



HAL
open science

Interactions rayonnement-matière résonantes en régime nonlinéaire : systèmes à deux niveaux et milieux quadratiques

Petrutza Anghel-Vasilescu

► **To cite this version:**

Petrutza Anghel-Vasilescu. Interactions rayonnement-matière résonantes en régime nonlinéaire : systèmes à deux niveaux et milieux quadratiques. Formation de Structures et Solitons [nlin.PS]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2010. Français. NNT : . tel-00664992v1

HAL Id: tel-00664992

<https://theses.hal.science/tel-00664992v1>

Submitted on 31 Jan 2012 (v1), last revised 6 Feb 2012 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L' UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : **Constituants élémentaires de la matière**

Ecole Doctorale : **Information Structures Systèmes**

présentée et soutenue publiquement par

Petruța Anghel-Vasilescu

le 15 octobre 2010

**Interactions rayonnement-matière résonantes en
régime nonlinéaire : systèmes à deux niveaux et
milieux quadratiques**

JURY

M. Antonio DEGASPERIS	Professeur	Université Roma 1	Rapporteur
M. Jérôme DORIGNAC	M. de Conf	Université Montpellier 2	Examineur
M. Philippe EMPLIT	Professeur	Université de Bruxelles	Examineur
M. Jérôme LEON	Professeur	Université Montpellier 2	Directeur de thèse
M. Miguel MANNA	Professeur	Université Montpellier 2	Président du jury
M. Majid TAKI	Professeur	Université de Lille 1	Rapporteur

à Jérôme,
le père de cette aventure. Je ne t'oublierai jamais.

à mon ange gardien,
merci d'exister et d'illuminer ma vie.

Remerciements

Il y a bien sûr plusieurs personnes sans lesquelles ce travail n'aurait pas pu être réalisé dans des si bonnes conditions et dont le valeureux soutien m'a donné beaucoup de confiance pendant ces trois années passées au LPTA. Mes pensées vont tout particulièrement à Jérôme Léon, qui a été bien plus qu'un directeur de thèse pour moi. J'ai énormément apprécié être sous sa tutelle, apprendre de sa grande expérience et expertise, partager sa grande bonne humeur et nos pauses café/champagne lorsque des résultats tant attendus voyaient le jour. Ce fut un réel plaisir de travailler avec lui et de parcourir le début de ma vie scientifique en sa compagnie. Il m'a appris qu'est-ce la passion pour ce métier, la persévérance, l'aboutissement d'un projet ou d'une idée, la patience quand les choses n'avancent pas à grande vitesse. Une petite tape sur l'épaule avec un "Ça roule ma poule !" suffisaient pour me redonner du courage. Je le remercie pour tout ce qu'il m'a appris, pour ses précieuses qualités pédagogiques, pour sa grande disponibilité et pour avoir su aussi me donner de l'espace pour devenir/m'épanouir. Même si je sais qu'il n'en a pas voulu, il m'a donné aussi une grande leçon de vie, par sa force et son courage de combattre cette atroce maladie, tout en continuant de travailler, même dans les petites chambres d'hôpital. Je regrette énormément de n'avoir pas eu le temps de lui dire au revoir et de lui exprimer ma gratitude et ma reconnaissance. Je sais que de là-haut il continue à veiller sur moi et à m'inspirer et j'espère jamais le décevoir. Il restera à jamais dans ma mémoire comme un père et un mentor.

Je remercie également Majid Taki pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, pour sa bienveillance et disponibilité ainsi que pour les nombreuses discussions scientifiques qu'on a eues ensemble. Notre collaboration a été une expérience très enrichissante et il m'a fait un grand honneur d'accepter d'être mon rapporteur de thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à Antonio Degasperis, ce fut un privilège de l'avoir eu comme rapporteur et à Philippe Emplit et Miguel Manna pour avoir accepté la responsabilité de participer à ma soutenance en tant qu'examineurs. J'ai été très honorée d'avoir eu un jury d'aussi bonne qualité et renommé et je leur remercie d'avoir accepté cette tâche malgré leurs emplois de temps très chargés.

Je remercie tout particulièrement Jérôme Dorignac qui est venu apporter son expertise à un moment très important de ma thèse. Sa présence et sa disponibilité, nos longues discussions, son amitié, son soutien et ses conseils m'ont permis aussi de continuer cette magnifique aventure. J'ai énormément apprécié son intégrité scientifique ainsi que sa passion. Ses réponses à mes questions souvent naïves m'ont fortement impressionné. Je lui remercie pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour sa participation dans le jury.

Je n'oublie pas tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules qui m'ont si bien accueillie au sein de leur établissement, en commençant par le directeur Alain Falvard et en finissant par tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, ont illuminé ces

merveilleuses années passées à Montpellier. Je n'oublierai pas la bonne cuisine méditerranéenne du CAS ainsi que les heures d'enseignement passées dans l'équipe pédagogique de Physique de l'UM2 (une pensée à toi Brahim).

Je remercie ensuite tous les doctorants et post-docs du LPTA, anciens comme nouveaux pour leur chaleur et accueil. Bruno, mon cher co-bureau brésilien pour avoir partagé son exotisme, ses passions et ses peines, mon gourou Radoudou pour son aide précieuse dans la programmation Mathematica ainsi que pour son calme et patience, Sean pour ses petites folies et sa bonne humeur, Amine pour le partage de ses films...euh...*atypiques* et ses bons gâteaux d'anniversaire, Véro, avec ses bienvenus cookies lors de nos pauses café-réunion et ses idées cadeaux de fin de thèse très originaux, Christian qui a réussi un incroyable exploit : m'initier à l'escalade, Armand avec son charmant *acceynt dyu syud*, Bruno, Fabio, Gregory, Raphael, Michèle, Jamal, Sabrina et tant d'autres qui ne me viennent pas à l'esprit en ce moment, pour les bons moments passés ensemble. Je suis également contente d'avoir pu rencontrer le club des amis mathématiciens (Romain, Afaf, Nadia, Benoît, Julien, Guillaume, Chady, Hilde, etc) qui m'ont émue avec leur joie et gentillesse et qui ont participé à un riche échange entre les physiciens et les mathématiciens au sein de l'UM2.

Le mulțumesc din suflet părinților mei pentru sprijinul necondiționat pe care mi l-au acordat și pentru încrederea ce mi-o poartă. Tot ce am realizat astăzi nu ar fi fost posibil fără ajutorul și sacrificiile lor. Merci Nico și Alex pentru că ați fost mereu alături de mine. Aș fi vrut să vă am aproape în această zi importantă din viața mea dar știu că am putut conta pe suportul vostru de la distanță.

Un grand merci à toute la famille Chalons pour avoir toujours été si gentille et pour l'immense bonheur et honneur qu'elle m'a faite d'être présente lors de ma soutenance malgré les grandes distances qui nous séparaient.

Enfin, cette thèse n'aurait pas été si agréable sans le précieux soutien et l'amour de Guillaume, qui a su être à mes côtés quand j'avais besoin et répondre à mes multiples questions existentielles, linguistiques et physiques. Il est donc naturel que je termine en te remerciant, Guillaume, pour toutes les choses que tu m'a apprises, pour le bonheur que tu m'apportes dans la vie, pour ta grande patience, ton sourire, ta bonté. Tu me donnes des forces pour dépasser mes peurs et limites, de l'espoir și o nouă rațiune de a exista : micuța noastră Piticoțenie.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Table des figures	vii
Liste des tableaux	xii
Introduction générale	1
I Génération et dynamique des solitons de gap dans les milieux à deux niveaux quantiques	5
Introduction première partie	7
1 Éléments de mécanique quantique	11
1.1 Espaces des fonctions d'onde et des états : Notation de Dirac	11
1.1.1 Espaces \mathcal{F} des fonctions d'onde d'un système	11
1.1.2 Espaces \mathcal{E} des états	13
1.1.3 Système libre non-perturbé	13
1.1.4 Système perturbé	15
1.1.5 Propriétés des opérateurs	15
1.2 L'opérateur densité	16
1.2.1 Système isolé à plusieurs composantes	16
1.2.2 Description en terme de matrice densité	17
1.3 Hamiltonien dipolaire électrique	18
1.3.1 Approximation des grandes longueurs d'onde	19
1.3.2 Approximation d'atome à deux niveaux	19
1.4 Interaction résonante électron-photon	20
2 Le système de Maxwell-Bloch dans les milieux à deux niveaux	25
2.1 Équations de Bloch optiques	25
2.1.1 Remarques	26
2.1.2 Conclusion	27
2.2 Éléments d'électrodynamique classique	27
2.3 Le système de Maxwell-Bloch	28

2.3.1	Système adimensionalisé	29
3	Analyse linéaire	31
3.1	Système de base	31
3.2	Solutions particulières du système linéaire	32
3.2.1	Le mode linéaire électrostatique	33
3.2.2	Le mode linéaire plasmon	33
3.2.3	Le mode linéaire électromagnétique	34
3.3	Relation de dispersion linéaire	34
3.3.1	Relation de dispersion adimensionalisée	36
4	Optique géométrique à l'interface des milieux à deux niveaux quantiques	37
4.1	Optique dans un milieu à deux niveaux	37
4.1.1	L'angle de Brewster et l'angle d'extinction	37
4.1.2	Optique non-linéaire	42
4.2	Plasmons de surface	43
4.2.1	Ondes de surface à la frontière de deux diélectriques	44
4.2.2	Ondes de surface dans les milieux à deux niveaux	46
4.2.3	Plasmon de surface à la frontière diélectrique-milieu à deux niveaux	47
5	Analyse non-linéaire	51
5.1	Précisions sur l'hypothèse de champ monochromatique	51
5.2	Méthode de développement multimodal	52
5.2.1	Calculs	53
5.3	Développement spatial multi-échelles	57
5.4	Effet Kerr	61
6	Solitons de gap dans un milieu à deux niveaux avec charges	63
6.1	Résultats publiés dans <i>Journal of Physics A</i>	63
	Conclusions première partie	81
 II Seuil de supratransmission non-linéaire dans les amplificateurs paramétriques optiques		83
	Introduction deuxième partie	85
7	Phénomènes non-linéaires dans les milieux quadratiques	89
7.1	Susceptibilité électrique linéaire	89
7.2	Susceptibilité non-linéaire	90
7.2.1	Propagation des champs électromagnétiques scalaires	90
7.2.2	Généralisation : champs à plusieurs composantes	91
7.3	Conversion de fréquences optiques	93
7.3.1	Principe de l'amplificateur paramétrique optique (OPA)	94
7.3.2	Milieux uniaxes	95
7.3.3	Technique d'accord de phase basée sur la biréfringence	96
8	Équations de propagation dans le cristal biréfringent	99
8.1	Équations de conservation du champ électrique	99
8.2	Équations de conservation du champ magnétique	101
8.3	Modes propres de propagation dans un cristal biréfringent	101

8.4	Effet non-linéaire de la biréfringence	106
8.4.1	Interaction à trois ondes non-dégénérée	108
8.5	Interaction à trois ondes dégénérée	108
8.5.1	Changement de variables	109
9	Optique géométrique à l'interface des milieux quadratiques biréfringents	111
9.1	Confined modes in an asymmetric planar waveguide	112
9.1.1	Guided TE modes - ordinary polarization	114
9.1.2	Guided TM modes - extraordinary polarization	118
9.2	Evanescence optics in a birefringent medium	123
9.2.1	Critical angle	128
9.2.2	Brewster angle	128
10	La supratransmission non-linéaire dans les modèles intégrables	131
10.1	Modèle de Schrödinger non-linéaire scalaire	131
10.1.1	Introduction	131
10.1.2	Résultats connus	132
10.1.3	Méthode de développement en série	133
10.1.4	Stabilité linéaire et seuil de supratransmission	135
10.2	Modèle de Schrödinger non-linéaire vectoriel (le système de Manakov)	138
10.2.1	Solitons de gap vectoriels et seuil de supratransmission	139
11	Solitons paramétriques de gap dans les milieux quadratiques	141
11.1	Valeurs numériques des paramètres pour la GSH dans LGT	141
11.2	Supratransmission NL dans les oscillateurs paramétriques dégénérés	143
11.2.1	Résultats publiés dans <i>Physical Review Letters</i>	144
11.2.2	Solutions sous la forme des séries asymptotiques	144
11.2.3	Prédiction du seuil NST	144
11.2.4	Instabilité paramétrique et supratransmission	144
11.3	Supratransmission NL dans les oscillateurs paramétriques non-dégénérés	149
11.3.1	Résultats publiés dans <i>Physical Review A</i>	149
11.3.2	Configuration physique	149
11.3.3	Forçage au bord par couplage évanescent	149
11.3.4	Le système d'équations non-linéaires couplées pour la 3WI	149
11.3.5	Le seuil de NST et les valeurs numériques	149
	Conclusions deuxième partie	159
	Annexes	160
A	Hamiltonien d'interaction et transformations de jauge	161
A.1	Jauge de Coulomb	161
A.2	Jauge de Göppert-Mayer	162
B	Angle d'accord de phase dans un cristal biréfringent positif	165
C	Transformations des coordonnées dans le cristal biréfringent	169
	Bibliographie	171

Table des figures

1.1	<i>Système physique composé de deux sous-ensembles A et B en corrélation quantique.</i>	17
1.2	<i>Niveaux d'énergie et fréquence de transition Ω dans l'approximation d'atome à deux niveaux.</i>	20
1.3	<i>Définition du repère utilisé pour décrire l'interaction d'un atome de hydrogène avec une onde monochromatique. Le noyau (\bullet) de l'atome est considéré fixé dans sa position \mathbf{r}_0 par rapport au centre du système de coordonnées (x, y, z) et la position de l'électron (\circ) sera donné à tout instant par le vecteur $\hat{\mathbf{r}}$. . .</i>	21
3.1	<i>Relation de dispersion de la solution électromagnétique linéaire de système de Maxwell-Bloch dans un système à deux niveaux de fréquence de transition Ω_j.</i>	35
3.2	<i>Relation de dispersion linéaire du système de Maxwell-Bloch sans dimensions dans un système à deux niveaux ayant la fréquence de transition égale à 1 et la fréquence de plasma $\omega_0 = \sqrt{1 + \alpha}$.</i>	36
4.1	<i>Directions de propagation de l'onde incidente, transmise et réfléchi à l'interface d'un système formé d'un diélectrique d'indice n et d'un milieu à deux niveaux de fréquence de transition Ω.</i>	38
4.2	<i>Changement de repère pour la propagation d'une onde plane dans un milieu à deux niveaux. Le repère $(\xi\zeta)$ attaché à la propagation du champ peut être lié au repère (x_0z) par une simple rotation d'angle θ (l'angle fait entre la direction du vecteur d'onde \mathbf{K} ayant les composantes k et q et la normale à l'interface)</i>	43
4.3	<i>Composantes normales (F_1 et F_2) du champ électrique du plasmon de surface selon la direction z perpendiculaire à l'interface $z = 0$ entre un diélectrique ($\varepsilon_1 > 0$) et un métal ($\varepsilon_2 < 0$) et profondeurs de pénétration du champ $z_1 = \frac{1}{ k_1 }$ et $z_2 = \frac{1}{ k_2 }$ dans chaque milieu.</i>	46
4.4	<i>À gauche : relations de dispersions adimensionalisées $\omega(q)$ (en bleu), $\omega(k)$ (en rouge) et $\omega(K)$ (en noir) données par les relations (4.54) et (4.55) pour $e = 9$. Au centre : relations de dispersion $k(\omega)$ (en rouge) et $q(\omega)$ (en bleu) données par (4.54) pour une fréquence ω dans la bande interdite. À droite : détails des courbes $\omega(q)$ et $\omega(k)$ autour de la fréquence plasma adimensionalisée ω_0.</i>	48
7.1	<i>Dans l'amplification paramétrique, une onde signal incidente ω_i est amplifiée au cours de sa propagation dans un milieu non-linéaire par interaction non-linéaire quadratique avec une onde de pompe ω_p. La conservation de l'énergie des photons impose la création d'une onde complémentaire ω_i.</i>	94

7.2	<i>Variations des indices de réfractions ordinaires et extraordinaires dans un cristal biréfringent positif dans le plan principal (ZOz) pour deux ondes incidentes de fréquences ω et 2ω</i>	96
8.1	<i>Le système de coordonnées $(X, Y, Z) \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est un repère orthonormé lié au cristal et $(x, y, z) \equiv (\mathbf{e}, \mathbf{o}, \mathbf{k})$ est un autre repère lié à la propagation du champ électrique. Pour un champ de polarisation extraordinaire, le rayon lumineux (direction de propagation de l'énergie \mathbf{P}) et l'onde (direction de propagation de la phase \mathbf{k}) forment un angle ρ, dit angle de walk-off.</i>	100
9.1	<i>Experimental configuration for the generation of gap solitons in a birefringent nonlinear crystal with evanescent periodic driving at the boundary</i>	112
9.2	<i>Asymmetric waveguides : (a) Schematic drawing of an asymmetric slab waveguide. (b) The profile of the refractive index in the asymmetric waveguide</i>	113
9.3	<i>Graphic solutions of equation (9.14) for different values of the waveguide refractive index which are given by the equation (9.9). In blue you can see the LHS of (9.14) and in red the RHS of the former equation. (a) Here, for $H = 15$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2.55$ and $n_3 = 2.49$, four values of β are found : $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4$. Theses corresponds to four orthogonal TE modes. (b) Here, for $H = 15$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2.5$ and $n_3 = 2.49$, only one value of β is found so there is only one TE (fundamental) mode propagating in the waveguide</i>	116
9.4	<i>Confined TE modes in an asymmetric slab waveguide. The thickness of the core $H = 15$ is equal to 3.58λ. (a) $n_2 = 2.55$ and $n_3 = 2.49$. As you can see this waveguide supports four wave modes corresponding to the four β values found graphically in (9.1.1-a). (b) For a small $n_2 - n_3$ difference only the fundamental mode is found to be supported by the slab guide.</i>	116
9.5	<i>Confined TE fundamental mode in an asymmetric slab waveguide with $n_2 = 2.55$, $n_3 = 2.49$ and $H = 5$.</i>	117
9.6	<i>Graphic solutions of equation (9.34) for different values of the waveguide refractive index. (a) Here, for $H = 15$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2.55$ and $n_3 = 2.49$, four values of β are found : $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4$. Theses corresponds to four TM modes. (b) Here, for $H = 15$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2.5$ and $n_3 = 2.49$, only one value of β is found so there is only one TM (fundamental) mode propagating in the waveguide</i>	121
9.7	<i>Confined TM modes in an asymmetric slab waveguide. (a) $n_2 = 2.55$ and $n_3 = 2.49$. As you can see this waveguide supports four wave modes corresponding to the four β values found graphically in (9.1.1-a). (b) For a small $n_2 - n_3$ difference only the fundamental mode is found to be supported by the slab guide.</i>	122
9.8	<i>(a) β values for the TE and TM modes as functions of $H\sqrt{n_2^2 - n_3^2}$. As $H\sqrt{n_2^2 - n_3^2}$ decreases, the number of guided modes reduces ($H=15$). (b) Here we represent more values of β/k_0 as functions of $H\sqrt{n_2^2 - n_3^2}/\lambda$</i>	122

9.9	<i>Dispersion curves for the confined modes of a film of refractive index n_2 and thickness H on LGT crystal substrate ($n_3 = 2.4979$). The graph (a) shows the number of guided TE/TM modes as functions of the H/λ fraction for $n_2 = 2.55$. We see that a waveguide of thickness $H = 15 = 3.58\lambda$ (the dotted line) supports four TE modes and four TM modes. As H/λ approaches the unity (the dash-dotted line), the number of guided modes supported by the structure reduces to one. The graph (b) shows that the cutoff fraction H/λ for the fundamental TE/TM modes increases if we reduce the refractive index to $n_2 = 2.5$. In this case a waveguide of thickness $H = 15 = 3.58\lambda$ supports only one TE/TM mode.</i>	123
9.10	<i>A 2D birefringent crystal, represented in the principal crystal plane, is lighted on its surface xOy from a dielectric of index n_1, greater than the ordinary optical index $n_o(\omega)$ of the crystal at a given irradiation frequency ω. The incident angle α_1 is chosen slightly greater than the extinction angle.</i>	124
9.11	<i>Dielectric prism to cancel wavenumber q along the surface. The wavenumber \mathbf{K} is real valued in the dielectric prism but should be imaginary complex inside the crystal. This means to chose incident direction at extinction angle.</i>	128
9.12	<i>Reflectance (the square of the reflection coefficient) variation as function of the angle of incidence. For (a) and (b) the second medium is considered homogeneous and isotropic ($n = ct$). In (c) and (d) we can see how the reflectance varies with the incident angle, if the scattering medium is a birefringent cristal ($n = n(\theta)$). In this case it is important to know which is the angle θ between the interface and the optical axis of the cristal.</i>	129
10.1	<i>Solutions de l'équation de Schrödinger (10.1) avec les conditions aux bords (10.2). Branche stable (en bleu) et instable (en rouge) de la solution soliton (10.3) pour une amplitude de forçage $A < 1$. Le seuil de supratransmission est atteint pour $A = 1$.</i>	132
10.2	<i>L'amplitude de supratransmission A en fonction de l'ordre de troncature N de la série (10.14). La ligne continue montre le seuil exact de NST correspondant à $A = 1$.</i>	135
10.3	<i>La valeur propre ω^2 est exprimée en fonction du paramètre de translation η. La courbe numérique est tracée en rouge et le résultat analytique approché est en vert.</i>	137
10.4	<i>Simulations numériques du système (10.31) avec les conditions (10.33). Pour $A = 0.43$ et $B = 0.9$ le profil évanescent est stable (a) pour tout $z > 0$. En augmentant très peu la valeur de A on constate que le profil évanescent initial devient instable (b) en $x = 0$ et l'instabilité génère dans le milieu un soliton de gap vectoriel (c)</i>	139
10.5	<i>(a) Simulations numériques de l'intensité de ψ et ϕ pour $A = 0.45$ et $B = 0.9$. Les amplitudes maximales du soliton vectoriel émis sont $\psi _m \simeq 1.2$ et $\phi _m \simeq 2.3$. (b) La courbe du seuil de NST dans le plan (A, B). Les points représentent les valeurs numériques et la ligne continue est donnée par (10.38)</i>	140
11.1	<i>Variations du laplacien transverse $\Delta_{\perp}^Z = \frac{\eta^2}{\beta^2} \partial^2 x + \frac{1}{\beta^2} \partial^2 y$ en fonction de l'angle θ : vert pour une propagation selon l'axe optique ($\theta = 0$), rouge pour une propagation dans la direction d'accord de phase ($\theta = \theta_{opt} = 0.56$ rad) et bleu pour une propagation à $\theta = \pi/2$.</i>	143

11.2	<i>Génération de solitons paramétriques dans les milieux quadratiques biréfringents. (a) Profil évanescent non-linéaire stable lors du forçage au bord ($x = 0$) dans la bande interdite avec des amplitudes A et B en dessous du seuil de NST. (b) Quand les amplitudes de forçage dépassent une certaine valeur (correspondant au seuil de supratransmission) le profil évanescent se déstabilise et l'énergie est envoyée dans le milieu sous forme d'onde localisée dans la direction transverse x. (c) Exemple de collision élastique entre deux solitons paramétriques de gap.</i>	144
B.1	<i>Variations des indices de réfractions ordinaires et extraordinaires dans un cristal biréfringent positif, dans le plan principal (ZOz) (à gauche) et dans le plan perpendiculaire au plan principal (XOY) (à droite)</i>	166
C.1	<i>Le système de coordonnées (X, Y, Z) est un repère orthonormé lié au cristal et (x, y, z) est un autre repère lié à la propagation du champ électrique. . . .</i>	169

Liste des tableaux

7.1	<i>Les divers termes pouvant apparaître lorsque deux faisceaux de fréquences ω_1 et ω_2 se propagent dans un milieu non-linéaire de second ordre</i>	91
11.1	<i>Valeurs des indices ordinaire et extraordinaire pour différentes longueurs d'onde pour un cristal de type LiGaTe_2</i>	142

Introduction générale

Le XIX^e siècle et la première partie du XX^e siècle ont marqué le triomphe de la *physique linéaire* à travers les équations de Maxwell, puis avec la mécanique quantique dont le formalisme repose sur la linéarité associée au principe de superposition. Bien entendu, les chercheurs avaient identifié l'importance des phénomènes non-linéaires qui apparaissaient dans les équations de l'hydrodynamique, la théorie de la gravitation, les effets collectifs en physique des solides, etc mais, en général, la non-linéarité était vue comme un obstacle mathématique, non comme une source de richesses, elle était le plus souvent traitée en perturbation des théories linéaires. Ces quarante dernières années ont vu cette tendance s'inverser. L'importance du *traitement intrinsèque* des non-linéarités a été de mieux en mieux perçue conduisant à des concepts révolutionnaires et à des avancées considérables dans la résolution d'équations non-linéaires aux dérivées partielles ayant des solutions localisées de type soliton.

Le soliton est une *onde solitaire*, c'est à dire localisée spatialement, dont les propriétés de stabilité sont spectaculaires. Le soliton a une histoire à éclipses puisqu'après sa première observation en 1834 (par un ingénieur hydrodynamicien John Scott Russell [Russell 44]), il a fallu attendre 1895 pour qu'une théorie puisse en rendre compte grâce à l'équation obtenue par Korteweg et de Vries [Korteweg 95]. Puis le phénomène a été oublié jusqu'à ce que l'expérience de 1953 faite par Fermi, Pasta et Ulam [Fermi 74], révèle un phénomène étonnant expliqué dix ans plus tard par Zabusky et Kruskal [Zabusky 65], qui ont introduit le terme de *soliton*. Le soliton est une onde, mais il correspond aussi à un maximum localisé de la densité d'énergie du système, qui se propage en conservant sa forme et sa vitesse, comme le ferait une particule. On dispose ainsi d'une solution d'une équation de champs *classique* qui possède à la fois les propriétés d'une quasi-particule et celles d'une onde (caractéristiques que l'on n'attend que dans les systèmes *quantiques*).

Du point de vue des mathématiques, les équations à solitons fournissent des exemples remarquables de systèmes totalement intégrables possédant un nombre infini de degrés de liberté. Pourtant les solitons concernent aussi les physiciens et ils sont même devenus indispensables pour décrire certains phénomènes, tels que la propagation des ondes en hydrodynamique, les ondes localisées dans les plasmas, la propagation des signaux dans les fibres optiques, les modes localisés dans les cristaux photoniques et le transport de charge dans les polymères par exemple. Les solitons sont extrêmement stables et ils sont même capables de se former spontanément dans un système physique auquel on fournit de l'énergie, par exemple par une onde électromagnétique ou une action mécanique, même si l'excitation initiale ne correspond pas exactement à un soliton.

La *non-linéarité* est omniprésente en physique et c'est la linéarité qui est l'exception à tel point qu'on se demande pourquoi on a eu recours à la négation "non"-linéarité pour nommer cette propriété si générale. De même, la dispersion est très répandue car, à part dans le vide,

les composantes à différentes longueurs d'ondes qui constituent un signal complexe n'ont pas la même vitesse de propagation. Ces deux propriétés qui agissent en général en sens inverse (car la non-linéarité tend à localiser les signaux alors que la dispersion les étale), compensent dans certains régimes leurs effets et conduisent à des solitons dans des systèmes très variés [Scott 99].

Pour la majorité des systèmes, après une analyse physique primaire, on arrive à des équations non-linéaires et dispersives que l'on ne sait pas traiter. Par des descriptions approximatives (approximation des milieux continus, approximation paraxiale, développement en échelles multiples etc.), on peut faire tendre de nombreux systèmes physiques vers l'une des grandes classes d'équations non-linéaires à solitons qu'on sait résoudre. Lorsque l'on passe maintenant de l'équation à solitons, en tant que description idéaliste d'un système, à la modélisation des phénomènes réels en rajoutant de nombreux termes perturbatifs, l'essentiel des propriétés des solitons est préservé et cela est dû à leur remarquable stabilité [Dauxois 04].

Le travail de cette thèse concerne l'étude des propriétés non-linéaires des interactions rayonnement-matière. Différents processus non-linéaires ont été mis en scène afin d'étudier la génération et la dynamique des structures spatiales localisées. Le processus de supratransmission non-linéaire a été lui aussi revisité et des nouveaux résultats très intéressants ont vu le jour pendant cette thèse. Cet ouvrage en deux actes est organisé comme suit.

La première partie est dédiée à l'étude de la génération et la dynamique des solitons de gap dans les milieux à deux niveaux quantiques avec charges. Pour ce faire, il a fallu d'abord décrire l'interaction d'un faisceau puissant avec un milieu à deux niveaux. Les équations de propagation ont été élaborées dans une approche semi-quantique. Pour permettre une bonne compréhension des concepts introduits et des notations utilisées, un petit rappel des notions de mécanique quantique a été nécessaire. Cela nous a permis de déterminer ensuite les équations de Bloch quantiques pour l'opérateur densité. La propagation du champ électromagnétique a été traitée de façon classique. Pour cela, les toutes puissantes équations de Maxwell ont été utilisées et un certain nombre d'approximations a dû être fait afin de simplifier les équations d'évolution. Après adimensionalisation, nous avons procédé à la description des solutions particulières du système linéaire. Les trois modes linéaires fondamentaux : électrostatique, plasmon et électromagnétique ont été caractérisés avant de poursuivre avec l'étude de la relation de dispersion du modèle de Maxwell-Bloch (MB) à la recherche des bandes interdites. L'existence d'une bande interdite dans la relation de dispersion nous a permis d'étudier la génération des solitons de gap à travers le processus de supratransmission non-linéaire. L'analyse non-linéaire très laborieuse a été accomplie en utilisant des méthodes spécifiques comme les développements multi-échelles et les expansions multimodales. L'analyse asymptotique perturbative du système de MB dans un milieu avec charges (créant un potentiel électrostatique permanent dans le milieu) nous a amené à un système d'équations aux dérivées partielles de type Schrödinger non-linéaire (NLS) dans un potentiel externe de type Kerr, pour les enveloppes lentement variables du champ électromagnétique. La génération de solitons de gap a bien été mise en évidence ici en résolvant le système de MB avec des conditions aux bords et initiales judicieusement choisies. En particulier, on impose un forçage au bord avec une pulsation dans la bande interdite du milieu, pour permettre l'étude de l'instabilité du couplage évanescent dans le milieu à deux niveaux et le processus de supratransmission non-linéaire (NST). Les conditions aux bords jouent un rôle extrêmement important dans le processus de NST et pour cela qu'un chapitre a été dédié à l'étude des configurations physiques permettant leur réalisation.

Dans la deuxième partie nous introduisons un phénomène non-linéaire différent : l'amplification paramétrique optique dans les milieux quadratiques. Les phénomènes non-linéaires quadratiques sont expliqués à l'aide du tenseur susceptibilité électrique dans le premier chapitre. Les phénomènes non-linéaires d'ordre deux permettent entre autre d'expliquer : la génération de la seconde harmonique, la génération des fréquences somme et différence ainsi

que le principe de l'amplification paramétrique optique (OPA). À travers ce processus il est possible d'amplifier un signal de fréquence ω_s à partir d'un champ de pompe intense ω_i sous certaines conditions. Pour que le processus soit optimal il faut réaliser un accord de phase parfait entre les différentes fréquences des champs électriques appliqués. Une technique très répandue est l'accord de phase par biréfringence au sein d'un cristal uniaxe présentant une forte non-linéarité quadratique et elle sera aussi celle que nous étudierons en détail dans ce manuscrit.

Nous avons ensuite réalisé la description de la propagation des champs électromagnétiques au sein des cristaux non-linéaires biréfringents. On a d'abord déterminé les équations de conservation du champ électrique et magnétique, en prenant en compte les effets dus à la biréfringence, tels que la dérive spatiale de la composante extraordinaire du champ électrique, appelée effet de *walk-off spatial* et l'asymétrie des termes de diffraction transverses. On s'est intéressé en particulier à l'interaction de trois ondes dégénérée (D3W) au sein d'un cristal uniaxe positif pour lesquelles un accord de phase de type I a été réalisé. L'analyse des modes propres linéaires de propagation nous a ensuite permis de mieux comprendre les effets de la biréfringence sur la propagation des ondes planes monochromatiques. Les équations pour les enveloppes lentement variables ont été complétées avec les contributions non-linéaires et nous avons ensuite effectué des simulations numériques pour mettre en évidence le processus de NST. À notre grande surprise ce système d'équations non-linéaires couplées aux dérivées partielles nous a posé des problèmes très intéressants concernant le calcul du seuil de NST. Dans les systèmes intégrables, le seuil de NST peut être calculé à partir de la solution soliton stationnaire, en cherchant le maximum de son amplitude. Or, le système D3W n'a pas de solution exacte de type soliton pour calculer le seuil de cette manière. De plus, toutes les méthodes variationnelles standard ne nous ont pas permis, à ce stade, de résoudre le mystère du seuil NST dans les systèmes non-intégrables à multiples composantes.

Il était clair qu'il fallait trouver un autre moyen d'expliquer le seuil et pour cela une solution du problème, même approximative, était indispensable. Cet obstacle a pu être contourné d'une façon très élégante, en introduisant une méthode de développement en séries astucieuse. La méthode proposée a été d'abord testée sur un modèle plus simple : l'équation de Schrödinger non-linéaire à une composante et puis la généralisation à plusieurs composantes s'est faite par l'intermédiaire du système de Manakov (chapitre 10). Ensuite, cette technique a été appliquée avec succès au problème de supratransmission dans D3W. Les courbes des amplitudes de seuil ont pu être expliquées et les résultats analytiques obtenus sont en très bon accord avec les expériences numériques. De plus, l'analyse de la stabilité linéaire du système a montré que le seuil de NST coïncide avec le seuil d'instabilité paramétrique.

Une grande attention a été accordée aux propriétés physiques des conditions aux bords nécessaires à la réalisation de la NST. Deux méthodes ont été proposées et analysées pour créer des modulations au bord du cristal biréfringent, périodiques dans une direction et évanescentes dans la direction transverse. Un chapitre leur est ainsi dédié.

Première partie

Génération et dynamique des solitons de gap dans les milieux à deux niveaux quantiques

Introduction première partie

Dans toute cette thèse nous allons nous intéresser à l'interaction entre la matière et la lumière. Une *description quantique de la matière* est indispensable si l'on veut comprendre à l'échelle microscopique les divers processus d'interaction qui peuvent se produire entre celle-ci et le champ électromagnétique. Nous nous proposons ici de présenter quelques éléments de base sur l'interaction entre un *atome, traité quantiquement*, et un *champ électromagnétique classique*, c'est-à-dire une onde électromagnétique constituée de champs électriques et magnétiques réels obéissant aux équations de Maxwell. Une description rigoureuse devrait prendre en compte aussi la nature quantique de la lumière. Néanmoins, des résultats importants peuvent être obtenus dans le point de vue "semi-classique" ¹ (ou plutôt "semi-quantique") adopté dans ce manuscrit.

Le système de Maxwell-Bloch décrit l'interaction d'un milieu quantique à deux niveaux avec un champ électromagnétique à travers la variation de la densité de population. L'évolution de la densité de population est un phénomène purement quantique qui est à l'origine même de la non-linéarité. Le couplage non-linéaire qui en résulte mène à des processus physiques particulièrement intéressants en cas de résonance, c'est à dire quand la fréquence du champ électromagnétique appliqué est proche de la fréquence de transition du niveau fondamental vers le niveau excité. Le processus qui sera analysé ici, la génération de solitons de gap, est une conséquence de ce couplage non-linéaire dans Maxwell-Bloch avec des conditions aux bords bien particulières. L'origine de la génération de ces modes non-linéaires est une instabilité de l'onde évanescente qui se produit au moment où l'excitation externe a une fréquence comprise dans la bande interdite. À travers ce processus, l'énergie est injectée dans le milieu non-linéaire, alors qu'un milieu linéaire soumis à une condition pareille ne permettra pas la transmission de l'énergie de l'onde incidente et c'est pour cela qu'il a reçu le nom de *supra-transmission non-linéaire*. À mesure que les non-linéarités couplent les différentes composantes du champ électromagnétique, les solitons de gap formés subissent une diffusion sur les charges du milieu. Ainsi, ces structures localisées peuvent être réfléchies ou capturées par les charges. Ce processus de diffusion est compris qualitativement ici : un modèle de type Schrödinger non-linéaire dans un potentiel externe, créé par les charges, peut expliquer ce comportement.

Cette partie débute donc par un chapitre de rappel des techniques et postulats de la mécanique quantique qui seront strictement nécessaires à la compréhension des calculs et résultats. Les concepts ne seront pas présentés dans toute leur généralité mais il seront développés dans la seule optique d'introduire les outils et les notations utilisés par la suite.

¹Il faut néanmoins savoir que l'approche semi-classique est incapable de traiter de façon rigoureuse le phénomène très important de l'émission spontanée

Une question importante sera de déterminer l'évolution d'un atome mis à l'instant initial dans un état déterminé et qui sera soumis à partir de cet instant à un rayonnement électromagnétique. L'évolution dépend d'une part de la variation temporelle du rayonnement incident et d'autre part de la structure du spectre énergétique du système considéré, qui peut être un ensemble de niveaux discrets bien séparés, ou bien un continuum. Le cas idéal (plus simple), qui est aussi celui traité ici, serait un atome qui dispose de deux niveaux d'énergie seulement. Même si dans la réalité un atome de ce type n'existe pas, beaucoup d'interactions résonnantes n'utilisent que deux des niveaux atomiques d'énergie. C'est par exemple le cas d'un champ électromagnétique hautement monochromatique (ayant une seule fréquence ω) qui interagit avec un atome (par exemple l'atome de hydrogène). Donc, dans une première approximation on peut supposer que l'idéalisation d'atome à deux niveaux est valide [Allen 87].

Toujours dans le premier chapitre, je vais présenter le formalisme de la *matrice densité* qui permettra d'écrire les *équations de Bloch optiques*, grâce auxquelles on peut traiter en général l'interaction d'une onde électromagnétique et d'un atome. C'est précisément ce formalisme qui nous permettra de passer aux équations de Maxwell-Bloch couplées, qu'on va analyser par la suite dans le chapitre 2.

Le chapitre 3 est dédié à la limite linéaire du système de Maxwell-Bloch qui est obtenue en imposant une variation nulle de la densité de population dans le temps. On a exposé ensuite trois solutions particulières importantes de ce système linéarisé : le mode électromagnétique, le mode électrostatique et les ondes plasma longitudinales. L'analyse de la relation de dispersion montre l'existence d'une bande interdite qui sera très importante pour la génération des solitons de gap.

Par la suite, le chapitre 4 est consacré à l'étude des principes d'optique classique (réfraction et réflexion d'un rayon lumineux), soit à l'interface de deux milieux à deux niveaux quantiques, soit à l'interface d'un milieu à deux niveaux avec un diélectrique. L'angle de Brewster et l'angle d'extinction seront déterminés, dans le but d'expliquer et surtout comprendre quelles sont les conditions au bord et initiales physiquement valables et réalisables pour la génération de solitons de gap dans les milieux à deux niveaux. Toujours dans cette optique un paragraphe sera dédié aux plasmons de surface à la frontière diélectrique-milieu à deux niveaux.

Le traitement des non-linéarités qui apparaissent lors de l'interaction d'un faisceau monochromatique avec un milieu à deux niveaux sera fait dans le chapitre 5. On introduira dans ce but deux approches adaptées au traitement des effets non-linéaires : *la méthode de développement multimodal* qui saura prendre en compte les contributions des harmoniques supérieures des champs et polarisations et *la méthode de développement spatial multi-échelles* qui permettra de réduire le système d'équations non-linéaires couplées de Maxwell-Bloch à une équation de type Schrödinger avec une non-linéarité cubique ou de type Kerr. L'origine de l'effet Kerr optique réside dans l'anisotropie induite par la polarisabilité du milieu à deux niveaux.

Finalement la première partie de cet ouvrage sera clôturée par la présentation des résultats obtenus sur la génération et diffusion des solitons de gap dans un milieu à deux niveaux avec charges. On a montré que le couplage non-linéaire a des conséquences particulièrement intéressantes à la résonance, quand la fréquence du champ électrique appliqué est proche de la fréquence de transition du milieu à deux niveaux. L'onde évanescente créée par un forçage périodique au bord devient instable à partir d'un certain seuil du couplage non-linéaire et cette instabilité génère dans le milieu des trains de solitons. Les propriétés des solitons de gap produits de cette manière (vitesse, amplitude) sont directement dépendantes des caractéristiques du forçage au bord : fréquence, amplitude, forme du signal. La relation exacte entre ces deux classes de données reste toujours une question ouverte à ce jour.

En dernier lieu, on a analysé la dynamique de ces structures spatialement localisées tant

numériquement qu'analytiquement. Les solitons de gap ainsi produits peuvent par exemple subir des collisions, réflexions et diffusions avec les charges présentes dans le milieu considéré. Le processus de diffusion a été compris de façon qualitative à travers un modèle de type Schrödinger non-linéaire dans un potentiel externe créé par les charges sous la forme d'un champ électrostatique permanent. J'ai choisi d'inclure le papier qui a été publié en 2009 dans la revue Journal of Physics A tel quel, pour l'économie d'espace et de travail que cela engendre.

Éléments de mécanique quantique

Sommaire

1.1	Espaces des fonctions d'onde et des états : Notation de Dirac	11
1.1.1	Espaces \mathcal{F} des fonctions d'onde d'un système	11
1.1.2	Espaces \mathcal{E} des états	13
1.1.3	Système libre non-perturbé	13
1.1.4	Système perturbé	15
1.1.5	Propriétés des opérateurs	15
1.2	L'opérateur densité	16
1.2.1	Système isolé à plusieurs composantes	16
1.2.2	Description en terme de matrice densité	17
1.3	Hamiltonien dipolaire électrique	18
1.3.1	Approximation des grandes longueurs d'onde	19
1.3.2	Approximation d'atome à deux niveaux	19
1.4	Interaction résonante électron-photon	20

1.1 Espaces des fonctions d'onde et des états : Notation de Dirac

1.1.1 Espaces \mathcal{F} des fonctions d'onde d'un système

L'état quantique d'un système physique quelconque est défini, à un instant donné, par une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ (ou fonction d'état). L'interprétation probabiliste de cette fonction exige qu'elle soit de carré sommable et donc elle appartient à un sous espace de L^2 qu'on va appeler \mathcal{F} nommé *l'espace des fonctions d'onde*¹.

Il est convenable de normaliser la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$:

$$\int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) = 1 \quad \text{avec} \quad \psi(\mathbf{r}, t) \in \mathcal{F} \quad (1.1)$$

¹Un ensemble de fonctions d'onde constitué par les fonctions de L^2 qui possèdent certaines propriétés de régularité : partout définies, continues, à support borné et même indéfiniment dérivables.

où l'astérisque dénote le complexe conjugué et l'intégrale est faite sur toutes les coordonnées desquelles ψ dépend. En général, la fonction ψ est définie comme une variété algébrique de variables indépendantes comme l'espace, le spin etc.

La fonction d'état $\psi(\mathbf{r}, t)$ contient toute l'information qui peut être connue sur un système et elle satisfait, dans le cas non-relativiste, l'équation de Schrödinger :

$$H\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.2)$$

L'opérateur différentiel H est relié à l'énergie totale d'une particule dans un potentiel scalaire. L'équation de Schrödinger joue un rôle fondamental en mécanique quantique car c'est elle qui régit l'évolution dans le temps du système physique.

Étant donné le Hamiltonien H qui décrit les propriétés du système analysé, beaucoup d'effort est demandé pour déterminer la forme exacte de la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$. Néanmoins, souvent dans les applications macroscopiques, il n'est pas vraiment nécessaire de déterminer la forme explicite de la fonction d'onde pour pouvoir connaître l'évolution du système considéré.

Dans l'espace vectoriel \mathcal{F} on peut définir un produit scalaire. Ainsi à tout couple de deux fonctions de \mathcal{F} , $\phi(\mathbf{r})$ et $\psi(\mathbf{r})$, prises dans cette ordre, on associe un *nombre complexe* noté (ϕ, ψ) qui vaut :

$$(\phi, \psi) = \int d\mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$$

Ce produit scalaire est *linéaire* par rapport à la deuxième fonction et *antilinéaire* par rapport à la première.

Une même fonction $\psi(\mathbf{r}, t)$ peut être représentée par plusieurs ensembles distincts de composantes, correspondant chacun au choix d'une base. Un ensemble de fonctions $\{u_k(\mathbf{r})\}$ appartenant à \mathcal{F} , constitue une base si toute fonction d'état $\psi(\mathbf{r}) \in \mathcal{F}$ peut se développer d'une façon unique sur les $u_k(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_k c_k u_k(\mathbf{r}) \quad , \quad \text{si les indices } k \text{ sont discrets.} \quad (1.3)$$

La base des fonctions $\{u_k(\mathbf{r})\}$ est *orthonormée* si

$$(u_i, u_j) = \int u_i^*(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta_{ij}$$

La composante c_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) de la fonction $\psi(\mathbf{r})$ sur la base $\{u_k(\mathbf{r})\}$ est donnée par le produit scalaire de $\psi(\mathbf{r})$ avec $u_i(\mathbf{r})$, c'est-à-dire :

$$c_i = (u_i, \psi) = \int u_i^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

Donc la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ est représentée par l'ensemble des nombres c_i dans la base $\{u_i(\mathbf{r})\}$.

Pour qu'un système de fonctions $\{u_i(\mathbf{r})\}$ soit une base dans \mathcal{F} il ne suffit pas qu'elles soient juste normées et orthogonales. Une autre condition est nécessaire pour cela, plus précisément cet ensemble doit satisfaire une relation dite *relation de fermeture* qu'on va établir par la suite.

Si on suppose que $\{u_i(\mathbf{r})\}$ est une base de \mathcal{F} alors, pour toute fonction $\psi(\mathbf{r}) \in \mathcal{F}$, il existe un développement tel que (1.3). Reportons dans cette expression la relation (1.1.1) des diverses composantes c_i :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \sum_i c_i u_i(\mathbf{r}) = \sum_i (u_i, \psi) u_i(\mathbf{r}) = \sum_i \left[\int u_i^*(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \right] u_i(\mathbf{r}) \\ &= \int d\mathbf{r}' \psi(\mathbf{r}') \left[\sum_i u_i(\mathbf{r})u_i^*(\mathbf{r}') \right] = \int d\mathbf{r}' \psi(\mathbf{r}') F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Cette dernière relation est caractéristique de la fonction $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ car, en effet, on peut écrire une fonction quelconque $\psi(\mathbf{r})$ sous la forme $\psi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \psi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. On déduit ainsi la relation :

$$\sum_i u_i(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}') = F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

qui est connue comme étant la *relation de fermeture* qui caractérise n'importe quelle base.

1.1.2 Espaces \mathcal{E} des états

Il existe des systèmes physiques dont la description quantique ne peut pas se faire à partir d'une fonction d'onde : c'est le cas lorsque l'on tient compte des degrés de liberté de spin et ce, même si l'on a affaire à une seule particule. C'est ainsi que l'introduction d'un nouveau concept s'impose : *le vecteur d'état*. Contrairement à la mécanique classique, la mécanique quantique décrit de façon fondamentalement différente l'état d'un système et les grandeurs physiques associées : un état est représenté par un vecteur, une grandeur physique par un opérateur.

L'état quantique d'un système physique quelconque est caractérisé par un vecteur d'état, appartenant à un espace \mathcal{E} qui est *l'espace des états* du système (qui représente un sous-espace d'un espace de Hilbert)². Comme \mathcal{E} est un espace vectoriel, alors une combinaison linéaire de vecteurs d'état est un vecteur d'état³.

Avec la notation de Dirac, un élément quelconque de l'espace \mathcal{E} est appelé *vecteur-ket* et on le note par le symbole $|\bullet\rangle$. La relation (1.1) peut donc s'écrire :

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (1.4)$$

D'une façon analogue, le vecteur $\langle \psi |$ est appelé *bra* et il représente un élément d'un autre espace vectoriel appelé *espace dual*⁴ de \mathcal{E} et que l'on note \mathcal{E}^* . Le produit entre n'importe quel *bra* $\langle u |$ et n'importe quel *ket* $|v\rangle$ représente l'intégrale $\int u^*(\mathbf{r})v(\mathbf{r})d\mathbf{r}$. Celui ci est un produit scalaire qui a les propriétés suivantes :

$$\text{a) } \langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^*$$

$$\text{b) } \langle u | u \rangle \geq 0$$

Utilisant la même notation de Dirac dans l'équation de Schrödinger (1.2), on obtient pour le vecteur ket :

$$H(t) | \psi(t) \rangle = i\hbar \frac{\partial | \psi(t) \rangle}{\partial t}, \quad H^\dagger = H. \quad (1.5)$$

1.1.3 Système libre non-perturbé

Si on s'intéresse au cas d'un système libre non perturbé, décrit par le Hamiltonien H_0 , qui est présumé indépendant du temps, il existe un ensemble d'états $|\Phi_k\rangle$, qui (en principe) peut être trouvé en résolvant l'équation de Schrödinger ci-dessus. Les indices k désignent les états quantiques.

$$H_0 | \Phi_k \rangle = i\hbar \frac{\partial | \Phi_k \rangle}{\partial t} \quad (1.6)$$

²L'espace des fonctions d'onde \mathcal{F} et l'espace des états \mathcal{E} sont isomorphes.

³Il est facile de montrer que si $|\psi_1\rangle \in \mathcal{E}$ et $|\psi_2\rangle \in \mathcal{E}$ alors $|\psi\rangle = \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle \in \mathcal{E}$ où λ_1 et λ_2 sont deux nombres complexes quelconques.

⁴L'ensemble des fonctionnelles linéaires définies sur les kets $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$ constitue l'espace dual de \mathcal{E} . Une fonctionnelle linéaire χ est une opération linéaire qui associe un nombre complexe à tout $|\psi\rangle : |\psi\rangle \in \mathcal{E} \xrightarrow{\chi} \chi(|\psi\rangle) \in \mathcal{E}^*$ avec $\chi(|\psi\rangle) = \langle \chi | \psi \rangle$

On peut résoudre l'équation (1.6) par la méthode de séparation des variables, en supposant une solution de la forme :

$$| \Phi_k \rangle = a_k(t) | u_k \rangle \quad (1.7)$$

Les vecteurs d'état $| u_k \rangle$ doivent satisfaire l'équation aux valeurs propres,

$$H_0 | u_k \rangle = E_k | u_k \rangle \quad (1.8)$$

et ils sont orthonormés $\langle u_k | u_l \rangle = \delta_{kl}$. Ici δ_{kl} est le symbole de Kronecker. En substituant (1.7) et (1.8) dans la relation (1.6) on arrive à :

$$i\hbar \frac{da_k}{dt} = a_k E_k$$

qui a les solutions $a_k(t) = a_k(0)e^{-i\omega_k t}$. La fréquence ω_k est donnée par $E_k = \hbar\omega_k$.

À une phase arbitraire près, les vecteurs propres $| \Phi_k \rangle$ ⁵ sont donnés par : $| \Phi_k \rangle = e^{-i\omega_k t} | u_k \rangle$. Le système isolé se trouve soit dans l'un de ses états propres soit dans l'état $| \psi \rangle$ qui est une superposition de vecteurs propres :

$$| \psi \rangle = \sum_k c_k | \Phi_k \rangle = \sum_k c_k e^{-i\omega_k t} | u_k \rangle$$

La condition (1.4) nous donne une relation entre les coefficients c_k :

$$\sum_k |c_k|^2 = 1,$$

où $|c_k|^2$ représente la probabilité que le système soit dans l'état propre k . Les coefficients c_k ne dépendent pas du temps car on a supposé qu'il n'y a aucune interaction ou perturbation externe pour altérer l'état du système.

Les coefficients c_k sont donnés par $c_k = \langle \Phi_k | \psi \rangle$, qui représente une conséquence directe de la condition de normalisation. Souvent, le vecteur d'état $| \psi \rangle$ est écrit comme le vecteur colonne de ses coefficients sur une base des vecteurs propres orthonormés :

$$| \psi \rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Dans le cas particulier où le système est initialement dans l'état propre $| u_k \rangle$ de H_0 , alors, il est décrit à tout instant t par le vecteur d'état :

$$| \psi(t) \rangle = e^{-i\omega_k t} | u_k \rangle$$

La probabilité de le trouver ultérieurement dans un autre état propre $| u_m \rangle$ de H_0 ($m \neq k$) est donc nulle :

$$\mathcal{P}_{k \rightarrow m}(t) = |\langle u_m | \psi \rangle|^2 = 0.$$

Par exemple un électron d'un atome d'hydrogène initialement dans un état $| n, l, m \rangle$ pourrait subsister indéfiniment dans cet état si l'atome n'était pas couplé au monde extérieur. Sous l'effet d'interactions extérieures (collisions avec des ions, électrons ou atomes, présence des champs électromagnétiques oscillants), il subit des transitions vers d'autres niveaux. Les interactions viennent rajouter à l'hamiltonien H_0 du système isolé un terme supplémentaire H_1 . En général, l'état $| u_k \rangle$ n'est plus un état propre du système perturbé et l'évolution se fait de manière non triviale. Dans ce cas, la probabilité de trouver le système au bout d'un temps t dans un autre état $| u_m \rangle$ propre de H_0 n'est pas nulle.

⁵Le bra correspondant est $\langle \Phi_k | = e^{i\omega_k t} \langle u_k |$, car le produit scalaire demande $\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^*$

1.1.4 Système perturbé

Si l'état dynamique du système est maintenant altéré suite à une perturbation ou une interaction H_1 alors le Hamiltonien dans l'équation de Schrödinger (1.5) doit être remplacé par $H(t) = H_0 + H_1(t)$. Dans ce contexte, l'état $|\psi\rangle$ s'écrit dans la même base des vecteurs propres $|u_k\rangle$ de l'Hamiltonien non-perturbé (1.8) mais avec des coefficients qui dépendent du temps :

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k(t) |\Phi_k\rangle = \sum_k c_k(t) e^{-i\omega_k t} |u_k\rangle$$

Si on suppose cette expansion de ψ sur la base des vecteurs propres et en la substituant dans l'équation (1.5) on obtient un système d'équations différentielles pour les coefficients $c_k(t)$ qui peuvent être résolues utilisant des techniques de la théorie des perturbations.

1.1.5 Propriétés des opérateurs

Toute grandeur physique mesurable \mathcal{A} est décrite par un opérateur A agissant dans \mathcal{E} . Cet opérateur est une observable. En plus, la mesure d'une grandeur physique \mathcal{A} ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres de l'observable A correspondante. Ainsi, lorsqu'on mesure la grandeur \mathcal{A} sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ normé,

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle, \quad \sum_n |c_n|^2 = 1,$$

la probabilité $\mathcal{P}(a_n)$ d'obtenir comme résultat la valeur propre non-dégénérée a_n de l'observable A correspondante est :

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2 = |c_n|^2,$$

où $|u_n\rangle$ est le vecteur propre normé associé à la valeur propre a_n [Cohen-Tannoudji 77].

Un opérateur linéaire A représente une série d'opérations (actions) qui appliquées sur un vecteur $|v\rangle$ le transforment en un autre vecteur $|w\rangle$, la correspondance étant linéaire :

$$\begin{cases} |w\rangle = A |v\rangle \\ A (\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle) = \lambda_1 A |v_1\rangle + \lambda_2 A |v_2\rangle \end{cases}$$

Le produit entre un bra et un ket est un scalaire $\langle u | y \rangle$ et le produit d'un ket avec un bra est un vecteur $|y\rangle \langle u|^6$. Cette dernière affirmation se démontre facilement. Si A est défini comme étant le vecteur $|y\rangle \langle u|$ on peut voir que :

$$A |v\rangle = |y\rangle \langle u | v \rangle$$

On peut exprimer l'opérateur A avec ses éléments de matrice A_{ij} sur la base de vecteurs propres orthonormés $\{u_k\}$:

$$A = \sum_{i,j} A_{ij} |u_i\rangle \langle u_j|, \quad \text{Tr} A = \sum_i A_{ii}. \quad (1.9)$$

Une décomposition pareille à (1.9) peut être faite pour l'opérateur unité I :

$$I = \sum_{i,j} I_{ij} |u_i\rangle \langle u_j|$$

⁶L'opérateur $P_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|$ appliqué à un vecteur ket $|\varphi\rangle$ quelconque donne un ket proportionnel à $|\psi\rangle$ avec un coefficient de proportionnalité donné par le produit scalaire $\langle \psi | \varphi \rangle$. La signification de P_ψ est donc claire : c'est l'opérateur de projection orthogonale sur le ket $|\psi\rangle$

Les éléments de matrice I_{ij} sont donnés par le symbole de Kronecker,

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \langle u_i | I | u_j \rangle$$

ce qui nous amène à la forme suivante pour l'opérateur unité :

$$I = \sum_k | u_k \rangle \langle u_k |.$$

Si on applique l'opérateur A successivement sur les vecteurs $| u_k \rangle$ et $\langle u_l |$ on trouve que l'élément de matrice A_{lk} est donné par :

$$\langle u_l | A | u_k \rangle = \langle u_l | \sum_{i,j} A_{ij} | u_i \rangle \langle u_j | u_k \rangle = \sum_{i,j} A_{ij} \langle u_l | u_i \rangle \langle u_j | u_k \rangle = \sum_{i,j} A_{ij} \delta_{li} \delta_{jk} = A_{lk}.$$

Si \mathcal{A} est une observable physique alors l'opérateur associé A est hermitien avec la relation entre ses composantes $A_{ij} = A_{ji}^*$, donc l'opérateur A coïncide avec son adjoint A^\dagger . La valeur moyenne de la quantité physique reliée à l'opérateur A sera quant à elle donnée par la quantité réelle :

$$\langle A \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{ij} c_i^* c_j A_{ij}.$$

Si $H(t)$ est l'Hamiltonien d'un système, alors l'évolution temporelle de toute valeur moyenne $\langle A \rangle$ est trouvée en utilisant (1.5) :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle A \rangle = \langle [A, H] \rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle. \quad (1.10)$$

Cette relation devient très intéressante quand l'opérateur A ne dépend pas explicitement du temps (par exemple les opérateurs position, vitesse, impulsion ou spin). Dans ce cas, la relation (1.10) est connue en mécanique quantique sous le nom de *théorème d'Ehrenfest*.

1.2 L'opérateur densité

Si on ne s'intéresse pas aux corrélations apparaissant entre l'atome et son environnement, mais seulement à l'évolution de l'atome, il existe un formalisme quantique bien adapté, celui de *l'opérateur (ou matrice) densité*. Ce formalisme permet de décrire à chaque instant l'état de l'atome, dans une situation où il n'existe pas de vecteur d'état pour l'atome seul.

1.2.1 Système isolé à plusieurs composantes

On a vu que l'évolution d'un *système isolé*, dont l'état à $t = 0$ est $|\phi_0\rangle$, est déterminée par l'équation de Schrödinger

$$\hat{H}_0 |\phi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle, \quad (1.11)$$

ayant comme condition initiale $|\phi(0)\rangle = |\phi_0\rangle$.

Si le système est composé de deux sous-systèmes A et B , dont les états à $t = 0$ sont respectivement $|\phi_A\rangle$ et $|\phi_B\rangle$, la résolution de l'équation de Schrödinger avec la condition initiale $|\phi(0)\rangle = |\phi_A(0)\rangle \otimes |\phi_B(0)\rangle$ donne généralement un état $|\phi\rangle$ qu'il n'est pas possible de factoriser en un produit de deux états correspondant aux sous-systèmes A et B :

$$|\phi(t)\rangle \neq |\phi_A(t)\rangle \otimes |\phi_B(t)\rangle$$

L'interaction entre les systèmes A et B crée des *corrélations quantiques* qui vont subsister même en l'absence d'interaction ultérieure entre A et B . Lorsque A interagit successivement

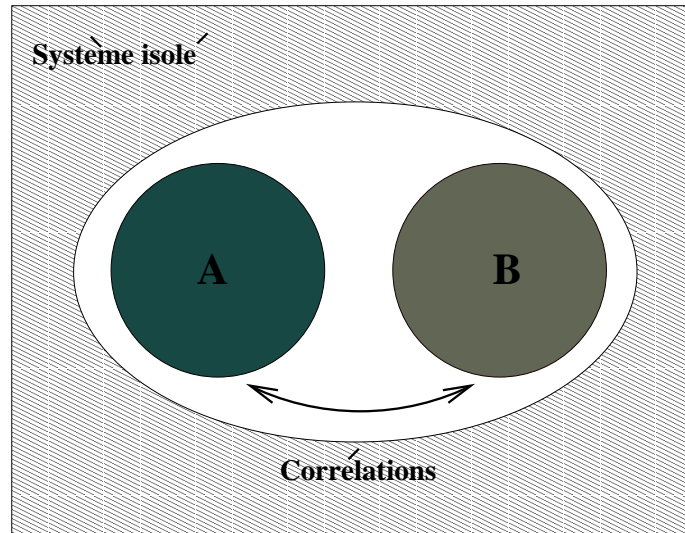


FIGURE 1.1 – *Système physique composé de deux sous-ensembles A et B en corrélation quantique.*

avec plusieurs systèmes $B, C, D \dots X$, l'espace à considérer croît à chaque étape suite aux corrélations quantiques accumulées lors de chacune des interactions. Ainsi, pour un atome subissant progressivement des collisions avec d'autres atomes, la fonction d'onde décrivant l'atome A au bout d'un certain temps doit également prendre en compte l'état de tous les atomes qu'il a rencontré avant le temps t . Dans cette situation, décrire l'état du système A au moyen d'un vecteur d'état va se trouver très rapidement limitée par des problèmes d'encombrement évidents.

1.2.2 Description en terme de matrice densité

En pratique, l'information contenue dans la fonction d'onde globale décrivant le système et son environnement est sur-dimensionnée pour les prévisions physiques relatives au seul système. Plutôt que de décrire chaque interaction on va se contenter de décrire leur effet moyen sur le système. Une telle approche statistique nécessite l'emploi de l'*opérateur densité* $\hat{\rho}$ plutôt qu'un vecteur d'état.

Dans le cas appelé *cas pur* - où l'état du système A peut être décrit au moyen d'un vecteur d'état $|\psi_A\rangle$, son opérateur densité est le *projecteur* :

$$\hat{\rho} = |\psi_A\rangle \langle \psi_A| \quad (1.12)$$

On peut voir sur (1.12) que $e^{i\theta} \langle \psi_A|$ (avec θ réel) est aussi un vecteur d'état du même système physique, correspondant au même opérateur densité. L'usage de ce dernier supprime donc les inconvénients liés à l'existence d'un facteur de phase global arbitraire pour le vecteur d'état.

Dans le cas pur, $\hat{\rho}$ étant un projecteur, toutes ses valeurs propres sont nulles sauf une qui vaut 1. Si le système n'est pas dans un cas pur, alors parmi les valeurs propres de l'opérateur $\hat{\rho}$ il y a plus d'une non-nulle et elles sont de valeur $0 < \lambda_i < 1$. On appelle cette situation un *mélange statistique d'états* et ici l'opérateur densité n'est pas, en général, un *projecteur*. Dans chaque base l'opérateur densité s'exprime sous forme de matrice, la *matrice densité*. Par abus de langage on emploiera souvent les deux noms *matrice* et *opérateur* sans les différencier. L'évolution de la matrice densité d'un système isolé (initialement dans un cas pur), peut se déduire de l'équation de Schrödinger (1.11) :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}_0, \hat{\rho}(t)]. \quad (1.13)$$

Plusieurs propriétés de l'opérateur densité peuvent être déterminées facilement :

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho} \quad (1.14a)$$

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad (1.14b)$$

$$\rho_{ij} = \langle u_i | \hat{\rho} | u_j \rangle = c_i c_j^* \quad (1.14c)$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_i \rho_{ii} = 1 \quad (1.14d)$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) = \sum_l \rho_{il} A_{li}. \quad (1.14e)$$

Il faut rappeler que par la *trace* d'un opérateur on comprend la trace de la matrice par laquelle on représente l'opérateur dans une base donnée.

Les éléments diagonaux de la matrice densité nous donnent les probabilités de trouver le système physique dans un de ses états fondamentaux, car $\rho_{ii} = |c_i|^2$. L'élément ρ_{ii} s'appelle aussi *population* de l'état $|u_i\rangle$. Les éléments non-diagonaux $\rho_{ij} = c_i c_j^*$ sont appelés *cohérences* car il prennent en compte la phase relative des composantes A et B relatives aux deux états $|u_i\rangle$ et $|u_j\rangle$. Ce sont ces corrélations quantiques qui sont associées aux phénomènes liés à l'intrication. Les éléments ρ_{ij} peuvent être calculés lorsque l'hamiltonien d'interaction entre le système considéré et son environnement est connu. À l'équilibre thermique, l'opérateur densité est représenté par une matrice diagonale dont les éléments diagonaux ρ_{ii} sont les populations à l'équilibre thermodynamique des niveaux \mathcal{E}_i décrites par la statistique de Fermi-Dirac : les populations sont en cm^{-3} ou cm^{-2} suivant que le système est tridimensionnel ou bidimensionnel.

Si on note avec $|u_n\rangle$ les états propres correspondantes à un hamiltonien indépendant du temps (c'est-à-dire celui d'un système isolé) :

$$\hat{H}_0 |u_n\rangle = \mathcal{E}_n |u_n\rangle, \quad \mathcal{E}_n \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt} |u_n\rangle = 0, \quad (1.15)$$

alors,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{ij} &= i\hbar \frac{d}{dt} \langle u_i | \hat{\rho} | u_j \rangle = \langle u_i | i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} | u_j \rangle = \langle u_i | [\hat{H}_0, \hat{\rho}] | u_j \rangle \\ &= \mathcal{E}_i \langle u_i | \hat{\rho} | u_j \rangle - \langle u_i | \hat{\rho} | u_j \rangle \mathcal{E}_j = (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j) \langle u_i | \hat{\rho} | u_j \rangle. \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{nn} = 0, \quad i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{ij} = (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j) \rho_{ij},$$

ce qui nous amène donc aux solutions :

$$\rho_{ij}(t) = \rho_{ij}(0) e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j)t}, \quad (1.16)$$

où $(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j)/\hbar$ est la *fréquence de Bohr*. Donc dans le cas d'un système isolé, les populations des niveaux restent constantes et les cohérences oscillent à la fréquence de Bohr correspondante (les fréquences de Rabi). Ce résultat sera utilisé comme point de départ pour une théorie de perturbations dans le cas de l'interaction dipolaire électrique.

1.3 Hamiltonien dipolaire électrique

Nous allons mettre en place dans cette partie le formalisme permettant de décrire l'interaction entre un champ électromagnétique classique et un atome traité de façon quantique.

L'élément central du formalisme est l'hamiltonien d'interaction dont les éléments de matrice non-diagonaux entre deux états atomiques sont responsables des transitions entre ces deux états. Contrairement à ce que l'on pourrait penser a priori, cet hamiltonien n'est pas déterminé de façon univoque. Il s'exprime en effet en fonction des potentiels électromagnétiques, et on peut, par des transformations de jauge, en donner plusieurs formes équivalentes⁷. Cette liberté au niveau du choix de la jauge - et donc de l'hamiltonien d'interaction - ne remet bien évidemment pas en cause *l'unicité des prédictions physiques*. Il est donc possible de choisir la jauge qui conduit à l'hamiltonien d'interaction le plus commode pour l'étude du processus physique considéré. En particulier, en utilisant la transformation de Göppert-Mayer, on aboutit, au prix de certaines approximations, à un hamiltonien d'interaction ne mettant en jeu que le champ électrique : c'est *l'hamiltonien dipolaire électrique*, dont la forme très naturelle rappelle l'expression de l'énergie d'interaction entre un dipôle électrique classique et un champ électrique.

1.3.1 Approximation des grandes longueurs d'onde

En optique quantique, les phénomènes d'interaction entre atome et rayonnement correspondent souvent à des situations où la longueur d'onde du rayonnement est très grande devant les dimensions atomiques. Par exemple, pour l'atome d'hydrogène, les raies d'émission ou d'absorption ont des longueurs d'onde de l'ordre de 100 nm ou plus, alors que les dimensions atomiques sont de l'ordre du rayon de Bohr ($a_0 = 0.053$ nm). Dans ces conditions, le champ extérieur est quasiment constant sur l'étendue de l'atome et on remplacera sa valeur en tout point de l'espace $\hat{\mathbf{r}}$ par sa valeur à la position du noyau \mathbf{r}_0 . On effectue ainsi *l'approximation des grandes longueurs d'onde*.

Dans le cadre de l'approximation des grandes longueurs d'onde, un avantage de la jauge de Göppert-Mayer est que les diverses quantités mathématiques acquièrent généralement une interprétation physique simple. Par exemple, la vitesse $\hat{\mathbf{v}}$ de l'électron coïncide avec l'opérateur $\hat{\mathbf{p}}/m$. Ceci implique que l'hamiltonien \hat{H}_0 coïncide *dans cette jauge* avec la somme de l'énergie cinétique et coulombienne de l'électron.

Lorsque l'approximation des grandes longueurs d'onde n'est plus valable, il n'est pas possible d'utiliser l'hamiltonien dipolaire électrique. Il faut alors soit revenir à la jauge de Coulomb, soit améliorer le changement de jauge de façon à obtenir les termes suivants du développement multipolaire. Ces termes deviennent particulièrement importants quand le terme dipolaire est très petit ou nul.

1.3.2 Approximation d'atome à deux niveaux

On peut parler d'interaction résonante électron-photon quand le champ électromagnétique appliqué peut être considéré dans une bonne approximation comme étant monochromatique de fréquence ω proche de la pulsation de Bohr $\Omega = |\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_i|/\hbar$. Dans cette situation résonnante, nous ferons *l'approximation de l'atome à deux niveaux*. Nous allons noter les états d'énergie respectivement $|u_1\rangle$ pour le niveau inférieur et $|u_2\rangle$ pour celui supérieur :

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \hbar\Omega \quad (1.17)$$

de sorte que les éléments de l'hamiltonien non-perturbé \hat{H}_0 , dans l'espace $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$, s'écrivent :

$$(H_0)_{ij} = \langle u_i | \hat{H}_0 | u_j \rangle = \mathcal{E}_i \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

⁷Voir Annexe A

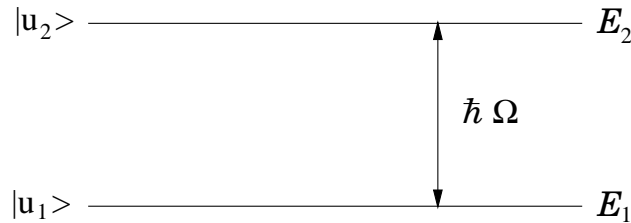


FIGURE 1.2 – Niveaux d'énergie et fréquence de transition Ω dans l'approximation d'atome à deux niveaux

On va donc travailler par la suite avec ces deux approximations pour décrire l'interaction champ-matière. Le but de cette section sera de construire le terme perturbatif \hat{H}_1 de l'interaction onde monochromatique-milieu à deux niveaux, sachant que le terme non-perturbatif sera noté \hat{H}_0 . On a montré dans l'annexe A que dans la jauge de Göppert-Mayer caractérisée par les potentiels vecteur et scalaire $\mathbf{A}'(\hat{\mathbf{r}}, t)$ et $U'(\hat{\mathbf{r}}, t)$,

$$\mathbf{A}'(\hat{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{A}'(\mathbf{r}_0, t) = 0 \quad (1.19a)$$

$$U'(\hat{\mathbf{r}}, t) = U_{coul}(\hat{\mathbf{r}}) + (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_0, t) = U_{coul}(\hat{\mathbf{r}}) - (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) \quad (1.19b)$$

qui prennent en compte aussi bien le champ coulombien du noyau ainsi que les champs extérieurs qui interagissent avec l'atome. L'hamiltonien d'interaction a une forme très intuitive qui rappelle l'expression de l'énergie d'interaction entre un dipôle électrique classique et un champ électrique :

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_{coul}(\hat{\mathbf{r}})}_{\hat{H}_0} - \underbrace{\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)}_{\hat{H}_1}. \quad (1.20)$$

Nous rappelons que \mathbf{r}_0 est la position du noyau considéré fixe et $\hat{\mathbf{r}}$ est l'opérateur position de l'électron. L'opérateur moment dipolaire électrique $\hat{\mathbf{D}}$ de l'atome est défini par :

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{r}}) = q(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0), \quad (1.21)$$

On a fait ici quelques *hypothèses supplémentaires* :

- on a supposé l'*invisibilité* de l'atome pour le champ extérieur, c'est-à-dire, on a présumé que la présence de la particule n'affecte pas la valeur du champ électrique appliqué ;
- on a négligé l'interaction du spin avec le champ magnétique externe ($\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B}(\hat{\mathbf{r}}, t)$) et
- on n'a pas pris en compte les *effets de relaxation* (par émission spontanée ou par collision), qui apportent de l'amortissement dans les oscillations des cohérences ρ_{ij} , ainsi que les *pompages* relatifs aux populations et aux cohérences.

1.4 Interaction résonante électron-photon

Nous allons maintenant traiter l'interaction résonante électron-photon du modèle présenté. Le point de départ de cette section sera l'hamiltonien dipolaire électrique explicité dans la relation (1.20) avec la notation (1.21) pour le moment dipolaire électrique :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_{coul}(r), \quad \hat{H}_1 = -\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}^l(t),$$

où $\mathbf{E}^l(t) = \mathbf{E}^l(\mathbf{r}_0, t)$ est le *champ électrique local* ressenti par l'atome, considéré pratiquement constant sur les dimensions de l'atome et le potentiel coulombien ne dépend de l'opérateur

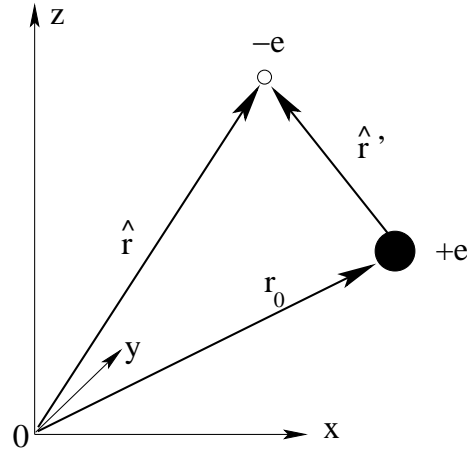


FIGURE 1.3 – Définition du repère utilisé pour décrire l'interaction d'un atome de hydrogène avec une onde monochromatique. Le noyau (●) de l'atome est considéré fixe dans sa position \mathbf{r}_0 par rapport au centre du système de coordonnées (x, y, z) et la position de l'électron (○) sera donné à tout instant par le vecteur $\hat{\mathbf{r}}$.

position $\hat{\mathbf{r}}$ que par intermédiaire de son module $V_{coul}(\hat{\mathbf{r}}) = V_{coul}(r)$. Pour comprendre mieux les notations utilisées par la suite, se rapporter à la Figure 1.4.

On va supposer que les deux niveaux d'énergie de l'hamiltonien non-perturbé \hat{H}_0 sont connues, autrement dit on connaît une base stationnaire $|u_n\rangle$ et les valeurs propres associés \mathcal{E}_n :

$$\hat{H}_0 |u_n\rangle = \mathcal{E}_n |u_n\rangle \quad \text{pour } n = 1, 2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \hbar\Omega,$$

Notre objectif dans cette partie sera d'obtenir les équations d'évolution pour les valeurs moyennes des composantes matricielles de l'opérateur \hat{H} . On a déjà vu que pour \hat{H}_0 on a les composantes suivantes dans la base $|u_n\rangle$:

$$(H_0)_{ij} = \langle u_i | \hat{H}_0 | u_j \rangle = \mathcal{E}_i \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}.$$

On va procéder de même avec les composantes de l'opérateur d'interaction \hat{H}_1 :

$$\begin{aligned} (H_1)_{ij} &= \langle u_i | \hat{H}_1 | u_j \rangle = -\langle u_i | \hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}^l(t) | u_j \rangle \\ &= -\langle u_i | \sum_{\alpha=1}^3 \hat{D}_{\alpha}(\hat{\mathbf{r}}) E_{\alpha}^l(t) | u_j \rangle = -\sum_{\alpha=1}^3 E_{\alpha}^l(t) \langle u_i | \hat{D}_{\alpha}(\hat{\mathbf{r}}) | u_j \rangle \end{aligned}$$

Sachant que \hat{H}_0 est pair par rapport à la transformation $\hat{\mathbf{r}} \rightarrow -\hat{\mathbf{r}}$ on peut montrer que

$$\langle u_i | \hat{\mathbf{D}} | u_i \rangle = -e \int \mathbf{r}' u_i^2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

simplement en utilisant le fait que $|u_i\rangle$ a une parité bien déterminée (il est soit pair, soit impair). Ici, on a noté la charge de l'électron $q = -e$. C'est bien la symétrie de l'hamiltonien non-perturbé \hat{H}_0 celle qui fait que $|u_i(\hat{\mathbf{r}})\rangle$ et $|u_i(-\hat{\mathbf{r}})\rangle$ sont toutes les deux des fonctions propres de \hat{H}_0 ayant la même valeur propre \mathcal{E}_i et donc

$$|u_i(\hat{\mathbf{r}})\rangle = \pm |u_i(-\hat{\mathbf{r}})\rangle.$$

On peut maintenant écrire les éléments de la matrice hamiltonienne \hat{H}_1 sur la base des fonctions propres $|u_i\rangle$:

$$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\langle u_1 | \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}^l | u_2 \rangle \\ -\langle u_2 | \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}^l | u_1 \rangle & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

On peut remarquer que l'élément d'interaction $\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}^l \in \mathbb{R}$ ce qui implique le fait que l'hamiltonien perturbatif \hat{H}_1 est lui aussi hermitien. Les valeurs moyennes des composantes de l'opérateur moment dipolaire sont calculés, d'après la recette (1.14e) comme suit :

$$\langle D_\alpha \rangle = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{D}_\alpha). \quad (1.23)$$

C'est l'opérateur densité $\hat{\rho}$ celui qui porte l'information sur l'état du système physique considéré à tout moment t . De même, en utilisant la relation (1.10) on peut montrer que l'évolution temporelle des composantes D_α est :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle D_\alpha \rangle = \langle [\hat{D}_\alpha, \hat{H}] \rangle$$

où on a tenu compte du fait que D_α ne dépend pas explicitement du temps. On est maintenant censé calculer le commutateur $[\hat{D}_\alpha, \hat{H}]$:

$$[\hat{D}_\alpha, \hat{H}] = [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_0 + \hat{H}_1] = [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_0] + [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_1] = [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_0],$$

car on rappelle que dans l'approximation de grandes longueurs d'onde le champ électrique sur la surface de l'atome ne dépend pas de la position $\hat{\mathbf{r}}$ de l'électron : $\mathbf{E}^l(\hat{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{E}^l(\mathbf{r}_0, t)$. On trouve ainsi que l'équation d'évolution pour la moyenne des composantes de l'opérateur dipolaire s'écrit :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle D_\alpha \rangle = \langle [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_0] \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}, [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_0]) = i\hbar \frac{d}{dt} \text{Tr}(\hat{\rho}, \hat{D}_\alpha).$$

Déterminer alors les principales équations qui décrivent l'évolution du système,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (1.24a)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{D}_\alpha) = \text{Tr}(\hat{\rho} [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_0]), \quad (1.24b)$$

revient à calculer les commutateurs suivants pour l'équation (1.24a) :

$$\begin{aligned} [\hat{H}_0, \hat{\rho}] &= \left[\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \right] = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} \\ -\rho_{21} & 0 \end{pmatrix}, \\ [-\hat{H}_1, \hat{\rho}] &= \sum_\alpha E_\alpha^l [\hat{D}_\alpha, \hat{\rho}] = \sum_\alpha E_\alpha^l (\rho_{22} - \rho_{11}) \begin{pmatrix} 0 & (D_\alpha)_{12} \\ -(D_\alpha)_{21} & 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \sum_\alpha E_\alpha^l ((D_\alpha)_{12} \rho_{21} - (D_\alpha)_{21} \rho_{12}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et à évaluer les éléments des matrices $\hat{\rho} \hat{D}_\alpha$ et $\hat{\rho} [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_0]$ apparaissant dans l'équation (1.24b) :

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \hat{D}_\alpha &= \begin{pmatrix} \rho_{12} (D_\alpha)_{21} & \rho_{11} (D_\alpha)_{12} \\ \rho_{22} (D_\alpha)_{21} & \rho_{21} (D_\alpha)_{12} \end{pmatrix}, \\ [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_0] &= (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) \begin{pmatrix} 0 & (D_\alpha)_{12} \\ -(D_\alpha)_{21} & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\rho} [\hat{D}_\alpha, \hat{H}_0] &= (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) \begin{pmatrix} -\rho_{12} (D_\alpha)_{21} & \rho_{11} (D_\alpha)_{12} \\ -\rho_{22} (D_\alpha)_{21} & \rho_{21} (D_\alpha)_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement nous obtenons le système suivant d'équations d'évolution couplées pour les composantes de l'opérateur densité :

$$i\hbar \frac{d}{dt}(\rho_{22} - \rho_{11}) = 2 \sum_{\alpha} E_{\alpha}^l ((D_{\alpha})_{12}\rho_{21} - (D_{\alpha})_{21}\rho_{12}), \quad (1.25)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\rho_{12} = -\hbar\Omega\rho_{12} - \sum_{\alpha} E_{\alpha}^l (\rho_{22} - \rho_{11})(D_{\alpha})_{12}, \quad (1.26)$$

$$-i\hbar \frac{d}{dt}\rho_{21} = -\hbar\Omega\rho_{21} - \sum_{\alpha} E_{\alpha}^l (\rho_{22} - \rho_{11})(D_{\alpha})_{21}, \quad (1.27)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}(\rho_{21}(D_{\alpha})_{12} + \rho_{12}(D_{\alpha})_{21}) = \hbar\Omega(\rho_{21}(D_{\alpha})_{12} - \rho_{12}(D_{\alpha})_{21}). \quad (1.28)$$

Les quatre expressions ci-dessus déterminent complètement l'opérateur densité $\hat{\rho}$, c'est-à-dire les quatre composantes de sa représentation matricielle. On remarquera que ces équations ne sont pas totalement indépendantes. Mais la condition de normalisation (1.14d),

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1,$$

implique que seulement trois des quatre composantes ρ_{ij} sont significatives, donc nécessaires pour déterminer complètement l'opérateur densité. Pour des raisons physiques qui vont être clarifiées par la suite on va choisir comme variables dynamiques l'anti-trace $\rho_{22} - \rho_{11}$ et les deux cohérences ρ_{12} et ρ_{21} .

Il faut remarquer aussi que la valeur moyenne de la composante α de l'opérateur densité exprimée en (1.23) devient maintenant :

$$\langle D_{\alpha} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{D}_{\alpha}) = \rho_{12}(D_{\alpha})_{21} + \rho_{21}(D_{\alpha})_{12}, \quad (1.29)$$

résultat qu'on peut extrapoler facilement à l'opérateur vecteur $\hat{\mathbf{D}}$

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{D}}) = \rho_{12}\mathbf{D}_{21} + \rho_{21}\mathbf{D}_{12}. \quad (1.30)$$

Ce résultat va être très utile par la suite.

Le système de Maxwell-Bloch dans les milieux à deux niveaux

Sommaire

2.1	Équations de Bloch optiques	25
2.1.1	Remarques	26
2.1.2	Conclusion	27
2.2	Éléments d'électrodynamique classique	27
2.3	Le système de Maxwell-Bloch	28
2.3.1	Système adimensionalisé	29

2.1 Équations de Bloch optiques

On a vu dans la section 1.4 qu'il est possible de donner un traitement *non-perturbatif* au processus d'interaction entre un milieu à deux niveaux (\mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2) et un champ électromagnétique quasi-résonant (c'est-à-dire que l'onde plane électromagnétique a la fréquence proche de la fréquence de Bohr du milieu).

Le système d'équations (1.25), (1.26), (1.27) et (1.28) décrit complètement la réponse d'un milieu à deux niveaux à un champ électromagnétique externe appliqué, dans le cas d'un hamiltonien d'interaction dipolaire qui suppose un certain nombre d'approximations, décrites dans la section 1.3. Ce système peut être simplifié en introduisant les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} &= \rho_{22} - \rho_{11}, \\
 \mathbf{P}^l &= \rho_{21}\mathbf{D}_{12} + \rho_{12}\mathbf{D}_{21}, \\
 \mathcal{R} &= \rho_{21}\mathbf{D}_{12} - \rho_{12}\mathbf{D}_{21},
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

où le scalaire \mathcal{N} est relié à l'*inversion de la densité de population* et le vecteur \mathbf{P}^l à la polarisation macroscopique. En effet, la polarisation macroscopique est la moyenne de l'opérateur moment dipolaire \hat{D} multipliée par le nombre N de dipôles (constitués par les systèmes à deux niveaux) par unité de volume V :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{V} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{D})
 \tag{2.2}$$

Il faut souligner aussi que les quantités \mathcal{N} et \mathbf{P}^l sont réelles et que \mathcal{R} est purement complexe. En utilisant les notations (2.1) on peut voir facilement que l'équation (1.25) devient :

$$i\hbar \frac{d\mathcal{N}}{dt} = 2 \mathbf{E}^l \cdot \mathcal{R}, \quad (2.3)$$

et que la relation (1.28) se traduit par

$$i\hbar \frac{d\mathbf{P}^l}{dt} = \hbar \Omega \mathcal{R}. \quad (2.4)$$

Pour obtenir une troisième équation, celle pour le vecteur \mathcal{R} , il faut multiplier l'expression (1.26) par \mathbf{D}_{21} et (1.27) par \mathbf{D}_{12} et après faire leur différence pour aboutir à :

$$i\hbar \frac{d\mathcal{R}}{dt} = \hbar \Omega \mathbf{P}^l + \mathcal{N} \left[(\mathbf{E}^l \cdot \mathbf{D}_{12}) \mathbf{D}_{21} + (\mathbf{E}^l \cdot \mathbf{D}_{21}) \mathbf{D}_{12} \right]. \quad (2.5)$$

Il n'est pas difficile d'éliminer \mathcal{R} en substituant la relation (2.4) dans (2.3) et (2.5) pour se retrouver avec un système de deux équations pour les inconnues \mathcal{N} (une équation scalaire) et \mathbf{P}^l (une équation vectorielle) :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{P}^l}{dt^2} + \Omega^2 \mathbf{P}^l + \frac{\Omega}{\hbar} \mathcal{N} \left[(\mathbf{E}^l \cdot \mathbf{D}_{12}) \mathbf{D}_{21} + (\mathbf{E}^l \cdot \mathbf{D}_{21}) \mathbf{D}_{12} \right] &= 0, \\ \frac{1}{2} \hbar \Omega \frac{d\mathcal{N}}{dt} &= \mathbf{E}^l \cdot \frac{d\mathbf{P}^l}{dt}. \end{aligned}} \quad (2.6)$$

Le système d'équations (2.6), d'une importance fondamentale, est connu en physique sous le nom d'*équations de Bloch optiques*, où $\mathbf{E}^l = \mathbf{E}^l(\mathbf{r}_0, t)$ dénote la *valeur locale* du champ électrique produit par l'onde électromagnétique incidente de fréquence proche de Ω .

2.1.1 Remarques

On peut montrer que chaque coefficient du type $(D_\alpha)_{21} (D_\beta)_{12}$ est une quantité réelle. Pour arriver à cela on va utiliser les propriétés suivantes de l'opérateur moment dipolaire

$$\begin{aligned} \hat{D}_\alpha^\dagger &= \hat{D}_\alpha, \\ \langle u_i | \hat{D}_\alpha | u_i \rangle &= 0, \\ \sum_{j=1,2} |u_j\rangle \langle u_j| &= 1, \\ [\hat{D}_\alpha, \hat{D}_\beta] &= 0. \end{aligned}$$

et on montre que

$$\begin{aligned} (D_\alpha)_{12} (D_\beta)_{21} &= \langle u_1 | \hat{D}_\alpha | u_2 \rangle \langle u_2 | \hat{D}_\beta | u_1 \rangle = \sum_{j=1,2} \langle u_1 | \hat{D}_\alpha | u_j \rangle \langle u_j | \hat{D}_\beta | u_1 \rangle \\ &= \langle u_1 | \hat{D}_\alpha \hat{D}_\beta | u_1 \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_\alpha)_{21} (D_\beta)_{12} &= \langle u_2 | \hat{D}_\alpha | u_1 \rangle \langle u_1 | \hat{D}_\beta | u_2 \rangle = \langle u_1 | \hat{D}_\beta | u_2 \rangle \langle u_2 | \hat{D}_\alpha | u_1 \rangle \\ &= \sum_{j=1,2} \langle u_1 | \hat{D}_\beta | u_j \rangle \langle u_j | \hat{D}_\alpha | u_1 \rangle = \langle u_1 | \hat{D}_\beta \hat{D}_\alpha | u_1 \rangle \\ &= \langle u_1 | \hat{D}_\alpha \hat{D}_\beta | u_1 \rangle \end{aligned}$$

Donc on démontre en effet que si $z \in \mathbb{R}$ alors $z = z^*$:

$$(D_\alpha)_{12} (D_\beta)_{21} = (D_\alpha)_{21} (D_\beta)_{12} = (D_\alpha)_{12}^* (D_\beta)_{21}^* = \left((D_\alpha)_{12} (D_\beta)_{21} \right)^*, \quad (2.7)$$

pour n'importe quel $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$. Ainsi on peut simplifier le terme qui apparaît dans l'équation (2.5) pour obtenir :

$$(\mathbf{E}^l \cdot \mathbf{D}_{12}) \mathbf{D}_{21} + (\mathbf{E}^l \cdot \mathbf{D}_{21}) \mathbf{D}_{12} = 2(\mathbf{E}^l \cdot \mathbf{D}_{12}) \mathbf{D}_{21} \quad (2.8)$$

ce qui permet d'alléger les équations.

En général, la relation entre \mathbf{D}_{12} et \mathbf{E}^l est donnée par une équation d'état qui doit être déterminée à partir des propriétés physiques du milieu. Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, le vecteur \mathbf{D}_{12} reste parallèle au vecteur électrique \mathbf{E}^l , au moins en moyenne. Dans ce cas le produit (2.8) peut être encore simplifié pour donner :

$$(\mathbf{E}^l \cdot \mathbf{D}_{12}) \mathbf{D}_{21} = |D_{12}|^2 \mathbf{E}^l \quad (2.9)$$

2.1.2 Conclusion

Les équations de Bloch optiques constituent un outil fondamental de l'interaction atome-rayonnement. Par rapport à des traitements approchés plus simples, elles ont l'avantage de décrire correctement deux types de phénomènes essentiels de l'interaction laser-matière. D'une part, les effets d'ordre supérieur apparaissant à forte intensité, comme la saturation ou les effets non-linéaires. D'autre part, elles permettent de traiter correctement les cohérences entre niveaux atomiques, qui sont responsables de très nombreux effets. Ce sont notamment ces cohérences qui déterminent la fréquence et la phase du dipôle électrique atomique induit par le rayonnement incident.

Les équations de Bloch optiques se généralisent naturellement aux systèmes comportant plus de deux niveaux, mais elles conduisent souvent à des systèmes d'équations inextricables, dès qu'on doit considérer plus de trois niveaux atomiques. Dans ce cas, l'utilisation d'autres méthodes de perturbation ou approximations s'avèrent plus adaptées pour expliquer tel ou tel phénomène physique.

2.2 Éléments d'électrodynamique classique

Les équations fondamentales de l'électrodynamique classique décrivent l'évolution d'un système de particules chargées et de champs en interaction. Les équations de Maxwell relient les champs électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ aux densités de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ et de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$.

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.10a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.10b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.10c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (2.10d)$$

Les deux équations (2.10b) et (2.10c) entraînent l'existence de potentiels vecteur et scalaire $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $U(\mathbf{r}, t)$ qui caractérisent complètement les champs :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla U(\mathbf{r}, t). \quad (2.11b)$$

Il existe une infinité de couples $\{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), U(\mathbf{r}, t)\}$ associé au même champ électromagnétique $\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\}$. Une *transformation de jauge* permet le passage de l'un de ces couples à un autre :

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla F(\mathbf{r}, t), \quad (2.12a)$$

$$U'(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{r}, t). \quad (2.12b)$$

où $F(\mathbf{r}, t)$ est un champ scalaire arbitraire. Il est possible de tirer parti de cet arbitraire pour fixer des potentiels adaptés au problème considéré, en imposant une condition supplémentaire, la *condition de jauge*. Pour voir quelques types de conditions de jauge se rapporter à l'annexe A.

Pour calculer les champs créés par un ensemble de particules ponctuelles de charges q_α , localisées aux points \mathbf{r}_α et ayant les vitesses \mathbf{v}_α , on exprime les densités de charge et de courant des équations de Maxwell (2.10a) et (2.10d) à l'aide de fonctions δ de Dirac :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)), \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)). \quad (2.13b)$$

Par ailleurs, les équations classiques de Newton-Lorentz décrivent la dynamique de chaque particule (de masse m_α) sous l'effet des forces électriques et magnétiques exercées par les champs :

$$m_{\alpha} \frac{d\mathbf{v}_{\alpha}}{dt} = q_{\alpha} [\mathbf{E}(\mathbf{r}_{\alpha}(t), t) + \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_{\alpha}(t), t)] \quad (2.14)$$

Lorsqu'on a un système isolé de particules chargées en interaction, l'ensemble des équations (2.10), (2.13) et (2.14) constitue un système fermé d'équations couplées. À partir de ces équations on peut obtenir la totalité des résultats de l'électrodynamique classique, théorie dans laquelle ni les champs ni les mouvements des particules ne sont quantifiés [Aspect 05].

2.3 Le système de Maxwell-Bloch

On a vu que dans l'approximation des grandes longueurs d'onde, le champ électrique externe ne varie pas beaucoup sur les dimensions de l'atome et donc on peut considérer que les quantités physiques macroscopiques qui le décrivent dépendent, dans le système du laboratoire, uniquement de la coordonnée associée à la position du noyau \mathbf{r}_0 ($\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$). Les quantités microscopiques \mathcal{N} et \mathbf{P}^l , qui sont associées au mouvement de l'électron (étant repéré par sa coordonnée \mathbf{r}), vont dépendre elles aussi de la variable spatiale \mathbf{r}_0 , mais seulement de façon paramétrique. C'est comme si on avait en effet deux dimensions spatiales :

- une associée au déplacement de l'électron et qui se manifeste comme variable dynamique *microscopique* dans les équations pour le moment électrique dipolaire et
- une autre qui correspond aux variations spatiales du champ électrique dans le référentiel *macroscopique*

Il faut donc faire intervenir l'opérateur ∇_0 dans les équations de Maxwell (2.10) pour le champ électromagnétique $\{\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t)\}$. Ainsi, en utilisant les relations (2.10a) et (2.10c) et la loi constitutive

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.15)$$

on trouve l'équation d'évolution pour le champ électrique :

$$\nabla_0 \times \nabla_0 \times \mathbf{E} + \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.16)$$

où \mathbf{P} est la *polarisation* du champ macroscopique \mathbf{E} . En utilisant les facteurs de corrections locales de Lorentz [Jackson 01] on peut montrer que :

$$\mathbf{E}^l(t) = \Lambda \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t), \quad N_0 \mathbf{P}^l(t) = \Lambda^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{r}_0, t), \quad \Lambda = \frac{n^2 + 2}{3} \quad (2.17)$$

Ici on a noté par N_0 la densité volumique d'atomes actives du milieu et \mathbf{P}/Λ est la polarisation effective du milieu. On peut dire que les relations (2.17) induisent une dépendance de la variable spatiale \mathbf{r}_0 aux éléments de la matrice densité $\rho_{ij} = \rho_{ij}(\mathbf{r}_0, t)$.

Avec toutes ces précisions on arrive finalement à écrire les équations (2.6) et (2.16) sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \Omega^2 \mathbf{P} + 2 \frac{\Omega}{\hbar} N_0 \Lambda^2 \mathcal{N} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_{12}) \mathbf{D}_{21} = 0, \quad (2.18a)$$

$$\frac{1}{2} N_0 \hbar \Omega \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (2.18b)$$

$$\nabla_0 \times \nabla_0 \times \mathbf{E} + \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (2.18c)$$

On rappelle que la quantité normalisé \mathcal{N} est la *densité d'inversion de population*, définie par

$$\mathcal{N} = \rho_{22} - \rho_{11}, \quad (2.19)$$

et elle prend donc les valeurs maximales $\mathcal{N}^+ = 1$, quand tous les atomes se trouvent dans l'état excité $|u_2\rangle$ ($\rho_{11} = 0$ et $\rho_{22} = 1$) et $\mathcal{N}^- = -1$, quand l'état fondamental $|u_1\rangle$ est le seul à être peuplé ($\rho_{11} = 1$ et $\rho_{22} = 0$). On rappelle que $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$ sont les deux états propres de l'hamiltonien non-perturbé.

2.3.1 Système adimensionalisé

Le système de Maxwell-Bloch (2.18) tel quel n'est pas très adapté pour l'étude de ses propriétés non-linéaires à cause du nombre élevé de paramètres et variables qui rentrent en jeu. Dans sa forme actuelle ce système fait intervenir des quantités physiques telles que :

- le moment dipolaire en $[C \cdot m]$,
- l'énergie $\hbar\Omega$ en $[J]$,
- la permittivité du milieu qui peut être exprimée en $[C^2 \cdot J^{-1} \cdot m^{-1}]$ et
- la densité volumique d'atomes mesurée en $[m^{-3}]$

Manipuler ces données peut vite devenir incommode et c'est pour cela qu'on va essayer ici de simplifier la tâche en mettant (2.18) dans une forme un peu plus accessible pour les applications numériques. On va commencer par adimensionaliser les variables d'espace-temps :

$$\mathbf{r}' = \frac{n}{c} \Omega \mathbf{r}_0, \quad t' = \Omega t, \quad (2.20)$$

après on redéfinit les caractéristiques du champ macroscopique :

$$\mathbf{E}' = \sqrt{\frac{\epsilon}{W_0}} \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}' = \sqrt{\frac{1}{\epsilon W_0}} \mathbf{P}, \quad (2.21)$$

pour finir avec l'introduction de

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N}, \quad \mathbf{D}'_{12} = \frac{\mathbf{D}_{12}}{\tilde{D}}. \quad (2.22)$$

On a introduit ici la densité d'énergie W_0 de référence et le module du vecteur moment dipolaire \tilde{D} :

$$W_0 = N_0 \hbar \Omega / 2, \quad \tilde{D}^2 = \mathbf{D}_{12}^* \cdot \mathbf{D}_{12}, \quad (2.23)$$

et par définition la permittivité $\epsilon = \epsilon_0 n^2$. Avec ces notations le vecteur moment dipolaire qui était défini sur la base des états $\{|u_k\rangle\}$ devient unitaire et sans dimension, c'est-à-dire que

$$|\mathbf{D}'_{12}|^2 = 1 \quad \text{où} \quad \mathbf{D}'_{12} = \frac{1}{\tilde{D}} \langle u_1 | \hat{D} | u_2 \rangle = \frac{\langle u_1 | \hat{D} | u_2 \rangle}{\langle u_2 | \hat{D}^2 | u_2 \rangle}$$

Finalement, en enlevant cette fois ci les ($'$), le système (2.18) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mathbf{P} &= -\alpha \mathcal{N} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_{12}) \mathbf{D}_{21}, \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Toutes les quantités apparaissant ici sont sans dimension physique et on peut vérifier que même le seul paramètre α qui reste dans le milieu est lui aussi sans dimension :

$$\alpha = \frac{2N_0}{\hbar \Omega} \frac{\tilde{D}^2}{\epsilon} \Lambda^2. \quad (2.25)$$

Il faut souligner que le système (2.24) est en effet complet. Il s'agit là d'un ensemble de 7 équations : 2 vectorielles ($6 = 2 \times 3$) + 1 scalaire, pour un ensemble de 7 inconnues : 3 + 3 composantes pour les quantités adimensionnelles $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ et +1 pour la densité d'inversion de population \mathcal{N} du milieu avec des conditions initiales et/ou de bords adéquates. Le vecteur \mathbf{D}_{12} n'est pas une variable dynamique. Il regroupe l'ensemble de propriétés physiques microscopiques du milieu qui est *a priori* connu à l'avance car c'est lui décrit le système physique soumis à un champ incident. En plus, en regardant le système (2.24) de plus près, on peut remarquer que ce même vecteur dipolaire \mathbf{D}_{12} est responsable du couplage des trois composantes du champ électrique, et cela reste vrai même dans la limite linéaire.

En plus, dans le cas particulier où \mathbf{D}_{12} est parallèle au champ électrique appliqué \mathbf{E} , alors la relation (2.9) pour les quantités sans dimensions devient encore plus simple :

$$(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}'_{12}) \mathbf{D}'_{21} = |D'_{12}|^2 \mathbf{E}' = \mathbf{E}' \quad (2.26)$$

et donc le système prend la forme [Pantell 69]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mathbf{P} &= -\alpha \mathcal{N} \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Analyse linéaire

Sommaire

3.1	Système de base	31
3.2	Solutions particulières du système linéaire	32
3.2.1	Le mode linéaire électrostatique	33
3.2.2	Le mode linéaire plasmon	33
3.2.3	Le mode linéaire électromagnétique	34
3.3	Relation de dispersion linéaire	34
3.3.1	Relation de dispersion adimensionalisée	36

3.1 Système de base

Nous allons discuter plus loin (dans le chapitre 4) le cas des ondes de surface qui apparaissent à l'interface (x, y) de deux milieux ayant des indices de réfraction différents $n_j = \epsilon_j/\epsilon_0$, $j = 1, 2$. Dans ce cas il faudra écrire les équations de Maxwell-Bloch en faisant attention à ce que les caractéristiques de chaque milieu soient bien renseignées et poser les conditions de continuité des champs à l'interface. Nous allons considérer ici le cas où le vecteur moment dipolaire \mathbf{D}_{12} est parallèle (au moins en moyenne) au champ électrique \mathbf{E} . Ainsi le système de Maxwell-Bloch (2.18) en dimensions physiques s'écrit pour le milieu j :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_j \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \Omega_j^2 \mathbf{P} = \Gamma_j^2 (1 - \mathcal{N}) \epsilon_j \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2} N_0 \hbar \Omega_j \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

où on a introduit $\mathcal{N}(\mathbf{r}, t) = 1 + \mathcal{N}$ qui est la densité de population normalisée de l'état excité. Ainsi, $\mathcal{N} = 0$ quand seulement l'état fondamental est peuplé et $\mathcal{N} = 2$ quand seulement l'état excité l'est. Les Ω_j sont les fréquences de transition de chaque milieu. La constante de couplage Γ_j définie ici (de dimension s^{-1}) est donnée par

$$\Gamma_j^2 = \frac{2N_0}{\hbar \epsilon_j} \Omega_j \Lambda_j^2 \tilde{D}_j^2, \quad (3.4)$$

et le facteur de correction locale du champ (le facteur de Lorentz) n'est rien d'autre que :

$$\Lambda_j = \frac{1}{3\varepsilon_0}(\varepsilon_j + 2\varepsilon_0).$$

On a désigné par N_0 la densité de population des éléments actifs et on rappelle que \tilde{D}_j^2 représente la moyenne angulaire du vecteur moment dipolaire \mathbf{D}_{12} dans chaque milieu. Il est à noter que l'on retrouve le cas d'un milieu diélectrique parfait en posant tout simplement $\Omega_j = 0$, impliquant $\Gamma_j = 0$ et $\mathbf{P} = 0$.

La limite linéaire du système de Maxwell-Bloch est obtenue en imposant une variation nulle de la densité de population dans le temps $\partial_t \mathcal{N} = 0$. Pour un système initialement au repos $\mathcal{N} = 0$ ($\mathcal{N} = \mathcal{N}^- = -1$), la limite linéaire correspond à la situation où tous les atomes actifs $N_0 V$ se trouvent et restent dans l'état fondamental. En négligeant les termes de second ordre dans (3.1), (3.2) et (3.3) nous arrivons finalement à

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_j \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \Omega_j^2 \mathbf{P} = \Gamma_j^2 \varepsilon_j \mathbf{E}. \quad (3.5b)$$

Ce système nous permettra d'obtenir trois solutions particulières importantes : les modes électromagnétiques, les modes électrostatiques et les ondes plasma longitudinales. Toujours pour la commodité des calculs, comme précédemment on définira des *nouvelles variables sans dimensions*,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{W_{0j}}}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{P} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_j W_{0j}}}, \quad t'_j = \Omega_j t, \quad \mathbf{r}'_j = \Omega_j \sqrt{\varepsilon_j \mu_0} \mathbf{r} \quad (3.6)$$

avec $W_{0j} = N_0 \hbar \Omega_j / 2$, le système de Maxwell-Bloch dans le milieu actif devient

$$\nabla' \times \nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial t'^2} = -\frac{\partial^2 \mathbf{P}'}{\partial t'^2}, \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}'}{\partial t'^2} + \mathbf{P}' = \frac{\Gamma_j^2}{\Omega_j^2} \mathbf{E}', \quad (3.7b)$$

et nous retrouvons les anciennes notations pour le modèle adimensionalisé (2.27) en imposant :

$$\frac{\Gamma_j^2}{\Omega_j^2} = \alpha. \quad (3.8)$$

3.2 Solutions particulières du système linéaire

Afin d'obtenir les solutions particulières du système linéarisé, nous avons besoin de rappeler ici les équations de Maxwell (2.10c) et (2.10d) :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t \mathbf{D}.$$

Nous avons introduit l'induction \mathbf{D} tel que l'équation de propagation (3.1) est obtenue pour

$$\mathbf{D} = \varepsilon_j \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (3.9)$$

Le théorème de Gauss s'écrit alors

$$\nabla \cdot (\varepsilon_j \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \quad (3.10)$$

Il faut aussi remarquer qu'il existe deux types de champs obéissant à $\nabla \times \mathbf{E} = 0$: les champs électrostatiques pour lesquels $\partial_t \mathbf{B} = 0$ et les champs non-magnétiques caractérisés par $\mathbf{B} = 0$.

3.2.1 Le mode linéaire électrostatique

La solution électrostatique générale peut être déduite directement du système (3.5) en supposant un champ électrostatique,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.11)$$

pour lequel le système (3.5) possède la solution *statique* $\mathbf{P}_t = \mathbf{E}_t = 0$ et donc il dévient :

$$\Omega_j^2 \mathbf{P} = \Gamma_j^2 \varepsilon_j \mathbf{E}. \quad (3.12)$$

Ce mode est appelé *mode électrostatique* car il correspond à un champ électrique de fréquence nulle. Une telle solution est représentée par les charges statiques, car en effet, le théorème de Gauss pour la relation précédente donne

$$\nabla \cdot (\varepsilon_j \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_s = \varepsilon_j \left(1 + \frac{\Gamma_j^2}{\Omega_j^2} \right) \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_j (1 + \alpha) \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (3.13)$$

La densité ρ_s obtenue ci-dessus à partir de $\nabla \cdot \mathbf{E}$ est en effet la charge statique puisque \mathbf{E} est indépendant du temps.

3.2.2 Le mode linéaire plasmon

Il existe une autre solution particulière à l'équation (3.5a) en imposant cette fois ci la contrainte suivante

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.14)$$

Cela nous dit que la polarisation est directement proportionnelle au champ électrique, le facteur de proportionnalité étant tout simplement la permittivité ε_j du milieu :

$$\mathbf{P} = -\varepsilon_j \mathbf{E}. \quad (3.15)$$

Si on remplace ce résultat dans la relation (3.5b) on trouve que la polarisation doit satisfaire l'équation d'un oscillateur harmonique à la fréquence Ω_0 :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \Omega_0^2 \mathbf{P} = 0,$$

où nous avons introduit la *fréquence plasma* Ω_0 définie par

$$\Omega_0^2 = \Omega_j^2 + \Gamma_j^2. \quad (3.16)$$

Cette solution à fréquence Ω_0 est appelée *l'onde de plasma* et le théorème de Gauss montre qu'un tel type d'onde ne génère pas de charge, car par construction $\mathbf{D} = 0$:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_j \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0.$$

On peut remarquer ici que la pulsation Ω_0 ne dépend pas de k et donc on ne peut pas définir une vitesse de phase ou de groupe pour l'onde de plasma. L'onde oscille mais elle ne se propage pas. Ces propriétés sont caractéristiques des plasmas froids non-magnétiques.

Il est important de préciser que l'onde plasma ne peut pas exister dans un milieu diélectrique parfait, car une induction nulle ($\mathbf{D} = 0$) implique un champ électrique nul ($\mathbf{E} = 0$). Pour rappel, dans ce formalisme le vecteur de polarisation \mathbf{P} représente le *terme source de la polarisation*, car la partie de la polarisation linéaire est déjà incluse dans la constante diélectrique ε_j .

L'onde plasma représente une caractéristique de tout matériau se comportant comme un milieu à deux niveaux. Elle peut être calculée directement à partir des mesures expérimentales de la relation de dispersion du milieu.

Il est important d'introduire ici, une nouvelle fréquence normalisée ω_{0j} , qui est la fréquence de plasma Ω_0 normalisée par rapport à la fréquence de transition Ω_j du milieu. Ainsi, en utilisant la définition de la fréquence plasma (3.16) et la définition du paramètre de couplage α (3.8) on arrive à :

$$\alpha = \frac{\Gamma_j^2}{\Omega_j^2} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_j^2} - 1 = \omega_{0j}^2 - 1 \quad (3.17)$$

3.2.3 Le mode linéaire électromagnétique

On va enfin considérer ici un champ électromagnétique monochromatique de fréquence ω . Toujours en regardant le système linéaire (3.5) on trouve que

$$(\Omega_j^2 - \omega^2) \mathbf{P} = \Gamma_j^2 \varepsilon_j \mathbf{E} \quad (3.18)$$

et par conséquent l'équation de propagation pour le champ électrique dans (3.5) devient,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \tilde{\varepsilon}_j \omega^2 \mathbf{E} = 0. \quad (3.19)$$

On a introduit ici le nouveau paramètre $\tilde{\varepsilon}_j$ défini par

$$\tilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_j \left(1 + \frac{\Gamma_j^2}{\Omega_j^2 - \omega^2} \right).$$

Le théorème de Gauss peut être écrit *sans charges* pour donner :

$$\nabla \cdot (\varepsilon_j \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (3.20)$$

3.3 Relation de dispersion linéaire

Dans cette section on va se lancer à la recherche d'une relation entre les caractéristiques ω (fréquence) et \mathbf{k} (le vecteur d'onde) d'une onde plane électromagnétique

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.21)$$

qui se propage dans un milieu à deux niveaux (de fréquence de Bohr Ω_j). Pour faire cela on injecte (3.21) dans l'équation (3.19), qui nous fournit ainsi le système algébrique homogène pour E_j , $j = \overline{1, 3}$

$$\begin{pmatrix} k_y^2 + k_z^2 - \tilde{\omega}^2 & -k_x k_y & -k_x k_z \\ -k_y k_x & k_x^2 + k_z^2 - \tilde{\omega}^2 & -k_y k_z \\ -k_z k_x & -k_z k_y & k_x^2 + k_y^2 - \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0 \iff M \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0,$$

où la nouvelle fréquence $\tilde{\omega}$ est définie par :

$$\tilde{\omega}^2 = \mu_0 \tilde{\varepsilon}_j \omega^2 = \mu_0 \varepsilon_j \left(1 + \frac{\Gamma_j^2}{\Omega_j^2 - \omega^2} \right) \omega^2.$$

Pour que ce système ait des solutions non-nulles il faut que son déterminant soit zéro, ce qui se traduit par :

$$\det M = -\tilde{\omega}^2(\mathbf{k}^2 - \tilde{\omega}^2)^2 = 0, \quad (3.22)$$

et en conséquence on trouve la *relation de dispersion* suivante pour chaque milieu ε_j

$$\mathbf{k}_j^2 = \mu_0 \varepsilon_j \left(1 + \frac{\Gamma_j^2}{\Omega_j^2 - \omega^2}\right) \omega^2 = \mu_0 \varepsilon_j \omega^2 \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{\Omega_j^2 - \omega^2}. \quad (3.23)$$

On a utilisé ici le résultat (3.16) pour la fréquence Ω_0 obtenu pour les ondes de plasma et on a indiqué la dépendance du nombre d'onde de la fréquence de transition du milieu Ω_j en lui donnant l'indice j .

On peut remarquer que cette relation de dispersion admet une bande interdite (ou *gap*) pour des valeurs de la fréquence de l'onde incidente

$$\omega \in [\Omega_0, \Omega_j] \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{k}_j^2 < 0.$$

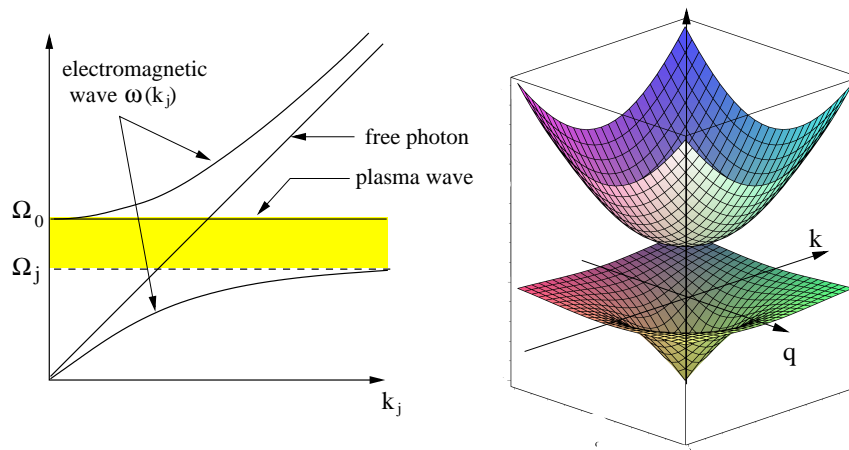


FIGURE 3.1 – Relation de dispersion de la solution électromagnétique linéaire de système de Maxwell-Bloch dans un système à deux niveaux de fréquence de transition Ω_j .

La relation (3.22) nous permet aussi de retrouver les cas particuliers traités précédemment : les ondes électrostatiques et de plasma. Cela se fait à l'aide de l'autre solution de l'équation, $\tilde{\omega}^2 = 0$, qui a deux solutions $\omega = 0$ (électrostatique) et $\omega = \Omega_0$ (plasmon). Nous pouvons écrire la formule explicite des deux branches (\pm) de la relation (3.23) :

$$\omega_{\pm}(k_j)^2 = \frac{1}{2}(\Omega_0^2 + c^2 \mathbf{k}_j^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Omega_0^4 + c^2 \mathbf{k}_j^2 (c^2 \mathbf{k}_j^2 + 2\Omega_0^2 - 4\Omega_j^2)} \quad (3.24)$$

Il est aussi intéressant d'obtenir le comportement de ces deux courbes pour des petites et grandes valeurs du module du nombre d'onde k_j . Nous obtenons alors,

$$\omega_+(k_j)^2 \underset{k_j \rightarrow 0}{\sim} \Omega_0^2 + c^2 \mathbf{k}_j^2 \frac{\Omega_0^2 - \Omega_j^2}{\Omega_0^2} + \mathcal{O}(k_j^4), \quad (3.25)$$

$$\omega_+(k_j)^2 \underset{k_j \rightarrow \infty}{\sim} (\Omega_0^2 - \Omega_j^2) + c^2 \mathbf{k}_j^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k_j^2}\right), \quad (3.26)$$

$$\omega_-(k_j)^2 \underset{k_j \rightarrow 0}{\sim} c^2 \mathbf{k}_j^2 \frac{\Omega_j^2}{\Omega_0^2} + \mathcal{O}(k_j^4), \quad (3.27)$$

$$\omega_-(k_j)^2 \underset{k_j \rightarrow \infty}{\sim} \Omega_j^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k_j^2}\right). \quad (3.28)$$

Les deux expressions de ω_{\pm} possèdent les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial \omega_{+}}{\partial k_j} + \frac{\partial \omega_{-}}{\partial k_j} = 2k,$$

$$\frac{\partial}{\partial k_j}(\omega_{+}\omega_{-}) = 1.$$

Les données expérimentales des deux fréquences Ω_0 (fréquence plasma) et Ω_j (fréquence de transition) déterminent complètement la constante de couplage Γ_j par (3.16). Ainsi, le seul paramètre restant à évaluer est N_0 et le système est complètement déterminé. Notons qu'au lieu de N_0 , il est possible de déterminer la valeur moyenne du module du moment dipolaire D_{12} . Nous rappelons que le vecteur \mathbf{D}_{12} est défini à partir des deux vecteurs propres $|u_i\rangle$ de l'Hamiltonien non-perturbé H_0 .

3.3.1 Relation de dispersion adimensionalisée

D'une manière similaire à celle employée dans la section (3.1), on peut procéder à l'écriture de la relation de dispersion dans des nouvelles variables sans dimension. On reprend ici les mêmes variables adimensionalisées proposées dans (3.6) :

$$t'_j = \Omega_j t, \quad \mathbf{r}'_j = \Omega_j \sqrt{\varepsilon_j \mu_0} \mathbf{r}$$

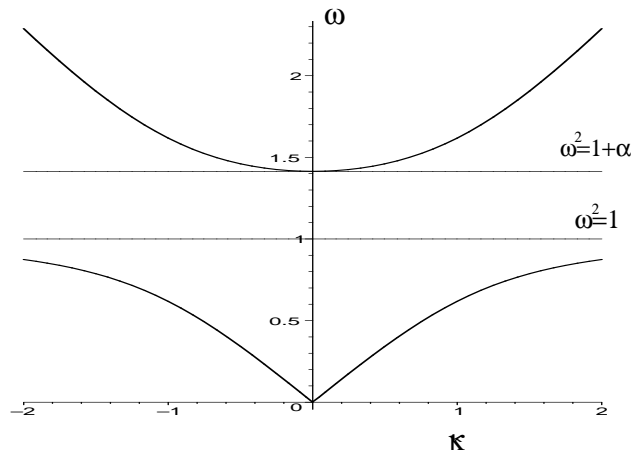


FIGURE 3.2 – Relation de dispersion linéaire du système de Maxwell-Bloch sans dimensions dans un système à deux niveaux ayant la fréquence de transition égale à 1 et la fréquence de plasma $\omega_0 = \sqrt{1 + \alpha}$.

et donc on introduit la fréquence du champ incident ω'_j , le nombre d'onde \mathbf{k}'_j et respectivement la fréquence plasma ω_{0j} sans dimensions, définis par :

$$\omega'_j = \frac{\omega}{\Omega_j}, \quad \mathbf{k}'_j = \frac{\mathbf{k}}{\Omega_j \sqrt{\varepsilon_j \mu_0}}, \quad \omega_{0j} = \frac{\Omega_0}{\Omega_j} = \sqrt{1 + \alpha}$$

Avec ces notations la relation de dispersion (3.23) devient :

$$\mathbf{k}'_j{}^2 = \omega_j'^2 \frac{\omega_j'^2 - \omega_{0j}^2}{\omega_j'^2 - 1}, \quad \omega_{0j}^2 = 1 + \alpha_j$$

ou alors en oubliant les primes (') et les indices ($_j$) qui désignent le milieu à deux niveau,

$$\mathbf{k}^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - 1}, \quad \omega_0^2 = 1 + \alpha. \quad (3.29)$$

Cette relation entre la fréquence et le nombre d'onde sans dimensions est présentée dans la figure 3.2.

Optique géométrique à l'interface des milieux à deux niveaux quantiques

Sommaire

4.1	Optique dans un milieu à deux niveaux	37
4.1.1	L'angle de Brewster et l'angle d'extinction	37
4.1.2	Optique non-linéaire	42
4.2	Plasmons de surface	43
4.2.1	Ondes de surface à la frontière de deux diélectriques	44
4.2.2	Ondes de surface dans les milieux à deux niveaux	46
4.2.3	Plasmon de surface à la frontière diélectrique-milieu à deux niveaux	47

Ce chapitre sera consacré à l'étude des principes d'optique classique (réfraction et réflexion d'un rayon lumineux), soit à l'interface de deux milieux à deux niveaux, soit à l'interface d'un milieu à deux niveaux avec un diélectrique d'indice de réfraction n_1 . L'angle de Brewster et l'angle d'extinction seront déterminés ici dans le but d'expliquer et surtout comprendre quelles sont les conditions au bord et initiales physiquement valables et réalisables pour la génération de solitons de gap dans les milieux à deux niveaux. Toujours dans cette partie nous allons voir quelles sont les conditions dans lesquelles les ondes de surface existent à l'interface de deux milieux quantiques et nous allons établir leur propriétés.

4.1 Optique dans un milieu à deux niveaux

4.1.1 L'angle de Brewster et l'angle d'extinction

On va considérer ici un milieu à deux niveaux d'indice de réfraction n situé dans le semi-espace $z > 0$, collé à un diélectrique linéaire d'indice de réfraction n_1 , l'interface de ce système étant dans le plan $z = 0$. Un faisceau laser monochromatique de fréquence ω illumine cette interface sous un angle d'incidence défini par le vecteur d'onde \mathbf{K} . On traitera ici le cas (plus intéressant) d'une onde plane polarisée dans le plan d'incidence ($x0z$) (ce mode de polarisation est appelé *transverse magnétique*). Le but de ce chapitre sera de déterminer quels sont les coefficients de transmission (T) et de réflexion (R) d'un champ incident \mathbf{E}_i de vecteur d'onde \mathbf{K}_i en fonction des propriétés des deux milieux. Pour cela il faut écrire les équations de propagation des champs électromagnétiques dans chaque milieu :

- les équations de Maxwell pour le diélectrique d'indice n_1 dans $z < 0$

- les équations de Maxwell-Bloch dans la limite linéaire pour le milieu n dans la zone $z > 0$

et les résoudre en imposant les conditions de continuité adéquates. On peut donc commencer

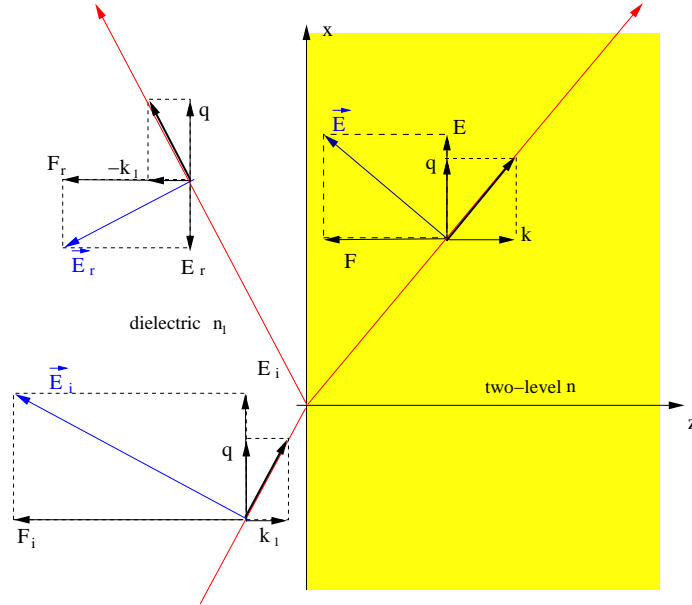


FIGURE 4.1 – Directions de propagation de l'onde incidente, transmise et réfléchie à l'interface d'un système formé d'un diélectrique d'indice n et d'un milieu à deux niveaux de fréquence de transition Ω .

par écrire les équations de Maxwell :

$$z < 0 : \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\partial_t \mathbf{B}_1, \\ \nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \partial_t (\varepsilon_1 \mathbf{E}_1), \\ \nabla \cdot (\varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \end{cases}, \quad z > 0 : \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}), \\ \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

et l'équation de Bloch dans la limite linéaire (3.2) obtenue en posant $\mathcal{N} = -1$ devient

$$\partial_t^2 \mathbf{P} + \Omega^2 \mathbf{P} = \varepsilon \Gamma^2 \mathbf{E}. \quad (4.2)$$

Pour un champ monochromatique de fréquence ω , la polarisation \mathbf{P} est donnée par

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon \Gamma^2}{\Omega^2 - \omega^2} \mathbf{E} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \left(1 + \frac{\Gamma^2}{\Omega^2 - \omega^2} \right) \mathbf{E}, \quad (4.3)$$

et donc le système des équations de Maxwell dans la région des z positifs s'écrit

$$z > 0 : \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t (\tilde{\varepsilon} \mathbf{E}), \\ \nabla \cdot (\tilde{\varepsilon} \mathbf{E}) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

où on a introduit la notation $\tilde{\varepsilon}$ pour la permittivité dépendante de la fréquence

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 + \frac{\Gamma^2}{\Omega^2 - \omega^2} \right). \quad (4.5)$$

Dans ce contexte, en négligeant les charges et les courants de surface, les conditions de continuité à l'interface $z = 0$ s'écrivent de la manière suivante

$$(\mathbf{E}_1)_\parallel = (\mathbf{E})_\parallel, \quad \varepsilon_1(\mathbf{E}_1)_\perp = (\varepsilon\mathbf{E})_\perp, \quad (\mathbf{B}_1)_\parallel = (\mathbf{B})_\parallel, \quad (\mathbf{B}_1)_\perp = (\mathbf{B})_\perp. \quad (4.6)$$

Considérons maintenant un champ incident de fréquence ω et de nombre d'onde $\mathbf{K}_1 = q_1\mathbf{e}_x + k_1\mathbf{e}_z$ qui arrive à l'interface $z = 0$. Une partie du champ sera alors réfléchi dans le milieu initial,

$$z < 0 : \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} E_i \\ 0 \\ F_i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 z - q_1 x)} + \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \\ F_r \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 z - q_1 x)}, \quad (4.7)$$

et une autre sera transmise dans le milieu à deux niveaux

$$z > 0 : \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ F \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz - qx)}. \quad (4.8)$$

Les seules données expérimentales connues à ce stade sont l'intensité du champ incident $|E_i|^2 + |F_i|^2$ et la direction de propagation donnée par le rapport q_1/k_1 . Pour déterminer le champ magnétique on utilise la relation $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ et on obtient :

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 E_i - q_1 F_i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 z - q_1 x)} + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ -k_1 E_r - q_1 F_r \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 z - q_1 x)}, \quad \forall z < 0$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ kE - qF \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz - qx)}, \quad \forall z > 0.$$

Maintenant la condition de continuité $(\mathbf{E})_\parallel$ en $z = 0$ nous donne

$$(E_i + E_r)e^{iq_1 x} = Ee^{iqx} \Rightarrow \begin{cases} E = E_i + E_r, \\ q_1 = q. \end{cases} \quad (4.9)$$

Ces résultats nous incitent à définir les facteurs de réflexion et de transmission suivants

$$E_r = -RE_i, \quad E = TE_i, \quad T = 1 - R \quad (4.10)$$

Pour des raisons géométriques évidentes on pose

$$F_r = RF_i \quad (4.11)$$

pour enfin réécrire le champ électrique (4.7) dans la première région comme étant

$$z < 0 : \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} E_i \\ 0 \\ F_i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 z - qx)} + R \begin{pmatrix} -E_i \\ 0 \\ F_i \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 z - qx)}, \quad (4.12)$$

et l'induction magnétique

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 E_i - qF_i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 z - qx)} + \frac{R}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 E_i - qF_i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 z - qx)}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ kE - qF \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz - qx)}. \quad (4.14)$$

En appliquant maintenant le théorème de Gauss $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ dans chaque région

$$-qE_i - k_1F_i = 0, \quad R(qE_i + k_1F_i) = 0, \quad qE + kF = q(1 - R)E_i + kF = 0,$$

puis en imposant les conditions de continuité pour \mathbf{B} ,

$$k_1(1 + R)E_i - q(1 + R)F_i = k(1 - R)E_i - qF$$

et respectivement \mathbf{D}_\perp

$$\varepsilon_1(1 + R)F_i = \tilde{\varepsilon}F,$$

on arrive au système d'équations suivant

$$\begin{aligned} (1 + R)(k_1E_i - qF_i) &= k(1 - R)E_i - qF & \varepsilon_1(1 + R)F_i &= \tilde{\varepsilon}F, \\ qE_i + k_1F_i &= 0, & q(1 - R)E_i + kF &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pour résoudre ce système de quatre équations on exprime d'abord les composantes longitudinales

$$\begin{aligned} F_i &= -\frac{q}{k_1}E_i, \\ F &= -\frac{q}{k}(1 - R)E_i. \end{aligned}$$

qui, une fois introduites dans les équations restantes de (4.15), nous fournissent deux équations couplées pour les inconnues q/k et R :

$$\begin{aligned} (1 + R)\left(k_1 + \frac{q^2}{k_1}\right) &= (1 - R)\left(k + \frac{q^2}{k}\right), \\ (1 + R)\frac{q}{k_1} &= \tilde{\varepsilon}(1 - R)\frac{q}{k}. \end{aligned}$$

On a introduit ici un nouveau paramètre défini par $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}/\varepsilon_1$. On obtient ainsi une première équation qui nous fournit le rapport des composantes du nombre d'onde dans le milieu à deux niveaux k/q en fonction des données initiales k_1/q

$$k^2 + q^2 = \tilde{\varepsilon}(k_1^2 + q^2), \quad (4.16)$$

et la dernière relation nous fournit explicitement le coefficient de réflexion R (et par conséquent celui de transmission T) en fonction de k_1/q (ou k_1/k)

$$R = \frac{\tilde{\varepsilon}k_1 - k}{\tilde{\varepsilon}k_1 + k} \quad \Longrightarrow \quad T = 1 - R = \frac{2k}{\tilde{\varepsilon}k_1 + k} \quad (4.17)$$

La dernière relation à être utilisée sera $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t \mathbf{D}$ et elle nous permettra par la suite de déterminer la relation de dispersion dans chaque milieu. Ainsi, dans la région $z > 0$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} ik(kE - qF) \\ 0 \\ -iq(kE - qF) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz - qx)} = i\omega\mu_0\tilde{\varepsilon} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ F \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz - qx)},$$

qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} k^2/\omega - \omega\tilde{\varepsilon}\mu_0 & kq/\omega \\ kq/\omega & q^2/\omega - \omega\tilde{\varepsilon}\mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = 0.$$

Dans la région $z < 0$ on obtient de manière similaire deux systèmes pour les enveloppes (E_i, F_i) et (E_r, F_r) qui découplent à cause de l'indépendance des exponentielles (avec $-k_1 z$ et $+k_1 z$) apparaissant dans l'équation. Enfin, la condition de déterminant nul nous donne la relation de dispersion pour le milieu diélectrique

$$k_1^2 + q^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 \quad (4.18)$$

et pour le milieu à deux niveaux

$$k^2 + q^2 = \omega^2 \tilde{\varepsilon} \mu_0. \quad (4.19)$$

La relation de dispersion (4.19) trouvée ici est compatible avec la relation de dispersion (3.23) obtenue auparavant ; pour vérifier cela il faut juste utiliser la définition de la fréquence de plasma Ω_0 donnée en (3.16) et du facteur $\tilde{\varepsilon}$ introduit au (4.5) :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (4.20)$$

On remarque encore une fois la présence des fréquences de la bande interdite $[\Omega, \Omega_0]$ pour lesquelles l'indice de réfraction $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ devient imaginaire. Ici on a bien entendu pris en compte le cas de fréquences appartenant au domaine électromagnétique $\omega > \Omega_0$ (pour lequel $\tilde{\varepsilon} > 0$).

En conclusion, on est arrivé ici à déterminer explicitement les inconnues k_1, q, k en fonction de l'angle d'incidence θ_1 ,

$$\frac{q}{k_1} = \tan \theta_1, \quad q^2 = \varepsilon_1 \mu_0 \omega^2 \sin^2 \theta_1, \quad k^2 = \mu_0 \omega^2 (\varepsilon_1 - \tilde{\varepsilon}(\omega) \sin^2 \theta_1) \quad (4.21)$$

ce qui nous a permis de trouver une expression pour le facteur de réflexion et de transmission

$$\boxed{R = \frac{\tilde{\varepsilon} - \delta}{\tilde{\varepsilon} + \delta}, \quad T = \frac{2\delta}{\tilde{\varepsilon} + \delta}, \quad \delta = \frac{k}{k_1} = \sqrt{1 + \frac{\tilde{\varepsilon} - 1}{\cos^2 \theta_1}}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}.} \quad (4.22)$$

L'angle d'extinction : Il existe une valeur de l'angle d'incidence θ_1^c tel que pour tout faisceau incident d'angle $\theta_1 > \theta_1^c$ il n'y a aucun rayon transmis dans le milieu à deux niveaux. Ceci est équivalent à un coefficient de transmission nul ($T = 0$). Il est possible de trouver la valeur de l'angle critique à partir des relations (4.22)

$$T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 \theta_1^c = \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (4.23)$$

Cet angle n'est bien défini que si le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} < 1$. Dans le cas des ondes électromagnétiques, pour lesquelles $\omega > \Omega_0 > \Omega$, cette condition nous donne la relation bien connue

$$\varepsilon < \varepsilon_1 \quad \Leftrightarrow \quad n < n_1$$

entre les indices de réfraction pour l'angle d'extinction dans les cas des milieux diélectriques non-linéaires homogènes et isotropes classiques que si la fréquence de Bohr Ω devient égale à la fréquence de plasma Ω_0 . On peut remarquer aussi que la valeur de l'angle critique est d'autant plus grande si la largeur de la bande interdite est importante.

Un important effet secondaire de la réflexion totale interne est la propagation d'une onde évanescente à l'interface de ces deux milieux. Entre l'onde incidente et l'onde réfléchie il y a un déphasage ($\Delta\phi$) qui dépend de la valeur de l'angle d'incidence θ_1 (le déphasage $\Delta\phi$ croît avec l'augmentation de la valeur de l'angle d'incidence). En plus, la valeur du déphasage est dépendante de la polarisation du rayon incident. C'est précisément ce phénomène la raison

pour laquelle les modes TM (transverse magnétique) et TE (transverse électrique) ont des relations de dispersion différentes.

Angle de Brewster : Travaillant toujours dans l'hypothèse des ondes planes monochromatiques polarisées dans le plan d'incidence (ondes TM), on peut constater qu'il existe une solution valide correspondant à une valeur nulle de l'indice de réflexion $R = 0$. Dans ce cas, l'onde plane TM incidente est complètement transmise dans le deuxième milieu. La valeur de l'angle correspondant à une réflexion nulle est appelé *angle de Brewster* et sa valeur est obtenue à partir de (4.22)

$$R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \tilde{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2 \theta_1^B = \tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (4.24)$$

Bien évidemment pour que ce résultat soit valable il faut que la fréquence ω de l'onde appliquée soit dans la bande passante du milieu à deux niveaux. En plus, cette relation est applicable seulement dans le cas où les indices de réfraction sont des nombres réels. On remarque une fois de plus que pour un milieu à deux niveaux avec une bande interdite nulle ($\Omega = \Omega_0$) la valeur de l'angle de Brewster devient celle habituelle $\tan^2 \theta = \frac{\epsilon}{\epsilon_1}$.

4.1.2 Optique non-linéaire

Les résultats trouvés précédemment ont été obtenus dans la limite linéaire pour le système à deux niveaux, c'est-à-dire qu'on a négligé la variation de la densité de population \mathcal{N} qui est responsable des couplages entre les différentes composantes du champ électromagnétique et la polarisation. À travers ce couplage les harmoniques de la fréquence ω sont produites dans le milieu à deux niveaux et il faudra en tenir compte par différentes méthodes. En plus, le système d'équations n'étant plus linéaire, le calcul avec les champs dans leur forme complexe perd sa validité. Effectivement, il faudra considérer aussi la composante complexe conjuguée pour assurer la validité physique des résultats. Ainsi, le champ électrique devrait comporter à l'ordre le plus bas des termes de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r})e^{i\omega t} + \mathbf{E}_1^*(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathcal{O}(e^{\pm 2i\omega t}), \quad (4.25)$$

et la polarisation s'écrit

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_1(\mathbf{r})e^{i\omega t} + \mathbf{P}_1^*(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathcal{O}(e^{\pm 2i\omega t}). \quad (4.26)$$

On a vu dans le chapitre 3 que le mode linéaire électromagnétique suppose une polarisation proportionnelle au champ électrique de la forme (3.18) et donc cela nous indique que les termes d'ordre 1 de la polarisation du milieu à deux niveaux sont égaux à :

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon\Gamma^2}{\Omega^2 - \omega^2}\mathbf{E}_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{P}_1^*(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon\Gamma^2}{\Omega^2 - \omega^2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{r}). \quad (4.27)$$

La densité de population est égale à une constante ($\mathcal{N} = 0$) dans la limite linéaire et le premier terme non-nul peut être calculé en utilisant l'équation de Bloch (3.3) avec \mathbf{E} et \mathbf{P} donnés par les relations (4.25), (4.26) et (4.27). On trouve ainsi

$$\mathcal{N} = \frac{2}{N_0\hbar\Omega} \frac{\epsilon\Gamma^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^* + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 e^{2i\omega t} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 e^{-2i\omega t} \right) + \dots \quad (4.28)$$

Les termes d'ordre supérieur seront traités par une méthode de développement multimodal dans le chapitre 5.

Il est parfois plus utile de travailler dans un autre référentiel que celui attaché au milieu dans lequel l'interaction lumière-matière a lieu ($x0z$). Du point de vue de la simplicité des

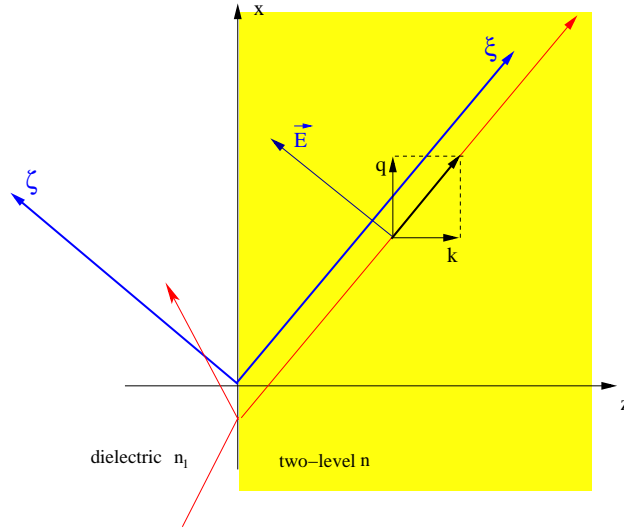


FIGURE 4.2 – *Changement de repère pour la propagation d'une onde plane dans un milieu à deux niveaux. Le repère $(\xi\zeta)$ attaché à la propagation du champ peut être lié au repère $(x0z)$ par une simple rotation d'angle θ (l'angle fait entre la direction du vecteur d'onde \mathbf{K} ayant les composantes k et q et la normale à l'interface)*

opérateurs rentrant en jeu dans les équations de mouvement, il est parfois intéressant de choisir comme système de coordonnées celui qui est attaché à la propagation de l'onde plane monochromatique (voir figure 4.2) qu'on va appeler ici $(\xi0\zeta)$. Dans le repère en mouvement $(\xi0\zeta)$ le champ électrique ainsi que le vecteur d'onde présentent une seule composante. Le passage des variables dynamique d'un repère à l'autre se fait à l'aide d'une simple transformation de rotation. Ainsi les nouvelles variables peuvent être exprimées en fonctions des anciennes

$$\xi = qx + kz, \quad \zeta = qz - kx, \quad (4.29)$$

et inversement

$$x = \frac{1}{k^2 + q^2}(q\xi - k\zeta), \quad z = \frac{1}{k^2 + q^2}(k\xi + q\zeta) \quad (4.30)$$

De plus, dans le repère $(\xi0\zeta)$ le champ électrique est simplement

$$\mathbf{E} = |\mathbf{E}| \mathbf{e}_\zeta = \sqrt{E^2 + F^2} \mathbf{e}_\zeta \quad (4.31)$$

où $E = |\mathbf{E}_x|$ et $F = |\mathbf{F}_z|$ sont respectivement les composantes du champ dans le repère du laboratoire $(x0z)$. De même le vecteur d'onde à lui aussi une seule composante

$$\mathbf{K} = |\mathbf{K}| \mathbf{e}_\xi = \sqrt{k^2 + q^2} \mathbf{e}_\xi \quad (4.32)$$

Les conditions de continuité au bord $z = 0$ devront être alors données sur la ligne $k\xi + q\zeta = 0$.

4.2 Plasmons de surface

Dans cette partie nous allons donner une description simple des plasmons de surface en indiquant dans quelles conditions ils peuvent exister à la frontière de deux milieux (semi-infinis) et nous allons voir quelles sont leurs propriétés. Pour introduire le concept de plasmon de surface on va d'abord traiter le cas classique d'une interface diélectrique-métal et après on essaiera de voir si ces ondes peuvent exister aussi à la surface séparatrice d'un diélectrique et un milieu à deux niveaux quantiques. Pour prouver l'existence de ces ondes de surface on utilisera comme support la théorie de Maxwell. Les ondes de surface sont appelées parfois

plasmons-polaritons de surface, en liaison avec leur nature hybride : ils sont à la fois une excitation collective des électrons libres à la surface du métal mais aussi une onde électromagnétique à la surface du métal. L'intensité du champ électromagnétique associé à cette onde présente son maximum à l'interface métal-diélectrique et elle décroît exponentiellement dans les deux milieux suivant les directions perpendiculaires à l'interface [Raether 88].

4.2.1 Ondes de surface à la frontière de deux diélectriques

Les ondes de surfaces sont, comme leur nom l'indique, des ondes localisées exponentiellement à la frontière de deux milieux. Nous allons considérer ici deux milieux semi-infinis non-absorbants, de constantes diélectriques ε_1 (pour $z < 0$) et ε_2 (pour $z > 0$) on peut trouver une solution des équations de Maxwell telle que les nombres d'ondes k_1 et k_2 dans la direction z soient purement imaginaires. Pour montrer cela on va d'abord écrire les équations de Maxwell (dans les variables physiques) :

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_j &= -\partial_t \mathbf{B}_j, & \nabla \cdot (\varepsilon_j \mathbf{E}_j) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B}_j &= \mu_0 \partial_t (\varepsilon_j \mathbf{E}_j), & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}$$

pour chaque milieu $j = 1, 2$ et ensuite on posera, comme précédemment, les conditions de continuité à la frontière $z = 0$,

$$(\mathbf{E}_1)_\parallel = (\mathbf{E}_2)_\parallel, \quad \varepsilon_1 (\mathbf{E}_1)_\perp = \varepsilon_2 (\mathbf{E}_2)_\perp, \quad (\mathbf{B}_1)_\parallel = (\mathbf{B}_2)_\parallel, \quad (\mathbf{B}_1)_\perp = (\mathbf{B}_2)_\perp.$$

On a négligé ici tout effet dû à des densités de charges ou de courants. Le champ électrique dans chaque zone est alors écrit dans l'hypothèse des ondes planes monochromatiques de fréquence ω comme suit

$$z < 0 : \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ F_1 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 z - q_1 x)}, \quad z > 0 : \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \\ F_2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_2 z - q_2 x)},$$

où on a supposé qu'il n'y a pas d'onde réfléchi sur l'interface de ces deux milieux. On a vu dans le chapitre précédent qu'une telle situation peut être obtenue pour une onde plane polarisée dans le plan d'incidence qui arrive à la frontière $z = 0$ sous un angle de Brewster. À partir de la première équation de Maxwell on peut extraire des informations concernant l'induction magnétique :

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 E_1 - q_1 F_1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 z - q_1 x)}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 E_2 - q_2 F_2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_2 z - q_2 x)}.$$

La condition de continuité pour la composante du champ électrique parallèle à l'interface $(\mathbf{E}_j)_\parallel$ nous fournit les équations suivantes

$$E_1 e^{iq_1 x} = E_2 e^{iq_2 x} \Rightarrow E_1 = E_2, \quad q_1 = q_2, \quad (4.33)$$

et celle pour la composante transverse se traduit par :

$$\varepsilon_1 F_1 = \varepsilon_2 F_2. \quad (4.34)$$

On notera donc par la suite $E_j = E$ et $q_j = q$ pour $j = 1, 2$. Il nous reste donc une seule condition de passage pour le champ magnétique \mathbf{B}_j à l'interface

$$qF_1 - k_1 E = qF_2 - k_2 E. \quad (4.35)$$

Il faut noter que l'équation de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ est automatiquement satisfaite car il n'y a pas de dépendance en y du champ magnétique. La troisième équation de Maxwell $\nabla \cdot (\varepsilon_j \mathbf{E}_j) = 0$ en $z = 0$ nous amène à écrire une condition supplémentaire

$$qE + k_1 F_1 = 0, \quad qE + k_2 F_2 = 0, \quad (4.36)$$

tandis que la dernière nous aidera à trouver les relations de dispersion des deux milieux. Ainsi, le système homogène obtenu

$$\nabla \times \mathbf{B}_j = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} ik_j(k_j E - qF_j) \\ 0 \\ -iq(k_j E - qF_j) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_j z - qx)} = i\omega\mu_0\varepsilon_j \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ F_j \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_j z - qx)}$$

peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} k^2/\omega - \omega\varepsilon\mu_0 & kq/\omega \\ kq/\omega & q^2/\omega - \omega\varepsilon\mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = 0,$$

et en imposant la condition de déterminant nul on trouve les relations de dispersions recherchées

$$k_1^2 + q^2 = \omega^2\varepsilon_1\mu_0, \quad k_2^2 + q^2 = \omega^2\varepsilon_2\mu_0. \quad (4.37)$$

En conclusion, les relations (4.34), (4.35), (4.36) et (4.37) forment un système de 6 équations couplées, pas toutes linéairement indépendantes, pour 6 inconnues $(q, k_1, k_2, E, F_1, F_2)$. Cela signifie qu'il y a des paramètres libres dans le système, par exemple l'intensité de l'onde incidente et l'angle d'incidence. En utilisant (4.34) et (4.36) on trouve que

$$\frac{k_1}{\varepsilon_1} = \frac{k_2}{\varepsilon_2}, \quad F_2 = -\frac{q}{k_2}E, \quad F_1 = -\frac{q}{k_1}E. \quad (4.38)$$

et après en remplaçant ces résultats dans l'équation (4.35) on arrive à

$$\frac{q^2}{k_1} + k_1 = \frac{q^2}{k_2} + k_2 \Rightarrow q^2 = k_1 k_2 \quad (4.39)$$

si $k_1 \neq k_2$. Finalement en utilisant les relations de dispersion (4.37) on trouve les valeurs des nombres d'onde recherchés :

$$k_j^2 = \mu_0\omega^2 \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad q^2 = \mu_0\omega^2 \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (4.40)$$

Pour avoir une onde qui se propage dans la direction x mais qui est localisée dans la direction transverse z il faut poser $k_j^2 < 0$ et $q^2 > 0$. Pour que cette condition soit vraie il faut donc utiliser des milieux pour lesquels

$$\{\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0\} \Rightarrow \{k_j^2 < 0, q^2 > 0\}. \quad (4.41)$$

On conclue donc, que les ondes électromagnétiques de surface ne peuvent exister qu'à l'interface de deux milieux de constantes diélectriques opposées et de somme négative. Cette condition peut être obtenue à l'interface d'un diélectrique habituel $\varepsilon_1 > 0$ et un métal, pour lequel la constante diélectrique (dans le modèle de Drude) peut être écrite sous la forme

$$\varepsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.42)$$

où ω_p est la pulsation des plasmons de volume (qui est une caractéristique du métal). On peut constater que pour des fréquences ω de l'onde incidente plus petites que ω_p la constante

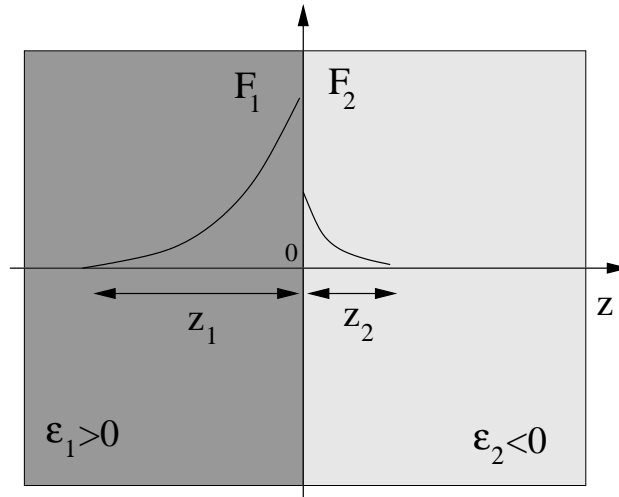


FIGURE 4.3 – Composantes normales (F_1 et F_2) du champ électrique du plasmon de surface selon la direction z perpendiculaire à l'interface $z = 0$ entre un diélectrique ($\varepsilon_1 > 0$) et un métal ($\varepsilon_2 < 0$) et profondeurs de pénétration du champ $z_1 = \frac{1}{|k_1|}$ et $z_2 = \frac{1}{|k_2|}$ dans chaque milieu.

diélectrique du métal devient négative. Le plasmon est donc une onde électromagnétique se propageant à l'interface plane entre un milieu diélectrique et un métal.

Les conditions exprimées dans (4.41) assurent l'existence d'une composante transverse imaginaire du vecteur d'onde du champ électromagnétique. Il faut aussi noter qu'une condition nécessaire à l'existence des ondes de surfaces est la présence d'une composante longitudinale q (plasmon) non-nulle du vecteur d'onde. En plus, en suivant la même procédure que celle exposée dans cette section, on peut montrer que les plasmons de surface ne peuvent pas exister pour une onde incidente polarisée TE (c'est à dire polarisée perpendiculairement au plan d'incidence).

4.2.2 Ondes de surface dans les milieux à deux niveaux

Si dans le paragraphe antérieur on a vu quelles sont les conditions d'existence d'un plasmon de surface à l'interface de deux milieux semi-infinis classiques caractérisés par les constantes diélectriques ε_1 et ε_2 , dans cette section on va utiliser la même démarche physique pour voir si des ondes de surface peuvent exister cette fois ci à l'interface de deux milieux à deux niveaux ayant les fréquences de Bohr de transition Ω_1 et Ω_2 .

Dans la section 3.3 on a vu que si on considère le système de Maxwell-Bloch linéarisé pour un champ électrique polarisé dans le plan $(x0z)$ d'incidence se propageant dans deux milieux différents,

$$\mathbf{E}_j = \begin{pmatrix} E_j(x, z, t) \\ 0 \\ F_j(x, z, t) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}_{j,\text{lin}} = \begin{pmatrix} E_j \\ 0 \\ F_j \end{pmatrix} e^{i(q_j x + k_j z - \omega_j t)}. \quad (4.43)$$

alors cela nous permet d'écrire la relation de dispersion linéaire dans chaque milieu à deux niveaux (3.23), qu'on rappelle ici pour $k = k_z$ et $q = k_x$

$$k_j^2 + q_j^2 = \mu_0 \omega^2 \varepsilon_j \left(1 + \frac{\Gamma_j^2}{\Omega_j^2 - \omega^2} \right). \quad (4.44)$$

On rappelle aussi que chacun de ces milieux présente une bande interdite donnée par $[\Omega_j, \Omega_0]$. Si on compare cette relation de dispersion (4.44) avec (4.37) alors on constate rapidement

qu'elle reste compatible avec l'analyse linéaire des ondes de surface simplement en changeant ε_j avec $\tilde{\varepsilon}_j$ introduit dans la relation (3.19)

$$\tilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_j \left(1 + \frac{\Gamma_j^2}{\Omega_j^2 - \omega^2}\right). \quad (4.45)$$

Ainsi, les conditions d'existence de plasmons de surface (4.41) deviennent ici :

$$\{\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 < 0, \tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 < 0\} \Rightarrow \{k_j^2 < 0, q^2 > 0\}, \quad (4.46)$$

avec les composantes des nombres d'onde dans chaque milieu données par

$$k_j^2 = \mu_0 \omega^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_j^2}{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}, \quad q^2 = \mu_0 \omega^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}. \quad (4.47)$$

On remarque ici que même si les deux constantes diélectriques sont positives $\varepsilon_j > 0$ il y a des valeurs de la fréquence ω ($\omega^2 > \Omega_j^2$) telles que le produit $\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 < 0$. En utilisant la relation (4.44) et la définition (4.45) on peut voir que pour toute fréquence ω de la bande passante du milieu ε_j on a

$$\omega \in]\Omega_j, \Omega_0[\Rightarrow \tilde{\varepsilon}_j < 0, \quad (4.48)$$

et donc les conditions d'existence ($q^2 > 0$ et $k_j^2 < 0$) du plasmon de surface sont satisfaites.

4.2.3 Plasmon de surface à la frontière diélectrique-milieu à deux niveaux

Prenons ici l'exemple d'un milieu diélectrique ε_1 placé à coté d'un milieu à deux niveaux ε_2 ayant la fréquence de transition $\Omega_2 = \Omega$. Les relations de dispersions de chaque milieu seront (4.37) et (4.44) pour les nombres d'onde :

$$k_1^2 = \mu_0 \omega^2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}_2}, \quad k^2 = \mu_0 \omega^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_2^2}{\varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}_2}, \quad q^2 = \mu_0 \omega^2 \frac{\varepsilon_1 \tilde{\varepsilon}_2}{\varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}_2}, \quad (4.49)$$

où on a noté k_2 par k pour simplifier les notations. Dans ce cas, les conditions d'existence d'onde de surface se traduisent par

$$\tilde{\varepsilon}_2 < 0, \quad |\tilde{\varepsilon}_2| > \varepsilon_1 \quad (4.50)$$

pour lesquelles k_1^2 et k^2 sont strictement négatives et q^2 est positive. En utilisant (3.23) et (4.45) on voit que

$$\tilde{\varepsilon}_2 = -\varepsilon_2 \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (4.51)$$

et donc les conditions de (4.50) s'écrivent maintenant comme suit

$$\Omega^2 < \omega^2 < \frac{e\Omega_0^2 + \Omega^2}{1 + e} = \Omega_m^2. \quad (4.52)$$

On a introduit ici le paramètre $e = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. On peut donc constater que pour des fréquences $\omega \in [\Omega, \Omega_m]$ du champ électromagnétique un plasmon de surface peut exister à la frontière d'un milieu à deux niveaux avec un diélectrique.

On va maintenant tracer les courbes de dispersion obtenues dans ce contexte et pour faire cela on va passer dans les variables sans dimension définies comme suit :

$$k' = \frac{k}{\Omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_0}}, \quad q' = \frac{q}{\Omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_0}}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \omega'_0 = \frac{\Omega_0}{\Omega}. \quad (4.53)$$

Les relations (4.49) deviennent alors

$$k^2 = \frac{e\omega^2}{1-\omega^2} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{1 + e\omega_0^2 - (1+e)\omega^2}, \quad q^2 = \omega^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{1 + e\omega_0^2 - (1+e)\omega^2} \quad (4.54)$$

où on a abandonné les ('). On rappelle qu'on a déjà écrit dans un chapitre précédent la relation

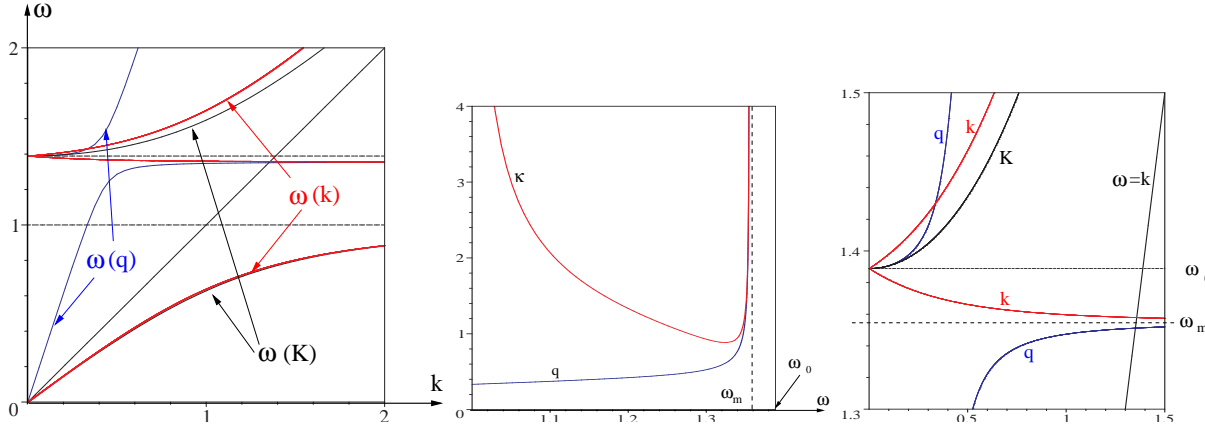


FIGURE 4.4 – À gauche : relations de dispersions adimensionnalisées $\omega(q)$ (en bleu), $\omega(k)$ (en rouge) et $\omega(K)$ (en noir) données par les relations (4.54) et (4.55) pour $e = 9$. Au centre : relations de dispersion $k(\omega)$ (en rouge) et $q(\omega)$ (en bleu) données par (4.54) pour une fréquence ω dans la bande interdite. À droite : détails des courbes $\omega(q)$ et $\omega(k)$ autour de la fréquence plasma adimensionnalisée ω_0 .

de dispersion adimensionnalisée (3.29) pour un milieu à deux niveaux dans les variables sans dimensions (4.53)

$$k^2 + q^2 = K^2 = \omega^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{1 - \omega^2}. \quad (4.55)$$

Les relations (4.55) et (4.54) sont représentées dans les figures 4.4.

On peut montrer ici que $q^2 > 0$ pour les fréquences $\omega \notin [\omega_m, \omega_0]$ où la fréquence ω_m adimensionnalisée a été définie par

$$\omega_m^2 = \frac{1 + e\omega_0^2}{1 + e} \quad \longrightarrow \quad \Omega_m^2 = \frac{\Omega^2 + e\Omega_0^2}{1 + e}. \quad (4.56)$$

Donc finalement la condition physique (4.52) d'existence des ondes de surface s'écrit ici

$$\omega \in]1, \omega_m[\Rightarrow \{q^2 > 0, k^2 < 0\} \quad (4.57)$$

On remarque ici que la fréquence ω_m se trouve dans la bande interdite $[1, \omega_0]$ et elle est proche de la limite inférieure de la bande, c'est-à-dire proche de la valeur 1 (sans dimension) ou Ω (en dimensions physiques) pour des valeurs de $e \rightarrow 0$ et proche de la fréquence de plasma (ω_0 ou Ω_0) pour des valeurs très grandes du paramètre e . En plus, si $e = 1$ alors ω_m se trouve exactement au milieu de la bande interdite :

$$\begin{cases} \omega_m \rightarrow 1 & \text{pour } e \rightarrow 0 \\ \omega_m \rightarrow \omega_0 & \text{pour } e \rightarrow \infty \\ \omega_m = (1 + \omega_0)/2 & \text{pour } e = 1 \end{cases} \quad (4.58)$$

Il est important de rappeler que les relations obtenues ici sont calculées dans la limite linéaire, c'est-à-dire en considérant que la densité de population \mathcal{N} reste constante (on a pris $\mathcal{N} = 0$). Dans le cas le plus général, \mathcal{N} a le droit de varier dans le temps (ce qui nous

place alors dans la limite non-linéaire du système de Maxwell-Bloch) et alors la constante diélectrique associée $\tilde{\varepsilon}_2$ (4.20) s'écrit dans ce cas

$$\varepsilon'_2 = \varepsilon_2 \left(1 + \frac{\Gamma^2(1 - \bar{N})}{\Omega_2^2 - \omega^2} \right). \quad (4.59)$$

où \bar{N} représente une constante qui doit être reliée d'une façon ou d'une autre à la moyenne de $\mathcal{N}(z, t)$. On remarque un cas particulier intéressant : pour $\bar{N} = 1$ le milieu à deux niveaux non-linéaire se comporte comme un diélectrique ordinaire de constante ε_2 . On peut donc avoir l'espoir (et l'intuition) de pouvoir transmettre de l'énergie dans le milieu à deux niveaux dans ces conditions d'onde évanescente à la surface. Il faut souligner aussi que si \bar{N} varie dans l'intervalle $[0, 2]$ alors la nouvelle constante diélectrique peut avoir des valeurs positives ou négatives et par conséquent, le milieu à deux niveaux peut se comporter soit comme un diélectrique soit comme un métal.

La propagation de plasmons de surface présente quelques applications expérimentales très intéressantes. Par exemple, en mesurant la vitesse de groupe des ondes de surface à petites fréquences on peut déterminer la valeur de la fréquence de transition entre les deux niveaux quantiques. Effectivement, si on regarde la courbe $\omega(q)$ de la figure 4.4 on constate que pour des fréquences plus petites que 1 (c'est-à-dire Ω) la courbe $\omega(q)$ est très proche d'une droite. De là on peut calculer la vitesse de groupe :

$$V = \left(\frac{\partial \omega(q)}{\partial q} \right)_{q \sim 0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ 2\sqrt{q^2} \left(\frac{\partial q^2}{\partial \omega} \right)^{-1} \right\} \quad (4.60)$$

et en utilisant la fonction de $q^2(\omega)$ donnée par (4.54), en unités physique

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2) + e(\Omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (4.61)$$

On constate donc qu'il y a une relation entre la vitesse de groupe V et la fréquence de transition

$$V = c \sqrt{\frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} + e}. \quad (4.62)$$

Si V peut être mesurée expérimentalement alors la valeur de Ω sera simplement calculée avec la relation suivante

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 \left(\frac{V^2}{c^2} - e \right). \quad (4.63)$$

Analyse non-linéaire

Sommaire

5.1	Précisions sur l'hypothèse de champ monochromatique	51
5.2	Méthode de développement multimodal	52
5.2.1	Calculs	53
5.3	Développement spatial multi-échelles	57
5.4	Effet Kerr	61

5.1 Précisions sur l'hypothèse de champ monochromatique

On a vu dans le chapitre 3 que les non-linéarités dans le système de Maxwell-Bloch rentrent en jeu dès que la densité d'inversion de population devient variable dans le temps. Cela traduit le fait que les non-linéarités ont une origine purement quantique. Ce chapitre va être dédié au traitement des non-linéarités qui apparaissent lors de l'interaction d'un faisceau monochromatique avec un milieu à deux niveaux.

Nous considérons ici le système Maxwell-Bloch adimensionalisé (3.7) suivant

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mathbf{P} = \alpha(1 - \mathcal{N}) \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (5.1)$$

Dans le cas d'un *champ monochromatique* on peut écrire que

$$\mathbf{E}_{tt} = -\omega^2 \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{tt} = -\omega^2 \mathbf{P}.$$

Le système précédent devient alors

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 (\mathbf{E} + \mathbf{P}), \quad (5.2a)$$

$$(1 - \omega^2) \mathbf{P} = \alpha(1 - \mathcal{N}) \mathbf{E} \quad (5.2b)$$

$$\mathcal{N}_t = \frac{\alpha}{1 - \omega^2} \mathbf{E} \cdot [(1 - \mathcal{N}) \mathbf{E}]_t, \quad (5.2c)$$

où nous rappelons que \mathcal{N} est défini tel que $\mathcal{N}^- = 0$ et $\mathcal{N}^+ = 2$. Or, en revenant à l'ancienne définition de la densité d'inversion de population $\mathcal{N} = \mathcal{N} - 1$ (avec $\mathcal{N}^- = -1$ pour l'état fondamental et $\mathcal{N}^+ = 1$ pour l'état excité), la relation (5.2c) devient

$$-\mathcal{N}_t = \frac{\alpha}{1 - \omega^2} \mathbf{E} \cdot (\mathcal{N} \mathbf{E})_t \quad (5.3)$$

et encore,

$$-\frac{\mathcal{N}_t}{\mathcal{N}}\left(1 + \frac{\alpha}{1 - \omega^2}\mathbf{E}^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1 - \omega^2}(\mathbf{E}^2)_t.$$

Pour intégrer correctement l'équation ci-dessus nous devons prêter attention au signe de $\alpha/(1 - \omega^2)$ et on utilise la condition initiale qui semble la plus naturelle $\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathcal{N} = -1$ (en absence de toute excitation externe tous les atomes se trouvent dans l'état fondamental). Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{N}(t) = -\sqrt{\frac{1 + \frac{\alpha}{1 - \omega^2}\mathbf{E}^2(0)}{1 + \frac{\alpha}{1 - \omega^2}\mathbf{E}^2(t)}} = \mathcal{N}(t) - 1, \quad (5.4)$$

et l'équation pour le champ électrique devient

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \mathbf{E} \left(1 + \frac{\alpha}{1 - \omega^2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\alpha}{1 - \omega^2}\mathbf{E}^2(0)}{1 + \frac{\alpha}{1 - \omega^2}\mathbf{E}^2(t)}}\right). \quad (5.5)$$

On peut faire apparaître dans toutes ces relations la fréquence de plasma normalisée à la fréquence de transition Ω entre les niveaux atomiques telle qu'elle a été introduite au (3.17) :

$$\omega_0^2 = 1 + \alpha.$$

Ainsi l'équation (5.5) s'écrit :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \mathbf{E} \left(1 + \frac{\omega_0^2 - 1}{1 - \omega^2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\omega_0^2 - 1}{1 - \omega^2}\mathbf{E}^2(0)}{1 + \frac{\omega_0^2 - 1}{1 - \omega^2}\mathbf{E}^2(t)}}\right).$$

Il faut remarquer qu'une telle équation est seulement *indicative* puisque, pour un champ électrique monochromatique de fréquence ω , la non-linéarité va produire des harmoniques et la procédure présentée perd sa validité. Il est à signaler que cette procédure est valide aussi longtemps que $1 + \frac{\omega_0^2 - 1}{1 - \omega^2}\mathbf{E}^2 \neq 0$. Cela est vrai pour $\omega < 1$ (la partie inférieure de la courbe de dispersion) mais pas sur la branche $\omega > \omega_0 > 1$ pour laquelle il faudra ajouter la contrainte

$$\mathbf{E}^2 < \frac{\omega^2 - 1}{\omega_0^2 - 1}. \quad (5.6)$$

Enfin la formule ci-dessus implique $\mathcal{N} \leq 0$, ce qui signifie que \mathcal{N} peut prendre au plus la valeur 0, correspondant à *la moitié* des atomes dans l'état excité, car on rappelle que $\mathcal{N}_{min} = \mathcal{N}^- = -1$ et $\mathcal{N}_{max} = \mathcal{N}^+ = 1$.

5.2 Méthode de développement multimodal

On a vu dans la section 5.1 qu'il n'est pas trivial de prendre en compte les effets non-linéaires dans le système de Maxwell-Bloch (5.1). Une des approches adaptée à ce phénomène est la *méthode de développement multimodal* qui considère les contributions de toutes les harmoniques supérieures des champs et polarisations, proportionnelles à un petit paramètre ϵ . Ce paramètre peut être lié à l'intensité du mode fondamental de fréquence ω . Pour appliquer cette théorie il faut donc chercher des solutions du système (5.1) de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=-j}^{+j} \mathbf{E}_j^n(\mathbf{r}) e^{in\omega t}, \\ \mathbf{P} &= \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=-j}^{+j} \mathbf{P}_j^n(\mathbf{r}) e^{in\omega t}, \\ \mathcal{N} &= \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=-j}^{+j} \mathcal{N}_j^n(\mathbf{r}) e^{in\omega t}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Notre système d'équations étant non-linéaire, il faut utiliser des quantités physiques réelles des champs, polarisations et densité de population, restriction réalisée en imposant les conditions suivantes pour les composantes spatiales X_n^j :

$$\mathbf{E}_j^{-n} = (\mathbf{E}_j^n)^*, \quad \mathbf{P}_j^{-n} = (\mathbf{P}_j^n)^*, \quad \mathcal{N}_j^{-n} = (\mathcal{N}_j^n)^* \quad (5.8)$$

D'un point de vue pratique, il sera plus simple d'exprimer ces développements sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega t} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{E}_j^n(\mathbf{r}), \\ \mathbf{P} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega t} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{P}_j^n(\mathbf{r}), \\ \mathcal{N} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega t} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \mathcal{N}_j^n(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

avec la convention

$$\text{pour } \forall |n| > j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_j^n = \mathbf{P}_j^n = \mathcal{N}_j^n = 0. \quad (5.10)$$

Nous allons considérer ici qu'il n'existe pas de composante permanente du champ électrique, c'est-à-dire

$$\text{pour } \forall j > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_j^0 = 0, \quad (5.11)$$

mais la densité d'atomes excités $\mathcal{N} \in [0, 2]$ quant à elle, elle peut avoir une composante permanente (des termes $\mathcal{N}_j^0 \neq 0$ peuvent exister dans le développement (5.9) car la seule restriction imposée par la non-linéarité est $\mathcal{N}_1^0 = 0$). La condition (5.11) n'est toutefois pas nécessaire pour l'application de la théorie. Enlever cette restriction implique l'existence (du moins en hypothèse) des modes de fréquence nulle pour le champ électrique \mathbf{E} et la polarisation \mathbf{P} . Par contre, en résolvant le système de Maxwell-Bloch nous allons obtenir des équations de contrainte pour les composantes \mathbf{E}_j^0 et \mathbf{P}_j^0 mais ces contraintes ne seront pas suffisantes pour déterminer exactement leur valeur. Elles resteront comme paramètres libres du système et c'est pour cela qu'en général leur valeur est prise nulle. Si jamais on veut inclure dans nos développements une composante longitudinale permanente du champ électrique dans le milieu, alors pour permettre son existence mathématique il faut enlever la restriction (5.11) pour \mathbf{E} .

5.2.1 Calculs

Dans cette section on va essayer de voir quels sont les résultats qu'on peut obtenir sur le comportement non-linéaire du système de Maxwell-Bloch en utilisant l'hypothèse de champ multimodal présentée. En injectant (5.9) dans (5.1), chaque équation s'exprime comme une double série : elle est à la fois une série de puissances en exponentielles $e^{in\omega t}$ dont le coefficient est lui même une série de puissances en ϵ . Pour les résoudre, il faut que le coefficient de chaque puissance de ϵ^j devant chaque exponentielle $e^{in\omega t}$ soit nul. Montrons ici de manière explicite

ce que la troisième équation de (5.1) devient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_t &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in\omega) e^{in\omega t} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \mathcal{N}_j^n \\
&= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\omega t} \sum_{l=1}^{\infty} \epsilon^l \mathbf{E}_l^p \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (iq\omega) e^{iq\omega t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \mathbf{P}_k^q \\
&= \sum_p \sum_q (iq\omega) e^{i(p+q)\omega t} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \sum_{l+k=j} \mathbf{E}_l^p \cdot \mathbf{P}_k^q \\
&= \sum_n \sum_{p+q=n} (iq\omega) e^{in\omega t} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \sum_{l+k=j} \mathbf{E}_l^p \cdot \mathbf{P}_k^q
\end{aligned} \tag{5.12}$$

et donc il faut

$$n \mathcal{N}_j^n(\mathbf{r}) = \sum_{p+q=n} \sum_{l+k=j} q \mathbf{E}_l^p \cdot \mathbf{P}_k^q. \tag{5.13}$$

On rappelle que

$$\mathcal{N}_1^0 = 0, \quad \mathcal{N}_j^{-n} = (\mathcal{N}_j^n)^*, \quad \mathcal{N}_j^n = 0 \forall |n| > j$$

Une fois qu'on a vu comment ça marche, appliquons nous dans une première étape, à résoudre les équations quantiques de (5.1) pour les séries infinies (5.9), qui nous donnent pour chaque exponentielle $e^{in\omega t}$ les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
[1 - (n\omega)^2](\epsilon \mathbf{P}_1^n + \epsilon^2 \mathbf{P}_2^n + \dots) - \alpha(\epsilon \mathbf{E}_1^n + \epsilon^2 \mathbf{E}_2^n + \dots) = \\
- \alpha \sum_{p+q=n} (\epsilon \mathcal{N}_1^p + \epsilon^2 \mathcal{N}_2^p + \dots)(\epsilon \mathbf{E}_1^q + \epsilon^2 \mathbf{E}_2^q + \dots)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$n(\epsilon \mathcal{N}_1^n + \epsilon^2 \mathcal{N}_2^n + \dots) = \sum_{p+q=n} q(\epsilon \mathbf{P}_1^q + \epsilon^2 \mathbf{P}_2^q + \dots) \cdot (\epsilon \mathbf{E}_1^p + \epsilon^2 \mathbf{E}_2^p + \dots) \tag{5.15}$$

où p et q peuvent prendre des valeurs négatives, en particulier dans $p + q = n$. En résolvant maintenant les équations à chaque puissance de ϵ on trouve :

- pour ϵ^1 et $n = 0$: $\mathbf{P}_1^0 = \alpha \mathbf{E}_1^0 = 0$ (par hypothèse)
- pour ϵ^1 et $n = 1$:

$$\boxed{\mathbf{P}_1^1 = \gamma \mathbf{E}_1^1} \quad \gamma = \frac{\alpha}{1 - \omega^2} \tag{5.16}$$

$$\boxed{\mathcal{N}_1^1 = 0} \tag{5.17}$$

- pour ϵ^2 et $n = 0$: L'équation (5.15) ne donne pas de relation mais à partir de (5.14) on trouve que

$$0 = -\alpha [\mathcal{N}_1^{-1} \mathbf{E}_1^1 + \mathcal{N}_1^1 \mathbf{E}_1^{-1}],$$

relation qui est vérifiée grâce à (5.17).

- pour ϵ^2 et $n = 1$: en utilisant le fait que $\mathcal{N}_1^0 = 0$ on obtient d'abord la relation

$$\boxed{\mathbf{P}_2^1 = \gamma \mathbf{E}_2^1} \tag{5.18}$$

et puis l'équation (5.15) fournit

$$\boxed{\mathcal{N}_2^1 = 0} \tag{5.19}$$

- pour ϵ^2 et $n = 2$: on a

$$(1 - 4\omega^2)\mathbf{P}_2^2 - \alpha\mathbf{E}_2^2 = -\alpha\mathcal{N}_1^1\mathbf{E}_1^1, \quad \mathcal{N}_2^2 = \frac{1}{2}\mathbf{P}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1,$$

Par conséquent en utilisant (5.17) et (5.16) on trouve

$$\boxed{(1 - 4\omega^2)\mathbf{P}_2^2 = \alpha\mathbf{E}_2^2} \quad (5.20)$$

$$\boxed{\mathcal{N}_2^2 = \frac{\gamma}{2}\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1} \quad (5.21)$$

- pour ϵ^3 et $n = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_3^0 - \alpha\mathbf{E}_3^0 &= -\alpha \left[\mathcal{N}_1^0\mathbf{E}_2^0 + \mathcal{N}_2^0\mathbf{E}_1^0 + \mathcal{N}_1^1\mathbf{E}_2^{-1} + \mathcal{N}_1^{-1}\mathbf{E}_2^1 + \mathcal{N}_2^1\mathbf{E}_1^{-1} + \mathcal{N}_2^{-1}\mathbf{E}_1^1 \right], \\ 0 &= \mathbf{P}_1^1 \cdot \mathbf{E}_2^{-1} - \mathbf{P}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^1 + \mathbf{P}_2^1 \cdot \mathbf{E}_1^{-1} - \mathbf{P}_2^{-1} \cdot \mathbf{E}_1^1, \end{aligned}$$

Par substitution avec les expressions obtenues précédemment (et en utilisant en particulier $\mathbf{E}_j^0 = 0$), la première équation ci-dessus est triviale. La seconde est aussi vérifiée simplement en utilisant l'expression (5.18) de \mathbf{P}_2^1 (on a aussi utilisé $\mathcal{N}_1^0 \in \mathbb{R}$).

- pour ϵ^3 et $n = 1$:

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2)\mathbf{P}_3^1 - \alpha\mathbf{E}_3^1 &= -\alpha \left[\mathcal{N}_1^0\mathbf{E}_2^1 + \mathcal{N}_1^{-1}\mathbf{E}_2^2 + \mathcal{N}_2^0\mathbf{E}_1^1 + \mathcal{N}_2^1\mathbf{E}_1^0 + \mathcal{N}_2^2\mathbf{E}_1^{-1} \right], \\ \mathcal{N}_3^1 &= \mathbf{P}_1^1 \cdot \mathbf{E}_2^0 - \mathbf{P}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^2 + \mathbf{P}_2^1 \cdot \mathbf{E}_1^0 + 2\mathbf{P}_2^2 \cdot \mathbf{E}_1^{-1}. \end{aligned}$$

Après simplifications et substitutions nous obtenons

$$\boxed{\mathbf{P}_3^1 = \gamma\mathbf{E}_3^1 - \frac{1}{2}\gamma^2(\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1)\mathbf{E}_1^{-1} - \gamma\mathcal{N}_2^0\mathbf{E}_1^1} \quad (5.22)$$

$$\boxed{\mathcal{N}_3^1 = \left(\frac{2\alpha}{1 - 4\omega^2} - \frac{\alpha}{1 - \omega^2} \right) \mathbf{E}_2^2 \cdot \mathbf{E}_1^{-1}} \quad (5.23)$$

- pour ϵ^3 et $n = 2$:

$$\begin{aligned} (1 - 4\omega^2)\mathbf{P}_3^2 - \alpha\mathbf{E}_3^2 &= -\alpha \left[\mathcal{N}_1^0\mathbf{E}_2^2 + \mathcal{N}_1^1\mathbf{E}_2^1 + \mathcal{N}_2^1\mathbf{E}_1^1 \right], \\ 2\mathcal{N}_3^2 &= \mathbf{P}_1^1 \cdot \mathbf{E}_2^1 + \mathbf{P}_2^1 \cdot \mathbf{E}_1^1 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{(1 - 4\omega^2)\mathbf{P}_3^2 = \alpha\mathbf{E}_3^2} \quad (5.24)$$

$$\boxed{\mathcal{N}_3^2 = \gamma\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_2^1} \quad (5.25)$$

- pour ϵ^3 et $n = 3$:

$$\begin{aligned} (1 - 9\omega^2)\mathbf{P}_3^3 - \alpha\mathbf{E}_3^3 &= -\alpha \left[\mathcal{N}_2^2\mathbf{E}_1^1 + \mathcal{N}_1^1\mathbf{E}_2^2 \right] \\ 3\mathcal{N}_3^3 &= 2\mathbf{P}_2^2 \cdot \mathbf{E}_1^1 + \mathbf{P}_1^1 \cdot \mathbf{E}_2^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

et donc finalement

$$\boxed{(1 - 9\omega^2)\mathbf{P}_3^3 = \alpha\mathbf{E}_3^3 + \frac{1}{2}\alpha\gamma(\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1)\mathbf{E}_1^1} \quad (5.27)$$

$$\boxed{\mathcal{N}_3^3 = \frac{1}{3}\mathbf{E}_2^2 \cdot \mathbf{E}_1^1 \left(\frac{2\alpha}{1 - 4\omega^2} + \frac{\alpha}{1 - \omega^2} \right)} \quad (5.28)$$

- pour ϵ^4 et $n = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{N}_1^1 \mathbf{E}_3^{-1} + \mathcal{N}_1^{-1} \mathbf{E}_3^1 + \mathcal{N}_2^1 \mathbf{E}_2^{-1} + \mathcal{N}_2^{-1} \mathbf{E}_2^1 + \mathcal{N}_3^1 \mathbf{E}_1^{-1} + \mathcal{N}_3^{-1} \mathbf{E}_1^1 + \mathcal{N}_2^2 \mathbf{E}_2^{-2} + \mathcal{N}_2^{-2} \mathbf{E}_2^2, \\ 0 &= \mathbf{P}_1^1 \cdot \mathbf{E}_3^{-1} + \mathbf{P}_2^1 \cdot \mathbf{E}_2^{-1} + \mathbf{P}_3^1 \cdot \mathbf{E}_1^{-1} \\ &\quad - \mathbf{P}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_3^1 - \mathbf{P}_2^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^1 - \mathbf{P}_3^{-1} \cdot \mathbf{E}_1^1 + 2\mathbf{P}_2^2 \cdot \mathbf{E}_2^{-2} - 2\mathbf{P}_2^{-2} \cdot \mathbf{E}_2^2. \end{aligned}$$

Après simplifications nous arrivons à

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2\alpha}{1-4\omega^2} - \gamma \right) \left[(\mathbf{E}_2^2 \cdot \mathbf{E}_1^{-1}) \mathbf{E}_1^{-1} + (\mathbf{E}_2^{-2} \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_1^1 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma \left[(\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_2^{-2} + (\mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_1^{-1}) \mathbf{E}_2^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

alors que la seconde équation est automatiquement vérifiée. L'équation précédente est un système homogène pour les 6 inconnues constituées des composantes réelles et imaginaires du vecteur \mathbf{E}_2^2 . Alors en général l'unique solution est $\mathbf{E}_2^2 = 0$ qui implique

$$\boxed{\mathbf{E}_2^2 = 0, \quad \mathbf{P}_2^2 = 0, \quad \mathcal{N}_3^1 = 0, \quad \mathcal{N}_3^3 = 0} \quad (5.30)$$

Nous pouvons résumer toutes les relations obtenues ici en écrivant les *expressions complexes* du champ électrique adimensionalisé

$$\mathbf{E} = \left[\epsilon \mathbf{E}_1^1 e^{i\omega t} + \epsilon^2 \mathbf{E}_2^1 e^{i\omega t} + \epsilon^3 \mathbf{E}_3^1 e^{i\omega t} \right] + \epsilon^3 \left[\mathbf{E}_3^2 e^{2i\omega t} + \mathbf{E}_3^3 e^{3i\omega t} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (5.31)$$

et de la polarisation source pour le champ macroscopique

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \gamma \left[\epsilon \mathbf{E}_1^1 e^{i\omega t} + \epsilon^2 \mathbf{E}_2^1 e^{i\omega t} + \epsilon^3 \mathbf{E}_3^1 e^{i\omega t} \right] + \epsilon^3 \left[-\frac{1}{2} \gamma^2 (\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_1^{-1} - \gamma \mathcal{N}_2^0 \mathbf{E}_1^1 \right] e^{i\omega t} \\ &\quad + \epsilon^3 \frac{\alpha}{1-4\omega^2} \mathbf{E}_3^2 e^{2i\omega t} + \epsilon^3 \frac{\alpha}{1-9\omega^2} \left[\mathbf{E}_3^3 + \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_1^1 \right] e^{3i\omega t} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (5.32)$$

avec $\gamma = \frac{\alpha}{1-\omega^2}$. La densité réelle de population \mathcal{N} est donnée par une série infinie dont les premiers termes sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \epsilon^2 \left(\mathcal{N}_2^0 + \frac{\gamma}{2} \mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1 e^{2i\omega t} + \frac{\gamma}{2} \mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_1^{-1} e^{-2i\omega t} \right) + \\ &\quad + \epsilon^3 \left(\mathcal{N}_3^0 + \gamma \mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_2^1 e^{2i\omega t} + \gamma \mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^{-1} e^{-2i\omega t} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Les quantités \mathcal{N}_j^0 sont les *constantes d'intégration* qui entrent en jeu naturellement (à l'exception du terme \mathcal{N}_1^0 de la série asymptotique qui s'annule par construction). Revenons maintenant à l'équation d'évolution (5.12) pour \mathcal{N} avec les expressions précédentes pour \mathbf{E} (5.31) et \mathbf{P} (5.32) :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_t &= \epsilon^2 \left(\mathbf{E}_1^1 e^{i\omega t} + \mathbf{E}_1^{-1} e^{-i\omega t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma \mathbf{E}_1^1 e^{i\omega t} + \gamma \mathbf{E}_1^{-1} e^{-i\omega t} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\gamma \mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^{-1} + \frac{\gamma}{2} \mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1 e^{2i\omega t} + \frac{\gamma}{2} \mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_1^{-1} e^{-2i\omega t} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Comme \mathbf{E}_1^1 ne dépend pas du temps, cela montre que \mathcal{N}_2^0 ne peut être évalué. La seule information à notre disposition est qu'il s'annule en l'absence de champ, à savoir

$$\mathbf{E}_1^1 = 0 \Rightarrow \mathcal{N}_2^0 = 0. \quad (5.34)$$

Le papier de Léon J. et Ginovart F. apporte une autre information sur la valeur de \mathcal{N}_2^0 obtenue dans le cas d'une dépendance temporelle lentement variable [Ginovart 94] :

$$\mathcal{N}_2^0 = \gamma \frac{1 + \omega^2}{1 - \omega^2} \mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^{-1}. \quad (5.35)$$

Il faut souligner le fait que le calcul rigoureux de \mathcal{N}_2^0 reste une question toujours ouverte¹.

Il est important de remarquer ici en regardant le développement précédent des champs qu'à l'ordre ϵ et ϵ^2 la relation entre \mathbf{P} et \mathbf{E} est celle de la solution linéaire. C'est seulement à l'ordre ϵ^3 que l'inversion de population entre en jeu pour générer les termes non-linéaires dans la relation entre \mathbf{P} et \mathbf{E} . Notons en particulier que la non-linéarité apparaît naturellement comme un terme de polarisation non-linéaire de type Kerr de la forme $(\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_1^{-1}$. Dans la section 5.4 on discutera un peu plus cet aspect.

5.3 Développement spatial multi-échelles

Cette section sera consacrée à l'étude de la partie spatiale du système de Maxwell-Bloch (5.1)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0, \quad (5.36)$$

où nous insérons les expressions (5.31) et (5.32) trouvées dans la section précédente. Cette équation étant linéaire nous permet de travailler avec des champs complexes. On travaille ici (comme on l'a déjà fait dans le chapitre 4) avec des ondes polarisées ayant deux composantes non-nulles, selon x et z . En faisant l'hypothèse d'enveloppe lentement variable dans l'espace, on écrit

$$\mathbf{E}_j^n = \begin{pmatrix} E_j^n(\{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \{z_1, z_2, \dots, z_N\}) \\ F_j^n(\{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \{z_1, z_2, \dots, z_N\}) \end{pmatrix} e^{-in(qx_0 + kz_0)} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{P}_j^n = \begin{pmatrix} P_j^n(\{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \{z_1, z_2, \dots, z_N\}) \\ Q_j^n(\{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \{z_1, z_2, \dots, z_N\}) \end{pmatrix} e^{-in(qx_0 + kz_0)} \quad (5.38)$$

où on considérera que les valeurs positives de n (car on a travaillé avec les champs complexes). Les coordonnées lentement variables sont définies, de façon générale [Jeffrey 82] comme suit :

$$\begin{aligned} x_n &= \epsilon^n x, & \forall n &= 0, 1, 2, \dots, N \\ z_n &= \epsilon^n z, & \forall n &= 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

tel que les opérateurs de dérivation s'expriment sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \dots = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \frac{\partial}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \mu} \\ \frac{d}{dz} &= \frac{\partial}{\partial z_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial z_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial z_3} + \dots = \frac{\partial}{\partial z_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \frac{\partial}{\partial z_m} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \nu}. \end{aligned}$$

On rappelle aussi la relation de dispersion linéaire en deux dimensions donnée par (3.29)

$$k^2 + q^2 = \omega^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{1 - \omega^2} \quad (5.39)$$

qui, comme on a déjà montré dans le paragraphe 4.2.2, peut supporter des ondes de surface avec $k^2 < 0$ et $q^2 > 0$, sous certaines conditions.

¹Une possible piste à suivre serait de prendre en compte les effets de relaxation.

Il est facile de montrer que dans l'espace à deux dimensions (x, z) où les fonctions ne dépendent pas de y , l'opérateur différentiel $\nabla \times \nabla \times$ possède la structure suivante

$$\nabla \times \nabla \times = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} & \frac{d^2}{dx dz} \\ \frac{d^2}{dx dz} & -\frac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

et donc nous obtenons

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_j^n = e^{-in(qx+kz)} \begin{pmatrix} -(\partial_\nu - ink)^2 & (\partial_\mu - inq)(\partial_\nu - ink) \\ (\partial_\mu - inq)(\partial_\nu - ink) & -(\partial_\mu - inq)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_j^n \\ F_j^n \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Il sera plus pratique pour la suite des calculs de développer l'opérateur précédent en puissance de ϵ

$$e^{in(qx+kz)} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_j^n = n^2 \begin{pmatrix} k^2 & -qk \\ -qk & q^2 \end{pmatrix} + \epsilon n \begin{pmatrix} 2ik\partial_{z_1} & -ik\partial_{x_1} - iq\partial_{z_1} \\ -ik\partial_{x_1} - iq\partial_{z_1} & 2iq\partial_{x_1} \end{pmatrix} \\ + \epsilon^2 \begin{pmatrix} -\partial_{z_1}^2 + 2ink\partial_{z_2} & \partial_{x_1}\partial_{z_1} - ink\partial_{x_2} - inq\partial_{z_2} \\ \partial_{x_1}\partial_{z_1} - ink\partial_{x_2} - inq\partial_{z_2} & -\partial_{x_1}^2 + 2inq\partial_{x_2} \end{pmatrix} + \dots$$

et de résoudre les équations ordre par ordre.

À l'ordre $j = 1, n = 1$, c'est-à-dire en regardant le coefficient de $\epsilon e^{i(\omega t - qx - kz)}$ nous avons obtenu :

$$\begin{pmatrix} k^2 & -qk \\ -qk & q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^1 \\ F_1^1 \end{pmatrix} - \omega^2(1 + \gamma) \begin{pmatrix} E_1^1 \\ F_1^1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ce système possède des solutions non-triviales si son déterminant est nul ce qui nous donne une condition entre ω et k

$$\omega^2(1 + \gamma) \left[-k^2 - q^2 + \omega^2(1 + \gamma) \right] = 0.$$

Cette équation possède deux solutions : $\omega = \omega_0$ (pour l'onde plasma) et ω de la relation de dispersion (5.39) de l'onde électromagnétique linéaire. Il reste ensuite une relation entre les amplitudes qui, grâce à la relation de dispersion (5.39), peut s'écrire

$$qE_1^1 + kF_1^1 = 0. \quad (5.42)$$

Cette relation n'est rien d'autre que l'expression du théorème de Gauss $\nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0$ au premier ordre.

On peut remarquer ici que la relation de dispersion nous permet de réécrire la relation matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} k^2 & -qk \\ -qk & q^2 \end{pmatrix} - \omega^2(1 + \gamma) = - \begin{pmatrix} q^2 & qk \\ qk & k^2 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

À l'ordre $j = 2, n = 1$, le coefficient de $\epsilon^2 e^{i(\omega t - qx - kz)}$ est :

$$- \begin{pmatrix} q^2 & qk \\ qk & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^1 \\ F_2^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2ik\partial_{z_1} & -ik\partial_{x_1} - iq\partial_{z_1} \\ -ik\partial_{x_1} - iq\partial_{z_1} & 2iq\partial_{x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^1 \\ F_1^1 \end{pmatrix} = 0.$$

En multipliant la première ligne avec k et la seconde avec q , et en utilisant (5.42), nous arrivons à

$$kq(qE_2^1 + kF_2^1) = i \left[(2k^2 + q^2)\partial_{z_1} + kq\partial_{x_1} \right] E_1^1, \\ kq(qE_2^1 + kF_2^1) = -i \left[q^2\partial_{z_1} + \frac{q}{k}(k^2 + 2q^2)\partial_{x_1} \right] E_1^1.$$

En résolvant ce système on obtient deux informations importantes. D'abord, en égalisant les deux lignes, on trouve que

$$2(q^2 + k^2)(\partial_{z_1} + \frac{q}{k}\partial_{x_1})E_1^1 = 0,$$

ce qui montre le fait que, au premier ordre, on peut définir une seule coordonnée spatiale lentement variable, telle que

$$\boxed{\zeta = qz_1 - kx_1} \Rightarrow \partial_{x_1}E_1^1 = -k\partial_\zeta E_1^1, \quad \partial_{z_1}E_1^1 = q\partial_\zeta E_1^1. \quad (5.44)$$

Cette transformation de coordonnées n'est rien d'autre que celle obtenue en se plaçant dans un repère qui bouge avec l'onde plane à la vitesse de groupe $v = \partial\omega/\partial k$. On peut constater en effet qu'on retrouve ici les mêmes coordonnées définies avec les relations (4.29), trouvées dans la section 4.1.2. Le deuxième résultat obtenu ici est

$$qE_2^1 + kF_2^1 = \frac{i}{k}(k^2 + q^2)\frac{\partial E_1^1}{\partial \zeta}, \quad (5.45)$$

qui ressemble à l'expression du théorème de Gauss au second ordre.

Pour montrer cela nous considérons maintenant le théorème de Gauss sans dimensions, dans lequel on va développer les champs jusqu'à l'ordre deux et on tiendra compte du fait que jusqu'à l'ordre 2 on a $\mathbf{P} = \gamma\mathbf{E}$.

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \epsilon e^{i\theta}(1 + \gamma)(-iqE_1^1 - ikF_1^1) + \epsilon^2 e^{i\theta}(1 + \gamma)(-iqE_2^1 - ikF_2^1 + \partial_{x_1}E_1^1 + \partial_{z_1}F_1^1) + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

avec $\theta = \omega t - qx - kz$. Le premier ordre donne en effet (5.42) et en regardant le second ordre on retrouve la relation (5.45).

Continuons maintenant notre analyse du système (5.36) aux ordres supérieurs. Nous avons vu dans la section antérieure que les séries trouvées pour \mathbf{E} et \mathbf{P} , (5.31) et (5.32), ne présentent pas de termes à l'ordre $j = 2$, $n = 2$. Nous pouvons donc poursuivre notre analyse avec l'ordre $j = 3$, $n = 1$.

À l'ordre $j = 3$, $n = 1$: Utilisant (5.43) on trouve que le coefficient de $\epsilon^3 e^{i(\omega t - qx - kz)}$ est

$$\begin{aligned} & - \begin{pmatrix} q^2 & qk \\ qk & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3^1 \\ F_3^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2ik\partial_{z_1} & -ik\partial_{x_1} - iq\partial_{z_1} \\ -ik\partial_{x_1} - iq\partial_{z_1} & 2iq\partial_{x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^1 \\ F_2^1 \end{pmatrix} \\ & + \omega^2 \frac{1}{2} \gamma^2 (1 + \frac{q^2}{k^2})(E_1^1)^2 \begin{pmatrix} E_1^{-1} \\ F_1^{-1} \end{pmatrix} + \omega^2 \gamma \mathcal{N}_2^0 \begin{pmatrix} E_1^1 \\ F_1^1 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -\partial_{z_1}^2 + 2ik\partial_{z_2} & \partial_{x_1}\partial_{z_1} - ik\partial_{x_2} - iq\partial_{z_2} \\ \partial_{x_1}\partial_{z_1} - ik\partial_{x_2} - iq\partial_{z_2} & -\partial_{x_1}^2 + 2iq\partial_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^1 \\ F_1^1 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

où nous avons utilisé (5.42). Puis, avec la relation (5.44), nous avons

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2ik\partial_{z_1} & -ik\partial_{x_1} - iq\partial_{z_1} \\ -ik\partial_{x_1} - iq\partial_{z_1} & 2iq\partial_{x_1} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} -2qk & q^2 - k^2 \\ q^2 - k^2 & 2qk \end{pmatrix} \partial_\zeta \\ & \begin{pmatrix} -\partial_{z_1}^2 & \partial_{x_1}\partial_{z_1} \\ \partial_{x_1}\partial_{z_1} & -\partial_{x_1}^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} q^2 & qk \\ qk & k^2 \end{pmatrix} \partial_\zeta^2 \end{aligned}$$

et nous remarquons que

$$\begin{pmatrix} -2qk & q^2 - k^2 \\ q^2 - k^2 & 2qk \end{pmatrix}^2 = (k^2 + q^2)^2 I_2. \quad (5.47)$$

Maintenant nous allons multiplier la première ligne par k , la seconde par q et puis on va soustraire les deux. Un phénomène très intéressant se produit alors : les composantes E_2^1 et

F_2^1 surviennent ici précisément dans la combinaison donnée par (5.45), qui les exprime en termes de E_1^1 . En effet,

$$\begin{aligned} & -i \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[k(-2qkE_2^1 + (q^2 - k^2)F_2^1) - q((q^2 - k^2)E_2^1 + 2kqF_2^1) \right] = \\ & -i \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[E_2^1(-2qk^2 - q^3 + qk^2) + F_2^1(kq^2 - k^3 - 2q^2k) \right] = \\ & i(k^2 + q^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} (qE_2^1 + kF_2^1) = -\frac{1}{k}(k^2 + q^2)^2 \frac{\partial^2 E_1^1}{\partial \zeta^2} \end{aligned}$$

Si nous nous intéressons maintenant au terme contenant les dérivées en x_2 et z_2 on obtient,

$$\begin{aligned} & 2ik^2 \partial_{z_2} E_1^1 - ik(k \partial_{x_2} + q \partial_{z_2}) F_1^1 + iq(k \partial_{x_2} + q \partial_{z_2}) E_1^1 - 2iq^2 \partial_{x_2} F_1^1 = \\ & 2i(k^2 + q^2) \left(\partial_{z_2} + \frac{q}{k} \partial_{x_2} \right) E_1^1, \end{aligned}$$

en utilisant (5.42). Puis nous calculons les termes non linéaires

$$\begin{aligned} & \omega^2 \frac{1}{2} \gamma^2 \left(1 + \frac{q^2}{k^2} \right) (E_1^1)^2 (k, -q) \cdot \begin{pmatrix} E_1^{-1} \\ F_1^{-1} \end{pmatrix} + \omega^2 \gamma \mathcal{N}_2^0 (k, -q) \cdot \begin{pmatrix} E_1^1 \\ F_1^1 \end{pmatrix} = \\ & \omega^2 \left(k + \frac{q^2}{k} \right) \left[\frac{1}{2} \gamma^2 \left(1 + \frac{|q|^2}{|k|^2} \right) |E_1^1|^2 + \gamma \mathcal{N}_2^0 \right] E_1^1. \end{aligned}$$

Finalement, en multipliant avec $k/(k^2 + q^2)$ et on introduisant la notation $\boxed{E_1^1 = \psi}$, on obtient

$$2i(k \partial_{z_2} + q \partial_{x_2}) \psi - (k^2 + q^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|q|^2}{|k|^2} \right) \omega^2 \gamma^2 |\psi|^2 \psi + \omega^2 \gamma \mathcal{N}_2^0 \psi = 0. \quad (5.48)$$

L'équation restante fournit tout simplement une relation entre \mathbf{E}_3^1 et le couple $\mathbf{E}_2^1, \mathbf{E}_1^1$, qu'on va pas donner ici.

À l'ordre $j = 3, n = 2$, le coefficient de $\epsilon^3 e^{2i(\omega t - qx - kz)}$ est

$$4 \begin{pmatrix} k^2 & -qk \\ -qk & q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3^2 \\ F_3^2 \end{pmatrix} - 4\omega^2 \left(1 + \frac{\alpha}{1 - 4\omega^2} \right) \begin{pmatrix} E_3^2 \\ F_3^2 \end{pmatrix} = 0.$$

En utilisant la relation de dispersion (5.39), on constate que le déterminant de l'équation ci-dessus ne s'annule pas et donc la solution de ce système est

$$\boxed{\mathbf{E}_3^2 = 0} \quad (5.49)$$

À l'ordre $j = 3, n = 3$, le coefficient de $\epsilon^3 e^{3i(\omega t - qx - kz)}$

$$\left[9 \begin{pmatrix} k^2 & -qk \\ -qk & q^2 \end{pmatrix} - 9\omega^2 \left(1 + \frac{\alpha}{1 - 9\omega^2} \right) \right] \begin{pmatrix} E_3^3 \\ F_3^3 \end{pmatrix} = 9\omega^2 \frac{1}{2} \frac{\alpha \gamma}{1 - 9\omega^2} (\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_1^1$$

est une équation qui détermine \mathbf{E}_3^3 en fonction de \mathbf{E}_1^1 .

Il est convenable de définir ici une nouvelle variable

$$\xi = qx_2 + kz_2 \quad \Rightarrow \quad k \partial_{z_2} + q \partial_{x_2} = (k^2 + q^2) \partial_\xi$$

telle que l'équation (5.48) devient

$$-2i \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} - \frac{\omega^2}{k^2 + q^2} \left[\beta |\psi|^2 + \gamma \mathcal{N}_2^0 \right] \psi = 0, \quad \beta = \frac{\gamma^2}{2} \left(1 + \frac{|q|^2}{|k|^2} \right). \quad (5.50)$$

On remarque encore une fois la similitude avec les variables définies dans (4.29) de la section 4.1.2. Il est important de rappeler ici la relation de dispersion

$$\frac{\omega^2}{k^2 + q^2} = \frac{1 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (5.51)$$

qui sera importante pour établir le signe du facteur $\frac{\omega^2}{k^2 + q^2}$ situé devant le terme non-linéaire de l'équation (5.50). On constate ainsi que ce rapport est *néгатif* dans la bande interdite et *positif* dans la bande passante. Nous voyons alors que $\gamma \mathcal{N}_2^0$ sera déterminant pour le signe de la non linéarité. Par exemple, en remplaçant la valeur de \mathcal{N}_2^0 par celle obtenue dans (5.35) on trouve l'équation suivante :

$$-2i \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{3 + \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\frac{\alpha}{1 - \omega^2} \right)^2 \left(1 + \frac{|q|^2}{|k|^2} \right) |\psi|^2 \psi = 0. \quad (5.52)$$

Avec ces précisions nous pouvons tirer des conclusions importantes sur la nature de la non-linéarité. Ainsi pour

$$\begin{aligned} \omega > \omega_0 &\Rightarrow \text{non-linéarité } \textit{focalisante} \\ \omega < \omega_0 &\Rightarrow \text{non-linéarité } \textit{défocalisante} . \end{aligned}$$

5.4 Effet Kerr

Dans cette section nous allons résumer les résultats obtenus pour les composantes du champ électrique et de la polarisation et nous allons les comparer avec les expressions connues pour un milieu ayant une non-linéarité de type Kerr. Dans un milieu présentant l'effet Kerr optique, l'indice de réfraction du milieu n , autrement dit la vitesse de phase $v = c/n$ des ondes se propageant dans le milieu, dépend de l'intensité lumineuse I

$$n(I) = n_0 + n_2 I$$

où n_0 est l'indice de réfraction linéaire donné par $n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}}$ et n_2 est une constante caractéristique du matériau liée au tenseur de susceptibilité électrique $n_2 \approx 3\chi^{(3)}/(8n_0)$. Il en résulte donc un effet de modulation de phase par l'intensité lumineuse du faisceau qui crée un retard de phase (maximal au pic d'intensité de l'impulsion). Cette variation temporelle de la phase à l'intérieur de l'impulsion induit une variation de fréquence instantanée, définie comme l'opposée de la dérivée temporelle de la phase. L'avant de l'impulsion voit donc ses fréquences être réduites alors que les fréquences en fin d'impulsion sont augmentées par effet Kerr. À ce stade, on pourrait croire que l'effet non-linéaire est parasite, puisque lui seul devient gênant pour la propagation des grandes puissances sur des longues distances.

Cependant, la propagation d'une impulsion dans les milieux non-linéaires est souvent accompagnée de la dispersion chromatique, ce qui signifie que les courtes longueurs d'onde se propagent plus vite que les longues. Puisque les deux effets sont antagonistes on peut espérer une compensation de l'auto-modulation de phase par la dispersion. En effet, d'une part, à cause de l'effet Kerr les grandes longueurs d'onde se retrouvent à l'avant de l'impulsion, mais elles se propagent plus lentement à cause de la dispersion, alors que les courtes longueurs d'onde sont reléguées à l'arrière par l'effet Kerr, mais accélérées par la dispersion. Ainsi, l'intensité et la forme de l'impulsion sont ajustées de manière à compenser exactement l'élargissement naturel, permettant une propagation de l'impulsion localisée sous forme de soliton.

L'origine de l'effet Kerr optique est microscopique et réside dans une anisotropie induite de la polarisabilité du milieu. Dans le cas du système de Maxwell-Bloch nous avons vu que

le champ électrique et la polarisation s'écrivent comme

$$\mathbf{E} = \left[\epsilon \mathbf{E}_1^1 e^{i\omega t} + \epsilon^2 \mathbf{E}_2^1 e^{i\omega t} + \epsilon^3 \mathbf{E}_3^1 e^{i\omega t} \right] + \epsilon^3 \mathbf{E}_3^3 e^{3i\omega t} + \mathcal{O}(\epsilon^4) + c.c., \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \gamma \left[\epsilon \mathbf{E}_1^1 e^{i\omega t} + \epsilon^2 \mathbf{E}_2^1 e^{i\omega t} + \epsilon^3 \mathbf{E}_3^1 e^{i\omega t} \right] + \epsilon^3 \left[-\frac{1}{2} \gamma^2 (\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_1^{-1} - \gamma \mathcal{N}_2^0 \mathbf{E}_1^1 \right] e^{i\omega t} \\ & + \epsilon^3 \frac{\alpha}{1 - 9\omega^2} \left[\mathbf{E}_3^3 + \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_1^1 \right] e^{3i\omega t} + \mathcal{O}(\epsilon^4) + c.c., \end{aligned} \quad (5.54)$$

car l'équation (5.49) nous dit que $\mathbf{E}_3^2 = 0$. Ici $\gamma = \alpha/(1 - \omega^2)$.

Comparons maintenant les expressions précédentes avec celles qui résulteraient, dans le cas d'un milieu à deux niveaux qui présente un effet nonlinéaire de type Kerr simple sous l'action d'un champ électrique externe puissant. En prenant en compte la contribution linéaire (modèle de Lorentz) pour la polarisation,

$$\mathbf{P}_{\text{kerr}} = \gamma \mathbf{E} + \chi^{(3)} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \quad (5.55)$$

Avec l'expression ci-dessus (5.53) pour \mathbf{E} , nous arrivons à :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{kerr}} = & \gamma \left[\epsilon \mathbf{E}_1^1 e^{i\omega t} + \epsilon^2 \mathbf{E}_2^1 e^{i\omega t} + \epsilon^3 \mathbf{E}_3^1 e^{i\omega t} \right] + \epsilon^3 \chi^{(3)} \left[(\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_1^{-1} + 2(\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^{-1}) \mathbf{E}_1^1 \right] e^{i\omega t} \\ & + \epsilon^3 \left[\gamma \mathbf{E}_3^3 + \chi^{(3)} (\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1) \mathbf{E}_1^1 \right] e^{3i\omega t} + c.c. + \dots, \end{aligned} \quad (5.56)$$

En comparant cette dernière relation avec (5.54) nous constatons que cette procédure permet de déterminer la susceptibilité nonlinéaire de troisième ordre $\chi^{(3)}$ à partir du système de Maxwell-Bloch.

Solitons de gap dans un milieu à deux niveaux avec charges

6.1 Résultats publiés dans *Journal of Physics A*

Cette section contient l'article *Scattering of slow-light gap solitons with charges in a two-level medium* tel qu'il a été publié dans *Journal of Physics A* en janvier 2009.

Scattering of slow-light gap solitons with charges in a two-level medium

J Leon¹, P Anghel-Vasilescu¹, F Ginovart² and N Allegra¹

¹ Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules, Université de Montpellier 2 (CNRS-IN2P3), F34095 Montpellier, France

² Laboratoire FOTON, Université de Rennes, ENSSAT (CNRS), F22305 Lannion, France

Received 6 October 2008, in final form 24 November 2008

Published 6 January 2009

Online at stacks.iop.org/JPhysA/42/055101

Abstract

The Maxwell–Bloch system describes a quantum two-level medium interacting with a classical electromagnetic field by mediation of the population density. This population density variation is a purely quantum effect which is actually at the very origin of nonlinearity. The resulting nonlinear coupling possesses particularly interesting consequences at the resonance (when the frequency of the excitation is close to the transition frequency of the two-level medium) as e.g. *slow-light gap solitons* that result from the nonlinear instability of the evanescent wave at the boundary. As nonlinearity couples the different polarizations of the electromagnetic field, the slow-light gap soliton is shown to experience effective scattering with *charges* in the medium, allowing it for instance to be trapped or reflected. This scattering process is understood qualitatively as being governed by a nonlinear Schrödinger model in an external potential related to the charges (the electrostatic permanent background component of the field).

PACS numbers: 42.50.Gy, 42.65.Re

1. Introduction

In the field of interaction of radiation with matter, the resonant scattering of an electromagnetic pulse with a structure imprinted in a medium (as a periodic grating) has become widely studied for its rich and novel nonlinear mechanisms [1]. Such studies have been developed in nonlinear optics where the medium is a periodic arrangement of dielectrics (Bragg medium) and where the nonlinearity results from Kerr effect [2], or in Bose–Einstein condensates where the periodic structure is produced by external applied field (thus called an optical lattice) [3, 4], or else in photorefractive media where an externally applied electric potential modifies locally the index value [5].

In a Bragg medium, the underlying model is the Maxwell equation for the electromagnetic field where the optical index varies along the propagation direction and where the constitutive

equations (relating field and polarization) take into account the third-order susceptibility. A simplified model is obtained then in the slowly varying envelope approximation: the nonlinear Schrödinger equation embedded in a potential which represents the structure of the medium. In a Bose–Einstein condensate, the model is the Gross–Pitaevskii equation which is again a nonlinear Schrödinger equation in an external potential representing the optically generated structure (the optical grating). Lastly, in a photorefractive medium, the variations of the applied electrostatic field induce a local variation of the optical index, and possibly also of the group velocity dispersion, which eventually results again in a NLS-like model with variable coefficients.

It is remarkable that these situations share the same model and that it is precisely the simplest nonlinear version of the paradigm model for wave scattering, the Schrödinger equation of quantum mechanics, namely

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + |\psi|^2 \psi - V \psi = 0, \quad (1.1)$$

where the wavefunction $\psi = \psi(z, t)$ is submitted both to self-interaction (nonlinearity) and scattering with the external potential V (depending on space z and possibly also on time t).

In fact the common original mechanism is the coupling of an electromagnetic radiation of a given frequency ω , to a quantum two-level system whose transition frequency Ω is close to ω . The interaction is then mediated by the variation of the population densities of the levels which makes it a nonlinear process. The semi-classical model of such a process is the Maxwell–Bloch (MB) system which can be written [6–9] as

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \Omega^2 \mathbf{P} = - \left[\frac{2}{\hbar} \Omega \Lambda |\vec{\mu}_{12}|^2 \right] N \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

$$\hbar \Omega \frac{\partial N}{\partial t} = 2 \Lambda \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\eta^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \Lambda \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

in the case when the dipolar momentum $\vec{\mu}_{12}$ is assumed to be parallel to the applied electric field \mathbf{E} (at least in average). The constant $\Lambda = (\eta^2 + 2)/3$ is the Lorentz local field correction, η is the optical index of the medium and Ω the transition frequency. The dynamical variables are the real-valued 3-vectors \mathbf{E} (electric field) and \mathbf{P} (polarization source), and the inversion of population density N . The above first two equations are a convenient rewriting of the Bloch equation of quantum mechanics for the density matrix ρ where one defines

$$\mathbf{P} = N_0(\rho_{21} \vec{\mu}_{12} + \rho_{12} \vec{\mu}_{21}), \quad N = N_0(\rho_{22} - \rho_{11}), \quad (1.5)$$

with N_0 being the density of state of active elements (note that hermiticity guaranties that N and \mathbf{P} are real valued). To be complete, the vector $\vec{\mu}_{12}$ is defined from the two eigenstates $|u_i\rangle$ of the unperturbed Hamiltonian H_0 by

$$\vec{\mu}_{12} = \langle u_1 | e \vec{r} | u_2 \rangle, \quad H_0 u_i = \mathcal{E}_i u_i, \quad \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \hbar \Omega, \quad (1.6)$$

when the electric dipolar Hamiltonian is $H_0 - e \vec{r} \cdot \vec{E}$.

In the above MB system, the variations of the dynamical variable N (inversion of population density) are on the one side a purely quantum effect and on the other side the very mechanism of nonlinearity. Indeed, the linear limit (small field values) comes from assuming N constant (in fact $N = -N_0$ if the medium is in the ground state), and MB reduces to the Lorentz classical linear model (equation (2.9)). Moreover, the structure of equation (1.3)

implies effective coupling of all three components of the field, a property which will allow us to couple a polarized transverse electromagnetic component to the longitudinal electrostatic one.

Inclusion of a particular physical situation consists of the MB system in a convenient choice of the set of initial and boundary values for a particular structure of the fields (as e.g. a propagation in one given direction). The freedom in such choices makes the MB system a very rich model that has not finished to offer interesting results. Many different limits of MB have been studied, for instance the case of a weak coupling (under-dense media) allows for *self-induced transparency* (SIT) of a light pulse whose peak frequency is tuned to the resonant value Ω , when a linear theory would predict total absorption [10, 11]. The limit model in the slowly varying envelope approximation results to be integrable [12] and have the *mathematical* property of transparency: any fired pulse having an area above a threshold evolves to a soliton, plus an asymptotically vanishing background [13]. Description of the SIT process within the inverse spectral transform is fruitful here because the incident pulse, which is physically represented by a boundary datum, maps to an *initial value problem* on the infinite time line.

Away from the resonance and for dense media, a widely used approach models the dynamical nonlinear properties of pulse propagation by selecting propagation in one direction. The resulting *reduced Maxwell–Bloch system* has again the nice property of being integrable [14, 15] (also when detuning and permanent dipole are included [16]). As a consequence the properties of the *gap soliton* such as pulse reshaping, pulse slowing, pulse–pulse interactions are fairly well understood, more especially as the reduced MB system possesses explicit N -soliton solutions [17]. Other interesting features include pulse velocity selection [18]. However, unlike the SIT model, the reduced MB system happens to be integrable for an *initial pulse profile* which makes it almost useless to study the scattering of an *incident* light pulse.

To describe the explicit scattering process, the reduced MB equation was replaced by the *coupled-mode Maxwell–Bloch system* where the electric field envelope contains both right-going and left-going slowly varying components [19]. Although the adequation of the model to the physical situation is a very difficult question often left apart, the approach allowed us to prove the existence of gap 2π -pulses in the presence of inhomogeneous broadening, and to discover ‘*optical zoomerons*’. Moreover numerical simulations have demonstrated the possibility of ‘*storage of ultrashort optical pulses*’ [20]. This storage can moreover be externally managed to release the stored pulse and thus create a ‘*gap soliton memory*’ with a two-level medium [21].

The coupled-mode approach has also been applied to understand the properties of *resonantly absorbing Bragg reflectors* introduced in [22] and further studied in [23, 24], which consist of periodic arrays of dielectric films separated by layers of a two-level medium. Very recently, the coupled-mode MB system has been used to model ‘*plasmonic Bragg gratings*’ [25] in nanocomposite materials where a dielectric is imbedded in a periodic structure of thin films made of metallic nanoparticles [26].

Beyond such a set of approximations, the MB system offers a natural intrinsic nonlinear coupling of the various field components. It has been demonstrated, for instance, that for a uni-directional propagation, the coupling of two transverse electromagnetic components can be described in the slowly varying envelope approximation by a (non-integrable) set of two coupled nonlinear Schrödinger equations [27]. Thus the question of the analytic expression of the fundamental soliton solution is still open. However such a coupling process allows us to conceive a method for manipulating light pulses with light by propagating a pulse on a background made of a stationary wave, when wave and pulse are orthogonally polarized [28].

The problem of the generation of a pulse living in the stop gap of the two-level medium has been solved in [29] by exciting the medium at one end with a cavity standing wave. As the frequency is in the stop gap, the result is an evanescent wave, at least at the linear level. It happens that the evanescent wave is nonlinearly unstable, which results in the *nonlinear supratransmission* process [30] that generates gap solitons propagating in the two-level medium at a fraction of light velocity.

We demonstrate here that the effective coupling of a transverse electromagnetic (polarized) field to a longitudinal electrostatic component having a permanent background (representing local charges) allows us to scatter a slow-light gap soliton (SLGS) and to trap it in the medium or to make it move backward. This result is obtained by first studying the MB system in a particular situation of a propagation in a given direction (say z) of a field which is linearly polarized in the transverse direction (say x) and which interacts, through the variations of the population density, with a longitudinal component. Then by appropriate boundary values for the transverse component and initial data for the longitudinal one, we perform numerical simulations that show the propagation and scattering of the SLGS.

We thus demonstrate that the presence of charges in a definite region of space (obtained for example by an applied electrostatic potential or with a doped semiconductor, or else with inclusion of metallic nanoparticles) produces a dynamical interaction with an electromagnetic radiation by means of a nonlinear coupling through the plasma wave field component (spontaneously generated out of the permanent electrostatic background). It is worth mentioning that this work makes use of the results of [29] where a SLGS is generated in homogeneous two-level media and that the perturbative asymptotic analysis follows [27] and will not be detailed (see the appendix). Lastly, another way of manipulating light pulses has been proposed in [28] by creating in the two-level medium a standing electromagnetic field background (inside the passing band) which is a completely different physical process.

The scattering is finally given a simple meaning by writing a nonlinear Schrödinger model for the envelope of the electromagnetic field in an external *potential* resulting from the electrostatic permanent background. Interestingly enough, the usual asymptotic perturbative analysis of the system leads to a deformed nonlinear Schrödinger system which allows us to calculate the correct expression of the *initial vacuum*. However the model does not furnish an accurate description of the dynamical properties of the SLGS. This is the result of the intrinsic nature of the method which separates the orders of perturbation when the original model naturally couples them.

2. The model

2.1. Dimensionless form

The system (1.2)–(1.4) can be written under a dimensionless form by defining first the new spacetime variables

$$\vec{r}' = \frac{\eta}{c} \Omega \vec{r}, \quad t' = \Omega t \quad (2.1)$$

and the new field variables

$$\mathbf{E}' = \sqrt{\frac{\epsilon}{W_0}} \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}' = \Lambda \sqrt{\frac{1}{\epsilon W_0}} \mathbf{P}, \quad N' = \frac{N}{N_0}, \quad \vec{\mu}'_{12} = \frac{\vec{\mu}_{12}}{\mu}, \quad (2.2)$$

where by definition of the optical index $\epsilon = \epsilon_0 \eta^2$, and where

$$W_0 = N_0 \hbar \Omega / 2, \quad \mu^2 = \vec{\mu}_{12}^* \cdot \vec{\mu}_{12}. \quad (2.3)$$

Note that W_0 is a reference energy density. Then the MB system eventually reads (forgetting the *primes*)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mathbf{P} &= -\alpha N \mathbf{E}, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

We check that the unique remaining coupling constant α , defined by

$$\alpha = \frac{2N_0 \mu^2}{\hbar \Omega} \frac{\Lambda^2}{\epsilon}, \quad (2.5)$$

is indeed dimensionless. The length μ of the dipolar moment is in units of $\text{C} \cdot \text{m}$, the energy $\hbar \Omega$ in J while the permittivity ϵ can be expressed in $\text{C}^2 \cdot \text{J}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Using finally that N_0 is a density in m^{-3} effectively leads to a dimensionless α . The actual dynamical variables are the dimensionless quantities $\mathbf{E}(\vec{r}, t)$, $\mathbf{P}(\vec{r}, t)$ and $N(\vec{r}, t)$, namely seven scalar real variables, fully determined by the MB system (2.4) with convenient initial boundary value data. Note that the scaled inversion of population density N now varies from $N = -1$ (fundamental) to $N = 1$ (excited).

2.2. Polarized waves

We restrict our study to the uni-directional propagation for a field which possesses a linearly polarized electromagnetic component $E(z, t)$ and a longitudinal component $F(z, t)$. Namely we assume the following structure,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E(z, t) \\ 0 \\ F(z, t) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P(z, t) \\ 0 \\ Q(z, t) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

for which the system (2.4) reads

$$\begin{aligned} P_{tt} + P &= \alpha(1-n)E, & Q_{tt} + Q &= \alpha(1-n)F, \\ E_{tt} - E_{zz} &= -P_{tt}, & F_{tt} &= -Q_{tt}, \\ n_t &= EP_t + FQ_t, \end{aligned} \quad (2.7)$$

where we have defined the scaled density of excited states

$$n(z, t) = 1 + N(z, t). \quad (2.8)$$

The compatibility of the chosen structure with the MB model can be demonstrated at the linear level obtained for $N = -1$ (or $n = 0$)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}, \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

which is nothing but the Lorentz model. The general fundamental solution possessing the structure (2.6) can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(z) \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0(z) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P} &= \frac{\omega_0^2 - 1}{1 - \omega^2} \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -f(z) \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha F_0(z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

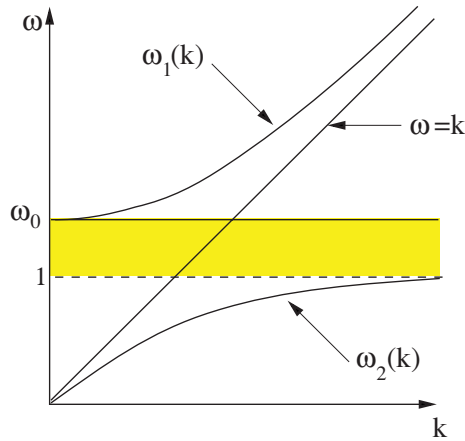


Figure 1. Plot of the linear dispersion relation of Maxwell–Bloch for $\alpha = 1$. The two curves are the two solutions $\omega_1(k)$ and $\omega_2(k)$ of expression (2.11). We have also plotted the plasma frequency ω_0 and the free photon line $\omega = k$. Solitons will be generated in the forbidden band gap $[1, \omega_0]$.

The above fields are constituted of three basic parts: the first one is the transverse electromagnetic component where k is given by the dispersion relation (plotted in figure 1)

$$k^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - 1}, \quad \omega_0^2 = 1 + \alpha, \quad (2.11)$$

the second one is the plasma wave of frequency ω_0 and arbitrary z -dependent amplitude $f(z)$, the third one is the electrostatic field $F_0(z)$ that represents the permanent charges. Indeed the Gauss theorem relates F_0 to the (dimensionless) charge density ρ by $\nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho = (1 + \alpha)\partial_z F_0(z)$.

2.3. Initial data

The above structure of the linear solution shows that it is possible to eliminate the variable $Q(z, t)$ by integrating one equation in the system (2.7). Actually the equation $F_{tt} = -Q_{tt}$ results from the original equation $\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}$ (no current of charges). As the propagation is along z , the third component of the curl vanishes, therefore $(\partial_t \mathbf{D})_z = 0 = \partial_t (F + Q)$, which allows us to express $Q(z, t)$ as $Q(z, t) = -F(z, t) + C(z)$, where the integration constant $C(z)$ remains to be computed. It is naturally determined from the initial conditions. We consider here a situation where the presence of stationary charges produces a permanent electrostatic component $F_0(z)$, namely when

$$F(z, t) = \phi(z, t) + F_0(z), \quad \phi(z, 0) = 0. \quad (2.12)$$

Then the structure (2.10) of the linear solution implies the following expression for the longitudinal component of the polarization,

$$Q(z, t) = \alpha F_0(z) - \phi(z, t), \quad (2.13)$$

where, in the absence of initial electromagnetic irradiation, we have the initial conditions $\{n(z, 0) = 0, \phi(z, 0) = 0\}$. We now demonstrate that the initial vacuum $\{E = P = 0, n = 0, \phi = 0\}$ and $\{F = F_0(z), Q = \alpha F_0(z)\}$ is *nonlinearly stable* as soon as F_0 is below some threshold.

2.4. Nonlinear stability

The stability of the *initial vacuum* is proved for the dynamical variable $\phi(z, t)$ without applied external electromagnetic field $E(z, t)$ (the x -component). Replacing expressions (2.12) and (2.13) in the system (2.7), the equation for the electrostatic wave $\phi(z, t)$ becomes

$$\phi_{tt} + \omega_0^2 \phi = \alpha n(\phi + F_0). \quad (2.14)$$

Without applied electromagnetic wave ($E = P = 0$), the equation for $n(z, t)$ (the density of population of the excited state) can be integrated taking into account $n(z, 0) = 0$ and $\phi(z, 0) = 0$ to give

$$n = -\frac{1}{2}\phi^2 - \phi F_0, \quad (2.15)$$

which, in the evolution for ϕ , provides the closed equation

$$\phi_{tt} + (\omega_0^2 + \alpha F_0^2)\phi + \frac{\alpha}{2}\phi^2(\phi + 3F_0) = 0. \quad (2.16)$$

This is an equation for an anharmonic oscillator whose frequency depends on the *parameter* $F_0(z)$. The solution corresponding to $\phi(z, 0) = 0$ and $\phi_t(z, 0) = 0$ is obviously $\phi(z, t) = 0$, which shows that the initial conditions are consistent. To study the stability, we rewrite the above oscillator as

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}\phi_t^2 + \mathcal{E}_p \right] = 0, \quad \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(\omega_0^2 + \alpha F_0^2)\phi^2 + \frac{\alpha}{2}F_0\phi^3 + \frac{\alpha}{8}\phi^4.$$

The condition of *nonlinear stability* is reached when the function $\mathcal{E}_p(\phi)$ has one single minimum in $\phi = 0$ (initial condition). The derivative

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\phi} = \frac{\alpha}{2}\phi \left[\phi^2 + 3F_0\phi + 2 \left(\frac{\omega_0^2}{\alpha} + F_0^2 \right) \right]$$

vanishes always at $\phi = 0$, and there will be no other solutions as soon as $\max_z \{F_0^2\} < 8(1+\alpha)/\alpha$ (in our case $\alpha = 1$, i.e. $8(1+\alpha)/\alpha = 16$). With a single root at $\phi = 0$, the potential $\mathcal{E}_p(\phi)$ has a single minimum in $\phi = 0$. However, when $\max_z \{|F_0|\}$ exceeds the threshold value (namely the value 4 with $\alpha = 1$), the potential $\mathcal{E}_p(\phi)$ becomes a double well with a *local maximum* at point $\phi = 0$ which is thus unstable (and might be of interest to study). Thus here we shall consider values of F_0 such that $\max_z \{|F_0|\} < 4$ such that the nonlinear stability condition is always satisfied.

Thus we have obtained the initial state reached by the medium submitted to electrical potential (charges), namely to a permanent longitudinal component $F_0(z)$ which has been shown to generate a permanent polarization $\alpha F_0(z)$ accordingly with (2.13). These data constitute then the initial condition (initial equilibrium ground state) that is now inserted in the model itself.

2.5. Final model

The model studied from now on eventually reads

$$\begin{aligned} P_{tt} + P &= \alpha(1-n)E, & \phi_{tt} + \omega_0^2 \phi &= \alpha n(\phi + F_0), \\ E_{tt} - E_{zz} &= -P_{tt}, & n_t &= EP_t - (\phi + F_0)\phi_t, \end{aligned} \quad (2.17)$$

and it is completed by the following initial values (ground state at rest),

$$\begin{aligned} E(z, 0) &= 0, & E_t(z, 0) &= 0, & P(z, 0) &= 0, & P_t(z, 0) &= 0, \\ \phi(z, 0) &= 0, & \phi_t(z, 0) &= 0, & n(z, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

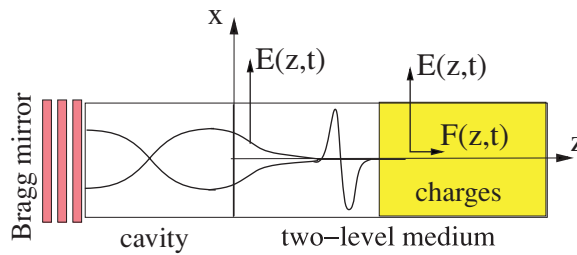


Figure 2. Principle of a situation where the transverse generated electromagnetic gap soliton would scatter with a permanent longitudinal background $F_0(z)$ created by a region with charges (doped semiconductor, applied static electric potential, inclusion of metallic nanoparticles, etc) where a longitudinal component $F(z, t)$ is generated by nonlinear coupling.

Two boundary values for the electromagnetic components are now needed, chosen following [29] as representing an electromagnetic cavity coupled to the two-level medium by using its stop gap as one side *mirror* (the cavity works at frequency ω in the gap). We then assume an open end $z = L$ (vanishing of the magnetic component), therefore we set

$$E(0, t) = a \sin(\omega t), \quad E_z(L, t) = 0, \quad (2.19)$$

with $\omega \in [1, \omega_0]$. Last, $F_0(z)$ is a given function that results from the presence of charges, (created e.g. with a doped semiconductor, an applied static electric potential, inclusion of metallic nanoparticles, etc), and that needs to be evaluated in a given physical context. We present in figure 2 the scheme of principle of the device that corresponds to our problem.

3. Numerical simulations

Our purpose is simply here to show that a given function $F_0(z)$ acts as a scattering potential on the dynamics of the *slow-light gap soliton*. To that end one needs first to generate the SLGS. It is done by applying the principle of nonlinear supratransmission [30] to the MB system as described in [29]. There it is proved that the boundary value (2.19) at a frequency in the stop gap, which would linearly produce an evanescent wave in the medium, is actually *unstable* above a threshold a_s given by

$$a_s = 4 \sqrt{2\omega_0 \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0^2 + 3}}, \quad (3.1)$$

where ω is the driving frequency in the stop gap $[1, \omega_0]$.

Let us simply mention that the threshold of nonlinear supratransmission is obtained from the nonlinear Schrödinger limit of MB by assuming a driving frequency close to the gap edge ω_0 . For instance it is shown in [29] this threshold is correct to a high precision close to the edge (typically for $\omega = 1.4$ with the edge $\omega_0 = \sqrt{2}$), precision that decreases to 15% at the frequency 1.2. But the very question is not the value of the threshold but its *existence*, source of gap soliton generation. Note that one needs to ensure compatibility of boundary values (2.19) with initial data (2.18) and thus we always start the boundary driving smoothly at $t > 0$ such that $E(0, 0) = 0$. Note also that the stability of the static solution is used to determine a stable *vacuum* solution inside the region with charges, which is disconnected from the instability of the evanescent wave living in the region without charges.

We display in figure 3 the result of the scattering of a SLGS onto a step potential

$$F_0(z) = B\theta(z - z_0), \quad (3.2)$$

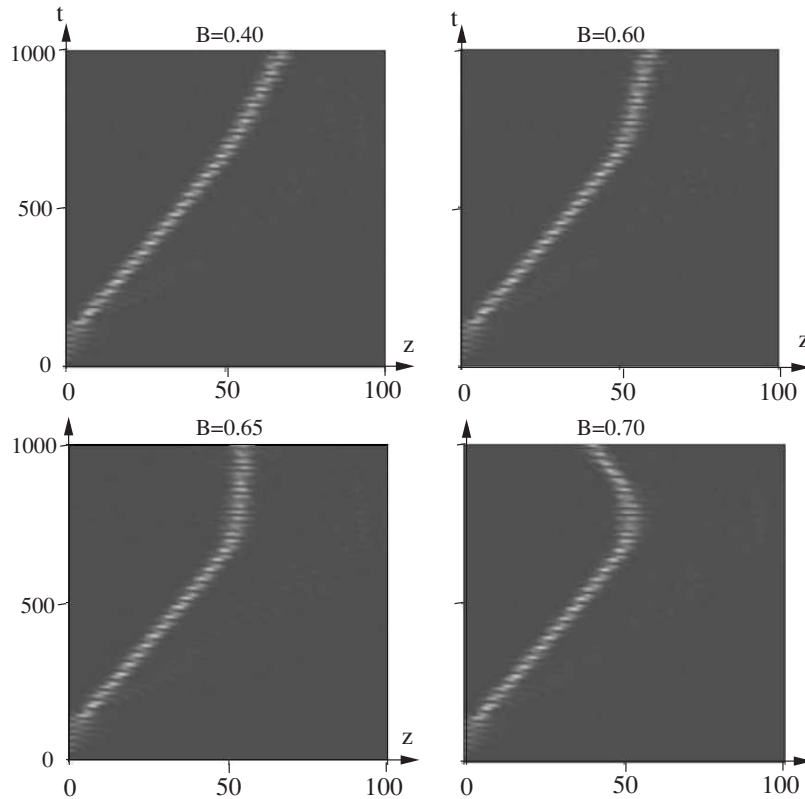


Figure 3. Scattering of the SLGS generated by the boundary (2.19) with $a = 0.4$ and $\omega = 1.4$ onto the step function $F_0(z)$ of (3.2) with $z_0 = 50$ and values of step height B as indicated. These are intensity plots of the energy density flux $-EP/2$ where the brightest regions have value 0.3.

where θ is the Heaviside function. We have used as boundary (2.19) the following driving (at frequency $\omega = 1.4$),

$$E(0, t) = 0.2[\tanh(0.2(t - 20)) - \tanh(0.5(t - 150))] \cos(\omega t). \quad (3.3)$$

The scattering mechanism will be analyzed in the following section; let us simply mention here that the SLGS is very robust and has been checked to (almost) maintain its amplitude and frequency across the step, the only varying parameter being its velocity. This property will allow us to understand the existence of a threshold step height above which the SLGS is reflected. Below this threshold the SLGS simply slows down to adjust to a different medium.

4. A phenomenological model

4.1. The NLS model

To describe the gap soliton scattering in a simple and efficient way, we propose here the following model

$$-2i\omega_0\psi_t + \frac{\omega_0^2 - 1}{\omega_0^2}\psi_{zz} + \frac{1}{2}(\omega_0^2 + 3)|\psi|^2\psi = V(z)\psi \quad (4.1)$$

similar to (1.1) and obtained from (A.19) by replacing the action of φ by that of an external potential $V(z)$. The related initial-boundary value problem is naturally deduced from relation (A.12) and boundary value (2.19) as

$$\psi(z, 0) = 0, \quad \psi(0, t) = -i\frac{a}{\gamma} e^{i(\omega - \omega_0)t}. \quad (4.2)$$

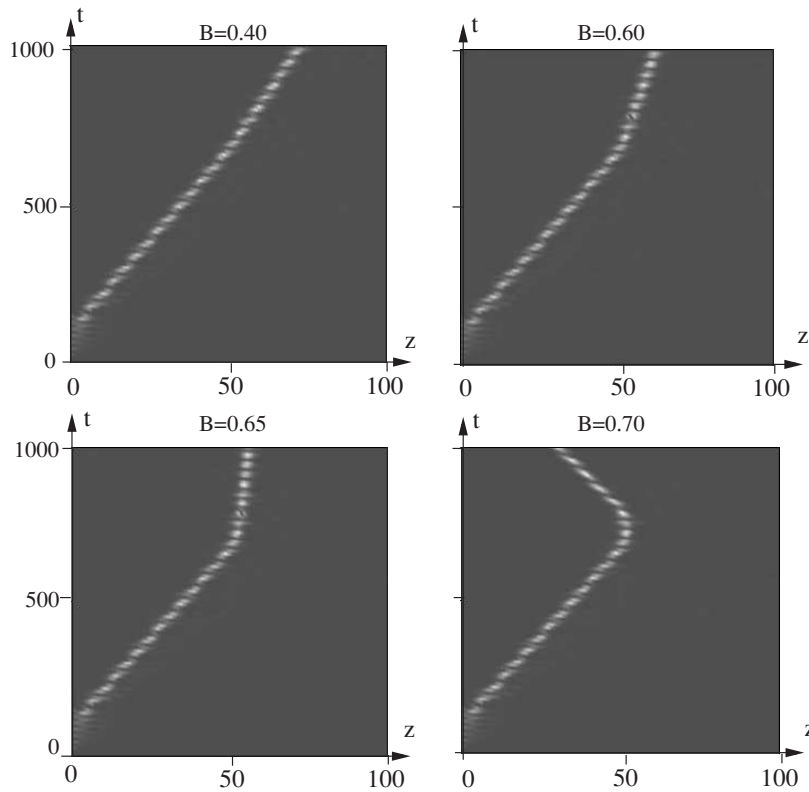


Figure 4. Test of the soliton scattering by use of the NLS model (4.1) with boundary driving (4.2) where $a = 0.4$ and $\omega = 1.4$, and with $V(z)$ given by (4.3) where $F_0(z) = B\theta(z - 40)$. We have plotted the energy flux density $-EP/2$ given here by (4.4), which concurs with simulations of Maxwell–Bloch of figure 3.

This constitutes a *phenomenological* model where the value of the applied potential $V(z)$ is obtained by comparing numerical simulations of the above equation with those of the MB system (2.17). We have obtained that

$$V(z) = \frac{1}{2} \frac{(\omega_0^2 - 1)^2}{\omega_0^2 + 4} F_0(z)^2 \quad (4.3)$$

provides a quite accurate description of the scattering process. The above particular form has been inspired by the nature of the asymptotic expansion in equation (A.15) with the structure (A.17), especially for the dependence in F_0^2 , but the precise expression has been worked out to generate scattering processes similar to those obtained from Maxwell–Bloch. This is illustrated by figure 4 obtained by solving (4.1) with the above potential and boundary value. Then to compare to the plots of figure 3, we construct the electromagnetic energy density flux $-EP/2$ which from (A.12) is given by

$$-\frac{1}{2}EP \simeq \frac{1}{2}(\psi e^{i\omega_0 t} + \bar{\psi} e^{-i\omega_0 t})^2. \quad (4.4)$$

4.2. Scattering simple rules

The interest in having such a simplified model is to derive explicit formulae for the scattered gap soliton. The NLS equation in a potential has been widely studied, e.g. by use of the inverse spectral theory [32], and especially when the potential is a Dirac delta function

representing a local inhomogeneity [33–35], which has also been done for discrete systems [36]. An interesting application is the study, with a stochastic series of delta functions, of the competition between disorder and nonlinearity [37, 38]. In our case the step (or barrier) height is not small compared to soliton amplitude (V_0 is of the order of $\max |\psi|^2$) and one cannot call a perturbative approach to get on analytical description of the scattering process. However, we shall obtain by quite elementary arguments, an expression of the scattered soliton velocity in terms of the incident velocity and the parameters of the medium.

We are interested in potentials $V(z)$ piecewise constant (in regions sufficiently larger than the soliton extension) for which the NLS equation (4.1) possesses approximate soliton solution in each region, far enough from the discontinuities. The soliton solution of (4.1) for any $V(z) = V_0$ constant is given by

$$\psi_s(z, t) = \frac{A e^{i(\beta z - \mu t)}}{\cosh[\gamma(z - vt)]} \quad (4.5)$$

with the following three relations linking the five coefficients A (amplitude), β (wave number), μ (frequency), γ (stiffness) and v (velocity). These are

$$\beta = -\frac{\omega_0^3}{\omega_0^2 - 1} v, \quad (4.6)$$

$$\gamma^2 = \frac{A^2}{4} (\omega_0^2 + 3) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - 1}, \quad (4.7)$$

$$V_0 = (\gamma^2 - \beta^2) \frac{\omega_0^2 - 1}{\omega_0^2} - 2\mu\omega_0. \quad (4.8)$$

One important consequence of the above relations is obtained by elimination of β and γ and writes

$$v^2 \frac{\omega_0^4}{\omega_0^2 - 1} = \frac{A^2}{4} (\omega_0^2 + 3) - 2\omega_0\mu - V_0, \quad (4.9)$$

which furnishes the soliton velocity from its amplitude A and carrier frequency μ . Note that the solution is a *gap* soliton which means $\mu > 0$.

Now we assume, accordingly with observations of a number of numerical simulations, that the amplitude A and the frequency μ do not change across a step from a region 1 where $V = 0$ to a region 2 where $V = V_0$. The soliton is produced in region 1 by the boundary driving and is measured for each numerical experiment as in [29] (it is actually easier to measure v and μ and to deduce A). Then the scattering process is understood in a quite simple manner. First formula (4.8) immediately implies the existence of a particular threshold value of the constant V_0 for which the velocity in region 2 would vanish and above which this soliton is not a solution. This threshold, called V_{th} , is thus obtained by setting $v = 0$ in (4.8) and reads

$$V_{\text{th}} = \frac{A^2}{4} (\omega_0^2 + 3) - 2\omega_0\mu. \quad (4.10)$$

To be clear, this threshold indicates that the NLS equation (4.1) with $V_0 > V_{\text{th}}$ does not support a soliton solution with the given parameters A and μ . So we expect a *reflection* on the step of height V_0 as soon as $V_0 > V_{\text{th}}$.

Below the threshold, the velocity v' in region 2 is deduced from (4.8) and (4.10) as

$$V_0 < V_{\text{th}}: \quad v'^2 = v^2 - V_0 \frac{\omega_0^2 - 1}{\omega_0^4}, \quad V_{\text{th}} = v^2 \frac{\omega_0^4}{\omega_0^2 - 1}. \quad (4.11)$$

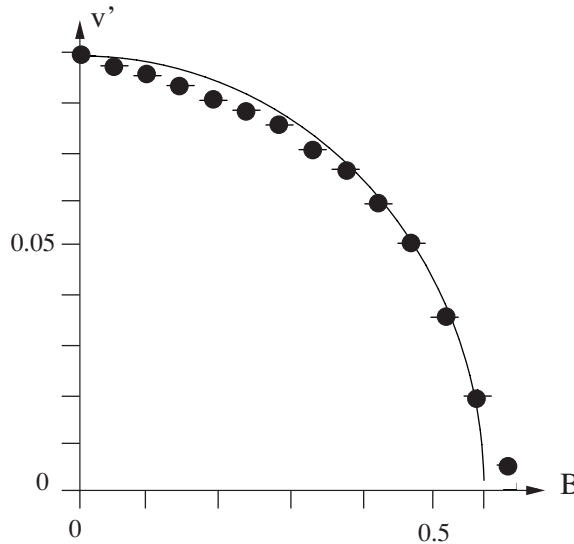


Figure 5. Soliton velocity v' beyond the step location z_0 in terms of the step height B according to formula (4.13) plotted as the continuous curve, and measured from simulations of Maxwell–Bloch (points).

Here, the threshold value V_{th} given in (4.10) is written in terms of the emitted SLGS velocity v only by computing here above the value of V_0 for which $v' = 0$.

4.3. Step potential

In the case of the one-step potential (3.2) we have

$$z > z_0: \quad V_0 = \frac{1}{2} \frac{(\omega_0^2 - 1)^2}{\omega_0^2 + 4} B^2, \quad (4.12)$$

and the velocity v' reads from (4.11)

$$v'^2 = v^2 - \frac{B^2}{2\omega_0^4} \frac{(\omega_0^2 - 1)^3}{\omega_0^2 + 4}. \quad (4.13)$$

As a consequence the threshold amplitude B_{th} of the electrostatic permanent background $F_0(z) = B\theta(z - z_0)$ can be written as

$$B_{\text{th}} = v\omega_0^2 \sqrt{2} \frac{(\omega_0^2 + 4)^{1/2}}{(\omega_0^2 - 1)^{3/2}}. \quad (4.14)$$

We have tested these formulae against numerical simulations of the MB system (not simply the NLS model), which is summarized in figure 5. Clearly, the small discrepancy between soliton scattering and the elementary formula (4.13) comes on the one side from the assumptions of conservation of shape across the step, on the other side from losses by phonon emission. Note that formula (4.13) relates the kinetic energy of the soliton in the two media through the potential energy V_0 of the obstacle. Another interesting aspect of this formula is the fact that the scattered velocity v' depends only on the incident velocity v , once the step height V_0 and the coupling constant $\alpha = \omega_0^2 - 1$ have been fixed.

Such an expression can be confronted to numerical simulations of Maxwell–Bloch for different values of the coupling parameter α and different incident SLGS velocities v (obtained by varying the driving amplitude).

α	ω	a	v	B_{th}	B	
1	1.40	0.40	0.088	0.61	0.65	
1	1.40	0.42	0.111	0.77	0.72	
1	1.40	0.44	0.133	0.92	0.90	
1	1.40	0.46	0.154	1.07	1.00	
2	1.70	0.60	0.175	0.69	0.70	(4.15)
3	1.95	0.70	0.14	0.45	0.50	
4	2.18	0.72	0.15	0.40	0.42	
5	2.40	0.70	0.22	0.53	0.54	
10	3.25	0.70	0.18	0.34	0.38	

Some results are presented in table 4.15 where α is the coupling parameter, a and ω are the chosen driving amplitude and frequency for Maxwell–Bloch as defined in (2.19). Then v is the measured soliton velocity and B_{th} the theoretical threshold for soliton reflection as given by (4.14). The effective threshold B is then obtained by multiple simulations of Maxwell–Bloch where $F_0(z) = B\theta(z - z_0)$ varying the value of B . Such a result shows that the empirical formula (4.3) for the potential $V(z)$ entering the nonlinear Schrödinger model correctly describes the scattering process within the chosen parameter range.

5. Conclusion and comments

The main result we wish to emphasize is the demonstration that a slow-light gap soliton in a two-level medium can be manipulated by the use of a permanent electrostatic background field. Such a property may have interesting applications as it is quite generic and fundamental: a two-level medium constitutes the basic model for any medium submitted to monochromatic radiation close to one transition frequency.

One interesting open problem is the description of the interaction process through the method of perturbative asymptotic expansion. We have indeed discovered that it is the interaction of processes of different orders which is fundamental in the coupling of the electromagnetic field with the electrostatic component. We have not been able to include such interaction in the perturbative asymptotic method as by nature it decouples the different orders. Although the simple nonlinear Schrödinger model (4.1) describes quite well the SLGS scattering of Maxwell–Bloch, one would appreciate to *obtain* it by some limit procedure. Actually the NLS equation is a natural limit, it is the expression of the external potential (4.3) representing the electrostatic permanent background that should be rigorously derived.

One may of course play with different types of potentials, as for instance a barrier of height B and width D . In that case at a given height, and a given incident soliton velocity, we observe tunnelling when the width value is below a threshold (e.g. we have obtained tunnelling with parameters of figure 3 at height $B = 0.8$ for a width $D < 4.5$). This is an interesting problem, obviously related to the delta-function case [34], that will be considered in future studies.

Note finally that the soliton is generated from the boundary driving (2.19) by the *nonlinear supratransmission* mechanism which is an instability of the evanescent wave [39]. As a consequence, the soliton characteristics are quite sensitive to the driving parameters: frequency, amplitude and shape. Figure 3 has been obtained for the particular boundary value

(3.3) and the soliton is generated at a velocity $v = 0.88$. A different shape of that driving, keeping same amplitude and frequency, may generate a SLGS with a slightly different velocity. Note that the fundamental question of the relation between soliton characteristics and driving parameters is also an open problem.

Acknowledgments

This work was carried out as part of the program GDR 3073 Nonlinear Photonics and Microstructured Media.

Appendix A. Perturbative asymptotic analysis

The purpose of this appendix is to provide useful expressions for the asymptotic model derived from Maxwell–Bloch as in [27] but here with non-vanishing permanent fields. Although computations are lengthy, they are standard and we list here only the relevant results.

General expressions. It is actually convenient to consider the full 3-vector case and to reduce it to our particular interest at the very end. The dimensionless MB system (2.4) reduced to a propagation in the z -direction becomes

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \mathbf{P} + \mathbf{P} - \alpha \mathbf{E} &= -\alpha n \mathbf{E}, & \partial_t n &= \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{P}, \\ (\partial_t^2 - \sigma \partial_z^2) \mathbf{E} &= -\partial_t^2 \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

where the singular matrix σ is defined by

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

The reductive perturbative expansion is a method for extracting information about the variations at the first order of a formal expansion of the fields in terms of new slow variables, see e.g. the tutorial paper [31] and the references therein. We seek *slowly varying envelope approximation* solutions (SVEA) for a carrier wave at frequency ω very close to ω_0 (and in the gap: $\omega < \omega_0$), thus we assume the expansion

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \sum_{m=-j}^{+j} \mathbf{E}_j^m(\xi, \tau) e^{im\omega_0 t}, \\ \mathbf{P} &= \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \sum_{m=-j}^{+j} \mathbf{P}_j^m(\xi, \tau) e^{im\omega_0 t}, \\ n &= \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \sum_{m=-j}^{+j} N_j^m(\xi, \tau) e^{im\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

in which the reality condition implies

$$\mathbf{E}_j^{-m} = \bar{\mathbf{E}}_j^m, \quad \mathbf{P}_j^{-m} = \bar{\mathbf{P}}_j^m, \quad N_j^{-m} = \bar{N}_j^m. \quad (\text{A.4})$$

An important issue is to include in the expansion the description of the permanent background $F_0(z)$. Then we must assume that \mathbf{E} and \mathbf{P} do possess zero-frequency modes, namely that $\mathbf{E}_j^0 \neq 0$ and $\mathbf{P}_j^0 \neq 0$. We shall find that these quantities must obey some general constraint but are not governed by an equation (this is the reason why in general they are assumed to vanish)

which will allow us to fix them as external data (scattering potential). The *slow variables* ξ and τ are here

$$\xi = \epsilon z, \quad \tau = \epsilon^2 t. \quad (\text{A.5})$$

Indeed, the natural space variable is usually $\xi = \epsilon(z - vt)$ where v is the group velocity at the frequency of the carrier. Here this frequency is ω_0 for which the group velocity vanishes, as implied by the dispersion relation (2.11). Note that this property ensures that the boundary-value problem in the physical space maps effectively to a boundary value problem in the *slow space*.

Inserting the infinite series expansion (A.3) into the system (A.1) we obtain, after careful (tedious) algebraic computations, the following closed form system at order ϵ^3 (remember $\mathbf{E}_1^{-1} = \overline{\mathbf{E}_1^1}$),

$$\begin{aligned} -2i\frac{\omega_0}{\alpha}\partial_\tau\mathbf{E}_1^1 + \frac{\sigma}{\omega_0^2}\partial_\xi^2\mathbf{E}_1^1 &= -N_2^0\mathbf{E}_1^1 + (\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^0)\mathbf{E}_1^0 + \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1)\mathbf{E}_1^{-1}, \\ \partial_\tau N_2^0 &= \partial_\tau \left(\frac{\alpha}{2}\mathbf{E}_1^0 \cdot \mathbf{E}_1^0 + \frac{\omega_0^2 + 1}{\omega_0^2 - 1}\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^{-1} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

together with the following constraints on the background field \mathbf{E}_1^0 ,

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\tau^2 \end{pmatrix} \mathbf{E}_1^0 = 0. \quad (\text{A.7})$$

The principle of the method is then to express all relevant quantities in terms of the solution of the nonlinear evolution (A.6). These are given by

$$\mathbf{E} = \epsilon(\mathbf{E}_1^0 + \mathbf{E}_1^1 e^{i\omega_0 t} + \mathbf{E}_1^{-1} e^{i\omega_0 t}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{P} = \epsilon(\alpha\mathbf{E}_1^0 - \mathbf{E}_1^1 e^{i\omega_0 t} - \mathbf{E}_1^{-1} e^{-i\omega_0 t}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} n &= \epsilon^2(N_2^0 - \mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^0 e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{E}_1^1 e^{2i\omega_0 t} - \mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_1^0 e^{-i\omega_0 t} \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_1^{-1} e^{-2i\omega_0 t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

where \mathbf{E}_1^1 and N_2^0 are given in equations (A.6). The structure of the external datum \mathbf{E}_1^0 resulting from the constraint (A.7) reads

$$\mathbf{E}_1^0 = \begin{pmatrix} E_{1x}^0(\tau) \\ E_{1y}^0(\tau) \\ E_{1z}^0(\xi) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

where the dependences can be arbitrarily fixed.

Electrostatic potential. By inverse scaling we may come back to the original physical variables z and t , and we restrict our study to the case (2.6) where the longitudinal component $F(z, t) = \phi(z, t) + F_0(z)$. Rewriting then expressions (A.8)–(A.10) in physical variables, we get at first order (namely ϵ for \mathbf{E} and \mathbf{P} , ϵ^2 for n)

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0(z) \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \psi(z, t) \\ 0 \\ \varphi(z, t) \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.} \right], \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha F_0(z) \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} \psi(z, t) \\ 0 \\ \varphi(z, t) \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.} \right], \quad (\text{A.13})$$

$$n = \nu - \left[F_0 \varphi e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} (\psi^2 + \varphi^2) e^{2i\omega_0 t} + \text{c.c.} \right], \quad (\text{A.14})$$

where we rename $(E_1^1)_x = \psi$, $(E_1^1)_z = \varphi$ and $N_2^0 = \nu$. The corresponding evolutions (A.6) eventually read

$$-2i\omega_0 \psi_t + \frac{\omega_0^2 - 1}{\omega_0^2} \psi_{zz} = -\alpha \nu \psi + \frac{\alpha}{2} (\psi^2 + \varphi^2) \bar{\psi}, \quad (\text{A.15})$$

$$-2i\omega_0 \varphi_t - \alpha (F_0)^2 \varphi = -\alpha \nu \varphi + \frac{\alpha}{2} (\psi^2 + \varphi^2) \bar{\varphi}, \quad (\text{A.16})$$

$$\nu_t = \partial_t \left(\frac{\alpha}{2} (F_0)^2 + \frac{\omega_0^2 + 1}{\omega_0^2 - 1} (|\psi|^2 + |\varphi|^2) \right). \quad (\text{A.17})$$

Thanks to the initial data (2.18), namely here to $\psi(z, 0) = 0$, $\varphi(z, 0) = 0$ and $\nu(z, 0) = 0$, we may integrate now the evolution of ν to get

$$\nu = \frac{\omega_0^2 + 1}{\omega_0^2 - 1} (|\psi|^2 + |\varphi|^2). \quad (\text{A.18})$$

Inserted in the equations for ψ and φ it gives the final NLS-like system

$$-2i\omega_0 \psi_t + \frac{\omega_0^2 - 1}{\omega_0^2} \psi_{zz} + \frac{1}{2} (\omega_0^2 + 3) |\psi|^2 \psi = \frac{1}{2} (\omega_0^2 - 1) \varphi^2 \bar{\psi} - (\omega_0^2 + 1) |\varphi|^2 \psi, \quad (\text{A.19})$$

$$-2i\omega_0 \varphi_t - \alpha (F_0)^2 \varphi + \frac{1}{2} (\omega_0^2 + 3) |\varphi|^2 \varphi = \frac{1}{2} (\omega_0^2 - 1) \psi^2 \bar{\varphi} - (\omega_0^2 + 1) |\psi|^2 \varphi. \quad (\text{A.20})$$

Equation (A.19) is a nonlinear Schrödinger equation for ψ (envelope of the transverse electromagnetic component) in some *external potential* created by φ , the envelope of the *plasma wave*. The applied permanent background $F_0(z)$ does not act *directly* on ψ but through the plasma wave φ according to the dynamical equation (A.20).

The above asymptotic analysis has allowed us to demonstrate that the elimination of the variable $Q(z, t)$ by equations (2.12) and (2.13), namely comes naturally as the first-order solution. Then the initial condition $\phi(z, 0) = n(z, 0) = 0$ was shown to be stable in the absence of applied electromagnetic transverse component. By means of (A.12), such a set of initial data maps to $\varphi(z, 0) = 0$. The problem is that the evolution (A.20) has the unique solution $\varphi(z, t) = 0$ for initial data $\varphi(z, 0) = 0$ and $\varphi_t(z, 0) = 0$ (representing an initial equilibrium state). Thus we are not able to use the system of NLS-like equations (A.19) and (A.20) to describe the gap soliton scattering with purely vanishing initial data.

This comes from the fact that the scattering process in Maxwell–Bloch is initiated at higher orders by nonlinear coupling. Indeed, considering the MB system (2.17) with the initial-boundary value problem (2.18) and (2.19), it is clear that the interaction of E (electromagnetic component) with the permanent electrostatic background $F_0(z)$ works with the birth of the plasma wave ϕ . And ϕ grows on an initial vacuum by mediation of the normalized density n of population of the excited level, which is an effect of second order (see the time evolution of $n(z, t)$). But the method of multiscale asymptotic series *separates the orders* as indeed, at each order ϵ^n an equation is obtained (independent of ϵ). We thus cannot expect the method to describe correctly such a situation.

We have pursued the series to order ϵ^5 to check that indeed no *source term* appears. As expected from the method, we got a linear system for the next-order expansion with the variable coefficients φ and ψ , given from the preceding order. This confirms that the method does not allow feedback interaction of higher orders to the fundamental one $\{\psi, \varphi\}$.

References

- [1] Yeh P 2005 *Optical Waves in Layered Media* (Hoboken, NJ: Wiley-Interscience)
- [2] Kivshar Y S and Agrawal G P 2003 *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (San Diego, CA: Academic)
- [3] Morsch O, Muller J H, Cristiani M, Ciampini D and Arimondo E 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 140402
- [4] Meacher D R 1998 *Contemp. Phys.* **39** 329
- [5] Yeh P 1993 *Introduction to Photorefractive Nonlinear Optics* (New York: Wiley)
- [6] Fain V M and Khanin Ya I 1969 *Quantum Electronics* (Oxford: Pergamon)
- [7] Allen L C and Eberly J H 1987 *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (New York: Dover)
- [8] Butylkin V S, Kaplan A E, Khronopulo Yu G and Yakubovich E I 1989 *Resonant Nonlinear Interactions of Light with Matter* (Heidelberg: Springer)
- [9] Pantell R H and Puthoff H E 1969 *Fundamentals of Quantum Electronics* (New York: Wiley)
- [10] S L Mac Call and Hahn E L 1969 *Phys. Rev.* **183** 457
- [11] Maimistov A I, Basharov A M, Elyutin S O and Sklyarov Yu M 1990 *Phys. Rep.* **191** 1–108
- [12] Lamb G L Jr 1974 *Phys. Rev. A* **9** 422
- [13] Ablowitz M J, Kaup D J and Newell A C 1974 *J. Math. Phys.* **15** 1852
- [14] Gibbon J D, Caudrey P J, Bullough R K and Eilbeck J C 1973 *Lett. Nuovo Cimento* **8** 775
- [15] Gabitov I R, Zakharov V E and Mikhailov A V 1985 *Theor. Math. Phys.* **63** 328
- [16] Agrotis M, Ercolani N M, Glasgow S A and Moloney J V 2000 *Physica D* **138** 134
- [17] Hynne F and Bullough R K 1990 *Phil. Trans. R. Soc. A* **330** 253
- [18] Branis S V, Martin O and Birman J L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 2638
- [19] Mantsyzov B I and Kuz'min R N 1986 *Sov. Phys—JETP* **64** 37
Mantsyzov B I 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4939
Mantsyzov B I and Silnikov R A 2002 *J. Opt. Soc. Am. B* **19** 2203
Mantsyzov B I 2005 *JETP Lett.* **82** 253
- [20] Xiao W, Zhou J and Prineas J 2003 *Opt. Exp.* **11** 3277
- [21] Mel'nikov I V and Aitchison J S 2005 *Appl. Phys. Lett.* **87** 201111
- [22] Kozhekin A E and Kurizki G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5020
- [23] Kozhekin A E, Kurizki G and Malomed B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3647
- [24] Aközbek N and John S 1998 *Phys. Rev. E* **58** 3876
- [25] Raether H 1988 *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings* (Berlin: Springer)
- [26] Gabitov I R, Korotkevitch A O, Maimistov A I and McMahon J B 2007 *Appl. Phys. A: Mater. Sci. Process.* **89** 277
- [27] Ginovart F and Leon J 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** 3955
- [28] Khomeriki R and Leon J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 183601
- [29] Leon J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 06811
- [30] Geniet F and Leon J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 134102
- [31] Leblond H 2008 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41** 043001
- [32] Balakrishnan R 1985 *Phys. Rev. A* **32** 1144
- [33] Newel A C 1978 *J. Math. Phys.* **19** 1126
- [34] Cao X D and Malomed B A 1995 *Phys. Lett. A* **206** 177
- [35] Holmer J, Marzuola J and Zworski M 2007 *Commun. Math. Phys.* **274** 187
- [36] Forinash K, Peyrard M and Malomed B 1994 *Phys. Rev. E* **49** 3400
- [37] Kivshar Yu S, Gredeskul S A, Sanchez A and Vazquez L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1693
- [38] Vicencio R A and Flach S 2008 Control of wavepacket spreading in nonlinear finite disordered lattices
<http://arxiv.org/abs/0809.2115>
- [39] Leon J 2003 *Phys. Lett. A* **319** 130

Conclusions première partie

Le système de Maxwell-Bloch décrit l'interaction d'un milieu à deux niveaux avec un champ électromagnétique classique à travers la densité de population. La variation de la densité de population dans un milieu à deux niveaux est un effet purement quantique qui est à l'origine du comportement non-linéaire du milieu irradié. C'est à travers cette densité de population \mathcal{N} que les composantes électriques du champs incident se couplent avec les composantes de la polarisation du milieu pour donner naissance à des phénomènes très intéressants de point de vue des applications. Si la variable dynamique \mathcal{N} est très petite ou nulle, le système de Maxwell-Bloch se réduit au système linéaire classique de Lorentz. [Leon 09]

Le problème de la génération d'une excitation spatialement localisée, dont la fréquence se situe dans la bande interdite du milieu à deux niveaux, a été résolu. Quand le milieu est forcé à une extrémité par une modulation périodique ayant la fréquence dans la bande interdite, une onde évanescence est produite proche du bord. Celle-ci présente une instabilité non-linéaire qui est à la base du processus de supratransmission non-linéaire. On a démontré que le couplage d'un champ électromagnétique transverse à un champ électrostatique longitudinal permanent est suffisant pour diffuser de manière efficace les solitons de gap, processus pouvant entraîner entre autre un piégeage ou une retro-diffusion de ces structures hautement localisées.

La dynamique des solitons de gap a été ensuite comprise de manière qualitative à travers un modèle phénoménologique simple, obtenu grâce à une analyse perturbative asymptotique du système d'équations couplées initiales. Celui-ci prend la forme d'une équation de Schrödinger non-linéaire dans un potentiel externe créé par la composante électrostatique permanente induite par les charges du milieu.

Deuxième partie

Seuil de supratransmission non-linéaire dans les amplificateurs paramétriques optiques

Introduction deuxième partie

Cette deuxième partie sera consacrée à l'étude des phénomènes non-linéaires liés aux *solitons optiques quadratiques* - états localisés aux multiples composantes qui peuvent exister dans les milieux avec une brisure de la symétrie d'inversion au niveau moléculaire [Buryak 02]. On s'intéressera en particulier à la génération et la dynamique des solitons de gap spatiaux dans les milieux biréfringents avec non-linéarité quadratique (ou de type $\chi^{(2)}$). On parle de *solitons de gap* car ils sont produits par le phénomène de supratransmission non-linéaire en forçant le milieu au bord avec une "fréquence" (il s'agit en effet d'une modulation spatiale stationnaire et non pas temporelle du signal appliqué sur le cristal) dans la bande interdite du système.

Les effets non-linéaires optiques peuvent être facilement expliqués à travers le formalisme de la polarisation macroscopique induite dans un milieu diélectrique par un champ électrique de forte intensité. Ainsi, le premier terme non-linéaire dans l'expansion de la polarisation (au delà des effets linéaires diélectriques habituels) serait quadratique. Son origine se trouve alors dans l'existence d'un terme non-nul, dit $\chi^{(2)}$, de la susceptibilité électrique, qui est responsable, entre autre, de phénomènes physiques tels que la génération de la seconde harmonique (GSH). C'est pour cela que la GSH a été le premier effet non-linéaire prédit et observé par les physiciens [Franken 61]. Le développement des techniques mathématiques et expérimentales concernant les solitons dans les milieux Kerr (avec non-linéarité cubique) a stimulé depuis peu un retour d'intérêt aux effets non-linéaires quadratiques. Il faut préciser qu'il a fallu quand même attendre une vingtaine d'années entre le moment où les solitons optiques $\chi^{(2)}$ ont été prédits théoriquement [Karamzin 74] et leur observation expérimentale [Torruellas 95]. Pendant cette longue période, les études des effets optiques non-linéaires ont été principalement dirigés vers les matériaux Kerr pour plusieurs raisons :

1. c'est plus facile d'étudier des matériaux isotropes,
2. produire des solitons par auto-modulation (rectification) optique est nettement plus simple pour un milieu Kerr que pour un milieu $\chi^{(2)}$,
3. le modèle qui régit la dynamique des ondes dans les milieux cubiques (le fameux modèle de Schrödinger non-linéaire) s'est avéré être intégrable. Des solutions de type onde solitaire ont vite été trouvées ce qui a beaucoup stimulé la communauté scientifique.

Si la génération des solitons optiques cubiques est naturelle dans les fibres optiques de type Kerr - en envoyant un faisceau laser dans la fibre et en attendant qu'il s'auto-module au cours de la propagation pour former un soliton, il est beaucoup plus compliqué de produire des solitons quadratiques de cette manière. Dans le premier cas il s'agit d'un problème

avec conditions initiales bien précises alors que dans le deuxième cas des configurations plus complexes sont nécessaires, comme par exemple dans l'expérience de Taverner et al, où des multiples solitons de gap ont été formés dans un réseau de Bragg avec une radiation quasi-constante appliquée à une des extrémités du circuit [Taverner 98]. Celui ci est donc un problème différent, puisqu'il s'agit de produire des solitons à travers une condition au bord bien spécifique et adaptée au modèle considéré. C'est à quoi nous allons nous intéresser nous aussi dans cette partie : comment produire des solitons de gap dans les milieux biréfringents avec une forte non-linéarité quadratique.

Pour traiter cette question on va commencer d'abord par faire un petit rappel des phénomènes non-linéaires présents dans les milieux quadratiques. Dans le chapitre 7 on introduit d'abord la susceptibilité électrique linéaire et ensuite les tenseurs électriques d'ordre supérieur qui correspondent aux termes non-linéaires de la polarisation diélectrique [Kleinman 62]. Toujours dans ce chapitre, on discute le phénomène de conversion de fréquences optiques et amplifications des signaux dans les amplificateurs paramétriques optiques (OPA). Dans un OPA, une onde signal est amplifiée au cours de sa propagation dans un milieu non-linéaire par interaction quadratique avec une onde pompe intense. La condition de conservation d'énergie impose entre autre la création d'une onde complémentaire mais, à cause de la dispersion, cette condition ne peut être réalisée que dans les milieux anisotropes (où l'indice de réfraction dépend également de la polarisation). On montre ensuite qu'il est possible de réaliser un parfait accord de phase (nécessaire si on veut une amplification paramétrique efficace) dans un milieu uniaxe biréfringent.

Le chapitre 8 a été dédié à l'étude des équations de propagation dans un cristal biréfringent. Les équations dynamiques seront déterminées dans l'approximation paraxiale et nous allons prendre en compte les effets diffractifs. On montre qu'un terme de type advection apparaît lorsque les rayons lumineux sont appliqués en incidence non normale par rapport à l'axe optique du milieu biréfringent non linéaire. Cette dérive lors de la réfraction extraordinaire porte le nom d'*effet de "walk-off" spatial*. De plus, nous allons découvrir que l'anisotropie du milieu détermine une asymétrie des termes de diffraction transverses. Ce chapitre va aboutir à un système d'équations non-linéaires couplées pour les enveloppes lentement variable des champs électriques appliqués, ayant des composantes polarisées ordinairement et extraordinairement. En second lieu, une limite simplifiée de ce système (seulement deux équations non-linéaires couplées) sera présentée.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude des conditions au bord nécessaires à la réalisation des solitons de gap biréfringents dans les milieux quadratiques. En particulier on va se concentrer sur deux méthodes de production d'une excitation périodique évanescence spatialement localisée, indispensable au processus de NST. Premièrement on va traiter le cas d'un guide d'onde plan posé à l'interface du cristal $\chi^{(2)}$ biréfringent et on va illustrer les modes confinés de type transverse-électrique (TE) pour un champ de polarisation ordinaire et transverse-magnétique (TM) pour un champ polarisé extraordinairement. La deuxième proposition qu'on fera sera plus facilement réalisable en expérience (car plus maniable) : le champ évanescence sera produit par illumination directe du bord, avec une onde monochromatique continue, à un angle légèrement supérieur à l'angle d'extinction.

Une fois que les conditions physiques seront bien posées, on s'attaquera dans le chapitre 10 aux problèmes mathématiques liés aux phénomènes non-linéaires dans les modèles intégrables scalaires (équation de NLS) et vectoriels (le système de Manakov). On montrera ici comment déterminer le seuil de NST en effectuant une analyse de stabilité linéaire de la solution de type soliton exacte et on introduira des méthodes générales permettant d'obtenir les mêmes résultats pour les systèmes non-intégrables.

Finalement dans le chapitre 11 les résultats concernant la génération et la dynamique des solitons quadratiques dans un cristal biréfringent seront révélés sous la forme de deux papiers publiés dans des revues scientifiques. Entre autre, on va étudier la dynamique des ondes dans

les OPA en prenant en compte l'effet de walk-off produit par l'anisotropie du milieu à la fois du point de vue numérique qu'analytique, on va montrer qu'il est quand même possible de prédire le seuil de NST dans cette classe de systèmes à multiples composantes non-intégrables en introduisant une méthode astucieuse de développement en série et on va effectuer une analyse de stabilité paramétrique qui nous permettra de formuler une conjecture très simple pour la génération de solitons de gap.

Phénomènes non-linéaires dans les milieux quadratiques

Sommaire

7.1	Susceptibilité électrique linéaire	89
7.2	Susceptibilité non-linéaire	90
7.2.1	Propagation des champs électromagnétiques scalaires	90
7.2.2	Généralisation : champs à plusieurs composantes	91
7.3	Conversion de fréquences optiques	93
7.3.1	Principe de l'amplificateur paramétrique optique (OPA)	94
7.3.2	Milieux uniaxes	95
7.3.3	Technique d'accord de phase basée sur la biréfringence	96

7.1 Susceptibilité électrique linéaire

La propagation d'une onde électromagnétique dans la matière est affectée par la polarisation diélectrique induite par le champ électrique de l'onde. La polarisation diélectrique $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ au voisinage du point \mathbf{r} (dipôle induit par unité de volume) est évidemment reliée au champ électrique au point \mathbf{r} , et c'est la susceptibilité diélectrique qui caractérise cette relation. Pour la calculer, il faut déterminer le mouvement des charges de la matière sous l'effet du champ classique monochromatique

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} + c.c.. \quad (7.1)$$

Si on se rapporte à la description quantique introduite dans la première partie de ce manuscrit, on note que si on considère un objet polarisable (atome dans une vapeur, ion, atome ou molécule dans un solide) caractérisé par un opérateur dipôle électrique $\hat{\mathbf{D}}$, il atteint sous l'effet du champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ un régime forcé caractérisé par une matrice densité $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$, et son dipôle prend la valeur moyenne

$$\langle \mathbf{D} \rangle(\mathbf{r}, t) = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{\mathbf{D}}).$$

Dans ce cas, la polarisation au point \mathbf{r} où il y a une densité d'atomes par unité de volume N/V vaut :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{V} \langle \mathbf{D} \rangle(\mathbf{r}, t) \quad (7.2)$$

Sous l'effet d'une excitation sinusoïdale, le régime forcé est périodique. Si le champ électrique est suffisamment faible, on est dans un *régime linéaire* et on peut écrire la polarisation dans une forme analogue à (7.1). On définit ainsi la susceptibilité linéaire complexe telle que :

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (7.3)$$

Pour un milieu transparent $\chi^{(1)}(\omega)$ est réel et on peut en première approximation négliger la dépendance en fréquence

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7.4)$$

Si le milieu n'est pas isotrope, la polarisation diélectrique n'est pas à priori parallèle au champ électrique. La susceptibilité est dans ce cas un tenseur de rang 2 et la relation (7.4) est remplacée par :

$$P_i(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j(\mathbf{r}, t) \quad (7.5)$$

où P_i et E_j sont les composantes cartésiennes des vecteurs \mathbf{P} et \mathbf{E} , avec $i, j \in \{x, y, z\}$.

7.2 Susceptibilité non-linéaire

Dans un système atomique réel, lorsque le champ électrique devient de plus en plus fort, la polarisation induite dans le milieu n'est plus proportionnelle au champ appliqué et on dit que le *régime non-linéaire* est atteint. Ainsi, en négligeant la dispersion (c'est-à-dire la dépendance en fréquence de la susceptibilité électrique), pour un matériau transparent qui a une réponse instantanée, on obtient la généralisation suivante :

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \epsilon_0 \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \epsilon_0 \sum_j \sum_k \sum_l \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \quad (7.6)$$

où P_i est la composante i de la polarisation instantanée, E_i est la composante i du champ électrique et $\chi_{ijk}^{(2)}$ est un tenseur réel de rang 3 (27 composantes) qui caractérise la susceptibilité non-linéaire de deuxième ordre. De même $\chi_{ijkl}^{(3)}$ est un tenseur de rang 4 caractérisant la susceptibilité non-linéaire de troisième ordre [Rosencher 02].

7.2.1 Propagation des champs électromagnétiques scalaires

Considérons maintenant le cas où le matériau est soumis à la superposition de deux champs monochromatiques de fréquences ω_1 et ω_2 . Pour simplifier on va considérer ici le cas d'un champ à une seule composante cartésienne. La généralisation à trois dimensions va être faite au paragraphe suivant. Avec ces précisions prenons le champ total $E(t) = E_1(t) + E_2(t)$ où :

$$E_1(t) = \mathcal{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + c.c., \quad E_2(t) = \mathcal{E}_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. \quad (7.7)$$

La polarisation non-linéaire du second ordre s'écrit alors :

$$P^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \left(\mathcal{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + c.c. + \mathcal{E}_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. \right)^2 \quad (7.8)$$

Cette équation explique de nombreux processus non-linéaires comme par exemple la génération de la seconde harmonique ou encore l'addition de fréquences où l'onde E_1 se mélange avec E_2 pour produire une polarisation à la fréquence $\omega_1 + \omega_2$.

Lorsqu'on se rapproche des résonances du système on ne peut plus négliger la dépendance en fréquence de la susceptibilité ni le déphasage entre la polarisation non-linéaire et le champ électrique, qui se traduit par une composante complexe de la susceptibilité. Ainsi pour l'addition des fréquences on remplacera $\chi^{(2)}$ par la notation $\chi^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2; \omega_1, \omega_2)$. Par

$\chi^{(2)}(-2\omega_1; \omega_1, \omega_1)$	$(\mathcal{E}_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + c.c.)$	doublage de fréquence
$\chi^{(2)}(-2\omega_2; \omega_2, \omega_2)$	$(\mathcal{E}_2^2 e^{-2i\omega_2 t} + c.c.)$	doublage de fréquence
$2\chi^{(2)}(0; \omega_1, -\omega_1)$	$ \mathcal{E}_1 ^2$	redressement optique
$2\chi^{(2)}(0; \omega_2, -\omega_2)$	$ \mathcal{E}_2 ^2$	redressement optique
$2\chi^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2; \omega_1, \omega_2)$	$(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + c.c.)$	addition de fréquences
$2\chi^{(2)}(-\omega_1 + \omega_2; \omega_1, -\omega_2)$	$(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c.)$	différence de fréquences

TABLE 7.1 – Les divers termes pouvant apparaître lorsque deux faisceaux de fréquences ω_1 et ω_2 se propagent dans un milieu non-linéaire de second ordre

convention le premier des trois arguments est toujours égal à l'opposé de la somme des deux autres. Les différents termes contribuant à la polarisation non-linéaire sont reproduits dans le tableau (7.2.1). Lorsqu'il y a dispersion, il suffit d'écrire les équations ci-dessus en notation complexe pour conclure que dans le cas général \mathbf{E} se développe sous forme d'une série d'ondes planes monochromatiques :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \mathbf{e}_l \mathcal{E}_l e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + c.c. \quad (7.9)$$

avec le nombre d'onde

$$k_l = n \frac{\omega_l}{c} \quad (7.10)$$

et

$$\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{k}_l = 0. \quad (7.11)$$

L'indice n dépend alors de la fréquence ω_l . Si le milieu est absorbant ou amplificateur alors $\chi^{(1)}$ et donc k_l comportent une partie imaginaire, ce qui correspond à des ondes atténuées ou amplifiées.

Les milieux non-linéaires sont souvent des cristaux et les symétries jouent un rôle fondamental car elles permettent de savoir a priori que de nombreuses composantes des tenseurs de susceptibilité non-linéaire sont nulles. Prenons l'exemple des milieux centro-symétriques. De tels milieux sont invariants par symétrie par rapport à l'origine ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$). Il est alors clair que les termes de deuxième ordre comme (7.8) sont nuls. On peut donc conclure que dans un milieu centro-symétrique seulement les termes impairs sont différents de zéro. On voit donc que pour avoir des non-linéarités d'ordre 2 importantes il faut soit utiliser un cristal non-centro-symétrique, soit appliquer une contrainte extérieure pour briser cette symétrie. Cela peut être une contrainte mécanique, électrique ou une interface entre deux milieux différents.

7.2.2 Généralisation : champs à plusieurs composantes

D'autres auteurs [Yariv 03] préfèrent écrire la polarisation instantanée P_i sous la forme suivante :

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j + 2 \sum_j \sum_k d_{ijk} E_j E_k + 4 \sum_j \sum_k \sum_l \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots \quad (7.12)$$

Il faut remarquer l'apparition des facteurs 2 et 4 devant les termes quadratiques et cubiques, qui n'étaient pas présents dans la définition (7.6). Les coefficients χ_{ij} , d_{ijk} , χ_{ijkl} sont invariants pour toute combinaison de leurs indices : $\chi_{1233} = \chi_{3213}$.

Considérons maintenant le couplage non linéaire de deux champs optiques ayant les composantes E_j avec $j = X, Y, Z$, le premier de fréquence ω_1 :

$$E_j^{\omega_1}(t) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{E}_j^{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + c.c. \right) \quad \text{pour } j = X, Y, Z \quad (7.13)$$

et le deuxième de fréquence ω_2 :

$$E_k^{\omega_2}(t) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{E}_k^{\omega_2} e^{i\omega_2 t} + c.c. \right) \quad \text{pour } k = X, Y, Z. \quad (7.14)$$

Si le milieu est non linéaire, la présence de ces deux composantes peut déterminer l'apparition des polarisations aux fréquences $n\omega_1 + m\omega_2$, avec n et m des nombres entiers. Si on regarde l'élément de la polarisation de fréquence $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ dans la direction i , alors :

$$P_i^{\omega_3}(t) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{P}_i^{\omega_3} e^{i\omega_3 t} + c.c. \right) \quad \text{pour } i = X, Y, Z, \quad (7.15)$$

et les termes de second ordre de (7.12) :

$$P_i = 2d_{ijk} E_j E_k,$$

on obtient

$$P_i(t) = 2d_{ijk} \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}_j^{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_j^{\omega_2} e^{i\omega_2 t} + c.c. \right) \times \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}_k^{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_k^{\omega_2} e^{i\omega_2 t} + c.c. \right). \quad (7.16)$$

On peut considérer que les termes de la somme des fréquences

$$\begin{aligned} P_i^{\omega_3}(t) &= \frac{1}{2} \left[d_{ijk} \mathcal{E}_j^{\omega_1} \mathcal{E}_k^{\omega_2} e^{i(\omega_1+\omega_2)t} + d_{ikj} \mathcal{E}_k^{\omega_2} \mathcal{E}_j^{\omega_1} e^{i(\omega_2+\omega_1)t} + c.c. \right] \\ &= d_{ijk} \mathcal{E}_j^{\omega_1} \mathcal{E}_k^{\omega_2} e^{i(\omega_1+\omega_2)t} + c.c., \end{aligned} \quad (7.17)$$

ou bien alors

$$\mathcal{P}_i^{\omega_3} = 2d_{ijk} \mathcal{E}_j^{\omega_1} \mathcal{E}_k^{\omega_2}. \quad (7.18)$$

En général d_{ijk} dépend de la fréquence du champ appliqué (dans les milieux dispersifs). Il est ainsi plus pratique de définir les non-linéarités en fonction d'amplitudes complexes et non pas de champs instantanés :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i^{\omega_3=\omega_1+\omega_2} &= 2d_{ijk}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) \mathcal{E}_j^{\omega_1} \mathcal{E}_k^{\omega_2}, \\ \mathcal{P}_i^{\omega_3=\omega_1-\omega_2} &= 2d_{ijk}(-\omega_3, \omega_1, -\omega_2) \mathcal{E}_j^{\omega_1} (\mathcal{E}_k^{\omega_2})^*. \end{aligned}$$

Il faut noter qu'en général

$$\begin{aligned} d_{ijk}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) &\neq d_{ijk}(-\omega_3, \omega_2, \omega_1) \\ d_{ijk}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) &= d_{ikj}(-\omega_3, \omega_2, \omega_1), \end{aligned}$$

mais nous allons nous intéresser surtout aux cristaux transparents aux fréquences des champs appliqués et pour lesquels les composantes du tenseur d_{ijk} ne dépendent pas de la fréquence. On a déjà vu que seulement les cristaux non centro-symétriques ont un tenseur $d_{ijk} \neq 0$. Les coefficients d_{ijk} sont mesurés le plus souvent par l'intermédiaire d'une expérience de génération de la seconde harmonique où $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Dans ce cas ¹,

$$\mathcal{P}_i^{2\omega} = d_{ijk} \mathcal{E}_j^\omega \mathcal{E}_k^\omega. \quad (7.19)$$

Comme on ne peut pas attacher de signification physique au changement des indices j et k , les groupes kj et jk vont être souvent remplacés par les indices contractés :

$$\begin{aligned} XX &= 1, & YZ &= ZY = 4, \\ YY &= 2, & XZ &= ZX = 5, \\ ZZ &= 3, & XY &= YX = 6. \end{aligned}$$

¹Remarque la différence par rapport à la relation (7.18)

Le tenseur contracté résultant (d_{ij}) forme une matrice de 3×6 qui agit sur le tenseur colonne E^2 de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_X \\ \mathcal{P}_Y \\ \mathcal{P}_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_X^2 \\ \mathcal{E}_Y^2 \\ \mathcal{E}_Z^2 \\ 2\mathcal{E}_Z\mathcal{E}_Y \\ 2\mathcal{E}_Z\mathcal{E}_X \\ 2\mathcal{E}_X\mathcal{E}_Y \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

Pour un cristal de type *LGT* ($LiGaTe_2$) qui a une symétrie $\bar{4}2m$ (système orthorhombique), le tenseur d_{ij} est donné par ² :

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

donc les éléments non nuls de la polarisation non-linéaire sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X &= 2 d_{14} \mathcal{E}_Z \mathcal{E}_Y \\ \mathcal{P}_Y &= 2 d_{14} \mathcal{E}_Z \mathcal{E}_X \\ \mathcal{P}_Z &= 2 d_{36} \mathcal{E}_X \mathcal{E}_Y. \end{aligned} \quad (7.22)$$

7.3 Conversion de fréquences optiques

L'un des succès les plus impressionnants de l'optique ondulatoire est de pouvoir décrire de façon cohérente et compacte les interactions entre une onde électromagnétique et un milieu matériel (gaz, solide, etc.). En effet, le couplage des équations de Maxwell, qui décrivent le comportement propagatif de la lumière, avec les équations de Laplace-Lorentz, qui décrivent les termes sources de la lumière, permet de rendre compte des effets de réfraction, diffusion, diffraction de la lumière par des milieux denses. C'est un fait remarquable qu'une théorie soit capable de décrire une interaction aussi complexe, d'une onde électromagnétique avec un ensemble d'atomes, à travers l'introduction d'un simple indice optique n_{op} .

En optique (comme dans le reste de la physique), un système soumis à une excitation sinusoïdale suffisamment intense sort du régime de la réponse linéaire : les non-linéarités entraînent des conversions de fréquences comme la génération de la seconde harmonique ou l'amplification paramétrique optique.

On se pose alors une question fondamentale : "Quelle intensité faut-il atteindre pour voir apparaître des effets non-linéaires ?" On pourrait penser qu'une échelle naturelle est le champ électrique du noyau à l'emplacement d'un électron atomique : dans le cas de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental, ce champ vaut environ $e/4\pi\epsilon_0 a_0^2$, soit $3 \times 10^{11} V/m$ (e est la charge de l'électron, et a_0 le rayon de Bohr, de l'ordre de $5 \times 10^{-11} m$). En fait, l'expérience montre que dans la zone de transparence d'un matériau électrique tel que le quartz, il suffit d'un champ de $10^7 V/m$ (correspondant à une intensité lumineuse de $2,5 kW/cm^2$) pour voir les effets non-linéaires se manifester de façon perturbative. Effectivement, très vite après l'invention du premier maser [Collins 60], la génération de la seconde harmonique a été mise en évidence par Franken et al, lors de la propagation d'un faisceau de $694nm$ dans un cristal de quartz [Franken 61]. Même si l'éditeur de PRL Si on s'approche des résonances électroniques, des intensités encore plus faibles (de l'ordre du mW/cm^2) font entrer dans le régime de saturation qui est un régime non-linéaire.

²Pour un cristal *LGT*, pour des longueurs d'onde $\lambda \in (2.5, 12)\mu m$ la composante $d_{36}^{2\omega}$ prend des valeurs de l'ordre $43 \pm 10 pm/V$.

7.3.1 Principe de l'amplificateur paramétrique optique (OPA)

Considérons maintenant l'interaction non-linéaire d'un faisceau laser intense de fréquence ω_p (*onde de pompe*) au sein d'un cristal non-centro-symétrique de forte susceptibilité non linéaire d'ordre deux. Si le cristal est transparent (pas de résonances électroniques) pour les fréquences du champ appliqué, alors, dans la section 7.2.2 nous avons vu que la polarisation macroscopique non-linéaire (\mathbf{P}_{NL}) induite dans le milieu est une fonction quadratique du champ électromagnétique

$$\mathbf{P}_{NL} = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \chi^{(2)}(t - t_1, t - t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2). \quad (7.23)$$

La susceptibilité d'ordre deux ($\chi^{(2)}$) caractérise le milieu amplificateur et est habituellement remplacée par le tenseur d :

$$\chi_{ijk} = 2d_{ijk}.$$

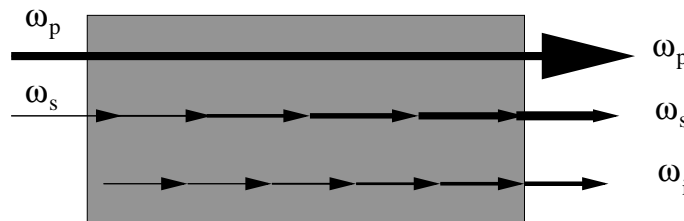


FIGURE 7.1 – Dans l'amplification paramétrique, une onde signal incidente ω_s est amplifiée au cours de sa propagation dans un milieu non-linéaire par interaction non-linéaire quadratique avec une onde de pompe ω_p . La conservation de l'énergie des photons impose la création d'une onde complémentaire ω_i

Ce processus non linéaire permet entre autres³, la description de l'amplification paramétrique d'un signal de fréquence ω_s (*onde signal*), à partir d'un champ de pompe intense de fréquence $\omega_p > \omega_s$ ⁴. Cette amplification est accompagnée par la génération d'une onde complémentaire de pulsation ω_i (appelée *onde complémentaire* ou *idler* en anglais) qui doit vérifier certaines conditions de conservation. Tout d'abord, la réalisation de cette amplification implique la condition de résonance en fréquence :

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i. \quad (7.24)$$

Cette condition traduit la loi de conservation de l'énergie lors de la conversion d'un photon pompe en deux photons de plus faible énergie (photon signal et photon idler).

Le nombre d'onde et la fréquence d'un faisceau polarisé extraordinairement se propageant dans un cristal non-centro-symétrique dépendent de la valeur de l'angle θ fait par le vecteur d'onde avec l'axe optique du milieu. Pour un pompage laser monochromatique à fréquence ω_p fixée, si on change l'orientation du cristal par rapport au faisceau incident, les fréquences du signal et de l'idler vont s'adapter pour compenser la variation de l'indice extraordinaire $n(\theta)$. Cette propriété fait de l'OPA une source cohérente accordable en fréquence.

³La non-linéarité d'ordre deux $\chi^{(2)}$ est responsable de la :

- Génération de la Seconde Harmonique (GSH) ou le doublement de fréquence
- Génération des fréquences somme et différence
- Amplification Paramétrique Optique (OPA)

⁴On ne peut pas amplifier un signal de pulsation ω_s à partir d'une pompe de pulsation inférieure

La conservation de la quantité de mouvement totale des photons $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ se traduit par une condition de résonance spatiale des trois faisceaux lumineux :

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i \quad (7.25)$$

Physiquement, lorsque la condition (7.25) est satisfaite, les faisceaux en interaction forment des interférences spatiales constructives, optimisant le processus d'amplification paramétrique. Cette résonance spatiale est recherchée expérimentalement afin de réaliser une conversion d'énergie optimale de la pompe vers le signal. Dans une géométrie colinéaire (les trois ondes se propagent dans la même direction), la relation (7.25) implique :

$$\omega_p n(\omega_p) = \omega_s n(\omega_s) + \omega_i n(\omega_i) \quad (7.26)$$

Dans les milieux non-linéaires, les vitesses de phase des trois ondes sont différentes, car leurs fréquences sont différentes. Cette propriété générale des milieux est la dispersion. Tenant compte de la conservation de l'énergie (7.24), la dernière égalité (7.26) semble irréalisable, dans la région de transparence optique du milieu amplificateur (région de dispersion normale : $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0$), puisque $n(\omega_p) \neq n(\omega_s) \neq n(\omega_i)$. Le régime de dispersion anormale offre un rendement trop faible pour être utilisé, à cause de la forte absorption énergétique.

En réalité, dans certains matériaux, appelés biréfringents, ou anisotropes, l'indice de réfraction dépend également de la polarisation. Grâce à ce degré de liberté supplémentaire, il est possible de réaliser l'accord de phase entre des ondes de fréquences différentes, à condition que leurs polarisations soient judicieusement choisies. Dans les milieux non-linéaires isotropes en revanche, ce type d'accord de phase n'est pas réalisable : c'est la technique du quasi-accord de phase qui est alors utilisée⁵. Par exemple, pour la génération de la seconde harmonique (GSH), la condition d'accord de phase (7.26) est :

$$n(2\omega) = n(\omega), \quad (7.27)$$

condition pour laquelle la longueur maximale de conversion (ou longueur de cohérence l_c définie dans l'Annexe B) devient infinie. Nous allons montrer par la suite comment il est possible de réaliser la condition (7.27) dans les milieux cristallins qui, par leur structure cristallographique particulière, présentent une anisotropie de leurs propriétés optiques. Nous allons nous intéresser qu'aux cristaux uniaxiaux, c'est-à-dire présentant un axe de symétrie autour duquel le cristal reste inchangé par toute opération élémentaire de symétrie.

7.3.2 Milieux uniaxes

Dans le cas d'un matériau doté d'un axe de symétrie (OZ) d'ordre supérieur à deux, on peut montrer que les indices de réfraction selon les axes propres, n_X et n_Y , sont nécessairement égaux. Il existe donc deux indices de réfraction pour les axes propres du milieu : l'indice ordinaire $n_o = n_X = n_Y$ et l'indice extraordinaire $n_e = n_Z$. L'axe (OZ) est alors appelé *axe optique* du matériau. Dans ce cas, la surface des indices est constituée d'une sphère d'indice n_o et d'un ellipsoïde de révolution d'indice $n(\theta)$. θ est ici l'angle entre l'axe optique et le vecteur d'onde et $n(\theta)$ est donné par la relation :

$$n(\theta) = \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.28)$$

⁵Appelées aussi QPM (Quasi-Phase-Match) techniques. Celles-ci ont été suggérées dès l'année 1962 par Armstrong et al. et ont été réalisées vers les années 1990 par Magel et al [Armstrong 62], [Magel 90]. Des désaccords de phase importants ont été compensés par une variation périodique (de période L) des coefficients non linéaires réalisée de manière artificielle. Le désaccord des vecteurs d'onde est donné par $k_1 + k_2 = k_3 - 2\pi/L$. Aujourd'hui, les techniques QPM sont considérées comme étant les plus prometteuses. Elles permettent un accord de phase avec les trois ondes ordinaires (s, p et i), éliminant ainsi le phénomène de walk-off et donc l'utilisation des cristaux non biréfringents devient possible.

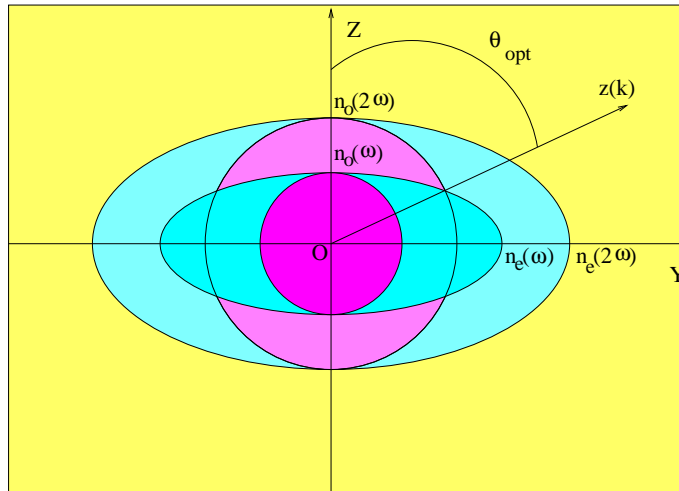


FIGURE 7.2 – Variations des indices de réfractons ordinaires et extraordinaires dans un cristal biréfringent positif dans le plan principal (ZOz) pour deux ondes incidentes de fréquences ω et 2ω

Un faisceau lumineux pénétrant ce milieu, sous un angle θ par rapport à l'axe optique du cristal (OZ), est alors réfracté dans deux directions et ce phénomène porte le nom de *biréfringence*. L'onde se propageant selon la première direction voit l'indice de réfraction n_o - elle est donc appelée onde ordinaire, tandis que la seconde voit l'indice de réfraction $n(\theta)$ et est appelée onde extraordinaire. Le cristal est dit

- *positif* quand $n_e > n_o$,
- *négatif* quand $n_e < n_o$.

Dans le cas de l'onde ordinaire, \mathbf{E} et \mathbf{D} sont polarisés perpendiculairement au plan $\{\mathbf{k}, Z\}$. A l'inverse, dans le cas de l'onde extraordinaire, \mathbf{E} et \mathbf{D} sont dans ce plan. De plus, il ne sont alors pas exactement colinéaires mais forment un petit angle ρ appelé angle de double réfraction (*walk-off* en anglais) dont la valeur est déterminée par la relation :

$$\tan \rho = \frac{n^2(\theta)}{2} \sin(2\theta) \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right).$$

Dans ce cas, on a donc $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$. De plus, de même que \mathbf{E} et \mathbf{D} forment un angle ρ , le vecteur d'onde \mathbf{k} (perpendiculaire à \mathbf{D}) et le vecteur de Poynting \mathcal{P} (perpendiculaire à \mathbf{E}) forment eux-aussi un angle ρ : le faisceau lumineux ne se propagera pas perpendiculairement aux plans d'ondes. Pour l'instant on s'arrêtera ici avec l'énumération des propriétés des milieux biréfringents car une description plus détaillée de la propagation d'un faisceau au sein d'un milieu uniaxe sera faite au chapitre 8.

7.3.3 Technique d'accord de phase basée sur la biréfringence

L'idée de l'accord de phase par biréfringence repose sur le fait que, grâce à l'anisotropie des milieux cristallins, il est possible dans certains cas, de satisfaire l'égalité entre l'indice $n(\omega)$ dans une direction propre et l'indice $n(2\omega)$ dans une autre. Plus précisément, comme pour toute direction on a $n(2\omega, \theta) > n(\omega, \theta)$, pour la condition (7.27) on ne peut espérer dans un cristal uniaxe positif que

$$n_o(2\omega) = n(\omega, \theta_{opt}). \quad (7.29)$$

L'accord de phase (7.29) est obtenu pour une valeur précise de l'angle incident θ_{opt} . Dans l'Annexe B nous verrons comment on peut déterminer la valeur de cet angle pour la génération de la seconde harmonique.

Dans un cristal biréfringent positif, il y a deux types d'accord de phase possibles pour l'interaction de trois ondes de fréquences ω_p , ω_s et ω_i [Ward 01] :

a) Accord de phase de *type I* :

$$\mathbf{k}_p^o = \mathbf{k}_s^e(\theta_{opt}) + \mathbf{k}_i^e(\theta_{opt})$$

b) Accord de phase de *type II* :

$$\mathbf{k}_p^o = \mathbf{k}_s^e(\theta_{opt}) + \mathbf{k}_i^o \quad \text{ou bien} \quad \mathbf{k}_p^o = \mathbf{k}_s^o + \mathbf{k}_i^e(\theta_{opt})$$

Pour que le processus d'amplification paramétrique soit efficace pour des faibles puissances de pompage (de l'ordre mW pour un laser de pompe continu), on place le milieu amplificateur dans un résonateur optique. La cavité optique peut être simplement résonnante (la cavité est alors résonnante soit pour le signal, soit pour l'idler), doublement résonnante (celles ci sont très instables) ou triplement résonnante (pour les trois signaux : pompe, signal et idler) [Shen 84].

Équations de propagation dans le cristal biréfringent

Sommaire

8.1	Équations de conservation du champ électrique	99
8.2	Équations de conservation du champ magnétique	101
8.3	Modes propres de propagation dans un cristal biréfringent . .	101
8.4	Effet non-linéaire de la biréfringence	106
8.4.1	Interaction à trois ondes non-dégénérée	108
8.5	Interaction à trois ondes dégénérée	108
8.5.1	Changement de variables	109

8.1 Équations de conservation du champ électrique

Il faut introduire deux systèmes de coordonnées orthonormées pour décrire l'évolution spatiale du champ électrique au sein d'un cristal non-linéaire ($\chi^{(2)}$) biréfringent. Le premier, noté (X, Y, Z) , sera lié au cristal biréfringent, homogène, d'axe optique (OZ) . Le deuxième quant à lui, noté (x, y, z) , sera lié à la propagation de l'onde. L'axe (Oz) sera orienté selon la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} qui définit avec l'axe optique *le plan principal* (zOZ) . La polarisation extraordinaire est obtenue par la projection de l'axe optique sur le plan orthogonal à la direction de propagation de l'onde. Cette projection définit l'axe (Ox) , de vecteur unitaire \mathbf{e} , qui appartient au plan principal. L'axe (Oy) , de vecteur unitaire \mathbf{o} , est orienté selon la composante ordinaire de la polarisation du champ. Il est perpendiculaire au plan principal et confondu avec l'axe (OX) .

La propagation du champ électromagnétique à la traversée du cristal est gouvernée par les équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (8.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (8.1b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (8.1c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D} = \sigma \mathbf{E} + \partial_t (\vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL}) \quad (8.1d)$$

σ et \mathbf{j} sont respectivement la conductivité du milieu et la densité de courant due aux charges libres. L'excitation magnétique \mathbf{H} est la réponse du milieu à l'action du champ magnétique

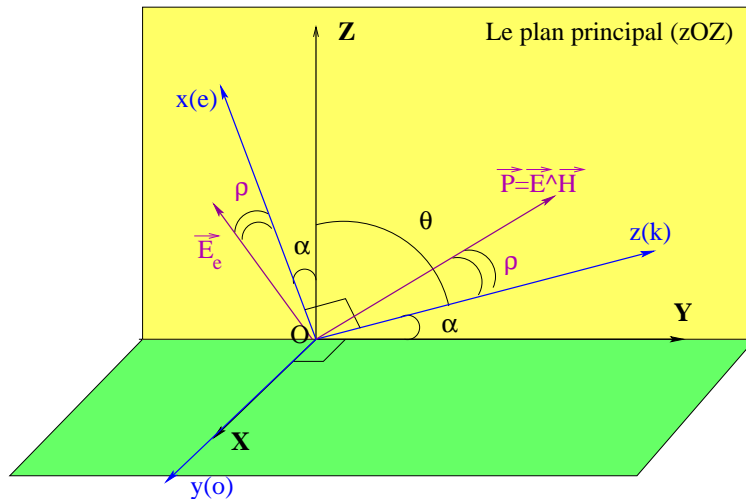


FIGURE 8.1 – Le système de coordonnées $(X, Y, Z) \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est un repère orthonormé lié au cristal et $(x, y, z) \equiv (\mathbf{e}, \mathbf{o}, \mathbf{k})$ est un autre repère lié à la propagation du champ électrique. Pour un champ de polarisation extraordinaire, le rayon lumineux (direction de propagation de l'énergie \mathbf{P}) et l'onde (direction de propagation de la phase \mathbf{k}) forment un angle ρ , dit angle de walk-off.

et la polarisation \mathbf{P}_{NL} prend en compte la réponse non-linéaire du milieu (7.23). Pour les fréquences optiques considérées, le matériau est non-magnétique (on considère que $\mu = \mu_0$, où μ_0 est la perméabilité du vide). Le milieu étant anisotrope, la réponse linéaire de la matière au champ appliqué est proportionnelle à la permittivité du milieu $\vec{\varepsilon}$, qui dans le système d'axes orthonormés lié au cristal (axes principaux), est un tenseur d'ordre 2 de forme diagonale :

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_X & & \\ & \varepsilon_Y & \\ & & \varepsilon_Z \end{pmatrix}_{(X,Y,Z)} = \varepsilon_0 \vec{\varepsilon}_r = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & & \\ & n_o^2 & \\ & & n_e^2 \end{pmatrix}_{(X,Y,Z)} \quad (8.2)$$

Nous avons vu dans la section 7.3.2 que pour un cristal uniaxe, les deux permittivités principales (ε_X et ε_Y) du plan transverse à l'axe optique sont égales.

À partir des équations de Maxwell (8.1), la polarisation non-linéaire induite étant définie par (7.23), il vient :

$$\mathbf{rot rot E} = \mathbf{grad div E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0(\sigma \partial_t \mathbf{E} + \partial_t^2 \mathbf{D}) \quad (8.3)$$

Dans le repère du cristal, la divergence du champ électrique s'écrit, en utilisant (8.1a) :

$$\mathbf{div E} = \left(1 - \frac{n_e^2}{n_o^2}\right) \partial_Z E_Z - \frac{1}{\varepsilon_0 n_o^2} \mathbf{div P}_{NL} \quad (8.4)$$

On peut donc écrire l'équation non-linéaire d'évolution spatio-temporelle du champ électrique sous la forme d'une équation d'onde modifiée :

$$\Delta \mathbf{E} - (1 - \gamma^2) \mathbf{grad}(\partial_Z E_Z) - \mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 (\vec{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E}) + \left(\frac{1}{\varepsilon_0 n_o^2} \mathbf{grad div} - \mu_0 \partial_t^2\right) \mathbf{P}_{NL} = \vec{0} \quad (8.5)$$

où c est la vitesse de la lumière définie par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{\omega n(\omega)}{k}$$

Le deuxième terme de l'équation (8.5) traduit la dérive spatiale de l'énergie du champ électrique due à la contribution linéaire de la biréfringence. La dérive ∂_Z et la présence de la composante du champ électrique E_Z suivant l'axe principal du cristal ôtent à l'équation (8.5) sa propriété d'invariance par rapport à un système de coordonnées.

L'existence de deux directions de propagation de l'énergie des faisceaux ordinaire et extraordinaire réduit le recouvrement entre les faisceaux lors de l'interaction à trois ondes. C'est ce qu'on appelle l'effet de *walk-off*.

Les opérateurs laplacien ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$), gradient et divergence se rapportent au trois coordonnées de l'espace de n'importe quel des deux repères. On rappelle que ces opérateurs sont invariants par changement de système de coordonnées. Le coefficient γ traduit le rapport d'indices extraordinaire et ordinaire du cristal biréfringent, considéré uniforme (ε_X , ε_Y et ε_Z ne dépendent pas de la position) :

$$\gamma^2 = \frac{\varepsilon_Z}{\varepsilon_X} = \frac{n_e^2}{n_o^2}$$

Les deux indices de réfraction du cristal étant très proches, la quantité $1 - \gamma^2$ est proportionnelle à la différence ($n_e - n_o$) entre les deux indices (il va jouer le rôle d'un petit paramètre ϵ en posant $\gamma = 1 + \mathcal{O}(\epsilon)$).

8.2 Équations de conservation du champ magnétique

Pour déterminer l'équation de Helmholtz modifiée pour le champ magnétique on va procéder d'une manière similaire à celle utilisée pour le champ électrique (8.5). À partir des équations de Maxwell (8.1a, 8.1b, 8.1c, 8.1d) et en utilisant les relations connues des opérateurs **grad** et **rot** on trouve pour le champ magnétique l'expression suivante :

$$\mathbf{rot rot B} = -\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \sigma (\mathbf{rot E}) + \mu_0 \partial_t \mathbf{rot} \left(\vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL} \right) \quad (8.6)$$

Dans le système d'axes principaux le laplacien du champ \mathbf{B} s'écrit :

$$-\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{B} + \mu_0 \partial_t [\varepsilon_X (\mathbf{rot E}) - (\varepsilon_X - \varepsilon_Z) \mathbf{rot E}_Z] + \mu_0 \partial_t (\mathbf{rot P}_{NL}),$$

et donc

$$-\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{B} - \frac{n_o^2}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} - \frac{n_o^2 - n_e^2}{c^2} \partial_t (\mathbf{rot E}_Z) + \mu_0 \partial_t (\mathbf{rot P}_{NL}). \quad (8.7)$$

On arrive ainsi à trouver l'équation non linéaire d'évolution spatio-temporelle du champ magnétique :

$$\Delta \mathbf{B} - \mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{B} - \frac{n_o^2}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} - \frac{n_o^2 - n_e^2}{c^2} \partial_t (\mathbf{rot E}_Z) + \mu_0 \partial_t (\mathbf{rot P}_{NL}) = \mathbf{0} \quad (8.8)$$

8.3 Modes propres de propagation dans un cristal biréfringent

Pour caractériser la propagation du champ électrique en fonction de l'indice de réfraction $n(\theta)$ du milieu, il est utile de chercher des solutions de la partie linéaire de l'équation (8.5) sous la forme d'ondes planes longitudinales. En pratique, on n'a jamais affaire à une onde plane mais à un faisceau lumineux d'extension transverse finie. L'onde plane est l'équivalent de l'onde de de Broglie en mécanique quantique, qui n'a pas de réalité physique, tandis qu'un

véritable faisceau lumineux est l'équivalent d'un paquet d'ondes. Néanmoins, un faisceau lumineux est souvent assez proche d'une onde plane, et il sera donc intéressant d'écrire le champ électrique associé au faisceau sous la forme du produit d'une enveloppe $\mathcal{E}(x, y, z)$ et d'une porteuse $e^{(ikz)}$. De plus, dans l'approximation paraxiale, nous allons travailler dans la limite où $\mathcal{E}(x, y, z)$ varie lentement selon z à l'échelle de la longueur d'onde. Cela nous permettra de négliger la dérivée seconde de l'enveloppe :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} \ll \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}.$$

Considérons maintenant un champ \mathbf{E} qui se propage dans la direction (Oz) et qui a les composantes (ξ_X, ξ_Y, ξ_Z) selon les axes principaux du cristal :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \xi_X \\ \xi_Y \\ \xi_Z \end{pmatrix} e^{-i(\omega t - kz)} \quad (8.9)$$

Si on introduit (8.9) dans l'équation (8.5) linéarisée avec conductivité électrique nulle, on arrive à un problème aux valeurs propres dans le référentiel du cristal (X, Y, Z) :

$$\begin{pmatrix} n_o^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 - n^2 & (1 - \gamma^2) n^2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 & 0 & (1 - \gamma^2) n^2 \cos^2 \theta + n_e^2 - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_X \\ \xi_Y \\ \xi_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

Les valeurs propres de ce système sont :

$$n = n_o \quad \text{et} \quad n = \frac{n_e}{\beta(\theta)} = n(\theta)$$

où on a posé :

$$\beta^2(\theta) = \gamma^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \quad (8.11)$$

La recherche des vecteurs propres associés aboutit à deux types de solutions d'ondes planes qui sont exprimées ici dans les deux repères. Pour l'onde ordinaire d'indice n_o on a¹ :

$$\mathbf{E}^o = \begin{pmatrix} \xi_X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(X,Y,Z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_y \\ 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}, \quad (8.12)$$

et pour l'onde extraordinaire :

$$\mathbf{E}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_Y \\ -\frac{1}{\gamma^2} \tan \theta \xi_Y \end{pmatrix}_{(X,Y,Z)} = \begin{pmatrix} \xi_x \\ 0 \\ \frac{\tau}{\beta^2} \xi_x \end{pmatrix}_{(x,y,z)}, \quad (8.13)$$

où on a introduit le paramètre τ défini par :

$$\tau(\theta) = (\gamma^2 - 1) \sin \theta \cos \theta.$$

On retrouve ici les propriétés classiques de la double réfraction [Fleck 83] :

- l'onde ordinaire est polarisée perpendiculairement au plan principal selon l'axe (Oy) du repère lié à la propagation,

¹Précision sur le calcul : il faut tenir compte du fait que $\mathbf{div} \mathbf{E} = 0$, pour une onde ordinaire, pour trouver le vecteur propre associé à la valeur propre $n = n_o$

- l'onde extraordinaire a deux composantes proportionnelles dans le plan principal : le champ électrique d'une onde extraordinaire est alors polarisé dans une direction faisant l'angle ρ avec l'axe (Ox) , comme le montre la Fig. 8.1. Cet angle (dit de *walk-off*) est responsable de la dérive des vecteurs de Poynting transportant l'énergie ordinaire ($\mathbf{P}^o \parallel \mathbf{k}$) et de l'onde extraordinaire ($\widehat{\mathbf{P}^e}, \mathbf{k} = \rho$).

La dynamique spatio-temporelle est obtenue à partir de l'équation (8.5) en tenant compte des polarisations linéaires déterminées. Le champ électrique total pour une interaction à trois ondes est exprimé par la superposition de ces trois champs avec les polarisations, les fréquences et les nombres d'onde appropriés :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=p,s,i} [\mathbf{p}_j \xi_j(x, y, z, t) e^{-i(\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})} + c.c.] \quad (8.14)$$

où \mathbf{p}_j est un vecteur unitaire donnant la direction de polarisation du faisceau j qui peut être la pompe, le signal ou l'idler.

Si dans un premier temps on s'intéresse à une onde polarisée ordinairement, de pulsation ω_p et nombre d'onde k_p qui se propage dans le cristal dans la direction (Oz) ($n(\omega_p) = n_o(\omega_p)$) et ($\mathbf{p}_p = \mathbf{o}$), alors sa propagation est entièrement décrite par l'équation (8.5). Pour un champ :

$$\mathbf{E}_p^o = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_y \\ 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} e^{-i(\omega_p t - k_p z)} = \begin{pmatrix} \xi_X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(X,Y,Z)} e^{-i(\omega_p t - k_p z)}$$

la relation de dispersion est :

$$\boxed{k_p c = \omega_p n_o(\omega_p)}$$

La composante du champ électrique le long de l'axe optique du cristal étant nulle pour une onde ordinaire ($\xi_Z = 0$), alors la partie linéaire de l'équation de propagation (8.5) est :

$$\mathcal{J}_p \xi_y + (NL)_y = 0 \quad \iff \quad \mathcal{J}_p \xi_X + (NL)_X = 0. \quad (8.15)$$

L'opérateur \mathcal{J}_p est donné par :

$$\mathcal{J}_p = \Delta_{\perp} + \partial_z^2 + 2ik_p \partial_z - k_p^2 - \mu_0 \sigma (\partial_t - i\omega_p) - \frac{1}{c^2} n_o^2(\omega_p) (\partial_t^2 - 2i\omega_p \partial_t - \omega_p^2), \quad (8.16)$$

où $\Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Contrairement au faisceau ordinaire, un champ extraordinaire a des composantes ξ_Y et ξ_Z non nulles dans le plan principal, donc il comporte une composante ξ_x dans le référentiel (x, y, z) du laboratoire, mais aussi une petite composante le long de la direction de propagation ξ_z due à la biréfringence du cristal. La composante ξ_z sera négligée dans les calculs car $|\xi_z| \ll |\xi_x|$ (pour le cristal LGT $\xi_z/\xi_x \simeq 3.5\%$) mais il ne faut pas oublier que cela correspond à des amplitudes comparables ξ_Y, ξ_Z dans le référentiel du cristal (pour un cristal LGT $\xi_Z/\xi_Y \simeq 58.3\%$). L'enveloppe lentement variable ξ_x peut être considérée, dans ce cas, suffisante pour décrire l'évolution du champ polarisé extraordinairement.

Pour un champ de fréquence ω_s et nombre d'onde k_s , polarisé extraordinairement et qui a les composantes suivantes :

$$\mathbf{E}_s^e = \begin{pmatrix} \xi_x \\ 0 \\ \xi_z \end{pmatrix}_{(x,y,z)} e^{-i(\omega_s t - k_s z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_Y \\ \xi_Z \end{pmatrix}_{(X,Y,Z)} e^{-i(\omega_s t - k_s z)},$$

la relation de dispersion est :

$$k_s c = \omega_s n(\omega_s, \theta) = \omega_s \frac{n_e(\omega_s)}{\beta(\theta)}.$$

On rappelle les relations suivantes :

$$\xi_Z \stackrel{(8.13)}{\cong} -\frac{1}{\gamma^2} \tan \theta \xi_Y \quad \text{et} \quad (8.17)$$

$$\xi_z \stackrel{(8.13)}{\cong} \frac{\tau}{\beta^2} \xi_x \ll \xi_x. \quad (8.18)$$

$$\text{Si } \xi_z \equiv 0 \quad \text{alors } \xi_Z \cong -\tan \theta \xi_Y. \quad (8.19)$$

La partie linéaire de l'équation (8.5) pour un signal extraordinaire ($\mathbf{p}_s = \mathbf{e}$ et $n = n(\theta)$) devient :

$$\Delta E_Y - (1 - \gamma^2) \partial_Y (\partial_Z E_Z) - \mu_0 \sigma \partial_t E_Y - \frac{n_o^2(\omega_s)}{c^2} \partial_t^2 E_Y + (NL)_Y = 0$$

$$\Delta E_Z - (1 - \gamma^2) \partial_Z (\partial_Z E_Z) - \mu_0 \sigma \partial_t E_Z - \frac{n_e^2(\omega_s)}{c^2} \partial_t^2 E_Z + (NL)_Z = 0.$$

Sachant que $E_Y = -E_x \cos \theta + E_z \sin \theta$ et $E_Z = E_x \sin \theta + E_z \cos \theta$ (voir Annexe C pour plus de détails) alors on trouve :

$$\left\{ \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} \tan \theta \left[-\frac{1}{2} \sin(2\theta) \partial_x^2 + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \partial_z^2 - \cos(2\theta) \partial_x \partial_z \right] - \mu_0 \sigma \partial_t - \frac{n_o^2(\omega_s)}{c^2} \partial_t^2 \right\} (-E_x \cos \theta + E_z \sin \theta) + (NL)_Y = 0$$

$$\left\{ \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - (1 - \gamma^2) \left[\sin^2 \theta \partial_x^2 + \cos^2 \theta \partial_z^2 + \sin(2\theta) \partial_x \partial_z \right] - \mu_0 \sigma \partial_t - \frac{n_e^2(\omega_s)}{c^2} \partial_t^2 \right\} (E_x \sin \theta + E_z \cos \theta) + (NL)_Z = 0$$

Et on arrive finalement aux équations pour les enveloppes lentement variables (ξ_x, ξ_z) ou (ξ_Y, ξ_Z) :

$$\begin{cases} -\cos \theta (\mathcal{L}_s \xi_x + (NL)_x) + \sin \theta (\mathcal{L}_s \xi_z + (NL)_z) = 0 \\ \sin \theta (\mathcal{T}_s \xi_x + (NL)_x) + \cos \theta (\mathcal{T}_s \xi_z + (NL)_z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{L}_s \xi_Y + (NL)_Y = 0 \\ \mathcal{T}_s \xi_Z + (NL)_Z = 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

ou on a introduit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s = & \partial_x^2 \left(1 + \frac{\tau}{\gamma^2} \tan \theta \right) + \partial_y^2 + (\partial_z^2 + 2ik_s \partial_z - k_s^2) \left(1 - \frac{\tau}{\gamma^2} \tan \theta \right) + \\ & + \frac{2\tau \tan \theta}{\gamma^2 \tan(2\theta)} (\partial_x \partial_z + ik_s \partial_x) - \mu_0 \sigma (\partial_t - i\omega_s) - \frac{n_o^2(\omega_s)}{c^2} (\partial_t^2 - 2i\omega_s \partial_t - \omega_s^2) \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_s = & \partial_x^2 (1 + \tau \tan \theta) + \partial_y^2 + \beta^2 (\partial_z^2 + 2ik_s \partial_z - k_s^2) + 2\tau (\partial_x \partial_z + ik_s \partial_x) - \\ & - \mu_0 \sigma (\partial_t - i\omega_s) - \frac{n_e^2(\omega_s)}{c^2} (\partial_t^2 - 2i\omega_s \partial_t - \omega_s^2) \end{aligned} \quad (8.22)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} k_p^2 &= \frac{\omega_p^2 n_o^2(\omega_p)}{c^2}, \\ k_s^2 &= \frac{\omega_s^2 \gamma^2 n_o^2(\omega_s)}{c^2 \beta^2} \quad \text{et} \\ \beta^2 &- \gamma^2 + \tau \tan \theta = 0 \end{aligned}$$

et travaillant dans *l'approximation paraxiale*² qui reste valable tant que :

$$\begin{aligned} |\partial_z \xi| &\ll k |\xi| \\ |\partial_t \xi| &\ll \omega |\xi| \\ |\partial_z^2 \xi| &\ll k |\partial_z \xi| \\ |\partial_x \partial_z \xi| &\ll k |\partial_x \xi| \\ |\partial_t^2 \xi| &\ll \omega |\partial_t \xi| \end{aligned} \quad (8.23)$$

les opérateurs \mathcal{J}_p (8.16), \mathcal{L}_s (8.21) et \mathcal{T}_s (8.22) s'écrivent alors comme suit :

$$\mathcal{J}_p = \partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik_p \left(\partial_z + \frac{k_p}{\omega_p} \partial_t \right) + i\mu_0 \sigma \omega_p \quad (8.24)$$

$$\mathcal{L}_s = \left(1 + \frac{\tau}{\gamma^2} \tan \theta \right) \partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik_s \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left(\partial_z + \frac{k_s}{\omega_s} \partial_t \right) + 2ik_s \frac{\tau \tan \theta}{\gamma^2 \tan(2\theta)} \partial_x + i\mu_0 \sigma \omega_s \quad (8.25)$$

$$\mathcal{T}_s = \eta^2 \partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik_s \beta^2 \left(\partial_z + \frac{k_s}{\omega_s} \partial_t \right) + 2ik_s \tau \partial_x + i\mu_0 \sigma \omega_s. \quad (8.26)$$

On a posé $\eta^2(\theta)$ par analogie avec (8.11) :

$$\eta^2(\theta) = \cos^2 \theta + \gamma^2 \sin^2 \theta. \quad (8.27)$$

On peut déterminer de façon similaire les opérateurs \mathcal{L}_i et \mathcal{T}_i nécessaires pour décrire l'évolution spatio-temporelle d'un idler (\mathbf{E}_i^e) de pulsation ω_i et nombre d'onde k_i qui est lui aussi polarisé extraordinairement (pour un accord de phase de type *I*).

$$\mathcal{L}_i = \left(1 + \frac{\tau}{\gamma^2} \tan \theta \right) \partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik_i \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left(\partial_z + \frac{k_i}{\omega_i} \partial_t \right) + 2ik_i \frac{\tau \tan \theta}{\gamma^2 \tan(2\theta)} \partial_x + i\mu_0 \sigma \omega_i \quad (8.28)$$

$$\mathcal{T}_i = \eta^2 \partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik_i \beta^2 \left(\partial_z + \frac{k_i}{\omega_i} \partial_t \right) + 2ik_i \tau \partial_x + i\mu_0 \sigma \omega_i. \quad (8.29)$$

La relation de dispersion pour l'idler extraordinaire est :

$$\boxed{k_i c = \omega_i n(\omega_i, \theta) = \omega_i \frac{n_e(\omega_i)}{\beta(\theta)}}.$$

Donc la propagation linéaire, pour un champ électrique (8.14) dont les trois composantes, se propageant dans un cristal biréfringent, sont dans un accord de phase de type *I*, est décrite par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_p \xi_X^p + (NL)_X^p &= 0 \\ \begin{cases} \mathcal{L}_s \xi_Y^s + (NL)_Y^s = 0 \\ \mathcal{T}_s \xi_Z^s + (NL)_Z^s = 0 \end{cases} & \quad (8.30) \\ \begin{cases} \mathcal{L}_i \xi_Y^i + (NL)_Y^i = 0 \\ \mathcal{T}_i \xi_Z^i + (NL)_Z^i = 0 \end{cases} & \end{aligned}$$

²On fait l'hypothèse que l'amplitude du champ électrique varie lentement par rapport au nombre d'onde optique (approximation d'enveloppe lentement variable).

8.4 Effet non-linéaire de la biréfringence

Le système (8.30) décrit la propagation dans la limite linéaire d'un champ électrique dans un cristal biréfringent quelconque ayant une forte non-linéarité de type $\chi^{(2)}$. Dans cette section nous allons prendre en compte les effets non-linéaires de l'interaction faisceau-cristal, c'est-à-dire que nous allons exprimer les non-linéarités dominantes de type quadratique définies par (7.23). Plusieurs approximations seront faites pour aboutir au système non-linéaire. D'abord, dans l'équation (8.5) le terme suivant peut être négligé :

$$\text{grad div } \mathbf{P}_{NL} \approx 0$$

Ensuite, il faut ajouter au système (8.30) les contributions non-linéaires suivantes pour la pompe :

$$\left(-\mu_0 \partial_t^2 \mathbf{P}_{NL}\right)_p \approx \mu_0 \epsilon_0 \omega_p^2 \chi_{pjk} \xi_j \xi_k \mathbf{p}_p = \frac{2}{c^2} \omega_p^2 d_{eff} \xi_j \xi_k \mathbf{p}_p$$

et pour le signal et l'idler :

$$\left(-\mu_0 \partial_t^2 \mathbf{P}_{NL}\right)_l \approx \mu_0 \epsilon_0 \omega_p^2 \chi_{ljk} \xi_j \xi_k^* \mathbf{p}_l = \frac{2}{c^2} \omega_l^2 d_{eff} \xi_j \xi_k^* \mathbf{p}_l, \quad \text{pour } l = s, i.$$

Le faisceau pompe de fréquence ω_p est polarisé suivant l'axe ordinaire, le faisceau signal (ω_s) et le faisceau idler (ω_i) seront polarisés extraordinairement pour assurer un accord de phase de *type I* dans un cristal positif ($n_e > n_o$). La longueur limitée du cristal ainsi que les effets non-linéaires imposent l'introduction d'un petit écart à l'accord de phase, noté Δk . Les équations de conservation (7.24) et (7.25) deviennent :

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \quad (8.31)$$

$$\mathbf{k}_p^o = \mathbf{k}_s^e(\theta) + \mathbf{k}_i^e(\theta) + \Delta \mathbf{k} \quad (8.32)$$

Le champ électrique total est donné par la relation (8.14). Dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable on peut montrer que la contribution de termes non-linéaires pour chacun des trois champs est :

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}^2|_p &= \xi_s \xi_i e^{-i\Delta k \cdot z} \\ |\mathbf{E}^2|_s &= \xi_p \xi_i^* e^{+i\Delta k \cdot z} \\ |\mathbf{E}^2|_i &= \xi_p \xi_s^* e^{+i\Delta k \cdot z} \end{aligned} \quad (8.33)$$

L'équation (8.24) pour la pompe ordinaire devient³

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_p} \partial_t \right) \xi_X^p = \frac{i}{2k_p} \Delta_{\perp} \xi_X^p - \sigma_o(\omega_p) \xi_X^p + i\mathcal{K}_p d_{eff} \xi_j^s \xi_k^i e^{-i\Delta k \cdot z}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_p} &= \frac{k_p}{\omega_p} = \frac{n_o(\omega_p)}{c}, \\ \sigma_o(\omega_p) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega_p}{2k_p} = \frac{\mu_0 \sigma c}{2n_o(\omega_p)} \quad \text{et} \\ \mathcal{K}_p &= \frac{k_p}{n_o^2(\omega_p)} = \frac{\omega_p^2}{c^2 k_p} = \frac{\omega_p}{c n_o(\omega_p)}. \end{aligned}$$

³après division par $2ik_p$

De même, en divisant les équations (8.25) et (8.26) par $2ik_s\beta^2/\gamma^2$, respectivement $2ik_s\beta^2$, on trouve

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_s}\partial_t\right)\xi_Y^s = \left[\frac{i}{2k_s}\Delta_\perp^Y - \frac{\tau \tan\theta}{\beta^2 \tan(2\theta)}\partial_x - \gamma^2\sigma_e(\omega_s)\right]\xi_Y^s + i\gamma^2\mathcal{K}_s d_{eff}\xi_X^p (\xi_k^i)^* e^{i\Delta k \cdot z}$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_s}\partial_t\right)\xi_Z^s = \left[\frac{i}{2k_s}\Delta_\perp^Z - \frac{\tau}{\beta^2}\partial_x - \sigma_e(\omega_s)\right]\xi_Z^s + i\mathcal{K}_s d_{eff}\xi_X^p (\xi_k^i)^* e^{i\Delta k \cdot z}$$

où on a introduit les notations suivantes

$$\begin{aligned}\Delta_\perp^Y &= \frac{1}{\beta^2} \left[(\gamma^2 + \tau \tan\theta) \partial_x^2 + \gamma^2 \partial_y^2 \right] \cong \gamma^2 \Delta_\perp^Z, \\ \Delta_\perp^Z &= \frac{1}{\beta^2} (\eta^2 \partial_x^2 + \partial_y^2), \\ \frac{1}{v_s} &= \frac{k_s}{\omega_s} = \frac{n(\omega_s, \theta)}{c} = \frac{n_e(\omega_s)}{\beta c}, \\ \sigma_e(\omega_s) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega_s}{2k_s \beta^2} = \frac{\mu_0 \sigma c}{2\beta^2 n(\omega_s, \theta)} = \frac{\mu_0 \sigma c}{2\beta n_e(\omega_s)} \quad \text{et} \\ \mathcal{K}_s &= \frac{k_s}{n_e^2(\omega_s)} = \frac{k_s}{\beta^2 n^2(\omega_s, \theta)} = \frac{\omega_s^2}{\beta^2 c^2 k_s} = \frac{\omega_s}{\beta^2 c n(\omega_s, \theta)}\end{aligned}$$

Les deux composantes (ξ_Y^i et ξ_Z^i) de l'idler obéissent aux équations :

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_i}\partial_t\right)\xi_Y^i = \left[\frac{i}{2k_i}\Delta_\perp^Y - \tan\rho_Y\partial_x - \gamma^2\sigma_e(\omega_i)\right]\xi_Y^i + i\gamma^2\mathcal{K}_i d_{eff}\xi_X^p (\xi_k^s)^* e^{i\Delta k \cdot z}$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_i}\partial_t\right)\xi_Z^i = \left[\frac{i}{2k_i}\Delta_\perp^Z - \tan\rho_Z\partial_x - \sigma_e(\omega_i)\right]\xi_Z^i + i\mathcal{K}_i d_{eff}\xi_X^p (\xi_k^s)^* e^{i\Delta k \cdot z}$$

où

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_i} &= \frac{k_i}{\omega_i} = \frac{n(\omega_i, \theta)}{c} = \frac{n_e(\omega_i)}{\beta c}, \\ \sigma_e(\omega_i) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega_i}{2k_i \beta^2} = \frac{\mu_0 \sigma c}{2\beta^2 n(\omega_i, \theta)} = \frac{\mu_0 \sigma c}{2\beta n_e(\omega_i)} \quad \text{et} \\ \mathcal{K}_i &= \frac{k_i}{n_e^2(\omega_i)} = \frac{k_i}{\beta^2 n^2(\omega_i, \theta)} = \frac{\omega_i^2}{\beta^2 c^2 k_i} = \frac{\omega_i}{\beta^2 c n(\omega_i, \theta)}.\end{aligned}$$

On a introduit ici les angles de *walk-off* spatial⁴ :

$$\tan\rho_Y = \frac{\tau \tan\theta}{\beta^2 \tan(2\theta)} = \tan\rho_Z \frac{\tan\theta}{\tan(2\theta)} \quad (8.34)$$

$$\tan\rho_Z = \frac{\tau}{\beta^2} = \frac{(\gamma^2 - 1) \sin\theta \cos\theta}{\beta^2} \quad (8.35)$$

⁴L'effet de walk-off spatial est dû à la biréfringence du cristal

8.4.1 Interaction à trois ondes non-dégénérée

Les seuls termes non-linéaires qui vont apparaître dans les équations qui décrivent l'interaction des trois ondes dans un cristal à symétrie orthorhombique seront⁵ :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X^p &= d_{14}\xi_Z^s \xi_Y^i + d_{14}\xi_Z^i \xi_Y^s \\ \mathcal{P}_Y^s &= d_{14}\xi_X^p (\xi_Z^i)^* \\ \mathcal{P}_Z^s &= d_{36}\xi_X^p (\xi_Y^i)^* \\ \mathcal{P}_Y^i &= d_{14}\xi_X^p (\xi_Z^s)^* \\ \mathcal{P}_Z^i &= d_{36}\xi_X^p (\xi_Y^s)^*\end{aligned}$$

Ainsi, la dynamique des enveloppes lentement variables $\xi_X^p, \xi_Y^s, \xi_Z^s, \xi_Y^i$ et ξ_Z^i due aux interactions entre les trois champs (pompe, signal, idler) est décrite par le système suivant :

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_p}\partial_t\right)\xi_X^p = \frac{i}{2k_p}\Delta_{\perp}\xi_X^p - \sigma_o(\omega_p)\xi_X^p + i\mathcal{K}_p d_{14}\left(\xi_Z^s\xi_Y^i + \xi_Z^i\xi_Y^s\right)e^{-i\Delta k\cdot z} \quad (8.36)$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_s}\partial_t\right)\xi_Y^s = \frac{i}{2k_s}\Delta_{\perp}^Y\xi_Y^s - \tan\rho_Y\partial_x\xi_Y^s - \gamma^2\sigma_e(\omega_s)\xi_Y^s + i\gamma^2\mathcal{K}_s d_{14}\xi_X^p(\xi_Z^i)^*e^{i\Delta k\cdot z} \quad (8.37)$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_s}\partial_t\right)\xi_Z^s = \frac{i}{2k_s}\Delta_{\perp}^Z\xi_Z^s - \tan\rho_Z\partial_x\xi_Z^s - \sigma_e(\omega_s)\xi_Z^s + i\mathcal{K}_s d_{36}\xi_X^p(\xi_Y^i)^*e^{i\Delta k\cdot z} \quad (8.38)$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_i}\partial_t\right)\xi_Y^i = \frac{i}{2k_i}\Delta_{\perp}^Y\xi_Y^i - \tan\rho_Y\partial_x\xi_Y^i - \gamma^2\sigma_e(\omega_i)\xi_Y^i + i\gamma^2\mathcal{K}_i d_{14}\xi_X^p(\xi_Z^s)^*e^{i\Delta k\cdot z} \quad (8.39)$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_i}\partial_t\right)\xi_Z^i = \frac{i}{2k_i}\Delta_{\perp}^Z\xi_Z^i - \tan\rho_Z\partial_x\xi_Z^i - \sigma_e(\omega_s)\xi_Z^i + i\mathcal{K}_i d_{36}\xi_X^p(\xi_Y^s)^*e^{i\Delta k\cdot z} \quad (8.40)$$

Ce système décrit parfaitement l'interaction à trois ondes non-dégénérée (3WI-*Three Wave Interaction*) dans un cristal biréfringent avec une forte non-linéarité quadratique.

8.5 Interaction à trois ondes dégénérée

Le système (8.36)-(8.40) décrit la propagation des enveloppes lentement variables de trois ondes de fréquences différentes $\omega_i \neq \omega_p \neq \omega_s$. Une limite simplifiée de ce système correspond au cas où deux des trois pulsations sont égales. On prendra, par exemple, $\omega_s = \omega_i = \omega$ et en conséquence $\omega_p = 2\omega$ (8.31). On appellera ce cas *l'interaction dégénérée à trois ondes* et on y fera référence par l'abréviation de l'appellation anglaise D3WI (Degenerate 3-Wave Interaction). Le signal et l'idler étant identiques, les 5 équations décrivant leur interaction se réduit à 3 (1 pour la pompe ordinaire et 2 pour le signal extraordinaire). Les simplifications peuvent être poussées encore plus loin.

On a pu voir dans l'analyse des modes propres dans la limite linéaire (dans la section 8.3) que les enveloppes du champ extraordinaire sont en fait proportionnelles (8.17). On peut donc supposer⁶ que cette proportionnalité est conservé même dans le régime non-linéaire. Cela nous indique que, pour décrire l'évolution du champ extraordinaire, l'analyse d'une seule composante est à priori suffisante, ce qui réduit le nombre d'équation étudiées à 2.

⁵Regarder le paragraphe 7.2.2 pour plus de détails

⁶Souvent en science on dépense un temps impressionnant pour prendre en compte tous les effets physiques pouvant intervenir lors de l'interaction lumière-matière pour au final les considérer, pour la plupart, comme négligeables et donc les omettre dans l'analyse dynamique.

Ainsi, à ce stade, la dynamique des amplificateurs paramétriques dégénérés est donnée par :

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_p}\partial_t\right)\xi_X^p = \frac{i}{2k_p}\Delta_\perp \xi_X^p - \sigma_o(\omega_p)\xi_X^p + i\mathcal{K}_p d_{14}\xi_Z^s\xi_Y^i e^{-i\Delta k \cdot z} \quad (8.41a)$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v_s}\partial_t\right)\xi_Z^s = \frac{i}{2k_s}\Delta_\perp^Z \xi_Z^s - \sigma_e(\omega_s)\xi_Z^s - \tan\rho \partial_x \xi_Z^s + i\mathcal{K}_s d_{36} \xi_X^p (\xi_Y^i)^* e^{i\Delta k \cdot z}. \quad (8.41b)$$

Le système (8.41) peut être encore réduit. En négligeant les pertes et l'asymétrie du laplacien transverse (voir Figure 11.1), le système (8.41) avec le walk-off se réduit à

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v}\partial_t\right) A_0 = \frac{i}{2k_p} \partial_x^2 A_0 + i\sigma_0 A_1^2 e^{i\delta \cdot z} \quad (8.42a)$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{v}\partial_t\right) A_1 = \frac{i}{2k_s} \partial_x^2 A_1 - \tan\rho \partial_x A_1 + i\sigma_1 A_0 A_1^* e^{-i\delta \cdot z} \quad (8.42b)$$

où on a introduit les notations

$$\sigma_0 = \mathcal{K}_p d_{14},$$

$$\sigma_1 = \mathcal{K}_s d_{36},$$

$$\Delta k = -\delta.$$

8.5.1 Changement de variables

Dans le système (8.42) on effectue les transformations suivantes

$$A_0 = \frac{1}{\sigma_1} \psi e^{i\delta z}, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0 \sigma_1}} \phi, \quad \xi = x\sqrt{2k_1}, \quad \zeta = z, \quad \tau = t - \frac{1}{v}z,$$

et on introduit le paramètre α

$$\boxed{\alpha = \frac{2k_1}{k_0} = \left(1 - \frac{\delta}{2k_1}\right)^{-1}} \quad (8.43)$$

pour finalement écrire

$$i\frac{\partial}{\partial\zeta}\psi + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\psi - \delta\psi + \psi^2 = 0 \quad (8.44a)$$

$$i\frac{\partial}{\partial\zeta}\phi + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\phi + \psi\phi^* = 0. \quad (8.44b)$$

On a omis ici le terme de dérive spatiale ($i\sqrt{2k_1} \tan\rho \frac{\partial}{\partial\xi}\phi$) dans l'équation pour ϕ (8.44b).

On étudiera par la suite le système (8.44) sur la demi-ligne, dans le contexte de la NST, en imposant comme conditions aux bords et initiales :

$$\psi(0, \zeta) = A(\zeta)e^{2ik\zeta},$$

$$\phi(0, \zeta) = B(\zeta)e^{ik\zeta},$$

$$\psi(L, \zeta) = \phi(L, \zeta) = 0,$$

$$\psi(\xi, 0) = \phi(\xi, 0) = 0.$$

Ici $A(\zeta)$ et $B(\zeta)$ sont des fonctions monotones croissantes. On choisit d'augmenter les amplitudes de forçage au bord de façon adiabatique, tel que $A(0) = B(0) = 0$, $\max\{A(\zeta)|_{\zeta > z_0}\} = A$ et $\max\{B(\zeta)|_{\zeta > z_0}\} = B$. En plus le nombre d'onde k , donné par la relation de dispersion linéaire du système (8.44) en demandant un accord parfait des fréquences ($\omega_0 = 2\omega_1$) :

$$k = -\frac{\delta}{2(1-\alpha)}, \quad (8.45)$$

est positif pour n'importe quel signe et valeur du désaccord de phase δ .

Optique géométrique à l'interface des milieux quadratiques biréfringents (chapitre en anglais)

Sommaire

9.1	Confined modes in an asymmetric planar waveguide	112
9.1.1	Guided TE modes - ordinary polarization	114
9.1.2	Guided TM modes - extraordinary polarization	118
9.2	Evanescence optics in a birefringent medium	123
9.2.1	Critical angle	128
9.2.2	Brewster angle	128

NST is a process that generates easily and naturally nonlinear structures (solitons) and which results from an instability of the evanescent periodic driving at the boundary of a nonlinear medium [Leon 03], [Geniet 02]. This principle, which has been soon proposed as a means to generate solitons in Kerr media precisely by evanescent coupling [Khomeriki 04], is at the basis of our proposal, namely to suggest and analyse a physical situation allowing the generation of D3W solitons in a birefringent medium by convenient illumination. The fundamental advantage is that the generated nonlinear structure, that we shall call *birefringent gap soliton* (BGS) is in a sense intrinsic as being spontaneously created from the driving, not by a pre-built light pulse.

In the following section the physical situation is described with emphasis on the conditions under which a birefringent medium, here taken as the *LGT* crystal, can be modelled by a boundary value problem for a partial differential equation. We shall see in particular that the intrinsic need of an evanescent field inside the crystal implies automatically that the process has to be stationary, and thus our work will concern exclusively spatial dependences, and thus spatial BGS.

Two situations are being investigated here as to see if they are appropriate for the generation of the evanescent periodic driving at the boundary. First we are looking at the possibility of using a planar waveguide to obtain the required boundary conditions and we obtain here the amplitudes of the guided waves which we have seen to be playing an important role in the nonlinear supratransmission process. As we know now that the polarization of the fields plays an important role in realizing the phase-match condition, both TE and TM modes are studied here. Realizing the required physical condition using this method may pose some practical problems. We will see that the index of refraction of the planar waveguide must

be finely tuned in order to select only the fundamental mode and this can become be very restrictive.

In the end, another boundary configuration seemed more appropriate : illuminating one of the boundary with a continuous wave (CW) monochromatic beam, incident with an angle slightly above the extinction angle. This proposition will be developed in the section 9.2.

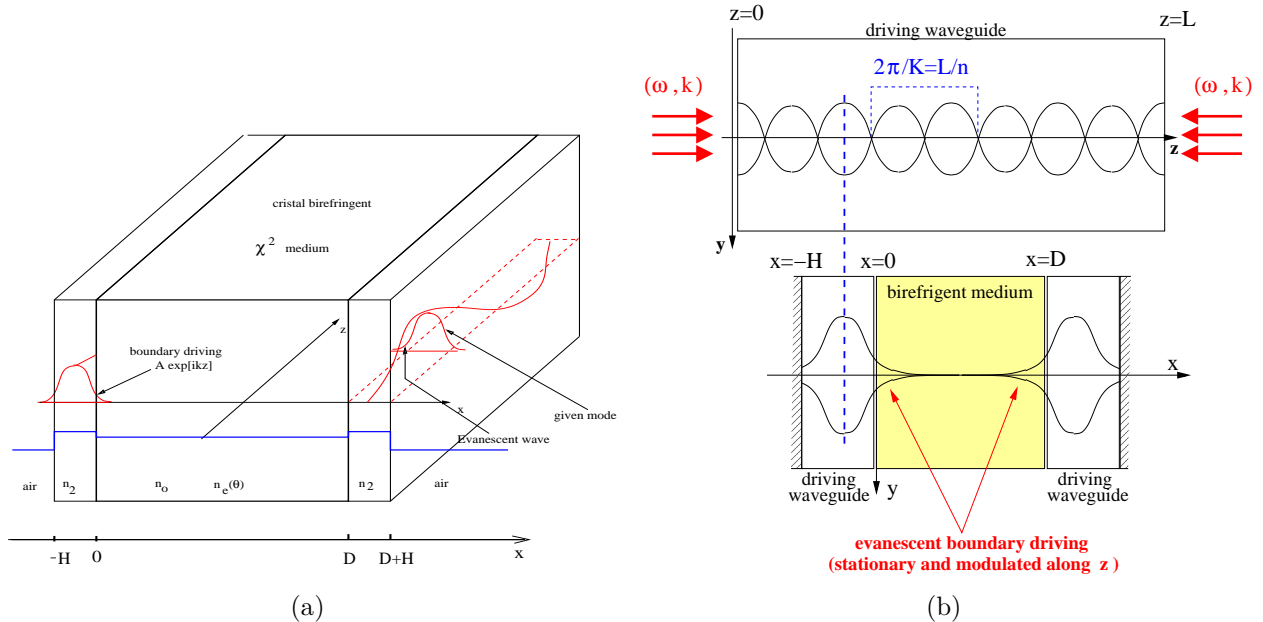


FIGURE 9.1 – *Experimental configuration for the generation of gap solitons in a birefringent nonlinear crystal with evanescent periodic driving at the boundary*

9.1 Confined modes in an asymmetric planar waveguide

We shall study here a physical situation where a $\chi^{(2)}$ birefringent crystal is driven by one or both ends (like in Figure 9.1) with a planar waveguide, where a stationary field is created (either by using contra-propagating beams or by creating a convenient cavity). The created mode is (linearly) guided by index variations : the index of the driving guides is chosen greater than the index of the birefringent crystal. As a result the field at the input boundaries of the crystal has the two important properties of being evanescent and periodic along the propagation direction, as sketched on the Figure 9.1.

Dielectric slabs are the simplest optical waveguides. Figure 9.2(a) shows a typical example of an asymmetric slab waveguide. It consists of a thin dielectric layer called *core* or *guiding layer* sandwiched between two different semi-infinite media. Generally speaking, the index of refraction of the guiding layer must be greater than those of the surrounding media, for the confined modes to exist. In addition, the thickness of the guiding layer is typically on the order of a wavelength.

We will consider the propagation of confined modes in an asymmetric slab waveguide whose index profile is given by :

$$n(x) = \begin{cases} n_1 & , x < -H \\ n_2 & , x \in (-H, 0) \\ n_3 & , x > 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

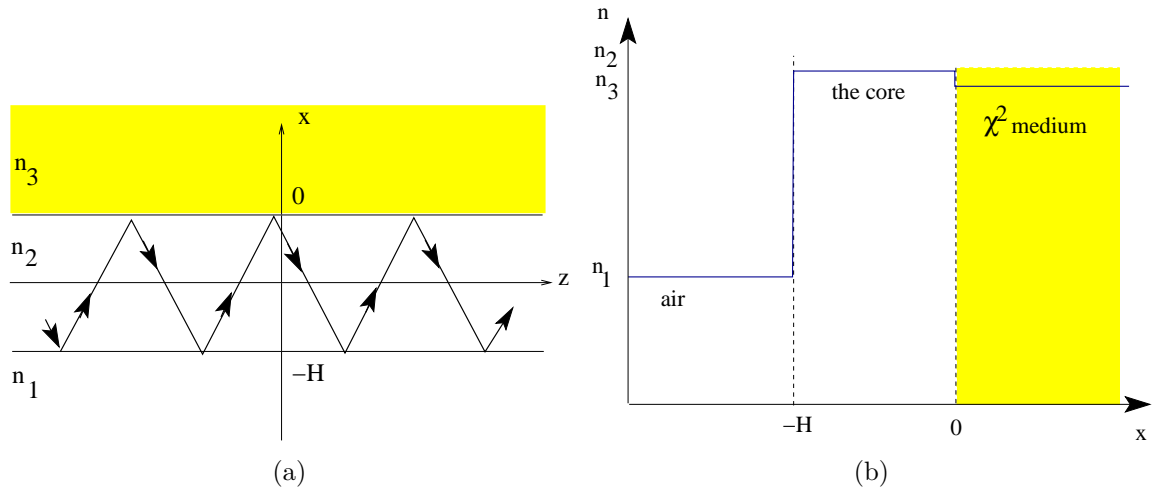


FIGURE 9.2 – *Asymmetric waveguides : (a) Schematic drawing of an asymmetric slab waveguide. (b) The profile of the refractive index in the asymmetric waveguide*

In our numerical applications n_1 will be considered as the air refraction index ($n_{air} = 1$), n_3 will be the ordinary index of refraction of the LGT crystal at the frequency 2ω ($n_o(2\omega) = 2.4979$) and n_2 will be chosen slightly larger than n_3 ($n_2 = 2.55$) so that it supports guided modes.

We now consider the propagation of monochromatic radiation along the z axis. Maxwell's equations in the linear media n_1 and n_2 are written on the left and the ones for the nonlinear birefringent medium n_3 are on the right :

$$\begin{array}{l|l}
 \mathbf{rot} \mathbf{E}_{1,2} = -\partial_t \mathbf{B}_{1,2} & \mathbf{rot} \mathbf{E}_3 = -\partial_t \mathbf{B}_3 \\
 \mathbf{rot} \mathbf{H}_{1,2} = \epsilon_{1,2} \partial_t \mathbf{E}_{1,2} & \mathbf{rot} \mathbf{H}_3 = \partial_t (\vec{\epsilon}_3 \cdot \mathbf{E}_3 + \mathbf{P}_{NL}) \\
 \mathbf{div} \mathbf{B}_{1,2} = 0 & \mathbf{div} \mathbf{B}_3 = 0 \\
 \mathbf{div} \mathbf{E}_{1,2} = 0 & \mathbf{div} \mathbf{E}_3 = (1 - \gamma^2) \partial_Z E_3^Z - \frac{1}{\epsilon_0 n_o^2} \mathbf{div} \mathbf{P}_{NL} \\
 1/\epsilon_1 \mu_1 = c^2/n_1^2 = v_1^2 & \gamma^2 = \epsilon_3^Z / \epsilon_3^X = n_e^2 / n_o^2 \\
 1/\epsilon_2 \mu_2 = c^2/n_2^2 = v_2^2 & v_{o,e}^2 = c^2/n_{o,e}^2 \\
 (\Delta - \frac{n_{1,2}^2}{c^2} \partial_t^2) \mathbf{E}_{1,2} = 0 & \Delta \mathbf{E}_3 - (1 - \gamma^2) \mathbf{grad}(\partial_Z E_3^Z) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 (\vec{\epsilon}_{3r} \cdot \mathbf{E}_3) - \mu_3 \partial_t^2 \mathbf{P}_{NL} = 0
 \end{array}$$

To be a satisfactory wavefunction, a solution to the Maxwell's wave equations must be continuous, single valued and finite throughout the space.

If we consider an homogeneous linear core and if we work under the approximation of linear evanescent wave in the birefringent crystal near the core, the electromagnetic treatment of the guided modes is relatively easy. In addition, the solutions of Maxwell's equations in homogeneous media are simply plane waves. Thus, all we need to do is to write the plane wave solutions for each segment and then match the boundary conditions at the interfaces. If we suppose that the whole structure is homogeneous along the z axis then we can write solutions to the wave equation in each medium like :

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{E}_m(x) \exp[i(\omega t - \beta z)],$$

where β is the z component of the wave vector and is known as the *propagation constant* to be determined from the Maxwell's equations and $\mathbf{E}_m(x)$ are wavefunctions of the guided modes (the integer m being called the *mode number*). Thus, using the Helmholtz equation, we obtain :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) \mathbf{E}_m(x) = 0 \quad (9.2)$$

We have to solve this equation in each segment of the structure and then match the tangential components of the fields vectors at each interface. In addition, an important boundary condition requires that the field amplitudes be zero at infinity.

For confined modes, the field amplitude must fall off exponentially outside the core. Consequently, the quantity $\frac{n^2\omega^2}{c^2} - \beta^2$ must be negative for $x \in (-\infty, -H) \cup (0, \infty)$. In other words, the propagation constant β of a confined mode must be :

$$\beta > \frac{n_1\omega}{c} \quad \text{and} \quad \beta > \frac{n_3\omega}{c}. \quad (9.3)$$

On the other hand, the continuity of the field requires that the magnitude of the field $\mathbf{E}_m(x)$ attain a maximum value for $x \in (-H, 0)$. The existence of a maximum demands a negative Laplacian of the field, such that :

$$\beta < \frac{n_2\omega}{c}. \quad (9.4)$$

Thus, the propagation constant must satisfy the inequality :

$$\frac{n_1\omega}{c} < \frac{n_3\omega}{c} < \beta < \frac{n_2\omega}{c}. \quad (9.5)$$

We see that we can define an effective refractive index such that :

$$\beta = \frac{n_{eff}\omega}{c} = n_{eff}k_0$$

where we have introduced the wavenumber $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$.

9.1.1 Guided TE modes - ordinary polarization

In order to have an ordinary polarization, the electric field must be perpendicular on the main surface of the crystal :

$$\mathbf{E}(x, z, t) = E^y(x, z, t)\mathbf{e}_y = E_m^y(x) \exp[i(\omega t - \beta z)]\mathbf{e}_y \quad (9.6)$$

In a manner very similar to the wave function of a particle in a square-well potential, the mode function $E_m^y(x)$ is taken as :

$$E_m^y(x) = \begin{cases} A \sin(hx) + B \cos(hx), & x \in (-H, 0) \\ C e^{-qx}, & x > 0 \\ D e^{lx}, & x < -H \end{cases} \quad (9.7)$$

where A , B , C and D are constants to be determined and the parameters l , h and q are the transverse components of the wave vectors in the first, second and third medium :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \beta\mathbf{e}_z + il\mathbf{e}_x & \text{and} & \quad |\mathbf{K}_1| = \omega n_1/c, \\ \mathbf{K}_2 &= \beta\mathbf{e}_z + h\mathbf{e}_x & \text{and} & \quad |\mathbf{K}_2| = \omega n_2/c, \\ \mathbf{K}_3 &= \beta\mathbf{e}_z + iq\mathbf{e}_x & \text{and} & \quad |\mathbf{K}_3| = \omega n_3/c. \end{aligned} \quad (9.8)$$

The transverse components are related to β as follows :

$$l = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega n_1}{c}\right)^2}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{\omega n_2}{c}\right)^2 - \beta^2}, \quad q = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega n_3}{c}\right)^2}. \quad (9.9)$$

To be acceptable solutions, the tangential component of the electric and magnetic fields (E_m^y and $B_m^z = \frac{i}{\omega} \frac{\partial E_m^y}{\partial x}$) must be continuous at the interfaces. So the field given by (9.7) as well as his derivative must be continuous functions. The magnetic field of the TE mode is given by :

$$\mathbf{B}(x, z, t) = B_m^x(x) \exp[i(\omega t - \beta z)]\mathbf{e}_x + B_m^z(x) \exp[i(\omega t - \beta z)]\mathbf{e}_z, \quad (9.10)$$

and the z component of the magnetic field we are interested in is :

$$B_m^z(x) = \begin{cases} i\frac{h}{\omega}(A \cos(hx) - B \sin(hx)), & x \in (-H, 0) \\ -i\frac{q}{\omega}C e^{-qx}, & x > 0 \\ i\frac{l}{\omega}D e^{lx}, & x < -H \end{cases} \quad (9.11)$$

The four continuity conditions obtained are :

$$\begin{aligned} D e^{-lH} &= B \cos(hH) - A \sin(hH) \\ B &= C \\ l D e^{-lH} &= h A \cos(hH) + h B \sin(hH) \\ h A &= -q C \end{aligned} \quad (9.12)$$

which lead us to :

$$\begin{aligned} B = C &= -\frac{h}{q}A, \\ \frac{D}{A} e^{-lH} &= -\frac{h}{q} \cos(hH) - \sin(hH) \quad \text{and} \\ \frac{lD}{hA} e^{-lH} &= \cos(hH) - \frac{h}{q} \sin(hH). \end{aligned} \quad (9.13)$$

These equations can be combined into a single equation :

$$\boxed{\tan(hH) = \frac{h(q+l)}{h^2 - ql}} \quad (9.14)$$

This is the so-called *mode condition*. The propagation constant β of a guided TE mode must satisfy this condition. Given a set of refractive indexes n_1 , n_2 and n_3 of a slab waveguide, equation (9.14) yields (in general) a finite number of solutions for β provided the thickness H is large enough. These modes are mutually orthogonal.

The propagation constants β of the TE modes are found from a numerical or graphical solution of the equation (9.14). Then, according to (9.9), all the parameters can be expressed in terms of β . In the figure (9.1.1) we represent the transcendental equation (9.14) as functions of the propagation constant β .

The number of the TE modes depends on both the thickness H and the difference of indexes of refraction.

Eventually, the wave function $E_m^y(x)$ can be written :

$$E_m^y(x) = \begin{cases} A \sin(hx) - \frac{h}{q}A \cos(hx), & x \in (-H, 0) \\ -\frac{h}{q}A e^{-qx}, & x > 0 \\ -[\frac{h}{q}A \cos(hH) + A \sin(hH)]e^{l(x+H)}, & x < -H \end{cases} \quad (9.15)$$

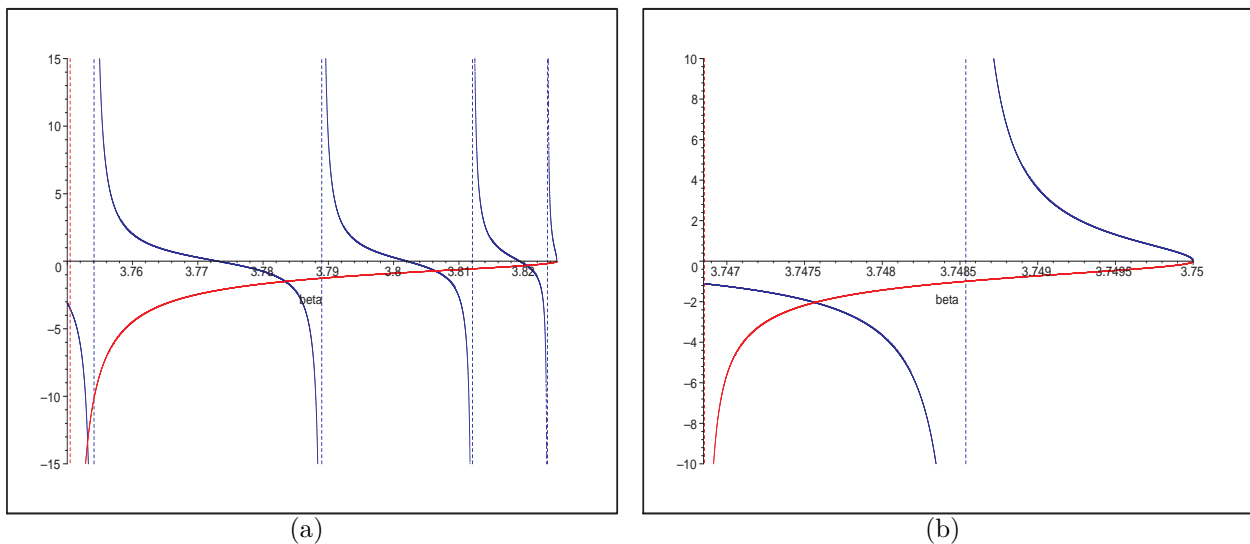


FIGURE 9.3 – Graphic solutions of equation (9.14) for different values of the waveguide refractive index which are given by the equation (9.9). In blue you can see the LHS of (9.14) and in red the RHS of the former equation. (a) Here, for $H = 15$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2.55$ and $n_3 = 2.49$, four values of β are found : $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4$. These corresponds to four orthogonal TE modes. (b) Here, for $H = 15$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2.5$ and $n_3 = 2.49$, only one value of β is found so there is only one TE (fundamental) mode propagating in the waveguide

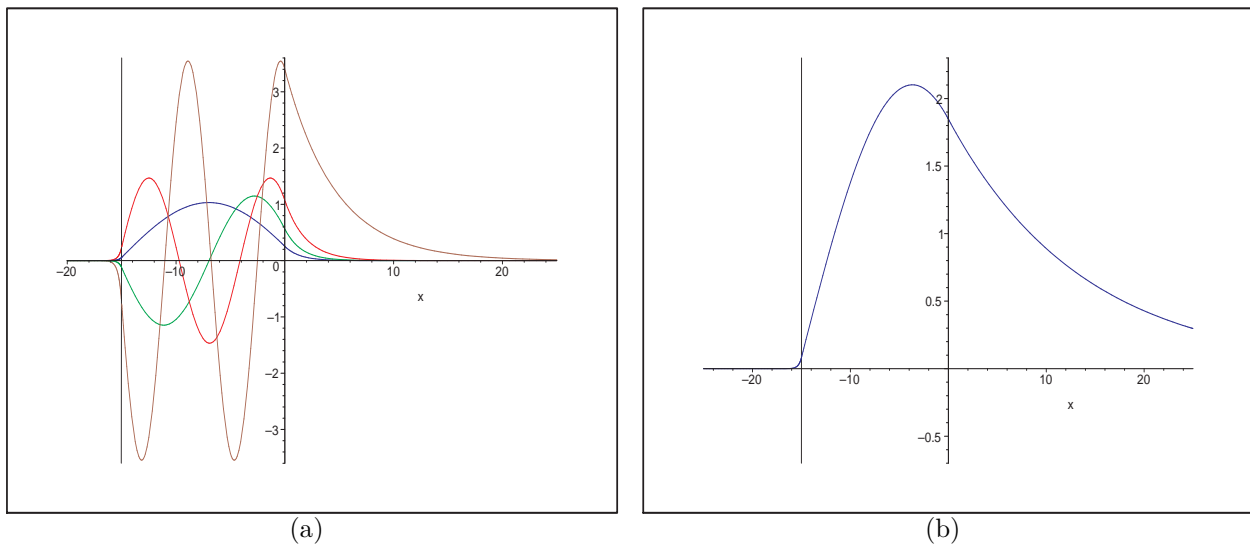


FIGURE 9.4 – Confined TE modes in an asymmetric slab waveguide. The thickness of the core $H = 15$ is equal to 3.58λ . (a) $n_2 = 2.55$ and $n_3 = 2.49$. As you can see this waveguide supports four wave modes corresponding to the four β values found graphically in (9.1.1-a). (b) For a small $n_2 - n_3$ difference only the fundamental mode is found to be supported by the slab guide.

It is easy to notice that the m -th wavefunction has $m - 1$ nodes. We also notice that the wavefunctions are either *quasi*-symmetric or *quasi*-antisymmetric with respect to the origin $x = -H/2$ of the core. The evanescent tail of the TE modes in the n_1 medium is less important than the ones of the n_3 medium because of the difference of indexes of refraction, $n_2 - n_1 \gg n_2 - n_3$.

Lowering the $n_2 - n_3$ difference is not the only way of reducing the number of the wave guided modes. We can obtain similar results by reducing the thickness of the guiding layer H . For instance, in the next example, the guide thickness was reduce by a factor of three (so that $H \approx \lambda$) and the refractive index of the guide was kept at the same value $n_2 = 2.55$. In this case, the penetration depth of the evanescent field in the birefringent nonlinear medium is less important than in the former one. So, by playing both on H and $n_2 - n_3$ values, we can obtain suitable boundary conditions needed for the birefringent gap soliton generation.

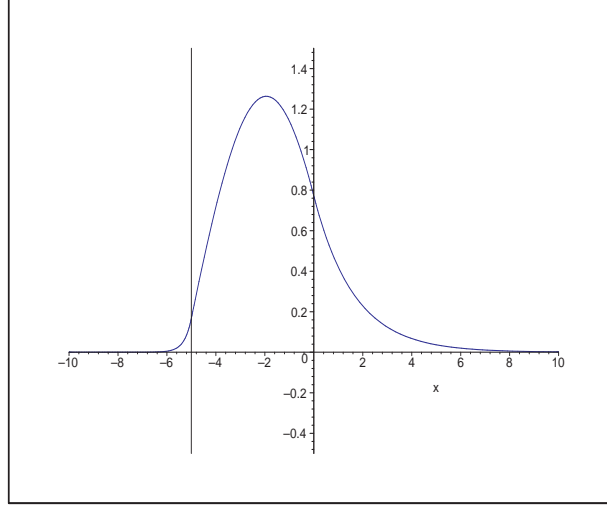


FIGURE 9.5 – *Confined TE fundamental mode in an asymmetric slab waveguide with $n_2 = 2.55$, $n_3 = 2.49$ and $H = 5$.*

The normalization constant A should be chosen so that the field $E_m^y(x)$ in (9.15) corresponds to a power flow of 1 W/per unit width in the y direction. A mode for which $E = UE_m^y(x)$ will thus correspond to a power flow of $|U|^2$ W/m. The normalization condition is given by :

$$\mathbf{S}_z = \frac{1}{2} \int Re[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_z dx = 1, \quad (9.16)$$

or, knowing that $H_x = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}$, for the m th confined mode we have :

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_y H_x^* dx = \frac{\beta_m}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} |E_m(x)|^2 dx = 1. \quad (9.17)$$

Substitution of (9.15) into (9.17) and carrying out the integration lead to :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |E_m(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{-H} |E_m(x)|^2 dx + \int_{-H}^0 |E_m(x)|^2 dx + \int_0^{\infty} |E_m(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{-H} \left[\frac{h_m}{q_m} A_m \cos(h_m H) + A_m \sin(h_m H) \right]^2 e^{2h_m(x+H)} dx + \\ &\quad + \int_{-H}^0 \left[A_m \sin(h_m x) - \frac{h_m}{q_m} A_m \cos(h_m x) \right]^2 dx + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \left(\frac{h_m}{q_m} A_m \right)^2 e^{-2q_m x} dx \end{aligned} \quad (9.18)$$

Let us introduce

$$\boxed{\frac{h_m}{q_m} = \tan \varphi_m}, \quad (9.19)$$

so the equation (9.18) becomes :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |E_m(x)|^2 dx &= \frac{A_m^2}{\cos^2 \varphi_m} \sin^2(h_m H + \varphi_m) \int_{-\infty}^{-H} e^{2l_m(x+H)} dx + \\ &+ \frac{A_m^2}{\cos^2 \varphi_m} \int_{-H}^0 \sin^2(h_m x - \varphi_m) dx + A_m^2 \tan^2 \varphi_m \int_0^{\infty} e^{-2q_m x} dx \\ &= \frac{1}{2l_m} \frac{A_m^2}{\cos^2 \varphi_m} \sin^2(h_m H + \varphi_m) + \frac{A_m^2}{\cos^2 \varphi_m} I + \frac{1}{2q_m} A_m^2 \tan^2 \varphi_m. \end{aligned}$$

Next, I is calculated,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-H}^0 \sin^2(h_m x - \varphi_m) dx = \frac{1}{2} \int_{-H}^0 (1 - \cos(2h_m x - 2\varphi_m)) dx \\ &= \frac{H}{2} - \frac{1}{2h_m} \sin(h_m H) \cos(2\varphi_m + h_m H) \end{aligned} \quad (9.20)$$

So,

$$\begin{aligned} \frac{2\omega\mu}{\beta_m} &= \\ &= \frac{A_m^2}{2 \cos^2 \varphi_m} \left[\frac{1}{l_m} \sin^2(h_m H + \varphi_m) + \frac{1}{q_m} \sin^2 \varphi_m + H - \frac{1}{h_m} \sin(h_m H) \cos(2\varphi_m + h_m H) \right] \\ &= \frac{A_m^2}{2 \cos^2 \varphi_m} \frac{1}{l_m} \left[\cos^2 \varphi_m \sin^2(h_m H) + \sin^2 \varphi_m \cos^2(h_m H) + \sin \varphi_m \cos \varphi_m \sin(2h_m H) \right] + \\ &+ \frac{A_m^2}{2 \cos^2 \varphi_m} \left(\frac{1}{q_m} \sin^2 \varphi_m + H \right) - \\ &- \frac{A_m^2}{2 \cos^2 \varphi_m} \frac{1}{h_m} \left[\frac{1}{2} \sin(2h_m H) (\cos^2 \varphi_m - \sin^2 \varphi_m) - 2 \sin^2(h_m H) \sin \varphi_m \cos \varphi_m \right] \end{aligned} \quad (9.21)$$

Knowing that $\cos^2(h_m H) = 1/(1 + \tan^2(h_m H))$ and using (9.14) we eventually find :

$$\frac{4\omega\mu}{A_m^2 \beta_m} = (h_m^2 + q_m^2) \frac{l_m + q_m + H l_m q_m}{l_m q_m^3} \quad (9.22)$$

And so the constant A_m is given by :

$$A_m^2 = \frac{4\omega\mu q_m^2}{\beta_m (h_m^2 + q_m^2) (H + 1/q_m + 1/l_m)} \quad (9.23)$$

The orthonormalization of the modes can be written as :

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_m E_l dx = \frac{2\omega\mu}{\beta_m} \delta_{ml}. \quad (9.24)$$

9.1.2 Guided TM modes - extraordinary polarization

In order to construct an extraordinary polarization this time, the electric field must be parallel to the main surface of the crystal or the plane of incidence (xz plane). The electric field is written using its amplitudes :

$$\mathbf{E}(x, z, t) = E^x(x, z, t) \mathbf{e}_x + E^z(x, z, t) \mathbf{e}_z = E_m^x(x) \exp[i(\omega t - \beta z)] \mathbf{e}_x + E_m^z(x) \exp[i(\omega t - \beta z)] \mathbf{e}_z$$

and the magnetic confined field needs to be :

$$\mathbf{B}(x, z, t) = B^y(x, z, t) \mathbf{e}_y = B_m^y(x) \exp[i(\omega t - \beta z)] \mathbf{e}_y. \quad (9.25)$$

The electric field components are related to the magnetic field through :

$$\begin{aligned} E^x(x, z, t) &= \frac{i}{\epsilon\omega} \partial_z H^y(x, z, t) = \frac{i}{\epsilon\mu\omega} \partial_z B^y(x, z, t) \\ E^z(x, z, t) &= -\frac{i}{\epsilon\omega} \partial_x H^y(x, z, t) = -\frac{i}{\epsilon\mu\omega} \partial_x B^y(x, z, t) \end{aligned} \quad (9.26)$$

The derivation of the confined TM modes is similar in principle to that of the TE modes. The guided mode function $B_m^y(x)$ is taken as :

$$B_m^y(x) = \begin{cases} A \sin(hx) + B \cos(hx), & x \in (-H, 0) \\ C e^{-qx}, & x > 0 \\ D e^{lx}, & x < -H \end{cases} \quad (9.27)$$

where A , B , C and D are again constants to be determined and the parameters l , h and q are the transverse components of the wave vectors in the first, second and third medium, for an extraordinary beam :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \beta \mathbf{e}_z + i l \mathbf{e}_x & \text{and} & \quad |\mathbf{K}_1| = \omega n_1 / c, \\ \mathbf{K}_2 &= \beta \mathbf{e}_z + h \mathbf{e}_x & \text{and} & \quad |\mathbf{K}_2| = \omega n_2 / c, \\ \mathbf{K}_3 &= \beta \mathbf{e}_z + i q \mathbf{e}_x & \text{and} & \quad |\mathbf{K}_3| = \omega n_3(\theta) / c. \end{aligned} \quad (9.28)$$

The value of the refractive index seen by the extraordinary wave traveling in the third medium depends on the angle θ between the propagation direction z and the crystal optical axis Z (see appendix). In the case of perfect phase matching configuration, $n_3(\omega, \theta) = n_3^e(\omega, \theta) = n_3^o(2\omega)$. The transverse components are related to β :

$$l = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega n_1}{c}\right)^2}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{\omega n_2}{c}\right)^2 - \beta^2}, \quad q = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega n_3}{c}\right)^2}. \quad (9.29)$$

The continuity of B^y and E^z at the two interfaces ($x = 0$ and $x = -H$) is required in order to have acceptable solutions. The z component of the electric fields which we are interested in is :

$$E_m^z(x) = \begin{cases} -i \frac{h c^2}{\omega n_2^2} (A \cos(hx) - B \sin(hx)), & x \in (-H, 0) \\ i \frac{q c^2}{n_3^2 \omega} C e^{-qx}, & x > 0 \\ -i \frac{l c^2}{n_1^2 \omega} D e^{lx}, & x < -H \end{cases} \quad (9.30)$$

so, the four continuity conditions are :

$$\begin{aligned} D e^{-lH} &= B \cos(hH) - A \sin(hH) \\ C &= B \\ n_2^2 l D e^{-lH} &= n_1^2 h (A \cos(hH) + B \sin(hH)) \\ -n_2^2 q C &= n_3^2 h A \end{aligned} \quad (9.31)$$

Let us introduce

$$\boxed{\tilde{l} = \frac{n_2^2}{n_1^2} l} \quad \text{et} \quad \boxed{\tilde{q} = \frac{n_2^2}{n_3^2} q}, \quad (9.32)$$

so the system (4.34) becomes :

$$\begin{aligned} B &= C = -\frac{h}{\tilde{q}} A, \\ \frac{D}{A} e^{-lH} &= -\frac{h}{\tilde{q}} \cos(hH) - \sin(hH) \quad \text{and} \\ \frac{\tilde{l} D}{h A} e^{-lH} &= \cos(hH) - \frac{h}{\tilde{q}} \sin(hH). \end{aligned} \quad (9.33)$$

By comparing the TM system (4.34) to the TE one (4.33), one can easily see that all these equations can be combined into a single equation :

$$\boxed{\tan(hH) = \frac{h(\tilde{q} + \tilde{l})}{h^2 - \tilde{q}\tilde{l}}}. \quad (9.34)$$

The latter can be solved in the same way as the TE one (9.14).

Eventually, the wave function $B_m^y(x)$ can be written :

$$B_m^y(x) = \begin{cases} A \left[\sin(hx) - \frac{h}{\tilde{q}} \cos(hx) \right], & x \in (-H, 0) \\ -\frac{h}{\tilde{q}} A e^{-qx}, & x > 0 \\ -A \left[\frac{h}{\tilde{q}} \cos(hH) + \sin(hH) \right] e^{l(x+H)}, & x < -H \end{cases} \quad (9.35)$$

where A is the normalization constant which is again chosen so that the field represented by (9.30) and (9.35) carries 1 W/per unit width in the y direction along the z axis. Thus, we have :

$$\mathbf{S}_z = \frac{1}{2} \int \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_z dx = 1, \quad (9.36)$$

or, knowing that $E^x = \frac{i}{\epsilon\mu\omega} \partial_z B^y$, for the m th confined mode we have :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_x H_y^* dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\epsilon\mu\omega} \partial_z B^y \frac{1}{\mu} B_y^* dx = \frac{c^2 \beta_m}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B_m(x)|^2}{n^2(x)} dx = 1. \quad (9.37)$$

So the normalization condition becomes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B_m(x)|^2}{n^2(x)} dx = \frac{2\omega\mu}{c^2 \beta_m}. \quad (9.38)$$

Substitution of (9.35) into (9.37) and carrying out the integration gives :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B_m(x)|^2}{n^2(x)} dx &= \int_{-\infty}^{-H} \frac{|B_m(x)|^2}{n_1^2} dx + \int_{-H}^0 \frac{|B_m(x)|^2}{n_2^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{|B_m(x)|^2}{n_3^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{-H} \frac{1}{n_1^2} \left[\frac{h_m}{\tilde{q}_m} A_m \cos(h_m H) + A_m \sin(h_m H) \right]^2 e^{2l_m(x+H)} dx + \\ &\quad + \int_{-H}^0 \frac{1}{n_2^2} \left[A_m \sin(h_m x) - \frac{h_m}{\tilde{q}_m} A_m \cos(h_m x) \right]^2 dx + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{1}{n_3^2} \left(\frac{h_m}{\tilde{q}_m} A_m \right)^2 e^{-2q_m x} dx \end{aligned} \quad (9.39)$$

We introduce again

$$\boxed{\frac{h_m}{\tilde{q}_m} = \tan \tilde{\varphi}_m}, \quad (9.40)$$

so the equation (9.39) becomes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B_m(x)|^2}{n^2(x)} dx = \frac{1}{2n_1^2 l_m} \frac{A_m^2}{\cos^2 \tilde{\varphi}_m} \sin^2(h_m H + \tilde{\varphi}_m) + \frac{1}{n_2^2} \frac{A_m^2}{\cos^2 \tilde{\varphi}_m} I + \frac{1}{2n_3^2 q_m} A_m^2 \tan^2 \tilde{\varphi}_m,$$

with I given by,

$$I = \int_{-H}^0 \sin^2(h_m x - \tilde{\varphi}_m) dx = \frac{H}{2} - \frac{1}{2h_m} \sin(h_m H) \cos(2\tilde{\varphi}_m + h_m H). \quad (9.41)$$

So,

$$\begin{aligned}
\frac{2\omega\mu}{c^2\beta_m} &= \frac{A_m^2}{2\cos^2\tilde{\varphi}_m} \times \\
&\times \left[\frac{1}{n_1^2 l_m} \sin^2(h_m H + \tilde{\varphi}_m) + \frac{1}{n_3^2 q_m} \sin^2\tilde{\varphi}_m + \frac{H}{n_2^2} - \frac{1}{n_2^2 h_m} \sin(h_m H) \cos(2\tilde{\varphi}_m + h_m H) \right] \\
\frac{4\omega\mu}{A_m^2 c^2 \beta_m} &= \frac{1}{n_1^2 l_m} \left[\sin^2(h_m H) + \frac{h_m^2}{\tilde{q}_m^2} \cos^2(h_m H) + \frac{h_m}{\tilde{q}_m} \sin(2h_m H) \right] + \\
&+ \frac{1}{n_3^2 q_m} \frac{h_m^2}{\tilde{q}_m^2} + \frac{H}{n_2^2} \left(1 + \frac{h_m^2}{\tilde{q}_m^2} \right) - \\
&- \frac{1}{n_2^2 h_m} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{h_m^2}{\tilde{q}_m^2} \right) \sin(2h_m H) - 2 \frac{h_m}{\tilde{q}_m} \sin^2(h_m H) \right] \\
&= \frac{H(h^2 + \tilde{q}^2)}{\tilde{q}^2 n_2^2} + \frac{h^2}{n_3^2 q \tilde{q}^2} + \frac{h^2(h^2 + \tilde{q}^2)}{\ln_1^2 (h^2 + \tilde{l}^2) \tilde{q}^2} + \frac{(\tilde{l} + \tilde{q})(h^2 + \tilde{l}\tilde{q})}{n_2^2 (h^2 + \tilde{l}^2) \tilde{q}^2} \quad (9.42)
\end{aligned}$$

The number of the TM modes also depends on both the thickness H and the difference of indexes of refraction.

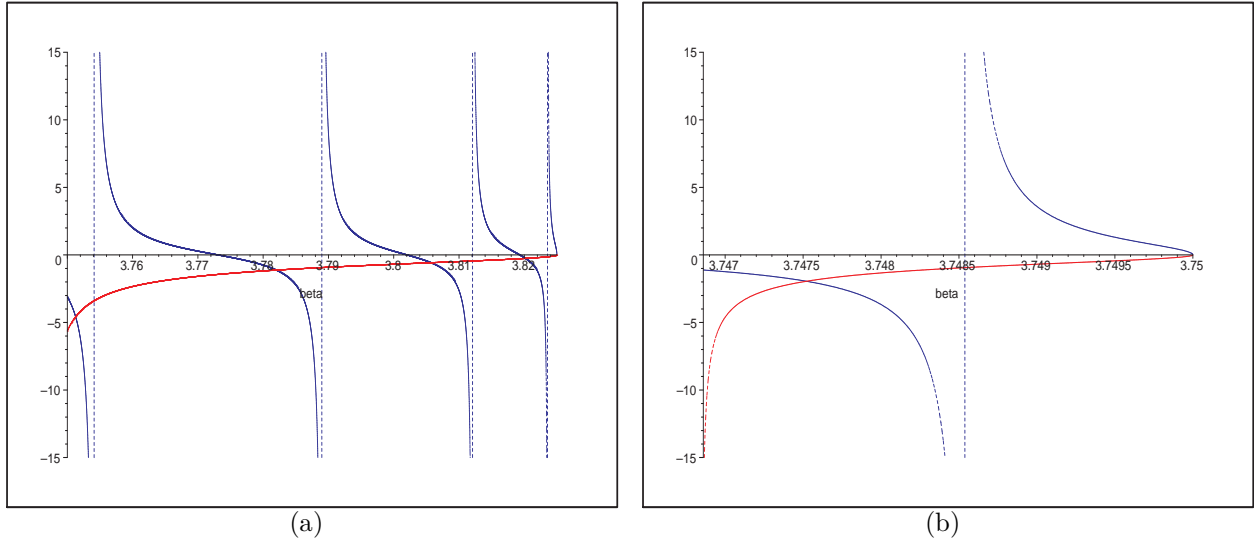


FIGURE 9.6 – Graphic solutions of equation (9.34) for different values of the waveguide refractive index. (a) Here, for $H = 15$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2.55$ and $n_3 = 2.49$, four values of β are found : $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4$. These corresponds to four TM modes. (b) Here, for $H = 15$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2.5$ and $n_3 = 2.49$, only one value of β is found so there is only one TM (fundamental) mode propagating in the waveguide

Generally speaking, a mode becomes confined above a certain (cutoff) value of H/λ . At the cutoff value, $q = 0$ and $\beta = n_3\omega/c = n_3k_0$ and the mode extends to $x = \infty$. According to the mode conditions (9.14), (9.34) and (9.9), cutoff values of H/λ for TE and TM modes are given by :

$$\left(\frac{H}{\lambda} \right)_{TE} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_2^2 - n_3^2}} \left[p\pi + \arctan \left(\sqrt{\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}} \right) \right] \quad (9.43)$$

$$\left(\frac{H}{\lambda} \right)_{TM} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_2^2 - n_3^2}} \left[p\pi + \arctan \left(\frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}} \right) \right] \quad (9.44)$$

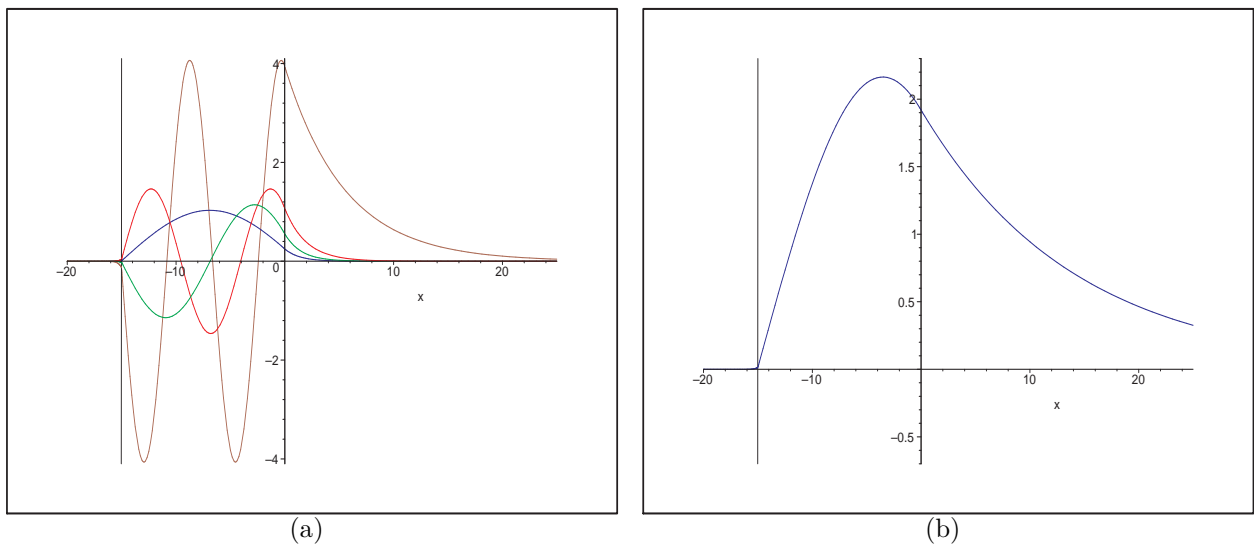


FIGURE 9.7 – *Confined TM modes in an asymmetric slab waveguide. (a) $n_2 = 2.55$ and $n_3 = 2.49$. As you can see this waveguide supports four wave modes corresponding to the four β values found graphically in (9.1.1-a). (b) For a small $n_2 - n_3$ difference only the fundamental mode is found to be supported by the slab guide.*

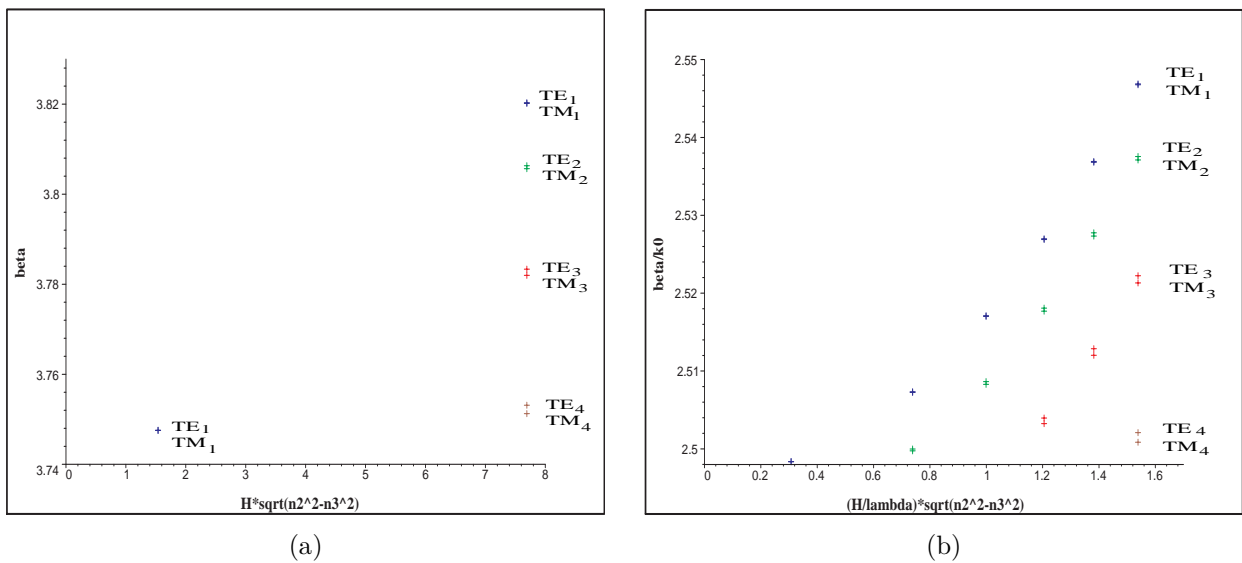


FIGURE 9.8 – (a) β values for the TE and TM modes as functions of $H\sqrt{n_2^2 - n_3^2}$. As $H\sqrt{n_2^2 - n_3^2}$ decreases, the number of guided modes reduces ($H=15$). (b) Here we represent more values of β/k_0 as functions of $H\sqrt{n_2^2 - n_3^2}/\lambda$

where p is an integer that denotes the $(p+1)$ th confined TE/TM mode. Note that the cut-off thickness of the TM_p mode is always larger than that of the TE_p mode because $n_2/n_1 > 1$. As the values of H/λ increase, so does the value of q and the mode becomes increasingly confined.

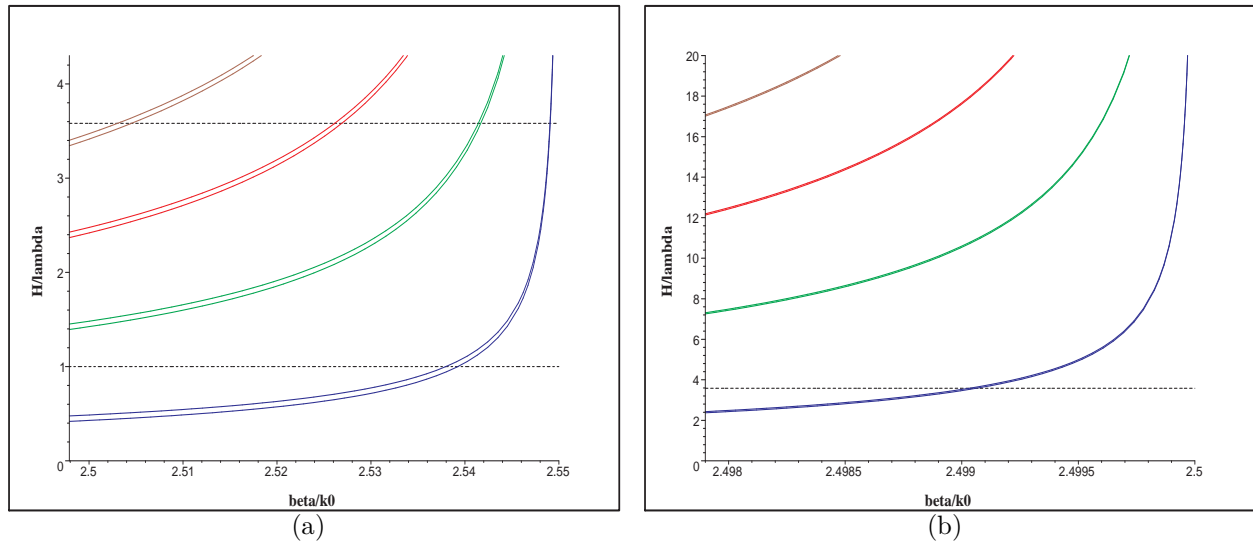


FIGURE 9.9 – Dispersion curves for the confined modes of a film of refractive index n_2 and thickness H on LGT crystal substrate ($n_3 = 2.4979$). The graph (a) shows the number of guided TE/TM modes as functions of the H/λ fraction for $n_2 = 2.55$. We see that a waveguide of thickness $H = 15 = 3.58\lambda$ (the dotted line) supports four TE modes and four TM modes. As H/λ approaches the unity (the dash-dotted line), the number of guided modes supported by the structure reduces to one. The graph (b) shows that the cutoff fraction H/λ for the fundamental TE/TM modes increases if we reduce the refractive index to $n_2 = 2.5$. In this case a waveguide of thickness $H = 15 = 3.58\lambda$ supports only one TE/TM mode.

9.2 Evanescent optics in a birefringent medium

We propose here another physical situation where the birefringent crystal is lighted one face (conveniently chosen) with a continuous wave (CW) monochromatic beam incident with an angle slightly above the extinction angle. The refracted beam then propagates along the surface $x = 0$ and it is evanescent inside the crystal. The planar medium is assumed infinite in the direction y to reduce the number of variables for technical convenience.

Our first task is to determine the nature of the electromagnetic field inside the birefringent medium and in particular on the surface $x = 0$. There, nonlinearity had no space to come into play and we simply write down the refraction laws of an incident CW transverse magnetic (TM) beam of frequency ω propagating in the xOz plane in the direction $\mathbf{K}_1 = k_1\mathbf{e}_x + q_1\mathbf{e}_z$ in the dielectric (region $x < 0$, index n_1). In the crystal it propagates in the direction $\mathbf{K} = k\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_z$.

We thus consider Maxwell equations

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t (\varepsilon \mathbf{E}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (9.45)$$

The dielectric constant $\varepsilon(\omega, \theta)$ depends of course on the medium in which the field propagates, on the frequency and, in a birefringent crystal, on the direction of propagation with respect to the optical axis (OZ) (given by the angle θ):

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2}. \quad (9.46)$$

The process of parametric amplification is most efficient when the phase-matching condition is fulfilled. We have seen that for the second harmonic generation this gives us the optimal angle θ_o as in (11.1).

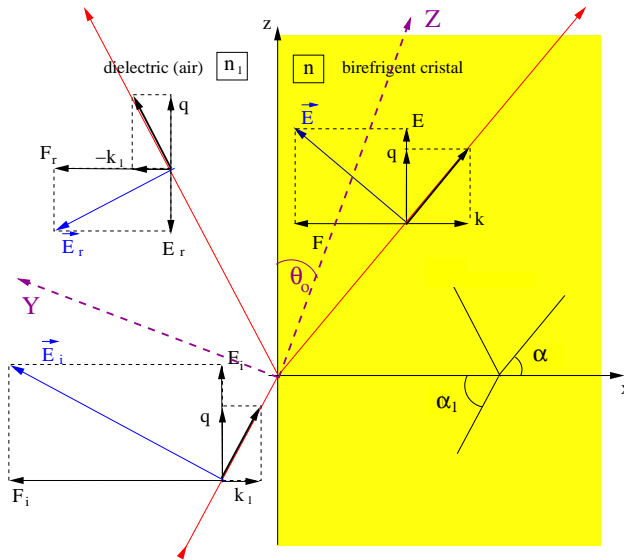


FIGURE 9.10 – A 2D birefringent crystal, represented in the principal crystal plane, is lighted on its surface xOy from a dielectric of index n_1 , greater than the ordinary optical index $n_o(\omega)$ of the crystal at a given irradiation frequency ω . The incident angle α_1 is chosen slightly greater than the extinction angle.

First, by inspection of the Figure 9.10, we immediately can set

$$q_1 = q \quad (9.47)$$

by continuity of the tangential component of the electric field. Thus from now on we shall denote by q the unique z -component of the wave numbers. Let us introduce a new angle in the birefringent medium, that we will define again with respect to the optical axis ¹ :

$$\theta = \theta_o + \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (9.48)$$

This angle will be important to evaluate the refractive index (or the dielectric constant) in a given direction of propagation, using the relation (9.46). We also denote the electromagnetic field amplitudes by small letters if they are expressed with respect to the coordinate system (xOz) and we will use capital letters if the em field is expressed in the coordinate system attached to the birefringent crystal $(Y0Z)$.

So, due to reflection we have

$$x < 0 : \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \\ e_i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 x - qz)} + \begin{pmatrix} f_r \\ 0 \\ e_r \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 x - qz)}, \quad (9.49)$$

and seek a transmitted wave solution in the crystal ($x > 0$) :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ e \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx - qz)} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ E \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx - qz)} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ E \end{pmatrix}. \quad (9.50)$$

The data are the incident power flux density proportional to $|e_i|^2 + |f_i|^2$ and the direction α_1 of incident beam

$$\tan \alpha_1 = \frac{q}{k_1} \quad (9.51)$$

¹and therefore $\sin \theta = \cos(\theta_o + \alpha)$ and $\cos \theta = \sin(\theta_o + \alpha)$

We compute the magnetic field from $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 x - qz)} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_r \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 x - qz)}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx - qz)}.$$

with

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{1}{\omega} (qf_i - k_1 e_i) \\ b_r &= \frac{1}{\omega} (qf_r + k_1 e_r) \\ b &= \frac{1}{\omega} (qf - ke) \end{aligned}$$

Now, using $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t (\vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})$ in both regions will allow us to find the dispersion relations.

In the region $x < 0$ the dielectric tensor $\vec{\varepsilon}$ does not depend on the direction of propagation as the first medium is isotropic and so we have :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} iq(qf_i - k_1 e_i) \\ 0 \\ -ik_1(qf_i - k_1 e_i) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 x - qz)} + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} iq(qf_r + k_1 e_r) \\ 0 \\ ik_1(qf_r + k_1 e_r) \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 x - qz)} \\ \mu_0 \varepsilon_1 \partial_t \mathbf{B}_1 &= i\omega \mu_0 \varepsilon_1 \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \\ e_i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 x - qz)} + i\omega \mu_0 \varepsilon_1 \begin{pmatrix} f_r \\ 0 \\ e_r \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 x - qz)} \end{aligned}$$

The two systems for (e_i, f_i) and (e_r, f_r) decouple due to the independence of the exponentials (with $-k_1 x$ and $+k_1 x$) and thus, the last system reads :

$$\begin{pmatrix} q^2 - \mu_0 \varepsilon_1 \omega^2 & -qk_1 \\ -qk_1 & k_1^2 - \mu_0 \varepsilon_1 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ e_i \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} q^2 - \mu_0 \varepsilon_1 \omega^2 & qk_1 \\ qk_1 & k_1^2 - \mu_0 \varepsilon_1 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ e_r \end{pmatrix} = 0$$

A vanishing determinant finally gives ²

$$k_1^2 + q^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 \quad \Leftrightarrow \quad (k_1^2 + q^2)c^2 = \omega^2 n_1^2. \quad (9.52)$$

In the region $x > 0$ the dielectric tensor can be expressed in the crystal frame as in (8.2) and so we have the following relations :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} iq(qf - ke) \\ 0 \\ -ik(qf - ke) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx - qz)} \\ \mu_0 \partial_t (\vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}) &= i\omega \mu_0 \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 \\ n_o^2 F \\ n_e^2 E \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx - qz)} \\ &= i\frac{\omega}{c^2} \begin{pmatrix} n_o^2(f \cos^2 \theta - e \sin \theta \cos \theta) + n_e^2(f \sin^2 \theta + e \sin \theta \cos \theta) \\ 0 \\ n_o^2(e \sin^2 \theta - f \sin \theta \cos \theta) + n_e^2(e \cos^2 \theta + f \sin \theta \cos \theta) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx - qz)} \end{aligned}$$

which reads

$$\begin{pmatrix} q^2 & -kq \\ -kq & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n_o^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \gamma^2 \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta (\gamma^2 - 1) \\ \sin \theta \cos \theta (\gamma^2 - 1) & \sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix}$$

²We recall that $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

Introducing the same notations as before :

$$\begin{aligned}\eta^2(\theta) &= \cos^2 \theta + \gamma^2 \sin^2 \theta \\ \tau(\theta) &= \sin \theta \cos \theta (\gamma^2 - 1) \\ \beta^2(\theta) &= \sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta \\ \eta^2(\theta) \beta^2(\theta) - \tau^2(\theta) &= \gamma^2 = \frac{n_e^2}{n_o^2}\end{aligned}$$

leads us to the following system :

$$\begin{pmatrix} c^2 q^2 - \omega^2 n_o^2 \eta^2(\theta) & -c^2 kq - \omega^2 n_o^2 \tau(\theta) \\ -c^2 kq - \omega^2 n_o^2 \tau(\theta) & c^2 k^2 - \omega^2 n_o^2 \beta^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} = 0.$$

A vanishing determinant furnishes the dispersion relation :

$$c^2 [k^2 \eta^2(\theta) + q^2 \beta^2(\theta) + 2qk \tau(\theta)] = \omega^2 \gamma^2 n_o^2. \quad (9.53)$$

Last, the continuity conditions at the interface $x = 0$ read

$$(\mathbf{E}_1)_\parallel = (\mathbf{E})_\parallel, \quad \varepsilon_1 (\mathbf{E}_1)_\perp = (\vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})_\perp, \quad (\mathbf{B}_1)_\parallel = (\mathbf{B})_\parallel, \quad (\mathbf{B}_1)_\perp = (\mathbf{B})_\perp. \quad (9.54)$$

as indeed surface charges and currents are contained in \mathbf{P} . We first solve the continuity of $(\mathbf{E})_\parallel$ in $x = 0$, which gives $(e_i + e_r) e^{i(\omega t - qz)} = e e^{i(\omega t - qz)}$ and therefore (we already used $q_1 = q$)

$$e = e_i + e_r. \quad (9.55)$$

Such a relation leads us to define (accordingly to the Figure 9.10)

$$e_r = -R e_i, \quad e = T e_i \quad T = 1 - R \quad (9.56)$$

which are the reflection and transmission factors. Then, by geometric considerations, we set $f_r = R f_i$ (it comes from the starting assumption that the wave vector of the reflected wave is $(-k_1, 0, q)$) such that finally

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \\ e_i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 x - qz)} + R \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \\ -e_i \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 x - qz)}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ (1 - R)e_i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx - qz)}, \quad (9.57)$$

while the magnetic field becomes

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ q f_i - k_1 e_i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 x - qz)} + \frac{R}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ q f_i - k_1 e_i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 x - qz)}, \quad (9.58)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ q f - k(1 - R)e_i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx - qz)}. \quad (9.59)$$

Requiring the continuity of \mathbf{B}

$$k_1(1 + R)e_i - q(1 + R)f_i = k(1 - R)e_i - qf \quad (9.60)$$

Note that the Maxwell equation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ is automatically satisfied as there is no y -dependence.

We apply now the Gauss theorem $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ in the region $x < 0$ and obtain

$$k_1 f_i + q e_i = 0, \quad R(k_1 f_i + q e_i) = 0 \quad (9.61)$$

and in the region $x > 0$ we obtain :

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \left[\begin{array}{c} n_o^2(f \cos^2 \theta - e \sin \theta \cos \theta) + n_e^2(f \sin^2 \theta + e \sin \theta \cos \theta) \\ 0 \\ n_o^2(e \sin^2 \theta - f \sin \theta \cos \theta) + n_e^2(e \cos^2 \theta + f \sin \theta \cos \theta) \end{array} \right]_{xyz} e^{i(\omega t - kx - qz)} = 0$$

and so,

$$k [f \eta^2(\theta) + (1 - R)e_i \tau(\theta)] + q [(1 - R)e_i \beta^2(\theta) + f \tau(\theta)] = 0 \quad (9.62)$$

Last, the continuity of \mathbf{D}_\perp in $x = 0$ gives

$$\varepsilon_1(1 + R)f_i = \varepsilon_0 n_o^2 [f \eta^2(\theta) + (1 - R)e_i \tau(\theta)]. \quad (9.63)$$

In summary we have obtained the following system formed by the relations (9.60), (9.61), (9.62) and (9.63) :

$$\begin{aligned} (1 + R)(k_1 e_i - q f_i) &= k(1 - R)e_i - q f \\ k_1 f_i + q e_i &= 0, \\ k [f \eta^2(\theta) + (1 - R)e_i \tau(\theta)] + q [(1 - R)e_i \beta^2(\theta) + f \tau(\theta)] &= 0 \\ \varepsilon_0 n_o^2 [f \eta^2(\theta) + (1 - R)e_i \tau(\theta)] &= \varepsilon_1(1 + R)f_i. \end{aligned} \quad (9.64)$$

This allows us to eliminate 4 unknowns as follows. From (9.61) and (9.62) we can find :

$$f_i = -\frac{q}{k_1} e_i, \quad (9.65)$$

$$f = -(1 - R) \frac{q\beta^2 + k\tau}{k\eta^2 + q\tau} e_i. \quad (9.66)$$

The remaining relations in (9.64) then give the system (simplified by e_i)

$$\begin{aligned} (1 + R)\left(k_1 + \frac{q^2}{k_1}\right) &= (1 - R)\left(k + q \frac{q\beta^2 + k\tau}{k\eta^2 + q\tau}\right), \\ (1 + R)\frac{q}{k_1} &= \varrho^2(1 - R)\left(\eta^2 \frac{q\beta^2 + k\tau}{k\eta^2 + q\tau} - \tau\right), \end{aligned}$$

where we have introduced the parameter $\varrho^2 = \frac{n_o^2}{n_1^2}$. This is a linear algebraic system for the two unknowns q/k and R .

The next equation determines the ratio k/q in terms of the datum k_1/q :

$$\begin{aligned} \varrho^2(k_1^2 + q^2)\left(\eta^2 \frac{q\beta^2 + k\tau}{k\eta^2 + q\tau} - \tau\right) &= q\left(k + q \frac{q\beta^2 + k\tau}{k\eta^2 + q\tau}\right), \\ \implies \varrho^2 \gamma^2 \left(\frac{k_1^2}{q^2} + 1\right) &= \left(\frac{k}{q} \cos \theta - \sin \theta\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{k}{q} \sin \theta + \cos \theta\right)^2 \end{aligned} \quad (9.67)$$

while the second gives explicitly the reflection and transmission coefficients :

$$R = \frac{k_1 \varrho^2 \gamma^2 - (k \eta^2 + q \tau)}{k_1 \varrho^2 \gamma^2 + (k \eta^2 + q \tau)} \quad (9.68)$$

$$T = \frac{2(k \eta^2 + q \tau)}{k_1 \varrho^2 \gamma^2 + (k \eta^2 + q \tau)} \quad (9.69)$$

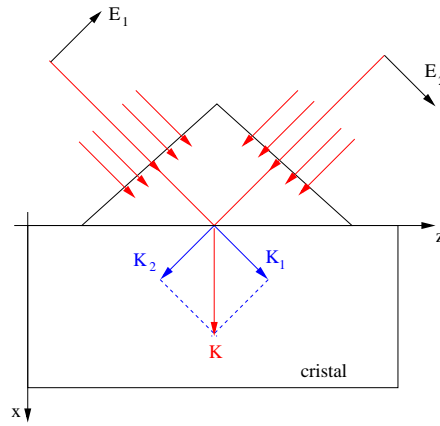


FIGURE 9.11 – Dielectric prism to cancel wavenumber q along the surface. The wavenumber \mathbf{K} is real valued in the dielectric prism but should be imaginary complex inside the crystal. This means to chose incident direction at extinction angle.

Conclusion : the datum of the incident beam direction θ_1 together with the two dispersion relations allow us to compute explicitly k_1 , q , k , and finally R , as functions of the incident frequency ω , namely

$$\boxed{\frac{q}{k_1} = \tan \alpha_1, \quad q^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} \sin^2 \alpha_1, \quad k_{\pm} = \frac{\omega n_1}{c \eta^2} \left(-\tau \sin \alpha_1 \pm \gamma \sqrt{\eta^2 \varrho^2 - \sin^2 \alpha_1} \right).} \quad (9.70)$$

Consequently the reflection and transmission factors can eventually be written :

$$R = \frac{\varrho^2 \gamma^2 - (\delta \eta^2 + \tau \tan \alpha_1)}{\varrho^2 \gamma^2 + (\delta \eta^2 + \tau \tan \alpha_1)}, \quad T = \frac{2(\delta \eta^2 + \tau \tan \alpha_1)}{\varrho^2 \gamma^2 + (\delta \eta^2 + \tau \tan \alpha_1)} \quad (9.71)$$

$$\text{where} \quad \varrho^2 \gamma^2 = \frac{n_e^2}{n_1^2} \quad \text{and} \quad \delta_{\pm} = \frac{k}{k_1} = -\frac{\tau}{\eta^2} \tan \alpha_1 \pm \frac{\gamma}{\eta^2} \sqrt{\eta^2 \varrho^2 + (\eta^2 \varrho^2 - 1) \tan^2 \alpha_1}$$

9.2.1 Critical angle

There exists an angle of incidence α_1^c above which total internal reflection occurs. This is equivalent to a zero transmission coefficient ($T = 0$) and so by putting $\delta \eta^2 + \tau \tan \alpha_1 = 0$ in relation (9.71) we get for the critical angle the value :

$$\sin^2 \alpha_1^c = \eta^2 \varrho^2. \quad (9.72)$$

we can see that this angle is well defined only if $\eta^2 \varrho^2 < 1$ (equivalent to $n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta = n^2(\theta) < n_1^2$). For a isotropic medium, namely $\eta^2 = \gamma^2 = 1$, the relation (9.72) gives the well known relation for the critical extinction angle : $\sin^2 \alpha_1^c = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$. An important side effect of total internal reflection is the propagation of an evanescent wave across the boundary surface. The reflected light has an angle dependent *phase shift* between the reflected and incident light. This means that the Fresnel reflection coefficient becomes a complex number (rather than a real one). This phase shift is polarization dependent and grows as the incident angle becomes larger. The polarization dependence phase shift is also the reason why TE and TM guided modes have different dispersion relations.

9.2.2 Brewster angle

There exists a uniformly valid solution with $R = 0$ for plane progressive waves, provided the polarization is in the incident plane. In this case the incident beam is totally transmitted

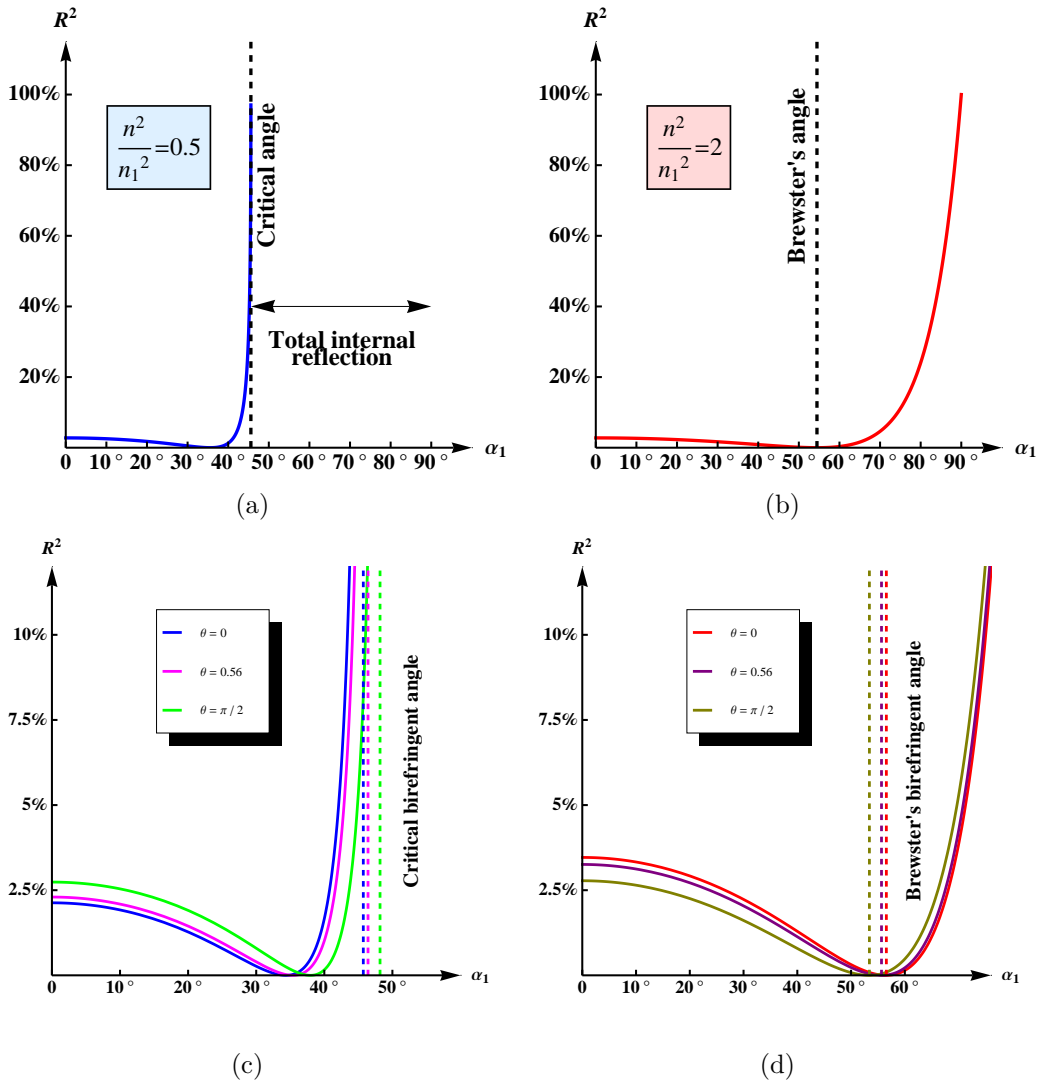


FIGURE 9.12 – Reflectance (the square of the reflection coefficient) variation as function of the angle of incidence. For (a) and (b) the second medium is considered homogeneous and isotropic ($n = ct$). In (c) and (d) we can see how the reflectance varies with the incident angle, if the scattering medium is a birefringent crystal ($n = n(\theta)$). In this case it is important to know which is the angle θ between the interface and the optical axis of the crystal.

into the second medium. The relation (9.71) shows that R vanishes for $\varrho^2 \gamma^2 = \delta \eta^2 + \tau \tan \alpha_1$ namely

$$\varrho^2 \gamma^2 = \eta^2 + \left(\eta^2 - \frac{1}{\varrho^2}\right) \tan^2 \alpha_1, \quad (9.73)$$

which fixes the incident angle value in terms of the frequency ω

$$\tan^2 \alpha_1^B = \varrho^2 \frac{\varrho^2 \gamma^2 - \eta^2}{\varrho^2 \eta^2 - 1} \quad (9.74)$$

This particular angle is known as the Brewster angle and corresponds to a situation when a p-polarised incident ray is completely transmitted (refracted) into the second medium. This is true only when the refractive indices of both materials are real numbers. Again, if we look at this result in an isotropic medium we get for the Brewster angle the value : $\tan^2 \alpha_1^B = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$

La supratransmission non-linéaire dans les modèles intégrables

Sommaire

10.1	Modèle de Schrödinger non-linéaire scalaire	131
10.1.1	Introduction	131
10.1.2	Résultats connus	132
10.1.3	Méthode de développement en série	133
10.1.4	Stabilité linéaire et seuil de supratransmission	135
10.2	Modèle de Schrödinger non-linéaire vectoriel (le système de Manakov)	138
10.2.1	Solitons de gap vectoriels et seuil de supratransmission	139

10.1 Modèle de Schrödinger non-linéaire scalaire

10.1.1 Introduction

L'intégrabilité de l'équation de NLS scalaire, découverte en 1972 par Zakharov et Shabat dans leur article de référence [Zakharov 72],

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2|\psi|^2\psi = 0 \quad (10.1)$$

a été très stimulante pour la communauté scientifique qui s'est mis à la recherche d'autres équations non-linéaires d'évolution ayant la propriété d'intégrabilité. Très vite après [Zakharov 72], les mêmes auteurs ont montré aussi l'intégrabilité de l'équation NLS dans un potentiel chimique avec une non-linéarité défocalisante et des conditions aux bords constantes, soulignant en même temps l'importance physique et mathématique d'un tel modèle [Zakharov 73]. Ces modèles ont permis par la suite l'application de la méthode spectrale inverse (IST de *Inverse Scattering Transform*), l'équivalent non-linéaire de la transformation de Fourier pour les équations linéaires aux dérivées partielles, par [Zakharov 84].

L'IST a été introduite pour la première fois par [Gardner 67] et puis [Lax 68], [Ablowitz 74] et [Calogero 76] ont permis des avancés considérables dans le domaine. L'idée de l'IST c'est de représenter l'équation d'évolution non-linéaire d'une fonction $\psi(x, t)$ sous la forme d'une *paire de Lax* (\hat{L}, \hat{A}) , où \hat{L} et \hat{A} sont des opérateurs linéaires dont les coefficients dépendent de la fonction ψ et de ses dérivées. En d'autre termes, l'équation d'évolution pour u devient une

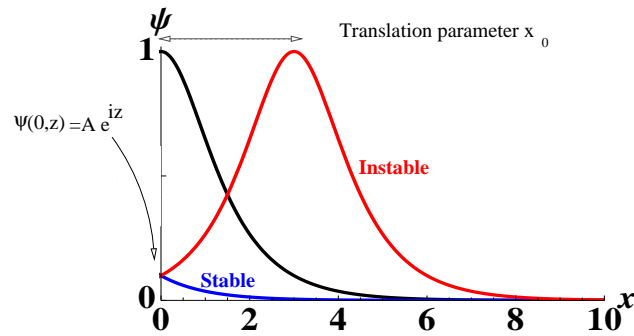


FIGURE 10.1 – Solutions de l'équation de Schrödinger (10.1) avec les conditions aux bords (10.2). Branche stable (en bleu) et instable (en rouge) de la solution soliton (10.3) pour une amplitude de forçage $A < 1$. Le seuil de supratransmission est atteint pour $A = 1$.

condition de compatibilité pour les équations linéaires associées aux deux opérateurs qui font intervenir le *paramètre spectral* λ et la *fonction de Jost* u . Le spectre des données de diffusion est déterminant dans cette méthode, car sa partie discrète est directement liée aux solutions de type solitons alors que le domaine continu correspond aux radiations [Kivshar 89].

Le champ ψ de (10.1) est l'enveloppe lentement variable du champ électromagnétique d'intensité $|\psi|^2$. Le premier terme correspond à la propagation de l'onde. Le deuxième terme caractérise l'étalement linéaire, se rapportant soit à la dispersion, soit à la diffraction, car écrite sous cette forme, l'équation NLS peut s'appliquer au cas temporel ou bien au cas spatial. Enfin le signe du troisième terme exprime l'influence de la non-linéarité qui peut être focalisante (pour le cas présenté ici) ou défocalisante (si on prend le signe contraire devant le terme non-linéaire). Le milieu pourra alors être le support de solitons brillants (faisceau focalisé) ou de solitons noirs (faisceau étendu présentant une bande ou tâche sombre en son centre).

10.1.2 Résultats connus

Résoudre l'équation (10.1) implique l'addition supplémentaire des conditions initiales et aux bords correspondant à une situation physique particulière. On s'intéresse ici au problème (10.1) restreint à la ligne semi-infinie $\{x \in [0, \infty], z \in [0, L]\}$ avec les conditions aux bords de type Dirichlet

$$\psi(0, z) = Ae^{iz}, \quad \psi(\infty, z) = 0 \quad (10.2)$$

et des conditions initiales compatibles pour $\psi(x, 0)$. Le nombre d'onde unitaire $k = 1$ sans dimension¹ appartient à la bande interdite du spectre linéaire de NLS, c'est-à-dire que la composante selon x du vecteur d'onde est pure imaginaire. Ce choix particulier des conditions aux bords correspond à une configuration idéale pour le phénomène de supratransmission non-linéaire (NST) dans NLS.

Il est connu que le forçage harmonique (10.2) détermine l'apparition d'un profil évanescents stable dans le milieu, tant que l'amplitude de forçage reste inférieure à l'unité $A < 1$. Il a été montré que cette onde évanescents n'est rien d'autre que la queue d'un soliton statique du NLS

$$\psi(x, z) = \frac{e^{iz}}{\cosh(x - \eta)}, \quad A = \operatorname{sech}(\eta), \quad \text{pour } \forall \eta < 0. \quad (10.3)$$

Cette solution est atteinte au bout d'une certaine période transitoire et elle correspond à la solution exacte de ce problème quand le profil initial est $\psi(x, 0) = \operatorname{sech}(x - \eta)$.

¹car on a effectué une transformation sur les coordonnées et le champ complexe $z \rightarrow kz, x \rightarrow \sqrt{k}x$ et $\psi \rightarrow \psi/\sqrt{k}$

Évidemment, il ne faut pas oublier que ce problème a une autre solution pour $\eta > 0$, mais on montrera que celle ci est instable. Cette instabilité du profil évanescent sera responsable de la génération et de la propagation des *solitons de gap* et une fois ceux derniers émis, le système sera attiré de nouveau vers l'état (10.3). Toujours en regardant la relation (10.3), il est évident que cette solutions ne reste plus valable pour $A > 1$. La valeur $A = 1$ correspond au *seuil* de la NST. Si on essaye d'appliquer une modulation périodique au bord ($x = 0$) d'une amplitude A supérieure à l'unité, un train de solitons de gap sera émis suite à cette démarche [Khomeriki 04].

10.1.3 Méthode de développement en série

Nous allons maintenant regarder les résultats précédents d'un autre point de vue : est-ce qu'il est possible d'obtenir la solution statique² approchée de (10.3) en utilisant une méthode d'expansion en séries? On considère pour cela le problème statique associé au (10.1) en cherchant des solutions de la forme

$$\psi(x, z) = u(x)e^{iz}, \quad u(x) \in \mathbb{R} \quad (10.4)$$

et donc on obtient

$$u_{xx} - u + 2u^3 = 0. \quad (10.5)$$

En imposant les conditions (10.2) on trouve que la nouvelle fonction $u(x)$ doit satisfaire les conditions

$$u(0) = A, \quad u(\infty) = 0. \quad (10.6)$$

Pour bien choisir les bonnes séries asymptotiques on va tenir compte de deux aspects importants :

- la méthode proposée doit tenir compte des non-linéarités du système de façon perturbative. Effectivement, puisqu'on traite un problème au bord, on peut, dans un premier temps, supposer que les non-linéarités n'ont pas l'*espace* pour se développer de façon significative et que l'approximation linéaire doit pouvoir fournir une bonne base de départ.
- la solution approximative recherché doit être nulle à l'infini ce qui nous suggère que l'onde évanescente peut être le pilier fondamental du développement. Dans ce cas, le terme non-linéaire va créer des résonances qui devront être prise en compte. De plus, la forme cubique de la non-linéarité présente dans (10.5) restreint la série à une somme des exponentielles évanescentes de puissances impaires.

Ainsi, nous posons

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{-(2n+1)x} \quad (10.7)$$

et en introduisant cela dans l'équation (10.5) on trouve à l'ordre n :

$$\left[(2n+1)^2 - 1 \right] u_n + 2 \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} u_{n_1} u_{n_2} u_{n_3} = 0, \quad n \geq 1. \quad (10.8)$$

Pour l'instant le premier terme u_0 sera considéré comme un paramètre libre et sans perte de généralité il va être pris positif. On verra par la suite quelles sont les contraintes qu'il doit respecter et dans quel mesure il sera responsable de l'identification du seuil de NST. En tenant compte du fait que

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

²du problème aux conditions aux bords considéré

alors on trouve que la composante u_n est donné par

$$u_n = 2(-1)^n \left(\frac{u_0}{2}\right)^{2n+1} \quad (10.9)$$

et donc

$$u(x) = u_0 e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{u_0^2 e^{-2x}}{4} \right]^n = \operatorname{sech}(x - \eta) \quad (10.10)$$

où le paramètre de translation η est défini comme suit

$$\boxed{\eta = \ln\left(\frac{u_0}{2}\right)}.$$

On remarque ici que l'ordre le plus bas de notre développement permet de définir le paramètre de translation de la solution soliton de NLS et en plus il permet de définir une seule solution qui, par translation, s'adapte aux variations des conditions au bord $x = 0$ (c'est-à-dire à l'amplitude $A = u(0)$).

Il est tout aussi important de souligner le fait que la série (10.10) ne converge que pour des valeurs de la coordonnée spatiale $x > \eta$. Par conséquent, la condition au bord $u(0) = A$ impose $\eta < 0$ si on veut que les séries restent valables pour tout $x > 0$ ce qui se traduit par

$$\eta = \ln\left(A^{-1} - \sqrt{A^{-2} - 1}\right) < 0. \quad (10.11)$$

Le paramètre (10.11) défini pour $A < 0$ correspond à la partie stable de la solution solitonique alors que le profil évanescant instable, correspondant à $\eta > 0$, ne peut pas être décrit par cette approche. le seuil de NST peut être obtenu maintenant de façon asymptotique comme étant le maximum de la fonction

$$A_s = \max\{\operatorname{sech}(\eta)\} \quad \text{pour } \eta < 0. \quad (10.12)$$

Le modèle de NLS a l'avantage d'être assez simple³ et en plus il est intégrable ce qui permet le calcul de tous les termes u_n de la série (10.10). Ceci n'est pas forcément la cas pour d'autres modèles de type Schrödinger non-linéaire mais la méthode reste quand même très utile. En effet, même si le calcul exact de tous les termes de l'expansion ne peuvent pas être trouvés, une très bonne approximation de la solution exacte est obtenue en tronquant la série à un certain ordre N . On va noter la solution tronquée par $u_N(x)$, qui, dans le cas de NLS (10.5), devient

$$u_N(x) = u_0 e^{-x} \sum_{n=0}^N \left[-\frac{u_0^2 e^{-2x}}{4} \right]^n = \frac{1 - (-1)^{N+1} e^{-2(N+1)(x-\eta)}}{\cosh(x - \eta)}. \quad (10.13)$$

La condition au bord $u(0) = A$ devient alors

$$A_N = \operatorname{sech}(\eta) \left[1 - (-1)^{N+1} e^{2\eta(N+1)} \right] \quad (10.14)$$

Dans ces conditions, le seuil de NST défini par (10.12) peut être déterminé en cherchant le maximum de la fonction (10.14), c'est-à-dire en imposant la condition

$$\frac{\partial A_N}{\partial \eta} = 0. \quad (10.15)$$

Celle ci nous fournit la valeur du paramètre de translation pour laquelle la condition de NST est satisfaite

$$\eta_N = -\frac{W(4(N+1)^2)}{2(N+1)}, \quad \text{pour } N \text{ impair.} \quad (10.16)$$

³car il possède beaucoup de symétries

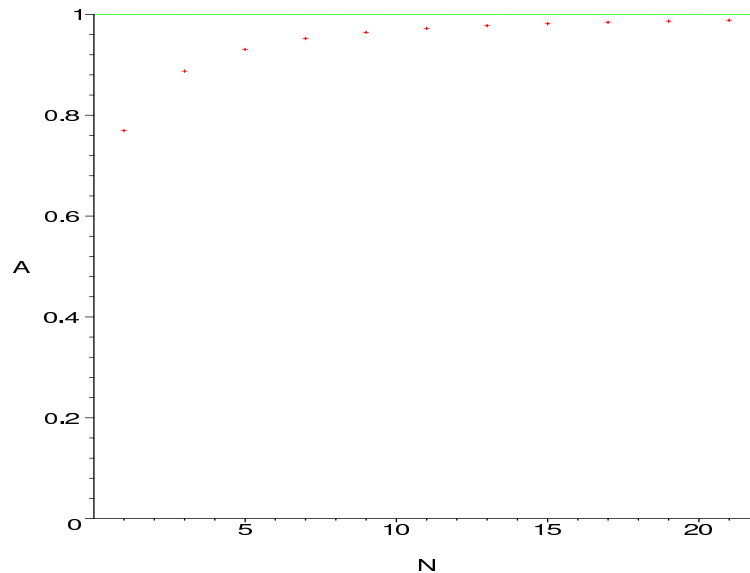


FIGURE 10.2 – L’amplitude de supratransmission A en fonction de l’ordre de troncature N de la série (10.14). La ligne continue montre le seuil exact de NST correspondant à $A = 1$.

Ici, W est la fonction de Lambert définie à travers l’équation implicite

$$W(x)e^{W(x)} = x$$

et dont le comportement asymptotique pour $x \rightarrow \infty$ est donné par

$$W(x) = \ln x - \ln \ln x + \mathcal{O}(1). \quad (10.17)$$

Maintenant, l’amplitude du seuil de NST peut être obtenue de façon approximative en introduisant (10.17) dans (10.16) et puis le tout dans (10.14). Cette solution devient exacte dans la limite $N \rightarrow \infty$. Dans la Figure 10.1.3 on peut voir que même en s’arrêtant au premier ordre dans la série, la solution approximative n’est pas très loin de celle exacte donnée par $A = 1$. L’avantage de cette expansion en séries ne s’arrête pas là. Son attribut majeur reste son applicabilité à d’autres problèmes dont on ne connaît pas une solution exacte de type soliton et nous allons voir que dans les cas des systèmes multi-composant non-intégrables cet outil permet de déterminer le seuil NST avec une excellente précision.

10.1.4 Stabilité linéaire et seuil de supratransmission

On s’intéresse maintenant aux corrélations qui existent entre la stabilité linéaire et le seuil de NST pour le problème (10.1) avec les conditions (10.2) sur la demie-ligne \mathbb{R}^+ . On sait déjà qu’il n’y a pas de solution de type onde évanescence dans le milieu quand l’amplitude de forçage dépasse la valeur critique $A = 1$ et que dans ce cas des solitons de gap sont systématiquement générés. De plus, l’équation NLS avec les conditions aux bords (10.2) pour $A = \operatorname{sech}(\eta)$ et une condition initiale de profil $\psi(x, 0) = \operatorname{sech}(x - \eta)$ aboutit à une solution instable pour tout $\eta > 0$. Inversement, si $\eta < 0$ alors le profil initial est bien stable et cela est un résultat bien intéressant. Cela peut être vérifié numériquement très facilement. Dans le paragraphe qui suit on essaiera de montrer cet effet aussi de point de vu analytique par l’intermédiaire d’une méthode perturbative autour du paramètre $\eta = 0$.

Tous ces remarques suggèrent à ce stade que le phénomène de supratransmission et la perte de la stabilité linéaire s’expriment à la même valeur critique du paramètre de translation $\eta = 0$. Pour démontrer cela on va analyser par la suite l’évolution linéaire d’une petite perturbation de la solution exacte de (10.1)

$$\psi(x, z) = [u(x) + \gamma(x, z)] e^{iz} \quad \text{avec} \quad \gamma(0, z) = \gamma(\infty, z) = 0, \quad (10.18)$$

où la perturbation est une fonction complexe

$$\gamma(x, z) = \gamma_r(x, z) + i\gamma_i(x, z).$$

Si on injecte maintenant (10.18) dans (10.1) et on ne garde que les termes linéaires des équations on obtient pour les équations variationnelles suivantes

$$\dot{\gamma}_r + L_- \gamma_i = 0, \quad L_- = \partial_x^2 - 1 + 2u^2, \quad (10.19)$$

$$\dot{\gamma}_i - L_+ \gamma_r = 0, \quad L_+ = \partial_x^2 - 1 + 6u^2, \quad (10.20)$$

où le point représente une dérivation par rapport à la variable z . Il devient clair que les opérateurs L_- et L_+ joueront un rôle important dans l'étude de la stabilité. Ce sont des opérateurs de Schrödinger auto-adjoints ayant un spectre continu pour $[1, \infty)$ et un nombre fini de valeurs propres discrètes plus petites que 1 [Chang 06].

Les équation (10.19) et (10.20) peuvent être étudiées comme un problème aux valeurs propres en imposant une séparation des variables de la forme :

$$\gamma(x, z) = \Gamma(x)e^{i\omega z},$$

et en posant $\Gamma(x) = \Gamma_r(x) + i\Gamma_i(x)$ on trouve les équations suivantes pour les parties réelles et imaginaires :

$$L_- L_+ \Gamma_r = \omega^2 \Gamma_r \quad \text{et} \quad L_+ L_- \Gamma_i = \omega^2 \Gamma_i. \quad (10.21)$$

Il ne faut pas oublier aussi les conditions correspondantes pour $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(0) = \Gamma(\infty) = \partial_x^2 \Gamma(0) = \partial_x^2 \Gamma(\infty) = 0. \quad (10.22)$$

Il est important de préciser ici que l'opérateur $L_- L_+$ est l'adjoint de $L_+ L_-$. La valeur propre ω^2 est réelle et elle nous indiquera le comportement de la solution. Ainsi, si

- $\omega^2 > 0$ alors la solution $u(x)e^{iz}$ de NLS est *stable* car toute perturbation $\gamma(x, z)$, apportée à la solution, détermine juste une oscillation de la solution autour de la solution initiale, alors que pour
- $\omega^2 < 0$ la solution est *instable*. Effectivement, une petite perturbation initiale croit de manière exponentielle entraînant la perte de la stabilité du profil initial.

La valeur $\omega = 0$ correspond donc au point de *bifurcation*. La solution exacte de (10.21) est donnée par la combinaison linéaire des solutions indépendantes $\partial_x u$ et $u + x\partial_x u$ [Rose 88]. En imposant les conditions (10.22) la seule solution sélectionnée sera $\partial_x u$ et cela nous donne finalement

$$\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_x u|_{x=0} = 0. \quad (10.23)$$

Si on compare maintenant la solution $u(x)$ de (10.13) exprimée en fonction du paramètre η , alors la condition (10.23), qui n'est rien d'autre que la condition de supratransmission, implique $\eta = 0$. Maintenant il reste à voir comment la valeur propre change en variant le paramètre de translation autour de la position critique $\eta = 0$ et si la stabilité de la solution pour $\eta < 0$ est bien retrouvée dans le signe de la valeur propre ω^2 . Pour des valeurs très petites du paramètre de translation on peut montrer que

$$\omega^2 \sim -4\eta, \quad \text{pour} \quad |\eta| \ll 1. \quad (10.24)$$

Ce résultat est ensuite comparé aux valeurs numérique exactes et on peut voir qu'on obtient un bon accord entre la solution exacte et celle approchée pour des valeurs plus petites que $\eta < 0.3$.

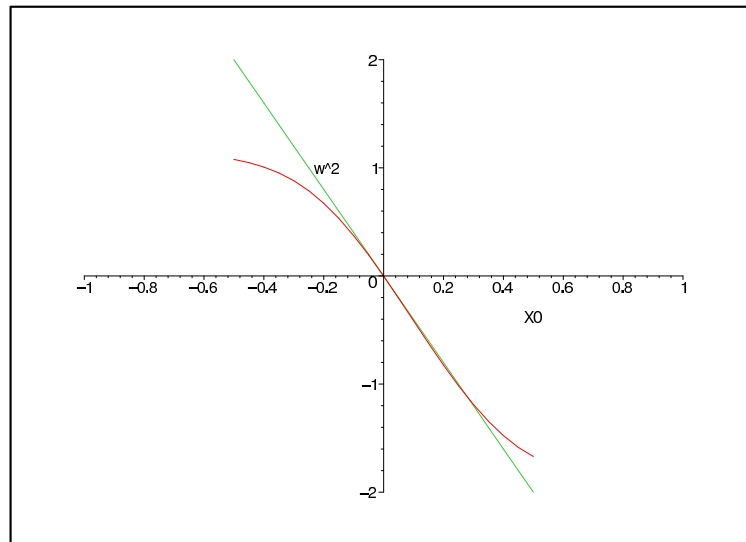


FIGURE 10.3 – La valeur propre ω^2 est exprimée en fonction du paramètre de translation η . La courbe numérique est tracée en rouge et le résultat analytique approché est en vert.

Nous allons maintenant montrer comment le résultat (10.24) a été obtenu. Nous savons que pour $\eta = 0$, la solution du problème aux valeurs propres (10.21) est $\omega^2 = 0$ et $\Gamma_r^{(0)} = \partial_x u^{(0)}$. Par la notation $f^{(0)}$ on indique que la fonction est calculée pour $\eta = 0$. Pour $\forall |\eta| \ll 1$, on peut écrire les fonction u et Γ_r sous la forme des séries de Taylor

$$u = u^{(0)} - \eta \partial_x u^{(0)} + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (10.25)$$

$$\Gamma_r = \partial_x u^{(0)} + \eta f(x) + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (10.26)$$

où on a noté par $f(x)$ la perturbation qui reste à évaluer⁴. En introduisant les séries (10.25) et (10.26) dans (10.21), alors, au premier ordre en η on trouve les équations :

$$\eta L_-^{(0)} L_+^{(0)} f(x) - 12 \eta L_-^{(0)} u^{(0)} (\partial_x u^{(0)})^2 = \omega^2 \partial_x u^{(0)}, \quad (10.27)$$

On a utilisé ici le fait que

$$L_+^{(0)} \partial_x u^{(0)} = 0$$

L'astuce pour éliminer la contribution de la correction $f(x)$ (inconnue) est de multiplier l'équation (10.27) par la fonction $xu^{(0)}$ qui appartient au noyau de l'opérateur $L_+^{(0)} L_-^{(0)}$. On rappelle que $L_+^{(0)} L_-^{(0)}$ est l'opérateur adjoint de $L_-^{(0)} L_+^{(0)}$. On peut maintenant intégrer le résultat sur \mathbb{R}^+ car la fonction d'intégration choisie a les bonnes propriétés aux bords :

$$xu^{(0)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad xu^{(0)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \quad (10.28)$$

Le résultat obtenu après intégration est

$$-12 \eta \int_0^\infty 2u^{(0)} (\partial_x u^{(0)})^2 \partial_x u^{(0)} dx = \omega^2 \int_0^\infty xu^{(0)} \partial_x u^{(0)} dx$$

ou encore en introduisant le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)dx$

$$-12 \eta \langle u^{(0)} (\partial_x u^{(0)})^2, 2\partial_x u^{(0)} \rangle = \omega^2 \langle xu^{(0)}, \partial_x u^{(0)} \rangle, \quad (10.29)$$

où nous avons utilisé le fait que

$$L_-^{(0)} xu^{(0)} = 2\partial_x u^{(0)}.$$

⁴Il faut noter que $\partial_x u = -\partial_\eta u$ car par définition $u = u(x - \eta)$

Maintenant si on utilise la solution statique $u^{(0)} = \operatorname{sech}x$, correspondant à $\eta = 0$, nous obtenons après intégration de (10.29) le résultat annoncé auparavant

$$\omega^2 = -4\eta + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (10.30)$$

Pour résumer, le résultat (10.30) nous montre que la solution initiale $\psi(x, 0) = \operatorname{sech}(x - \eta)$ du problème (10.1) avec la condition $\psi(0, z) = \operatorname{sech}(\eta) e^{iz}$ est

- *linéairement stable* pour $\eta < 0$,
- *linéairement instable* pour $\eta > 0$.

10.2 Modèle de Schrödinger non-linéaire vectoriel (le système de Manakov)

La généralisation non-triviale la plus simple de l'équation NLS est le système de NLS à plusieurs composantes, connu sous le nom de modèle de NLS vectoriel pour un champ complexe à n composantes [Atanasov 06]. La version intégrable la plus simple, pour $n = 2$, a été introduite par Manakov et elle est donnée par [Manakov 74] :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2(|\psi|^2 + |\phi|^2)\psi = 0 \quad (10.31a)$$

$$i\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2(|\psi|^2 + |\phi|^2)\phi = 0 \quad (10.31b)$$

où z est la direction de propagation et x représente la direction transverse. Des équations similaires peuvent se retrouver aussi en optique, où (10.31) apparaît comme modèle limite de la propagation d'un pulse dans un milieu non-linéaire de type Kerr et où la direction de propagation z est remplacée par le temps retardé t [Kivshar 03], [Akhmediev 97].

Le système (10.31) possède la solution suivante

$$\psi = e^{iz} \sin\theta \operatorname{sech}(x - \eta), \quad \phi = e^{iz} \cos\theta \operatorname{sech}(x - \eta). \quad (10.32)$$

qui dépend de deux paramètres θ et η . Si on impose la restriction de (10.31) au semi-axe positif $x > 0$ et $z \in [0, L]$ avec les conditions au bord $x = 0$

$$\psi(0, z) = Ae^{iz}, \quad \phi(0, z) = Be^{iz}, \quad (10.33)$$

et $x \rightarrow \infty$

$$\psi(\infty, z) = \phi(\infty, z) = 0, \quad (10.34)$$

alors les relations (10.32) restent des solutions de (10.31) que si les amplitudes A et B sont reliées aux paramètres (θ, η) par :

$$A = \sin\theta \operatorname{sech}\eta, \quad B = \cos\theta \operatorname{sech}\eta. \quad (10.35)$$

Les simulations numériques de ce système figurent en 10.4. On peut voir là comment l'instabilité se développe au-delà d'une certaine valeur de A et B et les solitons de gap vectoriels qui en résultent.

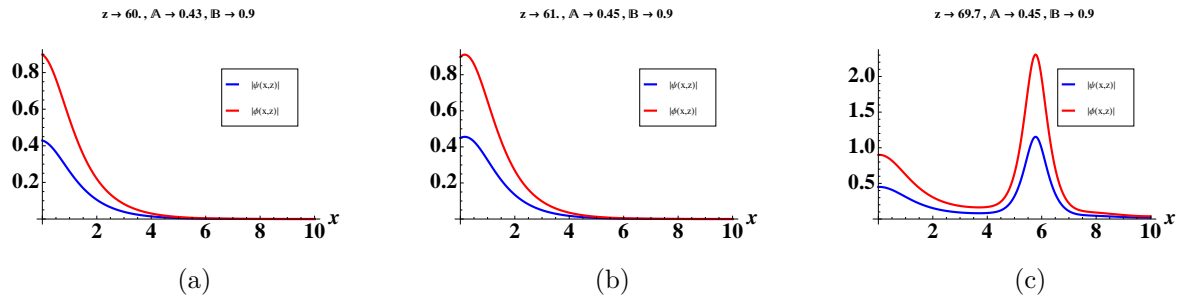


FIGURE 10.4 – Simulations numériques du système (10.31) avec les conditions (10.33). Pour $A = 0.43$ et $B = 0.9$ le profil évanescents est stable (a) pour tout $z > 0$. En augmentant très peu la valeur de A on constate que le profil évanescents initial devient instable (b) en $x = 0$ et l'instabilité génère dans le milieu un soliton de gap vectoriel (c)

10.2.1 Solitons de gap vectoriels et seuil de supratransmission

Le seuil de NST est obtenu en cherchant le maximum d'une des deux amplitudes en maintenant l'autre constante. Cette approche est utilisé à la fois pour trouver les amplitudes critiques dans les simulations numériques mais elle fournira aussi la courbe NST du point de vu analytique, tel qu'on verra par la suite. On peut remarquer à ce stade que la solution (10.35) à notre problème dépend de deux paramètres η et θ qui seront déterminés par la suite⁵. Ainsi, on peut exprimer cette condition d'extremum en utilisant le paramètre de Lagrange λ par

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial B}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial A}{\partial \eta} - \lambda \frac{\partial B}{\partial \eta} = 0. \quad (10.36)$$

Cette condition se traduit par un Jacobien $J(\eta, \theta) = 0$, qui fournit ici la relation tant recherchée :

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial B}{\partial \theta} = 0. \quad (10.37)$$

La solution de l'équation (10.37) est $\eta = 0$ et cela nous fournit l'équation pour le seuil de NST dans le plan (A, B) comme étant le cercle

$$A^2 + B^2 = 1. \quad (10.38)$$

On a tracé cette courbe dans la Figure 10.5(b) et on a montré aussi le résultat d'une simulation numérique pour un point (A, B) appartenant au domaine de génération de solitons de gap 10.5(a). Ce résultat nous sera très utile pour le problème de la génération des solitons de gap dans l'interaction à trois ondes dégénérée (qu'on nommera D3W de l'anglais *degenerate three wave*) dans les OPA.

Il est évident que la généralisation à un système de type (10.1) avec plusieurs composantes est directe. Le modèle de Manakov à M champs complexes ϕ_m s'écrit alors

$$i\partial_z \phi_m + \partial_x^2 \phi_m + 2\left(\sum_{n=1}^M |\phi_n|^2\right) \phi_m = 0 \quad (10.39)$$

avec les conditions au bord $\phi_m(0, z) = A_m e^{iz}$. Le seuil de NST généralisé à ce problème est l'hypersphère de dimension M

$$\sum_{n=1}^M A_m^2 = 1. \quad (10.40)$$

⁵Plus précisément, le seuil de NST fournira une relation entre ces deux paramètres

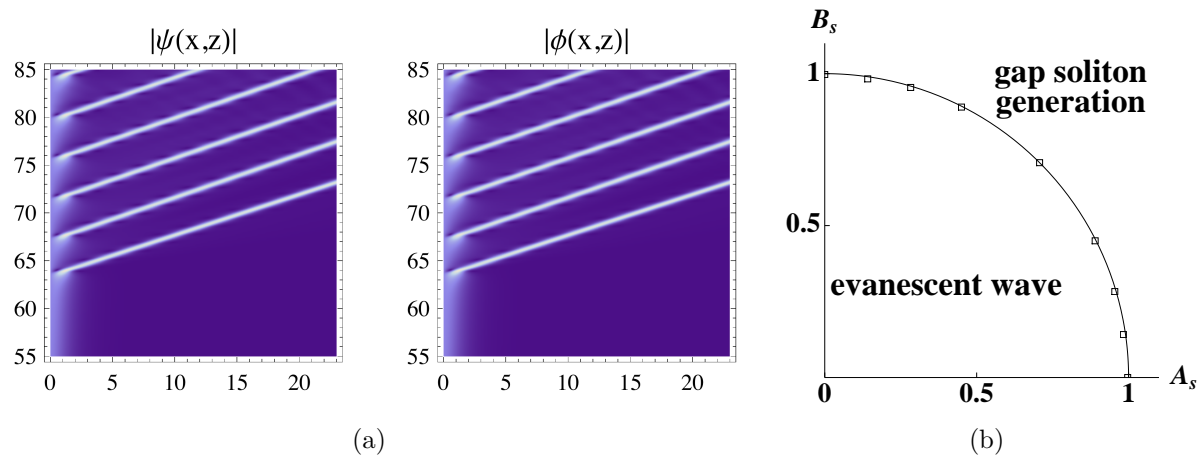


FIGURE 10.5 – (a) Simulations numériques de l'intensité de ψ et ϕ pour $A = 0.45$ et $B = 0.9$. Les amplitudes maximales du soliton vectoriel émis sont $|\psi|_m \simeq 1.2$ et $|\phi|_m \simeq 2.3$. (b) La courbe du seuil de NST dans le plan (A, B) . Les points représentent les valeurs numériques et la ligne continue est donnée par (10.38)

Solitons paramétriques de gap dans les milieux quadratiques

Sommaire

11.1 Valeurs numériques des paramètres pour la GSH dans LGT	141
11.2 Supratransmission NL dans les oscillateurs paramétriques dégénérés	143
11.2.1 Résultats publiés dans <i>Physical Review Letters</i>	144
11.2.2 Solutions sous la forme des séries asymptotiques	144
11.2.3 Prédiction du seuil NST	144
11.2.4 Instabilité paramétrique et supratransmission	144
11.3 Supratransmission NL dans les oscillateurs paramétriques non-dégénérés	149
11.3.1 Résultats publiés dans <i>Physical Review A</i>	149
11.3.2 Configuration physique	149
11.3.3 Forçage au bord par couplage évanescent	149
11.3.4 Le système d'équations non-linéaires couplées pour la 3WI	149
11.3.5 Le seuil de NST et les valeurs numériques	149

11.1 Valeurs numériques des paramètres pour la GSH dans LGT

Le cristal $LiGaTe_2$ (ou *LGT*) est un chalcopyrite de forte non-linéarité quadratique transparent aux longueurs d'onde de l'infrarouge moyen. Il est assez biréfringent pour permettre l'accord de phase entre une onde fondamentale (FH) et sa deuxième harmonique (SH). Son coefficient non-linéaire d_{36} a été estimé par la méthode de la génération de la seconde harmonique (GSH) comme étant de l'ordre de $43 \text{ pm/V} \pm 10\%$. Son intervalle de transmission a été évalué à $[0.5, 24] \mu\text{m}$ et il présente une transparence totale pour les longueurs d'onde allant de 2.5 à $12 \mu\text{m}$. La bande interdite à température ambiante est de 2.41 eV , correspondant à 515 nm . Dans le tableau suivant sont notées quelques valeurs des indices ordinaire et extraordinaire pour différentes longueurs d'onde.

λ (μm)	n_o	n_e
0.8	2.6415	
0.9	2.6082	2.7243
1	2.5863	2.6989
1.1	2.5757	2.6819
1.5	2.5376	2.6376
2	2.5184	2.6151
3	2.5057	2.5999
5	2.4979	2.5914
7	2.4868	2.5831
10	2.4703	2.5713

TABLE 11.1 – Valeurs des indices ordinaire et extraordinaire pour différentes longueurs d'onde pour un cristal de type $LiGaTe_2$

L'angle pour lequel l'accord de phase peut être réalisé dans un cristal LGT (Voir Annexe B) est $\theta_{opt} = 0.56$ rad. Pour calculer cette valeur on a utilisé la relation

$$\sin^2 \theta_{opt} = \frac{n_o^{-2}(2\omega) - n_o^{-2}(\omega)}{n_e^{-2}(\omega) - n_o^{-2}(\omega)} \quad (11.1)$$

et on s'est intéressé en particulier à la génération de la seconde harmonique à partir d'une impulsion $\lambda = 10 \mu m$. Les indices de réfraction intervenant dans la relation (11.1) sont alors [Isaenko 05] : $n_o(2\omega) = 2.4979$, $n_o(\omega) = 2.4703$ et $n_e(\omega) = 2.5713$ et on trouve les valeurs suivantes pour les paramètres rentrant en jeu dans le système (8.36), (8.37), (8.38), (8.39) et (8.40) :

$$\gamma^2(\theta_{opt}) = 1.083443, \quad (11.2)$$

$$\eta^2(\theta_{opt}) = 1.023810, \quad (11.3)$$

$$\beta^2(\theta_{opt}) = 1.059633, \quad (11.4)$$

$$\tau(\theta_{opt}) = 0.037681, \quad (11.5)$$

$$\Delta_{\perp}^Y(\theta_{opt}) = \frac{\gamma^2}{\beta^2} (1.02197 \partial^2 x + \partial^2 y) = 1.0225 (1.02197 \partial^2 x + \partial^2 y), \quad (11.6)$$

$$\Delta_{\perp}^Z(\theta_{opt}) = \frac{1}{\beta^2} (1.02381 \partial^2 x + \partial^2 y) = 0.9437 (1.02381 \partial^2 x + \partial^2 y). \quad (11.7)$$

Pour les deux longueurs d'onde $\lambda_p = 5 \mu m$ et $\lambda_s = 10 \mu m$ qui nous intéressent on trouve aussi :

$$\omega_p = 0.38 \text{ PHz}, \quad k_p^0 = 1.26 (\mu m)^{-1}, \quad k_p = 3.147 (\mu m)^{-1}, \quad \frac{1}{2k_p} = 0.159 \mu m$$

$$\omega_s = 0.19 \text{ PHz}, \quad k_s^0 = 0.63 (\mu m)^{-1}, \quad k_s = 1.574 (\mu m)^{-1}, \quad \frac{1}{2k_s} = 0.318 \mu m$$

et les coefficients non-linéaires et les angles de walk-off ont les valeurs numériques

$$\mathcal{K}_p = 0.504 (\mu m)^{-1}, \quad \tan \rho_Y = 0.010681 \quad (11.8)$$

$$\mathcal{K}_s = 0.238 (\mu m)^{-1}, \quad \tan \rho_Z = 0.035561. \quad (11.9)$$

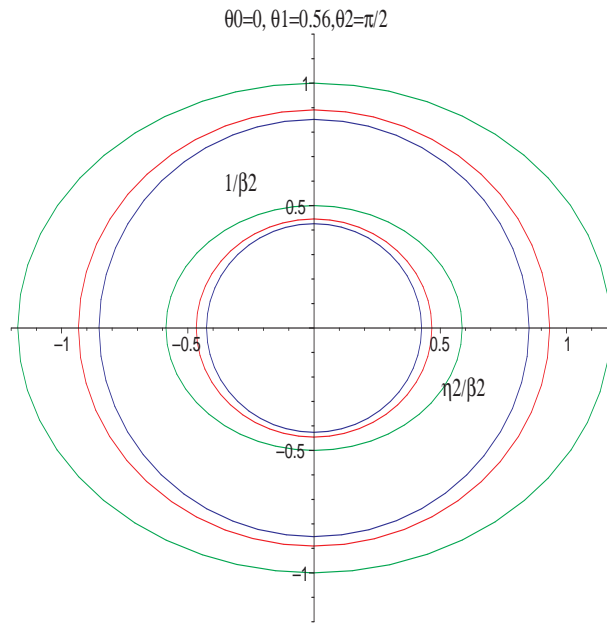


FIGURE 11.1 – Variations du laplacien transverse $\Delta_{\perp}^Z = \frac{\eta^2}{\beta^2} \partial^2 x + \frac{1}{\beta^2} \partial^2 y$ en fonction de l'angle θ : vert pour une propagation selon l'axe optique ($\theta = 0$), rouge pour une propagation dans la direction d'accord de phase ($\theta = \theta_{opt} = 0.56$ rad) et bleu pour une propagation à $\theta = \pi/2$.

11.2 Supratransmission NL dans les oscillateurs paramétriques dégénérés

Cette section sera consacré à l'étude du problème de supratransmission non-linéaire dans l'interaction à trois ondes dégénérée évoquée dans la section 8.5.1. Le système auquel on s'intéresse est (8.44) dans lequel on renommera les variables spatiales x et y

$$i\psi_z + \frac{\alpha}{2}\psi_{xx} - \delta\psi + \phi^2 = 0 \quad (11.10a)$$

$$i\phi_z + \phi_{xx} + \psi\phi^* = 0 \quad (11.10b)$$

avec les conditions aux bords

$$\psi(0, z) = Ae^{2ikz}, \quad \phi(0, z) = Be^{ikz} \quad \text{et} \quad \psi(L, z) = \phi(L, z) = 0. \quad (11.11)$$

La génération des solitons de gap biréfringents (BGS) a été mise en évidence par des simulations numériques. La Figure 11.2 montre les amplitudes des champs $|\psi|$ et $|\phi|$ pour différentes valeurs des paramètres α , δ et k et pour différentes amplitudes de forçage.

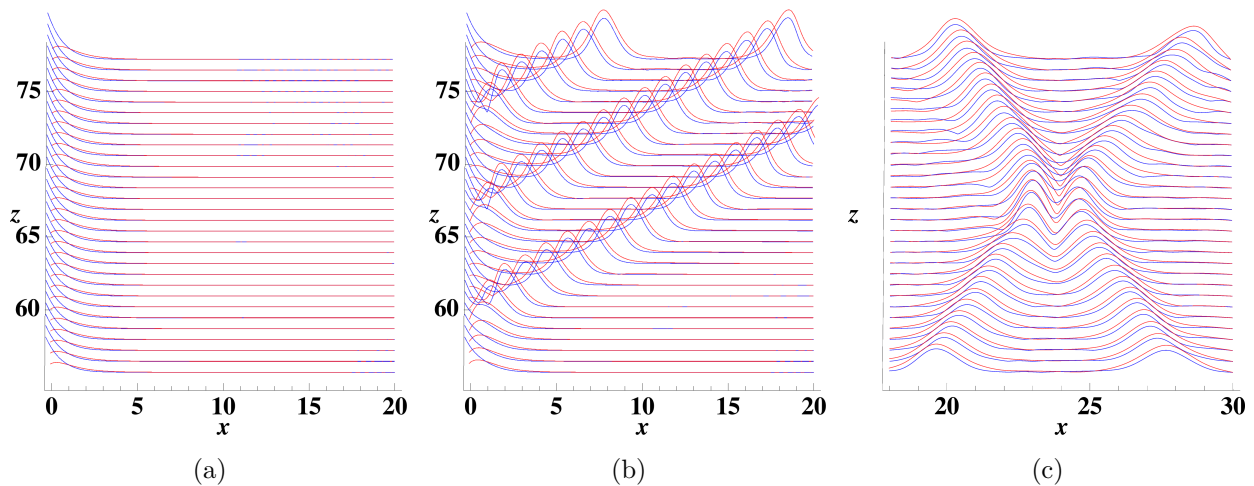


FIGURE 11.2 – Génération de solitons paramétriques dans les milieux quadratiques biréfringents. (a) Profil évanescents non-linéaire stable lors du forçage au bord ($x = 0$) dans la bande interdite avec des amplitudes A et B en dessous du seuil de NST. (b) Quand les amplitudes de forçage dépassent une certaine valeur (correspondant au seuil de supratransmission) le profil évanescents se déstabilise et l'énergie est envoyée dans le milieu sous forme d'onde localisée dans la direction transverse x . (c) Exemple de collision élastique entre deux solitons paramétriques de gap.

11.2.1 Résultats publiés dans *Physical Review Letters*

Les résultats obtenus dans le cas D3W seront présentés sous la forme d'une publication *Nonlinear Supratransmission in Multicomponent Systems* telle qu'elle est apparue dans le Journal *Physical Review Letters* en août 2010 et qui comporte les sections suivantes :

11.2.2 Solutions sous la forme des séries asymptotiques

11.2.3 Prédiction du seuil NST

11.2.4 Instabilité paramétrique et supratransmission



Nonlinear Supratransmission in Multicomponent Systems

P. Anghel-Vasilescu, J. Dorignac, F. Geniet, J. Leon, and M. Taki*

*Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules, CNRS-IN2P3-UMR5207, Université Montpellier 2,
34095 Montpellier, France*

(Received 5 June 2010; published 10 August 2010)

A method is proposed to solve the challenging problem of determining the supratransmission threshold (onset of instability of harmonic boundary driving inside a band gap) in multicomponent nonintegrable nonlinear systems. It is successfully applied to the degenerate three-wave resonant interaction in a birefringent quadratic medium where the process generates spatial gap solitons. No analytic expression is known for this model showing the broad applicability of the method to nonlinear systems.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.074101

PACS numbers: 05.45.Yv, 42.65.Tg

Introduction.—Nonlinear supratransmission (NST) in a medium possessing a natural forbidden band gap is a process by which nonlinear structures, gap solitons, are generated by an applied periodic boundary condition at a frequency in the band gap. Discovered in the pendula chain (sine-Gordon model) [1], and further studied for fully discrete chain in Refs. [2,3], it has been applied, among others, in Bragg media (coupled mode equations in Kerr regime) [4] allowing us to explain the experiments of Ref. [5], and also to coupled-wave-guide arrays (nonlinear Schrödinger model) [6,7]. Nonlinear supratransmission results from an instability of the evanescent wave profile created by the driving [8,9] that manifests itself above a threshold amplitude. Today this threshold has been obtained in single component systems by making use of the explicit solution of the model equation and seeking its maximum allowed amplitude at the boundary.

Predicting the threshold value is of fundamental importance for physical applications such as soliton generation or conception of ultrasensitive detectors. Indeed, on the one side NST is a very efficient means to generate gap solitons: while an incident single pulse with carrier wave at forbidden frequency would be mainly reflected, an incident continuous wave excitation easily produces gap soliton as experimentally shown in Bragg media [5]. On the other side such systems seeded by a cw excitation slightly below the threshold will be extremely sensitive to any applied signal, detected either through generation of gap solitons or by bistable behavior; see, e.g., [10].

We address in this Letter the practical question of evaluating NST thresholds in multicomponent systems (where the instability of either wave separately can induce soliton formation in all channels), and moreover when the system has no explicit solution allowing for threshold prediction. This is the case with second harmonic generation in a birefringent medium with quadratic nonlinearity [11]. The model is a two-component system which does not possess analytic expression of solitonlike solutions and which is a key model in order to study their existence and stability; see, e.g., [12].

We shall develop a method based on an asymptotic solution obtained by asymptotic series expansion, which provides an accurate NST threshold prediction. As NST requires driving in the forbidden band, the linear evanescent wave is the natural keystone upon which to build the series. The method is restricted to neither the specific case of second harmonic generation nor to the quadratic nature of the nonlinearity. Moreover, it can be applied to a wide class of nonintegrable multicomponent nonlinear systems since it does not require known analytical expressions for their solutions. The method thus furnishes a practical tool highly interesting for further applications in any multicomponent coupled-wave system.

Birefringent gap solitons.—Let us consider a birefringent medium in permanent regime, namely, assuming perfect frequency matching. In that case, degenerate spatial three-wave model (D3W) reduces to [11,12]

$$\begin{aligned} i\partial_z\psi + \frac{\alpha}{2}\partial_x^2\psi - \delta\psi + \phi^2 &= 0, \\ i\partial_z\phi + \partial_x^2\phi + \psi\phi^* &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where $\phi(x, z)$ [respectively $\psi(x, z)e^{i\delta z}$] is the scaled static envelope of the signal wave with frequency ω and wave number k (respectively second harmonic at frequency $\omega' = 2\omega$ and wave number k') and δ is the mismatch wave number in the propagation direction z defined by $k' = 2k - \delta$. Last, x is the transverse direction and $\alpha = 1 + \delta/k'$ by definition. The system (1) is subject to the boundary condition

$$\psi(0, z) = Ae^{2iz}, \quad \phi(0, z) = Be^{iz} \quad (2)$$

on the strip $x > 0$, $z \in [0, L]$, with vanishing conditions as $x \rightarrow \infty$ and now with normalization $k' = 2$ (that is $\alpha = 1 + \delta/2$) [13].

For the sake of simplicity, we only consider here the boundary conditions (2), although the wave number may in general be chosen different from 1. We see on Fig. 1 the generation, through the evanescent coupling, of birefringent gap solitons (BGS) formation and propagation above a threshold curve in the amplitude plane (A, B) . It is worth

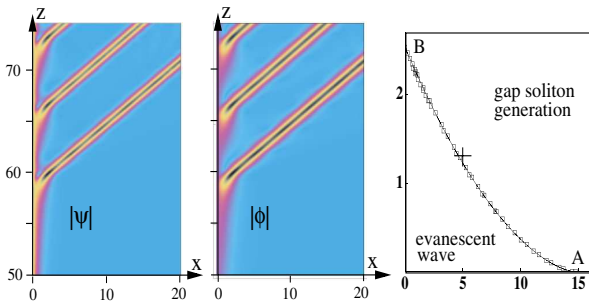


FIG. 1 (color online). Left: intensity plots of a typical numerical simulation of the D3W system (1) with $\alpha = 1.1$ subject to boundary conditions (2) with $A = 5$, $B = 1.3$ [the cross on the (A, B) plot]. The maximum amplitudes of the emitted soliton are $|\psi|_m \sim 4.5$ and $|\phi|_m \sim 5.5$. Right: threshold curve in the (A, B) plane where dots result from numerical simulations [18] and the curve is given by the solution of (6).

pointing out that the present situation is fundamentally different from studies of initial-value problems where field values are given at $z = 0$, as, e.g., in the theoretical prediction [14] and experimental realization [15] for nondegenerate 3-wave interaction.

Asymptotic series solution.—Given the boundary values (2), we seek stationary solutions of the form

$$\psi(x, z) = u(x)e^{2iz}, \quad \phi(x, z) = \sqrt{\alpha}v(x)e^{iz}, \quad (3)$$

with real-valued functions u and v vanishing at infinity (the factor $\sqrt{\alpha}$ has been included for convenience). The system (1), now with $\delta = 2(\alpha - 1)$, provides for u and v the following parameter free equations:

$$\partial_x^2 u - 4u + 2v^2 = 0, \quad \partial_x^2 v - v + uv = 0. \quad (4)$$

Treating nonlinear terms as perturbative, we first solve the linearized equation for v and obtain $v = \beta e^{-x}$. Substituting this result in the equation for u , we find that the v^2 term is resonant and generates a solution of the form $u = (\mu + \beta^2 x/2)e^{-2x}$ where μ and β are two arbitrary constants. This is the general solution of the quasilinear system $\partial_x^2 u - 4u + 2v^2 = 0$, $\partial_x^2 v = v$, that vanishes as $x \rightarrow \infty$.

The structure of (4) now indicates that u and v may be expressed as the following asymptotic series:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)e^{-2(n+1)x}, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)e^{-(2n+1)x},$$

$$Q_0(x) = \beta, \quad P_0(x) = \mu + \beta^2 x/2. \quad (5)$$

By inspection, the polynomials $P_n(x)$ and $Q_n(x)$ are of degree n (except P_0 of degree 1) and obey a system of differential-recurrence equations obtained by replacing (5) in (4). Their coefficients are then recursively given in terms of the two independent parameters β and μ . To ensure an accurate determination of the threshold curve, we have evaluated the first 17 terms of the series (5), which takes up to a minute on a PC computer (with MAPLE or MATHEMATICA). The first ones are, e.g., $Q_1 = -3\beta^3/64 -$

$\mu\beta/8 - \beta^3 x/16$ and $P_1 = \beta^2(24\mu + 17\beta^2)/576 + x\beta^4/48$. The advantage of this method is to be applicable to any system driven in a forbidden band, which is essential when no soliton solution is known. Notice that, in the absence of resonant terms in the equations, the polynomials involved in the asymptotic series would simply be constants as, e.g., in the Manakov system below.

NST threshold prediction.—Once the series (5) has been determined up to a given truncation order N , imposing the boundary conditions $u(0) = A$ and $v(0) = B$ leads to the two driving amplitudes $A(\beta, \mu)$ and $B(\beta, \mu)$ explicitly expressed in terms of β and μ . Assuming that the supratransmission threshold curve is given by the maximum value of one of those, the other one being held constant, we can use a Lagrange parameter λ and write the extremum condition as $\partial_\mu A - \lambda \partial_\mu B = 0$ and $\partial_\beta A - \lambda \partial_\beta B = 0$. This finally leads to the condition of vanishing Jacobian

$$J(\beta, \mu) = (\partial_\beta A)(\partial_\mu B) - (\partial_\mu A)(\partial_\beta B) = 0. \quad (6)$$

With a high enough truncation order ($N = 16$ here), the threshold curve is best obtained as the zero contour of the surface $J(\beta, \mu)$ plotted parametrically as a function of the amplitudes $A(\beta, \mu)$ and $B(\beta, \mu)$, as presented in Fig. 1.

The condition (6) is symmetric with respect to A and B ; thus, there is no need to specify which maximum amplitude is sought. Moreover, condition (6) does not depend on the specific choice of parameters, provided they are independent. For instance, using the new parameters η and σ defined by

$$\beta = \exp(\eta), \quad \mu = (\sigma - \eta) \exp(2\eta), \quad (7)$$

the NST threshold condition becomes $J(\sigma, \eta) = 0$. The interesting point here is that for fixed σ , the new parameter η operates a shift of the solutions (5) $u(x) \rightarrow u(x - \eta)$ and $v(x) \rightarrow v(x - \eta)$. Such a translation parameter always exists in systems that possess a translation invariance on the whole x axis.

Generalizations.—Generalization of the procedure to M -component systems is straightforward. To this end, let us denote the components by $\phi_m(x, z) = u_m(x)e^{iv_m z}$ and their amplitudes by $u_m(0) = A_m(\{\eta_n\})$, where η_n are the M parameters of the solution (e.g., in the asymptotic solution). Finding the NST threshold manifold amounts to setting to zero the determinant of the Jacobi matrix of the amplitudes with respect to the parameters, that is

$$\det[J_{mn}] = 0, \quad J_{mn} = \frac{\partial A_m}{\partial \eta_n}. \quad (8)$$

To illustrate our result with another interesting problem, we may consider a multicomponent system having soliton solutions, the (integrable) Manakov system [16], written here for spatial fields as

$$i\partial_z \psi + \partial_x^2 \psi + 2(|\phi|^2 + |\psi|^2)\psi = 0,$$

$$i\partial_z \phi + \partial_x^2 \phi + 2(|\phi|^2 + |\psi|^2)\phi = 0. \quad (9)$$

It possesses the two-parameter soliton solution [17]

$$\psi = e^{iz} \sin\theta \operatorname{sech}(x - \eta), \quad \phi = e^{iz} \cos\theta \operatorname{sech}(x - \eta). \quad (10)$$

Subject then, on the semi-infinite strip $x > 0$ and $z \in [0, L]$, to the boundary condition

$$\psi(0, z) = A e^{iz}, \quad \phi(0, z) = B e^{iz}, \quad (11)$$

and vanishing values as $x \rightarrow \infty$, the Manakov system possesses solution (10) provided the parameters (η, θ) are related to the driving amplitudes A and B by

$$A = \sin\theta \operatorname{sech}\eta, \quad B = \cos\theta \operatorname{sech}\eta. \quad (12)$$

The threshold curve in the (A, B) plane is then obtained by solving $J(\eta, \theta) = 0$ as given by (6). The solution is $\eta = 0$, that is, in the variables (A, B) , the circle $A^2 + B^2 = 1$. This is illustrated on Fig. 2 where we display a typical soliton formation and the NST threshold curve for which the points represent results of numerical simulations [18].

Then one can check that the threshold manifold of the M -component Manakov system, $i\partial_z \phi_m + \partial_x^2 \phi_m + 2(\sum_1^M |\phi_n|^2) \phi_m = 0$, subject to the boundary condition $\phi_m(0, z) = A_m e^{iz}$, is the M -dimensional sphere $\sum_1^M A_m^2 = 1$.

Parametric instability and supratransmission.—As can be seen from Figs. 1 and 2, as soon as one of the amplitudes A or B crosses the threshold curve, the evanescent wave profile (soliton tail in integrable models) ceases to exist and gap solitons are emitted by the driven boundary. It turns out that, at least in the models we have investigated, the NST threshold manifold also corresponds to values of the parameters around which the stability of the solutions changes. To substantiate this claim, we investigate why the conditions for parametric and NST instabilities might indeed be the same by performing linear stability analysis of the stationary solutions (3) that we write in the form

$$\psi(x, z) = [u(x) + U(x, z)] e^{2iz}, \quad (13)$$

$$\phi(x, z) = \sqrt{\alpha} [v(x) + V(x, z)] e^{iz}, \quad (14)$$

where U and V are small perturbations that satisfy, accord-

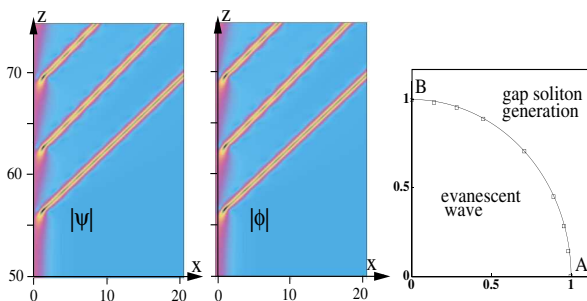


FIG. 2 (color online). Left: typical numerical simulation of (9) submitted to boundary conditions (11) with $A = 0.45$ and $B = 0.9$. The maximum amplitudes of the emitted soliton are $|\psi|_m \sim 1.2$ and $|\phi|_m \sim 2.3$. Right: threshold curve in the (A, B) plane where the dots result from numerical simulations [18] and the curve is the circle $A^2 + B^2 = 1$.

ing to (2), the boundary condition

$$U(0, z) = 0, \quad V(0, z) = 0, \quad (15)$$

and vanish at $x \rightarrow \infty$ for all z . Defining the real-valued perturbation vectors $\Gamma_r = (U_r, V_r)^T$ and $\Gamma_i = (U_i, V_i)^T$, where index r (i) stands for real (imaginary) part, linearization of system (1) yields

$$\partial_z \Gamma_r + \mathcal{P}_- \Gamma_i = 0, \quad \partial_z \Gamma_i - \mathcal{P}_+ \Gamma_r = 0. \quad (16)$$

The matrix differential operators \mathcal{P}_\pm are given by

$$\mathcal{P}_\pm = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial_x^2 - 2 & 2v \\ v & \partial_x^2 - 1 \pm u \end{pmatrix}. \quad (17)$$

This is conveniently written as an eigenvalue problem by differentiating with respect to z . For the real part $\Gamma_r(x, z)$ we may seek a solution $\Gamma_r(x, z) = \Phi_\omega(x) \cos(\omega z)$ and obtain

$$\mathcal{P}_- \mathcal{P}_+ \Phi_\omega = \omega^2 \Phi_\omega \quad (18)$$

with boundary conditions [use $\partial_z \Gamma_i(0, z) = 0$]

$$\Phi_\omega(0) = 0, \quad (\mathcal{P}_+ \Phi_\omega)(0) = 0. \quad (19)$$

As \mathcal{P}_\pm and Φ_ω are real valued, ω^2 is also real valued. Then the solution is linearly stable when $\omega^2 > 0$ and unstable for $\omega^2 < 0$, so that marginal instability is reached at the bifurcation point $\omega = 0$ providing the parametric instability threshold.

An essential property of the operator \mathcal{P}_+ , obtained by differentiation of (4) with respect to the parameters, is

$$\mathcal{P}_+ \frac{\partial}{\partial \eta} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad \mathcal{P}_+ \frac{\partial}{\partial \sigma} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (20)$$

Thus a two-parameter family of solutions of (18) at $\omega = 0$ reads

$$\Phi_0(x) = a \frac{\partial}{\partial \eta} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b \frac{\partial}{\partial \sigma} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (21)$$

for arbitrary constants $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Though it is not the most general solution of (18), it seems to be the only one able to satisfy the boundary conditions (19). Requiring then $\Phi_0(0) = 0$, with $u(0) = A$ and $v(0) = B$, eventually yields $J(\eta, \sigma) = 0$, namely, the parametric instability condition (6). Thus the NST threshold condition (6), i.e., the condition for the maximum allowed amplitudes A and B at the boundary $x = 0$, actually coincides with the onset of instability of the solution for the corresponding critical values of the parameters (here η and σ).

To check this statement, we have computed numerically the eigenvalue ω^2 of the differential equation (18) around the bifurcation point $\omega = 0$ by varying η and σ around their critical values η_c and σ_c defined by the solution of $J(\eta, \sigma) = 0$. The result is plotted in Fig. 3 where we have used the asymptotic series solution (u, v) at order $N = 16$ as previously. As can be seen from the figure marginal instability is actually reached at the criticality $(\eta_c$ and $\sigma_c)$ when ω crosses zero.

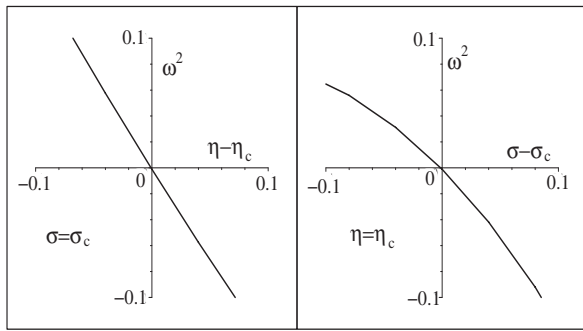


FIG. 3. Plots of the eigenvalue ω^2 in terms of the parameters (η, σ) as a function of $\eta - \eta_c$ for $\sigma = \sigma_c$ (left) and a function of $\sigma - \sigma_c$ for $\eta = \eta_c$ (right) again with $\alpha = 1.1$.

Comments and conclusion.—The method presented here can be readily applied to the simple case of the scalar nonlinear Schrödinger equation $i\partial_z\psi + \partial_x^2\psi + 2|\psi|^2\psi = 0$ to get interesting insight about the occurrence of NST. It is found that (i) the asymptotic series solution actually sums up exactly to furnish the one-soliton solution, (ii) the fundamental parameter is the position η of the soliton maximum, (iii) the threshold is indeed the maximum amplitude of this static soliton reached at $\eta = 0$, (iv) the variations of the eigenvalue ω^2 around zero is given by $\omega^2 = -4\eta + o(\eta)$ that, straightforwardly, gives the marginal instability threshold $\eta = 0$.

In such single component systems as the nonlinear Schrödinger equation, the instability occurs always at the maximum amplitude of the solution [19]. On the contrary, the solution of the D3W model does not display any maximum nor any other geometric evidence that the NST threshold has been reached.

In conclusion, we have solved the challenging problem of determining the threshold for nonlinear supratransmission in nonintegrable N -component systems. This is obtained in two steps: first by deriving an asymptotic solution based on their linear evanescent profile that depends on N parameters, and second by solving Eq. (8). In the parameter space the latter condition results in a $N - 1$ dimensional manifold that determines the change of stability of the (asymptotic) solution. Expressed in terms of the amplitudes, it gives rise to the sought NST threshold. The situation is highly simplified in the case of an integrable system, or a system that possesses an exact static soliton-like solution, since one can work directly with the solution to obtain the threshold.

Finally, since no analytical expression is required, the method can be successfully applied to a wide class of nonintegrable nonlinear multicomponent systems.

Work done as part of the programme GDR 3073 PhoNoMi2 (*Photonique Nonlinéaire et Milieux Microstructurés*).

*Permanent address: Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, CNRS-INP-UMR8523, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq, France.

- [1] F. Geniet and J. Leon, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 134102 (2002).
- [2] P. Maniatis, G. Kopidakis, and S. Aubry, *Physica (Amsterdam)* **216D**, 121 (2006).
- [3] J.E. Macias-Daz and A. Puri, *Phys. Lett. A* **366**, 447 (2007).
- [4] J. Leon and A. Spire, *Phys. Lett. A* **327**, 474 (2004).
- [5] D. Taverner, N.G.R. Broderick, D.J. Richardson, R.I. Laming, and M. Ibsen, *Opt. Lett.* **23**, 328 (1998).
- [6] R. Khomeriki, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 063905 (2004).
- [7] J. Leon, *Phys. Rev. E* **70**, 056604 (2004).
- [8] J. Leon, *Phys. Lett. A* **319**, 130 (2003).
- [9] H. Susanto, *SIAM J. Appl. Math.* **69**, 111 (2008).
- [10] R. Khomeriki and J. Leon, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 243902 (2005).
- [11] See, e.g., the following review: A.V. Buryak, P. Di Trapani, D.V. Skryabin, and S. Trillo, *Phys. Rep.* **370**, 63 (2002).
- [12] V.A. Brazhnyi, V.V. Konotop, S. Coulibaly, and M. Taki, *Chaos* **17**, 037111 (2007).
- [13] The driving wave number is scaled to any value by using the invariance D3W under the transformation $z \rightarrow kz$, $x \rightarrow \sqrt{k}x$ and $(\psi, \phi, \delta) \rightarrow (\psi, \phi, \delta)/k$.
- [14] G. Leo and G. Assanto, *Opt. Lett.* **22**, 1391 (1997).
- [15] M.T.G. Canva, R.A. Fuerst, S. Baboiu, G.I. Stegeman, and G. Assanto, *Opt. Lett.* **22**, 1683 (1997).
- [16] S.V. Manakov, *Sov. Phys. JETP* **38**, 248 (1974).
- [17] The driving wave number is scaled to $k = 1$ by using the invariance of the system under the transformation $z \rightarrow kz$, $x \rightarrow \sqrt{k}x$, and $(\psi, \phi) \rightarrow (\psi, \phi)/\sqrt{k}$.
- [18] The points are obtained as follows: at fixed B no soliton is emitted for some A while at $A + \epsilon$ solitons are generated. The point is then set as $(A + \epsilon/2, B)$ and ϵ can be made as small as needed within the accuracy of the numerical code. As component profiles are initially set to zero, we smoothly increase amplitudes A and B from zero up to their respective assigned value to avoid shocks. This is why simulations are only displayed from $z = 60$ on.
- [19] The NST condition (8) for a one-component system leads to $\partial A / \partial \eta = 0$ that is to $(\partial u / \partial x)(x = 0) = 0$.

11.3 Génération et dynamique des solitons de gap dans les milieux quadratiques biréfringents

11.3.1 Résultats publiés dans *Physical Review A*

Les résultats obtenus dans le cas le plus général d'une interaction non-dégénérée (3WI) seront présentés sous la forme d'une publication *Generation and dynamics of quadratic birefringent spatial gap solitons* telle qu'elle est apparue dans le Journal *Physical Review A* en avril 2011 et qui comporte les sections suivantes :

11.3.2 Configuration physique

11.3.3 Forçage au bord par couplage évanescent

11.3.4 Le système d'équations non-linéaires couplées pour la 3WI

11.3.5 Le seuil de NST et les valeurs numériques

Generation and dynamics of quadratic birefringent spatial gap solitons

P. Anghel-Vasilescu,¹ J. Dorignac,² F. Geniet,² J. Leon,^{2,*} and A. Taki³

¹Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Nöthnitzer Str. 38, D-01187 Dresden, Germany

²Laboratoire Charles Coulomb, Département de Physique Théorique,

UMR 5221 CNRS-UM2, Université Montpellier 2, F-34095 Montpellier Cedex 5, France

³Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, CNRS-INP-UMR8523,

Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France

(Received 28 January 2011; published 29 April 2011)

A method is proposed to generate and study the dynamics of spatial light solitons in a birefringent medium with quadratic nonlinearity. Although no analytical expression for propagating solitons has been obtained, our numerical simulations show the existence of stable localized spatial solitons in the frequency forbidden band gap of the medium. The dynamics of these objects is quite rich and manifests for instance elastic reflections, or inelastic collisions where two solitons merge and propagate as a single solitary wave. We derive the dynamics of the slowly varying envelopes of the three fields (second harmonic pump and two-component signal) and study this new system theoretically. We show that it does present a threshold for nonlinear supratransmission that can be calculated from a series expansion approach with a very high accuracy. Specific physical implications of our theoretical predictions are illustrated on LiGaTe₂ (LGT) crystals. Once irradiated by a cw laser beam of 10 μm wavelength, at an incidence beyond the extinction angle, such crystals will transmit light, in the form of spatial solitons generated in the nonlinear regime above the nonlinear supratransmission threshold.

DOI: [10.1103/PhysRevA.83.043836](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.043836)

PACS number(s): 42.65.Tg, 05.45.-a, 42.50.Gy, 42.65.Re

I. INTRODUCTION

Nonlinear effects in optics find a simple description by assuming a nonlinear dependence of the induced polarization of the medium in the applied electric field (for nonmagnetic media). The first term beyond linear dielectric effects is thus quadratic, commonly said to result from a nonzero $\chi^{(2)}$ susceptibility component, and it is responsible for second harmonic generation (SHG): a monochromatic light beam spontaneously generates waves of double frequency by wave mixing. This process is expected to occur primarily in birefringent crystals that are highly sensitive to the $\chi^{(2)}$ susceptibility. In such quadratic media, cubic (Kerr) nonlinear terms are typically an order of magnitude weaker. This is why SHG was naturally the first predicted nonlinear optical effect to be observed [1].

A recent renewal of interest in this topic is certainly due to the experimental generation of SHG spatial soliton [2] in the case of three-wave resonant interaction (nondegenerate), soon followed by many interesting works on $\chi^{(2)}$ media, see, e.g., [3,4]; among which are the theoretical prediction [5] and experimental realization [6] of spatial three-component quadratic solitons, and the description of the dynamics of various $\chi^{(2)}$ solitons [7].

During the long period of time between the observations of 1961 [1] and 1995 [2], the studies of nonlinear effects in optics were mainly devoted to $\chi^{(3)}$ materials, not only because isotropy is easier to manage, but also for the following two reasons: First the experimental realization of pulse reshaping (i.e., soliton generation out of an incident pulse) in a Kerr medium is much easier and natural than in a quadratic medium. The second reason is that the basic model equations for a cubic $\chi^{(3)}$ medium is the famous nonlinear Schrödinger equation (NLS) whose attractive property is to be integrable (infinite

set of conserved quantities and explicit N -soliton solutions) while model equations for quadratic $\chi^{(2)}$ media are not and do not even possess soliton solutions in the general case.

As a matter of fact, the generation of a bright soliton in an optical fiber with cubic nonlinearity is naturally achieved by sending a laser pulse into the fiber. When constructing the model equation out of Maxwell's system, it is shown that the time profile of the pulse at the input end acts mathematically as an initial condition for the NLS equation [8]. This initial condition is then proved, by means of the inverse scattering theory, to evolve into propagating solitons (plus a quasilinear background). The situation is fundamentally different in a birefringent medium where the incident pulse results in a wave scattering process, giving rise to a boundary value problem for the related model. Therefore, as the irradiation frequency must belong to the forbidden band gap, energy simply does not penetrate into the medium. It is this very simple and basic difference of mathematical nature (initial value problem versus boundary value data for a nonlinear system) that allows to understand why the experimental search of SHG solitons is so difficult.

This is not without reflecting on the quest for Bragg solitons predicted in 1979 [9–11] and based on the analytical expression for the solitary wave solution with a frequency within the forbidden gap. Then, 13 years went by before a first experimental evidence [12], followed in 1998 by a definitely convincing experiment showing repeated formation of light pulses under quasicontant wave irradiation *inside* the band gap [13]. The important point we want to stress here is that the experiment in [13] has been interpreted in terms of nonlinear supratransmission effect: the incident (quasi-)monochromatic beam creates a boundary value for the Bragg medium that results in an evanescent profile, until some intensity threshold is reached beyond which energy suddenly penetrates within the medium by means of soliton generation (eventually detected at the output) [14].

*Deceased.

Nonlinear supratransmission (NST) is a process that easily and naturally generates solitons in nonlinear media. It results from an instability (or disappearance) of the evanescent wave generated by periodically driving one of their boundaries [15,16]. This principle, which has already been proposed as a means to generate solitons in $\chi^{(3)}$ media (precisely by evanescent coupling [17]) is at the basis of our proposal, namely to suggest and analyze a physical situation allowing the generation of SHG solitons in a birefringent medium by convenient illumination. The fundamental advantage of our method is to generate nonlinear structures, that we shall call the *birefringent gap soliton* (BGS) [18], that are *intrinsic* in the sense that they are spontaneously created from the driving, not by a prebuilt light pulse. The term gap soliton has been mainly used in optics to describe a solitary wave generated in optical periodical media, where the underlying linear dispersion spectrum has a characteristic band structure (mainly a series of allowed and forbidden band gaps), see, e.g., [19]. Although in this paper we investigate the case of nonlinear interacting waves in continuous birefringent media, the linear relation dispersion still exhibits one semi-infinite band gap, and it is thus meaningful to extensively use the same terminology for the nonlinear structures generated by the boundary driving force in the semi-infinite forbidden band. Indeed, as NST requires driving in the forbidden band gap, the instability of the nonlinear evanescent wave which arises above a certain threshold is the keystone mechanism that allows for gap soliton formation.

In the following section the physical setup is briefly described with emphasis on the conditions under which a birefringent medium, here taken as the crystal LiGaTe₂ (LGT), can be modeled by a boundary value problem for coupled partial differential equations. We shall see in particular that the intrinsic need of an evanescent field inside the crystal implies automatically that the process has to be stationary. Our work is thus exclusively devoted to spatial dependences, and thus spatial BGS. A simple way to obtain an evanescent boundary value is to illuminate the LGT crystal beyond its extinction angle from a dielectric with higher optical index. BGS generation appears then as a specific nonlinear effect which allows for the light to penetrate and propagate, in the form of localized rays. This simple physical experiment would allow one to demonstrate both formation of birefringent spatial gap solitons and nonlinear supratransmission in quadratic media.

II. PHYSICAL SETUP

We propose a physical setup where a $\chi^{(2)}$ birefringent crystal is lighted on one side (conveniently chosen) with a monochromatic continuous wave (cw) beam incident with an angle slightly above the extinction angle. The refracted beam propagates along the surface $x = 0$ and is evanescent inside the crystal. The planar medium is assumed infinite in the y direction to reduce the number of variables for technical convenience.

In order to illustrate explicitly our proposal, we choose to consider the case of LiGaTe₂ (LGT) [20] which is a highly nonlinear chalcopyrite optical crystal operating in the mid-IR. LGT is a positive uniaxial crystal that possesses sufficient birefringence for phase matching. The clear transparency

range of LGT extends from 2.5 to 12 μm and the band gap at room temperature is at 2.41 eV (515 nm). We are interested in the generation of the second harmonic and chose the fundamental wavelength about 10 μm , and thus an angular frequency $\omega = 188$ THz. The effective optical index of LGT varies about the value 2.5. Therefore the medium used to illuminate the crystal must be transparent to the IR radiation at 10 μm and possess an optical index n_1 greater than 2.5. There is a wide choice of such material in semiconductors, as, e.g., GaSb whose optical index is $n_1 = 3.8$, which we select for illustrative purpose.

The fundamental constitutive equation for a uniaxial non-magnetic crystal, see, e.g., [21], can be written in the crystal frame (O, X, Y, Z) , where OZ is the principal optical axis and the plane YOZ , the principal crystal plane, is as follows:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2(\omega) \end{pmatrix} \mathbf{E} = [\epsilon] \mathbf{E}, \quad (1)$$

where n_o is the ordinary optical index and n_e the extraordinary one. The nonlinear coefficient d_{36} contributing to the quadratic $\chi^{(2)}$ effect, see Eq. (23), was estimated by phase-matched second-harmonic generation to be 43 pm/V \pm 10. The transmission was recorded in the range 0.5 to 24 μm .

Perfect phase-matching configuration is obtained for an angle θ between the direction of the electromagnetic field and the principal optical axis of the crystal, for which the apparent optical index obeys $n(\omega, \theta) = n_o(2\omega)$. This relation is more conveniently written as the relation between the extraordinary and ordinary optical indices

$$n_e(\omega) = \beta n_o(2\omega), \quad (2)$$

with the following definitions that we shall use throughout the paper:

$$\beta^2 = \sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta, \quad \gamma^2 = \frac{n_e^2(\omega)}{n_o^2(\omega)}. \quad (3)$$

This angle θ is then easily shown to be given by

$$\sin^2 \theta = \frac{n_o^{-2}(2\omega) - n_o^{-2}(\omega)}{n_e^{-2}(\omega) - n_o^{-2}(\omega)} = 0.2853 \quad (4)$$

thus for LGT: $\theta = 32.3^\circ$. This basic angle shall be used to prepare the crystal such as the plane yOz , normal to the principal crystal plane, makes the angle θ with the principal crystal axis OZ , as indicated in Fig. 1. In particular, both β and γ , functions of θ and ω , are fixed experimentally. We shall also make use of the following parameters:

$$\eta^2 = \cos^2 \theta + \gamma^2 \sin^2 \theta, \quad \tau = (\gamma^2 - 1) \sin \theta \cos \theta, \quad \varrho = \frac{n_o(\omega)}{n_1}. \quad (5)$$

III. EVANESCENT DRIVING

We first determine the nature of the electromagnetic field within the birefringent medium and in particular at the surface $x = 0$ where nonlinearity does not play any role. We therefore use the refraction laws for an incident cw transverse magnetic (TM) beam with frequency ω propagating on the xOz plane in

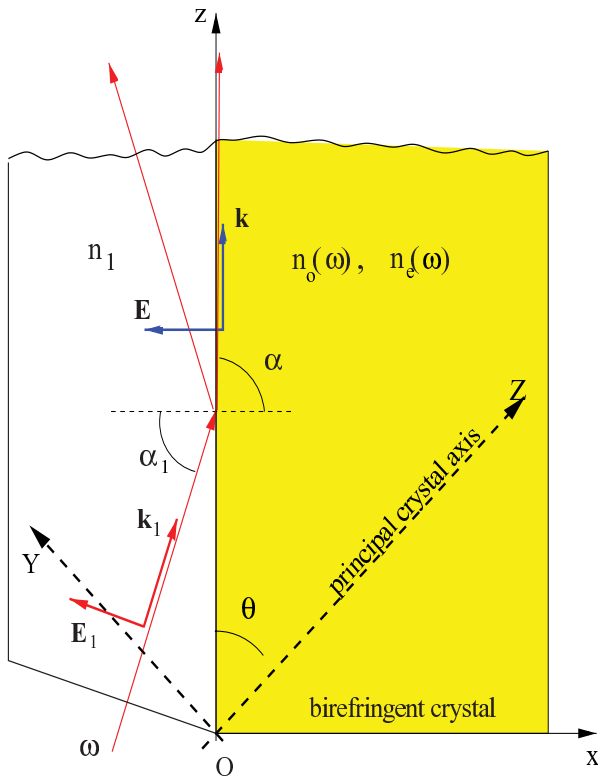


FIG. 1. (Color online) A 2D birefringent crystal, represented in the principal crystal plane, is lighted on its surface xOy from a material of index n_1 , greater than the ordinary optical index $n_o(\omega)$ of the crystal at given irradiation frequency ω . The incident angle α_1 is chosen slightly greater than the extinction angle, thus $\alpha = \pi/2$ and the light is evanescent in the direction Ox . The angle θ is chosen such as to obtain perfect phase matching for waves propagating in the direction Oz .

the direction \mathbf{k}_1 within the dielectric (region $x < 0$, index n_1). In the crystal, it propagates in the direction \mathbf{k} . The relations between the complex electric field components in the two reference frames read

$$\begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{R})}, \quad (6)$$

where \mathcal{R} is the in-plane rotation matrix

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

that links also the coordinates, namely $\mathbf{r} = \mathcal{R}\mathbf{R}$. Note that obviously $\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$.

When the incident angle α_1 is precisely the extinction angle, the propagation inside the crystal is the direction Oz . We now study the physical situation where α_1 is slightly greater than this extinction value. We consider that deviations of the electromagnetic field from the one propagating perfectly in the direction Oz (perfect frequency matching) are comprehensively described by envelopes slowly varying in space, as shown hereafter. Remembering that we are essentially concerned with the evaluation of the field value at the interface,

the governing equations are taken as linear. We therefore define the wave vector \mathbf{k} by

$$\mathbf{k} = p\mathbf{e}_x + (k+q)\mathbf{e}_z, \quad p^2, q^2 \ll k^2, \quad (8)$$

where k obeys the dispersion relation of a wave that would propagate exactly in the direction Oz , namely,

$$k = \frac{\omega}{c} \frac{n_e(\omega)}{\beta(\theta)}. \quad (9)$$

We emphasize that this is a particular value of k resulting from the original crystal design and illumination incident direction. For the sake of completeness, we give in the Appendix, the essential refraction formula in a birefringent medium. These laws (A12) and (A13) read, here with $k_x = p$ and $k_z = k+q$,

$$k+q = \frac{\omega n_1}{c} \sin \alpha_1, \quad (10)$$

$$p = \frac{\omega n_1}{c \eta^2} (-\tau \sin \alpha_1 + \gamma \sqrt{\eta^2 \varrho^2 - \sin^2 \alpha_1}). \quad (11)$$

The parameters η , τ and ϱ are defined in (5).

We now examine the properties of the refracted beam when the incident direction α_1 is close to the extinction angle α_1^c defined in Eq. (A15) by $\sin \alpha_1^c = \eta \varrho$. To measure the deviation of α_1 from this extinction angle, we look at the crystal properties and find it natural to introduce a small parameter ϵ by defining [22]

$$\gamma^2 = 1 + \epsilon. \quad (12)$$

In LGT illuminated at $10 \mu\text{m}$ we have $\gamma^2 = 1.08$ and thus $\epsilon \sim 0.08$. The incident angle is then measured by a parameter ν through the definition

$$\sin^2 \alpha_1 = (1 + \nu \epsilon) \sin^2 \alpha_1^c. \quad (13)$$

The parameter ν will be positive when $\alpha_1 > \alpha_1^c$, the case considered here. Hence ϵ , used now as a perturbative expansion parameter, is determined at the very beginning from the experimental context by the nature of the crystal. To first order in ϵ , other fundamental parameters obey

$$\begin{aligned} \tau &= \epsilon \cos \theta \sin \theta, & \rho &= \frac{n_e(\omega)}{n_1} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \\ \beta^2 &= 1 + \epsilon \cos^2 \theta, & \eta^2 &= 1 + \epsilon \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

An important consequence is that the reference wave number k can be written

$$k = \frac{\omega}{c} n_e(\omega) \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon \cos^2 \theta\right), \quad (15)$$

which allows us to compute from the expressions (10) and (11), and to leading order,

$$q = \frac{\epsilon}{2} \frac{\omega}{c} n_e(\omega) \nu, \quad (16)$$

$$p = -i\sqrt{\epsilon} \frac{\omega}{c} n_e(\omega) \sqrt{\nu}, \quad (17)$$

(note the sign of the complex parameter p defining an evanescent wave for $x > 0$). The above result indicates that the physical situation allows us to seek a solution, in the general nonlinear case, under the form of a slowly varying envelope that depends on the slow space variables ϵz and $\sqrt{\epsilon} x$, which

we do in the next section. Of course the quadratic nonlinearity requires now to complete the above expression with harmonic terms. Note that the present approach requires the parameter ν to be nonzero, which means that we have to irradiate the medium at an incident angle slightly greater than the extinction angle, as given by Eq. (13).

IV. NONLINEAR MODEL EQUATIONS

We now write down Maxwell equations in the crystal frame (O, X, Y, Z) with the variables (Y, Z, t) , and then move to the laboratory variables (x, z, t) thanks to the rotation \mathcal{R} defined in (7), but keeping the vector field components in the crystal frame. Let us start with Maxwell's equation (in a birefringent uniaxial crystal with OZ as principal axis) that results from the constitutive linear relation (1)

$$\Delta \mathbf{E} - (1 - \gamma^2) \nabla(\partial_Z E_Z) - \mu_0 \partial_t^2 [\epsilon] \mathbf{E} = \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{P}, \quad (18)$$

where \mathbf{P} is the nonlinear polarization source term representing the medium response. We have assumed a nonconductive medium and neglected the contribution of $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{P})$.

We shall seek solutions of the above equation that describe the process of the second harmonic generation (SHG) where a wave of double frequency is spontaneously generated in the crystal out of the incident wave of frequency ω described in the preceding section. This process is referred to as the degenerate three-wave resonant interaction. We therefore seek a solution of the Maxwell Equation (18) under the following expression:

$$\mathbf{E} = \frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_Y \\ \mathcal{E}_Z \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)} + \frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega' t - k' z)} + O(\epsilon^2) + \text{c.c.} \quad (19)$$

According to the results of the preceding section, the three envelopes \mathcal{E} actually depend on the slow variables $\sqrt{\epsilon}x$ and ϵz . It is worth noting that the envelopes are not time dependent because the physical context described previously means that a monochromatic continuous wave irradiation is applied to the crystal. We are thus interested in the spatial evolution of that laser beam (time dependence of the envelopes would be required, e.g., for an incident pulse). In expression (19) for the electric field (in the crystal frame), we have assumed particular polarization properties corresponding to SHG of type I: the incident field at frequency ω is a TM field living in the principal crystal plane with components in extraordinary polarization while the generated second harmonic lies in the OX direction, normal to the crystal plane, and is in ordinary polarization.

The frequencies obey the SHG selection rules

$$\omega' = 2\omega, \quad k' = 2k - \delta, \quad (20)$$

where δ is the mismatch wave number resulting from the dispersion relations

$$k = \frac{\omega}{c} \frac{n_e(\omega)}{\beta}, \quad k' = \frac{\omega'}{c} n_o(\omega'), \quad (21)$$

obtained by a linear analysis of each term in the decomposition (19). Because we have assumed that propagation takes place

along the Oz axis for perfect frequency matching condition (2), we immediately obtain that $\delta = 0$. In other words, the intrinsic mismatch is actually taken into account through the slow variations of the envelopes.

We now come to the quadratic medium response, assumed instantaneous. Using the polarization vector \mathbf{P} , they are written

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{P}_Y \\ \mathcal{P}_Z \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)} + \frac{\epsilon^2}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega' t - k' z)} + O(\epsilon^3) + \text{c.c.} \quad (22)$$

As the 6×3 contracted second-order susceptibility tensor possesses two defining parameters, d_{14} and d_{36} , envelopes now read (slow space variable dependence)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X &= 2\epsilon_0 d_{14} \mathcal{E}_Z \mathcal{E}_Y e^{-i\delta z}, \\ \mathcal{P}_Y &= \epsilon_0 d_{14} \mathcal{E}_Z^* \mathcal{E}_X e^{i\delta z}, \\ \mathcal{P}_Z &= \epsilon_0 d_{36} \mathcal{E}_X \mathcal{E}_Y^* e^{i\delta z}. \end{aligned} \quad (23)$$

It is now a simple matter to write down the starting Equation (18) with definitions (19) and (22), which allows us first to separate the independent exponentials and then to obtain the differential equations for the three field components. Expressed in the laboratory variables (x, z, t) and expanded perturbatively in ϵ by making use of dimensionless variables, we find

$$\xi = \sqrt{\epsilon} k_0 x, \quad \zeta = \frac{\epsilon}{2} k_0 z, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} n_e(\omega). \quad (24)$$

To leading order (ϵ^0), we naturally obtain the two dispersion relations (21). No contribution appears at order ϵ , and the three closed-form envelope equations come about at order ϵ^2 as

$$\begin{aligned} i \partial_\zeta \mathcal{E}_X &= \frac{1}{2} \partial_\xi^2 \mathcal{E}_X + 4 \frac{2d_{14}}{n_e^2(\omega)} \mathcal{E}_Z \mathcal{E}_Y, \\ i \partial_\zeta \mathcal{E}_Y &= \partial_\xi^2 \mathcal{E}_Y + \frac{2d_{14}}{n_e^2(\omega)} \mathcal{E}_X \mathcal{E}_Z^*, \\ i \partial_\zeta \mathcal{E}_Z &= \partial_\xi^2 \mathcal{E}_Z + \frac{2d_{36}}{n_e^2(\omega)} \mathcal{E}_X \mathcal{E}_Y^*. \end{aligned} \quad (25)$$

We have used $n_o(2\omega) = \beta n_e(\omega)$ and $\delta = 0$, and considered only the leading values of the various parameters, for instance $k = k_0[1 + O(\epsilon)]$ and $k' = 2k_0[1 + O(\epsilon)]$. The above result can be found directly (up to a redefinition of the reference frame) as Eq. (4.1) in [3]. Equivalently the reader might use Eq. (14) in [4] written without walk-off and for SHG of type I [remark: the resulting Eq. (26) in [4] is obtained under a scalar-like assumption that would correspond here to $\mathcal{E}_Y(x, z) = \mathcal{E}_Z(x, z)$].

Equation (25) can be written for dimensionless fields ψ , ϕ and φ by defining

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_X(x, z) &= \frac{n_e^2(\omega)}{\sqrt{d_{14}d_{36}}} \psi(\xi, \zeta), \\ \mathcal{E}_Y(x, z) &= \frac{n_e^2(\omega)}{2\sqrt{d_{14}d_{36}}} \phi(\xi, \zeta), \\ \mathcal{E}_Z(x, z) &= \frac{n_e^2(\omega)}{2d_{14}} \varphi(\xi, \zeta). \end{aligned} \quad (26)$$

It then reads

$$\begin{aligned} i\partial_\zeta\psi &= \frac{1}{2}\partial_\xi^2\psi + \phi\psi, \\ i\partial_\zeta\phi &= \partial_\xi^2\phi + \psi\phi^*, \\ i\partial_\zeta\varphi &= \partial_\xi^2\varphi + \psi\phi^*. \end{aligned} \quad (27)$$

Remarkably enough, the above model includes the three fields envelopes and, because of cross nonlinear terms, cannot be reduced to a two-field system, although at the linear level, the components $\mathcal{E}_Y(x,z)$ and $\mathcal{E}_Z(x,z)$, thus ϕ and φ , are simply proportional.

System (27) is our model equation for spatial variations of the envelopes of the electric fields (two-component signal and second harmonic). It has to be completed with a set of initial and boundary values corresponding to the chosen physical situation. The result inside the crystal on the surface $x = 0$ of the incident illumination at frequency ω is described with the field (19) where actually $\mathcal{E}_z \ll \mathcal{E}_x$. This is the obvious result of irradiating at an angle close to the extinction angle, see Fig. 1. Passing to the field components in the crystal frame we have

$$\mathcal{E}_Y|_{x=0} \sim -\mathcal{E}_x(0,z) \cos\theta, \quad \mathcal{E}_Z|_{x=0} \sim \mathcal{E}_x(0,z) \sin\theta,$$

which is valid at order $\epsilon^{1/2}$ as can be checked with the result (A19) obtained in the Appendix. By definition, see Eqs. (15), (16), and (17), we may write

$$\epsilon \mathcal{E}_x(0,z) = E_0 e^{-iqz}, \quad q = \frac{\epsilon}{2} \frac{\omega}{c} n_e(\omega)\nu, \quad (28)$$

where E_0 , computed below, is related to the amplitude of the incident radiation through refraction laws.

We now use expressions (14) and (15) to obtain that $qz = \nu\zeta$, where ν measures the incident angle through the definition (13). Once reported in the dimensionless envelopes and variables defined by relations (26) and (24) this yields the following boundary-value problem:

$$\psi(0,\zeta) = 0, \quad \phi(0,\zeta) = B e^{-i\nu\zeta}, \quad \varphi(0,\zeta) = C e^{-i\nu\zeta}, \quad (29)$$

on the strip $\xi > 0$, $\zeta \in [0, L]$, with vanishing conditions as $\xi \rightarrow \infty$, and with

$$B = -\frac{2\sqrt{d_{14}d_{36}}}{n_e^2(\omega)} \frac{E_0}{\epsilon} \cos\theta, \quad C = \frac{2d_{14}}{n_e^2(\omega)} \frac{E_0}{\epsilon} \sin\theta. \quad (30)$$

Note that in the present physical situation the boundary driving is given by $\psi(0,\zeta) = 0$. Due to the structure of system (27), the nonzero boundary value for (ϕ, φ) actually acts as a source for the second harmonic field envelope ψ . Note also that this system is invariant under the transformation $(\phi, \psi) \rightarrow (-\phi, -\psi)$ which means that, for $\psi(0,\zeta) = 0$, the sign of the quantity B mentioned above is arbitrary. For the sake of simplicity, we choose a plus sign in (30). One might also consider an experiment in the other direction, namely for $\theta \rightarrow \pi - \theta$.

V. NONLINEAR SUPRATRANSMISSION

We shall consider in our simulations the more natural situation of a finite sample, namely $\xi \in [0, D]$. A boundary value is to be provided at $\xi = D$, for instance,

$$\psi(D,\zeta) = 0, \quad \phi(D,\zeta) = 0, \quad \varphi(D,\zeta) = 0, \quad (31)$$

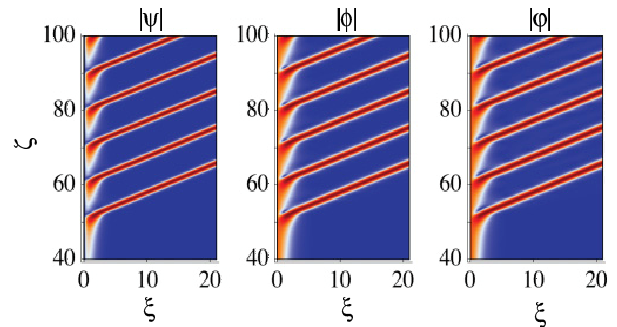


FIG. 2. (Color online) Three-component soliton generated in the system (27) with boundary values (29) for $B = 2.4$ and $C = 2.7$ with a reflecting end (31) and for $\nu = 1$. The boundary amplitudes are settled smoothly from $B = C = 0$ on the interval $\zeta \in [0, 30]$ such as to avoid shock because of vanishing initial data $\phi(\xi, 0) = 0$ and $\varphi(\xi, 0) = 0$. The maximum amplitude values have been measured to be $|\psi|_m \sim 4$, $|\phi|_m \sim 4$ and $|\varphi|_m \sim 5$.

corresponding to a perfectly reflecting end. Needless to say, different boundary values can also be implemented. In Fig. 2 we present a series of numerical simulations of the system (27) submitted to the boundary driving (29) in $\xi = 0$ and to the conditions (31) in $\xi = D$. It can be seen from Fig. 2 that the boundary values, which represent the evanescent field at the interface $x = 0$ between dielectric and birefringent medium, do produce repeated formation of three-component spatial gap solitons through the generation of the second harmonic (envelope ψ).

Spatial gap solitons are quite stable, as shown on the left plot of Fig. 3. However they undergo inelastic interaction. The right plot of Fig. 3, obtained by applying identical boundary values on both sides $\xi = 0$ and $\xi = L$, shows that two solitons merge to generate a new solitary wave that propagates in the ζ direction. This new soliton then interacts with the generated small amplitude phonons and ultimately undergoes a stochastic trajectory. In general, varying the boundary conditions, one obtains quite rich and sometime surprising effects.

In order to understand and predict such gap soliton generation, we apply the results of Ref. [18] to system (27) with boundary data (29) extended to a nonzero second harmonic envelope ψ ,

$$\psi(0,\zeta) = A e^{-2i\nu\zeta}, \quad \phi(0,\zeta) = B e^{-i\nu\zeta}, \quad \varphi(0,\zeta) = C e^{-i\nu\zeta}. \quad (32)$$

Threshold curves in the (B, C) plane [$B = B(C)$] are shown in Fig. 4 for two specific values, $A = 0$ and $A = 1$. Numerical results (square symbols) are obtained by setting A to either of the aforementioned values and applying a slow and smooth time ramp to the initially zero driving boundary amplitudes B and C until they reach a threshold value where a soliton is emitted in the medium. Note the symmetry of the curve that results from the invariance of the system under the exchange of ϕ and φ . To understand these results, we seek a stationary solution of system (27) in the form

$$\begin{aligned} \phi(\xi,\zeta) &= v(\xi) e^{-i\zeta}, \quad \varphi(\xi,\zeta) = w(\xi) e^{-i\zeta}, \\ \psi(\xi,\zeta) &= u(\xi) e^{-2i\zeta}. \end{aligned} \quad (33)$$

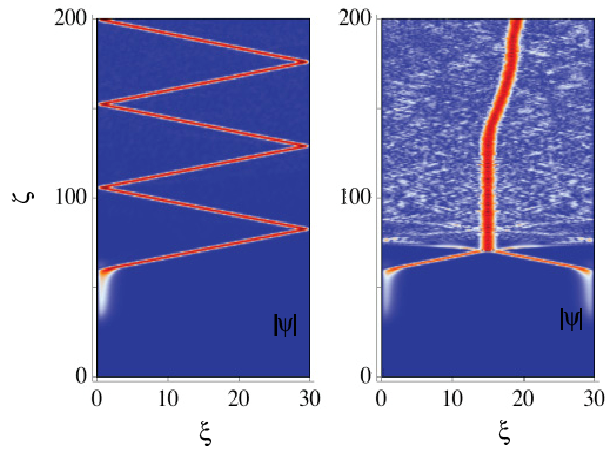


FIG. 3. (Color online) Examples of dynamics of the SHG soliton $|\psi(\xi, \zeta)|$ generated in the system (27) with $B = C = 2.53$ and $\nu = 1$. Left: boundary values (29) applied on a finite domain $\zeta \in [20, 40]$ in $\xi = 0$ to show the stability of the BGS soliton. Right: inelastic interaction of two identical solitons generated with the same boundary values but both in $\xi = 0$ and $\xi = 30$. The noise generated by the interaction is seen to perturb the trajectory of the emerging soliton.

Note that ν has been set to unity because, for stationary solutions, it can be scaled off by a proper redefinition of the variables and the amplitudes. Following [18], u , v , and w are expressed in the form of asymptotic series

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) e^{-2(n+1)\xi}, \\ v(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\xi) e^{-(2n+1)\xi}, \\ w(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\xi) e^{-(2n+1)\xi}, \end{aligned} \quad (34)$$

where P_n , Q_n , and R_n are polynomials of degree n . The first terms of the series are $Q_0(\xi) = q$, $R_0(\xi) = r$, and $P_0(\xi) = p +$

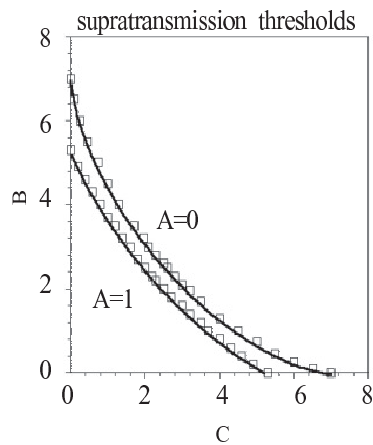


FIG. 4. Threshold curves in the (B, C) plane for the system (27) submitted to boundary values (32) with $\nu = 1$, for $A = 0$ (up) and $A = 1$ (down). Numerical results (squares) are checked against analytical ones (solid curves) obtained by solving (36) using the truncated series method at order $N = 10$.

$qr \xi/2$. They actually define the three independent parameters (p, q, r) that parametrize the solution. The expression for $P_0(\xi)$ is obtained as a solution of the linearized system once $Q_0(\xi) = q$ and $R_0(\xi) = r$ are fixed.

These expressions are carried forward in system (27) which is then solved recursively for series truncated to the N th term. The value $N = 10$ ensures an accurate determination of the stationary solutions. The driving amplitudes $A = u(0)$, $B = v(0)$, and $C = w(0)$ are then obtained explicitly in terms of the parameters (p, q, r) [23]. According to Ref. [18] the nonlinear supratransmission (NST) threshold is given by the condition of vanishing Jacobian

$$J(p, q, r) = \det \begin{pmatrix} \partial_p A & \partial_q A & \partial_r A \\ \partial_p B & \partial_q B & \partial_r B \\ \partial_p C & \partial_q C & \partial_r C \end{pmatrix} = 0. \quad (35)$$

Together with the boundary driving amplitude expressions,

$$A(p, q, r) = A, \quad B(p, q, r) = B, \quad C(p, q, r) = C, \quad (36)$$

condition (35) defines the NST threshold surface in the amplitude space (A, B, C) . A section of this surface for a given value of A generates a curve in the (B, C) plane. For $A = 0$ and $A = 1$, the latter is obviously in perfect agreement with the numerical results (see Fig. 4).

VI. DISCUSSION: PHYSICAL DATA

We propose to evaluate the threshold of incident power flux necessary to initiate a second harmonic gap soliton. The irradiating beam defined out of Eq. (A2) produces the following incident power flux density:

$$\langle \mathbf{S}_i \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |e_i|^2 \frac{n_1 c}{\cos^2 \alpha_1}, \quad (37)$$

obtained by averaging the Poynting vector $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1$ over fast oscillations and using the relation (A9) and the dispersion law (A3). Using result (A19) of the Appendix together with definition (28), we have

$$E_0 = \frac{-2e_i n_1^2}{n_e(\omega) \sqrt{n_1^2 - n_e(\omega)^2}}, \quad (38)$$

which is related to the boundary driving amplitudes B and C defined by Eqs. (30) through

$$e_i = \epsilon C \frac{n_e(\omega)^3 \sqrt{n_1^2 - n_e(\omega)^2}}{d_{14} \sin \theta}. \quad (39)$$

It is clear from the above expression that the threshold of incident power-flux density strongly depends on the dimensionless threshold value of the boundary amplitude C . In particular, in the example considered here, thresholds would become experimentally out of reach for $\nu \sim 1$. However, the parameter ν can be tuned to arbitrarily small values by modifying the incident angle defined in Eq. (13) and so does the related threshold for the amplitude C given that $C(\nu) = \nu C(1)$.

The relation (30) between the two components of the boundary electric field, with the angle θ given by relation (4), gives $C = 0.63 B$ for the LGT crystal (assuming $d_{14} \sim d_{36}$). For that value, and choosing for illustration $\nu = 0.01$, which fixes the incident direction by Eq. (13), the dimensionless

threshold set of amplitudes eventually read

$$A = 0, \quad B = 0.035, \quad C = 0.022. \quad (40)$$

Let us list the values of the different parameters chosen to illustrate our task:

$$\begin{aligned} \omega &= 188 \text{ THz}, & n_e(\omega) &= 2.57, & n_o &= 3.80, \\ \theta &= 32.3^\circ, & d_{14} &\simeq d_{36} = 43 \text{ pm V}^{-1}, & & \\ \alpha_1^c &= 41.00^\circ, & \alpha_1 &= 41.02^\circ. & & \end{aligned} \quad (41)$$

We may then compute the incident power-flux density (37) necessary to reach the threshold, and we find

$$\langle S_i \rangle_{\text{thresh}} = 3.8 \text{ GW cm}^{-2}. \quad (42)$$

Such value compares to the 10 GW cm^{-2} obtained for soliton generation by an initial pulse in KTP crystal [2]. Note that to obtain such “low enough” threshold we have to irradiate almost at extinction angle, which might represent some experimental challenge.

ACKNOWLEDGMENTS

Work done as part of the program GDR 3073 PhoNoMi2 (*Photonique Nonlinéaire et Milieux Microstructurés*).

APPENDIX: REFRACTION LAWS IN A BIREFRINGENT MEDIUM

Although the content of this appendix is not original, we found it very useful to rewrite the computations of refraction laws for a birefringent medium within the considered physical context, in particular to compute explicitly the electric field amplitude at the interface, inside the crystal, for an incidence at extinction angle. Indeed this amplitude E_0 is the fundamental parameter that allows for the determination [see definitions (30)] of the power-flux intensity threshold beyond which SHG gap solitons are generated.

Let us consider a laser beam, monochromatic with frequency ω , that illuminates the surface $x = 0$ of the birefringent medium, in a given direction defined by the wave vector $k_{1x}\mathbf{e}_x + k_{1z}\mathbf{e}_z$. We moreover assume a transverse magnetic (TM) incident plane wave, as displayed on Fig. 5. We consider Maxwell equations when the index of the medium extending in the region $x < 0$ is the constant n_1 while for $x > 0$ the medium is a birefringent crystal whose index depends on the direction of propagation (measured with the angle θ with respect to the principal axis) and on the frequency ω . In this direction a beam sees the index $n(\theta, \omega)$ given by

$$\frac{1}{n^2(\theta, \omega)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2(\omega)} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2(\omega)}. \quad (A1)$$

We compute the electromagnetic field amplitudes in the laboratory system (xOz). We may readily set $k_{1z} = k_z$ by continuity of the tangential component of the electric field, and define a reflection factor R such that we may readily write

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_i [e^{-ik_{1x}x} + R e^{ik_{1x}x}] \\ 0 \\ e_i [e^{-ik_{1x}x} - R e^{ik_{1x}x}] \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_z z)} + \text{c.c.}, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ (1 - R)e_i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (A2)$$

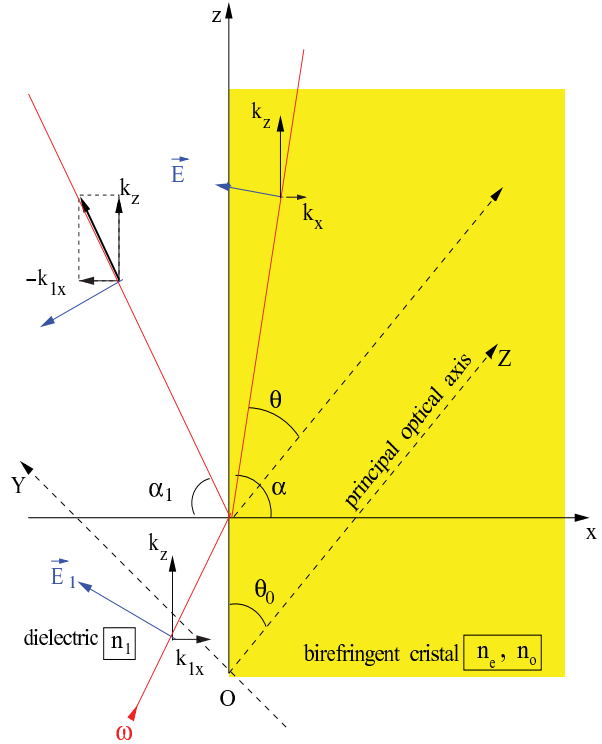


FIG. 5. (Color online) Basic definitions for refraction laws in a birefringent medium.

where \mathbf{E}_1 is the electric field in the region $x < 0$ (dielectric with optical index n_1) and where \mathbf{E} is the transmitted wave in the birefringent crystal. The data are the incident power-flux density and the direction α_1 of incident beam $\tan \alpha_1 = k_z/k_{1x}$. The important quantity to compute is the amplitude f of the field \mathbf{E} in $x = 0^+$ when the incident angle α_1 is close to, and greater than, the extinction angle α_1^c defined below.

The magnetic field results from $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ and using $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t ([\epsilon] \mathbf{E})$ in both regions we obtain the dispersion relations. In the region $x < 0$ where the dielectric tensor does not depend on the direction of propagation, we eventually obtain the usual dispersion law

$$(k_{1x}^2 + k_z^2)c^2 = \omega^2 n_1^2. \quad (A3)$$

In the region $x > 0$ however the dielectric tensor is defined in the frame YOZ by (1). Thus one must first write down the Maxwell equation in this crystal frame and then move to the laboratory frame by the rotation (7). One is eventually led to

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} k_z^2 & -k_x k_z \\ -k_x k_z & k_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} \\ &= \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n_o^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \gamma^2 \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta (\gamma^2 - 1) \\ \sin \theta \cos \theta (\gamma^2 - 1) & \sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

which possesses a nontrivial solution if (vanishing determinant)

$$k_x^2 \eta^2 + k_z^2 \beta^2 + 2k_x k_z \tau = \frac{\omega^2}{c^2} n_e^2. \quad (A4)$$

This is the sought dispersion relation.

We use now the continuity conditions at the interface $x = 0$ of the magnetic field which provides

$$k_{1x}(1+R)e_i - k_z(1+R)f_i = k_x(1-R)e_i - k_z f. \quad (\text{A5})$$

The Gauss theorem $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ gives in the region $x < 0$

$$k_{1x}f_i + k_z e_i = 0, \quad (\text{A6})$$

and in the region $x > 0$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \left[\begin{pmatrix} U \\ 0 \\ V \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \right] = 0,$$

$$U = n_o^2(f \cos^2 \theta - e \sin \theta \cos \theta) + n_e^2(f \sin^2 \theta + e \sin \theta \cos \theta),$$

$$V = n_o^2(e \sin^2 \theta - f \sin \theta \cos \theta) + n_e^2(e \cos^2 \theta + f \sin \theta \cos \theta),$$

and so, after some algebra

$$k_x[f\eta^2 + (1-R)e_i\tau] + k_z[(1-R)e_i\beta^2 + f\tau] = 0. \quad (\text{A7})$$

Last, the continuity of \mathbf{D}_\perp in $x = 0$ furnishes the relation

$$\varepsilon_1(1+R)f_i = \varepsilon_0 n_o^2[f\eta^2 + (1-R)e_i\tau]. \quad (\text{A8})$$

In summary we have obtained an algebraic system formed by the relations (A5), (A6), (A7), and (A8) for four unknowns. From (A6) and (A7) we readily get

$$f_i = -\frac{k_z}{k_{1x}} e_i, \quad (\text{A9})$$

$$f = -(1-R) \frac{k_z \beta^2 + k_x \tau}{k_x \eta^2 + k_z \tau} e_i. \quad (\text{A10})$$

The remaining relations then give the system for the two unknowns k_z/k_x and R

$$(1+R) \left(k_{1x} + \frac{k_z^2}{k_{1x}} \right) = (1-R) \left(k_x + k_z \frac{k_z \beta^2 + k_x \tau}{k_x \eta^2 + k_z \tau} \right),$$

$$(1+R) \frac{k_z}{k_{1x}} = \rho^2 (1-R) \left(\eta^2 \frac{k_z \beta^2 + k_x \tau}{k_x \eta^2 + k_z \tau} - \tau \right),$$

where ρ is defined in Eq. (5). The second equation determines the ratio k_x/k_z in terms of the datum k_{1x}/k_z

$$\begin{aligned} & \rho^2 \gamma^2 \left(\frac{k_{1x}^2}{k_z^2} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{k_x}{k_z} \cos \theta - \sin \theta \right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{k_x}{k_z} \sin \theta + \cos \theta \right)^2, \quad (\text{A11}) \end{aligned}$$

from which we must select the positive root. The second relation gives explicitly the reflection factor, written below.

In conclusion the datum of the incident beam direction α_1 together with the two dispersion relations allow us to compute

explicitly k_{1x} , k_z , k_x , and R , as functions of the incident frequency ω , by means of

$$k_z = \frac{\omega n_1}{c} \sin \alpha_1, \quad k_{1x} = \frac{\omega n_1}{c} \cos \alpha_1, \quad (\text{A12})$$

$$k_x = \frac{\omega n_1}{c \eta^2} \left(-\tau \sin \alpha_1 + \gamma \sqrt{\eta^2 \varrho^2 - \sin^2 \alpha_1} \right), \quad (\text{A13})$$

$$R = \frac{k_{1x} \varrho^2 \gamma^2 - (k_x \eta^2 + k_z \tau)}{k_{1x} \varrho^2 \gamma^2 + (k_x \eta^2 + k_z \tau)}. \quad (\text{A14})$$

As a consequence, computing $R - 1$ out of Eq. (A14) with the above expressions, there exists an angle of incidence α_1^c above which waves are totally reflected and become evanescent in the crystal. This extinction angle is thus given by

$$\sin^2 \alpha_1^c = \eta^2 \rho^2. \quad (\text{A15})$$

which exists if $\eta^2 \varrho^2 < 1$, thus giving acceptable values for the optical index n_1 by

$$n_1^2 > n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A16})$$

The important result then is the expression of the field inside the crystal on the surface $x = 0$. This value does not vanish even at extinction angle because from Eqs. (A10) and (A14) we have

$$f = -2e_i \frac{k_x \tau + k_z \beta^2}{k_{1x} \gamma^2 \rho^2 + k_x \eta^2 + k_z \tau}, \quad (\text{A17})$$

which is not zero when $R = 1$. Then, in general, the transmitted electric field reads

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} + \text{c.c.}, \quad (\text{A18})$$

$$E_x = -2e_i \frac{k_x \tau + k_z \beta^2}{k_{1x} \gamma^2 \rho^2 + k_x \eta^2 + k_z \tau},$$

$$E_z = 2e_i \frac{k_x \eta^2 + k_z \tau}{k_{1x} \gamma^2 \rho^2 + k_x \eta^2 + k_z \tau},$$

completely determined from relations (A12) and (A13).

Next the relation (A18) can be evaluated perturbatively in powers of ϵ by using definitions (12) and (13), and the expansions (14). We get

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-2e_i n_1^2}{n_e(\omega) \sqrt{n_1^2 - n_e(\omega)^2}} + i\sqrt{\epsilon v} \frac{2e_i n_1^4}{n_e(\omega)^2 [n_1^2 - n_e(\omega)^2]}, \\ E_z &= i\sqrt{\epsilon v} \frac{2e_i n_1^2}{n_e(\omega) \sqrt{n_1^2 - n_e(\omega)^2}}, \quad (\text{A19}) \end{aligned}$$

with corrections of order ϵ . This is the result that allows to compute E_0 in Sec. V.

- [1] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 118 (1961).
 [2] W. E. Torruellas, Z. Wang, D. J. Hagan, E. W. Van Stryland, G. I. Stegeman, L. Torner, and C. R. Menyuk, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5036 (1995).

- [3] C. Etrich, F. Lederer, B. A. Malomed, T. Peschel, and U. Peschel, *Prog. Opt.* **41**, 483 (2000).
 [4] A. V. Buryak, P. Di Trapani, D. V. Skryabin, and S. Trillo, *Phys. Rep.* **370**, 63 (2002).
 [5] G. Leo and G. Assanto, *Opt. Lett.* **22**, 1391 (1997).

- [6] M. T. G. Carva, R. A. Fuerst, S. Baboiu, G. I. Stegeman, and G. Assanto, *Opt. Lett.* **22**, 1683 (1997).
- [7] V. V. Steblina, Y. S. Kivshar, and A. V. Buryak, *Opt. Lett.* **23**, 156 (1998); A. V. Buryak, Y. S. Kivshar, M. F. Shih, and M. Segev, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 81 (1999); C. Simos, V. Couderc, A. Barthélémy, and A. V. Buryak, *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 2133 (2003).
- [8] A. Hasegawa and F. Tappert, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142 (1973).
- [9] H. G. Winful, J. H. Marburger, and E. Garmire, *Appl. Phys. Lett.* **35**, 379 (1979).
- [10] A. B. Aceves and S. Wabnitz, *Phys. Lett. A* **14**, 37 (1989).
- [11] D. N. Christodoulides and R. I. Joseph, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1746 (1989).
- [12] N. D. Sankey, D. F. Prelewitz, and T. G. Brown, *Appl. Phys. Lett.* **60**, 1427 (1992).
- [13] D. Taverner, N. G. R. Broderick, D. J. Richardson, R. I. Laming, and M. Ibsen, *Opt. Lett.* **23**, 328 (1998).
- [14] J. Leon and A. Spire, *Phys. Lett. A* **327**, 474 (2004).
- [15] F. Geniet and J. Leon, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 134102 (2002).
- [16] J. Leon, *Phys. Lett. A* **319**, 130 (2003).
- [17] R. Khomeriki, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 063905 (2004).
- [18] P. Anghel-Vasilescu, J. Dorignac, F. Geniet, J. Leon, and M. Taki, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 074101 (2010).
- [19] J. C. Bronski, Mordechai Segev, and Michael I. Weinstein, *PNAS* **98**, 12872 (2001).
- [20] L. Isaenko, P. Krinitsin, V. Vedenyapin, A. Yelisseyev, A. Merkulov, J.-J. Zondy, and V. Petrov, *Crystal Growth and Design* **5**, 1325 (2005).
- [21] J. A. Fleck and M. D. Feit, *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 920 (1983).
- [22] The parameter ϵ should not be confused with a dielectric constant. To this end, and except for the vacuum constant ϵ_0 , we rather use optical indices throughout the paper.
- [23] We note incidentally that the translation of the solution $\xi \rightarrow \xi - \xi_0$ is represented by a one dimensional flow in the parameter space: $q \rightarrow qe^{\xi_0}$, $r \rightarrow re^{\xi_0}$, $p \rightarrow (p - \xi_0 qr/2)e^{2\xi_0}$.
- [24] S. Chang, S. Gustafson, K. Nakanishi, and T. Tsai, *SIAM J. Math. Anal.* **39**, 1070 (2008).

Conclusions deuxième partie

Dans la deuxième partie de cette thèse on a traité de façon numérique et analytique le problème de la génération de solitons de gap biréfringents dans les milieux non-linéaires quadratiques.

On a développé une méthode asymptotique permettant de reproduire et prédire le seuil de NST avec une grande précision. Cette méthode de développement en séries n'est pas restreinte au cas particulier de la génération de seconde harmonique ni à la forme quadratique du terme non-linéaire. Par ailleurs, elle peut être appliquée avec succès à une large gamme de systèmes non-intégrables scalaires ou à multiple composantes car son application ne dépend pas de l'existence/de la connaissance d'une solution analytique exacte du problème. Cette méthode pourra donc trouver des applications concrètes dans n'importe quel système d'ondes couplées avec couplage évanescent. Dans le cas des systèmes non-linéaires intégrables, la solution donnée par le développement asymptotique susmentionné s'avère exacte et la série infinie converge dans ce cas vers la solution exacte de type solitonique.

De plus, on a montré que le seuil de supratransmission non-linéaire est donné par une condition mathématique très simple, qui pose l'annulation du déterminant de la matrice de Jacobi $J_{mn} = \frac{\partial A_m}{\partial \eta_n}$. Cette condition définit une variété à $N - 1$ dimensions qui pose la limite de la zone de stabilité de la solution statique dans l'espace des paramètres.

Même si aucune expression analytique n'a été obtenue pour décrire la propagation des solitons dans le milieu quadratique une fois générés, les simulations numériques montrent l'existence des structures spatiales localisées dont la fréquence appartient à la bande interdite du milieu considéré et qui sont très stables. La dynamique de ces objets est assez riche car on constate la présence d'interactions élastiques (une caractéristique des "vrais" solitons) mais aussi des collisions inélastiques (par exemple deux solitons en contre-propagation restent collés pour former une nouvelle onde solitaire).

Hamiltonien d'interaction et transformations de jauge

On va rappeler ici deux des principales jagues de l'électromagnétisme. On considère l'interaction entre un champ électromagnétique classique et l'atome le plus simple, constitué d'un électron dans le champ coulombien d'un noyau supposé immobile. Le champ est complètement caractérisé par les potentiels $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t)$ et $U(\hat{\mathbf{r}}, t)$, qui prennent en compte aussi bien le champ coulombien du noyau ainsi que les champs extérieurs qui interagissent avec l'atome. Nous admettons que la dynamique de cet électron est déterminée par l'hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t))^2 + qU(\hat{\mathbf{r}}, t), \quad (\text{A.1})$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est l'opérateur position de l'électron, tandis que $\hat{\mathbf{p}}$ est l'opérateur $-i\hbar\nabla$. On ne va pas donner ici de justification rigoureuse de cet hamiltonien. Celui ci est bien plausible et le lecteur motivé peut montrer facilement qu'en utilisant le théorème d'Ehrenfest, on obtient bien les équations classiques de mouvement (2.14), lorsqu'on s'intéresse à l'évolution des valeurs moyennes quantiques des opérateurs position et vitesse.

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t)}{m} \quad (\text{A.2})$$

A.1 Jauge de Coulomb

Nous savons qu'il existe une infinité de couples $\{\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t), U(\hat{\mathbf{r}}, t)\}$ correspondant au même champ électromagnétique $\{\mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}, t), \mathbf{B}(\hat{\mathbf{r}}, t)\}$. On peut passer d'un couple à un autre par une transformation de jauge. Parmi les diverses jagues possibles il existe une qui est bien adaptée aux problèmes de l'optique quantique, c'est la jauge de Coulomb, définie par la condition de jauge :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Ce choix correspond à une valeur particulière du potentiel vecteur, notée $\mathbf{A}_\perp(\hat{\mathbf{r}}, t)$ et elle est appelée *A transverse*. Dans le cas d'une onde plane électromagnétique :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.4a})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.4b})$$

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (\text{A.4c})$$

Le potentiel vecteur correspondant en jauge de Coulomb est

$$\mathbf{A}_\perp(\hat{\mathbf{r}}, t) = -\frac{\mathbf{E}_0}{\omega} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.5})$$

tandis que le potentiel scalaire associé est nul :

$$U(\hat{\mathbf{r}}, t) = 0. \quad (\text{A.6})$$

En plus, le champ électrique (A.4a) de l'onde électromagnétique libre s'écrit :

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_{\perp}(\hat{\mathbf{r}}, t) \quad (\text{A.7})$$

On se place maintenant dans la jauge de Coulomb pour traiter le problème décrit par l'hamiltonien d'interaction (A.1) entre un champ électromagnétique et un atome constitué d'un électron soumis au potentiel coulombien du noyau. L'avantage de cette jauge c'est de permettre une séparation claire entre le champ coulombien statique créé par le noyau atomique et le rayonnement électromagnétique extérieur appliqué (onde plane). En ce qui concerne le champ électrostatique créé par le noyau, le potentiel vecteur associé est nul, tandis que le potentiel scalaire est tout simplement le potentiel coulombien habituel $U_{coul}(\hat{\mathbf{r}})$. En posant $V_{coul}(\hat{\mathbf{r}}) = qU_{coul}(\hat{\mathbf{r}})$, l'hamiltonien (A.1) s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}_{\perp}(\hat{\mathbf{r}}, t))^2 + V_{coul}(\hat{\mathbf{r}})$$

soit encore :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{q}{2m} (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}_{\perp}(\hat{\mathbf{r}}, t) + \mathbf{A}_{\perp}(\hat{\mathbf{r}}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{q^2 \mathbf{A}_{\perp}^2(\hat{\mathbf{r}}, t)}{2m} + V_{coul}(\hat{\mathbf{r}})$$

Les deux termes $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}_{\perp}$ et $\mathbf{A}_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ sont égaux car $[\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{A}_{\perp}] = -i\hbar \nabla \cdot \mathbf{A}_{\perp} = 0$ et $\mathbf{A}_{\perp}(\hat{\mathbf{r}}, t)$ obéit à (A.3). Ainsi, l'hamiltonien de l'électron s'écrit $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ avec

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_{coul}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.8a})$$

$$\hat{H}_1 = \underbrace{-\frac{q}{m} \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}_{\perp}(\hat{\mathbf{r}}, t)}_{\hat{H}_{11}} + \underbrace{\frac{q^2 \mathbf{A}_{\perp}^2(\hat{\mathbf{r}}, t)}{2m}}_{\hat{H}_{12}}. \quad (\text{A.8b})$$

L'hamiltonien de l'atome de hydrogène \hat{H}_0 décrit le mouvement d'une particule soumise à un potentiel coulombien et le terme d'interaction \hat{H}_1 décrit le mouvement d'un électron et le champ extérieur appliqué, complètement caractérisé par le potentiel vecteur en jauge de Coulomb. \hat{H}_1 apparaît comme la somme de deux contributions \hat{H}_{11} et \hat{H}_{12} , respectivement linéaire et quadratique en fonction du potentiel vecteur.

A.2 Jauge de Göppert-Mayer

Nous introduisons maintenant une deuxième jauge très utile pour la description de l'interaction atome-rayonnement, car elle conduit à une forme de l'hamiltonien d'interaction particulièrement suggestive. Il s'agit de la jauge de Göppert-Mayer, qui se déduit de la jauge de Coulomb par la transformation de jauge (2.12a) et (2.12b)

$$\mathbf{A}'(\hat{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t) + \nabla F(\hat{\mathbf{r}}, t),$$

$$U'(\hat{\mathbf{r}}, t) = U(\hat{\mathbf{r}}, t) - \frac{\partial}{\partial t} F(\hat{\mathbf{r}}, t).$$

dans laquelle on prend :

$$F(\hat{\mathbf{r}}, t) = -(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_0, t). \quad (\text{A.10})$$

Cette transformation privilégie la position \mathbf{r}_0 du noyau. Elle donne les potentiels de Göppert-Mayer :

$$\mathbf{A}'(\hat{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{A}_\perp(\hat{\mathbf{r}}, t) - \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_0, t) \quad (\text{A.11a})$$

$$U'(\hat{\mathbf{r}}, t) = U_{coul}(\hat{\mathbf{r}}) + (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_0, t) \quad (\text{A.11b})$$

Avec ces potentiels, l'hamiltonien (A.1) s'écrit

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}'(\hat{\mathbf{r}}, t))^2 + V_{coul}(\hat{\mathbf{r}}) + q(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_0, t)$$

En se souvenant que le champ électrique associé au rayonnement appliqué est donnée par (A.7) et en introduisant l'opérateur *moment dipolaire électrique* de l'atome :

$$\hat{\mathbf{D}} = q(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0),$$

l'hamiltonien s'écrit finalement :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}'(\hat{\mathbf{r}}, t))^2 + V_{coul}(\hat{\mathbf{r}}) - \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t). \quad (\text{A.12})$$

Dans *l'approximation des grandes longueurs d'onde*, on peut remplacer les potentiels associés au rayonnement extérieur par leur valeur à la position \mathbf{r}_0 du noyau. On remplace donc $\mathbf{A}'(\hat{\mathbf{r}}, t)$ par $\mathbf{A}'(\mathbf{r}_0, t)$ et d'après (A.11a) on trouve :

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}_0, t) = 0,$$

de sorte que (A.12) prend la forme :

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_{coul}(\hat{\mathbf{r}})}_{\hat{H}_0} - \underbrace{\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)}_{\hat{H}'_1}, \quad (\text{A.13})$$

où l'hamiltonien d'interaction \hat{H}'_1 porte le nom d'*hamiltonien dipolaire électrique*. Cet hamiltonien rappelle l'expression classique de l'énergie d'interaction entre un champ électrique extérieur $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et un dipôle classique \mathbf{D} situé au point \mathbf{r}_0 .

Même si les deux jauges présentée ici décrivent le même système dynamique par deux hamiltoniens différents, cela ne doit pas être inquiétant quant à l'unicité des résultats physiques. On peut affirmer que les deux hamiltoniens d'interaction $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ et $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ conduisent aux mêmes probabilités de transition. Ceci reste vrai à l'approximation des grandes longueurs d'onde. En revanche, pour des approximations plus fortes, les résultats peuvent dépendre du type d'hamiltonien choisi, et ce d'une manière très subtile. Un calcul approché donne généralement des résultats plus précis avec l'hamiltonien dipolaire électrique lorsqu'on traite une transition entre deux niveaux discrets, alors que dans la jauge de Coulomb on obtient des meilleurs résultats dans le cas d'une transition vers un continuum d'états.

Angle d'accord de phase dans un cristal biréfringent positif

L'indice de réfraction d'une onde extraordinaire qui pénètre un cristal uniaxe positif dépend de l'angle θ fait par la direction de propagation de l'onde (Oz) avec l'axe optique (OZ). Voir Figure C pour les notations. Tous les indices dépendent de la fréquence de l'onde incidente ($n(\omega, \theta)$, $n_o(\omega)$, $n_e(\omega)$). Il ne faut pas oublier cette dépendance même si parfois on omet de la préciser explicitement, pour simplifier l'écriture des relations. On se rappelle que l'indice de réfraction "vu" par une onde extraordinaire se propageant dans un cristal biréfringent sous un angle θ avec l'axe optique est :

$$n(\theta) = \frac{n_e}{\beta(\theta)} \quad (\text{B.1})$$

où $\beta(\theta)$ est donné par la relation

$$\beta^2(\theta) = \gamma^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta, \quad \gamma^2 = \frac{n_e^2}{n_o^2}. \quad (\text{B.2})$$

On peut donc trouver que :

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (\text{B.3})$$

Pour un accord de phase de type I dans un cristal positif ($n_e(\omega) > n_o(\omega)$),

$$\vec{k}_p^o = \vec{k}_s^e(\theta_{opt}) + \vec{k}_i^e(\theta_{opt}) \quad (\text{B.4})$$

la condition de conservation de la quantité de mouvement doit être satisfaite :

$$\omega_p n(\omega_p) = \omega_s n(\omega_s) + \omega_i n(\omega_i). \quad (\text{B.5})$$

Pour la génération de la seconde harmonique :

$$\omega_p = 2\omega \quad \text{et} \quad \omega_s = \omega_i = \omega,$$

$$k_p^o(2\omega) = k_s^e(\omega, \theta_{opt}) + \Delta k$$

les relations (B.5) et (B.4) impliquent :

$$2\omega n_o(2\omega) = 2\omega n(\theta_{opt}, \omega). \quad (\text{B.6})$$

Il existe donc un angle θ_{opt} pour lequel $n_o(2\omega) = n(\theta_{opt}, \omega)$. En utilisant la relation (B.3) il vient :

$$\frac{1}{n^2(\theta_{opt}, \omega)} = \frac{1}{n_o^2(2\omega)} = \frac{\cos^2 \theta_{opt}}{n_o^2(\omega)} + \frac{\sin^2 \theta_{opt}}{n_e^2(\omega)}, \quad (\text{B.7})$$

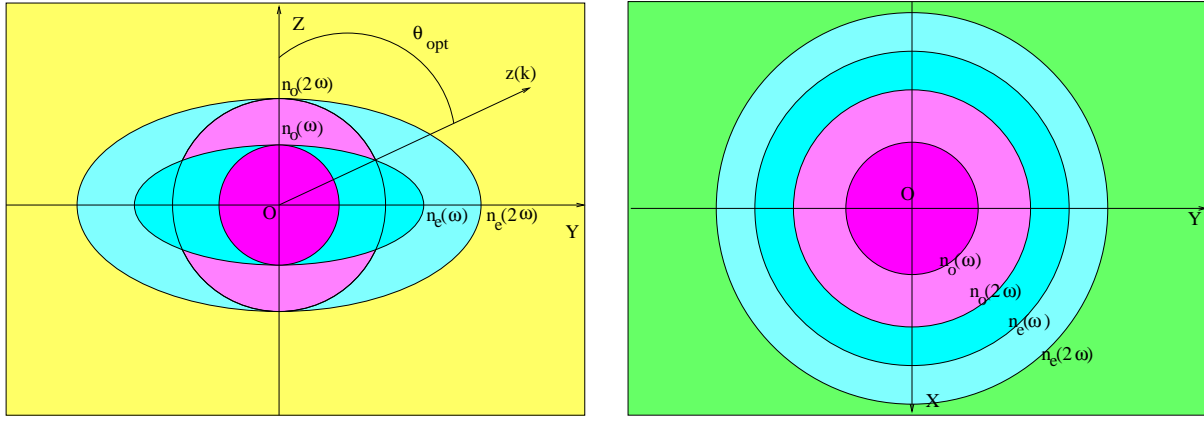


FIGURE B.1 – Variations des indices de réfractifs ordinaires et extraordinaires dans un cristal biréfringent positif, dans le plan principal (ZOz) (à gauche) et dans le plan perpendiculaire au plan principal (XOY) (à droite)

et on trouve l'angle :

$$\sin^2 \theta_{opt} = \frac{n_o^{-2}(2\omega) - n_o^{-2}(\omega)}{n_e^{-2}(\omega) - n_o^{-2}(\omega)}. \quad (\text{B.8})$$

Bien évidemment, cette solution n'existe que si $n_o(2\omega) < n_e(\omega)$, c'est-à-dire que si le cristal est suffisamment biréfringent. Cette dernière équation permet de calculer directement l'angle d'accord de phase dès que les relations de dispersions sont connues pour chacune des polarisations, le plus souvent sous la forme de relations de Sellmeier pour les grands gaps

$$n_{op} \approx \sqrt{\varepsilon_1} \approx \left[\varepsilon_\infty - (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{1}{[(\nu/\nu_{TO})^2 - 1]} \right]^{1/2} \quad (\text{B.9})$$

soit encore sous la forme de relations d'Afromowitz pour des semiconducteurs à plus petits gaps [Born 80]

$$\varepsilon_1(E) = 1 + M_{-1} + M_{-3}E^2 + \frac{\eta}{\pi} \ln \left[\frac{E_f^2 - E^2}{E_G^2 - E^2} \right] E^4. \quad (\text{B.10})$$

Nous avons utilisé les paramètres suivants :

- ε_1 la partie réelle de la constante diélectrique ε ,
- ε_∞ la constante diélectrique à fréquence infinie,
- ε_s la constante diélectrique statique correspondant à une fréquence nulle,
- ν_{TO} la fréquence du phonon optique transverse du milieu considéré,
- ν la fréquence de l'onde plane électromagnétique incidente,
- E_G l'énergie de la bande interdite (*gap*) du semiconducteur,
- les moments M_i sont donnés par $M_i = \frac{2}{\pi} \int_{E_G}^{\infty} \varepsilon_2(E) E^i dE$,
- ε_2 la partie imaginaire de la constante diélectrique ε liée à l'absorption du matériau définie dans le modèle d'Afromowitz par

$$\varepsilon_2(E) = \begin{cases} \eta E^4 & E_G < E < E_f \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Une fois l'angle d'accord de phase déterminé, il restera encore à calculer la valeur de la susceptibilité quadratique optique à partir de la relation (7.18). Le résultat dépendra évidemment des différents termes non nuls du tenseur d_{ijk} et donc des propriétés de symétrie du cristal.

Si $\Delta k \neq 0$, alors la seconde harmonique générée dans un point z_1 , qui se propage jusqu'au point z_2 , ne sera plus en phase avec l'onde (la seconde harmonique) générée en z_2 . Cela provoque l'apparition des interférences constructives et destructives. Deux pics adjacents sont séparés par une longueur l_c appelée *longueur de cohérence*¹ :

$$l_c = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{k(2\omega) - 2k(\omega)} = \frac{\lambda}{2[n(2\omega) - n(\omega)]} \quad (\text{B.12})$$

Celle ci nous donne une mesure de la longueur maximale du cristal qui permet de produire la seconde harmonique avec une puissance considérable.

¹Pour une valeur typique de la longueur d'onde de $\lambda = 1\mu m$ et pour $n(2\omega) - n(\omega) \simeq 10^{-2}$, on obtient $l_c \simeq 100\mu m$

Transformations des coordonnées dans le cristal biréfringent

On rappelle la configuration des deux repères attachés au cristal dans la Figure C.1. Le chan-

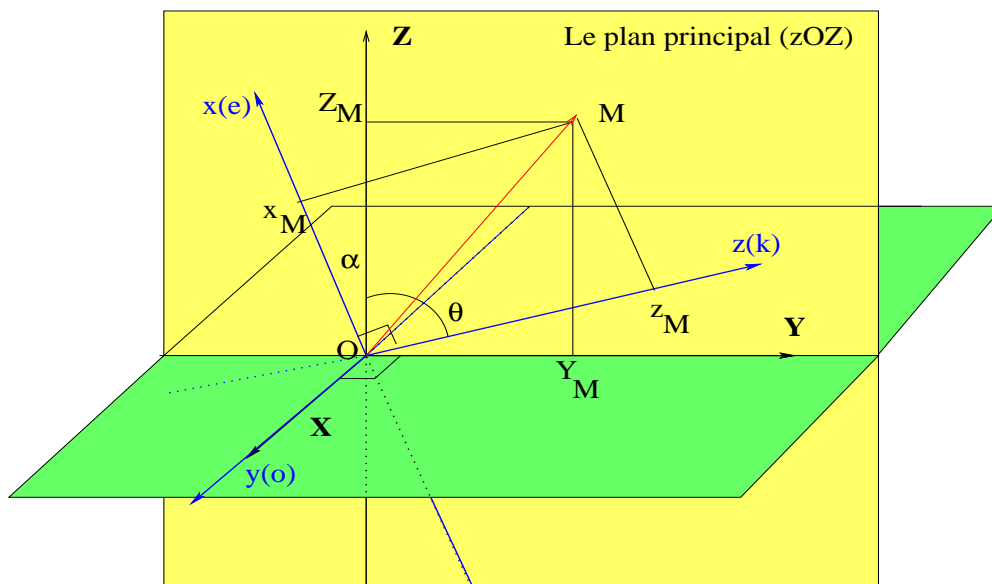


FIGURE C.1 – Le système de coordonnées (X, Y, Z) est un repère orthonormé lié au cristal et (x, y, z) est un autre repère lié à la propagation du champ électrique.

gement de variables, exprimé dans le repère du cristal (XYZ) , vers le repère du laboratoire (xyz) se fait avec les transformations suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

et inversement

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

On peut définir des relations semblables pour les dérivées partielles premières :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \partial_X \\ \partial_Y \\ \partial_Z \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

et

$$\begin{pmatrix} \partial_X \\ \partial_Y \\ \partial_Z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Pour les dérivées partielles de deuxième ordre on trouve que :

$$\begin{pmatrix} \partial_X^2 \\ \partial_Y^2 \\ \partial_Z^2 \\ \partial_X \partial_Y \\ \partial_Y \partial_Z \\ \partial_X \partial_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 \theta & 0 & \sin^2 \theta & 0 & 0 & -\sin(2\theta) \\ \sin^2 \theta & 0 & \cos^2 \theta & 0 & 0 & +\sin(2\theta) \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{1}{2} \sin(2\theta) & 0 & +\frac{1}{2} \sin(2\theta) & 0 & 0 & -\cos(2\theta) \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x^2 \\ \partial_y^2 \\ \partial_z^2 \\ \partial_x \partial_y \\ \partial_y \partial_z \\ \partial_x \partial_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Bibliographie

- [Ablowitz 74] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell & H. Segur. *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems*. Studies in Applied Mathematics, vol. 53, pages 249–315, 1974.
- [Akhmediev 97] N. N. Akhmediev & A. Ankiewicz. *Solitons : nonlinear pulses and beams*. Chapman & Hall London, 1997.
- [Allen 87] L. Allen & J. H. Eberly. *Optical resonance and two-level atoms*. Dover publications, New York, 1987.
- [Armstrong 62] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing & P. S. Pershan. *Interactions between light waves in a nonlinear dielectric*. Physical Review, vol. 127, no. 6, pages 1918–1939, 1962.
- [Aspect 05] Fabre C. Aspect A. & G. Grynberg. *Optique quantique 1 : Lasers - Tome I*. Cours de l'École polytechnique, 2005.
- [Atanasov 06] V. Atanasov & V. Gerdjikov. *On the multi-component nonlinear Schrödinger equation with constant boundary conditions*. Gravity, Astrophysics and Strings at the Black Sea, eds. PP Fiziev, MD Todorov, St. Kliment Ohridsky Univ. Press, Sofia, pages 22–36, 2006.
- [Born 80] M. Born & E. Wolf. *Principles of optics*. Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [Buryak 02] Di Trapani P. Skryabin D. V. Trillo S. Buryak A. V. *Optical solitons due to quadratic nonlinearities : from basic physics to futuristic applications*. Physics Reports-Review Section of Physics Letters, vol. 370, no. 2, pages 63–235, July 2002.
- [Calogero 76] F. Calogero & A. Degasperis. *Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform I, II*. Il Nuovo Cimento, vol. 32B, pages 201–242, 1976.
- [Chang 06] S. M. Chang, S. Gustafson, K. Nakanishi & T. P. Tsai. *Spectra of linearized operators for NLS solitary waves*. Arxiv preprint math/0611483, 2006.
- [Cohen-Tannoudji 77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu & F. Laloë. *Mécanique quantique - Tome I*. Hermann, Paris, 1977.
-

- [Collins 60] R. J. Collins, D. F. Nelson, A. L. Schawlow, W. Bond, C. G. B. Garrett & W. Kaiser. *Coherence, Narrowing, Directionality, and Relaxation Oscillations in the Light Emission from Ruby*. Phys. Rev. Lett., vol. 5, no. 7, pages 303–305, Oct 1960.
- [Dauxois 04] T. Dauxois & M. Peyrard. *Physique des solitons*. EDP sciences., 2004.
- [Fermi 74] E. Fermi, J. Pasta & S. Ulam. *Studies of nonlinear problems I, Los Alamos Report LA-1940 (non publié 1955); reproduced in Nonlinear Wave Motion, AC Newell ed.* American Mathematical Society, Providence, RI, pages 143–156, 1974.
- [Fleck 83] J. A. Fleck & M. D. Feit. *Beam propagation in uniaxial anisotropic media*. Optical Society of America, Journal, vol. 73, pages 920–926, 1983.
- [Franken 61] PA Franken, AE Hill, CW Peters & G. Weinreich. *Generation of optical harmonics*. Physical Review Letters, vol. 7, no. 4, pages 118–119, 1961.
- [Gardner 67] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal & R. M. Miura. *Method for solving the Korteweg-deVries equation*. Physical Review Letters, vol. 19, no. 19, pages 1095–1097, 1967.
- [Geniet 02] F. Geniet & J. Leon. *Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain*. Physical Review Letters, vol. 89, no. 13, page 134102, 2002.
- [Ginovart 94] F. Ginovart & J. Leon. *Nonlinear propagation of electromagnetic pulses in two-level media under strong coupling*. Journal of Physics A : Mathematical and General, vol. 27, page 3955, 1994.
- [Isaenko 05] L. Isaenko, P. Krinitsin, V. Vedenyapin, A. Yelisseyev, A. Merkulov, J. J Zondy & V. Petrov. *LiGaTe2 : A New Highly Nonlinear Chalcopyrite Optical Crystal for the Mid-IR*. Crystal Growth & Design, vol. 5, no. 4, pages 1325–1329, June 2005.
- [Jackson 01] J. D. Jackson. *Électrodynamique classique - Cours et exercices d'électromagnétisme*. Dunod, Paris, 2001.
- [Jeffrey 82] A. Jeffrey & T. Kawahara. *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.
- [Karamzin 74] Yu. N. Karamzin & A. P. Sukhorukov. *Nonlinear interaction of diffracted light beams in a medium with quadratic nonlinearity : mutual focusing of beams and limitations of the efficiency of optical frequency converters*. JETP Lett., vol. 20, no. 11, pages 339–343, Dec 1974.
- [Khomeriki 04] R. Khomeriki. *Nonlinear band gap transmission in optical waveguide arrays*. Physical review letters, vol. 92, no. 6, page 63905, 2004.
- [Kivshar 89] Y. S. Kivshar & B. A. Malomed. *Dynamics of solitons in nearly integrable systems*. Reviews of Modern Physics, vol. 61, no. 4, pages 763–915, 1989.
-

- [Kivshar 03] Y. S. Kivshar & G. P. Agrawal. *Optical solitons : from fibers to photonic crystals*. Academic Press San Diego, 2003.
- [Kleinman 62] DA Kleinman. *Nonlinear dielectric polarization in optical media*. *Physical Review*, vol. 126, no. 6, page 1977, 1962.
- [Korteweg 95] D. J. Korteweg & G. De Vries. *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves*. *Philosophical Magazine 5th Series*, vol. 36, pages 422–442, 1895.
- [Lax 68] P. D. Lax. *Commun. Pure Appl. Math*, vol. 21, no. 467, pages 521–1979, 1968.
- [Leon 03] J. Leon. *Nonlinear supratransmission as a fundamental instability*. *Physics Letters A*, vol. 319, no. 1-2, pages 130–136, 2003.
- [Leon 09] J. Leon, P. Anghel-Vasilescu, F. Ginovart & N. Allegra. *Scattering of slow-light gap solitons with charges in a two-level medium*. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 42, page 055101, 2009.
- [Magel 90] G. A. Magel, M. M. Fejer & R. L. Byer. *Quasi-phase-matched second-harmonic generation of blue light in periodically poled LiNbO*. *Applied Physics Letters*, vol. 56, page 108, 1990.
- [Manakov 74] S. V. Manakov. *On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves*. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 38, page 248, 1974.
- [Pantell 69] R.H. Pantell & H.E. Puthoff. *Fundamentals of quantum electronics*. Wiley New York, 1969.
- [Raether 88] H. Raether. *Surface Plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*. Springer Tracts on modern physics, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Rose 88] H. A. Rose & M. I. Weinstein. *On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential*. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 30, no. 1-2, pages 207–218, 1988.
- [Rosencher 02] E. Rosencher & B. Vinter. *Optoélectronique*. Dunod, Paris, 2002.
- [Russell 44] J. S. Russell. *Report on waves*. In *Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, pages 311–390, 1844.
- [Scott 99] A. Scott. *Nonlinear Science - Emergence and Dynamics of Coherent Structures*. Oxford University Press, 1999.
- [Shen 84] Y. R. Shen. *The principles of nonlinear optics*. 1984.
- [Taverner 98] D. Taverner, NGR Broderick, DJ Richardson, RI Laming & M. Ibsen. *Nonlinear self-switching and multiple gap-soliton formation in a fiber Bragg grating*. *Optics letters*, vol. 23, no. 5, pages 328–330, 1998.
-

- [Torruellas 95] W. E. Torruellas, Z. Wang, D. J. Hagan, E. W. VanStryland & G. I. Stegeman. *Observation of Two-Dimensional Spatial Solitary Waves in a Quadratic Medium*. Phys. Rev. Lett., vol. 74, no. 25, pages 5036 – 5039, June 1995.
- [Ward 01] H. Ward. *Instabilités spatio-temporelles des oscillateurs paramétriques optiques : couplage walk-off/diffraction*, 2001.
- [Yariv 03] Yariv & Yeh. *Optical waves in crystals - propagation and control of laser radiation*. Wiley Classics Library, 2003.
- [Zabusky 65] N. J. Zabusky & M. D. Kruskal. *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*. Phys. Rev. Lett., vol. 15, pages 240–243, 1965.
- [Zakharov 72] V. E. Zakharov & A. B. Shabat. *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media (Differential equation solution for plane self focusing and one dimensional self modulation of waves interacting in nonlinear media)*. Soviet Physics-JETP, vol. 34, pages 62–69, 1972.
- [Zakharov 73] V. E. Zakharov & A. B. Shabat. *Interaction between solitons in a stable medium*. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics, vol. 37, page 823, 1973.
- [Zakharov 84] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov & L. I. Pitaevskii. *Theory of solitons : the inverse scattering method*, 1984.
-

Interactions rayonnement-matière résonantes en régime nonlinéaire : systèmes à deux niveaux et milieux quadratiques

Résumé : Nous avons consacré cette thèse à l'étude des différents processus non-linéaires de l'interaction rayonnement-matière et en particulier à la génération des solitons de gap dans les milieux non-linéaires à bandes interdites. Dans la première partie nous avons utilisé un modèle semi-classique de Maxwell-Bloch pour décrire l'interaction d'un milieu à deux niveaux quantiques avec charges avec un champ électromagnétique classique à travers la densité de population, qui est à l'origine même de la non-linéarité. Le couplage non-linéaire qui en résulte génère des phénomènes particulièrement intéressants (génération et diffusion des solitons de gap) à la résonance, quand la pulsation du champ appliqué est proche de la fréquence de transition du milieu à deux niveaux. La dynamique non-linéaire observée numériquement est expliquée à l'aide d'un modèle de Schrödinger non-linéaire dans un potentiel lié aux charges du milieu. La deuxième partie concerne l'étude théorique de la dynamique des solitons quadratiques dans les amplificateurs paramétriques optiques (OPA). Les équations décrivant l'interaction à trois ondes dégénérée dans un cristal biréfringent non-linéaire ont été établies en prenant en compte la diffraction transverse et le walk-off spatial. Nous avons proposé une méthode pour résoudre le problème ardu de la détermination du seuil de supratransmission non-linéaire dans les OPA et nous avons généralisé les résultats obtenus à une grande classe de systèmes non-linéaires non-intégrables à composantes multiples.

Mots-clefs : supratransmission, analyse multi-échelles, amplification paramétrique, biréfringence, non-linéarité quadratique, solitons de gap, système de Maxwell-Bloch

Resonant radiation-matter interactions in nonlinear regime : quantum two-level systems and quadratic media

Abstract : In this thesis we were interested in studying different nonlinear phenomena of the radiation-matter interaction and in particular the generation of gap solitons in nonlinear media presenting forbidden band gaps. In the first part we used a semi-classical model of Maxwell-Bloch to describe the interaction of a quantum two-level medium with charges and a classical electromagnetic field, by mediation of the population density, which is actually at the very origin of nonlinearity. The resulting nonlinear coupling possesses particularly interesting consequences (generation of slow-light solitons and effective scattering with charges) at the resonance, when the frequency of the excitation is close to the transition frequency of the two-level medium. The nonlinear dynamic observed numerically is understood by means of a nonlinear Schrödinger model in an external potential related to the charges. The second part of this thesis is focused on the theoretical study of the dynamics of quadratic gap solitons in optical parametric amplifiers (OPA). The equations describing the degenerate three-wave interaction in a nonlinear birefringent crystal are established in presence of transverse diffraction and spatial walk-off. We proposed a method for solving the challenging problem of determining the nonlinear supratransmission threshold in OPA which was generalised to any multicomponent nonintegrable nonlinear systems.

Keywords : supratransmission, multiple scale analysis, parametric amplification, birefringence, quadratic nonlinearities, gap solitons, Maxwell-Bloch system

Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules
UMR 5207 CNRS-UM2, Université Montpellier II
Case Courrier 070, Bât. 13, place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5 FRANCE

