



HAL
open science

Modélisation numérique par la méthode SPH de la séparation eau-huile dans les séparateurs gravitaires

Nicolas Grenier

► **To cite this version:**

Nicolas Grenier. Modélisation numérique par la méthode SPH de la séparation eau-huile dans les séparateurs gravitaires. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2009. Français. NNT: . tel-00664668v2

HAL Id: tel-00664668

<https://theses.hal.science/tel-00664668v2>

Submitted on 6 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Centrale de Nantes

**École Doctorale
Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences & Architecture**

Année 2009

N B.U. :

Thèse de Doctorat

Spécialité : Dynamique des Fluides et des Transferts

Présentée et soutenue publiquement par :

Nicolas Grenier

le 26 février 2009
à l'École Centrale de Nantes

**Modélisation numérique par la méthode SPH
de la séparation eau-huile dans les séparateurs gravitaires**

Jury

Président : M. Yves LECOINTE Professeur, Président de l'Université de Nantes

Rapporteurs : M. Francis LEBOEUF Professeur, LMFA, École Centrale Lyon,
M. Jean-Paul VILA Professeur, IMT, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

Examineurs : M. Bertrand ALESSANDRINI Ingénieur de Recherche, LMF, École Centrale de Nantes,
M. Loïc BOUDET Adjoint Scientifique du Directeur Technique, DGA (BEC),
M. Andrea COLAGROSSI Chercheur, INSEAN, Rome

Membres invités : M. Jacques RUER Directeur adjoint R&D, SAIPEM S.A.,
M. David LE TOUZÉ Maître de Conférences, LMF, École Centrale de Nantes

Directeur de thèse : Bertrand ALESSANDRINI

Laboratoire : Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'École Centrale de Nantes

Co-encadrant : David LE TOUZÉ

Laboratoire : Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'École Centrale de Nantes N ED 498-35

À ma mère.

Remerciements

Étrange coutume que d'ouvrir ce manuscrit de thèse sur la partie qui vient clôturer effectivement ces 3 années de travail. Mais tellement indispensable pour remettre en perspective l'état d'esprit qui a abouti à ce résultat.

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants au Laboratoire de Mécanique des Fluides, Bertrand Alessandrini, mon directeur de thèse et David Le Touzé pour la supervision technique. Le premier pour son accueil au sein de l'équipe, son énergie et son éternel optimisme. Le second pour son amitié et son support au quotidien.

Je n'oublie pas non plus Guillaume Oger qui a commencé aussi à me suivre en début de thèse et à me transmettre son code SPH avant de me suivre d'un peu plus loin depuis Hydrocéan.

Je remercie aussi parmi les personnes de Saipem (l'entreprise qui m'a financé au cours de cette thèse Cifre) tout particulièrement Jacques Ruer. Il a su me faire confiance, lire et écouter patiemment mes rapports et exposés un peu techniques sur la résolution de la partie hyperbolique par solveur de Riemann du modèle à fraction de volume. . . Il m'a aussi laissé une grande liberté de recherche en me permettant de rester au sein du laboratoire.

Sont à remercier aussi Jean-Marc Bonnissel, puis Nicolas Butin, qui ont suivi les développements techniques et qui ont eux aussi ingurgité de la SPH et toutes ses subtilités.

D'une base initialement purement Nantaise, les travaux m'ont amenés à explorer d'autres variantes de la SPH développées ailleurs. C'est ainsi qu'après avoir éprouvé quelques difficultés sur la méthode à fraction de volume (quoi ? quatre mois sur ce MUSCL ? broutille !!), je suis allé rencontrer Jean-Paul Vila à l'Insa Toulouse. Je tiens à le remercier de nous avoir accueilli, David et moi, ces quelques jours et d'avoir pris le temps de regarder en détail, les mains dans le cambouis, les raisons de mon blocage sur cette méthode.

Parallèlement à cela, mon exploration m'a aussi permis de collaborer avec Andrea Colagrossi, de l'Insean à Rome. Bien que je n'ai jamais foulé le sol de la cité aux 7 collines (enfin celle transalpine ; la provencale Nîmes ne m'est pas inconnue !), les nombreux échanges avec lui ont été très fructueux. L'implémentation de sa méthode, mathématiquement moins complexe que celle qui me donnait un peu plus de fil à retordre, m'a permis d'avoir assez rapidement des résultats et de dissiper, à moins d'un an de la fin de thèse, les nuages qui en assombrissaient le dénouement. Je suis particulièrement reconnaissant d'avoir aussi travaillé avec lui.

Je remercie aussi Francis Leboeuf d'avoir bien voulu être rapporteur de mon manuscrit de thèse et d'avoir fait d'excellentes remarques en tant que spécialiste de la mécanique

des fluides compressibles. Mes remerciements vont aussi à Loïc Boudet et Yves Lecointe d'avoir voulu, respectivement, participer et présider à mon jury de thèse.

Enfin, je tiens à remercier beaucoup d'autres personnes, qui sont intervenues moins formellement dans le cadre de ma thèse (ils ne figurent pas dans la bibliographie, ni sur la couverture du manuscrit) mais n'en demeurent pas moins indispensables à la réussite de celle-ci.

Il y a tout d'abord ma famille qui m'a vu émigrer dans le nord (vous savez au dessus d'une ligne Bordeaux-Lyon...), ne comprenant pas pourquoi j'échangeais le soleil nîmois contre la pluie bretonne. Pendant trois années, ils ont patiemment essayé de comprendre, à travers mes récits un peu obscurs sur la SPH, mes histoires de sorties voiles ou vtt ou nocturnes... Puis un beau matin de février, arrivant sous le soleil dans la cité des ducs, écoutant ma soutenance pieusement et s'émerveillant devant la houle magique de Maître Fébulle, ils ont vu cette fabuleuse vie nantaise.

Cette thèse s'est aussi bien déroulée grâce à la très bonne ambiance de travail au labo, à ses collègues et sa dynamique équipe de doctorants. Il y a tout d'abord Lionel Gentaz qui m'accueilli en stage de Master (avec Alain Clément), toujours partant pour le badminton et le vtt. Pierre Ferrant qui a suivi de loin, avec un regard non SPH, ma thèse. Anne et Thuy pour leur gentillesse.

Et puis tous les jeunes, qui sont partis, revenus, restés, arrivés, titularisés. Qui n'ont jamais été croisés qu'au deuxième étage du bâtiment D, à la cafét', ou revus jusque sur la terrasse du Remorqueur. Pèle-mêle : Mathieu Do. (le père de la SPH au LMF), Yannoux (ça bouine?), Micky, Jsex, Romulus Hélène et Velcro (t'as faim?), Babar et Elise (Vélocampus Powa!), Alban, PM (le pécheur de loup), JB, Guigs, Aurélien le DAH!, Adrien Hellfest en kayak, Joss, OG, Ally, Matt Du. sailor master, Elich', Hakim et Vonvon LMF surf crew, Matt DL (on se disait avec Charles), Charles donc chess master, Clément, Chadi, Bruno, Auré D., Guillaume F., Ilyes, Lionel H., Wawann.

Et surtout les 3 aînés qui m'ont recueilli comme pauvre stagiaire de Master, perdu seul en D01 et dans Nantes. Avec qui j'ai découvert Nantes (de nuit surtout...) : Duke Ducro, Pierrot a.k.a. Rdr et Ouss.

Une mention toute spéciale à mon cobureau, Fébo, le normalien le plus cool jamais vu, le roi de la vague (en bassin) et du vent en voile légère.

A Saipem, je tiens aussi à remercier Xavier Riou, docteur pleinement heureux dans une boîte d'ingénierie. Merci à ses conseils de début de thèse. Je décerne aussi une mention spéciale à la TEDE young team, avec ses nombreux jeunes ingénieurs et stagiaires, qui ont vu débarquer le temps d'une présentation un extraterrestre les inondant de numérique et de SPH pour aussitôt repartir dans son labo.

Je remercie aussi Jérôme et Emilie pour m'avoir permis de m'initier à l'enseignement durant ma thèse.

Et finalement, je fais un clin d'oeil à ceux qui n'ont pas travaillé directement avec moi, mais qui ont été plus ou moins au courant de ma thèse ces années nantaises : Lolotte, Pablo et Lilie, Oliv', Claire, Céd J80, Ingrid, Justine. Et les meilleurs : Palpak, Guigui et Zaza, Tibo et Eve.

Table des matières

Introduction	1
I Modèles physiques et schémas numériques	5
I.1 Les équations physiques	7
I.1.1 Les équations de Navier-Stokes	7
I.1.2 Loi de comportement	8
I.1.3 Équation d'état	8
I.1.4 Vitesse du son et pseudo-compressibilité	9
I.1.5 Effets de la tension superficielle	10
I.1.6 Conditions aux limites	11
I.1.6.1 Conditions dynamiques	11
I.1.6.2 Conditions cinématiques	11
I.2 À base de SPH classique	13
I.2.1 SPH classique	13
I.2.1.1 Schéma d'interpolation	13
I.2.1.2 Discrétisation du système d'équations	17
I.2.1.3 Conditions aux limites	20
I.2.1.4 Avance en temps	24
I.2.1.5 Viscosité artificielle	25
I.2.1.6 Conditions initiales	26
I.2.2 Les instabilités à l'interface	27
I.2.3 Formulation SPH-Multifluide	28
I.2.3.1 Le schéma physique	29
I.2.3.2 Le schéma d'interpolation	29
I.2.3.3 Discrétisation du système d'équations	30
I.3 La SPH hybride	35
I.3.1 La formulation monofluide	35
I.3.1.1 Lois de conservation	35
I.3.1.2 Discrétisation du système d'équations	37
I.3.1.3 Le schéma hybride	40
I.3.1.4 Validation des solveurs	53
I.3.2 Extension à deux fluides et difficultés	59
I.3.3 La formulation à fraction de volume	61

I.3.3.1	Le modèle physique	62
I.3.3.2	Discrétisation du système d'équations	66
I.3.3.3	Validation du solveur	72
II	Ajout de phénomènes physiques	79
II.1	La viscosité	83
II.1.1	Les différentes modélisations	83
II.1.1.1	Formulation de Flekkøy	83
II.1.1.2	Formulation de Morris	84
II.1.1.3	Formulation de Monaghan	84
II.1.1.4	Forme P.S.E.R.	84
II.1.2	Viscosité dynamique inter-particulaire	85
II.1.3	Stabilité temporelle	85
II.1.4	Condition aux limites	85
II.1.5	Validation	86
II.1.5.1	Mise en œuvre numérique	87
II.1.5.2	Cas monofluide	88
II.1.5.3	Cas bifluide	93
II.2	Les effets de tension superficielle	97
II.2.1	La modélisation adoptée	97
II.2.2	Modélisation alternative	99
II.2.3	Stabilité temporelle	99
II.2.4	Conditions aux limites	100
II.2.5	Validation	100
II.2.5.1	Courants parasites	100
II.2.5.2	Goutte oscillante	102
III	Cas tests et exemples d'application	111
III.1	Ballotement linéaire	113
III.1.1	Problème et solution analytique	113
III.1.2	Configuration numérique	114
III.1.3	Résultats	115
III.1.3.1	Avec interface	115
III.1.3.2	Avec surface libre	116
III.2	Instabilités de Rayleigh-Taylor	121
III.2.1	Configuration	121
III.2.2	Résultats numériques	122
III.2.2.1	Convergence en espace	122
III.2.2.2	Précision du noyau	124
III.2.2.3	Diffusion de l'interface	125

III.3 Envahissement	127
III.3.1 Cas du LMF	127
III.3.1.1 Configuration	127
III.3.1.2 Résultats et comparaisons expérimentales	129
III.3.2 Cas de Ruponen	132
III.3.2.1 Problème et configuration	132
III.3.2.2 Résultats	133
III.4 Bulle isolée	135
III.4.1 Sussman	135
III.4.1.1 Problème et configuration	135
III.4.1.2 Résultats numériques	136
III.4.2 Vitesse terminale ascendante	140
III.4.2.1 Problème et configuration	140
III.4.2.2 Résultats numériques	140
III.5 Séparateur eau-huile	145
III.5.1 Cuve fermée	145
III.5.1.1 Configuration	145
III.5.1.2 Résultats	146
III.5.2 Cuve avec entrée/sortie	148
III.5.2.1 Configuration	148
III.5.2.2 Résultats	150
Conclusion	153
A Pulsation propre d'une goutte cylindrique	155
Bibliographie	156

Introduction

Notre époque industrielle est caractérisée par sa grande consommation énergétique et sa dépendance aux énergies fossiles (charbon, gaz, pétrole). Cette dernière s'explique par l'abondance relative des ressources et par la facilité d'exploitation et d'utilisation qui ont découlé des progrès effectués par la technique depuis près de deux siècles. Mais, ces ressources, qui paraissent inépuisables du point de vue d'un individu actuel, sont limitées en raisonnant à l'échelle de l'humanité. Sans parler d'autres conséquences découlant de la transformation de ces produits carbonés lors de leur utilisation et dont les effets commencent seulement à être saisis et redoutés.

À moyen terme, pour pallier cela, on peut raisonnablement penser que l'on arrivera à substituer l'usage de certains de ces combustibles dans des activités identifiées (comme le chauffage, la production électrique ou généralement tous les besoins sédentaires) par d'autres ressources plus durables dans le temps. Mais pour d'autres besoins, certaines caractéristiques physiques font que les matières fossiles sont, au moins en tout cas pour le moment, incontournables : il en est ainsi de la forme la plus répandue et la plus connue, celle du carburant (fossile). De part son énergie massique et volumique, celui-ci est difficilement remplaçable pour son utilisation dans les moyens de transport actuels. À moins donc de développer ou découvrir d'autres sources d'énergies aisément transportables et compétitives (ou à défaut des vecteurs d'énergie non primaire), ou de modifier substantiellement notre organisation des déplacements, le carburant s'avère indispensable. L'intérêt est donc d'exploiter au mieux les ressources connues.

Parmi toutes les énergies fossiles, le pétrole est celle qui convient le mieux actuellement pour une transformation en carburants. Les premières découvertes et mises en exploitation ont d'abord été faites dans les champs pétrolifères terrestres sous forme conventionnelle (extrait par un puits pétrolier) pour des raisons évidentes de commodité. Mais plusieurs facteurs (pression de la demande, épuisement des premiers champs historiques, raisons géopolitiques des principaux pays consommateurs, ...) ont fait que l'on s'est aussi intéressé à l'autre partie non terrestre de la Terre : les océans. Rapidement la part de cette ressource (dénommée ainsi *offshore*) est devenue non négligeable dans la production pétrolière. Mais là aussi les champs les plus faciles à exploiter l'ont été en premier et il faut dorénavant envisager de mettre en production d'autres champs qui ont été découverts dans des lieux plus difficiles d'accès. Et en mer, l'accessibilité se traduit tout simplement par la profondeur d'eau qu'il faut traverser avant d'arriver au plancher océanique où le forage doit être effectué. Cela a plusieurs conséquences techniques que l'on va examiner après avoir rappelé le fonctionnement d'une exploitation offshore.

Celle-ci ne se limite pas à la construction du puits pétrolier en lui-même (issu d'un forage fait à partir d'une plate-forme). Il est nécessaire d'étudier aussi l'interaction avec le réservoir géologique contenant l'huile (autre dénomination du pétrole). Ainsi, une fois

foré, et grâce, entre autres, à la pression élevée régnant dans la roche, le réservoir expulse naturellement l'huile par le puits. Cette récupération primaire est cependant limitée dans le temps et par conséquent ne permet pas d'extraire toute la quantité contenue dans le réservoir. Pour augmenter celle-ci on a donc recours à une récupération assistée : par l'usage de pompes sur terre et/ou par injection de fluides dans le réservoir sous la poche d'huile (pour « pousser » celle-ci). C'est cette dernière technique qui est employée en production en mer grâce à la disponibilité de l'eau. Cependant un réservoir géologique n'est pas une entité parfaitement étanche, et la chute de pression d'une part et l'injection d'eau d'autre part, provoquent la présence d'eau en sortie, dans le puits de production. Or, la proportion de cette eau mélangée à l'huile ne cesse de croître au cours de la vie de production d'un puits : de traces à son début, la part d'eau peut atteindre 99% du volume de mélange extrait en fin de vie (proportion atteinte suivant les conditions économiques du lieu de production). Ce mélange n'étant pas valorisable directement, il est nécessaire de séparer l'eau de l'huile : on peut alors récupérer d'un côté l'huile pour la revendre et de l'autre l'eau pour la ré-injecter dans le réservoir pour en améliorer le rendement (sous réserve de pureté vis-à-vis de la porosité de la roche). Ce processus de séparation est fait dans des séparateurs gravitaires (par décantation) ou dans des hydrocyclones (par centrifugation) suivant les conditions de mélange. Ces systèmes sont actuellement disposés en surface sur les plate-formes pétrolières.

Or, il a été vu plus haut que les exploitations en mer doivent se faire dans des profondeurs d'eau toujours plus grandes ($> 1000m$). Parmi toutes les contraintes supplémentaires que cet environnement extrême apporte, certaines ont un impact direct sur le mélange eau-huile, et d'autres sur les infrastructures, par exemple les séparateurs. En effet, comme cela a été mentionné précédemment, la quantité d'eau présente dans le mélange peut devenir prépondérante : se pose alors le problème de la pertinence économique et énergétique de remonter à la surface un fluide non valorisable sur de grandes hauteurs pour l'évacuer ensuite (ou le redescendre pour le ré-injecter). Cela a des répercussions évidentes en terme de dimensionnement du réseau de transport. De plus, à grande profondeur règnent de très faibles températures (de l'ordre du degré Celsius) qui contrastent avec celles de l'huile sortant du réservoir (de l'ordre de quelques dizaines de degrés). De par sa composition chimique complexe et ses propriétés, le mélange eau-huile-gaz peut réagir à ce choc thermique par la formation de composés solides (les hydrates), qui peuvent le cas échéant boucher les conduites. Bien qu'il existe des procédés pour prévenir (par isolation ou chimiquement) ces dépôts, leur déploiement dans ces conditions peut devenir pénalisant économiquement.

Les problématiques amenées par l'extraction d'un mélange eau-huile à grande profondeur sont donc posées. La séparation apparaît comme pouvant être un point clé d'une exploitation viable si elle peut être effectuée au plus près de la tête de puits du gisement. Si théoriquement, rien n'empêche de faire de la décantation avec des conditions thermiques et mécaniques assez sévères, cela impose pratiquement une conception différente prenant en compte toutes ces contraintes. Vient s'ajouter aussi un facteur contraignant supplémentaire qui est la difficulté des opérations à ces grandes profondeurs : toute intervention de l'homme est alors relativement complexe et sans commune mesure avec ce qui peut se passer sur une plate-forme, que ce soit pour la mise en œuvre initiale du séparateur, son exploitation ou sa maintenance. Toutes ces contraintes font qu'un séparateur doit être conçu de façon la plus optimale possible tout en respectant une efficacité donnée (c'est-à-dire la capacité à séparer correctement les deux fluides ; celle-ci est quantifiée en mesurant

le taux de présence d'un fluide dans l'autre après séparation).

C'est dans ce contexte que ce travail de recherche s'inscrit : n'intervenant pas sur la conception du séparateur (qui est plutôt du ressort industriel ; le concept restant somme toute assez simple puisqu'il ne s'agit que d'un décanteur gravitaire, soit *grosso modo* une cuve), il est nécessaire d'étudier les mécanismes physiques le régissant de manière à, idéalement, en déterminer l'efficacité.

Le concept de séparation fait intervenir plusieurs aspects de la mécanique des fluides tels que l'étude d'écoulements de bulles et de gouttes, la coalescence et la rupture de celles-ci. Tous ces phénomènes étant relativement complexes, l'approche sera simplifiée en ne considérant que quelques-uns des effets physiques à leur origine (à savoir les effets visqueux et les effets de tension superficielle, en plus, évidemment des principes de base de la mécanique des fluides). Ainsi, à partir de modèles simples, on pourra se placer en position de reproduire par étapes tous ces phénomènes. Les modèles physiques utilisés dans ce travail sont présentés en début de première partie.

Une fois déterminés les modèles physiques à étudier, il est nécessaire de les valider sur le cas d'étude choisi ou dans un premier temps sur des configurations simplifiées (par exemple l'écoulement d'une bulle isolée). Pour effectuer cette démarche de validation des modèles s'offrent au physicien deux choix : soit la comparaison directe de ses modèles à la réalité, soit une étude virtuelle avec des outils de simulation informatique. La première option, l'expérimentation, est la plus évidente : la confrontation au réel a longtemps été la seule façon de confirmer la viabilité des modèles. Mais la lourdeur de mise en place d'essais dans certaines configurations ainsi que l'émergence de nouveaux moyens technologiques ont donné plus d'importance à un nouveau moyen de validation : la simulation par des méthodes numériques. L'avènement de l'informatique a ainsi permis de faire résoudre par des machines les équations régissant certains phénomènes physiques (faisant intervenir des notions mathématiques compliquées à résoudre manuellement) et de confronter leur solution aux hypothèses physiques. Et l'essor de ces méthodes de résolution a été portée par la rapidité grandissantes des ordinateurs à fournir les simulations et par le faible coût matériel de celles-ci. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que l'expérimentation reste indispensable à la validation de la réponse numérique ou pour valider les concepts physiques hors de portée de la simulation actuellement.

Ayant fait le choix de la modélisation numérique, et parmi les outils développés dans l'équipe Hydrodynamique et Génie Océanique du Laboratoire, deux d'entre eux sont potentiellement susceptibles de nous permettre d'étudier notre problématique. Le premier, VOFNI, est basé sur la méthode des Volumes Finis et une méthode de capture d'interface (Volume Of Fluid). Il s'agit d'une méthode reposant sur des maillages eulériens, dont les limites de la manipulation sont difficiles à repousser lorsqu'on étudie des grands mouvements de corps au sein du fluide (tels que le déplacement d'un navire dans de la houle, sujet au cœur de la thématique de l'équipe). C'est pour cette raison qu'un deuxième outil a été développé : la méthode SPH dont l'une des principales caractéristiques est l'absence d'utilisation de maillage. Cette méthode a été initialement développée à la fin des années 70 dans le domaine de l'astrophysique, avant d'être appliquée aux problèmes d'hydrodynamique à surface libre au milieu des années 90. Quatre doctorants ([Doring \(2005\)](#), [Oger \(2006\)](#), [Deuff \(2007\)](#) et [Guilcher \(2008\)](#)) et plusieurs stagiaires de Master se sont succédés dans l'équipe pour développer cette méthode et prolonger son application à travers dif-

férents aspects : parallélisation, interaction fluide-structure, interaction houle-structure, écoulement en faible profondeur et couplage avec la thermique. G. Oger avait ainsi, lors de sa thèse, amorcé l'étude d'écoulements bifluïdes avec la méthode SPH, concluant à la nécessité de recherches avancées sur le sujet. Ce travail de thèse s'inscrit donc dans ce contexte local.

Dans un premier temps, il a consisté à étudier les formulations utilisées dans un environnement monofluïde pour évaluer leurs capacités à étudier des écoulements bifluïdes. Sur cette base, des formulations multifuïdes ont été proposées. Elles résultent de discussions et de travaux menés en collaboration avec Andrea Colagrossi (INSEAN Rome) d'une part, et avec Jean-Paul Vila (INSA Toulouse) d'autre part. Elles sont présentées dans les deuxième et troisième chapitres de la première partie.

Puis, ayant l'objectif d'ajouter les phénomènes physiques d'effets de viscosité et de tension superficielle aux formulations choisies, il en a été étudié différentes modélisations. Celles-ci ont été ensuite validées sur des cas simples ne mettant en jeu que ces effets. Ces aspects sont détaillés dans la deuxième partie.

Dans la troisième partie (chapitres 1 à 4) sont exposés des cas-tests de validation plus complets, mettant en jeu de façon progressive tous les éléments étudiés précédemment. Les résultats des formulations SPH sont confrontés, suivant les cas, à des résultats expérimentaux ou analytiques, ou lorsque ceux-ci ne sont pas disponibles à cause de la complexité de l'écoulement, à des résultats issus d'autres méthodes numériques dont la validation a été effectuée par ailleurs.

Dans le dernier chapitre, une configuration très simplifiée d'un séparateur gravitaire est présentée afin de démontrer la capacité de la méthode SPH proposée à traiter ce genre de problématique.

Enfin, on réalise un bilan de ces travaux en esquisant des pistes de développements futurs.

Première partie

Modèles physiques et schémas numériques

Chapitre I.1

Les équations physiques

Les écoulements envisagés font intervenir des fluides incompressibles avec des effets visqueux et de tension superficielle. Nous allons rappeler les équations instationnaires régissant ces mouvements de fluides que nous considérons compressibles : les équations de Navier-Stokes.

I.1.1 Les équations de Navier-Stokes

Nous nous intéressons aux écoulements de deux fluides non-miscibles. Les écoulements considérés sont isothermes et sans changement de phase.

Le domaine considéré est un domaine fluide Ω composé de deux fluides \mathcal{X} et \mathcal{Y} tels que : $\Omega = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ (l'extension à n fluides des modèles étudiés est immédiate théoriquement et ne devrait pas présenter de difficulté supplémentaire de mise en œuvre pratique, même si elle n'a pas été étudiée au cours de ce travail). Les frontières de ce domaine Ω sont composées d'une surface libre $\partial\Omega_{SL}$, d'interfaces $\partial\Omega_I$ et de frontières solides $\partial\Omega_S$.

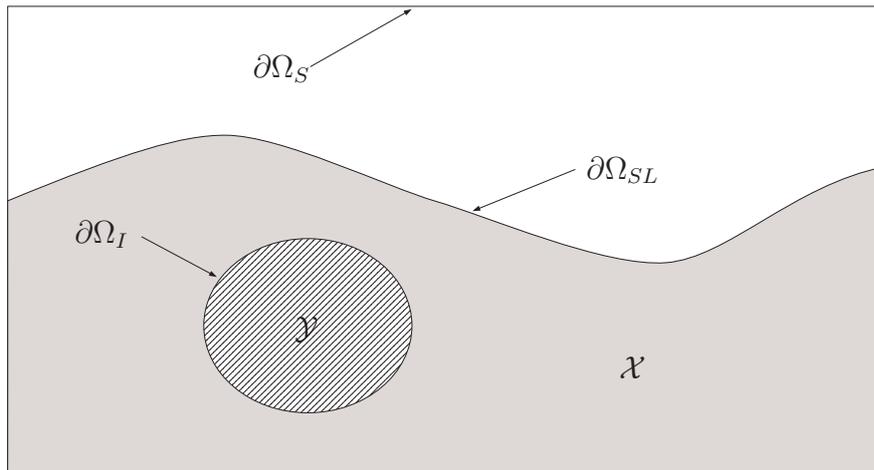


FIG. I.1.1 – Domaine considéré et frontières

La conservation de la quantité de mouvement dans le domaine Ω s'écrit sous forme différentielle et Lagrangienne :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\text{div}(p\mathbb{I}) + \text{div}\mathbb{T}^v + \vec{S} \quad (\text{I.1.1})$$

où ρ , \vec{u} et p et sont respectivement les champs de masse volumique, de vitesse et de pression. \mathbb{T}^v est le tenseur des contraintes visqueuses et S le terme source volumique (les écoulements étudiés ici sont gravitaires, d'où $\vec{S} = \rho\vec{g}$, avec g accélération de la pesanteur).

La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0.$$

Enfin, du point de vue Lagrangien adopté pour l'expression de ces équations, tout point matériel suit une trajectoire portée par le champ de vitesse du fluide :

$$\frac{D\vec{x}}{Dt} = \vec{u}.$$

La formulation de ces équations sera reprise dans les chapitres suivants, chaque modèle s'appuyant sur une formulation qui lui est propre.

I.1.2 Loi de comportement

Les équations détaillées plus haut procèdent de la mécanique des milieux continus et ne sont pas basées sur une hypothèse particulière concernant la nature moléculaire du milieu étudié. Pour fermer le système, ces équations doivent être complétées d'un lien supplémentaire entre le champ de déformation et le champ de contrainte appelé loi de comportement. Nous choisissons d'étudier des fluides dont la loi régissant leur comportement est linéaire : ces fluides sont dits Newtoniens. Dans ce cas, le tenseur des contraintes visqueuses \mathbb{T}^v est donné par :

$$\mathbb{T}^v = \mu[(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T] + \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\mathbb{I}$$

où μ est la viscosité dynamique et λ est la viscosité de volume du fluide qui vérifient l'hypothèse de Stokes ($2\mu+3\lambda = 0$). Dans les cas où μ est constant et le fluide incompressible (*i.e.* $(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$), la divergence du tenseur prend la forme :

$$\operatorname{div}\mathbb{T}^v = \mu \Delta \vec{u}. \quad (\text{I.1.2})$$

I.1.3 Équation d'état

On considère que les fluides étudiés sont barotropes, c'est-à-dire que la pression régnant au sein du fluide \mathcal{K} ($\mathcal{K} = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$) est fonction de sa masse volumique uniquement :

$$p_{\mathcal{K}} = p(\rho_{\mathcal{K}}).$$

L'équation d'état couramment choisie en SPH pour modéliser des fluides quasi-incompressibles est l'équation de Tait :

$$p_{\mathcal{K}} = \frac{c_{0\mathcal{K}}^2 \rho_{0\mathcal{K}}}{\gamma_{\mathcal{K}}} \left[\left(\frac{\rho_{\mathcal{K}}}{\rho_{0\mathcal{K}}} \right)^{\gamma_{\mathcal{K}}} - 1 \right] + p_{0\mathcal{K}}$$

où $\gamma_{\mathcal{K}}$ est le coefficient polytropique du fluide considéré, $\rho_{0\mathcal{K}}$ et $p_{0\mathcal{K}}$ ses masse volumique et pression de référence et $c_{0\mathcal{K}}$ est la vitesse du son lorsque $\rho_{\mathcal{K}} = \rho_{0\mathcal{K}}$. Cette dernière vitesse permet de régler le degré de compressibilité du fluide.

Pour étudier un fluide incompressible, au lieu d'utiliser le coefficient polytropique du fluide considéré on peut choisir arbitrairement $\gamma_{\mathcal{K}}$. Ainsi on peut utiliser la loi d'état de Chorin (où $\gamma_{\mathcal{K}} = 1$) :

$$p_{\mathcal{K}} = c_{0\mathcal{K}}^2 (\rho_{\mathcal{K}} - \rho_{0\mathcal{K}}) + p_{0\mathcal{K}}.$$

Une fois posées les équations permettant la fermeture du problème, nous pouvons les adimensionner afin de mettre en évidence des nombres adimensionnels caractéristiques des écoulements. Les écoulements étudiés peuvent être donc caractérisés par des grandeurs locales. A l'aide de grandeurs caractéristiques x_0 nous pouvons décomposer chaque grandeur X de la manière suivante : $X^* = Xx_0$. Nous pouvons ainsi réécrire les équations précédentes :

$$\frac{D\rho^* \vec{u}^*}{Dt^*} = -\text{div}(p^* \mathbf{I}) + \frac{1}{Re} \text{div} \mathbf{T}^{v*} + \frac{1}{Fr^2} \vec{S}^* \quad \text{et} \quad p^* = \frac{1}{\gamma Ma^2} (\rho^{*\gamma} - 1).$$

Le nombre de Reynolds Re est défini par $Re = (\rho_0 L_0 U_0) / \mu_0$, le nombre de Froude Fr par $Fr^2 = U_0^2 / (L_0 g_0)$, en supposant que $p_0 = \rho_0 U_0^2$. Pour l'équation d'état on introduit le nombre de Mach Ma tel que $Ma = U_0 / c_0$.

En général les grandeurs caractéristiques choisies sont physiques et liées à l'écoulement étudié : par exemple, dans le cas d'une rupture de barrage, L_0 peut être la hauteur H du barrage, V_0 la vitesse d'écoulement gravitaire (*i.e.* \sqrt{gH}), ρ_0 et μ_0 la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide incompressible. Toutefois, l'utilisation de schémas numériques pousse à prendre en compte d'autres échelles caractéristiques, en particulier la taille des éléments de discrétisation (en SPH il sera plus intéressant d'utiliser la grandeur caractéristique du support d'interpolation défini plus loin). La présence de ces deux longueurs caractéristiques issues de raisonnements différents doit être gardée à l'esprit.

I.1.4 Vitesse du son et pseudo-compressibilité

La vitesse du son (dans les conditions d'adiabaticité) est définie par :

$$c_{\mathcal{K}}^2 = \frac{\partial p_{\mathcal{K}}}{\partial \rho_{\mathcal{K}}}.$$

Cette relation est valable pour chacune des équations d'état.

Cette vitesse du son est caractéristique d'un écoulement compressible, de même que la présence d'un nombre de Mach non nul. Le problème que nous résolvons est donc bien compressible alors que nous cherchons à étudier des écoulements incompressibles (caractérisés, eux, par une vitesse du son infinie, ce qui équivaut à un nombre de Mach nul).

Nous pourrions donc tout à fait respecter une condition $Ma \sim 0$ en effectuant la résolution à la vitesse de son réelle (pour nos écoulements qui sont largement subsoniques nous aurions alors $Ma \ll 1$). Cela reviendrait à résoudre toute la partie acoustique de l'écoulement (*i.e.* toutes les perturbations en pression petites devant les variations de pression génératrices de l'écoulement), ce qui ne nous intéresse pas dans le cadre de ce travail. De plus, la résolution de ces faibles variations est très instable numériquement et aurait conduit à tenir compte de problèmes n'ayant que peu de rapport avec le but final de l'étude. Enfin, l'utilisation d'une résolution explicite pour l'avance en temps nous

contraint numériquement à respecter des pas de temps compatibles avec la transmission de l'information sonore sur notre discrétisation spatiale : imposer une vitesse du son réelle aurait conduit à utiliser des pas de temps si petit que le coût de résolution (temps CPU) en aurait été prohibitif.

Pour sortir des contraintes imposées par une résolution purement compressible, nous avons choisi une approche pseudo-compressible dans l'optique de chercher à résoudre des écoulements incompressibles. Avec cette nouvelle approche, nous devons nous assurer que les variations relatives de densité restent faibles :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} < 1\% \ll 1$$

ce qui se traduit par une limitation du nombre de Mach : $Ma < 0,1$. Pour nous assurer de cette contrainte, tout en ayant une dynamique de l'écoulement imposée (caractérisée par sa vitesse V_0), le paramètre sur lequel il nous faut intervenir est la vitesse du son caractéristique c_0 . La vitesse du son utilisée numériquement pour les calculs est donc totalement arbitraire (tout en respectant la condition énoncées ci-dessus).

Pour résumer, pour modéliser des écoulements incompressibles nous effectuons la résolution d'un système d'équations compressibles avec une vitesse du son distincte de la vitesse du son réelle au sein du fluide compressible.

Nous pouvons introduire le coefficient de compressibilité isotherme χ_T :

$$\chi_T = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_T$$

et qui vaut, pour une loi d'état linéaire, $\chi_T^{-1} = \rho c^2$. L'utilisation d'une vitesse du son artificielle (telle que justifiée ci-dessus) introduit donc une compressibilité artificielle que nous contrôlons via le nombre de Mach.

Pour les écoulements bifluïdes, les vitesses du son dans chacun des fluides peuvent être choisies de manière indépendantes pourvu qu'on vérifie $Ma < 0,1$ pour chaque fluide.

Or, d'après [Colagrossi et Landrini \(2003\)](#), les coefficients de compressibilité ne peuvent être indépendants pour pouvoir opérer dans la même gamme de pressions. Il en déduit alors :

$$\frac{c_{0x}^2 \rho_{0x}}{\gamma_x} = \frac{c_{0y}^2 \rho_{0y}}{\gamma_y} \quad \text{soit} \quad c_{0x} = c_{0y} \sqrt{\frac{\gamma_x \rho_{0y}}{\gamma_y \rho_{0x}}}.$$

Bien que d'un point de vue physique deux fluides peuvent coexister avec des compressibilités différentes, notre expérience numérique tend à considérer l'hypothèse de Colagrossi importante pour des simulations stables pour les deux fluides.

I.1.5 Effets de la tension superficielle

Les effets de la tension superficielle se manifestent par un saut de pression à travers une interface non plane. Ce saut (noté $[[\cdot]]$) est quantifié par la loi de Laplace qui est fonction de la courbure moyenne locale κ de l'interface et du coefficient de tension superficielle σ entre les deux liquides :

$$[[P]] = \sigma \kappa. \tag{I.1.3}$$

Cette relation traduit le fait que pour une interface courbe en équilibre, les forces de tension sont compensées par une différence de pression de part et d'autre de cette interface.

Le lien de cette relation avec l'équation de quantité de mouvement (I.1.1) sera fait ultérieurement.

Dans cette étude les effets de capillarité (liés aux effets de tension superficielle en présence d'une paroi solide) seront éludés. A priori on suppose que, dans les écoulements étudiés, soit les interfaces ne rejoignent pas une paroi (avec présence d'un angle de contact), soit ce contact existe mais les effets sont négligeables. Ainsi près d'une paroi solide les effets capillaires se traduisent par un ménisque de mouillage dont la longueur capillaire l_c peut être évaluée par la relation suivante :

$$l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

si les fluides sont soumis à l'accélération de la gravité g . Cette longueur (de l'ordre du millimètre pour un domaine air-eau sous pesanteur terrestre) est faible devant les dimensions caractéristiques des écoulements étudiés où une interface rejoint une paroi solide (de l'ordre du mètre).

I.1.6 Conditions aux limites

L'utilisation de domaines de calculs finis impose la définition de conditions aux limites. Celles-ci peuvent être de deux types :

I.1.6.1 Conditions dynamiques

Cette condition exprime la continuité des efforts normaux à l'interface $\partial\Omega_I$ entre deux milieux \mathcal{X} et \mathcal{Y} :

$$(\mathbb{T}^v - p\mathbb{I})_{\mathcal{X}} \cdot \vec{n} = (\mathbb{T}^v - p\mathbb{I})_{\mathcal{Y}} \cdot \vec{n}.$$

Dans le cas des équations d'Euler cette condition se traduit par une égalité des pressions de part et d'autre de l'interface $\partial\Omega_I$ (sauf si les effets de tension superficielle sont pris en compte : cf. ci-dessus).

Si, en plus, un des fluides n'est pas modélisé (cas d'une surface libre $\partial\Omega_{SL}$), la condition dynamique de surface libre se simplifie de la sorte : une pression constante p_{atm} est alors appliquée sur la surface libre $\partial\Omega_{SL}$.

I.1.6.2 Conditions cinématiques

Cette condition traduit l'imposition de déplacements sur le fluide. Elle s'exprime en terme de champ de vitesse du fluide.

I.1.6.2.1 Condition de glissement

Cette condition, qui s'applique dans le cadre des équations d'Euler, se traduit par la continuité des vitesses normales à l'interface $\partial\Omega_I$:

$$\vec{u}_{\mathcal{X}} \cdot \vec{n} = \vec{u}_{\mathcal{Y}} \cdot \vec{n}.$$

Cette condition peut aussi se voir comme une condition de non-pénétration à l'interface : chaque fluide ne peut se mélanger à l'autre (cette interprétation s'étend aussi au cas des parois $\partial\Omega_S$ que le fluide ne peut pénétrer). Le seul degré de liberté restant sur la vitesse est celui sur la vitesse tangentielle à l'interface.

Sur l'interface $\partial\Omega_I$ (respectivement sur la surface libre $\partial\Omega_{SL}$), cette condition cinématique peut se reformuler de la manière suivante : tout point matériellement sur l'interface (resp. la surface libre) doit y rester.

I.1.6.2.2 Condition d'adhérence

Cette condition, qui s'applique dans le cadre des équations de Navier-Stokes, se traduit par la continuité de la vitesse à l'interface $\partial\Omega_I$:

$$\vec{u}_x = \vec{u}_y.$$

Cette condition permet le développement d'une couche limite au niveau de l'interface $\partial\Omega_I$ entre les deux fluides ou au voisinage d'une paroi $\partial\Omega_S$.

Chapitre I.2

À base de SPH classique

Dans ce chapitre on présente d'abord la SPH telle qu'elle a été formulée par Monaghan et telle qu'elle a été utilisée dans le contexte du laboratoire [Doring \(2005\)](#), [Oger \(2006\)](#). On s'attardera sur la première tentative d'extension aux écoulements bifluides faite par Oger. Il sera mis en évidence les défauts de cette formulation. Ceux-ci sont à l'origine d'une réflexion sur la modélisation des écoulements multifluides qui s'est traduite par une reformulation de la méthode SPH (travail mené avec la collaboration Andrea Colagrossi de l'INSEAN). On présentera cette reformulation dans un deuxième temps.

I.2.1 SPH classique

Une fois la physique du problème mise en équations (cf. chapitre précédent), nous nous intéressons à sa résolution (dans un premier temps nous nous limitons aux écoulements non visqueux où $\mathbb{T}^v = 0$). N'ayant pas de possibilité de résoudre analytiquement ce système d'équations hyperboliques, il est nécessaire d'avoir une approche discrète de celui-ci de manière à pouvoir employer des méthodes numériques. L'usage de ces dernières nous permettra de formuler algorithmiquement le problème et de le résoudre ainsi avec une machine de calcul (communément un ordinateur, de manière plus intensive un calculateur dédié).

Nous allons détailler cette démarche de discrétisation des équations d'Euler.

I.2.1.1 Schéma d'interpolation

La méthode SPH est basée sur la convolution des champs par une fonction de Dirac de la manière suivante sur le domaine Ω :

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x}) \delta(\vec{r} - \vec{x}) dV = f(\vec{r}).$$

On a donc égalité entre la valeur du champ f au point \vec{r} et sa valeur interpolée $\langle f \rangle$. Cependant, pour une question de dérivabilité de la fonction test (de Dirac), on remplace celle-ci par une fonction de forme (couramment appelée noyau) plus régulière. On introduit alors la longueur de lissage h qui est une mesure de l'étalement du noyau autour du point d'intérêt. Cette grandeur doit tendre vers 0 de manière à faire tendre la fonction de forme vers un Dirac. Nous perdons donc l'égalité entre la valeur du champ et son interpolation :

$$\langle f(\vec{r}) \rangle^h = \int_{\Omega} f(\vec{x}) W(\vec{r} - \vec{x}, h) dV.$$

En choisissant le noyau W suivant certaines propriétés (positivité, centré radialement en x , décroissance monotone, symétrique) et en imposant :

$$\int_{\Omega} W(\vec{r} - \vec{x}, h) d\vec{x} = 1 \quad (\text{I.2.1})$$

on peut évaluer la précision de l'approximation ainsi réalisée [Mas-Gallic et Raviart \(1987\)](#) :

$$\langle f(\vec{r}) \rangle^h = f(\vec{r}) + O(h^2).$$

L'approximation est d'ordre 2.

Si l'on souhaite interpoler le gradient du champ f , on applique la même convolution au gradient de f et on intègre par parties (et on utilise la propriété d'antisymétrie du gradient du noyau) :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla} f(\vec{r}) \rangle^h &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} f(\vec{x}) W(\vec{r} - \vec{x}, h) dV \\ &= \int_{\delta\Omega} f(\vec{x}) W(\vec{r} - \vec{x}, h) \vec{n} dS + \int_{\Omega} f(\vec{x}) \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{x}, h) dV. \end{aligned} \quad (\text{I.2.2})$$

Nous voyons ainsi l'intérêt de ce schéma d'interpolation : il est possible d'évaluer le gradient $\langle \vec{\nabla} f \rangle$ à partir des valeurs connues (du champ f , du noyau W et de son gradient) sans avoir à connaître la valeur du champ ∇f .

De la même manière que précédemment, en imposant la condition suivante :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{x}, h) d\vec{x} = 0 \quad (\text{I.2.3})$$

on peut montrer [Mas-Gallic et Raviart \(1987\)](#) que l'approximation du gradient est aussi d'ordre 2 :

$$\langle \vec{\nabla} f(\vec{r}) \rangle^h = \vec{\nabla} f(\vec{r}) + O(h^2).$$

Nous ne discuterons pas ici d'une variation du schéma d'interpolation où la longueur de lissage h peut varier en temps et en espace. Se reporter à [Doring \(2005\)](#), [Oger \(2006\)](#) pour plus d'informations.

I.2.1.1.1 Choix du noyau

Le noyau choisi pour approximer la fonction de Dirac peut être par exemple une fonction gaussienne ou une spline. Le respect des conditions (I.2.1) et (I.2.3) aide à construire ces fonctions. En pratique, le support du noyau n'est pas le domaine Ω de calcul mais un support compact \mathcal{D} (*i.e.* au-delà d'une taille équivalente à n fois la longueur de lissage la valeur du noyau est nulle). Les noyaux les plus couramment utilisés ont un support de rayon $2h$ ou $3h$. Ceci influera directement sur le nombre de voisins et donc la précision de l'approximation (cf. la discrétisation). Au final nous nous proposons d'utiliser les noyaux suivants (où $q = |\vec{r}|/h$) :

– la spline cubique proposée par Monaghan, sur un support de taille $2h$:

$$W(\vec{r}, h) = C_c \begin{cases} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3 & \text{si } 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2 - q)^3 & \text{si } 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la constante de renormalisation C_c permet de vérifier la condition I.2.1 et vaut $\frac{1}{h}$, $\frac{15}{7\pi h^2}$ et $\frac{3}{2\pi h^3}$, respectivement en 1, 2 et 3 dimensions.

- la gaussienne sur un support de taille $3h$:

$$W(\vec{r}, h) = \frac{1}{C_g} \begin{cases} e^{-q^2} & \text{si } 0 \leq q \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la constante de renormalisation C_g permet de vérifier la condition I.2.1 et vaut $\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(3)h$, $(1 - e^{-9})\pi h^2$ et $(\operatorname{erf}(3)\pi^{3/2} - 6\pi e^{-9})h^3$, respectivement en 1, 2 et 3 dimensions (erf étant la fonction d'erreur de Gauss).

Bien d'autres fonctions de formes peuvent être employées mais on se limitera à celles-ci dans le cadre de ce travail.

I.2.1.1.2 Approximation discrète du schéma d'interpolation

Une fois choisi l'interpolateur qui va nous amener d'une description continue des variables dans l'espace à la description discrète de ces mêmes variables, il nous faut préciser la manière dont cette discrétisation va être opérée et sous quelles conditions.

Tout d'abord le domaine de calcul Ω est subdivisé en volumes élémentaires ω_i dont on peut définir le barycentre P_i (de position \vec{x}_i). Par commodité, ces volumes sont généralement initialement créés en se basant sur des éléments de type triangulaire ou quadrangulaire en 2 dimensions. Cet ensemble de points définit un maillage du domaine, qui peut donc être réalisé par un logiciel de maillage (en prenant soin de minimiser les variations locales de volume pour des raisons de précision).

Cependant, les frontières de ces volumes (*i.e.* les mailles au sens strict) ne sont qu'une représentation issue de la façon dont on génère le maillage. La méthode SPH, comme toutes les méthodes dites *sans maillage*, ne se base pas sur les mailles à proprement parler mais uniquement sur leurs volumes associés.

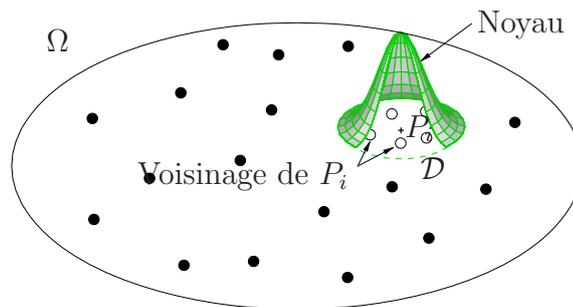


FIG. I.2.1 – Représentation schématique de la discrétisation du domaine Ω par un ensemble de points P_i et vue dans l'espace d'un noyau de type gaussienne.

Une fois introduit cet espace de discrétisation, nous pouvons définir l'approximation de l'intégrale d'une fonction f sur le domaine Ω par la formule de quadrature suivante (de type trapèze) :

$$\int_{\Omega} f(\vec{x}) d\vec{x} \approx \sum_{i \in P} f(\vec{x}_i) \omega_i. \quad (\text{I.2.4})$$

Cette formule de quadrature est valable pour les intégrales volumiques, c'est-à-dire que l'on ne peut pas approximer avec cette formulation les intégrales surfaciques apparaissant dans la dérivation du produit de convolution (I.2.2). Grâce au caractère compact

du support \mathcal{D} de la fonction de forme, si ce support n'intersecte pas de frontière du domaine l'approximation de la dérivée du produit de convolution restera correcte (car la fonction de forme s'annule sur la frontière du support). Par contre si le support intersecte une frontière, le terme surfacique devient non négligeable et il faudrait l'évaluer de manière particulière. Pour prendre en compte ce problème aux frontières du domaine, une technique sera présentée ultérieurement.

Finalement le produit de convolution peut être discrétisé de la manière suivante :

$$\langle f(\vec{x}_i) \rangle^h = \sum_{j \in \mathcal{D}} f(\vec{x}_j) W(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \omega_j$$

et sa dérivée :

$$\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_i) \rangle^h = \sum_{j \in \mathcal{D}} f(\vec{x}_j) \vec{\nabla} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \omega_j. \quad (\text{I.2.5})$$

Dans la suite du manuscrit nous noterons f_i pour $f(\vec{x}_i)$ et W_{ij} pour $W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)$.

I.2.1.1.3 Précision de l'approximation

Bien que le schéma d'interpolation soit exact à l'ordre 2 au niveau continu, il n'en est pas de même au niveau discret. En effet, l'approximation ne respecte plus les conditions (I.2.1) et (I.2.3) en général :

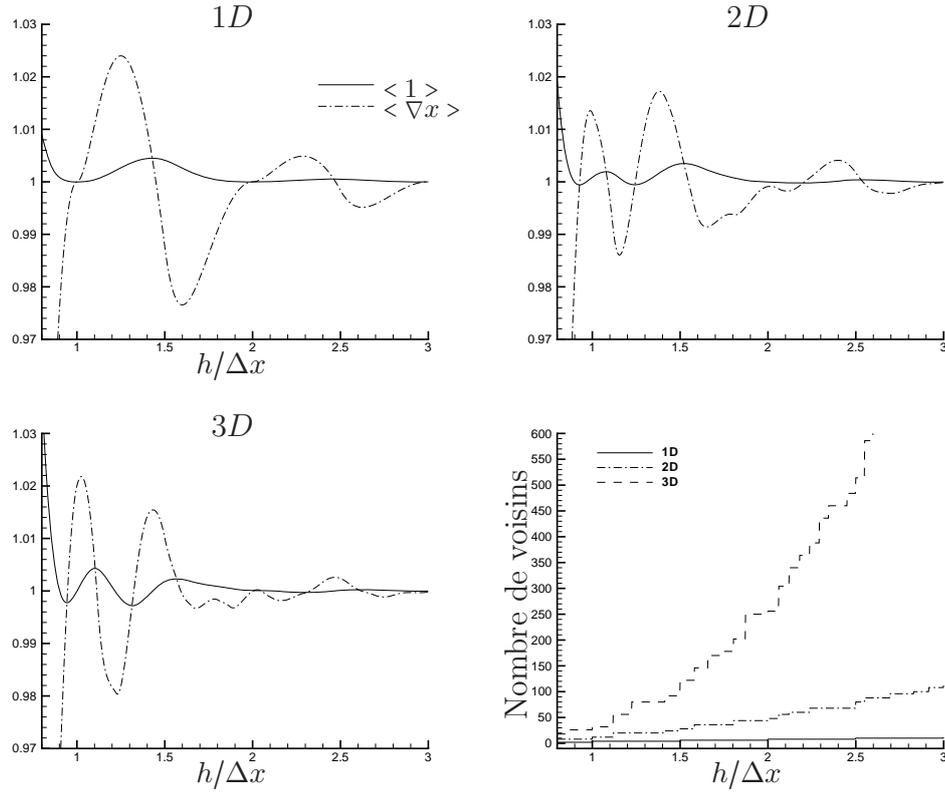
$$\sum_{j \in \mathcal{D}} W_{ij} \omega_j \neq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in \mathcal{D}} \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \neq \vec{0}. \quad (\text{I.2.6})$$

Pour garantir théoriquement la précision de ce schéma d'interpolation, il faut respecter tout d'abord la condition de convergence spatiale du maillage qui intervient quand la distance caractéristique Δx entre deux points d'interpolation tend vers zéro. Il faut aussi respecter la condition de convergence de la fonction de forme vers la fonction de Dirac : la longueur de lissage h doit tendre aussi vers zéro. En plus du respect de ces deux critères, l'étude de la convergence des méthodes particulières [Raviart \(1985\)](#) impose aussi une condition sur le rapport $\Delta x/h$: celui-ci doit aussi tendre vers zéro.

Ce dernier critère signifie que, pour un domaine Ω de taille donnée, en plus d'avoir de plus en plus d'éléments de discrétisation ($\Delta x \rightarrow 0$), il est aussi nécessaire d'avoir de plus en plus d'éléments dans le support compact \mathcal{D} pour assurer la convergence. En pratique cela n'est pas réalisable et on se limite à un nombre fini et relativement faible de voisins par élément de discrétisation (de l'ordre de 20 à 50 voisins en deux dimensions), *i.e.* le rapport $h/\Delta x$ est fixé.

On peut cependant étudier l'influence de ce paramètre de voisinage $R = h/\Delta x$ sur la précision, de manière à minimiser l'erreur commise. En première approche, on peut estimer, grâce à l'interpolateur discret, une fonction constante et une fonction linéaire. Ceci est fait sur un maillage régulier (cartésien) avec la spline cubique sur un support de $2h$. Pour étudier de manière plus fine les autres termes source d'erreurs, se reporter à [Oger \(2006\)](#).

Pratiquement, certains rapports R sont tels qu'ils limitent l'erreur : un rapport R égal à 1 sera ainsi un bon choix en 1D. En 2D, le rapport peut être abaissé à 0,93 (ce qui correspond à 8 voisins) mais est couramment pris égal à 1,24 (*i.e.* 20 voisins). En 3D, l'erreur est vraiment minimisée pour un rapport R élevé (environ 2) ce qui correspond à nombre de voisins (250) extrêmement élevé.


 FIG. I.2.2 – Estimation de 1, de ∇x et du nombre de voisins en fonction de R .

Tel qu'il a été mentionné, ces tests ont été effectués sur une distribution régulière des points de discrétisation. Des techniques de correction seront présentées ultérieurement pour augmenter la précision lorsque cette distribution se déstructure (à cause du mouvement lagrangien) .

I.2.1.2 Discrétisation du système d'équations

Les équations de conservation à discrétiser sont, sous forme lagrangienne pour un fluide parfait compressible :

$$\begin{cases} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} &= -\text{div}(p\mathbb{I}) + \vec{S} \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \text{div}(\vec{u}) \\ \frac{D\vec{x}}{Dt} &= \vec{u} \end{cases}$$

avec la loi d'état fermant le système :

$$p = \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0.$$

Ayant introduit par la suite les éléments de volume ω_i , on peut définir la masse m_i de ces points telle que :

$$m_i = \rho_i \omega_i. \quad (\text{I.2.7})$$

Étant dans le formalisme Lagrangien (les volumes de contrôle ω_i sont suivis au cours du temps et restent constants) d'une part, et ayant conservation de la masse localement (et donc globalement) d'autre part, on peut remarquer que les masses m_i sont constantes au cours du temps. Les points P_i ne sont plus seulement des points nécessaires à la définition des volumes ω_i pour la formule de quadrature (I.2.4) mais ce sont aussi des points matériels qui sont identifiés comme étant des particules. D'où la qualification de méthode particulière pour la méthode SPH.

$$\frac{D\rho\omega}{Dt} = 0. \quad (\text{I.2.8})$$

Ainsi, de cette dernière équation on en déduit une équation d'évolution des volumes au cours du temps :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \operatorname{div}(\vec{u}).$$

Une discrétisation intuitive de l'équation de quantité de mouvement serait, avec ce qui a été mentionné précédemment sur la dérivée de l'opérateur d'interpolation discret :

$$\frac{D\rho\vec{u}}{Dt}_i = - \left\langle \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right\rangle_i + \vec{g} = - \sum_j P_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j + \vec{g}. \quad (\text{I.2.9})$$

Et d'une manière analogue, on aurait pour l'équation de continuité :

$$\frac{D\rho}{Dt}_i = - \left\langle \rho \operatorname{div}(\vec{u}) \right\rangle_i = \rho_i \sum_j \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j.$$

En pratique, ces discrétisations sont peu précises et mènent à des instabilités numériques. La principale raison en est la violation du principe d'action-réaction entre deux particules (où normalement l'effort $\vec{F}_{j \rightarrow i} = -m_i \frac{1}{\rho_i} P_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j$ de la particule j sur i est opposé à l'effort réciproque $\vec{F}_{i \rightarrow j}$). Avec ce schéma nous avons :

$$-m_i \frac{1}{\rho_i} P_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \neq -m_j \frac{1}{\rho_j} P_i \vec{\nabla} W_{ji} \omega_i$$

ce qui ne garantit pas la conservation locale de quantité de mouvement et de moment angulaire.

Pour pallier cela on peut réarranger les équations de manière à les symétriser et retrouver la réciprocité des interactions. Nous ne détaillerons pas ici tous les travaux concernant ces aspects (*e.g.* [Bonet et Lok \(1999\)](#), [Vila \(2000\)](#), [Monaghan \(1992\)](#)) car tous ne respectent pas la consistance du schéma complet (*i.e.* que le système discrétisé converge vers le système continu ; un moyen de la démontrer est de savoir si la discrétisation choisie pour l'équation de continuité génère de manière formelle une discrétisation donnée pour l'équation de quantité de mouvement). Nous allons seulement développer la méthode variationnelle présentée par [Bonet et Lok \(1999\)](#) et reprise dans [Colagrossi \(2005\)](#), qui garantit la consistance du schéma. Cette approche est basée sur une étude variationnelle et une approche thermodynamique.

La conservation du moment pour un système de particules non soumis à des forces extérieures peut s'écrire de la façon suivante :

$$\sum_i m_i \frac{D\vec{u}_i}{Dt} = \sum_i \vec{T}_i \quad (\text{I.2.10})$$

où \vec{T}_i représente la force (interne) exercée sur la particule i .

L'énergie interne e pour un fluide compressible isentropique est reliée à la pression à travers l'équation suivante :

$$\frac{De}{D\rho} = \frac{p}{\rho^2} \quad (\text{I.2.11})$$

et l'énergie potentielle élastique totale du système vaut :

$$E = \sum_i m_i e_i. \quad (\text{I.2.12})$$

Le travail des forces internes \vec{T}_i dû à un déplacement arbitraire $\delta\vec{w}_i$ est directement relié à la variation incrémentale DE de l'énergie potentielle élastique totale E :

$$\sum_i \vec{T}_i \cdot \delta\vec{w}_i = -DE[\delta\vec{w}_i]. \quad (\text{I.2.13})$$

Des équations (I.2.11 & I.2.12), on déduit l'expression de la variation incrémentale de l'énergie DE pour un déplacement arbitraire :

$$DE[\delta\vec{w}_i] = \sum_i m_i De_i = \sum_i m_i \frac{p_i}{\rho_i^2} D\rho_i. \quad (\text{I.2.14})$$

La variation élémentaire de densité $D\rho_i$ est discrétisée selon la manière suivante (ce choix met en évidence la symétrie du terme de la divergence de \vec{v}) :

$$D\rho_i = -\rho_i \sum_j (\delta\vec{w}_j - \delta\vec{w}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j.$$

En réarrangeant cette équation on a :

$$D\rho_i = \rho_i \sum_j \delta\vec{w}_i \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j - \rho_i \sum_j \delta\vec{w}_j \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j. \quad (\text{I.2.15})$$

En reportant dans l'équation (I.2.14) et en permutant les indices du second terme de l'équation (I.2.15) on obtient :

$$DE[\delta\vec{w}_i] = \sum_i \sum_j \frac{m_i}{\rho_i} p_i \delta\vec{w}_i \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} - \sum_j \sum_i \frac{m_j}{\rho_j} p_j \delta\vec{w}_i \cdot \vec{\nabla} W_{ji} \frac{m_i}{\rho_i}.$$

Grâce à la propriété d'antisymétrie du gradient du noyau ($\vec{\nabla} W_{ij} = -\vec{\nabla} W_{ji}$), la variation incrémentale de l'énergie DE s'écrit finalement :

$$DE[\delta\vec{w}_i] = \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_i \rho_j} (p_i + p_j) \vec{\nabla} W_{ij} \cdot \delta\vec{w}_i.$$

Ainsi grâce au principe des travaux virtuels (I.2.13), on en déduit la force interne \vec{T}_i s'exerçant sur chaque particule i :

$$\vec{T}_i = -\sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_i \rho_j} (p_i + p_j) \vec{\nabla} W_{ij}.$$

In fine, grâce à (I.2.10), nous pouvons en déduire une discrétisation consistante de l'équation de quantité de mouvement (sans terme source). Le système complet discrétisé s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i \frac{D\vec{u}}{Dt_i} = - \sum_j (p_i + p_j) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j + \rho_i \vec{g} \\ \frac{D\rho}{Dt_i} = - \rho_i \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \\ \frac{D\vec{x}}{Dt_i} = \vec{u}_i \end{array} \right. \quad (\text{I.2.16})$$

I.2.1.3 Conditions aux limites

Le traitement des conditions aux limites est un point délicat à effectuer pour les méthodes particulières en général et la méthode SPH ne déroge pas à la règle. Les difficultés proviennent de deux points distincts : l'un concerne l'application à proprement parler des conditions aux limites sur les points mobiles que sont les particules. L'autre difficulté vient de l'incomplétude du support compact en limite de domaine. En effet, en s'approchant d'une des frontières du domaine (où s'applique une condition aux limites), le point de discrétisation voit son support d'interpolation associé intersecter cette frontière. L'interpolation des gradients, qui est basée sur une quadrature volumique et surfacique (§I.2.1.1.2), ne peut alors plus s'appliquer car on n'approxime pas cette dernière composante. Pour contourner cela on considère les cas où les conditions aux limites doivent s'appliquer :

- s'il s'agit d'une paroi, les conditions à imposer sont celles de non-pénétration et de glissement ;
- s'il s'agit de la surface libre, les conditions dynamiques et cinématiques sont à imposer.

I.2.1.3.1 Conditions sur les parois

Ce type de conditions a été abordé de nombreuses fois dans la littérature SPH [Morris et alii \(1997\)](#), [Takeda et alii \(1994\)](#), [Monaghan \(1994\)](#) mais souvent avec peu d'efficacité étant donnés les problèmes théoriques sous-jacent non résolus [Guilcher \(2008\)](#). De l'expérience de l'équipe, la technique qui donne les résultats les plus précis [Doring \(2005\)](#) et qui a été retenue ici est la technique dite des particules « fantômes » [Colagrossi \(2005\)](#).

L'idée de cette méthode, que l'on présentera ici pour une paroi fixe pour simplifier la lecture, repose sur l'annulation des flux à la paroi (condition de non pénétration) par symétrisation de l'écoulement par rapport à cette paroi. En étendant fictivement le domaine de calcul par création de particules fantômes ne discrétisant aucune partie du domaine réel, on satisfait d'abord la condition à la limite de glissement sur la paroi, puis cela permet par ailleurs de compléter le support d'interpolation des particules « réelles » lorsque celles-ci s'approche de la paroi.

Les variables correspondant à ces fantômes F_i sont extrapolées à partir de leur parti-

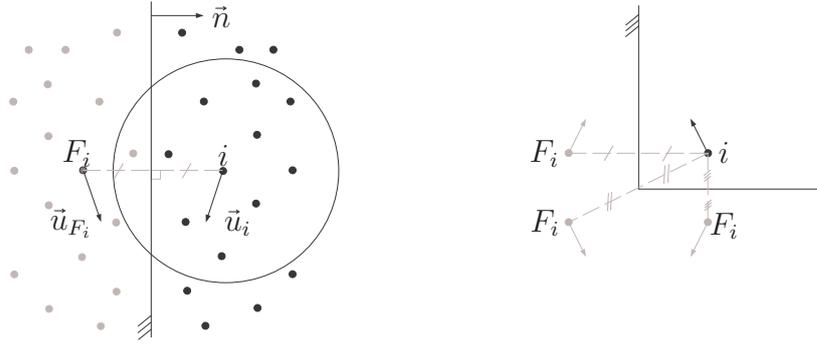


FIG. I.2.3 – Particules (•) et leurs particules (◦) fantômes. Paroi plane et coin concave.

cule génératrice i (\vec{n} est la normale à la paroi P) :

$$\begin{cases} \vec{x}_{F_i} = \vec{x}_i + 2(\vec{x}_i \cdot \vec{n} - \vec{x}_i \cdot \vec{n})\vec{n} \\ \vec{u}_{F_i} = \vec{u}_i - 2(\vec{u}_i \cdot \vec{n})\vec{n} \\ \rho_{F_i} = \rho_i \\ \omega_{F_i} = \omega_i \end{cases}$$

Cette technique permet de vérifier la condition de glissement pourvu que les particules fantômes soient répliquées à partir des particules i situées à une distance inférieure au rayon du support compact ($2h$ ou $3h$) afin de compléter entièrement le support d'interpolation des particules dans le domaine fluide. Pour les points P de la paroi, on a :

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_P \cdot \vec{n} \rangle &= \sum_{i \in \text{particules}} (\vec{u}_i \cdot \vec{n}) W_{iP} \omega_i + \sum_{j \in \text{fantomes}} (\vec{u}_j \cdot \vec{n}) W_{jP} \omega_j \\ &= \sum_{i \in \text{particules}} (\vec{u}_i \cdot \vec{n}) W_{iP} \omega_i + \sum_{j \in \text{particules}} (-\vec{u}_j \cdot \vec{n}) W_{jP} \omega_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cependant, en dérivant la condition cinématique à la paroi ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$) pour les équations d'Euler, on obtient une accélération non nulle pour les points P sur la paroi :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D\vec{u}_P}{Dt} \cdot \vec{n} \right\rangle &= \frac{1}{\rho_P} \sum_{i \in \text{particules}} (p_i + p_P) (\vec{\nabla} W_{iP} \cdot \vec{n}) \omega_i \\ &\quad + \frac{1}{\rho_P} \sum_{j \in \text{fantomes}} (p_j + p_P) (\vec{\nabla} W_{jP} \cdot \vec{n}) \omega_j + \vec{g} \cdot \vec{n} \\ &= \frac{1}{\rho_P} \sum_{i \in \text{particules}} (p_i + p_P) (\vec{\nabla} W_{iP} \cdot \vec{n}) \omega_i \\ &\quad + \frac{1}{\rho_P} \sum_{j \in \text{particules}} (p_j + p_P) (-\vec{\nabla} W_{jP} \cdot \vec{n}) \omega_j + \vec{g} \cdot \vec{n} \\ &= \vec{g} \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

Afin de corriger ce défaut (qui se manifeste dans les simulations par des particules qui ont tendance à traverser les parois perpendiculaires à la gravité), il est donc nécessaire de prendre en compte le terme source \vec{g} dans l'extrapolation de la densité pour les particules fantômes :

$$\left\langle \frac{D\vec{u}_P}{Dt} \cdot \vec{n} \right\rangle = 0 \iff \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \vec{g} \cdot \vec{n} \quad \text{avec} \quad p(\rho) = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right]$$

Cette dernière équation se résout à une constante près, déterminée par la valeur de la densité de la particule (cf. paragraphe sur les conditions initiales pour la méthode de résolution) :

$$\rho_{F_i} = \left[\rho_i^{\gamma-1} + \frac{\rho_0^{\gamma-1}(\gamma-1)}{c_0^2} (\vec{g} \cdot \vec{n})(\vec{x}_{iF_i} \cdot \vec{n}) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Grâce à cette équation la densité de la particule fantôme F_i est modifiée. Mais pour rester consistant avec la discrétisation de la masse, il faut par conséquent modifier la masse de cette particule fantôme par rapport à la particule génératrice (les volumes restant identiques par des considérations géométriques) : $m_{F_i} = \rho_{F_i} \omega_{F_i}$.

Cette correction de la densité des particules fantômes peut s'étendre à des parois en mouvement de translation et de rotation, à des parois courbes et à parois en 3D [Oger \(2006\)](#). Avec les géométries utilisés dans cette étude (exclusivement des domaines rectangulaires), seules quelques variations à la méthode présentée précédemment sur une paroi sont à envisager. Lorsque la particule est à proximité d'un coin concave (figure [\(I.2.3\)](#) droite), 3 particules fantômes doivent être générées. S'il s'agit d'un coin concave, une attention particulière doit être portée aux vitesses des particules fantômes [Le Touzé et alii \(2006\)](#).

Cependant cette méthode ne résout pas complètement le problème de l'imposition des conditions aux limites en paroi dans la mesure où l'extrapolation de la pression sur la particule fantôme se base sur une approximation SPH de la pression à la paroi. Ainsi des problèmes de passage de particules à travers une paroi peuvent toujours survenir : pour éviter cela, on utilise une technique un peu sommaire d'inversion de la particule et de sa fantôme [Doring \(2005\)](#) lorsque cela se produit.

I.2.1.3.2 Conditions de surface libre

La condition cinématique de surface libre (qui implique que tout point sur la surface libre y reste) est implicitement vérifiée par le schéma SPH grâce au caractère lagrangien de la méthode. Après discrétisation cette condition n'est qu'approximativement satisfaite (aucune particule ne se trouvant exactement sur la surface libre elle-même, mais à une distance $\Delta x/2$ en moyenne).

La condition dynamique de surface libre (une pression p_{atm} est imposée sur la surface libre Ω_{SL}) est plus difficile à satisfaire étant donné qu'on ne dispose pas de points de discrétisation sur cette surface, ni même de localisation explicite des particules dans son voisinage sauf à utiliser des algorithmes spécifiques élaborés. Une manière de procéder serait alors, de la même façon que pour les parois, de compléter le support avec des particules fantômes sur lesquelles on appliquerait la condition $p_{F_i} = p_{atm}$.

Cette technique serait extrêmement complexe à mettre en œuvre dans la mesure où il faudrait être capable de localiser la surface libre, d'en déterminer une normale locale, de générer des fantômes de manière assez précise et consistante. Sauf pour le cas particulier où la pression atmosphérique est nulle (à une constante près) : chaque particule fantôme ayant une pression nulle il n'est plus nécessaire de les créer. Pour se retrouver donc dans cette configuration, on opère un changement de référentiel de pression (via l'équation d'état, en imposant $\rho = \rho_0$ sur la surface libre). On est alors ramené à un problème d'interface un peu spécifique où le fluide supérieur est considéré toujours à pression et vitesse nulles. On est alors confronté aux difficultés numériques spécifiques à un problème d'interface (cf. §

suivant).

Il est à noter que cette manière d'envisager les choses n'est valable que si l'on ne vient pas corriger le noyau d'interpolation pour interpoler dans le fluide, en le considérant incomplet. Dans le raisonnement précédent, il est complet avec une partie de son support pour laquelle les champs interpolés sont nuls.

Dans ce cas particulier d'une interface où le fluide supérieur est à pression et vitesse nulles, on peut s'intéresser plus finement à la prise en compte de la présence de la surface libre à travers la consistance et la précision des schémas de discrétisation des opérateurs différentiels (la divergence de la vitesse dans l'équation de continuité et le gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement) et du schéma discret pour les points de discrétisation proche de la surface libre. Cette démarche, où l'on étudie notamment l'influence de l'approximation de l'intégrale surfacique au niveau continu puis discret, est relativement complexe et n'a pas été abordé dans cette étude (cf. travaux de [Colagrossi et alii \(2008\)](#)).

Finalement, la condition dynamique de surface libre est relativement simple à appliquer en SPH : il n'y a pas de traitement particulier à appliquer sur cette frontière et le schéma utilisé au sein du fluide reproduit cette condition de surface libre implicitement. La précision dans son voisinage dépendra des schémas choisis, qui doivent l'être de manière à ne pas générer de travail à travers cette interface, au moins à convergence.

I.2.1.3.3 Conditions à l'interface

La condition cinématique à l'interface s'applique de la même façon que pour la surface libre : le caractère lagrangien de la SPH prend en compte cette condition naturellement.

Pour ce qui est de la condition dynamique, comme dans le cas d'une surface libre, il n'est pas envisageable d'aller imposer des conditions sur cette surface dont la position n'est pas explicitement définie en SPH. On n'impose donc aucune condition d'interface de manière explicite en pratique.

Au voisinage de l'interface, les particules ont leur support d'interpolation qui est rempli de particules voisines pour partie de leur fluide et pour partie de l'autre fluide.

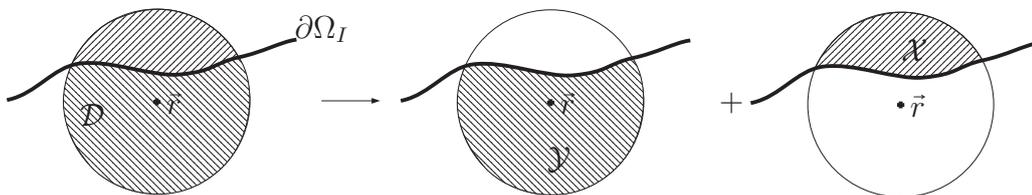


FIG. I.2.4 – Support d'interpolation \mathcal{D} proche de l'interface.

À l'interface, certains champs sont continus, c'est le cas de la contrainte normale et donc, en fluide parfait, de la pression ; c'est aussi le cas de la vitesse normale. En revanche, la densité, la vitesse tangentielle, la divergence de la vitesse et le gradient de la pression sont discontinus en fluide parfait. Donc, quand on calcule les opérateurs différentiels dans le schéma discret, on s'appuie sur des particules des deux fluides. Cela a pour conséquence indirecte de lisser les variables au voisinage de l'interface, et en ce sens on vérifie la continuité de la pression et de la vitesse normale, *i.e.* les conditions à l'interface. Le lissage

du champ de densité n'est lui, pas désirable et on verra au §I.2.3 qu'on peut modifier le schéma pour éviter son lissage.

I.2.1.4 Avance en temps

Une fois le problème discrétisé dans l'espace, nous souhaitons le résoudre de manière à avoir sa solution à n'importe quel instant t . Nous allons donc utiliser une intégration numérique en temps.

Pour cela, le système d'équations différentielles ordinaires (I.2.16) va être intégré explicitement en temps grâce à un schéma numérique de type Runge-Kutta. Le choix de ce schéma Doring (2005) repose sur la simplicité de sa programmation, sur la gestion simple du pas d'avance en temps Δt et sur son ordre facilement modifiable. Ici nous avons choisi le schéma d'ordre 4, qui permet avec des pas de temps deux fois supérieurs à l'ordre 2 d'avoir une précision toujours importante Doring (2005), Guilcher (2008).

Comme mentionné auparavant, la transmission de l'information acoustique à la vitesse du son c sur un maillage de taille caractéristique Δx (lui-même proportionnel à h) nous oblige à restreindre le pas de l'avance en temps de manière à ce que cette transmission soit correcte (*i.e.* qu'elle ne puisse pas « sauter » une particule au cours d'un pas de temps). Il s'agit d'une condition restrictive de type Courant-Friedrichs-Lewy :

$$\Delta t^{ac} \leq C_{CFL_{ac}} \frac{h}{c}$$

où $C_{CFL_{ac}}$ est un nombre adimensionnel permettant de pondérer cette restriction suivant l'ordre du schéma d'avance en temps.

Une autre condition à vérifier est basée sur les termes sources Monaghan (1992) :

$$\Delta t^s \leq 0.4 \sqrt{\frac{h}{f}}$$

où f est le module de la force s'exerçant sur une particule (par exemple la gravité). Dans la pratique, ce pas de temps Δt^s est largement supérieur (de plusieurs ordres) au pas de temps acoustique Δt^{ac} et n'est jamais calculé.

Ces conditions sont à vérifier sur chacune des particules à chaque pas de temps. Le calcul global est donc guidé par le pas de temps minimal sur l'ensemble des particules du domaine de discrétisation :

$$\Delta t = \min_i (\Delta t_i^{ac}, \Delta t_i^s).$$

Algorithmiquement parlant, l'implémentation de ce schéma fait appel à des techniques de recherche de voisinage (connectivité locale) basées sur des grilles sous-jacentes. Et combiné à cette technique, l'algorithme de Verlet permet d'éviter de faire cette recherche systématiquement (qui est fort coûteuse en temps de calcul) et de la différer dans le temps. Pour plus de détails, se reporter à Doring (2005) et Oger (2006) pour l'implémentation pour du calcul parallèle.

I.2.1.5 Viscosité artificielle

Le système d'équations ainsi totalement discrétisé (en espace et en temps) est un système dont la résolution est instable numériquement. En effet, le schéma est centré en espace (les contributions des particules voisines j sont symétriques par rapport à la particule d'intérêt i) et avancé en temps de manière explicite. Or ce genre de schéma est connu pour être inconditionnellement instable (*e.g.* Capdeville (1990)), c'est-à-dire que quel que soit le pas de temps employé pour le résoudre (pour un maillage et une vitesse du son donnés), il ne convergera pas.

Pour éviter ce problème il est donc nécessaire de décentrer le schéma en espace. Ceci se fait en apportant de la diffusion dans l'équation de quantité de mouvement sous forme de dissipation numérique. Cette dissipation s'insère comme une viscosité artificielle (différente de la formulation (I.1.2)) et qui va agir comme une sorte de surpression lorsque deux particules s'approchent. L'équation de quantité de mouvement est modifiée de la sorte Monaghan (1992) :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt}_i = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j (p_i + p_j + \Pi_{ij}) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j + \vec{g}$$

avec le terme de viscosité artificielle Π_{ij} définit par :

$$\Pi_{ij} = -\alpha \bar{c}_{ij} \bar{\rho}_{ij} \mu_{ij} \quad \text{avec} \quad \mu_{ij} = \begin{cases} \bar{h}_{ij} \frac{\vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} & \text{si } \vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.2.17})$$

où les quantités \bar{f}_{ij} et f_{ij} sont définies par (notations couramment utilisées par la suite) :

$$\bar{f}_{ij} = \frac{f_i + f_j}{2} \quad \text{et} \quad f_{ij} = f_i - f_j.$$

Le coefficient α est déterminé en fonction du problème à résoudre : sa valeur est classiquement comprise entre 0,01 et 1 (si l'on est précautionneux, on peut utiliser des valeurs comprises entre 0,01 et 0,1).

Cette approche est relativement simple et peu coûteuse pour améliorer la stabilité des simulations. Cependant, elle atteint rapidement des limites pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le choix du coefficient α se fait dans l'optique d'éviter la formation d'instabilités tout en minimisant la perte d'énergie (le système doit rester le plus conservatif possible). Ensuite, la détermination du coefficient dépend tout aussi bien du problème à traiter (rupture de barrage, ballotement, instabilités, ...), que de la modélisation du fluide (sa vitesse du son). Enfin, pour une configuration donnée, la dissipation à apporter au schéma ne sera pas nécessairement la même dans toutes les zones (un zone d'impact nécessite un coefficient plus grand qu'une zone de propagation de houle par exemple) et au cours du temps : bien que basé sur la vitesse de l'écoulement, ce terme de viscosité artificielle ne prend en compte que partiellement la partie acoustique de l'écoulement (via la vitesse du son). Ainsi les discontinuités physiques (au sens hyperbolique) ne sont pas correctement modélisées.

Pour rendre la tâche encore un peu plus complexe, la simulation d'écoulements bi-fluides nécessite la détermination d'un coefficient de viscosité artificielle pour chaque fluide (puisque chacun possède ses propriétés {densité et vitesse du son}).

Bien qu'il existe d'autres formes du terme de viscosité artificielle [Balsara \(1995\)](#), un des moyens de décentrer le schéma de manière satisfaisante (du point de vue des instabilités et de manière cohérente par rapport à l'hyperbolicité du système) tout en restant conservatif consiste à introduire des solveurs ¹ de Riemann. Ceci sera abordé au chapitre suivant.

I.2.1.6 Conditions initiales

Certaines des conditions initiales du système sont totalement définies par la discrétisation du problème : la position \bar{x}_0 et le volume associé ω_0 des particules sont issus du maillage initial. Le type d'avance en temps choisi (explicite avec un schéma de type Runge-Kutta) ne nécessite pas de définir des dérivées spatiales ou temporelles initiales : seul la connaissance de l'état des variables naturelles (ρ et \bar{u}) est suffisante.

Cependant initialiser ces champs avec la solution incompressible du problème (pour un état initial au repos dont les composantes sont connues) génère des instabilités au début du calcul provenant de l'inconsistance entre ces conditions initiales et le schéma de résolution utilisé par la suite (qui est compressible). Il est donc nécessaire d'initialiser les problèmes à résoudre par la solution compressible la plus proche. La plupart des problèmes étudiés auront pour condition initiale la solution hydrostatique compressible (fluide au repos soumis à l'accélération de la pesanteur). Le problème à résoudre est :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g\rho(y) \quad \text{avec} \quad p(\rho) = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right]$$

en supposant l'axe y orienté de manière opposée au champ de pesanteur. Cette équation s'intègre à une constante près et on détermine celle-ci en supposant que $\rho(y = H_{SL}) = \rho_0$ (pression nulle à la surface libre) :

$$\rho(y) = \rho_0 \left[1 + \frac{(\gamma - 1)g(H_{SL} - y)}{c_0^2} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Lorsqu'on initialise un domaine avec deux fluides pesants superposés (\mathcal{X} au dessus du fluide \mathcal{Y} , séparés par une interface à la position H_I ; la référence de pression nulle étant à la côte $y = H_{cuve}$), il faut procéder de même en veillant à raccorder correctement les deux profils de pression à l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(y) = \rho_{0x} \left[1 + \frac{(\gamma_x - 1)g(H_{cuve} - y)}{c_{0x}^2} \right]^{\frac{1}{\gamma_x - 1}} \quad \text{pour } H_I < y < H_{cuve} \\ \rho_I = \rho(H_I) = \rho_{0y} \left[\frac{\gamma_y \rho_{0x} c_{0x}^2}{\gamma_x \rho_{0y} c_{0y}^2} \left[\left(1 + \frac{(\gamma_x - 1)g(H_{cuve} - H_I)}{c_{0x}^2} \right)^{\frac{\gamma_x}{\gamma_x - 1}} - 1 \right] + 1 \right]^{\frac{1}{\gamma_y}} \\ \rho(y) = \left[\left(\frac{\rho_I}{\rho_{0y}} \right)^{(\gamma_y - 1)} + \frac{(\gamma_y - 1)g(H_I - y)}{c_{0y}^2} \right]^{\frac{1}{\gamma_y - 1}} \quad \text{pour } 0 < y < H_I \end{array} \right.$$

A titre d'exemple, sur la figure [\(I.2.5\)](#) sont représentés les profils de pression hydrostatique (air et eau) incompressible et compressible dans une cuve de $2 \times 1m$. Afin d'exagérer les différences, les vitesses du son sont prises égales à $1m.s^{-1}$ pour les deux fluides (ce qui est loin de l'hypothèse de pseudo-compressibilité qui serait basée ici sur une vitesse caractéristique $\sqrt{gH_{cuve}}$).

¹Barbarisme provenant de l'anglais *solver* mais largement adopté par les praticiens français à la place de *résolveur*.

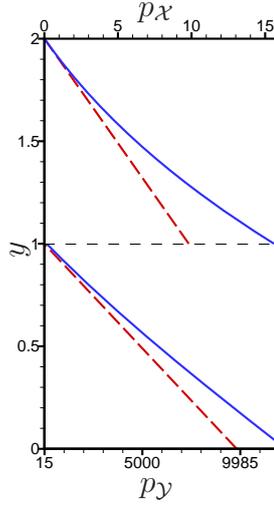


FIG. I.2.5 – Profils de pression incompressible (---) et compressible (—) dans la cuve dans chaque fluide.

I.2.2 Les instabilités à l'interface

Comme mentionné plus haut (§I.2.1.3.3), la condition dynamique à l'interface est basée sur la négligence de certains termes et un lissage des gradient spatiaux. Nous allons étudier les effets de ces approximations sur un cas relativement simple : une cuve soumise à la pesanteur. En effet, dans cette configuration hydrostatique, nous connaissons exactement le champ de pression solution (que nous appliquons comme solution initiale §I.2.1.6) ainsi que ses dérivées spatiales.

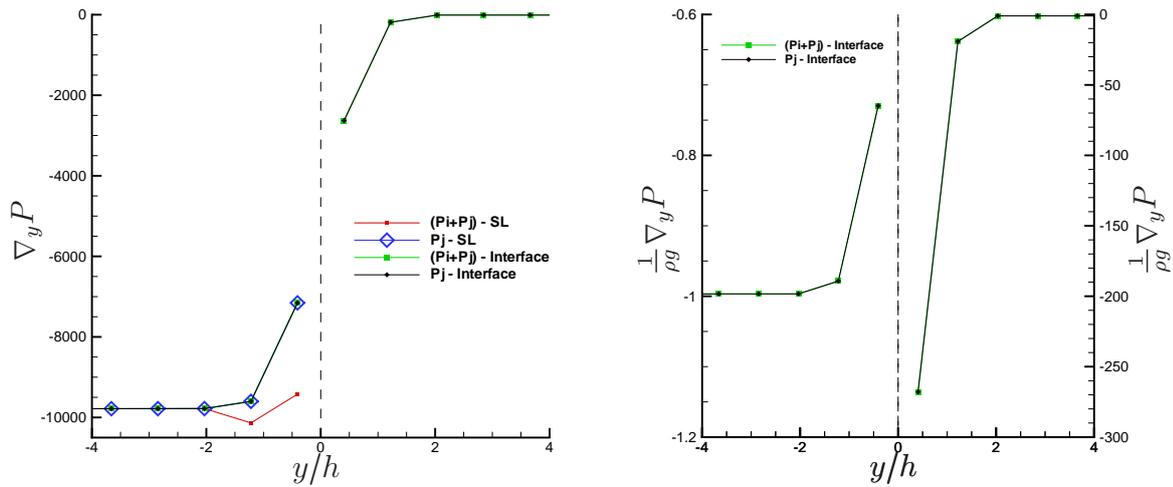
Le gradient de pression calculé dans la configuration d'une cuve $2 \times 1m$ (avec un fluide \mathcal{X} caractérisé par $\rho_{\mathcal{X}} = 1kg.m^{-3}$ et $c_{\mathcal{X}} = 150m.s^{-1}$, et un fluide \mathcal{Y} caractérisé par $\rho_{\mathcal{Y}} = 1000kg.m^{-3}$ et $c_{\mathcal{Y}} = 30m.s^{-1}$) soumise à la gravité $g = 9,81m.s^{-2}$ est égal, dans chaque fluide respectivement, à environ $9,81Pa.m^{-1}$ et $9810Pa.m^{-1}$ (l'approximation vient du fait que l'écoulement étant compressible, le gradient n'est pas exactement constant dans l'espace).

Le détail de cette évaluation par la méthode SPH est représenté sur la figure I.2.6(a). Pour les écoulements à surface libre on s'aperçoit donc que la formulation directe (en $\sum_j p_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j$) sous-estime le gradient de pression proche de la surface libre, ce qui n'est pas le cas, en moyenne, pour la formulation classique (en $\sum_j (p_i + p_j) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j$).

Pour les écoulements à interface, la différence d'interpolation entre les deux schémas est masquée par le fait que les supports d'interpolation sont complets. Ainsi les termes surfaciques, différents pour ces deux formulations, n'interviennent plus. On obtient alors une interpolation du gradient de pression qui est lissée à l'interface (au lieu d'une discontinuité).

D'autre part, le traitement de l'estimation de la divergence de la vitesse de manière continue (alors que seule la vitesse normale est continue) aboutit à une estimation erronée de la densité volumique proche de l'interface. Le lissage spatial de ce champ physique totalement discontinu influe considérablement sur la résolution de l'écoulement.

Dans l'équation de quantité de mouvement ces deux effets se combinent (le gradient de pression étant divisé par la masse volumique du fluide considéré) : l'accélération subie



(a) Composante verticale du gradient de pression (b) Comparaison entre le terme moteur de l'écoulement et l'accélération de pesanteur

FIG. I.2.6 – Différentes composantes verticales en fonction de la position par rapport la surface libre/interface (comptée positivement dans l'air).

par la particule la plus proche de l'interface côté eau est égale à 25% de la gravité contre 270 fois l'accélération de la pesanteur pour celle se trouvant du côté de l'air (voir figure I.2.6(b)) Oger (2006).

L'approximation des conditions dynamiques de surface libre se traduit donc concrètement par de fortes accélérations des particules « légères » situées à proximité (dans un rayon d'interaction $2h$) de l'interface.

Malgré le fait que les champs de gradient de la pression (et de la vitesse) soient discontinus à l'interface, le traitement par l'opérateur d'interpolation des gradients spatiaux des variables continues (pression et vitesse normale) permet d'effectuer un lissage de ces champs gradients discontinus. Cette perte de précision est alors compensée par une stabilité du schéma global (les mécanismes exacts de ce transfert d'erreur n'ont pas été mis en évidence à ce jour).

I.2.3 Formulation SPH-Multifluide

Afin d'améliorer le schéma standard présenté ci-dessus pour des configurations où une interface est présente (lieu où sont générées les erreurs les plus fortes comme vu précédemment), quelques modifications de la méthode SPH vont être proposées Grenier *et alii* (2009).

Ce nouveau modèle est une extension du travail présenté par Colagrossi & Landrini Colagrossi et Landrini (2003) et basé sur une approche variationnelle Bonet et Lok (1999). Cette formulation possède de fortes ressemblances avec la méthode proposée par Hu & Adams Hu et Adams (2006) mais diffère sur un point essentiel : la formulation proposée est capable de prendre en compte à la fois les écoulements avec interfaces, mais aussi les écoulements à surface libre (ce qui n'est pas le cas pour la formulation de Hu & Adams).

De plus, un soin particulier a été pris pour améliorer la précision du schéma grâce à l'utilisation d'un noyau de type Shepard (présenté ultérieurement). Le schéma proposé

conduit ainsi à utiliser une renormalisation du gradient de ce noyau qui diffère de ce qui est présenté classiquement avec ce type de noyau.

Enfin, se basant sur la méthode SPH dite classique, on n'évoquerons dans cette section que les modifications apportées. Les points n'ayant pas été abordés sont considérés comme traités de la même manière que dans la méthode classique.

I.2.3.1 Le schéma physique

Toutes les équations physiques présentées en §I.1 restent identiquement valables.

Cependant l'équation de continuité peut être réécrite sous une nouvelle forme mettant en évidence le caractère lagrangien de suivi des volumes discrets et de leur déformation. Ainsi on introduit le déterminant Jacobien \mathcal{J} tel que :

$$\mathcal{J} = \det(\mathbf{F}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}$$

où \vec{x} est la position spatiale d'un point matériel quelconque \vec{X} .

L'équation de continuité s'écrit donc finalement :

$$\frac{D \log \mathcal{J}}{Dt} = \operatorname{div}(\vec{u}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{J} = \frac{\rho_0(\vec{X})}{\rho(\vec{X})} = \frac{v(\vec{X})}{v_0(\vec{X})}. \quad (\text{I.2.18})$$

Le Jacobien peut donc être vu comme le rapport entre la masse volumique initiale $\rho_0(\vec{X})$ d'un point \vec{X} et sa masse volumique $\rho(\vec{X})$ à l'instant t , ou comme le rapport entre son volume spécifique $v(\vec{X})$ et son volume initial $v_0(\vec{X})$.

Cette écriture de l'équation de continuité en terme du Jacobien \mathcal{J} au lieu de la masse volumique ρ est réalisée pour des raisons numériques qui seront expliquées ultérieurement.

Au final le schéma physique à discrétiser est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\operatorname{div}(p\mathbf{I}) + \vec{S} \\ \frac{D \log \mathcal{J}}{Dt} = \operatorname{div}(\vec{u}) \quad ; \quad v(\vec{X}) = \mathcal{J}(\vec{X})v_0(\vec{X}) \quad ; \quad \rho(\vec{X}) = \frac{1}{v(\vec{X})} \\ \frac{D\vec{x}}{Dt} = \vec{u} \end{array} \right. \quad (\text{I.2.19})$$

avec la loi d'état fermant le système (pour $\vec{X} \in \mathcal{K}$) :

$$p(\vec{X}) = \frac{c_{0\kappa}^2 \rho_{0\kappa}}{\gamma\kappa} \left[\left(\frac{\rho(\vec{X})}{\rho_{0\kappa}} \right)^{\gamma\kappa} - 1 \right] + p_{0\kappa}.$$

I.2.3.2 Le schéma d'interpolation

Pour éviter les inconvénients dus à l'incomplétude du support d'interpolation près de la surface libre (où la somme $\sum_j W_{ij}\omega_j$ tend vers 0,5 pour une surface libre plate au lieu

de 1), nous choisissons d'utiliser la renormalisation du noyau suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f(\vec{x}) \rangle = \sum_j f_j W^S(\vec{x} - \vec{x}_j) \omega_j; \\ W^S(\vec{x} - \vec{x}_j) = \frac{W(\vec{x} - \vec{x}_j)}{c(\vec{x})}; \quad c(\vec{x}) = \sum_k W(\vec{x} - \vec{x}_k) \omega_k \end{array} \right. \quad (\text{I.2.20})$$

où le nouveau noyau W^S est connu sous le nom de noyau Shepard dans la littérature [Belytschko et alii \(1998\)](#).

À partir du schéma d'interpolation discret classique (I.2.5) et en effectuant une manipulation sur le gradient de la fonction à évaluer (on utilise la propriété $\langle \nabla(f.1) \rangle = f \langle \nabla 1 \rangle + 1 \langle \nabla f \rangle$), on peut obtenir un nouveau schéma d'interpolation du gradient d'une fonction en introduisant le noyau Shepard :

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\vec{x}_i) \rangle &= \sum_j f_j \vec{\nabla} W_{ij}^S \omega_j - f_i \sum_j \vec{\nabla} W_{ij}^S \omega_j \\ &= \frac{1}{c_i} \sum_j f_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j - \frac{f_i}{c_i} \sum_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \end{aligned} \quad (\text{I.2.21})$$

où $f_i = f(\vec{x}_i)$, $c_i = c(\vec{x}_i)$ et $\vec{\nabla} W_{ij} = \vec{\nabla} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)$. Il est à noter que cette formulation est légèrement différente de celle connue comme étant le gradient du noyau Shepard $\vec{\nabla} W_{ij}^S$ [Belytschko et alii \(1998\)](#) :

$$\sum_j f_j \vec{\nabla} W_{ij}^S \omega_j = \frac{1}{c_i} \sum_j f_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j - \frac{\langle f_i \rangle}{c_i} \sum_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j$$

où l'on remarque que le second terme fait intervenir l'interpolation du champ f au point \vec{x} avec le noyau Shepard. Cette dernière est obtenue par différenciation de (I.2.20) alors que (I.2.21) est une correction de (I.2.5) pour en améliorer la précision, en particulier proche de la surface libre, ce qui est notre objectif.

Ainsi le schéma d'interpolation utilisé est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f(\vec{x}) \rangle = \sum_j f_j \frac{W_{ij}}{c_i} \omega_j; \\ \langle \vec{\nabla} f(\vec{x}) \rangle = \sum_j (f_j - f_i) \frac{\vec{\nabla} W_{ij}}{c_i} \omega_j. \end{array} \right.$$

I.2.3.3 Discrétisation du système d'équations

I.2.3.3.1 Approche de Hu & Adams

En utilisant l'approche variationnelle déjà employée pour le schéma SPH classique, on peut dériver de manière consistante le schéma SPH proposé par [Hu et Adams \(2006\)](#) (bien qu'ils n'obtiennent pas leur système par cette méthode).

Tout d'abord, avec le schéma classique, le champ de masse volumique peut être évalué de manière directe par (si l'on n'utilise pas d'équation de continuité) :

$$\langle \rho(\vec{x}) \rangle = \sum_j \rho_j W_{ij} \omega_j = \sum_j m_j W_{ij} \quad (\text{I.2.22})$$

si l'on définit la masse m_j des particules comme étant le produit de leur masse volumique ρ_j par leur volume élémentaire ω_j . Cette approche, utilisée dans la formulation originale de la SPH, ne permet pas de prendre en compte de manière précise les discontinuités de densité entre deux fluides. Pour pallier cela, Hu & Adams se sont appuyés sur une autre évaluation de la masse volumique :

$$\langle \rho(\vec{x}) \rangle = m_i \sum_j W_{ij} \quad \text{ou} \quad \langle \rho(\vec{x}) \rangle = m_i n_i \quad \text{avec} \quad n_i = \sum_j W_{ij}. \quad (\text{I.2.23})$$

Cette formulation est bien capable de prendre en compte une discontinuité de densité car l'évaluation de la densité au point \vec{x} ne dépend que de sa propre masse m_i et d'une contribution géométrique n_i de la part des particules j voisines.

Avec cette formulation, une variation incrémentale de densité $D\rho_i$ peut se mettre sous la forme :

$$D\rho_i = m_i \sum_j \vec{\nabla} W_{ij} \cdot (\delta\vec{w}_i - \delta\vec{w}_j). \quad (\text{I.2.24})$$

Dans l'approche variationnelle, en remplaçant cette expression dans l'équation (I.2.14), on obtient après quelques manipulations (indices et antisymétrie du gradient du noyau) :

$$\begin{aligned} DE[\delta\vec{w}_i] &= \sum_i m_i \frac{p_i}{\rho_i^2} D\rho_i \\ &= \sum_i \frac{p_i}{n_i^2} \sum_j \vec{\nabla} W_{ij} \cdot (\delta\vec{w}_i - \delta\vec{w}_j) \\ &= \sum_i \sum_j \left(\frac{p_i}{n_i^2} + \frac{p_j}{n_j^2} \right) \vec{\nabla} W_{ij} \cdot \delta\vec{w}_i = - \sum_i \vec{T}_i \cdot \delta\vec{w}_i = - \sum_i m_i \frac{D\vec{u}_i}{Dt} \cdot \delta\vec{w}_i \end{aligned}$$

d'où la discrétisation consistante de l'équation de quantité de mouvement selon Hu et Adams (2006) :

$$m_i \frac{D\vec{u}_i}{Dt} = - \sum_j \left(\frac{p_i}{n_i^2} + \frac{p_j}{n_j^2} \right) \vec{\nabla} W_{ij}.$$

Cependant cette formulation ne peut pas s'appliquer pour les écoulements à surface libre car l'interpolation de la densité choisie (I.2.24) devient erronée pour les points de discrétisation proche de la surface libre. D'autre part, le fait de faire reposer l'évaluation de la densité uniquement sur la masse de la particule considérée (et de ne n'avoir que des informations géométriques sur son voisinage) ne permet pas de prendre en compte les variations de masse existant dans un domaine discrétisé avec des particules de différentes tailles.

L'avantage de cette approche est qu'elle ne requiert pas l'intégration temporelle de l'équation de continuité, ce qui garantit une conservation de la masse (et du volume).

I.2.3.3.2 Approche choisie

Comme mentionné plus haut, la nouvelle formulation proposée est basée sur le noyau Shepard pour l'évaluation de la masse volumique :

$$\langle \rho(\vec{x}) \rangle = \sum_{j \in \mathcal{K}} m_j W_{ij}^S \quad \text{avec} \quad W_{ij}^S = \frac{W_{ij}}{c_i} \quad \text{et} \quad c_i = \sum_{l \in \mathcal{K}} W_{il} \omega_l \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathcal{K}. \quad (\text{I.2.25})$$

Le calcul du terme $c_i = c(\vec{x})$ est basé sur la sommation de quantités pour des particules appartenant au même fluide \mathcal{K} que le point d'intérêt \vec{x} (d'où la restriction $\forall \vec{x} \in \mathcal{K}$). De cette manière les discontinuités de densité sont traitées explicitement.

Il est intéressant de remarquer que cette évaluation de la densité (I.2.25) est de conception différente de la formule (I.2.23) car, étant basée sur le noyau Shepard, elle est fonction des volumes ω qui doivent être calculés via l'équation de continuité (I.2.18). Ainsi, l'utilisation de l'équation (I.2.25) induit une relaxation dans le lien entre la masse m_i , le volume ω_i et la masse volumique ρ_i d'un point i quelconque. Il faudra donc, par la suite, manipuler la relation $m_i = \rho_i \omega_i$ avec précaution. En particulier, le champ de densité calculé directement à partir de la masse et du volume (*i.e.* m_i/ω_i) ne coïncide plus avec l'évaluation donnée par (I.2.22) ; l'évaluation (I.2.25) donne seulement une représentation lissée $\langle \rho \rangle$ du champ de densité (*i.e.* $\langle \rho \rangle < m_i/\omega_i$).

Ainsi cette nouvelle formulation nécessite l'intégration temporelle de l'équation de continuité (I.2.18) pour l'évaluation des volumes tandis que l'évaluation de la densité est faite avec le noyau Shepard (I.2.25). La divergence de la vitesse est évaluée par :

$$\operatorname{div}(\vec{u}_i) = \frac{1}{d_i} \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad \text{avec} \quad d_i = \sum_l W_{il} \omega_l \quad (\text{I.2.26})$$

où cette fois-ci les sommations sont faites sur tout le voisinage, sans tenir compte du type de fluide. De cette manière, les discontinuités de vitesse à l'interface sont régularisées par (I.2.26), tandis que les discontinuités de densité sont explicitement prises en compte par (I.2.25).

Avec cette nouvelle formulation, une variation incrémentale de densité $D\rho_i$ peut se mettre sous la forme :

$$D\rho_i = -\rho_i \operatorname{div}(\delta\vec{w}_i) = -\frac{\rho_i}{d_i} \sum_j (\delta\vec{w}_j - \delta\vec{w}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad (\text{I.2.27})$$

Dans l'approche variationnelle, en remplaçant cette expression dans l'équation (I.2.14), on obtient après quelques manipulations (indices et antisymétrie du gradient du noyau) :

$$\begin{aligned} DE[\delta\vec{w}_i] &= \sum_i m_i \frac{p_i}{\rho_i^2} D\rho_i \\ &= -\sum_i m_i \frac{p_i}{\rho_i d_i} \sum_j \vec{\nabla} W_{ij} \cdot (\delta\vec{w}_j - \delta\vec{w}_i) \omega_j \\ &= \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_i \rho_j} \left(\frac{p_i}{d_i} + \frac{p_j}{d_j} \right) \vec{\nabla} W_{ij} \cdot \delta\vec{w}_i = -\sum_i \vec{T}_i \cdot \delta\vec{w}_i = -\sum_i m_i \frac{D\vec{u}_i}{Dt} \cdot \delta\vec{w}_i \end{aligned}$$

d'où la discrétisation consistante de l'équation de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt}_i = -\sum_j \left(\frac{p_i}{d_i} + \frac{p_j}{d_j} \right) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j. \quad (\text{I.2.28})$$

Termes géométriques Ces termes $n(\vec{x})$ (cf. équation I.2.23) peuvent être introduits de la même manière que par Hu & Adams [Hu et Adams \(2006\)](#). La principale différence provient de ce qu'on raisonne sur une approximation de la distribution des volumes au lieu des masses des particules. Ainsi, au début d'une simulation on choisit d'aligner cartésienement les particules, leurs volumes sont donc identiques. D'autre part, travaillant sur

des fluides faiblement compressibles, nous pouvons toujours supposer que les volumes ω_j des particules proches de la particule d'intérêt i sont presque identiques à ω_i (*i.e.* que le gradient spatial de la distribution des volumes est négligeable devant l'échelle de longueur assimilée à la taille du support compact). Avec cette hypothèse, il est possible d'écrire :

$$\frac{W_j(\vec{x}_i) \omega_j}{d(\vec{x}_i)} = \frac{W_j(\vec{x}_i) \omega_j}{\sum_k W_k(\vec{x}_i) \omega_k} \simeq \frac{W_j(\vec{x}_i)}{\sum_k W_k(\vec{x}_i)} = \frac{W_j(\vec{x}_i)}{n(\vec{x}_i)}.$$

En introduisant cette approximation dans l'interpolation de la divergence de la vitesse (I.2.26) et du gradient de pression (I.2.28) on obtient :

$$\operatorname{div}(\vec{u}_i) = \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \frac{\vec{\nabla} W_{ij}}{n_i} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} p_i = \sum_j \left(\frac{p_i}{n_i} + \frac{p_j}{n_j} \right) \vec{\nabla} W_{ij}.$$

Comme mentionné précédemment pour l'approche de Hu & Adams, cette discrétisation ne fait plus intervenir les volumes des particules mais seulement leurs termes géométriques $n(\vec{x})$.

De la même manière que nous avons fait une approximation sur la répartition spatiale des volumes pour passer de $d(\vec{x})$ à $n(\vec{x})$, nous pouvons faire la même démarche pour les termes $c(\vec{x})$:

$$c(\vec{x}_i) = \sum_{k \in \mathcal{K}} W_{ik} \omega_k \simeq \omega_i \sum_{k \in \mathcal{K}} W_{ik} = \omega_i l_i.$$

On peut donc réécrire l'équation de densité (I.2.25) de la façon suivante :

$$\rho(\vec{x}_i) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{K}} m_j W_{ij}}{l_i \omega_i} = \frac{\mathcal{M}_i}{\omega_i} \quad ; \quad \mathcal{M}_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{K}} m_j W_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{K}} W_{ik}}. \quad (\text{I.2.29})$$

Cette écriture met en évidence ce qui a déjà été mentionné plus haut, à savoir que l'évaluation de la masse volumique $\rho(\vec{x}_i)$ et le volume ω_i sont reliés grâce à une distribution lissée \mathcal{M}_i des masses (qui ne coïncide pas avec la masse ponctuelle m_i).

Ainsi, les termes géométriques $l(\vec{x})$ permettent d'évaluer la masse lissée \mathcal{M} tandis que les volumes ω sont évalués à partir de l'intégration temporelle de l'équation de continuité (I.2.18). Puis, grâce à ces deux champs \mathcal{M} et ω , on peut évaluer le champ de masse volumique ρ avec l'équation (I.2.29), et ensuite le champ de pression (grâce à l'équation d'état).

Remarque :

Cette approche avec termes géométriques a été choisie dans ce travail pour rester proche des développements effectués par Hu & Adams et ainsi mener des comparaisons dans un cadre restreint. Toutefois, à titre complémentaire après tous les cas de validations étudiés, quelques calculs ont été menés sans l'approximation faite sur la faible variation spatiale des volumes, et en comparaison avec ces mêmes calculs opérés avec cette approximation, les différences n'ont pas été décelables qualitativement. Pour des travaux ultérieurs, il serait donc envisageable de ne pas utiliser cette approximation.

Système discrétisé Finalement le système d'équations (I.2.19) discrétisé peut s'écrire de la façon suivante. Dans un premier temps, à l'instant t , les positions, masses et volumes des particules sont connus, ce qui permet d'évaluer les quantités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{K}} m_j W_{ij}}{l_i} \quad ; \quad l_i = \sum_{k \in \mathcal{K}} W_{ik} \\ \rho_i = \frac{\mathcal{M}_i}{\omega_i} \end{array} \right. \Rightarrow p(\vec{x}_i) = \frac{c_{0\mathcal{K}}^2 \rho_{0\mathcal{K}}}{\gamma_{\mathcal{K}}} \left[\left(\frac{\rho(\vec{x}_i)}{\rho_{0\mathcal{K}}} \right)^{\gamma_{\mathcal{K}}} - 1 \right]; \quad \forall \vec{x}_i \in \mathcal{K}.$$

Puis une fois la densité et la pression connues, on peut évaluer les dérivées temporelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\vec{x}}{Dt}_i = \vec{u}_i; \quad n_i = \sum_k W_{ik} \\ \frac{D \log \mathcal{J}}{Dt}_i = \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \frac{\vec{\nabla} W_{ij}}{n_i}; \\ \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}_i = - \sum_j \left(\frac{p_i}{n_i} + \frac{p_j}{n_j} \right) \vec{\nabla} W_{ij} + \vec{S}. \end{array} \right.$$

Ces dérivées permettent alors de mettre à jour les volumes, vitesses et positions des particules.

On peut remarquer que si l'on ne considère qu'un seul fluide, le modèle reste inchangé et l'on a alors $l_i = n_i$.

Chapitre I.3

La SPH hybride

Dans ce chapitre nous allons reconsidérer la méthode SPH par une approche plus mathématique, menée principalement dans les travaux de Vila (2000), Lanson et Vila (2001) (repris par Deuff (2007) et Guilcher (2008)). Le système d'équations présenté plus haut (les équations d'Euler pour un fluide compressible) présente un caractère hyperbolique, ce qui change radicalement l'approche que l'on peut avoir pour l'étude d'un écoulement incompressible (que l'on cherche toujours à étudier dans notre cadre de travail, la pseudo-compressibilité n'étant qu'un moyen d'approcher la solution asymptotique incompressible). En effet dans un système d'équations pour un fluide incompressible, le caractère elliptique des équations induit que l'information se propage instantanément dans tout le domaine. Ce qui n'est plus cas avec un système hyperbolique, où cette information va avoir une vitesse et une direction de déplacement propres dans l'espace. De plus, le caractère compressible du fluide permet aussi l'existence de discontinuités dans les champs même si l'écoulement étudié n'en présente pas initialement. Ceci remet en cause le cadre d'une approche différentielle du système d'équation, telle que nous l'avons précédemment présentée.

Ainsi ces problématiques mathématiques et numériques naissant de l'étude et de la modélisation d'un fluide compressible vont être abordées dans ce chapitre. Des solutions vont être proposées et étudiées, provenant en partie du domaine des Volumes Finis. L'on parlera ainsi de SPH hybride, méthode à mi-chemin entre la conception classique de la SPH (à partir d'une réflexion sur les méthodes non-maillées) et la méthode des Volumes Finis.

I.3.1 La formulation monofluide

I.3.1.1 Lois de conservation

Les équations mentionnées au chapitre §I.1 sont toujours valables et nous allons nous baser sur la formulation conservative des équations d'Euler ¹ :

$$L_u(\phi) + \operatorname{div}F(x, t, \phi) = S \quad (\text{I.3.1})$$

avec $\phi = (\rho, \rho\vec{u})$ le vecteur des variables conservatives, F le flux associé aux lois de conservation (de composantes $F^1 = (0, p, 0)$ et $F^2 = (0, 0, p)$, dans un espace de dimensions 2) et

¹Nous utilisons la forme isentropique de ces équations, c'est-à-dire ne faisant pas intervenir l'équation d'énergie. Le développement peut être repris de manière identique si on en tient compte.

$S = (0, \rho \vec{g})$ le terme source. L'opérateur de transport L_u est défini par :

$$L_u(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1,d} \frac{\partial}{\partial x^i} (u^i \phi).$$

Ce système (I.3.1) voit donc sa solution exacte satisfaire la propriété de conservativité (*i.e.* conservativité de la masse et de la quantité de mouvement) :

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi \, dx \right) = \int_{\mathbb{R}^d} S \, dx. \quad (\text{I.3.2})$$

De plus, contrairement au schéma SPH classique où l'on raisonne en terme de masses ponctuelles (cf. §I.2.8), on observe ici l'évolution temporelle des volumes ω transportés par le champ \vec{u} :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \operatorname{div}(\vec{u}).$$

Enfin, on adjoint l'équation de transport des volumes matériels, qui traduit le caractère lagrangien du schéma :

$$\frac{D\vec{x}}{Dt} = \vec{u}.$$

I.3.1.1.1 Formulation ALE

Le formalisme ALE (pour *Arbitrary Lagrangian-Eulerian*) consiste à modifier l'opérateur de transport L_u afin que celui-ci soit lié à un champ de vitesse arbitraire \vec{u}_0 :

$$L_{u_0}(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1,d} \frac{\partial}{\partial x^i} (u_0^i \phi).$$

Par conséquent le flux intervenant dans l'équation (I.3.1) est modifié de la sorte :

$$F = F^E - u_0 \phi$$

où F^E est le flux eulérien. Les équations de transport des points matériels et d'évolution des volumes sont aussi modifiées :

$$\frac{D\vec{x}}{Dt} = \vec{u}_0 \quad \text{et} \quad \frac{D\omega}{Dt} = \omega \operatorname{div}(\vec{u}_0).$$

Ce choix de formulation permet donc de « dégénérer » le système d'équations en une approche purement eulérienne ($\vec{u}_0 = \vec{0}$), ou en une approche strictement lagrangienne ($\vec{u}_0 = \vec{u}$), ou encore en une approche mixte (où la vitesse \vec{u}_0 peut être une vitesse lissée localement).

I.3.1.1.2 Relation de Rankine-Hugoniot

L'hypothèse de compressibilité envisagée impose de prendre en compte les discontinuités comme les ondes de choc ou les discontinuités de contact. Or, au travers de ces phénomènes physiques (qui ont une épaisseur de l'ordre de $10^{-7}m$) l'hypothèse de milieu continu ne peut plus être appliquée et donc les équations précédentes ne sont plus valables. Cependant, certaines quantités ne sont pas modifiées : ce sont celles qui sont appelées variables conservatives et qui varient, au travers du saut que représente la discontinuité, suivant les relations de Rankine-Hugoniot :

$$F(\phi_1) - F(\phi_2) = s \cdot (\phi_1 - \phi_2)$$

où s est la vitesse de déplacement de cette discontinuité, séparant les milieux 1 et 2.

I.3.1.2 Discrétisation du système d'équations

Pour une analyse exhaustive de la démarche de formulation de ce schéma, se reporter à [Guilcher \(2008\)](#) (basé sur les travaux de [Vila \(2000\)](#)).

I.3.1.2.1 L'opérateur d'interpolation discret

Par la même démarche que la SPH classique, nous nous appuyons sur l'opérateur d'interpolation discret $\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}) \rangle^h$ (I.2.5). Cependant, comme remarqué un peu plus loin après cette définition, l'approximation faite par cet opérateur est pauvre (I.2.6) et ne permet pas de garantir la conservativité discrète. On définit donc un nouvel interpolateur régularisé basé sur :

$$D^h f(\vec{x}) = \langle \vec{\nabla} f(\vec{x}) \rangle^h - f(\vec{x}) \langle \vec{\nabla} 1(\vec{x}) \rangle^h$$

ce qui se traduit par :

$$D^h f(\vec{x}_i) = \sum_{j \in \mathcal{D}} (f(\vec{x}_j) - f(\vec{x}_i)) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad (\text{I.3.3})$$

et qui garantit finalement que $D^h 1(\vec{x}) = \vec{0}$.

I.3.1.2.2 Formulation forte

En utilisant l'opérateur D^h pour discrétiser l'opérateur divergence, on peut maintenant discrétiser les équations d'Euler (I.3.1) :

$$\frac{D\omega_i \phi_i}{Dt} + \omega_i D^h F_i = \omega_i S_i \quad \text{soit} \quad \frac{D\omega_i \phi_i}{Dt} + \omega_i \sum_j (F_j - F_i) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j = \omega_i S_i$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt_i} &= -\rho_i \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \\ \rho \frac{D\vec{u}}{Dt_i} &= -\sum_j (p_j - p_i) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j + \rho_i \vec{g} \end{cases}$$

Cette discrétisation a été étudiée par [Lanson et Vila \(2001\)](#) et [Oger \(2006\)](#) et présente une bonne précision au sein des fluides. Cependant elle présente deux inconvénients majeurs. Le premier est que ce schéma n'est pas conservatif (cf. éq. I.3.2) dans le sens où :

$$\frac{D}{Dt} \left(\sum_j \omega_j \phi_j \right) \neq \sum_j \omega_j S_j. \quad (\text{I.3.4})$$

Le deuxième inconvénient concerne les opérateurs L_u et divergence qui ne sont pas définis au niveau des discontinuités (qui existent au sein du fluide compressible ; cf. §I.3.1.1).

L'idée est donc d'utiliser une formulation variationnelle et de reporter ces opérateurs de dérivation sur les fonctions-tests associées pour obtenir une solution faible.

I.3.1.2.3 Formulation faible

La formulation variationnelle du problème peut s'écrire sous la forme :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{**}) \quad \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} [L_u(\phi) + \operatorname{div} F(x, t, \phi) - S] \varphi(x, t) \, dw \, dt = 0$$

où φ est une fonction test suffisamment régulière.

Par diverses opérations (dans l'ordre : report des dérivées sur les fonctions tests, définition d'un nouvel opérateur de transport, d'un opérateur de discrétisation adjoint) et manipulations calculatoires (cf. *e.g.* [Guilcher \(2008\)](#)), on aboutit à un schéma discret exhibant la solution faible du problème :

$$\frac{D\omega_i \phi_i}{Dt} + \omega_i D^{*h} F_i = \omega_i S_i$$

où l'opérateur adjoint D^{*h} vaut :

$$D^{*h} f(\vec{x}_i) = \sum_{j \in \mathcal{D}} (f(\vec{x}_i) \vec{\nabla} W_{ij} - f(\vec{x}_j) \vec{\nabla} W_{ji}) \omega_j.$$

Ceci nous amène au système d'équations suivant :

$$\frac{D\omega_i \phi_i}{Dt} + \omega_i \sum_j (F_i + F_j) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j = \omega_i S_i. \quad (\text{I.3.5})$$

En le développant et en le complétant des équations de transport et d'évolution des volumes, on aboutit au système d'équations discrétisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\omega \rho}{Dt}_i = 0 \\ \frac{D\omega \rho \vec{u}}{Dt}_i = -\omega_i \sum_j (p_i + p_j) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j + \omega_i \rho_i \vec{g} \\ \frac{D\omega}{Dt}_i = \omega_i \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \\ \frac{D\vec{x}}{Dt}_i = \vec{u}_i \end{array} \right. \quad (\text{I.3.6})$$

En combinant les première et troisième équations de (I.3.6), on obtient une discrétisation de l'équation de continuité :

$$\frac{D\rho}{Dt}_i = -\rho_i \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \nabla W_{ij} \omega_j.$$

On retrouve ainsi la discrétisation consistante du schéma SPH classique sous une forme légèrement différente. Ce schéma vérifie donc la conservativité discrète (*i.e.* le contraire de l'équation (I.3.4)).

Cependant, la principale différence avec la même démonstration faite plus tôt (outre le formalisme mathématique qui permet par la suite d'étudier certaines propriétés de la méthode, entre autres démontrer la convergence sous certaines hypothèses [Vila \(2000\)](#)) va concerner l'étude de la stabilité de ce schéma.

Nous avons en effet déjà évoqué ce problème de stabilité pour le schéma SPH classique, dû à l'utilisation d'une avance en temps explicite avec la discrétisation spatiale centrée. La solution retenue pour le schéma classique avait été de décentrer le schéma en espace au moyen d'une pseudo-viscosité rajoutée dans l'équation de quantité de mouvement.

Mais avec le cheminement effectué avec cette formulation variationnelle, nous remarquons que les équations sont fortement liées entre elles par l'évaluation de la divergence des flux. La dissipation à appliquer pour décentrer le schéma devra donc s'appliquer, *a priori*, sur toutes les composantes du flux.

I.3.1.2.4 Convergence et renormalisation

L'étude de la convergence a déjà été abordée (cf. §I.2.1.1.3) : l'interpolateur discret converge spatialement sous les deux conditions de raffinement de la taille du « maillage » ($\Delta x \rightarrow 0$) et de raffinement de la longueur de lissage du support compact ($h \rightarrow 0$).

On peut rajouter que deux théorèmes étayent cette propriété de convergence de la solution faible du problème des équations d'Euler compressible vers la solution exacte. D'une part, le théorème de Lax assure la convergence sous une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour un problème bien posé et un schéma numérique consistant. D'autre part, le théorème de Lax-Wendroff assure que, si un schéma numérique est consistant et s'il converge en espace et en temps, alors il converge vers la solution faible des équations.

L'introduction d'une technique d'augmentation de la précision de l'interpolateur discret va nous permettre de nous affranchir (sous condition) d'une de ces deux contraintes de convergence. En effet la renormalisation, proposée par [Randles et Libersky \(1996\)](#), permet cela en corrigeant directement le gradient discret du noyau de manière à estimer exactement l'interpolation de champs constants (déjà obtenue grâce à l'interpolateur D^h , cf. éq. I.3.3) et de champs linéaires.

Tout d'abord, on estime un champ linéaire \vec{x} par l'interpolateur :

$$D^h \vec{x}(\vec{x}_i) = \sum_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i) \otimes \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j.$$

Cette estimation doit, par ailleurs, être égale à la matrice identité I. On peut donc introduire un nouvel opérateur d'interpolation renormalisé D_R^h défini par :

$$D_R^h f(\vec{x}_i) = B(\vec{x}_i) \cdot \sum_j (f(\vec{x}_j) - f(\vec{x}_i)) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j$$

où la matrice $B(\vec{x}_i)$ de renormalisation est définie au point \vec{x}_i par :

$$B(\vec{x}_i) = (D^h \vec{x}(\vec{x}_i))^{-1} = \left(\sum_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i) \otimes \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \right)^{-1}.$$

De la même façon, l'opérateur adjoint est modifié :

$$D_R^{*h} f_i = \sum_j (f_i B_i \cdot \vec{\nabla} W_{ij} - f_j B_j \cdot \vec{\nabla} W_{ji}) \omega_j.$$

En plus d'augmenter la précision de l'interpolateur (qui devient d'ordre 2 en h au niveau discret), la renormalisation permet de relaxer une des conditions de convergence de la méthode. D'après [Lanson \(2001\)](#), en gardant un ratio constant $\Delta x/h = \mathcal{O}(1)$, la

convergence est assurée sous la seule condition de raffinement du pas spatial ($\Delta x \rightarrow 0$).

Afin d'introduire un outil de décentrement du schéma (basé sur la résolution du problème de Riemann; cf. plus loin) et pour gagner en temps de calcul, on définit une forme symétrisée de la renormalisation avec $B_{ij} = (B_i + B_j)/2$. Les opérateurs d'interpolation sont modifiés de la sorte :

$$D_R^h f_i = \sum_j (f_j - f_i) B_{ij} \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad \text{et} \quad D_R^{*h} f_i = \sum_j (f_i + f_j) B_{ij} \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j.$$

Remarques :

- La forme symétrisée dégrade la propriété de convergence de l'opérateur renormalisé au second ordre.
- Lors du calcul de la matrice de renormalisation B_i , l'inversion matricielle est possible analytiquement en prenant soin d'étudier les conditions de cette opération. L'inversibilité pose problème lorsque le point de discrétisation concerné est proche de la surface libre. Il est alors nécessaire de repasser à la formulation initiale non-renormalisée (en posant $B_i = \mathbb{I}$) suivant la variation des valeurs propres de la matrice non inversée (cf. les travaux de [Doring \(2005\)](#) et [Guilcher \(2008\)](#)).

I.3.1.3 Le schéma hybride

Dans cette section nous allons définir plus précisément l'outil de décentrement du schéma évoqué plus haut : les solveurs de Riemann.

I.3.1.3.1 L'approche caractéristique des équations d'Euler

Afin d'étudier le problème de Riemann, il est plus aisé de raisonner sur la forme convective des équations d'Euler isentropiques ² et d'en trouver ainsi les valeurs propres du système. Le retour à la formulation conservative se fait via des matrices de passage qui ne seront pas détaillées ici (cf. [Capdeville \(1990\)](#), [Guilcher \(2008\)](#)).

De plus, nous nous plaçons dans une direction quelconque \vec{n} du plan sur laquelle nous projetons les équations d'Euler sous forme convective (nous négligeons au passage la composante transverse $\vec{\tau}$ de ce repère pour nous ramener à un problème monodimensionnel; de même pour le terme source qui n'intervient pas dans l'étude hyperbolique) :

$$\frac{\partial \phi_v}{\partial t} + A_n \frac{\partial \phi_v}{\partial n} = 0 \quad \text{avec} \quad A_n = \begin{pmatrix} \vec{u} \cdot \vec{n} & \rho n_x & \rho n_y \\ c^2 n_x / \rho & \vec{u} \cdot \vec{n} & 0 \\ c^2 n_y / \rho & 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} \end{pmatrix}$$

avec $\phi_v = [\rho, \vec{u}]^t$ le vecteur des variables conservatives.

On peut montrer que cette matrice jacobienne A_n du système est diagonalisable (de valeurs propres réelles $\lambda_i \in \{\vec{u} \cdot \vec{n}, \vec{u} \cdot \vec{n} - c, \vec{u} \cdot \vec{n} + c\}$). Le système est donc hyperbolique. Ceci est caractérisé par le fait que l'information va se propager dans le domaine de calcul selon

²Nous nous restreignons au cas bidimensionnel. L'extension au cas tridimensionnel ne présente pas de difficultés hormis un peu plus de calculs ...

des trajectoires particulières qui sont les courbes caractéristiques. On peut les déterminer par l'étude du système diagonalisé :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad \text{avec} \quad \partial W = \begin{pmatrix} \partial u_x n_y - \partial u_y n_x \\ c \partial \rho / \rho - \partial \vec{u} \cdot \vec{n} \\ c \partial \rho / \rho + \partial \vec{u} \cdot \vec{n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \vec{u} \cdot \vec{n} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} - c & 0 \\ 0 & 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} + c \end{pmatrix}$$

où ∂W est le vecteur accroissement des variables caractéristiques (obtenu par multiplication du vecteur des variables convectives avec la matrice de passage du système diagonal) et Λ la matrice diagonalisée de A_n . Ce système, correspondant à la diagonalisation des équations d'Euler, peut se réécrire sous forme scalaire :

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial n} = 0. \quad (\text{I.3.7})$$

Et on en déduit, par intégration, pour chaque composante w_i de W , l'invariant de Riemann (qui reste constant le long de la courbe caractéristique $\frac{dn}{dt} = \lambda_i$) :

$$W = \begin{pmatrix} \vec{u} \cdot \vec{t} \\ \vec{u} \cdot \vec{n} - \frac{2c}{\gamma - 1} \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + \frac{2c}{\gamma - 1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a décomposé les équations d'Euler monodimensionnelles en un système découpé de 3 équations de convection (I.3.7) représentant la propagation d'informations (sous forme d'ondes simples) dans des directions distinctes du plan (\vec{n}, t) (t étant le temps).

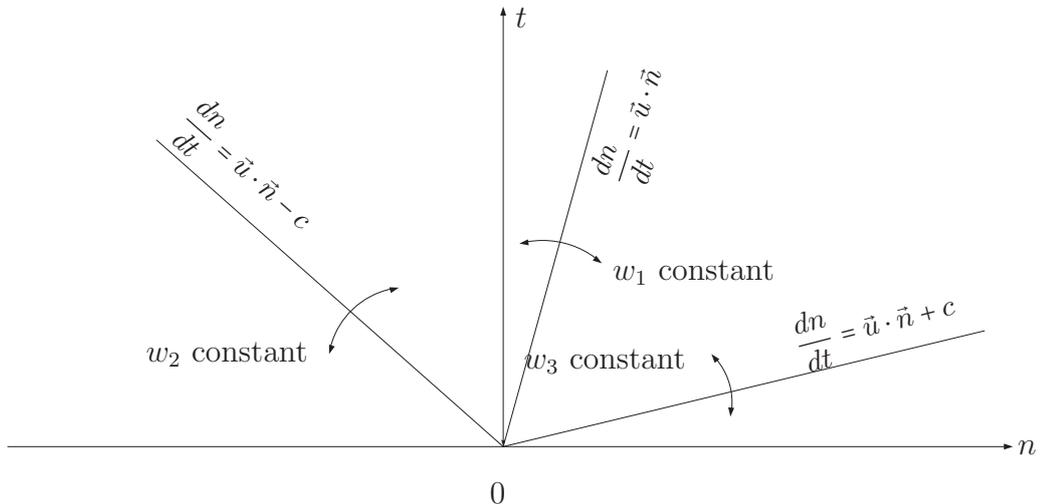


FIG. I.3.1 – Représentation des ondes caractéristiques dans le plan (\vec{n}, t) .

Sur ce diagramme, on peut avoir une représentation des régions d'influence des ondes dans le plan espace-temps. Chaque droite correspond à une onde simple (liée à un invariant de Riemann), telle que la quantité ∂w_i reste constante au travers de cette droite. Et chaque droite sépare deux régions où la solution est uniforme.

Pour l'onde simple entropique $\lambda_1 = \vec{u} \cdot \vec{n}$, on a ainsi (en multipliant par le vecteur propre r_i associé) un accroissement du vecteur des variables convectives tel que seules la vitesse normale et la densité restent constantes à travers cette onde (c'est donc la vitesse tangentielle qui varie). Pour les autres ondes liées aux autres valeurs propres, celles-ci sont dites acoustiques (et peuvent être soit des détentés soit des compressions) et voient toutes les grandeurs varier.

Au final, la somme de ces ondes ∂w_i reconstitue l'accroissement du vecteur des variables convectives :

$$\partial \phi_v = \sum_i \partial w_i r_i.$$

Ainsi on est capable de quantifier, en tout point de l'espace et à chaque instant, l'état du fluide affecté par la perturbation causée par une discontinuité initiale.

I.3.1.3.2 Le problème de Riemann

Le problème de Riemann est un cas particulier du problème étudié précédemment (équations d'Euler monodimensionnelles pour les gaz parfaits avec transformations adiabatiques). La configuration spatiale correspond à un tube de section uniforme et de longueur infinie, séparé en deux états initiaux et uniformes de part et d'autre de l'abscisse $x = 0$. Cette discontinuité des états gauche et droit est maintenue (à l'infini) au cours du temps.

La rupture de la membrane séparatrice à l'instant initial va donner naissance à différentes ondes. La première va être la discontinuité de contact qui va séparer les deux autres types d'ondes. Il y aura donc, de part et d'autre de celle-ci, soit une onde de choc, soit une onde de détente (suivant les conditions initiales), qui vont se propager dans chaque direction, cf. figure I.3.2.

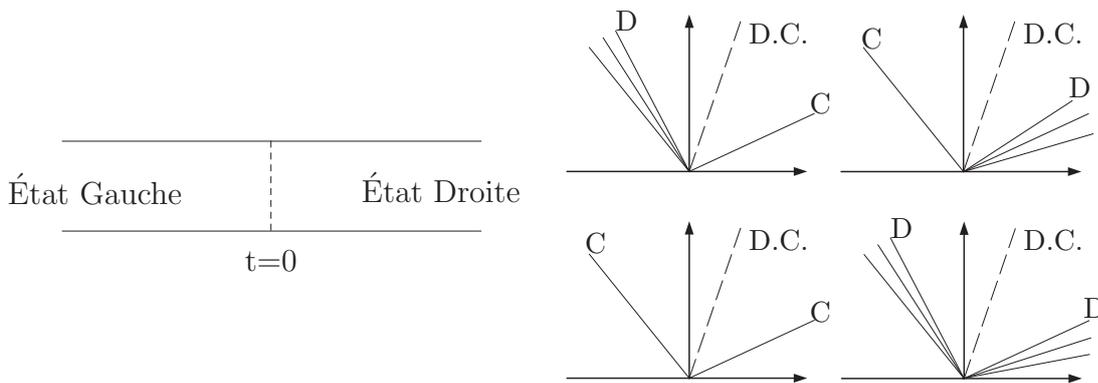


FIG. I.3.2 – Problème de Riemann initial et certaines configurations parmi toutes celles possibles dans le plan (x, t) avec D signifiant détente, C choc et $D.C.$ discontinuité de contact.

La méthode de résolution de ce problème s'appuie sur les développements faits auparavant sur les ondes simples. L'approche va néanmoins changer (le problème n'étant plus linéaire au niveau de certaines ondes) sur les relations s'appliquant aux ondes de compression (les chocs) et les discontinuités de contact où l'on utilisera les relations de Rankine-Hugoniot. On peut ainsi déterminer complètement, pour ce problème de Riemann, l'état du fluide dans le plan (x, t) .

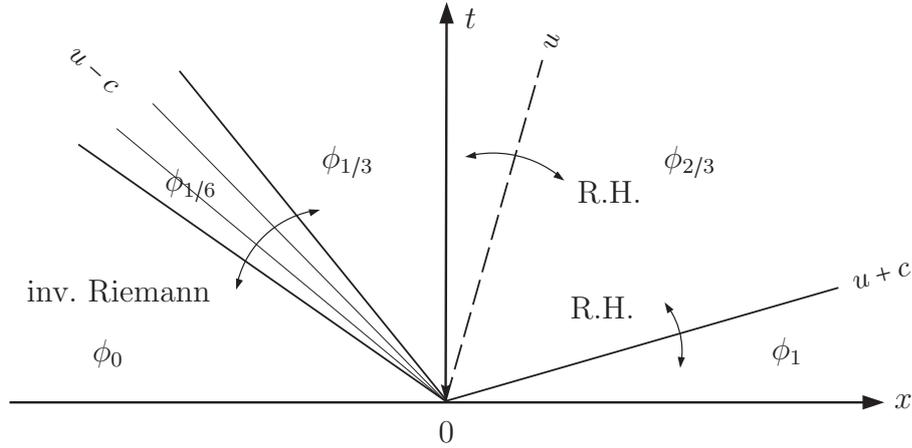


FIG. I.3.3 – Cas particulier d'un problème de Riemann avec les différents états ϕ et les relations de passage (« R.H. » pour Rankine-Hugoniot et « inv. Riemann » pour les invariants).

Nous allons donner le principe de résolution du problème de Riemann pour les équations d'Euler isentropiques monodimensionnelles sous forme conservative, sans rentrer dans les détails (se reporter à [Ivings et alii \(1998\)](#)). La fermeture du système se fait grâce à l'équation de Tait, avec une évaluation de la pression absolue grâce à la masse volumique (*i.e.* $p = B\rho^\gamma$) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + B\rho^\gamma)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Onde de valeur propre $\lambda = u - c$: Si cette onde est une détente (c'est-à-dire si $\rho_{1/3} < \rho_0$), l'invariant de Riemann correspondant s'applique :

$$u_0 + \frac{2c_0}{\gamma - 1} = u_{1/3} + \frac{2c_{1/3}}{\gamma - 1}$$

soit, sachant que $c^2 = \gamma B\rho^{\gamma-1}$:

$$u_{1/3} = u_0 - f_0(\phi_0, \rho_{1/3}) \quad \text{avec} \quad f_0(\phi_0, \rho_{1/3}) = \frac{2c_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\rho_{1/3}}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]. \quad (\text{I.3.8})$$

Si cette onde est un choc ($\rho_{1/3} > \rho_0$), les relations de Rankine-Hugoniot s'appliquent :

$$\begin{cases} \rho_0(u_0 - s_0) = \rho_{1/3}(u_{1/3} - s_0) \\ \rho_0(u_0 - s_0)^2 + B\rho_0^\gamma = \rho_{1/3}(u_{1/3} - s_0)^2 + B\rho_{1/3}^\gamma \end{cases}$$

où s_0 est la vitesse inconnue du choc. Ce système se simplifie en :

$$u_{1/3} = u_0 - f_0(\phi_0, \rho_{1/3}) \quad \text{avec} \quad f_0(\phi_0, \rho_{1/3}) = \left[\frac{B}{\rho_{1/3}\rho_0} (\rho_{1/3}^\gamma - \rho_0^\gamma) (\rho_{1/3} - \rho_0) \right]^{1/2}.$$

Onde de valeur propre $\lambda = u + c$: On a de la même manière, si cette onde est une détente ($\rho_{2/3} < \rho_1$) :

$$u_{2/3} = u_1 + f_1(\phi_1, \rho_{2/3}) \quad \text{avec} \quad f_1(\phi_1, \rho_{2/3}) = \frac{2c_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\rho_{2/3}}{\rho_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]. \quad (\text{I.3.9})$$

Si cette onde est un choc ($\rho_{2/3} > \rho_1$), on a :

$$u_{2/3} = u_1 + f_1(\phi_1, \rho_{2/3}) \quad \text{avec} \quad f_1(\phi_1, \rho_{2/3}) = \left[\frac{B}{\rho_{2/3}\rho_1} (\rho_{2/3}^\gamma - \rho_1^\gamma) (\rho_{2/3} - \rho_1) \right]^{1/2}.$$

Onde de valeur propre $\lambda = u$: Sur cette onde, qui est une discontinuité de contact, les relations de Rankine-Hugoniot nous donnent :

$$\begin{cases} u_{1/3} = u_{2/3} \\ \rho_{1/3} = \rho_{2/3} \end{cases}$$

On appellera cette zone entre les deux ondes non-linéaires région étoilée *.

Solution complète : On peut réécrire cette dernière relation sur les vitesses de la façon suivante :

$$f(\rho_*) = (u_1 + f_1(\phi_1, \rho_*)) - (u_0 - f_0(\phi_0, \rho_*)) = 0.$$

Ainsi le problème de Riemann peut être totalement résolu en trouvant la solution ρ_* de cette équation linéaire. Ceci peut se faire grâce à la méthode de Newton-Raphson, qui en quelques itérations (3 ou 4 typiquement), trouve une solution à 10^{-6} près. On initialise le calcul avec la solution ρ_* d'un solveur de Riemann approché que nous détaillerons plus loin. De plus, au cours des itérations il faut remarquer que les solutions intermédiaires influent sur la considération des ondes à prendre en compte (il faut actualiser l'état étoilé à chaque itération suivant le type d'onde rencontré).

La vitesse normale u_* est obtenue grâce à la demi-somme des relations valables pour un choc à gauche et à droite (ou grâce à celle pour une détente à gauche et à droite) :

$$u_* = \frac{1}{2}(u_0 + u_1) + \frac{1}{2}(f_1(\phi_1, \rho_*) - f_0(\phi_0, \rho_*)).$$

La vitesse tangentielle, quant à elle, ne peut être déterminée avec l'approche choisie (monodimensionnelle). On prolonge donc les vitesses tangentielles des états gauche ($\phi_{1/3} = \phi_0$) et droit ($\phi_{2/3} = \phi_1$) jusqu'à la discontinuité de contact qui est une condition de glissement ($\vec{u}_{1/3} \cdot \vec{t} \neq \vec{u}_{2/3} \cdot \vec{t}$).

Pour compléter la détermination de tous les états possibles, il reste à préciser les états à l'intérieur des détentes ($\phi_{1/6}$ si la détente se trouve à gauche ou $\phi_{5/6}$ si elle est à droite) :

$$\begin{cases} u_{1/6} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} u_0 + \frac{x}{t} \right) \\ \rho_{1/6} = \left(\frac{c_{1/6}^2}{\gamma B} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad \text{où} \quad c_{1/6} = u_{1/6} - x/t \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_{5/6} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(-c_1 + \frac{\gamma - 1}{2} u_1 + \frac{x}{t} \right) \\ \rho_{5/6} = \left(\frac{c_1^2}{\gamma B} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad \text{où} \quad c_{5/6} = x/t - u_{5/6} \end{cases}$$

Les détente, qui sont des ondes qui s'étalent dans le temps, sont comprises entre :

$$u_0 - c_0 < \frac{dx}{dt} < u_* - c_* \quad \text{et} \quad u_* + c_* < \frac{dx}{dt} < u_1 + c_1.$$

Les chocs sont exactement positionnés aux vitesses déterminées par les relations de Rankine-Hugoniot :

$$s_0 = \frac{\rho_* u_* - \rho_0 u_0}{\rho_* - \rho_0} \quad \text{et} \quad s_1 = \frac{\rho_* u_* - \rho_1 u_1}{\rho_* - \rho_1}$$

On peut remarquer que le problème de Riemann est autosimilaire, c'est-à-dire que sa solution, notée (ρ_e, \vec{u}_e) , est valable quel que soit le rapport x/t .

I.3.1.3.3 La méthode de Godunov

L'idée est de raisonner sur une formulation Volumes Finis des équations de conservation non linéaires, et, selon l'approche de Godunov, [Godunov \(1958\)](#), de remarquer que l'évolution temporelle de la solution discrète de ces équations est régie par la présence d'ondes simples aux interfaces des volumes de contrôle. Ainsi la discrétisation de l'espace amène à considérer chaque élément discret et son voisinage adjacent comme une formulation locale d'un problème de Riemann. Et au vu des développements effectués ci-dessus, on peut en déterminer la solution exacte.

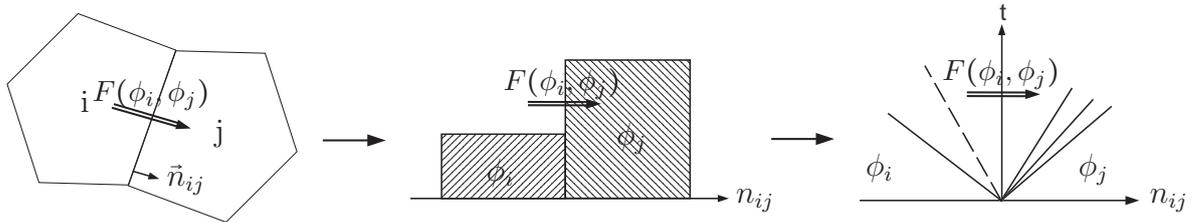


FIG. I.3.4 – Schéma de principe de la décomposition de la formulation Volumes Finis en problème de Riemann local.

Les équations d'Euler peuvent se mettre sous la forme discrète suivante (en utilisant le formalisme Volumes Finis) :

$$\frac{D\omega_i \phi_i}{Dt} + \sum_j F_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} l_j = 0 \quad (\text{I.3.10})$$

où $F_{ij} = F(\phi_i, \phi_j)$ est le flux sur la face commune à i et j , l_j est la longueur de cette face, \vec{n}_{ij} son vecteur normal (orienté vers l'extérieur de i) et ω_i le volume de la maille i .

Ainsi pour calculer le flux numérique F_{ij} on se ramène à un problème local (cf. figure I.3.4) où la face commune devient une interface entre deux états discontinus ϕ_i et ϕ_j . Avec la méthode de Godunov, on détermine donc ce flux en résolvant exactement le problème de Riemann.

Remarque :

La formulation conservative des équations d'Euler employée dans le formalisme Volumes Finis permet de garantir la conservativité du flux numérique, *i.e.*, $F_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} = -F_{ji} \cdot \vec{n}_{ji}$.

I.3.1.3.4 Les autres méthodes de décentrement

La méthode de Godunov permet de calculer les flux numériques en bord de maille en se basant sur la résolution exacte du problème de Riemann. Cette méthode fait appel à la résolution d'un sous-problème non-linéaire qui peut être coûteux en terme de temps de calcul. Pour pallier cela, il peut donc être intéressant d'avoir à disposition d'autres méthodes de calcul de ces flux qui seront basées sur certaines approximations.

Nous n'aborderons volontairement ici que très peu d'entre elles, l'étude de solveurs efficaces étant un domaine de recherche riche, [Toro \(1997\)](#).

Solveur de Riemann à 2 détente : Pour ce type de solveur, nous allons faire une approximation sur le calcul de l'état étoilé. Nous allons supposer que le problème de Riemann est posé avec 2 ondes correspondant à des détente (appelé aussi TRRS pour Two-Rarefaction Riemann Solver). Ainsi à partir des équations (I.3.8) et (I.3.9) issues des relations de Rankine-Hugoniot, on obtient :

$$\begin{cases} u_* &= \frac{1}{2}(u_0 + u_1) + \frac{1}{\gamma - 1}(c_0 - c_1) \\ c_* &= \frac{1}{2}(c_0 + c_1) + \frac{\gamma - 1}{4}(u_0 - u_1) \end{cases}$$

L'équation d'état et la définition de la vitesse du son permettent d'avoir :

$$\rho_* = \left(\frac{c_*^2}{\gamma B} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

La vitesse tangentielle dans la région étoilée est déterminée de la même façon que dans le solveur exact, à savoir par prolongation des états gauche et droit.

C'est l'état étoilé déterminé grâce à cette approximation qui est utilisé comme valeur initiale dans la méthode itérative de Newton-Raphson du solveur exact de Godunov.

Solveur de Riemann à 2 chocs : De la même manière, nous pouvons présenter un solveur postulant que les 2 ondes en présence sont des chocs (appelé aussi TSRS pour Two-Shock Riemann Solver). Cependant cette formulation est délicate à mettre en œuvre (non-unicité des solutions ou racines complexes). Une approche est proposée par [Toro \(1997\)](#) et basée sur une approximation de la masse volumique initiale. On a ainsi :

$$\rho_* = \frac{\rho_0 g_0(\rho^i) + \rho_1 g_1(\rho^i) + u_0 - u_1}{g_0(\rho^i) + g_1(\rho^i)}$$

avec, pour K valant 0 ou 1 :

$$g_K = \left[\frac{B(\rho_*^\gamma - \rho_K^\gamma)}{\rho_* \rho_K (\rho_* - \rho_K)} \right]^{1/2}.$$

La masse volumique ρ_* est approchée en première estimation par ρ^i , défini par :

$$\rho^i = \max \left(0, \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_1) + \frac{1}{2}(u_0 - u_1) \frac{\rho_0 + \rho_1}{c_0 + c_1} \right).$$

La solution est ensuite complétée par l'estimation de la vitesse :

$$u_* = \frac{1}{2} \left(u_0 + u_1 + (\rho_* - \rho_1)g_1(\rho^i) - (\rho_* - \rho_0)g_0(\rho^i) \right).$$

Solveur de Riemann HLL : Ce type de solveur n'est plus basé sur le calcul approché de l'état étoilé mais sur une estimation directe des flux. Pour cela, Harten, Lax and Van Leer, [Harten *et alii* \(1983\)](#), ont supposé que la configuration des ondes est telle que seules deux ondes séparent les trois régions du plan (x, t) correspondant à des états constants, cf. figure I.3.5.

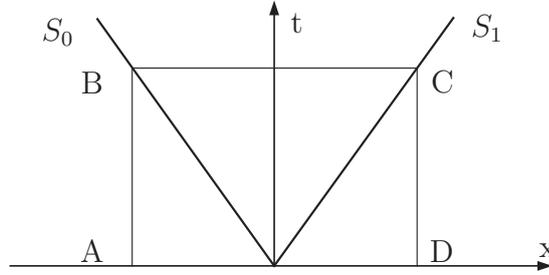


FIG. I.3.5 – Chemin d'intégration pour le solveur de Riemann HLL.

De plus, en supposant que les vitesses de ces ondes sont données par un autre algorithme, et en appliquant la formulation intégrale des lois de conservation, on obtient une expression approchée du flux numérique.

Le flux F_{ij} est estimé directement par la relation suivante :

$$F^{HLL} = \begin{cases} F_0 & \text{si } S_0 \geq \frac{x}{t} \\ \frac{S_1 F_0 - S_0 F_1 + S_0 S_1 (\phi_1 - \phi_0)}{S_1 - S_0} & \text{si } S_0 < \frac{x}{t} < S_1 \\ F_1 & \text{si } S_1 \leq \frac{x}{t} \end{cases} \quad (\text{I.3.11})$$

où $F_0 = F(\phi_0)$ et $F_1 = F(\phi_1)$. On peut aussi obtenir une estimation de l'état étoilé équivalent (ce qui sera nécessaire pour estimer le flux lagrangien) :

$$\phi^{HLL} = \begin{cases} \phi_0 & \text{si } S_0 \geq \frac{x}{t} \\ \frac{S_1 \phi_1 - S_0 \phi_0 + F_0 - F_1}{S_1 - S_0} & \text{si } S_0 < \frac{x}{t} < S_1 \\ \phi_1 & \text{si } S_1 \leq \frac{x}{t} \end{cases} \quad (\text{I.3.12})$$

Une estimation simple des vitesses S_0 et S_1 des ondes est donnée par [Davis \(1988\)](#) :

$$S_0 = \min(u_0 - c_0, u_1 - c_1) \quad \text{et} \quad S_1 = \min(u_0 + c_0, u_1 + c_1).$$

Cette méthode HLL, qui est très efficace et robuste, est très populaire dans la communauté de la CFD³ des écoulements compressibles. Cependant elle ne prend pas en compte la présence d'une discontinuité de contact, ce qui est incorrect dans le cas des équations d'Euler.

³Computational Fluid Dynamics

Solveur de Riemann HLLC : Ce solveur, Toro (1997), est basé sur le même raisonnement que précédemment sauf qu'on suppose ici que 3 ondes sont présentes, en ajoutant la discontinuité de contact en plus des deux ondes existantes (ce qui ajoute un C pour Contact à l'acronyme HLL) .

Les développements donnent des résultats semblables au solveur HLL, sauf en ce qui va concerner la composante tangentielle de la vitesse et du flux. Ainsi les deux premières composantes du vecteur des variables conservatives de l'état étoilé équivalent ϕ^{HLLC} sont donnés par la relation (I.3.12), la densité et la vitesse normale se conservant de part et d'autre de la discontinuité de contact. Pour la vitesse tangentielle on a donc :

$$(\rho u_y)^{HLLC} = \begin{cases} \rho_0 u_{y0} & \text{si } S_0 \geq \frac{x}{t} \\ \rho^{HLL} u_{y0} & \text{si } S_0 < \frac{x}{t} < S_* \\ \rho^{HLL} u_{y1} & \text{si } S_* < \frac{x}{t} < S_1 \\ \rho_1 u_{y1} & \text{si } S_1 \leq \frac{x}{t} \end{cases}$$

où ρ^{HLL} est évalué grâce à la première composante de (I.3.12).

De la même manière, les deux premières composantes du vecteur flux F^{HLLC} sont données par la relation (I.3.11) tandis que le flux du moment tangent est donné par :

$$(\rho u_x u_y)^{HLLC} = \begin{cases} \rho_0 u_{x0} u_{y0} & \text{si } S_0 \geq \frac{x}{t} \\ (\rho u_x)^{HLL} u_{y0} & \text{si } S_0 < \frac{x}{t} < S_* \\ (\rho u_x)^{HLL} u_{y1} & \text{si } S_* < \frac{x}{t} < S_1 \\ \rho_1 u_{x1} u_{y1} & \text{si } S_1 \leq \frac{x}{t} \end{cases}$$

où $(\rho u_x)^{HLL}$ est évalué grâce à la deuxième composante de (I.3.12).

Les vitesses des ondes sont basées sur les estimations suivantes :

$$\begin{cases} S_0 = u_0 - q_0 c_0 \\ S_* = u_* \\ S_1 = u_1 + q_1 c_1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad q_K = \begin{cases} 1 & \text{si } p_* \leq p_K \\ \left[1 + \frac{(\rho_*/\rho_K)^\gamma - 1}{\gamma(1 - \rho_K/\rho_*)} \right]^{1/2} & \text{si } p_* > p_K \end{cases} .$$

Les quantités étoilées u_* et ρ_* (pour obtenir p_*) sont issues d'un solveur approximatif simple tel qu'un TRRS ou un TSRS.

I.3.1.3.5 Le couplage à la SPH

Maintenant que nous avons, d'une part, reformulé le schéma SPH selon la formulation faible (I.3.5), et d'autre part exprimé les équations d'Euler sous un formalisme Volume Finis (I.3.10) dont on est capable de proposer un schéma numérique décentré grâce à l'utilisation de solveurs de Riemann, nous pouvons étudier le couplage entre ces deux méthodes.

La formulation faible discrétisée du schéma s'écrit :

$$\frac{D\omega_i \phi_i}{Dt} + \omega_i \sum_j (F_i + F_j) \|\vec{\nabla} W_{ij}\| \tilde{n}_{ij} \omega_j = 0$$

où $\tilde{n}_{ij} = \frac{\vec{\nabla} W_{ij}}{\|\vec{\nabla} W_{ij}\|}$. Tandis que le formalisme Volumes Finis discrétisé s'écrit :

$$\frac{D\omega_i \phi_i}{Dt} + \sum_j F_{ij} \cdot \tilde{n}_{ij} l_j = 0.$$

On trouve donc une correspondance entre le flux numérique Volumes Finis $F_{ij} \cdot \tilde{n}_{ij}$ et la demi-somme $\frac{1}{2}(F_i + F_j) \tilde{n}_{ij}$ du schéma SPH, ainsi qu'entre la mesure l_j de la face de la maille et la quantité $\|\vec{\nabla} W_{ij}\| \tilde{n}_{ij} \omega_i \omega_j$ (cette dernière correspondance est valable quelle que soit la dimension de l'espace). Cependant il faut noter la différence notable entre les sommations effectuées dans les deux schémas. En effet, dans un cas (Volumes Finis) la sommation s'étend aux voisins adjacents à la maille i tandis que dans l'autre (SPH) la sommation s'étend à la notion de voisinage du point i dans le support compact.

Une autre grande différence entre les deux approches est que la formulation SPH est conçue pour être employée de manière lagrangienne alors que les Volumes Finis sont classiquement employés sur des maillages fixes. Les idées développées par [Harten et Hyman \(1983\)](#) et généralisées à la SPH par [Vila \(2000\)](#) vont être brièvement exposées.

On raisonne sur la formulation ALE (cf. §I.3.1.1.1) du schéma SPH qui permet de mettre en évidence le flux eulérien :

$$L_{u_0}(\phi) + \text{div}(F^E - u_0 \phi) = 0.$$

Entre la paire de particules i et j , selon la direction \tilde{n}_{ij} , on peut mettre ce problème sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (F^E(x_{ij}, t, \phi) \cdot \tilde{n}_{ij} - \bar{u}_0 \cdot \tilde{n}_{ij} \phi) = 0 \\ \phi(x, 0) = \begin{cases} \phi_i & \text{si } x < x_{ij} \\ \phi_j & \text{si } x > x_{ij} \end{cases} \end{cases}$$

qui est un problème de Riemann en \tilde{x}_{ij} dans le repère mobile lié au champ de transport \bar{v}_0 . Or on sait résoudre, en eulérien, le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (F^E(x_{ij}, t, \phi) \cdot \tilde{n}_{ij}) = 0 \\ \phi(x, 0) = \begin{cases} \phi_i & \text{si } x < x_{ij} \\ \phi_j & \text{si } x > x_{ij} \end{cases} \end{cases}$$

On passe donc d'une formulation à l'autre par le changement :

$$\phi = \phi_E \left(\frac{x + X^0(t)}{t}, \phi_i, \phi_j \right) \quad \text{où} \quad X^0(t) = \int_0^t \bar{u}_0(x_{ij}, \tau) \cdot \tilde{n}_{ij} d\tau$$

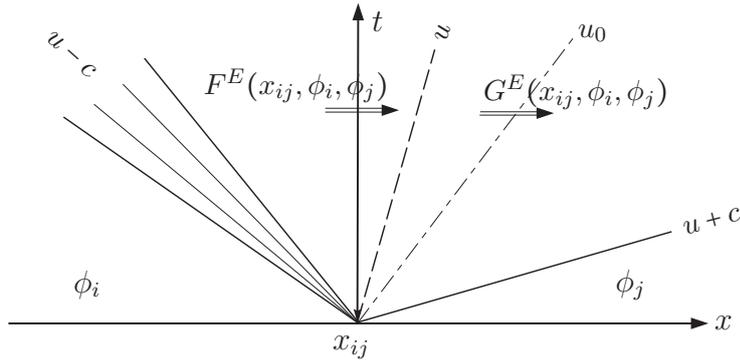


FIG. I.3.6 – Schéma de principe du problème de Riemann mobile et flux associés.

qui traduit le fait que l'on ne résout plus le problème de Riemann en $\frac{x}{t}$ mais en $\frac{x+X^0(t)}{t}$.

La résolution du problème de Riemann sur la raie caractéristique $\lambda_{ij}^0 = \vec{u}_0(x_{ij}, t) \cdot \vec{n}_{ij}$ donne un vecteur solution $\phi_E(\lambda_{ij}^0, \phi_i, \phi_j)$ et un flux eulérien égal à $F_E(\phi_E(\lambda_{ij}^0, \phi_i, \phi_j))$. Le flux lagrangien s'écrit finalement :

$$G_E(\phi_i, \phi_j) = F_E(\phi_E(\lambda_{ij}^0, \phi_i, \phi_j)) - \vec{u}_0(x_{ij}, t) \otimes \phi_E(\lambda_{ij}^0, \phi_i, \phi_j).$$

Le problème de Riemann étant résolu monodimensionnellement sur la direction \vec{n}_{ij} , on le reprojette dans l'espace :

$$g_E(\vec{n}_{ij}, \phi_i, \phi_j) = G_E(\phi_i, \phi_j) \cdot \vec{n}_{ij}.$$

In fine, on écrit le schéma SPH discrétisé complet de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{D\vec{x}_i}{Dt} = \vec{u}_i \\ \frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_i \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \\ \frac{D\omega\phi_i}{Dt} = -\omega_i \sum_j 2 g_E(\vec{n}_{ij}, \phi_i, \phi_j) \|\vec{\nabla} W_{ij}\| \omega_j + \omega_i S \end{cases}$$

ou, en détaillant les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \frac{D\omega\rho_i}{Dt} = -\omega_i \sum_j 2\rho_E(\vec{u}_E - \vec{u}_{ij}^0) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \\ \frac{D\omega\rho\vec{u}_i}{Dt} = -\omega_i \sum_j 2 [p_E\mathbb{I} + \rho_E\vec{u}_E \otimes (\vec{u}_E - \vec{u}_{ij}^0)] \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j + \omega_i\rho_i\vec{g} \end{cases} \quad (\text{I.3.13})$$

avec $\phi_E(\lambda_{ij}^0, \phi_i, \phi_j) = (\rho_E, \vec{u}_E)^t$ le vecteur solution du problème de Riemann. Comme mentionné précédemment, ce problème de Riemann mobile est résolu sur l'interface x_{ij} entre les deux particules de l'interaction, dont la vitesse de déplacement dans le champ de transport \vec{u}_0 est estimée de la manière suivante :

$$\vec{u}_0(x_{ij}) = \frac{1}{2}(\vec{u}_0(x_i) + \vec{u}_0(x_j)).$$

L'étude du système d'équations montre que la correction (le décentrement) effectuée par la résolution du problème de Riemann se répercute sur chacune des équations d'Euler. Entre autres, l'équation de conservation de la masse issue de la formulation faible ($\frac{D\omega\rho_i}{Dt} = 0$) n'est plus vérifiée sous cette forme localement. Par conséquent, un flux de masse est introduit entre les points de discrétisation, même si le champ de transport \vec{u}_0 est exactement égal au champ de vitesse du fluide \vec{u} . La masse $\omega\rho_i$ de chaque point varie donc au cours du temps, rendant plus difficile l'interprétation de ce schéma hybride comme un schéma particulière *stricto sensu*.

I.3.1.3.6 Schéma M.U.S.C.L.

Le problème de Riemann, tel que nous l'avons défini, est basé sur des conditions initiales déterminées à partir des états ϕ_i et ϕ_j des points de discrétisation concernés. Or la solution qui va être issue des solveurs de Riemann va introduire de la dissipation numérique pour pouvoir s'adapter à ces discontinuités vues comme étant purement physiques (alors qu'elles sont issues de la discrétisation qui est basée sur des fonctions constantes par morceaux). On va ainsi obtenir un schéma qui est globalement diffusif.

Pour outrepasser ce problème, l'idée, proposée par [Van Leer \(1979\)](#) et baptisée Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws - M.U.S.C.L., est d'approcher la solution physique par des fonctions linéaires par morceaux à chaque point de discrétisation. Pour ce faire, on se base sur l'estimation locale du gradient des variables conservatives. On utilise le schéma SPH renormalisé de manière à être le plus précis possible :

$$D_R^h \phi_i = \sum_j (\phi_j - \phi_i) B_{ij} \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j$$

On remplace alors les valeurs utilisées par le solveur de Riemann à l'interface (ϕ_i et ϕ_j) par les vecteurs ϕ_{ij} et ϕ_{ji} de variables conservatives corrigés par les gradients :

$$\begin{cases} \phi_{ij} &= \phi_i + D_R^h \phi_i \cdot (\vec{x}_{ij} - \vec{x}_i) \\ \phi_{ji} &= \phi_j + D_R^h \phi_j \cdot (\vec{x}_{ij} - \vec{x}_i) \end{cases}$$

Cependant, cette correction ne peut être utilisée telle quelle car le calcul du gradient peut être inexact localement (entre autres, au voisinage des discontinuités physique où le gradient lui-même n'est pas défini). Ceci peut créer des extrema locaux qui vont générer des oscillations dans la solution, oscillations qui peuvent exister numériquement mais qui ne correspondent pas à la solution physique de problème qui est monotone (à cause de la viscosité réelle du fluide). L'idée est donc de limiter les flux numériques dans les zones de forts gradients tout en respectant une condition moins restrictive que la monotonie, la Variation Totale Diminuante (Total Variation Diminishing, [Harten \(1983\)](#)) .

Cette condition impose que la variation totale de ϕ :

$$TV(\phi) = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| dx$$

ne doit pas augmenter dans le temps. Il en découle les propriétés suivantes : le nombre d'extrema de la solution n'augmente pas ; un extremum local n'augmente pas non plus ; un schéma monotone vérifie cette condition. Un type de limiteur satisfaisant cette condition TVD est le Minmod (figure [I.3.7](#)). Il corrige chaque composante des gradients indépendamment avec un facteur β^l tel que :

$$\begin{cases} \phi_{ij}^l - \phi_i^l = \beta_{ij}^l (\phi_j^l - \phi_i^l) \\ 0 \leq \beta_{ij}^l \leq 1 \end{cases}$$

où β_{ij}^l est en pratique borné par le limiteur le Minmod défini par :

$$\begin{cases} \beta_{ij}^l &= \text{minmod}\left(1, \frac{D_R^h \phi_i^l \cdot (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i)}{\phi_j^l - \phi_i^l}\right) \\ \text{minmod}(a, b) &= \min(0, \max(a, b)) + \max(0, \min(a, b)) \end{cases}$$

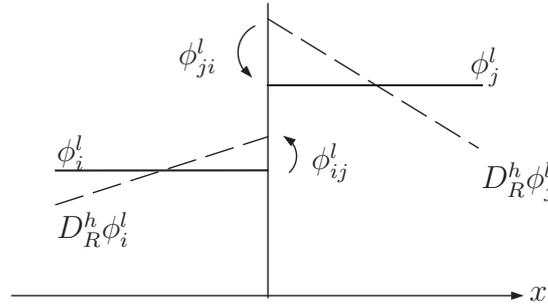


FIG. I.3.7 – Schéma de principe du limiteur Minmod pour une composante de ϕ .

Cette opération de correction du vecteur des variables conservatives se fait avant de résoudre chaque problème de Riemann défini par paire d'interaction. Ainsi pour un point i , le coefficient β_{ij}^l est défini pour chaque composante de ϕ_i et pour chaque voisin j (et on a évidemment $\beta_{ij}^l \neq \beta_{ji}^l$).

Concernant ce dernier point, le limiteur proposé est construit en ne tenant compte de la reconstruction linéaire que du point de vue où il agit (soit indépendamment pour chaque particule d'une interaction donnée). C'est-à-dire qu'il va diminuer le flux à l'interface par rapport à la discontinuité créée par l'approximation constante par morceaux mais il ne va pas pour autant le diminuer de manière absolue par rapport à la discontinuité créée par l'approximation linéaire par morceaux. Ceci peut arriver si la reconstruction inverse la discontinuité (figure I.3.8).

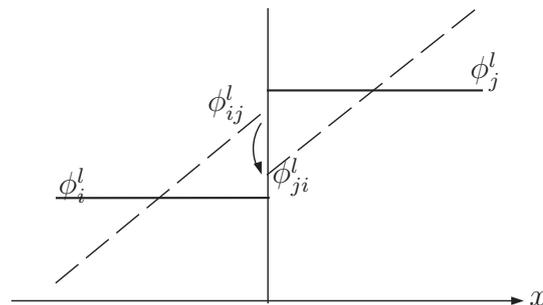


FIG. I.3.8 – Schéma de principe de l'inversion du problème de Riemann.

Il existe deux manières d'éviter cet écueil. La première consiste effectivement à comparer les états ϕ_{ij}^l et ϕ_{ji}^l de manière à détecter cette inversion du problème de Riemann et par la suite la corriger [Marongiu \(2007\)](#) :

$$\text{si } (\phi_i^l - \phi_j^l)(\phi_{ij}^l - \phi_{ji}^l) < 0 \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \phi_{ij}^l &= \phi_i^l \\ \phi_{ji}^l &= \phi_j^l \end{cases}$$

Cette correction est qualifiée de limiteur strict.

La deuxième façon d'éviter cela est d'employer le limiteur Minmod en le bridant pour empêcher toute inversion :

$$\beta_{ij}^l = 0,5 \minmod \left(1, \frac{D_R^h \phi_i^l \cdot (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i)}{\phi_j^l - \phi_i^l} \right) \implies 0 \leq \beta_{ij}^l \leq 0,5.$$

Ceci a pour corollaire que le limiteur peut devenir moins efficace si la discontinuité n'est pas inversée (il permet de réduire, au mieux, celle-ci de moitié).

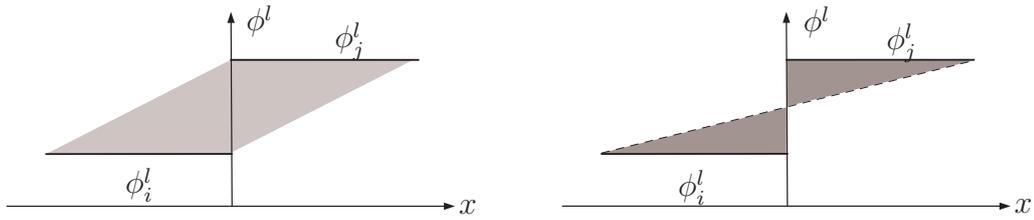


FIG. I.3.9 – Région d'influence des deux variantes du limiteur Minmod : à gauche version classique, à droite version « papillon ».

I.3.1.4 Validation des solveurs

Nous allons présenter des cas test pour les solveurs proposés de manière à valider leur implémentation mais aussi à choisir le plus approprié pour les calculs qui seront menés par la suite (en terme de compromis temps CPU - précision).

I.3.1.4.1 Cas monodimensionnels

Les cas suivants concernent des tubes à choc monodimensionnels. On se retrouve alors à résoudre un problème de Riemann de manière numérique (et non plus exacte comme dans les solveurs). On peut alors évaluer la précision des schémas numériques sur ces problèmes purement compressibles.

Numériquement on utilise un schéma SPH renormalisé avec un noyau 1D (spline cubique), avec un rapport $h/\Delta x$ tel qu'il minimise l'erreur d'interpolation (égal à 2 soit 6 voisins). La longueur de lissage est prise égale à $1mm$. Pour limiter l'influence des conditions aux limites, on choisit une longueur de tube à choc importante et une position de la discontinuité suffisamment loin des parois (on positionne la discontinuité au centre du tube, en $x = 0$, et on prend celui-ci de longueur $0.5m$).

La solution exacte du problème est donnée pour tout point d'abscisse x_i et à chaque instant en utilisant le solveur de Riemann exact en x_i/t (avec la discontinuité initiale). Les performances de chaque solveur étant connues sur l'estimation de l'état étoilé (cf. précision évaluée par [Ivings et alii \(1998\)](#)), le critère de comparaison retenu pour une évaluation de ces solveurs dans le schéma SPH sera l'énergie totale. Celle-ci se calcule en chaque point (et est décomposée en énergie interne d'un gaz parfait et en énergie cinétique) :

$$E_{tot} = e_i + e_c = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2.$$

La comparaison sera donc effectuée entre la solution exacte et celle de chaque solveur :

$$err = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|E_{tot}^{exact} - E_{tot}^{solveur}|}{E_{tot}^{exact}}$$

où N est le nombre total de particules en jeu.

Cas à 2 chocs : Les deux états gauche et droit sont définis par :

$$\phi_G = \begin{pmatrix} 1100 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \phi_D = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La masse volumique de référence ρ_0 du fluide est prise égale à $1000kg.m^{-3}$ (avec $\gamma = 7$). La vitesse du son est égale à $1466m.s^{-1}$. La solution est formée de deux ondes de choc voyageant vers la gauche et la droite aux vitesses respectives $1788m.s^{-1}$ et $1827m.s^{-1}$.

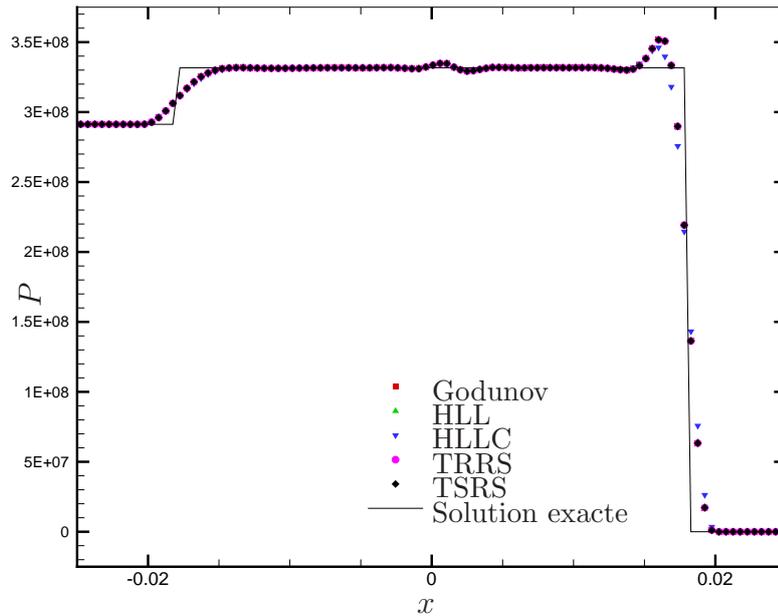


FIG. I.3.10 – Répartition de pression dans le tube à choc n°1 à l’instant $t = 10^{-5}s$.

Cas à 2 détente : Les deux états gauche et droit sont définis par :

$$\phi_G = \begin{pmatrix} 1100 \\ -200 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \phi_D = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les propriétés du fluide restent identiques mais cette fois-ci deux détente vont être créées, se propageant dans des directions opposées aux vitesses respectives $2151m.s^{-1}$ et $1466m.s^{-1}$.

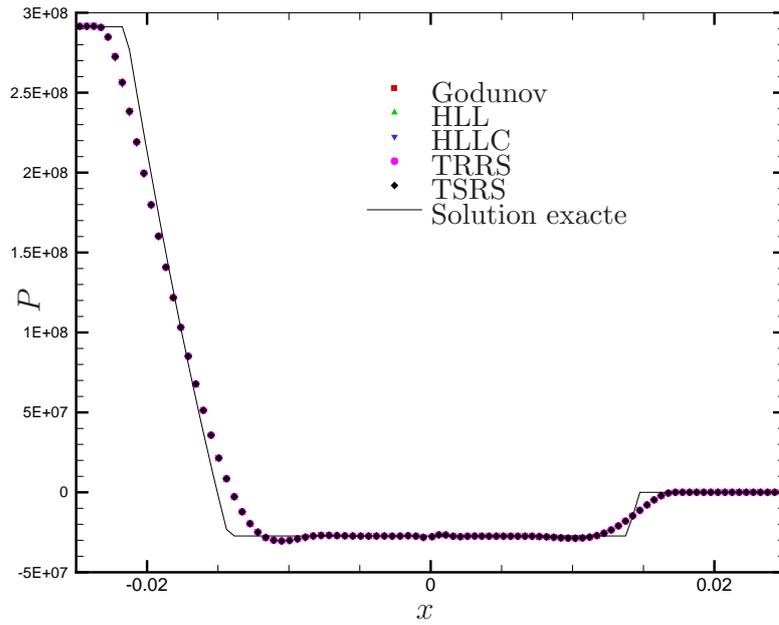


FIG. I.3.11 – Répartition de pression dans le tube à choc n°2 à l’instant $t = 10^{-5}s$.

Cas à un choc et une détente : Les deux états gauche et droit sont définis par :

$$\phi_G = \begin{pmatrix} 1100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \phi_D = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les deux états sont donc au repos. La discontinuité de pression existante va générer une onde de choc qui va se déplacer vers la droite à une vitesse de $1627m.s^{-1}$ et une onde de détente qui va vers la gauche à $1951.s^{-1}$.

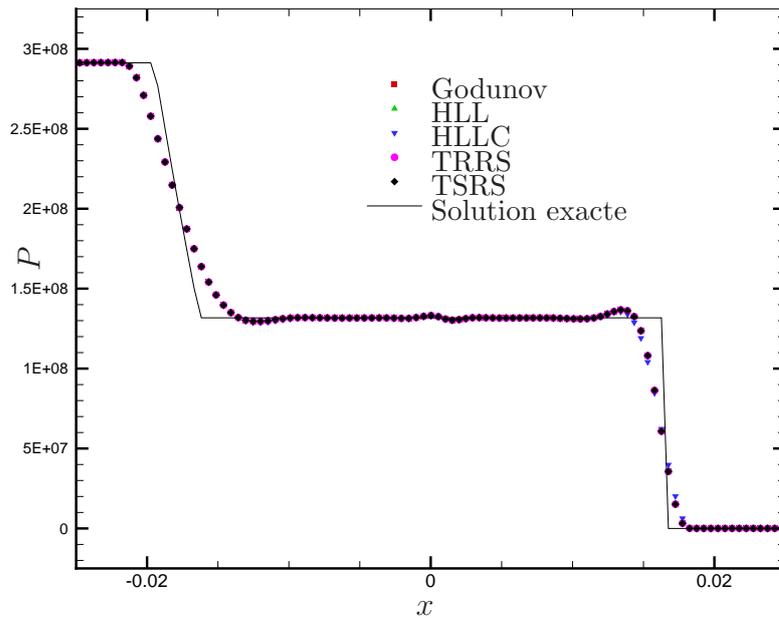


FIG. I.3.12 – Répartition de pression dans le tube à choc n°3 à l’instant $t = 10^{-5}s$.

Les différents solveurs donnent des solutions très proches. Les différences entre eux sont négligeables devant l'erreur qu'ils commettent tous par rapport à la solution exacte. Cette erreur relative sur l'énergie entre la solution exacte et les solutions données par les solveurs est néanmoins relativement faible : de l'ordre de 0.9%, 9.9% et 8.1% respectivement pour les trois cas tests.

Inversion du problème de Riemann : Sur le troisième cas de tube à choc, nous allons estimer l'influence du schéma M.U.S.C.L. et de ses limiteurs sur le solveur exact de Godunov.

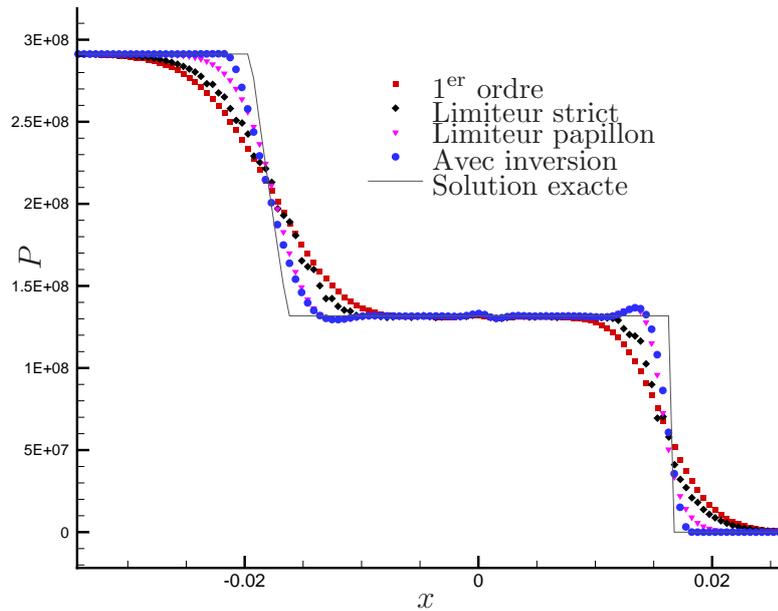


FIG. I.3.13 – Répartition de pression dans le tube à choc n°3 à l'instant $t = 10^{-5} s$. Influence du schéma M.U.S.C.L. et des différents limiteurs.

Sont confrontés à la solution exacte, un calcul avec un solveur de Riemann exact 1^{er} ordre (c'est-à-dire sans utilisation du schéma M.U.S.C.L) puis des calculs avec différents limiteurs du schéma M.U.S.C.L. : un limiteur Minmod strict, le même en version « papillon » et un dernier en version sans traitement particulier des inversions des problèmes de Riemann. On constate cette fois des différences notables entre les solutions obtenues.

	$\Delta err \times 10^{-6}$
Avec inversion	réf.
1er ordre	-278008
Limiteur strict	-165571
Limiteur papillon	-21088

TAB. I.3.1 – Différence d'erreur relative de l'énergie totale E_{tot} de chaque type de limiteur par rapport à celle du solveur de Godunov avec un limiteur Minmod autorisant les inversions.

D'un point de vue énergétique (cf. table (I.3.1)), il ressort clairement que l'absence de schéma M.U.S.C.L. engendre beaucoup de dissipation dans le calcul de la solution numérique. L'ajout de ce schéma est donc indispensable. La façon de le limiter via le Minmod, et plus particulièrement le traitement des inversions, est aussi une source de dissipation : adopter un limiteur strict paraît être un peu trop restrictif (et par conséquent dissipatif). En comparaison le limiteur « papillon » est environ 8 fois moins dissipatif. Quant à ignorer complètement les inversions, cela permet de minimiser l'erreur sur l'énergie du système.

D'un point de vue qualitatif (figure I.3.13), l'utilisation d'un limiteur Minmod sans traitement des inversions paraît être la meilleure façon de capturer les discontinuités de pression, tant pour les chocs que dans les détente.

Conclusion sur la validation monodimensionnelle : Si l'on se tient aux résultats obtenus sur ces cas-tests, on aura donc intérêt à utiliser le solveur approché le plus rapide HLL (qui donne une précision équivalente à Godunov) avec un Minmod sans inversion. On va voir sur les cas-tests 2D que ces conclusions provisoires sont à nuancer fortement.

I.3.1.4.2 Cas bidimensionnel

Pour la validation sur une simulation en 2 dimensions, nous avons choisi la rupture de barrage qui est un cas classique en hydrodynamique et qui est plus proche du champ d'application envisagé qu'un cas-test purement compressible (comme, par exemple, le tube de Sod).

Nous nous basons sur l'étude menée par Colagrossi et Landrini (2003). Les dimensions de la colonne d'eau sont de $H \times L = 0,6 \times 1,2m$ et le domaine a pour taille $1,8 \times 3,2196m$. La longueur de lissage h est prise égale à $0,016116m$. La vitesse du son est telle que $c(gH)^{1/2} = 10,9$. Le schéma SPH renormalisé est augmenté en ordre pour chaque solveur grâce au schéma M.U.S.C.L. avec un limiteur Minmod permettant les inversions.

Tout d'abord, qualitativement (figure I.3.14), nous pouvons observer que le solveur HLL est très dissipatif. Ceci se remarque sur le deuxième jet apparaissant après le jet plongeant créé après l'impact sur le mur : ce jet s'élève moins haut et le champ de pression est plus faible.

En observant cette fois-ci (figure I.3.15) la hauteur d'eau en deux tranches particulières, $(x/H)_1 = 0,825$ et $(x/H)_2 = 1,653$, on est en accord avec les simulations de Colagrossi et Landrini (2003) sur le passage du front (bien que l'on sous-estime sa hauteur par rapport aux expériences). Par contre, le dépassement observé sur H1 à partir de l'instant $t(g/H)^{1/2} = 5,6$ est dû à un jet, après impact sur le mur, qui monte trop haut sur celui-ci. Puis en retombant (après $t(g/H)^{1/2} = 6,2$) il dissipe son énergie en créant un autre jet qui remonte très à la verticale (cf. H2). Hormis le solveur HLL, les autres solveurs ont le même comportement.

Enfin en observant la variation d'énergie totale du système au cours du temps (figure I.3.16), on constate que les solveurs basés sur une approximation du flux (type HLL et HLLC) voient leur énergie se dégrader beaucoup plus vite. Les solveurs où l'on ne fait qu'une approximation sur le calcul de l'état étoilé (TRRS et TSRS) sont en revanche très proches de la solution par solveur exact.

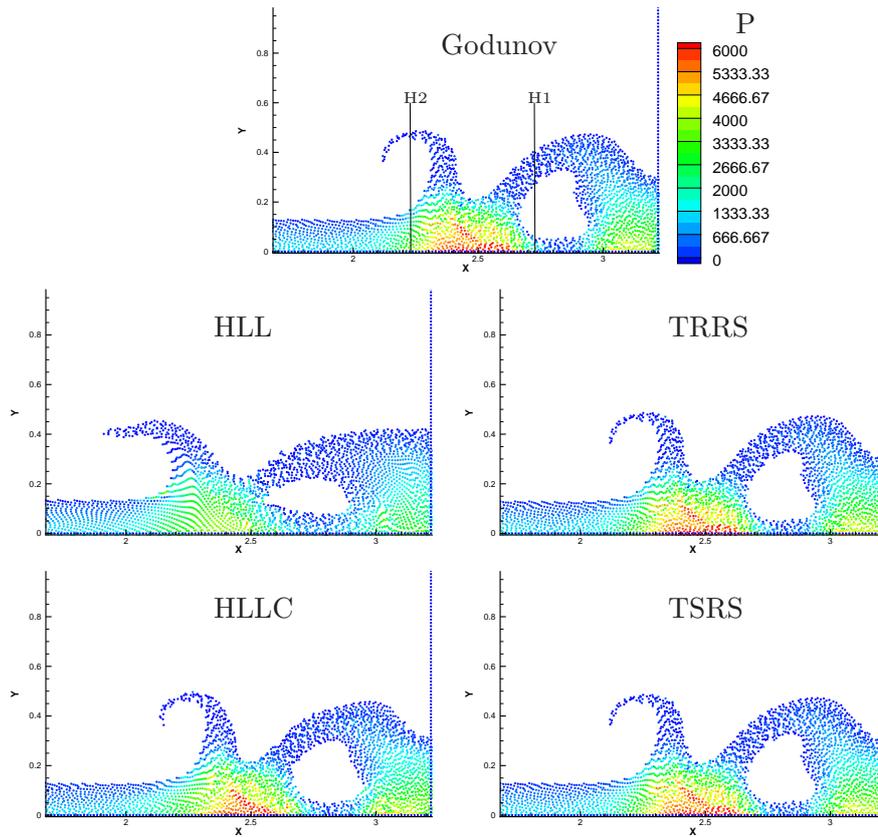


FIG. I.3.14 – Champ de pression pour les différents solveurs au temps $t(g/H)^{1/2} = 6,75$

I.3.1.4.3 Choix final

Sur ce cas de validation sur une application réaliste se rapprochant de celles qu'on cherchera à simuler par la suite, les solveurs ont donc un comportement globalement assez proche les uns des autres (hormis le solveur HLL qui est nettement plus dissipatif). Cependant du point de vue algorithmique, les solveurs approximatifs peuvent paraître intéressants par rapport à un solveur exact de type Godunov. On compare donc le temps de calcul (temps CPU) global de ces simulations, cf. table I.3.2. Il ressort que les solveurs approximatifs sont effectivement plus performants.

	Temps CPU
Godunov	ref.
HLL	-13,1%
HLLC	-0,4%
TRRS	-4,6%
TSRS	-5,4%

TAB. I.3.2 – Écart relatif par rapport au solveur de Godunov sur le temps CPU global de la simulation.

Les gains restent toutefois assez faibles (de l'ordre de 5%), ce qui n'est pas suffisant pour être décisif dans le choix du solveur utilisé par la suite. On privilégie la précision en

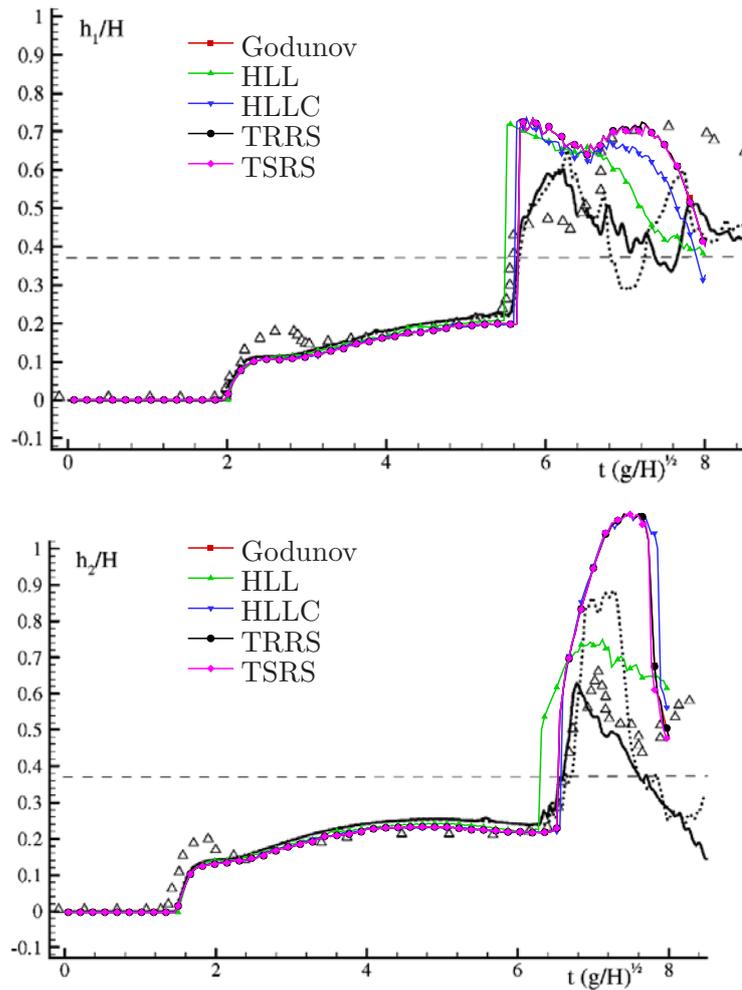


FIG. I.3.15 – Hauteur d'eau totale en $(x/H)_1 = 0,825$ et $(x/H)_2 = 1,653$ (distances indiquées à partir du bord droit). Comparaison aux calculs de Colagrossi et Landrini (2003) : biffuide ligne continue noire sans symboles, monofluidie ligne pointillée sans symboles et aux expériences de Zhou *et alii* (1999) : (Δ).

faisant le choix de conserver le solveur exact de Godunov.

I.3.2 Difficultés liées à l'extension aux écoulements à deux fluides

L'objet de ce travail étant l'étude des écoulements biffuides, il apparaît naturel d'étendre cette formulation hybride à la discrétisation d'un schéma prenant en compte des fluides de différentes propriétés. Le schéma SPH et les solveurs ayant été décrits pour la loi d'état de Tait pour un fluide quelconque, il est aisé d'implémenter ceux-ci pour chaque fluide impliqué.

Cependant il se pose rapidement le problème du traitement de l'interface, et tout particulièrement celui des interactions « croisées », c'est-à-dire entre points de discrétisation de nature différente (en terme de propriétés physiques). On peut alors redévelopper le

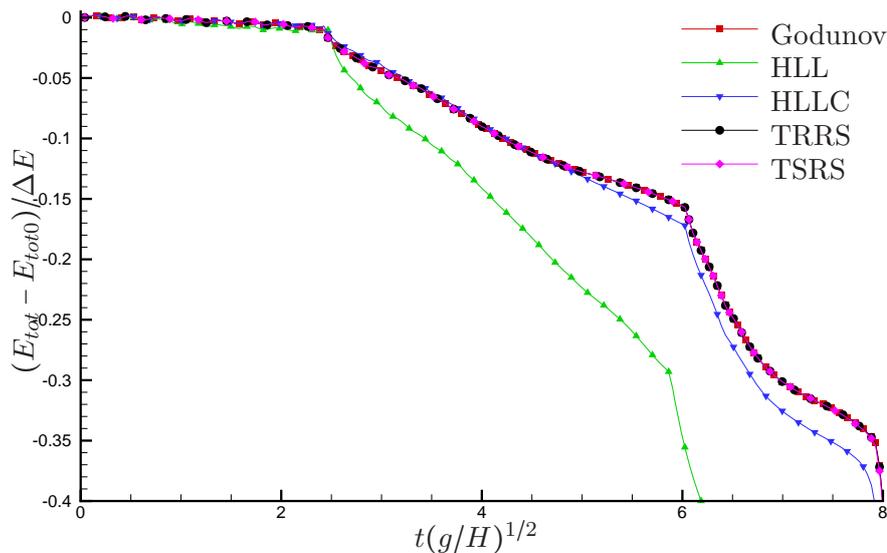


FIG. I.3.16 – Évolution de l'énergie au cours du temps pour les différents solveurs.

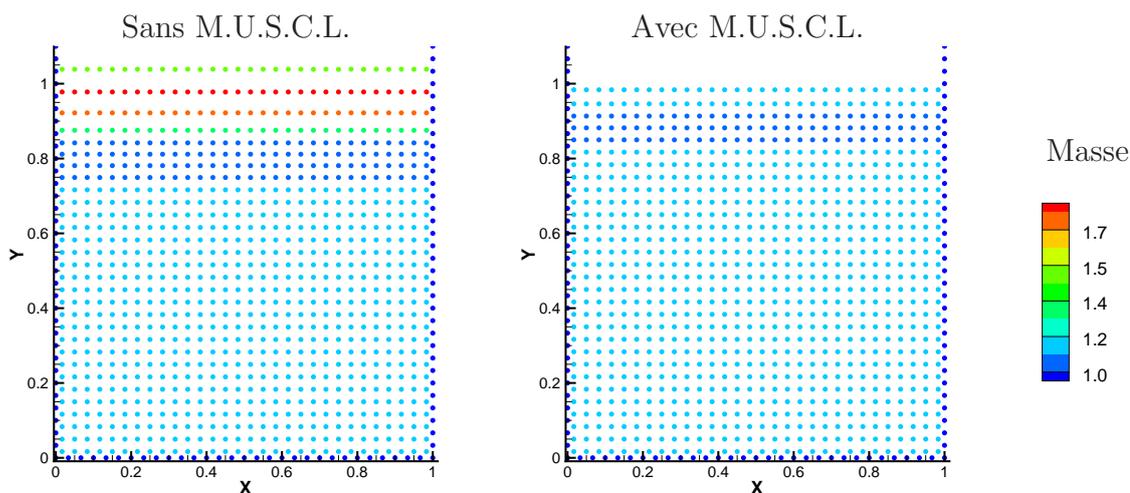
travail effectué plus haut sur la construction du solveur de Riemann, en prenant soin de ne pas faire de simplifications (à cause des lois d'état différentes pour chaque fluide). Il en résulte alors de nouveaux flux, asymétriques, entre les particules de part et d'autre de l'interface.

On autorise donc, par cette approche de solveur de Riemann interfacial, des flux entre les particules et tout particulièrement des flux de masse à travers l'interface (comme ailleurs). On pourrait penser, à priori, que cela a une faible incidence dans les configurations choisies. Or quand on fait un simple test de maintien hydrostatique d'une colonne eau/air, on obtient une solution divergente, l'effort appliqué d'un fluide sur l'autre croissant rapidement.

Pour comprendre ce phénomène, on revient à un cas monofluide. On peut en effet observer ce phénomène en étudiant le cas simple d'un fluide soumis à la pesanteur dans un domaine ($1m \times 1m$) avec une surface libre et en observant la répartition de la masse, cf. figure I.3.17.

Sur ce cas particulier, le schéma M.U.S.C.L. n'a pas été employé pour accentuer le phénomène. L'absence de ce schéma conduit à résoudre les problèmes de Riemann entre des états discontinus alors que le champ moteur de l'écoulement (le champ de pression hydrostatique) est en première approximation linéaire (aux effets de compressibilité près). On introduit alors une dissipation excessive qui force le transfert de masse.

Enfin sur ce cas, la présence d'une condition aux limites de type mur avec glissement est traitée par la technique des particules fantômes. Comme cela a, par ailleurs (§I.2.1.3.1), été mentionné, ces particules fantômes voient leurs masses corrigées par la variation de densité hydrostatique. Ceci crée donc un flux de masse entrant à la paroi qui va traverser le domaine. Les parois verticales ne faisant pas intervenir de correction particulière (la pesanteur est orthogonale à la paroi), le flux ne peut sortir par ces frontières. La dernière frontière est la surface libre, où la condition de non-pénétration impose un flux de masse nul à travers celle-ci. Il n'y a donc pas de condition de flux sortant sur ce domaine : la masse va s'y accumuler. Les particules de la surface libre n'étant pas contraintes (condition de surface libre cinématique), celles-ci vont pouvoir se déplacer en hauteur et, par

FIG. I.3.17 – Répartition de la masse à l'instant $t = 7, 1s$.

augmentation de volume, accumuler la masse excédentaire. On notera toutefois qu'avec le schéma de M.U.S.C.L. cet effet est limité, cf. figure I.3.17. Néanmoins, une adaptation de la méthode des particules frontières serait nécessaire pour supprimer ce phénomène parasite.

Le but de cet exemple n'était toutefois pas de discuter de la technique de prise en compte des frontières solides, mais de mettre en évidence les transferts de masse rendus possibles pour l'utilisation d'un solveur de Riemann. Dans le cas d'un écoulement bifluide, l'utilisation d'un solveur de Riemann interfacial permet ainsi faire passer de la masse à travers l'interface, ce qui est complètement incompatible avec la physique sur cette frontière.

On s'est alors intéressé à une approche permettant d'interdire ce flux de masse dans les interactions croisées. Pour ce faire, on revient au voisinage de l'interface à un traitement SPH classique de ces interactions. Cependant, outre que les quelques tests effectués ont été peu concluants (effort à l'interface dans une configuration hydrostatique et cas de rupture de barrage, tous deux en bifluide), cette approche au niveau discret n'est pas facilement justifiable d'un point de vue théorique.

Pour passer outre ce point de blocage à l'interface, tout en conservant la résolution du problème de Riemann pour décentrer le schéma SPH, on peut laisser un degré de liberté supplémentaire au système en introduisant une autre technique de description de l'interface, pour laquelle on a finalement opté. Celle-ci va maintenant être présentée.

I.3.3 La formulation à fraction de volume

La formulation qui va être étudiée ici repose sur une approche un peu différente du problème de résolution des équations de Navier-Stokes [Cueille \(2005\)](#). En effet, nous allons reformuler d'un autre point de vue le modèle physique sur lequel on basera les approximations introduites ensuite.

I.3.3.1 Le modèle physique

Bien que les phénomènes physiques étudiés soient les mêmes que dans les chapitres précédents et que les équations de Navier-Stokes soient toujours celles qui décrivent ces écoulements, nous allons les représenter d'un point de vue légèrement différent. Entre autres, les développements réalisés par la suite seront écrits d'un point de vue eulérien suivant [Chanteperdrix \(2004\)](#) (et non plus lagrangien), de manière à avoir un formalisme permettant d'étudier l'hyperbolicité du modèle et d'en déduire un solveur de Riemann adapté. On réécrira ensuite la formulation obtenue de manière lagrangienne pour l'appliquer selon la méthode SPH.

Pour l'étude des écoulements bifluïdes visés, nous allons désormais considérer que les deux fluides en présence coexistent en tout point de l'espace, sans être miscibles. Il est alors nécessaire de quantifier le taux de présence de chacun d'entre eux en introduisant leur fraction volumique $\alpha_{\mathcal{K}}$ (ici \mathcal{K} vaut 1 ou 2) :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Cette condition de saturation traduit le fait que le domaine en volume est complètement occupé par les deux fluides (figure [I.3.18](#)).

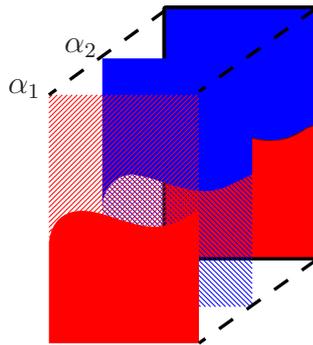


FIG. I.3.18 – Schéma de principe de la description de l'espace par deux fractions de volume.

Nous nous intéressons à un cas particulier de cette condition (celle qui concerne les écoulements à interface libre) où α_1 est nul dans toute la partie occupée par le fluide 2 (et inversement pour α_2 dans le fluide 1). Cette condition est vérifiée à l'approximation numérique près (la fraction volumique est proche de zéro). On peut ainsi supposer qu'il n'existe qu'un seul champ de vitesse \vec{u} commun aux deux fluides.

I.3.3.1.1 Equations de conservation

Afin d'écrire le bilan de masse, il est nécessaire d'introduire la densité volumique de masse $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ du fluide \mathcal{K} telle que :

$$\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{K}} \rho_{\mathcal{K}}.$$

Avec cette notation, l'équation de conservation de la masse s'écrit, pour chacun des fluides :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} \vec{u}) = 0. \quad (\text{I.3.14})$$

On peut aussi introduire la densité volumique de masse de mélange ρ (bien qu'au niveau de la description continue les fluides ne se mélangent pas) telle que $\rho = \tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2$. Elle vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

Cependant, avec l'utilisation des lois d'état qui seront introduites ultérieurement, cette équation seule n'est pas suffisante pour décrire correctement le problème : les deux équations (I.3.14) sont nécessaires.

La conservation de la quantité de mouvement, vue précédemment équation (I.1.1), s'écrit :

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\text{div}(p^* \mathbb{I}) + \text{div} \mathbb{T}^v + S \quad (\text{I.3.15})$$

à cette différence près que le tenseur des contraintes fait intervenir la pression de mélange p^* (correspondant à une valeur d'équilibre ; cf. plus loin).

I.3.3.1.2 Loi d'état

De la même façon que pour le modèle de SPH classique, nous considérons que les fluides étudiés sont barotropes (la pression partielle de chaque fluide ne dépend que de sa propre densité volumique de masse). La loi d'état est linéarisée autour des états de référence $\rho_{0\kappa}$ et $p_{0\kappa}$:

$$p_{\kappa} = c_{0\kappa}^2 (\rho_{\kappa} - \rho_{0\kappa}) + p_{0\kappa}. \quad (\text{I.3.16})$$

Le choix de cette loi d'état nous permettra par la suite de résoudre analytiquement certaines équations.

I.3.3.1.3 Relations de fermeture

Pour compléter le modèle formé par le système d'équations (I.3.14) et (I.3.15) il est nécessaire d'introduire des relations de fermeture. Les principaux critères concernant celles-ci vont être leur capacité à permettre au modèle de dégénérer vers les équations de Navier-Stokes (lorsque les deux fluides sont identiques) et vers la forme monofluide de ces équations (quand la fraction volumique d'une espèce est nulle ou égale à 1). La forme choisie pour ces lois de fermeture (dites lois de mélange) est la suivante :

$$X_m = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2 \quad (\text{I.3.17})$$

où la grandeur mélangée X_m est le barycentre des grandeurs des espèces 1 et 2, affectées respectivement de leur fraction volumique (notées plus légèrement avec $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha_2 = 1 - \alpha$).

Cette loi de mélange introduit donc dans le système une nouvelle inconnue α qui peut suivre une relation algébrique (reliant cette fraction aux masses volumiques partielles) ou une équation aux dérivées partielles. Pour ce genre de relation, exprimant la conservation de la fraction volumique (ou densité volumique de volume) du fluide 1, les modèles VOF, [Hirt et Nichols \(1981\)](#), adoptent une équation de transport :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha = 0.$$

Pour les fluides incompressibles, celle-ci peut se mettre sous la forme d'une équation de conservation :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{u}) = 0.$$

Mais pour les fluides pseudo-compressibles, cette équation de conservation n'est pas forcément justifiée. Une autre relation pour la fraction de volume sera introduite ultérieurement.

Pression de mélange : Avec la loi de mélange introduite éq. (I.3.17), nous pouvons maintenant définir la pression de mélange p^* :

$$p^* = \alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2.$$

Cependant, la pression partielle p_1 (respectivement p_2) n'est pas définie dans la région 2 (resp. 1) où le fluide 1 (resp. 2) n'existe pas. L'étude mathématique du modèle, et plus particulièrement son caractère hyperbolique, Chanteperdrix (2004), justifie de fixer la pression partielle du fluide non présent égale à celle du fluide présent, de manière à assurer un équilibre mécanique. La loi de pression de mélange s'écrit donc :

$$p^*(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2) = \alpha^* p_1 \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\alpha^*} \right) + (1 - \alpha^*) p_2 \left(\frac{\tilde{\rho}_2}{1 - \alpha^*} \right)$$

où $\alpha^*(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ est la fraction volumique d'équilibre solution de l'équation :

$$p_1 \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\alpha} \right) = p_2 \left(\frac{\tilde{\rho}_2}{1 - \alpha} \right).$$

Cette condition d'équilibre des pressions admet une solution unique, Chanteperdrix (2004), et celle-ci peut être calculée explicitement dans le cas de lois d'état linéarisées (éq. I.3.16) :

$$\frac{\tilde{\rho}_1 c_1^2}{\alpha} - \frac{\tilde{\rho}_2 c_2^2}{1 - \alpha} + \rho_{02} c_2^2 - \rho_{01} c_1^2 = 0.$$

Cette équation doit donc permettre de trouver α connaissant $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$. Pour la résolution, on introduit les paramètres suivants : $\gamma = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$, $q = \rho_{02} c_2^2 - \rho_{01} c_1^2$ et $\tilde{q} = \tilde{\rho}_2 c_2^2 - \tilde{\rho}_1 c_1^2$. L'équation à résoudre devient :

$$\tilde{\rho}_2 c_2^2 \gamma^2 - (q - \tilde{q}) \gamma - \tilde{\rho}_1 c_1^2 = 0.$$

On s'intéresse alors à la solution physiquement admissible, qui est donnée par la racine positive de cette équation :

$$\gamma^+ = \frac{q - \tilde{q} + \sqrt{(q - \tilde{q})^2 + 4\tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2 c_1^2 c_2^2}}{\tilde{\rho}_2 c_2^2}$$

et on en déduit la fraction volumique d'équilibre :

$$\alpha^* = \frac{\gamma^+}{1 + \gamma^+}.$$

Celle-ci est bien unique, comprise entre 0 et 1 et dépend uniquement de $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$.

Viscosité de mélange : De la même façon qu'une pression de mélange a été définie pour l'équation de quantité de mouvement, il est nécessaire de préciser le tenseur des contraintes visqueuses \mathbb{T}^v . On suppose qu'il est défini comme celui d'un seul fluide Newtonien de mélange (on néglige la partie antisymétrique du tenseur parce qu'on ne s'intéresse qu'à la solution incompressible des écoulements) :

$$\mathbb{T}^v = \mu(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})$$

avec une viscosité dynamique de mélange vérifiant la loi de fermeture :

$$\mu = \alpha^* \mu_1 + (1 - \alpha^*) \mu_2. \quad (\text{I.3.18})$$

I.3.3.1.4 Propriétés du modèle

Par invariance par rotation de la partie eulérienne des équations, le modèle étudié s'écrit finalement, dans un espace à une dimension pour simplifier, sous sa forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \\ \rho u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 u \\ \tilde{\rho}_2 u \\ \rho u^2 + p^* \end{pmatrix} = 0$$

avec la pression d'équilibre p^* définie par :

$$p^*(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2) = \alpha^* p_1 \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\alpha^*} \right) + (1 - \alpha^*) p_2 \left(\frac{\tilde{\rho}_2}{1 - \alpha^*} \right)$$

et où $\alpha^*(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ est la fraction volumique d'équilibre solution de l'équation :

$$p_1 \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\alpha} \right) = p_2 \left(\frac{\tilde{\rho}_2}{1 - \alpha} \right). \quad (\text{I.3.19})$$

Ce modèle est appelé modèle d'équilibre et noté (E). Son étude mathématique, [Chanteperdrix \(2004\)](#), montre qu'il est hyperbolique et qu'il existe une entropie de Lax. Cependant, il n'est pas aisé à utiliser numériquement à cause de la relation $\alpha^*(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$. Chanteperdrix introduit donc un nouveau modèle proche de celui-ci et mieux adapté à la mise en œuvre numérique.

Le modèle (E) est alors augmenté d'une équation sur la fraction volumique qui vient relaxer la condition d'équilibre des pressions (éq. [I.3.19](#)). Cette relaxation fait intervenir un paramètre de vitesse de relaxation, qui en devenant très petit, figure un équilibre quasi-instantané des pressions (afin de retrouver l'équation [I.3.19](#)). Cette équation est :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha = \frac{p_1 - p_2}{\epsilon} \quad (\text{I.3.20})$$

où ϵ est le paramètre de vitesse de relaxation. Lorsque celui-ci tend vers 0, l'équation précédente devient donc équivalente à celle de l'équilibre des pressions.

Dans ce nouveau modèle, appelé modèle de relaxation (R), la fraction volumique devient une inconnue à part entière du système. La pression de mélange dépend maintenant aussi de celle-ci :

$$p(\alpha, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2) = \alpha p_1 \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) p_2 \left(\frac{\tilde{\rho}_2}{1 - \alpha} \right).$$

L'étude mathématique de ce modèle (R) en montre l'hyperbolicité, [Chanteperdrix \(2004\)](#), et l'existence d'une entropie de Lax. De plus, la vitesse du son c de mélange est définie par :

$$\rho c^2 = \alpha \rho_1 c_1^2 + (1 - \alpha) \rho_2 c_2^2.$$

I.3.3.1.5 Compléments pour le schéma SPH

Bien que tous les raisonnements précédents aient été faits, comme nous l'avons introduit, d'un point de vue eulérien pour faciliter une approche semblable à celle qui a prévalu lors de l'étude du schéma SPH hybride monofluide, il faut garder en mémoire l'objectif de construction d'un schéma particulière.

En particulier il ne faut pas oublier, dans le modèle, la présence de l'équation d'évolution des volumes et de l'équation de transport des points matériels :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \operatorname{div}(\vec{u}) \quad \text{et} \quad \frac{D\vec{x}}{Dt} = \vec{u}.$$

I.3.3.2 Discrétisation du système d'équations

Le modèle (R) à discrétiser, complété par les termes sources, est le suivant :

$$(R) \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\alpha) & = \frac{p_1 - p_2}{\epsilon} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} & = S \end{cases}$$

où $\phi = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \rho \vec{u})^t$ est le vecteur des variables conservatives, $F = (\tilde{\rho}_1 u, \tilde{\rho}_2 u, \rho u^2 + P, \rho uv)^t$ et $G = (\tilde{\rho}_1 v, \tilde{\rho}_2 v, \rho uv, \rho v^2 + P)^t$ les flux dans les directions x et y , et $S = (0, 0, F_x, F_y)^t$ le terme source.

I.3.3.2.1 Schéma de relaxation

La résolution du modèle (R) est faite grâce à un schéma de relaxation qui opère en deux temps : d'abord, lors de l'étape de transport, on fige le terme source de relaxation ($\frac{p_1 - p_2}{\epsilon}$) à zéro, puis, lors de l'étape de relaxation, on cherche la fraction de volume de manière à obtenir l'équilibre en pression du nouvel état. Nous allons détailler ces étapes.

L'étape de transport : le système (R) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\alpha) & = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} & = S \end{cases}$$

La solution issue de la première équation est notée $\tilde{\alpha}$. Nous verrons à l'étape suivante qu'il n'est pas nécessaire de l'expliciter (car elle ne correspond pas à l'équilibre des pressions) et par conséquent de définir un schéma numérique pour sa résolution. On ne s'occupe donc que de la résolution de la deuxième équation.

Cette équation hyperbolique étant la même que celle sur laquelle a été basée la démonstration du schéma SPH hybride monofluide, nous pouvons en reprendre les résultats

en terme de discrétisation. Ainsi le schéma discret associé à cette étape de transport sera :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\vec{x}_i}{Dt} = \vec{u}_i \\ \frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_i \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \\ \frac{D\omega\phi_i}{Dt} = -\omega_i \sum_j 2 g_E(\vec{n}_{ij}, \phi_i, \phi_j) \|\vec{\nabla} W_{ij}\| \omega_j + \omega_i S \end{array} \right.$$

Ce schéma discret est résolu numériquement avec un schéma d'avance en temps de type Runge-Kutta d'ordre 4 et un schéma de décentrement en espace de type solveur de Riemann exact (donnant le flux $g_E(\vec{n}_{ij}, \phi_i, \phi_j)$). Ce dernier sera détaillé spécifiquement pour les équations étudiées au prochain paragraphe.

La solution issue de ce schéma est notée $\tilde{\phi}$ et va servir au calcul de la deuxième étape.

L'étape de relaxation : À partir des solutions intermédiaires $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\phi}$, à chaque étape Runge-Kutta d'un pas de temps, il est nécessaire de mettre à jour α et ϕ grâce au schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = \frac{p_1 - p_2}{\epsilon} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0 \end{array} \right.$$

où τ est un pseudo-temps. On remarque facilement que, lors de cette étape, le vecteur des variables conservatives n'est pas modifié : $\phi_i^{n+1} = \tilde{\phi}$ (où l'exposant $n+1$ dénote le pas de temps discret suivant). Seule la fraction de volume va évoluer.

On sait que lorsque le paramètre ϵ tend vers 0, la fraction volumique solution de la première équation tend (au bout d'un pseudo-temps τ d'autant plus court que la vitesse de relaxation est grande) vers la fraction volumique d'équilibre issue de l'équation (I.3.19). Il n'est donc pas nécessaire d'avoir de schéma numérique d'avance en temps pour trouver cette fraction. Avec les lois d'état linéarisées, elle est issue directement du calcul analytique détaillé plus haut :

$$\alpha^*(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2) = \frac{\gamma^+(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)}{1 + \gamma^+(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^+(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2) = \frac{q - \tilde{q}(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2) + \sqrt{(q - \tilde{q}(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2))^2 + 4\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2c_1^2c_2^2}}{\tilde{\rho}_2c_2^2} \\ \tilde{q}(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2) = \tilde{\rho}_2c_2^2 - \tilde{\rho}_1c_1^2 \\ q = \rho_{02}c_2^2 - \rho_{01}c_1^2 \end{array} \right.$$

L'étape de relaxation consiste donc, pour chaque point de discrétisation, à mettre à jour sa fraction volumique de manière à ce qu'elle représente l'équilibre des pressions issues de l'étape de transport :

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha^*(\tilde{\rho}_{i1}^{n+1}, \tilde{\rho}_{i2}^{n+1}).$$

Il est important de noter que le schéma discret de la méthode proposée ne fait alors appel à aucun schéma numérique d'évolution de la fraction de volume.

I.3.3.2.2 Solveur de Riemann

Pour le modèle (R) étudié, le problème de Riemann monodimensionnel est défini par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{\partial F'(\phi')}{\partial x} = 0 \\ \phi'(x, 0) = \begin{cases} \phi'_g & \text{si } x < x_{ij} \\ \phi'_d & \text{si } x > x_{ij} \end{cases} \end{cases}$$

où $\phi' = (\rho\alpha, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \rho u)^t$ est le vecteur des variables conservatives (issu de la réécriture du système hyperbolique de manière à y inclure l'équation (I.3.20) sous forme d'équation de bilan). Le flux dans la direction x vaut : $F' = (\rho\alpha u, \tilde{\rho}_1 u, \tilde{\rho}_2 u, \rho u^2 + \alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2)^t$.

Il s'agit donc d'étudier ce système hyperbolique sous forme convective, $\phi'^v = (\alpha, \rho_1, \rho_2, u)$, de la même façon que cela a été fait pour les équations d'Euler monofluide. On en déduit les éléments propres (valeurs et vecteurs propres) et les invariants de Riemann (le développement des calculs est fait dans [Chantepedrix \(2004\)](#)). Grâce à eux et aux relations de Rankine-Hugoniot ($s[\phi'] = [F']$, où s est la vitesse inconnue de la discontinuité et où pour toute grandeur $X : [X] = X_a - X_b$), on peut déterminer les relations de passage à travers les différentes ondes.

Pour les lois d'état linéarisées on pose, pour la pression de mélange :

$$p(\alpha, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2) = (\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2)c^2 + \tilde{p}_0(\alpha)$$

avec $\tilde{p}_0(\alpha) = p_0 - \alpha\rho_{01}c_1^2 - (1 - \alpha)\rho_{02}c_2^2$ la pression de mélange minimale pour une fraction volumique fixée.

Onde de valeur propre $\lambda = u - c$: Pour une onde de détente (soit $p_{*g} \leq p_g$), les invariants de Riemann sont :

$$\begin{cases} u_{*g} + \frac{c_g}{2} \log\left(\frac{\rho_{1*g}\rho_{2*g}}{\rho_{01}\rho_{02}}\right) = u_g + \frac{c_g}{2} \log\left(\frac{\rho_{1g}\rho_{2g}}{\rho_{01}\rho_{02}}\right) \\ \frac{\rho_{1*g}}{\rho_{2*g}} = \frac{\rho_{1g}}{\rho_{2g}} \end{cases}$$

On en déduit les densités partielles de l'état étoilé :

$$\begin{cases} \rho_{1*g} = \rho_{1g} \exp\left(\frac{u_g - u_{*g}}{c_g}\right) \\ \rho_{2*g} = \rho_{2g} \exp\left(\frac{u_g - u_{*g}}{c_g}\right) \end{cases}$$

où la vitesse de l'état étoilé est donnée par :

$$u_{*g} = u_g + f_g(\phi'_g, p_{*g}) \quad \text{où} \quad f_g(\phi'_g, p_{*g}) = c_g \log\left(\frac{p_g - \tilde{p}_{0g}}{p_{*g} - \tilde{p}_{0g}}\right).$$

Si, cette fois-ci, une onde de choc ($p_{*g} > p_g$) est présente à gauche, les invariants de Riemann sont :

$$\begin{cases} \rho_{1*g}(u_{*g} - s) = \rho_{1g}(u_g - s) \\ \rho_{2*g}(u_{*g} - s) = \rho_{2g}(u_g - s) \\ \rho_g(u_g - s)(u_g - u_{*g}) = -(p_g - p_{*g}) \end{cases}$$

Avec les deux premières relations et après quelques calculs, nous pouvons en déduire les densités partielles :

$$\begin{cases} \rho_{1*g} &= \rho_{1g} \frac{u_g - s}{u_{*g} - s} \\ \rho_{2*g} &= \rho_{2g} \frac{u_g - s}{u_{*g} - s} \end{cases}$$

où la vitesse s de l'onde de choc est déduite via la pression de mélange :

$$s = u_{*g} + \rho_g c_g^2 \frac{u_{*g} - u_g}{p_{*g} - p_g}.$$

En pratique, celle-ci n'est pas calculée numériquement avec cette relation pour éviter les problèmes dans les discontinuités de contact (où $u_{*g} = u_g$ et $p_{*g} = p_g$). On utilise plutôt la relation suivante :

$$s = u_{*g} - c_g^2 \sqrt{\frac{\rho_g}{p_{*g} - p_g}}.$$

Enfin, le troisième invariant de Riemann permet d'obtenir la vitesse de l'état étoilé :

$$u_{*g} = u_g + f_g(\phi'_g, p_{*g}) \quad \text{où} \quad f_g(\phi'_g, p_{*g}) = -\frac{p_{*g} - p_g}{\sqrt{\rho_g(p_{*g} - \tilde{p}_{0g})}}.$$

Onde de valeur propre $\lambda = u + c$: La démarche reste identique et nous obtenons les résultats suivants.

Pour une onde de détente (soit $p_{*d} \leq p_d$), les densités partielles de l'état étoilé sont :

$$\begin{cases} \rho_{1*d} &= \rho_{1d} \exp\left(-\frac{u_d - u_{*d}}{c_d}\right) \\ \rho_{2*d} &= \rho_{2d} \exp\left(-\frac{u_d - u_{*d}}{c_d}\right) \end{cases}$$

où la vitesse de l'état étoilé est donnée par :

$$u_{*d} = u_d + f_d(\phi'_d, p_{*d}) \quad \text{où} \quad f_d(\phi'_d, p_{*d}) = -c_d \log\left(\frac{p_d - \tilde{p}_{0d}}{p_{*d} - \tilde{p}_{0d}}\right).$$

Si, cette fois-ci, une onde de choc ($p_{*d} > p_d$) est présente à droite, les densités partielles sont :

$$\begin{cases} \rho_{1*d} &= \rho_{1d} \frac{u_d - s}{u_{*d} - s} \\ \rho_{2*d} &= \rho_{2d} \frac{u_d - s}{u_{*d} - s} \end{cases}$$

où la vitesse s de l'onde de choc est aussi simplifiée par :

$$s = u_{*d} + c_d^2 \sqrt{\frac{\rho_d}{p_{*d} - p_d}}.$$

Enfin, la vitesse de l'état étoilé est égale à :

$$u_{*d} = u_d + f_d(\phi'_d, p_{*d}) \quad \text{où} \quad f_d(\phi'_d, p_{*d}) = \frac{p_{*d} - p_d}{\sqrt{\rho_d(p_{*d} - \tilde{p}_{0d})}}.$$

Onde de valeur propre $\lambda = u$: Pour les discontinuités de contact, les relations de Rankine-Hugoniot donnent :

$$\begin{cases} u_{*g} = u_{*d} \\ p_{*g} = p_{*d} \end{cases}$$

L'état est donc noté étoilé simplement (*i.e.* $u_{*g} = u_{*d} = u_*$ et idem pour la pression). Le saut de chacune des densités partielles est quelconque à travers la discontinuité de contact.

De même, on peut montrer que le saut de fraction volumique est aussi quelconque à travers la discontinuité de contact. Par contre, ce saut devient nul à travers un choc ou une détente. Pour résumer, si l'on se trouve à gauche de la discontinuité on a $\alpha_{*g} = \alpha_g$ (puisque α est constante à travers la 1-onde), et inversement on a $\alpha_{*d} = \alpha_d$ à droite de la discontinuité.

Solution complète : On peut réécrire la relation sur les vitesses au niveau de la discontinuité de contact de la façon suivante :

$$f(p_*) = (u_d + f_d(\phi'_d, p_*)) - (u_g + f_g(\phi'_g, p_*)) = 0.$$

Cette équation non-linéaire se résout par une méthode de Newton-Raphson. On initialise cet algorithme avec une pression de mélange non plus issue d'un solveur approximatif mais d'une simple moyenne des états gauche et droit, $p_*^{init} = (p_g + p_d)/2$.

Une fois la pression p_* trouvée, on obtient la vitesse de l'état étoilé par la relation :

$$u_* = \frac{1}{2}(u_g + u_d) + \frac{1}{2}(f_d(\phi'_d, p_*) - f_g(\phi'_g, p_*)).$$

À l'intérieur des détente, nous avons les relations suivantes, pour la détente gauche (état « 1/6 ») :

$$\begin{cases} u = \frac{x}{t} + c_g \\ p = \alpha_g p_1(\rho_1) + (1 - \alpha_g) p_2(\rho_2) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_1 = \rho_{1g} \exp\left(\frac{u_g - u}{c_g}\right) \\ \rho_2 = \rho_{2g} \exp\left(\frac{u_g - u}{c_g}\right) \end{cases}$$

et dans la détente droite (état « 5/6 ») :

$$\begin{cases} u = \frac{x}{t} - c_d \\ p = \alpha_d p_1(\rho_1) + (1 - \alpha_d) p_2(\rho_2) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_1 = \rho_{1d} \exp\left(-\frac{u_d - u}{c_d}\right) \\ \rho_2 = \rho_{2d} \exp\left(-\frac{u_d - u}{c_d}\right) \end{cases}$$

Les détente, qui sont des ondes qui s'étalent dans le temps, sont comprises entre :

$$u_g - c_g < \frac{dx}{dt} < u_* - c_g \quad \text{et} \quad u_* + c_d < \frac{dx}{dt} < u_d + c_d$$

toutes les vitesses ayant été définies auparavant.

I.3.3.2.3 M.U.S.C.L. et traitement spécifique

Afin d'augmenter la précision de ce schéma résolvant le problème de Riemann, on procède à l'implémentation du schéma M.U.S.C.L. tel qu'il a été présenté auparavant pour l'approche monofluide.

Cependant cet ajout s'est avéré délicat pour cette formulation. L'introduction directe du schéma M.U.S.C.L., basé sur un limiteur Minmod et sur une estimation renormalisée des gradients des variables conservatives, menait à une instabilité de la méthode numérique proposée. Ceci se traduisait par des fractions volumiques issues de l'étape de relaxation qui étaient hors de leur domaine de validité (soit $\alpha \notin [0, 1]$). En se plaçant dans un cadre de tube à choc monodimensionnel, suivant une formulation eulérienne (grâce au formalisme A.L.E. et en se limitant à 2 voisins) et renormalisée (ce qui peut être démontré comme étant équivalent alors à un schéma différences finies centré d'ordre 2), nous avons pu explorer les causes de cette erreur.

D'une part, nous avons remarqué que l'approximation des gradients par le schéma SPH étant centrée, l'estimation du gradient des variables conservatives devenait fortement imprécise proche de l'interface. En effet, pour ces points de discrétisation, le support compact traverse l'interface et des points de convolution appartenant à l'autre fluide contribuent au calcul du gradient. Or, il existe un fort ratio sur la fraction volumique de part et d'autre de l'interface (typiquement, un ratio de l'ordre de 10^6 qui correspond à l'initialisation numérique de la fraction volumique pour chaque fluide avec ϵ et $1 - \epsilon$, $\epsilon \ll 1$).

D'autre part, nous avons observé que le couplage de cette mauvaise reconstruction linéaire du champ des variables conservatives avec le schéma M.U.S.C.L. de réduction des discontinuités menait à des pics de dépassement des variables que le limiteur ne parvenait pas à éviter. Même une restriction du limiteur Minmod (à la manière du limiteur « papillon », avec une amplitude plus faible) ne peut éviter cet écueil.

Pour contourner ce point de blocage, et toujours dans l'optique d'augmenter la précision de la formulation en gardant le schéma M.U.S.C.L., il a été mis au point une correction qui s'inspire du travail effectué en différences finies par Vila et Villedieu. Dans leur formulation à fraction de volume avec cette méthode numérique, les gradients, qui peuvent être estimés aussi de manière centrée, sont corrigés avant d'être utilisés dans la procédure M.U.S.C.L.. Ils le sont en comparant localement (*i.e.* aux noeuds les plus proches) la pente du gradient pour chaque composante des variables conservatives dans chaque direction principale.

Nous nous sommes inspirés de cette approche pour proposer une limitation locale du gradient des variables conservatives. La notion de limitation est cependant étendue à la direction locale du gradient, dans le voisinage du support compact (voir figure I.3.19).

$$\vec{\nabla}^l \phi_i = \min_{j \in \mathcal{D}} (\|\vec{\nabla} \phi_i\|, \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \phi_j) \vec{n}_i \quad \text{où} \quad \vec{n}_i = \frac{\vec{\nabla} \phi_i}{\|\vec{\nabla} \phi_i\|}$$

Ce nouveau gradient limité $\vec{\nabla}^l \phi_i$ est par la suite utilisé dans le schéma M.U.S.C.L..

Cette correction a été pensée pour être utilisable en deux dimensions. Elle reste coûteuse (elle oblige à effectuer une sommation supplémentaire sur le voisinage, entre le calcul des gradients et le calcul final des dérivées temporelles) mais s'avère indispensable pour mener à bien les simulations.

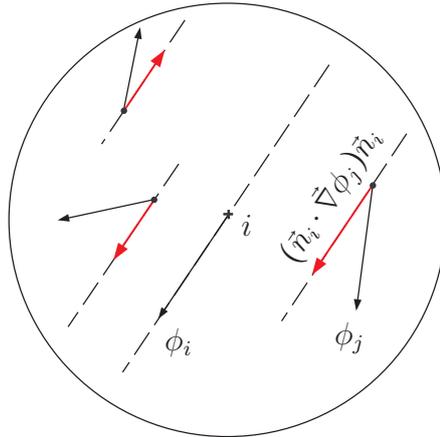


FIG. I.3.19 – Schéma de principe de la comparaison du gradient en i avec le gradient projeté sur \vec{n}_i des autres particules j du support.

I.3.3.3 Validation du solveur

On ne présente ici que la validation de la formulation à fraction de volume sur les cas de tube à choc mono-dimensionnels. Les cas de validation bidimensionnels et ceux plus proches des applications envisagées seront présentés dans les sections suivantes.

Nous allons d'abord étudier cette formulation sous la version dégénérée dans laquelle les deux fluides sont identiques. Ces cas vont nous permettre de confronter le solveur à la solution issue de la formulation monofluide présentée précédemment (cf. §I.3.1); la présence de la fraction volumique devenant alors un artéfact numérique⁴.

Cependant, il conviendra de faire attention à la physique modélisée. En effet le modèle monofluide est basé sur l'équation d'état de Tait tandis que le modèle à fraction de volume (même dégénéré) est basé sur l'équation d'état linéarisée. Celle-ci pouvant être définie comme la limite de la précédente lorsque le coefficient polytropique γ tend vers 1. N'ayant pas redéveloppé un solveur de Riemann monofluide spécifique pour cette équation linéarisée, il est possible d'utiliser celui basé sur l'équation de Tait en ayant en tête que l'élaboration du modèle a fait apparaître des fractions dont le dénominateur (en $\gamma - 1$) pourrait alors s'annuler. En prenant une valeur de γ satisfaisante ($\gamma = 1,1$) on peut avoir un comportement des deux lois d'état proche (cf. figure I.3.20; en limite de domaine, pour $\rho = 1200 \text{ kg.m}^{-3}$, l'écart avec la solution linéaire est d'environ 85% avec $\gamma = 7$ et 1% pour $\gamma = 1,1$).

Dans un deuxième temps, on s'intéressera à la validation de la formulation faisant intervenir deux fluides différents.

I.3.3.3.1 Deux fluides identiques

Les cas présentés (tube n°1 à 2 chocs; tube n°2 à 2 détente; tube n°3 à un choc et une détente) sont ceux décrits dans la partie §I.3.1. La configuration est identique: schéma renormalisé, noyau type spline cubique, support avec 6 voisins ($h/\Delta x = 2$), longueur de lissage de 1mm. On ne place pas de discontinuité de fraction de volume au niveau de la

⁴La formulation à fraction volumique sera baptisée par son acronyme anglais SPH-VF où VF signifie *Volume Fraction*.

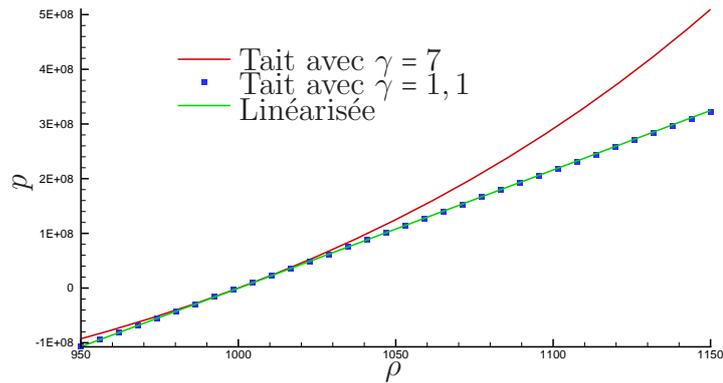


FIG. I.3.20 – Variation de la pression pour les différentes lois d'état dans la gamme de masse volumique étudiée. La vitesse du son vaut $1466m.s^{-1}$ et la masse volumique de référence $1000kg.m^{-3}$.

discontinuité physique de manière à pouvoir utiliser la formulation dans une version où le gradient nécessaire au schéma M.U.S.C.L. n'est pas limité (correction présentée plus haut). Néanmoins, la fraction de volume ne peut pas être prise égale à 0 ou 1 pour des raisons numériques : elle est donc initialisée à 10^{-7} uniformément sur tout le domaine.

Les résultats sont présentés sur les figures I.3.21, I.3.22 et I.3.23.

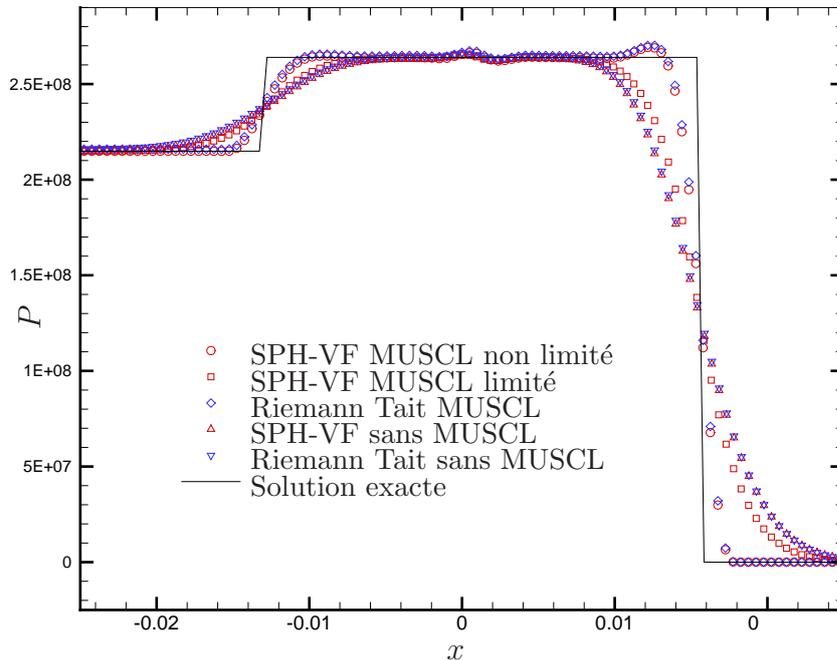


FIG. I.3.21 – Répartition de pression dans le tube à choc n°1 à l'instant $t = 10^{-5}s$.

Il ressort plusieurs tendances de l'analyse qualitative de ces courbes de pression. Tout d'abord, qu'il s'agisse d'un choc ou d'une détente, on remarque que les formulations sans utilisation du schéma M.U.S.C.L. (symboles Δ et ∇) sont sensiblement équivalentes (au comportement près découlant des lois d'état différentes).

Ensuite, bien qu'il n'y ait pas de discontinuité de la fraction volumique dans le domaine, l'utilisation du schéma M.U.S.C.L. dans sa version non corrigée produit des erreurs

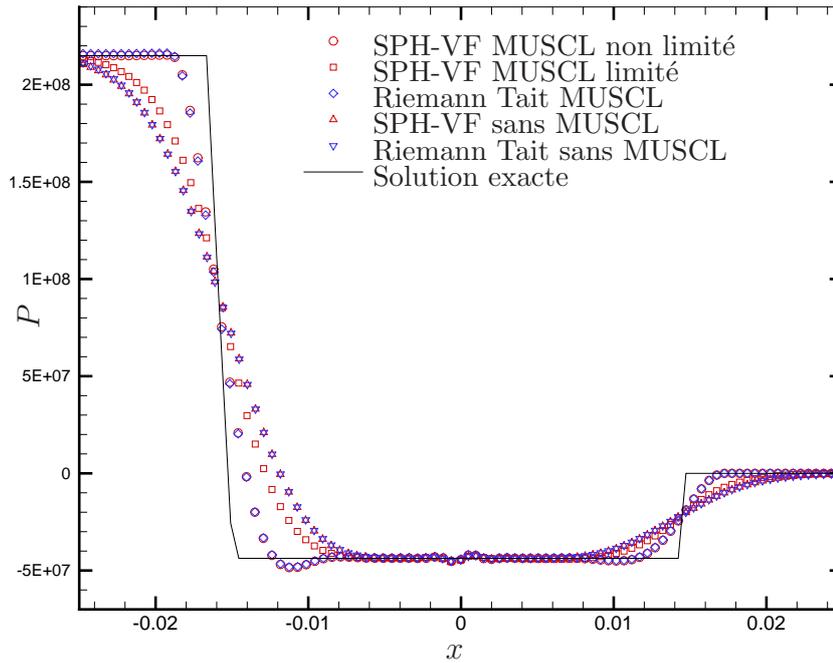


FIG. I.3.22 – Répartition de pression dans le tube à choc n°2 à l’instant $t = 10^{-5}s$.

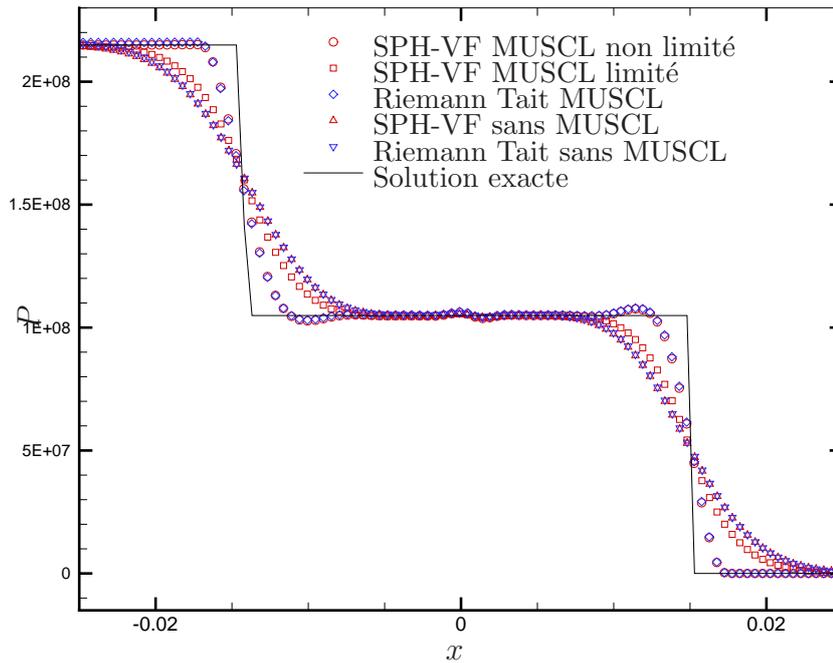


FIG. I.3.23 – Répartition de pression dans le tube à choc n°3 à l’instant $t = 10^{-5}s$.

lors de l'étape de relaxation ($\alpha \notin [0, 1]$ causé par des densités partielles négatives...). Cette formulation est clairement fautive mais néanmoins elle fournit des résultats intéressants (symboles respectifs \circ et \diamond) : ceux-ci sont proches de la formulation équivalente mono-fluide (avec solveur de Riemann et équation de Tait). Ceci est à analyser prudemment mais laisserait à penser que la résolution de la partie hyperbolique du schéma SPH-VF soit en un sens correcte.

Enfin, nous pouvons remarquer la forte dégradation de la précision apportée par la

correction qui vient limiter les gradients avant la procédure M.U.S.C.L. (symboles \square). On retrouve alors une précision légèrement supérieure à celle d'une formulation sans schéma M.U.S.C.L. mais encore fortement éloignée des résultats utilisant le schéma M.U.S.C.L. non limité. Mais, comme signalé au moment de la présentation de cette correction, celle-ci reste indispensable pour que le schéma numérique SPH-VF fonctionne correctement.

I.3.3.3.2 Deux fluides différents

Sur un cas faisant intervenir deux fluides distincts maintenant, on confronte la formulation à fraction volumique proposée ici dans le formalisme SPH à celle étudiée dans le formalisme Volumes Finis par [Chanteperdrix \(2004\)](#).

La configuration est proche de celle utilisée précédemment : schéma renormalisé et noyau type spline cubique. La longueur de lissage est choisie telle qu'il y ait 50 éléments de discrétisation dans le domaine de calcul (de longueur 1m). Le ratio $h/\Delta x$ aurait pu être fixé comme précédemment à 6 pour être le plus précis possible. Mais comme la comparaison va être faite à un code Volumes Finis, il a été choisi de se limiter à 2 voisins d'interaction par point ($h/\Delta x = 1$) ce qui engendre un comportement du schéma SPH renormalisé équivalent à celui d'un schéma différences finies.

Pour information, l'influence du ratio $h/\Delta x$ est présentée sur la figure [I.3.24](#).

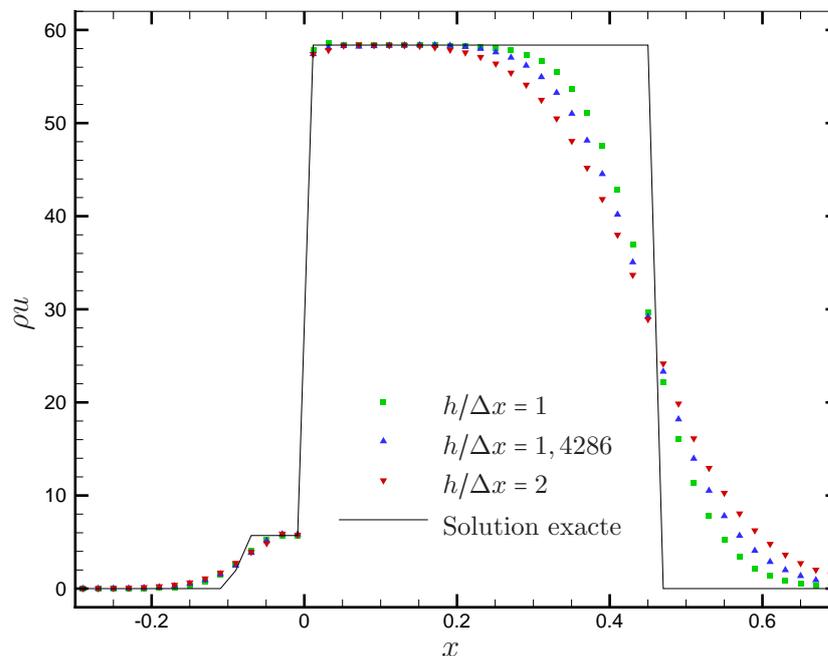


FIG. I.3.24 – Influence du rapport $h/\Delta x$ (avec pour un ratio croissant, respectivement 2, 4 et 6 voisins) sur la précision de la résolution du problème de Riemann du tube à choc n°5.

Les propriétés des deux fluides sont les suivantes : le fluide 1 possède une masse volumique au repos de 1kg.m^{-3} et sa vitesse du son est de 3m.s^{-1} . La masse volumique du fluide 2 vaut 1000kg.m^{-3} et sa vitesse du son est de 15m.s^{-1} . Les états initiaux sont donnés sous forme du vecteur de variables convectives $\phi^v = (\alpha, \rho_1, \rho_2, u)^t$.

Cas d'une discontinuité de contact convectée : Les deux états gauche et droit sont définis par :

$$\phi_G^v = \begin{pmatrix} 1 - 10^{-7} \\ 1 \\ 1000 \\ 0,15 \end{pmatrix} ; \quad \phi_D^v = \begin{pmatrix} 10^{-7} \\ 1 \\ 1000 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

La discontinuité est initialement positionnée en $x = 0,25m$. Cet état initial crée une discontinuité de contact qui va être simplement advectée dans le domaine à une vitesse de $0,15m.s^{-1}$. Cela permet de tester la diffusion numérique du schéma.

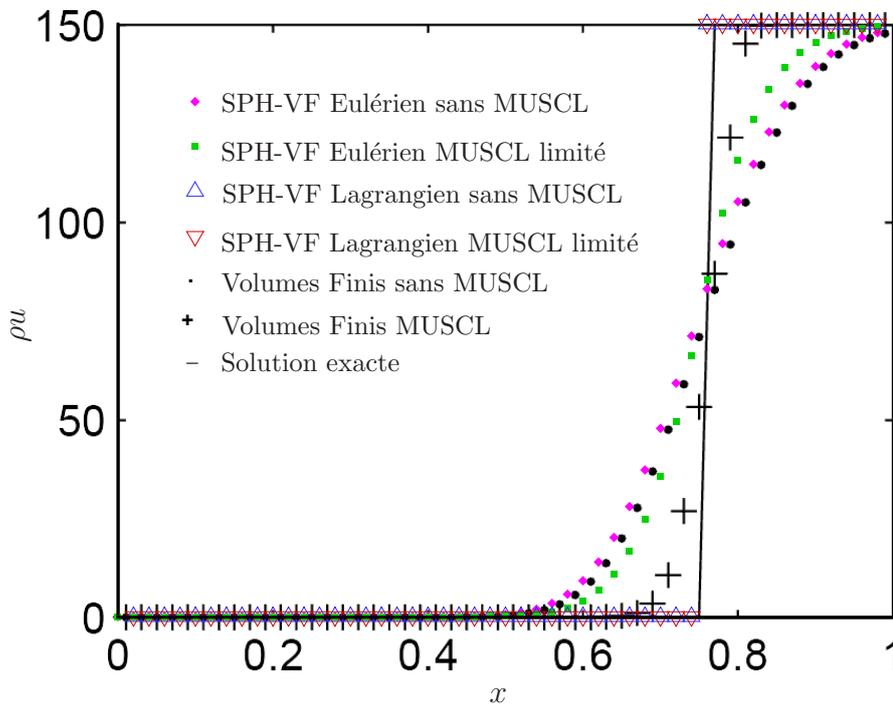


FIG. I.3.25 – Répartition de la quantité de mouvement dans le tube à choc n°4 à l'instant $t = 3,333s$.

Sans le schéma M.U.S.C.L, on remarque sur la figure I.3.25 que la formulation eulérienne du schéma SPH-VF est proche de celle Volumes Finis. Avec le schéma M.U.S.C.L., elle devient beaucoup diffuseuse qu'en Volumes Finis, du fait de la correction.

Par contre, dans la formulation SPH-VF purement lagrangienne, on observe comme attendu que la discontinuité est positionnée exactement quelle que soit l'utilisation du M.U.S.C.L., et ce sans diffusion même sur la fraction volumique (cf. figure I.3.26). On voit ici l'intérêt du caractère lagrangien couplé à cette formulation.

Cas à un choc et une détente : Les deux états gauche et droit sont définis par :

$$\phi_G^v = \begin{pmatrix} 1 - 10^{-7} \\ 100 \\ 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \phi_D^v = \begin{pmatrix} 10^{-7} \\ 1 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

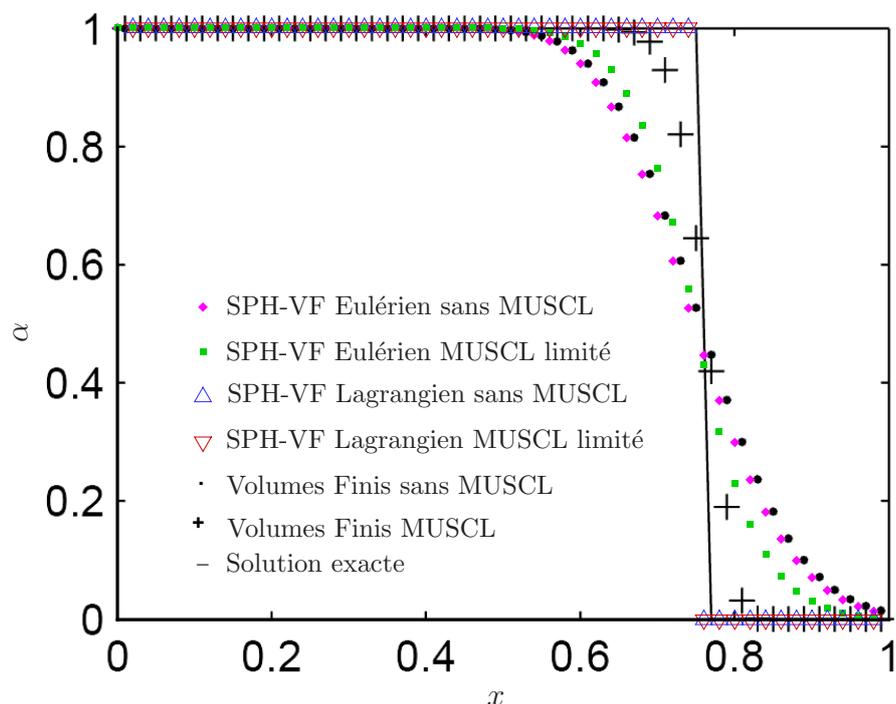


FIG. I.3.26 – Répartition de la fraction volumique dans le tube à choc n°4 à l’instant $t = 3,333s$.

La discontinuité est initialement positionnée en $x = 0,3m$. Cet état initial va créer une détente qui va se déplacer vers la gauche et un choc qui va aller à droite. La discontinuité de contact se déplace peu et reste à sa position initiale ($x \simeq 0,3m$).

Pour la discontinuité de contact, on peut remarquer (voir figure I.3.28) le même phénomène que pour le cas-test précédent : le caractère lagrangien du schéma SPH-VF permet de bien la capturer même si elle commence à diffuser légèrement du fait de sa faible vitesse.

Quant au choc et à la détente, on observe (figure I.3.27) néanmoins une plus grande diffusion qu’avec le schéma Volumes Finis.

On notera que les décalages en espace qui peuvent être observés entre nos résultats et ceux des Volumes Finis proviennent certainement d’un recalage incorrect de ces dernières données car, sur notre formulation SPH-VF, les discontinuités de contact sont positionnées exactement (respectivement pour chaque tube à $x = 0,15 \times 3,333m$ et $x = 0,3m$).

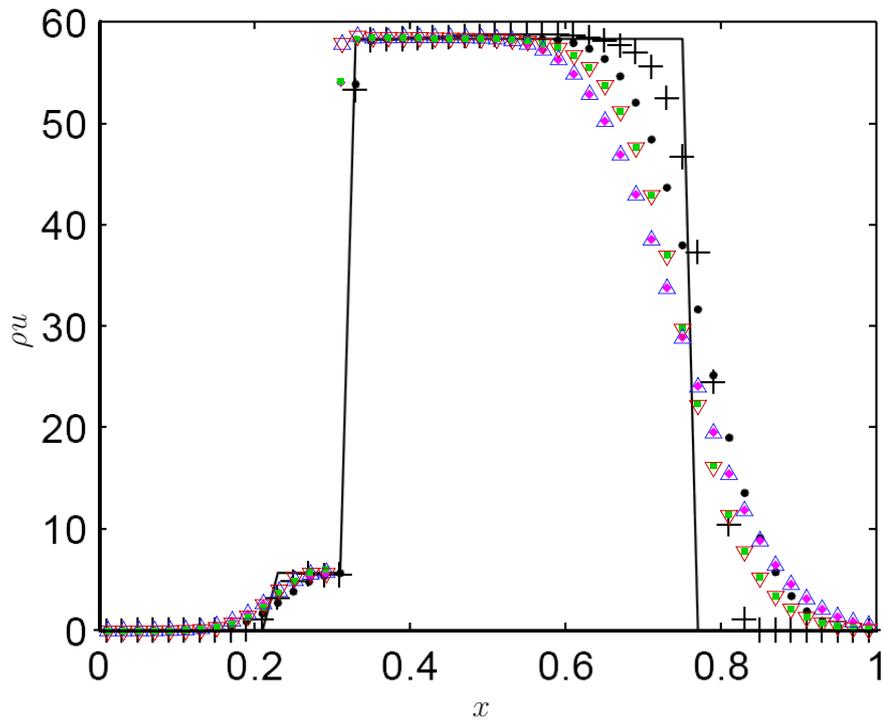


FIG. I.3.27 – Répartition de la quantité de mouvement dans le tube à choc n°5 à l’instant $t = 0,03s$. Légende des symboles : cf. figure ci-dessous.

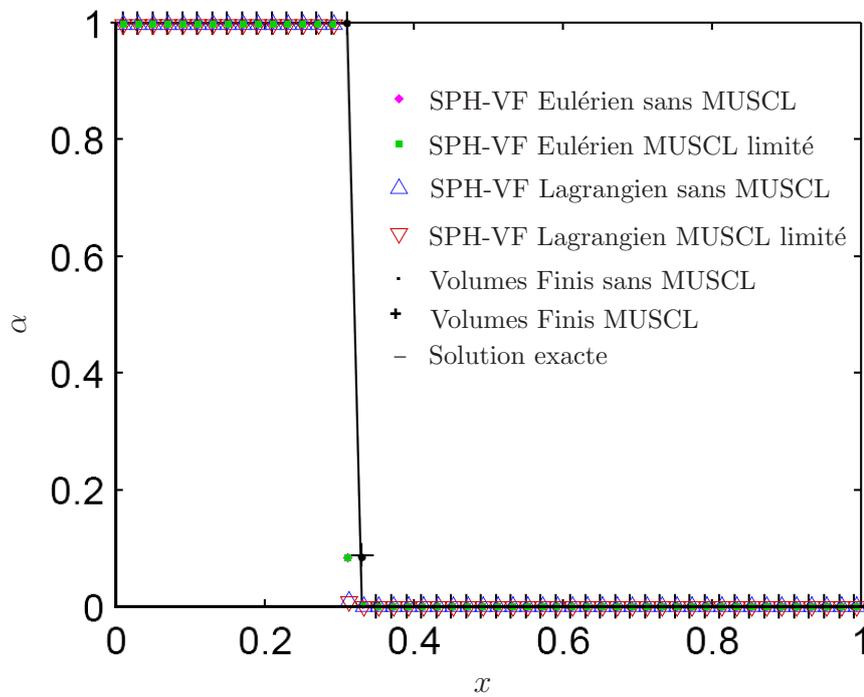


FIG. I.3.28 – Répartition de la fraction volumique dans le tube à choc n°5 à l’instant $t = 0,03s$.

Deuxième partie

Ajout de phénomènes physiques

Dans ce chapitre nous allons aborder la modélisation de deux phénomènes physiques distincts : la viscosité (réelle cette fois-ci) et les effets de tension superficielle. Dans l'étude des équations de Navier-Stokes, on peut séparer l'étude de la partie hyperbolique de ces équations (Euler) et les parties diffusives et capillaires. Les modélisations de ces effets diffusifs et capillaires proposées dans cette partie pourront s'appliquer aux deux approches distinctes précédentes pour modéliser la partie hyperbolique.

Chapitre II.1

La viscosité

II.1.1 Les différentes modélisations

Dans la littérature SPH, nous pouvons trouver diverses modélisations de la divergence du tenseur des contraintes. Nous allons détailler les trois plus courantes ainsi qu'une formulation permettant d'en augmenter la précision.

II.1.1.1 Formulation de Flekkøy

En se basant sur la formulation [Flekkøy et alii \(2000\)](#) (reprise par [Hu et Adams \(2006\)](#)), on peut exprimer, avec une approche différences finies (1^{er} ordre) du gradient, le tenseur des contraintes entre deux particules \mathbb{T}_{ij}^v par :

$$\mathbb{T}_{ij}^v = \mu_{ij} \frac{1}{r_{ij}^2} \left[(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \otimes (\vec{u}_i - \vec{u}_j) + (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \otimes (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right]$$

où μ_{ij} est la viscosité dynamique entre les deux particules i et j , tandis que r_{ij} est la distance entre elles.

Puis on obtient l'effort visqueux volumique (pour rappel : $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \text{div}\mathbb{T}^v$) agissant sur une particule en appliquant simplement l'opérateur dérivée d'interpolation discret au tenseur (et en remarquant que celui-ci est symétrique, *i.e.* $\mathbb{T}_{ji}^v = \mathbb{T}_{ij}^v$) :

$$\text{div}\mathbb{T}_{ij}^v = D^h(\mathbb{T}^v).$$

Ce qui se développe, pour la formulation SPH-Multifluide (§[I.2.3](#)) en :

$$\text{div}\mathbb{T}_{ij}^v = \sum_j \mu_{ij} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right) \mathbb{T}_{ij}^v \cdot \vec{\nabla} W_{ij}$$

et pour la formulation ALE on a :

$$\text{div}\mathbb{T}_{ij}^v = \sum_j \mu_{ij} 2\mathbb{T}_{ij}^v \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j.$$

II.1.1.2 Formulation de Morris

En repartant de cette formulation, et en supposant que les effets visqueux compressibles peuvent être négligés (*i.e.* $(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \simeq 0$), on peut réécrire la formulation discrète de la divergence du tenseur des contraintes (ce qui revient à évaluer le laplacien de la vitesse ; voir [Morris et alii \(1997\)](#)).

Pour la formulation SPH-Multifluide, on a :

$$\operatorname{div} \mathbb{T}_{ij}^v = \sum_j \mu_{ij} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right) \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \vec{\nabla} W_{ij}}{r_{ij}^2} (\vec{u}_i - \vec{u}_j).$$

Pour la formulation ALE, on obtient :

$$\operatorname{div} \mathbb{T}_{ij}^v = \sum_j 2\mu_{ij} \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \vec{\nabla} W_{ij}}{r_{ij}^2} (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \omega_j.$$

II.1.1.3 Formulation de Monaghan

Les deux formulations précédents ne conservant pas le moment angulaire, Monaghan (cf. *e.g.* [Monaghan \(2005\)](#)) propose la formulation suivante.

Pour la formulation SPH-Multifluide, on a :

$$\operatorname{div} \mathbb{T}_{ij}^v = \sum_j 4\mu_{ij} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right) \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot (\vec{u}_i - \vec{u}_j)}{r_{ij}^2} \vec{\nabla} W_{ij}.$$

Pour la formulation ALE, on a :

$$\operatorname{div} \mathbb{T}_{ij}^v = \sum_j 8\mu_{ij} \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot (\vec{u}_i - \vec{u}_j)}{r_{ij}^2} \frac{\rho_j}{\rho_i + \rho_j} \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j.$$

II.1.1.4 Forme P.S.E.R.

[Cueille \(2005\)](#) a montré que le schéma de Monaghan n'est pas consistant quelle que soit la distribution de particules tandis que le schéma de Morris l'est pour une distribution cartésienne des points et pour un ratio $h/\Delta x$ particulier. En utilisant ce dernier schéma, il propose, pour éviter ce problème, (et en se basant sur le terme Particle Strength Exchange des méthodes vortex) de renormaliser localement le laplacien avec une constante. Celle-ci est évaluée grâce à une fonction polynomiale d'ordre 2 correctement choisie :

$$f_i(\vec{x}) = r_i^2(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{x}_i)^2.$$

La version scalaire du laplacien de Morris permet de calculer la constante de renormalisation C_i (on raisonne ici avec la formulation ALE mais le même raisonnement peut se faire sur la formulation SPH-Multifluide) :

$$C_i = \sum_j 2 \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \vec{\nabla} W_{ij}}{r_{ij}^2} (f_i - f_j) \omega_j = -2 \sum_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j.$$

Cette constante peut être calculée analytiquement et vaut : $C^{th} = \Delta(f(\vec{x})) = 4$. La formulation de Morris P.S.E.R. s'écrit finalement :

$$\operatorname{div} \mathbb{T}_{ij}^v = \frac{4}{C_i} \sum_j 2\mu_{ij} \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j}{r_{ij}^2} (\vec{u}_i - \vec{u}_j).$$

On pourra se référer à [Cueille \(2005\)](#) pour une étude de la précision des 3 derniers schémas (Monaghan, Morris et Morris P.S.E.R.) sur des fonctions scalaires sur différents types de maillages.

II.1.2 Viscosité dynamique inter-particulaire

La manière d'estimer celle-ci entre deux particules i et j peut être une moyenne arithmétique :

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2}(\mu_i + \mu_j) \quad (\text{II.1.1})$$

ou une moyenne harmonique :

$$\mu_{ij} = \frac{2\mu_i\mu_j}{\mu_i + \mu_j}. \quad (\text{II.1.2})$$

Si cela ne présente pas de différence pour un écoulement monofluide, la façon d'estimer la viscosité dynamique interfaciale sera plus importante pour les écoulements mettant en jeu deux fluides de viscosités distinctes. Nous montrerons ultérieurement l'influence des 2 moyennes.

II.1.3 Stabilité temporelle

Lorsqu'on modélise la viscosité, il faut se prémunir contre l'apparition d'instabilités liées à la diffusion en imposant une contrainte supplémentaire sur les pas de temps. Les pas de temps « visqueux » doivent ainsi être bornés par :

$$\Delta t^v \leq C_{CFLv} \frac{\rho h^2}{\mu}.$$

Remarque :

On peut noter que pour un fluide donné (masse volumique, viscosité dynamique, vitesse du son), le raffinement de la taille h des éléments de discrétisation (via $h/\Delta x$) peut mener très rapidement à restreindre le pas de temps général à cause de la condition « visqueuse » (terme en h^2). Pour éviter cela, [Cueille \(2005\)](#) propose d'impliciter la contrainte visqueuse et obtient une réduction notable du temps de calcul. Cependant, la prise en compte des effets de tension superficielle va imposer une condition sur les pas de temps sensiblement aussi restrictive (terme en $h^{3/2}$). Dans cette première approche on n'a donc pas cherché à spécifiquement reformuler le problème comme [Cueille](#) pour s'en affranchir.

II.1.4 Condition aux limites

Afin de prendre en compte les effets de la viscosité sur les parois, nous modifions la condition cinématique pour qu'elle devienne une condition d'adhérence. L'approche reste néanmoins basée sur la technique des particules fantômes mentionnée plus haut. Finalement la condition d'adhérence va se traduire uniquement sur la vitesse de la particule fantôme [Takeda et alii \(1994\)](#) :

$$\vec{u}_{F_i} = -\vec{u}_i.$$

II.1.5 Validation

Nous allons ici valider ces différents schémas et estimer leur précision sur un cas académique d'écoulement visqueux : l'écoulement de Poiseuille plan.

L'écoulement s'effectue dans un canal périodique (pour que le profil stationnaire s'établisse tout en limitant le domaine de calcul) à un régime laminaire. L'élément moteur est un gradient de pression assimilable à un champ de force volumique parallèle à l'axe du canal (celui-ci peut être vu comme un champ de pesanteur, l'écoulement étant alors vertical descendant).

Le bilan de quantité de mouvement projeté sur l'axe \vec{e}_y s'écrit donc :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{soit} \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho(x)g.$$

Cette formulation reste généraliste (en terme de répartition de viscosité et densité dans l'espace) de manière à pouvoir en dériver la solution aussi bien dans le cas monofluide (avec le même fluide dans tout le canal) que bifluide (avec deux fluides \mathcal{X} et \mathcal{Y} occupant des régions distinctes, l'interface étant évidemment parallèle à l'axe d'écoulement).

Les différentes conditions cinématiques en découlant vont servir de condition aux limites pour l'intégration de l'équation précédente. Sur les parois (en $x = 0$ et $x = L$), nous avons une condition de vitesse nulle ($v_0 = 0$ et $v_L = 0$), tandis qu'à l'interface (en $x = x_I$), si présente, on a continuité de la vitesse tangentielle ($v_I^{\mathcal{X}} = v_I^{\mathcal{Y}}$).

Dans le cas monofluide (fluide \mathcal{X}), le profil de vitesse analytique du régime stationnaire s'écrit, cf. *e.g.* [Cueille \(2005\)](#) :

$$v(x) = -\frac{\rho^{\mathcal{X}}g}{2\mu^{\mathcal{X}}}x(L-x).$$

Dans le cas bifluide (avec le fluide \mathcal{X} entre 0 et x_I , et entre x_I et L le fluide \mathcal{Y}), le profil devient, cf. *e.g.* [Chantepedrix \(2004\)](#) :

$$v(x) = \frac{\rho(x)g}{2\mu(x)}(x-x_I)^2 - \frac{\tau_I}{\mu(x)}(x-x_I) - v_I$$

où τ_I le cisaillement à l'interface et v_I sa vitesse sont définis par :

$$\tau_I = \frac{gx_I}{2} \frac{\rho^{\mathcal{X}}\mu^{\mathcal{Y}} - \rho^{\mathcal{Y}}\mu^{\mathcal{X}}}{\mu^{\mathcal{X}} + \mu^{\mathcal{Y}}} \quad \text{et} \quad v_I = \frac{\rho^{\mathcal{Y}}g}{\mu^{\mathcal{Y}}} \frac{x_I^2}{2} + \frac{\tau_I}{\mu^{\mathcal{Y}}}x_I.$$

Une fois calculé ce profil analytique de vitesse, nous pouvons en déduire le débit à travers la section du canal :

$$Q = \int_0^L \rho(x)v(x)dx.$$

On peut aussi en déduire la vitesse maximale dans le canal ainsi que le nombre de Reynolds correspondant. Pour le cas monofluide, la vitesse maximale v_m est atteinte en $x = L/2$:

$$v_m = \frac{\rho^{\mathcal{X}}g}{2\mu^{\mathcal{X}}} \frac{L^2}{4} \quad \text{et} \quad Re = \left(\frac{\rho^{\mathcal{X}}}{\mu^{\mathcal{X}}} \right)^2 g \frac{L^3}{8}.$$

Pour le cas bifluide, la recherche d'extremum de la vitesse analytique donne comme position : $x_m = x_I + \frac{\tau_I}{\rho(x)g}$. On remarque alors que, si τ_I est positif (*i.e.* $\nu^{\mathcal{Y}} > \nu^{\mathcal{X}}$), le maximum global se situe alors pour $x > x_I$, dans le fluide \mathcal{Y} :

$$v_m^{\mathcal{Y}} = -\left(\frac{\tau_I^2}{2\mu^{\mathcal{Y}}\rho^{\mathcal{Y}}g} + v_I\right) \quad \text{et} \quad Re^{\mathcal{Y}} = \left(\frac{\rho^{\mathcal{Y}}}{\mu^{\mathcal{Y}}}\frac{L}{2}\right)v_m^{\mathcal{Y}}.$$

Pour l'autre fluide \mathcal{X} , le maximum local se situe donc à l'interface, en $x = x_I$, puisque la solution est monotone.

$$v_m^{\mathcal{X}} = v_I \quad \text{et} \quad Re^{\mathcal{X}} = \left(\frac{\rho^{\mathcal{X}}}{\mu^{\mathcal{X}}}\frac{L}{2}\right)v_m^{\mathcal{X}}.$$

Et inversement si $\nu^{\mathcal{Y}} < \nu^{\mathcal{X}}$.

II.1.5.1 Mise en œuvre numérique

II.1.5.1.1 Conditions aux limites

Nous avons détaillé précédemment la traduction de la condition à la limite d'adhérence sur les particules fantômes. Il reste à traiter la condition d'entrée-sortie du canal. Celle-ci n'étant pas simple à réaliser (cf. [Oger \(2006\)](#)), il est préférable d'utiliser la propriété d'invariance du problème suivant le sens de l'écoulement et de créer ainsi une condition de périodicité sur ces frontières du domaine.

Dans cette optique, il existe deux façons équivalentes de procéder : soit l'on modifie localement les listes d'interactions des particules dont le support d'interpolation intersecte la frontière périodique, et l'on leur rajoute virtuellement dans le support les particules situées sur l'autre frontière périodique (démarche détaillée par [Cueille \(2005\)](#)). Soit l'on garde la structure existante en prenant soin de créer les particules fantômes d'une frontière périodique sur l'autre frontière périodique associée (à une longueur de canal près donc).

II.1.5.1.2 Extraction des profils

Afin d'observer les profils de vitesse, nous pourrions définir une ligne fictive à mi-hauteur du canal et venir régulièrement (en espace) interpoler les champs (grâce à une technique de type moindres carrées mobiles - MLS [Belytschko et alii \(1996\)](#)). Mais cela lisserait les éventuels bruits de la solution.

Pour éviter cela, nous allons relever directement relever la vitesse des particules, ce qui peut être effectué avec deux méthodes. Soit nous définissons initialement une rangée de particules dans la largeur, et nous observons leur vitesse au cours du temps. Elles ne seront plus alignés au fur et à mesure du développement de l'écoulement et de l'effet de cisaillement ; mais la condition de périodicité garantit l'invariance de la vitesse à chaque abscisse.

Soit, en procédant de la même façon que [Cueille \(2005\)](#), on définit une zone rectangulaire de largeur du canal et ayant pour hauteur l'espacement initial des particules (soit Δx). Elle est centrée à mi-hauteur du domaine et permet de relever la vitesse et l'abscisse des particules détectées à chaque pas d'écriture. C'est la solution mise en œuvre ici.

II.1.5.1.3 Configuration numérique

Le canal possède une largeur L de $1m$ et une hauteur de $1m$ (le problème étant invariant par translation suivant la direction de l'écoulement, cette hauteur peut être prise

inférieure ; mais à faible résolution spatiale cela peut poser problème lors de la création des particules fantômes). Les points sont initialement disposés cartésienement. Le noyau est la gaussienne (avec un rapport $h/\Delta x = 1,3298$). La formulation choisie ici par défaut est la formulation SPH-Multifluide.

II.1.5.2 Cas monofluide

La loi d'état choisie est celle linéarisée, avec une masse volumique de référence $\rho_0 = 1000\text{kg.m}^{-3}$ et une vitesse du son permettant de rester dans un domaine pseudo-compressible (*i.e.* égale à 10 fois la vitesse maximale de l'écoulement comme calculée plus haut). Le terme moteur de l'écoulement est un terme source volumique g pris égal à 8m.s^{-2} .

Remarque :

Exceptionnellement, nous avons choisi ici la loi d'état linéarisée pour la formulation SPH-Multifluide. Sur les autres cas présentés par la suite, il a été vérifié que le choix de la loi d'état n'influe pas sur les résultats. La loi d'état sera donc celle de Tait pour la SPH-Multifluide, tandis que sera celle linéarisée pour la SPH-VF (sauf mention contraire).

Nous allons étudier l'influence de divers paramètres numériques sur la précision (celle-ci sera calculée relativement à la solution analytique détaillée plus haut). L'écoulement s'effectuera à un nombre de Reynolds de 1 (soit $\mu = 1000\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $v_m = 1\text{m.s}^{-1}$).

II.1.5.2.1 Convergence en espace

On effectue d'abord une étude de convergence spatiale en prenant la méthode la plus précise selon [Cueille \(2005\)](#), *i.e.* la méthode de Morris corrigée par la renormalisation P.S.E.. Pour ce schéma nous étudions l'influence de la résolution dans la largeur du canal, avec 20, 40, 80 et 160 particules.

Nous pouvons considérer qu'à partir de 80 points, le résultat est convergé (cf. figures [II.1.1](#)). On peut remarquer que, localement, l'erreur provient des zones de fort cisaillement, proches des parois, comme on pouvait s'y attendre.

L'erreur moyenne quadratique est définie par :

$$err_{RMS} = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N err_v^2 \right)^{1/2}$$

où err_v est l'erreur relative sur la vitesse par rapport à l'expression analytique sur l'ensemble des N particules échantillonnées dans la largeur du canal. On peut alors étudier la convergence spatiale et on observe (voir figure [II.1.2](#)) que la formulation SPH-Multifluide converge à un ordre proche de 2. L'utilisation de la renormalisation pour le noyau (§[I.3.1.2.4](#)) permettrait d'atteindre ce taux de convergence. On observera son effet avec l'autre formulation SPH-VF.

Remarque :

La convergence dont il est question ici (et par la suite) est une convergence vers la solution analytique. L'ordre de convergence en espace devrait reposer sur une convergence vers une solution numérique « saturée » (où l'augmentation de la résolution spatiale n'aurait

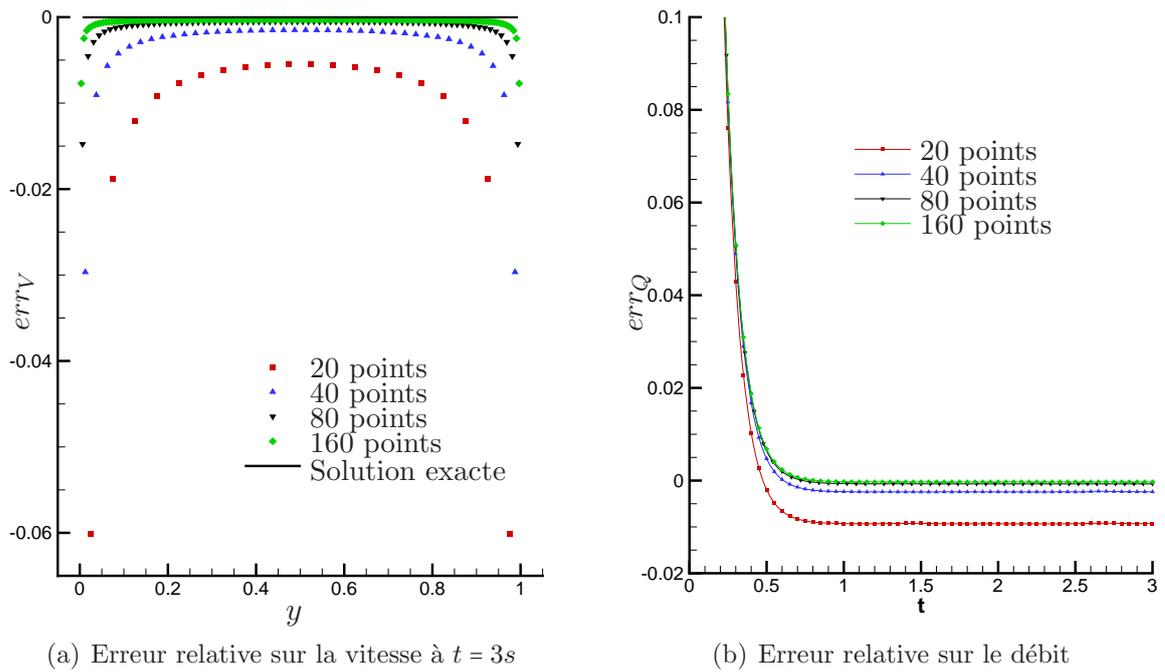


FIG. II.1.1 – Erreurs relatives sur le canal de Poiseuille à $Re = 1$.

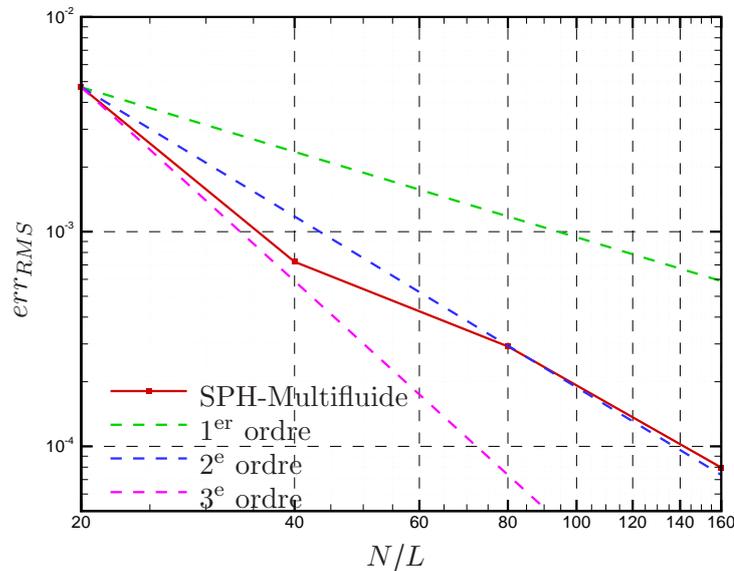


FIG. II.1.2 – Ordre de convergence en espace et pente des différents ordres.

aucune incidence sur la précision de la solution). Ceci n'a été fait qu'incomplètement ici puisqu'on n'observe pas encore de saturation de la courbe de convergence aux plus hautes résolutions étudiés. Il serait donc nécessaire d'effectuer des calculs plus fins (et plus coûteux). Néanmoins, même si l'on n'obtient pas l'ordre de convergence absolu du schéma, cela permet d'avoir une idée de la vitesse de convergence aux résolutions utilisées en pratique.

II.1.5.2.2 Précision des différents schémas

Pour la résolution de 80 points, nous étudions la précision des différents schémas de modélisation de la viscosité.

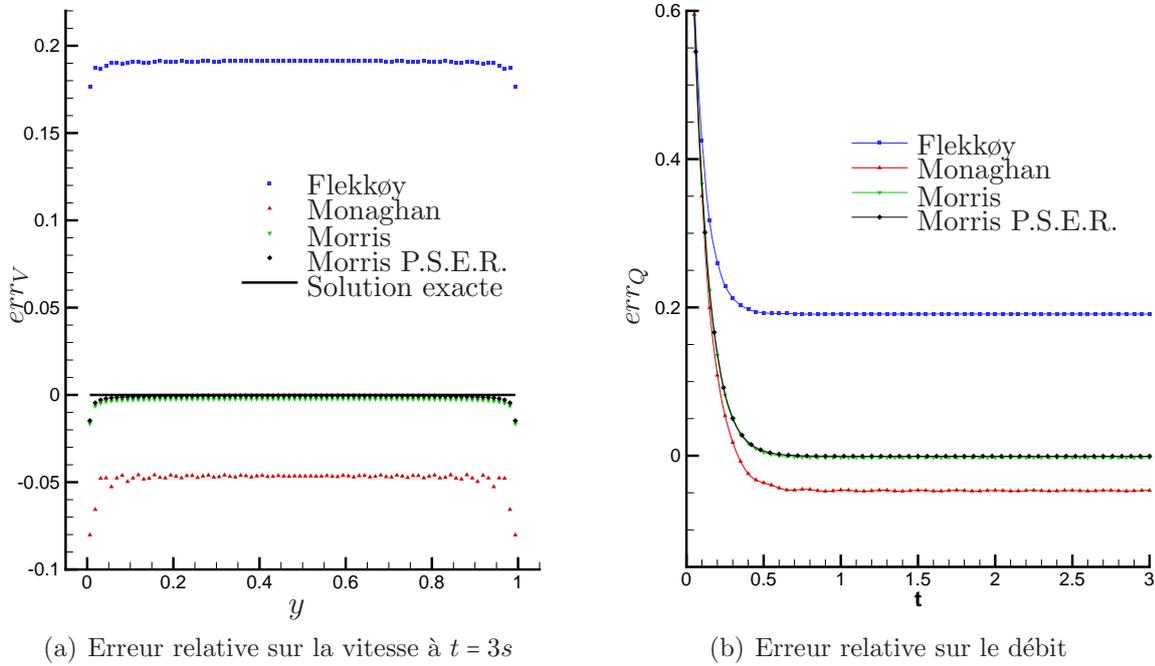


FIG. II.1.3 – Erreurs relatives sur le canal de Poiseuille à $Re = 1$.

	err_{RMS}
Flekkoy	$2, 1 \cdot 10^{-2}$
Monaghan	$5, 4 \cdot 10^{-3}$
Morris	$4, 3 \cdot 10^{-4}$
Morris P.S.E.R.	$2, 9 \cdot 10^{-4}$

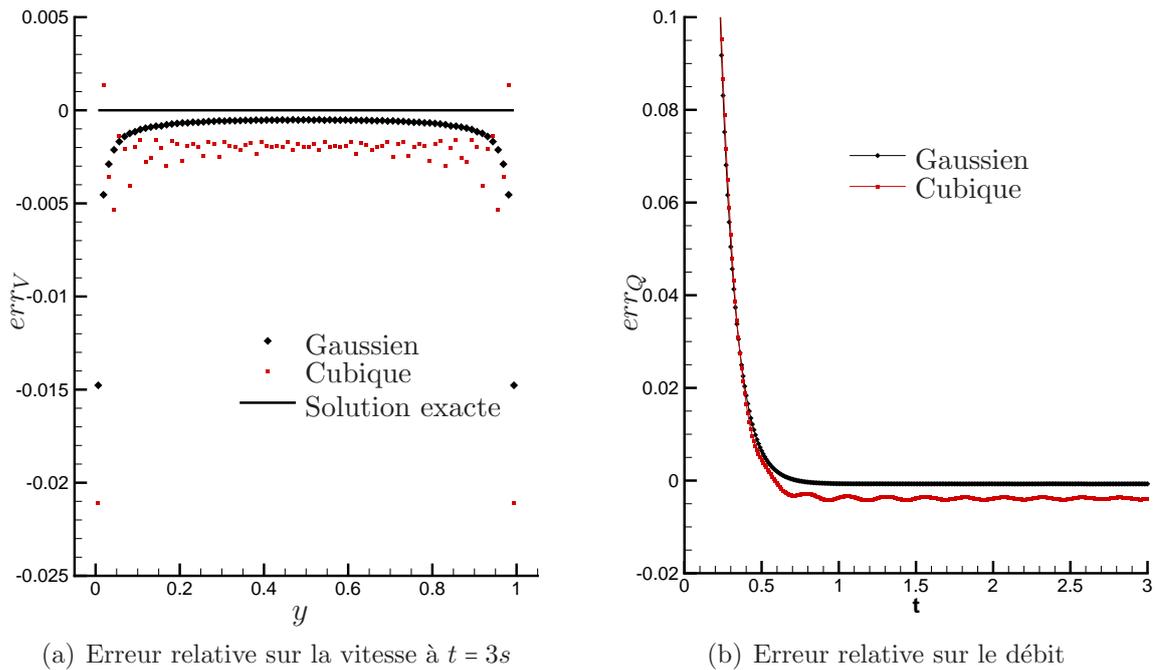
TAB. II.1.1 – Erreur relative quadratique moyenne.

Les schémas les plus précis sont ceux basés sur la formulation de Morris : ils sont 1 à 2 ordre de magnitude plus précis que les schémas de Monaghan et Flekkøy (respectivement précis à 0,5% et 2% contre au mieux 0,03% pour Morris). La renormalisation P.S.E. apporte effectivement une amélioration de la précision.

II.1.5.2.3 Précision du noyau

Avec le schéma Morris P.S.E.R. et la résolution de 80 points nous avons étudié l'influence du noyau.

Le noyau gaussien possédant un support compact plus large que la spline cubique ($3h$ contre $2h$), on pourrait s'attendre à un lissage de la solution dans les zones de fort cisaillement (en proche paroi). Or les résultats présentés ci-dessus montrent que le noyau gaussien est plus précis que la spline cubique (la largeur du support se traduisant en précision plutôt qu'en lissage). Il faut cependant rappeler qu'à cause de la largeur de son support, son coût d'évaluation est aussi plus élevé.

FIG. II.1.4 – Erreurs relatives sur le canal de Poiseuille à $Re = 1$.

II.1.5.2.4 Influence du nombre de Reynolds

Pour la configuration choisie (schéma Morris P.S.E.R. et la résolution de 80 points), nous avons tenté d'étudier la précision du schéma selon le nombre de Reynolds. Pour cela, les paramètres précédents ont été conservés et on fait uniquement varier la viscosité dynamique μ pour atteindre le régime souhaité.

Or sur les simulations menées à divers nombres de Reynolds (entre 10^{-4} et 100), on observe, tôt ou tard, le développement d'instabilités sur les positions des particules proches de la paroi (qui n'ont pas de raison d'avoir de déplacement perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement et donc de quitter le rang où elles évoluent) qui conduisent à la dégradation de la solution. Ce phénomène a été décrit dans la littérature SPH (voir Watkins *et alii* (1996), Di G. Sigalotti *et alii* (1997) et Basa *et alii* (2008)).

Dans cette dernière publication, les auteurs analysent la naissance de cette instabilité dans la première couche de particules. Celle-ci va être par la suite amplifiée de sorte à déstabiliser complètement l'écoulement. À maillage fixé, l'instant où arrive cet événement est d'autant plus proche de l'instant initial que le nombre de Reynolds est élevé (cf Basa *et alii* (2008)) et peut ne pas permettre d'atteindre le régime stationnaire de l'écoulement.

Une manière de reformuler cette remarque est de raisonner, pour un nombre de Reynolds fixé, sur le temps de stabilité que l'on se fixe pour atteindre ce régime stationnaire. Alors, en raffinant suffisamment, on peut mener une simulation à terme pour cet objectif.

Cependant il n'existe pas de critère défini pour guider ce choix de discrétisation. Alors qu'on pourrait s'attendre à une considération du caractère turbulent de l'écoulement (fait de manière erronée dans Watkins *et alii* (1996)), il est rappelé par Basa *et alii* (2008) que les instabilités peuvent apparaître dans un régime connu pour être purement laminaire (la transition dans un canal de Poiseuille étant aux alentours de $Re \simeq 2645$) : les instabilités peuvent être observées à $Re = 1$ au bout d'un temps suffisamment long ($t^* = t\pi^2\rho/(\mu L) = 168 \gg t^*_{stationnaire} = 9$).

De même, si l'on essaye de raisonner de manière locale, en faisant l'analogie entre la formulation de la viscosité artificielle (I.2.17) et la formulation de la divergence du tenseur des contraintes par Monaghan, on peut mettre en évidence la relation suivante :

$$\mu = \frac{1}{8} \alpha c h \rho$$

où le coefficient α est communément pris dans la communauté SPH dans la fourchette $0,01 - 0,1$. L'idée d'introduire ce que l'on pourrait appeler un nombre de Reynolds acoustique local ($Re^{ac} = ch/\nu$) et de le relier à α (et par conséquent à sa plage de valeur admissible communément) paraît séduisante mais ne parvient pas à déterminer une condition nécessaire et suffisante de stabilité des écoulements.

II.1.5.2.5 Formulation SPH-VF

Ayant ainsi caractérisé les schémas de modélisation de la viscosité sur la formulation SPH-Multifluide, nous allons conduire une étude similaire sur l'autre formulation, SPH-VF.

La comparaison des différents schémas de discrétisation du tenseur des contraintes visqueuses présentés plus haut amène au même classement et fait ressortir la grande précision d'un seul de ceux-ci : la formulation de Morris renormalisée. C'est donc celle qui sera conservée pour la suite du travail.

On étudie la convergence spatiale de ce schéma avec la formulation SPH-VF, renormalisée ou non (relativement au gradient du noyau ; cf. §I.3.1.2.4).

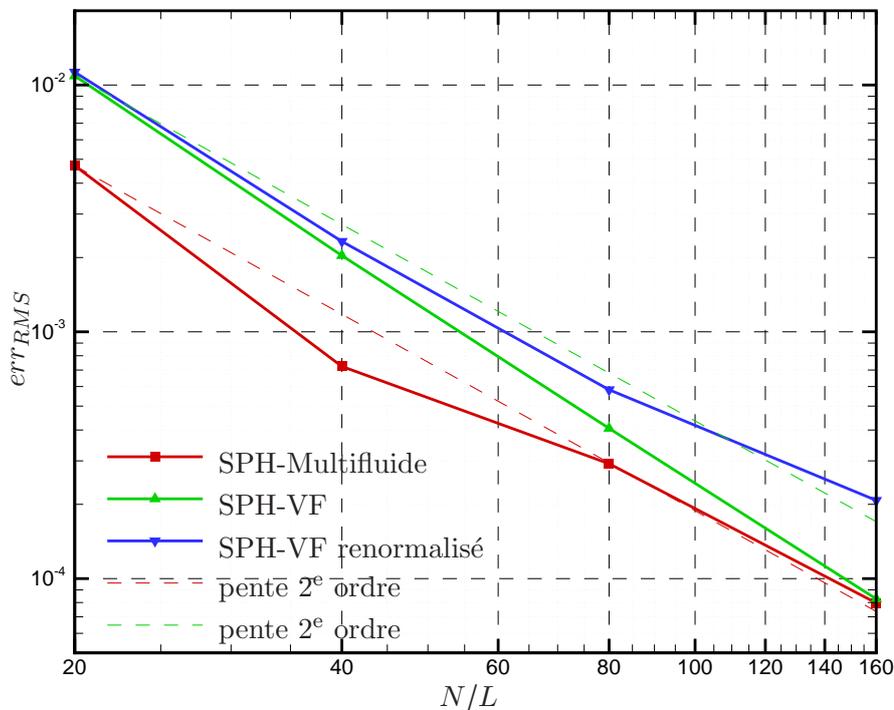


FIG. II.1.5 – Ordre de convergence en espace.

On observe (voir figure II.1.5) que la formulation SPH-VF converge avec un ordre légèrement supérieur à 2 (à noyau identique). Néanmoins, on peut remarquer qu'à faible résolution, cette formulation est moins précise que la formulation SPH-Multifluide. La

dissipation excessive induite par le limiteur de gradient (cf. §I.3.3.2.3) pourrait expliquer ce manque de précision.

Quant à la renormalisation du gradient du noyau, son utilisation semble mener au contraire du résultat attendu (augmentation de la précision spatiale qui permettrait de se rapprocher du 2^e ordre théoriquement).

Remarque :

Par ailleurs nous avons étudié aussi l'influence des coefficients C_{CFL_a} et C_{CFL_v} pour les deux formulations. Avec le schéma d'avance en temps employé (Runge-Kutta 4^e ordre), le coefficient de la condition restrictive sur l'acoustique C_{CFL_a} peut être égal à 2,5 pour la formulation SPH-Multifluide (cf. Colagrossi et Landrini (2003)) et égal à 4,6 pour la formulation SPH-VF (voir l'analyse faite par Guilcher (2008)). Ceci a été vérifié sur ce cas. Il a aussi été testé l'influence du coefficient de restriction sur les effets visqueux C_{CFL_v} : la différence relative entre un calcul mené avec ce coefficient égal à 0,1 et un autre calcul avec $C_{CFL_v} = 1$ est inférieure à $2 \cdot 10^{-4}$.

II.1.5.3 Cas bifluide

Nous allons étudier ici la précision des formulations sur un cas d'écoulement de Poiseuille mettant en jeu deux fluides. L'un d'entre eux sera toujours de l'eau et l'autre fluide n'aura pas des propriétés physiques très éloignées de manière à ne pas engendrer une zone de trop fort cisaillement à l'interface. De même, compte tenu de ce qui a été mentionné plus haut sur les nombres de Reynolds atteignables, le terme source volumique sera réduit ($g = 10^{-2} m \cdot s^{-2}$).

Le canal a une largeur de $0,1m$ pour une hauteur de $0,1m$. L'interface se situe à l'abscisse $x = 0,05m$ avec le fluide \mathcal{X} à gauche et le fluide \mathcal{Y} à droite.

Les paramètres retenus sont les suivants (en unités S.I.) :

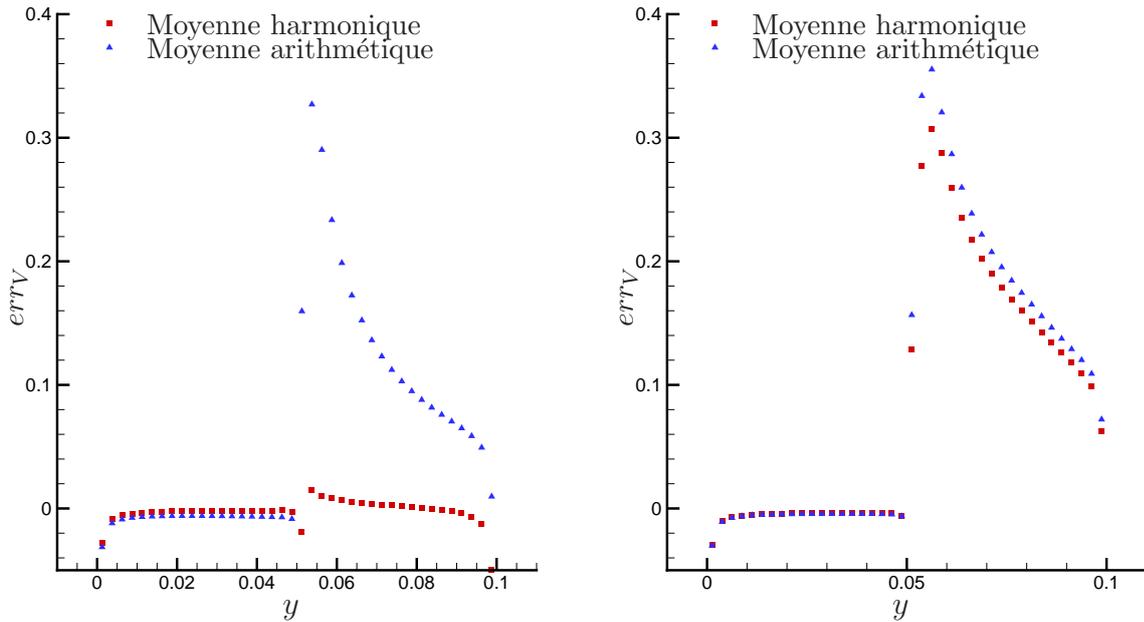
Fluide	ρ_0	μ	v_m	Re
\mathcal{X}	1000	5	$2,7 \cdot 10^{-3}$	0,769
\mathcal{Y}	100	$5 \cdot 10^{-2}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	0,027

La vitesse du son est prise égale à $0,1m \cdot s^{-1}$ dans les deux fluides. La discrétisation spatiale est de 40 points dans la largeur du canal. La formulation utilisée est SPH-Multifluide avec un noyau gaussien.

II.1.5.3.1 Viscosité dynamique inter-particulaire

Bien que ces deux fluides aient la même viscosité cinématique, nous allons montrer l'influence du choix de la viscosité dynamique inter-particulaire (soit une moyenne arithmétique (II.1.1) soit une moyenne harmonique (II.1.2)) sur la précision du calcul. La configuration est celle décrite plus haut.

On remarque clairement (figure II.1.6(a)) que l'erreur maximale sur la vitesse provient, dans le cas de la moyenne arithmétique, des particules proches de l'interface. Plus particulièrement, ce sont celles qui ont la viscosité dynamique la plus faible (coté fluide \mathcal{Y}) qui vont être notablement influencées par ce type de moyenne. Coté fluide \mathcal{X} , les particules



(a) Formulation SPH-Multifluide. Erreur relative sur la vitesse à $t = 10s$

(b) Formulation SPH-VF. Erreur relative sur la vitesse à $t = 10s$

FIG. II.1.6 – Erreurs relatives sur le canal de Poiseuille bifluide suivant la viscosité dynamique inter-particulaire.

vont être aussi légèrement influencées par l'autre viscosité dans le cas de la moyenne harmonique. Mais globalement cette moyenne permet d'avoir une meilleure précision globale (l'erreur relative quadratique moyenne vaut 0,1% contre 1,6% pour la moyenne arithmétique).

Pour la formulation SPH-VF (figure II.1.6(b)), on remarque que l'erreur sur la vitesse est, quelle que soit la moyenne utilisée, proche de la moyenne arithmétique. Afin d'expliquer une partie de l'origine de cette erreur, il est nécessaire de rappeler que, dans cette formulation, la viscosité dynamique de chaque particule est déjà estimée comme un barycentre de la viscosité dynamique de chaque fluide (I.3.18), pondéré par la fraction volumique. Or celle-ci va avoir tendance à diffuser à l'interface de telle sorte que la viscosité dynamique de chaque particule va être déjà influencée par la viscosité de l'autre fluide (via la fraction volumique).

L'observation de cette fraction volumique en fin de simulation (figure II.1.7(a)) montre que celle-ci aura plus diffusé à l'interface avec l'utilisation d'une moyenne harmonique pour la viscosité dynamique inter-particulaire. On peut supposer que ce schéma étant plus précis sur la vitesse que celui de la moyenne arithmétique (cf. figure II.1.6(b)), il va engendrer une diffusion plus forte à l'interface. Ce qui aura pour conséquence de lisser encore davantage le saut de viscosité dynamique (figure II.1.7(b)) et de minimiser la contrainte de cisaillement à l'interface. D'où un schéma légèrement plus précis. Néanmoins, l'erreur reste grande dans le fluide \mathcal{Y} et diminuera donc la précision de cette formulation.

II.1.5.3.2 Convergence en espace

Afin de déterminer l'ordre de convergence de chacune des formulations sur le cas bifluide, nous comparons la précision sur le débit calculé avec 4 résolutions différentes :

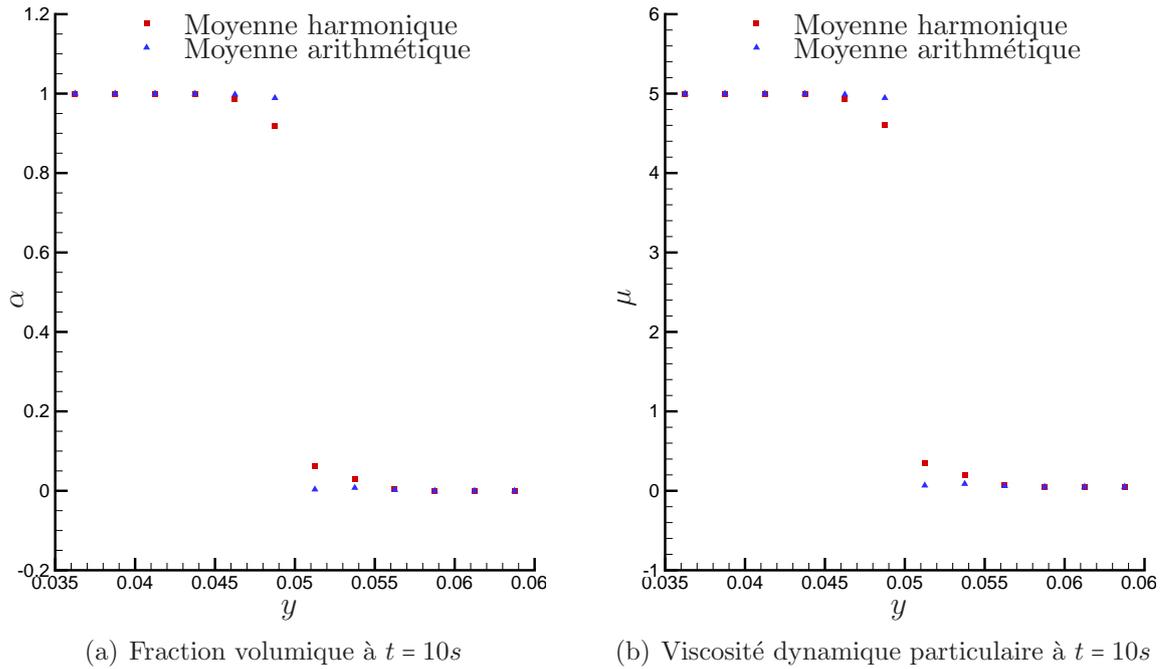


FIG. II.1.7 – Formulation SPH-VF.

20, 40, 80 et 160 points de discrétisation dans la largeur du canal.

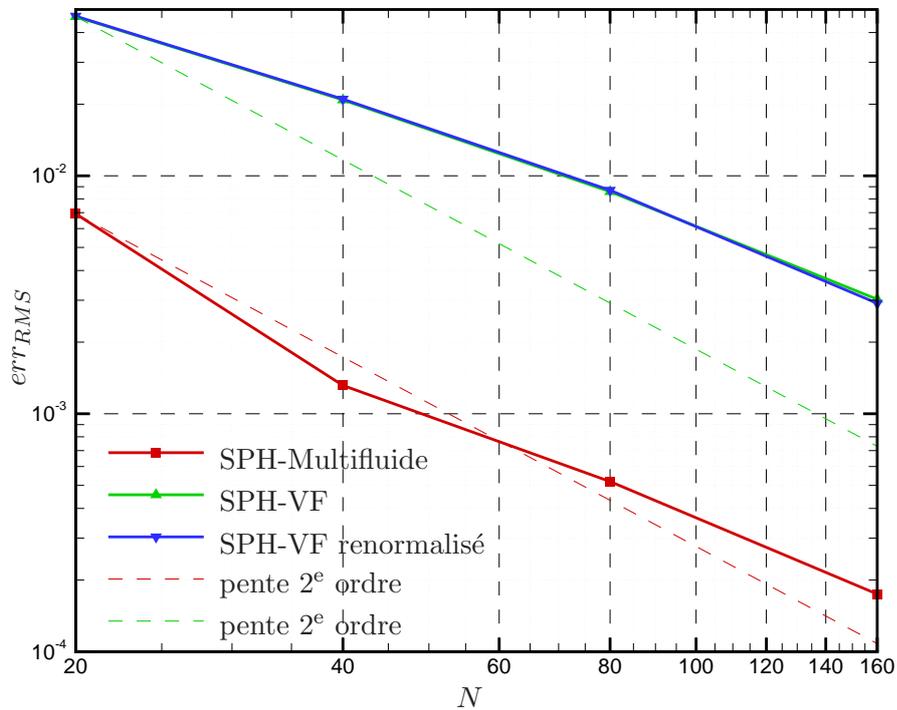


FIG. II.1.8 – Ordre de convergence en espace.

Figure (II.1.8) on retrouve les tendances observées lors des simulations monofluides pour la formulation SPH-Multifluide. Celle-ci converge avec un ordre proche de 2. Par contre, comme mentionné plus haut pour la formulation SPH-VF, l'erreur générée à l'interface se propage dans le fluide \mathcal{Y} et dégrade fortement la précision du calcul.

Remarque :

On peut rappeler que, dans le cas de la formulation SPH-VF, la résolution du problème de Riemann se fait localement de manière unidimensionnelle. Ainsi pour les interactions à cheval sur l'interface, et donc soumises principalement à un tenseur de contrainte de cisaillement, la précision du modèle sera faible. Pour pallier cela, il serait nécessaire d'utiliser un solveur de Riemann bi-dimensionnel mais ceux-ci sont beaucoup plus complexes à mettre en œuvre et font encore l'objet de recherches.

Conclusion

Concernant la validation de la modélisation des effets visqueux, nous avons donc mené celle-ci sur les deux formulations et dans deux configurations, monofluide et bifluide. Si, sur le cas monofluide, les différences entre les deux formulations ne sont pas très importantes, elles le deviennent par contre sur le cas bifluide, et sont toujours à l'avantage de SPH-Multifluide. Comme cela a été souligné, la dissipation excessive induite par la correction faite dans la formulation SPH-VF impacte fortement ses résultats en bifluide.

Il serait aussi intéressant d'effectuer d'autres cas de validation des effets purement visqueux sur des problèmes possédant une solution analytique mais présentant une moins forte directionnalité de l'écoulement. Un cas couramment employé est celui de la cavité entraînée. Cependant il ne peut pas être décliné en version bifluide. Nous verrons plus loin (au chapitre [III.2](#)) le cas des instabilités de Rayleigh-Taylor qui peut être utilisé en tant que validation des effets visqueux bifluides.

Chapitre II.2

Les effets de tension superficielle

II.2.1 La modélisation adoptée

Comme nous l'avons vu lors de la modélisation physique des effets de tension superficielle, ceux-ci se traduisent par une relation de saut de pression à l'interface (relation de Laplace I.1.3). La mise en œuvre numérique de cette approche ne peut se faire que si l'on est capable de localiser exactement l'interface. Cela est possible avec la Ghost Fluid Method basée une méthode Level Set (cf. *e.g.* Tanguy (2004)).

Cependant nous avons déjà vu qu'il est fortement difficile de déterminer précisément la position de l'interface dans la méthode SPH (quelle que soit sa formulation). Des astuces numériques basées sur les propriétés de la matrice de renormalisation (cf. Guilcher (2008)) permettent d'avoir une approximation de cette position mais cela n'est pas suffisant pour implémenter correctement cette approche.

Nous allons donc nous baser sur une approche couramment pratiquée dans les méthodes Volume Of Fluid qui consiste à rajouter une densité volumique de force adéquate \vec{F}^{ts} dans l'équation de quantité de mouvement¹ de manière à reproduire le comportement du saut de pression physique. Elle peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\vec{F}^{ts} = \sigma \kappa \delta_I \vec{n}_I$$

où δ_I est la fonction de Dirac portée par l'interface, κ la courbure locale et \vec{n}_I est la normale à l'interface. C'est cette modélisation qui est choisie par Morris (2000). Cependant elle fait appel au calcul de la courbure et à la détermination de la normale à l'interface, qui sont des opérations délicates numériquement avec la méthode SPH. Il utilise aussi une autre approximation proposée par Brackbill (Brackbill *et alii* (1992)) et largement adoptée : l'approche Continuum Surface Force (C.S.F.). Une variante de celle-ci, plus stable numériquement sera plutôt utilisée : l'approche Continuum Surface Stress (C.S.S.). Celle-ci s'écrit de la manière suivante :

$$\vec{F}^{ts} = \vec{\nabla} \cdot \left(\sigma \|\vec{\nabla} C\| \mathbb{I} - \sigma \frac{\vec{\nabla} C}{\|\vec{\nabla} C\|} \otimes \vec{\nabla} C \right) \quad (\text{II.2.1})$$

où C est une fonction indicatrice de phase, valant 0 pour un des fluides et 1 pour l'autre. Pour la formulation SPH-VF dans laquelle une fraction de volume ayant la même propriété est nativement incluse, C est pris égal à la fraction volumique d'équilibre α_* .

¹soit $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\text{div}(p\mathbb{I}) + \text{div}\mathbf{T}^v + \vec{F}^{ts} + \vec{S}$

On peut réécrire cette densité volumique de force sous la forme suivante :

$$\vec{F}^{ts} = \vec{\nabla} \cdot \mathbb{T}^{ts} \quad \text{où} \quad \mathbb{T}^{ts} = \sigma \|\vec{\nabla} C\| (\mathbb{I} - \vec{n}_I \otimes \vec{n}_I)$$

et où la normale à l'interface est définie par $\vec{n}_I = \frac{\vec{\nabla} C}{\|\vec{\nabla} C\|}$. Si l'on applique à ce tenseur \mathbb{T}^{ts} un vecteur quelconque \vec{x} , on obtient :

$$\mathbb{T}^{ts} \cdot \vec{x} = \sigma \|\vec{\nabla} C\| (\vec{x} - \vec{n}_I \otimes \vec{n}_I \cdot \vec{x}) = \sigma \|\vec{\nabla} C\| (\vec{x} - \vec{n}_I (\vec{x} \cdot \vec{n}_I)).$$

On reconnaît dans le membre de droite, la projection de \vec{x} sur le plan tangent à l'interface. Ceci montre que l'effort \vec{F}^{ts} associé au tenseur \mathbb{T}^{ts} est bien un effort tangent à l'interface, ce qui est cohérent avec la notion d'effort de tension de surface (cf. *e.g.* [Chantepedrix \(2004\)](#)).

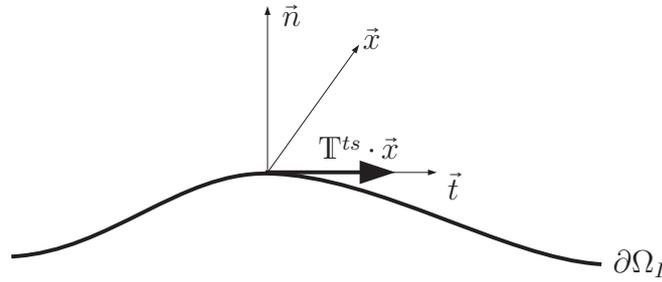


FIG. II.2.1 – Propriété de projection sur la tangente \vec{t} du tenseur \mathbb{T}^{ts} .

Comme il a été déjà mentionné, cette approche a été aussi adoptée par la communauté SPH. Il a été alors remarqué que cette force volumique de tension de surface pouvait engendrer localement des pressions négatives [Morris \(2000\)](#). Or la méthode SPH est fortement sensible à la présence locale de pressions négatives qui conduit à des appariements indésirés de particules [Monaghan \(2000\)](#). Il a été proposé par [Hu et Adams \(2006\)](#) de modifier le tenseur \mathbb{T}^{ts} pour éviter ces pressions négatives de la façon suivante :

$$\mathbb{T}^{ts} = \sigma \|\vec{\nabla} C\| \left(\frac{1}{d} \mathbb{I} - \vec{n}_I \otimes \vec{n}_I \right)$$

où d est la dimension de l'espace. Hors des bénéfices numériques attendus (examinés plus loin lors de la validation), il est important de remarquer que l'introduction du terme $1/d$ change la propriété de projection sur le plan tangent à l'interface du tenseur des effets de tension de surface : celle-ci n'est plus respectée et l'on ne peut donc plus parler *stricto sensu* d'efforts de tension de surface.

Par la suite, le schéma de discrétisation numérique de cette modélisation C.S.S. va dépendre du choix de l'interpolateur gradient discret SPH. Pour la formulation SPH-Multifluide, dans un premier temps, le gradient de la fonction indicatrice C va être calculé par :

$$\vec{\nabla} C_i = \sum_j \left(\frac{C_i}{n_i} + \frac{C_j}{n_j} \right) \vec{\nabla} W_{ij}$$

et dans un second temps, la divergence du tenseur sera calculée par :

$$\vec{F}_i^{ts} = \sum_j \left(\frac{\mathbb{T}_i^{ts}}{n_i} + \frac{\mathbb{T}_j^{ts}}{n_j} \right) \vec{\nabla} W_{ij}.$$

Pour la formulation SPH-VF, le gradient de la fraction volumique est calculé par :

$$\vec{\nabla}\alpha_i = \sum_j \alpha_{ij} \cdot \vec{\nabla}W_{ij}\omega_j$$

tandis que la divergence du tenseur est calculée par :

$$\vec{F}_i^{ts} = \sum_j \mathbb{T}_{ij}^{ts} \cdot \vec{\nabla}W_{ij}\omega_j.$$

Dans les deux formulations, le tenseur discret \mathbb{T}_i^{ts} est calculé à partir du gradient de la fonction indicatrice $\vec{\nabla}C_i$ avec la relation (II.2.1).

II.2.2 Modélisation alternative

Lorsque les effets de la tension superficielle sont faibles dans l'écoulement étudié (*i.e.* le nombre de Bond $Bo = \rho g L^2 / \sigma$, caractéristique des effets de tension superficielle par rapport aux forces de volumes (ici la gravité), est grand), les effets de la modélisation vue précédemment deviennent négligeables à l'interface. Dans ces cas, il peut être nécessaire d'assurer numériquement une certaine cohésion entre les particules modélisant chaque fluide.

Colagrossi a ainsi introduit dans Colagrossi et Landrini (2003), suivant Nugent et Posch (2000), une force locale répulsive qui permet d'empêcher l'interpénétration indésirée de particules d'un fluide dans l'autre. Celle-ci prend la forme d'une modification du gradient de pression, qui peut s'écrire pour la formulation SPH-Multifluide Grenier *et alii* (2009) de la façon suivante :

$$\vec{\nabla}p_i = \sum_j \left(\frac{p_i}{n_i} + \frac{p_j}{n_j} \right) \vec{\nabla}W_{ij} + \epsilon_I \sum_{j \notin \mathcal{X}} \left(\left| \frac{p_i}{n_i} \right| + \left| \frac{p_j}{n_j} \right| \right) \vec{\nabla}W_{ij} \quad \forall i \in \mathcal{X} \quad (\text{II.2.2})$$

où ϵ_I est de l'ordre de 0,01–0,1. La deuxième somme possède un effet correctif uniquement dans la région proche de l'interface, pour les interactions croisées (où $i \in \mathcal{X}$ tandis que $j \notin \mathcal{X}$).

De part l'approche complètement différente (avec l'étude de l'hyperbolicité du système d'équations), il est plus difficile d'envisager ce genre de correction pour la formulation SPH-VF où l'on ne distingue pas les phases.

II.2.3 Stabilité temporelle

L'introduction de la modélisation des effets de tension superficielle pourrait, *a priori*, influencer sur la stabilité numérique du schéma complet et nécessiterait d'imposer une condition restrictive sur le pas de temps. D'après Tanguy (2004), l'analyse numérique ne semble pas justifier cette condition, qui serait plutôt basée sur une interprétation physique : la restriction temporelle aurait pour but de permettre la résolution correcte des ondes capillaires dans une maille. La restriction temporelle est plutôt nécessaire, d'après Tanguy (2004), pour assurer la convergence temporelle.

Suivant [Brackbill *et alii* \(1992\)](#), [Morris \(2000\)](#) et [Hu et Adams \(2006\)](#) proposent une condition restrictive sur les pas de temps basée sur la relation suivante :

$$\Delta t^{ts} \leq C_{CFLts} \left(\frac{\min(\rho_x, \rho_y) h^3}{2\pi\sigma} \right)^{1/2}$$

où ces auteurs prennent la constante C_{CFLts} égale à 0,25.

D'autre part, les lois d'état choisies imposent une condition restrictive sur le choix de la vitesse du son numérique dans l'écoulement [Chanteperdrix \(2004\)](#). Celle-ci doit assurer que les variations de pressions engendrées par les effets capillaires restent négligeables :

$$\frac{\sigma}{\rho c^2 R} \ll 1. \tag{II.2.3}$$

II.2.4 Conditions aux limites

Comme mentionné lors de l'introduction de la modélisation physique, les effets de capillarité ne sont pas pris en compte. Nous n'effectuons donc aucun traitement spécifique sur les parois.

II.2.5 Validation

Nous allons aborder ici la validation du schéma C.S.S.. Nous ne présenterons ici que des résultats issus de l'implémentation du schéma avec la formulation SPH-Multiphase, n'ayant pas du tout réussi à coupler ce schéma avec la formulation SPH-VF (les investigations sur ce problème n'ont pas été poussées plus loin faute de temps).

II.2.5.1 Courants parasites

Avant de valider ce schéma C.S.S. sur un cas dynamique, nous allons nous intéresser à un artefact numérique produit par cette modélisation volumique de la tension superficielle. En effet, dans la littérature associée à ce schéma ([Brackbill *et alii* \(1992\)](#), [Lafaurie *et alii* \(1994\)](#)), il a été mis en évidence la génération de courants parasites au niveau de l'interface. Cela a aussi été remarqué par [Morris \(2000\)](#) qui a relevé que la présence de ces courants peut être préjudiciable aux simulations SPH (à cause du caractère lagrangien) car cela va engendrer un mélange des points de discrétisation proches de l'interface et avoir un effet de diffusion de celle-ci.

Nous avons effectivement observé ces courants parasites qui vont jusqu'à déstabiliser les simulations. Nous avons seulement cherché à les quantifier pour les formulations étudiées sans proposer par ailleurs une des adaptations des corrections existantes (par exemple, en reconstruisant finement l'interface, en travaillant sur le gradient de pression pour une méthode incompressible, ...cf. [Popinet et Zaleski \(1999\)](#), [Torres et Brackbill \(2000\)](#), [Renardy et Renardy \(2002\)](#), [Francois *et alii* \(2006\)](#) ...).

Pour observer ces courants parasites, on étudie une goutte soumise à aucun champ source autre que la tension superficielle (c'est-à-dire qu'il n'y a ni pesanteur ni déformation initiale). À l'équilibre, l'effort volumique de tension superficielle ne sera compensé que par le gradient de pression.

II.2.5.1.1 Mise en œuvre numérique

Nous allons nous placer dans la configuration décrite dans [Renardy et Renardy \(2002\)](#) pour étudier ces courants parasites.

La formulation utilisée est donc la SPH-Multifluide, avec un noyau cubique et le terme de viscosité présenté plus haut. La loi d'état est celle linéarisée.

Le domaine de calcul est de dimension $1m \times 1m$ et la résolution spatiale est identique dans les 2 directions de l'espace. Le pas de temps est imposé à $\Delta t = 10^{-5}s$. La goutte est un disque centré au milieu du domaine de calcul et de rayon $R = 0,125m$. Les deux fluides ont une masse volumique ($\rho = 4kg.m^{-3}$) et une viscosité dynamique ($\mu = 1kg.m^{-1}.s^{-1}$) identiques, le coefficient de tension superficielle entre ces deux fluides étant égal à $\sigma = 0,357N.m^{-1}$.

La condition (II.2.3) impose une vitesse du son numérique minimale et celle-ci est prise égale à $10m.s^{-1}$ pour les deux fluides.

II.2.5.1.2 Convergence spatiale

Les calculs ont été effectués pour différentes résolutions spatiales. L'amplitude du champ de vitesse a été considérée suivant plusieurs normes (N_∞, N_2, N_1) sur le domaine de calcul.

Δx	N_∞	N_2	N_1	
1/96	$4,96.10^{-2}$	$7,74.10^{-3}$	$2,28.10^{-3}$	avec 1/d
1/128	$5,06.10^{-2}$	$8,20.10^{-3}$	$2,42.10^{-3}$	
1/160	$5,71.10^{-2}$	$8,31.10^{-3}$	$2,43.10^{-3}$	
1/192	$5,32.10^{-2}$	$8,42.10^{-3}$	$2,46.10^{-3}$	
1/96	$1,87.10^{-2}$	$1,61.10^{-3}$	$3,38.10^{-4}$	sans 1/d
1/128	$1,86.10^{-2}$	$1,14.10^{-3}$	$2,33.10^{-4}$	
1/160	$2,50.10^{-2}$	$1,36.10^{-3}$	$2,63.10^{-4}$	
1/192	$1,81.10^{-2}$	$1,18.10^{-3}$	$2,48.10^{-4}$	

TAB. II.2.1 – Norme de l'amplitude de la vitesse à $t = 200.\Delta t = 2.10^{-3}s$ suivant la résolution spatiale et selon le terme correctif employé dans le tenseur \mathbb{T}^{ts} .

Contrairement à [Renardy et Renardy \(2002\)](#), nous pouvons constater que l'amplitude de ces courants parasites ne diminue pas avec le raffinement en espace, quelle que soit la norme utilisée. On peut simplement constater que la formulation originale du schéma C.S.S. (c'est-à-dire sans 1/d dans le tenseur \mathbb{T}^{ts}) produit des courants parasites de moindre amplitude qu'avec la correction de [Hu et Adams \(2006\)](#) (qui inclut ce terme 1/d).

L'observation du champ de vitesse autour de l'interface de la goutte (figure II.2.2) montre bien cette amplitude qui ne décroît pas avec le raffinement spatial.

Comme rappelé en présentation de ce cas, il serait donc nécessaire de travailler plus finement sur l'implémentation du schéma C.S.S. dans la formulation SPH-Multiphase pour adapter les techniques existantes permettant de réduire ces courants parasites. Ceux-ci

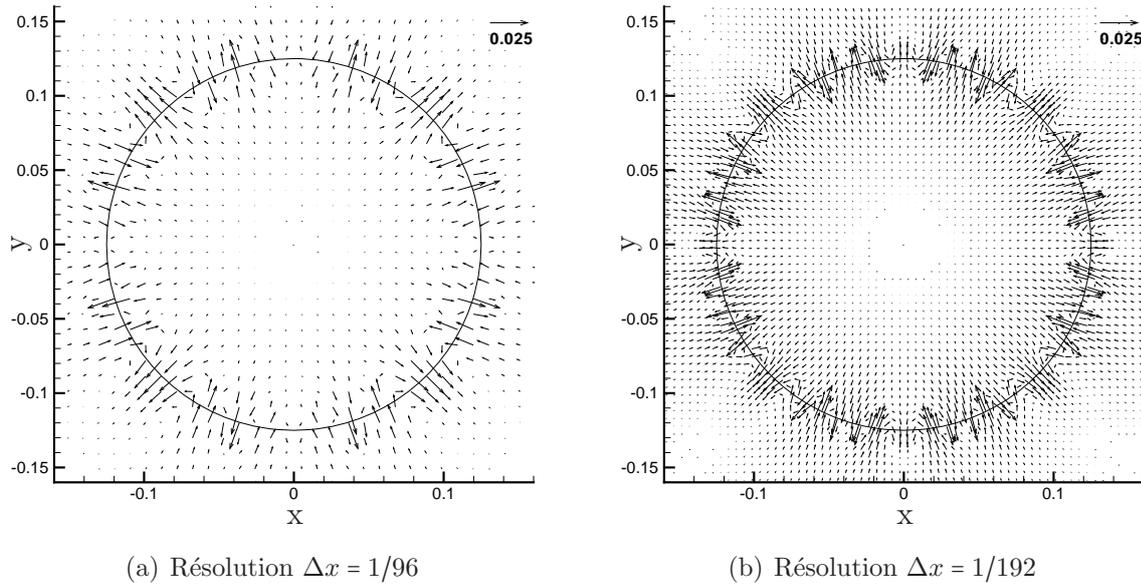


FIG. II.2.2 – Courants parasites à $t = 2.10^{-3}s$ (sans $1/d$). Le trait plein matérialise l'interface pour faciliter l'appréciation du phénomène.

restent donc présents dans les simulations qui seront présentées avec ce schéma par la suite.

II.2.5.2 Goutte oscillante

Nous allons maintenant valider l'implémentation de ce schéma C.S.S. pour les 2 formulations sur un cas dynamique où ces effets de tension superficielle sont prédominants. Toujours en apesanteur, il s'agit cette fois du cas d'une goutte oscillante. Le terme source de gravité n'interviendra donc pas et les effets d'inertie seront uniquement contrebalancés par les effets de tension superficielle.

L'excitation initiale de la bulle est réalisée au moyen d'un champ de vitesse (figure II.2.3), appliqué indistinctement du fluide, et qui possède la propriété d'être à divergence nulle :

$$\vec{v} = V_0 e^{-\frac{r}{r_0}} \begin{pmatrix} \frac{x}{r_0} \left(1 - \frac{y^2}{r_0 r}\right) \\ -\frac{y}{r_0} \left(1 - \frac{x^2}{r_0 r}\right) \end{pmatrix}$$

où r est la distance du point (x, y) au centre de la goutte, V_0 et r_0 la vitesse et le rayon caractéristiques du champ initial.

De cette configuration initiale relativement simple (ou d'une autre faite par une déformation initiale en ellipse de la goutte), une approche analytique ne nous permet pas de déterminer complètement les divers champs physiques de la goutte oscillante. Néanmoins, une analyse théorique des effets capillaires [Lamb \(1932\)](#) permet de relier la pulsation des oscillations de la goutte au coefficient de tension superficielle : cf. §A. On en retiendra la détermination du mode d'oscillation le plus important (*i.e.* $n = 2$; cf. l'annexe pour la signification de n) pour les deux cas qui seront étudiés :

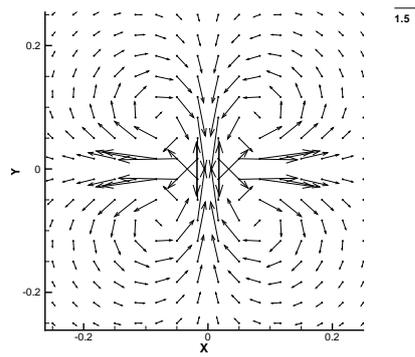


FIG. II.2.3 – Zoom sur le champ de vitesse initial.

- quand la densité ρ_e du fluide environnant la goutte est égale à celle de la goutte :

$$\omega^2 = \frac{18}{5} \frac{\sigma}{R^3 \rho_i} \quad (\text{II.2.4})$$

- quand la densité ρ_e du fluide environnant la goutte est négligeable devant celle de la goutte ($\rho_e \ll \rho_i$) :

$$\omega^2 = \frac{6\sigma}{R^3 \rho_i} \quad (\text{II.2.5})$$

où R est le rayon de la goutte.

Nous nous attacherons donc à caractériser les effets de tension superficielle par la capacité des diverses formulations à respecter cette relation théorique.

II.2.5.2.1 Mise en œuvre numérique

On se place dans la configuration numérique des tests effectués par [Hu et Adams \(2006\)](#). Ainsi, de façon semblable au test précédent, la formulation utilisée est donc SPH-Multifluide, avec un noyau gaussien et le terme de viscosité présenté plus haut.

II.2.5.2.2 Faible ratio de densité

Afin de pouvoir discriminer l'effet de la tension superficielle, on se place dans un cas où le ratio de densité entre les deux fluides n'a pas d'influence. Les deux fluides sont donc identiques avec une masse volumique égale à $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ (avec $\gamma = 1,4$) et une viscosité dynamique égale à $\mu = 0,05 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, le coefficient de tension superficielle entre ces deux fluides étant égal à $\sigma = 0,357 \text{ N.m}^{-1}$.

Le domaine de calcul est de dimension $1\text{m} \times 1\text{m}$ et la résolution spatiale est identique dans les 2 directions de l'espace. La goutte est un disque centré au milieu du domaine de calcul et de rayon $R = 0,1875\text{m}$. La vitesse et le rayon caractéristiques introduits plus haut sont égaux respectivement à $10\text{m}.\text{s}^{-1}$ et $0,05\text{m}$.

La condition (II.2.3) impose une vitesse du son minimale à considérer numériquement et celle-ci est prise égale à $23\text{m}.\text{s}^{-1}$ pour les deux fluides. [Hu et Adams \(2006\)](#) utilisent une vitesse plus faible, de l'ordre de $10\text{m}.\text{s}^{-1}$.

Pour caractériser le mouvement de pulsation de la goutte, on pourrait observer la période de pulsation d'un des diamètres de la goutte (suivant une des directions principales). Cela imposerait néanmoins de savoir correctement situer la position maximale (ou minimale) de l'interface suivant la direction choisie ce qui est assez peu précis avec

le formalisme SPH. Pour contourner cela, on va s'intéresser à la pulsation du centre de gravité d'un quart de goutte (celui pour $x > 0$ et $y > 0$ en l'occurrence).

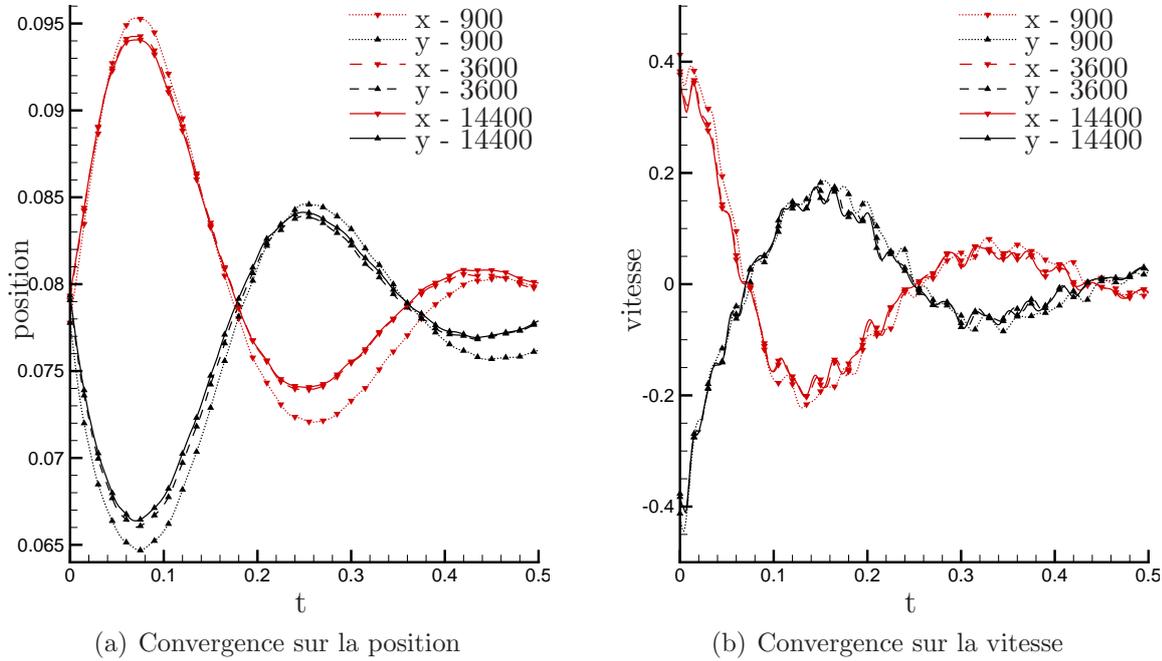


FIG. II.2.4 – Convergence en espace sur la position et la vitesse du centre de gravité du quart supérieur droit de la goutte. Calculs sans terme correctif en $1/d$.

L'étude de la convergence spatiale (figure II.2.4) montre que celle-ci s'effectue de manière assez rapide, et ce autant sur la position que sur la vitesse du centre de gravité du quart de la goutte.

Si l'on compare la période de pulsation relevée ($0,36s$) à celle prédite par la théorie mentionnée plus haut (éq. (II.2.4), soit $0,27s$), on remarque que la simulation numérique excède largement l'estimation analytique (+34%). Cependant, il faut noter que la formulation employée est basée sur les équations de Navier-Stokes (qui s'appliquent ici à un écoulement visqueux, de nombre de Reynolds -basé sur le diamètre de la goutte et la vitesse relevée numériquement- égal à $0,75$), tandis que le raisonnement analytique est fondé sur les équations d'Euler. Le calcul numérique introduit alors une pseudo-période propre à la viscosité. Cela est aussi confirmé par le calcul du nombre d'Ohnesorge ($Oh = \mu_i / \sqrt{\sigma \rho_i R} = 0,19$), qui est ici très grand : les effets de viscosité sont plus importants que ceux de la tension superficielle.

Des travaux, [Miller et Scriven \(2006\)](#), [Prosperetti \(1980\)](#), reprenant ceux de [Lamb \(1932\)](#), ont été effectués en prenant compte ces effets visqueux. Ils aboutissent à corriger la relation sur les modes de pulsation en introduisant les termes dissipatifs. Ces travaux ayant été effectués pour le cas d'une goutte sphérique et leur adaptation n'étant pas immédiate, nous n'avons pas eu le temps de les redévelopper pour notre cas de goutte bidimensionnelle. Nous ne pouvons donc pas quantifier cet allongement de la période d'oscillation.

Remarque :

Comme noté dans Morris (2000), à haute résolution, le schéma C.S.S. implémenté en SPH peut générer localement des pressions négatives. Pour éviter cela, il peut être utilisé la procédure de contrôle de l'instabilité de tension Monaghan (2000). Au lieu d'implémenter cette correction supplémentaire purement numérique, nous avons préféré tirer parti du fait que ces simulations ne possédant pas de surface libre, on peut librement ajouter une pression de fond². Cela ne change pas la solution théoriquement mais son introduction dans l'équation d'état permet d'éviter d'avoir des pressions relatives négatives et les instabilités numériques qui s'ensuivent.

Cependant, il a été remarqué que l'utilisation d'une pression de fond de valeur trop grande (typiquement la pression atmosphérique) ne permettait pas de poursuivre correctement les simulations. En effet, lors de l'adimensionnalisation des équations (cf. §I.1.3), la longueur de référence choisie est, pour des raisons numériques (liées à l'utilisation du ratio r/h , cf. §I.2.1.1.1), la longueur de lissage h du schéma d'interpolation. Celle-ci est forcément très petite devant la longueur physique de référence du problème (dans le sens où la résolution numérique du problème impose des éléments de discrétisation petits devant la taille du domaine de calcul). La pression de fond peut donc être très différente de la pression de référence découlant de l'adimensionnalisation, et ainsi poser problème d'un point de vue purement numérique.

Ainsi, la détermination de cette pression de fond n'est pas aisée. Dans ce cas de validation en apesanteur, la seule pression de référence du problème (à savoir le saut de pression à travers l'interface, $\Delta P = \sigma/R$) ne suffit pas à avoir des simulations stables, et la pression de fond choisie est prise égale à $50Pa$.

II.2.5.2.3 Fort ratio de densité

L'étape suivante consiste à vérifier si la formulation employée reproduit correctement les périodes de pulsation de la goutte oscillante (caractérisées par la relation (II.2.5)) en fonction du coefficient de tension superficielle.

La configuration de ce deuxième cas de validation est similaire au cas précédent. Le seul point différent est le ratio de densité entre les deux fluides qui est, cette fois, important (de l'ordre de 1000). Le fluide dans la goutte a une masse volumique égale à $\rho_i = 1kg.m^{-3}$ tandis que le fluide environnant possède une masse volumique beaucoup plus faible : $\rho_e = 10^{-3}kg.m^{-3}$. Les coefficients polytropiques pour l'équation de Tait sont identiques : $\gamma = 1,4$.

Le ratio sur la viscosité est plus faible : le fluide intérieur a une viscosité dynamique égale à $\mu_i = 5.10^{-2}kg.m^{-1}.s^{-1}$ tandis qu'elle vaut $\mu_e = 5.10^{-4}kg.m^{-1}.s^{-1}$ pour le fluide extérieur.

À nouveau, le domaine de calcul est de dimension $1m \times 1m$ et la résolution spatiale est identique dans les 2 directions de l'espace. La goutte est un disque centré au milieu du domaine de calcul et de rayon $R = 0,2m$. De façon à minimiser les effets non-linéaires de déformation de l'interface et à réduire les effets de la viscosité (qui ont tendance à fausser la relation II.2.5 ; ici $Oh = 0,1$), l'amplitude de la vitesse imposée initialement est fortement réduite par rapport au cas précédent : on a $V_0 = 1m.s^{-1}$ et toujours $r_0 = 0,05m$.

De manière à respecter la condition (II.2.3), la vitesse du son choisie est égale à $40m.s^{-1}$. La pression de fond est prise égale à $50Pa$.

²Avec une surface libre, cela n'est pas faisable du fait de l'incidence que cela aurait sur la prise en compte correcte des conditions de surface libre (cf. §I.2.1.3.2).

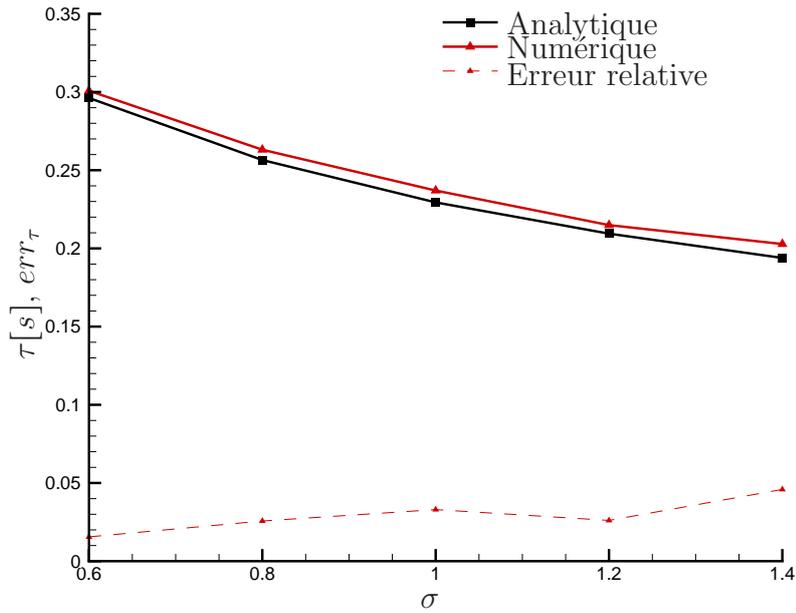


FIG. II.2.5 – Comparaison entre la période d’oscillation donnée par la relation analytique (II.2.5) et les résultats de la simulation numérique et erreur relative. Résolution spatiale : 60×60 points.

Les résultats numériques (cf. figure II.2.5) obtenus sont satisfaisants. La tendance issue de la relation (II.2.5) est correctement respectée, à 3% près.

L’ordre de convergence en espace de cette formulation a été étudié : voir figure (II.2.6). Celui-ci est compris entre le 1^{er} et le 2^e ordre.

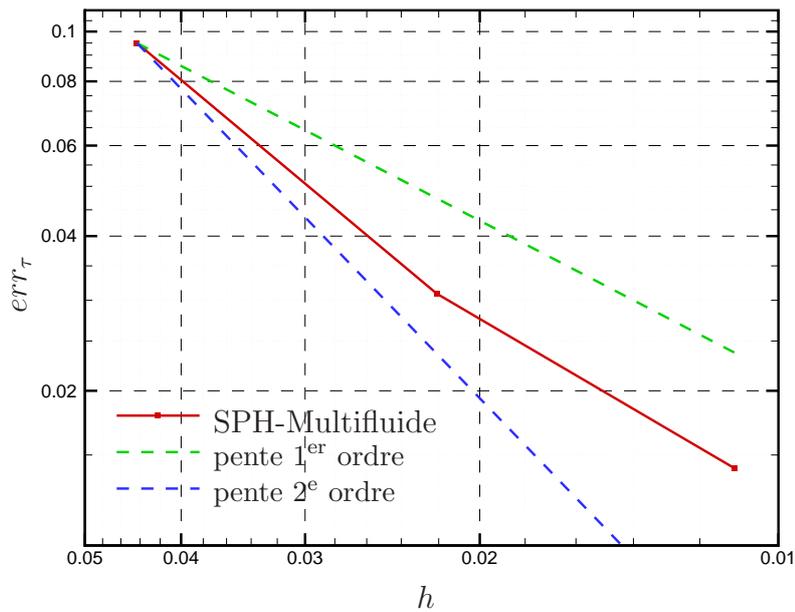


FIG. II.2.6 – Convergence en espace et pente des différents ordres.

II.2.5.2.4 Effet du terme correctif en $1/d$

Il a été évoqué plus haut le terme correctif (en $1/d$) introduit par Hu & Adams dans le tenseur des effets capillaires. Nous avons montré que ce dernier est altéré par ce terme de correction. Nous allons regarder ici son influence sur la stabilité numérique et sur la pulsation de la goutte.

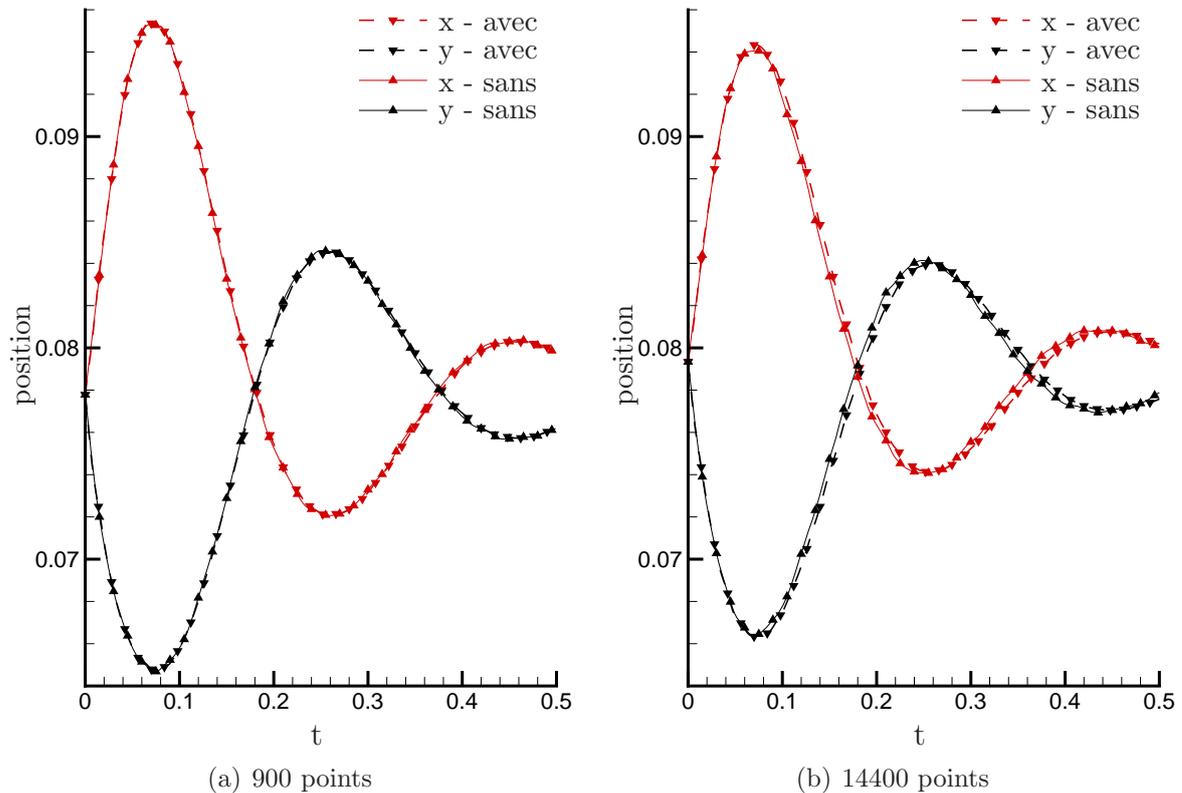


FIG. II.2.7 – Influence du terme $1/d$ sur la période d'oscillation suivant la résolution spatiale. Cas à faible ratio de densité.

Sur le premier cas, en analysant les oscillations de la position du centre de gravité de la goutte (cf. figure II.2.7), on remarque qu'à faible résolution l'influence du terme $1/d$ est effectivement faible. Par contre, à plus forte résolution, ce terme correctif tend à augmenter la période propre d'oscillation. Sur ce cas à faible ratio de densité, la seule référence disponible étant celle du fluide parfait, il n'est pas possible de savoir si cette période est plus proche du cas fluide visqueux.

Sur le deuxième cas, avec un fort ratio de densité, plus favorable à la comparaison à la relation analytique, on observe aussi (figure II.2.8) un décalage entre les pulsations suivant la présence du terme correctif. Mais l'erreur quadratique moyenne de l'erreur relative est relativement peu différente entre les deux approches : inférieure à un quart de point (3,3% avec $1/d$ contre 3,1% sans).

En revanche, on peut observer (cf. figure II.2.9) la nette différence dans le champ de pression simulé suivant la présence ou non de ce terme correctif. Ceci se manifeste tout particulièrement aux premiers instants, quand le terme volumique de modélisation des effets de tension superficielle est prépondérant dans l'équation de quantité de mouvement devant les termes d'inertie.

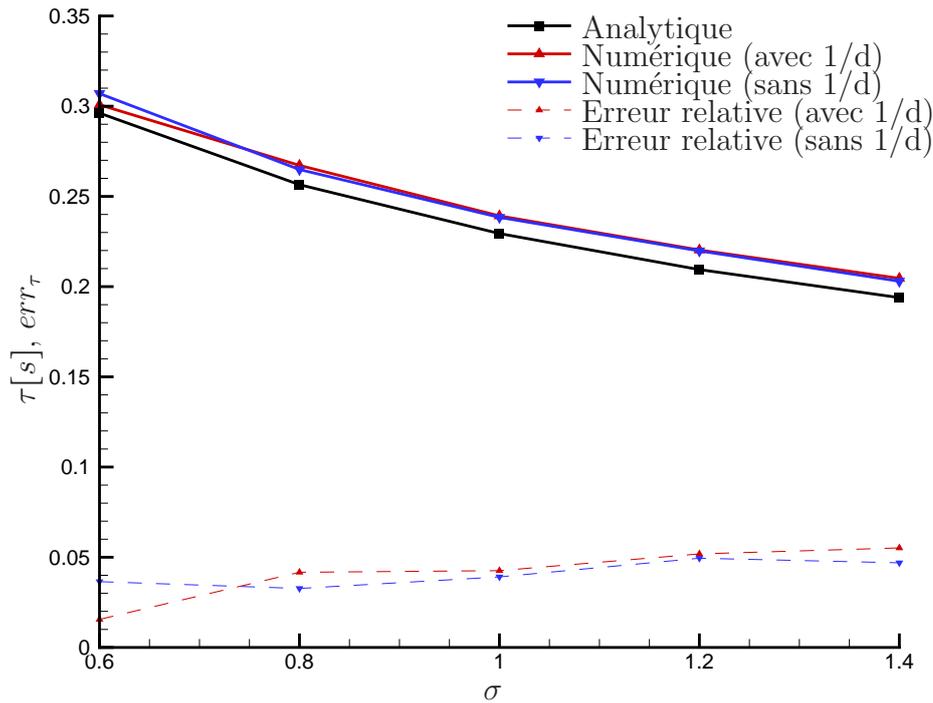


FIG. II.2.8 – Comparaison entre la période d’oscillation donnée par la relation analytique (II.2.5) et les résultats de la simulation numérique suivant la présence du terme $1/d$ et erreur relative. $V_0 = 2m.s^{-1}$.

D’autre part, il n’a été observé aucune différence sur la forme de l’interface suivant la présence de la correction.

Par contre, à plus forte résolution (sur le premier cas à faible ratio de densité, des simulations à 56700 et 230400 points ont été conduites), des instabilités apparaissent effectivement à l’interface (figure II.2.10), ce qui dégrade fortement la précision du modèle de tension superficielle. Mais le fait de rajouter le terme correctif de Hu & Adams n’améliore pas la qualité de la pression à l’interface.

Conclusion

Nous avons mené ici la validation des effets de tension superficielle sur des cas tests de goutte oscillante en apesanteur avec deux ratio de densité différents. Il en ressort que le schéma C.S.S. couplé à la formulation SPH-Multifluide donne des résultats très satisfaisants en terme de prédiction de la pulsation d’oscillation de la goutte, et ce malgré le fait que des courants parasites (artefact numérique) existent et n’aient pas été corrigés.

Toutefois, il convient d’être prudent dans l’utilisation du schéma à haute résolution où les corrections proposées n’apportent pas de réponses satisfaisantes. Il est nécessaire d’être aussi attentif dans la détermination de la pression de fond.

Dans la dernière partie sera présenté un cas de validation plus complexe faisant intervenir ce schéma C.S.S. avec succès (cf. §III.4.2).

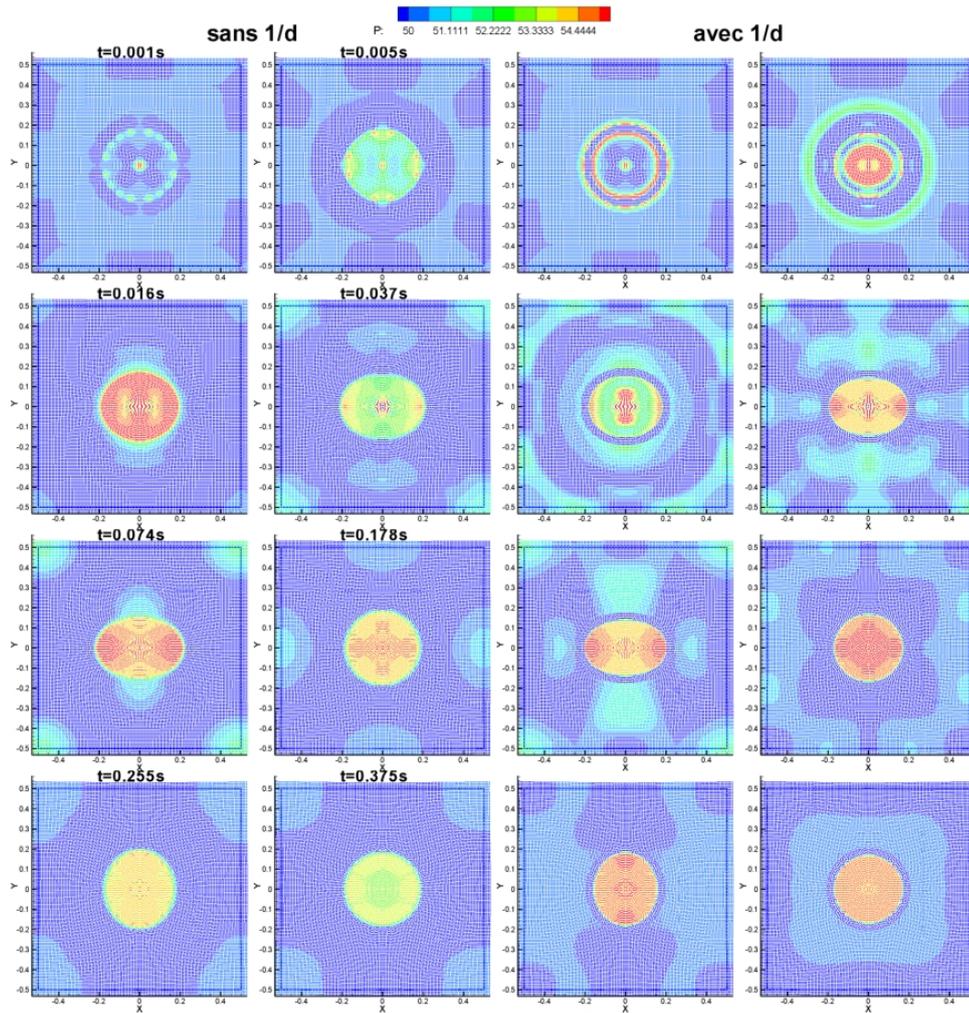


FIG. II.2.9 – Influence du terme $1/d$ sur le champ de pression de la goutte oscillante à différents instants dimensionnels. Faible ratio de densité. Résolution de 14400 points. Les deux colonnes de droite (avec $1/d$) sont aux mêmes instants que les deux colonnes de gauche (sans $1/d$).

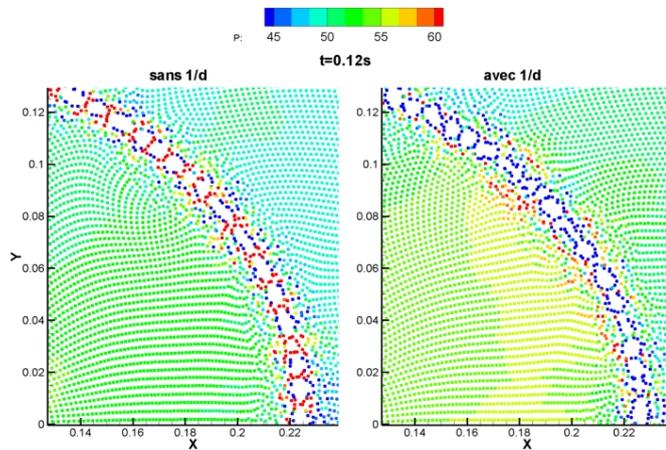


FIG. II.2.10 – Instabilités à haute résolution (230400 points). Influence du terme $1/d$ sur le champ de pression de la goutte oscillante. Faible ratio de densité.

Troisième partie
Cas tests et exemples d'application

Chapitre III.1

Ballottement linéaire

Ce premier cas test va concerner particulièrement la formulation SPH-VF et vise à estimer l'influence de la diffusion numérique à l'interface sur la précision de cette formulation lorsque la résolution spatiale devient importante pour saisir le phénomène physique modélisé.

Dans ce cas de ballottement, les déplacements attendus de l'interface vont donc être relativement faibles devant les discrétisations choisies et la formulation qui pourrait voir son interface diffuser numériquement de manière assez forte.

III.1.1 Problème et solution analytique

Ce problème fait intervenir deux fluides parfaits de densités différentes mis en mouvement dans une cuve bidimensionnelle par une légère accélération \vec{a} perpendiculaire à l'accélération de la pesanteur \vec{g} . Le domaine est représenté ci-dessous.

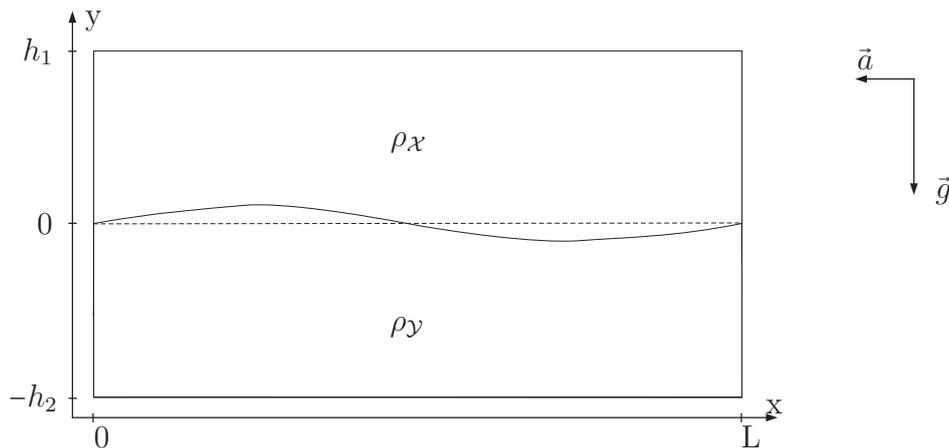


FIG. III.1.1 – Domaine considéré et frontières

Le fluide lourd (de densité ρ_y) est situé sous le fluide léger (de densité ρ_x).

En se plaçant dans le cas où l'accélération transverse reste suffisamment faible, on peut alors supposer que les oscillations créées sont linéaires. En supposant en plus que le fluide est parfait et incompressible, on peut se placer dans le cadre des équations d'Euler mises sous forme potentielle. Avec ces hypothèses, on peut alors résoudre cet écoulement analytiquement (cf. détails de la résolution dans [Chanteperdrix \(2004\)](#)).

La solution instationnaire s'exprime sous forme d'élévation de surface libre ξ par :

$$\xi = \frac{a_0}{g} \left(x - \frac{L}{2} + \sum_{n \geq 0} \frac{4}{Lk_{2n+1}^2} \cos(\omega_{2n+1}t) \cos(k_{2n+1}x) \right)$$

où

$$\begin{cases} k_n &= \frac{n\pi}{L} \\ \omega_n &= \frac{gk_n \Delta \rho}{\rho_1 \coth(k_n h_1) + \rho_2 \coth(k_n h_2)} \end{cases}$$

Cette solution reste valable tant que l'hypothèse de régime linéaire des oscillations est vérifiée, c'est-à-dire que l'amplitude du mode le plus énergétique (pour $n = 0$) reste petite devant la largeur L de la cuve et devant la hauteur h_1 et inférieure à h_2 , soit :

$$\frac{a_0}{g} \ll 1 \quad , \quad \frac{a_0 L}{gh_1} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_0 L}{g} < h_2$$

III.1.2 Configuration numérique

Afin de respecter les critères précédents, la configuration géométrique est choisie telle que :

$$\begin{cases} L &= 1m \\ h_1 &= 1,25m \\ h_2 &= 1m \end{cases}$$

et les accélérations de la pesanteur et transverse valent, respectivement $g = 9,81m.s^{-2}$ et $a_0 = 10^{-2}g$.

Les deux fluides \mathcal{X} et \mathcal{Y} ont les caractéristiques suivantes : leurs densités sont, respectivement, $\rho_{\mathcal{X}0} = 1kg.m^{-3}$ et $\rho_{\mathcal{Y}0} = 1000kg.m^{-3}$; les vitesses du son sont prises égales à $c_{\mathcal{X}} = 30m.s^{-1}$ et $c_{\mathcal{Y}} = 150m.s^{-1}$.

La fraction volumique est initialisée telle que dans la partie supérieure du domaine on ait $\alpha = 1 - \epsilon$ et dans la partie inférieure $\alpha = \epsilon$ avec $\epsilon = 10^{-6}$.

Le nombre de modes utilisés pour comparer les résultats numériques à la solution analytique mentionnée ci-dessus est pris égal à $n = 100$. On s'intéresse aux élévations de surface libre sur les parois, soit en $x = 0$ et en $x = L$.

La discrétisation spatiale est choisie de façon à avoir un certain nombre d'éléments par longueur d'onde du premier mode (soit deux fois la largeur de la cuve). Deux résolutions ont été étudiées de manière à effectuer les comparaisons avec [Chanteperdrix \(2004\)](#) (la convergence en espace n'a donc pas été le critère déterminant pour justifier ces résolutions) : la première avec 40 points dans la largeur de la cuve et la deuxième avec deux fois plus de points. Le pas spatial est identique pour chaque direction de l'espace.

Remarque :

Il est nécessaire de noter que le pas de résolution choisi par Chanteperdrix est différent dans les deux directions de l'espace (il choisit un nombre d'éléments égal à 40×100 et 80×150 alors que le domaine a pour dimensions $1 \times 2,25m$). De manière à assurer la plus grande précision possible de l'interpolation SPH, nous avons choisi d'avoir une répartition

initiale des particules sur une grille cartésienne.

Ainsi, avec le rapport des accélérations imposé, l'amplitude de l'élévation de surface libre sera inférieure à $0,01m$ sur les parois, ce qui est relativement faibles devant les discrétisations choisies (soit $\Delta x = 0.025m$ pour la résolution la plus grossière et $\Delta x = 0.0125m$ pour la plus fine).

Le noyau choisi est la spline cubique. Le nombre de voisins est pris égal à environ 20 (soit $h/\Delta x = 1.2295$).

Avec cette formulation, la position de l'interface est déterminée en suivant la position de la première particule située sous l'interface et proche de la paroi (corrigée d'un demi pas de discrétisation spatial, la particule n'étant pas exactement sur l'interface), ce qui s'est avéré la technique la plus fiable en pratique.

III.1.3 Résultats

III.1.3.1 Avec interface

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans la configuration décrite ci-dessus afin de pouvoir comparer les résultats de la formulation SPH-VF avec ceux issus du formalisme Volumes Finis (cf. [Chanteperdrix \(2004\)](#)).

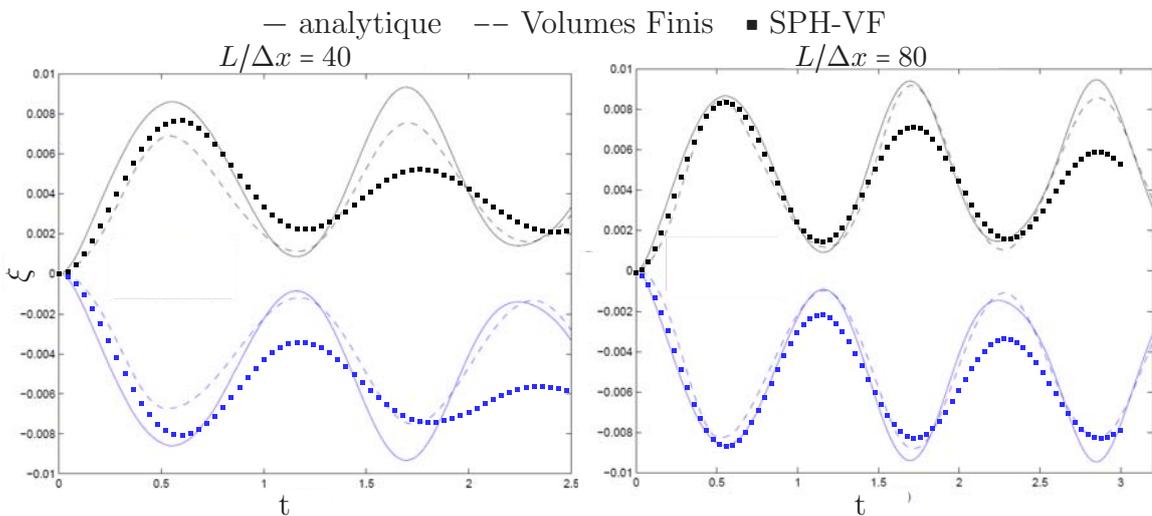


FIG. III.1.2 – Comparaison de l'élévation de surface libre sur les parois gauche ($x = 0$ courbes du bas) et droite ($x = L$ courbes du haut) entre la solution analytique, la formulation Volumes Finis à fraction de volume [Chanteperdrix \(2004\)](#) et SPH-VF

On peut observer (cf. figure [III.1.2](#)) que sur un maillage grossier l'amplitude des oscillations est très fortement atténuée dès la deuxième oscillation. Sur un maillage plus fin, l'amortissement est plus réduit pour la première oscillation mais devient non négligeable pour les suivantes. On retrouve le comportement de la formulation tel qu'il avait été observé lors de l'étude monodimensionnelle des tubes à choc.

Pour compléter cette observation et pour écarter le biais dans la validation que peut constituer la diffusion de l'interface (phénomène qui n'est pas quantifié à proprement

parler avec le choix de suivi des particules proches de l'interface), le même cas va être conduit sans interface mais avec une surface libre.

III.1.3.2 Avec surface libre

Il s'agit de reprendre exactement la même configuration que précédemment mais cette fois-ci de ne pas modéliser la partie supérieure du domaine (l'air). L'intérêt de ce cas est de profiter du caractère lagrangien de la méthode SPH-VF et de vérifier uniquement la dissipation du schéma en absence d'interface. Ainsi en se plaçant dans cette configuration-là, la formulation SPH-VF va pouvoir être utilisée sans la correction présentée précédemment (cf. §I.3.3.2.3).

Ce cas ne peut évidemment pas être reproduit par la formulation Volumes Finis à fraction de volume qui nécessite des éléments de discrétisation dans l'ensemble du domaine de calcul.

Pour être le plus exhaustif possible dans la recherche des causes de la dissipation du schéma, nous comparerons les résultats à trois autres formulations :

- la première est une version dégradée de la formulation SPH-VF où le problème de Riemann n'est plus résolu pour chaque interaction mais le flux entre particules dans l'équation de quantité de mouvement est pris égal à $(p_i + p_j)$ (avec les notations utilisées plus haut) tandis que le flux dans l'équation de continuité est nul (cf. raisonnement sur la SPH hybride monofluide).
- La deuxième formulation sera la SPH classique, présentée initialement, avec absence de viscosité artificielle (pour pouvoir se comparer à la formulation précédente).
- Enfin la troisième formulation sera la SPH hybride monofluide (cf. §I.3.1), dont l'intérêt est d'intégrer un solveur de Riemann. Ces deux dernières formulations sont correctement adaptées au cas étudié en raison du caractère purement monofluide de l'écoulement.

Remarque :

Il convient de noter que, pour les trois formulations SPH-VF utilisées (avec et sans limiteur, et $(p_i + p_j)$), la partie du domaine modélisant l'eau (soit le bas de la cuve) contient aussi l'autre fluide (l'air) de manière négligeable (exactement ϵ du point de vue de la fraction volumique).

Tous les schémas ont été utilisés avec un noyau renormalisé. Comme cela a déjà été évoqué (cf. §I.3.1.2.4), le critère de passage de la matrice de renormalisation à la matrice identité est basé sur une des valeurs propres de cette matrice (limite prise ici égale à 0,6).

Les résultats sont présentés sur les figures III.1.3 et III.1.4. Ils sont quantifiés dans le tableau III.1.1 et divers enseignements peuvent en être tirés.

Tout d'abord, la formulation « SPH-VF $(p_i + p_j)$ », qui correspond au schéma SPH-VF non décentré (sans viscosité artificielle ni solveur de Riemann), possède un comportement extrêmement proche de la formulation SPH classique sans viscosité artificielle, comme attendu. La formulation avec fraction de volume est donc aussi stable (voire plus précise) que la formulation SPH classique pour cette configuration particulière. Cette dernière est précise sur un maillage grossier mais le raffinement ne lui fait pas gagner beaucoup plus de précision.

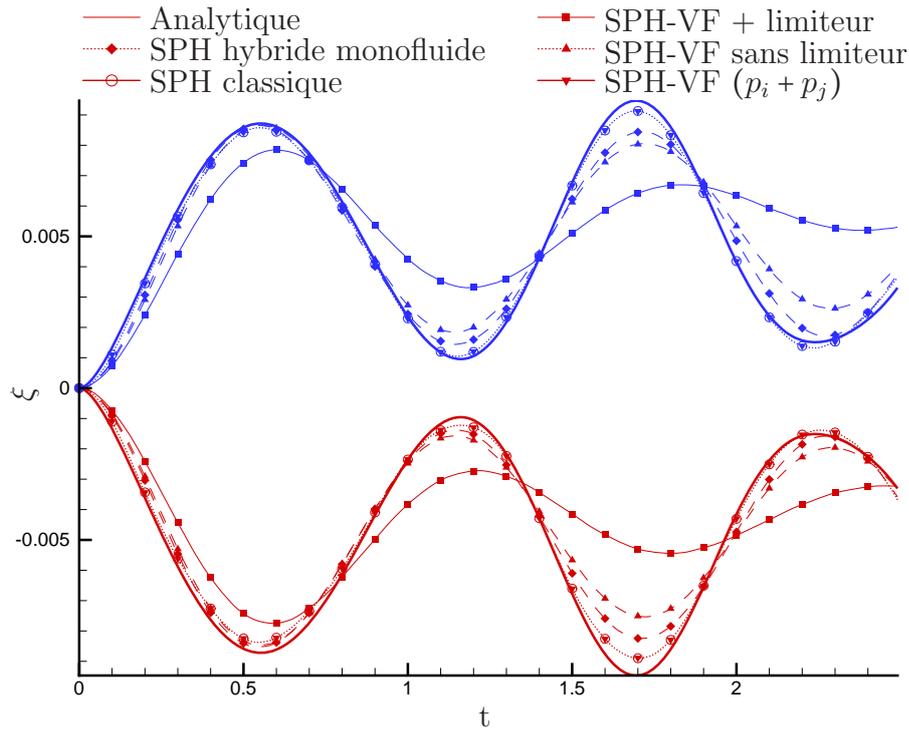


FIG. III.1.3 – Comparaison de l'élévation de surface libre sur les parois gauche ($x = 0$ courbes du bas) et droite ($x = L$ courbes du haut) entre la solution analytique et les diverses formulations. Résolution grossière.

	err_{ξ}			
	grossier		fin	
	0	L	0	L
SPH classique	0,13	0,12	0,13	0,11
SPH hybride monofluide	0,19	0,21	0,12	0,12
SPH-VF ($p_i + p_j$)	0,13	0,12	0,10	0,10
SPH-VF sans limiteur	0,26	0,38	0,14	0,16
SPH-VF + limiteur	0,68	1,03	0,30	0,40

TAB. III.1.1 – Erreur quadratique moyenne en temps de l'erreur relative d'élévation de surface libre sur chaque paroi 0 et L.

Ensuite, lorsque pour ces deux formulations (SPH-VF et SPH classique) on introduit un solveur de Riemann pour décentrer le schéma en espace (et deviennent donc « SPH-VF sans limiteur » et « SPH hybride monofluide »), on observe une légère dissipation numérique. L'écart aux résultats des formulations non décentrées se réduit avec l'augmentation de la résolution spatiale. La formulation SPH-VF sans limiteur est toutefois légèrement plus dissipative que la formulation SPH hybride monofluide.

Enfin, lorsque le limiteur de gradient est introduit dans la formulation SPH-VF, la dissipation devient non négligeable (on a entre 30% et 100% d'erreur). Néanmoins il faut noter que cet ajout est nécessaire pour pouvoir simuler des écoulements bifluïdes (cf. remarques lors de son introduction §I.3.3.2.3).

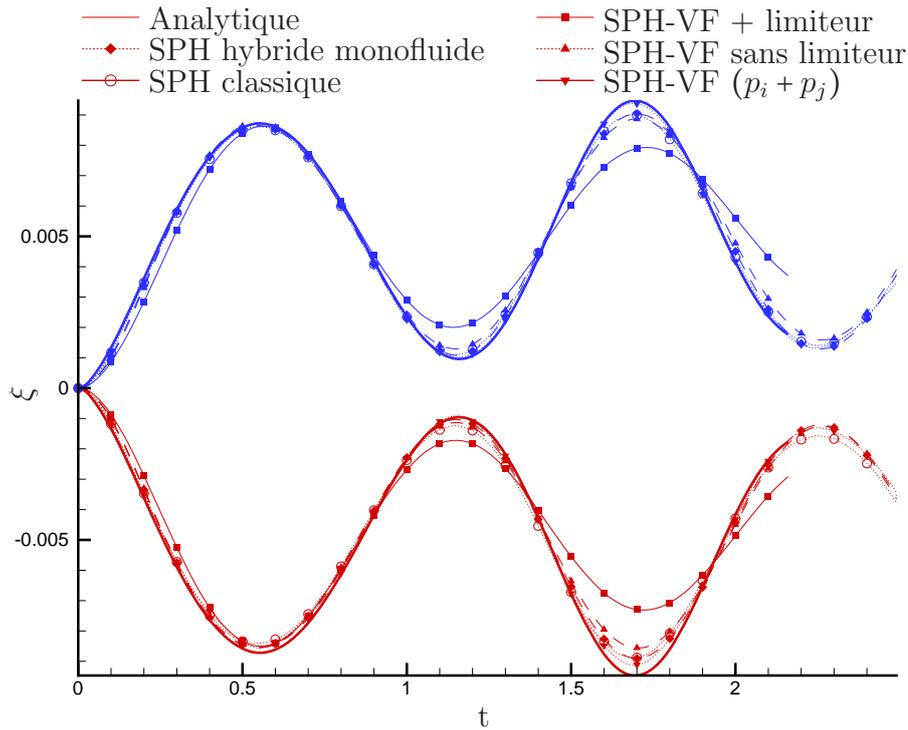


FIG. III.1.4 – Comparaison de l’élévation de surface libre sur les parois gauche ($x = 0$ courbes du bas) et droite ($x = L$ courbes du haut) entre la solution analytique et les diverses formulations. Résolution fine.

Remarque :

À titre d’illustration, le temps CPU pour ce cas est donné tableau III.1.2.

	Temps CPU (s)
SPH classique	188
SPH hybride monofluide	377
SPH-VF ($p_i + p_j$)	1126
SPH-VF sans limiteur	2481
SPH-VF + limiteur	3939

TAB. III.1.2 – Temps de calcul CPU pour la résolution grossière. Le coefficient CFL acoustique $C_{CFL_{ac}}$ est égal à 1 pour toutes les formulations.

Il est important de noter que le coefficient CFL a été pris identique pour tous les calculs, alors qu’*a priori* il peut être beaucoup plus important pour les formulations avec solveur de Riemann (facteur proche de 2 en se basant sur les résultats de l’écoulement de Poiseuille).

Conclusion

Comme mentionné en introduction, ce cas test est assez sévère pour la formulation SPH-VF complète à cause de la dissipation numérique à l’interface. Mais en restreignant

la configuration avec seulement une surface libre, nous montrons que les majeures parties composant la formulation SPH-VF permettent d'avoir des résultats satisfaisants : ainsi, la version « SPH-VF ($p_i + p_j$) » démontre les bonnes capacités du formalisme à fraction de volume choisi. Et l'introduction d'un solveur de Riemann pour résoudre correctement la partie hyperbolique (la version « SPH-VF sans limiteur ») permet de conserver des résultats proches de son modèle équivalent sans fraction de volume (à savoir « SPH hybride monofluide »). Mais toutes ces bonnes propriétés sont dégradées lorsque la correction par limiteur est ajoutée, comme cela avait été montré par ailleurs sur les cas de tube à choc.

La partie « fautive » est donc parfaitement identifiée. Mais n'ayant pu trouver d'autre moyen d'effectuer des simulations bifluïdes sans s'en passer, nous la conservons, comme nous l'avons déjà mentionné.

Chapitre III.2

Instabilités de Rayleigh-Taylor

On étudie maintenant un cas de validation classique bi-dimensionnel, qui est celui des instabilités de Rayleigh-Taylor. On notera que ce cas se place dans le cadre des équations de Navier-Stokes. La tension superficielle joue en revanche un rôle faible dans cet écoulement et on peut la négliger. Dans ce problème d'instabilités, l'interface entre deux fluides visqueux différents nécessite d'être calculée précisément. En effet, initialement le fluide lourd se situe dans la partie supérieure du domaine, au-dessus du fluide léger. Afin de se retrouver dans une configuration stable, le fluide lourd va glisser sous le fluide léger en créant des enroulements d'interface dus au cisaillement visqueux, dont la capture nécessite d'avoir une description précise de l'évolution de l'interface entre les deux fluides.

III.2.1 Configuration

Le domaine du problème est rectangulaire (de hauteur $2m$ et de largeur $1m$) et l'interface est située à $y = 1 - 0,15 \sin(2\pi x)$. Elle sépare le fluide lourd (de densité $1,8kg.m^{-3}$) situé au dessus, et le fluide léger ($\rho = 1kg.m^{-3}$) situé au dessous. Le nombre de Reynolds basé sur la largeur du domaine est égal à 420.

La vitesse du son numérique est prise égale à $14m.s^{-1}$ pour le fluide léger et à $10m.s^{-1}$ pour le fluide lourd. L'équation d'état choisie est celle linéarisée pour les deux formulations. Pour la formulation SPH-VF, il est appliqué une pression de fond correspondant à la pression hydrostatique (soit $p_0 = 3,6Pa$).

Une condition d'adhérence est appliquée sur les parois.

Dans cet écoulement, on peut supposer que les effets de tension superficielle sont négligeables. Elle n'est pas modélisée par le schéma C.S.S.. Seule la formulation SPH-Multiphase utilisera le paramètre ϵ_I , pris égal à 0,02, pour éviter une inter-pénétration des phases.

Pour cette dernière formulation, l'interface est repérée par les particules dont la valeur propre de la matrice de renormalisation (calculée en ne considérant que les particules voisines du même fluide) est supérieure à une certaine valeur seuil (ici égale à 0,6). Le noyau d'interpolation est la gaussienne.

Pour la formulation SPH-VF, la notion d'appartenance à l'un ou l'autre fluide n'étant présente qu'implicitement, l'interface devrait être repérée par l'isocontour de la fraction de volume égal à 0,5. Cependant, les résultats donnés par la méthode SPH étant ponctuels (définis sur les particules), la détermination des champs sur tout le domaine de calcul (pour calculer les contours) ferait appel à une interpolation supplémentaire. Pour éviter

cela, nous avons tiré parti de la légère diffusion de l'interface au cours du temps et nous n'affichons que les particules dont la fraction volumique est comprise entre 0,1 et 0,9 (choix totalement arbitraire mais suffisant pour avoir une approximation de la position de l'interface). Le noyau choisi est la spline cubique (cf. paragraphe suivant pour le choix de ce noyau).

III.2.2 Résultats numériques

III.2.2.1 Convergence en espace

On étudie ici la convergence en espace des différentes formulations. Le domaine est discrétisé avec les résolutions suivantes dans la largeur : 75, 150 et 300 particules (avec un pas de discrétisation identique dans la largeur et la hauteur). Les résultats en convergence spatiale sont comparés à ceux issus d'une formulation Différences Finies type Level-Set des équations de Navier-Stokes, [Colicchio \(2004\)](#) (la résolution spatiale y est légèrement différente, avec 78, 156 et 312 points dans la largeur).

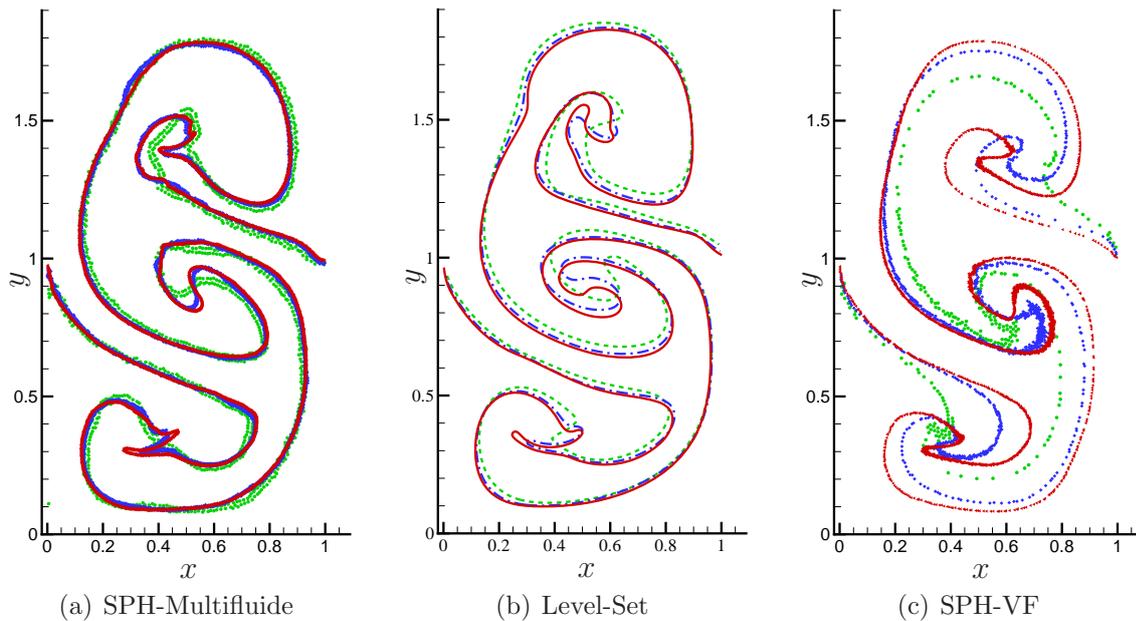


FIG. III.2.1 – Convergence spatiale pour les deux formulations SPH et comparaison à une solution Level-Set. Instant $t = 5s$. Résolutions SPH : ● : 75×150 , ◆ : 150×300 , ▲ : 300×600 . Résolutions Level-Set : --- : 78×156 , -.- : 156×312 , - : 312×624 .

Les résultats sont regroupés sur la figure [III.2.1](#). On peut noter que les ordres de convergence semblent comparables (la convergence est peut-être un peu plus rapide en SPH-Multifluide). Par contre, sur cette figure, on est de droite à gauche de plus en plus précis, dans le sens où l'on est de plus en plus proche de la solution convergée alors qu'on a des résolutions identiques. La méthode SPH-Multifluide est ainsi déjà convergée avec la résolution moyenne, contrairement aux autres.

L'étude de la vorticité (cf. figure [III.2.2](#)), montre que celle-ci est générée à la fois à l'interface et sur les parois, et est responsable de la complexité des enroulements crées. La comparaison entre la formulation SPH-Multifluide et le Level-Set montre une similarité

dans les formes de cette vorticité, et par conséquent de la forme de l'interface. Cependant, la vorticité SPH est plus bruitée que la vorticité Level-Set, ce qui est lié à la répartition désordonnée des particules.

L'analyse de l'intensité de la vorticité montre que, sur les deux formulations (SPH et Différences Finies), la répartition est proche, même si, dans certaines régions (*e.g.* au milieu du domaine), le Level-Set exhibe un champ plus fort (et qui est la cause de l'enroulement plus intense qu'en SPH). Le Level-Set a aussi tendance à présenter une vorticité plus diffusée dans l'espace : ceci peut être dû du   la fonction Level-Set qui tend à lisser les quantités entre les deux fluides, ou au fait que cette vorticité est probablement dissipée plus rapidement en SPH.

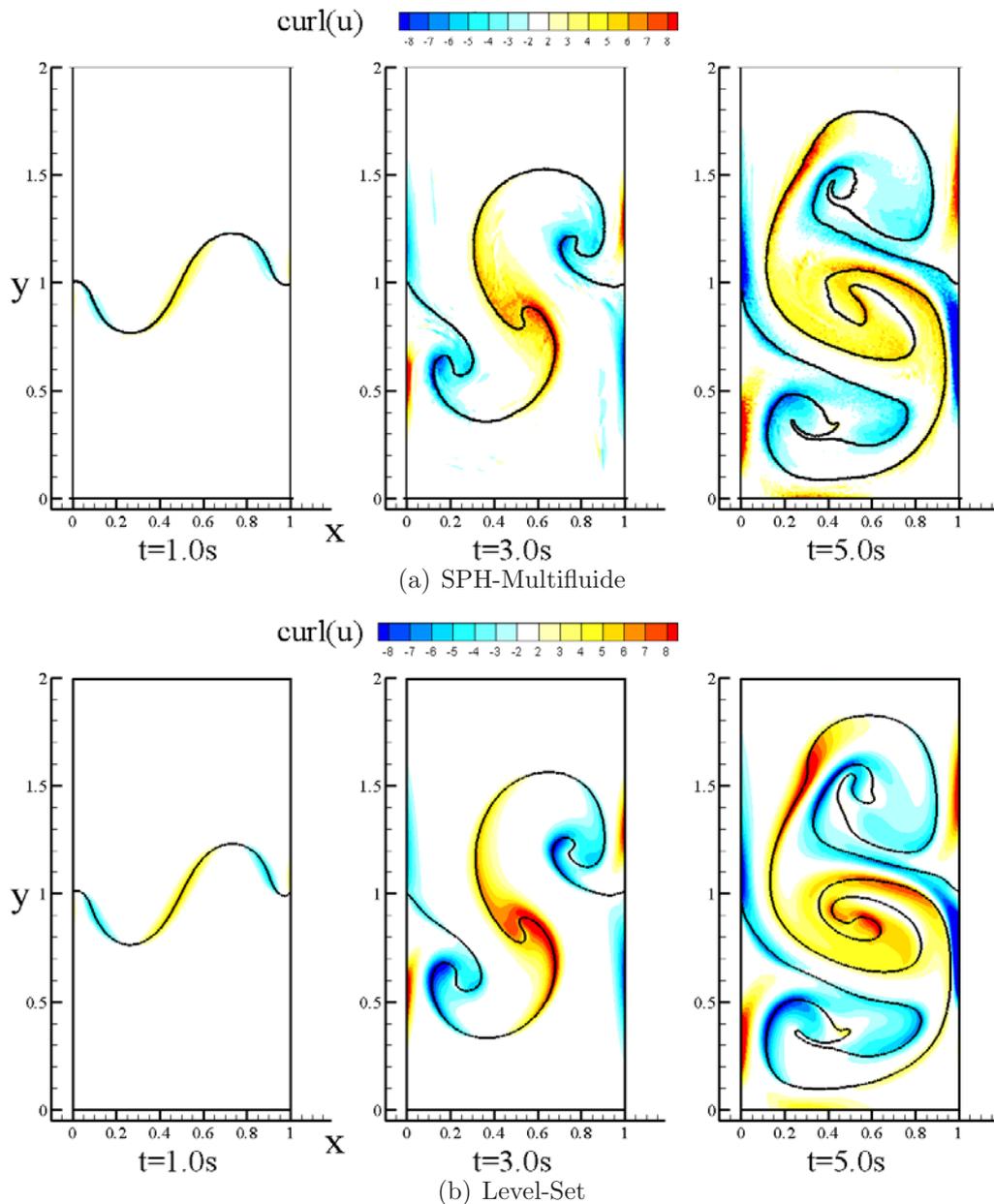


FIG. III.2.2 – Vorticité des formulations SPH-Multifluide et Level-Set à différents instants. Résolution : 300×600 .

III.2.2.2 Précision du noyau

Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous avons choisi un noyau différent pour chacune des formulations. Ce choix a été guidé par l'étude comparative que nous avons menée en regardant le développement de l'instabilité suivant le noyau choisi. La discrétisation spatiale est fixée (150×300 particules), donc seul va varier le nombre de voisins par particules pour les deux noyaux (ici en deux dimensions, il y a ~ 50 voisins dans un support compact de taille $3h$ {gaussienne} contre ~ 20 pour $2h$ {spline cubique}).

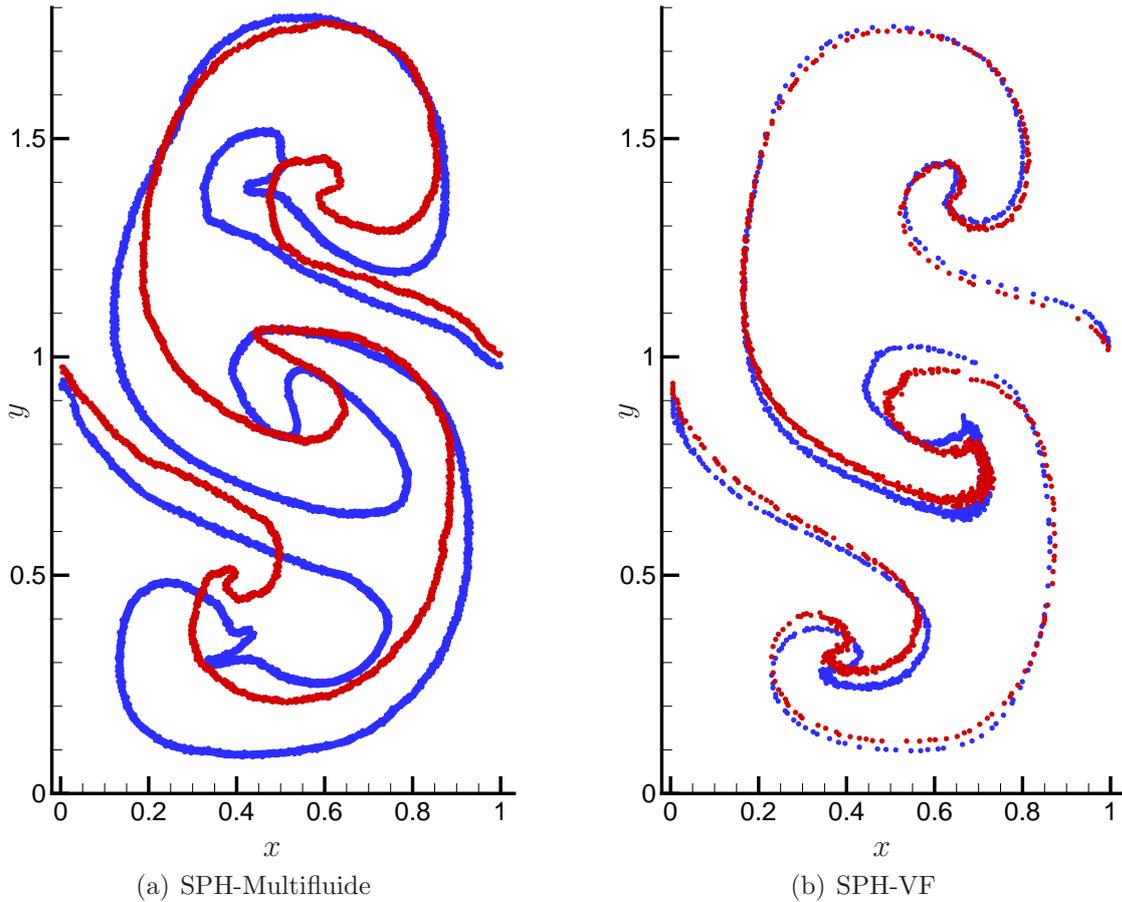


FIG. III.2.3 – Importance du choix du noyau d'interpolation pour les deux formulations SPH. Instant $t = 5s$. Résolution : 150×300 . \bullet : spline cubique, \bullet : gaussienne

Les résultats de la figure III.2.3 montrent que, pour la formulation SPH-Multifluide, le noyau gaussien apporte un gain de précision qui se traduit directement par des enroulements de l'interface beaucoup plus prononcés (via le calcul de la vorticité). Comme sur le cas de l'écoulement de Poiseuille, la précision l'emporte sur le plus grand lissage éventuel causé par le support compact plus large.

Par contre, pour la formulation SPH-VF, les résultats entre la gaussienne et la spline cubique montrent beaucoup moins de différences. Le support compact élargi ne semble apporter que peu de gain en précision : cet apport doit être contre-carré sur cette formulation par le lissage plus important des quantités à l'interface. Ainsi, au vu du faible apport de ce noyau et de son surcoût algorithmique (plus d'interactions à discrétisation donnée ; cf. table III.2.1), il a été choisi la spline cubique pour la formulation SPH-VF sur

la simulation des instabilités de Rayleigh-Taylor .

	Temps CPU (s)	
	spline cubique	gaussienne
SPH-Multifluide	11210	28188
SPH-VF	53641	115125

TAB. III.2.1 – Temps de calcul CPU pour la résolution 150×300 . La condition CFL acoustique $C_{CFL_{ac}}$ est égale à 1 pour toutes les formulations.

III.2.2.3 Diffusion de l'interface

Le modèle SPH-VF est basé sur une formulation à fraction de volume et celle-ci est autorisée à diffuser à l'interface. Cependant, nous avons remarqué (cf. tube à choc 1D) que le caractère lagrangien de la SPH aide fortement à contenir cette diffusion (suivant l'importance des autres termes diffusifs). Il serait donc intéressant de qualifier cette diffusion par rapport à une méthode équivalente eulérienne sur un cas plus complexe (que les tubes à choc 1D ou le ballotement linéaire).

La formulation SPH-VF étant une adaptation de la formulation à fraction de volume pour un formalisme Volumes Finis, [Chanteperdrix \(2004\)](#), il paraîtrait naturel de se comparer à celle-ci. Mais n'ayant pas à disposition ce code, et le cas d'étude des instabilités de Rayleigh-Taylor ne figurant pas dans la littérature associée, nous nous sommes tournés vers une autre formulation proche.

Dans le formalisme voisin des Différences Finies, la formulation Level-Set utilisée précédemment est intéressante mais basée sur une approche différente de la prise en compte de différents fluides, via la fonction distance à l'interface. Ainsi, pour rester plus proches de la formulation SPH-VF, il nous a paru intéressant d'utiliser la formulation Volume Of Fluid, [Hirt et Nichols \(1981\)](#), pour comparaison.

Stricto sensu, cette formulation Volume Of Fluid n'est pas tout à fait semblable à la formulation SPH à fraction de volume. Le modèle numérique construit diffère aussi par l'approche de la variable supplémentaire introduite : bien que la fraction de volume VOF autant que la fraction de volume SPH vérifient une équation de transport, dans le premier cas celle-ci est explicitement résolue tandis que dans le second cas elle ne l'est pas et la fraction évolue selon une étape de relaxation (choix lié au système hyperbolique découlant des équations d'écoulement compressible ; cf. §I.3.3). Enfin, la physique modélisée n'est pas la même : fluide incompressible contre fluide compressible mais tout deux dans l'optique d'étude d'écoulements incompressibles.

Cependant, numériquement, il se pose le même problème de diffusion de la fraction de volume à l'interface dans la formulation VOF. Nous avons donc utilisé un code précédemment développé dans l'équipe, [Andrillon \(2004\)](#), pour confronter des résultats Volumes Finis VOF aux résultats SPH-VF.

Les résultats présentés sur la figure [III.2.4](#) sont toutefois à considérer avec précaution : les résolutions spatiales ne sont pas celles qui assurent que le calcul soit convergé en espace. Néanmoins, on peut remarquer que, qualitativement, l'interface semble moins diffuser avec la formulation SPH-VF qu'avec le solveur VOF utilisé, ce qui tendrait à confirmer l'intérêt de coupler la SPH à cette formulation à fraction de volume.

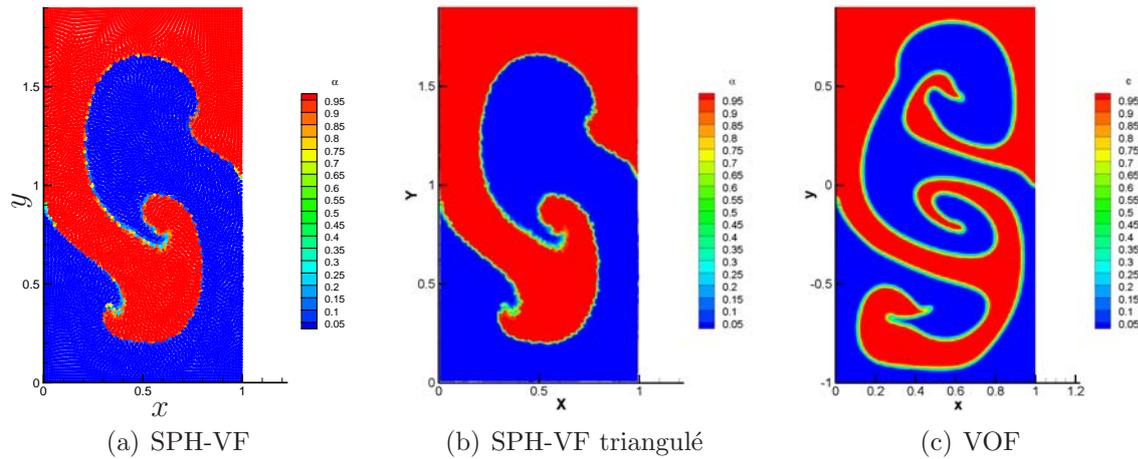


FIG. III.2.4 – Formulations SPH-VF et Volumes Finis VOF. Résolution 75×150 . Instant $t = 5s$.

Cela est d'autant plus notable que, pour la formulation VOF, la fraction de volume étant convectée par une équation de transport propre, des techniques numériques sont utilisées pour limiter la diffusion à l'interface à chaque pas de temps et reconstruire celle-ci. Aucune de ces techniques n'est utilisée dans la formulation SPH-VF.

Conclusion

La simulation des instabilités de Rayleigh-Taylor avec les deux formulations SPH a permis d'observer comparativement leur comportement sur un cas d'écoulement bidimensionnel avec une interface pleinement développée. Il en ressort que la SPH-Multifluide se montre beaucoup plus précise que la méthode SPH-VF, avec une convergence rapide. La comparaison à des solutions de codes maillés classiques sur des résolutions identiques permet en outre de conclure positivement quant à la validation de cette méthode sur ce cas.

Chapitre III.3

Envahissement

Les cas abordés dans ce chapitre vont permettre de valider les formulations sur des configurations où l'écoulement est plus violent. Les deux cas étudiés concernent des problèmes d'envahissement. On retrouve cette problématique dans les questions de survivabilité des navires en cas d'avarie. Un des paramètres importants entrant alors en jeu est le degré de confinement de la partie envahie par rapport à l'atmosphère environnante.

Afin de maîtriser au mieux les conditions de réalisation de ces simulations, la géométrie est simplifiée à l'extrême et aboutit à étudier l'envahissement d'un volume de type caisson. Comme dans les études précédentes, nous nous limitons à l'approche bi-dimensionnelle de ce problème.

III.3.1 Cas du LMF

Afin d'étudier l'envahissement, une campagne expérimentale a été menée au sein de l'équipe, [Blondel \(2006\)](#). Celle-ci a permis de construire l'installation expérimentale, d'effectuer une série d'essais et d'en exploiter les résultats. Ces derniers consistent en films expérimentaux réalisés avec un moyen d'acquisition rapide (ce qui permet d'avoir une résolution temporelle élevée). Nous allons détailler les configurations étudiées et les résultats issus des comparaisons expérimental/numérique.

III.3.1.1 Configuration

Comme présenté en introduction, la configuration choisie est relativement simple, cf. schémas [III.3.1\(a\)](#) & [III.3.1\(b\)](#). D'un côté du domaine, il y a la partie que nous pouvons appeler réservoir et qui contient le fluide « envahissant ». Séparée par une paroi d'une certaine épaisseur se trouve, de l'autre côté du domaine, la zone prête à être envahie et dont le confinement va pouvoir être modulé. En effet, tandis que le réservoir est toujours laissé à pression atmosphérique, la partie de la zone envahie peut être plus ou moins fermée avec des couvercles de taille variable (afin de faire varier la perte de charge représentant le confinement plus ou moins imparfait d'un navire). Dans le cadre de cette étude nous nous limiterons à deux particuliers : avec confinement total (zone envahie complètement fermée) ou sans (zone envahie à la pression atmosphérique).

Les cotations du domaine sont mentionnées dans le tableau [III.3.1](#).

Du point de vue numérique, les simulations étant conduites principalement en prenant en compte les deux fluides, pour assurer la condition de pression atmosphérique on intro-

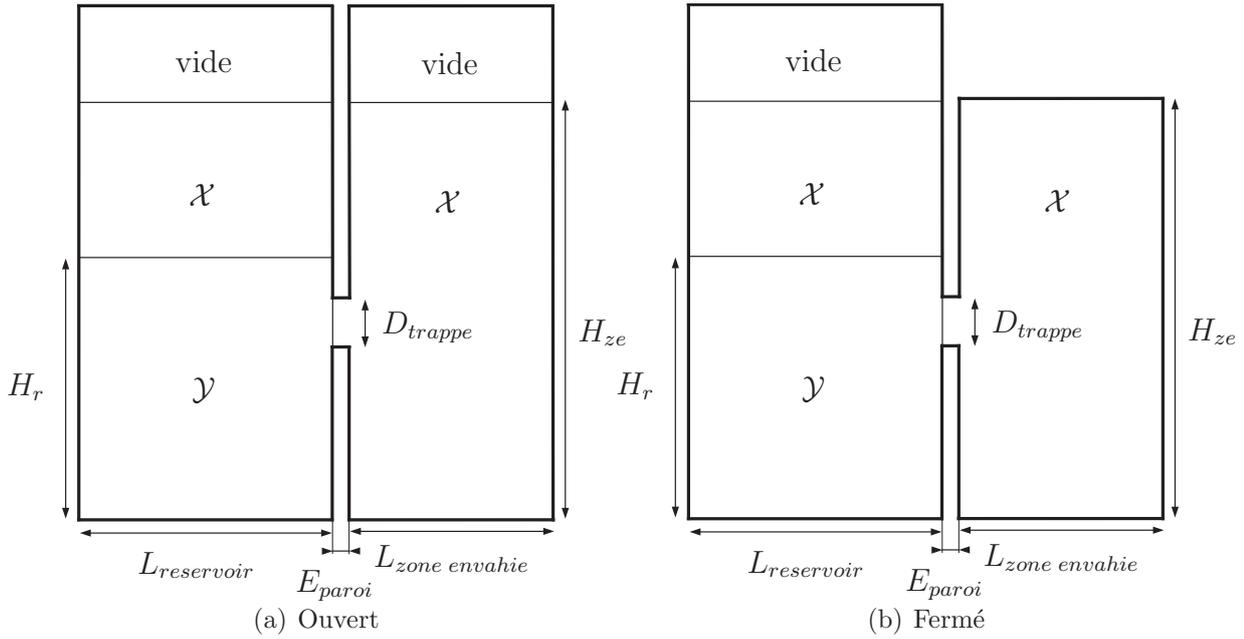


FIG. III.3.1 – Schéma de configuration du domaine de calcul.

	H_{ze}	D_{trappe}	$L_{zone\ envahie}$	E_{paroi}	$L_{reservoir}$	H_r
[m]	0,8	0,1	0,3825	0,03	0,5875	0,46

TAB. III.3.1 – Cotations du domaine.

duit une surface libre air/vidé au-dessus de l'air (d'où la position arbitraire de la partie supérieure du domaine en milieu ouvert et dans la partie réservoir).

D'autre part, la configuration géométrique présente des angles aigus (du point de vue du fluide modélisé) qui peuvent être problématiques dans l'implémentation algorithmique. Il a été adopté la modélisation présentée par [Le Touzé et alii \(2006\)](#).

Les propriétés des fluides sont les suivantes : pour l'eau, la densité est de 1000kg.m^{-3} et la vitesse du son de 45m.s^{-1} . Pour l'air, la densité est prise égale à 1kg.m^{-3} et la vitesse du son à 636m.s^{-1} .

Pour une raison de temps disponible, la formulation choisie a été SPH-Multifluide. Pour que ce schéma reste stable numériquement, il a été choisi des viscosités dynamiques issues de la relation suivante :

$$\mu = \frac{1}{8}\alpha\rho ch$$

où α est pris égal à 0,1. Les viscosités dynamiques ont donc été choisies telles que : $\mu_x = 2,25\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $\mu_y = 2,5.10^{-2}\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

Sur ce cas les effets de tension superficielle vont être négligeables devant les effets inertiels ($We = \rho U^2 L / \sigma > 10^5$ en se basant sur une vitesse maximale relevée numériquement de 6m.s^{-1} , sur le coefficient de tension superficielle air-eau ($\sigma = 0,073\text{N.m}^{-1}$) et sur la largeur de la zone envahie). Le coefficient ϵ_I est donc pris égal à 0,08.

Exceptionnellement pour cette formulation, le noyau choisi a été la spline cubique pour une question de coût de calcul. Pour simplifier l'implémentation, la résolution spatiale a été choisie de telle façon que le rayon du support d'interaction soit strictement inférieur à

l'épaisseur E_{paroi} de la paroi entre le réservoir et la zone envahie (de manière à ce que le support d'interpolation ne soit pas à cheval sur les deux parties du domaine). La longueur de lissage est donc prise égale à $h = 4.10^{-3}m$.

III.3.1.2 Résultats et comparaisons expérimentales

III.3.1.2.1 Cas ouvert

Cette configuration correspond au cas où la zone envahie est ouverte et est à la pression atmosphérique. Les résultats présentés figure III.3.2 comparent les images issues des essais expérimentaux aux représentations des résultats numériques. Pour ce cas, l'effet de confinement n'intervenant pas au début de l'invasion, une simulation a été menée sans que l'air soit modélisé. Un bon accord global est trouvé avec les expériences pour ce qui est de l'évolution du domaine fluide.

Par contre, à partir du moment où le jet sortant de la trappe atteint la paroi opposée, une poche d'air est enfermée sous celui-ci. L'effet de coussinage se fait alors sentir, ce qui s'observe entre les simulations réalisées respectivement avec un ou deux fluides (comportement analysé dans e.g. Colagrossi et Landrini (2003)). Des différences sont en effet clairement observables sur la figure III.3.2 quand l'air est inclus dans la simulation. A $t = 1s$, des poches d'air sont encore nettement visibles dans la simulation air/eau, comme dans l'expérience, même si les formes sont alors différentes.

Il convient de préciser que, globalement, l'écoulement est simulé en reproduisant les conditions expérimentales. Cependant, plusieurs aspects doivent être pris en compte, permettant de relativiser les différences entre la simulation et l'expérience. Tout d'abord, la loi d'ouverture de la trappe est différente entre l'expérience et la simulation : dans le premier cas, la trappe est actionnée par la chute d'un poids (via un système de poulies) tandis que dans les simulations l'ouverture est instantanée. Cela a un effet net sur la forme du front du premier jet entrant. De plus, bien que le banc d'essai ait une profondeur relativement modeste (150mm), de légers effets tridimensionnels sont visibles (même s'ils sont accentués par les conditions de prise de vue). Enfin, l'interface étant fortement fragmentée et mélangée dès lors que la poche d'air enfermée se disloque, il est extrêmement difficile de capturer ces phénomènes physiques à la résolution choisie. Et dans la « mousse » créée, les effets de tension superficielle (non modélisés) deviennent importants.

Par ailleurs, on sait que la vorticité générée par les coins de la plaque médiane est source de difficulté numérique en SPH (cf. Colagrossi *et alii* (2007)) : il peut se créer des déchirements dans le fluide (même en simulant explicitement deux fluides). Si pour les résultats présentés, ceux-ci sont relativement modestes et ne changent pas fondamentalement la nature de l'écoulement, il s'agit d'une difficulté réelle pour les simulations SPH. Des travaux spécifiques devront être menés sur cet aspect.

III.3.1.2.2 Cas fermé

Dans cette configuration, la zone envahie est totalement confinée (la pression y régnant au départ étant celle de l'atmosphère). Les effets de la présence du gaz vont donc être importants, et ce dès le début de l'essai. Seule une simulation purement biffuide a donc été menée.

On observe (cf. figure III.3.3), dès les premiers instants de l'essai, l'effet de chasse à travers la trappe de l'air contenu dans la zone confinée. L'air s'échappant va alors

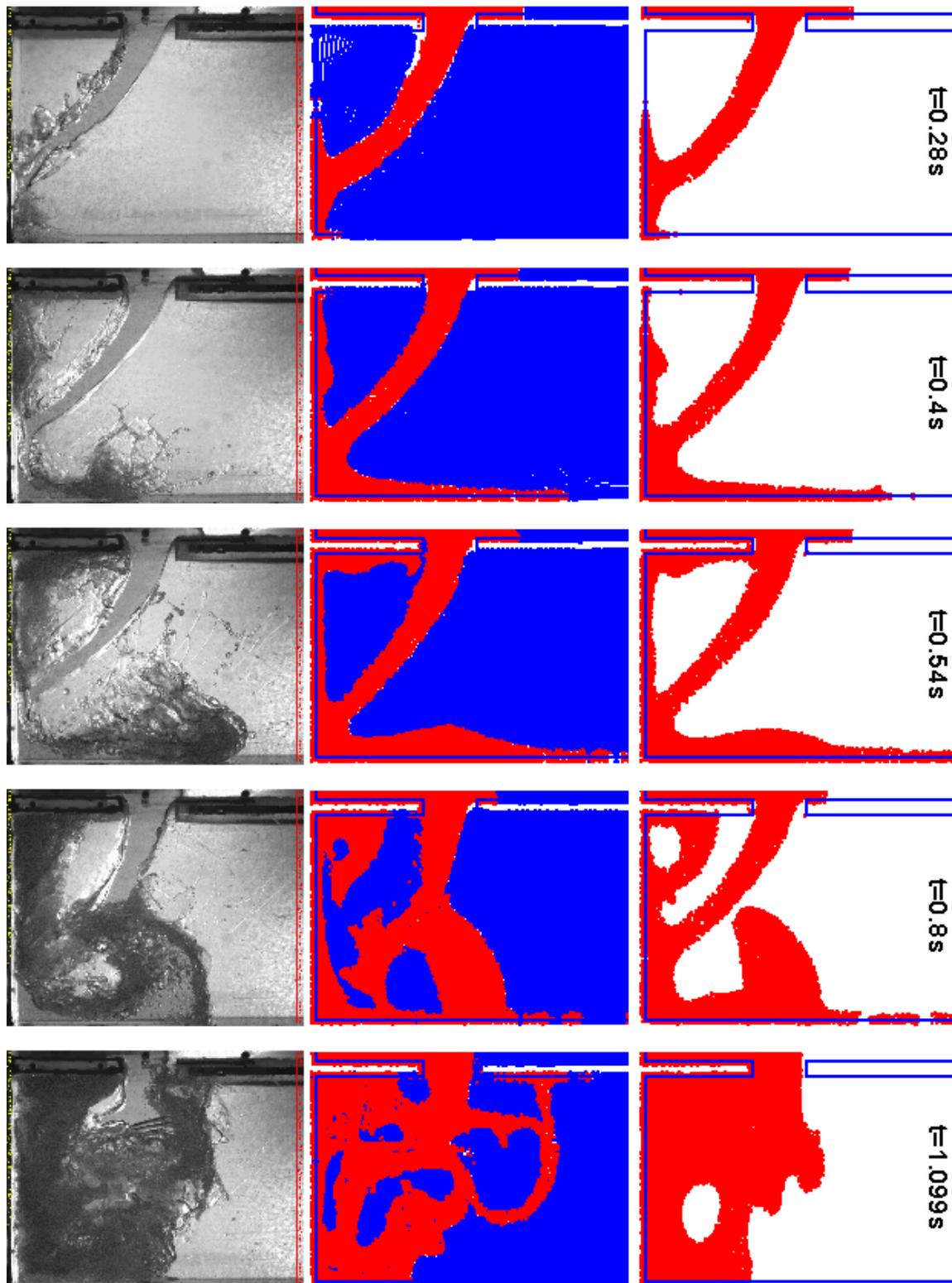


FIG. III.3.2 – Zone envahie ouverte. Champ de densité. Instants dimensionnels. En haut : formulation SPH-Multifluid avec un seul fluide modélisé. Au milieu : SPH-Multifluid avec deux fluides modélisés. En bas : résultats expérimentaux.

restreindre la section de passage de l'eau qui va s'engouffrer de manière moins violente dans la zone envahie. On retrouve ce comportement similaire à la fois sur les résultats expérimentaux et numériques. Cet effet de confinement est d'autant plus accentué sur les résultats numériques que l'ouverture de la trappe est instantanée.

Sur le reste de l'essai, les mêmes remarques que pour le cas ouvert peuvent être faites.

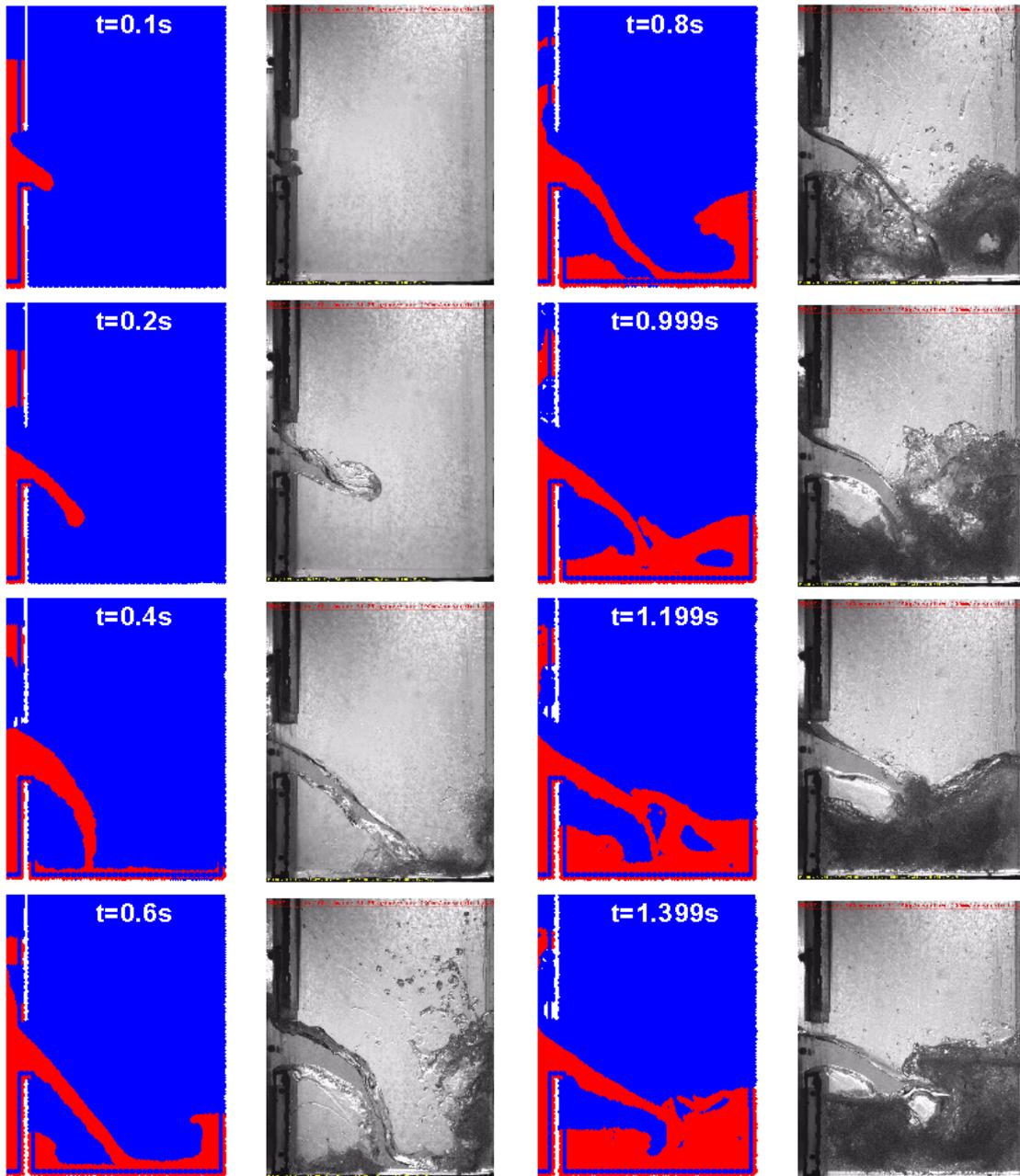


FIG. III.3.3 – Zone envahie fermée. Champ de densité. Instants dimensionnels. Colonnes de gauche : formulation SPH-Multifluide avec deux fluides modélisés. Colonnes de droite : résultats expérimentaux.

Pour compléter la comparaison entre l'étude expérimentale et celle numérique, il serait intéressant de disposer d'évolutions temporelles de grandeurs physiques comme la pression.

Celle-ci pourrait être relevée en différents endroits sur les parois de la zone envahie pour donner accès à la fois à la pression au sein de l'air et à la pression du liquide lorsque celui-ci arrive sur ces parois.

III.3.2 Cas de Ruponen

Le cas d'envahissement étudié à présent provient de [Ruponen \(2006\)](#), auquel on compare nos résultats. Il faut préciser que plusieurs configurations sont étudiées par cet auteur : un caisson à l'air libre, un caisson fermé et un caisson partiellement fermé. Par manque de temps, on ne s'est intéressé qu'au premier cas. Par ailleurs, on a modélisé ce cas en n'utilisant qu'un seul fluide, le caisson étant à l'air libre et voulant nous assurer dans un premier temps qu'on pouvait bien se comparer aux hypothèses très différentes de Ruponen.

III.3.2.1 Problème et configuration

Ce cas consiste en l'envahissement d'un caisson de tirant d'eau fixe dans un réservoir infini. Pour nous rapprocher au mieux de cette condition avec notre réservoir de dimensions finies (dont on a limité l'extension pour des raisons de coût de calcul), on a imposé un mouvement forcé de descente du caisson au fur et à mesure de l'envahissement, de telle manière que son tirant d'eau par rapport au réservoir externe reste constant. Sa loi de déplacement provient donc directement de l'intégration du débit volume passant à travers la trappe (cf. schéma de la configuration sur la figure [III.3.4](#)).

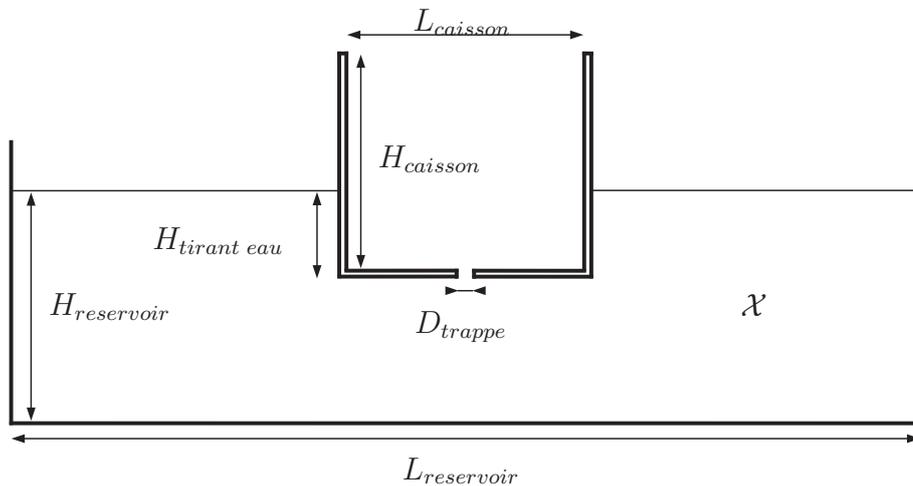


FIG. III.3.4 – Configuration du domaine.

Dans son article Ruponen utilise une méthode de correction de pression, basée sur la résolution des équations de Bernoulli. Il se place dans une configuration tri-dimensionnelle et ramène alors le problème à une résolution globale de la hauteur d'eau dans le caisson en se basant sur les deux sections que sont les surfaces libres du réservoir et du caisson, en voyant la trappe comme un simple orifice en paroi mince occasionnant une perte de charge singulière de coefficient connu. Outre ce coefficient, les seules données qu'il se donne sont le tirant d'eau du caisson (qui reste inchangé dans le temps dans son approximation),

l'aire de la trappe et la section horizontale du caisson. La forme de la section horizontale du caisson, en particulier, n'est pas définie.

Ne disposant pour le moment que d'un modèle bidimensionnel, on a choisi de garder le même rapport entre l'aire du caisson et celle de la trappe (qui est un rapport de distance pour nous), sur la base du raisonnement que la pression entrante dépendant principalement du tirant d'eau, on devait faire entrer un débit équivalent pour pouvoir comparer. Les cotations d'un tel domaine de calcul sont mentionnées dans le tableau III.3.2.

	$L_{caisson}$	$H_{caisson}$	$H_{tirant\ eau}$	D_{trappe}	$H_{reservoir}$	$L_{reservoir}$	E_{paroi}
[m]	10	10	4	0,5	10	30	1

TAB. III.3.2 – Cotations du domaine.

De la même façon que dans le cas précédent, nous avons traité la paroi du caisson séparant deux parties du domaine (réservoir et zone envahie) en imposant une certaine épaisseur à celle-ci pour simplifier l'implémentation.

L'eau est caractérisée de la manière suivante : la densité est de $1000kg.m^{-3}$ et la vitesse du son de $150m.s^{-1}$. Sa viscosité est choisie telle que $\alpha = 0,1$ soit $\mu_x = 93,75kg.m^{-1}.s^{-1}$.

Le noyau utilisé est la spline cubique avec une longueur de lissage égale à $h = 0,05m$. Par ailleurs, on tire parti de la symétrie du domaine en ne simulant qu'un demi-domaine.

III.3.2.2 Résultats

Le caisson n'étant pas confiné dans cette configuration, on cherche à déterminer le remplissage de celui-ci au cours du temps. Afin de comparer à la hauteur globale prédite par Ruponen, on estime la hauteur d'eau moyenne dans le caisson (hauteur qui n'est pas uniforme avec notre modélisation locale) à partir du volume d'eau entrant en comptant simplement les particules entrantes. Les résultats sont présentés sur la figure III.3.5.

Nous pouvons observer que la tendance générale de la hauteur de remplissage est correctement respectée. La méthode SPH-Multifluide prédit une évolution plus lente. En fin de simulation, à $t = 35s$, l'équilibre n'est pas atteint entre la hauteur d'eau dans le caisson et la hauteur de charge imposée correspondant au tirant d'eau (ici 4m). Cependant ces premiers résultats sont à considérer avec précaution étant donné qu'aucune étude de convergence spatiale n'a été menée et que la discrétisation est relativement grossière (6 particules dans la demi-largeur de la trappe). De plus, on rappelle que les hypothèses étant très différentes, on ne s'attend pas à obtenir une évolution strictement identique du remplissage.

De façon parallèle à la remarque de fin du paragraphe précédent, pour compléter la comparaison entre les deux méthodes numériques, il serait intéressant d'étudier la pression dans le cas d'un caisson confiné (cas abordé par Ruponen (2006)). Cela n'a pas encore été effectué par manque de temps.

Conclusion

Ces deux cas tests sont intéressants dans la mesure où ils ont permis de confronter la formulation SPH-Multifluide à des écoulements assez violents où des fragmentations et

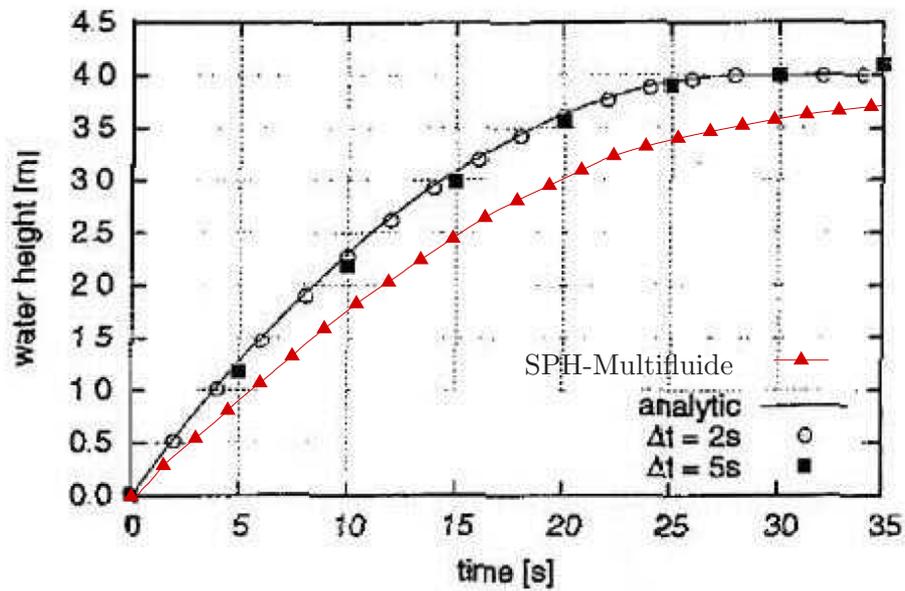


FIG. III.3.5 – Évolution temporelle de la hauteur d'eau dans le caisson. Comparaison aux résultats issus de [Ruponen \(2006\)](#).

reconnexions d'interface se produisent, avec emprisonnement d'air. Dans le cas d'envahissement du LMF, la comparaison aux résultats expérimentaux est satisfaisante du point de vue de la position de l'interface au cours du temps, malgré la loi d'ouverture différente et les difficultés générées par les coins de la plaque médiane. Des études complémentaires doivent être menées pour se rapprocher des conditions expérimentales et pour évaluer les pressions dans l'écoulement. Les calculs en cours sur le premier cas de Ruponen sont aussi assez encourageants.

Chapitre III.4

Bulle isolée

Dans ce chapitre nous allons aborder des problèmes plus spécifiques et plus proches du but de notre travail, l'étude de la séparation des fluides. Nous allons nous intéresser à l'écoulement d'une bulle de gaz isolée et ascendante dans une colonne d'un liquide au repos. Dans un premier temps, il s'agit d'une bulle avec un ratio de densité élevé (par rapport au fluide environnant) mais avec des effets de tension superficielle faibles. La comparaison est faite avec des résultats de la littérature. Dans un deuxième temps, on étudie l'écoulement d'une bulle avec un ratio de densité faible et des effets de tension superficielle importants. La convergence de la vitesse d'ascension est alors étudiée.

III.4.1 Sussman

III.4.1.1 Problème et configuration

Pour ce premier problème, nous nous plaçons dans une configuration qui a été étudiée en SPH par Colagrossi et Landrini (2003), sur la base de travaux de Sussman *et alii* (1994). Ces derniers ont été effectués par une méthode de type Volumes Finis Level-Set.

Il s'agit d'une bulle d'air remontant dans une colonne d'eau au repos. Le domaine est représenté sur la figure III.4.1.

L'écoulement est caractérisé par les nombres adimensionnels suivants : le nombre de Reynolds (défini par $Re = \sqrt{(2R)^3 g \rho_{\mathcal{X}} / \mu_{\mathcal{X}}}$ et valant 1000), et le nombre de Bond (défini par $Bo = 4\rho_{\mathcal{X}} g R^2 / \sigma$ et valant 200). Ce dernier caractérise les effets de tension superficielle (par rapport aux effets d'inertie) et, ici, sa valeur élevée signifie que ces effets sont négligeables.

Le rayon de la bulle est pris égal à $R = 0,025m$. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 9,81m.s^{-2}$. Une condition de glissement est imposée sur les parois, comme dans Sussman *et alii* (1994).

Les deux fluides sont définis par les caractéristiques suivantes : pour l'eau, la densité est de $1000kg.m^{-3}$, la viscosité dynamique égale à $3,5.10^{-2}kg.m^{-1}.s^{-1}$ et la vitesse du son égale à $16m.s^{-1}$. Pour le fluide gazeux on a : $\rho_{\mathcal{Y}} = 1kg.m^{-3}$, $\mu_{\mathcal{Y}} = 4,5.10^{-3}kg.m^{-1}.s^{-1}$ et $c_{\mathcal{Y}} = 505m.s^{-1}$.

Pour la formulation SPH-Multifluide, l'équation d'état est celle de Tait (avec les coefficients polytropiques $\gamma_{\mathcal{X}} = 7$ et $\gamma_{\mathcal{Y}} = 1.4$). Étant donné que les effets de tension superficielle sont négligeables, ceux-ci ne sont pas modélisés par le schéma C.S.S. mais par la modélisation alternative (cf. §II.2.2). Le coefficient ϵ_I est pris égal à 0,08. Le noyau utilisé est la gaussienne.

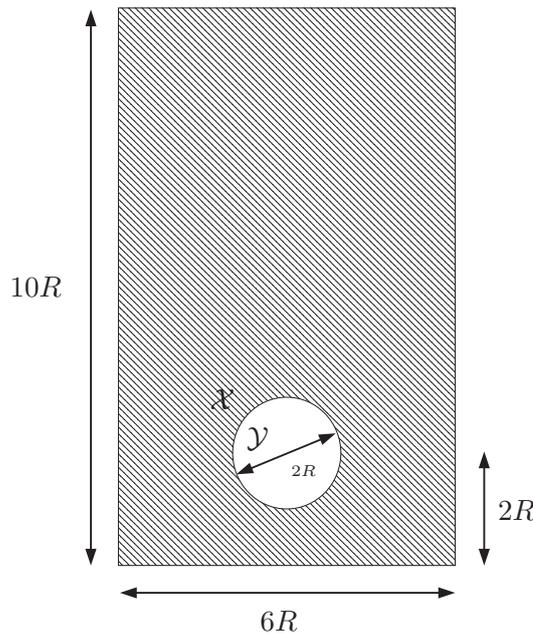


FIG. III.4.1 – Configuration initiale du domaine.

Pour la formulation SPH-VF, la tension superficielle n'est évidemment pas prise en compte puisqu'elle n'a pas été validée sur ce schéma. Le noyau utilisé est la spline cubique.

Il est appliqué une pression de fond égale à la pression hydrostatique de la colonne d'eau seule (soit $\sim 2500Pa$) pour la formulation SPH-VF. La formulation SPH-Multifluide s'en affranchit puisque le schéma C.S.S. n'est pas utilisé sur ce cas.

III.4.1.2 Résultats numériques

Il est à noter que le cas présenté n'a pas d'équivalent expérimental exact pour la validation. En effet les conditions initiales expérimentales (d'injection du gaz dans le liquide) étant difficiles à reproduire numériquement, la configuration initiale choisie (une bulle parfaitement ronde avec une vitesse nulle) est idéale. Les résultats seront donc confrontés à ceux de Sussman.

Les résultats présentés ici ont été menés avec une résolution spatiale de $h = 6,72 \cdot 10^{-4}m$ pour la formulation avec gaussienne et $h = 6,21 \cdot 10^{-4}m$ pour la spline cubique (ce qui correspond à environ 100 particules dans le diamètre de la bulle). Une étude de convergence spatiale a été menée et aboutit aux mêmes remarques que pour le cas des instabilités de Rayleigh-Taylor.

L'interface est décrite de la même manière que pour les autres cas de validation (valeur propre seuil en SPH-Multifluide et zone de diffusion en SPH-VF).

Pour la formulation SPH-Multifluide (cf. figure III.4.2), les résultats sont en bon accord avec les résultats Level-Set. Il faut seulement noter que nous ne capturons pas certains détails (en particulier, les petites parties de gaz détachées à partir de $t^* = 4, 8$). Néanmoins, ces résultats provenant tous deux de méthodes numériques, on ne peut être sûr de savoir les détails duquel sont les plus réalistes.

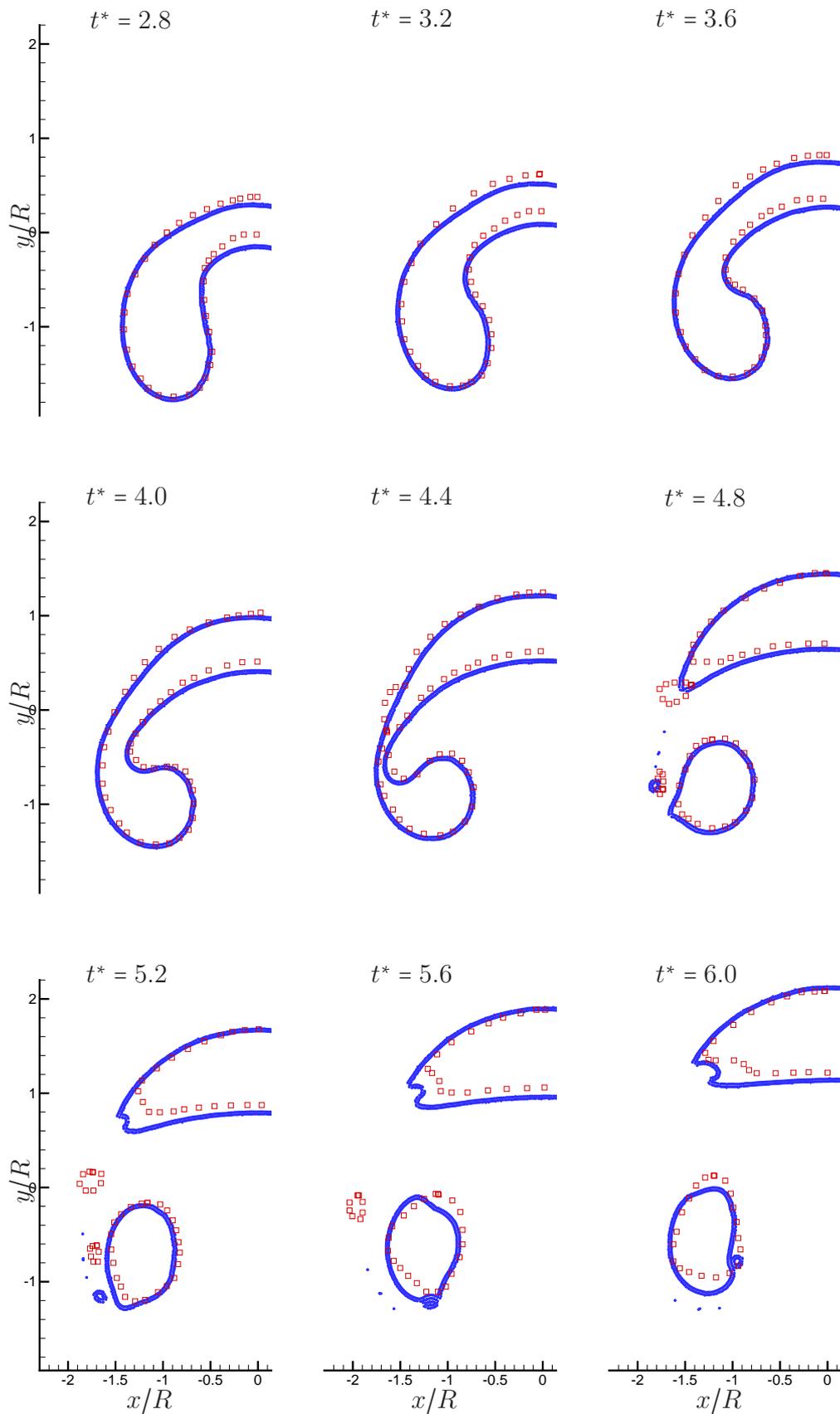


FIG. III.4.2 – Formulation SPH-Multifluide en points bleus et carrés rouges pour la solution Level-Set de [Sussman *et alii* \(1994\)](#). Instants adimensionnels $t^* = t\sqrt{g/R}$.

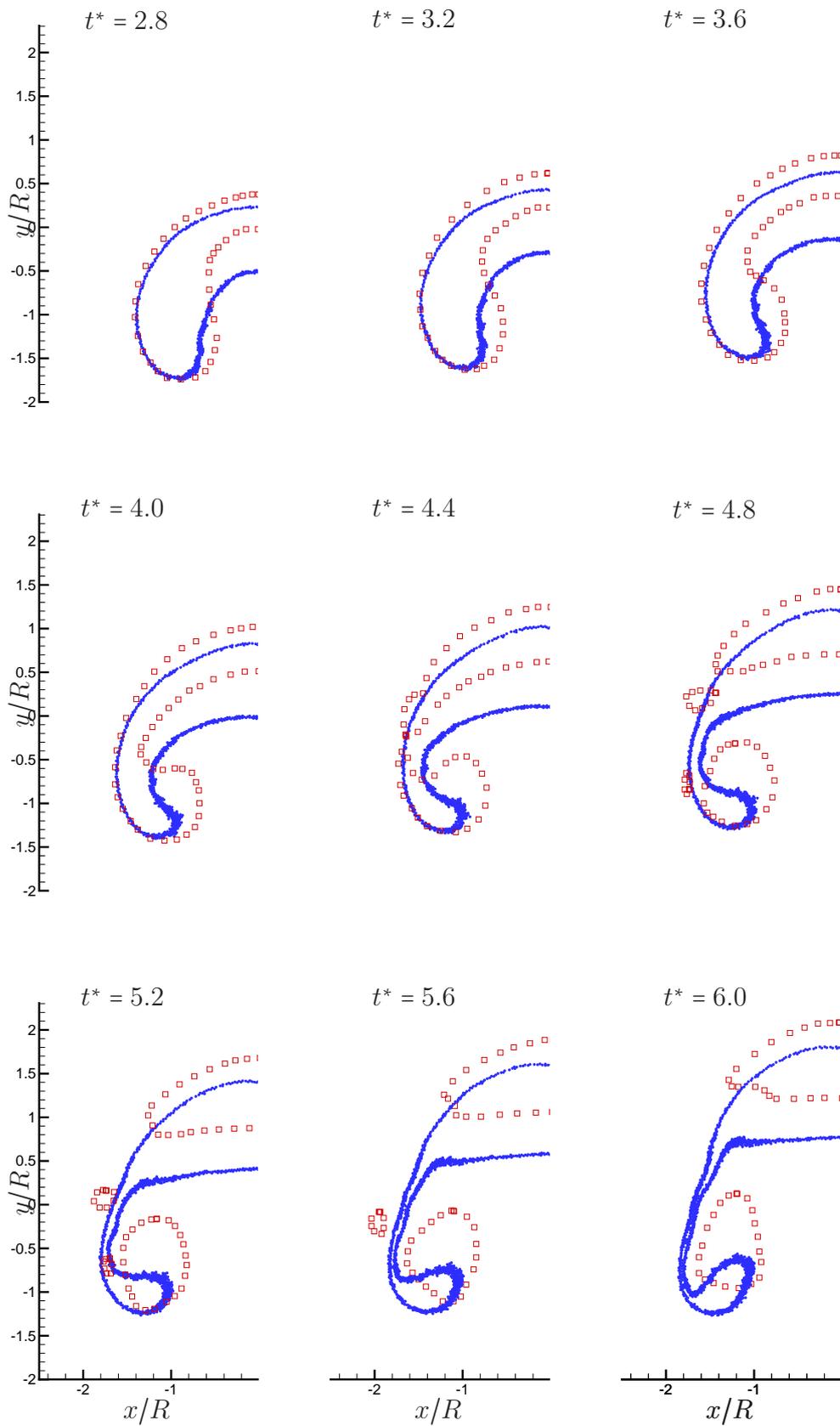


FIG. III.4.3 – Formulation SPH-VF en points bleus et carrés rouges pour la solution Level-Set de [Sussman et alii \(1994\)](#).

Pour la formulation SPH-VF (cf. figure III.4.3), les résultats sont beaucoup moins en accord avec ceux du Level-Set. Toutefois, de la même manière que sur le cas de validation précédent (les instabilités de Rayleigh-Taylor), la solution ne semble pas être totalement convergée à la plus forte résolution présentée ici. Les temps de calculs excessivement longs de cette formulation nous ont amené à ne pas poursuivre l'étude de convergence en espace au-delà de cette résolution.

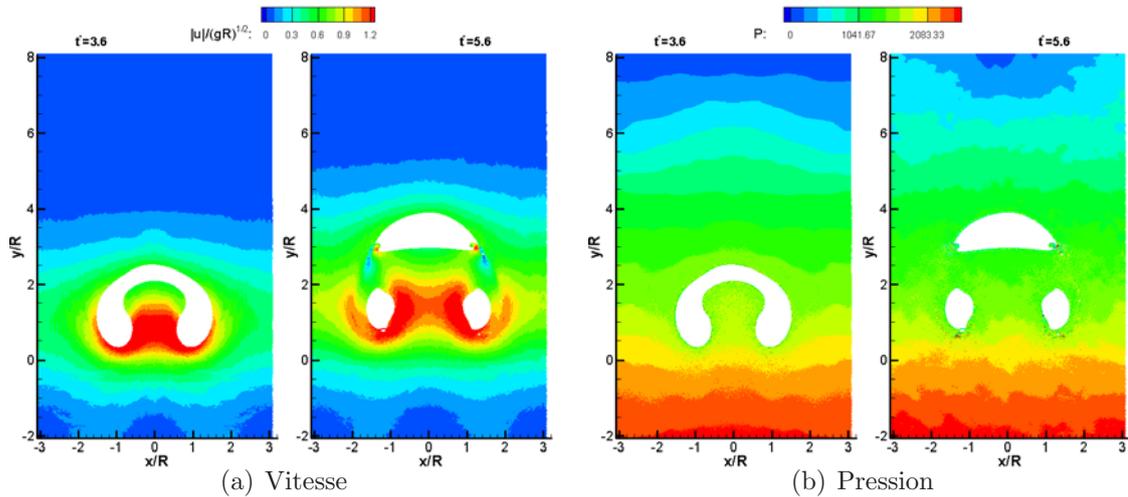


FIG. III.4.4 – Formulation SPH-Multifluide.

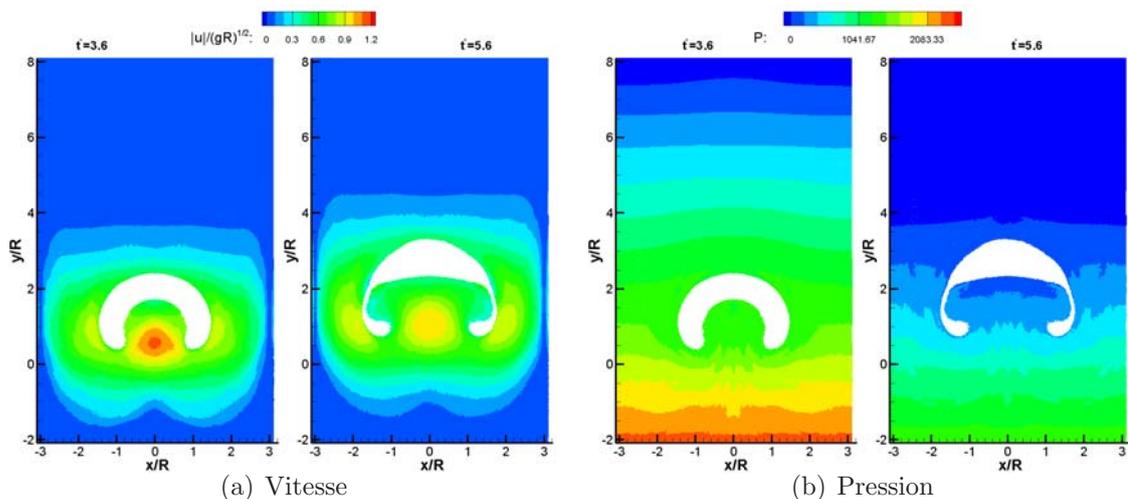


FIG. III.4.5 – Formulation SPH-VF.

Dans l'analyse des champs de vitesse et de pression (cf. figures III.4.4 & III.4.5) on retrouve certaines tendances déjà mentionnées. Ainsi, le champ de vitesse dans le fluide autour de la bulle en SPH-VF est bien plus faible qu'en SPH-Multifluide, conséquence des déformations plus fortes avec cette dernière formulation. En revanche, le champ de pression en SPH-VF apparaît bien plus lisse spatialement qu'en SPH-Multifluide : ceci est dû à l'emploi d'un solveur de Riemann. Il est à noter que des résultats semblables pourraient être obtenus sur la formulation SPH-Multifluide en effectuant régulièrement un lissage du champ de pression (par interpolation type MLS [Belytschko et alii \(1996\)](#)),

cf. Colagrossi et Landrini (2003). Cela n'a pas été testé sur notre implémentation de la formulation.

III.4.2 Vitesse terminale ascendante

III.4.2.1 Problème et configuration

Dans ce deuxième problème, on étudie l'évolution en temps de la vitesse de remontée d'une bulle dans une colonne de liquide au repos jusqu'à atteindre un régime stationnaire. Cette bulle est soumise, d'une part, à la poussée d'Archimède qui tend à la faire remonter vers le haut du domaine, et d'autre part, à un effort de traînée comprenant les effets visqueux. Or, en régime stationnaire, ces deux forces tendent à s'équilibrer : la bulle se déplace alors à vitesse constante, appelée vitesse terminale ascendante. Nous allons chercher à la mettre en évidence. La configuration spatiale est similaire au cas précédent. Seuls deux paramètres changent : la hauteur du domaine est plus grande afin de permettre à la bulle d'atteindre son régime stationnaire et de le maintenir sur plusieurs longueurs (ici $H/R = 120$), la largeur du domaine est aussi plus importante afin d'éviter les effets de confinement qui pourraient influencer sur la valeur de la vitesse atteinte. Bien qu'idéalement, pour éviter ce phénomène, le milieu devrait être infini, ici on se limite à $L/R = 20$. La bulle est de rayon $R = 0,01596m$.

Physiquement, on se place aussi dans un régime d'écoulement différent par rapport au cas précédent. Celui-ci est plus visqueux : le nombre de Reynolds (défini plus haut) est égal à 5. De plus, pour éviter de trop grandes déformations de la bulle (*i.e.* pour que celle-ci reste le plus sphérique possible), on se place à un nombre de Bond très bas ($Bo = 0,4$).

Le coefficient de tension superficielle est égal à $\sigma = 1N.m^{-1}$. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 9,81m.s^{-2}$. La pression de fond est prise égale à $750Pa$. Le liquide environnant est défini par : $\rho_{\mathcal{X}} = 40kg.m^{-3}$, $\mu_{\mathcal{X}} = 1.429.10^{-1}kg.m^{-1}.s^{-1}$ et $c_{\mathcal{X}} = 7m.s^{-1}$. Pour le gaz on a : $\rho_{\mathcal{Y}} = 1kg.m^{-3}$, $\mu_{\mathcal{Y}} = 10^{-1}kg.m^{-1}.s^{-1}$ et $c_{\mathcal{Y}} = 44m.s^{-1}$. Cette dernière viscosité a été choisie assez grande par rapport à celle du liquide de manière à avoir un écoulement assez stabilisé au sein de la bulle.

Étant donné le faible nombre de Bond de cet écoulement, il est nécessaire de modéliser correctement la tension superficielle. Cela a donc exclu la formulation SPH-VF pour le moment. La formulation SPH-Multifluide a donc été utilisée ici (avec un coefficient $\epsilon_I = 0$).

Le noyau choisi est la gaussienne. L'équation d'état est celle de Tait avec un coefficient polytropique identique pour les deux fluides ($\gamma = 1,4$).

La vitesse de remontée de la bulle est celle de son centre de gravité. Celle-ci est obtenue au niveau discret par la relation suivante :

$$\vec{u}_G = \frac{\sum_{i \in \mathcal{Y}} m_i \vec{u}_i}{\sum_{i \in \mathcal{Y}} m_i}$$

III.4.2.2 Résultats numériques

Une étude de convergence spatiale a été menée avec les résolutions suivantes : $h_1 = 8,48.10^{-3}m$, $h_2 = h_1/2$ et $h_3 = h_1/4$.

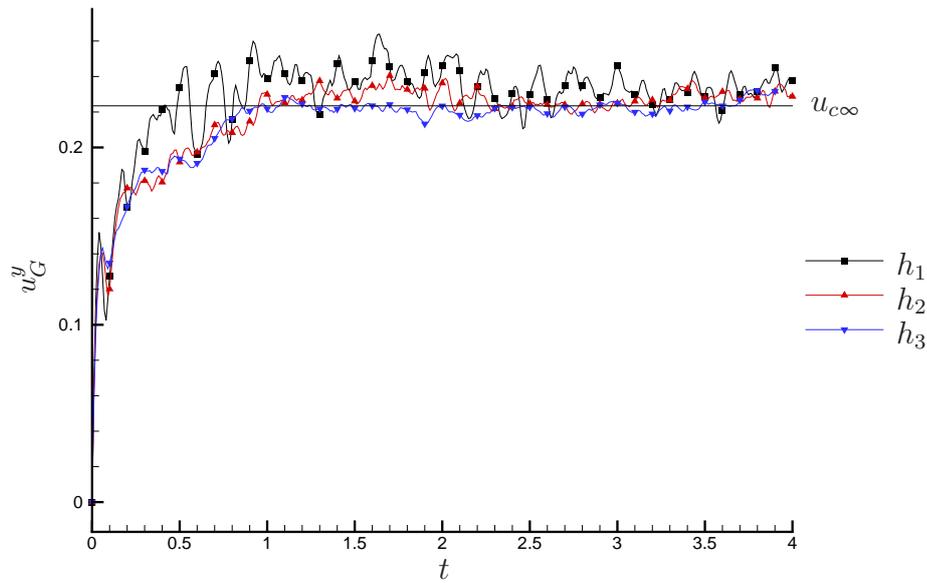


FIG. III.4.6 – Convergence en espace de la vitesse terminale.

On note tout d'abord (cf. figure III.4.6) que, pour toutes les résolutions, la vitesse converge en temps vers une certaine valeur, la vitesse terminale ascendante.

Nous avons cherché à déterminer la valeur de cette vitesse terminale à partir d'une analyse théorique de l'écoulement. La simulation étant bidimensionnelle, la bulle plane peut être assimilée à la section d'un cylindre infini dont on peut étudier l'effort de traînée dans un écoulement à vitesse constante Lamb (1932) :

$$F_{c\infty} = \frac{4\pi\mu\chi u_{c\infty}}{\frac{1}{2} - \gamma - \ln\left(\frac{Ru_{c\infty}\rho\chi}{4\mu\chi}\right)}$$

où γ est la constante d'Euler ($\gamma \simeq 0,577$). Cherchant la solution stationnaire de l'équation de quantité de mouvement, on peut équilibrer la précédente force avec la différence entre la poussée d'Archimède et l'effort de pesanteur s'exerçant sur une section du cylindre. La vitesse terminale est alors la solution de l'équation :

$$\pi R^2 g(\rho\chi - \rho\gamma) = F_{c\infty}.$$

Pour cette configuration, la résolution numérique de cette équation donne pour solution : $u_{c\infty} = 0,22m.s^{-1}$. Celle-ci est reportée sur la figure III.4.6.

Bien que la simulation numérique semble s'accorder avec cette vitesse terminale analytique, il faut noter plusieurs points essentiels sur la construction (et donc la validité) de cette dernière. D'une part, le cylindre infini est supposé être un corps rigide donc l'écoulement se produisant à sa surface (condition d'adhérence sur un solide) est différent de la condition existant à l'interface de la bulle simulée (condition d'adhérence mais entre deux fluides). La circulation existant dans le gaz de la bulle va donc permettre un mouvement de l'interface, ce qui va, à priori, avoir tendance à limiter les frottements et permettre à la bulle de remonter plus vite que le cylindre.

Remarque :

Pour être dans une configuration tout à fait équivalente au cylindre rigide, on aurait pu simuler le mouvement libre d'un corps rigide.

D'autre part, le calcul effectué dans [Lamb \(1932\)](#) et présenté ici est valable pour de faibles nombres de Reynolds ($Re < 1$), ce qui n'est pas tout à fait le cas dans la simulation ($Re = 5$). Il serait nécessaire de prendre en compte l'asymétrie liée au décollement de l'écoulement derrière le cylindre (cf. les corrélations données par [Clift *et alii* \(1978\)](#)).

Enfin, les effets de compressibilité du fluide gazeux sont importants (environ 20% de variation du volume v_{air} , cf. figure [III.4.7\(b\)](#)) : plus la bulle remonte, plus son volume augmente (tout en conservant sa masse, acquise par construction du schéma). Alors la différence entre la poussée d'Archimède et la force de pesanteur augmente (proportionnellement à R^2) tandis que les effets de traînée s'accroissent parallèlement. Néanmoins ces efforts semblent s'équilibrer car la bulle n'accélère pas au cours du temps.

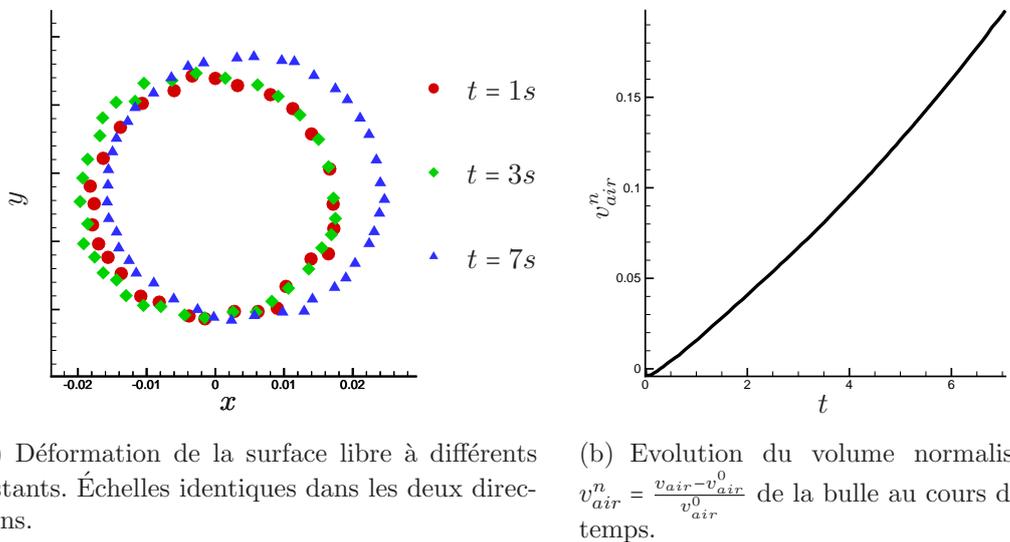


FIG. III.4.7 – Résolution h_2 .

Nous pouvons observer sur la figure [III.4.7\(a\)](#) les déformations de la surface libre à divers instants de remontée de la bulle. Celle-ci reste très circulaire et démontre l'efficacité du schéma C.S.S. à reproduire les forts effets de tension superficielle ($Bo = 0,4$).

Conclusion

Les écoulements qui ont été étudiés dans ce chapitre sont très importants dans la mesure où leur validation permet de connaître l'aptitude des formulations à prédire des situations qui se reproduiront dans un séparateur.

Toutefois, les cas présentés ne suffisent pas à balayer l'ensemble des configurations d'écoulements de bulles pouvant réellement intervenir dans un séparateur : il serait nécessaire de faire une étude plus exhaustive en faisant varier les caractéristiques de ces écoulements de bulles isolées (ceci s'étudie classiquement dans le domaine $We-Re$). D'autre part, il est à signaler que ce genre d'étude ne peut, à priori, être faite de manière satisfaisante qu'en procédant à des simulations tridimensionnelles des écoulements. Cela permet alors

de se placer dans des situations étudiées expérimentalement et numériquement, avec une riche littérature.

Néanmoins, même si cet important travail de validation fine reste à faire, nous allons aborder dans le chapitre suivant l'étude simplifiée d'un séparateur eau-huile.

Chapitre III.5

Séparateur eau-huile

Le but ultime de ces travaux est l'étude de la séparation de fluides, et plus particulièrement de l'eau et de l'huile. Pour cela nous avons développé et confronté à des cas de validation deux formulations dont l'une semble montrer plus de capacités pour pouvoir simuler ce problème. Afin de tirer parti au mieux des caractéristiques favorables de cette formulation SPH-Multifluide, nous avons construit un séparateur simplifié dont la configuration est détaillée ci-dessous.

III.5.1 Cuve fermée

III.5.1.1 Configuration

Le point de départ a été le rayon moyen des bulles que l'on désire représenter : nous avons choisi un rayon égal à $R = 1mm$. Puis, l'objet de ce cas étant uniquement de montrer la capacité de la SPH à traiter cette problématique, nous nous sommes limités à un nombre de bulles assez restreint (36) permettant de conserver un temps de calcul modéré.

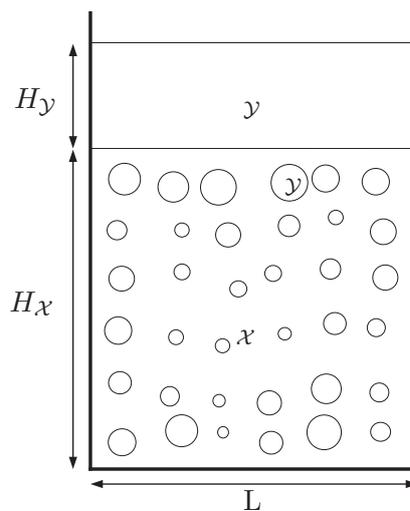


FIG. III.5.1 – Schéma de la configuration initiale.

Ces bulles sont initialement disposées de manière structurée en 6 lignes et 6 colonnes, cf. figure III.5.1. Mais pour ne pas créer de configuration initiale singulière qui aurait peu

d'intérêt d'un point de vue physique, nous avons, à la fois déplacé aléatoirement (selon les 2 directions principales) le centre de chaque bulle autour de ces positions de référence, et modulé le rayon de chacune d'entre elles de $\pm 50\%$ par rapport au rayon nominal.

Le domaine a été ensuite construit de manière à ce que des interactions puissent se produire entre les bulles et les parois (avec $L = H_{\mathcal{X}} = 26,6R$). Au dessus de la colonne d'eau au repos contenant les bulles d'huile a été rajoutée une colonne d'huile (avec $H_{\mathcal{X}} = 8,4R$) aussi au repos, modélisant une part d'huile déjà séparée vers laquelle les bulles vont migrer.

Les fluides ont les caractéristiques suivantes : pour l'eau on a une densité égale à $\rho_{\mathcal{X}} = 1000 \text{kg.m}^{-3}$, une vitesse du son de 7m.s^{-1} . Sa viscosité est choisie telle que $\alpha = 0,08$ soit $\mu_{\mathcal{X}} = 7.10^{-3} \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Pour l'huile on a choisi une densité égale à $\rho_{\mathcal{Y}} = 800 \text{kg.m}^{-3}$, la vitesse du son égale à $7,8 \text{m.s}^{-1}$ et une viscosité de $\mu_{\mathcal{Y}} = 6,5.10^{-3} \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

Le noyau choisi est la gaussienne avec une longueur de lissage égale à $h = 10^{-4} \text{m}$.

Le nombre de Reynolds de cet écoulement (cf. III.4.1.1) est de 40. Concernant les effets de tension superficielle, nous ne les avons pas modélisés dans ce premier essai effectué avant la validation du schéma C.S.S., seule la correction avec $\epsilon_I = 0,03$ est appliquée. Toutefois, en première approximation, on peut calculer le nombre de Bond moyen avec un coefficient de tension superficielle eau-huile ($\sigma_{\text{eau-huile}} = 2.10^{-2} \text{N.m}^{-1}$). On a alors $Bo_{\text{eau-huile}} = 4\Delta\rho gR^2/\sigma \sim 0,4$. En réalité, cet écoulement présente donc des effets de tension superficielle importants. Les résultats obtenus ici seront donc à interpréter avec précaution.

III.5.1.2 Résultats

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure III.5.2. Qualitativement, on peut mentionner le comportement cohérent de l'ensemble des bulles par rapport au comportement observé avec une bulle isolée sans tension superficielle : d'importants « aplatissements » des bulles se produisent. Avec le nombre de Bond estimé pour l'écoulement réel, les bulles devraient se déformer très peu tant qu'elles ne se touchent pas, surtout les plus petites (cf. le cas de la bulle isolée dont on cherche à déterminer la vitesse terminale ascendante). Ce n'est pas le cas ici, ce qui justifierait l'emploi du schéma C.S.S pour modéliser des effets de tension superficielle.

Néanmoins, ces résultats sont encourageants dans la mesure où ils démontrent la capacité de la formulation SPH-Multifluide à prendre en compte de manière relativement précise un nombre élevé d'interfaces disjointes, pouvant se fragmenter et/ou se reconnecter, comme ce serait le cas pour des nombre de Bond plus élevés. L'intérêt en est d'autant plus grand dans la zone de fort mélange à l'interface des deux colonnes de fluide initialement au repos, là où se déroule le processus même de séparation, où l'on peut observer à quel point la non-miscibilité des fluides est bien respectée. Une telle simulation effectuée avec une technique autorisant la diffusion de l'interface mènerait inévitablement à l'obtention d'une zone de mélange épaisse.

Pour quelques instants choisis, les champs de vitesse et pression sont aussi présentés sur la figure III.5.3. On remarque que le champ de pression est assez uniforme et dominé par la pesanteur, l'écoulement étant assez lent. En revanche, on notera la complexité du champ de vitesse dans le domaine.

Remarque :

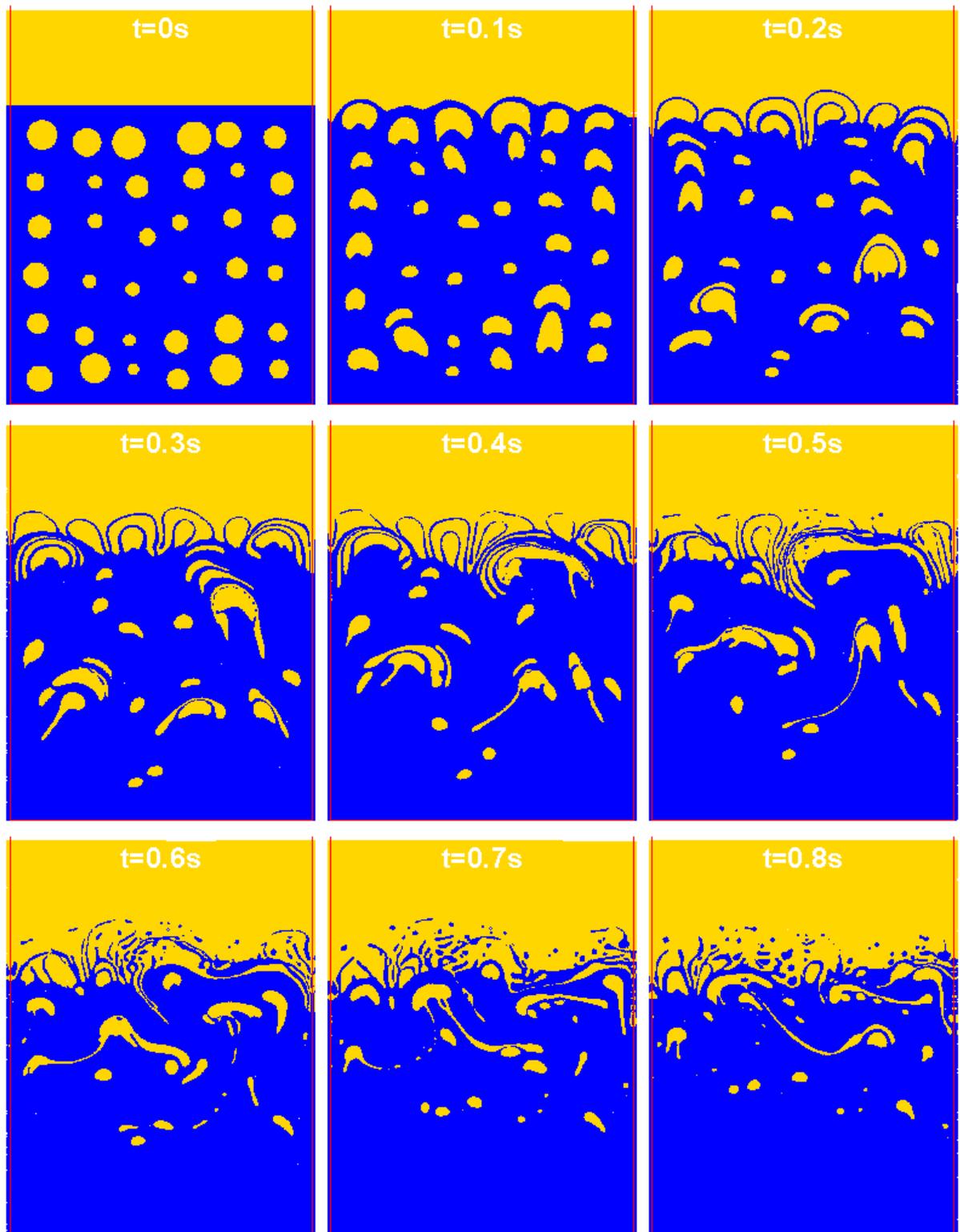


FIG. III.5.2 – Ensemble de bulles dans un séparateur simplifié. Champ de densité à divers instants.

Le temps de calcul sur un processeur 2,4GHz est de 18 jours pour 1,32s de temps physique simulé (171000 particules) avec un pas de temps de $1,2 \sim 10^{-5}s$, soit 110000 itérations du

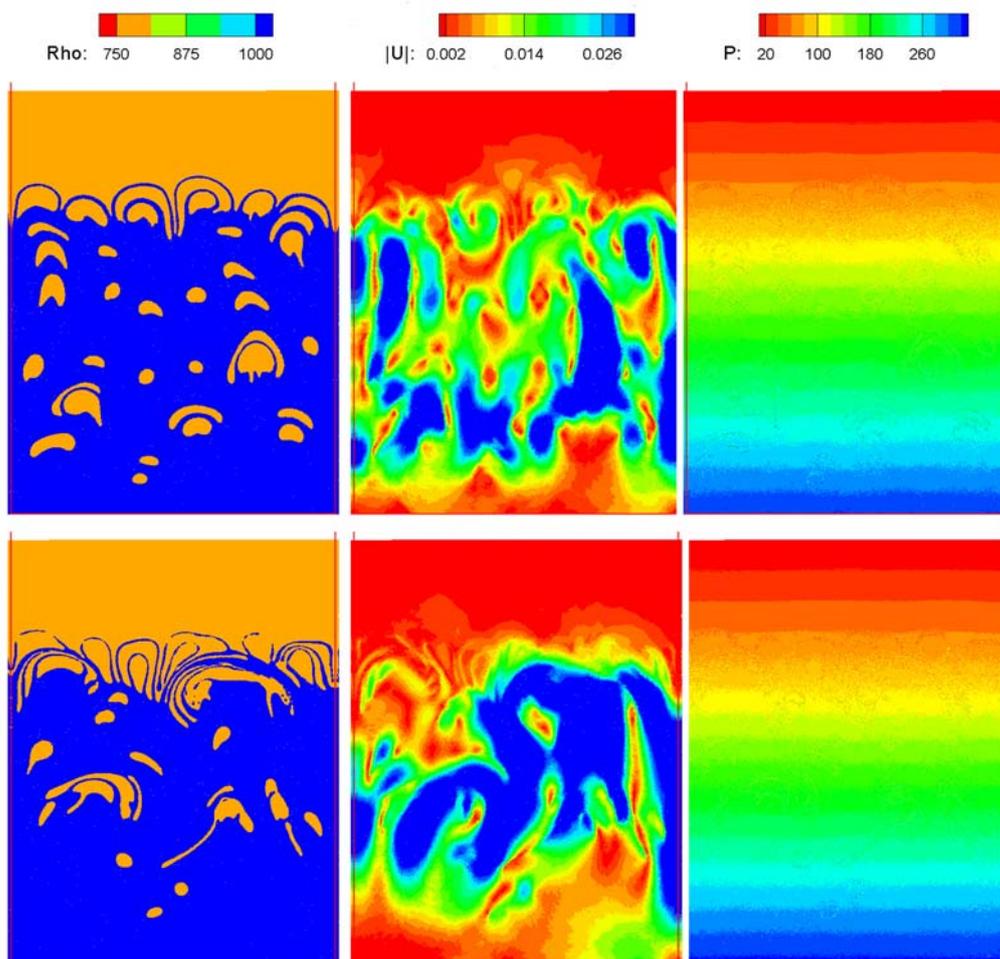


FIG. III.5.3 – Champ de densité, vitesse et pression à $t = 0,2s$ en haut et $t = 0,4s$ en bas.

schéma d’avance en temps Runge-Kutta 4^e ordre. Des techniques spécifiques devront donc être recherchées pour améliorer ces temps importants. On pourra notamment tenter de s’affranchir de la condition CFL_{visq} (cf. remarque au chapitre concernant la viscosité).

III.5.2 Cuve avec entrée/sortie

La simulation de la cuve précédente est enrichie par l’ajout d’un système permettant d’imposer des conditions d’entrée-sortie.

III.5.2.1 Configuration

Le système d’entrée/sortie développé par *Oger et alii* (2006) est adapté ici pour les écoulements bifluides. Les modifications portent sur deux points : la zone d’entrée et l’imposition des variables physiques.

Tout d’abord, l’objectif du système d’entrée est de permettre l’injection de deux fluides mélangés sous forme de bulles. Comme précédemment, de façon à éviter des configurations singulières, les bulles injectés vont être choisies avec un rayon et une position relative dans la hauteur de la section d’entrée de manière aléatoire (en restant dans un certain

intervalle). Ainsi, pour faciliter la gestion de la position et du rayon des bulles par rapport au support d'interpolation des particules étant dans le domaine de calcul (zone entre $Pos_E - 3h$ et Pos_E sur la figure III.5.4), celles-ci sont créées dans une zone de « germination » (zone tampon en amont de la section d'entrée, entre Pos_T et $Pos_E - 3h$) et advectées suivant la vitesse imposée jusqu'à l'entrée (il n'y a donc pas d'interpolation SPH à proprement parler dans la zone tampon).

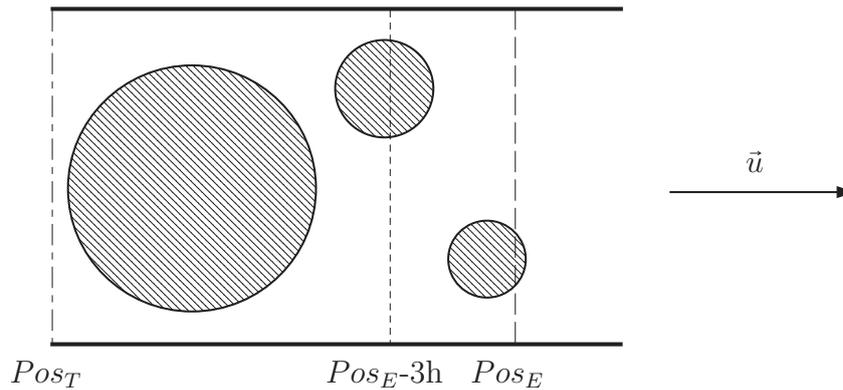


FIG. III.5.4 – Système de génération des bulles à l'entrée.

La deuxième modification majeure du système d'entrée/sortie concerne l'imposition des grandeurs physiques (vitesse et pression) sur les particules en entrée ou en sortie (une fois sorties du domaine fluide, c'est-à-dire une fois devenues « fantômes »). Les conditions naturelles à assigner ici (vitesse en entrée et pression en sortie) se révèlent être délicates à maintenir en pratique et peuvent poser des problèmes de stabilité et de génération d'ondes acoustiques. Ainsi, sur les particules d'entrée ont été imposés la vitesse ainsi qu'un profil de pression hydrostatique compressible, tandis que sur les particules de sortie seule la vitesse est imposée (la pression est celle de la particule la plus proche dans le domaine fluide; cf. Oger (2006)).

En entrée comme en sortie est appliqué un profil de vitesse uniforme sur la hauteur de la section. La vitesse est choisie telle qu'on ait conservation du débit volumique de mélange dans le domaine fermé. Néanmoins, la « germination » des bulles étant aléatoire (dans une certaine gamme de variation du rayon de celles-ci), la vitesse prescrite est corrigée de façon à avoir un ratio de densité entre les deux fluides aussi proche que possible de celui défini initialement.

La configuration du séparateur est illustrée sur la figure III.5.5. Les dimensions de la cuve sont de $160R \times 80R$, avec R le rayon nominal des bulles (fixé ici à $1mm$). Ce rayon est autorisé à varier de $\pm 50\%$ autour de cette valeur nominale. Le diamètre de l'entrée est de $10R$ ainsi que celui de la sortie d'eau. Le diamètre de la sortie d'huile est de $5R$.

Les fluides ont les caractéristiques suivantes : pour le fluide lourd on a une densité égale à $\rho_X = 1030kg.m^{-3}$, une vitesse du son de $6m.s^{-1}$. Sa viscosité est égale à $\mu_X = 3,125.10^{-2}kg.m^{-1}.s^{-1}$. Pour l'huile on a choisi une densité égale à $\rho_Y = 920kg.m^{-3}$, la vitesse du son égale à $6,3m.s^{-1}$ et une viscosité de $\mu_Y = 3,125.10^{-2}kg.m^{-1}.s^{-1}$. Le coefficient de tension superficielle entre les deux fluides est pris égal à $2.10^{-2}N.m^{-1}$. La pression de fond est égale à $400Pa$.

Le débit volumique imposé à l'entrée est égal à $2 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot s^{-1}$ (calcul 2D) pour l'eau, et égal à 5 fois moins pour l'huile. Ainsi la vitesse du mélange à l'entrée est $V_{sM} = 24 mm \cdot s^{-1}$.

Le noyau choisi est la gaussienne avec une longueur de lissage égale à $h = 5 \cdot 10^{-4} m$ (ce qui correspond à environ 98 000 points de discrétisation).

Le nombre de Reynolds de cet écoulement (basé sur V_{sM} et $2R$) est de $\sim 1,6$. Le nombre de Bond est égal à 0,2. Il est à noter que ce nombre adimensionnel est calculé pour une bulle remontant dans un milieu infini au repos, ce qui n'est pas exactement le cas ici : cependant, les effets inertiels sont peu importants devant les effets de la gravité ($Fr = V_{sM} / \sqrt{g2R} = 0,17$). Ainsi les effets visqueux et capillaires seront prépondérants par rapports aux effets inertiels.

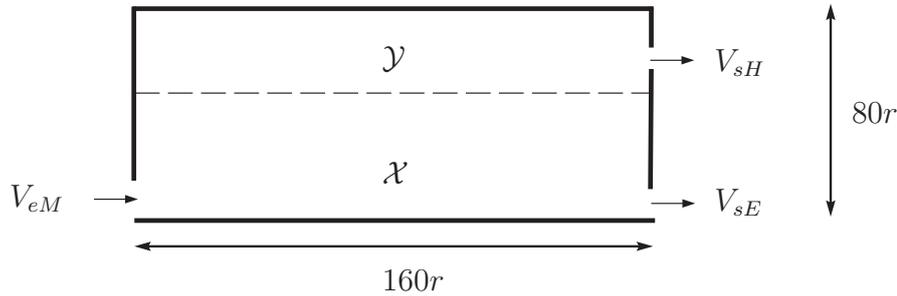


FIG. III.5.5 – Configuration du séparateur simplifié avec système d'entrée/sortie.

III.5.2.2 Résultats

Les résultats sont présentés sur la figure III.5.6. Un détail du domaine de calcul est aussi présenté sur cette même figure pour illustrer le fonctionnement du système d'entrée sur ce cas-là. Qualitativement, on observe un écoulement qui est dominé par les effets de gravité et qui se traduit par une remontée rapide des bulles après l'entrée. L'écoulement des bulles est donc peu dominé par l'effet inertiel dû à la vitesse d'entrée.

Pareillement à la simulation dans la cuve fermée, le nombre de Bond de cet écoulement est faible. Or ici le schéma C.S.S. a été utilisé. Il en résulte que les bulles conservent une forme circulaire beaucoup plus longtemps au cours de leur remontée. Des irrégularités à l'interface peuvent être cependant observées (cf. détail fig. III.5.6) : celle-ci peuvent provenir d'une résolution spatiale insuffisante (ici on a $R/h = 2$ contre $R/h = 10$ dans la précédente simulation). La discrétisation plus fine du domaine de calcul, qui apparaît ici nécessaire, se heurte aux dimensions même de ce grand domaine : une stratégie de parallélisation algorithmique serait alors efficace pour résoudre ce genre de problème en des temps de calcul raisonnables.

Néanmoins, de la même façon que précédemment, on peut souligner encore que la formulation SPH-Multifluide prend en compte ces interfaces complexes sans diffusion numérique.

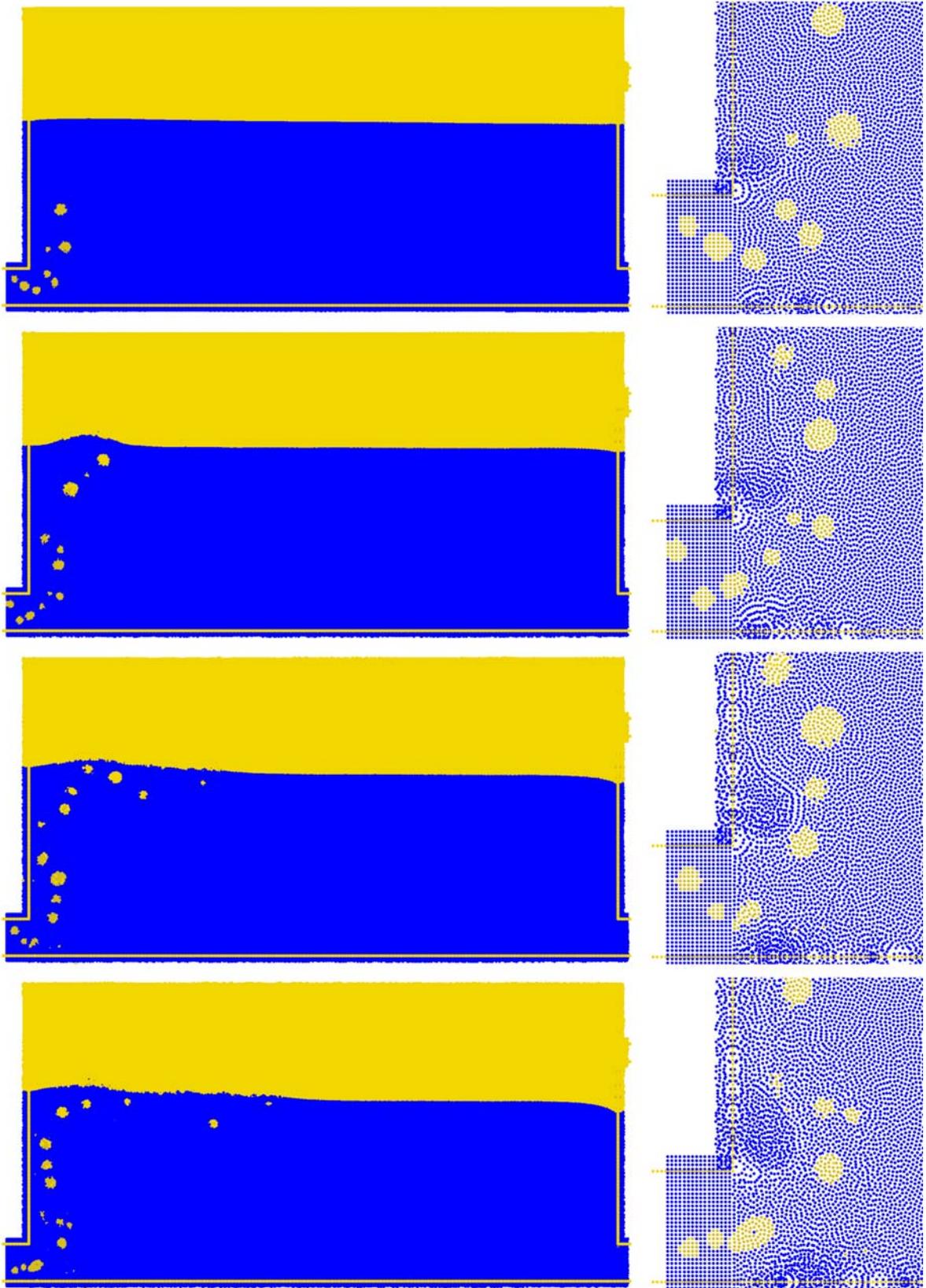


FIG. III.5.6 – Séparateur simplifié avec système d'entrée/sortie. Colonne de droite : zoom sur l'entrée. Champ de densité aux instants $t = 1s; 2s; 3s; 4s$ en partant du haut.

Conclusion

Ce cas d'étude d'un séparateur simplifié conclut donc nos travaux en montrant les capacités de la formulation SPH-Multifluide à simuler des problèmes de ce type. Comme mentionné au chapitre précédent, il reste toutefois à approfondir les différents régimes d'écoulements de bulles isolées et à s'intéresser aux phénomènes spécifiques lorsque plusieurs bulles interagissent (coalescence, rupture) avant de pouvoir réellement valider le comportement d'un ensemble plus important de bulles.

Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire ont porté sur le développement et la validation de formulations de la méthode SPH adaptées à la modélisation d'écoulements bifluïdes. Ainsi, avec l'objectif final de modélisation du fonctionnement d'un séparateur eau-huile, nous avons poursuivi le développement initié dans l'équipe par G. Oger dans une étude préliminaire de la simulation d'écoulements bifluïdes avec la méthode SPH.

Après avoir identifié les faiblesses de cette formulation initiale, il a été proposé, en collaboration avec A. Colagrossi, une nouvelle formulation plus à même de tenir compte des problèmes numériques introduits par la modélisation de plusieurs fluides avec interface. Parallèlement ont été aussi étendus les travaux effectués dans l'équipe sur les solveurs de Riemann pour la méthode SPH, par J.-B. Deuff et P.-M. Guilcher, aux cas d'écoulements bifluïdes avec cette technique. Ces deux formulations, respectivement dénommées dans le manuscrit comme SPH-Multifluïde pour la première et SPH-VF pour la seconde, ont alors été développées de manière distincte.

Puis de nouvelles modélisations physiques ont été ajoutées aux formulations afin de prendre en compte les effets de viscosité et les effets de tension superficielle. Ces schémas additifs ont été implémentés pour chaque formulation (sauf la tension superficielle avec SPH-VF) et testés sur des cas de validation spécifiques (écoulement de Poiseuille, oscillation d'une goutte en apesanteur). Si l'une des formulations (SPH-Multifluïde) a montré de bonnes capacités sur ces tests, l'autre a révélé un comportement beaucoup plus diffusif.

Enfin, d'autres cas de validation plus complets ont été simulés (ballotement linéaire, instabilités de Rayleigh-Taylor, cas d'envahissement, écoulement de bulle isolée), s'attachant à chaque fois à comparer les deux formulations aux solutions de référence. Globalement, il a été retrouvé un meilleur comportement de la méthode SPH-Multifluïde que celle SPH-VF. Il faut néanmoins préciser que cette dernière formulation se base sur un formalisme plus complexe. L'analyse des sources de différence aux solutions de référence ainsi que les solutions palliatives sont donc plus difficiles à mettre en œuvre. Néanmoins, on a pu identifier le point dégradant excessivement sa précision : la correction ajoutée pour permettre à la formulation de simuler de manière satisfaisante les écoulements bifluïdes est clairement à l'origine de ce défaut. Aucune alternative efficace n'a été trouvée dans cette étude pour s'en affranchir, mais la question reste ouverte.

La poursuite des cas-test avec la SPH-Multifluïde a mené à démontrer finalement sa capacité à simuler le problème cible de ce travail, la séparation eau-huile. On bénéficie là de ce que cette formulation capture les formes complexes d'interface, incluant de multiples fragmentations et reconnections sans aucune diffusion numérique de l'interface.

Au moment de dresser le bilan de ces travaux, on peut donc dire que l'objectif initial de développer une modélisation SPH bifluïde apte à être utilisée pour réaliser la sépara-

tion eau-huile est globalement atteint. Toutefois le travail réalisé est loin d'être exhaustif sur le sujet et bien des améliorations seront à y apporter afin d'augmenter le potentiel des formulations proposées. Nous allons suggérer quelques pistes de travail.

Tout d'abord sur la modélisation des effets physiques introduits, ceux-ci se sont limités à de faibles nombres de Reynolds pour des questions de stabilité. Il conviendra donc d'étendre le champ d'application de la modélisation de la viscosité : ce travail est poursuivi dans la thèse de M. De Leffe en cours. Pour les effets de tension superficielle, il sera nécessaire de travailler sur les courants parasites et en adaptant les techniques existant dans la littérature sur les méthodes maillées. Ayant observé qu'actuellement l'intensité des courants ne convergeait pas en espace vers zéro, résoudre ce problème permettra de conduire correctement des simulations à haute résolution.

La formulation SPH-Multifluide étant relativement robuste et ayant montré de bonnes capacités, peu de corrections (hormis celles décrites ci-dessus) semblent à recommander aujourd'hui dans le contexte de la séparation eau-huile. Bien sûr, elle pourra bénéficier des améliorations qui seraient réalisées sur la formulation monofluide, en terme de précision par exemple. Néanmoins, l'étude de cas où la dynamique est plus violente (impacts) nécessitera d'introduire un lissage supplémentaire des champs (tel que pratiqué de son côté par A. Colagrossi sur la divergence de la vitesse). L'étude fine du comportement de la méthode en termes de pression dans l'eau et dans l'air sur des cas confinés type envahissement devra aussi être menée.

Quant à la formulation SPH-VF, son potentiel réside dans la résolution précise de sa partie hyperbolique (qui, au contraire, ne nécessite pas de lissage tel que celui proposé ci-dessus). Néanmoins, la clé de son succès résidera dans la compréhension du problème numérique justifiant l'introduction de la correction proposée. De plus, les temps de calculs présentés dans les différents cas, qui peuvent paraître prohibitifs, sont à relativiser : des gains sont à attendre en étudiant mieux l'influence du coefficient de la condition CFL (qui pourrait être augmenté comme en formulation monofluide) et celle du nombre de voisins (la précision en compensant alors leur plus faible nombre).

Enfin, concernant l'applicabilité de ce qui a été développé, l'inclusion relativement aisée dans le code de calcul SPH-flow du laboratoire (tridimensionnel et parallélisé) permettra d'étendre les possibilités d'étude et de validation. En ce qui concerne la séparation eau-huile, on pourra, par exemple, valider le modèle sur des études d'écoulements de bulles réalistes (tridimensionnels). Et, outre une exploration du domaine {Reynolds-Weber} et son influence sur le comportement d'une bulle isolée, cela permettra de s'intéresser aussi aux phénomènes de coalescence entre bulles ou de ruptures de celles-ci. L'étude d'un séparateur sera alors beaucoup plus proche de la physique modélisée (avec possibilité de pouvoir prendre en compte une géométrie réaliste de cet équipement).

Annexe A

Pulsation propre d'une goutte cylindrique

On reprend ici la démonstration de [Lamb \(1932\)](#), qui détaille les modes propres d'oscillation d'une goutte bi-dimensionnelle en apesanteur et dans le vide, pour la compléter du cas où un fluide est pris en compte dans l'environnement extérieur. Cette extension est essentiellement basée sur un autre travail effectué par Lamb sur une goutte sphérique dans un liquide environnant.

On suppose que la goutte plane, qui peut être assimilée à une section d'un cylindre liquide infini (tel que l'a supposé Lamb), est de masse volumique ρ_i et qu'elle est entourée d'un fluide de masse volumique ρ_e . La tension superficielle existant entre eux a pour coefficient σ .

La goutte a un rayon moyen R . Les oscillations créées par l'excitation initiale (quelconque) vont déformer l'interface et on suppose que ces déformations ξ sont suffisamment petites devant R . Le rayon local r peut donc se décomposer de la manière suivante :

$$r(\theta) = R + \xi(\theta).$$

Comme détaillé par [Landau et Lifchitz \(1989\)](#), on peut exprimer le rayon de courbure κ en fonction de ces déformation :

$$\kappa = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \left(\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right).$$

On introduit alors le potentiel des vitesses ϕ pour chaque fluide,
– pour celui intérieur :

$$\phi_i = \frac{A}{n} \frac{r^n}{R^n} \cos(n\theta) \cos(\omega t + \varphi);$$

– et pour celui extérieur :

$$\phi_e = -\frac{A}{n+1} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}} \cos(n\theta) \cos(\omega t + \varphi)$$

de telle sorte qu'ils puissent vérifier, sur l'interface $r = R$, la condition suivante :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial r} = -\frac{\partial \phi_e}{\partial r}.$$

À l'aide de ces potentiels et sachant que :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

on peut exprimer la partie variable des pressions interne et externe sur l'interface :

$$\begin{cases} p_i = \dots - \rho_i \frac{A}{n} \cos(n\theta) \omega \sin(\omega t + \varphi) \\ p_e = \dots + \rho_e \frac{A}{n+1} \cos(n\theta) \omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Finalement, il convient d'utiliser cette paramétrisation du problème dans l'équation physique régissant celui-ci (en absence de pesanteur et de tout autre terme) : l'équation de Laplace (I.1.3). Pour rappel, elle s'écrit :

$$p_i - p_e = \sigma \kappa.$$

En introduisant les différents termes définis plus haut et en omettant les constantes (qui ne contribuent pas à la détermination des modes propres), on a :

$$-\rho_i \frac{A}{n} \cos(n\theta) \omega \sin(\omega t + \varphi) - \rho_e \frac{A}{n} \cos(n\theta) \omega \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{\sigma}{R^2} (-1 + n^2) \frac{A}{nR} \cos(n\theta) \sin(\omega t + \varphi),$$

relation valable à chaque instant t et pour tout angle θ . On en déduit donc la relation suivante :

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)(n^2-1)}{(n+1)\rho_i + n\rho_e}.$$

Pour deux cas remarquables, cette relation se simplifie de la manière suivante :

- si le fluide extérieur est de densité négligeable ($\rho_e \ll \rho_i$), on retrouve la relation démontrée par Lamb :

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n^2-1)}{\rho_i};$$

- si les deux fluides ont une densité identique ($\rho_i = \rho_e$) :

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)\rho_i}.$$

Bibliographie

- Andrillon Yann. *Simulation d'écoulements à surface libre par une méthode de capture d'interface en formulation totalement couplée*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Mar 2004.
- Balsara D. S. 1995. Von Neumann stability analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics - Suggestions for optimal algorithms. *Journal of Computational Physics*, 121 :357–372. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991\(95\)90221-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991(95)90221-X).
- Basa Mihai, Quinlan Nathan J., et Lastiwka Martin. 2008. Robustness and accuracy of sph formulations for viscous flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1002/flid.1927>.
- Belytschko T., Krongauz Y., Dolbow J., et Gerlach C. 1998. On the completeness of meshfree particle methods. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 43 :785–819. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19981115\)43:5%3C785::AID-NME420%3E3.0.CO;2-9](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19981115)43:5%3C785::AID-NME420%3E3.0.CO;2-9).
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., et Krysl P. December 1996. Meshless methods : An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4) :3–47. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X).
- Blondel Élise. Conception d'un protocole expérimental pour validation de simulation sph d'invasion. Master's thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2006.
- Bonet J. et Lok T. S. L. 1999. Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, 180(1-2) :97–115. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00051-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00051-1).
- Brackbill J. U., Kothe D. B., et Zemach C. June 1992. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100(2) :335–354. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90240-Y](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(92)90240-Y).
- Capdeville Guy. *Modélisation numérique d'écoulements compressibles, Polycopié de cours EI3, parties I et II*. 1990. École Centrale de Nantes.
- Chanteperdrix Guilhem. *Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques à interface libre. Application à l'étude des mouvements de liquides dans les réservoirs de véhicules spatiaux*. Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Mar 2004.

- Clift R., Grace J. R., et E. Weber M. *Bubbles, drops, and particles*. 1978. Academic Press, New-York. ISBN 0-12-176950-X.
- Colagrossi A., Colicchio G., et Le Touzé D. Enforcing boundary conditions in sph applications involving bodies with right angles. In *Proc. 2nd SPHERIC Workshop*, 2007.
- Colagrossi A. et Landrini M. 2003. Numerical simulation of interfacial flows by Smoothed Particle Hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 191 :448–475. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00324-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00324-3).
- Colagrossi A., Le Touzé D., et Antuono M. 2008. Theoretical considerations on the free-surface role in the smoothed-particle-hydrodynamics model. *Physical Review E*, 79, Issue 5, 056701. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.79.056701>.
- Colagrossi Andrea. *A meshless lagrangian method for free-surface flows and interface flows with fragmentation*. PhD thesis, Università di Roma La Sapienza, Apr 2005.
- Colicchio G. *Violent disturbance and fragmentation of free surfaces*. PhD thesis, University of Southampton, 2004.
- Cueille Pierre-Victor. *Modélisation par SPH des phénomènes de diffusion présent dans un écoulement fluide*. Thèse de Doctorat, INSA Toulouse, Dec 2005.
- Davis S. F. 1988. Simplified second-order godunov-type methods. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 9(3) :445–473. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1137/0909030>.
- Deuff Jean-Baptiste. *Extrapolation au réel des mesures de pressions obtenus sur des cuves modèle réduit*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Oct 2007.
- Di G. Sigalotti L., Klapp J., Sira E., Meleán Y., et Hasmy A. 1997. Sph simulations of time-dependent poiseuille flow at low reynolds numbers. *Journal of Computational Physics*, 191(2). Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00343-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00343-7).
- Doring Mathieu. *Développement d'une méthode SPH pour les applications à surface libre en hydrodynamique*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Jun 2005.
- Flekkøy E.G., Coveney P.V., et de Fabritiis G. 2000. Foundations of dissipative particle dynamics. *Physical Review E*, 62, Issue 2, 2140-2157. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.62.2140>.
- Francois Marianne M., Cummins Sharen J., Dendy Edward D., Kothe Douglas B., Sicilian James M., et Williams Matthew W. 2006. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework. *Journal of Computational Physics*, 213(1) :141 – 173. ISSN 0021-9991. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2005.08.004>.
- Godunov S.K. 1958. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math. Sbornik*, 47, 271-306. Translated by US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7226, 1969.

- Grenier N., Antuono M., Colagrossi A., Le Touzé D., et Alessandrini B. 2009. An hamiltonian interface sph formulation for multi-fluid and free-surface flows. *Journal of Computational Physics*. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.08.009>.
- Guilcher Pierre-Michel. *Contribution au développement d'une méthode SPH pour la simulation numérique des interactions houle-structure*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Oct 2008.
- Harten Amiram. 1983. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49 :357–393. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1997.5713>.
- Harten Amiram et Hyman James M. 1983. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 50(2) :235–269. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90066-9](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(83)90066-9).
- Harten Amiram, Lax Peter D., et Van Leer Bram. 1983. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1) :35–61. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1137/1025002>.
- Hirt C. W. et Nichols B. D. 1981. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90145-5](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5).
- Hu X. Y. et Adams N. A. 2006. A multi-phase sph method for macroscopic and mesoscopic flows. *Journal of Computational Physics*, 213 (2) :844–861. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2005.09.001>.
- Ivings M.J., Causon D.M., et Toro E.F. 1998. On riemann solvers for compressible liquids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 28 :395–418. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19980915\)28:3<395::AID-FLD718>3.0.CO;2-S](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19980915)28:3<395::AID-FLD718>3.0.CO;2-S).
- Lafaurie B., Nardone C., Scardovelli R., Zaleski S., et Zanetti G. 1994. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *Journal of Computational Physics*, 113, Issue 1 :134–147. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1994.1123>.
- Lamb Horace. *Hydrodynamics*. 1932. Dover, New York.
- Landau L. et Lifchitz E. *Physique théorique. Tome 6 : Mécanique des Fluides*. 1989. Mir, Moscou.
- Lanson N. et Vila J. P. 2001. Meshless methods for conservation laws. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55 :493–501. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4754\(00\)00285-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4754(00)00285-8).
- Lanson Nathalie. *Etude des méthodes particulières renormalisées : applications aux problèmes de dynamique rapide*. Thèse de Doctorat, INSA Toulouse, 2001.
- Le Touzé D., Colagrossi A., et Colicchio G. Ghost technique for right angles applied to the solution of benchmarks 1 and 2. In *Proc. 1st SPHERIC Workshop*, 2006.

- Marongiu Jean-Christophe. *Méthode numérique lagrangienne pour la simulation d'écoulements à surface libre.-Application aux turbines Pelton*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Lyon, 2007.
- Mas-Gallic S. et Raviart P. A. 1987. A particle method for first-order symmetric systems. *Numer. Math.*, 51 :323–352. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1007/BF01400118>.
- Miller C. A. et Scriven L. E. 2006. The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 32(03) :417–435. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112068000832>.
- Monaghan J. J. 1992. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of Astronomy and Astrophysics*, 30 :543–574. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>.
- Monaghan J. J. 1994. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110 :399–406. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1994.1034>.
- Monaghan J. J. 2000. Sph without a tensile instability. *Journal of Computational Physics*, 159 :290–311. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2000.6439>.
- Monaghan J. J. 2005. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68 :1703–1759. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01>.
- Morris Joseph P. 2000. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 33 :333–353. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1002/1097-0363\(20000615\)33:3%3C333::AID-FLD11%3E3.0.CO;2-7](http://dx.doi.org/10.1002/1097-0363(20000615)33:3%3C333::AID-FLD11%3E3.0.CO;2-7).
- Morris Joseph P., Fox Patrick J., et Zhu Yi. 1997. Modeling low reynolds number incompressible flows using sph. *Journal of Computational Physics*, 136 :214–226. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1997.5776>.
- Nugent S. et Posch H. A. 2000. Liquid drops and surface tension with smoothed particle applied mechanics. *Physics Review E*, 62. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.62.4968>.
- Oger G., Doring M., Alessandrini B., et Ferrant P. 2006. Two-dimensional sph simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213 (2) :803–822.
- Oger Guillaume. *Aspects théoriques de la méthode SPH et applications à l'hydrodynamique à surface libre*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Oct 2006.
- Popinet Stéphane et Zaleski Stéphane. 1999. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30(6) :775–793. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19990730\)30:6<775::AID-FLD864>3.0.CO;2-#](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19990730)30:6<775::AID-FLD864>3.0.CO;2-#).
- Prosperetti Andrea. 1980. Normal-mode analysis of the oscillations of a viscous liquid drop in an immiscible liquid. *Journal de Mécanique*, 19(1) :149–182.

- Randles P. W. et Libersky L. D. 1996. Smoothed particle hydrodynamics : some recent improvements and applications. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, 139 :375–408. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01090-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01090-0).
- Raviart P.A. *An analysis of particle methods*. 1985, volume 1127 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0074532>.
- Renardy Yuriko et Renardy Michael. 2002. Prost : A parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics*, 183(2) : 400–421. ISSN 0021-9991. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2002.7190>.
- Ruponen Pekka. 2006. Pressure-correction method for simulation of progressive flooding and internal air flows. *Ship Tech. Res.*, 53 :63–73.
- Sussman M., Smereka P., et Osher S. 1994. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114, 146-159. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1994.1155>.
- Takeda H., Miyama S. M., et Sekiya M. 1994. Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics. *Progress of Theoretical Physics*, 92(5) :939–960. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1143/PTP.92.939>.
- Tanguy Sébastien. *Développement d'une Méthode de Suivi d'Interface. Application aux Écoulements Diphasiques*. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de l'Université de Rouen, Nov 2004. Disponible à <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00007613/fr>.
- Toro E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. 1997. Springer, Berlin.
- Torres D. J. et Brackbill J. U. 2000. The point-set method : Front-tracking without connectivity. *Journal of Computational Physics*, 165(2) :620 – 644. ISSN 0021-9991. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2000.6635>.
- Van Leer B. 1979. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32 :101–136. Disponible à [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1).
- Vila J. P. 2000. On particle weighted methods and smoothed particle hydrodynamics. *Mathematical models and Methods in Applied Sciences*, 9(2) :161–209. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1142/S0218202599000117>.
- Watkins S. J., Bhattal A. S., Francis N., Turner J. A., et Whitworth A. P. 1996. A new prescription for viscosity in smoothed particle hydrodynamics. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 119 :177–187. Disponible à <http://dx.doi.org/10.1051/aas:1996104>.
- Zhou Z.Q., De Kat J.O., et Buchner B. A nonlinear 3-d approach to simulate green water dynamics on deck. In *Proc. 7th Int. Conf. Num. Ship Hydrod.*, pages 5.1–1, 15, 1999.

Modélisation numérique par la méthode SPH de la séparation eau-huile dans les séparateurs gravitaires

Résumé : Dans l'industrie d'extraction pétrolière, l'efficacité des séparateurs eau-huile pour la production offshore est cruciale. L'objet de ce travail est de mettre en place les outils numériques nécessaires à la modélisation du fonctionnement de ces systèmes. Les phénomènes physiques entrant en jeu sont principalement : la présence d'interfaces entre des fluides non miscibles, la viscosité de ces fluides, et les effets de tension superficielle. Les modèles physiques et numériques correspondants ont été implémentés dans le cadre de la méthode numérique SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) développée au L.M.F.. Cette méthode numérique appartient à la classe des méthodes particulaires (sans maillage), suivant une approche d'écoulement compressible et avec une résolution explicite. Pour modéliser au mieux les écoulements bifluïdes, la formulation historique de la SPH a été enrichie par deux approches différentes, développées simultanément. Chacune d'entre elles a été validée séparément. La physique supplémentaire a été rajoutée par des modèles communs qui ont été validés sur différents cas tests tels que l'écoulement de Poiseuille, les instabilités de Rayleigh-Taylor, des cas d'invasion ou l'évolution de bulles dans un liquide. Ce dernier cas a permis la comparaison aux outils de conception utilisés dans le procédé d'ingénierie de SAIPEM S.A., par l'intermédiaire d'une validation sur la loi de Stokes. Finalement, les capacités de la méthode sont illustrées sur la séparation eau-huile dans un séparateur de géométrie simplifiée.

Mots-clés : SPH, multi-fluides, interface, fraction de volume, solveur de Riemann, écoulements de bulles

Numerical modeling of water-oil separation in phase separators using an SPH method

Abstract : In oil extraction industry, efficiency of water-oil separators for offshore production is crucial. The aim of this work is to develop numerical tools able to model such systems in operation. The physical phenomena involved are mainly : the presence of an interface between two immiscible fluids, the viscosity of these fluids, and surface tension effects. Corresponding physical and numerical models have been implemented in the frame of the SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) numerical method developed at L.M.F.. The main features of SPH are : particle-based method (mesh-free), weakly-compressible approach, and explicit resolution. To improve two-phase flows modeling, classical formulation of SPH has been extended by two different approaches, developed simultaneously. Each of these has been validated separately. Additional physical effects have been implemented using shared models which validations have been performed on several test cases such as Poiseuille flows, Rayleigh-Taylor instabilities, flooding or bubble evolutions in liquids. The latter has allowed comparison to the design tools used in the SAIPEM S.A. engineering process, through the validation versus Stoke's law. Eventually, the method capabilities are illustrated on the water-oil separation in a separator of simplified geometry.

Keywords : SPH, multiphase, interface, volume fraction , Riemann solver, bubble flows

Discipline : Sciences de l'Ingénieur