



**HAL**  
open science

# Stratégie multiparamétrique pour la simulation d'assemblages de structures stratifiées

Vincent Roulet

► **To cite this version:**

Vincent Roulet. Stratégie multiparamétrique pour la simulation d'assemblages de structures stratifiées. Mécanique des structures [physics.class-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2011. Français. NNT: . tel-00661703v1

**HAL Id: tel-00661703**

**<https://theses.hal.science/tel-00661703v1>**

Submitted on 20 Jan 2012 (v1), last revised 1 Mar 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Vincent Roulet**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Stratégie multiparamétrique pour la simulation  
d'assemblages de structures stratifiées**

Soutenue à Cachan le 1<sup>er</sup> décembre 2011 devant le jury composé de :

Pierre Alart	Professeur, Université Montpellier 2	Président
Pierre-Alain Boucard	Professeur, Université Paris Sud 11	Co-directeur de thèse
Laurent Champaney	Professeur, ENS de Cachan	Co-directeur de thèse
Philippe Cresta	Ingénieur, EADS IW	Examineur
Jean-Michel Cros	Professeur, Université d'Évry	Rapporteur
Laurent Gornet	Maître de Conférence HDR, Centrale Nantes	Rapporteur



Lorsque l'on commence cette formidable aventure que sont ces trois années de thèse, l'écriture de la page des remerciements n'est qu'une chimère que l'on ne pense pas atteindre si rapidement. Et pourtant ! Cette possibilité s'offre enfin à moi.

Je remercie tout d'abord mes deux co-directeurs, Pierre-Alain Boucard et Laurent Champaney, qui ont su me faire confiance dès le début de ces travaux, tout en m'inculquant une vraie rigueur scientifique. De plus, l'humanité et la bonne humeur dont ils ont su faire preuve tout du long ont fait de cette thèse une formidable expérience.

Je tiens tout naturellement à remercier les membres du jury, monsieur Alart notamment pour en avoir accepté la présidence. Un très grand merci également à messieurs Cros et Gornet pour avoir accepté la lourde charge de rapporteurs, ainsi qu'à monsieur Cresta pour son point de vue industriel et la pertinence de ses questions.

Je ne saurais bien évidemment pas oublier ceux qui font tout pour que l'on puisse travailler dans les meilleures conditions possibles. Le matériel récalcitrant, au fonctionnement mystérieux, a su être dompté par l'équipe du Centre de Calcul, à savoir Frisou, Philippe, Pierre et Arnaud. Merci à vous pour votre bonne humeur, pour ces tranches de rire et votre pédagogie lors de mes (nombreuses !) visites.

L'équipe « logiciel » n'est pas en reste, avec ces faiseurs de miracles que sont Hugo et Raphaël. Leur pédagogie et leur ouverture parviennent à faire du développement d'un code de calcul quelque chose d'abordable !

Enfin, comment oublier nos deux anges gardiens à tous, Lydia et Danielle, qui ont su démystifier – et donc rendre moins effrayant – l'ogre administratif que chacun craint, que ce soit du côté recherche ou enseignement. Il est difficile d'exprimer à quel point je vous suis redevable. Merci infiniment à toutes les deux.

Ces trois années de travail sont passées à vitesse grand « V » et la liste des coupables de cette formidable ambiance est longue, très longue et pourrait inclure tout le LMT ! Parmi les principaux responsables, les doctorants ouvrent le bal, en particulier Nicolas F., Jérémie et Florent, mais aussi Karin, Jorge, Roxane, Nathan, Nicolas R., Alain, Dom', Bastou, Bibou, Loulou, Anne-Charlotte, Huyen, Julien, Pierre-Étienne, Chloé, Augustin, Manue, Op'... Merci, merci à vous tous.

Je ne peux pas non plus oublier toutes ces personnes faisant parti de ce rituel du matin où, devant un café, on refait le monde et que l'on ne pouvait quitter sans une crise de fou rire. Merci à vous, Frisou, Arnaud (encore eux !), Federica, Jean-Luc, Jean-Pierre, PAG, Olivier, Manu, Éric et Peewee. Petite dédicace au passage à Momo et Henri, mes « voisins du dessous », pour leur bonne humeur et les petites discussions que l'on a pu partager.

*Last but not least*, je souhaite tout particulièrement à remercier ma famille et Stéphane pour leur soutien (moral et grammatical !) de chaque instant, ainsi que pour avoir fait de ma soutenance un moment inoubliable de par leur simple présence. Merci énormément.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Rappels sur la modélisation des matériaux composites stratifiés</b>	<b>9</b>
1 Phénoménologie du matériau considéré . . . . .	10
1.1 Description du matériau . . . . .	10
1.2 Mécanismes de dégradation . . . . .	11
1.3 Bilan partiel . . . . .	14
2 Modèles macroscopiques . . . . .	15
2.1 Critères de dimensionnement . . . . .	15
2.2 Comportement anélastique . . . . .	17
3 La modélisation à l'échelle microscopique des dégradations des stratifiés	17
3.1 Modélisation de la fissuration transverse . . . . .	17
3.2 Modélisation de la décohésion fibres/matrice . . . . .	20
4 Le mésomodèle d'endommagement . . . . .	21
4.1 Modélisation des plis . . . . .	22
4.2 Modélisation des interfaces . . . . .	25
5 Conclusions . . . . .	27
<b>2 Revue des stratégies numériques pour la résolution des problèmes d'assemblage</b>	<b>29</b>
1 Modélisation des assemblages . . . . .	30
1.1 Modèles simplifiés d'éléments de liaison . . . . .	31
1.2 Représentation de la géométrie réelle . . . . .	32
1.3 Conclusion sur les problèmes d'assemblages . . . . .	33
2 Stratégies multi-échelles pour le calcul de structures . . . . .	34
2.1 Méthodes avec raffinement local . . . . .	35
2.2 Méthodes multi-grilles . . . . .	40
2.3 Méthodes de décomposition de domaine . . . . .	43

3	Conclusions . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Stratégie de résolution numérique</b>	<b>51</b>
1	Sous-structuration du problème . . . . .	53
1.1	Problème sur les sous-structures . . . . .	54
1.2	Problème sur les interfaces . . . . .	55
2	Introduction d'une échelle macroscopique . . . . .	56
2.1	Séparation des échelles . . . . .	57
2.2	Choix des quantités macroscopiques . . . . .	57
2.3	Admissibilité macroscopique des champs d'interface . . . . .	62
3	Algorithme itératif de résolution . . . . .	62
3.1	Principe . . . . .	62
3.2	Choix des directions de recherche . . . . .	64
3.3	Écriture du problème à l'étape linéaire . . . . .	67
3.4	Écriture du problème de l'étape locale . . . . .	70
3.5	Étape locale sur les sous-structures . . . . .	71
3.6	Étape locale sur les interfaces . . . . .	72
4	Algorithme de la méthode . . . . .	75
4.1	Initialisation de la méthode . . . . .	75
4.2	Convergence de la stratégie . . . . .	75
4.3	Algorithme . . . . .	77
5	Discrétisation du problème . . . . .	77
5.1	Choix des espaces d'approximation . . . . .	77
5.2	Résolution numérique du problème de l'étape linéaire . . . . .	79
5.3	Résolution numérique de l'étape locale sur les sous-structures . . . . .	79
6	Applications . . . . .	82
6.1	Géométrie de l'éprouvette . . . . .	82
6.2	Matériau . . . . .	84
6.3	Comparaison avec les essais . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Une stratégie de calcul adaptée aux études paramétriques</b>	<b>87</b>
1	État de l'art . . . . .	88
1.1	Approches fréquentielles . . . . .	89
1.2	Méthodes de perturbation . . . . .	89
1.3	Méthodes spectrales . . . . .	91
1.4	Conclusion partielle . . . . .	93
2	Présentation de la stratégie multiparamétrique . . . . .	94
2.1	La stratégie multiparamétrique avec l'approximation PGD . . . . .	94
2.2	La stratégie multiparamétrique sans l'approximation PGD . . . . .	95
2.3	Recherche de la meilleure solution de référence . . . . .	95
3	Applications . . . . .	96
3.1	Ouverture d'un empilement composite . . . . .	96
3.2	Étude d'un assemblage boulonné . . . . .	101

---

3.3	Endommagement d'un assemblage en flexion 4 points . . . . .	108
4	Conclusions sur la stratégie multiparamétrique . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Validation et mise en œuvre de la stratégie</b>	<b>115</b>
1	Parallélisation de la stratégie . . . . .	116
1.1	Répartition des données . . . . .	116
1.2	Parallélisation du processus itératif de la méthode LATIN . . . . .	117
1.3	Étude des performances en parallèle . . . . .	118
2	Assemblage à grand nombre d'éléments de fixation . . . . .	123
2.1	Présentation du problème . . . . .	123
2.2	Déroulement du calcul . . . . .	125
2.3	Résultats . . . . .	127
3	Conclusion partielle . . . . .	131
	<b>Conclusion</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Reproduction des essais d'identification du mésomodèle</b>	<b>137</b>
1	Essai n°1 . . . . .	137
2	Essai n°3 . . . . .	138
3	Essai n°5 . . . . .	138
	<b>Bibliographie</b>	<b>141</b>





# Table des figures

1.1	Représentation d'un pli, puis d'un composite stratifié . . . . .	11
1.2	Observation par microscopie électronique à balayage d'une rupture de fibres en traction [Zhao et Takeda, 2000] . . . . .	12
1.3	Formation d'une bande de pliage [Oguni <i>et al.</i> , 2000] . . . . .	12
1.4	Mise en évidence de la décohésion fibres/matrice sur un composite $[\pm 45^\circ]_{2S}$ chargé en traction . . . . .	13
1.5	Mise en évidence de la fissuration transverse . . . . .	14
1.6	Fissures transverses d'un pli avec création de délaminage local en pointe de fissure [Blázquez <i>et al.</i> , 2009] . . . . .	15
1.7	Phénoménologie des dégradations au sein d'un stratifié . . . . .	16
1.8	Comparaison de différents critères à rupture dans le plan $\sigma_{xx}$ vs. $\tau_{xy}$ . . . . .	16
1.9	Modélisation d'une cellule élémentaire . . . . .	18
1.10	Niveaux des déformations plastiques cumulées pour différents cas de chargement [Totry <i>et al.</i> , 2008] . . . . .	20
1.11	Décomposition du matériau stratifié . . . . .	22
2.1	Aperçu d'une jonction circonférentielle de fuselage . . . . .	30
2.2	Différentes échelles de modélisation d'une liaison entre deux pièces [McCarthy et McCarthy, 2005] : macroscopique (modèle simplifié), mésoscopique ([Boucard et Champaney, 2003a]), microscopique ([Alkatan <i>et al.</i> , 2007]) . . . . .	31
2.3	Disparité d'échelles d'observation sur un assemblage . . . . .	34
2.4	Aperçu d'un zoom structurel : un modèle global et un local . . . . .	36
2.5	Aperçu d'une itération de $FE^2$ . . . . .	38
2.6	Analyse micro/macro . . . . .	38
2.7	Identification des deux échelles de la <i>Homogenized Dirichlet Projection Method</i> . . . . .	39
2.8	Enrichissements possibles pour le suivi de propagation de fissure . . . . .	40
2.9	Définition des zones d'études de la méthode Arlequin . . . . .	41
2.10	Hiérarchie des discrétisations et cycles de résolution associés . . . . .	42
3.1	Décomposition du domaine $\Omega$ . . . . .	54
3.2	Définition d'une interface et convention d'écriture des inconnues . . . . .	56

3.3	Représentation du schéma itératif de la méthode . . . . .	80
3.4	Convergence de la méthode avec et sans surdiscrétisation [Ladevèze <i>et al.</i> , 2002] . . . . .	80
3.5	Application de la <i>h-method</i> pour les tétraèdres et les prismes . . . . .	83
3.6	Géométrie de l'échantillon – Identification de la partie modélisée . . . . .	83
4.1	Description de l'empilement : matériaux et chargements . . . . .	97
4.2	Description de l'empilement : vue des interfaces . . . . .	97
4.3	Sous-structuration et maillage de l'empilement . . . . .	98
4.4	Itérations LATIN nécessaires pour les 100 premières résolutions . . . . .	100
4.5	Variation de l'ouverture des plis . . . . .	100
4.6	Influence du nombre d'interfaces cohésives sur la convergence de la méthode . . . . .	102
4.7	Variation de l'ouverture des plis . . . . .	102
4.8	Géométrie de l'assemblage (dimensions en millimètres) . . . . .	103
4.9	Sous-structuration du problème . . . . .	104
4.10	Évolution de la solution en fonction du critère d'erreur LATIN . . . . .	105
4.11	Comparaison des résultats obtenus avec les deux logiciels . . . . .	106
4.12	Géométrie et chargement du problème . . . . .	109
4.13	Géométrie, maillage et sous-structuration du problème d'assemblage en flexion . . . . .	111
4.14	Effort de réaction en fonction des paramètres . . . . .	112
5.1	Sous-structuration et répartition des données . . . . .	117
5.2	Traitement du problème macro sur 3 processeurs . . . . .	118
5.3	<i>Speedup</i> du problème à 8000 sous-structures . . . . .	120
5.4	Contribution au <i>speedup</i> de chacune des étapes LATIN . . . . .	121
5.5	Évolution de la contribution en temps de calcul . . . . .	122
5.6	Évolution du <i>speedup</i> en fonction du nombre de sous-structures . . . . .	122
5.7	Géométrie et chargement du problème . . . . .	124
5.8	Maillage et sous-structuration du problème . . . . .	125
5.9	Répartition sur 80 processeurs . . . . .	126
5.10	Évolution de l'erreur LATIN sur le problème d'assemblage . . . . .	128
5.11	Évolution de l'endommagement diffus sur les pas de temps 2, 6, 10 . . . . .	129
5.12	Évolution de l'endommagement diffus sur les pas de temps 5, 10, 15 . . . . .	130
5.13	Déformée finale de l'assemblage (amplification de 50) . . . . .	130
5.14	Déformée (amplifiée 50 fois) finale de quelques sous-structures autour du trou. <i>Les couleurs représentent les matériaux différents</i> . . . . .	131
A.1	Essai 1 : traction sur un unidirectionnel IM6/914 . . . . .	137
A.2	Essai 3 : Courbe d'érouissage en cisaillement d'un T300/914 [45] <sub>8</sub> . . . . .	138
A.3	Essai 3 : Courbe d'érouissage en traction transverse d'un T300/914 [45] <sub>8</sub> . . . . .	138
A.4	Essai 3 : Courbe de réponse en cisaillement d'un T300/914 [±67,5] <sub>2S</sub> . . . . .	139

# Liste des tableaux

3.1	Base macroscopique constante d'une interface cylindrique d'axe $\vec{x}$ . . . .	60
3.2	Base macroscopique linéaire d'une interface cylindrique d'axe $\vec{x}$ . . . . .	61
3.3	Identification du mésomodèle avec pli 2D . . . . .	84
4.1	Performances de la stratégie multiparamétrique . . . . .	99
4.2	Performances de la stratégie multiparamétrique . . . . .	101
4.3	Coefficients matériau des plaques boulonnées . . . . .	104
4.4	Étude de la longueur de glissement admissible . . . . .	105
4.5	Temps de calcul sur l'étude paramétrique des précharges . . . . .	107
4.6	Temps de calcul sur l'étude paramétrique des frottements . . . . .	107
4.7	Statistiques diverses des études paramétriques . . . . .	108
4.8	Coefficients matériau d'un pli à 0° . . . . .	110
4.9	Tableau de variation des valeurs des paramètres d'entrée . . . . .	111
4.10	Tableau de variation des valeurs des paramètres variables . . . . .	112
4.11	Temps CPU de l'étude paramétrique de l'assemblage endommageable . .	113
5.1	Paramètres matériau utilisés pour l'assemblage . . . . .	124
5.2	Temps de calcul de l'assemblage à multiples fixations . . . . .	127







# Introduction

Dans le domaine de l'industrie aéronautique, en Bureau d'Études, la volonté actuelle est de tendre vers le *Virtual Testing* pour progressivement remplacer, dès la phase de conception, les essais mécaniques réels, onéreux, par des simulations numériques. Se pose donc le problème de la confiance que l'on peut avoir dans ces simulations, d'autant plus avec l'utilisation grandissante des matériaux composites pour lesquels les spécificités ne sont pas forcément toutes maîtrisées. Offrant des performances mécaniques similaires aux alliages métalliques suivant certaines directions privilégiées, les matériaux composites apportent en plus un gain en masse non négligeable, argument clef dans le domaine aéronautique plus encore qu'ailleurs.

La volonté de généraliser l'utilisation de ces nouveaux matériaux a justifié l'ouverture du programme européen MAAXIMUS<sup>1</sup>, lequel a pour objectif d'améliorer tout aussi bien leur production, leur compréhension et leur modélisation. C'est dans le cadre de ce projet que ce travail a été réalisé, ayant pour objectif la simulation du comportement d'assemblages de composants aéronautiques (ferrures, cadres, etc.) constitués de matériaux composites stratifiés.

La simulation d'assemblages de composants en matériaux composites stratifiés soulève trois problèmes scientifiques distincts que nous aborderons successivement au cours de cette étude :

- le matériau présente un caractère fortement multi-échelle : il est composé d'un empilement de plis, eux-mêmes composés de fibres unidirectionnelles de carbone noyées dans une résine. L'orientation de chaque pli, définie au préalable, est définie par la séquence d'empilement. Le comportement de ce matériau est fortement non-linéaire, du fait de mécanismes de dégradation complexes, et a été la source de nombreuses études ;
- dans le cadre du projet MAAXIMUS, aucune idéalisation de la géométrie des liaisons n'est faite. Les problèmes d'assemblages impliquent donc systématiquement de nombreux éléments aux géométries complexes. Typiquement, un assemblage de deux composants est formé, outre desdits composants, de très nombreux éléments de visserie, lesquels sont explicitement modélisés. De plus, les interactions entre les différentes pièces sont nombreuses et potentiellement non-linéaires : contact, frottement, jeux, précharges, etc. ;
- enfin, de nombreuses variabilités, aussi bien dues à l'assemblage (précharge de

---

1. More Affordable Aircraft through eXtended, Integrated and Mature nUmerical Sizing



boulons, coefficients de frottement, chargements) qu'au matériau (seuils d'endommagement, paramètres cohésifs) doivent être prises en compte.

La modélisation des matériaux composites stratifiés a donné lieu à de nombreuses études expérimentales d'abord, mais aussi numériques. Ces dernières peuvent d'ailleurs être classées à partir d'un critère relativement simple, à savoir l'échelle d'observation du matériau. De la modélisation fine de la fibre, de la matrice et de leurs interactions jusqu'aux critères énergétiques globaux, chaque approche a ses propres avantages et inconvénients en termes de coût de calcul, de représentativité des phénomènes de dégradation et de confiance dans la modélisation du matériau.

- La première approche [Nairn, 2000, Budiansky et Fleck, 1993] est de représenter explicitement la microstructure du matériau, puis de modéliser physiquement sa dégradation. Bien évidemment, puisque le contenu physique de ces modèles, à une échelle d'observation très fine, est important, la confiance que l'on peut avoir dans ces calculs est élevée. Qui plus est, un changement mineur du matériau (enrichissement en fibres, augmentation de l'épaisseur du pli, etc.) ne demande pas de nouveaux essais d'identification. Hélas, le coût numérique de pareilles simulations devient très vite prohibitif avec l'augmentation de la taille de l'échantillon et devient tout simplement inabordable à l'échelle d'un assemblage.
- L'approche opposée est de considérer uniquement la tenue du matériau à certains critères énergétiques ou en contraintes de type Tsai-Hill ou Tsai-Wu [Tsai et Wu, 1971, Azzi et Tsai, 1965]. Historiquement, ces modèles ont été les premiers à être utilisés massivement puisque dérivant d'approches bien connues pour la plasticité des matériaux métalliques. Si cette approche macroscopique introduit un coût numérique modéré, elle ne retrace pas le scénario d'endommagement précédant la rupture finale du composite. Ces critères de résistance souffrent donc d'une manque de physique dans la représentation des dégradations du matériau, nécessitant de nouveaux essais d'identification dès que la géométrie, le matériau ou l'empilement change. De récents travaux ont toutefois amélioré ces critères [Hinton *et al.*, 2004].
- Une dernière approche, à une échelle intermédiaire, est basée sur la mécanique de l'endommagement [Kachanov, 1958] qui permet de prendre en compte l'influence des dégradations de façon continue, sans les représenter explicitement dans la modélisation. Le matériau est alors vu comme un ensemble de deux méso-constituants endommageables : le pli, entité volumique, et l'interface, entité surfacique liant chaque pli adjacent. Cette approche permet alors de simuler l'évolution de la dégradation de la structure stratifiée à l'échelle du pli (échelle mésoscopique), sans pour autant forcément pouvoir remonter exactement aux différents mécanismes de dégradation. Cela définit les bases du mésomodèle d'endommagement des composites stratifiés utilisé dans cette étude [Ladevèze, 1986, Allix et Ladevèze, 1992, Ladevèze et Le Dantec, 1992].

De par leur échelle d'observation, les modèles microscopiques ne conviennent pas à la résolution de problèmes de structures de grande taille, comme les assemblages. Cependant, les modèles macroscopiques ne sont pas suffisamment fins pour tenir compte de l'influence des dégradations du matériau, du fait de la complexité des chargements subis. C'est pourquoi notre choix s'est porté vers un modèle mésoscopique, qui semble être le meilleur compromis entre les deux approches.

Cependant, la simulation numérique du modèle mésoscopique à l'échelle d'un assemblage conduit nécessairement à des problèmes non-linéaires de très grande taille, dont la résolution directe n'est pas envisageable. Pour y remédier, de nombreuses stratégies de calcul performantes, généralement basées sur une méthode de décomposition de domaine, ont été développées ces dernières années [Le Tallec *et al.*, 1991, Mandel, 1993, Farhat et Roux, 1992, Rixen et Farhat, 1999, Series *et al.*, 2003]. Elles décomposent le problème global en plusieurs sous-problèmes de taille réduite et indépendants, et donc naturellement adaptés au calcul parallèle. Spécifiquement développée pour le calcul d'assemblages, la méthode LATIN<sup>2</sup>, formalisée dans [Ladevèze, 1985, Ladevèze, 1999], décompose le domaine en sous-structures volumiques raccordées par l'intermédiaire d'interfaces surfaciques, possédant leur propre comportement exprimé sur les grandeurs primales et duales. Cette décomposition se prête tout naturellement à celle introduite par le mésomodèle d'endommagement : un pli est modélisé par une sous-structure LATIN (ou un ensemble de sous-structures), alors que les interfaces issues de la décomposition se confondent avec celles du mésomodèle. Cette méthode, ainsi que la décomposition de domaine choisie, a d'ores et déjà été appliquée dans le cas du délaminage de plis élastiques dans [Kerfriden *et al.*, 2009].

De plus, ce type de décomposition se prête particulièrement bien aux problèmes d'assemblages [Blanzé *et al.*, 1996, Blanzé *et al.*, 2000]. La modélisation des liaisons entre les différents composants, point critique de la simulation d'assemblages, nécessite l'écriture de conditions de contact, de frottement, de jeu ou de précharge. Elle conduit donc naturellement à l'expression de conditions de raccord aux interfaces en effort *et* en déplacement, et donc à une décomposition de domaine l'autorisant. Afin de permettre le calcul d'assemblages de grande taille, une vision à deux échelles a été ajoutée à la méthode LATIN dans [Ladevèze *et al.*, 2001] afin de garantir son extensibilité numérique (indépendance de la convergence de la méthode vis-à-vis du nombre de sous-structures). Elle consiste alors à résoudre un problème local sur chaque interface et sur chaque sous-structure, ainsi qu'un problème global, dit macroscopique, sur l'ensemble des interfaces.

Jusqu'ici, nous avons considéré la simulation numérique de l'assemblage comme un calcul déterministe. Cependant, la complexité des phénomènes et la modélisation du réel se traduisent systématiquement par des incertitudes sur certains paramètres. Typiquement, le contact entre deux pièces réelles est fortement dépendant des im-

---

2. Acronyme de LARge Time INcrement

perfections et de la rugosité de chacune des surfaces, défauts aléatoires qui viennent influencer la valeur du coefficient de frottement. De la même façon, le matériau lui-même souffre de nombreuses variabilités dues au processus même de fabrication, conduisant à la rupture de certaines fibres, des défauts d'alignement ou une répartition hétérogène dans le pli. Cela vient changer les propriétés matériau identifiées, notamment au niveau des lois d'endommagement. Ces quelques exemples de sources de variabilités, auxquelles pourraient s'ajouter bien d'autres, font qu'un calcul unique sur des valeurs moyennes arbitraires n'est pas satisfaisant.

La prise en compte de ces variabilités nécessite donc de représenter la réponse de la structure non plus comme une solution unique, mais comme une réponse dépendant des paramètres d'entrée du problème. Les informations probabilistes de cette réponse (moyenne, écart-type, distribution, ...) sont le plus souvent issues d'une simulation de Monte Carlo [Hammersley *et al.*, 1965], en effectuant un tirage aléatoire de valeurs pour chaque paramètre et en résolvant le problème numérique associé. Cependant, ce type de simulation demande un nombre de résolutions bien trop élevé pour que l'on puisse l'appliquer dans le cas de calcul d'assemblages de pièces en matériaux composites.

Une autre possibilité est de mener une étude paramétrique, revenant à construire une surface de réponse dépendant des différents paramètres. La discrétisation de l'espace de variation des paramètres définit des jeux de valeurs de paramètres différents, auxquels sont associés à chacun un unique problème. Par la suite, chaque problème est résolu, permettant ainsi de connaître la réponse quelle que soit la valeur des paramètres d'entrée. La première approche serait de résoudre « brutalement » chaque problème, ce qui devient là aussi très coûteux en termes de temps de calcul (bien que moins qu'une simulation de Monte Carlo). La stratégie LATIN multiparamétrique utilise quant à elle le fait que, par construction même de l'étude paramétrique, chaque solution associée à un jeu de paramètres est relativement « similaire » du point de vue mécanique. Chaque calcul peut alors être utilisé comme une approximation pertinente du suivant, approximation que la méthode LATIN vient progressivement raffiner. Cette approche, relativement simple dans l'idée, offre des gains en termes de temps de calcul, par rapport à l'approche « force brute », non négligeables dans le cas de problèmes de contact avec frottement en quasi-statique dans [Boucard et Champaney, 2003b, Champaney *et al.*, 2008] ou en dynamique transitoire [Boucard *et al.*, 2011].

Une dernière façon de prendre en compte ces variabilités est de traiter le problème de façon probabiliste [Becher et Ingra, 1981, Moens et Vandepitte, 2005], en l'enrichissant d'informations sur la distribution de probabilité des paramètres d'entrée. Moyennant discrétisation des variables aléatoires par les fonctions du chaos polynomial, chaque champ est représenté par un ensemble de variables aléatoires. Il est alors possible d'exprimer une quantité d'intérêt tirée de la réponse du système sous forme d'une loi probabiliste.

La présentation de ce travail est composée en cinq chapitres.

1. Le premier est consacré à des rappels sur la modélisation du matériau. Après une brève introduction sur l'architecture des matériaux composites stratifiés, nous ferons un état de l'art sur les différentes façons de le modéliser, avant d'exposer plus en détail le mésomodèle utilisé, tel que présenté dans [Ladevèze, 1986, Allix et Ladevèze, 1992, Ladevèze et Le Dantec, 1992].
2. Le deuxième chapitre traite des problématiques d'assemblages du point de vue numérique. Nous détaillons ici le problème que nous souhaitons résoudre et les différentes méthodes numériques pour traiter les points délicats, en nous focalisant très rapidement sur les différentes méthodes de décomposition de domaine.
3. Le troisième chapitre s'attache à la mise en place de la stratégie de calcul (et le formalisme associé) que l'on propose dans ce travail : le mésomodèle d'endommagement résolu par le biais du solveur LATIN multiéchelle avec décomposition de domaine. Un exemple clôture le chapitre pour illustrer le fonctionnement de la méthode.
4. Le quatrième chapitre porte sur la résolution de problèmes paramétriques. Après un bref état de l'art sur les méthodes permettant de traiter les variabilités des problèmes, nous présentons la stratégie de calcul LATIN multiparamétrique, avec les spécificités liées à l'endommagement de sous-structures.
5. Le cinquième et dernier chapitre présente plusieurs problèmes numériques à la complexité croissante, résolus à l'aide de la stratégie de calcul développée, en s'attachant particulièrement à l'aspect calcul haute performance.



# Chapitre 1

## Rappels sur la modélisation des matériaux composites stratifiés

*Ce chapitre aborde le matériau composite stratifié et notamment les problématiques et modèles qui y sont associés.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Phénoménologie du matériau considéré</b>	<b>10</b>
1.1	Description du matériau	10
1.2	Mécanismes de dégradation	11
1.3	Bilan partiel	14
<b>2</b>	<b>Modèles macroscopiques</b>	<b>15</b>
2.1	Critères de dimensionnement	15
2.2	Comportement anélastique	17
<b>3</b>	<b>La modélisation à l'échelle microscopique des dégradations des stratifiés</b>	<b>17</b>
3.1	Modélisation de la fissuration transverse	17
3.2	Modélisation de la décohésion fibres/matrice	20
<b>4</b>	<b>Le mésomodèle d'endommagement</b>	<b>21</b>
4.1	Modélisation des plis	22
4.2	Modélisation des interfaces	25
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>27</b>

---

LA MODÉLISATION du comportement des matériaux composites stratifiés est un outil indispensable pour mener cette étude. Il est donc intéressant d'avoir un aperçu – non exhaustif – des différents modèles existants dans la littérature pour situer la problématique de ce travail, à savoir le traitement d'assemblages de pièces en matériaux composites.

Dans un premier temps, ce chapitre présente la structure et la phénoménologie des matériaux composites stratifiés, et notamment des différents modes de dégradation considérés dont l'importance sur le comportement est prépondérante. C'est pourquoi les modèles de comportement développés pour ces matériaux s'attachent à les prendre en compte. Ils peuvent généralement être classés selon trois types d'approches différentes.

Les premières sont inspirées des critères de résistance classiques utilisés pour les matériaux métalliques. Le matériau composite a soit un comportement « sain », soit un comportement « détruit » à partir d'un certain critère limite. Les approches dites microscopiques essaient, quant à elles, de représenter au mieux la dégradation du matériau. Pour cela, la géométrie du matériau et du dommage est faite explicitement et permet d'étudier l'influence de la dégradation sur la réponse du matériau. Il existe pour finir une approche intermédiaire, qui ne considère plus la dégradation explicitement, mais directement son influence sur un comportement homogénéisé du matériau.

## 1 Phénoménologie du matériau considéré

### 1.1 Description du matériau

Le type de matériaux considéré dans ce travail sont les matériaux composites stratifiés à fibres longues, que l'on peut schématiser par la **Figure 1.1**. Le composant élémentaire du matériau sont des fibres longues, généralement en carbone ou en verre, de quelques dizaines de micromètres de diamètre. Ces fibres sont orientées suivant une unique direction puis enrobée de matrice, formant ainsi un « pli » de quelques dixièmes de millimètres d'épaisseur. Les plis sont alors empilés, généralement en changeant leur orientation, pour former le matériau final.

Chaque pli peut être caractérisé par la direction de ses fibres. C'est pourquoi la définition du matériau se fait par la donnée de la séquence d'empilement, laquelle précise pour chaque pli l'angle entre la direction des fibres le composant et une arbitraire, prise à l'échelle du pli. Par exemple, les fibres d'un pli à  $0^\circ$  sont parallèles à la direction choisie, et perpendiculaires dans le cas d'un à  $90^\circ$ .

Par conséquent, le matériau stratifié dans son entier présente naturellement une très forte hétérogénéité. Les fibres, généralement en verre ou en carbone dans le milieu de l'aéronautique, assurent la tenue mécanique du matériau. La matrice, généralement en polymère pour son coût modéré, sa bonne adhésion aux fibres et sa mise en forme aisée, sert à répartir les contraintes entre les fibres.

**Remarque 1.1 :** Pour la suite, la séquence d'empilement sera notée entre crochets, en respectant la nomenclature classique suivante :

- l'indice  $S$  indique un pli symétrique. On reproduit donc symétriquement la séquence d'empilement entre crochets pour avoir celle du stratifié. Par exemple, une séquence notée  $[0/90]_S$  est strictement équivalente à la séquence  $[0/90/90/0]$  ;
- l'indice  $\bar{S}$  indique une symétrie de l'empilement par rapport au plan médian du pli central. Ainsi, la séquence d'empilement  $[0/90/0]$  peut s'écrire  $[0/90]_{\bar{S}}$  ;
- en indice peut aussi figurer un chiffre, permettant de répéter la séquence entre crochets un certain nombre de fois. Par exemple, les séquences  $[0]_4$ ,  $[0_4]$  et  $[0/0/0/0]$  sont strictement équivalentes.

## 1.2 Mécanismes de dégradation

De par sa microstructure même, le matériau composite est un milieu complexe et hautement multiéchelle. Par conséquent, les mécanismes de dégradation au sein du matériau sont nombreux, souvent couplés et observables tant à l'échelle de la fibre (quelques dizaines de micromètres) que du composite (d'une épaisseur de l'ordre du millimètre).

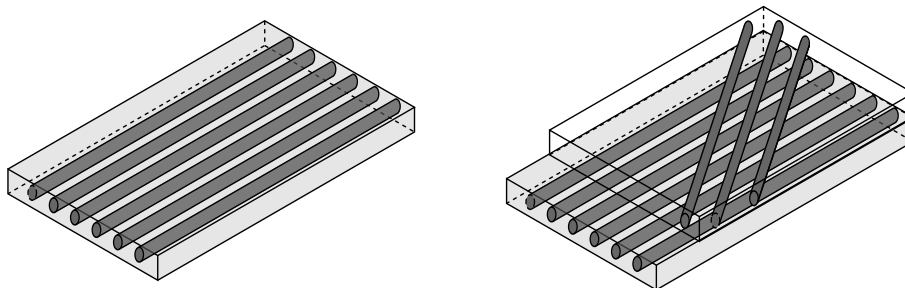
Une distinction naturelle est faite entre les différents mécanismes de dégradation : ceux concernant le pli (dégradations intralaminaires) et ceux concernant l'interface entre ces plis (dégradations interlaminaires).

### 1.2.1 Mécanismes de dégradations intralaminaires

Trois mécanismes majeurs de dégradation sont recensés par les observations expérimentales : la rupture des fibres, la décohésion fibres/matrices et la fissuration transverse.

#### ■ La rupture fibre

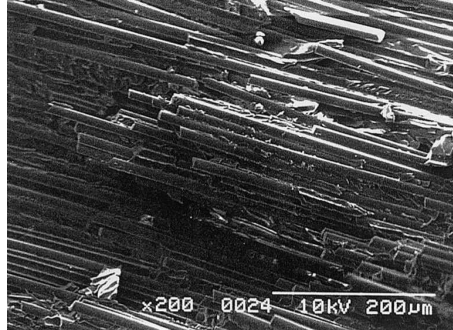
Ce mécanisme de dégradation intervient lorsque les fibres, constituées de matériaux fragiles, sont sollicitées en traction au point d'atteindre leur charge à rupture. La dégradation, visible sur la **Figure 1.2**, est alors brutale du fait de la fragilité des



**FIGURE 1.1 :** Représentation d'un pli, puis d'un composite stratifié

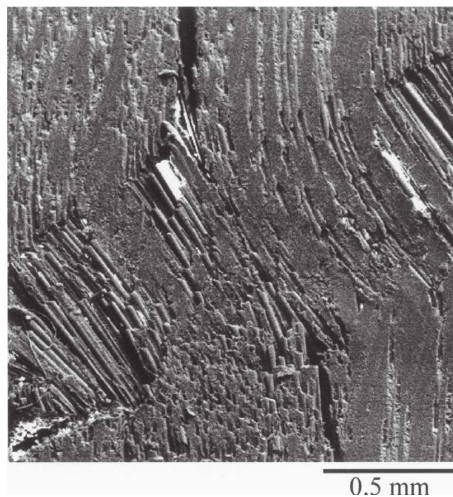


matériaux composant les fibres, et conduit généralement à la ruine du matériau et de la structure.



**FIGURE 1.2 :** Observation par microscopie électronique à balayage d'une rupture de fibres en traction [Zhao et Takeda, 2000]

Dans le cas de la compression, le phénomène ne fait plus intervenir uniquement les fibres mais aussi la matrice les entourant. L'élançement très important des fibres les rend particulièrement sensible au flambage. Cependant, tant que la contrainte reste inférieure à une certaine charge critique, le confinement des fibres par la matrice permet de prévenir toute instabilité. Cependant, une fois le seuil dépassé, la matrice commence à se dégrader et le phénomène s'amplifie d'autant plus que les fibres peuvent alors flamber. On observe alors l'apparition de bandes de pliage (**Figure 1.3**) et d'une chute notable des caractéristiques mécaniques locales.



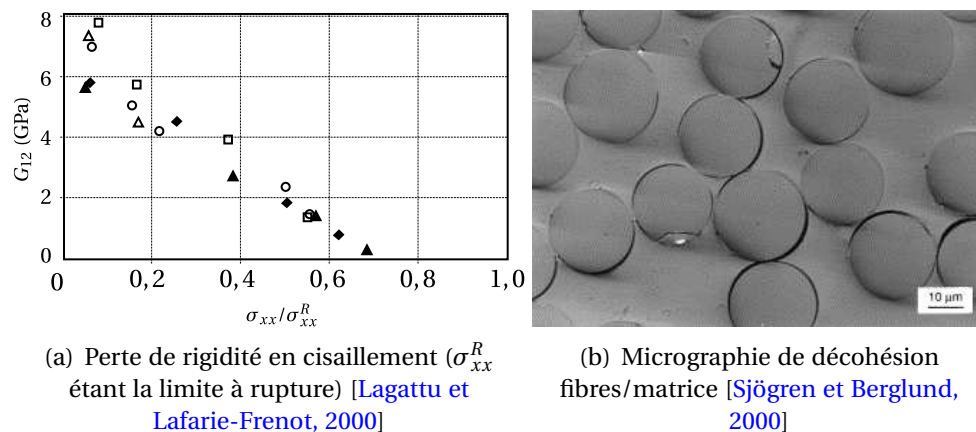
**FIGURE 1.3 :** Formation d'une bande de pliage [Oguni *et al.*, 2000]

#### ■ La décohésion fibres/matrices

Les travaux de [Lagattu et Lafarie-Frenot, 2000] ont mis en évidence une perte de rigidité importante des plis sollicités en cisaillement, avant même l'apparition de toute

microfissuration dans le matériau. La **Figure 1.4(a)** présente les résultats, sur plusieurs échantillons, d'un essai de traction sur un composite fait uniquement de plis à  $\pm 45^\circ$ .

Ce comportement est dû à un phénomène visible à l'échelle la plus élémentaire du composite, celle du pli, à savoir une décohésion entre les fibres et la matrice, que l'on peut observer sur la **Figure 1.4(b)**. Elle est essentiellement due à deux défauts de fabrication : une répartition hétérogène des fibres dans la matrice, créant des concentrations de contraintes dans le matériau à l'origine de la dégradation de la matrice, et une interface entre fibre et matrice imparfaite. Ce phénomène est, dans les faits, quasiment homogène dans le volume d'un pli, d'où l'appellation d'« endommagement diffus » à l'échelle d'observation du pli.



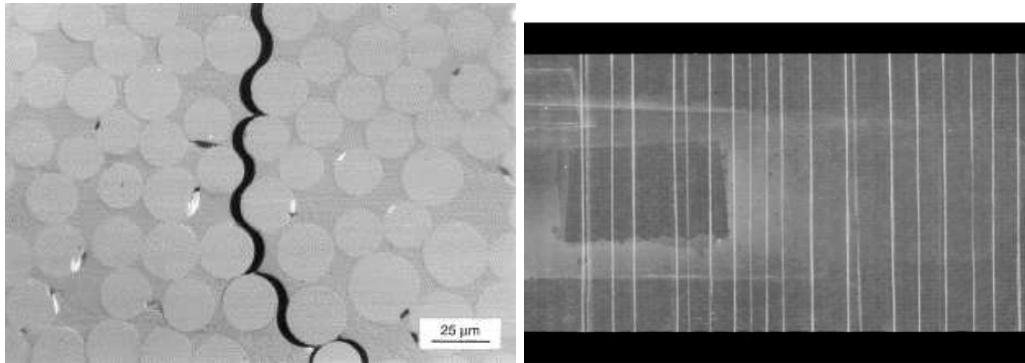
**FIGURE 1.4 :** Mise en évidence de la décohésion fibres/matrice sur un composite  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  chargé en traction

### ■ La fissuration transverse

La coalescence des décohésions fibres/matrice conduit à l'apparition de fissures visibles sur la **Figure 1.5(a)**, orientées parallèlement aux fibres et traversant de part en part l'épaisseur du pli, pour peu qu'il soit désorienté par rapport à la direction de charge. Lorsque l'effort augmente, le réseau de fissures transverses se densifie de façon presque homogène (**Figure 1.5(b)**), ce qui se traduit macroscopiquement par une diminution de la rigidité du stratifié dans la direction de la charge. Cependant, à partir d'une certaine densité de fissures critique, un régime de saturation est atteint et il n'y a plus création de nouvelles fissures. Ce phénomène s'explique par la chute de contrainte locale lors de la création d'une fissure, jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'atteindre à quelque endroit du pli une contrainte critique qui permettrait la création d'une nouvelle fissure.

Une particularité de la fissuration transverse, mise en évidence dans [Garrett et Bailey, 1977], réside dans le fait que la propagation de la fissure est plus ou moins stable selon l'épaisseur du pli. En effet, dans le cas de plis « épais », la fissure est

instable et traverse instantanément la section du pli, alors que dans le cas de plis « fins », les fissures s'initient sur les bords du pli et ne se propagent que si le chargement continue d'augmenter.



(a) Micrographie d'une fissure transverse née d'une coalescence des décohésions fibres/matrice [Sjögren et Berglund, 2000]      (b) Radiographie d'un stratifié  $(0/90_4)_S$  [Lubineau, 2002]

**FIGURE 1.5 :** Mise en évidence de la fissuration transverse

### 1.2.2 Mécanismes de dégradations interlaminaires

L'interphase est une couche fine, constituée presque uniquement de matrice, entre les plis du stratifié. Par conséquent, cette zone possède des caractéristiques mécaniques bien inférieures au reste du matériau et est donc particulièrement sensible aux contraintes d'arrachement normales. Le phénomène de décohésion que l'on observe est appelé délaminage.

#### ■ Le délaminage local

La propagation d'une fissure transverse hors du pli est généralement stoppée par l'interphase. La concentration de contrainte en pointe de fissure suffit à dégrader la matrice localement, créant un délaminage très localisé.

#### ■ Le délaminage macroscopique

À la différence du précédent, la zone délaminée est très étendue, la séparation entre les plis devenant visible à l'échelle de la structure. Ce mode de dégradation conduit généralement à la ruine de la structure puisque son apparition empêche toute répartition de contrainte entre les plis.

## 1.3 Bilan partiel

La **Figure 1.7** récapitule sommairement l'ensemble des dégradations d'un matériau stratifié, en les classant par échelle d'observation. De très nombreuses études,

théoriques et expérimentales, ont été faites pour tenter de représenter la dégradation des stratifiés. Un bref état de l'art permet de classer les approches elles aussi par échelle d'observation.

## 2 Modèles macroscopiques

### 2.1 Critères de dimensionnement

Les premières approches à être historiquement utilisées pour le dimensionnement de structures en matériaux composites sont basées sur l'établissement d'un critère en énergie ou en contraintes ([Tsai et Wu, 1971], [Azzi et Tsai, 1965]). En effet, ces approches sont inspirées de celles, alors mieux connues, des lois de dimensionnement des matériaux métalliques, et ne nécessitent qu'une redéfinition du critère de von Mises, non pertinent dans le cas des matériaux composites.

L'exercice récent du *World Wide Failure Exercise* a permis grandement d'améliorer certains critères établis, de type Hashin ([Hashin, 1980]) ou Puck ([Puck et Schürmann, 2002]). Les résultats, récapitulés dans [Hinton *et al.*, 2004] et dont un extrait est présenté **Figure 1.8**, permettent l'établissement et la comparaison des différents critères macroscopiques connus.

Cependant, la modélisation de l'endommagement et de son évolution ne peut pas être retracée par ce genre de critères. En effet, le matériau est considéré soit en un état parfaitement sain, soit en ruine, et l'influence de l'apparition d'une dégradation n'est absolument pas prise en compte dans le modèle de comportement. Aussi, l'interprétation physique des résultats au-delà du critère de ruine du matériau n'est tout simplement pas possible. Cependant, certains travaux visent à améliorer ces critères, pour l'instant sans endommagement [Dávila *et al.*, 2005], en les couplant avec des lois endommageables.



**FIGURE 1.6 :** Fissures transverses d'un pli avec création de délaminage local en pointe de fissure [Blázquez *et al.*, 2009]

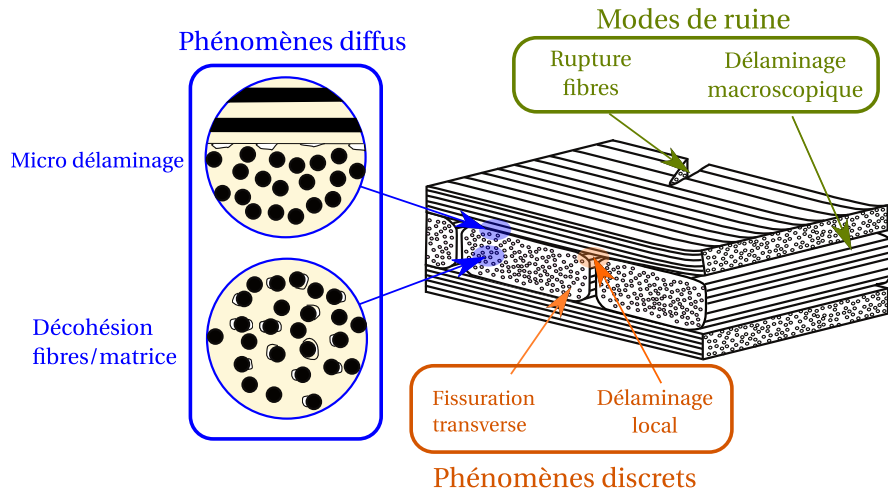


FIGURE 1.7 : Phénoménologie des dégradations au sein d'un stratifié

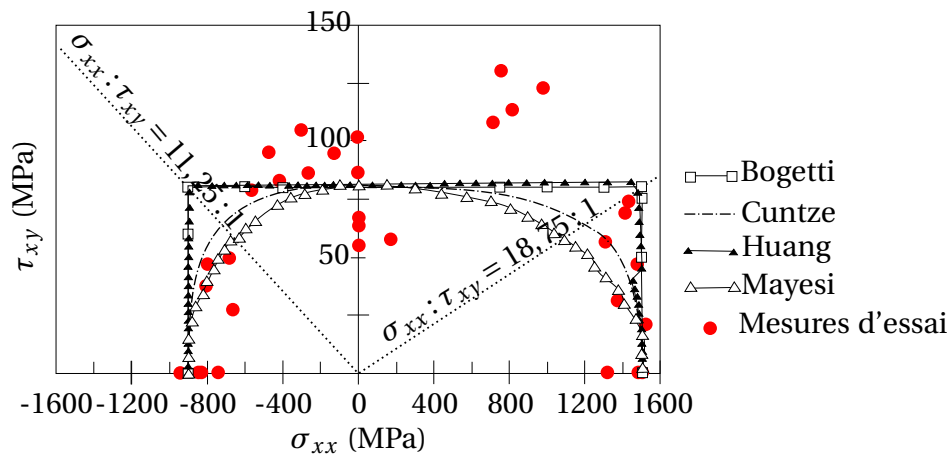


FIGURE 1.8 : Comparaison de différents critères à rupture dans le plan  $\sigma_{xx}$  vs.  $\tau_{xy}$

## 2.2 Comportement anélastique

Une autre approche consiste à considérer le comportement macroscopique, non-linéaire, de la structure comme anélastique. L'ensemble des non-linéarités, sans distinction particulière entre les différents phénomènes de dégradation [Yokozeki *et al.*, 2007], est alors représenté par une déformation plastique (voire viscoplastique) du matériau. À partir de la définition du potentiel quadratique de Hill [Hill, 1950], dans [Sun et Chen, 1989] est proposé un modèle à un seul paramètre, d'abord en 2D, puis en 3D [Sun et Chen, 1991]. Ce modèle est relativement simple, tant au niveau de sa compréhension que de son implémentation, mais il présente l'inconvénient majeur de ne pas représenter correctement les phases de décharge du matériau, notamment parce qu'il n'y a pas de réelle distinction entre les différents phénomènes d'endommagement. C'est pourquoi, dans [Hansen *et al.*, 1991] est proposé, avec succès, l'ajout d'une nouvelle variable interne, à savoir la variable d'écrouissage. Ce modèle a d'ailleurs été amélioré par [Schmidt *et al.*, 1993].

## 3 La modélisation à l'échelle microscopique des dégradations des stratifiés

La particularité des méthodes microscopiques est de modéliser la dégradation, généralement discrète à son échelle, en représentant explicitement sa géométrie. Par conséquent, ces modèles conservent un très fort sens physique. Une revue de ceux-ci est proposée dans plusieurs articles de synthèse, tels que [Nairn et Hu, 1994], [Nairn, 2000] et [Berthelot, 2003]. Le terme de micro-mécanique est valable dans le sens où, selon la dégradation considérée, la vision est soit à l'échelle de la fibre, soit à l'échelle du pli.

La majorité des approches microscopiques se basent sur une approche en deux étapes. Dans un premier temps, l'état des contraintes dans le domaine considéré doit être évalué. Puis, dans un second temps, la prédiction de l'évolution des dégradations est faite par l'introduction de critères d'initiation ou de propagation. Dans un souci de simplification – d'autant plus que la majorité de ces approches sont analytiques – la plupart des études sont faites sur des stratifiés de type  $[0_m/90_n]_S$ .

### 3.1 Modélisation de la fissuration transverse

#### 3.1.1 Calcul du champ de contrainte

Les premiers travaux [Garrett et Bailey, 1977] effectuent une analyse unidimensionnelle d'une cellule unitaire (illustrée **Figure 1.9**), basée sur les hypothèses de type « *shear-lag* ». Cette approche utilise la différence de déplacement entre les plis à  $0^\circ$  et ceux à  $90^\circ$  pour en déduire la contrainte de cisaillement à l'interface. À partir de cette donnée, les contraintes transverses dans le pli fissuré sont déduites, par l'intermédiaire d'un calcul d'équilibre local.



Cette approche suppose néanmoins un certain nombre d'hypothèses et, surtout, elle ne respecte pas la condition de bord libre (et donc la nullité des contraintes) au niveau des lèvres de la fissure. Des améliorations de ce modèle, proposées par [Lim et Hong, 1989] et [Takeda et Ogihara, 1994], permettent de prendre en compte le délaminage local en pointe des fissures transverses. Cependant, ces modèles restent limités à des séquences d'empilement basiques.

Une des premières analyses bidimensionnelles du champ de contraintes est faite dans [Hashin, 1985], toujours dans le cas où seul le pli à  $90^\circ$  voit l'apparition de fissures. Elle repose sur une hypothèse simple, à savoir que la contrainte dans la direction transverse est invariante dans l'épaisseur du pli considéré. Les contraintes sont alors déterminées en fonction de la contrainte dans la direction transverse par l'intermédiaire de la relation d'équilibre, puis d'une minimisation de l'énergie complémentaire. Une extension de cette approche, proposée dans [Nairn, 1989], prend en compte les effets thermiques dans le calcul des contraintes. La méthode a par la suite été étendue au cas de séquences d'empilement de type  $[\pm 45]_S$  avec fissuration dans tous les plis [Hashin, 1987], puis  $[\alpha/90]_S$  ( $\alpha$  étant supposé faible) dans [Nairn et Hu, 1992].

Un avantage majeur de l'analyse bidimensionnelle par rapport à la précédente est la vérification de la nullité des contraintes aux lèvres de la fissure. Toutefois, elle ne reste valable que dans le cas de géométries simples (sans trou, ni entaille) et d'un stratifié présentant une séquence d'empilement spécifique. De plus, cette approche suppose une fissure traversante, ce qui n'est pas nécessairement le cas, selon l'épaisseur du pli.

Finalement, grâce à l'augmentation des capacités de calcul, la représentation bidimensionnelle ou tridimensionnelle de la géométrie par éléments finis devient possible. Elle permet alors de traiter des problèmes bien plus complexes et elle se généralise à n'importe quelle séquence d'empilement. Si ces méthodes étaient, dans un premier temps, utilisées conjointement aux méthodes analytiques ([Nairn, 1995, Berthelot et Corre, 2000]), de nouveaux modèles s'appuient désormais sur ces analyses par éléments finis, tels que ceux présentés dans [Camanho *et al.*, 2003] ou [Jiang *et al.*, 2007].

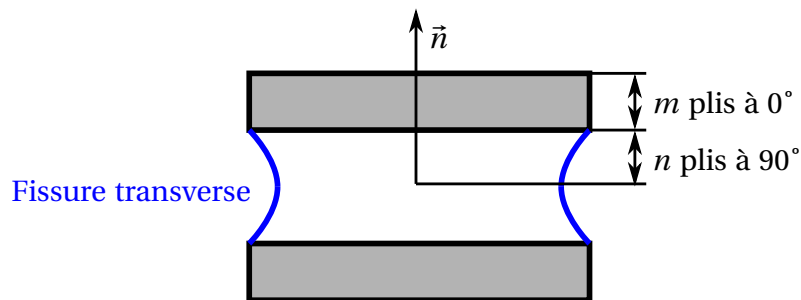


FIGURE 1.9 : Modélisation d'une cellule élémentaire

Pour terminer, notons que l'utilisation d'une méthode éléments finis permet aussi de prendre en compte l'interaction des plusieurs phénomènes d'endommagement ayant lieu à une échelle similaire. Ainsi, les travaux présentés dans [Violeau, 2007] en quasi-statique et [Bouvet *et al.*, 2009] dans le cadre des petits chocs permettent la modélisation des fissures transverses et du micro-délaminage entre les plis, jusqu'au macro-délaminage.

### 3.1.2 Évolution des dégradations

À partir de la connaissance de la contrainte au sein du pli, deux types de critères de rupture peuvent être appliqués afin de simuler l'évolution de la dégradation. Le premier, dit en contrainte, utilise la distribution des contraintes au sein du pli. Lorsqu'un seuil en contrainte, généralement égal à la résistance en traction, est dépassé, une nouvelle fissure est créée, conduisant à une relaxation locale. Le second type est basé sur la mécanique de la rupture, en comparant le taux de restitution d'énergie associé à la formation d'une nouvelle fissure à un taux de restitution critique.

#### ■ Critères en contrainte

Le premier critère, présenté dans [Garrett et Bailey, 1977], est basé sur une approche unidirectionnelle et suppose donc une répartition des contraintes homogène dans le pli, lesquelles ne doivent pas dépasser une certaine limite. Cependant, ce type d'approche n'est pas en accord avec l'expérience. Toutefois, la définition de critères bidimensionnels ne vient que modérément améliorer la pertinence du modèle, du fait de l'impossibilité de représenter l'effet d'épaisseur mis en évidence dans [Crossman et Wang, 1982].

Les auteurs de [Berthelot *et al.*, 1996, Berthelot, 2003] proposent, pour palier ce problème, d'utiliser une distribution aléatoire de la contrainte à rupture dans le stratifié. Si les améliorations sont notables, les paramètres utilisés dans les lois de probabilité présentent toutefois une dépendance à la structure. Le critère ne serait alors plus intrinsèque au matériau.

#### ■ Critères en énergie

Les faiblesses des modèles basés sur la contrainte à rupture ont conduit les auteurs de [Parvizi *et al.*, 1978] à la définition d'un nouveau type de critère, basé sur le taux de restitution d'énergie. L'énergie libérée par la création d'une fissure devient alors un paramètre matériau, appelé taux de restitution d'énergie  $G_c$ . Si  $G_c$  vient à dépasser une valeur critique intrinsèque au matériau appelée taux de restitution d'énergie critique, il y a création d'une nouvelle fissure.

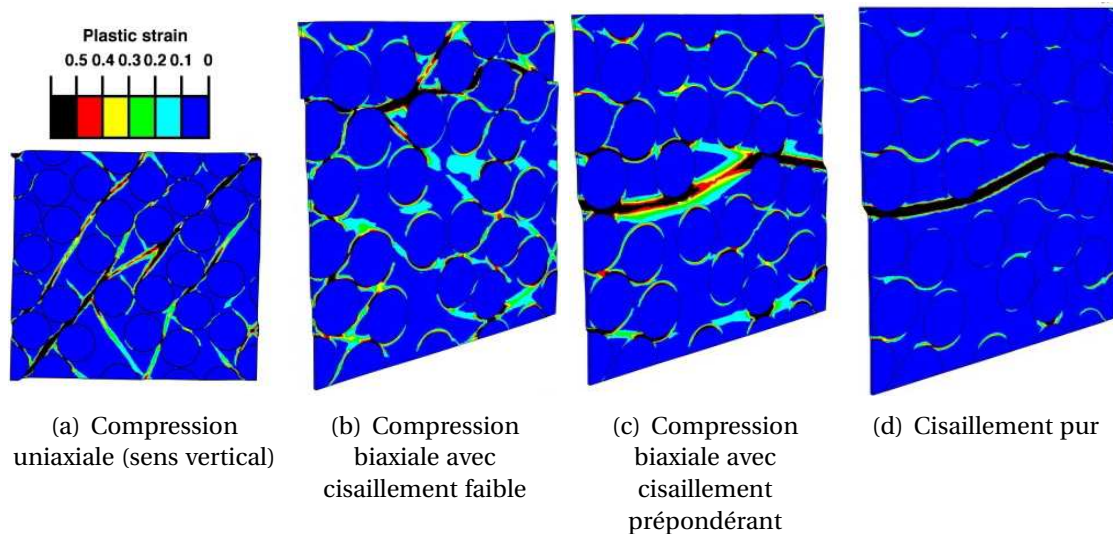
Ce type de critère est maintenant très largement utilisé par de nombreux auteurs ([Hashin, 1996], [Nairn, 1989], ...). Il permet dorénavant de prendre en compte l'effet d'épaisseur, non représenté par les critères en contrainte, et ce bien que l'initiation de fissure dans le cas de plis épais semble encore poser problème.



### 3.2 Modélisation de la décohésion fibres/matrice

Contrairement aux précédents modèles liés à l'apparition de fissures transverses, ceux traitant de la décohésion se placent à une échelle effectivement microscopique, ce afin de représenter la dégradation de l'interface entre la fibre et la matrice. Cette décohésion est, chronologiquement, la première dégradation qui se développe avec la mise en charge du matériau. Elle joue donc un rôle prépondérant dans les mécanismes de base aboutissant à des dégradations à l'échelle du pli.

Dans les faits, la simulation d'un volume élémentaire incluant quelques fibres est faite par éléments finis, auxquels sont associés des critères de rupture. Les capacités de calcul actuelles permettent d'introduire explicitement la physique de chaque composant, avec toutes les non-linéarités associées, dont le comportement de l'interface entre la fibre et la matrice [González et LLorca, 2007, Totry *et al.*, 2008]. L'avantage d'une modélisation explicite par éléments finis est de pouvoir balayer une grande variété de cas. Par exemple, l'influence de la direction de chargement est mise en évidence par la **Figure 1.10**, où l'on peut voir la simulation de l'apparition d'une microfissure depuis la décohésion fibres/matrice.



**FIGURE 1.10** : Niveaux des déformations plastiques cumulées pour différents cas de chargement [Totry *et al.*, 2008]

Si les résultats de ces méthodes sont très probants, ils sont hélas inadaptés à la simulation d'éprouvettes de taille plus importante. Le volume étudié est généralement très élémentaire, comme dans les travaux de [González et LLorca, 2007], ou bien ces modèles n'introduisent pas toute la physique dans le cas de géométries plus complexes ([Jiang *et al.*, 2007]). De plus, le niveau d'observation est tel que les variabilités ne peuvent être ignorées, ce qui complexifie plus encore le choix d'un modèle.

## 4 Le mésomodèle d'endommagement

Les approches mésoscopiques font le choix d'une échelle d'observation au niveau du pli, sans pour autant modéliser explicitement chacune des dégradations du matériau. En ce sens, elles se placent entre les approches micro et macroscopiques : on parle alors d'échelle mésoscopique.

Ces approches se basent sur la mécanique de l'endommagement initiée par [Kachanov, 1958] et [Rabotnov, 1968]. Elle permet de représenter l'effet des différentes dégradations physiques du matériau, sans avoir à les représenter explicitement dans la modélisation, par le biais de variables internes de type endommagement ou anélasticité. Ces variables viennent modifier le comportement respectivement comme une perte de rigidité du matériau ou comme une déformation inélastique. Les différents modèles, utilisant tous cette base, se distinguent principalement par la complexité des phénomènes modélisés.

Ainsi, le modèle proposé par Talreja [Talreja, 1985, Talreja, 1986, Talreja, 1994] et repris dans [Thionnet et Renard, 1993] n'utilise qu'une seule variable d'endommagement dans le pli, correspondant au déplacement normal d'ouverture des fissures transverses. Ce modèle est donc très efficace dans le cas d'empilements composés de plis à 0 et 90°. Cependant, dans le cas de chargements en cisaillement, la simplicité du modèle ne lui permet pas de simuler correctement les dégradations. Allen propose un modèle plus complexe [Allen et al., 1987a, Allen et al., 1987b, Allen, 1994, Allen, 2001]. Il définit un tenseur d'endommagement à partir de l'homogénéisation d'une cellule élémentaire comprenant des microfissures. Son comportement est alors intégré dans une approche classique de théorie des stratifiés.

Le développement du mésomodèle d'endommagement est initié depuis une vingtaine d'années au LMT-Cachan, et notamment dans les travaux de [Ladevèze, 1986, Ladevèze et Le Dantec, 1992, Allix et Ladevèze, 1992]. Bien qu'initialement développé pour les composites stratifiés, il a par la suite été étendu aux matériaux tissés dans [Hochard et al., 2001, Bordreuil et Hochard, 2004], ainsi qu'aux matériaux composites carbone/carbone. Après avoir été faits en quasi-statique [Le Dantec, 1989], des essais d'identification pour la caractérisation du comportement dynamique du mésomodèle d'endommagement ont été réalisés pour des petits chocs dans [Allix et al., 2000].

Utilisé dans ces travaux, ce mésomodèle est expliqué dans ses grandes lignes par la suite. Il repose sur deux hypothèses fondamentales :

- le matériau stratifié est vu comme un ensemble de deux types de mésoconstituants élémentaires : les plis et les interfaces (**Figure 1.11**). Chacun possède son propre comportement et ses propres variables, l'intégralité des dégradations est représentée à l'échelle de ces constituants ;
- les variables d'endommagement sont supposées constantes dans l'épaisseur d'un pli. Cependant, elles peuvent varier dans le plan du pli considéré, ainsi que lors du passage d'un pli à l'autre.

## 4.1 Modélisation des plis

### 4.1.1 Expression de l'endommagement

Le pli étant naturellement orienté, il est nécessaire, pour caractériser son comportement, de définir une base d'orthotropie en fonction de l'orientation principale des fibres unidirectionnelles qui le composent : 1 est la direction de ces fibres, 2 la direction transverse dans le pli et 3 la direction normale au pli. L'expérience montre que seuls les modules de rigidité en cisaillement  $G_{12}$  et le module de traction transverse  $E_2$  sont affectés par les dégradations liées au pli uniquement. À partir de ces hypothèses simplificatrices, un premier modèle de comportement du pli est bimensionnel, en supposant les contraintes planes et sa densité d'énergie de déformation  $\mathcal{E}_d^{2D}$  définie par :

$$2\mathcal{E}_d^{2D} = \frac{1}{1-d_F} \left( \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1^0} + \frac{\Phi(\langle -\sigma_{11} \rangle_+)}{E_1^0} \right) - \left( \frac{\nu_{12}}{E_1^0} + \frac{\nu_{21}}{E_2^0} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{\langle \sigma_{22}^2 \rangle_+}{(1-d')E_2^0} + \frac{\langle -\sigma_{22}^2 \rangle_+}{E_2^0} + \frac{\sigma_{12}^2}{(1-d)G_{12}^0} \quad (1.1)$$

où  $\langle x \rangle_+$  désigne la partie positive de  $x$  définie par  $2\langle x \rangle_+ = x + |x|$ .

Trois variables d'endommagement  $d_F, d, d'$  sont introduites, associées respectivement à la rupture fragile des fibres, à l'endommagement par microfissuration et à la décohésion fibre/matrice. Deux remarques peuvent toutefois être faites suite à la définition de cette énergie :

- Du fait de la séparation entre partie positive et partie négative des contraintes transverses, les endommagements diffus  $d$  et  $d'$  n'agissent qu'en traction transverse. La compression entraîne la fermeture des fissures et n'est donc pas affectée par cet endommagement ;
- l'expérience montre que la fonction de compression longitudinale  $\Phi$  n'est pas linéaire du fait de l'apparition de certains phénomènes d'endommagement particuliers (formation de bandes de pliages). Nous ferons cependant l'hypothèse lors de ces travaux que  $\Phi(\langle -\sigma_{11} \rangle_+) = \langle -\sigma_{11} \rangle_+$ . Cette approximation reste

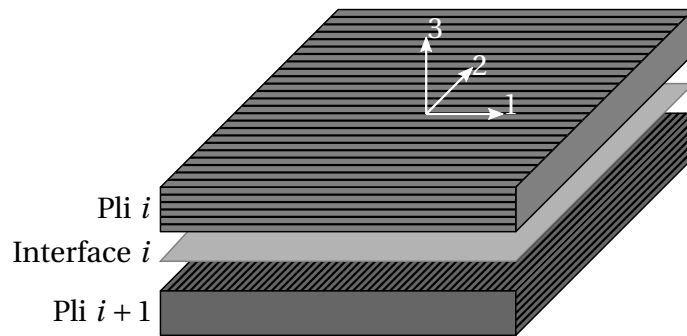


FIGURE 1.11 : Décomposition du matériau stratifié

valable dans le cas où les chargements demeurent suffisamment faibles pour éviter l'apparition de ces non-linéarités, et donc dans le cas où le matériau n'est pas complètement dégradé.

L'expression de l'énergie (1.1) peut être étendue à un milieu tridimensionnel, moyennant l'hypothèse d'un comportement isotrope transverse : on considère alors que les variables internes affectent les modules hors plan de la même façon que les modules plan. L'énergie de déformation dans le cas d'un pli tridimensionnel peut alors s'écrire :

$$2\mathcal{E}_d = \frac{1}{(1-d_F)} \left[ \frac{(\sigma_{11})^2}{E_1^0} - \left( \frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} + \frac{\nu_{21}^0}{E_2^0} \right) \sigma_{11}\sigma_{22} - \left( \frac{\nu_{13}^0}{E_1^0} + \frac{\nu_{31}^0}{E_3^0} \right) \sigma_{11}\sigma_{33} \right. \\ \left. - \left( \frac{\nu_{23}^0}{E_2^0} + \frac{\nu_{32}^0}{E_3^0} \right) \sigma_{22}\sigma_{33} \right] + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} \\ + \frac{1}{1-d} \left[ \frac{(\sigma_{12})^2}{G_{12}^0} + \frac{(\sigma_{23})^2}{G_{23}^0} + \frac{(\sigma_{31})^2}{G_{31}^0} \right] + \frac{1}{1-d'} \left[ \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} \right] \quad (1.2)$$

La condition sur la dissipation mécanique, une fois intégrée sur l'épaisseur du pli (l'invariance de l'endommagement dans l'épaisseur permet de travailler avec la valeur moyenne des variables dans l'épaisseur, notée  $\langle\langle . \rangle\rangle$ ), permet de définir les forces thermodynamiques associées aux variables d'endommagement de telle sorte que :

$$Y_F = \langle\langle \frac{\partial \mathcal{E}_d}{\partial d_F} \rangle\rangle = \frac{1}{(1-d_F)^2} \langle\langle \frac{(\sigma_{11})^2}{E_1^0} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j>i}^3 \left( \frac{\nu_{ij}^0}{E_i^0} + \frac{\nu_{ji}^0}{E_j^0} \right) \sigma_{ii}\sigma_{jj} \rangle\rangle \quad (1.3)$$

$$Y_d = \langle\langle \frac{\partial \mathcal{E}_d}{\partial d} \rangle\rangle = \frac{1}{(1-d)^2} \langle\langle \frac{(\sigma_{12})^2}{G_{12}^0} + \frac{(\sigma_{23})^2}{G_{23}^0} + \frac{(\sigma_{31})^2}{G_{31}^0} \rangle\rangle \quad (1.4)$$

$$Y_{d'} = \langle\langle \frac{\partial \mathcal{E}_d}{\partial d'} \rangle\rangle = \frac{1}{(1-d')^2} \langle\langle \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} \rangle\rangle \quad (1.5)$$

L'irréversibilité de l'endommagement, impliquant un effet d'histoire sur l'évolution des variables, est prise en compte par l'introduction des forces thermodynamiques effectives  $\bar{Y}_F$  et  $\bar{Y}_d$  définies respectivement par les équations (1.6) et (1.7). Le couplage entre la décohésion fibre/matrice et la microfissuration se fait par l'intermédiaire du paramètre  $b$  introduit dans l'expression des forces thermodynamiques effectives :

$$\bar{Y}_F(t) = \sup_{\tau \leq t} (Y_F(\tau)) \quad (1.6)$$

$$\bar{Y}_d(t) = \sup_{\tau \leq t} (Y_d(\tau) + bY_{d'}(\tau)) \quad (1.7)$$

Les grandeurs thermodynamiques sont alors comparées au seuil  $Y^0$  à partir duquel l'endommagement commence et  $Y^C$  le seuil d'endommagement critique. Dans le cas de faibles taux d'endommagement, les variables d'endommagement peuvent alors être exprimées à partir des grandeurs définies ci-dessus :

$$d_F = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{Y}_F(t) < Y_F^C \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.8)$$

$$d = \begin{cases} \omega_d = \frac{\sqrt{\bar{Y}_d(t)} - \sqrt{Y^0}}{\sqrt{Y^C} - \sqrt{Y^0}} & \text{si } d < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.9)$$

$$d' = \begin{cases} \omega_{d'} = bd & \text{si } d < 1 \text{ and } d' < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.10)$$

La formulation des variables d'endommagement telles qu'écrite en (1.8) ne s'affranchit toutefois pas du problème classique de la localisation des déformations dans un calcul de structure, et donc de la dépendance de la solution au maillage du modèle [Lemaitre *et al.*, 2008, Lasry et Belytschko, 1988]. Pour palier ce problème, des limiteurs de localisation de type effet retard sont introduits sur les variables d'endommagement diffus  $d$  et  $d'$  ([Ladevèze *et al.*, 2000]). Ils viennent modifier les lois d'évolution de ces variables en introduisant un temps caractéristique ainsi qu'un taux d'endommagement limite :

$$\begin{cases} \dot{d} = \frac{1}{\tau_c} [1 - \exp(-a \langle \omega_d - d \rangle_+)] & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \dot{d}' = \frac{1}{\tau_c} [1 - \exp(-a \langle \omega_{d'} - d' \rangle_+)] & \text{si } d' < 1 \\ d' = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.12)$$

L'identification des paramètres introduits n'a de sens qu'en dynamique. Hélas, le contenu mécanique de ces paramètres, dans le cas de calculs quasi-statiques, est perdu : les valeurs identifiées en dynamique ne peuvent être réutilisées. Malgré cela, du point de vue numérique, les lois d'évolution avec effet retard permettent d'éviter le problème de localisation numérique de l'endommagement. Ainsi, si le problème de l'identification de la valeur physique des paramètres en jeu est délicat, leur introduction permet de conserver l'indépendance au maillage de la solution.

#### 4.1.2 Introduction de l'anélasticité

Les déformations anélastiques, généralement dues aux glissements et aux frottements entre les fibres et la matrice ou au niveau des lèvres des fissures transverses, sont introduites sous la forme de lois de plasticité. L'introduction de contraintes et de déformations plastiques effectives (notées respectivement  $\underline{\tilde{\sigma}}$  et  $\underline{\tilde{\epsilon}}_p$ ) permet de traiter simplement le couplage entre l'endommagement et la plasticité. Ces grandeurs

effectives respectent l'équivalence énergétique suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_p = \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_p$$

Les contraintes effectives s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= \sigma_{11}, & \tilde{\sigma}_{22} &= \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+}{1-d'} - \langle -\sigma_{22} \rangle_+, & \tilde{\sigma}_{33} &= \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+}{1-d'} - \langle -\sigma_{33} \rangle_+ \\ \tilde{\sigma}_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{1-d}, & \tilde{\sigma}_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{1-d}, & \tilde{\sigma}_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{1-d} \end{aligned}$$

Les lois d'évolution de la plasticité sont alors exprimées en fonction de ces grandeurs effectives, permettant de ne pas avoir à considérer l'endommagement dans leurs expressions. Les déformations plastiques s'expriment alors en fonction d'un écrouissage cinématique gouverné par la fonction seuil  $f$  définie classiquement par :

$$\begin{aligned} f(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}, \tilde{R}) &= \tilde{\sigma}_{eq} - R - R_0 \leq 0 \\ \text{avec } \tilde{\sigma}_{eq} &= \sqrt{(\tilde{\sigma}_{12})^2 + (\tilde{\sigma}_{23})^2 + (\tilde{\sigma}_{31})^2 + c^2 [(\tilde{\sigma}_{22})^2 + (\tilde{\sigma}_{33})^2]} \end{aligned} \quad (1.13)$$

où  $c$  est une constante matériau de couplage,  $R_0$  le seuil d'élasticité initial et  $R$  la variable d'écrouissage, liée à la plasticité accumulée  $p$  par une loi d'état du type :

$$R = k_p p^m$$

Les variables de plasticité et de plasticité cumulée sont gouvernées par les lois d'évolution suivantes :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}} \quad \text{et} \quad \dot{p} = \begin{cases} \tilde{\sigma}_{eq} \left( \frac{\partial R}{\partial p} \right)^{-1} & \text{si } f = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.14)$$

## 4.2 Modélisation des interfaces

Le lien entre les différents plis est fait par l'interface, entité surfacique qui assure le transfert des efforts et des déplacements entre les plis adjacents. Leur comportement doit pouvoir refléter un phénomène de dégradation interlaminaire prépondérant, à savoir le délaminage. Pour cela, plusieurs modèles basés sur des lois cohésives ont été développés dans le cas élastique [Schellekens et Borst, 1993, Allix *et al.*, 1995, Corigliano et Allix, 2000, Gornet *et al.*, 2000, Corigliano et Mariani, 2001, Remmers *et al.*, 2003], anélastique [Gornet *et al.*, 2010] ou d'une sollicitation en fatigue [Gornet et Ijaz, 2011].

L'anisotropie du matériau conduit à la définition d'une base locale d'orthotropie dans laquelle est défini le comportement. Classiquement, la direction 1 est celle de la bissectrice de l'angle formé par les fibres des plis adjacents, la 2 celle orthogonale

dans le plan de l'interface et la 3 la normale à la surface. L'énergie de déformation s'écrit alors dans ce repère de la façon suivante :

$$e_d = \frac{1}{2} \left( \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{(1-d_I)k_n^0} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{k_n^0} + \frac{(\sigma_{31})^2}{(1-d_{II})k_t^0} + \frac{(\sigma_{32})^2}{(1-d_{III})k_t^0} \right)$$

Les trois variables d'endommagement  $d_I$ ,  $d_{II}$  et  $d_{III}$  sont classiquement associées aux trois modes d'ouverture possibles de l'interface (mode I d'ouverture, modes de cisaillement II et III). Le caractère unilatéral du mode d'ouverture est pris en compte en séparant les parties positive et négative de la contrainte normale  $\sigma_{33}$ . Les raideurs élastiques du matériau sain  $k_n^0$  et  $k_t^0$  relient quant à elles les efforts surfaciques transitant dans l'interface au saut de déplacement entre le pli inférieur et le pli supérieur.

Tout comme pour le pli, l'écriture de la dissipation permet de définir les forces d'endommagement pilotant les variables associées à partir de la dérivée de l'énergie de déformation :

$$\begin{aligned} Y_I &= \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{(1-d_I)^2 k_n^0} \\ Y_{II} &= \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{31})^2}{(1-d_{II})^2 k_t^0} \\ Y_{III} &= \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{32})^2}{(1-d_{III})^2 k_t^0} \end{aligned}$$

L'interface ayant une épaisseur très fine, une variable d'endommagement « isotope » est adoptée, en posant  $d_I = d_{II} = d_{III}$ . Cette variable d'endommagement est donc gouvernée par une unique force thermodynamique associée effective :

$$\bar{Y}(t) = \sup_{\tau \leq t} \left[ (Y_{III}(\tau))^\alpha + (\gamma Y_I(\tau))^\alpha + (\gamma Y_{II}(\tau))^\alpha \right]^{1/\alpha} \quad (1.15)$$

avec  $\gamma$  et  $\alpha$  des paramètres matériau représentant respectivement le poids relatif des énergies en mode 1, 2 et 3, et le caractère fragile de l'interface.

La loi d'évolution retenue ici pour la variable d'endommagement est la suivante :

$$d_I = \begin{cases} \left[ \frac{n}{n+1} \frac{\langle \bar{Y} - Y_0 \rangle_+}{Y_C - Y_0} \right]^n & \text{si } d < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.16)$$

Pour ce type de solution, la localisation de l'endommagement a un impact bien moindre, puisqu'il est déjà localisé aux interfaces. Même dans le cas de chargements favorisant grandement le délaminage entre les plis comme principal mode de dégradation, typiquement un essai DCB, l'influence de la localisation est très faible sur la réponse globale de la structure. Toutefois, elle n'est pas négligeable dans le cas de grandeurs très localisées autour du front de fissure.

## 5 Conclusions

Nous l'avons vu, les matériaux composites stratifiés sont la source de phénomènes de dégradation complexes, justifiant une grande quantité de travaux pour tenter de les comprendre et surtout, de les modéliser. Les modèles microscopiques, notamment, permettent une compréhension poussée de l'endommagement du matériau et ont, en ce sens, un très fort contenu mécanique. Cependant, dans le cas de calcul d'assemblage de pièces composites, il n'est pas envisageable de faire des calculs à l'échelle de la fibre.

Dans ce souci d'accessibilité numérique, les méthodes macroscopiques sont très performantes puisqu'elles ajoutent des informations sur la tenue du matériau avec un surcoût numérique quasi-nul. Toutefois, la variété des chargements, des géométries et des empilements que l'on peut trouver dans les assemblages ne permet pas l'utilisation de tels critères. C'est pourquoi les approches mésoscopiques s'imposent comme le meilleur compromis entre représentativité de l'endommagement et l'accessibilité numérique.

Le modèle, dit « standard », présenté précédemment a de plus été doté de nombreuses améliorations, jusqu'à la définition d'un nouveau mésomodèle dit « amélioré ». Son principal avantage vient de la prise en compte de la densité de fissures dans le matériau, et donc de la saturation, ce qui lui permet notamment de représenter fidèlement les effets d'épaisseur dans les plis, ainsi que les interactions entre les fissures transverses et le délaminage. Toutefois, son identification est difficile et surtout, le surcoût numérique conséquent. C'est pourquoi, pour des raisons de compromis entre représentativité de la physique et coût de calcul, ces travaux se limiteront à l'implantation du modèle standard. Malgré tout, l'intégration du mésomodèle d'endommagement « standard » dans un calcul de structures demande de réels efforts sur les méthodes numériques de résolution utilisées. En effet, la taille des problèmes ainsi définis rend impossible la simulation par une approche directe classique. C'est pourquoi le chapitre suivant est consacré aux différentes méthodes numériques pour le calcul massivement parallèle.





## Chapitre 2

# Revue des stratégies numériques pour la résolution des problèmes d'assemblage

*On se propose dans ce chapitre d'aborder les différentes méthodes permettant le calcul intensif et hautes performances de notre problème.*

### Sommaire

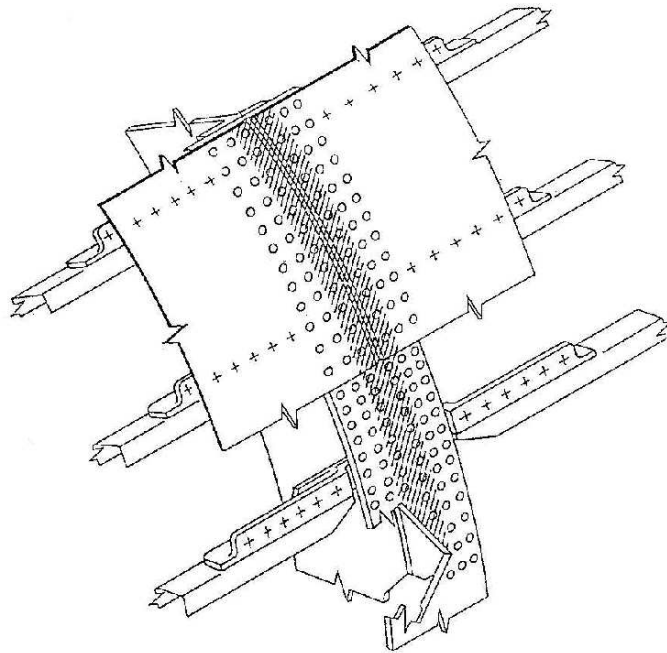
---

<b>1</b>	<b>Modélisation des assemblages</b>	<b>30</b>
1.1	Modèles simplifiés d'éléments de liaison	31
1.2	Représentation de la géométrie réelle	32
1.3	Conclusion sur les problèmes d'assemblages	33
<b>2</b>	<b>Stratégies multi-échelles pour le calcul de structures</b>	<b>34</b>
2.1	Méthodes avec raffinement local	35
2.2	Méthodes multi-grilles	40
2.3	Méthodes de décomposition de domaine	43
<b>3</b>	<b>Conclusions</b>	<b>48</b>

---

LE DIMENSIONNEMENT d'un composant d'assemblage, sorti de son contexte, pose de nombreux problèmes de pertinence et de validité, notamment au niveau des conditions aux limites appliquées. Le calcul d'assemblage consiste donc non plus à envisager le comportement d'un composant seul, mais celui de la structure entière. Dans le cas de structures aéronautiques, la prépondérance des liaisons (voir **Figure 2.1**), ainsi que l'augmentation constante des moyens de calcul, justifie pleinement l'utilisation d'une approche « assemblage ». La modélisation desdites liaisons entre les différentes pièces physiques a fait l'objet de nombreuses études qui ont abouti à des modèles plus ou moins complexes.

Ce chapitre sera composé de deux parties principales. La première sera consacrée aux différents modèles d'assemblage et aux différentes problématiques sous-jacentes, afin de définir au mieux le type de problème à résoudre. La seconde partie sera liée au traitement numérique du problème à proprement parler. En effet, la capacité à pouvoir traiter des problèmes complexes, tels que ceux d'assemblages, nécessite des moyens de calcul efficaces, mais surtout des algorithmes performants basés sur des stratégies multi-échelles.



**FIGURE 2.1** : Aperçu d'une jonction circonférentielle de fuselage

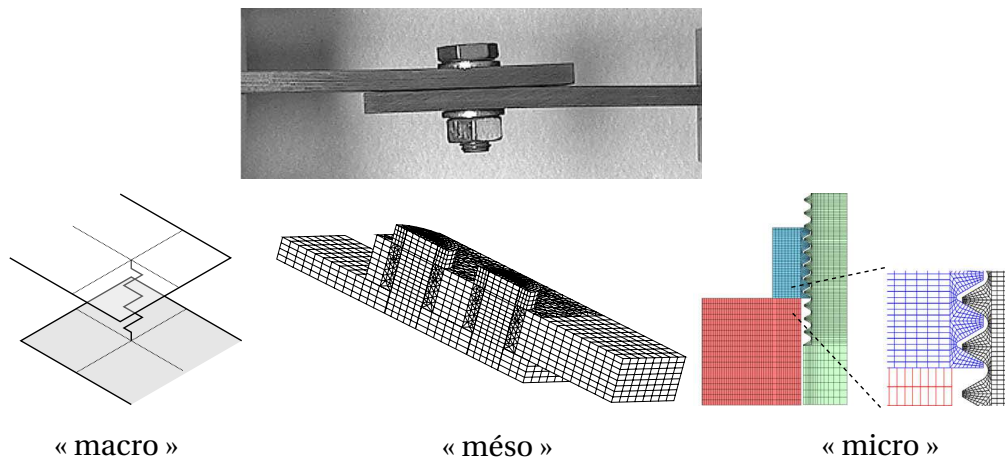
## 1 Modélisation des assemblages

La particularité des problèmes d'assemblage réside dans la volonté de représenter le comportement d'un ensemble de composants et de leurs interactions par le biais

des liaisons mécaniques. C'est la modélisation de ces liaisons qui est le fruit de nombreux travaux, résultats de différents compromis entre la pertinence du modèle, sa simplicité et son coût de calcul.

La première classe d'approches fait le choix d'introduire un modèle simplifié de la liaison, généralement par le biais de connecteurs. Ces éléments particuliers, reliant deux nœuds ou deux éléments de composants en vis-à-vis, peuvent avoir des comportements plus ou moins complexes pour représenter celui d'une véritable liaison. Cette simplification permet à ces approches d'introduire les liaisons entre composants avec un très faible surcoût numérique. Cependant, l'identification des paramètres intrinsèques au comportement des connecteurs est parfois délicate et dépend bien souvent de nombreux facteurs mal connus : précharge, matériaux, coefficients de frottement, géométrie de la liaison, etc.

Avec la montée en puissance des calculateurs, une deuxième classe d'approches a pu apparaître. La complexité géométrique de la liaison est représentée explicitement par éléments finis, ce qui permet d'introduire plus naturellement les différents phénomènes physiques en jeu (contact, frottement). Ces méthodes, qui engendrent forcément un coût numérique important, voient de plus un très grand nombre de zones de contact frottant, ce qui peut conduire à des difficultés numériques.



**FIGURE 2.2 :** Différentes échelles de modélisation d'une liaison entre deux pièces [McCarthy et McCarthy, 2005] : macroscopique (modèle simplifié), mésoscopique ([Boucard et Champany, 2003a]), microscopique ([Alkatan *et al.*, 2007])

### 1.1 Modèles simplifiés d'éléments de liaison

Les modèles simplifiés consistent, nous l'avons dit, à ne pas représenter explicitement les pièces dédiées à la liaison (rivets, boulons, vis, rondelles, etc.). L'identification du comportement des connecteurs, censés représenter le comportement de l'ensemble de ces petites pièces, dépend alors de la configuration de l'assemblage

(recouvrement simple ou double), ainsi que des matériaux utilisés, voire de la pré-charge.

### 1.1.1 Modèles linéaires

Les premiers modèles à avoir été utilisés ont proposé l'utilisation d'un ressort généralisé, permettant d'introduire une rigidité reliant deux composants assemblés. Si les premières études sont assez anciennes [Tate *et al.*, 1946], de nombreuses autres [Swift, 1971, Huth, 1986, Niu, 1988] ont vu le jour notamment dans le but d'évaluer la tenue en fatigue des assemblages boulonnés. Ces modèles ont permis, à l'aide de formules semi-empiriques, de retrouver la raideur équivalente à la liaison, laquelle dépendait de paramètres plus ou moins nombreux selon les modèles :

- liés aux composants : module d'élasticité des matériaux, épaisseur de chaque plaque, configuration (simple ou double recouvrement)
- liés à la fixation elle-même : diamètre, type de fixation (boulonné, riveté).

Dans le cas de la tenue en fatigue, ces approches sont largement suffisantes, d'autant que l'implantation de ce type de lois est naturelle dans le cadre d'une implantation dans un code Éléments Finis. Toutefois, ces approches montrent rapidement des limites dans le cas de chargements critiques où l'on souhaite représenter finement le comportement de la liaison.

### 1.1.2 Modèles non-linéaires

Pour améliorer la pertinence de l'approche dans le cas où de nombreux éléments de fixation composent la liaison, [McCarthy *et al.*, 2006] propose un comportement bilinéaire pour chaque connecteur, afin de prendre en compte le jeu entre les éléments de fixation et les composants. Toutefois, ce modèle ne prend pas en compte le frottement entre deux composants assemblés, phénomène pourtant prépondérant dans le transfert d'effort [McCarthy *et al.*, 2005]. Pour y remédier, l'approche proposée par [Gant *et al.*, 2011] s'appuie sur un modèle linéaire associé à un modèle probabiliste permettant de calculer un intervalle de solutions au sein duquel se trouve la solution « réelle » avec frottement.

## 1.2 Représentation de la géométrie réelle

De nombreuses autres études, profitant de l'augmentation des moyens de calcul, représentent explicitement la géométrie de la liaison et intègrent directement les différents phénomènes physiques en jeu. Cependant, si cela permet de faciliter l'identification des paramètres, ce n'est pas sans induire de nombreuses difficultés numériques. En effet, les problèmes de contact ou de frottement introduisent des non-linéarités très fortes, dues à une transition brutale entre un état de contact et de décollement, ou d'adhérence et de glissement.

Dans le cas particulier du contact, la « raideur » entre deux nœuds en vis-à-vis est soit nulle (cas du décollement), soit infinie (cas du contact, sans interpénétration).

Pour prendre en compte cela numériquement, deux approches sont généralement utilisées : les approches par pénalisation [Kikuchi, 1982] et celles par ajout de multiplicateurs de Lagrange [Wriggers *et al.*, 1985].

Les approches par pénalisation introduisent une rigidité artificielle, autorisant une légère interpénétration des surfaces. Cette approximation assouplit grandement les conditions de contact et permet de régulariser le problème. La méthode peut toutefois converger difficilement, du fait du mauvais conditionnement de la matrice de rigidité, notamment si le paramètre de pénalisation vient à être trop élevé (ce qui conduit, théoriquement, à une meilleure qualité de résultat). Malgré tout, la simplicité d'implantation numérique ainsi que son surcoût modéré font que ces approches sont souvent utilisées dans les problèmes d'assemblage [Chung et Ip, 2000, Izumi *et al.*, 2005, McCarthy et McCarthy, 2005].

*A contrario*, les approches par multiplicateurs de Lagrange [Arora *et al.*, 1991, Radi *et al.*, 1998] cherchent à respecter exactement les conditions de contact. Les multiplicateurs de Lagrange sont des inconnues supplémentaires à rajouter dans le problème, que l'on peut interpréter comme les forces de réaction, ce afin d'assurer les conditions de non-pénétration. L'ajout de ces nouvelles inconnues implique deux défauts importants : l'augmentation de la taille du problème et son conditionnement potentiellement très mauvais, puisque les inconnues sont soit homogènes à des déplacements (inconnues classiques des approches par éléments finis) et à des efforts (les multiplicateurs introduits). Malgré tout, ces méthodes n'introduisent aucun paramètre non-physique qui altère le résultat final, contrairement aux méthodes par pénalisation.

Afin de palier les problèmes de conditionnement dûs aux multiplicateurs de Lagrange, il est courant d'utiliser des méthodes de Lagrange augmentées [Arora *et al.*, 1991]. Elles ont pour conséquence l'ajout de nouveaux multiplicateurs, homogènes à des déplacements, et sont souvent comparées à des algorithmes d'Uzawa [?], dont la convergence est hélas relativement lente. Malgré cela, elles restent souvent utilisées dans le calcul d'assemblages [Klarbring, 1992, Chabrand *et al.*, 1998].

**Remarque 2.1 :** Les problèmes de frottement sont généralement traités de la même façon que les problèmes de contact. On distingue donc les approches primales (pénalisation) et duales (multiplicateurs de Lagrange), lesquelles s'appliquent indifféremment sur les composantes normales (contact) ou tangentielles (frottement) des surfaces de contact.

### 1.3 Conclusion sur les problèmes d'assemblages

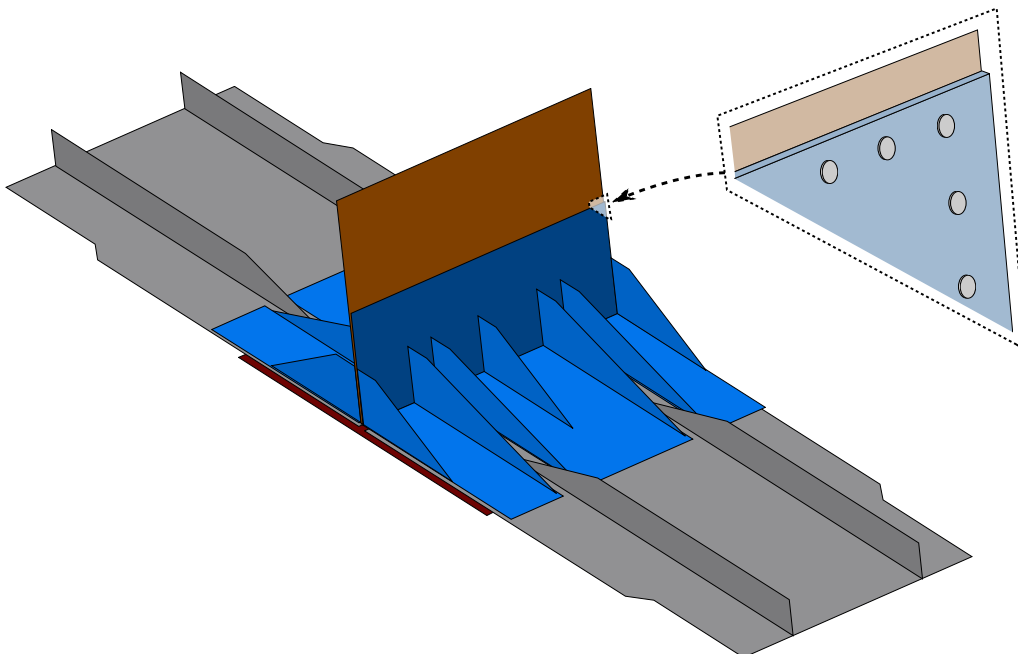
Les problèmes d'assemblages impliquent la modélisation de plusieurs composants, et donc naturellement des problèmes de taille conséquente. De plus, les liaisons entre ces différents composants sont souvent complexes et mettent en jeu de nombreux phénomènes physiques que les modèles simplifiés ne prennent pas forcément en compte.

Dans le cas de calcul de tenue à une charge critique, sortant donc du cadre de la fatigue pour lequel sont utilisées la majorité des approches simplifiées, il est absolument nécessaire de minimiser les approximations faites du fait des très fortes non-linéarités intrinsèques aux problèmes d'assemblage. Par conséquent, tout comme dans le cas du modèle matériau à utiliser, le meilleur compromis entre précision et coût de calcul reste l'approche « mésoscopique », qui permet de modéliser explicitement la géométrie de la liaison tout en s'épargnant l'introduction de détails beaucoup trop pointus (filets des vis...).

Par conséquent, se pose la question des moyens de calcul de ces problèmes à potentiellement très grand nombre de degrés de liberté. Il existe, dans les faits, de nombreuses méthodes pouvant être appliquées dans le cas de calcul d'assemblages, sur des architectures de calcul soit séquentielles, soit parallèles.

## 2 Stratégies multi-échelles pour le calcul de structures

Par conséquent, le problème à résoudre présente de grandes disparités d'échelle d'observation, pour intégrer une composante très locale (la liaison) au sein d'un problème global d'assemblage (voir **Figure 2.3**). Les méthodes de calcul adaptées à la résolution de ce type de problème présentent cette même particularité et traitent le problème suivant plusieurs échelles d'observation. De par cet aspect, elles sont appelées méthodes de résolution multi-échelles.



**FIGURE 2.3 :** Disparité d'échelles d'observation sur un assemblage

Les premières classes de méthodes, que l'on appellera dans la suite du chapitre

« avec raffinement local », composent avec cette différence d'échelle. Par conséquent, ces méthodes décomposent le problème en deux : la partie globale, avec une échelle d'analyse – et donc une discrétisation – grossière, et la partie locale, avec une échelle d'analyse beaucoup plus fine. Le point crucial de ces méthodes réside alors dans le transfert de données et le couplage entre les deux modèles.

*A contrario*, l'autre approche est plus « brutale ». Le problème est discrétisé dans son ensemble de façon suffisamment fine pour pouvoir représenter les détails de la composante locale. Par conséquent, il s'agit ici d'être capable de résoudre des problèmes non-linéaires de *très* grande taille, notamment en tirant parti de moyens de calculs plus complexes et parallèles. Nous présenterons ici deux types d'algorithmes : les méthodes multi-grilles d'abord et les méthodes de décomposition de domaine par la suite. L'aspect multi-échelle de ces méthodes est toutefois bien présent : un problème global, très grossier, est généralement défini afin d'accélérer le taux de convergence de ces méthodes, bien qu'il ne soit pas nécessaire pour la résolution à proprement parler.

## 2.1 Méthodes avec raffinement local

Les méthodes avec raffinement local reposent généralement sur une double modélisation, une pour chaque échelle d'observation, afin de limiter le coût numérique du calcul. Les plus utilisées en Bureau d'Études, du fait de leur relative simplicité de mise en œuvre, sont des approches avec « zoom structurel » employant une technique d'analyse globale/locale.

Les autres approches décrites brièvement dans ce manuscrit partent du principe qu'il existe une véritable distinction des échelles entre celle, dite « micro », du problème local et celle, dite « macro », du problème global. À la différence des méthodes précédentes, les phénomènes se produisant à l'échelle micro peuvent avoir une influence significative sur la solution macro, d'où des méthodes de couplage entre les échelles plus complexes.

### 2.1.1 Méthodes de « zoom structurel »

Les méthodes de « zoom structurel » décrivent la structure au moyen de deux modèles séparés (voir **Figure 2.4**) :

- un modèle global, grossier et représentant la structure dans son entier, sans nécessairement représenter tous les détails ;
- un modèle local, qui représente plus finement, que ce soit en termes de modèle (non-linéarités) ou de géométrie, lorsque le modèle global s'avère trop imprécis.

Les améliorations apportées par le modèle local peuvent être de plusieurs sortes : ajout de détails structuraux, hétérogénéité du matériau [Voleti *et al.*, 1996], relations de comportement [Whitcomb, 1991]... Quel que soit le raffinement du modèle local, le transfert d'information d'un modèle à l'autre peut se faire de plusieurs fa-



cons : soit unidirectionnel (approches descendantes), soit bidirectionnel (approches directes, approches itératives).

### ■ Approches descendantes

Ces approches sont très certainement les plus utilisées dans le milieu de l'industrie, du fait de leur relative simplicité de mise en œuvre. En effet, elles consistent à résoudre le problème global dans un premier temps, afin d'en extraire des conditions aux limites pour le problème local.

Dans le cas du *submodeling* implanté dans de nombreux codes de calcul (appelé *Specified Boundary Displacement* dans [Kelley, 1982]), c'est le déplacement qui est imposé sur les bords du modèle local. Cette méthode, appliquée dans de nombreux cas (non-linéarités matériau et géométriques [Ransom *et al.*, 1992], raffinements topologiques [Kapania *et al.*, 1997], hétérogénéité [Voleti *et al.*, 1996]), présente le gros avantage de réduire de façon considérable le coût de calcul par rapport à une approche raffinée globalement. Cependant, cette méthode souffre de défauts rédhibitoires dans le cas de calcul d'assemblage. Tout d'abord, puisque toute influence du problème local sur le global est négligée, des erreurs conséquentes peuvent apparaître dans certains cas, notamment de flambage ([Cresta, 2008]), ou même de raffinement de maillage ([Jara-Almonte et Knight, 1988, Mao et Sun, 1991]). De plus, des phénomènes de blocages cinématiques peuvent apparaître dans le cas de maillages fortement incompatibles. Pour remédier à ce problème, une approche descendante en effort a été proposée notamment dans [Cornuault, 1998], avec l'utilisation de techniques de régularisation des contraintes [Zienkiewicz et Zhu, 1992] pour le raccord dual.

### ■ Approches exactes directes

Le principe de ces méthodes est, contrairement aux précédentes, de pouvoir résoudre de façon exacte un problème dit de référence. Ce problème de référence est obtenu en substituant le problème local au sein du problème global. Une première

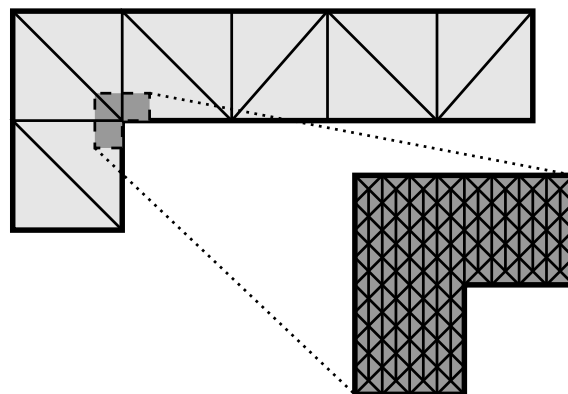


FIGURE 2.4 : Aperçu d'un zoom structurel : un modèle global et un local

façon de résoudre le problème est celle adoptée par [Holnicki-Szulc et Gierlinski, 1995, Saka, 1991]. Elle repose sur l'utilisation de techniques de réanalyse structurale, qui permettent de calculer, à partir du calcul d'une structure de base, la réponse d'une structure modifiée suite à des modifications géométriques. Une autre approche, proposée dans [Hirai *et al.*, 1984, Hirai *et al.*, 1985], utilise des techniques de condensation statiques pour réduire la taille des problèmes, moyennant une hypothèse de linéarité.

Si ces méthodes sont des résolutions exactes et prennent donc en compte l'influence des phénomènes du modèle local sur le global, elles demeurent néanmoins coûteuses et limitées soit à des perturbations faibles (réanalyse structurale), soit à des problèmes linéaires (condensation). Par conséquent, des méthodes itératives approchées ont été mises au point afin de limiter le coût numérique, voire élargir le domaine d'application.

### ■ Approches itératives

Les approches itératives peuvent tout simplement être vues comme des extensions des méthodes descendantes, en introduisant une nouvelle étape de remontée. Cette phase de descente puis remontée constitue une itération de la méthode, laquelle peut être répétée jusqu'à convergence d'un certain indicateur d'erreur.

Leur principal avantage est de s'affranchir des limites des méthodes descendantes en instaurant une véritable communication entre les deux échelles, tout en limitant le coût de calcul puisque les itérations restent, en théorie, limitées en nombre. Ainsi, la méthode *Iterative Global-Local* introduite dans [Whitcomb, 1991] propose, sous réserve de compatibilité des maillages, d'effectuer un raccord en déplacement entre les différentes modélisations. Un raccord mixte, avec différentes techniques d'accélération, est proposé par [Gendre *et al.*, 2011] dans le cadre de la mise au point d'une méthode non-intrusive pour l'ajout local d'un modèle de plasticité.

### 2.1.2 Approches avec distinction des échelles

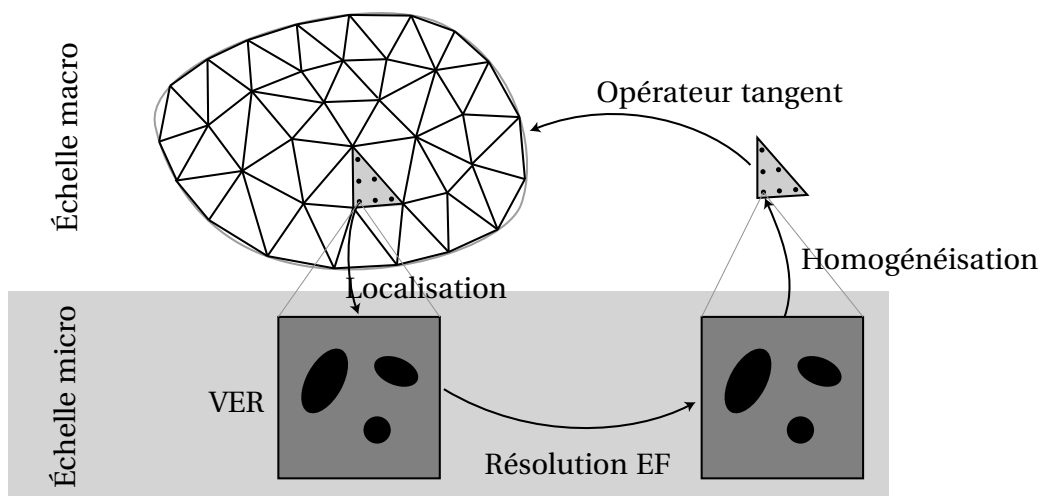
Les approches multi-échelles présentées dans cette partie considèrent une véritable distinction des échelles, et supposent donc que les détails locaux ont une dimension caractéristique beaucoup plus faible que celle de la structure. Afin de prendre en compte la contribution du problème micro dans le problème macro, une première idée est d'utiliser des techniques d'homogénéisation. Une autre approche est de prendre comme référence le problème macro, lequel sera enrichi localement par des informations tirées du problème micro. La dernière classe d'approches considère le problème micro plutôt comme un « patch », une correction, à apporter à la solution globale.

### ■ Méthodes de calcul avec homogénéisation du problème micro

Ces méthodes reposent sur des techniques d'homogénéisation, afin d'intégrer le

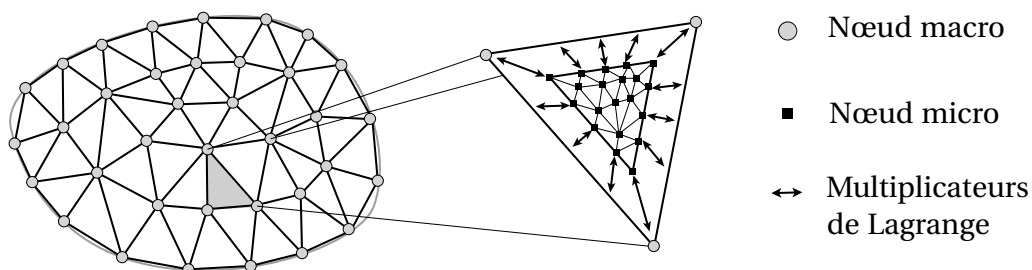
comportement plus ou moins particulier des détails de la structure (ou, plus souvent, de la microstructure du matériau) directement dans le problème macro.

La méthode Éléments Finis à deux niveaux (ou  $FE^2$ , voir **Figure 2.5**) a été introduite dans [Feyel et Chaboche, 2000] et repose sur les hypothèses d'homogénéisation périodique de [Sanchez-Palencia, 1974]. Une discrétisation par éléments finis est appliquée sur le problème global. La particularité de la méthode est alors d'introduire, en chaque point de Gauss, le comportement d'un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau. Ce comportement est alors calculé, à son tour, par éléments finis. Du fait de la définition de ce VER, la méthode  $FE^2$  souffre toutefois des mêmes limitations que l'homogénéisation périodique, dont elle est dérivée.



**FIGURE 2.5 :** Aperçu d'une itération de  $FE^2$

Par conséquent, dans le cas où les deux échelles ne sont pas « suffisamment » séparées, il n'est pas forcément judicieux mécaniquement parlant de définir un comportement macroscopique homogénéisé de la particularité micro. C'est pourquoi [Ibrahimbegovic et Markovic, 2003] propose, sous le nom d'analyse micro/macro (**Figure 2.6**), d'effectuer une homogénéisation directement sur les problèmes discrets. L'opérateur de rigidité et le second membre du problème global sont directement assemblés à partir de leurs homologues locaux.



**FIGURE 2.6 :** Analyse micro/macro

### ■ Méthodes de calcul avec enrichissement

Le principe de ces méthodes est de considérer le modèle global comme celui de référence. Toutefois, la solution de ce problème peut être enrichie plus ou moins localement par des informations tirées d'un problème calcul à l'échelle micro.

Par exemple, la *Homogenized Dirichlet Projection Method* ([Zohdi *et al.*, 1996, Oden et Zohdi, 1997]) passe dans un premier temps par la résolution du problème de référence *via* une méthode Éléments Finis classique. Il est ensuite découpé grossièrement en un certain nombre de cellules, au sein desquelles on vient calculer un indicateur d'erreur ([Oden *et al.*, 2007]). Si l'indicateur dépasse un certain critère, un problème micro sur la cellule entière est alors créé et calculé pour corriger la solution.

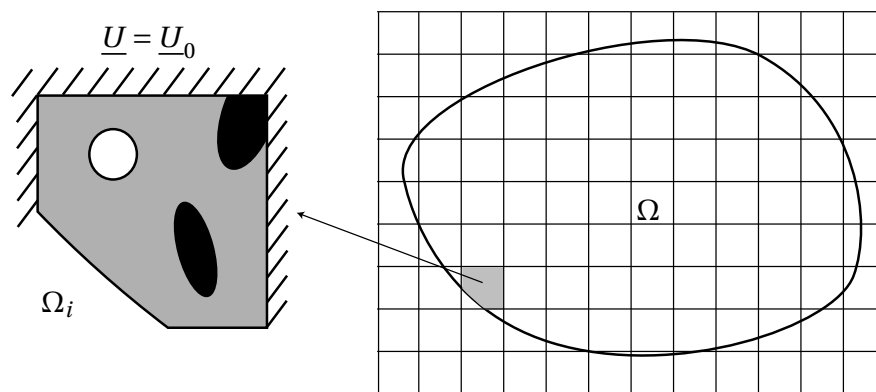


FIGURE 2.7 : Identification des deux échelles de la *Homogenized Dirichlet Projection Method*

Comme précédemment, il est aussi possible d'enrichir directement le problème discrétisé éléments finis associé au problème de référence. Les méthodes dérivées de la partition de l'unité ([Melenk et Babuska, 1996]) permettent d'enrichir certains éléments par des fonctions de forme adaptées, éventuellement discontinues. La méthode X-FEM (pour *eXtended Finite Element Method*) permet ainsi de suivre la propagation d'une fissure en enrichissant progressivement les éléments traversés par des fonctions de forme discontinues, pour décrire au mieux la solution sans avoir à passer par de coûteuses opérations de remaillage. La méthode G-FEM [Strouboulis *et al.*, 2000] (pour *Generalized Finite Element Method*) propose d'enrichir les fonctions de formes par des « patches » de solutions calculées, soit analytiquement, soit par éléments finis, de problèmes locaux appelés *handbooks*.

### ■ Méthodes de calcul avec superposition

Les méthodes par « patches » utilisent la superposition d'un modèle global et d'un modèle local, plus fin, sans pour autant imposer de relation hiérarchique entre les deux. L'espace d'approximation local n'est alors plus réellement un enrichissement au sens strict du terme. Parmi ces méthodes, notons la méthode Arlequin, initialement introduite dans [Dhia, 1998, Dhia et Rateau, 2005]. Elle introduit un modèle

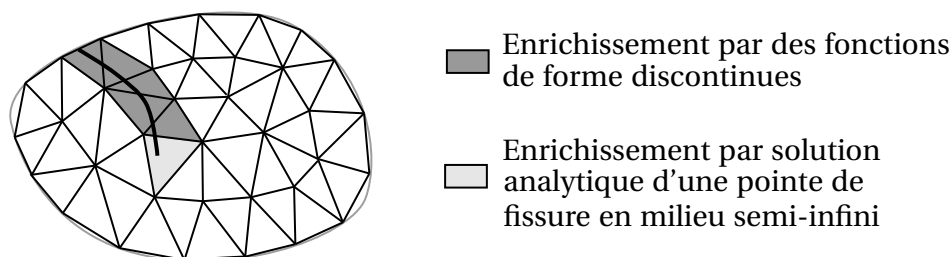
macro et un modèle micro, dont la zone de recouvrement est non nulle. L'originalité de la méthode vient du raccord sur cette zone de recouvrement, lequel est exprimé faiblement et imposé par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Cette particularité permet à la méthode d'être capable de traiter un très grand nombre de cas et de modèles différents.

## 2.2 Méthodes multi-grilles

Généralement, l'efficacité du comportement des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires « classiques » (gradient conjugué, GMRES, SSOR... [Saad, 2000]) dépend grandement de la longueur d'onde de la solution. Typiquement, les composantes fortement oscillantes de l'erreur décroissent rapidement alors que celles basses fréquences sont réduites plus lentement. Les méthodes multi-grilles [Fedorenko, 1964] profitent du fait que ce caractère « haute ou basse fréquence » est relatif à la taille de maille considérée et définissent donc une hiérarchie de maillages, allant d'un très fin au plus grossier.

Le principe de base des méthodes multi-grilles est donc d'utiliser quelques itérations du solveur linéaire sur le niveau le plus fin pour obtenir la composante haute fréquence de la solution. Cette solution est ensuite transférée sur une grille plus grossière sur quelques itérations encore, pour réduire les composantes plus basses fréquences. Le résultat est alors de nouveau transféré sur la grille fine. Cette démarche est alors mise en œuvre de manière récursive au sein de cycles dit « en V » ou « en W » (voir **Figure 2.10**). En posant  $N$  le niveau de discrétisation le plus fin et 1 le plus grossier, la résolution d'un problème linéaire par une méthode multi-grille avec un cycle en V est résumée par l'algorithme suivant :

1. **Construction des opérateurs** : la première étape est de construire, pour chaque grille  $n$ , l'opérateur de rigidité  $\mathbf{K}_n$  associé. Des opérateurs de transfert doivent de plus être définis :  $\mathbf{R}_{n \rightarrow n-1}$  est l'opérateur de restriction de la grille  $n$  à la grille  $n-1$ ,  $\mathbf{P}_{n-1 \rightarrow n}$  est l'opérateur de prolongation de la grille  $n-1$  à la grille  $n$ . Le choix le plus courant est d'ailleurs de prendre  $\mathbf{P}_{n-1 \rightarrow n} = (\mathbf{R}_{n \rightarrow n-1})^T$ .
2. **Initialisation de l'algorithme** : le système à résoudre est donc  $\mathbf{K}_N \cdot \underline{u}_N = \underline{f}_N$ . Par conséquent, le second membre  $\underline{f}_N$  est connu et l'initialisation de l'algorithme



**FIGURE 2.8** : Enrichissements possibles pour le suivi de propagation de fissure

se fait en posant  $\underline{r}_N \leftarrow \underline{f}_N$ .

3. **Phase de descente** : la phase de descente consiste à effectuer, pour  $n$  allant de  $N$  à 2, les opérations suivantes.

- (a) *Opération de lissage* : le lissage réalise  $p_n$  itérations du solveur itératif pour résoudre le système :

$$\mathbf{K}_n \underline{e}_n = \underline{r}_n \quad (2.1)$$

- (b) *Restriction du résidu* : le résidu de l'étape précédente est alors restreint sur la grille grossière la plus proche, afin de pouvoir initialiser l'opération de lissage au niveau  $n - 1$  :

$$\underline{r}_{n-1} \leftarrow \mathbf{R}_{N \rightarrow N-1} (\underline{r}_n - \mathbf{K}_n \underline{u}_n)$$

4. **Cas de la grille la plus grossière** : le système  $\mathbf{K}_1 \underline{u}_1 = \underline{r}_1$  est alors résolu de manière exacte, analytiquement ou à l'aide d'un solveur direct. Cette étape est cruciale puisqu'elle permet de capter les composantes basses fréquences de l'erreur, lesquelles n'ont pas pu être diminuées par le solveur itératif. Puisque le système est très réduit (un élément en théorie !), le calcul de la solution exacte doit prendre très peu de temps.

5. **Phase de remontée** : la phase de remontée consiste à effectuer, pour  $n$  allant de 2 à  $N$ , les opérations suivantes :

- (a) *Prolongation de la solution* : corriger la solution de la grille  $n$  calculée lors de la phase de descente à l'aide de la solution calculée sur la grille  $n - 1$  :

$$\underline{u}_n \leftarrow \underline{u}_n + \mathbf{P}_{n-1 \rightarrow n} \cdot \underline{e}_{n-1}$$

- (b) *Opération de lissage* : le lissage consiste à effectuer  $q_n$  itérations du solveur itératif pour résoudre le système :

$$\mathbf{K}_n \underline{u}_n = \underline{r}_n$$

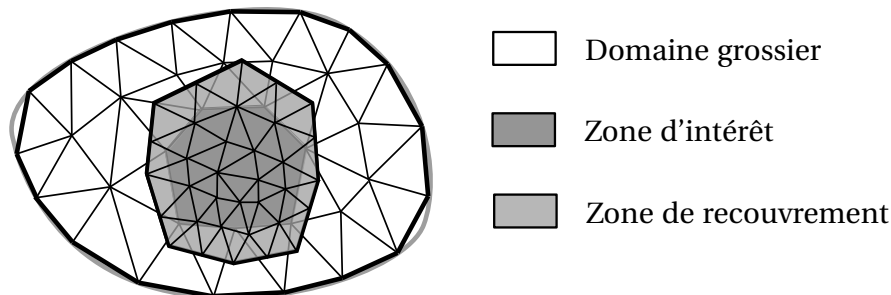


FIGURE 2.9 : Définition des zones d'études de la méthode Arlequin

Les méthodes multi-grilles présentent la particularité d'avoir une complexité linéaire et donc d'être des méthodes optimales [Yserentant, 1986], moyennant certaines conditions (systèmes symétriques, définis positifs de taille  $2^N$ ). Par conséquent, elles sont des solveurs de choix pour des problèmes de très grande taille, sous réserve d'être capable de « déraffiner » le maillage initial jusqu'à un niveau où le coût d'une résolution exacte est négligeable. Toutefois, les géométries complexes induites par les problèmes d'assemblages rendent impossible la construction de cette hiérarchie de grilles complète et, en pratique, seuls deux ou trois niveaux d'analyse sont considérés, ce qui se traduit par une perte d'optimalité de la méthode.

La résolution de problèmes non-linéaires par des méthodes multi-grilles ne modifie pas drastiquement l'algorithme précédent. Dans les faits, il existe deux approches possibles, soit par le biais de techniques d'homogénéisation, soit en introduisant directement le comportement non-linéaire à résoudre dans le problème résiduel grossier.

La première consiste à résoudre le problème linéarisé sur plusieurs grilles, d'où le nom de « Newton-Multigrid ». [Fish et Shek, 2000] propose ainsi de modifier le calcul des opérateurs intervenant dans la méthode, pour le traitement de structures élastoplastiques. Ainsi, les opérateurs de restriction  $\mathbf{R}_{n \rightarrow n+1}$  et de prolongation  $\mathbf{P}_{n+1 \rightarrow n}$  dérivent de techniques d'homogénéisation asymptotique, au lieu d'interpolation linéaire. Les matrices de rigidité pour les niveaux les plus grossiers sont, quant à elles, construites à partir d'un comportement homogénéisé. Ce type de choix est tout à fait pertinent puisque le problème grossier permet de raccorder précisément les différentes échelles que les techniques d'homogénéisation supposent séparées. Cependant, du fait du traitement global de la non-linéarité, la convergence de l'ensemble est très fortement pénalisée lorsque les phénomènes sont très locaux.

La seconde approche introduit directement le problème non-linéaire au sein de l'algorithme multi-grilles, faisant des opérations de lissage, ou de résolution, des opérations non-linéaires. La méthode « *Full Approximation Scheme* », introduite dans [Brandt, 1977], consiste essentiellement à remplacer le problème résiduel grossier 2.1

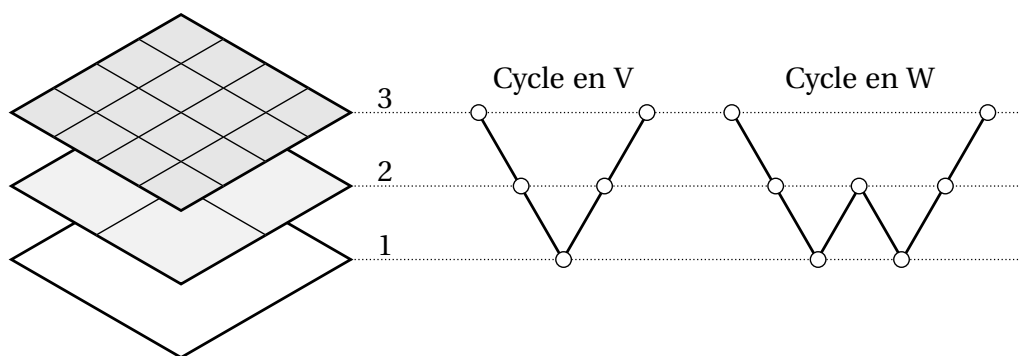


FIGURE 2.10 : Hiérarchie des discrétisations et cycles de résolution associés

par :

$$\mathbf{K}_n(\underline{u}_n + \underline{e}_n) - \mathbf{K}_n(\underline{u}_n) = \underline{r}_n$$

avec  $\mathbf{K}_n$  un opérateur non-linéaire et  $\underline{u}_n = \mathbf{R}_{n \rightarrow n+1} \cdot \underline{u}_{n+1}$ . Par conséquent, en plus de la correction  $\underline{e}_n$ , la technique transfère la solution complète  $\underline{u}_n$  d'une grille à l'autre, ce qui peut rapidement s'avérer gourmand en termes de stockage. Cependant, contrairement à la méthode précédente, la non-linéarité est traitée à tous les niveaux, la méthode se montre par conséquent très efficace dans le cas de localisation prononcée.

Un aspect déterminant dans le cas de structures de très grande taille est l'extensibilité de la méthode, quasiment nulle dans le cas de la méthode « *Full Approximation Scheme* ». Afin de la restaurer, les auteurs de [Fish et Belsky, 1995] proposent finalement de coupler ces deux approches en calculant l'opérateur du problème grossier *via* une approche basée sur l'homogénéisation. Le problème grossier est alors un problème homogénéisé, ce qui lui permet de capter plus efficacement les non-linéarités globales et donc de conserver une certaine extensibilité à la méthode.

### 2.3 Méthodes de décomposition de domaine

L'avènement des architectures de calcul parallèles a entraîné un intérêt croissant pour les méthodes de décomposition de domaine. En effet, ces méthodes visent à décomposer le domaine d'étude global  $\Omega$  en plusieurs sous-domaines de taille inférieure pouvant être traités séparément, et « raccordés » après coup. Ces raccords sont une caractéristique majeure des différentes méthodes de décomposition de domaine : nécessaires pour assurer l'équivalence entre les problèmes de base après décomposition, ils doivent demeurer suffisamment pertinents pour minimiser la quantité de données échangée entre chaque sous-domaine et donc, potentiellement, entre chaque processeur.

Parmi ces méthodes, selon le type de raccord, on distingue :

- les méthodes *avec* recouvrement : historiquement les premières à être présentées dans [Schwarz, 1869], le raccord entre les différents sous-domaines se faisant au niveau de leur intersection.
- les méthodes *sans* recouvrement : l'intersection entre les deux sous-domaines ne se fait qu'au niveau de leur « peau », et se limite donc à une surface dans le cas de sous-domaines tridimensionnels, une ligne dans le cas bidimensionnel. Ces méthodes sont actuellement largement préférées dans le domaine de l'ingénierie, notamment parce que les données sont naturellement localisées au niveau de chaque sous-structure, ce qui évite une certaine redondance au niveau des informations, point crucial en vue de minimiser les échanges entre processeurs.

Pour le reste du chapitre, nous nous limiterons aux méthodes de décomposition de domaines sans recouvrement, dont une revue quasi-exhaustive peut être trouvée dans [Gosselet et Rey, 2006]. Ces méthodes reposent toutes sur un même formalisme, à savoir qu'elles posent le problème sous forme sous-structurée : il est nécessaire de trouver la solution qui vérifie d'une part les équations classiques posées sur chaque



sous-domaine (admissibilité, équilibre, relation de comportement), d'autre part les conditions de raccord entre chacun des sous-domaines.

### 2.3.1 Écriture du problème sous-structuré

Considérons un problème d'élasticité linéaire en statique, posé sur un domaine d'étude  $\Omega$ , admettant éventuellement une discrétisation  $\Omega_h$ . La validité du cadre de travail des méthodes présentées par la suite nécessite de décomposer le domaine d'étude de manière conforme, c'est-à-dire qu'il doit exister une correspondance nœud à nœud de part et d'autre de l'interface faisant le raccord entre deux sous-domaines. Cette précaution est simple à respecter dans le cas d'une décomposition du domaine discrétisé  $\Omega_h$ , où il suffit de s'assurer qu'un élément n'appartient qu'à une seule et unique sous-structure. Dans le cas d'étude d'assemblages, la phase de discrétisation suit généralement la phase de découpage (chaque sous-domaine étant lié à une pièce physique), ce qui nécessite une attention particulière pour assurer la conformité de la décomposition.

Dans la suite, nous considérerons une décomposition en  $E$  sous-domaines notés  $\Omega^e$ , à chaque variable de  $\Omega^e$  sera attribuée un exposant  $e$ . Les degrés de liberté intérieurs aux sous-domaines discrétisés seront affectés de l'indice  $i$ , ceux sur les bords  $b$ . Nous l'avons vu, il sera alors nécessaire de respecter les conditions de raccord, ainsi que les équations sur chaque sous-structure (par une étape de condensation du problème).

#### ■ Discrétisation des conditions de raccord

L'hypothèse de décomposition conforme faite précédemment permet de simplifier grandement l'écriture des conditions de raccord puisqu'elle se résume à une correspondance nœud à nœud entre les différentes variables en jeu. Il est toutefois nécessaire d'introduire plusieurs opérateurs :

- l'opérateur de trace discrète  $\mathbf{t}^e$  sur  $\Omega^e$  défini par

$$\underline{u}_b^e = \mathbf{t}^e \cdot \underline{u}^e$$

- les opérateurs d'assemblage  $\mathbf{A}^e$  et  $\mathbf{B}^e$  ( $\mathbf{A}^e$  étant une version signée de  $\mathbf{B}^e$ ) faisant le lien entre les degrés de liberté d'une interface particulière  $\Gamma^{ee'}$  (raccordant  $\Omega^e$  et  $\Omega^{e'}$ ) et ceux de l'ensemble des interfaces  $\Gamma$ .

Par conséquent, la continuité des déplacements entre les sous-structures s'écrit comme :

$$\sum_e \mathbf{A}^e \underline{u}_b^e = \sum_e \mathbf{A}^e \mathbf{t}^e \underline{u}^e = \underline{0} \quad (2.2)$$

En introduisant  $\underline{\lambda}_b^e$  les inter-efforts nodaux exercés d'un domaine sur son domaine adjacent, l'équilibre entre les sous-structures s'écrit :

$$\sum_e \mathbf{B}^e \underline{\lambda}_b^e = \sum_e \mathbf{B}^e \mathbf{t}^e \underline{\lambda}^e = \underline{0} \quad (2.3)$$

Typiquement, dans le cas de deux sous-structures  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$ , les relations (2.2) et (2.3) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sum_e \mathbf{A}^e \underline{u}_b^e &= \underline{u}_b^1 - \underline{u}_b^2 = \underline{0} \\ \sum_e \mathbf{B}^e \underline{\lambda}_b^e &= \underline{\lambda}_b^1 + \underline{\lambda}_b^2 = \underline{0}\end{aligned}$$

### ■ Écriture sous forme d'un problème d'interface

Par conséquent, la résolution du problème sous-structuré (dans le cas de comportement élastique linéaire) revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}\forall e \in \llbracket 1, E \rrbracket, \quad \mathbf{K}^e \underline{u}^e &= \underline{f}^e + \underline{\lambda}^e \\ \sum_e \mathbf{A}^e \underline{t}^e \underline{u}^e &= \underline{0} \\ \sum_e \mathbf{B}^e \underline{t}^e \underline{\lambda}_b^e &= \underline{0}\end{aligned}\tag{2.4}$$

où  $\mathbf{K}^e$  est la matrice de rigidité liée au sous-domaine  $\Omega^e$ ,  $\underline{f}^e$  le second membre issu des efforts imposés sur le sous-domaine.

Afin de pouvoir poser le problème sous-structuré uniquement sur les inconnues d'interface, il est nécessaire de passer par une phase de condensation. Elle consiste alors à réécrire les problèmes locaux (2.4) en des problèmes posés aux interfaces. En décomposant les quantités aux interfaces et à l'intérieur du sous-domaine, l'équilibre mécanique de  $\Omega^e$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ib}^e \\ \mathbf{K}_{bi}^e & \mathbf{K}_{bb}^e \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_i^e \\ \underline{u}_b^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_i^e \\ \underline{f}_b^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{0}_i^e \\ \underline{\lambda}_b^e \end{Bmatrix}\tag{2.5}$$

Par conséquent, les déplacements à l'intérieur du sous-domaine s'écrivent :

$$\underline{u}_i^e = \left( \mathbf{K}_{ii}^e \right)^{-1} \left( \underline{f}_i^e - \mathbf{K}_{ib}^e \underline{u}_b^e \right)$$

Il suffit alors de substituer l'expression précédente dans le second bloc de (2.5) pour obtenir la formulation condensée du problème (2.4) sur l'interface :

$$\mathbf{S}^e \underline{u}_b^e = \underline{b}_p^e + \underline{\lambda}_b^e\tag{2.6}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^e &= \mathbf{K}_{bb}^e - \mathbf{K}_{bi}^e \left( \mathbf{K}_{ii}^e \right)^{-1} \mathbf{K}_{ib}^e \\ \underline{b}_p^e &= \underline{f}_b^e - \mathbf{K}_{bi}^e \left( \mathbf{K}_{ii}^e \right)^{-1} \underline{f}_i^e\end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathbf{S}^e$  est appelé complément de Schur de la sous-structure  $\Omega^e$ , que l'on peut interpréter comme la rigidité reliant les efforts de réaction de l'interface à un

déplacement imposé sur cette même interface. Le second membre  $\underline{b}_p^e$  vient de la condensation des efforts intérieurs, en plus de ceux appliqués directement sur l'interface.

Le problème global sous-structuré peut donc s'écrire uniquement sur les inconnues aux interfaces :

$$\forall e \in \llbracket 1, E \rrbracket, \quad \mathbf{S}^e \underline{u}_b^e = \underline{b}_p^e + \underline{\lambda}_b^e \quad (2.7)$$

$$\sum_e \mathbf{A}^e \mathbf{t}^e \underline{u}^e = \underline{0} \quad (2.8)$$

$$\sum_e \mathbf{B}^e \mathbf{t}^e \underline{\lambda}_b^e = \underline{0} \quad (2.9)$$

Le problème ainsi posé constitue le point de départ de la formulation des nombreuses stratégies de décomposition de domaine sans recouvrement. Ces différentes approches se différencient par le choix de la variable intervenant dans la résolution. Les approches primales consistent à rechercher le déplacement d'interface  $\underline{u}_b$  vérifiant la continuité des déplacements (2.8). *A contrario*, les approches duales cherchent les inter-efforts  $\underline{\lambda}_b$  vérifiant (2.9). Si ces deux approches sont vraisemblablement les plus utilisées à l'heure actuelle, d'autres ont été développées par la suite pour répondre à différentes problématiques. Ainsi, les approches hybrides consistent à rechercher un champ de déplacement sur une partie des interfaces et le champ d'inter-effort sur son complémentaire. Les approches mixtes s'intéressent, quant à elles, à trouver une combinaison linéaire entre les déplacements et les inter-efforts aux interfaces. Enfin, l'approche à trois champs consiste à rechercher simultanément un champ de déplacement global avec les champs de déplacement et d'inter-efforts locaux d'interfaces.

### 2.3.2 Approche duale

La méthode FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*, [Farhat et Roux, 1991]) est la méthode de décomposition de domaine primale la plus connue et la plus utilisée actuellement. Le problème défini par la recherche du champ des inter-efforts aux interfaces est résolu à l'aide d'un solveur gradient conjugué. L'extensibilité de l'algorithme par rapport à la taille du problème est permise par l'utilisation d'un préconditionneur, alors que son extensibilité par rapport à la sous-structuration est garantie par l'utilisation d'un projecteur, qui permet de définir un problème grossier macroscopique.

La prise en compte de non-linéarités par l'intermédiaire de la méthode FETI peut se faire de deux façons différentes. La première s'appuie sur une approche de type Newton et consiste donc à résoudre un ensemble de problèmes linéaires successifs. C'est pour ce type d'application que les auteurs de [Gosselet et Rey, 2002] proposent une stratégie qui exploite les informations issues de la résolution des problèmes pré-

cédents pour la construction de préconditionneurs et de problèmes grossiers du problème considéré.

Une autre méthode consiste à traiter la non-linéarité *via* la décomposition de domaine, en admettant des sous-domaines aux comportements non-linéaires. [Pebrel *et al.*, 2008] propose une extension de la méthode FETI au cas non-linéaire : la condensation est effectuée sur le problème non-linéaire et le problème aux interfaces est résolu par un algorithme de Newton. Dans les faits, cette approche revient à appliquer la méthode FETI avec une étape de résolution de problèmes non-linéaires sur chaque sous-domaine.

### 2.3.3 Approche primale

La méthode BDD (*Balancing Domain Decomposition* [Mandel, 1993, Le Tallec, 1994]), initialement basée sur le formalisme introduite dans [Le Tallec *et al.*, 1991], résout le problème aux interfaces par l'intermédiaire d'un gradient conjugué projeté. Le problème grossier, associé au préconditionnement de la matrice, est alors relativement similaire à celui de la méthode FETI et confère à l'approche primale des performances similaires aux approches duales, notamment en termes d'extensibilité de la méthode.

### 2.3.4 Approche hybride ou recondensée

La méthode HDD (pour *Hybrid Domain Decomposition method* [Gosselet et Rey, 2006]) unifie les deux méthodes précédentes. L'idée ici est de diviser l'ensemble des degrés de liberté sur les interfaces en deux sous-ensembles complémentaires. Sur le premier, une approche primale est appliquée alors que sur le second, une approche duale est utilisée. De par ce choix de traiter les interfaces par l'une ou l'autre des approches, cette méthode est particulièrement adaptée aux problèmes multiphysiques en appliquant les conditions de continuité possédant la signification physique la plus forte.

Les approches FETI-DP (pour *Dual Primal* [Farhat *et al.*, 2000]) et BDDC [Dohrmann, 2003, Cros, 2003] utilisent une recondensation du problème aux interfaces. Afin de remédier au problème délicat des degrés de liberté aux coins, il s'agit de procéder en deux étapes :

- on isole dans un premier temps les degrés de liberté « aux coins » (coins dans le cas de problèmes bidimensionnels, arêtes dans le cas de problèmes tridimensionnels). La vérification *a priori* des conditions de continuité et d'équilibre est alors imposée sur ce sous-ensemble ;
- une phase de condensation supplémentaire est réalisée pour éliminer ce sous-groupe du problème global, sur lequel est ensuite appliquée une approche primale (BDDC) ou duale (FETI-DP).

### 2.3.5 Approche mixte

Plutôt que de considérer les efforts *ou* les déplacements, une approche mixte recherche une combinaison linéaire des deux inconnues. Par conséquent l'inconnue  $\underline{\mu}_b^e$  doit vérifier la forme

$$\underline{\mu}_b^e = \underline{\lambda}_b^e + \mathbf{H}^e \underline{u}_b^e$$

où  $\mathbf{H}^e$  peut être interprété comme un opérateur de rigidité d'interface.

L'introduction de cet opérateur confère à cette approche un contenu mécanique fort puisqu'il permet une formulation du comportement de l'interface considérée. L'utilisation de conditions d'interfaces mixtes est par conséquent au cœur de plusieurs algorithmes de résolution par décomposition de domaine : les méthodes de type FETI-2LM [Series *et al.*, 2003] et l'algorithme LATIN [Ladevèze, 1999].

## 3 Conclusions

Les problèmes d'assemblages impliquent nécessairement d'être capable de traiter de grandes disparités d'échelles. Cependant, la modélisation de l'état d'endommagement du matériau ainsi que le couplage fort entre la liaison et le comportement à l'échelle de la structure conduisent à la nécessité d'une discrétisation fine sur l'ensemble de la structure. De plus, la complexité de la géométrie n'est pas adaptée à l'application d'une méthode multi-grilles, d'où le choix d'utiliser une méthode de décomposition de domaine.

Une notion clef dans le calcul haute performance est l'extensibilité de la méthode. Celle-ci consiste à garantir l'indépendance du taux de convergence de l'algorithme, dans le cas d'une méthode de décomposition de domaine, vis-à-vis de :

- la taille du problème tout d'abord. Cet aspect est intimement lié au solveur itératif utilisé, dont le nombre d'itérations nécessaires pour parvenir à convergence est grandement dépendant du conditionnement du système. L'extensibilité par rapport à la taille du système est généralement garantie par l'utilisation de préconditionneurs adaptés.
- la décomposition. L'augmentation du nombre de sous-structures ne doit donc pas conduire à une perte du taux de convergence de l'algorithme. Pour cela, la majorité des méthodes passent par l'introduction d'un problème grossier défini sur l'ensemble de l'assemblage, qui leur confère un aspect multi-échelle de ces méthodes.

Dans le cas des méthodes de décomposition de domaine, l'extensibilité est généralement assurée par l'intermédiaire d'un problème grossier portant sur l'ensemble de la structure. Ce problème grossier permet de définir une solution grossière sur chaque sous-domaine, ce qui permet de transmettre une grande partie de l'information dans chaque sous-domaine.

La prise en compte de non-linéarités demeure un problème délicat pour les méthodes de décomposition de domaine. Le cas de la prise en compte de non-linéarités

de type contact a fait l'objet d'une extension de l'approche FETI, appelée FETI-C [Dureisseix et Farhat, 2001]. Une stratégie classique et généralisable à toutes les non-linéarités est la méthode NKS (pour *Newton Krylov Schur*) qui permet de réutiliser les méthodes de décomposition de domaine précédentes moyennant la décomposition de la résolution en trois étapes, comme son nom l'indique :

- la méthode de Newton linéarise le problème non-linéaire et introduit un schéma itératif;
- la sous-structuration et la condensation de Schur pour l'écriture du problème aux interfaces;
- la résolution du problème condensé en parallèle par un solveur de Krylov.

Des perfectionnements de cette approche pour la prise en compte de non-linéarités locales ont fait l'objet de travaux dans [Cresta *et al.*, 2007, Hinojosa *et al.*, 2011].

La méthode développée au LMT-Cachan pour le calcul d'assemblages complexes est basée sur la méthode LATIN [Blanzé *et al.*, 1996, Champaney *et al.*, 1997] et présente l'avantage de son approche mixte, ce qui permet la prise en compte d'une très grande variété de comportements d'interface, non-linéaires ou pas. L'ajout d'un problème grossier définit la méthode LATIN multiéchelle, présentée dans [Ladevèze et Dureisseix, 2000], et assure ainsi l'extensibilité de la méthode. C'est sur cette méthode que s'appuie la stratégie présentée dans le chapitre suivant, afin de pouvoir traiter au mieux les problématiques d'assemblages de pièces en matériaux composites.



# Chapitre 3

## Stratégie de résolution numérique

*Le calcul d'assemblage de structures composites nécessite une méthode de calcul dédiée. Dans ce chapitre est présentée la stratégie de calcul multiéchelle développée dans ces travaux de thèse.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Sous-structuration du problème . . . . .</b>	<b>53</b>
1.1	Problème sur les sous-structures . . . . .	54
1.2	Problème sur les interfaces . . . . .	55
<b>2</b>	<b>Introduction d'une échelle macroscopique . . . . .</b>	<b>56</b>
2.1	Séparation des échelles . . . . .	57
2.2	Choix des quantités macroscopiques . . . . .	57
2.3	Admissibilité macroscopique des champs d'interface . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Algorithme itératif de résolution . . . . .</b>	<b>62</b>
3.1	Principe . . . . .	62
3.2	Choix des directions de recherche . . . . .	64
3.3	Écriture du problème à l'étape linéaire . . . . .	67
3.4	Écriture du problème de l'étape locale . . . . .	70
3.5	Étape locale sur les sous-structures . . . . .	71
3.6	Étape locale sur les interfaces . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Algorithme de la méthode . . . . .</b>	<b>75</b>
4.1	Initialisation de la méthode . . . . .	75
4.2	Convergence de la stratégie . . . . .	75
4.3	Algorithme . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Discrétisation du problème . . . . .</b>	<b>77</b>
5.1	Choix des espaces d'approximation . . . . .	77
5.2	Résolution numérique du problème de l'étape linéaire . . . . .	79



5.3	Résolution numérique de l'étape locale sur les sous-structures . .	79
<b>6</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>82</b>
6.1	Géométrie de l'éprouvette . . . . .	82
6.2	Matériau . . . . .	84
6.3	Comparaison avec les essais . . . . .	84

---

LA MÉTHODE LATIN avec décomposition de domaine est une stratégie de simulation adaptée au calcul de structures. L'objectif de ces travaux est d'étendre la méthode au cas de non-linéarités matériaux, lesquelles ne sont donc plus uniquement concentrée au niveau des interfaces de la décomposition. Cependant, une particularité de la stratégie proposée ici permet de coupler, assez naturellement, la décomposition de domaine avec la représentation en « plis et interphases » d'un stratifié tirée du mésomodèle d'endommagement.

Aussi, nous considérons le cas le plus général. Le problème considéré se place dans le cadre des hypothèses de petites perturbations et qui suit l'évolution quasi-statique et isotherme d'une structure  $\Omega$  sur un intervalle de temps  $[0, T]$ . Cette structure est soumise à des efforts volumiques  $\underline{f}_d$  sur son ensemble et à des efforts surfaciques  $\underline{F}_d$  sur une partie  $\partial_2\Omega$  de son bord  $\partial\Omega$ . Sur la partie complémentaire, notée  $\partial_1\Omega$ , le déplacement est imposé égal à  $\underline{U}_d$ .

Le comportement du matériau est celui du mésomodèle décrit dans la **Partie 1.4**, bien que des simplifications de celui-ci soient envisageables pour représenter le comportement des alliages métalliques (comportement élasto-plastique, voire élastique).

## 1 Sous-structuration du problème

Afin de pouvoir traiter des problèmes complexes et de grande taille, tels que les assemblages de pièces composites, il est nécessaire d'avoir une méthode de calcul performante et adaptée aux architectures de calcul massif actuelles, à savoir les clusters de machines parallèles. Les méthodes de décomposition de domaine répondent parfaitement à cette contrainte, puisqu'elles fragmentent le problème global en un ensemble de sous-problèmes plus ou moins indépendants les uns des autres.

C'est pourquoi la stratégie utilisée repose sur une décomposition du domaine en sous-structures, séparées les unes des autres par des interfaces (voir **Figure 3.1**). Une particularité de la méthode est de pouvoir attribuer à chaque entité, sous-structure comme interface, un comportement propre. Dans le cas de calculs d'assemblages de pièces composites, cet aspect est très intéressant, notamment pour la prise en compte du délaminage. La décomposition de domaine est par conséquent assez naturelle, et très proche du modèle utilisé et présenté dans la **Partie 1.4** :

- le comportement interpli du matériau composite est considéré au niveau des interfaces issues de la décomposition ;
- chaque pli est alors attribué à une sous-structure et peut donc être traité indépendamment des autres.

L'intégration du comportement du mésomodèle d'endommagement est alors grandement simplifiée. Plutôt que d'avoir à traiter le stratifié dans son entier, les entités, et donc les difficultés, sont séparées pour être traitées indépendamment les unes des autres.

Le domaine  $\Omega$  est par conséquent décomposé en un ensemble de sous-structures. Le domaine occupé par une sous-structure  $E$  est noté  $\Omega^E$ , lequel est soumis à l'action

des interfaces voisines sur sa frontière  $\partial\Omega^E$ . Une interface  $\Gamma^{EE'}$  exerce à la fois une distribution d'effort  $\underline{F}^E$  et de déplacement  $\underline{W}^E$  sur la sous-structure  $E$ . Le comportement de l'interface permet donc le transfert des efforts et du déplacement entre les sous-structures  $E$  et  $E'$ , conférant à la stratégie son caractère mixte. Les conditions aux limites sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  sont intégrées par le biais d'interfaces particulières, dites interfaces de bord (voir **Figure 3.1**).

### 1.1 Problème sur les sous-structures

Dans le cas le plus général, l'état d'une sous-structure  $\Omega^E$  est défini par l'ensemble des champs  $\left(\underline{\dot{\varepsilon}}_p, \underline{\dot{\chi}}, \underline{\sigma}, \underline{\Upsilon}\right)^E$  où :

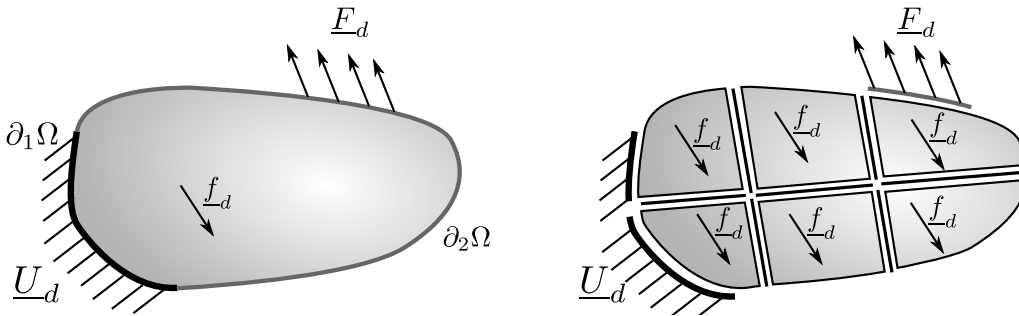
- $\underline{\varepsilon}_p^E$  désigne la partie anélastique de la déformation  $\underline{\varepsilon}^E$  ;
- $\underline{\sigma}^E$  désigne le champ de contraintes de Cauchy ;
- $\underline{\chi}^E$  désigne l'ensemble des variables internes du problème. Dans le cas du mésomodèle d'endommagement, cela comprend les 3 variables d'endommagement ainsi que la déformation plastique cumulée ;
- $\underline{\Upsilon}^E$  désigne l'ensemble des variables conjuguées de  $\underline{\chi}^E$ . Dans le cas du mésomodèle d'endommagement, cela comprend les forces thermodynamiques d'endommagement et la variable d'écrouissage.

Le problème sur chaque sous-structure  $\Omega^E$  revient alors à trouver l'évolution sur  $\Omega^E \times [0, T]$  de  $\left(\underline{\dot{\varepsilon}}_p, \underline{\dot{\chi}}, \underline{\sigma}, \underline{\Upsilon}\right)^E$  vérifiant les conditions suivantes :

- ❶ **Admissibilité cinématique** : le champ de déplacement doit appartenir à l'espace des champs cinématiques admissibles  $\mathcal{U}^E$  défini par l'ensemble des champs vérifiant :

$$\forall (M, T) \in \partial\Omega^E \times [0, T], \quad \underline{U}^E(M, t) = \underline{W}^E(M, t) \quad (3.1)$$

L'espace  $\mathcal{U}_0^E$  des champs admissibles à 0 associé est celui pour lequel les déplacements aux bords de la sous-structure  $\partial\Omega^E$  sont nuls. De plus, le champ de



**FIGURE 3.1** : Décomposition du domaine  $\Omega$

déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^E) = \underline{\underline{\varepsilon}}^E$  est défini classiquement comme la partie symétrique du gradient des déformations  $\underline{U}^E$  et est écrit comme la somme des déformations élastiques et des déformations anélastiques :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^E = \underline{\underline{\varepsilon}}_e^E + \underline{\underline{\varepsilon}}_p^E \quad (3.2)$$

② **Équilibre** : le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^E$  doit appartenir à l'espace des contraintes admissibles  $\mathcal{S}^E$  défini par l'ensemble des champs symétriques tels que :

$$\forall (\underline{U}^*, \underline{W}^*) \in \mathcal{W}_0^E, \quad \int_{\Omega^E} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) d\Omega = \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{W}^* d\Gamma \quad (3.3)$$

③ **Lois d'état** : dans le cas du pli composite, en notant  $\underline{d}$  le sous-ensemble des variables internes  $\mathbb{X}$  impliquées dans la loi d'état entre les contraintes et la déformation élastique, à savoir les variables d'endommagement, la loi d'état peut être écrite ainsi :

$$\underline{\underline{\sigma}}^E = \mathbf{K}(\underline{d}) \underline{\underline{\varepsilon}}_e^E \quad (3.4)$$

$$\mathbb{Y}^E = \mathcal{A} \left( \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{\sigma}}^E \\ \mathbb{X}^E \end{array} \right\} \right) \quad (3.5)$$

④ **Lois d'évolution** : les lois d'évolution doivent être vérifiées localement en chaque point de la sous-structure  $\Omega^E$  :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e^E \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p^E \\ \dot{\mathbb{X}}^E \end{array} \right\} = \mathcal{B} \left( \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{\sigma}}^E \\ \mathbb{Y}^E \end{array} \right\} \right) \quad (3.6)$$

## 1.2 Problème sur les interfaces

Considérons ici une interface  $\Gamma^{EE'}$  séparant la sous-structure  $\Omega^E$  de la sous-structure  $\Omega^{E'}$ , comme montrée sur la **Figure 3.2**. L'état de l'interface est défini par :

- les actions  $\underline{F}^E$  et  $\underline{F}^{E'}$ , par convention de l'interface sur les sous-structures  $\Omega^E$  et  $\Omega^{E'}$  ;
- les vitesses  $\underline{W}^E$  et  $\underline{W}^{E'}$ , par convention des sous-structures  $\Omega^E$  et  $\Omega^{E'}$  vues par l'interface ;
- les variables internes  $X^{EE'}$  du comportement de l'interface et  $Y^{EE'}$  les variables conjuguées.

Le problème à résoudre sur chaque interface consiste alors à trouver l'ensemble des inconnues  $(\underline{F}^E, \underline{W}^E, X^{EE'}, Y^{EE'})$  vérifiant les relations suivantes :

❶ **Équilibre** : les efforts à l'interface doivent respecter l'équilibre, à savoir :

$$\forall (M, t) \in \Gamma^{EE'} \times [0, T], \quad \underline{F}^E(M, t) + \underline{F}^{E'}(M, t) = \underline{0} \quad (3.7)$$

❷ **Comportement** : le comportement de chaque interface est décrit sous la forme d'une loi d'évolution éventuellement non-linéaire entre les forces, le saut de vitesse  $\underline{W}^{EE'} = \underline{W}^{E'} - \underline{W}^E$  et les variables internes :

$$\forall (M, t) \in \Gamma^{EE'} \times [0, T], \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{F}^E(M, t) \\ \underline{Y}^{EE'}(M, t) \end{array} \right\} = \mathcal{R} \left( \left\{ \begin{array}{l} \underline{W}^{EE'}(M, t) \\ \underline{X}^{EE'}(M, t) \end{array} \right\} \right) \quad (3.8)$$

Le comportement d'une interface peut aller du plus simple (interface parfaite) au plus complexe. Un aperçu de plusieurs lois d'évolution possibles, ainsi que leur résolution, est donné partie 3.6 de ce chapitre.

## 2 Introduction d'une échelle macroscopique

La méthode LATIN, telle que présentée dans [Ladevèze, 1999], est utilisée pour la résolution du problème sous-structuré. Cependant, elle souffre d'un manque d'extensibilité notable et voit son taux de convergence nettement dégradé dans le cas d'une augmentation du nombre de sous-structures. En effet, une itération de la méthode ne permet de propager l'information que d'une sous-structure à ses voisines immédiates. C'est pourquoi [Ladevèze *et al.*, 2000] proposent la définition d'un problème macroscopique capable de transmettre, sur la structure entière et en une seule itération, une partie de l'information.

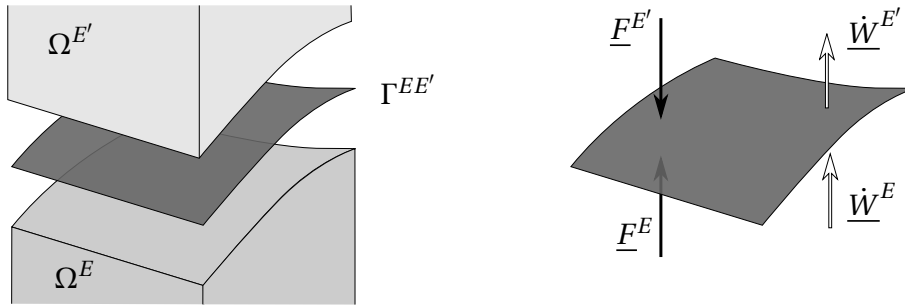


FIGURE 3.2 : Définition d'une interface et convention d'écriture des inconnues

## 2.1 Séparation des échelles

La méthode multiéchelle repose sur une séparation des échelles au niveau des inconnues aux interfaces. Les champs cinématiques et statiques sont décomposés en une partie microscopique et une macroscopique, notées respectivement  $\square^m$  et  $\square^M$ .

$$\forall (M, t) \in \Gamma^{EE'} \times [0, T], \quad \begin{cases} \underline{F}(M, t) = \underline{F}^M(M, t) + \underline{F}^m(M, t) \\ \underline{W}(M, t) = \underline{W}^M(M, t) + \underline{W}^m(M, t) \end{cases} \quad (3.9)$$

Les parties macroscopiques sont définies dans un espace de recherche prédéterminé, les parties microscopiques étant donc leurs compléments. Le découplage entre les parties microscopique et macroscopique est réalisé au sens des travaux d'interface : le travail de la partie microscopique (respectivement macroscopique) des efforts et des déplacements macroscopiques (respectivement microscopiques) des interfaces est nul. L'écriture mathématique de cette relation est :

$$\forall t \in [0, T], \quad \int_{\Gamma^{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} d\Gamma = \int_{\Gamma^{EE'}} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^M d\Gamma + \int_{\Gamma^{EE'}} \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m d\Gamma \quad (3.10)$$

**Remarque 3.1 :** Cette relation s'interprète comme une condition d'orthogonalité au sens du produit scalaire  $\mathcal{L}^E(\Gamma^{EE'})$  entre les parties macroscopiques et microscopiques. Le choix d'une discrétisation spatiale commune pour décrire les parties macroscopiques  $\underline{F}^M$  et  $\underline{W}^M$  est généralement fait pour simplifier le calcul du produit scalaire.

## 2.2 Choix des quantités macroscopiques

### 2.2.1 Définition du projecteur macroscopique

Les parties macroscopiques des inconnues sont définies à partir du projecteur  $\Pi^M$  défini pour chaque interface  $\Gamma^{EE'}$ . Son expression est obtenue *via* l'introduction d'une base orthonormée  $\mathcal{B}^M = (\underline{\mathbf{e}}_1^M, \dots, \underline{\mathbf{e}}_{N_M}^M)$ , dite base macroscopique.

$$\begin{aligned} \underline{F}^M &= \Pi^M(\underline{F}) = \sum_{i=1}^{N_M} (\underline{\mathbf{e}}_i^M, \underline{F}) \underline{\mathbf{e}}_i^M \\ \underline{W}^M &= \Pi^M(\underline{W}) = \sum_{i=1}^{N_M} (\underline{\mathbf{e}}_i^M, \underline{W}) \underline{\mathbf{e}}_i^M \end{aligned}$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire de  $\mathcal{L}^E(\Gamma^{EE'})$ . Le cas des interfaces de bord n'est généralement pas particularisé : le même type d'opérateur est introduit et permet de définir un projecteur macroscopique spécifiques aux bords.

## 2.2.2 Choix de la base macroscopique

Le choix de la base macroscopique repose sur les deux idées suivantes :

- la dimension de l'espace macroscopique doit rester suffisamment faible. En effet, la taille du problème macroscopique, défini par la suite et découlant de l'admissibilité des champs macroscopiques aux interfaces, dépend directement du nombre d'interfaces de l'ensemble du problème et de la taille de la base macroscopique  $\mathcal{B}^M$  ;
- les quantités macroscopiques des champs d'interface sont transmises systématiquement pour chaque itération LATIN à l'ensemble des interfaces. Elles doivent donc dans l'idéal contenir une information à grande longueur de variation.

C'est pourquoi la définition de la base macroscopique linéaire classiquement utilisée, proposée par [Ladevèze *et al.*, 2000], comprend les résultantes et les moments de l'interface  $\Gamma^{EE'}$ , que l'on peut éventuellement enrichir avec des fonctions polynomiales. Sa construction a été généralisée à des interfaces quelconques dans le cadre de la résolution de problèmes tridimensionnels dans [Violeau, 2007] et est reprise dans ses grandes lignes ici.

La généralisation de la définition de la base macroscopique repose sur une signification mécanique forte, en projetant les actions mécaniques et les déplacements sur la base principale d'inertie de l'interface. Ainsi, la base macroscopique  $\mathcal{B}^M$  d'une interface  $\Gamma^{EE'}$  est définie dans le repère lié aux vecteurs propres  $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$  de la matrice d'inertie de l'interface définie par :

$$\mathbf{I}^{EE'} = \int_{M \in \Gamma^{EE'}} \underline{\mathbf{G}}^{EE'} M \otimes \underline{\mathbf{G}}^{EE'} M d\Gamma$$

avec  $\underline{\mathbf{G}}^{EE'}$  le centre de gravité de l'interface  $\Gamma^{EE'}$ .

Les premiers vecteurs de  $\mathcal{B}^M$  sont généralement les résultantes des efforts d'interface ainsi que les translations des déplacements d'interface, définis sur :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_1^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \underline{\mathbf{e}}_2^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \underline{\mathbf{v}}_2 \\ \underline{\mathbf{e}}_3^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \underline{\mathbf{v}}_3 \end{aligned}$$

Les rotations et moments sont eux aussi classiquement extraits des champs d'interface et s'écrivent sur :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{e}}_4^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \left( \underline{\mathbf{v}}_1 \wedge \underline{G}^{EE'} M \right) \\ \underline{\mathbf{e}}_5^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \left( \underline{\mathbf{v}}_2 \wedge \underline{G}^{EE'} M \right) \\ \underline{\mathbf{e}}_6^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \left( \underline{\mathbf{v}}_3 \wedge \underline{G}^{EE'} M \right)\end{aligned}$$

De part leur définition et leur construction, ces six vecteurs respectent intrinsèquement l'orthogonalité au sens de  $\mathcal{L}^E$ . La définition de la base macroscopique linéaire part de cette première base, laquelle est enrichie en considérant l'interface comme un milieu déformable. Les modes d'extension et de cisaillement de l'interface sont alors extraits pour être inclus dans la base macroscopique :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{e}}_7^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \left( \underline{\mathbf{v}}_1 \cdot \underline{G}^{EE'} M \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \underline{\mathbf{e}}_8^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \left( \underline{\mathbf{v}}_2 \cdot \underline{G}^{EE'} M \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 \\ \underline{\mathbf{e}}_9^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \left( \underline{\mathbf{v}}_3 \cdot \underline{G}^{EE'} M \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_3 \\ \underline{\mathbf{e}}_{10}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \left( \left( \underline{\mathbf{v}}_1 \cdot \underline{G}^{EE'} M \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 + \left( \underline{\mathbf{v}}_2 \cdot \underline{G}^{EE'} M \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 \right) \\ \underline{\mathbf{e}}_{11}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \left( \left( \underline{\mathbf{v}}_1 \cdot \underline{G}^{EE'} M \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_3 + \left( \underline{\mathbf{v}}_3 \cdot \underline{G}^{EE'} M \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 \right) \\ \underline{\mathbf{e}}_{12}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma^{EE'})}} \left( \left( \underline{\mathbf{v}}_2 \cdot \underline{G}^{EE'} M \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_3 + \left( \underline{\mathbf{v}}_3 \cdot \underline{G}^{EE'} M \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 \right)\end{aligned}$$

La description de la base macroscopique sur une interface cylindrique est illustrée par les **Tableau 3.1** et **Tableau 3.2**.

**Remarque 3.2 :** Ces six derniers vecteurs ne sont pas orthogonaux entre eux, ni même par rapport aux six premiers. C'est pourquoi une procédure classique d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est nécessaire pour finir la définition de la base macroscopique linéaire.

**Remarque 3.3 :** Dans le cas d'une interface plane, le produit scalaire de  $\underline{G}^{EE'} M$  par rapport à la normale à l'interface est nul. Ainsi, des six fonctions correspondant à l'extension et au cisaillement, seules 3 sont non nulles.



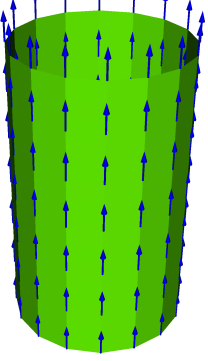
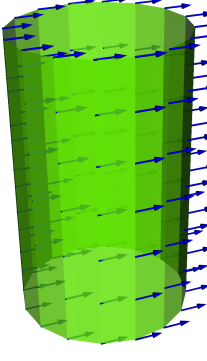
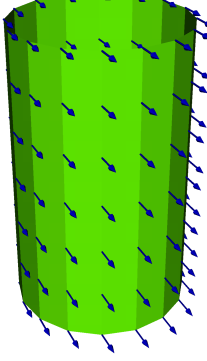
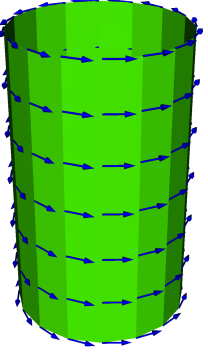
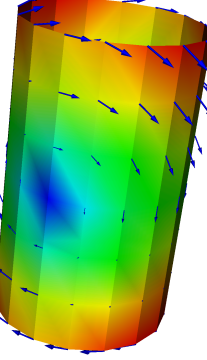
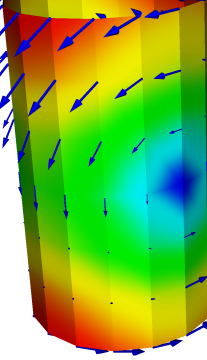
	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
Translations			
	$\underline{\mathbf{e}}_1^M$	$\underline{\mathbf{e}}_2^M$	$\underline{\mathbf{e}}_3^M$
Rotations			
	$\underline{\mathbf{e}}_4^M$	$\underline{\mathbf{e}}_5^M$	$\underline{\mathbf{e}}_6^M$

TABLE 3.1 : Base macroscopique constante d'une interface cylindrique d'axe  $\vec{x}$

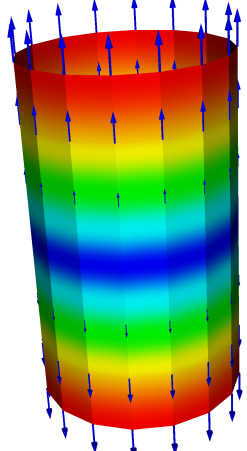
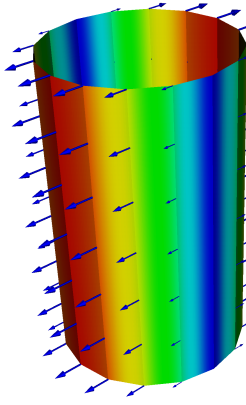
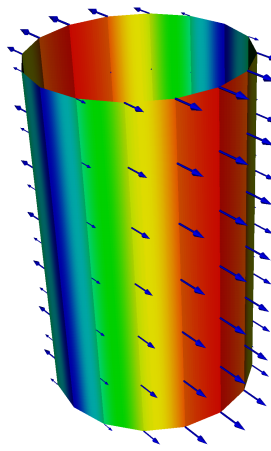
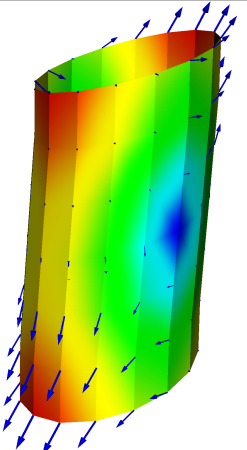
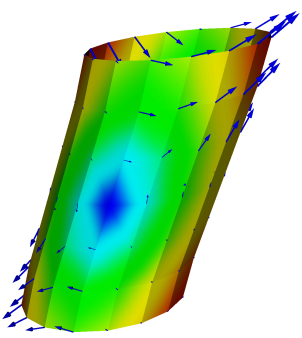
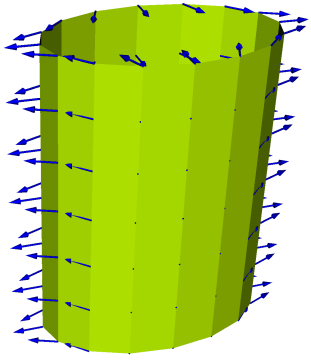
	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
Extensions	 $\underline{\mathbf{e}}_7^M$	 $\underline{\mathbf{e}}_8^M$	 $\underline{\mathbf{e}}_9^M$
Cisaillements	 $\underline{\mathbf{e}}_{10}^M$	 $\underline{\mathbf{e}}_{11}^M$	 $\underline{\mathbf{e}}_{12}^M$

TABLE 3.2 : Base macroscopique linéaire d'une interface cylindrique d'axe  $\vec{x}$

**Remarque 3.4 :** Un enrichissement de la base macroscopique pour en extraire les champs quadratiques, voire cubiques, a déjà été étudié [Guidault *et al.*, 2006]. Si la convergence s'en voit améliorée, le gain est trop faible dans le cas d'un assemblage pour compenser l'explosion de la taille du problème macroscopique. D'autres études ont été menées dans le cas d'une propagation de fissure au sein d'une structure [Guidault *et al.*, 2008]. Dans ce cas, il est tout à fait judicieux d'enrichir la base macroscopique de fonctions discontinues pour représenter la fissure au sein d'une interface.

### 2.3 Admissibilité macroscopique des champs d'interface

Le dernier point nécessaire à la définition du problème grossier de l'approche multi-échelle (dite micro/macro) est la définition des conditions d'admissibilité des champs macroscopiques d'interface qui doivent être vérifiées.

Les auteurs de [Ladevèze et Nouy, 2003] proposent de n'imposer que la vérification de l'équilibre des efforts macroscopiques de chaque interface intérieure, ainsi qu'aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \forall M \in \partial_2 \Omega, \quad \underline{F}^M(M) &= \underline{F}_d(M) \\ \forall M \in \Gamma^{EE'}, \quad \underline{F}^{M,E}(M) + \underline{F}^{M,E'}(M) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Remarque 3.5 :** Plutôt que d'imposer la vérification de l'équilibre des efforts macroscopiques, il peut sembler plus naturel, dans le cas d'une méthode de décomposition de domaine mixte, d'imposer le comportement de l'interface aux inconnues macroscopiques. Dans le cas de comportements d'interfaces simples, notamment parfaites ou élastiques, c'est d'ailleurs tout à fait judicieux puisque le comportement s'étend simplement aux variables macroscopiques. Cependant, dans le cas d'un comportement plus complexe, typiquement de contact ou de frottement, l'écriture en variables macroscopiques est difficile, voire impossible. De plus, la relation 3.11 présente le double avantage d'être linéaire et indépendante du comportement de l'interface, venant grandement simplifier sa résolution.

## 3 Algorithme itératif de résolution

### 3.1 Principe

L'état du problème sous-structuré de référence est défini en tout point de l'espace  $\Omega$  et du temps  $[0, T]$  par l'ensemble des variables noté  $\mathbf{s}$  tel que :

$$\mathbf{s} = \sum_{\Omega^E} \left( \underline{\dot{\varepsilon}}_{\underline{p}}, \underline{\dot{\chi}}, \underline{\sigma}, \underline{\Upsilon} \right)^E \cup \sum_{\Gamma^{EE'}} \left( \underline{F}^E, \underline{W}^E, X^{EE'}, Y^{EE'} \right)$$

Finalement, le problème sous-structuré s'écrit :

Trouver  $\mathbf{s}_{\text{ref}}$  définie sur  $\Omega \times [0, T]$  qui vérifie :

- l’admissibilité cinématique de chaque sous-structure définie par l’Équation (3.1) ;
- l’admissibilité statique de chaque sous-structure définie par l’Équation (3.3) ;
- la relation de comportement de chaque sous-structure définie par les Équations (3.4, 3.5) ;
- les lois d’évolution de chaque sous-structure définies par l’Équation (3.6) ;
- le comportement de chaque interface défini par l’Équation (3.8) ;
- l’admissibilité des efforts macroscopiques définie par l’Équation (3.11).

L’approche présentée dans le cadre de ces travaux s’appuie sur la méthode LATIN développée dans [Ladevèze, 1999], solveur itératif général pour des problèmes non-linéaires d’évolution. Elle repose sur trois principes fondamentaux.

Le premier principe de la méthode consiste à définir deux groupes d’équations, en séparant les équations linéaires (éventuellement globales) des équations locales (éventuellement non-linéaires). Les espaces des solutions associées à chacun de ces groupes d’équations sont notés respectivement  $\mathcal{A}_d$  et  $\Gamma$ . Dans notre cas, nous effectuons la séparation suivante, laquelle sera justifiée par après dans la partie 3.2 :

- *Équations linéaires* : l’admissibilité des sous-structures (3.1, 3.3) et la relation de comportement des sous-structures (3.4, 3.5) ;
- *Équations locales* : les lois d’évolution des sous-structures (3.6), ainsi que le comportement (3.8) et l’admissibilité macroscopique (3.11) des interfaces.

Le deuxième principe de la méthode consiste à utiliser un schéma itératif à deux étapes pour accéder à la solution  $\mathbf{s}_{\text{ref}}$  vérifiant naturellement  $\mathbf{s}_{\text{ref}} = \mathcal{A}_d \cup \Gamma$ . Une itération de la méthode est constituée de deux étapes, appelées « locale » et « linéaire », venant construire à chaque itération une approximation de la solution définie en tout point de l’espace et sur tout l’intervalle de temps. Une interprétation géométrique de la méthode est donnée **Figure 3.3**, où l’on représente une itération LATIN dans l’espace des solutions, l’abscisse représentant les variables primales, l’ordonnée les duales. Elle illustre ainsi la nécessité d’introduire des directions de recherche, notées  $E^-$  et  $E^+$ , pour passer d’un espace à l’autre.

Le dernier principe repose sur une représentation des inconnues adaptée à l’étude. Si cet aspect n’est pas appliqué dans le cadre de la méthode utilisée dans ces travaux, il a fait l’objet de nombreux travaux, notamment ces dernières années avec l’utilisation de la *Proper Generalized Decomposition* [Ladevèze et Nouy, 2003, Cognard et al., 1999]. Une variante, plus robuste et performante, a d’ailleurs été étudiée et appliquée dans le cas de matériaux visco-élastiques [Ladevèze et al., 2010] et viscoplastiques [Relun et al., 2011a].

### 3.2 Choix des directions de recherche

La séparation des équations en deux groupes définit autant de problèmes à résoudre de façon itérative. Toutefois, le problème associé à la définition de  $\mathcal{A}_d$  conduit à un problème mal posé, alors que celui associé à  $\Gamma$  conduit à un problème à solutions multiples. L'ajout de nouvelles équations dans chaque groupe, dites directions de recherche, est donc nécessaire afin d'avoir à résoudre, à chaque étape, un problème bien posé mécaniquement parlant.

On utilisera la convention suivante :  $\mathbf{s}_n$  et  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$  désignent la solution  $\mathbf{s}$  après résolution respectivement de l'étape linéaire  $n$  et de l'étape locale  $n+1/2$ . D'une façon générale, les directions de recherche de la méthode s'écrivent alors comme une relation linéaire entre les inconnues du problème linéaire et celles du problème local, que l'on sépare généralement en les écrivant sur les interfaces et sur les sous-structures :

$$\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n \in E^+ \iff \begin{cases} \widehat{F}_{n+1/2}^E - F_n^E = k_0 (\widehat{W}_{n+1/2}^E - W_n^E) \\ \left\{ \begin{array}{c} \widehat{\sigma}_{n+1/2}^E - \sigma_n^E \\ \widehat{Y}_{n+1/2} - Y_n \end{array} \right\} = \mathbf{H}^+ \left\{ \begin{array}{c} \widehat{\dot{e}}_{p,n+1/2}^E - \dot{e}_{p,n}^E \\ \widehat{\dot{\chi}}_{n+1/2}^E - \dot{\chi}_n^E \end{array} \right\} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in E^- \iff \begin{cases} F_{n+1}^E - \widehat{F}_{n+1/2}^E = -k_0 (W_{n+1}^E - \widehat{W}_{n+1/2}^E) \\ \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{n+1}^E - \widehat{\sigma}_{n+1/2}^E \\ Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1/2} \end{array} \right\} = \mathbf{H}^- \left\{ \begin{array}{c} \dot{e}_{p,n+1}^E - \widehat{\dot{e}}_{p,n+1/2}^E \\ \dot{\chi}_{n+1}^E - \widehat{\dot{\chi}}_{n+1/2}^E \end{array} \right\} \end{cases} \quad (3.13)$$

$\mathbf{H}^-$  et  $\mathbf{H}^+$  sont appelés paramètres de direction de recherche sur les sous-structures et sont des opérateurs symétriques définis positifs. Le paramètre de direction de recherche aux interfaces  $k_0$  est un scalaire. Ces paramètres sont relatifs à la méthode et n'influent donc pas sur la solution trouvée par l'algorithme, mais uniquement sur son taux de convergence.

#### 3.2.1 Choix de la direction de recherche sur les interfaces

L'interprétation physique du paramètre de direction de recherche  $k_0$  est relativement naturelle telle que définie par (3.13, 3.12). Elle peut en effet être vue comme une rigidité reliant le déplacement du bord de la sous-structure considérée à celui de l'interface associée. Par conséquent, la valeur idéale, mécaniquement parlant, de  $k_0$  correspond à la rigidité de toute la structure, privée de la sous-structure considérée.

Bien évidemment, cette valeur optimale ne peut pas être obtenue simplement et le choix de la valeur de cette direction de recherche au niveau des interfaces reste un problème relativement ouvert. Dans le cas de sous-structures linéaires, le paramètre  $k_0$  doit s'approcher au mieux de la rigidité du complémentaire de  $\Omega^E$  condensé sur l'interface concernée, ce que l'on appelle usuellement complément de Schur dans un problème discrétisé. Bien évidemment, le calcul exact de ce terme serait trop coûteux car dépendant à la fois de la géométrie et des conditions aux limites. De plus, la non-

linéarité du comportement complique cette interprétation puisqu'il n'est alors plus possible de représenter la réponse du complémentaire par une rigidité linéaire  $k_0$ .

Une première approche, utilisée ici et présentée dans [Ladevèze *et al.*, 2006], est de considérer que la méthode LATIN multiéchelle ne propage les informations à grandes longueurs d'onde (résultantes et moments) que par l'intermédiaire du problème macroscopique. À l'opposé, les directions de recherche n'ont qu'un effet sur les quantités locales, autour de l'interface, en vertu du principe de Saint-Venant. Le principal avantage de cette approche est que l'opérateur de direction de recherche s'écrit donc comme un simple scalaire portant aussi bien sur les champs microscopiques que macroscopiques.

Dans le cas des problèmes non-linéaires, le principe de Saint-Venant ne s'applique plus et limite donc l'efficacité de la première approche. Une toute autre approche, proposée dans [Ladevèze *et al.*, 2001], effectue une séparation entre les parties microscopiques  $k_0^m$  et macroscopiques  $k_0^M$  au niveau de la direction de recherche, de la même façon que pour les inconnues. Ainsi, le paramètre  $k_0^m$  est supposée avoir une influence très locale et, par conséquent, est traditionnellement identique à celui de la première approche. Pour la partie macroscopique, il s'agit en revanche d'avoir une approximation pertinente du comportement de l'interface, afin d'avoir un problème macroscopique avec un fort contenu mécanique.

C'est ce dernier point qui pose généralement problème. En effet, dans le cas de comportement d'interface simple et linéaire, la rigidité équivalente  $k_0^M$  est assez naturelle : infinie dans le cas d'une interface parfaite ou bien la rigidité du comportement dans le cas d'une interface élastique. Cependant, le comportement des interfaces est généralement complexe et non-linéaire (contact, frottement, interfaces cohésives) et ne peut donc pas être assimilé à une simple rigidité. De la même façon, il n'est pas vraiment envisageable d'avoir un paramètre  $k_0^M$  qui évolue au cours des itérations, puisque son changement impliquerait le réassemblage de l'opérateur de rigidité intervenant à l'échelle macroscopique.

### 3.2.2 Choix de la direction de recherche dans les sous-structures

Tout d'abord, notons que la définition de la direction de recherche sur les sous-structures n'est pertinente que dans le cas de sous-structures avec un comportement non-linéaire. En effet, si ce dernier est élastique et linéaire, le problème sur les sous-structures est résolu entièrement lors de l'étape linéaire et ne dépend que des grandeurs aux interfaces. Dans ce cas-là, l'état de la sous-structure  $\mathbf{s}^E$  n'est d'ailleurs défini qu'à partir des grandeurs aux interfaces.

Le modèle de comportement choisi pour ces travaux est le mésomodèle d'endommagement, lequel introduit des variables d'endommagement et de plasticité, qui sont traitées séparément grâce à l'introduction de variables effectives. Il semble donc peu naturel d'utiliser une direction de recherche qui réintroduirait artificiellement ce couplage. Nous pouvons donc traiter la question de la direction de recherche successi-

vement dans le cas des variables d'endommagement et dans le cas des variables de plasticité.

Le principal problème introduit par les variables d'endommagement est la non-linéarité de la loi d'état de l'équation 3.4. Or, le formalisme habituel de la méthode LATIN dans le cas du calcul d'assemblages est de traiter le comportement des sous-structures lors de l'étape linéaire, en considérant que toutes les non-linéarités sont localisées au niveau des interfaces, traitées lors de l'étape locale. Cela permet d'associer le problème sur les sous-structures à l'étape linéaire et celui sur les interfaces à l'étape locale. Cette séparation a par ailleurs de nombreux avantages au niveau de l'approche LATIN multiparamétrique, discutés lors du **Chapitre 4**, et permet de surcroît de limiter grandement le coût de l'étape locale.

Pour retrouver cette séparation dans le cas de sous-structures non-linéaires, le choix du paramètre de la direction de recherche  $E^-$  pour les variables d'endommagement est :

$$(\mathbf{H}^-)^{-1} = 0$$

ce qui permet d'écrire la direction de recherche suivante

$$\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in E^- \implies \left\{ \begin{array}{l} d_{n+1} - \widehat{d}_{n+1/2} \\ d'_{n+1} - \widehat{d}'_{n+1/2} \\ d_{E,n+1} - \widehat{d}_{E,n+1/2} \end{array} \right\} = \{0\} \quad (3.14)$$

Ce choix permet alors de connaître la valeur de l'endommagement lors de l'étape linéaire, puisque celle-ci est strictement égale à celle calculée lors de l'étape locale. Ainsi, la loi d'état reliant l'état des contraintes aux déformations élastiques devient linéaire puisque l'opérateur de rigidité est connu.

Par souci de simplicité, la direction de recherche conjuguée est dans le même esprit : les forces thermodynamiques lors de l'étape locale sont strictement égales à celles calculées lors de l'étape linéaire.

Concernant la direction de recherche sur les variables de plasticité, deux choix peuvent être faits :

- la solution la plus simple est de choisir une direction de recherche sensiblement identique à celle utilisée pour l'endommagement :

$$(\mathbf{H}^-)^{-1} = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}}_{p,n+1}^E \\ \underline{\underline{p}}_{n+1}^E \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{p,n+1/2}^E \\ \widehat{\underline{\underline{p}}}_{n+1/2}^E \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

Cela permet de connaître la valeur de la déformation plastique en tout point et en tout temps lors de l'étape linéaire, ce qui vient largement faciliter son expression. Cependant, la convergence de l'algorithme n'est pas forcément optimale puisqu'une telle solution est similaire à une technique de point fixe.

- la solution la plus performante *a priori* est de donner un sens « mécanique » à la direction de recherche en la prenant égale à la matrice tangente. Cependant, cette méthode introduit un surcoût à chaque itération non négligeable. En effet, la matrice tangente devra être recalculée à chaque itération de la méthode, impliquant donc d'avoir à assembler et décomposer à nouveau un nouvel opérateur de raideur.

Le surcoût numérique dû au ré-assemblage de l'opérateur de rigidité est toutefois à relativiser. Dans le cas spécifique où le comportement de la sous-structure est celui d'un pli du mésomodèle, la reconstruction de l'opérateur sera très probablement nécessaire du fait de la variation de l'endommagement. Cependant, l'idée est aussi de pouvoir calculer efficacement des comportements plastiques sans endommagement (typiquement celui d'un alliage métallique utilisé dans les visseries). Aussi, dans l'optique d'avoir une méthode efficace quel que soit le comportement choisi, ainsi que dans un souci de simplicité, nous avons retenu le premier choix.

### 3.3 Écriture du problème à l'étape linéaire

Le problème à l'étape linéaire consiste à résoudre l'ensemble des équations  $\mathcal{A}_d$  linéaires, éventuellement globales, ainsi que la direction de recherche  $E^-$ .

Suite aux choix précédents, résoudre le problème linéaire revient, connaissant  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ , à trouver  $\mathbf{s}_{n+1}$  vérifiant :

- l'admissibilité cinématique de chaque sous-structure

$$\forall (M, T) \in \partial\Omega^E \times [0, T], \quad \underline{U}_{n+1}^E(M, t) = \underline{W}_{n+1}^E(M, t) \quad (3.16)$$

- l'équilibre de chaque sous-structure

$$\forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}^E, \quad \int_{\Omega^E} \underline{\sigma}_{n+1}^E : \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*) d\Omega = \int_{\Omega^E} \underline{f}_{-d} \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega^E} \underline{F}_{n+1}^E \underline{U}^* d\Gamma \quad (3.17)$$

- la loi d'état de chaque sous-structure, en notant  $\underline{d} = \{d, d', d_F\}$

$$\underline{\sigma}_{n+1}^E = \mathbf{K}(\underline{d}_{n+1}) \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}_{n+1}^E & -\underline{\varepsilon}_{p,n+1}^E \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

- l'admissibilité des efforts macroscopiques des interfaces

$$\underline{F}_{n+1}^{M,E} \in \mathcal{F}^M \iff \begin{cases} \forall M \in \partial_2\Omega, & \underline{F}_{n+1}^{M,E}(M) + \underline{F}_d(M) = \underline{0} \\ \forall M \in \Gamma^{EE'}, & \underline{F}_{n+1}^{M,E}(M) + \underline{F}_{n+1}^{M,E'}(M) = \underline{0} \end{cases} \quad (3.19)$$

- la direction de recherche modifiée sur les interfaces

$$\underline{F}_{n+1}^E - \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E = -k_0 \left( \underline{W}_{n+1}^E - \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E \right) \quad (3.20)$$

- la direction de recherche sur les sous-structures

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\varepsilon}}_{p,n+1}^E - \hat{\dot{\underline{\varepsilon}}}_{p,n+1/2}^E \\ \dot{\underline{\chi}}_{n+1}^E - \hat{\dot{\underline{\chi}}}_{n+1/2}^E \end{array} \right\} = \{0\} \quad (3.21)$$

La vérification de l'admissibilité des efforts macroscopiques est incompatible avec l'écriture de la direction de recherche. C'est pourquoi [Ladevèze et Nouy, 2003] propose de vérifier cette direction de recherche au mieux sous la contrainte d'admissibi-



lité des efforts macroscopiques. Cela revient à écrire la direction de recherche sous la formulation faible suivante :

$$\forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}^M, \quad \sum_{\partial\Omega^E} \int_{\partial\Omega^E} \left[ \underline{F}_{n+1}^E - \widehat{\underline{F}}_{n+1/2}^E + k_0 \left( \dot{\underline{W}}_{n+1}^E - \widehat{\dot{\underline{W}}}_{n+1/2}^E \right) \right] \cdot \underline{F}^{M*} d\Gamma = 0 \quad (3.22)$$

La fonction test appartient à l'ensemble  $\mathcal{F}^M$ , ce qui couple cette équation sur toutes les interfaces de la structure. Pour rendre cette équation locale, [Ladevèze et Nouy, 2002] propose d'assurer cette condition *via* l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange.

En définissant l'espace  $\mathcal{F}_0^M$  comme l'espace des déplacements macroscopiques continus aux interfaces et nuls sur  $\partial_1\Omega$ , l'admissibilité des efforts macroscopiques et la direction de recherche aux interfaces peut être écrite sous la forme de deux nouvelles conditions :

$$\begin{aligned} \forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{S}^E, \quad \sum_{\partial\Omega^E} \int_{\partial\Omega^E} \left[ \underline{F}_{n+1}^E - \widehat{\underline{F}}_{n+1/2}^E + k_0 \left( \dot{\underline{W}}_{n+1}^E - \widehat{\dot{\underline{W}}}_{n+1/2}^E \right) \right] \cdot \underline{F}^{M*} d\Gamma \\ = \sum_{\partial\Omega^E} \int_{\partial\Omega^E} \widehat{\underline{W}}^M \cdot \underline{F}^{M*} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\forall \widehat{\underline{W}}^{M*} \in \mathcal{F}_0^M, \quad \sum_{\partial\Omega^E} \int_{\partial\Omega^E} \widehat{\underline{W}}^{M*} \cdot \underline{F}_{n+1}^{M,E} d\Gamma = \sum_{\partial_2\Omega} \int_{\partial\Omega^E} \widehat{\underline{W}}^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (3.24)$$

L'introduction du multiplicateur de Lagrange  $\widehat{\underline{W}}^M$  permet de considérer l'équation (3.23) sous sa formulation forte. Les conditions (3.23) et (3.24) conduisent finalement à la définition de deux types de problèmes : le problème dit « micro » défini pour chaque sous-structure indépendamment du reste de l'assemblage et le problème dit « macro » portant sur l'ensemble des interfaces de la structure.

### 3.3.1 Définition du problème micro

Le problème micro est un problème linéaire qui consiste en un ensemble de problèmes définis indépendamment sur chaque sous-structure. La solution du problème micro doit vérifier l'admissibilité cinématique et statique des sous-structures, leur loi d'état ainsi que les directions de recherche. Résoudre les conditions d'admissibilité ainsi que la loi d'état consiste à trouver  $\underline{s}^E$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}^E, \quad \int_{\Omega^E} \mathbf{K}(\underline{d}_{n+1}) \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^E : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) d\Omega = \\ \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \underline{U}^* d\Omega + \int_{\Omega^E} \mathbf{K}(\underline{d}_{n+1}) \underline{\underline{\varepsilon}}_{p,n+1}^E : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega^E} \underline{F}_{n+1}^E \underline{U}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'intégration des directions de recherche conduit à l'écriture du problème micro suivant :

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}^E, \quad & \int_{\Omega^E} \mathbf{K}(\hat{\underline{d}}_{n+1/2}) \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^E : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega^E} k_0 \dot{\underline{W}}_{n+1}^E \underline{U}^* d\Gamma \\
 & = \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \underline{U}^* d\Omega + \int_{\Omega^E} \mathbf{K}(\hat{\underline{d}}_{n+1/2}) \underline{\underline{\varepsilon}}_{p,n+1/2}^E : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) d\Omega \\
 & + \int_{\partial\Omega^E} \left( \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E + k_0 \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E \right) \underline{U}^* d\Gamma + \int_{\partial\Omega^E} \dot{\underline{W}}^M \underline{U}^* d\Gamma \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

La solution de ce problème ne dépend, finalement, que de  $\hat{\underline{s}}_{n+1/2}$  et du multiplicateur  $\dot{\underline{W}}^M$  introduit pour la prise en compte de l'admissibilité macroscopique. Le problème micro étant linéaire, sa solution peut être vue comme la somme d'un terme dépendant de  $\hat{\underline{s}}_{n+1/2}$ , que l'on peut calculer explicitement et que l'on notera  $\tilde{\underline{s}}$ , et d'un dépendant de  $\dot{\underline{W}}^M$  :

$$\underline{\mathbf{s}}_{n+1} = \mathbb{L}^E(\dot{\underline{W}}^M) + \tilde{\underline{\mathbf{s}}}$$

où  $\mathbb{L}^E$  est un opérateur linéaire. Cette relation peut être exprimée en particulier dans le cas des efforts macroscopiques :

$$\underline{F}_{n+1}^{M,E} = \mathbb{L}_F^E(\dot{\underline{W}}^M) + \tilde{\underline{F}}^E \quad (3.27)$$

L'opérateur  $\mathbb{L}^E$  (ou  $\mathbb{L}_F^E$ ) peut être interprété comme un opérateur de comportement homogénéisé de la sous-structure  $\Omega^E$ . Il est calculé de façon explicite en résolvant un ensemble de problèmes micros (3.26) avec les termes issus de l'étape locale nuls et le multiplicateur de Lagrange  $\dot{\underline{W}}^M$  prenant successivement les valeurs de chaque vecteur de la base  $\mathcal{B}^M$ .

**Remarque 3.6 :** Il est important de noter que le problème micro n'est linéaire que grâce au choix de la direction de recherche (3.15), en particulier sur l'endommagement. Tout autre choix aurait fait des variables d'endommagement une nouvelle inconnue lors de l'étape linéaire : la loi d'état (3.18) n'est alors plus linéaire, ce qui vient remettre en question la séparation des équations.

La conséquence de cette nouvelle séparation des équations est que l'on donne un poids prépondérant à la valeur de la direction de recherche que l'on choisit puisque c'est elle qui fait le lien entre les grandeurs primales et duales. Par conséquent, il est souhaitable que le paramètre de direction de recherche reflète au mieux le comportement réel du matériau.

### 3.3.2 Définition du problème macro

La résolution des Équations (3.24, 3.27) revient à résoudre la relation suivante :

$$\forall \dot{\underline{W}}^M \in \mathcal{F}_0^M, \quad \sum_{\partial\Omega^E} \int_{\partial\Omega^E} \dot{\underline{W}}^{M*} \cdot \mathbb{L}_F^E(\dot{\underline{W}}^M) d\Gamma = \sum_{\partial_2\Omega} \int_{\partial\Omega^E} \dot{\underline{W}}^{M*} \cdot \left( \underline{F}_d - \tilde{\underline{F}}^E \right) d\Gamma \quad (3.28)$$

La résolution du problème macro consiste donc à résoudre un système créé par assemblage des opérateurs de comportement homogénéisé  $\mathbb{L}_F^E$ . La taille du problème est directement dépendante de la taille de la base macroscopique choisie, ainsi que du nombre d'interfaces. Si ce dernier vient à trop augmenter, il est alors nécessaire d'envisager une résolution par des méthodes plus performantes que l'approche directe. Par exemple, une nouvelle décomposition de domaine peut être appliquée sur le problème macroscopique afin de pouvoir le paralléliser aisément. Cela introduit l'ajout d'une troisième échelle « super macroscopique » proposée dans [Kerfriden *et al.*, 2009] et que ces travaux réutiliseront.

### 3.3.3 Résolution de l'étape linéaire

La détermination du second membre du problème macro nécessite la résolution d'un problème micro sur chaque sous-structure au préalable. En utilisant le principe de superposition, la solution du problème micro s'écrit alors comme la somme des deux problèmes suivants :

- le problème micro 1 : le multiplicateur de Lagrange  $\hat{W}^M$  est nul et permet donc l'assemblage du second terme du problème macro :

$$\begin{aligned} \forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}^E, \quad & \int_{\Omega^E} \mathbf{K}(\hat{d}_{n+1/2}) \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^E : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega^E} k_0 \hat{W}_{n+1}^E \underline{U}^* d\Gamma \\ & = \int_{\Omega^E} f_{-d} \underline{U}^* d\Omega + \int_{\Omega^E} \mathbf{K}(\hat{d}_{n+1/2}) \underline{\underline{\varepsilon}}_{p,n+1/2}^E : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega^E} \left( \hat{F}_{n+1/2}^E + k_0 \hat{W}_{n+1/2}^E \right) \underline{U}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.29)$$

- le problème micro 2 : après résolution du problème macroscopique, la connaissance de  $\hat{W}^M$  permet de calculer le reste du problème micro :

$$\begin{aligned} \forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}^E, \quad & \int_{\Omega^E} \mathbf{K}(\hat{d}_{n+1/2}) \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^E : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega^E} k_0 \hat{W}_{n+1}^E \underline{U}^* d\Gamma \\ & = \int_{\partial\Omega^E} \hat{W}^M \underline{U}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.30)$$

L'étape linéaire de la méthode LATIN multiéchelle consiste finalement à résoudre trois problèmes à chaque pas de temps et à chaque itération LATIN. Le premier est le problème micro 1 qui est défini pour chaque sous-structure de l'assemblage, indépendamment des autres sous-structures. Le deuxième est le problème macro, défini sur l'ensemble des interfaces de la structure et, enfin, le troisième est le problème micro 2, défini aussi sur chaque sous-structure.

La résolution de chacun de ces problèmes sera abordée lors du **Chapitre 5**.

## 3.4 Écriture du problème de l'étape locale

Le problème de l'étape locale consiste à résoudre l'ensemble des équations  $\Gamma$  locales, éventuellement non-linéaires, ainsi que la direction de recherche  $E^+$ . Résoudre

le problème linéaire revient, connaissant  $\mathbf{s}_n$ , à trouver  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$  vérifiant :

- les lois d'évolution de chaque sous-structure  $\Omega^E$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}_{p,n+1/2}^E \\ \hat{\underline{\underline{\chi}}}_{n+1/2}^E \end{array} \right\} = \mathcal{B} \left( \left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_{n+1/2}^E \\ \hat{\underline{\underline{\gamma}}}_{n+1/2}^E \end{array} \right\} \right) \quad (3.31)$$

- les directions de recherche sur les sous-structures

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_{n+1/2}^E - \underline{\underline{\sigma}}_n^E \\ \hat{\underline{\underline{\gamma}}}_{n+1/2}^E - \underline{\underline{\gamma}}_n^E \end{array} \right\} = \{0\} \quad (3.32)$$

- le comportement de chaque interface  $\Gamma^{EE'}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{\underline{F}}}_{n+1/2}^E \\ \hat{\underline{\underline{Y}}}_{n+1/2}^{EE'} \end{array} \right\} = \mathcal{R} \left( \left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{\underline{W}}}_{n+1/2}^{EE'} \\ \hat{\underline{\underline{X}}}_{n+1/2}^{EE'} \end{array} \right\} \right) \quad (3.33)$$

- les directions de recherche sur les interfaces

$$\hat{\underline{\underline{F}}}_{n+1/2}^E - \underline{\underline{F}}_n^E = k_0 \left( \hat{\underline{\underline{W}}}_{n+1/2}^E - \underline{\underline{W}}_n^E \right) \quad (3.34)$$

L'étape locale consiste donc à résoudre d'une part les Équations (3.31, 3.32) en tout point de chaque sous-structure  $\Omega^E$ , d'autre part les Équations (3.33, 3.34) en tout point de chaque interface.

### 3.5 Étape locale sur les sous-structures

Cette partie de l'étape locale n'a de sens que si le comportement de la sous-structure comprend la définition d'une loi d'évolution sur ses variables internes. Dans ce cas précis, l'expression desdites variables internes devient explicite du fait du choix de nos directions de recherche.

Afin d'alléger les notations, les quantités de l'étape locale seront notées  $\hat{\square}$  au lieu de  $\hat{\square}_{n+1/2}$ . De plus, puisque chaque quantité est exprimée pour chaque sous-structure  $E$ , la notation  $\square^E$  de chaque inconnue est supposée implicite.

#### 3.5.1 Calcul de l'état d'endommagement

De part le choix des directions de recherche, les lois d'évolution du mésomodèle (1.11, 1.12, 1.8) s'écrivent ainsi :

$$\hat{d}_F = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{Y}_{E,n} < Y_F^C \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\begin{cases} \hat{d} = \frac{1}{\tau_c} [1 - \exp(-a \langle \omega_n - \hat{d} \rangle_+)] & \text{si } \hat{d} < 1 \\ \hat{d} = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} \hat{d}' = \frac{1}{\tau_c} [1 - \exp(-a \langle \omega'_n - \hat{d}' \rangle_+)] & \text{si } \hat{d}' < 1 \\ \hat{d}' = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.37)$$

Dans le cas général, le calcul de l'état d'endommagement d'une sous-structure conduit à la résolution d'un problème non-linéaire à deux inconnues : l'endommagement et sa grandeur duale associée, la force thermodynamique d'endommagement (laquelle est comprise dans l'écriture de  $\omega_n$  et  $\omega'_n$ ). Le choix de la direction de recherche fait précédemment permet de définir explicitement  $\omega_n$  en fonction des forces thermodynamiques de l'étape linéaire,  $\omega'_n$  devenant à son tour explicite une fois le calcul de  $\hat{d}$  effectué :

$$\omega_n = \frac{\sqrt{\bar{Y}_n} - \sqrt{Y^0}}{\sqrt{Y^C} - \sqrt{Y^0}} \quad (3.38)$$

$$\omega'_n = b\hat{d} \quad (3.39)$$

### 3.5.2 Calcul des déformations plastiques

La valeur de la déformation plastique et de la déformation plastique cumulée lors de l'étape locale se fait à contrainte donnée, simplifiant grandement leurs expressions. L'endommagement sera calculé juste avant, afin de pouvoir exprimer les valeurs effectives des contraintes et des déformations plastiques. Dans le cas du méso-modèle, les lois d'évolution sont écrites Équation (1.14). L'intégration de la direction de recherche permet d'écrire :

$$\hat{p} = \mathcal{H}(f^n) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\underline{\underline{=}}_{\text{eq},n}} \cdot \frac{\hat{p}^{1-m}}{m \cdot k_p} \quad (3.40)$$

$$\frac{\hat{\epsilon}}{\underline{\underline{=}}_p} = \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{p}}{\underline{\underline{=}}_n} \quad (3.41)$$

où  $\mathcal{H}(x)$  est la fonction de Heaviside valant 0 si  $x$  est strictement négatif, 1 sinon.

La valeur de la fonction seuil  $f$  est elle aussi définie explicitement à partir de  $\mathbf{s}_n$  puisqu'elle ne dépend que des contraintes au point considéré (voir Équation (1.13)).

## 3.6 Étape locale sur les interfaces

Un gros atout des méthodes mixtes, et donc de la méthode LATIN, est de pouvoir prendre en compte naturellement des comportements d'interface complexes (contact, frottement, interfaces cohésives, etc.).

Dans cette partie, nous détaillerons les comportements d'interface utilisés dans le cas de calcul d'assemblage. Une fois de plus dans un souci de simplification de la notation, l'exposant  $\square^{EE'}$ , représentant le lien avec l'interface  $\Gamma^{EE'}$  considérée, sera omis. De plus, les grandeurs de l'étape locale seront notées  $\hat{\square}$  (au lieu de  $\hat{\square}_{n+1/2}$ ). Les grandeurs  $x$  issues de la sous-structure  $\Omega^{E'}$  seront notées  $x'$  et le saut de déplacement  $\hat{W}' - \hat{W}$  est noté  $[\hat{W}]$  ( $[\hat{W}]$  pour le saut en vitesse).

### 3.6.1 Interfaces parfaites

Le comportement parfait se traduit par l'absence de saut de déplacement et l'équilibre des efforts à l'interface :

$$\left[ \hat{W} \right] = \underline{0} \quad \text{et} \quad \hat{F} + \hat{F}' = \underline{0}$$

En additionnant les directions de recherche exprimées pour la sous-structure  $\Omega^E$  et  $\Omega^{E'}$ , et en supposant que la direction de recherche  $k_0$  est identique pour les deux sous-structures situées de part et d'autre de l'interface, nous obtenons l'expression :

$$\left( \hat{F} + \hat{F}' \right) - \left( \underline{F}_n + \underline{F}'_n \right) = k_0 \left( \hat{W} + \hat{W}' - \underline{W}_n - \underline{W}'_n \right)$$

L'ajout du comportement, ainsi que d'un schéma d'intégration temporel classique d'Euler implicite, permet d'exprimer les déplacements  $\hat{W}$  et  $\hat{W}'$  en fonction du déplacement du pas de temps précédent et des grandeurs de l'étape linéaire :

$$2\hat{W} = \underline{W}_n + \underline{W}'_n - \frac{1}{k_0} \left( \underline{F}_n + \underline{F}'_n \right)$$

Une fois le déplacement calculé, l'effort est déterminé par le biais des directions de recherche.

### 3.6.2 Interfaces de contact avec frottement

La difficulté du traitement d'une interface de contact ou de frottement entre deux sous-structures consiste à trouver les efforts et les déplacements en chaque point vérifiant un comportement inconnu *a priori*, puisqu'il dépend de son état actuel (contact ou décollement, adhérence ou glissement). Une démarche classique consiste à postuler un état, et donc le comportement associé, pour chaque point, puis d'effectuer le calcul et de vérifier l'hypothèse ainsi faite, qu'il faut corriger le cas échéant. Ici, l'originalité de l'écriture du problème, telle que développée par [Blanzé *et al.*, 1996], est d'introduire pour chaque point de l'interface un indicateur d'état pour le problème de contact et celui de frottement projeté sur les directions de recherche. Le calcul de ces indicateurs permet alors de connaître l'état du point considéré.

#### ■ Problème du contact

En notant  $\underline{n}$  la normale au contact de  $\Omega^E$  vers  $\Omega^{E'}$ , on distingue les deux comportements différents :

- décollement : si  $\left[ \hat{W} \right] \cdot \underline{n} > 0$ , alors  $\hat{F} = \hat{F}' = \underline{0}$
- contact : si  $\left[ \hat{W} \right] \cdot \underline{n} = 0$ , alors  $\left( \hat{F} + \hat{F}' \right) \cdot \underline{n} = 0$

On définit l'indicateur de contact  $C_n$ , dans le cas où  $k_0$  est identique pour les deux sous-structures considérées, tel que :

$$C_n = \frac{1}{2} \left[ \hat{W} \right] \cdot \underline{n} - \frac{1}{2k_0} \left( \hat{F}' - \hat{F} \right)$$

Le problème peut alors être réécrit de la façon suivante :

- décollement :  $C_n > 0$
- contact :  $C_n \leq 0$

### ■ Problème du frottement

En notant  $f$  le coefficient de frottement et  $\Pi$  l'opérateur de projection sur le plan tangent, on distingue deux comportements différents en cas de contact :

- adhérence : si  $\|\Pi\hat{\underline{F}}\| < f|\hat{\underline{F}}n|$  alors  $\Pi\left[\hat{\underline{W}}\right] = \underline{0}$
- glissement : si  $\|\Pi\hat{\underline{F}}\| = f|\hat{\underline{F}}n|$  alors  $\exists \lambda > 0$  tel que  $\left[\hat{\underline{W}}\right]n = -\lambda\hat{\underline{F}}$

De la même façon que pour le problème de contact, un indicateur de glissement  $\underline{G}_t$  est défini tel que :

$$\underline{G}_t = \frac{k_0}{2}\Pi\left[\hat{\underline{W}}\right] - \frac{1}{2}\Pi\left(\hat{\underline{F}}' - \hat{\underline{F}}\right)$$

Le problème du frottement peut alors être réécrit :

- adhérence : si  $\underline{G}_t < f|\hat{\underline{F}}n|$  alors  $\Pi\left[\hat{\underline{W}}\right] = \underline{0}$
- glissement : si  $\underline{G}_t \geq f|\hat{\underline{F}}n|$  alors  $\exists \lambda > 0$  tel que  $\left[\hat{\underline{W}}\right]n = -\lambda\hat{\underline{F}}$

### ■ Résolution

L'intégration des deux directions de recherche et l'utilisation d'un schéma d'intégration temporel d'Euler implicite permet d'écrire les indicateurs de contact et de frottement à l'instant  $t$  tels que :

$$2C_n(t) = \left[\hat{\underline{W}}\right]_{(t)}n - \frac{1}{k_0}\left(\hat{\underline{F}}'_{(t)} - \hat{\underline{F}}_{(t)}\right)n + \frac{1}{\Delta t}\left[\hat{\underline{W}}\right]_{(t-\Delta t)}n \quad (3.42)$$

$$\underline{G}_t(t) = \frac{k_0}{2}\Pi\left[\hat{\underline{W}}\right]_{(t)} - \frac{1}{2}\Pi\left(\hat{\underline{F}}'_{(t)} - \hat{\underline{F}}_{(t)}\right) \quad (3.43)$$

Bien évidemment, l'indicateur de frottement n'est calculé que s'il y a effectivement contact. Le calcul de ces indicateurs permet donc de connaître l'état du point considéré et donc, d'appliquer le comportement approprié.

Notons toutefois que cette approche souffre d'une convergence très lente. Ce phénomène, bien connu des algorithmes de type Uzawa [Uzawa, 1958] dans lequel s'inscrit cette méthode [Champany et al., 1999], est d'autant plus marqué dans le cas où il y a un décollement important de l'interface. En effet, la direction de recherche peut être vue comme une raideur virtuelle introduite dans le comportement de l'interface, et venant relier les deux sous-structures. En particulier, dans le cas du décollement, cette raideur résiduelle vient grandement affecter la convergence de la méthode. C'est pourquoi les auteurs de [Saavedra et al., 2011] proposent d'annuler, au cours des itérations LATIN, la valeur de la direction de recherche lorsqu'il y a un décollement lors de plusieurs itérations. La convergence est alors, dans le cas de grands décollements, largement améliorée.

### 3.6.3 Interfaces cohésives

Le cas des interfaces cohésives a été étudié dans [Kerfriden *et al.*, 2009] et consiste à prendre en compte la loi de comportement du mésomodèle d'endommagement. Il est considéré comme dépendant d'une unique variable d'endommagement  $d_I$  dont les lois d'évolution sont reprises dans la partie 4.2 :

$$\begin{aligned}\underline{\hat{F}} \cdot \underline{n} &= (1 - \mathcal{H}([\underline{\hat{W}}] \cdot \underline{n}) d_I) [\underline{\hat{W}}] \cdot \underline{n} \\ \Pi \underline{\hat{F}} &= k_t^0 (1 - d_I) \Pi [\underline{\hat{W}}]\end{aligned}$$

On écrira cette loi de comportement de façon générique en posant  $\underline{\hat{F}} = K(d) [\underline{\hat{W}}]$  afin de simplifier l'écriture du système. En soustrayant les deux équations des directions de recherche, en utilisant un schéma d'intégration temporelle d'Euler implicite et en y injectant la loi de comportement, on arrive à la relation suivante :

$$\left[ 2K(d) + \frac{k_0}{\Delta t} \right] [\underline{\hat{W}}](t) = \frac{k_0}{\Delta t} [\underline{\hat{W}}](t - \Delta t) + k_0 (\underline{\dot{W}}'_n(t) - \underline{\dot{W}}_n(t)) - (\underline{F}'_n(t) - \underline{F}_n(t))$$

**Remarque 3.7 :** Dans le cas le plus général, la direction de recherche  $k_0$  est prise égale à l'infini. L'expression ci-dessus devient alors explicite, ce qui simplifie le problème en plus d'avoir un avantage en termes de calcul parallèle, sur lequel nous reviendrons dans la **Partie 1.3.1** du **Chapitre 5**.

## 4 Algorithme de la méthode

### 4.1 Initialisation de la méthode

Classiquement, la méthode est initialisée par la solution dite élastique. Le problème résolu est celui correspondant à des sous-structures parfaitement élastiques, chaque interface intérieure étant considérée comme parfaite.

Cependant, ce choix reste arbitraire dans le cas où l'on a aucune information sur le type de solution que l'on recherche. Le **Chapitre 4** de ce manuscrit traitant de l'étude multiparamétrique revient sur cette initialisation.

### 4.2 Convergence de la stratégie

La convergence de la stratégie est démontrée dans [Ladevèze, 1999], moyennant certaines conditions mathématiques sur le comportement des matériaux ainsi que dans le cas de l'utilisation de directions de recherche conjuguées. Afin d'assurer la convergence de la méthode sur une classe plus large de comportements, il est classique de passer par une phase de relaxation à la fin de l'étape linéaire :

$$\mathbf{s}_{n+1} \longleftarrow \mu \mathbf{s}_{n+1} + (1 - \mu) \mathbf{s}_n$$



En pratique, la vitesse de convergence maximale est atteinte pour une valeur du paramètre de relaxation de l'ordre de 0,8. Si des oscillations viennent à apparaître, notamment dans le cas de problèmes fortement non-linéaires, il est parfois bénéfique de diminuer la valeur de ce paramètre.

Le contrôle de la convergence de la méthode se fait par l'intermédiaire d'un indicateur d'erreur. Celui classiquement employé est basé sur la direction de recherche et peut s'interpréter comme la distance entre les espaces  $\mathcal{A}_d$  et  $\Gamma$  suivant la direction de recherche  $E^-$  à une itération LATIN donnée. L'indicateur  $\epsilon$  s'écrit donc sous la forme générale :

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{s}_n - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}\|_{E^-}}{\|\mathbf{s}_n + \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}\|_{E^-}} \quad (3.44)$$

Dans le cas où les sous-structures sont élastiques, le problème dans son entier est finalement défini uniquement par les grandeurs aux interfaces. Aussi, l'indicateur d'erreur s'écrit traditionnellement :

$$\epsilon_{\text{int}}^2 = \frac{\sum_{\Omega^E} \left( \|\dot{\underline{W}}_n^E - \widehat{\underline{W}}_{n+1/2}^E\|_E^W + \|\underline{F}_n^E - \widehat{\underline{F}}_E^F\|_E^F \right)}{\sum_{\Omega^E} \left( \|\dot{\underline{W}}_n^E + \widehat{\underline{W}}_{n+1/2}^E\|_E^W + \|\underline{F}_n^E + \widehat{\underline{F}}_E^F\|_E^F \right)} \quad (3.45)$$

où l'on définit les normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|\underline{x}\|_E^W &= \int_{\partial\Omega^E} \underline{x}^T k_0 \underline{x} \, d\Gamma \\ \|\underline{x}\|_E^F &= \int_{\partial\Omega^E} \underline{x}^T (k_0)^{-1} \underline{x} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Dans le cas le plus général,  $\mathbf{s}$  dépend aussi des valeurs des variables internes dans les sous-structures. Par conséquent, il est nécessaire de définir une erreur du même type :

$$\epsilon_{\text{sst}}^2 = \frac{\sum_{\Omega^E} \left( \|\dot{\underline{X}}_n^E - \widehat{\underline{X}}_{n+1/2}^E\|_E^X + \|\underline{Y}_n - \widehat{\underline{Y}}_{n+1/2}\|_E^Y \right)}{\sum_{\Omega^E} \left( \|\dot{\underline{X}}_n^E + \widehat{\underline{X}}_{n+1/2}^E\|_E^X + \|\underline{Y}_n + \widehat{\underline{Y}}_{n+1/2}\|_E^Y \right)}$$

en définissant les normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|\underline{x}\|_E^X &= \int_{\Omega^E} \underline{x}^T \mathbf{H}^- \underline{x} \, d\Omega^E \\ \|\underline{x}\|_E^Y &= \int_{\Omega^E} \underline{x}^T (\mathbf{H}^-)^{-1} \underline{x} \, d\Omega^E \end{aligned}$$

Le choix de la direction de recherche fixe  $(\mathbf{H}^-)^{-1} = 0$  ; la norme sur les grandeurs conjuguées  $\|\cdot\|_E^Y$  est donc nulle. Par conséquent, l'erreur sur les sous-structures peut

se réécrire :

$$e_{\text{sst}}^2 = \frac{\sum_{\Omega^E} \left( \int_{\Omega^E} \left( \dot{\mathbb{X}}_n^E - \dot{\mathbb{X}}_{n+1/2}^E \right)^T \left( \dot{\mathbb{X}}_n^E - \dot{\mathbb{X}}_{n+1/2}^E \right) d\Omega^E \right)}{\sum_{\Omega^E} \left( \int_{\Omega^E} \left( \dot{\mathbb{X}}_n^E + \dot{\mathbb{X}}_{n+1/2}^E \right)^T \left( \dot{\mathbb{X}}_n^E + \dot{\mathbb{X}}_{n+1/2}^E \right) d\Omega^E \right)}$$

Le nouvel indicateur d'erreur de la méthode s'écrit donc, finalement, comme la somme de la contribution à l'erreur des interfaces et celle des sous-structures :

$$e^2 = e_{\text{int}}^2 + e_{\text{sst}}^2$$

### 4.3 Algorithme

L'algorithme de la méthode est donné par l'**Algorithme 1**.

## 5 Discrétisation du problème

### 5.1 Choix des espaces d'approximation

Les problèmes sur les sous-structures et les interfaces sont classiquement résolus par une méthode Éléments Finis standard. La discrétisation de deux sous-structures en contact l'une avec l'autre est supposée compatible. Concernant la discrétisation des interfaces, l'espace des champs discrets primal et dual  $\mathcal{W}_h^{EE'}$  et  $\mathcal{F}_h^{EE'}$  doit être choisi avec soin. En particulier, les efforts aux interfaces ne sont pas forcément continus, d'où le choix d'interpoler les efforts de manière compatible avec les contraintes sur le bord des sous-structures. Typiquement, dans le cas de sous-structures en 3D maillées par des tétraèdres à 4 nœuds, la contrainte est constante par élément. Par conséquent, les quantités d'interfaces sont choisies, elles aussi, constantes par élément de surface.

Dans le cadre d'une méthode de décomposition de domaine mixte, ce type de discrétisation génère des modes oscillants, qui peuvent être évités si l'on vérifie les conditions de stabilité « inf-sup » associées aux problèmes mixtes [Brezzi et Fortin, 1991]. [Ladevèze et Nouy, 2003] propose, pour y remédier, d'utiliser une discrétisation sur les bords des sous-structures plus riche que celle des interfaces. Pour cela, deux approches peuvent être envisagées :

- la *p-method* consiste à augmenter le degré d'interpolation des éléments de bord par rapport à celui des interfaces, par exemple en ajoutant des nœuds sur les arêtes de ces éléments ;
- la *h-method* sur-discrétise les éléments de bord en les découpant en sous-éléments, un élément d'interface étant alors en vis-à-vis de plusieurs éléments de la sous-structure.

Dans les travaux présentés ici, seule la *h-method* est utilisée. Dans le cas d'éléments 2D, elle est décrite pour les triangles et quadrangles dans [Ladevèze et al.,

■ **Initialisation de la méthode** ■

Décomposition du domaine en  $N_E$  sous-structures et  $N_I$  interfaces  
 Assemblage et décomposition des opérateurs  
 Résolution du problème élastique  $s_0$

■ **Début de l'algorithme itératif** ■

**tant que**  $\epsilon > \epsilon_a$  **faire**

■ **Étape linéaire**

□ **Problème micro 1**

**pour**  $E = 1, \dots, N_E$  **faire**

Assemblage éventuel des opérateurs de rigidité de  $\Omega^E$

Calcul de la première partie de  $\mathbf{s}_{n+1}^E$

Calcul de la contribution élémentaire au second membre du problème macro

**fin**

□ **Problème macro**

Assemblage du second membre du problème macro

Calcul du multiplicateur  $\hat{W}^M$

□ **Problème micro 2**

**pour**  $E = 1, \dots, N_E$  **faire**

Calcul de la deuxième partie de  $\mathbf{s}_{n+1}^E$

**fin**

■ **Étape locale**

□ **Problème aux interfaces**

Calcul de  $(\underline{W}^E, \underline{F}^E, X^{EE'}, Y^{EE'})$  en tout point de  $\Gamma^{EE'}$

□ **Problème aux sous-structures**

Calcul de  $\mathbb{X}$  en tout point de Gauss de  $\Omega^E$

■ **Calcul de l'indicateur de convergence**

Calcul de l'erreur sur les grandeurs aux interfaces

Calcul de l'erreur sur les variables internes des sous-structures

**fin**

**Algorithme 1:** Stratégie LATIN multi-échelle pour la résolution du mésomodèle

2002]. L'influence de la méthode sur la convergence de l'algorithme est illustrée par la **Figure 3.4**.

Dans le cas tridimensionnel, la technique a dû être étendue aux éléments tétraédriques et prismatiques. Le découpage, illustré par la **Figure 3.5**, a pour avantage de n'augmenter le nombre de nœuds qu'au niveau du ou des bords considérés. Cependant, la qualité des éléments tétraédriques créés peut parfois poser problème, du fait d'un rapport de forme trop faible. Une autre façon de faire aurait été d'appliquer la *h-method* à l'ensemble des sous-structures, pour conserver un rapport de forme correct. Cependant, cela aurait entraîné une augmentation non négligeable du coût de calcul.

## 5.2 Résolution numérique du problème de l'étape linéaire

Dans le cas classique (sans endommagement), les opérateurs de rigidité associés aux sous-structures sont constants au cours du temps. Par conséquent, une simple décomposition LU est effectuée lors de l'étape de l'initialisation, ce qui permet un gain en temps de calcul conséquent lors de l'étape linéaire.

Cependant, avec l'introduction de l'endommagement, la matrice de rigidité associée à une sous-structure est amenée à évoluer au cours des itérations. L'idée d'une décomposition LU préalable n'est alors plus forcément judicieuse. C'est pourquoi le calcul du problème linéaire sur une sous-structure est effectué par un algorithme de type gradient conjugué préconditionné.

Ici, la question du préconditionneur n'a pas été étudiée spécifiquement. Il apparaît toutefois que l'utilisation d'un préconditionneur précis, issu d'une factorisation de Cholesky incomplète, offre des performances tout à fait remarquables. De plus, le calcul du préconditionneur n'est alors fait que lors de l'initialisation de l'algorithme.

## 5.3 Résolution numérique de l'étape locale sur les sous-structures

En chaque point de Gauss d'une sous-structure non-linéaire (endommagement ou plasticité), un problème non-linéaire local doit être résolu. Par conséquent, la résolution est faite par des algorithmes itératifs simples, de type point fixe ou Newton-Raphson si la relation est simplement dérivable.

Cependant, la méthode LATIN est elle-même une méthode itérative qui construit progressivement une approximation de plus en plus fine de la solution du problème. Par conséquent, les premières itérations de la méthode consistent à résoudre un problème finalement faux, ou en tout cas trop grossier pour être exploitable. Une subtilité, ici, est alors de faire évoluer le critère en erreur des algorithmes des problèmes locaux en fonction de l'erreur LATIN : cela évite de résoudre « trop précisément » à chaque point de Gauss un problème issu d'une approximation grossière de la solution.

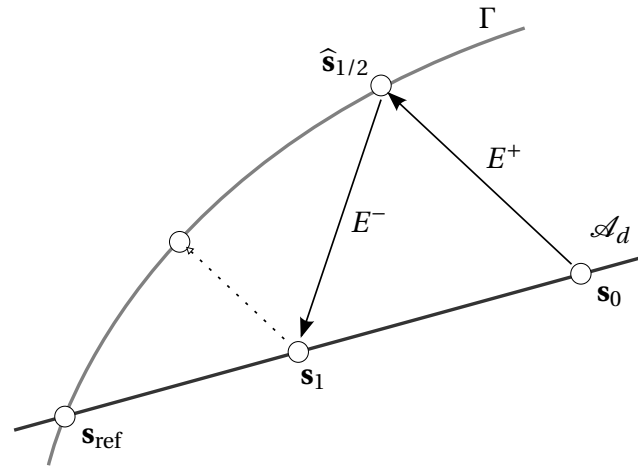


FIGURE 3.3 : Représentation du schéma itératif de la méthode

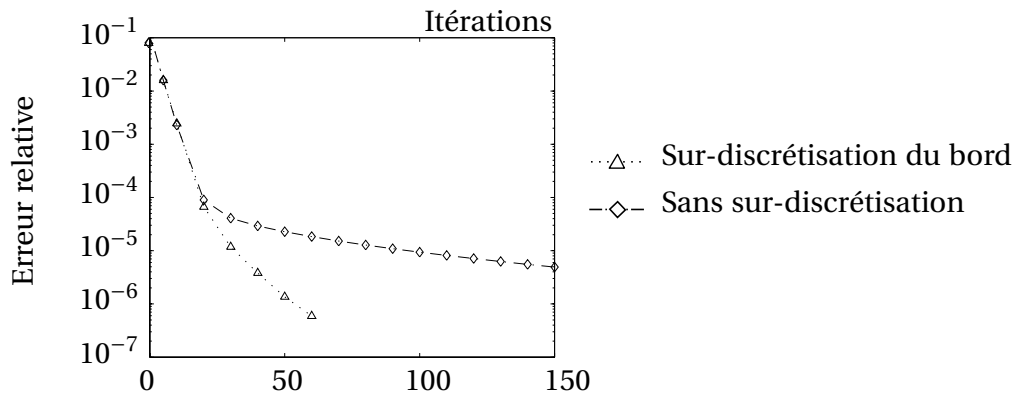


FIGURE 3.4 : Convergence de la méthode avec et sans surdiscrétisation  
[Ladevèze *et al.*, 2002]

### ■ Cas du calcul des variables d'endommagement

Mise à part celle liée à la rupture fibre, les variables d'endommagement sont régies par une loi d'évolution de type effet retard. Par conséquent, après l'introduction d'un schéma en temps de type Euler implicite, le calcul de  $d$  et  $d'$  revient à résoudre, en chaque point de Gauss, une équation de la forme :

$$\hat{d}(t) - \hat{d}(t - \Delta t) - \frac{\Delta t}{\tau_c} [1 - \exp(-a \langle \omega_t - \hat{d}(t) \rangle_+)] = 0$$

où seule  $\hat{d}(t)$  est inconnue, puisque ne dépendant que de  $\omega_t$ , calculée lors de l'étape linéaire, et de données matériau.

Ce type de loi, notamment à cause de la partie positive, est difficilement dérivable. Par conséquent, nous avons fait le choix d'appliquer ici une méthode de type point fixe, donnée par l'**Algorithme 2**, que l'on applique pour les deux variables d'endommagement diffus  $d$  et  $d'$ .

**tant que**  $\epsilon_d > \alpha \cdot \epsilon_{latin}$  **faire**

$\epsilon_d \leftarrow \hat{d}(t)$

$\hat{d}(t) \leftarrow \hat{d}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{\tau_c} [1 - \exp(-a \langle \omega_t - \hat{d}(t) \rangle_+)]$

$\epsilon_d \leftarrow \|\epsilon_d - \hat{d}(t)\|$

**fin**

**Algorithme 2:** Calcul des variables d'endommagement à chaque point de Gauss

**Remarque 3.8 :** L'**Algorithme 2** utilise un critère en erreur non normé. L'endommagement étant forcément compris entre 0 et 1, il n'est en pratique pas nécessaire de définir une erreur normée.

**Remarque 3.9 :** Le mésomodèle d'endommagement suppose un état d'endommagement constant dans l'épaisseur de chaque pli. Dans le cas d'un maillage tri-dimensionnel, cette modification est prise en compte en calculant la force thermodynamique associée à chaque force thermodynamique en chaque point de Gauss de l'intégralité de la structure. Si plusieurs points de Gauss sont alignés suivant l'épaisseur, la valeur des variables d'endommagement est prise égale, et fonction de la moyenne des forces thermodynamiques.

### ■ Cas du calcul des variables de plasticité

Le calcul des variables de plasticité se fait après celui de l'endommagement, afin de pouvoir calculer les quantités effectives définies dans le **Chapitre 1**. Il s'agit ici de trouver, en chaque point de Gauss,  $\hat{p}(t)$  telle que :

$$\text{Si } f \geq 0, \quad \hat{p}(t) = \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_t}{m \cdot k_p}}_{\Lambda} \hat{p}(t)^{1-m}$$

où  $\tilde{\sigma}_t$  est la contrainte équivalente au point de Gauss considéré, calculée lors de l'étape locale, le reste étant des coefficients matériau.

Pour ce type de loi, l'intégration est explicite pour simplifier la résolution du calcul. Par conséquent, un simple algorithme itératif décrit par l'**Algorithme 3** est utilisé.

```

tant que  $\epsilon_p > \beta \cdot \epsilon_{latin}$  faire
   $\epsilon_p \leftarrow \hat{p}(t)$ 
   $\hat{p}(t) \leftarrow \hat{p}(t - \Delta t) + \Delta t \cdot \Lambda \cdot \epsilon_p^{1-m}$ 
   $\epsilon_p \leftarrow \|\hat{p}(t) - \epsilon_p\| / \|\hat{p}(t) + \epsilon_p\|$ 
fin

```

**Algorithme 3:** Calcul des variables d'endommagement à chaque point de Gauss

## 6 Applications

Le mésomodèle d'endommagement nécessite en pratique plusieurs essais pour l'identification complète de ses paramètres. Ces essais, présentés par [Le Dantec, 1989], sont ici reproduits numériquement afin de valider la méthode et son implémentation. Sur un même matériau, en jouant uniquement sur sa séquence d'empilement, cinq essais suffisent à identifier chaque paramètre du matériau :

**Essai 1 :** un essai de traction sur un stratifié  $[0]_8$  sollicitant les fibres en traction jusqu'à rupture ;

**Essai 2 :** un essai de compression sur un stratifié  $[0/90]_{4S}$  pour identifier le comportement en compression du matériau. Cet essai ne sera pas reproduit dans ce manuscrit puisque nous avons fait l'hypothèse d'un comportement linéaire en compression. Dans les faits, des phénomènes d'instabilité (formation de bandes de pliage) apparaissent à partir d'une charge critique, lesquels ont été étudiés pour la première fois dans [Allix *et al.*, 1994] ;

**Essai 3 :** un essai de traction sur un stratifié  $[45]_8$  pour identifier le couplage entre la traction transverse et le cisaillement ;

**Essai 4 :** un essai de traction sur un stratifié  $[\pm 45]_{2S}$  pour le comportement en cisaillement du matériau ;

**Essai 5 :** un essai de traction sur un stratifié  $[\pm 67,5]_{2S}$  afin de compléter l'identification du comportement jusqu'à rupture du pli élémentaire dans le cas d'un couplage de cisaillement-traction transverse.

### 6.1 Géométrie de l'éprouvette

Chaque essai (à part le deuxième) implique un essai de traction sur un stratifié à 8 plis. Les géométries de l'éprouvette et des talons associés ne changent donc pas d'un essai à l'autre. Les dimensions nominales sont indiquées sur la **Figure 3.6**.

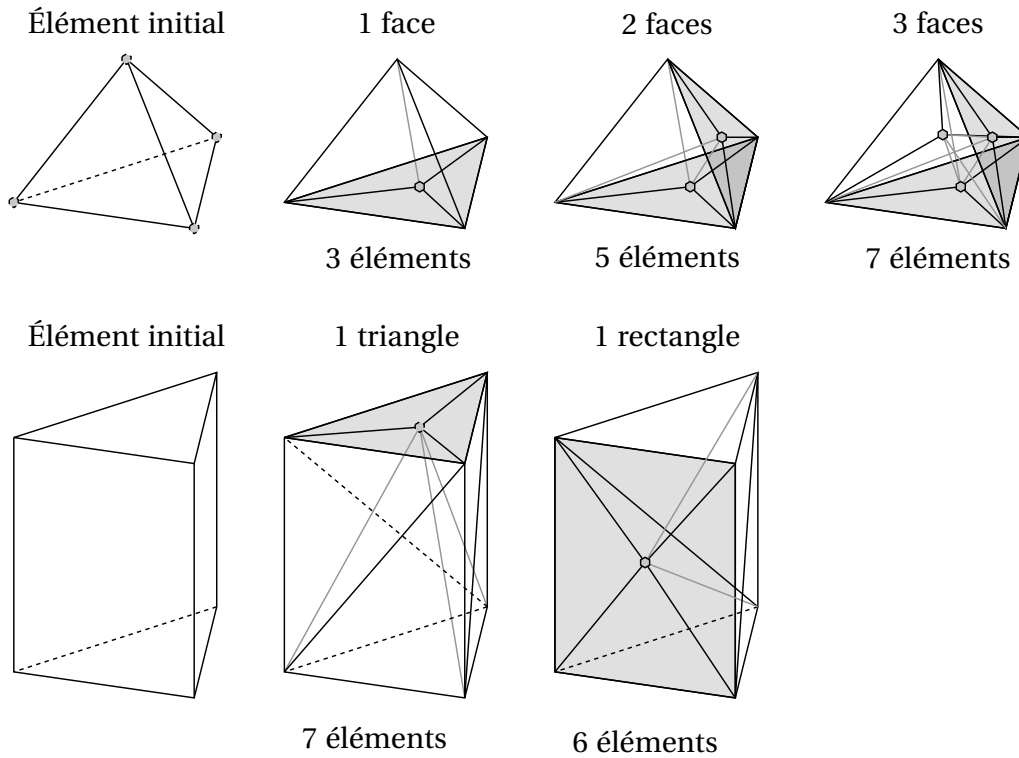


FIGURE 3.5 : Application de la *h-method* pour les tétraèdres et les prismes

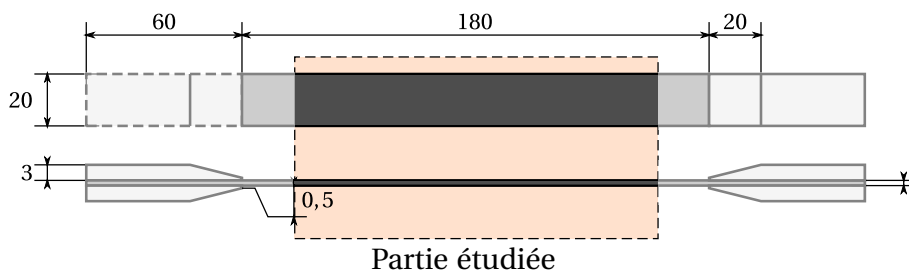


FIGURE 3.6 : Géométrie de l'échantillon – Identification de la partie modélisée



Nous faisons ici le choix d'utiliser le même maillage pour chaque essai, sans utiliser les symétries dans le cas des empilements de l'essai 1 et 2. Les conditions aux limites appliquées sur l'échantillon sont des efforts opposés, les mouvements de corps rigide étant ensuite retirés numériquement. L'ensemble est sous-structuré en 224 sous-structures élémentaires de  $10 \times 10 \times 0,125 \text{ mm}^3$ .

## 6.2 Matériau

Le matériau utilisé est un composite stratifié IM6/914 ou T300/914. L'identification des paramètres du mésomodèle a été faite dans le cas bidimensionnel, en considérant les plis comme des milieux 2D anisotropes, et est récapitulée par le **Tableau 3.3**. L'extension au tridimensionnel suppose que chaque pli a un comportement isotrope transverse.

Essai	Coefficient matériau	Notation	IM6/914	T300/914
n°1 & 2	Module d'élasticité sens fibre	$E_1^0$	170 GPa	150 GPa
	Contrainte sens fibre à rupture	$Y_F^C$	2210 MPa	1500 MPa
	Allongement sens fibre à rupture	$\varepsilon_{11}^R$	1,3 %	1,0 %
	Coefficient de Poisson 12	$\nu_{12}$	0,34	0,32
n°3	Module d'élasticité transverse	$E_2^0$	10,2 GPa	10,8 GPa
	Module de cisaillement	$G_{12}^0$	5,8 GPa	5,8 GPa
	Seuil d'endommagement	$Y^0$	57,6 kPa	96,1 kPa
	Seuil d'endommagement critique	$Y^C$	14,29 MPa	13,62 MPa
	Coefficient plastique de couplage	$c^2$	0,38	0,38
n°4	Limite d'élasticité	$R_0$	20 MPa	20 MPa
	Raideur plastique à l'origine	$k_p$	530 MPa	570 MPa
	Puissance de la loi d'écrouissage	$m$	0,37	0,42

TABLE 3.3 : Identification du mésomodèle avec pli 2D

## 6.3 Comparaison avec les essais

Du fait des hypothèses que nous avons effectuées sur le modèle, notamment quant au comportement en compression des plis, l'essai 2 n'a pas été représenté puisque nous ne sommes pas capables de simuler les effets spécifiques apparaissant lors de ce type de sollicitations. En revanche, les autres essais sont reproduits numériquement et comparés sur l'**Annexe A**.

Cette comparaison, bien que limitée, permet de valider le comportement du code sur des essais simples. Les différences que l'on observe, notamment le décalage progressif entre les courbes, trahit les limites du mésomodèle d'endommagement standard tel que posé dans le chapitre précédent. Celui-ci n'est en réalité valable que sous

l'hypothèse de petites perturbations et ne prend pas en compte certains phénomènes visibles à partir d'un certain seuil, notamment le réalignement des fibres.



# Chapitre 4

## Une stratégie de calcul adaptée aux études paramétriques

*L'objectif de ce chapitre est de présenter la stratégie de calcul multiparamétrique, permettant de calculer efficacement un très grand nombre de problèmes aux paramètres « légèrement » différents, appliquée sur quelques exemples.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>État de l'art</b> . . . . .	<b>88</b>
1.1	Approches fréquentielles . . . . .	89
1.2	Méthodes de perturbation . . . . .	89
1.3	Méthodes spectrales . . . . .	91
1.4	Conclusion partielle . . . . .	93
<b>2</b>	<b>Présentation de la stratégie multiparamétrique</b> . . . . .	<b>94</b>
2.1	La stratégie multiparamétrique avec l'approximation PGD . . . . .	94
2.2	La stratégie multiparamétrique sans l'approximation PGD . . . . .	95
2.3	Recherche de la meilleure solution de référence . . . . .	95
<b>3</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>96</b>
3.1	Ouverture d'un empilement composite . . . . .	96
3.2	Étude d'un assemblage boulonné . . . . .	101
3.3	Endommagement d'un assemblage en flexion 4 points . . . . .	108
<b>4</b>	<b>Conclusions sur la stratégie multiparamétrique</b> . . . . .	<b>113</b>

---

LA MODÉLISATION de phénomènes physiques souvent complexes (contact, frottement, endommagement, plasticité) conduit nécessairement à des incertitudes sur les paramètres intervenant dans les lois des modèles introduits. Par conséquent, l'utilisation d'une valeur déterministe pour ces paramètres d'entrée n'est pas satisfaisante et il est nécessaire de répercuter leurs fluctuations sur la solution finale.

La définition d'une étude paramétrique repose sur la présence des paramètres variables  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$  et sa résolution consiste finalement à rechercher une ou plusieurs des informations suivantes :

- la représentation de l'ensemble des solutions dans l'espace de variation des paramètres d'entrée ;
- les moments statistiques de quantités d'intérêt (déplacement maximal, contrainte maximale...) comme la moyenne, l'écart type, etc. ;
- la probabilité d'événements particuliers (une contrainte équivalente dépassant un certain seuil critique par exemple).

L'approche la plus basique pour l'obtention de ces informations est l'utilisation d'approches fréquentielles de type Monte Carlo/Quasi Monte Carlo [[Hammersley et al., 1965](#), [Caflich, 1998](#)], moyennant un nombre de tirages parfois très grand. Il existe toutefois un grand nombre d'autres méthodes permettant la prise en compte de variabilités au sein d'un problème éléments finis, qui feront l'objet d'une revue non exhaustive lors de la première partie de ce chapitre.

La deuxième partie du chapitre sera dédiée à la description d'une méthode de résolution particulière utilisée lors de ces travaux : la stratégie multiparamétrique, décrite dans [[Boucard et Champaney, 2003b](#)], et intimement liée à la méthode LATIN. Enfin, la troisième et dernière partie du chapitre sera l'occasion de mener différentes études paramétriques avec la stratégie.

## 1 État de l'art

Les méthodes fréquentielles évoquées précédemment souffrent d'une convergence très lente mais demeurent néanmoins incontournables, du fait de leur robustesse et de leur simplicité de mise en œuvre, puisque non intrusives. Il existe aussi des techniques spécifiques, généralement intrusives, pour la prise en compte de paramètres variables au sein d'approches éléments finis déterministes. Un bref état de l'art sur deux types de méthodes sera fait dans ce manuscrit : les méthodes de perturbation reposent sur un développement limité autour d'une moyenne, alors que les méthodes spectrales abordent directement le problème stochastique par le biais d'une séparation des variables.

## 1.1 Approches fréquentielles

### 1.1.1 Définition du problème

En appelant  $\underline{\lambda} = \{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$  les  $n$  paramètres aléatoires du problème, deux approches peuvent être envisagées :

- l'approche énumérative « simple » : le domaine de variation de chaque paramètre  $\lambda_i$  est subdivisé en  $h_i$  valeurs déterministes. On effectue alors un calcul éléments finis pour les  $N$  cas (où  $N = n \times \sum_i h_i$ ).
- l'approche probabiliste « Monte Carlo » : les valeurs de chaque paramètre  $\lambda_i$  sont tirées aléatoirement, nécessitant donc une information sur la répartition statistique de chacun. À chaque tirage est alors associé un calcul éléments finis complet.

Les approches de Monte Carlo souffrent d'une convergence très lente : leur précision évolue en  $M^{-1/2}$  où  $M$  est le nombre de tirages effectués. Une manière d'augmenter le taux de convergence de la méthode, dans le cas de petites dimensions stochastiques, est de dégénérer quelque peu la méthode en utilisant un tirage des paramètres déterministe : c'est l'approche de quasi Monte Carlo. Quoi qu'il en soit, ces méthodes souffrent de la nécessité de résoudre un très grand nombre de problèmes et gagnent donc à être utilisées conjointement avec des techniques d'accélération [Rey et Léné, 1998, Saad, 2000, Risler et Rey, 2000, Gosselet et Rey, 2002].

## 1.2 Méthodes de perturbation

Les méthodes de perturbation sont très efficaces et précises dans le cas de faibles variations des paramètres du problème. À partir d'une valeur moyenne des paramètres variables, elles s'appuient sur un développement limité introduit directement dans le problème éléments finis.

### 1.2.1 Décomposition en série de Taylor

Les méthodes par une décomposition en série de Taylor ([Hisada et Nakagiri, 1985, Shinozuka, 1987]) supposent que les paramètres aléatoires  $\underline{\lambda}$  peuvent être écrits tels que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lambda_i = \bar{\lambda}_i + \alpha_i$$

où  $\bar{\lambda}_i$  est la valeur moyenne du paramètre aléatoire  $\lambda_i$  et  $\alpha_i$  une variable aléatoire à moyenne nulle.

La résolution d'un problème par éléments finis s'écrit donc :

$$\mathbf{K}(\underline{\lambda}) \cdot \underline{U}(\underline{\lambda}) = \underline{F}$$

En supposant petites les variations autour des moyennes  $\bar{\lambda}_i$ , les termes variables peuvent être décomposés en série de Taylor et s'écrivent finalement :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\lambda) &= \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{,i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \mathbf{K}_{,ij} + \dots \\ \underline{U}(\lambda) &= \underline{U}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{U}_{,i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \underline{U}_{,ij} + \dots\end{aligned}$$

où  $\square_{,i}$  est la dérivée de  $\square$  par rapport à  $\alpha_i$  calculée en la valeur moyenne et  $\square_{,ij}$  la dérivée de  $\square$  par rapport à  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  calculée en la valeur moyenne.

En injectant le développement dans le problème à résoudre et en identifiant terme à terme, on obtient l'écriture du système suivant dans le cas du développement de Taylor au second ordre :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_0 \underline{U}_0 &= \underline{F} \\ \mathbf{K}_0 \underline{U}_{,i} &= -\mathbf{K}_0 \underline{U}_0 \\ \mathbf{K}_0 \underline{U}_{,ij} &= -\mathbf{K}_{,i} \underline{U}_{,j} - \mathbf{K}_{,j} \underline{U}_{,i} - \mathbf{K}_{,ij} \underline{U}_0\end{aligned}$$

**Remarque 4.1 :** Nous supposons ici que le second membre  $\underline{F}$  peut être calculé directement et n'apparaît donc pas dans la suite du développement. En effet, dans le cas où  $\underline{F}$  est fonction des variables aléatoires, il est généralement plus simple de le calculer directement, sans passer par une approximation *via* un développement limité.

Bien que ces méthodes soient efficaces, elles présentent néanmoins l'inconvénient majeur d'avoir à calculer les gradients, ce qui mène parfois à certains problèmes de convergence [Yamazaki *et al.*, 1988]. Cet inconvénient est d'autant plus marqué lors du traitement de problèmes non-linéaires ([Hisada, 1988, Frangopol *et al.*, 1996]), bien que l'application d'une méthode de décomposition de Taylor se soit révélée satisfaisante dans certains cas particuliers [Deodatis, 1989].

### 1.2.2 Décomposition en série de Neumann

Limitée au cas linéaire, cette technique [Shinozuka, 1987, Yamazaki *et al.*, 1988] utilise une décomposition en série de Neumann de l'inverse de la matrice de rigidité aléatoire  $\mathbf{K}(\lambda)$ . Dans un premier temps, il s'agit de décomposer la matrice de rigidité sous la forme :

$$\mathbf{K}(\lambda) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\lambda) = \mathbf{K}_0 (\mathbf{I} + \mathbf{P})$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $\mathbf{P} = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_1(\lambda)$ .

Par conséquent, l'inverse de la matrice de rigidité s'écrit :

$$\mathbf{K}(\lambda)^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{K}_0^{-1}$$

La décomposition en série de Neumann de l'opérateur  $(\mathbf{1} + \mathbf{P})$  donne, par définition :

$$(\mathbf{1} + \mathbf{P})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{P}^k$$

La résolution du système linéaire associé au problème éléments finis peut donc s'écrire :

$$\underline{U}(\lambda) = \mathbf{K}(\lambda)^{-1} \underline{F} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{P}^k \mathbf{K}_0^{-1} \underline{F}$$

La solution du problème  $\underline{U}(\lambda)$  s'écrit comme la série géométrique de raison  $(-\mathbf{P})$  et de premier terme  $\mathbf{K}_0^{-1} \underline{F}$  que l'on tronque à un ordre  $m$  :

$$\underline{U}(\lambda) \simeq \sum_{k=0}^m \underline{U}_k \text{ avec } \begin{cases} \underline{U}_0 = \mathbf{K}_0^{-1} \underline{F} \\ \underline{U}_k = -\mathbf{P} \underline{U}_{k-1} \text{ pour } k > 0 \end{cases}$$

### 1.3 Méthodes spectrales

L'idée principale de ces méthodes, initialement introduite dans [Ghanem et Spanos, 1991], est de procéder à une séparation des variables stochastiques et d'espace. Typiquement, l'opérateur de Hooke  $\mathbb{H}$  dépend, dans le pire des cas, du point de l'espace considéré ainsi que de la distribution :

$$\mathbb{H} \equiv \mathbb{H}(\underline{M}, \theta) = \mathcal{H}(\underline{M}, \theta) \mathbb{H}_0$$

où  $\mathbb{H}_0$  est un opérateur supposé constant et où il est possible d'écrire  $\mathcal{H}(\underline{M}, \theta)$  sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}(\underline{M}, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi(\theta) \psi(\underline{M})$$

Pour cela, une des possibilités est d'utiliser une approche spectrale ou décomposition de Karhunen-Loève [Loève, 1955].

#### ■ Décomposition de Karhunen-Loève

La fonction de covariance  $C_{\mathcal{H}}(\underline{M}, \underline{M}')$  d'un champ aléatoire  $\mathcal{H}(\underline{M}, \theta)$  est, par définition, bornée, symétrique et définie positive. Par conséquent, elle admet une décomposition spectrale [Courant et Hilbert, 1962] :

$$C_{\mathcal{H}}(\underline{M}, \underline{M}') = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \psi_k(\underline{M}) \psi_k(\underline{M}')$$

avec  $\mu_k$  les valeurs propres et  $\psi_k$  les vecteurs propres du noyau de covariance  $C_{\mathcal{H}}(\underline{M}, \underline{M}')$  et, par conséquent, les solutions de l'équation intégrale de Fredholm :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{\Omega} C_{\mathcal{H}}(\underline{M}, \underline{M}') \psi_k(\underline{M}') d\Omega = \mu_k \psi_k(\underline{M})$$



La matrice de covariance étant symétrique et définie positive, l'ensemble de ses vecteurs propres forme une base complète orthogonale de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  et ses valeurs propres sont réelles, positives et dénombrables. Par conséquent, le processus stochastique  $\mathcal{H}(\underline{M}, \theta)$  peut s'écrire :

$$\mathcal{H}(\underline{M}, \theta) = \overline{\mathcal{H}}(\underline{M}) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\theta) \sqrt{\mu_k} \psi_k(\underline{M}) \quad (4.1)$$

où  $\overline{\mathcal{H}}(\underline{M})$  est l'espérance de  $\mathcal{H}(\underline{M}, \theta)$  et  $\{\xi_k, k > 0\}$  sont des variables aléatoires non corrélées d'espérance nulle et de variance unité.

La troncature de la décomposition à l'ordre  $M$  de (4.1) est définie par :

$$\mathcal{H}(\underline{M}, \theta) \simeq \overline{\mathcal{H}}(\underline{M}) + \sum_{k=1}^M \xi_k(\theta) \sqrt{\mu_k} \psi_k(\underline{M})$$

L'avantage majeur de l'utilisation de la méthode spectrale est de garantir la pertinence de la troncature. En effet, cette dernière est la meilleure approximation de  $\mathcal{H}(\underline{M}, \theta)$  au sens des moindres carrés.

Finalement, la matrice de rigidité globale résultant de cette écriture de l'opérateur de Hooke peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$\mathbf{K}(\theta) = \mathbf{K}_0 + \sum_{k=1}^M \xi_k(\theta) \mathbf{K}_k$$

avec  $\mathbf{K}_0$  la matrice de rigidité moyenne et  $\mathbf{K}_k$  les matrices déterministes suivantes :

$$\mathbf{K}_k = \sqrt{\mu_k} \int_{\Omega} \psi_k(\underline{M}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{V}) : \mathbb{H}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) d\Omega$$

**Remarque 4.2 :** Cette décomposition peut aussi être utilisée dans le cadre des méthodes de perturbation décrites précédemment.

Cependant, dans le cas d'un processus stochastique inconnu (les déplacements  $\underline{U}(\underline{M}, \theta)$  typiquement), la fonction de covariance associée l'est également. Par conséquent, la décomposition de Karhunen-Loève n'est pas directement exploitable. Il est alors nécessaire d'utiliser une autre décomposition.

#### ■ Décomposition sur le chaos polynomial

Une des solutions est la projection de la solution sur la base du chaos polynomial  $\{\psi_k\}_{k=0}^p$  [Wiener, 1938], représentant l'ensemble des polynômes dont la somme des puissances est inférieure ou égale à  $p$  :

$$\mathcal{P}_m = \{x_1^{\beta_1}, \dots, x_m^{\beta_m}\} \in \{\psi_k\}_{k=0}^p \iff \sum_{i=1}^m \beta_i \leq p$$

Les déplacements  $\underline{U}(\underline{M}, \theta)$  s'écrivent dans la base des fonctions du chaos polynomial d'ordre  $p$  :

$$\underline{U}(\underline{M}, \theta) = \sum_{i=1}^p \underline{U}_i \psi_k(\theta)$$

où  $\underline{U}_i$  sont les déplacements nodaux.

### ■ Résolution du problème

Par conséquent, le problème décomposé, soit par le biais d'une décomposition de Karhunen-Loève, soit par une projection sur le chaos polynomial, revient à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{K}_0 + \sum_{k=1}^M \xi_k(\theta) \mathbf{K}_k \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^p \underline{U}_i \psi_k(\theta) \right) = \underline{F} \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^M \sum_{i=1}^p \mathbf{K}_k \underline{U}_i \xi_k(\theta) \psi_k(\theta) = \underline{F} \end{aligned}$$

L'utilisation d'une méthode de Galerkin pour déterminer les coefficients  $\underline{U}_i$ , ainsi que la propriété d'orthogonalité des fonctions du chaos polynomial au sens de l'espérance  $E(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$ , permettent de réécrire le problème sous la forme suivante :

$$\forall l \leq p, \quad \sum_{i=0}^p \mathbf{K}_{kl} \cdot \underline{U}_k = \underline{F}_l$$

où  $\mathbf{K}_{kl}$  est s'écrit :

$$\mathbf{K}_{kl} = \sum_{i=0}^M E(\xi_i \psi_k \psi_l) \mathbf{K}_i$$

Par conséquent, la résolution du problème revient à résoudre le système de taille ( $p \times$  nombre de ddl) suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \cdots & \mathbf{K}_{0p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{p0} & \cdots & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{U}_0 \\ \vdots \\ \underline{U}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_0 \\ \vdots \\ \underline{F}_p \end{Bmatrix}$$

## 1.4 Conclusion partielle

Pour l'application à la résolution de problèmes d'assemblages, du fait des très fortes non-linéarités de type contact ou frottement, la robustesse des approches fréquentielles est très certainement préférable. Cependant, leur coût numérique conduit nécessairement à l'utilisation d'une stratégie adaptée.

La stratégie multiparamétrique utilisée dans le cadre de ces travaux est intimement liée à la méthode LATIN. Elle permet de résoudre *de façon exacte* de nombreux problèmes, relativement « proches », en offrant des gains non négligeables.

## 2 Présentation de la stratégie multiparamétrique

L'objectif de la stratégie multiparamétrique est la résolution accélérée de nombreux problèmes « mécaniquement similaires ». Elle repose sur la réutilisation de la solution d'un problème déjà résolu (problème « de référence ») afin de résoudre un problème suffisamment similaire (problème « perturbé »). La stratégie multiparamétrique, intimement liée à la méthode LATIN, utilise dans les faits le problème de référence comme initialisation du problème perturbé, ce qui est généralement plus pertinent qu'une simple initialisation élastique dans le cas où les problèmes sont assez proches.

La méthode LATIN a toutefois été déclinée en plusieurs versions, dont les deux principales sont les suivantes :

- l'approche utilisant l'approximation PGD<sup>1</sup> ;
- l'approche, employée ici, avec une représentation classique des inconnues.

### 2.1 La stratégie multiparamétrique avec l'approximation PGD

L'approximation PGD permet de construire la solution d'un problème comme la somme de produits de fonctions temporelles et spatiales. La stratégie multiparamétrique consiste logiquement à exprimer la correction entre le problème de référence et le problème perturbé sous cette même forme de produits de fonctions de l'espace et du temps. En pratique, le calcul des fonctions temporelles revient à la résolution d'une équation différentielle scalaire, alors que celui des fonctions spatiales nécessite le calcul de problèmes éléments finis. Par conséquent, dans le processus de calcul d'un nouveau couple de fonctions, l'étape la plus coûteuse est la détermination de la fonction spatiale. Une première idée est donc de réutiliser uniquement ces fonctions spatiales [Boucard et Ladeveze, 1999], puis de passer par une étape préliminaire construisant un jeu de fonctions temporelles associé aux fonctions spatiales déjà construites. Si cela est nécessaire, la méthode enrichira ensuite la base de fonctions de nouveaux couples pour s'adapter au problème perturbé.

Cependant, la résolution d'un grand nombre de problèmes conduit à un enrichissement souvent superflu, voire contre-productif, de la base de solutions. Par conséquent, [Relun *et al.*, 2011b] propose, dès l'étape préliminaire, d'effectuer un tri sur les fonctions du problème précédemment calculé, afin de n'en conserver que les plus pertinentes en termes de minimisation de l'erreur PGD. Cette approche affiche des gains très intéressants, notamment dans le cas de sous-structures au comportement matériau fortement non-linéaire et dépendant du temps, la visco-élasticité ou viscoplasticité notamment. Toutefois, elle n'offre que peu d'avantages par rapport à la méthode « classique » décrite ci-dessous dans le cas de sous-structures linéaires (ou quasi-linéaires).

---

1. Pour *Proper Generalized Decomposition*

## 2.2 La stratégie multiparamétrique sans l'approximation PGD

Dans le cas d'une représentation classique des inconnues, on ne cherche pas à donner de forme particulière à la correction. En effet, la stratégie multiparamétrique repose alors sur l'idée simple que la solution du problème de référence peut servir de très bonne initialisation pour le calcul du problème perturbé. En effet, la méthode LATIN permet l'initialisation à partir de toute solution vérifiant l'appartenance à  $\mathcal{A}_d$ , sans pour autant que  $\Gamma$  soit vérifié. En pratique, cela se traduit par une diminution notable du nombre d'itérations nécessaires pour faire converger la méthode.

Dans le cas de sous-structures élastiques et linéaires, cette approche offre des performances très intéressantes pour deux raisons majeures :

- les non-linéarités étant localisées au niveau des interfaces, l'étude des variabilités est généralement faite sur des grandeurs d'interface. Par conséquent, les opérateurs de rigidité de chaque sous-structure peuvent être réutilisés d'une résolution à l'autre, allégeant grandement la phase d'initialisation de la méthode.
- l'ensemble du problème n'est défini qu'à partir des grandeurs aux interfaces. Il est donc inutile de stocker les grandeurs sur les sous-structures, puisque celles-ci dépendent directement des déplacements et efforts aux bords.

**Remarque 4.3 :** Dans l'hypothèse où le problème de référence est celui résolu juste avant que l'on aborde le problème perturbé, l'application de cette stratégie est simple. Après avoir itéré jusqu'à convergence pour le problème de référence, les paramètres sont changés au cours du processus itératif pour passer à la solution perturbée. On continue alors les itérations jusqu'à arriver une nouvelle fois à convergence pour le problème perturbé.

**Remarque 4.4 :** Dans le cas des matériaux composites, les opérateurs de rigidité ne sont pas constants au cours du temps et des itérations LATIN. Le système linéaire associé est donc résolu par l'intermédiaire d'un solveur gradient conjugué, pour ne pas avoir à décomposer la matrice de rigidité dès que celle-ci vient à changer. Par conséquent, l'éventuelle réutilisation des opérateurs de rigidité dans le cadre d'une stratégie multiparamétrique n'est pas vraiment utile ici.

## 2.3 Recherche de la meilleure solution de référence

Il est, dans les faits, délicat de trouver le « meilleur » problème de référence parmi les problèmes précédemment calculés. Dans les travaux présentés ici, nous nous limiterons à balayer l'espace des paramètres dans un ordre prédéfini, en initialisant le problème perturbé à partir de la solution précédemment calculée. Il existe toutefois des méthodes de recherche plus fines.

La première méthode consiste à déterminer, parmi les jeux de paramètres précédemment traités, lequel serait le plus proche de celui de la solution perturbée au sens d'une certaine norme définie dans l'espace des paramètres.

Toutefois, la méthode la plus prometteuse est présentée dans [Soulie et Boucard, 2009]. Elle s'appuie sur la construction d'un métamodèle du problème, autrement dit la représentation d'une certaine grandeur d'intérêt  $\alpha$  en fonction des paramètres variables  $\{\lambda_i\}$ , construction qui s'améliore d'ailleurs au fur et à mesure des résolutions. Sur ce métamodèle, on calcule la valeur  $\alpha_k$  qu'atteint  $\alpha$  avec le jeu de paramètres de la solution perturbé. Les solutions susceptibles de devenir une solution de référence sont toutes celles dont les jeux de paramètres permettent d'avoir  $\alpha \simeq \alpha_k$ . Le choix final résulte d'un compromis entre ces solutions pré-sélectionnées et celles que favoriseraient la première méthode.

Quoiqu'il en soit, la recherche de la meilleure solution de référence reste un problème ouvert, sujet encore de travaux de recherche poussés, notamment sur la construction du mésomodèle en lui-même.

### 3 Applications

La stratégie multiparamétrique repose sur une idée simple : l'initialisation d'un problème à partir de la solution d'un problème déjà calculé. La recherche de la meilleure solution d'initialisation n'est pas abordée dans ce travail. Par conséquent, nous nous contentons de parcourir l'espace des paramètres dans un ordre prédéterminé. Les techniques abordées dans la sous-partie 2.3 ne sont donc nullement utilisées.

Pour illustrer l'efficacité de la stratégie, elle est ici appliquée à différents cas, présentant chacun des non-linéarités différentes et allant croissant en termes de complexité structurelle. Le premier exemple est l'étude d'un simple empilement de plusieurs plis, dont le comportement des interfaces est variable. Le deuxième exemple se prête à la comparaison entre la méthode proposée ici (et son implantation) et un code industriel, *Abaqus/Standard*, en s'attardant notamment sur la prise en compte du contact et du frottement dans les deux cas. La dernière application étudie la stratégie multiparamétrique dans le cas où les variabilités sont présentes aussi au niveau des sous-structures.

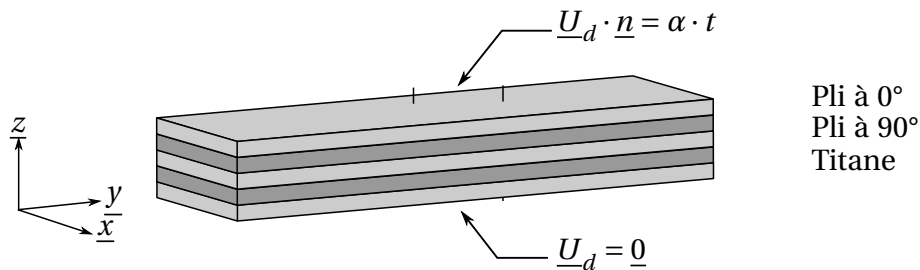
#### 3.1 Ouverture d'un empilement composite

La première application de la stratégie multiparamétrique présentée ici est le cas simple d'un empilement de plis élastiques, séparés par différents types d'interface concentrant les non-linéarités du problème : contact frottant ou au comportement cohésif. C'est d'ailleurs sur ces interfaces cohésives que se concentreront l'étude, puisque ces interfaces seront forcément nombreuses dans le cas des problèmes d'assemblages de composites, il est donc nécessaire de vérifier l'influence de leur nombre sur la convergence de la méthode. C'est après cette vérification que nous pourrons lancer une étude paramétrique sur un problème avec interfaces cohésives.

### 3.1.1 Description du problème

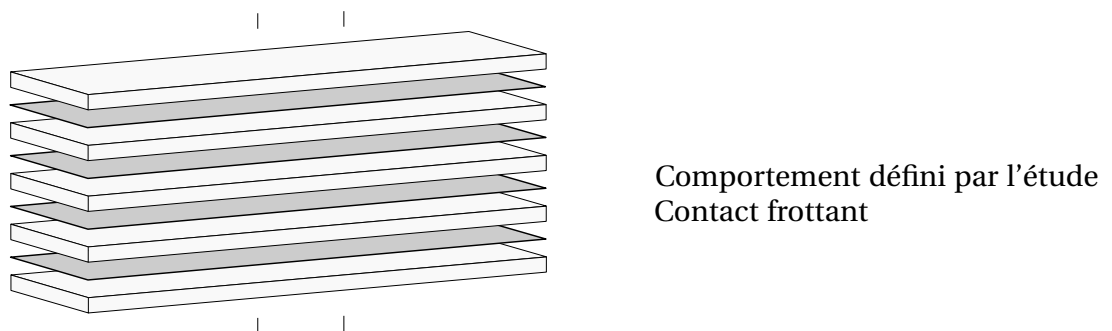
#### ■ Géométrie et chargement

Le problème, illustré par la **Figure 4.1**, a pour objectif principalement de solliciter une même interface à la fois en traction et en compression. Pour cela, un empilement  $[0/90/0]_5$  est considéré, tout en sachant que chaque pli a un comportement *linéaire* et isotrope transverse. Le chargement est exercé par l'intermédiaire de deux pions métalliques qui viennent compresser la structure en son centre. Il en résulte alors une ouverture en bord de plis, alors qu'une forte pression de contact est exercée au centre.



**FIGURE 4.1 :** Description de l'empilement : matériaux et chargements

Les interfaces, mises en évidence **Figure 4.2**, pourront dans la suite de l'étude avoir deux comportements différents : contact avec frottement ou cohésif. Du fait du chargement précédemment exposé, une grandeur d'intérêt observable et intéressante est l'ouverture de l'empilement, à savoir la différence de déplacements entre un même nœud des deux plis extrêmes.



**FIGURE 4.2 :** Description de l'empilement : vue des interfaces

#### ■ Discrétisation du problème

Dans le cadre de cette étude, les plans de symétrie passant par le centre des pions et de normales  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  sont utilisés pour réduire la taille du problème (voir **Figure 4.3**). La sous-structuration est minimale, à savoir que chaque pli n'est composé que d'une unique sous-structure, tout comme les pions, soit 7 sous-structures au total. La discrétisation est, quant à elle, suffisamment fine pour représenter correctement les

mouvements de flexion autour de  $x$  de chaque pli, ce qui engendre 53424 degrés de liberté pour 27160 éléments prismatiques.

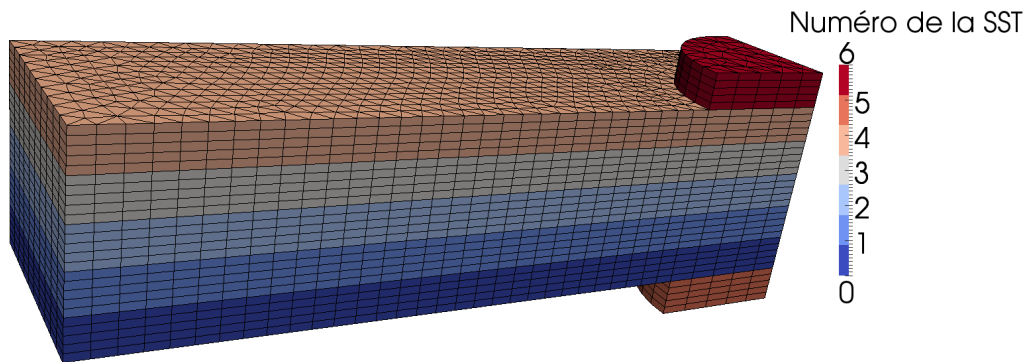


FIGURE 4.3 : Sous-structuration et maillage de l'empilement

### 3.1.2 Première étude paramétrique

Pour cette étude, nous supposons le comportement des interfaces de type contact avec frottement. À chacune des 4 interfaces sera affecté un coefficient de frottement potentiellement différent, pouvant prendre 5 valeurs comprises entre 0,1 et 0,5. Ce type de problèmes nécessitera par conséquent  $5^4 = 625$  simulations.

#### ■ Coût de l'étude

Pour quantifier le gain permis par la stratégie multiparamétrique, nous définissons les grandeurs suivantes :

- $\tau_{625}$  : temps CPU nécessaire pour résoudre, sans précaution particulière, l'intégralité des simulations. Nous supposons ici que  $\tau_{625} \simeq 625 \times \tau_1$  où  $\tau_1$  est le temps CPU pour résoudre la première simulation ;
- $\mu_{625}$  : temps CPU nécessaire pour résoudre l'intégralité des simulations avec la stratégie multiparamétrique.

Le Gain est alors défini comme le rapport  $\tau_{625}/\mu_{625}$ . Le **Tableau 4.1** offre un aperçu des temps de calcul nécessaires pour mener à bien cette étude paramétrique, ainsi que les gains observés sur plusieurs processeurs. La **Figure 4.4** illustre l'impact de la stratégie sur le nombre d'itérations nécessaires à la méthode pour arriver à convergence pour chacune des résolutions abordées.

Comme il a été dit précédemment, l'impact majeur de la stratégie multiparamétrique réside dans la réduction drastique du nombre d'itérations nécessaires pour faire converger la méthode. La **Figure 4.4** montre, pour chacune des 100 premières résolutions de la méthode, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un même seuil d'erreur.

Les gains offerts par l'approche multiparamétrique s'expliquent donc très facilement, au regard de la réduction notable d'itérations LATIN à convergence, sans

compter la phase de construction des opérateurs qui n'est plus à refaire après la première résolution. Ce gain semble, de plus, être sensiblement indifférent au nombre de processeurs sur lequel le problème est résolu.

### ■ Résultats

Une façon d'exploiter l'étude paramétrique ci-dessus consiste à représenter la surface de réponse du système, sous la forme de l'évolution d'une grandeur d'intérêt en fonction des paramètres d'entrée de l'étude. En appelant  $f_1$  le coefficient de frottement de l'interface entre les plis 0 et 1 (voir **Figure 4.3**) jusqu'à  $f_4$  celui entre les plis 3 et 4, il est possible de tracer l'ouverture du pli telle que le montre la **Figure 4.5**.

L'influence des paramètres est assez flagrante sur la grandeur d'intérêt considérée n'est pas négligeable. Cependant, le coefficient de frottement n'a pas forcément une très grande influence sur ce type de problème. C'est pourquoi l'approche suivante, utilisant des interfaces cohésives, est certainement plus intéressante.

### 3.1.3 Seconde étude paramétrique

La différence de cette étude avec la précédente est l'utilisation d'un comportement cohésif en lieu et place du contact frottement. Dans le cadre de cette étude paramétrique, les interfaces seront supposées strictement identiques, les mêmes coefficients matériaux étant affectés à chaque interface.

Une première étape est de valider le bon comportement des interfaces cohésives au sein de la méthode, et notamment l'influence de leur nombre sur sa convergence. Pour cela, la comparaison des courbes de convergence pour un empilement allant de 7 à 15 plis est donnée par la **Figure 4.6**. Leur similarité nous permet d'envisager d'étendre leur nombre pour d'autres exemples, notamment présentés dans le **Chapitre 5**.

L'étude paramétrique concerne les deux paramètres suivant : le seuil d'endommagement critique  $Y_C$  et la rigidité normale initiale  $k_0$ . Chacun peut prendre jusqu'à 30 valeurs comprises respectivement entre 0, 1 et 2 MPa, et 500 kN/mm à  $5 \cdot 10^6$  kN/mm. Par conséquent, cette seconde étude génère  $30^2 = 900$  simulations.

### ■ Coût de l'étude

Pour quantifier le gain permis par la stratégie multiparamétrique, nous définissons les grandeurs suivantes :

Nombre de processeurs	$\tau_1$ (mn)	$\mu_{625}$ (mn)	Gain
<b>1</b>	32	1098	18
<b>6</b>	10	330	19

**TABLE 4.1** : Performances de la stratégie multiparamétrique



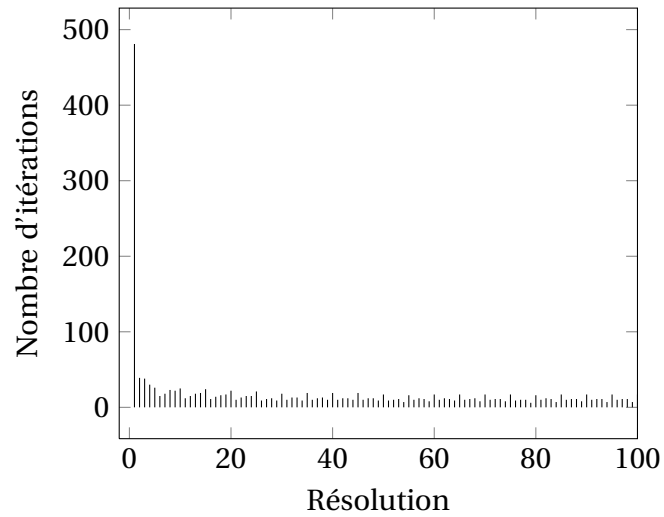


FIGURE 4.4 : Itérations LATIN nécessaires pour les 100 premières résolutions

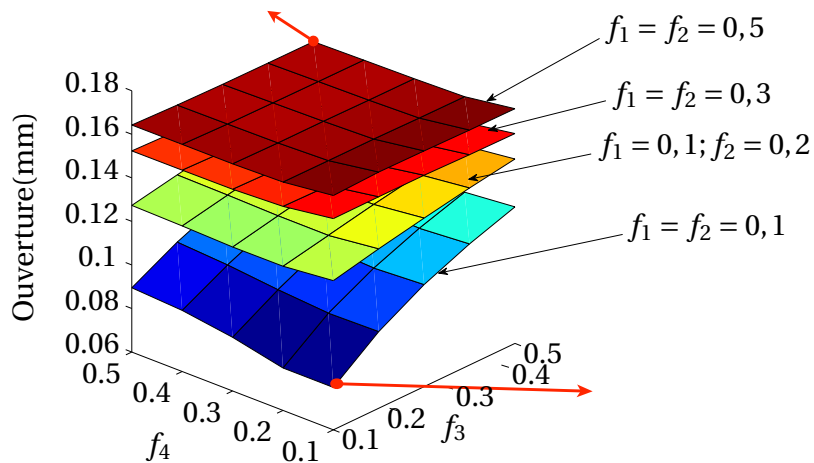


FIGURE 4.5 : Variation de l'ouverture des plis

Nombre de processeurs	$\tau_1$ (s)	$\mu_{900}$ (s)	Gain
1	272	10281	24
4	101	4470	20

**TABLE 4.2 :** Performances de la stratégie multiparamétrique

- $\tau_{900}$  : temps CPU nécessaire pour résoudre, sans stratégie particulière, l'intégralité des simulations. Nous supposons ici que  $\tau_{900} \simeq 900 \times \tau_1$ , où  $\tau_1$  est le temps CPU pour résoudre la première simulation ;
- $\mu_{900}$  : temps CPU nécessaire pour résoudre l'intégralité des simulations avec la stratégie multiparamétrique.

Le Gain est alors défini comme le rapport  $\tau_{900}/\mu_{900}$ . Le **Tableau 4.2** offre un aperçu des temps de calcul nécessaires pour mener à bien cette étude paramétrique, ainsi que les gains observés sur plusieurs processeurs.

Le gain est ici légèrement réduit dans le cas de plusieurs processeurs. Cela s'explique assez simplement : la plupart des résolutions se font en 2 ou 3 itérations. Par conséquent, une grande majorité du temps de calcul consiste à écrire les données post-traitées (contraintes, déplacements, etc.), ce qui conduit systématiquement à un partage de données supplémentaire et finalement peu nécessaire dans notre cas. Toutefois, le gain reste remarquablement élevé, du fait finalement des faibles différences entre les différents problèmes définis par l'étude.

### ■ Résultats de l'étude

La surface de réponse est ici plus simple à visualiser, puisqu'il n'y a que deux paramètres. En prenant toujours comme grandeur d'intérêt l'ouverture de l'empilement (défini par la différence de déplacement entre le pli supérieur et inférieur), il est possible de tracer la **Figure 4.7**.

On constate alors la faible influence d'un des paramètres, expliquant les performances élevées constatées juste avant. Toutefois, l'étude est loin d'être caduque puisque le second paramètre a une influence parfois très marquée sur la grandeur d'intérêt considérée.

## 3.2 Étude d'un assemblage boulonné

Cette étude, abordée dans [Roulet *et al.*, 2011], propose l'application de la stratégie multiparamétrique sur un assemblage boulonné et surtout, la comparaison du code de recherche sur lequel sont développés ces travaux avec le code commercial *Abaqus/Standard*. La prise en compte des conditions de contact avec frottement est différente pour les deux logiciels, ce qui conduit naturellement à prendre quelques précautions quant à la comparaison des résultats.

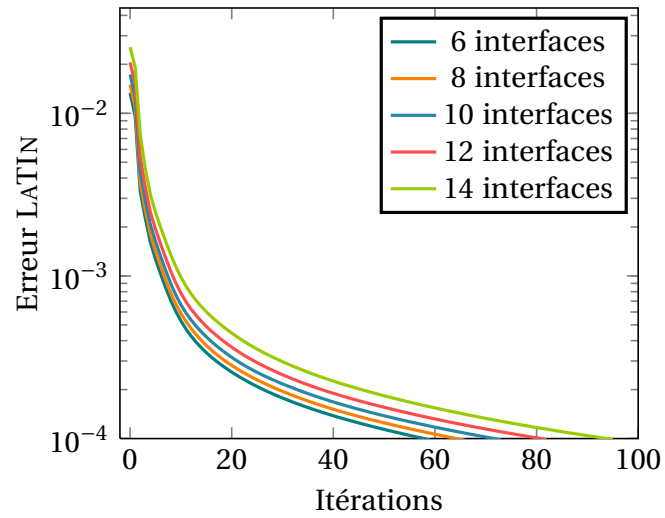


FIGURE 4.6 : Influence du nombre d'interfaces cohésives sur la convergence de la méthode

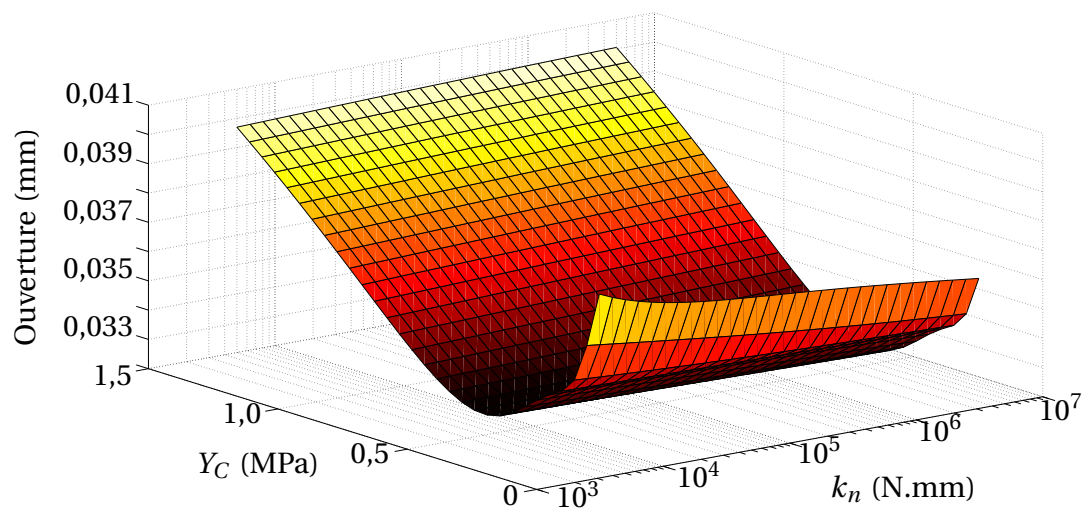


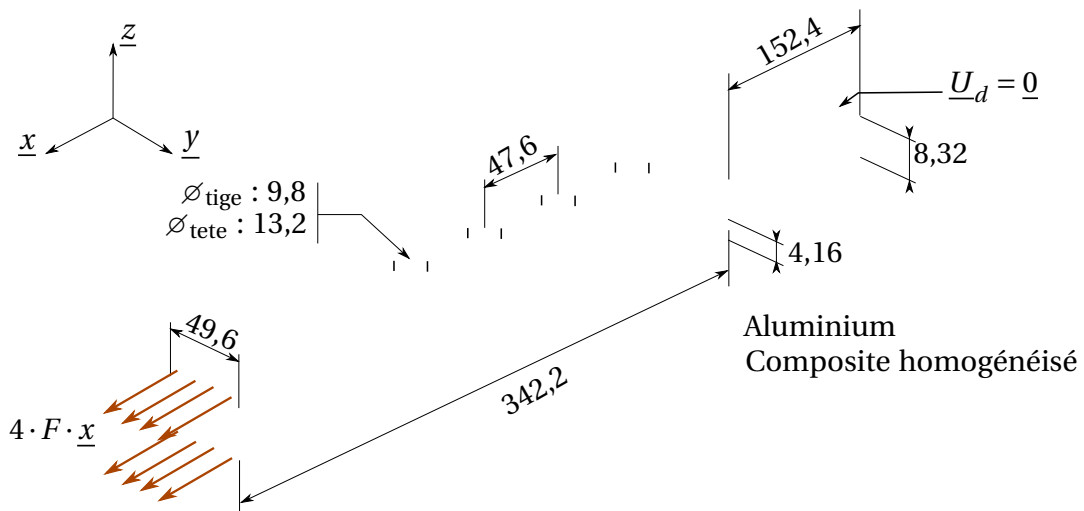
FIGURE 4.7 : Variation de l'ouverture des plis

### 3.2.1 Description du problème

#### ■ Géométrie et chargement

Le problème est posé sur un assemblage de trois plaques fixées par l'intermédiaire de 4 boulons précontraints (voir **Figure 4.8**). La phase de chargement de l'ensemble se passe selon 4 étapes :

1. *Précharge* : les 4 boulons sont préchargés par l'intermédiaire d'un déplacement relatif imposé entre les têtes et la tige de 0,05 mm. Ce déplacement ne change plus au cours des prochains pas de chargement.
2. *Chargement en traction* : l'effort croît progressivement jusqu'à atteindre  $4F_{\max} = 40000$  N.
3. *Chargement en compression* : l'effort décroît ensuite progressivement jusqu'à atteindre 0, puis continue de décroître jusqu'à atteindre  $-4F_{\max} = -40000$  N.
4. *Relaxation* : le chargement revient ensuite à 0 N.



**FIGURE 4.8** : Géométrie de l'assemblage (dimensions en millimètres)

Les plaques sont constituées de deux matériaux différents. Notons que le comportement de ces matériaux est, dans tous les cas, *élastique*. L'aluminium présente un comportement isotrope alors que le composite homogénéisé est orthotrope, leurs coefficients élastiques étant détaillés par le **Tableau 4.3**.

Les interfaces entre les plaques, ainsi que celles entre les têtes de vis et les plaques, doivent simuler le contact avec frottement entre les solides. Les interfaces entre les plaques et les tiges de vis sont légèrement différentes, puisqu'elles modélisent un contact frottant mais avec un jeu initial de 0,5 mm. Quels que soient les matériaux, les coefficients de frottement sont pris arbitrairement égaux à 0,3.

#### ■ Discrétisation du problème

Étant donnée la géométrie, deux plans de symétrie sont utilisés afin de réduire

Matériau	Module(s) d'élasticité	Coefficient(s) de Poisson	Module(s) de cisaillement
Aluminium	$E = 70\,000$ MPa	$\nu = 0,3$	$G = 26,9$ GPa
Composite	$E_x = 90\,740$ MPa	$\nu_{xy} = 0,36$	$G_{xy} = 18\,190$ MPa
	$E_y = 37\,700$ MPa	$\nu_{xy} = 0,36$	$G_{xy} = 18\,190$ MPa
	$E_z = 37\,700$ MPa	$\nu_{xy} = 0,36$	$G_{xy} = 13\,860$ MPa

TABLE 4.3 : Coefficients matériau des plaques boulonnées

la taille de l'étude : le plan passant par tous les axes des boulons et de normale  $\underline{y}$ , ainsi que le plan médian du composite homogénéisé de normale  $\underline{z}$ . La génération du maillage conduit à un problème d'approximativement 100 000 degrés de liberté. Ce maillage est strictement identique, que ce soit sur *Abaqus/Standard* ou sur le code de recherche développé pour ces travaux. Dans le dernier cas, toutefois, le maillage est décomposé sur 20 sous-structures (voir **Figure 4.9**). Cette décomposition n'influe bien évidemment pas sur la taille du problème.

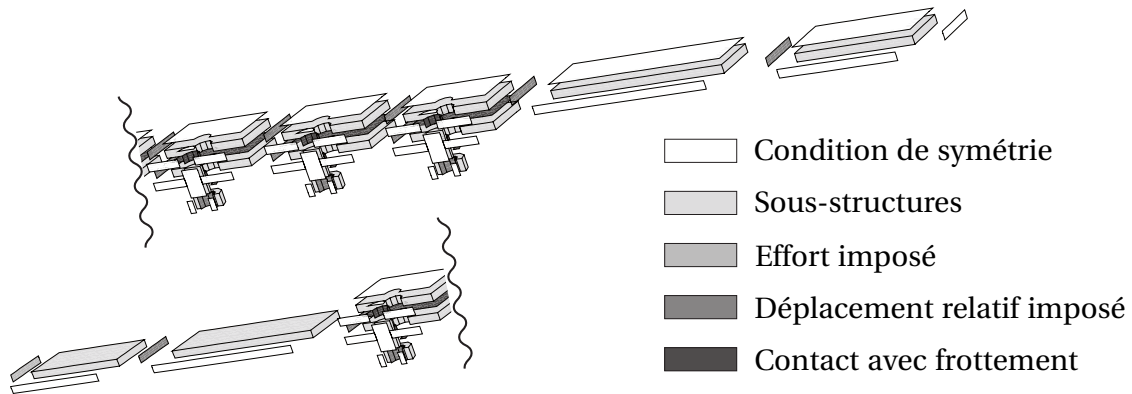


FIGURE 4.9 : Sous-structuration du problème

### 3.2.2 Comparaison avec *Abaqus/Standard*

Les deux codes de calcul diffèrent sur un point majeur : la gestion du contact avec frottement. *Abaqus/Standard* propose plusieurs algorithmes pour intégrer les contraintes liées au contact et au frottement, alors que la méthode LATIN permet de prendre en compte ce type de comportement de façon assez originale, par l'intermédiaire du comportement des interfaces (voir partie 3.6.2 du **Chapitre 3**).

Afin de pouvoir comparer les résultats, nous choisirons de tester les différentes méthodes et la pertinence de leurs résultats en fonction du temps de calcul, seul critère finalement facilement mesurable pour les départager.

#### ■ Prise en compte du frottement

*Abaqus/Standard* propose de traiter séparément d'une part la composante normale

$\epsilon_{\text{adm}}$ (mm)	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
Temps de calcul (mn)	20,8	27,9	118,23	<i>Pas de convergence</i>

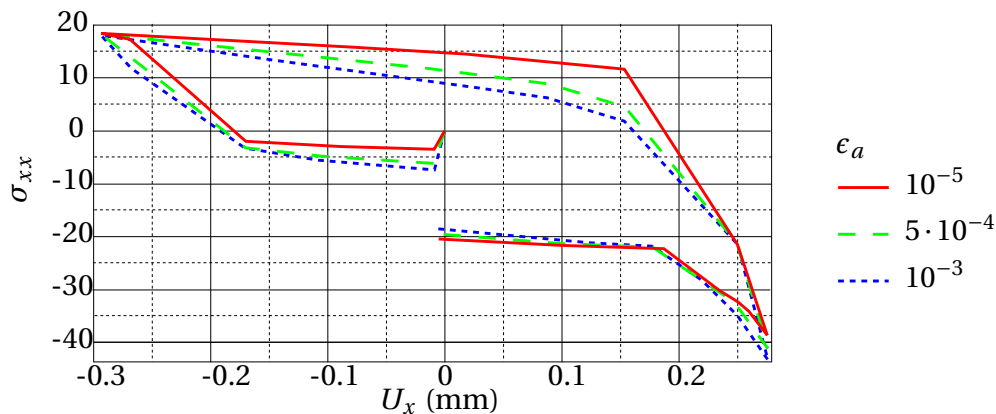
**TABLE 4.4 :** Étude de la longueur de glissement admissible

aux surfaces de contact et d'autre part la composante tangentielle (liée au frottement). Les algorithmes proposés sont classiques :

- méthode par pénalisation : ces méthodes introduisent une approximation au niveau des conditions, afin de régulariser le problème éléments finis. Dans le cas du contact, cela revient à introduire une « raideur de contact » permettant une interpénétration limitée des deux surfaces. Cette raideur devient nulle dans le cas du décollement. Dans le cas du frottement, on introduit une « longueur admissible de glissement »  $\epsilon_{\text{adm}}$  dans le cas de l'adhérence.
- méthode par lagrangien ou lagrangien augmenté : ces méthodes permettent de résoudre *exactement* les conditions de contact ou de frottement. Toutefois, la convergence de l'algorithme est fortement diminuée par rapport aux méthodes par pénalisation, voire impossible dans certains cas.

Dans le cas de notre problème, l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange est impossible sur la composante tangentielle : la méthode ne parvient pas à converger dès le premier pas de temps. Cependant, elle semble tout à fait envisageable pour la composante normale. Nous faisons donc le choix de traiter le contact par un lagrangien augmenté et le frottement par pénalisation.

Le calcul est effectué pour plusieurs valeurs de longueur de glissement admissible, les temps sont récapitulés sur le **Tableau 4.4**. Bien évidemment, ce paramètre a une influence non négligeable sur les résultats : la **Figure 4.10** montre, sur un même graphique, la courbe  $\sigma_{xx}$  en fonction du déplacement d'un nœud situé entre les deux plaques.



**FIGURE 4.10 :** Évolution de la solution en fonction du critère d'erreur LATIN

La longueur admissible de glissement a bien entendu une influence nette lors des phases d'adhérence. D'ailleurs, les déplacements extrêmes atteints lors des phases de

glissement sont identiques quelle que soit la valeur du paramètre. Ce sont essentiellement les contraintes qui sont mal estimées en chaque point, du fait de la « relaxation » permise par une importante longueur de glissement (et donc une grande approximation).

La méthode LATIN n'introduit pas de nouveaux paramètres pour intégrer le comportement de type contact frottant. Toutefois, l'erreur à convergence de la méthode a bien évidemment une influence nette sur le résultat. Il faut savoir que, quelle que soit l'erreur atteinte, les conditions de contact et de frottement seront strictement respectées, au prix toutefois d'une approximation sur l'état des sous-structures environnantes.

### ■ Comparaison des résultats

Le point délicat de cette comparaison est de trouver un critère de discrimination pertinent dans notre cas. Pour cela, nous avons choisi de sélectionner une valeur de paramètre qui donne un temps de calcul relativement similaire (environ 30 minutes), ce qui correspond à une longueur de glissement admissible d'environ  $5 \cdot 10^{-4}$  et une erreur LATIN de  $10^{-3}$ .

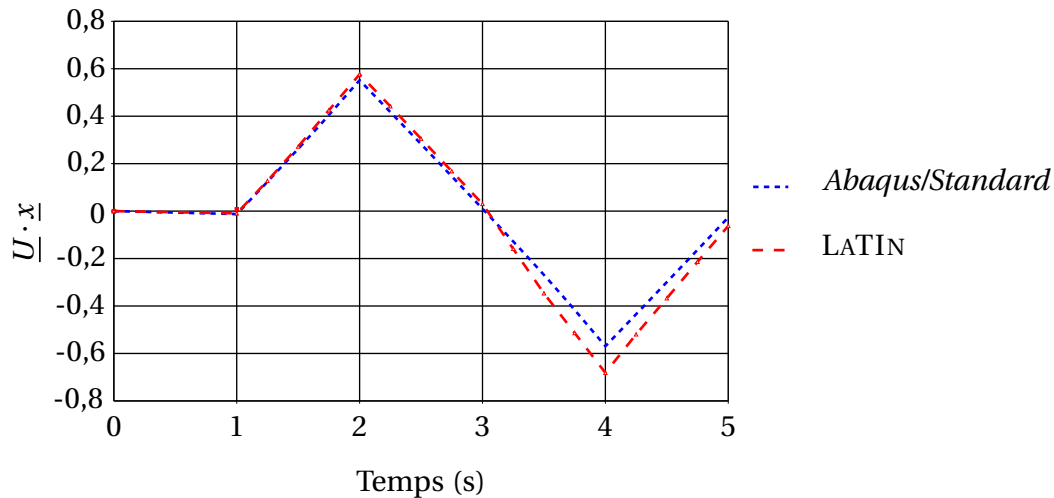


FIGURE 4.11 : Comparaison des résultats obtenus avec les deux logiciels

La courbe de la **Figure 4.11** montre le déplacement au cours du temps d'un point appartenant à la surface de chargement.

Vu le point choisi, loin des surfaces de friction, les résultats semblent relativement similaires, pour un temps de calcul lui aussi quasiment identique. Notons toutefois que la courbe issue de la méthode LATIN diffère légèrement lors de la phase de compression. Les calculs plus précis, menés aussi bien avec la méthode LATIN que par pénalisation avec *Abaqus/Standard* tendent plutôt vers la solution de la courbe rouge.

Par conséquent, l'approche proposée ici n'est pas complètement incohérente par rapport aux calculs classiques. En tant que méthode dédiée, elle offre des résultats

similaires, voire meilleurs, que ceux générés par un code de calcul classique, tout en profitant de performances en termes de temps de calcul similaires. De plus, la robustesse de la méthode l'autorise théoriquement à raffiner la solution autant que l'on souhaite ; *a contrario* des approches classiques qui ne sont pas à même de respecter exactement les conditions d'adhérence.

### 3.2.3 Études paramétriques

Sur ce cas, deux études paramétriques sont menées. La première consiste à faire varier la précharge indépendamment dans chaque boulon. La précharge, équivalente à un déplacement relatif imposé entre la tête et la tige du boulon, peut prendre 5 valeurs différentes, conduisant à  $5^4 = 625$  résolutions. La deuxième étude paramétrique porte sur les coefficients de frottement entre les différents couples de matériau : composite/aluminium entre les plaques, titane/composite entre la plaque médiane et les boulons et titane/aluminium entre la plaque supérieure et les boulons (tête et vis). Chaque paramètre peut prendre jusqu'à 8 valeurs distinctes, conduisant à  $8^3 = 512$  résolutions.

#### ■ Coût de l'étude

L'étude a été faite sur une architecture parallèle. Nous pouvons donc définir le speedup  $S_n$  défini comme le rapport entre le temps d'exécution sur un processeur et celui sur  $n$  processeurs. Les **Tableaux 4.5** et **4.6** récapitulent les temps de calcul, ainsi que les valeurs de speedup et du gain pour chacune des approches.

Nombre de processeurs	Une résolution		625 résolutions		
	Temps de calcul	$S_n$	Temps de calcul	$S_n$	Gain
1	1 796 s	1	23,1 h	1	13,50
4	657 s	2,78	10,1 h	2,29	11,12
8	389 s	4,6	5,82 h	3,97	11,60

**TABLE 4.5 :** Temps de calcul sur l'étude paramétrique des précharges

Nombre de processeurs	Une résolution		512 résolutions		
	Temps de calcul	$S_n$	Temps de calcul	$S_n$	Gain
1	1 796 s	1	18,18 h	1	14,05
4	657 s	2,78	7,96 h	2,28	11,56
8	389 s	4,6	4,64 h	3,92	11,56

**TABLE 4.6 :** Temps de calcul sur l'étude paramétrique des frottements

À la lumière de ces tableaux, on constate qu'il y a une légère perte au niveau du gain de la stratégie multiparamétrique lorsque l'on parallélise la méthode. Ce défaut



		Première résolution	Deuxième résolution	Ratio
Nombre d'itérations LATIN		112	16	7
Temps de calcul en secondes	Calcul des opérateurs	115	0	-
	Partie itérative	1595	274	5,83
	Total	1710	274	6,24

**TABLE 4.7 :** Statistiques diverses des études paramétriques

excepté, les gains restent sensiblement identiques lorsque l'on utilise plusieurs processeurs.

De plus, les gains sont un peu plus faibles que ceux du petit problème précédent. C'est notamment dû au fait que l'influence des coefficients de frottement est beaucoup plus grande, vu la taille des surfaces de contact. Par conséquent, l'initialisation est « moins pertinente » que dans le premier cas.

Une autre étude instructive est d'essayer de déterminer quelles sont les contributions aux gains des différentes étapes. En effet, entre la réduction du nombre d'itérations nécessaires pour parvenir à la convergence de la méthode et le fait que l'on puisse conserver les opérateurs de rigidité d'une résolution à l'autre, il est difficile de savoir d'où vient le gain. Pour cela, le **Tableau 4.7** donne certaines informations pour un début de réponse.

Dans le cas de problèmes où les paramètres ont une influence sur une très grande surface, l'économie du coût des opérateurs de rigidité est finalement très vite noyée dans les itérations nécessaires pour converger. Cette remarque préliminaire expliquera entre autres pourquoi la stratégie multiparamétrique reste très efficace, quand bien même les opérateurs seraient amenés à changer (ce qui est typiquement le cas de l'endommagement).

### 3.3 Endommagement d'un assemblage en flexion 4 points

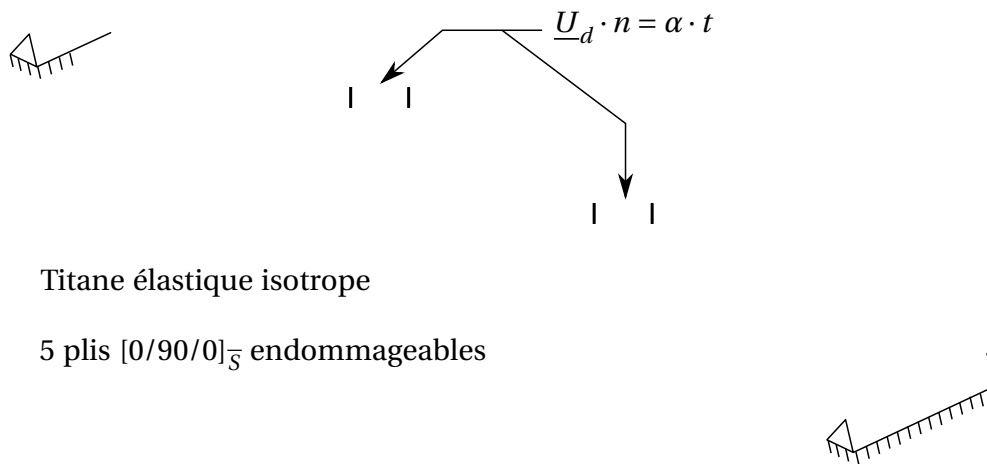
Dans le cas de sous-structures élastiques et linéaires, l'état de l'ensemble de la structure est défini uniquement à partir des grandeurs aux interfaces. Par conséquent, les données à stocker pour l'initialisation sont finalement de taille réduite. En revanche, si les sous-structures deviennent endommageables, le problème est tout autre. L'état d'endommagement, calculé en chaque point de Gauss de chaque sous-structure, n'est absolument pas négligeable en termes d'espace de stockage. On peut donc légitimement se poser la question des données nécessaires à l'initialisation au fil de la stratégie multiparamétrique : doit-on réellement initialiser à partir de l'intégralité des grandeurs de l'étape locale, endommagement compris, ou peut-on se contenter des grandeurs aux interfaces, beaucoup plus simples à stocker ?

Pour répondre à cela, nous appliquerons la méthode sur un problème à un problème avec sous-structures endommageables, en vérifiant le gain dans chacun des cas.

### 3.3.1 Définition du problème

#### ■ Géométrie et chargement

L'objectif du problème présenté **Figure 4.12** est de pouvoir observer l'influence de la perte de rigidité de la structure du fait de son endommagement. La structure étudiée est un assemblage de trois plaques en contact frottant entre elles, et maintenue à l'aide de deux boulons précontraints. La grandeur d'intérêt du problème sera l'effort de réaction au niveau de l'endroit où le chargement (déplacement normal imposé) est appliqué.



**FIGURE 4.12 :** Géométrie et chargement du problème

Le chargement suit le même principe que précédemment, à savoir :

- une première phase de précharge, où le déplacement relatif entre la tête et la tige de la vis atteint une valeur  $U_i$  ;
- une deuxième phase de charge, où la précharge est maintenue et le déplacement normal augmente progressivement jusqu'à sa valeur maximale  $\alpha \cdot T$ .

#### ■ Matériaux

Les boulons sont réalisés en titane, que l'on supposera dans le cadre de cette étude élastique et isotrope. Les plaques sont quant à elles constituées d'un empilement de 5 plis endommageables, liés par des interfaces cohésives. Les coefficients utilisés sont récapitulés dans le **Tableau 4.8**.

#### ■ Discrétisation

Le choix de l'empilement est motivé par la volonté d'utiliser la double symétrie du problème, laquelle n'est pas vérifiée dans le cas de plis orientés autrement qu'à  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ . Par conséquent, nous pouvons ici nous permettre de ne modéliser qu'un quart de la structure entière, ce qui génère 125 184 degrés de liberté.

Le critère de choix quant à la sous-structuration du problème est d'avoir un nombre de degrés de liberté relativement similaire pour chacune des 73 sous-structures créées. Un aperçu du maillage et de la sous-structuration est visible **Figure 4.13**.

### 3.3.2 Étude paramétrique

Pour rappel, le point clef de ce problème est d'étudier la « meilleure » façon d'initialiser le problème :

- données aux interfaces uniquement : c'est le choix fait dans le cas où les sous-structures sont élastiques, choix parfaitement justifié par le fait que le problème n'est défini qu'à partir des grandeurs aux interfaces ;
- données aux interfaces et état d'endommagement des sous-structures : ce choix est beaucoup plus exigeant en termes de volume de données à stocker, mais il est le seul qui permette effectivement d'initialiser à partir de la solution précédente entièrement définie, et non pas qu'une solution incomplète.

#### ■ Définition des paramètres

La grandeur d'intérêt, à savoir l'effort de réaction sur la zone de chargement, est nécessairement dépendante de la raideur de la structure et donc, nécessairement, de son état d'endommagement. C'est par conséquent sur ce dernier que nos grandeurs d'intérêt doivent porter. Nous choisirons, pour ce cas, une grandeur d'interface et une grandeur de sous-structure, à savoir respectivement la précharge  $U_i$  et le seuil d'endommagement critique  $Y^C$ . Les valeurs que pourront prendre ces paramètres seront données par le **Tableau 4.9**.

La **Figure 4.14** illustre la variation de l'effort de réaction au niveau de la surface de chargement en fonction des différents paramètres variables. Comme on pouvait s'y attendre, la précharge tend à diminuer cet effort de réaction puisque vient fortement endommager le matériau, alors que l'augmentation du seuil d'endommagement critique augmente bien entendu sa résistance, et donc l'effort de réaction.

Pli isotrope transverse (1 direction des fibres)							
$E_1$	181,5 GPa	$\nu_{12}$	0,34	$G_{12}$	6,16 GPa	$Y^0$ 0 MPa	$b$ 0,2
$E_2$	9,9 GPa	$\nu_{13}$	0,34	$G_{13}$	6,16 GPa	$Y^C$ variable	$a$ 1
$E_3$	9,9 GPa	$\nu_{13}$	0,49	$G_{13}$	3,08 GPa	$Y_F^C$ 40 MPa	$\tau_c$ 0,01
Interfaces cohésives							
$k_n^0$	7120 N/mm	$k_t^0$	5900 N/mm	$\gamma$	0,4	$\alpha$	1,0
$Y_0$	0	$Y_C$	0,18 MPa	$\tau_c$	0,05	$a$	1
							$n$ 0,5
Boulons élastiques isotropes							
$E$	110 GPa	$\nu$	0,33				

**TABLE 4.8 :** Coefficients matériau d'un pli à 0°

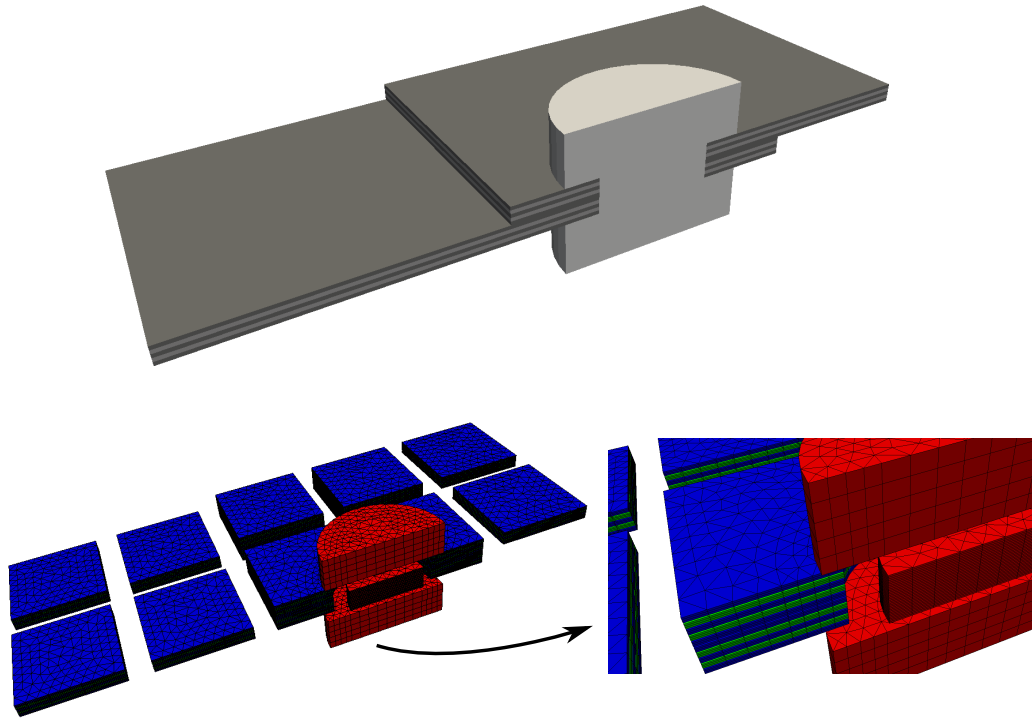


FIGURE 4.13 : Géométrie, maillage et sous-structuration du problème d'assemblage en flexion

Paramètre	Valeur min.	Valeur max.	Pas	Nombre de valeurs
$U_i$	0,01 mm	0,1 mm	0,01 mm	11
$Y^C$	0,1 MPa	1 MPa	0,1 MPa	11

TABLE 4.9 : Tableau de variation des valeurs des paramètres d'entrée

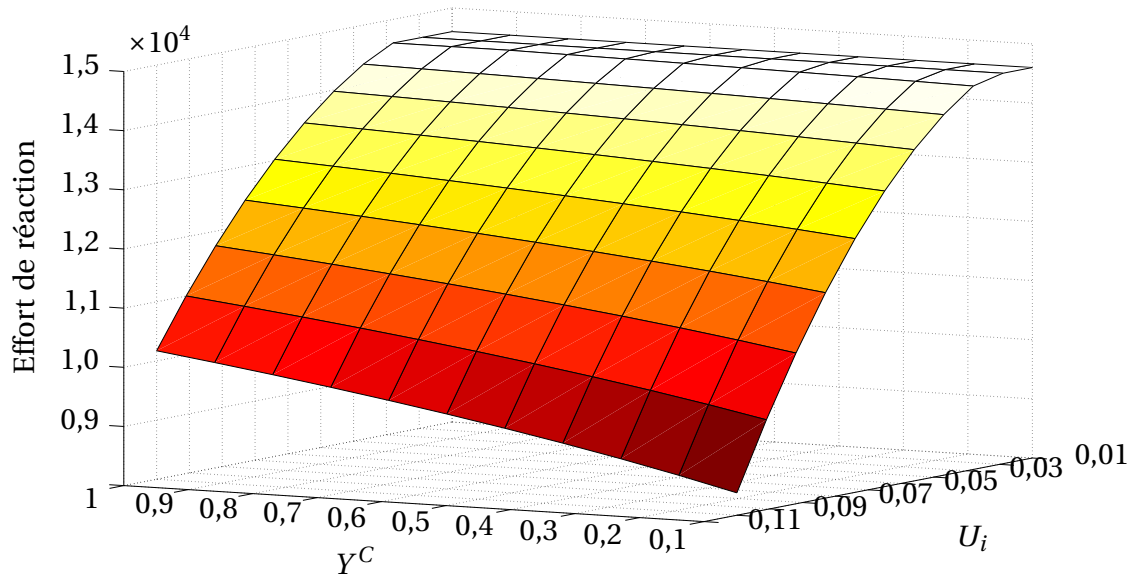


FIGURE 4.14 : Effort de réaction en fonction des paramètres

Initialisation	Mémoire
Opérateurs de rigidité par pas de temps	32 944,608 ko
Déplacements sur les sous-structures	1 001,472 ko
Grandeurs aux interfaces seulement	1 069,7 ko
<i>idem</i> avec forces thermodynamiques d'endommagement des SST	2 661,4 ko
<i>idem</i> avec intégralité des variables internes des SST	5 314,4 ko

TABLE 4.10 : Tableau de variation des valeurs des paramètres variables

### ■ Comparaison des deux approches

La première différence majeure entre les deux approches est, bien entendu, la quantité de données à transmettre d'un calcul à l'autre. Afin de relativiser la différence entre ces approches, le **Tableau 4.10** affiche un aperçu de la taille de stockage de différentes données nécessaires au calcul.

La quantité de données à stocker est effectivement multipliée par 5 entre les deux types d'approches. Cependant, pour relativiser l'occupation mémoire, il est intéressant de comparer cela à la place utilisée par les opérateurs de rigidité. En termes de mémoire vive, le type d'initialisation n'a, en réalité, quasiment aucune influence perceptible. Quant à l'espace de stockage, les données nécessaires sont finalement assez réduites dans les deux cas.

En termes de temps de calcul toutefois, la différence de gain est très différente, comme l'indique le **Tableau 4.11**. En effet, si l'on ne stocke pas les variables internes, en particulier les forces thermodynamiques d'endommagement, celles-ci sont nulles lors de l'étape locale par laquelle commence l'algorithme. Toutes les sous-structures ne voient alors plus aucun endommagement, et la première étape linéaire considère

donc les structures comme saines. Tout le processus itératif pour déterminer l'état d'endommagement doit alors être refait. Le gain est donc parfaitement nul, même si l'état des interfaces (endommagement, déplacement et efforts) est réutilisé.

Type d'initialisation	1 résolution	121 résolutions	Gain
Interfaces seulement	810 s	95 590 s	1,02
Interfaces et SST	810 s	7 159 s	13,7

TABLE 4.11 : Temps CPU de l'étude paramétrique de l'assemblage endommageable

## 4 Conclusions sur la stratégie multiparamétrique

En dépit du fait que les gains peuvent largement varier en fonction du type de problème abordé et de « l'échantillonnage » de l'espace des paramètres, ces gains restent néanmoins très intéressants au regard de la simplicité de mise en œuvre. Dans les cas étudiés dans ce rapport, et malgré la présence de fortes non-linéarités, les gains offerts par la stratégie multiparamétrique se sont toujours avérés positifs.

Une autre observation importante concerne les données à inclure dans la solution d'initialisation. Dans le cas de sous-structures où l'endommagement atteint des taux importants, typiquement l'exemple de flexion 4 points présenté dans la partie 3.3, l'efficacité de la stratégie multiparamétrique est fortement dépendante de la richesse des données de la solution initiale. Dans les cas les plus extrêmes, les gains offerts par cette stratégie sont faibles si l'état des variables internes de chaque sous-structure n'est pas stocké. Par conséquent, il est nettement préférable d'inclure dans la solution d'initialisation l'état des variables internes des sous-structures.

De plus, des améliorations notables peuvent être apportées à ce type d'approche, notamment en termes de recherche de la meilleure solution d'initialisation. Pour cela, les travaux abordés dans [Soulie et Boucard, 2009] sont très prometteurs grâce à l'utilisation d'un métamodèle pour déterminer la pertinence de l'initialisation.

Les exemples présentés ici, de taille finalement relativement modeste, sont une bonne présentation des outils mis au point pour le traitement de non-linéarités matériau au sein d'une structure. Le chapitre suivant est dédié au traitement de structures aéronautiques, avec un éclairage « calcul haute performance » nécessaire pour traiter des problèmes de très grande taille.



# Chapitre 5

## Validation et mise en œuvre de la stratégie

*Dans ce chapitre, différentes applications seront présentées avec une très forte connotation « Calcul Haute Performance ». Nous présenterons donc des calculs exigeants sur deux aspects : leur taille d'abord, les fortes non-linéarités matériaux ensuite.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Parallélisation de la stratégie</b> . . . . .	<b>116</b>
1.1	Répartition des données . . . . .	116
1.2	Parallélisation du processus itératif de la méthode LATIN . . . . .	117
1.3	Étude des performances en parallèle . . . . .	118
<b>2</b>	<b>Assemblage à grand nombre d'éléments de fixation</b> . . . . .	<b>123</b>
2.1	Présentation du problème . . . . .	123
2.2	Déroulement du calcul . . . . .	125
2.3	Résultats . . . . .	127
<b>3</b>	<b>Conclusion partielle</b> . . . . .	<b>131</b>

---



LA MÉTHODE LATIN repose notamment sur une méthode de décomposition de domaine, laquelle permet une parallélisation du problème relativement naturelle. En effet, en décomposant le problème global en plusieurs sous-problèmes locaux (un par sous-structure et un par interface), indépendants les uns des autres, il est possible d'utiliser au mieux les architectures parallèles.

Le premier exemple abordé dans ce chapitre n'est pas, à proprement parler, un problème difficile à traiter. Il sert principalement à mettre en évidence les particularités de la méthode, les précautions à prendre lors de la parallélisation des calculs, ainsi que les limites à ne pas dépasser. Dans le cadre de cet exemple, la notion de *speedup* sera abordée pour quantifier les performances de la méthode en calcul parallèle.

Le deuxième et dernier exemple applique la méthode présentée dans ces travaux dans le cas d'un problème d'assemblage à plusieurs fixations, impliquant donc un très grand nombre de degrés de liberté. Le comportement des matériaux utilisés dans ce cas va du simple comportement plastique au mésomodèle complet. L'objectif de cet exemple est d'étudier les performances pratiques de l'algorithme sur un cas de très grande taille.

## 1 Parallélisation de la stratégie

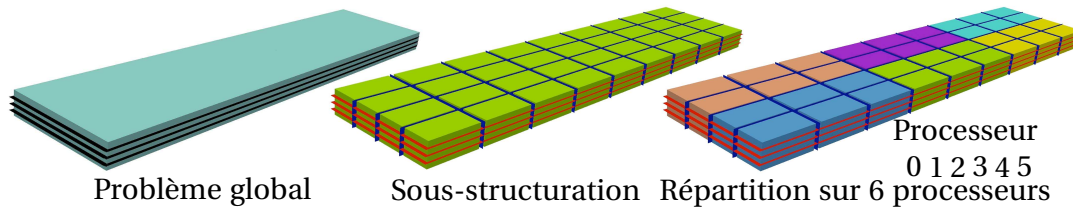
L'implantation parallèle de la stratégie présentée dans ces travaux repose sur plusieurs travaux précédents. Le code, réalisé en C++, s'appuie sur une bibliothèque d'outils génériques mise au point et régulièrement mise à jour par Hugo Leclerc [Leclerc, 2005], outils dédiés à la construction de problèmes éléments finis à partir de la définition d'une loi de comportement. Le code est le résultat des travaux de plusieurs thèses. Celle de David Violeau [Violeau, 2007] a permis de mettre en place une première version de l'algorithme. L'implantation des outils des bibliothèques MPI par Alain Caignot [Caignot, 2009] a permis de faire tourner le code « réellement » en parallèle sur des architectures de type cluster. Enfin, la parallélisation du problème macroscopique, obligatoire dans le cas de problèmes sur des stratifiés, a été mise au point par Pierre Kerfriden [Kerfriden, 2009].

Le code est utilisé sur le cluster de calcul du laboratoire. Les calculs présentés dans ce chapitre sont exécutés sur des processeurs à deux cœurs cadencés à 3 GHz (Bi Xeon Quad Core 5450), chaque processeur utilisant 4 Gio de mémoire vive. Dans la suite du manuscrit, sera appelé « processeur » une unité de calcul, à savoir un cœur dans notre cas.

### 1.1 Répartition des données

La répartition des données est importante pour minimiser les échanges entre les différents processeurs. Comme nous le verrons par la suite, les seules données partagées sont les champs des interfaces communes à plusieurs processeurs. Par consé-

quent, il est nécessaire de minimiser leur nombre, lequel dépend directement de la répartition des sous-structures sur les différents processeurs. Pour cela, nous utilisons la librairie METIS [Karypis et Kumar, 1998], moyennant l'ajout de contraintes de continuité entre les sous-structures affectées sur un même processeur, permettant d'obtenir une décomposition quasi optimale en termes d'échange de données (voir **Figure 5.1**).



**FIGURE 5.1** : Sous-structuration et répartition des données

Chaque processeur peut alors procéder à la lecture des maillages fournis par l'utilisateur, puis à la construction des opérateurs associés. La construction automatique des interfaces passe nécessairement par de nombreuses et coûteuses communications entre les processeurs, mais cette phase d'initialisation n'a, heureusement, lieu qu'une seule fois dans le calcul. Les interfaces partagées par plusieurs processeurs sont calculées en double sur chacun des processeurs, ce qui implique donc des calculs redondants. Toutefois, ce choix permet de limiter les transferts de champs d'interface uniquement à l'étape locale, lorsque l'on vient traiter les interfaces en question.

## 1.2 Parallélisation du processus itératif de la méthode LATIN

Si les problèmes micro 1 et micro 2 sont, par définition, résolus indépendamment sur chaque sous-structure, le problème macro est, quant à lui, défini sur l'ensemble des interfaces. Une conséquence majeure, en termes de parallélisation, de ce type de problème est la création de processus de transferts d'information de type « tous vers un ». Autrement dit, chaque processeur doit transmettre les champs des interfaces qui lui sont affectées vers un processeur unique, chargé de résoudre le problème macro.

Cette difficulté est, dans les faits, contournée par la parallélisation du problème macro par l'intermédiaire d'une méthode de décomposition de domaine (la BDD). Le problème macro, posé sur l'ensemble des interfaces, est découpé en plusieurs sous-domaines, chacun étant les interfaces vues par un seul processeur (voir **Figure 5.2**). Les interfaces communes à deux processeurs sont appelées « macro interfaces » et constituent le seul lieu d'échange de données entre les différents processeurs. La résolution du problème macro revient alors à effectuer quelques itérations du solveur BDD, ce qui minimise grandement la quantité de données transitant d'un processeur à l'autre. Ce traitement particulier est souvent vu comme une troisième échelle « super macroscopique ».

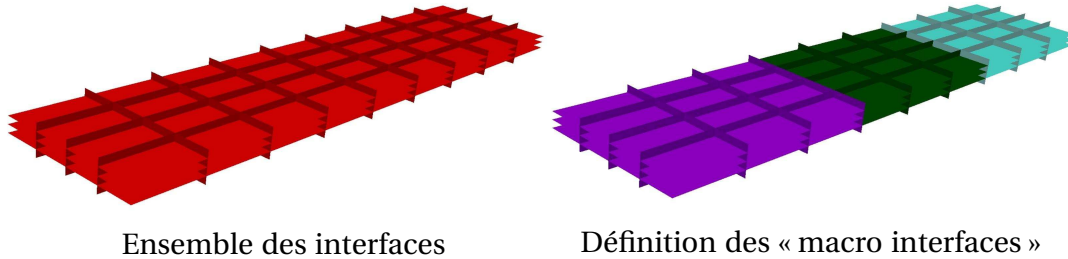


FIGURE 5.2 : Traitement du problème macro sur 3 processeurs

Lors du passage de l'étape linéaire à l'étape locale, un nouvel échange d'informations a lieu au niveau des interfaces partagées entre les différentes sous-structures, afin de définir le problème à résoudre au niveau des interfaces. Par conséquent, les opérations de résolution sur les interfaces partagées sont redondantes, et faites sur chaque processeur concerné. Ceci permet d'économiser un nouveau transfert de champ après l'étape locale.

### 1.3 Étude des performances en parallèle

#### 1.3.1 Problème de l'équilibrage

Le coût numérique d'un problème à résoudre dépend non seulement de sa taille, mais aussi de sa complexité. Les algorithmes de la bibliothèque METIS ne prennent que le premier aspect en compte, puisqu'il est difficile de juger du second. Typiquement, dans le cas du calcul de composites stratifiés, le traitement des interfaces cohésives semble, de façon intuitive, beaucoup plus coûteux que le traitement d'interfaces parfaites ou de contact, dont l'écriture est directe et explicite. C'est pour cela que la direction de recherche  $k_0$ , dans le cas d'interfaces cohésives, est prise égale à l'infini, ce qui revient à choisir  $\widehat{W}_{n+1/2}^E = \dot{W}_n^E$ . Ce choix permet non seulement d'assurer la convergence de la méthode, quitte à légèrement pénaliser son taux (ce qui n'est pas incohérent avec la volonté de traiter des problèmes fortement non-linéaires), mais aussi de rendre explicite la relation entre le saut de déplacement et les efforts dans l'interface, et donc de limiter le déséquilibre de la charge de calcul entre les différents processeurs.

De la même façon, une sous-structure au comportement plastique et endommageable aura, pour METIS, le même « poids » qu'une sous-structure au comportement linéaire élastique. Dans les faits, pourtant, cela change énormément de choses en termes d'équilibrage de charge entre les processeurs : lors de l'étape locale, une sous-structure non-linéaire implique une évaluation des contraintes en chaque point de Gauss pour la résolution de lois non-linéaires locales, ce qui finit par avoir un coût non négligeable. Mis à part une amélioration de la répartition des données par METIS, il n'y a, pour l'heure, aucune solution viable implantée dans le code utilisé.

### 1.3.2 Définition du problème de base

L'étude du *speedup* consiste à étudier les temps de calcul en fonction du nombre de processeurs. Par conséquent, il est important de s'assurer que, pour ce type de mesure, les charges entre les différents processeurs soient relativement similaires. Par conséquent, le problème de base est défini à partir de la volonté d'utiliser un très grand nombre de sous-structures strictement identiques. Le plus simple est donc de supposer un cube, découpé en  $n$  petits cubes le long de chaque arête, générant donc  $n \times n \times n$  sous-structures.

Pour l'exemple considéré ci-dessous où  $n = 20$ , le problème conduit à la définition de  $20 \times 20 \times 20 = 8000$  sous-structures, chacune possédant 192 degrés de liberté. Toutes les interfaces intérieures (c'est-à-dire n'étant pas une interface de bord) ont un comportement parfait (déplacement relatif imposé à zéro). Chaque sous-structure a un comportement élastique linéaire, ces choix permettant un très bon équilibre de charge entre les différents processeurs. En posant  $T_1$  le temps CPU pour la résolution du problème sur un unique processeur et  $T_n$  le temps CPU pour la résolution du problème sur  $n$  processeurs, on définit le *speedup*  $S_n$  sur  $n$  processeurs de la façon suivante :

$$S_n = \frac{T_1}{T_n}$$

### 1.3.3 Étude du *speedup*

Le *speedup* « parfait » sous-entend qu'avec  $n$  processeurs, le temps de calcul est divisé par  $n$ , et revient donc à dire  $S_n = n$ . On définit aussi le demi-*speedup*, lequel est égal à la moitié du *speedup* parfait, et qui est l'objectif visé par la méthode. La courbe de la **Figure 5.3** donne un aperçu de l'évolution du *speedup* en fonction du nombre de processeurs.

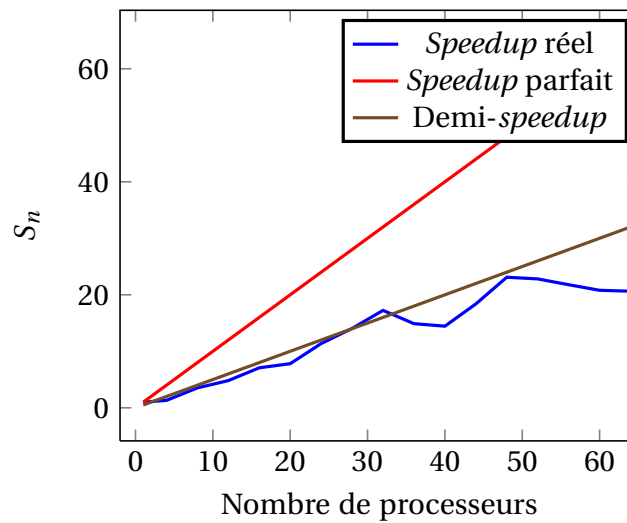


FIGURE 5.3 : *Speedup* du problème à 8000 sous-structures

Cette figure met en évidence un comportement irrégulier, notamment au-delà de 32 processeurs utilisés. Le *speedup* semble se stabiliser, voire parfois décroître. La contribution de chacune des étapes de la méthode LATIN, en termes de *speedup*, est illustrée par la **Figure 5.4**. Si la parallélisation des problèmes micros et de l'étape locale est très satisfaisante, le problème macroscopique pénalise fortement le *speedup* du problème global.

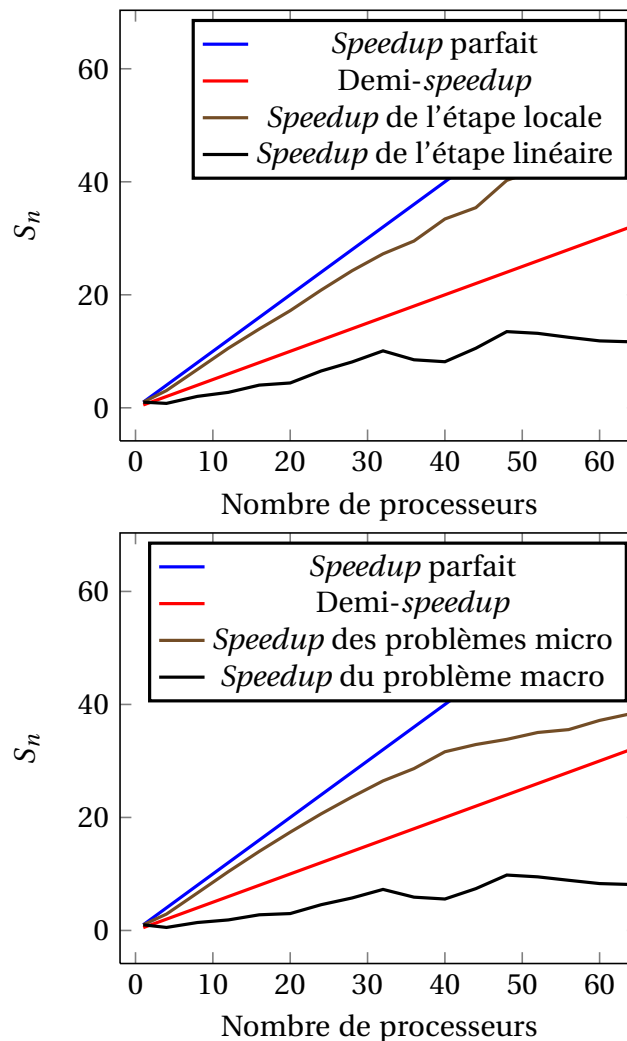


FIGURE 5.4 : Contribution au *speedup* de chacune des étapes LATIN

Dans ce cas test, nous nous sommes volontairement placés dans le cas d'un problème macro beaucoup plus grand que les problèmes micros : le problème macro est défini par un système unique à plus de 200000 degrés de liberté, les problèmes micros par 8000 systèmes à 192 degrés de liberté. Par conséquent, la **Figure 5.5** illustre déjà le fait qu'un tiers du temps de calcul sur un processeur est alloué à la résolution du problème macro. Sur 64 processeurs, ce temps de calcul passe à plus de 80% !

### 1.3.4 Précautions à prendre

Dans les faits, le problème macro ne pénalise réellement le *speedup* de la méthode qu'à partir d'un certain seuil, lequel dépend directement du nombre d'interfaces, mais aussi de la complexité géométrique des zones de frontières entre les sous-domaines. Typiquement, en subdivisant notre domaine en un nombre plus élevé de sous-structures ( $40 \times 40 \times 40 = 64\,000$  sous-structures), la courbe de *speedup*

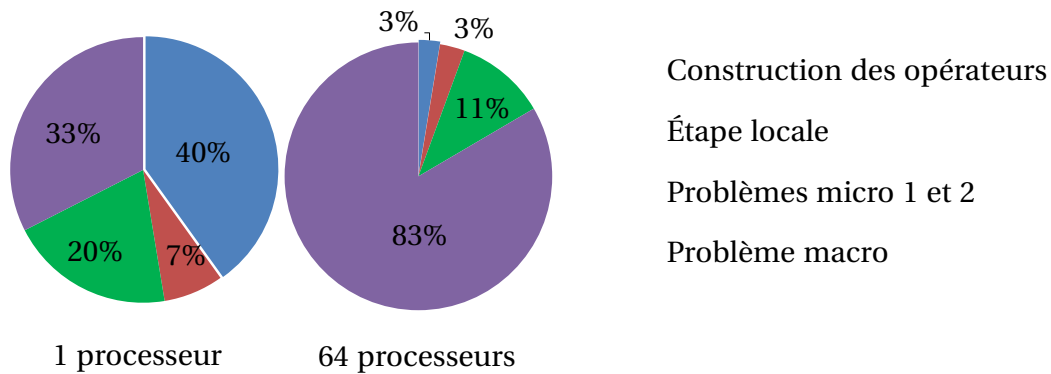


FIGURE 5.5 : Évolution de la contribution en temps de calcul

(Figure 5.6) reste autour du demi-*speedup* sur un nombre bien plus élevé de processeurs.

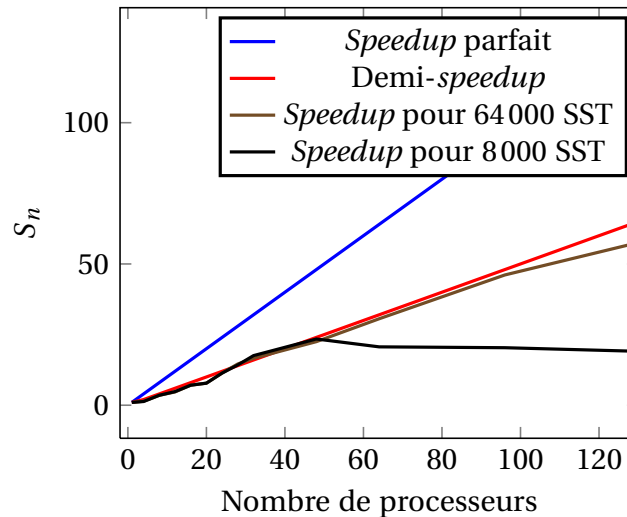


FIGURE 5.6 : Évolution du *speedup* en fonction du nombre de sous-structures

Les performances du calcul parallèle du problème macro sont donc fortement dépendantes du nombre de degrés de liberté (et donc du nombre d'interfaces que contient le problème) qu'il contient : plus il est grand, plus le *speedup* est correct. Toutefois, dans les cas que nous serons amenés à résoudre dans la suite de ce chapitre, cette contrainte n'est pas forcément limitante, et ce pour deux raisons :

- le nombre d'interfaces, et donc de degrés de liberté à traiter lors du problème macro, est relativement élevé du fait de la décomposition de chaque pli en plusieurs sous-structures ;
- le temps de calcul du problème macro est, dans les faits et contrairement à ce cas d'illustration, presque négligeable devant celui des problèmes micros ; que sa parallélisation soit déficiente ne se ressent donc presque pas en termes de temps de calcul total.

## 2 Assemblage à grand nombre d'éléments de fixation

L'exemple traité ici, inspiré d'un cas-test du projet BOJCAS<sup>1</sup>, est fait de trois plaques composites assemblées à l'aide de nombreux éléments de fixation. L'objectif de ce problème est de tester la stratégie (ainsi que le code développé) sur la résolution d'un problème non-linéaire à très grand nombre de degrés de liberté.

### 2.1 Présentation du problème

#### ■ Géométrie et chargement

Les trois plaques stratifiées sont trouées et disposées de telle sorte que les trous coïncident. Elles sont ensuite assemblées par l'intermédiaire de 20 boulons, disposés autour du trou, comme on peut le voir sur la **Figure 5.7**. Sur cette même figure, le chargement imposé à la structure est présenté et se décompose donc en deux temps bien distincts :

- tout d'abord, les boulons sont préchargés. Pour cela, un déplacement relatif est appliqué entre la tête et la tige de la vis, conduisant à une déformation axiale d'environ  $10^{-3}$  ;
- puis un déplacement est imposé aux deux extrémités opposées de l'assemblage, augmentant jusqu'à faire glisser les plaques l'une sur l'autre.

Un jeu initial est présent entre les tiges des vis et les plaques, permettant une petite phase de glissement lorsque la limite d'adhérence sera dépassée entre la tête et la plaque supérieure. Ce jeu permet de limiter l'endommagement des plis lors de la phase de précharge et, par conséquent, de pouvoir traiter la phase de précharge en statique. D'autres cas, sans jeu initial, ont été traités et l'endommagement du composite était tel que la phase de précharge a dû être faite en quasi-statique pour permettre à l'algorithme de converger rapidement.

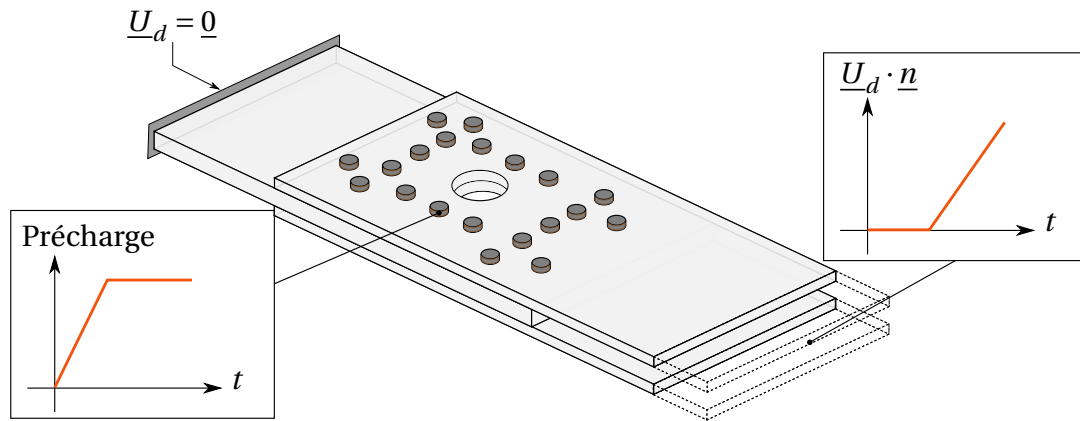
#### ■ Matériaux

Les plaques stratifiées sont composées d'un empilement de 5 plis à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  alternativement pour les extérieures, 10 plis pour à  $[0/90/0/90/0]_S$  l'intérieure. Nous utilisons le mésomodèle standard d'endommagement pour représenter le comportement du matériau. Par conséquent, les plis ont un comportement isotrope transverse et endommageable ; la plasticité n'est ici pas prise en compte et l'état d'endommagement est défini par trois variables. Les interfaces entre les plis sont isotropes transverses et endommageables, l'état d'endommagement étant ici défini par une unique variable. Quant aux boulons, leur comportement est volontairement simple, à savoir élastique et isotrope, aux coefficients proches de ceux du titane. Un récapitulatif des différents paramètres matériaux est donné par le **Tableau 5.1**.

---

1. BOLted Joints in Composite Aircraft Structures (<http://www.smr.ch/bojcas/>)





Composite  $[0/90/0]_5$  endommageable  
Titane (isotrope plastique)

FIGURE 5.7 : Géométrie et chargement du problème

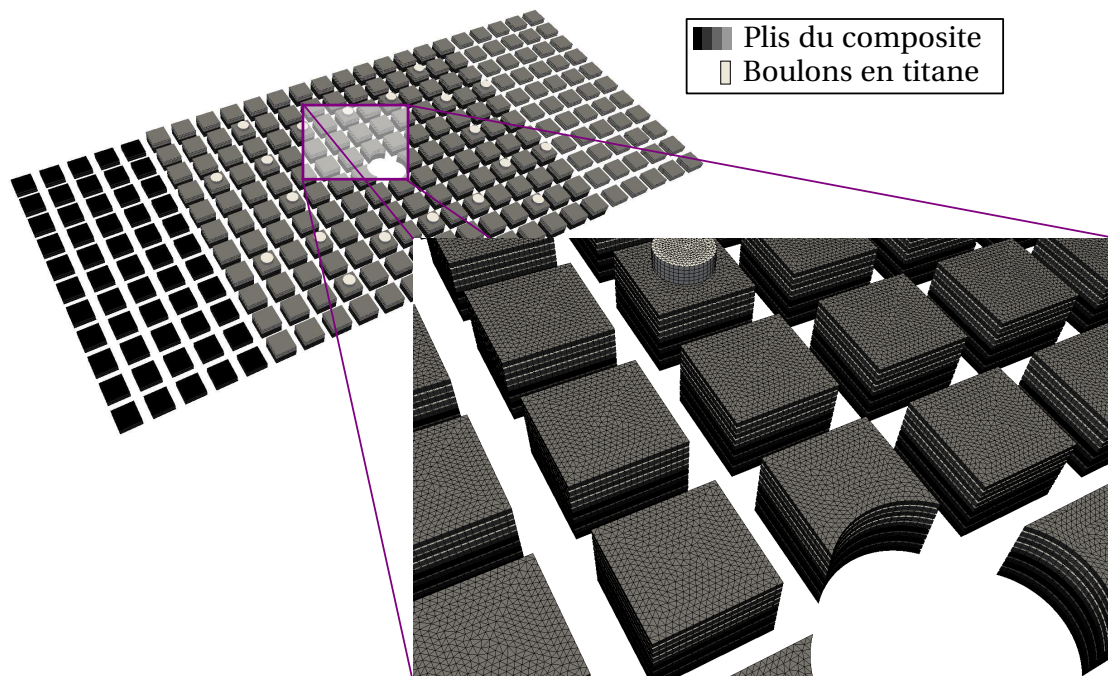
Pli isotrope transverse (1 direction des fibres)									
$E_1$	181,5 GPa	$\nu_{12}$	0,34	$G_{12}$	6,13 GPa	$Y^0$	0 MPa	$b$	0,2
$E_2$	9,9 GPa	$\nu_{13}$	0,34	$G_{13}$	6,13 GPa	$Y^C$	0,5 MPa	$a$	1
$E_3$	9,9 GPa	$\nu_{13}$	0,49	$G_{13}$	3,08 GPa	$Y_F^C$	40 MPa	$\tau_c$	0,05
Interfaces cohésives									
$k_n^0$	7120 N/mm	$k_t^0$	5900 N/mm	$\gamma$	0,4	$\alpha$	1,0		
$Y_0$	0	$Y_C$	0,18 MPa	$\tau_c$	0,01	$a$	1	$n$	0,5
Boulons élastiques isotropes									
$E$	110 GPa	$\nu$	0,33						

TABLE 5.1 : Paramètres matériau utilisés pour l'assemblage

### ■ Maillage et sous-structuration

Le maillage doit être suffisamment raffiné à la fois dans l'épaisseur des plis, pour représenter correctement la flexion, et dans leur plan, pour ne pas introduire d'irrégularités au niveau du contact entre les plis. Par conséquent, le maillage, présenté **Figure 5.8**, conduit à un problème à plus de  $18 \cdot 10^6$  degrés de liberté.

Les  $2 \times 5$  plis sont décomposés en 208 sous-structures, les 20 boulons en 2 sous-structures, conduisant ainsi à 2120 sous-structures pour le problème global aux nombres de degrés de liberté sensiblement équivalents. En termes d'interfaces, pour un peu moins de 6000 interfaces automatiquement créées, 1664 sont des interfaces cohésives, 373 sont des interfaces de contact avec ou sans jeu et 3900 sont des interfaces à déplacement relatif imposé (dont 20 non nul).



**FIGURE 5.8 :** Maillage et sous-structuration du problème

Contrairement au cas d'étude précédent, la taille du problème macro généré ici n'est plus aussi disproportionnée qu'auparavant (environ 54000 degrés de liberté pour le problème macro, contre environ 9000 en moyenne pour chacun des 2120 problème micro). Par conséquent, et nous le verrons par la suite, la parallélisation difficile du problème macroscopique n'a que peu d'impact sur le temps de calcul global.

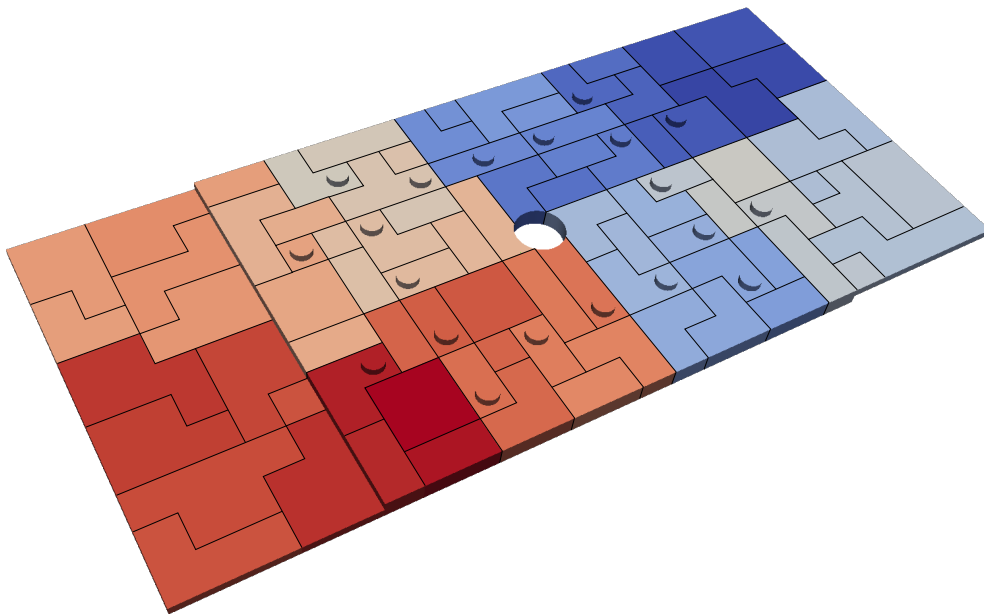
## 2.2 Déroulement du calcul

### ■ Parallélisation

Le nombre de sous-structures permet de pouvoir lancer un calcul sur un grand

nombre de processeurs. Par conséquent, un premier calcul a été lancé sur 80 processeurs, décomposé comme l'illustre la **Figure 5.9**. Les cas de géométries relativement complexes, comme ceux du problème abordé, mettent en évidence les limites du partitionnement automatique pour limiter les échanges au niveau des interfaces. Afin d'aller plus loin en terme de chargement, un deuxième calcul a quant à lui été lancé sur 160 processeurs. Le déplacement final est doublé et le nombre de pas de temps lors de la phase de chargement passe de 10 à 20.

En pratique, que ce soit pour 80 ou 160 processeurs, les temps d'échanges entre eux restent très réduits et parfaitement négligeables devant les temps de calcul des itérations LATIN. En revanche, le problème macroscopique, traité par l'intermédiaire d'une BDD qui assimile la répartition sur les processeurs à une décomposition en sous-domaines, peut être grandement pénalisé par un trop grand nombre de « macro-interfaces ». Une façon d'observer le mauvais conditionnement du problème macro est de contrôler le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence du solveur BDD. On considère généralement que le solveur se comporte de façon optimale lorsque le nombre d'itérations est inférieur à 10. Ici, il tourne généralement aux alentours de 40.



**FIGURE 5.9 :** Répartition sur 80 processeurs

### ■ Temps de calcul

Toutefois, même si la parallélisation du problème macro n'est pas optimale, le temps de calcul qui lui est alloué reste largement négligeable, notamment face à la résolution des problèmes micros. Le **Tableau 5.2** récapitule la contribution en temps

Partie du calcul	Calcul A		Calcul B	
	Temps (h)	Temps (%)	Temps (h)	Temps (%)
Calcul entier	208,3	100	173,1	100
Calcul des opérateurs	0,26	0,2	0,1	< 0,1
Étape linéaire	200,4	96,2	167,8	96,9
<i>Problèmes micros</i>	198,8	95,4	165,9	95,3
<i>Problème macro</i>	1,6	0,8	2,7	1,6
Étape locale	3,9	1,9	2,4	1,4
Calcul de l'erreur	1,1	0,5	0,7	0,4
Échanges entre processeurs	0,08	< 0,1	0,09	< 0,1

**Calcul A** : 10 pas de chargement, 80 processeurs  
**Calcul B** : 20 pas de chargement, 160 processeurs

TABLE 5.2 : Temps de calcul de l'assemblage à multiples fixations

de calcul de chaque étape de l'algorithme. Le calcul A correspond à 10 pas de chargement sur 80 processeurs, le calcul B correspond à 20 pas de chargement sur 160 processeurs.

L'étape linéaire, et notamment le calcul des problèmes micros, correspond ainsi à 95% du temps de calcul global. Il est important de préciser qu'ici, pour des raisons techniques, il est impossible de différencier le temps de calcul dédié à la résolution elle-même, et celui dédié au ré-assemblage des opérateurs de rigidité lorsque l'endommagement vient à changer. Toutefois, il est certain que c'est bien le gradient conjugué qui monopolise les ressources, et non l'assemblage.

Une autre observation importante a trait à l'étape locale. Bien que cette étape soit composée de très nombreux problèmes non-linéaires en chaque point de Gauss de chaque élément des sous-structures comme des interfaces, le fait que les problèmes soient locaux fait que le temps de résolution est finalement très faible face au reste.

Enfin, si l'on compare les deux calculs, il est possible de faire quelques déductions quant à la parallélisation du code de calcul. Comme on pouvait s'y attendre, le problème macro souffre énormément du découpage en sous-domaines ; son calcul prend d'ailleurs plus de temps sur 160 processeurs que sur 80 ! Toutefois, les autres chiffres sont excessivement rassurants, puisque les pourcentages restent relativement constants, que l'on soit sur 80 ou 160 processeurs. Doubler le nombre de processeurs et le nombre de pas de temps permet de conserver un temps de calcul tout à fait similaire, ce qui permet de s'assurer de l'extensibilité en temps de la méthode.

## 2.3 Résultats

### ■ Convergence de la méthode

Dans le cas de nombreuses interfaces aux comportements différents, la définition de l'indicateur d'erreur LATIN est différente de celle que l'on utilise habituellement (Équation (3.45)). On emploie ici une erreur basée sur la non-vérification du com-

portement d'interface par les grandeurs de l'étape linéaire. Beaucoup plus exigeante, cette définition a cependant l'avantage de donner un sens plus « physique » à l'erreur LATIN. Par conséquent, le critère d'arrêt en erreur est généralement revu à la hausse et est fixé autour de  $10^{-3}$ .

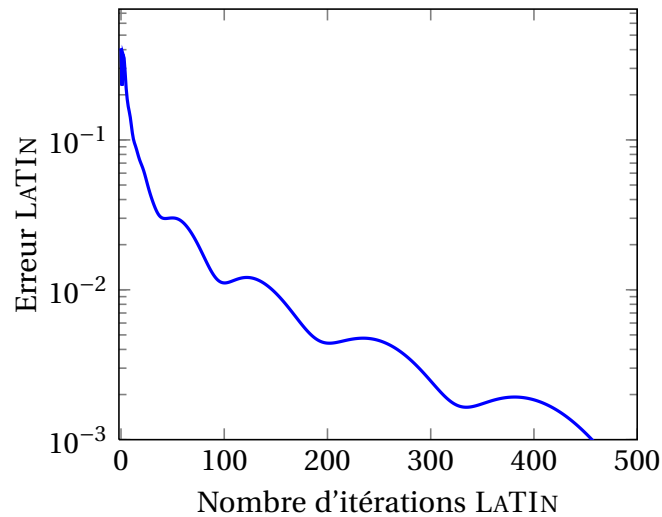


FIGURE 5.10 : Évolution de l'erreur LATIN sur le problème d'assemblage

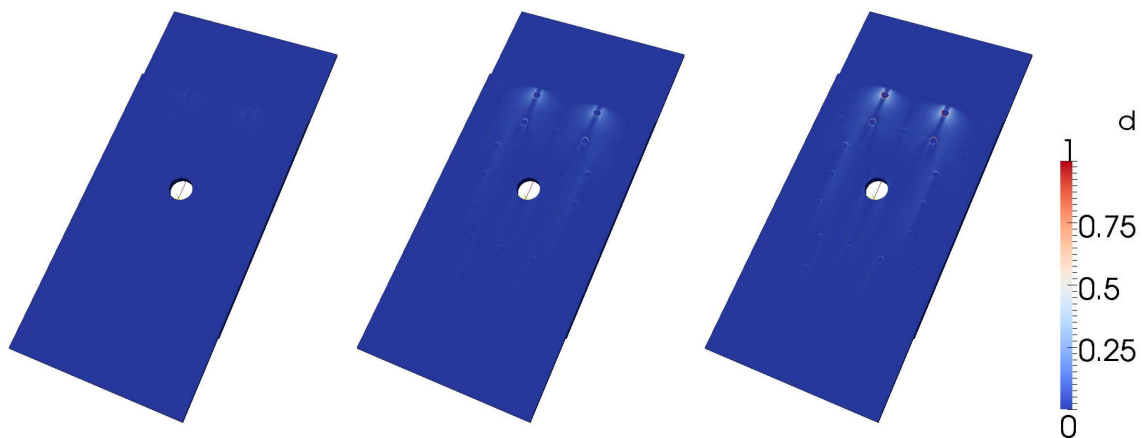
La **Figure 5.10** montre l'évolution de cette erreur, appelée abusivement « en relation de comportement », au cours des itérations LATIN. Le calcul a été arrêté ici à 480 itérations, pour atteindre une erreur finale de  $10^{-3}$ . Notons au passage que l'erreur sur l'endommagement est elle aussi prise en compte, mais atteint très rapidement une valeur négligeable (de l'ordre de  $10^{-6}$ ) au bout d'une centaine d'itérations.

Une stabilisation de l'erreur apparaît régulièrement, alors qu'elle ne décroît que très peu au cours des itérations. Ce comportement est dû à des instabilités locales au niveau des zones où se concentrent les fortes non-linéarités, typiquement autour des éléments de fixation. Il faut alors de nombreuses itérations pour parvenir à saisir une instabilité pourtant très locale.

Ce phénomène est déjà bien connu et a été notamment rencontré dans [Guidault *et al.*, 2008] et [Kerfriden *et al.*, 2009]. Afin de ne pas avoir à itérer sur l'intégralité de la structure pour capturer un phénomène très local, des sous-itérations sont effectuées sur quelques sous-structures au voisinage du phénomène. Le gain en temps est généralement remarquable puisque l'influence d'une instabilité est généralement très locale. Cependant, dans le cas d'assemblage, l'application de cette astuce est plus difficile. En effet, les non-linéarités sont diverses, du fait des multiples fixations, et la définition de « boîte » spatiale où l'on sous-itére semble difficile. De plus, cela suppose que l'instabilité n'a un effet que très local, ce qui n'est pas forcément évident dans le cadre des assemblages de structures endommageables.

### ■ Aperçu des résultats

La visualisation et le post-traitement des résultats nécessitent des outils adaptés, capables d'afficher des problèmes de grandes tailles et contenant un très grand nombre de données. Pour cela, il a été nécessaire d'utiliser une version spécifique du logiciel libre de visualisation *ParaView*<sup>2</sup>, compilée afin de pouvoir utiliser plusieurs cartes graphiques en parallèle. L'utilisation de 8 cartes graphiques<sup>3</sup> permet d'afficher un résultat (une grandeur définie en chaque nœud ou élément pour un pas de temps) en 2 à 10 minutes, donnant une idée de la complexité de l'étape.



**FIGURE 5.11 :** Évolution de l'endommagement diffus sur les pas de temps 2, 6, 10

Une première grandeur intéressante à observer est l'évolution de l'endommagement au cours du temps. La **Figure 5.11** montre les pas de temps de 2, 6 et 10. L'évolution se concentre autour de quelques fixations, alors qu'il reste relativement modéré partout ailleurs. C'est cette observation qui a motivé la décision de faire un second calcul, sur un chargement doublé, afin d'observer la propagation de l'endommagement après.

Lorsque l'on change le point de vue et que l'on observe du côté des têtes de vis, l'endommagement croît beaucoup plus rapidement. En effet, le frottement entre les têtes de vis et le pli extérieur induit des contraintes non négligeables lors du chargement, comme on peut le voir sur la **Figure 5.12**. On observe alors un endommagement essentiellement concentré autour des fixations dans un premier temps, puis qui commence à s'initier à partir du trou ensuite. Sur cet exemple, on atteint pratiquement la ruine de la structure, et donc dépasse largement les limites du modèle matériau utilisé. Toutefois, cela illustre la robustesse de l'algorithme utilisé.

La **Figure 5.13** montre la déformée finale de l'assemblage, ainsi que l'état des contraintes. Ce qui est appelé ici « contraintes équivalentes », exprimée en MPa, vaut

2. <http://www.paraview.org/>

3. Modèle : *GeForce 8800 Ultra* à 768 Mo de mémoire vive

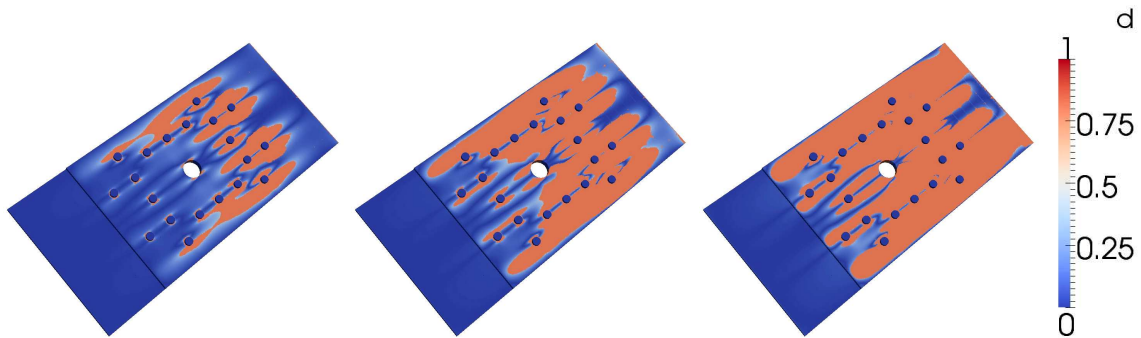


FIGURE 5.12 : Évolution de l'endommagement diffus sur les pas de temps 5, 10, 15

$\sqrt{\sum_i \sum_{j \geq i} \sigma_{ij}^2}$ . Cette contrainte n'a pas vraiment de sens, et encore moins lors de l'étude des matériaux composites. Toutefois, elle permet d'avoir une appréciation de l'état des contraintes dans le matériau et de limiter le nombre de post-traitements à réaliser. La valeur de 1000 MPa laisse penser que le chargement est proche de la limite à rupture des fibres.

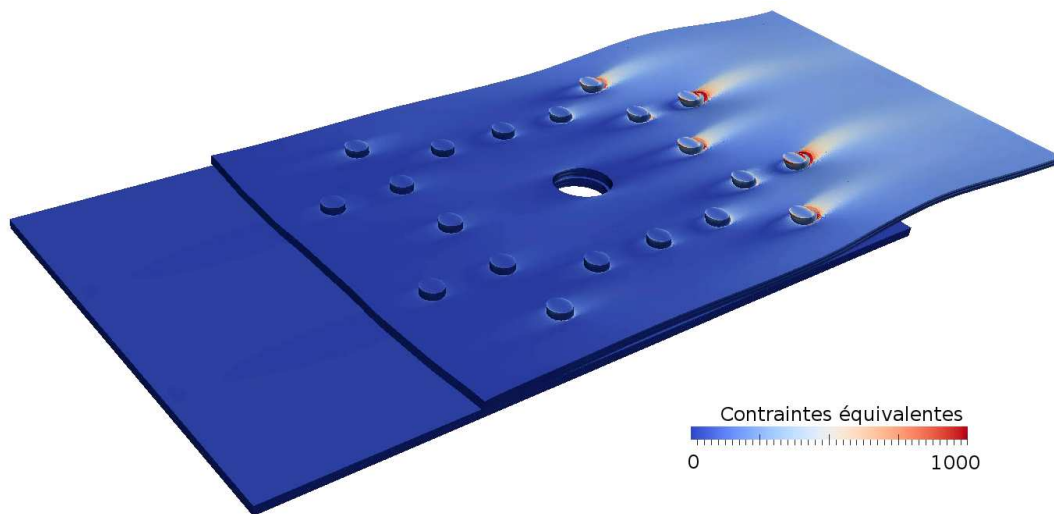
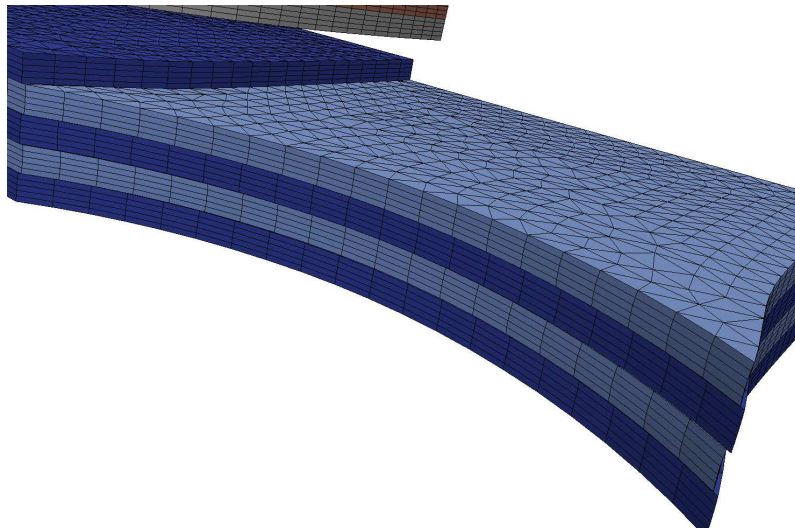


FIGURE 5.13 : Déformée finale de l'assemblage (amplification de 50)

Les détails locaux, comme le délaminage aux alentours du trou ou le glissement d'une plaque sur l'autre (voir **Figure 5.14**), sont aussi observés. Notons toutefois que dans ce cas précis, l'endommagement des plis et le glissement de chaque plaque l'une sur l'autre viennent limiter la dégradation de l'interpli, et donc le délaminage. Ce phénomène n'est pas forcément observé dans la réalité, où le délaminage reste un mode de dégradation prépondérant autour des éléments de fixation. Cette différence souligne les difficultés d'identification des coefficients régissant les interfaces, ces coefficients correspondant ici à une tenue élevée par rapport aux matériaux utilisés classiquement dans le cas des assemblages boulonnés.





**FIGURE 5.14 :** Déformée (amplifiée 50 fois) finale de quelques sous-structures autour du trou. *Les couleurs représentent les matériaux différents*

### 3 Conclusion partielle

Cette étude a permis de vérifier plusieurs points concernant son l'implantation parallèle du code et la convergence de la méthode dans le cas d'un problème de très grande taille entièrement non-linéaire.

En effet, le premier point à vérifier dans le cadre « calcul haute performance » dans lequel nous nous plaçons est la pertinence de l'utilisation des architectures de calcul parallèles. Pour cela, une donnée importante à quantifier est le *speedup* de la méthode. Le premier cas, très simple, a permis de montrer que la méthode bénéficie d'un *speedup* remarquable, excepté au niveau du problème macro. Toutefois, dans les cas pratiques, ce dernier demeure largement négligeable en terme de temps de calcul par rapport aux problèmes micros. Cette observation est de très bonne augure en vue d'augmenter encore la taille des problèmes qu'on peut traiter *via* l'augmentation du nombre de processeurs utilisés, que le problème macro ne pénalisera finalement que très peu.

Le deuxième et dernier point important concerne la convergence de l'algorithme dans le cas de problèmes fortement non-linéaires. Jusque là, le comportement de la méthode LATIN a été éprouvée sur des problèmes de grande taille uniquement avec des non-linéarités au niveau des interfaces seulement. Les non-linéarités des sous-structures ne viennent finalement pas, sur le cas étudié ici, augmenter de façon significative le nombre d'itérations nécessaires à convergence.





# Conclusion

Au cours de ce travail, une stratégie de calcul pour la simulation d'assemblages comportant des pièces en matériaux composites stratifiés a été développée et appliquée notamment à des études paramétriques. Cette stratégie repose sur une idée simple, à savoir l'utilisation en synergie d'un mésomodèle d'endommagement et de la méthode LATIN. En effet, la méthode de décomposition associée à cette dernière se prête particulièrement bien à la division du composite en plis et interfaces imposée par le mésomodèle. L'assemblage est donc scindé d'abord par composant, puis par plis et interfaces le cas échéant. Cette décomposition génère ainsi un nombre important de sous-structures et d'interfaces, lesquelles forment autant de sous-problèmes indépendants, et donc une parallélisation naturelle du calcul.

Cette stratégie de calcul a été implantée au sein d'un code de calcul Éléments Finis pour permettre la simulation tridimensionnelle d'assemblages de pièces composites en quasi-statique. Particulièrement adaptée aux architectures parallèles, l'utilisation conjointe du code de calcul et du récent cluster acquis par le laboratoire a permis d'aborder des problèmes d'une taille et d'une complexité importantes, jamais traités ici auparavant. Le code de calcul, basé sur une première version développée au sein du laboratoire pour le traitement d'assemblages quasi-statiques, a vu le développement de nouvelles fonctionnalités :

- prise en charge des non-linéarités au sein des sous-structures *via* l'implantation de plusieurs lois de comportement non-linéaires (endommagement isotrope ou orthotrope, plasticité à écrouissage isotrope, couplage éventuel entre les deux) ;
- choix du solveur utilisé lors de l'étape linéaire (LDL<sup>t</sup>, Cholesky, gradient conjugué préconditionné) ;
- amélioration de l'indicateur d'erreur, pour prendre en compte l'endommagement éventuel des sous-structures ;
- application de la stratégie multiparamétrique.

L'intégration des non-linéarités matériau impacte l'algorithme sur plusieurs points. La définition de l'étape linéaire, tout d'abord, est intrinsèquement liée au choix de la direction de recherche « verticale » dans le cas de lois endommageables. Ce choix implique la résolution, à chaque itération LATIN, d'un problème linéaire à endommagement donné lors de l'étape linéaire. Cependant, contrairement au cas élastique, l'opérateur de rigidité est amené à changer régulièrement avec l'évolution

de l'endommagement au sein de la structure. Par conséquent, un solveur direct de type Cholesky n'est plus viable.

C'est pourquoi nous avons fait le choix d'utiliser un gradient conjugué pour résoudre le problème linéaire sur les sous-structures endommageables. Il n'est donc plus nécessaire de décomposer l'opérateur de rigidité. Cependant, les performances de ce type de solveur sont intimement liées à la qualité du préconditionneur utilisé. L'utilisation d'un préconditionneur issu d'une décomposition de Cholesky incomplète de l'opérateur de rigidité du matériau « sain » montre des résultats tout à fait satisfaisants, et n'a à être calculé qu'une fois pour toutes, lors de l'initialisation de la méthode.

Une autre conséquence de l'évolution des non-linéarités matériau tient à la définition de l'indicateur d'erreur. En effet, l'état global de la structure n'étant plus défini uniquement à partir des grandeurs aux interfaces, il est nécessaire de prendre en compte la variation des variables internes dans l'indicateur.

Cela permet de se rendre compte que la localisation des phénomènes d'endommagement et de plasticité induisent un ralentissement notable de la convergence de la méthode. Dans le cas où ces non-linéarités sont localisées dans une zone réduite spatialement, une méthode classique est de « sous-itérer » sur cette zone jusqu'à les capturer correctement. Toutefois, les problèmes d'assemblages traités ici ne permettent pas de faire l'hypothèse d'unicité de ces zones, ou même de pouvoir les délimiter de manière pertinente. Par conséquent, le seul choix qui s'offre à nous, faute de mieux, est de les traiter tous à la fois, dans leur globalité et sans « sous-itérer ».

L'introduction de variabilités sur les paramètres matériaux des lois de comportement est ici prise en compte par le biais d'une étude paramétrique : à partir de la discrétisation de l'espace des paramètres d'entrée, on résout autant de problèmes qu'il y a de jeux de paramètres. La solution du problème est alors une surface de réponse, représentant généralement l'évolution d'une certaine grandeur d'intérêt en fonction des paramètres d'entrée.

Ce type d'étude implique donc la résolution d'un grand nombre de problèmes « mécaniquement similaires ». La stratégie multiparamétrique, intimement liée à la méthode LATIN, permet de réutiliser les solutions précédemment calculées pour initialiser le calcul en cours, afin de réduire de façon notable le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à convergence. Toutefois, il est crucial d'initialiser le calcul avec une solution complète, état des variables internes compris, sous peine de voir s'effondrer le gain observé par la stratégie multiparamétrique.

À la suite de ces travaux, une perspective à court terme concerne justement l'utilisation de la stratégie multiparamétrique. Pour l'instant, le choix de la solution servant à l'initialisation est arbitraire et fait *a priori*, en balayant l'espace des paramètres suivant un ordre pré-défini. Des procédures de choix plus fines peuvent être envisagées :

- la solution précédemment calculée la plus proche dans l'espace des paramètres ;

- la solution la plus proche dans l'espace des solutions au sens d'un certain métamodèle raffiné progressivement ;
- un mélange des deux approches précédentes.

Cette mise en œuvre permet à la stratégie multiparamétrique d'offrir des gains très intéressants, tout en automatisant le choix de la solution d'initialisation sans intervention de l'utilisateur.

Nous avons pu mener à bien, grâce à l'utilisation du cluster de calcul du LMT-Cachan et le développement d'un code de calcul parallèle, des problèmes jamais traités au laboratoire auparavant ( $18 \cdot 10^6$  degrés de liberté avec endommagement anisotrope et plasticité). Le projet européen MAAXIMUS a pour ambition de calculer un tronçon d'avion entier, générant un problème atteignant le milliard de degrés de liberté. La future extension du cluster (1000 processeurs à court terme) devrait permettre rapidement de passer le cap d'une étude paramétrique d'un problème à plusieurs centaines de millions de degrés de liberté.

Une perspective à moyen terme concerne l'enrichissement du modèle de matériau utilisé lors de ces travaux. La première amélioration à apporter implique le comportement des plis en compression sens fibre, comportement non-linéaire à partir d'un certain point du fait du micro-flambage des fibres. Nous avons fait, dans ces travaux, le choix de négliger ce point. Toutefois, de nombreuses études démontrent que sur certains cas, cette hypothèse est erronée. Par conséquent, une première amélioration serait d'implanter un comportement non-linéaire en compression, bien que cela puisse poser de nouveaux problèmes de convergence, du fait de la très forte localité de ces phénomènes.

Un autre point est l'implantation du mésomodèle amélioré. Ce dernier répond à une limitation du mésomodèle standard, qui ne modélise pas correctement les effets d'épaisseur des plis du stratifié. En incluant la densité de fissuration des plis au sein des lois de comportement, le mésomodèle amélioré pallie la mauvaise représentation du mésomodèle standard dans le cas de plis dits « épais ».

Une dernière voie de recherche, qui s'inscrirait dans une vision à long terme, serait d'utiliser une représentation des inconnues avec PGD. La représentation incrémentale, choisie ici dans ces travaux, finit par être excessivement gourmande en mémoire, notamment lorsque le nombre de pas de temps vient à augmenter. La représentation PGD permet de s'affranchir de ce type de limitation et offre donc de très bons gains en termes de mémoire. Dans le cas de problèmes d'endommagement traités ici, le fait de pouvoir raffiner le pas de temps sans être limité offre forcément des perspectives très intéressantes.

*The research leading to these results was funded by the European Community's Seventh Framework Program FP7/2007-2013 under Grant Agreement n°213371. <http://www.maaximus.eu>*



## Annexe A

# Reproduction des essais d'identification du mésomodèle

Cette annexe est dédiée à la comparaison des différentes courbes tracées dans [Le Dantec, 1989] avec la simulation des essais d'identification du mésomodèle effectuée avec le code de recherche développé au cours de ces travaux.

### 1 Essai n°1

Le premier essai sert essentiellement à identifier les paramètres élastiques dans le sens des fibres, ainsi que la contrainte à rupture des fibres. La **Figure A.1** compare les résultats des essais avec ceux récupérés à la suite de la simulation.

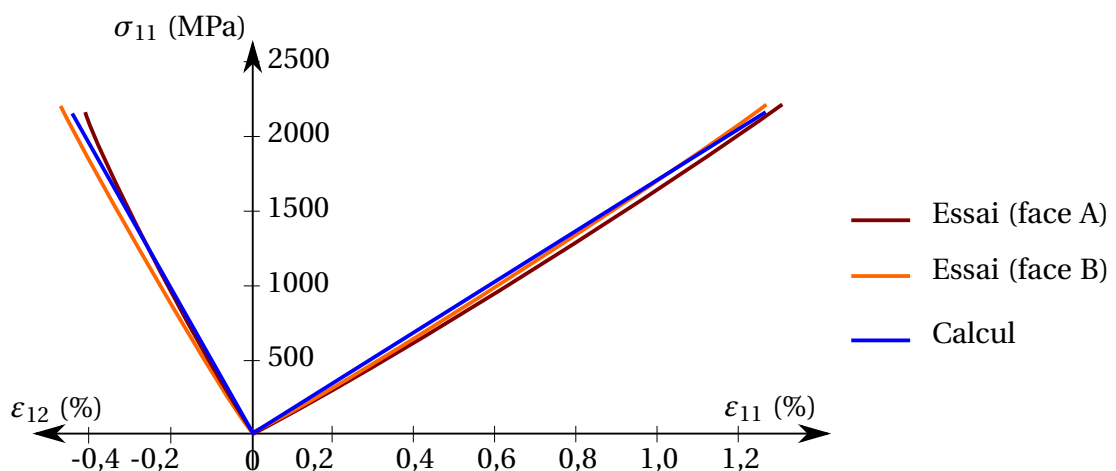


FIGURE A.1 : Essai 1 : traction sur un unidirectionnel IM6/914

## 2 Essai n°3

Le troisième essai est essentiel pour caractériser les paramètres intervenant dans l'évolution des lois d'endommagement, ainsi le coefficient de couplage en plasticité.

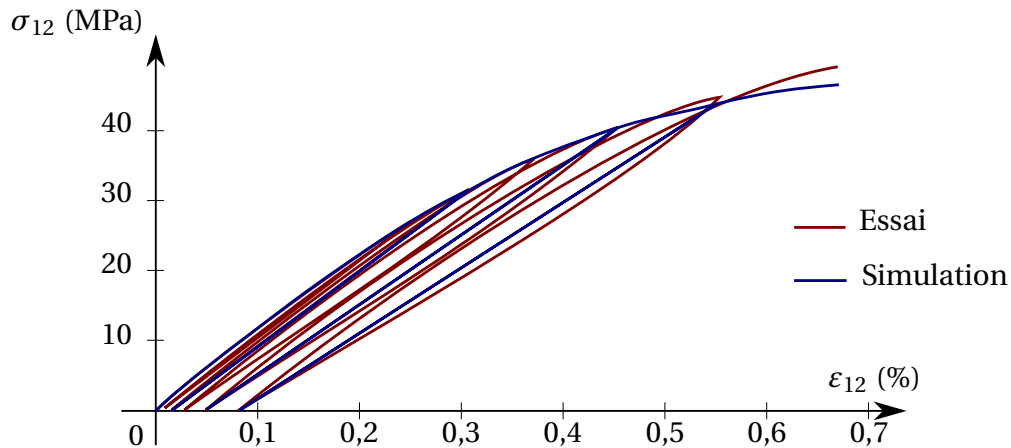


FIGURE A.2 : Essai 3 : Courbe d'érouissage en cisaillement d'un T300/914 [45]<sub>8</sub>

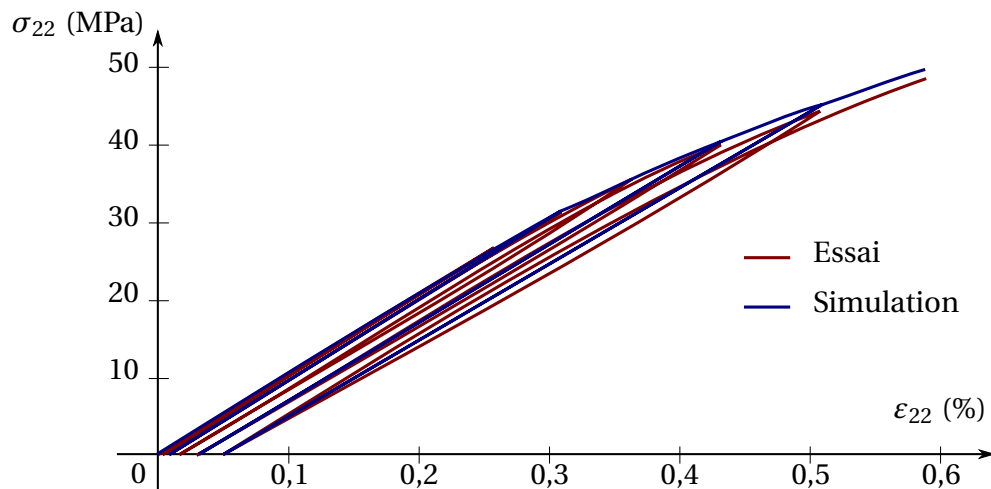


FIGURE A.3 : Essai 3 : Courbe d'érouissage en traction transverse d'un T300/914 [45]<sub>8</sub>

## 3 Essai n°5

Le quatrième essai sert essentiellement à identifier les paramètres intervenant dans la loi de plasticité. Le cinquième, quant à lui, permet de corriger le comportement jusqu'à rupture du pli élémentaire. En effet, l'essai 3 utilise un empilement unidirectionnel, lequel est par conséquent très sensible aux défauts géométriques et

de chargement du matériau. Un empilement croisé, ici  $[\pm 67,5]_{2S}$ , permet de caractériser le comportement du matériau en traction transverse, tout en diminuant sensiblement l'effet des défauts.

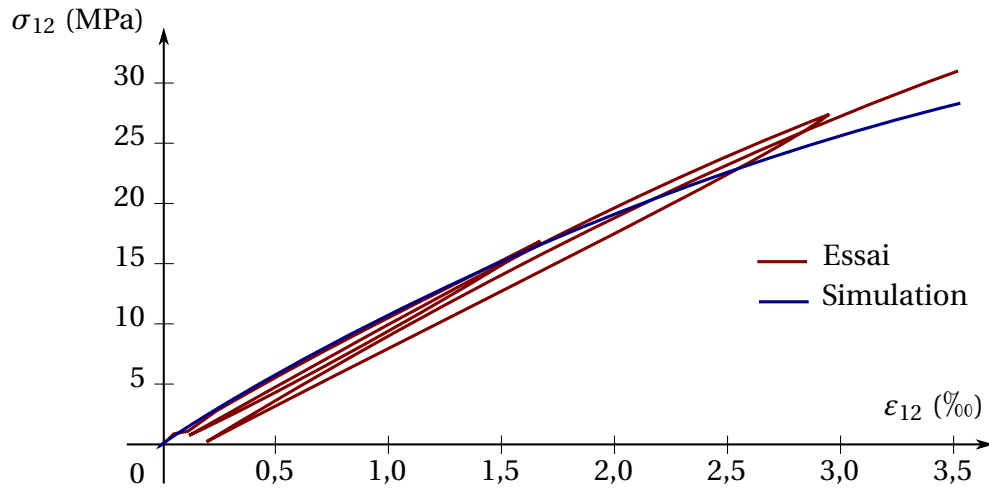


FIGURE A.4 : Essai 3 : Courbe de réponse en cisaillement d'un T300/914  $[\pm 67,5]_{2S}$





# Bibliographie

- [Alkatan *et al.*, 2007] ALKATAN, F., STEPHAN, P., DAIDIE, A. et GUILLOT, J. (2007). Equivalent axial stiffness of various components in bolted joints subjected to axial loading. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(8):589–598.
- [Allen, 1994] ALLEN, D. H. (1994). Damage evolution in laminates. *Composite Materials Series*, pages 79–79.
- [Allen, 2001] ALLEN, D. H. (2001). Homogenization principles and their application to continuum damage mechanics. *Composites Science and Technology*, 61(15): 2223–2230.
- [Allen *et al.*, 1987a] ALLEN, D. H., HARRIS, C. E. et GROVES, S. E. (1987a). A thermo-mechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage–i. theoretical development. *International Journal of Solids and Structures*, 23(9): 1301–1318.
- [Allen *et al.*, 1987b] ALLEN, D. H., HARRIS, C. E. et GROVES, S. E. (1987b). A thermo-mechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage–ii. application to matrix cracking in laminated composites. *International Journal of Solids and Structures*, 23(9):1319–1338.
- [Allix *et al.*, 2000] ALLIX, O., GUÉDRA-DEGEORGES, D., GUINARD, S. et VINET, A. (2000). Analyse de la tenue aux impacts à faible vitesse et faible énergie des stratifiés composites par la mécanique de l’endommagement. *Mécanique & Industries*, 1(1):27–35.
- [Allix et Ladevèze, 1992] ALLIX, O. et LADEVÈZE, P. (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, 22(4):235–242.
- [Allix *et al.*, 1995] ALLIX, O., LADEVÈZE, P. et CORIGLIANO, A. (1995). Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 31(1):61–74.
- [Allix *et al.*, 1994] ALLIX, O., LADEVÈZE, P. et VITTECOQ, E. (1994). Modelling and identification of the mechanical behaviour of composite laminates in compression. *Composites science and technology*, 51(1):35–42.
- [Arora *et al.*, 1991] ARORA, J. S., CHAHANDE, A. I. et PAENG, J. K. (1991). Multiplier methods for engineering optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, 32(7):1485–1525.
- [Azzi et Tsai, 1965] AZZI, V. D. et TSAI, S. W. (1965). Anisotropic strength of composites. *Experimental Mechanics*, 5(9):283–288.

- [Beacher et Ingra, 1981] BEACHER, G. B. et INGRA, T. S. (1981). Stochastic fem in settlement predictions. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 107(4):449–463.
- [Berthelot, 2003] BERTHELOT, J.-M. (2003). Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates : Static and fatigue loading. *Applied Mechanics Reviews*, 56(1):111–147.
- [Berthelot et Corre, 2000] BERTHELOT, J. M. et CORRE, J. F. L. (2000). A model for transverse cracking and delamination in cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 60(7):1055–1066.
- [Berthelot *et al.*, 1996] BERTHELOT, J. M., LEBLOND, P., MAHI, A. E. et CORRE, J. F. L. (1996). Transverse cracking of cross-ply laminates : Part 1. analysis. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 27(10):989–1001.
- [Blanzé *et al.*, 1996] BLANZÉ, C., CHAMPANEY, L., COGNARD, J. Y. et LADEVÈZE, P. (1996). A modular approach to structure assembly computations : application to contact problems. *Engineering Computations : Int J for Computer-Aided Engineering*, 13(1):15–32.
- [Blanzé *et al.*, 2000] BLANZÉ, C., CHAMPANEY, L. et VÉDRINE, P. (2000). Contact problems in the design of a superconducting quadrupole prototype. *Engineering Computations*, 17(2/3):136–153.
- [Blázquez *et al.*, 2009] BLÁZQUEZ, A., MANTIC, V., PARÍS, F. et MCCARTNEY, N. L. (2009). Bem analysis of damage progress in 0/90 laminates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(6):762–769.
- [Bordreuil et Hochard, 2004] BORDREUIL, C. et HOCHARD, C. (2004). Finite element computation of woven ply laminated composite structures up to rupture. *Applied Composite Materials*, 11(3):127–143.
- [Boucard et Champaney, 2003a] BOUCARD, P.-A. et CHAMPANEY, L. (2003a). Approche multirésolution pour l'étude paramétrique d'assemblages par contact et frottement. In *6e Colloque National en Calcul des Structures*.
- [Boucard et Champaney, 2003b] BOUCARD, P. A. et CHAMPANEY, L. (2003b). A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9):1259–1281.
- [Boucard et Ladeveze, 1999] BOUCARD, P. A. et LADEVÈZE, P. (1999). A multiple solution method for non-linear structural mechanics. *Mechanical Engineering*, 50(5): 317–328.
- [Boucard *et al.*, 2011] BOUCARD, P. A., ODIÈVRE, D. et GATUINGT, F. (2011). A parallel and multiscale strategy for the parametric study of transient dynamic problems with friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [Bouvet *et al.*, 2009] BOUVET, C., CASTANIÉ, B., BIZEUL, M. et BARRAU, J.-J. (2009). Low velocity impact modelling in laminate composite panels with discrete interface elements. *International Journal of Solids and Structures*, 46(14-15):2809–2821.

- [Brandt, 1977] BRANDT, A. (1977). Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of computation*, 31(138):333–390.
- [Brezzi et Fortin, 1991] BREZZI, F. et FORTIN, M. (1991). *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA.
- [Budiansky et Fleck, 1993] BUDIANSKY, B. et FLECK, N. A. (1993). Compressive failure of fibre composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(1):183–211.
- [Caflich, 1998] CAFLISCH, R. E. (1998). Monte carlo and quasi-monte carlo methods. *Acta numerica*, 1998:1–49.
- [Caignot, 2009] CAIGNOT, A. (2009). *Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Caen.
- [Camanho et al., 2003] CAMANHO, P. P., DAVILA, C. G. et de MOURA, M. F. (2003). Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 37(16):1415–1438.
- [Chabrand et al., 1998] CHABRAND, P., DUBOIS, F. et RAOUS, M. (1998). Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4-8):97–108. Recent Advances in Contact Mechanics.
- [Champaney et al., 2008] CHAMPANEY, L., BOUCARD, P. A. et GUINARD, S. (2008). Adaptive multi-analysis strategy for contact problems with friction. *Computational Mechanics*, 42(2):305–315.
- [Champaney et al., 1997] CHAMPANEY, L., COGNARD, J. Y., DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P. (1997). Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19(4):253–263.
- [Champaney et al., 1999] CHAMPANEY, L., COGNARD, J. Y. et LADEVÈZE, P. (1999). Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers & Structures*, 73(1-5):249–266.
- [Chung et Ip, 2000] CHUNG, K. F. et IP, K. H. (2000). Finite element modeling of bolted connections between cold-formed steel strips and hot rolled steel plates under static shear loading. *Engineering Structures*, 22(10):1271–1284.
- [Cognard et al., 1999] COGNARD, J. Y., LADEVÈZE, P. et TALBOT, P. (1999). A large time increment approach for thermo-mechanical problems. *Advances in Engineering Software*, 30(9-11):583–593.
- [Corigliano et Allix, 2000] CORIGLIANO, A. et ALLIX, O. (2000). Some aspects of interlaminar degradation in composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185(2-4):203–224.
- [Corigliano et Mariani, 2001] CORIGLIANO, A. et MARIANI, S. (2001). Simulation of damage in composites by means of interface models : parameter identification. *Composites Science and Technology*, 61(15):2299–2315.
- [Cornuault, 1998] CORNUAULT, C. (1998). Aircraft structures mechanical modelling and optimization. *Nouvelle Revue Aeronautique Astronautique*, (1):35–53.

- [Courant et Hilbert, 1962] COURANT, R. et HILBERT, D. (1962). *Methods of mathematical physics*, volume 1. CUP Archive.
- [Cresta, 2008] CRESTA, P. (2008). *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- [Cresta *et al.*, 2007] CRESTA, P., ALLIX, O., REY, C. et GUINARD, S. (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1436–1446. Domain Decomposition Methods : recent advances and new challenges in engineering.
- [Cros, 2003] CROS, J.-M. (2003). A preconditioner for the Schur complement domain decomposition method. *In* in SCIENCE, D. D. M. et ENGINEERING, éditeurs : *I. Herrera, D. Keyes, O. Widlund and R. Yates*, pages 373–380. National Autonomous University of Mexico (UNAM).
- [Crossman et Wang, 1982] CROSSMAN, F. W. et WANG, A. S. D. (1982). The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates. *Damage in composite materials*, pages 118–139.
- [Dávila *et al.*, 2005] DÁVILA, C. G., CAMANHO, P. P. et ROSE, C. A. (2005). Failure criteria for frp laminates. *Journal of composite materials*, 39(4):323.
- [Deodatis, 1989] DEODATIS, G. (1989). Stochastic fem sensitivity analysis of nonlinear dynamic problems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 4(3):135–141.
- [Dhia, 1998] DHIA, H. B. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(12):899–904.
- [Dhia et Rateau, 2005] DHIA, H. B. et RATEAU, G. (2005). The arlequin method as a flexible engineering design tool. *International journal for numerical methods in engineering*, 62(11):1442–1462.
- [Dohrmann, 2003] DOHRMANN, C. R. (2003). A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25:246.
- [Dureisseix et Farhat, 2001] DUREISSEIX, D. et FARHAT, C. (2001). A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12):2643–2666.
- [Farhat *et al.*, 2000] FARHAT, C., LESOINNE, M. et PIERSON, K. (2000). A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numerical linear algebra with applications*, 7(7-8):687–714.
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205–1227.

- [Farhat et Roux, 1992] FARHAT, C. et ROUX, F. X. (1992). An unconventional domain decomposition method for an efficient parallel solution of large-scale finite element systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13:379.
- [Fedorenko, 1964] FEDORENKO, R. P. (1964). The speed of convergence of one iterative process. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 4(3):559–564.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3-4):309–330.
- [Fish et Belsky, 1995] FISH, J. et BELSKY, V. (1995). Multi-grid method for periodic heterogeneous media part 2 : Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(1-2):17–38.
- [Fish et Shek, 2000] FISH, J. et SHEK, K. (2000). Multiscale analysis of large scale non-linear structures and materials. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1(1):79–90.
- [Frangopol *et al.*, 1996] FRANGOPOL, D. M., LEE, Y.-H. et WILLAM, K. J. (1996). Nonlinear finite element reliability analysis of concrete. 122(12):1174–1182.
- [Gant *et al.*, 2011] GANT, F., ROUCH, P. et CHAMPANEY, L. (2011). Updating of uncertain joint models using the lack-of-knowledge theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, À paraître.
- [Garrett et Bailey, 1977] GARRETT, K. W. et BAILEY, J. E. (1977). Multiple transverse fracture in 90 cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester. *Journal of materials science*, 12(1):157–168.
- [Gendre *et al.*, 2011] GENDRE, L., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2011). A two-scale approximation of the schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, À paraître.
- [Ghanem et Spanos, 1991] GHANEM, R. G. et SPANOS, P. D. (1991). *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer, Berlin.
- [González et LLorca, 2007] GONZÁLEZ, C. et LLORCA, J. (2007). Mechanical behavior of unidirectional fiber-reinforced polymers under transverse compression : Microscopic mechanisms and modeling. *Composites Science and Technology*, 67(13): 2795–2806.
- [Gornet et Ijaz, 2011] GORNET, L. et IJAZ, H. (2011). A high-cyclic elastic fatigue damage model for carbon fibre epoxy matrix laminates with different mode mixtures. *Composites Part B : Engineering*, 42(5):1173–1180.
- [Gornet *et al.*, 2010] GORNET, L., IJAZ, H. et CARTIÉ, D. D. R. (2010). Inelastic interface damage modeling with friction effects : Application to z-pinning reinforcement in carbon fiber epoxy matrix laminates. *Journal of Composite Materials*, 44(17):2067–2081.

- [Gornet *et al.*, 2000] GORNET, L., LÉVÊQUE, D. et PERRET, L. (2000). Modélisation, identification et simulations éléments finis des phénomènes de délaminage dans les structures composites stratifiées. *Mécanique & Industries*, 1(3):267–276.
- [Gosselet et Rey, 2002] GOSSELET, P. et REY, C. (2002). On a selective reuse of krylov subspaces in newton-krylov approaches for nonlinear elasticity. *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 419–426.
- [Gosselet et Rey, 2006] GOSSELET, P. et REY, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of computational methods in engineering*, 13(4):515–572.
- [Guidault *et al.*, 2006] GUIDAULT, P. A., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et CORNUAULT, C. (2006). Une approche micro-macro pour le suivi de fissure avec enrichissement local. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15:187–198.
- [Guidault *et al.*, 2008] GUIDAULT, P. A., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et CORNUAULT, C. (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381–399.
- [Hammersley *et al.*, 1965] HAMMERSLEY, J. M., HANDSCOMB, D. C. et WEISS, G. (1965). Monte carlo methods. *Physics Today*, 18(2):55–56.
- [Hansen *et al.*, 1991] HANSEN, A. C., BLACKKETTER, D. M. et WALRATH, D. E. (1991). An invariant-based flow rule for anisotropic plasticity applied to composite materials. *Journal of applied mechanics*, 58:881.
- [Hashin, 1980] HASHIN, Z. (1980). Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, 47:329.
- [Hashin, 1985] HASHIN, Z. (1985). Analysis of cracked laminates : a variational approach. *Mechanics of Materials*, 4(2):121–136.
- [Hashin, 1987] HASHIN, Z. (1987). Analysis of orthogonally cracked laminates under tension. *Journal of Applied Mechanics*, 54(4):872–879.
- [Hashin, 1996] HASHIN, Z. (1996). Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(7):1129–1145.
- [Hill, 1950] HILL, R. (1950). *The mathematical theory of plasticity, 1950*. Clarendon Press, Oxford.
- [Hinojosa *et al.*, 2011] HINOJOSA, J., ALLIX, O., GUIDAULT, P. A. et CRESTA, P. (2011). On the robustness of a mixed domain decomposition method with nonlinear re-localization for handling geometrical instabilities. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, À paraître.
- [Hinton *et al.*, 2004] HINTON, M. J., KADDOUR, A. S. et SODEN, P. D. (2004). *Failure criteria in fibre reinforced polymer composites : the world-wide failure exercise*. Elsevier Science.

- [Hirai *et al.*, 1985] HIRAI, I., UCHIYAMA, Y., MIZUTA, Y. et PILKEY, W. D. (1985). An exact zooming method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1(1):61–69.
- [Hirai *et al.*, 1984] HIRAI, I., WANG, B. P. et PILKEY, W. D. (1984). An efficient zooming method for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(9):1671–1683.
- [Hisada, 1988] HISADA, T. (1988). Sensitivity analysis of nonlinear fem. *In Probabilistic Methods in Civil Engineering*, pages 160–163.
- [Hisada et Nakagiri, 1985] HISADA, T. et NAKAGIRI, S. (1985). Role of stochastic finite element method in structural safety and reliability. *In Proc. 4th. Int. Conf. Struct. Safety and Reliability, ICOSSAR'85*, pages 385–395.
- [Hochard *et al.*, 2001] HOCHARD, C., AUBOURG, P. A. et CHARLES, J. P. (2001). Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61(2):221–230.
- [Holnicki-Szulc et Gierlinski, 1995] HOLNICKI-SZULC, J. et GIERLINSKI, J. T. (1995). *Structural analysis, design and control by the virtual distortion method*. Wiley.
- [Huth, 1986] HUTH, H. (1986). Influence of fastener flexibility on the prediction of load transfer and fatigue life for multiple-row joints. *In POTTER, J. M., éditeur : Fatigue in Mechanically Fastened Composite and Metallizing Joints*, pages 221–250.
- [Ibrahimbegovic et Markovic, 2003] IBRAHIMBEGOVIC, A. et MARKOVIC, D. (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3089–3107. Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures.
- [Izumi *et al.*, 2005] IZUMI, S., YOKOYAMA, T., IWASAKI, A. et SAKAI, S. (2005). Three-dimensional finite element analysis of tightening and loosening mechanism of threaded fastener. *Engineering Failure Analysis*, 12(4):604–615.
- [Jara-Almonte et Knight, 1988] JARA-ALMONTE, C. C. et KNIGHT, C. E. (1988). The specified boundary stiffness/force sbsf method for finite element subregion analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(7):1567–1578.
- [Jiang *et al.*, 2007] JIANG, W.-G., HALLETT, S. R., GREEN, B. G. et WISNOM, M. R. (2007). A concise interface constitutive law for analysis of delamination and splitting in composite materials and its application to scaled notched tensile specimens. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(9):1982–1995.
- [Kachanov, 1958] KACHANOV, L. M. (1958). On creep rupture time. *Izv. Acad. Nauk SSSR, Otd. Techn. Nauk*, 8:26–31.
- [Kapania *et al.*, 1997] KAPANIA, R. K., HARYADI, S. G. et HAFTKA, R. T. (1997). Global/local analysis of composite plates with cutouts. *Computational Mechanics*, 19(5):386–396. 10.1007/s004660050187.



- [Karypis et Kumar, 1998] KARYPIS, G. et KUMAR, V. (1998). Metis : A software package for partitioning unstructured graphs, partitioning meshes, and computing fill-reducing orderings of sparse matrices. *University of Minnesota*, 102.
- [Kelley, 1982] KELLEY, F. S. (1982). Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method. *In Proceedings of the Second International Computers in Engineering Conference, ASME*.
- [Kerfriden, 2009] KERFRIDEN, P. (2009). *Stratégie de décomposition de domaine à trois échelles pour la simulation du délaminage dans les stratifiés*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.
- [Kerfriden et al., 2009] KERFRIDEN, P., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2009). A three-scale domain decomposition method for the 3d analysis of debonding in laminates. *Computational mechanics*, 44(3):343–362.
- [Kikuchi, 1982] KIKUCHI, N. (1982). Penalty/finite element approximations of a class of unilateral contact problems. *Penalty method and finite element method*. ASME, New York.
- [Klarbring, 1992] KLARBRING, A. (1992). Mathematical programming and augmented lagrangian methods for frictional contact problems. *In Proc. Contact Mechanics Int. Symp., PPUR*, volume 369, page 390.
- [Ladevèze, 1985] LADEVÈZE, P. (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Compte rendu de l’académie des Sciences*, 300(2):41–44.
- [Ladevèze, 1986] LADEVÈZE, P. (1986). Sur la mécanique de l’endommagement des composites. *C. Bathias et D. Menkes, eds : Comptes-rendus des JNC5, Paris*.
- [Ladevèze, 1999] LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear computational structural mechanics : New approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer Verlag.
- [Ladevèze et al., 2000] LADEVÈZE, P., ALLIX, O., DEÛ, J. F. et LÉVÊQUE, D. (2000). A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183(1-2):105–122.
- [Ladevèze et Dureisseix, 2000] LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1(1):18–28.
- [Ladevèze et Le Dantec, 1992] LADEVÈZE, P. et LE DANTEC, E. (1992). Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3):257–267.
- [Ladevèze et al., 2001] LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2):121–138.
- [Ladevèze et al., 2006] LADEVÈZE, P., LUBINEAU, G. et VIOLEAU, D. (2006). A computational damage micromodel of laminated composites. *International Journal of Fracture*, 137(1):139–150.

- [Ladevèze et Nouy, 2002] LADEVÈZE, P. et NOUY, A. (2002). Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps : A multiscale computational method with time and space homogenization. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(10):683–689.
- [Ladevèze et Nouy, 2003] LADEVÈZE, P. et NOUY, A. (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3061–3087.
- [Ladevèze *et al.*, 2002] LADEVÈZE, P., NOUY, A. et LOISEAU, O. (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43):4869–4891.
- [Ladevèze *et al.*, 2010] LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J. C. et NÉRON, D. (2010). The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22):1287–1296. Multiscale Models and Mathematical Aspects in Solid and Fluid Mechanics.
- [Lagattu et Lafarie-Frenot, 2000] LAGATTU, F. et LAFARIE-FRENOT, M. C. (2000). Variation of peek matrix crystallinity in apc-2 composite subjected to large shearing deformations. *Composites science and technology*, 60(4):605–612.
- [Lasry et Belytschko, 1988] LASRY, D. et BELYTSCHKO, T. (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6):581–597.
- [Le Dantec, 1989] LE DANTEC, É. (1989). *Contribution à la modélisation du comportement mécanique des composites stratifiés*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- [Le Tallec, 1994] LE TALLEC, P. (1994). Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational mechanics advances*, 1(2):121–220.
- [Le Tallec *et al.*, 1991] LE TALLEC, P., ROECK, Y. H. et VIDRASCU, M. (1991). Domain decomposition methods for large linearly elliptic three-dimensional problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 34(1):93–117.
- [Leclerc, 2005] LECLERC, H. (2005). Outil d’assistance au développement d’application d’analyse numérique et de mécanique. In *Séminaire du LMT-Cachan*.
- [Lemaitre *et al.*, 2008] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.-L., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2008). *Mécanique des matériaux solides*. 3<sup>e</sup>édition édition.
- [Lim et Hong, 1989] LIM, S. G. et HONG, C. S. (1989). Prediction of transverse cracking and stiffness reduction in cross-ply laminated composites. *Journal of composite materials*, 23(7):695.
- [Loève, 1955] LOÈVE, M. (1955). *Probability Theory*. Princeton.
- [Lubineau, 2002] LUBINEAU, G. (2002). *Sur un mésomodèle d’endommagement des composites stratifiés : relations micro-méso, possibilités et limites*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.

- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in numerical methods in engineering*, 9(3):233–241.
- [Mao et Sun, 1991] MAO, K. M. et SUN, C. T. (1991). A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1):29–43.
- [McCarthy et McCarthy, 2005] MCCARTHY, C. T. et MCCARTHY, M. A. (2005). Three-dimensional finite element analysis of single-bolt, single-lap composite bolted joints : Part ii—effects of bolt-hole clearance. *Composite Structures*, 71(2):159–175.
- [McCarthy et al., 2005] MCCARTHY, C. T., MCCARTHY, M. A., STANLEY, W. F. et LAWLOR, V. P. (2005). Experiences with modeling friction in composite bolted joints. *Journal of Composite Materials*, 39(21):1881–1908.
- [McCarthy et al., 2006] MCCARTHY, M. A., MCCARTHY, C. T. et PADHI, G. S. (2006). A simple method for determining the effects of bolt-hole clearance on load distribution in single-column multi-bolt composite joints. *Composite Structures*, 73(1):78–87.
- [Melenk et Babuska, 1996] MELENK, J. M. et BABUSKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314.
- [Moens et Vandepitte, 2005] MOENS, D. et VANDEPITTE, D. (2005). A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(12-16):1527–1555.
- [Nairn, 1989] NAIRN, J. A. (1989). The strain energy release rate of composite microcracking : a variational approach. *Journal of Composite Materials*, 23(11):1106.
- [Nairn, 1995] NAIRN, J. A. (1995). Some new variational mechanics results on composite microcracking. *In Proceedings of the Tenth International Conference on Composite Materials : Fatigue and fracture*.
- [Nairn, 2000] NAIRN, J. A. (2000). Matrix microcracking in composites. *Polymer matrix composites*, 2:403–432.
- [Nairn et Hu, 1992] NAIRN, J. A. et HU, S. (1992). The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites. *International Journal of Fracture*, 57(1):1–24.
- [Nairn et Hu, 1994] NAIRN, J. A. et HU, S. (1994). Matrix microcracking. *Composite Materials Series*, pages 187–243.
- [Niu, 1988] NIU, M. C. Y. (1988). *Airframe structural design*. Conmilit Press Ltd.
- [Oden et al., 2007] ODEN, J. T., PRUDHOMME, S., ROMKES, A. et BAUMAN, P. T. (2007). Multiscale modeling of physical phenomena : Adaptive control of models. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(6):2359–2392.
- [Oden et Zohdi, 1997] ODEN, J. T. et ZOHDI, T. I. (1997). Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(3-4):367–391.

- [Oguni *et al.*, 2000] OGUNI, K., TAN, C. Y. et RAVICHANDRAN, G. (2000). Failure mode transition in unidirectional e-glass/vinylester composites under multiaxial compression. *Journal of composite materials*, 34(24):2081.
- [Parvizi *et al.*, 1978] PARVIZI, A., GARRETT, K. W. et BAILEY, J. E. (1978). Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Materials Science*, 13(1):195–201.
- [Pebrel *et al.*, 2008] PEBREL, J., REY, C. et GOSSELET, P. (2008). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *international journal of multiscale computational engineering*, 6(3):251–262.
- [Puck et Schürmann, 2002] PUCK, A. et SCHÜRMAN, H. (2002). Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 62(12-13):1633–1662.
- [Rabotnov, 1968] RABOTNOV, Y. N. (1968). Creep rupture. *In Proceedings of the XII international congress on applied mechanics*, pages 342–349.
- [Radi *et al.*, 1998] RADI, B., BABA, O. A. et GELIN, J. C. (1998). Treatment of the frictional contact via a lagrangian formulation. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4-8):407–412. Recent Advances in Contact Mechanics.
- [Ransom *et al.*, 1992] RANSOM, J. B., MCCLEARY, S. L., AMINPOUR, M. A. et KNIGHT, Jr., . N. F. (1992). Computational methods for global/local analysis. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 92:33104.
- [Relun *et al.*, 2011a] RELUN, N., NÉRON, D. et BOUCARD, P. A. (2011a). Multiscale elastic-viscoplastic computational analysis : a detailed example. *European Journal of Computational Mechanics*.
- [Relun *et al.*, 2011b] RELUN, N., NÉRON, D., BOUCARD, P.-a., GHOUALI, A. et HEYBERGER, C. (2011b). Stratégie dédiée à l'étude paramétrique de problèmes élasto-viscoplastiques d'évolution. *In 10e colloque national en calcul des structures*, Giens, France.
- [Remmers *et al.*, 2003] REMMERS, J. J. C., WELLS, G. N. et BORST, R. d. (2003). A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(13):2013–2040.
- [Rey et Léné, 1998] REY, C. et LÉNÉ, F. (1998). Reuse of krylov spaces in the solution of large-scale nonlinear elasticity problems. *In* PETTER E. BJØRSTAD, M. S. E. et KEYES, D. E., éditeurs : *Ninth International Conference on Domain Decomposition Methods*.
- [Risler et Rey, 2000] RISLER, F. et REY, C. (2000). Iterative accelerating algorithms with krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical Algorithms*, 23(1):1–30. 10.1023/A :1019187614377.
- [Rixen et Farhat, 1999] RIXEN, D. J. et FARHAT, C. (1999). A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(4):489–516.

- [Roulet *et al.*, 2011] ROULET, V., CHAMPANEY, L. et BOUCARD, P. A. (2011). A parallel strategy for the multiparametric analysis of structures with large contact and friction surfaces. *Advances in Engineering Software*, 42(6):347–358.
- [Saad, 2000] SAAD, Y. (2000). *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Company, 3rd edition édition.
- [Saavedra *et al.*, 2011] SAAVEDRA, K., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2011). On a multi-scale strategy and its optimization for combined delamination and buckling simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, À paraître.
- [Saka, 1991] SAKA, M. P. (1991). Finite element applications of the theorems of structural variation. *Computers & Structures*, 41(3):519–530.
- [Sanchez-Palencia, 1974] SANCHEZ-PALENCIA, E. (1974). Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques heterogenes. *International Journal of Engineering Science*, 12(4):331–351.
- [Schellekens et Borst, 1993] SCHELLEKENS, J. C. J. et BORST, R. D. (1993). A non-linear finite element approach for the analysis of mode-i free edge delamination in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 30(9):1239–1253.
- [Schmidt *et al.*, 1993] SCHMIDT, R. J., WANG, D. Q. et HANSEN, A. C. (1993). Plasticity model for transversely isotropic materials. *Journal of engineering mechanics*, 119(4):748–766.
- [Schwarz, 1869] SCHWARZ, H. A. (1869). Ueber einige abbildungsaufgaben. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, 1869(70):105–120.
- [Series *et al.*, 2003] SERIES, L., FEYEL, F. et ROUX, F. X. (2003). Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de lagrange.
- [Shinozuka, 1987] SHINOZUKA, M. (1987). Basic issues in stochastic finite element analysis. *Reliability and Risk Analysis in Civil Engineering*, 1:506–519.
- [Sjögren et Berglund, 2000] SJÖGREN, B. A. et BERGLUND, L. A. (2000). The effects of matrix and interface on damage in grp cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 60(1):9–21.
- [Soulie et Boucard, 2009] SOULIER, B. et BOUCARD, P.-A. (2009). A multiparametric strategy for large-scale multilevel optimization of structural assemblies. *In WCSMO-8 - 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*.
- [Strouboulis *et al.*, 2000] STROUBOULIS, T., BABUSKA, I. et COPPS, K. (2000). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):43–69.
- [Sun et Chen, 1989] SUN, C. T. et CHEN, J. L. (1989). A simple flow rule for characterizing nonlinear behavior of fiber composites. *Journal of Composite Materials*, 23(10):1009.
- [Sun et Chen, 1991] SUN, C. T. et CHEN, J. L. (1991). A micromechanical model for plastic behavior of fibrous composites. *Composites science and technology*, 40(2): 115–129.

- [Swift, 1971] SWIFT, T. (1971). Development of the fail-safe design features of the dc-10. In *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, pages 164–214.
- [Takeda et Ogihara, 1994] TAKEDA, N. et OGIHARA, S. (1994). Initiation and growth of delamination from the tips of transverse cracks in cfrp cross-ply laminates. *Composites science and technology*, 52(3):309–318.
- [Talreja, 1985] TALREJA, R. (1985). Transverse cracking and stiffness reduction in composite laminates. *Journal of composite materials*, 19(4):355.
- [Talreja, 1986] TALREJA, R. (1986). Stiffness properties of composite laminates with matrix cracking and interior delamination. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6):751–762.
- [Talreja, 1994] TALREJA, R. (1994). Damage characterization by internal variables. *Composite Materials series*, pages 53–53.
- [Tate et al., 1946] TATE, M. B., ROSENFELD, S. J. et AERONAUTICS, U. S. N. A. C. f. (1946). *Preliminary investigation of the loads carried by individual bolts in bolted joints*. National Advisory Committee for Aeronautics.
- [Thionnet et Renard, 1993] THIONNET, A. et RENARD, J. (1993). Meso-macro approach to transverse cracking in laminated composites using talreja’s model. *Composites Engineering*, 3(9):851–871.
- [Totry et al., 2008] TOTRY, E., GONZÁLEZ, C. et LLORCA, J. (2008). Prediction of the failure locus of c/peek composites under transverse compression and longitudinal shear through computational micromechanics. *Composites Science and Technology*, 68(15-16):3128–3136.
- [Tsai et Wu, 1971] TSAI, S. W. et WU, E. M. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of composite materials*, 5(1):58.
- [Uzawa, 1958] UZAWA, H. (1958). Iterative methods for concave programming. *Studies in Linear and Nonlinear Programming*, pages 154–165.
- [Violeau, 2007] VIOLEAU, D. (2007). *Une stratégie de calcul pour l’analyse à l’échelle micro des endommagements jusqu’à rupture des composites stratifiés*. Thèse de doctorat, LMT-Cachan.
- [Voleti et al., 1996] VOLETI, S. R., CHANDRA, N. et MILLER, J. R. (1996). Global-local analysis of large-scale composite structures using finite element methods. *Computers & Structures*, 58(3):453–464.
- [Whitcomb, 1991] WHITCOMB, J. D. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers & Structures*, 40(4):1027–1031.
- [Wiener, 1938] WIENER, N. (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936.
- [Wriggers et al., 1985] WRIGGERS, P., SIMO, J. C. et TAYLOR, R. L. (1985). Penalty and augmented lagrangian formulations for contact problems. 85:97–106.
- [Yamazaki et al., 1988] YAMAZAKI, E., SHINOZUKA, M. et DASGUPTA, G. (1988). Neumann expansion for stochastic finite element analysis. 114(8):1335–1354.

- [Yokozeki *et al.*, 2007] YOKOZEKI, T., OGIHARA, S., YOSHIDA, S. et OGASAWARA, T. (2007). Simple constitutive model for nonlinear response of fiber-reinforced composites with loading-directional dependence. *Composites science and technology*, 67(1):111–118.
- [Yserentant, 1986] YSERENTANT, H. (1986). On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numerische Mathematik*, 49(4):379–412.
- [Zhao et Takeda, 2000] ZHAO, F. M. et TAKEDA, N. (2000). Effect of interfacial adhesion and statistical fiber strength on tensile strength of unidirectional glass fiber/epoxy composites. part. ii : comparison with prediction. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(11):1215–1224.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1331–1364.
- [Zohdi *et al.*, 1996] ZOHDI, T. I., ODEN, J. T. et RODIN, G. J. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1-4):273–298.