



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation dynamique d'un véhicule urbain innovant en utilisant le formalisme de la robotique

Salim Maakaroun

► **To cite this version:**

Salim Maakaroun. Modélisation et simulation dynamique d'un véhicule urbain innovant en utilisant le formalisme de la robotique. Automatique / Robotique. Ecole des Mines de Nantes, 2011. Français. NNT : 2011EMNA0014 . tel-00664283

**HAL Id: tel-00664283**

**<https://theses.hal.science/tel-00664283>**

Submitted on 30 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

**Salim Maakaroun**

**ECOLE DOCTORALE : Sciences et Technologies de  
l'Information et de Mathématiques (ED'STIM)  
THESE N° 2012EMNA0014**

*Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de  
Docteur de l'Ecole des Mines  
Sous le label de l'Université Nantes Angers Le Mans  
Discipline **Automatique, Productique***

**Soutenue le 02 Décembre 2011**

**Modélisation et  
simulation dynamique  
d'un véhicule urbain  
innovant en utilisant le  
formalisme de la  
robotique**

**DIRECTEUR DE THESE :**

**Chevrel Philippe**, Professeur, Ecole des Mines de Nantes

**CO DIRECTEUR DE THESE :**

**Khalil Wisama**, Professeur, Ecole Centrale de Nantes

**Gautier Maxime**, Professeur, Université de Nantes

**RAPPORTEURS DE THESE :**

**Basset Michel**, Professeur, ESSAIM Mulhouse

**M'SIRDI Nacer**, Professeur Polytech, Marseille

**PRESIDENT DU JURY :**

**D'Andrea Novel Brigitte**, Professeur, Ecole des Mines de Paris

**MEMBRES DU JURY :**

**Vandanjon Pierre-Olivier**, Chargé de recherche, IFSTTAR

**Arviu Thomas**, Responsable R&D, Lumeneo



## REMERCIEMENTS

*Je remercie en premier lieu mes directeurs de thèse Wisama KHALIL, Maxime GAUTIER et Philippe CHEVREL de m'avoir initié et guidé dans mon parcours. Je leur suis très reconnaissant de m'avoir apporté leurs expériences dans le domaine de la robotique et de l'automatique et de m'avoir accordé leur confiance.*

*Travailler et collaborer avec vous fut pour moi un plaisir tant au niveau technique qu'au niveau personnel.*

*Je souhaite remercier Brigitte D'ANDRE NOVEL d'avoir accepté de présider mon jury. J'exprime ma gratitude pour les rapporteurs Nacer M'SIRDI et Michel BASSET pour leurs lectures attentives du manuscrit ainsi que pour leurs remarques constructives. Je remercie également Thomas ARVIEU pour sa participation à l'évaluation de ma thèse.*

*J'adresse également mes remerciements à Pierre-Olivier VANDANJON pour son soutien et sa participation à l'évaluation de ma thèse.*

*Je remercie l'Ecole des Mines de Nantes ainsi que l'Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes de m'avoir accueilli chaleureusement dans leurs établissements et de m'avoir permis de mener à bien ce travail dans les meilleures conditions.*

*Je remercie en particulier Philippe LEMOINE, Fabien CLAVEAU, Michael CANU, Christine CHEVALLEREAU et Yannick Aoustin pour leur aide précieuse qui a grandement participé à la qualité de mon mémoire.*

*Merci à toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce travail.*

*Enfin, je remercie tous mes proches, amis, famille pour leur soutien tout au long de ma thèse.*

*Merci beaucoup*

# Sommaire

---

|  |           |
|--|-----------|
| Liste des tableaux .....   | v         |
| Liste des figures .....  | vii       |
| Notations .....  | xi        |
| Introduction générale.....   | 1         |
| <b>Chapitre 1 Véhicule du futur et son environnement.....</b>                  | <b>5</b>  |
| <b>1. Véhicules étroits .....</b>  | <b>5</b>  |
| <b>2. Description du véhicule et de son environnement .....</b>                | <b>11</b> |
| 2.1. La caisse ou châssis .....  | 11        |
| 2.2. Les trains .....  | 12        |
| 2.3. L'essieu.....   | 13        |
| 2.4. Les suspensions .....   | 13        |
| 2.5. Direction, angle de braquage, pince, voie et empattement .....            | 14        |
| 2.6. Carrossage et angle de chasse.....  | 15        |
| 2.7. Le pneumatique et torseur d'effort .....                                  | 15        |
| 2.7.1. Transfert de charge et force normale.....                               | 16        |
| 2.7.2. Le frottement de Coulomb.....   | 18        |
| 2.7.3. Glissement entre le pneumatique et la chaussée .....                    | 18        |
| 2.7.4. Modèle d'efforts de Coulomb/Burckhardt/Kiencke de type exponentiel..... | 20        |
| 2.7.5. Modèle de Pacejka.....  | 22        |
| 2.7.6. Moment de renversement .....  | 26        |
| 2.7.7. Moment de résistance au roulement .....                                 | 26        |
| 2.8. Forces aérodynamiques .....   | 27        |
| <b>3. Simulateur.....</b>  | <b>27</b> |
| 3.1. Drive (Sate-italy) .....  | 29        |
| 3.2. TruckSim, CarSim & BikeSim .....  | 30        |
| 3.3. Carmaker .....  | 31        |
| 3.4. ASM Vehicle Dynamics Simulation Package .....                             | 32        |
| 3.5. Ve-DYNA.....  | 33        |
| 3.6. VDL (Dymola) .....  | 34        |
| 3.7. Civitec .....   | 35        |
| 3.8. RaceSim (DATAS).....  | 36        |
| 3.9. SCANer-OKTAL .....  | 36        |
| <b>4. Discussion et Conclusion.....</b>  | <b>37</b> |
| <b>Chapitre 2 Modélisation robotique .....</b>                                 | <b>39</b> |
| <b>1. Système multi-corps et DHM .....</b>                                     | <b>39</b> |
| <b>2. Système à base fixe .....</b>  | <b>40</b> |
| 2.1. Système mécanique à structure arborescente.....                           | 40        |
| 2.2. Système mécanique à structure fermée.....                                 | 43        |
| 2.3. Modèle géométrique direct (MGD) des structures arborescentes .....        | 44        |
| 2.4. Modèle géométrique direct (MGD) des structures fermées .....              | 45        |
| 2.5. Modèle cinématique des robots à structure arborescentes et fermées.....   | 45        |
| 2.6. Modèle dynamique d'une structure arborescente .....                       | 46        |

|                   |  |            |
|-------------------|--|------------|
| 2.6.1.            | Le formalisme de Lagrange .....  | 47         |
| 2.6.2.            | Paramètres inertiels .....   | 49         |
| 2.6.3.            | Newton d'Euler .....   | 50         |
| 2.7.              | Modèle dynamique direct (MDD) d'une structure arborescente .....               | 53         |
| 2.8.              | Modèle dynamique inverse (MDI) d'une structure fermée .....                    | 54         |
| 2.9.              | Modèle dynamique direct (MDD) des structures fermées .....                     | 56         |
| <b>3.</b>         | <b>Structure à base mobile .....</b>   | <b>57</b>  |
| 3.1.              | Repère route .....   | 57         |
| 3.2.              | Matrice de transformation entre la base et le repère galiléen .....            | 57         |
| 3.3.              | Représentation de la base .....  | 58         |
| 3.3.1.            | Méthode 1 : Porteur spatial .....  | 59         |
| 3.3.2.            | Méthode 2 : Modèle Eulérien .....  | 59         |
| 3.4.              | Modèle dynamique .....   | 60         |
| 3.5.              | Modèle mixte de variables Euler -Lagrange .....                                | 62         |
| 3.6.              | Calcul des Matrices A et H à partir de Newton-Euler .....                      | 64         |
| 3.7.              | Récapitulatif de la méthodologie .....   | 64         |
| <b>4.</b>         | <b>Application : Modèle bicyclette 3ddl .....</b>                              | <b>65</b>  |
| 4.1.              | Modélisation .....   | 65         |
| 4.2.              | Simulation .....   | 68         |
| 4.2.1.            | Essai en virage .....  | 69         |
| <b>5.</b>         | <b>Conclusion .....</b>  | <b>71</b>  |
| <b>Chapitre 3</b> | <b>Modèle 2 roues avec suspension et modèle 4 roues avec suspensions .....</b> | <b>73</b>  |
| <b>1.</b>         | <b>Modèle 2 roues avec suspensions .....</b>                                   | <b>73</b>  |
| 1.1.              | Hypothèses simplificatrices .....  | 73         |
| 1.2.              | Modélisation globale du véhicule .....   | 74         |
| 1.3.              | Efforts Extérieurs .....   | 77         |
| 1.4.              | Paramètres dynamiques .....  | 78         |
| 1.5.              | Contraintes cinématiques verticales .....                                      | 80         |
| 1.6.              | Modèle dynamique .....   | 82         |
| <b>2.</b>         | <b>Simulateur .....</b>  | <b>83</b>  |
| 2.1.              | Architecture globale du simulateur .....                                       | 83         |
| 2.2.              | Architecture du scénario pour les essais en simulation .....                   | 85         |
| 2.3.              | Essais en simulation du modèle 2 roues à 11ddl .....                           | 87         |
| 2.3.1.            | Accélération en ligne droite .....   | 87         |
| 2.3.2.            | Essai en virage .....  | 90         |
| <b>3.</b>         | <b>Modèle 4 roues 16 ddl .....</b>   | <b>93</b>  |
| 3.1.              | Modélisation globale du véhicule .....   | 94         |
| 3.2.              | Efforts Extérieurs .....   | 96         |
| 3.3.              | Paramètres dynamiques .....  | 97         |
| 3.4.              | Contraintes cinématiques verticales .....                                      | 98         |
| 3.5.              | Modèle dynamique .....   | 99         |
| <b>4.</b>         | <b>Essais en simulation du modèle 4 roues à 16ddl .....</b>                    | <b>100</b> |
| 4.1.              | Essai en virage .....  | 100        |
| 4.2.              | Prise en compte de la barre anti-roulis .....                                  | 103        |
| 4.3.              | Cohérence des modèles 11 ddl et 16 ddl .....                                   | 104        |
| <b>5.</b>         | <b>Conclusion .....</b>  | <b>106</b> |
| <b>Chapitre 4</b> | <b>Véhicule étroit inclinable : SMERA .....</b>                                | <b>107</b> |
| <b>1.</b>         | <b>Description Générale et Caractéristiques de la SMERA .....</b>              | <b>108</b> |
| 1.1.              | Principe d'inclinaison .....   | 109        |
| <b>2.</b>         | <b>Modèle géométrique de la Smera .....</b>                                    | <b>109</b> |
| 2.1.              | Train arrière .....  | 111        |
| 2.2.              | Train avant .....  | 115        |
| 2.2.1.            | Demi-train gauche .....  | 116        |
| 2.2.2.            | Demi-train droit .....   | 118        |
| 2.2.3.            | Modèle articulaire du train avant .....  | 119        |
| <b>3.</b>         | <b>Modèle cinématique de la Smera .....</b>                                    | <b>121</b> |
| 3.1.              | Train arrière .....  | 123        |

|   |  |            |
|---|--|------------|
| 3.1.1.                                  | Demi -train arrière gauche.....  | 123        |
| 3.1.2.                                  | Demi -train arrière droit.....   | 125        |
| 3.1.3.                                  | Relations entre les vitesses et les accélérations du train arrière.....                | 127        |
| 3.1.4.                                  | Relations entre les vitesses et les accélérations du train avant.....                  | 128        |
| 3.1.5.                                  | Demi-train avant gauche.....   | 128        |
| 3.1.6.                                  | Demi-train avant droit.....  | 129        |
| 3.1.7.                                  | Train avant.....   | 130        |
| 3.2.                                    | Relation matricielles cinématique entre les variable dépendantes et indépendantes..... | 132        |
| 3.3.                                    | Paramètres dynamiques.....   | 132        |
| 3.4.                                    | Efforts Extérieurs.....  | 133        |
| 3.5.                                    | Contraintes cinématiques verticales.....   | 134        |
| 3.6.                                    | Modèle dynamique.....  | 135        |
| <b>4.</b>                               | <b>Essai de simulation.....</b>  | <b>136</b> |
| 4.1.                                    | Essai en freinage rectiligne.....  | 136        |
| 4.2.                                    | Essai en virage.....   | 138        |
| 4.3.                                    | Comparaison des modèles 11ddl et Smera.....  | 140        |
| <b>5.</b>                               | <b>Conclusion.....</b>   | <b>146</b> |
| <b>Conclusion et perspectives.....</b>  |  | <b>147</b> |
| <b>Références bibliographiques.....</b> |  | <b>151</b> |
| <b>A.</b>                               | <b>Annexe : Paramètres de base.....</b>  | <b>157</b> |
|   | <b>Calcul des paramètres de base en utilisant le modèle dynamique.....</b>             | <b>157</b> |
|   | <b>Calcul des paramètres de base en utilisant l'énergie.....</b>                       | <b>158</b> |
| <b>B.</b>                               | <b>Annexe : Algorithme de calcul numérique du modèle géométrique inverse.....</b>      | <b>161</b> |
| <b>C.</b>                               | <b>Annexe : Paramètres Symoro+ modèles 11 ddl, 16 ddl et Smera.....</b>                | <b>163</b> |





## Liste des tableaux

---

|  |     |
|--|-----|
| Tableau 1-1 : Coefficient de Burckhardt en fonction de type de chaussée .....  | 21  |
| Tableau 1-2 : Expression des paramètres du mode longitudinal, latéral et moment d'auto-alignement.....               | 24  |
| Tableau 2-1 : Paramètres géométriques du modèle bicyclette 3ddl .....  | 66  |
| Tableau 3-1 : Paramètres géométriques du modèle à 11 degrés de liberté .....   | 75  |
| Tableau 3-2 : Efforts de contact appliqués par le véhicule sur l'environnement.....                                  | 78  |
| Tableau 3-3 : Paramètres dynamiques du modèle à 11ddl.....   | 79  |
| Tableau 3-4 : Paramètres dynamiques regroupés .....  | 80  |
| Tableau 3-5 : Paramètres géométriques du modèle à 16 degrés de liberté .....   | 95  |
| Tableau 3-6 : Efforts de contact appliqués par le véhicule sur l'environnement.....                                  | 96  |
| Tableau 3-7 : Paramètres dynamiques après regroupement du modèle à 16 ddl .....                                      | 97  |
| Tableau 3-8 : Projection des paramètres inertiels du repère.....   | 105 |
| Tableau 4-1 : Paramètres géométriques du train arrière.....  | 112 |
| Tableau 4-2 : Paramètres géométriques de la boucle gauche reliant le parallélogramme, la suspension et la lyre ..... | 116 |
| Tableau 4-3 : Paramètres géométriques de la boucle droite reliant le parallélogramme, la suspension et la lyre ..... | 118 |
| Tableau 4-4 : Paramètres géométriques du train avant.....  | 120 |
| Tableau 4-5 : Paramètres dynamiques après regroupement du modèle à 32 ddl .....                                      | 132 |
| Tableau 4-6 : Efforts de contact appliqués par le véhicule sur l'environnement.....                                  | 134 |
| Tableau 4-7 : Projection des paramètres inertiels .....  | 141 |



## Liste des figures

---

|   |    |
|---|----|
| Figure 1.1: Diagramme de pourcentage du nombre de passagers par type de trajet.....                           | 6  |
| Figure 1.2 : Distance parcourue d'un conducteur citadin en ile de France.....                                 | 7  |
| Figure 1.3 : City Mobil.....  | 8  |
| Figure 1.4 : Clever.....  | 8  |
| Figure 1.5 : Carver.....  | 8  |
| Figure 1.6 : Piaggio.....   | 8  |
| Figure 1.7 : Tilter.....  | 9  |
| Figure 1.8 : BMW Simple.....  | 9  |
| Figure 1.9 : Tango.....   | 10 |
| Figure 1.10 : Toyota PM.....  | 10 |
| Figure 1.11 : Smera.....  | 10 |
| Figure 1.12 : Volvo Tandem.....   | 10 |
| Figure 1.13 : Land Glider Nissan.....   | 10 |
| Figure 1.14 : Twizy Renault.....  | 10 |
| Figure 1.15 : Prodrive Naro.....  | 11 |
| Figure 1.16 : Next-Ere.....   | 11 |
| Figure 1.17 : Caisse d'un véhicule.....   | 12 |
| Figure 1.18 : Mouvement de la caisse par rapport au sol.....  | 12 |
| Figure 1.19 : Train avant.....  | 13 |
| Figure 1.20 : Schéma d'une suspension.....  | 14 |
| Figure 1.21 : Suspension.....   | 14 |
| Figure 1.22 : Barre anti-roulis.....  | 14 |
| Figure 1.23 : Voie.....   | 14 |
| Figure 1.24 : Angle de braquage ou pince.....   | 14 |
| Figure 1.25 : Empattement.....  | 14 |
| Figure 1.26 : Carrossage positif.....   | 15 |
| Figure 1.27 : Carrossage négatif.....   | 15 |
| Figure 1.28 : Angle de Chasse.....  | 15 |
| Figure 1.29 : Différents types de pneu.....   | 16 |
| Figure 1.30 : Transfert de charge.....  | 16 |
| Figure 1.31 : Vitesse au niveau du contact pneu/sol.....  | 19 |
| Figure 1.32 : Forme de la courbe de la force longitudinale ou latérale.....                                   | 20 |
| Figure 1.33 : Coefficient d'adhérence pour divers types de surface.....                                       | 22 |
| Figure 1.34 : Courbe caractéristique selon le modèle de Pacejka.....  | 23 |
| Figure 1.35 : Courbe caractéristique selon le modèle de Pacejka pour des variations de C, B, D et E.<br>..... | 24 |
| Figure 1.36 : Variation de la force latérale par rapport à la force normale et à l'adhérence.....             | 25 |

|  |    |
|--|----|
| Figure 1.37 : Variation de la force longitudinale par rapport à la force normale et à l'adhérence.....   | 25 |
| Figure 1.38 : Variation du moment d'auto-alignement par rapport à la force normale et à l'adhérence..... | 25 |
| Figure 1.39 : Moment de renversement.....  | 26 |
| Figure 1.40 : Architecture du cycle en V.....  | 28 |
| Figure 1.41 : Cycle de validation – application automobile.....  | 29 |
| Figure 1.42 : Chaîne de transmission.....  | 30 |
| Figure 1.43 : CarSim 7.....  | 31 |
| Figure 1.44 : Paramètres de Carmaker.....  | 32 |
| Figure 1.45 : ASM-VDSP.....  | 33 |
| Figure 1.46 : Ve-Dyna.....   | 34 |
| Figure 1.47 : VDL.....   | 35 |
| Figure 2.1 : Types de structures.....  | 39 |
| Figure 2.2 : Types d'articulations et topologie des structures arborescentes.....                        | 40 |
| Figure 2.3 : Paramètres géométriques standards.....  | 42 |
| Figure 2.4 : Topologie d'une boucle fermée.....  | 44 |
| Figure 2.5 : Bilan des efforts appliqués sur le corps $C_j$ d'une structure arborescente.....            | 53 |
| Figure 2.6 : Angle de Roulis, Tangage et Lacet.....  | 58 |
| Figure 2.7 : Modélisation du Porteur spatial.....  | 59 |
| Figure 2.8 : Modèle Eulérien de la base.....   | 60 |
| Figure 2.9 : Modèle bicyclette et interface roue/sol.....  | 65 |
| Figure 2.10 : Topologie et modèle articulaire du modèle bicyclette 3ddl.....                             | 66 |
| Figure 2.11 : Angle de braquage appliqué au modèle bicyclette.....                                       | 69 |
| Figure 2.12 : Trajectoire planaire du CDG dans $R_f$ .....   | 69 |
| Figure 2.13 : Angle de lacet.....  | 70 |
| Figure 2.14 : Vitesse longitudinale du véhicule dans $R_f$ .....   | 70 |
| Figure 2.15 : Angle de dérive de la roue avant.....  | 70 |
| Figure 2.16 : Angle de dérive de la roue arrière.....  | 70 |
| Figure 2.17 : Effort latéral de la roue avant.....   | 70 |
| Figure 2.18 : Effort latéral de la roue arrière.....   | 70 |
| Figure 2.19 : Angle de braquage appliqué au modèle bicyclette.....                                       | 71 |
| Figure 2.20 : Trajectoire planaire du CDG dans $R_f$ .....   | 71 |
| Figure 2.21 : Angle de lacet.....  | 71 |
| Figure 2.22 : Vitesse latérale du véhicule dans $R_f$ .....  | 71 |
| Figure 3.1 : Schéma du modèle 2 roues avec suspensions.....  | 73 |
| Figure 3.2 : Topologie du modèle à 11ddl et 10 corps.....  | 74 |
| Figure 3.3 : Modèle articulaire à 11 degrés de liberté et 10 corps.....                                  | 75 |
| Figure 3.4 : Torseur de contact roue-sol.....  | 77 |
| Figure 3.5 : Axe d'inertie d'une roue.....   | 79 |
| Figure 3.6 : Direction des composantes nulles de vitesse et d'accélération du modèle à 11ddl.....        | 80 |
| Figure 3.7 : Architecture globale du simulateur.....   | 83 |
| Figure 3.8 : Architecture du bloc « route + environnement ».....   | 84 |
| Figure 3.9 : Exemple de capteurs d'un véhicule instrumenté.....  | 84 |
| Figure 3.10 : Architecture du module « modèle dynamique ».....   | 85 |
| Figure 3.11 : Schéma de calcul des vitesses avant intégration.....                                       | 85 |
| Figure 3.12 : Génération du couple de braquage.....  | 86 |
| Figure 3.13 : Angle d'inclinaison du véhicule.....   | 86 |
| Figure 3.14 : Génération du couple d'inclinaison.....  | 87 |
| Figure 3.15 : Schéma de scénario.....  | 87 |

|   |     |
|---|-----|
| Figure 3.16 : Couple articulaire appliqué à la roue arrière.....                                    | 88  |
| Figure 3.17 : Forces, accélération et vitesse latérales.....  | 88  |
| Figure 3.18 : Trajectoire planaire du cdg.....  | 88  |
| Figure 3.19 : Vitesse longitudinale du cdg.....   | 89  |
| Figure 3.20 : Accélération longitudinale du cdg.....  | 89  |
| Figure 3.21 : Débattement de la suspension avant.....   | 89  |
| Figure 3.22 : Débattement de la suspension arrière.....   | 89  |
| Figure 3.23 : Force normale avant.....  | 89  |
| Figure 3.24 : Force normale arrière.....  | 89  |
| Figure 3.25 : Angle de Roulis, tangage et lacet.....  | 90  |
| Figure 3.26 : Glissement longitudinal arrière.....  | 90  |
| Figure 3.27 : Force longitudinale arrière.....  | 90  |
| Figure 3.28 : Angle de braquage de référence.....   | 91  |
| Figure 3.29 : Trajectoire planaire du cdg.....  | 91  |
| Figure 3.30 : Angle de lacet.....   | 91  |
| Figure 3.31 : Angle de roulis désiré et simulé.....   | 92  |
| Figure 3.32 : Angle de braquage désiré et simulé.....   | 92  |
| Figure 3.33 : Forces latérales.....   | 92  |
| Figure 3.34 : Angle de dérive.....  | 92  |
| Figure 3.35 : Vitesse longitudinale du véhicule dans le repère $R_I$ .....                          | 93  |
| Figure 3.36 : Accélération longitudinale du véhicule dans le repère $R_I$ .....                     | 93  |
| Figure 3.37 : Schéma du modèle 4 roues à 16 ddl.....  | 93  |
| Figure 3.38 : Topologie du modèle à 16 ddl.....   | 94  |
| Figure 3.39 : Modèle articulaire à 16 degrés de liberté et 19 corps.....                            | 94  |
| Figure 3.40 : Direction des composantes nulles de vitesse et d'accélération du modèle à 16 ddl..... | 98  |
| Figure 3.41 : Trajectoire planaire du cdg.....  | 101 |
| Figure 3.42 : Angle de lacet.....   | 101 |
| Figure 3.43 : Forces verticales avant.....  | 101 |
| Figure 3.44 : Forces verticales arrière.....  | 101 |
| Figure 3.45 : Débattements des suspensions avant.....   | 102 |
| Figure 3.46 : Débattements des suspensions arrière.....   | 102 |
| Figure 3.47 : Angle de roulis.....  | 102 |
| Figure 3.48 : Angles de dérive.....   | 102 |
| Figure 3.49 : Forces latérales.....   | 103 |
| Figure 3.50 : Débattement des suspensions arrière.....  | 104 |
| Figure 3.51 : Débattement des suspensions avant.....  | 104 |
| Figure 3.52 : Angle de roulis.....  | 104 |
| Figure 3.53 : Vitesse longitudinale et latérale.....  | 105 |
| Figure 3.54 : Accélération longitudinale et latérale.....   | 105 |
| Figure 3.55 : Angle de tangage.....   | 105 |
| Figure 3.56 : Débattement des suspensions.....  | 105 |
| Figure 4.1 : Photo de la Smera.....   | 108 |
| Figure 4.2 : Architecture intérieure de la Smera.....   | 108 |
| Figure 4.3 : Inclinaison des véhicules étroits.....   | 109 |
| Figure 4.4 : Schéma de la moitié gauche de la Smera.....  | 110 |
| Figure 4.5 : Les lyres avant et arrière.....  | 110 |
| Figure 4.6 : Schéma multi-corps représentatif de la Smera.....                                      | 111 |
| Figure 4.7 : Schéma du demi-train arrière gauche.....   | 112 |
| Figure 4.8 : Modèle articulaire du train arrière.....   | 112 |

|  |     |
|--|-----|
| Figure 4.9 : Coupure des boucles du train arrière .....  | 114 |
| Figure 4.10 : Schéma multi-corps du train avant .....  | 115 |
| Figure 4.11 : Mouvement de la lyre avant lors de l'inclinaison.....  | 115 |
| Figure 4.12 : Schéma de représentation du demi-train gauche.....   | 116 |
| Figure 4.13 : schéma de représentation du demi-train droit .....   | 118 |
| Figure 4.14 : Modèle articulaire du train avant de la Smera .....  | 119 |
| Figure 4.15 : Coordonnées articulaires du train avant.....   | 121 |
| Figure 4.16 : Couple de freinage appliquée aux roues avant.....  | 137 |
| Figure 4.17 : Accélération longitudinale de la Smera .....   | 137 |
| Figure 4.18 : Vitesse longitudinale du véhicule .....  | 137 |
| Figure 4.19 : Angle de la lyre arrière.....  | 137 |
| Figure 4.20 : Débattement des suspensions.....   | 138 |
| Figure 4.21 : Angle de Tangage.....  | 138 |
| Figure 4.22 : Glissement longitudinal des roues avant.....   | 138 |
| Figure 4.23 : Forces longitudinales des roues avant .....  | 138 |
| Figure 4.24 : Angle de braquage.....   | 139 |
| Figure 4.25 : Trajectoire planaire du cdg de la Smera .....  | 139 |
| Figure 4.26 : Angle de lacet.....  | 139 |
| Figure 4.27 : Angle de roulis désiré et simulé .....   | 139 |
| Figure 4.28 : Angles de dérive .....   | 140 |
| Figure 4.29 : Forces latérales.....  | 140 |
| Figure 4.30 : Vitesse latérale et accélération latérale du véhicule dans $R_y$ .....   | 140 |
| Figure 4.31 : Angle de roulis simulé et désiré .....   | 141 |
| Figure 4.32 : Angle de lacet.....  | 141 |
| Figure 4.33 : Trajectoire planaire du cdg .....  | 142 |
| Figure 4.34 : Vitesse longitudinale et accélération longitudinale du véhicule dans $R_f$ .....                               | 142 |
| Figure 4.35 : Vitesse latérale et accélération latérale du véhicule dans $R_f$ .....   | 142 |
| Figure 4.36 : Couple d'inclinaison résultant de la commande du modèle de la Smera et du modèle<br>11 ddl .....               | 143 |
| Figure 4.37 : Couple d'inclinaison appliqué à la Smera en augmentant le frottement visqueux des<br>suspensions arrière ..... | 143 |
| Figure 4.38 : Accélération latérale perçue des deux modèles.....   | 143 |
| Figure 4.39 : Modèle de flexibilité.....   | 144 |
| Figure 4.40 : Couple moteur en variant le frottement visqueux .....  | 145 |
| Figure 4.41 : Couple moteur en variant la raideur .....  | 145 |
| Figure 4.42 : Couple moteur en ajoutant la raideur $K_y$ .....   | 145 |
| Figure 4.43 : Couple moteur en agissant sur l'inertie et le frottement visqueux .....  | 146 |
| Figure 4.44 : Accélération latérale perçue.....  | 146 |

## Notations

---

$A(q)$  : matrice d'inertie du système

AVG : avant gauche

AVD : avant droite

ARG : arrière gauche

ARD : arrière droite

$a(j)$  : antécédent du corps  $j$

$C_j$  : corps  $j$

$C_x$  : moment suivant l'axe  $x$

$C_y$  : moment suivant l'axe  $y$

$C_z$  : moment suivant l'axe  $z$

$\text{cha}$  : angle de chasse

$\text{ddl}$  : degré de liberté

$E_v$  : voie du véhicule

$E$  : Energie cinétique du système

$F_{sj}$  : frottement sec de l'articulation  $j$

$F_{vj}$  : frottement visqueux de l'articulation  $j$

$F_x$  : force suivant l'axe  $x$

$F_y$  : force suivant l'axe  $y$

$F_z$  : force suivant l'axe  $z$

$F_e$  : torseur d'efforts extérieur

$g_{li}$  : glissement longitudinal

$g$  : gravité

$H_{cdg}$  : hauteur du centre de gravité

$H(q, \dot{q})$  : vecteur regroupant les efforts de Coriolis, les efforts centrifuges et les efforts extérieurs

$I_a$  : Inertie du moteur

$J_j$  : matrice d'inertie du corps  $j$

$K_j$  : raideur de l'articulation  $j$

$L$  : lagrangien d'un système

$L_f$  : distance longitudinale du centre de gravité à l'essieu avant

$L_r$  : distance longitudinale du centre de gravité à l'essieu arrière

$M$  : masse  
 $MGD$  : modèle géométrique direct  
 $MDI$  : modèle dynamique inverse  
 $MDD$  : modèle dynamique direct  
 $q$  : vecteur des coordonnées articulaires  
 $\dot{q}$  : vecteur des vitesses articulaires  
 $\ddot{q}$  : vecteur des accélérations articulaires  
 $q_{ar}$  : vecteur des coordonnées articulaires de la chaîne arborescente  
 $\dot{q}_{ar}$  : vecteur des vitesses articulaires de la chaîne arborescente  
 $\ddot{q}_{ar}$  : vecteur des accélération articulaires de la chaîne arborescente  
 $q_{e,1}$  : vecteur position de configuration  
 $qv_{e,1}$  : vecteur vitesse de configuration  
 $qa_{e,1}$  : vecteur accélération de configuration  
 $R_f$  : repère galiléen lié au sol  
 $R_G$  : repère lié au centre de gravité  
 $R_r$  : repère lié à la route  
 $R_j$  : repère lié au corps  $j$   
 $R_b$  : repère lié à la base  
 $V$  : vecteur vitesse de translation  
 $V_{gx}$  : vitesse de glissement  
 $\dot{V}$  : vecteur accélération de rotation  
 $\omega$  : vecteur vitesse de rotation  
 $\dot{\omega}$  : vecteur accélération de translation  
 $\lambda$  : vecteur de Lagrange  
 $\theta$  : angle de roulis  
 $\phi$  : angle de tangage  
 $\psi$  : angle de lacet  
 $\Gamma$  : couple articulaire  
 $\gamma_x$  : accélération longitudinale du véhicule  
 $\gamma_y$  : accélération latérale du véhicule  
 $\alpha$  : angle de dérive  
 $XX_j$  : moment d'inertie du corps  $j$  suivant l'axe  $x_j$   
 $YY_j$  : moment d'inertie du corps  $j$  suivant l'axe  $y_j$   
 $ZZ_j$  : moment d'inertie du corps  $j$  suivant l'axe  $z_j$   
 $XY_j$  : produit d'inertie suivant le plan  $(x_j, y_j)$   
 $XZ_j$  : produit d'inertie suivant le plan  $(x_j, z_j)$   
 $YZ_j$  : produit d'inertie suivant le plan  $(y_j, z_j)$



$MX_j$ : premier moment d'inertie par rapport à  $O_j$  et suivant l'axe  $x_j$

$MY_j$ : premier moment d'inertie par rapport à  $O_j$  et suivant l'axe  $y_j$

$MZ_j$ : premier moment d'inertie par rapport à  $O_j$  et suivant l'axe  $z_j$

$MS_j$ : vecteur des premiers moments d'inertie du corps  $j$

$x$ : abscisse longitudinale par rapport au repère  $R_f$

$y$ : abscisse latérale par rapport au repère  $R_f$

$z$ : abscisse verticale par rapport au repère  $R_f$

$\delta$ : angle de braquage

$\rho$ : angle de carrossage

$\mu$ : adhérence



## Introduction générale

---

Le développement et l'étude de différents moyens de transport passionnent l'être humain depuis des siècles. En conséquence, il s'est efforcé d'accroître sa mobilité dans tous les milieux (mer, terre et air) que ce soit à des fins professionnelles ou personnelles. Dans le cadre de la mobilité terrestre, le développement urbain a conduit à l'usage quasi-exclusif de l'automobile pour les déplacements quotidiens. Avec l'accroissement de la population mondiale et l'épuisement des ressources pétrolières, les moyens de transport conventionnels ont provoqué des problèmes de circulation dans les grandes agglomérations avec notamment la densification du trafic en ville, la pollution par l'émission du CO<sub>2</sub> et le réchauffement climatique, la nuisance sonore... Les solutions à ces problèmes passent naturellement par l'utilisation des transports en commun, du vélo, ainsi que des moyens de transports du type « mobilité individuelle durable ». Ces moyens devraient utiliser des véhicules innovants peu énergivores, écologiques, étroits, qui répondent aux enjeux de l'environnement, en évitant l'usage de moyens de transports surdimensionnés, et en réduisant l'encombrement urbain.

Nos travaux s'inscrivent dans le cadre du développement d'un véhicule urbain innovant, de largeur inférieure à la moitié de la largeur d'une voiture classique, en collaboration avec la société française *LUMENEO*, concepteur de véhicule électrique. Après avoir présenté son premier concept Car au salon de l'automobile à Genève en 2008, la société *LUMENEO* développe actuellement la fabrication en petite série de véhicules étroits, électriques et inclinables baptisés « Smera ». Cette voiture biplace en tandem, 100 % électrique, s'inclinant automatiquement dans les virages est unique au monde. L'inclinaison est réalisée automatiquement par un système motorisé intégré, avec une commande qui assure la stabilité et le confort des passagers au moindre coût énergétique.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation et à la simulation utilisées comme outils de conception pour le développement de nouveaux véhicules de type étroit et inclinable. La modélisation systématique des véhicules s'inspire des techniques développées en robotique pour la modélisation des robots industriels de structure série, arborescente, à boucle fermée ou parallèle. Le véhicule est considéré comme un système multi-corps poly-articulé dont la base mobile est le châssis et dont les roues sont les organes terminaux. La description géométrique

utilise le formalisme de Denavit et Hartenberg Modifié, et la modélisation dynamique utilise l'algorithme de Newton-Euler récursifs adapté au cas des robots à base mobile.

Cette thèse propose une description systématique, générique du modèle dynamique des véhicules indépendamment de leur complexité et cette description est appliquée à un véhicule innovant, étroit et inclinable dont la structure comporte des chaînes fermées.

Le travail présenté est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre présente la motivation pour la mobilité individuelle dans le transport du futur ainsi qu'un état de l'art sur les véhicules étroits dans le monde. Ce chapitre traite également les principales notions liées à la dynamique des véhicules et se termine par un état de l'art des simulateurs commerciaux présents sur le marché.

Le deuxième chapitre présente le formalisme utilisé en robotique pour décrire les systèmes multi-corps arborescents ou fermés, à base fixe ou mobile, pour calculer systématiquement les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques.

Le troisième chapitre est dédié à la modélisation de 2 types de véhicules intermédiaires, un véhicule à 2 roues avec 11 degrés de liberté et un véhicule à 4 roues avec 16 degrés de liberté dont la structure cinématique est arborescente. L'architecture générale d'un simulateur de véhicule est présentée, et un ensemble de simulations pour différents scénarios sont proposés, qui permettent d'analyser et d'étudier le comportement des véhicules considérés. Les travaux de ce chapitre ont permis la publication d'un article dans la *conférence IFACWC 2011, 8<sup>th</sup> World Congress of the International Federation of Automatic Control* (Maakaroun et al. 2011).

Le quatrième chapitre est dédié à la modélisation du véhicule étroit inclinable « Smera » dont la structure cinématique comporte des chaînes fermées. La modélisation dynamique fait appel aux techniques mentionnées dans le chapitre 2 pour les chaînes fermées et au chapitre 3 pour les structures arborescentes et les scénarios de simulation. Précisément, ce chapitre aborde les aspects suivants :

- Résolution des contraintes cinématiques des chaînes fermées ;
- Elaboration des modèles dynamiques à partir des structures arborescentes et fermées ;
- Calcul des modèles dynamiques inverse et direct ;
- Simulation du véhicule étroit, inclinable.

Les travaux menés dans ce chapitre ont donné lieu à la publication d'un article dans la conférence *MMAR 2010, 15th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics* (Maakaroun et al. 2010), avec le prix du meilleur papier, ainsi qu'un article dans la conférence *ICINCO2011, 8th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics* (Maakaroun et al. 2011).

Ce document se termine par une conclusion générale sur le travail présenté ainsi que plusieurs perspectives dans le cadre de ce projet.



## Chapitre 1 Véhicule du futur et son environnement

---

La mobilité est un besoin auquel personne ne veut renoncer, au point de préférer payer davantage plutôt que de restreindre ses déplacements. Parmi les moyens de transport, l'automobile est la plus utilisée et a connu une énorme évolution depuis son invention. La conception d'une voiture nécessite de nombreuses étapes depuis sa spécification jusqu'à sa commercialisation. Ce processus est complexe et soumis à de nombreuses contraintes qui évoluent constamment : attentes du marché, outils de production, technologies, normes, budgets, maintenance, délais, pollution ....

Dans l'histoire de l'automobile, il y a eu plusieurs projets de véhicules innovants pour réduire leur consommation. Aujourd'hui plusieurs facteurs entrent en jeu comme la protection de l'environnement, la densité du trafic, le coût croissant du carburant, l'amélioration de la qualité de vie dans les villes...

Pour concevoir les véhicules du futur, la simulation est indispensable afin de prédire le comportement du véhicule dans diverses situations et modifier la conception si nécessaire.

Dans ce chapitre, nous passons en revue différents véhicules innovants et introduisons les principales notions de dynamique de véhicule. Nous présentons ensuite un état de l'art des simulateurs commerciaux présents sur le marché.

### 1. Véhicules étroits

La généralisation de l'automobile à l'échelle planétaire depuis la fin du siècle dernier pose des problèmes quant au réchauffement climatique, à la pollution, à la sécurité, à la santé des personnes, en particulier les plus faibles (piétons, cyclistes, enfants, personnes âgées, etc.), à l'utilisation des ressources naturelles en particulier, l'épuisement des réserves de pétrole.

L'impact sur l'environnement s'accroît avec l'augmentation de la masse de la voiture. En effet une voiture lourde a un besoin en énergie plus important qu'une voiture légère, en particulier en circulation urbaine dans les phases d'accélération. L'aérodynamisme du véhicule devient prépondérant lorsque la vitesse augmente, c'est alors les véhicules à surface frontale élevée qui sont pénalisés. L'impact environnemental le plus connu est la pollution atmosphérique due

aux gaz d'échappements, qui cause des maladies respiratoires et contribue au réchauffement de la planète. Avec les appareils de chauffage domestique, l'automobile est devenue le principal responsable des brouillards urbains, situation chronique dans plusieurs capitales asiatiques. Selon l'Agence française de sécurité sanitaire environnementale (AFSSET), la pollution atmosphérique, liée pour près d'un tiers aux rejets polluants des voitures, serait responsable chaque année du décès de 6 500 à 9 500 personnes en France.

Avec l'effet de serre, la température moyenne à la surface de la Terre pourrait augmenter de 5,2°C en 2100, alors qu'une étude datant de 2003 tablait sur une hausse de 2,4°C, indiquent des chercheurs du Massachusetts Institute of Technology. Cette nouvelle étude de l'American Meteorological Society, (Sokolov et al. 2009), se fonde sur des modèles économiques plus performants et sur de nouvelles données qui n'avaient pas été prises en compte dans le précédent scénario. Les effets du réchauffement climatique au cours de ce siècle pourraient être deux fois plus importants que ceux estimés il y a seulement six ans, révèlent des scientifiques américains.

Les moyens de transport individuel du futur passeront certainement par des voitures économiques, maniables, peu énergivores, confortables et qui offrent la sécurité des voitures d'aujourd'hui. Une enquête écossaise a interrogé des adultes au sujet de leurs déplacements (The Scottish Government 2008): en 2007/2008, 61 % des trajets ont été effectués avec le conducteur seul, 27 % ont été faits avec un passager, 7 % avec deux passagers, 4 % avec trois passagers, et 1 % avec quatre passagers ou plus. En conséquence, le nombre de personnes moyen par voyage de voiture était de 1.58 (Figure 1.1).

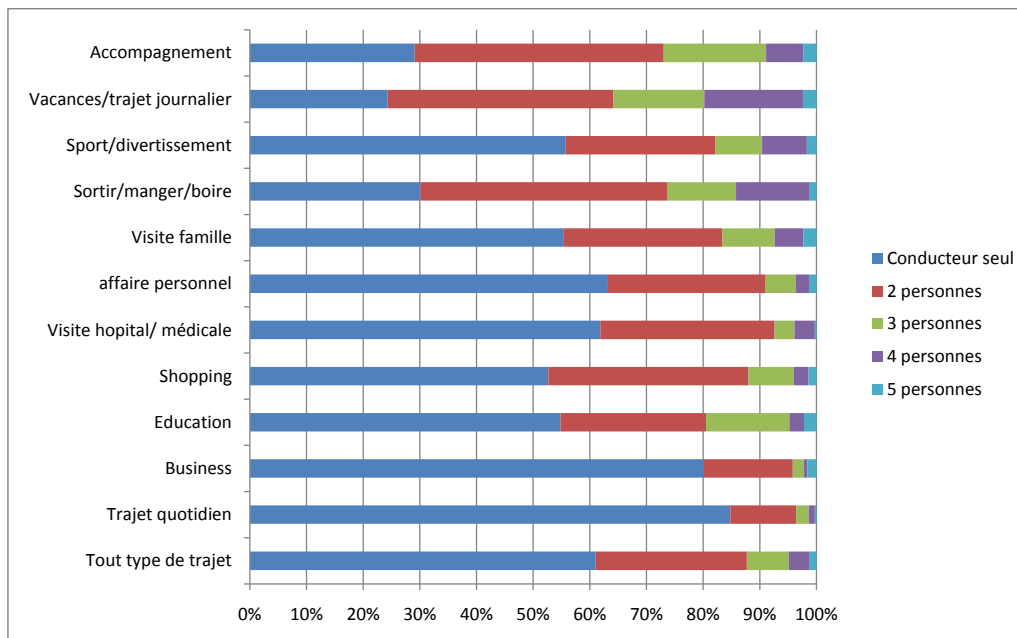


Figure 1.1: Diagramme de pourcentage du nombre de passagers par type de trajet



La figure 1.2 montre que le transport individuel fait référence aux voitures qui ne transportent que le conducteur avec 50% des trajets de moins de 20 kilomètres (Schulz 2008).

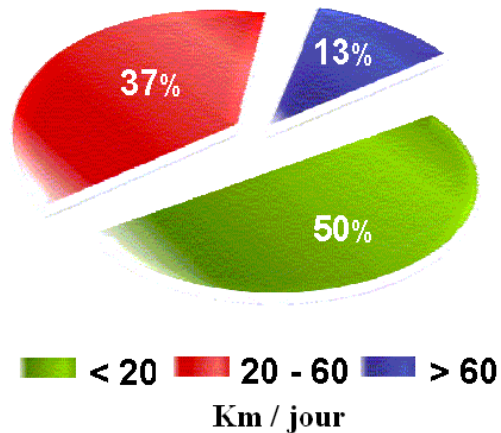


Figure 1.2 : Distance parcourue d'un conducteur citadin en ile de France

L'objectif alors ne se limite pas seulement à lutter contre les pollutions d'origine automobile, mais également à proposer des réponses nouvelles à l'enjeu du transport des personnes : reconquérir l'espace dans la cité, gagner du temps (bien précieux pour tout citadin...), se déplacer de façon plus libre. On parlera du concept de "Navette Individuelle".

Cette navette individuelle devra pouvoir remplacer la voiture pour les déplacements individuels quotidiens. Pour cela elle devra répondre à un cahier des charges bien précis afin d'être adoptée par les automobilistes : être peu encombrante, étroite, maniable, pouvoir atteindre les vitesses sur autoroute (130 Km/h), offrir un niveau de confort et de sécurité, avoir une excellente stabilité malgré la faible largeur.

Plusieurs prototypes de ces véhicules étroits existent déjà : véhicules à quatre roues, à trois roues, électriques, hybrides, inclinables, ou non inclinables....

Donnons d'abord un aperçu sur les véhicules 3 roues (Figure 1.3 - Figure 1.8):

- **CLEVER (Suède)** « Compact Low Emission Vehicle for Urban Transport » (CLEVER 2002), est créé en 2002 à l'initiative de la TU de Berlin, Institut des véhicules automobiles, un consortium européen bénéficiant du soutien du 5e plan de la Commission Européenne et en collaboration avec l'université de Bath.
- **CITY MOBIL (Suisse)**, une filiale d'Armec Sidecar, présentée en octobre 2003 au Tokyo Motor Show (City Mobil 2003).
- **CARVER One (Pays-bas)**, est né du concept de véhicule caréné aérodynamique mais des compromis importants font que Carver One se trouve équipé d'un groupe moto propulseur automobile et donc avec un train arrière large. Seule la partie avant peut s'incliner jusqu'à 45° dans les virages (Carver 1997).

- **BMW Simple (Allemagne)**, tricycle en cours de développement, les 3 roues s'inclinent (Horatiu 2009).
- **Mp3 et mp3 Hybrid Piaggio (Italie)**, un scooter à trois roues, est le premier véhicule inclinable à trois roue commercialisé par un grand constructeur (Piaggio 2006). Il rencontre un très grand succès (meilleure vente de scooter 125cc en France en 2009).
- **Tilter (France)**, un engin électrique à 3 roues inclinables et en propulsion, en développement chez Synergetic (Tilter 2008).

On cite encore d'autres projets de véhicules tricycles étroits : Peugeot Hybrid3, Torga, X-novo (France), Flybo EV (Chine), Aptera (Etat unis), Drymer (Belgique), Cree Sam (Suisse), Renault UBLO (France)....



Figure 1.3 : City Mobil



Figure 1.4 : Clever



Figure 1.5 : Carver



Figure 1.6 : Piaggio



Figure 1.7 : Tilter



Figure 1.8 : BMW Simple

Citons maintenant quelques véhicules à 4 roues ( Figure 1.9 - Figure 1.16):

- **TANGO (Etats-Unis)**, véhicule électrique lourd développé par Brian et Rick Woodbury de « Computer Car Corporation », et exposé à l'Exposition Auto LA 2004 (Tango 2004).
- **Toyota PM (Japon)**, véhicule présenté à Tokyo 2003 Motor show, et basé sur le concept PM « Personal Mobility » Ce concept est vraiment dédié à l'utilisation dans des villes surpeuplées et prenant en compte le transport personnel, ce qui explique son nom "la Mobilité Personnelle" (Toyota PM 2003).
- **SMERA (France)** de Lumeneo, constructeur automobile de voitures électriques, est un véhicule de type voiture à 4 roues, compact et de faible largeur, s'inclinant légèrement dans les virages (Lumeneo 2005).
- **VOLVO Tandem (Suède)**, en mai 2004, le centre de conception et de contrôle (VMCC) en Californie du sud a annoncé un nouveau concept de véhicule, appelé le Tandem (Volvo Tandem 2004).
- **Lang Glider de Nissan (Japon)**, concept car inclinable à 4 roues présenté fin 2009.
- **Twizy Renault (France)**, bi place tandem 4 roues à habitacle partiellement fermé, dévoilé par Renault septembre 2009 avec une sortie prévue en 2012 (Renault 2011).
- **Podrive NARO (Grande Bretagne)** véhicule inclinable. Il a été conçu par les étudiants de l'université de Coventry, faculté d'art et de design (Naro 2004).
- **Next-Ere (France)**, un concept car électrique à 4 roues, présenté au mondial de l'auto 2008 (Eco&mobilité 2007).





Figure 1.9 : Tango



Figure 1.10 : Toyota PM



Figure 1.11 : Smera



Figure 1.12 : Volvo Tandem



Figure 1.13 : Land Glider Nissan



Figure 1.14 : Twizy Renault



Figure 1.15 : Prodrive Naro



Figure 1.16 : Next-Ere

On cite encore d'autres projets d'automobiles étroites à quatre roues : Ducati (Italie), Gazelle Phillip Jams (Australie), Ligier (France), Itri Ecooter (Taïwan), Assystem Franco Sbarro (France), Twotwo car concept (Allemagne), Suzuki Sharing Coach (Japon)...

## 2. Description du véhicule et de son environnement

Un véhicule est un ensemble de corps reliés entre eux par plusieurs liaisons visant d'une part à assurer le mouvement du châssis mais aussi le confort des passagers qu'il transporte. Il est composé d'un châssis, et d'un système de liaison au sol comprenant : les pneumatiques, les roues, les trains et les suspensions. La dynamique du système de direction n'est pas pris en compte et l'angle au volant est directement appliqué aux roues. (Baffet 2007), (Glaser 2004), (Raharijona 2004), (Venture 2003), (Sentouh 2007) et (Nehaoua 2008).

### 2.1. La caisse ou châssis

C'est la structure métallique externe qui supporte et rigidifie tous les éléments constituant un véhicule terrestre. Elle contient l'habitacle, le groupe moteur, le système de commande pilote : pédales, volant, levier de vitesse... Cet ensemble constitue la masse suspendue. Dans cette étude, le châssis est modélisé par un corps rigide, ce qui permet de limiter l'étude des flexibilités aux suspensions et aux pneus (Deutchsh 1970).

Dans la suite, les définitions d'angle et de position correspondent à un véhicule à l'arrêt ou en mouvement sur un sol plan horizontal.



Figure 1.17 : Caisse d'un véhicule

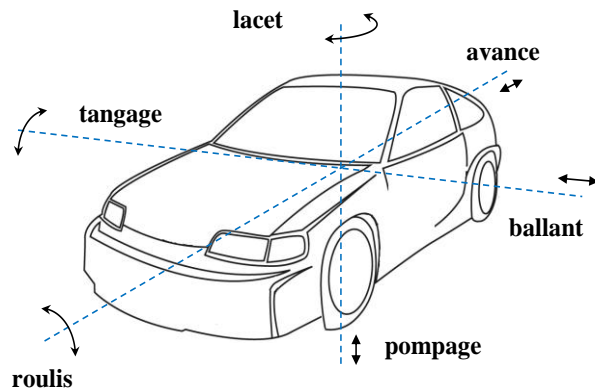


Figure 1.18 : Mouvement de la caisse par rapport au sol

Soit  $R_f$  un repère lié au sol d'axes  $(x_f, y_f, z_f)$  dont l'axe  $z_f$  est vertical et orienté vers le haut. Les axes  $x_f$  et  $y_f$  constituent avec  $z_f$  un trièdre direct.

Soit  $R_G$  un repère d'origine  $G$ , le centre de gravité du véhicule. L'axe  $x_G$  est orienté positif longitudinalement dans le sens de l'avance, l'axe  $y_G$  est orienté positif vers la gauche et l'axe  $z_G$  est orienté positif verticalement pour former une base directe.

Les mouvements de la caisse  $R_G$  par rapport au sol  $R_f$ , dans les trois directions, se caractérisent par la situation d'un repère lié à la caisse par rapport à un repère lié au sol avec les six degrés de liberté : l'avance suivant l'axe longitudinal, le ballant suivant l'axe transversal et le pompage suivant l'axe vertical et trois rotations : le roulis autour de l'axe longitudinal, le tangage autour de l'axe transversal et le lacet autour de l'axe vertical.

Les efforts principaux qui agissent sur la caisse sont :

- Les efforts d'interaction roues/sol, transmis à la caisse par le système de liaison au sol
- Les efforts aérodynamiques d'interaction du véhicule avec l'air qui sont principalement appliqués dans la direction longitudinale sauf en cas de vent latéral.

## 2.2. Les trains

Le train avant est l'ensemble des organes mécaniques d'un véhicule assurant la suspension et la direction des roues avant et le train arrière est l'ensemble des organes qui assurent la suspension et le guidage des roues arrière. Les trains sont caractérisés par leur cinématique et par leur élastocinématique. La cinématique détermine la position et l'orientation de la roue par rapport au sol, ce qui conditionne l'effort d'interaction roue/sol. L'élastocinématique détermine la position et l'orientation du châssis par rapport au train, et elle est assurée par des cales élastiques de liaisons (Brossard 2006).

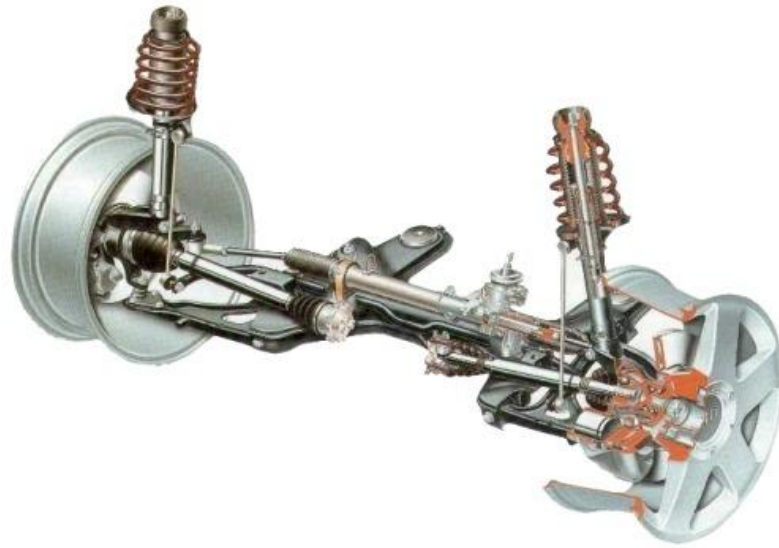


Figure 1.19 : Train avant

### 2.3. L'essieu

C'est l'ensemble des organes qui relient la roue au train à l'exception des éléments de directions et de suspensions. L'essieu assure la compatibilité avec l'environnement physique, les performances attendues et la sécurité d'utilisation.

### 2.4. Les suspensions

La suspension est l'ensemble qui assure la liaison entre la roue et la caisse (Figure 1.21). Elle porte le véhicule, assure le contact entre les pneus et le sol, et isole le châssis des perturbations générées à l'interface roue-sol. Son rôle est d'assurer la bonne tenue de route et le confort des passagers en éliminant les fréquences de vibrations indésirables.

On appelle débattement, les déplacements des centres de roue par rapport à la caisse suivant l'axe vertical.

On représente la partie « élastique et amortisseur » de la suspension par un système composé d'un ressort de raideur  $k_i$  et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement (ou coefficient de frottement visqueux)  $F_{v_i}$  et d'un frottement sec  $F_{s_i}$ . Le schéma d'une suspension est donné par la figure 1.20.

La barre anti-roulis est un dispositif de couplage élastique des débattements des roues d'un même train qui augmente la rigidité en roulis de la suspension du véhicule (Figure 1.22). Ce dispositif permet de générer des couples qui s'opposent au roulis du véhicule.



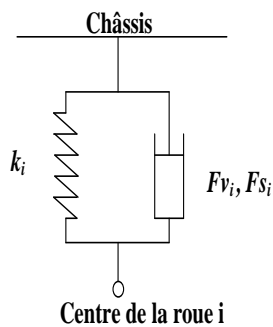


Figure 1.20 : Schéma d'une suspension

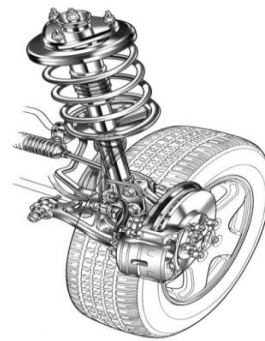


Figure 1.21 : Suspension



Figure 1.22 : Barre anti-roulis

## 2.5. Direction, angle de braquage, pince, voie et empattement

La direction se compose du volant, de la colonne de direction et de la crémaillère qui transforme la rotation du volant en une translation afin de faire tourner les roues directrices.

Le braquage  $\delta_i$ , est l'angle de rotation des roues avant autour de leurs axes verticaux. Il est dû principalement à l'action du conducteur sur le volant (Figure 1.24).

La pince est l'angle de rotation des roues arrière autour de leurs axes verticaux. Cet angle est dû uniquement à la cinématique et à l'élastocinématique des trains (Figure 1.24).

La voie est la distance entre les deux roues d'un même essieu (Figure 1.23).

L'empattement est la distance entre les deux roues d'un même côté (Figure 1.25).

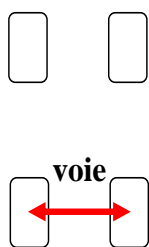


Figure 1.23 : Voie

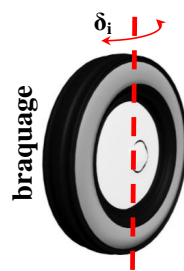


Figure 1.24 : Angle de braquage ou pince

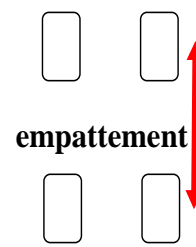


Figure 1.25 : Empattement



## 2.6. Carrossage et angle de chasse

Lorsque la voiture est soulevée ou enfoncée, les plans de la roue ne restent pas perpendiculaires à celui de la route : le véhicule prend du carrossage. C'est l'angle  $\rho_i$  (Figure 1.26 & Figure 1.27) formé par l'axe d'inclinaison de la roue (donnée par la fusée ou le porte moyeu) par rapport à l'horizontale. Cette inclinaison a plusieurs rôles :

- Permettre au poids du véhicule de reposer aussi près que possible de la base de la fusée pour diminuer le porte à faux (déport)
- Permettre de garder les roues perpendiculaires au sol sur route bombée
- Aider l'inclinaison des pivots à faire coïncider l'axe des pivots et le point de contact du pneumatique au sol (diminution du déport qui provoque un couple nuisible)

Un carrossage est négatif (Figure 1.27) lorsque le hauts des roues s'écartent et il est positif lorsqu'ils se rapprochent (Figure 1.26).

Une roue directrice s'oriente suivant un axe de pivotement incliné par rapport à la verticale vers l'arrière ou l'avant du véhicule et forme l'angle de chasse  $cha_i$ . La chasse donne la stabilité aux roues directrices et améliore les sensations au volant (Figure 1.28).

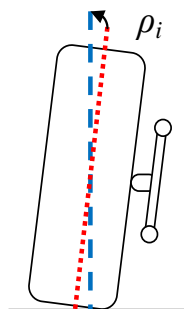


Figure 1.26 : Carrossage positif

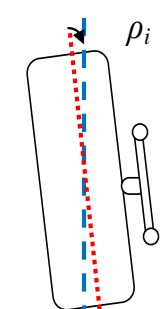


Figure 1.27 : Carrossage négatif

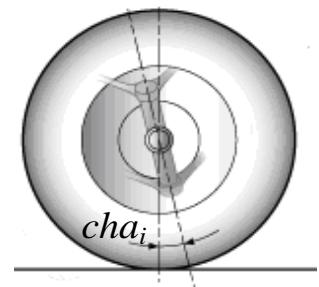


Figure 1.28 : Angle de Chasse

## 2.7. Le pneumatique et torseur d'effort

Le pneumatique est l'élément physique du véhicule en interaction avec le sol. Il doit assurer la sécurité d'utilisation et l'agrément de conduite.

- La surface de contact du pneu avec le sol est appelée aire de contact. Elle peut être représentée sous forme rectangulaire et caractérisée par le coefficient d'adhérence noté  $\mu$  qui varie entre 0 et 1. Une adhérence totale ou proche de 1 correspond à l'absence de glissement entre le pneu et le sol. C'est le cas d'une chaussée sèche avec de bon pneumatique. Une adhérence entre 0.5 et 0.6 peut être due à une chaussée humide ou légèrement mouillée. Une chaussée verglacée correspond à une adhérence  $< 0.3$ .

➤ La contribution du pneumatique dans l'agrément de conduite est fondamentale. Il doit être capable de filtrer les perturbations extérieures, absorber les irrégularités de la route pour assurer le confort des passagers. Leurs caractéristiques sont fournies généralement par le constructeur, et peuvent être déterminées à l'aide d'un banc de caractérisation de pneumatique « MTS flatrac » (MTS 1999).

Il existe plusieurs types de pneus qui répondent à des conditions d'utilisation et des caractéristiques désirées (Figure 1.29).



Figure 1.29 : Différents types de pneu

Plusieurs types de modèle de contact pneumatique-chaussée sont envisageables. Tout dépend du domaine d'utilisation et de la précision requise pour la simulation. Nous allons exposer plusieurs formulations des efforts de contact pneumatique-chaussée.

### 2.7.1. Transfert de charge et force normale

Les efforts de contact roue/sol dépendent fortement des charges verticales appliquées aux roues. Ces efforts verticaux sont principalement dus aux forces de gravité et aux accélérations du véhicule. Lorsque le véhicule est à l'arrêt ou à vitesse constante, la répartition des charges est obtenue à partir d'un équilibre statique de sorte que :

$$\begin{aligned}
 F_{zAVG} = F_{zAVD} &= Mg \frac{L_r}{2(L_r + L_f)} \\
 F_{zARG} = F_{zARD} &= Mg \frac{L_f}{2(L_r + L_f)}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

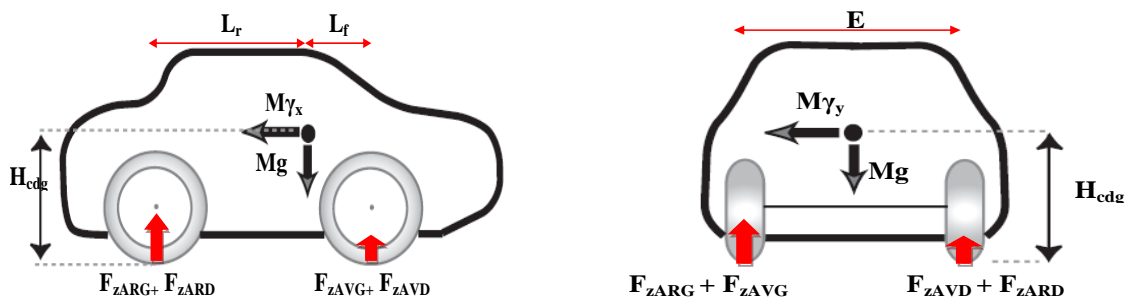


Figure 1.30 : Transfert de charge

Avec :

- $g$ , la gravité ;
- $M$ , la masse du véhicule ;
- Les notations AVG, AVD, ARG et ARD correspondent respectivement à avant gauche, avant droit, arrière gauche et arrière droit ;

La répartition du torseur dynamique sur les roues se traduit par un « transfert de charge » par rapport à la répartition à l'arrêt. En conditions dynamiques, la charge peut être transférée aux roues avant pendant le freinage, vers les roues arrière pendant l'accélération, et d'un coté à l'autre pendant la prise d'un virage. La connaissance de la répartition non homogène de l'effet de la masse totale du véhicule sur chaque pneumatique est une étape importante pour analyser le comportement dynamique du véhicule.

Les équations présentées dans ( 1.2 ) reposent sur les travaux de Kiencke et Nielsen (Kiencke & Nielsen 2000) en faisant l'équilibre des moments sur l'axe arrière et avant des roues et l'équilibre des moments sur les quatre roues du véhicule (Figure 1.30). Ces équations illustrent un cas particulier où le couplage latéral/longitudinal est négligé et la dynamique des suspensions n'est pas prise en compte. Les équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_{zAVG} &= \frac{M}{L_f + L_r} (L_r g - H_{cdg} \gamma_x) \left( \frac{1}{2} - \frac{H_{cdg} \gamma_y}{E_v g} \right) \\
 F_{zAVD} &= \frac{M}{L_f + L_r} (L_r g - H_{cdg} \gamma_x) \left( \frac{1}{2} + \frac{H_{cdg} \gamma_y}{E_v g} \right) \\
 F_{zARG} &= \frac{M}{L_f + L_r} (L_f g + H_{cdg} \gamma_x) \left( \frac{1}{2} - \frac{H_{cdg} \gamma_y}{E_v g} \right) \\
 F_{zARD} &= \frac{M}{L_f + L_r} (L_f g + H_{cdg} \gamma_x) \left( \frac{1}{2} + \frac{H_{cdg} \gamma_y}{E_v g} \right)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Avec :

- $\gamma_x$ , l'accélération longitudinale du véhicule ;
- $\gamma_y$ , l'accélération latérale du véhicule ;
- $H_{cdg}$ , la hauteur du centre de gravité par rapport au sol ;
- $L_f + L_r$ , l'empattement du véhicule ;
- $E_v$ , la voie du véhicule.

Dans la suite, nous utilisons une approche générale basée sur le modèle dynamique qui calcule directement la répartition de la charge sur les quatre points de contact avec le sol.

### 2.7.2. Le frottement de Coulomb

La loi de frottement de Coulomb décrit le comportement des forces de frottement sec entre deux solides en contact et en mouvement relatif :

- Première loi : la résultante des efforts de frottement est une force tangentielle qui s'oppose à la vitesse de glissement.
- Deuxième loi : le module de cette composante est inférieur ou égal à la force normale au point d'application multiplié par le coefficient d'adhérence  $\mu$ .

Soit  $F_N$ , la force normale au niveau du point de contact entre le pneumatique et la chaussée. Selon la deuxième loi du frottement de Coulomb, la relation suivante entre la force normale et la force tangentielle  $F_T$  est :

$$\|F_T\| \leq \mu \|F_N\| \quad (1.3)$$

Cette force tangentielle projetée dans un repère du plan de contact a deux composantes  $F_X$  et  $F_Y$ . D'après l'équation ( 1.3 ), on peut écrire :

$$\frac{F_X^2 + F_Y^2}{F_N^2} \leq \mu^2 \quad (1.4)$$

L'équation ( 1.4 ) est celle d'un disque dans le repère de projection. Pour le contact pneumatique chaussée, les caractéristiques du pneumatique en comportement longitudinal sont meilleures que celles en comportement latéral. Ainsi, pour le pneumatique, nous obtenons, non pas un disque, mais une ellipse de friction. Les forces longitudinales et latérales sont couplées et un pneumatique ne peut pas délivrer un effort maximal à la fois en longitudinal et en latéral. Ceci est à l'origine de perte de contrôle lorsque le frottement est maximal en longitudinal. En effet, la force longitudinale étant maximale, d'après la formulation de Coulomb, le pneumatique ne peut générer une force latérale permettant le guidage du véhicule.

Donc cette formulation ne permet pas d'exprimer les forces latérales et longitudinales. Les phénomènes à l'origine de ces forces seront présentés dans le paragraphe 2.7.3.

### 2.7.3. Glissement entre le pneumatique et la chaussée

#### 2.7.3.1 Taux de glissement

Le contact pneu/sol se traduit par un glissement du pneumatique sur la chaussée. La vitesse de glissement appelée  $V_{gxi}$ , est la différence entre la vitesse linéaire du véhicule au point de contact pneu/sol suivant l'axe longitudinal  $V_{xi}$  et la vitesse de roulement du pneumatique  $V_{Rwi}$  :

$$V_{gxi} = V_{xi} - V_{Rwi} = V_{xi} - R\omega_i \quad i : \text{indice du pneumatique}$$

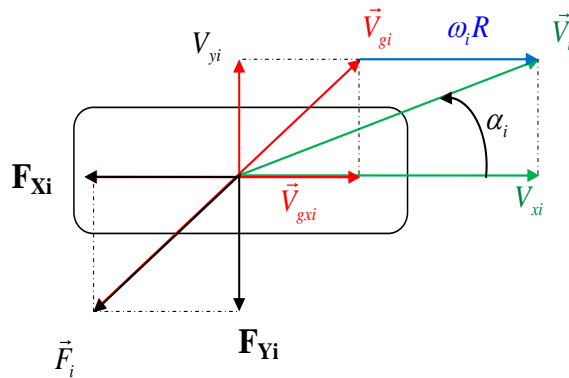


Figure 1.31 : Vitesse au niveau du contact pneu/sol

La figure 1.31 montre la vitesse au niveau du point de contact roue/sol et la création de la force. Un roulement sans glissement veut dire que cette différence est nulle et donc les forces longitudinales appliquées au niveau des pneumatiques sont nulles. Le taux de glissement  $g_{li}$  représente le rapport entre la vitesse de glissement  $V_{gxi}$  et le maximum des deux grandeurs  $V_{Rw}$  et  $V_{xi}$ :

$$g_{li} = \frac{V_{gxi}}{\max(V_{xi}, R\omega_i)} = \frac{V_{xi} - R\omega_i}{\max(V_{xi}, R\omega_i)} \quad (1.5)$$

Dans le cas de freinage, la vitesse de rotation du pneu  $\omega_i$  diminue et la vitesse de glissement  $V_{gxi}$  devient positive. Le taux de glissement dans ce cas là devient négatif et cela va créer une force de frottement au sens inverse du glissement, qui freine le véhicule.

L'évolution des forces de contact pneumatique/chaussée montre l'existence de trois zones différentes (Figure 1.32) :

- La zone de pseudo-glissement linéaire : la zone du régime linéaire (les forces varient linéairement en fonction des glissements). C'est la zone dans laquelle nous ne mobilisons pas une forte adhérence (conduite normale).
- La zone de pseudo-glissement : c'est la zone d'une forte mobilisation de l'adhérence, mais le véhicule reste contrôlable.
- La zone de glissement total : c'est la zone où le véhicule devient difficilement contrôlable.

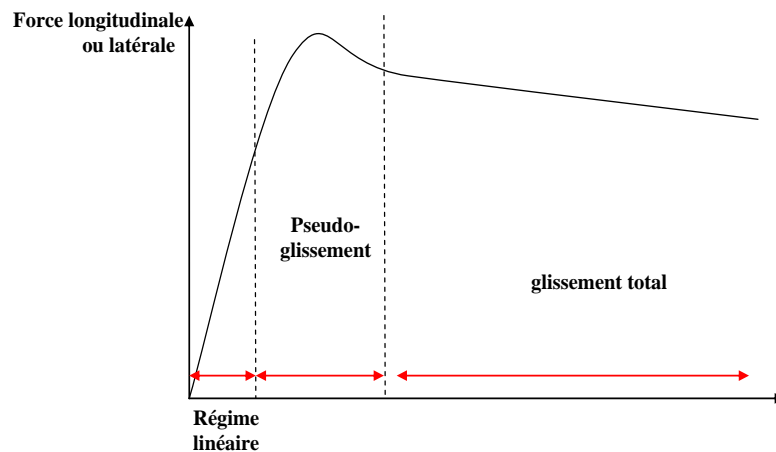


Figure 1.32 : Forme de la courbe de la force longitudinale ou latérale

### 2.7.3.2 Angle de dérive

Lorsqu'une roue est soumise à une sollicitation latérale (par exemple une force latérale), la surface de contact du pneumatique sur la chaussée tend à glisser dans le sens opposé. Le glissement latéral qui en résulte est caractérisé par l'angle de dérive appelé  $\alpha_i$ , entre l'axe longitudinal de la roue et la direction de son mouvement (Figure 1.31). Il est donné par la formule suivante :

$$\alpha_i = -\arctan \frac{V_{yi}}{V_{xi}} \quad (1.6)$$

Avec :

- $V_{xi}$ , la vitesse du véhicule au point de contact suivant la direction longitudinale de la roue  $i$  ;
- $V_{yi}$ , la vitesse du véhicule au point de contact suivant la direction transversale de la roue  $i$ .

La connaissance précise de cet angle (par identification à partir de données expérimentales) contribue dans la détection de situation critique de conduite (Caroux et al. 2006).

### 2.7.4. Modèle d'efforts de Coulomb/Burckhardt/Kiencke de type exponentiel

D'après le modèle de Coulomb, les forces longitudinales et latérales peuvent être exprimées en fonction du coefficient d'adhérence longitudinale  $\mu_{xi}$  et du coefficient d'adhérence latérale  $\mu_{yi}$ , et de la force normale  $F_{zi}$  appliquée sur le pneumatique (Canudas de Wit et al. 1995). Elles sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} F_{xi} &= \mu_{xi} F_{zi} \\ F_{yi} &= \mu_{yi} F_{zi} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Les coefficients d'adhérence sur chaque roue sont calculés en utilisant la formule de Burckhardt (Burckhardt 1993) et (Kiencke & Nielsen 2000) donnée par l'équation (1.8). Elle dépend du glissement longitudinal  $g_{li}$  et de l'angle de dérive  $\alpha_i$ :

$$\begin{aligned}\mu_{xi} &= \mu_{resi} \frac{g_{li}}{s_i} \\ \mu_{yi} &= \mu_{resi} \frac{\tan \alpha_i}{s_i}\end{aligned}\tag{1.8}$$

Avec :

$$\begin{aligned}s_i &= \sqrt{g_{li}^2 + \tan(\alpha_i)^2} \\ \mu_{resi}(s_i) &= c_1(1 - e^{-c_2 s_i}) - c_3 s_i e^{-c_4 s_i V_G} (1 - c_5 F_{zi}^2)\end{aligned}\tag{1.9}$$

$V_G$  représente la vitesse du centre de gravité du véhicule

Les paramètres  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont spécifiques à l'état de la surface de la chaussée, comme l'indique le tableau 1-1 issue de l'ouvrage de Kiencke.

Les paramètres  $c_4$  et  $c_5$  étant positifs,  $\mu_{resi}$  diminue lorsque la vitesse et la charge verticale du véhicule diminuent.

**Tableau 1-1 : Coefficient de Burckhardt en fonction de type de chaussée**

|                  | $c_1$  | $c_2$   | $c_3$  |
|------------------|--------|---------|--------|
| Asphalte, sec    | 1.2801 | 23.9    | 0.52   |
| Asphalte, humide | 0.857  | 33.822  | 0.347  |
| Béton, sec       | 1.1973 | 25.168  | 0.5373 |
| Pavés, sec       | 1.3713 | 6.4565  | 0.6691 |
| Pavés, humide    | 0.4004 | 33.7080 | 0.1204 |
| Neige            | 0.1946 | 94.129  | 0.0646 |
| Glace            | 0.05   | 306.39  | 0      |

La figure 1.33 représente les caractéristiques du coefficient d'adhérence en fonction de divers types de revêtement et d'état de la chaussée.

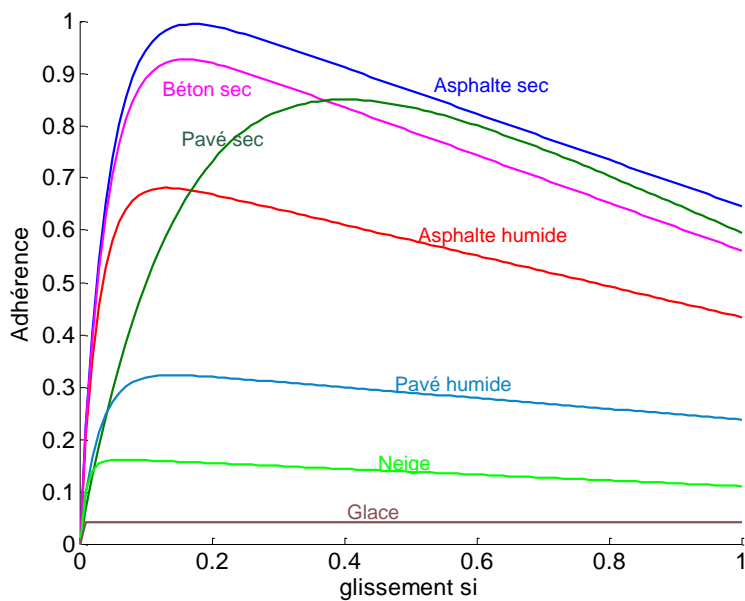


Figure 1.33 : Coefficient d'adhérence pour divers types de surface

### 2.7.5. Modèle de Pacejka

Les modèles de Pacejka (Pacejka et al. 1987), (Bakker & Pacejka 1991), (Pacejka 2006) connus sous le nom de « formule magique », sont issus de l'identification des paramètres de courbes à partir de relevés expérimentaux obtenus sur banc d'essai. Les paramètres du modèle du Pacejka nécessitent d'être ajustés aux conditions d'essais réelles (revêtement, protocole d'essais...) qui ne sont pas prises en compte par les équations du modèle (Basset et al. 2005). Malgré son domaine de validité limité, il est encore utilisé comme référence dans le domaine industriel. Ce modèle quasi-statique non-linéaire permet de calculer les forces longitudinales, latérales, ainsi que le moment d'auto alignement. Il exprime aussi le couplage entre les efforts longitudinaux et latéraux. La seule expression à utiliser est donnée par :

$$\begin{aligned}
 X &= x + S_h \\
 F(x) &= y(X) + S_v \\
 y(X) &= D \sin(C \tan^{-1}(BX - E(BX - \tan^{-1}(BX))))
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Cette formule permet de décrire :

- En entrée  $x$ , le glissement longitudinal ou l'angle de dérive de la roue
- En sortie, respectivement l'effort longitudinal ou l'effort latéral et le moment d'auto-alignement

Les paramètres  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $S_h$  et  $S_v$  dépendent de la force normale appliquée sur le pneumatique, de l'angle de carrossage  $\rho$ , des caractéristiques du pneumatique et du mode étudié. Ils ont une signification physique :



- $B$  : coefficient de raideur ;
- $C$  : facteur de forme ;

$B$  et  $C$  permettent d'ajuster les pentes aux origines et l'allure des courbes.

- $D$  : valeur maximale ;
- $E$  : courbure qui permet un contrôle des abscisses pour lesquelles les valeurs maximales des courbes sont atteintes ;
- $S_h$  : décalage à l'origine en horizontal ;
- $S_v$  : décalage à l'origine en vertical ;

La figure 1.34 montre qu'à partir de l'observation de la courbe caractéristique des efforts d'un pneumatique, il est possible de déterminer les paramètres  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Le paramètre  $E$  corrige la courbure de la courbe après le sommet

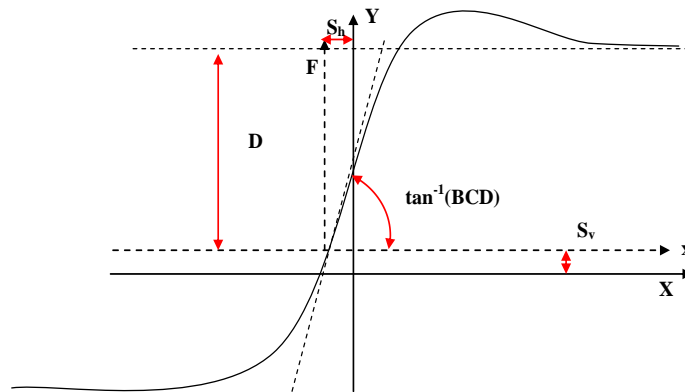
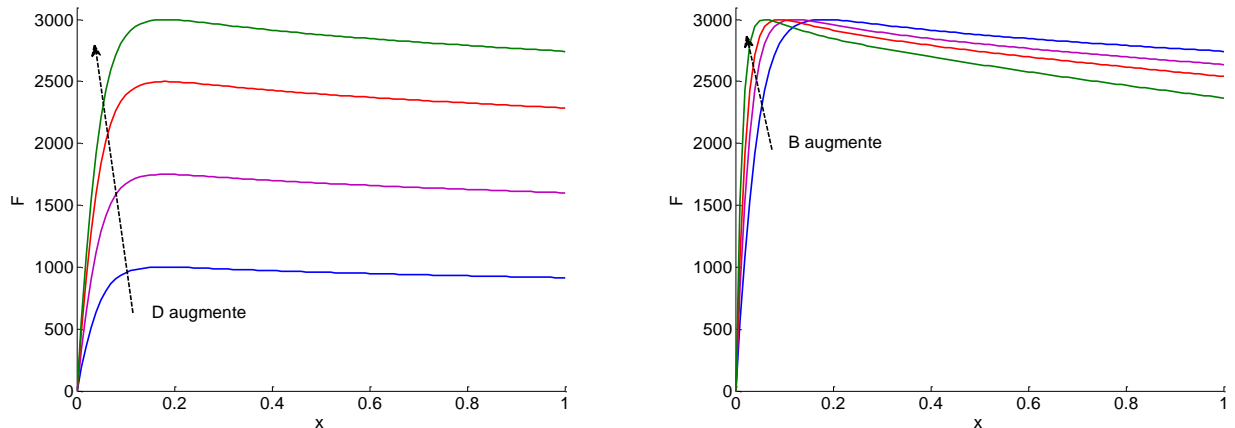


Figure 1.34 : Courbe caractéristique selon le modèle de Pacejka

Le coefficient  $BCD$  représente la tangente à l'origine. Il est équivalent à la raideur d'adhérence du pneumatique en latéral ou en longitudinal. La figure suivante montre la forme des réponses du modèle de Pacejka en fonction des paramètres pour un pneumatique donné.



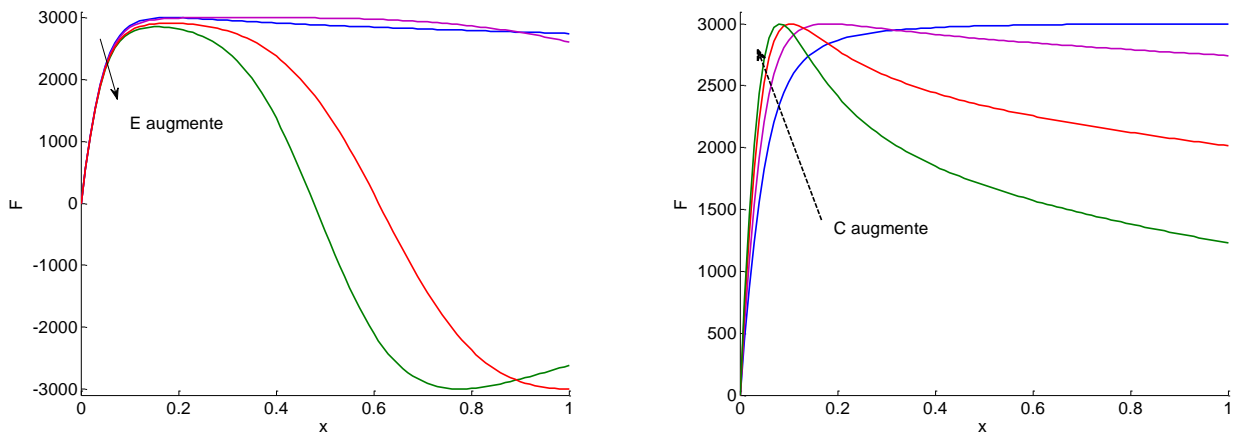


Figure 1.35 : Courbe caractéristique selon le modèle de Pacejka pour des variations de C, B, D et E.

Les expressions des paramètres du mode longitudinal, latéral et le moment d'auto-alignement du modèle de Pacejka sont représentées sur le tableau 1-2 :

Tableau 1-2 : Expression des paramètres du mode longitudinal, latéral et moment d'auto-alignement

| Mode longitudinal                            | Mode latéral  | Moment Auto-alignement   |
|--|---|--|
| $\mu_{xm} = b_1 F_z + b_2$                   | $\mu_{ym} = a_1 F_z + a_2$                                | $\mu_{zm} = c_1 F_z + c_2$                                     |
| $D = \mu_{xm} F_z$                           | $D = \mu_{ym} F_z$  | $D = \mu_{zm} F_z$   |
| $BCD = (b_3 F_z^2 + b_4 F_z) e^{(-b_5 F_z)}$ | $BCD = a_3 \sin(2 \tan^{-1}(F_z / a_4)) (1 - a_5  \rho )$ | $BCD = (c_3 F_z^2 + c_4 F_z) (1 - c_6  \rho  e^{(-c_5 F_z)})$  |
| $C = b_0$                                    | $C = a_0$   | $C = c_0$  |
| $E = b_6 F_z^2 + b_7 F_z + b_8$              | $E = a_6 F_z + a_7$                                       | $E = (c_7 F_z^2 + c_8 F_z + c_9) (1 - c_{10}  \rho )$          |
| $B = BCD / CD$                               | $B = BCD / CD$  | $B = BCD / CD$   |
| $S_h = b_8 F_z + b_{10}$                     | $S_h = a_8 \rho + a_9 F_z + a_{10}$                       | $S_h = c_{11} \rho + c_{12} F_z + c_{13}$                      |
| $S_v = 0$                                    | $S_v = a_{11} \rho F_z + a_{12} F_z + a_{11}$             | $S_v = (c_{14} F_z^2 + c_{15} F_z) \rho + c_{16} F_z + c_{17}$ |

On remarque que l'angle de carrossage n'intervient que dans le mode latéral et que les coefficients  $\mu_{xm}$  et  $\mu_{ym}$  peuvent être analysés comme étant des modules du frottement de Coulomb. Quant aux équations du couple d'auto-alignement, la chasse géométrique n'est pas prise en compte. Elle est considérée relativement faible par rapport à la distance entre le centre de gravité du véhicule et le point de contact du pneu avec le sol. Les figures (Figure 1.36), (Figure 1.37) et (Figure 1.38) montrent les variations des forces latérales, longitudinales et les moments d'auto-alignement pour différentes forces normales et différentes adhérences.

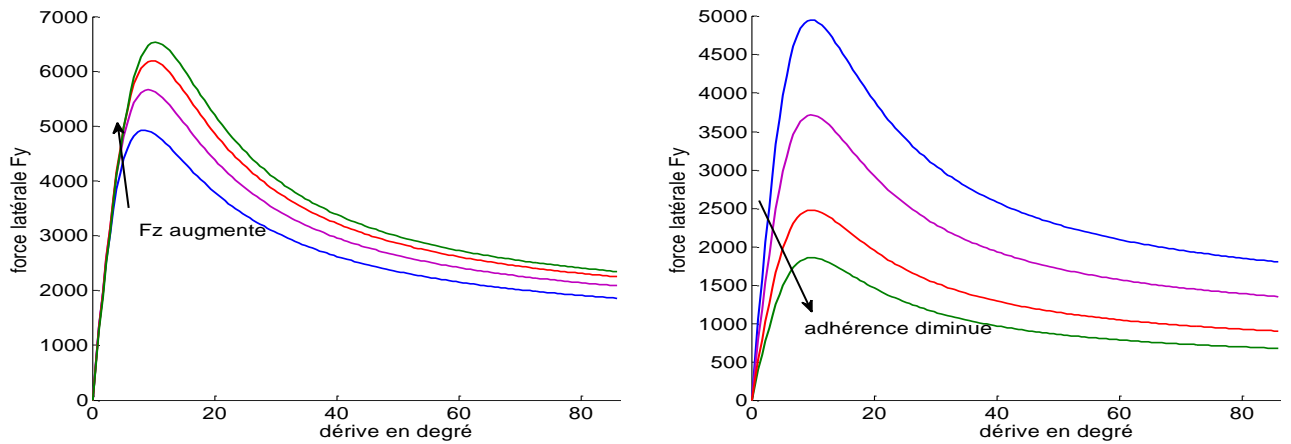


Figure 1.36 : Variation de la force latérale par rapport à la force normale et à l'adhérence

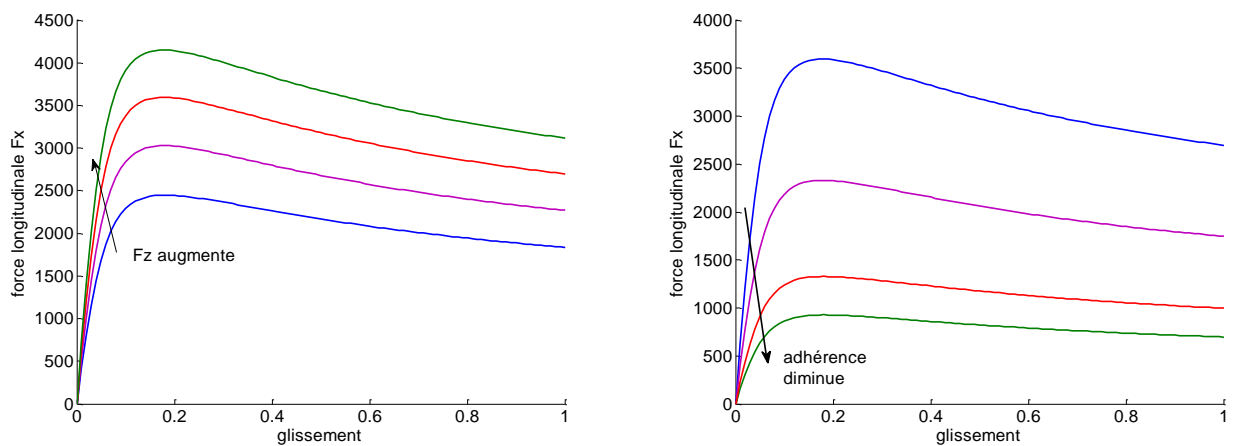


Figure 1.37 : Variation de la force longitudinale par rapport à la force normale et à l'adhérence

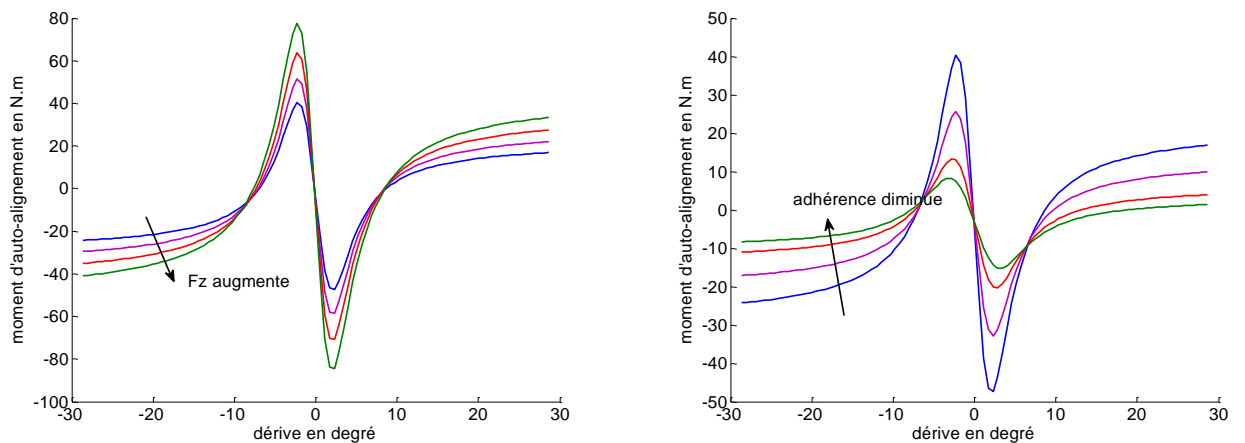


Figure 1.38 : Variation du moment d'auto-alignement par rapport à la force normale et à l'adhérence

En comparant le moment d'auto-alignement avec les forces latérales, nous remarquons que le maximum du moment d'auto-alignement se situe avant le maximum de la force latérale maximale. Ce phénomène est utilisé par les pilotes de course pour détecter les limites de contrôlabilité de leur véhicule : dès qu'ils sentent une diminution de la force nécessaire pour

faire tourner ou maintenir le volant, ils savent qu'ils se rapprochent du maximum de la force latérale.

Il existe dans la littérature d'autres modèles d'effort de contact roue-sol comme le modèle de Dugoff (Dugoff et al. 1970) et des travaux de recherche portant sur l'estimation de ces efforts (Villagra et al. 2010), (M'sirdi et al. 2005). Nous utilisons par la suite le modèle de Pacejka pour représenter le modèle de contact roue-sol.

### 2.7.6. Moment de renversement

Ce moment est causé par le carrossage de la roue. Il est donc dû au déplacement du point de contact pneu-chaussée. En effet, le point conventionnel est défini comme étant l'intersection du plan vertical de symétrie de la roue avec le sol (Figure 1.39). Cependant, vue la géométrie du pneumatique, le point de contact pneu-sol se déplace transversalement le long de la circonférence du pneu (Takahashi & Hada 2004) et se retrouve à distance du point conventionnel. L'équation du moment peut être approchée par le produit de la charge verticale par le bras de levier associé (Cossalter & Doria 1999). Dans ce cas, le moment de renversement est donné comme suit :

$$C_x = -t_p F_z \quad (1.11)$$

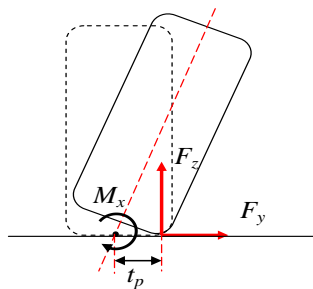


Figure 1.39 : Moment de renversement

### 2.7.7. Moment de résistance au roulement

Lorsque le véhicule roule, un moment apparaît autour de l'axe latéral du pneu. En effet, le rayon de la roue  $R$  à l'arrêt est différent de celui en roulement. Cette différence crée une zone de contact, qui une fois soumise à la charge verticale, génère un moment de résistance au roulement. Le moment est fonction de la charge verticale et d'un coefficient de résistance au roulement  $f$  :

$$C_y = RfF_z \quad (1.12)$$

## 2.8. Forces aérodynamiques

Comme tout objet en mouvement, un véhicule est exposé à un ensemble d'efforts aérodynamiques dont le torseur est calculé au centre d'inertie du véhicule. Il se résume à la trainée longitudinale qui affecte principalement les performances en accélération, et la poussée latérale constituant une perturbation externe influant surtout la stabilité du guidage et la portée verticale.

L'effort aérodynamique peut être approché par l'équation suivante :

$$F = \frac{1}{2} \rho_{air} C_d A V_r^2 \quad (1.13)$$

où  $\rho_{air}$  est la densité de l'air,  $A$  est la surface de référence obtenue par projection frontale du véhicule.  $C_d$  est le coefficient de pénétration dans l'air et  $V_r$  est la vitesse relative du véhicule définie comme la somme vectorielle de la vitesse du véhicule et celle du vent.

Afin d'illustrer et d'analyser la dynamique du véhicule ainsi que la contribution de chacune des différentes composantes cités ci-dessus, les modèles correspondants doivent être implémentés dans un environnement de simulation. Dans la partie suivante, nous évoquons un état de l'art des simulateurs du marché ainsi que leurs domaines d'applications

## 3. Simulateur

L'ingénierie basée sur la simulation, « simulation-based engineering », représente un outil efficace pour réduire les coûts de développement, en limitant notamment le nombre de prototypes réels et le volume des essais nécessaires à la mise au point du produit. Ce concept de prototypage rapide a été adopté par pratiquement tous les secteurs industriels et de recherches. Le potentiel du Prototypage Virtuel augmente quand le système final résulte de l'assemblage de composants développés par plusieurs fabricants situés à des emplacements géographiques différents. La fabrication des sous-systèmes des prototypes physiques peut être compliquée voire impossible dans les étapes diverses du développement (coût élevé et contraintes de temps).

Aujourd'hui, le prototypage virtuel de véhicule atteint dans l'industrie d'automobile un niveau qui permet d'analyser des véhicules complets par la simulation. Cependant, certaines difficultés subsistent par exemple l'intégration du groupe motopropulseur dans le modèle de véhicule, la modélisation fine du contact entre le pneu et le sol et l'élaboration de véhicules dont l'architecture mécanique est innovante (véhicule avec dispositif d'inclinaison, ...)

Le développement d'un simulateur se fait suivant différentes étapes caractérisées par un cycle en V (Royce 1987). C'est un modèle de gestion de projet qui limite le retour aux étapes

précédentes. Les phases de la partie montante doivent renvoyer de l'information sur les phases en vis-à-vis lorsque les défauts sont détectés, afin d'améliorer le logiciel. La figure 1.40 montre l'architecture du cycle en V :

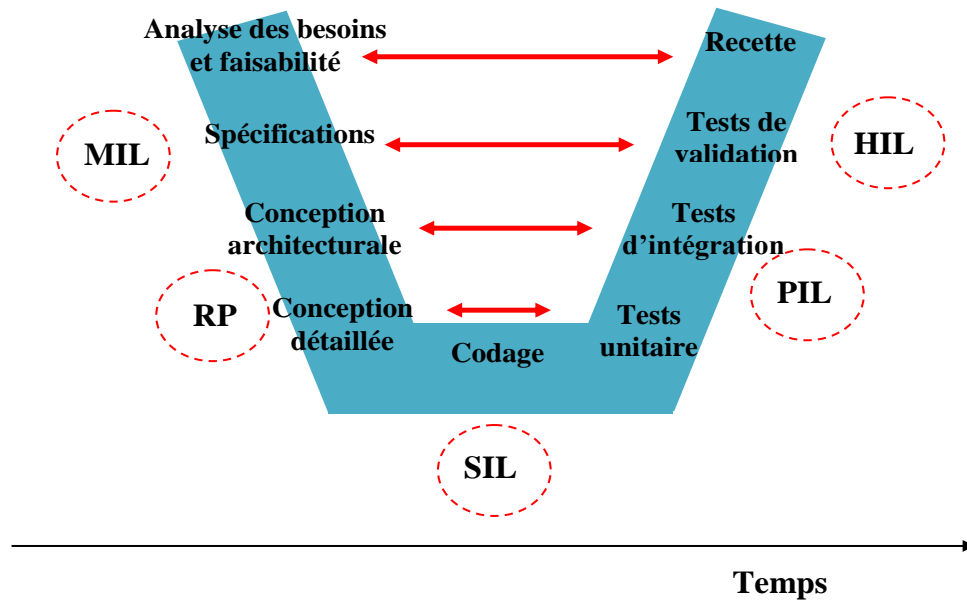


Figure 1.40 : Architecture du cycle en V

Il part du principe que les procédures de vérification de la conformité du logiciel par rapport aux spécifications doivent être élaborées dès les phases de conception. Au cours de ce cycle, plusieurs types de validation ont lieu :

- **MIL** (Model In the Loop) : la validation en simulation du modèle (par exemple celui du véhicule) couplé à un modèle d'environnement. La vérification du modèle doit satisfaire les prestations et les principales exigences opérationnelles et fonctionnelles.
- **RP** (Rapid Prototyping) : Prototypage rapide. Le modèle de contrôle-commande est intégré et compilé dans un calculateur prototype connecté au système réel. Les stratégies sont validées et la pré-calibration est affinée.
- **SIL** (Software In the Loop) : validation en boucle fermée du logiciel embarqué couplé au modèle d'environnement. On doit vérifier que le logiciel développé donne les mêmes résultats que lors des tests MIL et satisfait aussi les exigences supplémentaires.
- **PIL** (Power in the loop) : les organes électroniques de puissance et électrotechniques (onduleurs, chargeurs, batteries, moteurs électriques,..) sont testés avec un environnement virtuel de charges passives ou actives.
- **HIL** (Hardware In the Loop) : validation sur banc hybride du calculateur embarqué. On valide les exigences opérationnelles, fonctionnelles et de sûreté de fonctionnement du calculateur réel sur le prototype virtuel.

La figure 1.41 montre un exemple de cycle de validation MIL, SIL et HIL d'un modèle de contrôle- commande dédié à une application automobile

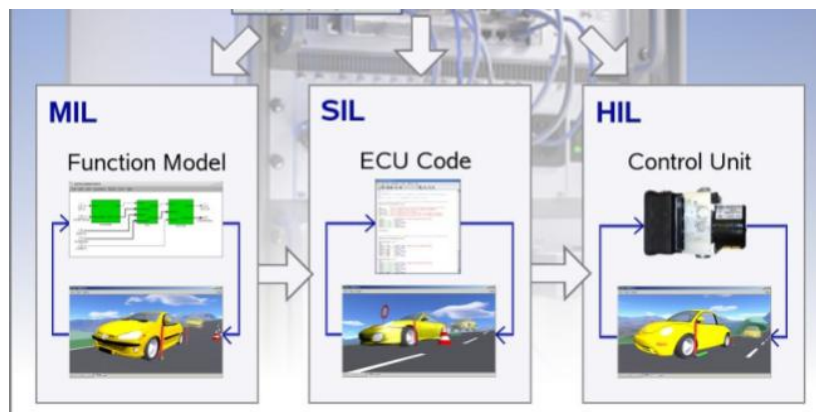


Figure 1.41 : Cycle de validation – application automobile

La conception d'un bon simulateur doit répondre à un cahier de charge universel. Il doit

- être capable de résoudre les équations différentielles et récurrentes,
- manipuler des schémas blocs...
- avoir un langage de script, un environnement graphique, un compilateur pour Pc et microcontrôleurs,
- avoir un schéma fonctionnel, des bibliothèques, cartographies...
- avoir des interfaces standardisées d'entrées/sorties
- importer/exporter des modèles, C et VHDL-AM code....

D'après la bibliographie, on compte plusieurs simulateurs à travers le monde développés dans les secteurs académiques, industriels et commerciaux. Dans la suite, nous présentons les simulateurs « les plus connus » avec leurs spécificités.

### 3.1. Drive (Sate-italy)

Drive est un simulateur dynamique de voitures. Il simule le comportement des voitures pendant l'accélération le long de leur axe longitudinal de symétrie. La dynamique couplée des masses suspendues et non suspendues est obtenue en calculant le mouvement vertical et le tangage du véhicule. La transmission est soigneusement modélisée de l'embrayage aux pneus, y compris la boîte de vitesse (Figure 1.42). L'interaction entre les pneus et le sol est exprimée par un diagramme non linéaire de force et du glissement, qui tient compte du calcul correct de forces de traction, y compris ceux avec des valeurs élevées de glissement. *Sate* (SATE 1998) a conçu d'autres outils complémentaires comme *Bench* pour les suspensions, *Clutch* pour l'embrayage, *Condiz* pour la climatisation... Ces produits, la plupart du temps basés sur une

architecture de MATLAB/Simulink, peuvent être utilisés individuellement aussi bien que dans un environnement plus large de simulation.

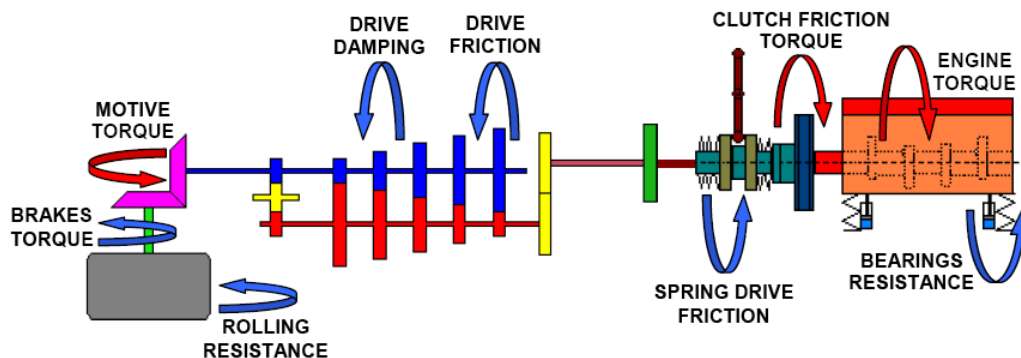


Figure 1.42 : Chaîne de transmission

### 3.2. TruckSim, CarSim & BikeSim

Les outils de *CarSim*, de *BikeSim*, et de *TruckSim* (Mechanical Simulation Corporation 1996) simulent et animent la dynamique des voitures, motos, scooters, voitures de compétition, et camions, en utilisant les PCs standard sous Windows. Les modèles mathématiques basés sur 30 ans de recherche universitaire dans la dynamique de véhicule, simulent avec précision le freinage, la conduite, la stabilité et l'accélération. Ces outils ont été conçus pour communiquer avec les technologies SIL et HIL. Une interface avec d'autres logiciels tel que Simulink, LabVIEW, ASCET et Visual studio est possible. Le modèle mathématique des véhicules est un modèle multi-corps qui interagit avec l'environnement à travers le contact roue/sol et les forces aérodynamiques. Le système comporte des degrés de liberté liés au : châssis (mouvement longitudinal, latéral et vertical, roulis, tangage et lacet), roues (rotation, braquage,...), suspensions (raideur, coefficient d'amortissement,...), freinage et accélération (couple, température, système ABS, consommation d'essence...), pneus (glissement latéral et longitudinal....).

Plusieurs modèles d'interaction du pneumatique avec le sol sont disponibles : Pacejka 5.2, MF-tyre, MF-Swift, glissement longitudinal et latéral couplés, cisaillement externe avec carrossage.

*CarSim* est modulaire : chaque sous système du véhicule est défini avec des paramètres et des tables de performances. Ceci permet aux utilisateurs de modifier le système et de le simuler à part, contrairement à d'autres outils qui nécessitent la conception du véhicule entier avant la simulation.



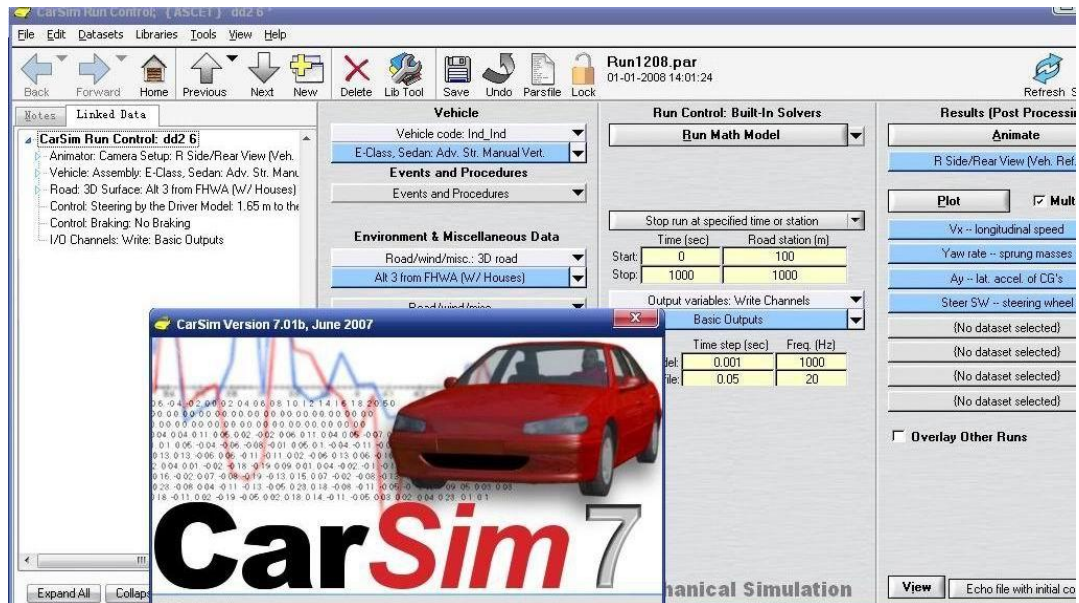


Figure 1.43 : CarSim 7

### 3.3. Carmaker

Carmaker (IPG 2003) est un ensemble d'outils de simulation pour les tests de conduite virtuelle d'un véhicule routier. Il peut être utilisé hors ligne, en temps réel ainsi que dans les applications HIL. Le logiciel inclut un modèle de conducteur permettant de gérer des situations très variées, un modèle de route qui traite des données réelles de route, un outil d'animation et beaucoup d'autres fonctions.

Les composants des véhicules sont modélisés comme des systèmes multi-corps rigides ou flexibles qui sont non-linéaires. Le système multi-corps forme le modèle principal et la plateforme d'intégration pour tous les autres sous-composants comme les suspensions, systèmes de direction, les pneus, le système de frein, la transmission et l'aérodynamique. Les modèles sont groupés en sous-ensembles qui peuvent être modifiés ou échangés par des modèles internes développés sous Simulink ou en langage C. Le paramétrage peut être fait via une interface utilisateur graphique (Figure 1.44). L'interface tridimensionnelle de contact roue-sol, utilise plusieurs modèles comme *IPGTire*, *MF-5.2*, *MF-Swift*,....

*Carmaker* présente, en plus de la simulation classique de la dynamique du véhicule, des champs d'application sur le développement des systèmes de contrôle de châssis, les systèmes d'aide à la conduite...

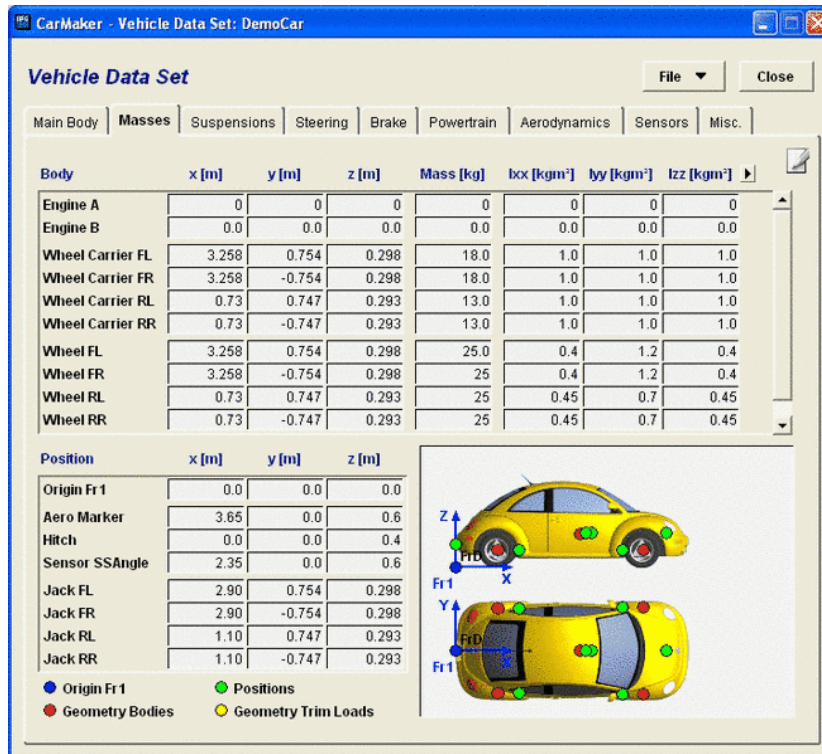


Figure 1.44 : Paramètres de Carmaker

### 3.4. ASM Vehicle Dynamics Simulation Package

L'outil de simulation de dynamique de véhicule (ASM-VDSP 2007) est un modèle Simulink pour la simulation en temps réel du comportement de la dynamique d'un véhicule dans un environnement donné. Le modèle peut être employé sur un simulateur de dSPACE pour les essais HIL des unités de commande électronique (ECU) ou pendant la phase de conception des algorithmes de contrôle pour une pré-validation. Tous les blocs sont visibles, ainsi il est facile d'ajouter ou remplacer des composants par des modèles spécifiques pour adapter les propriétés du véhicule dans différents types de projets. Les interfaces standardisées permettent au modèle de dynamique de véhicule d'être facilement étendu pour satisfaire aux exigences spécifiques ou même créer un véhicule virtuel. Les routes et les manœuvres de conduite peuvent être créés facilement en utilisant des outils graphiques avec une visualisation claire. Tous les paramètres peuvent être changés durant la simulation. Le modèle physique du véhicule est représenté par un système multi corps avec 11 degrés de liberté (6 pour le châssis, 4 pour les roues et 1 pour le braquage). Le modèle non linéaire du véhicule, prend en compte la géométrie et la cinématique de suspension, l'aérodynamisme, un modèle de direction, une boîte de vitesse avec des flexibilités de transmission, un moteur, deux modèles semi-empirique de pneu (Pacejka et TMEasy) et un modèle hydraulique du freinage (Figure 1.45). L'environnement est constitué d'une route, des manœuvres de conduite, et un modèle conducteur en boucle ouverte ainsi que fermée.

La visualisation des simulations en réalité virtuelle est assurée par l'outil MotionDesk qui lit les données du simulateur de dSPACE ou de Simulink en temps réel et montre l'animation des objets mobiles (par exemple, véhicule, roues, volant) en ligne. Les animations peuvent être stockées comme dossiers visuels d'AVI.

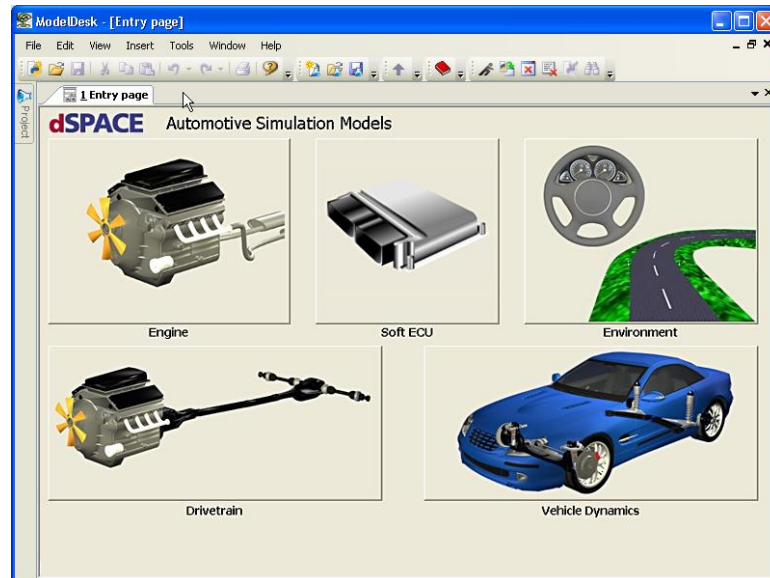


Figure 1.45 : ASM-VDSP

### 3.5. Ve-DYNA

Ve-DYNA (TESIS DYNAware 2007) est un logiciel particulièrement conçu pour la simulation rapide de la dynamique de véhicule dans des applications en temps réel (HIL, SIL) et dans des études de conception sur ordinateur. L'exécution informatique du Ve-DYNA permet son utilisation même pour des tâches longues de simulation, telles que l'optimisation ou l'estimation des paramètres.

La simulation avec Ve-DYNA peut être employée dans le développement des tests de contrôle du système comme le contrôle global du châssis ou du lacet. De plus, il permet des tests de traitement virtuels pour évaluer la conception des suspensions ou des systèmes de direction. Ve-DYNA comporte une représentation 3D de la route, aussi bien de divers types de manœuvres, et d'un conducteur virtuel qui peut être ajusté à divers types de comportement. Pour simuler les fonctions d'assistance au conducteur dans diverses situations de trafic comme par exemple garder une distance constante avec le véhicule précédent, le module fournit un environnement étendu de test comprenant de nombreuses configurations de véhicules et d'obstacles.

Le modèle non linéaire du véhicule est basé sur un concept de modélisation développé par Rill (Rill 2007). Il est modulaire avec des blocs séparés pour le châssis, le moteur, la transmission et

les roues dans Simulink. Tous les blocs ont des ports bien définis d'entrée et de sortie. L'interaction des pneumatiques avec le sol est décrite par les modèles empiriques TM-Easy, Pacejka 5.2, TNO tyre et FTire. Les résultats de simulation sont animés à travers un outil 3D DYNA-animation.

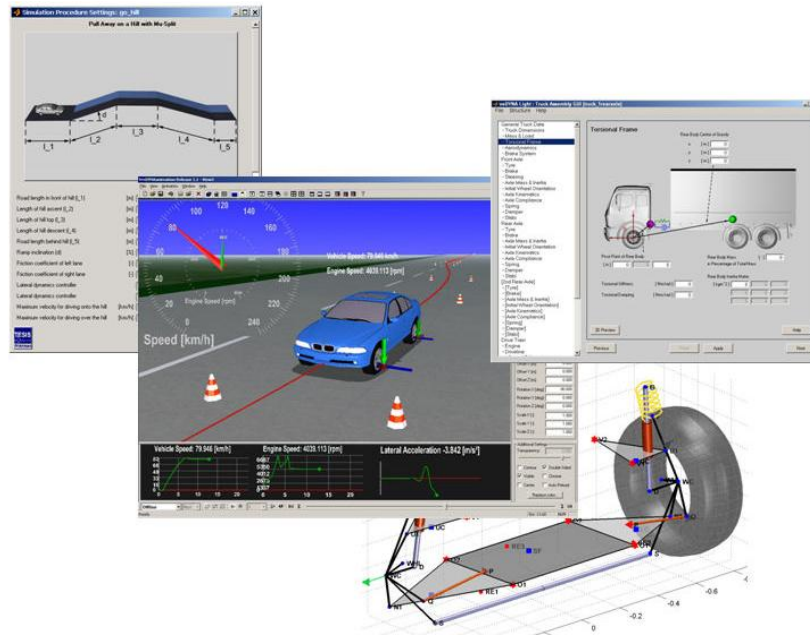


Figure 1.46 : Ve-Dyna

### 3.6. VDL (Dymola)

VDL, librairie de dynamique de véhicule, (Dassault Systèmes 1981) est un outil pour modéliser, simuler et analyser le comportement d'un véhicule routier. C'est un outil propre à DYMOLA, un environnement de plusieurs domaines d'ingénierie qui contient des composants mécaniques, thermiques, électriques, pneumatiques, hydrauliques, thermodynamiques... Il dispose d'un algorithme performant pour résoudre les équations algébriques différentielles (DAE). La haute performance et la robustesse est due à une manipulation symbolique des boucles algébriques qui expriment les contraintes cinématiques. Ces techniques ainsi que les solveurs numériques spéciaux donnent une simulation rapide des modèles de hautes complexités.

VDL est basé sur Modelica , un langage de modélisation « open source ». Le système est décrit comme un système multi corps composé du châssis, des suspensions avant et arrière, des roues, des pneus...

La route est décrite en 3D et plusieurs manœuvres de conduite sont disponibles : suivi de courbure, changement de ruelle, freinage en courbe, slalom, évitement d'obstacle...



L'interaction entre le pneumatique et le sol est modélisée par les modèles de Pacejka02, Rill 05, Bakker 87....

La simulation en temps réel avec Dymola donne la possibilité d'exécuter les tests HIL sur les plates-formes communes comme dSPACE, RT-LAB, xPC Target et Cramas.

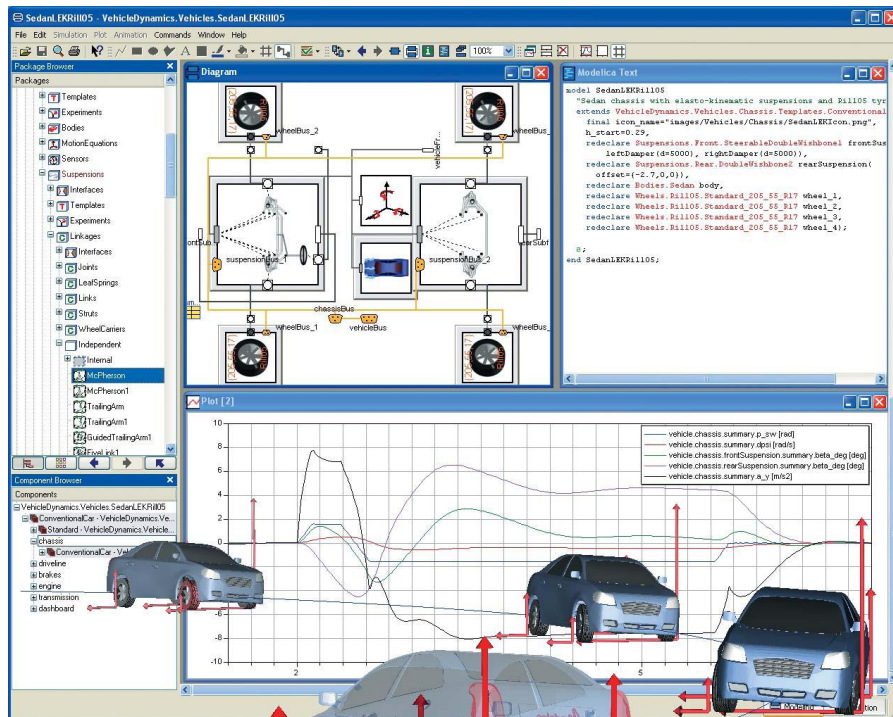


Figure 1.47 : VDL

### 3.7. Civitec

Civitec est un éditeur de logiciel de simulation en réalité virtuelle créé en 2008, dont le domaine d'application est la simulation des systèmes de détection communément utilisés en perception et de leur environnement physico-réaliste. Les applications couvrent aussi bien les ADAS (Advanced Driver Assistance Systems), la robotique ainsi que la sécurité (surveillance vidéo). Pro-SiVIC (CIVITEC 2008) est la version industrielle et commerciale de SiVIC™, une plate-forme de simulation développée depuis une dizaine d'années au sein du laboratoire de recherche LIVIC commun à l'INRETS et au LCPC.

Pro-SiVIC intègre les éléments suivants :

- modèles paramétriques de capteurs extéroceptifs (caméra, télémétrie) ;
- modèles paramétriques de capteurs proprioceptifs (Odomètre, centrale inertielle) ;
- modèle d'un environnement immersif « bio-fidèle » (brouillard, pluie,...) ;
- modèle paramétrique de la dynamique de véhicule (latéral, longitudinal, contact roue sol, amortisseur....) ;

- modèle contrôle/commande ;
- interfaces avec Intempora <sup>RT</sup> Maps, Effidence AROCCAM et prochainement Mathworks Matlab, Simulink et LMS Amesim.

### 3.8. RaceSim (DATAS)

C'est un outil d'analyse de la dynamique du véhicule (DATAS 1999). Il permet de faire divers tests de simulations et de comparer plusieurs configurations de véhicules avant la mise en place d'une conception détaillée. Par exemple, les masses, les puissances des moteurs peuvent être modifiées afin de déterminer l'effet de la position du centre de gravité, des inerties sur les performances d'un véhicule. Le modèle de véhicule est divisé en sous-groupes. Le modèle global est défini par 1600 paramètres, 480 variables dynamiques calculées, 15 ddl dont un système non linéaire des suspensions, des efforts du pneumatique,...

Cet outil existe en trois versions : Expert (F1, CART, GP2, F3000, IRL, NasCar, GT, WRC, Super Touring Car, DTM, Tarmac Rally....), Standard (Touring Car, advanced F3), special (Dallara F301 –F306).

### 3.9. SCANeR-OKTAL

SCANeR<sup>TM</sup> *studio* Car est un outil d'aide à la conception des véhicules de tourisme, de course, des camions, bus, avec ou sans remorque. De plus, c'est un logiciel de référence pour les applications militaires. Développé pour des experts de l'automobile, il est conçu pour répondre aux besoins spécifiques des professionnels de la simulation dynamique. Le logiciel englobe, grâce à sa modularité, toutes les variétés des différents composants d'un véhicule.

Développé par OKTAL en 1990, et mis à jour en permanence, il permet d'atteindre un haut degré de précision par la comparaison constante avec des essais réels dans différents domaines d'application et d'aider à comprendre le modèle afin d'améliorer sa conception et ses réglages. En 1998, une fusion des logiciels *Callas* et *Tour* a contribué à obtenir *CALLAS Motorsport* qui devient SCANeR<sup>TM</sup> *studio* Motorsport en 2010. Ce dernier ajoute de nouvelles possibilités pour répondre aux besoins particuliers des professionnels du sport automobile (SCANeR Studio 2010).

Son interface évolue dans un environnement familier (MS Office, Excel). Plusieurs manœuvres sont possibles : accélération, freinage, mise en virage, passage d'obstacle et toutes les combinaisons, afin de solliciter le véhicule en conditions extrêmes (glissement, tête à queue, saut, renversement) et faciliter la recherche du meilleur compromis entre le comportement du véhicule et les paramètres de réglage des suspensions, de l'élastodynamique ...

## 4. Discussion et Conclusion

Les véhicules du futur seront dotés certainement de technologies innovantes permettant d'améliorer le confort et la sécurité. De plus, ils doivent être maniables, peu encombrants, économiques et peu polluants. Un état de l'art des véhicules innovants, étroits et citadins a été présenté dans cette première partie. Après avoir décrit les principaux composants agissant sur la dynamique des véhicules y compris l'interaction avec l'environnement, nous avons dressé un état de l'art des simulateurs existants ainsi que leurs domaines d'applications. Le domaine de la simulation automobile est riche avec des simulateurs dotés des dernières technologies. Il est le résultat des moyens et des investissements énormes réalisés par les constructeurs automobiles et les sociétés de développement de produits pour la réalité virtuelle.

Au niveau de la modélisation, on remarque que tous les simulateurs utilisent un modèle multi-corps rigide ou flexible pour représenter le véhicule. Ceci permet d'avoir une structure modulaire de modélisation offrant la possibilité de modifier les paramètres d'un corps, ou de le remplacer par un autre module externe (par exemple modifier le type des suspensions, le modèle de contact roue sol,...) Chacune de ces entités élémentaires possède ses caractéristiques propres, indépendamment du reste de l'environnement.

Ces logiciels permettent la construction d'un nouveau modèle de véhicule à partir d'une bibliothèque prédéfinie. Donc nous pouvons choisir entre plusieurs modèles de conducteur, de types de suspensions, de modèles de contact roue/sol, de carrosserie ou même intégrer des nouveaux modules conçus en respectant l'architecture d'entrée et de sortie. Mais la conception d'un nouveau modèle doit respecter la structure classique des véhicules routiers, définie dans chaque simulateur, et qui n'inclut pas à titre d'exemple un système d'inclinaison. Malgré leurs aspects modulaires, une simple modification, ou un remplacement de composants ne permet pas de prendre en compte une dynamique complémentaire particulière.

A notre connaissance, les logiciels existants ne permettent pas la simulation d'un véhicule inclinable comme la Smera de « Lumeneo » qui présente une structure géométrique non standard, avec des chaînes fermées qui permettent une inclinaison prononcée du véhicule (le châssis et les roues).

Le deuxième inconvénient de ces logiciels est leur caractère fermé : il est impossible d'accéder au code source. Leur conception interne est tenue secrète, ce qui empêche de les adapter et de les modifier en fonction des besoins propres des utilisateurs. Par suite, les équations dynamiques du système et des sous-systèmes ne sont pas accessibles aux utilisateurs.

De plus, le prix d'achat de ces logiciels s'élève jusqu'à quelques dizaines de K€. Il s'y ajoute une cotisation annuelle de mise à jour et de maintenance.

Pour toutes ces raisons, nous avons cherché à développer un simulateur flexible et ouvert d'un véhicule inclinable étroit dont la structure est complexe. On se limite à la première étape du

cycle en V, c'est-à-dire MIL, où l'environnement et le véhicule seront représentés par un modèle mathématique symbolique. La modélisation du véhicule est basée sur la description géométrique d'un système multi-corps en utilisant la paramétrisation modifiée de Denavit-Hartenberg. Cette modélisation introduit la notion de composant mécanique, constitué non seulement des caractéristiques physiques et des paramètres nécessaires à sa représentation, mais également des méthodes d'intégration des équations différentielles (algorithme d'intégration, pas de la simulation). Le système global n'existe quant à lui que par l'existence de relations entre ces entités élémentaires. Des changements dans la structure de la chaîne cinématique peuvent donc être réalisés à tout instant par des modifications de ces relations sans affecter la définition des composants mécaniques eux-mêmes.

Le développement de ce simulateur a pour but l'aide à la conception de nouveaux véhicules de type étroit et inclinable. L'apport de ce simulateur réside dans le gain de temps de conception, dans le gain en coût de réalisation de véhicule prototype physique et il servira de support à l'analyse de la robustesse et des performances des stratégies de contrôle de trajectoires existantes, ou encore à définir d'autres lois de commande. Les modèles développés par l'approche multi-corps du formalisme de la robotique, sont implémentés dans un environnement de simulation pour jouer des scénarios routier, visualiser le déplacement et le comportement cinématique et dynamique du système.



## Chapitre 2 Modélisation robotique

---

Un véhicule peut être considéré comme un système multi-corps dont le châssis, possédant six degrés de liberté par rapport au repère galiléen, est la base et les roues sont les organes terminaux. Dans ce chapitre, on présente le formalisme utilisé en robotique pour décrire les systèmes multi-corps arborescents et fermés, et calculer systématiquement les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques. La première partie du chapitre introduit la modélisation, avec l'utilisation de la description systématique de *Denavit & Hartenberg* modifiée, pour les systèmes à base fixe. La seconde partie du chapitre présente la prise en compte des systèmes à base mobile. Enfin la troisième partie donne un exemple de modélisation et de simulation d'un modèle simple dit « modèle bicyclette 3ddl ».

### 1. Système multi-corps et DHM

La modélisation systématique et automatique des robots exige une méthode adéquate pour la description géométrique de leur morphologie. La méthode la plus répandue est celle de Denavit-Hartenberg (Denavit & Hartenberg 1955). Mais les ambiguïtés qu'elle porte au niveau des structures fermées nous a conduit à utiliser la notation de DH modifiée par Khalil et Kleinfinger (Khalil & Kleinfinger 1986), (Khalil & Dombre 2002).

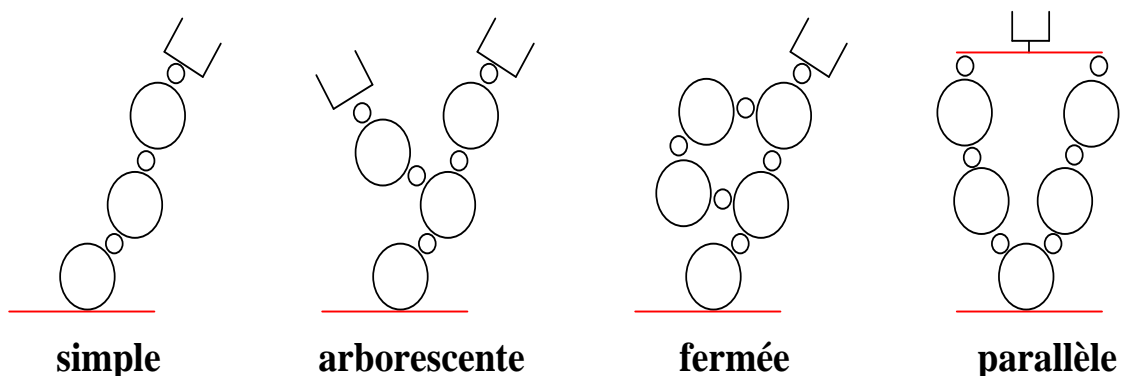


Figure 2.1 : Types de structures

La méthode de DHM permet la description unifiée avec un nombre minimum de paramètres, des structures simples, parallèles, complexes et fermées (Figure 2.1). Elle s'applique également aux robots mobiles.

## 2. Système à base fixe

Dans cette section, nous présentons la méthode de modélisation adoptée pour les structures à base fixe, arborescentes ou fermées. Le calcul des modèles géométrique, cinématique et dynamique est présenté par la suite.

### 2.1. Système mécanique à structure arborescente

Soit un système mécanique  $\Lambda$ , constitué par des corps rigides assemblés entre eux par des liaisons mécaniques simples appelées articulations avec un seul degré de liberté par articulation. Elles peuvent être de deux types : rotoïde ou prismatique (Figure 2.2 a&b).

Le système est défini comme une structure arborescente de  $n+1$  corps rigides notés  $C_j$  avec  $j = 0, \dots, n$ , reliés entre eux par  $n$  articulations et ayant éventuellement plusieurs corps terminaux (Figure 2.2 c). Conventionnellement, les corps et les articulations sont numérotés d'une façon croissante depuis la base  $C_0$  vers l'organe terminal  $C_n$ . Le corps  $C_j$  est articulé suivant l'articulation  $j$  qui relie le corps  $j$  à son antécédent, le corps  $C_{a(j)}$ . Dans le cas d'une structure série, l'antécédent de  $j$  est  $a(j) = j-1$ . De même le repère  $R_j$  est lié au corps  $C_j$  et la variable de l'articulation  $j$  est notée  $q_j$ . Soit  $q$ , le vecteur de dimension  $(n \times 1)$ , qui représente le vecteur des coordonnées généralisées associé au système  $\Lambda$ . Il est composé des  $n$  variables articulaires  $q_j$ .

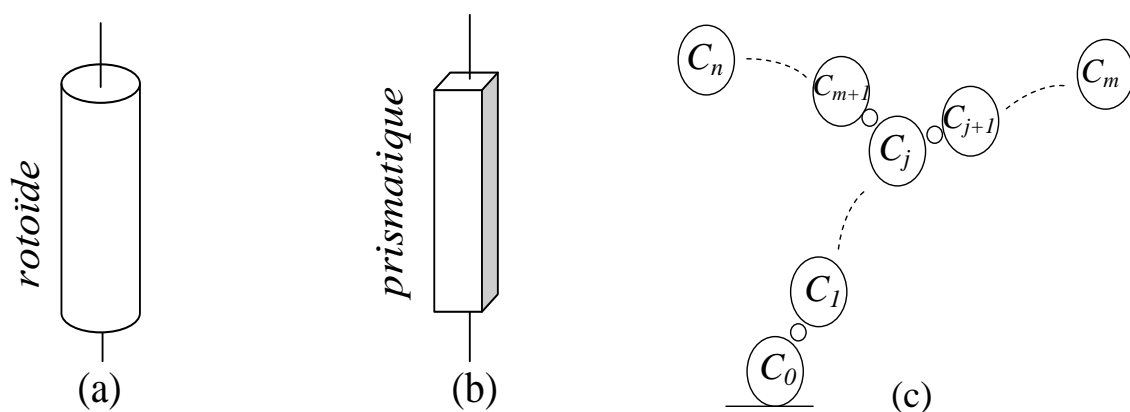


Figure 2.2 : Types d'articulations et topologie des structures arborescentes

Un corps  $C_j$  peut être réel ou virtuel. Un corps réel a une représentation physique, caractérisée par une masse et des inerties. Un corps virtuel n'a pas d'existence physique dans la structure mécanique, il ne possède ni masse, ni inertie propre. Les corps virtuels sont utilisés dans deux cas :

- Le cas des articulations complexes, pour lesquelles des corps fictifs de masses et de longueurs nulles sont reliés entre eux par des articulations simples. Par exemple, une rotule est modélisée en associant trois articulations rotoïdes d'axes concourants, un pivot glissant par une articulation rotoïde et une articulation prismatique de même axe.
- La définition de plusieurs repères attachés au même corps.

Afin d'obtenir les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques du système, il faut définir les repères attachés à chaque corps. Soit le repère  $R_j$  associé au corps  $C_j$ . Il est défini par son origine  $O_j$  et par une base orthonormée dont les axes sont notés  $(x_j, y_j, z_j)$ .

Le corps  $C_j$  est le successeur du corps  $C_{a(j)}$  et l'antécédent du corps  $C_{s(j)}$ . Le repère  $R_j$  est défini de la façon suivante :

- L'axe  $z_j$  est porté par l'axe de l'articulation  $j$ ,
- l'axe  $x_j$  est porté par la perpendiculaire commune aux axes  $z_j$  et l'un des  $z_{s(j)}$  et orienté arbitrairement,
- l'axe  $y_j$  est pris de telle sorte que le repère  $(x_j, y_j, z_j)$  soit orthonormal direct.

En notant  $i = a(j)$ , l'indice du corps antécédent de  $C_j$ .

L'axe  $u_j$  est construit sur la perpendiculaire commune aux axes  $z_i$  et  $z_j$  dans le cas d'un arborescence où  $x_i$  n'est pas perpendiculaire à  $z_i$  et  $z_j$ .

Le changement de repère entre  $R_i$  et  $R_j$  s'effectue à l'aide des six paramètres géométriques  $\gamma_j, b_j, \alpha_j, d_j, \theta_j, r_j$  définis par (Figure 2.3) :

- $\gamma_j$  est l'angle entre  $x_i$  et  $u_j$  autour de  $z_i$ ,
- $b_j$  est la distance entre  $x_i$  et  $u_j$  le long de  $z_i$ ,
- $\alpha_j$  est l'angle entre les axes  $z_i$  et  $z_j$  correspondant à une rotation autour de l'axe  $u_j$ ,
- $d_j$  est la distance entre les axes  $z_i$  et  $z_j$  le long de l'axe  $u_j$ ,
- $\theta_j$  est l'angle entre les axes  $u_j$  et  $x_j$  correspondant à une rotation autour de l'axe  $z_j$ ,
- $r_j$  est la distance entre les axes  $u_j$  et  $x_j$  le long de l'axe  $z_j$ .

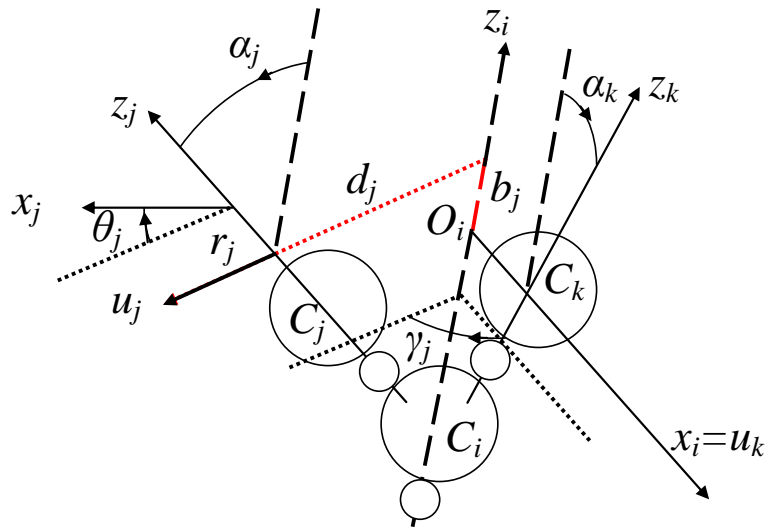


Figure 2.3 : Paramètres géométriques standards

La matrice de transformation homogène du repère i au repère j, est donnée par la matrice (4x4) suivante :

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & {}^i P_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i s_j & {}^i n_j & {}^i a_j & {}^i P_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Où  ${}^i s_j$ ,  ${}^i n_j$  et  ${}^i a_j$  représentent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes  $x_j$ ,  $y_j$  et  $z_j$  du repère  $R_j$  exprimés dans le repère  $R_i$ .  ${}^i P_j$  est le vecteur exprimant l'origine du repère  $R_j$  dans le repère  $R_i$ .

Il existe deux cas pour définir cette matrice de transformation entre deux corps consécutifs :

Notons que  $CY = \text{Cos}(Y)$  et  $SY = \text{Sin}(Y)$

- Si  $i = a(j)$  et  $x_i$  est la perpendiculaire commune aux axes  $z_i$  et  $z_j$ , alors  $\gamma_j$  et  $b_j$  sont nuls et  ${}^i T_j$  est fonction des quatre paramètres géométriques ( $\alpha_j$ ,  $d_j$ ,  $\theta_j$  et  $r_j$ )

$${}^i T_j = \text{Rot}(x, \alpha_j) \text{Trans}(x, d_j) \text{Rot}(z, \theta_j) \text{Trans}(z, r_j) = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & -r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

➤ Si  $i = a(j) = a(k)$  et  $x_i$  est la perpendiculaire commune aux axes  $z_i$  et  $z_k$ , on construit alors la perpendiculaire commune  $u_j$  aux axes  $z_i$  et  $z_j$  et  ${}^i T_j$  est fonction de six paramètres géométriques ( $\gamma_j, b_j, \alpha_j, d_j, \theta_j, r_j$ )

$$\begin{aligned}
 {}^i T_j &= \text{Rot}(z, \gamma_j) \text{Trans}(z, b_j) \text{Rot}(x, \alpha_j) \text{Trans}(x, d_j) \text{Rot}(z, \theta_j) \text{Trans}(z, r_j) \\
 &= \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j & d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha_j \\ S\gamma_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j & d_j S\gamma_j - r_j C\gamma_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j + b_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

La variable articulaire  $q_j$  associée à l'articulation  $j$  est définie par :

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j \quad \text{avec } \bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$$

Où :

- $\sigma_j = 0$  si l'articulation  $j$  est rotoïde
- $\sigma_j = 1$  si l'articulation  $j$  est prismatique
- $\sigma_j = 2$  si l'articulation  $j$  est bloquée. Ce cas est utilisé pour définir les repères  $R_i$  et  $R_j$  attachés au même corps  $C_i$ . Dans ce cas, il n'y a pas de variables articulaire ( $q_j=0$ ).

## 2.2. Système mécanique à structure fermée

Soit un système mécanique  $\Sigma$ , composé de  $n+1$  corps et de  $L$  articulations ( $L > n$ ), la base étant le corps  $C_0$ . Le nombre de boucles fermées est calculé par la relation suivante :

$$B = L - n \quad (2.4)$$

Soit  $N$ , le nombre d'articulations actives, c'est-à-dire les articulations motorisées par des actionneurs. Les articulations non motorisées sont notées articulations passives. Tous les robots industriels comportant des boucles fermées doivent vérifier les conditions suivantes :

- la structure est compatible avec les contraintes de fermeture des boucles,
- le nombre de degré de liberté du robot doit être égal au nombre d'articulations motorisées  $N$ ,
- la configuration du robot peut être déterminée par les  $N$  variables articulaires actives.

Les paramètres géométriques du système sont déterminés par la méthode suivante (Figure 2.4) :

- On coupe virtuellement chacune des boucles sur l'une de ses articulations passives et on place ensuite les repères sur les corps pour déterminer les paramètres géométriques de la structure arborescente équivalente en appliquant les règles de DHM.
- Les articulations coupées sont numérotées de  $n+1$  jusqu'à  $L$ . On définit un repère  $R_k$  pour chaque articulation coupée  $k$ . Ce repère est fixe par rapport à l'un des corps qui portent cette articulation,  $C_j$  par exemple. L'axe  $z_k$  est porté par l'articulation  $k$  et l'axe  $x_k$  est porté par la perpendiculaire commune à  $z_k$  et  $z_j$ . Ainsi on détermine la transformation entre les repères  $R_i$  et  $R_k$ ,  $i=a(k)$  désignant l'autre corps connecté à l'articulation  $k$ .
- Vu que le repère  $R_k$  est attaché au corps  $C_j$  et que son antécédent est le corps  $C_i$ , on définit un repère  $R_{k+B}$  confondu avec le repère  $R_k$  et d'antécédent le corps  $C_i$ . Ainsi la description d'un système fermé se ramène à celle d'un système arborescent obtenu en coupant chaque boucle sur une de ses articulations et en ajoutant deux repères par boucle.

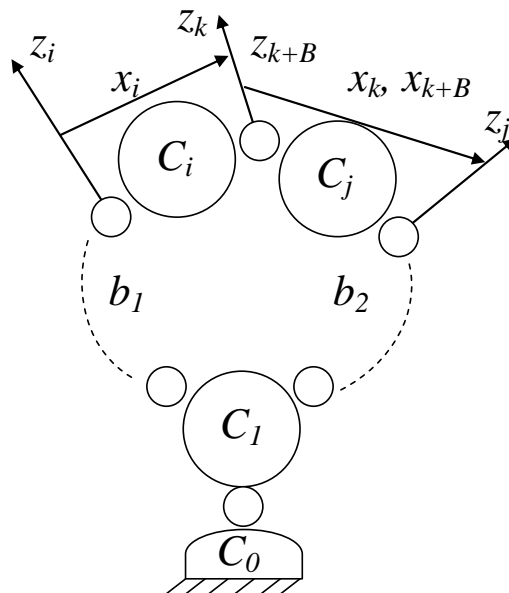


Figure 2.4 : Topologie d'une boucle fermée

### 2.3. Modèle géométrique direct (MGD) des structures arborescentes

Le modèle géométrique direct d'un robot est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, c'est-à-dire la position et l'orientation d'un repère lié à l'organe terminal, en fonction de ses coordonnées articulaires. Ceci se traduit par un produit de matrices de transformation  ${}^i T_j$ . La matrice qui exprime la position d'un organe terminal  $C_k$  par rapport à la base  $C_0$  est présentée par l'équation suivante :

$${}^0T_k = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{a(a(k))}T_{a(k)} {}^{a(k)}T_k \quad (2.5)$$

L'expression des matrices de transformation est donnée dans les équations ( 2.1), ( 2.2) et ( 2.3).

## 2.4. Modèle géométrique direct (MGD) des structures fermées

Pour une structure fermée, le modèle géométrique direct MGD est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la position de l'organe terminal en fonction des variables articulaires actives. Ceci revient à résoudre les équations de fermeture des boucles et à exprimer les variables articulaires passives en fonction des variables actives.

Il existe L-N relations indépendantes entre les variables articulaires  $q$ . Ces équations sont obtenues, à partir de la relation suivante, qui traduit la fermeture de chaque boucle :

$${}^{k+B}T_k = {}^{k+B}T_j \dots {}^i T_k = I_4 \quad (2.6)$$

L'équation ( 2.6) comporte 12 relations non linéaires, mais le nombre de relations indépendantes est de six au maximum pour une boucle spatiale et trois pour une boucle plane.

## 2.5. Modèle cinématique des robots à structures arborescentes et fermées

Le modèle cinématique d'une chaîne arborescente représente la relation entre les vecteurs des vitesses de translation  $V_i$  et de rotation  $\omega_i$  de l'organe terminal  $i$  dans l'espace cartésien en fonction des vitesses articulaires du système. Ceci se traduit par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} V_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = Ja_i(q)\dot{q} \quad (2.7)$$

Où

- $V_i$  est le vecteur vitesse de translation du point  $O_i$
- $\omega_i$  est le vecteur vitesse de rotation du corps  $i$
- $\dot{q}$  est le vecteur des vitesses articulaires
- $Ja_i(q)$  est la matrice jacobienne de dimension  $(6 \times n)$  qui se calcule en fonction des éléments des matrices de transformation :

$$Ja_i(q) = [Jc_1 \quad \dots \quad Jc_{n-1} \quad Jc_n]$$

Avec :

➤  $Jc_j$  est un vecteur colonne de dimension (6x1) qui est égal à :

- $Jc_j = \begin{bmatrix} a_j \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}$  si l'articulation  $j$  est prismatique
- $Jc_j = \begin{bmatrix} a_i \times L_{j,i} \\ a_j \end{bmatrix}$  si l'articulation  $j$  est rotoïde et  $L_{j,i} = O_j O_i$
- $Jc_j = [0_{6 \times 1}]$  si l'articulation  $j$  ne se trouve pas entre le corps  $C_0$  et  $C_i$  ou si le repère  $j$  est fixe

Dans le cas d'une chaîne fermée, le modèle cinématique permet de décrire les vitesses articulaires passives en fonction des vitesses des articulations actives. Ceci se traduit par la méthode suivante :

- le modèle cinématique de la chaîne directe entre la base et l'organe terminal est calculé comme dans le cas d'une chaîne ouverte,
- les relations de contraintes entre les vitesses des articulations actives et passives sont calculées en égalisant les vitesses des repères  $R_k$  et  $R_{K+B}$  associés aux articulations coupées :

$$J_K \dot{q}_{b1} = J_{K+B} \dot{q}_{b2} \quad (2.8)$$

Où :

$\dot{q}_{b1}$  et  $\dot{q}_{b2}$  sont les vecteurs de vitesses des articulations appartenant à chacune des deux branches de l'arborescence associées à la boucle, notées  $b1$  et  $b2$  (Figure 2.4).

## 2.6. Modèle dynamique d'une structure arborescente

Le modèle dynamique donne la relation entre les couples /ou les forces (appelés efforts par la suite) appliqués aux actionneurs du robot, et les positions, vitesses et accélérations articulaires. On distingue deux types de modèle dynamique :

- Le modèle dynamique inverse (**MDI**), qui exprime les efforts en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires. Il est représenté par la relation :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, F_e) \quad (2.9)$$

- Le modèle dynamique direct (**MDD**), qui exprime les accélérations en fonction des efforts, positions et vitesses articulaires. Il est représenté par la relation :



$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \Gamma, F_e) \quad (2.10)$$

Où :

- $q$  est le vecteur des coordonnées généralisées (articulaires)
- $\dot{q}$  est le vecteur des vitesses articulaires
- $\ddot{q}$  est vecteur des accélérations articulaires
- $F_e$  est le vecteur des efforts appliqués sur le système

Les modèles dynamiques sont utilisées pour la simulation, le dimensionnement des actionneurs, l'identification des paramètres inertiels et de frottement, et la commande. Plusieurs méthodes permettent d'obtenir ces modèles, les plus connues utilisent le formalisme de *Lagrange* et les équations de *Newton-Euler*.

### 2.6.1. Le formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement en termes de travail et d'énergie du système sous la forme suivante :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

Où :

- $L$  est le Lagrangien du système, tel que  $L = E - U$
- $E$  est l'énergie cinétique du système
- $U$  est l'énergie potentielle du système
- $q_i$  est la coordonnée articulaire de l'articulation  $i$

L'expression de l'effort articulaire  $\Gamma$  peut s'écrire :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (2.12)$$

Où :

- $A(q)$  est la matrice de dimension  $(n \times n)$  de l'énergie cinétique, dite aussi matrice d'inertie du système. Elle est symétrique, définie positive. Ses éléments  $A_{ij}$  dépendent des variables articulaires  $q_j$ ;
- $C(q, \dot{q})\dot{q}$  est le vecteur  $(n \times 1)$  représentant les efforts de Coriolis et centrifuges ;

➤  $G = [G_1 \quad \dots \quad G_n]^T$  est le vecteurs des efforts de gravité, avec  $G_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$

### 2.6.1.1 Prise en compte du frottement, élasticités, inerties des rotors des actionneurs et efforts extérieurs

La prise en compte des efforts extérieurs appliqués au robot, des flexibilités localisées et des frottements articulaires conduit à l'équation suivante :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \Gamma_{el} + \Gamma_f + \Gamma_e + \Gamma_a \quad (2.13)$$

Où :

- $\Gamma_{el}$  est le vecteur de dimension  $(nx1)$  des efforts élastiques, composé d'éléments  $\Gamma_{elj}$ 
  - $\Gamma_{elj} = K_j(q_j - q_{j0})$  si  $j$  est une articulation élastique passive, avec  $K_j$  la raideur de l'articulation  $j$  et  $q_{j0}$  le déplacement articulaire par rapport à la position initiale. Dans ce cas,  $\Gamma$  correspondant sera nul.
  - $\Gamma_{elj} = 0$  ailleurs
- $\Gamma_f$  est le vecteur des efforts de frottement articulaires, d'éléments  $\Gamma_{fj}$ . Ils sont modélisés par un frottement visqueux de coefficient  $F_{vj}$  et un frottement sec de Coulomb de coefficient  $F_{sj}$ . La composante du frottement s'écrit alors :

$$\Gamma_{fj} = F_{vj}\dot{q}_j + F_{sj}\text{sign}(\dot{q}_j) \quad (2.14)$$

Où  $\text{sign}$  désigne une fonction telle que :

- $\text{sign}(x) = -1$  si  $x < 0$
  - $\text{sign}(x) = 1$  si  $x > 0$
  - $\text{sign}(x) = 0$  si  $x = 0$
- $\Gamma_e$  est le vecteur de dimension  $(nx1)$  des efforts généralisés associé aux efforts extérieurs appliqués sur le système, d'éléments  $\Gamma_{ej}$ . Les composants de ce vecteur se calculent par :

$$\Gamma_{ej} = Q_{(j,:)}(q) \begin{bmatrix} f_{e1} \\ m_{e1} \\ \vdots \\ f_{en} \\ m_{en} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Avec :

- $Q$  est la matrice jacobienne totale. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$Q = [Ja_1^T \quad \dots \quad Ja_n^T] \quad (2.16)$$

$Ja_j$  est la matrice jacobienne du repère  $j$  par rapport au repère de la base (cf. ( 2.7 ))

- $f_{ej}, m_{ej}$  : les forces et couples extérieurs d'interaction entre le corps  $j$  et l'environnement. Leur concaténation forme le torseur des efforts extérieurs.

➔  $\Gamma_a$  est le vecteur ( $nx1$ ) des couples inertiels des moteurs, d'éléments  $\Gamma_{aj}$ . Les composants de ce vecteur se calculent par :

$$\Gamma_{aj} = I_{aj}\ddot{q}_j \quad (2.17)$$

Avec :

- $I_{aj} = N_j^2 J_{mj}$  l'inertie du moteur ramenée au niveau articulaire,  $N_j$  est le rapport de réduction de l'axe  $j$  et égal à  $\dot{q}_{mj} / \dot{q}_j$  où  $\dot{q}_{mj}$  désigne la vitesse du rotor de l'actionneur  $j$  et  $J_{mj}$  désigne le moment d'inertie du rotor de l'actionneur  $j$

On remarque que la composante de frottement est linéaire par rapport à  $F_{vj}$  et  $F_{sj}$ , la composante élastique est linéaire par rapport à  $K_j$  et la composante de l'inertie du moteur est linéaire par rapport à  $I_{aj}$ . La contribution de cette dernière peut être ajoutée à la matrice  $A$ , en augmentant les coefficients  $A_{jj}$  de  $I_{aj}$ .

### 2.6.2. Paramètres inertiels

Chaque corps réel est caractérisé par 10 paramètres inertiels standards qui sont les suivants :

- ➔ La masse du corps  $j$  :  $M_j$
- ➔ Les six composants de la matrice d'inertie  $J_j$  du corps  $j$  définie dans le repère  $R_j$

$$J_j = \begin{bmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j \\ XY_j & YY_j & YZ_j \\ XZ_j & YZ_j & ZZ_j \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

- ➔ Les trois premiers moments du corps  $j$  par rapport à l'origine  $O_j$  du repère  $R_j$

$$MS_j = [MX_j \quad MY_j \quad MZ_j] \quad (2.19)$$

$X_j, Y_j, Z_j$  sont les coordonnées du centre de gravité du corps  $j$  dans le repère  $R_j$

Nous ajoutons à ces 10 paramètres inertiels les paramètres de la chaîne de transmission articulaire qui sont la raideur  $K_j$  des articulations élastiques, les coefficients du frottement sec et visqueux  $F_{sj}$  et  $F_{vj}$  ainsi que l'inertie  $I_{aj}$  des rotors. Donc au total, il y a au maximum 14 paramètres dynamiques pour chaque corps.

Comme le modèle dynamique est linéaire vis-à-vis des paramètres standards, une simplification du modèle dynamique est possible par un calcul minimal de paramètres, appelés paramètres de base. Les paramètres de base sont obtenus à partir des paramètres dynamiques standards en éliminant ceux qui n'ont pas d'effet sur le modèle dynamique et regroupant certains paramètres (Gautier & Khalil 1990), (Gautier 1990), (Khalil & Dombre 2002), (cf. Annexe A).

### 2.6.3. Newton d'Euler

Le formalisme Eulérien décrit le mouvement d'un solide en fonction de son torseur cinématique de vitesse  $[\mathbf{V}^T \ \boldsymbol{\omega}^T]^T$ . Les équations de Newton-Euler d'un corps  $C_j$  expriment l'égalité entre le torseur dynamique et le torseur des efforts extérieurs sur un corps  $j$  en son centre de gravité  $G_j$ , y compris l'effet de la gravité. Cependant, exprimer le torseur dynamique à l'origine  $O_j$  du repère du corps  $j$  plutôt qu'au point  $G_j$ , permet d'avoir un modèle dynamique linéaire par rapport aux paramètres inertiels (Khalil & Kleinfinger 1987), (Kholisa 1986). Les équations sont alors les suivantes :

$$F_j = M_j \dot{V}_j + \dot{\omega}_j \wedge MS_j + \omega_j \wedge (\omega_j \wedge MS_j) \quad (2.20)$$

$$M_j = J_j \dot{\omega}_j + MS_j \wedge \dot{V}_j + \omega_j \wedge (J_j \omega_j) \quad (2.21)$$

On note que le modèle en variables lagrangiennes peut être obtenu à partir des équations de Newton-Euler en exprimant les torseurs de vitesse et d'accélération en fonction des variables articulaires et de ses dérivées sans calculer explicitement les matrices  $A$ ,  $C$  et  $G$  (Luh et al. 1980), (Khalil & Dombre 2002).

Avec :

- $M_j$  est le moment des efforts extérieurs appliqués sur le corps  $C_j$  en son origine  $O_j$ ;
- $F_j$  est la résultante des forces extérieures appliquées sur le corps  $j$ ;
- $\dot{\omega}_j$  est le vecteur d'accélération de rotation du corps  $j$ ;
- $\dot{V}_j$  est le vecteur d'accélération de translation du corps  $j$ ;
- $V_j = V_{Gj} - \omega_j \wedge S_j$
- $S_j$  : les coordonnées du point  $G_j$  dans  $R_j$  tel que  $S_j = O_j G_j = [x_G \ y_G \ z_G]^T$

La méthode de *Luh, Walker et Paul* (Luh et al. 1980) permet de calculer le modèle dynamique d'un robot par une double récurrence.

- i) Une récurrence avant, de la base du robot vers l'effecteur, qui calcule successivement les vitesses et accélérations des corps, puis leurs torseurs dynamiques.
- ii) Une récurrence arrière, de l'effecteur vers la base, qui calcule les efforts articulaires en prenant en compte les efforts extérieurs appliqués au robot et efforts articulaires dans l'équation d'équilibre de chaque corps (Figure 2.5).

Une forme pratique des équations de récurrence avant et arrière est exposée dans la suite au paragraphe (2.6.3.1) et (2.6.3.2) en projetant les grandeurs relatives d'un corps dans le repère qui lui est lié.

### 2.6.3.1 Récurrence avant

Elle permet de calculer le torseur dynamique à partir des équations suivantes :

Pour  $j=1\dots n$

$$\begin{aligned}
 {}^j\omega_i &= {}^jA_i {}^i\omega_i \\
 {}^j\omega_j &= {}^j\omega_i + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j a_j \\
 {}^j\dot{\omega}_i &= {}^jA_i {}^i\dot{\omega}_i + \bar{\sigma}_j [\ddot{q}_j {}^j a_j + {}^j\omega_i \times \dot{q}_j {}^j a_j]
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
 {}^j\dot{V}_j &= {}^jA_i ({}^j\dot{V}_i + {}^iY_i {}^iP_j) + \sigma_j (\ddot{q}_j {}^j a_j + 2 {}^j\omega_i \times \dot{q}_j {}^j a_j) \\
 {}^jF_j &= M_j {}^j\dot{V}_j + {}^jY_j {}^jMS_j \\
 {}^jM_j &= {}^jJ_j {}^j\dot{\omega}_j + {}^j\omega_j \times ({}^jJ_j {}^j\omega_j) + {}^jMS_j \times {}^j\dot{V}_j
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Avec :

$$\rightarrow \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow {}^jY_j = {}^j\hat{\omega}_j + {}^j\hat{\omega}_j {}^j\hat{\omega}_j$$

$$\rightarrow {}^j a_j = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Pour un robot à base fixe, l'initialisation de cette récurrence est :

$${}^0\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]^T, {}^0\dot{\omega}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T, {}^0\dot{V}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

### 2.6.3.2 Récurrence arrière

Ces équations sont obtenues à partir du bilan des efforts sur chaque corps, écrit à l'origine  $O_j$ .

Pour  $j = n \dots 1$

$$\begin{aligned} {}^j f_j &= {}^j F_j + {}^j f_{ej} + \sum_{s(j)} {}^j f_{s(j)} \\ {}^i f_j &= {}^i A_j {}^j f_j \\ {}^j m_j &= {}^j M_j + {}^j m_{ej} + \sum_{s(j)} ({}^i A_{s(j)})^{s(j)} m_{s(j)} + {}^j \hat{P}_{s(j)} {}^j f_{s(j)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les efforts de gravité sont calculés en incluant l'accélération de la gravité dans l'accélération de chaque corps, ce qui revient à prendre :  ${}^0 \dot{V}_0 = -g$

Avec :

- $g$  est le vecteur d'accélération de la pesanteur exprimé dans le repère  $R_0$

Les couples articulaires  $\Gamma_j$  sont calculés en projetant, suivant la nature de l'articulation  $j$ , les vecteurs  $f_j$  ou  $m_j$  sur l'axe du mouvement.

$$\Gamma_j = (\sigma_j {}^j f_j + \bar{\sigma}_j {}^j m_j)^T {}^j a_j \quad (2.25)$$

Avec :

- ${}^j f_j$  : la résultante des forces appliquées par le corps antécédent d'indice  $a(j)$  sur le corps  $j$
- ${}^j m_j$  : la résultante des couples appliquées par le corps antécédent d'indice  $a(j)$  sur le corps  $j$

Cette récurrence est initialisée, pour un corps terminal  $k$  sans successeur, par :

$${}^k f_{s(k)} = 0, {}^k m_{s(k)} = 0$$

L'équation de la chaîne d'actionnement qui tient compte de l'effet des frottements, des inerties des actionneurs ramenées coté charge, s'écrit :

$$\Gamma_j = (\sigma_j {}^j f_j + \bar{\sigma}_j {}^j m_j)^T {}^j a_j + F_{sj} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{vj} \dot{q}_j + I_{aj} \ddot{q}_j \quad (2.26)$$

Pour une articulation élastique, l'équation devient :

$$0 = (\sigma_j {}^j f_j + \bar{\sigma}_j {}^j m_j)^T {}^j a_j + F_{sj} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{vj} \dot{q}_j + I_{aj} \ddot{q}_j + K_j (q_j - q_{j0}) \quad (2.27)$$

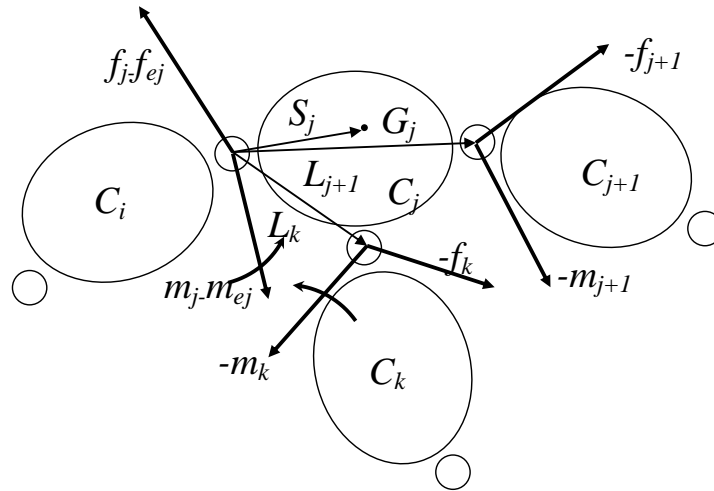


Figure 2.5 : Bilan des efforts appliqués sur le corps  $C_j$  d'une structure arborescente

Lorsqu'un corps  $j$  est fixe par rapport à son antécédent ( $\sigma_j=2$ ), les éléments multipliés par  $\sigma_j$  et  $\bar{\sigma}_j$  dans les équations des vitesses et accélérations ( 2.22 ) et ( 2.23 ) sont éliminés, et l'équation du couple articulaire  $\Gamma_j$  n'est pas à calculer.

D'une manière générale, le modèle dynamique inverse selon Newton-Euler, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, g, F_e, F_s, F_v, K) \quad (2.28)$$

Où :

- $g$  est le vecteur de la gravité exprimé dans le repère de la base (par exemple pour un repère de base  $R_0$  avec  $z_0$  vertical positif vers le haut,  $g = [0 \ 0 \ -9.81]^T$  ;
- $F_s$  est le vecteur de frottement sec de toutes les articulations ;
- $F_v$  est le vecteur de frottement visqueux de toutes les articulations ;
- $K$  est le vecteur des raideurs de toutes les articulations.

## 2.7. Modèle dynamique direct (MDD) d'une structure arborescente

Afin de simuler le comportement d'un robot et de sa boucle de commande, on utilise le modèle dynamique direct qui s'écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles non linéaire implicite :

$$E(x)\dot{x} = f(x, u) \quad (2.29)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \rightarrow x &= [q \quad \dot{q}]^T ; \dot{x} = [\dot{q} \quad \ddot{q}]^T \\
 \rightarrow E &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A(q) \end{bmatrix} \\
 \rightarrow f &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \Gamma - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - \Gamma_{el} - \Gamma_f - \Gamma_e \end{bmatrix} ; u = \Gamma
 \end{aligned}$$

Le modèle dynamique direct du robot s'écrit sous la forme explicite :

$$\begin{aligned}
 \ddot{q} &= A^{-1}(q)[\Gamma - H(q, \dot{q})] \\
 &= A^{-1}(q)[\Gamma - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - \Gamma_{el} - \Gamma_f - \Gamma_e]
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \Gamma_{el} &= \text{diag}(q - q_0)K \\
 \rightarrow \Gamma_f &= \text{diag}(\dot{q})Fv + \text{diag}(\text{sign}(\dot{q}))F_s \\
 \rightarrow \Gamma_e &= Q^T F_e \\
 \rightarrow H &= C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - \Gamma_{el} - \Gamma_f - \Gamma_e
 \end{aligned}$$

Où *diag* est la matrice diagonale et *Q* la matrice jacobienne définie par l'équation (2.16).

## 2.8. Modèle dynamique inverse (MDI) d'une structure fermée

Dans ce paragraphe, nous présentons une approche basée sur l'utilisation du modèle dynamique d'un système arborescent et le calcul de la matrice jacobienne des variables de la structure arborescente par rapport aux variables motorisées (Khalil & Kleinfinger 1986).

Comme noté dans le paragraphe (2.2), la structure arborescente équivalente d'une chaîne fermée est construite en coupant chaque boucle en l'une de ses articulations non-motorisées. On note  $q_{ar}$  le vecteur contenant les  $n$  variables de la structure arborescente dépourvue des articulations coupées. Ce vecteur est composé de  $N$  variables motorisées ou « actives »  $q_a$  et  $p$  variables articulaires non motorisées ou « passives »  $q_p$ . Les équations de contraintes cinématiques qui traduisent la fermeture des boucles ont comme expression :

$$J\dot{q}_{ar} = \begin{bmatrix} J_a & J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \end{bmatrix} = 0 \tag{2.31}$$



$$\begin{aligned}
 J\ddot{q}_{ar} + \dot{J}\dot{q}_{ar} &= \begin{bmatrix} J_a & J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{J}_a & \dot{J}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} J_a & J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_p \end{bmatrix} + \Psi = 0
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\text{Avec : } \Psi = \begin{bmatrix} \dot{J}_a & \dot{J}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \end{bmatrix}$$

Les matrices  $J_a$  et  $J_p$  sont respectivement de dimensions  $(pxN)$  et  $(pxp)$

Le modèle dynamique de la structure fermée peut être obtenu à partir de l'équation de *Lagrange* avec contraintes :

$$\Gamma = \Gamma_{ar}(q_{ar}, \dot{q}_{ar}, \ddot{q}_{ar}) + J^T \lambda \tag{2.33}$$

Avec :

➤  $\Gamma_{ar}(q_{ar}, \dot{q}_{ar}, \ddot{q}_{ar})$  est le vecteur des efforts de la structure arborescente partitionné en  $\Gamma_a$  (relatifs aux articulations actives) et  $\Gamma_p$  (relatifs aux articulations passives). Son expression est donnée en fonction de la matrice d'inertie  $\mathbf{A}_{ar}$  et du vecteur des efforts Centrifuge, de Coriolis et de gravité de cette même structure :

$$\Gamma_{ar} = \mathbf{A}_{ar}(q_{ar})\ddot{q}_{ar} + \mathbf{H}_{ar}(q_{ar}, \dot{q}_{ar}) \tag{2.34}$$

Avec :

$$\text{➤ } \Gamma_{ar} = \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_p \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{ar} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa(NxN)} & \mathbf{A}_{ap(Nxp)} \\ \mathbf{A}_{pa(pxN)} & \mathbf{A}_{pp(ppx)} \end{bmatrix}$$

$$\text{➤ } \ddot{q}_{ar} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_p \end{bmatrix}; \mathbf{H}_{ar} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{a(Nx1)} \\ \mathbf{H}_{p(px1)} \end{bmatrix}$$

➤  $\lambda$  représente le vecteur de dimension  $(px1)$ , qui contient les multiplicateurs de *Lagrange* représentant l'effort transmis par les liaisons coupées pour respecter les contraintes de fermetures des boucles

Comme les efforts articulaires des articulations passives d'un système fermé sont nuls, les multiplicateurs de Lagrange peuvent être éliminés en écrivant l'équation (2.34) sous la forme :

$$\Gamma_{\text{système fermé}} = \begin{bmatrix} \Gamma_{m \text{ fermé}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_a^T \lambda \\ J_p^T \lambda \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

En prenant la partie inférieure de l'équation ( 2.35 ), les multiplicateurs de Lagrange auront comme équations :

$$\lambda = -[J_p^T]^{-1} \Gamma_p \quad (2.36)$$

En remplaçant l'équation ( 2.36 ) dans la partie supérieure de l'équation ( 2.35 ), nous obtenons les couples aux actionneurs du système fermé tels :

$$\begin{aligned} \Gamma_{m \text{ fermé}} &= \Gamma_a - J_a^T [J_p^T]^{-1} \Gamma_p \\ &= \Gamma_a + J_{ap}^T \Gamma_p \end{aligned} \quad (2.37)$$

Avec :

$$\blacktriangleright J_{ap} = -J_p^{-1} J_a = \frac{\partial \dot{q}_p}{\partial \dot{q}_a}$$

## 2.9. Modèle dynamique direct (MDD) des structures fermées

Il représente la relation entre les efforts articulaires motorisés et les accélérations des articulations actives. Pour réaliser ceci, il faut exprimer l'accélération des articulations passives en fonction des articulations actives.

D'après l'équation ( 2.32 ), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_p &= -J_p^{-1} J_a \ddot{q}_a - J_p^{-1} \Psi \\ &= J_{ap} \ddot{q}_a - J_p^{-1} \Psi \end{aligned} \quad (2.38)$$

En combinant les équations ( 2.35 ), ( 2.36 ), ( 2.37 ) et ( 2.38 ), on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{fermé}} &= \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ap} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ J_{ap} \ddot{q}_a - J_p^{-1} \Psi \end{bmatrix} + H_a + J_{ap}^T \begin{bmatrix} A_{pa} & A_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ J_{ap} \ddot{q}_a - J_p^{-1} \Psi \end{bmatrix} + H_p \\ &= A_{m \text{ fermé}} \ddot{q}_a + H_{m \text{ fermé}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright A_{m \text{ fermé}} &= A_{aa} + A_{ap} J_{ap} + J_{ap}^T A_{pa} + J_{ap}^T A_{pp} J_{ap} \\ \blacktriangleright H_{m \text{ fermé}} &= H_a - A_{ap} J_p^{-1} \Psi - J_{ap}^T A_{pp} J_p^{-1} \Psi + J_{ap}^T H_p \end{aligned}$$

Et donc le modèle dynamique direct s'écrit :

$$\ddot{q}_a = A_m^{-1} [\Gamma_m - H_m] \quad (2.40)$$

### 3. Structure à base mobile

Les robots mobiles sont des structures à base mobile au contraire des robots manipulateurs à base fixe. Un véhicule automobile peut être considéré comme un robot mobile dont la base est le châssis et les organes terminaux sont les roues. Dans la suite, on va introduire des méthodes de description et de notions complémentaires pour la modélisation et simulation des robots mobiles.

#### 3.1. Repère route

Soit  $R_r$  un repère lié à la route. Son origine est la projection du centre de gravité du véhicule sur le plan de la route. L'axe  $z_r$  est normal au plan tangent de la route, les axes  $x_r$  et  $y_r$  définissant ce plan tel que  $x_r$  soit parallèle à l'axe  $x_f$ . C'est un repère qui prend en compte la pente et le dévers de la route par rapport au repère sol  $R_f$ . Dans la suite, nous considérons que la route est plane horizontale sans pente ni dévers. En conséquence, la matrice d'orientation entre le repère route  $R_r$  et le repère galiléen  $R_f$  est l'identité ( $R_r = I_{(3 \times 3)}$ )

#### 3.2. Matrice de transformation entre la base et le repère galiléen

La matrice de transformation entre le repère de la base mobile du robot  $R_b$  et le repère de référence  $R_f$  nous permet de connaître la position actuelle du robot ainsi que son orientation. La position est en général décrite par les coordonnées cartésiennes. Pour l'orientation, on adoptera pour les véhicules routiers les angles de Roulis-Tangage-Lacet.

Pour décrire l'orientation d'un repère  $R_b$  lié au centre de gravité d'un véhicule dans un repère lié au sol  $R_f$ , la convention adoptée est celle de la figure 2.6. Les angles  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\psi$  désignent respectivement le roulis, le tangage et le lacet. Si l'on suppose que la direction du mouvement est selon l'axe  $x$ , la matrice d'orientation s'écrit :

$$\begin{aligned} {}^f A_b &= \text{rot}(z, \psi) \text{rot}(y, \phi) \text{rot}(x, \theta) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi + \cos \psi \sin \phi \cos \theta \\ \sin \psi \cos \phi & \cos \theta \cos \psi + \sin \psi \sin \phi \sin \theta & -\sin \theta \cos \psi + \sin \psi \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

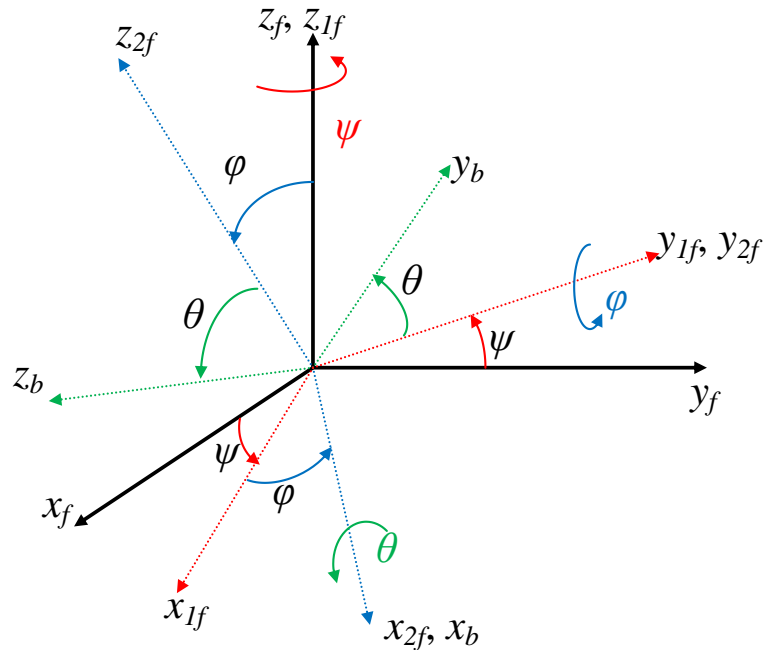


Figure 2.6 : Angle de Roulis, Tangage et Lacet

$\text{rot}(z, \psi)$  est la rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $z_f = [0 \ 0 \ 1]^T$ ,  $\text{rot}(y, \phi)$  est la rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $y_{1f}$  dont les composantes sont  $[-\sin\psi \ \cos\psi \ 0]^T$  dans  $R_f$  et  $\text{rot}(x, \theta)$  est la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $x_{2f}$  de composantes  $[\cos\psi \ \cos\phi \ \sin\psi \ \cos\phi \ -\sin\phi]^T$  dans  $R_f$ . On exprime la vitesse de rotation du repère  $R_b$  dans le repère  $R_f$  par :

$${}^f\omega_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\psi} + \begin{bmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} + \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\psi \\ \cos\phi \sin\psi \\ -\sin\phi \end{bmatrix} \dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\psi & \cos\psi \cos\phi \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \cos\phi \\ 1 & 0 & -\sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Les vitesses angulaires des angles de roulis, tangage et lacet s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\psi & \cos\psi \cos\phi \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \cos\phi \\ 1 & 0 & -\sin\phi \end{bmatrix}^{-1} {}^f\omega_b = \begin{bmatrix} \text{tg}\phi \cos\psi & \text{tg}\phi \sin\psi & 1 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi / \cos\phi & \sin\psi / \cos\phi & 0 \end{bmatrix} {}^f\omega_b \quad (2.43)$$

### 3.3. Représentation de la base

Le châssis est caractérisé par six degrés de liberté par rapport à un repère fixe lié au sol : trois translations suivant l'axe longitudinal, latéral et vertical et trois rotations. Ils permettent de définir la position et l'orientation de la caisse dans  $R_f$  (cf. Chapitre 1, section 2.1). Pour représenter ceci dans le formalisme de la robotique, deux méthodes sont possibles : soit par l'emploi des corps virtuels, soit en utilisant les variables eulériennes pour le châssis.

### 3.3.1. Méthode 1 : Porteur spatial

Dans ce modèle, la base du robot est le corps  $C_0$  fixe lié au sol. Il est possible de représenter ces degrés de liberté dans le formalisme de la robotique en considérant une chaîne simple de cinq corps virtuels, de masse et inerties nulles, liant la caisse  $C_b$  au sol, corps  $C_0$  de référence et base du robot (Figure 2.7). Les articulations entre ces corps sont les trois translations successives d'axe  $x_0$ ,  $y_0$ , et  $z_0$ , et les trois rotations successives. (Guillo 2000), (Venture 2003). Cette méthode a été utilisée également par M'Sirdi, Nasser et Naamane pour la modélisation de plusieurs types de véhicules (véhicule complet 406, quad, bicyclette, motorcycle et Kart). Le modèle dynamique qu'ils proposent est calculé par la méthode de Lagrange et implémenté dans le simulateur « SimK106N », édité sous Matlab/Simulink (Nasser & M'sirdi 2010), (Jaballah, M'sirdi, et al. 2009).

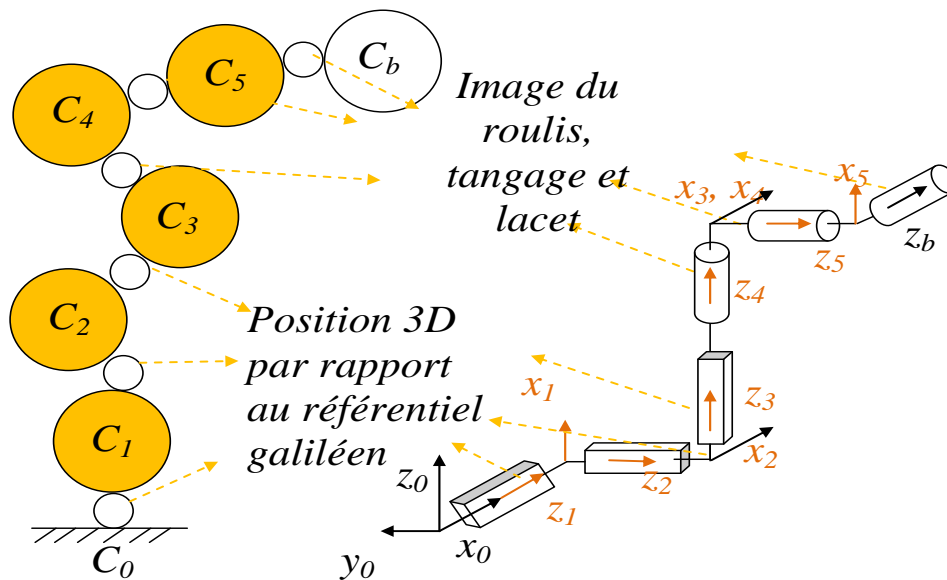


Figure 2.7 : Modélisation du Porteur spatial

### 3.3.2. Méthode 2 : Modèle Eulérien

Dans ce modèle, le corps  $C_0$  est le châssis mobile du véhicule. Or les paramètres dynamiques de  $C_0$  n'interviennent pas dans le modèle dynamique d'un robot à base fixe. De plus, le logiciel SYMORO+ (Khalil & Creusot 1997) dédié aux robots à base fixe, ne permet pas d'introduire les paramètres dynamiques de la base  $C_0$ . Il faut donc introduire un corps réel supplémentaire lié à  $C_0$  par une articulation virtuelle bloquée.  $C_0$  est finalement considéré comme un corps virtuel de variables eulériennes ( $V_0$ ,  $\omega_0$ ) non nulles qui sont les conditions initiales de la récurrence avant du modèle dynamique eulérien (Section 2.6.3.1). Les variables eulériennes des repères  $R_0$  et  $R_b$  liées au châssis sont égales et les paramètres dynamiques du châssis sont ceux du corps  $C_b$ .

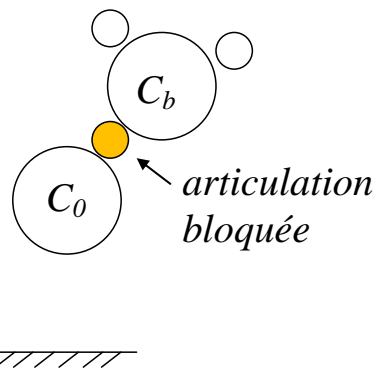


Figure 2.8 : Modèle Eulérien de la base

Cette méthode est plus avantageuse que celle du porteur spatial pour plusieurs raisons :

Pour le porteur spatial à base fixe :

- l'ajout de 5 corps virtuels avec 6 variables lagrangiennes augmente les nombres d'opérations arithmétiques (multiplications et additions) et par conséquent accroît le coût de calcul,
- les variables lagrangiennes qui déterminent les rotations de la caisse ne sont pas absolues, elles définissent les rotations relatives d'un corps par rapport à son antécédent, d'où la nécessité de faire des projections pour déterminer la relation entre les variables relatives et absolues.

Pour la représentation eulérienne de robot à base mobile :

- les axes des repères  $R_0$  et  $R_b$  liés au châssis sont colinéaires aux axes traditionnellement utilisés dans le domaine de l'automobile,
- dans le cas où le véhicule est instrumenté par une centrale inertielle, les mesures de la centrale sont exprimées dans un repère  $R_c$  lié à la centrale fixée au châssis. Le plus simple est de choisir  $R_c = R_0 = R_b$  et les variables d'Euler sont données directement par les mesures de la centrale inertielle.

Dans la suite on adoptera cette méthode pour modéliser le châssis de tout type de véhicule routier.

### 3.4. Modèle dynamique

L'algorithme de calcul des équations de Newton-Euler (Section 2.6.3) est repris dans le cas d'un robot à base mobile, en modifiant les conditions initiales de la récurrence avant. Ceci se traduit par la détermination des vitesses et accélérations de la base dans son propre repère. En conséquence, le repère de base  $R_0$  des robots manipulateurs à base fixe sera confondu avec le repère de base  $R_b$  d'un robot mobile :

$${}^0\dot{V}_0 = {}^b\dot{V}_b = \begin{bmatrix} {}^b\dot{V}_{xb} \\ {}^b\dot{V}_{yb} \\ {}^b\dot{V}_{zb} \end{bmatrix} \quad {}^0\dot{\omega}_0 = {}^b\dot{\omega}_b = \begin{bmatrix} {}^b\dot{\omega}_{xb} \\ {}^b\dot{\omega}_{yb} \\ {}^b\dot{\omega}_{zb} \end{bmatrix} \quad {}^0\omega_0 = {}^b\omega_b = \begin{bmatrix} {}^b\omega_{xb} \\ {}^b\omega_{yb} \\ {}^b\omega_{zb} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Avec :

- ${}^bV_b, {}^b\omega_b$  sont les vitesses respectives linéaires et angulaires du corps de la base par rapport au repère galiléen exprimées selon les directions des axes du repère  $R_b$ .
- ${}^b\dot{V}_b, {}^b\dot{\omega}_b$  sont les accélérations respectives linéaires et angulaires du corps de la base par rapport au repère galiléen exprimées selon les directions des axes du repère  $R_b$ , hors accélération de la gravité.

La prise en compte des forces de gravité sans les exprimer explicitement dans le bilan des efforts est possible, en ajoutant dans l'initialisation de la récurrence avant, l'accélération de la

gravité projetée dans le repère  $R_b$  à l'accélération du châssis :  $\begin{bmatrix} {}^b\dot{V}_{xb} \\ {}^b\dot{V}_{yb} \\ {}^b\dot{V}_{zb} \end{bmatrix} - {}^b g$

Avec :

${}^b g$ , le vecteur de la gravité exprimé dans le repère de la base

$$\begin{aligned} {}^b g = {}^b A_f g &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \cos \phi & -\sin \phi \\ -\cos \theta \sin \psi + \cos \psi \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \cos \psi + \sin \psi \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi + \cos \psi \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \cos \psi + \sin \psi \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \phi G_3 \\ \cos \phi \sin \theta G_3 \\ \cos \phi \cos \theta G_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Quand à la récurrence arrière, arrivant au corps de base, le mouvement est libre, sans efforts extérieurs appliqués sur le châssis (en absence d'efforts aérodynamiques), et se traduit par un torseur d'effort nul entre  $C_0$  et  $C_b$ .

$$[0_{6 \times 1}] = \begin{bmatrix} {}^b f_b \\ {}^b m_b \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Les six équations de l'équation (2.46) permettent d'exprimer les équations dynamiques de translation et de rotation du châssis.

### 3.5. Modèle mixte de variables Euler -Lagrange

Dans les équations d'Euler développées dans la section (2.44 ), nous conservons les variables d'Euler du châssis, par contre les variables des autres corps sont exprimées en fonction des variables généralisées lagrangiennes.

Le modèle mélange les variables d'Euler du châssis et les variables de Lagrange des autres corps.

Au niveau des accélérations, Nous appelons  $qa_{e-l}$ , le vecteur suivant :

$$qa_{e-l} = \begin{bmatrix} {}^b\dot{V}_b \\ {}^b\dot{\omega}_b \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Le vecteur  $qv_{e-l}$  de vitesse est représenté par :

$$qv_{e-l} = \begin{bmatrix} {}^bV_b \\ {}^b\omega_b \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Et finalement le vecteur des positions est exprimé en fonction des coordonnées cartésiennes de la base par rapport au sol, des angles de roulis, tangage et lacet pour représenter l'orientation et des variables articulaires lagrangiennes. Son expression est :

$$q_{e-l} = \begin{bmatrix} [x \quad y \quad z]^T \\ [\theta \quad \phi \quad \psi]^T \\ q \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$q, \dot{q}$  et  $\ddot{q}$  sont respectivement les positions, vitesses et accélérations des variables généralisées lagrangiennes.

Dans la suite nous développons le calcul des vitesses et des accélérations des variables eulériennes du châssis.

Les variables  ${}^bV_b$  et  ${}^b\omega_b$  représentant les vitesses linéaires et angulaires de la base et exprimé dans le repère  $R_b$ , sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} {}^bV_b &= {}^bR_f \cdot {}^fV_b \\ {}^b\omega_b &= {}^bR_f \cdot {}^f\omega_b \end{aligned} \quad (2.50)$$

Avec :



- ${}^bR_f$  la matrice de rotation (2.41) qui exprime l'orientation du repère Galiléen absolu dans le repère de la base ;
- ${}^fV_b$  et  ${}^f\omega_b$  les vecteurs de vitesse linéaire et angulaire de la base  $C_b$  exprimés dans le repère  $R_f$ .

De même, pour les accélérations nous définissons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} {}^b\dot{V}_b &= {}^bR_f \cdot {}^f\dot{V}_b \\ {}^b\dot{\omega}_b &= {}^bR_f \cdot {}^f\dot{\omega}_b \end{aligned} \quad (2.51)$$

Avec :

- ${}^b\dot{V}_b$  l'accélération absolue de translation de  $C_b$  projetée dans le repère  $R_b$
- ${}^b\dot{\omega}_b$  l'accélération absolue angulaire de  $C_b$  projetée dans le repère  $R_b$

Tenant compte des définitions ( 2.50 ) et ( 2.51 ), nous montrons que la dérivée temporelle de  ${}^bV_b$  n'est pas la projection de l'accélération absolue dans  $R_b$ .

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^bV_b &= {}^bR_f \frac{d}{dt} {}^fV_b + \left( \frac{d}{dt} {}^bR_f \right) {}^fV_b \\ &= {}^b\dot{V}_b + \left( \frac{d}{dt} {}^bR_f \right) {}^fV_b \end{aligned} \quad (2.52)$$

Sachant que la dérivée de la matrice de rotation  ${}^bA_f$  est égale à  $-{}^fA_b {}^b\hat{\omega}_b$  (Sciavicco & Siciliano 2000), nous pouvons écrire l'équation ( 2.52 ) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^bV_b &= {}^b\dot{V}_b - {}^bR_f {}^f\hat{\omega}_b {}^fV_b \\ &= {}^b\dot{V}_b - {}^bR_f ({}^f\omega_b \times {}^fV_b) \\ &= {}^b\dot{V}_b - ({}^bR_f {}^f\omega_b) \times ({}^bR_f {}^fV_b) \\ &= {}^b\dot{V}_b - {}^b\omega_b \times {}^bV_b \end{aligned}$$

Par contre, pour les vitesses angulaires la projection de l'accélération absolue angulaire dans  $R_b$   ${}^b\dot{\omega}_b$  est égale à la dérivée temporelle de  ${}^b\omega_b$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^b\omega_b &= {}^bR_f \frac{d}{dt} {}^f\omega_b + \left( \frac{d}{dt} {}^bR_f \right) {}^f\omega_b \\ &= {}^b\dot{\omega}_b - {}^bR_f {}^f\hat{\omega}_b {}^f\omega_b \\ &= {}^b\dot{\omega}_b - {}^bR_f ({}^f\omega_b \wedge {}^f\omega_b) = {}^b\dot{\omega}_b \end{aligned}$$

### 3.6. Calcul des Matrices A et H à partir de Newton-Euler

Comme mentionné dans la section (2.6.3) du chapitre 2, le modèle *Lagrangien* peut être obtenu à partir des équations de Newton-Euler. Ceci se traduit par le calcul du vecteur  $H$  et de la matrice  $A$  de l'équation ( 2.29 ) :

- Le calcul du vecteur  $H$  peut être effectué par l'algorithme de Newton-Euler, en remarquant que  $H = \Gamma$  ( 2.28 ) si le vecteur accélération est remplacé par un vecteur nul :

$$H = f(q_{e\_l}, qv_{e\_l}, qa_{e\_l} = 0, g, Fe, F_v, F_s, K) = C(q_{el}, qv_{e\_l})qv_{e\_l} + G + \Gamma_{el} + \Gamma_f + \Gamma_e \quad (2.53)$$

- Le calcul de la matrice  $A$  peut être effectué par l'algorithme de Newton-Euler, en remarquant que la  $i$ ème colonne de  $A$ , notée  $A(:,i)$  est égale à  $\Gamma$  ( 2.28 ) si les vecteurs vitesse, gravité, torseurs extérieurs, frottement visqueux et sec, élasticité sont remplacés par des vecteur nuls et le vecteur accélération correspond à une colonne de la matrice identité de dimension  $(n,n)$ :

$$A(:,i) = f(q_{e\_l}, qv_{e\_l} = 0, u_i, g = 0, F_e = 0, F_s = 0, F_v = 0, K = 0) \quad (2.54)$$

Avec :

$u_i$  est le vecteur de dimension  $(nx1)$  dont tous les éléments sont nuls sauf la  $i$ ème composante qui est égale à 1.

Le modèle lagrangien d'une structure à base mobile est obtenu de la même façon à partir des équations de Newton-Euler mais en utilisant les vecteurs Euler-Lagrangien mentionnés précédemment.

### 3.7. Récapitulatif de la méthodologie

Pour un véhicule considéré comme un robot, la méthodologie de description se résume par les étapes suivantes :

- définir le repère galiléen de référence, le repère lié à la base mobile ainsi que la matrice de transformation entre les deux repères ;
- définir les vitesses et les accélérations de la base suivant les trois axes ;
- définir le modèle géométrique de la structure mécanique du robot. Si la structure comporte des chaînes fermées, couper les chaînes et définir le modèle géométrique de la structure arborescente. De plus, calculer les équations géométriques et cinématiques de contraintes de fermeture des chaînes fermées ;
- définir les paramètres dynamiques des corps du robot ;

- élaborer le modèle dynamique inverse par SYMORO+ et l'algorithme de Newton-Euler ;
- calculer la matrice d'inertie  $A$  et le vecteur  $H$  du robot regroupant les forces centrifuges, l'effet de la gravité, les forces de Coriolis et les efforts extérieurs ;
- calculer la matrice d'inertie  $A_{fermé}$  et  $H_{fermé}$  pour les robot comportant des chaînes fermées.

## 4. Application : Modèle bicyclette 3ddl

### 4.1. Modélisation

Le modèle bicyclette que nous proposons, est constitué d'un cadre de masse  $M_1$  et de deux roues. Ce modèle traduit le comportement en lacet et en dérive du véhicule (Figure 2.9). La dérive provient des frottements et des glissements au niveau du point de contact entre la roue et le sol (chapitre 1 section 2.7.3.2). Pour l'élaboration de ce modèle, la dynamique de la roue et les débattements ne sont pas pris en compte. Le véhicule est considéré plan : il se déplace dans un plan horizontal, donc sa vitesse verticale est nulle et les degrés de liberté correspondants au roulis et tangage sont éliminés ( $V_z=0$  ;  $\theta=0$  ;  $\phi=0$ ). Le point de contact entre chaque roue et le sol est aligné avec le centre de gravité  $G$ . La masse et l'inertie des roues sont négligées.

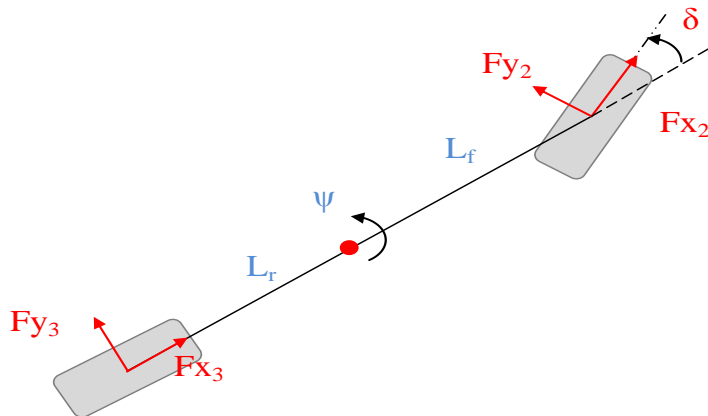


Figure 2.9 : Modèle bicyclette et interface roue/sol

Les efforts de contacts  $F_{xi}$  et  $F_{yi}$  sont calculés avec les équations de Pacejka (1.10). L'effort transversal  $F_{yi}$  représente l'effort de la dérive et l'effort longitudinal  $F_{xi}$  est l'effort dû au glissement longitudinal. Le couple d'auto-alignement n'est pas considéré.

Afin de modéliser le système décrit ci-dessus en utilisant le formalisme DHM, un jeu de paramètres est nécessaire pour l'élaboration du modèle dynamique à l'aide de SYMORO+.

Tableau 2-1 : Paramètres géométriques du modèle bicyclette 3ddl

| $j$ | $a(j)$ | $\sigma_j$ | $\gamma_j$ | $b_j$ | $\alpha_j$ | $d_j$  | $\theta_j$ | $r_j$ | Commentaires                  |
|-----|--------|------------|------------|-------|------------|--------|------------|-------|-------------------------------|
| 1   | 0      | 2          | 0          | 0     | 0          | 0      | 0          | 0     | Base-châssis                  |
| 2   | 1      | 0          | 0          | 0     | 0          | $L_f$  | $q_2$      | 0     | Braquage roue AV ( $\delta$ ) |
| 3   | 1      | 2          | 0          | 0     | 0          | $-L_r$ | 0          | 0     | Articulation bloquée          |

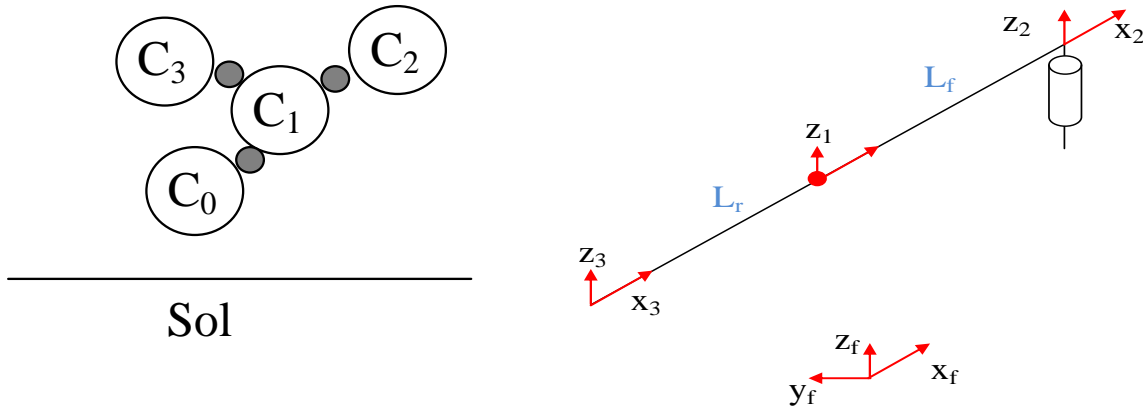


Figure 2.10 : Topologie et modèle articulaire du modèle bicyclette 3ddl

Le paramétrage complet engendré automatiquement par Symoro+ est alors le suivant :

|  |   |
|--|---|
| <pre>(* Generic parameters *) (*Robotname = 'bicilacet' *) NL = 3 NJ = 3 NF = 3 Type = 1 (*Tree*)  (* Geometric parameters *)  Ant = {0, 1, 1} Sigma = {2, 0, 2} Mu = {0, 1, 0} B = {0, 0, 0} d = {0, Lf, -Lr} R = {0, 0, 0} gamma = {0, 0, 0} Alpha = {0, 0, 0} Theta = {0, q2, 0}  (* Inertial parameters *) XX = {0, 0, 0} XY = {0, 0, 0} XZ = {0, 0, 0} YY = {0, 0, 0} YZ = {0, 0, 0} ZZ = {ZZ1, 0, 0}</pre> | <p>Nombre de repère<br/>           Nombre de corps<br/>           Nombre d'articulation<br/>           Type de structure</p> <p>Antécédent des corps<br/>           Type d'articulation</p> <p>Paramètres géométriques du système</p> <p>Paramètres inertiels et frottement<br/>           des différents corps</p> |
|--|---|

|   |  |
|---|--|
| <pre> MX = {0, 0, 0} MY = {0, 0, 0} MZ = {0, 0, 0} M = {M1, 0, 0} IA = {0, 0, 0} FV = {0, 0, 0} FS = {0, 0, 0}  FX = {0, -FX2, -FX3} FY = {0, -FY2, -FY3} FZ = {0, 0, 0} CX = {0, 0, 0} CY = {0, 0, 0} CZ = {0, 0, 0}  (* Speed and Acceleration of the base *) W0 = {0, 0, wz} WPO = {0, 0, wpz} V0 = {vx, vy, 0} VPO = {vpx, vpy, 0}  (* Acceleration of gravity *) G = {Gx, Gy, Gz}  (* Joints velocities and accelerations *) QP = {0, QP2, 0} QDP = {0, QDP2, 0}  (* End of definition *) </pre> | <p>Efforts extérieurs appliqués par le système sur l'environnement</p> <p>Vitesse et accélération de la base</p> <p>Vecteur de gravité</p> |
|---|--|

Avec :

- La matrice de transformation entre le repère galiléen  $R_f$  et le repère de la base  $R_1$  dépend uniquement du lacet (le tangage et le roulis ne sont pas pris en compte).

$${}^f R_1 = \text{rot}(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

- L'accélération de la gravité projetée dans le repère de la base  $R_1$  a comme expression :

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = {}^1 g = {}^1 R_f g = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

- Le vecteur accélération de translation de la base exprimé dans le repère  $R_1$  est calculé par l'équation ( 2.57 ) :

$$VP0 = \begin{bmatrix} vpx \\ vpy \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} vx \\ vy \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} vx \\ vy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}x - \dot{\psi} vy \\ \dot{v}y + \dot{\psi} vx \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

➤ Le vecteur accélération de rotation de la base exprimé dans le repère  $R_I$  est calculé par l'équation (2.58) :

$$WP0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega pz \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega z \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Le modèle dynamique inverse associé à l'équation de *Newton-Euler* du corps de la base est le suivant :

```
% Function description:
S2=sin(t2);
C2=cos(t2);
VSP11=-Gx + vpx;
VSP21=-Gy + vpy;
F11=M1.*VSP11;
F21=M1.*VSP21;
F31=-(Gz.*M1);
No31=wpz.*ZZ1;
FDI12=-(C2.*FX2) + FY2.*S2;
FDI22=-(C2.*FY2) - FX2.*S2; %Report des forces extérieures
E11=F11 + FDI12 - FX3;
E21=F21 + FDI22 - FY3;
N31=FDI22.*Lf + FY3.*Lr + No31; % Bilan des efforts
GAM2=0; % pas de dynamique de q2
E10=E11;
E20=E21;
N30=N31; % Equations du mouvement
```

En posant  $E10=0$ ,  $E20=0$  et  $E30=0$  (pas d'actionnement sur les degrés de liberté liés au châssis) (cf. section 3.4), les équations symboliques du modèle dynamique inverse sont les suivantes :

$$\begin{aligned} M_1 vpx &= Fx_3 + Fx_2 \cos(q_2) - Fy_2 \sin(q_2) \\ M_1 vpy &= Fy_3 + Fy_2 \cos(q_2) + Fx_2 \sin(q_2) \\ ZZ_1 wpz &= -Fy_3 L_r + L_r (Fy_2 \cos(q_2) + \sin(q_2) Fx_2) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Avec :

$$\begin{aligned} vpx &= \dot{v}x - \dot{\psi} vy \\ vpy &= \dot{v}y + \dot{\psi} vx \\ wpz &= \ddot{\psi} \\ q_2 &= \delta \end{aligned}$$

## 4.2. Simulation

Afin de prédire et analyser la dynamique du véhicule, on a besoin de simuler son modèle dynamique. Un simulateur sous Matlab/Simulink est édité pour la simulation sous différentes

manœuvres et en interaction avec son environnement. L'architecture détaillée du simulateur est présentée dans le chapitre 3.

Le modèle dynamique direct utilisé pour la simulation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 vpx &= \frac{1}{M_1} (Fx_3 + Fx_2 \cos(q_2) - Fy_2 \sin(q_2)) \\
 vpy &= \frac{1}{M_1} (Fy_3 + Fy_2 \cos(q_2) + Fx_2 \sin(q_2)) \\
 wpz &= \frac{1}{M_1} (-Fy_3 L_r + L_f (Fy_2 \cos(q_2) + \sin(q_2) Fx_2))
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Dans les essais suivants, l'entrée principale du système est l'angle de braquage  $q_2$  (on considère une consigne de position sans la dynamique du degré de liberté lié au braquage dont  $ZZ_2=0$  et  $GAM2=0$ ). Les essais sont effectués en régime libre avec les conditions initiales suivantes :

$$v_x = V; v_y = 0; \dot{\psi} = 0$$

Les forces longitudinales ( $Fx_2$  et  $Fx_3$ ) et latérales ( $Fy_2$  et  $Fy_3$ ) sont fonctions de  $q_2$ ,  $v_x$  et  $v_y$  et de la rotation angulaire  $\omega$  des roues non modélisées. Celle-ci est supposée constante.

#### 4.2.1. Essai en virage

L'essai en virage - braquage de la roue avant- permet d'étudier le comportement du véhicule dans la direction transversale ainsi que le lacet. Une consigne d'angle de braquage est appliquée au modèle en boucle ouverte pour différentes valeurs de vitesse longitudinale  $V$ .

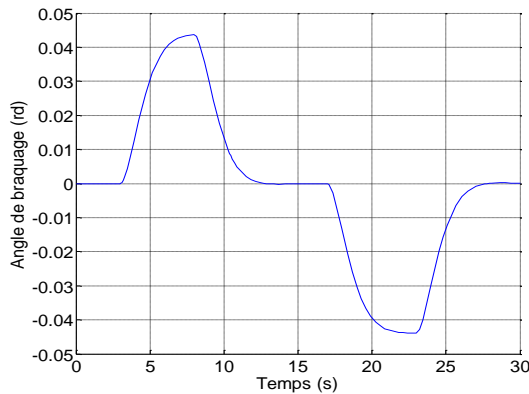


Figure 2.11 : Angle de braquage appliqué au modèle bicyclette

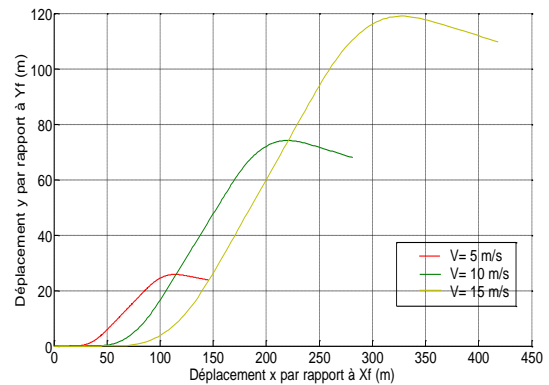


Figure 2.12 : Trajectoire planaire du CDG dans  $R_f$

Nous considérons dans cette simulation, que la route est plane, sans pente ni cote et sans dévers. L'entrée du modèle est le braquage de la roue avant, montré sur la figure ( 2.12 ). Sur la figure ( 2.14 ), nous présentons l'évolution de l'angle du lacet. Nous présentons également l'angle de dérive de la roue avant et arrière, respectivement, sur les figures ( 2.16 ) et ( 2.17 ). La vitesse longitudinale du véhicule est maintenue constante comme le montre la figure ( 2.15 ).

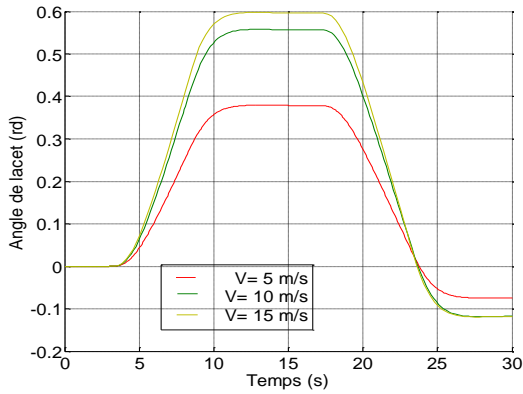


Figure 2.13 : Angle de lacet

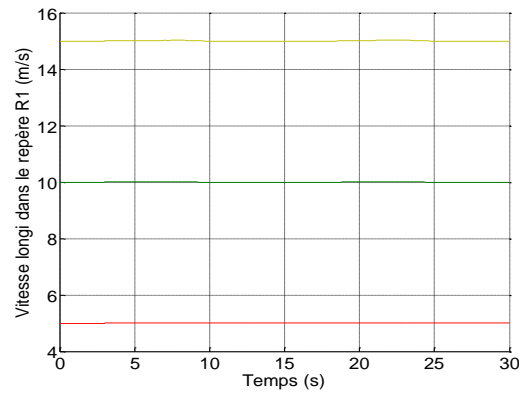


Figure 2.14 : Vitesse longitudinale du véhicule dans  $R_1$

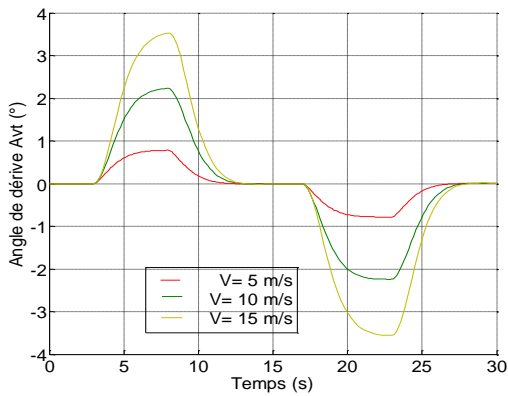


Figure 2.15 : Angle de dérive de la roue avant

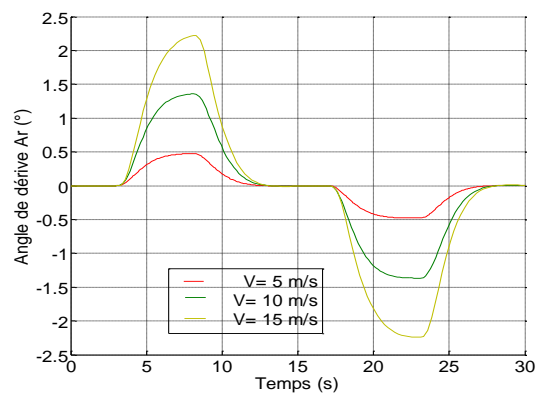


Figure 2.16 : Angle de dérive de la roue arrière

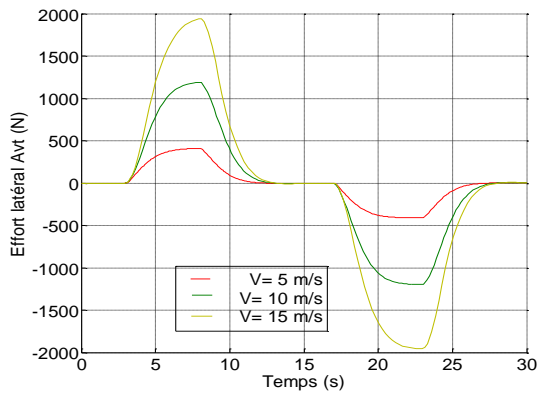


Figure 2.17 : Effort latéral de la roue avant

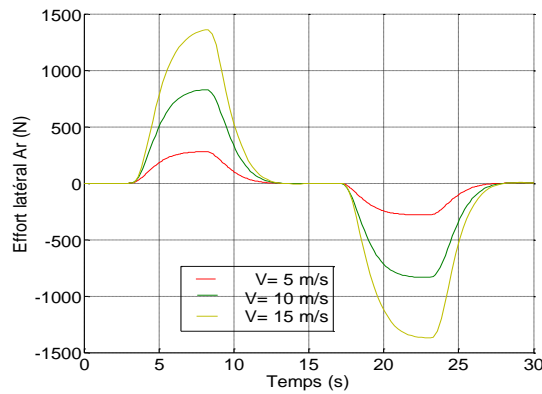


Figure 2.18 : Effort latéral de la roue arrière

Une deuxième simulation est effectuée en faisant varier l'angle de braquage pour une vitesse longitudinale donnée de 10 m/s. La trajectoire effectuée, l'angle du lacet ainsi que la vitesse latérale du véhicule exprimée dans le repère  $R_1$ , sont respectivement présentés sur les figures (2.21), (2.22) et (2.23).



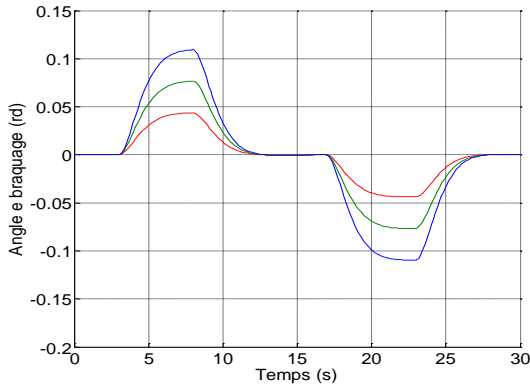


Figure 2.19 : Angle de braquage appliqué au modèle bicyclette

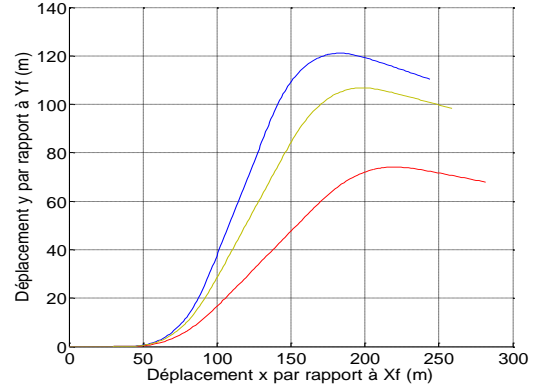


Figure 2.20 : Trajectoire planaire du CDG dans  $R_f$

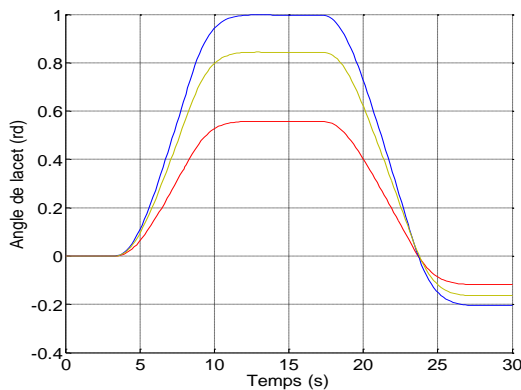


Figure 2.21 : Angle de lacet

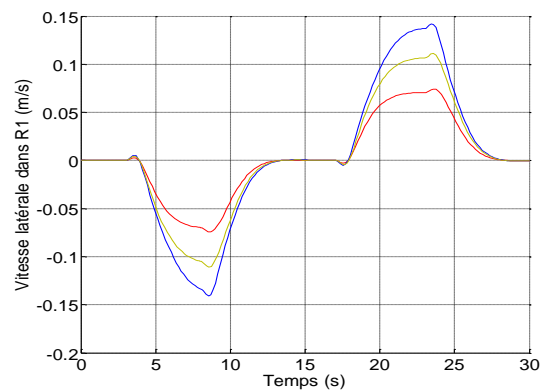


Figure 2.22 : Vitesse latérale du véhicule dans  $R_f$

## 5. Conclusion

Un système multi-corps peut être décrit en utilisant le formalisme de Denavit et Hartenberg modifié. Le formalisme permet de décrire géométriquement un système avec un minimum de paramètres quelque soit le type de structure considéré : simple, arborescente ou fermée. Sur la base de cette modélisation, un logiciel de calcul symbolique SYMORO+ a été développé dans l'équipe robotique de l'IRCCyN (Khalil & Creusot 1997), permettant d'une façon systématique, de calculer les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques de telles structures. Puisque le modèle dynamique exprime la relation entre les efforts articulaires, les efforts extérieurs appliqués au système et les coordonnées articulaires, il sera utilisé pour la simulation numérique du comportement des structures en mouvement et notamment les robots mobiles du type véhicule. Dans les chapitres suivants, différents véhicules routiers de complexité variable sont modélisés et simulés numériquement.



## Chapitre 3 **Modèle 2 roues avec suspension et modèle 4 roues avec suspensions**

---

Dans ce chapitre, une description géométrique de deux modèles de véhicule à 11 et 16 degrés de liberté est menée en appliquant le formalisme de Denavit&Hartenberg modifiée. Ceci permet d'obtenir le modèle dynamique des deux modèles à travers l'algorithme de *Newton-Euler* décrit dans le chapitre 2 et à l'aide du logiciel SYMORO+. Ces modèles mixtes en variables d'Euler et de Lagrange sont utilisés pour la simulation du comportement dynamique des structures en réponse à des manœuvres et des sollicitations extérieures, prédéfinies par les scénarios de conduite. L'architecture du modèle de simulation est présentée et détaillée. Des essais en simulation sur les deux modèles sont effectués pour différents scénarios (accélération et freinage en ligne droite, essai en virage).

### 1. **Modèle 2 roues avec suspensions**

Le modèle étudié est décrit sous la forme d'un système multi-corps selon le formalisme usuellement utilisé en robotique. Il est constitué d'un cadre (le châssis) de masse  $M$ , de matrice d'inertie  $J$ , de premier moment  $MS$ , d'une roue avant qui peut tourner par rapport au cadre autour d'un axe vertical et d'une roue arrière d'axe fixe par rapport au cadre. Ces deux roues sont liées au cadre à l'aide de deux suspensions selon l'axe vertical (Figure 3.1).

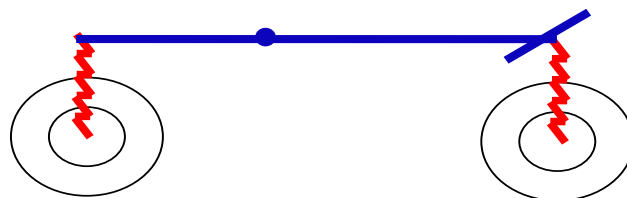


Figure 3.1 : Schéma du modèle 2 roues avec suspensions

#### 1.1. **Hypothèses simplificatrices**

Ce modèle complète le modèle bicyclette introduit précédemment (cf. Chapitre 2, section 4) pour se rapprocher du modèle de voiture en prenant en compte : les débattements des

suspensions des deux roues et la rotation des roues autour de leurs axes. Le cadre du modèle 2 roues possède six degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) lui permettant un mouvement spatial en 3 dimensions dans son environnement. Les hypothèses simplificatrices par rapport à un modèle automobile standard sont les suivantes :

- La cinématique et l'élastocinématique des trains ne sont pas prises en compte :
  - la pince arrière et l'enroulement ne varient pas et sont supposés nuls ;
  - la voie et l'empattement ne varient pas ;
  - les efforts de liaisons dus aux trains ne sont pas pris en compte ;
  - le braquage est dû à la rotation du volant et la dynamique du système colonne de direction-crémaillère n'est pas prise en compte.
- les forces aérodynamiques ne sont pas considérées ;
- les coefficients des suspensions sont considérés constants :  $K_i, F_{vi}$ ;
- le torseur pneumatique est appliqué au point de contact entre le pneu et le sol.
- le plan de la route est horizontal.

## 1.2. Modélisation globale du véhicule

Le véhicule peut être considéré comme un robot mobile composé de corps connectés entre eux par des articulations, dont le cadre est la base mobile et les roues sont les organes terminaux. La prise en compte des simplifications conduit à un modèle à onze degrés de liberté dont la topologie est donnée par la figure 3.2 . La figure 3.3 représente le modèle articulaire obtenu en appliquant la démarche décrite dans le chapitre 2. Cette méthode systématique simplifie le calcul du modèle contrairement au modèle de Cossalter calculé en utilisant les coordonnées cartésiennes pour chaque corps et aboutissant à des équations non manipulables (Cossalter & Lot 2002). Les paramètres géométriques du système sont présentés par le tableau 3-1 conformément au formalisme DHM.

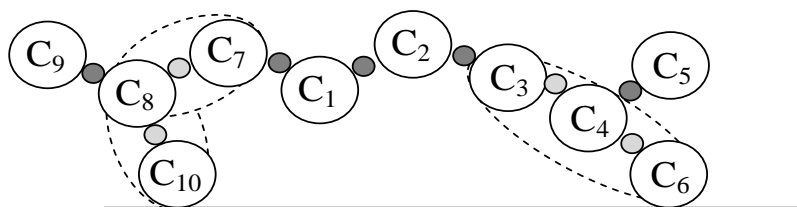


Figure 3.2 : Topologie du modèle à 11ddl et 10 corps

- $C_1$ , le cadre (châssis) ;

- $C_2$  et  $C_7$  sont respectivement les suspensions avant et arrière ;
- $C_3$  est le pivot ;
- $C_5$  et  $C_9$  sont les roues avant et arrière ;
- $C_4$  et  $C_8$  sont deux corps virtuels liés respectivement à  $C_3$  et  $C_7$  par une articulation virtuelle pour définir un changement de repère ;
- $C_6$  et  $C_{10}$  sont deux corps virtuels liés respectivement à  $C_4$  et  $C_8$  pour définir les repères de contact avec le sol.

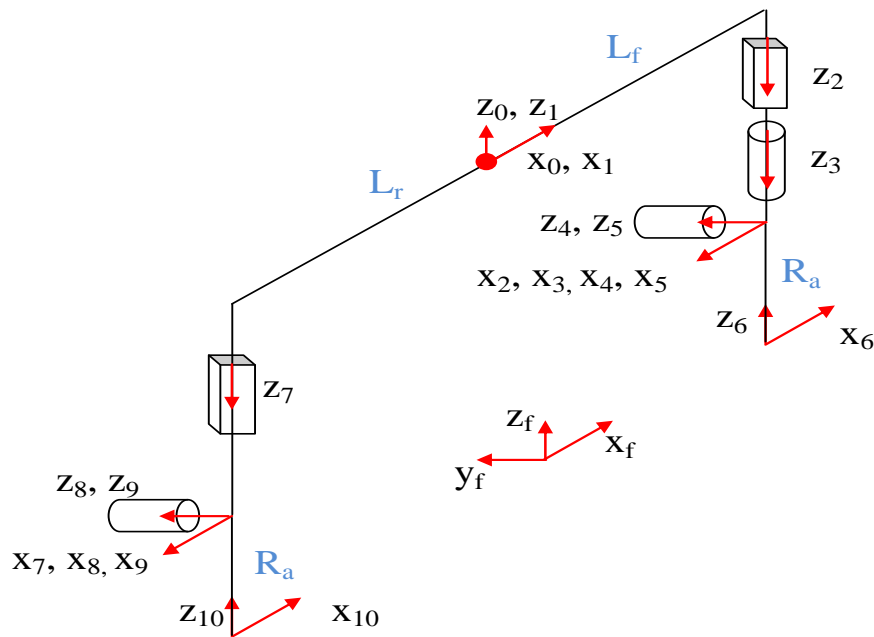


Figure 3.3 : Modèle articulaire à 11 degrés de liberté et 10 corps

Tableau 3-1 : Paramètres géométriques du modèle à 11 degrés de liberté

| $j$ | $a(j)$ | $\sigma_j$ | $\gamma_j$ | $b_j$ | $\alpha_j$ | $d_j$  | $\theta_j$ | $r_j$  | Commentaires                            |
|-----|--------|------------|------------|-------|------------|--------|------------|--------|---|
| 1   | 0      | 2          | 0          | 0     | 0          | 0      | 0          | 0      | Base-châssis-cadre                      |
| 2   | 1      | 1          | 0          | 0     | $\pi$      | $L_f$  | $\pi$      | $q_2$  | Débattement de suspension AV            |
| 3   | 2      | 0          | 0          | 0     | 0          | 0      | $q_3$      | 0      | Braquage roue AV                        |
| 4   | 3      | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0      | 0          | 0      | Articulation virtuelle bloquée          |
| 5   | 4      | 0          | 0          | 0     | 0          | 0      | $q_5$      | 0      | Rotation de la roue AV                  |
| 6   | 4      | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0      | $\pi$      | $-R_a$ | Articulation bloquée (point de contact) |
| 7   | 1      | 1          | 0          | 0     | $\pi$      | $-L_r$ | $\pi$      | $q_7$  | Débattement de suspension AR            |
| 8   | 7      | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0      | 0          | 0      | Articulation virtuelle bloquée          |
| 9   | 8      | 0          | 0          | 0     | 0          | 0      | $q_9$      | 0      | Rotation de la roue AR                  |
| 10  | 8      | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0      | $\pi$      | $-R_a$ | Articulation bloquée (point de contact) |

Avec :

- $L_f$ : distance longitudinale entre le centre de gravité du véhicule et le train avant ;
- $L_r$ : distance longitudinale entre le centre de gravité du véhicule et le train arrière ;
- $R_a$ : Rayon de la roue.

Le mouvement du châssis est décrit par les variables eulériennes de position et d'orientation du repère  $R_I$  lié au cadre par rapport au repère de référence  $R_f$ .

Soit  $q_{e\_I}$  le vecteur de configuration des 11 degrés de liberté, composé par le vecteur  $\xi$  (6x1) de posture du véhicule, et les coordonnées articulaires (les articulations bloquées sont dépourvues de coordonnées articulaires) :

$$q_{e\_I} = \left[ \xi^T \quad q_2 \quad q_7 \quad q_5 \quad q_9 \quad q_3 \right]^T \quad (3.1)$$

Avec :

- $\xi = [x \quad y \quad z \quad \theta \quad \phi \quad \psi]^T$ 
  - $x, y$  et  $z$  sont les coordonnées de l'origine du cadre dans le repère de référence  $R_f$ ;
  - $\theta, \phi$  et  $\psi$  sont respectivement les angles de roulis, tangage et lacet qui déterminent l'orientation du repère  $R_I$  par rapport au repère  $R_f$  (cf. chapitre 2, section 3.2).
- $q_2$  et  $q_7$  représentent le débattement en translation des suspensions ;
- $q_5$  et  $q_9$  représentent les positions angulaires des deux roues, autour de leurs axes de rotation ;
- $q_3$  représente l'angle de braquage de la roue avant ;
- les repères correspondants aux articulations bloquées sont fixes par rapport à leurs repères antécédents et leurs coordonnées articulaires sont des constantes qui expriment le changement de repère et leur dérivées est nulles

Soit  $qv_{e\_I}$  le vecteur vitesse de configuration des 11 degrés de liberté

$$qv_{e\_I} = \left[ {}^1V_{1x} \quad {}^1V_{1y} \quad {}^1V_{1z} \quad {}^1\omega_{1x} \quad {}^1\omega_{1y} \quad {}^1\omega_{1z} \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_9 \quad \dot{q}_3 \right] \quad (3.2)$$

Avec :

- $\left[ {}^1V_{1x} \quad {}^1V_{1y} \quad {}^1V_{1z} \right]^T$  le vecteur vitesse de translation de la base par rapport au repère  $R_f$  exprimé dans son propre repère  $R_I$  ;
- $\left[ {}^1\omega_{1x} \quad {}^1\omega_{1y} \quad {}^1\omega_{1z} \right]^T$  le vecteur vitesse de rotation de la base par rapport au repère  $R_f$  exprimé dans son propre repère  $R_I$  ;

→  $[\dot{q}_2 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_9 \quad \dot{q}_3]^T$  le vecteur des vitesses articulaires

Soit  $qa_{e\_l}$  le vecteur accélération de configuration des 11 degrés de liberté :

$$qa_{e\_l} = \left[ \dot{V}_{1x} \quad \dot{V}_{1y} \quad \dot{V}_{1z} \quad \dot{\omega}_{1x} \quad \dot{\omega}_{1y} \quad \dot{\omega}_{1z} \quad \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_7 \quad \ddot{q}_5 \quad \ddot{q}_9 \quad \ddot{q}_3 \right]^T \quad (3.3)$$

Avec :

→  $\left[ \dot{V}_{1x} \quad \dot{V}_{1y} \quad \dot{V}_{1z} \right]^T$  le vecteur de l'accélération en translation de la base par rapport au repère référence exprimé dans son propre repère  $R_l$  et égal à  ${}^1R_f \frac{d}{dt} \left[ {}^fV_{1x} \quad {}^fV_{1y} \quad {}^fV_{1z} \right]^T$  ;

→  $\left[ \dot{\omega}_{1x} \quad \dot{\omega}_{1y} \quad \dot{\omega}_{1z} \right]^T$  le vecteur accélération de rotation de la base exprimé par rapport au repère référence dans son propre repère  $R_l$  et égal à  ${}^1R_f \frac{d}{dt} \left[ {}^f\omega_{1x} \quad {}^f\omega_{1y} \quad {}^f\omega_{1z} \right]^T$  ;

→  $[\ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_7 \quad \ddot{q}_5 \quad \ddot{q}_9 \quad \ddot{q}_3]^T$  le vecteur des accélérations articulaires.

### 1.3. Efforts Extérieurs

Les efforts dus à la gravité et les efforts de contact roue/sol conditionnent de manière déterministe la dynamique des véhicules. Ces efforts sont exprimés dans les repères des pneumatiques de contact avec le sol  $R_6$  et  $R_{10}$  comme illustré sur la figure 3.4.

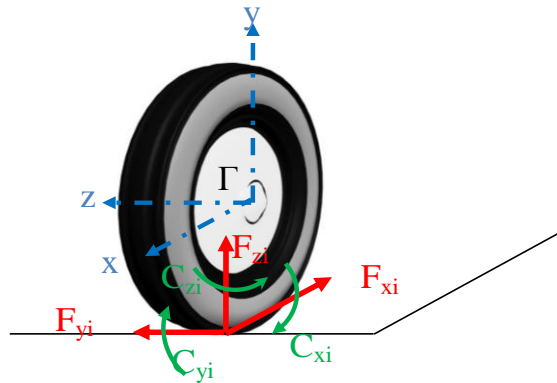


Figure 3.4 : Torseur de contact roue-sol

Les efforts de contact sont calculés avec le modèle de Pacejka (Pacejka et al. 1987) dans un repère mobile en translation au point de contact. Pour s'affranchir de la rotation du repère de projection lié à la roue, on introduit une branche arborescente du repère moyeu  $R_4$  de la roue avant vers le repère de contact avec le sol  $R_6$ . De façon similaire, une arborescence est introduite du repère du moyeu de la roue arrière  $R_8$  vers le repère de contact avec le sol  $R_{10}$ . En conséquence, les repères  $R_6$  et  $R_{10}$  sont attachés respectivement au moyeu avant et arrière des

roues. Nous obtenons donc les équations dynamiques des roues au niveau des moyeux (repère  $R_4$  et  $R_8$ ) incluant la projection des efforts dans le repère moyeu et incluant le torseur inertiel de la roue.

Dans le logiciel Symoro+ (Khalil & Creusot 1997), l'interaction avec l'environnement est définie par des forces et des couples appliqués par la structure sur l'environnement. Ces torseurs sont présentés dans le tableau suivant et sont calculées par le modèle de Pacejka (cf. chapitre 1, section 2.7.5) qui exprime les efforts appliqués de l'environnement sur le véhicule:

Tableau 3-2 : Efforts de contact appliqués par le véhicule sur l'environnement

| $j$ | $F_{xj}$   | $F_{yj}$   | $F_{zj}$   | $C_{xj}$   | $C_{yj}$   | $C_{zj}$   | Commentaires    |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----------------|
| 6   | $-F_{x6}$  | $-F_{y6}$  | $-F_{z6}$  | $-C_{x6}$  | $-C_{y6}$  | $-C_{z6}$  | Torseur avant   |
| 10  | $-F_{x10}$ | $-F_{y10}$ | $-F_{z10}$ | $-C_{x10}$ | $-C_{y10}$ | $-C_{z10}$ | Torseur arrière |

Dans la suite, nous négligeons les moments extérieurs appliqués sur la structure suivant  $x_j$  et  $y_j$ . Quand aux forces, on considère les forces suivant les axes  $x_j$  et  $y_j$ . Les forces suivant l'axe  $z_j$  sont calculées avec le modèle dynamique pour satisfaire les contraintes cinématiques qui permettent le contact roue-sol.

Nous signalons que le calcul des efforts par le modèle de Pacejka est fonction des variables d'état du système. A titre d'exemple, les vecteurs vitesse de translation et de rotation du châssis, la vitesse angulaire de rotation des roues, l'angle de braquage, le débattement des suspensions. Ces variables interviennent dans le calcul du vecteur vitesse des points de contact avec le sol.

#### 1.4. Paramètres dynamiques

Dans cette partie, nous présentons les paramètres dynamiques standards des corps réels du modèle à 11 ddl. Il s'agit du cadre, des deux roues et des deux suspensions. Pour le châssis, tous les paramètres inertiels sont considérés : il y a donc dix paramètres pour le corps  $C_1$ . Pour les suspensions, les raideurs, les coefficients d'amortissement ainsi que les masses sont considérés. Enfin pour les roues, nous supposons que le centre de masse est le centre de la roue et que l'inertie  $XX_i = YY_i$  (Figure 3.5).

On aura :

➤ Pour le châssis, corps  $C_1$ :

$XX_1, XY_1, XZ_1, YY_1, YZ_1, ZZ_1, MX_1, MY_1, MZ_1$  et  $M_1$ .

➤ Pour les roues, corps  $C_5$  et  $C_9$  :

$XX_5=YY_5, ZZ_5, M_5$ , et  $XX_9=YY_9, ZZ_9, M_9$ .



➤ Pour les suspensions, corps  $C_2$  et  $C_7$ :

$K_2, Fv_2, M_2$ , et  $K_7, Fv_7, M_7$ .

➤ Pour le corps  $C_3$ :

$M_3$  et  $ZZ_3$ .

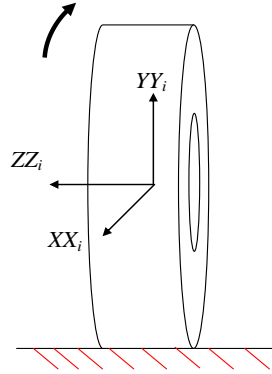


Figure 3.5 : Axe d'inertie d'une roue

Les paramètres dynamiques du modèle à 11ddl sont présentés dans le tableau 3-3 :

Tableau 3-3 : Paramètres dynamiques du modèle à 11ddl

| $j$ | $XX_j$ | $XY_j$ | $XZ_j$ | $YY_j$ | $YZ_j$ | $ZZ_j$ | $MX_j$ | $MY_j$ | $MZ_j$ | $M_j$ | $K_j$ | $Fv_j$ | $Fsj$ |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|-------|
| 1   | $XX_1$ | $XY_1$ | $XZ_1$ | $YY_1$ | $YZ_1$ | $ZZ_1$ | $MX_1$ | $MY_1$ | $MZ_1$ | $M_1$ | 0     | 0      | 0     |
| 2   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $M_2$ | $K_2$ | $Fv_2$ | 0     |
| 3   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZ_3$ | 0      | 0      | 0      | $M_3$ | 0     | 0      | 0     |
| 4   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0      | 0     |
| 5   | $XX_5$ | 0      | 0      | $XX_5$ | 0      | $ZZ_5$ | 0      | 0      | 0      | $M_5$ | 0     | 0      | 0     |
| 6   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0      | 0     |
| 7   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $M_7$ | $K_7$ | $Fv_7$ | 0     |
| 8   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0      | 0     |
| 9   | $XX_9$ | 0      | 0      | $XX_9$ | 0      | $ZZ_9$ | 0      | 0      | 0      | $M_9$ | 0     | 0      | 0     |
| 10  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0      | 0     |

Un regroupement de paramètres est possible au niveau des roues (cf. Annexe A). Les masses  $M_5$  et  $M_9$ , ainsi que les inerties  $XX_5$  et  $XX_9$  sont regroupés respectivement sur les corps antécédents.

Les paramètres dynamiques des corps 4, 5, 8 et 9 après regroupement, sont donnés dans le tableau 3-4 :

Tableau 3-4 : Paramètres dynamiques regroupés

| $j$ | $XX_j$ | $XY_j$ | $XZ_j$ | $YY_j$ | $YZ_j$ | $ZZ_j$    | $MX_j$ | $MY_j$ | $MZ_j$ | $M_j$    | $K_j$ | $Fv_j$ | $Fsj$ |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|----------|-------|--------|-------|
| 1   | $XX_1$ | $XY_1$ | $XZ_1$ | $YY_1$ | $YZ_1$ | $ZZ_1$    | $MX_1$ | $MY_1$ | $MZ_1$ | $M_1$    | 0     | 0      | 0     |
| 2   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0         | 0      | 0      | 0      | $M_{2R}$ | $K_2$ | $Fv_2$ | 0     |
| 3   | $XX_5$ | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZ_{3R}$ | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0     |
| 5   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZ_5$    | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0     |
| 7   | $XX_9$ | 0      | 0      | 0      | 0      | $XX_9$    | 0      | 0      | 0      | $M_{7R}$ | $K_7$ | $Fv_7$ | 0     |
| 9   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZ_9$    | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0     |

$$M_{7R} = M_7 + M_9$$

$$M_{2R} = M_2 + M_3 + M_5$$

$$ZZ_{3R} = ZZ_3 + XX_5$$

Les valeurs numériques des paramètres dynamiques utilisés dans les simulations de ce modèle sont mentionnées en Annexe C

### 1.5. Contraintes cinématiques verticales

Pour simuler des mouvements avec les roues en contact avec le sol, on introduit des contraintes cinématiques qui s'expriment par la nullité des vitesses verticales des points de contacts avec le sol dans le repère  $R_r$ .

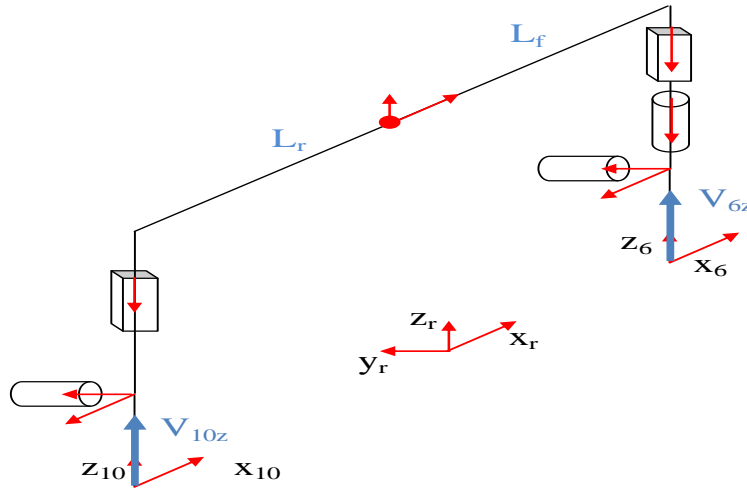


Figure 3.6 : Direction des composantes nulles de vitesse et d'accélération du modèle à 11ddl

Les équations suivantes traduisent ces contraintes :

$$\begin{aligned} {}^rV_{6z} &= {}^rV_6(3) = {}^rR_1(3,:) {}^lV_6 = 0 \\ {}^rV_{10z} &= {}^rV_{10}(3) = {}^rR_1(3,:) {}^lV_{10} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

La dérivée des équations de contrainte est :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} {}^r V_{6z} &= \frac{d}{dt} ({}^r R_1(3,:) {}^1 V_6) = \frac{d}{dt} ({}^r R_1(3,:) V_6 + {}^r R_1(3,:) \frac{d}{dt} ({}^1 V_6) = 0 \\ \frac{d}{dt} {}^r V_{10z} &= \frac{d}{dt} ({}^r R_1(3,:) {}^1 V_{10}) = \frac{d}{dt} ({}^r R_1(3,:) V_{10} + {}^r R_1(3,:) \frac{d}{dt} ({}^1 V_{10}) = 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

L'équation ( 3.4) peut s'écrire sous la forme d'un produit d'une matrice  $J_2$  et du vecteur  $qv_{e,l}$  de l'équation ( 3.2):

$$\begin{bmatrix} {}^r V_{6z} \\ {}^r V_{10z} \end{bmatrix} = J_2 qv_{e,l} = \begin{bmatrix} C_{1(2,x6)} & C_{2(2,x5)} \end{bmatrix} qv_{e,l} = 0 \quad (3.6)$$

Avec :

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta & (r_2 + R_a) \cos \phi \cos \theta & (r_2 + R_a) \sin \phi - L_f \cos \phi \cos \theta & L_f \cos \phi \cos \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta & (r_7 + R_a) \cos \phi \sin \theta & (r_2 + R_a) \sin \phi + L_r \cos \phi \cos \theta & -L_r \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\cos \phi \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \phi \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La dérivée de l'équation ( 3.6) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^r V_{6z} \\ {}^r V_{10z} \end{bmatrix} &= J_2 \frac{dqv_{e,l}}{dt} + \dot{J}_2 qv_{e,l} \\ &= J_2 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^1 V_{1x} \\ {}^1 V_{1y} \\ {}^1 V_{1x} \\ {}^1 \omega_{1x} \\ {}^1 \omega_{1y} \\ {}^1 \omega_{1z} \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_9 \end{bmatrix} + \dot{J}_2 qv_{e,l} = J_2 \begin{bmatrix} {}^1 \dot{V}_{1x} + {}^1 \omega_{1z} {}^1 V_{1y} - {}^1 \omega_{1y} {}^1 V_{1z} \\ {}^1 \dot{V}_{1y} - {}^1 \omega_{1z} {}^1 V_{1x} + {}^1 \omega_{1x} {}^1 V_{1z} \\ {}^1 \dot{V}_{1x} + {}^1 \omega_{1y} {}^1 V_{1x} - {}^1 \omega_{1x} {}^1 V_{1y} \\ {}^1 \dot{\omega}_{1x} \\ {}^1 \dot{\omega}_{1y} \\ {}^1 \dot{\omega}_{1z} \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_7 \\ \ddot{q}_9 \end{bmatrix} + \dot{J}_2 qv_{e,l} \\ &= J_2 qa_{e,l} + J_2(:,1:3) \begin{bmatrix} {}^1 \omega_{1z} {}^1 V_{1y} - {}^1 \omega_{1y} {}^1 V_{1z} \\ -{}^1 \omega_{1z} {}^1 V_{1x} + {}^1 \omega_{1x} {}^1 V_{1z} \\ {}^1 \omega_{1y} {}^1 V_{1x} - {}^1 \omega_{1x} {}^1 V_{1y} \end{bmatrix} + \dot{J}_2 qv_{e,l} \\ &= J_2 qa_{e,l} + \mathcal{G}_2\end{aligned}\quad (3.7)$$

Avec :

$$\mathcal{G}_2 = J_2(:,1:3) \begin{bmatrix} {}^1 \omega_{1z} {}^1 V_{1y} - {}^1 \omega_{1y} {}^1 V_{1z} \\ -{}^1 \omega_{1z} {}^1 V_{1x} + {}^1 \omega_{1x} {}^1 V_{1z} \\ {}^1 \omega_{1y} {}^1 V_{1x} - {}^1 \omega_{1x} {}^1 V_{1y} \end{bmatrix} + \dot{J}_2 qv_{e,l}$$

## 1.6. Modèle dynamique

Le modèle dynamique à 11 ddl s'écrit sous la forme (cf. chapitre 2, section 2.8) :

$$\Gamma_{(11,x1)} = A_{(11,x11)} q a_{e-l} + H_{(11,x1)}(q_{e-l}, qv_{e-l}) \quad (3.8)$$

Afin de prendre en compte les contraintes cinématiques verticales, nous ajoutons au modèle dynamique de l'équation ( 3.8 ), les multiplicateurs de *Lagrange*  $\lambda_v$ . Ceci se traduit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma_{(11,x1)} &= A_{(11,x11)} q a_{e-l} + H_{(11,x1)}(q_{e-l}, qv_{e-l}) + J_2^T \lambda_v \\ 0_{(2,x1)} &= J_{2(2,x11)} q a_{e-l} + \mathcal{G}_{2(2,x1)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ces deux équations forment un système qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{(11,x1)} \\ 0_{(2,x1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(11,x11)} & J_2^T \\ J_2 & 0_{(2,x2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q a_{e-l} \\ \lambda_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{(11,x1)}(q_{e-l}, qv_{e-l}) \\ \mathcal{G}_{2(2,x1)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Ainsi le modèle dynamique direct utilisé pour la simulation permet de calculer au même instant, le vecteur accélération ainsi que les multiplicateurs de *Lagrange* comme suit :

$$\begin{bmatrix} q a_{e-l} \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(11,x11)} & J_2^T \\ J_2 & 0_{(2,x2)} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \Gamma_{(11,x1)} \\ 0_{(2,x1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{(11,x1)}(q_{e-l}, qv_{e-l}) \\ \mathcal{G}_{2(2,x1)} \end{bmatrix} \right) \quad (3.11)$$

Les multiplicateurs de *Lagrange* représentent les efforts verticaux nécessaires au maintien du contact des roues sur le sol en évitant le décollement. Ils peuvent s'interpréter en terme de « transfert de charge » qui se calcule automatiquement en fonction des accélérations du véhicule.

Le modèle dynamique calculé symboliquement à l'aide du logiciel Symoro+, génère automatiquement les équations des efforts appliqués par les actionneurs.

Les efforts liés aux six degrés de liberté de la base sont nuls puisqu'ils sont dépourvus d'actionneurs.

Pour prendre en compte l'élasticité des articulations flexibles, (articulations 2 et 7), un modèle de flexibilité est mis en place (cf. Chapitre 2, section 2.6.1.1).

$$\Gamma_j = -K_j(q_j - q_{j0})$$

Il reste à définir les couples appliqués aux roues et le couple de braquage. Ces trois entrées varient selon le type de motorisation du système (propulsion, traction) et la trajectoire à effectuer. Par exemple, une propulsion correspond à un couple nul sur la roue avant tandis

qu'une traction correspond à un couple nul sur la roue arrière. Une trajectoire rectiligne correspond à un couple de braquage nul.

## 2. Simulateur

L'étude du mouvement d'un véhicule en interaction avec son environnement passe par la simulation de son modèle dynamique pour prédire la sécurité et le confort des passagers. Le véhicule est soumis à des perturbations extérieures (irrégularité du sol « pente, dévers », forces aérodynamiques), et aux sollicitations du conducteur (angle de volant, accélération, freinage) en boucle ouverte ou fermée. Afin d'étudier et de présenter l'effet de ces perturbations sur le comportement du véhicule, un simulateur est mis en place qui s'appuie sur les équations dynamiques élaborées par l'algorithme de Newton-Euler.

### 2.1. Architecture globale du simulateur

L'architecture générale du simulateur est composée de trois modules principaux (Figure 3.7). Un module au centre du schéma représente le modèle mathématique du véhicule étudié, sous la forme d'équations algèbro-différentielles. L'interaction avec l'environnement est représentée par le bloc « Route + environnement » qui agit sur le module central. Dans ce module, les paramètres de la route, les efforts aérodynamiques ainsi que le modèle de contact roue/sol sont présents (Figure 3.8).

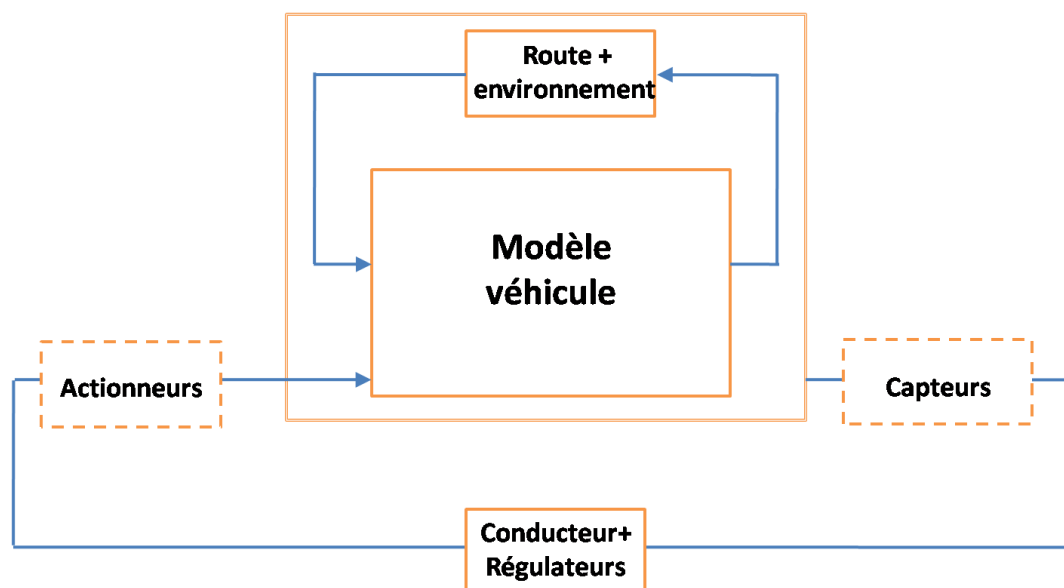


Figure 3.7 : Architecture globale du simulateur

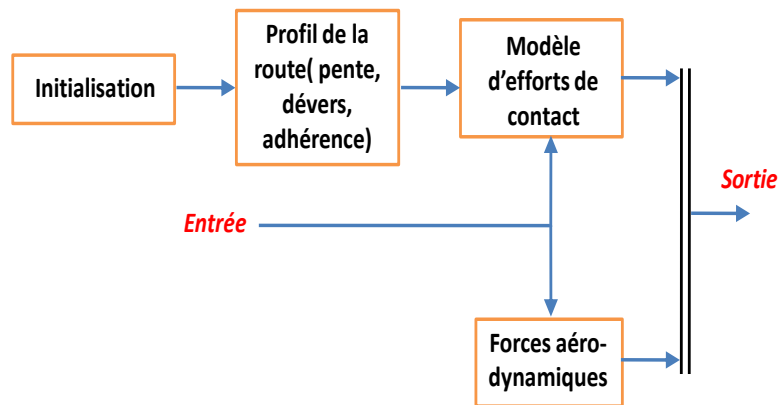


Figure 3.8 : Architecture du bloc « route + environnement »

Le conducteur peut être modélisé par le bloc « conducteur + régulateur » rétroagissant lui aussi sur le modèle mathématique du véhicule (Figure 3.7). L'asservissement des différentes variables se fait également dans cette partie qui peut être élargie en intégrant un module pour l'instrumentation et les capteurs et un module pour les actionneurs agissant.

La figure 3.9 représente un exemple de capteurs classiques dont les modèles peuvent être présents dans le bloc « capteurs ».

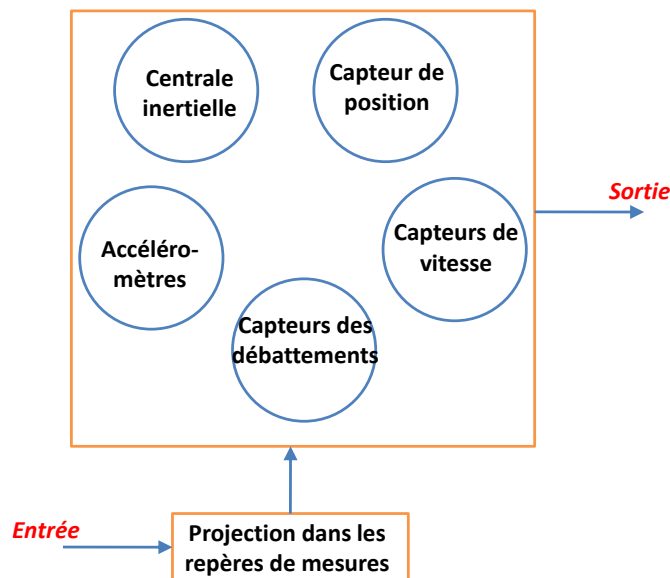


Figure 3.9 : Exemple de capteurs d'un véhicule instrumenté

Le modèle dynamique direct calcule les accélérations en fonctions des couples/efforts, des positions et des vitesses des articulations. Nous distinguons : les accélérations du châssis et les accélérations articulaires (Figure 3.10).

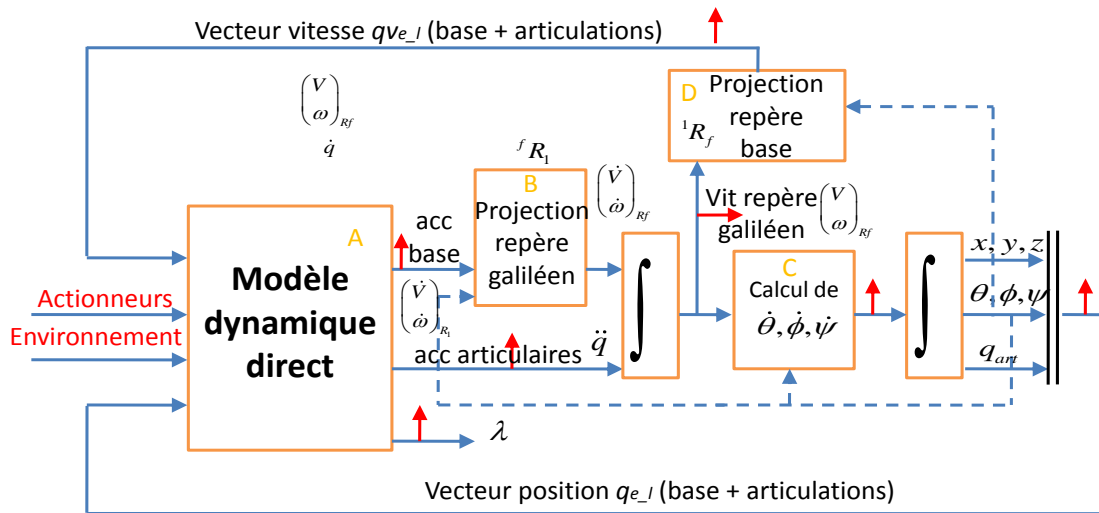


Figure 3.10 : Architecture du module « modèle dynamique »

Les accélérations eulériennes du châssis sont exprimées à la sortie du modèle dynamique direct dans le repère mobile  $R_1$  (bloc A). Un changement de repère est donc nécessaire avant toute intégration pour le calcul des vitesses et positions dans le repère  $R_f$  (bloc B). Quant aux accélérations langrangiennes articulaires, elles sont directement intégrées. Les variables du vecteur vitesse du châssis, en entrée du modèle dynamique direct, doivent quand à elles être exprimées dans le repère  $R_1$ . Un changement de repère est donc nécessaire après la première intégration (bloc D). Ces projections s'appuient respectivement sur la matrice de transformation entre le repère de la base  $R_1$  et le repère sol  $R_f$  et sa transposée (chapitre 2, section 3.2). Pour calculer la dérivée des angles d'orientation (le roulis, le tangage et le lacet) à partir du vecteur d'orientation exprimé dans le repère galiléen, nous utilisons l'équation (2.43) qui constitue le bloc C entre les deux intégrateurs. Un schéma plus détaillé de ce module est présenté sur la figure 3.11.

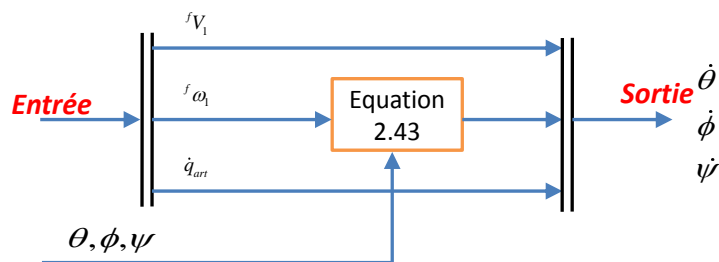


Figure 3.11 : Schéma de calcul des vitesses avant intégration

## 2.2. Architecture du scénario pour les essais en simulation

Afin de pouvoir simuler le comportement du véhicule, il faut définir des scénarios de trajectoire et de conduite. Ces scénarios peuvent être réalisés en boucle ouverte et /ou en boucle fermée, en fonction des besoins.

Un régulateur de braquage représente un modèle « conducteur ». Il génère les entrées de commande du système afin d'assurer le suivi du profil routier correspondant aux scénarios choisis. Dans les simulations, on se contente d'un modèle simpliste du conducteur. Celui-ci est modélisé par un correcteur proportionnel dérivée PD, qui génère le couple de braquage  $\Gamma_b$  en fonction de l'angle de braquage souhaité. Ce dernier est appliqué directement sur l'axe vertical de la roue et résulte de l'erreur entre une consigne de référence et l'angle de braquage actuel (Figure 3.12).

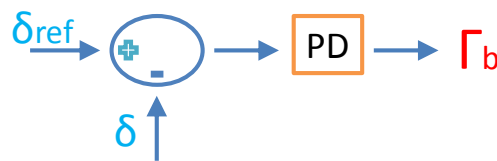


Figure 3.12 : Génération du couple de braquage

Dans le cas du simulateur de véhicule étroit et inclinable, un couple d'inclinaison  $\Gamma_{inc}$  doit piloter le mouvement de roulis dans les virages pour éviter le renversement du véhicule sous l'effet de la force centrifuge. Ce couple traduit le basculement du conducteur d'un vélo ou d'une moto vers l'intérieur du virage et revient à compenser l'effet de la force centrifuge  $F_c$  (Figure 3.13). L'angle d'inclinaison désiré (de référence) dans la commande de roulis est calculé afin d'obtenir une accélération latérale nulle dans le repère véhicule, qui n'est autre que l'accélération latérale ressentie par les occupants du véhicule.

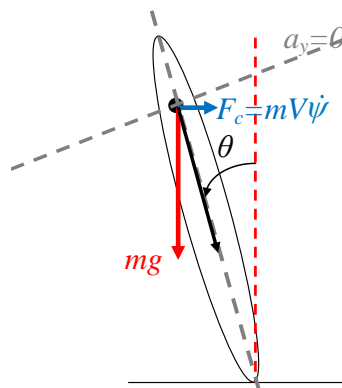


Figure 3.13 : Angle d'inclinaison du véhicule

$$\begin{aligned}
 a_y &= g \sin \theta - V\dot{\psi} \cos \theta = 0 \\
 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta &= V\dot{\psi} / g \\
 \Rightarrow \theta &= \tan^{-1}(V\dot{\psi} / g)
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Avec :

- $\theta$  représente l'inclinaison ou le roulis du véhicule ;
- $V$  représente la vitesse longitudinale du véhicule dans le repère  $R_1$  ;



→  $\dot{\psi}$  représente la vitesse de lacet.

Le couple d'inclinaison  $\Gamma_{inc}$  est calculé à travers un correcteur proportionnel dérivé PD qui asservit l'angle d'inclinaison du véhicule (le roulis), à la valeur souhaitée (Figure 3.14). Pour la motorisation, on se contente d'un scénario en boucle ouverte : les couples moteurs  $\Gamma_m$  sont générés à partir d'une consigne d'accélération  $\gamma_{ref}$  prédéfinie.

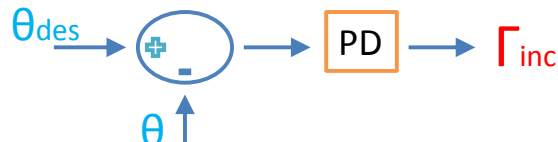


Figure 3.14 : Génération du couple d'inclinaison

Les différents scénarios envisagés seront simulés à partir du schéma de la figure 3.15

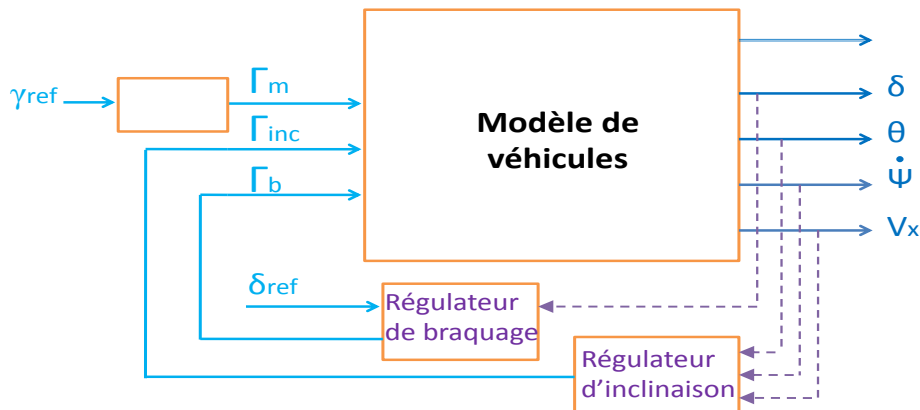


Figure 3.15 : Schéma de scénario

Nous signalons que l'ensemble des simulations réalisées dans ce chapitre et dans le chapitre suivant sont effectués sous l'environnement Matlab/Simulink, version R2007B, sur un PC standard. Tous les calculs sont réalisés par des fonctions M-file à l'exception du modèle dynamique inverse, calculé par Symoro+, où nous utilisons le format C en mex-fonction.

## 2.3. Essais en simulation du modèle 2 roues à 11ddl

### 2.3.1. Accélération en ligne droite

Le premier essai consiste à rouler en ligne droite. Un profil d'accélération de référence est défini pour engendrer le couple articulaire de propulsion (Figure 3.16). Ceci permet d'analyser la dynamique longitudinale du véhicule ainsi que la dynamique de pompage et de tangage. L'angle de braquage de référence est nul. Nous considérons que la route est un plan horizontal parfait sans pente, ni dévers. Le frottement au niveau de la transmission est négligé et l'entrée

du modèle est le couple articulaire appliqué à la roue arrière. Cette entrée est choisie de telle sorte que le véhicule accélère et continue sa trajectoire à vitesse constante. Nous présentons sur la figure 3.17 les forces latérales avant et arrière, la vitesse latérale et l'accélération latérale du centre de gravité du véhicule. Ces variables sont nulles, traduisant une dynamique latérale nulle comme le montre la figure 3.18.

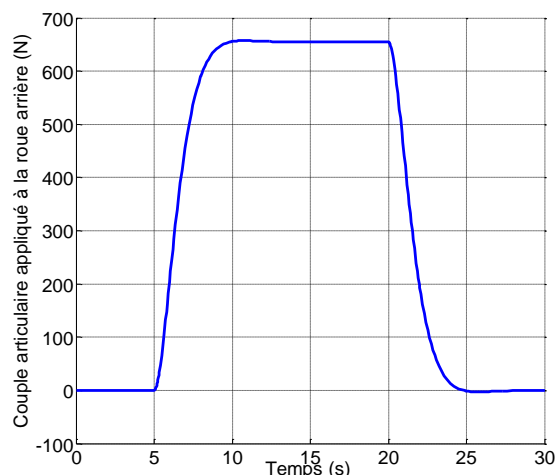


Figure 3.16 : Couple articulaire appliqué à la roue arrière

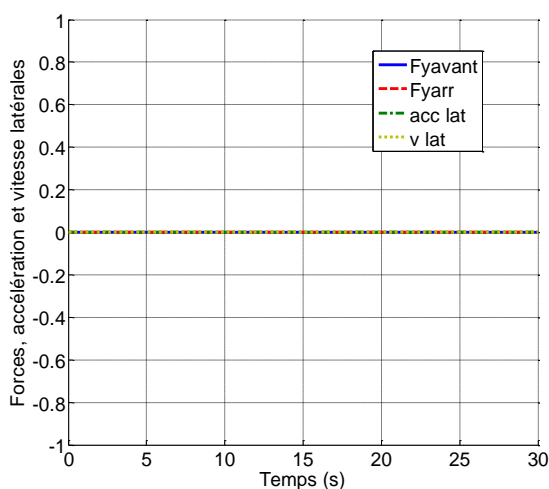


Figure 3.17 : Forces, accélération et vitesse latérales

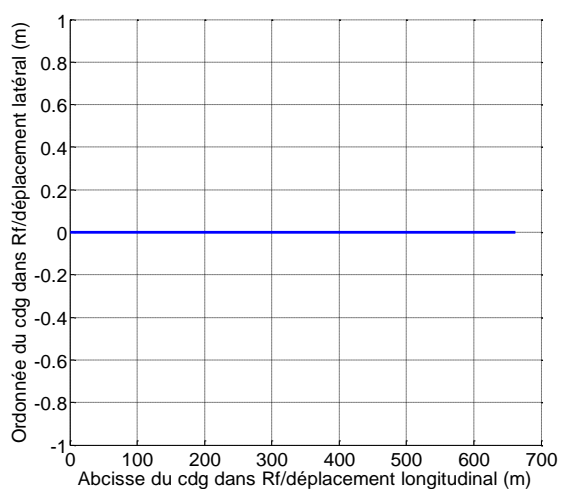


Figure 3.18 : Trajectoire planaire du cdg

Nous présentons également la vitesse longitudinale et l'accélération longitudinale du véhicule respectivement sur les figures 3.19 et 3.20. Nous remarquons que la vitesse augmente pendant la phase d'accélération puis reste constante quand l'accélération s'annule. Le « transfert de charge » dû à l'accélération est illustré par les figures 3.21, 3.22, 3.23 et 3.24. Quand le véhicule accélère un transfert de charge apparaît de l'avant vers l'arrière. Ceci implique un écrasement de la suspension arrière et un étirement de la suspension avant. Un tangage négatif apparaît car l'axe latéral est orienté vers la gauche (Figure 3.25). Les angles de roulis et de lacet restent nuls.

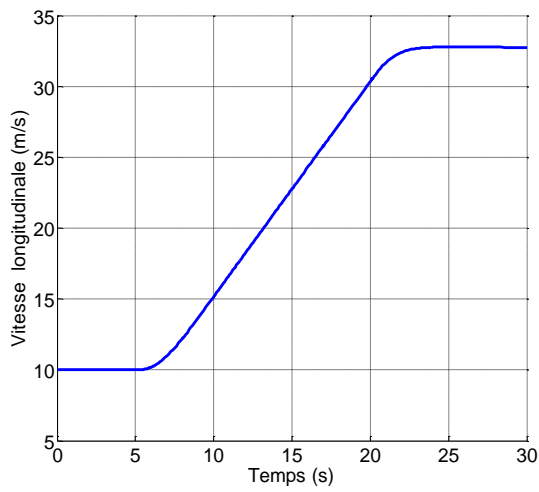


Figure 3.19 : Vitesse longitudinale du cdg

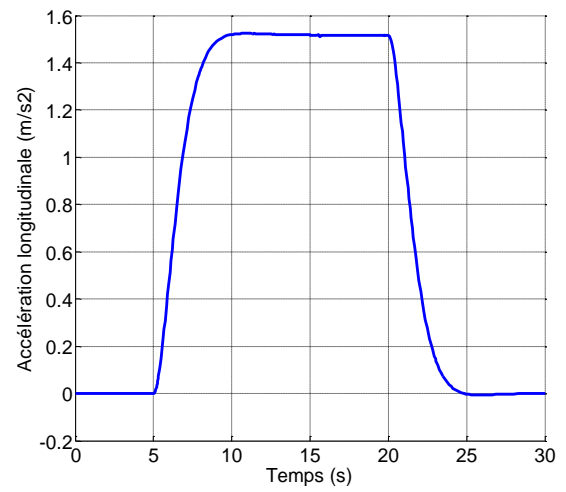


Figure 3.20 : Accélération longitudinale du cdg

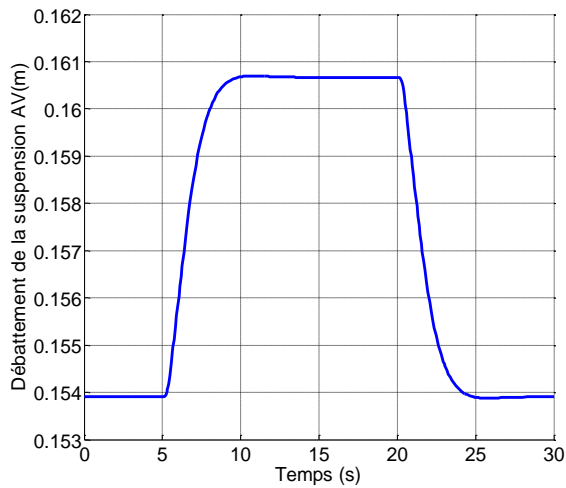


Figure 3.21 : Débattement de la suspension avant

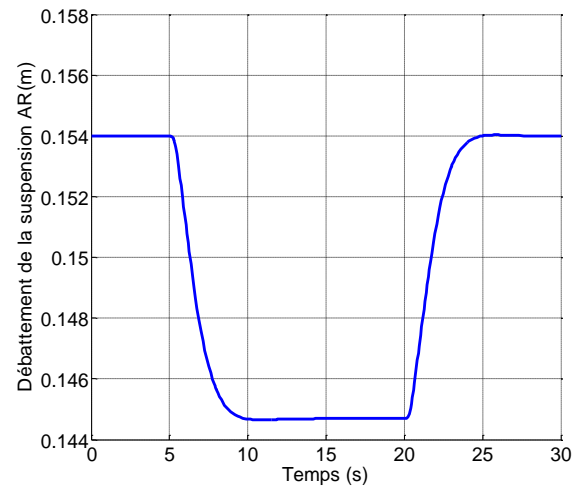


Figure 3.22 : Débattement de la suspension arrière

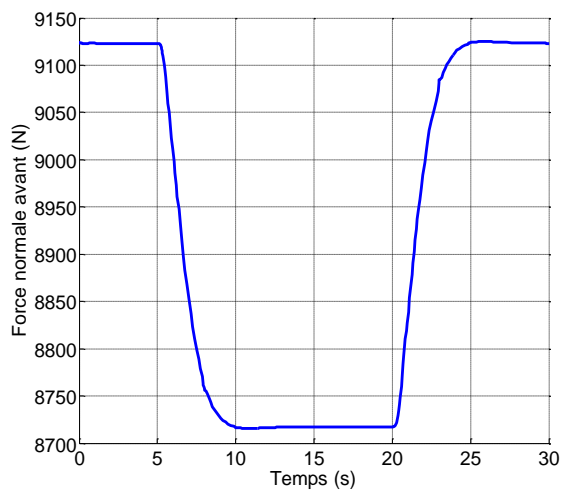


Figure 3.23 : Force normale avant

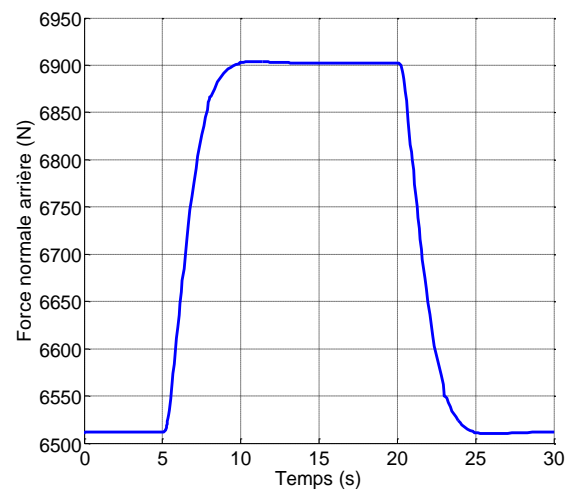


Figure 3.24 : Force normale arrière

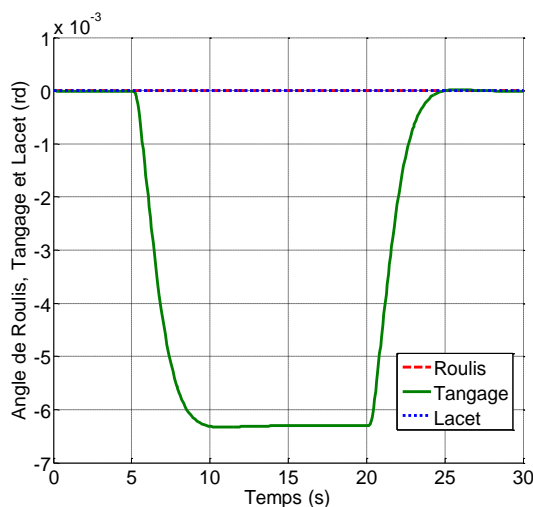


Figure 3.25 : Angle de Roulis, tangage et lacet

Le glissement et l'effort longitudinal de la roue arrière sont présentés respectivement sur les figures 3.26 et 3.27. Les courbes illustrent le bon comportement du modèle du véhicule en mode longitudinal.

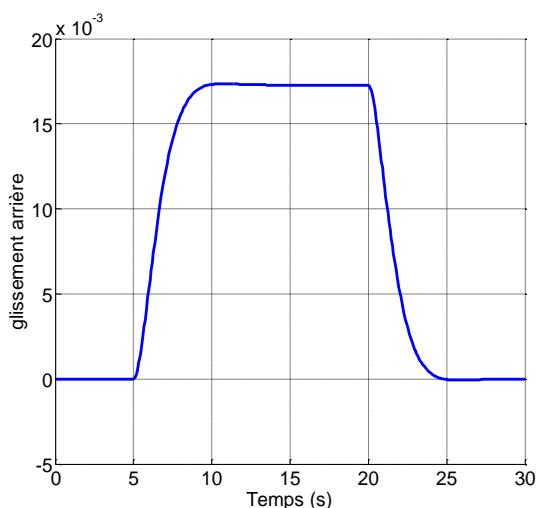


Figure 3.26 : Glissement longitudinal arrière

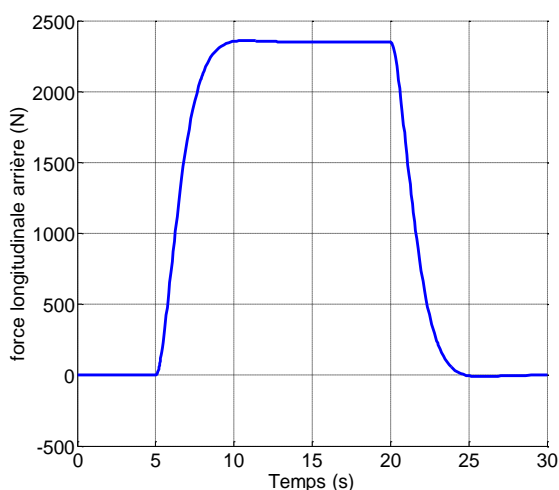


Figure 3.27 : Force longitudinale arrière

Nous signalons que le temps de calcul nécessaire pour cette simulation de 30 secondes est de 5,37 secondes.

### 2.3.2. Essai en virage

Dans cet essai, nous allons étudier le comportement latéral du véhicule en réponse à des manœuvres de braquage (Figure 3.28). L'axe de braquage  $z_2$  (Figure 3.3) est orienté vers le bas, donc un angle de braquage positif correspond à un braquage à droite.

Les entrées du modèle sont :

- le couple de braquage résultant de la régulation entre l'angle de braquage référence et l'angle de braquage réalisé ;
- la vitesse du véhicule est initialisée à une vitesse de 10 m/s et le couple articulaire est mis à zéro ;
- le véhicule est maintenu stable pendant le virage par l'application d'un couple d'inclinaison approprié, déduit de l'état instantanée du véhicule (cf. ( 3.12)).

Le couple d'inclinaison est appliqué à l'axe de roulis du véhicule. Il résulte de la commande en moment de roulis du véhicule. Dans ce cas, la composante liée au degré de liberté du roulis du torseur d'effort lié au châssis est égale à  $\Gamma_{mc}$ .

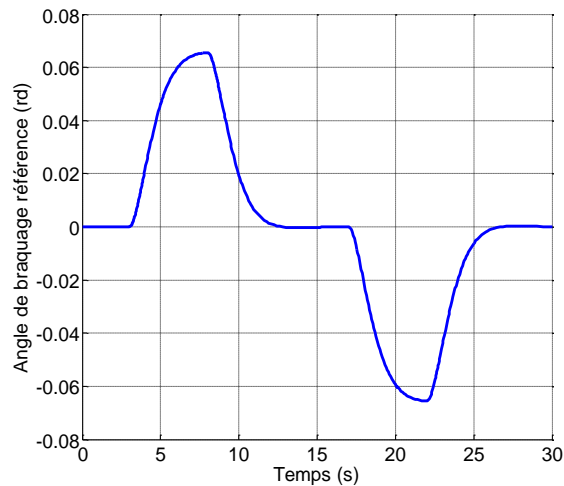


Figure 3.28 : Angle de braquage de référence

La figure 3.29 et la figure 3.30 montrent la trajectoire et l'angle de lacet du véhicule suite à la consigne de braquage.

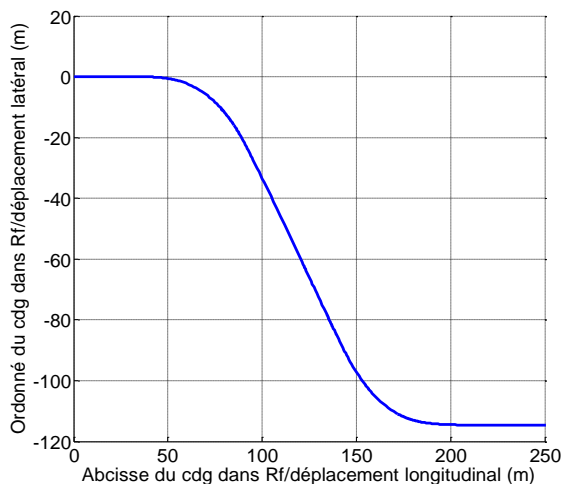


Figure 3.29 : Trajectoire planaire du cdg

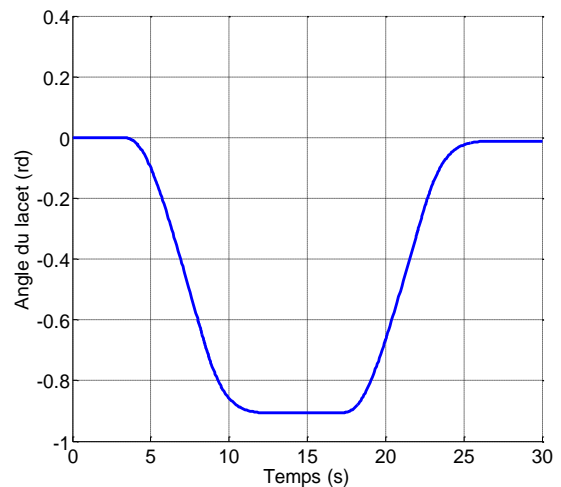


Figure 3.30 : Angle de lacet

Les angles de braquage et de roulis sont contrôlés par une commande PD en boucle fermée.

Les figures 3.31 et 3.32 présentent respectivement le roulis et l'angle de braquage du véhicule asservis à une inclinaison désirée et un braquage de référence. Nous présentons également les angles de dérive avant et arrière et les forces latérales correspondantes, respectivement sur les figures 3.33 et 3.34.

Quand au temps de calcul de cette simulation, il s'élève à 12 secondes.

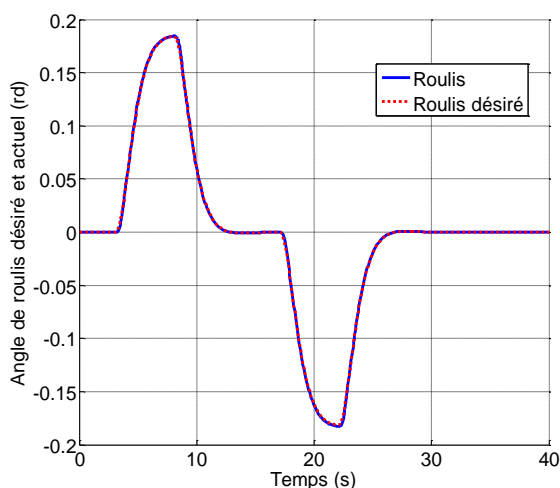


Figure 3.31 : Angle de roulis désiré et simulé

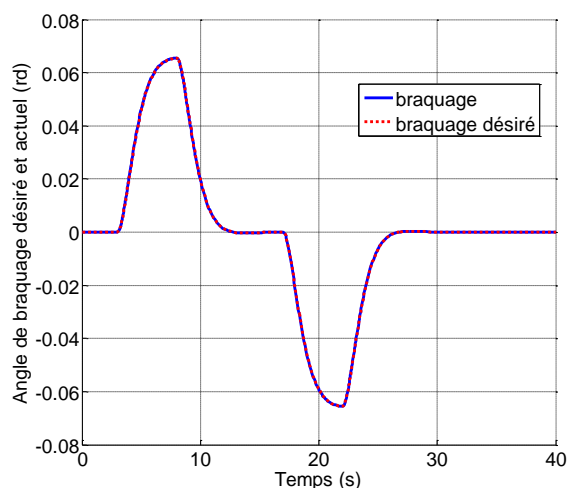


Figure 3.32 : Angle de braquage désiré et simulé

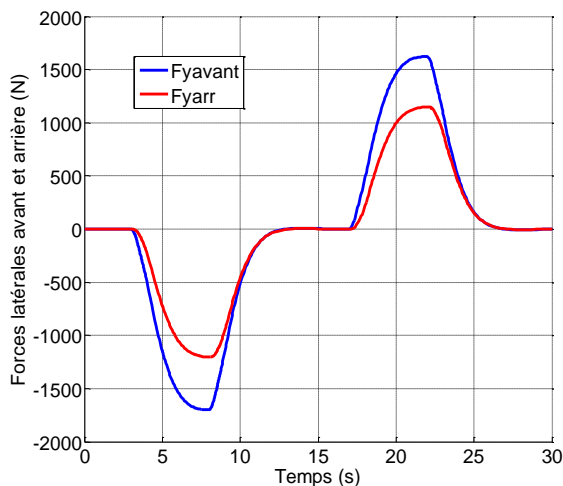


Figure 3.33 : Forces latérales

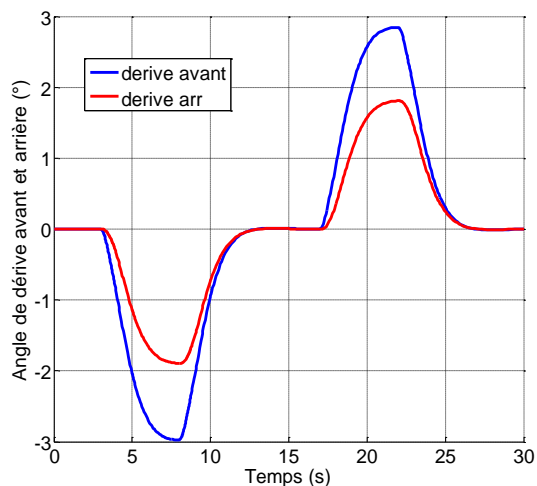


Figure 3.34 : Angle de dérive

### 2.3.2.1 Virage à vitesse constante

Pour un scénario à vitesse longitudinale constante le couple de propulsion doit assurer une vitesse longitudinale constante dans le repère lié au véhicule. Ceci est assuré par un asservissement de la vitesse longitudinale du véhicule dans le repère  $R_l$ .

Sur les figures 3.35 et 3.36, nous présentons l'allure de la vitesse et de l'accélération longitudinale dans le repère de la base avec et sans asservissement de vitesse. La vitesse longitudinale décroît en phase de braquage suite à la mobilisation de l'adhérence latérale.

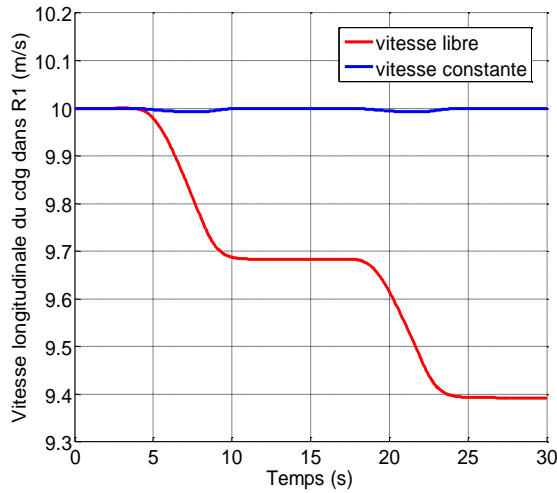


Figure 3.35 : Vitesse longitudinale du véhicule dans le repère  $R_I$

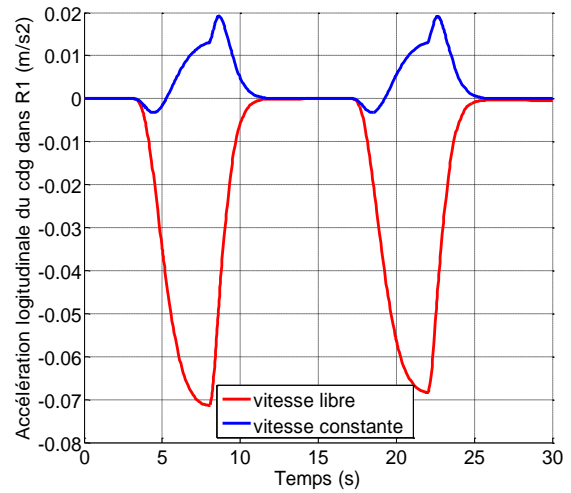


Figure 3.36 : Accélération longitudinale du véhicule dans le repère  $R_I$

### 3. Modèle 4 roues 16 ddl

Le modèle est constitué d'un châssis de masse  $M$ , de matrice d'inertie  $J$  et de premier moment  $MS$ , d'un train avant et d'un train arrière. Le train avant est constitué de 2 roues avant qui peut tourner par rapport au châssis autour d'un axe vertical et qui lui sont liés par deux suspensions selon l'axe vertical. Le train arrière est similaire au train avant mais les axes des roues sont fixes par rapport au châssis (Figure 3.37).

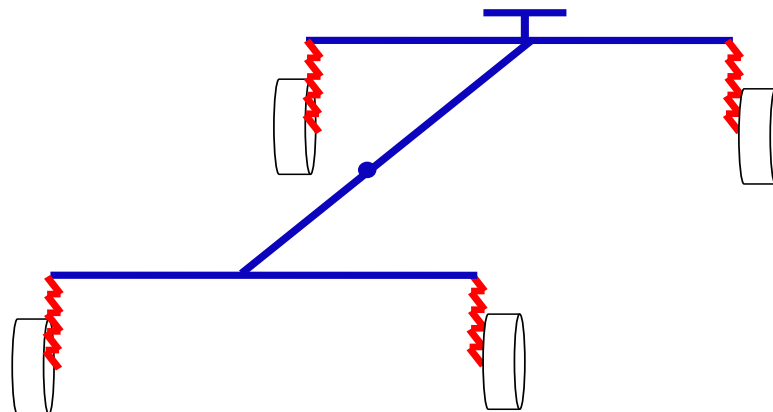


Figure 3.37 : Schéma du modèle 4 roues à 16 ddl

### 3.1. Modélisation globale du véhicule

Sous les mêmes hypothèses simplificatrices que celles appliquées au modèle 2 roues à 11 ddl (section 1.1 de ce chapitre), la structure est modélisée par une base mobile, et 4 branches, deux à deux identiques. Ceci mène à un modèle à 16 degrés de liberté et 19 corps dont la topologie est donnée par la figure 3.38. La figure 3.39 représente le modèle articulatoire obtenu en appliquant la démarche décrite dans le chapitre 2. Ceci permet d'écrire le tableau 3-5 des paramètres géométriques du système, conformément au formalisme DHM.

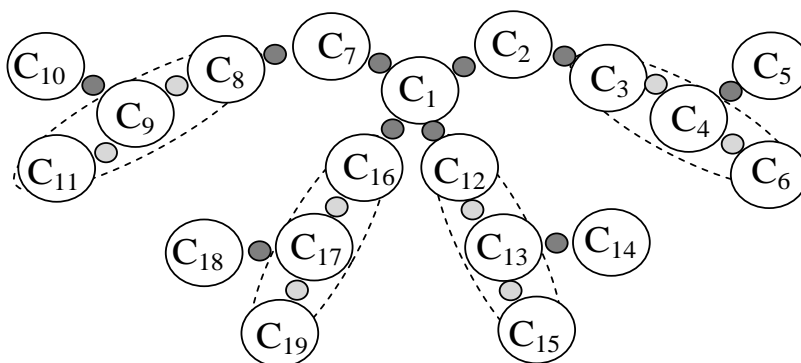


Figure 3.38 : Topologie du modèle à 16 ddl

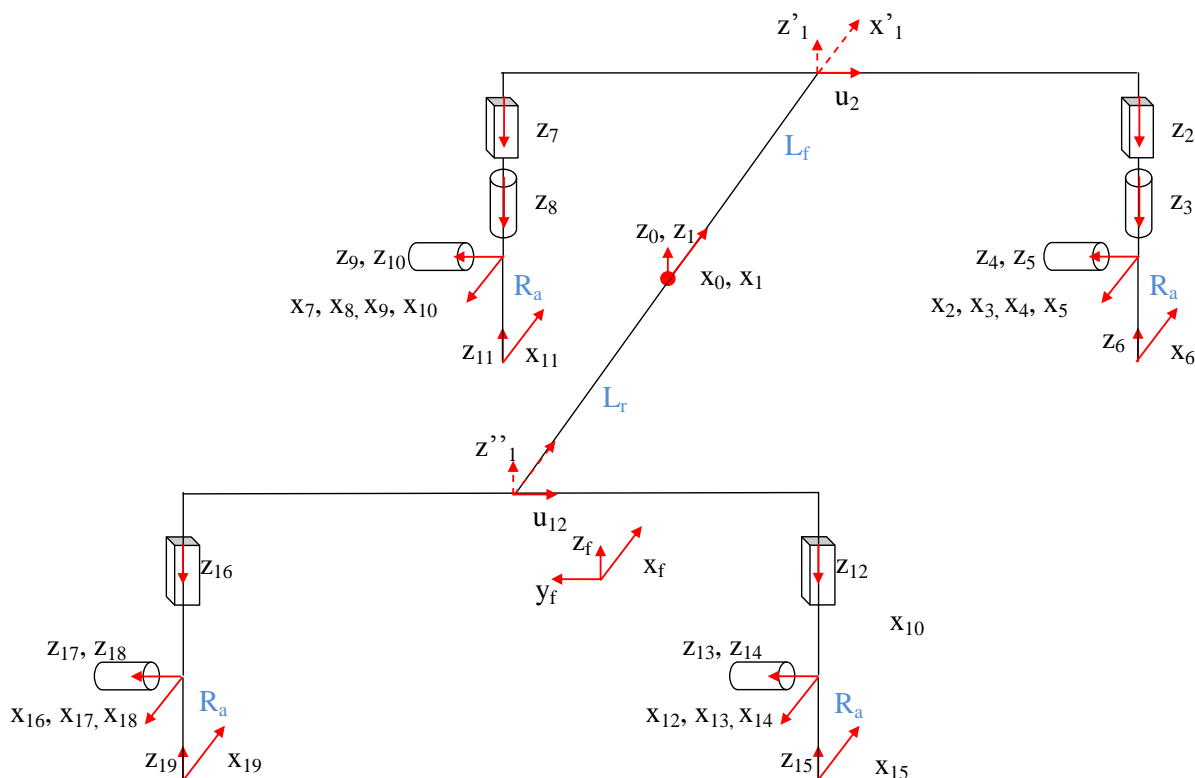


Figure 3.39 : Modèle articulatoire à 16 degrés de liberté et 19 corps



Tableau 3-5 : Paramètres géométriques du modèle à 16 degrés de liberté

| $j$        | $a(j)$ | $\sigma_j$ | $\gamma_j$ | $b_j$ | $\alpha_j$ | $d_j$    | $\theta_j$ | $r_j$    | Commentaires                                |
|------------|--------|------------|------------|-------|------------|----------|------------|----------|---|
| <b>1</b>   | 0      | 2          | 0          | 0     | 0          | 0        | 0          | 0        | Base-châssis                                |
| <b>1'</b>  | 1      | 2          | 0          | 0     | 0          | $L_f$    | 0          | 0        | Articulation bloquée                        |
| <b>2</b>   | 1'     | 1          | $-\pi/2$   | 0     | $\pi$      | $d_2$    | $\pi/2$    | $q_2$    | Débattement de suspension AVD               |
| <b>3</b>   | 2      | 0          | 0          | 0     | 0          | 0        | $q_3$      | 0        | Braquage roue AVD                           |
| <b>4</b>   | 3      | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0        | 0          | 0        | Articulation bloquée                        |
| <b>5</b>   | 4      | 0          | 0          | 0     | 0          | 0        | $q_5$      | 0        | Rotation de la roue AVD                     |
| <b>6</b>   | 4      | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0        | $\pi$      | $-R_a$   | Articulation bloquée (point de contact AVD) |
| <b>7</b>   | 1'     | 1          | $-\pi/2$   | 0     | $\pi$      | $d_2$    | $\pi/2$    | $q_7$    | Débattement de suspension AVG               |
| <b>8</b>   | 7      | 0          | 0          | 0     | 0          | 0        | $q_8$      | 0        | Braquage roue AVG                           |
| <b>9</b>   | 8      | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0        | 0          | 0        | Articulation bloquée                        |
| <b>10</b>  | 9      | 0          | 0          | 0     | 0          | 0        | $q_{10}$   | 0        | Rotation de la roue AVG                     |
| <b>11</b>  | 9      | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0        | $\pi$      | $-R_a$   | Articulation bloquée (point de contact AVG) |
| <b>1''</b> | 1      | 2          | 0          | 0     | 0          | $-L_r$   | 0          | 0        | Articulation bloquée                        |
| <b>12</b>  | 1''    | 1          | $-\pi/2$   | 0     | $\pi$      | $d_{12}$ | $\pi/2$    | $q_{12}$ | Débattement de suspension ARD               |
| <b>13</b>  | 12     | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0        | 0          | 0        | Articulation bloquée                        |
| <b>14</b>  | 13     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0        | $q_{14}$   | 0        | Rotation de la roue ARD                     |
| <b>15</b>  | 13     | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0        | $\pi$      | $-R_a$   | Articulation bloquée (point de contact ARD) |
| <b>16</b>  | 1''    | 1          | $-\pi/2$   | 0     | $\pi$      | $d_{16}$ | $\pi/2$    | $q_{16}$ | Débattement de suspension ARG               |
| <b>17</b>  | 16     | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0        | 0          | 0        | Articulation bloquée                        |
| <b>18</b>  | 17     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0        | $q_{18}$   | 0        | Rotation de la roue ARG                     |
| <b>19</b>  | 17     | 2          | 0          | 0     | $-\pi/2$   | 0        | $\pi$      | $-R_a$   | Articulation bloquée (point de contact ARG) |

Soit  $q_{e-1}$  le vecteur de configuration des 16 degrés de liberté, composé par le vecteur  $\xi$  (6x1) de posture du véhicule et les coordonnées articulaires (les articulations bloquées sont dépourvues de coordonnées articulaires) :

$$q_{e-1} = \left[ \xi^T \quad q_2 \quad q_7 \quad q_{12} \quad q_{16} \quad q_5 \quad q_{10} \quad q_{14} \quad q_{18} \quad q_3 \quad q_8 \right]^T \quad (3.13)$$

Avec :

- $q_2$  et  $q_7$  représentent respectivement les débattements en translation des suspensions avant droite et gauche ;
- $q_{12}$  et  $q_{16}$  représentent respectivement les débattements en translation des suspensions arrière droite et gauche ;
- $q_5, q_{10}$  représentent les positions angulaires des roues avant droite et gauche, autour de leur axe de rotation ;

- $q_{14}$  et  $q_{18}$  représentent les positions angulaires des roues arrière droite et gauche, autour de leur axe de rotation ;
- $q_3$  et  $q_8$  représente l'angle de braquage des roues avant ;
- les repères  $R_i'$  et  $R_i''$  sont fixes par rapport au repère  $R_1$  ;
- $d_2 = -d_7$  et  $d_{12} = -d_{16}$ .

Soit  $q_{v_{e\_l}}$  le vecteur vitesse de configuration des 16 degrés de liberté

$$q_{v_{e\_l}} = \left[ {}^1V_{1x} \quad {}^1V_{1y} \quad {}^1V_{1z} \quad {}^1\omega_{1x} \quad {}^1\omega_{1y} \quad {}^1\omega_{1z} \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_{12} \quad \dot{q}_{16} \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_{10} \quad \dot{q}_{14} \quad \dot{q}_{18} \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_8 \right]^T \quad (3.14)$$

Avec :

- $\left[ \dot{q}_2 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_{12} \quad \dot{q}_{16} \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_{10} \quad \dot{q}_{14} \quad \dot{q}_{18} \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_8 \right]^T$  le vecteur constitué de la dérivée des positions articulaires  $q_2, q_7, q_{12}, q_{16}, q_5, q_{10}, q_{14}, q_{18}, q_3$  et  $q_8$ .

Soit  $q_{a_{e\_l}}$  le vecteur accélération de configuration des 16 degrés de liberté

$$q_{a_{e\_l}} = \left[ {}^1\dot{V}_{1x} \quad {}^1\dot{V}_{1y} \quad {}^1\dot{V}_{1z} \quad {}^1\dot{\omega}_{1x} \quad {}^1\dot{\omega}_{1y} \quad {}^1\dot{\omega}_{1z} \quad \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_7 \quad \ddot{q}_{12} \quad \ddot{q}_{16} \quad \ddot{q}_5 \quad \ddot{q}_{10} \quad \ddot{q}_{14} \quad \ddot{q}_{18} \quad \ddot{q}_3 \quad \ddot{q}_8 \right]^T \quad (3.15)$$

Avec :

- $\left[ \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_7 \quad \ddot{q}_{12} \quad \ddot{q}_{16} \quad \ddot{q}_5 \quad \ddot{q}_{10} \quad \ddot{q}_{14} \quad \ddot{q}_{18} \quad \ddot{q}_3 \quad \ddot{q}_8 \right]^T$  le vecteur constitué de la dérivée seconde des positions articulaires  $q_2, q_7, q_{12}, q_{16}, q_5, q_{10}, q_{14}, q_{18}, q_3$  et  $q_8$ .

### 3.2. Efforts Extérieurs

Le système est en interaction avec le sol à travers les quatre roues. Les repères correspondants à ces interactions sont  $R_6, R_{11}, R_{15}$  et  $R_{19}$ . Chaque torseur est constitué de trois forces et trois moments suivant les trois axes. Le tableau 3-6 présente les forces et les couples appliqués par la structure sur l'environnement.

Tableau 3-6 : Efforts de contact appliqués par le véhicule sur l'environnement

| $j$ | $F_{xj}$   | $F_{yj}$   | $F_{zj}$   | $C_{xj}$   | $C_{yj}$   | $C_{zj}$   | Commentaires           |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------------------|
| 6   | $-F_{x6}$  | $-F_{y6}$  | $-F_{z6}$  | $-C_{x6}$  | $-C_{y6}$  | $-C_{z6}$  | Torseur avant droit    |
| 11  | $-F_{x11}$ | $-F_{y11}$ | $-F_{z11}$ | $-C_{x11}$ | $-C_{y11}$ | $-C_{z11}$ | Torseur avant gauche   |
| 15  | $-F_{x15}$ | $-F_{y15}$ | $-F_{z15}$ | $-C_{x15}$ | $-C_{y15}$ | $-C_{z15}$ | Torseur arrière droit  |
| 19  | $-F_{x19}$ | $-F_{y19}$ | $-F_{z19}$ | $-C_{x19}$ | $-C_{y19}$ | $-C_{z19}$ | Torseur arrière gauche |

Les moments de contact appliqués par l'environnement sur la structure suivant  $x_j$  et  $y_j$  ne sont pas pris en compte. Les forces suivant  $z_j$  sont calculées avec le modèle dynamique pour

satisfaire les contraintes cinématiques. Les forces suivant  $x_j$  et  $y_j$  sont calculées par le modèle de Pacejka (Pacejka 2006).

### 3.3. Paramètres dynamiques

Les paramètres dynamiques standards des corps réels du modèle à 16 ddl sont présentés dans cette section. Tous les paramètres inertiels du châssis sont considérés. Les raideurs, les coefficients d'amortissement et les masses des suspensions sont pris en compte. Enfin nous supposons que le centre de masse des roues est le centre géométrique des roues et que les inerties  $XX_i$  et  $YY_i$  sont égales par symétrie.

On aura :

- Pour le châssis, corps  $C_1$  :  
 $XX_1, XY_1, XZ_1, YY_1, YZ_1, ZZ_1, MX_1, MY_1, MZ_1$  et  $M_1$ .
- Pour les roues, corps  $C_i$  avec  $i= 5, 10, 14$  et  $18$  :
  - $XX_i, YY_i, ZZ_i, M_i$
- Pour les suspensions, corps  $C_i$  avec  $i= 2, 7, 12$  et  $16$  :
  - $K_i, Fv_i, M_i$ ;
- Pour les corps  $C_i$  avec  $i= 3, 8$  :
  - $ZZ_i, M_i$ ;

Les paramètres dynamiques après regroupement, sont présentés par le tableau 3-7 :

**Tableau 3-7 : Paramètres dynamiques après regroupement du modèle à 16 ddl**

| $j$ | $XX_j$    | $XY_j$ | $XZ_j$ | $YY_j$ | $YZ_j$ | $ZZ_j$    | $MX_j$ | $MY_j$ | $MZ_j$ | $M_j$    | $K_j$ | $Fv_j$ | $Fs_j$ |
|-----|-----------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|----------|-------|--------|--------|
| 1   | $XX_1$    | $XY_1$ | $XZ_1$ | $YY_1$ | $YZ_1$ | $ZZ_1$    | $MX_1$ | $MY_1$ | $MZ_1$ | $M_1$    | 0     | 0      | 0      |
| 2   | 0         | 0      | 0      | 0      | 0      | 0         | 0      | 0      | 0      | $M_{2R}$ | $K_2$ | $Fv_2$ | 0      |
| 3   | $XX_5$    | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZ_{3R}$ | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0      |
| 4   | 0         | 0      | 0      | 0      | 0      | 0         | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0      |
| 5   | 0         | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZ_5$    | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0      |
| 6   | 0         | 0      | 0      | 0      | 0      | 0         | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0      |
| 7   | 0         | 0      | 0      | 0      | 0      | 0         | 0      | 0      | 0      | $M_{7R}$ | $K_7$ | $Fv_7$ | 0      |
| 8   | $XX_{10}$ | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZ_{8R}$ | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0      |
| 9   | 0         | 0      | 0      | 0      | 0      | 0         | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0      |
| 10  | 0         | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZ_{10}$ | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0      |
| 11  | 0         | 0      | 0      | 0      | 0      | 0         | 0      | 0      | 0      | 0        | 0     | 0      | 0      |

|    |           |   |   |   |   |           |   |   |   |           |          |           |   |
|----|-----------|---|---|---|---|-----------|---|---|---|-----------|----------|-----------|---|
| 12 | $XX_{14}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $XX_{14}$ | 0 | 0 | 0 | $M_{12R}$ | $K_{12}$ | $Fv_{12}$ | 0 |
| 13 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0         | 0        | 0         | 0 |
| 14 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0 | $ZZ_{14}$ | 0 | 0 | 0 | 0         | 0        | 0         | 0 |
| 15 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0         | 0        | 0         | 0 |
| 16 | $XX_{18}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $XX_{18}$ | 0 | 0 | 0 | $M_{16R}$ | $K_{16}$ | $Fv_{16}$ | 0 |
| 17 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0         | 0        | 0         | 0 |
| 18 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0 | $ZZ_{18}$ | 0 | 0 | 0 | 0         | 0        | 0         | 0 |
| 19 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0         | 0 | 0 | 0 | 0         | 0        | 0         | 0 |

$$M_{16R} = M_{16} + M_{18} ; M_{2R} = M_2 + M_3 + M_5$$

$$M_{12R} = M_{12} + M_{14} ; M_{7R} = M_7 + M_8 + M_{10}$$

$$ZZ_{3R} = ZZ_3 + XX_5 ; ZZ_{8R} = ZZ_8 + XX_{10}$$

### 3.4. Contraintes cinématiques verticales

Les forces verticales sont déduites des quatre contraintes cinématiques aux quatre points de contact avec le sol. Elles traduisent la nullité des vitesses verticales des points de contacts avec le sol dans le repère route  $R$ .

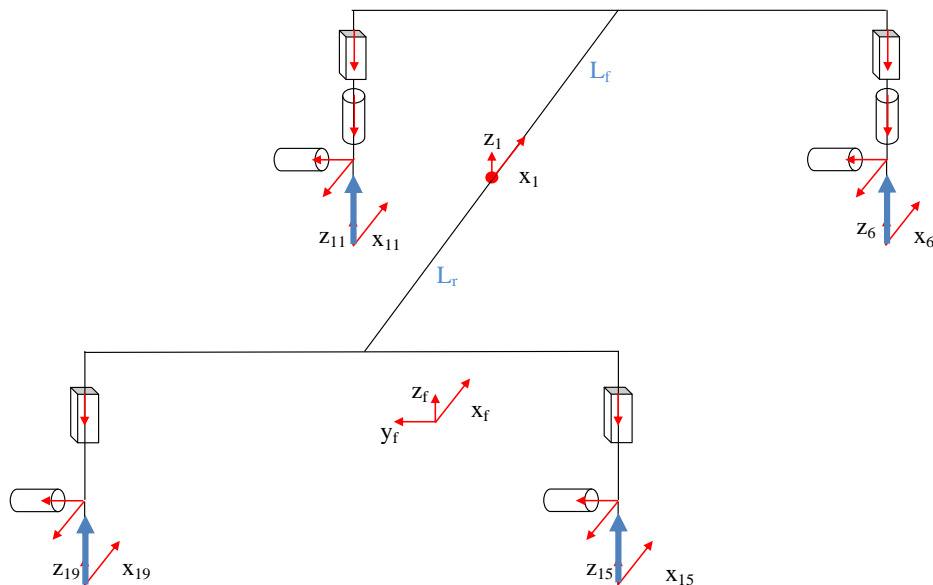


Figure 3.40 : Direction des composantes nulles de vitesse et d'accélération du modèle à 16 ddl

Les équations qui traduisent les contraintes sont :

$$\begin{aligned}
 {}^fV_{6z} &= {}^fV_6(3) = {}^fR_1(3,:){}^1V_6 = 0 \\
 {}^fV_{11z} &= {}^fV_{11}(3) = {}^fR_1(3,:){}^1V_{11} = 0 \\
 {}^fV_{15z} &= {}^fV_{15}(3) = {}^fR_1(3,:){}^1V_{15} = 0 \\
 {}^fV_{19z} &= {}^fV_{19}(3) = {}^fR_1(3,:){}^1V_{19} = 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

La dérivée des équations de contrainte est :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} {}^rV_{6z} &= \frac{d}{dt} ({}^rR_1(3,:){}^1V_6) = \frac{d}{dt} ({}^rR_1(3,:)){}^1V_6 + {}^rR_1(3,:) \frac{d}{dt} ({}^1V_6) = 0 \\
 \frac{d}{dt} {}^rV_{11z} &= \frac{d}{dt} ({}^rR_1(3,:){}^1V_{11}) = \frac{d}{dt} ({}^rR_1(3,:)){}^1V_{11} + {}^rR_1(3,:) \frac{d}{dt} ({}^1V_{11}) = 0 \\
 \frac{d}{dt} {}^rV_{15z} &= \frac{d}{dt} ({}^rR_1(3,:){}^1V_{15}) = \frac{d}{dt} ({}^rR_1(3,:)){}^1V_{15} + {}^rR_1(3,:) \frac{d}{dt} ({}^1V_{15}) = 0 \\
 \frac{d}{dt} {}^rV_{19z} &= \frac{d}{dt} ({}^rR_1(3,:){}^1V_{19}) = \frac{d}{dt} ({}^rR_1(3,:)){}^1V_{19} + {}^rR_1(3,:) \frac{d}{dt} ({}^1V_{19}) = 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

L'équation (3.16) s'écrit sous la forme d'un produit d'une matrice  $J_4$  par le vecteur  $qv_{e_l}$  de l'équation (3.14) :

$$\begin{bmatrix} {}^rV_{6z} \\ {}^rV_{11z} \\ {}^rV_{15z} \\ {}^rV_{19z} \end{bmatrix} = J_4 qv_{e_l} = 0 \tag{3.18}$$

Avec :

➤  $J_4$  la matrice de dimension  $(4 \times 16)$  qui représente la jacobienne par rapport au vecteur  $qv_{e_l}$  de l'équation (3.14) .

L'équation (3.17) ou la dérivée de l'équation (3.18) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^rV_{6z} \\ {}^rV_{11z} \\ {}^rV_{15z} \\ {}^rV_{19z} \end{bmatrix} &= J_4 \frac{dqv_{e_l}}{dt} + \dot{J}_4 qv_{e_l} \\
 &= J_4 qa_{e_l} + \mathcal{G}_4
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Avec :

$$\mathcal{G}_4 = \dot{J}_4 qv_{e_l} - J_4(:,1:3) \begin{bmatrix} {}^1\omega_{1z} {}^1V_{1y} - {}^1\omega_{1y} {}^1V_{1z} \\ -{}^1\omega_{1z} {}^1V_{1x} + {}^1\omega_{1x} {}^1V_{1z} \\ {}^1\omega_{1y} {}^1V_{1x} - {}^1\omega_{1x} {}^1V_{1y} \end{bmatrix}$$

### 3.5. Modèle dynamique

Le modèle dynamique du modèle à 16 ddl en considérant les contraintes cinématiques s'écrit :

$$\begin{aligned}\Gamma_{(16x1)} &= A_{(16x16)}qa_{e\_l} + H_{(16x1)}(q_{e\_l}, qv_{e\_l}) + J_4^T \lambda_v \\ 0_{(4x1)} &= J_{4(4x16)}qa_{e\_l} + \mathcal{G}_{4(4x1)}\end{aligned}\quad (3.20)$$

Avec :

- $\lambda_v$  est le vecteur de multiplicateurs de Lagrange. Il représente les forces normales d'interaction roue/sol au niveau des quatre points de contact ;

Ces deux équations forment un système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{(16x1)} \\ 0_{(4x1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(16x16)} & J_4^T \\ J_4 & 0_{(4x4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qa_{e\_l} \\ \lambda_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{(16x1)}(q_{e\_l}, qv_{e\_l}) \\ \mathcal{G}_{4(4x1)} \end{bmatrix}\quad (3.21)$$

Donc le modèle dynamique direct utilisé pour la simulation permet de calculer au même instant, le vecteur accélération ainsi que les multiplicateurs de *Lagrange* comme suit :

$$\begin{bmatrix} qa_{e\_l} \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(16x16)} & J_4^T \\ J_4 & 0_{(2x2)} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \Gamma_{(16x1)} \\ 0_{(4x1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{(16x1)}(q_{e\_l}, qv_{e\_l}) \\ \mathcal{G}_{4(4x1)} \end{bmatrix} \right)\quad (3.22)$$

Rappelons que :

- le torseur d'effort lié au châssis est nul ;
- L'élasticité des articulations flexibles est considérée pour ( $j=2, 7, 12$  et  $16$ ).

$$\Gamma_j = -K_j(q_j - q_{j0})$$

## 4. Essais en simulation du modèle 4 roues à 16ddl

Dans cette section, nous simulons le comportement du modèle 4 roues à 16 degrés de liberté. L'architecture de simulation introduite précédemment est utilisée et les valeurs des paramètres dynamiques ainsi que les dimensions du véhicule sont celles résultants de l'identification d'un modèle de véhicule 4 roues *Peugeot 406* (Venture 2003). Dans un premier lieu, un scénario de virage identique à celui appliqué au modèle 11 ddl est présenté puis nous vérifions la cohérence de la dynamique des modèles à 11 ddl et 16 ddl.

### 4.1. Essai en virage

Le comportement latéral du véhicule en réponse à des manœuvres de braquage ( Figure 3.28) est étudié dans cette section. Les entrées du modèle sont :

- un couple de braquage identique sur les deux roues avant et résultant de la régulation PD de l'angle de braquage ;

- une condition initiale de vitesse longitudinale de 10 m/s avec des couples nuls sur les 2 roues arrière ;
- Le couple lié au degré de liberté du roulis est nul. Ceci est possible sans basculement pour le véhicule 16 ddl à 4 roues au contraire du véhicule 11 ddl à 2 roues.

Les figures 3.41 et 3.42 montrent la trajectoire et l'angle de lacet du véhicule en réponse à la consigne de braquage.

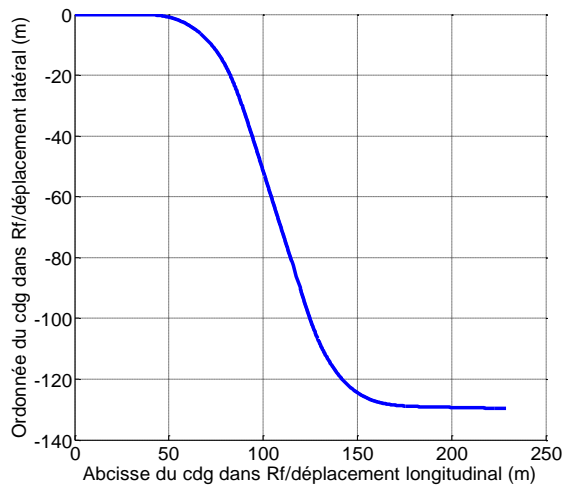


Figure 3.41 : Trajectoire planaire du cdg

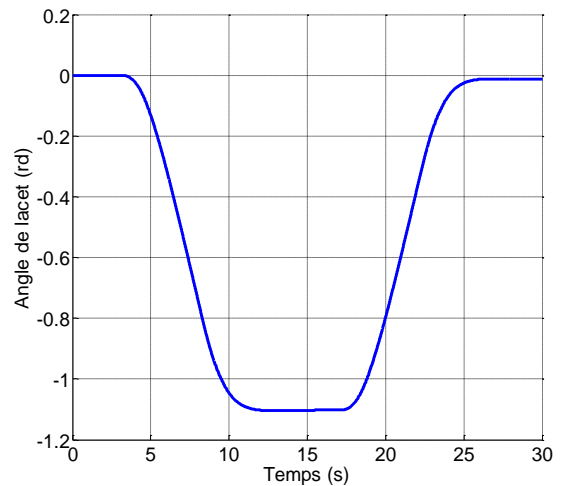


Figure 3.42 : Angle de lacet

Quand le véhicule aborde un virage, il apparaît un « transfert de charge » vers l'extérieur du virage. Ici, le véhicule braque à droite puis à gauche. Le « transfert de charge » s'effectue d'abord vers la gauche : les forces verticales avant et arrière droite diminuent tandis que les forces verticales avant et arrière gauche augmentent. Le transfert est inversé quand le véhicule braque à gauche. Ceci est visible par les figures 3.43 et 3.44.

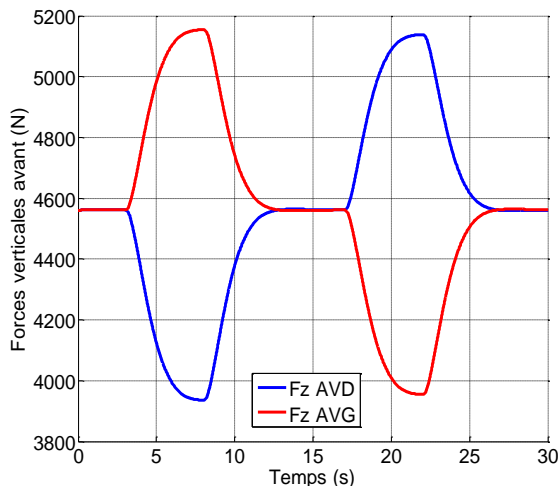


Figure 3.43 : Forces verticales avant

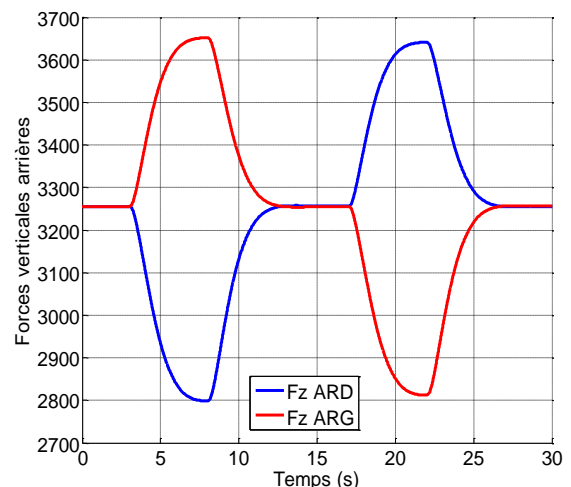


Figure 3.44 : Forces verticales arrière

Le comportement des suspensions dépend de la variation des efforts verticaux associés à chaque roue. L'allure du débattement des suspensions est présentée sur les figures 3.45 et 3.46. Les forces verticales équilibrent toujours le poids du véhicule, mais la somme de leurs moments par rapport au centre de gravité du véhicule n'est plus nulle. Un angle de roulis apparaît vers l'extérieur comme le montre la figure 3.47. Les angles de dérive et les forces latérales correspondantes sont présentés sur les figures 3.48 et 3.49.

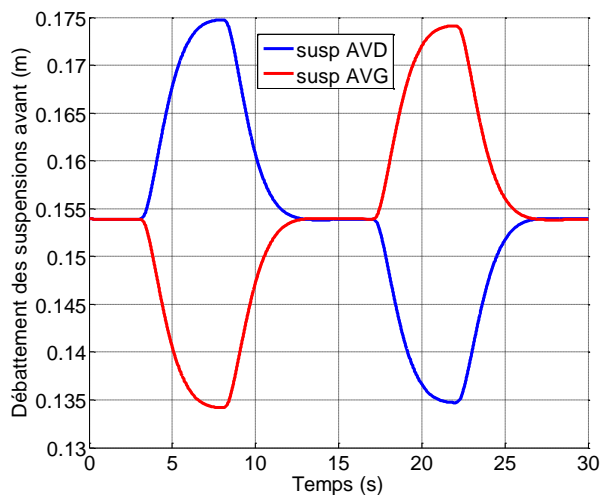


Figure 3.45 : Débattements des suspensions avant

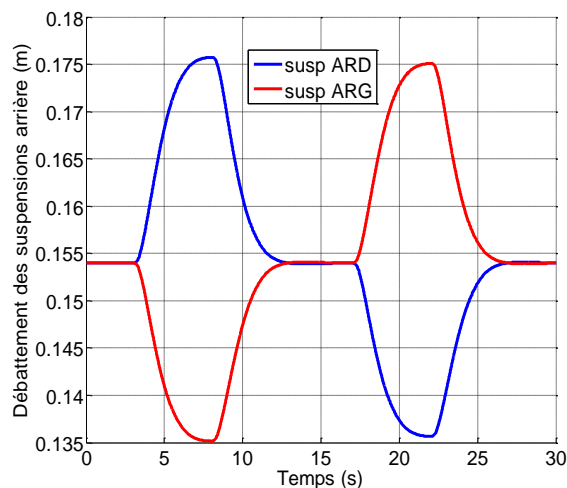


Figure 3.46 : Débattements des suspensions arrière

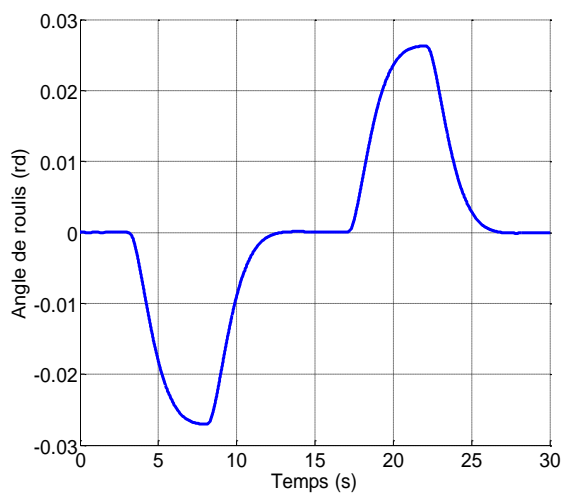


Figure 3.47 : Angle de roulis

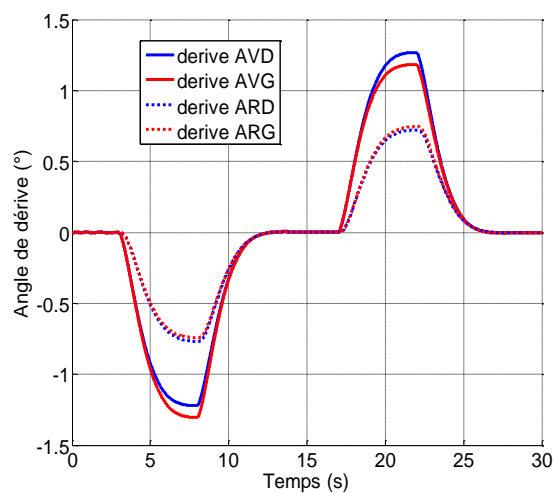


Figure 3.48 : Angles de dérive



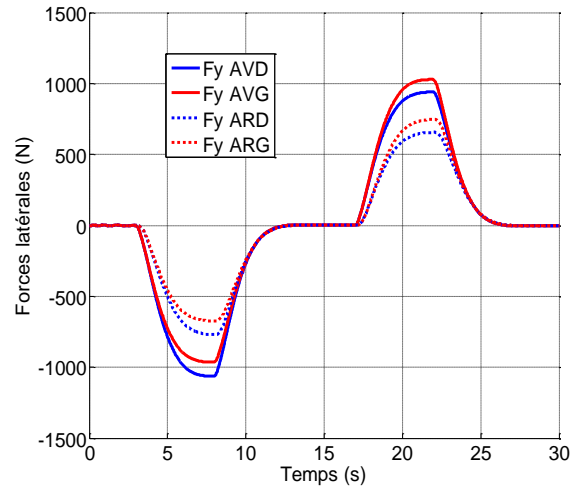


Figure 3.49 : Forces latérales

#### 4.2. Prise en compte de la barre anti-roulis

Une barre anti-roulis est un élément stabilisateur des débattements des véhicules. Elle peut être modélisée par un ressort dont l'effort s'applique au centre des roues d'un même essieu (Venture 2003). En considérant que les efforts de part et d'autre de la barre sont identiques et de signes opposés, l'expression de ces efforts est alors :

$$F_k = K_{ar}(z_k - z_l) = -F_l \quad (3.23)$$

Avec :

- $K_{ar}$  représente la raideur de la barre anti-roulis;
- $z_k$  et  $z_l$  représentent respectivement les débattements des suspensions d'un même essieu.

La prise en compte de l'effet de la barre anti-roulis dans le modèle dynamique du véhicule à 16 ddl s'effectue en ajoutant des termes sur les équations des suspensions entre les corps d'indices  $j=2, 7, 12$  et  $16$  et  $i=7, 2, 16$  et  $12$  respectivement :

$$-K_j(q_j - q_{j0}) - K_{ar}(q_j - q_i) = \Gamma_j$$

En simulant le même scénario avec les mêmes entrées que dans la simulation (section 4.1), nous observons un amortissement au niveau de la dynamique de pompage qui se traduit par une diminution de la variation de débattement des suspensions (Figure 3.50 et Figure 3.51).

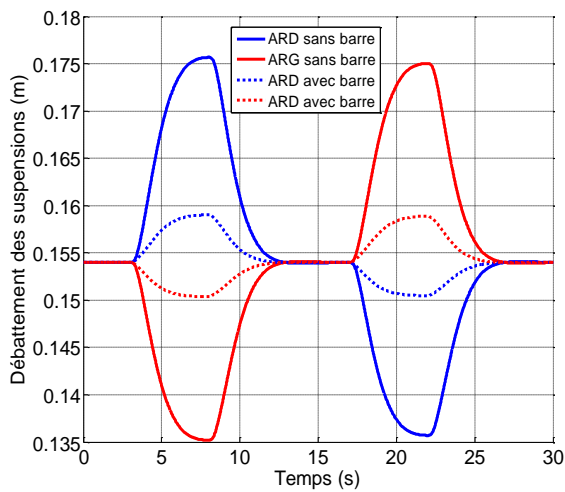


Figure 3.50 : Débattement des suspensions arrière

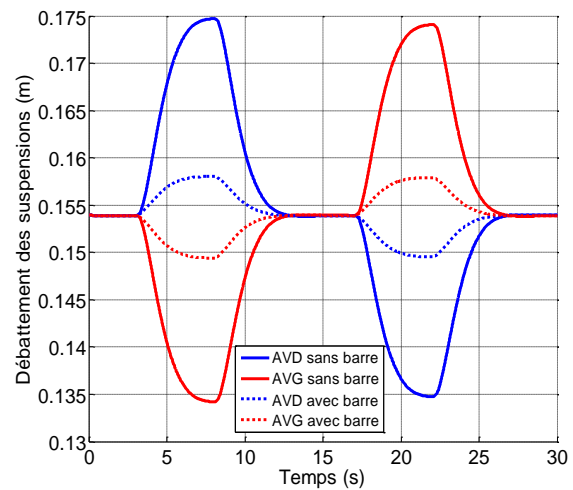


Figure 3.51 : Débattement des suspensions avant

Sur la figure 3.52, nous présentons une comparaison entre le roulis du véhicule avec et sans barre anti-roulis. La barre anti-roulis réduit le roulis ainsi que le débattement des suspensions. Au niveau du temps de calcul nécessaire pour cette simulation, il s'élève à 18.5 secondes

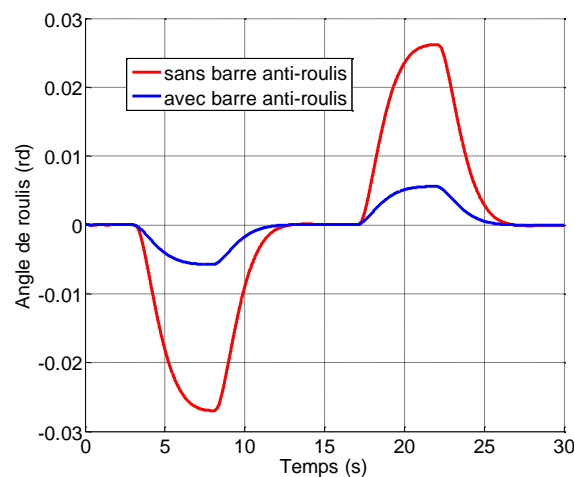


Figure 3.52 : Angle de roulis

### 4.3. Cohérence des modèles 11 ddl et 16 ddl

Dans cette section, nous allons discuter la cohérence des comportements longitudinaux des deux modèles. Le scénario proposé est un essai en freinage sur une trajectoire rectiligne. Le modèle 4 roues possède une symétrie par rapport à l'axe longitudinal du véhicule. Afin de comparer ces deux modèles de structures cinématiques différentes, nous allons projeter les paramètres dynamiques de l'un sur l'autre. Tenant compte de la symétrie du modèle 16 ddl, la projection des paramètres sur le modèle 11ddl se traduit par la conservation des paramètres du châssis, et la combinaison des branches arborescences gauche et droite de chaque essieu. Les

paramètres des 2 branches du 11 ddl sont la somme des paramètres des 4 branches, 2 à 2 par train avant et arrière, comme indiqué dans le tableau suivant :

Tableau 3-8 : Projection des paramètres inertiels du repère

| Modèle à 16 ddl  | Modèle à 11 ddl  |
|--|--|
| <i>Châssis</i><br>$XX_1, XY_1, XZ_1, YY_1, YZ_1, ZZ_1, MX_1, MY_1, MZ_1$<br>et $M_1$ .   | <i>Châssis</i><br>$XX_1, XY_1, XZ_1, YY_1, YZ_1, ZZ_1, MX_1, MY_1, MZ_1$<br>et $M_1$ .                   |
| <i>Suspensions</i><br>$AV: K_2, Fv_2, M_2; K_7, Fv_7, M_7;$<br>$AR: K_{12}, Fv_{12}, M_{12}; K_{16}, Fv_{16}, M_{16}.$   | <i>Suspensions</i><br>$AV: 2*K_2, 2*Fv_2, 2*M_2;$<br>$AR: 2*K_{12}, 2*Fv_{12}, 2*M_{12};$                |
| <i>Roues</i><br>$AV: XX_5, YY_5, ZZ_5, M_5; XX_{10}, YY_{10}, ZZ_{10}, M_{10}.$<br>$AR: XX_{14}, YY_{14}, ZZ_{14}, M_{14}; XX_{18}, YY_{18}, ZZ_{18}, M_{18}.$ | <i>Roues</i><br>$AV: 2*XX_5, 2*YY_5, 2*ZZ_5, 2*M_5;$<br>$AR: 2*XX_{14}, 2*YY_{14}, 2*ZZ_{14}, 2*M_{14}.$ |
| <i>Fourche</i><br>$ZZ_3, M_3; ZZ_8, M_8.$  | <i>Fourche</i><br>$2*ZZ_3, 2*M_3;$   |

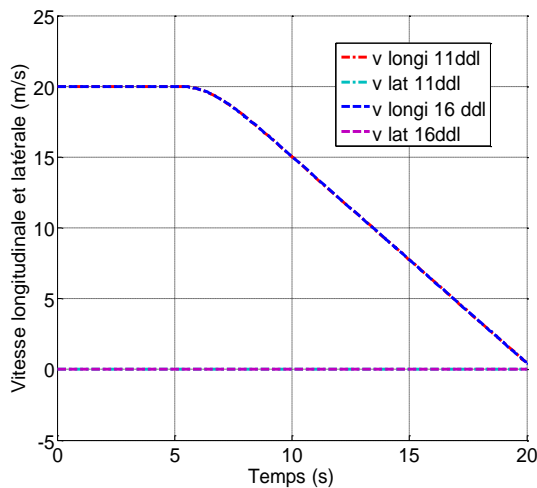


Figure 3.53 : Vitesse longitudinale et latérale

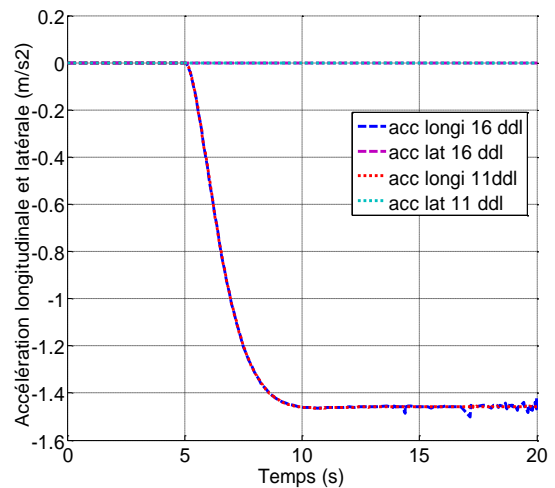


Figure 3.54 : Accélération longitudinale et latérale

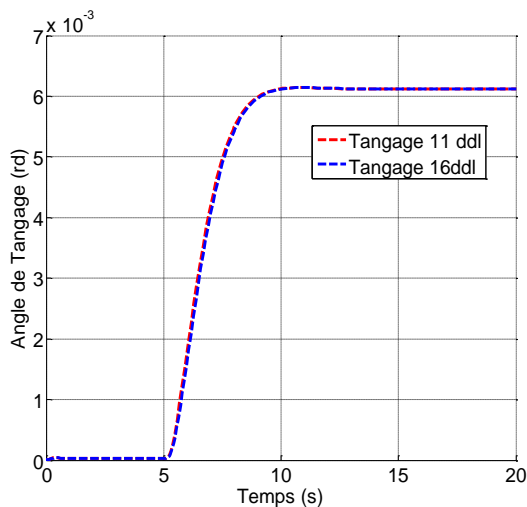


Figure 3.55 : Angle de tangage

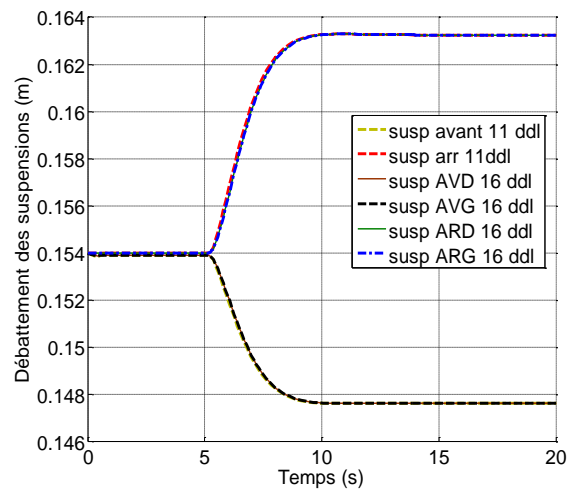


Figure 3.56 : Débattement des suspensions

Les figures 3.53, 3.54, 3.55 et 3.56 montrent la cohérence de comportement des modèles à 11ddl et 16 ddl relativement aux dynamiques longitudinales et verticales. L'utilisation du modèle 2 roues pour l'analyse du comportement du véhicule 4 roues est donc justifiée si l'on s'intéresse qu'à ces dynamiques.

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux cas d'études de modélisation et simulation dynamique de véhicules à degré de complexité croissant. Après avoir paramétré le modèle géométrique associé à chaque modèle et défini les paramètres dynamiques pour chaque corps, le modèle dynamique a été calculé et le scénario de simulation est défini. Les résultats obtenus en simulation avec les deux modèles suivant les différents scénarios, ont permis la validation de leur comportement longitudinal, latéral et vertical. Dans le chapitre suivant nous allons étudier un véhicule de structure plus complexe et original : celui de la **Smera de Lumeneo**. C'est un véhicule étroit inclinable dont la structure cinématique comporte des chaînes fermées planaires et spatiales.

## Chapitre 4 Véhicule étroit inclinable : SMERA

---

La société **Lumeneo** développe un véhicule urbain innovant baptisé SMERA. C'est une voiture électrique, maniable comme un scooter, confortable et sûre comme une automobile. Avec une masse faible (500 Kg), une largeur inférieure à la moitié de celle d'une voiture classique (0.96 m) et une propulsion électrique, elle s'incline pour accroître sa stabilité en virage.

Ce type d'automobile facilite le stationnement et l'agilité dans les embouteillages. Il combine les avantages d'un deux roues et d'une voiture traditionnelle, avec un impact écologique faible comparé à celui des véhicules classiques.

Le véhicule étudié dispose d'un système motorisé d'inclinaison simultanée des 4 roues et du châssis du véhicule. De par la géométrie de ses liaisons au sol, le véhicule peut s'incliner comme un deux roues.

La motorisation de l'inclinaison est nécessaire pour les raisons suivantes :

- l'habitacle étant fermé, le conducteur ne peut balancer son corps comme sur un véhicule à 2 roues ;
- la direction est plus lourde que celle d'un 2 roues classique ;
- le véhicule ne doit pas nécessiter d'apprentissage particulier de basculement du corps ;
- la masse importante, comparée à celle d'un « deux roues », rend difficile le basculement du véhicule sans assistance.

Les études menées récemment sur les véhicules inclinables, se basent sur un modèle bicyclette simplifié, à 4 ddl, dont les suspensions et l'inertie des roues sont négligées (Gohl & Rajamani 2004), (Gohl et al. 2006), (Kidane et al. 2008). Les travaux de Vieira, Fossas et Roqueiro portent sur un tricycle modélisé par 4 corps et 9 ddl, utilisant une approche multi-corps basée sur la méthode de Lagrange (Roqueiro et al. 2010), (Roqueiro & Fossas 2010), (Roqueiro et al. 2011). Dans ce chapitre nous allons présenter les caractéristiques du véhicule Smera, définir ses composants mécaniques, et étudier le comportement de son inclinaison. L'approche multi-corps de la robotique est appliquée pour élaborer son modèle géométrique et résoudre les

chaines cinématiques fermées qu'il contient. Ensuite le modèle dynamique est calculé et simulé pour différents types de trajectoires.

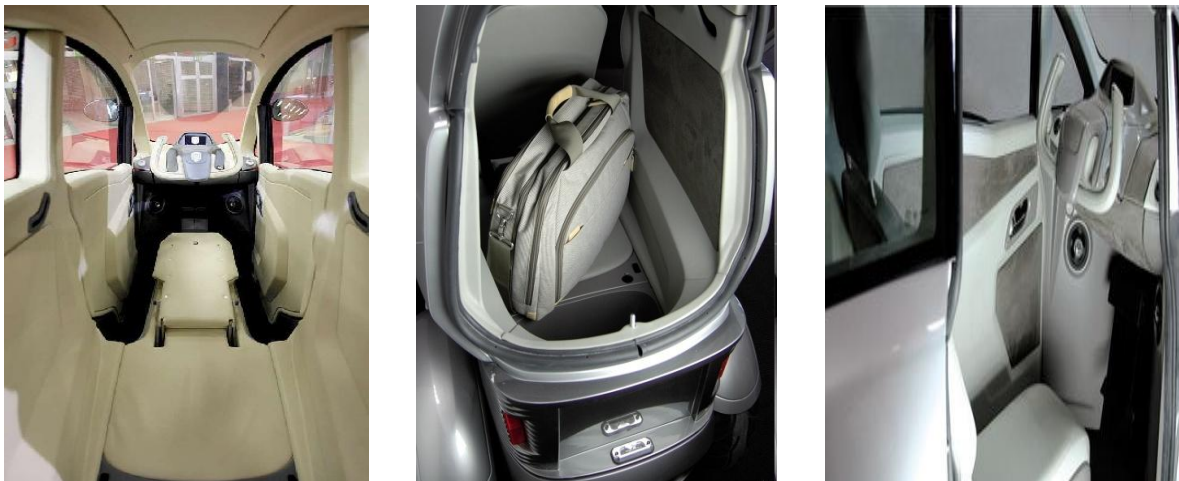
## **1. Description Générale et Caractéristiques de la SMERA**

La Smera mesure 2,5 m de long, 0,96 m de large et 1,45 m de haut. Ses dimensions lui permettent de se déplacer, se faufiler et se garer en zone urbaine. La masse est de 500 Kg incluant la masse des batteries (Figure 4.1). Un permis auto (B) suffit pour la conduire.



**Figure 4.1 : Photo de la Smera**

Son habitacle fermé permet le transport de deux personnes en tandem et leur assure confort et sécurité. Un petit coffre est possible à l'arrière (Figure 4.2).



**Figure 4.2 : Architecture intérieure de la Smera**

Le système d'inclinaison est entièrement automatisé. Il utilise notamment les signaux fournis par une centrale inertielle et différents capteurs. Suivant les paramètres dynamiques de la

voiture, la courbe de virage, le mode de conduite et l'état de la chaussée, le calculateur embarqué détermine instantanément l'inclinaison optimale. Le servo moteur à courant continu piloté par le calculateur, réalise automatiquement cette fonction en agissant sur une pièce mécanique appelée « lyre » qui incline la cabine et les 4 roues.

### 1.1. Principe d'inclinaison

La dynamique des véhicules étroits est différente de celle des voitures conventionnelles. En effet, de par leur étroitesse, et suivant la position de leur centre de gravité, leur dynamique lors de la prise de virage peut s'avérer plus proche de la dynamique des véhicules deux roues comme les motos. L'effet des forces centrifuges entraîne le véhicule à basculer vers l'extérieur du virage. Pour éviter ceci, ces véhicules étroits doivent s'incliner vers l'intérieur des virages pour que la résultante du poids du véhicule et de la force centrifuge passe par le polygone de sustentation du véhicule, donc entre les quatre roues (Figure 4.3). Ceci revient à annuler l'accélération latérale dans l'axe  $y_1$  du repère  $R_1$  lié au châssis (cf. Chapitre 3, section 2.2).



Figure 4.3 : Inclinaison des véhicules étroits

## 2. Modèle géométrique de la Smera

L'architecture géométrique de la Smera est composée de deux grandes parties : la première regroupe le train arrière, les bras de suspensions, la lyre arrière motorisée, et les moteurs de propulsion. La seconde partie représente l'ensemble du train avant composé des parallélogrammes, de la lyre avant passive et des suspensions. La figure 4.4 représente le modèle physique de la moitié gauche de la Smera. La moitié droite est obtenue par symétrie par rapport à l'axe longitudinal du véhicule.



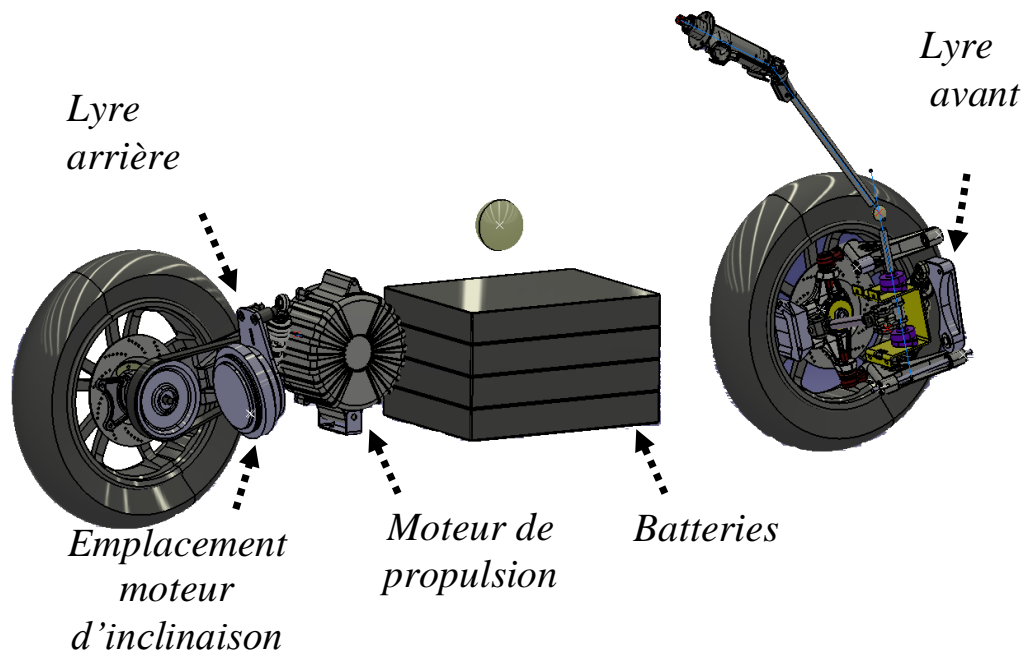


Figure 4.4 : Schéma de la moitié gauche de la Smera

Le véhicule s'incline par la rotation des « lyres » avant et arrière. Il s'agit de deux pièces mobiles en rotation assurant la liaison entre les ensembles ressort/amortisseur de chaque train. La lyre arrière est actionnée par le moteur d'inclinaison qui agit sur la lyre avant par un couplage mécanique à travers le châssis.

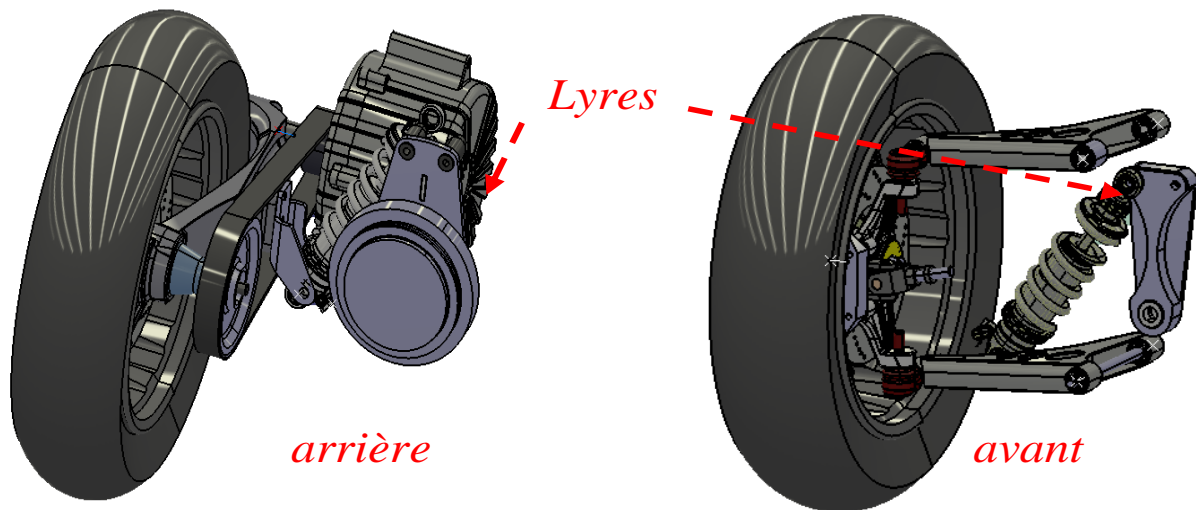


Figure 4.5 : Les lyres avant et arrière

La figure 4.6 représente un schéma détaillé illustrant les éléments mécaniques de la Smera. Le schéma de droite montre les différents corps reliés entre eux par les articulations (cercles rouges) ; chaque ensemble de corps est associé à une couleur illustré physiquement par les schémas de gauche.



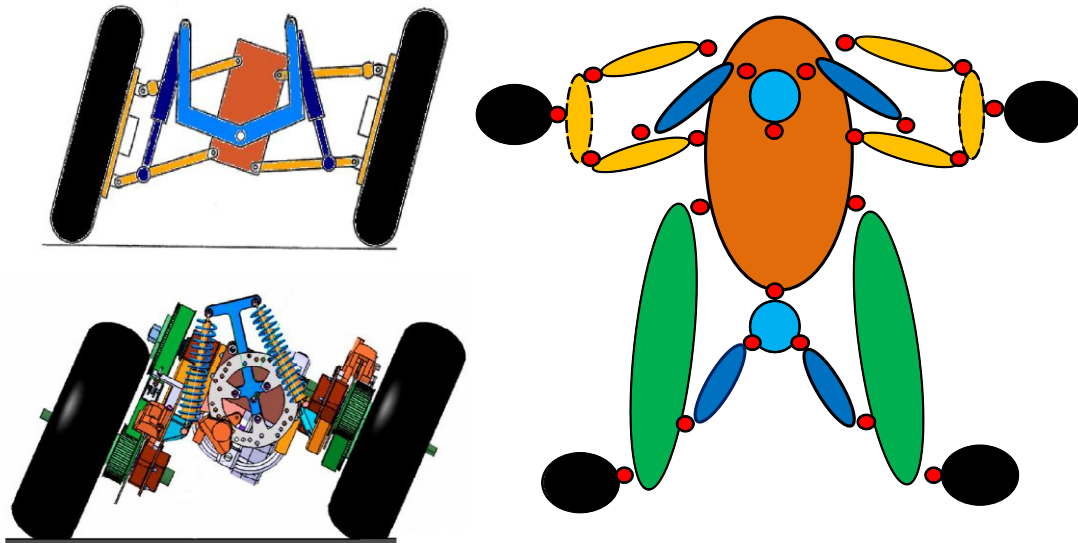


Figure 4.6 : Schéma multi-corps représentatif de la Smera

Ce système peut être décrit comme un robot à chaîne arborescente comportant 6 chaînes fermées. L'élaboration des modèles géométriques, cinématiques et dynamiques passe par l'ouverture de ces chaînes fermées pour obtenir une structure arborescente équivalente. Les variables dépendantes (passives) seront calculées dans un deuxième temps en fonction des variables indépendantes en écrivant les équations de contrainte de fermeture des boucles (cf. Chapitre 2, section 2.2). Compte tenu de la complexité du modèle et de sa symétrie, nous allons analyser chaque train à part et les coupler par la suite.

## 2.1. Train arrière

Le demi-train arrière gauche (Figure 4.7) est constitué d'une lyre actionnée par un moteur d'inclinaison dont le stator est solidaire du châssis du véhicule. La partie supérieure de la lyre est reliée par une liaison rotule à la partie supérieure de l'ensemble ressort/amortisseur. La partie inférieure de cet ensemble est reliée au bras de suspension par une liaison rotule.

Les deux extrémités du bras de suspension sont reliées d'une part au châssis à travers une liaison rotoïde et d'autre part à la roue à travers son axe de rotation. Cette chaîne fermée est décrite par l'angle de rotation de la lyre arrière, les six angles de rotation des deux rotules, le débattement prismatique de la suspension ainsi que la rotation du bras. Dans la suite nous regroupons les deux rotations des rotules autour de l'axe de la suspension en une seule rotation. On obtient alors une rotule à la partie inférieure et un cardan à la partie supérieure et la chaîne fermée est ouverte au niveau de la rotule inférieure résultante.

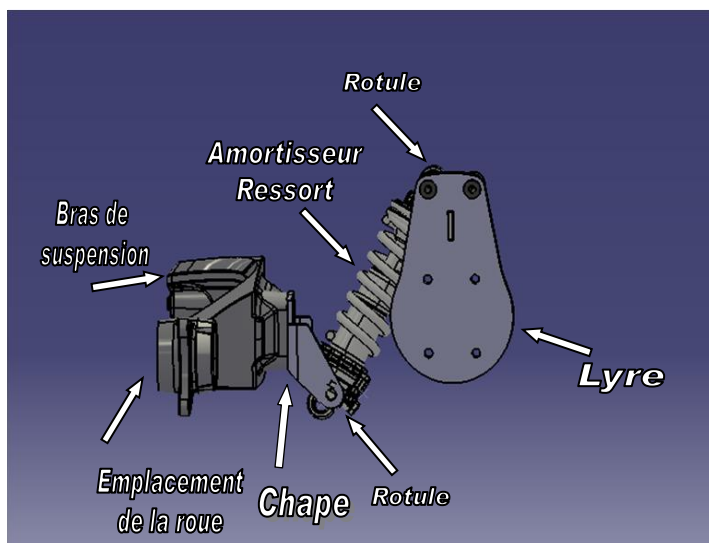


Figure 4.7 : Schéma du demi-train arrière gauche

La même simplification est appliquée au demi-train droit pour constituer une structure arborescente du train arrière (Figure 4.8) dont les paramètres géométriques sont présentés dans le tableau 4-1:

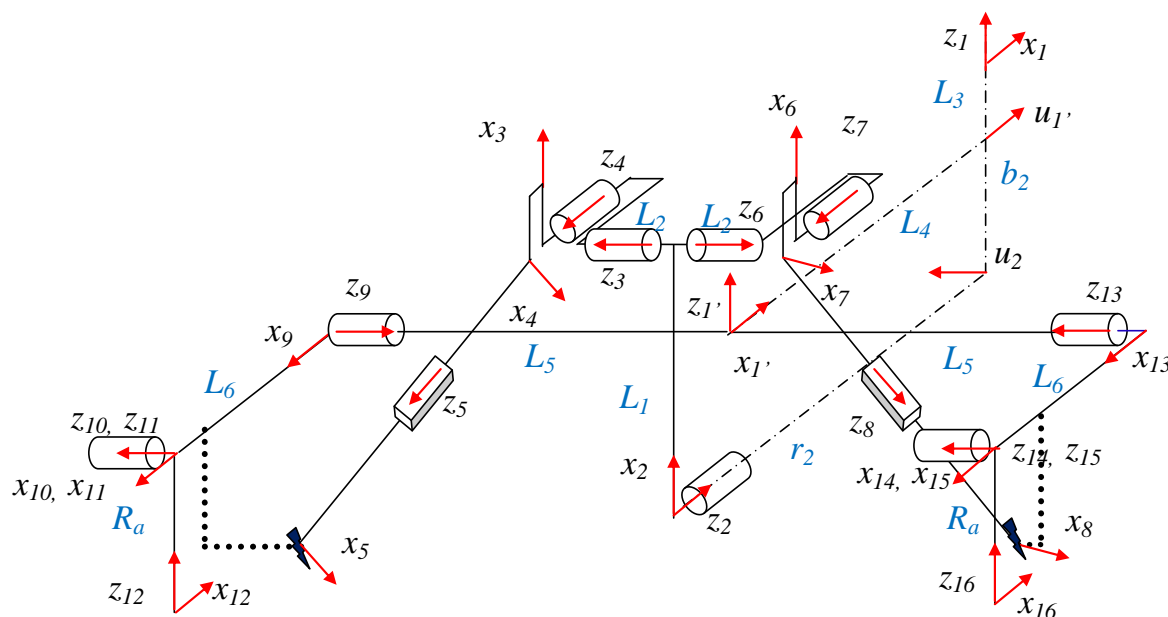


Figure 4.8 : Modèle articulaire du train arrière

Tableau 4-1 : Paramètres géométriques du train arrière

| $j$ | $a(j)$ | $\sigma_j$ | $\gamma_j$ | $b_j$  | $\alpha_j$ | $d_j$ | $\theta_j$ | $r_j$  | Commentaires                  |
|-----|--------|------------|------------|--------|------------|-------|------------|--------|-------------------------------|
| 1   | 0      | 2          | 0          | 0      | 0          | 0     | 0          | 0      | Châssis                       |
| 2   | 1      | 0          | $\pi/2$    | $-b_2$ | $\pi/2$    | 0     | $q_2$      | $-r_2$ | Rotation de la lyre arrière   |
| 3   | 2      | 0          | 0          | 0      | $\pi/2$    | $L_1$ | $q_3$      | $L_2$  | Première rotation du cardan G |
| 4   | 3      | 0          | 0          | 0      | $\pi/2$    | 0     | $q_4$      | 0      | Deuxième rotation du cardan G |
| 5   | 4      | 1          | 0          | 0      | $\pi/2$    | 0     | 0          | $q_5$  | Débattement de suspension ARG |

|           |    |   |                |        |          |        |          |        |   |
|-----------|----|---|----------------|--------|----------|--------|----------|--------|---|
| <b>6</b>  | 2  | 0 | 0              | 0      | $-\pi/2$ | $L_1$  | $q_6$    | $L_2$  | <i>Première rotation du cardan D</i>                      |
| <b>7</b>  | 6  | 0 | 0              | 0      | $-\pi/2$ | 0      | $q_7$    | 0      | <i>Deuxième rotation du cardan D</i>                      |
| <b>8</b>  | 7  | 1 | 0              | 0      | $\pi/2$  | 0      | 0        | $q_8$  | <i>Débattement de suspension ARD</i>                      |
| <b>1'</b> | 1  | 2 | 0              | $-L_3$ | 0        | $-L_4$ | 0        | 2      | <i>Articulation bloquée</i>                               |
| <b>9</b>  | 1' | 0 | 0              | 0      | $\pi/2$  | 0      | $q_9$    | $-L_5$ | <i>Rotation bras gauche</i>                               |
| <b>10</b> | 9  | 2 | 0              | 0      | $\pi$    | $L_6$  | 0        | 0      | <i>Articulation bloquée</i>                               |
| <b>11</b> | 10 | 0 | 0              | 0      | 0        | 0      | $q_{11}$ | 0      | <i>Rotation roue gauche</i>                               |
| <b>12</b> | 10 | 2 | $q_9 - \pi$    | 0      | $-\pi/2$ | 0      | $\pi$    | $-R_a$ | <i>Articulation bloquée (repère point de contact ARG)</i> |
| <b>13</b> | 1' | 0 | 0              | 0      | $-\pi/2$ | 0      | $q_{13}$ | $-L_5$ | <i>Rotation bras droit</i>                                |
| <b>14</b> | 13 | 2 | 0              | 0      | 0        | $L_6$  | 0        | 0      | <i>Articulation bloquée</i>                               |
| <b>15</b> | 14 | 0 | 0              | 0      | 0        | 0      | $q_{15}$ | 0      | <i>Rotation roue gauche</i>                               |
| <b>16</b> | 14 | 2 | $\pi - q_{13}$ | $-L_9$ | $-\pi/2$ | 0      | $\pi$    | $-R_a$ | <i>Articulation bloquée (repère point de contact ARD)</i> |

Avec :

- Le repère  $R_1$  est lié à la caisse à vide en son centre de gravité ;
- le repère  $R_{1'}$  est lié à la caisse et fixe par rapport à  $R_1$  ;
- $q_2$  est la rotation angulaire de la lyre arrière. C'est une variable motorisée ;
- $q_5$  et  $q_8$  représentent respectivement les débattements en translation des suspensions arrière gauche et droite ;
- $q_3$  et  $q_4$  représentent respectivement la première et la deuxième rotation de la rotule gauche supérieure ;
- $q_6$  et  $q_7$  représentent respectivement la première et la deuxième rotation de la rotule droite supérieure ;
- $q_9$  et  $q_{13}$  représentent respectivement les angles de rotation du bras gauche et droit, autour de leur axe de rotation ;
- $q_{11}$  et  $q_{15}$  représentent les positions angulaires des roues arrière gauche et droite, autour de leur axe de rotation ;
- Les repères  $R_{10}$  et  $R_{12}$  sont liés au moyeu gauche et  $R_{14}$  et  $R_{16}$  sont liés au moyeu droit. Les repères  $R_{12}$  et  $R_{16}$  sont les repères de projection des efforts de contact roue/sol. Ils sont fixes par rapport aux repères  $R_{10}$  et  $R_{14}$  respectivement et s'inclinent avec la voiture.

Les équations de fermetures des boucles se traduisent par l'égalité des équations de positions de part et d'autre du point d'ouverture des boucles comme le montre la figure 4.9 .

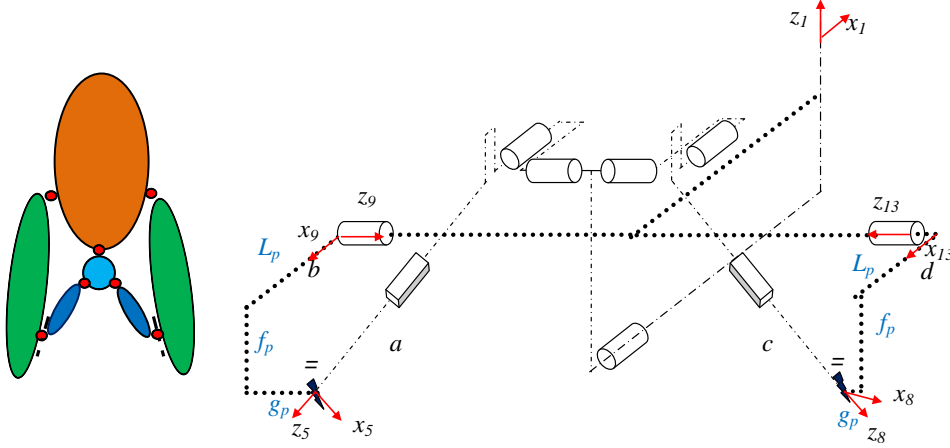


Figure 4.9 : Coupe des boucles du train arrière

Pour le demi-train gauche, on obtient trois équations à trois inconnues ( $q_3$ ,  $q_4$  et  $q_9$ ). Les variables  $q_2$  (variable motorisée représentant la rotation de la lyre arrière) et  $q_5$  (variable qui représente le débattement de la suspension arrière gauche) sont connues par l'intégration du modèle dynamique qui sera étudié plus tard dans la section (3.6) :

$$\begin{aligned}
 {}^1P_{5(a)} &= {}^1P_{5(b)} \Rightarrow \\
 -b_2 + q_5 \sin q_3 \sin q_4 &= -L_4 + L_p \cos q_9 + f_p \sin q_9 \\
 L_1 \cos q_2 + L_2 \sin q_2 - q_5 \cos q_4 \sin q_2 + r_5 \cos q_2 \cos q_3 \sin q_4 &= -g_p + L_5 \\
 -r_2 - L_2 \cos q_2 + q_5 \cos q_2 \cos q_4 + L_1 \sin q_2 + q_5 \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4 &= -L_3 + f_p \cos q_9 + L_p \sin q_9
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

De même, on obtient trois équations à trois inconnues ( $q_6$ ,  $q_7$  et  $q_{13}$ ) pour le demi-train droit. Les variables  $q_2$  et  $q_8$  (le débattement de la suspension arrière droite) sont connues.

$$\begin{aligned}
 {}^1P_{8(c)} &= {}^1P_{8(d)} \Rightarrow \\
 -b_2 + q_8 \sin q_6 \sin q_7 &= -L_4 + L_p \cos q_{13} + f_p \sin q_{13} \\
 L_1 \cos q_2 - L_2 \sin q_2 - q_8 \cos q_7 \sin q_2 + r_8 \cos q_2 \cos q_6 \sin q_7 &= g_p - L_5 \\
 -r_2 + L_2 \cos q_2 + q_8 \cos q_2 \cos q_7 + L_1 \sin q_2 + q_8 \cos q_6 \sin q_2 \sin q_7 &= -L_3 + f_p \cos q_{13} - L_p \sin q_{13}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Avec :

↪  $L_p$ ,  $f_p$  et  $g_p$  sont des constantes

$${}^9P_5 = cte = \begin{bmatrix} L_p \\ f_p \\ g_p \end{bmatrix} ; \quad {}^{13}P_8 = cte = \begin{bmatrix} L_p \\ -f_p \\ g_p \end{bmatrix}$$

La résolution analytique des équations (4.1) et (4.2) étant compliquée, une solution numérique (cf. Annexe B) basé sur le modèle différentiel à partir d'une configuration initiale courante a été développée.

## 2.2. Train avant

Le train avant est constitué d'une lyre, de deux parallélogrammes et de deux ensembles ressorts/amortisseurs. La lyre avant est passive et liée au châssis à travers un pivot. Sa partie supérieure et celles des deux ensembles ressorts/amortisseurs sont reliées entre elles par deux liaisons pivots. De même, les deux extrémités inférieures de ces ensembles sont reliées chacune au bras du parallélogramme par une liaison pivot. Chaque parallélogramme est lié au châssis par deux liaisons pivots. Compte tenu de l'architecture du véhicule, la présence des parallélogrammes assure le parallélisme entre les roues et le châssis.

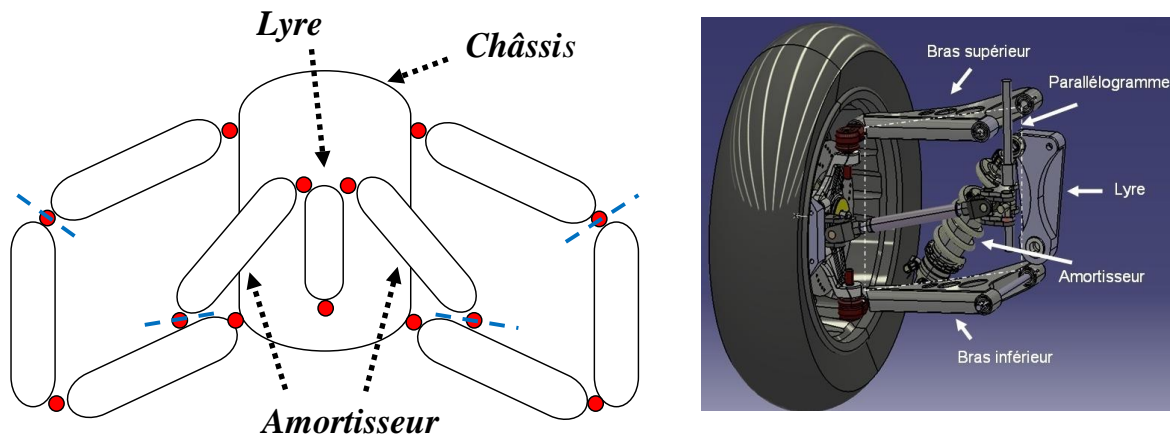


Figure 4.10 : Schéma multi-corps du train avant

Le véhicule a été conçu de telle manière que l'axe longitudinal de la rotation de la lyre avant soit parallèle et le plus proche possible de l'axe autour duquel le châssis peut s'incliner (D. Moulène & T. Moulène 2006). De cette manière, la lyre avant reste quasi parallèle à la verticale au sol ( $\theta_l = \theta$ ) comme le montre la figure 4.11 :

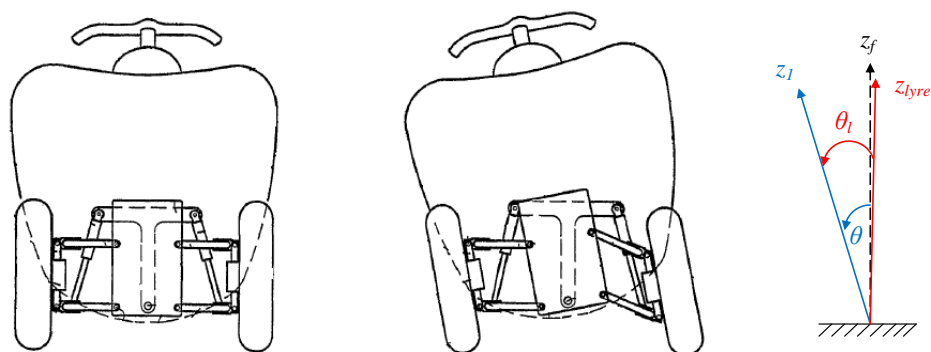


Figure 4.11 : Mouvement de la lyre avant lors de l'inclinaison

Nous considérons alors que l'angle de rotation de la lyre est une variable connue pour résoudre les boucles fermées du train avant.

Afin d'analyser le mouvement de cette structure, le train avant peut être décomposé en quatre chaînes fermées :

- Le parallélogramme gauche ;
- le parallélogramme droit ;
- la chaîne reliant la lyre, le châssis, l'amortisseur gauche et le bras inférieur du parallélogramme gauche ;
- la chaîne reliant la lyre, le châssis, l'amortisseur droit et le bras inférieur du parallélogramme droit.

### 2.2.1. Demi-train gauche

Le demi-train gauche est constitué d'un parallélogramme et d'une chaîne cinématique reliant ce dernier à l'amortisseur gauche et à la lyre. Chacune des boucles est coupée sur une articulation et les équations de fermeture de boucle représentent les équations de contraintes géométriques qui s'expriment par l'égalité des matrices de transformations (modèle géométrique direct) de part et d'autre de l'articulation coupée par rapport au repère de base de la boucle (cf. chapitre 2, section 2.4)

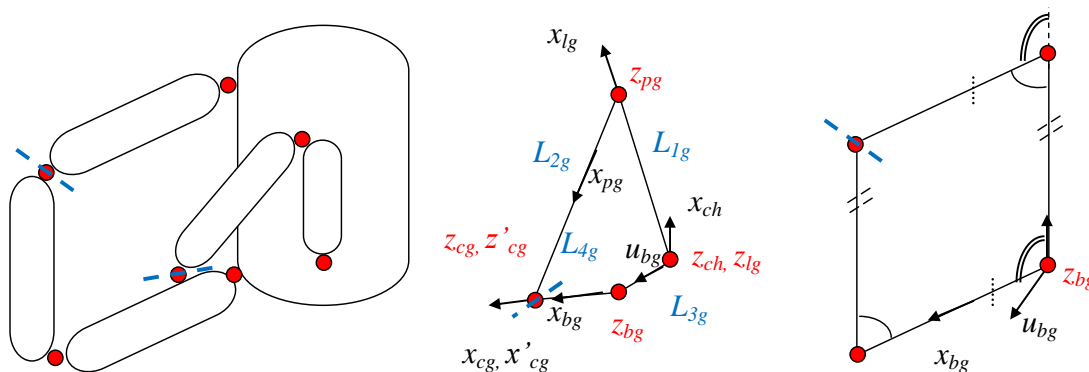


Figure 4.12 : Schéma de représentation du demi-train gauche

Tableau 4-2 : Paramètres géométriques de la boucle gauche reliant le parallélogramme, la suspension et la lyre

| $j$    | $a(j)$ | $\sigma_j$ | $\gamma_j$    | $b_j$ | $\alpha_j$ | $d_j$    | $\theta_j$    | $r_j$ | Commentaires   |
|--------|--------|------------|---------------|-------|------------|----------|---------------|-------|--|
| $l_g$  | ch     | 0          | 0             | 0     | 0          | 0        | $\theta_{lg}$ | 0     | Lyre   |
| $p_g$  | $l_g$  | 0          | 0             | 0     | 0          | $L_{1g}$ | $\theta_{pg}$ | 0     | Rotation pivot (liaison lyre-amortisseur)                |
| $b_g$  | ch     | 0          | $\gamma_{3g}$ | 0     | 0          | $L_{3g}$ | $\theta_{bg}$ | 0     | Rotation pivot (châssis- bras parallélogramme inférieur) |
| $c_g$  | $p_g$  | 0          | 0             | 0     | 0          | $L_{2g}$ | $\theta_{cg}$ | 0     | Articulation « coupure »                                 |
| $c'_g$ | $c_g$  | 2          | 0             | 0     | 0          | $L_{4g}$ | 0             | 0     | Articulation bloquée                                     |

Avec :

- $R_{ch}$  est un repère fixé au châssis dont l'origine est sur l'axe de rotation de la lyre avant.
- les repères  $R_{lg}, R_{pg}$  et  $R_{bg}$  désignent respectivement les repères liés à la lyre avant, à la suspension gauche et au bras inférieur du parallélogramme gauche.

➤ les repères  $R_{cg}$  et  $R'_{cg}$  désignent les repères de part et d'autre du point d'ouverture de la boucle.

Cette structure fermée est planaire et comporte quatre articulations. Il suffit donc d'avoir la valeur d'une de ces articulations pour calculer les valeurs des autres articulations. Dans la suite, nous calculons  $\theta_{pg}$ ,  $\theta_{bg}$  et  $\theta_{cg}$  en fonction de l'angle de rotation de la lyre  $\theta_{lg}$  et de la longueur de la suspension  $L_{2g}$ .

Les équations de fermeture de la boucle sont :

$$\gamma_{3g} - \theta_{lg} - \theta_{pg} + \theta_{bg} - \theta_{cg} = 0 \quad (4.3)$$

$$-L_{1g}^2 + L_{2g}^2 - L_{3g}^2 + L_{4g}^2 - 2L_{4g}L_{2g}\cos\theta_{cg} + 2L_{1g}L_{3g}\cos(\gamma_{3g} - \theta_{lg}) = 0 \quad (4.4)$$

$$L_{4g}\cos\theta_{bg} - L_{2g}\cos(\theta_{bg} - \theta_{cg}) = -L_{3g} + L_{1g}\cos(\gamma_{3g} - \theta_{lg}) \quad (4.5)$$

$$L_{4g}\sin\theta_{bg} - L_{2g}\sin(\theta_{bg} - \theta_{cg}) = -L_{1g}\sin(\gamma_{3g} - \theta_{lg}) \quad (4.5)$$

A partir de l'équation (4.3), nous obtenons :

$$\Rightarrow \theta_{cg} = a \cos\left(\frac{-L_{1g}^2 + L_{2g}^2 - L_{3g}^2 + L_{4g}^2 + 2L_{3g}L_{1g}\cos(\gamma_{3g} - \theta_{lg})}{2L_{4g}L_{2g}}\right) \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) est de la forme :

$$\begin{aligned} X \cos i + Y \cos(i + j) &= Z_1 \\ X \sin i + Y \sin(i + j) &= Z_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

La résolution de ce système conduit aux expressions :

$$\begin{aligned} \sin i &= \frac{B_1 Z_2 - B_2 Z_1}{B_1^2 + B_2^2} \\ \cos i &= \frac{B_1 Z_1 - B_2 Z_2}{B_1^2 + B_2^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Avec :

- $B_1 = X + Y \cos j$  ;  $B_2 = Y \sin j$  ;
- $X = L_{4g}$  ;  $Y = -L_{2g}$  ;  $Z_1 = -L_{3g} + L_{1g} \cos(\gamma_{3g} - \theta_{lg})$  ;  $Z_2 = -L_{1g} \sin(\gamma_{3g} - \theta_{lg})$

Donc nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sin \theta_{bg} &= \frac{(L_{4g} - L_{2g} \cos \theta_{cg})(-L_{1g} \sin(\gamma_{3g} - \theta_{lg})) + (-L_{2g} \sin \theta_{cg})(-L_{3g} + L_{1g} \cos(\gamma_{3g} - \theta_{lg}))}{L_{4g}^2 + L_{2g}^2 - 2L_{2g}L_{4g} \cos \theta_{cg}} \\ \cos \theta_{bg} &= \frac{(L_{4g} - L_{2g} \cos \theta_{cg})(-L_{3g} + L_{1g} \cos(\gamma_{3g} - \theta_{lg})) - L_{2g} \sin \theta_{cg} L_{1g} \sin(\gamma_{3g} - \theta_{lg})}{L_{4g}^2 + L_{2g}^2 - 2L_{2g}L_{4g} \cos \theta_{cg}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Alors  $\theta_{bg} = \tan^{-1}(\sin \theta_{bg} / \cos \theta_{bg})$

Enfin nous calculons  $\theta_{pg}$  de l'équation ( 4.3 ) :

$$\gamma_{3g} - \theta_{lg} + \theta_{bg} - \theta_{cg} = \theta_{pg}$$

### 2.2.2. Demi-train droit

Le demi- train droit est constitué d'un parallélogramme et d'une chaîne cinématique reliant ce dernier à la suspension droite et à la lyre (Figure 4.13). Les équations de fermeture des boucles sont calculées de la même manière que celles du demi-train gauche en fonction de l'angle de rotation de la lyre  $\theta_{ld}$  et du débattement de la suspension droite  $L_{2d}$ .

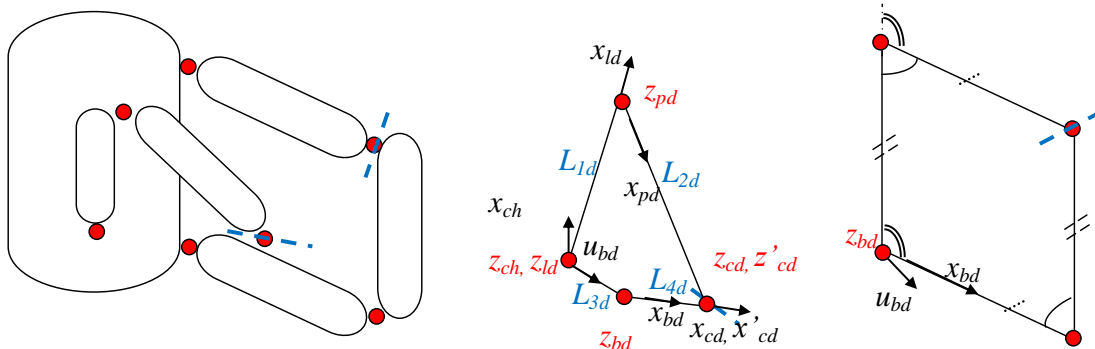


Figure 4.13 : schéma de représentation du demi-train droit

Tableau 4-3 : Paramètres géométriques de la boucle droite reliant le parallélogramme, la suspension et la lyre

| $j$    | $a(j)$ | $\sigma_j$ | $\gamma_j$    | $b_j$ | $\alpha_j$ | $d_j$           | $\theta_j$    | $r_j$ | <i>Commentaires</i>                                      |
|--------|--------|------------|---------------|-------|------------|-----------------|---------------|-------|--|
| $l_d$  | ch     | 0          | 0             | 0     | 0          | 0               | $\theta_{ld}$ | 0     | Lyre   |
| $p_d$  | $l_d$  | 0          | 0             | 0     | 0          | $L_{1d}=L_{1g}$ | $\theta_{pd}$ | 0     | Rotation pivot (liaison lyre- amortisseur)               |
| $b_d$  | ch     | 0          | $\gamma_{3d}$ | 0     | 0          | $L_{3d}=L_{3g}$ | $\theta_{bd}$ | 0     | Rotation pivot (châssis- bras parallélogramme inférieur) |
| $c_d$  | $p_d$  | 0          | 0             | 0     | 0          | $L_{2d}$        | $\theta_{4d}$ | 0     | Articulation « coupure »                                 |
| $c'_d$ | $c_d$  | 2          | 0             | 0     | 0          | $L_{4d}=L_{4g}$ | 0             | 0     | Articulation bloquée                                     |

Avec :

- les repères  $R_{ld}$ ,  $R_{pd}$  et  $R_{bd}$  désignent respectivement les repères liés à la lyre avant, à la suspension droite et au bras inférieur du parallélogramme droit.
- les repères  $R_{cd}$  et  $R_{c'd}$  désignent les repères de part et d'autre du point d'ouverture de la boucle.

Les équations de fermeture de la boucle sont :



$$\gamma_{3d} - \theta_{ld} - \theta_{pd} + \theta_{bd} - \theta_{cd} = 0 \quad (4.10)$$

$$-L_{1d}^2 + L_{2d}^2 - L_{3d}^2 + L_{4d}^2 - 2L_{4d}L_{2d} \cos \theta_{cd} + 2L_{1d}L_{3d} \cos(\gamma_{3d} - \theta_{ld}) = 0 \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} L_{4d} \cos \theta_{bd} - L_{2d} \cos(\theta_{bd} - \theta_{cd}) &= -L_{3d} + L_{1d} \cos(\gamma_{3d} - \theta_{ld}) \\ L_{4d} \sin \theta_{bd} - L_{2d} \sin(\theta_{bd} - \theta_{cd}) &= -L_{1d} \sin(\gamma_{3d} - \theta_{ld}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

A partir de l'équation ( 4.11 ), nous obtenons :

$$\theta_{cd} = -\cos^{-1}\left(\frac{-L_{1d}^2 + L_{2d}^2 - L_{3d}^2 + L_{4d}^2 + 2L_{3d}L_{1d} \cos(\gamma_{3d} - \theta_{ld})}{2L_{4d}L_{2d}}\right) \quad (4.13)$$

$$\sin \theta_{bd} = \frac{(L_{4d} - L_{2d} \cos \theta_{cd})(-L_{1d} \sin(\gamma_{3d} - \theta_{ld})) + (-L_{2d} \sin \theta_{cd})(-L_{3d} + L_{1d} \cos(\gamma_{3d} - \theta_{ld}))}{L_{4d}^2 + L_{2d}^2 - 2L_{2d}L_{4d} \cos \theta_{cd}} \quad (4.14)$$

$$\cos \theta_{bd} = \frac{(L_{4d} - L_{2d} \cos \theta_{cd})(-L_{3d} + L_{1d} \cos(\gamma_{3d} - \theta_{ld})) - L_{2d} \sin \theta_{cd} L_{1d} \sin(\gamma_{3d} - \theta_{ld})}{L_{4d}^2 + L_{2d}^2 - 2L_{2d}L_{4d} \cos \theta_{cd}}$$

Alors  $\theta_{bd} = \tan^{-1}(\sin \theta_{bd} / \cos \theta_{bd})$

$\theta_{pd}$  est calculée de l'équation ( 4.10 ) :

$$\gamma_{3d} - \theta_{ld} + \theta_{bd} - \theta_{cd} = \theta_{pd}$$

### 2.2.3. Modèle articulaire du train avant

Après la résolution des équations de contraintes des boucles du train avant, nous présentons un modèle articulaire de ce dernier sur la figure ( 4.14 ). Les paramètres géométriques de la structure arborescente du train avant sont présentés par le tableau 4-4.

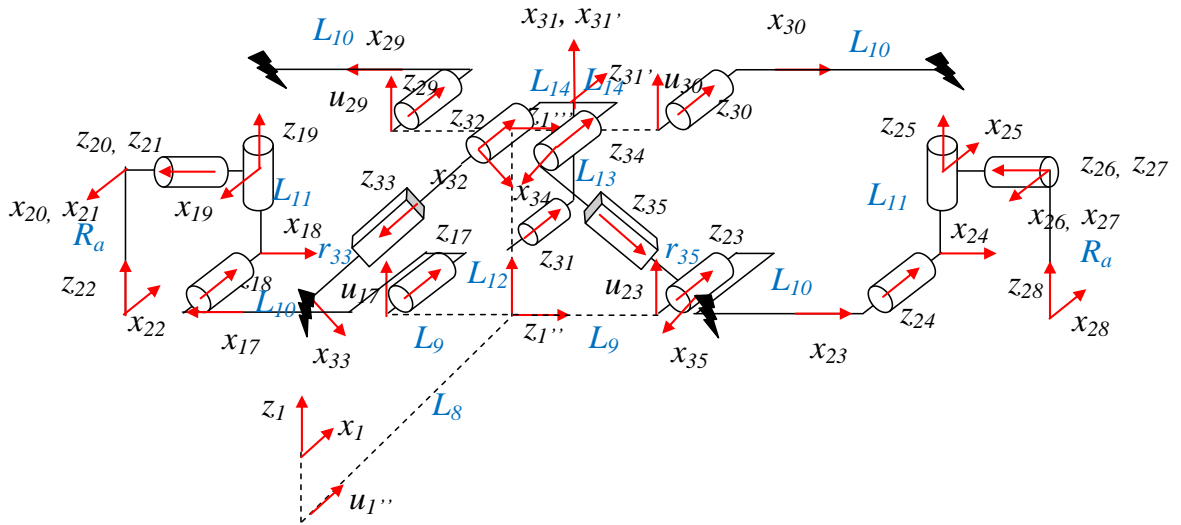


Figure 4.14 : Modèle articulaire du train avant de la Smera

Tableau 4-4 : Paramètres géométriques du train avant

| $j$    | $a(j)$ | $\sigma_j$ | $\gamma_j$ | $b_j$  | $\alpha_j$ | $d_j$     | $\theta_j$ | $r_j$    | Commentaires                                       |
|--------|--------|------------|------------|--------|------------|-----------|------------|----------|--|
| $1''$  | 1      | 2          | 0          | $-L_7$ | $\pi/2$    | $L_8$     | $\pi/2$    | 0        | Articulation bloquée                               |
| 17     | 1''    | 0          | 0          | $-L_9$ | $\pi/2$    | 0         | $q_{17}$   | 0        | Rotation parallélogramme G                         |
| 18     | 17     | 0          | 0          | 0      | 0          | $L_{10}$  | $q_{18}$   | 0        | Rotation parallélogramme G                         |
| 19     | 18     | 0          | 0          | 0      | $\pi/2$    | 0         | $q_{19}$   | $L_{11}$ | Braquage gauche                                    |
| 20     | 19     | 2          | 0          | 0      | $\pi/2$    | 0         | 0          | 0        | Articulation bloquée                               |
| 21     | 20     | 0          | 0          | 0      | 0          | 0         | $q_{21}$   | 0        | Rotation roue AVG                                  |
| 22     | 20     | 2          | 0          | 0      | $-\pi/2$   | 0         | $\pi$      | $-R_a$   | Articulation bloquée (repère point de contact AVG) |
| 23     | 1''    | 0          | 0          | $L_9$  | $\pi/2$    | 0         | $q_{23}$   | 0        | Rotation parallélogramme D                         |
| 24     | 23     | 0          | 0          | 0      | 0          | $L_{10}$  | $q_{24}$   | 0        | Rotation parallélogramme D                         |
| 25     | 24     | 0          | 0          | 0      | 0          | 0         | $q_{25}$   | $L_{11}$ | Braquage droite                                    |
| 26     | 25     | 2          | 0          | 0      | $-\pi/2$   | 0         | $\pi$      | 0        | Articulation bloquée                               |
| 27     | 26     | 0          | 0          | 0      | 0          | 0         | $q_{27}$   | 0        | Rotation roue AVD                                  |
| 28     | 26     | 2          | 0          | 0      | $-\pi/2$   | 0         | $\pi$      | $-R_a$   | Articulation bloquée (repère point de contact AVD) |
| $1'''$ | 1''    | 2          | 0          | 0      | 0          | $2L_{11}$ | 0          | 0        | Articulation bloquée                               |
| 29     | 1'''   | 0          | 0          | $-L_9$ | $\pi/2$    | 0         | $q_{29}$   | 0        | Rotation parallélogramme G                         |
| 30     | 1'''   | 0          | 0          | $L_9$  | $\pi/2$    | 0         | $q_{30}$   | 0        | Rotation parallélogramme D                         |
| 31     | 1''    | 0          | 0          | 0      | $\pi/2$    | $L_{12}$  | $q_{31}$   | 0        | Lyre   |
| 31'    | 31     | 2          | 0          | 0      | 0          | $L_{13}$  | 0          | 0        | Articulation bloquée                               |
| 32     | 31'    | 0          | $-\pi/2$   | 0      | 0          | $L_{14}$  | $q_{32}$   | 0        | Rotation pivot                                     |
| 33     | 32     | 1          | 0          | 0      | $\pi/2$    | 0         | 0          | $q_{33}$ | Débattement de suspension AVG                      |
| 34     | 31'    | 0          | $-\pi/2$   | 0      | 0          | $-L_{14}$ | $q_{34}$   | 0        | Rotation pivot                                     |
| 35     | 34     | 1          | 0          | 0      | $\pi/2$    | 0         | 0          | $q_{35}$ | Débattement de suspension AVD                      |

Avec :

- $q_{17}$ ,  $q_{18}$  et  $q_{19}$  représentent les rotations du parallélogramme gauche ;
- $q_{23}$ ,  $q_{24}$  et  $q_{30}$  représentent les rotations du parallélogramme droit ;
- $q_{21}$  et  $q_{27}$  représentent les positions angulaires des roues avant gauche et droite, autour de leur axe de rotation ;
- $q_{19}$  et  $q_{25}$  représentent respectivement les angles de braquage des deux roues avant gauche et droite ;
- $q_{33}$  et  $q_{35}$  représentent respectivement les débattements en translation des suspensions avant gauche et droite et sont égales respectivement à  $L_{2g}$  et  $L_{2d}$  ;
- $q_{31}$  représente la rotation de la lyre avant autour de son axe de rotation ;
- $L_{1g} = L_{1d} = \sqrt{L_{13}^2 + L_{14}^2}$
- $L_{3g} = L_{3d} = \sqrt{L_9^2 + L_{12}^2}$

- les 3 repères  $R_1, R_1'', R_1'''$  sont fixés au châssis (corps  $C_1$ );
- La matrice d'orientation des repères de contact avec le sol  $R_{22}$  et  $R_{26}$  par rapport au repère  $R_1$  dépend respectivement de l'angle de braquage  $q_{19}$  ou  $q_{25}$  respectivement.

Les figures suivantes représentent le calcul des coordonnées articulaires du train avant en fonction des variables utilisés dans les sections 2.2.1 et 2.2.2 :

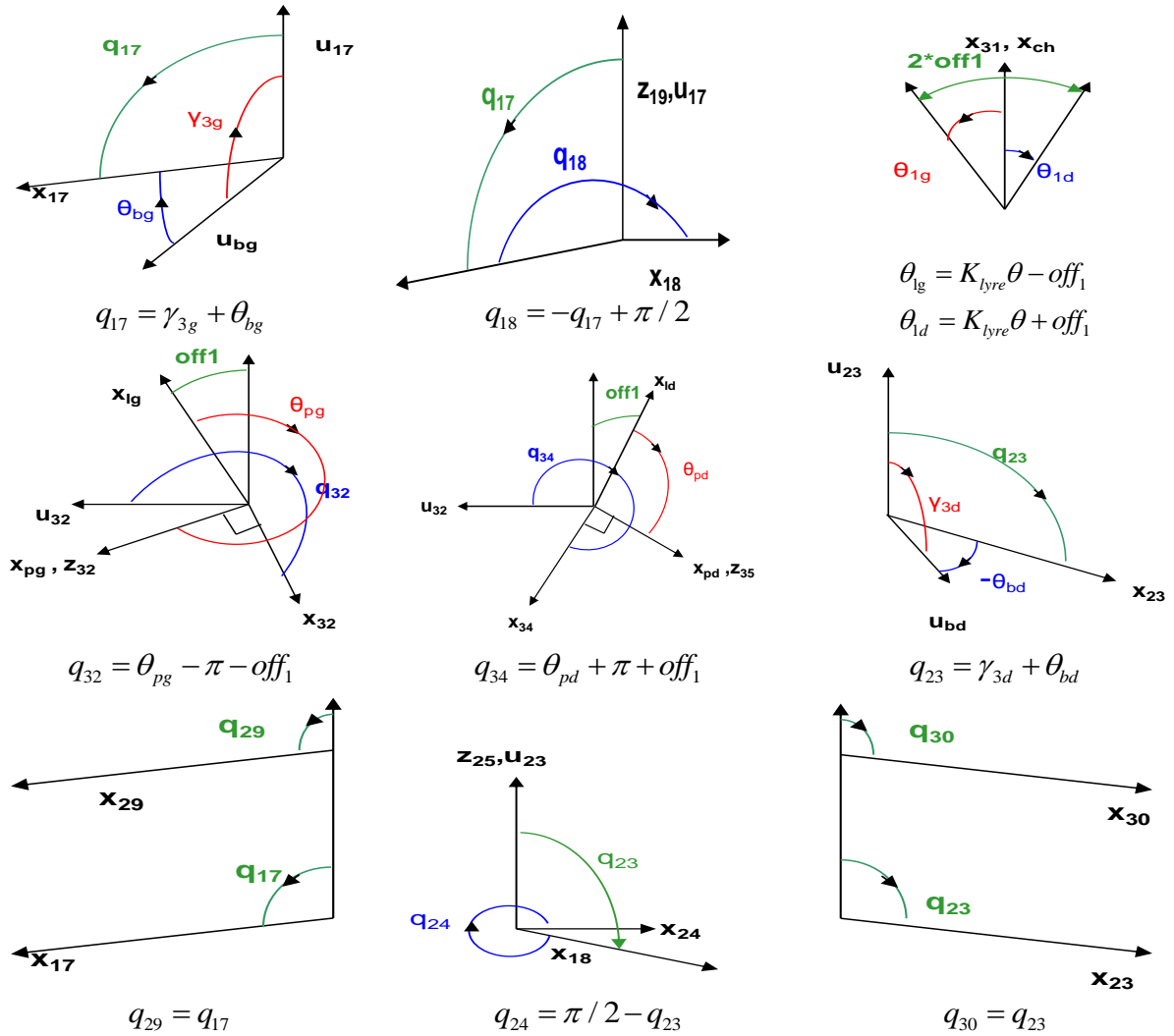


Figure 4.15 : Coordonnées articulaires du train avant

### 3. Modèle cinématique de la Smera

Le modèle cinématique de la Smera permet de décrire les dérivées des variables dépendantes cinématiquement en fonction des dérivées des variables indépendantes.

Soit  $q_{e,l}$ , le vecteur de configuration des 32 degrés de liberté, composé par le vecteur  $\xi$  (6x1) de posture du véhicule, et les coordonnées articulaires de la structure arborescente de la Smera :

$$q_{e\_l} = \begin{bmatrix} q_{ind}^T & q_{dep}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.15)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright q_{ind} &= [x \quad y \quad z \quad \theta \quad \phi \quad \psi \quad q_2 \quad q_5 \quad q_8 \quad q_{33} \quad q_{35} \quad q_{21} \quad q_{27} \quad q_{11} \quad q_{15} \quad q_{19} \quad q_{25}]^T \\ q_{dep} &= [q_3 \quad q_4 \quad q_9 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_{13} \quad q_{17} \quad q_{18} \quad q_{29} \quad q_{23} \quad q_{24} \quad q_{30} \quad q_{31} \quad q_{32} \quad q_{34}]^T \end{aligned}$$

Nous notons que les variables indépendantes sont soit motorisées comme la lyre arrière ( $q_2$ ), la rotation des roues arrières actionnées ( $q_{11}$ ,  $q_{15}$ ), soit obtenues par l'intégration du modèle dynamique comme les six degrés de liberté du châssis ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\theta$ ,  $\Phi$ ,  $\psi$ ), les débattements des suspensions ( $q_5$ ,  $q_8$ ,  $q_{33}$ ,  $q_{35}$ ), les rotations des roues avant ( $q_{21}$ ,  $q_{27}$ ) et les angles de braquage sur les deux roues avant ( $q_{19}$ ,  $q_{25}$ ).

Soit  $qv_{e\_l}$  le vecteur vitesse de configuration des 32 degrés de liberté

$$qv_{e\_l} = \begin{bmatrix} qv_{ind}^T & \dot{q}_{dep}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.16)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright qv_{ind} &= [{}^1V_{1x} \quad {}^1V_{1y} \quad {}^1V_{1z} \quad {}^1\omega_{1x} \quad {}^1\omega_{1y} \quad {}^1\omega_{1z} \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_8 \quad \dot{q}_{33} \quad \dot{q}_{35} \quad \dot{q}_{21} \quad \dot{q}_{27} \quad \dot{q}_{11} \quad \dot{q}_{15} \quad \dot{q}_{19} \quad \dot{q}_{25}]^T \\ \dot{q}_{dep} &= [\dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_9 \quad \dot{q}_6 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_{13} \quad \dot{q}_{17} \quad \dot{q}_{18} \quad \dot{q}_{29} \quad \dot{q}_{23} \quad \dot{q}_{24} \quad \dot{q}_{30} \quad \dot{q}_{31} \quad \dot{q}_{32} \quad \dot{q}_{34}]^T \end{aligned}$$

La résolution des équations de contraintes des boucles (parallélogramme, ...) se ramène à :

$$\begin{aligned} \dot{q}_{17} &= \dot{\theta}_{bg} & \dot{q}_{18} &= -\dot{q}_{17} & \dot{q}_{32} &= \dot{\theta}_{pg} & \dot{q}_{29} &= \dot{q}_{17} & \dot{\theta}_{lg} &= K_{lyre} \dot{\theta} \\ \dot{q}_{23} &= \dot{\theta}_{bd} & \dot{q}_{24} &= -\dot{q}_{23} & \dot{q}_{34} &= \dot{\theta}_{pd} & \dot{q}_{30} &= \dot{q}_{23} & \dot{\theta}_{ld} &= K_{lyre} \dot{\theta} \end{aligned}$$

Soit  $qa_{e\_l}$ , le vecteur accélération de configuration des 32 degrés de liberté :

$$qa_{e\_l} = \begin{bmatrix} qa_{ind}^T & \ddot{q}_{dep}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.17)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright qa_{ind} &= [{}^1\dot{V}_{1x} \quad {}^1\dot{V}_{1y} \quad {}^1\dot{V}_{1z} \quad {}^1\dot{\omega}_{1x} \quad {}^1\dot{\omega}_{1y} \quad {}^1\dot{\omega}_{1z} \quad \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_5 \quad \ddot{q}_8 \quad \ddot{q}_{33} \quad \ddot{q}_{35} \quad \ddot{q}_{21} \quad \ddot{q}_{27} \quad \ddot{q}_{11} \quad \ddot{q}_{15} \quad \ddot{q}_{19} \quad \ddot{q}_{25}]^T \\ \ddot{q}_{dep} &= [\ddot{q}_3 \quad \ddot{q}_4 \quad \ddot{q}_9 \quad \ddot{q}_6 \quad \ddot{q}_7 \quad \ddot{q}_{13} \quad \ddot{q}_{17} \quad \ddot{q}_{18} \quad \ddot{q}_{29} \quad \ddot{q}_{23} \quad \ddot{q}_{24} \quad \ddot{q}_{30} \quad \ddot{q}_{31} \quad \ddot{q}_{32} \quad \ddot{q}_{34}]^T \\ \ddot{q}_{17} &= \ddot{\theta}_{bg} & \ddot{q}_{18} &= -\ddot{q}_{17} & \ddot{q}_{32} &= \ddot{\theta}_{pg} & \ddot{q}_{29} &= \ddot{q}_{17} & \ddot{\theta}_{lg} &= K_{lyre} \ddot{\theta} \\ \ddot{q}_{23} &= \ddot{\theta}_{bd} & \ddot{q}_{24} &= -\ddot{q}_{23} & \ddot{q}_{34} &= \ddot{\theta}_{pd} & \ddot{q}_{30} &= \ddot{q}_{23} & \ddot{\theta}_{ld} &= K_{lyre} \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Dans la suite nous établissons les relations qui calculent respectivement  $\dot{q}_{dep}$  et  $\ddot{q}_{dep}$  en fonction de  $qv_{ind}$  et  $qa_{ind}$  à travers les équations de contraintes cinématiques de fermeture des boucles.

### 3.1. Train arrière

Dans cette section, nous présentons le calcul des vitesses articulaires des articulations dépendantes du train arrière  $(\dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_9 \ \dot{q}_6 \ \dot{q}_7 \ \dot{q}_{13})$  en fonction des vitesses articulaires  $(\dot{q}_2 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_8)$ .

#### 3.1.1. Demi -train arrière gauche

Les repères  $R_5$  et  $R_9$  sont fixés au bras gauche arrière du véhicule (Figure 4.9 ). La position  ${}^9P_5$  entre les deux origines étant constante, on a :

$${}^9P_5 = cte = \begin{bmatrix} L_p \\ f_p \\ g_p \end{bmatrix}$$

La coupure de la boucle arrière gauche est réalisée au niveau de la rotule inférieure. Son centre est confondu avec l'origine du repère  $R_5$  et sa vitesse linéaire peut être calculée en parcourant les deux branches (a et b) de part et d'autre de l'articulation coupée (Figure 4.9 ).

Vu que la base de la boucle est le châssis qui est un corps mobile, ses vitesses linéaires et angulaires vont se propager tout au long des deux branches jusqu'au point de coupure. En égalisant les vitesses linéaires des extrémités des 2 branches par rapport à la base mobile, la vitesse de la base mobile est éliminée des relations. Il est donc possible de mettre à zéro les vitesses linéaires et angulaires du châssis (corps  $C_1$ ) a priori pour le calcul des relations de contrainte de fermeture.

La vitesse linéaire du repère  $R_5$  à travers la branche « a » s'exprime par l'équation

$${}^1V_{5(a)} = {}^1R_5 {}^5V_5 \quad (4.18)$$

Avec :

➤  ${}^1R_5$ , la matrice d'orientation entre le repère  $R_1$  et  $R_5$

$${}^1R_5 = \begin{bmatrix} \cos q_4 \sin q_3 & -\cos q_3 & \sin q_3 \sin q_4 \\ \cos q_2 \cos q_3 \cos q_4 + \sin q_2 \sin q_4 & \cos q_2 \sin q_3 & -\cos q_4 \sin q_2 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_4 \\ \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2 - \cos q_2 \sin q_4 & \sin q_2 \sin q_3 & \cos q_2 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4 \end{bmatrix}$$

➤  ${}^5V_5$ , le vecteur vitesse du repère  $R_5$  par rapport au repère  $R_1$  exprimé dans le repère  $R_5$

$${}^5V_5 = \begin{bmatrix} \cos q_4 \cos q_3 L_2 \dot{q}_2 - \sin q_4 L_1 \dot{q}_2 + q_5 (\dot{q}_4 - \cos q_3 \dot{q}_2) \\ L_2 \dot{q}_2 \sin q_3 - q_5 (\dot{q}_3 \sin q_4 + \cos q_4 \dot{q}_2 \sin q_3) \\ \dot{q}_5 + \sin q_4 \cos q_3 L_2 \dot{q}_2 + \cos q_4 L_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Ceci ramène à l'équation suivante :

$${}^1V_{5a} = \begin{bmatrix} \cos q_4 \sin q_3 q_5 \dot{q}_4 + \cos q_3 q_5 \dot{q}_3 \sin q_4 + \sin q_3 \sin q_4 \dot{q}_5 \\ (\cos q_2 \cos q_3 \cos q_4 q_5 + \sin q_2 \sin q_4 q_5) \dot{q}_4 + (-\sin q_2 L_1 - \sin q_2 \sin q_4 q_5 \cos q_3 + \cos q_2 L_2 - \cos q_2 q_5 \cos q_4) \dot{q}_2 \\ -\cos q_2 \sin q_3 q_5 \sin q_4 \dot{q}_3 + (\cos q_2 \cos q_3 \sin q_4 - \cos q_4 \sin q_2) \dot{q}_5 \\ (\sin q_2 \cos q_3 \cos q_4 q_5 - \cos q_2 \sin q_4 q_5) \dot{q}_4 + (\cos q_2 L_1 + \cos q_2 \sin q_4 q_5 \cos q_3 + \sin q_2 L_2 - \sin q_2 q_5 \cos q_4) \dot{q}_2 \\ -\sin q_2 \sin q_3 q_5 \sin q_4 \dot{q}_3 + (\sin q_2 \cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \cos q_2) \dot{q}_5 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

La vitesse linéaire du repère  $R_5$  à travers la branche « b » s'exprime par la relation suivante (Figure 4.9) :

$${}^1V_{5(b)} = {}^1R_9 {}^9V_5 \quad (4.20)$$

Avec :

➤  ${}^1R_9$ , la matrice d'orientation entre le repère  $R_1$  et  $R_9$

$${}^1R_9 = \begin{bmatrix} \cos q_9 & -\sin q_9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin q_9 & \cos q_9 & 0 \end{bmatrix}$$

➤  ${}^9V_5$ , le vecteur vitesse du repère  $R_5$  exprimé dans le repère  $R_9$

$$\begin{aligned} {}^9V_5 &= {}^9V_9 + {}^9\omega_9 \wedge {}^9P_5 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_9 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} L_p \\ f_p \\ g_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_9 f_p \\ L_p \dot{q}_9 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$${}^1V_{5b} = \begin{bmatrix} -\cos q_9 \dot{q}_9 f_p - \sin q_9 L_p \dot{q}_9 \\ 0 \\ -\sin q_9 \dot{q}_9 f_p + \cos q_9 L_p \dot{q}_9 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Egalisons  ${}^1V_{5(a)}$  et  ${}^1V_{5(b)}$  et mettons l'équation correspondante sous une forme matricielle telle :

$$S_1 \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_9 \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Avec :

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos q_3 q_5 \sin q_4 & \cos q_4 \sin q_3 q_5 & \cos q_9 f_p + \sin q_9 L_p \\ -\cos q_2 \sin q_3 q_5 \sin q_4 & \cos q_2 \cos q_3 \cos q_4 q_5 + \sin q_2 \sin q_4 q_5 & 0 \\ -\sin q_2 \sin q_3 q_5 \sin q_4 & \sin q_2 \cos q_3 \cos q_4 q_5 - \cos q_2 \sin q_4 q_5 & \sin q_9 f_p - \cos q_9 L_p \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -\sin q_3 \sin q_4 & 0 \\ -\cos q_2 \cos q_3 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_2 & \sin q_2 L_1 + \sin q_2 \sin q_4 q_5 \cos q_3 - \cos q_2 L_2 + \cos q_2 q_5 \cos q_4 \\ -\sin q_2 \cos q_3 \sin q_4 - \cos q_4 \cos q_2 & -\cos q_2 L_1 - \cos q_2 \sin q_4 q_5 \cos q_3 - \sin q_2 L_2 + \sin q_2 q_5 \cos q_4 \end{bmatrix}$$

### 3.1.2. Demi -train arrière droit

Les repères  $R_8$  et  $R_{13}$  sont fixés au bras droit arrière du véhicule (Figure 4.9). La position  ${}^{13}P_8$  entre les deux origines étant constante, on a :

$${}^{13}P_8 = cte = \begin{bmatrix} L_p \\ -f_p \\ g_p \end{bmatrix}$$

D'une façon similaire, la coupure de la boucle arrière droite se situe au niveau de la rotule inférieure. Son centre est confondu avec l'origine du repère  $R_8$  et sa vitesse linéaire peut être calculée en parcourant les deux branches (c et d) de part et d'autre de l'articulation coupée (Figure 4.9).

La vitesse linéaire du repère  $R_8$  à travers la branche « c » s'exprime par l'équation suivante :

$${}^1V_{8(c)} = {}^1R_8 {}^8V_8 \quad (4.23)$$

Avec :

➤  ${}^1R_8$ , la matrice d'orientation entre le repère  $R_1$  et  $R_8$

$${}^1R_8 = \begin{bmatrix} -\cos q_7 \sin q_6 & -\cos q_6 & -\sin q_6 \sin q_7 \\ \cos q_2 \cos q_7 \cos q_6 + \sin q_2 \sin q_7 & -\cos q_2 \sin q_6 & -\cos q_7 \sin q_2 + \cos q_2 \cos q_6 \sin q_7 \\ \cos q_7 \cos q_6 \sin q_2 - \cos q_2 \sin q_7 & -\sin q_2 \sin q_6 & \cos q_2 \cos q_7 + \cos q_6 \sin q_2 \sin q_7 \end{bmatrix}$$

➤  ${}^8V_8$ , le vecteur vitesse du repère  $R_8$  par rapport au repère  $R_1$  exprimé dans le repère  $R_8$

$${}^8V_8 = \begin{bmatrix} -\cos q_7 \cos q_6 L_2 \dot{q}_2 - \sin q_7 L_1 \dot{q}_2 + q_8 (\dot{q}_7 - \cos q_6 \dot{q}_2) \\ L_2 \dot{q}_2 \sin q_6 - q_8 (-\dot{q}_6 \sin q_7 - \cos q_7 \dot{q}_2 \sin q_6) \\ \dot{q}_8 - \sin q_7 \cos q_6 L_2 \dot{q}_2 + \cos q_7 L_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Ceci ramène à l'équation suivante :

$${}^1V_{8(c)} = \begin{bmatrix} -\cos q_7 \sin q_6 q_8 \dot{q}_7 - \cos q_6 q_8 \dot{q}_6 \sin q_7 - \sin q_7 \sin q_6 \dot{q}_8 \\ (\cos q_7 \cos q_2 \cos q_6 q_8 + \sin q_7 \sin q_2) \dot{q}_7 + (-\sin q_2 L_1 - \sin q_7 \sin q_2 q_8 \cos q_6 - \cos q_2 L_2 - \cos q_2 q_8 \cos q_7) \dot{q}_2 \\ -\cos q_2 \sin q_7 \sin q_6 q_8 \dot{q}_6 + (\cos q_2 \cos q_6 \sin q_7 - \cos q_7 \sin q_2) \dot{q}_8 \\ (-\cos q_2 \sin q_7 q_8 + \cos q_7 \cos q_6 \sin q_2 q_8) \dot{q}_7 + (\cos q_2 L_1 + \cos q_2 \sin q_7 q_8 \cos q_6 - \sin q_2 L_2 - \sin q_2 q_8 \cos q_7) \dot{q}_2 \\ -\sin q_2 \sin q_7 \sin q_6 q_8 \dot{q}_6 + (\sin q_2 \cos q_6 \sin q_7 + \cos q_7 \cos q_2) \dot{q}_8 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

La vitesse linéaire du repère  $R_8$  à travers la branche «d» s'exprime par la relation suivante :

$${}^1V_{8(d)} = {}^1R_{13} {}^{13}V_8 \quad (4.25)$$

Avec :

➤  ${}^1R_{13}$ , la matrice d'orientation entre le repère  $R_1$  et  $R_{13}$

$${}^1R_{13} = \begin{bmatrix} \cos q_{13} & -\sin q_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin q_{13} & -\cos q_{13} & 0 \end{bmatrix}$$

➤  ${}^{13}V_8$ , le vecteur vitesse du repère  $R_5$  exprimé dans le repère  $R_9$

$$\begin{aligned} {}^{13}V_8 &= {}^{13}V_{13} + {}^{13}\omega_{13} \wedge {}^{13}P_8 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_{13} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} L_p \\ -f_p \\ g_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{13} f_p \\ L_p \dot{q}_{13} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$${}^1V_{8(d)} = \begin{bmatrix} \cos q_{13} \dot{q}_{13} f_p - \sin q_{13} L_p \dot{q}_{13} \\ 0 \\ -\sin q_{13} \dot{q}_{13} f_p - \cos q_{13} L_p \dot{q}_{13} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Egalisons  ${}^1V_{8(c)}$  et  ${}^1V_{8(d)}$  et mettons l'équation correspondante sous une forme matricielle telle que :

$$S_2 \begin{bmatrix} \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_{13} \end{bmatrix} = N_2 \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Avec :

$$S_2 = \begin{bmatrix} -\cos q_6 q_8 \sin q_7 & -\cos q_7 \sin q_6 q_8 & -\cos q_{13} f_p + \sin q_{13} L_p \\ -\cos q_2 \sin q_6 q_8 \sin q_7 & \cos q_2 \cos q_7 \cos q_6 q_8 + \sin q_2 \sin q_7 q_8 & 0 \\ -\sin q_2 \sin q_6 q_8 \sin q_7 & \cos q_2 \cos q_7 \cos q_6 q_8 - \cos q_2 \sin q_7 q_8 & \sin q_{13} f_p + \cos q_{13} L_p \end{bmatrix}$$



$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sin q_7 \sin q_6 \\ \sin q_2 L_1 + \sin q_2 \sin q_7 q_8 \cos q_6 + \cos q_2 L_2 + \cos q_2 q_8 \cos q_7 & -\cos q_2 \cos q_6 \sin q_7 + \cos q_7 \sin q_2 \\ -\cos q_2 L_1 - \cos q_2 \sin q_7 q_8 \cos q_6 + \sin q_2 L_2 + \sin q_2 q_8 \cos q_7 & -\sin q_2 \cos q_6 \sin q_7 - \cos q_7 \cos q_2 \end{bmatrix}$$

### 3.1.3. Relations entre les vitesses et les accélérations du train arrière

Les équations ( 4.22) et ( 4.27) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} S_{1(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & S_{2(3 \times 3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_9 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 1)} \\ 0_{(3 \times 1)} & N_{2(3 \times 2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_9 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{-1} & 0_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & S_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 1)} \\ 0_{(3 \times 1)} & N_{2(3 \times 2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} = J_{t_1} \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Avec :

$$J_{t_1} = \begin{bmatrix} S_1^{-1} & 0_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & S_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 1)} \\ 0_{(3 \times 1)} & N_{2(3 \times 2)} \end{bmatrix}$$

La dérivée des équations ( 4.22) et ( 4.27) mène respectivement aux équations ( 4.29) et ( 4.30) :

$$S_1 \begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_9 \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \dot{N}_1 \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - \dot{S}_1 \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_9 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$S_2 \begin{bmatrix} \ddot{q}_6 \\ \ddot{q}_7 \\ \ddot{q}_{13} \end{bmatrix} = N_2 \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_8 \end{bmatrix} + \dot{N}_2 \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} - \dot{S}_2 \begin{bmatrix} \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_{13} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Avec  $\dot{S}_1, \dot{N}_1, \dot{S}_2$  et  $\dot{N}_2$  représentent respectivement les dérivées temporelles des termes des matrices  $S_1, N_1, S_2$  et  $N_2$ .

En combinant les deux équations ( 4.29) et ( 4.30 ), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_9 \\ \ddot{q}_6 \\ \ddot{q}_7 \\ \ddot{q}_{13} \end{bmatrix} = J_{t1} \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} + Y1 \quad (4.31)$$

$$\text{Avec : } Y_1 = \begin{bmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & S_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{N}_1 & 0 \\ 0 & \dot{N}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{S}_1 & 0 \\ 0 & \dot{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_9 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_{13} \end{bmatrix}$$

### 3.1.4. Relations entre les vitesses et les accélérations du train avant

Dans cette section nous allons calculer les vitesses des articulations dépendantes du train avant en fonction des vitesses articulaires des débattements des suspensions et de la vitesse de roulis du véhicule. L'équation (2.43) nous permet d'écrire la vitesse de roulis en fonction du vecteur vitesse angulaire du châssis exprimé dans le repère  $R_1$ . Ceci se traduit par l'équation (4.32):

$$\dot{\theta} = \omega_x + tg \varphi \sin \theta \omega_y + tg \varphi \cos \theta \omega_z \quad (4.32)$$

### 3.1.5. Demi-train avant gauche

La dérivée des relations de l'équation (4.5) conduit à un système d'équations sous la forme :

$$\begin{aligned} X_{1g} \dot{\theta}_{bg} + Y_{1g} (\dot{\theta}_{bg} - \dot{\theta}_{cg}) &= Z_{1g} \\ X_{2g} \dot{\theta}_{bg} + Y_{2g} (\dot{\theta}_{bg} - \dot{\theta}_{cg}) &= Z_{2g} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Avec :

$$\begin{aligned} X_{1g} &= -L_{4g} \sin \theta_{bg} & Y_{1g} &= q_{33} \sin(\theta_{bg} - \theta_{cg}) & Z_{1g} &= L_{1g} \sin(\gamma_{3g} - \theta_{lg}) \dot{\theta}_{lg} + \dot{q}_{33} \cos(\theta_{bg} - \theta_{cg}) \\ X_{2g} &= L_{4g} \sin \theta_{bg} & Y_{2g} &= -q_{33} \cos(\theta_{bg} - \theta_{cg}) & Z_{2g} &= L_{1g} \cos(\gamma_{3g} - \theta_{lg}) \dot{\theta}_{lg} + \dot{q}_{33} \sin(\theta_{bg} - \theta_{cg}) \end{aligned}$$

La résolution du système précédent donne :

$$\dot{\theta}_{bg} = \frac{Z_{1g} Y_{2g} - Z_{2g} Y_{1g}}{Y_{2g} X_{1g} - Y_{1g} X_{2g}} \quad (4.34)$$

$$\dot{\theta}_{cg} = \frac{Z_{1g} (X_{2g} + Y_{2g}) - Z_{2g} (X_{1g} + Y_{1g})}{Y_{2g} X_{1g} - Y_{1g} X_{2g}} \quad (4.35)$$

A partir de la dérivée de l'équation (4.3), nous obtenons :

$$\dot{\theta}_{pg} = -\dot{\theta}_{lg} + \dot{\theta}_{bg} - \dot{\theta}_{cg} \quad (4.36)$$

La dérivée du système de l'équation ( 4.33 ) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} X_{1g} \ddot{\theta}_{bg} + Y_{1g} (\ddot{\theta}_{bg} - \ddot{\theta}_{cg}) &= M_{1g} \\ X_{2g} \ddot{\theta}_{bg} + Y_{2g} (\ddot{\theta}_{bg} - \ddot{\theta}_{cg}) &= M_{2g} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Avec :

$$\begin{aligned} M_{1g} &= -\dot{X}_{1g} \dot{\theta}_{bg} - \dot{Y}_{1g} (\dot{\theta}_{bg} - \dot{\theta}_{cg}) + \dot{Z}_{1g} & M_{2g} &= -\dot{X}_{2g} \dot{\theta}_{bg} - \dot{Y}_{2g} (\dot{\theta}_{bg} - \dot{\theta}_{cg}) + \dot{Z}_{2g} \\ \dot{X}_{2g} &= L_{4g} \dot{\theta}_{bg} \cos \theta_{bg} & Y_{1g} &= -\dot{q}_{33} \cos(\theta_{bg} - \theta_{cg}) + q_{33} (\dot{\theta}_{bg} - \dot{\theta}_{cg}) \sin(\theta_{bg} - \theta_{cg}) \\ \dot{Z}_{1g} &= L_{1g} \cos(\gamma_{3g} - \theta_{lg}) \ddot{\theta}_{lg} + L_{1g} \sin(\gamma_{3g} - \theta_{lg}) \dot{\theta}_{lg}^2 + \dot{q}_{33} \cos(\theta_{bg} - \theta_{cg}) - \dot{q}_{33} (\dot{\theta}_{bg} - \dot{\theta}_{cg}) \sin(\theta_{bg} - \theta_{cg}) \\ \dot{Z}_{2g} &= L_{1g} \cos(\gamma_{3g} - \theta_{lg}) \ddot{\theta}_{lg} - L_{1g} \sin(\gamma_{3g} - \theta_{lg}) \dot{\theta}_{lg}^2 + \dot{q}_{33} \sin(\theta_{bg} - \theta_{cg}) + \dot{q}_{33} (\dot{\theta}_{bg} - \dot{\theta}_{cg}) \cos(\theta_{bg} - \theta_{cg}) \end{aligned}$$

La résolution de l'équation ( 4.37 ) donne :

$$\ddot{\theta}_{bg} = \frac{M_{1g} Y_{2g} - M_{2g} Y_{1g}}{Y_{2g} X_{1g} - Y_{1g} X_{2g}} \quad (4.38)$$

$$\ddot{\theta}_{cg} = \frac{M_{1g} (X_{2g} + Y_{2g}) - M_{2g} (X_{1g} + Y_{1g})}{Y_{2g} X_{1g} - Y_{1g} X_{2g}} \quad (4.39)$$

A partir de la dérivée de l'équation ( 4.36 ), nous obtenons :

$$\ddot{\theta}_{pg} = -\ddot{\theta}_{lg} + \ddot{\theta}_{bg} - \ddot{\theta}_{cg} \quad (4.40)$$

### 3.1.6. Demi-train avant droit

La dérivée des relations de l'équation ( 4.12 ) conduit à un système d'équation sous la forme :

$$\begin{aligned} X_{1d} \dot{\theta}_{bd} + Y_{1d} (\dot{\theta}_{bd} - \dot{\theta}_{cd}) &= Z_{1d} \\ X_{2d} \dot{\theta}_{bd} + Y_{2d} (\dot{\theta}_{bd} - \dot{\theta}_{cd}) &= Z_{2d} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Avec :

$$\begin{aligned} X_{1d} &= -L_{4d} \sin \theta_{bd} & Y_{1d} &= q_{35} \sin(\theta_{bd} - \theta_{cd}) & Z_{1d} &= L_{1d} \sin(\gamma_{3d} - \theta_{1d}) \dot{\theta}_{1d} + \dot{q}_{35} \cos(\theta_{bd} - \theta_{cd}) \\ X_{2d} &= L_{4d} \sin \theta_{bd} & Y_{2d} &= -q_{35} \cos(\theta_{bd} - \theta_{cd}) & Z_{2d} &= L_{1d} \cos(\gamma_{3d} - \theta_{1d}) \dot{\theta}_{1d} + \dot{q}_{35} \sin(\theta_{bd} - \theta_{cd}) \end{aligned}$$

La résolution du système précédent donne :

$$\dot{\theta}_{bd} = \frac{Z_{1d} Y_{2d} - Z_{2d} Y_{1d}}{Y_{2d} X_{1d} - Y_{1d} X_{2d}} \quad (4.42)$$

$$\dot{\theta}_{cd} = \frac{Z_{1d} (X_{2d} + Y_{2d}) - Z_{2d} (X_{1d} + Y_{1d})}{Y_{2d} X_{1d} - Y_{1d} X_{2d}} \quad (4.43)$$

A partir de la dérivée de l'équation ( 4.10 ), nous obtenons :

$$\dot{\theta}_{pd} = -\dot{\theta}_{ld} + \dot{\theta}_{bd} - \dot{\theta}_{cd} \quad (4.44)$$

La dérivée du système de l'équation ( 4.41 ) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} X_{1d}\ddot{\theta}_{bd} + Y_{1d}(\ddot{\theta}_{bd} - \ddot{\theta}_{cd}) &= M_{1d} \\ X_{2d}\ddot{\theta}_{bd} + Y_{2d}(\ddot{\theta}_{bd} - \ddot{\theta}_{cd}) &= M_{2d} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Avec :

$$\begin{aligned} M_{1d} &= -\dot{X}_{1d}\dot{\theta}_{bd} - \dot{Y}_{1d}(\dot{\theta}_{bd} - \dot{\theta}_{cd}) + \dot{Z}_{1d} & M_{2d} &= -\dot{X}_{2d}\dot{\theta}_{bd} - \dot{Y}_{2d}(\dot{\theta}_{bd} - \dot{\theta}_{cd}) + \dot{Z}_{2d} \\ \dot{X}_{2d} &= L_{4d}\dot{\theta}_{bd}\cos\theta_{bd} & Y_{1d} &= -\dot{q}_{35}\cos(\theta_{bd} - \theta_{cd}) + q_{35}(\dot{\theta}_{bd} - \dot{\theta}_{cd})\sin(\theta_{bd} - \theta_{cd}) \\ \dot{Z}_{1d} &= L_{1d}\cos(\gamma_{3d} - \theta_{1d})\ddot{\theta}_{1d} + L_{1d}\sin(\gamma_{3d} - \theta_{1d})\dot{\theta}_{1d}^2 + \dot{q}_{33}\cos(\theta_{bd} - \theta_{cd}) - \dot{q}_{33}(\dot{\theta}_{bd} - \dot{\theta}_{cd})\sin(\theta_{bd} - \theta_{cd}) \\ \dot{Z}_{2d} &= L_{1d}\cos(\gamma_{3d} - \theta_{1d})\ddot{\theta}_{1d} - L_{1d}\sin(\gamma_{3d} - \theta_{1d})\dot{\theta}_{1d}^2 + \dot{q}_{33}\sin(\theta_{bd} - \theta_{cd}) + \dot{q}_{33}(\dot{\theta}_{bd} - \dot{\theta}_{cd})\cos(\theta_{bd} - \theta_{cd}) \end{aligned}$$

La résolution de l'équation ( 4.45 ) donne :

$$\ddot{\theta}_{bd} = \frac{M_{1d}Y_{2d} - M_{2d}Y_{1d}}{Y_{2d}X_{1d} - Y_{1d}X_{2d}} \quad (4.46)$$

$$\ddot{\theta}_{cd} = \frac{M_{1d}(X_{2d} + Y_{2d}) - M_{2d}(X_{1d} + Y_{1d})}{Y_{2d}X_{1d} - Y_{1d}X_{2d}} \quad (4.47)$$

A partir de la dérivée de l'équation ( 4.44 ), nous obtenons :

$$\ddot{\theta}_{pd} = -\ddot{\theta}_{ld} + \ddot{\theta}_{bd} - \ddot{\theta}_{cd} \quad (4.48)$$

### 3.1.7. Train avant

Les équations de vitesses des sections 3.1.5, 3.1.6 et l'équation (4.16) permettent d'exprimer les vitesses articulaires dépendantes du train avant en fonction de la vitesse articulaire des débattements de suspensions avant ( $\dot{q}_{33}, \dot{q}_{35}$ ) et de la vitesse du roulis  $\dot{\theta}$  sous la forme suivante :

$$[\dot{q}_{17} \quad \dot{q}_{18} \quad \dot{q}_{29} \quad \dot{q}_{23} \quad \dot{q}_{24} \quad \dot{q}_{30} \quad \dot{q}_{31} \quad \dot{q}_{32} \quad \dot{q}_{34}]^T = O_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q}_{33} \\ \dot{q}_{35} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Avec :

- $O_2$ , la matrice de dimension (9x3) qui dépend des variables articulaire du train avant.

En tenant compte de l'équation ( 4.32 ), l'équation ( 4.49 ) s'écrit sous la forme :

$$[\dot{q}_{17} \quad \dot{q}_{18} \quad \dot{q}_{29} \quad \dot{q}_{23} \quad \dot{q}_{24} \quad \dot{q}_{30} \quad \dot{q}_{31} \quad \dot{q}_{32} \quad \dot{q}_{34}]^T = Jt_2 \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \dot{q}_{33} \\ \dot{q}_{35} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\text{Avec : } Jt_2 = [O_2(:,1) \quad O_2(:,1)tg\phi\sin\theta \quad O_2(:,1)tg\phi\cos\theta \quad O_2(:,2:3)]$$

La dérivée de l'équation ( 4.32 ) donne :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = \dot{\omega}_x + tg\phi\sin\theta\dot{\omega}_y + tg\phi\cos\theta\dot{\omega}_z + \left(\frac{\dot{\phi}}{\cos^2\phi}\sin\theta + tg\phi\dot{\theta}\cos\theta\right)\omega_y \\ + \left(\frac{\dot{\phi}}{\cos^2\phi}\cos\theta - tg\phi\dot{\theta}\sin\theta\right)\omega_z \end{aligned} \quad (4.51)$$

Les équations d'accélération des sections 3.1.5, 3.1.6 et l'équation (4.17) permettent d'exprimer les accélérations articulaires dépendantes du train avant en fonction des accélérations articulaires des débattements de suspensions avant ( $\ddot{q}_{33}, \ddot{q}_{35}$ ) et de l'accélération du roulis  $\ddot{\theta}$  sous la forme suivante :

$$[\ddot{q}_{17} \quad \ddot{q}_{18} \quad \ddot{q}_{29} \quad \ddot{q}_{23} \quad \ddot{q}_{24} \quad \ddot{q}_{30} \quad \ddot{q}_{31} \quad \ddot{q}_{32} \quad \ddot{q}_{34}]^T = O_2 \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q}_{33} \\ \ddot{q}_{35} \end{bmatrix} + O_3 \quad (4.52)$$

Avec :

$$O_3 = \dot{O}_2 [\ddot{\theta} \quad \ddot{q}_{33} \quad \ddot{q}_{35}]^T$$

En tenant compte de l'équation ( 4.51 ), l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$[\ddot{q}_{17} \quad \ddot{q}_{18} \quad \ddot{q}_{29} \quad \ddot{q}_{23} \quad \ddot{q}_{24} \quad \ddot{q}_{30} \quad \ddot{q}_{31} \quad \ddot{q}_{32} \quad \ddot{q}_{34}]^T = Jt_2 \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \ddot{q}_{33} \\ \ddot{q}_{35} \end{bmatrix} + Y_2 \quad (4.53)$$

Avec :

$$Y_2 = O_3 + O_2(:,1) \left[ \omega_y \left( \frac{\dot{\phi}\sin\theta}{\cos^2(\phi)} + \dot{\theta}tg\phi\cos\theta \right) + \omega_z \left( \frac{\dot{\phi}\cos\theta}{\cos^2(\phi)} - \dot{\theta}tg\phi\sin\theta \right) \right]$$

### 3.2. Relation matricielles cinématique entre les variables dépendantes et indépendantes

Elle exprime la relation entre le vecteur vitesse des articulations dépendantes  $\dot{q}_{dep}$  et celui des articulations indépendantes  $qv_{ind}$ . Son expression est :

$$\dot{q}_{dep} = Jtqv_{ind} = \begin{bmatrix} 0_{(6 \times 6)} & Jt_1(:,2) & Jt_1(:,1) & Jt_1(:,3) & 0_{(6 \times 8)} \\ 0_{(9 \times 3)} & Jt_2(:,1:3)} & 0_{(9 \times 3)} & Jt_2(:,4:5)} & 0_{(9 \times 6)} \end{bmatrix} qv_{ind} \quad (4.54)$$

La relation suivante exprime la relation entre le vecteur accélération  $\ddot{q}_{dep}$  et le vecteur  $qa_{ind}$  :

$$\ddot{q}_{dep} = Jtqa_{ind} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = Jtqa_{ind} + Y \quad (4.55)$$

Avec :  $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$

### 3.3. Paramètres dynamiques

Les paramètres dynamiques standards des corps réels du modèle à 32 ddl sont présentés dans cette section.

Pour le châssis  $C_1$ , les bras de suspension arrière  $C_9$  et  $C_{13}$ , les lyres  $C_2$  et  $C_{31}$ , les bras des parallélogrammes  $C_{17}$ ,  $C_{18}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{24}$ ,  $C_{29}$ ,  $C_{30}$ , les paramètres sont :

$$XX_i, XY_i, XZ_i, YY_i, YZ_i, ZZ_i, MX_i, MY_i, MZ_i \text{ et } M_i. (i = 1, 2, 9, 13, 17, 18, 23, 24, 29, 30, 31)$$

➤ Pour les roues, corps  $C_{11}$ ,  $C_{15}$ ,  $C_{21}$  et  $C_{27}$ :

- $XX_i, YY_i, ZZ_i, M_i$  pour  $i = 11, 15, 21$  et  $27$  ( $XX_i = YY_i$ );

➤ Pour les suspensions, corps  $C_5$ ,  $C_8$ ,  $C_{33}$  et  $C_{35}$  :

- $K_i, Fv_i, M_i$  pour  $i = 5, 8, 33$  et  $35$  ;

Les paramètres dynamiques sont présentés par le tableau suivant :

Tableau 4-5 : Paramètres dynamiques après regroupement du modèle à 32 ddl

| $j$ | $XX_j$ | $XY_j$ | $XZ_j$ | $YY_j$ | $YZ_j$ | $ZZ_j$ | $MX_j$ | $MY_j$ | $MZ_j$ | $M_j$ | $K_j$ | $Fv_j$ | $Fsj$ |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|-------|
| 1   | $XX_1$ | $XY_1$ | $XZ_1$ | $YY_1$ | $YZ_1$ | $ZZ_1$ | $MX_1$ | $MY_1$ | $MZ_1$ | $M_1$ | 0     | 0      | 0     |

|    |           |           |           |           |           |           |           |           |           |          |          |           |   |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|---|
| 2  | $XX_2$    | $XY_2$    | $XZ_2$    | $YY_2$    | $YZ_2$    | $ZZ_2$    | $MX_2$    | $MY_2$    | $MZ_2$    | $M_2$    | 0        | 0         | 0 |
| 5  | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $M_5$    | $K_5$    | $F_{v5}$  | 0 |
| 8  | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $M_8$    | $K_8$    | $F_{v8}$  | 0 |
| 9  | $XX_9$    | $XY_9$    | $XZ_9$    | $YY_9$    | $YZ_9$    | $ZZ_9$    | $MX_9$    | $MY_9$    | $MZ_9$    | $M_9$    | 0        | 0         | 0 |
| 10 | $XX_{11}$ | 0         | 0         | $XX_{11}$ | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $M_{11}$ | 0        | 0         | 0 |
| 11 | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $ZZ_{11}$ | 0         | 0         | 0         | 0        | 0        | 0         | 0 |
| 13 | $XX_{13}$ | $XY_{13}$ | $XZ_{13}$ | $YY_{13}$ | $YZ_{13}$ | $ZZ_{13}$ | $MX_{13}$ | $MY_{13}$ | $MZ_{13}$ | $M_{13}$ | 0        | 0         | 0 |
| 14 | $XX_{15}$ | 0         | 0         | $XX_{15}$ | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $M_{15}$ | 0        | 0         | 0 |
| 15 | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $ZZ_{15}$ | 0         | 0         | 0         | 0        | 0        | 0         | 0 |
| 17 | $XX_{17}$ | $XY_{17}$ | $XZ_{17}$ | $YY_{17}$ | $YZ_{17}$ | $ZZ_{17}$ | $MX_{17}$ | $MY_{17}$ | $MZ_{17}$ | $M_{17}$ | 0        | 0         | 0 |
| 18 | $XX_{18}$ | $XY_{18}$ | $XZ_{18}$ | $YY_{18}$ | $YZ_{18}$ | $ZZ_{18}$ | $MX_{18}$ | $MY_{18}$ | $MZ_{18}$ | $M_{18}$ | 0        | 0         | 0 |
| 20 | $XX_{21}$ | 0         | 0         | $XX_{21}$ | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $M_{21}$ | 0        | 0         | 0 |
| 21 | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $ZZ_{21}$ | 0         | 0         | 0         | 0        | 0        | 0         | 0 |
| 23 | $XX_{23}$ | $XY_{23}$ | $XZ_{23}$ | $YY_{23}$ | $YZ_{23}$ | $ZZ_{23}$ | $MX_{23}$ | $MY_{23}$ | $MZ_{23}$ | $M_{23}$ | 0        | 0         | 0 |
| 24 | $XX_{24}$ | $XY_{24}$ | $XZ_{24}$ | $YY_{24}$ | $YZ_{24}$ | $ZZ_{24}$ | $MX_{24}$ | $MY_{24}$ | $MZ_{24}$ | $M_{24}$ | 0        | 0         | 0 |
| 26 | $XX_{27}$ | 0         | 0         | $XX_{27}$ | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $M_{27}$ | 0        | 0         | 0 |
| 27 | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $ZZ_{27}$ | 0         | 0         | 0         | 0        | 0        | 0         | 0 |
| 31 | $XX_{31}$ | $XY_{31}$ | $XZ_{31}$ | $YY_{31}$ | $YZ_{31}$ | $ZZ_{31}$ | $MX_{31}$ | $MY_{31}$ | $MZ_{31}$ | $M_{31}$ | 0        | 0         | 0 |
| 33 | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $M_{33}$ | $K_{33}$ | $F_{v33}$ | 0 |
| 35 | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $M_{35}$ | $K_{35}$ | $F_{v35}$ | 0 |

Nous signalons que les corps qui ne figurent pas dans le tableau 4-5 ont leurs paramètres dynamiques nuls et les valeurs des paramètres dynamiques du tableau sont calculées avec le modèle CAO de la Smera. Les valeurs numériques de ces paramètres ne sont pas communiqués par raison de confidentialité.

### 3.4. Efforts Extérieurs

Le système est en interaction avec le sol à travers les quatre roues. Les repères correspondants à ces interactions sont  $R_{12}$ ,  $R_{16}$ ,  $R_{22}$  et  $R_{28}$ . De façon similaire aux modèles 11 et 16 ddl, chaque torseur est constitué de trois forces et trois moments suivant les trois axes. Les moments suivant  $x_j$  et  $y_j$  sont négligés dans la suite et les forces suivant  $x_j$  et  $y_j$  sont définies par le modèle de Pacejka. Le tableau 4-6 présente ainsi les forces et les couples appliqués par la structure sur l'environnement.

Tableau 4-6 : Efforts de contact appliqués par le véhicule sur l'environnement

| $j$ | $F_{xj}$   | $F_{yj}$   | $F_{zj}$   | $C_{xj}$   | $C_{yj}$   | $C_{zj}$   | Commentaires           |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------------------|
| 12  | $-F_{x12}$ | $-F_{y12}$ | $-F_{z12}$ | $-C_{x12}$ | $-C_{y12}$ | $-C_{z12}$ | Torseur avant gauche   |
| 16  | $-F_{x16}$ | $-F_{y16}$ | $-F_{z16}$ | $-C_{x16}$ | $-C_{y16}$ | $-C_{z16}$ | Torseur avant droit    |
| 22  | $-F_{x22}$ | $-F_{y22}$ | $-F_{z22}$ | $-C_{x22}$ | $-C_{y22}$ | $-C_{z22}$ | Torseur arrière gauche |
| 28  | $-F_{x28}$ | $-F_{y28}$ | $-F_{z28}$ | $-C_{x28}$ | $-C_{y28}$ | $-C_{z28}$ | Torseur arrière droit  |

### 3.5. Contraintes cinématiques verticales

Elles se représentent par la nullité des vitesses verticales des points de contacts avec le sol dans le repère galiléen  $R_r$ .

$${}^rV_{12z} = 0; {}^rV_{16z} = 0; {}^rV_{22z} = 0; {}^rV_{28z} = 0 \quad (4.56)$$

L'équation s'écrit sous la forme d'un produit d'une matrice  $J_{smera}$  et du vecteur  $qv_{ind}$  de l'équation (4.16):

$$\begin{bmatrix} {}^rV_{12z} \\ {}^rV_{16z} \\ {}^rV_{22z} \\ {}^rV_{28z} \end{bmatrix} = J_{smera} qv_{ind} = 0 \quad (4.57)$$

Avec :

➤  $J_{smera}$  la matrice de dimension  $(4 \times 17)$  qui représente la jacobienne par rapport au vecteur  $qv_{ind}$ .

La dérivée des équations de contrainte est :

$$\frac{d}{dt} {}^rV_{12z} = 0; \frac{d}{dt} {}^rV_{16z} = 0; \frac{d}{dt} {}^rV_{22z} = 0; \frac{d}{dt} {}^rV_{28z} = 0 \quad (4.58)$$

De même l'équation ( 4.58 ) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^rV_{12z} \\ {}^rV_{16z} \\ {}^rV_{22z} \\ {}^rV_{28z} \end{bmatrix} &= J_{smera} \frac{dqv_{ind}}{dt} + j_{smera} qv_{ind} \\ &= J_{smera} qa_{ind} + \mathcal{G}_{smera} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Avec :



$$\mathcal{G}_{smera} = \dot{J}_{smera} q a_{ind} - J_{smera}(:, 1:3) \begin{bmatrix} {}^1\omega_{1z} {}^1V_{1y} - {}^1\omega_{1y} {}^1V_{1z} \\ -{}^1\omega_{1z} {}^1V_{1x} + {}^1\omega_{1x} {}^1V_{1z} \\ {}^1\omega_{1y} {}^1V_{1x} - {}^1\omega_{1x} {}^1V_{1y} \end{bmatrix}$$

### 3.6. Modèle dynamique

Le modèle dynamique inverse de la structure arborescente de la Smera s'écrit sous la forme (cf Chapitre 2, section 2.8) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ar} &= \begin{bmatrix} \Gamma_{ind_{ar}} \\ \Gamma_{dep_{ar}} \end{bmatrix} = A_{ar} q a_{e-l} + H_{ar}(q_{e-l}, qv_{e-l}) \\ &= \begin{bmatrix} A_{ind_{ar}(17 \times 17)} & A_{inddep_{ar}(17 \times 15)} \\ A_{depind_{ar}(15 \times 17)} & A_{dep_{ar}(15 \times 15)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q a_{ind} \\ \ddot{q}_{dep} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{ind_{ar}(17 \times 1)} \\ H_{dep_{ar}(15 \times 1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Les équations ( 2.37 ), ( 4.54 ), ( 4.55 ) et ( 4.60 ) permettent d'élaborer le modèle dynamique de la structure fermée de la Smera comme suit (cf. Chapitre 2, section 2.8):

$$\begin{aligned} \Gamma_{fermé} &= \Gamma_{ind_{fermé}} = \Gamma_{ind_{ar}} + J_t^T \Gamma_{dep_{ar}} \\ &= A_{ind_{fermé}} q a_{ind} + H_{ind_{fermé}} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{ind_{fermé}} &= A_{ind_{ar}} + A_{inddep_{ar}} J_t + J_t^T (A_{depind_{ar}} + A_{dep_{ar}} J_t) \\ H_{ind_{fermé}} &= H_{ind_{ar}} + A_{inddep_{ar}} Y + J_t^T (A_{dep_{ar}} Y + H_{dep_{ar}}) \end{aligned}$$

Pour maintenir les roues en contact avec le sol, les contraintes cinématiques correspondantes doivent être considérées. Ceci ramène à l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{ind_{fermé}} \\ 0_{(4 \times 1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ind_{fermé}} & J_{smera}^T \\ J_{smera} & 0_{(4 \times 4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q a_{ind} \\ \lambda_{smera} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{ind_{fermé}} \\ \mathcal{G}_{smera(4 \times 1)} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Donc le modèle dynamique direct utilisé pour la simulation permet de calculer au même moment, le vecteur accélération ainsi que les multiplicateurs de *Lagrange* représentant les forces normales réparties sur les 4 points de contact.

$$\begin{bmatrix} qa_{ind} \\ \lambda_{smera} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ind\_fermé} & J_{smera}^T \\ J_{smera} & 0_{(4 \times 4)} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \Gamma_{ind\_fermé} \\ 0_{(4 \times 1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ind\_fermé} \\ \mathcal{G}_{smera(4 \times 1)} \end{bmatrix} \right) \quad (4.63)$$

Rappelons que :

- pour prendre en compte l'élasticité des articulations flexibles, un modèle de flexibilité est mis en place (cf. Chapitre 2, section 2.6.1.1).

Pour ( $j=5, 8, 33$  et  $35$ )

$$\Gamma_j = -K_j(q_j - q_{j0})$$

- les efforts liés aux degrés de liberté du châssis sont nuls (cf. Chapitre 2, section 3.4).

## 4. Essai de simulation

Dans cette section, le modèle dynamique direct de la Smera est simulé suivant plusieurs types de trajectoires qui montrent un comportement différent du véhicule. L'architecture générale de simulation détaillée au chapitre 3 est utilisée. Les entrées sont les couples moteurs de propulsion, les couples générés par l'asservissement de l'angle de braquage ainsi que le couple d'inclinaison appliqué à la lyre. Le premier scénario sollicite la dynamique longitudinale et le deuxième la dynamique latérale. Ensuite, nous comparons le modèle de la Smera avec le modèle 2 roues à 11 degrés de liberté.

### 4.1. Essai en freinage rectiligne

La Smera est soumise à un couple de freinage appliqué aux roues avant ( Figure 4.16). L'angle de braquage est maintenue nul pour assurer un déplacement rectiligne. Les figures 4.17 et 4.18 présentent respectivement la vitesse et l'accélération longitudinale du véhicule. Nous observons une accélération négative (décélération), entraînant le freinage de la Smera. Nous présentons également l'angle de rotation de la lyre arrière sur la figure 4.19. Il est bien constant tout au long du scénario, ce qui montre une dynamique d'inclinaison nulle.

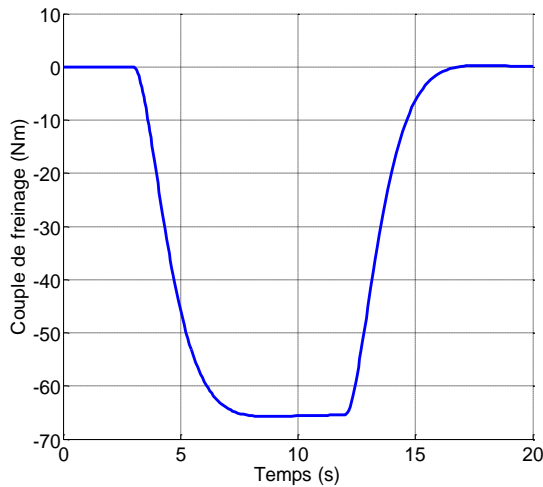


Figure 4.16 : Couple de freinage appliquée aux roues avant

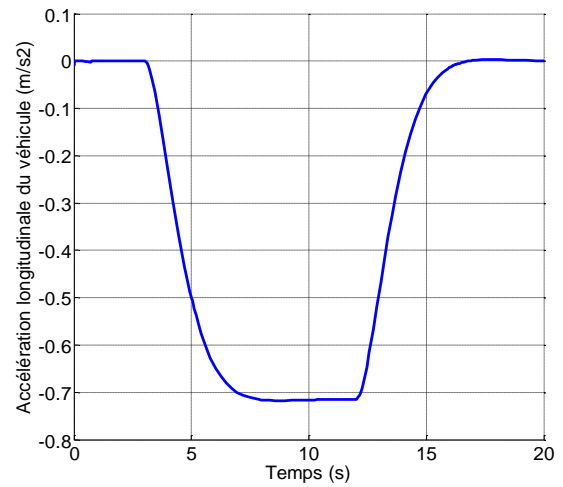


Figure 4.17 : Accélération longitudinale de la Smera

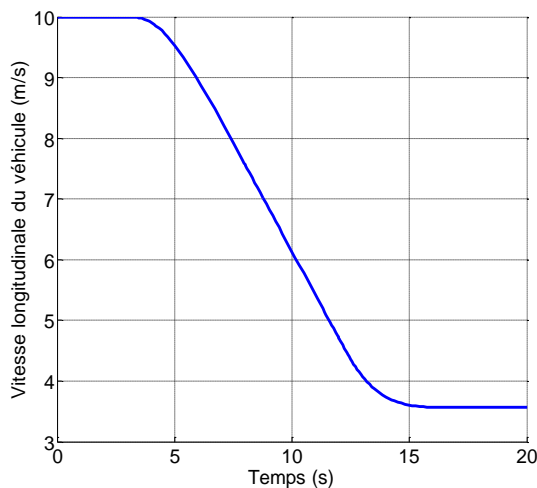


Figure 4.18 : Vitesse longitudinale du véhicule

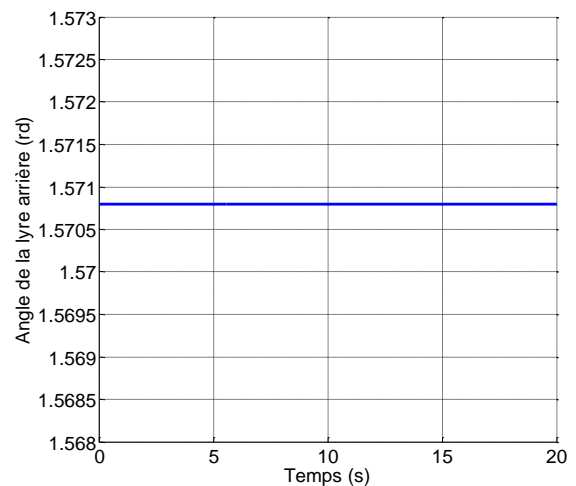


Figure 4.19 : Angle de la lyre arrière

Les figures 4.20 et 4.21 montrent le débattement des suspensions ainsi que l'angle de tangage du véhicule. En freinage, nous observons une plongée du véhicule vers l'avant due à la répartition de la charge sur les quatre points de contacts. La longueur des suspensions avant diminue et celle de l'arrière augmente. Le glissement des roues avant et les forces longitudinales correspondantes sont présentés respectivement sur les figures 4.22 et 4.23. Le temps de calcul nécessaire pour cette simulation s'élève à 66 secondes.

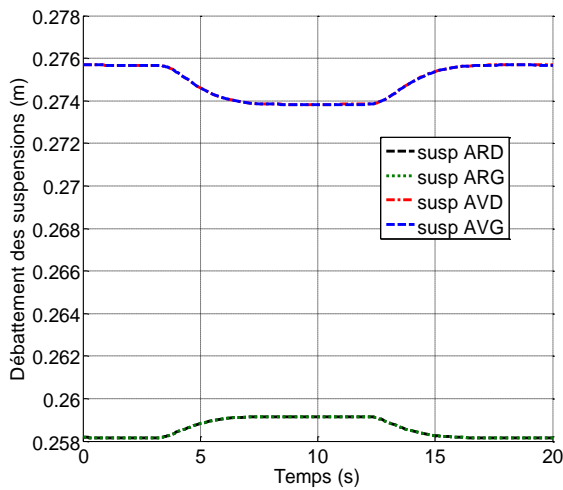


Figure 4.20 : Débattement des suspensions

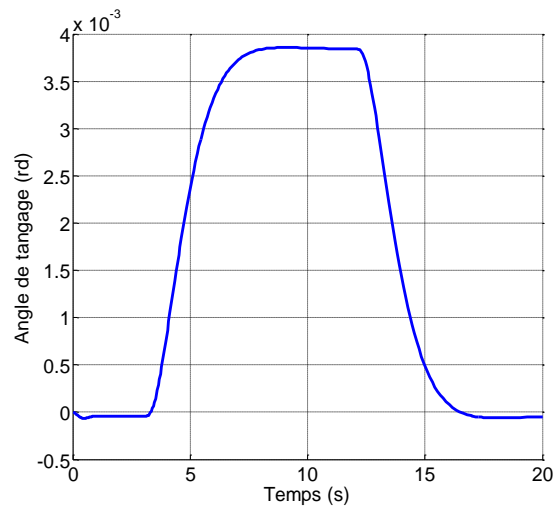


Figure 4.21 : Angle de Tangage

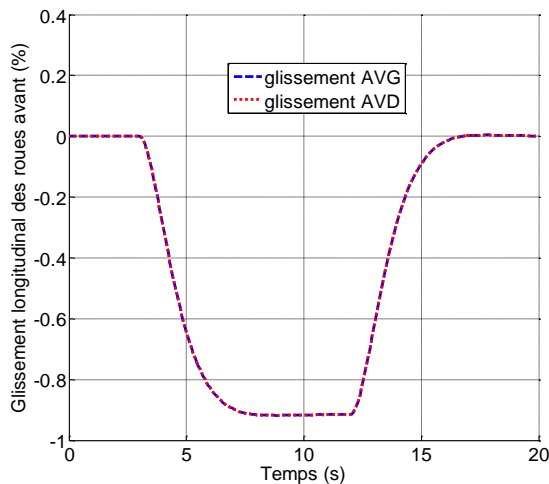


Figure 4.22 : Glissement longitudinal des roues avant

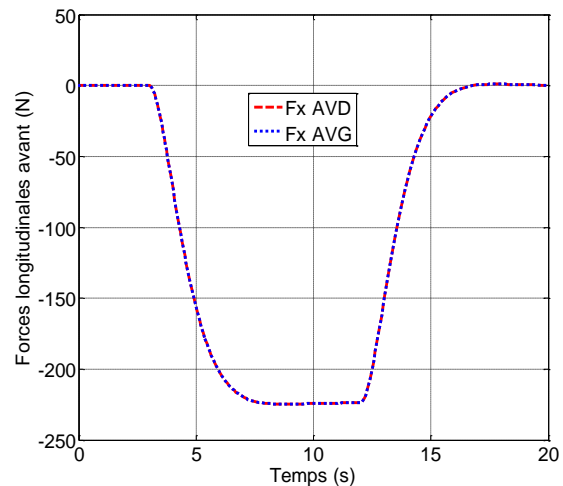


Figure 4.23 : Forces longitudinales des roues avant

## 4.2. Essai en virage

Dans cet essai, le comportement latéral du véhicule et la dynamique du roulis sont étudiés en réponse à des manœuvres de braquage (Figure 4.24). Les entrées du modèle sont :

- Le couple de braquage résultant de la boucle de régulation entre la consigne de référence et l'angle de braquage ;
- La vitesse initiale du véhicule est 10 m/s en régime libre sans couple moteur appliqué aux roues ;
- Le couple d'inclinaison résultant de la commande d'inclinaison est appliqué à l'axe de la lyre arrière.

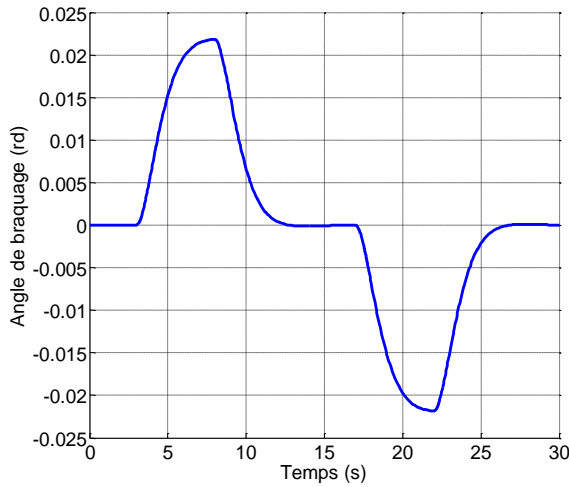


Figure 4.24 : Angle de braquage

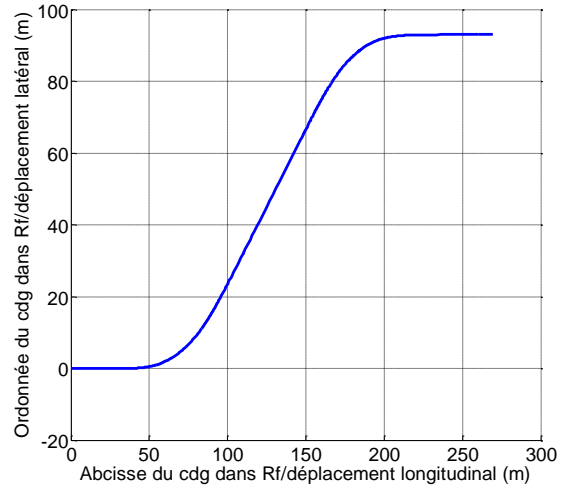


Figure 4.25 : Trajectoire planaire du cdg de la Smera

Les figures 4.25 et 4.26 présentent respectivement la trajectoire effectuée par le véhicule dans le repère  $R_r$  ainsi que l'angle de lacet correspondant.

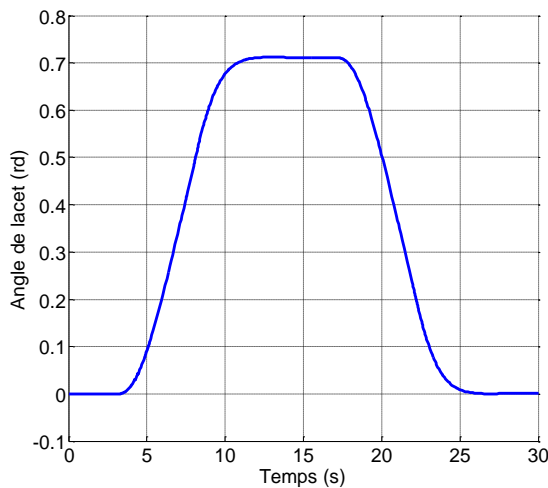


Figure 4.26 : Angle de lacet

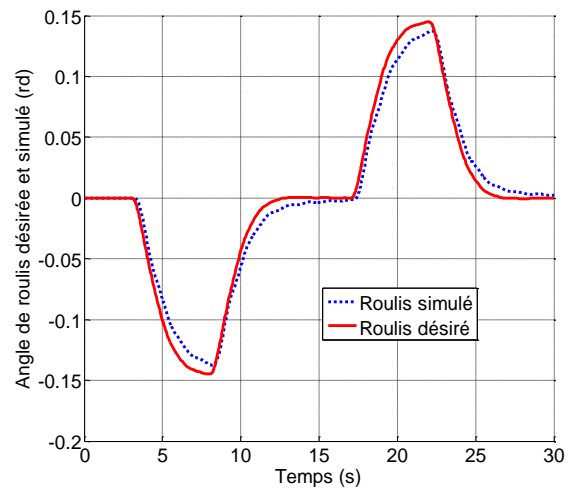


Figure 4.27 : Angle de roulis désiré et simulé

Le couple d'inclinaison résulte de l'asservissement de l'angle d'inclinaison (roulis) à la valeur de consigne. La figure 4.27 représente l'angle de roulis simulé et désiré. Nous présentons également les angles de dérive avant et arrière et les forces latérales correspondantes, respectivement sur les figures 4.28 et 4.29. La figure 4.30 montre la vitesse latérale et l'accélération latérale du véhicule exprimées dans le repère  $R_f$ . Le temps de calcul nécessaire pour cette simulation s'élève à 101 secondes.

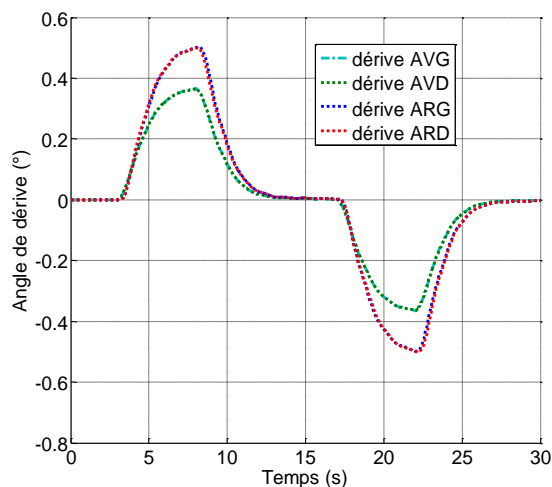


Figure 4.28 : Angles de dérive

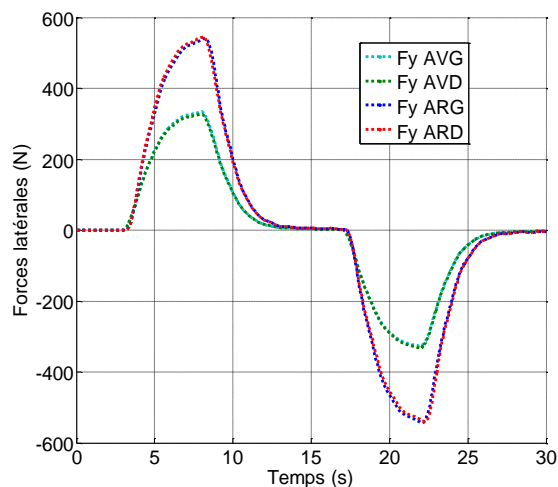
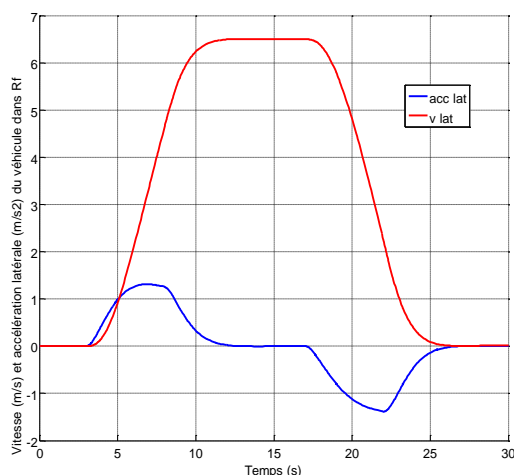


Figure 4.29 : Forces latérales

Figure 4.30 : Vitesse latérale et accélération latérale du véhicule dans  $R_f$ 

### 4.3. Comparaison des modèles 11ddl et Smera

Dans cette section, nous comparons le modèle de la Smera et le modèle 2 roues à 11 degrés de liberté. Le scénario proposé est un double virage (Figure 4.24) comme dans l'essai précédent. Afin de comparer les deux modèles dont les structures cinématiques sont différentes, les hypothèses de comparaison sont les suivantes :

- les régulateurs d'inclinaison et de braquage, de type PD, sont identiques dans les deux cas ;
- un jeu de paramètres dynamiques est défini par des relations de symétrie et d'homothétie ;

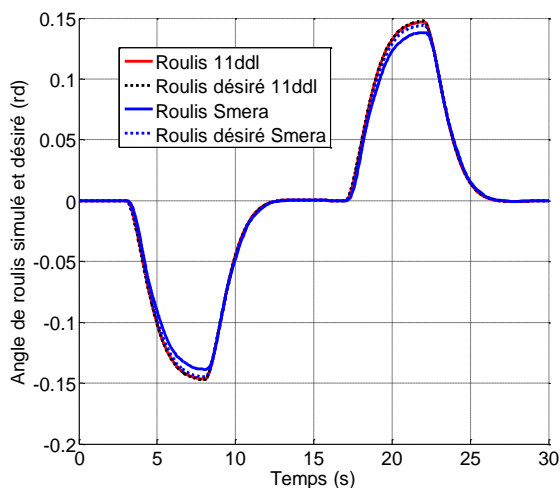
La projection des paramètres de la Smera sur le modèle 11ddl se traduit par le tableau suivant :

**Tableau 4-7 : Projection des paramètres inertiels**

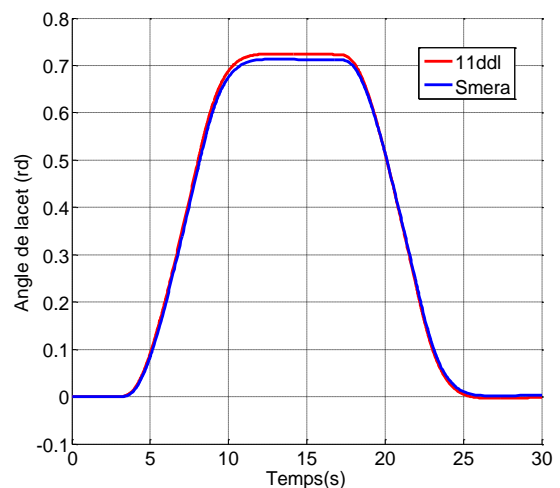
| Modèle Smera  | Modèle à 11 ddl  |
|---|--|
| <i>Châssis</i><br>$XX_1, XY_1, XZ_1, YY_1, YZ_1, ZZ_1, MX_1, MY_1, MZ_1$<br>et $M_1$ .  | <i>Châssis</i><br>$XX_1, XY_1, XZ_1, YY_1, YZ_1, ZZ_1, MX_1, MY_1, MZ_1$<br>et $M_1$ .                                       |
| <i>Suspensions</i><br>$AV: K_{33}, F_{v33}, M_{33}; K_{35}, F_{v35}, M_{35};$<br>$AR: K_5, F_{v5}, M_5; K_8, F_{v8}, M_8.$  | <i>Suspensions</i><br>$AV: 2^*K_{33}, 2^*F_{v33}, 2^*M_{33};$<br>$AR: 2^*K_5, 2^*F_{v5}, 2^*M_5;$                            |
| <i>Roues</i><br>$AV: XX_{21}, YY_{21}, ZZ_{21}, M_{21}; XX_{27}, YY_{27}, ZZ_{27},$<br>$M_{27}.$<br>$AR: XX_{11}, YY_{11}, ZZ_{11}, M_{11}; XX_{15}, YY_{15}, ZZ_{15}, M_{15}.$ | <i>Roues</i><br>$AV: 2^*XX_{21}, 2^*YY_{21}, 2^*ZZ_{21}, 2^*M_{21};$<br>$AR: 2^*XX_{11}, 2^*YY_{11}, 2^*ZZ_{11}, 2^*M_{11}.$ |

➔ L'inclinaison désirée des deux modèles est calculée par l'équation ( 3.12 )

Nous présentons dans les figures suivantes l'angle de roulis, de lacet et la trajectoire des deux modèles. Pour une même consigne d'angle de braquage (Figure 4.24), nous obtenons deux angles d'inclinaison désirés semblables, avec un écart maximal de 1.6% (Figure 4.31) ce qui implique des trajectoires et des angles de lacet quasi égales (Figure 4.32 et Figure 4.33).



**Figure 4.31 : Angle de roulis simulé et désiré**



**Figure 4.32 : Angle de lacet**

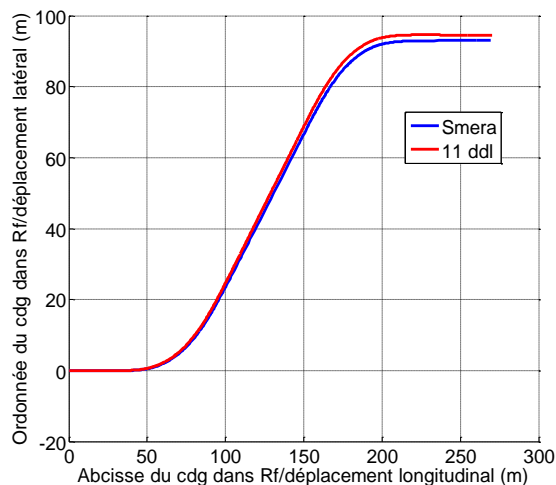


Figure 4.33 : Trajectoire planaire du cdg

Nous présentons également les vitesses et les accélérations longitudinales, latérales des deux modèles sur les figures 4.34 et 4.35.

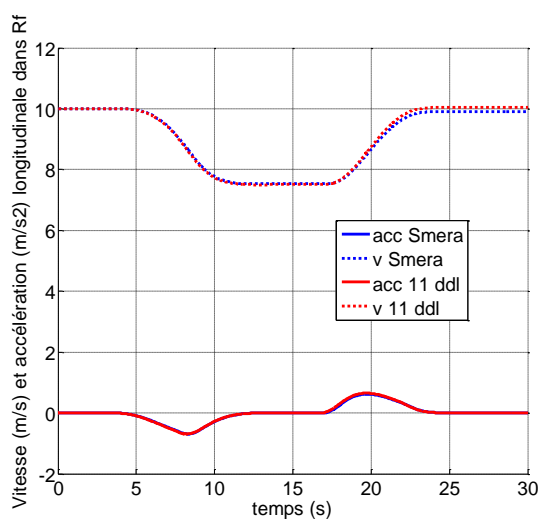


Figure 4.34 : Vitesse longitudinale et accélération longitudinale du véhicule dans Rf

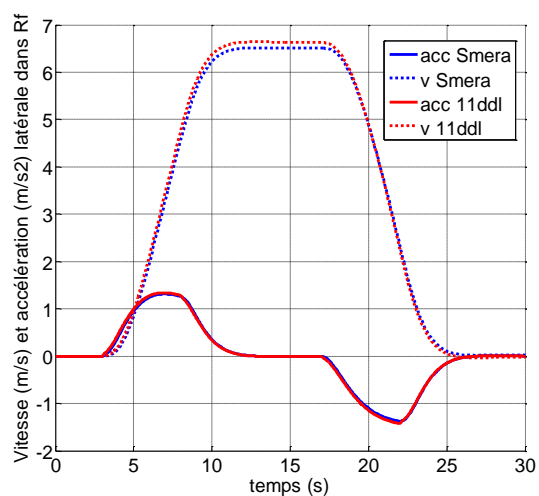


Figure 4.35 : Vitesse latérale et accélération latérale du véhicule dans Rf

Les couples articulaires appliqués respectivement sur l'axe de roulis du modèle 11ddl et sur l'axe de la lyre arrière de la Smera sont présentés par la figure 4.36 . Nous observons des oscillations sur le couple de la lyre qui n'existent pas sur le couple appliqué au modèle 11ddl. Le système d'inclinaison « élastique » de la Smera composé de la lyre arrière et des deux suspensions, contribue à l'apparition de ces oscillations. En augmentant donc le frottement visqueux des suspensions arrière, les oscillations disparaissent comme le montre la figure 4.37 . Nous remarquons également que le modèle 11ddl nécessite un couple d'amplitude inférieure à celle du couple de la lyre de la Smera. De plus, l'accélération latérale perçue sur le modèle 11ddl est inférieure à celle perçue sur la Smera (Figure 4.38).



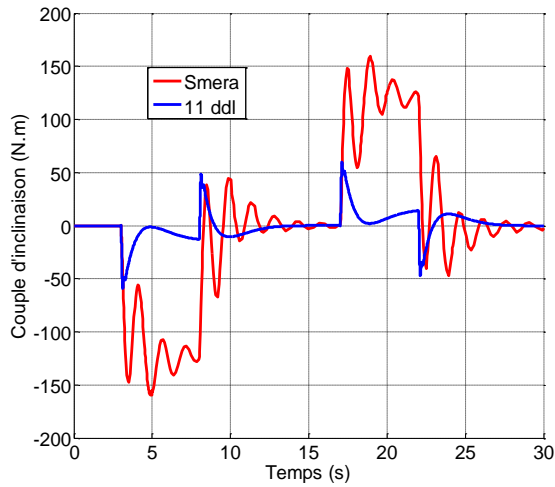


Figure 4.36 : Couple d'inclinaison résultant de la commande du modèle de la Smera et du modèle 11 ddl

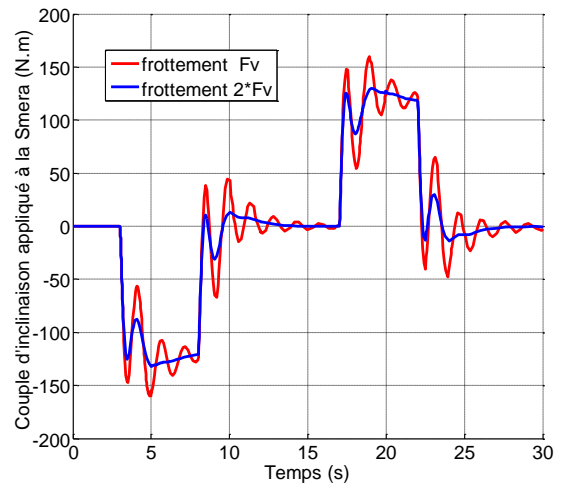


Figure 4.37 : Couple d'inclinaison appliqué à la Smera en augmentant le frottement visqueux des suspensions arrière

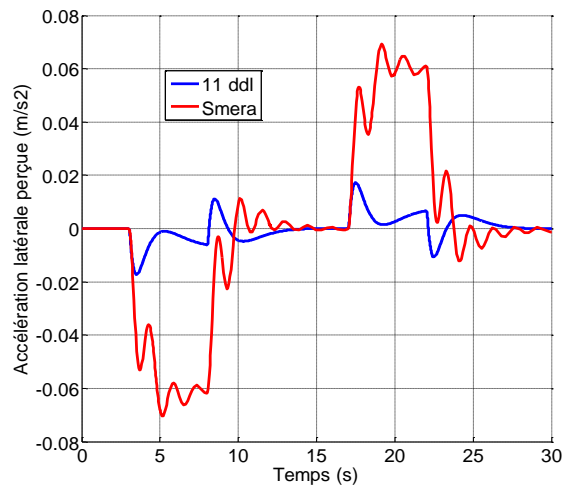


Figure 4.38 : Accélération latérale perçue des deux modèles

Le modèle 11ddl permet de prédire le couple d'inclinaison de la Smera sur un temps limité de 0.2s après le braquage.

Vu que les deux modèles ont des structures cinématiques différentes (2 roues et 4 roues, action directe sur l'axe du roulis et action à travers le système d'inclinaison...) et que les couples d'inclinaison sont appliqués à des endroits différents dans les deux modèles, nous proposons de prendre en compte ces aspects, en ajoutant au modèle 11 ddl un système virtuel composé de deux raideurs, d'un frottement et d'une inertie en amont du couple appliqué sur l'axe de roulis (Figure 4.39).

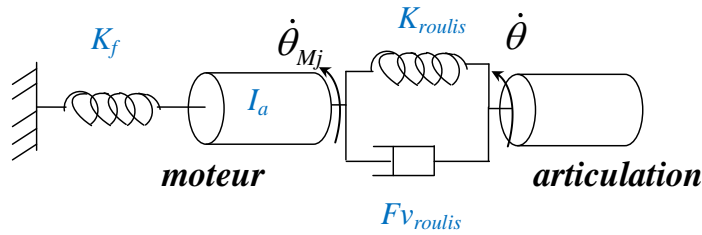


Figure 4.39 : Modèle de flexibilité

Avec :

- $K_{roulis}$  est la raideur de torsion au niveau de l'articulation
- $Fv_{roulis}$  est le frottement visqueux au niveau de l'arbre de transmission
- $I_a$  est l'inertie de l'actionneur exprimé côté articulaire
- $K_f$  est la raideur de torsion par rapport à la verticale du véhicule

L'introduction d'une flexibilité articulaire entraîne une différence entre la position angulaire de l'axe de l'actionneur (ddl rigide) et la position articulaire de l'articulation (ddl flexible). La raideur  $K_f$  modélise sur la Smera le moment de rappel vers la position au repos verticale, dû à une déformation différentielle des ressorts de suspension arrière.

L'équation dynamique du couple appliqué au moment de roulis se met sous la forme :

$$\Gamma_{roulis} = -K_{roulis} (\theta - \theta_M) - Fv_{roulis} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_M) \quad (4.64)$$

L'équation dynamique du moteur se met sous la forme :

$$I_a \ddot{\theta}_M + K_{roulis} (\theta - \theta_M) + Fv_{roulis} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_M) - K_f \theta_M = \Gamma_{moteur} \quad (4.65)$$

Nous obtenons donc un système de second ordre dont les paramètres fondamentaux dépendent des raideurs  $K_{roulis}$  et  $K_f$ , du frottement visqueux  $Fv_{roulis}$  et de l'inertie  $I_a$ .

Dans la suite nous allons ajouter ce système flexible au modèle 11ddl et faire une analyse de sensibilité et le comparer de nouveau au modèle de la Smera.

Dans un premier temps, nous négligeons la raideur  $K_f$  de rappel pour ne prendre en compte que le ressort amortisseur entre le moteur et l'articulation.

La figure 4.40 présente le couple moteur pour une inertie  $I_a$  et une raideur  $K_{roulis}$  données en faisant varier le frottement ( $Fv1 < Fv2 < Fv3$ ). La figure 4.41 présente le couple moteur pour une inertie  $I_a$  et un frottement visqueux  $Fv_{roulis}$  donnés en faisant varier la raideur ( $K1 < K2 < K3$ ). Nous observons une augmentation de l'amplitude des oscillations lorsque le frottement visqueux diminue et une diminution de l'amplitude lorsque la raideur diminue. La pseudo période d'oscillation reste quasi invariable dans les deux cas.

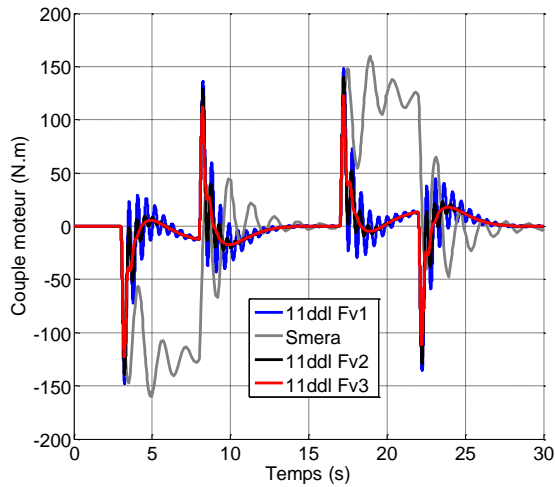


Figure 4.40 : Couple moteur en variant le frottement visqueux

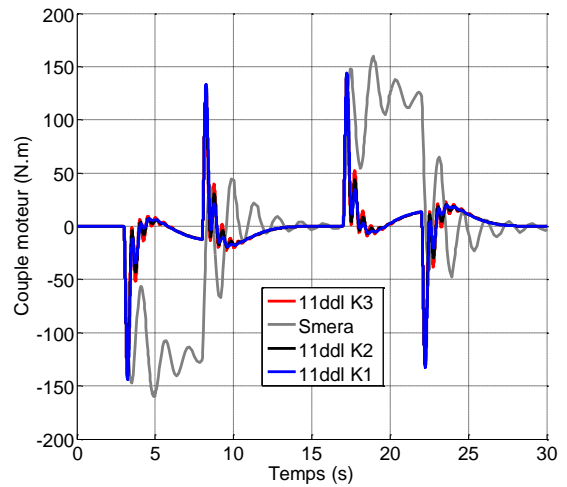


Figure 4.41 : Couple moteur en variant la raideur

La prise en compte de la raideur  $K_f$  permet d'avoir un régime permanent quasi identique à celui de la Smera, comme le montre la figure 4.42. L'augmentation de la raideur  $K_f$  ( $K_1 < K_2$ ) augmente les amplitudes des oscillations alors que la pseudo-période reste quasi la même.

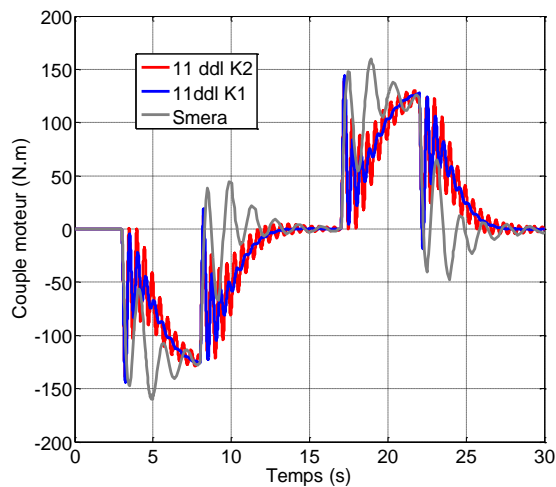


Figure 4.42 : Couple moteur en ajoutant la raideur  $K_f$

De plus, nous agissons sur l'inertie  $I_a$  et le frottement visqueux  $F_{Vroulis}$  pour obtenir une période d'oscillation proche de celle de la Smera (Figure 4.43). L'augmentation de l'inertie augmente l'amplitude du couple d'inclinaison appliqué à l'instant du braquage dans le but d'annuler l'accélération latérale perçue. Celle-ci augmente comme le montre la figure 4.44.

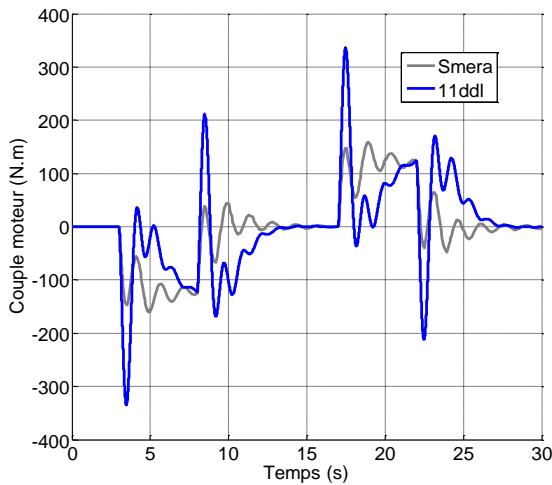


Figure 4.43 : Couple moteur en agissant sur l'inertie et le frottement visqueux

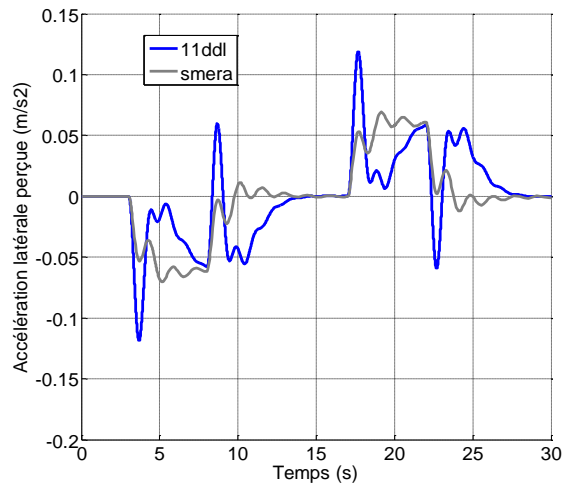


Figure 4.44 : Accélération latérale perçue

A partir de cette première analyse, nous constatons un couplage entre les raideurs, le frottement et l'inertie qui agissent sur la réponse en couple à la sortie du correcteur. Le réglage d'un paramètre affecte les autres d'où la nécessité d'identifier ces paramètres pour s'approcher le plus possible du modèle de la Smera. L'ajout de ce système virtuel au modèle 11ddl a permis d'une manière approchée, de reproduire le phénomène observé sur la Smera. Nous prouvons également la nécessité de prendre en compte les modèles complets non simplifiés, pour étudier des systèmes complexes. Le

## 5. Conclusion

Un modèle de la Smera a été élaboré en utilisant le formalisme robotique de Denavit & Hartenberg modifié. La Smera, comportant 6 chaînes fermées, est modélisé et simulé sur différentes trajectoires. La résolution des équations de fermeture des chaînes fermées a été effectuée analytiquement ou numériquement selon la complexité des équations. Les relations de vitesse entre les variables indépendantes et les variables dépendantes ont été établies et utilisées dans l'élaboration du modèle dynamique de la structure fermée. L'interaction avec l'environnement, à travers les contacts roue/sol, a été modélisée par le modèle de Pacejka. La répartition de la charge sur les quatre roues a été calculée par des multiplicateurs de Lagrange, exprimant le contact des roues avec le sol.

Un simulateur du comportement dynamique de la Smera a été réalisé. Il est modulaire et modifiable et permet l'accès à toutes les variables d'accélération, de vitesse et de position.

## Conclusion et perspectives

---

La modélisation et la simulation de la dynamique des véhicules constituent un outil indispensable pour la réduction des coûts de développement et la limitation des essais expérimentaux pour développer des véhicules sûrs et confortables. La conception de véhicules innovants nécessite une modélisation précise de la dynamique du mouvement du véhicule. La méthode adoptée dans cette thèse s'appuie sur les méthodes de modélisation couramment utilisées en robotique. La voiture est modélisée par une structure multi-corps arborescente décrite dans le formalisme de Denavit et Hartenberg modifié. Ce formalisme permet de calculer de façon systématique et générique, pour tout type de véhicule, le modèle géométrique, cinématique et dynamique. Nous avons traité le véhicule comme un robot mobile à architecture arborescente (dans le cas des modèles 2 roues et 4 roues du chapitre 3) et à architecture fermée contenant des chaînes fermées (dans le cas du véhicule inclinable « Smera » de *LUMENEO* du chapitre 4). Nous avons proposé des algorithmes simples à mettre en oeuvre et à calculer que ce soit pour l'obtention du modèle dynamique inverse ou du modèle dynamique direct. Pour cela, nous avons étendu les algorithmes de Newton-Euler au cas des robots à base mobile et comportant des chaînes fermées. Un simulateur a été conçu et réalisé afin d'étudier et analyser le comportement dynamique de différents modèles de véhicules.

Le chapitre 1 a introduit la réflexion sur la recherche de nouveaux moyens de transport pour les zones urbaines. Ceux-ci doivent être :

- peu énergivores ;
- écologiques pour diminuer les émissions des gaz nocifs à la santé ;
- maniables et étroits pour réduire les encombrements dans les villes et le problème de stationnement.

Ce chapitre a également présenté différentes caractéristiques d'un véhicule, en termes d'architecture et de composants, et la manière dont ces caractéristiques affectent son environnement. La fin du chapitre présente un état de l'art des simulateurs de véhicule du marché.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à la méthodologie de modélisation des véhicules en utilisant le formalisme de la robotique. Le véhicule est considéré comme un robot à base mobile dont la structure est constituée par des corps liés entre eux par des articulations. La description géométrique de Denavit & Hartenberg modifiée a été présentée ainsi que les algorithmes de calcul du modèle dynamique.

Le troisième chapitre a traité le cas d'étude de deux modèles de complexité croissante : un modèle 2 roues à 11 degrés de liberté et un modèle 4 roues à 16 degrés de liberté. Les six degrés de liberté du châssis et les dynamiques longitudinales, latérales et verticales ont été considérés et le modèle de contact roue/sol utilise le modèle d'effort de Pacejka. Les équations dynamiques du mouvement sont élaborées à travers l'algorithme de Newton-Euler et simulées de manière structurée dans l'environnement Matlab/Simulink. Ce simulateur permet de calculer les sorties du modèle dynamique direct, dont les entrées sont les couples de motorisation du véhicule, le couple de braquage appliqué directement aux roues et le couple d'inclinaison pour les véhicules étroits inclinables. Une commande en boucle fermée permet de générer le couple de braquage nécessaire pour obtenir l'angle de braquage de référence ainsi que le couple d'inclinaison permettant d'annuler l'accélération latérale perçue par les occupants du véhicule. Ce chapitre a mis en évidence l'efficacité de la méthodologie de description pour la simulation des véhicules à structure arborescente.

Le quatrième chapitre a été consacré au véhicule étroit inclinable « Smera », de *Lumeneo*. Sa structure est complexe, composée de six chaînes fermées. Une structure arborescente équivalente comportant 32 degrés de liberté est obtenue par l'ouverture des chaînes fermées et par des équations de contrainte de fermeture de boucle. Le système d'inclinaison est piloté par un moteur situé dans la partie arrière du véhicule et agissant directement sur les chaînes du train arrière par l'intermédiaire de la lyre arrière. Par suite, le châssis s'incline et entraîne l'inclinaison du train avant par l'intermédiaire de la lyre avant. Le modèle dynamique est calculé en tenant compte les contraintes géométriques et cinématiques de fermeture des boucles. Sur cette base et reprenant l'architecture de simulation introduite au chapitre 3, nous avons simulé le comportement de la Smera selon différents scénarios.

La méthodologie de modélisation utilisée dans ce travail permet à partir du modèle géométrique de décrire des systèmes complexes pour lesquels la description analytique n'est plus manipulable à la main. Ceci est rendu possible par le caractère systématique et générique de l'approche et l'utilisation du vecteur de variables descripteurs généralisées «  $q$  ». Le modèle dynamique symbolique calculé d'une manière récursive par l'algorithme de Newton-Euler possède un nombre d'opérations (+,\*) optimisé et ses limites sont uniquement celles du calcul symbolique (allocation de mémoire, ...). De plus le modèle dynamique est linéaire par rapport aux paramètres dynamiques, ce qui est favorable du point de vue de l'identification et de la simplification des modèles.

Au-delà de la description formelle de la démarche, cette thèse a abordé plusieurs cas d'étude, soit à titre didactique, soit pour illustrer la simplicité de mise en œuvre de la méthodologie, soit encore pour démontrer sa capacité à traiter le cas de véhicules innovants et complexes pour lesquels aucun simulateur commercial n'existe à ce jour. Enfin, nous avons comparé les différents modèles simulés en expliquant dans quelle mesure les modèles les plus simples pouvaient rendre compte, de manière approchée mais incomplète, du comportement de modèles plus complexes.

Les perspectives liées à ce travail sont les suivantes :

- Un travail plus poussé sur la modélisation des pneumatiques et la modélisation de l'interaction roues-pneu/sol en considérant les efforts d'interaction aire de contact/sol, les effets inertiels et la flexibilité de l'ensemble jante-pneumatique. La modélisation de l'ensemble de ces phénomènes peut être réalisée par une chaîne sérielle à 7 degrés de liberté entre les repères du porte fusée et le repère de contact comme proposé dans (Ripert 2006), (Ripert et al. 2006).
- L'intégration d'un modèle dynamique de colonne de direction et d'un modèle conducteur tenant compte des temps de réaction et les capacités neuromusculaires.
- L'identification des paramètres dynamiques du véhicule inclinable en utilisant la linéarité du modèle dynamique par rapport à ces paramètres. La méthode sera basée sur les moindres carrés linéaires et l'identification peut se faire par des essais en simulations ou sur un véhicule réel. Les variables eulériennes de la base mobile pourraient être mesurées directement par une centrale inertielle fixé sur le châssis du véhicule, les torseurs d'interaction roue-sol pourraient être mesurés par des roues dynamométriques (Venture et al. 2006),(Gautier 2001),(Gautier, Vandanjon, et al. 2011), (Gautier, Janot, et al. 2011).
- En terme de commande, le travail effectué devrait permettre de faire évoluer les stratégies de commande à partir des modèles simplifiés et les évaluer sur des modèles plus précis et complets. Le simulateur édité sous Matlab/simulink pourra être utilisé par l'équipe commande de l'IRCCyN pour élaborer et tester des lois de commande d'inclinaison robuste du type STC « Steering Tilt Control » ou DTC « Direct Tilt Control » ou une combinaison des deux. (Mourad et al. 2011), (Kidane et al. 2006).
- Une modélisation plus fine des chaînes de transmission des efforts moteurs vers les roues et vers la lyre.





## Références bibliographiques

---

- ASM-VDSP, 2007. dSPACE - ASM - Vehicle Dynamics Simulation Package. Available at: [http://www.dspaceinc.com/en/inc/home/products/sw/automotive\\_simulation\\_models/vehicle\\_dynamics\\_models/asm\\_vehicle\\_dynamics\\_sim\\_pack.cfm](http://www.dspaceinc.com/en/inc/home/products/sw/automotive_simulation_models/vehicle_dynamics_models/asm_vehicle_dynamics_sim_pack.cfm).
- Baffet, G., 2007. *Développement et validation expérimentale des forces du contact pneumatique/chaussée d'une automobile*. UTC.
- Bakker, E. & Pacejka, H.B., 1991. The magic formula tyre model. In the 1st International Colloquium on Tyre models for vehicle dynamics analysis. Delft, The Netherlands, p. 1-18.
- Basset, M. et al., 2005. Problématique de l'identification de la liaison véhicule-sol. In Journée Nationale de la Recherche en Robotique, JNRR.
- Brossard, J.P., 2006. *dynamique du véhicule, Modélisation des systèmes complexes*, Lausanne, EPFL: PPUR.
- Burckhardt, M., 1993. *Fahrwerktechnik - Radschlupfregelsysteme*, Würzburg, Germany: Vogel Verlag.
- CIVITEC, 2008. CIVITEC - Perception Sensors Simulation & Virtual Sensors. Available at: <http://www.civitec.net/>.
- CLEVER, U. of B., 2002. Press Release - 25 April 2006 University of Bath. Available at: <http://www.bath.ac.uk/news/articles/archive/clever-car250406.html>.
- Canudas de Wit, C. et al., 1995. A new model for control of systems with friction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(3), p.419-425.
- Caroux, J. et al., 2006. Identification of lateral vehicle behaviour for observer-based sideslip angle estimation. In Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification, and Anomalies. Budapest, Hungary, p. 513-520.
- Carver, V., 1997. Carver Europe. Available at: <http://www.3wheelers.com/carver.html>.
- City Mobil, 2003. Armec-City Mobil Vehicle. Available at: [http://www.armac.ch/citymobil/main\\_2.asp](http://www.armac.ch/citymobil/main_2.asp).

- Cossalter, V. & Doria, A., 1999. Steady Turning of Two-Wheeled Vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 31(3), p.157-181.
- Cossalter, V. & Lot, R., 2002. A Motorcycle Multi-Body Model for Real Time Simulations Based on the Natural Coordinates Approach. , 37(6), p.423-477.
- DATAS, 1999. D.A.T.A.S. Ltd. - Distribution of RaceSim and other software - DATAS. Available at: <http://www.datas-ltd.com/>.
- Dassault Systèmes, 1981. PLM solutions, 3D CAD and simulation software - Dassault Systèmes. Available at: <http://www.3ds.com/>.
- Denavit, J. & Hartenberg, R.S., 1955. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *ASME Journal of Applied Mechanisms*, p.215-221.
- Deutch, C., 1970. *Dynamique des véhicules routiers : données de bases*, Organisme National de Sécurité routière.
- Dugoff, H., Fancher, P.S. & Segel, L., 1970. An Analysis of Tire Traction Properties and Their Influence on Vehicle Dynamic Performance. , (700377).
- Eco&mobilité, 2007. Eco&Mobilité. Available at: <http://www.eco-mobilite.com/>.
- Gautier, M., 2001. *Elaboration d'un logiciel d'identification des paramètres dynamiques de robot, DYCARO: DYnamic CALibration of ROBots*,
- Gautier, M., 1991. Numerical calculation of the base inertial parameters. , RA-6(3), p.368-373.
- Gautier, M., 1990. Numerical calculation of the base inertial parameters of robots.
- Gautier, M. & Khalil, W., 1990. Direct calculations of minimum set of inertial parameters of serial robots. , RA-6 (3), p.368-373.
- Gautier, M., Janot, A. & Vandanjon, P.O., 2011. Dynamic identification of a 6 dof industrial robot with a closed-loop output error method. In 18th IFAC World Congress. Milano.
- Gautier, M., Vandanjon, P.O. & Janot, A., 2011. Dynamic identification of a 6 dof robot without joint position data. In IEEE International Conference on Robotics and Automation. Shanghai, p. 234-239.
- Glaser, S., 2004. *Modélisation et analyse d'un véhicule en trajectoires limites, Application au développement de systèmes d'aide à la conduite*. LIVIC.
- Gohl, J. & Rajamani, R., 2004. Active Roll Mode Control Implementation on a Narrow Tilting Vehicle. , 42(5), p.347-372.
- Gohl, J. et al., 2006. *Development of a novel tilt-controlled narrow commuter vehicle*, University of Michigan: Department of Mechanical Engineering.

- Guillo, E., 2000. *Modélisation et identification dynamique des engins de construction de routes*. Thèse de doctorat, IRCCyN Nantes.
- Horatiu, B., 2009. BMW reveals « The simple concept ». Available at: <http://www.bmwblog.com/2009/10/09/bmw-reveals-the-simple-concept/>.
- IPG, C., 2003. IPG: Company. Available at: <http://www.ipg.de/>.
- Jaballah, B. et al., 2009. Estimation of longitudinal and lateral velocity vehicle. In 17th Mediterranean conference on Control & Automation. Thessaloniki, Greece.
- Khalil, W. & Creusot, D., 1997. Symoro+: A system for the symbolic modelling of robots. , 15(2), p.153-161.
- Khalil, W. & Dombre, E., 2002. *Modeling, Identification and Control of robots*, London and Paris: Hermès, Penton.
- Khalil, W. & Kleinfinger, J., 1986. A new geometric notation for open and closed loop robots. In Robotics and Automation, IEEE International Conference On. p. 1174-1179.
- Khalil, W. & Kleinfinger, J., 1987. Minimum operations and minimum parameters of the dynamic model of tree structure robots. , RA-6(3), p.517-526.
- Kholsa, P.K., 1986. *Real-time control and identification of direct drive manipulators*. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA.
- Kidane, S. et al., 2008. A fundamental investigation of tilt control systems for narrow commuter vehicles. , 46, p.295-322.
- Kidane, S. et al., 2006. Road bank angle considerations in modeling and tilt stability controller design for narrow commuter vehicles. In American Control Conference. Minneapolis, USA.
- Kiencke, U. & Nielsen, L., 2000. *Automotive Control Systems for Engine, Driveline and vehicle* Springer-Verlag., New York.
- Luh, J., Walker, M. & Paul, R., 1980. On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators. *J. DYN. SYS. MEAS. & CONTR.*, 102(2), p.69-76.
- Lumeneo, 2005. LUMENEO. Available at: <http://www.lumeneo.fr/>.
- MTS, 1999. MTS Model 868 Flat-Trac III Tire test system.
- Maakaroun, S. et al., 2011. Modeling and Simulation of a Two wheeled vehicle with suspensions by using Robotic Formalism. In 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control. Milan, Italy.
- Maakaroun, S. et al., 2010. Geometric model of a narrow tilting CAR using robotics formalism. In Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2010 15th International Conference on. Miedzyzdroje, Poland, p. 377-382.

- Maakaroun, S. et al., 2011. Modeling and simulating a Narrow tilting Car. In *9th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*. Noordwijkerhout, Netherland.
- Mechanical Simulation Corporation, 1996. Mechanical Simulation: History. Available at: <http://www.carsim.com/company/ourhistory.php>.
- Moulène, D. & Moulène, T., 2006. Motor vehicle with limited angle of inclination.
- Mourad, L., Claveau, F. & Chevrel, P., 2011. A lateral strategy for narrow tilting commuter vehicle based on the perceived lateral acceleration. In 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control. Milano, italy.
- M'sirdi, N.K. et al., 2005. Vehicle-road interaction modelling for estimation of contact forces. , 43, p.403-411.
- Naro, R., 2004. prodrive. Available at: <http://www.prodrive.com/level4.html?id=45>.
- Nasser, H. & M'sirdi, N.K., 2010. Decoupled models for vehicle dynamics and estimation of coupling terms. In *Control & Automation (MED), 2010 18th Mediterranean Conference on*. p. 1479–1484.
- Nehaoua, L., 2008. *Conception et réalisation d'uneplateforme mécatronique dédiée à la simulation de conduite des véhiculesdeux-roues motorisés*. Evry.
- Pacejka, H.B., 2006. *Tyre and Vehicle Dynamics*, Elseiver Butterworth, Heinemann.
- Pacejka, H.B., Bakker, E. & Lidner, L., 1987. A New Tire Model with an Application in Vehicle Dynamics Studies. , SAE paper(890087).
- Piaggio, 2006. Piaggio. Available at: <http://www.piaggio.com/en/>.
- Raharijona, T., 2004. *Commande robuste pour l'assistance au controle latéral d'un véhicule routier*. Supélec.
- Renault, 2011. Renault Twizy. Available at: <http://www.renault.com/en/vehicules/renault/pages/twizy.aspx>.
- Ripert, P.-J., 2006. *Modélisation et identification paramétrique de l'effort de contact pneumatique/sol pour la dynamique véhicule*. Nantes: Ecole centrale de Nantes.
- Ripert, P.-J. et al., 2006. Identification robuste de la « formule magique » pour la caractérisation du pneumatique. In IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatisme, CIFA. Bordeaux.
- Roqueiro, N. & Fossas, E., 2010. A sliding mode controlled three wheeled narrow vehicle for two passengers. In The 11th International Workshop on Variable Structure Systems.

- Roqueiro, N., de Faria, M. & Fossas, E., 2011. Sliding Mode Controller and Flatness Based Set-Point Generator for a Three Wheeled Narrow Vehicle. In 18th IFAC World COngress. Milano, Italy.
- Roqueiro, N., Vieira, R.S. & Gaudenzi, M., 2010. Tilting control of a three-wheeled vehicle through steering. In 18th COongresso Brasileiro de Automatica. Bonito, MS, Brasil.
- Royce, W., 1987. Managing the development of large software systems: concepts and techniques. In *Proceedings of the 9th international conference on software Engineering (ICSE'87)*, p.328-338.
- SATE, 1998. SATE. Available at: <http://www.sate-italy.com/>.
- SCANeR Studio, 2010. SCANeR simulateur de conduite pour la recherche et la formation à la conduite. Available at: <http://www.scanersimulation.com/>.
- Schulz, P., 2008. Energy and Environment: Key challenges for the automotive industry.
- Sciavicco, L. & Siciliano, B., 2000. *Modeling and control of Robot Manipulators 2<sup>e</sup> éd.*, London, UK: Springer-Verlag.
- Sentouh, C., 2007. *Analyse du risque et détection de situations limites, Application au développement des systèmes d'alerte au conducteur*. IBISC.
- Sokolov, A.P. et al., 2009. Probabilistic Forecast for Twenty-First-Century Climate Based on Uncertainties in Emissions (Without Policy) and Climate Parameters. *Journal of Climate*, 22(19), p.5175-5204.
- TESIS DYNAware, 2007. veDYNA Vehicle Dynamics Simulation in Real-Time: Overview. Available at: <http://tesis-dynaware.com/en/products/vedyna.html>.
- Takahashi, T. & Hada, M., 2004. New Model of Tire Overturning Moment Characteristics and Analysis of Their Influence on Vehicle Rollover Behavior. *Vehicle System dynamics*, 42, p.109-118.
- Tango, C.C., 2004. Commuter Cars - The Tango, ultra-narrow electric car for commuting; 0-60 in 4 seconds. Available at: <http://www.commutercars.com/>.
- The Scottish Government, 2008. Private Transport- Car Occupancy. Available at: <http://www.scotland.gov.uk/About/>.
- Tilter, 2008. Tilter | Be early, be safe, be clean. Available at: <http://www.tilter.fr/index.html>.
- Toyota PM, 2003. Toyota Concept Vehicles -- PM. Available at: <http://www.toyota.com/concept-vehicles/pm.html>.
- Venture, G., 2003. *Identification des paramètres dynamiques d'une voiture*. IRCCyN.
- Venture, G. et al., 2006. Modelling and identification of passenger car dynamics using robotics formalism. , 7, p.349-359.

Villagra, J. et al., 2010. a diagnostic-based approach for tire-road forces and maximum friction estimation. In Control Engineering Practice. p. 174-184.

Volvo Tandem, 2004. Volvo's Tandem Concept | Car Design Online. Available at: <http://www.carsdesignonline.com/design/case-studies/volvo-concept-center/volvo-tandem.php>.

## A. Annexe : Paramètres de base

---

Nous présentons dans cette partie, une méthode formelle pour calculer les paramètres dynamiques d'une chaîne poly-articulée. Elle consiste en un calcul du jeu minimal de paramètres dynamiques, appelés aussi paramètres de base, caractérisant complètement le modèle dynamique. L'utilisation de ces paramètres dans le calcul du modèle dynamique réduit sa complexité sans introduire d'erreur. Les paramètres dynamiques de base sont obtenus à partir des paramètres dynamiques standards en éliminant ceux qui n'ont pas d'effet sur le modèle dynamique et en regroupant certains paramètres.

### Calcul des paramètres de base en utilisant le modèle dynamique

Le modèle dynamique est linéaire par rapport aux paramètres dynamiques. Il s'écrit sous la forme :

$$\Gamma = DK \tag{A.1}$$

Avec :

- $D$  : matrice ( $n \times N_p$ ), fonction de  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  et des paramètres géométriques ;
- $K$  : vecteur ( $N_p \times 1$ ) contenant les paramètres inertiels standard ;
- $N_p = 11n$

On peut tirer de l'équation (A.1)

a) si la colonne  $j$  de  $D$  est nulle ( $D_j = 0$ ), le vecteur  $\Gamma$  ne dépend pas de  $K_j$ , donc le paramètre  $K_j$  peut être mis à zéro sans affecter la valeur de  $\Gamma$ .

b) si la colonne  $D_j$  peut être exprimée sous forme linéaire des certaines autres colonnes  $D_p$

On dit dans ce cas que le paramètre  $K_j$  est regroupé avec les paramètres  $K_p$ .

La création du jeu de paramètres  $K_B$  repose donc sur l'étude des combinaisons linéaires des  $D_j$ . De façon globale, en permutant les colonnes de  $D$  et les paramètres du vecteur  $K$ , on peut exprimer la relation (A.1) par :

$$\Gamma = [D_1 \quad D_2] \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

- $D_1$  représente les colonnes indépendantes de  $D$  pour tout  $q, \dot{q}, \ddot{q}$ ;
- $D_2$  représente les colonnes dépendantes de telle sorte que  $D_2 = D_1\beta$ , avec  $\beta$  étant une matrice constante.

On montre alors que :

$$\Gamma = D_1 [K_1 + \beta K_2] = D_1 K_B \quad (\text{A.3})$$

Avec  $K_B$  le vecteur de paramètres de base :  $K_B = [K_1 + \beta K_2]$ .

## Calcul des paramètres de base en utilisant l'énergie

A partir du modèle dynamique, le calcul des paramètres dynamiques de base s'avère souvent long et fastidieux. Une méthode formelle est donnée dans (Khalil & Dombre 2002) et (Gautier 1990). Elle conduit aux règles générales simples sans avoir à calculer le modèle dynamique, ni l'énergie. Cette méthode est basée sur la relation de l'énergie totale du corps  $j$ , linéaire par rapport aux paramètres dynamiques. Les relations de regroupement se résument par les équations suivantes :

- Lorsque l'articulation  $j$  est rotoïde, les paramètres  $YY_j$ ,  $MZ_j$  et  $M_j$  peuvent être regroupés avec les paramètres des corps  $C_j$  et  $C_{j-1}$  selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned} XXR_j &= XX_j - YY_j \\ XXR_{j-1} &= XX_{j-1} + YY_j + 2r_j MZ_j + r_j^2 M_j \\ XYR_{j-1} &= XY_{j-1} + d_j S\alpha_j MZ_j + d_j r_j S\alpha_j M_j \\ XZR_{j-1} &= XZ_{j-1} - d_j C\alpha_j MZ_j - d_j r_j C\alpha_j M_j \\ YYR_{j-1} &= YY_{j-1} + CC\alpha_j YY_j + 2r_j CC\alpha_j MZ_j + (d_j^2 + r_j^2 CC\alpha_j) M_j \\ YZR_{j-1} &= YZ_{j-1} + CS\alpha_j YY_j + 2r_j CS\alpha_j MZ_j + r_j^2 CS\alpha_j M_j \\ ZZR_{j-1} &= ZZ_{j-1} + SS\alpha_j YY_j + 2r_j SS\alpha_j MZ_j + (d_j^2 + r_j^2 SS\alpha_j) M_j \\ MXR_{j-1} &= MX_{j-1} + d_j M_j \\ MYR_{j-1} &= MY_{j-1} - S\alpha_j MZ_j - r_j S\alpha_j M_j \\ MZR_{j-1} &= MZ_{j-1} + C\alpha_j MZ_j + r_j C\alpha_j M_j \\ MR_{j-1} &= M_{j-1} + M_j \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$



➤ Lorsque l'articulation  $j$  est prismatique, les paramètres de la matrice d'inertie du corps  $j$  se regroupent avec ceux du corps  $j-1$  selon les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
XXR_{j-1} &= XX_{j-1} + CC\theta_j XX_j - 2CS\theta_j XY_j + SS\theta_j YY_j \\
XYR_{j-1} &= XY_{j-1} + CS\theta_j C\alpha_j XX_j + (CC\theta_j - SS\theta_j)C\alpha_j XY_j - C\theta_j S\alpha_j XZ_j \\
&\quad - CS\theta_j C\alpha_j YY_j + S\theta_j S\alpha_j YZ_j \\
XZR_{j-1} &= XY_{j-1} + CS\theta_j S\alpha_j XX_j + (CC\theta_j - SS\theta_j)S\alpha_j XY_j + C\theta_j C\alpha_j XZ_j \\
&\quad - CS\theta_j S\alpha_j YY_j - S\theta_j C\alpha_j YZ_j \\
YYR_{j-1} &= YY_{j-1} + SS\theta_j CC\alpha_j XX_j + 2CS\theta_j CC\alpha_j XY_j - 2S\theta_j CS\alpha_j XZ_j \\
&\quad + CC\theta_j CC\alpha_j YY_j - 2C\theta_j CS\alpha_j YZ_j + SS\alpha_j ZZ_j \\
YZR_{j-1} &= YZ_{j-1} + SS\theta_j CS\alpha_j XX_j + 2CS\theta_j CS\alpha_j XY_j + S\theta_j (CC\alpha_j - SS\alpha_j) XZ_j \\
&\quad + CC\theta_j CS\alpha_j YY_j + C\theta_j (CC\alpha_j - SS\alpha_j) YZ_j - CS\alpha_j ZZ_j \\
ZZR_{j-1} &= ZZ_{j-1} + SS\theta_j SS\alpha_j XX_j + 2CS\theta_j SS\alpha_j XY_j + 2S\theta_j CS\alpha_j XZ_j \\
&\quad + CC\theta_j SS\alpha_j YY_j + 2C\theta_j CS\alpha_j YZ_j + CC\alpha_j ZZ_j
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Avec  $SS(.) = S(.)S(.)$  ;  $CC(.) = C(.)C(.)$  ;  $CS(.) = C(.)S(.)$

➤ Lorsque l'articulation  $j$  est bloquée, tous les paramètres inertiels du corps  $j$  se regroupent avec ceux du corps  $j-1$ .

En outre, il existe des méthodes numériques permettant de déterminer les paramètres de base (Gautier 1991). Le modèle minimal est obtenu par simplification du modèle complet, sans perte d'information et sans approximation



## B. Annexe : Algorithme de calcul numérique du modèle géométrique inverse

---

Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite au modèle géométrique inverse, on peut utiliser le modèle cinématique pour calculer itérativement une solution locale numérique  $q^d$  correspondant à une situation désirée  ${}^0T_n^d$

L'algorithme se résume par les étapes suivantes :

- définir une configuration articulaire initiale  $q_c$  (aléatoire ou courante) dans le domaine articulaire accessible,
- calculer la situation correspondante  ${}^0T_n^c$  du repère outil en utilisant le modèle géométrique direct ;
- calculer l'écart  $dX = \begin{bmatrix} dX_p^T & dX_r^T \end{bmatrix}^T$  entre la situation désirée  ${}^0T_n^d$  et la situation initiale  ${}^0T_n^c$ , tel que  $dX_p = P_n^d - P_n^c$  et  $dX_r = u\alpha$

Avec :  $u$  et  $\alpha$  désignant l'axe et l'angle correspondant à la rotation  ${}^0R_n^d = \text{rot}(u, \alpha) {}^0R_n^c$ . Pour rester dans le domaine de validité du modèle cinématique, qui représente un développement du premier ordre, on doit introduire à chaque pas de calcul des seuils  $S_p$  et  $S_r$  respectivement sur  $dX_p$  et  $dX_r$  de sorte que :

- si  $\|dX_p\| > S_p$ , alors  $dX_p = \frac{dX_p}{\|dX_p\|} S_p$
- si  $\|dX_r\| > S_r$ , alors  $dX_r = \frac{dX_r}{\|dX_r\|} S_r$

Lorsque  $dX$  est suffisamment petit, arrêter le calcul et prend  $q^d = q^c$  ;

- calculer numériquement la matrice jacobienne directe  ${}^0J_n(q_c)$  et sa pseudo inverse  $J^+$  ;

- calculer la variation articulaire correspondante  $dq = J^+ dX$  ;
- mettre à jour la configuration articulaire courante :  $q_c = q_c + dq$  ;
- retourner à la deuxième étape.

Cet algorithme est rapide et se calcule en temps réel. Lorsque l'algorithme ne converge pas après un nombre d'itérations prédéfini, il faut recommencer le calcul avec une nouvelle valeur initiale.

## C. Annexe : Paramètres Symoro+ modèles 11 ddl, 16 ddl et Smera

---

### Modèle 11 ddl

```
(* General parameters *)
(* Robotname = 'modele11ddl' *)
NF = 10
NL = 10
NJ = 10
Type = 1 (* Tree *)

(* Geometric parameters *)
Ant = {0,1,2,3,4,4,1,7,8,8}
Sigma = {2,1,0,2,0,2,1,2,0,2}
B = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
d = {0,Lf,0,0,0,0,-Lr,0,0,0}
R = {0,r2,0,0,0,-Ra,r7,0,0,-Ra}
gamma = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
Alpha = {0,Pi,0,-Pi/2,0,-Pi/2,Pi,-Pi/2,0,-Pi/2}
Mu = {0,1,1,0,1,0,1,0,1,0}
Theta = {0,Pi,t3,0,t5,Pi,Pi,0,t9,Pi}

(* Dynamic parameters and external forces *)
XX = {XX1,0,0,0,XX5,0,0,0,XX9,0}
XY = {XY1,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
XZ = {XZ1,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
YY = {YY1,0,0,0,XX5,0,0,0,XX9,0}
YZ = {YZ1,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
ZZ = {ZZ1,0,ZZ3,0,ZZ5,0,0,0,ZZ9,0}
MX = {MX1,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
MY = {MY1,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
MZ = {MZ1,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
M = {M1,M2,M3,0,M5,0,M7,0,M9,0}
IA = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
FV = {0,FV2,0,0,0,0,Fv7,0,0,0}
FS = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
FX = {0,0,0,0,0,-FX6,0,0,0,-FX10}
FY = {0,0,0,0,0,-FY6,0,0,0,-FY10}
FZ = {0,0,0,0,0,-FZ6,0,0,0,-FZ10}
CX = {0,0,0,0,0,-CX6,0,0,0,-CX10}
CY = {0,0,0,0,0,-CY6,0,0,0,-CY10}
CZ = {0,0,0,0,0,-CZ6,0,0,0,-CZ10}
```

```

(* Joints velocity and acceleration *)
QP = {0,QP2,QP3,0,QP5,0,QP7,0,QP9,0}
QDP = {0,QDP2,QDP3,0,QDP5,0,QDP7,0,QDP9,0}

(* Speed and acceleration of the base *)
W0 = {wx,wy,wz}
WP0 = {wpw,wpv,wpz}
V0 = {vx,vy,vz}
VP0 = {vpw,vpv,vpz}

(* Matrix Z *)
Z = {1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1}

(* Acceleration of gravity *)
G = {Gx,Gy,Gz}

(* End of definition *)

```

## Modèle 16 ddl

```

(* General parameters *)
(* Robotname = 'modele16ddl' *)
NF = 19
NL = 19
NJ = 19
Type = 1 (* Tree *)

(* Geometric parameters *)
Ant = {0,1,2,3,4,4,1,7,8,8,10,1,12,13,13,15,16,17,17}
Sigma = {2,1,0,2,0,2,1,0,2,0,2,1,2,0,2,1,2,0,2}
B = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
d = {0,d2,0,0,0,0,d7,0,0,0,0,d12,0,0,0,d16,0,0,0}
R = {0,r2,0,0,0,-Ra,r7,0,0,0,-Ra,r12,0,0,-Ra,r16,0,0,-Ra}
gamma = {0,-off2,0,0,0,0,off2,0,0,0,0,-off12,0,0,0,off12,0,0,0}
Alpha = {0,Pi,0,-Pi/2,0,-Pi/2,Pi,0,-Pi/2,0,-Pi/2,0,-Pi/2,0,-Pi/2,0,-Pi/2,0,-Pi/2}
Mu = {0,1,1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0}
Theta = {0,-off2 + Pi,t3,0,t5,Pi,off2 + Pi,t8,0,t10,
Pi,-off12 + Pi,0,t14,Pi,off12 + Pi,0,t18,Pi}

(* Dynamic parameters and external forces *)
XX = {XX1,0,0,0,XX5,0,0,0,0,XX10,0,0,0,XX14,0,0,0,XX18,0}
XY = {XY1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
XZ = {XZ1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
YY = {YY1,0,0,0,XX5,0,0,0,0,YY10,0,0,0,YY14,0,0,0,YY18,0}
YZ = {YZ1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
ZZ = {ZZ1,0,ZZ3,0,ZZ5,0,0,ZZ8,0,ZZ10,0,0,0,ZZ14,0,0,0,ZZ18,0}
MX = {MX1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
MY = {MY1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
MZ = {MZ1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
M = {M1,M2,M3,0,M5,0,M7,M8,0,M10,0,M12,0,M14,0,M16,0,M18,0}
IA = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

```

```

FV = {0, FV2, 0, 0, 0, 0, FV7, 0, 0, 0, 0, FV12, 0, 0, 0, FV16, 0, 0, 0}
FS = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
FX = {0, 0, 0, 0, 0, -FX6, 0, 0, 0, 0, -FX11, 0, 0, 0, -FX15, 0, 0, 0, -FX19}
FY = {0, 0, 0, 0, 0, -FY6, 0, 0, 0, 0, -FY11, 0, 0, 0, -FY15, 0, 0, 0, -FY19}
FZ = {0, 0, 0, 0, 0, -FZ6, 0, 0, 0, 0, -FZ11, 0, 0, 0, -FZ15, 0, 0, 0, -FZ19}
CX = {0, 0, 0, 0, 0, -CX6, 0, 0, 0, 0, -CX11, 0, 0, 0, -CX15, 0, 0, 0, -CX19}
CY = {0, 0, 0, 0, 0, -CY6, 0, 0, 0, 0, -CY11, 0, 0, 0, -CY15, 0, 0, 0, -CY19}
CZ = {0, 0, 0, 0, 0, -CZ6, 0, 0, 0, 0, -CZ11, 0, 0, 0, -CZ15, 0, 0, 0, -CZ19}

(* Joints velocity and acceleration *)
QP = {0, QP2, QP3, 0, QP5, 0, QP7, QP8, 0, QP10, 0, QP12, 0, QP14, 0, QP16, 0, QP18, 0}
QDP =
{0, QDP2, QDP3, 0, QDP5, 0, QDP7, QDP8, 0, QDP10, 0, QDP12, 0, QDP14, 0, QDP16, 0, QDP18, 0}

(* Speed and acceleration of the base *)
W0 = {wx, wy, wz}
WP0 = {wpx, wpy, wpz}
V0 = {vx, vy, vz}
VP0 = {vpx, vpy, vpz}

(* Matrix Z *)
Z = {1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1}

(* Acceleration of gravity *)
G = {Gx, Gy, Gz}

(* End of definition *)

```

## Smera

```

(* General parameters *)
(* Robotname = 'smera35ddl' *)
NF = 35
NL = 35
NJ = 35
Type = 1 (* Tree *)

(* Geometric parameters *)
Ant = {0, 1, 2, 3, 4, 2, 6, 7, 1, 9, 10, 10, 1, 13, 14, 14, 1, 17, 18, 19,
        20, 21, 1, 23, 24, 25, 26, 26, 1, 1, 1, 31, 32, 33, 34}
Sigma = {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 0, 2,
          0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1}
B = {0, b2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -L3, 0, 0, 0, -L3, 0, 0, -L9, 0, 0, 0, 0, 0,
      0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
d = {0, 0, L1, 0, 0, L1, 0, 0, -L4, L6, 0, 0, -L4, L6, 0, 0, d17, L10, 0, 0,
      0, 0, d23, L10, 0, 0, 0, 0, d9, d30, d31, d32, 0, d34, 0}
R = {0, r2, L2, 0, r5, L2, 0, r8, -L5, 0, 0, -Ra, -L5, 0, 0, -Ra, 0, 0, L11, 0,
      0, -Ra, 0, 0, L11, 0, 0, -Ra, 0, 0, 0, 0, r33, 0, r35}
gamma = {0, Pi/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -Pi + q9, 0, 0, 0, Pi - q13, off17a, 0, 0, 0,
          0, 0, off23a, 0, 0, 0, 0, 0, off29a, off30a, off31a, off32a, 0, off34a, 0}
Alpha = {0, Pi/2, Pi/2, Pi/2, Pi/2, -Pi/2, -Pi/2, Pi/2, Pi/2, Pi,
          0, -Pi/2, -Pi/2, 0, 0, -Pi/2, off17b, 0, Pi/2, Pi/2,

```

```

0,-Pi/2,off23b,0,0,-Pi/2,0,-Pi/2,off29b,off30b,
off31b,0,Pi/2,0,Pi/2}
Mu = {1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,1,1,0,
1,0,1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,1,1}
Theta = {t1,t2,t3,t4,0,t6,t7,0,t9,0,
t11,Pi,t13,0,t15,Pi,off17c + t17,t18,t19,0,
t21,Pi,off23c + t23,t24,t25,Pi,t27,Pi,off29c + t29,off30c + t30,
off31c + t31,off32b + t32,0,off34b + t34,0}

```

(\* Dynamic parameters and external forces \*)

```

XX = {XX1,XX2,0,0,0,0,0,0,XX9,XX11,
0,0,XX13,XX15,0,0,XX17,XX18,0,XX21,
0,0,XX23,XX24,XX26,XX27,0,0,0,0,
XX31,0,0,0,0}
XY = {XY1,XY2,0,0,0,0,0,0,XY9,0,
0,0,XY13,0,0,0,XY17,XY18,0,0,
0,0,XY23,XY24,0,0,0,0,0,0,
XY31,0,0,0,0}
XZ = {XZ1,XZ2,0,0,0,0,0,0,XZ9,0,
0,0,XZ13,0,0,0,XZ17,XZ18,0,0,
0,0,XZ23,XZ24,0,0,0,0,0,0,
XZ31,0,0,0,0}
YY = {YY1,YY2,0,0,0,0,0,0,YY9,XX11,
0,0,YY13,XX15,0,0,YY17,YY18,0,XX21,
0,0,YY23,YY24,XX26,XX27,0,0,0,0,
YY31,0,0,0,0}
YZ = {YZ1,YZ2,0,0,0,0,0,0,YZ9,0,
0,0,YZ13,0,0,0,YZ17,YZ18,0,0,
0,0,YZ23,YZ24,0,0,0,0,0,0,
YZ31,0,0,0,0}
ZZ = {ZZ1,ZZ2,0,0,0,0,0,0,ZZ9,0,
ZZ11,0,ZZ13,0,ZZ15,0,ZZ17,ZZ18,0,0,
ZZ21,0,ZZ23,ZZ24,0,0,ZZ27,0,0,0,
ZZ31,0,0,0,0}
MX = {MX1,MX2,0,0,0,0,0,0,MX9,0,
0,0,MX13,0,0,0,MX17,MX18,0,0,
0,0,MX23,MX24,0,0,0,0,0,0,
MX31,0,0,0,0}
MY = {MY1,MY2,0,0,0,0,0,0,MY9,0,
0,0,MY13,0,0,0,MY17,MY18,0,0,
0,0,MY23,MY24,0,0,0,0,0,0,
MY31,0,0,0,0}
MZ = {MZ1,MZ2,0,0,0,0,0,0,MZ9,0,
0,0,MZ13,0,0,0,MZ17,MZ18,0,MZ20,
0,0,MZ23,MZ24,0,0,0,0,0,0,
MZ31,0,0,0,0}
M = {M1,M2,0,0,M5,0,0,0,M9,M11,
0,M12,M13,M15,0,0,M17,0,0,M21,
0,0,M23,M24,M26,M27,0,0,0,0,
M31,0,M33,0,M35}
IA = {0,IA2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
FV = {0,0,0,0,FV5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,FV33,0,FV35}
FS = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
FX = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-FX12,0,0,0,-FX16,0,0,0,0,
0,-FX22,0,0,0,0,0,-FX28,0,0,0,0,0,0}
FY = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-FY12,0,0,0,-FY16,0,0,0,0,

```



```

0,-FY22,0,0,0,0,0,-FY28,0,0,0,0,0,0,0,0}
FZ = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-FZ12,0,0,0,-FZ16,0,0,0,0,
0,-FZ22,0,0,0,0,0,-FZ28,0,0,0,0,0,0,0}
CX = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-CX12,0,0,0,-CX16,0,0,0,0,
0,-CX22,0,0,0,0,0,-CX28,0,0,0,0,0,0,0}
CY = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-CY12,0,0,0,-CY16,0,0,0,0,
0,-CY22,0,0,0,0,0,-CY28,0,0,0,0,0,0,0}
CZ = {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-CZ12,0,0,0,-CZ16,0,0,0,0,
0,-CZ22,0,0,0,0,0,-CZ28,0,0,0,0,0,0,0}

(* Joints velocity and acceleration *)
QP = {QP1,QP2,QP3,QP4,QP5,QP6,QP7,QP8,QP9,0,
QP11,0,QP13,0,QP15,0,QP17,QP18,QP19,0,
QP21,0,QP23,QP24,QP25,0,QP27,0,QP29,QP30,
QP31,QP32,QP33,QP34,QP35}
QDP = {QDP1,QDP2,QDP3,QDP4,QDP5,QDP6,QDP7,QDP8,QDP9,0,
QDP11,0,QDP13,0,QDP15,0,QDP17,QDP18,QDP19,0,
QDP21,0,QDP23,QDP24,QDP25,0,QDP27,0,QDP29,QDP30,
QDP31,QDP32,QDP33,QDP34,QDP35}

(* Speed and acceleration of the base *)
W0 = {wx,wy,wz}
WP0 = {wpx,wpv,wpz}
V0 = {vx,vy,vz}
VP0 = {vpx,vpy,vpz}

(* Matrix Z *)
Z = {1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1}

(* Acceleration of gravity *)
G = {Gx,Gy,Gz}

(* End of definition *)

```

## Valeurs paramètres dynamiques modèle 11 ddl

|  |
|--|
| <p><i>Châssis</i></p> <p><math>XX_1= 622.15 \text{ Kg.m}^2</math> ; <math>XY_1= -76 \text{ Kg.m}^2</math> ; <math>YY_1= 2041 \text{ Kg.m}^2</math> ; <math>XZ_1= 20 \text{ Kg.m}^2</math><br/> <math>ZZ_1= 2342 \text{ Kg.m}^2</math> ; <math>YZ_1= 13 \text{ Kg.m}^2</math>; <math>M_1 = 1508 \text{ Kg}</math></p> |
| <p><i>Suspensions:</i></p> <p><math>M_2=M_7= 2*1.32 \text{ Kg}</math><br/> <math>K_2=2*30000 \text{ N/m}</math><br/> <math>K_7=2*21012 \text{ N/m}</math><br/> <math>F_{V_2} = F_{V_7} = 2*3200 \text{ N/m/s}</math></p>   |
| <p><i>Roues :</i></p> <p><math>M_5=M_9=2*20 \text{ Kg}</math><br/> <math>XX_5= XX_9= YY_5= YY_9=2* 0.415 \text{ Kg.m}^2</math><br/> <math>ZZ_5= ZZ_9= 2*0.756 \text{ Kg.m}^2</math></p>  |

## Valeurs paramètres dynamiques modèle 16 ddl

|  |
|--|
| <p><i>Châssis</i></p> <p><math>XX_1= 622.15 \text{ Kg.m}^2</math> ; <math>XY_1= -76 \text{ Kg.m}^2</math> ; <math>YY_1= 2041 \text{ Kg.m}^2</math> ; <math>XZ_1= 20 \text{ Kg.m}^2</math><br/><math>ZZ_1= 2342 \text{ Kg.m}^2</math> ; <math>YZ_1= 13 \text{ Kg.m}^2</math>; <math>M_1 =1508 \text{ Kg}</math></p> |
| <p><i>Suspensions:</i></p> <p><math>M_2=M_7= M_{12}=M_{16}=1.32 \text{ Kg}</math><br/><math>K_2= K_7=30000 \text{ N/m}</math><br/><math>K_{12}= K_{16}=21012 \text{ N/m}</math><br/><math>F_{v_2}= F_{v_7}=F_{v_{12}}= F_{v_{16}}=3200 \text{ N/m/s}</math></p>  |
| <p><i>Roues :</i></p> <p><math>M_5=M_{10}= M_{14}=M_{18}=20 \text{ Kg}</math><br/><math>XX_5= XX_{10}= XX_{14}= XX_{18}= YY_5= YY_{10}= YY_{14}= YY_{18}= 0.415 \text{ Kg.m}^2</math><br/><math>ZZ_5= ZZ_{10}= ZZ_{14}= ZZ_{18}= 0.756 \text{ Kg.m}^2</math></p>   |



# Salim Maakaroun

## Modélisation et simulation dynamique d'un véhicule urbain innovant en utilisant le formalisme de la robotique

### Résumé

La modélisation et la simulation numérique sont des outils fondamentaux pour la conception et le développement de nouveaux véhicules.

Les travaux de cette thèse portent sur la modélisation et la simulation d'un véhicule innovant, étroit et inclinable, en appliquant une description systématique et générique du véhicule considéré comme un robot dont la base est mobile et les roues sont les organes terminaux. Le système d'inclinaison motorisé entraîne une cinématique complexe et comporte des chaînes fermées. Le but du travail est de construire un modèle physique, au contraire des modèles simplifiés de type bicyclette ou quart de véhicule utilisés habituellement pour l'étude de la commande des véhicules. L'approche procède à la description de l'architecture mécanique du véhicule, le considérant comme un système multi-corps poly-articulés, s'appuyant sur le formalisme de la robotique et précisément sur la représentation géométrique de Denavit-Hartenberg modifié. Cette approche permet de calculer automatiquement les expressions symboliques des modèles géométriques, cinématiques et dynamiques des structures simples et arborescentes. Les modèles qui en résultent comportent un nombre minimum d'opérations par la mise à profit du calcul symbolique itératif et des techniques de simplification de modèles propres à la robotique. Ces techniques sont implémentées dans le logiciel de calcul symbolique SYMORO+. Le modèle dynamique est calculé d'une manière récursive à l'aide de l'algorithme de Newton-Euler. La simulation dynamique utilise un simulateur édité sous Matlab/Simulink qui intègre le modèle dynamique direct calculé automatiquement à partir du modèle inverse. Des simulations réalisées sur des modèles de complexité croissante, pour des scénarios de freinage ou d'accélération, en ligne droite ou en virage, valident la méthodologie de modélisation mécanique proposée.

#### Mots clés

**Modélisation, simulation, véhicule urbain inclinable, formalisme de Denavit&Hartenberg modifié, robot mobile**

### Abstract

Modeling and simulating are fundamental tools to develop new vehicles.

The aim of this thesis is to model and simulate an urban narrow tilting car whose structure contains closed mechanical chains. Hence the goal is to build a physical model more precise and realistic than the bicycle model or quarter vehicle model used usually for some control purposes. The modeling approach is based on the modified Denavit&Hartenberg description, commonly used in robotics, by considering the vehicle as a multi-body poly-articulated system where the terminal links are the wheels. This description allows calculating automatically the symbolic expression of the geometric, kinematic and dynamic models, by using robotics techniques and a symbolic software package named SYMORO+. The dynamic model is calculated recursively thanks to the Newton-Euler algorithm. Simulations of different dynamical model of vehicles have been performed, analyzed and compared. They validate in some sense the modeling methodology presented as an efficient way to get realistic model of non-standard vehicles.

#### Key Words

**Modeling, simulation, urban tilting vehicle, modified Denavit&Hartenberg formalism, mobile robot**