$$\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{W_i^{el}}{W^{el}}. \quad (\text{IV.35})$$

Dans l'expression (IV.35),  $W_i^{el}$  et  $W^{el}$  représentent les énergies de déformation associées au  $i$ -ème matériau et à la structure complète.

#### IV.4.4.e Facteur de perte du bras élastomérique sous chargement de traînée

On s'intéresse au facteur de perte du bras élastomérique à deux fréquences différentes correspondant, d'une part, au régime nominal du rotor ( $6Hz$ ) et, d'autre part, à la première fréquence propre du rotor ( $3.5Hz$ ) qui sollicite le bras en traînée. L'utilisation d'élastomère permet en théorie d'apporter de l'amortissement à la structure et ce afin d'éviter tout problème d'instabilité.

Les matériaux élastiques qui constituent le bras élastomérique sont, par définition, affectés d'un facteur de perte nul. Les différents élastomères utilisés sont peu amortissants, si bien que leurs facteurs de perte sont suffisamment faibles ( $\eta \approx 0.1$ ) pour permettre l'application de l'équation (IV.35). Le tableau TAB. IV.1 donne les facteurs de pertes du bras pour les deux fréquences précitées.

fréquence	Facteur de perte
$6Hz$	3.2%
$3.5Hz$	3.45%

TABLEAU IV.1 – Facteur de perte de la structure.

On constate TAB. IV.1 que les valeurs de l'amortissement diminuent avec l'augmentation de la fréquence, c'est à dire avec les efforts centrifuges. Ceci est du à l'apport de rigidification amené par les efforts centrifuges qui augmentent l'énergie élastique totale sans pour autant engendrer de dissipation d'énergie supplémentaire.

## IV.5 Conclusion

Ce chapitre est dédié à la modélisation d'assemblage de structures une à une invariante dans une direction. Pour ce faire, on met en place une méthode de sous structuration pouvant être vue comme le couplage d'une méthode classique et d'une méthode multi-niveau de sous structuration. La première consiste à résoudre un problème à la frontière et la seconde est dédiée à la modélisation d'une unique structure invariante dans une direction.

Cette technique permet la résolution d'un problème industriel, à savoir la modélisation par la méthode des éléments finis du Bras Elastomérique, pièce développée par la Société EUROCOPTER et, remplaçant sur un hélicoptère, le mécanisme classique de liaison entre le mat rotor et la pale. La difficulté d'un tel problème réside dans la grande hétérogénéité des caractéristiques des différents matériaux et dans la trop faible répétition des motifs, rendant impossible un calcul par homogénéisation. De plus, étant intéressé par des phénomènes locaux dans les zones de discontinuité géométrique et/ou matérielle, un maillage précis doit être adopté. La résolution du problème 3D, en adoptant un maillage d'une telle précision, conduirait à un problème à plusieurs millions de degrés de liberté alors que l'application de la technique de sous structuration développée ne demande la prise en compte d'au plus une dizaine de milliers d'équations à la fois.

L'analyse des différents résultats obtenus sur le Bras Elastomérique met en avant les points principaux suivants :

- la confirmation de la présence de singularités dans les zones de transition entre les différentes parties constitutives, singularités d'autant plus marquées à la frontière entre l'attache et la zone intermédiaire,
- la mise en évidence d'une déformation en tonneau des baguettes, quand celles-ci sont sollicitées en traction. Ce phénomène est naturellement présent pour le chargement simulant les uniques efforts centrifuges, mais aussi sur les baguettes les plus excentrées pour le chargement de traînée,
- enfin, la zone d'élastomère située entre les parois latérales des baguettes semblent être un site privilégié de localisation des déformation et donc d'endommagement du matériau.

On calcule, pour finir, à partir d'une méthode énergétique développée par DELORME [1997], l'amortissement de la structure pour la fréquence nominale de rotation du rotor, ainsi que pour la première fréquence propre du rotor. Une diminution de l'amortissement est constatée avec l'augmentation de la fréquence.



## CHAPITRE V

# Détermination d'un terme de dissipation à partir des résultats de sous structuration

oOo

**L**e chapitre à venir a pour objet une étude de faisabilité concernant la détermination d'un terme de dissipation sur les zones les plus sollicitées du Bras Elastomérique.

La démarche peut se résumer en deux étapes :

1. On détermine, dans un premier temps, la zone la plus sollicitée en terme de contraintes et de déformations via un calcul de sous structuration (comportement élastique),
2. puis, en considérant les solutions élastiques en contraintes et déformations  $(\bar{\sigma}_0, \bar{\varepsilon}_0)$  comme les amplitudes des solutions que l'on obtiendrait, sous sollicitations harmoniques, à partir du modèle rhéologique de POYNTING-THOMSON, un terme de dissipation est déterminé. Cette grandeur résulte de l'établissement de relations entre les coefficients du modèle en grandes déformations (supposés identifiés via l'algorithme du paragraphe § II.2.3) et leurs homologues définissant le modèle en petites perturbations.

oOo

## PLAN DU CHAPITRE V

---

<b>V.1</b>	<b>Introduction et motivations de l'étude . . . . .</b>	<b>165</b>
<b>V.2</b>	<b>Choix du modèle . . . . .</b>	<b>165</b>
V.2.1	Cas d'une sollicitation monodimensionnelle . . . . .	165
V.2.2	Identification des caractéristiques du modèle de POYNTING-THOMSON en petites perturbations en fonctions d'un jeu de paramètres identifiés en grandes déformations . . . . .	167
V.2.2.a	Démarche . . . . .	167
V.2.2.b	linéarisation du modèle . . . . .	167
V.2.2.c	identification des paramètres . . . . .	168
<b>V.3</b>	<b>Cas d'un chargement de traction harmonique . . . . .</b>	<b>171</b>
<b>V.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>173</b>

---

## V.1 Introduction et motivations de l'étude

L'hétérogénéité et la complexité de structures telles que le Bras Elastomérique (cf. chapitre IV), nous a contraint, malgré la mise en place de techniques de sous structuration simplifiant grandement le problème numérique, à adopter des comportements simples pour les différents constituants (élasticité linéaire). Ce cadre présente deux inconvénients majeurs dans le cadre de sollicitations harmoniques :

- d'une part, il ne rend pas compte du caractère amortissant des élastomères
- et d'autre part il ne tient pas compte de l'échauffement lié aux propriétés visqueuses de ces matériaux.

Le premier point est en partie résolu par une méthode énergétique et moyennant quelques hypothèses (cf. § IV.4.4.d). Le second fait l'objet de l'étude présentée dans ce chapitre, à savoir la détermination, sous un jeu minimum d'hypothèses, de la dissipation au coeur de l'élastomère. Ce résultat est à prendre comme une première indication quant aux lieux privilégiés d'augmentation de température et donc d'un éventuel endommagement dû aux effets thermiques.

## V.2 Choix du modèle

Le modèle de KELVIN-VOIGT a été présenté au paragraphe § IV.4.4.d dans le cadre de la détermination de l'amortissement global du Bras Elastomérique. La dissipation intrinsèque est une grandeur locale qui réclame a priori plus de précision que d'éventuelles grandeurs globales. C'est pour cette raison que l'on choisit d'utiliser le modèle de POYNTING-THOMSON. On rappelle que ce modèle est mis en oeuvre dans les chapitres II et III.

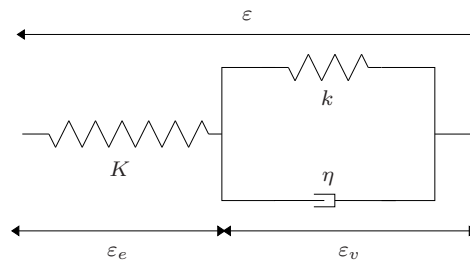


FIGURE V.1 – *Modèle de POYNTING-THOMSON en petite déformation.*

### V.2.1 Cas d'une sollicitation monodimensionnelle

Sous l'hypothèse des petites perturbations, le modèle est gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \\ \sigma = K(\varepsilon - \varepsilon_v) = k\varepsilon_v + \eta\dot{\varepsilon}_v \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

Dans le cas d'une sollicitation en déformation monodimensionnelle, d'amplitude  $\varepsilon_0$ , de pulsation  $\omega$  et de déphasage nul, on a en notation complexe :

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \text{ avec } \varepsilon_0 \in \mathcal{R}^+, \quad (\text{V.2})$$

$$\sigma^* = \frac{K(k + i\omega\eta)}{k + K + i\omega\eta} \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad (\text{V.3})$$

$$\varepsilon_v^* = \frac{K}{k + K + i\omega\eta} \varepsilon_0 e^{i\omega t}. \quad (\text{V.4})$$

Le retour aux notations réelles donne alors une contrainte de la forme :

$$\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{V.5})$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_0 = \frac{K\varepsilon_0}{(k + K)^2 + \omega^2\eta^2} [(k(K + k) + \omega^2\eta^2)^2 + K^2\omega^2\eta^2]^{1/2} \\ \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{K\omega\eta}{k(K + k) + \omega^2\eta^2} \right) \end{cases}, \quad (\text{V.6})$$

et une déformation visqueuse donnée par :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{v_0} \cos(\omega t + \beta) \quad (\text{V.7})$$

où

$$\begin{cases} \varepsilon_{v_0} = \frac{K\varepsilon_0}{[(k + K)^2 + \omega^2\eta^2]^{1/2}} \\ \beta = \tan^{-1} \left( \frac{\omega\eta}{k + K} \right) \end{cases}. \quad (\text{V.8})$$

La dissipation intrinsèque instantanée peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi^{int} &= \eta \dot{\varepsilon}_v^2 \\ &= \eta \frac{K^2 \varepsilon_0^2 \omega^2}{(k + K)^2 + \omega^2 \eta^2} \sin^2(\omega t + \beta). \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

L'énergie dissipée sur un cycle se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned} W^{int} &= \int_0^{2\pi/\omega} \phi^{int}(t) dt \\ &= \eta \frac{K^2 \varepsilon_0^2 \omega \pi}{(k + K)^2 + \omega^2 \eta^2}. \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

## V.2.2 Identification des caractéristiques du modèle de POYNTING-THOMSON en petites perturbations en fonctions d'un jeu de paramètres identifiés en grandes déformations

### V.2.2.a Démarche

On se propose, dans ce paragraphe, de déterminer les coefficients du modèle de POYNTING-THOMSON, dans le cadre des petites perturbations à partir des coefficients identifiés en grandes déformations de ce même modèle.

La démarche est la suivante : on linéarise les équations du modèle obtenues au chapitre II en grandes déformations, puis on détermine les caractéristiques de traction et de cisaillement du modèle en petites déformations.

### V.2.2.b linéarisation du modèle

On rappelle les équations du modèle de POYNTING-THOMSON en grandes transformations :

$$\begin{cases} \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + p \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} - \rho_0 \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) \\ \quad + \left( \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} I_1^v \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{\bar{C}}_v + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

avec, pour les potentiels énergie libre et le pseudo-potentiel de dissipation, les formes suivantes :

$$\begin{cases} \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) = c_1 (I_1^e - 3) + c_2 \ln \left( \frac{I_2^e}{3} \right) \\ \psi_v(\bar{\bar{C}}_v) = a_1 (I_1^v - 3) \\ \varphi(\dot{\bar{\bar{C}}}_v) = \frac{\nu}{2} \dot{\bar{\bar{C}}}_v : \dot{\bar{\bar{C}}}_v \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, on rappelle que :

$$\begin{cases} \bar{\bar{C}} = 1 + 2\bar{\bar{\varepsilon}} \\ \bar{\bar{C}}_v = 1 + 2\bar{\bar{\varepsilon}}_v \end{cases} \quad (\text{V.13})$$

et que

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\pi}} = \bar{\bar{S}}. \quad (\text{V.14})$$

Les conditions d'incompressibilité se traduisent par :

$$\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}} = \text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}_v = \text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}_e = 0. \quad (\text{V.15})$$

On pose, de plus :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1^e = \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} = c_1 + c_2 + \frac{2c_2}{3} \underbrace{\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}_e}_{=0} + \mathcal{O}(\bar{\bar{\varepsilon}}_e^2) \\ w_2^e = \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} = \frac{c_2}{3} - \frac{4c_2}{9} \underbrace{\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}_e}_{=0} + \mathcal{O}(\bar{\bar{\varepsilon}}_e^2) \\ w_v = \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} = a_1 \\ \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{V.16})$$

si bien que l'on a pour (V.11a), aux termes d'ordre 2 près :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{S}} &= 2w_1^e(\bar{\bar{1}} - 2\bar{\bar{\varepsilon}}_v) - 2w_2^e(\bar{\bar{1}} - 4\bar{\bar{\varepsilon}}_v + 2\bar{\bar{\varepsilon}}) + p(\bar{\bar{1}} - 2\bar{\bar{\varepsilon}}) \\ &= \underbrace{(2w_1^e - 2w_2^e + p)}_{p'} \bar{\bar{1}} - 4w_2^e \bar{\bar{\varepsilon}} - 4(w_1^e - 2w_2^e) \bar{\bar{\varepsilon}}_v - 2p \bar{\bar{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

et donc

$$\boxed{\bar{\bar{\sigma}} = p' \bar{\bar{1}} + 4 \left( c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\bar{\bar{\varepsilon}} - \bar{\bar{\varepsilon}}_v)} \quad (\text{V.18})$$

Il en va de même pour (V.11b) :

$$\begin{aligned} \nu \dot{\bar{\bar{C}}}_v - \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left( w_1^e \bar{\bar{1}} - w_2^e \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + w_v \bar{\bar{1}} + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} &= 0 \\ 2\nu \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_v - w_1^e (\bar{\bar{1}} - 4\bar{\bar{\varepsilon}}_v + 2\bar{\bar{\varepsilon}}) + w_2^e (\bar{\bar{1}} - 6\bar{\bar{\varepsilon}}_v + 4\bar{\bar{\varepsilon}}) + w_v \bar{\bar{1}} + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} &= 0 \\ 2\nu \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_v + \underbrace{(w_2^e - w_1^e + w^v + q)}_{q'} \bar{\bar{1}} + (4w_2^e - 2w_1^e) (\bar{\bar{\varepsilon}} - \bar{\bar{\varepsilon}}_v) + 2w^v \bar{\bar{\varepsilon}}_v &= 0 \end{aligned}$$

On adopte la forme suivante :

$$\boxed{2 \left( c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\bar{\bar{\varepsilon}} - \bar{\bar{\varepsilon}}_v) = 2\nu \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_v + 2a_1 \bar{\bar{\varepsilon}}_v + q' \bar{\bar{1}}} \quad (\text{V.19})$$

### V.2.2.c identification des paramètres

Les équations (V.18) et (V.19) permettent alors l'identification des paramètres du modèle de POYNTING-THOMSON sous l'hypothèse des petites perturbations et ce, en considérant les cas de chargement de cisaillement et de traction.

#### Chargement de cisaillement

On pose dans ce cas :

$$[\sigma] \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_v] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy}^v & 0 \\ \varepsilon_{xy}^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.20})$$

Les équations (V.18), (V.19) donnent alors :

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = 4 \left( c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^v) \\ 2 \left( c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^v) = 2\nu \dot{\varepsilon}_{xy} + 2a_1 \varepsilon_{xy}^v \end{cases} \quad (\text{V.21})$$

Les caractéristiques de cisaillement du modèle en petites déformations sont alors données par :

$$\begin{cases} K_c = 2 \left( c_1 + \frac{c_2}{3} \right) \\ k_c = 2a_1 \\ \eta_c = 2\nu \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

### Chargement de traction

Ce cas de chargement implique les formes suivantes des différentes grandeurs cinématiques et sthéniques :

$$[\sigma] \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon^v] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^v & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y^v & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_y^v \end{bmatrix}, \quad (\text{V.23})$$

si bien que (V.18) donne :

$$\begin{cases} \sigma_x = p' + 4 \left( c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_x - \varepsilon_x^v) \\ 0 = p' + 4 \left( c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_y - \varepsilon_y^v) \end{cases} \quad (\text{V.24})$$

Une combinaison de ces deux équations permet l'élimination du terme de pression. Puis la condition d'incompressibilité globale (resp. visqueuse) permet d'exprimer  $\varepsilon_y$  (resp.  $\varepsilon_y^v$ ) en fonction  $\varepsilon_x$  (resp.  $\varepsilon_x^v$ ) :

$$\boxed{\sigma_x = 6 \left( c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_x - \varepsilon_x^v)}. \quad (\text{V.25})$$

Par une démarche analogue sur l'équation (V.19), on a :

$$\begin{cases} \sigma_x = 4\nu \dot{\varepsilon}_x^v + 4a_1 \varepsilon_x^v + (2q' + p') \\ 0 = 4\nu \dot{\varepsilon}_y^v + 4a_1 \varepsilon_y^v + (2q' + p') \end{cases} \quad (\text{V.26})$$

et donc

$$\boxed{\sigma_x = 6\nu \dot{\varepsilon}_x^v + 6a_1 \varepsilon_x^v}. \quad (\text{V.27})$$

V.25 et V.27 permettent alors de déduire les caractéristiques de traction du modèle comme étant :

$$\begin{cases} K_t = 6 \left( c_1 + \frac{c_2}{3} \right) \\ k_t = 6a_1 \\ \eta_t = 6\nu \end{cases} \quad (\text{V.28})$$



### V.3 Cas d'un chargement de traction harmonique

On se propose, à titre d'illustration, d'observer l'évolution du terme de dissipation le long de la zone intermédiaire (cf. FIG. IV.8) dans le cas d'un chargement de traction harmonique de fréquence  $6Hz$ . Les résultats présentés FIG. V.2 sont normalisés dans un souci de confidentialité.

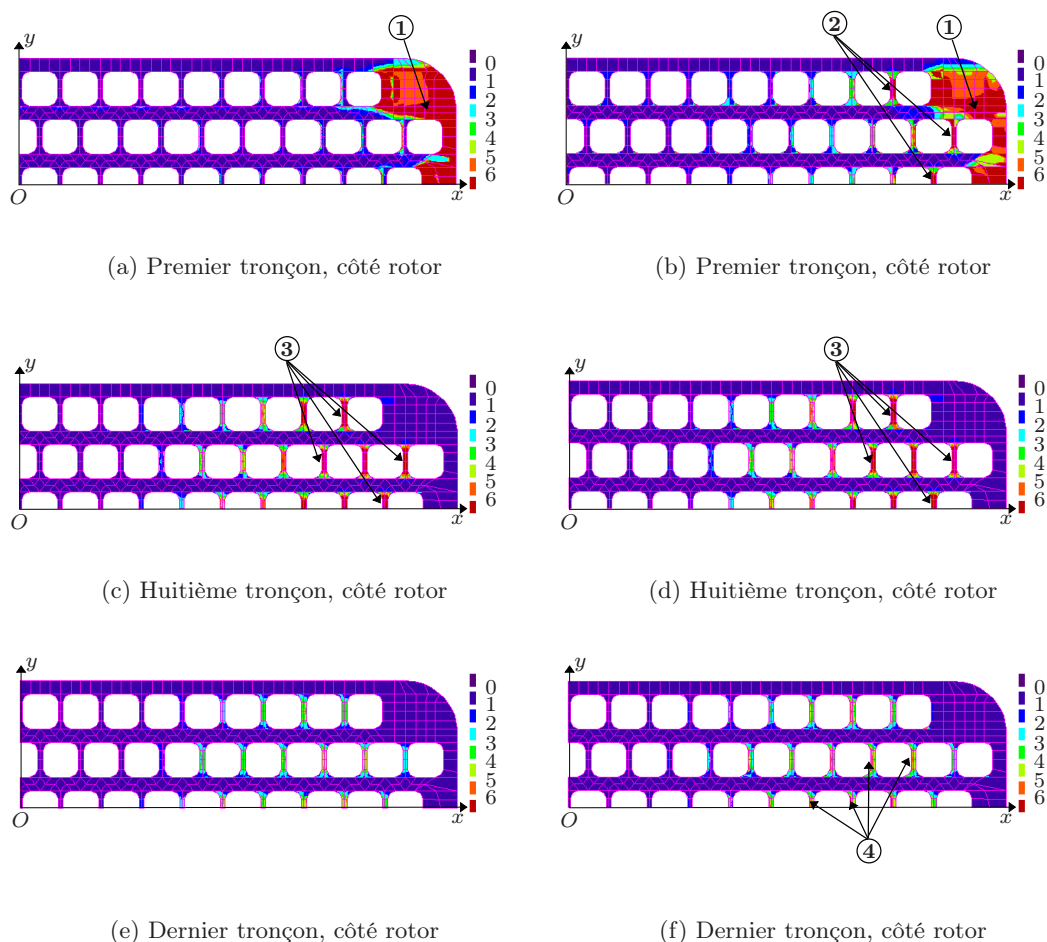


FIGURE V.2 – Evolution normalisée du terme de dissipation le long de la zone intermédiaire.

Cette étude met en évidence, sur le premier tronçon, un terme de dissipation important sur l'extérieur de la pièce (①, FIG. V.2(a) et FIG. V.2(b)). Une concentration fait sont apparition entre les baguettes de verre sur la section de droite de ce même tronçon (②, FIG. V.2(b)). Puis, ce phénomène semble se généraliser à toutes les zones d'élastomère situées entre les baguettes de verre pour atteindre un maximum sur le huitième tronçon (③, FIG. V.2(c) et FIG. V.2(d)). Le terme source s'amenuise par la suite pour finalement réaugmenter – sans pour autant atteindre les niveaux précédents – à la frontière zone intermédiaire / partie courante. Ceci semble, une fois de plus, mettre en avant le rôle prépondérant joué par les baguettes de verres qui, par une déformation en tonneau importante, influent fortement sur les zones d'élastomère les séparant.



## V.4 Conclusion

L'objet de ce chapitre n'est pas de produire une étude complète sur l'ensemble des chargements présentés au chapitre IV, mais de proposer une méthode permettant une première approche d'un terme de dissipation mécanique et ce, à partir d'un unique calcul élastique.

La démarche est basée sur, d'une part, une linéarisation au premier ordre des équations gouvernant le modèle de POYNTING-THOMSON dans le cadre défini dans le chapitre II et, d'autre part, par la prise en compte des solutions en contraintes et déformations  $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon})$  d'un problème élastique comme les amplitudes des solutions d'un problème équivalent mais faisant intervenir un comportement viscoélastique (modèle de POYNTING-THOMSON) et sous une sollicitation harmonique.

Il est certain que les résultats présentés, à titre d'exemple et d'illustration, au paragraphe § V.3 sont à considérer avec prudence de par les hypothèses formulées pour arriver à ces résultats. Cependant, on constate que au moins d'un point de vue qualitatif, les résultats obtenus présentent une assez bonne cohérence et peuvent donner une bonne idée du comportement dissipatif local de pièces complexes telles que le Bras Elastomérique.

Par ailleurs, il ne semble pas exclu, après une vérification plus quantitative des niveaux de dissipation, de prendre en compte ce terme mécanique comme un terme source d'un calcul thermique qui pourra à son tour donner une bonne indication sur les niveaux de température atteint dans la pièce, sa répartition, son évolution et sur une éventuelle fatigue thermique.



# Conclusion

Ce manuscrit aborde deux types de difficulté classiquement rencontrées dans la résolution numérique de problèmes (thermo-)mécaniques :

- D’une part, une difficulté d’ordre comportementale (*i.e.* on ne s’intéresse qu’au matériau), avec la proposition d’un algorithme de couplage thermo-mécanique en vue de caractériser le comportement d’un élastomère.
- D’autre part, une difficulté que l’on peut qualifier de numérique, dans le sens où elle réside davantage dans l’organisation des calculs que dans le comportement des matériaux.
- Finalement, une ébauche de réponse est donnée dans le cas d’un problème présentant simultanément ces deux difficultés.

De manière plus détaillée, concernant la caractérisation d’un élastomère, on part d’une formulation thermodynamique en grandes déformations ramenée au cadre des descriptions à configurations intermédiaires. Ceci permet, après la prise en compte de l’incompressibilité, de pleinement établir, à la fois les lois de comportement et les lois d’évolution des différentes variables internes introduites. Un résultat intermédiaire sur la décomposition du potentiel énergie libre permet de ramener cette description à une généralisation aux grandes transformations de modèles rhéologiques.

Partant de ces résultats, on s’attache à identifier le comportement d’un élastomère. Pour ce faire, on considère une description à un seul état intermédiaire visqueux définissant ainsi les trois modèles rhéologiques de MAXWELL, ZENER et POYNTING-THOMSON. Le choix d’un unique état intermédiaire visqueux se justifie par des constatations expérimentales qui semblent mettre en évidence le caractère dominant mais non exclusif de la viscosité. Une formulation monodimensionnelle, des trois assemblages rhéologiques précités permet la mise en place d’un algorithme d’identification [BOUKAMEL et MÉO, 2000] ainsi que la détermination du modèle et de ses composantes représentant au mieux le matériau, c’est-à-dire le modèle de POYNTING-THOMSON auquel sont associés les potentiels hyperélastiques de GENT-THOMAS et de NÉOHOOKE et un potentiel de dissipation dépendant quadratiquement de la dérivée temporelle de la variable interne.

Enfin, la formulation éléments finis de ce modèle fait l’objet d’une attention particulière quant au choix des éléments mixtes et leur organisation spatiale. Ceci permet de privilégier les éléments

à déplacement quadratique et à pression constante.

Les élastomères présentant une forte sensibilité aux conditions de température extérieure et une production de chaleur interne non négligeable, une généralisation de l'algorithme de couplage thermo-mécanique proposé par BÉRARDI [1995] est proposée. L'adaptation (et la validation) de cet algorithme aux cas de sollicitations mécaniques cycliques est mise en place, permettant une comparaison de résultats numériques et expérimentaux. Cette confrontation met en évidence, comme attendu, une convergence du champ de température numérique vers un état stable, mais la température de stabilisation est nettement supérieure aux valeurs expérimentales. Ce phénomène peut traduire une surévaluation du terme source dans le calcul thermique, c'est-à-dire de la dissipation mécanique. Un recalage de cette grandeur, sur la partie asymptotique de la courbe d'évolution en température au centre de l'élastomère, permet alors une bonne concordance numérique/expérimentale sur l'évolution complète (*i.e.* asymptotique finale mais aussi en début d'évolution), en un autre point de mesure (au comportement thermique différent du point de recalage). A une température extérieure différente, ce même coefficient donne une évolution correcte de la température aux deux points de mesure. Ce terme correcteur peut trouver une explication, sur la base des travaux de SIMO [1987] ; GOVINDJEE et SIMO [1991, 1992], dans l'hypothèse que seule une partie de l'énergie mécanique est dissipée en chaleur, le reste servant au réarrangement ou à l'endommagement des chaînes moléculaires. Ceci semble en particulier se justifier dans le cas d'essais cyclés d'élastomères ou un endommagement continu est expérimentalement constaté par MIEHE [1995]. Cette hypothèse constitue une perspective intéressante au présent travail ; la principale difficulté réside dans la définition d'une campagne d'essais afin de mettre en évidence expérimentalement cet endommagement et, le cas échéant, de déterminer les coefficients inhérents à sa prise en compte numérique.

L'autre aspect de ce travail de thèse, présenté au chapitre IV, concerne les modélisations d'assemblages de structures une à une invariantes dans une direction. La difficulté de ces modélisations ne réside ni dans le comportement des matériaux, ni dans une éventuelle formulation en grandes déformations puisque l'on choisit de décrire les différents matériaux via une loi élastique linéaire, mais dans l'organisation de calculs lourds de plusieurs millions de degrés de liberté. Pour passer outre cette difficulté, une méthode de sous structuration – en fait, un couplage de deux méthodes – est mise en place et ce, en usant au maximum des propriétés d'invariance des différentes parties constitutives.

On applique cette méthode à la modélisation d'un Bras Elastomérique. Cette pièce mécanique complexe développée par la société EUROCOPTER est composée d'une centaine de baguettes en composites unidirectionnels, noyées dans différentes matrices en élastomère. Les résultats locaux obtenus par cette méthode présentent une bonne cohérence avec les résultats expérimentaux. Par la suite, on détermine l'amortissement global de la pièce à l'aide une méthode énergétique.

---

Le cinquième chapitre présente une étude de faisabilité pour la prise en compte des effets dissipatifs locaux sur une structure complexe – ici le Bras Elastomérique – sous une sollicitation harmonique, à partir des résultats élastiques obtenus au chapitre IV.

Il semble utopique, mis à part par une parallélisation massive du calcul, d'envisager un calcul thermo-mécanique analogue à ceux présentés au chapitre III, une itération d'un calcul non linéaire étant équivalente en terme de temps CPU à un calcul élastique complet. L'alternative, proposée au chapitre V, est basée sur :

- d'une part, la linéarisation des différentes équations (lois de comportement, d'évolution de la variable interne et d'incompressibilité) obtenues en grandes transformations sur le modèle de POYNTING-THOMSON
- et d'autre part, sur la prise en compte des résultats en contraintes et déformations déterminés au chapitre IV dans le cas élastique comme les amplitudes des solutions sous régime harmonique.

Ceci permet de déterminer un terme de dissipation locale sur des sections fortement sollicitées à partir des coefficients du modèle en grandes transformations et identifiés via l'algorithme présenté au chapitre II.

Une autre mise en oeuvre possible, plus coûteuse en temps car obligeant un calcul complet de sous structuration, est d'isoler une sous structure supplémentaire – une zone fortement sollicitée déterminée par un calcul élastique – et d'affecter à ses différents constituants un comportement non linéaire.



# BIBLIOGRAPHIE

- F. ANDRIEUX, K. SAANOUNI et F. SIDOROFF. Sur les solides hyperélastiques à compressibilité induite par l'endommagement. *C. R. Acad. Sci.*, 324(SérieIIb) :281–288, 1997.
- SURESNES AÉROSPATIALE. *Calcul de l'attache feuilletée E.F.B.* DCR/M-64481/F-97, 1997.
- I. BABUŠKA et R. NARASIMHAN. The babuška-bressi condition and the patch test : an example. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 140:183–199, 1997.
- K.J. BATHE. The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. *Computers and Structures*, 79:243–252, 2001.
- G. BÉRARDI. *Modélisation numérique du comportement thermo-viscoélastique d'un élastomère en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université de Provence, 1995.
- B. BERNSTEIN, E.A. KEARSLEY et L.J. ZAPAS. A study of stress relaxation with finite strain. *Transaction of the Society of Rheology*, 7:391–410, 1963.
- A. BOUKAMEL. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1988.
- A. BOUKAMEL, C. GABRIELI et S. MÉO. Modélisation en grandes déformations viscoélastiques des élastomères. *Actes du Troisième Colloque National en Calcul des Structures*, pages 387–396, 1997.
- A. BOUKAMEL et S. MÉO. Identification de modèles rhéologiques en grandes déformations. 2000.
- J.L. CHABOCHE. Continuous damage mechanics, part 1&2. *Journal of Applied Mechanics*, 55: 233–247, 1988.
- D. CHAPELLE et K.J. BATHE. The inf-sup test. *Comp. And Struct.*, 4/5:537–545, 1993.
- J.S. CHEN, W. HAN, C.T. WU et W. DUAN. On the perturbed lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 142:335–351, 1997.
- J.S. CHEN, S. YOON, H.P. WANG et W. K. LIU. An improved reproducing kernel particle method for nearly incompressible finite elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 181: 117–145, 2000.

- R.M. CHRISTENSEN. *Theory of viscoelasticity, an introduction*. Academic Press Inc., New York, 1971.
- A. CHRYSOCHOOS et R. PEYROUX. Modélisation numérique des couplages en thermomécanique des solides. *Revue européenne des éléments finis*, 6:673–724, 1997.
- B.D. COLEMAN et W. NOLL. Foundations of linear viscoelasticity. *Rev. Mod. Phys.*, 33:239–249, 1961.
- M.A. CRISFIELD et V.C. NORRIS. Lessons for incompressible and near-incompressible elasticity drawn from the driven cavity flow problem. *Computers and Structures*, 75:529–538, 2000.
- D. DELORME. *Modélisation numérique du comportement mécanique de matériaux composites à matrices élastomériques*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, 1997.
- Y. ESCAIG. *Décomposition de domaines multiniveaux et traitements distribués pour la résolution de problèmes de grande taille*. Thèse de Doctorat, Université de Compiègne, 1992.
- Y. ESCAIG, M. VAYSSADE et G. TOUZOT. Une méthode de décomposition de domaines multifrontale multiniveaux. *Revue européenne des éléments finis*, 3(1):312–337, 1994.
- C. GABRIELI. *Modélisation théorique et numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, 1995.
- A.N. GENT et A.G. THOMAS. *Forms for the stored strain energy function for vulcanised rubber*. Masson, 1973.
- P. GERMAIN. *Cours de Mécanique des milieux continus, tome 1*. Masson, 1973.
- P. GERMAIN. *Mécanique 1&2. Cours de l'Ecole Polytechnique*. Ellipses, 1986.
- S. GOVINDJEE et J. SIMO. Transition from micro-mechanics to computationally efficient phenomenology: carbon black filled rubbers incorporating mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, 40:213–233, 1992.
- S. GOVINDJEE et J.C. SIMO. A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, 39:87–112, 1991.
- B. HALPHEN et NGUYEN QUOC SON. Sur les matériaux standards généralisés. *J. Méc.*, 14:39–63, 1975.
- L.J. HART-SMITH. Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. *J. Appl. Math. Phys.*, 17:608–626, 1966.
- G.A. HOLZAPFEL et J. SIMO. Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 132:17–44, 1996.
- J.F. IMBERT. *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues édition, 1979.
- M.F. JAZZAR. *Modélisation du comportement hyperélastique quasi incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1993.

- 
- J. LAMBERT-DIANI et C. REY. Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères : principe et avantages. *C. R. Acad. Sci.*, 326(SérieIb) :483–488, 1998.
- F. LARABA-ABBES. *Etude des comportements hyperélastique et viscohyperélastique de deux élastomères de type NR et PDMS par extensométrie optique bidimensionnelle*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, 1998.
- P. LE TALLEC. Compatibility condition and existence results in discret finite incompressible elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 27 :239–259, 1981.
- P. LE TALLEC. Numerical analysis of viscoelastic problems. Masson, 1990.
- P. LE TALLEC et C. RAHIER. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37 :1159–1186, 1994.
- J. LELONG-FERRAND et J.M. ARNUADIÈS. *Cours de mathématiques, Tome1, Algèbre*. Dunod, Paris, 1978.
- J. LEMAÎTRE. How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering Design*, 80 :233–245, 1984.
- J. LEMAÎTRE et J.L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- A.I. LEONOV. On thermodynamics and stability of general maxwell-like viscoelastic constitutive equations, theoretical and applied rheology. *XIth Int. Cong. On Rheology*, pages 97–99, 1992.
- A. LION. A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomers. *Acta Mechanica*, 123 :1–25, 1996.
- A. LION. On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :1805–1834, 1997.
- M.R. MAHERI et R.D ADAMS. Finite-element prediction of modal response of damped layered composite panels. *Composites Science and Technology*, 55 :13–23, 1995.
- D.S. MALKUS. Finite element with penalties in nonlinear elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 16 :121–136, 1980.
- D.S. MALKUS et T.J.R. HUGHES. Mixed finite element methods – reduced and selective integration technique – a unification of concepts. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 15 :63–81, 1978.
- C. MIEHE. Discontinuous and continuous damage evolution in ogden-type large-strain elastic materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14 :697–720, 1995.
- J.J. MOREAU. Lois d'élasticité en grande déformation. *Séminaire d'analyse convexe*, pages 12.1–12.54, 1979.
- K.N. MORMAN. Original contributions. an adaptation of finite linear viscoelasticity theory for rubber-like by use of the generalised strain measure. *Rheologica Acta*, 27 :3–14, 1988.
- J.C. NAGTEGALL, D.M. PARKS et J.R. RICE. On numerically accurate finite element solutions in fully plastic range. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 4 :153–177, 1974.

- J.T. ODEN. A theory of penalty methods for finite element approximations of highly nonlinear problems in continuum mechanics. *Computers and Structures*, 8:445–449, 1978.
- J.T. ODEN et N. KIKUCHI. Finite element methods for constrained problems in elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18:701–725, 1982.
- J.T. ODEN, N. KIKUCHI et Y.J. SONG. Penalty-finite elements methods for the analysis of stokesian flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 31:297–329, 1982.
- R.W. OGDEN. Large deformation isotropic elasticity, on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids. *Proc. Roy. Soc., Lond.*, A326:565–584, 1972.
- J.K. SEUNG, S.K. KYEONG et Y.C. JIN. Viscoelastic model of finitely deforming rubber and its finite element analysis. *ASME, Journal of Applied Mechanics.*, 64:835–841, 1997.
- F. SIDOROFF. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic finite strain. *Arch. Mech.*, 25(2):299–309, 1973.
- F. SIDOROFF. Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 13(4):679–713, 1974.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 1. variable internes scalaires et tensorielles. *J. Méc.*, 14(3):545–566, 1975a.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 2. milieux avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 14(4):571–595, 1975b.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 3. milieux avec plusieurs configurations intermédiaires. *J. Méc.*, 15(1):85–118, 1976.
- F. SIDOROFF. Rhéologie non-linéaire et variables internes tensorielles. *Symposium franco-polonais, Cracovie*. 1977.
- F. SIDOROFF. Cours sur les grandes déformations. *Ecole d'été, Sophia-Antipolis*, 1982.
- J.C. SIMO. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : fomulation and computational aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 60:153–163, 1987.
- L.R.G. TRELOAR. The elasticity of a network of long chain molecules i. *Trans. Faraday Soc.*, 39:36–64, 1943.
- L.R.G. TRELOAR. The present status of the theory of large elastic deformations. *The rheology of elastomers*, 1957.
- C. TRUESDELL et W. NOLL. *The non-linear field theories of mechanics*. Springer Verlag, 1973.
- J. VANTOMME. Parametric study of material damping in fibre-reinforced plastics. *Composites*, 26:147–153, 1995.
- O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR. *The finite elements method*, volume 1&2. Mac Graw-Hill Book Compagny, London, 1991.

O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR. The finite element patch test revisited. a computer test for convergence, validation and error estimates. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 149: 223–254, 1997.



# TABLE DES FIGURES

I.1	Système de configurations. . . . .	7
I.2	Décomposition polaire. . . . .	11
I.3	Etat de contrainte dans les différentes configurations. . . . .	12
I.4	Conditions limites dans les configurations de référence et actuelle. . . . .	14
I.5	Milieu avec une configuration intermédiaire. . . . .	29
I.6	Milieu avec $n$ configurations intermédiaires. . . . .	31
I.7	Modèles à un seul état intermédiaire. . . . .	36
I.8	Généralisations à un modèle rhéologique. . . . .	37
II.1	Evolution du module d'YOUNG en fonction de la température. . . . .	43
II.2	Evolution des différentes formes d'énergie de compressibilité. . . . .	48
II.3	Chargement cyclique d'un élastomère. . . . .	54
II.4	Modèle d'endommagement : rupture des liaisons interparticulaires [GOVINDJEE et SIMO, 1991]. . . . .	55
II.5	Eprouvette de double cisaillement. . . . .	59
II.6	Essais expérimentaux, Contrainte ( $\frac{R}{\epsilon \times L}$ , MPa) - Déformation globale ( $\tan \theta = \frac{u}{l}$ , %), $T = 23^\circ C$ . . . . .	60
II.7	Dispersion des résultats sur trois éprouvettes de double cisaillement, amplitude de 50%, $T = 25^\circ C$ . . . . .	61
II.8	Modèle de MAXWELL. . . . .	62
II.9	Modèle de POYNTING-THOMSON. . . . .	63
II.10	Modèle de ZENER. . . . .	64
II.11	Découplage des courbes expérimentales. . . . .	66
II.12	Résultats d'identification sur le modèle de ZENER (cisaillement 10%, 20%, 50%). . . . .	68
II.13	Résultats d'identification sur le modèle de POYNTING-THOMSON (cisaillement 10%, 20%, 50%). . . . .	69
II.14	Comparaison des résultats semi-analytiques sur le modèle POYNTING-THOMSON et expérimentaux sur un essai d'amplitude de cisaillement 50%. . . . .	70

II.15 Comparaison des formulations basées sur le modèle de POYNTING-THOMSON et faisant intervenir les formes de potentiel de GENT-THOMAS de sc Hart-Smith ou de MOONEY-RIVLIN. . . . .	71
II.16 Patch test. . . . .	80
II.17 Test de validité de l'élément Q8P1. . . . .	81
II.18 Test de validité de l'élément Q8P4. . . . .	81
II.19 Test de validité de l'élément T6P1. . . . .	82
II.20 Test de validité de l'élément T6P3. . . . .	82
II.21 Différents motifs de maillage utilisant des éléments triangulaires. . . . .	83
II.22 Description et résultat du test sur le coefficient de compressibilité. . . . .	84
II.23 Conditions aux limites du problèmes . . . . .	84
II.24 Discrétisations spatiales d'une demi éprouvette. . . . .	85
II.25 Comparaison des résultats expérimentaux (amplitude cisaillement 50% - fréquence 3.1 Hz) et des résultats éléments finis. . . . .	86
II.26 Résultats d'un calcul éléments finis sur un maillage utilisant des éléments T6-P1 et un motif en drapeau anglais, amplitude du cisaillement 50% (troisième cycle). . . . .	87
II.27 Comparaison des réponses en contrainte obtenues à partir des maillages faisant intervenir des éléments T6-P1, organisés en motifs classiques ou drapeaux anglais. . . . .	87
III.1 Positionnement des thermocouples sur la demi éprouvette supérieure. . . . .	94
III.2 Courbes contrainte déformation obtenues à différentes températures d'essais sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50 % et de fréquence 3.1 Hz. . . . .	94
III.3 Evolution de la température aux thermocouples b et d à une température extérieure de 27°C et sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50% et de fréquence 3.1Hz. . . . .	95
III.4 Evolution de la température aux thermocouples b et d à une température extérieure de 60°C et sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50% et de fréquence 3.1Hz. . . . .	95
III.5 Définition du problème thermo-mécanique. . . . .	98
III.6 Etat intermédiaire thermique. . . . .	101
III.7 Evolution en fonction de la température des différentes paramètres matériaux. . . . .	104
III.8 Algorithme de couplage thermo-mécanique. . . . .	105
III.9 Comparaison de solutions analytiques (ou obtenues par calcul complet) de problèmes thermo-mécaniques et de solutions résultant de couplage faible. . . . .	108
III.10 Représentation schématique de la dissipation et de sa moyenne temporelle au cours de deux couples de calcul. . . . .	109

III.11 Description du test de validation de l'algorithme adopté dans le cas de sollicitations cycliques . . . . .	110
III.12 Problèmes numériques. . . . .	111
III.13 Evolution de la température au coeur d'une des couches d'élastomères. Comparaison des résultats obtenus pour les deux configurations. . . . .	112
III.14 Evolutions de la température au centre d'une des deux couches d'élastomère obtenues par les répartitions 1 et 2 - Ecart relatif. . . . .	114
III.15 Différents raffinements testés. . . . .	115
III.16 Influence du maillage. . . . .	116
III.17 Essai de type 2, Température d'enceinte = $27^{\circ}C$ . Evolution de la température au centre de l'élastomère. Comparaison des résultats expérimentaux et numérique. . . . .	119
III.18 Essai de type 2, Température d'enceinte = $27^{\circ}C$ . Evolution de la température au centre de l'élastomère. Comparaison des résultats expérimentale et numérique ( $\alpha = 0.704$ ). . . . .	121
III.19 Essai de type 2, Température d'enceinte = $27^{\circ}C$ . Evolution de la température au thermocouple b. Comparaison des résultats expérimentale et numérique ( $\alpha = 0.704$ ). . . . .	121
III.20 Essai de type 2, Température d'enceinte = $27^{\circ}C$ . Comparaison des évolution numérique ( $\alpha = 0.704$ ) de la température au thermocouple b et d. . . . .	122
III.21 Evolution du champ de température. . . . .	122
III.22 Essai de type 2, Température d'enceinte = $60^{\circ}C$ . Evolution de la température au centre de l'élastomère. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques ( $\alpha = 0.704$ ). . . . .	123
III.23 Essai de type 2, Température d'enceinte = $60^{\circ}C$ . Evolution de la température au thermocouple b. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques ( $\alpha = 0.704$ ). . . . .	123
IV.1 Exemple de sous structures de niveau 1. . . . .	130
IV.2 Méthode de sous structuration classique. . . . .	132
IV.3 Structure invariante suivant la direction $z$ et symétrique par rapport à $(O, x, y)$ . . . . .	133
IV.4 Méthode de sous structuration multi-niveaux. . . . .	134
IV.5 Dédution des degrés de liberté milieux. . . . .	136
IV.6 Structure composée de $s$ structures une à une invariante dans une direction. . . . .	137
IV.7 Combinaison des méthodes de sous structuration. . . . .	138
IV.8 Bras élastomérique et chargements. . . . .	139
IV.9 Sections des maillages adoptés pour la partie courantes et l'attache. . . . .	140
IV.10 Bras élastomérique et dispositif expérimental. . . . .	141
IV.11 Section du bras élastomérique et positions des jauges de déformations. . . . .	142

IV.12	Chargement de traction pure – force centrifuge. . . . .	142
IV.13	Champ de contrainte $\sigma_{zz}$ sur la frontière côté pale sous chargement de traction. . . . .	143
IV.14	Champ de contrainte $\sigma_{zz}$ sur la frontière côté rotor sous chargement de traction. . . . .	143
IV.15	Répartition du second invariant sur la frontière côté pale sous chargement de traction. . . . .	144
IV.16	Répartition du second invariant sur la frontière côté rotor sous chargement de traction. . . . .	144
IV.17	Déplacements normalisés moyens de la baguette 15 sous chargement de traction. . . . .	145
IV.18	Déplacements normalisés moyens de la baguette 21 sous chargement de traction. . . . .	146
IV.19	Détail de la déformée de la baguette 15 sous chargement de traction. . . . .	147
IV.20	Détail de la déformée de la baguette 21 sous chargement de traction. . . . .	147
IV.21	Evolution, sous chargement de traction, de $\sigma_{zz}$ (normalisé) le long de la baguette 15. . . . .	148
IV.22	Evolution, sous chargement de traction, de $\sigma_{zz}$ (normalisé) le long de la baguette 21. . . . .	149
IV.23	Chargement de traînée. . . . .	149
IV.24	Champ de contrainte $\sigma_{zz}$ sur la frontière côté pale sous chargement de traînée. . . . .	150
IV.25	Champ de contrainte $\sigma_{zz}$ sur la frontière côté rotor sous chargement de traînée. . . . .	150
IV.26	Répartition du second invariant sur la frontière côté pale sous chargement de traînée. . . . .	151
IV.27	Répartition du second invariant sur la frontière côté rotor sous chargement de traînée. . . . .	151
IV.28	Détail de la déformée de la baguette 15 . . . . .	152
IV.29	Détail de la déformée de la baguette 21 . . . . .	152
IV.30	Evolution, sous chargement de traînée, de $\sigma_{zz}$ (normalisé) le long de la baguette 15. . . . .	153
IV.31	Evolution, sous chargement de traînée, de $\sigma_{zz}$ (normalisé) le long de la baguette 21. . . . .	154
IV.32	Répartition du second invariant à 10mm de l'attache sous chargement de traînée. . . . .	154
IV.33	Répartition du second invariant à 10mm de l'attache sous chargement de traînée. . . . .	155
IV.34	Chargement de torsion. . . . .	155
IV.35	Répartition du second invariant sur la frontière côté pale sous chargement de torsion. . . . .	156
IV.36	Répartition du second invariant sur la frontière côté rotor sous chargement de torsion. . . . .	156
IV.37	Modèle de KELVIN-VOIGT. . . . .	157
IV.38	Caractérisation de l'amortissement. . . . .	158

---

V.1	Modèle de POYNTING-THOMSON en petite déformation. . . . .	165
V.2	Evolution normalisée du terme de dissipation le long de la zone intermédiaire. . .	171
F.1	Influences de la température globale. Courbes contrainte - déformation obtenues sur une éprouvette de double cisaillement pour une sollicitation sinusoïdale de fréquence 3.1 Hz et d'amplitudes 5 %, 10 %, 20 %, 50 % et 100 %. . . . .	214
G.1	Présentation du problème. . . . .	218
G.2	Maillages adoptés. . . . .	219
G.3	Comparaisons des résultats à $t = 10s$ . . . . .	219
G.4	Comparaisons des résultats à $t = 100s$ . . . . .	220
H.1	Maillage quadratique (315 Noeuds). . . . .	222
H.2	Maillage quadratique – Déformée. . . . .	222
H.3	Maillage quadratique – Détail de la déformée (X3). . . . .	222
H.4	Maillage linéaire (114 Noeuds). . . . .	223
H.5	Maillage linéaire – Déformée. . . . .	223
H.6	Maillage linéaire – Détail de la déformée (X3). . . . .	223



ANNEXE A

Inégalité de Clausius-Duhem dans les  
différentes descriptions

L'opérateur " $\bullet$ " représente la contraction sur le nombre adéquat d'indices, en vue de l'obtention d'un scalaire.

• Description eulérienne

Dans cette description, on choisit pour variables d'état la température  $T$ ,  $\bar{\bar{B}}$ , le tenseur d'Euler-Almansi, pour représenter les déformations, et les variables internes  $\alpha_i$  définies § I.3.2.b.

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{d\psi}{dt}(\bar{\bar{B}}, T, \alpha_i) \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \dot{\bar{\bar{B}}} + \frac{\partial\psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \bullet \dot{\alpha}_i. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Or on a :

$$\dot{\bar{\bar{B}}} = \dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^T + \bar{F} \cdot \dot{\bar{F}}^T. \quad (\text{A.2})$$

D'après (I.19),  $\dot{\bar{F}} = \bar{L} \cdot \bar{F}$  ; par conséquent :

$$\dot{\bar{\bar{B}}} = \bar{L} \cdot \bar{\bar{B}} + \bar{\bar{B}} \cdot \bar{L}^T. \quad (\text{A.3})$$

En isolant le premier terme du membre de gauche de (A.1) et en y injectant (A.3), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \dot{\bar{\bar{B}}} &= \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \left( \bar{L} \cdot \bar{\bar{B}} + \bar{\bar{B}} \cdot \bar{L}^T \right) \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \bar{L} \cdot \bar{\bar{B}} + \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \bar{\bar{B}} \cdot \bar{L}^T \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} \cdot \bar{\bar{B}}^T : \bar{L} + \bar{\bar{B}}^T \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \bar{L}^T \\ &= \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}^T} : \bar{L}^T + \bar{\bar{B}}^T \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \bar{L}^T \\ &= 2\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \bar{L}^T \quad \text{car } \bar{\bar{B}} \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

En remplaçant alors le premier terme de (A.1) par le résultat ci-dessus, puis en substituant  $\dot{\psi}$  dans (I.50), on obtient :

$$\boxed{\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}}) : \bar{L}^T - \rho(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \bullet \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T}\bar{q} \cdot \text{div}_x T \geq 0} \quad (\text{A.4})$$

Dans le cas particulier où  $\psi$  est une fonction scalaire isotrope de  $\bar{\bar{B}}$  :

$$\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} \text{ est symétrique,} \quad (\text{A.5})$$

si bien que :

$$\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \bar{L}^T = \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} : \bar{D} \quad (\text{A.6})$$

d'où pour l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM :

$$\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}}) : \bar{D} - \rho(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \bullet \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T}\bar{q} \cdot \text{div}_x T \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

• Description lagrangienne

Le tenseur de Green-Lagrange,  $\bar{E}$ , est associé aux déformations, on considère la température et les variables internes de la configuration initiale  $\mathcal{A}_i$ .

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{d\psi}{dt}(\bar{E}, T, \mathcal{A}_i) \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial\bar{E}} : \dot{\bar{E}} + \frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Par un raisonnement beaucoup plus rapide que pour la description eulérienne, on obtient alors, en substituant  $\dot{\psi}$  dans (I.51) :

$$\phi_0 = (\bar{S} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{E}}) : \dot{\bar{E}} - \rho_0(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T}\bar{Q} \cdot \text{div}_X T \geq 0 \quad (\text{A.9})$$

• Description mixte

Dans ce cas on associe  $\bar{F}$ , le gradient de la transformation, aux déformations ce qui nous permet l'obtention de :

$$\phi_0 = (\bar{\pi} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{F}}) : \dot{\bar{F}} - \rho_0(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T}\bar{Q} \cdot \text{div}_X T \geq 0. \quad (\text{A.10})$$

Cette dernière équation se met sous la forme équivalente :

$$\phi_0 = (\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi} - 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{C}}) : \dot{\bar{E}} - \rho_0(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T}\bar{Q} \cdot \text{div}_X T \geq 0 \quad (\text{A.11})$$



ANNEXE B

Etats intermédiaires et Inégalité de  
Clausius-Duhem

On se place dans le cas d'un matériau isotrope à  $n$  configurations.

• Description eulérienne

Sous les hypothèses précédentes, on a  $\psi$  qui est fonction isotrope de  $(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^i)$  et de la température. (A.7) donne alors :

$$\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}}) : \bar{\bar{D}} - \rho(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}^i} : \dot{\bar{\bar{B}}}^i - \frac{1}{T}\vec{q} \cdot \text{div}_x T \geq 0 \quad (\text{B.1})$$

L'obtention d'une formulation vérifiant le Principe d'Invariance des Fonctions Constitutives passe par l'utilisation de grandeurs  $\Gamma$ -objectives ou  $\Gamma$ -invariantes. Or  $\dot{\bar{\bar{B}}}^i$  ne vérifie aucune de ces propriétés. En prenant en compte que  $\bar{\bar{B}}^i = \bar{F}^i \cdot \bar{F}^{iT}$ ,  $\bar{F} = \bar{F}^i \cdot {}^i\bar{F}$ , on a :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\bar{B}}}^i &= \dot{\bar{F}} \cdot {}^i\bar{F}^{-1} \cdot {}^i\bar{F}^{-T} \cdot \bar{F}^T + \bar{F} \cdot \dot{\bar{F}}^{-1} \cdot {}^i\bar{F}^{-T} \cdot \bar{F}^T + \bar{F} \cdot {}^i\bar{F}^{-1} \cdot \dot{{}^i\bar{F}}^{-T} \cdot \bar{F}^T + \bar{F} \cdot {}^i\bar{F}^{-1} \cdot {}^i\bar{F}^{-T} \cdot \dot{\bar{F}}^T \\ &= \dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^{-1} \cdot \bar{F}^T + \bar{F} \cdot \dot{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{F}^T + \bar{F} \cdot {}^i\bar{F}^{-1} \cdot \dot{{}^i\bar{F}}^{-T} \cdot \bar{F}^T + \bar{F} \cdot {}^i\bar{F}^{-1} \cdot {}^i\bar{F}^{-T} \cdot \dot{\bar{F}}^T \\ &\quad + \bar{F} \cdot {}^i\bar{F}^{-1} \cdot {}^i\bar{F}^{-T} \cdot \bar{F}^T \cdot \bar{F}^{-T} \cdot \dot{\bar{F}}^T \\ &= \bar{L} \cdot \bar{B}^i + \bar{F}^i \cdot {}^i\bar{F} \cdot \dot{{}^i\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{F}^{iT} + \bar{F}^i \cdot {}^i\bar{F}^{-T} \cdot \dot{{}^i\bar{F}}^T \cdot \bar{F}^{iT} + \bar{B}^i \cdot \bar{L}^T \\ &= \bar{L} \cdot \bar{B}^i + \bar{B}^i \cdot \bar{L}^T + \bar{F}^i \cdot \left( \frac{d}{dt}({}^i\bar{F} \cdot {}^i\bar{F}^{-1}) - \dot{{}^i\bar{F}} \cdot {}^i\bar{F}^{-1} + \frac{d}{dt}({}^i\bar{F}^{-T} \cdot {}^i\bar{F}^T) - \dot{{}^i\bar{F}}^{-T} \cdot {}^i\bar{F}^T \right) \cdot \bar{F}^{iT} \\ &= \bar{L} \cdot \bar{B}^i + \bar{B}^i \cdot \bar{L}^T - \bar{F}^i \cdot ({}^i\bar{L} + {}^iL^T) \cdot \bar{F}^{iT} \end{aligned}$$

et donc :

$$\dot{\bar{\bar{B}}}^i = \bar{L} \cdot \bar{B}^i + \bar{B}^i \cdot \bar{L}^T - \bar{F}^i \cdot {}^i\bar{D} \cdot \bar{F}^{iT}. \quad (\text{B.2})$$

on injecte ce résultat dans (B.1) tout en utilisant la décomposition polaire de  $\bar{F}^i (= \bar{V}^i \cdot \bar{R}^i)$  :

$$\begin{aligned} \phi &= (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} - 2\rho\bar{\bar{B}}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}^i}) : \bar{\bar{D}} - \rho(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} + \\ &\quad 2\rho\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i : \bar{R}^i \cdot {}^i\bar{D} \cdot \bar{R}^{iT} - \frac{1}{T}\vec{q} \cdot \text{div}_x T \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

• Description lagrangienne

Cette description considère la fonction d'énergie libre comme une fonction scalaire isotrope de  $(\bar{\bar{C}}, {}^i\bar{\bar{C}})$  et de  $T$ , si bien que (A.9) s'écrit :

$$\phi_0 = (\bar{\bar{S}} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{E}}}) : \dot{\bar{\bar{E}}} - \rho_0(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial {}^i\bar{\bar{C}}} : {}^i\dot{\bar{\bar{C}}} - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{div}_X T \geq 0 \quad (\text{B.4})$$

$\bar{\bar{E}}, \dot{\bar{\bar{E}}}, {}^i\bar{\bar{C}}, {}^i\dot{\bar{\bar{C}}}$  sont des grandeurs  $\Gamma$ -invariantes, l'application du principe de normalité à cette équation mènera donc à une théorie vérifiant le P.I.F.C.

• Description mixte

On réalise une approche similaire au cas lagrangien si bien que :

$$\phi_0 = \bar{F}^{-1} \cdot (\bar{\pi} - 2\rho_0\bar{F} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{C}}}) : \dot{\bar{\bar{E}}} - \rho_0(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial {}^i\bar{\bar{C}}} : {}^i\dot{\bar{\bar{C}}} - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{div}_X T \geq 0 \quad (\text{B.5})$$

---

La loi de comportement qui découle de l'application du principe de normalité à cette équation ( $\bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}}$ ) fait intervenir  $\bar{F}$  qui n'est ni  $\Gamma$ -invariante, ni  $\Gamma$ -objective. Cependant, cette loi étant équivalente à une loi vérifiant le P.I.F.C. ( $\bar{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{E}}$ ), elle vérifie donc ce dernier.



ANNEXE C

Milieux incompressibles, calculs  
annexes

On remarque que :

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{F}}^{-T} : \dot{\bar{\bar{F}}} &= \bar{\bar{F}}^{-T} : \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{F}} \quad \text{d'après (I.19b)} \\
&= \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \bar{\bar{F}}^T : \bar{\bar{L}} \\
&= \bar{\bar{1}} : \bar{\bar{L}} \\
&= \text{tr}(\bar{\bar{1}} \cdot \bar{\bar{L}}) \\
&= \text{tr} \bar{\bar{D}}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc une nouvelle condition d'incompressibilité globale :

$$\boxed{\text{un matériau est globalement incompressible} \Leftrightarrow \bar{\bar{F}}^{-T} : \dot{\bar{\bar{F}}} = 0} \quad (\text{C.1})$$

De plus :

$$\begin{aligned}
{}^i \dot{\bar{C}} &= {}^i \bar{F}^T \cdot {}^i \bar{F} + {}^i \bar{F}^T \cdot {}^i \dot{\bar{F}} \\
&= {}^i \bar{F}^T \cdot {}^i \bar{L}^T \cdot {}^i \bar{F} + {}^i \bar{F}^T \cdot {}^i \bar{L} \cdot {}^i \dot{\bar{F}} \\
&= 2 {}^i \bar{F}^T \cdot {}^i \bar{D} \cdot {}^i \bar{F},
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
{}^i \dot{\bar{C}} : {}^i \bar{C}^{-1} &= 2 {}^i \bar{F}^T \cdot {}^i \bar{D} \cdot {}^i \bar{F} : {}^i \bar{C}^{-1} \\
&= 2 {}^i \bar{D} : {}^i \bar{F} \cdot {}^i \bar{C}^{-1} \cdot {}^i \bar{F}^T \\
&= 2 {}^i \bar{D} : \bar{\bar{1}} \\
&= 2 \text{tr} {}^i \bar{D}.
\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\boxed{\text{une des transformations anélastiques est incompressible} \Leftrightarrow {}^i \dot{\bar{C}} : {}^i \bar{C}^{-1} = 0} \quad (\text{C.2})$$

Un calcul analogue nous mène à une autre condition globale d'incompressibilité :

$$\boxed{{}^i \dot{\bar{C}} : \bar{\bar{C}}^{-1} = 0} \quad (\text{C.3})$$

## ANNEXE D

# Isotropie de la fonction énergie libre élastique par rapport aux variables d'état

On définit les opérateurs invariants qui à un tenseur associent l'invariant de ce dernier :

$$I_1(\bar{\bar{X}}) = \text{tr} \bar{\bar{X}} \quad (\text{D.1})$$

$$I_2(\bar{\bar{X}}) = \frac{1}{2} \left( (\text{tr} \bar{\bar{X}})^2 - \text{tr} \bar{\bar{X}}^2 \right) \quad (\text{D.2})$$

$$I_3(\bar{\bar{X}}) = \det \bar{\bar{X}} \quad (\text{D.3})$$

Par ailleurs, on rappelle la propriété fondamentale reliant les invariants d'un tenseur  $\bar{\bar{X}}$  invariants à ceux de son inverse  $\bar{\bar{X}}^{-1}$  (propriété obtenue par le théorème de CAYLEY -HAMILTON [LELONG-FERRAND et ARNUADIÈS, 1978]) :

$$\begin{cases} I_1(\bar{\bar{X}}^{-1}) = \frac{I_2(\bar{\bar{X}})}{I_3(\bar{\bar{X}})} \\ I_2(\bar{\bar{X}}^{-1}) = \frac{I_1(\bar{\bar{X}})}{I_3(\bar{\bar{X}})} \\ I_3(\bar{\bar{X}}^{-1}) = \frac{1}{I_3(\bar{\bar{X}})} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

De plus, on notera :

$$\begin{cases} I_k(\bar{\bar{C}}) = I_k \\ I_k(\bar{\bar{C}}^i) = I_k^i \\ I_k({}^i\bar{\bar{C}}) = {}^iI_k \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

De manière analogue, on introduit les opérateurs invariants mixtes associant à deux tenseurs leurs invariants mixtes :

$$\begin{cases} K_{11}(\bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}}) = \text{tr}(\bar{\bar{X}} \cdot \bar{\bar{Y}}) = \text{tr}(\bar{\bar{Y}} \cdot \bar{\bar{X}}), \\ K_{21}(\bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}}) = \text{tr}(\bar{\bar{X}}^2 \cdot \bar{\bar{Y}}) = \text{tr}(\bar{\bar{Y}} \cdot \bar{\bar{X}}^2), \\ K_{22}(\bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}}) = \text{tr}(\bar{\bar{X}}^2 \cdot \bar{\bar{Y}}^2) = \text{tr}(\bar{\bar{X}}^2 \cdot \bar{\bar{Y}}^2), \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

et on note

$$\begin{cases} K_{11}(\bar{\bar{C}}, {}^i\bar{\bar{C}}) = K_{11} \\ K_{21}(\bar{\bar{C}}, {}^i\bar{\bar{C}}) = K_{21} \\ K_{21}({}^i\bar{\bar{C}}, \bar{\bar{C}}) = K_{12} \\ K_{22}(\bar{\bar{C}}, {}^i\bar{\bar{C}}) = K_{22} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

On définit  $\psi_2^i$  une fonction isotrope de  $\bar{\bar{C}}^i$  :

$$\begin{aligned} \psi_2^i(\bar{\bar{C}}^i) &= \tilde{\psi}_2^i(I_1(\bar{\bar{C}}^i), I_2(\bar{\bar{C}}^i), I_3(\bar{\bar{C}}^i)) \\ &= \tilde{\psi}_2^i(I_1^i, I_2^i, I_3^i) \end{aligned}$$

Montrons que  $\psi_2^i$  est une fonction isotrope de  $(\bar{C}, {}^i\bar{C})$ , c'est à dire fonction des invariants de ces tenseurs.

Preuve: D'après (I.88) on a :

$$\bar{F} = \bar{F}^i \cdot {}^i\bar{F} \quad (\text{D.8})$$

si bien que :

$$\begin{aligned} I_1^i &= \text{tr} \bar{C}^i \\ &= \text{tr}(\bar{F}^{i^T} \cdot \bar{F}^i) \\ &= \bar{F}^i : \bar{F}^i \\ &= \bar{F} \cdot {}^i\bar{F}^{-1} : \bar{F} \cdot {}^i\bar{F}^{-1} \\ &= {}^i\bar{F}^{-1} \cdot {}^i\bar{F}^{-T} : \bar{F}^T \cdot \bar{F} \\ &= \text{tr} \left( {}^i\bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \end{aligned}$$

Soit  ${}^iP$  polynôme caractéristique de  ${}^i\bar{C}$  :

$${}^iP(X) = X^3 - {}^iI_1 X^2 + {}^iI_2 X - {}^iI_3. \quad (\text{D.9})$$

D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON  ${}^i\bar{C}$  annule  ${}^iP$ , si bien que :

$${}^i\bar{C}^{-1} = \frac{1}{{}^iI_3} {}^i\bar{C}^2 - \frac{{}^iI_1}{{}^iI_3} {}^i\bar{C} + \frac{{}^iI_2}{{}^iI_3} \bar{1}. \quad (\text{D.10})$$

On en déduit donc pour le premier invariant de  $\bar{C}^i$  :

$$I_1^i = \frac{1}{{}^iI_3} \text{tr} \left( {}^i\bar{C}^2 \cdot \bar{C} \right) - \frac{{}^iI_1}{{}^iI_3} \text{tr} \left( {}^i\bar{C} \cdot \bar{C} \right) + \frac{{}^iI_2}{{}^iI_3} \text{tr} \bar{C} \quad (\text{D.11})$$

$$\boxed{I_1^i = \frac{1}{{}^iI_3} K_{12} - \frac{{}^iI_1}{{}^iI_3} K_{11} + \frac{{}^iI_2}{{}^iI_3} I_1} \quad (\text{D.12})$$

On rappelle l'expression du second invariant de  $\bar{C}^i$  :

$$\begin{aligned}
 I_2^i &= \frac{1}{2} \left( \left( \text{tr} \bar{C}^i \right)^2 - \text{tr} \bar{C}^{i2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( \text{tr} \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \right)^2 - \text{tr} \left( \bar{F}^{iT} \cdot \bar{F}^i \cdot \bar{F}^{iT} \cdot \bar{F}^i \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( \text{tr} \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \right)^2 - \text{tr} \left( {}^i \bar{F}^{-T} \cdot \bar{F}^T \cdot \bar{F} \cdot {}^i \bar{F}^{-1} \cdot {}^i \bar{F}^{-T} \cdot \bar{F}^T \cdot \bar{F} \cdot {}^i \bar{F}^{-1} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( \text{tr} \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \right)^2 - \text{tr} \left( {}^i \bar{F}^{-T} \cdot \bar{C} \cdot {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \cdot {}^i \bar{F}^{-1} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( \text{tr} \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \right)^2 - {}^i \bar{F}^{-1} : \bar{C} \cdot {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \cdot {}^i \bar{F}^{-1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( \text{tr} \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \right)^2 - {}^i \bar{F}^{-1} \cdot {}^i \bar{F}^{-T} : \bar{C} \cdot {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( \text{tr} \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \right)^2 - \text{tr} \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \cdot {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \right) \\
 &= I_2 \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right) \\
 &= \frac{I_1 \left( \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right)^{-1} \right)}{I_3 \left( \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right)^{-1} \right)} \\
 &= \frac{I_3 \left( \bar{C} \right)}{I_3 \left( {}^i \bar{C} \right)} I_1 \left( \bar{C}^{-1} \cdot {}^i \bar{C} \right) \quad \text{car } I_3 \left( \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right)^{-1} \right) = \det \left( \left( {}^i \bar{C}^{-1} \cdot \bar{C} \right)^{-1} \right) = \det \bar{C}^{-1} \det {}^i \bar{C} \\
 &= \frac{\det {}^i \bar{C}}{\det \bar{C}} \\
 &= \frac{I_3}{{}^i I_3} \text{tr} \left( \bar{C}^{-1} \cdot {}^i \bar{C} \right)
 \end{aligned}$$

Une démarche analogue à celle nous conduisant à (D), nous donne :

$$\bar{C}^{-1} = \frac{1}{I_3} {}^i \bar{C}^2 - \frac{I_1 {}^i \bar{C}}{I_3} + \frac{I_2 \bar{1}}{I_3}. \quad (\text{D.13})$$

Par conséquent :

$$I_2^i = \frac{I_3}{{}^i I_3} \left( \frac{1}{I_3} \text{tr} \left( \bar{C}^2 \cdot {}^i \bar{C} \right) - \frac{I_1}{I_3} \text{tr} \left( \bar{C} \cdot {}^i \bar{C} \right) + \frac{I_2}{I_3} \text{tr} {}^i \bar{C} \right)$$

$$\boxed{I_2^i = \frac{1}{{}^i I_3} K_{21} - \frac{I_1}{{}^i I_3} K_{11} + I_2} \quad (\text{D.14})$$

Le raisonnement pour le troisième invariant de  $\bar{C}^i$  est plus rapide :

$$\begin{aligned}
 I_3^i &= \det \bar{C}^i \\
 &= \det \left( {}^i \bar{F}^{-T} \cdot \bar{F}^T \cdot \bar{F} \cdot {}^i \bar{F}^{-1} \right) \\
 &= \det {}^i \bar{F}^{-T} \det \bar{C} \det {}^i \bar{F}^{-1} \\
 &= \det {}^i \bar{C}^{-1} \det \bar{C} \\
 &= \frac{\det \bar{C}}{\det {}^i \bar{C}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_3^i = \frac{I_3}{{}^i I_3}} \tag{D.15}$$

(D.12), (D.14) et (D.15) permettent de réécrire  $\psi_2^i$  :

$$\begin{aligned}
 \psi_2^i(\bar{C}^i) &= \tilde{\psi}_2^i(I_1^i, I_2^i, I_3^i) \\
 &= \tilde{\tilde{\psi}}_2^i(I_1, I_2, I_3, {}^i I_1, {}^i I_2, {}^i I_3, K_{11}, K_{12}, K_{21}).
 \end{aligned}$$

Cette dernière équation montre que la dépendance de  $\psi_2^i$  se fait par le biais des invariants respectifs de  $\bar{C}$  et  ${}^i \bar{C}$  et de leurs invariants mixtes.



ANNEXE E

Equations régissant les modèles  
rhéologiques choisis

## E.1 calcul des dérivées partielles des deux premier invariants (globaux, visqueux et élastiques)

L'objet de cette section est de déterminer les dérivées partielles des deux premier invariants (globaux, visqueux et élastiques) par rapport aux variables d'états  $\bar{\bar{C}}$  et  $\bar{\bar{C}}_v$ .

On rappelle que :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}\bar{\bar{C}}, & I_1^k = \text{tr}\bar{\bar{C}}_k \quad k \in \{v, e\} \\ I_2 = \frac{1}{2} \left( (\text{tr}\bar{\bar{C}})^2 - \text{tr}\bar{\bar{C}}^2 \right), & I_2^k = \frac{1}{2} \left( (\text{tr}\bar{\bar{C}}_k)^2 - \text{tr}\bar{\bar{C}}_k^2 \right) \quad k \in \{v, e\} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

### • Dérivées des invariants globaux

$\bar{\bar{C}}$  et  $\bar{\bar{C}}_v$  étant indépendants, seules les dérivées de  $I_1$  et  $I_2$  par rapport à  $\bar{\bar{C}}$  sont étudiées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \bar{\bar{C}}} &= \frac{\partial \text{tr}\bar{\bar{C}}}{\partial \bar{\bar{C}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{C}}} (\bar{\bar{1}} : \bar{\bar{C}}) \end{aligned}$$

par conséquent

$$\boxed{\frac{\partial I_1}{\partial \bar{\bar{C}}} = \bar{\bar{1}}} \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial \bar{\bar{C}}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{C}}} \left( (\text{tr}\bar{\bar{C}})^2 - \text{tr}\bar{\bar{C}}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{C}}} \left( (I_1)^2 - \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{C}}^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{C}}} \left( (I_1)^2 - \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{C}} \right) \quad \text{car } \bar{\bar{C}} \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial I_2}{\partial \bar{\bar{C}}} = I_1 \bar{\bar{1}} - \bar{\bar{C}}} \quad (\text{E.3})$$

### • Dérivées des invariants visqueux

De même les invariants visqueux sont indépendants de  $\bar{\bar{C}}$ . Leurs dérivées par rapport à  $\bar{\bar{C}}_v$  suivent les mêmes règles que celles des invariants globaux par rapport à  $\bar{\bar{C}}$ , *i.e.* :

$$\boxed{\frac{\partial I_1^v}{\partial \bar{\bar{C}}_v} = \bar{\bar{1}}} \quad (\text{E.4})$$

$$\boxed{\frac{\partial I_2^v}{\partial \bar{\bar{C}}_v} = I_1^v \bar{\bar{1}} - \bar{\bar{C}}_v} \quad (\text{E.5})$$

• Dérivées des invariants élastiques

On a

$$I_1^e = \text{tr} \bar{C}_e = \text{tr} \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right)$$

et

$$I_2^e = \frac{1}{2} \left( \left( \text{tr} \bar{C}_e \right)^2 - \text{tr} \bar{C}_e^2 \right) = \frac{1}{2} \left( I_1^{e2} - \text{tr} \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right)^2 \right)$$

Il vient alors pour les dérivées des deux premiers invariants élastiques par rapport à  $\bar{C}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^e}{\partial \bar{C}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \text{tr} \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left( \bar{C}_v^{-1} : \bar{C} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial I_1^e}{\partial \bar{C}} = \bar{C}_v^{-1}} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2^e}{\partial \bar{C}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left( I_1^{e2} - \text{tr} \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right)^2 \right) \\ &= I_1^e \bar{C}_v^{-1} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left( \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right) : \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right)^T \right) \\ &= I_1^e \bar{C}_v^{-1} - \frac{1}{2} \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right) : \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left( \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right) \right) : \left( \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) \\ &= I_1^e \bar{C}_v^{-1} - \frac{1}{2} \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right) : \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{C}} \cdot \bar{C}_v^{-1} - \frac{1}{2} \bar{C}_v^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{C}} : \left( \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial I_2^e}{\partial \bar{C}} = I_1^e \bar{C}_v^{-1} - \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1}} \quad (\text{E.7})$$

Menons un raisonnement semblable pour les dérivées par rapport à  $\bar{C}_v$ . On a :

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial \bar{C}_v} = \frac{\partial}{\partial \bar{C}_v} \left( \bar{C}_v^{-1} : \bar{C} \right) = \frac{\partial \bar{C}_v^{-1}}{\partial \bar{C}_v} : \bar{C} \quad (\text{E.8})$$

or

$$\begin{aligned} \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} = \bar{1} &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{C}_v} \left( \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right) = \bar{0} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{C}_v^{-1}}{\partial \bar{C}_v} \cdot \bar{C} + \bar{C}_v^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{C}_v} = \bar{0} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{C}_v^{-1}}{\partial \bar{C}_v} = -\bar{C}_v^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{C}_v} \bar{C}_v^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

En effectuant alors le produit doublement contracté de (E.9) par  $\bar{\bar{C}}$  et en utilisant la symétrie de  $\bar{\bar{C}}_v$ , il vient :

$$\boxed{\frac{\partial I_1^e}{\partial \bar{\bar{C}}_v} = -\bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1}} \quad (\text{E.10})$$

Enfin, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2^e}{\partial \bar{\bar{C}}_v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{C}}_v} \left( I_1^{e2} - \text{tr}(\bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2I_1^e \frac{\partial I_1^e}{\partial \bar{\bar{C}}_v} - (\bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}) : \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{C}}_v} (\bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}})^T - \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{C}}_v} (\bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}) : (\bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}})^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2I_1^e \frac{\partial I_1^e}{\partial \bar{\bar{C}}_v} - (\bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}) : \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{C}}_v} (\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1}) - \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{C}}_v} (\bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}) : (\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -2I_1^e \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} - (\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}) : \frac{\partial \bar{\bar{C}}_v^{-1}}{\partial \bar{\bar{C}}_v} - \frac{\partial \bar{\bar{C}}_v^{-1}}{\partial \bar{\bar{C}}_v} : (\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}) \right) \end{aligned}$$

Puis en utilisant la règle de dérivation (E.9), on aboutit à :

$$\boxed{\frac{\partial I_2^e}{\partial \bar{\bar{C}}_v} = -I_1^e \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} + \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1}} \quad (\text{E.11})$$

## E.2 Obtention des modèles

- MAXWELL

Ce modèle conduit aux formes suivantes de l'énergie libre et du potentiel de dissipation :

$$\begin{cases} \psi = \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) & \psi_e \text{ isotrope} \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\dot{\bar{\bar{C}}}_v) \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

La section § E.1 donne les dérivées des différents invariants élastiques par rapport aux variables d'états  $\bar{\bar{C}}$  et  $\bar{\bar{C}}_v$  permettant d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{C}}} &= \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \frac{\partial I_1^e}{\partial \bar{\bar{C}}} + \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \frac{\partial I_2^e}{\partial \bar{\bar{C}}} \\ &= \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{C}}_v} &= \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \frac{\partial I_1^e}{\partial \bar{\bar{C}}_v} + \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \frac{\partial I_2^e}{\partial \bar{\bar{C}}_v} \\ &= -\bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}}_1 - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) \end{aligned}$$

Ces résultats permettent alors l'obtention des formes développées de (II.58a,d) :

$$\boxed{\begin{cases} \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + p \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{C}}_v} - \rho_0 \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}}_1 - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) - q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{cases}} \quad (\text{E.13})$$

- POYNTING-THOMSON

L'énergie libre totale de ce modèle nous est donnée par :

$$\begin{cases} \psi = \psi_e(\bar{C}_e) + \psi_v(\bar{C}_v) & \psi_e, \psi_v \text{ isotropes} \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\dot{\bar{C}}_v) \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

Le terme  $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}}$  est le même que pour le modèle de MAXWELL, à savoir :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}} = \bar{C}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right). \quad (\text{E.15})$$

Il n'en va pas de même pour  $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v}$ , l'énergie libre présentant une dépendance en  $\bar{C}_e$  et  $\bar{C}_v$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v} &= \frac{\partial \psi_e}{\partial \bar{C}_v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \bar{C}_v} \\ &= \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \frac{\partial I_1^e}{\partial \bar{C}_v} + \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \frac{\partial I_2^e}{\partial \bar{C}_v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} \frac{\partial I_1^v}{\partial \bar{C}_v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \frac{\partial I_2^v}{\partial \bar{C}_v} \\ &= -\bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} I_2^e \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \right) \bar{C}_v^{-1} + \left( \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} I_1^v \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{C}_v \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{cases} \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \bar{C}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) + p \bar{F}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{C}_v} - \rho_0 \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) \\ \quad + \left( \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} I_1^v \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{C}_v + q \bar{C}_v^{-1} = 0 \end{cases}} \quad (\text{E.16})$$

- ZENER

L'énergie libre totale de ce modèle nous est donnée par :

$$\begin{cases} \psi = \psi_e(\bar{C}_e) + \psi(\bar{C}) & \psi_e, \psi \text{ isotropes} \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\dot{\bar{C}}_v) \end{cases} \quad (\text{E.17})$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}} &= \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \bar{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \bar{C}} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} \frac{\partial I_1^v}{\partial \bar{C}_v} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2^v} \frac{\partial I_2^v}{\partial \bar{C}_v} \\ &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \bar{C} + \bar{C}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} I_1^e \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) \end{aligned}$$

tandis que de manière analogue au modèle de MAXWELL, le terme  $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v}$  s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v} = -\bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) \quad (\text{E.18})$$

Ces deux derniers résultats nous permettent alors d'exprimer le premier tenseur de PIOLA-KIRCHOFF ainsi que la loi d'évolution de la variable interne sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \bar{C} + \bar{C}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} I_1^e \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) + p \bar{F}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{C}_v} - \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \cdot \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) + q \bar{C}_v^{-1} = 0 \end{array} \right.$$

(E.19)

## ANNEXE F

# Courbes contrainte - déformation

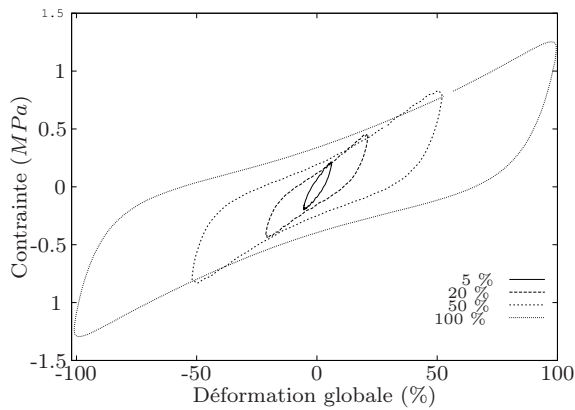
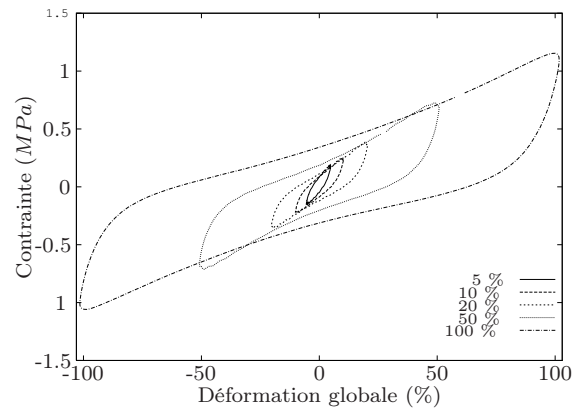
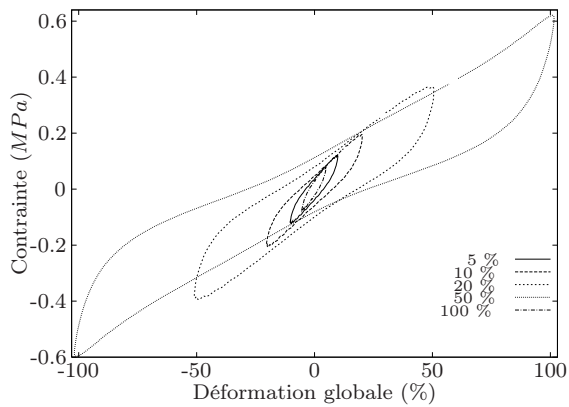
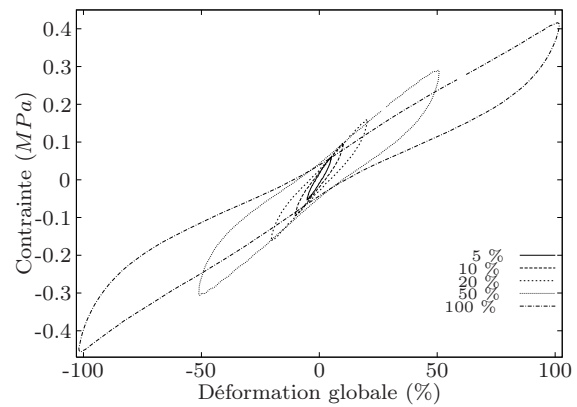
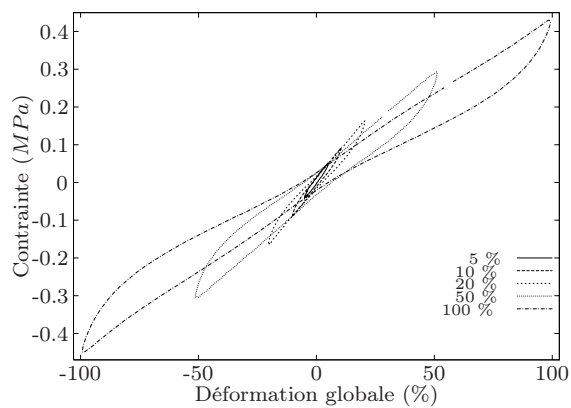
(a) Température d'essai  $-55\text{ }^{\circ}\text{C}$ .(b) Température d'essai  $-45\text{ }^{\circ}\text{C}$ (c) Température d'essai  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ (d) Température d'essai  $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ (e) Température d'essai  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ 

FIGURE F.1 – Influences de la température globale. Courbes contrainte - déformation obtenues sur une éprouvette de double cisaillement pour une sollicitation sinusoïdale de fréquence  $3.1\text{ Hz}$  et d'amplitudes  $5\%$ ,  $10\%$ ,  $20\%$ ,  $50\%$  et  $100\%$ .

ANNEXE G

Mise en oeuvre d'éléments finis  
thermiques

## G.1 Formulation

### G.1.1 Formulation intégrale

D'après l'équation de la chaleur (III.8), on a :

$$\rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \operatorname{div}_X \vec{Q} = \underbrace{\phi_0^{int} + \rho_0 r}_{D_S} \text{ sur } \Omega,$$

La grandeur  $D_S$  représente l'ensemble des sources volumiques et  $\Omega$  le volume du solide dans la configuration non déformée.

Le champ de température solution doit annuler la forme intégrale (G.1), et ce pour toute fonction  $\delta T$  choisie dans le même espace qu'elle.

$$\mathcal{W}^T(T, \delta T) = \int_{\Omega} \delta T \left( \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \operatorname{div}_X \vec{Q} - D_S \right) dV. \quad (\text{G.1})$$

Une intégration par partie permet alors de mettre (G.1) sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^T(T, \delta T) &= \int_{\Omega} \left( \delta T \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \operatorname{grad}_X \delta T \cdot \vec{Q} - \delta T D_S \right) dV + \int_{\partial\Omega_Q} \vec{Q} \cdot \vec{N} dS \\ &= \int_{\Omega} \left( \delta T \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} - \operatorname{grad}_X \delta T \cdot \bar{\bar{K}}_L \cdot \operatorname{grad}_X T - \delta T D_S \right) dV \\ &+ \int_{\partial\Omega_Q} \delta T \vec{Q} \cdot \vec{N} dS \quad \text{car } \vec{Q} = -\bar{\bar{K}}_L \cdot \operatorname{grad}_X T \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

La solution  $T$  vérifie donc :

$$\boxed{\int_{\Omega} \left( \delta T \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} - \operatorname{grad}_X \delta T \cdot \bar{\bar{K}}_L \cdot \operatorname{grad}_X T - \delta T D_S \right) dV + \int_{\partial\Omega_Q} \delta T \vec{Q} \cdot \vec{N} dS = 0 \quad \forall \delta T} \quad (\text{G.3})$$

### G.1.2 Discrétisation spatiale

La résolution de la formulation intégrale (G.3) par la méthode des éléments finis nécessite sa discrétisation de cette dernière en une somme de formes élémentaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^T(T, \delta T) &= \sum_{e=1}^{Nel} \mathcal{W}^{Te} \\ &= \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \left( \delta T \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} - \operatorname{grad}_X \delta T \cdot \bar{\bar{K}}_L \cdot \operatorname{grad}_X T - \delta T D_S \right) dV \\ &+ \int_{\partial\Omega_{Q_e}} \delta T \vec{Q} \cdot \vec{N} dS \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

On distingue alors pour le terme surfacique de l'équation (G.4), une contribution de flux imposée par conduction et une autre imposée par convection (on néglige les effets radiatifs) [BÉRARDI,

1995] :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{Q_e}} \delta T \vec{Q} \cdot \vec{N} dS &= \int_{\partial\Omega_{c_e}} \delta T \sqrt{\vec{N} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}} \Phi_{imp} dS \\ &+ \int_{\partial\Omega_{h_e}} \delta T h \sqrt{\vec{N} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}} (T - T_\infty) dS, \end{aligned} \quad (G.5)$$

où  $h$  est le coefficient d'échanges par convection et  $T_\infty$  la température du milieu extérieur.

Enfin en introduisant les fonctions d'interpolation thermique, on a, sur chaque élément :

$$T = \langle N_T^e \rangle \{T_e\}, \quad (G.6)$$

$$\dot{T} = \langle N_T^e \rangle \{\dot{T}_e\}, \quad (G.7)$$

$$\text{grad}_X T = \left\langle \frac{\partial N_T^e}{\partial X}, \frac{\partial N_T^e}{\partial Y} \right\rangle \{T_e\}. \quad (G.8)$$

Ceci permet alors la réécriture de la forme intégrale (G.2) après élimination de la fonction test  $\delta T$  et assemblage<sup>(1)</sup> :

$$[M] \{\dot{T}\} + [K(T)] \{T\} = \{F(T)\}, \quad (G.9)$$

avec

$$[M] = \sum_{e=1}^{Nel} A [M_e] \quad (G.10)$$

$$[K(T)] = \sum_{e=1}^{Nel} A [K_e^d] + [K_e^h] \quad (G.11)$$

$$\{F(T)\} = \sum_{e=1}^{Nel} A \{F_e^d\} + \{F_e^c\} + \{F_e^h\} \quad (G.12)$$

et

$$[M_e] = \int_{\Omega_e} \rho_0 C_\varepsilon \{N_T^e\} \langle N_T^e \rangle dV \quad (G.13)$$

$$[K_e^d] = \int_{\Omega_e} \left[ \left\{ \frac{\partial N_T^e}{\partial X} \right\}, \left\{ \frac{\partial N_T^e}{\partial Y} \right\} \right] [K_L] \left[ \begin{array}{c} \left\{ \frac{\partial N_T^e}{\partial X} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial N_T^e}{\partial Y} \right\} \end{array} \right] dV \quad (G.14)$$

$$[K_e^h] = \int_{\Omega_e} h \sqrt{\vec{N} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}} \{N_T^e\} \langle N_T^e \rangle dV \quad (G.15)$$

$$\{F_e^d\} = \int_{\Omega_e} \{N_T^e\} D_S dV \quad (G.16)$$

$$\{F_e^c\} = \int_{\partial\Omega_{c_e}} \{N_T^e\} \Phi_{imp} dS \quad (G.17)$$

$$\{F_e^h\} = \int_{\partial\Omega_{h_e}} \{N_T^e\} h T_\infty dS \quad (G.18)$$

(1). la démarche est similaire à celle réalisée § II.3

### G.1.3 Discrétisation temporelle

Pour résoudre le système différentiel (G.9), une méthode d'EULER est utilisée. Pour ce faire, la dérivée temporelle première de la température est approximée par :

$$\dot{T}_{t+\alpha\Delta t} = \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (\text{G.19})$$

Ceci permet alors l'écriture de (G.9) sous la forme [BÉRARDI, 1995] :

$$[\bar{K}(T_{t+\alpha\Delta t})] \{T_{t+\Delta t}\} = \{\bar{F}(T_{t+\alpha\Delta t})\}, \quad (\text{G.20})$$

avec

$$[\bar{K}(T_{t+\alpha\Delta t})] = [M] + \alpha\Delta t [K(T_{t+\alpha\Delta t})] \quad (\text{G.21})$$

et

$$\{\bar{F}(T_{t+\alpha\Delta t})\} = ([M] - (1 - \alpha)\Delta t [K(T_{t+\alpha\Delta t})]) \{T_t\} + \Delta t \{F(T_{t+\alpha\Delta t})\}. \quad (\text{G.22})$$

Pour  $\alpha$  prenant les valeurs 0, 0.5 et 1, on obtient respectivement les schémas d'EULER explicite, de CRANK-NICHOLSON ou d'EULER implicite.

## G.2 Comparaison d'une modélisation thermique 3D et 2D

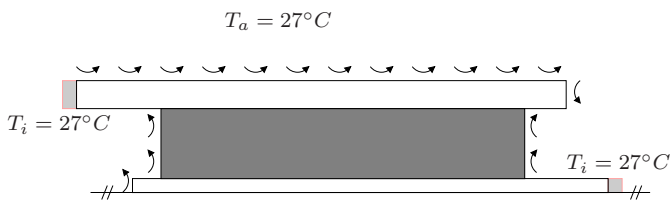


FIGURE G.1 – Présentation du problème.

On propose de résoudre le problème d'une éprouvette à l'air ambiant ( $T_a$ ), une température est imposée ( $T_i$ ) sur les mors, et on considère un terme source constant dans l'élastomère<sup>(2)</sup> (FIG. G.1). On compare les résultats obtenus par l'intermédiaire de modélisation **2D** et **3D**.

Cet exercice a pour but de valider les modélisations 2D sur ce type de problème. Les dimensions de l'éprouvette sont données FIG. II.5 et les coefficients matériau TAB. G.1.

	Elastomère	Acier
Conductivité thermique — $K$ ( $Wm^{-1}K^{-1}$ )	0.127	45
Capacité thermique — $\rho_0 C_\epsilon$ ( $Jm^{-3}K^{-1}$ )	0.74E6	3.5E6
Coefficient d'échange atmosphérique — $h$ ( $Wm^{-2}K^{-1}$ )	17	30
Source volumique — $r$ ( $Wm^{-3}$ )	0.4E - 3	0

TABLEAU G.1 – Caractéristiques thermiques des différents matériaux de l'éprouvette.

(2). Le terme source est à peu près égal à la moyenne spatiale et temporelle de la dissipation intrinsèque obtenue sur trois cycles par le modèle présenté dans le chapitre II

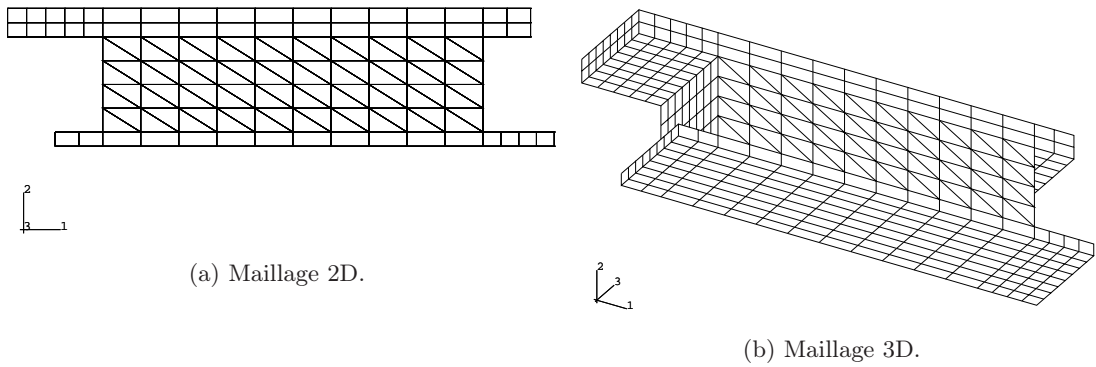


FIGURE G.2 – *Maillages adoptés.*

	Maillage 2D	Maillage 3D
Nombre d'éléments	171	121
Nombre de degré de liberté	1498	1089

TABLEAU G.2 – *Caractéristiques des maillages*

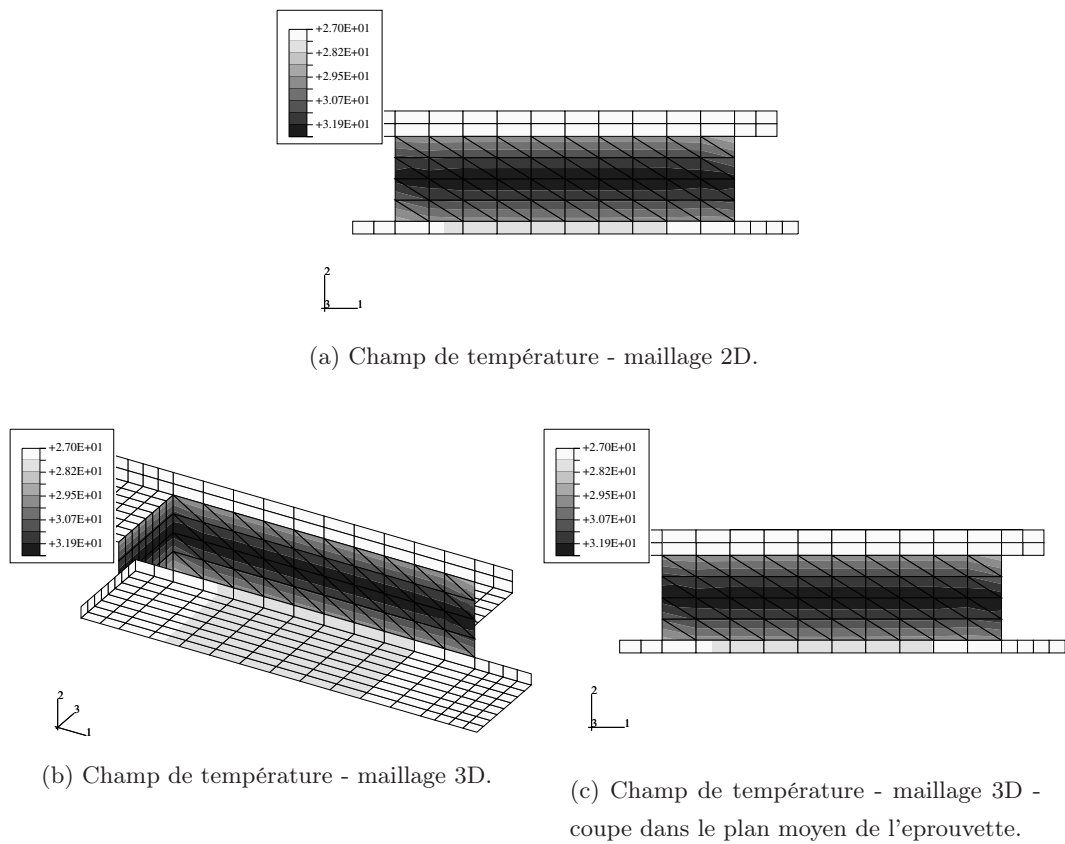
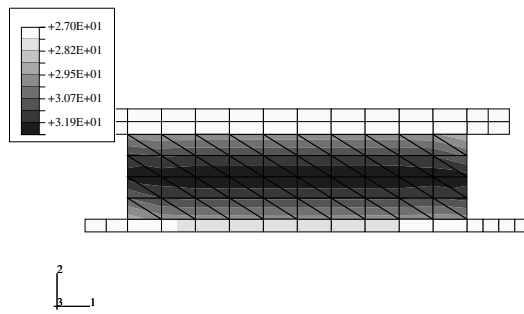
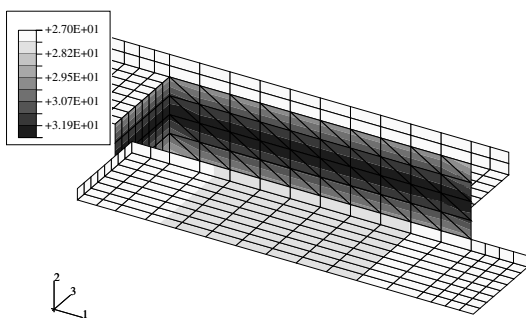


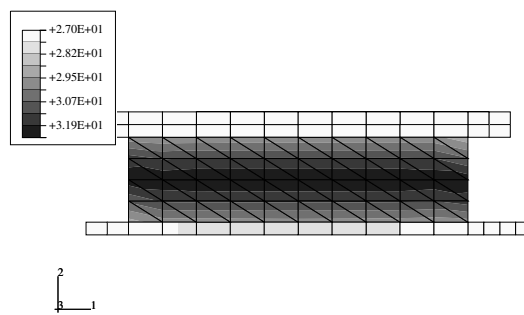
FIGURE G.3 – *Comparaisons des résultats à  $t = 10s$ .*



(a) Champ de température - maillage 2D.



(b) Champ de température - maillage 3D.



(c) Champ de température - maillage 3D - coupe dans le plan moyen de l'éprouvette.

FIGURE G.4 – Comparaisons des résultats à  $t = 100s$ .

Ces deux essais justifient l'utilisation d'un modèle 2D par :

- d'une part une quasi-invariance des champs de température suivant l'axe (3) sur l'essai 3D (FIG. G.4(b), FIG. G.3(b))
- et d'autre part par une distribution identique des températures sur le calcul 2D et sur le plan moyen de l'éprouvette.

## ANNEXE H

# Validation 2D de l'effet tonneau sous chargement de traction

Pour valider la déformation en tonneau obtenue pour un chargement du bras élastomérique en traction et ainsi de manière qualitative la méthode de sous structuration, un calcul en deux dimensions (contraintes planes) sur une structure simplifiée, mais présentant des conditions limites similaires est traité.

On utilise alternativement des éléments quadratiques puis avec des éléments linéaires.

– Maillage quadratique

Le maillage suivant est adopté :



FIGURE H.1 – Maillage quadratique (315 Noeuds).

En imposant une traction unitaire sur l'extrémité droite et un blocage sur l'extrémité gauche, on observe la déformée suivante (FIG. H.2, H.3) :



FIGURE H.2 – Maillage quadratique – Déformée.

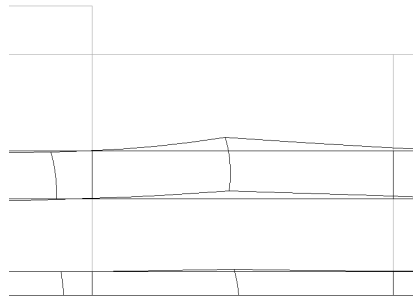


FIGURE H.3 – Maillage quadratique – Détail de la déformée (X3).

On constate donc bien sur les figures FIG. H.2 et FIG. H.3 que l'on a une remontée des baguettes au niveau de la zone d'attache.

– Maillage linéaire

Pour s'acquiescer définitivement de ce phénomène, le même essai numérique est traité avec des éléments linéaires, car la modélisation de l'E.F.B. est menée avec des éléments linéaires suivant l'axe d'invariance (mais quadratique dans le plan perpendiculaire à ce dernier).



FIGURE H.4 – *Maillage linéaire (114 Noeuds).*

On impose le même déplacement et les mêmes conditions limites, on observe alors la déformée suivante (FIG. H.6, FIG. H.5) :

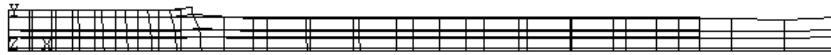


FIGURE H.5 – *Maillage linéaire – Déformée.*

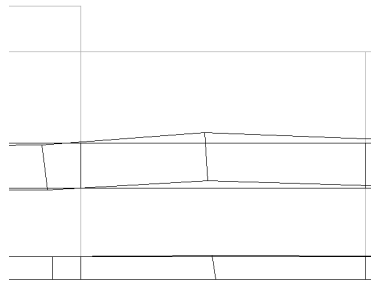


FIGURE H.6 – *Maillage linéaire – Détail de la déformée (X3).*

On constate pour ce type d'éléments que l'on obtient aussi un effet "tonneau", ainsi qu'une cassure (discontinuité) des baguettes entre l'attache et la zone intermédiaire tout comme sur les figures FIG. IV.19 et FIG. IV.20. Ce test simple valide donc, au moins qualitativement, les résultats obtenus en traction (*i.e.* : sous force centrifuge pure).



**Résumé :**

Dans ce mémoire deux principaux axes sont développés :

- Dans un premier temps, on s'intéresse à la modélisation numérique du comportement thermo-mécanique des élastomères. Pour ce faire un modèle mécanique en grandes déformations est proposé et discuté. Il est basé sur les hypothèses classiques de l'état local et des matériaux standards généralisés, et s'appuie sur la notion d'états intermédiaires. On applique alors la méthode des éléments finis à ces équations.

Le modèle éléments finis mécanique ainsi obtenu est alors associé, via un algorithme de couplage séquentiel à une formulation éléments finis des équations de la thermique écrites en configuration lagrangienne.

Diverses simulations numériques, visant à valider d'une part le comportement mécanique, et d'autre part thermo-mécanique, sont présentées et confrontées à des résultats expérimentaux.

- Dans un second temps, l'objet du travail concerne la modélisation d'un assemblage de structures composites à matrice élastomère, une à une invariante dans une même direction. La forte hétérogénéité des composants, rendant impossible la modélisation par homogénéisation périodique, contraint à user du couplage d'une technique de sous structuration classique et d'une méthode de sous structuration multi niveau.

La taille des calculs oblige à adopter pour les différents constituants un comportement élastique linéaire. Cependant, une première approche d'un terme de dissipation mécanique, dans le cas de sollicitations périodiques, est proposée en vue d'un éventuel couplage thermo-mécanique.

**Mots clefs :** élastomère, éléments finis, grandes déformations, viscoélasticité, hyperélasticité, thermo-mécanique, composite, méthodes de sous structuration.

**Abstract :**

In this document two aspects are developed :

- Firstly, the numerical modelisation of the thermo-mechanical behaviour of elastomers is investigated. To do this, a large strains mechanical model is proposed and discussed. The local state method constitutes the theoretical frame of this formulation, it is based on the concept of intermediate states. A finite element implementation is realized.

According to a sequential algorithm, the obtained mechanical model is then associated to a finite element formulation of the thermal equations written in lagrangian configuration.

To validate the thermo-mechanical model, some numerical simulations are realized and compared to some experimental results.

- Secondly, this work deals with the modelisation of an assembly of structures invariant in one direction. The heterogeneity of the different components makes it impossible to run a homogenisation computation. For this reason, the coupling, between a classical substructuring method and a multi level one, is adopted.

An elastic behavior is taking into account for the different materials. A first approach of a mechanical dissipation is finally proposed.

**keywords :** elastomer, finite elements method, large strains, viscoelasticity, hyperelasticity, thermo-mechanics, composites, substructuring methods.