



Etude de quelques problèmes issus de la physique des plasmas et de la mécanique des fluides.

Mathieu Colin

► To cite this version:

Mathieu Colin. Etude de quelques problèmes issus de la physique des plasmas et de la mécanique des fluides.. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2011. <tel-00664219>

HAL Id: tel-00664219

<https://theses.hal.science/tel-00664219v1>

Submitted on 30 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Université de Bordeaux

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

Discipline : Mathématiques Appliquées

**Étude de quelques problèmes issus de la
Physique des Plasmas et de la Mécanique des
Fluides**

présentée par

Mathieu COLIN

le 08 Novembre 2011

Après avis des rapporteurs :

Olivier Goubet	Professeur	Université de Picardie, France
Alain Miranville	Professeur	Université de Poitiers, France
Catherine Sulem	Professeur	University of Toronto, Canada

Devant le jury composé de :

Jerry Bona	Professeur	University of Illinois, Chicago
Thierry Colin	Professeur	Université de Bordeaux
Anne de Bouard	Directrice de Recherche	École Polytechnique
Pierre Fabrie	Professeur	Université de Bordeaux
Gérard Gallice	Ingénieur-Chercheur	CEA Cestas
Olivier Goubet	Professeur	Université de Picardie
Jean-Claude Saut	Professeur	Université Paris Sud

Remerciements

Mes premiers remerciements reviennent naturellement à Thierry Colin. Toujours présent, il a su créer la dynamique nécessaire pour me conduire à la rédaction de ce manuscrit, en m'intégrant en particulier dans l'équipe MC2 qu'il anime avec passion et caractère ! Durant ces années, j'ai pu apprécier sa manière de travailler, son enthousiasme pour les mathématiques appliqués et sa vision du métier de chercheur. Le contenu de ce manuscrit lui doit évidemment beaucoup et pour tout cela et bien plus encore, merci Colin !

Anne de Bouard a guidé mes premiers pas dans la recherche en dirigeant ma thèse. Elle a su ensuite s'effacer pour me laisser évoluer à Bordeaux, tout en suivant l'avancée de mes travaux. C'est je crois une chose fondamentale pour une directrice de thèse que de se séparer scientifiquement de son élève. C'est pour cela que je lui transmets ici tous mes remerciements et je suis très honoré qu'elle soit présente aujourd'hui pour cette habilitation.

Je remercie vivement et très chaleureusement Catherine Sulem, Olivier Goubet et Alain Miranville qui m'ont fait l'honneur de rédiger un rapport sur mon manuscrit d'habilitation. C'est une tâche ingrate mais bien évidemment essentielle, sans laquelle rien ne serait possible !

Pierre Fabrie a aussi toujours été présent pour moi dans les bons moments comme dans les mauvais. Soutien fidèle sur qui on peut toujours compter, je voudrais lui exprimer ici toute ma reconnaissance et mon amitié.

J'ai rencontré Jean-Claude Saut lorsque j'effectuais mon DEA à Orsay. Depuis ce temps-là, il a toujours suivi l'évolution de mes travaux et m'a toujours encouragé dans mes différentes démarches. Il fait partie de ces personnes indispensables qui ont veillé sur moi durant toutes ces années. Pour tout cela, j'aimerais lui exprimer ici ma plus profonde reconnaissance et toute mon amitié.

Durant ma thèse, j'ai eu l'honneur de faire la connaissance de Jerry Bona. Au fil des années, j'ai pu apprécier sa gentillesse, son savoir et son sens des mathématiques. Il me fait l'honneur d'être là aujourd'hui et j'aimerais en profiter pour lui exprimer ma profonde admiration.

Gérard Gallice a toujours participé avec intérêt aux travaux des membres de l'IMB portant sur les interactions laser-plasma. Il me fait l'honneur aujourd'hui de participer à ce jury et je l'en remercie profondément.

Je tiens à remercier tous les membres de l'IMB qui mettent de l'ambiance dans le labo. Mes pensées vont particulièrement aux membres de l'équipe MC2 qui au jour le jour, avec la bonne humeur qui les caractérise, répondent toujours présents. Alors dans le désordre et de manière non exhaustive, merci Michel, Olivier, Héloïse, David, Gilles, Vincent, Clair, Angelo, Cécile, Thomas, Charles-Henri, Lisl, Pierre, Jean-François, ... Je n'oublie pas non plus les cachannais !

Je ne peux terminer ces remerciements sans évoquer Marion, Benjamin et Charlotte qui au quotidien embellissent ma vie.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	6
PARTIE 1 Interactions Laser-Plasma : Équations de Schrödinger et Systèmes de Zakharov.	11
Chapitre 1 Résumé des travaux de thèse	13
1.1 Interactions laser-plasma relativiste.	13
1.2 Le problème de Cauchy pour des équations de Schrödinger quasi-linéaires	17
1.3 Approximation de l'équation de Schrödinger non-linéaire relativiste par une équation de Klein-Gordon	18
1.4 Stabilité des ondes stationnaires en dimension deux d'espace pour des équations de Schrö- dinger quasi-linéaires	19
Chapitre 2 L'effet Raman.	23
2.1 Interactions laser-plasma : Les systèmes de type Zakharov.	23
2.1.1 Présentation du système.	23
2.1.2 Description de la méthode.	25
2.1.3 Directions de propagation correspondant à une amplification maximale des champs.	28
2.2 Le problème de Cauchy.	32
2.2.1 Retour sur la condition de résonnance.	35
2.2.2 L'approche numérique et quelques résultats.	37
2.2.3 Présentation du schéma.	38
2.2.4 Quelques résultats numériques.	39
2.3 Conclusion.	41
Chapitre 3 Le point de vue des ondes solitaires.	43
3.1 Cas des équations semi-linéaires.	43
3.1.1 Etude d'ondes solitaires semi-triviales.	43
3.1.2 Etude générale pour un système de Schrödinger issu de la physique des plasmas.	45
3.2 Cas des équations quasi-linéaires.	49
3.2.1 Un premier résultat d'existence.	49
3.2.2 L'équation DNLS.	51
3.3 Une équation de Schrödinger quasi-linéaire.	52
3.4 Conclusion	55
Chapitre 4 Approximation des impulsions courtes dans des milieux dispersifs.	57
4.1 Introduction.	57

4.2	Présentation des résultats.	59
4.3	Simulations numériques.	62
PARTIE 2 Etude de quelques problèmes issus de la mécanique des fluides.		67
Chapitre 5	Un problème de contrôle optimal.	69
5.1	Présentation du problème.	69
5.2	Construction de l'espace de contrôle.	70
5.3	Présentation des résultats.	71
Chapitre 6	Modèles pour les mélanges de fluides Newtoniens en microfluidique	75
6.1	Présentation du modèle de mélange.	75
6.2	Tests numériques.	77
Chapitre 7	Les écoulements de solution de micelles géantes.	81
7.1	Description du modèle.	81
7.2	Les conditions aux limites et les modèles réduits.	81
7.3	Les expériences numériques.	83
PROJETS ET PERSPECTIVES		92
TRAVAUX DE L'AUTEUR		94
RÉFÉRENCES		97

Introduction

*“Comment s’étaient-ils rencontrés ?
Par hasard comme tout le monde.
Comment s’appelaient-ils ? Que vous importe ?
D’où venaient-ils ? Du lieu le plus prochain.
Où allaient-ils ? Est-ce que l’on sait où l’on va ?”*

Denis Diderot.

*"We are such stuff as dreams are made on",
William Shakespeare*

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent des équations aux dérivées partielles issues de la physique des plasmas ou de la mécanique des fluides. En amont, ils comportent une part importante de modélisation : approximation de systèmes hyperboliques oscillants, dérivation de systèmes de type Zakharov, modèles Hele-Shaw, modèles de micelles géantes. En aval, ils abordent un certain nombre de problèmes théoriques : existence et unicité des solutions, stabilité/instabilité des ondes solitaires, contrôle optimal, estimations d'erreur et convergence de modèles. Ils explorent aussi des méthodes numériques de résolution qui ont toutes pour point commun d'utiliser des méthodes de volumes finis sur des grilles cartésiennes en utilisant éventuellement des méthodes de pénalisation. Le but de cette introduction est de décrire brièvement la structure de ce document, chaque chapitre présentant les résultats publiés ou en voie de publication.

La première partie de ce mémoire concerne l'étude des interactions laser-plasma. La propagation d'une onde électro-magnétique dans un plasma provoque un grand nombre de phénomènes physiques susceptibles de modifier en profondeur la structure même du milieu. Le but de cette partie est d'étudier quelques phénomènes qui interviennent dans une telle situation.

Le chapitre 1 est un bref résumé des travaux effectués durant ma thèse, sous la direction d'Anne de Bouard. Il concerne une équation de Schrödinger relativiste quasi-linéaire pour laquelle on montre que le problème de Cauchy est bien posé sans faire d'hypothèse de petitesse sur la donnée initiale. On montre ensuite l'existence, l'unicité et la stabilité d'un état fondamental en dimension 2. Elle comporte aussi l'étude d'une version semi-classique de l'équation.

Le chapitre 2 est consacré à l'effet Raman. Il présente un nouveau système de type Zakharov qui décrit l'interaction des ondes Raman avec les autres ondes du milieu (onde laser incidente, ondes plasma-électroniques et ondes acoustiques-ioniques). L'originalité de ce travail réside dans la manière d'obtenir ce système en partant des équations d'Euler-Maxwell. Le problème de Cauchy y est ensuite résolu à l'aide de méthodes de symétrisation. Une analyse semi-classique du système permet ensuite de déterminer les taux d'amplification des ondes Raman. Il se termine par la présentation de quelques résultats numériques.

Le chapitre 3 est dédié à l'étude des ondes solitaires qui peuvent se propager dans de tels milieux. Il traite d'équation ou de systèmes de types Schrödinger semi-linéaires ou quasi-linéaires et aborde les questions d'existence, d'unicité et de stabilité orbitale d'ondes solitaires au sens large (ondes stationnaires, ondes progressives). La structure de l'ensemble des états fondamentaux est aussi étudiée lorsque l'équation le permet.

Le chapitre 4 termine cette première partie et montre comment modéliser des impulsions ultra-courtes ou à spectre large dans des milieux dispersifs. Plus précisément, on introduit plusieurs approximations de systèmes hyperboliques ayant des données initiales rapidement oscillantes. On fournit des estimations d'erreur dans des espaces de Wiener pour trois types d'approximation (approximation d'enveloppe, modèle dispersif et approximation de Schrödinger) en discutant de la validité des modèles introduits. On justifie ensuite l'introduction d'un modèle de Schrödinger avec une relation de dispersion "améliorée". Enfin, on illustre tous ces résultats avec des simulations numériques.

La deuxième partie de ce manuscrit concerne l'étude de problèmes issus de la mécanique des fluides. Le chapitre 5 traite d'un problème de contrôle optimal pour les équations de Navier-Stokes. Il s'agit d'introduire un cadre fonctionnel adéquat pour traiter ce genre de problème, lorsque que le contrôle est défini seulement sur une partie du bord. Un théorème d'existence est ensuite proposé et les équations d'Euler sont dérivées. Remarquons que par manque de convexité de la fonctionnelle d'énergie étudiée, aucun résultat d'unicité n'est démontré. Pour contourner cela, nous introduisons un système linéarisé sur lequel il est possible d'énoncer des résultats constructifs.

Le chapitre 6 traite du problème de mélanges de fluides Newtoniens dans des canaux micro-fluidiques. Deux approches dites "passives" sont ici privilégiées : la première consiste à considérer un canal plat associé à des conditions de type glissement et la seconde utilise un canal avec un fond à reliefs associé à des conditions d'adhérence aux parois. A partir des équations de Stokes et des lois de Darcy, des modèles fondés sur une approximation de type Hele-Shaw sont introduits. La validité de ces modèles est alors discutée à l'aide de simulation numériques.

Le chapitre 7 étudie l'écoulement de micelles géantes dans des jonctions micro-fluidiques. Notons que ces fluides sont utilisés dans la récupération assistée du pétrole. Plus particulièrement, on s'intéresse au

phénomènes de bouchage au niveau des jonctions qui interviennent dans de tels écoulements. Ces fluides non-Newtoniens peuvent être décrits à l'aide des modèles de Johnson-Segalman-Giesekus diffusif. Des expériences numériques 3D sont alors développées pour étudier la pertinence de telles approximations.

Première partie

Interactions Laser-Plasma : Équations
de Schrödinger et Systèmes de
Zakharov.

Chapitre 1

Résumé des travaux de thèse

Dans ma thèse, j’ai étudié quelques propriétés mathématiques d’une équation de Schrödinger quasi-linéaire intervenant en physique des plasmas. Trois aspects y ont été abordés : le problème de Cauchy associé à cette équation en dimension quelconque d’espace et sans hypothèse de petitesse sur la donnée initiale, la convergence d’une équation d’onde de type Klein-Gordon vers cette équation de Schrödinger et enfin l’existence et la stabilité d’ondes stationnaires en dimension 2 d’espace.

1.1 Interactions laser-plasma relativiste.

Lorsqu’une impulsion laser haute-énergie (de durée $\tau < 1$ picoseconde, $P = 10^{10}$ W) est envoyée dans un milieu gazeux (par exemple H_e , H_2 , CO_2 , N_2), il se produit une ionisation du gaz qui se situe sur les contours du laser. Même dans les régions où l’intensité est faible, l’impulsion arrache de nombreux électrons aux atomes et molécules de gaz présents créant ainsi une colonne de plasma dans laquelle les plus hautes intensités du laser se propagent.

La présence de ce plasma “abaisse” l’indice de réfraction du gaz et la colonne de plasma possède alors des propriétés défocalisantes. Cependant, il existe un certain nombre de phénomènes physiques qui font “augmenter” cet indice de réfraction. En premier lieu, il y a l’effet Kerr : les radiations électromagnétiques déforment le nuage électronique des atomes et des ions, créant ainsi des dipôles induits. Ensuite, il y a l’augmentation de masse des électrons libres oscillants dans le champ électromagnétique intense avec des vitesses proches de celle de la lumière et enfin il y a la répulsion des électrons depuis la région occupée par le champ qui aboutit à la création d’un tunnel rempli d’ions. Lorsqu’un seuil critique est atteint, on obtient un régime particulier dans lequel des impulsions lasers autofocalisées se propagent.

Les interactions entre une impulsion laser relativiste et un milieu gazeux ont fait l’objet de nombreuses recherches en physique ainsi qu’en mathématiques. On peut citer de manière non-exhaustive les travaux de A.I. Akhiezer et R.V. Polovin [AP56], de A.B. Borisov et *al* [BBBKLPRSS92], de A.V. Borovskii et A.L. Galkin [BG93], de S.V. Bulanov, V.I. Kirsanov et A.S. Sakharov [BKS90], de X.L. Chen et R.N. Sudan [CS93], de T. Lehner [L98], de G-Z Sun, E. Ott, Y.C. Lee et P. Gudzar [GLOS87] pour la physique et de A. de Bouard, N. Hayashi et J.C. Saut [BHS97], de C-H. Bruneau, L. Di Menza et T. Lehner [BDL99], de L. Di Menza [D95] ou encore de M. Poppenberg [P01] pour les mathématiques.

Pour décrire la propagation, on va utiliser l’approche suivante (voir[BG93]) : puisque les atomes et les ions subissent une rapide ionisation sur les contours de l’impulsion laser, on considère que la plupart des impulsions se propagent dans un plasma existant déjà. En conséquence, dans ce qui suit, on va étudier le cas d’une propagation d’onde dans un plasma. D’après les expérimentations, les électrons ne sont soumis qu’à des énergies thermiques E_{ther} de l’ordre de quelques kilo-électronvolts pendant le temps durant lequel l’intensité agit sur le matériel ([BBBKLPRSS92], [GLRTW92]). D’un autre côté, l’énergie moyenne

d'oscillation E_{osc} des électrons dans de tels champs dépasse les 100 kilo-électronvolts. En conséquence, puisque $E_{ther} \ll E_{osc}$, on peut considérer que le plasma est froid.

Un tel plasma plongé dans un champ électromagnétique ne répond qu'aux forces électromagnétiques. La pression dynamique et les phénomènes qui y conduisent peuvent être négligés. Par contre, du fait de leur grande vitesse oscillante, l'augmentation de masse des électrons doit être prise en compte. Ainsi on va utiliser, pour décrire le modèle, la physique de l'électrodynamique des plasmas froids relativistes ([BBBKLPRSS92]).

On considère donc la propagation d'une impulsion laser ultra-courte dans un plasma constitué initialement par une densité d'électrons inhomogène, radiale, décrite par la fonction $f(r)$ de telle sorte que

$$N_e^{(0)} = N_{e,0}f(r), \quad \max f(r) = 1.$$

$N_e^{(0)}$ désigne la densité de charges initiale. On note

- $\vec{A}$ et ϕ le vecteur et le potentiel du champ électromagnétique
- E le champ électrique correspondant
- $\vec{p}_e$ le moment des électrons
- $\vec{j}$ la densité d'électrons
- ρ la densité de charges
- $N_e = N_e^{(0)} + N_{e,0}\delta n$ la densité de charge dynamique
- $m_{e,0}$ la masse initiale des électrons.

On considère qu'initialement, les électrons sont figés dans le plasma. On peut alors écrire les équations du système. On couple les équations de Maxwell avec les équations issues de la dynamique des plasmas :

$$\square \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.1)$$

$$\Delta \phi = -4\pi \rho \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{p}_e = -e \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \vec{v}_e \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right] \quad (1.4)$$

$$\vec{j} = -e N_e \vec{v}_e, \quad \rho = e(N_e^0 - N_e) \quad (1.5)$$

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{p}_e}{m_e}, \quad m_e = m_{e,0} \gamma \quad (1.6)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}_e|^2}{(m_{e,0}c)^2}} \quad (1.7)$$

Les équations (1.1) et (1.2) sont les équations de Maxwell. L'équation (1.3) représente une condition de jauge de Coulomb alors que (1.4) est l'équation de mouvement des électrons. Les équations (1.5) définissent les densités de courant et de charge. (1.6) représente les relations relativistes entre la vitesse v_e des électrons et leurs moments. Enfin, (1.7) définit le facteur de Lorentz γ . Comme d'habitude, $\square$ désigne l'opérateur d'Alembertien

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Il est bien sûr utile de normaliser toutes les grandeurs afin de faire disparaître les constantes liées à la masse. On pose donc

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \frac{e}{m_{e,0}c} \vec{A}, \quad \phi' = \frac{e}{m_{e,0}c} \phi, \quad E' = \frac{e}{m_{e,0}c} E, \\ \vec{p}_e' &= \frac{\vec{p}_e}{m_{e,0}c}, \quad \vec{v}_e' = \frac{\vec{v}_e}{c}, \quad N_e' = \frac{N_e}{N_{e,0}}.\end{aligned}$$

Dans la suite, on supprimera le signe ' pour des commodités d'écriture. D'après les relations

$$\begin{aligned}(\vec{p}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{p}_e &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{p}_e|^2 - \vec{p}_e \times (\vec{\nabla} \times \vec{p}_e) \\ \vec{\nabla} \gamma &= \frac{\nabla |\vec{p}_e|^2}{2\gamma},\end{aligned}$$

on peut réécrire l'équation (1.4) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{p}_e - \vec{A}) - \vec{v}_e \times [\vec{\nabla} \times (\vec{p}_e - \vec{A})] = \vec{\nabla} (\phi - \gamma). \quad (1.8)$$

On note $\omega_p = (4\pi e^2 N_e / m_e)^{\frac{1}{2}}$ la fréquence du plasma et τ la durée de l'impulsion. En supposant que $\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_p}$ (on dira que l'on est en présence d'un pulse long), on peut alors écrire $\vec{p}_e = \vec{A}$. Cette hypothèse signifie que l'on peut regarder le système formé par les électrons comme étant "adiabatique". Le système d'équations (1.1) – (1.8) peut ainsi être réécrit sous la forme

$$\square \vec{A} = k_p^2 N_e \gamma^{-1} \vec{A} \quad (1.9)$$

$$\Delta \phi = k_p^2 (N_e - f(r)) \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} (\phi - \gamma) = 0 \quad (1.11)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + |\vec{p}_e|^2}, \quad \vec{p}_e = \vec{A} \quad (1.12)$$

où $\omega_{p,0}$ est la fréquence du plasma non perturbé

$$\omega_{p,0} = \frac{4\pi e^2 N_{e,0}}{m_{e,0}} \quad \text{et} \quad k_p = \frac{\omega_{p,0}}{c}.$$

On a supprimé le terme $\frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}$ dans l'équation (1.9) car on suppose que ϕ et γ varient lentement au cours du temps. L'équation (1.10) résulte de l'identité vérifiée par la densité de charge dynamique

$$N_e = \max[0, f(r) + k_p^{-2} \Delta \gamma]. \quad (1.13)$$

En effet, il est possible de montrer que l'équation vérifiée par la charge δn peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + \frac{\omega_{p,0}^2}{\gamma} (1 + \delta n) \delta n = c^2 (\vec{\nabla} \cdot (N_e \frac{\vec{\nabla} \gamma}{\gamma}) + \vec{\nabla} (\frac{N_e}{\gamma}) \cdot \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot (\frac{\partial}{\partial t} (\frac{N_e}{\gamma}) (\vec{P}_e - \vec{A}))). \quad (1.14)$$

En supposant que la répartition de charge est uniforme dans l'espace et en ne gardant dans (1.14) que les termes d'ordre le plus bas en $q = \frac{E}{E_c}$, on obtient, puisque $\vec{P}_e = \vec{A}$,

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + \frac{\omega_{p,0}^2}{\gamma} \delta n = c^2 \frac{\Delta \gamma}{\gamma}. \quad (1.15)$$

On effectue maintenant une hypothèse de type quasi-statique qui consiste à négliger la variation temporelle de δn devant $\omega_{p,0}$, ce qui permet finalement d'aboutir à

$$\delta n = k_p^{-2} \Delta \gamma. \quad (1.16)$$

En tenant compte du fait que N_e est une quantité positive, la relation (1.13) découle directement de (1.16).

En combinant les équations (1.9), (1.10) et (1.11), on aboutit finalement à l'équation suivante

$$\square \vec{A} = k_p^2 \left(\frac{\max[0, f(r) + k_p^{-2} \Delta \gamma]}{\gamma} \right) \vec{A}. \quad (1.17)$$

Dans la suite, on supprimera les flèches des différents vecteurs. On regarde maintenant un champ polarisé linéairement suivant l'axe des z et on suppose que l'on dispose de deux échelles spatio-temporelles différentes, c'est-à-dire que l'on suppose A de la forme

$$A(x, y, z, t) = u_\varepsilon(x, y, \varepsilon z, \varepsilon t) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.18)$$

où le paramètre ε s'écrit

$$\varepsilon = \frac{\omega_{p,0}}{\omega} = \frac{k_p}{k_0}. \quad (1.19)$$

En tenant compte de la relation de dispersion

$$k^2 = k_0^2 - k_p^2 \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (1.20)$$

un calcul rapide montre que u_ε est solution de

$$\begin{aligned} & \Delta_\perp u_\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z^2} - \varepsilon^2 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + 2i\varepsilon k \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} + 2i\varepsilon \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + k_p^2 u_\varepsilon \\ &= k_p^2 \left(\frac{1 + k_p^{-2} \Delta_\perp \gamma_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} \right) u_\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{u_\varepsilon}{2\gamma_\varepsilon^2} \frac{\partial^2 |u_\varepsilon|^2}{\partial z^2} - \varepsilon^2 \frac{u_\varepsilon}{4\gamma_\varepsilon^4} \left(\frac{\partial |u_\varepsilon|^2}{\partial z} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.21)$$

où $\gamma_\varepsilon = \sqrt{1 + |u_\varepsilon|^2}$. Grâce aux relations

$$\varepsilon k = k_p \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon \frac{\omega}{c} = k_p$$

et après une renormalisation avec des constantes fixes par rapport à ε des variables x, y, z et t , on obtient finalement

$$\begin{aligned} & \Delta_\perp u_\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + 2i\sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} + 2i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \\ &= \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon} - 1 \right) u_\varepsilon + \frac{\Delta_\perp \gamma_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{u_\varepsilon}{2\gamma_\varepsilon^2} \frac{\partial^2 |u_\varepsilon|^2}{\partial z^2} - \varepsilon^2 \frac{u_\varepsilon}{4\gamma_\varepsilon^4} \left(\frac{\partial |u_\varepsilon|^2}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.22)$$

L'hypothèse $\varepsilon \ll 1$ signifie que la fonction $u_\varepsilon(x, y, \varepsilon z, \varepsilon t)$ varie lentement suivant les variables z et t par rapport à l'onde plane $e^{i(kz - \omega t)}$. Elle revient à supposer que dans l'équation (1.22), on peut négliger les termes $\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z^2}$. Physiquement, cela veut dire que l'on est en présence d'un plasma sous-dense. Ainsi, en prenant formellement $\varepsilon = 0$ dans l'équation (1.22), on aboutit à l'équation de Schrödinger relativiste suivante

$$2i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta_\perp u - \frac{u}{\sqrt{1 + |u|^2}} \Delta_\perp (\sqrt{1 + |u|^2}) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + |u|^2}} \right) u = 0. \quad (1.23)$$

1.2 Le problème de Cauchy pour des équations de Schrödinger quasi-linéaires

Le deuxième chapitre de ma thèse traite du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger quasi-linéaire (1.23)

$$\begin{cases} 2i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - \frac{u}{\sqrt{1+|u|^2}} \Delta(\sqrt{1+|u|^2}) + u(1 - \frac{1}{\sqrt{1+|u|^2}}) = 0 \\ u(x, 0) = a_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.24)$$

où la dimension d'espace N est quelconque et a_0 représente la donnée initiale. Cette équation a été déjà étudiée par A. de Bouard, N. Hayashi et J.C. Saut (voir [BHN99], [BHS97]). Dans [BHS97], les auteurs montrent que le problème de Cauchy (1.24) est bien posé dans $H^6(\mathbb{R}^N)$ si $N = 1, 2, 3$ et si la donnée initiale a_0 est suffisamment petite. De plus, ils prouvent qu'en dimension $N = 2, 3$, il existe une unique solution globale au problème (1.24) dans $C([0, +\infty[; H^8(\mathbb{R}^N) \cap W^{6,6}(\mathbb{R}^N))$ si a_0 est suffisamment petite. Enfin, en dimension 1, ils montrent que (1.24) est localement bien posée sans hypothèse de petitesse sur la donnée initiale.

Après ces travaux, M. Poppenberg (voir [P01]) a étudié l'équation de Schrödinger suivante

$$iu_t + \Delta u + uh'(|u|^2)\Delta(h(|u|^2) - V(x)u - ug(|u|^2)) = 0 \quad (1.25)$$

où V est un potentiel donné. Dans [P01], l'auteur montre, moyennant certaines hypothèses sur h , g et V que le problème de Cauchy (1.25) est bien posé dans $H^\infty(\mathbb{R}^N)$ quelle que soit la dimension N sans supposer aucune petitesse sur la donnée initiale. Le principal ingrédient de sa preuve est un théorème de fonctions implicites de type Nash-Moser combiné avec la théorie des semi-groupes hyperboliques.

Il est cependant possible de montrer que le problème (1.24) est bien posé quel que soit la dimension d'espace N dans des espaces de Sobolev de régularité finie et sans restriction de taille sur la donnée initiale. Plus précisément, le résultat s'énonce de la manière suivante

Théorème 1.2.1. *Soient $N \geq 1$, $s = 3$ si $N = 1$ et $s = 2[\frac{N}{2}] + 2$ si $N \geq 2$ et supposons que $a_0 \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$. Alors, il existe un temps $T > 0$ et une unique solution u au problème de Cauchy (1.24) telle que*

$$u \in L^\infty(0, T; H^{s+2}(\mathbb{R}^N)) \cap C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^N)).$$

On peut étendre ce résultat à la classe d'équation plus générale de la forme suivante

$$2i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - 2uh'(|u|^2)\Delta(h(|u|^2)) + ug(|u|^2) = 0, \quad (1.26)$$

où g et h sont des fonctions à valeurs réelles régulières et où h vérifie la condition

$$\exists C_h > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+, \quad 1 - 4sh'^2(s) > C_h h'^2(s). \quad (1.27)$$

La condition (1.27) assure en particulier que le terme $\Delta u - 2uh'(|u|^2)\Delta(h(|u|^2))$ est elliptique et permet de mettre en oeuvre la méthode d'énergie utilisée. Il est à noter que ces hypothèses sont aussi utilisées par M. Poppenberg dans [P01].

Pour montrer ce résultat, on utilise la méthode introduite dans [BHS97]. On commence par réécrire l'équation (1.24) en un système en $(u, \bar{u})^t$. Ensuite, pour linéariser le terme quadratique en ∇u , on dérive (1.24) par rapport à l'espace et au temps pour obtenir un système en $u_0, \dots, u_{N+2}$ où

$$\forall 1 \leq j \leq N, \quad u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u_{N+1} = e^{f(|u_0|^2)} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{N+2} = e^{q(|u_0|^2)} \Delta u.$$

Ici, f et q jouent le rôle de transformation de jauge (voir [H095]). Ces transformations sont utiles pour pouvoir effectuer des intégrations par parties dans les estimations d'énergies. Enfin, la méthode consiste à appliquer un théorème de point fixe au nouveau système obtenu. Le fait de travailler avec une seule dérivée en temps nous permet de considérer des espaces de Sobolev plus simples que dans [BHS97] ce qui nous permet de supprimer les hypothèses de petitesse sur les données initiales.

1.3 Approximation de l'équation de Schrödinger non-linéaire relativiste par une équation de Klein-Gordon

Le but de cette partie est de regarder en détail l'approximation $\varepsilon \ll 1$ faite sur l'onde électromagnétique A , à savoir que si l'on introduit deux échelles spatio-temporelles différentes, alors on peut négliger les dérivées secondes suivant z et t de u . Plus précisément, on aimerait pouvoir justifier le passage de l'équation (1.22) à l'équation (1.23) en procédant de la manière suivante : trouver des solutions u_ε de (1.22) qui convergent vers des solutions de (1.23) dans un espace $L^\infty(0, T; H^s)$. Les solutions u_ε considérées devront alors avoir un temps d'existence indépendant de ε et devront avoir des données initiales $u_\varepsilon(\cdot, 0)$ de taille elles aussi indépendante de ε .

Ce programme a été appliqué sur une équation modifiée réduite en dimension 2

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \Delta u_\varepsilon = \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon} - 1 \right) u_\varepsilon + \frac{\Delta \gamma_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon. \quad (1.28)$$

En prenant formellement $\varepsilon = 0$ dans (1.28), on obtient à nouveau formellement l'équation de Schrödinger (1.23). L'équation (1.28) possède des solutions u_ε quelle que soit la valeur du paramètre ε qui convergent dans un espace approprié vers des solutions de l'équation (1.23) lorsque ε tend vers zéro, sous certaines restrictions sur leurs données initiales.

Tout d'abord, l'équation (1.28) a la forme d'une équation de Klein-Gordon. En effet, si on pose

$$v_\varepsilon(x, y, t) = u_\varepsilon(x, y, t) \exp\left(\frac{it}{\varepsilon^2}\right)$$

alors on peut montrer que v_ε vérifie l'équation de Klein-Gordon suivante

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial t^2} + \Delta v_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} v_\varepsilon = \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon} - 1 \right) v_\varepsilon + \frac{\Delta \gamma_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} v_\varepsilon \quad (1.29)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x, y, 0) &= u_0^\varepsilon(x, y) \\ \partial_t v_\varepsilon(x, y, 0) &= u_1^\varepsilon(x, y, z) + i \frac{1}{\varepsilon^2} u_0^\varepsilon(x, y). \end{aligned}$$

D'après [KP83], si les données initiales v_0^ε et v_1^ε sont petites dans des espaces adéquats, alors le problème de Cauchy (1.29) est globalement bien posé dans $C([0, +\infty[; H^s(\mathbb{R}^3))) \cap C^1([0, +\infty[; H^{s-2}(\mathbb{R}^3)))$ pour un certain entier s . En revenant à u_ε , on peut alors montrer que (1.28) admet une unique solution u_ε qui tend vers zéro avec ε dans les espaces $L^\infty(0, T; H^s(\mathbb{R}^2))$. De même, en utilisant les estimations d'énergies classiques concernant les équations d'ondes, il est possible de montrer les deux assertions suivantes :

1) le problème de Cauchy (1.28) est localement bien posé dans $L^\infty(0, T_\varepsilon, H^s(\mathbb{R}^2))$ sans supposer aucune restriction de taille sur les données initiales avec un temps d'existence $T_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{(\|u_0^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} + \|u_1^\varepsilon\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)})}$.

2) le problème de Cauchy (1.28) est localement bien posé dans $L^\infty(0, T, H^s(\mathbb{R}^2))$ avec un temps d'existence $T = 1$ mais pour des données initiales vérifiant $\|u_0^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} + \|u_1^\varepsilon\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)} \leq h(\varepsilon)$ où $h(\varepsilon)$ tends vers zéro avec ε .

Dans la première assertion, le temps d'existence tend vers zéro avec ε alors que dans la seconde, on demande aux données initiales d'être de l'ordre de ε^2 . Finalement, on commence par montrer le résultat suivant :

Théorème 1.3.1. *Supposons que $u_0^\varepsilon \in H^8(\mathbb{R}^3)$ et que $u_1^\varepsilon \in H^7(\mathbb{R}^3)$. Alors il existe deux constantes δ_ε ($\delta_\varepsilon \sim 2^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}$) et $M > 0$ indépendante de ε telles que si $\|u_1^\varepsilon\|_{H^7(\mathbb{R}^2)} \leq \delta_\varepsilon$, alors il existe un temps $T > 0$ indépendant de ε tel que (1.28) admet une unique solution u_ε vérifiant*

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H^8(\mathbb{R}^2)) \cap C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2)).$$

De plus,

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(\|u_\varepsilon\|_{H^8(\mathbb{R}^2)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_t u_\varepsilon\|_{H^6(\mathbb{R}^2)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_t^2 u_\varepsilon\|_{H^6(\mathbb{R}^2)}^2 \right) \leq M.$$

Pour montrer le Théorème 1.3.1, on va considérer l'équation (1.28) comme une perturbation de l'équation de Schrödinger relativiste (1.23), c'est-à-dire que dans (1.28), le terme $\varepsilon^2 \partial_t^2 u_\varepsilon$ sera traité comme un terme perturbatif. C'est pourquoi, on va utiliser la méthode introduite dans le Chapitre 2, à savoir que l'on va commencer par transformer (1.28) en un système en $(u_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon)$. Ensuite, on dérive l'équation obtenue par rapport à l'espace et au temps pour obtenir un nouveau système où les inconnues s'écrivent

$$u_0 = u_\varepsilon, \quad u_j = \partial_j u_\varepsilon, \quad \forall 1 \leq j \leq 2, \quad u_3 = e^{q(|u_0|^2)} \Delta u_\varepsilon, \quad u_4 = \partial_t \Delta u_\varepsilon, \quad u_5 = \partial_t^2 \Delta u_\varepsilon.$$

Comme dans le Chapitre 2, la fonction q joue ici le rôle de transformation de jauge. Les équations vérifiées par u_4 et u_5 , sont traitées à l'aide des estimations d'énergie relatives aux équations d'ondes. La fin de la preuve consiste à appliquer un théorème de point fixe.

Une fois montré le Théorème 1.3.1, il est possible d'étudier la convergence de u_ε vers la solution u de (1.23) ayant pour condition initiale $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ sous les conditions que u_0^ε et u_1^ε vérifient les hypothèses du Théorème 1.3.1, que u_0 vérifie les hypothèses du Théorème 1.2.1 et que u_0^ε converge vers u_0 dans l'espace de Sobolev $H^6(\mathbb{R}^2)$. Plus précisément, on montre

Théorème 1.3.2. *Soient (u_0^ε) et (u_1^ε) deux suites bornées respectivement dans $H^8(\mathbb{R}^2)$ et $H^7(\mathbb{R}^2)$ vérifiant*

$$u_0^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0 \quad \text{dans } H^6(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad u_1^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } H^7(\mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que $\|u_1^\varepsilon\|_{H^7(\mathbb{R}^2)} \leq \delta_\varepsilon$ où δ_ε est donné par le Théorème 1.3.1. Soient alors u_ε la solution de (1.28) donnée par 1.3.1 et u la solution de (1.23) donnée par 1.2.1. Alors il existe un temps T commun d'existence à u_ε et u tel que

$$u_\varepsilon - u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H^6(\mathbb{R}^2)).$$

La preuve du Théorème 1.3.2 repose sur l'estimation d'énergie utilisée dans le Chapitre 2. Les deux points essentiels sont ici d'utiliser le fait que les solutions u_ε de (1.28) possèdent un temps commun d'existence et sont bornées dans $L^\infty(0, T; H^8(\mathbb{R}^2))$ avec une borne indépendante de ε .

1.4 Stabilité des ondes stationnaires en dimension deux d'espace pour des équations de Schrödinger quasi-linéaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence et à la stabilité d'ondes stationnaires de la forme $u_\omega = e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ où $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$ qui sont solutions de l'équation (1.24). On suppose ici que la dimension

de l'espace est égale à 2. En effet, en dimension 1, le problème de l'existence et de la stabilité d'ondes stationnaires pour l'équation (1.24) à déjà été résolu par I.D. Iliev et K.P. Kirchev dans [IK93]. On demande à la fonction ϕ_ω d'être un état fondamental de l'équation

$$\Delta\phi - \frac{\phi}{\sqrt{1+|\phi|^2}}\Delta(\sqrt{1+|\phi|^2}) + \phi(1 - \frac{1}{\sqrt{1+|\phi|^2}}) - 2\omega\phi = 0, \quad (1.30_\omega)$$

c'est-à-dire une solution qui minimise l'action S_ω

$$S_\omega(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla\phi|^2 - |\nabla(\sqrt{1+|\phi|^2})|^2 - (\sqrt{1+|\phi|^2} - 1)^2 \right) dx + \omega \int_{\mathbb{R}^2} |\phi|^2 dx$$

parmi toutes les solutions de (1.30 $_\omega$). Il apparait difficile de travailler directement sur la fonctionnelle S_ω car celle-ci ne contrôle pas la norme H^1 , c'est-à-dire qu'une borne sur $S_\omega(\phi)$ ne fournit pas de borne H^1 sur ϕ . Par contre, on peut remarquer que si l'on effectue le changement de fonction $\chi = \operatorname{argsinh}(\phi)$, on se ramène à l'équation elliptique

$$-\Delta\chi = (1 - 2\omega)\sinh(\chi)\cosh(\chi) - \sinh(\chi), \quad (1.31_\omega)$$

à laquelle on peut associer l'action suivante

$$T_\omega = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla\chi|^2 - (\cosh(\chi) - 1)^2) dx + \omega \int_{\mathbb{R}^2} |\sinh(\chi)|^2 dx,$$

(les fonctions $\sinh$, $\cosh$ et $\operatorname{argsinh}$ désignent respectivement le sinus hyperbolique, le cosinus hyperbolique et la fonction réciproque du sinus hyperbolique). Il existe un lien très fort entre ces deux équations : on peut effectivement montrer qu'une fonction ϕ_ω est un état fondamental de (1.30 $_\omega$) si et seulement si $\chi_\omega = \operatorname{argsinh}(\phi_\omega)$ est un état fondamental de (1.31 $_\omega$). De plus, en dimension 2, l'inégalité de Trudinger démontrée dans [O95] permet d'estimer la norme L^1 de $(e^{|\chi|^2} - 1)$ en fonction de la norme H^1 de χ . En conséquence, la fonctionnelle T_ω contrôle cette fois la norme H^1 .

On va donc plutôt travailler sur l'équation (1.31 $_\omega$), tout en sachant que de nombreux résultats relatifs à l'équation (1.30 $_\omega$) seront déduits des résultats obtenus sur (1.31 $_\omega$). Par contre, on peut noter qu'en dimension supérieure où égale à trois, les termes $(\cosh(\chi) - 1)^2$ et $\sinh^2(\chi)$ ne sont pas a priori dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$, ce qui rend l'étude de l'existence des ondes u_ω beaucoup plus délicate.

En utilisant des résultats de H. Berestycki, T. Gallouët et O. Kavian ([BGK84]), on peut alors montrer

Théorème 1.4.1. *Il existe une constante ω_{max} telle que pour tout ω dans $]0, \omega_{max}[$, il existe une solution ϕ_ω de l'équation (1.30 $_\omega$) vérifiant*

- i) $\phi_\omega > 0$ dans $\mathbb{R}^2$,
- ii) ϕ_ω est radiale, symétrique et décroissante par rapport à $r = |x|$,
- iii) $\phi_\omega \in C^2(\mathbb{R}^2)$,
- iv) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 2, \exists (c_\alpha, \delta_\alpha) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,
 $|D^\alpha \phi_\omega(x)| \leq C_\alpha e^{-\delta_\alpha |x|}$,
- v) Pour tout ϕ solution de (1.30 $_\omega$), on a $S_\omega(\phi_\omega) \leq S_\omega(\phi)$

Ensuite, il apparait naturel d'étudier l'unicité des états fondamentaux ϕ_ω , cette propriété étant par ailleurs utile pour l'analyse de la stabilité. Là encore, le résultat découlera de l'unicité des états fondamentaux de l'équation (1.31 $_\omega$). Ce genre de problème a déjà fait l'objet de nombreuses études. On peut citer

en particulier les travaux de Adimurthi ([A98]), L. Erb et M. Tang ([ET97]), K. McLeod ([M93]), L.A. Peletier et J. Serrin ([PS83]) ou encore de M.K. Kwong ([K89]). P. Pucci et J. Serrin ([PS98]) ont étudié le cas d'une nonlinéarité qui croît exponentiellement à l'infini, ce qui est bien sûr le cas pour l'équation (1.31_ω). Ainsi, des travaux de P. Pucci et J. Serrin, on peut facilement déduire le théorème suivant :

Théorème 1.4.2. *Pour tout $\omega \in]0, \omega_{max}[$, l'équation (1.30_ω) possède un unique état fondamental, aux translations et multiplications par $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) près.*

Une fois montré les Théorèmes 1.4.1 et 1.4.2, nous possédons tous les ingrédients pour étudier la stabilité des ondes stationnaires u_ω . En dimension 1, dans [IK93], les auteurs ont montré la stabilité orbitale de l'onde u_ω en utilisant les méthodes spectrales introduites par M. Grillakis, J. Shatah et W. Strauss ([GSS90]).

En dimension 2, cette méthode paraît peu adaptée à cause de la difficulté à calculer le spectre de l'opérateur linéarisé autour de ϕ_ω . C'est pour cela que l'on a choisi la méthode de minimization de T. Cazenave et P.L. Lions ([CL82]). Introduisons l'énergie E associée à (1.30_ω)

$$E(\phi) = S_\omega(\phi) - \omega \int_{\mathbb{R}^2} |\phi|^2 dx.$$

La méthode consiste à étudier les minima de l'énergie E sous la contrainte d'un invariant de l'équation, ici la norme L^2 . Elle repose sur le principe de concentration-compacité introduit par P.L. Lions dans [L84]. Cependant, comme on l'a déjà remarqué, la fonctionnelle E ne contrôle pas la norme H^1 . En d'autres termes, il est possible de construire une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour chaque n , ϕ_n est dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^2)$, la suite $(E(\phi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais dont la norme L^2 du gradient tend vers $+\infty$. De plus, la fonctionnelle E n'est pas continue sur $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Pour ces raisons, on est obligé de travailler avec l'équation (1.31_ω) et surtout avec son énergie F

$$F(\chi) = T_\omega(\chi) - \omega \int_{\mathbb{R}^2} |\sinh(\chi)|^2 dx.$$

En conséquence, on ne montrera pas un résultat de stabilité orbitale pour les ondes u_ω mais un résultat un peu plus faible portant sur $\text{argsinh}(|u_\omega|)$. Le résultat est le suivant

Théorème 1.4.3. *Pour $\omega \in]0, \omega_{max}[$, on définit $u_\omega(x, t) = e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ où ϕ_ω est un état fondamental de (1.30_ω). Alors, il existe un sous-ensemble infini Ω de $]0, \omega_{max}[$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, u_ω vérifie la propriété suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si $a_0 \in H^6(\mathbb{R}^2)$, $\|a_0 - \phi_\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \delta$ et $|E(a_0) - E(\phi_\omega)| \leq \delta$, alors la solution $u(x, t)$ de l'équation (1.24) avec pour donnée initiale a_0 définie sur $[0, T]$ vérifie*

$$\sup_{t \in [0, T]} \inf_{y \in \mathbb{R}^2} \|\text{argsinh}(|u(\cdot, t)|) - \text{argsinh}(|\phi_\omega(\cdot - y)|)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon$$

et

$$\sup_{t \in [0, T]} |E(u(\cdot, t)) - E(|u(\cdot, t)|)| \leq \varepsilon.$$

Le théorème ci-dessus n'est pas valable pour toutes les valeurs possibles du paramètre ω dans $]0, \omega_{max}[$ pour lesquelles il existe des ondes stationnaires u_ω .

En effet, une condition nécessaire pour que l'onde u_ω soit stable est que $\chi_\omega = \text{argsinh}(\phi_\omega)$ soit un minimum de l'énergie F . Un des problèmes importants pour ce genre d'étude est de pouvoir relier ω et $\mu = \int_{\mathbb{R}^2} \sinh^2(\chi_\omega) dx$. Tout d'abord, grâce au Théorème 1.4.2, il est possible de définir μ comme une

fonction de ω . Cependant, on aimerait faire l'inverse, à savoir définir ω comme une fonction unique de μ . Cela revient à montrer que le problème de minimisation suivant

$$\inf_{\chi \in M_\mu} F(\chi) \quad \text{où} \quad M_\mu = \left\{ \chi \in H^1(\mathbb{R}^2) \ / \ \int_{\mathbb{R}^2} \sinh^2(\chi) dx = \mu \right\}$$

possède une unique solution (aux rotations et translations près).

Par exemple, dans le cas de l'équation de Schrödinger cubique, il existe un changement d'échelle qui permet de le faire (voir [C94]). Lorsqu'il n'existe pas de tel changement, ce qui est bien sûr le cas pour l'équation qui nous intéresse, le problème apparaît beaucoup plus délicat.

En d'autre terme, il est possible que pour une valeur de μ donnée, il existe deux états fondamentaux χ_{ω_1} et χ_{ω_2} avec $\omega_1 \neq \omega_2$ tels que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sinh^2(\chi_{\omega_1}) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \sinh^2(\chi_{\omega_2}) dx.$$

Des simulations numériques ont été effectuées sur l'équation (1.31 _{ω}) par L. Di Menza : il a notamment tracé la courbe représentant la norme L^2 des fonctions $\sinh(\chi_\omega)$ en fonction du paramètre ω . Il a obtenu une courbe strictement croissante, ce qui tendrait à prouver, qu'au moins dans le cas de l'équation (1.31 _{ω}), il soit possible de relier de manière unique ω et μ . C'est-à-dire, il apparaîtrait raisonnable de montrer qu'il existe une valeur critique ω_c telle que le théorème de stabilité 1.4.3 soit vrai pour toutes les valeurs de ω comprises dans l'intervalle $]\omega_c, \omega_{\max}[$. Ceci reste un problème ouvert.

Nous montrons seulement ici qu'il existe un ensemble infini Ω inclus dans $]0, \omega_{\max}[$ pour lequel on a effectivement stabilité des ondes u_ω .

Il reste à noter que d'une manière générale, il n'est pas toujours vrai que les ondes solitaires u_ω soient stables pour toutes les valeurs du paramètre ω . Par exemple, considérons l'équation

$$iu_t + \partial_x^2 u + a|u|^{p-1}u + b|u|^{q-1}u = 0 \tag{1.32}$$

où a, b sont des réels, $x \in \mathbb{R}$ et $1 < p < q < +\infty$. Dans [O95], M. Ohta a montré que si a et b sont positifs et si $q = 2p - 1$, alors u_ω est stable pour ω proche de 0 et instable pour de grandes valeurs de ω .

Chapitre 2

L'effet Raman.

La construction de lasers de plus en plus puissants, comme le laser Méga-Joule en cours de développement actuellement au CEA-Cestas, est en train de rendre la fusion par confinement inertiel accessible à l'échelle expérimentale du laboratoire. Le principe de base est le suivant : une chambre contenant un plasma et une cible deutérium-tritium est soumise à un flux laser. Une réaction de fusion intervient alors entre les deux éléments dégageant une énergie considérable, censée être récupérée puis être réutilisée par la suite. Lorsque le laser pénètre dans la chambre, une multitude de phénomènes physiques se produisent et sont susceptibles de modifier la réaction entre le deutérium et le tritium. Ils entraînent une modification en profondeur des caractéristiques de l'onde laser incidente : phénomènes de déviation du faisceau, création d'ondes de type Brillouin et Raman, effet Landau.... Le rendement de la réaction de fusion, qui se calcule en comparant l'énergie nécessaire à produire l'onde laser et l'énergie que l'on récupère en fin de réaction, se trouve ainsi grandement modifié par l'existence de tous ces phénomènes. Il est donc primordial d'essayer d'en comprendre les mécanismes en introduisant des modèles capables de rendre compte de leurs effets. Le but étant, sur le long terme, de minimiser leurs effets sur la production d'énergie.

C'est dans cette optique, qu'en collaboration avec T. Colin, nous avons étudié un de ces effets non-linéaires qui intervient lorsqu'une onde incidente laser se propage dans un plasma : l'effet Raman. C'est un phénomène d'interaction à trois ondes, l'onde laser incidente, l'onde plasma-électronique et l'onde Raman, dans lequel les champs Raman croissent de manière exponentielle au moins en temps court. L'idée de départ est de construire des systèmes de type Zakharov décrivant cette interaction. Notons qu'un premier système de ce type a été présenté dans [DRR99] dans le cas où l'onde Raman est colinéaire à l'onde incidente et se propage en sens inverse. Dans [5], nous avons montré comment dériver un tel système en appliquant des méthodes de type optique diffractive "à la Joly-Métivier-Rauch" ([JMR93]) aux équations d'Euler-Maxwell. On a alors montré comment résoudre localement en temps le problème de Cauchy associé et mis en oeuvre dans [6] une méthode de résolution numérique (basé sur les méthodes de [G92] et [B98]) ainsi qu'une analyse semi-classique permettant d'évaluer les taux d'amplification de chacun des champs. Dans un deuxième temps, nous avons repris cette étude en supposant cette fois que les champs pouvaient avoir une vraie configuration 2D. Ainsi, dans [14], nous mettons en évidence deux nouvelles directions de propagation privilégiées, non-colinéaires à l'onde laser incidente, correspondant à deux nouvelles composantes Raman qui se propagent vers l'avant. La suite de ce chapitre comporte 4 sections dans lesquelles je vais exposer en détail les résultats énoncés ci-dessus, en commençant par la présentation de la situation 2-dimensionnelle qui englobe, en un certain sens, le système étudié dans [5].

2.1 Interactions laser-plasma : Les systèmes de type Zakharov.

2.1.1 Présentation du système.

Dans cette partie, nous présentons comment obtenir un système d'équations multi-dimensionnel décrivant une interaction à 3 ondes. La situation physique est la suivante : lorsque une onde incidente A_0

de vecteur d'onde et de pulsation (K_0, ω_0) pénètre dans un plasma, une partie de son énergie est rétro-diffusée sous la forme d'une onde Raman A_R de vecteur d'onde et de pulsation (K_R, ω_R) . Ces 2 ondes se combinent pour créer une onde plasma-électronique E_0 de vecteur d'onde et de pulsation $(K_1, \omega_{pe} + \omega_1)$. Enfin ces 3 ondes interagissent pour provoquer une variation basse fréquence de la densité des ions p qui a elle-même une influence sur les 3 ondes précédentes. On suppose pour le moment que les vecteurs d'onde sont dans $\mathbb{R}^2$. L'interaction est effective lorsque les conditions suivantes sont réunies (on note $|\cdot|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$) :

- (K_0, ω_0) et (K_R, ω_R) satisfont la relation de dispersion pour les ondes électro-magnétiques

$$\omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 |K_0|^2, \quad (2.1)$$

$$\omega_R^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 |K_R|^2, \quad (2.2)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide,

- $(K_1, \omega_{pe} + \omega_1)$ satisfait la relation de dispersion pour les ondes plasma-électroniques

$$(\omega_{pe} + \omega_1)^2 = \omega_{pe}^2 + v_{th}^2 |K_1|^2, \quad (2.3)$$

où v_{th} est la vitesse thermique des électrons,

- les données vérifient la condition de résonance

$$\omega_0 = \omega_{pe} + \omega_R + \omega_1, \quad (2.4)$$

$$K_0 = K_R + K_1. \quad (2.5)$$

Puisque K_0 , ω_0 , ω_R , c et v_{th} sont fixés, nous disposons donc de 4 inconnues $(\omega_R, K_R, \omega_1, K_1)$ et des 4 équations (2.2)-(2.5). La méthode consiste à identifier les directions correspondantes à des taux d'amplification maximum. En effet, du fait de la croissance exponentielle des composantes Raman, seules ces directions précises sont à envisager. Deux approches sont alors possibles. Dans [5], nous avons adopté une approche 1D : les vecteurs d'ondes sont tous portés par l'onde incidente A_0 , ce qui permet de montrer l'existence d'un champ Raman A_R rétrodiffusé correspondant à un taux d'amplification maximum. Dans un cadre plus général où les vecteurs sont dans $\mathbb{R}^2$, la situation s'avère beaucoup plus riche. En effet, une des solutions du système (2.1)-(2.5) correspond à la configuration où les vecteurs d'ondes K_0 , K_R et K_1 sont colinéaires. Cette solution décrit l'onde Raman rétrodiffusée, que l'on notera A_{R_1} dans la suite. Cependant, il est aussi possible de montrer, au moins numériquement, que ce système possède une infinité de solutions dans le plan parmi lesquelles deux directions privilégiées, symétriques par rapport à l'onde incidente mais non-colinéaires à celle-ci, correspondent à un maximum d'amplification des champs Raman. Pour écrire le système de Zakharov, nous nous sommes donc intéressés à ces 3 directions privilégiées d'amplification. Deux nouveaux champs Raman A_{R_2} et $A_{R_2^s}$ se propageant vers l'avant sont ainsi mis en évidence dans ce travail. Le système complet s'écrit

$$i\left(\partial_t + \frac{c^2 k_0^2}{\omega_0^2} \partial_x\right) A_0 + \left(\frac{c^2 k_0^2}{2\omega_0^2} \Delta - \frac{c^4 k_0^4}{2\omega_0^4} \partial_x^2\right) A_0 = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0^2} p A_0 \quad (2.6)$$

$$- \nabla \cdot E_{||} \left(A_{R_1} e^{-i\theta_{1,1}} \frac{k_{R_1}}{|K_{R_1}|} + \alpha (A_{R_2} e^{-i\theta_{1,2}} + A_{R_2^s} e^{-i\theta_{1,2^s}}) \frac{k_{R_2}}{|K_{R_2}|} \right),$$

$$\begin{aligned} & i\left(\partial_t + \frac{c^2 k_0}{\omega_{R_1} \omega_0} K_{R_1} \cdot \nabla\right) A_{R_1} + \frac{1}{2\omega_{R_1} \omega_0} \left(c^2 k_0^2 \Delta - \frac{c^4 k_0^2}{\omega_{R_1}^2} (K_{R_1} \cdot \nabla)^2\right) A_{R_1} \\ &= \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0 \omega_{R_1}} p A_{R_1} - \nabla \cdot E_{||}^* A_0 e^{i\theta_{1,1}} \frac{k_{R_1}}{|K_{R_1}|}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & i\left(\partial_t + \frac{c^2 k_0}{\omega_{R_2} \omega_0} K_{R_2} \cdot \nabla\right) A_{R_2} + \frac{1}{2\omega_{R_2} \omega_0} \left(c^2 k_0^2 \Delta - \frac{c^4 k_0^2}{\omega_{R_2}^2} (K_{R_2} \cdot \nabla)^2\right) A_{R_2} \\ &= \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0 \omega_{R_2}} p A_{R_2} - \alpha \nabla \cdot E_{||}^* A_0 e^{i\theta_{1,2}} \frac{k_{R_2}}{|K_{R_2}|}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 & i \left(\partial_t + \frac{c^2 k_0}{\omega_{R_2} \omega_0} K_{R_2^s} \cdot \nabla \right) A_{R_2^s} + \frac{1}{2\omega_{R_2} \omega_0} \left(c^2 k_0^2 \Delta - \frac{c^4 k_0^2}{\omega_{R_2}^2} (K_{R_2^s} \cdot \nabla)^2 \right) A_{R_2^s} \\
 & = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0 \omega_{R_2}} p A_{R_2^s} - \alpha \nabla \cdot E_{||}^* A_0 e^{i\theta_{1,2^s}} \frac{k_{R_2^s}}{|K_{R_2^s}|},
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 & i \partial_t E_{||} + \frac{v_{th}^2 k_0^2}{2\omega_{pe} \omega_0} \Delta E_{||} = \frac{\omega_{pe}}{2\omega_0} p E_{||} + \nabla \left(A_0 A_{R_1}^* e^{i\theta_{1,1}} \frac{k_{R_1}}{|K_{R_1}|} \right. \\
 & \left. + \alpha (A_0 A_{R_2}^* e^{i\theta_{1,2}} + A_0 A_{R_2^s}^* e^{i\theta_{1,2^s}}) \frac{k_{R_2}}{|K_{R_2}|} \right),
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_t^2 - c_s^2 \Delta) p = & \frac{4m_e}{m_i} \frac{\omega_0 \omega_{R_1}}{\omega_{pe}^2} \Delta \left(|E_{||}|^2 + \frac{\omega_{pe}}{\omega_0} |A_0|^2 + \frac{\omega_{pe}}{\omega_{R_1}} |A_{R_1}|^2 \right. \\
 & \left. + \frac{\omega_{pe}}{\omega_{R_2}} (|A_{R_2}|^2 + |A_{R_2^s}|^2) \right).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Les notations adoptées sont les suivantes. Les vecteurs d'ondes sont 2D et on suppose que l'onde incidente A_0 est portée par l'axe des x :

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_{R_1} = \begin{pmatrix} k_{R_1} \\ \ell_{R_1} \end{pmatrix}, \quad K_{R_2} = \begin{pmatrix} k_{R_2} \\ \ell_{R_2} \end{pmatrix}, \quad K_{R_2^s} = \begin{pmatrix} k_{R_2^s} \\ \ell_{R_2^s} \end{pmatrix},$$

$$\theta_{1,1} = K_{1,1} \cdot X - \omega_{1,1} t, \quad \theta_{1,2} = K_{1,2} \cdot X - \omega_{1,2} t, \quad \theta_{1,2^s} = K_{1,2^s} \cdot X - \omega_{1,2^s} t,$$

$\alpha = \sqrt{\frac{\omega_{R_1}}{\omega_{R_2}}}$. Les constantes c_s , m_e et m_i désignent respectivement la vitesse du son, les masses des électrons et des ions.

2.1.2 Description de la méthode.

Nous expliquons maintenant comment obtenir un tel système. Tout d'abord, justifions le choix de la forme $(K_1, \omega_{pe} + \omega_1)$ dédiée à l'onde plasma-électronique. La vitesse thermique v_{th} étant petite devant la vitesse de la lumière dans le vide ($v_{th} \ll c$), les allures des graphes des relations de dispersions (2.1) et (2.3) sont très différentes, celle de (2.3) étant beaucoup plus plate à l'origine que celle de (2.1) comme on peut le voir sur la figure 2.1. En conséquence, concernant le graphe de (2.3), on en déduit que quel soit la

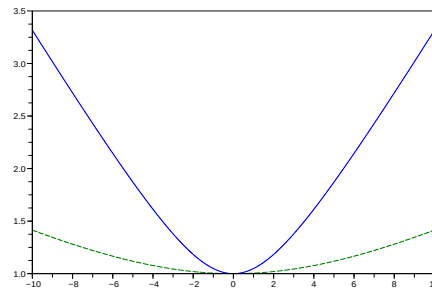


FIGURE 2.1 – Tracé (ω en fonction de $|K|$) de la première partie des relations de dispersion (2.26) (ligne pointillée) et (2.27) (ligne continue) avec $\omega_{pe}^2 = 1$, $c^2 = 1$ et $v_{th}^2 = 0.01$.

valeur du vecteur d'onde $|K|$, la valeur de ω correspondante restera proche de ω_{pe} . Pour cette raison, on introduit une pulsation ω_1 vérifiant $\omega_1 \ll \omega_{pe}$, qui rend compte des petites fluctuations de $\omega = \omega_{pe} + \omega_1$ lorsque $K = K_1$ décrit un ensemble continu de valeurs.

Partant de cette constatation, la méthode consiste à décomposer chaque champ F sous la forme (la notation c.c. désigne le complexe conjugué)

$$F = F_0 e^{i(K_0 \cdot X - \omega_0 t)} + F_R e^{i(K_R \cdot X - \omega_R t)} + F_e e^{-i\omega_e t} + \text{c.c.},$$

et d'injecter cette décomposition dans un système d'Euler-Maxwell en collectant les différents coefficients des termes temporels oscillants en $e^{-i\omega_0 t}$, $e^{-i\omega_R t}$ et $e^{-i\omega_{pe} t}$. Cela conduit aux résultats suivants :

1) pour la partie linéaire, chaque composante satisfait une équation de Schrödinger avec sa propre vitesse de groupe et ses termes de dispersion,

2) pour la partie non-linéaire, on garde seulement les termes résonnants, ce qui introduit un déphasage sous la forme $e^{i(K_1 \cdot X - \omega_1 t)}$. Ce terme traduit deux phénomènes différents : le premier est que K_1 peut prendre un ensemble continu de valeurs et le second exprime le fait que la relation $\omega_0 = \omega_R + \omega_{pe}$ n'est pas vérifiée et que l'on doit introduire un terme correctif $\omega_1 \ll \omega_{pe}$ pour obtenir la relation exacte (2.4).

Les équations d'Euler-Maxwell décrivent de manière générale l'évolution du champ électromagnétique dans un plasma. Le plasma peut être modélisé par un système de deux fluides (un pour les ions et un pour les électrons) et le système s'écrit

$$(n_0 + n_e) (\partial_t v_e + v_e \cdot \nabla v_e - (n_0 + n_i) v_i), \quad (2.12)$$

$$(n_0 + n_e) (\partial_t v_e + v_e \cdot \nabla v_e) = -\frac{\gamma_e T_e}{m_e} \nabla n_e - \frac{e(n_0 + n_e)}{m_e} (E + \frac{1}{c} v_e \times B), \quad (2.13)$$

$$(n_0 + n_i) (\partial_t v_i + v_i \cdot \nabla v_i) = -\frac{\gamma_i T_i}{m_i} \nabla n_i + \frac{e(n_0 + n_i)}{m_i} (E + \frac{1}{c} v_i \times B), \quad (2.14)$$

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot ((n_0 + n_e) v_e) = 0, \quad (2.15)$$

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot ((n_0 + n_i) v_i) = 0. \quad (2.16)$$

Les équations de Maxwell sont écrites en termes de champs électro-magnétiques pour l'étude des ondes plasma-électroniques

$$\partial_t B + c \nabla \times E = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial_t E - c \nabla \times B = 4\pi e ((n_0 + n_e) v_e - Z(n_0 + n_i) v_i), \quad (2.18)$$

et en termes de potentiel dans la jauge de Lorentz pour l'étude des ondes électromagnétiques

$$\partial_t \psi = c \nabla \cdot A, \quad (2.19)$$

$$\partial_t A + c E = c \nabla \psi, \quad (2.20)$$

$$\partial_t E - c \nabla \times \nabla \times A = 4\pi e ((n_0 + n_e) v_e - Z(n_0 + n_i) v_i), \quad (2.21)$$

où Z désigne le nombre atomique des ions. En négligeant la contribution des ions dans les équations d'Euler ($m_1 \geq 10^3 m_e$), et en linéarisant les équations autour de la solution nulle, on obtient

$$n_0 \partial_t v_e = -\frac{\gamma_e T_e}{m_e} \nabla n_e - \frac{e n_0}{m_e} E, \quad (2.22)$$

$$\partial_t n_e + n_0 \nabla \cdot v_e = 0, \quad (2.23)$$

$$\partial_t B + c \nabla \times E = 0, \quad (2.24)$$

$$\partial_t E - c \nabla \times B = 4\pi e n_0 v_e. \quad (2.25)$$

On cherche alors des solutions du système (2.22)-(2.25) sous la forme d'onde plane $e^{i(K \cdot X - \omega t)} (v_e, n_e, B, E)$. Deux types d'ondes peuvent se propager dans le milieu :

i) Les ondes longitudinales pour lesquelles K est parallèle à E (ondes plasma-électroniques). Elles satisfont la relation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + v_{th}^2 |K|^2, \quad (2.26)$$

avec

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}, \quad v_{th}^2 = \sqrt{\frac{\gamma_e T_e}{m_e}}.$$

ii) Les ondes transverses pour lesquelles K est orthogonal à E (ondes électromagnétiques). Leur relation de dispersion s'écrit

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 |K|^2. \quad (2.27)$$

Le champ électromagnétique total est alors cherché sous la forme

$$\begin{pmatrix} B \\ E \\ v_e \\ n_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{||} \\ E_{||} \\ v_{e||} \\ n_{e||} \end{pmatrix} e^{-i\omega_{pe}t} + \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} B_{\perp}^j \\ E_{\perp}^j \\ v_{e\perp}^j \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(K_j \cdot X - \omega_j t)} + c.c. \quad (2.28)$$

où $||$ correspond à la partie parallèles et $\perp$ à la partie transverse. De plus, pour tout $1 \leq j \leq 2$,

$$\omega_j^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 |K_j|^2. \quad (2.29)$$

En injectant (2.28) dans (2.23)-(2.27), on obtient pour la partie longitudinale

$$v_{e||} = -i \frac{\omega_{pe}}{4\pi e n_0} E_{||}, \quad B_{||} = 0, \quad n_{e||} = -\frac{1}{4\pi e} \nabla \cdot E_{||},$$

et pour la partie transverse

$$v_{e\perp}^j = \frac{e}{m_e c} A_{\perp}^j, \quad E_{\perp}^j = i \frac{\omega_j}{c} A_{\perp}^j. \quad (2.30)$$

Notons au passage qu'on obtient aussi l'équation suivante

$$-i\omega_j E_{\perp}^j + c K_j \times K_j \times A_{\perp}^j = -i \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e \omega_j} E_{\perp}^j.$$

qui permet de montrer que $E_{\perp}^j$, $A_{\perp}^j$ et $v_{e\perp}^j$ sont orthogonaux à K_j

A partir de maintenant, on utilise la notation $\mathbf{A}$ pour les champs de vecteur et on réserve la notation A pour les champs scalaire. L'équation satisfaite par chaque champ électromagnétique $(\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{v}_{e0})$ et $(\mathbf{B}_R, \mathbf{E}_R, \mathbf{v}_{eR})$ est, en utilisant le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ ou $\mathbf{A}_R$)

$$\partial_t^2 \mathbf{A} - c^2 \Delta \mathbf{A} = -4\pi e c (n_0 + n_e) \mathbf{v}_e.$$

On écrit

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(K_0 \cdot X - \omega_0 t)} + \mathbf{A}_R e^{i(K_R \cdot X - \omega_R t)} + c.c.,$$

et on introduit les potentiels scalaires A_0 and A_R de $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{A}_R$ par rapport à $K_0^\perp$ et $K_R^\perp$,

$$A_0 = P_{K_0^\perp} \mathbf{A}_0, \quad A_R = P_{K_R^\perp} \mathbf{A}_R,$$

où $P_{K_0^\perp}$ et $P_{K_R^\perp}$ désignent les projections orthogonales sur $K_0^\perp$ et $K_R^\perp$. En regroupant les termes dépendant de $e^{i(K_0 \cdot X - \omega_0 t)}$ (resp. $e^{i(K_R \cdot X - \omega_R t)}$) et en appliquant $P_{K_0^\perp}$ (resp. $P_{K_R^\perp}$) on obtient les équations suivantes sur A_0 et A_R

$$\begin{aligned} & i \left(\partial_t + \frac{c^2}{\omega_0} K_0 \cdot \nabla \right) A_0 + \frac{1}{2\omega_0} \left(c^2 \Delta - \frac{c^4}{\omega_0^2} (K_0 \cdot \nabla)^2 \right) A_0 \\ &= \frac{2\pi e^2}{\omega_0 m_e} p A_0 - \frac{e}{2\omega_0 m_e} (\nabla \cdot E_{||}) A_R e^{-i\theta_1} \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0| |K_R|}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
 & i\left(\partial_t + \frac{c^2}{\omega_R} K_R \cdot \nabla\right) A_R + \frac{1}{2\omega_R} \left(c^2 \Delta - \frac{c^4}{\omega_R^2} (K_R \cdot \nabla)^2\right) A_R \\
 & = \frac{2\pi e^2}{\omega_R m_e} p A_R - \frac{e}{2\omega_R m_e} (\nabla \cdot E_{||}^*) A_0 e^{i\theta_1} \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|}.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Par le même type de procédure, on obtient l'équation satisfaite par E (on renvoie à l'article [6] pour les détails techniques)

$$\begin{aligned}
 & i\partial_t \mathbf{E}_{||} + \frac{v_{th}^2}{2\omega_{pe}} \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}_{||} - \frac{c^2}{2\omega_{pe}} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{||} \\
 & = \frac{\omega_{pe}}{2n_0} p \mathbf{E}_{||} + \frac{e\omega_{pe}}{2m_e c^2} \nabla \left(A_0 A_R^* e^{i\theta_1} \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|} \right).
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Pour la partie acoustique, l'obtention de l'équation d'onde sur p se fait de manière plus classique et on renvoie à [5].

$$(\partial_t^2 - c_s^2 \Delta) p = \frac{1}{4\pi m_i} \Delta \left(|\mathbf{E}_{||}|^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} (|A_0|^2 + |A_R|^2) \right), \tag{2.34}$$

où

$$c_s^2 = \frac{\gamma_i T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e T_e}{m_e}.$$

2.1.3 Directions de propagation correspondant à une amplification maximale des champs.

Rappelons tout d'abord que l'effet Raman est un phénomène d'amplification exponentielle (pour des petits temps) des champs : en conséquence, seules les directions de propagation correspondant à une amplification maximale sont prises en considération ici. La question est de savoir comment déterminer ces directions privilégiées. Dans [5] et [6], on propose la démarche suivante. On commence par introduire une version semi-classique du système (2.31)-(2.34), en supposant $p = 0$, puisque on se concentre uniquement sur l'interaction à 3 ondes. On introduit ainsi un paramètre ε qui décrit l'ordre de grandeur de l'inverse de la fréquence des ondes. En réécrivant le déphasage θ_1 sous la forme

$$\theta_1 = \frac{(K_1 \cdot X - \omega_1 t)}{\varepsilon},$$

on introduit une version semi-classique de (2.31)-(2.33) (voir [C07])

$$\begin{aligned}
 & i\left(\partial_t + \frac{c^2}{\omega_0} K_0 \cdot \nabla\right) A_0 + \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left(c^2 \Delta - \frac{c^4}{\omega_0^2} (K_0 \cdot \nabla)^2\right) A_0 \\
 & = -\varepsilon \frac{e}{2\omega_0 m_e} (\nabla \cdot \mathbf{E}_{||}) A_R e^{-i\theta_1} \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|},
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 & i\left(\partial_t + \frac{c^2}{\omega_R} K_R \cdot \nabla\right) A_R + \frac{\varepsilon}{2\omega_R} \left(c^2 \Delta - \frac{c^4}{\omega_R^2} (K_R \cdot \nabla)^2\right) A_R \\
 & = -\varepsilon \frac{e}{2\omega_R m_e} (\nabla \cdot \mathbf{E}_{||}^*) A_0 e^{i\theta_1} \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|},
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$i\partial_t \mathbf{E}_{||} + \varepsilon \frac{v_{th}^2}{2\omega_{pe}} \Delta \mathbf{E}_{||} = \varepsilon \frac{e\omega_{pe}}{2m_e c^2} \nabla \left(A_0 A_R^* e^{i\theta_1} \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|} \right). \tag{2.37}$$

En notant $\mathbf{E}_{||} = \mathcal{E} e^{i \frac{(K_1 \cdot X - \omega_1 t)}{\varepsilon}}$ on obtient le système suivant

$$\begin{aligned} & i \left(\partial_t + \frac{c^2}{\omega_0} K_0 \cdot \nabla \right) A_0 + \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left(c^2 \Delta - \frac{c^4}{\omega_0^2} (K_0 \cdot \nabla)^2 \right) A_0 \\ & = -i \frac{e}{2\omega_0 m_e} K_1 \cdot \mathcal{E} A_R \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|} - \varepsilon \frac{e}{2\omega_0 m_e} (\nabla \cdot \mathcal{E}) A_R \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} & i \left(\partial_t + \frac{c^2}{\omega_R} K_R \cdot \nabla \right) A_R + \frac{\varepsilon}{2\omega_R} \left(c^2 \Delta - \frac{c^4}{\omega_R^2} (K_R \cdot \nabla)^2 \right) A_R \\ & = i \frac{e}{2\omega_R m_e} K_1 \cdot \mathcal{E}^* A_0 \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|} - \varepsilon \frac{e}{2\omega_R m_e} (\nabla \cdot \mathcal{E}^*) A_0 \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & \left(i \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \left(\omega_1 - \frac{v_{th}^2}{2\omega_{pe}} |K_1|^2 \right) + i \frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} K_1 \cdot \nabla \right) \mathcal{E} + \varepsilon \frac{v_{th}^2}{2\omega_{pe}} \Delta \mathcal{E} \\ & = i \frac{e\omega_{pe}}{2m_e c^2} \left(A_0 A_R^* \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|} \right) K_1 + \varepsilon \frac{e\omega_{pe}}{2m_e c^2} \nabla \left(A_0 A_R^* \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

En effectuant un développement limité sur la relation de dispersion

$$(\omega_{pe} + \omega_1)^2 = \omega_{pe}^2 + v_{th}^2 |K_1|^2,$$

on peut écrire

$$\omega_1 \approx \frac{v_{th}^2 |K_1|^2}{2\omega_{pe}}.$$

Ainsi l'équation (2.40) devient

$$\begin{aligned} & i \left(\partial_t + \frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} K_1 \cdot \nabla \right) \mathcal{E} + \varepsilon \Delta \mathcal{E} = i \frac{e\omega_{pe}}{2m_e c^2} \left(A_0 A_R^* \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|} \right) K_1 \\ & + \varepsilon \frac{e\omega_{pe}}{2m_e c^2} \nabla \left(A_0 A_R^* \frac{K_0 \cdot K_R}{|K_0||K_R|} \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Enfin, en notant

$$f_0 = \frac{\omega_{pe}}{c} A_0, \quad f_R = \frac{\omega_{pe}}{c} A_R, \quad f = \frac{K_1 \cdot \mathcal{E}}{|K_1|},$$

les équations (2.38), (2.39) and (2.41) deviennent au premier ordre en ε

$$\left(\partial_t + \frac{c^2}{\omega_0} K_0 \cdot \nabla \right) f_0 = -\frac{e|K_1|}{2\omega_0 m_e} f f_R \cos(\theta), \quad (2.42)$$

$$\left(\partial_t + \frac{c^2}{\omega_R} K_R \cdot \nabla \right) f_R = \frac{e|K_1|}{2m_e \omega_R} f^* f_0 \cos(\theta), \quad (2.43)$$

$$\left(\partial_t + \frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} K_1 \cdot \nabla \right) f = \frac{e|K_1|}{2m_e \omega_{pe}} f_0 f_R^* \cos(\theta), \quad (2.44)$$

où θ désigne l'angle entre les vecteurs K_0 and K_R . Une analyse de Fourier permet d'étudier la stabilité de la solution $(f_0, 0, 0)$ où f_0 est constante

$$\partial_t \widehat{f_R} + i \frac{c^2}{\omega_R} \xi \cdot K_R \widehat{f_R} = \frac{e|K_1|}{2m_e \omega_R} f_0 \widehat{f^*} \cos(\theta) \quad (2.45)$$

$$\partial_t \widehat{f^*} + i \frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} \xi \cdot K_1 \widehat{f^*} = \frac{e|K_1|}{2m_e \omega_{pe}} f_0^* \widehat{f_R} \cos(\theta) \quad (2.46)$$

Pour découpler les équations (2.45) et (2.46), on applique l'opérateur $\partial_t + i \frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} \xi \cdot K_1$ sur (2.45) pour obtenir, en utilisant (2.46)

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 \widehat{f_R} + i \left(\frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} K_1 + \frac{c^2}{\omega_R} K_R \right) \cdot \xi \partial_t \widehat{f_R} \\ & - \left(\frac{c^2 v_{th}^2}{\omega_{pe} \omega_R} (\xi \cdot K_1)(\xi \cdot K_R) + \frac{e^2 |K_1|^2 |f_0|^2 \cos^2(\theta)}{4m_e^2 \omega_R \omega_{pe}} \right) \widehat{f_R} = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Le discriminant associé à l'équation (2.47) est égal à

$$\begin{aligned} \Delta &= - \left(\left(\frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} K_1 + \frac{c^2}{\omega_R} K_R \right) \cdot \xi \right)^2 + 4 \left(\frac{c^2 v_{th}^2}{\omega_{pe} \omega_R} (\xi \cdot K_1)(\xi \cdot K_R) + \frac{e^2 |K_1|^2 |f_0|^2 \cos^2(\theta)}{4m_e^2 \omega_R \omega_{pe}} \right) \\ &= 4 \frac{e^2 |K_1|^2 |f_0|^2 \cos^2(\theta)}{4m_e^2 \omega_R \omega_{pe}} - \left(\left(\frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} K_1 - \frac{c^2}{\omega_R} K_R \right) \cdot \xi \right)^2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Il est clair que (2.48) atteint son maximum pour

$$\xi \cdot \left(\frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} K_1 - \frac{c^2}{\omega_R} K_R \right) = 0, \quad (2.49)$$

ce qui signifie que le taux d'amplification des solutions de (2.45) et (2.46) est maximal lorsque ξ satisfait (2.49). Le taux d'amplification est alors proportionnel à

$$\beta = \frac{|K_1|}{\sqrt{\omega_R \omega_{pe}}} |\cos(\theta)|.$$

En rappelant que

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_R = \begin{pmatrix} k_R \\ \ell_R \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{pmatrix},$$

les relations de dispersion (2.26) and (2.27) deviennent, en adimensionnant le système suivant ω_{pe} et $\frac{\omega_{pe}}{c}$,

$$\begin{cases} \omega_0^2 = 1 + k_0^2, \\ \omega_R^2 = 1 + (k_R^2 + \ell_R^2), \\ (1 + \omega_1)^2 = 1 + \rho^2 (k_1^2 + \ell_1^2), \end{cases} \quad (2.50)$$

où

$$\rho = \frac{v_{th}}{c} \ll 1.$$

Le taux d'amplification s'écrit alors

$$\beta = \frac{\sqrt{k_1^2 + \ell_1^2}}{\sqrt{1 + k_R^2 + \ell_1^2}} \frac{|k_R|}{\sqrt{k_R^2 + \ell_1^2}}, \quad (2.51)$$

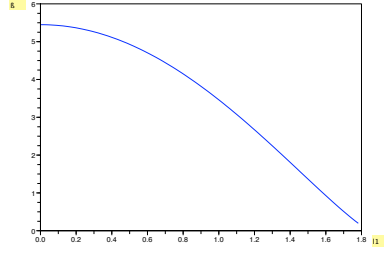
ou encore, en utilisant le fait que $k_R = k_0 - k_1$,

$$\beta = \frac{\sqrt{k_1^2 + \ell_1^2}}{\sqrt{1 + (k_0 - k_1)^2 + \ell_1^2}} \frac{|k_0 - k_1|}{\sqrt{(k_0 - k_1)^2 + \ell_1^2}}. \quad (2.52)$$

A k_0 fixé, le problème revient donc à maximiser le coefficient β sous la contrainte

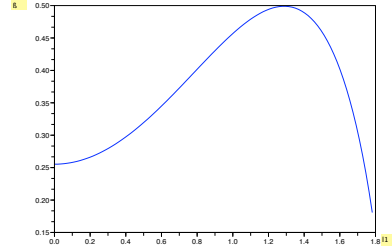
$$\sqrt{1 + k_0^2} = \sqrt{1 + (k_0 - k_1)^2 + \ell_1^2} + \sqrt{1 + \rho^2 (k_1^2 + \ell_1^2)}. \quad (2.53)$$

Nous avons choisit de résoudre ce problème numériquement et les conclusions sont les suivantes :


 FIGURE 2.2 – Tracé de β en fonction ℓ_1 avec $\rho = 0.01$ dans le cas $k < 0$.

• pour la composante rétrodiffusée du champ Raman ($k_1 < 0$), le maximum est atteint pour $\ell_1 = 0$, ce qui correspond au cas où la direction d'amplification maximale est colinéaire à l'onde laser incidente (voir la figure 2.2). Ce cas est traité dans [5].

• pour la composante se propageant vers l'avant ($k_1 > 0$), on s'aperçoit dans la figure 2.3, que le maximum de β est atteint pour $\ell_1 > 0$. Le champ Raman fait ainsi un angle non nul avec la direction de propagation. Nous montrons donc l'existence de 2 nouvelles directions de propagation privilégiées, symétriques par rapport à l'axe de propagation. Il reste donc à introduire les 3 vecteurs d'ondes Raman


 FIGURE 2.3 – Tracé de β en fonction ℓ_1 avec $\rho = 0.01$ dans le cas $k > 0$.

correspondant aux solutions de (2.52) – (2.53)

$$K_{R_1} = \begin{pmatrix} k_{R_1} \\ \ell_{R_1} \end{pmatrix}, \quad K_{R_2} = \begin{pmatrix} k_{R_2} \\ \ell_{R_2} \end{pmatrix}, \quad K_{R_2^s} = \begin{pmatrix} k_{R_2^s} \\ \ell_{R_2^s} \end{pmatrix},$$

avec

$$K_0 = K_{R_1} + K_{1,1} = K_{R_2} + K_{1,2} = K_{R_2^s} + K_{1,2^s},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k_0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_{R_1} \\ \ell_{R_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{1,1} \\ \ell_{1,1} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} k_{R_2} \\ \ell_{R_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{1,2} \\ \ell_{1,2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} k_{R_2^s} \\ \ell_{R_2^s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{1,2^s} \\ \ell_{1,2^s} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et les fréquences Raman associées ω_{R_1} , ω_{R_2} and $\omega_{R_2^s}$ vérifiant

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_{pe} + \omega_{R_1} + \omega_{1,1}, \\ &= \omega_{pe} + \omega_{R_2} + \omega_{1,2}, \\ &= \omega_{pe} + \omega_{R_2^s} + \omega_{1,2^s}.\end{aligned}$$

Avec toutes ces données, il est alors possible de construire le système (2.6)-(2.11).

2.2 Le problème de Cauchy.

Dans cette partie, on présente comment nous avons abordé le problème de Cauchy pour des systèmes du type (2.6)-(2.11). Dans un souci de simplicité, on va considérer ici le système introduit dans [5] qui traite seulement de l'onde Raman rétrodiffusée. Ce système s'écrit, sous forme adimensionnée

$$\begin{aligned}\left(i(\partial_t + \frac{k_0^2 c^2}{\omega_0^2} \partial_y) + \frac{c^2 k_0^2}{2\omega_0^2} \Delta - \frac{k_0^4 c^4}{2\omega_0^4} \partial_y^2\right) A_0 &= \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0^2} p A_0 \\ &- (\nabla \cdot E_0) A_R e^{-i(k_1 y - \omega_1 t)}.\end{aligned}\quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}\left(i(\partial_t + \frac{k_R k_0 c^2}{\omega_R \omega_0} \partial_y) + \frac{c^2 k_0^2}{2\omega_R \omega_0} \Delta - \frac{k_0^2 k_R^2 c^4}{2\omega_R^3 \omega_0}\right) A_R &= \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_R \omega_0} p A_R \\ &- (\nabla \cdot E_0^*) A_0 e^{i(k_1 y - \omega_1 t)},\end{aligned}\quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}i\partial_t E_0 + \frac{v_{th}^2 k^2}{2\omega_{pe} \omega_0} \Delta E_0 &= \frac{\omega_{pe}}{2\omega_0} \nabla \Delta^{-1} \text{div}(p E_0) \\ &+ \nabla \left(A_R^* A_0 e^{i(k_1 y - \omega_1 t)} \right),\end{aligned}\quad (2.56)$$

$$\left(\partial_t^2 - \frac{c_s^2 k_0^2}{\omega_0^2} \Delta\right) p = \frac{4m_e}{m_i} \frac{\omega_0 \omega_R}{\omega_{pe}^2} \Delta \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_0} |A_0|^2 + |E_0|^2 + \frac{\omega_{pe}}{\omega_R} |A_R|^2 \right). \quad (2.57)$$

En effet, d'un point de vue théorique, l'ajout des ondes Raman se propageant vers l'avant n'apporte aucune difficulté dans le traitement global du système et c'est pour cela que nous les omettons dans le cadre de cette partie.

L'intérêt du système (2.54)-(2.57) réside dans les 2 points suivants :

- i) Le système comporte un couplage entre 3 équations de Schrödinger quasi-linéaires et une équation d'onde qui implique une perte de dérivée,
- ii) la partie quasi-linéaire des équations de Schrödinger n'est pas hyperbolique et donc les résultats classiques de l'hyperbolique ne s'applique pas ici.

Nous allons maintenant développer ces deux points fondamentaux et expliquer comment les surmonter. Pour cela, nous allons introduire une hiérarchie de modèles de la manière suivante. Le système de Zakharov originel (voir [ZMR85]) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} i\partial_t E + \Delta E = \nabla \Delta^{-1} \text{div}(pE), \\ \partial_t^2 p - \Delta p = \Delta(|E|^2). \end{cases} \quad (2.58)$$

Ce système a fait l'objet de nombreuses études et on peut citer, par exemple, de manière non exhaustive [SS99] et [R]. Comme annoncé plus haut, le système (2.58) comporte une perte de dérivée. En effet, une estimation d'énergie sur l'équation de Schrödinger fournit une borne sur la solution dans un espace de

Sobolev H^s à condition bien sûr que p soit dans le même espace H^s . L'équation d'onde quant à elle a bien un effet régularisant, c'est à dire permet de gagner une dérivée en espace par rapport à son second membre. Or si $E \in H^s$, il est clair que $\Delta|E|^2$ est au mieux dans H^{s-2} et une estimation d'énergie sur l'équation d'onde permet seulement de récupérer une borne sur p dans H^{s-1} , ce qui s'avère insuffisant pour traiter l'équation de Schrödinger. Ainsi, il n'est pas possible de mettre en oeuvre directement un schéma itératif pour résoudre le problème de Cauchy.

Parmi toutes les techniques existantes pour contourner ce problème, la méthode d'Ozawa-Tsutsumi (voir [OT92]) paraît très bien adaptée. L'idée est la suivante : on introduit une nouvelle variable $A = \partial_t E$ et on réécrit le système sous la forme

$$\begin{cases} iA + \Delta(E) = \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}(pE), \\ i\partial_t A + \Delta A = \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}(\partial_t p E + pA), \\ \partial_t^2 p - \Delta p = \Delta(|E|^2). \end{cases} \quad (2.59)$$

Cette fois, une estimation H^s sur la nouvelle variable A permet d'obtenir, grâce au caractère régularisant de l'équation elliptique (première équation de (2.59)) une estimation H^{s+2} sur E , ce qui permet cette fois de boucler l'estimation sur l'équation d'onde en p . Cette méthode permet ainsi de récupérer la dérivée manquante dans les estimations d'énergie.

Nous expliquons maintenant en quel sens, le système (2.54)-(2.57) n'est pas hyperbolique. Nous introduisons d'abord un système simplifié composé uniquement de la partie quasi-linéaire des équations de Schrödinger, en omettant les exponentielles,

$$\partial_t A_0 = i(\nabla \cdot E_0) A_R, \quad (2.60)$$

$$\partial_t A_R = i(\nabla \cdot E_0^*) A_0, \quad (2.61)$$

$$\partial_t E_0 = -i\nabla(A_R^* A_0). \quad (2.62)$$

En décomposant chaque champ suivant sa partie réelle et sa partie imaginaire, $A_0 = u_1 + iu_2$, $A_R = u_3 + iu_4$, $E_0 = u_5 + iu_6$, et en se limitant à la dimension 1 d'espace, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 &= -\partial_x u_6 u_3 - \partial_x u_5 u_4, \\ \partial_t u_2 &= \partial_x u_5 u_3 - \partial_x u_6 u_4, \\ \partial_t u_3 &= \partial_x u_6 u_1 - \partial_x u_5 u_2, \\ \partial_t u_4 &= \partial_x u_5 u_1 + \partial_x u_6 u_2, \\ \partial_t u_5 &= \partial_x (u_2 u_3 - u_1 u_4), \\ \partial_t u_6 &= -\partial_x (u_1 u_3 + u_2 u_4), \end{aligned}$$

qui peut être écrit sous la forme compacte suivante

$$\partial_t \mathcal{U} = M(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{U},$$

où $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)^t$ et

$$M(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -u_4 & -u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 & -u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u_2 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ -u_4 & u_3 & u_2 & -u_1 & 0 & 0 \\ -u_3 & -u_4 & -u_1 & -u_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il apparaît clairement que les deux blocs

$$M_1 = \begin{pmatrix} -u_2 & u_1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_2 = \begin{pmatrix} u_2 & -u_1 \\ -u_1 & -u_2 \end{pmatrix}$$

sont antisymétriques. Ainsi, le problème de Cauchy (2.60)-(2.62) est mal-posé car ce système présente des zones elliptiques.

Cependant, en utilisant cette fois la partie dispersive des équations il est possible de montrer que le système suivant est localement bien posé

$$(i(\partial_t + v_C \partial_y) + \alpha \Delta) A_C = -(\nabla \cdot E_0) A_R, \quad (2.63)$$

$$(i(\partial_t + v_R \partial_y) + \beta \Delta) A_R = -(\nabla \cdot E_0^*) A_C, \quad (2.64)$$

$$(i\partial_t + \gamma \Delta) E_0 = \nabla(A_R^* A_C), \quad (2.65)$$

où

$$v_C = \frac{k_0^2 c^2}{\omega_0^2}, \quad v_R = \frac{k_R k_0 c^2}{\omega_R \omega_0},$$

$$\alpha = \frac{k_0^2 c^2}{2\omega_0^2}, \quad \beta = \frac{k_0^2 c^2}{2\omega_R \omega_0}, \quad \gamma = \frac{v_{th}^2 k^2}{2\omega_{pe} \omega_0},$$

comme le montre le théorème suivant

Théorème 2.2.1. *Soient $(a_C, a_R, e_0) \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2} + 3$. Ils existent $T^* > 0$ et une unique solution $(A_0, A_R, E_0) \in (\mathcal{C}([0, T^*]; H^s(\mathbb{R}^d)))^{3d}$ de (2.63), (2.64), (2.65) vérifiant $(A_0, A_R, E_0)(0, X) = (a_0, a_R, e_0)(X)$.*

Idée de la preuve : Il s'agit de transformer le système (2.63)-(2.65) en une perturbation dispersive d'un système quasi-linéaire symétrique. On procède de la manière suivante. Considérons le système d'EDP 1D ci-dessous

$$\partial_t \mathcal{U} + B(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{U} + K \partial_x^2 \mathcal{U} = 0, \quad (2.66)$$

où

$$\mathcal{U} : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

K est une matrice hermitienne et inversible,

$$B(\mathcal{U}) = B_1(\mathcal{U}) + B_2(\mathcal{U}),$$

où $B_1(\mathcal{U})$ est symétrique et $B_2(\mathcal{U}) \neq 0$ est anti-adjoint. On introduit $\mathcal{V} = \partial_t \mathcal{U}$, $\mathcal{X} = \partial_x \mathcal{U}$ et $\mathcal{W} = \partial_x^2 \mathcal{U}$. Les équations vérifiées par $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{W}$ s'écrivent

$$\partial_t \mathcal{V} + B(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{V} + K \partial_x^2 \mathcal{V} = \text{termes semi-linéaires}, \quad (2.67)$$

$$\partial_t \mathcal{X} + B(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{X} + K \partial_x^2 \mathcal{X} = \text{termes semi-linéaires}, \quad (2.68)$$

$$\partial_t \mathcal{W} + B(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{W} + K \partial_x^2 \mathcal{W} = \text{termes semi-linéaires}, \quad (2.69)$$

$$\partial_t \mathcal{U} = \text{termes semi-linéaires}, \quad (2.70)$$

et

$$\mathcal{V} + K \mathcal{W} = \text{termes semi-linéaires}, \quad (2.71)$$

où les termes semi-linéaires dépendent de $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{W}$. Dans l'équation (2.67), on remplace $\mathcal{V}$ par $-K \mathcal{W} + \text{termes semi-linéaires}$ dans $B_2(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{V}$ et dans (2.69) on remplace $\mathcal{W}$ par $-K^{-1} \mathcal{V} + \text{termes semi-linéaires}$ dans $B_2(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{W}$. Le nouveau système sur $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ s'écrit

$$\partial_t \mathcal{V} + B_1(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{V} - B_2(\mathcal{U}) K \partial_x \mathcal{W} + K \partial_x^2 \mathcal{V} = \text{termes semi-linéaires}, \quad (2.72)$$

$$\partial_t \mathcal{W} + B_1(\mathcal{U})\partial_x \mathcal{W} - B_2(\mathcal{U})K^{-1}\partial_x \mathcal{V} + K\partial_x^2 \mathcal{W} = \text{termes semi-linéaires.} \quad (2.73)$$

Le système (2.72) – (2.73) est maintenant symétrisable à condition que B_2 and K aient les bonnes propriétés, ce qui est le cas pour le système (2.63)-(2.65).

Concernant le Problème de Cauchy du système initial (2.54)-(2.57), en collaboration avec T. Colin, nous avons montré dans [5], le résultat suivant.

Théorème 2.2.2. *Soient $(a_0, a_R, e) \in (H^{s+2}(\mathbb{R}^d))^{3d}$, $p_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d)$ et $p_1 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2} + 3$. Ils existent $T^* > 0$ et une unique solution maximale (A_0, A_R, E, p) de (2.54) – (2.57) telle que*

$$(A_0, A_R, E) \in \mathcal{C}([0, T^*]; H^{s+2})^{3d}, \quad n \in \mathcal{C}([0, T^*]; H^{s+1}) \cap \mathcal{C}^1([0, T^*]; H^s)$$

vérifiant

$$(A_0, A_R, E, p)(0) = (a_0, a_R, e, p_0), \quad \partial_t p(0) = p_1.$$

La preuve repose sur une combinaison de la méthode d'Ozawa-Tsutsumi décrite plus haut avec la méthode de symétrisation de la partie antisymétrique des équations de Schrödinger exposée dans le Théorème 2.2.1.

2.2.1 Retour sur la condition de résonance.

Dans cette partie, on se place dans le cadre développé dans [5, 6], à savoir que l'on prend en considération uniquement la partie rétrodiffusée de l'onde Raman. Rappelons tout d'abord que l'effet Raman, phénomène d'interaction à 3 ondes, se caractérise par une croissance exponentielle des champs Raman et de l'onde plasma-électronique, au moins au début de l'interaction. Ce phénomène est effectif à condition que la condition de résonance soit satisfaite : l'onde $(\omega_{pe} + \omega_1, k_1)$ doit vérifier la relation de dispersion des ondes plasmas-électroniques

$$(\omega_{pe} + \omega_1)^2 = \omega_{pe}^2 + v_{th}^2 k_1^2. \quad (2.74)$$

Cette condition peut être écrite sous la forme

$$2\omega_{pe}\omega_1 + \omega_1^2 = v_{th}^2 k_1^2,$$

et tenant compte du fait que $\omega_1 \ll \omega_{pe}$, on obtient

$$\omega_1 \approx \frac{v_{th}^2 k_1^2}{2\omega_{pe}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{v_{th}^2 k_0^2}{2\omega_{pe}\omega_0} \left(\frac{k_1}{\omega_0} \right)^2 = \gamma \left(\frac{k_1}{\omega_0} \right)^2. \quad (2.75)$$

L'objectif de cette section est d'illustrer ce propos à l'aide du résultat ci-dessous. On introduit le système simplifié suivant, écrit dans une version semi-classique,

$$\begin{cases} i(\partial_t + v_C \partial_y) A_0 + \varepsilon(\alpha_1 \partial_y^2 + \alpha_2 \Delta_\perp) A_0 = -\varepsilon (\nabla \cdot E) A_R e^{-i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}}, \\ i(\partial_t + v_R \partial_y) A_R + \varepsilon(\beta_1 \partial_y^2 + \beta_2 \Delta_\perp) A_R = -\varepsilon (\nabla \cdot E^*) A_0 e^{i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}}, \\ (i\partial_t + \varepsilon(\gamma \Delta - \delta \nabla \times \nabla \times)) E = \varepsilon \nabla (A_R^* \cdot A_0 e^{i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}}), \end{cases} \quad (2.76)$$

où ε est un petit paramètre destiné à tendre vers 0. Les différents coefficients de ce système sont définis dans [6]. Le comportement asymptotique des solutions de (2.76) dépend de la condition de résonance (2.75). Dans le cas où celle-ci est satisfaite, on pose

$$E = \mathcal{E}^\varepsilon e^{i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}},$$

et on introduit le système limite

$$\begin{cases} (\partial_t + v_C \partial_y) A_0 = -(k \cdot \mathcal{E}) A_R, \\ (\partial_t + v_R \partial_y) A_R = (k \cdot \mathcal{E}^*) A_0, \\ \partial_t \mathcal{E} + 2\gamma k \cdot \nabla \mathcal{E} = (A_R^* \cdot A_0) k, \end{cases} \quad (2.77)$$

où $k = (0, k_1, 0)$. Dans le cas où celle-ci n'est pas satisfaite, on introduit

$$\mathcal{E}^\varepsilon = F^\varepsilon e^{i(\omega_1 - \gamma k_1^2) \frac{t}{\varepsilon}},$$

et le système

$$\begin{cases} (\partial_t + v_C \partial_y) A_0 = 0, \\ (\partial_t + v_R \partial_y) A_R = 0, \\ (\partial_t + 2\gamma k \cdot \nabla) F = 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

Le résultat est le suivant

Théorème 2.2.3. *Soient $A_0^0, A_R^0, \mathcal{E}^0$ in $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour s suffisamment grand. Ils existent un temps T indépendant de ε et une unique solution $(A_0^\varepsilon, A_R^\varepsilon, \mathcal{E}^\varepsilon)$ de (2.10) telle que*

$$A_0^\varepsilon(0) = A_0^0, \quad A_R^\varepsilon(0) = A_R^0, \quad \mathcal{E}^\varepsilon(0) = \mathcal{E}^0 e^{i \frac{k_1 y}{\varepsilon}}.$$

i) Supposons que $\omega_1 = \gamma k_1^2$ et soit $(A_0, A_R, \mathcal{E})$ la solution de (2.77) telle que

$$A_0(0) = A_0^0, \quad A_R(0) = A_R^0, \quad \mathcal{E}(0) = \mathcal{E}^0,$$

alors

$$\left(A_0^\varepsilon - A_0, A_R^\varepsilon - A_R, E e^{-i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}} - \mathcal{E} \right) \longrightarrow 0$$

lorsque ε tend vers 0 dans $[L^\infty(0, T; H^\sigma(\mathbb{R}^d))]^{3d}$ pour $\sigma > \frac{d}{2}$.

ii) Si $\omega_1 \neq \gamma k_1^2$, soit (A_0, A_R, F) la solution de (2.78) telle que

$$A_0(0) = A_0^0, \quad A_R(0) = A_R^0, \quad F(0) = \mathcal{E}^0,$$

alors

$$\left(A_0^\varepsilon - A_0, A_R^\varepsilon - A_R, E e^{-i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}} - F e^{i(\omega_1 - \gamma k_1^2) \frac{t}{\varepsilon}} \right) \longrightarrow 0$$

lorsque ε tend vers 0 dans $[L^\infty(0, T; H^\sigma(\mathbb{R}^d))]^{3d}$ for $\sigma > \frac{d}{2}$.

A la suite de ce théorème, deux commentaires s'imposent. Dans le cas non-résonnant *ii*), le système limite est linéaire. Partant de conditions initiales pour A_R et F proches de 0, on voit que ces deux champs restent proches de 0 au cours du temps. Ainsi, le processus Raman est quasi-inexistant dans ce cas là. A l'opposé, dans le cas résonnant *i*), le système limite est non-linéaire. De plus, il est aisé de voir que pour le système

$$\begin{aligned} \partial_t A_0 &= -(k \cdot \mathcal{E}) A_R, \\ \partial_t A_R &= -(k \cdot \mathcal{E}^*) A_0, \\ \partial_t \mathcal{E} &= (A_R^* \cdot A_0) k, \end{aligned}$$

le point stationnaire $(\alpha, 0, 0)$ est instable, ce qui entraîne une croissance au cours du temps des champs Raman et de l'onde plasma-électronique. La preuve du Théorème 2.2.3 se décompose en quatre étapes. On commence par découpler les parties transverse et longitudinales de l'onde plasma-électronique en écrivant $E = E_\perp + E_\parallel$ avec

$$E_\perp = -\nabla \times (\Delta^{-1} \nabla \times E), \quad E_\parallel = \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}(E).$$

Ainsi (2.76) devient (en utilisant $\nabla \cdot E_\perp = 0$ et $\nabla \times E_\parallel = 0$)

$$\begin{aligned} i(\partial_t + v_C \partial_y) A_0 + \varepsilon(\alpha_1 \partial_y^2 + \alpha_2 \Delta_\perp) A_0 &= -\varepsilon (\nabla \cdot E_\parallel) A_R e^{-i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}}, \\ i(\partial_t + v_R \partial_y) A_R + \varepsilon(\beta_1 \partial_y^2 + \beta_2 \Delta_\perp) A_R &= -\varepsilon (\nabla \cdot E_\parallel^*) A_0 e^{i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}}, \\ (i\partial_t + \varepsilon \gamma \Delta) E_\parallel &= \varepsilon \nabla (A_R^* \cdot A_0 e^{i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}}), \\ (i\partial_t + \varepsilon \delta \Delta) E_\perp &= 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

On suppose dans la suite que $E_\perp = 0$ et $E = E_\parallel$. On note $k = (0, k_1, 0)$ et

$$E = \mathcal{E} e^{i \frac{(k_1 y - \omega_1 t)}{\varepsilon}}.$$

Alors $\nabla \times E = 0$ si et seulement si $ik \times \mathcal{E} + \nabla \times \mathcal{E} = 0$, ce qui permet d'introduire le nouveau système

$$\begin{aligned} i(\partial_t + v_C \partial_y) A_0 + \varepsilon(\alpha_1 \partial_y^2 + \alpha_2 \Delta_\perp) A_0 &= -i(k \cdot \mathcal{E}) A_R - \varepsilon (\nabla \cdot \mathcal{E}) A_R, \\ i(\partial_t + v_R \partial_y) A_R + \varepsilon(\beta_1 \partial_y^2 + \beta_2 \Delta_\perp) A_R &= -i(k \cdot \mathcal{E}^*) A_0 - \varepsilon (\nabla \cdot \mathcal{E}^*) A_C, \\ (i\partial_t + \frac{\omega_1 - \gamma k_1^2}{\varepsilon} + 2i\gamma k \cdot \nabla + \varepsilon \gamma \Delta) \mathcal{E} &= i(A_R^* \cdot A_0) k + \varepsilon \nabla (A_R^* \cdot A_0). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Dans une seconde étape, on montre qu'à ε fixé, le système (2.80) est bien posé localement.

Proposition 2.2.4. *Soient $s > \frac{d}{2} + 3$ et $(A_0^0, A_R^0, \mathcal{E}^0) \in [H^s(\mathbb{R}^d)]^{3d}$. Supposons de plus que $\mathcal{E}^0$ vérifie la condition de polarisation $ik \times \mathcal{E}_0 + \varepsilon \nabla \times \mathcal{E}_0 = 0$. Alors ils existent $T(\varepsilon) > 0$ et une unique solution $(A_0, A_R, \mathcal{E}) \in [L^\infty(0, T(\varepsilon); H^s(\mathbb{R}^d))]^{3d}$ de (2.80) telle que $(A_0, A_R, \mathcal{E})(0) = (A_0^0, A_R^0, \mathcal{E}^0)$.*

La preuve de la Proposition 2.2.4 repose sur la même technique de symétrisation que celle utilisée dans la preuve du Théorème 2.2.1. La technique est cependant légèrement modifiée pour tenir compte du fait que, dans le système (2.80), les opérateurs de dispersions sont inhomogènes (voir [6] pour les détails techniques).

Ensuite, il est nécessaire d'obtenir des estimations indépendantes de ε afin de passer à la limite ε tend vers 0.

Proposition 2.2.5. *Soient $s > \frac{d}{2} + 3$ et $(A_0^0, A_R^0, \mathcal{E}^0) \in [H^s(\mathbb{R}^d)]^{3d}$. Il existent $T > 0$ indépendant de ε et une unique solution $(A_0^\varepsilon, A_R^\varepsilon, \mathcal{E}^\varepsilon) \in [L^\infty(0, T; (H^s(\mathbb{R}^d)))]^{3d}$ de (2.25) – (2.27) telle que $(A_0^\varepsilon, A_R^\varepsilon, \mathcal{E}^\varepsilon)(0) = (A_0^0, A_R^0, \mathcal{E}^0)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|(A_0^\varepsilon, A_R^\varepsilon, \mathcal{E}^\varepsilon)|_{[L^\infty(0, T; (H^s(\mathbb{R}^d)))]^{3d}} \leq C.$$

Il est important de noter que le temps d'existence des solutions de (2.80) ne tend pas vers 0 avec ε . La preuve de cette proposition est fondée sur le même type de transformations que celles utilisées dans la preuve du Théorème 2.2.1 (voir [6]). Elle repose aussi sur l'inégalité suivante qui permet de répartir ε dans les différentes estimations

$$|\varepsilon \partial_y f|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq |f|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + |\varepsilon^2 \Delta f|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

pour toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$

Finalement, la preuve du Théorème 2.2.3 est une conséquence directe des Propositions 2.2.4 et 2.2.5.

2.2.2 L'approche numérique et quelques résultats.

Dans cette partie, nous présentons un schéma numérique adaptée à la résolution du système (2.54)–(2.57). Les contraintes que nous nous sommes imposées sont les suivantes. Tout d'abord, puisque la partie

quasi-linéaire n'est pas hyperbolique, les schémas de splitting sont à proscrire. Ensuite, le système (2.54)-(2.57) conserve l'invariant suivant $\int_{\mathbb{R}} 2|A_C|^2 + |A_R|^2 + |E|^2 = \text{constante}$, ce qui doit être le cas de notre schéma. Cet invariant apporte un phénomène de saturation non-linéaire que l'on expliquera plus loin. De plus, l'effet Raman, dans le cas résonnant, étant un processus de croissance exponentielle, il faut utiliser un schéma implicite. Pour toute ces raisons, nous avons donc décidé d'utiliser, pour la partie Schrödinger du système, un schéma de type Crank-Nicolson couplé avec un schéma de type relaxation pour éviter les étapes non-linéaires inspiré de [B98]. Pour la partie accoustique, on utilise un schéma de Glassey (voir [G92]).

2.2.3 Présentation du schéma.

Nous avons effectués des simulations 1D et 2D, mais par souci de clareté, nous présentons maintenant la version 1D du schéma. Pour la discrétisation en espace, on utilise des schémas de type différences finies. La semi-discrétisation en temps s'écrit

$$\begin{aligned} i \frac{A_C^{n+1} - A_C^n}{\delta t} + (iv_C \partial_y + \alpha \partial_y^2) \left(\frac{A_C^{n+1} + A_C^n}{2} \right) &= \frac{b^2}{2} \left(\frac{p^{n+1} + p^n}{2} \right) \left(\frac{A_C^{n+1} + A_C^n}{2} \right) \\ &- \frac{1}{2} \phi^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{A_R^{n+1} + A_R^n}{2} \right) e^{-i\theta^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \psi^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial_y E^{n+1} + \partial_y E^n}{2} \right) e^{-i\theta^{n+\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} i \frac{A_R^{n+1} - A_R^n}{\delta t} + (iv_R \partial_y + \beta \partial_y^2) \left(\frac{A_R^{n+1} + A_R^n}{2} \right) &= \frac{bc}{2} \left(\frac{p^{n+1} + p^n}{2} \right) \left(\frac{A_R^{n+1} + A_R^n}{2} \right) \\ &- (\phi^{n+\frac{1}{2}})^* \left(\frac{A_C^{n+1} + A_C^n}{2} \right) e^{i\theta^{n+\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} i \frac{E^{n+1} - E^n}{\delta t} + \gamma \partial_y^2 \left(\frac{E^{n+1} + E^n}{2} \right) &= \frac{b}{2} \left(\frac{p^{n+1} + p^n}{2} \right) \left(\frac{E^{n+1} + E^n}{2} \right) \\ &+ \partial_y \left[(\psi^{n+\frac{1}{2}})^* \left(\frac{A_C^{n+1} + A_C^n}{2} \right) e^{i\theta^{n+\frac{1}{2}}} \right], \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\frac{p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}}{\delta t^2} - v_s^2 \partial_y^2 \left(\frac{p^{n+1} + p^{n-1}}{2} \right) = a \partial_y^2 (|E^n|^2 + b|A_C^n|^2 + c|A_R^n|^2), \quad (2.84)$$

où les fonctions auxiliaires ϕ et ψ sont données par

$$\frac{\phi^{n+\frac{1}{2}} + \phi^{n-\frac{1}{2}}}{2} = \partial_y E^n, \quad \frac{\psi^{n+\frac{1}{2}} + \psi^{n-\frac{1}{2}}}{2} = A_R^n, \quad (2.85)$$

et

$$\theta^{n+\frac{1}{2}} = k_1 y - \omega_1 \left(n + \frac{1}{2} \right) \delta t.$$

Comme annoncé ci-dessus, ce schéma préserve l'invariant L^2 .

Proposition 2.2.6. *Toute solution régulière de (2.81) – (2.84) vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}} 2|A_0^n|^2 + |A_R^n|^2 + |E^n|^2 = \int_{\mathbb{R}} 2|A_0^0|^2 + |A_R^0|^2 + |E^0|^2.$$

On peut de plus montrer que le schéma numérique est bien défini comme le prouve le résultat suivant.

Proposition 2.2.7. *Pour toute donnée $(A_0^n, A_R^n, E^n, p^{n-1}, p^n, \phi^{n-\frac{1}{2}}, \psi^{n-\frac{1}{2}})$, il existe une unique solution $(A_C^{n+1}, A_R^{n+1}, E^{n+1}, p^{n+1}, \phi^{n+\frac{1}{2}}, \psi^{n+\frac{1}{2}})$, de (2.81) – (2.84).*

Cette proposition montre, en outre, que la matrice du système est inversible.

2.2.4 Quelques résultats numériques.

On commence par un cas test simple en 1D pour illustrer le phénomène de croissance exponentielle. La direction de propagation est ici notée y . On suppose que la condition de résonance est vérifiée. Voici les données du problème : $c_0 = 3 * 10^8 m.s^{-1}$, $v_{th} = \frac{c_0}{10}$, $c_s = 0.005 * c_0$, $\frac{m_e}{m_i} = 0.01$, $\omega_{pe} = 3 * 10^{15} s^{-1}$ et $k_0 = 2 * 10^7 m^{-1}$. On calcule ω_0 par

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k_0^2 c_0^2},$$

on cherche k_R , k_1 , ω_R et ω_1 sous la forme

$$k_0 = k_R - k_1, \quad \omega_0 = \omega_1 + \omega_R + \omega_{pe},$$

où

$$\omega_R = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k_R^2 c_0^2}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k_1^2 v_{th}^2},$$

par un processus de dichotomie. On obtient

$$k_R = -6.65 * 10^6 m^{-1}, \quad k_1 = 2.6 * 10^7 m^{-1}, \quad \omega_R = 3.6 * 10^{15} s^{-1}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = 0.01561.$$

On travaille sur un système adimensionné où l'unité de référence pour les longueurs est $\frac{1}{k_0}$ et celle pour le temps $\frac{1}{\omega_0}$. L'intervalle d'espace est alors $[0, L]$ avec $L = 200$ et celui pour le temps est $[0, T]$ avec $T = 100$. La donnée initiale sur le champ incident A_0 est une gaussienne

$$A_0(0) = 0.3e^{-0.001(x-100)^2}.$$

Puisque nous travaillons sur un effet Raman stimulé, la donnée initiale sur A_R est $A_R(0) = 0.01A_0(0)$. De plus, E , p and $\partial_t p$ sont égaux à 0 à $t = 0$. Les nombres de points de discrétisation en espace et en temps sont respectivement $N_y = 500$ et $N_t = 200$. Dans la figure 2.4, on peut observer les courbes des champs A_0 , A_R et E_0 aux différents temps $t = 0, 50, 100$. La ligne continue correspond à A_0 , la ligne pointillée à E_0 et la dernière à A_R . La figure 2.5 représente le maximum des modules des différents champs en fonction du temps. On voit clairement la croissance exponentielle de A_R et E_0 au début, puis au bout d'un certain temps, on atteint le régime de saturation, c'est-à-dire que le phénomène s'arrête.

On présente maintenant un deuxième test numérique en 2D qui concerne le système complet (2.6)-(2.11) sous forme adimensionnée comprenant l'onde Raman rétrograde et les deux ondes Raman se propageant vers l'avant. Les conditions sont les suivantes. Le domaine spatial est $x \in [0, 300]$ et $y \in [0, 200]$, le domaine temporel est $t \in [0, 200]$. Les nombres de points en espaces sont $N_x = 300$ et $N_y = 200$ et en temps $N_t = 596$. On note θ l'angle entre les vecteurs A_0 and A_{R_2} et $\theta_{\max}$ l'angle qui correspond au maximum d'amplification du champ Raman A_{R_2} qui se propage vers l'avant. La données initiales sur A_0 est

$$A_0(0, \cdot) = \alpha e^{-\beta_x(x-\gamma_x)^2} e^{-\beta_y(y-\gamma_y)^2}.$$

On considère un cas de collision : les données initiales pour A_{R_1} et A_{R_2} sont localisées en différentes positions de telle sorte que l'interaction se fasse au milieu du domaine de calcul, au point $x = 100$ et $y = 100$. Pour tenir compte de la vitesse de propagation de chaque onde on introduit les paramètres suivants

$$L_{R_1}^x = \frac{v_{R_1}}{v_0} * 50, \quad L_{R_2}^x = \frac{v_{R_2}}{v_0} * 50 * \cos(\theta), \quad L_{R_2}^y = 100 - L_{R_2}^x * \tan(\theta).$$

Les données initiales sont égales à

$$\begin{cases} A_0(0, \cdot) = \alpha e^{-\beta_x(x-50)^2} e^{-\beta_y(y-100)^2}, \\ A_{R_1}^1 = \frac{\alpha}{100} e^{-\beta_x(x-(100+L_{R_1}^x))^2} e^{-\beta_y(y-100)^2}, \\ A_{R_2}^2 = \frac{\alpha}{100} e^{-\beta_x(x-(100-L_{R_2}^x))^2} e^{-\beta_y(y-L_{R_2}^y)^2}. \end{cases} \quad (2.86)$$

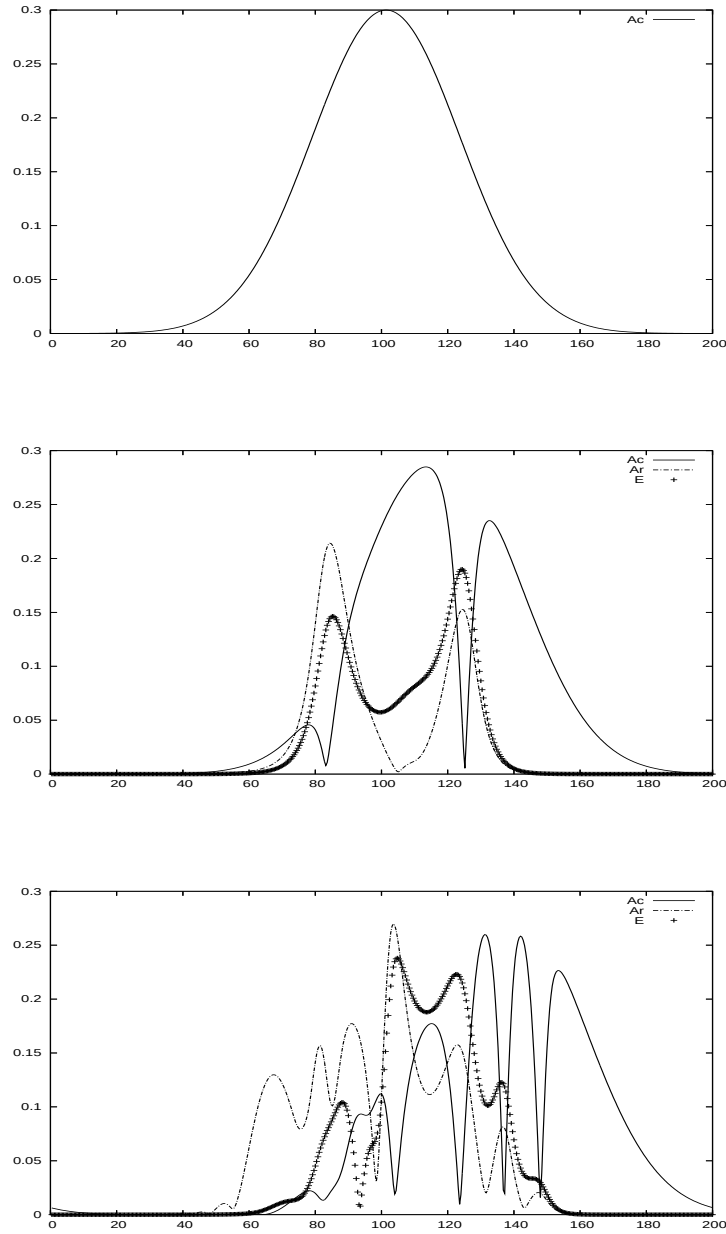


FIGURE 2.4 – Géométrie 1D, cas résonnant. Module des champs au temps $t = 0, 50, 100$, $A_C(0) = 0.3e^{-0.001(x-100)^2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_0} = 0.01561$ Première ligne $t = 0$, secondg ligne $t = 50$, troisième ligne $t = 100$.

On fait varier l'angle θ entre $\frac{1}{6}\theta_{\max}$ et $\frac{4}{3}\theta_{\max}$. Dans la figure 2.6, on trace le maximum des champs A_{R_1} et A_{R_2} en fonction du paramètre $\gamma = \frac{\theta}{\theta_{\max}}$. On observe que l'angle n'a pas d'influence sur A_{R_1} , alors qu'il en a beaucoup sur A_{R_2} . En effet, comme attendu, le maximum du champ A_{R_2} est atteint lorsque $\gamma = 1$, c'est-à-dire pour $\theta = \theta_{\max}$. De plus, on remarque que le processus est bien plus efficace pour $\gamma = 1$ que pour $\gamma = \frac{1}{6}$ par exemple, puisque le rapport entre le maximum des amplitudes correspondantes est de

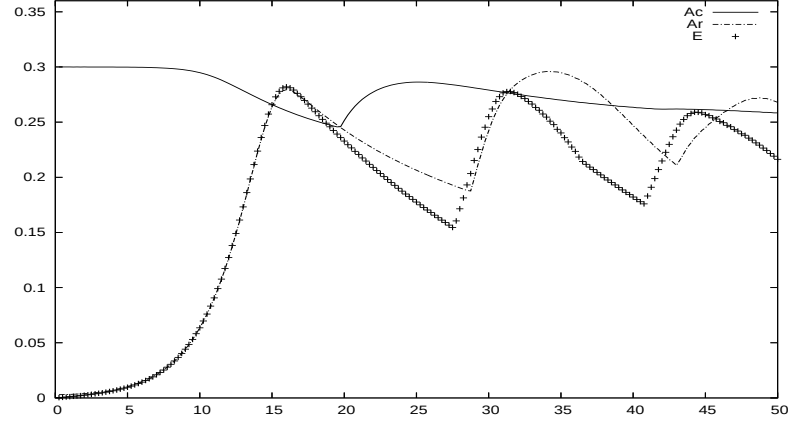


FIGURE 2.5 – Géométrie 1D, cas résonnant. Maximum des modules des champs en fonction du temps. $A_C(0) = 0.3e^{-0.001(x-100)^2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_0} = 0.01561$.

l'ordre de 20 pour cent, ce qui représente un gain considérable. D'autres test numériques ont été réalisés

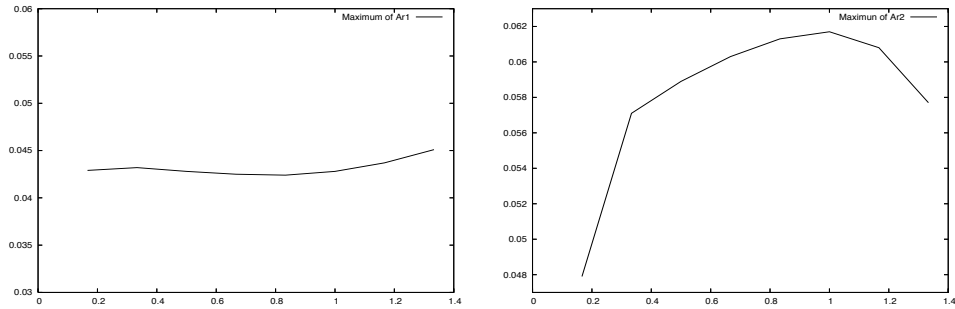


FIGURE 2.6 – Géométrie 2D, maximum des champs en fonction du paramètre $\gamma = \frac{\theta}{\theta_{\max}}$. On fait varier γ de $\frac{1}{6}$ à $\frac{8}{6}$. De gauche à droite, A_{R_1} et A_{R_2} .

dans [6] et [14].

2.3 Conclusion.

La justification mathématique des modèles de type Zakharov (2.6)-(2.11) dérivés à partir des systèmes d'Euler-Maxwell reste un problème largement ouvert. Quel serait le cadre mathématique approprié ? Quelques résultats partiels concernant cette question générale existent (voir [B07]), mais beaucoup de choses restent à comprendre. Il serait aussi intéressant de décrire une vraie situation 3D : dans ce cas, les directions de propagation correspondantes à une amplification maximale des champs Raman forment un cône, c'est-à-dire que l'on dispose d'un ensemble infini et "continu" de telles directions. Il n'existe pas, à

notre connaissance, de cadre mathématique susceptible de décrire une telle situation.

Chapitre 3

Le point de vue des ondes solitaires.

Les résultats de ce chapitre concernent l'étude des ondes solitaires pour des équations ou des systèmes de type Schrödinger semi-linéaires ou quasi-linéaires. Les ondes solitaires sont des solutions particulières d'équations d'évolution qui se propagent sans changer de forme. Elles ont la particularité d'être des solutions globales en temps. Deux aspects principaux sont ici abordés : l'existence et la stabilité (ou l'instabilité) orbitale. Cette dernière propriété fournit des informations précieuses sur la dynamique de ces équations. Nous définissons maintenant la notion de stabilité et d'instabilité pour un système général de la forme

$$\begin{cases} \partial_t U + A(\partial, U) = F(U), \\ U(0, \cdot) = U_0(\cdot), \end{cases} \quad (3.1)$$

où, par exemple, $A(\partial, U) = -i\Delta U$, $U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^3$ dans le cadre des systèmes de Schrödinger semi-linéaires (voir partie 3.1), ou $A(\partial, U) = -i\partial_x^2 U + \partial_x^2(|U|^2 U)$, $U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pour l'équation DNLS (voir partie 3.2.2). Notons E l'espace (si possible l'espace d'énergie) dans lequel le système (3.1) est localement bien posé.

Définition 3.0.1. *On dit qu'une onde solitaire $u(t, \cdot)$ de (3.1) est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $U_0 \in E$ vérifie $\|u(0) - U_0\|_E \leq \delta$, alors la solution $U(t)$ de (3.1) existe globalement en temps et vérifie*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \inf_{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2} \|U(t) - e^{i\theta} u(t, \cdot - y)\|_E < \varepsilon.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'onde solitaire est instable.

Dans la suite nous présentons, pour chaque équation proposée, la forme de l'onde solitaire étudiée ainsi que les résultats de stabilité associés.

3.1 Cas des équations semi-linéaires.

Dans cette partie, on se limite aux systèmes semi-linéaires de type Schrödinger.

3.1.1 Etude d'ondes solitaires semi-triviales.

Les travaux présentés dans cette section ont été réalisés en collaboration avec T. Colin et M. Ohta et sont regroupés dans [10] et [11]. Dans [10], on commence par montrer que, moyennant quelques hypothèses, le système (2.54)-(2.56) peut être simplifié sous la forme

$$i\partial_t u_1 = -\Delta u_1 - |u_1|^{p-1} u_1 - \gamma u_3 \overline{u_2}, \quad (3.2)$$

$$i\partial_t u_2 = -\Delta u_2 - |u_2|^{p-1} u_2 - \gamma u_3 \overline{u_1}, \quad (3.3)$$

$$i\partial_t u_3 = -\Delta u_3 - |u_3|^{p-1} u_3 - \gamma u_1 u_2, \quad (3.4)$$

où globalement u_1 représente l'onde incidente A_0 , u_2 l'onde Raman A_R et u_3 l'onde plasma-électronique E . On suppose que $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$, $1 < p < 1 + 4/N$, $\gamma > 0$ et on note $\vec{u}(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$. Tout d'abord, d'après [C94], le problème de Cauchy (3.2)–(3.3) est bien posé dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{C}^3)$. De plus les solutions régulières vérifient les lois de conservations suivantes ($\vec{u}_0$ désigne la donnée initiale)

$$E(\vec{u}(t)) = E(\vec{u}_0), \quad (3.5)$$

$$Q_1(\vec{u}(t)) = Q_1(\vec{u}_0), \quad Q_2(\vec{u}(t)) = Q_2(\vec{u}_0) \quad (3.6)$$

où

$$E(\vec{u}) = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_j\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|u_j\|_{L^{p+1}}^{p+1} \right) - \gamma \Re \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 \overline{u_3} dx,$$

$$Q_1(\vec{u}) = \|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_3\|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad Q_2(\vec{u}) = \|u_2\|_{L^2}^2 + \|u_3\|_{L^2}^2.$$

Désignons par φ_ω l'unique solution radiale positive de

$$-\Delta \chi + 2\omega \chi - |\chi|^{p-1} \chi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.7)$$

La fonction $u_\omega(t, x) = e^{i\omega t} \varphi_\omega(x)$ est une onde solitaire de l'équation

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1} u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (3.8)$$

et pour $\omega > 0$, $u_\omega(t)$ est orbitalement stable pour $1 < p < 4/N$ et instable pour $1 + 4/N \leq p < 1 + 4/(N-2)$ (voir [BC81, CL82, SS85, W86]). Dans ce contexte, il est clair que les ondes *semi-triviales*

$$(e^{2i\omega t} \varphi_\omega, 0, 0), \quad (0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega, 0), \quad (0, 0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega) \quad (3.9)$$

sont solutions du système (3.2)–(3.4). L'objet de cette partie est alors d'étudier leur stabilité orbitale. Les principaux résultats obtenus dans [10] sont les suivants.

Théorème 3.1.1. *Soient $1 \leq N \leq 3$, $1 < p < 1 + 4/N$, $\gamma > 0$, $\omega > 0$, et φ_ω la solution positive radiale de (3.7). Alors, les ondes solitaires $(e^{2i\omega t} \varphi_\omega, 0, 0)$ et $(0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega, 0)$ de (3.2)–(3.4) sont orbitalement stables.*

Théorème 3.1.2. *Soient $1 \leq N \leq 3$, $1 < p < 1 + 4/N$, $\omega > 0$, et φ_ω la solution positive radiale de (3.7). Alors, il existe une constante strictement positive γ^* telle que :*

- (i) *si $0 < \gamma < \gamma^*$, alors l'onde solitaire $(0, 0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega)$ solution de (3.2)–(3.4) est orbitalement stable.*
- (ii) *si de plus $N \leq 2$, $p > 2$ et $\gamma > \gamma^*$, alors l'onde solitaire $(0, 0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega)$ solution de (3.2)–(3.4) est orbitalement instable.*

On commence par remarquer que lorsque $1 + 4/N \leq p < 1 + 4/(N-2)$, l'onde solitaire $(e^{2i\omega t} \varphi_\omega, 0, 0)$ solution de (3.2)–(3.4) est fortement instable, car pour $\lambda > 1$, $(w_\lambda(t), 0, 0)$ est solution de (3.2)–(3.4) et explose en temps fini, où $w_\lambda(t)$ est une solution de (3.8) qui explose en temps fini, avec $w_\lambda(0) = \lambda \varphi_\omega$. Pour les mêmes raisons, les ondes $(0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega, 0)$ et $(0, 0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega)$ de (3.2)–(3.4) sont aussi fortement instables lorsque $1 + 4/N \leq p < 1 + 4/(N-2)$. On se limite donc au cas $1 < p < 1 + 4/N$.

La preuve du Théorème 3.1.1 est très classique et suit les arguments développés dans [CL82]. Le point essentiel de la démonstration réside dans la caractérisation variationnelle des ondes $(e^{2i\omega t} \varphi_\omega, 0, 0)$ et $(0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega, 0)$ (voir Lemme 4 de [10]). La preuve du second Théorème 3.1.2 est beaucoup plus délicate. La méthode variationnelle du théorème 3.1.1 ne s'adapte pas au cas du théorème 3.1.2 car les lois de conservations (3.5) – (3.6) ne sont pas adaptées. Il faut alors introduire l'action associée au système (3.2)–(3.4)

$$S(\vec{u}) = E(\vec{u}) + \omega (\|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_2\|_{L^2}^2 + 2\|u_3\|_{L^2}^2), \quad (3.10)$$

Notons que l'onde $(0, 0, e^{2i\omega t}\varphi)$ est un point critique de S . D'après la théorie générale développée par Grillakis, Shatah and Strauss dans [GSS90], il s'agit d'étudier l'opérateur linéarisé S'' . Le point clé est de montrer que S'' est un opérateur elliptique sur $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^3)$, ce qui s'avère être suffisant pour montrer que $(0, 0, e^{2i\omega t}\varphi)$ est orbitalement stable. On décompose alors S'' en deux parties $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ où $\mathcal{B}_1$ ne dépend que de u_1 et u_2 alors que $\mathcal{B}_2$ ne dépend seulement que de u_3 . L'opérateur $\mathcal{B}_2$ est elliptique sous certaines conditions d'orthogonalité (voir Lemme 5 de [10]). De plus, dans le Lemme 7 de [10], on prouve que $\mathcal{B}_1$ est elliptique si γ est strictement inférieure à une valeur critique γ^* définie par un problème de minimisation (voir Lemme 6, [10]).

Concernant le point *ii*) du Théorème 3.1.2, puisque le système (3.2) – (3.4) est symétrique par rapport à u_1 et u_2 , on commence par introduire le changement de variable

$$\vec{u}(t) = (e^{i\omega t}v_1(t), e^{i\omega t}v_2(t), e^{2i\omega t}(\varphi_\omega + v_2(t))) \quad (3.11)$$

pour obtenir

$$\partial_t v_1 = \mathcal{L}_1 v_1 + F_1(v_1, v_2), \quad \partial_t v_2 = \mathcal{L}_2 v_2 + F_2(v_1, v_2), \quad (3.12)$$

où

$$\mathcal{L}_1 v = -i(-\Delta v + \omega v - \gamma \varphi_\omega \bar{v}), \quad (3.13)$$

$$\mathcal{L}_2 v = -i(-\Delta v + 2\omega v - \frac{p+1}{2}\varphi_\omega^{p-1}v - \frac{p-1}{2}\varphi_\omega^{p-1}\bar{v}), \quad (3.14)$$

et

$$\begin{aligned} F_1(v_1, v_2) &= i(\gamma \bar{v}_1 v_2 + |v_1|^{p-1}v_1), \\ F_2(v_1, v_2) &= i\{\gamma v_1^2 + |\varphi_\omega + v_2|^{p-1}(\varphi_\omega + v_2) - \varphi_\omega^p \\ &\quad - \frac{p+1}{2}\varphi_\omega^{p-1}v_2 - \frac{p-1}{2}\varphi_\omega^{p-1}\bar{v}_2\}. \end{aligned}$$

L'idée est alors de construire une direction instable de la forme $\mathbf{z}_\gamma = (\zeta_\gamma, 0)$ de telle sorte que la solution $\mathbf{v}_\delta$ de (3.12) ayant pour condition initiale $\mathbf{v}_\delta(0) = \delta \mathbf{z}_\gamma$ où δ peut être choisi arbitrairement petit, sorte de l'orbite de $(0, 0, e^{2i\omega t}\varphi_\omega)$. Cette construction est fondée sur une étude minutieuse du spectre des opérateurs linéarisés $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Plus précisément, si $\gamma > \gamma^*$, on montre que les bornes supérieures de la partie réelle des spectres des opérateurs $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2)$ et $\mathcal{L}_1$ sont égales et que cette valeur est une valeur propre de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_1$. La direction instable est alors construite à partir du vecteur propre correspondant.

Notons enfin que les restrictions sur p et N intervenant dans la partie *ii*) du Théorème 3.1.2 servent à assurer la régularité C^2 de la fonction $z \mapsto |z|^{p-1}z$ nécessaire pour effectuer des estimations dans des espaces de Sobolev $H^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) des termes non-linéaires de (3.12).

L'objet de l'article [11] est de relaxer cette condition technique, notamment en dimension 3 d'espace. Le résultat obtenu est le suivant.

Théorème 3.1.3. *Soient $1 \leq N \leq 3$, $1 < p < 1 + 4/N$, $\omega > 0$, et φ la solution radiale, positive de (3.7). Soit $\gamma^* = \gamma^*(N, p, \omega)$ la constante du théorème 3.1.2. Si $\gamma > \gamma^*$, alors l'onde solitaire $(0, 0, e^{2i\omega t}\varphi_\omega)$ solution de (3.2)–(3.4) est orbitalement instable.*

Dans la preuve du Théorème 3.1.2, la nonlinéarité F apparaissant dans les équations (3.12) est estimée dans H^1 (resp. $H^{1+\alpha}$) en dimension 1 (resp. dimension 2). L'idée principale ici est d'utiliser les dérivées en temps plutôt que les dérivées en espace de telle sorte que F soit estimé seulement dans L^2 , ainsi que sa dérivée par rapport au temps $\partial_t F$.

3.1.2 Etude générale pour un système de Schrödinger issu de la physique des plasmas.

Le but de ce travail est de reprendre le système de la partie précédente et de faire une étude exhaustive des ondes solitaires, notamment de déterminer la structure des états fondamentaux. Il est le fruit d'une

collaboration avec M. Ohta et a fait l'objet de l'article [16]. On précise maintenant le cadre de cette étude. On considère le système réduit suivant

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 = -\Delta u_1 - \kappa |u_1| u_1 - \gamma \overline{u_1} u_2 \\ i\partial_t u_2 = -2\Delta u_2 - 2|u_2| u_2 - \gamma u_1^2 \end{cases} \quad (3.15)$$

pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $N \leq 3$. Notons encore une fois que le problème de Cauchy (3.15) est localement bien posé dans $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})^2$. Essentiellement, on suppose que, dans le système (3.2)-(3.4), $u_1 = u_2$ et on fait le choix $p = 2$. Par contre, pour enrichir la structure du système, on rajoute un paramètre κ devant le terme non-linéaire de la première équation de (3.15). Dans ce contexte, le paramètre γ^* introduit dans la section précédente est égal à 1. Il est alors aisé de montrer le théorème suivant, analogue du Théorème 3.1.3.

Théorème 3.1.4. *Soient $N \leq 3$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $\omega > 0$, et φ_ω la solution radiale positive de (3.7). Alors, l'onde solitaire semi-triviale $(0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega)$ de (3.15) est orbitalement stable si $0 < \gamma < 1$ et instable si $\gamma > 1$.*

La question naturelle qui se pose ensuite est de savoir s'il existe d'autres ondes solitaires et, si la réponse est positive, d'étudier leur stabilité orbitale. Remarquons tout d'abord, que d'après le théorème de bifurcation de Crandall et Rabinowitz [CR71], il est aisé de montrer que $\gamma = \gamma^* = 1$ est un point de bifurcation pour le système (3.15). On reviendra sur ce point un peu plus tard. De manière générale, dans ce travail, on s'intéresse à la structure de cette bifurcation depuis l'onde solitaire semi-triviale $(0, e^{2i\omega t} \varphi_\omega)$ ainsi qu'aux propriétés de stabilité de cette dernière. On se propose aussi de donner une classification complète des états fondamentaux, c'est-à-dire des solutions de

$$\begin{cases} -\Delta \phi_1 + \omega \phi_1 = \kappa |\phi_1| \phi_1 + \gamma \overline{\phi_1} \phi_2 \\ -\Delta \phi_2 + \omega \phi_2 = |\phi_2| \phi_2 + (\gamma/2) \phi_1^2 \end{cases} \quad (3.16)$$

qui minimisent l'action S_ω parmi toutes les autres solutions de (3.16). L'action S_ω est définie de la manière suivante. On commence par introduire l'énergie E et la charge Q associées à (3.15)

$$\begin{aligned} E(\vec{u}) &= \frac{1}{2} (\|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_2\|_{L^2}^2) - \frac{\kappa}{3} \|u_1\|_{L^3}^3 - \frac{1}{3} \|u_2\|_{L^3}^3 - \frac{\gamma}{2} \Re \int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 \overline{u_2} dx, \\ Q(\vec{u}) &= \frac{1}{2} (\|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_2\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

et on pose

$$S_\omega(\vec{v}) = E(\vec{v}) + \omega Q(\vec{v}).$$

L'idée est alors de chercher des solutions de (3.16) sous la forme $\vec{\phi} = (\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega)$ avec $(\alpha, \beta) \in]0, \infty[^2$, φ_ω étant la solution radiale positive de (3.7). Il est clair que si $(\alpha, \beta) \in]0, \infty[^2$ vérifie

$$\kappa \alpha + \gamma \beta = 1, \quad \gamma \alpha^2 + 2\beta^2 = 2\beta, \quad (3.17)$$

alors $(\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega)$ est solution de (3.16). Avant d'énoncer les résultats obtenus, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de notations utiles pour la suite. Pour $\kappa \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, on définit

$$\mathcal{S}_{\kappa, \gamma} = \{(x, y) \in]0, \infty[^2 : \kappa x + \gamma y = 1, \gamma x^2 + 2y^2 = 2y\}.$$

Afin de déterminer la structure de l'ensemble $\mathcal{S}_{\kappa, \gamma}$, pour $\kappa^2 \geq 2\gamma(1 - \gamma)$ on introduit

$$\begin{aligned} \alpha_\pm &= \frac{(2 - \gamma)\kappa \pm \gamma \sqrt{\kappa^2 + 2\gamma(\gamma - 1)}}{2\kappa^2 + \gamma^3}, \\ \beta_\pm &= \frac{\kappa^2 + \gamma^2 \pm \kappa \sqrt{\kappa^2 + 2\gamma(\gamma - 1)}}{2\kappa^2 + \gamma^3}, \\ \alpha_0 &= \frac{(2 - \gamma)\kappa}{2\kappa^2 + \gamma^3}, \quad \beta_0 = \frac{\kappa^2 + \gamma^2}{2\kappa^2 + \gamma^3}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

L'ensemble des paramètres admissibles (κ, γ) est noté $\mathcal{D} = \{(\kappa, \gamma) : \kappa \in \mathbb{R}, \gamma > 0\}$. On décompose $\mathcal{D}$ à l'aide des 4 sous-ensembles suivants (voir figure 3.1).

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &= \{(\kappa, \gamma) : \kappa \leq 0, \gamma > 1\} \cup \{(\kappa, \gamma) : \kappa > 0, \gamma \geq 1\}, \\ \mathcal{J}_2 &= \{(\kappa, \gamma) : 0 < \gamma < 1, \kappa > \sqrt{2\gamma(1-\gamma)}\}, \\ \mathcal{J}_3 &= \{(\kappa, \gamma) : 0 < \gamma < 1, \kappa = \sqrt{2\gamma(1-\gamma)}\}, \\ \mathcal{J}_0 &= \{(\kappa, \gamma) : \kappa \in \mathbb{R}, \gamma > 0\} \setminus (\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3).\end{aligned}$$

Remarquons que les ensembles $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ et $\mathcal{J}_3$ sont disjoints, et que $\mathcal{D} = \mathcal{J}_0 \cup \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3$. Notons,

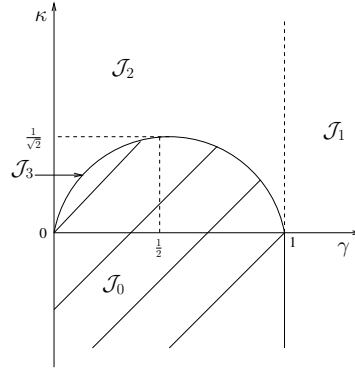


FIGURE 3.1 – Exemple d'ensemble $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ et $\mathcal{J}_3$.

de plus, que pour $0 < \kappa \leq 1/\sqrt{2}$, l'équation $2\gamma(1-\gamma) = \kappa^2$ permettant de définir l'ensemble $\mathcal{J}_3$, a pour solutions $\gamma = \gamma_{\pm} := (1 \pm \sqrt{1-2\kappa^2})/2$. Il est alors possible de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_{\kappa,\gamma}$ suivant l'appartenance de (κ, γ) aux ensembles $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ et $\mathcal{J}_3$, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.1.5. (0) Si $(\kappa, \gamma) \in \mathcal{J}_0$, alors $\mathcal{S}_{\kappa,\gamma}$ est vide.

- (1) Si $(\kappa, \gamma) \in \mathcal{J}_1$, alors $\mathcal{S}_{\kappa,\gamma} = \{(\alpha_+, \beta_-)\}$.
- (2) Si $(\kappa, \gamma) \in \mathcal{J}_2$, alors $\mathcal{S}_{\kappa,\gamma} = \{(\alpha_+, \beta_-), (\alpha_-, \beta_+)\}$.
- (3) Si $(\kappa, \gamma) \in \mathcal{J}_3$, alors $\mathcal{S}_{\kappa,\gamma} = \{(\alpha_0, \beta_0)\}$.

A ce stade il est utile de préciser la notion de bifurcation utilisée ci-dessus. D'après (3.18),

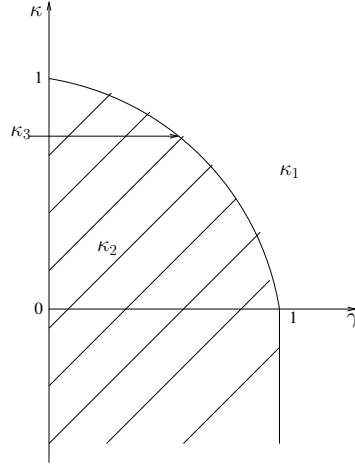
- si $\kappa \leq 0$, $(\alpha_+, \beta_-) \rightarrow (0, 1)$ lorsque $\gamma \rightarrow 1 + 0$, c'est-à-dire que la branche de solutions positives $\{(\alpha_+ \varphi_\omega, \beta_- \varphi_\omega) : \gamma > 1\}$ de (3.16) bifurque depuis la solution semi-triviale $(0, \varphi_\omega)$ au point $\gamma = 1$.
- si $\kappa > 0$, $(\alpha_-, \beta_+) \rightarrow (0, 1)$ lorsque $\gamma \rightarrow 1 - 0$, ce qui signifie que la branche de solutions positives $\{(\alpha_- \varphi_\omega, \beta_+ \varphi_\omega) : \gamma_m < \gamma < 1\}$ de (3.16) bifurque depuis la solution semi-triviale $(0, \varphi_\omega)$ au point $\gamma = 1$, où $\gamma_m = \inf\{\gamma : (\kappa, \gamma) \in \mathcal{S}_{\kappa,\gamma}\}$. De plus, on montre que $\gamma_m = 0$ si $\kappa > 1/\sqrt{2}$, et $\gamma_m = \gamma_+$ si $0 < \kappa \leq 1/\sqrt{2}$.

Il est maintenant possible d'énoncer les résultats de stabilité et d'instabilité obtenu sur les ondes $(\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega)$.

Théorème 3.1.6. Soit $N \leq 3$. Alors :

- i) si $(\kappa, \gamma) \in \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$, pour tout $\omega > 0$, l'onde solitaire $(e^{i\omega t} \alpha_+ \varphi_\omega, e^{2i\omega t} \beta_- \varphi_\omega)$ solution de (3.15) est orbitalement stable
- ii) si $(\kappa, \gamma) \in \mathcal{J}_2$, pour tout $\omega > 0$, l'onde solitaire $(e^{i\omega t} \alpha_- \varphi_\omega, e^{2i\omega t} \beta_+ \varphi_\omega)$ solution de (3.15) est orbitalement instable.

La preuve de ce théorème repose sur une étude précise des propriétés d'ellipticité des opérateurs


 FIGURE 3.2 – Les ensembles $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ and $\mathcal{K}_3$.

linéarisés suivants (voir section 2 de [16])

$$\mathcal{L}_R = \begin{bmatrix} -\Delta + \omega & 0 \\ 0 & -\Delta + \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (2\alpha + \gamma\beta)\varphi_\omega & \gamma\alpha\varphi_\omega \\ \gamma\alpha\varphi_\omega & 2\beta\varphi_\omega \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{L}_I = \begin{bmatrix} -\Delta + \omega & 0 \\ 0 & -\Delta + \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\alpha - \gamma\beta)\varphi_\omega & \gamma\alpha\varphi_\omega \\ \gamma\alpha\varphi_\omega & \beta\varphi_\omega \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

combiné avec une utilisation du Théorème 3.4 de [GSS90] et du Théorème 1 de [O11].

On montre aussi un résultat de stabilité concernant l'onde semi-triviale $(0, e^{2i\omega t}\varphi_\omega)$ au point de bifurcation $\gamma = 1$.

Théorème 3.1.7. *Soit $N \leq 3$.*

- i) Si $\kappa > 0$ et $\gamma = 1$, alors pour tout $\omega > 0$, l'onde solitaire $(0, e^{2i\omega t}\varphi_\omega)$ solution de (3.15) est orbitalement instable.*
- ii) Si $\kappa \leq 0$ et $\gamma = 1$, alors pour tout $\omega > 0$, l'onde solitaire $(0, e^{2i\omega t}\varphi_\omega)$ solution de (3.15) est orbitalement stable.*

La preuve de la partie *i)* du Théorème 3.1.7 repose sur une adaptation du théorème 2 de [O11] alors que celle de la partie *ii)* est fondée sur la méthode variationnelle introduite par Shatah dans [S83] et de la caractérisation des états fondamentaux donnée par le Théorème 3.1.8.

Nous passons maintenant à l'étude des états fondamentaux de (3.16). Notons

$$\kappa_c(\gamma) = \frac{1}{2}(\gamma + 2)\sqrt{1 - \gamma}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (3.21)$$

La fonction κ_c est une bijection de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$ et on peut ainsi définir son inverse γ_c . Il est utile de découper le domaine $\mathcal{D}$ avec les sous-ensemble suivants (voir la figure 3.2).

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \{(\kappa, \gamma) : \kappa \leq 0, \gamma > 1\} \cup \{(\kappa, \gamma) : \kappa \geq 1, \gamma > 0\} \\ &\quad \cup \{(\kappa, \gamma) : 0 < \kappa < 1, \gamma > \gamma_c(\kappa)\}, \\ \mathcal{K}_2 &= \{(\kappa, \gamma) : \kappa \leq 0, 0 < \gamma \leq 1\} \cup \{(\kappa, \gamma) : 0 < \kappa < 1, 0 < \gamma < \gamma_c(\kappa)\}, \\ \mathcal{K}_3 &= \{(\kappa, \gamma) : 0 < \kappa < 1, \gamma = \gamma_c(\kappa)\}. \end{aligned}$$

En notant $\mathcal{G}_\omega$ l'ensemble des états fondamentaux de (3.16) et

$$\mathcal{G}_\omega^0 = \left\{ 0, e^{2i\theta} \varphi_\omega(\cdot - y) : \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

$$\mathcal{G}_\omega^1 = \left\{ (e^{i\theta} \alpha_+ \varphi_\omega(\cdot - y), e^{2i\theta} \beta_- \varphi_\omega(\cdot - y)) : \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N \right\},$$

le résultat peut s'énoncer ainsi.

Théorème 3.1.8. *Soit $N \leq 3$ et $\omega > 0$.*

- (1) *Si $(\kappa, \gamma) \in \mathcal{K}_1$, alors $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{G}_\omega^1$.*
- (2) *Si $(\kappa, \gamma) \in \mathcal{K}_2$, alors $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{G}_\omega^0$.*
- (3) *Si $(\kappa, \gamma) \in \mathcal{K}_3$, alors $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{G}_\omega = \mathcal{G}_\omega^0 \cup \mathcal{G}_\omega^1$.*

La preuve de ce théorème est fondée encore une fois sur des méthodes variationnelles et sur une étude approfondie de la structure de l'ensemble défini par les relations (3.17). Un des points clés réside dans l'étude, pour un couple (κ, γ) donné, du signe de la quantité $\alpha^2 + \beta^2 - 1$.

3.2 Cas des équations quasi-linéaires.

Dans cette partie, on présente des résultats concernant des équations de Schrödinger de type quasi-linéaires.

3.2.1 Un premier résultat d'existence.

Les résultats de cette partie ont été obtenus en collaboration avec L. Jeanjean et ont fait l'objet de la publication [4]. On s'intéresse ici à l'existence d'ondes stationnaires de la forme $u(t, x) = e^{i\omega t} \phi(x)$ pour l'équation de Schrödinger suivante, issue de la physique des films super-fluides,

$$i\partial_t u - \Delta u - \Delta(u^2)u = h(x, u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad (3.22)$$

où h est une fonction régulière donnée. L'inconnue ϕ est alors solution d'une équation stationnaire du type

$$-\Delta \phi - \Delta(\phi^2)\phi = g(x, \phi), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad (3.23)$$

la fonction g s'exprimant en fonction de h . Il est alors naturel de chercher une solution de (3.23) sous la forme d'un point critique de la fonctionnelle $J : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx$$

où $G(x, s) = \int_0^s g(x, t) dt$. Cependant J n'est pas définie sur l'espace H^1 , excepté en dimension 1 d'espace. Pour surmonter cette difficulté, on introduit une formulation duale par l'intermédiaire du changement de variable $\psi = f^{-1}(\phi)$ qui transforme l'équation quasi-linéaire (3.23) en l'équation sur ψ

$$-\Delta \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(\psi)}} g(x, f(\psi)), \quad (3.24)$$

à condition que la fonction f vérifie

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}} ; f(0) = 0$$

sur $[0, +\infty[$ et $f(t) = -f(-t)$ sur $] -\infty, 0]$. L'équation (3.24) est de type semi-linéaire et la fonctionnelle d'énergie qui lui est associée est $I : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) dx.$$

La fonctionnelle I est cette fois bien définie sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ et est de plus de classe C^1 . Cette formulation du problème permet de travailler directement sur (3.24) et d'en déduire les résultats correspondants sur (3.23). Nous avons considéré alors deux types d'équations différents. Tout d'abord, nous nous sommes intéressés aux équations autonomes suivantes

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u = g(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (3.25)$$

D'un point de vue technique, les hypothèses sur g sont décrites ci-dessous :

(g0) $g(s)$ est localement Hölder continue sur $[0, \infty[$.

(g1) $-\infty < \liminf_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} = -\nu < 0$ pour $N \geq 3$,

$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} = -\nu \in (-\infty, 0)$ pour $N = 1, 2$.

(g2) Si $N \geq 3$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|g(s)|}{s^{\frac{3N+2}{N-2}}} = 0$.

Si $N = 2$, pour tout $\alpha > 0$ il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$|g(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}, \quad \text{pour tout } s \geq 0.$$

(g3) Lorsque $N \geq 2$, il existe $\xi_0 > 0$ tel que $G(\xi_0) > 0$,
Lorsque $N = 1$, il existe $\xi_0 > 0$ tel que

$$G(\xi) < 0 \text{ pour tout } \xi \in]0, \xi_0[, \quad G(\xi_0) = 0 \text{ et } g(\xi_0) > 0.$$

Sous ces conditions, nous avons montré le résultat suivant.

Théorème 3.2.1. *Sous les hypothèses (g0)-(g3), l'équation (3.25) admet une solution $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) $u_0 > 0$ sur $\mathbb{R}^N$.
- (ii) u_0 est radiale : $u_0(x) = u_0(r)$ avec $r = |x|$ et u_0 est décroissante par rapport à r .
- (iii) $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^N)$.
- (iv) u_0 et ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 décroissent exponentiellement à l'infini

$$|D^\alpha u_0(x)| \leq C e^{-\delta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

avec $C, \delta > 0$ et pour $|\alpha| \leq 2$.

La preuve est fondée sur des techniques variationnelles et consiste à étudier les points critiques de la fonctionnelles I .

Ensuite, nous avons étudié les équation non-autonomes suivantes

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u + V(x)u = h(u), \quad (3.26)$$

dans lesquelles $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et $h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est Hölder continue. Les hypothèses sur V et h sont :

(V0) il existe $V_0 > 0$ tel que $V(x) \geq V_0 > 0$ sur $\mathbb{R}^N$.

(V1) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = V(\infty)$ et $V(x) \leq V(\infty)$ sur $\mathbb{R}^N$.

(h0) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(s)}{s} = 0$.

(h1) il existe $p < \infty$ si $N = 1, 2$ et $p < \frac{3N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$ tel que $|h(s)| \leq C(1 + |s|^p)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, pour $C > 0$.

(h2) il existe $\mu \geq 4$ tel que, $\forall s > 0$,

$$0 < \mu H(s) \leq h(s)s \quad \text{où} \quad H(s) = \int_0^s h(t) dt.$$

On peut alors montrer le résultat suivant.

Théorème 3.2.2. *Sous les hypothèses (V0)-(V1) et (h0)-(h2), l'équation (3.25) possède une solution positive non nulle si une des conditions suivantes est satisfaite :*

- 1) (h2) est vérifiée avec $\mu > 4$.
- 2) (h2) est vérifiée avec $\mu = 4$ et $p \leq 5$ si $N = 3$, $p < \frac{3N+4}{N}$ si $N \geq 4$ dans (h1).

La preuve du Théorème 3.2.2 est aussi fondée sur l'étude de la fonctionnelle I . Plus précisément, on montre que I possède une géométrie de col. La principale difficulté est de contourner le manque de compacité des suites de Palais-Smale. Pour cela on utilise les résultats de [JT03.1] et [JT03.2] en montrant que le niveau $c > 0$ du col est en-dessous du premier niveau où il y a une perte de compacité.

3.2.2 L'équation DNLS.

L'équation DNLS (Derivative Nonlinear Schrödinger Equation) est aussi un modèle issu de la physique des plasmas. L'équation s'écrit

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\partial_x(|u|^2 u) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

Une des particularités intéressantes de cette équation est qu'elle possède une famille explicite d'ondes solitaires généralisées indexée par deux paramètres ω et c de la manière suivante

$$\begin{aligned} u_{\omega, c}(t, x) \\ = \phi_{\omega, c}(x - ct) \exp \left\{ i\omega t + i\frac{c}{2}(x - ct) - \frac{3}{4}i \int_{-\infty}^{x-ct} |\phi_{\omega, c}(\eta)|^2 d\eta \right\}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

où $(\omega, c) \in \mathbb{R}^2$ vérifient $c^2 < 4\omega$, et

$$\phi_{\omega, c}(x) = \left[\frac{\sqrt{\omega}}{4\omega - c^2} \left\{ \cosh(\sqrt{4\omega - c^2} x) - \frac{c}{2\sqrt{\omega}} \right\} \right]^{-1/2}, \quad (3.29)$$

est une solution positive de l'équation stationnaire

$$-\partial_x^2 \phi + \left(\omega - \frac{c^2}{4} \right) \phi + \frac{c}{2} |\phi|^2 \phi - \frac{3}{16} |\phi|^4 \phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

L'étude de la stabilité orbitale de ces familles d'ondes a été menée en partie dans [GW95], modulo deux hypothèses importantes : d'une part, les auteurs se limitent au cas $c < 0$ avec $c^2 < 4\omega$ et d'autre part, suivant la théorie générale introduite dans [GSS90], ils utilisent un théorème de stabilité abstrait dont ils omettent la preuve.

L'objet de ce travail, en collaboration avec M. Ohta, publié dans [7], est de reprendre l'étude de la stabilité orbitale en considérant toutes les valeurs des 2 paramètres admissibles, à savoir $(\omega, c) \in \mathbb{R}^2$ avec $c^2 < 4\omega$. L'idée est d'utiliser des méthodes variationnelles similaires à celles utilisées dans [S83] et [O94], évitant ainsi l'utilisation de méthodes spectrales. Le résultat principal obtenu est le suivant.

Théorème 3.2.3. *Pour tout $(\omega, c) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $c^2 < 4\omega$, l'onde solitaire $u_{\omega,c}(t)$ définie par (3.28) est orbitalement stable pour l'équation DNLS (3.27).*

On commence par noter encore une fois que le problème de Cauchy (3.27) est bien posé dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ (voir [O96]). On décrit maintenant brièvement la méthode. En utilisant la transformation de jauge

$$G_{1/2} : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{R})$$

$$u \mapsto G_{1/2}(u)(x) = u(x) \exp \left(\nu i \int_{-\infty}^x |u(\eta)|^2 d\eta \right),$$

on réécrit (3.27) sous la forme hamiltonienne suivante

$$i\partial_t v + \partial_x^2 v + i|v|^2 \partial_x v = 0. \quad (3.31)$$

On travaille alors sur cette nouvelle équation et on introduit $\mathcal{G}_{\omega,c}$ l'ensemble des solutions non nulles de l'équation stationnaire associée

$$-\partial_x^2 \varphi - i|\varphi|^2 \partial_x \varphi + \omega \varphi + ic \partial_x \varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.32)$$

Par la transformation

$$\phi(x) = \varphi(x) \exp \left(-\frac{c}{2} ix + \frac{i}{4} \int_{-\infty}^x |\varphi(\eta)|^2 d\eta \right), \quad (3.33)$$

l'équation (3.32) est transformée en

$$-\partial_x^2 \phi + \left(\omega - \frac{c^2}{4} \right) \phi + \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{\phi} \partial_x \phi) \phi + \frac{c}{2} |\phi|^2 \phi - \frac{3}{16} |\phi|^4 \phi = 0. \quad (3.34)$$

Il est alors clair que la fonction $\phi_{\omega,c}$, solution de (3.30), satisfait aussi l'équation (3.34) puisqu'elle est réelle et ainsi la fonction

$$\varphi_{\omega,c}(x) = \phi_{\omega,c}(x) \exp \left(\frac{c}{2} ix - \frac{i}{4} \int_{-\infty}^x |\phi_{\omega,c}(\eta)|^2 d\eta \right) \quad (3.35)$$

satisfait (3.32) et donc $\varphi_{\omega,c} \in \mathcal{G}_{\omega,c}$ si $c^2 < 4\omega$. De plus, si $\varphi \in \mathcal{G}_{\omega,c}$ alors $e^{i\omega t} \varphi(x - ct)$ est une onde solitaire de (3.31). Le cadre de l'étude étant posé, notons que l'équation (3.34) possède une structure très particulière. On montre en effet ce résultat surprenant : toute solution ϕ de (3.34) vérifie

$$\text{Im}(\bar{\phi} \partial_x \phi) = 0,$$

ce qui signifie que ϕ est aussi solution de (3.30). Ceci constitue un des points les plus originaux de la preuve. Muni de ce résultat, on peut alors décrire la structure de l'ensemble $\mathcal{G}_{\omega,c}$ de la manière suivante.

Proposition 3.2.4. *Pour tout $(\omega, c) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $c^2 < 4\omega$, on a*

$$\mathcal{G}_{\omega,c} = \{e^{i\theta} \varphi_{\omega,c}(\cdot - y) : (\theta, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Le reste de la preuve de la stabilité orbitale est basée sur des méthodes variationnelles et on renvoie à [7] pour plus de précisions.

3.3 Une équation de Schrödinger quasi-linéaire.

Les travaux présentés dans cette partie concerne l'équation de Schrödinger quasi-linéaire suivante

$$\begin{cases} i\phi_t + \Delta \phi + \phi \Delta(|\phi|^2) + f(|\phi|^2) \phi = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \\ \phi(0, x) = a_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.36)$$

où f est une fonction donnée et ont fait l'objet de la publication [13] en collaboration avec L. Jeanjean et M. Squasina. Nous nous sommes tout d'abord intéressés au problème de Cauchy local. La présence du terme quasi-linéaire rend difficile l'obtention d'un résultat d'existence dans l'espace d'énergie naturel

$$X = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N, C) : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 |\nabla u|^2 dx < \infty \right\}.$$

On peut aussi remarquer que le résultat de [1] ne s'applique pas car la fonction $\ell(s) = s$ ne vérifie pas la condition nécessaire

$$1 - 4\sigma \ell'^2(\sigma) > C_\ell \ell'^2(\sigma), \quad \text{for all } \sigma \in \mathbb{R}_+. \quad (3.37)$$

On a donc montré le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. *Soient $N \geq 1$, $s = 2E(\frac{N}{2}) + 2$, $a_0 \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$ et $f \in C^{s+2}(\mathbb{R}^+)$. Alors ils existent un temps $T > 0$ et une unique solution de (3.36) telle que*

$$\phi(0, x) = a_0(x),$$

$$\phi \in L^\infty([0, T[; H^{s+2}(\mathbb{R}^N)) \cap C([0, T[; H^s(\mathbb{R}^N)).$$

De plus, ϕ vérifie les lois de conservation

$$\|\phi(t)\|_2 = \|a_0\|_2, \quad \mathcal{E}(\phi(t)) = \mathcal{E}(a_0),$$

pour $t \in [0, T[$, où

$$\mathcal{E}(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla |\phi|^2|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(|\phi|^2) dx,$$

avec $F(\sigma) = \int_0^\sigma f(u) du$.

La preuve du Théorème 3.3.1 est fondée sur des méthodes d'énergie et pour surmonter la perte de dérivée induite par le terme quasilinéaire, on utilise des transformations de jauge. Pour contourner la condition (3.37), dans la procédure de point fixe, on introduit une version linéarisée différente de celle introduite dans [1].

Pour l'étude de l'existence et de la stabilité des ondes stationnaires, on se restreint au cas particulier $f(s) = s^{\frac{p-1}{2}}$. Une onde stationnaire est ici une solution de la forme $\phi_\omega(t, x) = u_\omega(x) e^{-i\omega t}$ où $\omega > 0$ est un paramètre fixé. La fonction ϕ_ω est solution de (3.36) si u_ω est une solution de

$$-\Delta u - u \Delta(|u|^2) + \omega u = |u|^{p-1} u, \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (3.38)$$

On appelle état fondamental de (3.38) toute solution qui minimise l'action $\mathcal{E}_\omega$ parmi toutes les solutions de (3.38), avec

$$\mathcal{E}_\omega(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla |u|^2|^2 dx + \frac{\omega}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

On note $\mathcal{G}_\omega$ l'ensemble des états fondamentaux de (3.38). Nous avons alors prouvé le théorème suivant décrivant la structure de $\mathcal{G}_\omega$.

Théorème 3.3.2. *Pour tout $\omega > 0$, $\mathcal{G}_\omega$ est non vide et chaque élément $u \in \mathcal{G}_\omega$ est de la forme*

$$u(x) = e^{i\theta} |u(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

pour $\theta \in \mathbb{S}^1$. En particulier, les éléments de $\mathcal{G}_\omega$ sont, modulo une phase complexe, réels et positifs. De plus, tout état fondamental réel, positif $u \in \mathcal{G}_\omega$ vérifie les propriétés suivantes

- i) $u > 0$ in $\mathbb{R}^N$,
- ii) u est radiale, décroissante,
- iii) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$,
- iv) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ avec $|\alpha| \leq 2$, il existe $(c_\alpha, \delta_\alpha) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que

$$|D^\alpha u(x)| \leq C_\alpha e^{-\delta_\alpha |x|}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

De plus pour $N = 1$ il existe une unique solution positive de (3.38), modulo les translations. En particulier, il existe un unique état fondamental positif de (3.38), modulo une translation.

Ce théorème amène le commentaire suivant. Dans le cas $N \geq 2$, nous ne disposons pas de résultats concernant l'unicité. Nous conjecturons l'existence de plusieurs solutions radiales, comme c'est le cas pour l'équation

$$-\Delta u + \omega u = |u|^{p-1}u, \quad \text{in } \mathbb{R}^N \quad (3.39)$$

La preuve du Théorème 3.3.2 utilise l'approche duale introduite dans [4]. Ensuite, nous prouvons le résultat d'instabilité par blow-up suivant, valable pour $p > 1$ suffisamment grand.

Théorème 3.3.3. *On suppose que $\omega > 0$, $p > 1$ si $N = 1, 2$,*

$$3 + \frac{4}{N} < p < \frac{3N+2}{N-2},$$

si $N \geq 3$, et que $f(\sigma) = \sigma^{\frac{p-1}{2}} \in C^{s+2}(\mathbb{R}^+)$. Soit $u \in X$ un état fondamental de

$$-\Delta u + u\Delta|u|^2 + \omega u = |u|^{p-1}u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (3.40)$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\|a_0 - u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$ et la solution $\phi(t)$ de (3.36) avec $\phi(0) = a_0$ explose en temps fini dans l'espace $H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$.

On remarque que les hypothèses sur la régularité de la fonction f sont satisfaites dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} p &\geq 9 \text{ lorsque } N = 1, \quad p = 7, 9, 11 \text{ ou } p \geq 13 \text{ si } N = 2, \\ p &= 5, 7, 9 \text{ si } N = 3 \text{ et } p = 5 \text{ si } N = 4. \end{aligned}$$

Pour prouver le Théorème 3.3.3, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une solution globale dans $H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$. A l'aide d'identités de type Viriel, on montre alors qu'une telle hypothèse ne peut être vérifiée. Pour ce faire, on introduit des ensembles invariants et on privilégie une approche sous contrainte, en jouant avec plusieurs caractérisations des états fondamentaux.

Lorsque $1 < p < 3 + \frac{4}{N}$, nous conjecturons que les états fondamentaux sont stables, sans être capable de donner une preuve de ce résultat. Cependant, dans cette direction, on considère la stabilité des minimiseurs pour le problème

$$m(c) = \inf\{\mathcal{E}(u) : u \in X, \|u\|_2^2 = c\}, \quad (3.41)$$

où

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 |\nabla|u||^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \quad (3.42)$$

On note $\mathcal{G}(c)$ l'ensemble des solutions de (3.41). Ce problème peut constituer une première étape vers la stabilité orbitale des états fondamentaux. En effet pour toute solution u de (3.41) avec $\|u\|_2^2 = c$ et $\mathcal{E}(u) = m(c)$, il existe un paramètre ω^* , dépendant de c et u , tel que u soit solution de (3.38) avec $\omega = \omega^*$. Cependant, l'étude de la stabilité orbitale des états fondamentaux via une approche de minimisation sous contrainte (voir [CL82] par exemple) nécessite de savoir que tout les états fondamentaux de (3.38) partagent la même norme L^2 . Excepté dans le cas $N = 1$ pour lequel on est capable de prouver l'unicité des états fondamentaux, on ne dispose pas en général de cette information. De plus, même en dimension 1 d'espace, nous n'arrivons pas à montrer que deux solutions différentes u_1 et u_2 de (3.41) possèdent le même multiplicateur de Lagrange, à savoir $\omega_1^* = \omega_2^*$. Notre résultat de stabilité est le suivant.

Théorème 3.3.4. *Supposons que*

$$1 < p < 3 + \frac{4}{N},$$

et soit $c > 0$ tel que $m(c) < 0$. Alors $\mathcal{G}(c)$ est non vide et orbitalement stable.

Dans le Théorème 3.3.4 la stabilité orbitale de $\mathcal{G}(c)$ est à prendre au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute donnée $a_0 \in X \cap H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$ avec $\inf_{u \in \mathcal{G}(c)} \|a_0 - u\|_{H^1} < \delta$, la solution $\phi(t, \cdot)$ de (3.36) ayant pour donnée initiale a_0 vérifie

$$\sup_{0 < t < T_0} \inf_{u \in \mathcal{G}(c)} \|\phi(t, \cdot) - u\|_{H^1} < \varepsilon,$$

où $T_0 > 0$ est le temps d'existence pour ϕ donné par le Théorème 3.3.1. La preuve du Théorème (3.3.4) est basée essentiellement sur la convergence des suites minimisantes de (3.41) et utilise la méthode de concentration-compacité (voir [L84]). Une fois cette convergence établie, la stabilité orbitale découle d'arguments standard. Finalement, on termine cette partie par une discussion sur la condition $m(c) < 0$.

Théorème 3.3.5. *La fonction $m(c)$ vérifie les propriétés suivantes :*

- 1) *si $1 < p < 1 + \frac{4}{N}$, alors $m(c) < 0$ pour tout $c > 0$.*
- 2) *Si $1 + \frac{4}{N} \leq p \leq 3 + \frac{4}{N}$, alors il existe $c(p, N) > 0$ tel que*
 - i) *si $0 < c < c(p, N)$ alors $m(c) = 0$ et $m(c)$ n'admet pas de minimiseur.*
 - ii) *si $c > c(p, N)$ alors $m(c) < 0$ et $m(c)$ admet un minimiseur. De plus, la fonction $c \mapsto m(c)$ est strictement décroissante.*

3.4 Conclusion

A la suite des travaux présentés dans cette partie, il est possible de faire un certain nombre de remarques et de présenter quelques problèmes ouverts. Tout d'abord, en complément des résultats d'existence des ondes solitaires, se pose la question de l'unicité des états fondamentaux. Cette question se révèle cruciale lorsqu'il s'agit d'aborder la stabilité orbitale de telles solutions via des méthodes variationnelles (essentiellement des méthodes de minimisation sous contraintes). On peut citer, par exemple, le Théorème 3.3.4 qui montre, sous certaines conditions, la stabilité de l'ensemble $\mathcal{G}(c)$ mais qui ne s'attaque pas à la stabilité proprement dite des états fondamentaux (qui peut être raisonnablement conjecturée). Cette version faible de "stabilité dans son ensemble" est expliquée en partie par le fait que l'on ne dispose pas de résultat d'unicité pour ces états. Plus précisément, le problème se reformule de la façon suivante : Soit $\omega_1 > 0$ et u_{ω_1} un état fondamental de l'équation (3.38). On note $c = \|u_{\omega_1}\|_2^2$ et u une solution du problème de minimisation (3.41). Alors, il existe un multiplicateur de Lagrange ω_2 tel que u soit solution d'une équation de type (3.38) dont le paramètre est égal à ω_2 . La question est alors de savoir si tous les états fondamentaux de (3.38) partagent la même norme L^2 et si $\omega_1 = \omega_2$. Ce problème est aussi apparu dans la partie 1.4 de ce mémoire et un argument de concavité permet de donner une réponse positive partielle pour presque toutes les valeurs admissibles du paramètre ω .

Un deuxième point important laissé en suspend est celui de la caractérisation des phénomènes d'instabilité. Le Théorème 3.3.3 propose un résultat d'explosion en temps fini. Qu'en est-il du comportement instable des solutions des théorèmes de la partie 3.1 ? Il serait intéressant d'étudier de telles instabilités via une approche numérique. Un autre prolongement possible de la partie 3.1 serait de continuer l'étude des ondes solitaires, non pas sur des systèmes de Schrödinger simplifiés dans lesquels les opérateurs de dérivation de la partie quasi-linéaire ont été supprimés mais sur les équations complètes présentées dans la partie 2.

Chapitre 4

Approximation des impulsions courtes dans des milieux dispersifs.

4.1 Introduction.

L'équation de Schrödinger non-linéaire est très souvent présentée comme un modèle asymptotique pour de nombreux phénomènes physiques liés à la propagation d'ondes planes. On peut citer en exemple le contexte des ondes de surfaces, du ferromagnétisme et bien sûr de l'optique non-linéaire. Considérons un système hyperbolique avec une donnée initiale rapidement oscillante de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u + A(\partial)u + \frac{1}{\varepsilon}Eu = \varepsilon F(u), \\ u|_{t=0} = U^0(x)e^{i\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}{\varepsilon}} + \text{c.c.}; \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\varepsilon \ll 1$ est un petit paramètre qui correspond à la longueur d'onde des oscillations. L'approximation de type Schrödinger consiste alors à

- 1) décomposer la solution en produit d'une enveloppe U avec un train d'onde rapidement oscillant

$$u(t, x) \sim U(t, x)e^{i\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t}{\varepsilon}} + \text{c.c.}, \quad (4.2)$$

où $(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})$ vérifie une relation de dispersion,

- 2) approcher l'enveloppe U par la solution de l'équation de Schrödinger suivante

$$\partial_t U + (\mathbf{c}_g \cdot \nabla)U - \varepsilon \frac{i}{2} \mathcal{R}(\partial, \partial)U = \varepsilon \tilde{F}(U), \quad U|_{t=0} = U^0, \quad (4.3)$$

où la vitesse de groupe $\mathbf{c}_g$, l'opérateur différentiel $\mathcal{R}(\partial, \partial)$ et la nonlinéarité $\tilde{F}$ s'expriment en fonction des données du problème de départ. L'approximation 1)-2) a été justifiée dans, par exemple, [L98] pour des temps de l'ordre de $O(1/\varepsilon)$, ce qui correspond à un nombre d'oscillation des pulses du même ordre $O(1/\varepsilon)$. Cependant, les impulsions laser ultra-courtes ne rentrent pas dans ce cadre là et pour les décrire, l'approximation d'enveloppe 1) n'est plus valide. En effet, il est communément admis que cette approximation est valide tant que

$$|\nabla U^0|_\infty \ll \frac{1}{\varepsilon}, \quad (4.4)$$

ce qui exclut les impulsions ultra-courtes. Des alternatives ont alors été proposées. Citons en particulier le travail [AR03] dans lequel la condition oscillante est remplacée par une donnée rapidement décroissante de la forme

$$u|_{t=0} = U^0(x, \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}{\varepsilon}),$$

avec $U^0(x, z) \rightarrow 0$ as $|z| \rightarrow \infty$, et l'approximation d'enveloppe est remplacée par

$$u(t, x) \sim U(t, x, \frac{\mathbf{k} \cdot x - \omega(\mathbf{k})t}{\varepsilon}),$$

où $U(t, x, z) \rightarrow 0$ as $z \rightarrow \infty$. L'équation de Schrödinger (4.3) est alors remplacée par

$$\partial_t \partial_z U + (\mathbf{c}_g \cdot \nabla) \partial_z U + \varepsilon \frac{1}{2} \mathcal{R}(\partial, \partial) U = \varepsilon \partial_z \tilde{F}(U), \quad U|_{t=0} = U^0. \quad (4.5)$$

Notons que dans [AR03], la vitesse de groupe $\mathbf{c}_g$ ne dépend pas de $|\mathbf{k}|$ et l'approximation n'est donc pas valable pour les milieux dispersifs. Pour traiter le cas de tels milieux, Barraill et Lannes (voir [BL02]) ont choisi de considérer des données initiales de la forme

$$u|_{t=0} = U^0(x, 0, \frac{\mathbf{k} \cdot x}{\varepsilon}),$$

où la transformée de Fourier du profil U^0 est une mesure à variations bornées dans H^s . Cependant, les équations qui découle de ce choix sont en générale non locales et s'avèrent difficiles à traiter de manière numérique.

Les impulsions ultra-courtes possèdent un spectre en fréquence très large. En conséquence, puisque la relation de dispersion de (4.3) est un développement de Taylor d'ordre 2 de celle de (4.1), l'erreur commise sur des fréquences éloignées de $\mathbf{k}$ devient importante, ce phénomène n'étant pas exclusivement réservé aux impulsions ultra-courtes puisqu'il concerne toutes les impulsions à spectre large. Une alternative possible pour décrire ces impulsions est de conserver l'approximation d'enveloppe en gardant les propriétés dispersives du modèle originel ainsi que la relation de dispersion totale. L'approximation est alors valable pour les impulsions courtes (mais pas ultra-courtes). Par exemple, dans [CGL05], les auteurs introduisent l'équation FDM (*full dispersion model*)

$$\partial_t U + \frac{i}{\varepsilon} (\omega(\mathbf{k} + \varepsilon D) - \underline{\omega}) U = \varepsilon \tilde{F}(U), \quad U(x) = U^0(x),$$

où $\omega(\cdot)$ est une paramétrisation de la branche adéquate de la variété caractéristique. Ce modèle est plus simple que les précédents mais inclut des opérateurs non-locaux et nécessite donc des méthodes spectrales de résolution. Le but de ce travail est de fournir une nouvelle approximation qui conserve les propriétés dispersives de l'équation FDM tout en ayant les avantages de l'équation de Schrödinger. Pour les applications pratiques, nous considérons deux types d'impulsions

- *Short-pulses* : le profil initial $U^0(x)$ dans (4.1) est de la forme

$$U^{0,\beta}(x) = f\left(\frac{x - x_0}{\beta}\right), \quad (4.6)$$

avec $0 < \beta \leq 1$, f étant une fonction régulière. Le cas $\beta = 1$ correspond aux impulsions laser classiques, le cas $\varepsilon \ll \beta \ll 1$ aux impulsions courtes et $\beta = O(\varepsilon)$ aux impulsions ultra-courtes ;

- *Chirped pulses* : le profil initial $U^0(x)$ dans 4.1) est de la forme

$$U^{0,\beta}(x) = f(x - x_0) \cos\left(\frac{1}{\beta} \cos\left(\frac{x - x_0}{\beta}\right)\right), \quad (4.7)$$

avec $0 < \beta \leq 1$, f est aussi une fonction régulière. Le cas $\beta = 1$ correspond aux impulsions laser classiques et $\beta \ll 1$ aux chirped pulses.

Les objectifs de ce travail sont alors les suivants

1. fournir un cadre de travail plus simple que celui de [BL02] permettant quand même de traiter le cas des spectres larges. L'idée est de garder l'approximation d'enveloppe (4.2) et de travailler dans les algèbres de Wiener (qui permettent de contrôler la norme L^∞ , ce qui n'est pas le cas des espaces de Sobolev) définies de la manière suivante

$$W^k(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k, |\partial^\alpha f|_W < \infty\}, \quad (4.8)$$

avec $|f|_W := |\widehat{f}|_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)}$.

2. Prouver de manière rigoureuse la règle (4.4). Nous montrons que l'approximation (4.2) a un sens tant que $|\nabla U^0|_W \ll \frac{1}{\varepsilon}$, où $|\cdot|_W$ est la norme dans l'espace de Wiener.
3. Etablir des estimations d'erreur précises pour les différents modèles afin d'établir leur domaine de validité.
4. Introduire une nouvelle famille d'équations de Schrödinger avec une "meilleure" relation de dispersion, contenant uniquement des opérateurs différentiels. Ces modèles s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} & (1 - i\varepsilon \mathbf{b} \cdot \nabla - \varepsilon^2 \nabla \cdot B \nabla) \partial_t U + (\mathbf{c}_g \cdot \nabla) U \\ & - \varepsilon \frac{i}{2} \mathcal{R}(\partial, \partial) U + i\varepsilon \nabla \cdot (\nabla \omega_1(\mathbf{k}) \mathbf{b}^T) \nabla U + \varepsilon^2 \mathbf{C}(\nabla) U = \widetilde{F}(U), \end{aligned} \quad (4.9)$$

où $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^d$, $B \in \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{C} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme trilinéaire.

5. Présenter des résultats numériques en comparant les différents modèles, pour des impulsions courtes et des *chirped pulses*.

4.2 Présentation des résultats.

Avant d'énoncer les résultats obtenus, il est nécessaire de préciser les hypothèses faites sur le système général suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + A(\partial)u + \frac{E}{\varepsilon}u = \varepsilon T(u, \bar{u}, u), \\ u|_{t=0} = U^0(x) e^{i \frac{\mathbf{k} \cdot x}{\varepsilon}} + \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Hypothèse 1 :

i. Le système (4.10) est hyperbolique symétrique : il existe $n \geq 1$ tel que

- $A(\partial) = \sum_{j=1}^d A_j \partial_j$, où les matrices A_j sont réelles, symétriques d'ordre n ,
- La matrice, d'ordre n , E est réelle et anti-symétrique ;

ii. L'application

$$T = \begin{matrix} \mathbb{C}^{3n} & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ (u^1, u^2, u^3) & \mapsto & T(u^1, u^2, u^3), \end{matrix}$$

est linéaire par rapport à u^1 , u^2 et u^3 .

Sous l'Hypothèse 1, la matrice $A(\mathbf{k}) + \frac{E}{i} = \sum_{j=1}^d A_j \mathbf{k}_j + \frac{E}{i}$ est hermitienne pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. On peut donc définir la variété caractéristique

$$\mathcal{C} := \{(\omega, \mathbf{k}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \omega \text{ est une valeur propre de } A(\mathbf{k}) + \frac{E}{i}\}. \quad (4.11)$$

Il est alors classique de faire les hypothèses suivantes sur $\mathcal{C}$.

Hypothèse 2 : Ils existent $m \in \mathbb{N}$ et des fonctions régulières $\omega_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ ($j = 1, \dots, m$), telles que pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, les valeurs propres de $A(\mathbf{k}) + \frac{E}{i}$ sont données par $\omega_j(\mathbf{k})$ ($j = 1, \dots, m$).

Sous l'Hypothèse 2, on peut alors écrire pour $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$A(\mathbf{k}) + \frac{E}{i} = \sum_{j=1}^m \omega_j(\mathbf{k}) \pi_j(\mathbf{k}), \quad (4.12)$$

où $\pi_j(\mathbf{k})$ est le projecteur associé à $\omega_j(\mathbf{k})$ (en particulier, $\pi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$).

On peut enfin énoncer la dernière hypothèse portant sur le nombre d'onde $\underline{\mathbf{k}}$ de la donnée initiale de (4.10).

Hypothèse 3 : On a $\underline{\mathbf{k}} \neq 0$ et, avec $\underline{\omega} = \omega_1(\underline{\mathbf{k}})$:

- on a $(3\underline{\omega}, 3\underline{\mathbf{k}}) \notin \mathcal{C}$;
- Avec les notations de l'Hypothèse 2,

$$\exists c_0 > 0, \quad \forall j = 2, \dots, m, \quad \inf_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} |\underline{\omega} - \omega_j(\mathbf{k})| \geq c_0.$$

On peut maintenant énoncer le premier résultat concernant l'approximation d'enveloppe (4.2). On montre, qu'au premier ordre, la solution de (4.10) peut être décrite par u_{app}^ε

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) = U(t, x) e^{i \frac{\mathbf{k} \cdot x - \omega t}{\varepsilon}} + \text{c.c.}, \quad (4.13)$$

où U est solution de

$$\begin{cases} \partial_t U + \frac{i}{\varepsilon} \mathcal{L}(\underline{\omega}, \underline{\mathbf{k}} + \varepsilon D) U = \varepsilon \mathcal{T}(U) \\ U|_{t=0}(x) = U^0(x), \end{cases} \quad (4.14)$$

$\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ est défini par

$$\mathcal{L}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) := -\omega I + A(\mathbf{k}) + \frac{E}{i}, \quad (4.15)$$

et $\mathcal{T}$ est égale à

$$\mathcal{T}(U) = T(\overline{U}, U, U) + T(U, \overline{U}, U) + T(U, U, \overline{U}).$$

L'avantage de l'approximation (4.14) est que l'échelle ε n'apparaît plus dans la condition initiale. Le résultat est le suivant.

Théorème 4.2.1. *On suppose que les Hypothèses 1, 2 et 3 sont satisfaites. Soient $a, b \in W^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ et*

$$U^0 = \pi_1(\underline{\mathbf{k}})a + \varepsilon b.$$

i. *Il existe un temps $\tau_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe une unique solution $U \in C([0, \frac{\tau_0}{\varepsilon}); W(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ de (4.14) ;*

ii. *Pour tout $0 < \tau < \tau_0$, il existe ε_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une unique solution $u_{ex}^\varepsilon \in C([0, \tau/\varepsilon] \times \mathbb{R}^d)^n$ de (4.10), vérifiant*

$$|u_{ex}^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon|_{L^\infty([0, \tau/\varepsilon] \times \mathbb{R}^d)^n} \leq \varepsilon C(\tau, |U^0|_W)(1 + |b|_W + |\nabla U^0|_W),$$

où u_{app}^ε est défini par (4.13).

On peut maintenant introduire les nouveaux modèles scalaires.

- *Le modèle complètement dispersif.* Il consiste à approcher la solution exacte de (4.10) par

$$u_{app,1}^\varepsilon(t, x) = U_{(1)}(t, x) e^{i \frac{\mathbf{k} \cdot x - \omega t}{\varepsilon}} + \text{c.c.}, \quad (4.16)$$

où $U_{(1)}$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t U_{(1)} + \frac{i}{\varepsilon} (\omega_1(\underline{\mathbf{k}} + \varepsilon D) - \underline{\omega}) U_{(1)} = \varepsilon \pi_1(\underline{\mathbf{k}}) \mathcal{T}(U_{(1)}) \\ U_{(1)}|_{t=0}(x) = U^0(x) \end{cases} \quad (4.17)$$

et $\omega_1(\cdot)$ vérifie l'Hypothèse 1. On a alors le résultat suivant.

Corollaire 4.2.2. *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.1, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit), il existe une unique solution $U_{(1)} \in C([0, \tau_0/\varepsilon]; W(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ de (4.17).*

De plus, pour tout $0 < \tau < \tau_0$, on a

$$|u_{ex}^\varepsilon - u_{app,1}^\varepsilon|_{L^\infty([0, \tau/\varepsilon] \times \mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon C(\tau, |U^0|_W)(1 + |b|_W + |\nabla U^0|_W),$$

où $u_{app,1}^\varepsilon$ est défini par (4.16).

• *L'équation de Schrödinger non-linéaire.* Dans ce contexte, la solution exacte de (4.10) est approchée par

$$u_{app,2}^\varepsilon(t, x) = U_{(2)}(t, x) e^{i \frac{\mathbf{k} \cdot x - \omega t}{\varepsilon}} + \text{c.c.}, \quad (4.18)$$

où le profil $U_{(2)}$ est solution de l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} \partial_t U_{(2)} + (\nabla \omega_1(\mathbf{k}) \cdot \nabla) U_{(2)} - \varepsilon \frac{i}{2} (\nabla \cdot H_{\mathbf{k}}(\omega_1) \nabla) U_{(2)} = \varepsilon \pi_1(\mathbf{k}) \mathcal{T}(U_{(2)}) \\ U_{(2)}|_{t=0}(x) = U^0(x), \end{cases} \quad (4.19)$$

et $H_{\mathbf{k}}(\omega_1)$ est le Hessien de $\omega_1(\cdot)$ en $\mathbf{k}$. On peut alors énoncer le résultat suivant.

Corollaire 4.2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.1, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit), il existe une unique solution $U_{(2)} \in C([0, \tau_0/\varepsilon]; W(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ de (4.19).*

Si de plus $U^0 \in W^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ alors pour tout $0 < \tau < \tau_0$, on a

$$|u_{ex}^\varepsilon - u_{app,2}^\varepsilon|_{L^\infty([0, \tau/\varepsilon] \times \mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon C(\tau, |U^0|_W)(1 + |\nabla U^0|_W + |b|_W + |\mathfrak{c}_{Schrod}|_\infty |U^0|_{W^3}),$$

où $u_{app,2}^\varepsilon$ est défini par (4.18) et

$$\mathfrak{c}_{Schrod}(\xi) := \frac{(\omega_1(\mathbf{k} + \varepsilon \xi) - (\omega + \varepsilon \nabla \omega_1(\mathbf{k}) \cdot \xi + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \xi \cdot H_{\mathbf{k}}(\omega_1) \xi))}{\varepsilon^3(1 + |\xi|^3)}.$$

• *L'équation de Schrödinger non-linéaire améliorée.* On propose ici une équation de Schrödinger modifiée pour laquelle la relation de dispersion est proche de celle du modèle exact. Elle est définie par

$$u_{app,3}^\varepsilon(t, x) = U_{(3)}(t, x) e^{i \frac{\mathbf{k} \cdot x - \omega t}{\varepsilon}} + \text{c.c.}, \quad (4.20)$$

où l'enveloppe $U_{(3)}$ est solution de

$$\begin{cases} (1 - i\varepsilon \mathbf{b} \cdot \nabla - \varepsilon^2 \nabla \cdot B \nabla) \partial_t U_{(3)} \\ \quad + (\nabla \omega_1(\mathbf{k}) \cdot \nabla - i\varepsilon \nabla \cdot (\frac{1}{2} H_{\mathbf{k}}(\omega_1) + \nabla \omega_1(\mathbf{k}) \mathbf{b}^T) \nabla + \varepsilon^2 \mathbf{C}(\nabla)) U_{(3)} \\ \quad = \varepsilon \pi_1(\mathbf{k}) \mathcal{T}(U_{(3)}) \\ U_{(3)}|_{t=0}(x) = U^0(x), \end{cases} \quad (4.21)$$

avec $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^d$, $B \in \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{R})$, $\mathbf{C} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ étant une forme trilinéaire. On suppose de plus que

$$B \text{ est symétrique positive, } \mathbf{b} \in \text{Image}(B), \quad \text{et} \quad 4 - \mathbf{b} \cdot (B^{-1} \mathbf{b}) > 0 \quad (4.22)$$

Le résultat suivant justifie alors cette approximation.

Corollaire 4.2.4. *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.1, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit), il existe une unique solution $U_{(3)} \in C([0, \tau_0/\varepsilon]; W(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ de (4.21).*

Si de plus $U^0 \in W^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ alors pour tout $0 < \tau < \tau_0$, on a

$$|u_{ex}^\varepsilon - u_{app,3}^\varepsilon|_{L^\infty([0, \tau/\varepsilon] \times \mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon C(\tau, |U^0|_W)(1 + |\nabla U^0|_W + |b|_W + |\mathfrak{c}_{improved}|_\infty |U^0|_{W^3}),$$

où $u_{app,3}^\varepsilon$ est défini par (4.20) et

$$\mathfrak{c}_{improved}(\xi) := \frac{\omega_1(\mathbf{k} + \varepsilon \xi) - (\omega + \varepsilon \frac{\nabla \omega_1(\mathbf{k}) \cdot \xi + \varepsilon \xi \cdot (\frac{1}{2} H_{\mathbf{k}}(\omega_1) + \nabla \omega_1(\mathbf{k}) \mathbf{b}^T) \xi - \varepsilon^2 \mathbf{C}(\xi))}{1 + \varepsilon \mathbf{b} \cdot \xi + \varepsilon^2 \xi \cdot B \xi}}{\varepsilon^3(1 + |\xi|^3)}.$$

Nous verrons dans le paragraphe suivant, à l'aide d'un exemple concret, quelle est l'amélioration apportée par ce nouveau modèle.

4.3 Simulations numériques.

Pour illustrer le bien fondé de ces approximations, on présente maintenant quelques simulations numériques sur le modèle suivant utilisé dans [CGL05]

$$\begin{cases} \partial_t f + \partial_x g - \frac{g}{\varepsilon} = -\varepsilon(|f|^2 + |g|^2)g, \\ \partial_t g + \partial_x f + \frac{f}{\varepsilon} = \varepsilon(|f|^2 + |g|^2)f. \end{cases} \quad (4.23)$$

Le but est de comparer numériquement les solutions du système complet (4.10) avec celles des différentes équations introduites dans la section précédente, en considérant des impulsions courtes et des *chirped pulses*. La condition initiale est

$$f|_{t=0}(x) = f^0(x)e^{i\frac{x}{\varepsilon}} + \text{c.c.}, \quad g|_{t=0}(x) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}f^0(x)e^{i\frac{x}{\varepsilon}} + \text{c.c.} \quad (4.24)$$

(ce qui, avec les notations du Théorème 4.2.1 correspond à $\underline{k} = 1$, $b = 0$ et $a = \pi_1(\underline{k})a = (f^0, \frac{1-i}{\sqrt{2}}f^0)^T$). Les 3 modèles asymptotiques s'écrivent alors :

- *Modèle complètement dispersif.* La solution exacte de (4.23) est approchée par

$$u_{app,1}^\varepsilon(t, x) = U_{(1)}(t, x)e^{i\frac{x-\sqrt{2}t}{\varepsilon}} + \text{c.c.},$$

où $U_{(1)} = (f_{(1)}, g_{(1)})$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t f_{(1)} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{-D+\varepsilon D^2}{\sqrt{1+(1+\varepsilon D)^2+\sqrt{2}}} f_{(1)} = \frac{4i\varepsilon}{\sqrt{2}} |f_{(1)}|^2 f_{(1)}, \\ g_{(1)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} f_{(1)} \quad (\text{condition de polarisation}). \end{cases} \quad (4.25)$$

- *L'équation de Schrödinger nonlinéaire.* La solution exacte de (4.23) est approchée par

$$u_{app,2}^\varepsilon(t, x) = U_{(2)}(t, x)e^{i\frac{x-\sqrt{2}t}{\varepsilon}} + \text{c.c.},$$

où $U_{(2)} = (f_{(2)}, g_{(2)})$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t f_{(2)} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x f_{(2)} - i\frac{\varepsilon}{4}\partial_x^2 f_{(2)}) = \varepsilon \frac{4i}{\sqrt{2}} |f_{(2)}|^2 f_{(2)}, \\ g_{(2)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} f_{(2)}. \end{cases} \quad (4.26)$$

- *L'équation de Schrödinger modifiée.* On approche la solution de (4.23) par

$$u_{app,3}^\varepsilon(t, x) = U_{(3)}(t, x)e^{i\frac{x-\sqrt{2}t}{\varepsilon}} + \text{c.c.},$$

où $U_{(3)} = (f_{(3)}, g_{(3)})$ est solution de

$$\begin{cases} (1 - i\varepsilon\partial_x - \varepsilon^2 \frac{5}{16}\partial_x^2)\partial_t f_{(3)} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x - i\varepsilon\frac{5}{4}\partial_x^2 + \varepsilon^2 \frac{7}{16}\partial_x^3)f_{(3)} = \frac{4i\varepsilon}{\sqrt{2}} |f_{(3)}|^2 f_{(3)}, \\ g_{(3)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} f_{(3)}; \end{cases} \quad (4.27)$$

En ce qui concerne le schéma numérique, on utilise une méthode spectrale en espace et une méthode de splitting en temps. On commence par décrire les résultats pour les impulsions courtes. Le domaine de calcul est $[0, 30\pi]$. La données initiales est prise sous la forme

$$f^0(x) = G\left(\frac{x-x_0}{\beta}\right),$$

où $G = e^{-x^2}$, $x_0 = 15$. La pertinence des approximations (4.25), (4.26) et (4.27) est établie à l'aide de la quantité suivante :

$$E_{(j)}(\varepsilon, \beta) = \sup_{t \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]} \frac{|f(t, \cdot) - (f_{(j)}(t, \cdot) e^{i \frac{kx - \omega t}{\varepsilon}} + \text{c.c.})|_{\infty}}{|f(t, \cdot)|_{\infty}}, \quad (4.28)$$

où $j = 1$ correspond à (4.25), $j = 2$ à (4.26) et $j = 3$ à (4.27).

Les données sont : ε varie entre 0.001 et 0.1, $T = 50$ (temps de calcul final) et $\beta = 0.1$. Les résultats sont regroupés dans la figure 4.1. On peut observer sur la figure 4.1 que les modèles (4.25) et (4.27) fournissent

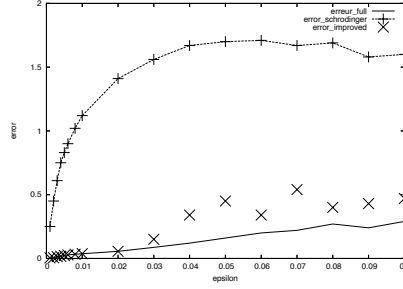


FIGURE 4.1 – Impulsions courtes : Erreur $E_{(j)}(\varepsilon, \beta)$ pour $\beta = 0.1$ et $\varepsilon \in [0.001, 0.1]$.

une bonne approximation alors que l'équation de Schrödinger (4.26) est complètement inappropriée.

On regarde maintenant le cas des *chirped pulses*. On considère une condition initiale pour (4.23) de la forme (4.24) avec

$$f^0(x) = G(x - x_0) \cos\left(\frac{1}{\beta} \cos\left(\frac{x - x_0}{\beta}\right)\right),$$

où $G = e^{-x^2}$. Les domaines de calculs sont les mêmes que dans l'exemple précédent. Les autres paramètres sont : $\varepsilon = 0.01$, et on fait varier β de 0.01 (*chirped pulses*) à 1, $T = 1/\varepsilon = 100$. On observe sur la figure 4.2 que les deux modèles (4.25) et (4.27) deviennent appropriés pour $\beta \geq 0.1$ alors que l'approximation de Schrödinger (4.26) n'est valable que pour $\beta \geq 0.4$.

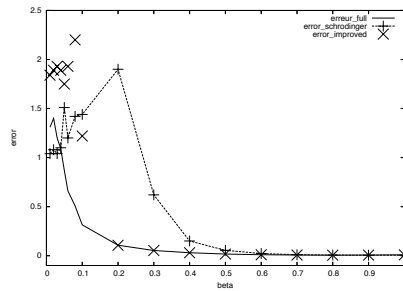


FIGURE 4.2 – *Chirped pulses* : Erreur $E_{(j)}(\varepsilon, \beta)$ pour $\varepsilon = 0.01$ et $\beta \in [0.01, 1]$.

En conclusion, le but de ce travail était d'une part d'introduire de nouveaux modèles ne faisant intervenir que des opérateurs différentiels capables de décrire la propagation de "short pulses" et de "chirped pulses" et d'autre part de donner des estimations d'erreur permettant de décrire le domaine

de validité de ces modèles. Enfin, nous avons effectué des tests numériques pour illustrer ces résultats à l'aide du système introduit dans [CGL05].

Deuxième partie

Etude de quelques problèmes issus de la
mécanique des fluides.

Chapitre 5

Un problème de contrôle optimal.

5.1 Présentation du problème.

Le but de ce travail est de fournir de nouvelles directions pour appréhender un problème de contrôle optimal pour les équations de Navier-Stokes posées sur un domaine borné. Il a fait l'objet de la publication [12], en collaboration avec P. Fabrie. En théorie du contrôle optimal, on cherche à minimiser une fonctionnelle de coût, impliquant généralement l'énergie cinétique et une norme adéquate sur le contrôle. C'est un problème très classique de mécanique des fluides qui apparait, par exemple, lorsque l'on veut augmenter les performances d'un avion en modifiant l'écoulement près des parois à l'aide de conditions aux bords non-homogènes (voir [BMT01], [CFT85]). Un nombre d'articles importants traite le sujet d'un point de vue théorique (voir [B03], [B01], [F96], [F98], [I98] et [I01]), mais le point de vue numérique reste un domaine largement ouvert (voir [IFZ01], [IZ01]). On s'intéresse ici au cas où le contrôle est défini seulement sur une partie de la frontière du domaine. La situation est la suivante. Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^2$ et $\partial\Omega$ sa frontière (voir Figure 5.1). On suppose que $\partial\Omega = \Gamma_e \cup \Gamma_c$ avec $\Gamma_e \cap \Gamma_c = \emptyset$, Γ_e et Γ_c désignant respectivement les parties extérieure et intérieure du domaine. Le contrôle est défini sur Γ_c et sur Γ_e , on impose une condition de Dirichlet non-homogène.

On se donne alors une fonction régulière g définie sur Γ_e , un contrôle u_ρ défini sur Γ_c et on introduit la fonctionnelle d'énergie que l'on souhaite minimiser

$$J(u_\rho) = \|u(\tau)\|_Y^2 + \alpha \|u_\rho(\tau)\|_X^2,$$

où X and Y sont deux espaces de Hilbert à choisir et α est un paramètre positif (d'un point de vue mathématique, on choisira $\alpha = 1$). Notons que l'espace X représente l'ensemble des contrôles admissibles.

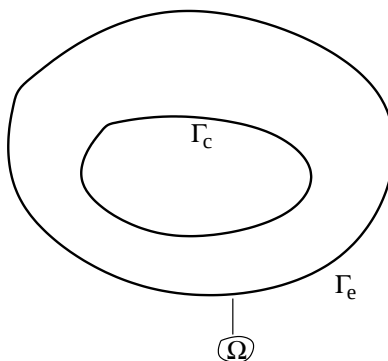


FIGURE 5.1 – Exemple de domaine Ω .

La relation entre u et u_ρ est donnée par le système de Navier-Stokes suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla)u(t, x) - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta u(t, x) + \nabla p(t, x) = f(t, x), \\ \operatorname{div}(u)(t, x) = 0, \\ u|_{\Gamma_c}(t, x) = u_\rho(t, x), \quad u|_{\Gamma_e}(t, x) = g(x), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.1)$$

où $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$, u_0 est une donnée initiale régulière, f est la force extérieure appliquée au système et $\mathcal{R}_e$ est le nombre de Reynolds. L'originalité de ce travail réside dans l'introduction d'un cadre naturel pour définir l'espace X (voir ci-dessous pour la construction). On recherche alors un contrôle u_ρ^{opt} dans l'espace X qui vérifie

$$J(u_\rho^{opt}) = \inf_{u_\rho \in X} J(u_\rho). \quad (5.2)$$

Les résultats présentés dans [12] sont les suivants. En premier lieu, rappelons que, sous certaines hypothèses sur g et u_0 , le problème de Cauchy (5.1) est bien posé (voir [T77]). Après avoir introduit l'espace des contrôles admissibles X , nous montrons l'existence d'un contrôle optimal u_ρ^{opt} vérifiant (5.2). Notons que la fonctionnelle J n'étant pas convexe, nous ne pouvons prouver l'unicité d'un tel u_ρ^{opt} . Cependant, nous présentons les équations d'Euler satisfaites par le contrôle optimal. Le manque d'unicité peut s'avérer problématique pour la construction d'une approximation de celui-ci, c'est pour cela que nous introduisons ensuite un problème linéarisé sur lequel nous pouvons énoncer des résultats constructifs.

5.2 Construction de l'espace de contrôle.

L'originalité du travail présenté ici est de définir un cadre naturel pour l'espace des contrôles admissibles X . Nous présentons ici la manière de le construire. Commençons par relever la condition de Dirichlet au bord en introduisant $\mathcal{U}_\rho$ solution du système de Stokes suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}_\rho}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta \mathcal{U}_\rho + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div}(\mathcal{U}_\rho) = 0, \\ \mathcal{U}_\rho|_{\Gamma_c} = u_\rho, \quad \mathcal{U}_\rho|_{\Gamma_e} = 0, \quad \int_{\Gamma_e} \mathcal{U}_\rho \cdot n \, ds = 0, \\ \mathcal{U}_\rho(0) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

La solution $\mathcal{U}_\rho$ appartient à l'espace

$$\mathcal{W}^L = \left\{ v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \text{ tel que } \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta v + \nabla p = 0, \right. \\ \left. \operatorname{div}(v) = 0, \quad v(0, \cdot) = 0, \quad v|_{\Gamma_e} = 0 \right\}, \quad (5.4)$$

On montre alors que l'espace $\mathcal{W}^L$ est un sous-espace fermé de $L^2(0, T; H^1)$ pour la topologie induite. De plus, les éléments de $\mathcal{W}^L$ possèdent des traces sur Γ_c dans $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))$. Plus précisément, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\Gamma_c} : \quad L^2(0, T; H^1(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)) \\ v &\longrightarrow \mathcal{R}_{\Gamma_c}(v) = v|_{\Gamma_c} \end{aligned}$$

est continue et injective. Pour $0 < \sigma < 1$, on introduit

$$\mathcal{W}_\sigma^{NL} = \mathcal{W}^L \cap H^\sigma(0, T; L^2(\Omega))$$

équipé de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{W}_{\sigma}^{NL}} = \left(\|v\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|D_t^{\sigma} v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $H^{\sigma}(0,T;L^2(\Omega))$ est défini à partir des dérivées fractionnaires d'ordre σ en temps D_t^{σ} , via la transformée de Fourier. On regarde maintenant l'espace de trace $\mathcal{W}_{\sigma,c}^{NL}$ associé à travers l'opérateur $\mathcal{R}|_{\Gamma_c}$. Pour $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, l'espace X des contrôles admissibles adapté au problème de contrôle optimal non-linéaire est

$$X = \mathcal{W}_{\sigma,c}^{NL}.$$

En vue d'étudier un problème approché linéarisé, on introduit aussi l'espace de Hilbert des restrictions à Γ_c des fonctions de $\mathcal{W}^L$

$$\mathcal{W}_c^L = \mathcal{R}_{\Gamma_c}(\mathcal{W}^L) = \left\{ w|_{\Gamma_c}, w \in \mathcal{W}^L \right\},$$

muni de la norme

$$\|\gamma\|_{\mathcal{W}_c^L} = \|v\|_{L^2(0,T;H^1)},$$

où v est l'unique fonction de $\mathcal{W}^L$ telle que $\mathcal{R}_{\Gamma_c}(v) = \gamma$.

5.3 Présentation des résultats.

Dans cette partie, on présente les principaux résultats obtenus sur ce problème de contrôle optimal. Pour tout couple de données (u_0, g) , rappelons tout d'abord la condition de compatibilité associée au système (5.1)

$$\int_{\Gamma_e} g \cdot n \, d\sigma = 0, \quad (u_0 \cdot n)|_{\Gamma_e} = g \cdot n. \quad (5.5)$$

Ensuite, on introduit les espaces de Banach

$$Y = L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

$$H = \{v \in L^2(\Omega), \operatorname{div}(v) = 0, (v \cdot n)|_{\Gamma_e} = 0\}, \quad (5.6)$$

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega), \operatorname{div}(v) = 0\}. \quad (5.7)$$

Le premier résultat concerne l'existence d'un tel contrôle dans l'espace $X = \mathcal{W}_{\sigma,c}^{NL}$ que nous avons introduit dans la section précédente.

Théorème 5.3.1. *Supposons que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière C^1 . Alors pour toute fonctions (u_0, g) appartenant à $H \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$ qui vérifient la condition (5.5), il existe au moins un contrôle optimal u_{ρ}^{opt} solution de $J(u_{\rho}^{opt}) = \inf_{u_{\rho} \in X} J(u_{\rho})$, avec $X = \mathcal{W}_{\sigma,c}^{NL}$.*

On pose alors $v = u - \mathcal{U}_{\rho}$ la solution du système de Navier-Stokes suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + (\mathcal{U}_{\rho} \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)\mathcal{U}_{\rho} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta v + \nabla p \\ \quad = f - (\mathcal{U}_{\rho} \cdot \nabla)\mathcal{U}_{\rho}, \\ \operatorname{div}(v) = 0, \quad v|_{\Gamma_c} = 0, \quad v|_{\Gamma_e} = g, \quad v(0) = u_0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Il est ici utile de préciser que, par application du Theorem 3.1 de [T77], on peut montrer le résultat suivant sur l'existence d'une solution du système (5.8) :

Théorème 5.3.2. *Supposons que $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vérifie (5.5), $f \in L^2(0,T;V')$ et $u_0 \in H$. Alors il existe une unique solution $v \in L^{\infty}(0,T;H)$ de (5.8). De plus, v est faiblement continue de $[0,T]$ dans H .*

On montre aussi un résultat de régularité pour l'application $\mathcal{U}_\rho \mapsto v$.

Théorème 5.3.3. *Soit $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. L'application $\mathcal{U}_\rho \in \mathcal{W}^L \cap H^\sigma(0, T; L^2) \mapsto v$ où v est la solution de (5.8) est dérivable au sens de Fréchet. De plus, pour tout $h \in \mathcal{W}^L \cap H^\sigma(0, T; L^2)$, $z = v'(\mathcal{U}_\rho) \cdot h$ est solution de*

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta z + v \cdot \nabla z + z \cdot \nabla v + \mathcal{U}_\rho \cdot \nabla z + z \cdot \nabla \mathcal{U}_\rho \\ + h \cdot \nabla v + v \cdot \nabla h + \mathcal{U}_\rho \cdot \nabla h + h \cdot \nabla \mathcal{U}_\rho + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div}(z) = 0, \quad z|_\Gamma = 0, \quad z(0) = 0. \end{cases}$$

On met ensuite en évidence la condition d'optimalité, sous sa forme faible, satisfaite par $\mathcal{U}_\rho^{opt}$.

Corollaire 5.3.4. *Sous les hypothèses du Théorème 5.3.1, le relèvement $\mathcal{U}_\rho^{opt}$ défini par (5.3) de u_ρ^{opt} vérifie*

$$\forall h \in \mathcal{W}_\sigma^{NL}, \quad (z, \mathcal{U}_\rho^{opt})_X + ((\mathcal{U}_\rho^{opt}, h))_Y = 0,$$

où z est solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta z + v \cdot \nabla z + z \cdot \nabla v + \mathcal{U}_\rho^{opt} \cdot \nabla z + z \cdot \nabla \mathcal{U}_\rho^{opt} \\ + h \cdot \nabla v + v \cdot \nabla h + \mathcal{U}_\rho^{opt} \cdot \nabla h + h \cdot \nabla \mathcal{U}_\rho^{opt} + \nabla \pi = 0, \\ \operatorname{div}(z) = 0, \quad z|_\Gamma = 0, \quad z(0) = 0. \end{cases}$$

et $(\cdot, \cdot)_X$ (resp. $((\cdot, \cdot))_Y$) est le produit scalaire sur X (resp. Y).

Nous présentons maintenant la version linéarisée du problème de contrôle optimal. Soit $\bar{v} \in H^2(\Omega)$ la solution de

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + \nabla \pi = 0, \\ \operatorname{div}(\bar{v}) = 0, \quad \bar{v}|_{\Gamma_c} = 0, \quad \bar{v}|_{\Gamma_e} = g, \end{cases} \quad (5.9)$$

où $g \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_e)$. On note v la solution de (5.1) avec les conditions aux bords

$$v|_{\Gamma_c} = u_\rho \in \mathcal{W}_c^L, \quad v|_{\Gamma_e} = g.$$

Alors $w = v - \bar{v}$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta w + w \cdot \nabla w + \bar{v} \cdot \nabla w + w \cdot \nabla \bar{v} + \nabla \pi = 0, \\ \operatorname{div}(w) = 0, \quad w|_{\Gamma_e} = 0, \quad w|_{\Gamma_c} = u_\rho, \quad w(0) = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Puisque l'on s'attend à ce que w soit petit, on introduit une version linéarisée de (5.10) autour de 0

$$\begin{cases} \frac{\partial w_L}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta w_L + \bar{v} \cdot \nabla w_L + w_L \cdot \nabla \bar{v} + \nabla \pi = 0, \\ \operatorname{div}(w_L) = 0, \quad w_L|_{\Gamma_e} = 0, \quad w_L|_{\Gamma_c} = u_\rho, \quad w_L(0) = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Enfin, $\tilde{w} = w_L - \mathcal{U}_\rho$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta \tilde{w} + \bar{v} \cdot \nabla (\tilde{w} + \mathcal{U}_\rho) + (\tilde{w} + \mathcal{U}_\rho) \cdot \nabla \bar{v} + \nabla \pi = 0 \\ \operatorname{div}(\tilde{w}) = 0, \quad \tilde{w}|_{\Gamma_e} = 0, \quad \tilde{w}|_{\Gamma_c} = 0, \quad \tilde{w}(0) = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Ce cas apparaît plus simple que sa version non-linéaire : en effet, dans ce contexte, l'espace $\mathcal{W}_{\sigma,c}^{NL}$ n'est pas indispensable et il suffit de travailler dans $\mathcal{W}_c^L$. Cela vient du fait qu'il n'est pas nécessaire d'obtenir

d'estimations sur les dérivées en temps de $\mathcal{U}_\rho$ pour passer à la limite dans les équations de Navier-Stokes, puisque les termes non-linéaires ont été supprimés. On introduit alors la fonctionnelle de coût

$$\mathcal{J}_L(\mathcal{U}_\rho) = \frac{1}{2} \int_0^T (\|\tilde{w} + \mathcal{U}_\rho\|_2^2 + \|\mathcal{U}_\rho\|_{H^1}^2) dt,$$

et nous prouvons le résultat suivant.

Théorème 5.3.5. *On suppose que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière C^1 . Pour toute fonction $(u_0, g) \in H(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_e)$ vérifiant (5.5), il existe un **unique** contrôle optimale $\mathcal{U}_\rho^{opt}$ solution de*

$$\mathcal{J}_L(\mathcal{U}_\rho^{opt}) = \inf_{\mathcal{U}_\rho \in \mathcal{W}^L} \mathcal{J}_L(\mathcal{U}_\rho). \quad (5.13)$$

De plus, $\mathcal{U}_\rho^{opt}$ vérifie les équations d'Euler-Lagrange

$$\mathcal{J}'_L(\mathcal{U}_\rho^{opt}) \cdot h = \int_0^T \{ (z + h, \tilde{w} + \mathcal{U}_\rho^{opt})_{L^2} + ((\mathcal{U}_\rho^{opt}, h))_{H^1} \} dt = 0, \quad (5.14)$$

pour tout h solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta h + \nabla \pi = 0, \\ \operatorname{div}(h) = 0, \quad h|_{\Gamma_e} = k, h|_{\Gamma_c} = 0, \quad h(0) = 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

où k est une fonction arbitraire sur Γ_c . La fonction z apparaissant dans (5.14) est égale à $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \mathcal{U}_\rho}(\mathcal{U}_\rho^{opt}) \cdot h$ et vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta z + \bar{v} \cdot \nabla(z + h) + (z + h) \cdot \nabla \bar{v} + \nabla \pi = 0, \\ \operatorname{div}(z) = 0, \quad z|_{\Gamma_e} = 0, \quad z|_{\Gamma_c} = 0, \quad z(0) = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

En conclusion, dans ce travail, nous introduisons un ensemble d'espaces fonctionnels qui permettent d'appréhender les problèmes de contrôle optimal pour les équations de Navier-Stokes. Dans ce contexte, nous montrons l'existence d'un contrôle optimal, sans toutefois présenter un résultat d'unicité. Dans un cadre linéaire simplifié, nous considérons le problème de stabilisation autour d'un état stationnaire. Dans cette situation, le contrôle optimal est unique et nous dérivons les équations d'Euler associées.

Chapitre 6

Modèles pour les mélanges de fluides Newtoniens en microfluidique

6.1 Présentation du modèle de mélange.

Ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse de J. Dambrine (Maître de conférence à l'Université de Poitiers), encadrée par T. Colin. Il a fait l'objet de la publication [15]. L'objectif est le suivant : on désire introduire des modèles pour décrire des écoulements de mélanges de fluides Newtoniens dans des canaux très fins. On se limite au cas de deux fluides A et B ayant des viscosités dynamiques différentes. On souhaite alors évaluer l'efficacité de deux méthodes passives différentes de mélange qui impliquent toutes les deux une modification du fond et du haut des canaux. La première méthode consiste à considérer un canal plat associé à des conditions de type glissement (voir ([KB03], [KB04])) qui correspondent à un traitement chimique de la surface qui permet aux fluides de glisser et pour la seconde, on considère un canal avec un fond à reliefs associé à des conditions d'adhérence ([S02-1], [S02-2]). Il est toujours coûteux numériquement de comparer ces deux stratégies en effectuant directement des simulations 3D. On propose donc ici de se placer dans une approximation de type Hele-Shaw (voir [JR93]), justifiée par le fait que dans des canaux microfluidiques, une des dimensions est en générale très fine. C'est un processus asymptotique dans lequel l'écoulement est généralement décrit par l'équation de Reynolds. Ce travail comporte donc une part importante de modélisation, dont en voici une brève description. On commence par introduire une fonction $\phi(t, X)$ qui décrit la fraction volumique de l'espèce A dans le canal. Cette inconnue est alors solution d'une équation de convection-diffusion

$$\partial_t \phi + V \cdot \nabla \phi = \nabla(D(\phi)\nabla\phi),$$

où V est la vitesse du fluide et D un coefficient d'inter-diffusion. L'hydrodynamique est décrite de manière classique par un système de Stokes (écoulement à bas nombre de Reynolds) incompressible auquel on ajoute une loi rhéologique pour relier la contrainte au taux de déformation. Une analyse asymptotique nous permet d'obtenir deux systèmes différents

- un système dit 2.5 D pour lequel les vitesses sont 3D mais la pression est seulement 2D :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varphi + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \nabla \varphi - \nabla_{x,y} \cdot (D(\varphi) \nabla_{x,y} \varphi) - \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z (D(\varphi) \partial_z \varphi) = 0, \\ \nabla_{xy} \cdot (K_1^{2D}(\varphi) \nabla_{xy} P(x, y)) = 0, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = K_1^{3D}(\varphi) \nabla_{xy} P, \\ w = - \int_0^z \nabla_{xy} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (x, y, \sigma) d\sigma. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

- un système simplifié pour lequel toutes les grandeurs sont 2D :

$$\begin{cases} \nabla_{xy} \cdot [K_2^{2D}(x, y) \nabla_{xy} P] = 0, \\ \left(\frac{\bar{u}}{\bar{v}} \right)(x, y) = \bar{K}_2^{3D}(x, y) \nabla_{xy} P, \\ \partial_t \varphi + \left(\frac{\bar{u}}{\bar{v}} \right) \cdot \nabla_{x,y} \varphi - \nabla_{x,y} \cdot (D(\varphi) \nabla_{x,y} \varphi) = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Finalement les différents coefficients K_1^{2D} , K_1^{3D} , $\bar{K}_2^{2D}$ et $\bar{K}_2^{3D}$ des deux précédents systèmes sont déterminés par les caractéristiques des canaux envisagés. Un des résultats de cette étude asymptotique est de montrer l'équivalence des deux modes de mélange. En effet, dans ce régime, on peut comparer les coefficients précédents correspondants aux deux types de canaux envisagés (canaux traités chimiquement ou canaux à reliefs). Plus précisément, dans le cas du modèle 2D, à viscosité constante, nous montrons qu'il est possible de choisir les paramètres définissant les deux types de canaux de telle sorte que les deux modèles correspondants soient très proches (c'est-à-dire telle que l'écart entre les vitesses soit petit) comme le montre la proposition suivante.

Proposition 6.1.1. *Soient $h(x, y) = \bar{h} + \tilde{h}(x, y)$ la hauteur du canal à reliefs où $\bar{h}$ représente la hauteur du canal à fond plat. On note $\bar{L}(x, y)$ la longueur de glissement associée au canal plat. Alors il existe une fonction $\bar{L}(x, y)$ qui minimise l'erreur entre les coefficients des systèmes (6.1) et (6.2). De plus, $\bar{L}(x, y)$ est donnée par*

$$\bar{L}(x, y) = -\frac{1}{12\bar{h}^2} (\tilde{h}^3(x, y) + 4\bar{h}\tilde{h}^2(x, y) + 4\bar{h}^2\tilde{h}(x, y)).$$

Nous nous sommes ensuite intéressés au problème de Cauchy pour le système 2D (6.2) en montrant l'existence de solutions faibles et fortes, dans l'esprit de [B99]. Nous avons considéré un canal rectangulaire $[0, L] \times [0, \ell]$ à relief associé à des conditions d'adhérence. On note Γ_e l'entrée du canal, Γ_s la sortie et Γ_L les murs latéraux et ν la normal sortante. Les conditions aux bords associées au système (6.2) s'écrivent alors

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_e, \text{ on impose la vitesse } \bar{u} = \bar{u}_0(y) \text{ et le paramètre d'ordre } \varphi = \varphi_1(y), \\ \text{sur } \Gamma_s, \text{ on impose } P = 0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_L, \text{ on impose } v = 0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0. \end{cases}$$

L'intérêt de ces résultats réside dans la prise en compte de conditions aux bords physiquement pertinentes, à savoir que les fluides se déplacent sous l'effet du gradient de pression. Nous montrons ainsi que ce type de modèle fournit un comportement physique raisonnable pour les fluides sur Γ_s . La preuve est basée sur une méthode de Galerkin et utilise des principes du maximum ainsi que des méthodes de relèvement. Les deux résultats sont les suivants. Pour les solutions faibles :

Théorème 6.1.2. *On suppose que $D(\varphi)$ est constant, $\varphi_1(y) \in H^2(0, \ell)$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} = 0$ sur Γ_L , $\bar{u}_0(y) \in L^2(0, \ell)$, $\bar{u}_0 \geq 0$ et $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi_0 \leq 1$. Alors il existe une solution globale faible $(P, \bar{u}, \bar{v}, \varphi)$ du système (6.2) telle que $\varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y)$ et*

$$\begin{aligned} P &\in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)), \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\in \left[L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)) \right]^2, \\ \varphi &\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Pour les solutions fortes :

Théorème 6.1.3. *On suppose que $D(\phi)$ est constant, $\varphi_1(y) \in H^3(0, \ell)$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} = 0$ sur Γ , $\bar{u}_0(y) \in H^1(0, \ell)$, $\bar{u}_0 \geq 0$, $\partial_y \bar{u}_0 = 0$ sur Γ_L et $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\varphi_0 = \varphi_1$ sur Γ_e et $0 \leq \varphi_0 \leq 1$. Alors il existe un temps*

$T > 0$ et une unique solution $(P, \bar{u}, \bar{v}, \varphi)$ au Système (6.2) telle que $\varphi(0) = \varphi_0$ et

$$\begin{aligned} P &\in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \left(L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \right)^2 \\ \varphi &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)). \end{aligned}$$

6.2 Tests numériques.

Nous avons effectué des simulations numériques sur les 2 modèles. Les méthodes de discrétisation sont classiques : différences finies en temps et utilisation de schéma volumes-finis sur des grilles cartésiennes décalées en espace. La première simulation concerne une expérience de *co-flow* décrite par la Figure 6.1 et utilise le modèle 2D (6.2). Il s'agit d'injecter deux fluides de viscosités différentes η_1 et η_2 dans un canal à fond plat avec conditions de glissement et de décrire la position de la zone de mélange. Dans cette configuration, le mélange s'effectue essentiellement par auto-diffusion. Les caractéristiques du canal et des fluides sont les suivantes : longueur $L = 1300\mu m$, largeur $\ell = 200\mu m$, vitesse d'entrée identique pour les 2 fluides $\bar{U}_0 = 1.8 * 10^{-2} m.s^{-1}$, même densité $\rho = 1.2 * 10^3 kg.m^{-3}$, $\eta_2 = 0.67 Pa.s$ et on fait varier la viscosité du fluide 1 de $\eta_1 = 8.375 * 10^{-2} Pa.s$ à $\eta_1 = 5.36 Pa.s$, $N_x = 100$, $N_y = 80$. Il est généralement

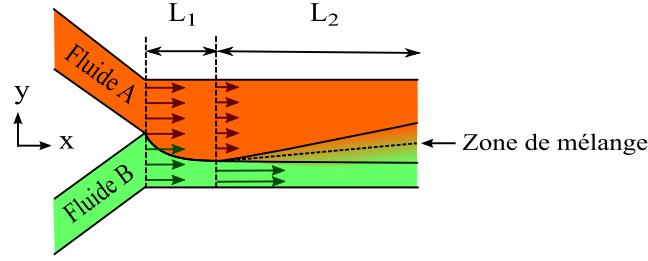


FIGURE 6.1 – Expérience de co-flow.

admis que la position de l'interface dépend du contraste de viscosité égale à

$$\varepsilon = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\min(\eta_1, \eta_2)}. \quad (6.3)$$

De plus, la notion d'interface n'étant pas claire en elle-même, nous avons utilisé, pour la décrire, un moment d'ordre 1 défini par

$$M_1(x, t) = \int_{-D}^D y \partial_y \varphi(x, y, t) dy.$$

On s'attend à ce que le fluide le plus visqueux soit poussé par le moins visqueux dans la section transverse du canal et que les murs latéraux aient une influence sur ce déplacement. Les résultats obtenus sont les suivants (voir Figure 6.2) :

- pour des petites valeurs de ε , l'influence des murs latéraux est négligeable et M_1 dépend linéairement du paramètre ε ,
- pour des grands rapports de viscosité, les effets dûs aux murs sont les plus importants et l'interface se rapproche des murs.

Un calcul élémentaire permet alors de prévoir le déplacement relatif

$$\frac{M_1}{\ell} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2(\eta_2 + \eta_1)} := f(\eta_1, \eta_2).$$

Les résultats numériques (voir Figure 6.3) confirment cette loi et font penser que ce modèle est ici adapté à la description d'une telle expérience (voir aussi [15] pour une expérience de "viscous-fingering").

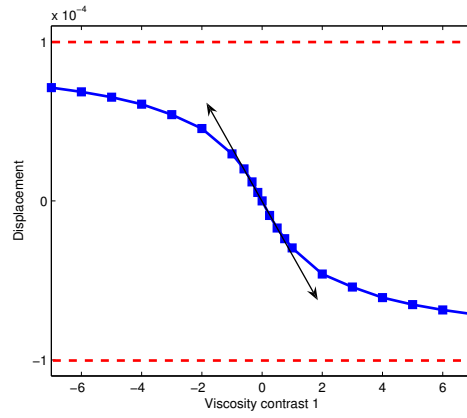


FIGURE 6.2 – Expérience de co-flow : déplacement de l'interface en fonction de ε .

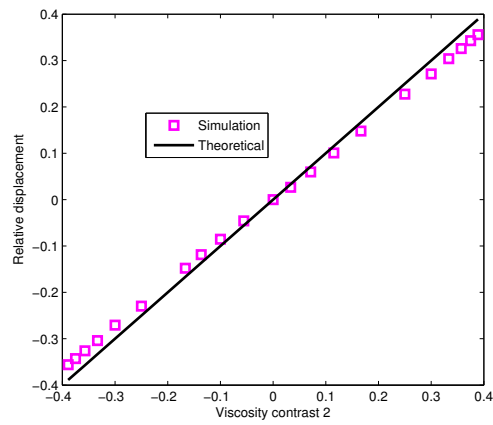


FIGURE 6.3 – Expérience de co-flow : déplacement relatif de l'interface en fonction de $f(\eta_1, \eta_2)$.

Une seconde expérience numérique vise à déterminer le domaine de validité du modèle de Reynolds. Un des sujets importants en micro-fluidique est l'accélération de mélange de fluides dans les micro-canaux. Deux méthodes existent actuellement : mettre des reliefs sur le fond et le haut des canaux ou traiter chimiquement les surfaces pour induire des zones de glissement. L'objectif de ces tests est de déterminer si le modèle de Reynolds 2.5D permet de décrire correctement de tels écoulements et surtout de reproduire les re-circulations nécessaires à l'accélération du mélange. Dans cette expérience, on choisit un canal à reliefs, la hauteur du canal étant donnée par

$$h(x, y) = h_{max} \left(1 - \frac{1 + \cos(6 \pi (x + 2y))}{5} \right),$$

où h_{max} désigne la hauteur maximale du canal. On veut tout d'abord quantifier l'influence de h_{max} sur l'erreur entre les solutions du modèle de Stokes complet et celles du modèle (6.1) dans la géométrie décrite ci-dessus. On choisit de calculer l'erreur sur les vitesses (voir Figure 6.4). Les caractéristiques du canal et de la grille numérique sont : $L = 2.5 \text{ mm}$, $l = 500 \mu\text{m}$, h_{max} varie de $50 \mu\text{m}$ à $200 \mu\text{m}$, $N_x = 400$, $N_y = 100$ et $N_z = 50$. La figure 6.4 montre la convergence des 2 modèles lorsque h_{max} tends vers 0.

La différence qualitative entre les solutions des deux modèles ((6.1) et Stokes) sont présentées dans la Figure 6.5. Elle représente les lignes de courant partant de l'entrée du canal. On remarque que pour h_{max} suffisamment grand, les lignes de courant calculées sur le modèle de Stokes présente une déviation vers le mur gauche du canal. Cette déviation ne s'aperçoit pas sur les solutions du Système (6.1). Ce phénomène de déviation est pourtant un mécanisme très important dans les processus de mélange par modification du canal en microfluidique (voir [NW10]) En conséquence, le modèle de Reynolds n'est pas adapté pour les modèles de mélange basés sur cette approche. D'autres expériences numériques sont présentées dans [15] faisant intervenir les canaux traités chimiquement pour induire des zones de glissement, confirmant elles-aussi l'inadaptation du modèle de Reynolds (6.1) dans ce cadre-là.

En conclusion, nous pouvons dire que les modèles de Reynolds sont bien adaptés pour décrire des phénomènes de mélange en régime d'auto-diffusion. Ils permettent de montrer que, dans ces régimes, les canaux traités chimiquement et les canaux à reliefs fournissent des modèles asymptotiquement équivalents. Enfin, les modèles asymptotiques (6.2) sont bien posés et décrivent bien le régime "pressure driven flows". Par contre, ils ne conviennent pas pour étudier les phénomènes d'accélération de mélange qui nécessitent de prendre en considération les modèles complets de Stokes 3D.

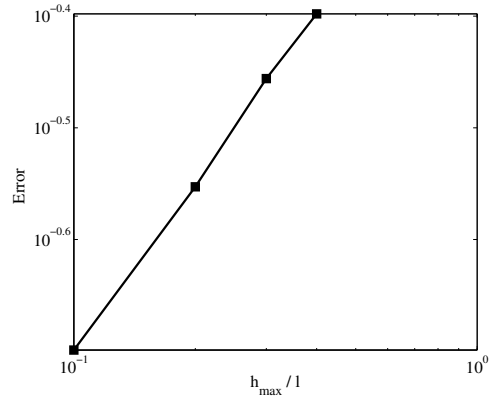


FIGURE 6.4 – Erreur sur les vitesses données par (6.1) et le modèle de en fonction $h_{\max}$.

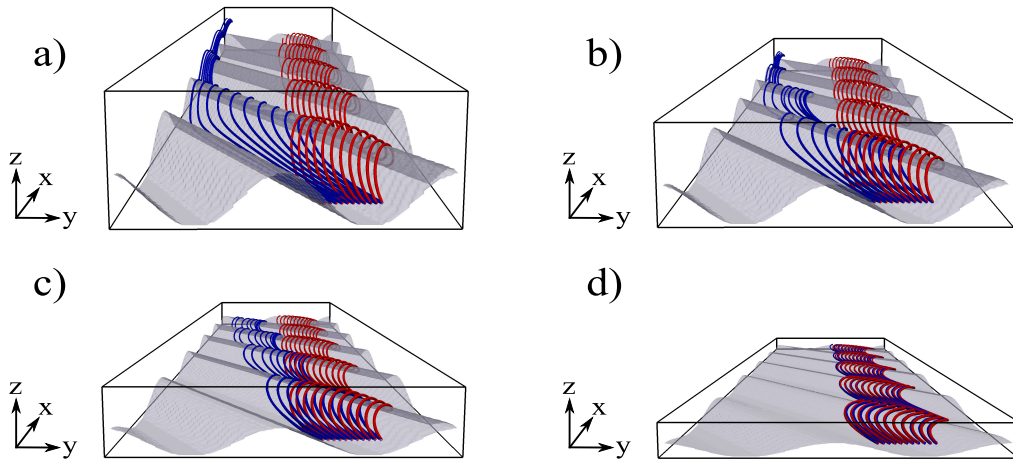


FIGURE 6.5 – Comparaison des lignes de courant calculées sur les deux modèles pour différentes valeurs de $h_{\max}$. a) : $h_{\max} = 200 \mu m$, b) : $h_{\max} = 150 \mu m$, c) : $h_{\max} = 100 \mu m$, d) : $h_{\max} = 50 \mu m$.

Chapitre 7

Les écoulements de solution de micelles géantes.

7.1 Description du modèle.

Ce travail, relatif aussi à la thèse de J. Dambrine, porte sur les écoulements de micelles géantes en solution dans les micro-canaux. Les micelles géantes sont des agrégats de molécules bipolaires nageant dans un solvant. Elles possèdent essentiellement deux états distincts dépendant de la force du cisaillement appliqué à la solution : un état aligné et un état enchevêtré. Dans les micro-canaux, du fait du cisaillement non-homogène, plus important près des murs, on retrouve l'état aligné près des murs et l'état enchevêtré au milieu du canal, provoquant ainsi des sortes de "bouchons". Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à la rhéologie de ces écoulements. Pour décrire de tels écoulements, nous avons choisi le modèle de Jonhson-Segalman diffusif, qui décrit la contrainte interne comme la somme d'une contribution visqueuse qui représente le fluide dans sa phase alignée et d'une contribution visco-élastique σ_p qui décrit la contrainte du fluide dans sa phase enchevêtrée

$$\sigma = 2\eta_s D[V] + \sigma_p.$$

L'évolution de σ_p est alors donnée par

$$(\partial_t + V \cdot \nabla) \sigma_p + \sigma_p \Omega[V] - \Omega[V] \sigma_p - a(\sigma_p D[V] + D[V] \sigma_p) + \frac{\sigma_p}{\tau} = 2GD[V] + \mathcal{D}\Delta\sigma_p, \quad (7.1)$$

où G est un module élastique, τ un temps de relaxation, $\mathcal{D}$ un coefficient de diffusion et $\Omega[V] = (\nabla V - \nabla V^t)/2$. Ce modèle a cependant le défaut de n'être valable que pour des taux d'élongations petits. Pour contourner ce problème, on propose de rajouter un terme quadratique dans l'équation sur la contrainte (modèle de Giesekus [G82]) afin de saturer la contribution visco-élastique σ_p . Pour fermer, cette équation, on ajoute alors une équation de Stokes incompressible pour aboutir finalement au modèle suivant

$$\begin{cases} \nabla \cdot (2\eta D[V] + \sigma_p) = \nabla P, \\ \nabla \cdot V = 0, \\ (\partial_t + V \cdot \nabla) \sigma_p + \sigma_p \Omega[V] - \Omega[V] \sigma_p - a(\sigma_p D[V] + D[V] \sigma_p) + \frac{\sigma_p}{\tau} + \frac{\kappa}{G\tau} \sigma_p^2 = 2GD[V] + \mathcal{D}\Delta\sigma_p. \end{cases} \quad (7.2)$$

7.2 Les conditions aux limites et les modèles réduits.

Le type de géométrie utilisée dans ces travaux est décrit par la Figure 7.1.

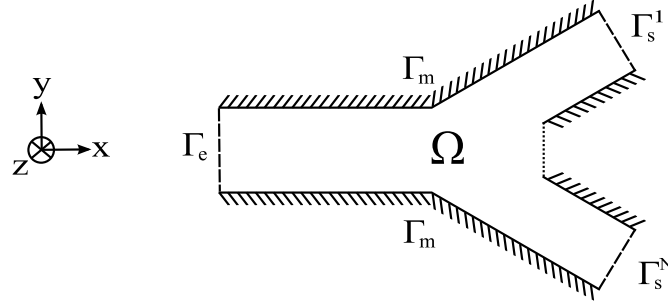


FIGURE 7.1 – Représentation schématique du type de domaine considéré.

On distingue 3 types de bords : l'entrée du canal Γ_e , les sorties du canal notées Γ_s^i avec $i = 1, \dots, N$ et les murs latéraux Γ_m . La difficulté est ici de déterminer les conditions appropriées à l'entrée et aux sorties du canal. En effet, la structure décrite par 7.1 ne représente qu'une petite partie du dispositif micro-fluidique envisagé pour les applications et il est destiné à être aggloméré à d'autres cellules du même type. Sur les murs latéraux, on considère une condition d'adhérence pour les vitesses

$$V|_{\Gamma_m} = 0$$

alors que pour contrainte σ_p , on choisit parmi les deux conditions suivantes :

- une condition de Dirichlet

$$\sigma_p|_{\Gamma_m} = \sigma_p^{loc},$$

où σ_p^{loc} est la solution de (7.1) avec $\mathcal{D} = 0$,

- une condition de Neuman

$$\partial_\nu \sigma_p|_{\Gamma_m} = 0.$$

A l'entrée, on souhaite imposer un gradient de pression δP_e alors qu'a priori, le modèle ne permet de considérer que des conditions sur les vitesses. Cependant, sous certaines hypothèses (écoulement établi, stationnaire, parallèle), il est possible d'introduire une version réduite de (7.2) dans laquelle le gradient de pression δP_e à l'entrée apparaît comme un paramètre (modèle Poiseuille 2D)

$$\begin{cases} \eta \Delta_{yz} u + \partial_y \sigma_p^{xy} + \partial_z \sigma_p^{xz} = \delta P \\ \partial_t \sigma_p + \sigma_p \Omega[V] - \Omega[V] \sigma_p - a(\sigma_p D[V] + D[V] \sigma_p) + \frac{\sigma_p}{\tau} + \frac{\kappa}{G\tau} \sigma_p^2 \\ = 2G(\partial_y(\delta_2^1 + \delta_1^2) + 2G\partial_z u(\delta_3^1 + \delta_1^3)) + \mathcal{D} \Delta_{yz} \sigma_p. \end{cases} \quad (7.3)$$

Ici, δ_i^j est une matrice dont les composantes sont nulles sauf pour $i = j$. Les conditions sur Γ_m sont les mêmes que celles décrites ci-dessus. L'écoulement stationnaire permet alors de calculer les profils d'entrée $V^*(\delta P_e)$ et $\sigma_p^*(\delta P_e)$ correspondants. On peut alors considérer une condition de type Dirichlet sur Γ_e pour le système (7.2)

$$V|_{\Gamma_e} = V^*(\delta P_e),$$

$$\sigma_p|_{\Gamma_e} = \sigma_p^*(\delta P_e).$$

Pour les conditions de sortie, on envisage deux jeux de conditions différents. D'une part, on considère une condition de sortie similaire à celle calculée en entrée à l'aide du modèle Poiseuille 2D. La difficulté consiste alors à trouver des gradients de pression δP_s^i qui soient *compatibles*, c'est-à-dire qui assurent que la somme des débits de sortie soit égale à la somme des débits à l'entrée. Sachant que la relation entre les débits et les gradients de pression n'est pas linéaire, nous avons proposé un algorithme de recherche de gradient de pression δP_s^i compatibles (voir [D09]) et qui permettent de calculer les vitesses et contraintes $V^*(\delta P_s^i)$ et $\sigma_p^*(\delta P_s^i)$ correspondantes. En résumé, les conditions de Dirichlet s'écrivent

$$V|_{\Gamma_s^i} = V^*(\delta P_s^i),$$

$$\sigma_p|_{\Gamma_s^i} = \sigma_p^*(\delta P_s^i).$$

D'autre part, on a aussi considéré des conditions de type Neuman classique

$$\partial_\nu V|_{\Gamma_s^i} = 0,$$

$$\partial_\nu \sigma_p|_{\Gamma_s^i} = 0.$$

7.3 Les expériences numériques.

Les méthodes numériques sont décrites en détail dans la thèse de J. Dambrine ([D09]). Pour la discrétisation en temps, on utilise des schémas implicites aux différences finies couplés avec des méthodes de splitting. En espace, on utilise des schémas MAC sur des grilles décalées, avec des méthodes de pénalisation pour prendre en compte des géométries complexes. L'incompressibilité du fluide est assurée par l'algorithme d'Uzawa. Dans ce travail, nous proposons deux applications de ce modèle dans le cadre d'écoulements micro-fluidiques.

La première concerne l'étude des bandes de cisaillement dans des canaux droits, dont la section transverse possède un grand rapport d'aspect. Des expériences menées au LOF (unité mixte CNRS-Bordeaux1-Rhodia) par Colin-Masselon montrent l'importance des effets de surface dans cette configuration particulière et mettent en lumière la perte de la notion de "courbe d'écoulement" (profil entre taux de cisaillement et contrainte de cisaillement). Les tests numériques présentés ici ont pour but de montrer que le modèle diffusif de Johnson-Segalman est capable de rendre compte de ces effets. Dans ce cadre précis, la description de l'écoulement est simplifiée et il est possible, pour le décrire, d'introduire des modèles réduit de type Poiseuille 1D. Nous avons alors montré que si le gradient de pression imposé est suffisamment fort, des bandes de cisaillement se forment près des bords du canal tout en laissant une bande faiblement cisailée au centre du canal. Ainsi, le fluide est séparé en deux phases : une phase fluide près des bords et une phase visqueuse au centre. Nous voulions aussi vérifier que des effets non-locaux pouvaient être à l'origine de la perte de la notion d'écoulement. Plus précisément, la relation $\sigma^{xy}(\dot{\gamma})$, qui donne la contrainte totale de cisaillement en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, ne dépend pas de la condition initiale (grâce à la présence du terme diffusif dans le modèle) mais peut dépendre du gradient de pression imposé dans le canal. D'un point de vue numérique, le modèle de Johnson-Segalman est capable de rendre compte de ce comportement suivant les conditions aux limites choisies sur σ_p . On choisit comme condition initiale $\sigma_p = 0$. On effectue alors des simulations numériques pour les valeurs suivantes de $\mathcal{D}$ et δP :

$$\mathcal{D} = [8, 16, 80] m^2.s^{-1}, \quad (7.4)$$

$$\delta P = [330, 495, 660, 825, 990, 1155, 1320] mB/(6 cm). \quad (7.5)$$

On considère également deux types de conditions aux limites :

- une condition de Neumann homogène :

$$\partial_{\vec{n}} \sigma_p|_{\Gamma_m} = 0, \quad (7.6)$$

- une condition de Dirichlet non-homogène :

$$\sigma_p|_{\Gamma_m} = \sigma_p^*(\dot{\gamma})|_{\Gamma_m}, \quad (7.7)$$

où $\sigma_p^*(\dot{\gamma})$ représente le résultat du modèle local ($\mathcal{D} = 0$).

La Figure 7.2 présente les résultats des simulations effectuées dans les conditions décrites ci-dessus pour des conditions aux limites de Dirichlet sur σ_p , lorsque l'état stationnaire est atteint. A gauche on présente les courbes d'écoulement obtenues en tracant σ^{xy} en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. On s'aperçoit qu'à mesure que $\mathcal{D}$ augmente, le profil $\sigma^{xy}(\dot{\gamma})$ dépend de plus en plus du gradient de pression δP imposé. Conformément aux expériences on a donc une perte de la notion de courbe d'écoulement à mesure que l'on augmente les effets non-locaux sur la contrainte (dans les expériences on augmente les effets non locaux en diminuant la largeur du canal, ici on les augmente en faisant varier le coefficient de diffusion $\mathcal{D}$).

Le second groupe d'expériences numériques porte sur les écoulements de micelles géantes à travers des jonctions micro-fluidiques en forme de "T", dans le cadre d'une véritable géométrie 3D (voir Figure 7.3). On choisit $L_3 = l = h = 1mm$, et on fait varier L_1 et L_2 . On note Γ_e l'entrée de la jonction, Γ_s^1 et Γ_s^2 les deux sorties et enfin Γ_m désigne les murs du canal. Les paramètres du système (7.2) sont

$$\eta = 1 Pa.s, G = 150 Pa, \tau = 0.5 s, \kappa = 0.3, \mathcal{D} = 1.0e^{-10} m^2.s^{-1},$$

et on définit les débits d'entrée Q_e et de sortie Q_{s1} et Q_{s2} par :

$$Q_e = \int_{\Gamma_e} u d\Gamma_e, \quad Q_{s1} = - \int_{\Gamma_s^1} v d\Gamma_s^1, \quad Q_{s2} = \int_{\Gamma_s^2} v d\Gamma_s^2.$$

Le fluide étudié ici étant incompressible, on doit avoir $Q_e = Q_{s1} + Q_{s2}$. Dans ce cadre-là, la question est alors de savoir comment déterminer les débits de sortie Q_{s1} et Q_{s2} connaissant le débit d'entrée Q_e . Assurément, il existe une infinité de débits de sortie vérifiant la relation précédente, le but étant d'en sélectionner une paire avec un argument physique. Dans cette optique, en première approximation, on peut supposer que, dans ce type d'écoulement incompressible, la pression évolue linéairement dans la direction longitudinale du canal. On applique ce principe aux 3 branches du canal et on considère que la pression P_j est constante au niveau de la jonction. On peut donc définir les gradients de pression à travers Γ_s^1 et Γ_s^2

$$\delta P_{s1} \sim \frac{P_{s1} - P_j}{L_1}, \quad \delta P_{s2} \sim \frac{P_{s2} - P_j}{L_2}.$$

Supposant $P_{s1} = P_{s2} = 0$ (sorties à la pression atmosphérique), on exprime le débit à travers une conduite droite en fonction du gradient de pression à l'aide du modèle réduit (7.3) (qui permet de calculer un profil de vitesse) et de l'expression $Q_s = \int_{\Gamma_s} u d\Gamma_s$. Il reste à déterminer la pression P_j au milieu du canal pour que

$$Q_{s1}(\delta P_{s1}) + Q_{s2}(\delta P_{s2}) = Q_e.$$

La relation entre débit et gradient de pression n'étant pas linéaire, nous avons proposé l'algorithme suivant :

0. Initialiser P_j^0
1. P_j^n est connue ,
2. On calcule δP_{s1} et δP_{s2} à partir de P_j^n ,
3. On calcule les débits correspondants Q_{s1}^n, Q_{s2}^n ,
4. On corrige la pression intermédiaire avec : $P_j^{n+1} = P_j^n + \delta r \frac{Q_e - (Q_{s1}^n + Q_{s2}^n)}{\max(Q_e, Q_{s1}^n + Q_{s2}^n)}$,
5. on itère en revenant à 1.

Lorsque cet algorithme a convergé on a bien : $Q_e = (Q_{s1}^n + Q_{s2}^n)$. La pression intermédiaire P_j obtenue permet alors d'évaluer les gradients de pression δP_{s1} et δP_{s2} et enfin Q_{s1} et Q_{s2} . Notons qu'à l'étape 3, les débits sont calculés en fonction des gradients de pression en utilisant les formules (7.8). Il est donc nécessaire de calculer les vitesses u et v en fonction de ces mêmes gradients de pression. Pour ce faire, on utilise le modèle Poiseuille 2D (7.3). Pour illustrer ces écoulements, la Figure 7.4, à droite, montre des coupes en $z = h/2$ de profils de vitesses obtenus grâce au modèle (7.3) avec les paramètres décrits ci-dessus, pour plusieurs gradients de pression imposés (la résolution du maillage choisie pour ces calculs est $N_x \times N_y = 50 \times 50$). On remarque sur la Figure 7.4, à droite, l'existence d'un saut dans l'ordre de grandeur des vitesses correspondant à une valeur seuil du gradient de pression. Au delà de ce seuil, il y a formation de bandes de cisaillement qui produisent au centre du canal un bouchon visqueux (phénomène connu sous le nom de "spurt effect" ou "effet de jaillissement"). La conséquence directe sur les débits (voir Figure 7.4, à gauche) est un saut dans la relation débit/gradient de pression.

La Figure 7.5 illustre les calculs fournis par cet algorithme. On prend $L_1 = 1mm$, $L_2 = 2mm$, on fait varier Q_e dans la gamme $Q_e \in [0.1, 110] \mu L.s^{-1}$ et on trace le rapport Q_{s1}/Q_{s2} des débits de sortie obtenus. On observe sur la Figure 7.5 une bosse très localisée pour une certaine gamme de débits d'entrées qui correspondent à la formation au milieu du canal d'un bouchon visqueux (*spur effect*). Cette approche se révèle cependant insuffisante car elle est fondée sur une approximation de pression linéaire dans chacune des branches, ce qui ne permet pas de reproduire tous les mécanismes en jeu dans de tels écoulements (notamment au niveau de la jonction).

Nous avons donc envisagé une deuxième approche basée sur des simulations directes sur le système complet (7.2). Afin de ne pas forcer l'écoulement en sortie, on considère des conditions de Neuman pour les vitesses sur Γ_s^1 et Γ_s^2 . Cela suppose que les écoulements en aval de Γ_s^1 et Γ_s^2 soient établis et il faut donc que les sorties soient suffisamment loin de la jonction. On considère d'abord le cas d'une jonction asymétrique $L_2 = 2L_1$. On fixe plusieurs débits d'entrée

$$Q_e = [25.28, 33, 49.66, 57.18, 72.04, 146.66, 293.54] \mu L.s^{-1}$$

sur un maillage $N_x \times N_y \times N_z = 100 \times 200 \times 50$. La Figure 7.6, présente un exemple de simulation pour $Q_e = 72,04 \mu L.s^{-1}$. On constate que la pression présente le comportement souhaité, c'est-à-dire qu'elle est au même niveau aux deux sorties Γ_s^1 et Γ_s^2 , validant ainsi l'utilisation des conditions de Neuman sur les vitesses. Les simulations montrent également la tendance du fluide à passer préférentiellement par la branche de sortie la plus courte. La Figure 7.7 présente les rapports de débits de sortie obtenus par cette simulation directe pour différentes valeurs $Q_e = [25.28, 49.66, 72.04, 293.54] \mu L.s^{-1}$. On constate sur cette figure que ce rapport de débits de sortie suit la même tendance que celle présentée dans la Figure 7.5, c'est-à-dire que l'effet de bouchage diminue à mesure que l'on augmente le débit d'entrée dans la jonction. Toutefois, le décalage entre les 2 courbes suggère l'importance de la jonction dans ce type d'écoulements. Pour décrire les effets de bouchage propre aux micelles géantes, il est donc nécessaire d'effectuer des simulations directes sur le système (7.2).

Pour terminer cette section, on présente maintenant le cas d'un écoulement de micelles géantes dans une jonction symétrique ($L_1 = L_2$). La Figure 7.8 montre les profils de vitesse obtenus en différents instants de l'écoulement. Dans cette configuration, l'écoulement n'atteint pas d'état stationnaire et l'écoulement semble osciller périodiquement autour d'une position d'équilibre. La Figure 7.9 représente le taux de cisaillement $|\dot{\gamma}|$ en différents temps. On remarque une oscillation au niveau du mur face à l'entrée des bandes de cisaillement. Ce phénomène doit être à l'origine de la déstabilisation de l'écoulement, et on peut donc voir ici l'influence très forte de la jonction sur l'écoulement.

En conclusion, on a montré que le modèle de Johnson-Segalman utilisé permet de décrire correctement les phénomènes de bouchage observés expérimentalement. Ces calculs ont mis en lumière l'importance de la géométrie sur les rapports des débits de sortie ainsi que l'importance de l'asymétrie de la jonction sur ces débits. On a ainsi observé des régimes non-permanents au niveau de la jonction. Tous ces phénomènes mettent bien sûr en évidence le caractère non-Newtonien des micelles géantes et la tendance du modèle à créer des bandes de cisaillement dans l'écoulement. Cette étude montre aussi l'importance d'effectuer, dans ce cas, de véritables simulations 3D afin de prédire les effets dus à la jonction. Notons enfin que ce travail va faire l'objet de la publication [19].

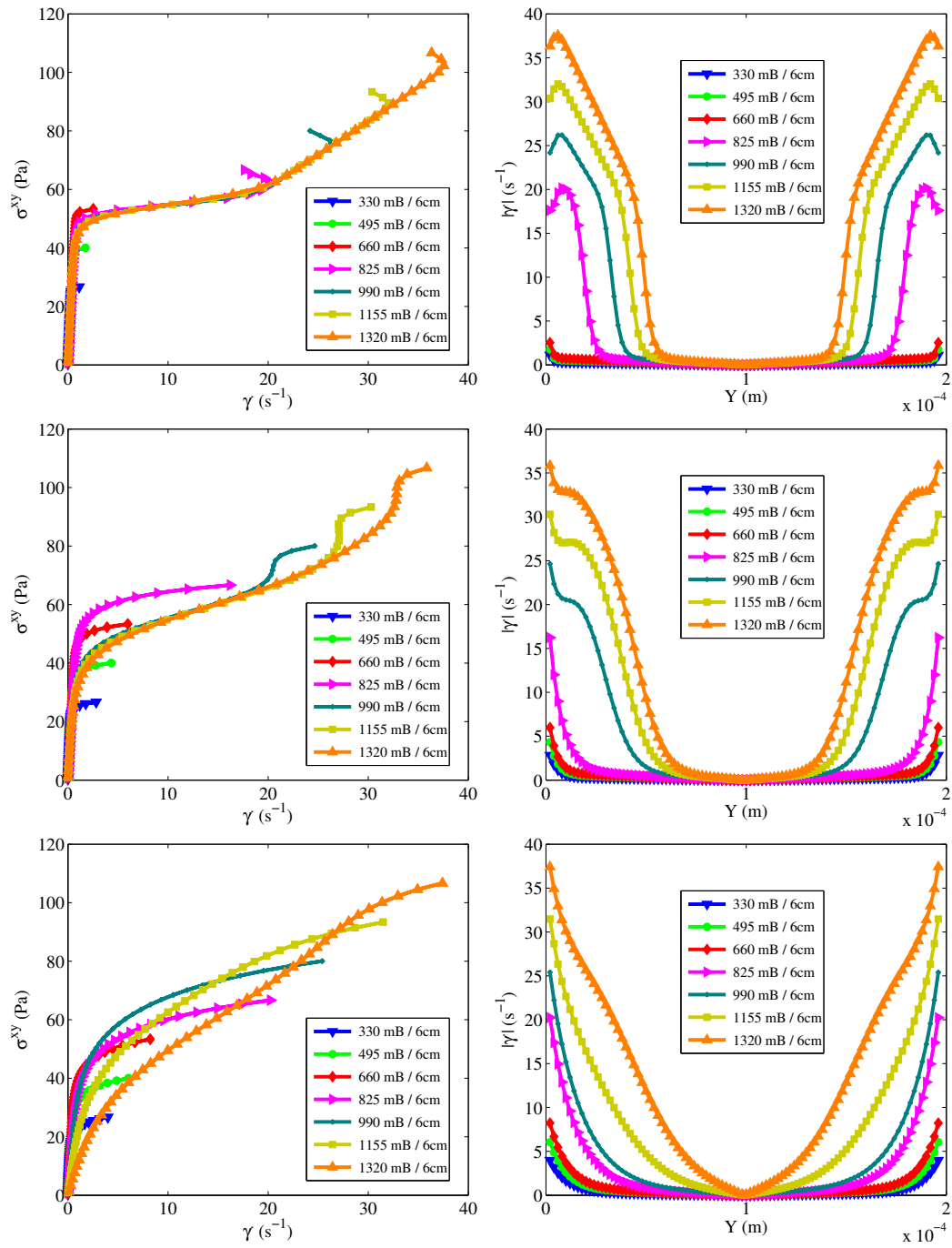


FIGURE 7.2 – Résultats à l'état stationnaire des simulations effectuées sur le modèle réduit (7.3). De haut en bas, $\mathcal{D} = [8, 16, 80] m^2.s^{-1}$, pour une condition aux limites de Dirichlet sur σ_p . A gauche courbes d'écoulement. A droite : profil transverse de cisaillement .

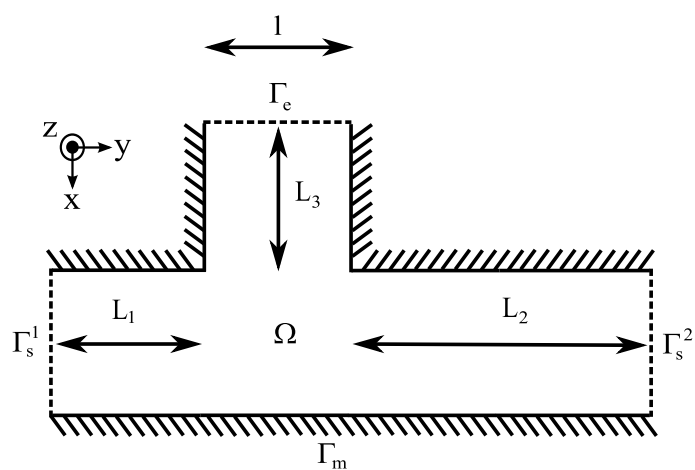


FIGURE 7.3 – Géométrie du domaine et notations

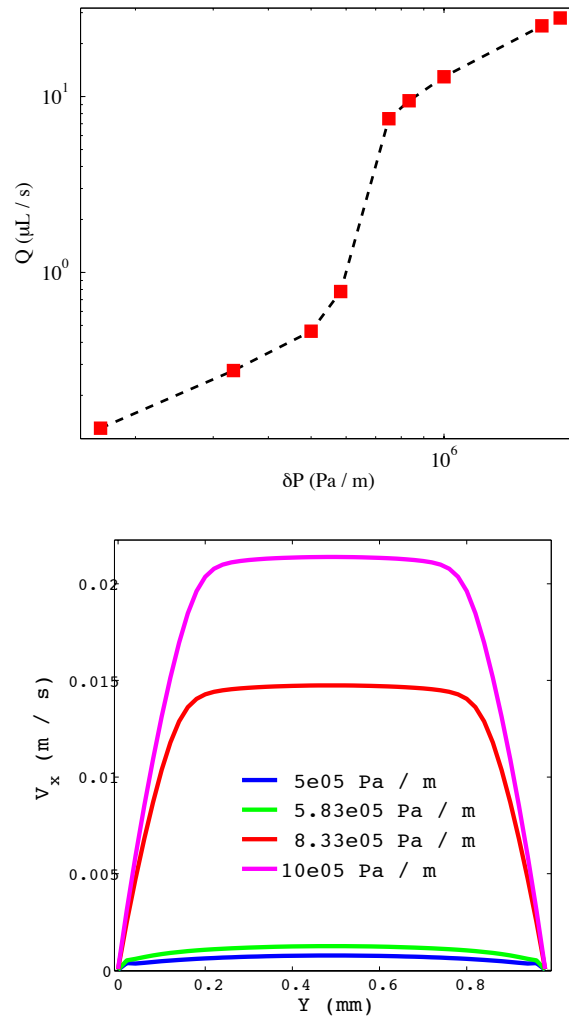


FIGURE 7.4 – A gauche : relation entre débit et gradient de pressions obtenu par simulation numérique sur le modèle Poiseuille 2D (7.3) (échelle logarithmique). A droite : quelques profils de vitesses correspondants (coupe en $z = h/2$).

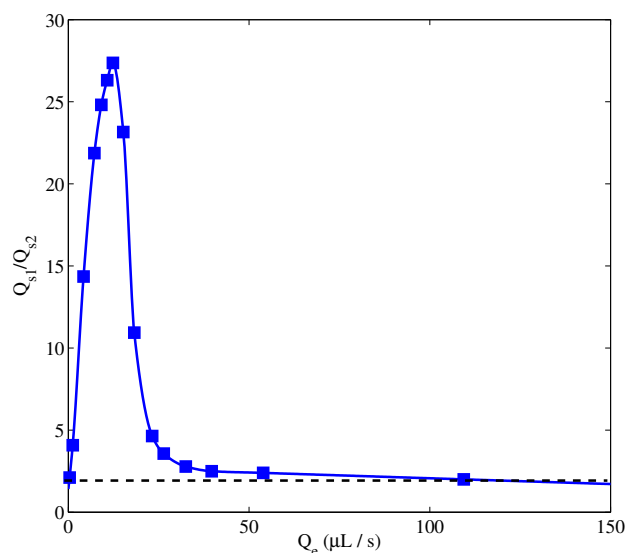


FIGURE 7.5 – Rapports de débits Q_{s1}/Q_{s2} en fonction du débit d'entrée Q_e obtenus avec l'algorithme présenté ci-dessus. En pointillés, résultat attendu sur un fluide Newtonien.

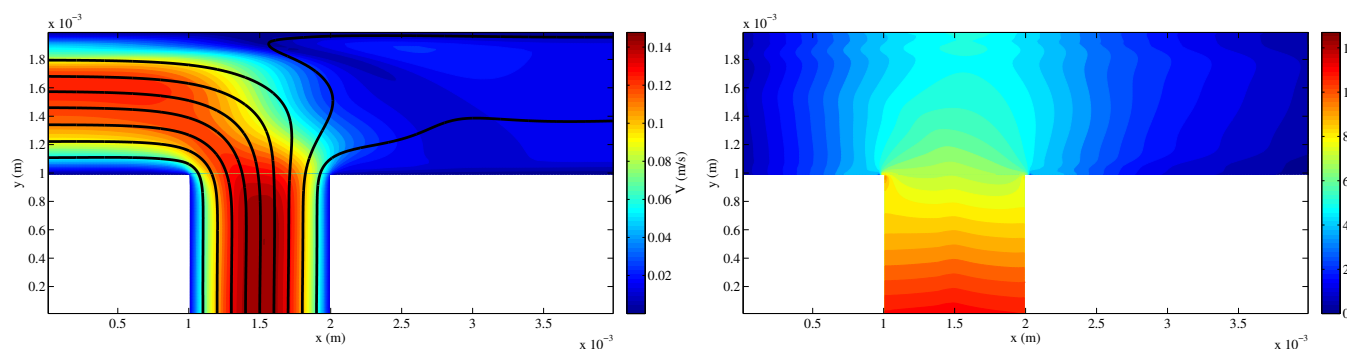


FIGURE 7.6 – Simulations numériques d'écoulement de micelles géantes dans une jonction en T asymétrique. Conditions aux limites de Neumann sur la vitesse en sortie. Débit d'entrée $Q_e = 72.04 \mu L.s^{-1}$. A gauche : coupe en $z = h/2$ du champ de vitesses et lignes de courant partant de l'entrée. A droite : coupe en $z = h/2$ du champ de pressions.

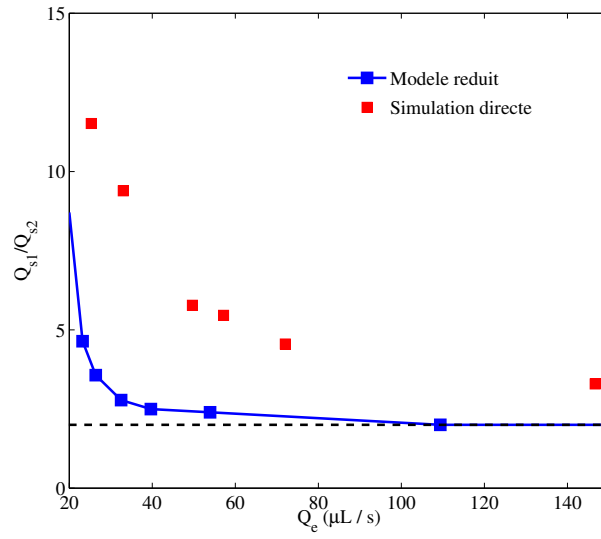


FIGURE 7.7 – Rapports de débits Q_{s1}/Q_{s2} en fonction du débit d'entrée Q_e . En rouge résultat obtenu par simulation directe sur le modèle (7.2). En bleu, résultats obtenus sur le modèle simplifié. En pointillés, résultat attendu sur un fluide Newtonien.

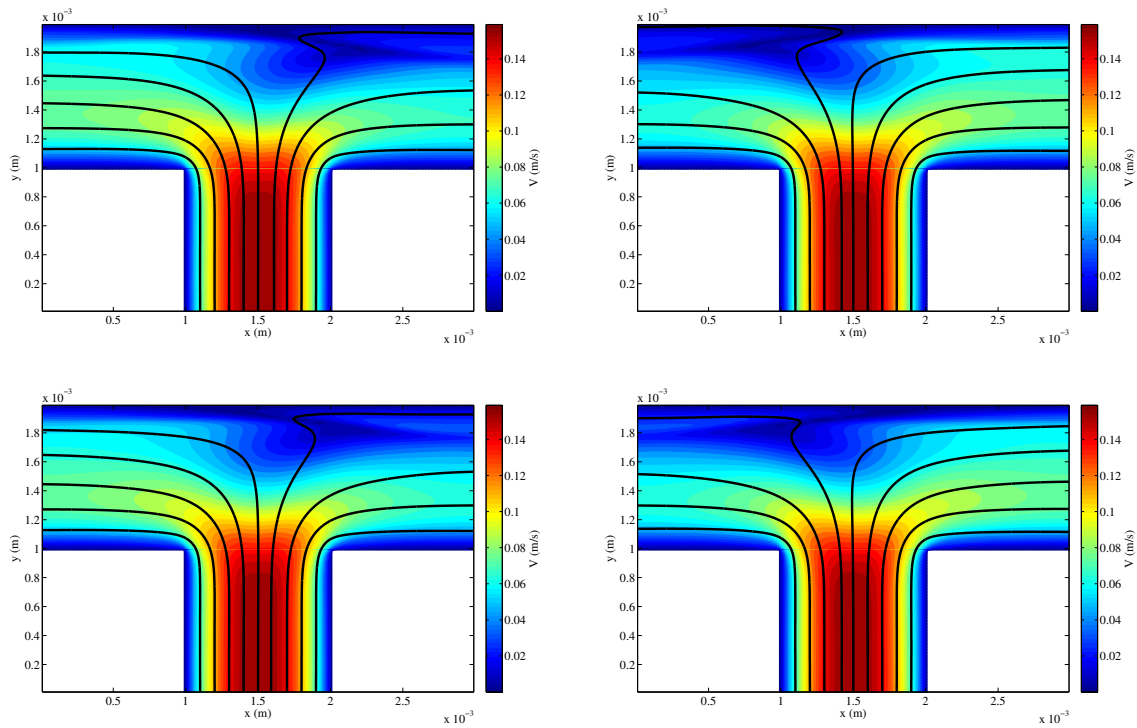


FIGURE 7.8 – Champs de vitesse et lignes de courant en différents instants obtenus par simulation sur le modèle (7.2) pour une jonction symétrique (coupe en $z = h/2$).

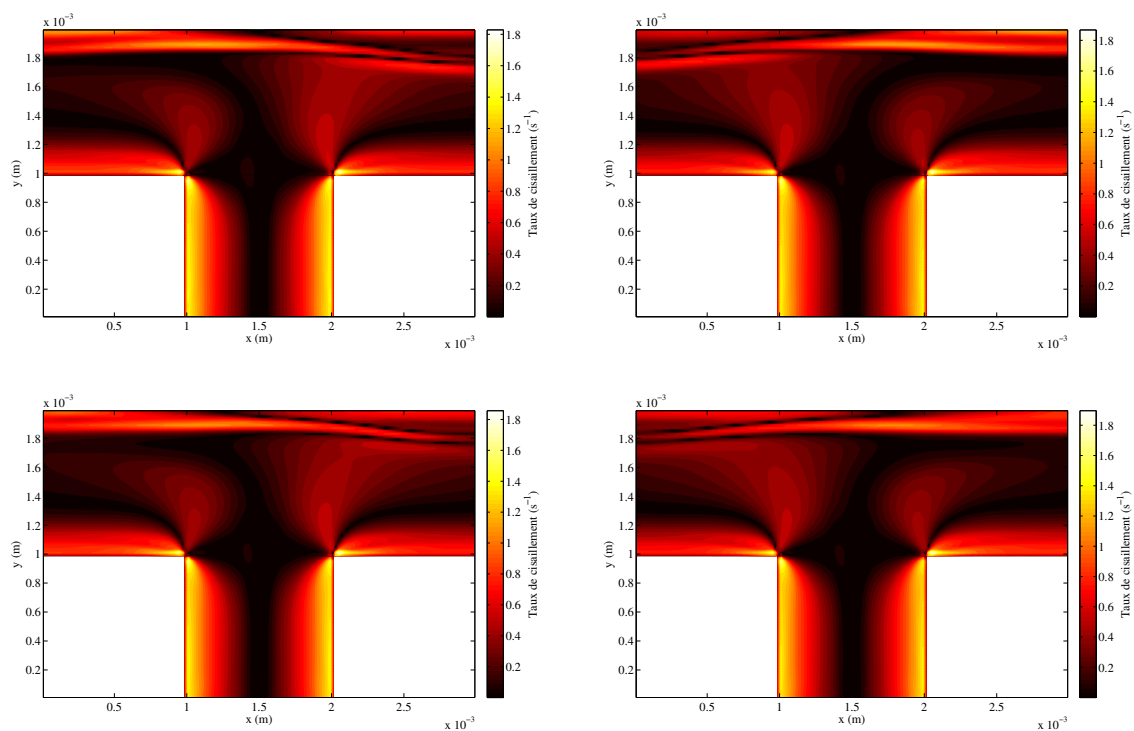


FIGURE 7.9 – Répartition spatiale du taux de cisaillement en différents instants obtenus par simulation sur le modèle (7.2) pour une jonction symétrique (coupe en $z = h/2$).

Projets et Perspectives

Pour conclure ce mémoire, voici quelque éléments de perspectives pour le futur. Certains des points ci-dessous reprennent ceux déjà mentionnés dans le manuscrit et les autres concernent de nouveaux axes de recherches que j'aimerais explorer dans les années à venir.

Interactions laser-plasmas

De manière générale, les modèles que l'on introduit pour décrire les phénomènes physiques sont difficiles à justifier d'un point de vue mathématique. Les modèles de Zakharov introduit pour décrire les interactions laser-plasma dans ce manuscrit ne dérogent pas à la règle : il n'existe pas, à notre connaissance, de cadre mathématique approprié pour justifier l'introduction de tels modèles dérivés à partir des équations d'Euler-Maxwell. De plus, le formalisme présenté ici s'adapte bien à une description géométrique 2D : on suppose que les vecteurs d'ondes des impulsions laser incidente, plasma-électronique et Raman sont coplanaires. Dans ce cadre-là, nous avons exhibé 2 directions privilégiées correspondant à une amplification maximale des champs Raman se propageant dans le même sens que l'onde incidente. Il est aisé d'extrapoler ce résultat au cas d'une vraie configuration 3D en conjecturant que ces directions d'amplification maximale forment alors un cône, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de telles directions. Comment pourrait-on alors écrire des systèmes qui rendent compte de cette situation ? Ce problème est totalement ouvert et présente un intérêt important tant du point de vue de la modélisation que de la compréhension physique du phénomène.

Ondes solitaires

Les ondes solitaires apportent des informations importantes sur la dynamique des équations ou des systèmes que l'on étudie, notamment sur les comportements des solutions : existence globale ou explosion en temps fini. Dans cette direction, il reste à étudier le type d'instabilité présentée dans la partie 3.1 pour les systèmes de Schrödinger. Une investigation numérique pourrait fournir des renseignements précieux. L'unicité des ondes solitaires jouent un rôle important dans l'obtention des résultats de stabilité orbitale via des méthodes variationnelles de minimisation sous contraintes. Lorsque ces ondes sont obtenues comme solution de tels problèmes, un multiplicateur de Lagrange apparaît alors dans les équations et le calibrage ou l'identification de ce paramètre est alors crucial. Lorsque l'équation ne dispose pas de changement d'échelle qui permet de répondre à cette question, alors il devient très difficile de relier ce paramètre de Lagrange aux états fondamentaux. Une solution partielle a été proposée dans [3] avec un argument basé sur la concavité de la courbe qui au paramètre ω décrivant l'état fondamental associe la norme L^2 de cette solution. Cependant, ce problème reste largement ouvert et du fait de son importance demeure un challenge intéressant à relever.

Mécanique des fluides

La partie 6.1 présente des modèles pour l'étude de mélanges de fluides dans des géométries fines. Les expériences numériques montrent que le modèle de Reynolds 2D (6.2) décrit de manière satisfaisante

l'hydrodynamique d'un mélange de fluides ayant des viscosités différentes dans des expériences de co-flow. Au contraire, le modèle 2.5D n'est pas adapté pour décrire un écoulement dans un canal à reliefs puisqu'il ne rend pas compte des phénomènes de re-circulation observés sur le modèle de Stokes 3D. Les prolongements possibles de ces travaux sont les suivants. En vue d'étudier les réactions chimiques entre les constituants des fluides en présence, il faudrait revenir sur l'étude de l'interdiffusion des fluides dans les expériences de co-flow en ajoutant un modèle de réaction chimique aux modèles développés dans cette partie.

La partie 7 est consacrée à l'étude d'écoulements de micelles géantes et est basée sur le modèle de Jonhson-Segalman diffusif. Un gros travail reste à faire sur la compréhension des conditions aux limites associées aux canaux. En particulier, nous ne sommes pas capables de relier les conditions aux limites sur la contrainte à l'état de la surface (rugosités, nature chimique) des canaux envisagés. Il faudrait donc établir une loi rhéologique de surface qui permette de moduler la nature des murs du canal.

Production de nanotubes de carbone.

Il s'agit d'un travail initié avec T. Colin et K. Santugini et en collaboration avec P. Poulain (CRPP, Université Bordeaux 1). Les nanotubes de carbone ont des propriétés mécaniques remarquables mais pour le moment, on les trouve sous forme de films fins, cassants et isotropiques. L'enjeu est ici de pouvoir obtenir des films de nanotubes plus résistants sur des échelles macroscopiques. Plusieurs méthodes existent pour produire les nanotubes de carbone. Celle utilisée par P. Poulain et son équipe consiste à orienter les nanotubes dans la même direction en utilisant un "shear flow" : en pratique on injecte par l'intermédiaire d'une buse une "poussière" de carbone dans un polymère en mouvement. La vitesse d'injection du carbone, la vitesse du polymère sont autant de paramètres qui vont influencer la structure et la résistance des nanotubes. Notons aussi qu'au niveau de l'interface, une réaction chimique se produit et un gel apparaît (voir figure ci-dessous).

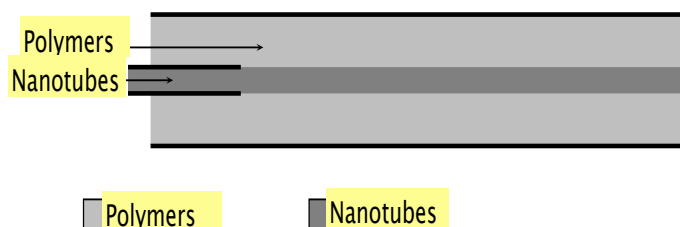


FIG. 1 – Injection of nanotubes inside a polymer flow

Nous avons donc mis en place un système rendant compte de ce phénomène, couplant les équations de Navier-Stokes incompressibles avec une équation sur le tenseur des contraintes et une équation de réaction-diffusion pour décrire la réaction chimique. Des simulations numériques 2D sont en cours et vont être comparées aux expériences.

Travaux de l'auteur

- [1] M. Colin, *On the Local Well-Possedness of Quasilinear Schrödinger Equations in Arbitrary Space Dimension*, Comm. in Part. Diff. Eqs, vol. 27, (2002), 325-354.
- [2] M. Colin, *Stability of Standing waves for a Quasilinear Schrödinger Equation in Space Dimension 2*, Advances in Differential Equations, vol. 8(1), (2003), 1-28.
- [3] M. Colin, *Approximation of a relativistic nonlinear Schrödinger equation by a Klein-Gordon equation*, Asymptotic Analysis, vol. 34(3,4), (2003), 275-309.
- [4] M. Colin et L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation : a dual approach*, Nonlinear Analysis, vol. 56(2), (2004), 213-226.
- [5] M. Colin et T. Colin, *On a quasilinear Zakharov system describing interactions laser plasma*, Diff. Int. Eqs., vol. 17(3,4), (2004), 297-330.
- [6] M. Colin et T. Colin, *A Numerical model for the Raman amplification for laser-plasma interaction*. J. Compt. App. Math., vol. 193(2), (2006), 535-562.
- [7] M. Colin et M. Ohta, *Stability of solitary waves for Derivative Nonlinear Schrödinger equation*, Ann. IHP Analyse Non Linéaire, vol. 23, (2006), 753-764.
- [8] M. Colin, T. Colin et G. Métivier, *Nonlinear models for laser-plasma interaction*, Séminaire X-EDP 2006-2007.
- [9] M. Colin et D. Lannes, *Short pulses approximations in dispersive media*, SIAM Journal on Math. Anal., vol. 41(2), (2009), 708-732.
- [10] M. Colin, T. Colin et M. Ohta, *Stability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three waves interaction*, Ann. IHP Analyse Non Linéaire, vol 26, (2009), 2211-2226.
- [11] M. Colin, T. Colin et M. Ohta, *Instability of standing waves or a system of nonlinear Schrödinger equations with three waves interaction*, Funkcialaj Ekvacioj, vol. 52, (2009), 371-380.
- [12] M. Colin et P. Fabrie, *Optimal control for Navier-Stokes equations*, Adv. Diff. Eqs., vol. 15, (2010), 829-852.
- [13] M. Colin, J. Jeanjean and M. Squassina, *Stability and instability results for standing waves of quasilinear Schrodinger equations*, Nonlinearity, vol. 23(6), (2010), 1353-1385.
- [14] M. Colin, T. Colin, *A multi-D model for Raman amplification*, M2AN, vol. 1, (2011), 1-22.
- [15] M. Colin, T. Colin et J. Dambrine, *Validity of the Reynolds equation for miscible fluids in micro-channels*, Accepté pour publication, DCDS Séries B.

- [16] M. Colin et M. Ohta, *Bifurcation from semi-trivial standing waves and ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations*, Accepté pour publication, SIAM Journal on Mathematical Analysis.
- [17] M. Colin, T. Colin and J. Dambrine *A simplified model for wormlike micelles flows in microchannel.*, Article soumis.
- [18] M. Colin, T. Colin et K. Santugini *Numerical modelling of the construction of fibers with carbon nanotubes* En préparation.

Références

- [AA88] H. Added and S. Added. *Equation of Langmuir turbulence and nonlinear Schrödinger equation : smoothness and approximation*. J. Funct. Anal., Vol. 79, (1988), 183-210.
- [A98] Adimurthi, *Uniqueness of positive solutions of a quasilinear Dirichlet problem with exponential nonlinearity*, Proc. Royal. Soc. Edimburg, vol. 128A, (1998), 895-906.
- [AP56] A.I. Akhiezer and R.V. Polovin, Zh. Eksp. Teor. Fiz, vol. 30, (1956), 915.
- [AG91] S. Alinhac and P. Gérard. “Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.” Editions du CNRS, (1991).
- [AR03] D. Altermann, J. Rauch, *Diffraction Nonlinear Geometric Optics for Short Pulses*, SIAM J. Math. Anal. **34** (2003) 1477-1502.
- [B01] V. Barbu, *Local internal controllability of the Navier-Stokes equations*, Adv. Diff. Eqs. 6 (2001), 1443-1462.
- [B03] V. Barbu, *Feedback stabilization of Navier-Stokes equations*, ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var., 9 (2003), 197-205.
- [BL02] K. Barrailh, D. Lannes, *A general framework for diffractive optics and its applications to lasers with large spectrums and short pulses*, SIAM J. Math. Anal. 34 (2002), no. 3, 636-674.
- [BCGG06] R. Belaouar, T. Colin, G. Gallice and C. Galusinski. *Theoretical and numerical study of a quasilinear system describing Landau damping*. M2AN Math. Model. Numer. Anal., Vol. 40(6), (2006), 961-990.
- [BBM72] T.B. Benjamin, J.L. Bona and J.J. Mahony. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, Vol. 272(1220), (1972), 47-78
- [BC81] H. Berestycki and T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris sér. I Math., **293** (1981), 489-492.
- [BGK84] H. Berestycki and T. Gallouët and O. Kavian, *Equations de champs scalaires euclidiens non-linéaires dans le plan*, C.R. Acad. Sciences Série I, vol. 297, (1983), 307-310 et Thèse d'Etat T. Gallouët, Université Paris VI, (1984).
- [BLSW98] R.L. Berger, A.B. Langdon C.H. Still and A. Williams . *On the dominant and subdominant behaviour of stimulated Raman and Brillouin scattering driven by nonuniform laser beams*. Physics of Plasma, Vol. 5, number 12, (1998), 4337-4356.
- [BD94] A. Bers and J-L. Delcroix . “Physique des plasmas 1, 2”. Inter Editions-Editions du CNRS, (1994).

- [B98] C. Besse. *Schéma de relaxation pour l'équation de Schrödinger non linéaire et les systèmes de Davey et Stewartson*. C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math., Vol. 326, (1998), 1427-1432.
- [BMT01] T.R. Bewley, P. Moin, and R. Temam, *DNS-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithms*, J. Fluid. Mech., 447 (2001), 179-225.
- [B95] B. Bidégaray. *On a nonlocal Zakharov equation*. Nonlinear Anal., Vol. 25 (3), (1995), 247-278.
- [BCSZ05] J. Bona, H. Chen, S.M. Sun, B.-Y. Zhang, *Comparison of quarter-plane and two-point boundary value problems : the BBM-equation*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 13 (2005), no. 4, 921–940.
- [BBBKLPRSS92] A.B. Borisov and A.V. Borovskii and K. Boyer and V.V. Korobkin and T.S. Luk and A.M. Prokhorov and C.K. Rhodes and O.B. Shiryayev J.C. Solem, *Relativistic and charge-displacement self-channeling of intense ultrashort laser pulses in plasma*, Phys. Rev. A, vol. 45, 8, (1992), 5830-5845
- [BG93] A.V. Borovskii and A.L. Galkin. Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter. *JETP*, **77**, 4, (1993), 562-573.
- [BHN99] A. de Bouard, N. Hayashi, P.I. Naumkin and J.C. Saut. Scattering problem and asymptotics for a relativistic nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity*, **12**, (1999), 1415-1425.
- [BHS97] A. de Bouard, N. Hayashi and J.C. Saut. Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, **189**, (1997), 73-105.
- [B99] F. Boyer, *Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation*, Asymptotic Analysis, vol. 20(2), (1999), 175-212.
- [BKS90] S.V. Bulanov and V.I. Kirsanov and A.S. Sakharov, Fiz. Plasmy, vol. 16, (1990), 935.
- [C07] R. Carles. *Geometrics optics and instability for semi-linear Schrödinger equations*. Arch. Ration. Mech. Anal. 183, (2007), 525-553.
- [C94] T. Cazenave, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, Text. Met. Mat. 26, Univ. Fed. Rio de Janeiro, (1994).
- [CL82] T. Cazenave and P.-L. Lions, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations.*, Comm. Math. Phys., vol. 85, (1982), 549-561.
- [CS93] X.L. Chen and R.N. Sudan, *Necessary and sufficient condition for self-focusing of short ultraintense laser pulse in underdense plasma*, Phys. Rev. Let., vol. 70, 14, (1993), 2082-2085.
- [CGL05] T. Colin, G. Gallice, K. Lauriaux, *Intermediate models in nonlinear optics*, SIAM J. Math. Anal. **36** (2005), no. 5, 1664-1688.
- [CFT85] P. Constantin, C. Foias, and R. Temam, *Attractors representing turbulent flows*, Mem. Amer. Math. Soc., 53 (1985).
- [CR71] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Funct. Anal. **8** (1971) 321–340.
- [D09] J. Dambrine, *Modélisation et étude numérique de quelques écoulements de fluides complexes en micro-fluidique*, Thèse de l'Université Bordeaux 1, (2009).
- [DHK96] C.D. Decker, D.E. Hinkel, T. Katsouleas and W.B. Mori. *Spatial temporal theory of Raman forward scattering*. Physics of Plasma, Vol. 3, (1996), 1360-1372.

-
- [D95] L. Di Menza, *Approximations numériques d'équations de Schrödinger non linéaires et de modèles associés*, Thèse de l'Université Bordeaux I, 1995.
 - [BDL99] C-H. Bruneau and L. Di Menza and T. Lehner, *Numerical resolution of some nonlinear Schrödinger-like equations in plasmas*, Num. Methods Partial Differential Equations, vol. 15, 6, (1999), 672-696.
 - [DDGS09] M. Doumika, F. Duboc, F. Golse, and R. Sentis, *Simulation of laser beam propagation with a paraxial model in a tilted frame*, Journal of Computational Physics, Volume 228, Issue 3, 20 February 2009, Pages 861-880
 - [DRR99] D.F. Dubois and H.A. Rose and D.A. Russel. *Nonlinear saturation of simulated Raman scattering in laser hot spots*. Physics of Plasmas, Vol. 6 (4), (1999), 1294-1317.
 - [G00] C. Galusinski. *A singular perturbation problem in a system of nonlinear Schrödinger equation occurring in Langmuir turbulence*. M2AN Math. Model. Numer. Anal., Vol. 34 (1), (2000), 109-125.
 - [ET97] L. Erbe and M. Tang, *Uniqueness theorems for positive radial solutions of quasilinear elliptic equations in a ball*, J. Diff. Eqs., vol. 138, (1997), 351-379.
 - [F96] C. Fabre, *Uniqueness results for Stokes equations and their consequence in linear and nonlinear control problems*, ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var., 1 (1996), 267-302.
 - [JR93] D. Joseph and Y. Renardy, *Fundamentals of two fluid dynamics*, Springer (1993).
 - [F98] A.V. Fursikov, M.D. Gunzburger, and L.S. Hou, *Boundary value problems and optimal boundary control for the Navier-Stokes system : the two dimensional case*, SIAM J. Control Optim., 36 (1998), 852-894.
 - [G82] H. Giesekus, *A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., (1982).
 - [GTV97] J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo. *On the Cauchy problem for the Zakharov system*. J. Funct. Anal., Vol. 151, (1997), 384-436.
 - [GM94(1)] L. Glangetas and F. Merle. *Existence of self-similar blow-up solutions for Zakharov equation in dimension two. I*. Comm. Math. Phys., Vol. 160 (1), (1994), 173-215.
 - [GM94(2)] L. Glangetas and F. Merle. *Concentration properties of blow up solutions and instability results for Zakharov equation in dimension two. II* Comm. Math. Phys., Vol. 160 (2), (1994), 349-389.
 - [G92] R.T. Glassey. *Convergence of an energy-preserving scheme for the Zakharov equation in one space dimension*. Math. of Comput. Vol. 58, Number 197, (1992), 83-102.
 - [GLRTW92] E.G. Gamalii and B. Luther-Davies and A.V. Rode and V.T. Tikhonchuk and Y. Wang, *Kvantovaya Elektron*", vol. 19, 317, (1992) ?
 - [GLOS87] P. Gudzar and Y.C. Lee and E. Ott and G-Z Sun, *Phys. Fluids*", vol. 30, (1987), 526 ?
 - [GSS90] M. Grillakis and J. Shatah and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I,II.*, J. Funct. Anal., I : vol. 74, (1987), 160-197, II : vol. 94, (1990), 308-348.
 - [GW95] Guo Boling and Wu Yaping, *Orbital stability of solitary waves for the nonlinear derivative Schrödinger equation*, J. Differential Equations **123** (1995) 35–55.
 - [HNP99] N. Hayashi, P.I. Naumkin, P-N. Pipolo, *Smoothing effects for some derivative nonlinear Schrödinger equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems 5 (1999), no. 3, 685–695.

- [H095] N. Hayashi and T. Ozawa. *Global, small radially symmetric solutions to nonlinear Schrödinger equations and a gauge transformation*. Diff. and Int. Eqs., Vol. 8, (1995), 1061-1072.
- [IK93] I.D. Iliev and K.P. Kirchev, *Stability and instability of solitary waves for one-dimensional singular Schrödinger equations*, Diff. Int. Eq., vol. 6, (1993), 685-703.
- [I98] O.Y. Imanuvilov, *On exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var., 3 (1998), 97-131.
- [I01] O.Y. Imanuvilov, *Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var., 6 (2001), 39-72.
- [IFZ01] A. Iollo, M. Ferlauto, and L. Zannetti, *An aerodynamic optimization method based on the inverse problem adjoint equations*, Journal of Computational Physics, 173 (2001), 87-115.
- [IZ01] A. Iollo and L. Zannetti, *Trapped vortex optimal control by suction and blowing at the wall*, Eur. J. Mech. B-Fluids, 20 (2001), 7-24.
- [JT03.1] L. Jeanjean and K. Tanaka, *A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$* , Proc. AMS, vol. 131, (2003), 2399-2408.
- [JT03.2] L. Jeanjean and K. Tanaka, *A note on a mountain pass characterization of least energy solutions*, Adv. Nonlinear Stud., vol. 3, (2003), 445-455.
- [JMR93] J.L. Joly, G. Métivier and J. Rauch. *Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves*. Duke Math. J. Vol. 70(2), (1993), 373-404.
- [KPV98] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega. *Smoothing effects and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equations*. Invent. Math., Vol. 134 (3), (1998), 489-545.
- [KP83] S. Klainerman and G. Ponce, *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 36, (1983), 133-141.
- [K88] W.L. Kruer. *The physics of laser plasma interactions*. New York : Addison-Wesley, (1988).
- [KB03] O. Kuksenok and A.C. Balazs, *Simulating the dynamic behavior of immiscible binary fluids in three-dimensional chemically patterned microchannels*, Physical Review E, (2003)
- [KB04] O. Kuksenok and A.C. Balazs, *Structures formation in binary fluids driven through patterned microchannels : effect of hydrodynamics and arrangement of surface patterns*, Physica D, (2004).
- [K89] M.K. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$* , Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 105, (1989), 243-266.
- [L98] D. Lannes, *Dispersive effects for nonlinear geometrical optics with rectification*, Asymptot. Anal. **18** (1998), no. 1-2, 111-146.
- [L98] T. Lehner, *Equations describing strong laser fields in interaction with matter within a plasma in the hydrodynamic limit*, Physics of Plasmas, vol. 5, (1998), 1423-1445
- [L84] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I.*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinéaire, vol. 1, (1984), 109-145.
- [M93] K. McLeod, *Uniqueness of positive radial solution of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^n$* , Trans. Amer. Math. Soc., vol. 339, (1993), 495-505.
- [NW10] N.-T. Nguyen, Z. Wu, *Micromixers - a review*, Journal of Micromechanics and Microengineering, (2010).

-
- [O94] M. Ohta, *Stability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system*, J. Dynam. Differential Equations **6** (1994) 325–334.
 - [O95] M. Ohta, *Stability and Instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity*, Kodai Math. J. , vol. 18, 1, (1995), 68-74.
 - [O11] M. Ohta, *Instability of bound states for abstract nonlinear Schrödinger equations*, preprint, arXiv :1010.1511.
 - [O95] T. Ozawa, *On critical cases of Sobolev’s inequalities*, J. Funct. Anal., vol. 127, (1995), 259-269.
 - [O96] T. Ozawa, *On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type*, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996) 137–163.
 - [OT92] T. Ozawa and Y. Tsutsumi. *Existence and smoothing effect of solution for the Zakharov equations*. Publ. Res. Inst. Math. Sci, Vol. 28 (3), (1992), 329-361.
 - [P01] M. Poppenberg. On the local well posedness of quasi-linear Schrödinger equations in arbitrary space dimension. J. Differential Equations, Vol. 172, (2001), 83-115.
 - [PS83] L.A. Peletier and J. Serrin, *Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in $\mathbb{R}^n$* , Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 81, (1983), 181-197.
 - [PS98] P. Pucci and J. Serrin, *Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic operators*, Indiana Univ. Math. J., vol. 47, (1998), 501-528.
 - [R00] D. Ramos. *Quelques résultats mathématiques et simulations numériques d’écoulements régis par des modèles bifluïdes*. Thèse de doctorat, CMLA ENS Cachan, (2000).
 - [R] G. Riazuelo. *Etude théorique et numérique de l’influence du lissage optique sur la filamentation des faisceaux lasers dans les plasmas sous-critiques de fusion inertielle*. Thèse de l’Université Paris XI, (1999).
 - [S05] R. Sentis, *Mathematical models for laser-plasma interaction*. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 39 (2005), no. 2, 275–318.
 - [S83] J. Shatah, *Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Math. Phys. **91** (1983) 313–327.
 - [SS85] J. Shatah and W. Strauss, *Instability of nonlinear bound states*, Comm. Math. Phys. **100** (1985) 173–190.
 - [SW86] S. Schochet and M. Weinstein. *The nonlinear Schrödinger limit of the Zakharov equations governing Langmuir turbulence*. Comm. Math. Phys., Vol. 106, (1986), 569-580.
 - [S02-1] A.D. Stroock, S.K.W. Dertinger, A. Adjari, I. Mezić, H.A. Stone and G.M. Whitesides, *Chaotic mixers in microchannels*, Science, (2002).
 - [S02-2] A.D. Stroock, S.K.W. Dertinger, G.M. Whitesides and A. Adjari, *Patterning flows using grooved surfaces*, Analytical Chemistry, (2002).
 - [SS99] C. Sulem and P-L. Sulem. “The nonlinear Schrödinger Equation. Self-Focusing and Wave Collapse.” Applied Mathematical Sciences 139, Springer, (1999).
 - [SS79] C. Sulem and P-L. Sulem. *Quelques résultats de régularité pour les équations de la turbulence de Langmuir*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, Vol. 289 (3), (1979), 173-176.
 - [T77] R. Temam, “Navier-Stokes Equations,” Studies in Mathematics and its applications, North-Holland, (1977).

- [B07] B. Texier. *Derivation of the Zakharov equations*. Arch. Ration. Mech. Anal., vol. 184(1), (2007), 121-183.
- [W86] M. I. Weinstein, *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 51–68.
- [ZMR85] V.E. Zakharov, S.L. Musher and A.M. Rubenchik. *Hamiltonian approach to the description of nonlinear plasma phenomena*. Phys. Reports, Vol. 129, (1985), 285-366.

Résumé

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent des équations aux dérivées partielles issues de la physique des plasmas ou de la mécanique des fluides. En amont, ils comportent une partie importante de modélisation : approximation de systèmes hyperboliques oscillants, dérivation de systèmes de types Zakharov, modèle Hele-Shaw, modèle de micelles géantes. En aval, ils abordent un certain nombre de problèmes théoriques : existence et unicité des solutions, stabilité/instabilité des ondes solitaires, contrôle optimal, estimations d'erreur et convergence de modèles. Ils explorent aussi des méthodes numériques de résolution qui ont toutes pour point commun d'utiliser des méthodes de volumes finis ou différences finies sur des grilles cartésiennes en utilisant éventuellement des méthodes de pénalisation.