

N° d'ordre : 10487

UNIVERSITÉ PARIS-SUD  
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

**THÈSE**

*présentée pour obtenir*

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

*par*

Thomas HAETTEL

*Sujet :*

**COMPACTIFICATIONS GÉOMÉTRIQUES  
DANS LES GROUPE, LES ESPACES  
SYMÉTRIQUES ET LES IMMEUBLES**

Soutenue le 9 décembre 2011 devant la Commission d'examen :

M. MARC BURGER	(Rapporteur)
M. LAURENT MANIVEL	(Examineur)
M. PIERRE PANSU	(Président du jury)
M. FRÉDÉRIC PAULIN	(Directeur de thèse)
M. BERTRAND RÉMY	(Rapporteur)
M. GEORGES TOMANOV	(Examineur)



# Remerciements

Je souhaite tout d'abord adresser ma reconnaissance infinie à Frédéric Paulin. Je le remercie pour tout le temps qu'il m'a si généreusement consacré. Je le remercie pour avoir su me transmettre sa passion pour de nombreux domaines mathématiques. Je le remercie pour sa rigueur mathématique et pour ses multiples relectures attentives. Je le remercie pour ses incroyables qualités pédagogiques qui m'ont permis d'arriver là. Il restera pour moi un modèle de chercheur et d'enseignant, et j'espère encore beaucoup apprendre de lui.

Je souhaite ensuite remercier très chaleureusement Marc Burger et Bertrand Rémy, qui ont accepté la tâche de rapporter ma thèse. Un grand merci à Laurent Manivel, Pierre Pansu et Georges Tomanov, qui me font l'honneur d'être dans le jury.

Je tiens à remercier Yves Benoist pour m'avoir expliqué des mathématiques très variées. Je tiens aussi à remercier mon ami Olivier Benoist pour avoir été si disponible pour répondre à mes questions. Je souhaite également remercier, à des titres mathématiques divers, Yves de Cornulier, Louis Funar, Yves Guivarc'h, Pierre de la Harpe, Benoît Kloeckner, Jean Lécureux, Daniel Massart, Nicolas Monod et Charles Torossian.

Je souhaite remercier l'ensemble des chercheurs du département de mathématiques pour leur dynamisme et leur disponibilité, en particulier Emmanuel Breuillard, Bertrand Deroin, Charles Frances, Olivier Guichard, Frédéric Haglund, David Harari, François Labourie et Patrick Massot, ainsi que les remarquables secrétaires Fabienne Jacquemin et Valérie Lavigne. Et je souhaite remercier tous les autres chercheurs que j'ai eu la chance de rencontrer, notamment Nicolas Bergeron, Marc Bourdon, Pierre-Emmanuel Caprace, François Guéritaud, Arnaud Hillion, Pascal Hubert, Lizhen Ji, Cyril Lecuire, Athanase Papadopoulos, Anne Parreau, Pierre Py, Alain Valette et Constantin Vernicos.

Je tiens à remercier le GDR Platon pour les multiples rencontres dont j'ai bénéficié, et tout particulièrement Françoise Dal'bo pour sa gentillesse et son dynamisme.

Parce qu'une thèse est l'aboutissement d'un long parcours, je souhaite remercier tous les professeurs qui ont contribué à ma formation, au lycée Clémenceau à Nantes et à l'ENS Paris.

Je tiens à remercier mes amis mathématiciens pour tant de bons moments, en particulier Ramla Abdellatif, Richard Aoun, Benjamin Beeker, Tristan Bozec, François Charles, Bernardo da Costa, Mickaël Crampon, Pierre Dehornoy, Guillaume Dufour, Fanny Kassel, Ludovic Marquis, Alexandre Martin, Paul Mercat, Emmanuel Militon, Vincent Pit, Aurélien Poiret, Claire Renard et Nicolas de Saxcé.

Une pensée à tous mes amis, notamment à Damien et Adeline, Romain et Isabelle, Loïc, Morgane et Pierre, Nicolas, Pierre, Simon, Céline et Sébastien, Mathieu et Florence, Sabine et Éloi, Robert et Sophie, Jean-Louis, Florent, Tus, Guillaume, Antonin, Christophe, Joachim, Romain, Charles-Éric, Adrien, Maud et Laurent, Emily et Richard.

Une grande pensée à mes parents, qui ont été un soutien chaleureux et constant, ainsi qu'à François, Fabien, Péma, Gali et Rozenn, et au reste de ma famille. Merci également à Éric, Geneviève, Arthur, Victor, Agathe, Jeanne et au reste de la famille.

Enfin et surtout, je remercie de tout mon cœur Louise.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Préliminaires</b>	<b>11</b>
<b>1 La topologie de Chabauty</b>	<b>12</b>
1.1 L'espace des fermés d'un espace topologique localement compact . . . . .	12
1.2 L'espace des sous-groupes fermés d'un groupe topologique localement compact . . . . .	13
1.3 Exemples d'espaces de sous-groupes fermés . . . . .	13
1.4 L'espace des sous-groupes fermés du dual d'un groupe abélien . . . . .	16
1.5 Compactification de Chabauty d'un espace homogène . . . . .	17
<b>2 Compactifications et espaces CAT(0)</b>	<b>20</b>
2.1 Compactifications . . . . .	20
2.2 Espaces CAT(0) . . . . .	20
2.3 Compactification géodésique d'un espace CAT(0) . . . . .	22
<b>3 Espaces symétriques de type non compact</b>	<b>22</b>
3.1 Décompositions de Cartan et polaire . . . . .	23
3.2 Espaces symétriques . . . . .	24
3.3 Espaces symétriques de type non compact . . . . .	24
3.4 Décompositions en espaces de racines . . . . .	25
<b>II L'espace des sous-groupes fermés de <math>\mathbb{R} \times \mathbb{Z}</math></b>	<b>29</b>
<b>4 Introduction</b>	<b>30</b>
<b>5 Les sous-groupes fermés de <math>\mathbb{R} \times \mathbb{Z}</math></b>	<b>31</b>
5.1 Le sous-espace $\mathcal{S}^I$ . . . . .	32
5.2 Le sous-espace $\mathcal{S}^{II}$ . . . . .	32
5.3 Les sous-espaces $\mathcal{S}_n^{III}$ . . . . .	34
<b>6 Une compactification du disque</b>	<b>35</b>

<b>7</b>	<b>Le recollement des sous-espaces de sous-groupes fermés</b>	<b>39</b>
7.1	L'adhérence des disques $\mathcal{S}_n^{III}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ . . . . .	39
7.2	L'accumulation des disques $\mathcal{S}_n^{III}$ sur $\mathcal{S}^I$ . . . . .	40
7.3	Le recollement final . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Le groupe fondamental de l'espace <math>\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})</math></b>	<b>43</b>
	<b>Annexe : Une autre présentation de la compactification du disque</b>	<b>45</b>
<b>III Compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non compact</b>		<b>47</b>
<b>9</b>	<b>Introduction</b>	<b>48</b>
<b>10</b>	<b>La compactification de Chabauty</b>	<b>50</b>
10.1	La définition de la compactification . . . . .	50
10.2	La distalité . . . . .	52
10.3	Décompositions à l'aide d'une partie de la base . . . . .	53
10.4	Détermination des groupes limites . . . . .	55
10.5	Caractérisation des groupes limites . . . . .	61
<b>11</b>	<b>Lien avec la compactification polyédrale</b>	<b>63</b>
11.1	Compactification polyédrale d'un espace vectoriel . . . . .	63
11.2	Compactification polyédrale d'un espace symétrique . . . . .	64
<b>IV Compactifications de l'espace des plats maximaux d'espaces symétriques et d'immeubles</b>		<b>69</b>
<b>12</b>	<b>Introduction</b>	<b>70</b>
<b>13</b>	<b>Compactification de Chabauty de l'espace des plats maximaux d'un espace symétrique de type non compact</b>	<b>72</b>
13.1	Définition de la compactification . . . . .	72
13.2	Le cas de rang un . . . . .	73
13.3	Le cas de $SL_3(\mathbb{R})$ . . . . .	75
13.3.1	Les sous-algèbres de Lie abéliennes de $\mathfrak{b}$ de dimension 2 . . . . .	75

13.3.2	La topologie de l'espace $Y$ des sous-algèbres de Lie abéliennes de $\mathfrak{b}$ de dimension 2 . . . . .	81
13.3.3	Compactification de $G/T'$ . . . . .	86
13.4	Le cas de $SL_4(\mathbb{R})$ . . . . .	91
13.5	Le cas d'autres groupes . . . . .	98
13.6	Comparaison avec le cas complexe étudié par Iliev, Manivel et Le Barbier Grünewald . . . . .	99
<b>14</b>	<b>Compactification géométrique de l'espace des plats maximaux d'espaces symétriques et d'immeubles</b>	<b>101</b>
14.1	Immeubles . . . . .	101
14.2	Distances angulaires dans un espace $CAT(0)$ . . . . .	104
14.3	Limites de fermés dans un espace $CAT(0)$ . . . . .	106
14.4	Compactification géométrique de l'espace des appartements marqués d'un immeuble sphérique topologique . . . . .	109
14.4.1	Définition de la compactification . . . . .	109
14.4.2	Le cas du type $A_1^m$ . . . . .	110
14.4.3	Le cas de l'immeuble sphérique de $SL_3$ . . . . .	110
14.4.4	Le cas d'autres immeubles . . . . .	115
14.5	Compactification géométrique de l'espace des plats maximaux des espaces symétriques de type non compact et des immeubles euclidiens . . . . .	116
<b>V</b>	<b>Compactifications à la Thurston</b>	<b>121</b>
<b>15</b>	<b>Introduction</b>	<b>122</b>
<b>16</b>	<b>Compactification de Thurston des espaces de réseaux marqués</b>	<b>124</b>
16.1	Algèbre linéaire quaternionique et octonionique . . . . .	124
16.2	Compactification de l'espace des réseaux hermitiens marqués . . . . .	127
16.3	Comparaison à la compactification de Satake . . . . .	131
16.4	Compactification d'espaces de réseaux autoduaux . . . . .	133
16.5	Cas du groupe de Lie exceptionnel $E_{6(-26)}$ . . . . .	135
<b>17</b>	<b>Compactification de Thurston de l'espace de Torelli</b>	<b>139</b>
17.1	L'espace de Torelli . . . . .	139
17.2	La compactification de Thurston de l'espace de Torelli . . . . .	140

17.3 Stratification d'une partie du bord de l'espace de Torelli . . . . .	144
17.3.1 Comparaison entre norme stable et norme euclidienne . . . . .	144
17.3.2 Le complexe des courbes séparantes . . . . .	146
17.3.3 Description des strates . . . . .	147

**Références**



## Introduction

Soit  $G$  un groupe topologique localement compact. L'ensemble  $\mathcal{S}(G)$  de ses sous-groupes fermés est muni d'une topologie naturelle, appelée topologie de Chabauty. C. Chabauty a introduit cette topologie afin de généraliser le critère de compacité de Mahler aux familles de réseaux de groupes localement compacts (voir [Cha50]).

L'étude de l'espace des sous-groupes fermés dans sa totalité est difficile. Le premier résultat non banal est dû à I. Poureza et J. Hubbard, qui ont montré que l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^2$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^4$  (voir [PH79]). Plus récemment, M. Bridson, P. de la Harpe et V. Kleptsyn ont déterminé l'espace des sous-groupes fermés du groupe de Heisenberg (voir [BdlHK09]). B. Kloeckner a montré que l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^n$  est stratifié et simplement connexe (voir [Klo09]). Si  $G$  est abélien, Y. de Cornulier a donné des propriétés générales sur l'espace de sous-groupes fermés de  $G$  (voir [dC11]). Dans le chapitre II (voir la publication [Hae10b]), nous décrivons l'espace des sous-groupes fermés du groupe  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  (voir le théorème 7.3), et montrons en particulier que son groupe fondamental n'est pas dénombrable (voir le théorème 8.2).

L'espace des sous-groupes fermés de  $G$  est un espace compact, il peut ainsi servir à définir de nombreuses compactifications. Par exemple, si  $X$  est un espace symétrique de type non compact, l'application qui à un point de  $X$  associe son stabilisateur dans l'espace des sous-groupes fermés du groupe des isométries de  $X$  est un plongement, dont l'adhérence est la compactification de Chabauty de  $X$ . Dans [GJT98], Y. Guivarc'h, L. Ji et J.C. Taylor ont montré par l'étude de mesures que cette compactification est isomorphe à la compactification de Satake-Furstenberg maximale de  $X$ . Dans le chapitre III (voir la publication [Hae10a]), nous établissons cet isomorphisme de manière plus directe (voir le théorème 9.1), et retrouvons sa caractérisation comme ensemble de sous-groupes distaux maximaux (voir le théorème 10.20). A. Borel et L. Ji définissent également une compactification de Chabauty des espaces localement symétriques, dont ils montrent qu'elle est dans certains cas isomorphe à la compactification de Borel-Serre réductive (voir [BJ07, III.12]). Si  $X$  est un immeuble de Bruhat-Tits, Y. Guivarc'h et B. Rémy ont défini de manière analogue la compactification de Chabauty de l'espace des sommets de  $X$ , et ont montré en particulier que cette compactification est isomorphe à la compactification polyédrale (voir [GR06]). Ce résultat a été étendu par P.E. Caprace et J. Lécureux à une large classe d'immeubles (voir [CL09]).

La topologie de Chabauty permet également de définir des compactifications d'autres espaces homogènes. Soient  $G$  un groupe de Lie réel connexe semi-simple, de centre fini et sans facteur compact,  $\Gamma$  un réseau de  $G$  et  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . L'étude des  $H$ -orbites dans  $G/\Gamma$  est naturelle et très riche. Depuis les travaux de M. Ratner (voir [Rat91]), on les comprend bien dans le cas où  $H$  est engendré par des unipotents. Plus récemment grâce aux travaux d'Y. Benoist et de J.-F. Quint (voir [BQ11a] et [BQ11b]), on les comprend bien lorsque l'adhérence de Zariski de  $H$  est semi-simple. Si  $H = A$  est la composante neutre d'un tore déployé maximal au contraire, les orbites sont bien moins comprises (voir par exemple [EKL06], [ELMV09] et [ELMV11]). Déjà dans le cas  $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$  et  $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ , une conjecture de G. Margulis affirme que les  $A$ -orbites bornées dans  $G/\Gamma$  sont compactes (voir [Mar97] et [Mau10]). Ainsi, il est essentiel de mieux comprendre la géométrie de l'espace  $G/A$ , c'est-à-dire essentielle-

ment de l'espace des plats maximaux marqués de l'espace symétrique  $X$  de  $G$ . Dans le chapitre IV, de manière analogue à la compactification de Chabauty de  $X$ , nous considérons l'application qui à un plat maximal de  $X$  associe son stabilisateur dans  $G$ , et appelons *compactification de Chabauty* de l'espace des plats maximaux de  $X$  l'adhérence de l'image de ce plongement. Nous la décrivons complètement lorsque  $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$  (voir le théorème 13.17), et dans ce cas nous montrons que la compactification est simplement connexe (voir le théorème 13.22), et nous la décrivons partiellement lorsque  $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$  (voir le théorème 13.25).

La complexité de cette compactification de Chabauty nous amène à définir la compactification géométrique de l'espace des plats maximaux de  $X$  en le voyant comme un sous-espace de l'espace des fermés de la compactification géodésique de  $X$ . Nous étendons cette étude au cas des immeubles euclidiens localement finis fortement transitifs, ce qui permet de traiter le cas des groupes  $p$ -adiques semi-simples. Nous montrons que cette compactification est isomorphe à la compactification géométrique de l'espace des appartements de l'immeuble sphérique au bord à l'infini de  $X$  (voir le théorème 14.8). Dans le cas où  $\mathbb{K}$  est un corps local et  $X$  est l'espace symétrique de type non compact ou l'immeuble euclidien de  $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ , nous décrivons en particulier complètement cette compactification géométrique, et nous montrons qu'elle coïncide avec l'espace de toutes les images d'appartements (par des morphismes de complexes polyédraux préservant le type) dans l'immeuble sphérique (voir le théorème 14.7). De manière peut-être surprenante, ce n'est plus le cas pour  $G = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  dès que  $m \geq 4$ .

Dans une autre perspective de dégénérescence de structures géométriques, nous nous intéressons aux généralisations de la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller d'une surface  $S$  compacte, connexe, orientable et de genre  $g \geq 2$  (voir la prépublication [Hae11]). Cette compactification est définie en associant à chaque classe d'isotopie de métrique hyperbolique sur  $S$  la fonction qui à une courbe fermée simple sur  $S$  associe la longueur de la géodésique hyperbolique isotope (voir [FLP79]). Dans le chapitre V, en identifiant un espace symétrique de type non compact classique  $X$  à un espace de classes d'isométrie de réseaux marqués d'un espace euclidien ou hermitien, nous définissons de manière analogue une compactification de Thurston de  $X$ . Nous montrons qu'elle est isomorphe à l'une des compactifications de Satake (voir le théorème 16.12), ce qui répond à une question posée par F. Paulin dans [Pau10]. Nous montrons que ce résultat reste vrai si  $X$  est l'espace symétrique du groupe de Lie exceptionnel  $E_{6(-26)}$ .

Puis nous appliquons cette étude pour définir une compactification de Thurston des espaces de Torelli de surfaces. L'espace de Torelli de  $S$  est le quotient de l'espace de Teichmüller de  $S$  par le groupe de Torelli de  $S$ , qui est le sous-groupe du groupe modulaire de  $S$  formé des classes d'homéomorphismes ayant une action triviale en homologie (voir par exemple [Far06]). Le groupe de Torelli est encore assez peu compris : lorsque  $g = 2$ , G. Mess a montré que le groupe de Torelli est libre sur une infinité dénombrable de générateurs (voir [Mes92]). Lorsque  $g \geq 3$ , D. Johnson a exhibé une famille génératrice finie du groupe de Torelli (voir [Joh83]), mais on ne sait toujours pas s'il est de présentation finie. Une étude homotopique de notre compactification pourrait permettre d'attaquer cette conjecture.

Nous définissons une compactification de Thurston de l'espace de Torelli en le plongeant dans l'espace des fonctions de longueurs de  $\mathbb{Z}^{2g}$ . En identifiant l'espace de Torelli à un sous-espace des classes d'isométrie de réseaux symplectiques marqués de  $\mathbb{R}^{2g}$  grâce à

l'application période, nous montrons que cette compactification est  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -isomorphe à une compactification de Satake du demi-espace de Siegel  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/U(g)$  (voir le théorème 17.4). Enfin, nous décrivons une stratification naturelle du bord de la compactification de Thurston de l'espace de Torelli, indexée par le complexe des courbes fermées simples séparantes de  $S$  (voir le théorème 17.8).

Présentons maintenant de manière plus détaillée les résultats principaux de la thèse.

Notre premier travail porte sur l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ .

Nous avons dit que la description de l'espace des sous-groupes fermés de groupes topologiques localement compacts n'est connue que pour un petit nombre d'exemples. Dans le chapitre II (correspondant à la publication [Hae10b]), nous décrivons l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  des sous-groupes fermés du groupe  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , qui est homéomorphe par dualité de Pontryagin à l'espace des sous-groupes fermés du dual  $\mathbb{C}^*$ .

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  l'espace des « anneaux hawaïens », réunion d'une infinité dénombrable de cercles  $(A_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  se rencontrant deux à deux exactement en un point et s'accumulant sur ce point. Pour tout entier  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , considérons une copie  $\overline{D}_k$  du disque fermé et  $I = [0, 1]$ . Munissons la réunion disjointe  $\overline{X} = I \sqcup \bigsqcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \overline{D}_k$  de la topologie telle que les disques  $\overline{D}_k$  s'accumulent sur le segment  $I$  le long des rayons de ces disques (voir la figure 1).

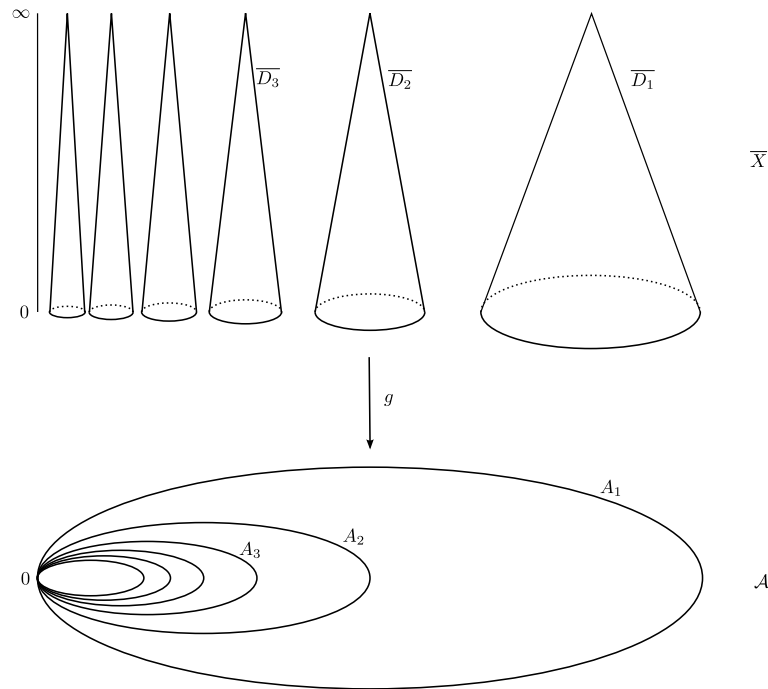


FIGURE 1 – Le recollement  $\overline{X} \cup_g \mathcal{A}$ , homéomorphe à l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ .

Recollons enfin le cercle  $\partial \overline{D}_k$  au bord de chacun des disques sur l'espace  $\mathcal{A}$ , de la manière suivante. Soit  $(I_{\overline{q}})_{\overline{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$  une famille de segments deux à deux disjoints du cercle  $\partial \overline{D}_k$ , dont l'ordre cyclique est donné par celui de  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Alors définissons  $g_k : \partial \overline{D}_k \rightarrow \mathcal{A}$ ,

qui sur chaque segment  $I_{\bar{q}}$  effectue une fois le tour du cercle  $A_{kb}$  dans le sens direct à partir de 0, où  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  désigne le dénominateur de  $\bar{q}$ , et qui envoie le reste du cercle  $\partial \overline{D_k}$  sur 0. Cela définit une application  $g : \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \partial \overline{D_k} \rightarrow \mathcal{A}$ . Prolongeons continûment l'application  $g$  à l'extrémité 0 du segment  $I$  en définissant  $g(0)$  comme le point singulier des anneaux hawaïens  $\mathcal{A}$ .

**Théorème.** *L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  est homéomorphe à la réunion de  $I$  et des disques  $(\overline{D_k})_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  s'accumulant sur  $I$ , recollée sur l'espace  $\mathcal{A}$  par l'application  $g$ . (Voir le théorème 7.3.)*

De plus, nous donnons une description combinatoire du groupe fondamental de l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , et montrons en particulier le résultat suivant.

**Théorème.** *Le groupe fondamental de l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  n'est pas dénombrable. (Voir le théorème 8.2.)*

La deuxième partie de notre travail porte sur la compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non compact. Elle correspond à la publication [Hae10a].

Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, et soit  $G$  son groupe d'isométries. On suppose que  $G$  se surjecte sur la composante neutre  $\text{Isom}_0(X)$  du groupe des isométries de  $X$ , avec noyau fini. Considérons le plongement

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathcal{S}(G) \\ x &\mapsto G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\} \end{aligned}$$

qui à un point de  $X$  associe son stabilisateur dans l'espace  $\mathcal{S}(G)$  des sous-groupes fermés de  $G$ , qui permet d'identifier  $X$  avec le sous-espace de  $\mathcal{S}(G)$  des sous-groupes compacts maximaux de  $G$ . L'adhérence  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  de l'image de ce plongement est appelée la *compactification de Chabauty* de  $X$ . Nous appellerons ici *groupes limites* les groupes apparaissant dans la frontière de  $X$  dans  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$ .

Les espaces symétriques sont des objets très riches (voir par exemple [Hel78]), et leurs compactifications ont été très étudiées (voir par exemple les travaux de Mostow [Mos73], Satake [Sat60], Borel et Ji [BJ07]...). Elles sont nombreuses, en fonction des besoins nécessaires : compactifications géodésique, de Satake, de Furstenberg, polyédrale, de Martin, de Karpelevic, etc. (voir par exemple [GJT98]). La géométrie des espaces symétriques étant intimement liée à la structure de leurs groupes d'isométries, il est naturel, comme dans [GJT98], d'étudier leurs compactifications de Chabauty.

Nous renvoyons à la partie 10.3 pour des détails sur la terminologie qui suit. Soient  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ ,  $G = KAN$  une décomposition d'Iwasawa de  $G$  et  $X = G/K$ , muni de la métrique riemannienne  $G$ -invariante définie par la forme de Killing de  $G$ , l'espace symétrique de type non compact associé. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  de  $A$  est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale diagonalisable de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . Elle définit un système de racines  $\Sigma$ , qui est l'ensemble des formes linéaires non nulles  $\alpha$  sur  $\mathfrak{a}$  dont l'espace de poids  $\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a}, \text{ad } H(Y) = \alpha(H)Y\}$  est non

nul. Choisissons une base  $\Delta$  de  $\Sigma$ , et notons  $\overline{\mathfrak{a}^+}$  la chambre de Weyl fermée associée. Notons de plus  $M = Z_K(\mathfrak{a})$  le centralisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $K$ .

Pour toute partie propre  $I$  de  $\Delta$ , notons  $\mathfrak{a}_I = \bigcap_{\alpha \in I} \text{Ker } \alpha$  et  $\mathfrak{a}^I$  l'orthogonal de  $\mathfrak{a}_I$  dans  $\mathfrak{a}$  pour la forme de Killing de  $G$ . Notons  $A^I$  le sous-groupe de Lie connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}^I$ , et  $\overline{A^{I,+}} = A^I \cap \exp \overline{\mathfrak{a}^+}$ .

Définissons alors le sous-groupe de Lie  $G^I = D(Z(\mathfrak{a}_I))_0$ , composante neutre du groupe dérivé du centralisateur de  $\mathfrak{a}_I$  dans  $G$ , et  $K^I = G^I \cap K$ . Soit  $\Sigma_I^+$  l'ensemble des racines positives qui ne sont pas combinaison linéaire des racines de  $I$ , et soit  $\mathfrak{n}_I$  la sous-algèbre de Lie somme directe des espaces de poids des éléments de  $\Sigma_I^+$ . Notons  $N_I$  le sous-groupe de Lie connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$ . Pour tous  $a \in A$  et  $k \in K$ , notons

$$D_{a,k}^I = kaK^I MN_I a^{-1} k^{-1}.$$

Le but principal du chapitre III est de donner une nouvelle démonstration, plus courte et plus directe, du théorème de [GJT98] donnant une description explicite des groupes limites de la compactification de Chabauty de  $X$ .

**Théorème.** *Soit  $D \in \overline{X^S} \setminus X$  un groupe limite. Alors il existe une partie propre  $I$  de  $\Delta$ ,  $a \in \overline{A^{I,+}}$  et  $k \in K$  tels que  $D = D_{a,k}^I$ .*

*De plus, cette écriture est unique au sens suivant : pour  $I_1, I_2$  deux parties propres de  $\Delta$ ,  $a_1 \in \overline{A^{I_1,+}}$ ,  $a_2 \in \overline{A^{I_2,+}}$  et  $k_1, k_2 \in K$ , nous avons  $D_{a_1,k_1}^{I_1} = D_{a_2,k_2}^{I_2}$  si et seulement si*

$$I_1 = I_2 = I, a_1 = a_2 = a \text{ et } k_2^{-1} k_1 \in (K^I \cap aK^I a^{-1})M.$$

*(Voir les théorèmes 10.12 et 10.13.)*

Nous retrouvons ensuite les résultats (voir [Moo79] et [Gui01]) de classification des sous-groupes distaux maximaux et moyennables maximaux isotropiquement connexes de  $G$ . Nous rappelons qu'un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  est dit distal si les valeurs propres de son action adjointe sur  $\mathfrak{g}$  sont toutes de module 1 ; en particulier, tout sous-groupe compact est distal. On dit qu'un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  est isotropiquement connexe s'il existe un tore  $A'$  de  $G$  déployé sur  $\mathbb{R}$ , inclus dans  $H'$ , tel que  $H = H_0 Z_H(A')$ , où  $Z_H(A')$  désigne le centralisateur de  $A'$  dans  $H$ .

**Théorème.** *La compactification de Chabauty  $\overline{X^S}$  est l'ensemble des sous-groupes distaux maximaux de  $G$ . Les sous-groupes moyennables maximaux isotropiquement connexes de  $G$  sont les normalisateurs de ces sous-groupes. (Voir les théorèmes 10.20 et 10.17.)*

La topologie de Chabauty permet également de définir des compactifications d'autres espaces homogènes, comme la compactification de Chabauty de l'espace des plats d'un espace symétrique de type non compact. L'idée de considérer les stabilisateurs est due à Demazure (voir [Dem80]).

Soient  $G$  un groupe de Lie réel connexe semi-simple, de centre fini, sans facteur compact et  $X$  l'espace symétrique de  $G$ . Notons  $A$  un sous-groupe de Cartan de  $G$ , c'est-à-dire la composante neutre d'un tore déployé maximal  $T$  de  $G$ , de normalisateur

$T'$ . Par exemple, pour  $G = \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$  où  $m \geq 2$ , nous prendrons pour  $A$  le sous-groupe diagonal de  $G$  à coefficients positifs.

Notons  $\mathrm{Plats}(X)$  l'espace des plats maximaux de  $X$ , muni de la topologie induite par la topologie de Chabauty sur l'espace  $\mathcal{F}(X)$  des fermés de  $X$ . Le groupe  $G$  agit transitivement sur l'espace  $\mathrm{Plats}(X)$ , et le stabilisateur du plat standard  $P_0$  est  $T'$ , donc l'espace  $\mathrm{Plats}(X)$  s'identifie naturellement à l'espace homogène  $G/T'$ . Remarquons que l'espace  $\mathrm{Plats}(X)$  a un groupe fondamental d'ordre 48 (voir le lemme 13.23).

Considérons le plongement

$$\begin{aligned} G/T' &\rightarrow \mathcal{S}(G) \\ gT' &\mapsto gAg^{-1} \end{aligned}$$

qui à un plat maximal  $P$  de  $X$  associe le sous-groupe de Cartan de  $G$  qui stabilise  $P$ , dans l'espace  $\mathcal{S}(G)$  des sous-groupes fermés de  $G$ . L'adhérence  $\overline{\mathrm{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'image de ce plongement est appelée la *compactification de Chabauty* de l'espace  $\mathrm{Plats}(X)$ .

Nous décrivons explicitement cette compactification dans le  $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ .

**Théorème.** *La compactification de Chabauty  $\overline{\mathrm{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'espace des plats maximaux  $\mathrm{Plats}(X)$  de l'espace symétrique  $X$  de  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathrm{SL}_3(\mathbb{R}))$  des sous-groupes fermés connexes abéliens maximaux inclus dans un sous-groupe de Borel. Cette compactification  $\overline{\mathrm{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  est simplement connexe. (Voir les théorèmes 13.17 et 13.22.)*

Pour le groupe  $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ , nous avons un résultat partiel.

**Théorème.** *La compactification de Chabauty  $\overline{\mathrm{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'espace des plats maximaux  $\mathrm{Plats}(X)$  de l'espace symétrique  $X$  de  $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{R}))$  des sous-groupes fermés connexes abéliens de dimension 3 inclus dans un sous-groupe de Borel. (Voir le théorème 13.25.)*

Par contre, l'analogie de cet énoncé est incorrect pour  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ , si  $m \geq 10$  (voir le lemme 13.28).

Puis nous avons étudié la compactification géométrique de l'espace des plats d'espaces symétriques et d'immeubles.

Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact de rang  $r$  ou un immeuble euclidien localement fini de dimension  $r$  fortement transitif, et notons  $G$  son groupe d'isométries. Considérons sa compactification géodésique  $\overline{X}^g$  (voir la partie 2), et notons  $\mathrm{Plats}(X)$  l'espace des plats maximaux de  $X$  (i.e. l'espace des appartements si  $X$  est un immeuble euclidien). Considérons le plongement

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Plats}(X) &\rightarrow \mathcal{F}(\overline{X}^g) \\ P \subset X &\mapsto \overline{P} \subset \overline{X}^g, \end{aligned}$$

et appelons son adhérence la *compactification géométrique*  $\overline{\overline{\mathrm{Plats}(X)}^g}$  de  $\mathrm{Plats}(X)$ .

D'autre part, notons  $\mathcal{I}$  l'immeuble sphérique à l'infini de  $X$ , il est muni d'une structure naturelle d'immeuble sphérique topologique au sens de [BS87b]. Considérons l'espace compact  $\mathcal{I}^{(r-1)}$  des chambres de Weyl fermées de  $\mathcal{I}$ , et soit  $W$  le groupe de Weyl de  $G$ .

L'espace  $\text{Plats}(X)$  est naturellement  $G$ -isomorphe à l'espace  $\text{App}(\mathcal{I})$  des appartements de  $\mathcal{I}$ . Un appartement de  $\mathcal{I}$  est une union finie de chambres de Weyl fermées, donc un fermé de  $\mathcal{I}^{(r-1)}$ . L'espace  $\text{App}(\mathcal{I})$  est muni de la topologie induite par la topologie de Chabauty sur l'espace  $\mathcal{F}(\mathcal{I}^{(r-1)})$ . Considérons l'adhérence de  $\text{App}(\mathcal{I})$  dans cet espace compact, elle est incluse dans le sous-espace des images d'un appartement fixé  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$  par un morphisme de complexes polyédraux préservant le type. Cela définit une  $G$ -compactification  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  de l'espace des appartements de  $\mathcal{I}$ , que nous appelons *compactification géométrique* de  $\text{App}(\mathcal{I})$ . Nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème.** *La compactification géométrique  $\overline{\text{Plats}(X)}^g$  de l'espace des plats de  $X$  est naturellement  $G$ -isomorphe à la compactification géométrique  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  de l'espace des appartements de  $\mathcal{I}$ . (Voir le théorème 14.8.)*

Nous décrivons ensuite explicitement cette compactification dans le cas du groupe  $G = \text{SL}_3(\mathbb{K})$ , où  $\mathbb{K}$  est un corps local (commutatif non trivialement valué, complet et localement compact, c'est-à-dire isomorphe à  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  ou  $\mathbb{F}_q((t))$  où  $p$  est premier et  $q$  est une puissance d'un nombre premier), et nous montrons dans ce cas le résultat suivant, qui est incorrect pour  $\text{SL}_m(\mathbb{K})$  dès que  $m \geq 4$  :

**Théorème.** *La compactification géométrique  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  de l'espace des appartements de l'immeuble sphérique  $\mathcal{I}$  de  $(\text{SL}_3, \mathbb{K})$  est l'espace de toutes les images par des morphismes de complexes polyédraux préservant le type de l'appartement  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$ . C'est une variété algébrique projective irréductible. (Voir le théorème 14.7.)*

Nous en déduisons l'existence de dégénérescences très particulières de plats et de géodésiques dans l'espace symétrique de type non compact ou dans l'immeuble euclidien  $X$  de  $\text{SL}_3(\mathbb{K})$ , dont en particulier le corollaire suivant.

**Corollaire.** *Il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de géodésiques de  $X$  telle que la suite  $(\overline{\gamma_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un fermé  $F$  dans l'espace  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$  des fermés de  $\overline{X}^g$ , qui ne soit inclus dans aucun plat à l'infini de  $X$ . (Voir le corollaire 14.11.)*

Dans une autre perspective de dégénérescence de structures géométriques, nous nous intéressons aux espaces de réseaux marqués. Tout espace symétrique de type non compact classique peut être vu comme un espace de réseaux marqués d'un espace euclidien ou hermitien (voir par exemple [Bav05]). Dans cette partie de notre travail (contenue dans la prépublication [Hae11]), nous nous servons de ce point de vue pour étudier une compactification à la Thurston des espaces de réseaux marqués.

Soit  $m \geq 1$  un entier, on appelle *réseau marqué* de covolume 1 de  $\mathbb{R}^m$  tout morphisme injectif de  $\mathbb{Z}$ -modules  $f : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  dont l'image est discrète et de covolume 1. L'espace des classes d'isométrie de tels réseaux marqués est naturellement homéomorphe à l'espace symétrique de type non compact  $\mathcal{E}_m = \text{SL}_m(\mathbb{R})/\text{SO}_m(\mathbb{R})$ . On peut définir une compactification à la Thurston de cet espace, grâce aux distances de translation (où  $\mathbb{R}^m$  est muni de la norme euclidienne usuelle). Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{E}_m &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}^m}) \\ [f : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^m] &\mapsto [u \mapsto \|f(u)\|]. \end{aligned}$$

**Théorème.** *L'application  $\phi$  est un plongement, dont on appelle l'adhérence de l'image  $\overline{\mathcal{E}_m^T}$  la compactification de Thurston de l'espace symétrique  $\mathcal{E}_m$ . Cette compactification est  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ -isomorphe à la compactification de Satake  $\overline{\mathcal{E}_m^S}$  associée à la représentation tautologique de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^m$ . (Voir la proposition 16.11 et le théorème 16.12.)*

Nous démontrons en fait un résultat plus général (voir le théorème 16.12), pour le corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou le corps gauche  $\mathbb{H}$  des quaternions de Hamilton, ainsi que pour des sous-espaces de réseaux autoduaux, ce qui permet de traiter le cas de tous les espaces symétriques de type non compact classiques. Et nous étendons ce théorème au cas du groupe de Lie exceptionnel  $E_{6(-26)}$  (voir le théorème 16.18), qui est la forme réelle non compacte de rang réel 2 du groupe de Lie complexe exceptionnel  $E_6$ .

Dans la dernière partie de notre travail (également contenue dans la prépublication [Hae11]), nous étudions une compactification à la Thurston de l'espace de Torelli.

Soit  $S$  une surface compacte, connexe, orientable et de genre  $g \geq 2$ . L'espace de Torelli  $\mathrm{Tor}(S)$  de la surface  $S$  est l'espace des classes d'isotopie de surfaces hyperboliques munies d'un marquage de leur homologie par celle de  $S$ . L'espace de Torelli  $\mathrm{Tor}(S)$  s'identifie au quotient de l'espace de Teichmüller de  $S$  par le groupe de Torelli  $T(S)$ , qui est le sous-groupe du groupe modulaire de  $S$  constitué des classes d'isotopie de difféomorphismes de  $S$  ayant une action triviale en homologie.

Dans l'espoir de mieux comprendre le type d'homotopie de l'espace de Torelli, nous allons en définir une compactification naturelle. Considérons une surface hyperbolique  $X$  marquée par un difféomorphisme  $h : S \rightarrow X$ . Le théorème de Hodge identifie l'espace  $H^1(X, \mathbb{R})$  avec l'espace des 1-formes différentielles harmoniques sur  $X$ , et cet espace est muni du produit scalaire  $L^2$  : notons  $\|\cdot\|_X$  la norme euclidienne associée sur  $H^1(X, \mathbb{R})$ . Considérons alors l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Tor}(S) &\rightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})} \\ [X, h] &\mapsto \{ \omega \mapsto \|h^{-1*}(\omega)\|_X \}, \end{aligned}$$

et  $\overline{\psi} : \mathrm{Tor}(S) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$  son application quotient. Appelons *compactification de Thurston* de l'espace de Torelli  $\mathrm{Tor}(S)$  l'adhérence de l'image de l'application  $\overline{\psi}$  dans  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$ . Nous allons l'identifier à une compactification à la Satake de  $\mathrm{Tor}(S)$ .

Considérons l'espace  $\mathcal{E}_{2g}^s$  des classes d'isométrie de réseaux symplectiques marqués de covolume 1 de  $\mathbb{R}^{2g}$ , qui s'identifie à l'espace symétrique  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\mathrm{U}(g)$  de  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ , aussi appelé demi-espace de Siegel. Considérons, comme précédemment, le plongement  $\phi : \mathcal{E}_{2g}^s \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}^{2g}})$ . Considérons d'autre part l'application

$$\begin{aligned} p : \mathrm{Tor}(S) &\rightarrow \mathcal{E}_{2g}^s \\ [X, h] &\mapsto [h^{-1*} : H^1(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow H^1(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2g}]. \end{aligned}$$

Alors l'application  $p$  est l'application période classique (voir le théorème 17.2), et  $\psi$  est égal à la composée  $\phi \circ p$ . En particulier,  $\psi$  est un revêtement de degré deux sur son image, ramifié le long du lieu hyperelliptique de  $\mathrm{Tor}(S)$ .

Appelons *compactification de Satake* de l'espace de Torelli l'adhérence de l'image de l'application période dans la compactification de Satake de  $\mathcal{E}_{2g}^s = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\mathrm{U}(g)$  associée à la représentation standard de  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^{2g}$ .



**Théorème.** *Les compactifications de Thurston et de Satake de l'espace de Torelli sont  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -isomorphes. (Voir le théorème 17.4.)*

De plus, nous décrivons une partie du bord de cette compactification : plus précisément, nous décrivons l'adhérence de l'image de  $\psi$ . Considérons  $K^{sep}(S)$  le complexe des courbes séparantes de  $S$  : les sommets de ce complexe simplicial sont les classes d'homotopie de courbes fermées simples séparantes non triviales, et les  $(k-1)$ -simplexes sont les  $k$ -uplets  $\sigma = \{[\gamma_1], \dots, [\gamma_k]\}$  de classes de telles courbes deux à deux disjointes et non homotopes. Notons également  $\Sigma K^{sep}(S)$  l'ensemble des simplexes de  $K^{sep}(S)$ .

Si  $\sigma = \{[\gamma_1], \dots, [\gamma_k]\}$  est un tel  $(k-1)$ -simplexe, considérons les  $k+1$  composantes connexes de  $S \setminus \cup_{j=1}^k \gamma_j$ , et fixons pour chacune d'elles un homéomorphisme avec  $S_j \setminus P_j$ , où  $S_j$  est une surface compacte lisse sans bord de genre  $g_j \geq 1$ , et où  $P_j$  est une partie finie de  $S_j$  (voir la figure 2).

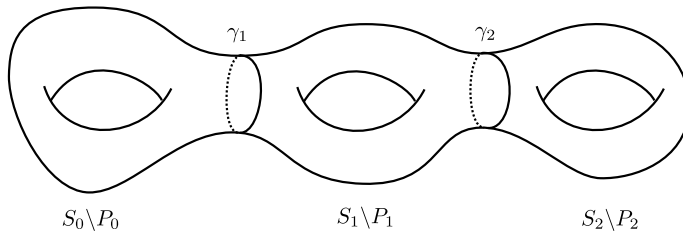


FIGURE 2 – Découpage de la surface  $S$ .

Notons

$$\psi_\sigma : \mathrm{Tor}_\sigma(S) = \prod_{j=0}^k \mathrm{Tor}(S_j) \rightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$$

$$([X_j, h_j]_{0 \leq j \leq k}) \mapsto \left\{ \omega = \sum_{j=0}^k \kappa_j^* \omega_j \mapsto \left( \sum_{j=0}^k \|h_j^{-1*}(\omega_j)\|_{X_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

où  $\omega_j \in H^1(S_j, \mathbb{Z})$ , et où  $\kappa_j : S \rightarrow S_j$  est l'application d'écrasement des  $S_{j'}$ , pour  $j' \neq j$  : pour plus de détails, voir la partie 17.3.3.

**Théorème.** *L'adhérence de l'image de l'application  $\psi$  dans l'espace  $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$  est la réunion disjointe des strates*

$$\overline{\psi(\mathrm{Tor}(S))} = \psi(\mathrm{Tor}(S)) \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma K^{sep}(S)} \psi_\sigma(\mathrm{Tor}_\sigma(S)).$$

(Voir le théorème 17.8.)



---

## Première partie

# Préliminaires

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>La topologie de Chabauty</b>	<b>12</b>
1.1	L'espace des fermés d'un espace topologique localement compact . .	12
1.2	L'espace des sous-groupes fermés d'un groupe topologique localement compact . . . . .	13
1.3	Exemples d'espaces de sous-groupes fermés . . . . .	13
1.4	L'espace des sous-groupes fermés du dual d'un groupe abélien . . . .	16
1.5	Compactification de Chabauty d'un espace homogène . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Compactifications et espaces CAT(0)</b>	<b>20</b>
2.1	Compactifications . . . . .	20
2.2	Espaces CAT(0) . . . . .	20
2.3	Compactification géodésique d'un espace CAT(0) . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Espaces symétriques de type non compact</b>	<b>22</b>
3.1	Décompositions de Cartan et polaire . . . . .	23
3.2	Espaces symétriques . . . . .	24
3.3	Espaces symétriques de type non compact . . . . .	24
3.4	Décompositions en espaces de racines . . . . .	25

---

# 1 La topologie de Chabauty

## 1.1 L'espace des fermés d'un espace topologique localement compact

Soient  $X$  un espace topologique localement compact et  $\mathcal{F}(X)$  l'ensemble des fermés de  $X$ . On munit  $\mathcal{F}(X)$  de la *topologie de Chabauty* (voir [Cha50], et [dlH08] pour un très bon survol), aussi appelée topologie de Hausdorff ou de Vietoris. Les ouverts de cette topologie sont les réunions quelconques d'intersections finies de parties de la forme :

$$\begin{aligned} O_K &= \{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap K = \emptyset\} \\ \text{et } O'_U &= \{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

où  $K$  est un compact de  $X$  et  $U$  un ouvert de  $X$ .

Le résultat suivant est classique, on pourra se référer à [Bou59b, §5], [CEG87, Proposition I.3.1.2, p. 59] ou [CDP07, Proposition 1.7, p. 58] par exemple.

**Proposition 1.1.** *L'espace topologique  $\mathcal{F}(X)$  est compact.* □

Dans le cas où l'espace topologique localement compact  $X$  est muni d'une distance induisant sa topologie, on peut décrire la convergence des suites de fermés de  $X$  pour la topologie de Chabauty (voir par exemple [CEG87, Lemma I.3.1.3, p. 60] ou [CDP07, Proposition 1.8, p. 60]).

**Proposition 1.2.** *Une suite de fermés  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un fermé  $F$  dans  $\mathcal{F}(X)$  si et seulement si  $F$  est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites de  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , c'est-à-dire :*

1. *pour tout  $x \in F$ , il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $x$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous ayons  $x_n \in F_n$  ;*
2. *pour toute partie infinie  $P \subset \mathbb{N}$ , pour toute suite  $(x_n)_{n \in P}$  convergeant vers  $x$  telle que  $x_n \in F_n$  pour tout  $n \in P$ , nous avons  $x \in F$ .* □

Par ailleurs, on a un critère simple de métrisabilité de l'espace  $\mathcal{F}(X)$  (voir par exemple [CDP07, Proposition 1.8, p. 60]).

**Proposition 1.3.** *Si de plus la distance de  $X$  est propre (i.e. les boules fermées sont compactes), alors l'espace  $\mathcal{F}(X)$  est métrisable, pour la distance de Hausdorff pointée (voir [BH99, Definition 5.43, p. 76]). Si  $x_0$  est un point base de  $X$ , et si  $F, F'$  sont des fermés de  $X$ , on définit  $d_{\text{Hau}, x_0}(F, F')$  comme la borne inférieure des  $\varepsilon > 0$  tels que :*

$$\begin{aligned} F \cap B(x_0, \frac{1}{\varepsilon}) &\subset V_\varepsilon(F') \\ \text{et } F' \cap B(x_0, \frac{1}{\varepsilon}) &\subset V_\varepsilon(F), \end{aligned}$$

où  $V_\varepsilon(F')$  désigne le  $\varepsilon$ -voisinage ouvert de  $F'$  dans  $X$ . □

## 1.2 L'espace des sous-groupes fermés d'un groupe topologique localement compact

Soit  $G$  un groupe topologique localement compact. On note  $\mathcal{S}(G) \subset \mathcal{F}(G)$  l'ensemble de ses sous-groupes fermés, muni de la topologie induite. La proposition suivante est immédiate.

**Proposition 1.4.** *Le sous-espace  $\mathcal{S}(G)$  est un fermé de  $\mathcal{F}(G)$ , donc est compact.  $\square$*

Les propriétés qui suivent sont élémentaires.

**Proposition 1.5.** *Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes topologiques localement compacts, qui est une application ouverte. Alors l'application  $\mathcal{S}^*(f) : \mathcal{S}(H) \rightarrow \mathcal{S}(G)$  définie par  $S \mapsto f^{-1}(S)$  est continue.*

**Démonstration.** Soit  $K$  un compact de  $G$ , alors  $f(K)$  est un compact de  $H$  et  $\mathcal{S}^*(f)^{-1}(O_K) = O_{f(K)}$  est un ouvert de  $\mathcal{S}(H)$ . Soit  $U$  un ouvert de  $G$ , alors par hypothèse  $f(U)$  est un ouvert de  $H$  et  $\mathcal{S}^*(f)^{-1}(O'_U) = O'_{f(U)}$  est un ouvert de  $\mathcal{S}(H)$ . Ainsi l'application  $\mathcal{S}^*(f)$  est continue.  $\square$

**Proposition 1.6.** *Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes topologiques localement compacts qui est un plongement d'image fermée. Alors l'application  $\mathcal{S}_*(f) : \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}(H)$  définie par  $S \mapsto f(S)$  est un plongement d'image fermée.*

**Démonstration.** Soit  $S$  un sous-groupe fermé de  $G$ . Alors, puisque  $f$  est un homéomorphisme sur son image,  $f(S)$  est un sous-groupe fermé de  $f(G)$ . Or  $f(G)$  est lui-même un sous-groupe fermé de  $H$ , donc finalement  $f(S)$  est un sous-groupe fermé de  $H$  : ainsi, l'application  $\mathcal{S}_*(f)$  est bien définie.

Considérons l'application  $g = f^{-1}|_{f(G)} : f(G) \rightarrow G$ , c'est un isomorphisme de groupes topologiques localement compacts. Ainsi l'application  $\mathcal{S}^*(g) : \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}(H)$  qui à  $S$  associe  $g^{-1}(S)$  est un homéomorphisme sur son image  $\mathcal{S}(f(G))$ , et cette application coïncide avec l'application  $\mathcal{S}_*(f)$ .

Par ailleurs l'image de  $\mathcal{S}_*(f)$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(H)$  constitué des sous-groupes fermés de  $H$  contenus dans le sous-groupe fermé  $f(G)$ , et est fermé.  $\square$

Remarquons que l'hypothèse que  $f$  réalise un homéomorphisme sur son image est nécessaire. En effet, considérons l'identité  $i$  du groupe  $G = \mathbb{R}$  muni de la topologie discrète, à valeurs dans  $H = \mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle. L'identité  $i$  est un morphisme continu de groupes topologiques, bijectif, dont l'image est bien un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$ , mais l'application  $\mathcal{S}_*(i)$  n'est même pas définie : tout sous-groupe (même non fermé) de  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ .

## 1.3 Exemples d'espaces de sous-groupes fermés

Voici les premiers exemples de calculs d'espaces des sous-groupes fermés. Adoptons la convention que  $\frac{1}{\infty}\mathbb{Z} = \{0\}$  et  $\frac{1}{0}\mathbb{Z} = \mathbb{R}$ . Cette notation est justifiée par la proposition suivante.

**Proposition 1.7.** *L'application*

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{R}} : [0, \infty] &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \alpha &\mapsto \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} \end{aligned}$$

*est un homéomorphisme.* □

Notons  $X_{\mathbb{Z}}$  le sous-espace topologique compact de  $\mathbb{R}$  défini par  $X_{\mathbb{Z}} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ .

**Proposition 1.8.** *L'application  $\phi_{\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z})$  définie par  $\frac{1}{n} \mapsto n\mathbb{Z}$  et  $0 \mapsto \{0\}$  est un homéomorphisme.* □

**Proposition 1.9.** *L'application  $\phi_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  définie par  $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n}\mathbb{Z} \pmod{\mathbb{Z}}$  et  $0 \mapsto \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un homéomorphisme.* □

Fixons  $p$  un nombre premier, et notons  $X_{\mathbb{Q}_p}$  le sous-espace topologique compact de  $[0, \infty]$  défini par  $X_{\mathbb{Q}_p} = \{0\} \cup \{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\infty\}$  (voir la figure 3).

**Proposition 1.10.** *L'application*

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{Q}_p} : X_{\mathbb{Q}_p} &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p) \\ 0 &\mapsto \mathbb{Q}_p \\ p^n &\mapsto p^n\mathbb{Z}_p \\ \infty &\mapsto \{0\} \end{aligned}$$

*est un homéomorphisme.* □

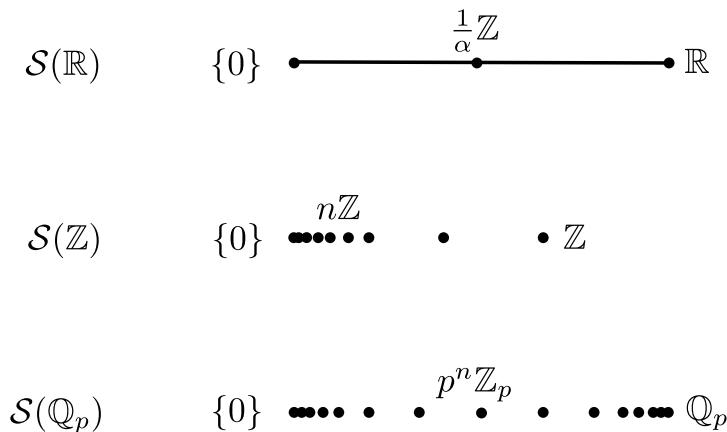


FIGURE 3 – L'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}_p$ .

Le premier calcul intéressant est celui des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 1.11** (Pourezza-Hubbard). *L'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^2$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^4$ . Le sous-espace des réseaux de  $\mathbb{R}^2$  de covolume 1 est homéomorphe au complémentaire du nœud de trèfle dans  $\mathbb{S}^3$ . (Voir [PH79].)* □

En ce qui concerne l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^n$ , B. Kloeckner a établi plusieurs propriétés.

**Théorème 1.12** (Kloeckner). *L'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^n$  est stratifié au sens de Goresky-MacPherson, et est simplement connexe. (Voir [Klo09, Theorems 1.2 et 1.3].)*  $\square$

En ce qui concerne les groupes non abéliens, le cas du groupe affine réel est bien connu. Notons  $\text{Aff}$  le groupe  $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}$ , muni du produit :

$$(x, y)(x', y') = (x + x', y + e^x y').$$

**Proposition 1.13.** *L'espace des sous-groupes fermés de  $\text{Aff}$  est homéomorphe à la réunion d'un disque fermé et d'un segment, dont une extrémité est attachée sur le bord du disque (voir la figure 4).*

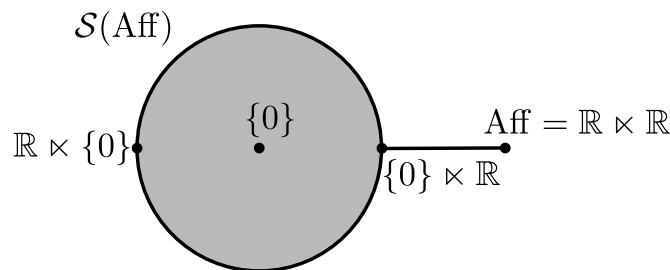


FIGURE 4 – L'espace des sous-groupes fermés du groupe affine.

**Démonstration.** Le groupe  $\text{Aff}$  admet la représentation matricielle

$$\text{Aff} = \left\{ \begin{pmatrix} e^x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'algèbre de Lie du groupe  $\text{Aff}$  est

$$\mathfrak{aff} = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{aff}$  admet la base  $\left( U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$  vérifiant  $[U, V] = V$ . Les sous-groupes à un paramètre de  $\text{Aff}$  sont, pour  $[u : v] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , les sous-groupes

$$\left\{ \exp \left\{ t \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{tu} & \frac{e^{tu}-1}{tu} v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi, l'exponentielle  $\mathfrak{aff} \rightarrow \text{Aff}$  est un difféomorphisme.

Considérons le disque fermé  $D = (P^1(\mathbb{R}) \times [0, \infty]) / \{(x, 0) \sim (x', 0)\}$ , et l'espace  $X_{\text{Aff}} = (D \sqcup [0, \infty]) / \{([0 : 1], \infty) \sim 0\}$ , recollement du disque  $D$  et du segment  $[0, \infty]$  en un point. Rappelons la convention que  $\frac{1}{0}\mathbb{Z} = \mathbb{R}$  et  $\frac{1}{\infty}\mathbb{Z} = \{0\}$ .

Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : X_{\text{Aff}} &\rightarrow \mathcal{S}(\text{Aff}) \\ ([u : v], \alpha) \in D &\mapsto \exp\left(\frac{1}{\alpha}\mathbb{Z}(uU + vV)\right) \\ \alpha \in [0, \infty] &\mapsto \exp\left(\frac{1}{\alpha}\mathbb{Z}U \oplus \mathbb{R}V\right). \end{aligned}$$

C'est un homéomorphisme.  $\square$

Nous pouvons ainsi voir que le sous-espace des sous-groupes discrets est le disque ouvert épointé, donc est ouvert dans  $\mathcal{S}(\text{Aff})$ , ce qui est vrai dès que  $G$  est sans petit sous-groupe (voir [BdlHK09, Proposition 3.4, p. 8]). On peut remarquer que ce sous-espace n'est pas dense, contrairement au cas de  $\mathbb{R}^n$  où le sous-espace des réseaux est ouvert et dense.

Un autre « petit » groupe est le groupe de Heisenberg  $H = \mathbb{C} \ltimes \mathbb{R}$ , muni du produit :

$$(z, t)(z', t') = \left( z + z', t + t' + \frac{1}{2}\text{Im}(zz') \right).$$

M. Bridson, P. de la Harpe et V. Kleptsyn ont décrit l'espace des sous-groupes fermés de  $H$  (voir [BdlHK09]).

## 1.4 L'espace des sous-groupes fermés du dual d'un groupe abélien

Si  $G$  est un groupe topologique localement compact abélien, notons  $\widehat{G}$  son *dual de Pontryagin*. C'est le groupe des caractères de  $G$ , c'est-à-dire des morphismes continus de  $G$  à valeurs dans  $\mathbb{S}^1$ , muni de la topologie compacte-ouverte. C'est un groupe topologique localement compact abélien. On a un isomorphisme canonique entre  $G$  et son bidual  $\widehat{\widehat{G}}$  (voir [Pon66, Theorem 52, p. 273]).

**Théorème 1.14** (Pontryagin). *L'application de  $G \times \widehat{G}$  dans  $\mathbb{S}^1$  définie par  $(g, \chi) \mapsto \chi(g)$  est continue, et l'application*

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \widehat{\widehat{G}} \\ g &\mapsto \{\chi \mapsto \chi(g)\} \end{aligned}$$

*est un isomorphisme de groupes topologiques.*  $\square$

De plus, on a un homéomorphisme canonique entre l'espace des sous-groupes fermés de  $G$  et celui de  $\widehat{G}$ .

**Proposition 1.15.** *L'application*

$$\begin{aligned} \phi_G : \mathcal{S}(G) &\rightarrow \mathcal{S}(\widehat{G}) \\ H &\mapsto \{\chi \in \widehat{G} : \forall h \in H, \chi(h) = 1\} \end{aligned}$$

*est un homéomorphisme. (Voir [dC11, Theorem 1.1])*  $\square$

Nous avons vu un exemple de cet homéomorphisme avec les espaces de sous-groupes fermés du groupe  $\mathbb{Z}$  et de son dual  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (voir les propositions 1.8 et 1.9).



## 1.5 Compactification de Chabauty d'un espace homogène

Soit  $G$  un groupe topologique localement compact, soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  et soit  $N = N_G(H)$  le normalisateur de  $H$  dans  $G$ . L'application naturelle

$$\begin{aligned}\phi_{G,H} : G/N &\rightarrow \mathcal{S}(G) \\ gN &\mapsto gHg^{-1}\end{aligned}$$

est injective et  $G$ -équivariante, pour l'action continue de  $G$  sur  $\mathcal{S}(G)$  par conjugaison. Cette application est également appelée plongement de Demazure (voir [Dem80]).

**Lemme 1.16.** *L'application  $\phi_{G,H}$  est continue.*

**Démonstration.** Puisque l'application  $\phi_{G,H}$  est  $G$ -équivariante, il suffit de montrer qu'elle est continue en  $N \in G/N$ .

Soit  $K$  un compact de  $G$  tel que  $H \in O_K$ , c'est-à-dire tel que  $H \cap K = \emptyset$ . Soit  $V$  un voisinage compact de  $e$  dans  $G$  tel que pour tout  $g \in V$  nous ayons  $g^{-1}Kg \cap H = \emptyset$ . Alors le voisinage  $VN$  de  $N$  dans  $G/N$  est tel que  $\phi_{G,H}(VN) \subset O_K$ .

Soit  $U$  un ouvert de  $G$  tel que  $H \in O'_U$ , c'est-à-dire tel que  $H \cap U \neq \emptyset$ . Soit  $h \in H \cap U$ , et soit  $V$  un voisinage compact de  $e$  dans  $G$  tel que pour tout  $g \in V$  nous ayons  $g^{-1}hg \in U$ . Alors le voisinage  $VN$  de  $N$  dans  $G/N$  est tel que  $\phi_{G,H}(VN) \subset O'_U$ .

Ainsi l'application  $\phi_{G,H}$  est continue.  $\square$

Considérons  $\widehat{G/N}$  la compactification d'Alexandrov de  $G/N$ , et appelons *compactification de Chabauty* (voir la partie 2.1) de  $G/N$  l'adhérence  $\overline{G/N}^{\mathcal{S}}$  du plongement diagonal  $G/N \rightarrow \widehat{G/N} \times \mathcal{S}(G)$  (où l'application de  $G/N$  dans  $\mathcal{S}(G)$  est  $\phi_{G,H}$ ). Lorsque l'application  $\phi_{G,H}$  est de plus un plongement, alors la compactification de Chabauty de  $G/N$  est simplement l'adhérence de l'image de  $\phi_{G,H}$ .

**Proposition 1.17.** *Si  $G$  est un groupe de Lie réel et si  $H$  est connexe, alors  $\phi_{G,H}$  est un plongement.*

**Démonstration.** Notons  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ , et  $\mathfrak{h}$  celle de  $H$ . Considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi_{G,H} : G/N &\rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \\ gN &\mapsto \text{Ad } g(\mathfrak{h}).\end{aligned}$$

Puisque le sous-groupe  $H$  est connexe, les normalisateurs de  $H$  et de son algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  dans  $G$  coïncident, ainsi l'application  $\varphi_{G,H}$  est injective. L'image de l'application  $\varphi_{G,H}$  est incluse dans le sous-espace fermé  $\mathcal{G}r_d(\mathfrak{g})$  des  $d$ -plans de  $\mathfrak{g}$ , où  $d$  est la dimension de  $H$ .

Si  $\text{Ad } G$  est un sous-groupe algébrique de  $\text{GL}(\mathfrak{g})$ , l'application  $\varphi_{G,H}$  s'identifie à l'application orbitale pour l'action algébrique du groupe algébrique  $\text{Ad } G$  sur la variété algébrique projective  $\mathcal{G}r_d(\mathfrak{g})$ . C'est une immersion de variétés algébriques, or son image est localement fermée pour la topologie de Zariski (voir par exemple [Hum75, Proposition 8.3, p. 60]), c'est donc en particulier un plongement pour la topologie analytique. Si

$\text{Ad } G$  n'est pas un sous-groupe algébrique, l'application  $\varphi_{G,H}$  s'identifie à la restriction à  $G/N$  de l'application orbitale pour l'action algébrique de l'adhérence de Zariski  $\overline{\text{Ad } G}^Z$  sur la variété algébrique projective  $\mathcal{G}r_d(\mathfrak{g})$ , c'est donc également un plongement.

L'application  $\phi_{G,H}$  est la composée du plongement  $\varphi_{G,H}$  et de l'application  $\eta : \text{Im}(\varphi_{G,H}) \rightarrow \mathcal{S}(G)$  qui à la sous-algèbre de Lie  $\text{Ad } g(\mathfrak{h})$  de  $\mathfrak{g}$  associe le sous-groupe fermé  $gHg^{-1}$  de  $G$ . Il suffit donc de montrer que l'application  $\eta$  est un plongement. Il est clair que l'application  $\eta$  est injective, et elle est continue car elle coïncide avec  $\phi_{G,H} \circ \varphi_{G,H}^{-1}$  sur  $\text{Im}(\varphi_{G,H})$ . Montrons que  $\eta^{-1}$  est continue sur son domaine : soient  $g \in G$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $G$  telle que la suite de sous-groupes fermés  $(\eta(\text{Ad } g_n(\mathfrak{h})) = g_n H g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $gHg^{-1}$  dans  $\mathcal{S}(G)$ . Alors puisque l'exponentielle de  $G$  est un difféomorphisme local en 0 de  $\mathfrak{g}$  sur  $G$ , la suite de sous-algèbres de Lie  $(\text{Lie}(g_n H g_n^{-1}) = \text{Ad } g_n(\mathfrak{h}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\text{Ad } g(\mathfrak{h})$ .

Ainsi l'application  $\eta$  est un plongement, donc l'application  $\phi_{G,H}$  est un plongement.  $\square$

**Proposition 1.18.** *Si  $G$  est un groupe de Lie réel, si  $H$  est connexe et si  $\text{Ad } G$  est un sous-groupe algébrique de  $\text{GL}(\mathfrak{g})$ , alors la compactification de Chabauty  $\overline{G/N}^S$  est une réunion de  $G$ -orbites qui sont des variétés localement fermées (sous-variétés algébriques de  $\mathcal{G}r_d(\mathfrak{g})$ ) lisses, dont la seule de dimension maximale soit  $G/N$ .*

**Démonstration.** D'après [Hum75, Proposition 8.3, p. 60], l'adhérence de Zariski de l'image du plongement  $\varphi_{G,H}$  est une réunion de  $G$ -orbites Zariski-localement fermées, dont la seule de dimension maximale soit  $G/N$ . Puisque la topologie analytique est plus fine que celle de Zariski, et puisque le plongement  $\varphi_{G,H}$  est  $G$ -équivariant, le bord de la compactification de Chabauty  $\overline{G/N}^S$  est une réunion de  $G$ -orbites localement fermées (sous-variétés algébriques de  $\mathcal{G}r_d(\mathfrak{g})$ ) lisses, dont la seule de dimension maximale soit  $G/N$ .  $\square$

Nous verrons deux exemples de telles compactifications lorsque  $G$  est un groupe de Lie réel connexe semi-simple, de centre fini, sans facteur compact, lorsque  $H$  est un sous-groupe compact maximal dans le chapitre III, et lorsque  $H$  est la composante neutre d'un tore déployé maximal dans la partie 13.

Rappelons qu'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $G$  est appelé un *réseau* s'il est discret et de covolume fini pour une mesure de Haar sur  $G$ .

**Proposition 1.19.** *Si  $N$  est un réseau de  $G$ , alors  $\phi_{G,H}$  est un plongement.*

**Démonstration.** L'application  $\phi_{G,H}$  est continue et injective. Par contraposée, supposons que  $\phi_{G,H}$  ne soit pas un plongement. Alors il existe une suite  $(x_n = g_n N)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers l'infini dans  $G/N$  telle que la suite de sous-groupes fermés  $(g_n H g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un conjugué  $gHg^{-1}$  de  $H$ . Quitte à extraire, on peut supposer que la suite de sous-groupes fermés  $(g_n N g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un sous-groupe fermé  $L$  de  $G$ . Il est immédiat que  $L$  normalise  $gHg^{-1}$ , donc  $L$  est inclus dans  $gNg^{-1}$ .

Fixons une mesure de Haar sur  $G$ . Soit  $K$  un voisinage compact de  $e$  dans  $G$  tel que  $K^{-1}K$  s'injecte dans  $G/gNg^{-1}$ , et dont la mesure de Haar soit  $c > 0$ . Ainsi  $K^{-1}K$  s'injecte dans  $G/L$ . Alors pour  $n$  assez grand, l'application de  $K$  dans  $G/N$  qui à  $k$

associe  $kg_n N$  est injective. Ainsi, pour  $n$  assez grand, la mesure de Haar de  $Kg_n N$  dans  $G/N$  est constante égale à  $c$ . On a construit une infinité de parties de  $G/N$  disjointes de volume  $c$ , donc  $G/N$  ne peut être de volume fini.  $\square$

Cette compactification est étudiée par A. Borel et L. Ji dans le cas du quotient d'un groupe de Lie réel connexe, semi-simple, de centre fini, sans facteur compact par un réseau, et ils montrent dans certains cas que cette compactification est isomorphe à la réduction de Borel-Serre réductive (voir [BJ07, III.12]).

Remarquons que l'hypothèse de covolume fini est nécessaire, comme le montre l'exemple suivant. Soit  $G = \text{Isom}_0(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ , nous allons construire une surface hyperbolique  $X$ . Pour tout réel  $r > 0$ , considérons la surface hyperbolique  $X_r$ , recollement de deux pantalons hyperboliques de longueurs  $r$ ,  $r$  et 1 (voir la figure 5), munie d'un point marqué  $x_r$  sur une composante connexe du bord de longueur  $r$ .

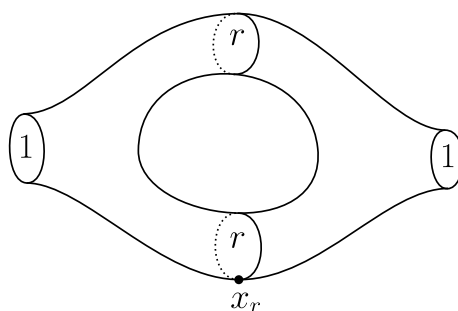
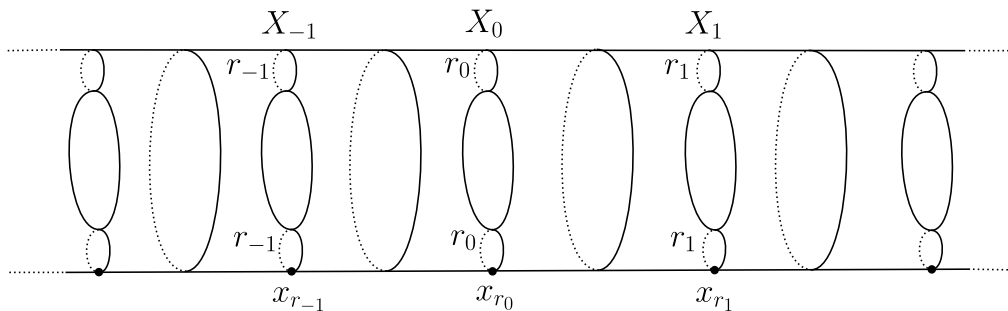


FIGURE 5 – La surface à bord  $X_r$ .

Considérons une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de réels strictement positifs presque périodique, plus précisément supposons qu'elle vérifie ces conditions :

- La suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  n'est pas périodique ni symétrique.
- Pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $A \in \mathbb{N}$ , il existe  $N > A$  tel que, pour tout  $n \in \llbracket -A, A \rrbracket$ , nous ayons  $|r_n - r_{N+n}| < \varepsilon$ .

Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la surface hyperbolique à bord totalement géodésique  $X_n = X_{r_n}$  de point base  $x_n$ . Considérons la surface  $X$  recollement consécutif de toutes ces surfaces hyperboliques avec des paramètres angulaires de recollement nuls (une « échelle de Jacob ») : c'est une surface hyperbolique complète, connexe, orientable, sans bord, de volume infini (voir la figure 6). Soit  $\Gamma = \pi_1(X, x_0)$  son groupe fondamental en le point base  $x_0 \in X_0$  : l'image de la représentation d'holonomie  $\Gamma \rightarrow G$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $G$ . Puisque la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  n'est pas périodique ni symétrique, le normalisateur  $N$  de  $\Gamma$  dans  $G$  est égal à  $\Gamma$ .

FIGURE 6 – La surface  $X$ .

Montrons que l'application  $\phi_{G,\Gamma}$  n'est pas un plongement. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $N_n \geq n$  tel que, pour tout  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ , nous ayons  $|r_k - r_{N_n+k}| < 2^{-n}$ . Par presque périodicité, pour tout rayon  $R > 0$ , la suite de boules  $(B_X(x_{N_n}, R))_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers la boule  $B_X(x_0, R)$ . Donc la suite d'espace métriques pointés  $(X, x_{N_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(X, x_0)$  pour la topologie de Gromov-Hausdorff pointée. D'après [CEG87, Theorem I.3.2.9, p. 72], sur l'espace de Teichmüller de  $\Gamma$ , les topologies de Gromov-Hausdorff pointée et la topologie quotient de la topologie de Chabauty sur l'espace de représentations  $\text{Hom}(\Gamma, G)/G$  coïncident, car  $\Gamma$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $G$ . Ainsi il existe une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $G$  tels que la suite de conjugués  $(g_n \Gamma g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\Gamma$  dans  $\mathcal{S}(G)$ . On peut de plus supposer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'isométrie  $g_n$  envoie un relevé de  $x_0$  à  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  sur un relevé de  $x_{N_n}$ .

Par contre, puisque  $N_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini dans  $X$ , donc la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini dans  $G/\Gamma$ . Ceci prouve que l'application  $\phi_{G,\Gamma}$  n'est pas un plongement.

## 2 Compactifications et espaces CAT(0)

### 2.1 Compactifications

Soit  $X$  un espace topologique localement compact. Une *compactification* de  $X$  est la donnée d'un couple  $(K, i)$ , où  $K$  est un espace topologique compact et  $i : X \rightarrow K$  est un plongement (i.e. un homéomorphisme sur son image) d'image ouverte et dense. On identifie fréquemment  $X$  et  $i(X)$  par l'application  $i$ . On appelle *bord* de  $X$  l'espace  $\partial X = K \setminus i(X)$ . Si  $G$  est un groupe agissant continûment sur  $X$ , on dit que c'est une  *$G$ -compactification*, ou compactification  *$G$ -équivariante*, si l'action de  $G$  sur  $i(X)$ , conjuguée par  $i$  de l'action de  $G$  sur  $X$ , s'étend continûment à  $K$ . Cette extension est alors unique.

### 2.2 Espaces CAT(0)

Un espace métrique CAT(0) est un espace à courbure négative, en un sens que nous allons préciser. La terminologie CAT est due à Gromov, et est un acronyme pour Cartan, Alexandrov et Toponogov. Deux très bonnes références au sujet des espaces CAT(0) sont

[BH99] et [BGS85].

Un espace métrique  $X$  est dit *géodésique* si deux points quelconques  $x$  et  $y$  de  $X$  sont les extrémités d'un segment géodésique  $\gamma : [0, d(x, y)] \rightarrow X$  de  $X$  (non nécessairement unique, noté  $[x, y]$ , mais ceci n'entraînera pas de confusion). Un espace métrique géodésique  $X$  est appelé CAT(0) si ses triangles sont au moins aussi fins que dans le cas euclidien. Précisément, on demande que pour tout triangle géodésique  $pqr$  dans  $X$  et pour tous points  $x \in [p, q]$  et  $y \in [p, r]$ , si l'on désigne par  $\overline{pqr}$  le triangle euclidien de comparaison (de sommets  $\overline{p}$ ,  $\overline{q}$  et  $\overline{r}$  tels que  $d(p, q) = d(\overline{p}, \overline{q})$ ,  $d(q, r) = d(\overline{q}, \overline{r})$  et  $d(r, p) = d(\overline{r}, \overline{p})$ ), et si  $\overline{x} \in [\overline{p}, \overline{q}]$  et  $\overline{y} \in [\overline{p}, \overline{r}]$  sont les points de comparaison dans ce triangle (voir la figure 7), alors  $d(x, y) \leq d(\overline{x}, \overline{y})$ .

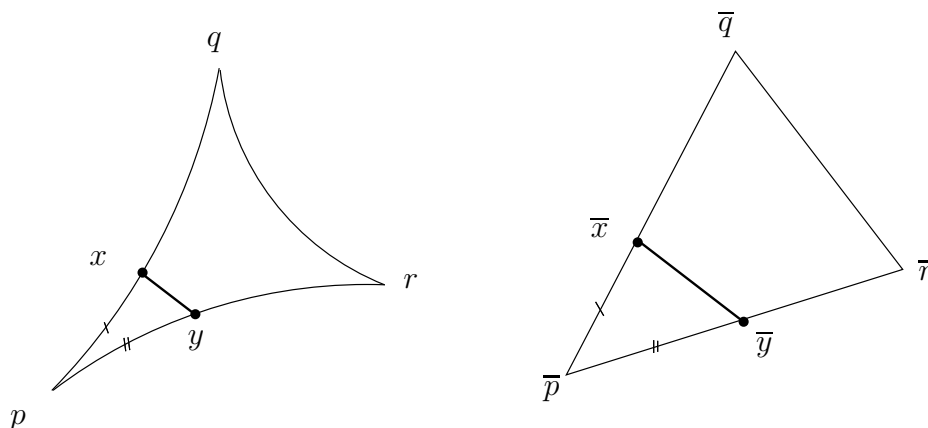


FIGURE 7 – L'inégalité CAT(0) :  $d(x, y) \leq d(\overline{x}, \overline{y})$ .

On dit qu'un espace métrique géodésique  $X$  est CAT(-1) si ses triangles sont au moins aussi fins que dans le cas du plan hyperbolique  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Tout espace CAT(-1) est en particulier CAT(0).

Sous l'hypothèse CAT(0), on a alors unicité des géodésiques.

**Proposition 2.1.** *Un espace métrique CAT(0)  $X$  est uniquement géodésique, c'est-à-dire que par deux points distincts de  $X$  passe une unique géodésique. (Voir [BH99, Proposition 1.4, p. 160].)  $\square$*

Voici le lien avec la notion riemannienne de courbure.

**Théorème 2.2.** *Si  $X$  est une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle négative ou nulle, alors  $X$  est un espace CAT(0). (Voir [BH99, Theorem 1A.6, p. 173].)  $\square$*

Deux grandes familles d'espaces CAT(0) sont les espaces symétriques de type non compact (voir la partie 3), et les réalisations géométriques d'immeubles euclidiens ou hyperboliques.

Si  $X$  est un espace CAT(0), on appelle *plat* de  $X$  toute sous-variété totalement géodésique isométrique à un espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ . On appelle *plat maximal* tout plat de  $X$  de dimension  $d$  maximale.

### 2.3 Compactification géodésique d'un espace CAT(0)

Soit  $X$  un espace métrique CAT(0) complet (en tant qu'espace métrique). Deux rayons géodésiques  $c, c' : [0, \infty[ \rightarrow X$  sont dits *asymptotes* s'il existe une constante  $K$  telle que, pour tout  $t \in [0, \infty[$ , nous ayons  $d(c(t), c'(t)) \leq K$ . Ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des rayons géodésiques de  $X$ ; appelons *bord* (visuel) de  $X$  l'ensemble de ses classes d'équivalence, et notons-le  $\partial_\infty X$ . Notons de plus  $\overline{X}^g = X \cup \partial_\infty X$ .

Définissons une topologie sur l'espace  $\overline{X}^g$  (voir [BH99]), où  $X$  est ouvert dans  $\overline{X}^g$  et un système fondamental de voisinages d'un point  $\xi = [c]$  du bord  $\partial_\infty X$  est donné par

$$U(r, \varepsilon, \xi) = \{x \in \overline{X}^g : d(x, c(0)) \geq r \text{ et } d(p_{B(c(0), r)}(x), c(r)) \leq \varepsilon\},$$

pour  $r > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , où  $p_{B(c(0), r)}(x)$  désigne le projeté de  $x$  sur la boule fermée  $B(c(0), r)$  (voir la figure 8).

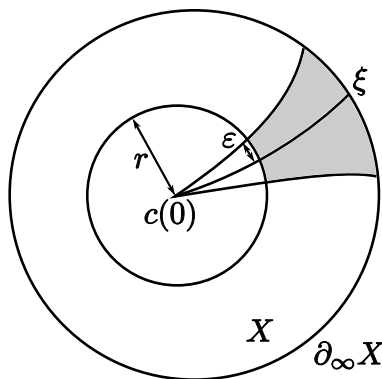


FIGURE 8 – Le voisinage  $U(r, \varepsilon, \xi)$  du point  $\xi$  du bord.

L'espace  $\overline{X}^g$  est alors une compactification de  $X$ . De plus, si  $G$  désigne un groupe agissant continûment par isométries sur  $X$ , l'action de  $G$  s'étend continûment au bord  $\partial_\infty X$  par quotient de l'action sur les rayons géodésiques, et  $\overline{X}^g$  est alors une  $G$ -compactification de  $X$  (voir [BH99, § 8.6, p. 263]). Elle est appelée *compactification géodésique*, *compactification conique*, *compactification par le bord visuel* ou *compactification de Busemann*.

**Exemple.** Dans le cas du plan hyperbolique réel  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ , dans le modèle du disque ouvert, la compactification géodésique est  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -isomorphe à la compactification usuelle où l'on ajoute le cercle à l'infini pour obtenir le disque fermé.

## 3 Espaces symétriques de type non compact

Toutes les algèbres de Lie et tous les groupes de Lie considérés ici sont, sauf mention contraire, réels.

### 3.1 Décompositions de Cartan et polaire

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple,  $B$  la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  et  $\text{ad} : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  la représentation adjointe. On rappelle que pour tous vecteurs  $X, Y, Z$  de  $\mathfrak{g}$ , nous avons

$$B(X, \text{ad} Y(Z)) = B(Y, \text{ad} Z(X)) = B(Z, \text{ad} X(Y)).$$

Et, pour tout automorphisme  $\theta$  de  $\mathfrak{g}$ , et pour tous vecteurs  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , nous avons

$$B(\theta(X), \theta(Y)) = B(X, Y).$$

On appelle *décomposition de Cartan* de  $\mathfrak{g}$  toute décomposition de  $\mathfrak{g}$  en somme directe vectorielle  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{k}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{p}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  tels que, si l'on note  $\theta$  l'*involution de Cartan*

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ X + Y &\mapsto X - Y, \end{aligned}$$

alors  $\theta$  est un automorphisme de  $\mathfrak{g}$  et la forme bilinéaire  $B_\theta(X, Y) = -B(X, \theta(Y))$  est définie positive sur  $\mathfrak{g}$ . La forme de Killing  $B$  est ainsi définie négative sur  $\mathfrak{k}$ , et définie positive sur  $\mathfrak{p}$ .

**Théorème 3.1.** *Toute algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  admet une décomposition de Cartan. De plus, deux décompositions de Cartan de  $\mathfrak{g}$  sont conjuguées. (Voir [Hel78, Theorem 7.1, p. 182].)*  $\square$

**Exemple.** Soient  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  l'algèbre de Lie des matrices réelles  $n \times n$  de trace nulle,  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  des matrices antisymétriques et  $\mathfrak{p}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  des matrices symétriques (de trace nulle). Alors  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  est une décomposition de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , et l'involution de Cartan associée est  $\theta : Y \mapsto -{}^t Y$ . La forme de Killing  $B(X, Y) = 2n \text{tr}(XY)$  est bien symétrique définie positive sur  $\mathfrak{p}$ , et définie négative sur  $\mathfrak{k}$ .

**Proposition 3.2.** *Si  $G$  est un groupe de Lie semi-simple ayant un nombre fini de composantes connexes, alors  $G$  admet un sous-groupe compact maximal, et deux sous-groupes compacts maximaux sont conjugués (Voir [Bor51], [OV90, Theorem 3, p. 259].)*  $\square$

**Proposition 3.3.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple de centre fini ayant un nombre fini de composantes connexes, et soit  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ , alors il existe une unique décomposition de Cartan de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  telle que  $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$  soit l'algèbre de Lie de  $K$ . De plus, l'application*

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{p} \times K &\rightarrow G \\ (X, k) &\mapsto (\exp X)k \end{aligned}$$

*est un difféomorphisme, appelé décomposition polaire de  $G$ . (Voir [OV90, Theorem 2, p. 256].)*  $\square$

L'hypothèse de centre fini est nécessaire pour la décomposition polaire, comme le montre l'exemple du revêtement universel  $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$  de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ . C'est un groupe de Lie connexe semi-simple, de centre infini, non linéaire. Son seul sous-groupe compact est le groupe trivial, donc il n'existe pas de sous-groupe compact  $K$  dont l'algèbre de Lie appartienne à une décomposition de Cartan.

### 3.2 Espaces symétriques

Une variété riemannienne connexe  $M$  est appelée un *espace (globalement) symétrique* si tout point  $p$  de  $M$  est un point fixe isolé d'une isométrie involutive  $s_p$  de  $M$ .

**Exemple.** Les sphères  $\mathbb{S}^n$ , les espaces hyperboliques réels  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  et les espaces euclidiens  $\mathbb{R}^n$  sont des espaces symétriques, ainsi que leurs produits riemanniens.

Si  $M$  est une variété riemannienne, notons  $\text{Isom}(M)$  le groupe des isométries de  $M$ , muni de la topologie compacte-ouverte. Notons de plus  $\text{Isom}_0(M)$  la composante neutre de  $\text{Isom}(M)$ .

Les propositions suivantes montrent comment passer d'un espace symétrique à son groupe d'isométries, et vice versa.

**Proposition 3.4.** *Soit  $M$  un espace symétrique, et fixons un point  $p_0$  de  $M$ . Posons  $G = \text{Isom}_0(M)$ ,  $K = \{g \in G, g \cdot p_0 = p_0\}$  le fixateur du point  $p_0$  et  $\sigma : G \rightarrow G$  le morphisme  $g \mapsto s_{p_0} g s_{p_0}$ . Alors  $G$  est un groupe de Lie connexe,  $\sigma$  est une involution de  $G$  et  $K$  est un sous-groupe compact de  $G$  tel que  $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$ . De plus, l'application suivante est un difféomorphisme :*

$$\begin{aligned} G/K &\rightarrow M \\ gK &\mapsto g \cdot p_0. \end{aligned}$$

*En particulier, l'action de  $G$  sur  $M$  est transitive. (Voir [Hel78, Theorem 3.3, p. 208].)*  $\square$

**Proposition 3.5.** *Soient  $G$  un groupe de Lie connexe,  $\sigma$  une involution de  $G$  et  $K$  un sous-groupe compact de  $G$  tel que  $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$ . Alors pour toute structure riemannienne  $G$ -invariante sur  $G/K$  (et il en existe),  $G/K$  est un espace symétrique. (Voir [Hel78, Proposition 3.4, p. 209].)*  $\square$

**Exemple.** Ces propositions sont illustrées par les exemples des sphères  $\mathbb{S}^n = \text{SO}(n+1, \mathbb{R})/\text{SO}(n, \mathbb{R})$ , des espaces hyperboliques réels  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n = \text{SO}_0(n, 1)/\text{SO}(n, \mathbb{R})$  et des espaces euclidiens  $\mathbb{R}^n = \text{Isom}_+(\mathbb{R}^n)/\text{SO}(n)$ .

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini et  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ . Alors, d'après la proposition 3.3, si on note  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  la décomposition de Cartan associée à  $K$ , la décomposition polaire fournit un difféomorphisme de l'espace symétrique  $G/K$  sur l'espace vectoriel  $\mathfrak{p}$ .

### 3.3 Espaces symétriques de type non compact

Un espace symétrique  $M$  est dit *de type non compact* si sa courbure sectionnelle est partout négative ou nulle, et si un revêtement riemannien universel  $\widetilde{M}$  de  $M$  n'admet pas de facteur de de Rham euclidien (i.e. si  $\widetilde{M}$  n'est pas isométrique au produit riemannien d'une variété riemannienne  $M'$  et d'un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n \geq 1$ ).

**Exemple.** Les espaces hyperboliques réels  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  sont des espaces symétriques de type non compact car de courbure constante strictement négative, le produit riemannien de deux espaces symétriques de type non compact est encore de type non compact.



On dit qu'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  est *sans facteur compact* si  $\mathfrak{g}$  n'admet pas d'*idéal compact* (i.e. un idéal  $\mathfrak{i}$  de  $\mathfrak{g}$  tel que la forme de Killing  $B|_{\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}}$  soit définie négative) autre que  $\{0\}$ . On dit qu'un groupe de Lie semi-simple  $G$  est *sans facteur compact* si son algèbre de Lie est sans facteur compact.

Les propositions suivantes donnent des conditions suffisantes (et nécessaires à indice fini près) pour que  $G/K$  soit un espace symétrique de type non compact :

**Proposition 3.6.** *Soient  $G$  un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini et sans facteur compact,  $\sigma$  une involution de  $G$  telle que  $d\sigma_e$  soit une involution de Cartan de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , et  $K$  un sous-groupe compact de  $G$  tel que  $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$ . Alors, pour toute structure riemannienne  $G$ -invariante sur  $G/K$ , l'espace  $G/K$  est un espace symétrique de type non compact, appelé l'espace symétrique de  $G$ . (Voir [Hel78, Theorem 3.1, p. 241].)  $\square$*

**Proposition 3.7.** *Soit  $M$  un espace symétrique de type non compact. Alors  $G = \text{Isom}_0(M)$  est un groupe de Lie connexe semi-simple, de centre trivial et sans facteur compact. (Voir [Hel78, Exercice 5, p. 250].)  $\square$*

Ces constructions sont presque inverses l'une de l'autre, en le sens suivant.

**Proposition 3.8.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe semi-simple, de centre trivial et sans facteur compact, et  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ . Alors, pour toute métrique riemannienne  $G$ -invariante sur l'espace  $G/K$ , le groupe  $G$  s'identifie canoniquement à la composante neutre  $\text{Isom}_0(G/K)$  du groupe des isométries de  $G/K$ . (Voir [Hel78, Theorem 4.1, p. 243].)  $\square$*

**Exemple.** L'espace  $\text{SL}(n, \mathbb{R})/\text{SO}(n, \mathbb{R})$  est un espace symétrique de type non compact. Une métrique riemannienne  $G$ -invariante sur  $\text{SL}(n, \mathbb{R})/\text{SO}(n, \mathbb{R})$  est donnée sur l'espace tangent en  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ , isomorphe à  $\mathfrak{p}$ , par  $B_\theta(X, Y) = 2n \text{tr}(XY)$ , et cette métrique est transportée par translation à gauche. L'importance de cet exemple est justifiée par le fait que tout espace symétrique de type non compact se plonge, de manière totalement géodésique et isométrique à constantes multiplicatives près, dans un  $\text{SL}(n, \mathbb{R})/\text{SO}(n)$  (voir [Ebe96, Theorem 2.6.5, p.76]).

### 3.4 Décompositions en espaces de racines

Dans toute cette partie,  $G$  désigne un groupe de Lie connexe semi-simple, de centre fini, et  $K$  un sous-groupe compact maximal. Notons de plus  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{k}$  l'algèbre de Lie de  $K$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  la décomposition de Cartan associée, et  $\theta$  l'involution de Cartan.

Choisissons  $\mathfrak{a}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  abélienne contenue dans  $\mathfrak{p}$  maximale. C'est une *sous-algèbre de Cartan*, c'est-à-dire une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  abélienne, dont l'action adjointe est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , maximale. On appelle sa dimension le rang (réel) de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $A$  l'unique sous-groupe de Lie connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$ , nous l'appellerons dans cette thèse un *sous-groupe de Cartan* (selon les références, la définition peut légèrement varier). C'est également la composante neutre d'un tore maximal déployé de  $G$ , c'est-à-dire d'un sous-groupe de  $G$  abélien, dont l'action adjointe est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , maximal.

Si l'on note  $\mathfrak{a}^*$  l'espace vectoriel dual de  $\mathfrak{a}$ , définissons le système de racines (restreint) associé à  $\mathfrak{a}$  :

$$\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} : \exists Y \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}, \forall H \in \mathfrak{a}, \text{ad } H(Y) = \alpha(H)Y\}.$$

Cela définit la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en espaces de racines :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où on a posé  $\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g}, \forall H \in \mathfrak{a}, \text{ad } H(Y) = \alpha(H)Y\}$  et  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$  est le centralisateur dans  $\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{a}$ . De plus, si l'on pose  $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$  le centralisateur dans  $\mathfrak{k}$  de  $\mathfrak{a}$ , alors  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ . La décomposition en espaces de racines est orthogonale pour le produit scalaire  $B_\theta$ .

**Exemple.** Pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{p}$  l'espace vectoriel des matrices symétriques de trace nulle, on peut choisir pour  $\mathfrak{a}$  la sous-algèbre des matrices diagonales. Dans ce cas, le système de racines est

$$\Sigma = \{\alpha_{i,j} : H \mapsto H_{i,i} - H_{j,j}, \forall i, j \in [[1, n]], i \neq j\}$$

et, pour  $i, j \in [[1, n]]$ , avec  $i \neq j$ , nous avons  $\mathfrak{g}_{\alpha_{i,j}} = \text{Vect}(E_{i,j})$ , où  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  désigne la base canonique de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Et  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$  dans ce cas particulier.

On appelle les composantes connexes de  $\mathfrak{a} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Sigma} \text{Ker } \alpha$  les *chambres de Weyl* (vectorielles, ouvertes) de  $\mathfrak{a}$ . Choisissons une chambre de Weyl  $\mathfrak{a}^+$ , que l'on appellera chambre de Weyl *positive*. On dit alors qu'une racine  $\alpha \in \Sigma$  est *positive* si  $\alpha|_{\mathfrak{a}^+} \geq 0$  (resp. *négative* si  $\alpha|_{\mathfrak{a}^+} \leq 0$ ). Notons  $\Sigma^+$  (resp.  $\Sigma^- = \Sigma \setminus \Sigma^+$ ) l'ensemble des racines positives (resp. négatives). Soit  $\Delta$  l'ensemble des racines  $\alpha \in \Sigma$  positives, ne pouvant pas s'écrire  $\alpha = \beta + \gamma$ , avec  $\beta$  et  $\gamma$  des racines positives. Alors  $\Delta$  est une *base* du système de racines  $\Sigma$ , c'est-à-dire que toutes les racines de  $\Sigma$  s'expriment de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients entiers, tous de même signe, des racines de la base  $\Delta$ . De plus, toute base s'obtient ainsi, et on a

$$\mathfrak{a}^+ = \{X \in \mathfrak{a} : \forall \alpha \in \Delta, \alpha(X) > 0\}.$$

**Exemple.** Pour  $G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$ , on peut choisir pour chambre de Weyl positive  $\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : H_{1,1} > H_{2,2} > \dots > H_{n,n}\}$ . Ceci correspond au choix de la base  $\Delta = \{\alpha_{i,i+1}, i \in [[1, n-1]]\}$ .

Posons  $M = Z_K(\mathfrak{a})$  le centralisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $K$  pour l'action adjointe, il a pour algèbre de Lie  $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$  le centralisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{k}$ . Et posons  $M' = N_K(\mathfrak{a})$  le normalisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $K$  pour l'action adjointe. Le centralisateur de  $A$  dans  $G$  est  $MA$ , aussi appelé *tore maximal déployé*, et le normalisateur de  $A$  dans  $G$  est  $M'A$ . Le groupe fini  $W = M'/M$  s'appelle le *groupe de Weyl* de  $G$ .

Notons  $\mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{n}^-$  les sous-algèbres de Lie nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  définies par  $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$  et  $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^-} \mathfrak{g}_\alpha$ . On peut alors écrire la décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-$ . Notons  $N$  et  $N^-$  les uniques sous-groupes de Lie de  $G$  connexes, d'algèbres de Lie respectives  $\mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{n}^-$ . Alors l'application  $K \times A \times N \rightarrow G$  définie par  $(k, a, n) \mapsto kan$  est un difféomorphisme, appelé décomposition d'Iwasawa (voir par exemple [OV90, Theorem 6, p. 275]).

**Exemple.** Pour  $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ,  $M$  est égal au sous-groupe des matrices diagonales ayant des  $\pm 1$  sur la diagonale,  $M'$  est égal au sous-groupe des matrices de permutation de coefficients égaux à  $\pm 1$  et  $W$  est isomorphe au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . De plus,  $N$  est égal au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de coefficients diagonaux égaux à 1.

Un sous-groupe fermé propre  $P$  de  $G$  est dit *parabolique* si le quotient  $G/P$  est une variété projective. Le sous-groupe  $MAN$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $G$ , appelé sous-groupe parabolique minimal standard. Deux sous-groupes paraboliques minimaux de  $G$  sont conjugués. Lorsque  $G$  est déployé sur  $\mathbb{R}$ , les sous-groupes paraboliques minimaux sont également appelés sous-groupes de Borel.

**Exemple.** Pour  $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  et le choix précédent de  $\mathfrak{a}$ , le sous-groupe parabolique minimal standard  $MAN$  est le sous-groupe triangulaire supérieur. Les sous-groupes paraboliques contenant  $MAN$  sont les sous-groupes triangulaires supérieurs par blocs.

Définissons  $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$  la chambre de Weyl (ouverte) positive de  $A$ , et notons  $\overline{\mathfrak{a}^+}$  et  $\overline{A^+}$  (les adhérences dans  $\mathfrak{g}$  et  $G$ ) les chambres de Weyl fermées. Le groupe de Weyl  $W$  agit simplement transitivement sur les chambres de Weyl de  $A$ .

De plus, tout élément  $g$  de  $G$  s'écrit  $g = k_1 a k_2$ , où  $k_1, k_2 \in K$  et  $a \in \overline{A^+}$  : c'est la *décomposition de Cartan*  $K\overline{A^+}K$  de  $G$ . Et l'élément  $a = a(g) \in \overline{A^+}$  est uniquement déterminé par  $g$ , et est continu en  $g$  (voir par exemple [Hel78, Theorem 1.1, p. 402]).



---

## Deuxième partie

# L'espace des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

## Sommaire

---

<b>4</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>Les sous-groupes fermés de <math>\mathbb{R} \times \mathbb{Z}</math></b>	<b>31</b>
5.1	Le sous-espace $\mathcal{S}^I$ . . . . .	32
5.2	Le sous-espace $\mathcal{S}^{II}$ . . . . .	32
5.3	Les sous-espaces $\mathcal{S}_n^{III}$ . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Une compactification du disque</b>	<b>35</b>
<b>7</b>	<b>Le recollement des sous-espaces de sous-groupes fermés</b>	<b>39</b>
7.1	L'adhérence des disques $\mathcal{S}_n^{III}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ . . . . .	39
7.2	L'accumulation des disques $\mathcal{S}_n^{III}$ sur $\mathcal{S}^I$ . . . . .	40
7.3	Le recollement final . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Le groupe fondamental de l'espace <math>\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})</math></b>	<b>43</b>
	<b>Annexe : Une autre présentation de la compactification du disque</b>	<b>45</b>

---

Le contenu de ce chapitre provient de l'article [Hae10b], excepté l'annexe.

## 4 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  des sous-groupes fermés du groupe topologique  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . Nous allons montrer que la topologie de  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  est singulièrement compliquée, et ce malgré la simplicité de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . Cet espace étant canoniquement homéomorphe à l'espace des sous-groupes fermés du groupe dual  $\mathbb{C}^\times$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , cette partie explicite aussi l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^\times)$ .

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  l'espace des « anneaux hawaïens » (voir la figure 9, p. 33), réunion d'une infinité dénombrable de cercles  $(A_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  se rencontrant deux à deux exactement en un point et s'accumulant sur ce point. Pour tout entier  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , considérons une copie  $\overline{D}_k$  du disque fermé et  $I = [0, 1]$ . Munissons la réunion disjointe  $\overline{X} = I \sqcup \bigsqcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \overline{D}_k$  de la topologie telle que les disques  $\overline{D}_k$  s'accumulent sur le segment  $I$  le long des rayons de ces disques (voir la figure 13, p. 42).

Recollons enfin le cercle  $\partial \overline{D}_k$  au bord de chacun des disques sur l'espace  $\mathcal{A}$ , de la manière suivante. Soit  $(I_{\overline{q}})_{\overline{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$  une famille de segments disjoints du cercle  $\partial \overline{D}_k$ , dont l'ordre cyclique est donné par celui de  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Alors définissons  $g_k : \partial \overline{D}_k \rightarrow \mathcal{A}$ , qui sur chaque segment  $I_{\overline{q}}$  effectue une fois le tour du cercle  $A_{kb}$  dans le sens direct à partir de 0, où  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  désigne le dénominateur de  $\overline{q}$ , et qui envoie le reste du cercle  $\partial \overline{D}_k$  sur 0. Cela définit une application  $g : \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \partial \overline{D}_k \rightarrow \mathcal{A}$ . Prolongeons continûment l'application  $g$  à l'extrémité 0 du segment  $I$  en définissant  $g(0)$  comme le point singulier des anneaux hawaïens  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 4.1.** *L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  est homéomorphe à la réunion des disques  $(\overline{D}_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  s'accumulant sur  $I$ , recollés sur l'espace  $\mathcal{A}$  par l'application  $g$ . (Voir le théorème 7.3.)*

Dans une première partie, nous explicitons des familles de sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . Ensuite, nous décrivons une compactification du disque ouvert par des arguments de géométrie hyperbolique. Ceci nous permet de décrire aisément le recollement de ces familles de sous-groupes fermés. Enfin, nous donnons une description combinatoire du groupe fondamental de l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , et montrons en particulier le résultat suivant.

**Théorème 4.2.** *Le groupe fondamental de l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  n'est pas dénombrable. (Voir le théorème 8.2.)*

Je tiens à remercier chaleureusement Frédéric Paulin pour ses relectures attentives et ses précieux conseils, ainsi que Pierre de la Harpe pour ses nombreuses remarques ayant permis de considérablement améliorer la présentation de l'article [Hae10b]. Je tiens également à remercier Yves de Cornulier qui m'a fait de nombreux commentaires précieux et expliqué plusieurs perspectives.

## 5 Les sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

Considérons le groupe topologique abélien localement compact métrisable  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . Notons  $i : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  le morphisme injectif  $x \mapsto (x, 0)$  et  $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  la deuxième projection. Adoptons également la convention que  $\frac{1}{0}\mathbb{Z} = \{0\}$  et  $\frac{1}{\infty}\mathbb{Z} = \mathbb{R}$ .

Nous noterons  $E(x)$  la partie entière du réel  $x$ . Adoptons la convention que nous écrirons chaque rationnel  $\beta = \frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  premiers entre eux. Si  $\beta \in \mathbb{R}$ , nous noterons  $\overline{\beta}$  son image dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Remarquons que le dual du groupe  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  est isomorphe à  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , donc également au groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^\times$ , donc d'après la proposition 1.15, l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  et celui de  $\mathbb{C}^\times$  sont homéomorphes.

Nous allons maintenant décrire tous les sous-groupes fermés du groupe  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ .

Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . Alors  $H \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$  est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R} \times \{0\}$  : soit donc  $\alpha$  l'unique élément de  $[0, \infty]$  tel que  $H \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} \times \{0\}$ . De plus  $\pi(H)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  : soit donc  $n$  l'unique élément de  $\mathbb{N}$  tel que  $\pi(H) = n\mathbb{Z}$ .

Si  $n = 0$ , alors  $H = G_\alpha^I$ , où nous notons

$$G_\alpha^I = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right).$$

Si  $n > 0$ , plusieurs cas sont à distinguer.

– Si  $\alpha = 0$ , alors  $\pi^{-1}(n) \cap H = \{(\gamma, n)\}$ , pour un unique  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Alors  $H = G_{\gamma, n}^{II}$ , où nous notons

$$G_{\gamma, n}^{II} = \mathbb{Z}(\gamma, n).$$

– Si  $0 < \alpha < \infty$ , alors  $\pi^{-1}(n) \cap H = \{(\frac{\beta+p}{\alpha}, n), p \in \mathbb{Z}\}$ , pour un unique  $\overline{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Alors  $H = G_{\alpha, \overline{\beta}, n}^{III}$ , où nous notons

$$G_{\alpha, \overline{\beta}, n}^{III} = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right) + \mathbb{Z}\left(\frac{\beta}{\alpha}, n\right).$$

– Si  $\alpha = \infty$ , alors  $\pi^{-1}(n) \cap H = \mathbb{R} \times \{n\}$ . Alors  $H = G_n^{IV}$ , où nous notons

$$G_n^{IV} = \mathbb{R} \times n\mathbb{Z}.$$

**Proposition 5.1.** *L'ensemble  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  est réunion disjointe des familles*

$$\begin{aligned} & \{G_\alpha^I = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right) : \alpha \in [0, \infty]\} \\ & \{G_{\gamma, n}^{II} = \mathbb{Z}(\gamma, n) : \gamma \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \\ & \{G_{\alpha, \overline{\beta}, n}^{III} = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right) + \mathbb{Z}\left(\frac{\beta}{\alpha}, n\right) : \alpha \in ]0, \infty[, \overline{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \\ & \text{et } \{G_n^{IV} = \mathbb{R} \times n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

De plus, le paramétrage de chacune de ces familles est bijectif.

**Démonstration.** Ceci découle de la définition et de l'unicité des paramètres  $\alpha, n, \bar{\beta}$  (si  $n > 0$  et  $\alpha \in ]0, \infty[$ ) et  $\gamma$  (si  $n > 0$  et  $\alpha = 0$ ), pour un sous-groupe de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  fermé  $H$  donné.  $\square$

Considérons la partition de  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  en trois sous-espaces :

1. Le sous-espace  $\mathcal{S}^I$  des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  dont la projection sur  $\mathbb{Z}$  est  $\{0\}$ , sauf  $\{0\}$ . Ses éléments sont les sous-groupes  $G_\alpha^I$ , pour  $\alpha \in ]0, \infty[$ .
2. Le sous-espace  $\mathcal{S}^{II}$  des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  qui sont cycliques infinis et ont une projection sur  $\mathbb{Z}$  différente de  $\{0\}$ , ainsi que le sous-groupe  $\{0\}$ . Ses éléments sont les sous-groupes  $G_{\gamma,n}^{II}$ , pour  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , et  $\{0\}$ .
3. Le sous-espace  $\mathcal{S}^{III}$  des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  isomorphes à  $\mathbb{Z}^2$  ou à  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . Ses éléments sont les sous-groupes  $G_{\alpha,\bar{\beta},n}^{III}$ , pour  $\alpha \in ]0, \infty[$ ,  $\bar{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , ainsi que les sous-groupes  $G_n^{IV}$ , pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Notons  $\mathcal{S}_n^{III}$  le sous-espace correspondant à une valeur  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  fixée, c'est-à-dire la réunion des  $G_{\alpha,\bar{\beta},n}^{III}$ , pour  $\alpha \in ]0, \infty[$  et  $\bar{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , et de  $G_n^{IV}$ .

Nous allons décrire la topologie de chacun de ces sous-espaces  $\mathcal{S}^I$ ,  $\mathcal{S}^{II}$  et  $\mathcal{S}^{III}$ . Puis nous allons décrire comment ces espaces se recollent pour former l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ .

## 5.1 Le sous-espace $\mathcal{S}^I$

**Proposition 5.2.** *L'application  $\psi^I : ]0, \infty] \rightarrow \mathcal{S}^I$  définie par  $\alpha \mapsto \mathbb{Z}(\frac{1}{\alpha}, 0)$  est un homéomorphisme.*

**Démonstration.** Remarquons que  $\psi^I$  est la composée de l'homéomorphisme  $\phi_{\mathbb{R}} : [0, \infty] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et de l'application  $\mathcal{S}_*(i) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ . Or le morphisme  $i$  est un plongement d'image fermée de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , donc d'après la proposition 1.6, l'application  $\mathcal{S}_*(i)$  est un plongement, d'image  $\mathcal{S}^I$ .  $\square$

Remarquons que l'adhérence de  $\mathcal{S}^I$  dans  $\mathcal{S}$  est égale à  $\mathcal{S}^I \cup \{\{0\}\}$ .

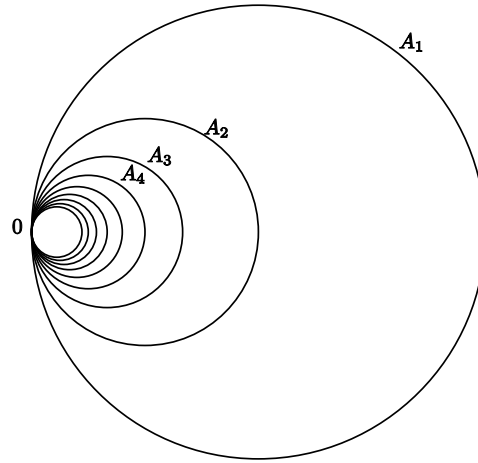
## 5.2 Le sous-espace $\mathcal{S}^{II}$

Considérons l'espace topologique des « anneaux hawaïens »

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$$

où  $A_n$  désigne le cercle dans la droite complexe  $\mathbb{C}$  de centre  $\frac{1}{n}$  et de rayon  $\frac{1}{n}$  (voir la figure 9).



FIGURE 9 – L'espace des « anneaux hawaïens »  $\mathcal{A}$ .

Considérons la bijection  $\psi^{II} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}^{II}$  définie par

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(1 + e^{2i\theta}) \neq 0 &\mapsto G_{\tan\theta, n}^{II}, \text{ où } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ et } \theta \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [ \\ 0 &\mapsto \{0\}. \end{aligned}$$

L'application  $\psi^{II}$  admet pour inverse l'application  $(\psi^{II})^{-1} : \mathcal{S}^{II} \rightarrow \mathcal{A}$  définie par

$$\begin{aligned} G_{\gamma, n}^{II} &\mapsto \frac{1}{n}(1 + e^{2i \arctan \gamma}) \text{ où } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ et } \gamma \in \mathbb{R} \\ \{0\} &\mapsto 0. \end{aligned}$$

**Proposition 5.3.** *La bijection  $\psi^{II}$  est un homéomorphisme.*

**Démonstration.** Comme l'espace de départ est compact métrisable et que l'espace d'arrivée est métrisable, il suffit de montrer que l'application  $\psi^{II}$  est séquentiellement continue.

Montrons que, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $\theta \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ , l'application  $\psi^{II}$  est continue en  $z = \frac{1}{n}(1 + e^{2i\theta})$ . Soit  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{A}$  convergeant vers  $z$ . Alors, à partir d'un certain rang, le point  $z_k$  s'écrit  $\frac{1}{n}(1 + e^{2i\theta_k})$ , où de plus la suite  $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\theta$ . Montrons que la suite  $(\psi^{II}(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\psi^{II}(z)$ . Le générateur  $(\tan\theta, n)$  de  $\psi^{II}(z)$  est limite de la suite  $(\tan\theta_k, n)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $(\psi^{II}(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ . Réciproquement, supposons qu'une suite  $(p_k \tan\theta_k, p_k n)_{k \in P}$  d'éléments de  $(\psi^{II}(z_k))_{k \in P}$  converge vers  $(x, m)$ , où  $P$  désigne une partie infinie de  $\mathbb{N}$  et où  $p_k \in \mathbb{Z}$  pour tout  $k \in P$ . Alors  $p_k = p$  est constant à partir d'un certain, donc  $(x, m) = p(\tan\theta, n) \in \psi^{II}(z)$ .

Montrons que l'application  $\psi^{II}$  est continue en 0. Soit  $(z_k = \frac{1}{n_k}(1 + e^{2i\theta_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{A}$  convergeant vers 0. Si la suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ , il est clair que la suite de sous-groupes  $(\psi^{II}(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\{0\} = \psi^{II}(0)$ . Sinon, quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\frac{\pm\pi}{2}$ , et dans ce cas il est également clair que la suite de sous-groupes  $(\psi^{II}(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\{0\} = \psi^{II}(0)$ .  $\square$

Remarquons que par compacité de l'espace des anneaux hawaïens  $\mathcal{A}$ , son image  $\mathcal{S}^{II}$  par  $\psi^{II}$  est compacte.

### 5.3 Les sous-espaces $\mathcal{S}_n^{III}$

Notons  $D$  l'écrasement  $\{(\alpha, \overline{\beta}), \alpha \in ]0, \infty], \overline{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\} / \{\{\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ , muni de la topologie quotient de la topologie usuelle sur  $]0, \infty] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  : l'espace  $D$  est homéomorphe à un disque ouvert (on notera indifféremment un point de  $]0, \infty] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et son image dans  $D$ ).

**Proposition 5.4.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , l'application  $\psi_n^{III} : D \rightarrow \mathcal{S}_n^{III}$  définie par*

$$(\alpha, \overline{\beta}) \mapsto \begin{cases} G_{\alpha, \overline{\beta}, n}^{III} & \text{si } \alpha < \infty \\ G_n^{IV} & \text{si } \alpha = \infty \end{cases}$$

*est un homéomorphisme.*

**Démonstration.** L'application  $\psi_n^{III}$  est bijective d'après la proposition 5.1. Les espaces  $D$  et  $\mathcal{S}_n^{III}$  étant localement compacts et métrisables, montrons que  $\psi_n^{III}$  est séquentiellement continue et séquentiellement propre. On en déduira que l'application  $\psi_n^{III}$  est continue, bijective et propre, donc un homéomorphisme.

Soit  $c = (\alpha, \overline{\beta}) \in D$  tel que  $\alpha \neq \infty$ . Soit  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \overline{\beta_k})_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $D$  convergant vers  $d$ , ce qui signifie que la suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$  et que la suite  $(\overline{\beta_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\overline{\beta}$ . Alors les deux générateurs  $(\frac{1}{\alpha}, 0)$  et  $(\frac{\beta}{\alpha}, n)$  du groupe  $\psi_n^{III}(d)$  sont les limites des suites  $(\frac{1}{\alpha_k}, 0)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\frac{\beta_k}{\alpha_k}, n)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  respectivement. Réciproquement, soit  $P$  une partie infinie de  $\mathbb{N}$  et soit  $(\frac{p_k + q_k \beta_k}{\alpha_k}, q_k n)_{k \in P}$  une suite de  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in P}$  convergant vers  $(x, m)$ . Alors  $q_k = q$  est constant à partir d'un certain rang, et donc  $p_k = p$  également. En conclusion, l'élément  $(x, m) = (\frac{p + q\beta}{\alpha}, qn)$  appartient à  $\psi_n^{III}(d)$ . On a donc montré que la suite de sous-groupes  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  convergeait vers  $\psi_n^{III}(d)$ .

Soit  $d = (\infty, 0)$  le « centre » du disque  $D$ . Soit  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \overline{\beta_k})_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $D$  convergant vers  $d$ , ce qui signifie que la suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\infty$ . Supposons que  $\alpha_k \neq \infty$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Choisissons des représentants  $\beta_k$  de  $\overline{\beta_k}$  bornés. Soit  $(x, qn) \in \psi_n^{III}(d)$ , où  $x \in \mathbb{R}$  et  $q \in \mathbb{Z}$ . Alors la suite  $(\frac{E(x\alpha_k) + q\beta_k}{\alpha_k}, qn)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(x, qn)$ . Puisque  $\psi_n^{III}(d_k) \subset \psi_n^{III}(d)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on en déduit que la suite de sous-groupes  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\psi_n^{III}(d)$ .

Ainsi l'application  $\psi_n^{III}$  est continue.

Soit  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \overline{\beta_k})_{k \in \mathbb{N}}$  une suite sortant de tout compact de  $D$ . Montrons par l'absurde que la suite  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  sort de tout compact de  $\mathcal{S}_n^{III}$  : supposons quitte à extraire que cette suite converge vers un sous-groupe  $H \in \mathcal{S}_n^{III}$ . Alors, par continuité de l'application  $\phi_{\mathbb{R}}^{-1} \circ \mathcal{S}^*(i)$ , on en déduit que la suite  $(\alpha_k = \phi_{\mathbb{R}}^{-1} \circ \mathcal{S}^*(i)(\psi_n^{III}(d_k)))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha_{\infty} = \phi_{\mathbb{R}}^{-1} \circ \mathcal{S}^*(i)(H) \in ]0, \infty]$ . Or le sous-espace  $\{\alpha \geq \frac{\alpha_{\infty}}{2}\}$  du disque  $D$  est un disque fermé donc est compact. Ceci est une contradiction avec le fait que la suite  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sort de tout compact : ainsi la suite  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  sort de tout compact de  $\mathcal{S}_n^{III}$ , et l'application  $\mathcal{S}_n^{III}$  est donc propre.  $\square$

Remarquons que pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  les sous-espaces  $\mathcal{S}_n^{III}$  sont ouverts : en effet, ce sont les images réciproques par  $\pi_* : \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z})$  des ouverts  $\{n\mathbb{Z}\}$ .

## 6 Une compactification du disque

Nous allons définir une compactification du disque ouvert  $D$  (défini en 5.3) en un disque fermé plus fine que la compactification usuelle : il s'agit d'éclater chaque point rationnel du bord usuel de  $D$  en le remplaçant par un petit arc de cercle. Cette méthode est inspirée des travaux de Denjoy consistant à éclater le cercle le long de l'orbite d'une rotation irrationnelle. On peut aussi y penser du point de vue des éclatements en géométrie algébrique où, informellement, on remplace chaque point rationnel du cercle par un demi-espace de demi-droites, au lieu de remplacer par une droite projective. Nous en donnons une autre construction en annexe.

**Proposition 6.1.** *Il existe un plongement  $\rho$  du disque ouvert  $D$  dans un disque fermé  $\overline{D}$ , d'image l'intérieur de  $\overline{D}$ , et il existe une famille d'arcs de cercles deux à deux disjoints  $(I_{\overline{q}})_{\overline{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$  inclus dans  $\partial\overline{D}$ , dont l'ordre cyclique est donné par  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , et des homéomorphismes  $f_{\overline{q}} : [-\infty, \infty] \rightarrow I_{\overline{q}}$ , tels que pour toutes suites réelles  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :*

1. la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement positive et converge vers 0,
2. la suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\beta \in \mathbb{Q}$ ,
3. la suite  $(\frac{\beta_n - \beta}{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x \in [-\infty, \infty]$ ,

alors la suite  $(\rho(\alpha_n, \overline{\beta_n}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f_{\overline{\beta}}(x) \in I_{\overline{\beta}} \in \overline{D}$ .

**Démonstration.** Considérons le modèle du demi-plan de Poincaré pour le plan hyperbolique réel  $\mathbb{H}^2$  : son bord  $\partial\mathbb{H}^2$  est naturellement identifié à  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Considérons le réseau arithmétique  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  dans le groupe des isométries préservant l'orientation  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  de  $\mathbb{H}^2$ , et appelons  $M$  la surface modulaire  $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ .

Considérons un voisinage de Margulis  $V$  de la pointe de  $M$  (voir par exemple [Bus92]). Son image réciproque par le revêtement ramifié  $\mathbb{H}^2 \rightarrow M$  est une réunion invariante par  $\Gamma$  d'horoboules ouvertes  $N_q$  centrée en  $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subset \partial\mathbb{H}^2$ , pour tout rationnel  $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ , d'adhérences deux à deux disjointes. Notons  $E = M \setminus V$ , qui est un orbifold à bord. Il admet comme domaine fondamental le quadrilatère  $Q$ , qui est le domaine fondamental usuel de  $\Gamma$  privé de l'horoboule  $N_\infty$  (voir la figure 10). Appelons  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  les quatre côtés de  $Q$  :  $a$  est un arc de la géodésique joignant  $-1$  et  $1$ ,  $b$  (resp.  $d$ ) est un arc de géodésique joignant  $-\frac{1}{2}$  (resp.  $\frac{1}{2}$ ) à  $\infty$  et  $c$  est un arc d'horocycle centré en  $\infty$ .

Soient  $T$  et  $S$  les isométries du plan hyperbolique  $T : z \mapsto z + 1$  et  $S : z \mapsto \frac{-1}{z}$  : il est bien connu (voir par exemple [Ser77]) que le réseau  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  est engendré par  $S$  et  $T$ .

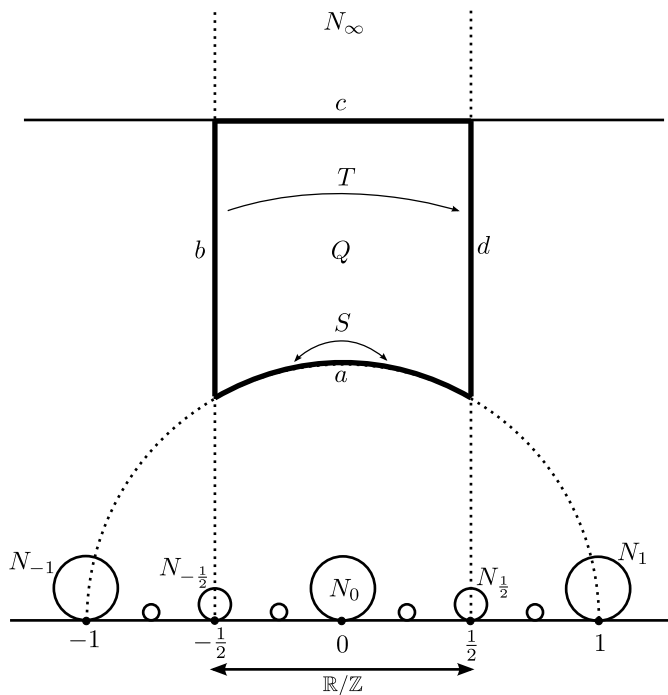


FIGURE 10 – Le domaine fondamental  $Q$  de l’orbifold  $E$ .

Considérons un quadrilatère hyperbolique convexe compact  $Q'$ , dont les côtés  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  et  $d'$  sont géodésiques, tel que les angles entre  $a'$  et  $b'$  et entre  $d'$  et  $a'$  valent  $\frac{\pi}{3}$ , et tel que les angles entre  $b'$  et  $c'$  et entre  $c'$  et  $d'$  valent  $\frac{\pi}{2}$  : voir la figure 11. Soit  $T'$  la translation hyperbolique d’axe la géodésique portant  $c'$  qui envoie la géodésique portée par le côté  $b'$  sur la géodésique portée par le côté  $d'$ , et soit  $S'$  la rotation d’angle  $\pi$  autour du milieu du segment  $a'$ . Soit  $\Gamma' \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  le sous-groupe engendré par  $S'$  et  $T'$ .

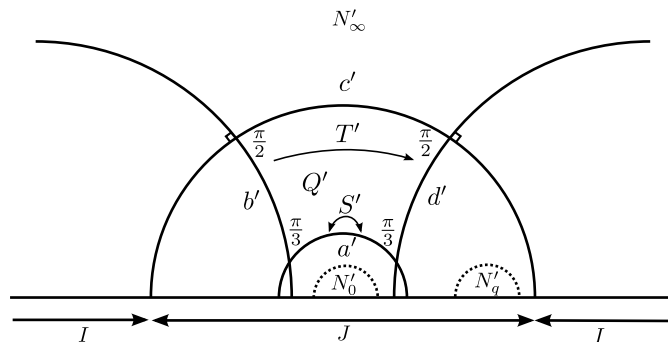


FIGURE 11 – Le domaine fondamental  $Q'$  de l’orbifold  $E'$ .

Considérons l’orbifold hyperbolique à bord  $E'$ , obtenu comme quotient de la surface hyperbolique à bord  $\Gamma' \cdot Q'$  par le groupe  $\Gamma'$ . Il est clair qu’il existe un homéomorphisme du quadrilatère  $Q$  sur le quadrilatère  $Q'$ , qui envoie respectivement les côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sur les cotés  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  et  $d'$ . Cet homéomorphisme passe au quotient en un isomorphisme entre les orbifolds topologiques à bord  $E$  et  $E'$ , qui définit donc un isomorphisme des groupes fondamentaux orbifolds  $\theta : \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma'$ . Par construction de l’homéomorphisme entre  $E$  et

$E'$ , l'isomorphisme  $\theta$  envoie  $T$  sur  $T'$  et  $S$  sur  $S'$ . Il existe ainsi un homéomorphisme  $\eta$  entre les revêtements orbifolds universels  $\widehat{E}$  et  $\widehat{E}'$  de  $E$  et  $E'$  respectivement, qui est de plus  $\theta$ -équivariant.

Or  $\widehat{E} = \mathbb{H}^2 \setminus \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} N_q$  et  $\widehat{E}' = \Gamma' \cdot Q = \mathbb{H}^2 \setminus \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} N'_q$ , où  $N'_q$  est un demi-espace ouvert de  $\mathbb{H}^2$  pour tout  $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  (voir la figure 11). Quitte à réindexer les demi-espaces  $(N'_q)_{q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}}$ , on peut supposer que l'homéomorphisme  $\eta$  envoie pour tout  $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  l'horocycle  $\partial N_q$  sur la géodésique  $\partial N'_q$ .

Nous allons prolonger l'homéomorphisme  $\eta$  en un homéomorphisme de  $\mathbb{H}^2$  sur  $\mathbb{H}^2$ .

Fixons  $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . L'application  $\eta$  est déjà définie sur l'horocycle  $\partial N_q$ , prolongeons-la de  $N_q$  sur  $N'_q$  : soit  $z \in N_q$ , et soit  $z'$  le point de la géodésique  $\partial N_q$  situé sur la droite euclidienne passant par  $q$  et  $z$  (lorsque  $q = \infty$ , on considère la droite « verticale » passant par  $f$ ) : voir la figure 12. Ainsi  $\eta(z')$  est un point de l'horocycle  $\partial N'_q$  : considérons le rayon géodésique  $\gamma$  issu de  $\eta(z')$ , orthogonal à  $\partial N'_q$  et inclus dans  $N'_q$ . Définissons  $\eta(z)$  comme le point de  $\gamma$  à distance  $d_{\mathbb{H}^2}(z, z')$  de  $\eta(z')$ .

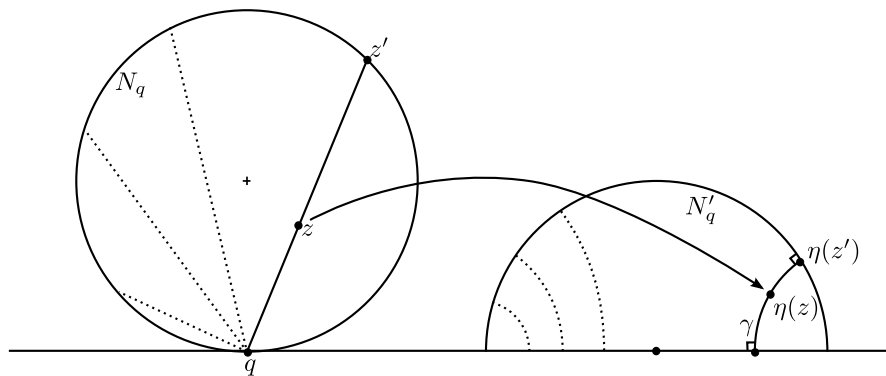


FIGURE 12 – Le prolongement de l'homéomorphisme  $\eta$  de  $N_q$  sur  $N'_q$ .

Nous avons donc défini un homéomorphisme  $\eta$  de  $\mathbb{H}^2$  sur  $\mathbb{H}^2$  qui, par construction, est de plus  $(T, T')$ -équivariant : en effet  $T$  préserve la distance hyperbolique et les droites euclidiennes, et  $T'$  préserve la distance hyperbolique et les géodésiques.

Le quotient de  $\mathbb{H}^2$  par le sous-groupe  $\langle T \rangle$  engendré par l'isométrie parabolique  $T$  s'identifie au disque épointé  $D \setminus \{\infty\}$ , par l'application  $z \mapsto (\text{Im}(z), \text{Re}(z))$ . Les deux composantes connexes du bord à l'infini de la surface  $\langle T \rangle \backslash \mathbb{H}^2$  s'identifient naturellement à  $\{\infty\}$  et  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Le disque  $D$  est alors naturellement homéomorphe à  $\langle T \rangle \backslash (\mathbb{H}^2 \cup \{\infty\})$  : nous identifierons ces deux espaces.

De même, le quotient de  $\mathbb{H}^2$  par le sous-groupe  $\langle T' \rangle$  engendré par la translation hyperbolique  $T'$  est homéomorphe à un anneau ouvert. Un domaine fondamental dans  $\mathbb{H}^2$  pour l'action de  $T'$  est donné par le domaine compris entre les deux géodésiques portant les côtés  $b'$  et  $d'$ . Notons  $I'_q = \overline{N'_q} \cap \partial \mathbb{H}^2$  le bord du demi-espace  $N'_q$  : c'est un arc du cercle  $\partial \mathbb{H}^2$ . Les deux composantes connexes du bord à l'infini de la surface  $\langle T' \rangle \backslash \mathbb{H}^2$  s'identifient alors à deux cercles, qui sont les quotients de deux arcs de cercle ouverts  $I$  et  $J$  de  $\partial \mathbb{H}^2$  par l'action de  $T'$  : ce sont les deux arcs de cercle délimités par les extrémités

de l'axe de translation de  $T'$ . L'arc  $I$  est l'intérieur de l'arc fermé  $I'_\infty$ , et l'arc  $J$  contient tous les  $I'_q$ , pour  $q \in \mathbb{Q}$  (voir la figure 11).

Appelons  $\overline{D}$  l'écrasement de l'image de  $I$  dans l'anneau fermé  $\langle T' \rangle \setminus (\mathbb{H}^2 \cup I \cup J)$  : l'espace  $\overline{D}$  est homéomorphe à un disque fermé, dont l'intérieur s'identifie à l'image de  $\langle T' \rangle \setminus (\mathbb{H}^2 \cup I)$ . L'homéomorphisme  $(T, T')$ -équivariant  $\eta : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  passe au quotient en un homéomorphisme  $\rho : \langle T \rangle \setminus \mathbb{H}^2 \rightarrow \langle T' \rangle \setminus \mathbb{H}^2$ . Cet homéomorphisme se prolonge naturellement à  $D$  en définissant  $\rho(\{\infty\})$  comme l'image de  $I$  dans l'écrasement  $\overline{D}$ . On obtient ainsi un plongement  $\rho : D \rightarrow \overline{D}$ , d'image l'intérieur de  $\overline{D}$ . Pour tout  $q \in \mathbb{Q}$ , notons  $I_q$  l'arc de cercle image homéomorphe de  $I'_q$  dans  $\overline{D}$ .

Il reste à vérifier que le plongement  $\rho$  vérifie la propriété souhaitée : soient  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les trois conditions de l'énoncé de la proposition. Alors le point  $z_n = \beta_n + i\alpha_n \in \mathbb{H}^2$  converge vers le point à l'infini  $\beta \in \mathbb{Q}$ .

Supposons tout d'abord que  $x \neq \pm\infty$ , alors la suite  $(\eta(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à partir d'un certain rang à l'horoboule  $N_\beta$ . Soit  $z'_n$  le point de la géodésique  $\partial N_\beta$  situé sur la droite euclidienne  $\delta_n$  passant par  $\beta$  et  $z_n$ . Ainsi  $\eta(z'_n)$  est un point de l'horocycle  $\partial N'_\beta$  : considérons le rayon géodésique  $\gamma_n$  issu de  $\eta(z'_n)$ , orthogonal à  $\partial N'_\beta$  et inclus dans  $N'_\beta$ . Par définition,  $\eta(z_n)$  est le point de  $\gamma_n$  à distance  $d_{\mathbb{H}^2}(z_n, z'_n)$  de  $\eta(z'_n)$ .

Par la troisième hypothèse, la droite euclidienne  $\delta_n$  converge vers la droite  $\delta_\infty$  passant par  $\beta$ , qui fait un angle orienté  $\cotan x$  avec l'axe réel : soit  $z'_\infty$  la limite de la suite  $(z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , c'est l'intersection de la droite  $\delta_\infty$  avec l'horocycle  $\partial N_\beta$ . Alors le rayon géodésique  $\gamma_n$  converge vers le rayon géodésique  $\gamma_\infty$  passant par  $\eta(z'_\infty)$ , orthogonal à la géodésique  $\partial N'_\beta$  et inclus dans  $N'_\beta$ .

Par ailleurs, la distance  $d_{\mathbb{H}^2}(z_n, z'_n)$  tend vers  $+\infty$  par l'hypothèse sur la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donc la suite  $(\eta(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'extrémité à l'infini du rayon géodésique  $\gamma_\infty$  : notons-la  $f_\beta(x) \in I_\beta$ , où  $I_\beta$  désigne le bord à l'infini de  $N'_\beta$ .

Supposons que  $x = \pm\infty$ , alors la suite  $(\eta(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'une des deux extrémités du désigne le bord à l'infini  $I_\beta$  de  $N'_\beta$ .

Cette construction fournit un homéomorphisme  $f_\beta : [-\infty, \infty] \rightarrow I_\beta$ , et ce pour tout rationnel  $\beta \in \mathbb{Q}$ . La construction étant  $(T, T')$ -équivariante, on obtient au quotient des homéomorphismes  $f_{\overline{q}} : [-\infty, \infty] \rightarrow I_{\overline{q}}$ , pour tout  $q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

Alors la suite  $(\rho(\langle T \rangle \cdot z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\langle T' \rangle \cdot f_\beta(x) = f_{\overline{\beta}}(x)$ .

Enfin, l'homéomorphisme  $\eta^{-1} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  induit au bord une surjection continue  $s$  de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  sur  $\overline{\mathbb{H}^2}$ , qui envoie chaque arc de cercle  $I'_q$  sur le point  $q \in \partial \mathbb{H}^2$ . Lorsque l'on écrase chaque arc de cercle  $I'_q$  en un point on obtient un cercle, et l'application  $s$  induit un homéomorphisme de ce cercle sur le cercle  $\partial \mathbb{H}^2$  : par conséquent l'ordre cyclique est préservé, donc les arcs de cercle  $(I'_q)_{q \in \mathbb{Q} \cup \infty}$  sont dans l'ordre cyclique donné par  $\mathbb{Q} \cup \infty$ . Puisque l'application  $T'$  préserve encore cet ordre cyclique et stabilise  $I'_\infty$ , les arcs de cercle  $(I_{\overline{q}})_{\overline{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$  sont dans l'ordre cyclique donné par  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .  $\square$

## 7 Le recollement des sous-espaces de sous-groupes fermés

### 7.1 L'adhérence des disques $\mathcal{S}_n^{III}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$

Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , définissons le lacet

$$g_n : \partial \overline{D} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{nb}(1 + e^{2i \arctan(bf_{\overline{q}}^{-1}(z))}) & \text{si } z \in I_{\overline{q}} \text{ (où } q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 7.1.** *L'homéomorphisme  $\psi_n^{III} : D \rightarrow \mathcal{S}_n^{III}$ , prolongé à  $\overline{D}$  par l'application  $\psi^{II} \circ g_n$ , est une surjection continue de  $\overline{D}$  sur l'adhérence  $\overline{\mathcal{S}_n^{III}}$  de  $\mathcal{S}_n^{III}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ .*

**Démonstration.** Soit  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \overline{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $D$  convergeant dans  $\overline{D}$  vers  $f_{\overline{q}}(x) \in I_{\overline{q}}$ , où  $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Montrons que la suite de sous-groupes fermés  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\psi^{II} \circ g_n(f_{\overline{q}}(x))$ .

On vérifie que  $\psi^{II} \circ g_n(f_{\overline{q}}(x)) = \psi^{II}(\frac{1}{nb}(1 + e^{2i \arctan(bx)})) = \mathbb{Z} \cdot (bx, bn)$ . De plus, la suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 et il existe des relevés  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(\overline{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $q$  et tels que la suite  $(\frac{\beta_k - q}{\alpha_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ .

Alors la suite  $(\frac{b\beta_k - a}{\alpha_k}, bn)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $(\psi_n^{III}(d_k) = \mathcal{S}_{\alpha_k, \beta_k, n}^{III})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers le générateur  $(bx, bn)$  du groupe  $\psi^{II} \circ g_n(f_{\overline{q}}(x))$ . Par ailleurs, soient  $P$  une partie infinie de  $\mathbb{N}$  et des entiers  $s_k, t_k \in \mathbb{Z}$  tels que la suite  $(\frac{s_k + t_k \beta_k}{\alpha_k}, t_k n)_{k \in P}$  d'éléments de  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in P}$  converge vers  $(y, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . Alors la suite  $t_k$  est constante égale à  $t \in \mathbb{Z}$  à partir d'un certain rang, et la suite  $(s_k + t\beta_k)_{k \in P}$  converge vers 0. Puisque la suite  $(\beta_k)_{k \in P}$  converge vers  $q$ , la suite  $(s_k)_{k \in P}$  doit être constante à partir d'un certain rang, égale à  $s \in \mathbb{Z}$  tel que  $q = -\frac{s}{t}$ . Ainsi il existe  $\ell \in \mathbb{Z}$  tel que  $t = \ell b$  et  $-s = \ell a$ . Ainsi, on en conclut que  $(y, m) = \ell(bx, bn) \in \psi^{II} \circ g_n(f_{\overline{q}}(x))$ .

Ainsi, la suite de sous-groupes fermés  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\psi^{II} \circ g_n(f_{\overline{q}}(x))$ .

Soit  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \overline{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $D$  convergeant dans  $\overline{D}$  vers un point  $z \in \partial \overline{D}$  n'appartenant à aucun des intérieurs des  $I_{\overline{q}}$ , pour  $\overline{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Montrons que la suite de sous-groupes fermés  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\psi^{II} \circ g_n(z) = \{0\}$ .

On sait que la suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 et que la suite  $(\overline{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  n'admet aucune valeur d'adhérence dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  : quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe des relevés  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(\overline{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Soient  $P$  une partie infinie de  $\mathbb{N}$  et des entiers  $s_k, t_k \in \mathbb{Z}$  tels que la suite  $(\frac{s_k + t_k \beta_k}{\alpha_k}, t_k n)_{k \in P}$  d'éléments de  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in P}$  converge vers  $(y, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . Alors la suite  $t_k$  est constante égale à  $t \in \mathbb{Z}$  à partir d'un certain rang, et la suite  $(s_k + t\beta_k)_{k \in P}$  converge vers 0. Puisque la suite  $(\beta_k)_{k \in P}$  converge vers  $\beta \neq 0$ , la suite  $(s_k)_{k \in P}$  doit être constante à partir d'un certain rang. Puisque  $\beta$  est irrationnel, la seule possibilité est  $t = s_k = 0$ . Ainsi, la suite de sous-groupes fermés  $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\psi^{II} \circ g_n(z) = \{0\}$ .  $\square$

Remarquons que la définition de  $g_n(z)$  ne fait intervenir que le dénominateur  $b$  du rationnel  $q$  tel que  $z \in I_{\overline{q}}$ . Ainsi le lacet  $g_n$  effectue le tour du cercle  $A_m$  exactement

0 fois si  $n$  ne divise pas  $m$ , et  $\varphi(\frac{m}{n})$  si  $n$  divise  $m$ , où  $\varphi$  désigne la fonction indicatrice d'Euler. Par ailleurs, ces cercles sont parcourus dans l'ordre de  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

## 7.2 L'accumulation des disques $\mathcal{S}_n^{III}$ sur $\mathcal{S}^I$

Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , soit  $\overline{D}_n$  une copie du disque fermé  $\overline{D}$ , et notons  $D_n \subset \overline{D}_n$  le disque ouvert. Soit  $\overline{X}$  la réunion des disques disjoints  $(\overline{D}_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  s'accumulant sur leur rayon  $[0, \infty]$  : formellement, munissons  $\overline{X} = [0, \infty] \sqcup \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \overline{D}_n$  de la topologie la moins fine induisant sur  $[0, \infty]$  la topologie usuelle, induisant sur  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \overline{D}_n$  la topologie réunion disjointe, et telle que les deux projections

$$\begin{array}{lll} p_1 : \overline{X} & \rightarrow & \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}\} \\ d \in \overline{D}_n & \mapsto & \frac{1}{n} \\ d \in [0, \infty] & \mapsto & 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} p_2 : \overline{X} & \rightarrow & [0, \infty] \\ d \in \overline{D}_n & \mapsto & \alpha_n(d) \\ d \in [0, \infty] & \mapsto & d \end{array}$$

soient continues, où  $\alpha_n$  désigne l'application

$$\begin{array}{ll} \alpha_n : \overline{D}_n & \rightarrow [0, \infty] \\ d = (\alpha, \beta) \in D_n & \mapsto \alpha \\ d \in \partial \overline{D}_n & \mapsto 0. \end{array}$$

Une base de voisinages d'un point  $\alpha \in [0, +\infty]$  dans  $\overline{X}$  est donnée par les voisinages  $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ , où  $U$  est un voisinage de  $\alpha$  dans  $[0, +\infty]$  et  $V$  est un voisinage de 0 dans  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}\}$ , c'est-à-dire que ce sont des réunions d'anneaux qui s'accumulent sur un intervalle.

De manière plus visuelle, l'espace  $\overline{X}$  est naturellement homéomorphe au sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ , réunion pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$  des cônes de sommet  $(\frac{1}{n}, 0, 1)$  sur les cercles (réduit à un point si  $n = +\infty$ ) dans  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  de centre  $(\frac{1}{n}, 0, 0)$  et de rayon  $\frac{1}{(n+1)^2}$  (voir la figure 13).

L'espace  $\overline{X}$  est alors compact. Soit  $X$  l'ouvert  $]0, \infty[ \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} D_n$  de  $\overline{X}$ .

Définissons l'application

$$\begin{array}{ll} \psi_X : X & \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \\ \alpha \in ]0, \infty[ & \mapsto \psi^I(\alpha) \\ d \in D_n & \mapsto \psi_n^{III}(d). \end{array}$$

**Proposition 7.2.** *L'application  $\psi_X$  est un plongement ouvert de  $X$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ .*

**Démonstration.** L'application  $\psi_X$  est injective. Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , l'application  $\psi_n^{III}$  est un plongement, donc l'application  $\psi_X$  est un homéomorphisme de l'ouvert  $D_n$  sur  $\psi_X(D_n)$ . De plus, l'application  $\psi_X$  est un homéomorphisme de  $]0, \infty[$  sur  $\psi_X(]0, \infty[)$ .

Montrons que l'application  $\psi_X$  est continue sur  $]0, \infty[$  : soit  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \overline{\beta_k})_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \overline{D}_n$  convergeant vers  $\alpha \in ]0, \infty[$ . Alors  $d_k \in \overline{D}_{n_k}$ , où la suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$



tend vers  $+\infty$ , et la suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ . Il est alors clair que la suite de sous-groupes fermés  $(\psi_{n_k}^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}} = (\mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{\alpha_k}, 0) + \mathbb{Z} \cdot (\frac{\beta_k}{\alpha_k}, n_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers le sous-groupe fermé  $\mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{\alpha}, 0) = \psi^I(\alpha)$ .

Montrons que l'application  $\psi_X^{-1}$  est continue sur  $\psi_X(]0, \infty])$  : soit  $(H_k = \psi_X(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\psi_X(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \overline{D}_n)$  convergeant vers  $\psi_X(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{Z} \in \psi_X(]0, \infty])$ . Alors  $d_k \in \overline{D}_{n_k}$ , où  $n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . La projection  $\pi(H_k) = n_k \mathbb{Z}$  du sous-groupe fermé  $\psi_X(d_k)$  sur  $\mathbb{Z}$  converge vers  $\{0\}$ , donc la suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ . Par ailleurs, par continuité de l'application  $i^* : \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (voir la proposition 1.5), l'intersection  $\frac{1}{\alpha_k} \mathbb{Z} = H_k \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = i^*(H_k)$  converge vers  $\frac{1}{\alpha} \mathbb{Z}$ , donc la suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ . La suite  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $\alpha \in ]0, \infty]$  dans  $X$ .

On a donc montré que l'application  $\psi_X$  réalisait un homéomorphisme sur son image  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \setminus \mathcal{S}^{II}$ . Puisque le sous-espace  $\mathcal{S}^{II}$  est fermé, l'image de  $\psi_X$  est ouverte.  $\square$

### 7.3 Le recollement final

La frontière de  $X$  dans  $\overline{X}$  est  $\partial X = \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \partial \overline{D}_n$ , qui est une suite de cercles disjoints s'accumulant sur un point. Considérons la surjection continue

$$\begin{aligned} g : \partial X &\rightarrow \mathcal{A} \\ 0 &\mapsto 0 \\ d \in \partial \overline{D}_n &\mapsto g_n(d). \end{aligned}$$

Ceci permet de définir le recollement  $\overline{X} \cup_g \mathcal{A}$ , ainsi que l'application  $\psi : \overline{X} \cup_g \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  par  $\psi|_X = \psi_X$  et  $\psi|_{\mathcal{A}} = \psi^{II}$  : voir la figure 13.

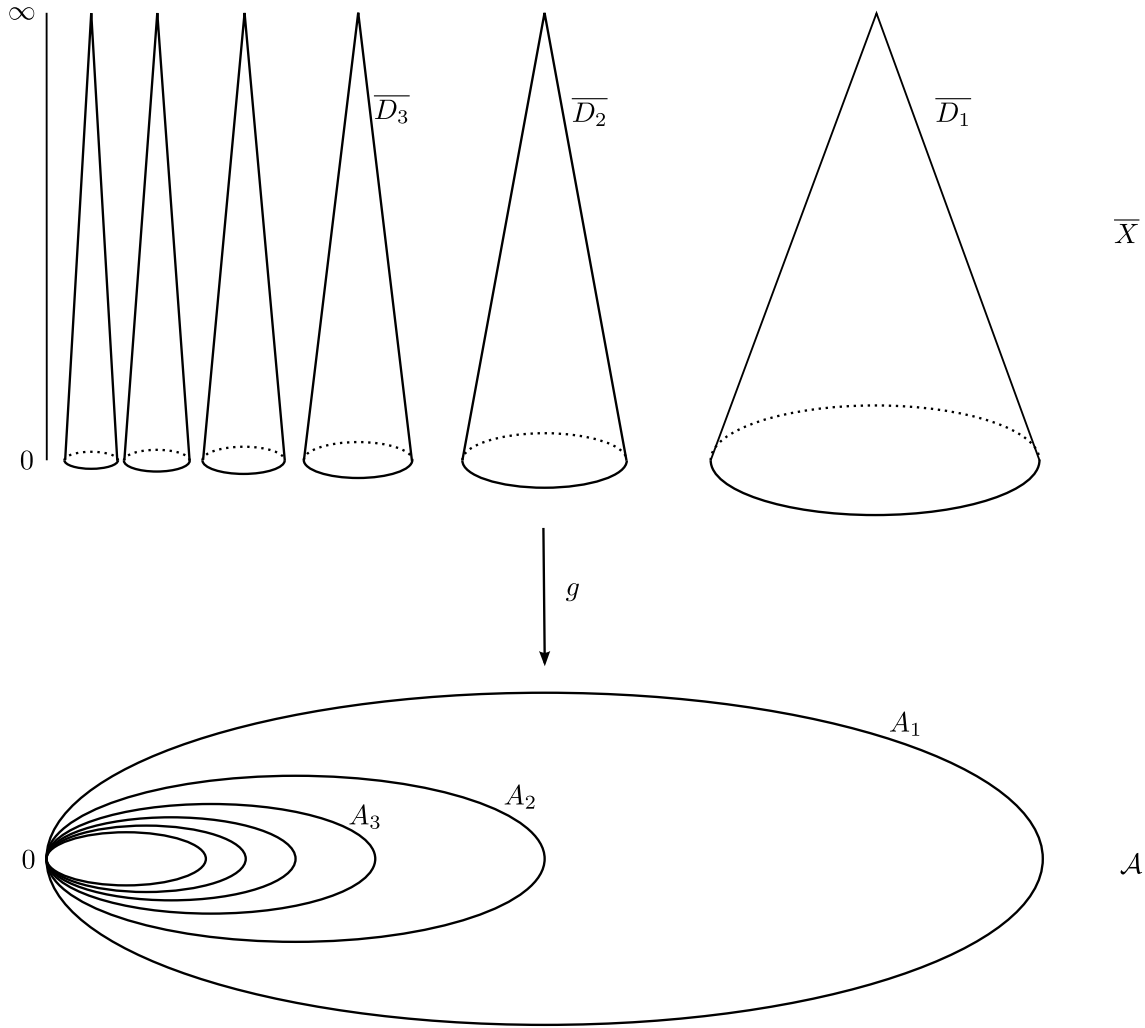


FIGURE 13 – Le recollement  $\overline{X} \cup_g \mathcal{A}$ , homéomorphe à l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ .

**Théorème 7.3.** *L'application  $\psi$  est un homéomorphisme du recollement  $\overline{X} \cup_g \mathcal{A}$  sur l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ .*

**Démonstration.** D'après les propositions 7.2 et 5.3, l'application  $\psi$  est une bijection, continue sur l'ouvert  $X$  et en restriction à  $\mathcal{A}$ .

Si  $z \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ , alors il n'y a qu'un nombre fini d'entiers  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tels que  $z \in g_n(\partial \overline{D})$ , donc l'application  $\psi$  est continue en  $z$ . Si  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $X$  convergeant vers 0 dans  $\overline{X} \cup_g \mathcal{A}$ , alors la projection de  $\psi(x_k)$  sur  $\{0\} \times \mathbb{Z}$  converge vers  $\{0\}$ , et le générateur  $\frac{1}{\alpha_k}$  de  $\psi(x_k) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$  tend vers l'infini, donc la suite de sous-groupes fermés  $(\psi(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\{0\} = \psi(0)$ .

Ainsi la bijection  $\psi$  est continue de l'espace  $\overline{X} \cup_g \mathcal{A}$  sur l'espace séparé  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ . Or les espaces  $\overline{X}$  et  $\mathcal{A}$  sont compacts donc normaux, donc d'après la proposition [Dug66, Proposition 3.4, p. 145] le recollement  $\overline{X} \cup_g \mathcal{A}$  est normal, donc en particulier séparé. De plus cet espace est image continue du compact  $\overline{X} \cup \mathcal{A}$ , donc est compact. En conclusion, l'application  $\psi$  est un homéomorphisme.  $\square$

## 8 Le groupe fondamental de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$

Pour la description du groupe fondamental des anneaux hawaïens, on se référera à [CC00] et [DS92]. Je tiens à remercier Yves de Cornulier pour m'avoir indiqué ces articles et expliqué comment on pouvait décrire le groupe fondamental de l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ .

Choisissons  $0 \in \mathcal{A}$  pour point base du groupe fondamental  $\pi_1(\mathcal{A})$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , notons  $a_n \in \pi_1(\mathcal{A})$  la classe du lacet qui effectue une fois le tour du cercle  $A_n$  dans le sens direct. Nous allons décrire les éléments de  $\pi_1(\mathcal{A})$  par des mots infinis sur l'alphabet  $\{a_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , soit  $F_n$  le groupe libre sur l'alphabet fini  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Considérons, pour tous  $1 \leq n \leq m$ , le morphisme  $p_{n,m} : F_m \rightarrow F_n$  trivial sur  $a_{n+1}, \dots, a_m$  et valant l'identité sur  $F_n$  : ceci forme un système projectif. Soit  $\Gamma$  le sous-groupe de  $\varprojlim F_n$  constitué des mots infinis sur l'alphabet  $\{a_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ , tels que chaque lettre apparaît un nombre fini de fois.

Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , soit  $\mathcal{A}_n = \bigcup_{m=1}^n A_m$  le bouquet des  $n$  premiers cercles de  $\mathcal{A}$ . La rétraction  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_n$  qui envoie tous les cercles  $A_m$  sur  $\{0\}$ , pour  $m > n$ , définit un morphisme de  $\pi_1(\mathcal{A})$  sur  $F_n$ . Ceci permet de définir un morphisme  $\eta : \pi_1(\mathcal{A}) \rightarrow \varprojlim F_n$ , qui est un isomorphisme de  $\pi_1(\mathcal{A})$  sur  $\Gamma$  (voir par exemple [DS92]).

On peut ainsi montrer de nombreuses propriétés sur le groupe fondamental des anneaux hawaïens : il est non dénombrable, tout sous-groupe de type fini est libre, mais il n'est pas libre (voir par exemple [CC00, Theorem 2.5, p. 234]).

Notons pour simplifier  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ . Le plongement  $\psi^{II} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$  nous permet d'identifier  $\mathcal{A}$  à son image dans  $\mathcal{S}$ . Pour tout entier  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , l'image par l'application  $\eta$  de la classe d'homotopie du lacet  $g_m$  est le mot infini  $\eta([g_m]) = b_m = (b_{m,n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \in \Gamma$ , où l'on a noté

$$b_{m,n} = \prod_{i=1}^n a_{\frac{mn}{\text{pgcd}(n,i)}},$$

où le produit est effectué dans l'ordre de  $i = 1$  à  $n$ .

**Théorème 8.1.** *Le morphisme naturel  $\xi : \pi_1(\mathcal{A}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S})$  est surjectif et a pour noyau le sous-groupe distingué  $N$  engendré par les  $([g_m])_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ .*

**Démonstration.** La surjectivité du morphisme  $\xi$  est une conséquence immédiate du fait que tout lacet dans  $\mathcal{S}$  est homotope à un lacet dans  $\mathcal{A}$ .

De plus, chaque lacet  $g_n$  est homotope au lacet trivial dans  $\mathcal{S}$ , donc le sous-groupe  $N$  est inclus dans le noyau du morphisme  $\xi$ .

Considérons un lacet  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{A}$  basé en  $0$ , homotope au lacet trivial dans  $\mathcal{S}$ . Montrons que la classe  $[f]$  de  $f$  dans  $\pi_1(\mathcal{A})$  appartient à  $N$ . Puisque  $f$  est homotope au lacet trivial, on peut prolonger  $f$  en une application continue  $F : \overline{D} \rightarrow \mathcal{S}$ , où  $\overline{D}$  désigne le disque fermé de rayon 1.

Notons  $C = \{c_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$  l'ensemble des centres des disques  $D_n$ . À homotopie près, on peut supposer que les points de  $F^{-1}(C)$  sont isolés dans  $\overline{D}$ . Par compacité de  $\overline{D}$ , on sait alors que  $F^{-1}(C)$  est fini. Quitte à multiplier  $[f]$  à droite par un nombre fini de conjugués de  $g_m$ , on peut supposer que  $F^{-1}(C) = \emptyset$ . Or  $\mathcal{S} \setminus C$  se rétracte par déformation sur  $\mathcal{A}$ , donc le lacet  $f$  est homotope au lacet trivial dans  $\mathcal{A}$ .

On a donc montré que le noyau du morphisme  $\xi$  est exactement  $N$ .  $\square$

On a obtenu une description combinatoire du groupe fondamental de l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  : il est isomorphe au quotient du groupe  $\Gamma$  par le sous-groupe distingué  $M$  engendré par les  $(b_m)_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ .

**Théorème 8.2.** *Le groupe  $\pi_1(\mathcal{S})$  contient un sous-groupe isomorphe à  $\pi_1(\mathcal{A})$ . En particulier, le groupe  $\pi_1(\mathcal{S})$  n'est pas dénombrable et n'est pas libre.*

**Démonstration.** Cela revient à montrer que le quotient  $\Gamma/M$  contient un sous-groupe isomorphe à  $\Gamma$ . Considérons le morphisme  $\zeta : \Gamma \rightarrow \Gamma$  défini par  $a_n \mapsto a_{p_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , où  $p_n$  désigne le  $n^{\text{ème}}$  nombre premier impair.

Le morphisme  $\zeta$  est injectif, montrons de plus que  $\zeta(\Gamma) \cap M = \{e\}$  : soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \in \zeta(\Gamma) \cap M$ . Fixons un nombre premier impair  $p$ .

Le mot  $x$  appartient à  $M$ , donc pour tout entier  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on peut considérer  $y_m \in \mathbb{Z}$  le nombre de conjugués des éléments  $b_m^{\pm 1}$  qui apparaissent dans l'écriture de  $x$  (en comptant  $-1$  si c'est  $b_m^{-1}$  qui apparaît). Pour tout entier  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , considérons le nombre d'occurrences de la lettre  $a_{2^k p}^{\pm 1}$ . Puisque  $2^k p$  n'est pas premier, ce nombre doit être égal à 0. Par ailleurs pour tout  $k' \in [[0, k]]$ , dans chaque mot  $b_{2^{k'} p}$ , la lettre  $a_{2^k p}$  apparaît avec multiplicité  $\varphi(2^{k-k'})$ , où  $\varphi$  désigne la fonction indicatrice d'Euler. On en déduit, pour tout  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , l'équation

$$\sum_{k'=0}^k y_{2^{k'} p} \varphi(2^{k-k'}) = 0.$$

Ce qui donne l'équation  $(E_k)$  :

$$\sum_{k'=0}^{k-1} y_{2^{k'} p} 2^{k-k'-1} + y_{2^k p} = 0.$$

On sait qu'il existe  $k_0$  tel que pour  $k \geq k_0$  nous avons  $y_{2^k p} = 0$ . Cela se ramène donc à un système de  $k_0$  équations linéaires  $(E_k)_{1 \leq k \leq k_0}$  en les  $k_0$  inconnues  $(y_{2^k p})_{0 \leq k \leq k_0-1}$ , inversible car triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Ainsi on en déduit que  $y_p = 0$ , ce qui implique que la lettre  $a_p$  apparaît avec multiplicité 0 dans l'écriture de  $x$ .

Ceci est vrai pour tout nombre premier impair  $n$ , or  $x \in \zeta(\Gamma)$  donc le mot  $x$  ne s'écrit qu'avec des lettres  $a_n$  telles que  $n$  soit un nombre premier impair. On en déduit que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , nous avons  $x_n = e$ . Ainsi  $x = e$ .

Le morphisme injectif  $\zeta$  vérifie  $\zeta(\Gamma) \cap M = \{e\}$ , donc il passe au quotient en un morphisme injectif de  $\Gamma$  dans  $\Gamma/M$ .  $\square$

## Annexe : Une autre présentation de la compactification du disque

Nous allons définir ici de manière plus directe une compactification du disque vérifiant les propriétés de la proposition 6.1.

Considérons l'écrasement  $\tilde{Y} = \left( [0, \infty] \times \mathbb{R} \times \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]^{\mathbb{Q}} \right) / \left\langle \{ \infty \} \times \mathbb{R} \times \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]^{\mathbb{Q}} \right\rangle$ , muni de la topologie quotient de la topologie produit sur  $[0, \infty] \times \mathbb{R} \times \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]^{\mathbb{Q}}$ . Considérons le sous-espace  $Y$  de  $\tilde{Y}$  des éléments  $(\alpha, \beta, (\theta_q)_{q \in \mathbb{Q}})$  tels que, si  $\alpha \neq \infty$ , pour tout  $q \in \mathbb{Q}$ , la droite affine du plan euclidien orienté  $\mathbb{R}^2$  passant par le point  $(0, q)$  et d'angle  $\theta_q$  passe également par le point  $(\alpha, \beta)$  (voir la figure 14).

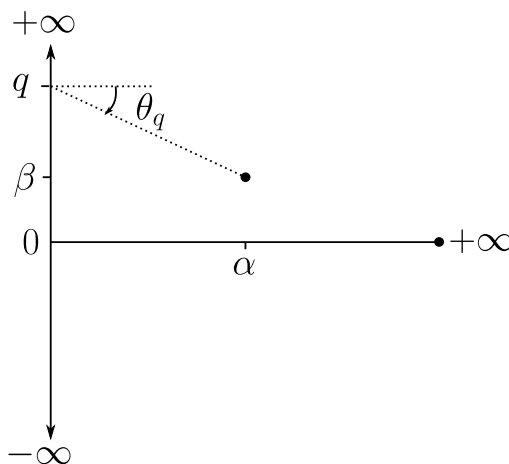


FIGURE 14 – L'espace  $Y$ .

Considérons l'action continue de  $\mathbb{Z}$  sur  $Y$  par translation sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{Q}$  :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall (\alpha, \beta, (\theta_q)_{q \in \mathbb{Q}}) \in Y, m \cdot (\alpha, \beta, (\theta_q)_{q \in \mathbb{Q}}) = (\alpha, \beta + m, (\theta_{r-m})_{r \in \mathbb{Q}}).$$

Appelons  $\overline{D}$  le quotient de l'espace  $Y$  par  $\mathbb{Z}$ , muni de la topologie quotient. Remarquons que le sous-espace  $D$  de  $\overline{D}$ , quotient du sous-espace  $\{\alpha > 0\}$  de  $Y$  par  $\mathbb{Z}$ , est un ouvert dense de  $\overline{D}$  homéomorphe au disque ouvert.

Pour tout  $q \in \mathbb{Q}$ , appelons  $I_q$  l'image du sous-espace de  $Y$  inclus dans  $\{0\} \times (q + \mathbb{Z}) \times \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]^{\mathbb{Q}}$  par  $\mathbb{Z}$ . Le sous-espace  $I_q$  de  $\overline{D}$  est constitué des classes d'éléments  $(\alpha, \beta, (\theta_q)_{q \in \mathbb{Q}})$  de  $Y$  modulo  $\mathbb{Z}$  telles que  $\alpha = 0, \beta = q \pmod{\mathbb{Z}}$ , et pour tout  $q' \in \mathbb{Q}$  différent de  $q$  modulo  $\mathbb{Z}$ ,  $\theta_{q'} = \pm \frac{\pi}{2}$ . Considérons l'homéomorphisme  $f_q^{-1} : [-\infty, \infty]$  qui à  $x \in [-\infty, \infty]$  associe l'image de l'élément  $(0, q, (\theta_{q'})_{q' \in \mathbb{Q}})$  tel que

$$\forall q' > q, \theta_{q'} = -\frac{\pi}{2}, \forall q' < q, \theta_{q'} = +\frac{\pi}{2} \text{ et } \theta_q = \tan x.$$

Le bord  $\partial \overline{D}$  est homéomorphe au cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , éclaté « à la Denjoy » (voir par exemple [KH97, § 2, p. 403]) en remplaçant chaque point rationnel de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  par un segment. On peut montrer, avec des arguments analogues à ceux de la partie 6, que l'espace  $\overline{D}$  est homéomorphe à un disque fermé, et il vérifie alors les conditions de la proposition 6.1.



---

Troisième partie

# Compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non compact

## Sommaire

---

<b>9</b>	<b>Introduction</b>	<b>48</b>
<b>10</b>	<b>La compactification de Chabauty</b>	<b>50</b>
10.1	La définition de la compactification . . . . .	50
10.2	La distalité . . . . .	52
10.3	Décompositions à l'aide d'une partie de la base . . . . .	53
10.4	Détermination des groupes limites . . . . .	55
10.5	Caractérisation des groupes limites . . . . .	61
<b>11</b>	<b>Lien avec la compactification polyédrale</b>	<b>63</b>
11.1	Compactification polyédrale d'un espace vectoriel . . . . .	63
11.2	Compactification polyédrale d'un espace symétrique . . . . .	64

---

Le contenu de ce chapitre provient de l'article [Hae10a].

## 9 Introduction

Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, et soit  $G$  son groupe d'isométries. Considérons le plongement

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathcal{S}(G) \\ x &\mapsto G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\} \end{aligned}$$

qui à un point de  $X$  associe son stabilisateur dans l'espace  $\mathcal{S}(G)$  des sous-groupes fermés de  $G$ , qui permet d'identifier  $X$  avec le sous-espace de  $\mathcal{S}(G)$  des sous-groupes compacts maximaux de  $G$ . L'adhérence  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  de l'image de ce plongement est appelée la compactification de Chabauty de  $X$ . Les groupes apparaissant dans la frontière de  $X$  dans  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  sont appelés les groupes limites.

Les espaces symétriques sont des objets très riches (voir par exemple [Hel78]), et leurs compactifications ont été très étudiées (voir par exemple les travaux de Mostow [Mos73], Satake [Sat60], Borel et Ji [BJ07]...). Elles sont nombreuses, en fonction des besoins nécessaires : compactifications géodésique, de Satake, de Furstenberg, polyédrale, de Martin, de Karpelevic, etc. (voir par exemple [GJT98]). La géométrie des espaces symétriques étant intimement liée à la structure de leurs groupes d'isométries, il est naturel, comme dans [GJT98], d'étudier leurs compactifications de Chabauty.

Nous renvoyons par exemple à [Hel78] et à la partie 3 pour des rappels, en particulier sur la terminologie qui suit. Soit  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ , une décomposition d'Iwasawa  $G = KAN$  de  $G$  et  $X = G/K$ , muni d'une métrique riemannienne  $G$ -invariante, l'espace symétrique de type non compact associé. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  de  $A$  est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . Elle définit un système de racines  $\Sigma$ , qui est l'ensemble des formes linéaires non nulles  $\alpha$  sur  $\mathfrak{a}$  dont l'espace de poids  $\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a}, \text{ad } H(Y) = \alpha(H)Y\}$  est non nul. Choisissons une base  $\Delta$  du système de racines défini par  $\mathfrak{a}$ , et notons  $\overline{\mathfrak{a}^+}$  la chambre de Weyl fermée associée. Notons de plus  $M = Z_K(\mathfrak{a})$  le centralisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $K$ .

Pour toute partie propre  $I$  de  $\Delta$ , notons  $\mathfrak{a}_I = \bigcap_{\alpha \in I} \text{Ker } \alpha$  et  $\mathfrak{a}^I$  l'orthogonal de  $\mathfrak{a}_I$  dans  $\mathfrak{a}$  pour la forme de Killing de  $G$ . Notons  $A^I$  le sous-groupe de Lie connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}^I$ , et  $\overline{A^{I,+}} = A^I \cap \exp \overline{\mathfrak{a}^+}$ .

Définissons alors le sous-groupe de Lie  $G^I = D(Z(\mathfrak{a}_I))_0$ , composante neutre du groupe dérivé du centralisateur de  $\mathfrak{a}_I$  dans  $G$ , et  $K^I = G^I \cap K$ . Soit  $\Sigma_I^+$  l'ensemble des racines positives qui ne sont pas combinaison linéaire des racines de  $I$ , et soit  $\mathfrak{n}_I$  la sous-algèbre de Lie somme directe des espaces de poids de  $\Sigma_I^+$ . Notons  $N_I$  le sous-groupe de Lie connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$ . Pour tous  $a \in A$  et  $k \in K$ , notons

$$D_{a,k}^I = kaK^I MN_I a^{-1} k^{-1}.$$

Le but principal de ce chapitre est de donner une nouvelle preuve, plus courte et plus directe, du théorème de [GJT98] donnant une description explicite des groupes limites de la compactification de Chabauty de  $X$ .



**Théorème 9.1.** Soit  $D \in \overline{X}^S \setminus X$  un groupe limite. Alors il existe une partie propre  $I$  de  $\Delta$ ,  $a \in \overline{A^{I,+}}$  et  $k \in K$  tels que  $D = D_{a,k}^I$ .

De plus, cette écriture est unique au sens suivant : pour  $I_1, I_2$  deux parties propres de  $\Delta$ ,  $a_1 \in \overline{A^{I_1,+}}$ ,  $a_2 \in \overline{A^{I_2,+}}$  et  $k_1, k_2 \in K$ , nous avons  $D_{a_1,k_1}^{I_1} = D_{a_2,k_2}^{I_2}$  si et seulement si

$$I_1 = I_2 = I, a_1 = a_2 = a \text{ et } k_2^{-1}k_1 \in (K^I \cap aK^Ia^{-1})M.$$

(Voir les théorèmes 10.12 et 10.13.) □

Par exemple, considérons le groupe  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^n$ , dont l'espace symétrique associé est le  $n$ -polydisque  $\mathbb{H}_2^n$ . Pour  $n = 1$ , la compactification de Chabauty  $\overline{\mathbb{H}_2^S}$  coïncide avec la compactification géométrique  $\overline{\mathbb{H}_2^g}$  du disque obtenue en ajoutant un cercle à l'infini. Pour  $n \geq 2$ , on voit que la compactification de Chabauty est le produit des  $n$  compactifications de Chabauty, c'est-à-dire le produit de  $n$  disques fermés :  $\overline{\mathbb{H}_2^S} = \left(\overline{\mathbb{H}_2^S}\right)^n$ . En effet, les groupes limites de  $G$  sont les produits de  $n$  groupes limites de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . En revanche, la compactification géométrique du  $n$ -polydisque est obtenue en ajoutant une  $(2n - 1)$ -sphère à l'infini.

Nous retrouvons ensuite les résultats (voir [Moo79] et [Gui01]) de classification des sous-groupes distaux maximaux et moyennables maximaux isotropiquement connexes de  $G$ . Nous rappelons qu'un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  est dit distal si les valeurs propres de son action adjointe sur  $\mathfrak{g}$  sont toutes de module 1 ; en particulier, tout sous-groupe compact est distal. On dit qu'un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  est isotropiquement connexe s'il existe un tore  $A'$  de  $G$  déployé sur  $\mathbb{R}$ , inclus dans  $H'$ , tel que  $H = H_0Z_H(A')$ , où  $Z_H(A')$  désigne le centralisateur de  $A'$  dans  $H$ .

**Théorème 9.2.** La compactification de Chabauty  $\overline{X}^S$  est l'ensemble des sous-groupes distaux maximaux de  $G$ . Les sous-groupes moyennables maximaux isotropiquement connexes de  $G$  sont les normalisateurs de ces sous-groupes. (Voir les théorèmes 10.20 et 10.17.)

La première partie de ce chapitre définit la compactification de Chabauty des espaces symétriques, donne la preuve du théorème 9.1 et établit la caractérisation des groupes limites comme sous-groupes distaux maximaux. Tandis que la preuve originelle de [GJT98] est fondée sur l'étude de mesures et l'utilisation des frontières de Furstenberg, la preuve présentée ici n'utilise que des arguments élémentaires de groupes de Lie. Celle-ci semble adaptée à l'étude de la compactification de Chabauty, qui présente l'avantage par rapport aux autres compactifications d'avoir une définition élémentaire. La deuxième partie de ce chapitre décrit l'homéomorphisme entre les compactifications de Chabauty et polyédrale. L'existence de cet homéomorphisme est bien connue, mais cette correspondance ne semblait pas exister dans la littérature. Par ailleurs, la continuité de l'action de  $G$  sur la compactification polyédrale est montrée directement, alors que dans [GJT98] elle est montrée via la compactification de Martin.

Je tiens à remercier chaleureusement Frédéric Paulin pour sa disponibilité et ses nombreux conseils, ainsi que le rapporteur de l'article [Hae10a] pour ses suggestions.

## 10 La compactification de Chabauty

### 10.1 La définition de la compactification

Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, et soit  $G$  un groupe de Lie connexe muni d'une action continue isométrique sur  $X$ . On suppose que  $G$  se surjecte sur la composante neutre  $\text{Isom}_0(X)$  du groupe des isométries de  $X$ , avec noyau fini. Alors le groupe de Lie  $G$  est semi-simple, de centre fini et sans facteur compact. Nous verrons en fin de paragraphe que la construction qui suit est indépendante du choix d'un tel groupe  $G$ , ce qui permet de travailler avec des groupes de Lie ayant un centre fini non trivial, comme par exemple  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$  pour  $n \geq 2$  pair.

Nous allons définir une compactification de  $X$  en plongeant  $X$  dans l'espace  $\mathcal{S}(G)$  des sous-groupes fermés de  $G$ , via l'application  $\phi$  qui à un point  $x$  de l'espace symétrique associe son stabilisateur  $G_x$  dans  $G$  (lequel est fermé car l'action de  $G$  sur  $X$  est continue) :

$$\begin{aligned} \phi : X &\rightarrow \mathcal{S}(G) \\ x &\mapsto G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}. \end{aligned}$$

Remarquons que l'image de  $\phi$  est exactement l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux de  $G$ , d'après le fait que tout sous-groupe compact de  $G$  fixe un point de l'espace métrique  $\text{CAT}(0)$   $X$  (voir par exemple [BH99, Proposition 2.7, p. 179]).

**Proposition 10.1.** *L'application  $\phi$  est un plongement.*

**Démonstration.** L'espace  $X$  s'identifie à l'espace homogène  $G/K$ , par le choix d'un point base de  $X$ , où  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$ . Le groupe  $K$  est égal à son propre normalisateur dans  $G$ , et il est connexe, donc d'après la proposition 1.17, l'application  $\phi = \phi_{G,K}$  est un plongement.

Nous donnons également ici la preuve de [GJT98, Proposition 9.3, p. 133], qui a été reprise dans l'article [Hae10a].

Choisissons un point base  $x_0$  de l'espace symétrique  $X$ , et notons  $K = \phi(x_0) = G_{x_0}$  le stabilisateur de  $x_0$  dans  $G$  : c'est un sous-groupe compact maximal. Choisissons une décomposition de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{k}$  est l'algèbre de Lie de  $K$ , une sous-algèbre de Lie abélienne maximale diagonalisable  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$  ainsi qu'une chambre de Weyl positive  $\mathfrak{a}^+$ .

Montrons que  $\phi$  est injective : soit  $g \in G$  tel que  $gKg^{-1} = K$ . Écrivons  $g = k_1ak_2$  dans la décomposition de Cartan  $K\overline{A^+}K$ , alors  $aKa^{-1} = K$ , donc si  $k \in K$  nous avons  $kak^{-1} = k(aka^{-1})a \in Ka$ . Or  $kak^{-1} \in P$  et  $a \in P$ , donc par unicité de la décomposition polaire  $G = KP$ , nous avons  $kak^{-1} = a$ , et ce pour tout  $k \in K$ . Montrons que  $a = e$ .

L'exponentielle réalise un homéomorphisme de  $\mathfrak{a}$  sur  $A$  : soit donc  $H \in \mathfrak{a}$  tel que  $\exp H = a$ . Pour tout  $k \in K$  nous avons  $aka^{-1} = k$ , donc pour tout  $U \in \mathfrak{k}$  nous avons  $\text{Ad } a(U) = e^{\text{ad } H}U = U$ . Or pour toute racine  $\alpha \in \Sigma$  il existe  $U_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  non nul, posons alors  $U = U_\alpha + \theta(U_\alpha)$ . Puisque  $\theta(U) = U$ , on en déduit que  $U \in \mathfrak{k}$ . Par ailleurs  $e^{\text{ad } H}U = e^{\alpha(H)}U_\alpha + e^{-\alpha(H)}\theta(U_\alpha)$ . On ne peut donc avoir  $e^{\text{ad } H}U = U$  que si  $\alpha(H) = 0$ , et ce pour tout  $\alpha \in \Sigma$  : ainsi  $H = 0$ . Finalement  $a = e$  donc  $g \in K$ .

Ceci montre que  $\phi$  est injective : supposons  $\phi(x) = \phi(x')$ . L'action de  $G$  sur  $X$  est transitive, soient donc  $g, g' \in G$  tels que  $x = g \cdot x_0$  et  $x' = g' \cdot x_0$ . Alors  $\phi(x) = gKg^{-1} = g'Kg'^{-1} = \phi(x')$ , donc  $(g'^{-1}g)K(g'^{-1}g)^{-1} = K$ , ainsi d'après ce qui précède  $g'^{-1}g \in K$ , ce qui implique  $x = x'$ .

Montrons que  $\phi$  est continue. Comme toute variété topologique, le groupe de Lie  $G$  est métrisable : on peut utiliser le critère séquentiel (voir la proposition 1.3) pour montrer la continuité de  $\phi$ . Soit  $g \cdot x_0 \in X$ , et soit  $(g_n \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $X$  convergeant vers  $g \cdot x_0$ . D'après la décomposition d'Iwasawa, on peut supposer que  $g$  et les  $g_n$  appartiennent à  $AN$ . Puisque  $(g_n \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $g \cdot x_0$ , il existe une suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $K$  telle que  $(g_n k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $g$ . D'après la continuité de la décomposition d'Iwasawa, on déduit que  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $e$  et que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $g$ . Ainsi la suite  $(g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $g^{-1}$ . On conclut que  $(\phi(g_n \cdot x_0))_{n \in \mathbb{N}} = (g_n K g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $gKg^{-1} = \phi(g \cdot x_0)$  :  $\phi$  est continue.

Montrons que l'application  $\phi$  est propre : soit  $(g_n K g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{S}(G)$  convergeant vers  $gKg^{-1}$ , montrons que la suite  $(g_n \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$  converge à extraction près.

Remarquons que, si  $d$  est une distance  $G$ -invariante sur  $X$ , alors pour  $h \in G$  et  $k \in K$

$$d(hkh^{-1} \cdot x_0, h \cdot x_0) = d(kh^{-1} \cdot x_0, x_0) = d(h^{-1} \cdot x_0, x_0) = d(h \cdot x_0, x_0).$$

Ainsi l'orbite  $hKh^{-1} \cdot x_0$  de  $x_0$  sous  $hKh^{-1}$  est incluse dans la sphère de centre  $h \cdot x_0$ , de rayon  $d(h \cdot x_0, x_0)$ . Donc le diamètre de  $hKh^{-1} \cdot x_0$  est inférieur ou égal à  $2d(h \cdot x_0, x_0)$ . Soit  $g \in G$  la symétrie géodésique par rapport au point  $h \cdot x_0$ , alors  $g \in hKh^{-1}$ . Or la distance de  $x_0$  à  $g \cdot x_0$  est égale à  $2d(h \cdot x_0, x_0)$ , et ces deux points sont dans l'orbite  $hKh^{-1} \cdot x_0$ . Par conséquent, pour tout  $h \in G$ , le diamètre de l'orbite  $hKh^{-1} \cdot x_0$  de  $x_0$  sous  $hKh^{-1}$  est égal à  $2d(h \cdot x_0, x_0)$ .

Puisque la suite  $(g_n K g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $gKg^{-1}$  dans  $\mathcal{S}(G)$  et que l'évaluation en  $x_0$  est continue, la suite  $(g_n K g_n^{-1} \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $gKg^{-1} \cdot x_0$  dans l'espace  $\mathcal{F}(M)$  des fermés de  $X$ , muni de la topologie de Chabauty. Cette suite appartient à partir d'un certain rang à l'ouvert  $O_F$ , où  $F$  est le compact de  $X$  défini par  $F = \overline{B}(h \cdot x_0, 3d(h \cdot x_0, x_0)) \setminus B(h \cdot x_0, 2d(h \cdot x_0, x_0))$ . De plus, le complémentaire de  $F$  dans  $X$  a deux composantes connexes,  $M \setminus \overline{B}(h \cdot x_0, 3d(h \cdot x_0, x_0))$  et  $B(h \cdot x_0, 2d(h \cdot x_0, x_0))$ . Or à partir d'un certain rang, l'ensemble  $g_n K g_n^{-1} \cdot x_0$  intersecte  $B(h \cdot x_0, 2d(h \cdot x_0, x_0))$ , donc par connexité de  $g_n K g_n^{-1} \cdot x_0$  (car  $K$  est connexe), l'orbite  $g_n K g_n^{-1} \cdot x_0$  est incluse dans  $B(h \cdot x_0, 2d(h \cdot x_0, x_0))$  à partir d'un certain rang. Ainsi le diamètre de  $g_n K g_n^{-1} \cdot x_0$ , qui est égal à  $2d(g_n \cdot x_0, x_0)$ , est borné. Donc la suite  $(g_n K)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée : elle converge, à extraction près.

L'application  $\phi$ , continue, injective et propre, est donc un homéomorphisme sur son image.  $\square$

Notons  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  l'adhérence de  $\phi(X)$  dans  $\mathcal{S}(G)$  : l'espace  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  est compact. Le couple  $(\overline{X}^{\mathcal{S}}, \phi)$  est appelé la *compactification de Chabauty* de l'espace symétrique  $X$ . Le groupe  $G$  agit sur  $\mathcal{S}(G)$  par conjugaison, et l'application  $\phi$  est  $G$ -équivariante : si  $g \in G$  et  $x \in X$ ,

le stabilisateur de  $g \cdot x$  dans  $X$  est  $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1} = g \cdot G_x$ . Ainsi, la compactification de Chabauty  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  est une  $G$ -compactification de  $X$ .

Notons  $G^0 = \text{Isom}_0(X)$  la composante neutre du groupe des isométries de  $X$ . Nous allons montrer que la compactification de Chabauty de  $X$  dans  $\mathcal{S}(G)$  ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix du groupe de Lie connexe  $G$  agissant continûment isométriquement sur  $X$ , et se surjectant avec noyau fini sur  $G^0$ .

Notons  $\pi : G \rightarrow G^0$  la projection définie par l'action de  $G$  sur  $X$ . Par hypothèse,  $\pi$  est un morphisme de groupes de Lie surjectif de noyau fini. En particulier,  $\pi$  est un difféomorphisme local. Soit  $K^0$  un sous-groupe compact maximal de  $G^0$ , et  $K$  le sous-groupe compact maximal  $K = \pi^{-1}(K^0)$  de  $G$ . Choisissons une métrique riemannienne  $G^0$ -invariante à gauche,  $K^0$ -invariante à droite sur  $G^0$ . Alors la métrique riemannienne tirée en arrière sur  $G$  par  $\pi$  est  $G$ -invariante à gauche et  $K$ -invariante à droite.

Notons  $\phi : X \rightarrow \mathcal{S}(G)$  (resp.  $\phi^0 : X \rightarrow \mathcal{S}(G^0)$ ) l'application qui à un point  $x \in X$  associe son stabilisateur dans  $G$  (resp. dans  $G^0$ ) : ce sont deux plongements de l'espace symétrique  $X$ . Notons  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  (resp.  $\overline{X}^{\mathcal{S},0}$ ) la compactification associée.

D'après la proposition 1.5, la projection  $\pi : G \rightarrow G^0$  induit un plongement  $\mathcal{S}^*(\pi) : \mathcal{S}(G^0) \rightarrow \mathcal{S}(G)$ .

**Proposition 10.2.** *L'application  $\mathcal{S}^*(\pi) : \mathcal{S}(G^0) \rightarrow \mathcal{S}(G)$  est un homéomorphisme de  $\overline{X}^{\mathcal{S},0}$  sur  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  qui entrelace  $\pi$ , i.e. pour tous  $g \in G$  et  $x \in \overline{X}^{\mathcal{S},0}$  nous avons  $\mathcal{S}^*(\pi)(\pi(g) \cdot x) = g \cdot \mathcal{S}^*(\pi)(x)$ .*

**Démonstration.** On constate que  $\phi = \mathcal{S}^*(\pi) \circ \phi^0$ , donc ceci montre que  $\mathcal{S}^*(\pi)(\overline{X}^{\mathcal{S},0}) = \overline{X}^{\mathcal{S}}$ . Or l'application  $\mathcal{S}^*(\pi)$  est un plongement, donc c'est un homéomorphisme de  $\overline{X}^{\mathcal{S},0}$  sur  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$ .

De plus, pour tous  $g \in G$  et  $x \in \overline{X}^{\mathcal{S},0} \subset \mathcal{S}(G^0)$  nous avons  $\mathcal{S}^*(\pi)(\pi(g) \cdot x) = \pi^{-1}(\pi(g) \cdot x) = g \cdot \pi^{-1}(x) = g \cdot \mathcal{S}^*(\pi)(x)$ .  $\square$

Ceci montre par exemple que, pour étudier la compactification de Chabauty de l'espace symétrique associé à  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ , on peut travailler dans l'espace  $\mathcal{S}(\text{SL}(n, \mathbb{R}))$ , plus maniable que  $\mathcal{S}(\text{PSL}(n, \mathbb{R}))$ .

## 10.2 La distalité

Si  $X$  est un espace métrique et  $G$  est un groupe d'homéomorphismes de  $X$ , on dit que l'action de  $G$  sur  $X$  est *distale* si pour tous  $x, y \in X$  distincts il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $g \in G$  nous ayons  $d(g \cdot x, g \cdot y) \geq \varepsilon$ . Si  $g$  est un homéomorphisme de  $X$ , on dit que son action sur  $X$  est distale si l'action du groupe  $\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$  engendré par  $g$  est distale.

Si  $V$  est un espace vectoriel réel de dimension finie, on dit qu'un élément  $h \in \text{GL}(V)$  est *distal* si son action linéaire sur  $V$  est distale, ce qui équivaut à demander que le

spectre de  $h$  soit inclus dans le cercle unité  $\mathbb{S}^1$ . D'après le théorème 1 de [CG74], l'action linéaire d'un groupe  $H$  sur  $V$  est distale si et seulement si tout élément de  $H$  est distal.

Un sous-groupe  $H$  d'un groupe de Lie  $G$  est appelé un *sous-groupe distal* de  $G$  si son action adjointe sur l'algèbre de Lie de  $G$  est distale, ce qui équivaut à demander que pour tout  $h \in H$  le spectre de  $\text{Ad } h$  agissant sur l'algèbre de Lie de  $G$  soit inclus dans  $\mathbb{S}^1$ .

Cette notion, introduite par Furstenberg, provient des systèmes dynamiques (voir par exemple [GJT98, Proposition 9.5, p. 135]). L'intérêt d'introduire ici la distalité réside dans la proposition suivante.

**Proposition 10.3.** *Soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{GL}(V)$ , où  $V$  est un espace vectoriel réel de dimension finie. Le sous-espace  $\mathcal{S}_{\text{distal}}(G)$  de  $\mathcal{S}(G)$ , constitué des sous-groupes fermés de  $G$  dont l'action sur  $V$  est distale, est fermé.*

**Démonstration.** Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  adhérent à  $\mathcal{S}_{\text{distal}}(G)$ , et soit  $h \in H$ . Soit  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  ayant une action distale sur  $V$ , convergeant vers  $h$ . On peut voir le spectre comme application de  $\text{GL}(V)$  à valeurs dans l'ensemble des  $n$ -uplets de nombres complexes, à permutation près. On munit cet espace, naturellement identifié à  $\mathbb{C}^n / \mathfrak{S}_n$ , de la topologie quotient de  $\mathbb{C}^n$  par l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  par permutation. Alors le spectre est continu. Puisque le cercle unité  $\mathbb{S}^1$  est fermé, le spectre de  $h$  est lui aussi inclus dans  $\mathbb{S}^1$ . Ainsi,  $H$  est un sous-groupe de  $G$  ayant une action distale sur  $V$ .  $\square$

**Proposition 10.4.** *Tout sous-groupe de Lie compact d'un groupe de Lie est distal.*

**Démonstration.** Soit  $H$  un sous-groupe de Lie compact d'un groupe de Lie  $G$ . Soit  $g \in H$ , alors la suite  $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une valeur d'adhérence  $h$ ; et si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\text{Ad } g$ , alors  $\lambda^n$  converge à extraction près vers une valeur propre de  $\text{Ad } h$ . Or  $\text{Ad } h$  est inversible, ce qui implique que  $|\lambda| = 1$ . Donc, pour tout  $g \in H$ , le spectre de  $\text{Ad } g$  est inclus dans le cercle unité  $\mathbb{S}^1$  : ainsi,  $H$  est un sous-groupe distal de  $G$ .  $\square$

**Proposition 10.5.** *La compactification de Chabauty  $\overline{X}^{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}(G)$  de  $X$  est constituée de sous-groupes distaux de  $G$ .*

**Démonstration.** Par définition de la compactification de Chabauty, l'espace  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  est l'adhérence des sous-groupes compacts maximaux de  $G$ , donc d'après les propositions 10.3 et 10.4, l'espace  $\overline{X}^{\mathcal{S}}$  est constitué de sous-groupes distaux de  $G$ .  $\square$

Concernant l'étude des actions distales de groupes, on pourra se référer à [Abe78], [Abe81] et [CG74].

### 10.3 Décompositions à l'aide d'une partie de la base

Afin de déterminer les groupes limites, nous avons besoin d'introduire des notations. Reprenons celles de la partie 3, en particulier nous avons fixé une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{g}$ , le système de racines associé  $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$  ainsi qu'une base  $\Delta$  du système de racines.

Choisissons une partie  $I$  de la base  $\Delta$  du système de racines  $\Sigma$ . Définissons alors le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{a}_I = \{H \in \mathfrak{a} : \forall \beta \in I, \beta(H) = 0\} = \bigcap_{\beta \in I} \text{Ker } \beta$  de  $\mathfrak{a}$ , et  $\mathfrak{a}^I$  l'orthogonal de  $\mathfrak{a}_I$  dans  $\mathfrak{a}$  pour la forme de Killing, qui est définie positive sur  $\mathfrak{a}$ . Remarquons que  $\dim \mathfrak{a}^I = \text{Card } I$ .

**Exemple.** Pour  $G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$ , en prenant  $I = \{\alpha_{i,i+1}, \alpha_{j,j+1}\}$ , où  $1 \leq i < j \leq n-1$ , nous avons

$$\mathfrak{a}_I = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} : a_i = a_{i+1} \text{ et } a_j = a_{j+1} \right\}.$$

Si  $i+1 < j$ , alors

$$\mathfrak{a}^I = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} : \begin{array}{l} a_i = -a_{i+1}, a_j = -a_{j+1} \\ \text{et } \forall k \notin \{i, i+1, j, j+1\}, a_k = 0 \end{array} \right\}.$$

Si  $i+1 = j$ , alors

$$\mathfrak{a}^I = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} : a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 0 \text{ et } \forall k \notin \{i, i+1, i+2\}, a_k = 0 \right\}.$$

Ce choix d'une partie  $I$  définit également une partition de l'ensemble des racines  $\Sigma$  : soit  $\Sigma^I$  l'ensemble des racines qui sont combinaison linéaire (à coefficients entiers) d'éléments de  $I$ . Nous avons également

$$\Sigma^I = \{\alpha \in \Sigma : \forall H \in \mathfrak{a}_I, \alpha(H) = 0\}.$$

Définissons de plus  $\Sigma_I = \Sigma \setminus \Sigma^I$  le complémentaire de  $\Sigma^I$ , ainsi que  $\Sigma^{I,+} = \Sigma^I \cap \Sigma^+$  et  $\Sigma_I^+ = \Sigma_I \cap \Sigma^+$ .

Ceci définit également une décomposition de  $\mathfrak{n}$  en somme directe  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^I \oplus \mathfrak{n}_I$ , où  $\mathfrak{n}^I = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^{I,+}} \mathfrak{g}_\alpha$  et  $\mathfrak{n}_I = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_I^+} \mathfrak{g}_\alpha$ . De plus,  $\mathfrak{n}^I$  et  $\mathfrak{n}_I$  sont des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{n}$ , et  $[\mathfrak{n}^I, \mathfrak{n}_I] \subset \mathfrak{n}_I$ . Notons  $A^I, A_I, N^I$  et  $N_I$  les uniques sous-groupes de Lie immergés de  $G$  connexes d'algèbres de Lie respectives  $\mathfrak{a}^I, \mathfrak{a}_I, \mathfrak{n}^I$  et  $\mathfrak{n}_I$ . Ils sont en fait fermés. Le groupe  $A$  est égal au produit  $A = A^I \times A_I$ , et le groupe  $N$  est égal au produit semi-direct  $N = N_I \rtimes N^I$ . Le groupe  $A$  normalise  $N_I$  et  $N^I$ , et les groupes  $N^I$  et  $A_I$  commutent. L'application exponentielle de chacun des groupes  $A, A^I, A_I, N, N^I$  et  $N_I$  est surjective (voir par exemple [Hae08] pour des détails).

**Exemple.** Pour  $G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$ , en prenant comme ci-dessus  $I = \{\alpha_{i,i+1}, \alpha_{j,j+1}\}$ , où  $1 \leq i < j \leq n-1$  :

$$\mathfrak{n}^I = \left\{ \begin{pmatrix} T_i & 0 & 0 \\ 0 & T_{j-i} & 0 \\ 0 & 0 & T_{n-j} \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} \right\}$$

$$\text{et } \mathfrak{n}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} \right\}$$

où les blocs sont de dimensions respectives  $i, j-i$  et  $n-j$ , et où  $T_i \in \mathfrak{gl}(i, \mathbb{R})$  désigne une matrice triangulaire supérieure stricte quelconque.

On définit de manière analogue  $\Sigma^{I,-}$ ,  $\Sigma_I^-$ ,  $N^{I,-}$  et  $N_I^-$ , et nous avons alors des propriétés semblables.

Posons  $G^I = D(Z_G(\mathfrak{a}_I))_0$  la composante neutre du groupe dérivé du centralisateur dans  $G$  de  $\mathfrak{a}_I$ , ce groupe a pour algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^I = \mathfrak{d}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}_I))$  l'algèbre de Lie dérivée du centralisateur de  $\mathfrak{a}_I$ . Notons également  $K^I = G^I \cap K$ , qui a pour algèbre de Lie  $\mathfrak{k}^I = \mathfrak{g}^I \cap \mathfrak{k}$ .

D'après [GJT98, § 2.13, p. 18], le groupe de Lie  $G^I$  est connexe, semi-simple, de centre fini et sans facteur compact, et  $K^I$  en est un sous-groupe compact maximal. On peut choisir pour sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}^I$  l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}^I$ , dont le système de racines associé est  $\Sigma^I|_{\mathfrak{a}^I}$  et dont on peut choisir pour base  $I|_{\mathfrak{a}^I}$ . La décomposition en espaces de racines de  $\mathfrak{g}^I$  est

$$\mathfrak{g}^I = \mathfrak{g}_0^I \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^I} \mathfrak{g}_\alpha.$$

De plus, la décomposition d'Iwasawa associée est  $G^I = K^I A^I N^I$ .

## 10.4 Détermination des groupes limites

Fixons  $I$  une partie propre de la base  $\Delta$  du système de racines  $\Sigma$ . L'ensemble  $\overline{\mathfrak{a}_I^+} = \mathfrak{a}_I \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$  est muni d'une structure de cône simplicial fermé :

$$\overline{\mathfrak{a}_I^+} = \left( \bigcap_{\alpha \in I} \text{Ker } \alpha \right) \cap \left( \bigcap_{\alpha \in \Delta \setminus I} \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \geq 0\} \right).$$

Les facettes du cône  $\overline{\mathfrak{a}_I^+}$  sont constituées des

$$\left( \bigcap_{\alpha \in J} \text{Ker } \alpha \right) \cap \left( \bigcap_{\alpha \in \Delta \setminus J} \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \geq 0\} \right),$$

où  $J$  est une partie de  $\Delta$  contenant strictement  $I$ .

Notons  $\mathfrak{a}_I^+$  l'intérieur de  $\overline{\mathfrak{a}_I^+}$  dans l'espace vectoriel  $\mathfrak{a}_I$  : c'est le cône simplicial ouvert

$$\mathfrak{a}_I^+ = \left( \bigcap_{\alpha \in I} \text{Ker } \alpha \right) \cap \left( \bigcap_{\alpha \in \Delta \setminus I} \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) > 0\} \right).$$

On dit qu'une suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathfrak{a}_I^+$  tend vers  $+\infty$  dans  $\mathfrak{a}_I^+$  si, pour toute racine  $\alpha \in \Delta \setminus I$ , nous avons  $\alpha(H_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , c'est-à-dire que la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'éloigne de chacun des murs du cône  $\mathfrak{a}_I^+$ . L'exponentielle réalisant un difféomorphisme de  $\mathfrak{a}_I^+$  sur  $A_I^+ = A_I \cap A^+$ , on dit qu'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A_I^+$  tend vers  $+\infty$  dans  $A_I^+$  si la suite  $(\log a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  dans  $\mathfrak{a}_I^+$ .

Notons de plus  $D^I = K^I M N_I$ .

**Exemple.** Pour  $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ,  $K = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$  et  $I = \{\alpha_{i,i+1}, \alpha_{j,j+1}\}$ , où  $1 \leq i < j \leq n-1$  :

$$D^I = \left\{ \begin{pmatrix} U_i & * & * \\ 0 & U_{j-i} & * \\ 0 & 0 & U_{n-j} \end{pmatrix} \in G : U_k \in \mathrm{O}(k, \mathbb{R}) \right\}.$$

**Proposition 10.6.** *Le sous-groupe  $M$  normalise  $K^I$ , donc  $K^I M$  est un sous-groupe de Lie de  $G$ . Le sous-groupe  $K^I M$  normalise  $N_I$ , donc  $D^I = K^I M N_I$  est un sous-groupe de Lie de  $G$ , d'algèbre de Lie notée  $\mathfrak{d}^I = (\mathfrak{k}^I + \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{n}_I$ .*

**Démonstration.** Montrons que le sous-groupe  $M$  normalise l'algèbre de Lie  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_I)$  : soient  $m \in M$ ,  $X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_I)$  et  $H \in \mathfrak{a}_I$ . Puisque  $M$  centralise  $\mathfrak{a}$ , nous avons

$$\mathrm{ad}(\mathrm{Ad} m(X))H = [\mathrm{Ad} m(X), H] = \mathrm{Ad} m([X, \mathrm{Ad} m^{-1}(H)]) = \mathrm{Ad} m([X, H]) = 0.$$

Ainsi  $\mathrm{Ad} m(X) \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_I)$  donc  $M$  normalise  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_I)$ . On en déduit que  $M$  normalise également son algèbre dérivée  $D(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_I)) = \mathfrak{g}^I$ , puis que  $M$  normalise le sous-groupe de Lie connexe  $G^I$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^I$ . Or  $M$  est un sous-groupe de  $K$ , donc  $M$  normalise  $G^I \cap K = K^I$ . Ainsi,  $K^I M$  est un sous-groupe compact de  $G$ .

Montrons que le groupe  $M$  normalise l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$  : soient  $m \in M$ ,  $\alpha \in \Sigma$ ,  $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  et  $H \in \mathfrak{a}$ . Alors

$$\mathrm{ad}(\mathrm{Ad} m(Y))H = \mathrm{Ad} m([Y, \mathrm{Ad} m^{-1}(H)]) = \mathrm{Ad} m([Y, H]) = \alpha(H) \mathrm{Ad} m(Y).$$

Donc le groupe  $M$  normalise tous les espaces de racines  $\mathfrak{g}_{\alpha}$ , donc en particulier  $M$  normalise l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$ .

Montrons que le groupe  $K^I$  normalise l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$  : soit  $Y \in \mathfrak{k}^I$ , écrivons la décomposition de  $Y$  en espaces de racines  $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma^I} Y_{\alpha}$ , où  $Y_0 \in \mathfrak{g}_0$  et  $Y_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  pour toute racine  $\alpha \in \Sigma^I$ . Soit  $Z \in \mathfrak{n}_I$ , écrivons sa décomposition en espaces de racines  $Z = \sum_{\beta \in \Sigma_I^+} Z_{\beta}$ , où  $Z_{\beta} \in \mathfrak{g}_{\beta}$  pour toute racine  $\beta \in \Sigma_I^+$ . Soient  $\alpha \in \Sigma^I$  et  $\beta \in \Sigma_I^+$ . Si  $\alpha + \beta$  est une racine, celle-ci doit appartenir à  $\Sigma_I^+$ , car dans l'écriture de  $\alpha + \beta$  sur la base  $\Delta$ , l'une des coordonnées des racines de  $\Delta \setminus I$  est strictement positive. Donc  $[Y, Z] \in \mathfrak{n}_I$ . Ainsi l'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}^I$  normalise  $\mathfrak{n}_I$ , puis le groupe connexe  $K^I$  normalise  $\mathfrak{n}_I$ .

En conclusion, le groupe  $K^I M$  normalise l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$  et également le groupe de Lie  $N_I$ . Par conséquent  $D^I = K^I M N_I$  est un sous-groupe de Lie de  $G$  (le groupe  $D^I$  est fermé car  $K^I M$  est compact et  $N_I$  est fermé).  $\square$

Nous allons maintenant étudier les *groupes limites*, c'est-à-dire les éléments de  $\overline{X^S} \setminus \phi(X)$ .

**Proposition 10.7.** *Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $A_I^+$  tendant vers  $+\infty$  dans  $A_I^+$ . Alors la suite de sous-groupes fermés  $(a_n K a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $D^I$  dans  $\mathcal{S}(G)$ .*

**Exemple.** Pour  $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ ,  $K = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$  et  $I = \{\alpha_{1,2}\}$ , soit

$$a_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n^2} \end{pmatrix} \in A_I^+,$$



où  $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Alors on peut vérifier dans ce cas particulier que la suite de sous-groupes fermés  $a_n \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) a_n^{-1}$  converge vers le sous-groupe fermé

$$D^I = \left( \begin{array}{cc} \mathrm{O}(2) & * \\ 0 & \pm 1 \end{array} \right) \subset \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}).$$

Fixons  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme dans cet énoncé. Puisque  $\mathcal{S}(G)$  est compact, pour montrer cette proposition, il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence de la suite  $(a_n K a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  est égale à  $D^I$  : soit  $D$  une valeur d'adhérence. Supposons, quitte à extraire une sous-suite, que la suite  $(a_n K a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $D$ . La preuve de cette proposition, que nous donnerons plus loin, découle immédiatement des lemmes suivants.

**Lemme 10.8.** *Nous avons l'inclusion  $D^I \subset D$ .*

**Démonstration.** Montrons que  $N_I \subset D$  : soit  $y \in N_I$ . Notons  $H_n \in \mathfrak{a}_I$  et  $Y \in \mathfrak{n}_I$  tels que  $\exp H_n = a_n$  et  $\exp Y = y$ . Écrivons de plus  $Y = \sum_{\alpha \in \Sigma_I^+} Y_\alpha$ , où  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \Sigma_I^+$ . Alors

$$a_n^{-1} y a_n = \exp(\mathrm{Ad} a_n^{-1}(Y)) = \exp(\sum_{\alpha \in \Sigma_I^+} e^{-\mathrm{ad} H_n} Y_\alpha) = \exp(\sum_{\alpha \in \Sigma_I^+} e^{-\alpha(H_n)} Y_\alpha).$$

Or l'hypothèse que  $a_n$  tend vers  $+\infty$  dans  $A_I^+$  signifie que  $\alpha(H_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  pour tout  $\alpha \in \Sigma_I^+$ . Donc  $a_n^{-1} y a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$ . Or, d'après la décomposition d'Iwasawa  $G = KAN^-$ , soient  $k_n \in K$ ,  $a'_n \in A$  et  $y'_n \in N^-$  tels que  $a_n^{-1} y a_n = k_n a'_n y'_n$ . Par continuité de la décomposition d'Iwasawa, nous avons  $k_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$ ,  $a'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$  et  $y'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$ . Puisque  $N^-$  est égal au produit semi-direct  $N^- = N_I^- \rtimes N^{I,-}$ , écrivons  $y'_n = y_n^{I'} y'_{n,I}$ , où  $y_n^{I'} \in N^{I,-}$  et  $y'_{n,I} \in N_I^-$  : on a alors  $y_n^{I'} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$  et  $y'_{n,I} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$ .

Ainsi, puisque  $N^{I,-}$  et  $A_I$  commutent, nous avons  $a_n y'_n a_n^{-1} = y_n^{I'} a_n y'_{n,I} a_n^{-1}$ . Soit  $Y'_{n,I} \in \mathfrak{n}_I^-$  tel que  $\exp Y'_{n,I} = y'_{n,I}$ , alors on peut écrire  $Y'_{n,I} = \sum_{\alpha \in \Sigma_I^-} Y'_{n,\alpha}$ , où  $Y'_{n,\alpha} \in \mathfrak{g}_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \Sigma_I^-$ . Ainsi,  $a_n y'_{n,I} a_n^{-1} = \exp(\sum_{\alpha \in \Sigma_I^-} e^{\alpha(H_n)} Y'_{n,\alpha})$ . Comme  $\alpha \in \Sigma_I^-$  et  $H_n \in \mathfrak{a}_I$ , nous avons  $\alpha(H_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , donc  $a_n y'_{n,I} a_n^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$ . Puisque  $a'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$ , on en déduit que  $y = (a_n k_n a_n^{-1}) a'_n (a_n y'_n a_n^{-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n k_n a_n^{-1} \in D$ .

Montrons que  $K^I M \subset D$ . Puisque  $M = Z_K(\mathfrak{a})$ , on en déduit que  $M$  commute à  $A_I$ . Par ailleurs, puisque  $K^I \subset G^I \subset Z_G(\mathfrak{a}_I)$ , le groupe  $K^I$  commute à  $A_I$ . Soit  $k \in K^I M \subset K$ , alors  $k = a_n k a_n^{-1}$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $k \in D$ .

Finalement  $D^I = K^I M N_I \subset D$ . □

Pour montrer l'inclusion réciproque, nous aurons besoin du résultat suivant. Considérons la compactification géodésique  $\overline{X}^g$  de l'espace symétrique  $X$  (voir la partie 2.3).

**Proposition 10.9.** *Soit  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathfrak{a}^+$  tendant vers l'infini, et soit  $I = \{\alpha \in \Delta : \alpha(H_n) \rightarrow +\infty\}$ . Alors la suite  $(\exp(H_n) \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$  converge dans  $\overline{X}^g$  vers un point de  $\partial_\infty X$ , dont le stabilisateur dans  $G$  est le sous-groupe parabolique  $P^I = K^I M A N$ . (Voir [GJT98, Proposition 3.9, p. 27].) □*

**Lemme 10.10.** *Nous avons l'inclusion  $D \subset P^I$ .*

**Démonstration.** Plaçons-nous dans la compactification géodésique  $\overline{X}^g$  de  $X$ . Puisque la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini dans  $A_I^+$ , d'après la proposition 10.9, la suite  $(x_n = a_n \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un point  $x \in \partial_\infty X$ , dont le stabilisateur dans  $G$  est  $P^I$ . Soit  $d \in D$ , et soit  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $K$  telle que la suite  $(a_n k_n a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $d$ . Puisque l'action de  $G$  sur la compactification  $\overline{X}^g$  est continue, on en déduit que la suite  $(a_n k_n a_n^{-1} \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $d \cdot x = x$ . Par conséquent, l'élément  $d \in D$  fixe le point à l'infini  $x$ , donc appartient au sous-groupe  $P^I$ .  $\square$

**Lemme 10.11.** *Nous avons l'inclusion  $D \subset D^I$ .*

**Démonstration.** Soit  $d \in D$ , montrons que  $d \in D^I$ . Puisque  $d \in P^I = K^I M A N$  et que  $N = N^I N_I$ , on peut supposer que  $d \in A N^I$ . D'après la proposition 10.5, l'élément  $d$  est distal. Or cet élément s'écrit  $d = au$ , où  $a \in A$  et  $u \in N^I$ . Soit  $H \in \mathfrak{a}$  tel que  $\exp H = a$  : alors, pour toute racine  $\alpha \in \Sigma$ , le réel  $\exp(\alpha(H))$  est une valeur propre de  $\text{Ad } d$ . Par distalité, on en déduit que pour tout  $\alpha \in \Sigma$  nous avons  $\alpha(H) = 0$  : ainsi  $H = 0$  et  $d = u \in N^I$ . Puisque l'exponentielle du groupe de Lie  $N$  est un difféomorphisme, soit  $Y \in \mathfrak{n}^I$  tel que  $\exp Y = d$ .

Soit  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $K$  telle que

$$a_n k_n a_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp Y.$$

Soit  $H_n \in \mathfrak{a}_I$  tel que  $\exp H_n = a_n$ . Puisque le spectre de  $\text{ad } Y \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  est égal à  $\{0\}$ , d'après [Hel78, Theorem 1.7, p. 105], l'exponentielle est un difféomorphisme local en  $Y$ . Donc il existe une suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathfrak{g}$  convergeant vers  $Y$  telle que  $\exp Y_n = a_n k_n a_n^{-1}$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $U_n = \text{Ad}(a_n^{-1})(Y_n) \in \mathfrak{g}$ , de sorte que  $\exp U_n = k_n \in K$ . Notons  $Y'_n = \text{Ad } a_n \theta(U_n)$ , de sorte que  $\exp Y'_n = \exp Y_n$  : nous allons montrer que  $Y'_n = Y_n$ .

On remarque que pour tout  $\alpha \in \Sigma^{I,+}$  nous avons  $\alpha(H_n) = 0$  donc

$$Y'_{n,\alpha} = \theta(U_n)_\alpha = \theta(U_{n,-\alpha}) = \theta(Y_{n,-\alpha}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta(Y_{-\alpha}) = 0.$$

Et pour tout  $\alpha \in \Sigma_I^-$  nous avons  $\alpha(H_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$  et

$$e^{-\alpha(H_n)} \theta(U_{n,-\alpha}) = \theta(Y_{n,-\alpha}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta(Y_{-\alpha}) = 0,$$

$$\text{donc } Y'_{n,\alpha} = e^{\alpha(H_n)} \theta(U_{n,-\alpha}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Enfin, la composante  $Y'_{n,0}$  de  $Y'_n$  sur  $\mathfrak{g}_0$  vérifie

$$Y'_{n,0} = \theta(U_{n,0}) = \theta(Y_{n,0}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta(Y_0) = 0.$$

Ainsi la distance de  $Y'_n$  à la sous-algèbre nilpotente  $\mathfrak{n}^{I,-} \oplus \mathfrak{n}_I$  tend vers 0, donc le spectre de la suite d'endomorphismes  $(\text{ad } Y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\{0\}$ . Si on appelle  $\mathcal{E} = \{Z \in \mathfrak{g} : |\text{Im Sp}(\text{ad } Z)| < \pi\}$ , cela signifie que pour  $n$  assez grand nous avons  $Y'_n \in \mathcal{E}$ . Par ailleurs  $Y \in \mathfrak{n}^I$  donc  $Y_n \in \mathcal{E}$  pour  $n$  assez grand. Or d'après [MT86, Théorème 3.8.4, p. 83], l'exponentielle de  $G$  est un difféomorphisme de  $\mathcal{E}$  sur son image, donc comme nous avons  $\exp Y_n = \exp Y'_n$ , on en déduit que  $Y_n = Y'_n$  si  $n$  est assez grand.

Or les valeurs d'adhérence de la suite  $(Y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartiennent à  $\mathfrak{n}^{I,-} \oplus \mathfrak{n}_I$ , donc  $Y \in (\mathfrak{n}^{I,-} \oplus \mathfrak{n}_I) \cap \mathfrak{n}^I = \{0\}$ . On a donc montré l'inclusion  $D \subset D^I$ .  $\square$

Notons, pour tous  $I \subset \Delta$ ,  $a \in A$  et  $k \in K$ ,

$$D_{a,k}^I = kaD^Ia^{-1}k^{-1} = kaK^I MN_I a^{-1}k^{-1}.$$

**Théorème 10.12.** *Soit  $D \in \overline{X^S} \setminus X$  un groupe limite. Alors il existe  $I$  une partie propre de  $\Delta$ ,  $a \in \overline{A^{I,+}}$  et  $k \in K$  tels que  $D = D_{a,k}^I$ .*

**Démonstration.** Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $G$  telle que  $D = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n K g_n^{-1}$ . Soit  $g_n = k_n a_n k'_n$  l'écriture de  $g_n$  dans la décomposition  $K \overline{A^+} K$  de  $G$  : ainsi,  $k_n, k'_n \in K$  et  $a_n \in \overline{A^+}$ . Soit  $I \subset \Delta$  l'ensemble des  $\alpha \in \Delta$  tels que la suite  $(\alpha(\log a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée. On ne peut avoir  $I = \Delta$  car sinon la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  serait bornée, donc convergerait à extraction près vers un élément  $g \in G$ , or  $D = g K g^{-1}$  n'est pas un groupe limite.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $k \in K$  et que :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in I, \quad & \text{la suite } (\alpha(\log a_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ \text{et } \forall \alpha \in \Delta \setminus I, \quad & \text{la suite } (\alpha(\log a_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty. \end{aligned}$$

Alors, si l'on écrit la décomposition  $a_n = a_n^I a_{n,I}$ , où  $a_n^I \in A^I$  et  $a_{n,I} \in A_I$ , ceci revient à dire que  $(a_n^I)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a \in A^I \cap \overline{A^+} = \overline{A^{I,+}}$  et que  $(a_{n,I})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  dans  $A_I$ . D'après la proposition 10.7, la suite  $a_{n,I} K a_{n,I}^{-1}$  converge dans  $\mathcal{S}(G)$  vers  $D^I$ . Donc

$$D = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n K g_n^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n a_n^I (a_{n,I} K a_{n,I}^{-1}) a_n^{I-1} k_n^{-1} = kaD^Ia^{-1}k^{-1} = D_{a,k}^I.$$

□

Nous démontrons ensuite la fin du théorème annoncé dans l'introduction.

**Théorème 10.13.** *Cette écriture est unique au sens suivant : soient  $I_1, I_2$  deux parties propres de  $\Delta$ ,  $a_1 \in \overline{A^{I_1,+}}$ ,  $a_2 \in \overline{A^{I_2,+}}$  et  $k_1, k_2 \in K$ . Alors nous avons  $D_{a_1, k_1}^{I_1} = D_{a_2, k_2}^{I_2}$  si et seulement si*

$$I_1 = I_2 = I, a_1 = a_2 = a \text{ et } k_2^{-1} k_1 \in (K^I \cap a K^I a^{-1}) M.$$

**Lemme 10.14.** *L'ensemble des vecteurs  $X$  de  $\mathfrak{d}^I$  tels que  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} X$  soit un endomorphisme nilpotent de  $\mathfrak{g}$  est la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$ .*

**Démonstration.** Pour tout  $X \in \mathfrak{n}_I \subset \mathfrak{n}$ , d'après la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en espaces de racines, on sait que l'endomorphisme  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} X$  est nilpotent. Réciproquement, soit  $X \in \mathfrak{d}^I$  tel que  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} X$  soit nilpotent : écrivons  $X = U + Y$ , où  $U \in \mathfrak{k}^I + \mathfrak{m}$  et  $Y \in \mathfrak{n}_I$ . Puisque  $[\mathfrak{k}^I + \mathfrak{m}, \mathfrak{n}_I] \subset \mathfrak{n}_I$ , pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  nous avons  $(\text{ad}_{\mathfrak{g}} X)^n = (\text{ad}_{\mathfrak{g}} U)^n + \text{ad}_{\mathfrak{g}} Y_n$ , où  $Y_n \in \mathfrak{n}_I$ . Or il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $(\text{ad}_{\mathfrak{g}} X)^n = 0$ , donc tel que  $(\text{ad}_{\mathfrak{g}} U)^n = -\text{ad}_{\mathfrak{g}} Y_n$  soit nilpotent : ainsi l'endomorphisme  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} U$  est nilpotent, et antisymétrique pour le produit scalaire  $B_{\theta}$  puisque  $U \in \mathfrak{k}$ . Donc  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} U = 0$ , puis  $U \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$  car l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple. Ainsi  $X \in \mathfrak{n}_I$ . □

**Lemme 10.15.** *Le normalisateur de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$  dans  $G$  est  $P^I = K^I M A N$ .*

**Démonstration.** L'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$  est normalisée par le sous-groupe  $AN$ .

Soit  $k \in K$ , et soit  $U \in \mathfrak{k}$  tel que  $\exp U = k$ . Écrivons la décomposition  $U = U_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma} U_\alpha$  de  $U$  en espaces de racines.

Si  $k \in K^I M$ , alors  $U \in \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}^I$ . Pour toutes les racines  $\alpha \in \Sigma^I$  et  $\beta \in \Sigma_I^+$ , si  $\alpha + \beta$  est une racine, nous avons  $\alpha + \beta \in \Sigma_I^+$ , donc  $[U_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{n}_I$ . Par ailleurs  $[U_0, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{n}_I$ . Par conséquent, nous avons  $[U, \mathfrak{n}_I] \subset \mathfrak{n}_I$ . Ainsi  $k$  normalise l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$ .

Si  $k \notin K^I M$ , puisque  $\text{Lie}(K^I M) = (\mathfrak{m} + \mathfrak{g}^I) \cap \mathfrak{k} = (\mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^I} \mathfrak{g}_\alpha)$ , il existe une racine  $\alpha \in \Sigma_I^+$  telle que  $U_\alpha \neq 0$ . Alors  $U_\alpha \in \mathfrak{n}_I$ , et la composante sur  $\mathfrak{g}_0$  de  $[U, U_\alpha]$  dans la décomposition en espaces de racines est  $[U_{-\alpha}, U_\alpha] = [\theta(U_\alpha), U_\alpha]$  car  $U \in \mathfrak{k}$ . Soit  $H \in \mathfrak{a}$  tel que  $\alpha(H) \neq 0$ . Alors

$$\begin{aligned} B([\theta(U_\alpha), U_\alpha], H) &= B([U_\alpha, H], \theta(U_\alpha)) \\ &= B(-\alpha(H)U_\alpha, \theta(U_\alpha)) \\ &= \alpha(H)B_\theta(U_\alpha, U_\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $[\theta(U_\alpha), U_\alpha] \neq 0$  : par conséquent, le vecteur  $[U, U_\alpha]$  n'appartient pas à  $\mathfrak{n}_I$ , donc  $U$  n'appartient pas au normalisateur de  $\mathfrak{n}_I$ , et par conséquent  $k$  ne normalise pas l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$ .

En résumé, le normalisateur de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$  dans  $G$  est  $K^I MAN$ .  $\square$

**Lemme 10.16.** *Le normalisateur du sous-groupe  $D^I$  dans  $G$  est  $K^I MA_I N_I$ .*

**Démonstration.** Notons  $L$  le normalisateur du sous-groupe  $D^I$  dans  $G$ . Alors  $L$  normalise également la sous-algèbre  $\mathfrak{n}_I$  des éléments  $\text{ad}_\mathfrak{g}$ -nilpotents de son algèbre de Lie  $\mathfrak{d}^I$ . Ainsi  $L$  est inclus dans le normalisateur  $P^I = K^I MAN$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_I$ . Soit  $x \in A^I N^I \cap L$ , alors pour tout  $k \in K^I$ , nous avons  $xkx^{-1} \in D^I \cap G^I$  d'après la décomposition d'Iwasawa  $G^I = K^I A^I N^I$ . Or  $D^I \cap G^I = K^I$ , donc  $xkx^{-1} \in K^I$ . Ceci étant vrai pour tout  $k \in K^I$ , on en déduit que  $xK^I x^{-1} = K^I$ . D'après la proposition 10.1 appliquée au groupe  $G^I$ , on en déduit que  $x \in K^I$ . Par conséquent, le normalisateur du sous-groupe  $D^I$  dans  $G$  est  $K^I MA_I N_I$ .  $\square$

**Démonstration du théorème 10.13.** (Voir [GJT98, Proposition 9.116, p. 139].)

Si les groupes  $k_1 a_1 D^{I_1} a_1^{-1} k_1^{-1}$  et  $k_2 a_2 D^{I_2} a_2^{-1} k_2^{-1}$  sont égaux, on en déduit que les sous-algèbres constituées d'éléments  $\text{ad}_\mathfrak{g}$ -nilpotents de leurs algèbres de Lie sont égales, donc d'après le lemme 10.14 nous avons  $\text{Ad}(k_1 a_1) \mathfrak{n}_{I_1} = \text{Ad}(k_2 a_2) \mathfrak{n}_{I_2}$ . Or  $A$  normalise  $\mathfrak{n}_{I_1}$  et  $\mathfrak{n}_{I_2}$ , donc si l'on pose  $k = k_1^{-1} k_2$  nous avons  $\mathfrak{n}_{I_1} = \text{Ad}(k) \mathfrak{n}_{I_2}$ . Par conséquent, nous avons également  $N_{I_1} = k N_{I_2} k^{-1}$ , donc d'après le lemme 10.15 leurs normalisateurs  $P^{I_1} = k P^{I_2} k^{-1}$  sont égaux.

Or, d'après le paragraphe [War72, 1.2.3, pp. 55-70], la paire  $(G, MAN)$  forme un système de Tits, donc d'après le théorème [War72, Theorem 1.2.1.1, p. 46], les sous-groupes paraboliques  $(P^I)_{I \subset \Delta}$  sont deux à deux non conjugués, et chacun est égal à son propre normalisateur. Ainsi,  $I_1 = I_2 = I$  et  $k \in P^I$ . Or  $k \in K$ , donc  $k \in P^I \cap K = K^I M$ .

Enfin  $D^I = (a_1^{-1} k a_2) D^I (a_1^{-1} k a_2)^{-1}$ , donc d'après le lemme 10.16, nous avons  $a_1^{-1} k a_2 \in K^I MA_I N_I$ . Or  $a_1^{-1} k a_2 \in A^I K^I M A^I \subset G^I M = K^I M A^I N^I$ , donc  $a_1^{-1} k a_2 \in K^I M$ . Par unicité du facteur  $\overline{A^+}$  dans la décomposition de Cartan  $G = K \overline{A^+} K$ , on en déduit que  $a_1 = a_2 = a$ . Et l'élément  $k$  appartient à  $K^I M \cap a K^I M a^{-1} = (K^I \cap a K^I a^{-1}) M$ .

Pour montrer la réciproque, soient  $I \subsetneq \Delta$  une partie propre de  $\Delta$ ,  $a \in \overline{A^{I,+}}$  et  $k_1, k_2 \in K$  tels que  $k_1^{-1}k_2 \in (K^I \cap aK^I a^{-1})M$ . Alors  $a^{-1}k_1^{-1}k_2 a \in K^I M \subset D^I$ , donc

$$k_1 a D^I a^{-1} k_1^{-1} = k_2 a D^I a^{-1} k_2^{-1}.$$

□

## 10.5 Caractérisation des groupes limites

Nous commençons par retrouver la classification des sous-groupes moyennables maximaux isotropiquement connexes de  $G$  effectuée par Moore [Moo79, Theorem 3.2, p. 133]. On dit qu'un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  est *isotropiquement connexe* s'il existe un tore  $A'$  de  $G$  déployé sur  $\mathbb{R}$ , inclus dans  $H'$ , tel que  $H = H_0 Z_H(A')$ , où  $Z_H(A')$  désigne le centralisateur de  $A'$  dans  $H$ .

**Théorème 10.17** (Moore). *Les sous-groupes moyennables fermés maximaux et isotropiquement connexes de  $G$  sont les stabilisateurs des points de  $\overline{X^S}$ . Ils forment donc  $2^r$  classes de conjugaison (où  $r = \text{rang}(G) = \text{Card } \Delta$ ), dont des représentants sont les groupes  $N_G(D^I) = K^I M A_I N_I$ , pour  $I$  une partie de  $\Delta$ .*

Pour démontrer ceci, nous allons nous servir du résultat suivant. Rappelons qu'un *plat* d'un espace métrique géodésique est un sous-espace fermé, complet, totalement géodésique et isométrique à un espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ , où  $d \geq 1$ .

**Théorème 10.18.** *Soit  $X$  une variété de Hadamard (par exemple un espace symétrique de type non compact) et  $L$  un groupe d'isométries moyennable de  $X$ . Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vraie.*

1. *Le groupe  $L$  fixe un point de la compactification géométrique  $\overline{X^g}$  de  $X$ .*
2. *L'espace  $X$  contient un plat  $L$ -invariant.*

(Voir [BS87a, Theorem 2, p. 506], ou [AB98, Theorem, p. 184].) □

**Corollaire 10.19.** *Si  $L$  est un sous-groupe moyennable fermé et isotropiquement connexe de  $G$  non compact, alors il existe une partie propre  $I$  de  $\Delta$  telle qu'un conjugué de  $L$  soit inclus dans  $P^I = K^I M A_I N_I$ .*

**Démonstration.** D'après le théorème 10.18, ou bien  $L$  fixe un point  $\xi$  de la compactification géométrique  $\overline{X^g}$  de  $X$ , ou bien  $L$  stabilise un plat  $F$  de  $X$ .

Si  $L$  fixe le point  $\xi$ , alors le groupe  $L$  est inclus dans le stabilisateur  $G_\xi$  de  $\xi$  dans  $G$ , qui est égal à un conjugué de  $P^I$ , où  $I$  est une partie de  $\Delta$  (propre car  $L$  n'est pas compact).

Si  $L$  stabilise le plat  $F$ , alors quitte à conjuguer on peut supposer qu'il s'agit du plat  $F = A_I \cdot x_0$ , où  $I$  est une partie de  $\Delta$  (propre car  $L$  n'est pas compact). Ainsi  $L$  est inclus dans le stabilisateur  $N_G(A_I) = N_K(A_I) A_I$  du plat  $F$ .

Or  $L$  est isotropiquement connexe, donc il existe un sous-groupe  $A'$  de  $A_I$  tel que  $L = L_0 Z_L(A')$ . Quitte à augmenter  $I$ , on peut supposer que  $A' = A_I$ . Dans ce cas  $L = L_0 Z_L(A_I) \subset (N_K(A_I) A_I)_0 Z_G(A_I) = K^I M A_I \subset P^I$ . □

Donnons maintenant la preuve du théorème 10.17.

**Démonstration.** Soit  $L$  un sous-groupe moyennable fermé et isotropiquement connexe de  $G$ , non compact. D'après le corollaire 10.19, considérons  $I$  une partie propre minimale de  $\Delta$  telle que  $L \subset K^I MAN$ .

Faisons agir  $L$  sur le sous-espace  $X^I = G^I \cdot x_0$  de  $X$  : il s'identifie à l'espace symétrique de type non compact associé à  $G^I$ . Puisque le sous-groupe  $A_I N_I$  est distingué dans  $K^I MAN$ , le quotient  $LA_I N_I / A_I N_I$  s'identifie à un sous-groupe moyennable fermé  $L^I$  de  $K^I MAN / A_I N_I = K^I M A^I N^I = G^I M$ . Puisque le groupe  $M \subset K$  normalise  $G^I$ , le groupe  $G^I M$  agit par isométries sur le sous-espace symétrique de type non compact  $X^I = G^I \cdot x_0 \subset X$ .

Rappelons qu'on peut choisir dans  $\mathfrak{g}^I$  pour sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{a}^I$ , pour système de racines  $\Sigma|_{\mathfrak{a}^I}$  et pour base  $I|_{\mathfrak{a}^I}$ . Supposons que  $L^I$  ne soit pas compact, auquel cas d'après le corollaire 10.19 il existe une partie propre  $J$  de  $I$  telle que  $L^I \subset K^J M A^J N^J$ , quitte à conjuguer par un élément de  $G^I$ . Cela implique que  $L$  est inclus dans  $K^J MAN$ , ce qui contredit la minimalité de  $I$ . Ainsi  $L^I$  est compact, donc quitte à conjuguer par un élément de  $G^I$  on peut supposer que  $L^I$  est inclus dans  $K^I M$ . Ainsi le groupe  $L$  est inclus dans  $K^I M A_I N_I$ .

Par ailleurs le groupe  $L = K^I M A_I N_I$ , extension d'un groupe compact par un groupe résoluble, est moyennable. Et ce groupe est isotropiquement connexe car le tore  $A_I$  inclus dans  $L$  est tel que  $L_0 = K^I M_0 A_I N_I$  et  $Z_L(A_I) = K^I M A_I$ , donc  $L = L_0 Z_L(A_I)$ . Ceci achève donc la preuve.  $\square$

Le théorème suivant retrouve la classification des sous-groupes distaux maximaux de  $G$  (voir [GJT98, Theorem 9.27, p. 144]), qui permet de caractériser intrinsèquement les éléments de la compactification de Chabauty.

**Théorème 10.20.** *Les éléments de  $\overline{X}^S$  sont les sous-groupes distaux maximaux de  $G$ . Ils forment donc  $2^r$  classes de conjugaison (où  $r = \text{rang}(G) = \text{Card } \Delta$ ), dont des représentants sont les groupes  $D^I = K^I M N_I$ , pour  $I$  une partie de  $\Delta$ .*

Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons sur le théorème suivant.

**Théorème 10.21** (Conze, Guivarc'h). *Si  $V$  est un espace vectoriel réel et si  $G$  est un sous-groupe fermé distal de  $\text{GL}(V)$ , alors  $G$  est moyennable.*

**Démonstration.** D'après le théorème [CG74, Théorème 1, p. 1083], on sait qu'il existe un drapeau

$$V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$$

stable par  $G$ , et tel que pour tout  $i \in [[0, n-1]]$  le groupe  $G$  opère de façon isométrique sur  $V_{i+1}/V_i$  (pour un produit scalaire convenable).

Or le groupe des isométries linéaires d'un espace vectoriel euclidien est compact, donc le sous-groupe distingué  $N$  de  $G$  constitué des éléments qui agissent trivialement sur chacun des quotients  $V_{i+1}/V_i$  est cocompact. Or, dans une base adaptée au drapeau, le groupe  $N$  est représenté par des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale, donc est nilpotent, puis moyennable. Ainsi le groupe  $G$ , extension de deux groupes moyennables, est moyennable.  $\square$

Donnons maintenant la preuve du théorème 10.20.

**Démonstration.** D'après la proposition 10.5, on sait que les éléments de  $\overline{X}^S$  sont des sous-groupes distaux.

Réciproquement, soit  $L$  un sous-groupe distal maximal de  $G$ . Puisque l'ensemble des éléments distaux de  $G$  est fermé dans  $G$ , le sous-groupe  $L$  est fermé par maximalité, donc est un sous-groupe de Lie de  $G$ . Les éléments de  $\text{Ad } L$  agissant sur  $\mathfrak{g}$  ont des valeurs propres de module 1, donc ceci reste vrai lorsqu'on restreint leur action à l'algèbre de Lie de  $L$ . Ainsi le groupe de Lie  $L$  est distal.

D'après le théorème 10.21, on sait que le groupe  $L$  est moyennable. Puis d'après le théorème 10.17, on sait qu'il existe une partie  $I$  de  $\Delta$  telle que  $L \subset K^I M A_I N_I$ . Fixons  $l \in L$ , notons sa décomposition  $l = kan$ , où  $k \in K^I M$ ,  $a \in A_I$  et  $n \in N_I$ . Puisque  $K^I M$  centralise  $A_I$ , normalise  $N_I$  et que  $A_I$  normalise  $N_I$ , on en déduit que pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$  nous avons  $l^p = k^p a^p n_p$ , où  $n_p \in N_I$ . Puisque le groupe  $K^I M$  est compact et que  $L$  est distal, on en déduit que le spectre de la suite  $(\text{Ad } a^p n_p)_{p \in \mathbb{N}}$  doit être borné. Or ce spectre est le même que le spectre de  $(\text{Ad } a^p)_{p \in \mathbb{N}}$ , donc il ne peut être borné que si  $a = 1$ . En conclusion, on en déduit que  $L$  est inclus dans le sous-groupe distal  $K^I M N_I = D^I$ , donc  $L = D^I$  par maximalité.  $\square$

Remarquons que tout sous-groupe fermé distal de  $G$  est à croissance polynomiale, mais que la réciproque n'est pas vraie. Par exemple le sous-groupe abélien  $A$  est à croissance polynomiale, mais n'est pas distal en tant que sous-groupe de  $G$  : il est distal en tant que groupe de Lie.

## 11 Lien avec la compactification polyédrale

### 11.1 Compactification polyédrale d'un espace vectoriel

Deux références pour la compactification polyédrale sont [Lan95, § I.2, p. 21] et [Rém99].

Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $r$ . Soit  $\Sigma$  un ensemble fini non vide de formes linéaires non nulles sur  $V$ , stable par  $\alpha \mapsto -\alpha$ , tel qu'on obtienne une partition de  $V \setminus \{0\}$  indexée par les partitions  $\Sigma = \Sigma_0 \sqcup \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$  de  $\Sigma$  en trois parties de  $\Sigma$ , en cônes simpliciaux ouverts (facettes) définis par

$$F_{\Sigma_0, \Sigma_+, \Sigma_-} = \left\{ x \in V \setminus \{0\} : \begin{array}{l} \forall \alpha \in \Sigma_0, \alpha(x) = 0, \forall \alpha \in \Sigma_+, \alpha(x) > 0 \\ \text{et } \forall \alpha \in \Sigma_-, \alpha(x) < 0 \end{array} \right\}.$$

Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des facettes, et  $\mathcal{F}_0$  l'ensemble des chambres (facettes de dimension maximale). Si  $F$  est une facette de cette décomposition, on note  $\langle F \rangle$  le sous-espace vectoriel de  $V$  engendré par  $F$ . On définit la *compactification polyédrale* de  $V$  relativement à  $\Sigma$  comme l'ensemble union disjointe

$$\overline{V}^p = \bigsqcup_{F \in \mathcal{F}} V / \langle F \rangle,$$

muni de la topologie que nous allons définir.

Si  $F_0 \in \mathcal{F}_0$  est une chambre, on appelle *coin* associé à  $F_0$  le sous-ensemble de  $\overline{V}^p$  :

$$C_{F_0} = \bigsqcup_{F \in \mathcal{F}, F \subset \overline{F_0}} V/\langle F \rangle,$$

où  $\overline{F_0}$  désigne l'adhérence de  $F_0$  dans  $V$ . Remarquons que le coin  $C_{F_0}$  contient une copie de  $V$ , pour la facette  $\{0\}$ .

Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Sigma$  tels que  $F_0 = \{x \in V : \forall i \in [[1, r]], \alpha_i(x) > 0\}$ . Ceci permet de considérer l'application :

$$\begin{aligned} \beta : C_{F_0} &\rightarrow ]-\infty, +\infty]^r \\ x \in V/\langle F \rangle &\mapsto (\beta(x)_i)_{i \in [[1, r]]} \\ \text{où } \beta(x)_i &= \begin{cases} \alpha_i(x) & \text{si } \alpha_i|_F = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha_i|_F > 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

L'application  $\beta$  est une bijection : munissons  $C_{F_0} \subset \overline{V}^p$  de la topologie qui fait de la bijection  $\beta$  un homéomorphisme de  $C_{F_0}$  sur  $]-\infty, +\infty]^r$ , muni de la topologie usuelle : en particulier, l'espace  $C_{F_0}$  est localement compact et métrisable.

On munit  $\overline{V}^p$  de la topologie faible définie par la famille  $(C_{F_0})_{F_0 \in \mathcal{F}_0}$  : une partie  $U \subset \overline{V}^p$  est ouverte si et seulement si, pour toute chambre  $F_0 \in \mathcal{F}_0$ , la partie  $U \cap C_{F_0}$  est ouverte dans  $C_{F_0}$ . L'ensemble  $\mathcal{F}_0$  des chambres étant fini, ceci fait de  $\overline{V}^p$  un espace compact et métrisable. Si l'on note  $W$  le groupe des automorphismes linéaires de  $V$  qui préservent l'ensemble  $\mathcal{F}$  des facettes, alors l'espace  $\overline{V}^p$  est une  $W$ -compactification de  $V$  (voir [Lan95, § I.2, p. 21]).

## 11.2 Compactification polyédrale d'un espace symétrique

Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, et  $x_0 \in X$  un point base. Soit  $G$  un groupe de Lie connexe agissant continûment isométriquement sur  $X$ , se surjectant sur  $\text{Isom}_0(X)$  avec noyau fini. Soit  $K = G_{x_0}$  le stabilisateur du point  $x_0$ . Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  une décomposition d'Iwasawa de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . Le système de racines  $\Sigma$  associé à une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{g}$  abélienne diagonalisable maximale donne une décomposition de  $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$  en cônes simpliciaux.

D'après ce qui précède, on peut définir la compactification polyédrale  $\overline{\mathfrak{a}}^p$  de  $\mathfrak{a}$ . Si on choisit une chambre de Weyl (ouverte) positive  $\mathfrak{a}^+$ , notons alors  $\overline{\mathfrak{a}^+}^p$  l'adhérence de  $\mathfrak{a}^+$  dans  $\overline{\mathfrak{a}}^p$ . Notons  $\Delta$  la base du système de racines  $\Sigma$  associée à la chambre de Weyl positive  $\mathfrak{a}^+$ . Les facettes de la chambre de Weyl  $\mathfrak{a}^+$  sont alors exactement les  $\mathfrak{a}_I^+$ , où  $I$  parcourt les parties propres de  $\Delta$ . Ainsi les facettes ajoutées pour obtenir la compactification polyédrale de  $\mathfrak{a}$  sont les  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_I$ , que nous identifierons à l'orthogonal  $\mathfrak{a}^I$  de  $\mathfrak{a}_I$ , où  $I$  parcourt les parties propres de  $\Delta$ .

Remarquons que l'application :

$$\begin{aligned} K \times \overline{\mathfrak{a}^+} &\rightarrow X \\ (k, H) &\mapsto k \exp(H) \cdot x_0 \end{aligned}$$



est continue et surjective. Montrons qu'elle est propre : soit  $(k_n \exp(H_n) \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans l'image de cette application convergeant vers  $k \exp(H) \cdot x_0$ . Par compacité de  $K$ , on peut supposer quitte à extraire que la suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $k' \in K$ . Alors la suite  $(\exp(H_n) \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $k'^{-1} k \exp(H) \cdot x_0$  dans  $X$ . Ainsi, il existe une suite  $(k'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$  telle que la suite  $(\exp(H_n) k'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $k'^{-1} k \exp(H)$  dans  $G$ . Par continuité de la composante dans  $\overline{A^+}$  dans la décomposition de Cartan  $G = K \overline{A^+} K$ , on en déduit que la suite  $(\exp(H_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\exp(H)$  dans  $\overline{A^+}$ , et donc que la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $H$  dans  $\overline{\mathfrak{a}^+}$ . En conclusion, la suite  $(k_n, H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(k', H)$  dans  $K \times \overline{\mathfrak{a}^+}$ . On a donc montré que l'application  $K \times \overline{\mathfrak{a}^+} \rightarrow X$  est propre.

Ainsi cette application, par passage au quotient, fournit un homéomorphisme dont on notera l'inverse

$$\psi : X \rightarrow (K \times \overline{\mathfrak{a}^+}) / \sim,$$

où  $(k, H) \sim (k', H')$  si  $k \exp(H) \cdot x_0 = k' \exp(H') \cdot x_0$ .

Ceci suggère d'étendre la relation d'équivalence à  $G \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}}$ , en posant, si  $H \in \mathfrak{a}^+$  et  $H' \in \mathfrak{a}^+$  :

$$(g, H) \sim (g', H') \iff g \exp(H) K \exp(-H) g^{-1} = g' \exp(H') K \exp(-H') g'^{-1}.$$

Et, si  $I$  et  $I'$  sont des parties propres de  $\Delta$  et si  $H + \mathfrak{a}_I \in \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_I$  et  $H' + \mathfrak{a}_{I'} \in \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_{I'}$  :

$$(g, H + \mathfrak{a}_I) \sim (g', H' + \mathfrak{a}_{I'}) \iff g \exp(H) D^I \exp(-H) g^{-1} = g' \exp(H') D^{I'} \exp(-H') g'^{-1}.$$

Cette définition a bien un sens car, pour toute partie propre  $I$  de  $\Delta$ , le groupe  $A_I$  normalise  $D^I$ . En effet, le groupe  $A$  normalise le groupe  $N_I$  et centralise le groupe  $M$ . De plus, le groupe  $A_I$  centralise le groupe  $G^I$ , donc en particulier centralise le groupe  $K^I$ .

Si  $I = \Delta$ , alors  $\mathfrak{a}_\Delta = \{0\}$  donc on peut identifier  $H + \mathfrak{a}_\Delta$  et  $H \in \mathfrak{a}^+$ . De plus, si l'on note  $D^\Delta = K$ , ceci permet d'écrire la relation d'équivalence sous la même forme pour tous les éléments de  $G \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}}$  :

$$(g, H + \mathfrak{a}_I) \sim (g', H' + \mathfrak{a}_{I'}) \iff g \exp(H) D^I \exp(-H) g^{-1} = g' \exp(H') D^{I'} \exp(-H') g'^{-1},$$

où  $I$  et  $I'$  sont des parties quelconques de  $\Delta$ .

**Proposition 11.1.** *L'application  $f : \overline{\mathfrak{a}^{+p}} \rightarrow \mathcal{S}(G)$  définie par  $H + \mathfrak{a}_I \mapsto \exp(H) D^I \exp(-H)$  est continue.*

**Démonstration.** Les espaces  $\overline{\mathfrak{a}^{+p}}$  et  $\mathcal{S}(G)$  étant métrisables, nous allons montrer que  $f$  est séquentiellement continue : soit  $(H_n + \mathfrak{a}_{I_n})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\overline{\mathfrak{a}^{+p}}$  convergeant vers  $H_\infty + \mathfrak{a}_J$ , où  $H_n \in \mathfrak{a}^{I_n}$  et  $H_\infty \in \mathfrak{a}^J$ . Le nombre de facettes étant fini, on peut supposer quitte à extraire que la partie  $I_n \subset \Delta$  est constante, égale à  $I$ . D'après la topologie sur  $\overline{\mathfrak{a}^{+p}}$ , nous avons nécessairement  $J \subset I$ . Or, par continuité de l'exponentielle et de l'action de  $G$  par conjugaison sur  $\mathcal{S}(G)$ , l'application  $f$  restreinte à la facette  $\mathfrak{a}^J$  est continue : ainsi, on peut supposer que  $J$  est strictement inclus dans  $I$ . Quitte à translater par  $H_\infty$ , on peut supposer que  $H_\infty + \mathfrak{a}_J = \mathfrak{a}_J$ .

Soit  $U$  un voisinage fermé de  $D^J$  dans  $\mathcal{S}(G)$  : montrons que  $\exp(H_n)D^I \exp(-H_n)$  appartient à  $U$  si  $n$  est assez grand, ce qui montrera la continuité de  $f$ . D'après la proposition 10.7, il existe des constantes  $\varepsilon > 0$  et  $N > 0$  telles que pour tout  $H$  appartenant à

$$V_{\varepsilon, N} = \{H \in \mathfrak{a}^+ : \forall \alpha \in \Delta \setminus J, \alpha(H) \geq N \text{ et } \alpha \in J, |\alpha(H)| \leq \varepsilon\},$$

nous avons  $\exp(H)K \exp(-H) \in U$ .

Puisqu'on peut choisir les  $H_n$  modulo  $\mathfrak{a}_I$ , on peut supposer que pour tout  $\alpha \in \Delta \setminus I$  nous avons  $\alpha(H_n) = 0$ . Puisque la suite  $(H_n + \mathfrak{a}_I)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{a}_J$  dans  $\overline{\mathfrak{a}^+}^p$ , on en déduit que pour tout  $\alpha \in I \setminus J$  nous avons  $\alpha(H_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , et que pour tout  $\alpha \in J$  nous avons  $\alpha(H_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi il existe un entier  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  nous avons  $H_n \in V_{\varepsilon, N}$ .

Soit  $(H'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathfrak{a}_I^+$  telle que pour tout  $\alpha \in \Delta \setminus I$  nous avons  $\alpha(H'_m) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Ainsi pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $n \geq n_0$  nous avons les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \Delta \setminus J, \quad \alpha(H_n + H'_m) &\geq \alpha(H_n) \geq N \\ \forall \alpha \in J, \quad |\alpha(H_n + H'_m)| &= |\alpha(H_n)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que  $H_n + H'_m \in V_{\varepsilon, N}$ , donc  $\exp(H_n + H'_m)K \exp(-H_n - H'_m) \in U$ . Or lorsque l'on fait tendre  $m$  vers  $+\infty$ , on en déduit d'après la proposition 10.7 que, pour tout  $n \geq n_0$  nous avons

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \exp(H_n + H'_m)K \exp(-H_n - H'_m) = \exp(H_n)D^I \exp(-H_n) \in U.$$

Ceci montre la continuité de  $f$ . □

Remarquons que dans [GJT98, Remark 7.34, p. 115], la continuité de l'action de  $G$  sur la compactification polyédrale est démontrée via la compactification de Martin.

Définissons la *compactification polyédrale* de  $X$  par

$$\overline{X}^p = (G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p) / \sim,$$

où l'espace  $\overline{X}^p$  est muni de la topologie quotient, et où l'inclusion  $X \rightarrow \overline{X}^p$  est la composition de l'homéomorphisme  $\psi : X \rightarrow (K \times \overline{\mathfrak{a}^+}) / \sim$  et de l'inclusion  $(K \times \overline{\mathfrak{a}^+}) / \sim \rightarrow (G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p) / \sim$ .

L'espace  $\overline{X}^p$  est naturellement muni d'une  $G$ -action à gauche, quotient de l'action de  $G$  à gauche sur le premier facteur de  $G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$ .

Si  $G^0$  désigne la composante neutre du groupe des isométries de  $X$ , alors le morphisme  $\pi : G \rightarrow G^0$  fourni par l'action de  $G$  sur  $X$  est, par hypothèse, surjectif et de noyau fini. Les compactifications polyédrales de  $X$  obtenues pour  $G$  et  $G^0$  sont naturellement isomorphes, par l'homéomorphisme  $\pi$ -équivariant

$$\begin{aligned} (G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p) / \sim &\rightarrow (G^0 \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p) / \sim \\ [(g, H)] &\mapsto [(\pi(g), H)]. \end{aligned}$$

**Proposition 11.2.** *L'espace  $\overline{X}^p$  est une  $G$ -compactification de  $X$ .*

**Démonstration.** Montrons tout d'abord que l'espace  $\overline{X}^p$  est séparé. Puisque l'application  $f$  est continue, l'application  $G \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}} \rightarrow \mathcal{S}(G)$  qui à  $(g, H + \mathfrak{a}_I)$  associe  $g \exp(H) D^I \exp(-H) g^{-1}$  est continue, et passe au quotient en une application continue injective de  $\overline{X}^p$  dans l'espace séparé  $\mathcal{S}(G)$ . Ceci implique que l'espace  $\overline{X}^p$  est séparé.

Montrons que l'espace  $\overline{X}^p$  est compact. La projection  $K \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}} \rightarrow \overline{X}^p$  est surjective (tout élément de  $G \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}}$  est équivalent à un élément de  $K \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}}$ ) et continue (par passage au quotient de l'inclusion  $K \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}} \rightarrow G \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}}$ ), or l'espace  $\overline{X}^p$  est séparé et l'espace  $K \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}}$  est compact, on conclut donc que  $\overline{X}^p$  est compact.

Montrons que l'espace  $X$ , identifié par l'homéomorphisme  $\psi : X \rightarrow (K \times \overline{\mathfrak{a}^+}) / \sim$  à un sous-espace de  $\overline{X}^p$ , est dense dans  $\overline{X}^p$ . Soit  $(g, H + \mathfrak{a}_I)$  un point de  $G \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}}$  tel que son image  $x$  dans  $\overline{X}^p$  n'appartienne pas à  $\psi(X)$ , c'est-à-dire tel que  $I$  soit une partie propre de  $\Delta$ . Tout voisinage de  $(g, H + \mathfrak{a}_I)$  dans  $G \times \overline{\mathfrak{a}^{+p}}$  intersecte  $G \times \mathfrak{a}^+$ , car par définition  $\overline{\mathfrak{a}^{+p}}$  est l'adhérence de  $\mathfrak{a}^+$  dans  $\overline{\mathfrak{a}^p}$ . Ainsi, tout voisinage de  $x$  dans  $\overline{X}^p$  intersecte  $\psi(X)$ . Par conséquent, l'espace  $\overline{X}^p$  est bien une compactification de l'espace symétrique  $X$ .

L'homéomorphisme  $X \rightarrow G \times \overline{\mathfrak{a}^+} / \sim$  est  $G$ -équivariant, donc l'espace  $\overline{X}^p$  est une  $G$ -compactification de  $X$ .  $\square$

**Proposition 11.3.** *Les  $G$ -compactifications de Chabauty  $\overline{X}^S$  et polyédrale  $\overline{X}^p$  de l'espace symétrique de type non compact  $X$  sont  $G$ -isomorphes, via le  $G$ -homéomorphisme  $\varphi : \overline{X}^p \rightarrow \overline{X}^S$  qui à la classe de  $(g, H + \mathfrak{a}_I)$  associe  $g \exp(H) D^I \exp(-H) g^{-1}$ .*

**Démonstration.** D'après la définition de la relation d'équivalence  $\sim$ , l'application  $\varphi$  est bien définie et injective. D'après le début de la preuve de la proposition 11.2, l'application  $\varphi$  est continue. D'après le théorème 10.12, l'application  $\varphi$  est surjective. Or l'espace  $\overline{X}^p$  est compact et  $\overline{X}^S$  est compact donc séparé : ainsi  $\varphi$  est un homéomorphisme,  $G$ -équivariant.  $\square$

**Proposition 11.4.** *La compactification polyédrale  $\overline{X}^p$  est  $G$ -isomorphe à la compactification cellulaire duale  $X \cup \Delta^*(X)$ , telle qu'elle est définie dans [GJT98, Definition 3.40, p. 45].*

**Démonstration.** Nous allons vérifier que la compactification polyédrale  $\overline{X}^p$  satisfait les hypothèses du théorème [GJT98, Theorem 3.38, p. 43], qui caractérise la compactification cellulaire duale.

Soit  $(k_n, H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite fondamentale au sens de [GJT98, Definition 3.35, p. 41], c'est-à-dire qu'il existe une partie propre  $I$  de  $\Delta$  telle que la suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $K$  converge vers  $k$ , et si  $H_n = H_{n,I} + H_n^I$  est la décomposition de  $H_n \in \mathfrak{a}$  selon  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I \oplus \mathfrak{a}^I$ , alors la suite  $(H_{n,I})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  dans  $\mathfrak{a}_I^+$  et la suite  $(H_n^I)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $H \in \overline{\mathfrak{a}^{I,+}}$ . Alors, d'après les propositions 10.7 et 11.3, la suite  $(k_n \exp H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, dans la compactification polyédrale, vers la classe d'équivalence de  $(k, H + \mathfrak{a}_I)$ .

Soient  $(k_n, H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(k'_n, H'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites fondamentales. Leurs limites formelles au sens de [GJT98, Definition 3.35, p. 41] sont  $(\text{Ad } k(\mathfrak{a}_I^+), k \exp(H) \cdot x_0)$  et

( $\text{Ad } k'(\mathfrak{a}_{I'}^+), k' \exp(H') \cdot x_0$ ) respectivement. Leurs limites dans la compactification polyédrale sont les classes d'équivalence de  $(k, H + \mathfrak{a}_I)$  et  $(k', H' + \mathfrak{a}_{I'})$  respectivement. Notons  $a = \exp(H)$  et  $a' = \exp(H')$ .

Supposons que les limites formelles soient égales. Alors, d'après la proposition [GJT98, Proposition 3.4, p. 25], nous avons  $I = I'$  et  $k^{-1}k$  appartient au normalisateur  $N_K(\mathfrak{a}_I^+) = K^I M$  de  $\mathfrak{a}_I^+$  dans  $K$ . De plus  $ka \cdot x_0 = k'a' \cdot x_0 \in M$ , donc  $a^{-1}k^{-1}k'a' \in K$ . Or  $a$  et  $a'$  appartiennent à  $\overline{A^+}$ , donc par unicité de la décomposition de Cartan  $G = K\overline{A^+}K$ , nous avons  $a = a'$ . Par ailleurs  $a^{-1}k^{-1}k'a \in A^I K^I M A^I \cap K \subset G^I M \cap K = K^I M$ . Par conséquent  $k^{-1}k' \in aK^I M a^{-1} \cap K^I M$ . Donc, d'après la réciproque du théorème 10.13, on en déduit que

$$kaD^I a^{-1}k^{-1} = k'a'D^{I'} a'^{-1}k'^{-1}.$$

Donc les limites dans la compactification polyédrale des classes d'équivalence de  $(k, H + \mathfrak{a}_I)$  et  $(k', H' + \mathfrak{a}_{I'})$  sont égales.

Réciproquement, supposons que les limites dans la compactification polyédrale soient égales. Alors, d'après le théorème 10.13, on en déduit que  $I = I'$ ,  $a = a'$  et  $k^{-1}k' \in (K^I \cap aK^I a^{-1})M$ . Alors  $k^{-1}k'$  appartient au stabilisateur  $aKa^{-1}$  du point  $a \cdot x_0$ , donc

$$k' \exp(H') \cdot x_0 = k'a \cdot x_0 = ka \cdot x_0 = k \exp(H) \cdot x_0.$$

De plus  $k^{-1}k' \in K^I M = Z_K(\mathfrak{a}_I^+)$ , donc d'après la proposition [GJT98, Proposition 3.4, p. 25], nous avons  $\text{Ad } k(\mathfrak{a}_I^+) = \text{Ad } k'(\mathfrak{a}_{I'}^+)$ . Ainsi, les limites formelles sont égales.

Ainsi, la compactification polyédrale  $\overline{X^p}$  satisfait les hypothèses du théorème [GJT98, Theorem 3.38, p. 43], donc est isomorphe à la compactification cellulaire duale. Ces compactifications étant des  $G$ -compactifications de  $X$  (voir [GJT98, Theorem 3.43, p. 46]), ce sont des compactifications  $G$ -isomorphes de  $X$ .  $\square$

**Théorème 11.5.** *Les compactifications de Chabauty, polyédrale, cellulaire duale ([GJT98, Definition 3.40, p. 45]), de Satake-Furstenberg maximale ([GJT98, Proposition 4.53, p. 73]) et de Martin ([GJT98, Chapter VII, pp. 103–115]) sont  $G$ -isomorphes.*

**Démonstration.** D'après les résultats [GJT98, Theorem 4.43, p.66], [GJT98, Proposition 4.53, p. 73] et [GJT98, Theorem 7.33, p. 115], les compactifications cellulaire duale, de Satake-Furstenberg maximale et de Martin sont  $G$ -isomorphes. D'après les propositions 11.3 et 11.4, celles-ci sont également  $G$ -isomorphes aux compactifications de Chabauty et polyédrale.  $\square$

---

## Quatrième partie

# Compactifications de l'espace des plats maximaux d'espaces symétriques et d'immeubles

## Sommaire

---

<b>12</b>	<b>Introduction</b>	<b>70</b>
<b>13</b>	<b>Compactification de Chabauty de l'espace des plats maximaux d'un espace symétrique de type non compact</b>	<b>72</b>
13.1	Définition de la compactification . . . . .	72
13.2	Le cas de rang un . . . . .	73
13.3	Le cas de $SL_3(\mathbb{R})$ . . . . .	75
13.3.1	Les sous-algèbres de Lie abéliennes de $\mathfrak{b}$ de dimension 2 . . . . .	75
13.3.2	La topologie de l'espace $Y$ des sous-algèbres de Lie abéliennes de $\mathfrak{b}$ de dimension 2 . . . . .	81
13.3.3	Compactification de $G/T'$ . . . . .	86
13.4	Le cas de $SL_4(\mathbb{R})$ . . . . .	91
13.5	Le cas d'autres groupes . . . . .	98
13.6	Comparaison avec le cas complexe étudié par Iliev, Manivel et Le Barbier Grünewald . . . . .	99
<b>14</b>	<b>Compactification géométrique de l'espace des plats maximaux d'espaces symétriques et d'immeubles</b>	<b>101</b>
14.1	Immeubles . . . . .	101
14.2	Distances angulaires dans un espace $CAT(0)$ . . . . .	104
14.3	Limites de fermés dans un espace $CAT(0)$ . . . . .	106
14.4	Compactification géométrique de l'espace des appartements marqués d'un immeuble sphérique topologique . . . . .	109
14.4.1	Définition de la compactification . . . . .	109
14.4.2	Le cas du type $A_1^m$ . . . . .	110
14.4.3	Le cas de l'immeuble sphérique de $SL_3$ . . . . .	110
14.4.4	Le cas d'autres immeubles . . . . .	115
14.5	Compactification géométrique de l'espace des plats maximaux des espaces symétriques de type non compact et des immeubles euclidiens . . . . .	116

---

## 12 Introduction

Soient  $X$  un espace symétrique de type non compact,  $G$  un groupe de Lie réel semi-simple de centre fini ayant un nombre fini de composantes connexes, agissant par isométries sur  $X$  et se surjectant sur la composante neutre  $\text{Isom}_0(X)$  du groupe des isométries de  $X$  et soit  $\mathcal{S}(G)$  l'espace des sous-groupes fermés de  $G$ , muni de la topologie de Chabauty.

La compactification de Chabauty de  $X$  (voir la partie III) est définie en associant à chaque point de  $X$  son stabilisateur dans  $G$  dans l'espace  $\mathcal{S}(G)$ . Dans une première partie, nous définissons de manière analogue la compactification de Chabauty de l'espace  $\text{Plats}(X)$  des plats maximaux de  $X$  en associant à chaque plat maximal son stabilisateur dans  $G$ . Appelons l'adhérence  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'image de ce plongement la *compactification de Chabauty* de l'espace  $\text{Plats}(X)$ . Nous verrons que cette compactification ne dépend pas du groupe  $G$  vérifiant les conditions ci-dessus, à homéomorphisme  $\text{Isom}_0(X)$ -équivariant près. Nous allons décrire explicitement cette compactification dans le cas facile  $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})^m$ , et dans le cas  $G = \text{SL}_3(\mathbb{R})$ .

**Théorème 12.1.** *La compactification de Chabauty  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'espace des plats maximaux  $\text{Plats}(X)$  de l'espace symétrique  $X$  de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(\text{SL}_3(\mathbb{R}))$  des sous-groupes fermés connexes abéliens maximaux inclus dans un sous-groupe de Borel. (Voir le théorème 13.17.)*

Nous explicitons tout d'abord l'espace des sous-algèbres abéliennes maximales de l'algèbre de Lie du sous-groupe de Borel standard  $B$ , nous décrivons les orbites dans cet espace sous l'action de la composante neutre  $B_0$  de  $B$  et nous montrons qu'elles forment les cellules d'une structure de  $CW$ -complexe (voir la proposition 13.15), qui permet en particulier d'en calculer le groupe fondamental (voir la proposition 13.16).

Pour étudier la compactification de Chabauty  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'espace des plats maximaux de l'espace symétrique  $X$  de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ , nous considérons ensuite l'action de  $G$  car toute  $G$ -orbite dans  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  rencontre le sous-espace des sous-algèbres abéliennes maximales de l'algèbre de Lie du sous-groupe de Borel standard  $B$ . L'espace  $\text{Plats}(X)$  n'est pas simplement connexe (son groupe fondamental est de cardinal 48, voir le lemme 13.23), le résultat suivant est donc surprenant.

**Théorème 12.2.** *La compactification de Chabauty  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'espace des plats maximaux  $\text{Plats}(X)$  de l'espace symétrique  $X$  de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$  est simplement connexe. (Voir le théorème 13.22.)*

Pour le groupe  $\text{SL}_4(\mathbb{R})$ , nous avons une description des groupes apparaissant dans la compactification de Chabauty, analogue au cas de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ .

**Théorème 12.3.** *Soit  $G$  un produit de copies de  $\text{SL}_4(\mathbb{R})$ , de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$  et de groupes de Lie de rang réel un, soit  $r$  le rang réel de  $G$ , et  $X$  l'espace symétrique de type non compact de  $G$ . La compactification de Chabauty  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'espace des plats maximaux  $\text{Plats}(X)$  de  $X$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(G)$  des sous-groupes fermés connexes abéliens de dimension  $r$  inclus dans un sous-groupe de Borel. (Voir le théorème 13.27.)*

Par contre, ce résultat est incorrect pour  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$  si  $m \geq 10$  (voir le lemme 13.28).

La description de la compactification de Chabauty de l'espace des plats maximaux de l'espace symétrique de  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$  étant délicate à généraliser en dimension supérieure, nous proposons donc une autre approche. Dans une seconde partie, nous définissons la compactification géométrique de l'espace  $\mathrm{Plats}(X)$  des plats maximaux d'un espace  $X$ , qui est soit un espace symétrique de type non compact soit un immeuble euclidien localement fini fortement transitif. Notons  $G$  un groupe agissant par isométries sur  $X$ . Considérons le plongement  $G$ -équivariant suivant :

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Plats}(X) &\rightarrow \mathcal{F}(\overline{X}^g) \\ P \subset X &\mapsto \overline{P} \subset \overline{X}^g, \end{aligned}$$

et appelons son adhérence la *compactification géométrique*  $\overline{\mathrm{Plats}(X)}^g$  de  $\mathrm{Plats}(X)$ .

Appelons  $\mathcal{I}$  l'immeuble sphérique topologique à l'infini de  $X$ , et notons  $d$  sa dimension. L'espace des plats maximaux de  $X$  est naturellement  $G$ -isomorphe à l'espace  $\mathrm{App}(\mathcal{I})$  des appartements de  $\mathcal{I}$ . Considérons l'espace de toutes les images par des morphismes de complexes polyédraux préservant le type de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$ , muni de la topologie induite par la topologie de Chabauty sur l'espace  $\mathcal{F}(\mathcal{I}^{(d)})$  des fermés de l'espace compact des chambres de Weyl de  $\mathcal{I}$ . Appelons *compactification géométrique* de  $\mathrm{App}(\mathcal{I})$  son adhérence  $\overline{\mathrm{App}(\mathcal{I})}^g$  dans ce sous-espace compact de  $\mathcal{F}(\mathcal{I}^{(d)})$ .

**Théorème 12.4.** *La compactification géométrique  $\overline{\mathrm{Plats}(X)}^g$  de l'espace des plats de  $X$  est naturellement  $G$ -isomorphe à la compactification géométrique  $\overline{\mathrm{App}(\mathcal{I})}^g$  de l'espace des appartements de  $\mathcal{I}$ . (Voir le théorème 14.8.)*

Nous décrivons ensuite explicitement cette compactification dans le cas du groupe  $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ , où  $\mathbb{K}$  est un corps local :

**Théorème 12.5.** *Pour  $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ , la compactification géométrique  $\overline{\mathrm{App}(\mathcal{I})}^g$  de l'espace des appartements de  $\mathcal{I}$  est l'ensemble de toutes les images par des morphismes de complexes polyédraux préservant le type de l'appartement  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$ . C'est une variété projective irréductible. (Voir le théorème 14.7.)*

Ce théorème est également vrai pour tout immeuble sphérique topologique de type  $A_1^m$  (voir le théorème 14.6), mais est incorrect pour l'immeuble sphérique topologique de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  dès que  $m \geq 4$  (voir la partie 14.4.4).

Nous en déduisons l'existence de dégénérescences très particulières de plats et de géodésiques dans l'espace symétrique de type non compact ou dans l'immeuble euclidien  $X$  de  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ , dont en particulier le corollaire suivant.

**Corollaire 12.6.** *Il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de géodésiques de  $X$  telle que la suite  $(\overline{\gamma_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un fermé  $F$  dans l'espace  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$  des fermés de  $\overline{X}^g$ , qui ne soit inclus dans aucun plat à l'infini de  $X$ . (Voir le corollaire 14.11.)*

## 13 Compactification de Chabauty de l'espace des plats maximaux d'un espace symétrique de type non compact

### 13.1 Définition de la compactification

Soient  $X$  un espace symétrique de type non compact,  $G$  un groupe de Lie réel semi-simple de centre fini ayant un nombre fini de composantes connexes, agissant par isométries sur  $X$  et se surjectant sur la composante neutre  $\text{Isom}_0(X)$  du groupe des isométries de  $X$ . Soit  $P_0$  un plat maximal de  $X$ , et  $T'$  le stabilisateur de  $P_0$  dans  $G$  : c'est le normalisateur d'un sous-groupe de Cartan  $A$  de  $G$ .

Notons  $\text{Plats}(X)$  l'espace des plats maximaux de  $X$ , muni de la topologie induite par la topologie de Chabauty sur  $\mathcal{F}(X)$ . Le groupe  $G$  agit transitivement sur l'espace  $\text{Plats}(X)$ , donc l'espace  $\text{Plats}(X)$  s'identifie naturellement à l'espace homogène  $G/T'$ .

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Theta : \text{Plats}(X) &\rightarrow \mathcal{S}(G) \\ P &\mapsto \{g \in G : g(P) = P\}_0. \end{aligned}$$

**Théorème 13.1.** *L'application  $\Theta$  est un plongement  $G$ -équivariant.*

On appelle *compactification de Chabauty* la  $G$ -compactification  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}} = \overline{\Theta(\text{Plats}(X))}$  de  $\text{Plats}(X)$  ainsi définie.

**Démonstration.** Notons  $A$  la composante neutre du tore  $T$ , alors le normalisateur de  $A$  dans  $G$  est égal à  $T'$ . Le théorème est une conséquence du fait que l'application

$$\begin{aligned} \Theta : G/T' &\rightarrow \mathcal{S}(G) \\ gT' &\mapsto gAg^{-1} \end{aligned}$$

est un plongement, ce qui est assuré par la proposition 1.17 car  $A$  est connexe. □

Afin de pouvoir décrire aisément cette compactification, nous allons montrer qu'on peut aussi la décrire via l'espace des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  (qui sont bien des sous-groupes fermés de  $(\mathfrak{g}, +)$ ). Appelons  $\mathfrak{a}$  l'algèbre de Lie de  $A$ , et considérons le plongement

$$\begin{aligned} \theta : G/T' &\rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \\ gT' &\mapsto \text{Ad } g(\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

On pourrait ainsi définir une autre compactification de Chabauty de  $G/T'$ , en considérant l'adhérence de ce plongement. Considérons l'application  $\text{Lie} : \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  qui à un sous-groupe fermé de  $G$  associe son algèbre de Lie.

**Théorème 13.2.** *L'application  $\text{Lie}$  est un homéomorphisme  $G$ -équivariant de  $\overline{\Theta(G/T')} \subset \mathcal{S}(G)$  sur  $\overline{\theta(G/T')} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ .*



**Démonstration.** Posons  $\mathcal{E} = \{Z \in \mathfrak{g} : \text{Sp}(\text{ad } Z) \subset \mathbb{R}\}$ , alors d'après [MT86, Théorème 3.8.4, p. 83] (pour  $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$ , mais  $G$  est un groupe linéaire), l'exponentielle de  $G$  est un difféomorphisme de  $\mathcal{E}$  sur son image. Ainsi, l'application Lie est un homéomorphisme du sous-espace des sous-groupes fermés de  $G$  inclus dans  $\exp(\mathcal{E})$  sur le sous-espace des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  incluses dans  $\mathcal{E}$ . Or toute sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  est incluse dans  $\mathcal{E}$ , qui est fermé dans  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ , donc chaque sous-algèbre de Lie appartenant à  $\overline{\theta(G/T)}$  est incluse dans  $\mathcal{E}$ . Ainsi l'application Lie est un homéomorphisme  $G$ -équivariant de  $\overline{\Theta(G/N_G(T))}$  sur  $\overline{\theta(G/N_G(T))}$ .  $\square$

Ainsi, étudier la compactification de Chabauty de l'espace des plats maximaux de  $X$  équivaut à étudier les limites de sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Ces limites sont des sous-algèbres de Lie abéliennes de  $\mathfrak{g}$ , de dimension  $r$ .

Notons  $G^0 = \text{Isom}_0(X)$  la composante neutre du groupe des isométries de  $X$ . Nous allons montrer que la compactification de Chabauty de l'espace des plats maximaux de  $X$  ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix du groupe de Lie connexe  $G$  agissant continûment isométriquement sur  $X$ , et se surjectant avec noyau fini sur  $G^0$ .

Notons  $\pi : G \rightarrow G^0$  la projection définie par l'action de  $G$  sur  $X$ . Par hypothèse,  $\pi$  est un morphisme de groupes de Lie surjectif de noyau fini. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Theta^0 : \text{Plats}(X) &\rightarrow \mathcal{S}(G^0) \\ P &\mapsto \{g \in G^0 : g(P) = P\}. \end{aligned}$$

Les deux plongements  $\Theta : \text{Plats}(X) \rightarrow \mathcal{S}(G)$  et  $\Theta^0 : \text{Plats}(X) \rightarrow \mathcal{S}(G^0)$  définissent deux compactifications de Chabauty  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  et  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S},0}$ . D'après la proposition 1.5, la projection  $\pi : G \rightarrow G^0$  induit un plongement  $\mathcal{S}^*(\pi) : \mathcal{S}(G^0) \rightarrow \mathcal{S}(G)$ .

**Proposition 13.3.** *L'application  $\mathcal{S}^*(\pi) : \mathcal{S}(G^0) \rightarrow \mathcal{S}(G)$  est un homéomorphisme de  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S},0}$  sur  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  qui entrelace  $\pi$ , i.e. pour tous  $g \in G$  et  $H \in \overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S},0}$  nous avons  $\mathcal{S}^*(\pi)(\pi(g) \cdot H) = g \cdot \mathcal{S}^*(\pi)(H)$ .*

**Démonstration.** On constate que  $\Theta = \mathcal{S}^*(\pi) \circ \Theta^0$ , donc ceci montre que  $\mathcal{S}^*(\pi) \left( \overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S},0} \right) = \overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$ . Or l'application  $\mathcal{S}^*(\pi)$  est un plongement, donc c'est un homéomorphisme de  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S},0}$  sur  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$ .

De plus, pour tous  $g \in G$  et  $H \in \overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S},0} \subset \mathcal{S}(G^0)$  nous avons  $\mathcal{S}^*(\pi)(\pi(g) \cdot H) = \pi^{-1}(\pi(g) \cdot H) = g \cdot \pi^{-1}(H) = g \cdot \mathcal{S}^*(\pi)(H)$ .  $\square$

## 13.2 Le cas de rang un

Supposons dans cette partie tout d'abord que  $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$  et que  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Dans ce cas, prenons pour  $A$  le sous-groupe diagonal de  $G$  avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et pour  $N$  le sous-groupe triangulaire supérieur avec des 1 sur la diagonale.

**Proposition 13.4.** *Soit  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de géodésiques de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  partant à l'infini, et supposons quitte à extraire que les extrémités  $(\gamma_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\gamma_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  aient une limite commune  $\xi$  dans  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Alors la suite de sous-groupes de Cartan  $(\text{Stab}(\gamma_n)_0)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le radical unipotent du fixateur de  $\xi$  dans  $G$ .*

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , considérons  $g_n \in G$  tel que  $\text{Stab}(\gamma_n)_0 = g_n A g_n^{-1}$ . D'après la décomposition d'Iwasawa  $G = KAN = KNA$ , on peut supposer que  $g_n \in N$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il est alors immédiat que la suite  $(g_n A g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $N$  dans  $\mathcal{S}(G)$ . Et le sous-groupe  $N$  est le radical unipotent du fixateur  $AN$  de  $\xi$  dans  $G$ .  $\square$

**Proposition 13.5.** *La compactification de Chabauty de l'espace  $\text{Plats}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$  des géodésiques de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  est l'espace des sous-groupes fermés de  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  abéliens connexes maximaux inclus dans un sous-groupe de Borel. Elle est naturellement  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -isomorphe au quotient du tore  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \times \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  par l'involution diagonale.*

**Démonstration.** Notons  $\sigma$  l'involution diagonale de  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \times \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Appelons  $\xi^+, \xi^- \in \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  les deux extrémités de la géodésique translatée par  $A$ , de sorte que  $\xi^+$  soit le point fixé par  $N$ .

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \overline{\text{Plats}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)}^{\mathcal{S}} &\rightarrow (\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \times \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2) / \sigma \\ g A g^{-1} &\mapsto [g \cdot \xi^+, g \cdot \xi^-] \\ g N g^{-1} &\mapsto [g \cdot \xi^+, g \cdot \xi^+], \end{aligned}$$

d'après la proposition précédente, c'est un homéomorphisme  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -équivariant pour l'action par conjugaison sur  $\mathcal{S}(G)$ , et pour l'action quotient de l'action diagonale sur  $(\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \times \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2) / \sigma$ .  $\square$

On déduit du cas de  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  une description du cas de rang un.

**Proposition 13.6.** *Soit  $G$  un groupe de Lie réel semi-simple de centre fini ayant un nombre fini de composantes connexes, sans facteur compact, de rang réel un, et soit  $X$  son espace symétrique. La compactification de Chabauty de l'espace  $\text{Plats}(X)$  des géodésiques de  $X$  est l'espace des sous-groupes fermés de  $G$  abéliens connexes de dimension 1 inclus dans un sous-groupe de Borel.*

**Démonstration.** Puisque tout sous-groupe compact maximal de  $G$  agit transitivement par conjugaison sur les sous-groupes de Borel de  $G$ , nous savons que la compactification de Chabauty de l'espace  $\text{Plats}(X)$  est incluse dans l'espace des sous-groupes fermés de  $G$  abéliens connexes de dimension 1 inclus dans un sous-groupe de Borel.

Réciproquement, considérons un sous-groupe fermé  $H$  abélien connexe de dimension 1 inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ . Notons  $A$  le sous-groupe de Cartan de  $G$  inclus dans  $B$ . Si  $H$  n'est pas un sous-groupe de Cartan, alors  $H$  est inclus dans le radical unipotent de  $B$ , est normalisé par  $A$ , et le sous-groupe de Lie connexe  $L = AH$  de  $G$  engendré par  $A$  et  $H$  est isomorphe à la composante neutre du sous-groupe de Borel de  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ . Alors d'après la proposition 13.4, le sous-groupe  $H$  est limite de conjugués de  $A$  (par des éléments de  $L$ ).  $\square$

### 13.3 Le cas de $SL_3(\mathbb{R})$

Posons  $G = SL_3(\mathbb{R})$ ,  $K = SO_3(\mathbb{R})$  et  $A$  le sous-groupe de  $G$  des matrices diagonales à coefficients diagonaux strictement positifs. Soit  $M$  le centralisateur de  $A$  dans  $K$ , c'est-à-dire le sous-groupe fini de  $G$  constitué des matrices diagonales à coefficients diagonaux égaux à  $\pm 1$ . Et soit  $M'$  le normalisateur de  $A$  dans  $K$ , c'est-à-dire le sous-groupe fini de  $G$  constitué des matrices de permutation de coefficients égaux à  $\pm 1$ . Notons  $T = MA$  le centralisateur de  $A$  dans  $G$ , c'est un tore déployé maximal, et notons  $T' = M'A$  le normalisateur de  $A$  (et de  $T$ ) dans  $G$ .

Notons  $N$  le sous-groupe de  $G$  unipotent supérieur,  $B = MAN$  le sous-groupe de Borel standard, c'est-à-dire le sous-groupe triangulaire supérieur, et  $B_0 = AN$  sa composante neutre.

Notons de plus  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{k}$ ,  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{b}$  les algèbres de Lie de  $G$ ,  $K$ ,  $A$ ,  $N$  et  $B$  respectivement.

Notons  $X$  l'espace symétrique de  $G$ . Pour étudier la compactification de Chabauty de l'espace  $\text{Plats}(X) = G/T'$  des plats de  $X$ , d'après le théorème 13.2, nous allons étudier les limites de sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . D'après la décomposition d'Iwasawa  $G = KAN$ , il suffit d'étudier les limites de sous-algèbres de Cartan incluses dans  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . Nous allons déterminer toutes les sous-algèbres abéliennes de dimension 2 de  $\mathfrak{b}$ .

#### 13.3.1 Les sous-algèbres de Lie abéliennes de $\mathfrak{b}$ de dimension 2

Soit  $Y$  le sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$  constitué des sous-algèbres de Lie abéliennes de dimension 2 de  $\mathfrak{b}$ . Le groupe  $B_0$  agit sur  $Y$  par l'action adjointe. Nous allons montrer que le sous-espace des sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$  incluses dans  $\mathfrak{b}$  est dense dans  $Y$ , puis nous étudierons la manière dont les orbites de  $B_0$  forment une structure de  $CW$ -complexe sur  $Y$ .

Notons  $p_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{a}$  la projection sur  $\mathfrak{a}$  parallèlement à  $\mathfrak{n}$ .

Notons  $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $H \mapsto H_{1,1} - H_{2,2}$  et  $\beta : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $H \mapsto H_{2,2} - H_{3,3}$  : ces racines forment une base du système de racines associé à la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{a}$ . Les racines positives correspondantes sont  $\Sigma^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ . Soit  $(H_{\alpha}, H_{\beta})$  la base de  $\mathfrak{a}$  duale de  $(\alpha, \beta)$ . Leurs matrices sont  $H_{\alpha} = \text{Diag}(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$  et  $H_{\beta} = \text{Diag}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$ .

Pour toute racine  $\gamma \in \Sigma$ , notons de plus  $\mathfrak{a}_{\gamma} = \text{Ker } \gamma$  et  $A_{\gamma} = \exp \mathfrak{a}_{\gamma}$ . Notons de plus

$$A_{\alpha=\beta} = \exp \mathbb{R}(H_{\alpha} + H_{\beta}).$$

Notons les vecteurs

$$U_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons les espaces de racines  $\mathfrak{n}^{\alpha} = \mathbb{R}U_{\alpha}$ ,  $\mathfrak{n}^{\beta} = \mathbb{R}U_{\beta}$  et  $\mathfrak{n}^{\alpha+\beta} = \mathbb{R}U_{\alpha+\beta}$ . Et, pour toute racine  $\gamma \in \Sigma$ , notons  $N^{\gamma} = \exp \mathfrak{n}^{\gamma}$ . Enfin, notons les deux sous-groupes paraboliques

maximaux contenant  $B$

$$P^\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \text{ et } P^\beta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour tout vecteur  $X \in \mathfrak{b}$ , nous noterons  $X = X_{\mathfrak{a}} + x_\alpha U_\alpha + x_\beta U_\beta + x_{\alpha+\beta} U_{\alpha+\beta}$  la décomposition en espaces de racines de  $X$  dans la décomposition  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}^\alpha + \mathfrak{n}^\beta + \mathfrak{n}^{\alpha+\beta}$ .

De plus, pour tout  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , notons

$$\mathfrak{l}_{[x:y]} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & tx & s \\ 0 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

On peut remarquer que les algèbres de Lie des radicaux unipotents de  $P^\alpha$  et  $P^\beta$  sont  $\mathfrak{l}_{[0:1]}$  et  $\mathfrak{l}_{[1:0]}$ , ce sont des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{b}$  abéliennes de dimension 2.

Pour toute racine  $\gamma \in \Sigma^+$ , notons de plus  $\mathfrak{l}_\gamma = \mathfrak{a}_\gamma \oplus \mathfrak{n}^\gamma$ . On vérifie facilement que les sous-algèbres de Lie  $\mathfrak{l}_{[x:y]}$ , pour  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , et  $\mathfrak{l}_\gamma$ , pour  $\gamma \in \Sigma^+$ , appartiennent à  $Y$ .

**Proposition 13.7.** *Soit  $\mathfrak{l} \in Y$ . Alors il y a trois possibilités (mutuellement exclusives) :*

1. *soit il existe un unique  $b \in N$  tel que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a})$  ;*
2. *soit il existe un unique  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[x:y]}$  ;*
3. *soit il existe un unique  $\gamma \in \Sigma^+$  et un unique  $b \in N/N^\gamma$  tels que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{l}_\gamma)$ .*

**Démonstration.** Distinguons selon la dimension de  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$ .

1. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{a}$ , considérons une base de  $\mathfrak{l}$  constituée de deux éléments diagonalisables. Alors  $\mathfrak{l}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , il existe donc  $b \in G$  tel que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a})$ . Puisque  $\mathfrak{b}$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Borel contenant  $\mathfrak{l}$ , on peut supposer de plus que  $\text{Ad } b(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ , c'est-à-dire que  $b \in N_G(\mathfrak{b}) = B = TN$ . Puisque  $T'$  est le normalisateur de  $A$ , on peut supposer que  $b \in N$ . Et cet élément est unique car  $N \cap N_G(A) = \{e\}$ .
2. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \{0\}$ , alors  $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{n}$ . Puisque  $\mathfrak{l}$  est abélienne, la projection de  $\mathfrak{l}$  sur  $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_\beta$  n'est pas de dimension 2, donc est de dimension 1. Puisque  $\mathfrak{l}$  ne se surjecte pas sur  $\mathfrak{n}^\alpha + \mathfrak{n}^\beta$ , cela implique que le noyau de la projection  $\mathfrak{n}^{\alpha+\beta}$ , qui est de dimension 1, est inclus dans  $\mathfrak{l}$ . Il existe donc un unique  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tel que  $xU_\alpha + yU_\beta \in \mathfrak{l}$ . Ainsi  $\mathfrak{l} = \{xtU_\alpha + ytU_\beta + zU_{\alpha+\beta} : t, z \in \mathbb{R}\} = \mathfrak{l}_{[x:y]}$ .
3. Sinon  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$  est de dimension 1 : soit alors  $X \in \mathfrak{l}$  tel que  $p_{\mathfrak{a}}(X) = X_{\mathfrak{a}} \neq 0$ . Soit  $Y \in \mathfrak{n}$  tel que  $(X, Y)$  soit une base de  $\mathfrak{l}$ . Alors, puisque  $\mathfrak{l}$  est abélienne, la coordonnée de  $[X, Y] = 0$  selon  $\mathfrak{n}^\alpha$  est  $\alpha(X_{\mathfrak{a}})Y_\alpha = 0$  et celle selon  $\mathfrak{n}^\beta$  est  $\beta(X_{\mathfrak{a}})Y_\beta = 0$ . On se trouve alors dans l'un des trois cas suivants :
  - (a) Soit  $X_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}_\alpha$ . Dans ce cas on peut supposer que  $\beta(X_{\mathfrak{a}}) = 1$  (c'est-à-dire  $X_{\mathfrak{a}} = H_\beta$ ), et on a donc  $Y_\beta = 0$ . Par ailleurs la coordonnée de  $[X, Y] = 0$  selon  $\mathfrak{n}^{\alpha+\beta}$  est  $y_{\alpha+\beta} - x_\beta y_\alpha = 0$ . Puisque  $Y \neq 0$ , on doit donc avoir  $y_\alpha \neq 0$  : on peut supposer que  $y_\alpha = 1$ . Quitte à ajouter à  $X$  un multiple de  $Y$ , supposons que  $x_\alpha = 0$ . Alors l'élément

$$b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{\alpha+\beta} \\ 0 & 1 & x_\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$$

est tel que  $\text{Ad } b^{-1}(X) = H_\beta \in \text{Ker } \alpha$  et  $\text{Ad } b^{-1}(Y) = U_\alpha \in \mathfrak{n}^\alpha$ . Donc  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_\alpha \oplus \mathfrak{n}^\alpha) = \text{Ad } b(\mathfrak{l}_\alpha)$ .

(b) Soit  $X_a \in \mathfrak{a}_\beta$ . Dans ce cas symétrique au précédent, on trouve également un élément  $b \in B_0$  tel que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{l}_\beta)$ .

(c) Sinon, on doit avoir  $y_\alpha = y_\beta = 0$  : on peut alors supposer  $y_{\alpha+\beta} = 1$ . Puisque  $X$  et  $Y$  commutent, on en déduit que la coordonnée de  $[X, Y] = 0$  selon  $\mathfrak{n}^{\alpha+\beta}$  est  $(\alpha + \beta)(X_a)y_{\alpha+\beta} = (\alpha + \beta)(X_a) = 0$ . On peut supposer que  $\alpha(X_a) = 1$  et  $\beta(X_a) = -1$ . Alors l'élément

$$b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x_\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -x_\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$$

est tel que  $\text{Ad } b^{-1}(X) \in X_a + \mathfrak{n}^{\alpha+\beta}$  et  $\text{Ad } b^{-1}(Y) = Y \in \mathfrak{n}^{\alpha+\beta}$ . Donc  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{l}_{\alpha+\beta})$ .

Et dans chacun de ces trois cas, le normalisateur de  $\mathfrak{l}_\gamma$  dans  $N$  est égal à  $N^\gamma$ , d'où l'unicité de  $b$  modulo  $N^\gamma$ .  $\square$

**Corollaire 13.8.** *Sous l'action de  $B_0$ , il y a 8 orbites dans  $Y$ , dont des représentants sont  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{l}_{[1:0]}$ ,  $\mathfrak{l}_{[0:1]}$ ,  $\mathfrak{l}_{[1:1]}$ ,  $\mathfrak{l}_{[1:-1]}$ ,  $\mathfrak{l}_\alpha$ ,  $\mathfrak{l}_\beta$  et  $\mathfrak{l}_{\alpha+\beta}$ .*

**Démonstration.** Il suffit de vérifier que pour tout  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{[1 : 0], [0 : 1]\}$ , il existe  $a \in A$  tel que  $\text{Ad } a(\mathfrak{l}_{[x:y]}) = \mathfrak{l}_{[1:\pm 1]}$  (selon que  $x$  et  $y$  sont de même signe ou non), et que deux de ces 8 représentants ne sont pas conjugués sous l'action adjointe de  $B_0$ .  $\square$

Considérons pour tous  $x, y$  et  $z$  réels l'élément

$$b(x, y, z) = \exp \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N.$$

Le lemme suivant permet de décrire quels éléments de l'orbite de  $\mathfrak{a}$  par  $N$  convergent vers quels éléments de  $Y$ .

**Lemme 13.9.** *Soient  $(x_n, y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^3$  tendant vers l'infini.*

1. *Si  $x_n \rightarrow \infty$  et  $(y_n, z_n + \frac{x_n y_n}{2}) \rightarrow (y, z)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(\mathfrak{a}) = \text{Ad } b(0, y, z)(\mathfrak{l}_\alpha)$ .*
2. *Si  $y_n \rightarrow \infty$  et  $(x_n, z_n - \frac{x_n y_n}{2}) \rightarrow (x, z)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(\mathfrak{a}) = \text{Ad } b(x, 0, z)(\mathfrak{l}_\beta)$ .*
3. *Si  $z_n \rightarrow \infty$  et  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(\mathfrak{a}) = \text{Ad } s(x, y, 0)(\mathfrak{l}_{\alpha+\beta})$ .*
4. *Si on n'est pas dans l'un de ces cas à extraction près, et si*

$$\left[ x_n \left( z_n + \frac{x_n y_n}{2} \right) : y_n \left( -z_n + \frac{x_n y_n}{2} \right) \right] \rightarrow [a : b]$$

*dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{l}_{[a:b]}$ .*

**Démonstration.** Calculons les images par  $\text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)$  des vecteurs  $H_\alpha$  et  $H_\beta$  de la base de  $\mathfrak{a}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(H_\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -x_n & -z_n + \frac{x_n y_n}{2} \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \text{ et} \\ \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(H_\beta) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -z_n - \frac{x_n y_n}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & -y_n \\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Supposons  $x_n \rightarrow \infty$  et  $(y_n, z_n + \frac{x_n y_n}{2}) \rightarrow (y, z)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)\left(\frac{-1}{x_n} H_\alpha\right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ad } b(0, y, z)(U_\alpha) \text{ et} \\ \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(H_\beta) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -z \\ 0 & \frac{1}{3} & -y \\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} = \text{Ad } b(0, y, z)(H_\beta). \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(\mathfrak{a}) = \text{Ad } b(0, y, z)(\mathbb{R}H_\beta + \mathbb{R}U_\alpha) = \text{Ad } b(0, y, z)(\mathfrak{l}_\alpha)$ .

2. Supposons  $y_n \rightarrow \infty$  et  $(x_n, z_n - \frac{x_n y_n}{2}) \rightarrow (x, z)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(H_\alpha) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -x & -z \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \text{Ad } b(x, 0, z)(H_\alpha) \text{ et} \\ \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)\left(\frac{-1}{y_n} H_\beta\right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ad } b(x, 0, z)(U_\beta). \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(\mathfrak{a}) = \text{Ad } b(x, 0, z)(\mathbb{R}H_\alpha + \mathbb{R}U_\beta) = \text{Ad } b(x, 0, z)(\mathfrak{l}_\beta)$ .

3. Supposons  $z_n \rightarrow \infty$  et  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)\left(\frac{-1}{z_n} H_\alpha\right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_{\alpha+\beta} = \text{Ad } b(x, y, 0)(U_{\alpha+\beta}) \\ &\text{et} \\ \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(H_\alpha - H_\beta) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -x & xy \\ 0 & \frac{-2}{3} & y \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \text{Ad } b(x, y, 0)(H_\alpha - H_\beta). \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(\mathfrak{a}) = \text{Ad } b(x, y, 0)(\mathbb{R}(H_\alpha - H_\beta) + \mathbb{R}U_{\alpha+\beta}) = \text{Ad } b(x, y, 0)(\mathfrak{l}_{\alpha+\beta})$ .

4. Sinon, considérons le vecteur  $Z_n$  de  $\text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(\mathfrak{a})$  suivant dont le coefficient dans le coin supérieur droite  $(Z_n)_{1,3}$  est nul :

$$\begin{aligned} Z_n &= \text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)\left(\left(z_n + \frac{x_n y_n}{2}\right) H_\alpha + \left(-z_n + \frac{x_n y_n}{2}\right) H_\beta\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{z_n}{3} + \frac{x_n y_n}{2} & -x_n(z_n + \frac{x_n y_n}{2}) & 0 \\ 0 & \frac{-2z_n}{3} & -y_n(-z_n + \frac{x_n y_n}{2}) \\ 0 & 0 & \frac{z_n}{3} - \frac{x_n y_n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Montrons que, si l'on n'est pas dans l'un des trois premiers cas à extraction près, les coefficients diagonaux de  $Z_n$  sont négligeables devant l'un des coefficients de la surdiagonale.

- Si  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $y_n \rightarrow y$  et  $z_n + \frac{x_n y_n}{2} \rightarrow \infty$ , alors les coefficients diagonaux de  $Z_n$  sont négligeables devant  $(Z_n)_{1,2} = -x_n(z_n + \frac{x_n y_n}{2})$ .
- Si  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow \infty$  et  $z_n - \frac{x_n y_n}{2} \rightarrow \infty$ , alors les coefficients diagonaux de  $Z_n$  sont négligeables devant  $(Z_n)_{2,3} = -y_n(-z_n + \frac{x_n y_n}{2})$ .
- Si  $x_n \rightarrow \infty$  et  $y_n \rightarrow \infty$ , alors les coefficients diagonaux de  $Z_n$  sont négligeables devant  $(Z_n)_{1,2} = -x_n(z_n + \frac{x_n y_n}{2})$ .

Ainsi il est naturel de supposer que la suite  $([x_n(z_n + \frac{x_n y_n}{2}) : y_n(-z_n + \frac{x_n y_n}{2})])_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[a : b]$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Dans ce cas, la suite de droites  $(\mathbb{R}Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathbb{R}(aU_\alpha + bU_\beta)$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathfrak{b})$ . Par ailleurs, selon les cas, l'une des deux suites de droite  $(\text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(H_\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(\text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(H_\beta))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathbb{R}U_{\alpha+\beta}$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathfrak{b})$ .

On en conclut que la suite de sous-algèbres de Lie  $(\text{Ad } b(x_n, y_n, z_n)(\mathfrak{a}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l}_{[a:b]}$ .  $\square$

Le résultat suivant découle alors immédiatement du corollaire 13.8.

**Corollaire 13.10.** *L'orbite de  $\mathfrak{a}$  sous l'action adjointe de  $N$  est dense dans  $Y$ .*  $\square$

Calculons les normalisateurs dans  $B_0$  de chacune des 8 sous-algèbres de Lie du corollaire 13.8.

- Proposition 13.11.**
1. *Le normalisateur  $N_{B_0}(\mathfrak{a})$  de  $\mathfrak{a}$  dans  $B_0$  est égal à  $A$ . Donc l'orbite de  $\mathfrak{a}$  sous l'action adjointe de  $B_0$  est homéomorphe à  $N$ , c'est-à-dire à  $\mathbb{R}^3$ .*
  2. *Le normalisateur  $N_{B_0}(\mathfrak{l}_{[0:1]})$  de  $\mathfrak{l}_{[0:1]}$  dans  $B_0$  est égal à  $B_0$ . Donc son orbite est un point.*
  3. *Le normalisateur  $N_{B_0}(\mathfrak{l}_{[1:0]})$  de  $\mathfrak{l}_{[1:0]}$  dans  $B_0$  est égal à  $B_0$ . Donc son orbite est un point.*
  4. *Le normalisateur  $N_{B_0}(\mathfrak{l}_{[1:1]})$  de  $\mathfrak{l}_{[1:1]}$  dans  $B_0$  est égal à  $A_{\alpha=\beta}N$ . Donc son orbite est homéomorphe à  $A/A_{\alpha=\beta}$ , c'est-à-dire à  $\mathbb{R}$ .*
  5. *Le normalisateur  $N_{B_0}(\mathfrak{l}_{[1:-1]})$  de  $\mathfrak{l}_{[1:-1]}$  dans  $B_0$  est égal à  $A_{\alpha=\beta}N$ . Donc son orbite est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ .*
  6. *Pour toute racine positive  $\gamma \in \Sigma^+$ , le normalisateur  $N_{B_0}(\mathfrak{l}_\gamma)$  de  $\mathfrak{l}_\gamma$  dans  $B_0$  est égal à  $AN^\gamma$ . Donc son orbite est homéomorphe à  $N/N^\gamma$ , c'est-à-dire à  $\mathbb{R}^2$ .*

**Démonstration.** • On sait même que le normalisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $G$  est  $N_G(\mathfrak{a}) = T'$ .

- Il est clair que les sous-algèbres de Lie  $\mathfrak{l}_{[1:0]}$  et  $\mathfrak{l}_{[0:1]}$  sont normalisées par  $B_0$ .
- La sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{l}_{[1:\pm 1]}$  est normalisée par  $N$ , et son normalisateur dans  $A$  est égal à  $A_{\alpha=\beta}$ .
- Il est clair que le sous-groupe  $A$  normalise  $\text{Ker } \gamma \oplus \mathfrak{n}^\gamma$ . Par ailleurs le normalisateur de  $\text{Ker } \gamma$  dans  $N$  est  $N^\gamma$ , et la sous-algèbre  $\mathfrak{n}^\gamma$  est normalisée par  $N$ . Donc le normalisateur de  $\text{Ker } \gamma \oplus \mathfrak{n}^\gamma$  dans  $B_0$  est égal à  $AN^\gamma$ .  $\square$

Le lemme suivant décrit les valeurs d'adhérence des autres orbites que  $\mathfrak{a}$  dans  $Y$  sous l'action adjointe de  $B_0$ , pour les représentants décrits dans le corollaire 13.8.

**Lemme 13.12.** 1. Les sous-algèbres  $\mathfrak{l}_{[0:1]}$  et  $\mathfrak{l}_{[1:0]}$  sont normalisées par  $B_0$ .

2. Pour  $\mathfrak{l}_{[1:\pm 1]}$ , un système complet de représentants de  $B_0$  modulo  $N_{B_0}(\mathfrak{l}_{[1:\pm 1]}) = A_{\alpha=\beta}N$  est  $A_{\alpha+\beta} = \{\text{Diag}(\lambda, \lambda^{-2}, \lambda) \in A : \lambda \in ]0, +\infty[ \}$ . Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, +\infty[$  et considérons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'élément  $b_n = \text{Diag}(\lambda_n, \lambda_n^{-2}, \lambda_n)$  de  $A_{\alpha+\beta}$ . Si  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n(\mathfrak{l}_{[1:\pm 1]}) = \mathfrak{l}_{[1:0]}$  et si  $\lambda_n \rightarrow 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n(\mathfrak{l}_{[1:\pm 1]}) = \mathfrak{l}_{[0:1]}$ .
3. Pour  $\mathfrak{l}_\alpha$ , un système complet de représentants de  $B_0$  modulo  $N_{B_0}(\mathfrak{l}_\alpha) = AN^\alpha$  est  $N^\beta N^{\alpha+\beta} = \{b(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ . Soit  $((y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^2$  tendant vers l'infini et considérons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'élément  $b_n = b(0, y_n, z_n)$  de  $N^\beta N^{\alpha+\beta}$ . Si  $[z_n : y_n^2] \rightarrow [a : b]$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n(\mathfrak{l}_\alpha) = \mathfrak{l}_{[a:b]}$ .
4. Pour  $\mathfrak{l}_\beta$ , un système complet de représentants de  $B_0$  modulo  $N_{B_0}(\mathfrak{l}_\beta) = AN^\beta$  est  $N^\alpha N^{\alpha+\beta} = \{b(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ . Soit  $((x_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^2$  tendant vers l'infini et considérons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'élément  $b_n = b(x_n, 0, z_n)$  de  $N^\alpha N^{\alpha+\beta}$ . Si  $[-x_n^2 : z_n] \rightarrow [a : b]$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n(\mathfrak{l}_\beta) = \mathfrak{l}_{[a:b]}$ .
5. Pour  $\mathfrak{l}_{\alpha+\beta}$ , un système complet de représentants de  $B_0$  modulo  $N_{B_0}(\mathfrak{l}_{\alpha+\beta}) = AN^{\alpha+\beta}$  est  $\{b(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$  (ce n'est pas un sous-groupe de  $B_0$ ). Soit  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^2$  tendant vers l'infini et considérons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'élément  $b_n = b(x_n, y_n, 0)$  de  $N$ . Si  $[-x_n : y_n] \rightarrow [a : b]$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n(\mathfrak{l}_{\alpha+\beta}) = \mathfrak{l}_{[a:b]}$ .

**Démonstration.** 1. Cela a été vu dans la proposition 13.11.

2. On remarque que  $\text{Ad } b_n(\mathfrak{l}_{[1:\pm 1]}) = \mathfrak{l}_{[\lambda_n^3, \pm \lambda_n^{-3}]}$ , le résultat est alors clair.
3. Calculons le vecteur

$$\text{Ad } b_n(U_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -y_n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi on constate la limite

$$\mathbb{R} \text{Ad } b_n(-y_n H_\beta + z_n U_\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, l'une des deux suites  $(\mathbb{R} \text{Ad } b_n(H_\beta))_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(\mathbb{R} \text{Ad } b_n(U_\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$  de droites de  $\mathfrak{b}$  converge vers  $\mathbb{R}U_{\alpha+\beta}$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n(\mathfrak{l}_\alpha) = \mathfrak{l}_{[a:b]}$ .

4. Calculons le vecteur

$$\text{Ad } b_n(U_\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi on constate la limite

$$\mathbb{R} \text{Ad } b_n(x_n H_\alpha + z_n U_\beta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, l'une des deux suites  $(\mathbb{R} \text{Ad } b_n(H_\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(\mathbb{R} \text{Ad } b_n(U_\beta))_{n \in \mathbb{N}}$  de droites de  $\mathfrak{b}$  converge vers  $\mathbb{R}U_{\alpha+\beta}$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n(\mathfrak{l}_\beta) = \mathfrak{l}_{[a:b]}$ .



5. Le vecteur  $U_{\alpha+\beta}$  est normalisé par  $b_n$ , et on constate la limite

$$\mathbb{R} \operatorname{Ad} b_n (H_\alpha - H_\beta - x_n y_n U_{\alpha+\beta}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Ad} b_n(\mathfrak{l}_{\alpha+\beta}) = \mathfrak{l}_{[a:b]}$ . □

### 13.3.2 La topologie de l'espace $Y$ des sous-algèbres de Lie abéliennes de $\mathfrak{b}$ de dimension 2

Considérons l'homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  défini par  $z \mapsto z' = \operatorname{sgn}(z)\sqrt{|z|}$ , d'inverse  $z' \mapsto z = \operatorname{sgn}(z')(z')^2$ .

Pour  $n = 2$  et  $n = 3$ , notons  $\mathbb{B}^n$  la compactification de  $\mathbb{R}^n$  obtenue en ajoutant la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  à l'infini (qui est la compactification géodésique de l'espace euclidien standard  $\mathbb{R}^n$ ). Utilisons des coordonnées homogènes pour les sphères, en identifiant  $\mathbb{S}^{n-1}$  avec  $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+^*$  de manière évidente. Notons  $\mathbb{B}_\alpha^2$ ,  $\mathbb{B}_\beta^2$  et  $\mathbb{B}_{\alpha+\beta}^2$  trois copies disjointes du disque fermé  $\mathbb{B}^2$ , de disques ouverts  $\mathbb{R}_\alpha^2$ ,  $\mathbb{R}_\beta^2$  et  $\mathbb{R}_{\alpha+\beta}^2$  et de cercles de bord  $\mathbb{S}_\alpha^1$ ,  $\mathbb{S}_\beta^1$  et  $\mathbb{S}_{\alpha+\beta}^1$ . Considérons les trois applications continues

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathbb{B}^3 \setminus \{[\pm 1 : 0 : 0]\} &\rightarrow \mathbb{B}_\alpha^2 \\ (x, y, z') \in \mathbb{R}^3 &\mapsto \left( y, \left( z + \frac{xy}{2} \right)' \right) \in \mathbb{R}_\alpha^2 \\ [x : y : z'] \in \mathbb{S}^2 &\mapsto \left[ y : \left( z + \frac{xy}{2} \right)' \right] \in \mathbb{S}_\alpha^1 \\ f_\beta : \mathbb{B}^3 \setminus \{[0 : \pm 1 : 0]\} &\rightarrow \mathbb{B}_\beta^2 \\ (x, y, z') \in \mathbb{R}^3 &\mapsto \left( x, \left( z - \frac{xy}{2} \right)' \right) \in \mathbb{R}_\beta^2 \\ [x : y : z'] \in \mathbb{S}^2 &\mapsto \left[ x : \left( z - \frac{xy}{2} \right)' \right] \in \mathbb{S}_\beta^1 \\ f_{\alpha+\beta} : \mathbb{B}^3 \setminus \{[0 : 0 : \pm 1]\} &\rightarrow \mathbb{B}_{\alpha+\beta}^2 \\ (x, y, z') \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (x, y) \in \mathbb{R}_{\alpha+\beta}^2 \\ [x : y : z'] \in \mathbb{S}^2 &\mapsto [x : y] \in \mathbb{S}_{\alpha+\beta}^1. \end{aligned}$$

Remarquons que ces formules étant positivement homogènes, et les domaines de définition indiqués étant les bons, ces applications sont bien définies. Soit  $C$  l'adhérence de l'image du plongement (et nous identifions l'espace de départ et l'image de ce plongement)

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^3 \setminus \{[\pm 1 : 0 : 0], [0 : \pm 1 : 0], [0 : 0 : \pm 1]\} &\rightarrow \mathbb{B}^3 \times \mathbb{B}_\alpha^2 \times \mathbb{B}_\beta^2 \times \mathbb{B}_{\alpha+\beta}^2 \\ p &\mapsto (p, f_\alpha(p), f_\beta(p), f_{\alpha+\beta}(p)). \end{aligned}$$

L'espace  $C$  est la boule  $\mathbb{B}^3$  où on a éclaté les six points  $\{[\pm 1 : 0 : 0], [0 : \pm 1 : 0], [0 : 0 : \pm 1]\}$  en six disques, identifiés deux à deux (voir la figure 15).

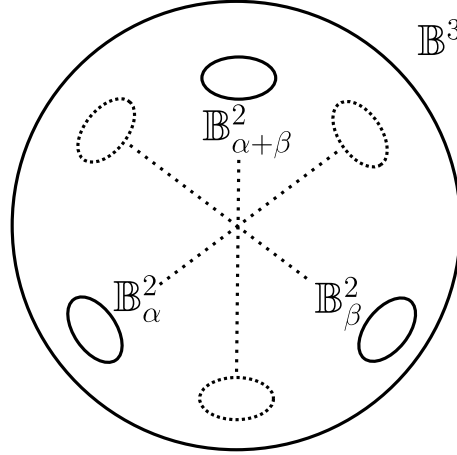


FIGURE 15 – La boule éclatée  $C$ .

Notons  $\partial C$  le complémentaire dans  $C$  de l'image de  $\mathbb{R}^3$ . Notons  $C'$  le complémentaire dans  $\partial C$  des trois disques  $\mathbb{B}_\alpha^2$ ,  $\mathbb{B}_\beta^2$  et  $\mathbb{B}_{\alpha+\beta}^2$ , c'est-à-dire  $\mathbb{S}^2$  privé des six points  $[\pm 1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : \pm 1 : 0]$  et  $[0 : 0 : \pm 1]$ , et considérons l'application

$$g : C' \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$[x : y : z'] \mapsto \left[ x \left( z + \frac{xy}{2} \right) : y \left( -z + \frac{xy}{2} \right) \right].$$

Prolongeons l'application  $g$  aux bords  $\mathbb{S}_\alpha^1$ ,  $\mathbb{S}_\beta^1$  et  $\mathbb{S}_{\alpha+\beta}^1$  des plans  $\mathbb{R}_\alpha^2$ ,  $\mathbb{R}_\beta^2$  et  $\mathbb{R}_{\alpha+\beta}^2$ , par les formules suivantes.

$$g_\alpha : \mathbb{S}_\alpha^1 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$[y : z'] \mapsto [z : y^2]$$

$$g_\beta : \mathbb{S}_\beta^1 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$[x : z'] \mapsto [-x^2 : z]$$

$$g_{\alpha+\beta} : \mathbb{S}_{\alpha+\beta}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$[x : y] \mapsto [-x : y].$$

On obtient ainsi une application  $g$  de  $C_0 = C' \cup \mathbb{S}_\alpha^1 \cup \mathbb{S}_\beta^1 \cup \mathbb{S}_{\alpha+\beta}^1$  dans  $\mathbb{P}^1$ .

**Lemme 13.13.** *L'application  $g : C_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est continue.*

**Démonstration.** Il est clair que l'application  $g$  est continue sur l'ouvert  $C'$  de  $C_0$ , ainsi qu'en restriction à chaque  $\mathbb{S}_\gamma^1$ , pour  $\gamma \in \Sigma^+$ .

Soit  $[y : z']$  un point de  $\mathbb{S}_\alpha^1$ , et soit  $([x_n : y_n : z'_n])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $C'$  convergeant vers  $[y : z']$  dans  $C$ . Par continuité de  $f_\beta$  et  $f_{\alpha+\beta}$  en  $[\pm 1 : 0 : 0]$ , cela signifie que la suite  $([x_n : y_n : z'_n])_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[\pm 1 : 0 : 0]$  dans  $\mathbb{S}^2$ , et par continuité de  $f_\beta$  et  $f_{\alpha+\beta}$  en  $[\pm 1 : 0 : 0]$  que la suite  $(f_\alpha([x_n : y_n : z'_n]))_{n \in \mathbb{N}} = \left( \left[ y_n : \left( z_n + \frac{x_n y_n}{2} \right)' \right] \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[y : z']$  dans  $\mathbb{S}_\alpha^1$ . Ainsi on peut supposer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini, que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $y$ , et que la suite  $(z_n + \frac{x_n y_n}{2})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $z$ . Or

$$g([x_n : y_n : z'_n]) = \left[ x_n \left( z_n + \frac{x_n y_n}{2} \right) : y_n \left( -z_n + \frac{x_n y_n}{2} \right) \right]$$

$$= \left[ z_n + \frac{x_n y_n}{2} : y_n \left( -\frac{z_n}{x_n} + \frac{y_n}{2} \right) \right].$$

Si  $y \neq 0$ , alors la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est équivalente à  $(-\frac{x_n y}{2})_{n \in \mathbb{N}}$ , donc la suite  $(-\frac{z_n}{x_n} + \frac{y_n}{2})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $y$ , et donc la suite  $(g([x_n : y_n : z'_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[z : y^2] = g_\alpha([y : z'])$ . Si  $y = 0$ , alors on en déduit que la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est négligeable devant  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et donc la suite  $(g([x_n : y_n : z'_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[1 : 0] = g_\alpha([y : z'])$ .

Pour  $\mathbb{S}_\beta^1$ , la continuité de  $g$  se montre de manière identique.

Soit  $[x : y]$  un point de  $\mathbb{S}_{\alpha+\beta}^1$ , et soit  $([x_n : y_n : z'_n])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $C'$  convergeant vers  $[x : y]$  dans  $C$ . Cela signifie que la suite  $([x_n : y_n : z'_n])_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[0 : 0 : \pm 1]$  dans  $\mathbb{S}^2$ , et que la suite  $(f_{\alpha+\beta}([x_n : y_n : z'_n]))_{n \in \mathbb{N}} = ([x_n : y_n])_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[x : y]$  dans  $\mathbb{S}^1$ . On peut donc supposer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ , que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $y$ , et que la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini. Or

$$g([x_n : y_n : z'_n]) = \left[ x_n \left( z_n + \frac{x_n y_n}{2} \right) : y_n \left( -z_n + \frac{x_n y_n}{2} \right) \right].$$

Puisque la suite  $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est négligeable devant la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on en déduit que la suite  $(g([x_n : y_n : z'_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  est équivalente à la suite  $([x_n : -y_n])_{n \in \mathbb{N}}$ , donc converge vers  $[x : -y] = g_{\alpha+\beta}([x : y])$ .

On a donc montré que l'application  $g$  était continue sur  $C_0$ .  $\square$

Considérons l'application suivante.

$$\begin{aligned} \phi : C &\rightarrow Y \\ (x, y, z') \in \mathbb{R}^3 &\mapsto \text{Ad } b(x, y, z) \mathfrak{a} \\ (y, z') \in \mathbb{R}_\alpha^2 &\mapsto \text{Ad } b(0, y, z) \mathfrak{l}_\alpha \\ (x, z') \in \mathbb{R}_\beta^2 &\mapsto \text{Ad } b(x, 0, z) \mathfrak{l}_\beta \\ (x, y) \in \mathbb{R}_{\alpha+\beta}^2 &\mapsto \text{Ad } b(x, y, 0) \mathfrak{l}_{\alpha+\beta} \\ c \in C_0 &\mapsto \mathfrak{l}_{g(c)}. \end{aligned}$$

**Théorème 13.14.** *L'application  $\phi$  est continue, surjective et induit un homéomorphisme  $\tilde{\phi}$  du recollement  $C \cup_g \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  sur l'espace topologique  $Y$ .*

**Démonstration.** Puisque l'application  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow Y$  définie par  $[a : b] \mapsto \mathfrak{l}_{[a:b]}$  est un plongement, et que l'application  $\phi$  factorise par  $g$  sur  $C_0$ , on en déduit que l'application  $\phi$  est continue en restriction à  $C_0$ . L'application  $\phi$  est également continue sur l'ouvert  $\mathbb{R}^3$  de  $C$ .

Considérons les six applications

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_\alpha^2 &\rightarrow Y \\ (y, z') \in \mathbb{R}_\alpha^2 &\mapsto \text{Ad } b(0, y, z') \mathfrak{l}_\alpha \\ [y : z'] \in \mathbb{S}_\alpha^1 &\mapsto \mathfrak{l}_{g_\alpha([y : z'])}, \\ \mathbb{B}_\beta^2 &\rightarrow Y \\ (x, z') \in \mathbb{R}_\beta^2 &\mapsto \text{Ad } b(x, 0, z') \mathfrak{l}_\beta \\ [x : z'] \in \mathbb{S}_\beta^1 &\mapsto \mathfrak{l}_{g_\beta([x : z'])} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \mathbb{B}_{\alpha+\beta}^2 &\rightarrow Y \\ (x, y) \in \mathbb{R}_{\alpha+\beta}^2 &\mapsto \text{Ad } b(x, y, 0)\mathfrak{l}_{\alpha+\beta} \\ [x : y] \in \mathbb{S}_{\alpha+\beta}^1 &\mapsto \mathfrak{l}_{g_{\alpha+\beta}([x:y])}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 13.12, ce sont des plongements. Puisqu'en restriction aux trois disques  $\mathbb{B}_\alpha^2$ ,  $\mathbb{B}_\beta^2$  et  $\mathbb{B}_{\alpha+\beta}^2$ , l'application  $\phi$  factorise par ces plongements, on en déduit que l'application  $\phi$  est continue en restriction à  $C \setminus \mathbb{R}^3$ .

Soit  $(y, z')$  un point de  $\mathbb{R}_\alpha^2$ , et soit  $(x_n, y_n, z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^3$  convergeant vers  $(y, z')$  dans  $C$ . Cela signifie que la suite  $(x_n, y_n, z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[\pm 1 : 0 : 0]$  dans  $\mathbb{B}^3$ , et que la suite  $(f_\alpha(x_n, y_n, z'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(y, z')$  dans  $\mathbb{R}_\alpha^2$ . Puisque  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini et que la suite  $(y_n, z_n + \frac{x_n y_n}{2})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(y, z)$ , d'après le lemme 13.9(1), on en déduit que la suite de sous-algèbres de  $\text{Lie}(\phi(x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\text{Ad } s(0, y, z)\mathfrak{l}_\alpha = \phi(y, z')$ .

Soit  $[y : z']$  un point de  $\mathbb{S}_\alpha^1$ , et soit  $(x_n, y_n, z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^3$  convergeant vers  $[y : z']$  dans  $C$ . Cela signifie que la suite  $(x_n, y_n, z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[\pm 1 : 0 : 0]$  dans  $\mathbb{B}^3$ , et que la suite  $(f_\alpha(x_n, y_n, z'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[y : z']$  dans  $\mathbb{B}_\alpha^2$ .

Supposons  $y \neq 0$ , alors la suite  $(\frac{z_n + \frac{x_n y_n}{2}}{y_n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{z}{y^2}$ , or la suite  $(\frac{x_n}{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini, donc la suite  $(\frac{z_n}{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est équivalente à  $(-\frac{x_n}{2y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Ainsi la suite  $([x_n(z_n + \frac{x_n y_n}{2}) : y_n(-z_n + \frac{x_n y_n}{2})])_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est équivalente à la suite  $([x_n \frac{z}{y^2} : y_n \frac{x_n}{y_n}])_{n \in \mathbb{N}}$ , donc converge vers  $[z : y^2] = g_\alpha([y : z'])$ . D'après le lemme 13.9(4), on en déduit que la suite de sous-algèbres de  $\text{Lie}(\phi(x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l}_{[z:y^2]} = \phi([y : z'])$ .

Supposons  $y = 0$ , alors la suite  $(\frac{y_n^2}{z_n + \frac{x_n y_n}{2}})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Donc la suite  $([x_n(z_n + \frac{x_n y_n}{2}) : y_n(-z_n + \frac{x_n y_n}{2})])_{n \in \mathbb{N}} = ([x_n(z_n + \frac{x_n y_n}{2}) : -y_n(z_n + \frac{x_n y_n}{2}) + x_n y_n^2])_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[1 : 0] = g_\alpha([y : z'])$ . D'après le lemme 13.9(4), on en déduit que la suite de sous-algèbres de  $\text{Lie}(\phi(x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l}_{[1:0]} = \phi([y : z'])$ .

La continuité de  $\phi$  sur  $\mathbb{B}_\beta^2$  est identique.

Soit  $(x, y)$  un point de  $\mathbb{R}_{\alpha+\beta}^2$ , et soit  $(x_n, y_n, z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^3$  convergeant vers  $(x, y)$  dans  $C$ . Cela signifie que la suite  $(x_n, y_n, z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[0 : 0 : \pm 1]$  dans  $\mathbb{B}^3$ , et que la suite  $(f_{\alpha+\beta}(x_n, y_n, z'_n))_{n \in \mathbb{N}} = (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}_{\alpha+\beta}^2$ . Puisque  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini et comme la suite  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(x, y)$ , d'après le lemme 13.9(3), on en déduit que la suite de sous-algèbres de  $\text{Lie}(\phi(x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\text{Ad } b(x, y, 0)(\mathfrak{l}_{\alpha+\beta}) = \phi(x, y)$ .

Soit  $[x : y]$  un point de  $\mathbb{S}_{\alpha+\beta}^1$ , et soit  $(x_n, y_n, z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^3$  convergeant vers  $(x, y)$  dans  $C$ . Cela signifie que la suite  $(x_n, y_n, z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[0 : 0 : \pm 1]$  dans  $\mathbb{B}^3$ , et que la suite  $(f_{\alpha+\beta}(x_n, y_n, z'_n))_{n \in \mathbb{N}} = (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[x : y]$  dans  $\mathbb{B}_{\alpha+\beta}^2$ . Alors la suite  $([x_n(z_n + \frac{x_n y_n}{2}) : y_n(-z_n + \frac{x_n y_n}{2})])_{n \in \mathbb{N}}$  est équivalente à la suite  $([x_n : -y_n])_{n \in \mathbb{N}}$ , donc converge vers  $[x : -y] = g_{\alpha+\beta}([x : y])$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Donc d'après

le lemme 13.9(4), on en déduit que la suite de sous-algèbres de Lie  $(\phi(x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l}_{[x:-y]} = \phi([x : y])$ .

On a donc montré que l'application  $\phi$  était continue sur  $C$ . Puisqu'elle factorise par  $g$  sur  $C_0$ , on en déduit qu'elle induit une application continue  $\tilde{\phi}$  de  $C \cup_g \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  sur  $Y$ .

L'application  $\phi$  est une bijection de  $\mathbb{R}^3$  sur l'orbite de  $\mathfrak{a}$  dans  $Y$  sous l'action adjointe de  $B_0$ . Pour tout  $\gamma \in \Sigma^+$ , l'application  $\phi$  est une bijection de  $\mathbb{R}_\gamma^2$  sur l'orbite de  $\mathfrak{l}_\gamma$  dans  $Y$  sous l'action adjointe de  $B_0$ . Et l'application  $\phi$  est une bijection de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  sur le sous-espace  $\{\mathfrak{l}_{[a:b]} : [a : b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$  de  $Y$ . Ainsi d'après la proposition 13.7, l'application  $\phi$  est bijective. Or l'espace  $C \cup_g \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est compact et l'espace  $Y$  est séparé, donc l'application  $\tilde{\phi}$  est un homéomorphisme.  $\square$

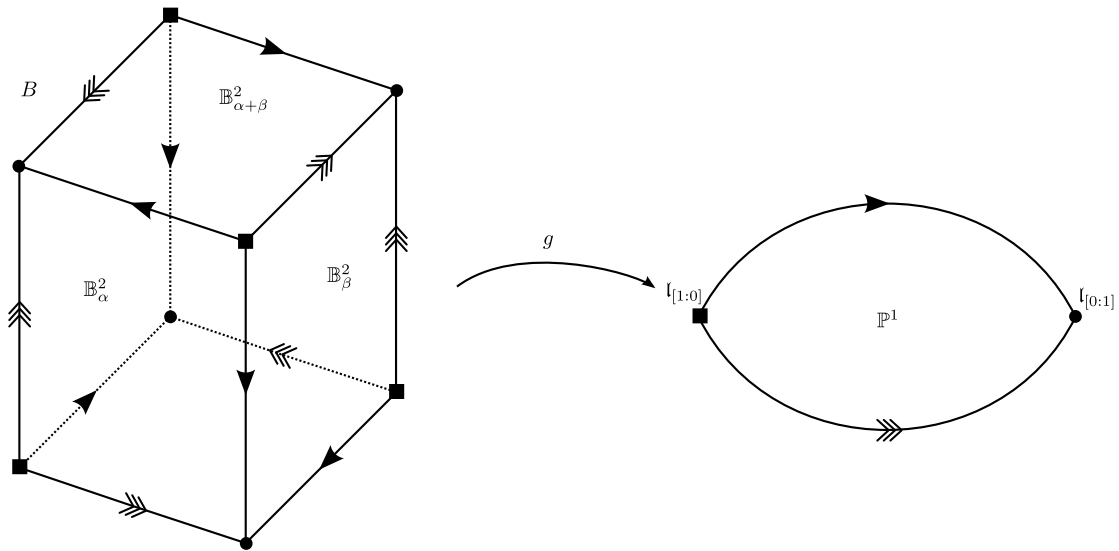


FIGURE 16 – Le CW-complexe  $Y$

**Corollaire 13.15.** *L'espace  $Y$  est un CW-complexe (voir la figure 16), dont les simplexes sont donnés par les  $B_0$ -orbites. Les voici, classés par dimensions.*

- Il y a deux 0-simplexes, qui sont les points  $\mathfrak{l}_{[1:0]}$  et  $\mathfrak{l}_{[0:1]}$ .
- Il y a deux 1-simplexes, qui sont les orbites de  $\mathfrak{l}_{[1:\pm 1]}$ .
- Il y a trois 2-simplexes, qui sont les orbites de  $\text{Ker } \gamma \oplus \mathfrak{g}_\gamma$  pour  $\gamma \in \Sigma^+$ .
- Il y a un 3-simplexe, qui est l'orbite de  $\mathfrak{a}$ .

$\square$

**Proposition 13.16.** *Le 2-squelette  $Y^{(2)}$  de  $Y$  a le type d'homotopie qu'un bouquet formé de deux sphères  $S^2$  et d'un plan projectif réel  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . En particulier, l'espace  $Y$  a pour groupe fondamental  $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , dont un générateur est donné par la classe d'homotopie d'un lacet parcourant une fois le cercle  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .*

**Démonstration.** Le 2-squelette  $Y^{(2)}$  de  $Y$  est le recollement des trois 2-cellules  $\mathbb{R}_\alpha^2$ ,  $\mathbb{R}_\beta^2$  et  $\mathbb{R}_{\alpha+\beta}^2$  par les trois applications  $g_\alpha$ ,  $g_\beta$  et  $g_{\alpha+\beta}$  sur le 1-squelette  $Y^{(1)} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

Or les applications  $g_\alpha$  et  $g_\beta$  sont homotopes à des applications constantes, et le recollement de  $\mathbb{R}_{\alpha+\beta}^2$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  par  $g_{\alpha+\beta}$  est homéomorphe à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Ainsi le 2-squelette  $Y^{(2)}$  a le type d'homotopie d'un bouquet formé de deux sphères  $\mathbb{S}^2$  et d'un plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Ainsi le groupe fondamental de  $Y$  est isomorphe au groupe fondamental de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .  $\square$

### 13.3.3 Compactification de $G/T'$

Notons  $Z = \overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  la compactification de Chabauty de  $G/T' = \text{Plats}(X)$ . Elle s'identifie à l'adhérence du plongement  $\theta : G/T' \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  (voir le théorème 13.2). On peut décrire tous les éléments de cette compactification.

**Théorème 13.17.** *La compactification de Chabauty  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'espace des plats maximaux  $\text{Plats}(X)$  de l'espace symétrique  $X$  de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(\text{SL}_3(\mathbb{R}))$  des sous-groupes fermés connexes abéliens maximaux inclus dans un sous-groupe de Borel.*

**Démonstration.** Soit  $H$  un sous-groupe fermé connexe abélien maximal de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$  inclus dans un sous-groupe de Borel. Quitte à conjuguer, on peut supposer que  $H$  est inclus dans le sous-groupe de Borel standard  $B$ , donc d'après le corollaire 13.10, le sous-groupe  $H$  appartient à  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$ .

Réciproquement, soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$  telle que la suite de sous-groupes fermés  $(g_n A g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un sous-groupe fermé  $L$ . Quitte à multiplier chaque  $g_n$  à gauche par un élément du groupe compact  $K = \text{SO}_3(\mathbb{R})$ , d'après la décomposition d'Iwasawa  $G = KAN = KB_0$ , on peut supposer que  $g_n$  appartient à  $B_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $L$  est un sous-groupe fermé connexe abélien maximal de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ , inclus dans le sous-groupe de Borel standard  $B$ .  $\square$

La condition d'être inclus dans un sous-groupe de Borel est nécessaire, comme le montre le sous-groupe fermé connexe abélien maximal de  $G$  suivant, qui n'appartient pas à  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  :

$$K^\alpha A_\alpha = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} a \cos \theta & -a \sin \theta & 0 \\ a \sin \theta & a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} \end{array} \right) : \theta \in \mathbb{R}, a \in ]0, +\infty[ \right\}.$$

On peut remarquer que ce sous-groupe stabilise une unique géodésique singulière de  $X$ , que  $H$  ne fixe pas de chambre de Weyl à l'infini et que certains éléments de  $H$  ont un spectre pour l'action adjointe sur  $\mathfrak{g}$  imaginaire pur. La condition d'être inclus dans un sous-groupe de Borel peut ainsi être formulée d'autres manières.

**Proposition 13.18.** *Soit  $H$  un sous-groupe fermé connexe abélien maximal de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- *Le sous-groupe  $H$  est inclus dans un sous-groupe de Borel.*
- *Le sous-groupe  $H$  fixe une chambre de Weyl à l'infini de  $X$ .*

- Le spectre de l'action adjointe de  $H$  sur  $\mathfrak{g}$  est réel.
- Le sous-groupe  $H$  ne stabilise pas une unique géodésique singulière de  $X$ .

**Démonstration.** D'après le théorème 10.18, on sait que soit  $H$  stabilise un plat de  $X$ , soit  $H$  fixe un point de  $\partial_\infty X$ . Le sous-groupe  $H$  ne peut pas fixer de point de  $X$ .

Si  $H$  ne stabilise aucun plat de  $X$ , les quatre assertions sont vraies.

Si  $H$  stabilise une unique géodésique singulière de  $X$ , les quatre assertions sont fausses.

Si  $H$  stabilise un unique plat maximal de  $X$ , les quatre assertions sont vraies.

Nous avons donc montré l'équivalence des quatre assertions.  $\square$

Il est aisé de voir que les trois premières assertions sont des conditions fermées pour  $H$  pour la topologie de Chabauty sur  $\mathcal{S}(G)$ . Pour les deux premières, il suffit de constater que le sous-groupe compact  $K$  agit simplement transitivement sur les sous-groupes de Borel, et sur les chambres de Weyl à l'infini. Pour la troisième, il suffit de constater que le spectre de l'action adjointe d'un élément de  $G$  varie continûment.

Déterminons les stabilisateurs dans  $G$  des éléments de  $Y$ .

Notons  $M_{\alpha=\beta}$  le sous-groupe de  $M$  de cardinal 2

$$M_{\alpha=\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\},$$

et notons  $H$  le sous-groupe  $H = M_{\alpha=\beta}A_{\alpha=\beta}N$  de  $G$  :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & x & z \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \forall a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall x, y, z \in \mathbb{R} : \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \right\}.$$

**Proposition 13.19.** 1. Le normalisateur  $N_G(\mathfrak{a})$  de  $\mathfrak{a}$  dans  $G$  est égal à  $T'$ .

2. Le normalisateur  $N_G(\mathfrak{l}_{[0;1]})$  de  $\mathfrak{l}_{[0;1]}$  dans  $G$  est égal à  $P^\alpha$ .

3. Le normalisateur  $N_G(\mathfrak{l}_{[1;0]})$  de  $\mathfrak{l}_{[1;0]}$  dans  $G$  est égal à  $P^\beta$ .

4. Le normalisateur  $N_G(\mathfrak{l}_{[1;1]})$  de  $\mathfrak{l}_{[1;1]}$  dans  $G$  est égal à  $H$ .

5. Le normalisateur  $N_G(\mathfrak{l}_{[1;-1]})$  de  $\mathfrak{l}_{[1;-1]}$  dans  $G$  est aussi égal à  $H$ .

6. Pour toute racine positive  $\gamma \in \Sigma^+$ , le normalisateur  $N_G(\mathfrak{l}_\gamma)$  de  $\mathfrak{l}_\gamma$  dans  $G$  est égal à  $MAN^\gamma$ .

**Démonstration.** 1. C'est la définition de  $T'$ .

2. Le normalisateur de  $\mathfrak{l}_{[0;1]}$  dans  $G$  est le stabilisateur du drapeau  $\{0\} \subset \text{Vect}(e_1, e_2) \subset \mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire

$$N_G(\mathfrak{l}_{[0;1]}) = P^\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

3. De même, le normalisateur de  $\mathfrak{l}_{[1:0]}$  dans  $G$  est le stabilisateur du drapeau  $\{0\} \subset \text{Vect}(e_1) \subset \mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire

$$N_G(\mathfrak{l}_{[0:1]}) = P^\beta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Soit  $g = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$  appartenant à  $g \in N_G(\mathfrak{l}_{[1:1]})$  équivaut à l'existence de  $U, U' \in \mathfrak{l}_{[1:1]}$  tels que  $\text{Ad } g(U) = U_{\alpha+\beta}$  et  $\text{Ad } g(U') = U_\alpha + U_\beta$ , ou encore l'existence de  $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$  tels que

$$g \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g$$

et

$$g \begin{pmatrix} 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & x' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g.$$

Lorsque nous calculons ces produits :

$$\begin{pmatrix} 0 & xg_{1,1} & yg_{1,1} + xg_{1,2} \\ 0 & xg_{2,1} & yg_{2,1} + xg_{2,2} \\ 0 & xg_{3,1} & yg_{3,1} + xg_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & x'g_{1,1} & y'g_{1,1} + x'g_{1,2} \\ 0 & x'g_{2,1} & y'g_{2,1} + x'g_{2,2} \\ 0 & x'g_{3,1} & y'g_{3,1} + x'g_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi cela équivaut à  $g_{2,1} = g_{3,1} = g_{3,2} = 0$ , et  $\frac{g_{2,2}}{g_{1,1}} = \frac{g_{3,3}}{g_{2,2}}$ , c'est-à-dire  $g \in M_{\alpha=\beta}A_{\alpha=\beta}N = H$ .

5. Pour  $\mathfrak{l}_{[1:-1]}$ , le même calcul donne  $N_G(\mathfrak{l}_{[1:-1]}) = H$ .
6. Pour  $\gamma = \alpha$ , soit  $g = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$  appartenant à  $N_G(\mathfrak{l}_\alpha)$ . Alors  $g$  normalise également le radical nilpotent  $\mathfrak{g}_\alpha$  de  $\mathfrak{l}_\alpha$ , donc il existe  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $gxU_\alpha = U_\alpha g$ . L'élément  $g$  normalise également l'orthogonal  $\mathfrak{a}_\alpha$  de  $\mathfrak{n}^\alpha$  dans  $\mathfrak{l}_\alpha$  pour la forme de Killing. Puisque  $\mathfrak{a}_\alpha$  est diagonale,  $g$  centralise en fait  $\mathfrak{a}_\alpha$ , ainsi  $gH_\beta = H_\beta g$ , d'où les égalités

$$\begin{pmatrix} \frac{g_{1,1}}{3} & \frac{g_{1,2}}{3} & \frac{-2g_{1,3}}{3} \\ \frac{g_{2,1}}{3} & \frac{g_{2,2}}{3} & \frac{-2g_{2,3}}{3} \\ \frac{g_{3,1}}{3} & \frac{g_{3,2}}{3} & \frac{-2g_{3,3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_{1,1}}{3} & \frac{g_{1,2}}{3} & \frac{g_{1,3}}{3} \\ \frac{g_{2,1}}{3} & \frac{g_{2,2}}{3} & \frac{g_{2,3}}{3} \\ \frac{-2g_{3,1}}{3} & \frac{-2g_{3,2}}{3} & \frac{-2g_{3,3}}{3} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & xg_{1,1} & 0 \\ 0 & xg_{2,1} & 0 \\ 0 & xg_{3,1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut à  $g_{2,1} = g_{3,1} = g_{3,2} = g_{1,3} = g_{2,3} = 0$ , c'est-à-dire  $g \in MAN^\alpha$ . Il est immédiat que  $MAN^\alpha$  normalise  $\mathfrak{l}_\alpha$ .

On montre le même résultat pour  $\beta$  et  $\alpha + \beta$ . □

Considérons l'application continue

$$\begin{aligned} \pi : G \times Y &\rightarrow Z \\ (g, y) &\mapsto g \cdot y, \end{aligned}$$



où le groupe  $G$  agit sur  $Z$  par l'action adjointe. Puisque toute  $G$ -orbite dans  $Z$  rencontre  $Y$ , l'application  $\pi$  est surjective et ouverte. Choisissons comme point base  $(e, y_0) = (e, \mathbf{a})$  dans  $G \times Y$  et  $z_0 = \pi(e, y_0) = \mathbf{a}$  dans  $Z$ .

Commençons par démontrer un lemme de topologie générale.

**Lemme 13.20.** *Soient  $(E, e_0)$  est un espace topologique pointé localement connexe par arcs,  $(F, f_0)$  un espace topologique pointé localement simplement connexe et  $\pi : (E, e_0) \rightarrow (F, f_0)$  une application continue, surjective et ouverte, telle que  $\pi^{-1}(f_0)$  soit connexe par arcs. Alors l'application  $\pi$  induit une surjection*

$$\pi_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(F, f_0).$$

**Démonstration.** Montrons qu'on peut relever localement les chemins, à homotopie près. Plus précisément, montrons que, pour tout  $e \in E$ , il existe un voisinage  $U$  de  $e$  dans  $E$  tel que, pour tout  $e' \in U$  et tout chemin  $c$  de  $\pi(e)$  à  $\pi(e')$  dans  $\pi(U)$ , il existe un chemin  $\tilde{c}$  de  $e$  à  $e'$  dans  $U$  tel que  $\pi(\tilde{c})$  soit homotope dans  $F$  à  $c$  relativement aux extrémités.

Fixons  $e \in E$  et  $f = \pi(e)$ . L'espace  $F$  est localement simplement connexe : soit donc un voisinage simplement connexe  $V$  de  $f$  dans  $F$ . L'espace  $E$  est localement connexe par arcs : soit donc un voisinage connexe par arcs  $U$  de  $e$  dans  $E$  tel que  $\pi(U) \subset V$ .

Soient  $e' \in U$  et  $f' = \pi(e')$ . Soit  $c : [0, 1] \rightarrow \pi(U)$  un chemin continu de  $f$  à  $f'$ . Considérons un chemin continu  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow U$  de  $e$  à  $e'$ . Alors  $\pi(\tilde{c})$  et  $c$  sont deux chemins continus de  $f$  à  $f'$  inclus dans  $\pi(U)$ , donc inclus dans  $V$  : ils sont ainsi homotopes dans  $F$  relativement à leurs extrémités.

Ainsi, pour tout lacet  $\ell$  de  $F$  basé en  $f_0$ , il existe un chemin  $\tilde{c}$  de  $E$  d'origine  $e_0$  et d'extrémité appartenant à  $\pi^{-1}(f_0)$  tel que les deux lacets  $\ell$  et  $\pi(\tilde{c})$  (basés en  $f_0$ ) soient homotopes dans  $F$ . Or  $\pi^{-1}(f_0)$  est connexe par arcs : soit  $\tilde{c}'$  un chemin dans  $\pi^{-1}(f_0)$  joignant les deux extrémités de  $\tilde{c}$ , alors le lacet concaténé  $\tilde{\ell} = \tilde{c}' \cdot \tilde{c}$  basé en  $e_0$  est tel que  $\pi(\tilde{\ell})$  soit homotope à  $\ell$  dans  $F$ . L'application  $\pi_*$  est donc surjective.  $\square$

**Corollaire 13.21.** *L'application  $\pi : (G \times Y, (e, y_0)) \rightarrow (Z, z_0)$  induit une surjection*

$$\pi_* : \pi_1(G \times Y, (e, y_0)) \rightarrow \pi_1(Z, z_0).$$

**Démonstration.** Il suffit de vérifier les hypothèses du lemme 13.20 pour l'application  $\pi : (G \times Y, (e, y_0)) \rightarrow (Z, z_0)$ . D'après la proposition 1.18, l'espace  $Z$  est la réunion finie des  $G$ -orbites, qui sont des sous-variétés algébriques lisses de  $\mathcal{G}r_2(\mathfrak{g})$ , donc l'espace  $Z$  est localement contractile. De même, l'espace  $Y$  est la compactification de Chabauty de l'espace homogène  $B/N_B(A)$ , donc l'espace  $Y$  est également localement contractile. De plus, la préimage  $\pi^{-1}(z_0) = \{(g, h \cdot \mathbf{a}) \in G \times Y : gh \in T'\} \simeq G \times G/T'$  est connexe par arcs. Ainsi d'après le lemme 13.20 l'application  $\pi_* : \pi_1(G \times Y, (e, y_0)) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$  est surjective.  $\square$

**Théorème 13.22.** *La compactification de Chabauty  $Z = \overline{\mathrm{Plats}(X)}^S$  de l'espace  $G/T' = \mathrm{Plats}(X)$  des plats maximaux de l'espace symétrique  $X$  de  $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$  est simplement connexe.*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que les générateurs de  $\pi_1(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et de  $\pi_1(Y) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ont une image triviale par  $\pi_*$  dans  $\pi_1(Z)$ . Chacun de ces générateurs est la classe d'homotopie d'un lacet dans  $G \times Y^{(1)}$ . Rappelons que  $Y^{(1)}$  est le 1-squelette de  $Y$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

D'après la proposition 13.19, l'image par  $\pi$  du sous-espace  $G \times Y^{(1)}$  de  $G \times Y$  est homéomorphe au quotient  $Q = (G/H \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))/\sim$ , avec les identifications suivantes.

$$\begin{aligned} (gH, [0 : 1]) &\sim (g'H, [0 : 1]) \text{ si } gP^\alpha = g'P^\alpha \\ (gH, [1 : 0]) &\sim (g'H, [1 : 0]) \text{ si } gP^\beta = g'P^\beta \\ \forall [s : t] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{[0 : 1], [1 : 0]\}, (gH, [s : t]) &\sim (g'H, [-s : t]) \text{ si } gH = \sigma g'H, \end{aligned}$$

où  $\sigma \in M \setminus M_{\alpha=\beta}$  est tel que  $\text{Ad } \sigma(\mathfrak{l}_{[1:1]}) = \mathfrak{l}_{[-1:1]}$ , par exemple

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M.$$

Montrons qu'un générateur de  $\pi_1(Y)$  a une image par  $\pi_*$  triviale dans  $\pi_1(Z)$ . Considérons le lacet  $c$  suivant dans  $Q$ , dont la classe d'homotopie engendre  $\pi_*(\pi_1(Y))$ , effectuant une fois le tour du cercle  $Y^{(1)} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , composé des deux chemins

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] &\mapsto [H, [t : 1 - t]] \\ \text{et } t \in [0, 1] &\mapsto [H, [1 - t : -t]]. \end{aligned}$$

D'après les équivalences définissant  $Q$ , le lacet  $c$  est aussi la composée des deux chemins

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] &\mapsto [H, [t : 1 - t]] \\ \text{et } t \in [0, 1] &\mapsto [\sigma H, [1 - t : t]]. \end{aligned}$$

Fixons un chemin  $c'$  de  $H$  à  $\sigma H$  dans  $G/H$ . Alors le lacet  $c$  est homotope à la composée des quatre chemins

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] &\mapsto [H, [t : 1 - t]], \\ t \in [0, 1] &\mapsto [c'(t), [1 : 0]], \\ t \in [0, 1] &\mapsto [\sigma H, [1 - t : t]] \\ \text{et } t \in [0, 1] &\mapsto [c'(1 - t), [0 : 1]]. \end{aligned}$$

Or la composée des deuxième et troisième chemins est homotope à la composée

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] &\mapsto [H, [1 - t : t]] \\ \text{et } t \in [0, 1] &\mapsto [c'(t), [0 : 1]]. \end{aligned}$$

Ainsi le lacet  $c$  est homotope à zéro.

Montrons qu'un générateur de  $\pi_1(G)$  a une image par  $\pi_*$  triviale dans  $\pi_1(Z)$ . Considérons le lacet  $d$  suivant dans  $Q$ , dont la classe d'homotopie engendre  $\pi_*(\pi_1(G))$  :

$$\begin{aligned} d : [0, 1] &\rightarrow Q \\ t &\mapsto \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ 0 & \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix} H, [0 : 1] \right]. \end{aligned}$$

Ce lacet est homotope à la composée des trois chemins

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] &\mapsto [H, [t : 1 - t]], \\ t \in [0, 1] &\mapsto \left[ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ 0 & \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{array} \right) H, [1 : 0] \right] \\ \text{et } t \in [0, 1] &\mapsto [H, [1 - t : t]]. \end{aligned}$$

Le deuxième chemin est constant dans  $Q$ , ainsi le lacet  $d$  est homotope à zéro.

D'après le corollaire 13.21, l'application  $\pi_*$  est surjective, et nous venons de montrer que son image était triviale, donc l'espace  $Z$  est simplement connexe.  $\square$

Ce résultat peut sembler surprenant, étant donné que l'espace  $\text{Plats}(X)$  n'est pas simplement connexe, comme l'explique le lemme suivant.

**Lemme 13.23.** *L'espace  $\text{Plats}(X)$  des plats maximaux de l'espace symétrique de  $SL_3(\mathbb{R})$  a un groupe fondamental d'ordre 48.*

**Démonstration.** L'espace  $\text{Plats}(X)$  s'identifie à l'espace homogène  $G/T'$ , il a pour revêtement l'espace homogène  $G/A$ , et ce revêtement est de degré  $\text{Card } T'/A = \text{Card } M' = 24$ . Par ailleurs l'espace homogène  $G/A$  est homéomorphe à  $K \times N$ , il a un groupe fondamental isomorphe à celui de  $K = SO_3(\mathbb{R})$ , donc d'ordre 2. Ainsi l'espace  $\text{Plats}(X)$  a un groupe fondamental d'ordre 48.  $\square$

## 13.4 Le cas de $SL_4(\mathbb{R})$

Posons  $G = SL_4(\mathbb{R})$ ,  $K = SO_4(\mathbb{R})$  et  $A$  le sous-groupe de  $G$  des matrices diagonales à coefficients diagonaux strictement positifs. Soit  $M$  le centralisateur de  $A$  dans  $K$ , c'est-à-dire le sous-groupe fini de  $G$  constitué des matrices diagonales à coefficients diagonaux égaux à  $\pm 1$ .

Notons  $N$  le sous-groupe de  $G$  unipotent supérieur,  $B = MAN$  le sous-groupe de Borel standard, c'est-à-dire le sous-groupe triangulaire supérieur, et  $B_0 = AN$  sa composante neutre.

Notons de plus  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{k}$ ,  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{b}$  les algèbres de Lie de  $G$ ,  $K$ ,  $A$ ,  $N$  et  $B$  respectivement.

Tout d'abord, remarquons qu'il existe une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  abélienne maximale incluse dans  $\mathfrak{b}$  de dimension 4 :

$$\mathfrak{l}_0 = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

Puisque la dimension des sous-algèbres de Cartan est 3, la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{l}_0$  ne peut être limite de sous-algèbres de Cartan. Ainsi l'analogie du théorème 13.17 est incorrect pour le groupe  $SL_4(\mathbb{R})$ . D'après [WZ84], il s'agit (à conjugaison près) de la seule sous-algèbre abélienne maximale de  $\mathfrak{g}$  de dimension 4. Nous allons ainsi étudier les sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  abéliennes incluses dans  $\mathfrak{b}$  de dimension 3.

Notons  $X$  l'espace symétrique de  $G$ . Pour étudier la compactification de Chabauty de l'espace  $\text{Plats}(X)$  des plats de  $X$ , d'après le théorème 13.2, nous allons étudier les limites de sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . D'après la décomposition d'Iwasawa  $G = KAN$ , il suffit d'étudier les limites de sous-algèbres de Cartan incluses dans  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . Nous allons déterminer toutes les sous-algèbres abéliennes de dimension 3 de  $\mathfrak{b}$ .

Notons  $p_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{a}$  la projection sur  $\mathfrak{a}$  parallèlement à  $\mathfrak{n}$ .

Considérons les trois racines

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha : H &\mapsto H_{1,1} - H_{2,2}, \\ \beta : H &\mapsto H_{2,2} - H_{3,3} \\ \text{et } \gamma : H &\mapsto H_{3,3} - H_{4,4}, \end{aligned}$$

elles forment une base  $\Delta$  du système de racines  $\Sigma$  associé à la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{a}$ . Les racines positives correspondantes sont  $\Sigma^+ = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$ .

Pour toute partie  $I \subset \Delta$ , notons de plus  $\mathfrak{a}_I = \bigcap_{\delta \in I} \text{Ker } \delta$  et  $\mathfrak{a}^I = \bigoplus_{\delta \in I} \mathbb{R}H_{\delta}$  (l'orthogonal de  $\mathfrak{a}_I$  dans  $\mathfrak{a}$  pour la forme de Killing), ainsi que  $A_I = \exp \mathfrak{a}_I$  et  $A^I = \exp(\mathfrak{a}^I)$ . Notons  $\Sigma^{I,+}$  l'ensemble des racines positives s'écrivant comme somme de racines de  $I$ . Notons  $\mathfrak{n}^I = \bigoplus_{\delta \in \Sigma^{I,+}} \mathfrak{n}^{\delta}$ .

Notons les vecteurs

$$\begin{aligned} U_{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & U_{\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & U_{\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ U_{\alpha+\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & U_{\beta+\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{et } U_{\alpha+\beta+\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notons, pour toute racine  $\delta \in \Sigma$ , l'espace de racine  $\mathfrak{n}^{\delta} = \mathbb{R}U_{\delta}$  et le sous-groupe  $N^{\delta} = \exp \mathfrak{n}^{\delta}$ . Soit  $I \subset \Delta$ , notons  $\Sigma^{I,+}$  l'ensemble des racines positives s'écrivant comme somme de racines de  $I$ . Notons  $\mathfrak{n}^I = \bigoplus_{\delta \in \Sigma^{I,+}} \mathfrak{n}^{\delta}$  et  $\mathfrak{n}_I = \bigoplus_{\delta \in \Sigma \setminus \Sigma^{I,+}} \mathfrak{n}^{\delta}$ .

Nous considérerons toujours les projections orthogonales par rapport à la forme de Killing. En particulier, notons  $p_{\alpha,\gamma} : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{n}^{\alpha} \oplus \mathfrak{n}^{\gamma}$  la projection sur  $\mathfrak{n}^{\alpha} \oplus \mathfrak{n}^{\gamma}$  parallèlement à  $\mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\delta \in \Sigma \setminus \{\alpha,\gamma\}} \mathfrak{n}^{\delta}$ . Et, pour toute racine positive  $\delta \in \Sigma^+$ , notons  $p_{\delta} : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{n}^{\delta}$  la projection sur  $\mathfrak{n}^{\delta}$  parallèlement à  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_{\delta}$ .

Définissons, pour tout  $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  avec  $x$  et  $z$  non nuls, la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{l}_{[x:y:z]} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & ax & bx & c \\ 0 & 0 & ay & bz \\ 0 & 0 & 0 & az \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Et définissons, pour tout  $[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{l}_{[x:y:z:t]} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} : ax + by + cz + dt = 0 \right\}.$$

Définissons également, pour tout  $(y, t) \in \mathbb{R}^2$ , la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{l}_{\alpha, y, t} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & ay & at \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{et } \mathfrak{l}_{\gamma, y, t} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & at & c \\ 0 & 0 & ay & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Et, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , définissons la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{l}_{x, y} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & by & c \\ 0 & 0 & 0 & ax \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ce sont toutes des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  abéliennes de dimension 3 incluses dans  $\mathfrak{b}$ .

Pour toute paire de racines primitives distinctes  $\{\delta, \delta'\} \subset \Delta$ , notons  $\mathfrak{z}^{\delta, \delta'}$  l'algèbre de Lie dérivée du centralisateur de  $\mathfrak{a}_{\Delta \setminus \{\delta, \delta'\}}$  dans  $\mathfrak{g}$  :

$$\mathfrak{z}^{\beta, \gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{z}^{\alpha, \gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$

$$\text{et } \mathfrak{z}^{\alpha, \beta} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}),$$

et notons  $Z^{\beta, \gamma}$ ,  $Z^{\alpha, \gamma}$  et  $Z^{\alpha, \beta}$  les trois sous-groupes de Lie connexes de  $G$  d'algèbres de Lie  $\mathfrak{z}^{\beta, \gamma}$ ,  $\mathfrak{z}^{\alpha, \gamma}$  et  $\mathfrak{z}^{\alpha, \beta}$  respectivement.

Définissons de plus, pour tout  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , les trois sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$

abéliennes de dimension 2

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_{[x:y]}^{\alpha,\beta} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & ax & b & 0 \\ 0 & 0 & ay & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{z}^{\alpha,\beta} \cap \mathfrak{n}, \\ \mathfrak{l}^{\alpha,\gamma} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{z}^{\alpha,\gamma} \cap \mathfrak{n} \\ \text{et } \mathfrak{l}_{[x:y]}^{\beta,\gamma} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ax & b \\ 0 & 0 & 0 & ay \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{z}^{\beta,\gamma} \cap \mathfrak{n}. \end{aligned}$$

**Proposition 13.24.** *Soit  $\mathfrak{l}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  abélienne de dimension 3 incluse dans  $\mathfrak{b}$ . Alors il y a dix possibilités (mutuellement exclusives) :*

1. *soit il existe un unique  $b \in N$  tel que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a})$  ;*
2. *soit il existe une unique racine primitive  $\delta \in \Delta$  et un unique  $b \in N_\delta$  tels que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_\delta \oplus \mathfrak{n}^\delta)$  ;*
3. *soit il existe un unique  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et un unique  $b \in N_{\alpha,\beta}$  tels que*

$$\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_{\alpha,\beta} \oplus \mathfrak{l}_{[x:y]}^{\alpha,\beta});$$

4. *soit il existe un unique  $b \in N_{\alpha,\gamma}$  tel que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_{\alpha,\gamma} \oplus \mathfrak{l}^{\alpha,\gamma})$  ;*
5. *soit il existe un unique  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et un unique  $b \in N_{\beta,\gamma}$  tels que*

$$\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_{\beta,\gamma} \oplus \mathfrak{l}_{[x:y]}^{\beta,\gamma});$$

6. *soit il existe un unique  $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  avec  $x$  et  $z$  non nuls tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[x:y:z]}$  ;*
7. *soit il existe un unique  $(y, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{\alpha,y,t}$  ;*
8. *soit il existe un unique  $(y, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{\gamma,y,t}$  ;*
9. *soit il existe un unique  $[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[x:y:z:t]}$  ;*
10. *soit il existe un unique  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{x,y}$ .*

Ces sous-algèbres de Lie abéliennes sont toutes maximales, sauf  $\mathfrak{l}_{[x:y:z:t]}$  qui est incluse dans  $\mathfrak{l}_0$ .

**Démonstration.** Distinguons selon  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$  et  $p_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{l})$ .

1. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{a}$ , considérons une base de  $\mathfrak{l}$  constituée de trois éléments diagonalisables. Alors  $\mathfrak{l}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , il existe donc  $b \in G$  tel que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a})$ . Puisque  $\mathfrak{b}$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Borel contenant  $\mathfrak{l}$ , on peut supposer de plus que  $\text{Ad } b(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ , c'est-à-dire que  $b \in N_G(\mathfrak{b}) = B$ . Puisque  $MA$  normalise  $A$ , on peut supposer que  $b \in N$ . Et cet élément est unique car  $N \cap N_G(A) = \{e\}$ .

2. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$  est de dimension 2, remarquons que si  $X \in \mathfrak{b}$  est tel que  $\alpha(p_{\mathfrak{a}}(X)), \beta(p_{\mathfrak{a}}(X))$  et  $\gamma(p_{\mathfrak{a}}(X))$  soient tous les trois non nuls, alors le centralisateur de  $X$  dans  $\mathfrak{n}$  est trivial, donc par un argument de dimension  $X$  n'appartient pas à  $\mathfrak{l}$ . Ainsi il existe une unique racine  $\delta \in \Delta$  telle que  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{a}_{\delta}$ . Alors la projection  $\mathfrak{l}'$  de  $\mathfrak{l}$  sur la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{z}^{\Delta \setminus \{\delta\}}$  est abélienne diagonalisable de dimension au moins 2, donc il existe  $b' \in N \cap Z^{\Delta \setminus \{\delta\}}$  tel que  $\text{Ad } b'(\mathfrak{a}^{\Delta \setminus \{\delta\}}) = \mathfrak{l}'$ .
  - Si  $\delta = \alpha$ , il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $(H_{\beta} + xU_{\alpha+\beta} + yU_{\alpha+\beta+\gamma}, H_{\gamma} + yU_{\alpha+\beta+\gamma}, U_{\alpha})$  soit une base de  $\text{Ad } b'^{-1}(\mathfrak{l})$ . Définissons  $b'' = \exp(xU_{\alpha+\beta} + yU_{\alpha+\beta+\gamma}) \in N_{\alpha}$ , alors l'élément  $b = b'b'' \in N_{\alpha}$  est tel que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_{\alpha} \oplus \mathfrak{n}^{\alpha})$ . Par ailleurs  $b$  est unique, car le normalisateur de  $\mathfrak{a}_{\alpha} \oplus \mathfrak{n}^{\alpha}$  dans  $N$  est égal à  $AN^{\alpha}$ , et  $AN^{\alpha} \cap N_{\alpha} = \{e\}$ .
  - Si  $\delta = \alpha$ , il existe trois réels  $x, y$  et  $z$  tels que  $(H_{\alpha} + xU_{\alpha+\beta} + zU_{\alpha+\beta+\gamma}, H_{\gamma} + yU_{\beta+\gamma} + zU_{\alpha+\beta+\gamma}, U_{\beta})$  soit une base de  $\text{Ad } b'^{-1}(\mathfrak{l})$ . Définissons  $b'' = \exp(xU_{\alpha+\beta} + yU_{\beta+\gamma} + zU_{\alpha+\beta+\gamma}) \in N_{\beta}$ , alors l'élément  $b = b'b'' \in N_{\beta}$  est tel que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_{\beta} \oplus \mathfrak{n}^{\beta})$ . Par ailleurs  $b$  est unique, car le normalisateur de  $\mathfrak{a}_{\beta} \oplus \mathfrak{n}^{\beta}$  dans  $N$  est égal à  $AN^{\beta}$ , et  $AN^{\beta} \cap N_{\beta} = \{e\}$ .
  - Si  $\delta = \alpha$ , on montre comme dans le cas  $\delta = \alpha$  qu'il existe un unique  $b \in N_{\gamma}$  tel que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_{\gamma} \oplus \mathfrak{n}^{\gamma})$ .
3. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$  est de dimension 1, remarquons que si  $X \in \mathfrak{b}$  est tel que deux des trois réels  $\alpha(p_{\mathfrak{a}}(X)), \beta(p_{\mathfrak{a}}(X))$  et  $\gamma(p_{\mathfrak{a}}(X))$  soient non nuls, alors le centralisateur de  $X$  dans  $\mathfrak{n}$  est de dimension 1, donc  $X$  n'appartient pas à  $\mathfrak{l}$ . Ainsi commençons par le cas où  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{a}_{\alpha,\beta}$ , alors la projection  $\mathfrak{l}'$  de  $\mathfrak{l}$  sur la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{z}^{\alpha,\beta} \simeq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$  est abélienne, donc de dimension au plus 2. Soit  $X \in \mathfrak{l}$  dont la projection sur  $\mathfrak{z}^{\alpha,\beta}$  soit nulle, et dont la projection sur  $\mathfrak{a}$  soit  $H_{\gamma}$  : alors l'élément  $b = \exp(X - H_{\gamma}) \in N_{\alpha,\beta}$  est tel que  $X = \text{Ad } b(H_{\gamma})$ . Or le centralisateur de  $H_{\gamma}$  dans  $\mathfrak{n}$  est  $\mathfrak{n}^{\alpha,\beta} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{z}^{\alpha,\beta}$ , donc la sous-algèbre  $\mathfrak{l}'$  de  $\mathfrak{z}^{\alpha,\beta} \simeq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$  est abélienne, de dimension 2, incluse dans  $\mathfrak{n}$  : d'après la proposition 13.7, il existe un unique  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tel que  $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}'_{[x:y]}^{\alpha,\beta}$ . Puisque l'élément  $b$  normalise  $\mathfrak{l}'$ , on en déduit que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_{\alpha,\beta} \oplus \mathfrak{l}'_{[x:y]}^{\alpha,\beta})$ . Par ailleurs  $b$  est unique, car le normalisateur de  $\mathfrak{a}_{\alpha,\beta} \oplus \mathfrak{l}'_{[x:y]}^{\alpha,\beta}$  dans  $N$  est égal à  $N^{\alpha,\beta}$ , et  $N^{\alpha,\beta} \cap N_{\alpha,\beta} = \{e\}$ .
4. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{a}_{\alpha,\gamma}$ , alors la projection  $\mathfrak{l}'$  de  $\mathfrak{l}$  sur la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{z}^{\alpha,\gamma} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  est abélienne, donc de dimension au plus 2. Soit  $X \in \mathfrak{l}$  dont la projection sur  $\mathfrak{z}^{\alpha,\gamma}$  soit nulle, et dont la projection sur  $\mathfrak{a}$  soit  $H_{\beta}$  : alors l'élément  $b = \exp(X - H_{\beta}) \in N_{\alpha,\gamma}$  est tel que  $X = \text{Ad } b(H_{\beta})$ . Or le centralisateur de  $H_{\beta}$  dans  $\mathfrak{n}$  est  $\mathfrak{n}^{\alpha,\gamma} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{z}^{\alpha,\gamma}$ , donc la sous-algèbre  $\mathfrak{l}'$  de  $\mathfrak{z}^{\alpha,\gamma} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  est abélienne, de dimension 2, incluse dans  $\mathfrak{n}$ , donc  $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}'^{\alpha,\gamma}$ . Puisque l'élément  $b$  normalise  $\mathfrak{l}'$ , on en déduit que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_{\alpha,\gamma} \oplus \mathfrak{l}'^{\alpha,\gamma})$ . Par ailleurs  $b$  est unique, car le normalisateur de  $\mathfrak{a}_{\alpha,\gamma} \oplus \mathfrak{l}'^{\alpha,\gamma}$  dans  $N$  est égal à  $N^{\alpha,\gamma}$ , et  $N^{\alpha,\gamma} \cap N_{\alpha,\gamma} = \{e\}$ .
5. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{a}_{\beta,\gamma}$ , on montre comme dans le cas où  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{a}_{\alpha,\beta}$  qu'il existe un unique  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et un unique  $b \in N_{\beta,\gamma}$  tels que  $\mathfrak{l} = \text{Ad } b(\mathfrak{a}_{\beta,\gamma} \oplus \mathfrak{l}'_{[x:y]}^{\beta,\gamma})$ .
6. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \{0\}$  et  $p_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{l})$  est de dimension 1, soit  $X \in \mathfrak{l}$  tel que  $p_{\alpha,\gamma}(X) \neq 0$ , et soient  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tels que  $p_{\alpha}(X) = xU_{\alpha}$ ,  $p_{\beta}(X) = yU_{\beta}$  et  $p_{\gamma}(X) = zU_{\gamma}$ . Supposons ici que  $x$  et  $z$  sont non nuls, alors le centralisateur de  $X$  dans  $\mathfrak{n}$  est  $\mathfrak{l}_{[x:y:z]}$ , donc  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[x:y:z]}$ . Par ailleurs  $[x : y : z]$  est unique.
7. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \{0\}$  et  $p_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{l})$  est de dimension 1, soit  $X \in \mathfrak{l}$  tel que  $p_{\alpha,\gamma}(X) \neq 0$ , et soient  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tels que  $p_{\alpha}(X) = xU_{\alpha}$ ,  $p_{\beta}(X) = yU_{\beta}$  et  $p_{\gamma}(X) = zU_{\gamma}$ . Supposons

ici que  $x = 1$  et  $z = 0$ , alors le centralisateur de  $X$  dans  $\mathfrak{n}$  est  $\mathfrak{l}_{\alpha,y,t}$ , où  $t \in \mathbb{R}$  est tel que  $p_{\beta+\gamma}(X) = tU_{\beta+\gamma}$ . Ainsi  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{\alpha,y,t}$ , et  $(y, t) \in \mathbb{R}^2$  est unique.

8. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \{0\}$  et  $p_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{l})$  est de dimension 1, soit  $X \in \mathfrak{l}$  tel que  $p_{\alpha,\gamma}(X) \neq 0$ , et soient  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tels que  $p_{\alpha}(X) = xU_{\alpha}$ ,  $p_{\beta}(X) = yU_{\beta}$  et  $p_{\gamma}(X) = zU_{\gamma}$ . Supposons ici que  $x = 0$  et  $z = 1$ , alors le centralisateur de  $X$  dans  $\mathfrak{n}$  est  $\mathfrak{l}_{\gamma,y,t}$ , où  $t \in \mathbb{R}$  est tel que  $p_{\alpha+\beta}(X) = tU_{\alpha+\beta}$ . Ainsi  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{\gamma,y,t}$ , et  $(y, t) \in \mathbb{R}^2$  est unique.
9. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \{0\}$  et  $p_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{l})$  est de dimension 0, alors  $\mathfrak{l}$  est incluse dans la sous-algèbre de Lie abélienne  $\mathfrak{l}_0$  de dimension 4, donc il existe un unique  $[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[x:y:z:t]}$ .
10. Si  $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}) = \{0\}$  et  $p_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{l})$  est de dimension 2, considérons  $X, Y \in \mathfrak{l}$  tels que  $p_{\alpha,\gamma}(X) = U_{\alpha}$  et  $p_{\alpha,\gamma}(Y) = U_{\gamma}$ . Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $p_{\beta+\gamma}(X) = xU_{\beta+\gamma}$  et  $p_{\alpha+\beta}(Y) = yU_{\alpha+\beta}$ . Alors le centralisateur de  $X$  et  $Y$  dans  $\mathfrak{n}$  est  $\mathfrak{l}_{x,y}$ , de dimension 3, donc  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{x,y}$ . Et l'élément  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est unique.

Nous disposons alors d'un théorème analogue au théorème 13.17 pour  $SL_4(\mathbb{R})$ .

**Théorème 13.25.** *La compactification de Chabauty  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'espace des plats maximaux  $\text{Plats}(X)$  de l'espace symétrique  $X$  de  $SL_4(\mathbb{R})$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(SL_4(\mathbb{R}))$  des sous-groupes fermés connexes abéliens de dimension 3 inclus dans un sous-groupe de Borel.*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que toutes les sous-algèbres de Lie décrites dans la proposition 13.24 sont limites de sous-algèbres de Cartan. Soit  $\mathfrak{l}$  l'une de ces sous-algèbres de Lie.

1. Si  $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}$ , il n'y a rien à démontrer.
2. S'il existe une racine primitive  $\delta \in \Delta$  telle que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}_{\delta} \oplus \mathfrak{n}^{\delta}$ , alors la suite  $(\text{Ad exp}(nU_{\delta})(\mathfrak{a}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l}$ .
3. S'il existe  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}_{\alpha,\beta} \oplus \mathfrak{l}_{[x:y]}^{\alpha,\beta}$ , alors d'après le théorème 13.17 appliqué au sous-groupe  $Z^{\alpha,\beta} \simeq SL_3(\mathbb{R})$ , la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{l}_{[x:y]}^{\alpha,\beta}$  de  $\mathfrak{z}^{\alpha,\beta}$  (dont la sous-algèbre de Cartan standard est  $\mathfrak{a}^{\alpha,\beta}$ ) est la limite d'une suite  $(\text{Ad } g_n(\mathfrak{a}^{\alpha,\beta}))_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $g_n \in Z^{\alpha,\beta}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors la suite  $(\text{Ad } g_n(\mathfrak{a}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l}$ .
4. Si  $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}_{\alpha,\gamma} \oplus \mathfrak{l}_{\alpha,\gamma}$ , alors la suite  $(\text{Ad exp}(nU_{\alpha} + nU_{\gamma})(\mathfrak{a}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l}$ .
5. S'il existe  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}_{\beta,\gamma} \oplus \mathfrak{l}_{[x:y]}^{\beta,\gamma}$ , alors comme pour le cas  $\mathfrak{a}_{\alpha,\beta} \oplus \mathfrak{l}_{[x:y]}^{\alpha,\beta}$ , on montre que  $\mathfrak{l}$  est limite de sous-algèbres de Cartan.
6. S'il existe  $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  avec  $x$  et  $z$  non nuls tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[x:y:z]}$ , distinguons deux cas.
  - Si  $y$  est non nul, alors quitte à conjuguer  $\mathfrak{l}$  par un élément de  $A$  on peut supposer que  $[x : y : z] = [1 : 1 : 1]$ . Toute valeur d'adhérence de la suite de sous-algèbres de Cartan

$$(\text{Ad exp}(nU_{\alpha} + nU_{\beta} + nU_{\gamma})(\mathfrak{a}))_{n \in \mathbb{N}}$$

contient le vecteur

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad exp}(nU_{\alpha} + nU_{\beta} + nU_{\gamma}) \left( -\frac{1}{n}H_{\alpha} - \frac{1}{n}H_{\beta} - \frac{1}{n}H_{\gamma} \right) = U_{\alpha} + U_{\beta} + U_{\gamma},$$

et par ailleurs toute valeur d'adhérence de cette suite est incluse dans  $\mathfrak{n}$ , donc d'après la proposition 13.24 nous en déduisons que cette suite de sous-algèbres de Cartan converge vers  $\mathfrak{l}$ .



- Si  $y = 0$ , alors la suite de sous-algèbres de Lie  $\left(\mathfrak{l}_{[x:\frac{1}{n}:z]}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  converge vers  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[x:y:z]}$ . Ainsi d'après le point précédent  $\mathfrak{l}$  est limite de sous-algèbres de Cartan.
7. S'il existe  $(y, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{\alpha,y,t}$ , distinguons deux cas.
- Si  $y$  et  $t$  sont non nuls, alors quitte à conjuguer par  $A$  on peut supposer que  $y = t = 1$ . Définissons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'élément

$$b_n = \exp(nU_\alpha + nU_\beta + nU_{\beta+\gamma}) \in N.$$

Alors toute valeur d'adhérence de la suite de sous-algèbres de Cartan  $(\text{Ad } b_n(\mathfrak{a}))_{n \in \mathbb{N}}$  contient le vecteur

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n \left( -\frac{1}{n}H_\alpha - \frac{1}{n}H_\beta \right) = U_\alpha + U_\beta + U_{\beta+\gamma},$$

et par ailleurs toute valeur d'adhérence de cette suite est incluse dans  $\mathfrak{n}$ , donc d'après la proposition 13.24 nous en déduisons que cette suite de sous-algèbres de Cartan converge vers  $\mathfrak{l}$ .

- Si  $y$  ou  $t$  est nul, alors considérons deux suites réelles  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dont tous les termes sont non nuls, convergeant vers  $y$  et  $t$  respectivement. Alors la suite de sous-algèbres de Lie  $(\mathfrak{l}_{\alpha,y_n,t_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{\alpha,y,t}$ . Ainsi d'après le point précédent  $\mathfrak{l}$  est limite de sous-algèbres de Cartan.
8. S'il existe  $(y, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{\gamma,y,t}$ , alors comme dans le cas précédent on montre que  $\mathfrak{l}$  est limite de sous-algèbres de Cartan.
9. S'il existe  $[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[x:y:z:t]}$ , alors considérons l'action par conjugaison du sous-groupe

$$N_G(\mathfrak{l}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Si le rang de la matrice  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  est 2 on peut supposer que  $[x : y : z : t] = [1 : 0 : 0 : 1]$ , et si le rang est 1 on peut supposer que  $[x : y : z : t] = [0 : 0 : 1 : 0]$ .

- Si  $[x : y : z : t] = [1 : 0 : 0 : 1]$ , alors remarquons que la suite  $(\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[1:n:1]})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l}$ , or d'après le point précédent nous savons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{l}_{[1:n:1]}$  est limite de sous-algèbres de Cartan, donc c'est également le cas de  $\mathfrak{l}$ .
  - Si  $[x : y : z : t] = [0 : 0 : 1 : 0]$ , alors remarquons que la suite  $(\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{[1:0:n:1]})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l}$ , or d'après le point précédent nous savons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{l}_{[1:0:n:1]}$  est limite de sous-algèbres de Cartan, donc c'est également le cas de  $\mathfrak{l}$ .
10. S'il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{x,y}$ , distinguons deux cas.
- Si  $x$  et  $y$  sont non nuls, alors quitte à conjuguer par  $A$  on peut supposer que  $x = y = -1$ . Définissons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'élément

$$b_n = \exp(nU_\alpha + nU_\gamma + nU_{\alpha+\beta} + nU_{\beta+\gamma} + n^4U_{\alpha+\beta+\gamma}) \in N.$$

Alors toute valeur d'adhérence de la suite de sous-algèbres de Cartan  $(\text{Ad } b_n(\mathfrak{a}))_{n \in \mathbb{N}}$  contient les vecteurs

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n \left( \frac{1}{n} H_\alpha - \frac{1}{n} H_\beta + \frac{1}{n^3} H_\gamma \right) &= U_\alpha - U_{\beta+\gamma} \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad } b_n \left( -\frac{1}{n^3} H_\alpha - \frac{1}{n} H_\beta + \frac{1}{n} H_\gamma \right) &= U_\gamma - U_{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

et par ailleurs toute valeur d'adhérence de cette suite est incluse dans  $\mathfrak{n}$ , donc d'après la proposition 13.24 nous en déduisons que cette suite de sous-algèbres de Cartan converge vers  $\mathfrak{l}$ .

- Si  $x$  ou  $y$  est nul, alors considérons deux suites réelles  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dont tous les termes sont non nuls, convergeant vers  $x$  et  $y$  respectivement. Alors la suite de sous-algèbres de Lie  $(\mathfrak{l}_{x_n, y_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{x, y}$ . Ainsi d'après le point précédent  $\mathfrak{l}$  est limite de sous-algèbres de Cartan.

Nous avons donc montré que toutes les sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  abéliennes de dimension 3 incluses dans  $\mathfrak{b}$  sont limites de sous-algèbres de Cartan. D'après le théorème 13.2, on en déduit que la compactification de Chabauty  $\overline{\text{Plats}(X)}^{\mathcal{S}}$  de l'espace des plats maximaux  $\text{Plats}(X)$  de l'espace symétrique  $X$  de  $\text{SL}_4(\mathbb{R})$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(\text{SL}_4(\mathbb{R}))$  des sous-groupes fermés connexes abéliens de dimension 3 inclus dans un sous-groupe de Borel. □

### 13.5 Le cas d'autres groupes

Remarquons tout d'abord que l'analogie du théorème 13.17 est incorrect pour  $\text{SL}_m(\mathbb{R})$  si  $m \geq 4$  (nous l'avons déjà vu pour  $m = 4$ ), comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 13.26.** *Pour  $m \geq 4$ , il existe un sous-groupe de  $\text{SL}_m(\mathbb{R})$  connexe fermé abélien maximal inclus dans un sous-groupe de Borel qui ne soit pas limite de sous-groupes de Cartan.*

**Démonstration.** Considérons sous-groupe  $H_m$  de  $\text{SL}_m(\mathbb{R})$  triangulaire supérieur par blocs de tailles  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  et  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$

$$H_m = \left\{ \exp \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : M \in \mathcal{M}_{\lceil \frac{m}{2} \rceil, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Le sous-groupe fermé  $H_m$  est connexe, abélien, maximal, de dimension  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lceil \frac{m}{2} \rceil$ , inclus dans le sous-groupe de Borel standard. Pour  $m \geq 4$ , cette dimension est strictement supérieure à la dimension  $m - 1$  de  $A$ , donc ce sous-groupe ne peut être limite de conjugués de  $A$ . □

Si l'on ajoute la condition d'être de même dimension  $m - 1$  que le rang, alors nous avons le théorème 13.25 pour  $m = 4$ .

Plus généralement, si nous avons deux groupes de Lie  $G$  et  $G'$  semi-simples de centre fini ayant un nombre fini de composantes connexes et sans facteur compact, alors leur produit  $G \times G'$  l'est également. Par ailleurs, les sous-groupes de Cartan de  $G \times G'$  sont

les produits des sous-groupes de Cartan de  $G$  et  $G'$ , et de même pour les sous-groupes de Borel. Si les deux groupes  $G$  et  $G'$  sont tels que la compactification de Chabauty de leurs sous-groupes de Cartan est l'ensemble des sous-groupes abéliens fermés connexes de dimension le rang inclus dans un sous-groupe de Borel, alors leur produit  $G \times G'$  le vérifie également. Ainsi d'après la proposition 13.6 et les théorèmes 13.17 et 13.25, nous avons en particulier le théorème suivant.

**Théorème 13.27.** *Soit  $G$  un produit de copies de  $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ , de  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$  et de groupes de Lie de rang réel un, soit  $r$  le rang réel de  $G$ , et  $X$  l'espace symétrique de type non compact de  $G$ . La compactification de Chabauty  $\overline{\mathrm{Plats}(X)}^S$  de l'espace des plats maximaux  $\mathrm{Plats}(X)$  de  $X$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(G)$  des sous-groupes fermés connexes abéliens de dimension  $r$  inclus dans un sous-groupe de Borel.*

Par contre, l'analogue de ce théorème est incorrect pour  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$  si  $m \geq 10$ , comme l'explique le lemme suivant.

**Lemme 13.28.** *Pour  $m \geq 10$ , il existe un sous-groupe de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$  connexe fermé abélien de dimension  $m - 1$  inclus dans un sous-groupe de Borel qui ne soit pas limite de conjugués de  $A$ .*

**Démonstration.** L'espace des sous-groupes fermés connexes abéliens de dimension  $m - 1$  inclus dans le sous-groupe  $H_m$  (défini dans la démonstration précédente) s'identifie (via leurs algèbres de Lie) à la Grassmannienne des  $(m - 1)$  plans dans l'algèbre de Lie de  $H_m$ , donc est de dimension  $(m - 1) \left( \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lceil \frac{m}{2} \rceil - m + 1 \right)$ . Si  $m = 2p$  est pair, cette dimension est égale à  $2p^3 - 5p^2 + 4p - 1$ , et si  $m = 2p + 1$  est impair elle est égale à  $2p^3 - 2p^2$ . On constate que si  $m \geq 10$  cette dimension est supérieure à la dimension  $m^2 - m$  de l'espace des conjugués de  $A$ . Or c'est une sous-variété algébrique fermée de la Grassmannienne  $\mathcal{G}r_{m-1}(\mathfrak{sl}_m(\mathbb{R}))$  des  $(m - 1)$  plans de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{R})$  de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ , donc elle ne peut être entièrement incluse dans l'adhérence de Zariski du sous-espace des sous-algèbres de Cartan : en particulier, elle n'est pas entièrement incluse dans la compactification de Chabauty du sous-espace des sous-algèbres de Cartan.  $\square$

## 13.6 Comparaison avec le cas complexe étudié par Iliev, Manivel et Le Barbier Grunewald

Dans cette partie, nous décrivons les liens entre notre approche de la compactification de Chabauty de l'espace des plats maximaux des espaces symétriques de type non compact et les variétés de réductions étudiées par A. Iliev, L. Manivel et M. Le Barbier Grunewald (voir [IM05a], [IM05b], [LBG11b] et [LBG11a]).

Soit  $G = \underline{G}(\mathbb{C})$  le groupe des  $\mathbb{C}$ -points d'un groupe algébrique sur  $\mathbb{C}$  réductif connexe  $\underline{G}$ , et soit  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Considérons l'espace  $\mathcal{R}_0$  des sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Puisque le groupe  $G$  agit transitivement pour l'action adjointe sur  $\mathcal{R}_0$ , ce dernier s'identifie à l'espace homogène  $G/T'$ , où  $T'$  est le normalisateur d'une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  fixée  $\mathfrak{a}$ . Notons  $r$  le rang de  $G$ , c'est-à-dire la dimension de  $\mathfrak{a}$ .

A. Iliev, L. Manivel et M. Le Barbier Grunewald considèrent l'adhérence de Zariski  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{R}_0$  dans la grassmannienne des  $r$ -plans de  $\mathfrak{g}$ , qu'ils appellent la variété des réductions de  $G$  : c'est la compactification de Chabauty de l'espace homogène  $\mathcal{R}_0$  sous l'action de  $G$ .

Si  $G$  est défini sur  $\mathbb{R}$  et déployé sur  $\mathbb{R}$ , supposons que  $\mathfrak{a}$  soit la complexifiée d'une sous-algèbre de Cartan réelle de  $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ , et notons  $X$  l'espace symétrique de type non compact de  $G$ . Alors l'espace homogène  $\mathcal{R}_{\mathbb{R},0} = G(\mathbb{R})/T'(\mathbb{R})$  est naturellement inclus dans  $\mathcal{R}_0 = G/T'$ , par l'application qui à une sous-algèbre de Lie réelle de  $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$  associe son produit tensoriel avec  $\mathbb{C}$ . Ainsi la compactification de Chabauty  $\overline{\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}}^{an} = \overline{\text{Plats}(X)}^S$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R},0} = \text{Plats}(X)$  est un fermé, pour la topologie analytique réelle, de la variété des réductions  $\mathcal{R}$ . Notons de plus  $\overline{\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}}^{Zar}$  l'adhérence de Zariski réelle de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}$  dans  $\mathcal{R}$ .

Remarquons tout d'abord que  $G(\mathbb{R})/T'(\mathbb{R})$  ne s'identifie pas au sous-espace des sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$  définies sur  $\mathbb{R}$ . Considérons par exemple la sous-algèbre  $\mathfrak{l}$  de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{l} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -z \\ z & 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\},$$

c'est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  définie sur  $\mathbb{R}$ , mais qui n'est pas la complexifiée d'une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ . Par contre, nous avons le résultat suivant.

**Lemme 13.29.** *La compactification de Chabauty  $\overline{\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}}^{an}$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}$  est incluse dans la sous-variété semi-algébrique réelle de  $\mathcal{R}$  constituée des sous-algèbres  $\mathfrak{l}$  de  $\mathfrak{g}$  définies sur  $\mathbb{R}$  et pour lesquelles le spectre de l'action adjointe de  $\mathfrak{l}(\mathbb{R})$  sur  $\mathfrak{g}$  est réel.*

**Démonstration.** Si  $\mathfrak{l} \in \mathcal{R}_0$ , il est immédiat que  $\mathfrak{l} \in \mathcal{R}_{\mathbb{R},0}$  si et seulement si  $\mathfrak{l}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $\text{Sp}(\text{ad } \mathfrak{l}(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}$ . Cette condition sur  $\mathfrak{l}$  est semi-algébrique sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\overline{\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}}^{an}$  est inclus dans cette sous-variété semi-algébrique réelle de  $\mathcal{R}$ .  $\square$

Par contre, contrairement au cas complexe, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 13.30.** *L'adhérence de Zariski réelle  $\overline{\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}}^{Zar}$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}$  contient strictement l'adhérence  $\overline{\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}}^{an}$  pour la topologie analytique réelle.*

**Démonstration.** Remarquons tout d'abord que ceci est vrai pour  $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$ . L'espace  $\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}$  des plats maximaux de  $G(\mathbb{R})$  est le sous-espace de  $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$  constitué des classes d'homothétie d'éléments de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  dont les deux valeurs propres (opposées) sont réelles et différentes de 0.

L'adhérence  $\overline{\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}}^{an}$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}$  pour la topologie analytique réelle est le sous-espace de  $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$  constitué des classes d'homothétie d'éléments de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  dont les deux valeurs propres sont réelles.

L'adhérence  $\overline{\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}}^{Zar}$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}$  pour la topologie de Zariski réelle est tout  $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ .

Dans le cas d'un groupe  $G$  complexe réductif connexe général, considérons une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ . Le même argument montre que les adhérences de Zariski réelle et analytique réelle de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}$  sont distinctes.  $\square$

Énonçons certains résultats de A. Iliev, L. Manivel et M. Le Barbier Grünewald et leurs conséquences sur  $\overline{\mathcal{R}_{\mathbb{R},0}}^{Zar}$ . Rappelons qu'un élément de  $\mathfrak{g}$  est dit régulier si son centralisateur dans  $\mathfrak{g}$  est de dimension minimale. Une sous-algèbre abélienne  $\mathfrak{l}$  de  $\mathfrak{g}$  est dite régulière s'il existe un élément de  $\mathfrak{l}$  régulier dont le centralisateur soit égal à  $\mathfrak{l}$ .

**Théorème 13.31** (Le Barbier Grünewald). *Toute sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$  de  $\mathfrak{g}$  régulière appartient au lieu lisse de  $\mathcal{R}$ . (Voir [LBG11b, Theorem 3.7].)*  $\square$

La démonstration donne le même résultat pour  $\overline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R},0}^{\text{Zar}}$ .

**Théorème 13.32** (Le Barbier Grunewald). *Toute sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{l} \in \mathcal{R}$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique de  $G$ . (Voir [LBG11b, Corollary 5.3].)*  $\square$

Le même résultat pour  $\overline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R},0}^{\text{Zar}}$  en découle, et en particulier pour  $\overline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R},0}^{\text{an}}$ .

**Proposition 13.33** (Le Barbier Grunewald). *Si la  $G$ -orbite de  $\mathfrak{l} \in \mathcal{R}$  est fermée, alors  $\mathfrak{l}$  est constituée d'éléments nilpotents. (Voir [LBG11b, Proposition 5.5].)*  $\square$

La démonstration donne le même résultat pour  $\overline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R},0}^{\text{Zar}}$ , et en particulier pour  $\overline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R},0}^{\text{an}}$ .

**Proposition 13.34** (Iliev-Manivel). *Pour  $G = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$ , alors  $\mathcal{R}$  est lisse. (Voir [IM05b, Proposition 9].)*  $\square$

La démonstration donne le même résultat pour  $\overline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R},0}^{\text{Zar}}$ . Par contre, la compactification de Chabauty  $\overline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R},0}^{\text{an}}$  de l'espace des plats maximaux de l'espace symétrique de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$  n'est pas lisse.

**Proposition 13.35** (Iliev-Manivel). *Pour  $G = \text{PGL}_4(\mathbb{C})$ , alors le lieu singulier de  $\mathcal{R}$  est la réunion de deux orbites isomorphes à  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ . (Voir [IM05b, Proposition 9].)*  $\square$

La démonstration donne le même résultat pour  $\overline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R},0}^{\text{Zar}}$ .

## 14 Compactification géométrique de l'espace des plats maximaux d'espaces symétriques et d'immeubles

### 14.1 Immeubles

Dans cette partie, nous rappelons les définitions élémentaires des immeubles (voir [AB08], [Ron89], [KL97] et [GP01]), ainsi que des immeubles topologiques (voir [BS87b]).

Soit  $X = \mathbb{S}^d$  une sphère euclidienne,  $X = \mathbb{R}^d$  un espace euclidien ou  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^d$  un espace hyperbolique réel, et soit  $W$  un groupe discret d'isométries de  $X$  engendré par un ensemble fini  $S$  de réflexions par rapport à des hyperplans (voir la figure 17). Supposons de plus que  $W$  soit *essentiel*, c'est-à-dire :

- si  $X = \mathbb{S}^d$ , on suppose que l'action linéaire de  $W$  induite sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  ne laisse pas de sous-espace vectoriel invariant non trivial ;
- si  $X = \mathbb{R}^d$  ou  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^d$ , on suppose que l'action de  $W$  sur  $X$  est cocompacte.

Considérons la structure de complexe polyédral  $\Sigma$  sur  $X$  (voir par exemple [BH99, Ch. I.7, p. 97]) dont les cellules maximales ouvertes sont les composantes connexes du complémentaire de la réunion des hyperplans des réflexions de  $W$ . Appelons *chambres de Weyl* (fermées) les adhérences de ces cellules maximales ouvertes, et *facettes* (de Weyl, ouvertes) les intersections non vides de chambres de Weyl.

Nous supposons que la partie génératrice  $S$  de  $W$  est l'ensemble des réflexions par rapport aux facettes de codimension 1 d'une chambre de Weyl fixée  $C_0$ . Appelons *type*

d'une facette  $F$  de  $C_0$  l'ensemble des réflexions  $s$  de  $S$  telles que  $F$  soit incluse dans l'hyperplan de  $s$ . Si  $F$  est une facette quelconque de  $X$ , soit  $w$  un élément de  $W$  tel que  $wF \subset C_0$ , et appelons type de  $F$  le type de  $wF$ .

Appelons *complexe polyédral  $S$ -typé* un complexe polyédral (dont les cellules polyédrales sont de courbure constante  $-1$ ,  $0$  ou  $1$ , voir par exemple [BH99, Ch. I.7, p. 97]) muni d'une application qui à chaque cellule associe une partie de  $S$ , qui soit décroissante pour l'inclusion. Appelons *morphisme* (de complexes polyédraux  $S$ -typés) tout morphisme de complexes polyédraux (c'est-à-dire envoyant cellules sur cellules isométriquement) préservant le type.

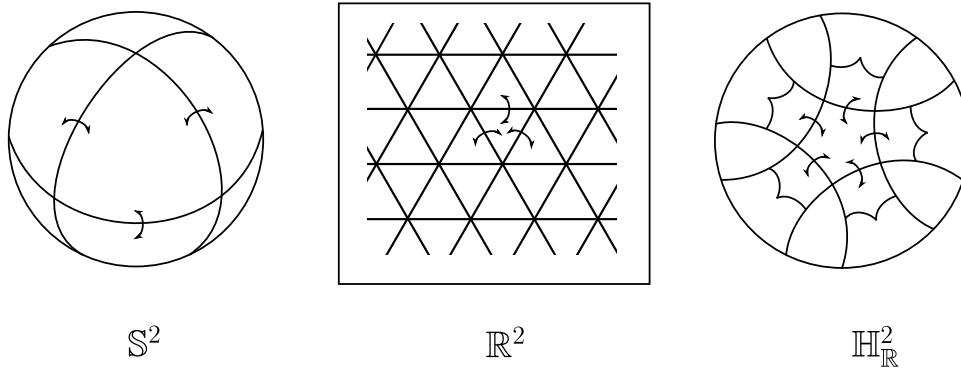


FIGURE 17 – Exemples d'espaces modèles  $(X, W)$ .

Un *immeuble* de type  $(X, W)$  est un complexe polyédral  $S$ -typé  $\mathcal{I}$ , muni de la distance de longueur associée (voir [BH99, Ch. I.7, p. 97]) et muni d'une collection de sous-complexes isomorphes isométriquement à  $\Sigma$  appelés *appartements*, vérifiant les propriétés suivantes.

1. Si  $x$  et  $y$  sont deux cellules de  $\mathcal{I}$ , il existe un appartement contenant  $x$  et  $y$ .
2. Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont deux appartements, il existe un isomorphisme de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{A}'$  fixant  $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ .

Sauf mention contraire, nous considérerons toujours le système d'appartements maximal pour un immeuble. L'immeuble est appelé *sphérique* si  $X = \mathbb{S}^d$ , *euclydien* si  $X = \mathbb{R}^d$  et *hyperbolique* si  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^d$ . Appelons chambres de Weyl et facettes de Weyl de  $\mathcal{I}$  les chambres de Weyl et facettes de Weyl des appartements de  $\mathcal{I}$ . On dit que l'immeuble est *épais* si toute facette de codimension 1 est contenue dans au moins trois chambres de Weyl. On dit que la dimension de  $\mathcal{I}$  est  $d$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , nous noterons  $\mathcal{I}^{<k>}$  l'ensemble des facettes de dimension  $k$ .

Par exemple, soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif, et soit  $G$  le groupe des  $\mathbb{K}$ -points d'un  $\mathbb{K}$ -groupe algébrique linéaire connexe réductif  $\underline{G}$ . Considérons une réalisation géométrique  $\mathcal{I}$  du complexe simplicial dont la subdivision barycentrique est l'ensemble partiellement ordonné par l'inclusion inverse des sous-groupes paraboliques de  $G$  définis sur  $\mathbb{K}$ . Alors  $\mathcal{I}$  est un immeuble sphérique, appelé l'*immeuble sphérique de  $(\underline{G}, \mathbb{K})$* . Le groupe  $G$  agit par conjugaison sur ses sous-groupes paraboliques définis sur  $\mathbb{K}$ , et agit sur l'immeuble  $\mathcal{I}$  par automorphismes.

**Exemple.** Soit  $\underline{G} = \mathrm{SL}_m$ , soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif et soit  $G = \underline{G}(\mathbb{K})$ . Les sous-groupes paraboliques de  $G$  définis sur  $\mathbb{K}$  sont les sous-groupes propres de  $G$  définis sur  $\mathbb{K}$  triangulaires par blocs, à conjugaison dans  $\mathbb{K}$  près. Les appartements de l'immeuble sphérique de  $(\underline{G}, \mathbb{K})$  correspondent aux sous-groupes paraboliques contenant un sous-groupe parabolique minimal donné. Ils correspondent donc aux *croix* (non ordonnées) de  $\mathbb{K}^n$ , c'est-à-dire aux ensembles de  $n$  droites vectorielles génériques de  $\mathbb{K}^n$ .

Un *immeuble topologique* (voir [BS87b]) est un immeuble  $\mathcal{I}$  dont l'espace  $\mathcal{I}^{<0>}$  des sommets est muni d'une topologie telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , l'espace des facettes de type donné ayant  $k$  sommets soit fermé pour la topologie induite par  $(\mathcal{I}^{<0>})^k$ . Rappelons en effet qu'une cellule polyédrale est par définition l'enveloppe convexe dans l'espace modèle  $X$  d'un nombre fini de points, elle est donc en particulier déterminée par ses sommets. Notons  $\mathcal{T}_{dist}$  la topologie sur  $\mathcal{I}$  induite par la distance polyédrale, elle n'est pas localement compacte a priori. La topologie sur l'espace des chambres de Weyl permet de définir une nouvelle topologie  $\mathcal{T}_{lc}$ , plus grossière que  $\mathcal{T}_{dist}$ , sur  $\mathcal{I}$ , où une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$  si

1. il existe une suite de chambres de Weyl  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  nous ayons  $x_n \in C_n$ , et telle que la suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une chambre de Weyl  $C$  contenant  $x$ ;
2. si l'on désigne pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $\phi_n$  l'isométrie préservant le type de  $C_n$  sur  $C$ , alors la suite  $(\phi_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$  dans  $C$ .

Dès que l'espace  $\mathcal{I}^{(0)}$  des sommets de  $\mathcal{I}$  est (localement) compact, la topologie  $\mathcal{T}_{lc}$  est (localement) compacte. Un *automorphisme d'immeuble topologique* est un automorphisme de l'immeuble  $\mathcal{I}$  qui est également un homéomorphisme pour la topologie  $\mathcal{T}_{lc}$ .

Par exemple, soit  $\mathbb{K}$  un *corps local* (c'est-à-dire un corps commutatif non trivialement valué, complet et localement compact, donc isomorphe à  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  ou  $\mathbb{F}_q((t))$ , avec  $p$  premier et  $q$  une puissance d'un nombre premier, voir par exemple [Ser68, Chapitre II]), et soit  $G$  le groupe des  $\mathbb{K}$ -points d'un  $\mathbb{K}$ -groupe algébrique linéaire connexe réductif  $\underline{G}$ . Soit  $\mathcal{I}$  l'immeuble sphérique de  $(\underline{G}, \mathbb{K})$ , alors le groupe  $G$  agit transitivement sur les sommets de  $\mathcal{I}^{<0>}$  de type fixé, de stabilisateur un sous-groupe parabolique maximal. Ainsi l'espace  $\mathcal{I}^{<0>}$  s'identifie à la réunion disjointe  $\sqcup_i G/P_i$ , où les  $P_i$  sont les sous-groupes paraboliques maximaux contenant un sous-groupe parabolique minimal fixé : munissons  $\mathcal{I}^{<0>}$  de la topologie induite par cette réunion disjointe finie de variétés projectives, c'est en particulier un espace compact. Cela définit une structure d'immeuble topologique compact sur  $\mathcal{I}$ .

**Théorème 14.1.** *Un immeuble euclidien  $\mathcal{I}$  est un espace CAT(0) complet. (Voir [AB08, Theorem 11.16, p.555].)*

Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, ou un immeuble euclidien localement fini. Son bord à l'infini  $\partial_\infty X$  est naturellement muni d'une structure d'immeuble sphérique  $\mathcal{I}$  (voir [AB08, § 11.8], [BGS85]). L'espace  $\mathcal{I}^{<0>}$  des sommets de  $\mathcal{I}$  est inclus dans  $\partial_\infty X$ , munissons-le de la topologie compacte induite par celle de  $\partial_\infty X$ . Cela définit une structure d'immeuble topologique compact sur  $\mathcal{I}$ , et la topologie  $\mathcal{T}_{lc}$  sur  $\mathcal{I}$  est celle de la sphère  $\partial_\infty X$ .

## 14.2 Distances angulaires dans un espace CAT(0)

On pourra trouver plus de détails sur les distances angulaires dans [BGS85] et [BH99]. Soit  $X$  un espace métrique CAT(0) complet. Notons  $\partial_\infty X$  le bord CAT(0) de l'espace  $X$ , et  $\overline{X}^g = X \cup \partial_\infty X$  la compactification géodésique de  $X$  (voir la partie 2.3). Si  $x \in X$  et  $\xi \in \partial_\infty X$ , notons  $[x, \xi[$  l'unique rayon géodésique issu de  $x$  et allant à  $\xi$ .

Si  $p, q, r$  sont trois points deux à deux distincts de  $X$ , notons  $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$  un triangle de comparaison de  $(p, q, r)$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  euclidien, c'est-à-dire  $d(p, q) = d(\overline{p}, \overline{q})$ ,  $d(q, r) = d(\overline{q}, \overline{r})$  et  $d(r, p) = d(\overline{r}, \overline{p})$ . Définissons alors l'*angle de comparaison* en  $p$  entre  $q$  et  $r$ , noté  $\overleftarrow{\angle}_p(q, r)$ , comme l'angle euclidien non orienté entre  $[\overline{p}, \overline{q}]$  et  $[\overline{p}, \overline{r}]$  (voir la figure 18).

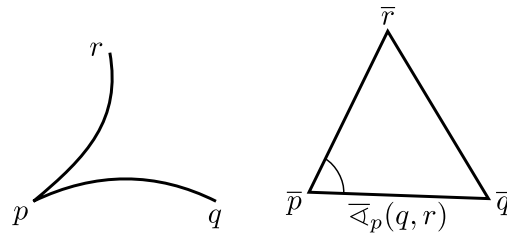


FIGURE 18 – L'angle de comparaison.

Pour tout  $t > 0$  inférieur ou égal à  $d(p, q)$  et à  $d(p, r)$ , notons  $q_t$  le point de  $[p, q]$  à distance  $t$  de  $p$ , et  $r_t$  le point de  $[p, r]$  à distance  $t$  de  $p$ . Définissons alors l'*angle de comparaison au rayon  $t$*  en  $p$  entre  $q$  et  $r$ , noté  $\overleftarrow{\angle}_{p,t}(q, r)$ , comme l'angle de comparaison  $\overleftarrow{\angle}_p(q_t, r_t)$  en  $p$  entre  $q_t$  et  $r_t$ . Il est également défini par la formule

$$\overleftarrow{\angle}_{p,t}(q, r) = 2 \arcsin \left( \frac{d(q_t, r_t)}{2t} \right),$$

et en particulier est continu en  $(q, r)$ . Remarquons que l'angle de comparaison au rayon  $t$  au point  $p$  se définit également si  $q$  et  $r$  appartiennent au bord à l'infini de  $X$ . De plus, d'après [BH99, Proposition 3.1, p. 184], la fonction  $t \mapsto \overleftarrow{\angle}_{p,t}(q, r)$  est croissante.

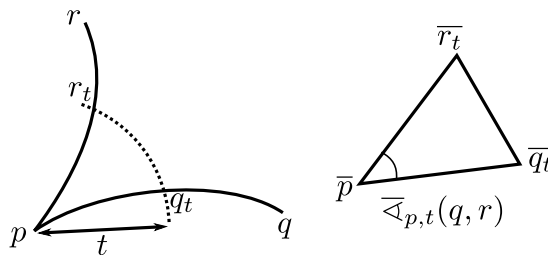


FIGURE 19 – L'angle de comparaison au rayon  $t$ .

Soient  $p \in X$  et  $q, r \in \overline{X}^g$  distincts de  $p$ . On appelle *angle visuel en  $p$*  entre  $q$  et  $r$  la quantité

$$\sphericalangle_p(q, r) = \lim_{t \rightarrow 0} \overleftarrow{\angle}_{p,t}(q, r).$$

Soient  $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ . On appelle *distance angulaire* entre  $\xi$  et  $\eta$  la quantité

$$\sphericalangle(\xi, \eta) = \sup_{p \in X} \sphericalangle_p(\xi, \eta),$$



c'est une distance sur  $\partial_\infty X$ .

La distance angulaire est reliée aux angles de comparaison à grand rayon de la manière suivante : si  $\xi$  et  $\eta$  sont deux points de  $\partial_\infty X$ , alors  $\overline{\angle}_{x_0, r}(\xi, \eta) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \angle(\xi, \eta)$  (voir [BGS85, Lemma 4.4, p. 36]). On appelle la distance de longueur associée à  $\angle$  sur  $\partial_\infty X$  la *distance de Tits*  $d_{Tits}$  : elle est définie, pour tous  $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ , comme la borne inférieure des  $L(c)$  (éventuellement  $+\infty$ ), où  $c$  est une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\partial_\infty X$  telle que  $c(0) = \xi$  et  $c(1) = \eta$ , et où

$$L(c) = \sup_{0=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} = 1} \sum_{i=0}^{k-1} \angle(c(t_i), c(t_{i+1})) \in [0, +\infty].$$

L'hypothèse CAT(0) implique que la somme des angles de comparaison d'un triangle est inférieure ou égale à  $\pi$ .

**Lemme 14.2.** *Pour tous  $p \in X$ ,  $q, r \in \overline{X}^g$  distincts de  $p$  et  $t > 0$  inférieur ou égal à  $d(p, q)$  et à  $d(p, r)$ , nous avons*

$$\overline{\angle}_{p, t}(q, r) + \overline{\angle}_{q, t}(r, p) + \overline{\angle}_{r, t}(p, q) \leq \pi.$$

**Démonstration.** La monotonie de l'angle visuel assure que  $\overline{\angle}_{p, t}(q, r) \leq \overline{\angle}_p(q, r)$ ,  $\overline{\angle}_{q, t}(r, p) \leq \overline{\angle}_q(r, p)$  et  $\overline{\angle}_{r, t}(p, q) \leq \overline{\angle}_r(p, q)$ . Ainsi, nous avons l'inégalité

$$\overline{\angle}_{p, t}(q, r) + \overline{\angle}_{q, t}(r, p) + \overline{\angle}_{r, t}(p, q) \leq \overline{\angle}_p(q, r) + \overline{\angle}_q(r, p) + \overline{\angle}_r(p, q) = \pi.$$

□

Rappelons que, d'après la partie 2.3, un système fondamental de voisinages d'un point  $\xi = [c]$  du bord  $\partial_\infty X$  est donnée par

$$U(r, \varepsilon, \xi) = \{x \in \overline{X}^g : d(x, c(0)) \geq r \text{ et } d(p_{B(c(0), r)}(x), c(r)) \leq \varepsilon\},$$

pour  $r > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , où  $p_{B(c(0), r)}(x)$  désigne le projeté de  $x$  sur la boule fermée  $B(c(0), r)$ .

**Lemme 14.3.** *Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $X$  telle que  $d(x_0, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , et soit  $\xi \in \partial_\infty X$ . La suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\xi$  si et seulement si*

$$\forall r > 0, \overline{\angle}_{x_0, r}(y_n, \xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Démonstration.** Supposons que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\xi$ . Fixons  $r > 0$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous savons que  $y_n \in U(r, \varepsilon, \xi)$  pour  $n$  assez grand, donc que

$$\overline{\angle}_{x_0, r}(y_n, \xi) = 2 \arcsin \left( \frac{d(p_{B(x_0, r)}(y_n), c(r))}{2r} \right) \leq 2 \arcsin \left( \frac{\varepsilon}{2r} \right).$$

Ainsi  $\overline{\angle}_{x_0, r}(y_n, \xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Réciproquement, fixons  $r > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Si  $\overline{\angle}_{x_0, r}(y_n, \xi) \leq$

$2 \arcsin(\frac{\varepsilon}{2r})$  pour  $n$  assez grand, alors  $y_n \in U(r, \varepsilon, \xi)$ . Ainsi la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\xi$ . □

### 14.3 Limites de fermés dans un espace CAT(0)

Soit  $X$  un espace métrique CAT(0) complet et localement compact. Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble non vide de parties fermées non vides de  $X$ , stable par isométries, vérifiant les deux propriétés suivantes.

1. Considérons le sous-espace de  $\mathcal{F}(X) \times X$ , muni de la topologie produit, constitué des éléments  $P$  de  $\mathcal{P}$  pointés en n'importe quel point de  $P$ . Demandons que ce sous-espace soit fermé dans  $\mathcal{F}(X) \times X$ , et que le groupe  $\text{Isom}(X)$  des isométries de  $X$  agisse cocompactement dessus.
2. Pour tout  $P \in \mathcal{P}$  et tout  $\xi \in \partial_\infty X$ , il existe  $\eta \in \partial_\infty P$  opposé à  $\xi$  dans  $\partial_\infty X$ , c'est-à-dire tel qu'il existe une géodésique de  $X$  dont les extrémités soient  $\xi$  et  $\eta$ .

Voici plusieurs familles d'exemples où ces hypothèses sont vérifiées. Dans chacun de ces cas  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des plats maximaux de  $X$ , et le bord à l'infini  $\partial_\infty X$  est naturellement muni d'une structure d'immeuble sphérique, ce qui implique la condition d'opposition 2.

- $X$  est un espace symétrique de type non compact.
- $X$  est la réalisation géométrique d'un immeuble euclidien localement fini dont le groupe d'isométries agit fortement transitivement.
- $X$  est un espace CAT(-1) dont le groupe d'isométries agit cocompactement sur les géodésiques pointées de  $X$ .

Un autre exemple est lorsque  $X$  est un immeuble hyperbolique localement fini (voir [Bou97], [GP01]) où le groupe d'isométries agit fortement transitivement, et où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des appartements de  $X$ . Dans ce cas, puisque l'espace  $X$  est CAT(-1), deux points distincts de  $\partial_\infty X$  sont toujours opposés.

**Lemme 14.4.** *Soient  $P \in \mathcal{P}$  et  $x_0 \in P$ . Soient  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $X$  convergeant vers  $\xi \in \partial_\infty X$  et  $\eta \in \partial_\infty P$  opposé à  $\xi$ . Alors, pour tout  $r > 0$ , la suite  $(\overline{\alpha}_{y_n, r}(x_0, \eta))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.*

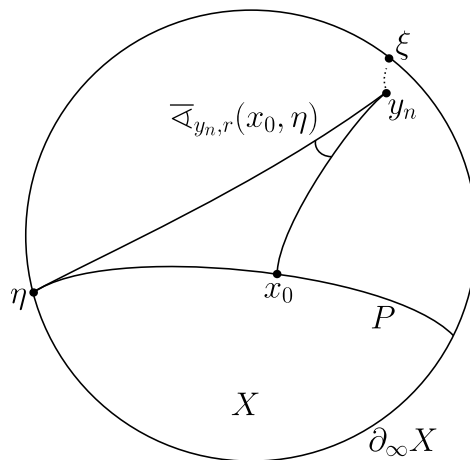


FIGURE 20 – Le lemme 14.4.

**Démonstration.** Fixons une géodésique  $\gamma$  allant de  $\eta$  à  $\xi$ , et fixons  $r > 0$ . Soit  $x'_0$  le projeté de  $x_0$  sur  $\gamma$ , montrons tout d'abord que la suite  $(\overline{\angle}_{y_n,r}(x'_0, \eta))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 (voir la figure 21).

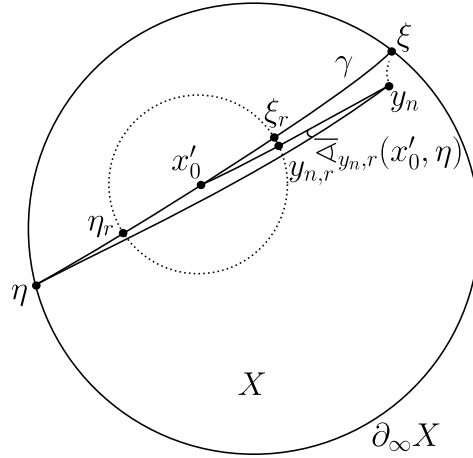


FIGURE 21 – L'angle  $\overline{\angle}_{y_n,r}(x'_0, \eta)$

Puisque la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\xi$ , d'après le lemme 14.3, la suite  $(\overline{\angle}_{x_0,r}(y_n, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

Puisque la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\xi$ , d'après le lemme 14.3, la suite  $(\overline{\angle}_{x'_0,r}(y_n, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $y_{n,r}$  le point de  $[x'_0, y_n]$  à distance  $r$  de  $x'_0$ ,  $\xi_r$  le point de  $[x'_0, \xi]$  à distance  $r$  de  $x'_0$  et  $\eta_r$  le point de  $[x'_0, \eta]$  à distance  $r$  de  $x'_0$ . Alors la suite  $(y_{n,r})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\xi_r$ . Donc la suite

$$\overline{\angle}_{x'_0,r}(y_n, \eta) = 2 \arcsin \left( \frac{d(y_{n,r}, \eta_r)}{2r} \right)$$

converge, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , vers

$$\pi = \overline{\angle}_{x'_0,r}(\xi, \eta) = 2 \arcsin \left( \frac{d(\xi_r, \eta_r)}{2r} \right).$$

Soit  $t > r$ , dans le triangle constitué des points  $x'_0$ ,  $y_n$  et  $\eta_t$ , d'après le lemme 14.2, nous avons

$$\overline{\angle}_{y_n,r}(x'_0, \eta_t) \leq \pi - \overline{\angle}_{x'_0,r}(y_n, \eta_t) = \pi - \overline{\angle}_{x'_0,r}(y_n, \eta).$$

Or, lorsque  $t \in \mathbb{N}$  tend vers  $+\infty$ , la suite  $(\eta_t)_{t > r}$  tend vers  $\eta$ , donc  $\overline{\angle}_{y_n,r}(x'_0, \eta) \leq \pi - \overline{\angle}_{x'_0,r}(y_n, \eta)$ , ce qui montre le premier résultat voulu.

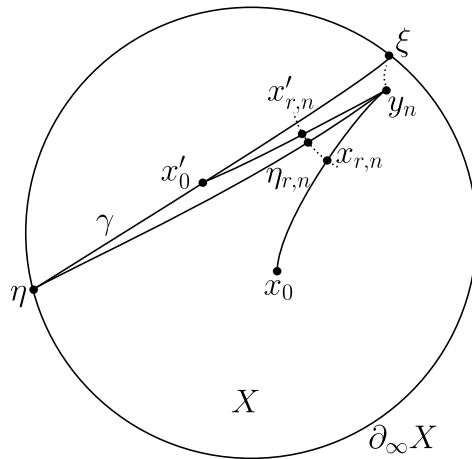


FIGURE 22 – Les points  $x_{r,n}$ ,  $x'_{r,n}$  et  $\eta_{r,n}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $x_{r,n}$  (resp.  $x'_{r,n}$ ,  $\eta_{r,n}$ ) le point de  $[y_n, x_0]$  (resp.  $[y_n, x'_0]$ ,  $[y_n, \eta]$ ) à distance  $r$  de  $y_n$  (voir la figure 22), de sorte que

$$\bar{\alpha}_{y_n, r}(x_0, \eta) = 2 \arcsin \left( \frac{d(x_{r,n}, \eta_{r,n})}{2r} \right)$$

$$\text{et } \bar{\alpha}_{y_n, r}(x'_0, \eta) = 2 \arcsin \left( \frac{d(x'_{r,n}, \eta_{r,n})}{2r} \right). \quad (1)$$

Puisque  $d(x_0, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , la convexité de la distance montre que

$$d(x_{r,n}, x'_{r,n}) \leq \frac{r}{\min(d(y_n, x_0), d(y_n, x'_0))} d(x_0, x'_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi par inégalité triangulaire, par l'assertion initiale et par la formule (1), nous avons

$$d(x_{r,n}, z_{r,n}) \leq d(x_{r,n}, x'_{r,n}) + d(x'_{r,n}, z_{r,n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc la suite  $(\bar{\alpha}_{y_n, r}(x_0, \eta))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0. □

**Théorème 14.5.** *Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{P}$  dont la distance à un point base de  $X$  tend vers l'infini, telle que la suite  $(\partial_\infty P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F$  dans l'espace  $\mathcal{F}(\partial_\infty X)$  des fermés de  $\partial_\infty X$ . Alors la suite  $(\overline{P_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F$  dans l'espace  $\mathcal{F}(\overline{X^g})$  des fermés de  $\overline{X^g}$ .*

**Démonstration.** Puisque la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  part à l'infini, toute valeur d'adhérence de la suite  $(\overline{P_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est contenue dans  $\partial_\infty X$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\zeta \in \partial_\infty X$ . Puisque le groupe des isométries de  $X$  agit cocompactement sur l'espace des éléments de  $\mathcal{P}$  pointés, on peut supposer qu'il existe  $P \in \mathcal{P}$ ,  $x \in P$  et une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'isométries de  $X$  telle que la suite  $(g_n \cdot P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $P$  dans  $\mathcal{F}(X)$  et que la suite  $(g_n \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$  dans  $X$ .

Quitte à extraire, supposons que la suite  $(y_n = g_n \cdot x)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un point  $\xi$  de  $\partial_\infty X$ . En effet, cette suite part à l'infini dans  $X$  :

$$d(x, y_n) = d(g_n^{-1} \cdot x, x) \geq d(x_n, x) - d(g_n^{-1} \cdot x, x_n) \geq d(P_n, x) - d(x, g_n \cdot x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

D'après la seconde hypothèse faite sur  $\mathcal{P}$ , considérons  $\eta \in \partial_\infty P$  qui soit opposé à  $\xi$ . D'après le lemme 14.4 appliqué à l'élément  $P$  de  $\mathcal{P}$ , au point base  $x \in P$ , à la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et au point  $\eta \in \partial_\infty P$ , on sait que, pour tout  $r > 0$ , la suite  $(\overline{\varphi}_{y_n, r}(x, \eta))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0. Fixons  $r > 0$ . Puisque la suite  $(g_n \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$  et comme la distance de  $y_n$  à  $x$  tend vers l'infini, on en déduit que la suite  $(\overline{\varphi}_{y_n, r}(g_n \cdot x_n, \eta))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

Puisque la suite  $(g_n \cdot P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $P$  dans  $\mathcal{F}(X)$ , choisissons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  un élément  $\eta_n \in \partial_\infty P_n$  tel que la suite  $(g_n \cdot \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\eta$  dans  $\partial_\infty X$ . Alors la suite  $(\overline{\varphi}_{y_n, r}(g_n \cdot x_n, g_n \cdot \eta_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $g_n^{-1}$  est une isométrie, on sait que  $\overline{\varphi}_{y_n, r}(g_n \cdot x_n, g_n \cdot \eta_n)$  est égal à  $\overline{\varphi}_{x, r}(x_n, \eta_n)$ . Par ailleurs, puisque la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\zeta$ , d'après le lemme 14.3, la suite  $(\overline{\varphi}_{x, r}(x_n, \zeta))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0. Donc sur la sphère de rayon  $r$  centrée en  $x$ , les intersections avec les trois rayons géodésiques  $[x_0, x_n[$ ,  $[x_0, \eta_n[$  et  $[x_0, \zeta[$  convergent vers un même point lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ainsi  $\overline{\varphi}_{x, r}(\zeta, \eta_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , et ce pour tout  $r > 0$ . D'après le lemme 14.3, la suite  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(\partial_\infty P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\zeta$ . Or par hypothèse, cette limite appartient à  $F$ . Donc toute valeur d'adhérence de la suite  $(\overline{P_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est contenue dans  $F$ . L'autre inclusion étant claire, on en déduit que la suite  $(\overline{P_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F$  dans l'espace  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$  des fermés de  $\overline{X}^g$ .  $\square$

## 14.4 Compactification géométrique de l'espace des appartements marqués d'un immeuble sphérique topologique

### 14.4.1 Définition de la compactification

Soit  $\mathcal{I}$  un immeuble sphérique topologique compact (voir la partie 14.1) de dimension  $d$ . Fixons un appartement  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{I}$ . Rappelons qu'un morphisme de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{I}$  désigne ici un morphisme de complexes polyédraux préservant le type. Appelons *appartement marqué* de  $\mathcal{I}$  tout morphisme de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$ , dont l'image est un appartement de  $\mathcal{I}$ .

Notons  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  l'ensemble de ces appartements marqués, et considérons l'ensemble  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  de tous les morphismes de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$ . Cette notation est motivée par le fait qu'un morphisme de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$  est un appartement marqué si et seulement s'il est injectif (voir [AB08, Proposition 4.59, p.193]).

Un tel morphisme de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$  est caractérisé par les images des chambres de Weyl de  $\mathcal{A}$ , qui sont indexées par le groupe de Weyl  $W$  de  $G$  (une fois fixée une chambre de Weyl, dite fondamentale, de  $\mathcal{A}$ ). Munissons l'espace  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  de la topologie induite par la topologie produit sur l'espace compact  $(\mathcal{I}^{<d>})^W$ . Cette topologie coïncide avec la topologie compacte-ouverte pour la topologie  $\mathcal{T}_{lc}$  sur  $\mathcal{I}$ . Un élément  $f$  de  $(\mathcal{I}^{<d>})^W$  est un morphisme si, pour toutes chambres de Weyl  $C, C'$  de  $\mathcal{A}$  dont l'intersection soit une facette non vide de type  $I$ , l'intersection  $f(C) \cap f(C')$  soit une facette non vide de même type  $I$ . C'est un nombre fini de conditions fermées, donc l'espace  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  est compact. On appelle *compactification géométrique* de l'espace  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  des appartements marqués de  $\mathcal{I}$  l'adhérence  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  de cet espace dans l'espace compact  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ . Nous allons décrire cette compactification dans le cas de l'immeuble sphérique de  $\text{SL}_3$  sur un corps local  $\mathbb{K}$ .

Définissons également la compactification géométrique de l'espace des appartements (non marqués) : notons  $\text{App}(\mathcal{I})$  l'espace des appartements de  $\mathcal{I}$ . On appelle *compactification géométrique* de l'espace  $\text{App}(\mathcal{I})$  des appartements (non marqués) de  $\mathcal{I}$  l'adhérence  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  de cet espace dans l'espace compact des images de l'appartement  $\mathcal{A}$  par les morphismes de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$ , muni de la topologie induite par la topologie de Chabauty sur l'espace  $\mathcal{F}(\mathcal{I}, \mathcal{T}_c)$  des fermés de l'espace  $\mathcal{I}$  muni de la topologie  $\mathcal{T}_c$ .

L'application d'oubli du marquage est l'application de  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  dans  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  qui à un morphisme de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$  associe son image. Elle est continue, surjective et équivariante pour l'action du groupe des automorphismes d'immeuble topologique de  $\mathcal{I}$ , et ses fibres sont finies.

#### 14.4.2 Le cas du type $A_1^m$

Si  $\mathcal{I}$  est un immeuble sphérique compact de rang 1, l'espace des sommets de  $\mathcal{I}$  est un espace compact  $\mathcal{I}^{<0>}$ , et le système complet des appartements marqués de  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des couples de points distincts de  $\mathcal{I}^{<0>}$ . La compactification géométrique  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  de cet espace est simplement l'ensemble des couples quelconques de  $\mathcal{I}^{<0>}$ , c'est-à-dire  $(\mathcal{I}^{<0>})^2$ . Autrement formulé, la compactification géométrique  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  de l'espace des appartements marqués de  $\mathcal{I}$  est l'espace  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  de tous les morphismes de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{I}$ .

Et l'ensemble des appartements (non marqués) de  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des paires de points distincts de  $\mathcal{I}^{<0>}$ , dont la compactification géométrique  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  est l'ensemble des paires et des singletons de  $\mathcal{I}^{<0>}$ , c'est-à-dire le quotient de  $(\mathcal{I}^{<0>})^2$  par l'involution diagonale.

De plus, soient deux immeubles sphériques topologiques  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{I}'$  sont tels que  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g = \text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  et  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}', \mathcal{I}')}^g = \text{Mor}(\mathcal{A}', \mathcal{I}')$ . L'espace des appartements de l'immeuble joint  $\mathcal{I} * \mathcal{I}'$  est le produit des espaces d'appartements de  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{I}'$ , et de même l'espace des chambres de Weyl de  $\mathcal{I} * \mathcal{I}'$  est le produit des espaces de chambres Weyl de  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{I}'$ . L'immeuble joint  $\mathcal{I} * \mathcal{I}'$  vérifie alors la même propriété, à savoir que

$$\begin{aligned} \overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A} * \mathcal{A}', \mathcal{I} * \mathcal{I}')}^g &= \overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g \times \overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}', \mathcal{I}')}^g \\ &= \text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) \times \text{Mor}(\mathcal{A}', \mathcal{I}') \\ &= \text{Mor}(\mathcal{A} * \mathcal{A}', \mathcal{I} * \mathcal{I}'). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi le théorème suivant.

**Théorème 14.6.** *Soit  $\mathcal{I}$  un immeuble sphérique topologique de type  $A_1^m$  (par exemple l'immeuble sphérique de  $\text{SL}_2(\mathbb{K})^m$ , où  $\mathbb{K}$  est un corps local), alors la compactification géométrique  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  de l'espace  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  des appartements marqués de  $\mathcal{I}$  est l'espace  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  de tous les morphismes de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$ .  $\square$*

#### 14.4.3 Le cas de l'immeuble sphérique de $\text{SL}_3$

Soit  $\mathbb{K}$  un corps local, soit  $G = \text{SL}_3(\mathbb{K})$  et soit  $\mathcal{I}$  l'immeuble sphérique topologique de  $(\text{SL}_3, \mathbb{K})$ . Rappelons qu'un appartement de  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des sous-groupes parabo-

liques définis sur  $\mathbb{K}$  contenant un tore maximal  $\mathbb{K}$ -déployé. Se donner une tore maximal  $\mathbb{K}$ -déployé équivaut à se donner une *croix* de  $\mathbb{K}^3$ , c'est-à-dire un ensemble de trois droites linéairement indépendantes de  $\mathbb{K}^3$ . Soit  $\mathcal{A}$  l'appartement standard de  $\mathcal{I}$ , correspondant à la croix canonique de  $\mathbb{K}^3$ . Un appartement est marqué si on choisit un sous-groupe parabolique minimal, ce qui revient à choisir un ordre sur la croix de  $\mathbb{K}^3$ .

**Théorème 14.7.** *Pour  $\mathcal{I}$  l'immeuble sphérique topologique de  $(\mathrm{SL}_3, \mathbb{K})$ , la compactification géométrique  $\overline{\mathrm{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  de l'espace  $\mathrm{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  des appartements marqués de  $\mathcal{I}$  est l'espace  $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  de tous les morphismes de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{I}$ .*

**Démonstration.** Considérons le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathbb{K}^3$ , alors l'immeuble sphérique  $\mathcal{I}$  de  $G$  est le graphe des drapeaux de  $\mathbb{K}^3$ . La topologie sur le sous-espace de  $\mathcal{I}^{<0>}$  constitué des sommets de  $\mathcal{I}$  de type droite est celle de  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ , et la topologie sur le sous-espace de  $\mathcal{I}^{<0>}$  constitué des sommets de  $\mathcal{I}$  de type plan est celle de l'espace des plans de  $\mathbb{K}^3$ , donc par dualité s'identifie à  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{3*})$ , où  $\mathbb{K}^{3*}$  désigne l'espace vectoriel dual de  $\mathbb{K}^3$ .

Se donner un élément  $f$  de  $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ , c'est-à-dire un morphisme  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$ , correspond à se donner trois droites  $(d_1, d_2, d_3)$  de  $\mathbb{K}^3$  et de trois plans  $(p_1, p_2, p_3)$  de  $\mathbb{K}^3$  vérifiant les conditions d'incidence de l'appartement standard, c'est-à-dire :

$$p_1 \subset d_2, p_1 \subset d_3, p_2 \subset d_1, p_2 \subset d_3, p_3 \subset d_1 \text{ et } p_3 \subset d_2. \quad (2)$$

Les droites de  $\mathbb{K}^3$  sont les points de  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ , et les plans de  $\mathbb{K}^3$  sont les droites de  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$  : ces relations d'incidence sont celles du triangle de la figure 23.

L'espace  $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  s'identifie donc naturellement (et nous ferons cette identification dans ce qui suit) à la sous-variété algébrique de  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)^3 \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^{3*})^3$  définie par 6 équations que nous expliciterons plus tard, qui correspondent aux 6 relations d'incidence (2). La variété projective  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)^3 \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^{3*})^3$  est de dimension 12, et la sous-variété  $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  est définie par 6 équations homogènes de degré 2.

La variété algébrique  $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  est la réunion disjointe des strates suivantes, que l'on peut trouver exhaustivement en comptant le nombre de droites distinctes et le nombre de plans distincts.

- L'ouvert  $\mathrm{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  des morphismes injectifs (ou des appartements marqués) : voir la figure 23.

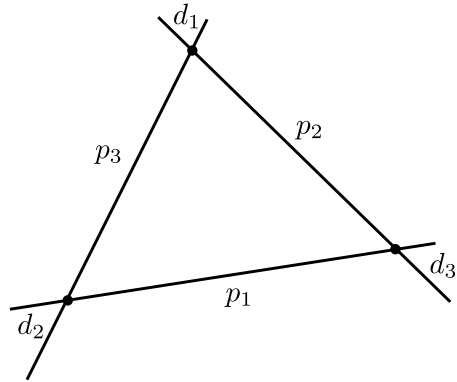


FIGURE 23 – La strate  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  : les configuration injectives.

- Les trois sous-espaces

$$\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{i,j} = \{f \in \text{Mor}'(\mathcal{A}, \mathcal{I}) : d_i = d_j \neq d_k \text{ et } p_i = p_j \neq p_k\},$$

où  $(i, j, k)$  décrit les permutations circulaires de  $(1, 2, 3)$  : voir la figure 24.

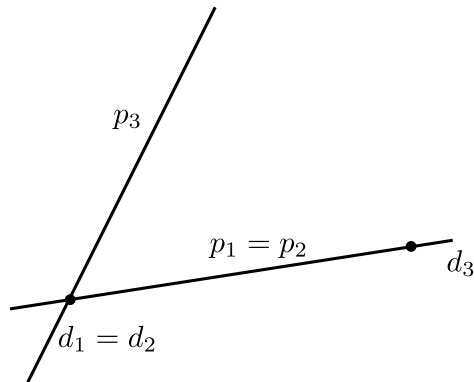


FIGURE 24 – La strate  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{1,2}$ .

- Les deux « tripodes »

$$\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_d = \{f \in \text{Mor}'(\mathcal{A}, \mathcal{I}) : d_1 = d_2 = d_3 \\ \text{et } p_1, p_2, p_3 \text{ deux à deux distincts}\}$$

$$\text{et } \text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_p = \{f \in \text{Mor}'(\mathcal{A}, \mathcal{I}) : p_1 = p_2 = p_3 \\ \text{et } d_1, d_2, d_3 \text{ deux à deux distincts}\},$$

voir la figure 25.



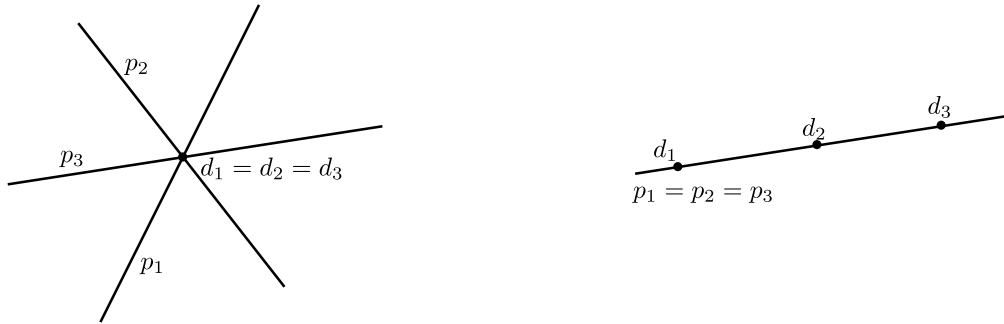


FIGURE 25 – Les strates  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_d$  et  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_p$  : les tripodes.

- Les trois sous-espaces

$$\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{d_i} = \{f \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) : p_1 = p_2 = p_3 \text{ et } d_j = d_k \neq d_i\},$$

où  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  : voir la figure 26.

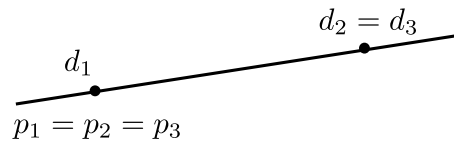


FIGURE 26 – La strate  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{d_1}$ .

- Les trois sous-espaces

$$\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{p_i} = \{f \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) : d_1 = d_2 = d_3 \text{ et } p_j = p_k \neq p_i\},$$

où  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  : voir la figure 27.

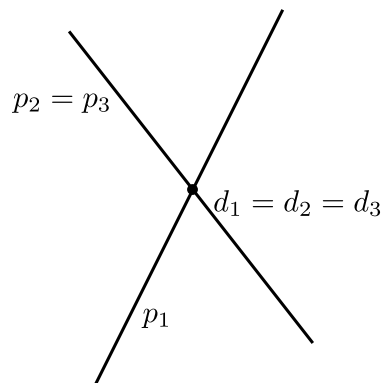


FIGURE 27 – La strate  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{p_1}$ .

- Le sous-espace des drapeaux complets :

$$\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{p,d} = \{f \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) : d_1 = d_2 = d_3 \text{ et } p_1 = p_2 = p_3\},$$

voir la figure 28.

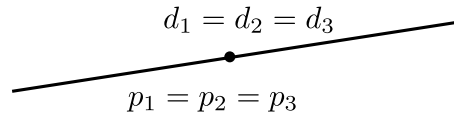


FIGURE 28 – La strate  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{p,d}$  : les drapeaux complets.

Chaque strate est une sous-variété analytique de  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)^3 \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^{3*})^3$ . Le groupe  $G$  agit transitivement sur la strate  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ , et le stabilisateur du plat marqué standard  $\text{id} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$  est le sous-groupe diagonal  $T \subset G$ , c'est le groupe des  $\mathbb{K}$ -points d'un tore (maximal)  $\mathbb{K}$ -déployé de dimension 2. Ainsi la strate  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  est diffeomorphe analytiquement à la variété homogène  $G/T$ , donc est de dimension  $8 - 2 = 6$ .

Montrons que les autres strates sont de dimension strictement inférieure à 6. Le groupe  $G$  agit transitivement sur chaque strate, donc il suffit pour ces strates d'en déterminer le stabilisateur d'un élément quelconque. Par exemple pour la strate  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{1,2}$ , considérons l'élément  $f$  défini par  $d_1 = d_2 = \mathbb{K}e_1$ ,  $d_3 = \mathbb{K}e_3$ ,  $p_1 = p_2 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_3$  et  $p_3 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2$ . Alors le stabilisateur de  $f$  dans  $G$  est le sous-groupe

$$G_f = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} a & d & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{K}, abc = 1 \right\},$$

de dimension 3, donc la strate  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{1,2}$  est de dimension 5.

On montre de même que les strates  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_d$  et  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_p$  sont de dimension 5, que les strates des tripodes  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{d_i}$  et  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{p_i}$  sont de dimension 4, et que la strate des drapeaux complets  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{p,d}$  est de dimension 3.

Calculons le rang de la matrice jacobienne des équations (2, p. 111) en un élément quelconque  $(d_1^0, d_2^0, d_3^0, p_1^0, p_2^0, p_3^0)$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)^3 \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^{3*})^3$ . Considérons plutôt un relevé de cet élément dans  $(\mathbb{K}^3 \setminus \{0\})^3 \times (\mathbb{K}^{3*} \setminus \{0\})^3$ , que nous noterons également  $(d_1^0, d_2^0, d_3^0, p_1^0, p_2^0, p_3^0)$  pour ne pas alourdir les notations. Notons de plus  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la dualité entre  $\mathbb{K}^3$  et  $\mathbb{K}^{3*}$ , ainsi la condition d'incidence  $d_i \subset p_j$  équivaut à l'égalité

$$\langle d_i, p_j \rangle = 0.$$

Les six équations d'incidence (2) amènent à définir l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{K}^3)^3 \times (\mathbb{K}^{3*})^3 &\rightarrow \mathbb{K}^6 \\ x = (d_1, d_2, d_3, p_1, p_2, p_3) &\mapsto (\langle d_i, p_j \rangle)_{i \neq j}, \end{aligned}$$

dont l'image dans  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)^3 \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^{3*})^3$  de l'image réciproque de  $\{0\}$  est  $\text{Mor}'(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ .

Sa différentielle en  $x^0 = (d_1^0, d_2^0, d_3^0, p_1^0, p_2^0, p_3^0)$  est égale à

$$\begin{aligned} Df_{x^0} : (\mathbb{K}^3)^3 \times (\mathbb{K}^{3*})^3 &\rightarrow \mathbb{K}^6 \\ x = (d_1, d_2, d_3, p_1, p_2, p_3) &\mapsto (\langle d_i^0, p_j \rangle + \langle d_i, p_j^0 \rangle)_{i \neq j}. \end{aligned}$$

Montrons que, si  $\mathbb{K}d_1^0 = \mathbb{K}d_2^0 = \mathbb{K}d_3^0$  et  $\mathbb{K}p_1^0 = \mathbb{K}p_2^0 = \mathbb{K}p_3^0$ , alors le rang de  $Df_{x^0}$  est égal à 5, et que sinon ce rang est maximal égal à 6.

Considérons une relation de dépendance linéaire entre les 6 formes linéaires  $(Df_{x^0,ij})_{i \neq j}$  composantes de  $Df_{x^0}$  : soient 6 scalaires  $(\lambda_{ij})_{i \neq j} \in \mathbb{K}^6$  tels que  $\sum_{i \neq j} \lambda_{ij} Df_{x^0,ij} = 0$ . En particulier, pour tout  $d_1 \in \mathbb{K}^3$ , nous avons

$$\sum_{i \neq j} \lambda_{ij} Df_{x^0,ij}(d^1, 0, 0, 0, 0, 0) = \lambda_{12} \langle d_1, p_2^0 \rangle + \lambda_{13} \langle d_1, p_3^0 \rangle = 0,$$

d'où  $\lambda_{12} p_2^0 + \lambda_{13} p_3^0 = 0$ . On montre de même pour toute permutation  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$  :

$$\lambda_{ij} p_j^0 + \lambda_{ik} p_k^0 = 0 \text{ et } \lambda_{ij} d_j^0 + \lambda_{ik} d_k^0 = 0.$$

- Si  $\mathbb{K}d_1^0 = \mathbb{K}d_2^0 = \mathbb{K}d_3^0$  et  $\mathbb{K}p_1^0 = \mathbb{K}p_2^0 = \mathbb{K}p_3^0$ , alors pour tout  $\lambda_{12} \in \mathbb{K}$  les autres coefficients sont uniquement déterminés par  $\lambda_{12}$ . Par conséquent, le rang de  $Df_{x^0}$  est égal à  $6 - 1 = 5$ .
- Sinon, par exemple si  $\mathbb{K}p_2^0 \neq \mathbb{K}p_3^0$ , alors  $\lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$ , puis on déduit que tous les coefficients sont nuls. Ainsi le rang de  $Df_{x^0}$  est égal à 6.

D'après le critère jacobien (voir [Bou67, §5.11.7]), en tout point  $x^0$  de  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  appartenant à une strate différente de  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{p,d}$ , la sous-variété  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  est lisse de dimension 12 dans  $(\mathbb{K}^3 \setminus \{0\})^3 \times (\mathbb{K}^{3*} \setminus \{0\})^3$ , ou encore de dimension 6 dans  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)^3 \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^{3*})^3$ . Or si  $x^0$  appartient à une strate différente de  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ , cette strate est lisse en  $x^0$  et de dimension strictement inférieure à 6. Ainsi aucun voisinage de  $x^0$  dans  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  n'est inclus dans  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ , donc  $x^0$  appartient à l'adhérence  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  de la strate  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ .

Par ailleurs, la strate des drapeaux  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{p,d}$  est incluse dans  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  : en effet c'est la seule strate fermée, et puisque  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  est compacte, on en déduit que cette strate est incluse dedans.

En conclusion, nous avons montré l'égalité  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) = \overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$ . Nous avons également montré que  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) \setminus \text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})_{p,d}$  est une sous-variété lisse de la variété projective  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)^3 \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^{3*})^3$  de dimension 6.  $\square$

De plus, la strate de dimension maximale  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  est homogène sous l'action algébrique du groupe algébrique irréductible  $G$ , donc cette strate est irréductible. Par ailleurs elle est dense dans la variété algébrique projective  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  pour la topologie de Zariski comme pour la topologie analytique, donc la compactification  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  est une variété algébrique projective irréductible.

#### 14.4.4 Le cas d'autres immeubles

Si l'on considère le groupe  $G = \text{SL}_4(\mathbb{K})$ , alors l'analogie du théorème 14.7 est incorrect. En effet l'espace des appartements marqués  $\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$  de  $\mathcal{I}$  est l'espace des croix ordonnées de  $\mathbb{K}^4$ , donc peut se voir comme l'espace des tétraèdres (numérotés) de  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$ . Notons  $d_1, \dots, d_4$  les 4 sommets du tétraèdre,  $p_{12}, \dots, p_{34}$  ses 6 droites et  $h_{123}, \dots, h_{234}$  ses 4 plans. L'espace des tétraèdres est de dimension 12.

Considérons la strate où  $d_1, \dots, d_4$  sont deux à deux distincts,  $p_{12}, \dots, p_{34}$  sont tous égaux et  $h_{123}, \dots, h_{234}$  sont deux à deux distincts (voir la figure 29). Cette strate est un

ouvert non vide d'une sous-variété algébrique de dimension 12 de  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ , donc elle ne peut être entièrement incluse dans l'adhérence de Zariski de l'espace des appartements marqués qui est également de dimension 12. En particulier, cette strate n'est pas entièrement incluse dans la compactification géométrique de l'espace des appartements marqués de  $\mathcal{I}$ .

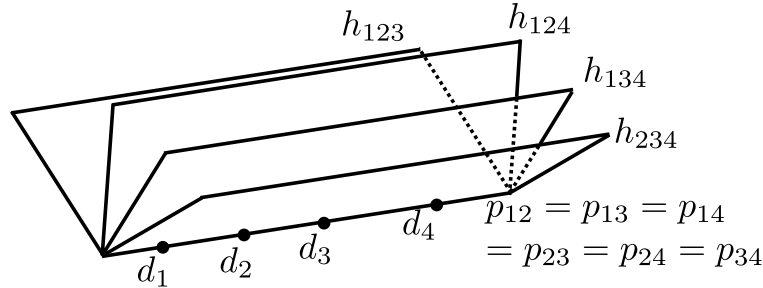


FIGURE 29 – Une strate de dimension 12.

Et, pour tout  $m \geq 4$ , l'immeuble sphérique de  $\text{SL}_4(\mathbb{K})$  est un sous-immeuble de  $\text{SL}_m(\mathbb{K})$ , donc cette même construction donne une autre strate ayant la même dimension que la strate des appartements marqués.

### 14.5 Compactification géométrique de l'espace des plats maximaux des espaces symétriques de type non compact et des immeubles euclidiens

Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, ou un immeuble euclidien localement fini. Posons  $G = \text{Isom}(X)$  le groupe des isométries de  $X$  (automorphismes préservant le type si  $X$  est un immeuble), et supposons si  $X$  est un immeuble que  $G$  agisse fortement transitivement sur  $X$ . Notons  $\text{Plats}(X)$  l'ensemble des plats maximaux de  $X$  (i.e. l'ensemble des appartements si  $X$  est un immeuble), muni de la topologie de Chabauty induite par l'espace  $\mathcal{F}(X)$  des fermés de  $X$ , et muni de l'action de  $G$  à gauche. Fixons  $P_0 \in \text{Plats}(X)$  un plat maximal de  $X$ .

L'espace  $X$  est  $\text{CAT}(0)$ , notons  $\overline{X}^g$  sa compactification géodésique (voir la partie 2.3). Considérons le plongement  $G$ -équivariant

$$\begin{aligned} \text{Plats}(X) &\rightarrow \mathcal{F}(\overline{X}^g) \\ P &\mapsto \overline{P}, \end{aligned}$$

et appelons *compactification géométrique* l'adhérence  $\overline{\text{Plats}(X)}^g$  de son image.

Munissons  $\partial_\infty X$  de sa structure naturelle d'immeuble sphérique notée  $\mathcal{I}$ , et considérons la structure d'immeuble sphérique topologique induite par la topologie compacte de  $\partial_\infty X$  (voir la partie 14.1). Soit  $d$  la dimension de  $\mathcal{I}$ .

Notons  $\mathcal{A} = \partial_\infty P_0$  l'appartement fixé de  $\mathcal{I}$ . Considérons l'espace  $\text{App}(\mathcal{I})$  des appartements de  $\mathcal{I}$ , et  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  sa compactification géométrique (voir la partie 14.4.1).

Considérons l'homéomorphisme naturel  $G$ -équivariant

$$\begin{aligned} \iota : \text{Plats}(X) &\rightarrow \text{App}(\mathcal{I}) \\ P &\mapsto \partial_\infty P, \end{aligned}$$

ainsi que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g &\rightarrow \mathcal{F}(\overline{X}^g) \\ A \in \text{App}(\mathcal{I}) &\mapsto \overline{P}, \text{ où } P \text{ est un plat de } X \text{ tel que } \partial_\infty P = A \\ A \in \partial \text{App}(\mathcal{I}) &\mapsto A \subset \partial_\infty X. \end{aligned}$$

**Théorème 14.8.** *La compactification géométrique  $\overline{\text{Plats}(X)}^g$  de l'espace des plats de  $X$  est naturellement  $G$ -isomorphe à la compactification géométrique  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  de l'espace des appartements de  $\mathcal{I}$ . Autrement dit, le diagramme de plongements  $G$ -équivariants suivant est bien défini et commute.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Plats}(X) & \hookrightarrow & \overline{\text{Plats}(X)}^g \\ \iota \downarrow \wr & & \wr \uparrow \phi \\ \text{App}(\mathcal{I}) & \hookrightarrow & \overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g. \end{array}$$

**Démonstration.** Il suffit de montrer que l'application  $\phi$  est un homéomorphisme  $G$ -équivariant de  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  à valeurs dans  $\overline{\text{Plats}(X)}$ .

Puisque  $G$  agit par isométries sur  $X$  et par automorphismes sur  $\mathcal{I}$ , l'application  $\phi$  est  $G$ -équivariante.

La topologie de chaque espace de facettes de Weyl fermées  $\mathcal{I}^{(k)}$  est induite par la topologie de Chabauty sur  $\mathcal{F}(\partial_\infty X)$ , donc  $\phi$  est un plongement de  $\partial \text{App}(\mathcal{I})$  dans  $\mathcal{F}(\partial_\infty X)$ .

Les espaces  $\text{App}(\mathcal{I})$  et  $\text{Plats}(X)$  sont chacun munis de la topologie d'espace homogène sous l'action continue de  $G$ . De plus, le stabilisateur du plat  $P_0$  et le stabilisateur de son appartement à l'infini  $\mathcal{A}$  coïncident. Puisque l'application  $\phi$  est  $G$ -équivariante, c'est un homéomorphisme de  $\text{App}(\mathcal{I})$  sur  $\text{Plats}(X)$ .

En conséquence, l'application  $\phi$  est injective : en effet  $\phi$  est une bijection de  $\text{App}(\mathcal{I})$  dans l'ensemble  $\text{Plats}(X)$ , et  $\phi$  est une injection de  $\partial \text{App}(\mathcal{I})$  dans l'ensemble  $\mathcal{F}(\partial_\infty X)$ , et les ensembles  $\text{Plats}(X)$  et  $\mathcal{F}(\partial_\infty X)$  sont disjoints dans  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$ .

Montrons que  $\phi$  est continue sur  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  : soit donc  $A \in \partial \text{App}(\mathcal{I})$ , et soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\text{App}(\mathcal{I})$  convergeant vers  $A$  dans  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $P_n \in \text{Plats}(X)$  l'unique plat tel que  $\partial_\infty P_n = A_n$ . Puisque la limite de la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas un appartement à l'infini, la suite de plats  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  part à l'infini dans  $\text{Plats}(X)$ . Appliquons le théorème 14.5 à l'ensemble  $\mathcal{P} = \text{Plats}(X)$  et à la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  : la suite  $(\partial_\infty P_n = A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $A$  dans  $\mathcal{F}(\partial_\infty X)$ , donc la suite  $(\overline{P_n} = \phi(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $A = \phi(A)$  dans  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$ . L'application  $\phi$  est donc continue.

Ainsi l'application  $\phi$  est continue, injective de l'espace compact  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  dans l'espace séparé  $\overline{\text{Plats}(X)}^g$  : c'est un plongement. De plus son image est un sous-espace compact de  $\overline{\text{Plats}(X)}^g$ , contenant le sous-espace dense  $\phi(\text{App}(\mathcal{I})) = \text{Plats}(X)$ , donc l'application  $\phi$  est surjective. Finalement, l'application  $\phi$  est un homéomorphisme  $G$ -équivariant de  $\overline{\text{App}(\mathcal{I})}^g$  dans  $\overline{\text{Plats}(X)}^g$ .  $\square$

La construction ci-dessus permet également de définir une compactification géométrique de l'espace des plats marqués de  $X$  : appelons *plat marqué* tout couple  $(P, C) \in \text{Plats}(X) \times \mathcal{I}^{<d>}$  tel que  $C$  soit une chambre de Weyl fermée de  $\partial_\infty P$ . Notons  $\text{Plats}_m(X)$  l'ensemble des plats marqués de  $X$ , muni de la topologie induite par la topologie produit sur  $\text{Plats}(X) \times \mathcal{I}^{<d>}$ . Définissons alors la *compactification géométrique*  $\overline{\text{Plats}_m(X)}^g$  de l'espace  $\text{Plats}_m(X)$  des plats marqués de  $X$  comme l'adhérence de  $\text{Plats}_m(X)$  dans l'espace compact  $\overline{\text{Plats}(X)}^g \times \mathcal{I}^{<d>}$ .

De manière équivalente, on aurait pu définir un plat marqué comme un couple  $(P, f) \in \text{Plats}(X) \times \text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ , où  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$  est un morphisme injectif tel que  $\partial_\infty P = f(\mathcal{A})$ . Ces deux formulations sont équivalentes, car le groupe de Weyl agit simplement transitivement sur les chambres de Weyl de  $\mathcal{A}$ , et coïncide avec le groupe des automorphismes de  $\mathcal{A}$ .

Fixons une chambre de Weyl fermée  $C_0$  de l'appartement standard  $\mathcal{A}$ . Considérons l'homéomorphisme naturel  $G$ -équivariant

$$\begin{aligned} \iota_m : \text{Plats}_m(X) &\rightarrow \text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) \\ (P, C) &\mapsto f : \mathcal{A} \rightarrow \partial_\infty P \text{ l'unique morphisme injectif tel que } f(C_0) = C, \end{aligned}$$

ainsi que l'application

$$\begin{aligned} \phi_m : \overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g &\rightarrow \overline{\text{Plats}(X)}^g \times \mathcal{I}^{<d>} \\ f \in \text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) &\mapsto (\overline{P}, f(C_0)) \text{ où } P \text{ est un plat de } X \text{ tel que } \partial_\infty P = f(\mathcal{A}) \\ f \in \partial \text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) &\mapsto (f(\mathcal{A}), f(C_0)). \end{aligned}$$

Comme ci-dessus, nous avons une identification entre les deux compactifications géométriques.

**Théorème 14.9.** *La compactification géométrique  $\overline{\text{Plats}_m(X)}^g$  de l'espace des plats marqués de  $X$  est naturellement  $G$ -isomorphe à la compactification géométrique  $\overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g$  de l'espace des appartements marqués de  $\mathcal{I}$ . Autrement dit, le diagramme de plongements  $G$ -équivariants suivant est bien défini et commute.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Plats}_m(X) & \hookrightarrow & \overline{\text{Plats}_m(X)}^g \\ \iota_m \downarrow & & \uparrow \phi_m \\ \text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) & \hookrightarrow & \overline{\text{Mor}_{inj}(\mathcal{A}, \mathcal{I})}^g. \end{array}$$

Le théorème 14.8, appliqué au cas de  $G = \text{SL}_3(\mathbb{K})$ , permet de décrire des dégénérescences très particulières de plats et de géodésiques dans l'espace symétrique ou l'immeuble de Bruhat-Tits  $X$  de  $G$  (voir [BT84]). Citons également la construction de cet immeuble de Bruhat-Tits par les normes ultramétriques (voir [IM64], [Par99] et [RTW09]).

Appelons *tripode* de  $\mathcal{I}$  tout sous-graphe de  $\mathcal{I}$  constitué de trois segments distincts ayant un unique sommet commun. On remarque qu'un tripode n'est inclus dans aucun appartement de  $\mathcal{I}$ .

**Proposition 14.10.** *Pour tout tripode  $T$  de l'immeuble sphérique  $\mathcal{I}$  de  $\text{SL}_3(\mathbb{K})$ , il existe une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de plats maximaux de  $X$  telle que la suite  $(\overline{P_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $T$  dans l'espace  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$  des fermés de  $\overline{X}^g$ .*

En particulier, il existe des limites géométriques de plats qui ne sont pas incluses dans des plats à l'infini.

**Corollaire 14.11.** *Pour toute image  $F$  d'un chemin de longueur  $\pi$  dans  $\mathcal{A}$  par un morphisme dans  $\mathcal{I}$ , il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de géodésiques de  $X$  telle que la suite  $(\overline{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F$  dans l'espace  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$  des fermés de  $\overline{X}^g$ .*

On remarquera qu'un tel  $F$  n'est pas nécessairement un demi-appartement, et ses extrémités peuvent ne pas être sur des sommets de  $\mathcal{I}$ .

**Démonstration.** Soit  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$  un morphisme tel que  $f(\mathcal{A}) \supset F$ . Soit  $F_0 \subset \mathcal{A}$  un chemin de longueur  $\pi$  telle que  $f(F_0) = F$ . D'après le théorème 14.9, il existe une suite  $(P_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de plats maximaux orientés de  $X$ , telle que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f$  dans  $\text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ .

Soit  $U$  un voisinage de  $F$  dans  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$ . Puisque la suite  $(f_n(F_0))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F$  dans  $\mathcal{F}(\partial_\infty X)$ , considérons  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f_n(F_0) \in U$ . Le chemin  $f_n(F_0)$  est de longueur  $\pi$  dans  $\partial_\infty P_n$ , il définit donc un demi-plan de  $P_n$  à translation près. Soit  $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de géodésiques parallèles de  $F_0$  qui bordent  $f_n(F_0)$ , et qui tendent vers l'infini dans la direction de  $f_n(F_0)$ . Alors la suite  $(\overline{\gamma}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f_n(F_0)$  dans  $\mathcal{F}(\overline{P}_n^g)$ , donc appartient à  $U$  pour  $m$  assez grand.

Ainsi pour tout voisinage  $U$  de  $F_0$  dans  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$ , il existe une géodésique  $\gamma$  de  $X$  telle que  $\overline{\gamma} \subset \overline{X}^g$  appartienne à  $U$ . Puisque l'espace  $\mathcal{F}(\overline{X}^g)$  est métrisable, cela prouve le corollaire.  $\square$

Lorsque  $X$  est de rang 1, toute limite géométrique de géodésiques est un point du bord. Il est remarquable qu'il existe, par exemple dans l'espace symétrique de  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ , des limites géométriques de géodésiques qui ne soient pas homéomorphes à un intervalle compact, et qui ne soient pas contenues dans un plat à l'infini.





## Cinquième partie

## Compactifications à la Thurston

## Sommaire

---

<b>15</b>	<b>Introduction</b>	<b>122</b>
<b>16</b>	<b>Compactification de Thurston des espaces de réseaux marqués</b>	<b>124</b>
16.1	Algèbre linéaire quaternionique et octonionique . . . . .	124
16.2	Compactification de l'espace des réseaux hermitiens marqués . . . . .	127
16.3	Comparaison à la compactification de Satake . . . . .	131
16.4	Compactification d'espaces de réseaux autoduaux . . . . .	133
16.5	Cas du groupe de Lie exceptionnel $E_{6(-26)}$ . . . . .	135
<b>17</b>	<b>Compactification de Thurston de l'espace de Torelli</b>	<b>139</b>
17.1	L'espace de Torelli . . . . .	139
17.2	La compactification de Thurston de l'espace de Torelli . . . . .	140
17.3	Stratification d'une partie du bord de l'espace de Torelli . . . . .	144
17.3.1	Comparaison entre norme stable et norme euclidienne . . . . .	144
17.3.2	Le complexe des courbes séparantes . . . . .	146
17.3.3	Description des strates . . . . .	147

---

Le contenu de ce chapitre provient de la prépublication [Hae11].

## 15 Introduction

Soit  $S$  une surface lisse compacte connexe orientable, de genre  $g \geq 2$ . La compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller  $\text{Teich}(S)$  de  $S$  est l'adhérence du plongement  $\text{Teich}(S) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\pi_1(S)})$  défini par les distances de translation. Cette compactification est homéomorphe à la boule fermée de dimension  $6g-6$ , munie d'une action continue du groupe modulaire  $\text{MCG}(S)$ , et elle a permis à Thurston de classer à isotopie près les difféomorphismes de  $S$  (voir par exemple [FLP79]).

Tout espace symétrique de type non compact classique peut être vu comme un espace de réseaux marqués d'un espace euclidien ou hermitien (voir par exemple [Bav05]). Soit  $m \geq 1$  un entier, on appelle réseau marqué de covolume 1 de  $\mathbb{R}^m$  tout morphisme injectif de  $\mathbb{Z}$ -modules  $f : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  dont l'image est discrète et de covolume 1. L'espace des classes d'isométrie de tels réseaux marqués est naturellement homéomorphe à l'espace symétrique de type non compact  $\mathcal{E}_m = \text{SL}_m(\mathbb{R})/\text{SO}_m(\mathbb{R})$ . On peut définir une compactification de Thurston de cet espace, grâce aux distances de translation (où  $\mathbb{R}^m$  est muni de la norme euclidienne usuelle) :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{E}_m &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}^m}) \\ [f : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^m] &\mapsto [u \mapsto \|f(u)\|]. \end{aligned}$$

**Théorème 15.1.** *L'application  $\phi$  est un plongement : la compactification de Thurston de l'espace symétrique  $\mathcal{E}_m$  est l'adhérence  $\overline{\mathcal{E}_m}^T$  de l'image de  $\phi$ . Cette compactification est isomorphe (de manière  $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ -équivariante) à la compactification de Satake  $\overline{\mathcal{E}_m}^S$  associée à la représentation tautologique de  $\text{SL}_m(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^m$ .*

Ceci répond à une question posée par Frédéric Paulin lors d'un exposé Bourbaki (voir [Pau10]). Nous démontrons en fait un résultat plus général (théorème 16.12), pour le corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou le corps gauche  $\mathbb{H}$  des quaternions de Hamilton, ainsi que pour des sous-espaces de réseaux autoduaux, ce qui permet de traiter le cas de tous les espaces symétriques de type non compact classiques. Et nous étendons ce théorème au cas du groupe de Lie exceptionnel  $E_{6(-26)}$  (théorème 16.18), qui est la forme réelle non compacte de rang réel 2 du groupe de Lie complexe exceptionnel  $E_6$ .

Puis nous appliquons cette construction pour définir une compactification à la Thurston de l'espace de Torelli. L'espace de Torelli  $\text{Tor}(S)$  de la surface  $S$  est l'espace des classes d'isotopie de surfaces hyperboliques munies d'un marquage de leur homologie par celle de  $S$ . L'espace de Torelli  $\text{Tor}(S)$  est le quotient de l'espace de Teichmüller par le groupe de Torelli  $T(S)$ , qui est le sous-groupe du groupe modulaire de  $S$  constitué des classes d'isotopie de difféomorphismes de  $S$  ayant une action triviale en homologie. Un théorème de Mess (voir [Mes92]) énonce qu'en genre 2, le groupe de Torelli est un groupe libre sur une infinité dénombrable de générateurs. En genre supérieur ou égal à 3, le groupe de Torelli est de type fini (voir [Joh83]), mais l'une des grandes questions est de savoir s'il est de présentation finie (voir [Far06]).

Dans l'espoir de mieux comprendre le type d'homotopie de l'espace de Torelli, nous allons en définir une compactification naturelle. Considérons une surface hyperbolique  $X$  marquée par  $h : S \rightarrow X$ . Le théorème de Hodge identifie l'espace  $H^1(X, \mathbb{R})$  avec l'espace des 1-formes différentielles harmoniques sur  $X$ , espace qui est muni du produit scalaire  $L^2$  : notons  $\|\cdot\|_X$  la norme euclidienne associée sur  $H^1(X, \mathbb{R})$ . Considérons alors l'application

$$\begin{aligned} \psi : \text{Tor}(S) &\rightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})} \\ [X, h] &\mapsto \{\omega \mapsto \|h^*(\omega)\|_X\}, \end{aligned}$$

et  $\bar{\psi} : \text{Tor}(S) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$  son application quotient. Nous montrons dans la partie 17.1 que l'application  $\bar{\psi}$  est un revêtement de degré 2 sur son image, ramifié sur le lieu hyperelliptique de  $\text{Tor}(S)$ . En considérant l'adhérence de l'image de  $\bar{\psi}$  dans l'espace compact  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$ , nous définissons une compactification de l'espace de Torelli, que nous appelons *compactification de Thurston* de  $\text{Tor}(S)$ .

Nous allons comparer notre compactification à une autre compactification naturelle de l'espace de Torelli. L'application période envoie l'espace de Torelli  $\text{Tor}(S)$  dans l'espace symétrique  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\text{U}(g)$ . L'adhérence de l'image de l'application période dans la compactification de Satake de  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\text{U}(g)$  associée à la représentation standard de  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^{2g}$  définit une compactification de l'espace de Torelli, que nous appellerons *compactification de Satake* de  $\text{Tor}(S)$ .

**Théorème 15.2.** *Les compactifications de Thurston et de Satake de l'espace de Torelli sont isomorphes de manière  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -équivariante.*

De plus, nous décrivons une partie de bord de cette compactification : nous allons décrire l'adhérence de l'image de  $\psi$  (et il serait intéressant d'avoir une description analogue, au moins à homotopie près, pour  $\bar{\psi}$ ).

Considérons  $K^{sep}(S)$  le complexe des courbes séparantes de  $S$  : les sommets de ce complexe simplicial sont les classes d'homotopie de courbes fermées simples séparantes non triviales, et les  $(k-1)$ -simplexes sont les  $k$ -uplets  $\sigma = \{[\gamma_1], \dots, [\gamma_k]\}$  de classes de telles courbes deux à deux disjointes et non homotopes. Notons également  $\Sigma K^{sep}(S)$  l'ensemble des simplexes de  $K^{sep}(S)$ .

Si  $\sigma$  est un tel  $(k-1)$ -simplexe, considérons les  $k+1$  composantes connexes de  $S \setminus \bigcup_{j=1}^k \gamma_j$ , et fixons pour chacune d'elles un homéomorphisme avec  $S_j \setminus P_j$ , où  $S_j$  est une surface compacte lisse sans bord de genre  $g_j \geq 1$ , et où  $P_j \subset S_j$  est un ensemble fini de points. Notons

$$\begin{aligned} \psi_\sigma : \text{Tor}_\sigma(S) = \prod_{j=0}^k \text{Tor}(S_j) &\rightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})} \\ ([X_j, h_j])_{0 \leq j \leq k} &\mapsto \left\{ \omega = \sum_{j=0}^k \kappa_j^* \omega_j \mapsto \left( \sum_{j=0}^k \|h_j^{-1*}(\omega_j)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

où  $\omega_j \in H^1(S_j, \mathbb{Z})$ , et où  $\kappa_j : S \rightarrow S_j$  est l'application d'écrasement des  $S_{j'}$ , pour  $j' \neq j$  (voir partie 17.3.3).

**Théorème 15.3.** *L'adhérence de l'image de l'application  $\psi$  dans l'espace  $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$  est la réunion disjointe des strates*

$$\overline{\psi(\text{Tor}(S))} = \psi(\text{Tor}(S)) \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma K^{sep}(S)} \psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S)).$$

Dans une première partie, nous rappelons quelques résultats élémentaires d'algèbre linéaire quaternionique (voir [Bou59a]). Puis nous définissons la compactification de Thurston de l'espace des réseaux marqués d'un espace euclidien, hermitien complexe ou quaternionique. Ensuite, nous établissons l'isomorphisme avec la compactification de Satake. Dans une quatrième partie, nous étendons ce résultat aux espaces de réseaux autoduaux.

Ensuite, nous montrons que ces résultats s'appliquent à l'espace de Torelli. Et enfin, nous décrivons la stratification d'une partie du bord de cette compactification.

Je tiens à remercier chaleureusement Frédéric Paulin pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés pour ce chapitre. Je tiens également à remercier Daniel Massart, qui m'a expliqué les liens entre les normes stable et  $L^2$ .

## 16 Compactification de Thurston des espaces de réseaux marqués

### 16.1 Algèbre linéaire quaternionique et octonionique

Soit  $\mathbb{K}$  le corps (commutatif)  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou le corps (gauche) des quaternions de Hamilton  $\mathbb{H}$  (de base vectorielle réelle  $1, i, j, k$ , où  $i^2 = j^2 = -1$  et  $ij = -ji = k$ ). Si  $x \in \mathbb{K}$ , notons  $\bar{x}$  son conjugué et  $\text{tr}(x)$  sa trace réduite (avec  $\bar{x} = x$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} = a - ib$  si  $x = a + ib \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$  et  $\bar{x} = a - ib - jc - kd$  si  $x = a + ib + jc + kd \in \mathbb{K} = \mathbb{H}$ ). Nous avons des inclusions évidentes  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ . Pour la théorie générale des formes sesquilinéaires sur des espaces vectoriels de dimension finie sur des corps gauches, nous renvoyons à [Bou59a].

Fixons un entier  $m \geq 1$ . L'espace vectoriel  $\mathbb{K}^m$  sera toujours considéré à droite, et l'action linéaire des matrices de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  sur  $\mathbb{K}^m$  à gauche. Munissons l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^m$  de sa structure hermitienne standard  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i y_i$ .

Si  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ , notons  $\overline{M}$  la matrice de coefficients les conjugués de ceux de  $M$ , et  $M^* = {}^t \overline{M}$  l'adjoint de  $M$  : il vérifie  $(MN)^* = N^* M^*$ . Une matrice  $M$  est dite *hermitienne* si  $M^* = M$ , et *unitaire* si  $MM^* = I_m$  (ce qui équivaut à  $M^* M = I_m$ ), où  $I_m$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ .

Rappelons une définition du déterminant de Dieudonné d'une matrice à coefficients dans  $\mathbb{H}$  (voir par exemple [Art72, § IV.1, p. 149]). Pour cela, considérons l'application  $\eta$  de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{H})$  dans  $\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C})$  qui à une matrice  $M = A + jB$ , où  $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  associe la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C}).$$

C'est un homomorphisme injectif de  $\mathbb{R}$ -algèbres à droite, équivariant pour l'adjoint. Remarquons de plus que le déterminant de  $\eta(M)$  est un nombre réel positif. Ceci permet de définir  $\det(M) = \sqrt{\det(\eta(M))}$ , le *déterminant de Dieudonné* de  $M$ . La matrice  $M$  est alors inversible si et seulement si  $\det(M) \neq 0$ , et si  $N \in \mathcal{M}_m(\mathbb{H})$  alors  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ . Cela permet de définir le sous-groupe  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{H})$  de  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{H})$ . Ce sous-groupe peut également être défini intrinsèquement : c'est le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{H})$  constitué des automorphismes linéaires de  $\mathbb{H}^m$  qui préservent une mesure de Haar de  $\mathbb{H}^m$ .

Notons  $U_m(\mathbb{K})$  le groupe unitaire de  $\mathbb{K}^m$  : c'est le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$  constitué des matrices unitaires. Notons de plus  $\mathrm{SU}_m(\mathbb{K}) = U_m(\mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  le groupe spécial unitaire de  $\mathbb{K}^m$ . Remarquons que lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ , le groupe  $\mathrm{SU}_m(\mathbb{H})$  est égal à  $U_m(\mathbb{H})$ , et également à l'image réciproque par l'application  $\eta$  du sous-groupe  $U_{2m}(\mathbb{C})$ . Le groupe  $\mathrm{SU}_m(\mathbb{K})$  est un sous-groupe compact maximal du groupe de Lie  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ .

**Lemme 16.1** (Diagonalisation des matrices hermitiennes). *Soit  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{H})$  une matrice hermitienne positive. Alors il existe une matrice unitaire  $U \in U_m(\mathbb{H})$  et une matrice diagonale positive réelle  $D \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  telles que  $M = UDU^{-1}$ .*

**Démonstration.** Pour le théorème général de réduction des matrices hermitiennes, voir [Bou59a, Théorème 1, p. 90]. Nous donnons ici une preuve rapide en admettant la diagonalisation des matrices hermitiennes complexes. L'application  $\eta : \mathcal{M}_m(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C})$  a pour image l'ensemble des matrices des endomorphismes qui commutent avec l'endomorphisme réel  $\alpha$  de  $\mathbb{C}^{2m}$  défini par  $X \mapsto J\bar{X}$ , où  $J$  est la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $N = \eta(M) \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C})$  : puisque l'application  $\eta$  est équivariante pour l'adjoint, la matrice  $N$  est hermitienne positive. Les sous-espaces propres complexes de  $N$  sont orthogonaux et stables par l'endomorphisme réel  $\alpha$ , donc il existe une matrice unitaire  $U' \in U_{2m}(\mathbb{C})$  commutant avec  $\alpha$  telle que  $D' = U'^{-1}NU'$  soit diagonale positive réelle. Puisque  $U'$  et  $D'$  commutent avec  $\alpha$ , ils appartiennent à l'image de  $\eta$  : soit donc  $U \in \mathrm{SU}_m(\mathbb{H})$  et  $D$  diagonale positive réelle tels que  $U' = \eta(U)$  et  $D' = \eta(D)$ . Ainsi  $M = UDU^{-1}$ .  $\square$

**Lemme 16.2** (Décomposition polaire). *Soit  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ . Alors il existe une matrice unitaire  $U \in U_m(\mathbb{K})$  et une unique matrice hermitienne positive  $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  telles que  $M = PU$ .*

**Démonstration.** Montrons tout d'abord ce résultat si  $M$  est inversible. La matrice  $MM^*$  est hermitienne positive, donc d'après la diagonalisation des matrices hermitiennes positives (lemme 16.1 si  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ), considérons  $P$  l'unique matrice hermitienne positive telle que  $P^2 = MM^*$ . La matrice  $P$  est inversible, et la matrice  $U = P^{-1}M$  est alors unitaire.

Si  $M$  n'est pas inversible, par densité de  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ , considérons une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de matrices inversibles convergeant vers  $M$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , considérons une décomposition polaire  $M_n = P_n U_n$  de la matrice  $M_n$ . Par compacité du sous-groupe  $U_m(\mathbb{K})$ , on peut supposer quitte à extraire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice unitaire  $U$ . Dans ce cas, la suite  $(P_n = M_n U_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $P = MU^{-1}$  hermitienne positive, et nous avons  $M = PU$ . Et la matrice  $P$  est l'unique matrice hermitienne positive telle que  $P^2 = MM^*$ .  $\square$

Nous aurons également besoin d'identités de polarisation, la première étant immédiate.

**Lemme 16.3** (Identité de polarisation complexe). *Soit  $\tau = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Alors pour tous  $u, v \in \mathbb{C}^m$ , nous avons :*

$$\langle u|v \rangle = \frac{1}{4} \left( \left(1 + \frac{ia}{b}\right) (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) - \frac{i}{b} (\|u + v\tau\|^2 - \|u - v\tau\|^2) \right).$$

□

**Lemme 16.4** (Identité de polarisation quaternionique). *Soit  $(q_1, \dots, q_4)$  une  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{H}$ . Alors il existe quatre quaternions  $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{H}^8$  tels que, pour tous  $u, v \in \mathbb{H}^m$ , nous ayons :*

$$\langle u|v \rangle = \sum_{l=1}^4 (\|u + vq_l\|^2 - \|u - vq_l\|^2) \lambda_l.$$

**Démonstration.** Remarquons tout d'abord que

$$(\|u + vq_l\|^2 - \|u - vq_l\|^2) = 4 \operatorname{Re}(\langle u, vq_l \rangle) = 4 \operatorname{Re}(\overline{u}vq_l) = 4 \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle q_l).$$

Considérons l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ q &\mapsto (4 \operatorname{Re}(qq_l))_{l \in [1,4]}. \end{aligned}$$

Si  $q \in \mathbb{H}$  appartient au noyau de  $\varphi$ , alors par  $\mathbb{R}$ -linéarité  $4 \operatorname{Re}(q\overline{q}) = 4|q|^2 = 0$  donc  $q = 0$  : l'application  $\varphi$  est donc un isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire. Pour tout  $l \in [1, 4]$ , notons  $\lambda_l = \varphi^{-1}(f_l)$ , où  $(f_1, \dots, f_4)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ . Alors, pour tous  $u, v \in \mathbb{H}^m$ , nous avons par  $\mathbb{R}$ -linéarité

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \varphi^{-1}(\varphi(\langle u, v \rangle)) = \varphi^{-1}((4 \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle q_l))_{l \in [1,4]}) \\ &= \varphi^{-1} \left( \sum_{l=1}^4 (4 \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle q_l)) f_l \right) \\ &= \sum_{l=1}^4 4 \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) \varphi^{-1}(f_l) \\ &= \sum_{l=1}^4 4 \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) (\|u + vq_l\|^2 - \|u - vq_l\|^2) \lambda_l. \end{aligned}$$

□

Nous aurons également besoin du lemme suivant.

**Lemme 16.5.** *Soient  $M$  et  $M'$  deux matrices de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  telles que, pour tout  $u \in \mathbb{K}^m$ , nous ayons  $\|M(u)\| = \|M'(u)\|$ . Alors il existe  $K \in U_m(\mathbb{K})$  tel que  $KM = M'$ .*

**Démonstration.** D'après la décomposition polaire (lemme 16.2 si  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ) et modulo multiplication à gauche par deux éléments de  $U_m(\mathbb{K})$ , on peut supposer que  $M$  et  $M'$  sont hermitiennes positives. D'après la réduction des matrices hermitiennes (lemme 16.1)

et modulo multiplication à gauche par deux éléments de  $U_m(\mathbb{K})$ , on peut supposer qu'il existe deux matrices diagonales positives  $D, D'$  et deux matrices unitaires  $U, U'$  telles que  $M = DU$  et  $M' = D'U'$ . Alors, pour tout  $u \in \mathbb{K}^m$ , nous avons  $\|Du\| = \|D'U'U^{-1}u\|$ . Ainsi, si  $u$  appartient au sous-espace propre de  $D$  associé à la valeur propre maximale, on en déduit que  $U'U^{-1}u$  appartient au sous-espace propre de  $D'$  associé à la valeur propre maximale. Puis on montre que si  $u$  appartient au sous-espace propre de  $D$  associé à la deuxième plus grande valeur propre (s'il y en a), alors  $U'U^{-1}u$  appartient au sous-espace propre de  $D'$  associé à la deuxième plus grande valeur propre. Finalement, on montre que la matrice unitaire  $U'U^{-1}$  envoie les sous-espaces propres de  $D$  sur ceux de  $D'$ . Quitte à permuter les coefficients de  $D$  ou  $D'$ , on en déduit que  $D = D'$  et  $D(U'U^{-1}) = (U'U^{-1})D$ . D'où  $M' = DU' = D(U'U^{-1})U = (U'U^{-1})DU = KM$ , avec  $K = U'U^{-1} \in U_m(\mathbb{K})$ .  $\square$

## 16.2 Compactification de l'espace des réseaux hermitiens marqués

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , notons  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ . Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , notons  $\mathcal{O}$  un ordre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres quadratique imaginaire (par exemple  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$ ). Enfin si  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ , notons  $\mathcal{O}$  un ordre dans une algèbre de quaternions  $A$  sur  $\mathbb{Q}$  non déployée sur  $\mathbb{R}$  — et nous identifierons alors  $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  et  $\mathbb{H}$  — (par exemple  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1, i, j, \frac{1+i+j+k}{2}]$ ). Ainsi  $\mathcal{O}$  est un  $\mathbb{Z}$ -réseau de l'espace vectoriel réel  $\mathbb{K}$ , et est un anneau contenant 1.

On appelle *réseau* (ou  $\mathcal{O}$ -réseau lorsque l'on veut préciser  $\mathcal{O}$ ) de  $\mathbb{K}^m$  tout  $\mathcal{O}$ -module à droite engendré par une  $\mathbb{K}$ -base de  $\mathbb{K}^m$ . On l'appelle *réseau euclidien* si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , *hermitien complexe* si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et *hermitien quaternionien* si  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ . On appelle *covolume* d'un réseau  $\Gamma$  le volume du quotient  $\mathbb{K}^m/\Gamma$  pour la mesure localement égale à la mesure de Haar sur  $\mathbb{K}^m$ , normalisée de sorte que le covolume du réseau standard  $\mathcal{O}^m$  soit égal à 1. Un *réseau marqué* de  $\mathbb{K}^m$  est un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules à droite de  $\mathcal{O}^m$  dans  $\mathbb{K}^m$  dont l'image est un réseau. Le groupe  $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O})$  agit à gauche par précomposition par l'adjoint, et le groupe de Lie  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$  agit à droite par postcomposition par l'adjoint sur l'ensemble des réseaux marqués de  $\mathbb{K}^m$ .

Notons  $\mathcal{E}_m$  l'espace symétrique de type non compact du groupe de Lie quasi-simple  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire l'espace homogène  $\mathcal{E}_m = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})/\mathrm{SU}_m(\mathbb{K})$ , où  $\mathrm{SU}_m(\mathbb{K})$  désigne le groupe spécial unitaire de  $\mathbb{K}^m$ , muni de l'action à gauche par translations de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  et d'une métrique riemannienne invariante par cette action.

Puisque  $\mathcal{O}$  est un ordre, tout morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules à droite de  $\mathcal{O}^m$  dans  $\mathbb{K}^m$  s'étend uniquement en un endomorphisme de l'espace vectoriel à droite  $\mathbb{K}^m$ , et réciproquement tout endomorphisme de  $\mathbb{K}^m$  se restreint en un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules à droite de  $\mathcal{O}^m$  dans  $\mathbb{K}^m$ . Ainsi nous utiliserons les mêmes notations pour ces deux points de vue, sans risque de confusion.

Notons  $\mathrm{SL}_m^1(\mathbb{K})$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$  constitué des automorphismes de  $\mathbb{K}^m$  dont le déterminant est de module 1. L'ensemble des réseaux marqués de  $\mathbb{K}^m$  de covolume 1, muni de la topologie induite par la topologie produit sur  $(\mathbb{K}^m)^{\mathcal{O}^m}$ , est muni de l'action à droite continue et simplement transitive de  $\mathrm{SL}_m^1(\mathbb{K})$  par postcomposition par l'adjoint, et est muni de l'action à gauche de  $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$  par précomposition par l'adjoint.

Notons  $\mathcal{E}'_m$  l'ensemble des classes d'isométrie (positive ou non) de réseaux marqués

de  $\mathbb{K}^m$  de covolume 1, muni de la topologie quotient : deux réseaux marqués  $f$  et  $f'$  sont identifiés s'il existe  $g \in U_m(\mathbb{K})$  tel que  $g \circ f = f'$ . L'homéomorphisme entre l'espace des réseaux marqués et  $\mathrm{SL}_m^1(\mathbb{K})$  passe au quotient en un homéomorphisme entre l'espace  $\mathcal{E}'_m$  et l'espace homogène  $\mathrm{SL}_m^1(\mathbb{K})/U_m(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})/\mathrm{SU}_m(\mathbb{K}) = \mathcal{E}_m$ , qui est de plus  $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$ -équivariant. Nous noterons dorénavant  $\mathcal{E}_m$  tant l'espace des classes d'isométrie de réseaux marqués que l'espace symétrique, sans risque de confusion.

Rappelons ce qu'est une compactification d'un espace topologique  $X$  localement compact : c'est la donnée d'une paire  $(K, i)$ , où  $K$  est un espace topologique compact et  $i : X \rightarrow K$  est un plongement d'image dense. Si  $G$  est un groupe agissant continûment sur  $X$ , on dit que  $(K, i)$  est une  $G$ -compactification si l'action de  $G$  sur  $i(X)$ , conjuguée par  $i$  de l'action de  $G$  sur  $X$ , s'étend continûment à  $K$ . Cette extension est alors unique. On dit que deux  $(G)$ -compactifications  $(K, i)$  et  $(K', i')$  de  $X$  sont  $(G)$ -isomorphes s'il existe un homéomorphisme  $(G)$ -équivariant  $f$  de  $K$  sur  $K'$  tel que  $i' = f \circ i$ .

Nous allons définir une compactification de Thurston des espaces symétriques  $\mathcal{E}_m$ , analogue à la compactification de Thurston des espaces de Teichmüller. Rappelons comment celle-ci est construite (voir par exemple [FLP79]). Si  $E$  est un ensemble, notons  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^E)$  l'espace topologique quotient de l'espace  $\mathbb{R}_+^E \setminus \{0\}$ , muni de la topologie produit, par les homothéties de rapport strictement positif. Si  $S$  est une surface compacte connexe orientée de genre supérieur ou égal à 2 et si  $\Gamma$  est son groupe fondamental, l'espace de Teichmüller de  $S$  est l'ensemble des classes d'isométrie équivariante d'actions isométriques propres et libres de  $\Gamma$  sur le plan hyperbolique réel  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  (voir par exemple [Pau10]). La compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller de  $S$  est alors l'adhérence de l'image du plongement dans  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\Gamma})$ , qui à la classe d'une telle action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  associe la classe de l'application qui à un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  associe la distance de translation  $\ell(\gamma) = \inf_{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2} d(x, \gamma x)$  de  $\gamma$  dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

Nous allons modifier cette définition en remplaçant la surface  $S$  par le tore  $\mathbb{K}^m/\mathcal{O}^m$ , et le groupe  $\Gamma$  par  $\mathcal{O}^m$ , le groupe fondamental du tore. Notons  $\phi$  l'application de  $\mathcal{E}_m$  dans  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$  qui à la classe d'isométrie équivariante d'un réseau marqué associe la classe d'homothétie de sa fonction distance de translation : un réseau marqué étant un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules à droite  $f$  de  $\mathcal{O}^m$  dans  $\mathbb{K}^m$ , notons  $\phi([f])$  la classe d'homothétie de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^m &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\mapsto \|f(u)\|, \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme hermitienne de  $\mathbb{K}^m$ .

**Lemme 16.6.** *L'application  $\phi$  est bien définie et continue.*

Remarquons que puisque les espaces topologiques  $\mathcal{E}_m$  et  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$  sont métrisables, on peut utiliser les critères séquentiels pour montrer les propriétés topologiques de ces espaces.

**Démonstration.** Composer un réseau marqué  $f$  au but par une isométrie de  $\mathbb{K}^m$  ne change pas  $\|f(u)\|$ , pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ . Donc l'application  $\phi$  est bien définie.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réseaux marqués de covolume 1, qui converge vers un réseau marqué  $f$  de covolume 1. Alors la continuité de la norme assure que, pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ ,



la suite  $(\|f_n(u)\|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\|f(u)\|$ . Ainsi la suite  $(\phi([f_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\phi([f])$ . Donc l'application  $\phi$  est continue.  $\square$

**Lemme 16.7.** *L'adhérence de l'image de  $\phi$  est l'ensemble des classes d'homothétie d'applications*

$$\begin{aligned} \ell_f : \mathcal{O}^m &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\mapsto \|f(u)\|, \end{aligned}$$

où  $f$  est un endomorphisme non nul de  $\mathbb{K}^m$ . L'image de  $\phi$  est l'ensemble des classes d'homothétie d'applications  $\ell_f$  pour lesquelles  $f$  est inversible.

**Démonstration.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réseaux marqués de covolume 1, telle que la suite  $(\phi([f_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la classe d'homothétie d'une application  $\ell : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Quitte à extraire, la suite  $(f_n \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f \mathbb{K}$  dans l'espace projectif à droite des endomorphismes de  $\mathbb{K}^m$ , où  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}^m$  non nul. Or, pour tout  $v \in \mathbb{K}^m$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , nous avons  $\|v\lambda\| = \|v\|\|\lambda\|$ . Alors, à homothétie réelle près, pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ , la suite  $(\|f_n(u)\|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell(u) = \|f(u)\|$ . Donc  $\ell = \ell_f$  est bien du type décrit.

Réciproquement, soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{K}^m$  non nul, et soit  $f_n = f + \frac{1}{n+1} \text{id}$ , pour tout entier  $n \geq n_0$  tel que  $f_n$  soit inversible. Alors l'endomorphisme  $|\det(f_n)|^{\frac{1}{m}} f_n$  appartient à  $\text{SL}_m^1(\mathbb{K})$ , donc définit un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules de  $\mathcal{O}^m$  dans  $\mathbb{K}^m$  dont l'image est de covolume 1. Et la suite  $(\phi([f_n]))_{n \geq n_0}$  converge vers la classe d'homothétie de l'application  $\ell_f$  qui à  $u \in \mathcal{O}^m$  associe  $\|f(u)\|$  dans  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$ .

Il est clair que l'image de  $\phi$  est incluse dans l'ensemble des classes d'homothétie d'applications  $\ell_f$  pour lesquelles  $f$  est inversible. Réciproquement, si  $f$  est un endomorphisme inversible de  $\mathbb{K}^m$ , alors à une homothétie réelle près on peut supposer que  $|\det f| = 1$ , et donc  $\mathbb{R}_+^* \ell_f = \phi([f])$ , où  $f : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$  est bien un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules dont l'image est de covolume 1.  $\square$

**Lemme 16.8.** *L'image de  $\phi$  est ouverte dans son adhérence.*

**Démonstration.** Soit  $f$  un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules de  $\mathcal{O}^m$  dans  $\mathbb{K}^m$  dont l'image est de covolume 1. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'endomorphismes non nuls de  $\mathbb{K}^m$ , telle que la suite  $(\mathbb{R}_+^* \ell_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\phi([f])$ . À des homothéties réelles près et quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{K}^m$  non nul. Dans ce cas, il est immédiat que la suite  $(\ell_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell_g$  dans  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m}$ . Donc  $\mathbb{R}_+^* \ell_g = \phi([f])$ , et puisque  $f$  est inversible, la fonction  $\ell_g$  ne s'annule qu'en  $0 \in \mathcal{O}^m$ , et donc l'endomorphisme  $g$  est inversible. L'ensemble des endomorphismes inversibles de  $\mathbb{K}^m$  étant ouvert, on en déduit qu'à partir d'un certain rang les endomorphismes  $f_n$  sont inversibles, et donc  $\mathbb{R}_+^* \ell_{f_n} = \phi([f_n])$  appartient à l'image de  $\phi$  : celle-ci est donc ouverte dans son adhérence.  $\square$

**Lemme 16.9.** *L'adhérence de l'image de  $\phi$  est compacte dans  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$ .*

**Démonstration.** Soit  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans l'adhérence de l'image de  $\phi$ . D'après le lemme 16.7, il existe pour tout  $n \in \mathbb{N}$  un endomorphisme  $f_n$  de  $\mathbb{K}^m$  non nul tel que, pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ , nous ayons  $\ell_n(u) = \ell_{f_n}(u) = \|f_n(u)\|$ . Par compacité de l'espace

projectif à droite des endomorphismes de  $\mathbb{K}^m$ , quitte à extraire et à homothéties réelles près, on peut supposer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}^m$  non nul. Alors la suite  $(\mathbb{R}_+^* \ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la classe d'homothétie de l'application  $\ell_f$ , et cette limite appartient à l'adhérence de l'image de  $\phi$ .  $\square$

Pour montrer l'injectivité de l'application  $\phi$ , nous avons besoin d'un renforcement du lemme 16.5.

**Lemme 16.10.** *Soient  $f$  et  $f'$  deux endomorphismes de  $\mathbb{K}^m$  tels que, pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ , nous ayons  $\|f(u)\| = \|f'(u)\|$ . Alors il existe  $k \in U_m(\mathbb{K})$  tel que  $kf = f'$ .*

**Démonstration.** Notons  $d \in \{1, 2, 4\}$  la dimension de  $\mathbb{K}$  sur  $\mathbb{R}$ , et soit  $(e_1, \dots, e_{dm})$  une  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{K}^m$  formée par  $m$  copies d'une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{O}$  : ainsi, tous les éléments de cette base appartiennent à  $\mathcal{O}^m$ . Soit  $u \in \mathbb{K}^m$ , et soit  $u = \sum_{j=1}^{dm} e_j u_j$  sa décomposition dans cette base : les scalaires  $u_j$  sont donc réels. Alors

$$\|f(u)\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{dm} f(e_j u_j) \right\|^2 = \sum_{j,k=1}^{dm} \langle f(e_j) u_j | f(e_k) u_k \rangle = \sum_{j,k=1}^{dm} u_j u_k \langle f(e_j) | f(e_k) \rangle.$$

Or, par l'identité de polarisation pour le corps  $\mathbb{K}$  (voir le lemme 16.3 ou 16.4), et par l'hypothèse sur  $f$  et  $f'$ , nous savons que

$$\forall j, k \in \llbracket 1, dm \rrbracket, \langle f(e_j) | f(e_k) \rangle = \langle f'(e_j) | f'(e_k) \rangle.$$

On en déduit donc que  $\|f(u)\| = \|f'(u)\|$ , et ceci pour tout  $u \in \mathbb{K}^m$ . D'après le lemme 16.5, on en déduit qu'il existe  $k \in U_m(\mathbb{K})$  tel que  $kf = f'$ .  $\square$

**Proposition 16.11.** *L'application  $\phi$  est un plongement.*

**Démonstration.** Montrons que l'application  $\phi$  est injective : soient  $f$  et  $f'$  deux réseaux marqués de covolume 1, tels que  $\phi([f]) = \phi([f'])$ . Il existe donc un réel strictement positif  $\lambda$  tel que pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ , nous ayons  $\|f(u)\| = \lambda \|f'(u)\| = \|\lambda f'(u)\|$ . D'après le lemme 16.10, on en déduit qu'il existe  $k \in U_m(\mathbb{K})$  tel que  $kf = \lambda f'$ . Or  $\det(kf) = \det(k) \det(f)$  est de module 1, et  $\det(\lambda f') = \lambda^m \det(f') = \lambda^m$  est un réel strictement positif, donc  $\lambda = 1$ . Ainsi  $kf = f'$ , donc  $[f] = [f']$  dans  $\mathcal{E}_m$  : l'application  $\phi$  est injective.

Montrons que l'application  $\phi$  est propre : soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réseaux marqués de covolume 1, telle que la suite  $(\phi([f_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\phi([f])$ , où  $f$  est un réseau marqué de covolume 1. Il existe donc une suite de réels strictement positifs  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ , la suite  $(\lambda_n \|f_n(u)\|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\|f(u)\|$ . Ainsi la suite d'endomorphismes  $(\lambda_n f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée : quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge vers un endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{K}^m$ . Alors, pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ , la suite  $(\|\lambda_n f_n(u)\|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\|g(u)\| = \|f(u)\|$ . D'après le lemme 16.10, on en déduit qu'il existe  $k \in U_m(\mathbb{K})$  tel que  $kg = f$ , et en particulier  $g$  a un déterminant de module 1. Puisque la suite  $(|\det(\lambda_n f_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $|\det g| = 1$ , on en déduit que la suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1. Donc la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $g = k^{-1}f$ , d'où la suite  $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[g] = [f]$  dans l'espace  $\mathcal{E}_m$ . L'application  $\phi$  est ainsi propre.

L'application  $\phi$ , continue, injective et propre, est donc un plongement.  $\square$

L'adhérence de l'image de  $\phi$  dans  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$  fournit une compactification de  $\mathcal{E}_m$ , donc de l'espace symétrique  $\mathcal{E}_m$ , que l'on appelle *compactification de Thurston*, et que l'on note  $\overline{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{T}}$ . Notons que c'est une  $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$ -compactification, c'est-à-dire que l'action de  $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$  s'étend continûment au bord de  $\mathcal{E}_m$ , où  $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$  agit sur  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$  à gauche par précomposition par l'adjoint et passage au quotient  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$ .

Cette compactification est en fait munie d'une action continue à gauche de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  : pour le voir, on pourrait remplacer dans la construction qui précède  $\mathcal{O}^m$  par  $\mathbb{K}^m$ . Nous allons expliciter directement l'action de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  sur  $\overline{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{T}}$  : soit  $g \in \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ , et soit  $\mathbb{R}_+^* \ell \in \overline{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{T}}$ . D'après le lemme 16.7, il existe un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}^m$  non nul tel que, pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ , nous ayons  $\ell(u) = \|f(u)\|$ . Définissons alors  $g \cdot \mathbb{R}_+^* \ell$  comme la classe d'homothétie de l'application qui à  $u \in \mathcal{O}^m$  associe  $\|f(g^*(u))\|$ . C'est une action continue, qui étend l'action de  $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$  à gauche par précomposition par l'adjoint.

### 16.3 Comparaison à la compactification de Satake

Nous voulons comparer la compactification de Thurston définie ci-dessus à l'une des compactifications de Satake. Rappelons la construction de ces compactifications (voir [Sat60]). Soit  $G$  un groupe de Lie réel connexe semi-simple de centre fini sans facteur compact, et soit  $\rho : G \rightarrow \mathrm{SL}(V)$  une représentation linéaire irréductible et de noyau fini de  $G$  dans un  $\mathbb{K}$ -module à droite de dimension finie  $V$ . Soit  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$  contenant  $\mathrm{Ker} \rho$ . Puisque  $K$  est compact, il existe un produit scalaire hermitien sur  $V$  tel que  $\rho(K) \subset \mathrm{SU}(V)$ . Si  $h^*$  désigne l'adjoint d'un élément  $h$  de  $\mathrm{SL}(V)$  pour le produit scalaire hermitien de  $V$ , alors l'involution de Cartan de  $\mathrm{SL}(V)$  associée à  $\mathrm{SU}(V)$  est  $h \mapsto (h^*)^{-1}$ . Si  $g \in G$  est tel que  $\rho(g) = (\rho(g)^*)^{-1}$ , alors  $\rho(g) \in \mathrm{SU}(V)$ , donc  $g \in \rho^{-1}(\mathrm{SU}(V)) = K$  car  $K$  est maximal.

Notons  $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}(V))$  l'espace projectif de l'espace vectoriel réel des applications linéaires hermitiennes de  $V$  dans  $V$ . Cet espace est muni d'une action naturelle de  $G$  à gauche, définie par :

$$\forall g \in G, \forall \mathbb{R}h \in \mathbb{P}(\mathrm{Sym}(V)), g \cdot \mathbb{R}h = \mathbb{R}\rho(g)h\rho(g)^*.$$

D'après [Sat60], l'application de  $G/K$  dans  $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}(V))$  qui à  $gK$  associe  $\mathbb{R}\rho(g)\rho(g)^*$  est un plongement, dont l'adhérence de l'image est appelée la *compactification de Satake* de  $G/K$  associée à la représentation  $\rho$ . L'action de  $G$  sur  $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}(V))$  préserve l'image de ce plongement, qui est de plus équivariant pour les actions de  $G$  : c'est donc une  $G$ -compactification de  $G/K$ .

Considérons ici le groupe  $G = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ , et le sous-groupe  $K = \mathrm{SU}_m(\mathbb{K})$ . Considérons la représentation  $\rho = \mathrm{id}$  de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  pour l'action linéaire à gauche de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  sur le  $\mathbb{K}$ -module à droite  $V = \mathbb{K}^m$ . Considérons le plongement associé

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_m(\mathbb{K}) / \mathrm{SU}_m(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Sym}(\mathbb{K}^m)) \\ \gamma \mathrm{SU}_m(\mathbb{K}) &\mapsto \mathbb{R}\gamma\gamma^*. \end{aligned}$$

Notons  $\overline{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{S}}$  l'adhérence de son image, c'est-à-dire la compactification de Satake de  $\mathcal{E}_m$  associée à la représentation  $\rho$ .

**Théorème 16.12.** *Les deux compactifications  $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{T}}$  et  $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{S}}$  sont  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ -isomorphes.*

**Démonstration.** La compactification de Satake  $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{S}}$ , adhérence des classes d'homothétie des matrices hermitiennes définies positives, est l'ensemble des classes d'homothétie des matrices hermitiennes positives non nulles : en effet, soit  $a$  une matrice hermitienne positive non nulle. Alors, pour  $n \geq n_0$ , la matrice  $a + \frac{1}{n+1}I_m$  est hermitienne, positive et inversible, donc définie positive. Ainsi  $(a + \frac{1}{n+1}I_m)_{n \geq n_0}$  est une suite de matrices hermitiennes définies positives convergeant vers  $a$ . Par ailleurs, l'ensemble des matrices hermitiennes positives est fermé. Nous identifions donc  $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{S}}$  avec l'espace des classes d'homothétie de matrices hermitiennes positives non nulles.

Définissons une application  $\xi : \overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$ . Soit  $a$  une matrice hermitienne positive non nulle. Par diagonalisation (voir le lemme 16.1 si  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ), la matrice  $a$  admet une unique racine carrée hermitienne positive que l'on notera  $\sqrt{a}$ , c'est-à-dire telle que  $\sqrt{a}^2 = a$ . Remarquons que si  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , alors  $\sqrt{\lambda a} = \sqrt{\lambda} \sqrt{a}$ . Définissons l'application

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}(a) : \mathcal{O}^m &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\mapsto \|\sqrt{a}(u)\|, \end{aligned}$$

ce qui permet de poser

$$\begin{aligned} \xi : \overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{S}} &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m}) \\ \mathbb{R}a &\mapsto \mathbb{R}_+^* \widehat{\xi}(a), \end{aligned}$$

application qui est bien définie.

Montrons que l'image de  $\xi$  est égale à  $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{T}}$ . D'après la définition de  $\xi$  et le lemme 16.7, elle est incluse dedans. Maintenant, soit  $f$  un endomorphisme non nul de  $\mathbb{K}^m$ , et soit  $\ell_f : u \mapsto \|fu\|$ . Montrons alors que  $\widehat{\xi}(f^*f) = \ell_f$ , ce qui conclura par le lemme 16.7. Soit  $u \in \mathcal{O}^m$ , et soit  $f = kp$  une décomposition polaire de  $f : k \in \mathrm{U}_m(\mathbb{K})$  et  $p$  est un endomorphisme hermitien positif non nul. Alors  $\sqrt{f^*f} = \sqrt{p^*k^*kp} = \sqrt{p^2} = p$ , donc  $\widehat{\xi}(f^*f)(u) = \|\sqrt{f^*f}u\| = \|pu\| = \|kpu\| = \|fu\| = \ell_f(u)$ .

Cette application est  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ -équivariante : soit  $a$  une matrice hermitienne positive non nulle, et soit  $g \in \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ . D'après la décomposition polaire (voir le lemme 16.2 si  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ), il existe une matrice unitaire  $k$  et une matrice hermitienne positive  $p$  non nulle telles que  $g\sqrt{a} = pk$ . Soit  $u \in \mathcal{O}^m$ , alors

$$\widehat{\xi}(g \cdot a)(u) = \widehat{\xi}(gag^*)(u) = \|\sqrt{gag^*}(u)\|.$$

Or  $gag^* = g\sqrt{a}(g\sqrt{a})^* = (pk)(pk)^* = pp^* = p^2$ , donc  $\sqrt{gag^*} = p$ . Ainsi

$$\widehat{\xi}(g \cdot a)(u) = \|pu\| = \|p^*u\| = \|k\sqrt{a}g^*u\| = \|\sqrt{a}g^*u\| = (g \cdot \widehat{\xi}(a))(u),$$

où nous renvoyons à la fin de la partie 16.2 pour la définition de l'action de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  sur  $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{T}}$ . Nous avons ainsi  $\xi(g \cdot \mathbb{R}a) = g \cdot \xi(\mathbb{R}a)$ .

L'application qui à une matrice hermitienne positive  $a$  associe sa racine carrée hermitienne positive  $\sqrt{a}$  est continue, et par continuité de la norme on en déduit que, à

$u \in \mathcal{O}^m$  fixé, l'application qui à  $a$  associe  $\widehat{\xi}(a)(u)$  est continue. Puisque l'espace  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$  est muni de la topologie quotient de la topologie produit sur  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m}$ , il s'ensuit que l'application  $\widehat{\xi}$  est continue. On en déduit que l'application quotient  $\xi$  est continue.

Montrons enfin que l'application  $\xi$  est injective : soient  $a$  et  $a'$  deux matrices hermitiennes positives non nulles telle que  $\xi(\mathbb{R}a) = \xi(\mathbb{R}a')$ . À une homothétie de rapport strictement positif près, on peut supposer que  $\widehat{\xi}(a) = \widehat{\xi}(a')$ . Ainsi, pour tout  $u \in \mathcal{O}^m$ , nous avons  $\|\sqrt{a}u\| = \|\sqrt{a'}u\|$ . D'après le lemme 16.10, on en déduit qu'il existe  $k \in U_m(\mathbb{K})$  tel que  $k\sqrt{a} = \sqrt{a'}$ . Par unicité dans la décomposition polaire, on conclut que  $\sqrt{a} = \sqrt{a'}$ , d'où  $a = a'$ . Ainsi l'application  $\xi$  est injective.

Ainsi l'application  $\xi$  est une bijection continue et  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ -équivariante de l'espace compact  $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{S}}$  sur l'espace séparé  $\overline{\mathcal{E}}_m^{-\mathcal{T}}$ , donc est un homéomorphisme  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ -équivariant.  $\square$

## 16.4 Compactification d'espaces de réseaux autoduaux

Pour les prérequis de cette partie, on renvoie à [Bav05]. Fixons  $\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$  ou la conjugaison si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , et  $\tau$  la conjugaison si  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ . Fixons  $b$  une forme  $\tau$ -sesquilinéaire à gauche sur  $\mathbb{K}^m$  non dégénérée, hermitienne ou anti-hermitienne. Dans une base adaptée, la forme  $b$  est définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^m, b(x, y) = {}^t x^\tau J y,$$

où  $J \in U_m(\mathbb{K}) \cap \mathrm{GL}_m(\mathcal{O})$ .

Notons  $\mathrm{SU}(b)$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$  constitué des automorphismes de  $\mathbb{K}^m$  qui préservent  $b$  : puisque  $J$  est unitaire, le groupe  $\mathrm{SU}(b)$  est autoadjoint. Si  $\Lambda$  est un  $\mathcal{O}$ -réseau de  $\mathbb{K}^m$ , on définit son dual par rapport à  $b$  par :

$$\Lambda^{*b} = \{y \in \mathbb{K}^m : \forall x \in \Lambda, b(x, y) \in \mathcal{O}\}.$$

On dit que le réseau  $\Lambda$  est *autodual* (pour  $b$ ) si  $\Lambda^{*b} = \Lambda$ . Par exemple, le réseau  $\mathcal{O}^m$  est autodual.

Soit  $\Lambda_0 = \mathcal{O}^m$  le  $\mathcal{O}$ -réseau standard autodual de covolume 1, marqué par l'identité  $f_0 : \mathcal{O}^m \rightarrow \Lambda_0$ .

Pour l'action à droite de  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$  sur l'espace des réseaux marqués par postcomposition par l'adjoint, l'orbite du réseau marqué  $f_0$  par  $\mathrm{SU}(b)$  est constituée de réseaux autoduaux. En effet, soit  $g \in \mathrm{SU}(b)$ , et considérons  $y \in (g^*\Lambda_0)^{*b}$ . Nous savons donc que  $\forall x \in g^*\Lambda_0, b(x, y) \in \mathcal{O}$ . Ainsi  $\forall x \in \Lambda_0, b(g^*x, y) = b(x, g^{*-1}y) \in \mathcal{O}$ . Donc  $g^{*-1}y \in \Lambda_0^{*b} = \Lambda_0$ . Ainsi  $(g^*\Lambda_0)^{*b} = g^*\Lambda_0$ .

Dans l'identification entre l'espace  $\mathcal{E}_m$  des classes d'isométrie de réseaux marqués de covolume 1 et l'espace symétrique  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})/\mathrm{SU}_m(\mathbb{K})$ , l'ensemble des classes d'isométrie de réseaux marqués dans l'orbite de  $f_0$  sous  $\mathrm{SU}(b)$  s'identifie alors à l'espace homogène  $\mathrm{SU}(b)\mathrm{SU}_m(\mathbb{K})/\mathrm{SU}_m(\mathbb{K}) = \mathrm{SU}(b)/(\mathrm{SU}(b) \cap \mathrm{SU}_m(\mathbb{K}))$ . Notons  $\mathcal{E}_m^b$  ce sous-espace de  $\mathcal{E}_m$ .

On supposera que le groupe  $SU(b)$  n'est pas compact, de sorte que l'espace homogène  $\mathcal{E}_m^b$  n'est pas compact. Lorsque l'on restreint le plongement  $\phi$  de  $\mathcal{E}_m$  dans  $\mathcal{E}_m^{\mathcal{T}}$  au sous-espace  $\mathcal{E}_m^b$ , l'adhérence de son image définit la *compactification de Thurston*  $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{T}}$  de l'espace  $\mathcal{E}_m^b$ .

Lorsque l'on restreint le plongement  $\mathcal{E}_m$  dans  $\mathcal{E}_m^{\mathcal{S}}$  au sous-espace  $\mathcal{E}_m^b$ , l'adhérence de son image définit la *compactification de Satake*  $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{S}}$  de l'espace  $\mathcal{E}_m^b$ .

Le groupe  $SU(b)$  est un groupe de Lie réel simple non compact. Alors la compactification de Satake définie ci-dessus est naturellement isomorphe à la compactification de Satake associée à la représentation  $\rho$  de  $SU(b)$  dans  $SL_m(\mathbb{K})$ , restriction de l'identité de  $SL_m(\mathbb{K})$ .

**Proposition 16.13.** *La compactification de Thurston  $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{T}}$  de l'espace des réseaux marqués autoduaux est  $SU(b)$ -isomorphe à la compactification de Satake  $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{S}}$ .*

**Démonstration.** L'homéomorphisme  $SL_m(\mathbb{K})$ -équivariant (voir le théorème 16.12) entre  $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{T}}$  et  $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{S}}$  induit un homéomorphisme  $SU(b)$ -équivariant entre  $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{T}}$  et  $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{S}}$ .  $\square$

Dans la suite, nous aurons besoin de savoir que dans le cas de l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^{2g}$  muni de la forme symplectique standard

$$b(x, x') = \sum_{j=1}^g x_j x'_{g+j} - x_{g+j} x'_j,$$

tout réseau autodual pour  $b$  est dans l'orbite du réseau  $\mathbb{Z}^{2g}$ .

**Lemme 16.14.** *Tout réseau autodual pour  $b$  de  $\mathbb{R}^{2g}$  est l'image par un élément de  $Sp_{2g}(\mathbb{R})$  du réseau standard  $\mathbb{Z}^{2g}$ .*

**Démonstration.** Soit  $\Lambda$  un réseau autodual de  $\mathbb{R}^{2g}$  de covolume 1. Soit  $A \in SL_{2g}(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^{2g}$ . Le réseau  $\Lambda$  étant autodual pour la forme symplectique  $b$  qui a pour matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix},$$

on en déduit que le réseau  ${}^tAJA \cdot \mathbb{Z}^{2g}$  est dual du réseau  $\mathbb{Z}^{2g}$  pour le produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^{2g}$ . Or on sait que le réseau  $\mathbb{Z}^{2g}$  est autodual pour le produit scalaire standard, donc  ${}^tAJA \cdot \mathbb{Z}^{2g} = \mathbb{Z}^{2g}$  : en particulier  ${}^tAJA \in SL_{2g}(\mathbb{Z})$ . C'est la matrice d'une forme symplectique à coefficients entiers, donc par réduction il existe une matrice  $B \in GL_{2g}(\mathbb{Q})$  telle que  ${}^tB{}^tAJAB = J$ . Ainsi la matrice  $AB$  appartient à  $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ .

Quitte à prendre l'image du réseau  $\Lambda$  par  $(AB)^{-1} \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$ , on suppose que le réseau  $\Lambda = (AB)^{-1}A \cdot \mathbb{Z}^{2g} = B^{-1} \cdot \mathbb{Z}^{2g}$  est commensurable à  $\mathbb{Z}^{2g}$ . Le fait que  $\Lambda$  soit autodual impose alors qu'il s'écrive

$$\Lambda = \bigoplus_{j=1}^g \left( \mathbb{Z}r_j e_j \oplus \mathbb{Z}\frac{1}{r_j} e_{g+j} \right),$$

où  $r_1, \dots, r_g$  sont des rationnels non nuls. Puisque la matrice

$$C = \text{Diag}(r_1^{-1}, \dots, r_g^{-1}, r_1, \dots, r_g)$$

appartient à  $Sp_{2g}(\mathbb{R})$  et que  $C \cdot \Lambda = \mathbb{Z}^{2g}$ , ceci conclut le lemme.  $\square$

## 16.5 Cas du groupe de Lie exceptionnel $E_{6(-26)}$

Notons  $\mathbb{O}$  désigne l'algèbre non associative des octonions de Cayley (voir [Bae01, All99, MW09, CS03]). Le groupe  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{O})$  (dont nous rappelons la définition ci-dessous) est une forme réelle non compacte de rang réel 2 du groupe de Lie complexe exceptionnel  $E_6$ , notée  $E_{6(-26)}$ . Montrons comment les résultats précédents s'étendent à ce groupe.

L'algèbre non associative  $\mathbb{O}$  des octonions de Cayley est l'espace vectoriel réel euclidien de dimension 8, de base orthonormée  $(e_0 = 1, e_1, \dots, e_7)$ , muni de la multiplication bilinéaire définie sur cette base par la table 1.

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$-1$	$e_4$	$e_7$	$-e_2$	$e_6$	$-e_5$	$-e_3$
$e_2$	$-e_4$	$-1$	$e_5$	$e_1$	$-e_3$	$e_7$	$-e_6$
$e_3$	$-e_7$	$-e_5$	$-1$	$e_6$	$e_2$	$-e_4$	$e_1$
$e_4$	$e_2$	$-e_1$	$-e_6$	$-1$	$e_7$	$e_3$	$-e_5$
$e_5$	$-e_6$	$e_3$	$-e_2$	$-e_7$	$-1$	$e_1$	$e_4$
$e_6$	$e_5$	$-e_7$	$e_4$	$-e_3$	$-e_1$	$-1$	$e_2$
$e_7$	$e_3$	$e_6$	$-e_1$	$e_5$	$-e_4$	$-e_2$	$-1$

TABLE 1 – Table de multiplication des octonions

C'est une algèbre non associative à division, munie de la conjugaison

$$\begin{aligned} \mathbb{O} &\rightarrow \mathbb{O} \\ x = x_0 e_0 + \sum_{i=1}^7 x_i e_i &\mapsto \bar{x} = x_0 e_0 - \sum_{i=1}^7 x_i e_i. \end{aligned}$$

La norme euclidienne de  $\mathbb{O}$  vérifie  $\|x\| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{\bar{x}x}$  et  $\|xy\| = \|x\|\|y\|$ . Pour tout octonion  $x \in \mathbb{O}$ , on définit de plus sa partie réelle  $\mathrm{Re} x = \frac{x+\bar{x}}{2}$  et sa partie imaginaire  $\mathrm{Im} x = \frac{x-\bar{x}}{2}$ .

Soit  $m$  un entier au moins égal à 2. L'espace vectoriel réel  $\mathbb{O}^m$  est naturellement muni d'une structure euclidienne, pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^m \mathrm{Re}(\bar{u}_i v_i), \quad \text{où } u, v \in \mathbb{O}^m.$$

Considérons  $\mathcal{M}_m(\mathbb{O})$  l'espace vectoriel réel des matrices carrées de taille  $m$  à coefficients dans  $\mathbb{O}$ . En tant qu'ensemble d'endomorphismes  $\mathbb{R}$ -linéaires de  $\mathbb{O}^m$ , muni de la composition des endomorphismes, c'est une algèbre associative. Par contre, la multiplication n'est pas obtenue avec la formule usuelle du produit matriciel. Considérons le groupe  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{O})$  des matrices de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{O})$  qui induisent un isomorphisme de  $\mathbb{O}^m$ .

L'adjoint  $M^*$  d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{O})$  pour le produit scalaire de  $\mathbb{O}^m$  est alors la matrice transposée et conjuguée de  $M$ . On dit que la matrice  $M$  est hermitienne si  $M = M^*$ , et on note  $\mathfrak{h}_m(\mathbb{O})$  l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes. Une matrice hermitienne  $M$  est dite positive (resp. définie positive) si pour tout  $x \in \mathbb{O}^m \setminus \{0\}$ , nous avons  $\langle x, Mx \rangle \geq 0$  (resp.  $\langle x, Mx \rangle > 0$ ).

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{O})$  est dite unitaire si  $MM^* = I_m$ . Le sous-groupe  $U_m(\mathbb{O})$  de  $GL_m(\mathbb{O})$  constitué des matrices unitaires est un sous-groupe compact maximal de  $GL_m(\mathbb{O})$ .

Les résultats d'algèbre linéaire de la partie 16.1 se généralisent dans ce cadre, montrons comment.

Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{O}$  engendré par  $1, e_1, e_2$  et  $e_4$  est une algèbre associative isomorphe au corps gauche  $\mathbb{H}$  : nous identifierons ainsi  $i$  avec  $e_1$ ,  $j$  avec  $e_2$  et  $k$  avec  $e_4$ . Une base réelle de  $\mathbb{O}$  est alors donnée par  $(1, i, j, k, e_3, ie_3, je_3, ke_3)$ . Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{O}$  engendré par  $1$  et  $e_3$  est une algèbre commutative isomorphe à  $\mathbb{C}$ , et nous identifierons les deux : une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathbb{O}$  est alors donnée par  $(1, i, j, k)$ . Considérons l'isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire à droite

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{O}^m &\rightarrow \mathbb{C}^{4m} = (\mathbb{C}^4)^m \\ (x_l + iy_l + jz_l + kw_l)_{l \in \llbracket 1, m \rrbracket} &\mapsto (x_l, y_l, z_l, w_l)_{l \in \llbracket 1, m \rrbracket}. \end{aligned}$$

Considérons alors l'application

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{M}_m(\mathbb{O}) &\rightarrow \mathcal{M}_{4m}(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto (u \in \mathbb{C}^{4m} \mapsto \beta(M(\beta^{-1}(u))) \in \mathbb{C}^{4m}), \end{aligned}$$

c'est un plongement de  $\mathbb{C}$ -algèbres à droite associatives, équivariant pour l'adjoint. L'application  $\eta$  réalise le sous-groupe  $GL_m(\mathbb{O})$  comme un sous-groupe algébrique autoadjoint de  $GL_{4m}(\mathbb{C})$  : d'après [Hel78, Theorem 7.1, p. 224], l'orbite de ce sous-groupe dans l'espace symétrique de  $GL_{4m}(\mathbb{C})$  est un sous-espace symétrique, donc la décomposition polaire et la décomposition de Cartan y sont internes. En particulier, la diagonalisation des matrices hermitiennes inversibles y est interne, donc par densité on en déduit la diagonalisation des matrices hermitiennes quelconques. Nous pouvons donc énoncer les deux résultats suivants.

**Lemme 16.15** (Diagonalisation des matrices hermitiennes octonioniques). *Pour toute matrice hermitienne  $M \in \mathfrak{h}_m(\mathbb{O})$ , il existe une matrice unitaire  $U \in U_m(\mathbb{O})$  et une matrice diagonale réelle  $D \in M_m(\mathbb{R})$  telles que  $M = UDU^{-1}$ .*

**Lemme 16.16** (Décomposition polaire octonionique). *Soit  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{O})$ . Alors il existe une matrice unitaire  $U \in U_m(\mathbb{O})$  et une unique matrice hermitienne positive  $P \in \mathfrak{h}_m(\mathbb{O})$  telles que  $M = PU$ .*

On dispose également d'une identité de polarisation.

**Lemme 16.17** (Identité de polarisation octonionique). *Soit  $(q_1, \dots, q_8)$  une  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{O}$ . Alors il existe huit réels  $(\lambda_1, \dots, \lambda_8) \in \mathbb{R}^8$  tels que, pour tous  $u, v \in \mathbb{O}^m$ , nous ayons :*

$$\langle u|v \rangle = \sum_{l=1}^8 (\|u + vq_l\|^2 - \|u - vq_l\|^2) \lambda_l.$$

**Démonstration.** Remarquons tout d'abord que

$$\|u + vq_l\|^2 - \|u - vq_l\|^2 = 4 \operatorname{Re}(\bar{u}(vq_l)).$$



Or la partie réelle des octonions est associative, donc  $\|u + vq_l\|^2 - \|u - vq_l\|^2 = 4 \operatorname{Re}((\bar{u}v)q_l)$ . Considérons l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{O} &\rightarrow \mathbb{R}^8 \\ q &\mapsto (4 \operatorname{Re}(qq_l))_{l \in \llbracket 1, 8 \rrbracket}.\end{aligned}$$

Si  $q \in \mathbb{O}$  appartient au noyau de  $\varphi$ , alors par  $\mathbb{R}$ -linéarité  $4 \operatorname{Re}(q\bar{q}) = 4|q|^2 = 0$  donc  $q = 0$  : l'application  $\varphi$  est donc un isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire. Pour tout  $l \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ , notons  $\lambda_l = \operatorname{Re}(\varphi^{-1}(f_l))$ , où  $(f_1, \dots, f_8)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^8$ . Alors, pour tous  $u, v \in \mathbb{O}^m$ , nous avons par  $\mathbb{R}$ -linéarité

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \operatorname{Re}(\bar{u}v) = \operatorname{Re}(\varphi^{-1}(\varphi(\bar{u}v))) \\ &= \operatorname{Re}(\varphi^{-1}((4 \operatorname{Re}((\bar{u}v)q_l))_{l \in \llbracket 1, 8 \rrbracket})) \\ &= \operatorname{Re}\left(\varphi^{-1}\left(\sum_{l=1}^8 4 \operatorname{Re}((\bar{u}v)q_l) f_l\right)\right) \\ &= \sum_{l=1}^8 4 \operatorname{Re}((\bar{u}v)q_l) \operatorname{Re}(\varphi^{-1}(f_l)) \\ &= \sum_{l=1}^8 (\|u + vq_l\|^2 - \|u - vq_l\|^2) \lambda_l. \quad \square\end{aligned}$$

Définissons  $\operatorname{SL}_m(\mathbb{O})$  le sous-groupe de  $\operatorname{GL}_m(\mathbb{O})$  constitué des matrices qui préservent une mesure de Haar sur  $\mathbb{O}^m$ . On peut également définir le déterminant d'une matrice hermitienne, auquel cas c'est aussi le sous-groupe qui préserve le déterminant, pour l'action suivante :

$$\forall g \in \operatorname{GL}_m(\mathbb{O}), \forall M \in \mathfrak{h}_m(\mathbb{O}), g \cdot M = gM + Mg^*.$$

Voici les formules définissant le déterminant des matrices hermitiennes dans les cas  $m = 2$  et  $m = 3$ .

- Lorsque  $m = 2$ , les matrices hermitiennes s'écrivent

$$\mathfrak{h}_2(\mathbb{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x \\ \bar{x} & \beta \end{pmatrix}, x \in \mathbb{O}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

On définit alors le déterminant par la formule

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & x \\ \bar{x} & \beta \end{pmatrix} = \alpha\beta - |x|^2.$$

- Lorsque  $m = 3$ , les matrices hermitiennes s'écrivent

$$\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \bar{z} & \bar{y} \\ z & \beta & x \\ y & \bar{x} & \gamma \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{O}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

On définit alors le déterminant par la formule

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \bar{z} & \bar{y} \\ z & \beta & x \\ y & \bar{x} & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma - (\alpha|x|^2 + \beta|y|^2 + \gamma|z|^2) + 2 \operatorname{Re}(xyz).$$

Lorsque  $m = 2$ , le groupe de Lie réel  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{O})$  est isomorphe au groupe simple  $\mathrm{Spin}(9, 1)$ , revêtement universel du groupe  $\mathrm{SO}_0(9, 1)$ . C'est un groupe classique, dont l'espace symétrique est l'espace des classes d'isométrie de réseaux orthogonaux de  $\mathbb{R}^{10}$  pour une forme quadratique de signature  $(9, 1)$ , donc son cas est traité dans la partie 16.4.

Dorénavant nous nous placerons dans le cas  $m = 3$ . Alors le groupe de Lie simple  $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{O})$  est une forme réelle non compacte de rang réel 2 du groupe de Lie complexe exceptionnel  $E_6$ , notée  $E_{6(-26)}$ . Le sous-groupe  $K = \mathrm{SU}_3(\mathbb{O}) = \mathrm{SL}_3(\mathbb{O}) \cap U_3(\mathbb{O})$  est un sous-groupe compact maximal de  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{O})$ , isomorphe au groupe  $F_{4(-52)}$ , la forme réelle compacte du groupe de Lie complexe exceptionnel  $F_4$ .

Notons  $\mathcal{O}$  un ordre (non associatif) de  $\mathbb{O}$ , c'est-à-dire le sous-groupe additif engendré par une base réelle de  $\mathbb{O}$  et stable par multiplication, contenant l'anneau des entiers  $\mathbb{Z}[e_0, \dots, e_7]$  (il existe 16 tels ordres, voir par exemple [CS03, Theorem1, p. 100]). Appelons  $\mathcal{O}$ -réseau marqué de  $\mathbb{O}^3$  toute application  $\mathcal{O}$ -équivariante à droite  $f : \mathcal{O}^3 \rightarrow \mathbb{O}^3$  telle que le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par l'image soit égal à  $\mathbb{O}^3$ . Le covolume d'un réseau marqué est le covolume de son image dans  $\mathbb{O}^3$ , pour une mesure de Haar sur  $\mathbb{O}^3$  normalisée de sorte que le covolume de  $\mathcal{O}^3$  soit égal à 1.

À toute matrice hermitienne  $M$  de  $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$  définie positive de déterminant 1, on associe la classe d'isométrie du  $\mathcal{O}$ -réseau marqué  $f : \mathcal{O}^3 \rightarrow \mathbb{O}^3$  de covolume 1 qui à  $u \in \mathcal{O}^3$  associe  $\|M^*f(u)\|$ . Et à toute classe d'isométrie d'un  $\mathcal{O}$ -réseau marqué  $f : \mathcal{O}^3 \rightarrow \mathbb{O}^3$  de covolume 1, on associe la classe à droite modulo  $\mathrm{SU}_3(\mathbb{O})$  d'une matrice  $M \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{O})$  telle que pour tout  $u \in \mathcal{O}^3$  nous ayons  $f(u) = M^*(u)$ , donc d'après la décomposition polaire de  $G$  on associe une unique matrice hermitienne de  $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$  définie positive de déterminant 1. Ainsi l'espace  $X$  des classes d'isométrie de  $\mathcal{O}$ -réseaux marqués de covolume 1 de  $\mathbb{O}^3$  s'identifie au sous-espace de  $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$  constitué des matrices hermitiennes définies positives de déterminant 1, et ce sont deux modèles de l'espace symétrique du groupe  $G$ .

On peut alors considérer l'application

$$\begin{aligned} \phi : X &\mapsto \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^3}) \\ [f : \mathcal{O}^3 \rightarrow \mathbb{O}^3] &\mapsto [u \mapsto \|f(u)\|]. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer la même preuve que celle de la proposition 16.11, en remplaçant « endomorphisme » par « endomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire  $\mathcal{O}^3$ -équivariant à droite ». On en déduit que l'application  $\phi$  est un plongement, et on appelle l'adhérence de son image la compactification de Thurston  $\overline{X}^T$  de  $X$ .

Par ailleurs, la compactification de Satake de  $X$  associée à la représentation  $\rho : G \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}))$  définie par  $g \cdot M = gM + Mg^*$  est l'adhérence  $\overline{X}^S$  de l'image de  $X$  dans l'espace projectif réel  $\mathbb{P}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}))$  de  $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ .

La preuve du théorème 16.12 est vraie dans ce cadre, et permet d'énoncer le résultat suivant.

**Théorème 16.18.** *Les deux compactifications  $\overline{X}^T$  et  $\overline{X}^S$  de l'espace symétrique  $X$  du groupe de Lie exceptionnel  $E_{6(-26)}$  sont  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{O})$ -isomorphes.*

## 17 Compactification de Thurston de l'espace de Torelli

### 17.1 L'espace de Torelli

Le but de cette partie est de construire une compactification de l'espace de Torelli d'une surface  $S$  analogue à la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller de  $S$ . Pour les définitions de base, nous renvoyons à [Far06], [Bos92] et [War83].

Soient  $g > 0$  et  $q \geq 0$  deux entiers tels que  $2 - 2g - q < 0$ . Fixons  $S$  une surface lisse compacte connexe orientée de genre  $g$ , munie d'une partie fixée  $P$  de cardinal  $q$ , dont les éléments sont appelés les points marqués de  $S$ . Dans le cas où  $q = 0$ , on omettra la notation  $P$  dans ce qui suit.

Notons  $\text{Diff}^+(S, P)$  le groupe des difféomorphismes de  $S$  préservant l'orientation, fixant  $P$  point par point, muni de la topologie compacte-ouverte.

Notons  $\text{Diff}_{H^1}(S, P)$  le sous-groupe des difféomorphismes de  $S$  préservant l'orientation, fixant  $P$  point par point, induisant l'identité sur  $H^1(S \setminus P, \mathbb{R})$ .

Notons  $\text{Diff}_0(S, P)$  le sous-groupe des difféomorphismes de  $S$  préservant l'orientation, isotopes à l'identité par une isotopie fixant  $P$ .

Nous avons les inclusions  $\text{Diff}_0(S, P) \subset \text{Diff}_{H^1}(S, P) \subset \text{Diff}^+(S, P)$ .

Notons  $\text{Teich}(S, P)$  l'espace de Teichmüller de  $S$  : c'est l'ensemble des classes d'équivalence de couples  $(X, h)$ , où  $X$  est une surface hyperbolique orientée complète d'aire finie et  $h : S \setminus P \rightarrow X$  est un difféomorphisme préservant l'orientation (appelé un marquage), et où l'on identifie les couples  $(X, h)$  et  $(X', h')$  s'il existe une isométrie préservant l'orientation  $s : X \rightarrow X'$  telle que  $h'$  soit égal à  $s \circ h$  modulo  $\text{Diff}_0(S, P)$ , c'est-à-dire que telle que  $h'$  soit isotope à  $s \circ h$ . Le groupe  $\text{Diff}^+(S, P)$  agit sur  $\text{Teich}(S, P)$  par précomposition du marquage, de noyau d'action  $\text{Diff}_0(S, P)$ . Le groupe modulaire  $\text{MCG}(S, P) = \text{Diff}^+(S, P) / \text{Diff}_0(S, P)$  agit ainsi fidèlement sur  $\text{Teich}(S, P)$ .

Notons  $\text{Tor}(S, P)$  l'espace de Torelli de  $S$  : c'est l'ensemble des classes d'équivalence de couples  $(X, h)$ , où  $X$  est une surface hyperbolique orientée complète d'aire finie et  $h : S \setminus P \rightarrow X$  est un difféomorphisme préservant l'orientation, et où l'on identifie les couples  $(X, h)$  et  $(X', h')$  s'il existe une isométrie préservant l'orientation  $s : X \rightarrow X'$  telle que  $h'$  soit égal à  $s \circ h$  modulo  $\text{Diff}_{H^1}(S, P)$ . Ceci revient à demander l'égalité  $h'^* = h^* \circ s^* : H^1(X', \mathbb{R}) \rightarrow H^1(S \setminus P, \mathbb{R})$ .

Notons  $\text{Mod}(S, P)$  l'espace des modules de  $S$  : c'est l'ensemble des classes d'équivalence de couples  $(X, h)$ , où  $X$  est une surface hyperbolique orientée complète d'aire finie et  $h : S \setminus P \rightarrow X$  est un difféomorphisme préservant l'orientation, et où l'on identifie les couples  $(X, h)$  et  $(X', h')$  si  $X$  et  $X'$  sont isométriques.

Munissons l'espace de Teichmüller  $\text{Teich}(S, P)$  de la topologie quotient de la topologie induite par celle de  $\Gamma(\otimes^2 TS)$ , où à chaque couple  $(X, h)$  on associe  $h^* \sigma_X$ , en notant  $\sigma_X$  la métrique riemannienne hyperbolique de  $X$ . L'espace de Teichmüller admet alors une structure naturelle de variété complexe biholomorphe à  $\mathbb{C}^{3g-3+q}$  (voir [FLP79]).

L'espace de Torelli  $\text{Tor}(S, P)$  est le quotient de  $\text{Teich}(S, P)$  par le groupe de Torelli  $T(S, P) = \text{Diff}_{H^1}^+(S, P) / \text{Diff}_0^+(S, P)$ . Le groupe de Torelli étant sans torsion (voir par exemple [Far06]), on munit  $\text{Tor}(S, P)$  de la structure de variété quotient induite par celle de  $\text{Teich}(S, P)$ .

L'espace des modules  $\text{Mod}(S, P)$  est le quotient de  $\text{Teich}(S, P)$  par le groupe modulaire  $\text{MCG}(S, P)$ . On munit  $\text{Mod}(S, P)$  de la topologie d'orbifold complexe quotient de celle de  $\text{Teich}(S, P)$ . C'est aussi le quotient de l'espace de Torelli par le groupe  $\text{MCG}(S, P) / T(S, P) = \text{Diff}^+(S, P) / \text{Diff}_{H^1}^+(S, P)$ .

La forme d'intersection algébrique est une forme symplectique non dégénérée sur  $H^1(S, \mathbb{Z})$ , ce qui permet de définir un morphisme du groupe modulaire  $\text{MCG}(S, P)$  à valeurs dans le groupe symplectique  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ . Le noyau de ce morphisme est le sous-groupe de Torelli  $T(S, P)$ , et ce morphisme est surjectif donc le groupe quotient  $\text{MCG}(S, P) / T(S, P)$  est isomorphe à  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  (voir [Far06]).

## 17.2 La compactification de Thurston de l'espace de Torelli

Soit  $X$  une surface hyperbolique connexe, orientée, d'aire finie, de genre  $g$ , avec  $q$  cuspidales, marquée par un difféomorphisme préservant l'orientation  $h : S \setminus P \rightarrow X$ . Le premier groupe de cohomologie  $H^1(X, \mathbb{R})$  est un espace vectoriel réel, considérons le sous-espace vectoriel  $H_c^1(X, \mathbb{R})$  de  $H^1(X, \mathbb{R})$  constitué des classes de cohomologie de 1-formes différentielles fermées à support compact. Considérons l'inclusion  $\iota : S \setminus P \rightarrow S$ , elle induit un isomorphisme  $\iota^* : H^1(S, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R})$ . Ainsi  $h^{-1*} \circ \iota^*$  est un isomorphisme entre  $H^1(S, \mathbb{R})$  et  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ , donc ce dernier est de dimension réelle  $2g$ .

Cet espace vectoriel est également isomorphe au premier groupe de cohomologie  $L^2$  réduite de  $X$ , ainsi qu'à l'espace vectoriel des 1-formes différentielles harmoniques sur  $X$  (dans le cas compact c'est le théorème de Hodge, dans le cas général voir [MP90] et [Car07, Corollary 1.6, p. 7 et Theorem 2.16, p. 27]). Nous utiliserons ici ces trois points de vue, et lorsqu'il faudra choisir un représentant d'une classe de cohomologie à support compact, nous choisirons l'unique représentant harmonique.

Sur l'espace  $H_c^1(X, \mathbb{R})$  vu comme premier groupe de cohomologie  $L^2$  réduite, nous disposons du produit scalaire  $L^2$ , noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ . On peut également voir ce produit scalaire grâce à l'étoile de Hodge  $*_X$ . L'étoile de Hodge est une anti-involution de l'espace vectoriel des 1-formes différentielles réelles sur  $X$ , définie comme la précomposition, sur chaque plan tangent, par la rotation d'un quart de tour dans le sens positif (c'est-à-dire la multiplication par  $i$ , pour la structure complexe sur  $X$  correspondante). L'étoile de Hodge définit par restriction une involution sur l'espace des 1-formes différentielles harmoniques  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ . Le produit scalaire sur  $H_c^1(X, \mathbb{R})$  s'exprime alors ainsi :

$$\forall \omega, \omega' \in H_c^1(X, \mathbb{R}), \langle \omega, \omega' \rangle_X = \int_X \omega \wedge *_X \omega'.$$

On notera  $\| \cdot \|_X$  la norme euclidienne ( $L^2$ ) associée sur  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ .

Par ailleurs, la forme d'intersection algébrique  $\text{Int}$  sur  $H_c^1(X, \mathbb{R})$  (image de la forme d'intersection algébrique sur  $H^1(S, \mathbb{R})$ ) est alternée et non dégénérée, et est donnée par

$$\forall \omega, \omega' \in H_c^1(X, \mathbb{R}), \text{Int}(\omega, \omega') = \int_X \omega \wedge \omega' = \langle \omega, - *_X \omega' \rangle_X.$$

Remarquons que l'espace vectoriel  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ , muni de ce produit scalaire et de la forme d'intersection, est isomorphe isométriquement symplectiquement à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{2g}$ , muni de la forme symplectique standard

$$b(x, x') = \sum_{j=1}^g x_j x'_{g+j} - x_{g+j} x'_j.$$

Choisissons un tel isomorphisme linéaire isométrique symplectique

$$\varphi_X : H_c^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}.$$

Le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{R})$  préservant la forme  $b$  est  $\mathrm{U}(b) = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ .

Considérons  $\mathcal{E}_{2g}^b$  l'espace des réseaux de covolume 1 de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{2g}$ , autoduals pour la forme symplectique  $b$ , marqués par  $\mathbb{Z}^{2g}$ , à isométrie près. Il s'identifie à l'espace symétrique hermitien  $\mathcal{E}_{2g}^b = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) / \mathrm{U}(g)$ , d'après le lemme 16.14. Fixons une base symplectique de  $H^1(S, \mathbb{Z})$ , ce qui nous permettra d'identifier  $H^1(S, \mathbb{Z})$  avec  $\mathbb{Z}^{2g}$ .

L'application période de l'espace de Torelli à valeurs dans l'espace symétrique  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) / \mathrm{U}(g)$  ou son quotient de l'espace des modules dans l'espace localement symétrique  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) / \mathrm{U}(g)$  est un objet très classique (voir par exemple [Gri70], [Deb10], [Mes92], [Far06]). La nouvelle formulation ci-dessous facilitera notre compactification de l'espace de Torelli, et nous ferons le lien avec la définition classique très prochainement. Cette formulation a de plus l'avantage d'inclure le cas non compact (i.e.  $P \neq \emptyset$ ).

Si  $[X, h] \in \mathrm{Tor}(S, P)$ , alors  $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^* : H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$  est un morphisme de groupes. Définissons l'application période

$$\begin{aligned} p : \mathrm{Tor}(S, P) &\rightarrow \mathcal{E}_{2g}^b \\ [X, h] &\mapsto [\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^* |_{H^1(S, \mathbb{Z})}]. \end{aligned}$$

**Lemme 17.1.** *L'application période est bien définie et continue.*

**Démonstration.** Puisque les trois applications linéaires  $\iota^* : H^1(S, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R})$ ,  $h^{-1*} : H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(X, \mathbb{R})$  et  $\varphi_X : H_c^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$  sont des isomorphismes linéaires, l'image  $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(H^1(S, \mathbb{Z}))$  est un réseau de  $\mathbb{R}^{2g}$ .

Vérifions que ce réseau  $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(H_1(S, \mathbb{Z}))$  de  $\mathbb{R}^{2g}$  est bien autodual par rapport à  $b$ . Soit  $c \in H^1(S, \mathbb{R})$  tel que, pour tout  $d \in H^1(S, \mathbb{Z})$ , nous ayons  $b(\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(c), \varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(d)) \in \mathbb{Z}$ . Fixons  $d \in H^1(S, \mathbb{Z})$ . Puisque  $\varphi_X : H_c^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$  préserve les formes symplectiques, on sait que  $\mathrm{Int}(h^{-1*} \circ \iota^*(c), h^{-1*} \circ \iota^*(d)) \in \mathbb{Z}$ . L'isomorphisme  $h^{-1*} : H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(X, \mathbb{R})$  provient d'un difféomorphisme préservant l'orientation  $h^{-1} : X \rightarrow S \setminus P$ , donc préserve les formes d'intersection, ainsi  $\mathrm{Int}(\iota^*(c), \iota^*(d)) \in \mathbb{Z}$ . Enfin, pour les formes différentielles  $\iota^*(c)$  et  $\iota^*(d)$  à support compact, leur nombre d'intersection sur  $S \setminus P$  et sur  $S$  est le même, donc  $\mathrm{Int}(c, d) \in \mathbb{Z}$ . Or on sait que le réseau standard  $\mathbb{Z}^{2g} = H^1(S, \mathbb{Z})$  de  $\mathbb{R}^{2g}$  est autodual pour la forme symplectique, donc  $c \in H^1(S, \mathbb{Z})$ . Ainsi le réseau  $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(H_1(S, \mathbb{Z}))$  de  $\mathbb{R}^{2g}$  est autodual par rapport à  $b$ .

De plus, d'après le lemme 16.14, il est dans l'orbite de  $\mathbb{Z}^{2g}$  sous  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ , donc il est de covolume 1.

Supposons que  $[X', h']$  soit égal à  $[X, h]$  dans l'espace de Torelli, alors il existe une isométrie préservant l'orientation  $s : X \rightarrow X'$  telle que  $h^{-1*} = s^* \circ h'^{-1*} : H^1(S \setminus P, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(X, \mathbb{R})$ . Or l'application  $s^* : H_c^1(X', \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(X, \mathbb{R})$  est une isométrie linéaire préservant la forme d'intersection, donc les deux réseaux marqués  $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*|_{H^1(S, \mathbb{Z})}$  et  $\varphi_{X'} \circ h'^{-1*} \circ \iota^*|_{H^1(S, \mathbb{Z})}$  sont isométriques symplectiquement, et égaux dans  $\mathcal{E}_{2g}^b$ .

Remarquons également que l'application  $p$  ne dépend pas du choix de l'isomorphisme isométrique symplectique  $\varphi_X : H_c^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$  : deux tels isomorphismes diffèrent par composition au but d'une isométrie symplectique de  $\mathbb{R}^{2g}$ , ce qui donne une même image dans l'espace  $\mathcal{E}_{2g}^b$ .

Montrons que l'application  $p$  est continue. Soit  $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $[X, h]$  dans  $\text{Tor}(S, P)$ . Dans le fibré localement trivial donné par  $H_c^1(\cdot, \mathbb{R})$  au-dessus de l'espace de Torelli  $\text{Tor}(S, P)$ , la suite  $(H_c^1(X_n, \mathbb{R}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ . Ceci nous permet donc d'identifier chaque  $H_c^1(X_n, \mathbb{R})$  avec  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ .

La forme d'intersection sur  $h_n^{-1*} \circ \iota^*(H^1(S, \mathbb{Z})) \subset H_c^1(X_n, \mathbb{R})$  est donnée par l'image de la forme d'intersection sur  $H^1(S, \mathbb{Z})$ . Puisque la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $X$  dans l'espace des modules  $\text{Mod}(S, P)$ , la suite des involutions de Hodge  $(*_X)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'involution de Hodge  $*_X$  sur  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ . Ainsi la suite des produits scalaires  $(\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ .

Il reste à montrer que la suite des marquages converge : on sait que la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $h$  modulo  $\text{Diff}_{H^1}^+(S, P)$ , donc la suite  $(h_n^{-1*})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $h^{-1*}$  pour la topologie des applications linéaires de  $H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R})$  dans  $H_c^1(X_n, \mathbb{R})$  identifié à  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ .

Nous avons montré que la suite  $(p([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  convergeait vers  $p([X, h])$  : l'application période est donc continue.  $\square$

**Théorème 17.2** (Griffiths). *Dans le cas compact ( $P = \emptyset$ ), l'application  $p$  est holomorphe. L'adhérence de son image  $p(\text{Tor}(S))$  est une sous-variété analytique complexe fermée de  $\mathcal{E}_{2g}^b$ , et l'image  $p(\text{Tor}(S))$  est le complémentaire dans son adhérence d'une sous-variété analytique complexe fermée.*

**Démonstration.** Rappelons la définition classique de l'application période (voir [Far06, Chapter 3, §2.1]). Nommons  $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$  la base de  $H^1(S, \mathbb{Z})$  qui s'envoie sur la base canonique de  $\mathbb{Z}^{2g}$  par l'isomorphisme fixé entre  $H^1(S, \mathbb{Z})$  et  $\mathbb{Z}^{2g}$ . Considérons la base symplectique  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  de  $H_1(S, \mathbb{Z})$  obtenue par dualité de Poincaré. Fixons  $[X, h] \in \text{Tor}(S)$ . Soit  $(\omega_1, \dots, \omega_g, \omega'_1, \dots, \omega'_g)$  une base de  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ , image de la base canonique de  $\mathbb{R}^{2g}$  par un isomorphisme isométrique respectant la forme symplectique, et choisissons pour  $\varphi_X$  cet isomorphisme.

Comme nous sommes ici dans le cas compact ( $P = \emptyset$ ), l'application  $h_*$  est définie de  $H_1(S, \mathbb{R})$  dans  $H_1(X, \mathbb{R})$ . La matrice période de  $[X, h]$  est alors définie comme la matrice par blocs

$$\Omega = \begin{pmatrix} \left( \int_{h_*(a_j)} \omega_k \right)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} & \left( \int_{h_*(a_j)} \omega'_k \right)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} \\ \left( \int_{h_*(b_j)} \omega_k \right)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} & \left( \int_{h_*(b_j)} \omega'_k \right)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2g}(\mathbb{R}).$$

Puisque  $(\omega_1, \dots, \omega_g, \omega'_1, \dots, \omega'_g)$  est une base symplectique de  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ , on en déduit que  $\Omega \in \text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ . Cette matrice ne dépend que du choix de la base  $(\omega_1, \dots, \omega_g, \omega'_1, \dots, \omega'_g)$ , et

deux choix de telles bases diffèrent par l'action d'une isométrie de  $H_c^1(X, \mathbb{R})$  préservant la forme d'intersection, c'est-à-dire par l'action de  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2g}(\mathbb{R}) = \mathrm{U}(g)$ . Ainsi la matrice période appartient à l'espace symétrique  $\mathcal{E}_{2g}^b = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\mathrm{U}(g)$  : cela définit l'application période classique  $\mathrm{Tor}(S) \rightarrow \mathcal{E}_{2g}^b$ .

Explicitons l'identification entre l'espace  $\mathcal{E}_{2g}^b$  des réseaux marqués autoduaux de  $\mathbb{R}^{2g}$  de covolume 1 et l'espace symétrique  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\mathrm{U}(g)$ , décrite au début de la partie 16.2, dans notre cas particulier. La classe d'isométrie d'un réseau marqué  $f : \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$  auto-dual pour  $b$  et de covolume 1, s'identifie à la transposée de la matrice de l'isomorphisme linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^{2g}$ , modulo multiplication par  $\mathrm{U}(g)$  à droite. Dans le cas de la classe du réseau marqué  $p([X, h])$ , la matrice ainsi obtenue est

$$\Omega' = \begin{pmatrix} (\langle h^{-1*}(\alpha_j), \omega_k \rangle)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} & (\langle h^{-1*}(\alpha_j), \omega'_k \rangle)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} \\ (\langle h^{-1*}(\beta_j), \omega_k \rangle)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} & (\langle h^{-1*}(\beta_j), \omega'_k \rangle)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2g}(\mathbb{R}).$$

Or chaque produit scalaire est égal à une intégrale intervenant dans la matrice  $\Omega$  : par exemple, pour tous  $j, k \in \llbracket 1, g \rrbracket$ , nous avons

$$\langle h^{-1*}(\alpha_j), \omega_k \rangle = \mathrm{Int}(h^{-1*}(\alpha_j), *_X \omega_k) = \int_{h_*(a_j)} *_X \omega_k = \int_{h_*(a_j)} \omega'_k,$$

par dualité de Poincaré. Dans les autres cas il faut utiliser la relation  $*_X \omega'_k = -\omega_k$ , et on remarque alors que  $\Omega' = \Omega J'$ , où  $J'$  est la matrice par blocs

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(g).$$

Ainsi les deux définitions de l'application période sont les mêmes.

D'après [Gri70, Proposition 9.3, p. 156], l'application période est holomorphe. De plus, d'après [Gri70, Theorem 9.6], l'adhérence de l'image de l'application période est une sous-variété analytique complexe fermée, qui contient  $\mathrm{Im} p$  comme complémentaire d'une sous-variété analytique complexe fermée.  $\square$

**Théorème 17.3** (Torelli). *Dans le cas compact ( $P = \emptyset$ ), l'application  $p$  est un revêtement ramifié de degré deux sur son image, ramifié sur le lieu hyperelliptique de  $\mathrm{Tor}(S)$ .*

**Démonstration.** La forme forte du théorème de Torelli, formulée dans [Mes92, Theorem 1, p. 783], énonce que l'application période est un revêtement ramifié de degré deux sur son image, ramifié sur le lieu hyperelliptique de  $\mathrm{Tor}(S)$ .  $\square$

Considérons l'application (introduite en introduction dans le cas  $P = \emptyset$ )

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Tor}(S, P) &\rightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})} \\ [X, h] &\mapsto (c \mapsto \|h^{-1*} \circ \iota^*(c)\|_X), \end{aligned}$$

et son image après composition par l'application canonique  $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \bar{\psi} : \mathrm{Tor}(S, P) &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}) \\ [X, h] &\mapsto [c \mapsto \|h^{-1*} \circ \iota^*(c)\|_X]. \end{aligned}$$

Les applications  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  sont  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -équivariantes pour les actions de  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  (s'identifiant à  $\mathrm{MCG}(S, P)/T(S, P)$ ) sur  $\mathrm{Tor}(S, P)$  et de  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{Z}^{2g} = H^1(S, \mathbb{Z})$ .

L'application  $\bar{\psi}$  est égale à la composition  $\phi \circ p$ , où  $\phi : \mathcal{E}_{2g}^b \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$  est le plongement de la proposition 16.11.

Dans le cas compact ( $P = \emptyset$ ), d'après le théorème 17.3, l'application  $\bar{\psi}$  est un revêtement ramifié d'ordre deux sur son image. Dans le cas non compact, d'après le lemme 17.1, l'application  $\bar{\psi}$  est continue.

Notons  $\mathrm{Tor}(S, P) \cup \{\infty\}$  la compactification d'Alexandrov de  $\mathrm{Tor}(S, P)$ , et considérons le plongement diagonal de  $\mathrm{Tor}(S, P)$  dans

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H_1(S, \mathbb{Z})}) \times (\mathrm{Tor}(S, P) \cup \{\infty\})$$

donné par le produit de  $\bar{\psi}$  et de l'inclusion. Appelons *compactification de Thurston* de l'espace de Torelli, notée  $\overline{\mathrm{Tor}(S, P)}^T$ , l'adhérence de l'image de ce plongement. C'est une  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -compactification.

D'autre part, considérons le plongement diagonal de  $\mathrm{Tor}(S)$  dans  $\overline{\mathcal{E}_{2g}^b}^S \times (\mathrm{Tor}(S) \cup \{\infty\})$  donné par le produit de  $p$  et de l'inclusion. Appelons *compactification de Satake* de l'espace de Torelli, notée  $\overline{\mathrm{Tor}(S)}^S$ , l'adhérence de l'image de ce plongement. C'est une  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -compactification.

**Théorème 17.4.** *Les compactifications de Thurston  $\overline{\mathrm{Tor}(S, P)}^T$  et de Satake  $\overline{\mathrm{Tor}(S, P)}^S$  de l'espace de Torelli sont  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -isomorphes.*

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que les deux compactifications de  $p(\mathrm{Tor}(S, P)) \subset \mathcal{E}_{2g}^b$ , où  $p(\mathrm{Tor}(S, P))$  est plongé dans les deux compactifications  $\overline{\mathcal{E}_{2g}^b}^T$  et  $\overline{\mathcal{E}_{2g}^b}^S$ , sont  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -isomorphes : c'est une conséquence du théorème 16.12.  $\square$

## 17.3 Stratification d'une partie du bord de l'espace de Torelli

Dans toute cette partie, nous fixerons comme au début la partie 17.1 une surface  $S$  lisse compacte connexe orientée de genre  $g$ , et  $P$  une partie finie fixée de  $S$  de cardinal  $q$ , telle que  $2g - 2 + q > 0$ .

### 17.3.1 Comparaison entre norme stable et norme euclidienne

Fixons une surface hyperbolique  $X$  d'aire finie connexe orientée. Appelons *systole séparante* (resp. non séparante) de  $X$  la borne inférieure (qui est atteinte) des longueurs des courbes fermées simples de  $X$  non homotopes à zéro, qui ne bordent pas une unique cuspide, et séparantes (resp. non séparantes). Notons  $\mathrm{sns}(X)$  la systole non séparante de  $X$ .

Pour les rappels qui suivent, nous renvoyons à la thèse de Daniel Massart ([Mas96]).

Définissons une norme naturelle sur  $H_1(X, \mathbb{R})$ , la *norme stable* (voir [Gro81] et [Mas97]). Si  $\gamma$  est une courbe fermée simple non homotope à zéro sur  $X$ , notons  $\mathrm{lg}(\gamma)$  la



longueur hyperbolique de l'unique géodésique dans la classe d'homotopie libre de  $\gamma$ . Soit  $c \in H_1(X, \mathbb{R})$ . Alors on peut représenter  $c$  par un 1-cycle singulier de la forme  $\sum_{i \in I} x_i \alpha_i$ , où  $I$  est fini,  $x_i \in \mathbb{R}$  (et  $x_i \in \mathbb{Z}$  si  $c \in H_1(X, \mathbb{Z})$ ) et  $\alpha_i$  est une courbe fermée simple non homologue à zéro sur  $X$ , qu'on appelle *multicourbe*. On appelle *support* d'une telle multicourbe la réunion des courbes  $\alpha_i$  pour lesquelles  $x_i \neq 0$ . Définissons alors la *norme stable* de  $c$  par

$$\|c\|_s = \inf_{c = [\sum_{i \in I} x_i \gamma_i]} \sum |x_i| \lg(\gamma_i),$$

où  $\sum_{i \in I} x_i \gamma_i$  parcourt toutes les multicourbes dans la classe d'homologie de  $c$ .

Notons  $\theta_X : H_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{R})$  l'isomorphisme de dualité de Poincaré. Définissons la norme stable sur  $H^1(X, \mathbb{R})$  par  $\|\omega\|_{X,1} = \|\theta_X^{-1}(\omega)\|_s$ , où  $\omega \in H^1(X, \mathbb{R})$ . Nous avons par ailleurs défini une norme euclidienne sur  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ , notons-la  $\|\cdot\|_{X,2}$ .

Dans sa thèse ([Mas96]), Daniel Massart compare les deux normes précédemment introduites.

**Théorème 17.5** (Massart). *Il existe deux constantes strictement positives  $a$  et  $b$ , ne dépendant que du genre de  $X$ , telles que pour tout  $\omega \in H_c^1(X, \mathbb{R})$  nous ayons*

$$a \|\omega\|_{X,1} \leq \|\omega\|_{X,2} \leq \frac{b}{\text{sns}(X)^2} \|\omega\|_{X,1}.$$

**Démonstration.** Dans la partie 4.2 de [Mas96], ce théorème est énoncé pour une surface hyperbolique compacte sans bord. Pour la première inégalité, D. Massart utilise la densité des formes de Strebel dans l'ensemble des 1-formes différentielles harmoniques, et ce résultat est encore vrai pour une surface de volume fini (voir [DH75]). Et la deuxième inégalité n'utilise même pas l'hypothèse de courbure, et elle reste vraie pour une surface de volume fini.  $\square$

Nous allons nous servir de ce théorème pour étudier l'image de  $\text{Tor}(S, P)$  par l'application  $\psi$ .

**Lemme 17.6.** *Soit  $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\text{Tor}(S, P)$  telle que la suite  $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée dans  $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ . Alors la systole non séparante  $(\text{sns}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par une constante strictement positive.*

**Démonstration.** Par contraposée, supposons que la systole non séparante de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tende vers 0 : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit donc  $\gamma_n$  une géodésique fermée simple de  $X_n$  non séparante et non cuspidale, dont la longueur  $\lg(\gamma_n) = \text{sns}(X_n)$  tend vers zéro. La courbe  $\gamma_n$  est non triviale et non cuspidale, donc a un nombre d'intersection non nul avec l'un des générateurs de

$$\theta_{X_n}^{-1}(H_c^1(X_n, \mathbb{Z})) = h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ \iota^*(H^1(S, \mathbb{Z})),$$

images des éléments de la base choisie de  $H^1(S, \mathbb{Z})$ . Quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe  $\omega \in H^1(S, \mathbb{Z})$  tel que le nombre d'intersection algébrique de  $\gamma_n$  avec  $h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ \iota^*(\omega)$  soit non nul pour tout  $n$ . D'après [Bus92, Corollary 4.1.2, p. 95], on en déduit que la longueur d'un représentant minimal de  $h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ \iota^*(\omega)$  est minorée par  $2 \argsh \left( \left( \text{sh} \left( \frac{\lg(\gamma_n)}{2} \right) \right)^{-1} \right)$ , ce qui tend vers l'infini lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi la norme stable  $\|h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ \iota^*(\omega)\|_s$  tend vers l'infini lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Or, d'après le théorème 17.5, on sait que

$$\begin{aligned} \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n,2} &\geq a \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n,1} \\ &\geq a \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n,1} \\ &\geq a \|h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ \iota^*(\omega)\|_s \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

donc la suite de fonctions de longueur  $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée.  $\square$

**Lemme 17.7.** *Soit  $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\text{Tor}(S, P)$  telle que la suite  $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  dans  $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ . Alors la suite  $(p([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{E}_{2g}^b$ , et en particulier la fonction de longueur  $\ell$  est propre.*

**Démonstration.** D'après le lemme 17.6, on sait que la systole non séparante  $\text{sys}(X_n)$  est minorée par une constante  $d > 0$ . Ainsi d'après le théorème 17.5, pour tout  $\omega \in H^1(S, \mathbb{Z})$  non nul et tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\psi([X_n, h_n])(\omega) = \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n,2} \geq a \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\| \geq ad > 0.$$

Ainsi la systole du réseau  $\varphi_{X_n} \circ h_n^{-1*}(H^1(S, \mathbb{Z}))$  de  $\mathbb{R}^{2g}$  de covolume 1 est minorée par  $ad$ , donc d'après le critère de Mahler (voir [Mah46]) on peut supposer quitte à extraire que cette suite de réseaux de  $\mathbb{R}^{2g}$  non marqués converge vers un réseau  $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2g}$  de covolume 1 et de systole minorée par  $ad$ . Ce réseau  $\Lambda$  est autodual pour la forme symplectique  $b$  standard de  $\mathbb{R}^{2g}$ . Puisque la suite de fonctions de longueur  $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge, on en déduit quitte à extraire que la suite de réseaux marqués  $(\varphi_{X_n} \circ h_n^{-1*}|_{H^1(S, \mathbb{Z})})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le réseau marqué  $(\Lambda, h)$ , où  $h : H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \Lambda$  est un marquage. Ainsi la suite  $(p([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[\Lambda, h]$  dans  $\mathcal{E}_{2g}^b$ .

En particulier, la suite de fonctions de longueur  $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell = \phi([\Lambda, h])$ , qui est une application propre.  $\square$

### 17.3.2 Le complexe des courbes séparantes

Pour plus de détails sur cette partie, on pourra consulter [Far06, Chapter 3, § 2.4]. Comme au début la partie 17.1, on considère une surface  $S$  lisse compacte connexe orientée de genre  $g$ , et  $P$  une partie finie fixée de  $S$  de cardinal  $q$ . On dit qu'une courbe fermée simple  $\gamma$  dans  $S \setminus P$  est *séparante* si  $S \setminus (P \cup \gamma)$  n'est pas connexe. On dit que  $\gamma$  est *cuspidale* si elle bord un disque époiné dans  $S \setminus P$ , et *triviale* si elle borde un disque dans  $S \setminus P$ .

Définissons le *complexe des courbes séparantes*  $K^{sep}(S, P)$  de  $S$ . Les sommets de  $K^{sep}(S, P)$  sont les classes d'isotopie de courbes fermées simples séparantes de  $S \setminus P$  non cuspidales et non triviales. Les classes d'isotopie de telles courbes  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  forment un  $(k-1)$ -simplexe de  $K^{sep}(S, P)$  si ces courbes sont disjointes et si leurs classes d'isotopie sont distinctes.

Notons  $\Sigma K^{sep}(S, P)$  l'ensemble des simplexes de  $K^{sep}(S, P)$ .

Au sujet du complexe des courbes non séparantes, on pourra se référer à [SS00] et à [Irm06].

### 17.3.3 Description des strates

Soit  $\sigma = \{[\gamma_1], \dots, [\gamma_k]\}$  un  $(k-1)$ -simplexe de  $K^{sep}(S, P)$ . Alors  $S \setminus (P \cup \bigcup_{j=1}^k \gamma_j)$  a  $k+1$  composantes connexes. À difféomorphisme préservant l'orientation près (fixé), ces composantes s'écrivent  $(S_j \setminus P_j)_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ , où  $S_j$  est une surface lisse compacte connexe orientée de genre  $g_j$  et  $P_j \subset S_j$  est un ensemble de cardinal  $q_j$  fini, tels que  $2 - 2g_j - q_j - j < 0$ . De plus, on a les égalités  $\sum_{j=0}^k g_j = g$  et  $\sum_{j=0}^k q_j = 2k + q$ . Pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , notons l'inclusion  $\iota_j : S_j \setminus P_j \rightarrow S_j$ . Voir la figure 30.

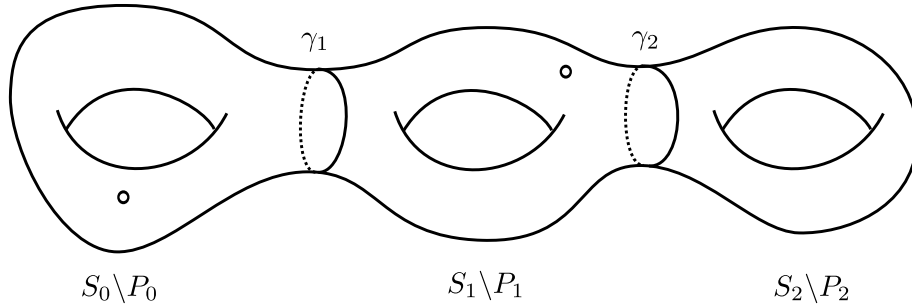


FIGURE 30 – Découpage de la surface  $S$

Considérons, pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , l'application  $\kappa_j : S \rightarrow S_j$  qui écrase chaque  $S_{j'}$ , pour  $j' \neq j$ . Considérons alors l'application

$$\xi_\sigma : \bigoplus_{j=0}^k H^1(S_j, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(S, \mathbb{R})$$

$$(\omega_j)_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket} \mapsto \sum_{j=0}^k \kappa_j^*(\omega_j),$$

elle s'appelle le *scindement symplectique* de  $H^1(S, \mathbb{R})$  associé à  $\sigma$ . Remarquons qu'elle définit aussi un scindement symplectique de  $\bigoplus_{j=0}^k H^1(S_j, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z})$ , encore noté  $\xi_\sigma$ . Il est dit symplectique car cette décomposition est orthogonale pour la forme d'intersection.

Considérons, pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , l'application  $\psi_j$  de  $\text{Tor}(S_j, P_j)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^{H^1(S_j, \mathbb{Z})}$ , définie pour le théorème 17.4.

Appelons *strate* au bord de l'espace de Torelli de  $S$  associée au simplexe  $\sigma$  la variété différentielle produit  $\text{Tor}_\sigma(S, P) = \prod_{j=0}^k \text{Tor}(S_j, P_j)$ . Nous allons la relier à l'espace de Torelli total  $\text{Tor}(S, P)$  grâce à l'application

$$\psi_\sigma : \text{Tor}_\sigma(S, P) \rightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$$

$$([X_j, h_j])_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket} \mapsto \left\{ \omega \mapsto \left( \sum_{j=0}^k \psi_j([X_j, h_j]) \circ (\xi_\sigma^{-1})_j(\omega)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

**Théorème 17.8.** *L'adhérence de l'image de l'application  $\psi$  dans l'espace  $\mathbb{R}_+^{H^1(S,\mathbb{Z})}$  est la réunion disjointe*

$$\overline{\psi(\text{Tor}(S, P))} = \psi(\text{Tor}(S, P)) \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma K^{sep}(S, P)} \psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S, P)).$$

**Démonstration.** Soit  $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\text{Tor}(S, P)$  telle que la suite  $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in \partial\psi(\text{Tor}(S, P))$ . D'après le lemme 17.6, on sait que la systole non séparante  $(\text{sns}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par une constante strictement positive.

Supposons que la systole de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit minorée par une constante strictement positive, alors d'après par exemple [CEG87, Corollary I.3.1.7, p. 63], on sait que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans l'espace des modules  $\text{Mod}(S)$ . Quitte à extraire, on peut donc supposer que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une surface hyperbolique  $X$  dans  $\text{Mod}(S)$ . Puisque la suite  $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$  part à l'infini dans  $\text{Tor}(S, P)$ , on en déduit que c'est la suite de marquages  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui part à l'infini : il existe donc  $\omega \in H_1(S, \mathbb{Z})$  tel que la suite  $(h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  parte à l'infini, donc telle que la norme stable  $(\|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n, 1})_{n \in \mathbb{N}}$  tende vers l'infini (en effet, la surface hyperbolique  $X$  a un nombre fini de géodésiques fermées simples de longueur majorée). En conséquence, d'après le théorème 17.5, on en déduit que la norme euclidienne  $(\|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n, 2})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini, et donc la suite de fonctions de longueur  $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut converger.

On en déduit donc que la systole séparante de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers zéro. Fixons  $\delta > 0$  suffisamment petit, inférieur à la constante de Margulis du plan hyperbolique (voir par exemple [CEG87, Theorem I.2.2.2, p. 50]), et inférieur aux systoles non séparantes des surfaces  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Considérons  $h_{n*}(\sigma_n)$  l'ensemble des classes d'homologie de géodésiques fermées simples séparantes de  $X_n$  de longueur au plus  $\delta$ . Ces géodésiques sont disjointes, donc  $\sigma_n$  est un simplexe du complexe  $K^{sep}(S, P)$  des courbes séparantes. Quitte à extraire et quitte à diminuer  $\delta$ , on peut supposer que  $\sigma_n$  est un  $(k-1)$ -simplexe dont la longueur de chacune des courbes tend vers zéro.

Quitte à précomposer les marquages  $h_n : S \setminus P \rightarrow X_n$  par des éléments de  $\text{Diff}_{H^1}^+(S, P)$ , comme il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de simplexes de  $K^{sep}(S, P)$  sous l'action de  $\text{Diff}_{H^1}^+(S, P)$ , on peut supposer que le simplexe  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constant, égal à  $\sigma$ . Choisissons un représentant  $\tilde{\sigma}$  de  $\sigma$ .

Notons  $(S_0 \setminus P_0), \dots, (S_k \setminus P_k)$  les composantes connexes de  $S \setminus \tilde{\sigma}$ . Fixons un indice  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , et notons  $X_{n,j}$  la  $j$ ème composante connexe de  $X_n \setminus h_n(\sigma)$ , où l'on a choisi les représentants géodésiques des courbes de  $h_n(\sigma)$  : c'est une surface hyperbolique non complète d'aire finie. Quitte à changer le marquage  $h_n : S \setminus P \rightarrow X$  par un difféomorphisme isotope à l'identité, on peut supposer que  $h_n$  envoie les courbes de  $\tilde{\sigma}$  sur les représentants géodésiques de  $h_n(\sigma)$ . Ainsi, l'application  $h_{n,j} = h_n|_{S_j \setminus P_j} : S_j \setminus P_j \rightarrow X_{n,j}$  est un difféomorphisme. Alors, pour n'importe quel pointage de  $X_{n,j}$  dans sa partie épaisse, la suite de surfaces hyperboliques ouvertes pointées  $(X_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une surface hyperbolique  $X_{\infty,j}$  pour la topologie de Gromov-Hausdorff, quitte à extraire. En effet, la systole de  $X_{n,j}$  est minorée par  $\delta$ . Et puisque la longueur des courbes au bord de  $X_{n,j}$  tend vers 0, la surface  $X_{\infty,j}$  est complète. De plus, quitte à changer les marquages  $h_{n,j} : S_j \setminus P_j \rightarrow X_{n,j}$  par des difféomorphismes isotopes à l'identité, on peut supposer que la suite de marquages  $(h_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un difféomorphisme  $h_{\infty,j} : S_j \setminus P_j \rightarrow X_{\infty,j}$ .

Fixons  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , et  $\omega_j \in H^1(S_j, \mathbb{Z})$ . Montrons que

$$\|h_n^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)\|_{X_n,2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|h_{\infty,j}^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)\|_{X_{\infty,j},2}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\eta_n = h_n^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j) \in H_c^1(X_n, \mathbb{R})$ . Rappelons-nous que par convention  $\eta_n$  désigne également l'unique 1-forme différentielle harmonique dans cette classe de cohomologie. Puisque  $\theta_{X_n}(\eta_n)$  peut être représenté par l'image par  $h_n$  d'une multicourbe  $c$  incluse dans  $S_j \setminus P_j$ , et que la systole de la surface  $X_{n,j} = h_n(S_j \setminus P_j)$  est minorée par  $\delta$ , d'après le théorème 17.5, on sait que la norme euclidienne de  $\eta_n$  est majorée par  $\|\eta_n\|_{X_n,2} \leq \frac{b}{\delta \log(\delta)} \|\eta_n\|_{X_n,1}$ . Or la multicourbe  $c$  est la somme formelle d'un nombre fini de courbes fermées simples  $c_i$  de  $S_j \setminus P_j$ , or puisque la suite de marquages  $(h_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $h_{\infty,j} : S_j \setminus P_j \rightarrow X_{\infty,j}$ , la suite des longueurs  $(\lg(h_{n,j}(c_i)))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lg(h_{\infty,j}(c_i))$ , donc est bornée. Ainsi la norme stable  $\|\eta_n\|_{X_n,1}$  de  $\eta_n$  est bornée, donc la norme euclidienne  $\|\eta_n\|_{X_n,2}$  également.

Ainsi, pour tout  $j' \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , la restriction  $\eta_{n,j'}$  de  $\eta_n$  à  $X_{n,j'}$  converge quitte à extraire vers une 1-forme différentielle harmonique  $\eta_{\infty,j'}$  sur  $X_{\infty,j'}$ . Si  $j' \neq j$ , alors  $\eta_{n,j'}$  est cohomologue à zéro pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $\eta_{\infty,j'}$  est cohomologue à zéro. Puisque la surface est complète, on en déduit que  $\eta_{\infty,j'} = 0$ . Et si  $j' = j$ , alors  $\eta_{n,j}$  est cohomologue à  $h_{n,j}^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)$ , donc on en déduit que  $\eta_{\infty,j}$  est cohomologue à  $h_{\infty,j}^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)$ . Par conséquent, pour les normes  $L^2$ , nous avons

$$\|\eta_n\|_{X_n,2}^2 = \sum_{j'=0}^k \|\eta_{n,j'}\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{j'=0}^k \|\eta_{\infty,j'}\|^2 = \|\eta_{\infty,j}\|^2 = \|h_{\infty,j}^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)\|_{X_{\infty,j},2}^2.$$

Nous avons donc montré que  $\psi([X_n, h_n])(\kappa_j^*(\omega_j)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi_j([X_{\infty,j}, h_{\infty,j}])(\omega_j)$ . Ceci prouve donc que la suite  $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$  vers

$$\psi_\sigma([X_{\infty,j}, h_{\infty,j}]_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket}) \in \psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S, P)).$$

Réciproquement, montrons que  $\psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S)) \subset \overline{\psi(\text{Tor}(S))}$  pour tout  $(k-1)$ -simplexe  $\sigma$  de  $K^{\text{sep}}(S)$  : soit  $([X_j, h_j])_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket} \in \text{Tor}_\sigma(S)$ . Fixons un entier  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , les points marqués  $P_j$  de  $S_j$  sont de deux types : ceux qui correspondent à un point marqué de  $P \subset S$  (nous les noterons  $P_j^1$ ), et ceux qui correspondent à une courbe fermée simple de  $\tilde{\sigma}$  (nous les noterons  $P_j^2$ ).

Il existe une suite de surfaces hyperboliques  $(X_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$  complètes d'aire finie avec  $\text{Card } P_j^2$  cuspidales, et avec  $\text{Card } P_j^1$  composantes de bord totalement géodésique, chacune ayant pour longueur  $\frac{1}{n+1}$ , marquées par  $h_{n,j} : S_j \setminus P_j \rightarrow X_{n,j} \setminus \partial X_{n,j}$ , telle que la suite de surfaces marquées  $([X_{n,j}, h_{n,j}])_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la surface marquée  $[X_j, h_j]$  au sens suivant : pour tout compact  $K$  de  $S_j \setminus P_j$ , la suite d'espaces métriques compacts  $(h_{n,j}(K))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $h_j(K)$  au sens de Gromov-Hausdorff.

Pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , la courbe  $\gamma_j$  de  $\tilde{\sigma}$  borde les surfaces  $S_{j-1} \setminus P_{j-1}$  et  $S_j \setminus P_j$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une composante de bord de  $X_{n,j-1}$  et une de  $X_{n,j}$  qui correspondent à  $\gamma_j$  : puisque ces deux composantes ont la même longueur  $\frac{1}{n+1}$ , on peut recoller ces deux composantes ensemble. Notons  $X_n$  le résultat du recollement des  $k+1$  surfaces

$X_{n,0}, \dots, X_{n,k}$ , et  $h_n : S \setminus P \rightarrow X_n$  un marquage qui coïncide avec chacun des  $h_{n,j} : S_j \setminus P_j \rightarrow X_{n,j} \setminus \partial X_{n,j}$  hors d'un petit voisinage de  $\tilde{\sigma}$ .

Alors d'après l'étude qui précède, la suite  $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\psi_\sigma([X_j, h_j]_{j \in [0,k]})$  dans  $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ .

Enfin, montrons que les strates  $\psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S, P))$  sont disjointes. Si  $\ell \in \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$  et  $\sigma \in \Sigma K^{sep}(S, P)$ , on dit que  $\ell$  se scinde selon  $\xi_\sigma$  si :

$$\forall (\omega_0, \dots, \omega_k) \in \prod_{j=0}^k H^1(S_j, \mathbb{Z}), \ell(\xi_\sigma(\omega_0, \dots, \omega_k))^2 = \sum_{j=0}^k \ell(\xi_\sigma(0, \dots, \omega_j, \dots, 0))^2.$$

On dit que  $\ell$  se scinde s'il existe un simplexe  $\sigma \in \Sigma K^{sep}(S, P)$  tel que  $\ell$  se scinde selon  $\xi_\sigma$ .

Si  $\ell \in \psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S))$ , alors il est immédiat  $\ell$  se scinde selon  $\xi_\sigma$ . Montrons que  $\ell$  ne se scinde pas plus finement que  $\xi_\sigma$ , c'est-à-dire qu'il n'existe aucun simplexe  $\sigma' \in \Sigma K^{sep}(S, P)$  contenant strictement  $\sigma$  tel que  $\ell$  se scinde selon  $\xi_{\sigma'}$ . Cela revient à montrer que, pour tout simplexe  $\sigma \in \Sigma K^{sep}(S, P)$ , aucune fonction de longueur  $\ell \in \psi(\text{Tor}(S, P))$  ne se scinde selon  $\xi_\sigma$  : c'est le contenu du lemme 17.9.  $\square$

**Lemme 17.9.** *Aucune fonction de longueur de  $\psi(\text{Tor}(S, P))$  ne se scinde.*

**Démonstration.** Supposons qu'il existe  $[X, h] \in \text{Tor}(S, P)$  tel que la fonction de longueur  $\ell = \psi([X, h])$  se scinde selon  $\xi_\sigma$ , où  $\sigma = \{[\gamma]\}$  et  $\gamma$  est une courbe fermée simple séparante et non cuspidale de  $S \setminus P$  telle que  $h(\gamma)$  soit géodésique.

Notons  $S_1 \setminus P_1$  et  $S_2 \setminus P_2$  les deux composantes connexes de  $S \setminus (P \cup \gamma)$ . Montrons que  $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$  et  $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$  sont orthogonaux pour le produit scalaire de  $H_c^1(X, \mathbb{R})$  : soient  $\omega_1 \in H^1(S_1, \mathbb{R})$  et  $\omega_2 \in H^1(S_2, \mathbb{R})$ . Alors  $\ell(\xi_\sigma^{-1}(\omega_1 + \omega_2))^2 = \|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1 + \omega_2)\|_X^2$  est égal à

$$\|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1)\|_X^2 + 2\langle h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1), h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2) \rangle_X + \|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2)\|_X^2,$$

mais aussi à

$$\ell(h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1))^2 + \ell(h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2))^2 = \|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1)\|_X^2 + \|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2)\|_X^2,$$

ainsi  $\langle h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1), h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2) \rangle_X = 0$ .

On en déduit que l'étoile de Hodge  $*_X$  préserve  $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$  et  $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$  : en effet, soient  $\omega_1 \in H^1(S_1, \mathbb{R})$  et  $\omega_2 \in H^1(S_2, \mathbb{R})$ . Alors

$$\langle *_X h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1), h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2) \rangle = \text{Int}(h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1), h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2)) = 0,$$

donc  $*_X h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1)$  appartient à l'orthogonal de  $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$ , qui est égal à  $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$ .

La surface  $X$  est conformément équivalente à une surface hyperbolique compacte connexe orientée  $X'$  (marquée par  $h' : S \rightarrow X'$ ), privée de  $q$  points (marqués par

$P$ ). D'après l'invariance conforme (voir par exemple [Car07, Proposition 2.15, p. 27]), l'application qui à une 1-forme différentielle harmonique sur  $X'$  associe sa restriction à  $X$  est un isomorphisme de  $H^1(X', \mathbb{R})$  dans  $H_c^1(X, \mathbb{R})$ . Par ailleurs, l'étoile de Hodge ne dépend que de la structure complexe, donc l'isomorphisme entre  $H^1(X', \mathbb{R})$  et  $H_c^1(X, \mathbb{R})$  préserve les étoiles de Hodge. Ainsi nous savons que l'étoile de Hodge  $*_{X'}$  préserve les sous-espaces  $h'^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$  et  $h'^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$  de  $H^1(X', \mathbb{R})$ . Montrons que la fonction de longueur  $\ell' = \psi'([X', h'])$  se scinde selon  $\xi_\sigma$ , avec  $\psi' : \text{Tor}(S, \emptyset) \rightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ .

Soient  $\omega_1 \in H^1(S_1, \mathbb{Z})$  et  $\omega_2 \in H^1(S_2, \mathbb{Z})$ . Alors  $\ell'(\xi_\sigma(\omega_1, \omega_2))^2$  est égal à

$$\|h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(\omega_1, 0)\|^2 + 2\langle h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(\omega_1, 0), h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(0, \omega_2) \rangle + \|h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(0, \omega_2)\|^2.$$

Or

$$\langle h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(\omega_1, 0), h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(0, \omega_2) \rangle = \text{Int}(h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(\omega_1, 0), *_{X'} h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(0, \omega_2)) = 0,$$

car  $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$  et  $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$  sont stables par  $*_{X'}$  et sont orthogonaux pour la forme d'intersection. Ainsi

$$\ell'(\xi_\sigma(\omega_1, \omega_2))^2 = \ell'(\xi_\sigma(\omega_1, 0))^2 + \ell'(\xi_\sigma(0, \omega_2))^2,$$

donc  $\ell'$  se scinde selon  $\xi_\sigma$ .

Définissons alors l'élément  $t$  de  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) = \text{Aut}(H^1(S, \mathbb{Z}))$  par

$$\begin{aligned} t : H^1(S, \mathbb{Z}) &\rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \\ \omega &\mapsto \xi_\sigma \circ \left( (\text{Id}_{H^1(S_1, \mathbb{Z})}) \oplus (-\text{Id}_{H^1(S_2, \mathbb{Z})}) \right) \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega) \\ &= \xi_\sigma \left( (\xi_\sigma^{-1})_1(\omega), -(\xi_\sigma^{-1})_2(\omega) \right). \end{aligned}$$

Puisque la fonction de longueur  $\ell'$  se scinde selon  $\xi_\sigma$ , il est immédiat que pour tout  $\omega \in H^1(S, \mathbb{Z})$  nous avons  $\ell'(t(\omega)) = \ell'(\omega)$ . L'action de  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$  est par précomposition par l'adjoint, donc  $t^* \cdot \ell' = \ell' \circ t = \ell'$ . Ainsi  $\psi(t^* \cdot [X', h']) = \psi([X', h'])$  dans  $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ , donc  $p'(t^* \cdot [X', h']) = p'([X', h'])$  dans  $\mathcal{E}_{2g}^b$  par injectivité de l'application  $\phi : \mathcal{E}_{2g}^b \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$ . Par compacité de  $X'$  on peut appliquer le théorème 17.3, donc on déduit que  $t^* \cdot [X', h']$  est soit égal à  $[X', h']$ , soit à l'image de  $[X', h']$  par l'involution hyperelliptique de l'espace de Torelli. Puisque l'involution hyperelliptique de  $\text{Tor}(S, \emptyset)$  est induite par l'élément  $-\text{Id} \in \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ , quitte à échanger les indices de  $S_1$  et  $S_2$ , on peut supposer que  $t^* \cdot [X', h'] = [X', h']$  dans  $\text{Tor}(S, \emptyset)$ .

Considérons un difféomorphisme  $\tau$  de  $S$  préservant l'orientation tel que l'image de  $\tau$  dans  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  soit égale à  $t^*$ , et tel que de plus  $\tau \cdot [X', h'] = [X', h']$  dans l'espace de Teichmüller. À isotopie près, on peut supposer que le difféomorphisme  $h \circ \tau \circ h^{-1}$  est une isométrie de  $X$ . Puisque  $\tau^*$  préserve  $h'^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$  et  $h'^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$ , on en déduit que  $\tau$  préserve la classe d'homotopie de la courbe  $\gamma$ , or  $h \circ \tau \circ h^{-1}$  est une isométrie donc stabilise la géodésique  $h(\gamma)$ .

Le difféomorphisme  $\tau$  stabilise les deux composantes connexes  $S_1 \setminus P'_1$  et  $S_2 \setminus P'_2$  de  $S \setminus \gamma$ , notons  $\tau_1$  et  $\tau_2$  les difféomorphismes de  $S_1 \setminus P'_1$  et  $S_2 \setminus P'_2$  induits. Puisque  $P'_1$  et

$P'_2$  sont des singletons, à isotopie près on peut supposer que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  s'étendent en des difféomorphismes de  $S_1$  et  $S_2$  respectivement. Le difféomorphisme  $\tau_1$  induit l'identité sur  $H^1(S_1, \mathbb{Z})$ , donc sa classe d'isotopie appartient au groupe de Torelli  $T(S_1, P_1)$ . Or ce groupe est sans torsion, et comme  $\tau$  est une involution nous avons  $\tau_1^2 = \text{Id}$ , donc  $\tau_1$  appartient à  $\text{Diff}_0(S_1, P_1)$ . Ainsi l'isométrie  $h \circ \tau \circ h^{-1}$  restreinte à  $X_1$  est isotope à l'identité, donc est égale à l'identité de  $X_1$ . Ainsi l'isométrie  $h \circ \tau \circ h^{-1}$  est égale à l'identité de  $X$ . Or cette isométrie induit  $-\text{Id}$  sur  $H_c^1(X_2, \mathbb{Z})$  : c'est une contradiction.

□



## Références

- [AB98] S. ADAMS & W. BALLMANN – « Amenable isometry groups of Hadamard spaces », *Math. Ann.* **312** (1998), p. 183–195.
- [AB08] P. ABRAMENKO & K. S. BROWN – *Buildings. Theory and Applications.*, Grad. Text. Math., Springer, 2008.
- [Abe78] H. ABELS – « Distal affine transformation groups », *J. reine Angew. Math.* **299/300** (1978), p. 294–300.
- [Abe81] — , « Distal automorphism groups of Lie groups », *J. reine Angew. Math.* **329** (1981), p. 82–87.
- [All99] D. ALLCOCK – « Reflections Groups on the Octave Hyperbolic Plane », *J. Algebra* **213** (1999), p. 467–498.
- [Art72] E. ARTIN – *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, 1972.
- [Bae01] J. C. BAEZ – « The Octonions », *Bull. Amer. Math. Soc.* **60** (2001), p. 145–205.
- [Bav05] C. BAVARD – « Théorie de Voronoï géométrique. Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues. », *Bull. Soc. Math. France* **133** (2005), p. 205–257.
- [BCR87] J. BOCHNAK, M. COSTE & M.-F. ROY – *Géométrie algébrique réelle*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), Springer-Verlag, 1987.
- [BdlHK09] M. R. BRIDSON, P. DE LA HARPE & V. KLEPTSYN – « The Chabauty space of closed subgroups of the three-dimensional Heisenberg group », *Pacific J. Math.* **240** (2009), p. 1–48.
- [BdlHV08] B. BEKKA, P. DE LA HARPE & A. VALETTE – *Kazhdan’s property*, Cambridge Univ. Press, 2008.
- [BGS85] W. BALLMANN, M. GROMOV & V. SCHROEDER – *Manifolds of nonpositive curvature*, Progr. Math. **61**, 1985.
- [BH99] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grund. math. Wiss., Springer Verlag, 1999.
- [BJ07] A. BOREL & L. JI – « Compactifications of symmetric spaces », *J. Diff. Geom.* **75** (2007), p. 1–56.
- [BK81] P. BUSER & H. KARCHER – *Gromov’s almost flat manifolds*, Astérisque **81**, Soc. Math. France, 1981.
- [Bor51] A. BOREL – « Sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie », *Sém. Bourbaki* **1** (1948-1951), p. 271–279.
- [Bos92] J.-B. BOST – *Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and abelian varieties*, dans « From number theory to physics (Les Houches, 1989) », Springer, 1992.
- [Bou59a] N. BOURBAKI – *Algèbre. Chapitre IX*, Hermann, 1959.
- [Bou59b] — , *Intégration. Chapitre VIII*, Hermann, 1959.
- [Bou67] — , *Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats (Paragraphes 1 à 7)*, Hermann, 1967.

- [Bou97] M. BOURDON – « Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), p. 245–268.
- [BQ11a] Y. BENOIST & J.-F. QUINT – « Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes », *Ann. of Math.* **174** (2011), p. 1111–1162.
- [BQ11b] — , « Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes II », *CRAS* **349** (2011), p. 341–345.
- [BS87a] M. BURGER & V. SCHROEDER – « Amenable groups and stabilizers of measures on the boundary of a Hadamard manifold », *Math. Ann.* **276** (1987), p. 505–514.
- [BS87b] K. BURNS & R. SPATZIER – « On topological Tits buildings and their classification », *Publ. Math. IHÉS* **65** (1987), p. 5–34.
- [BT84] F. BRUHAT & J. TITS – « Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local », *Bull. Soc. Math. France* **112** (1984), p. 259–301.
- [Bus92] P. BUSER – *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progr. in Math. **106**, 1992.
- [Car07] G. CARRON – «  $L^2$  harmonic forms on non compact manifolds », Lectures given at CIMPA’s summer school « Recent Topics in Geometric analysis », <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~carron/cours.pdf>, 2007.
- [CC00] J. CANNON & G. CONNER – « The combinatorial structure of the hawaiian earring group », *Topology Appl.* **106** (2000), p. 225–271.
- [CDP07] G. COURTOIS, F. DAL’BO & F. PAULIN – *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*, Journées mathématiques X-UPS 2007, Les Éditions de l’École Polytechnique, 2007.
- [CEG87] R. CANARY, D. EPSTEIN & P. GREEN – *Notes on notes of Thurston*, dans « Analytical and geometric aspects of hyperbolic space », Lond. Math. Soc., Lect. Notes Series **328**, 1987.
- [CG74] J.-P. CONZE & Y. GUIVARC’H – « Remarques sur la distalité dans les espaces vectoriels », *CRAS Paris* **278** (1974), p. 1083–1086.
- [Cha50] C. CHABAUTY – « Limite d’ensembles et géométrie des nombres », *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950), p. 143–151.
- [CL09] P.-E. CAPRACE & J. LÉCUREUX – « Combinatorial and group-theoretic compactifications of buildings », (2009), à paraître dans *Ann. Inst. Fourier*.
- [CS03] J. H. CONWAY & D. A. SMITH – *On Quaternions and Octonions : Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*, A K Peters, 2003.
- [dC11] Y. DE CORNULIER – « On the Chabauty space of locally compact abelian groups », *Alg. Geom. Top.* **11** (2011), p. 2007–2035.
- [Deb10] O. DEBARRE – *Periods and moduli*, dans « Current Developments in Algebraic Geometry », MSRI Publications, 2010.
- [Dem80] M. DEMAZURE – « Limites de groupes orthogonaux ou symplectiques », *Prépublication* (1980).
- [Des86] R. DESCOMBES – *Éléments de théorie des nombres*, PUF, 1986.
- [DH75] A. DOUADY & J. HUBBARD – « On the Density of Strebel Differentials », *Inventiones Math.* **30** (1975), p. 175–179.

- [dlH08] P. DE LA HARPE – « Spaces of closed subgroups of locally compact groups », arXiv :0807.2030v2, 2008.
- [DS92] B. DE SMIT – « The fundamental group of the hawaiian earring is not free », *Int. J. of Algebra and Comput.* **2** (1992), no. 1, p. 33–37.
- [Dug66] J. DUGUNDJI – *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
- [Ebe96] P. B. EBERLEIN – *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lect. Math., The University of Chicago Press, 1996.
- [EKL06] M. EINSIEDLER, A. KATOK & E. LINDENSTRAUSS – « Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood’s conjecture », *Ann. of Math.* **164** (2006), p. 513–560.
- [ELMV09] M. EINSIEDLER, E. LINDENSTRAUSS, P. MICHEL & A. VENKATESH – « Distribution of periodic torus orbits on homogeneous spaces », *Duke Math. J.* **148** (2009), p. 119–174.
- [ELMV11] — , « Distribution of periodic torus orbits and Duke’s theorem for cubic fields », *Duke Math. J.* **173** (2011), p. 815–885.
- [Far06] B. FARB (éd.) – *Problems on mapping class groups and related topics*, Proc. of Symp. in Pure Math. **74**, Amer. Math. Soc., 2006.
- [FLP79] A. FATHI, F. LAUDENBACH & V. POENARU – *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66-67**, Soc. Math. France, 1979.
- [GHL87] S. GALLOT, D. HULIN & J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, Springer Verlag, 1987.
- [GJT98] Y. GUIVARC’H, L. JI & J. C. TAYLOR – *Compactifications of symmetric spaces*, Progr. Math. **156**, Birkhäuser, 1998.
- [GP01] D. GABORIAU & F. PAULIN – « Sur les immeubles hyperboliques », *Geom. Dedi.* **88** (2001), p. 153–197.
- [GR06] Y. GUIVARC’H & B. RÉMY – « Group-theoretic compactification of Bruhat-Tits buildings », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 871–920.
- [Gri70] P. A. GRIFFITHS – « Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping. », *Publ. Math. IHÉS* **38** (170), p. 125–180.
- [Gro81] M. GROMOV – *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, CEDIC, 1981.
- [Gui01] Y. GUIVARC’H – « Compactifications of symmetric spaces and positive eigenfunctions of the laplacian », *Proc. and Lect. Notes CRM (Montréal)* (2001), p. 69–116.
- [Hae08] T. HAETTEL – « Compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non compact », *mémoire de seconde année de mastère, Univ. Orsay* (2008).
- [Hae10a] — , « Compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non compact », *J. Lie Theory* **20** (2010), p. 437–468.
- [Hae10b] — , « L’espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  », *Alg. Geom. Top.* **10** (2010), p. 1395–1415.
- [Hae11] — , « Compactification de Thurston d’espaces de réseaux marqués et de l’espace de Torelli », *Prépub. Univ. Orsay, arXiv :1104.3417v2* (2011).

- [Har77] W. J. HARVEY – *Spaces of discrete groups*, dans « Discrete groups and automorphic functions », 1977.
- [Har79] —, *Geometric structure of surface mapping class groups*, dans « Homological group theory », Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **36**, 1979.
- [Har81] —, *Boundary structure of the modular group*, dans « Riemann surfaces and related topics », Stony Brook, 1978, Ann. of Math. Stud. **97**, 1981.
- [Hat02] A. HATCHER – *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [Hel78] S. HELGASON – *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Grad. Stud. Math. **34**, Amer. Math. Soc., 1978.
- [Hum75] J. E. HUMPHREYS – *Linear algebraic groups*, Grad. Texts Math. **21**, Springer Verlag, 1975.
- [IM64] N. IWAHORI & H. MATSUMOTO – « Several remarks on projective representations of finite groups », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **10** (1964), p. 129–146.
- [IM05a] A. ILIEV & L. MANIVEL – « Severi varieties and their varieties of reductions », *J. de Crelle* **585** (2005), p. 93–139.
- [IM05b] —, *Varieties of reduction for  $gln$* , dans « Projective Varieties with Unexpected Properties », Walter de Gruyter, 2005.
- [Irm06] E. IRMAK – « Complexes of nonseparating curves and mapping class groups », *Michigan Math. J.* **54** (2006), p. 81–110.
- [Joh83] D. JOHNSON – « The structure of the Torelli group / I : A finite set of generators for  $\mathcal{T}$ . », *Ann. of Math.* **118** (1983), p. 423–442.
- [KH97] A. KATOK & B. HASSELBLATT – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Ency. Math. Appl. **78**, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [KL97] B. KLEINER & B. LEEB – « Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings », *Publ. Math. IHÉS* **86** (1997), p. 115–197.
- [Klo09] B. KLOECKNER – « The space of closed subgroups of  $\mathbb{R}^n$  is stratified and simply connected », *Journal of Topology* **2** (2009), p. 570–588.
- [Lan95] E. LANDVOGT – *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lect. Notes in Math. **1619**, Springer Verlag, 1995.
- [LBG11a] M. LE BARBIER GRÜNEWALD – « Examples of varieties of reductions of small rank », <http://www.uni-bonn.de/mlbg/public/michi-redex.pdf>, 2011.
- [LBG11b] —, « The variety of reductions for a reductive symmetric pair », *Transformation Groups* **16** (2011), p. 1–26.
- [Mah46] K. MAHLER – « On lattice points in  $n$ -dimensional star bodies. I. Existence theorems. », *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* **187** (1946), p. 151–187.
- [Mar97] G. MARGULIS – « Oppenheim conjecture », *Fields Medallists' lectures, dans World Sci. Ser. 20th Century Math., v.5, World Sci. Publ.* (1997), p. 272–327.
- [Mas96] D. MASSART – « Normes stables des surfaces », Thèse, ENS Lyon, 1996, HAL : tel-00589624, version 1.
- [Mas97] —, « Normes stables des surfaces », *CRAS* **324** (1997), p. 221–224.
- [Mau10] F. MAUCOURANT – « A non-homogeneous orbit closure of a diagonal subgroup », *Ann. of Math.* **171** (2010), p. 557–570.

- [Mes92] G. MESS – « The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces », *Topology* **31** (1992), p. 775–790.
- [Moo79] C. C. MOORE – « Amenable subgroups of semi-simple groups and proximal flows », *Isr. J. Math.* **34** (1979), p. 121–138.
- [Mos73] G. MOSTOW – *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, **78**, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1973.
- [MP90] R. MAZZEO & R. S. PHILLIPS – « Hodge theory on hyperbolic manifolds », *Duke Math J.* **60** (1990), p. 509–559.
- [MT86] R. MNEIMNÉ & F. TESTARD – *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.
- [MW09] A.-L. MARE & M. WILLEMS – « Topology of the octonionic flag manifold », arXiv :0809.4318v2, 2009.
- [OV90] A. ONISHCHIK & E. VINBERG – *Lie groups and algebraic groups*, Springer Verlag, 1990.
- [Par99] A. PARREAU – *Immeubles euclidiens : construction par les normes et études des isométries*, dans « Crystallographic Groups and Their Generalisations, II », Contemp. Math., Kortrijk, Amer. Math. Soc., 1999.
- [Pau04] F. PAULIN – *Sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller*, dans « Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités », L. Bessières, A. Parreau, B. Remy éd., p. 421-443, Séminaires et Congrès **18**, Soc. Math. France, 2004.
- [Pau10] —, « Sur les automorphismes de groupes libres et de groupes de surface », *Sém. Bourbaki* (2010), vol. 2009-2010, exp n°**1023**, à paraître dans Astérisque, Soc. Math. France.
- [PH79] I. POUREZZA & J. HUBBARD – « The space of closed subgroups of  $\mathbb{R}^2$  », *Topology* **18** (1979), p. 143–146.
- [Pie84] J.-P. PIER – *Amenable locally compact groups*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1984.
- [Pon66] L. S. PONTRYAGIN – *Topological groups*, 2. éd., Gordon and Breach, 1966.
- [PR94] V. PLATONOV & A. RAPINCHUK – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Math. **139**, Academic Press, 1994.
- [Rat91] M. RATNER – « On Raghunathan's measure conjecture », *Ann. of Math.* **134** (1991), p. 545–607.
- [Rat06] J. G. RATCLIFFE – *Foundations of hyperbolic manifolds*, 2nd éd., Grad. Texts Math. **149**, Springer Verlag, 2006.
- [Ron89] M. RONAN – *Lectures on buildings*, Persp. Math. **7**, Academic Press, 1989.
- [RTW09] B. RÉMY, A. THUILLIER & A. WERNER – « Bruhat-Tits Theory from Berkovich's Point of View. II - Satake compactifications. », To appear in J.I.M.J., arXiv : 0907.3264, 2009.
- [Rém99] B. RÉMY – « Immeuble à l'infini et combinatoire des groupes, Compactification polyédrique des plats », <http://math.univ-lyon1.fr/~remy/CpctPol.pdf>, 1999.
- [Sat60] I. SATAKE – « On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces », *Ann. of Math.* **71** (1960), p. 77–110.

- [Ser68] J.-P. SERRE – *Corps locaux*, Publ. Univ. Nancago, 1968.
- [Ser77] — , *Cours d'arithmétique*, PUF, 1977.
- [Spr98] T. A. SPRINGER – *Linear algebraic groups*, Modern Birkhäuser Classics, 1998.
- [SS00] P. SCHMUTZ SCHALLER – « Mapping class groups of hyperbolic surfaces and automorphism groups of graphs », *Compositio Math.* **122** (2000), p. 243–260.
- [War72] G. WARNER – *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Grund. math. Wiss. **188**, Springer Verlag, 1972.
- [War83] F. W. WARNER – *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Grad. Texts Math. **94**, Springer, 1983.
- [WZ84] P. WINTERNITZ & H. ZASSENHAUS – *The structure of maximal abelian subalgebras of classical Lie and Jordan algebras*, dans « XIIIth international colloquium on group theoretical methods in physics (College Park, Md., 1984) », World Sci. Publishing, 1984.