HAL
open science

# Analyse expérimentale et modélisation du comportement non linéaire thermomécanique de cloison en plaques carton-plâtre-carton, vissées et soumise à des charges thermiques et mécaniques

Thanh Trung Do

**To cite this version:**

Thanh Trung Do. Analyse expérimentale et modélisation du comportement non linéaire thermomécanique de cloison en plaques carton-plâtre-carton, vissées et soumise à des charges thermiques et mécaniques. Autre. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1076 . tel-00665543

**HAL Id: tel-00665543**

**https://theses.hal.science/tel-00665543**

Submitted on 2 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

ANNÉE 2011

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris-Est**

Discipline : **Génie Civil**

présentée et soutenue publiquement par

**Thanh Trung DO**

Soutenue le 08 Décembre 2011

Titre

**Analyse expérimentale et modélisation du comportement non linéaire thermomécanique de cloison en plaques carton-plâtre-carton, vissées et soumises à des charges thermiques et mécaniques**

Directeur de thèse

**Professeur Christian SOIZE**

JURY

| | | | |
|---|---|---|---|
| Adnan IBRAHIMBEGOVIC | LMT Cachan | Professeur | Président |
| Fékri MEFTAH | Univ.Cergy | Professeur | Rapporteur |
| Roger OHAYON | CNAM | Professeur | Rapporteur |
| Jean-Vivien HECK | CSTB | Ing.Rech | Examinateur |
| Christian SOIZE | Univ. Paris-Est | Professeur | Directeur de thèse |

# Remerciements

*La thèse comme le chapitre d'ouverture d'un roman de carrière scientifique encore inachevé. Il peut être continué dans des différentes directions ou même finir là, on ne le sait jamais à ce moment. Les années de thèse sont des années inoubliables de la jeunesses, plein d'émotions, de la joie et de la tristesse, du stress sous la pression du travail dans les moments difficiles et de la délibération lorsque ça marche…*

*Mon travail de thèse a été effectué dans le cadre d'un projet de recherche proposé et financé par le Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB), en collaboration avec le Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelle (LMSME) de l'Université Paris-Est, à qui j'exprime mes sincères reconnaissances pour ses accueils, ses ambiantes de travail très enthousiasme, passionnée et amicale.*

*Tout d'abord, mes plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur Jean-Vivien Heck, mon encadreur au niveau du CSTB, pour m'avoir accepté et encadré cette thèse. Il m'a beaucoup aidé non seulement sur le domaine scientifique (surtout la partie d'orientation de thèse et de programmation), mais également dans de la vie quotidienne. Il m'a montré les moyens d'organiser le travail, les méthodes de travail plus efficaces, comment faire relation avec des collègues ainsi que le travail en équipe. Je lui remercie très sincèrement pour tout ce qu'il m'a consacré.*

*De plus, au cours de ma thèse nous avons réalisé de nombreux travaux expérimentaux au CSTB à l'aide de Monsieur Dominique Pardon et des techniciens du service "Feu" et de l'atelier que je remercie vivement. Sans eux, cette thèse ne serait pas ce qu'elle est.*

*Au sein du LMSME, j'adresse tout d'abord mes remerciements à son co-Directeur, Monsieur le Professeur Guy Bonnet, pour son accueil. Je tiens à remercier aussi tous les doctorants et les permanents du labo pour tous les échanges techniques, scientifiques, et pour leur sympathie, leur amitié.*

*J'exprime spécialement mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur Christian Soize, pour ses précieux conseils sur le plan technique et scientifique, pour sa grande disponibilité malgré sa position, pour sa patience et son encouragement tout au long de la thèse.*

*Je tiens à remercier chaleureusement les membres du jury pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Tout d'abord Monsieur le Professeur Adnan Ibrahimbergovic qui a accepté d'en être le président ; Monsieur le Professeur Fékri Meftah et Monsieur le Professeur Roger Ohayon qui ont été mes rapporteurs. Je les remercie pour le temps qu'ils m'ont consacré afin de corriger des erreurs, de mettre des commentaires et de poser des questions ou approfondir l'explication de certaines parties.*

*Il ne faut pas oublier de remercier mes amis, en particulier ma copine, de m'avoir soutenu, encouragé et partagé les joies, les peines durant ces années de thèse.*

*Je clos enfin ces remerciements en dédiant cette thèse de doctorat à ma famille, qui m'a soutenu et m'encouragé tout au long de ces années de travail. Je vous suis infiniment reconnaissant, je vous dis un immense merci.*

# Table des matières

**Table des figures** **5**

**Introduction générale** **7**

1 Contexte, objectif et spécification de la recherche . . . . . 7

1.1 Contexte . . . . . 7

1.2 Objectif de la recherche . . . . . 7

1.3 Spécification de la recherche . . . . . 8

2 Positionnement de la recherche . . . . . 9

3 Méthodologie de la recherche . . . . . 11

4 Plan du mémoire de thèse . . . . . 12

**1 Etude bibliographique** **15**

1.1 Description d'une cloison légère . . . . . 15

1.2 Courbe conventionnelle de l'incendie naturel ISO 834 . . . . . 15

1.3 Propriétés de la plaque CPC . . . . . 16

1.3.1 Propriétés chimiques . . . . . 16

1.3.2 Caractéristiques mécaniques du plâtre et de la plaque CPC . . . . . 17

1.3.3 Caractéristiques thermiques du plâtre et de la plaque CPC . . . . . 19

1.3.4 Caractéristiques thermomécaniques des constituants de la plaque CPC . . 22

1.4 Modèle du transfert thermique et thermomécanique de la plaque CPC . . . . . 25

1.4.1 Modèle de transfert thermique . . . . . 25

1.4.2 Modèle déterministe moyen thermomécanique non linéaire homogénéisé avec endommagement d'une plaque CPC . . . . . 26

1.5 Rappels de la théorie des probabilités, utiles pour la modélisation stochastique des incertitudes . . . . . 29

1.5.1 Modélisation probabiliste paramétrique des incertitudes sur les paramètres du système . . . . . 29

1.5.2 Rappel sur la construction de la loi de probabilité d'un vecteur aléatoire par le principe du maximum d'entropie . . . . . 29

**2 Construction des modèles de la loi de comportement en cisaillement de l'assemblage 33**

2.1 Généralité . . . . . 33

2.2 Analyse expérimentale . . . . . 34

2.2.1 Description du dispositif expérimental . . . . . 34

2.2.2 Résultat d'essai et analyse . . . . . 34

2.3 Construction du modèle moyen du comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage à température ambiante . . . . . 37

2.4 Construction du modèle probabiliste du comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage à température ambiante . . . . . 38

2.5 Identification expérimentale des paramètres des modèles déterministe et probabiliste 39

2.5.1 Identification des paramètres du modèle moyen . . . . . 40

2.5.2 Identification des paramètres du modèle probabiliste . . . . . 41

2.6 Conclusion . . . . . 50

**3 Caractérisations expérimentales thermiques et thermomécaniques d'une plaque CPC 53**

3.1 Présentation du banc de charge thermique (BCT) . . . . . 53

3.2 Mesure de la dilatation thermique et de la courbure thermique . . . . . 55

3.2.1 Objectif des mesures . . . . . 55

3.2.2 Configuration expérimentale . . . . . 55

3.2.3 Résultats et analyse . . . . . 56

3.3 Mesure de la température et de la perte de masse de la plaque CPC . . . . . 63

3.3.1 Objectif des mesures . . . . . 63

3.3.2 Configuration expérimentale . . . . . 63

3.3.3 Résultats d'essai . . . . . 63

3.3.4 Analyse globale des mesures de la déformation thermique, de la température et de la perte de masse . . . . . 66

3.4 Essais de traction . . . . . 67

3.4.1 Objectif des mesures . . . . . 67

3.4.2 Configuration expérimentale . . . . . 68

3.4.3 Résultat d'essai . . . . . 69

3.4.4 Analyse des résultats d'essai . . . . . 74

3.5 Essais de compression . . . . . 75

3.5.1 Objectif des mesures . . . . . 75

3.5.2 Configuration expérimentale . . . . . 75

3.5.3 Résultats d'essai . . . . . 77

3.5.4 Analyse des résultats . . . . . 82

**4 Essais à chaud et identification de comportement de l'assemblage sous charge thermique 83**

4.1 Essais et résultats d'essais . . . . . 83

4.1.1 Objectif des mesures et configurations expérimentales . . . . . 83

4.1.2 Résultats des essais et analyse . . . . . 86

4.2 Identification des paramètres du modèle de l'assemblage par vissage à chaud . . . 91

**5 Modèle semi-analytique de calcul de la flèche des cloisons sous charge de service 97**

5.1 Méthode de construction du modèle moyen déterministe . . . . . 97

5.1.1 Hypothèses utilisées pour la construction du modèle . . . . . 97

5.1.2 Ecriture du modèle pour les cloison à parement simple . . . . . 99

5.2 Méthode de la construction du modèle probabiliste . . . . . 102

5.3 Application numérique et résultat de calcul . . . . . 103

**6 Développement du modèle thermomécanique non linéaire 105**

6.1 Modèle du comportement thermomécanique non linéaire de la plaque CPC . . . . 106

6.1.1 Modèle de la plaque CPC . . . . . 106

6.1.2 Discrétisation par la méthode des éléments finis du modèle de la plaque CPC106

6.2 Modèle de l'assemblage par vissage . . . . . 108

6.2.1 Cas de la cloison en parement simple en ne tenant pas compte de l'excentricité de la rotation . . . . . 108

6.2.2 Cas de la cloison en parement simple en tenant compte de l'excentricité de la rotation . . . . . 112

6.2.3 Cas de la cloison en parement double en tenant compte de l'excentricité de la rotation . . . . . 113

6.2.4 Estimation de la raideur des ressorts à l'aide des résultats expérimentaux 118

6.3 Modèle du montant métallique . . . . . 120

**7 Simulation d'une cloison légère en plaques CPC vissées sur une ossature métallique 127**

7.1 Résumé des configurations simulées et des méthodes utilisées . . . . . 127

7.2 Description de la configuration géométrique et mécanique de la cellule faisant l'objet des différentes simulations . . . . . 128

7.3 Simulation du comportement mécanique avec le modèle moyen déterministe à température ambiante . . . . . 128

7.4 Simulation du comportement mécanique avec le modèle probabiliste à température ambiante . . . 129
7.5 Simulation du comportement thermomécanique avec le modèle probabiliste sous charge thermique . . . 131
7.5.1 Simulation du transfert thermique pour la cellule . . . 131
7.5.2 Simulation du comportement thermomécanique avec le modèle numérique probabiliste sous charge thermique . . . 136

**Conclusions et perspectives** **139**

**A Calcul du champ de déplacement d'une plaque soumise chargement ponctuel** **141**
A.1 Résolution du problème 1 . . . 142
A.2 Résolution du problème 2 . . . 145
A.3 Champ de déplacement dans le parement en cas de montants simples . . . 147
A.4 Validation de la démarche par un calcul aux éléments finis . . . 148

**B Construction de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément d'assemblage151**

B.1 Cas de plaque en parement simple . . . 151
B.2 Cas de plaque en parement double . . . 151

**Bibliographie** **155**

# Table des figures


1.1 Description d'une cloison légère. (a) Exemple d'une cloison acoustique-thermique légère en plaque CPC. (b) Ossature métallique. . . . . 16
1.2 Description d'une plaque CPC. . . . . 16
1.3 Courbe ISO 834 en comparaison avec la courbe pour un feu réel. . . . . 17
1.4 Evolution de la densité volumique de masse en fonction de la température, normalisée par rapport à la densité volumique de masse à la température ambiante. . 20
1.5 Evolution de la chaleur spécifique avec la température. . . . . 21
1.6 Evolution de la conductivité thermique avec la température. . . . . 22
1.7 Caractérisation thermomécanique d'une plaque CPC sans les feuilles de carton, en flexion 4 points . . . . . 23
1.8 Identification expérimentale de la loi de comportement en traction des feuilles de carton à température ambiante . . . . . 24
1.9 Identification expérimentale de la loi de comportement en traction des feuilles de carton à 5 minutes de la charge thermique . . . . . 24

2.1 Schéma de la configuration expérimentale pour un essai d'assemblage par vissage. 35
2.2 Photo du banc d'essai de l'assemblage par vissage. . . . . 36
2.3 Résultats des essais de comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage 36
2.4 Résultat des essais de comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage sur la plage d'intérêt . . . . . 37
2.5 Comparaison de la courbe expérimentale moyenne avec le modèle moyen identifié 41
2.6 Graphe de la fonction coût $\delta_B \mapsto g(0, \delta_B)$. . . . . 44
2.7 Schéma définissant la fonction coût non différentiable. . . . . 45
2.8 Graphe de la fonction $\delta_A \mapsto J(\mathbf{r}_0, (\delta_A, 0))$ . . . . . 46
2.9 Graphe de la fonction $\delta_B \mapsto J(\mathbf{r}_0, (0, \delta_B))$ . . . . . 46
2.10 Comparaison des 8 courbes expérimentales avec la région de confiance du modèle probabiliste identifié par la méthode des moindres carrés avec la fonction coût non-différentiable. . . . . 47
2.11 Convergence vis-à-vis du nombre de tirages. Graphe de la fonction $n_s \mapsto conv(n_s)$ 48
2.12 Graphe de la fonction log-vraisemblance $\underline{a} \mapsto \mathcal{L}((\underline{a}, \underline{b}_0, \alpha_0), \boldsymbol{\delta}_0^{opt})$ . . . . . 49
2.13 Graphe de la fonction log-vraisemblance $\underline{b} \mapsto \mathcal{L}((\underline{a}_0, \underline{b}, \alpha_0), \boldsymbol{\delta}_0^{opt})$ . . . . . 49
2.14 Graphe de la fonction log-vraisemblance $\alpha \mapsto \mathcal{L}((\underline{a}_0, \underline{b}_0, \alpha), \boldsymbol{\delta}_0^{opt})$ . . . . . 49
2.15 Graphe de la fonction log-vraisemblance $\delta_A \mapsto \mathcal{L}(\underline{r}_0, (\delta_A, \{\delta_B\}_0^{opt}))$ . . . . . 50
2.16 Graphe de la fonction log-vraisemblance $\delta_B \mapsto \mathcal{L}(\underline{r}_0, (\{\delta_A\}_0^{opt}, \delta_B))$ . . . . . 50

2.17 Comparaison des 8 courbes expérimentales avec la région de confiance construite avec le modèle probabiliste identifié par la méthode de maximum de vraisemblance. 51

3.1 Banc de charge thermique . . . . . 54
3.2 Position des capteurs de déplacement de l'essai de déformation thermique. . . . . 55
3.3 Banc de mesure (éprouvette et capteurs de déplacement) pour l'essai de déformation thermique. . . . . 56
3.4 Mesures d'un essai de déformation thermique. . . . . 57
3.5 Déformation de la plaque CPC en parement simple après 15 mn de charge thermique par le BCT . . . . . 58
3.6 Déformation de la plaque CPC induite par la charge thermique. . . . . 58
3.7 Plaque se bombe vers le feu. . . . . 59
3.8 Schéma des déplacements au niveau de l'appui gauche. . . . . 60
3.9 Dilatation thermique de la plaque CPC en parement simple pendant 30 mn (soit 1800 s) de charge thermique par le BCT. . . . . 61
3.10 Courbure thermique de la plaque CPC en parement simple pendant 30 mn (soit 1800 s) de charge thermique par le BCT. . . . . 61
3.11 Dilatation thermique de la plaque CPC en parement double pendant 30 mn (soit 1800 s) de charge thermique par le BCT. . . . . 62
3.12 Courbure thermique de la plaque CPC en parement double pendant 30 mn (soit 1800 s) de charge thermique par le BCT. . . . . 63
3.13 Température pour chacune des deux faces de 5 plaques CPC en parement simple. 64
3.14 Evolution de la masse en pourcentage par rapport à la masse initiale de 5 plaques CPC en parement simple sous une charge thermique selon courbe ISO 834. . . . . 64
3.15 Température sur chacune des deux faces de 5 plaques CPC en parement double. . 65
3.16 Evolution de la masse en pourcentage par rapport à la masse initiale de 5 plaques CPC en parement double sous une charge thermique selon la courbe ISO 834. . . 66
3.17 Photos montrant les deux étapes d'un essai thermomécanique en traction de la plaque CPC en parement simple . . . . . 68
3.18 Rupture de l'éprouvette CPC dans le banc de traction, à une température donnée. 69
3.19 Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, à la température ambiante. . . . . 70
3.20 Courbes contrainte-déformation pour 7 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, après 7 minutes de charge thermique par BCT. . . . . 71
3.21 Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, après 10 minutes de charge thermique par BCT. . . . . 71
3.22 Courbes contrainte-déformation pour 7 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, après 15 minutes de charge thermique par BCT. . . . . 72
3.23 Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, après 20 minutes de charge thermique par BCT. . . . . 72
3.24 Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement double, en traction, après 30 minutes de charge thermique par BCT. . . . . 73
3.25 Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement double, en traction, après 45 minutes de charge thermique par BCT. . . . . 73

3.26 Courbes contrainte-déformation pour 6 éprouvettes CPC, en parement double, en traction, après 60 minutes de charge thermique par BCT. . . . . 74
3.27 Configuration d'essai pour la charge thermique avec le BCT pour préparer les essais de compression à chaud. Plaque CPC de 10 cm par 10 cm, suspendu par un porte-éprouvette. . . . . 76
3.28 Banc de charge mécanique pour les essais en compression et position des capteurs de mesure de déplacement. . . . . 77
3.29 Banc d'essai en compression avec une éprouvette CPC déformée, après 30 minutes de charge thermique par le BCT. . . . . 77
3.30 Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, à la température ambiante. . . . . 78
3.31 Courbes contrainte-déformation de 7 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, après 7 minutes de charge thermique par le BCT. . . . . 78
3.32 Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, après 15 minutes de charge thermique par le BCT. . . . . 79
3.33 Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, après 20 minutes de charge thermique par le BCT. . . . . 79
3.34 Courbes contrainte-déformation de 8 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, après 25 minutes de charge thermique par le BCT. . . . . 80
3.35 Courbes contrainte-déformation de 7 éprouvettes CPC en parement double, en compression, après 30 minutes de charge thermique par le BCT. . . . . 80
3.36 Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement double, en compression, après 45 minutes de charge thermique par le BCT. . . . . 81
3.37 Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement double, en compression, après 60 minutes de charge thermique par le BCT. . . . . 81

4.1 Schéma des trois types d'éprouvette liés aux trois types d'assemblage pour les essais en cisaillement et à chaud. . . . . 84
4.2 Banc d'essai réalisé dans la configuration pour des mesures en cisaillement de l'assemblage par vissage de type 2, à chaud. . . . . 85
4.3 Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 1 après 15 minutes de charge thermique par le BCT . . . . . 86
4.4 Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 1 après 20 minutes de charge thermique par le BCT . . . . . 86
4.5 Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 1 après 25 minutes de charge thermique par le BCT . . . . . 87
4.6 Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 1 après 30 minutes de charge thermique par le BCT . . . . . 87
4.7 Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 2 à température ambiante . . . . . 88
4.8 Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 2 après 30 minutes de charge thermique par le BCT . . . . . 89
4.9 Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 2 après 45 minutes de charge thermique par le BCT . . . . . 89

4.10 Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 2 après 60 minutes de charge thermique par le BCT . . . . . 90
4.11 Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement simple (type 1) après 15 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm. . . . . 92
4.12 Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement simple (type 1) après 20 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm. . . . . 92
4.13 Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement simple (type 1) après 25 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm. . . . . 93
4.14 Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement simple (type 1) après 30 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm. . . . . 93
4.15 Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement double (type 2) à la température ambiante. Force en N en fonction du déplacement en mm. . . 94
4.16 Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement double (type 2) après 30 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm. . . . . 94
4.17 Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement double (type 2) après 45 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm. . . . . 95
4.18 Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement double (type 2) après 60 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm. . . . . 95

5.1 Schéma d'une cloison légère constituée par les montants métalliques de l'ossature et des plaques CPC vissées sur les montants. . . . . 98
5.2 Notations pour l'écriture du modèle - vue de face et vue en coupe de la cellule. . 99
5.3 Déplacement relatif $g$ entre le montant et la plaque CPC suivant la direction $x_3$ (direction verticale sur la figure). . . . . 100
5.4 Convergence par rapport au nombre $n_s$ des simulations. Graphe de la fonction $n_s \mapsto conv\,(n_s)$. . . . . 103
5.5 Graphe de la fonction de densité probabilité de la flèche aléatoire $V_0$ à mi-hauteur de la cloison. . . . . 104

6.1 Cloison légère constituée de plaques CPC assemblées par vissage au montant métallique. . . . . 109
6.2 Section représentative d'une cellule de la cloison légère en parement simple. . . . 109
6.3 Modélisation de l'assemblage par vissage avec des ressorts. Figure de gauche : configuration initiale non chargée, figure de droite : configuration déformée liée au chargement. . . . . 110
6.4 Illustration du système de ressorts. A gauche : Système de deux ressorts en translation en série. A droite : Un ressort en translation équivalent. . . . . 111
6.5 Modélisation de l'assemblage des vissages par un système des ressorts dans le cas parement simple avec prise en compte de l'excentricité de la rotation des vis. . . . 113
6.6 Cellule de la cloison légère en parement double. . . . . 114
6.7 Modélisation de l'assemblage par un système de ressorts en translation et en rotation. 115
6.8 Modélisation de l'assemblage par un système de deux ressorts en translation. . . 115
6.9 Schéma illustrant la configuration expérimentale pour l'assemblage par vissage dans le cas d'une cloison en parement simple. . . . . 118
6.10 Schéma illustrant la configuration expérimentale pour l'assemblage par vissage dans le cas d'une cloison en parement double. . . . . 119
6.11 Schéma d'un élément de poutre en profil mince ouvert. . . . . 120
6.12 Elément quadratique à 3 nœuds dans le domaine de référence. . . . . 125

7.1 Déplacement hors plan de la cellule soumise à la pression uniforme obtenu par simulation avec le modèle moyen déterministe à température ambiante. . . . . 129
7.2 Convergence en moyenne d'ordre deux de la flèche aléatoire $V_0$ en fonction du nombre $n_s$ des simulations : graphe de la fonction $n_s \mapsto conv\,(n_s)$. . . . . 130
7.3 Graphe de la fonction de densité probabilité de la flèche aléatoire $V_0$ à mi-hauteur de la cellule. . . . . 131
7.4 Diffusivité thermique du plâtre . . . . . 132
7.5 Conductivité thermique du plâtre . . . . . 132
7.6 Chaleur spécifique du plâtre . . . . . 133
7.7 Masse volumique du plâtre . . . . . 133
7.8 Chaleur spécifique de l'acier selon l'Eurocode 3 . . . . . 134
7.9 Conductivité thermique de l'acier selon l'Eurocode 3 . . . . . 135
7.10 Maillage 2D de la section de la cellule pour le modèle de transfert thermique, le trait noir épais représente la section en C du profil du montant métallique, les zones haute et basse en gris foncés représentent la section des deux plaques CPC et la zone centrale en gris clair représente la laine de verre . . . . . 135
7.11 Champ de température à 20 minutes de charge thermique dans la section de la cellule. La partie haute correspond à la face exposée de la sollicitation thermique. 136
7.12 Sollicitation thermique à 20 minutes. Convergence en moyenne d'ordre deux de la flèche aléatoire $V_0$ en fonction du nombre $n_s$ des simulations : graphe de la fonction $n_s \mapsto conv\,(n_s)$. . . . . 137
7.13 Sollicitation thermique à 20 minutes. Graphe de la fonction de densité probabilité de la flèche aléatoire $V_0$ à mi-hauteur de la cellule. . . . . 138

A.1 Problème de la plaque mince chargée ponctuellement dans son plan. . . . . 141
A.2 Méthode de résolution du problème de base par décomposition en deux problème "plus simples". . . . . 142
A.3 Champ de déplacement vertical dans une plaque soumise à une charge ponctuelle -profil des confrontations simulation EF / approche analytique. . . . . 149
A.4 Confrontation simulations EF / approche analytique. . . . . 149

# Introduction générale

## 1 Contexte, objectif et spécification de la recherche

### 1.1 Contexte

Aujourd'hui, les ossatures métalliques légères sont largement utilisées dans la construction. Ce type de structure présente de nombreux avantages tels que la rapidité de construction, la flexibilité du bâtiment, la facilité de montage et de démontage. Elles sont utilisées soit comme des éléments porteurs tels que dans les bâtiments résidentiels, bureaux ou des bâtiments industriels, soit comme des éléments non porteurs dans les cloisons et les plafonds suspendus. D'autre part, depuis plusieurs années, un effort considérable a été fait pour développer des matériaux ayant une bonne résistance au feu. Ces matériaux doivent fournir une résistance mécanique suffisante pour éviter l'effondrement prématuré de la structure du bâtiment lorsqu'il subit un incendie. L'un des matériaux de construction présentant la meilleure résistance au feu est la plaque multicouche en CPC (carton-plâtre-carton). Dans la suite on appellera simplement une telle plaque, "plaque CPC". Le plâtre présente la particularité de subir deux réactions chimiques de déshydratation au cours de sa montée en température. Ces deux réactions ralentissent considérablement la montée en température des plaques CPC. Les plaques CPC ont donc une excellente résistance au feu. Grâce à cet avantage, celles-ci sont couramment utilisées pour la construction afin d'améliorer la résistance au feu des structures de bâtiments. Ainsi, les cloisons légères de grande hauteur sont constituées d'une ossature métallique sur la quelle sont vissées des plaques CPC. La tenue au feu de ces cloisons légères fait l'objet de ce travail.

### 1.2 Objectif de la recherche

Dans le cadre de ce travail, nous étudions le comportement thermomécanique d'une cloison légère faite de plaques CPC vissées sur une ossature métallique. Selon la norme NF P 72-203-1, une cloison légère doit vérifier non seulement la résistance structurale, mais aussi satisfaire à des exigences de la résistance au feu. Dans le contexte réglementaire actuel, pour la caractérisation de la résistance au feu de ce type de structure composite, il est nécessaire d'effectuer des essais en vraie grandeur sous une charge thermique nominale définie dans la norme ISO 834 et appelée "courbe d'incendie conventionnel". La hauteur d'une cloison légère en plaque CPC peut faire jusqu'à plus de 10 mètres. Les essais de telles cloisons en vraie grandeur posent alors des difficultés de mise en oeuvre de l'expérience (les dimensions des fours existants d'essais de résistance au feu permettent d'essayer des panneaux de 3 m $\times$ 3 m). Le développement de moyens expérimentaux pour des panneaux de 10 m de hauteur induirait des coûts importants. Des méthodes de simu-

lation numérique sont donc envisagées pour certifier la résistance au feu des cloisons de grande hauteur à la place des essais expérimentaux. Des modélisations numériques doivent donc être développées et validées. Le développement de ces modèles requiert l'identification expérimentale des caractéristiques thermiques, mécaniques et thermomécaniques des différents constituants de la cloison légère. Des travaux ont déjà été réalisés en ce sens, en particuliers dans le cadre de la thèse de S. Sakji [61] en collaboration avec le CSTB, dont les résultats ont été publiés dans [62, 63]. La présente recherche consiste d'une part à mener une analyse expérimentale pour identifier expérimentalement les propriétés thermiques, mécaniques et thermomécaniques les plus importantes et d'autre part, à développer un modèle analytique et un modèle numérique robuste du comportement thermomécanique non linéaire de cloisons légères de grande hauteur, soumises à un incendie naturel. Il est à noter qu'un point très difficile de ce type de modélisation est lié au comportement en cisaillement à froid et à chaud des assemblages par vissage des plaques CPC sur les montants de l'ossature métallique de la cloison. Ce point constitue un objectif majeur de la recherche.

## 1.3 Spécification de la recherche

Pour une modélisation robuste d'une cloison légère complète, il est nécessaire d'une part, de développer un modèle du comportement thermomécanique de l'assemblage par vissage des plaques CPC sur l'ossature métallique, et d'autre part de développer un modèle globale de la cloison légère en combinant, le modèle thermomécanique non linéaire du vissage, le modèle du comportement thermomécanique d'une plaque CPC et le modèle de l'ossature métallique. Concernant le comportement de l'assemblage par vissage d'une plaque carton-plâtre-carton sur un montant métallique, on pourrait envisager de mettre en place un modèle non linéaire multi-échelle micro-macro pour décrire le comportement thermomécanique. Un tel modèle thermomécanique non linéaire multi-échelle serait très difficile à développer compte tenu de la nature des matériaux (carton et plâtre, avec vissage par des vis en acier), de la physique mise en jeu et des comportements mécaniques à température élevée. De plus, une telle modélisation nécessiterait de connaître les valeurs expérimentales de nombreux paramètres difficiles à mesurer et il y aurait donc beaucoup de données manquantes pour effectuer des calculs. Ainsi, la spécification de ce travail de recherche n'était pas de développer des modèles multi-échelles, mais de développer une loi semi-physique du comportement mécanique et thermomécanique, à l'échelle macroscopique, du vissage et en l'identifiant à l'aide d'une analyse expérimentale que nous avons menée au CSTB. Comme il existe une grande variabilité dans les résultats expérimentaux, liée aux dispersions de comportement thermomécanique des plaques CPC ainsi que de la résistance de ces dernières dans la zone de vissage, les incertitudes doivent être prises en compte. Pour ce faire, on propose d'utiliser un modèle probabiliste du comportement de l'assemblage par vissage.

Concernant les caractéristiques mécaniques et thermomécaniques en traction-compression d'une part, et des caractéristiques thermiques (dilatation et courbure) d'autre part, des plaques CPC, nous avons mené une campagne d'essais au CSTB. Il est à noter que les caractéristiques mécaniques et thermomécaniques en flexion des plaques, ainsi que les caractéristiques thermiques (conductivité et diffusivité thermique) de ces plaques CPC, ont été identifiées préalablement. Les essais de caractérisation doivent être menés sur des éprouvettes en CPC de taille réduite.

## 2 Positionnement de la recherche

Ce travail a été mené dans le cadre de la modélisation du comportement thermomécanique des cloisons légères, et fait intervenir plusieurs domaines comme : l'étude de la résistance et de la tenue au feu d'éléments structuraux, la modélisation du comportement mécanique et thermomécanique de matériaux complexes comme les plaques CPC et le comportement thermomécanique de l'assemblage par vissage. La mise en place d'une telle modélisation requiert le développement d'essais expérimentaux, à froid et à chaud, l'utilisation de méthodes d'identification de modèles à partir de données expérimentales, la mise en place de modélisations probabilistes des incertitudes pour prendre en compte les variabilités très importantes de tels systèmes thermomécaniques.

La résistance au feu des éléments structuraux est un problème étudié largement depuis plusieurs décennies par de nombreux auteurs. Nous pouvons citer quelques exemples comme [11, 12, 17, 41, 54, 57, 60, 72]. La littérature en ce domaine est donc relativement abondante. A l'inverse, bien que le plâtre soit un matériau utilisé dans la construction depuis très longtemps, les résultats sur ce matériau soumis à des charges thermiques restent épars. Il existe quelques études concernant les propriétés thermiques du plâtre pour la résistance au feu, telles que celles de Ryan en 1962 [59] et Lawson en 1977 [49]. Puis, en raison du développement de l'utilisation des plaques CPC dans la construction, la recherche sur les propriétés de ces plaques s'est dévéloppée dans plusieurs groupes de recherche. Ainsi Benouis [10] a étudié le comportement mécanique de la plaque CPC en traction-compression mais seulement à la température ambiante. Axenenko [7], Belmiloudi [8], Korte [47], Mehaffey [53], Park [67], S. Sakji [61, 62, 63], Thomas [78] s'intéressent à l'évolution de la densité de masse (caractéristique physique) et de la chaleur spécifique et de la conductivité thermique (caractéristiques thermiques) de la plaque CPC à haute température, en tenant compte de l'influence de la vitesse de montée en température sur ces caractéristique (vitesse constante de montée en température ou correspondant à la vitesse de la courbe nominale définie dans la norme ISO 834). Les caractéristiques mécaniques de la plaque CPC, soumise au feu, ont été étudiées aussi par Cramer [19] pour différentes valeurs de la température (coefficient de dilatation thermique, module d'élasticité, masse volumique), tandis que S. Sakji [61, 62, 63] s'intéresse aux caractéristiques thermomécaniques de chaque constituant d'une plaque CPC soumise à une charge thermique définie par la courbe ISO 834 (raideur de flexion d'une plaque de plâtre sans carton, comportement en traction des feuilles de carton). Toutefois, les comparaisons des calculs avec des essais montrent qu'il existe encore des différences. Il est donc nécessaire de compléter la base de données expérimentales pour l'ensemble des paramètres qui interviennent dans les modélisations des plaques CPC. Ces aspects constituent une partie expérimentale du présent travail de recherche.

En utilisant les informations disponibles sur les caractéristiques mécaniques, thermiques et thermomécaniques des plaques CPC, plusieurs auteurs se sont intéressés à la modélisation d'une plaque CPC et/ou d'une cloison légère complète. Par exemple, Benouis [10] a modélisé, pour la température ambiante, une cloison légère en plaque CPC avec ossature métallique en utilisant des expériences de caractérisation de la plaque CPC (à température ambiante). Telue [76, 77], s'est intéressé au comportement à chaud de l'ossature métallique avec des plaques CPC, en considérant que les plaques CPC sont des éléments protecteurs de la structure, qui ne contribuent pas

à la résistance mécanique. Sous cette même hypothèse, des modélisations du comportement au feu de structures avec des plaques CPC (ossature en bois [81] ou ossature métallique [32]) ont été développées. Plusieurs autres auteurs se sont intéressés au développement de modèles de transfert thermique d'une plaque CPC soumise à la charge thermique définie par ISO 834, comme Ang [6], Axenenko [7], Belmiloudi [8], Feng [28], Sakji S. [61, 63], Thomas [78]. A l'exception de Sakji S. *et al*, tous les autres auteurs ont considéré la plaque CPC comme un matériau homogène dont les propriétés thermophysiques sont celles données par Mehaffey [53]. Dans le travail de Sakji S. *et al*, la plaque CPC n'est pas considérée comme homogène, mais comme une plaque multicouche homogénéisée avec prise en compte de l'endommagement dans le carton et dans le plâtre, en se basant sur le modèle de plaque multicouche homogénéisée introduite par Reissner en 1948. Un modèle probabiliste a été développé pour prendre en compte les incertitudes de modélisation et les incertitudes sur les paramètres du modèle dans le modèle numérique de transfert thermique [63] et dans le modèle thermomécanique non linéaire avec endommagement [62].

Concernant l'assemblage par vissage, aucun résultat n'étant disponible dans la littérature, nous avons donc développé dans ce travail, d'une part une campagne de mesures expérimentales mécaniques et thermomécaniques que nous avons réalisée au CSTB et d'autre part, un modèle semi-physique (empirique) du comportement de l'assemblage par vissage des plaques CPC sur des montants métalliques, en fonction de la température. Ce modèle a été identifié expérimentalement, la variabilité expérimentale étant prise en compte par l'introduction d'un modèle probabiliste.

Il est à noter, que pour les essais mécaniques, thermiques et thermomécaniques réalisés au CSTB, des variabilités importantes des résultats expérimentaux ont été constatées. Ces variabilités ne sont pas dues à des erreurs de mesure, mais sont dues aux variations des configurations expérimentales testées. Par exemple, les plaques CPC présentent de fortes variabilités de comportement mécanique, thermique et thermomécanique, liées au processus de fabrication des matériaux et des plaques. Ces variabilités sont encore plus importantes lorsque l'on sollicite les propriétés locales de la plaque CPC, comme c'est le cas pour le comportement à chaud d'une vis traversant la plaque et qui réalise l'assemblage par vissage de la plaque CPC (simple parement) avec l'ossature métallique ou avec une autre plaque CPC (cas du double parement). Dans ces conditions, les petites erreurs de mesure sont du second ordre devant les variabilités des configurations expérimentales et ne sont pas prises en compte dans la procédure d'identification des paramètres du modèle. Par contre, les incertitudes de modélisation et la variabilité expérimentale doivent être prises en compte.

Comme nous venons de l'expliquer, nous avons introduit une modélisation probabiliste pour la loi de comportement du vissage des plaques CPC afin de prendre en compte des variabilités expérimentales, ce modèle probabiliste de loi de comportement étant à son tour utilisé dans le modèle des cloisons légères. C'est donc l'approche probabiliste paramétrique des incertitudes sur les paramètres des modèles que nous utilisons dans ce travail. Rappelons que cette approche consiste à modéliser les paramètres incertains par des variables aléatoires dont les lois de probabilité *a priori* sont construites et identifiées avec les mesures expérimentales disponibles (voir par exemple [21, 48, 52, 65, 64, 66, 73]).

# 3 Méthodologie de la recherche

La méthodologie de la recherche proposée a été construite en s'appuyant sur les arguments suivants.

(1) Pour une modélisation robuste de la cloison légère soumise à des chargements mécaniques et thermiques, il est nécessaire de développer des modélisations mécaniques, thermiques et thermomécaniques des différentes éléments qui constituent la cloison et d'identifier expérimentalement les paramètres de ces modélisations, en particulier, de développer et d'identifier expérimentalement la loi de comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage d'une plaque CPC avec une ossature métallique ou une autre plaque CPC.
Pour identifier les caractéristiques thermiques et thermomécaniques des plaques CPC et des assemblages vissées, nous avons effectué les mesures en utilisant, d'une part un banc expérimental de charge thermique existant au CSTB et d'autre part un banc de charge mécanique d'éprouvette à froid et à chaud, développé au CSTB. Il est à noter que le banc de charge thermique a été conçu, réalisé et validé expérimentalement par le CSTB dans le cadre de la thèse de Sakji S. [61], ce banc de charge thermique permettant de reproduire sur des éprouvettes une charge thermique équivalente à la charge thermique définie par la courbe ISO 834 appliquée lors des essais de résistance au feu.

(2) De part la grande variabilité constatée expérimentalement des paramètres mécaniques, thermiques et thermomécaniques des modélisations évoquées ci avant, c'est-à-dire du modèle des plaques CPC et du modèle de l'assemblage par vissage, il est nécessaire d'implémenter une modélisation probabiliste des incertitudes (approche paramétrique) pour ce type de système thermomécanique extrêmement complexe.

(3) Ainsi, en utilisant les bancs d'essai et avec un protocole expérimental que nous avons développé, nous avons réalisé les mesures pour mener une analyse du comportement en cisaillement des assemblages par vissage des plaques CPC sur montant métallique, à la température ambiante et sous la charge thermique correspondant à la courbe ISO 834. Un modèle moyen a été proposé dont les paramètres ont été identifiés à l'aide des mesures expérimentales. Puis, nous avons développé un modèle probabiliste de cette loi de comportement qui a été construit en se basant sur le modèle moyen et en utilisant le Principe du Maximum Entropie issu de la Théorie de l'Information. Nous avons procédé à l'identification des paramètres inconnus du modèle moyen et du modèle probabiliste en utilisant les données expérimentales et les méthodes statistiques appropriées.

Le modèle thermomécanique de la cloison légère a été construit en combinant le modèle de transfert thermique et thermomécanique de la plaque CPC avec le modèle de l'assemblage par vissage que nous avons construit dans ce travail.

Concernant les modèles numériques et l'identification expérimentale des paramètres, nous avons d'une part développé les logiciels pour l'identification expérimentale de la loi de comportement en cisaillement des assemblages vissés et d'autre part nous avons implanté cette loi

de comportement dans un logiciel thermomécanique non linéaire de structure développé par le CSTB.

Finalement, la dernière étape de ce travail de recherche concerne la simulation à froid et à chaud, avec les modèles développés, d'une cloison légère soumise à des chargements mécaniques et thermiques.

## 4 Plan du mémoire de thèse

Le mémoire commence par la présente introduction générale dans laquelle nous avons présenté le contexte, les objectifs et la spécification de la recherche, ainsi que le positionnement de la recherche et la méthodologie utilisée dans ce travail. Cette introduction générale est suivie de sept chapitres. Puis on présente une conclusion générale. On y trouve enfin deux annexes et la bibliographie. Une brève description des chapitres est donnée ci-après.

***Premier chapitre***

Ce chapitre dédié à une étude bibliographique présente (1) les caractéristiques mécaniques, thermiques et thermomécaniques des plaques CPC, (2) le modèle de transfert thermique et le modèle du comportement thermomécanique avec endommagement d'une plaque CPC soumise à une charge thermique, (3) des éléments de la théorie des probabilités utiles pour la construction du modèle probabiliste de la loi de comportement des assemblages vissés.

***Deuxième chapitre***

Ce chapitre est consacré à une analyse du comportement en cisaillement, à la température ambiante, de l'assemblage par vissage d'une plaque CPC sur un montant métallique de l'ossature. Cette analyse a été réalisée expérimentalement et un modèle moyen est proposé. Puis, un modèle probabiliste de cette loi de comportement est développé. Les paramètres du modèle moyen et du modèle probabiliste sont alors identifiés en utilisant les données expérimentales. Enfin, les résultats expérimentaux sont comparés aux prévisions fournies par le modèle probabiliste.

***Troisième chapitre***

Ce chapitre présente l'ensemble des essais expérimentaux de caractérisation thermique et thermomécanique de la plaque CPC, soumis à la charge thermique définie par la courbe ISO 834, à plusieurs instants de l'évolution temporelle de cette charge thermique. Ces essais concernent : (1) des essais pour mesurer les déformations thermiques, (2) des essais pour mesurer le comportement thermomécanique en traction, (3) des essais pour mesurer le comportement thermomécanique en compression.

***Quatrième chapitre***

Ce chapitre est dédié à l'identification expérimentale du comportement probabiliste en cisaillement, à chaud, de l'assemblage par vissage de la plaque CPC sur le montant métallique de l'ossature, à plusieurs instants de l'évolution temporelle de la charge thermique.

***Cinquième chapitre***

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle analytique de calcul, à froid, de la flèche de la cloison légère soumise à une charge mécanique de service.

***Sixième chapitre***

Nous présentons dans ce chapitre la modélisation numérique du transfert thermique et du comportement thermomécanique de la cloison légère soumise simultanément à une charge mécanique et à une charge thermique.

***Septième chapitre***

Ce dernier chapitre, dédié à des simulations d'une cloison légère, présente : la simulation du comportement mécanique avec le modèle moyen déterministe et le modèle probabiliste, à la température ambiante, et la simulation du comportement thermomécanique avec le modèle probabiliste sous thermique.

# Chapitre 1

# Etude bibliographique

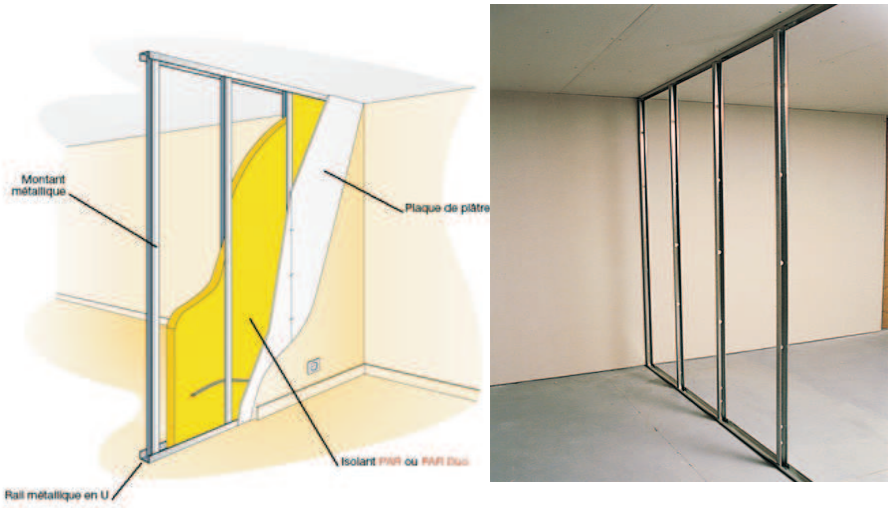
*Dans ce chapitre, nous présentons une étude bibliographique sur (1) la description d'une cloison légère, (2) la notion de courbe conventionnelle de l'incendie naturel ISO 834, (3) les propriétés chimiques et les caractéristiques mécaniques, thermiques et thermomécaniques de plaque CPC, (4) le modèle déterministe moyen du transfert thermique et du comportement thermomécanique non linéaire avec endommagement d'une plaque CPC, (5) des rappels de la théorie des probabilités utiles pour la modélisation stochastique des incertitudes.*

## 1.1 Description d'une cloison légère

La structure considérée dans ce travail est une cloison légère faite de plaques CPC vissées sur une ossature métallique (voir la figure 1.1-a). Les plaques CPC sont constituées d'un corps de plâtre collé à deux feuilles de carton sur ses deux faces (voir la figure 1.2). Les plaques CPC ont pour fonction d'empêcher la propagation du feu et permettent, durant un certain temps, de limiter l'élévation de la température. Les caractéristiques des plaques CPC sont définies par la norme NF 72-302 [NF.81]. L'ossature (montant) métallique de la cloison légère est montrée sur la figure 1.1-b. Les cloisons légères dont utilisées dans la réalisation d'éléments structuraux non porteurs comme les cloisons, les plafonds, les doublages de mur, etc. Les vis sont destinées à la fixation des plaques CPC sur l'ossature métallique. Les vis ont une tête de profil adaptée à cet usage qui permet une pénétration progressive dans la plaque CPC et un affleurement satisfaisant sans toutefois couper le carton [DTU.81].

## 1.2 Courbe conventionnelle de l'incendie naturel ISO 834

Selon la norme NF P 72-203-1, une cloison légère doit non seulement avoir une résistance mécanique, mais aussi satisfaire à des exigences de la résistance au feu. Dans le contexte réglementaire actuel, pour la caractérisation des structures au feu, il est nécessaire d'effectuer des essais en vraie grandeur sous une charge thermique normalisée qui est décrite par une courbe nominale de la norme ISO 834, appelée la courbe conventionnelle de l'incendie naturel. Cette courbe ISO 834 est la courbe qui définit la charge thermique de référence permettant de faire les




(a) (b)

FIG. 1.1 – Description d'une cloison légère. (a) Exemple d'une cloison acoustique-thermique légère en plaque CPC. (b) Ossature métallique.

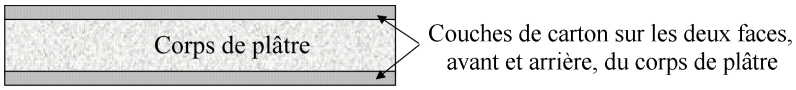



FIG. 1.2 – Description d'une plaque CPC.

tests et les calculs dans le cadre des règles des D.T.U. Cette courbe a l'équation suivante

$$\theta(t) = 20 + 345\ \log(8t + 1) \quad , \tag{1.1}$$

où $\theta(t)$ est l'écart entre la température, en degré Celsius, à l'instant $t$ et la température initiale, et où $t$ est le temps mesuré en minutes. Le graphe 1.3 illustre la courbe ISO 834 qui est comparée à la montée en température pour un feu réel. Le graphe montre que les courbes de feu réel sont différentes de la courbe moyenne ISO 834 dont la caractéristique principale est qu'elle n'arrête pas de croître, alors que, pour un feu réel, elle finit toujours par re-décroître, faute de combustible. Toutefois, la courbe ISO 834 présente l'avantage de ne mettre en jeu directement d'un seul paramètre (le débit combustible) et facilite la reproductibilité et la comparaison des résultats d'essais.

## 1.3 Propriétés chimiques et caractéristiques mécaniques, thermiques et thermomécaniques de plaque CPC

### 1.3.1 Propriétés chimiques

Les plaques CPC sont couramment utilisées pour assurer la résistance au feu en construction. Les bonnes propriétés de résistance au feu des plaques de CPC viennent de la composition

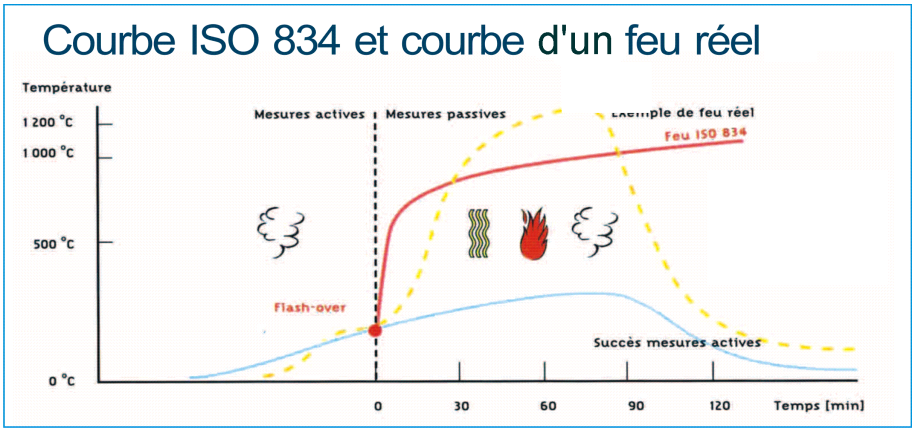



FIG. 1.3 – Courbe ISO 834 en comparaison avec la courbe pour un feu réel.

chimique du plâtre. Le plâtre pur, existant à l'état naturel, est composé de sulphate de calcium ($CaSO_4$), d'eau libre à l'état d'équilibre avec un taux d'humidité d'environ 3%, et de l'eau chimiquement liée avec un taux d'environ 20% [7], [32]. Sa formule chimique est $CaSO_4.2H_2O$ (sulphate de calcium di-hydraté). Lorsque les plaques CPC sont exposées à une source de chaleur, l'eau chimiquement liée se dissocie du réseau cristallin, migre et se vaporise. Au cours du chauffage, le plâtre subit trois réactions de décomposition endothermique, dans la quelle, la dissociation de l'eau chimiquement liée a lieu dans deux étapes. Ces étapes peuvent s'exprimer par les équations suivantes de réaction chimique :

$$CaSO_4.2H_2O \mapsto CaSO_4.\frac{1}{2}H_2O + \frac{3}{2}H_2O \tag{1.2}$$

$$CaSO_4.\frac{1}{2}H_2O \mapsto CaSO_4 + \frac{1}{2}H_2O \tag{1.3}$$

La première réaction de déshydratation se produit entre $100\,^oC$ et $120\,^oC$, lorsque le sulfate de calcium di-hydraté est converti en sulfate de calcium semi-hydraté comme le montre l'Eq. (1.2). Pour la seconde réaction de déshydratation, la température où cette seconde réaction se produit n'est pas connue avec précision. Sultan (1996) [75] a signalé que la seconde réaction de déshydratation se produisait à environ $600\,^oC$. Toutefois, Andersson et Jansson (1987) [4] estiment que cette seconde réaction se produit entre $210\,^oC$ et $300\,^oC$. La seconde réaction de déshydratation se produit quand le sulfate de calcium semi-hydraté est converti en sulfate de calcium anhydre comme le montre l'Eq. (1.3).
Concernant les feuilles de carton collées sur le corps en plâtre, elles fournissent la résistance à la traction et à la flexion de la plaque CPC, mais elles brûlent lorsque la température atteint environ $300\,^oC$.

### 1.3.2 Caractéristiques mécaniques du plâtre et de la plaque CPC

Pour développer un modèle du comportement mécanique homogénéisé de la plaque CPC, il est nécessaire de connaître les caractéristiques mécaniques de ses constituants. Dans les travaux

de Benouis [10], on trouve des résultats d'essais et l'identification des caractéristiques mécaniques des plaques CPC standard, d'épaisseur 13 mm, à la température ambiante. Les principaux résultas sont reportés dans les tableaux suivants.

- Tableau 1.1 : Caractéristiques mécaniques en traction de la plaque CPC homogénéisée (grandeurs effectives), pour $\sigma_r$, $\sigma_e$, $E$ et $\nu$, qui sont respectivement la contrainte à la rupture, la limite d'élasticité, le module d'Young en traction et le coefficient de Poisson de la plaque CPC.

| Sens | $\sigma_r$ (MPa) | $\sigma_e$ (MPa) | $E$ (MPa) | $\nu$ |
|---|---|---|---|---|
| Longitudinal | 1.84 | 1.08 | 1007 | 0.16 |
| Transversal | 0.76 | 0.53 | 2218 | - |

Tab. 1.1 – Caractéristiques mécaniques en traction de la plaque CPC homogénéisée, selon les résultats de Benouis [10]

- Tableau 1.2 : Caractéristiques mécaniques en compression de la plaque CPC homogénéisée (grandeurs effectives) pour $\sigma_r$, $\sigma_e$, $E$ et $\epsilon_r$ qui sont respectivement la contrainte à la rupture, la limite d'élasticité, le module d'Young en compression et la déformation à la rupture de la plaque CPC.

| Sens | $\sigma_r$ (MPa) | $\sigma_e$ (MPa) | $E$ (MPa) | $\epsilon_r(\%)$ |
|---|---|---|---|---|
| Longitudinal | 5.28 | 3.81 | 997 | 1.35 |
| Transversal | 4.47 | 3.54 | 924 | 1.31 |

Tab. 1.2 – Caractéristiques mécaniques en compression de la plaque CPC homogénéisée, selon le travail de Benouis [10]

- Tableau 1.3 : Caractéristiques mécaniques en flexion de la plaque CPC homogénéisée (grandeurs effectives) pour $F_r$, $f_r$, $F_e$ et $E$ qui sont respectivement, pour le sens longitudinal et pour le sens transversal, la force de rupture, la flèche à rupture, la force de limite d'élasticité et le module d'Young en flexion de la plaque CPC.

| Sens | $F_r$ (N) | $f_r$ (mm) | $F_e$ (N) | $E(MPa)$ |
|---|---|---|---|---|
| Longitudinal | 827.5 | 12.24 | 314.7 | 2851 |
| Transversal | 300 | 4.22 | 201.3 | 2373 |

Tab. 1.3 – Caractéristiques mécaniques en flexion de la plaque CPC homogénéisée, selon le travail de Benouis [10]

- Module de cisaillement : Le module de cisaillement est $G_{LT} = 519$ MPa.

- Tableau 1.4 : Cramer [19] s'intéresse aux caractéristiques mécaniques de la plaque CPC d'épaisseur 15.9 mm à plusieurs niveaux de température. Ses résultats sont montrés dans le tableau suivant.

| Température $^oC$ | E (Gpa) | | $\sigma$ (Mpa) | | $\alpha$ (mm/mm $^oC$ ) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | L | T | L | T | L | T |
| 23 | 2.5 | 1.75 | 3.79 | 2.25 | - | - |
| 100 | 1.41 | 1.15 | 3.76 | 1.64 | $2.6 \times 10^{-6}$ | $3.9 \times 10^{-6}$ |
| 200 | 0.94 | 0.48 | 2.37 | 1.09 | $-5.1 \times 10^{-6}$ | $-6.2 \times 10^{-6}$ |
| 300 | 0.58 | 0.54 | 0.93 | 0.66 | $-3.2 \times 10^{-6}$ | $-5.4 \times 10^{-6}$ |
| 400 | 0.47 | 0.52 | 0.26 | 0.14 | $-1.6 \times 10^{-6}$ | $-1.9 \times 10^{-6}$ |

TAB. 1.4 – Propriétés mécaniques de la plaque CPC d'épaisseur 15.9 mm, d'après Cramer et al. [19]

### 1.3.3 Caractéristiques thermiques du plâtre et de la plaque CPC

La précision de toute analyse de transfert thermique d'une plaque CPC dépend des données d'entrée et des propriétés thermiques des matériaux. Pour une analyse de transfert thermique de la plaque CPC homogénéisé, les paramètres effectifs de la plaque CPC sont la densité volumique de masse, la chaleur spécifique et la conductivité thermique. Plusieurs auteurs se sont intéressés aux mesures de ces paramètres, ce qui donnent une littérature assez riche.

#### Densité volumique de masse

La densité volumique de masse de la plaque CPC, à la température ambiante, varie de 578 à 1000 kg/m$^3$. Cette variation provient de la différence de quantité d'humidité contenue dans le plâtre et de la densité de pores remplies d'air dans le plâtre. Ces deux facteurs jouent un rôle important dans la performance à la résistance au feu des plaques CPC. A haute température, la densité volumique de masse de la plaque a été étudiée par différents groupes de recherche, qui ont établi, pour des plaques CPC similaires, l'évolution de la densité avec la température. La figure 1.4 montre des résultats de l'évolution de la densité avec la température dans la gamme des hautes températures.

Mehaffy *et al* [53], Sultan (1996) [75], et le NIST (1980) [2] ont trouvé des résultats similaires concernant l'évolution de la densité volumique de masse en fonction de la température pour les plaques CPC. La figure 1.4 montre une diminution importante de la densité volumique de masse à environ $100\,^oC$ où la première réaction de déshydratation se produit. Pour l'ensemble de ces travaux expérimentaux, seul Mehaffy rapporte que la seconde réaction de déshydratation (repérée par la baisse de la densité volumique de masse, est à environ $600\,^oC$. Harmanthy (1991) [35] et Fuller et al (1992)[31] signalent également les changements de densité volumique de masse avec la température de la plaque CPC. Cependant, les résultats expérimentaux donnent des valeurs différentes de celles de Sultan et Mehaffy *et al* [53].

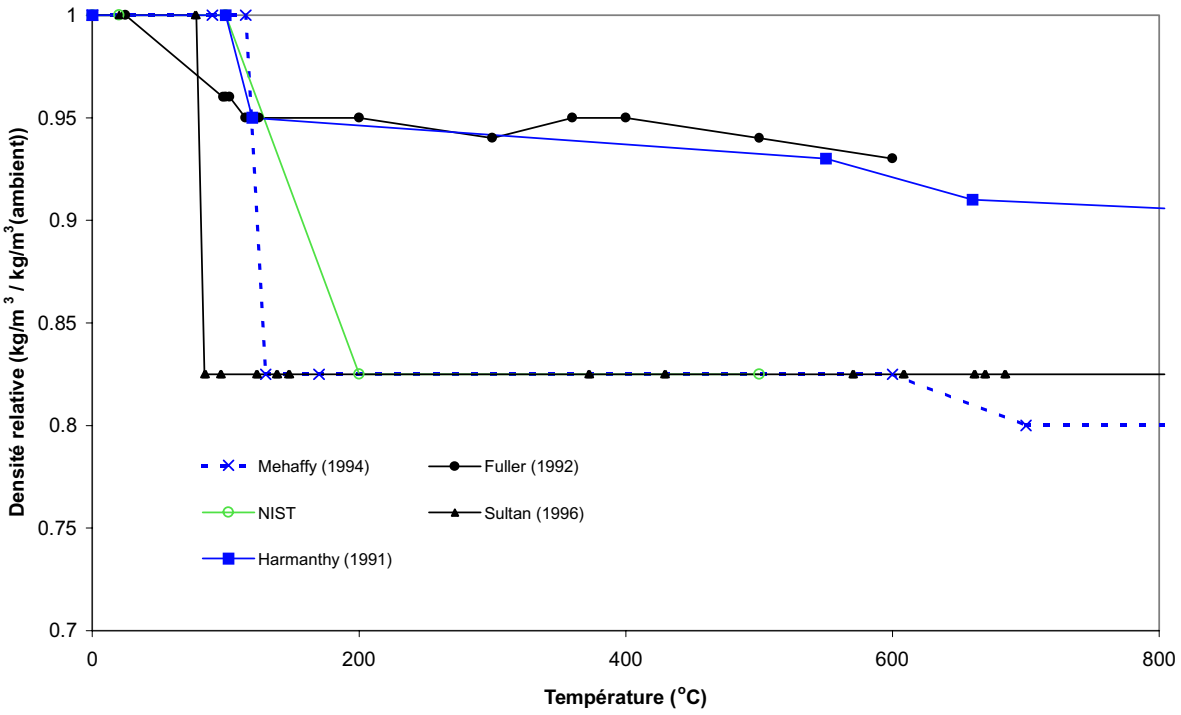



FIG. 1.4 – Evolution de la densité volumique de masse en fonction de la température, normalisée par rapport à la densité volumique de masse à la température ambiante.

### Chaleur spécifique

La valeur de la chaleur spécifique mesurée à la température ambiante varie de 600 à 1500 J/kg.K. Similairement à la variation de la densité volumique de masse en fonction de la température, il y a des différences significatives entre les valeurs mesurées pour la chaleur spécifique des plaques CPC.
La figure 1.5 montre qu'il existe un bon accord entre les auteurs pour la première déshydratation qui se produit à environ $100\,^oC$. Toutefois, il y a une forte dispersion dans les valeurs mesurées par les différents auteurs sur la seconde déshydratation.

Sultan (1996) [75] rapporte deux pics dans l'évolution de la chaleur spécifique de 18 500 et 3 070 J/kg.K à $125\,^oC$ et $670\,^oC$, respectivement. Harmanthy (1988) [35] prévoit un pic de 7 320 J/kg.K à $100\,^oC$ alors que Harmanthy présente des mesures avec un pic de 2 000 J/kg.K pour une température de $630\,^oC$, valeur similaire à celle de Sultan. Bien que non représentées sur la figure 1.5, Fuller et al (1992) donne des conclusions similaires à Sultan et Harmanthy, avec un premier pic de 16 600 J/kg.K à $103\,^oC$ et un second pic de 1 700 J/kg.K à $600\,^oC$. Mehaffy et al (1994) [53] ont seulement mesuré la chaleur spécifique jusqu'à $200\,^oC$ et n'ont pas enregistré de second pic. Leur études font état d'un pic de 49 950 J/kg.K à $110\,^oC$, et une chaleur spécifique extrapolée de 980 J/kg.K pour la température ambiante. Hadjisophocleous (1996) [34] ne trouve pas de pic pour la chaleur spécifique. Andersson et Jansson (1987) [4]

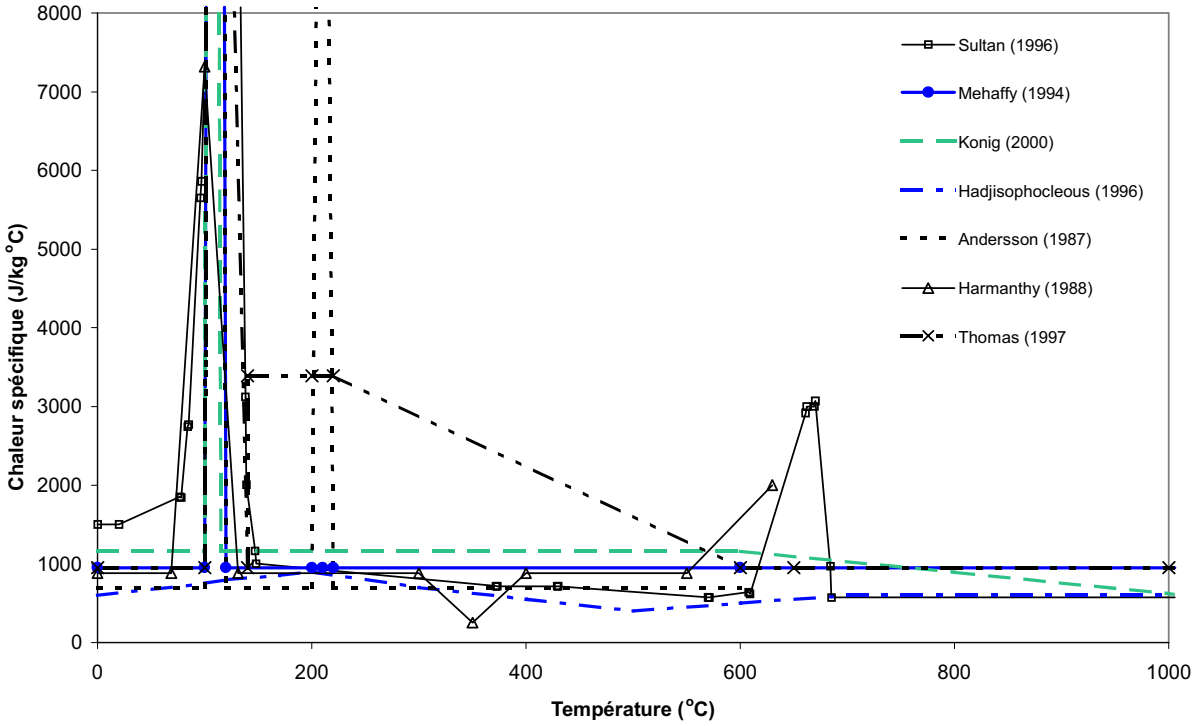



FIG. 1.5 – Evolution de la chaleur spécifique avec la température.

fournissent des valeurs de la chaleur spécifique, obtenues à partir de mesures sur des plaques CPC de type "nordique". Ils signalent des pics de 52 200 et 19 200 J/kg.K pour les températures $110\,^oC$ et $210\,^oC$, respectivement. Thomas (1997) [78] a étudié les valeurs déclarées par Mehaffy *et al* [53], Andersson et al [4], et Harmanthy [35]. Il est à noter que C. Konig et Walleij (2000) [46] définissent pour les modèles numériques de transfert thermique des plaques CPC, des valeurs pour la chaleur spécifique, basées sur les résultats expérimentaux de Harmanthy [35], Mehaffy *et al* [53], Andersson *et al* [4] et Thomas [78], avec un pic à 46 300 J/kg.K pour une température de $105\,^oC$ et négligent le second pic. Ils obtiennent ainsi des prévisions numériques correctes en comparaison avec des résultats expérimentaux.

### Conductivité thermique

Comme le montre la figure 1.6, il y a une cohérence entre les auteurs sur la conductivité thermique des plaques CPC jusqu'à $400\,^oC$. Au delà de cette température, les valeurs sont dispersées.

Cooper (1997) [18] a défini les valeurs par défaut pour la conductivité thermique des plaques CPC dans le logiciel SAFIR, qui proviennent de travaux effectués par Sultan (1996) [75]. Sultan définit des valeurs de la conductivité thermique qui ont données de bons résultats en comparaison avec les résultats expérimentaux. Mehaffy et al (1994) [53] ont extrapolé une courbe de conductivité thermique à partir de mesures effectuées au Conseil National de Recherche du Ca-

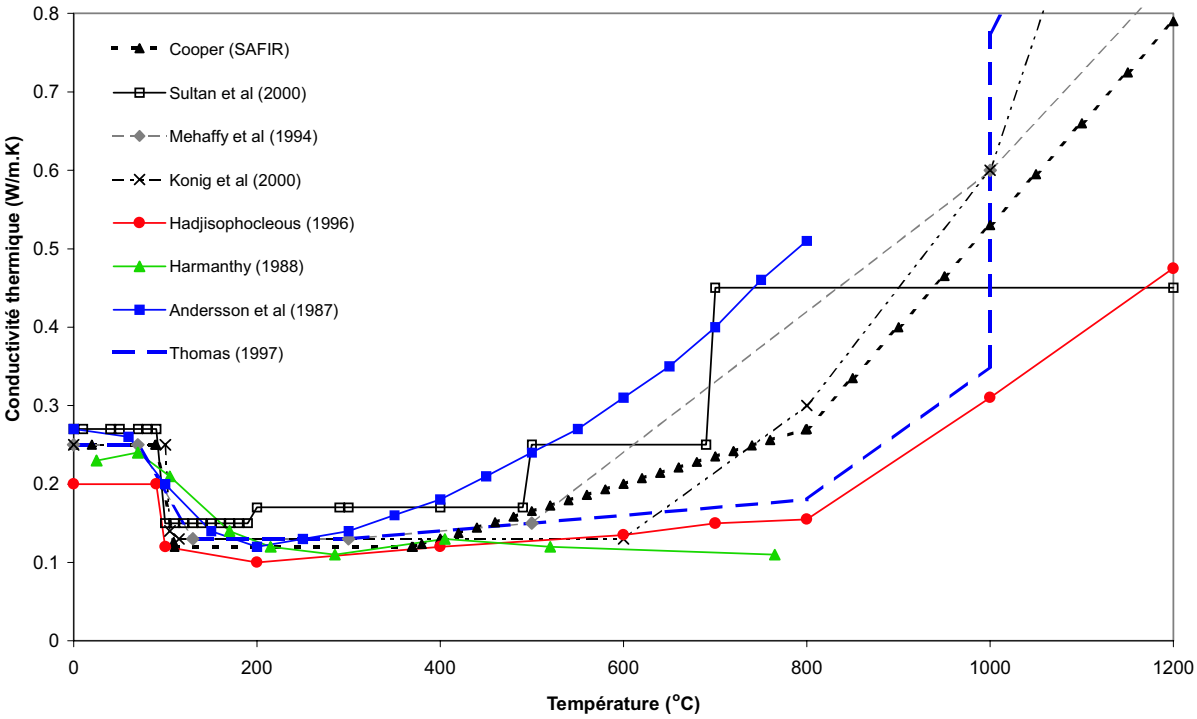



FIG. 1.6 – Evolution de la conductivité thermique avec la température.

nada (CNRC). Harmanthy (1988) [35] fournit des valeurs jusqu'à 750 $^oC$, mais n'a pas trouvé d'augmentation de la conductivité thermique au-delà de 400 $^oC$. Thomas (1997) [78] a utilisé les valeurs provenant de Mehaffy *et al* [53] pour les plaques CPC, valeurs extrapolées jusqu'à 1000 $^oC$. Pour tenir compte de l'ablation, Thomas a modifié la courbe de conductivité thermique à 0.775 W/m.K pour 1000 $^oC$ afin d'atteindre 2.3 W/m.K à 1500 $^oC$. Toutefois, aucun essai mené par Thomas ont dépassé 800 $^oC$, et il est peu probable que la plaque CPC reste intacte au-delà de cette température, comme indiqué par Sultan (1996) [75] et Goncalves *et al* (1996) [33]. La valeur de la conductivité mesurée par Hadjisophocleous (1996) [34] est inférieure à celle des autres études, cette différence pouvant être due à des variations de la densité de fissuration dans le plâtre des plaques CPC provenant de fabrications différentes comme l'a noté Goncalves et al (1996) [33].

### 1.3.4 Caractéristiques thermomécaniques des constituants de la plaque CPC

Dans ce paragraphe, nous rappelons les résultats concernant les caractéristiques thermomécaniques des constituants de la plaque CPC établies par Sakji [61], en reprenant largement des passages de la thèse de Sakji. Bien que nous n'utilisions pas directement ces résultats dans notre travail, nous les rappelons ici par soucie de cohérence de l'étude de bibliographique, car nous complèterons ces essais.

La figure 1.7 montre les résultats d'essais en flexion d'une plaque CPC, sans les feuilles de carton, à plusieurs instants de l'évolution temporelle de la charge thermique équivalente à celle définie par la courbe ISO 834.

Après 10 minutes de charge thermique, les plaques CPC ne présentent plus de résistance mé-

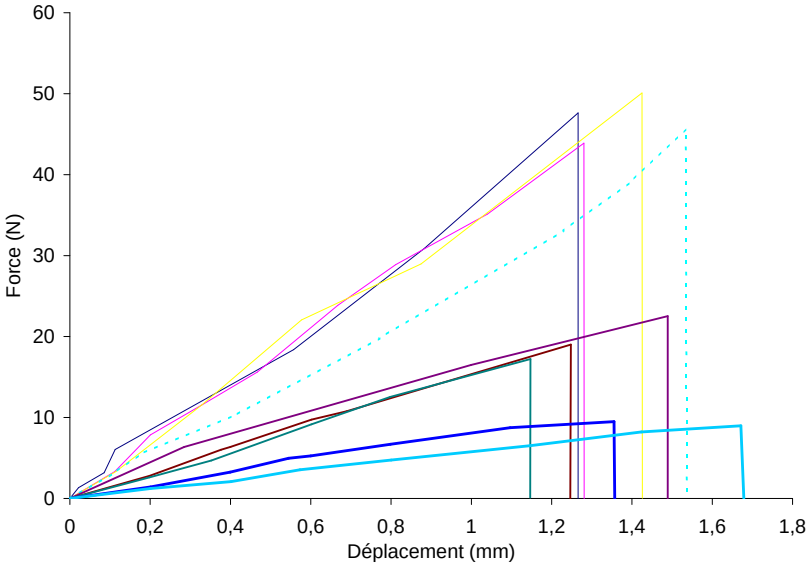



FIG. 1.7 – Caractérisation thermomécanique d'une plaque CPC sans les feuilles de carton, en flexion 4 points, réalisée par Sakji S. ([61]). Force (N) en fonction du déplacement transversal (en mm) au centre de la plaque : 3 essais à la température ambiante (3 traits très minces en haut de la figure), 1 essai à 5 minutes (1 trait tiret épais), 3 essais à 7 minutes (3 traits épais), 2 essais à 10 minutes (2 traits très épais en bas de la figure).

canique et il n'est donc pas possible de continuer les essais mécaniques après cet instant. Les résultats d'essais montrent que le comportement du plâtre est de type élastique-fragile. Les autres constituants de la plaque CPC sont les feuilles de carton. Pour les plaques CPC de type $BA13$ standard, la feuille de carton de la face exposée à la charge thermique est de type "carton gris" alors que le carton de la face non exposée est de type "carton crème". Les caractéristiques de deux cartons, à la température ambiante, et à plusieurs instants de charge thermique, ont été identifiées par des essais de traction. La figure 1.8 illustre les résultats d'essais d'identification de la loi de comportement en traction des feuilles de carton gris, à température ambiante, pour les 3 directions $0^o$, $45^o$ et $90^o$.

Selon ces résultats, le comportement mécanique en traction des feuilles cartons est faiblement non linéaire avant rupture pour la direction $0^o$, et plus fortement non linéaire pour les directions $45^o$ et $90^o$. Sakji S [61] a pris une approximation linéaire pour le comportement du carton en traction dans la direction $0^o$, c'est-à-dire un comportement élastique-fragile. La figure 1.9 montre des courbes expérimentales de la contrainte de traction (en MPa) mesurée en fonction de la déformation mesurée pour la direction $0^o$ à température ambiante et à 5 minutes de la charge thermique.

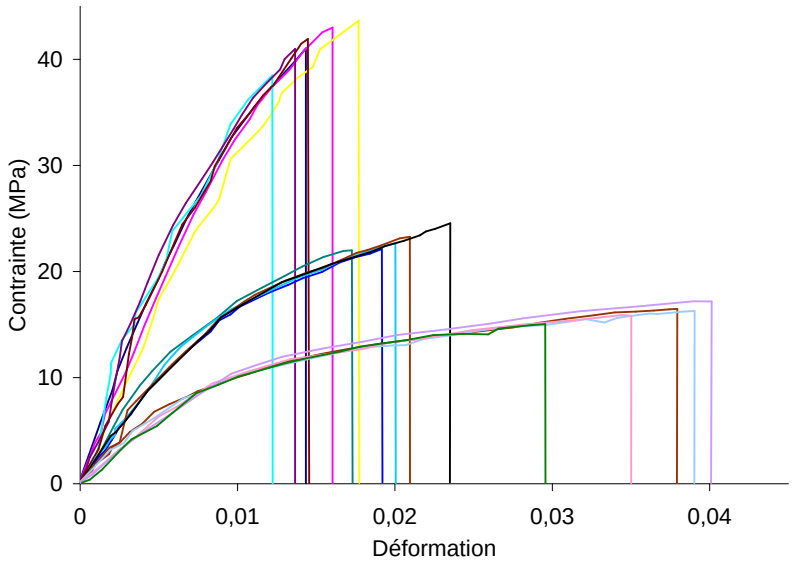



FIG. 1.8 – Identification expérimentale de la loi de comportement en traction des feuilles de carton gris à température ambiante pour les 3 directions $0^o$, $45^o$ et $90^o$, réalisée par Sakji S. [61]. Contrainte (en MPa) en fonction de la déformation : direction $0^o$ (6 traits groupés dans la partie supérieure de la figure), direction $45^o$ (5 traits groupés au milieu de la figure), direction $90^o$ (6 traits groupés dans la partie inférieure de la figure.

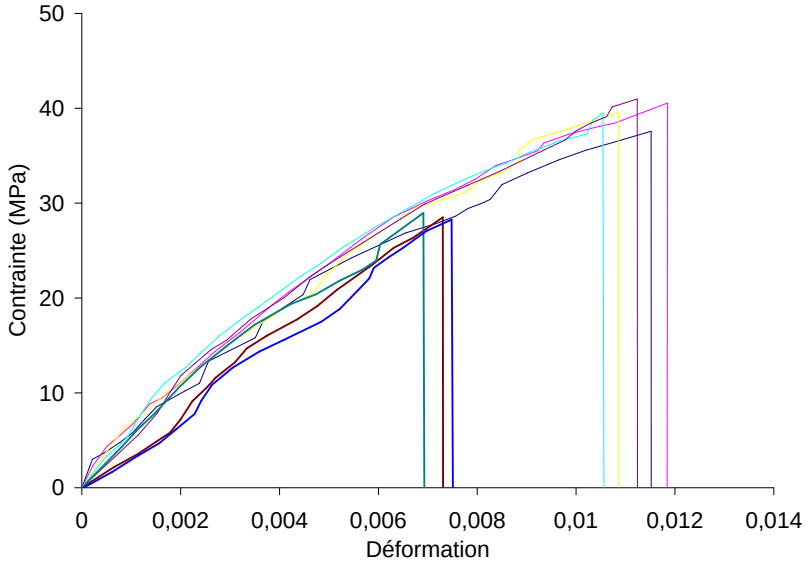



FIG. 1.9 – Identification expérimentale de la loi de comportement en traction des feuilles de carton gris à température ambiante et à 5 minutes de la charge thermique pour la direction $0^o$ réalisée par Sakji S. [61]. Contrainte (en MPa) en fonction de la déformation. Température ambiante (6 courbes en traits minces en haut de la figure), 5 minutes de la charge thermique (3 courbes en traits épais en dessous).

L'analyse de Sakji S. montre qu'avant rupture, le comportement mécanique en traction dans la direction $0^o$ du carton gris et à 5 minutes de la charge thermique est assez voisin du comportement à la température ambiante, par contre, les limites de rupture sont très différentes l'un de l'autre.

## 1.4 Modèle déterministe moyen du transfert thermique et du comportement thermomécanique non linéaire avec endommagement d'une plaque CPC

Dans cette Section, nous rappelons le modèle déterministe moyen développé par Sakji pour le transfert thermique [61],[63] et pour le comportement thermomécanique non linéaire avec endommagement [61],[62], pour les plaques CPC soumises à la charge thermique équivalente à la courbe ISO 834. Comme précédemment, afin de faciliter la lecture de ce travail, nous rappelons dans ce paragraphe de l'étude bibliographique les principaux résultats obtenus par Sakji, en reprenant largement des passages de sa thèse [61].

### 1.4.1 Modèle de transfert thermique

Sakji [61],[63] a développé un modèle déterministe moyen de transfert thermique en introduisant des hypothèses simplificatrices. Sous ces hypothèses, l'analyse du transfert thermique tridimensionnel est ramenée à une analyse unidirectionnelle suivant l'épaisseur de la plaque.
Soit $\Omega_{th}$ le domaine tridimensionnel dont le bord $\partial\Omega_{th}$ s'écrit $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Soit $\mathbf{n}$ la normale unitaire au bord extérieure à $\Omega_{th}$. Sur $\Gamma_1$ on impose une température, sur $\Gamma_2$ on impose un flux de chaleur de nature convective, sur $\Gamma_3$ on impose un flux de chaleur dû au rayonnement et enfin sur $\Gamma_4$ on a un flux de chaleur imposé. Soit $\rho(\theta)$ la masse volumique et $c(\theta)$ la chaleur spécifique. En présence d'une source volumique de chaleur notée $r$, le champ de température $\theta(t)$ dans $\Omega_{th}$ est régi par l'équation de la chaleur

$$\rho(\theta)\, c(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t} - div\{[K(\theta)]\mathbf{grad}(\theta)\} = r \ \text{ dans } \ \Omega_{th} \quad . \tag{1.4}$$

Cette équation utilise la loi de Fourier reliant linéairement, en un point donné, le flux de chaleur $\mathbf{q}$ au gradient de température selon l'expression

$$\mathbf{q} = -[K(\theta)]\mathbf{grad}\theta \quad , \tag{1.5}$$

où $[K(\theta)]$ est la matrice des conductivités thermiques. Les conditions aux limites pour ce problème de diffusion de la chaleur sont :
- La condition aux limites de Dirichlet sur $\Gamma_1$ (température imposée)

$$\theta = \overline{\theta} \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \quad . \tag{1.6}$$

- Trois conditions aux limites de Newmann :

. Une condition de convection sur $\Gamma_2$, tel que le flux de chaleur sur cette partie du bord soit régit par l'équation

$$\mathbf{qn} = h_c(\theta - \theta_{amb}) \ \ sur \ \ \Gamma_2 \quad . \tag{1.7}$$

. Une condition de rayonnement sur $\Gamma_3$, telle que le flux de chaleur sur cette partie du bord soit donné par la loi de Stéphane-Boltzmann

$$\mathbf{qn} = \xi\varphi(\theta^4 - \theta_{amb}^4) \ \ sur \ \ \Gamma_3 \quad . \tag{1.8}$$

. Une condition de flux de chaleur imposé sur $\Gamma_4$ définie par

$$\mathbf{qn} = \overline{q} \ \ sur \ \ \Gamma_4 \quad . \tag{1.9}$$

Dans ces équations, $h_c$ et $\theta_{amb}$ représentent respectivement le coefficient d'échange convectif et la température extérieure sur les bords considérés, $\xi$ et $\varphi$ représentent le facteur d'émission et la constante de Stephan-Boltzmanm. Pour le problème d'évolution, il faut ajouter une condition pour la température à l'instant initial $t_0$

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad . \tag{1.10}$$

### 1.4.2 Modèle déterministe moyen thermomécanique non linéaire homogénéisé avec endommagement d'une plaque CPC

Dans ce paragraphe, nous rappelons le modèle thermomécanique non linéaire homogénéisé d'une plaque CPC qui a été développé par Sakji [61, 62], en adoptant la théorie classique de Reissner-Mindlin. Nous faisons ce rappel pour bien positionner les travaux antérieurs qui ont été menés et qui seront nécessaires au développement d'un modèle de simulation thermomécanique non linéaire d'une cloison légère de grande hauteur (voir les perspectives de notre travail dans les conclusions du mémoire). Toutefois nous n'utiliserons pas directement ce modèle très avancé dans notre travail.
Dans ce développement, chacune des trois couches (carton-plâtre-carton) a été modélisée avec prise en compte de l'endommagement. Les deux couches de carton de la plaque CPC sont modélisées par un modèle de comportement fragile. Tant que la contrainte n'atteint pas la contrainte de rupture, la matrice d'endommagement est la matrice nulle. Si la contrainte atteint la limite de rupture alors la matrice d'endommagement est égale à la matrice unité. Pour la couche de plâtre, elle est discrétisée par morceaux avec une approximation constante par morceaux suivant la direction de l'épaisseur de la plaque. L'endommagement du plâtre est modélisé par morceaux dans le cadre de l'endommagement quasi-fragile isotrope.

Soit une plaque CPC (tricouche) de domaine $\Omega_m$ définie dans le repère orthonormé $(Ox_1x_2x_3)$, dont le plan moyen géométrique est $(Ox_1x_2)$. On note $\mathbf{n}$ la normale unitaire au bord, extérieur au domaine. Les deux feuilles de carton de la plaque CPC constituent deux couches distinctes. Pour construire, suivant la coordonnée $x_3$, une approximation constante par morceaux du champ

d'endommagement et du champ de température, on discrétise suivant $x_3$ la couche de plâtre de la plaque CPC en $J-2$ sous-couches. On obtient ainsi $J$ sous-couches. La valeur de $J$ est choisie suffisamment grande pour que l'approximation constante par morceaux du champ d'endommagement et du champ de température soit valable. Les coordonnées, suivant $x_3$, des deux faces de la sous-couches $k$ sont notées $z_{k-1}$ et $z_k$ avec $z_{k-1} < z_k$. La loi de comportement de la plaque CPC s'écrit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N}_i = \underline{H}_{ij} e_j^m + \underline{B}_{ij}\kappa_j - \underline{b}_i' \ \ (i,j=1,2,6)\\
&\mathbb{M}_i = \underline{B}_{ij} e_j^m + \underline{C}_{ij}\kappa_j - \underline{h}_i' \ \ (i,j=1,2,6)\\
&\mathbb{N}_i = \underline{F}_{ij} e_j \quad (i,j=4,5)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

où $\mathbb{N}$ et $\mathbb{M}$ sont les forces globales et les moments globaux qui sont définis par les relations,

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_i &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_i dx_3 \ \ (i=1,2,4,5,6)\\
\mathbb{M}_i &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_i x_3 dx_3 \ \ (i=1,2,6)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

avec $\mathbf{s}$ le vecteur des contraintes $\mathbf{s} = (\sigma_{11}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12})$. Les efforts globaux $\mathbb{N}_i$ et $\mathbb{M}_i$, pour $i = 1,2,6$, s'expriment en fonction de la déformation membranaire $e_i^m$ et des courbures du plan moyen $\kappa_i$ ainsi qu'en fonction de la dilatation thermique $\alpha_i \Delta T$. Les efforts globaux de cisaillement transverse $\mathbb{N}_i$, pour $i = 4,5$, s'expriment en fonction de la déformation en cisaillement transverse $e_i$ pour $i = 4,5$. Les matrice introduites dans l'Eq. (1.11) sont définies par les relations suivantes,

$$\begin{aligned}
\underline{H}_{ij} &= \underline{H}_{ji} = \sum_{k=1}^{J} \underline{\tilde{Q}}_{ij}^k(\mathbf{x})(z_k - z_{k-1}) \ \ (i,j=1,2,6)\\
\underline{B}_{ij} &= \underline{B}_{ji} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{J} \underline{\tilde{Q}}_{ij}^k(\mathbf{x})(z_k^2 - z_{k-1}^2) \ \ (i,j=1,2,6)\\
\underline{C}_{ij} &= \underline{C}_{ji} = \tfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{J} \underline{\tilde{Q}}_{ij}^k(\mathbf{x})(z_k^3 - z_{k-1}^3) \ \ (i,j=1,2,6)\\
\underline{F}_{ij} &= \underline{F}_{ji} = \sum_{k=1}^{J} k_{ij}\underline{\tilde{Q}}_{ij}^k(\mathbf{x})(z_k - z_{k-1}) \ \ (i,j=4,5)\\
\underline{h}_i' &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1,2} \underline{\tilde{Q}}_{ij}^k(\mathbf{x})(z_k - z_{k-1})\alpha_j^k \Delta T^k \ \ (i=1,2,6)\\
\underline{b}_i' &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1,2} \underline{\tilde{Q}}_{ij}^k(\mathbf{x})(z_k^2 - z_{k-1}^2)\alpha_j^k \Delta T^k \ \ (i=1,2,6)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Dans cette équation, la matrice $\tilde{\mathbb{Q}}^k$ est la matrice de rigidité réduite de la sous-couche $k$ à l'état endommagé, définie par

$$[\underline{\tilde{Q}}^k(\mathbf{x})] = ([I] - [\underline{D}^k(\mathbf{x})])[\underline{Q}^k] \tag{1.14}$$

et où $\underline{Q}_{11}^k = E_1^k/(1-\nu_{21}^k\nu_{12}^k)$, $\underline{Q}_{12}^k = \nu_{21}^k E_1^k/(1-\nu_{21}^k\nu_{12}^k)$, $\underline{Q}_{22}^k = E_2^k/(1-\nu_{21}^k\nu_{12}^k)$ et $\underline{Q}_{66}^k = G_{12}^k$ sont les coefficients de rigidité membranaire. Les coefficients de rigidité $\underline{Q}_{44}^k$ et $\underline{Q}_{55}^k$ correspondent aux coefficients de rigidité pour le cisaillement transverse. Les autres coefficients de rigidité

$\underline{Q}^k_{61}$,$\underline{Q}^k_{16}$,$\underline{Q}^k_{26}$,$\underline{Q}^k_{62}$ sont nuls car tous les matériaux de la plaque CPC sont décrits dans la même base d'orthoptropie $(o, x_1, x_2, x_3)$.
La matrice $[\underline{D}^k(\mathbf{x})]$ est la matrice d'endommagement de la sous-couche $k$ de la plaque multicouche au point $\mathbf{x}$. L'endommagement des sous-couches de plâtre est supposé quasi-fragile isotrope. Cette matrice n'est fonction que d'un seul paramètre $\underline{\beta}(\mathbf{x})$ et s'écrit

$$[\underline{D}(\mathbf{x})] = \beta(\mathbf{x})[I] \quad . \tag{1.15}$$

Dans cette équation, $[I]$ est la matrice (6x6) unité et $\beta(\mathbf{x})$ est une variable d'endommagement. La loi d'évolution de la variable de l'endommagement a été construite en se basant sur le modèle de Najar ([45]). Cette variable de l'endommagement a été identifiée expérimentale par Sakji S., en minimisant, pour la force appliquée à la plaque CPC, en fonction du déplacement transversal au centre de la plaque, l'écart quadratique entre le résultat donné par le modèle thermomécanique de la plaque CPC et la valeur expérimentale.
Les huit relations donnant les efforts globaux en fonction des déformations globales, s'écrivent sous la forme suivante,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{N}_1 \\ \mathbb{N}_2 \\ \mathbb{N}_6 \\ -- \\ \mathbb{M}_1 \\ \mathbb{M}_2 \\ \mathbb{M}_6 \\ -- \\ \mathbb{N}_4 \\ \mathbb{N}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{16} & | & \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} & \underline{B}_{16} & | & 0 & 0 \\ \underline{H}_{12} & \underline{H}_{22} & \underline{H}_{26} & | & \underline{B}_{12} & \underline{B}_{22} & \underline{B}_{26} & | & 0 & 0 \\ \underline{H}_{16} & \underline{H}_{26} & \underline{H}_{66} & | & \underline{B}_{16} & \underline{B}_{26} & \underline{B}_{66} & | & 0 & 0 \\ -- & -- & -- & | & -- & -- & -- & | & -- & -- \\ \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} & \underline{B}_{16} & | & \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{16} & | & 0 & 0 \\ \underline{B}_{12} & \underline{B}_{22} & \underline{B}_{26} & | & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{22} & \underline{C}_{26} & | & 0 & 0 \\ \underline{B}_{16} & \underline{B}_{26} & \underline{B}_{66} & | & \underline{C}_{16} & \underline{C}_{26} & \underline{C}_{66} & | & 0 & 0 \\ -- & -- & -- & | & -- & -- & -- & | & -- & -- \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & \underline{F}_{44} & \underline{F}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & \underline{F}_{45} & \underline{F}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^m \\ e_1^m \\ e_1^m \\ - \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \\ -- \\ e_4 \\ e_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{h}'_1 \\ \underline{h}'_2 \\ \underline{h}'_6 \\ - \\ \underline{b}'_1 \\ \underline{b}'_2 \\ \underline{b}'_6 \\ - \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{1.16}$$

que nous pouvons réécrire globalement

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}^m \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{N}^c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{H}] & [\underline{B}] & 0 \\ [\underline{B}] & [\underline{C}] & 0 \\ 0 & 0 & [\underline{F}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \mathbf{e}^c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{h}}' \\ \underline{\mathbf{b}}' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Dans cette équation, ont été introduits les vecteurs $\mathbf{N}^m = (\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \mathbb{N}_6)$, $\mathbf{M} = (\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \mathbb{M}_6)$, $\mathbf{N}^c = (\mathbb{N}_4, \mathbb{N}_5)$, $\underline{\mathbf{h}}' = (\underline{h}'_1, \underline{h}'_2, \underline{h}'_6)$, $\underline{\mathbf{b}}' = (\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \underline{b}'_6)$, $\mathbf{e}^m = (e_1^m, e_2^m, e_6^m)$, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_6)$ et $\mathbf{e}^c = (e_4, e_5)$.
La matrice $[\underline{H}]$ est la sous-matrice de rigidité globale qui relie les forces globales de membrane $\mathbb{N}_i$ aux déformations de membrane $e_i^m$ pour $i = 1, 2, 6$.
La matrice $[\underline{C}]$ est la sous-matrice de rigidité globale de flexion qui relie les moments globaux de flexion $\mathbb{M}_i$ aux déformations de flexion $\kappa_i$ pour $i = 1, 2, 6$.
La matrice $[\underline{B}]$ est la sous-matrice de rigidité globale de couplage membrane-flexion qui relie les forces globales de membrane $\mathbb{N}_i$ pour $i = 1, 2, 6$ aux déformations de flexion $\kappa_i$ pour $i = 1, 2, 6$ et les moment globaux de flexion $\mathbb{M}_i$ aux déformations globales de membrane $e_i^m$ pour $i = 1, 2, 6$.
La matrice $[\underline{F}]$ est la sous-matrice de rigidité de plaque pour les efforts tranchants.

## 1.5 Rappels de la théorie des probabilités, utiles pour la modélisation stochastique des incertitudes

*Pour donner plus de lisibilité à ce travail, nous donnons dans ce paragraphe des rappels sur la modélisation probabiliste paramétrique des incertitudes sur les paramètres du système.*

### 1.5.1 Modélisation probabiliste paramétrique des incertitudes sur les paramètres du système

Pour simplifier l'exposé de ce rappel, nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle numérique correspondant à un problème d'élasticité linéaire statique d'un milieu borné. Le modèle numérique s'écrit donc

$$[K(\underline{\mathbf{s}})]\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{f}} \tag{1.18}$$

où $\underline{\mathbf{v}}$ est le vecteur des degrés de liberté, $\underline{\mathbf{f}}$ est le vecteur dû aux efforts extérieurs moyens appliqués et $\underline{\mathbf{s}} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ est le vecteur moyen des $d$ paramètres considérés comme incertains.
L'approche probabiliste paramétrique des incertitudes consiste à modéliser $\underline{\mathbf{s}}$ par un vecteur aléatoire $\mathbf{S}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont le support de la mesure de probabilité $P_{\mathbf{S}}(d\mathbf{s})$ est $\mathcal{D}$. Dans ces conditions, la réponse $\underline{\mathbf{v}}$ devient un vecteur aléatoire $\mathbf{V}$ qui est la solution de l'équation stochastique,

$$[K(\mathbf{S})]\mathbf{V} = \underline{\mathbf{f}} \tag{1.19}$$

Nous sommes intéressés par le calcul effectif de la mesure de probabilité $P_{\mathbf{V}}(dv)$ du vecteur aléatoire $\mathbf{V}$, qui permet, par exemple, de calculer des régions de confiance des déplacements et de toutes observations sur les déplacements (déformations, contraintes, etc). Comme l'application $\mathbf{S} \mapsto \mathbf{V} = [K(\mathbf{S})]^{-1}\underline{\mathbf{f}}$ est non linéaire, il est indispensable pour mener ce type de calcul de connaître la mesure de probabilité $P_{\mathbf{S}}(d\mathbf{s})$ qu'il faut effectivement construire en n'utilisant que l'information disponible. Une des méthodes permettant la construction de cette mesure de probabilité, est l'utilisation du principe du maximum d'entropie (Shannon, 1948) [68], (Jaynes, 1957a) [42], (Jaynes, 1957b) [43], (Kapur et Kesavan, 1992) [44].

### 1.5.2 Rappel sur la construction de la loi de probabilité d'un vecteur aléatoire par le principe du maximum d'entropie

Ces rappels sont tirés de (Soize, 2003) [74]. L'entropie d'une mesure de probabilité d'une variable aléatoire a été introduite par (Shannon, 1948) [68] dans le cadre de la théorie de l'information pour mesurer le niveau d'incertitude.
*Entropie d'une variable aléatoire vectorielle.* Soit $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de probabilité $P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x})$ est définie par une densité $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\mathbf{x}$,

$$P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.20}$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ le point de $\mathbb{R}^n$ et où $d\mathbf{x} = dx_1...dx_n$. Nous notons $Supp_n \subset \mathbb{R}^n$ le support de la densité de probabilité $p_{\mathbf{X}}$, ce qui implique

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \notin Supp_n \quad . \tag{1.21}$$

L'entropie de la mesure de probabilité $P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x})$, définie par sa densité de probabilité $p_{\mathbf{X}}$, est telle que

$$\mathcal{S}(p_{\mathbf{X}}) = -\int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) ln(p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = -\mathcal{E}\{ln(p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}))\} \tag{1.22}$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'espérance mathématique.

*Principe du maximum de l'entropie* (Shannon, 1948) [68], (Jaynes[42, 43]). La densité de probabilité, $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, à construire est celle qui doit générer la plus grande incertitude sur l'ensemble de toutes les densités de probabilité possibles qui vérifient les contraintes définies par l'information disponible. La densité de probabilité inconnue à construire est alors la solution du problème d'optimisation

$$\max_{p_{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}_{ad}} \quad \mathcal{S}(p_{\mathbf{X}}) \tag{1.23}$$

où $\mathcal{C}_{ad}$ est l'espace admissible des densités de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ à support $Supp_n$, défini par l'information disponible.

*Définition de l'information disponible et de l'espace admissible $\mathcal{C}_{ad}$.* L'information disponible permet de donner des informations supplémentaires sur la variable aléatoire $\mathbf{X}$. Supposons, par exemple, que la densité de probabilité inconnue $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ soit sur $\mathbb{R}^n$ avec un support connu $Supp_n$ et telle que l'on connaisse $m$ vecteurs $\underline{\mathbf{f}}_1 \in \mathbb{R}^{\nu_1}, ..., \underline{\mathbf{f}}_m \in \mathbb{R}^{\nu_m}$ où $\nu_1, ..., \nu_m$ sont $m$ entiers supérieurs ou égaux à 1, tels que

$$\mathcal{E}\{\mathbf{g}_j(\mathbf{X})\} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \underline{\mathbf{f}}_j \quad , \quad j = 1, ..., m \quad , \tag{1.24}$$

avec $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ une application mesurable connue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{\nu_j}$. On définit ainsi l'espace admissible $\mathcal{C}_{ad}$ par

$$\mathcal{C}_{ad} = \{p_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+;\, Supp\ p_{\mathbf{X}} = Supp_n;\, \int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}} d\mathbf{x} = 1;$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \underline{\mathbf{f}}_j \quad , \quad j = 1, ..., m\} \quad . \tag{1.25}$$

*Solution du problème d'optimisation.* Pour résoudre le problème d'optimisation défini par l'Eq. (1.23), nous introduisons $1 + m$ multiplicateurs de Lagrange $(\lambda_0 - 1) \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\lambda}_1 \in \mathbb{R}^{\nu_1}, ...,\ \boldsymbol{\lambda}_m \in \mathbb{R}^{\nu_m}$ associés aux $1 + m$ contraintes et le Lagrangien défini par

$$\mathcal{L}(p_{\mathbf{X}}) = \mathcal{S}(p_{\mathbf{X}}) - (\lambda_0 - 1)\{\int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}}(x) dx - 1\} - \sum_j^m < \boldsymbol{\lambda}_j, \{\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}\, d\mathbf{x} - \underline{\mathbf{f}}_j\} >_{\mathbb{R}^{\nu_j}} \tag{1.26}$$

où $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >_{\mathbb{R}^{\nu_j}} = u_1 v_1 + ... + u_{\nu_j} v_{\nu_j}$ est le produit scalaire Euclidien dans $\mathbb{R}^{\nu_j}$.
Le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}(p_{\mathbf{X}}) = b - \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x}, p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \quad , \tag{1.27}$$

avec

$$b = (\lambda_0 - 1)\{\int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - 1\} - \sum_j^m < \boldsymbol{\lambda}_j, \{\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \underline{\mathbf{f}}_j\} >_{\mathbb{R}^{\nu_j}} \tag{1.28}$$

et

$$h(\mathbf{x}, p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\{ln(p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})) + (\lambda_0 - 1) + \sum_{j=1}^m < \boldsymbol{\lambda}_j, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) >_{\mathbb{R}^{\nu_j}}\} \quad . \tag{1.29}$$

Un calcul de variation (Luenberber, 1969) [51] montre que $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est la solution de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} h(\mathbf{x}, p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})) = 0 \quad . \tag{1.30}$$

Cette solution se construit facilement et s'écrit

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{Supp_n}(\mathbf{x})\, exp\{-(\lambda_0 - 1) - \sum_{j=1}^m < \boldsymbol{\lambda}_j, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) >_{\mathbb{R}^{\nu_j}}\} \quad , \tag{1.31}$$

où les multiplicateur $\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, ..., \boldsymbol{\lambda}_m$ sont calculées avec les équations définies par les contraintes.

# Chapitre 2

# Construction des modèles déterministe et probabiliste de la loi de comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage d'une plaque CPC avec un montant métallique, à la température ambiante

## 2.1 Généralité

Dans ce chapitre, nous proposons une modélisation robuste vis-à-vis des variabilités expérimentales pour la loi de comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage d'une plaque CPC avec un montant métallique, à la température ambiante. Comme nous l'avons expliqué dans "l'Introduction générale", pour développer un modèle complet d'une cloison légère, on pourrait tenter de mettre en place un modèle non linéaire multi-échelle micro-macro pour décrire le comportement de l'assemblage par vissage d'une plaque CPC avec un montant métallique. Un tel modèle micro-macro du vissage serait très difficile à élaborer et nécessiterait la connaissance d'un grand nombre de données dont beaucoup ne sont pas connues et seraient difficile à mesurer. D'autre part le calcul thermomécanique non linéaire d'une cloison légère avec un tel modèle micro-macro pour le comportement des vis dans les plaques CPC, en fonction de la température, conduirait à des calculs extrêmement lourds. C'est pourquoi, dans ce travail, une telle approche n'a pas été envisagée et nous avons préféré construire la loi de comportement macroscopique en cisaillement de l'assemblage par vissage en utilisant une analyse expérimentale, à température ambiante (pour des hautes températures, voir le chapitre 4), et ajuster un modèle algébrique avec les données expérimentales. On obtient ainsi un modèle moyen. Compte tenu de la très grande variabilité des résultats expérimentaux, liée aux variabilités des configurations expérimentales et non pas à des erreurs de mesure, on a construit un modèle probabiliste à partir du modèle moyen. L'identification des paramètres du modèle probabiliste est réalisée avec les mesures.

En ce qui concerne la méthodologie utilisée, on identifie tout d'abord les paramètres du modèle moyen en minimisant l'écart entre la moyenne des mesures expérimentales et la prévision fournie par ce modèle moyen. Puis on identifie les paramètres (moyennes et paramètres de dispersion) du modèle probabiliste par le maximum de vraisemblance avec un prédicteur construit par la méthode des moindres carrés.

## 2.2 Analyse expérimentale du comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage, à la température ambiante

### 2.2.1 Description du dispositif expérimental

Afin d'analyser le comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage, des expériences ont été effectuées en utilisant la configuration expérimentale montrée sur la figure 2.1. L'éprouvette est constituée d'une plaque CPC de dimension 0.22 m $\times 0,15$ m, vissée à deux montants métalliques séparés (verticaux). Le montant supérieur est vissé avec la plaque CPC par une vis tandis que le montant inférieur est vissé par 3 vis. On suppose que les 3 vis sur le montant inférieur réalisent une liaison indéformable tandis que l'on mesure le comportement en cisaillement de la vis isolée sur le montant supérieur. Le montant inférieur est maintenu fixe et on applique un effort de traction sur le montant supérieur dans le plan de la plaque à l'aide d'une presse qui engendre le déplacement du montant supérieur. Un capteur de déplacement est fixé sur le montant supérieur qui permet de mesurer le déplacement entre le montant supérieur et la plaque CPC, grâce à une mire fixée sur la plaque CPC. Lorsque l'éprouvette est mise en charge, le capteur mesure ainsi le déplacement relatif entre le montant métallique et la plaque CPC. Un autre capteur de force relève l'effort appliqué sur l'éprouvette par la presse. Les éprouvettes ont été mise en place dans la presse par des morts auto-bloquant empêchant le glissement de l'éprouvette durant la mise en traction. Grâce à ce dispositif, la précharge induite par le blocage de l'éprouvette est très petite et peut donc être négligée dans le traitement des mesures. La photo du banc d'essai est représentée à la figure 2.2 .

### 2.2.2 Résultat d'essai et analyse

#### Résultats des essais

Dix éprouvettes ont été préparées et testées, mais deux d'entre elles ont été prévues pour parer à des problèmes éventuels. L'exploitation des essais est donc basée sur une série de huit éprouvettes. Les résultats des essais sont présentés à la figure 2.3. Cette figure montre, pour chaque éprouvette, le graphe de la force appliquée en fonction du déplacement mesuré.
Pour chaque éprouvette, l'essai a été mené jusqu'à la chute brutale de la raideur de l'assemblage. Ceci conduit à des plages importantes avec une forte dispersion pour le déplacement maximal mesuré. Dans la suite, nous avons retenu un déplacement maximal de 7 mm comme plage utile. Cette valeur correspond à la limite supérieure pour la quelle la courbe déplacement-force expéri-

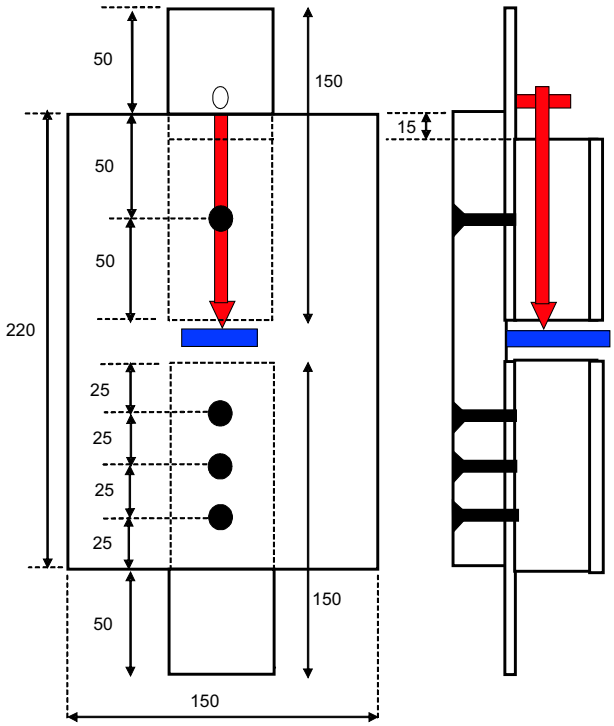



FIG. 2.1 – Schéma, de face et de profil, de la configuration expérimentale pour un essai d'assemblage par vissage. La flèche verticale représente le capteur de déplacement fixé sur le montant métallique de l'éprouvette. Le barreau horizontal représente la mire fixée sur la plaque CPC. Les vis sont représentées par gros points.

mentale moyenne est monotone croissante. La figure 2.4 montre les 8 graphes "déplacement-force" pour les 8 éprouvettes ainsi la courbe expérimentale moyenne (moyenne des mesures) sur la plage d'intérêt.

### Analyse des résultats expérimentaux

En observant les résultats d'essai, nous constatons que la courbe expérimentale moyenne est une fonction monotone croissante et strictement concave dans l'intervalle $[0, x_{max}]$ avec $x_{max} = 7$ mm. Le modèle moyen du comportement en cisaillement qui est construit dans le paragraphe 2.3 suivant, devra donc satisfaire ces propriétés. Il est noté aussi que le nombre d'essais est faible en raison du coût des expérimentations. Dans ces conditions, la variabilité observée avec ce petit nombre d'essai n'est pas complètement représentative de la fluctuation statistique réelle qui pourrait être observée si un grand nombre d'essais était disponible. Par conséquent, une méthode déterministe simple consistant à prendre les bornes inférieure et supérieure expérimentales ne serait pas satisfaisante. De plus, une telle approche déterministe ne permettrait pas de calculer la probabilité d'atteindre ces limites ainsi construites. Remarquons aussi que pour une même valeur du déplacement, la force expérimentale correspondante est incertaine liée à la variabilité, et réciproquement. Ces raisons nous ont conduit à développer un modèle probabiliste pour tenir compte des variabilités et avoir un modèle qui interpole correctement dans l'espace statistique.

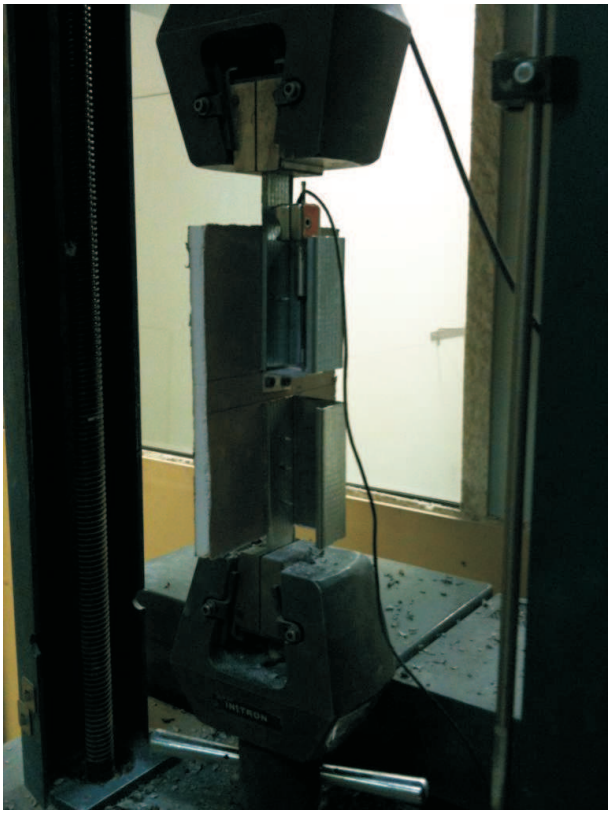


FIG. 2.2 – Photo du banc d'essai de l'assemblage par vissage.

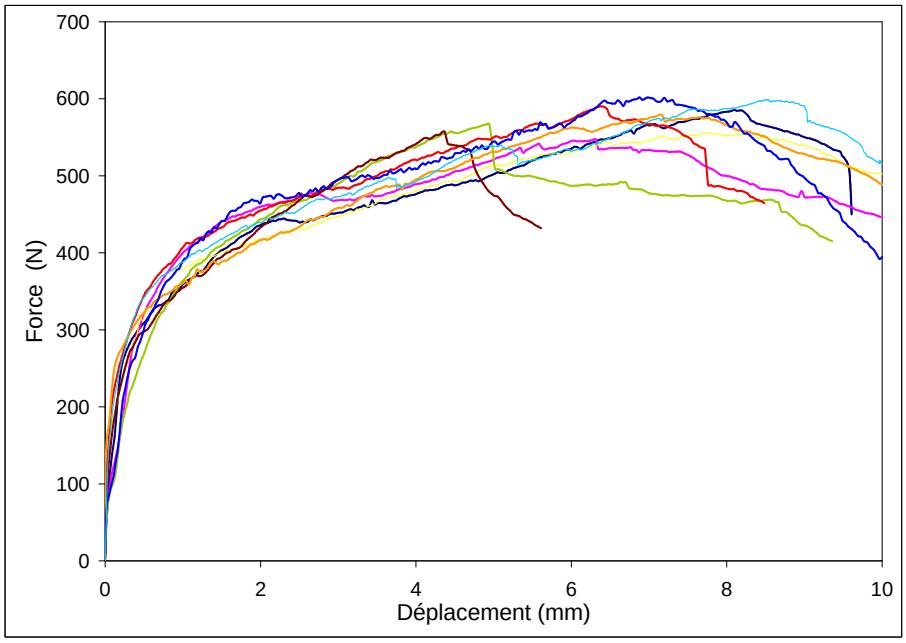



FIG. 2.3 – Résultats des essais de comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage. Force appliquée en N (axe vertical) en fonction du déplacement en mm (axe horizontal).

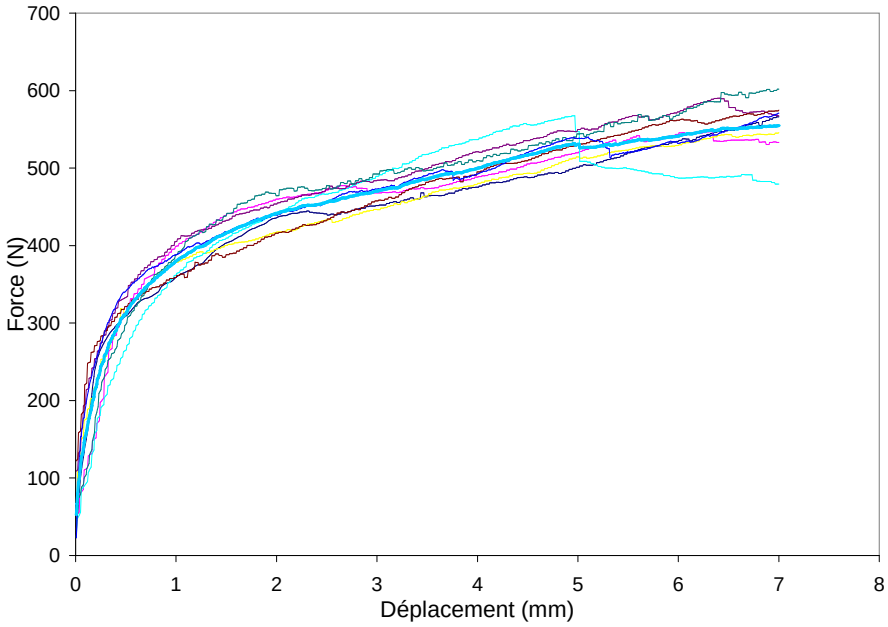



FIG. 2.4 – Résultat des essais de comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage sur la plage d'intérêt. Graphe des 8 courbes expérimentales (traits minces) et la courbe expérimentale moyenne (trait épais). Force appliquée en N (axe vertical) en fonction du déplacement en mm (axe horizontal).

## 2.3 Construction du modèle moyen du comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage à température ambiante

Le modèle algébrique moyen du comportement en cisaillement a été construit pour vérifier les hypothèses suivantes concernant les courbes déplacement-force. La fonction, sur son domaine de définition, doit être à valeurs positives, doit être strictement monotone croissance et doit être strictement concave, et enfin, doit avoir un paramétrage minimal qui garantisse la génération d'une famille suffisamment représentative de courbes "déplacement-force", entre autre, puisse représenter la courbe expérimentale moyenne mais aussi les autres courbes mesurées. Soit $x$ le déplacement relatif et $y$ la force appliquée, le modèle moyen proposé est écrit,

$$y(x) = a\{(x+b)^{\alpha} - b^{\alpha}\} \quad . \tag{2.1}$$

Dans l'Eq. (2.1) $a, b$ et $\alpha$ sont 3 paramètres réels positifs. Soit $\mathbf{r}$ le vecteur tel que $\mathbf{r} = (a, b, \alpha)$ qui appartient à un sous-ensemble admissible $\Re$ de $\mathbb{R}^3$. Le paramètre $\mathbf{r}$ est identifié en utilisant la courbe expérimentale moyenne et sera appelé le paramètre d'identification du modèle moyen. Le modèle algébrique proposé est tel que, sur l'intervalle $[0, x_{max}]$, la fonction $x \mapsto y(x)$ est à valeurs positives, est monotone strictement croissante, est strictement concave, et est tel que le déplacement relatif $x$ est nul si la force appliquée est nulle. On en déduit que, pour tout $\mathbf{r}$ dans

$\Re$ et pour tout $x \in [0, x_{max}]$, on doit avoir,

$$\begin{cases} y(x) \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(x) = \alpha a (x+b)^{\alpha-1} > 0 \\ y''(x) = \alpha(\alpha-1) a (x+b)^{\alpha-2} < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

On peut déduire facilement de l'Eq. (2.2) que les paramètres $a, b$ et $\alpha$ doivent être tels que

$$a > 0, \quad b > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad , \tag{2.3}$$

ce qui montre que $\Re = ]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times]0, 1[$. L'identification des paramètres du modèle moyen sera présentée dans le paragraphe 2.5.

## 2.4 Construction du modèle probabiliste du comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage à température ambiante

Conformément aux explications données au paragraphe 2.2, les variabilités des résultats expérimentaux sont pris en compte au travers d'un modèle probabiliste consistant à modéliser les paramètres $a$ et $b$ par deux variables aléatoires indépendantes $A$ et $B$, à valeurs positives, dont les valeurs moyennes sont $E\{A\} = \underline{a}$ et $E\{B\} = \underline{b}$, où $E$ désigne l'espérance mathématique. L'hypothèse d'indépendance des deux variables aléatoires $A$ et $B$ est justifiée par le fait qu'il n'y a pas d'information disponible concernant la dépendance statistique de ces deux variables $A$ et $B$. D'autre part, le paramètre $\alpha$ n'est pas modélisé par une variable aléatoire. dans ces conditions, le paramètre vectoriel moyen du modèle probabiliste est $\underline{\mathbf{r}} = (\underline{a}, \underline{b}, \alpha)$ dont la valeur optimale doit être identifiée à l'aide des mesures. Par conséquent, l'Eq. (2.1) est remplacée par l'équation aléatoire,

$$Y(x) = A\{(x+B)^{\alpha} - B^{\alpha}\} \quad . \tag{2.4}$$

Il est noté que $E\{Y(x)\}$ est différent de $\underline{a}[(x+\underline{b})^{\alpha} - \underline{b}^{\alpha}]$. Pour tout $x$ fixé, la variable aléatoire $Y(x)$ est définie sur l'espace probabilité $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, est à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et sa loi de probabilité est notée $P_{Y(x)}(dy; x)$. Pour des raisons physiques, $Y(x)$ doit être une variable aléatoire du second-ordre, ce qui signifie que $E\{Y(x)^2\} = \int_{\mathbb{R}^+} y^2 P_{Y(x)}(dy; x) < +\infty$. Compte tenu de l'hypothèse d'indépendance de $A$ et $B$, nous avons,

$$E\{Y(x)^2\} = E\{A^2\}\, E\{[(x+B)^{\alpha} - B^{\alpha}]^2\} < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} E\{A^2\} < +\infty \\ E\{[(x+B)^{\alpha} - B^{\alpha}]^2\} < +\infty \end{cases} \tag{2.5}$$

On peut vérifier que la seconde condition est satisfaite si $E\{B^2\} < +\infty$ sachant que $E\{A^2\} < +\infty$.

On déduit de l'Eq. (2.4) que, si la force est donnée, alors le déplacement relatif $x$ devient une variable aléatoire $X$ telle que

$$X = \left(\frac{y}{A} + B^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - B \quad . \tag{2.6}$$

De même, pour des raisons physiques, la variable aléatoire $X$ doit être du second ordre, c'est-à-dire que $E\{X^2\} < +\infty$. Comme $0 < \alpha < 1$, une telle condition est satisfaite si $E\{A^{-2}\} < +\infty$. Finalement, les informations disponibles pour la variable aléatoire $A$ sont : (i) le support de la fonction de densité de probabilité est $]0, +\infty[$, (ii) sa valeur moyenne $E\{A\} = \underline{a}$, (iii) $E\{A^{-2}\} < +\infty$. La condition (iii) impliquera que $E\{A^2\} < +\infty$. Le principe du maximum d'entropie avec ces informations disponibles donnent une loi Gamma pour la densité de probabilité $p_A(a)$ de $A$, qui s'écrit

$$p_A(a; \underline{a}, \delta_A) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(a) \frac{1}{\underline{a}} \left(\frac{1}{{\delta_A}^2}\right)^{1/\delta_A^2} \frac{1}{\Gamma(1/{\delta_A}^2)} \left(\frac{a}{\underline{a}}\right)^{1/\delta_A^2 - 1} \exp\left(-\frac{a}{\underline{a}{\delta_A}^2}\right) \quad , \tag{2.7}$$

où $\delta_A = \sigma_A/\underline{a}$ est le coefficient de variation de la variable aléatoire $A$, qui satisfait $\delta_A < 1/\sqrt{2}$, $\sigma_A$ est l'écart type de $A$, $\Gamma$ est la fonction Gamma et où $\mathbb{1}_K(a) = 1$ si $a \in K$ et $= 0$ si $a \notin K$. Pour la variable aléatoire $B$, les informations disponibles sont (i) le support de la fonction de densité de probabilité est $]0, +\infty[$, (ii) sa valeur moyenne $E\{B\} = \underline{b}$, (iii) $E\{B^2\} = \underline{b}^2(1 + {\delta_B}^2) < +\infty$. Le principe du maximum d'entropie avec ces informations disponibles donne alors une loi gaussienne tronquée (ce n'est donc pas Gaussien),

$$p_B(b; \underline{b}, \delta_B) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(b) C_0 \exp(-\lambda_1 b - \lambda_2 b^2) \quad , \tag{2.8}$$

où $(C_0, \lambda_1, \lambda_2)$ sont des multiplicateurs de Lagrange dont les valeurs sont calculées en résolvant le système d'équations non linéaires suivant,

$$\begin{aligned} &C_0 \int_0^{+\infty} b \exp(-\lambda_1 b - \lambda_2 b^2) db = \underline{b} \quad , \\ &C_0 \int_0^{+\infty} b^2 \exp(-\lambda_1 b - \lambda_2 b^2) db = \underline{b}^2(1 + \delta_B^2) \quad , \\ &C_0 \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda_1 b - \lambda_2 b^2) db = 1 \quad . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Les fonctions de densité de probabilité $p_A$ et $p_B$ ne dépendent donc que du vecteur $\underline{\mathbf{r}}$ à valeurs dans $\Re$ et du vecteur des paramètres de dispersion $\boldsymbol{\delta} = (\delta_A, \delta_B)$ à valeurs dans son ensemble admissible $\Delta$. Le paramètre $\boldsymbol{\delta}$ permet de contrôler le niveau de fluctuations statistiques, c'est-à-dire le niveau d'incertitudes.

## 2.5 Identification expérimentale des paramètres des modèles déterministe et probabiliste

Conformément aux explications données dans le paragraphe 2.4, il y a deux types de paramètres à identifier : le vecteur $\mathbf{r} \in \Re$ et le vecteur $\underline{\mathbf{r}} \in \Re$ contrôlant les moyennes, et le vecteur

$\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ contrôlant les dispersions. Ces vecteurs sont identifiées en utilisant les $\nu_{exp} = 8$ courbes expérimentales $y^{exp,\,1}(x), ..., y^{exp,\,\nu_{exp}}(x)$ pour $x \in [0, x_{max}]$. Ces courbes expérimentales sont considérées comme des réalisations indépendantes d'une courbe aléatoire $\{Y^{exp}(x), x \in [0, x_{max}]\}$. La moyenne d'échantillon $\{\underline{y}^{exp}(x), x \in [0, x_{max}]\}$, appelée courbe expérimentale moyenne, est telle que pour tout $x$,

$$\underline{y}^{exp}(x) = (1/\nu_{exp}) \sum_{\ell=1}^{\nu_{exp}} y^{exp,\,\ell}(x) \quad .$$

L'identification de ces vecteurs est effectuée en deux étapes pour lesquelles on doit résoudre des problèmes d'optimisation. Ces problèmes d'optimisation sont non convexes et sont résolus par la "méthode d'essai" en tirant des valeurs dans la région d'une valeur initiale. La première étape consiste à calculer une valeur optimale initiale du vecteur $\mathbf{r}$ par la méthode des moindres carrés (paragraphe 2.5.1). Cette valeur optimale, notée $\mathbf{r}_0$, est utilisée comme valeur initiale pour la seconde étape. La seconde étape concerne l'identification des paramètres du modèle probabiliste et donc l'identification du vecteur $\underline{\mathbf{r}}$ et du vecteur $\boldsymbol{\delta}$ (paragraphe 2.5.2). Pour cela deux sous-étapes sont introduites. La première consiste à estimer une valeur optimale de $\boldsymbol{\delta}$, d'une part, par la méthode des moindres carrés avec une fonction coût usuelle différentiable et d'autre part, avec une fonction coût plus sophistiquée mais non différentiable. Nous verrons que la fonction coût non différentiable est plus pertinente que la différentiable. La seconde sous-étape consiste à estimer la valeur optimale de $\underline{\mathbf{r}}$ et $\boldsymbol{\delta}$ par la méthode du maximum de vraisemblance avec, pour valeur initiale, la valeur calculée à la première sous-étape par la fonction coût non différentiable.

### 2.5.1 Identification des paramètres du modèle moyen

Le modèle moyen du comportement de l'assemblage par vissage a été présenté au paragraphe 2.3. Le paramètre à identifier est le vecteur $\mathbf{r} = (a, b, \alpha)$ qui appartient au domaine $\Re = ]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times]0, 1[$. Sa valeur optimale est estimée en résolvant le problème d'optimisation suivant,

$$\mathbf{r}_0 = (a_0,\, b_0,\, \alpha_0) = \arg\min_{\mathbf{r}\in\Re} \int_0^{x_{max}} (y(x;\mathbf{r}) - \underline{y}^{exp}(x))^2\, dx \quad , \tag{2.10}$$

où $\underline{y}^{exp}(x) = (1/\nu_{exp}) \sum_{\ell=1}^{\nu_{exp}} y^{exp,\,\ell}(x)$ est la courbe expérimentale moyenne. La valeur optimale du paramètre est $\mathbf{r}_0 = (a_0,\, b_0,\, \alpha_0) = (32\,108,\, 0.01905,\, 0.00294)$, ces coefficients ayant les dimensions telles que le déplacement $x$ soit en mm, et la force $y$ en N pour la loi de comportement. La comparaison entre le modèle moyen et le résultat expérimental moyen est présentée à la figure 2.5.

La figure 2.5 montre que la courbe expérimentale moyenne est bien représentée par la courbe du modèle moyen identifié. Cette valeur optimale $\mathbf{r}_0$ du paramètre $\mathbf{r}$ du modèle moyen sera utilisée comme une valeur initiale pour l'identification des paramètres du modèle probabiliste.

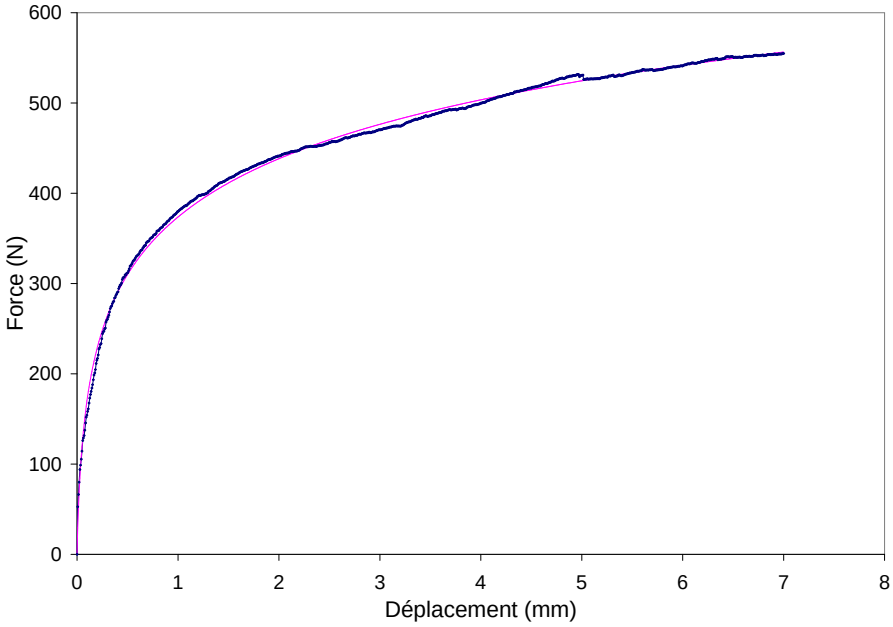



FIG. 2.5 – Comparaison de la courbe expérimentale moyenne (trait fin) avec le modèle moyen identifié (trait épais). Force appliquée en N (axe verticale) en fonction du déplacement en mm (axe horizontale).

### 2.5.2 Identification des paramètres du modèle probabiliste

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 2.4, il y a deux types de paramètre du modèle probabiliste à identifier : le vecteur $\underline{\mathbf{r}}$ et le vecteur $\boldsymbol{\delta}$ qui contrôle la dispersion. L'identification est faite en deux étapes pour estimer la valeur optimale $(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})^{opt}$ du paramètre $(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) \in \Re \times \Delta$. La première sous-étape consiste à utiliser la méthode des moindres carrés d'une part, avec une fonction coût différentiable et d'autre part, avec une fonction non différentiable. La seconde sous-étape est la mise en oeuvre de la méthode du maximum de vraisemblance.

#### Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés est une méthode usuelle en statistiques mathématiques utilisée pour calculer l'estimation de paramètres. Cette méthode consiste à minimiser la somme des carrés résiduels qui sont définis comme la différence entre une donnée expérimentale et la valeur correspondante calculée par le modèle. Le problème d'identification revient alors à un problème d'optimisation consistant à minimiser sur l'espace admissible la fonction coût (ou encore, fonction "objectif"). Nous considérons deux fonctions coûts, une fonction différentiable par rapport aux paramètres à estimer et une fonction coût non différentiable.

***Cas de la fonction différentiable***

Pour tout $\underline{\mathbf{r}}$ fixé dans $\Re$ et pour tout $\boldsymbol{\delta}$ fixé dans $\Delta$, nous introduisons la fonction coût suivante,

$$f(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = E\left\{\int_0^{x_{max}} \left(Y(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) - Y^{exp}(x)\right)^2 \, dx\right\} \quad . \tag{2.11}$$

Le problème d'identification est de trouver $(\underline{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\delta}_0)$ qui minimise cette fonction coût $f$ sur l'espace admissible $\Re \times \Delta$. En développant le membre à droite de l'Eq. (2.11), grâce à la linéarité de l'espérance mathématique et en tenant compte de l'indépendance des familles de variables aléatoires $\{Y(x; \underline{\mathbf{r}}, x \in [0, x_{max}]\}$ et $\{Y^{exp}(x), x \in [0, x_{max}]\}$, on vérifie que la minimisation de la fonction coût $f$ est équivalente à la minimisation de la fonction coût $g$ suivante,

$$g(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = \int_0^{x_{max}} \left(E\left\{(Y(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) - \underline{Y}(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}))^2\right\} + \left(\underline{Y}(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) - \underline{y}^{exp}(x)\right)^2\right) dx \quad , \tag{2.12}$$

où $\underline{Y}(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = E\left\{Y(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})\right\}$. Dans cette première sous-étape de la minimisation, nous utilisons la valeur optimale $\mathbf{r}_0 = (a_0,\, b_0,\, \alpha_0)$ du paramètre du modèle moyen identifiée dans le paragraphe 2.5.1 comme une valeur fixée dans la fonction coût de l'Eq. (2.12), qui ne dépend donc plus que du vecteur $\boldsymbol{\delta}$. Le problème d'identification devient à trouver la valeur optimale $\boldsymbol{\delta}_0$ de $\boldsymbol{\delta}$ dans $\Delta$, telle que,

$$\boldsymbol{\delta}_0 = \arg \min_{\boldsymbol{\delta} \in \Delta} \int_0^{x_{max}} \left(E\left\{(Y(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta}) - \underline{Y}(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta}))^2\right\} + \left(\underline{Y}(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta}) - \underline{y}^{exp}(x)\right)^2 dx \quad . \tag{2.13}$$

Nous pouvons détailler les termes de la fonction coût définie par l'Eq. (2.12). On a,

$$E\left\{(Y(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta}) - \underline{Y}(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta}))^2\right\} = E\left\{Y^2(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta})\right\} - \underline{Y}(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta})^2 \quad . \tag{2.14}$$

Par définition de l'espérance mathématique, nous avons,

$$\begin{aligned} \underline{Y}(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta}) &= E\left\{Y(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta})\right\} = E\{A(x+B)^\alpha - B^\alpha\} = E\{A\}\, E\{(x+B)^\alpha - B^\alpha\} \\ &= a_0 \int_0^{+\infty} \left((x+b)^\alpha - b^\alpha\right) p_B(b; b_0, \delta_B)\, db \quad , \end{aligned} \tag{2.15}$$

et

$$\begin{aligned} E\left\{Y^2(x; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\delta})\right\} &= E\left\{A^2((x+B)^\alpha - B^\alpha)^2\right\} = E\{A^2\} E\{((x+B)^\alpha - B^\alpha)^2\} \\ &= (\delta_A^2 + 1) a_0^2 \int_0^{+\infty} \left((x+b)^\alpha - b^\alpha\right)^2 p_B(b; b_0, \delta_B)\, db \quad . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pour simplifier l'écriture, nous posons

$$\begin{aligned} I_1(x; b_0, \delta_B) &= \int_0^{+\infty} \left((x+b)^\alpha - b^\alpha\right) p_B(b; b_0, \delta_B)\, db \quad , \\ I_2(x; b_0, \delta_B) &= \int_0^{+\infty} \left((x+b)^\alpha - b^\alpha\right)^2 p_B(b; b_0, \delta_B)\, db \quad . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dans ce cas, le problème de minimisation défini par l'Eq. (2.13) se réécrit,

$$\boldsymbol{\delta}_0 = \arg \min_{\boldsymbol{\delta} \in \Delta} \quad g(\boldsymbol{\delta}) \quad , \tag{2.18}$$

avec

$$g(\boldsymbol{\delta}) = (\delta_A^2 + 1)a_0^2 \int_0^{x_{max}} I_2(x; b_0, \delta_B)\, dx - a_0^2 \int_0^{x_{max}} I_1(x; b_0, \delta_B)^2\, dx$$

$$+ \int_0^{x_{max}} (a_0\, I_1(x; b_0, \delta_B) - \underline{y}^{exp}(x))^2\, dx \quad . \tag{2.19}$$

Notons que la fonction $g$ peut s'écrire

$$g(\delta_A, \delta_B) = \delta_A^2\, J_1(\delta_B) + J_2(\delta_B) \quad , \tag{2.20}$$

avec $J_1$ et $J_2$ tels que

$$J_1(\delta_B) = a_0^2 \int_0^{x_{max}} I_2(x; b_0, \delta_B)\, dx \quad ,$$

$$J_2(\delta_B) = J_1(\delta_B) - a_0^2 \int_0^{x_{max}} I_1(x; b_0, \delta_B)^2\, dx + \int_0^{x_{max}} (a_0\, I_1(x; b_0, \delta_B) - \underline{y}^{exp}(x))^2\, dx \quad . \tag{2.21}$$

Le problème de minimisation est résolu par la méthode d'essai. Pour évaluer la fonction coût, les intégrales $I_1(x, b_0, \delta_B)$ et $I_2(x, b_0, \delta_B)$, définies par l'Eq. (2.17), sont calculées par la méthode de Monte Carlo. Soit $I$ représentant $I_1$ ou $I_2$. Pour tout $x$ fixée, on peut écrire $I$ sous la forme,

$$I = \int_0^{+\infty} h(b)\, p_B(b; b_0, \delta_B) db = E\left\{h(B)\right\} \quad , \tag{2.22}$$

dans la quelle, $h(b)$ représente la fonction appropriée. Soient $B(\theta_1), \ldots, B(\theta_\nu)$, $\nu$ réalisations indépendantes de la variable aléatoire $B$ ayant pour densité de probabilité $p_B(b; \underline{b}_0, \delta_B)$. On a alors l'estimation suivante de $I$,

$$I \simeq \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} h\left(B(\theta_k)\right) \quad . \tag{2.23}$$

Concernant la génération des réalisations indépendantes de la variable aléatoire $B$, nous avons utilisé la méthode de transformation inverse. Elle est basée sur le résultat connu suivant : si $B$ est une variable aléatoire de fonction de répartition $F_B(b)$, et si $U$ est une variable aléatoire uniforme sur [0, 1], alors $B(\theta_k)$ est solution de $U(\theta_k) = F_B(B(\theta_k))$, c'est-à-dire, $B(\theta_k) = F_B^{-1}(U(\theta_k))$. La fonction de répartition de $B$ s'écrit,

$$\begin{aligned} F_B(b) &= \int_0^b p_B(b; b_0, \delta_B)\, db = C_0 \int_0^b \exp(-\lambda_1 t - \lambda_2 t^2) dt = \\ &= C_0 \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda_2}} \exp\left(\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\right) \left( erf\left(\sqrt{\lambda_2} b + \frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2}}\right) - erf\left(\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2}}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.24}$$

où $erf$ est la fonction définie par $erf(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-\varsigma^2} d\varsigma$. Par conséquent, nous déduisons la fonction inverse de la fonction de répartition de la variable aléatoire $B$,

$$F_B^{-1}(u) = k_1\, inverf(k_2\, u + k_3) - k_4 \quad , \tag{2.25}$$

dans la quelle, *inverf* est la fonction inverse de la fonction d'erreur et $k_1$, $k_2$, $k_3$ et $k_4$ sont des coefficients tels que,

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}},\ k_2 = \frac{1}{C_0}\sqrt{\frac{4\lambda_2}{\pi}}\exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\right),\ k_3 = erf\left(\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2}}\right),\ k_4 = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\ . \tag{2.26}$$

A titre indicatif, le graphe de la fonction $\delta_B \mapsto g(0, \delta_B)$ est montré sur la figure 2.6.

La solution trouvée par la méthode d'essai donne $\boldsymbol{\delta} = (\delta_A, \delta_B) = (0, 0)$, c'est-à-dire que le

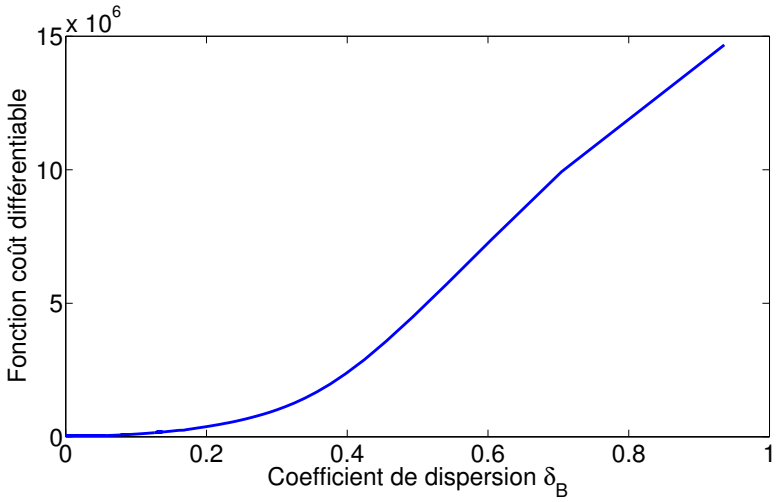



FIG. 2.6 – Graphe de la fonction coût $\delta_B \mapsto g(0, \delta_B)$.

modèle optimal, vu par cette fonction coût, est le modèle déterministe moyen. Ce résultat est cohérent, car la fonction coût ne tient compte que de la valeur expérimentale moyenne mais pas des fluctuations statistiques expérimentales. L'Eq. (2.13) montre, en effet, que la fonction côut est la somme du biais sur les moyennes et de la variance du modèle. Comme le modèle moyen est très bien ajusté sur la courbe expérimentale moyenne, une dispersion nulle dans le modèle donne le minimum absolu de la fonction coût. Dans ces conditions, une autre fonction coût doit être construite. C'est l'objet du paragraphe suivant.

#### *Cas de la fonction non différentiable*

On propose comme autre fonction coût, une fonction non différentiable construite en se basant sur le critère suivant : les courbes expérimentales appartiennent à la région de confiance des courbes aléatoires engendrées par le modèle probabiliste et associée à un niveau $P_c$ donné de probabilité. Soient $y^+(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$ et $y^-(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$, avec $x \in [0, x_{max}]$, les enveloppes supérieure et inférieure de la région de confiance de la courbe aléatoire, associées au niveau de probabilité $P_c$. Donc pour tout $x$ fixé, on a $\text{Proba}\{y^-(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) < Y(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) \leq y^+(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})\} = P_c$. Pour tout $x$ fixé, soient $y^{exp,-}(x) = \min_{\ell=1,\ldots,\nu} y^{exp,\ell}(x)$ et $y^{exp,+}(x) = \max_{\ell=1,\ldots,\nu} y^{exp,\ell}(x)$ les enveloppes inférieur et supérieur des réalisations expérimentales. La fonction coût non différentiable est alors construite pour minimiser la zone définie par la région grisée (ou la région en jaune pour la version en couleur) montrée sur la figure 2.7.

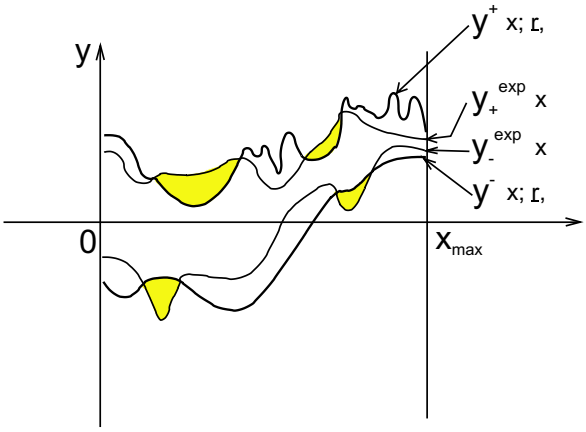



FIG. 2.7 – Schéma définissant la fonction coût non différentiable. Cette fonction coût mesure la région grisée.

Soit donc $\{x_1, ..., x_m\}$ avec $x_1 = 0$ et $x_m = x_{max}$ une partition à pas constant de l'intervalle $[0\, x_{max}]$. On introduit les deux vecteurs $\mathbf{z}^+(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = (z^+(x_1; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}), \ldots, z^+(x_m; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}))$ et $\mathbf{z}^-(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = (z^-(x_1; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}), \ldots, z^-(x_m; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}))$ tels que,

$$\begin{array}{ll} z^+(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = (y^+(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) - y^{exp,+}(x_k))\,(1 - Heav(y^+(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) - y^{exp,+}(x_k))) & , \\ z^-(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = (y^-(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) - y^{exp,-}(x_k))\,(1 - Heav(y^-(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) - y^{exp,-}(x_k))) & , \end{array} \tag{2.27}$$

dans laquelle, $t \mapsto Heav(t)$ est la fonction de Heaviside telle que $Heav(t) = 1$ si $t \geqslant 0$ et $Heav(t) = 0$ si $t < 0$. La fonction coût $(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) \mapsto J(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$ est définie par

$$J(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = \|\mathbf{z}^+(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})\|^2 + \|\mathbf{z}^-(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})\|^2 \tag{2.28}$$

La fonction coût définie par l'Eq. (2.28) n'est pas différentiable par rapport au paramètre $(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$. En fixant la valeur du paramètre $\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0$ calculée au paragraphe 2.5.1, la minimisation de la fonction permet de trouver la valeur optimale $\boldsymbol{\delta}_0^{opt}$ du paramètre de dispersion $\boldsymbol{\delta} = (\delta_A,\, \delta_B)$ du modèle probabiliste,

$$\boldsymbol{\delta}_0^{opt} = (\delta_{A_0},\, \delta_{B_0})^{opt} = \arg \min_{\boldsymbol{\delta} \in \Delta} J(\mathbf{r}_0,\, \boldsymbol{\delta}) \quad . \tag{2.29}$$

Pour le calcul des enveloppes supérieure et inférieure par la méthode des quantiles, pour chaque $x_k$, on introduit la statistique ordonnée $\widehat{y}_1 < \widehat{y}_2 < ... < \widehat{y}_{n_s}$ des $n_s$ réalisations $Y(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}; \theta_1)$, $\ldots$, $Y(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}; \theta_{n_s})$ de la variable aléatoire $Y(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$. Une estimation de $y^-(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$ et de $y^+(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$ est donnée par

$$\begin{array}{lll} y^-(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) \simeq \widehat{y}_{j^-} & \text{avec} & j^- = fix(n_s(1 - P_c)/2) \quad , \\ y^+(x_k; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) \simeq \widehat{y}_{j^+} & \text{avec} & j^+ = fix(n_s(1 + P_c)/2) \quad , \end{array} \tag{2.30}$$

où $fix(x)$ est la partie entière du réel $x$. La minimisation de la fonction coût définie par l'Eq. (2.28) a été réalisée par la méthode d'essai en tirant 200 valeurs dans le rectangle $[0, 0.04] \times [0, 0.25]$ La solution estimée est $\boldsymbol{\delta} = (\delta_A,\, \delta_B) = (0\,, 0.1703)$. A titre d'illustration, les figures 2.8 et 2.9 représente les deux coupes de la surface définie par la fonction coût pour $\delta_B = 0$ et $\delta_A = 0$.

La région de confiance du modèle probabiliste a été construite avec un niveau de probabi-

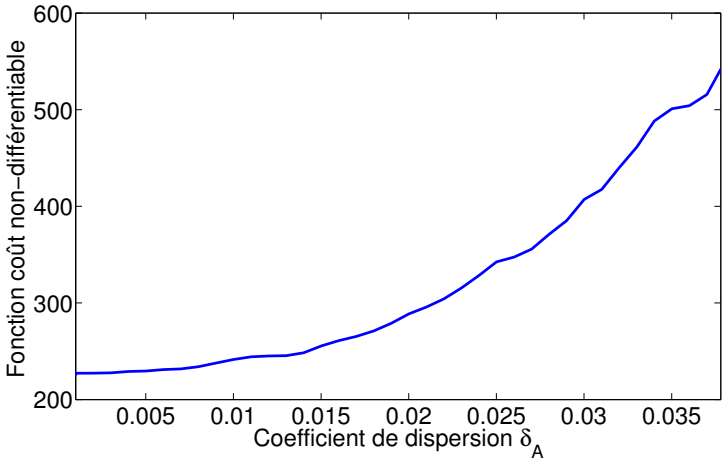



FIG. 2.8 – Graphe de la fonction $\delta_A \mapsto J(\mathbf{r}_0, (\delta_A, 0))$

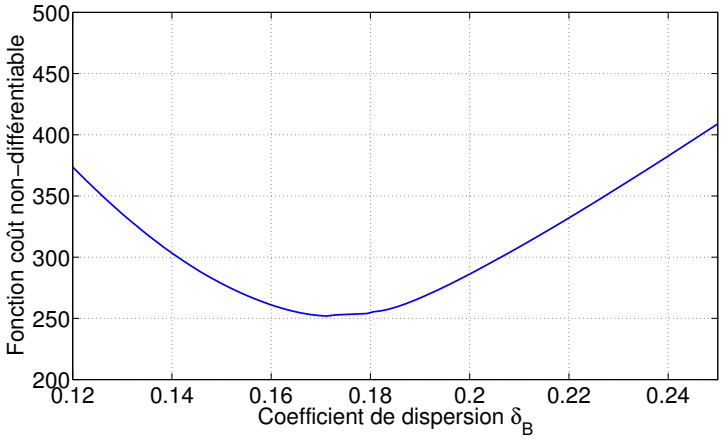



FIG. 2.9 – Graphe de la fonction $\delta_B \mapsto J(\mathbf{r}_0, (0, \delta_B))$

lité $P_c = 0.95$. La figure 2.10 montre une comparaison entre les courbes expérimentales et la région de confiance construite avec le modèle probabiliste identifiée avec les valeurs $\underline{r}_0 = (32\,108\,, 0.01905\,, 0.00294$ et $\boldsymbol{\delta}_0^{opt} = (0\,, 0.1703)$.

La figure 2.10 montre que le modèle probabiliste ainsi identifié donne déjà des prévisions satisfaisantes. Néanmoins, la méthode d'identification par les moindres carrés ne permet pas d'inclure dans la région de confiance toutes les courbes expérimentales. Nous allons voir, que la méthode du maximum de vraisemblance va permettre d'obtenir un meilleur modèle de prévision des courbes expérimentales.

### Méthode de maximum de vraisemblance

Dans ce paragraphe, on présente une autre méthode d'identification des paramètres, basée sur la méthode du maximum de vraisemblance, qui permet d'améliorer l'identification des paramètres

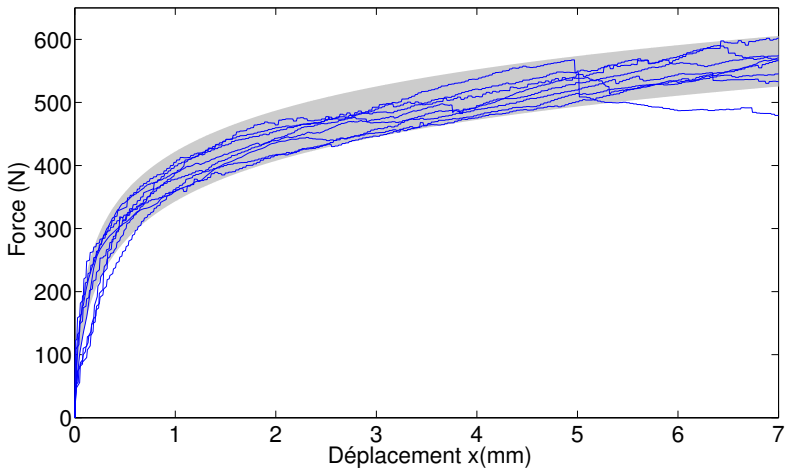



FIG. 2.10 – Comparaison des 8 courbes expérimentales (8 traits continus) avec la région de confiance (zone grise) construite avec le modèle probabiliste identifié par la méthode des moindres carrés avec la fonction coût non-différentiable.

effectuée par la méthode des moindres carrés avec la fonction coût non différentiable.
Soit

$$C(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = \int_0^{x_{max}} \left(Y(x; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) - \underline{y}^{exp}(x)\right)^2 \, dx$$

la variable aléatoire dont la fonction de densité de probabilité est notée $p_C(c; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$ avec $(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = ((\underline{a}, \underline{b}, \alpha), (\delta_A, \delta_B))$ est le vecteur à identifier dans l'espace admissible $\Re \times \Delta$. Soit $c_1^{exp}, \ldots, c_{\nu_{exp}}^{exp}$ les données expérimentales telles que

$$c_\ell^{exp} = \int_0^{x_{max}} \left(y^{exp,\ell}(x) - \underline{y}^{exp}(x)\right)^2 \, dx \quad , \quad \ell = 1, \ldots \nu_{exp} \quad .$$

Soit $\mathcal{L}(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$ la fonction log-vraisemblance définie sur $\Re \times \Delta$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que,

$$\mathcal{L}(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) = \sum_{\ell=1}^{\nu_{exp}} \log\left(p_C(c_\ell^{exp}; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\Delta})\right) \quad . \tag{2.31}$$

Le problème d'identification est donc de trouver la valeur optimale du paramètre $(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})^{opt}$ qui maximise la fonction log-vraisemblance,

$$(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})^{opt} = \arg \max_{(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) \in \Re \times \Delta} \mathcal{L}(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta}) \quad . \tag{2.32}$$

Pour tout $(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$ dans $\Re \times \Delta$, la fonction densité de probabilité $p_C(c; \underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$ est estimée par la méthode statistique non paramétrique utilisant la méthode des noyaux gaussiens pour laquelle les réalisations indépendantes de la variable aléatoire $C(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})$ sont construites par la méthode de Monte Carlo. Une analyse de convergence par rapport au nombre $n_s$ de tirages $\theta_1, ..., \theta_{n_s}$ pour la méthode de Monte Carlo a été menée.

$$n_s \mapsto conv(n_s) = \frac{1}{n_s} \sum_{\ell=1}^{n_s} \|Y(\theta_\ell)\|^2 \quad . \tag{2.33}$$

La figure 2.11 présente le graphe de la fonction $n_s \mapsto conv(n_s)$ pour $(\underline{a}, \underline{b}, \alpha, \delta_A, \delta_B) = (33\,208\,, 0.0108\,, 0.0024\,, 0.\,, 0.2658)$ (ce sera en fait la valeur optimale). La convergence est atteinte à partir de $n_s = 4000$ pour ces valeurs de $\underline{\mathbf{r}}$ et $\boldsymbol{\delta}$.

Le problème d'optimisation est résolue par une méthode de recherche aléatoire (méthode d'es-

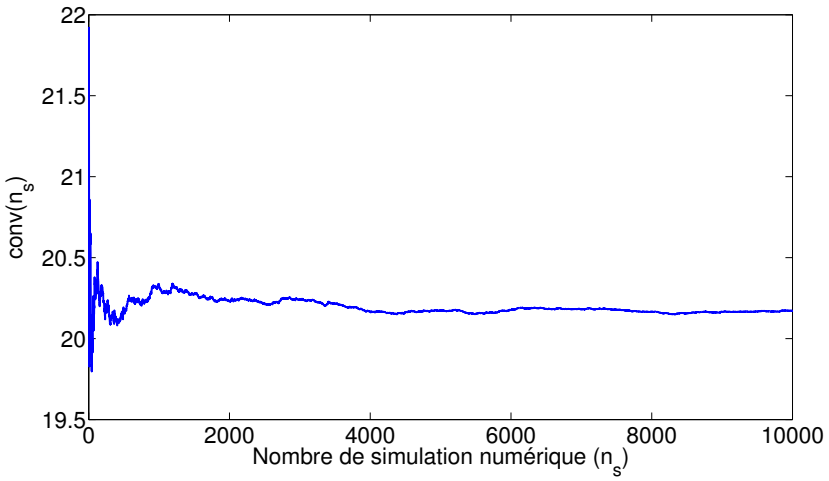



FIG. 2.11 – Convergence vis-à-vis du nombre de tirages. Graphe de la fonction $n_s \mapsto conv(n_s)$

.

sai) dans une partie de $\Re \times \Delta$ centrée autour du point optimal $\underline{r}_0 = (32\,108\,, 0.01905\,, 0.00294$ et $\boldsymbol{\delta}_0^{opt} = (0\,, 0.1703)$ qui a été déterminé précédemment. Cette partie est $[26\,000\,, 39\,000] \times [0.004\,, 0.03] \times [0.002\,, 0.0036] \times [0.\,, 0.15] \times [0.15\,, 0.5]$. A titre d'illustration, les figures 2.12, 2.13, 2.14, 2.15 et 2.16 montrent les coupes de l'hypersurface, définie par la fonction log-vraisemblance, par les hyperplans parallèles aux hyperplans définis par les axes et passant par le point optimal $\underline{r}_0 = (32\,108\,, 0.01905\,, 0.00294)$ et $\boldsymbol{\delta}_0^{opt} = (0\,, 0.1703)$. Nous remarquons que le graphe de la fonction $\delta_A \mapsto \mathcal{L}(\underline{\mathbf{r}}_\mathbf{0}, (\delta_A, \{\delta_B\}_0^{opt})$ est une fonction monotone décroissante. En fait, comme précédemment, la valeur optimale conduira à $\delta_A = 0$, c'est-à-dire, à une valeur déterministe de $A$. D'autre part les fluctuations qui apparaissent sur la figure 2.15 sont liées à un manque de convergence par rapport à $n_s$. Cela n'est pas gênant car la solution optimale correspond à $\delta_A = 0$ pour laquelle la convergence est atteinte.

La valeur optimale estimée par le maximum de vraisemblance est $(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})^{opt} = (\underline{a}, \underline{b}, \alpha, \delta_A, \delta_B)^{opt} = (33\,208\,, 0.0108\,, 0.0024\,, 0.\,, 0.2658)$.

La région de confiance construit avec le modèle stochastique identifié par le maximum de vraisemblance, associé au niveau de probabilité $P_c = 0,95$, et correspondant au paramètre optimal $(\underline{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\delta})^{opt} = (\underline{a}, \underline{b}, \alpha, \delta_A, \delta_B)^{opt} = (33\,208\,, 0.0108\,, 0.0024\,, 0.\,, 0.2658)$ est montrée à la figure 2.17. Cette figure montre que l'on a une bonne prévision avec ce modèle probabiliste.

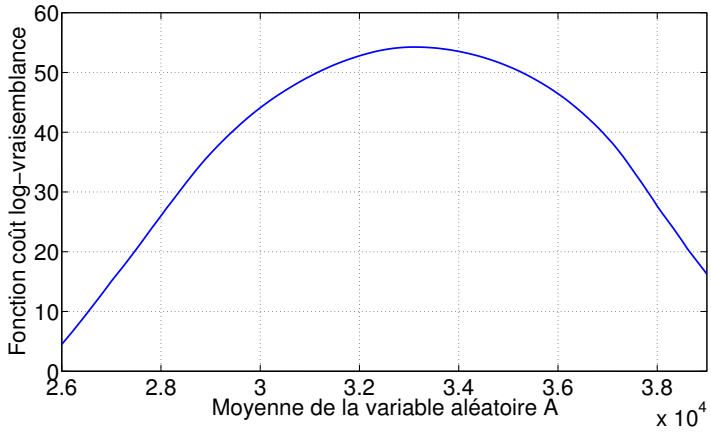



FIG. 2.12 – Graphe de la fonction log-vraisemblance $\underline{a} \mapsto \mathcal{L}((\underline{a}, \underline{b}_0, \alpha_0), \boldsymbol{\delta}_0^{opt})$

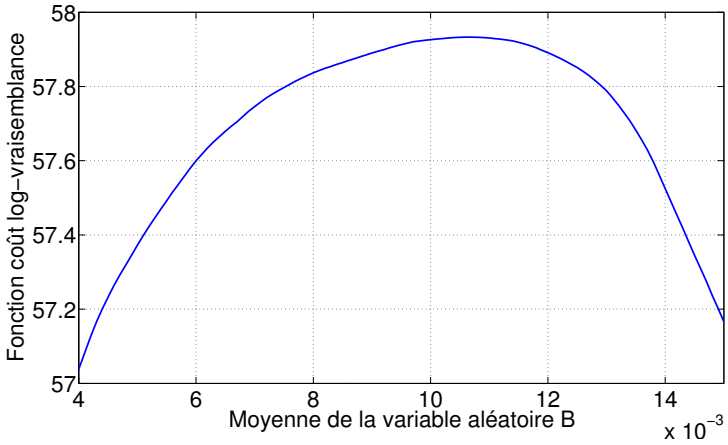



FIG. 2.13 – Graphe de la fonction log-vraisemblance $\underline{b} \mapsto \mathcal{L}((\underline{a}_0, \underline{b}, \alpha_0), \boldsymbol{\delta}_0^{opt})$

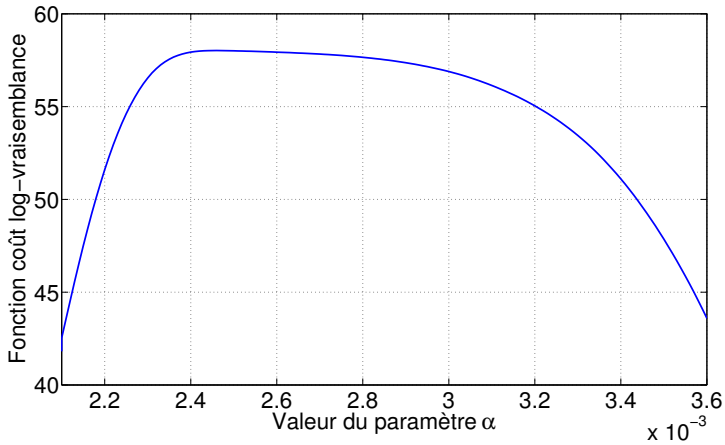



FIG. 2.14 – Graphe de la fonction log-vraisemblance $\alpha \mapsto \mathcal{L}((\underline{a}_0, \underline{b}_0, \alpha), \boldsymbol{\delta}_0^{opt})$

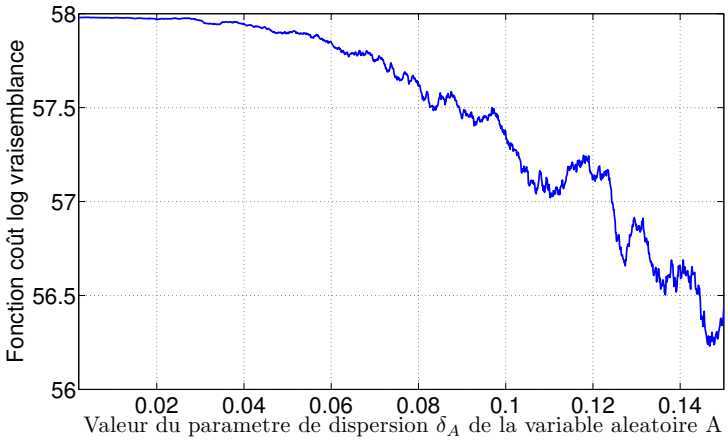



FIG. 2.15 – Graphe de la fonction log-vraisemblance $\delta_A \mapsto \mathcal{L}(\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}, (\delta_A, \{\delta_B\}_0^{opt}))$

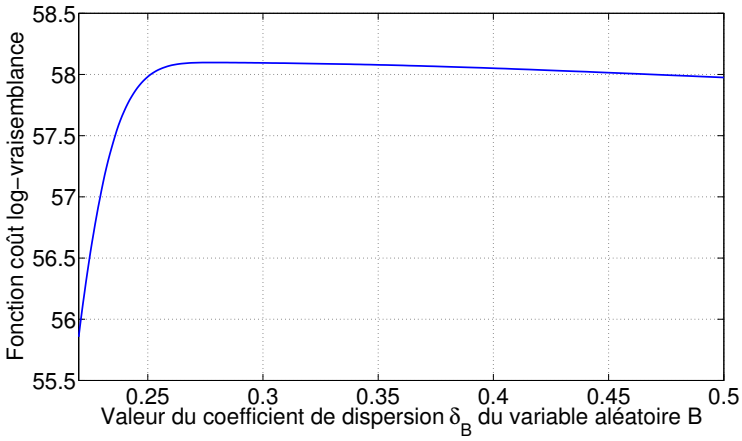



FIG. 2.16 – Graphe de la fonction log-vraisemblance $\delta_B \mapsto \mathcal{L}(\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}, (\{\delta_A\}_0^{opt}, \delta_B))$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit et identifié la loi de comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage d'une plaque CPC avec un montant métallique, pour la température ambiante. L'identification a été faite à partir de mesures que nous avons réalisées au CSTB. Nous avons décrit le banc expérimental et les configurations mesurées. Nous avons développé un modèle moyen et nous l'avons identifié expérimentalement. Puis, pour tenir compte de la variabilité des résultats expérimentaux, nous avons développer un modèle probabiliste que nous avons identifié avec les mesures expérimentales.

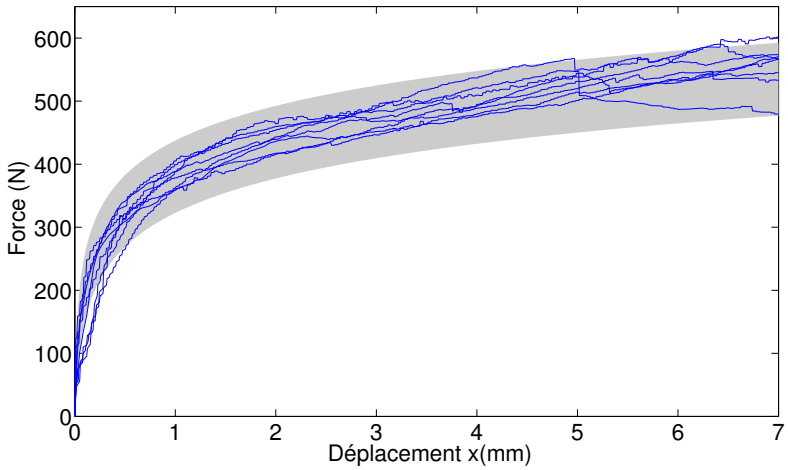



FIG. 2.17 – Comparaison des 8 courbes expérimentales (8 traits continus) avec la région de confiance (zone grise) construite avec le modèle probabiliste identifié par la méthode de maximum de vraisemblance.

# Chapitre 3

# Caractérisations expérimentales thermiques et thermomécaniques d'une plaque CPC

*Pour une modélisation complète de la cloison légère, il est nécessaire de déterminer les caractéristiques thermiques et thermomécaniques de la plaque CPC, soumise à une charge thermique définie par la courbe ISO 834, sachant que ces caractéristiques dépendent de la vitesse de montée en température. Nous présentons dans ce chapitre l'ensemble des essais de caractérisation. Notons que chaque essai que nous avons réalisé au CSTB a été fait sur parement simple et sur parement double :*
*- essais dédiés aux mesures de la dilatation thermique et de la courbure thermique de la plaque CPC.*
*- essais dédiés aux mesures de la perte de masse et de la température sur la face exposée et la face non exposée de la plaque CPC, après* 30 *minutes de charge thermique équivalente à celle définie par la courbe ISO 834.*
*- essais dédiés aux mesures du comportement en traction et du comportement en compression de la plaque CPC, à plusieurs instants de l'évolution temporelle de la charge thermique équivalente à celle définie par la courbe ISO 834.*

## 3.1 Présentation du banc de charge thermique (BCT)

Concernant la charge thermique, un banc essai de charge thermique (BCT) (voir la figure 3.1) a été développé au CSTB dans le cadre de la thèse de S. Sakji [61]. Ce banc peut reproduire un flux de chaleur équivalent à celui induit par la charge thermique définie par la courbe ISO 834. Le BCT se compose d'un panneau radiant et d'un chariot mobile automatisé. Un porte-éprouvette a été fixé sur le chariot mobile pour tenir l'éprouvette. Le panneau radiant est constitué d'un matériau réfractaire chauffé par un gaz combustible qui assure le rôle de source de chaleur par rayonnement.

FIG. 3.1 – Banc de charge thermique

Pour une charge thermique définie par la courbe ISO 834, le flux de chaleur que reçoit l'éprouvette est reproduit soit en modifiant le débit de gaz combustible soit en variant la distance entre l'éprouvette et le panneau radiant. Ce banc de charge thermique (BCT) a été développé en faisant varier cette distance et en supposant que l'émittance du panneau radiant est constante tout au long de la durée d'un essai. Pour ce faire, l'éprouvette est placée sur le porte-éprouvette fixé au chariot mobile mû par un moteur pas à pas et l'opération de charge thermique des éprouvettes a lieu une fois que le panneau radiant a atteint son régime permanent. La combinaison d'une source de chaleur utilisée en régime permanent et du déplacement de l'éprouvette contrôlé au millimètre près assure une excellente reproductibilité des charges thermiques.
Le mouvement du chariot mobile est défini par des procédures suivantes :
- Mesurer la température de surface du panneau radiant lors que le BCT atteint son régime permanent. Les mesures montrent que le champ de température au niveau de la surface du panneau radiant ont une bonne homogénéité et que le panneau radiant offre une puissance nominale suffisante pour reproduire l'historique d'une charge thermique spécifiée.
- Calculer le flux total incident sur une éprouvette lors d'un essai de résistance au feu.

- Calculer la position théorique de l'éprouvette par rapport au panneau radiant en utilisant la loi de Stéfan-Boltzman.
- Imposer le mouvement du chariot à l'aide d'un variateur dans lequel la loi d'évolution temporelle a été implémentée. La précision du déplacement du chariot est de l'ordre du millimètre.

## 3.2 Mesure de la dilatation thermique et de la courbure thermique

### 3.2.1 Objectif des mesures

Ces essais consistent à mesurer les déplacements de plusieurs points (7 points) de l'éprouvette pour calculer la dilatation thermique et la courbure thermique des plaques CPC et soumise à la charge thermique par le BCT. Le flux de chaleur est équivalent à celui donné par la courbe ISO 834.

### 3.2.2 Configuration expérimentale

Dix éprouvettes de plaque CPC en parement simple et dix en parement double, rectangulaires, de même dimension $100 \times 400$ mm$^2$, ont été testées. Pour les essais de parement double, les deux plaques CPC sont fixées par vissage avec une vis au centre. Le BCT sollicite thermiquement une face des éprouvettes. Théoriquement, grâce aux propriétés de symétrie de la source de charge thermique et de l'éprouvette, on devrait utiliser 5 capteurs pour mesurer la dilatation thermique et la courbure thermique : un capteur mesure le déplacement du point au milieu de la plaque, 2 capteurs mesurent le déplacement des points sous deux tiges en aluminium vissées à chaque extrémité de la plaque et deux autres capteurs mesurent le déplacement de ces deux tiges. Mais en réalité, ce montage peut entraîner une petite rotation de l'ensemble du système. Nous avons donc ajouté deux capteurs de chaque côté de manière à contrôler l'estimation faite avec les 5 points de la dilatation thermique et de la courbure thermique. Les positions de capteurs sont montrés sur le schéma de la figure 3.2.

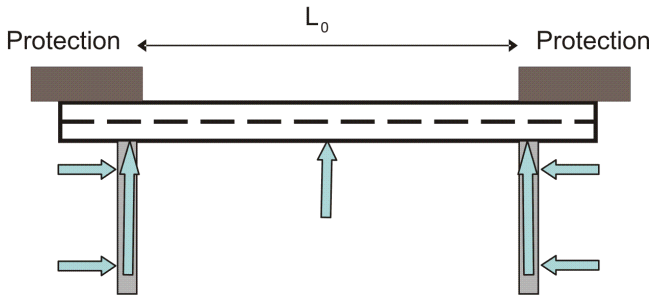



Fig. 3.2 – Position des capteurs de déplacement de l'essai de déformation thermique.

Dans la figure 3.2, $L_0$ est la valeur initiale avant l'application de la charge thermique. Les flèches correspondent à l'emplacement des capteurs de déplacement. Un déplacement suivant le sens des flèches est un déplacement négatif. Deux plaques d'isolation thermique sont mise en place aux deux extrémités de la plaque CPC. Les éprouvettes sont sollicitées par le BCT pendant 30 minutes. Les valeurs des capteurs de déplacement sont mesurées toutes les 5 secondes.

La figure 3.3 montre le banc de mesure (éprouvette et capteurs). Il est à noter que le capteur de mesure du déplacement au point milieu de la plaque a été décalé vers le bas par rapport à la ligne moyenne de la plaque pour des questions de montage, mais ce décalage ne gêne pas car les déplacements sont uniformes sur la hauteur de l'éprouvette. Il est noté aussi que, pour les essais de plaque CPC en parement double, les capteurs de mesure de déplacement ont été mis sur la seconde plaque.

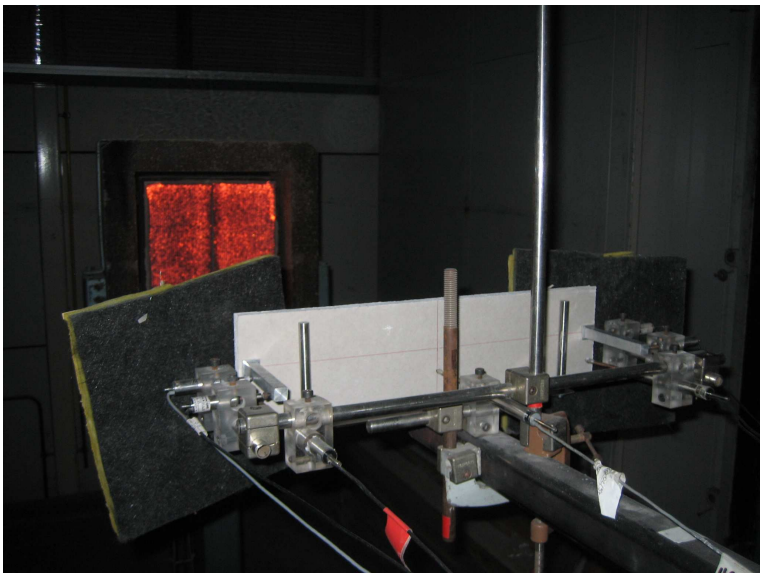


FIG. 3.3 – Banc de mesure (éprouvette et capteurs de déplacement) pour l'essai de déformation thermique.

### 3.2.3 Résultats et analyse

#### Résultats d'essais

A la figure 3.4, nous présentons les mesures d'un essai de la plaque CPC en parement simple. Nous constatons que dans cet essai, le déplacement du capteur au centre prend une valeur négative pendant environ 18 mn (soit 1080 s) de charge thermique par le BCT, et après il change le signe. Cela signifie qu'au bout de 18 mn la plaque s'oriente vers le feu, après elle s'inverse. La figure 3.5 montre la déformation de l'éprouvette en parement simple après 15 mn de charge thermique par le BCT.

### Calcul de la courbure thermique et de la dilatation thermique

La dilatation thermique et la courbure thermique de la plaque CPC soumise une charge thermique sont calculées analytiquement comme il est expliqué ci-dessous.
Soient $\Delta l(t)$ la dilatation et $\omega(t)$ la courbure de la plaque à l'instant $t$ dus à la charge thermique par le BCT. En chaque point d'appui, le déplacement de la plaque peut s'exprimer à l'aide d'une translation et d'une rotation de section. Le schéma (voir les figures 3.6 et 3.7) présentent l'état déformé de la plaque. Dans le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ (voir figure 3.7), par convention le capteur indique des valeurs négatives quand la plaque se bombe vers le feu. Soient $\mathbf{U}_1(t)$ et $\mathbf{U}_2(t)$ les vecteurs du déplacement des points 1 et 2 et soient $\Omega_G(t)$ et $\Omega_D(t)$ les rotations des tiges en aluminium à gauche et à droite. A cause de la taille de l'éprouvette et du niveau de déformation thermique faible, la courbure thermique de la plaque CPC est calculée en supposant que les déplacements sont petits. Nous pouvons donc calculer la courbure en négligeant la translation.
Soit $r(t) = 1/\omega(t)$ le rayon de courbure, et soient $(a(t), b(t))$ les coordonnées du centre du cercle dans le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ à l'instant $t$ de la charge thermique par le BCT. Soit $(x, y)$ les coordonnées d'un point du plan dans le repère. L'équation du cercle est :

$$(x - a(t))^2 + (y - b(t))^2 = r(t)^2 \quad . \tag{3.1}$$

En prenant l'origine du repère au point 1 l'équation, on a la relation,

$$a(t)^2 + b(t)^2 = r(t)^2 \quad . \tag{3.2}$$

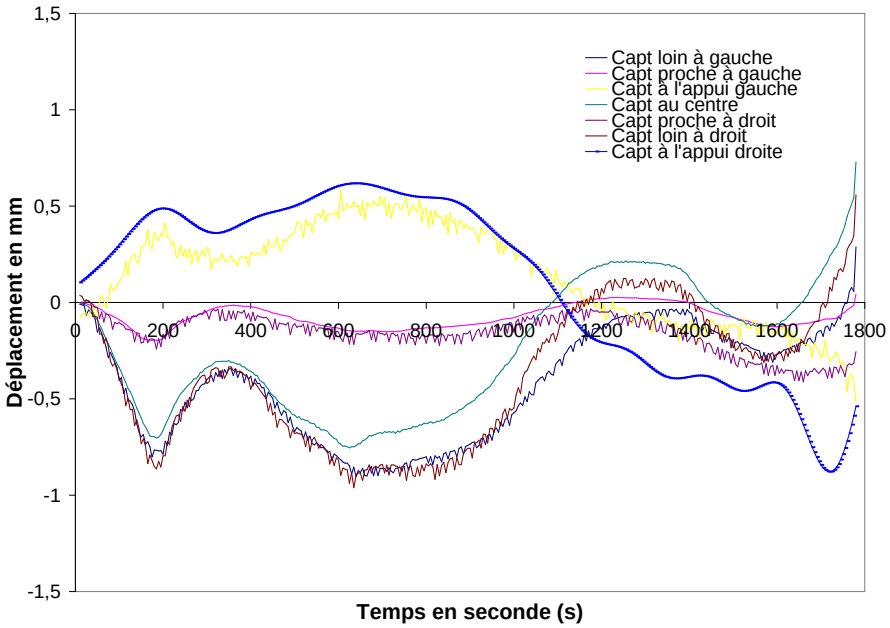



FIG. 3.4 – Mesures d'un essai de déformation thermique. Le déplacement du capteur au centre prend une valeur négative lorsque la plaque est orientée vers le feu.

FIG. 3.5 – Déformation de la plaque CPC en parement simple après 15 mn de charge thermique par le BCT .

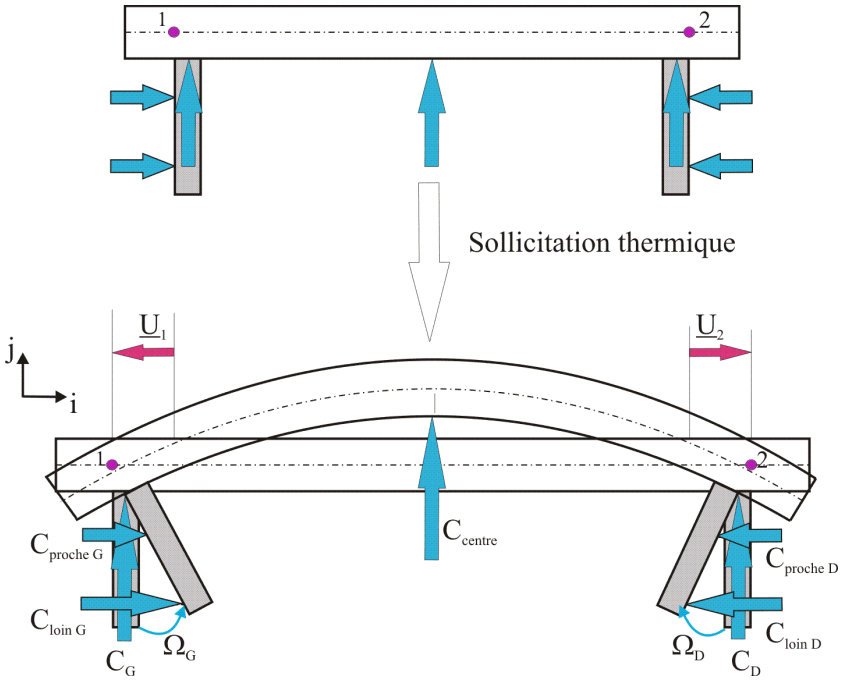



FIG. 3.6 – Déformation de la plaque CPC induite par la charge thermique.

Dans ce repère dont l'origine est au point 1, nous savons que $a(t)$ est positif et que $b(t)$ est négatif si la concavité est tournée vers le feu (cas de la figure). Soient $(x_2, y_2)$ et $(x_3, y_3)$ les coordonnées des points 2 et 3 (voir figure 3.7) dans le repère dont l'origine est au point 1. Ces

deux points étant sur le cercle, on a les relations,

$$\begin{cases} (x_2(t) - a(t))^2 + (y_2(t) - b(t))^2 = a(t)^2 + b(t)^2 & , \\ (x_3(t) - a(t))^2 + (y_3(t) - b(t))^2 = a(t)^2 + b(t)^2 & . \end{cases} \tag{3.3}$$

En connaissant les cordonnées des points 2 et 3 à chaque instant de la charge thermique, données par les capteurs de déplacement, nous pouvons déterminer les cordonnées du centre de cercle $a(t)$ et $b(t)$ en résolvant ce système,

$$\begin{cases} a(t) = \{y_2(t)(x_3(t)^2 + y_3(t)^2) - y_3(t)(x_2(t)^2 + y_2(t)^2)\}\{2(y_3(t)x_2(t) - y_2(t)x_3(t))\}^{-1} & , \\ b(t) = \{x_3(t)^2 - 2x_3(t)a(t) + y_3(t)^2\}\{2y_3(t)\}^{-1} & . \end{cases} \tag{3.4}$$

Une fois que les cordonnées du centre de cercle sont déterminées, la courbure de la plaque et l'angle de rotation des tiges en aluminium sont données par,

$$\begin{cases} \omega(t) = -\{a(t)^2 + b(t)^2\}^{-1/2}\, sign(y_3(t) - \frac{x_3(t)}{x_2(t)} y_2(t)) & , \\ \tan \Omega_G(t) = -a(t)/b(t), \\ \tan \Omega_D(t) = \{L_0 - a(t)\}\{b(t) - y_2(t)\}^{-1} & , \end{cases} \tag{3.5}$$

La dilatation de la plaque CPC, mesurée suivant **i**, qui est le déplacement relatif entre les deux points 1 et 2, s'écrit,

$$\Delta l(t) =< \mathbf{U}_2(t) \; - \; \mathbf{U}_1(t)\,, \mathbf{i} > \quad , \tag{3.6}$$

avec $< .,. >$ le produit scalaire. En notant $e$ l'épaisseur de la plaque, le déplacement du point situé au niveau de l'appui gauche, est défini (voir schéma de la figure 3.8) par :

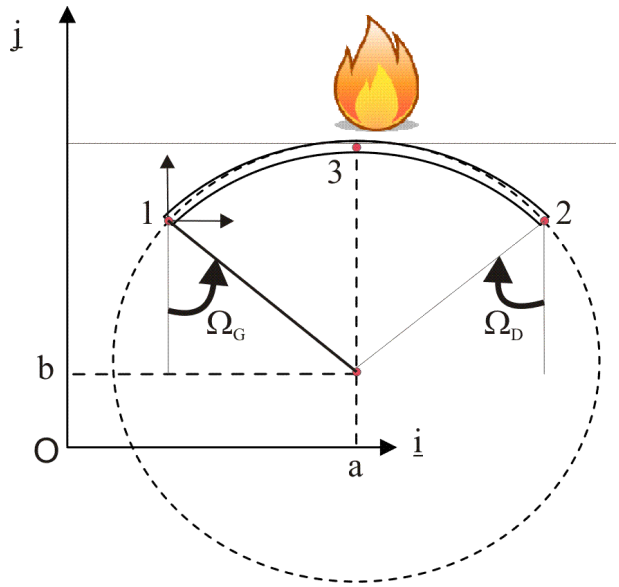



FIG. 3.7 – Plaque se bombe vers le feu.

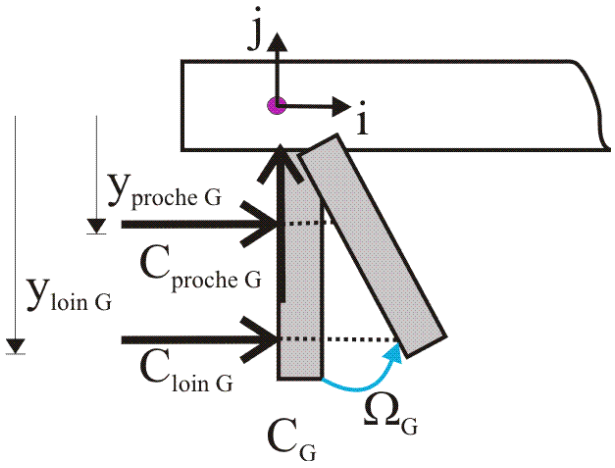



FIG. 3.8 – Schéma des déplacements au niveau de l'appui gauche.

- Une rotation $\Omega_G(t)$

$$\begin{cases} C^{ro}_{procheG}(t) = -y_{procheG}\ \tan\Omega_G(t) \quad , \\ C^{ro}_{loinG}(t) = -y_{loinG}\ \tan\Omega_G(t) \quad , \\ C^{ro}_{G}(t) = \frac{e}{2}(\frac{1}{\cos\Omega_G(t)} - 1) \quad . \end{cases} \tag{3.7}$$

- Un vecteur de translation $\mathbf{U}$

$$\begin{cases} C^{tr}_{procheG}(t) = C^{tr}_{loinG}(t) = -U_{1_i} - U_{1_j}\ \tan\Omega_G(t) \quad , \\ C^{tr}_{G}(t) = -U_{1_j} + U_{1_i}\ \tan\Omega_G(t) \quad , \end{cases} \tag{3.8}$$

avec $\mathbf{U}_k = (U_{k_i}, U_{k_j})$. Par combinaison des deux équations, on obtient,

$$\begin{cases} C_{procheG}(t) = -U_{1_i} - U_{1_j}\ \tan\Omega_G(t) - y_{procheG}\ \tan\Omega_G(t) \quad , \\ C_{loinG}(t) = -U_{1_i} - U_{1_j}\ \tan\Omega_G(t) - y_{loinG}\ \tan\Omega_G(t) \quad , \\ C_G(t) = -U_{1_j} + U_{1_i}\ \tan\Omega_G(t) + \frac{e}{2}(\frac{1}{\cos\Omega_G(t)} - 1), \end{cases} \tag{3.9}$$

En supposant que la rotation est petite, c'est-à-dire $\cos\Omega_G(t) \simeq 1$, le déplacement du point 1 est déterminé par les valeurs mesurées avec les capteurs. De même, le déplacement du point 2 est donné par,

$$\begin{cases} U_{1_i}(t) = -C_{proche\,G}(t) - \Omega_G(t)(y_G - C_G(t)) \quad , \\ U_{2_i}(t) = C_{proche\,D}(t) - \Omega_D(t)(y_D - C_D(t)) \quad . \end{cases} \tag{3.10}$$

La dilatation thermique et la courbure thermique des dix essais de plaque CPC en parement simple ont été calculées et présentées sur les figures 3.9 et 3.10.

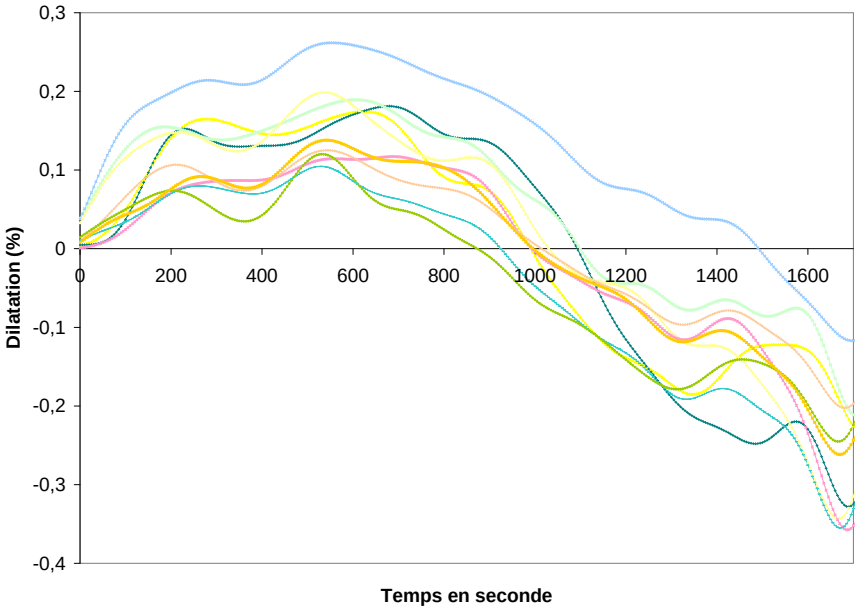



FIG. 3.9 – Dilatation thermique de la plaque CPC en parement simple pendant 30 mn (soit 1800 s) de charge thermique par le BCT. Les dix courbes représentent les résultats de dix essais.

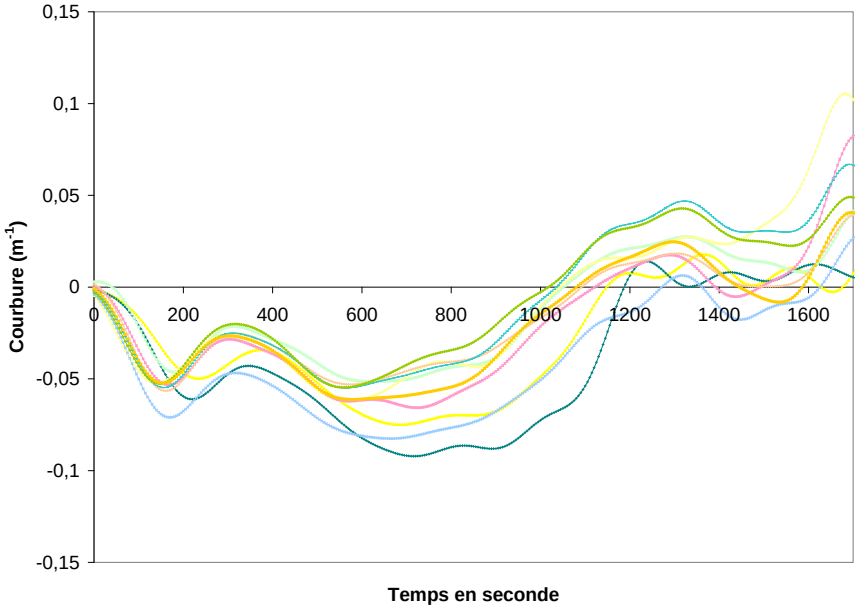



FIG. 3.10 – Courbure thermique de la plaque CPC en parement simple pendant 30 mn (soit 1800 s) de charge thermique par le BCT. Les dix courbes représentent les résultats de dix essais.

Les résultats d'essais montre que la plaque CPC en parement simple se dilate très fortement pendant les 5 premières minutes de charge thermique (la pente des courbes de la dilatation thermique augmente), entre 5 et 7 minutes la dilatation est quasi-inchangée, elle atteint sa valeur

maximale après 10 minutes et est de l'ordre de 0.15%. A partir de 10 minutes, la plaque à tendance à se contracter. Elle revient à sa configuration initiale après environ 18 à 20 minutes. Au bout de 20 minutes, on observe le phénomène inverse. La plaque se contracte et sa concavité est orientée à l'opposé de la source thermique. La courbure thermique de la plaque CPC en parement simple varie de la même manière. Elle prend une valeur négative lorsque la concavité est orientée vers la source thermique. La courbure augmente pendant les 10 premières minutes pour atteindre sa valeur maximale ($\simeq 0.06$ m$^{-1}$), puis elle diminue.

Les figures 3.11 et 3.12 montrent les résultats des dix essais en parement double. Nous constatons que la dilatation thermique de la plaque CPC en parement double, soumise à la charge thermique par le BCT, est identique à celle de la plaque en parement simple mais avec un décalage du temps. La dilatation thermique augmente très fortement pendant les 7 premières minutes, puis entre 7 et 15 minutes, elle est quasi-inchangée. A partir de 15 minutes, la dilatation continue à augmenter jusqu'à 25 minutes et atteint sa valeur maximale de ($\simeq 0.15\%$). Après 25 minutes, elle diminue. La courbure de la plaque CPC en parement double atteint sa valeur maximale qui est environ 0.05 m$^{-1}$. Il est aussi à noter que la variabilité du résultat des essais en parement double est plus grande que celle des essais en parement simple.

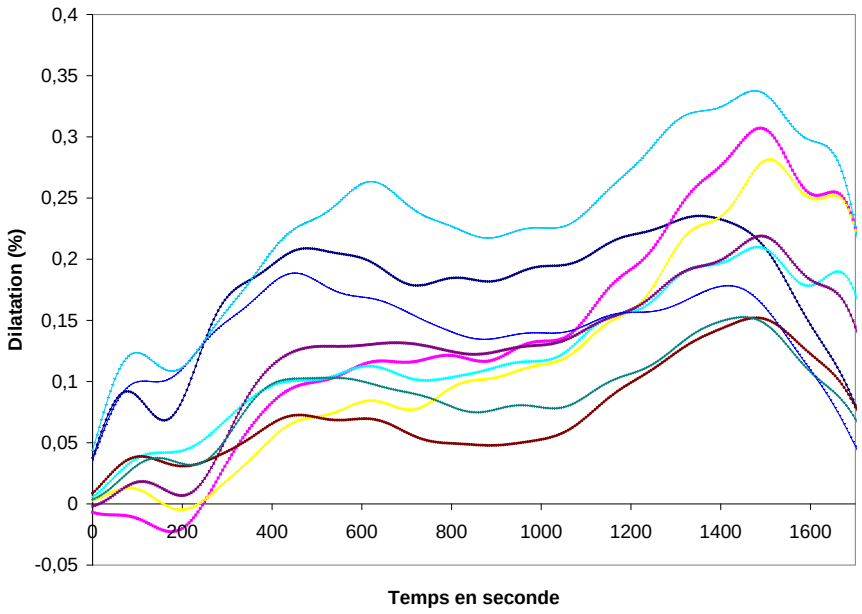



FIG. 3.11 – Dilatation thermique de la plaque CPC en parement double pendant 30 mn (soit 1800 s) de charge thermique par le BCT. Les dix courbes représentent les résultats de dix essais.

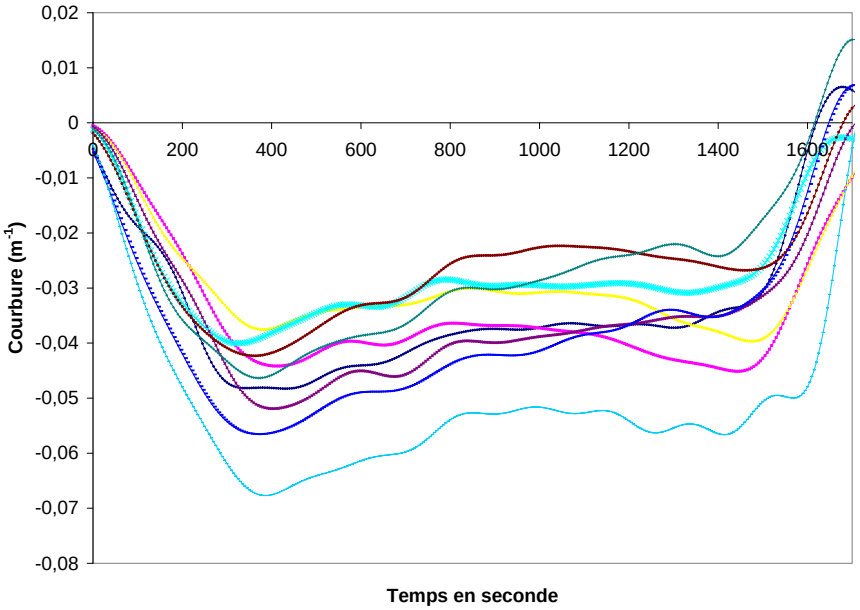



FIG. 3.12 – Courbure thermique de la plaque CPC en parement double pendant 30 mn (soit 1800 s) de charge thermique par le BCT. Les dix courbes représentent les résultats de dix essais.

## 3.3 Mesure de la température et de la perte de masse de la plaque CPC soumise à la charge thermique

### 3.3.1 Objectif des mesures

Ces essais ont pour but de mesurer la température de la face exposée et de la face non exposée ainsi que l'évolution de la masse de la plaque CPC soumise à la charge thermique par le BCT. Ces essais ont été réalisés pour mieux comprendre le comportement thermique de la plaque CPC.

### 3.3.2 Configuration expérimentale

Pour ces essais, nous avons utilisé les éprouvettes de même dimension que celles des essais de déformation thermique présentés au paragraphe 3.2. Les capteurs sont des thermomètres collés sur l'éprouvette et permettant de mesurer la température pendant environ 30 minutes de charge thermique par le BCT. La masse de la plaque a été mesurée avec une balance de précision, d'une part avant le début des essais et d'autre part, après un instant pré-choisi pour estimer la perte de masse des éprouvettes. Des essais de plaque en parement simple et en parement double ont été réalisés.

### 3.3.3 Résultats d'essai

Les figures 3.13 et 3.14 montrent les résultats des essais de mesure de température pour 5 plaques et de mesure de la perte de masse pour 5 autres plaques CPC en parement simple.

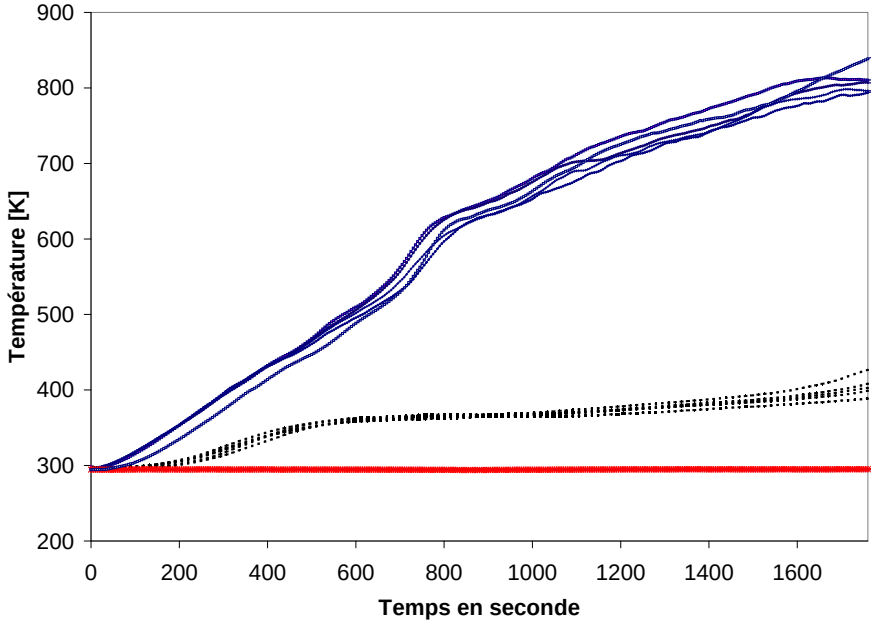



FIG. 3.13 – Température pour chacune des deux faces de la plaque en parement simple. Les traits minces continus représentent la température sur la face exposée, les traits en tirets représentent la température sur la face non exposée et les traits épais continus représentent la température ambiante.

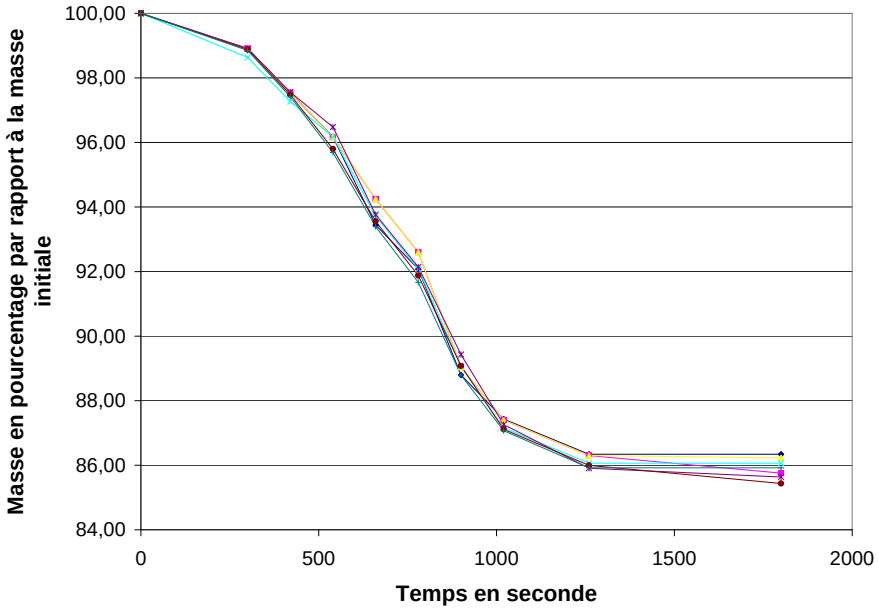



FIG. 3.14 – Evolution de la masse en pourcentage par rapport à la masse initiale de 5 plaques CPC en parement simple sous une charge thermique selon courbe ISO 834.

En analysant les résultats des mesures de la température et de la perte de masse pour les plaques CPC en parement simple, nous constatons que :
- entre 0 et 5 minutes de charge thermique, la température de la face exposée augmente très fortement, tandis que celle de la face non exposée ne croit pas significativement. La perte de masse est aussi petite dans cette phase,
- entre 5 et 7 minutes, la température de la face non exposée commence à augmenter, la pente de la courbe de perte de masse croît simultanément ,
- entre 7 et 10 minutes, la vitesse d'augmentation de la température de la face exposée diminue,
- entre 10 et 18 à 20 minutes, la courbe de la température sur la face non exposée est une droite horizontale, ce qui signifie que la température de la face non exposée est quasi-inchangée,
- à partir de 18 à 20 minutes, la température de la face non exposée croit de plus en plus. La vitesse de perte de masse diminue (la pente de la courbe décroît).
Les figures 3.15 et 3.16 montrent les résultats expérimentaux pour la température et pour la perte de masse de 5 plaques en parement double.

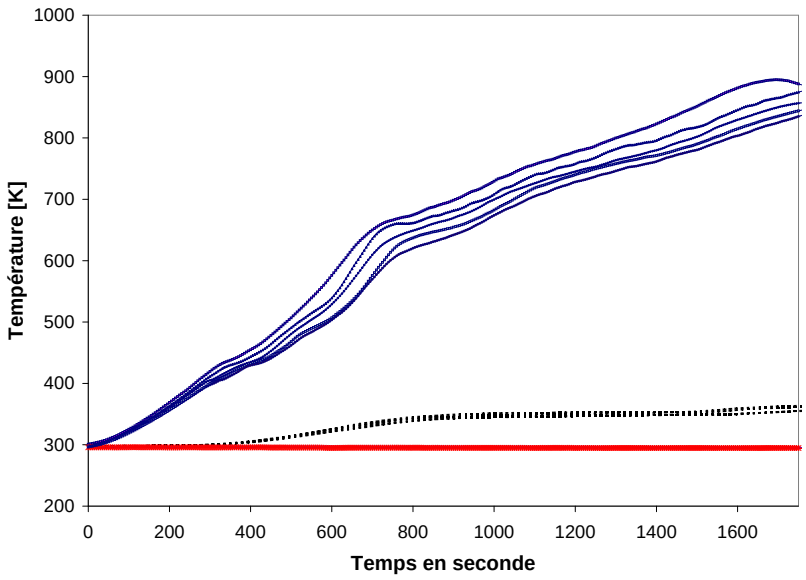



Fig. 3.15 – Température sur chacune des deux faces de la plaque en parement double. Les 5 traits minces continus représentent la température sur la face exposée. Les 5 traits en tirets représentent la température sur la face non exposée. Le trait épais continu représente la température ambiante pour les 5 essais.

Nous observons que l'évolution de la température sur la face exposée et sur la face non exposée d'une part, et la perte de masse d'autre part, de la plaque CPC en parement double, sont identiques à celles de la plaque CPC en parement simple mais avec un décalage temporel. Dans les 7 premières minutes de la charge thermique, la température sur la face non exposée n'évolue pas et la perte de masse est petite. Entre 7 et 15 minutes, la température de la face non exposée augmente ainsi que la perte de masse. De 15 minutes à 25 minutes, la température de la face non exposée est constante (palier). A partir de 25 minutes, la température recommence à augmenter.

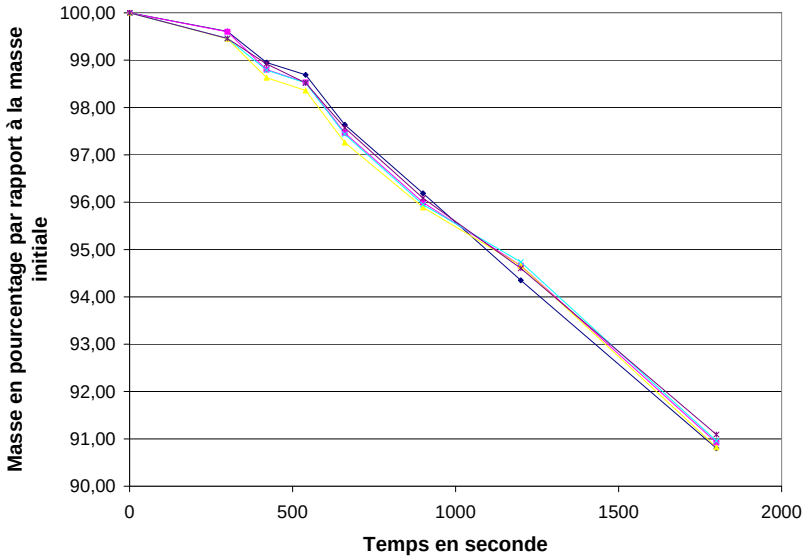



FIG. 3.16 – Evolution de la masse en pourcentage par rapport à la masse initiale de 5 plaques CPC en parement double sous une charge thermique selon la courbe ISO 834.

Comme le flux thermique délivré par le banc expérimental de charge thermique présente une bonne reproductibilité, la variabilité observée de la température mesurée sur la face exposée ne peut être attribuée qu'aux variabilités des propriétés géométriques, thermiques et hydriques des plaques CPC. Il est noter que les erreurs de mesures expérimentales sont très petites puisque les mesures sont effectuées de la même manière sur les deux faces et que la température mesurée sur la face non exposée ne présente pas de dispersion significative.

### 3.3.4 Analyse globale des mesures de la déformation thermique, de la température et de la perte de masse

En observant et en analysant les mesures de déformation, de température et de perte de masse des plaques CPC testées et soumises à la charge thermique par le BCT, nous remarquons que :
- le comportement thermique d'une plaque CPC peut être décomposé en deux étapes : (1) la dilatation thermique puis (2) le retrait hydrique ;
- le comportement thermique de la plaque en parement double suit la même évolution temporelle que celle de la plaque CPC (en parement simple) mais avec un décalage temporel par rapport à la charge thermique. La valeur de ce décalage dépend de l'étape.
Nous pouvons détailler le comportement de la plaque CPC en parement simple comme suit.
*(1) Etape de dilatation thermique* :
- Dans les 5 premières minutes, soit dans les 300 premières secondes, (7 minutes, soit 420 secondes, pour la plaque en parement double), le phénomène de la migration de l'eau est dominant, l'eau dans le plâtre se déplace vers la face non exposée au feu et la température croît, en parti-

culier la température de l'eau. Cet accroissement de la température produit une forte dilatation thermique (notons que si l'évaporation de l'eau commence à se produire, elle reste non significative car la perte de masse est petite).
- Entre 5 et 7 minutes, soit entre 300 et 420 secondes, (7 et 15 minutes, soit 420 et 900 secondes, pour la plaque en parement double), une forte augmentation de la température de la face non exposée se produit. La pente de la courbe d'évolution de la perte de masse augmente aussi. L'eau près de la face exposée de la couche de plâtre s'évapore tandis que celle près de la face non exposée continue de se déplacer vers la face non exposée. Dans cette période, la dilatation thermique (homogénéisée sur l'épaisseur de la plaque CPC) est quasi-inchangée.
- Puis, de 7 à 10 minutes, soit de 420 à 600 secondes, (de 15 à 25 minutes, soit de 900 à 1500 secondes, pour la plaque en parement double), la vitesse d'accroissement de la température de la face non exposée diminue. Dans le processus d'essai, nous avons observé des fumées qui s'échappent par le bord supérieur de la plaque, ce qui montre que le phénomène d'évaporation de l'eau est dominant.
- A 10 minutes, soit 600 secondes, (25 minutes, soit 1500 secondes, pour la plaque en parement double), la dilatation thermique atteint sa valeur maximale. Ensuite, la plaque à simple parement se contracte dans son plan. La température de sa face non exposée reste sur un palier jusqu'à 18-20 minutes, soit 1080-1200 secondes. Dans cette période, la perte de masse est régulière. Au bout de 18-20 minutes, soit 1080-1200 secondes, la longueur et la largeur de la plaque en parement simple reviennent à leurs valeurs initiales. Le phénomène d'évaporation de l'eau n'est plus observé. Ce fait est validé par la diminution de la vitesse de perte de masse. Le comportement plan de la plaque change alors et aborde l'étape de retrait hydrique.
*(2) Etape de retrait hydrique* :
A partir d'environ 18-20 minutes, soit 1080-1200 secondes, la vitesse d'accroissement de la température de la face non exposée croit alors que la vitesse d'évolution de la perte de masse est quasi nulle car l'eau dans le plâtre est presque complètement évaporée et donc le phénomène de dilatation s'inverse, la plaque se contracte dans son plan.

## 3.4 Essais de traction

### 3.4.1 Objectif des mesures

L'objectif de ces essais est d'identifier l'évolution temporel du comportement de la plaque CPC (parement simple et parement double) en traction soumise à la charge thermique selon la courbe ISO 834. Ces essais donnent une vue globale de l'évolution temporelle du comportement en traction de la plaque CPC en fonction de la température.
Il est noté que, pour l'essai mécanique de traction à chaud de la plaque en parement double, nous n'avons étudié que le comportement mécanique en traction à chaud du second parement, celui situé du coté non exposé dans l'essai en température sous charge thermique de la plaque en double parement.

### 3.4.2 Configuration expérimentale

Le protocole d'essai de déformation en traction dans le plan de la plaque, des plaques CPC, en fonction de la température est le suivant. Nous avons découpé, dans une plaque CPC de 30 cm de longueur sur 6.5 cm de largeur, une éprouvette dont la géométrie est celle d'une haltère. La partie centrale de l'éprouvette qui est resserrée, a pour dimensions 15 cm de longueur sur 3 cm de largeur. La charge thermique n'est appliquée que dans le tronçon centrale de l'éprouvette, sur une longueur de 8 cm. Pour réaliser cela, les deux extrémités de l'éprouvette sont isolées thermiquement de la charge thermique en les protégeant à l'aide de deux plaques isolantes. Cette configuration a été prise afin d'assurer que la rupture en traction et à chaud se produise dans la zone centrale de l'éprouvette. Concernant les effets de bord de la charge thermique sur le tronçon central de l'éprouvette et afin que ce tronçon soit dans les mêmes conditions thermiques que si il était dans la plaque CPC, on a placé deux petits morceaux de plaque CPC, prédécoupés, ajustés sur les deux bords du tronçon central de l'éprouvette, assurant ainsi la continuité de la conduction thermique et des phénomènes hydriques pendant la charge thermique. Chaque éprouvette testée est exposée à la charge thermique ISO 834. A un instant donné, la charge thermique est stoppée, les deux petits morceaux de plaque CPC qui sont rapportés sur l'éprouvette sont enlevés, et l'éprouvette (chaude) est soumise à l'essai mécanique de traction dans un laps de temps ne dépassant pas 1 minute. Il est à noter que, pour un essai de la plaque en parement double, l'éprouvette "parement double" est réalisée en attachant deux éprouvettes de "parement simple" et, après une charge thermique, l'essai mécanique de traction est fait sur l'éprouvette situé du coté de la face non exposée. La figure 3.17 illustre les différentes étapes d'un essai en traction à chaud pour une plaque CPC en parement simple.

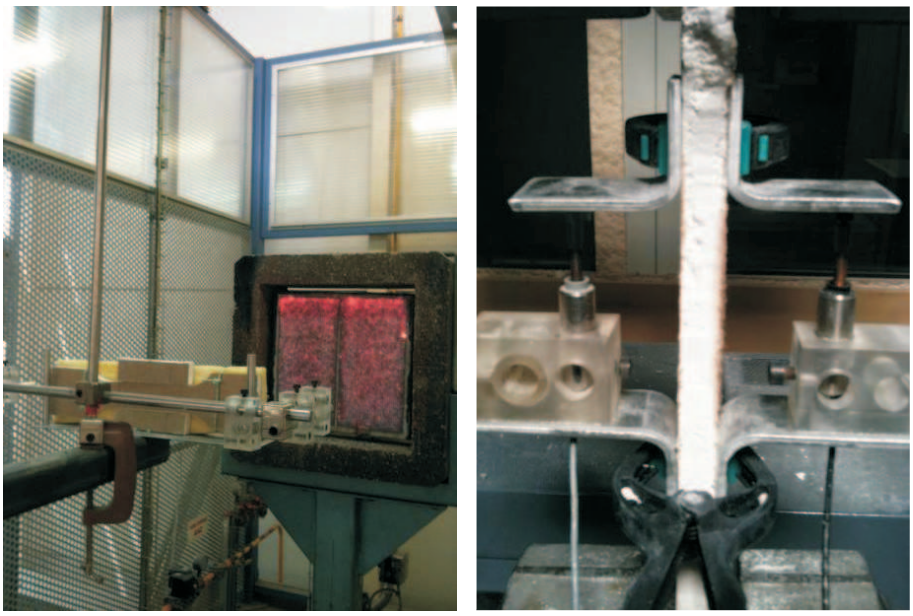


Fig. 3.17 – Photos montrant les deux étapes d'un essai thermomécanique en traction de la plaque CPC en parement simple : (1) charge thermique par le BCT (figure de gauche) ; (2) essai de traction à chaud (figure de droite).

Les essais mécaniques de traction à chaud sont réalisés avec un banc de traction uniaxiale dont la capacité est de 500 daN et qui est asservi en déplacement avec une vitesse constante de 0.8 mm/min. Compte tenu des aspects thermiques, les jauges de déformation n'ont pas été utilisées. En effet il y aurait, non seulement des difficultés de collage sur les éprouvettes CPC, mais aussi des problèmes de métrologie induits par les effets de température. Dans ces conditions, nous avons préféré utiliser un système mire-capteur de mesure des déplacements. Deux mires en aluminium sont attachées à l'aide d'une pince légère en plastique. ces deux mires sont placées à l'extrémité haute et de chaque coté de l'éprouvette CPC. Deux capteurs de déplacement sont attachés à l'aide de supports plastiques fixés sur des cornières, les cornières étant fixées à l'aide d'une pince légère en plastique sur l'extrémité basse et de chaque coté de l'éprouvette (voir le montage sur la figure 3.17. Le dispositif expérimental permet de mesurer les déplacements pour le tronçon centrale de l'éprouvette CPC, qui à une longueur de 8 cm. Concernant la fixation de l'éprouvette CPC dans les mors du banc de traction, le serrage des mors entraîne une légère précontrainte dans l'éprouvette. Nous avons limité cette influence en s'assurant qu'aucun glissement ne se produisait pendant l'essai de traction. Cette précontrainte a été contrôlée de manière à ce qu'elle reste inférieure à 0.1 MPa pour tous les essais. Un capteur de force mesure la force appliquée à l'éprouvette et les deux système mire-capteur mesurent les déplacements de chaque face (exposée et non exposée) de l'éprouvette CPC.

### 3.4.3 Résultat d'essai

La figure 3.18 montre la rupture d'une éprouvette CPC après le chargement de traction, à une température donnée. Il est à noter que la rupture se produit bien dans la partie centrale de l'éprouvette.

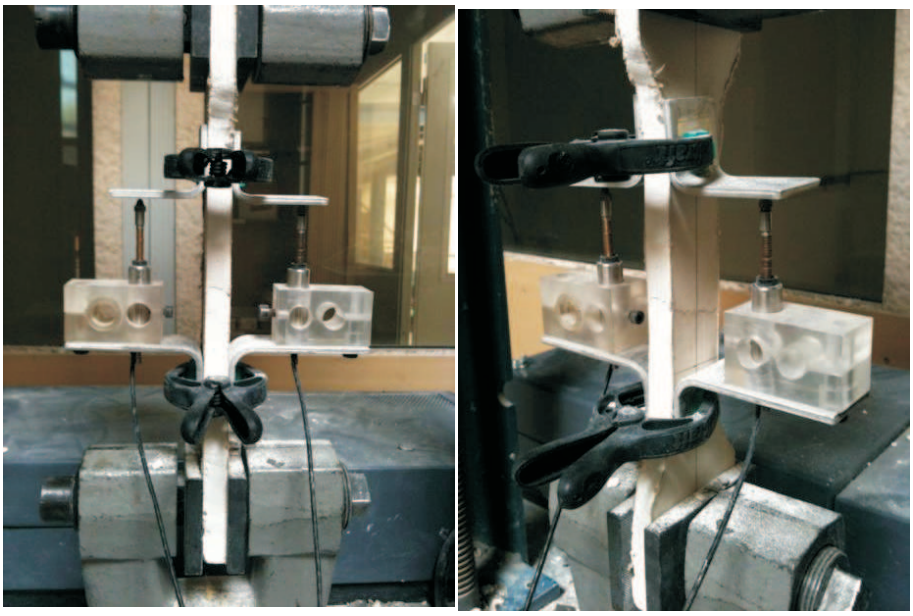


Fig. 3.18 – Rupture de l'éprouvette CPC dans le banc de traction, à une température donnée.

La déformation dans le plan moyen de l'éprouvette CPC est calculée en prenant la moyenne des déformations dans les deux plans correspondant aux deux faces de l'éprouvette. Des essais pour des éprouvettes CPC en parement simple et en parement double, soumises à la traction, après une charge thermique, ont été réalisés à plusieurs instants (c'est-à-dire, à plusieurs températures). Les figures 3.19, 3.20, 3.21, 3.22 et 3.23 montrent les résultats d'essai pour des éprouvettes CPC, en parement simple, à la température ambiante, après 7, 10, 15 et 20 minutes de charge thermique par le BCT. On notera, que les ordonnées de ces figures commencent à $-0.1$ MPa à cause de la précontrainte.

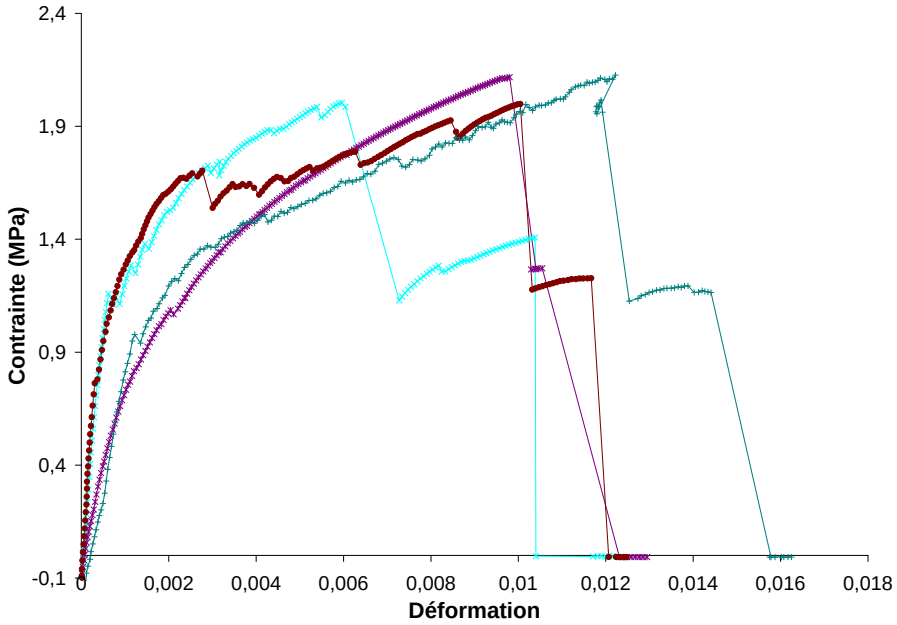



Fig. 3.19 – Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, à la température ambiante. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

Les figures 3.19 et 3.20 montrent que le comportement des éprouvettes CPC en traction, à la température ambiante et après 7 minutes de charge thermique par le BCT, est relativement voisin. Nous pouvons distinguer deux phases dans ce comportement. La première correspond à la rupture de la feuille de carton de la face exposée, la seconde correspondant à la rupture de la feuille de carton de la face non exposée. La première phase est de type élastoplatisque fragile. La seconde est la résistance de la feuille de carton sur la face non exposée. La limite de rupture des éprouvettes est de l'ordre de 1.9 MPa tandis que la seconde rupture est de l'ordre de 0.9 MPa.

En observant les courbes de contrainte-déformation après 10 minutes de charge thermique (figure 3.21), nous constatons que le comportement plastique disparaît dans la première phase et que l'on a un comportement de type élastique fragile. Par contre, la seconde phase liée à la résistance de la feuille de carton de la face non exposée, se comporte comme un matériau élasto-plastique fragile.

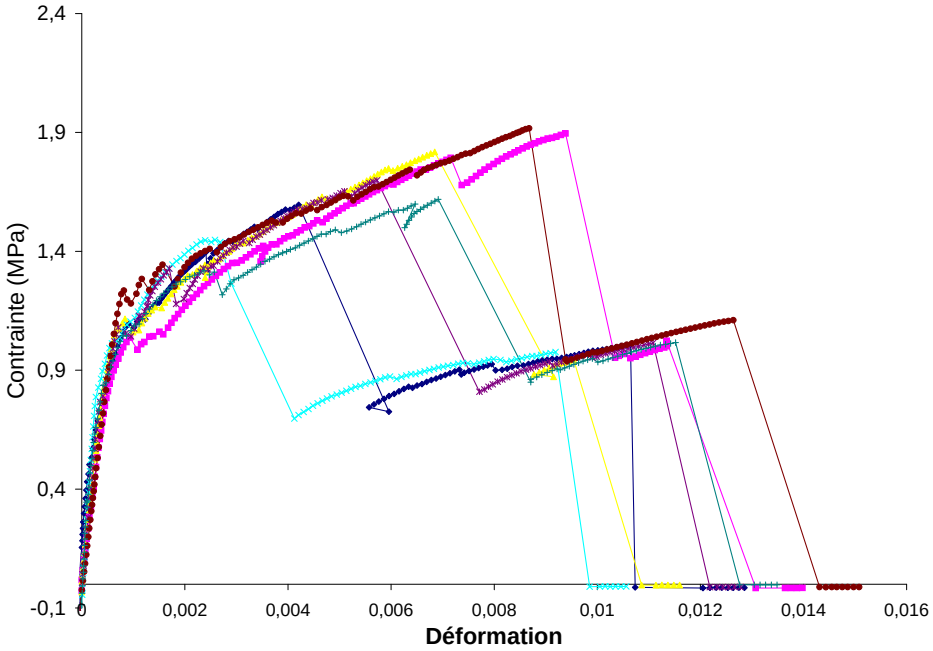



FIG. 3.20 – Courbes contrainte-déformation pour 7 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, après 7 minutes de charge thermique par BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

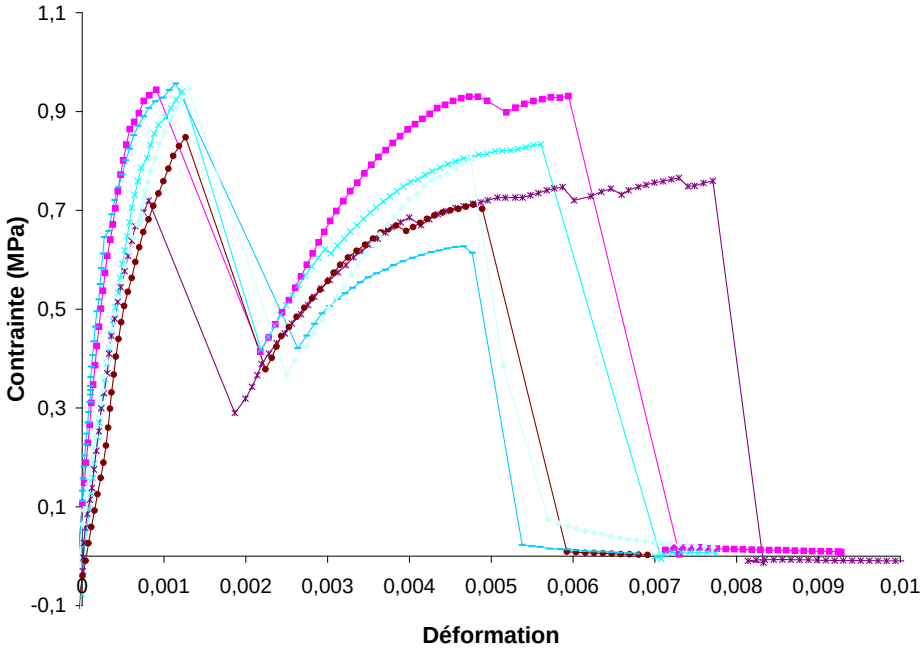



FIG. 3.21 – Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, après 10 minutes de charge thermique par BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

Pour 15 et 20 minutes de charge thermique (figures 3.22 et 3.23), nous observons une seule limite de rupture sur chaque courbe contrainte-déformation du comportement en traction de l'éprouvette CPC, en parement simple. A 15 minutes, nous constatons un changement de pente dans la partie quasi linéaire avec un affaiblissement de la résistance en traction, tandis qu'à partir de 20 minutes, le comportement de l'éprouvette CPC est de type élastique linéaire fragile.

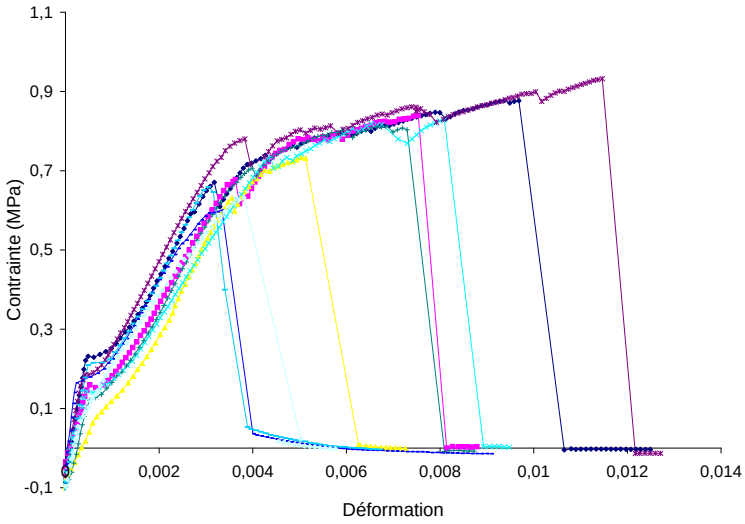



FIG. 3.22 – Courbes contrainte-déformation pour 7 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, après 15 minutes de charge thermique par BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

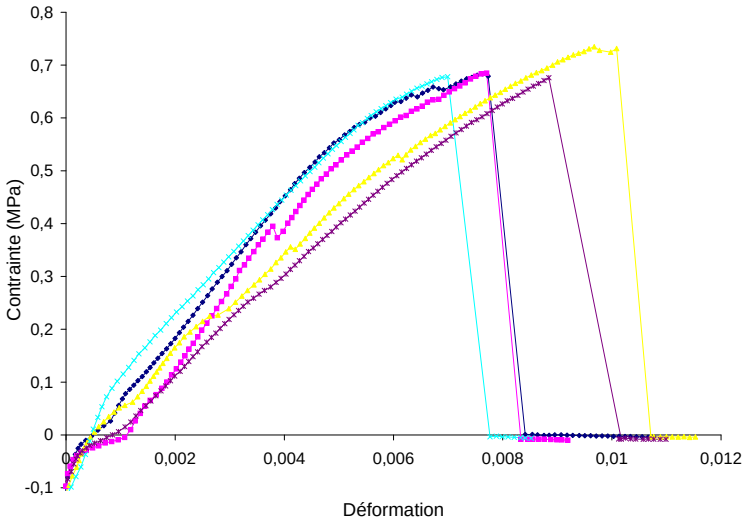



FIG. 3.23 – Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement simple, en traction, après 20 minutes de charge thermique par BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

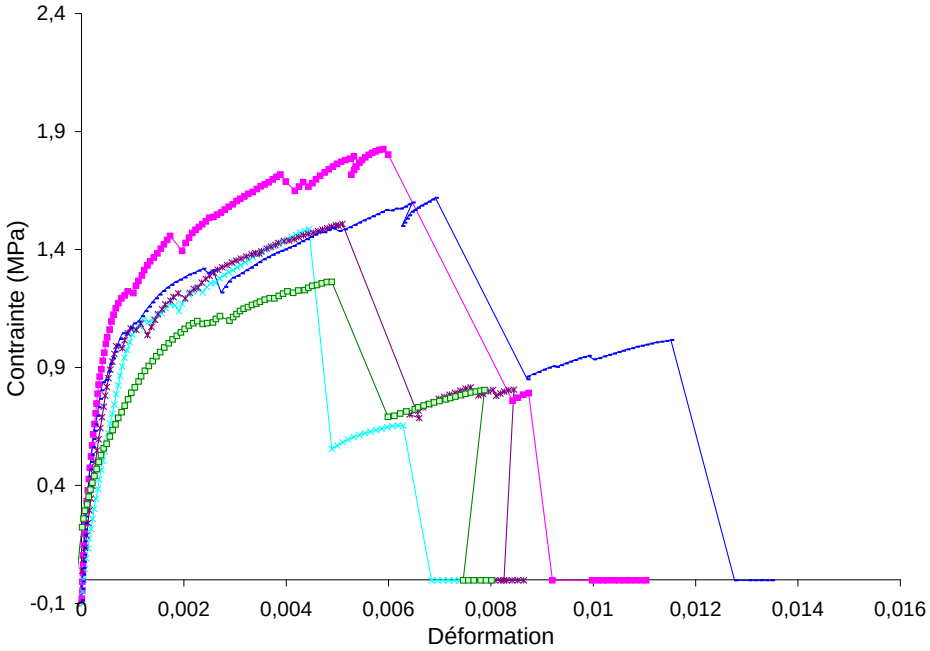



FIG. 3.24 – Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement double, en traction, après 30 minutes de charge thermique par BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

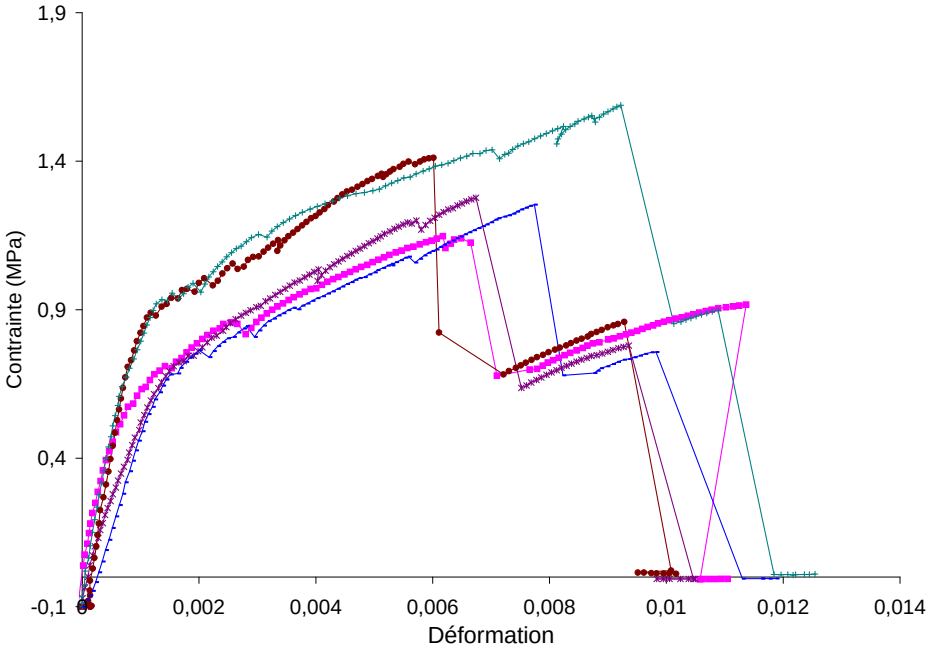



FIG. 3.25 – Courbes contrainte-déformation pour 5 éprouvettes CPC, en parement double, en traction, après 45 minutes de charge thermique par BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

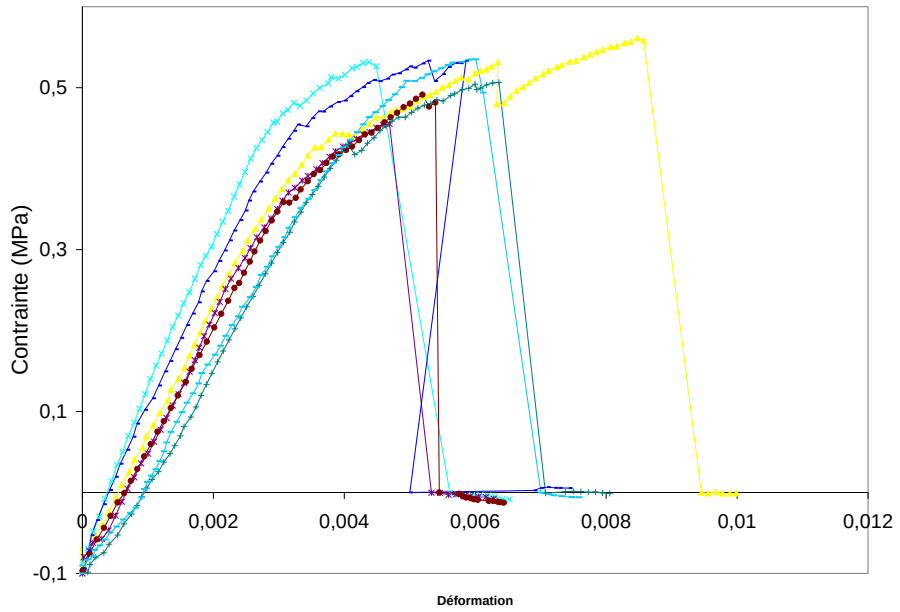



FIG. 3.26 – Courbes contrainte-déformation pour 6 éprouvettes CPC, en parement double, en traction, après 60 minutes de charge thermique par BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

Les figures 3.24, 3.25 et 3.26 montrent le comportement en traction des éprouvettes CPC en parement double après 30, 45 et 60 minutes de la charge thermique par le BCT. Les comportements sont similaires à ceux de l'éprouvette en parement simple avec un décalage temporelle correspondant à un décalage de la montée en température de l'éprouvette située du coté de la face non exposée.

### 3.4.4 Analyse des résultats d'essai

L'analyse de ces résultats permettent de tirer les conclusions suivantes pour les plaques CPC en parement simple ou parement double.
- Il y a une forte évolution du comportement en traction des plaques CPC en fonction de la température.
- Il y a une forte dispersion des valeurs de la limite de déformation correspondant à la limite de rupture en traction, à un même instant de charge thermique, pour différentes plaques CPC qui sont supposées être les mêmes (cette variabilité montre le bien fondé d'introduire un modèle probabiliste pour en tenir compte).
- A un instant donné de la charge thermique, les deux feuilles de carton (face exposée et face non exposée) n'étant pas à la même température et n'ayant pas le même taux d'humidité, leurs propriétés mécanique et thermique ne sont pas les mêmes et donc, causent une dissymétrie qui croît lorsque la température augmente.
Le comportement d'une plaque CPC en parement simple à la traction peut être caractérisé par des étapes suivantes :

- A base température (avant 7 minutes de charge thermique), le phénomène d'évaporation d'eau ne se produit pas encore. Comme les feuilles de carton de la face exposée et de la face non exposée ne sont pas les mêmes et donc n'ont pas les mêmes propriétés mécaniques, il y a une dissymétrie (même à température ambiante) induisant, pour la traction uniaxiale, deux ruptures dans la loi de comportement, une première rupture partielle, puis une rupture totale. Le comportement en traction d'une plaque CPC, à basse température, présente deux types de comportement. Un premier comportement est de type élastoplastique correspondant au travail simultané des trois couches carton-plâtre-carton. Puis après la rupture de la feuille de carton sur la face exposée, feuille de carton sur la face non-exposée résiste à la traction et son comportement est de type élastique fragile. Remarquons qu'à base température, cette feuille de carton non exposée au feu n'est pas endommagée.
- Au bout de 10 minutes de charge thermique, le phénomène d'évaporation de l'eau dans le plâtre est dominant. La couche de plâtre près de la face exposée au feu perd sa résistance à la traction, et l'on constate un premier type de comportement de la plaque CPC à la traction de type élastique fragile. Après la rupture de la feuille de canton exposée, on a de nouveau un comportement élastoplastique fragile jusqu'à la rupture totale.
- A partir de 15 minutes de charge thermique, la feuille de carton sur face exposée est complètement détruite et il n'existe plus qu'une seule rupture liée à la feuille de carton sur la face non exposée. On a un comportement en traction de la plaque CPC du type élastoplastique fragile avec un "accident" sur la partie élastique.
- A partir de 20 minutes, l'eau dans le plâtre est complètement évaporée et le plâtre qui n'a plus de cohésion ne contribue plus dans la résistance à la traction de la plaque CPC. Le comportement en traction de la plaque CPC est alors du type élastique fragile.

## 3.5 Essais de compression

### 3.5.1 Objectif des mesures

Dans ce paragraphe, nous présentons des essais de compression des plaques CPC, en parement simple et parement double, soumises à la charge thermique selon la courbe ISO 834. L'approche est similaire à celle des essais en traction à chaud, mais les éprouvettes sont de géométrie différente et le banc d'essai mécanique est un banc pour la compression.

### 3.5.2 Configuration expérimentale

Avant de choisir la dimension de l'éprouvette des essais de compression, nous avons fait des essais préliminaires sur 3 types d'éprouvette de type parallélépipède rectangle, que nous appellerons dans la suite, pour simplifier l'écriture, "cube". Par convention, la force de compression est appliquée suivant la "hauteur" du cube. Cette direction correspond à la direction longitudinale d'une plaque CPC. Le premier type est un cube de 3 cm de hauteur par 3 cm de largeur et 1.25 cm d'épaisseur (épaisseur de la plaque). Le second type est un cube de 4 cm de hauteur par 4 cm de largeur et 1.25 cm d'épaisseur. Enfin le troisième type est un cube de 5 cm de hauteur par 5 cm de largeur et 1.25 cm d'épaisseur. Ces essais de compression ont été faits à la température ambiante et montrent que l'influence des dimensions de l'éprouvette sur le résultat n'est pas très

significative. Finalement, le second type a été retenu pour faire les essais.

La préparation des éprouvettes de compression a été faite afin d'éviter les effets thermiques de bord, comme pour les essais de traction. L'essai thermique est fait sur une plaque CPC 10 cm par 10 cm dans laquelle est insérée en son centre l'éprouvette 4 cm par 4 cm qui est utilisée pour l'essai mécanique de compression à chaud.

La figure 3.27 montre la configuration d'essai pour la charge thermique avec le BCT pour préparer les essais de compression à chaud.

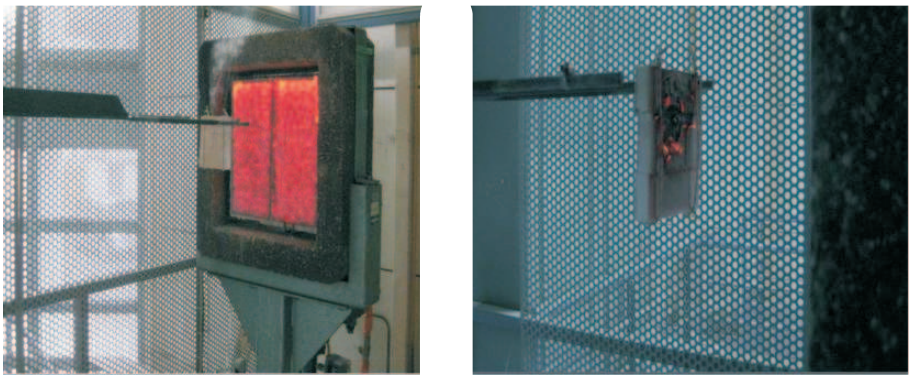


FIG. 3.27 – Configuration d'essai pour la charge thermique avec le BCT pour préparer les essais de compression à chaud. Plaque CPC de 10 cm par 10 cm, suspendu par un porte-éprouvette.

Les essais mécaniques de compression à chaud sont effectués à l'aide d'un banc de traction adapté pour générer une compression. La vitesse du banc de traction est de 2 mm/min. Un système de charge mécanique pour transformer la traction en compression a été développé. Deux plateaux (voir figure 3.28) sont utilisés pour mettre en compression les éprouvettes, le plateau du haut est fixé à la table du banc de traction tandis que le plateau du bas est relié aux mors, en haut du banc de traction, et peut se déplacer. Les deux plateaux sont liés à la presse par 4 tiges. Trois mires en aluminium sont fixées autour du plateau du haut, tandis que 3 capteurs de déplacement sont fixés sur des supports plastiques vissées sur le plateau du bas. Il est à noter que ces trois capteurs mesurent les déplacements des 3 points qui sont à $120^o$ chacun. Un capteur de force mesure la force appliquée à l'éprouvette.

Les essais de compression n'ont pas permis d'aller jusqu'à la rupture totale des éprouvettes à cause de la limitation des capteurs qui mesurent les déplacements. Les essais de compression ont été réalisés jusqu'à la limite de course des capteurs de déplacement. Cette limite de déplacement implique une limite de déformation mesurée de l'ordre de 4%. Il est à noter que cette limitation ne gène pas l'étude proposée car les cloisons légères en plaque CPC ne travaillent pas au de là 4% de déformation.

FIG. 3.28 – Banc de charge mécanique pour les essais en compression et position des capteurs de mesure de déplacement. Les capteurs sont espacés de 120$^o$.

### 3.5.3 Résultats d'essai

Des essais de plaques CPC en parement simple et en parement double soumises à la compression, après application d'une charge thermique, ont été réalisés pour plusieurs instants. La procédure utilisée pour les essais de compression des plaques CPC en parement double est similaire à la procédure utilisée pour les essais de traction à chaud des éprouvettes en parement double. La figure 3.29 montre la banc d'essai en compression avec une éprouvette CPC déformée, après 30 minutes de charge thermique par le BCT.

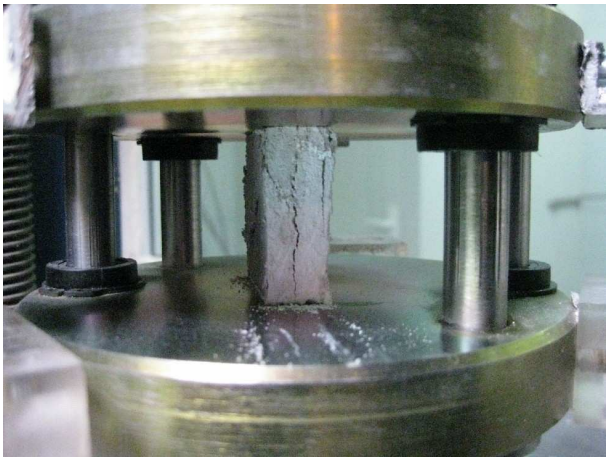


FIG. 3.29 – Banc d'essai en compression avec une éprouvette CPC déformée, après 30 minutes de charge thermique par le BCT.

Les figures 3.30 et 3.31 montrent les résultats d'essai en compression des éprouvettes CPC en parement simple, à la température ambiante et après 7 minutes de charge thermique.

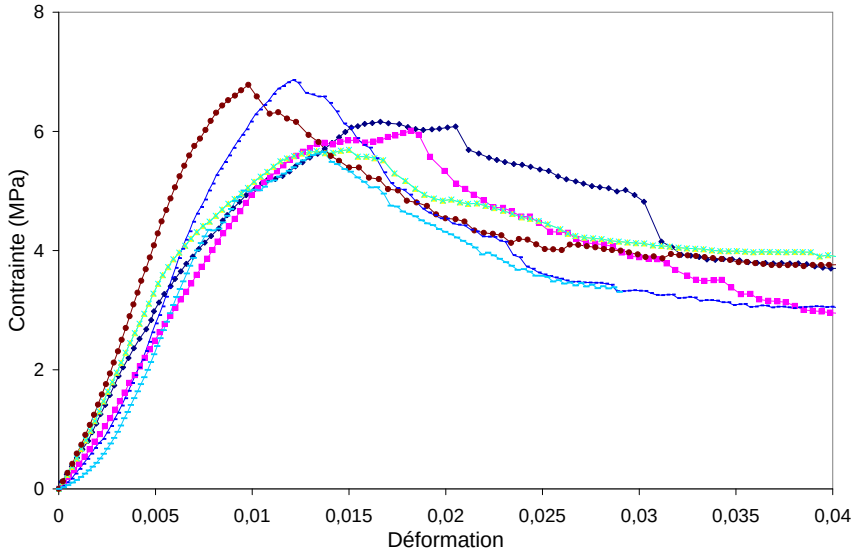



FIG. 3.30 – Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, à la température ambiante. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

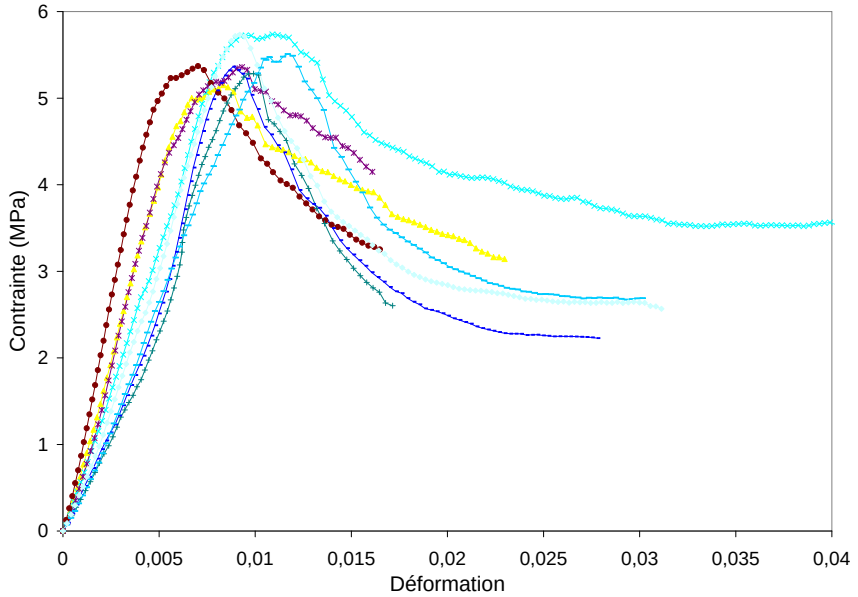



FIG. 3.31 – Courbes contrainte-déformation de 7 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, après 7 minutes de charge thermique par le BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

Nous constatons que le comportement en compression des éprouvettes CPC est de même type à la température ambiante et à 7 minutes de charge thermique. Dans les cas, le contrainte de rupture est de l'ordre 6 MPa.

Les figures 3.32, 3.33 et 3.34 illustrent le comportement en compression des éprouvettes CPC en parement simple après 15 minutes, 20 minutes et 25 minutes de charge thermique.

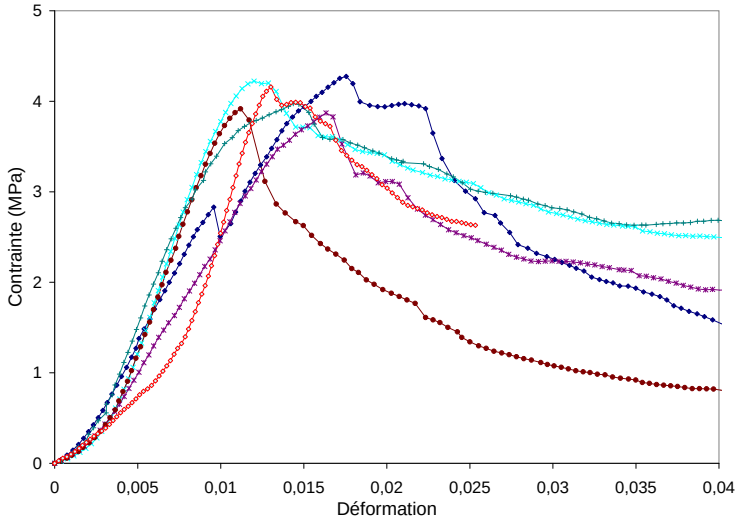



FIG. 3.32 – Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, après 15 minutes de charge thermique par le BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

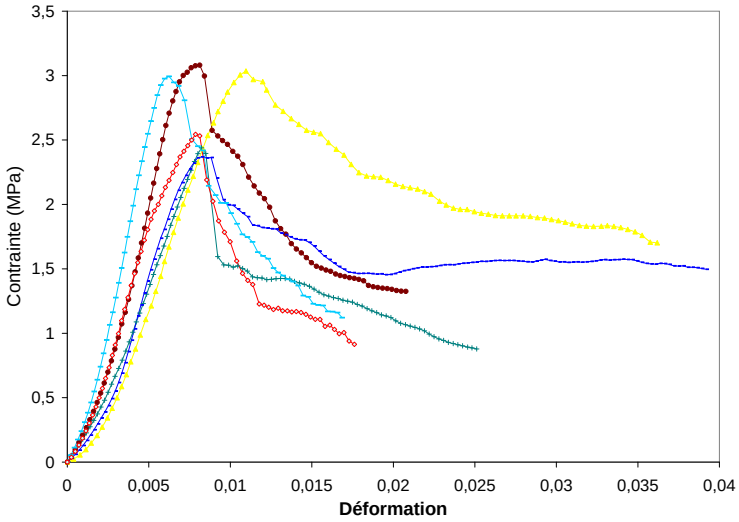



FIG. 3.33 – Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, après 20 minutes de charge thermique par le BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

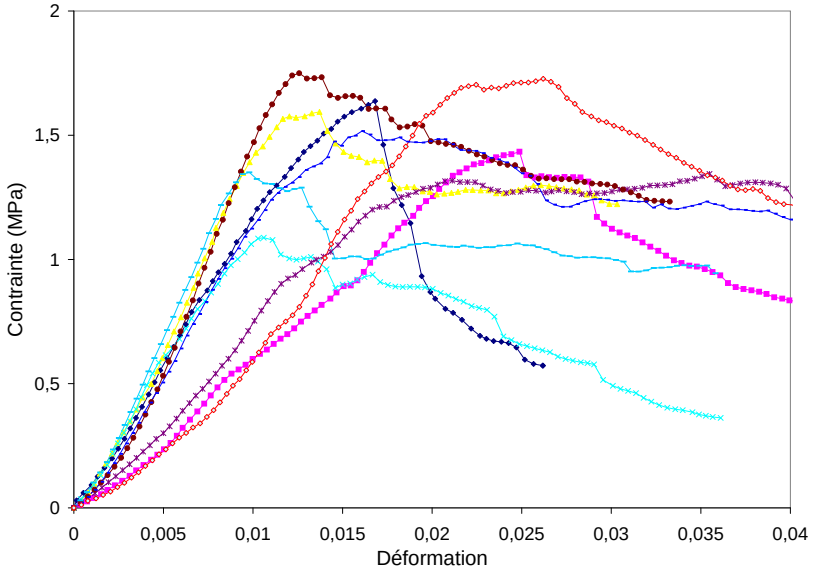



FIG. 3.34 – Courbes contrainte-déformation de 8 éprouvettes CPC en parement simple, en compression, après 25 minutes de charge thermique par le BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

Les essais de compression des éprouvettes CPC en parement double ont été faits à 30 minutes, 45 minutes et 60 minutes de charge thermique. Les résultats sont présentés aux figures 3.35, 3.36 et 3.37.

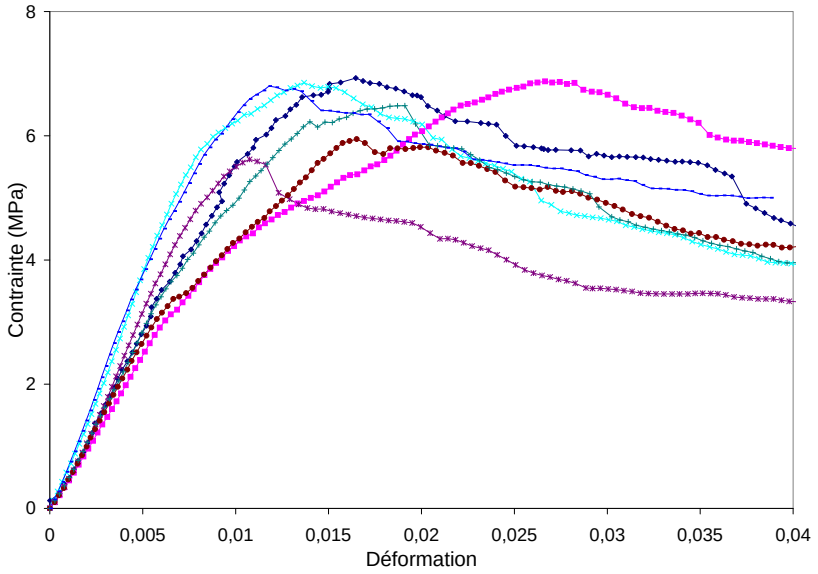



FIG. 3.35 – Courbes contrainte-déformation de 7 éprouvettes CPC en parement double, en compression, après 30 minutes de charge thermique par le BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

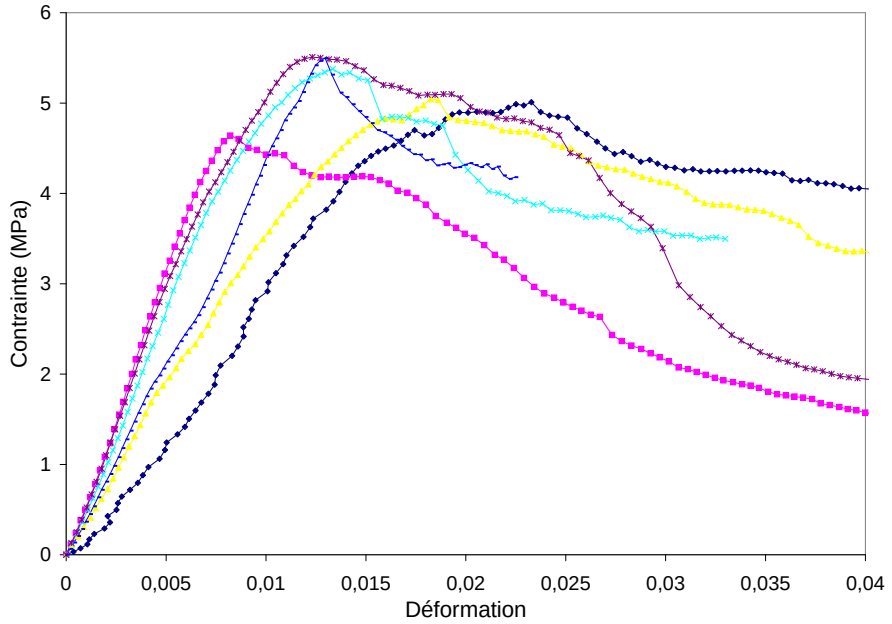



FIG. 3.36 – Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement double, en compression, après 45 minutes de charge thermique par le BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

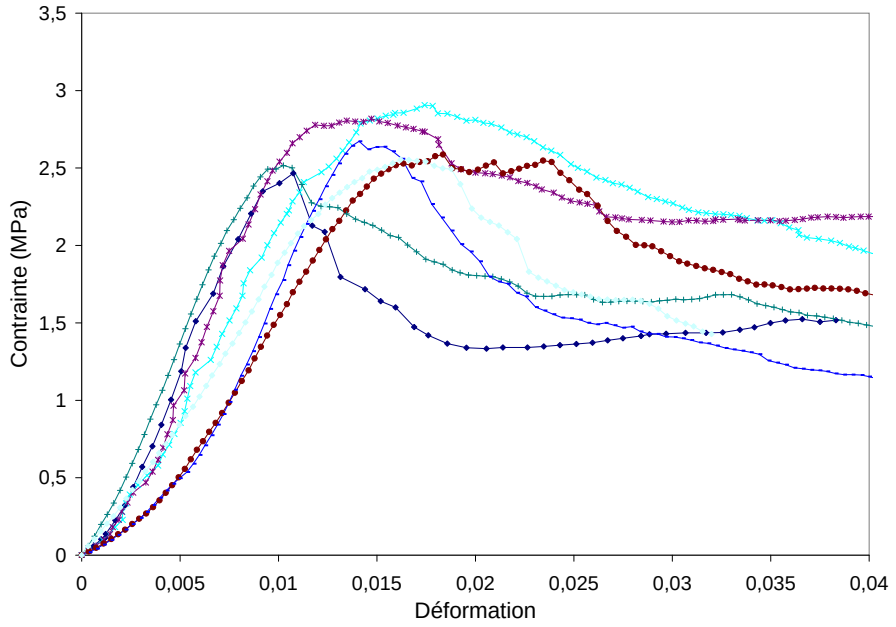



FIG. 3.37 – Courbes contrainte-déformation de 6 éprouvettes CPC en parement double, en compression, après 60 minutes de charge thermique par le BCT. Contrainte en MPa en fonction de la déformation.

### 3.5.4 Analyse des résultats

L'analyse des résultats pour les essais de compression à chaud des plaques CPC en parement simple ou en parement double.
- Il y a une forte évolution du comportement en compression en fonction de la température.
- Pour un instant de charge thermique, il y a une plus forte dispersion des courbes du comportement en compression que pour le comportement en traction.
- Globalement, on a un comportement élastoplastique avec radoucissement et sans rupture jusqu'à le taux de déformation de 0.04 pour tous les cas considérés.
- Remarquons qu'il n'existe pas de comportement vraiment linéaire dans la première partie de la courbe contrainte-déformation. Cela est vraisemblablement liée à la nature du matériau multicouche CPC et à son comportement en compression. La résistance en compression est fournie par le plâtre dont le gonflement à la compression est équilibré par les effets de membranes des feuilles de carton. Dans ces conditions, le comportement à la compression est très lié à planéité des feuilles de carton qui sont collés au plâtre. Il peut donc y avoir de nombreux effets non linéaires du seconde ordre et de plus des effets non linéaires très importante sur l'interface entre les feuilles de carton et la couche de plâtre avec des décollements partiels.

# Chapitre 4

# Essais à chaud de l'assemblage par vissage d'une plaque CPC et identification de son comportement en cisaillement sous charge thermique

## 4.1 Essais et résultats d'essais

### 4.1.1 Objectif des mesures et configurations expérimentales

Dans ce paragraphe, nous présentons les essais en vue d'identifier le comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage d'une plaque CPC soumise à une charge thermique définie par la courbe ISO 834. Trois types d'assemblage par vissage ont été testés. Dans les trois cas, le vissage est fait sur une ossature métallique. Pour le premier type, la plaque CPC est en parement simple (type 1). Pour le deuximème type, la plaque est en parement double, et la vis traverse les deux plaques CPC qui constituent le parement double (type 2). Pour le troisième type, la plaque est encore en parement double, mais la vis ne traverse que la plaque CPC en contact avec l'ossature métallique, la seconde plaque CPC du parement recouvrant la tête de la vis (type 3). La figure 4.1 illustre le schéma des 3 types d'éprouvette liés aux trois types d'assemblage. Le protocole d'essai est le suivant pour une éprouvette (de type 1 à 3) : (1) Sollicitation thermique de l'éprouvette par le BCT, (2) A un instant choisi, arrêt de la charge thermique puis essais mécaniques en cisaillement.

La figure 4.2 montre le banc d'essai réalisé dans la configuration pour des mesures en cisaillement de l'assemblage par vissage de type 2, à chaud.

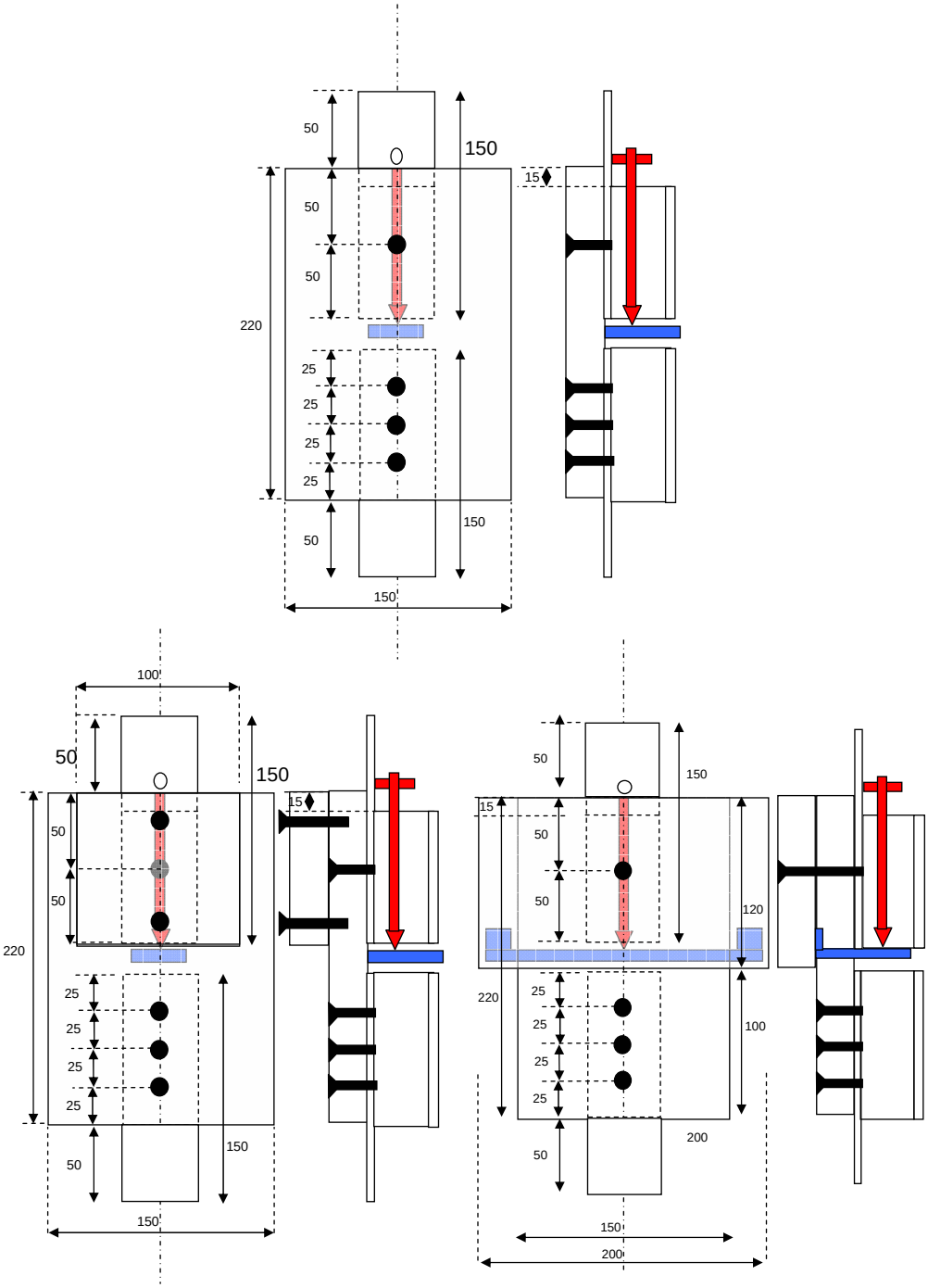



FIG. 4.1 – Schéma des trois types d'éprouvette liés aux trois types d'assemblage pour les essais en cisaillement et à chaud. Figure du haut : assemblage de type 1. Figure du bas : assemblage de type 2 (à droite) et de type 3 (à gauche). Les vis sont représentées par des cercles noirs, les flèches en orange présentent le capteur de mesure de déplacement et les rectangles en bleu représentent les mires.

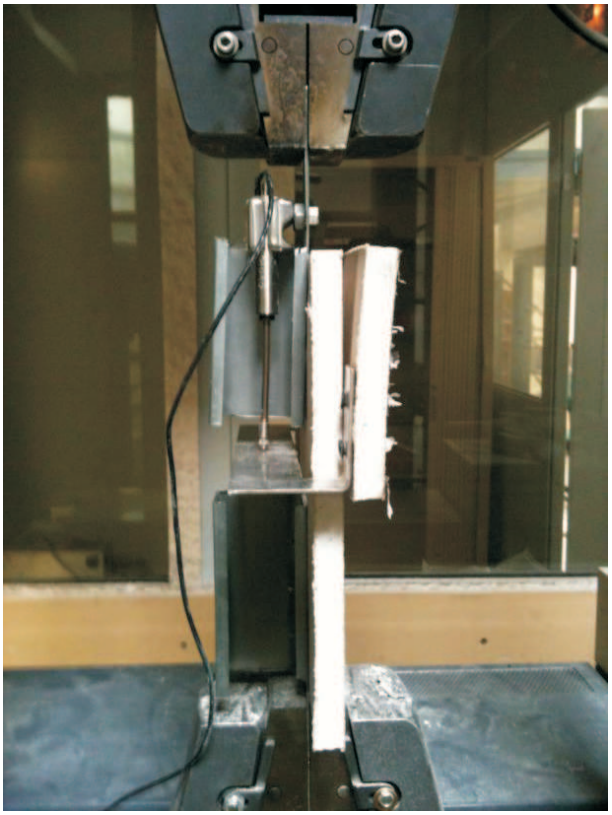


FIG. 4.2 – Banc d'essai réalisé dans la configuration pour des mesures en cisaillement de l'assemblage par vissage de type 2, à chaud.

### 4.1.2 Résultats des essais et analyse

Nous avons effectué les mesures pour les trois types d'assemblage. Toutefois, nous ne présentons dans ce chapitre que les résultats des essais pour les assemblages de type 1 et de type 2. Les courbes force-déplacement obtenues par les essais, pour 8 assemblages de type 1, pour les instants de charge thermique 15 minutes, 20 minutes, 25 minutes et 30 minutes, sont montrées aux figures 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6.

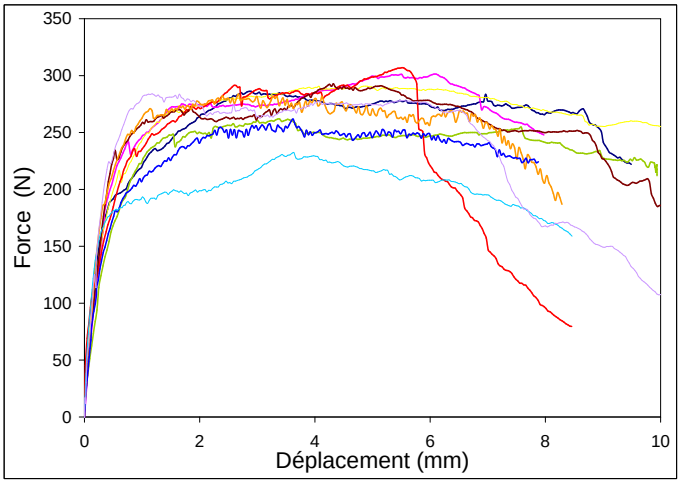



FIG. 4.3 – Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 1 après 15 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

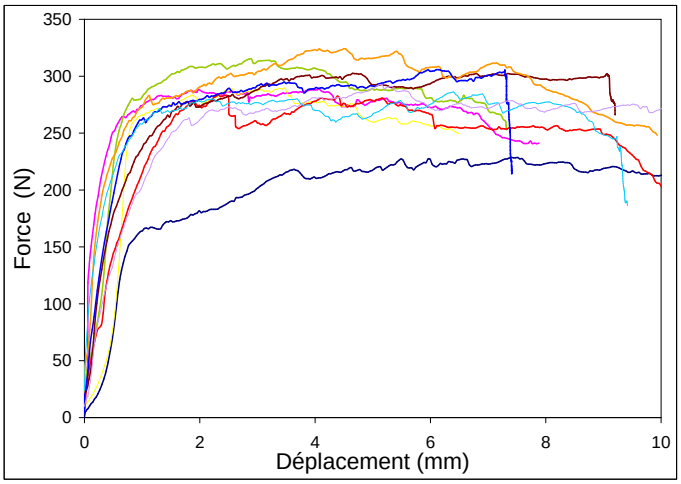



FIG. 4.4 – Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 1 après 20 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

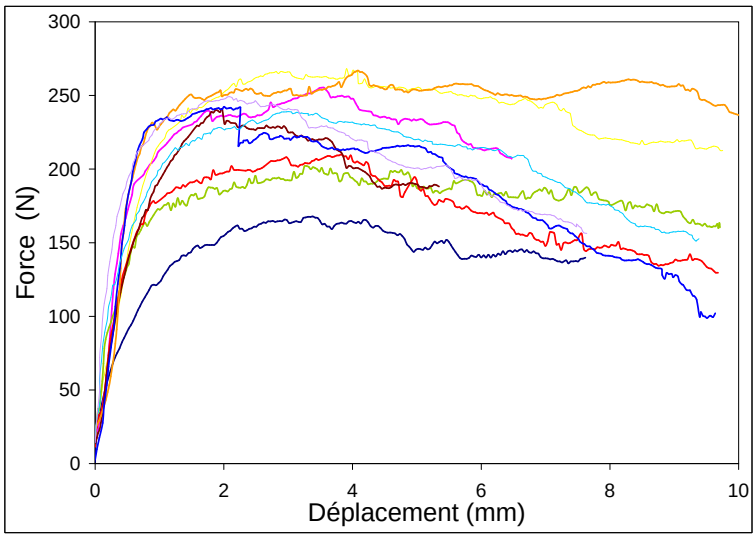



FIG. 4.5 – Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 1 après 25 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

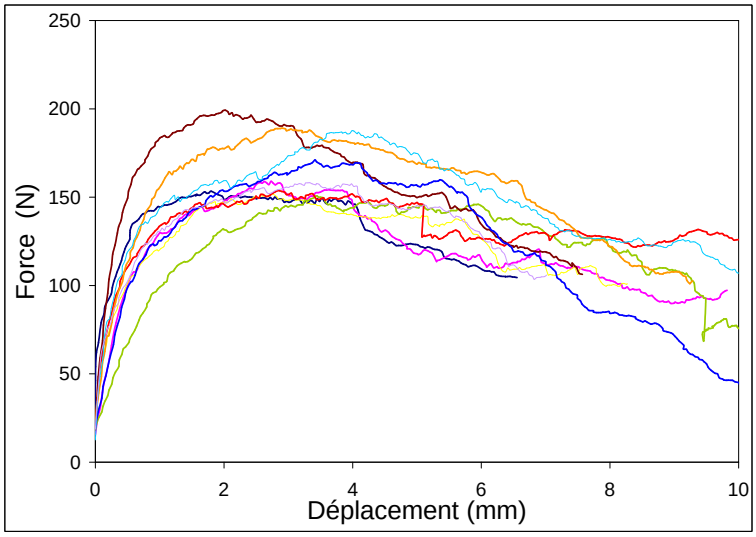



FIG. 4.6 – Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 1 après 30 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

L'analyse des résultats de ces essais permet de tirer les conclusions suivantes.

- Il y a un changement significatif du comportement de l'assemblage dès 15 minutes de la charge thermique par le BCT vis-à-vis de celui à la température ambiante montré à la figure 2.3.

- Entre 15 minutes et 20 minutes, il n'y a pas d'évolution significative, mais les résultats à 20 minutes sont plus dispersés que ceux à 15 minutes. Remarquons que pour ce niveau de charge thermique, après le maximum de la courbe, il y a un palier de type plasticité assez important avant rupture.

- A partir de 25 minutes de charge thermique, le palier de type plasticité disparaît, et est remplacé par un radoucissement de type écrouissage.

Les figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 présentent les résultats des essais de l'assemblage de type 2.

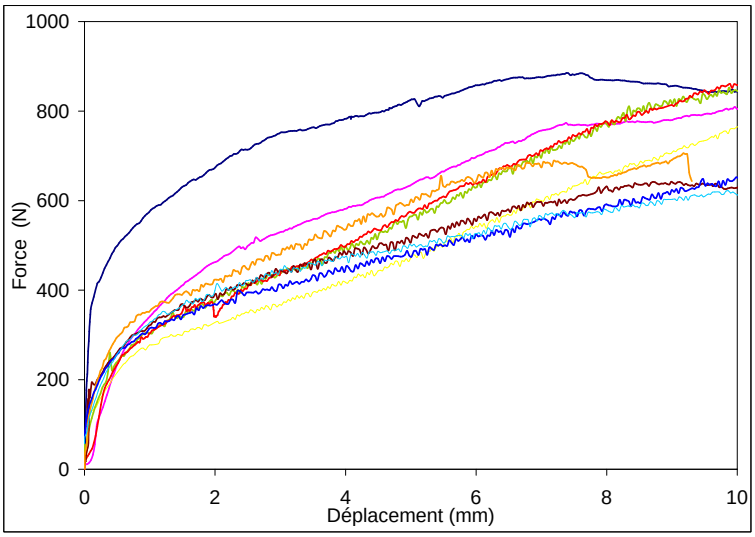



FIG. 4.7 – Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 2 à température ambiante. Force en N en fonction du déplacement en mm.

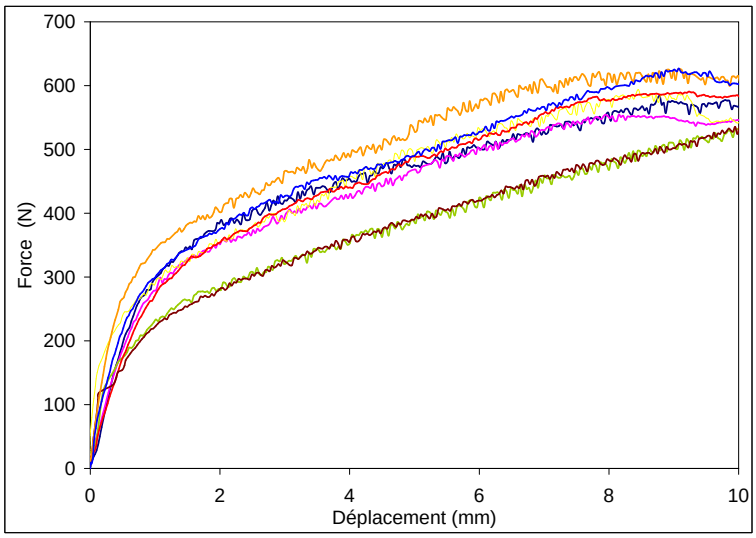



FIG. 4.8 – Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 2 après 30 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

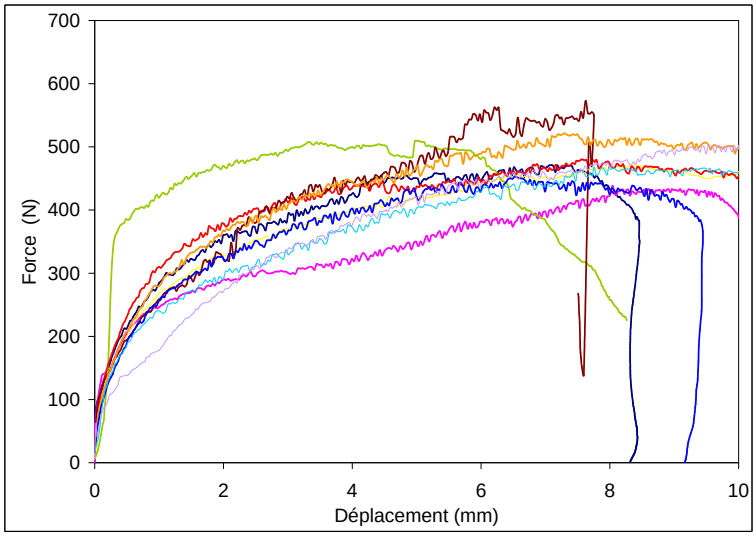



FIG. 4.9 – Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 2 après 45 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

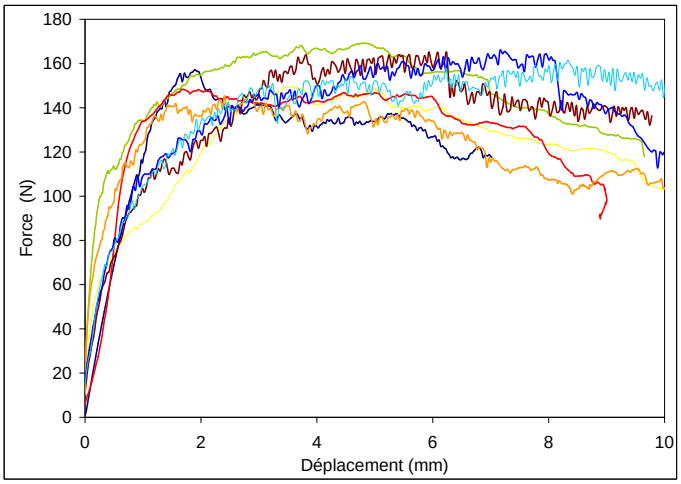



FIG. 4.10 – Courbes expérimentales force-déplacement pour 8 assemblages par vissage de type 2 après 60 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

L'analyse des résultats de ces essais permet de tirer les conclusions suivantes.
- Il n'y a pas de changement significatif du comportement de l'assemblage à 30 minutes de la charge thermique par le BCT vis-à-vis de celui à la température ambiante montré à la figure 4.7. Le comportement est de type élastoplastique.
- A 45 minutes, il y a une légère évolution sur le niveau maximum par rapport à la situation à 30 minutes, à l'exception de 3 courbes expérimentales qui présentent une limite de rupture pour un déplacement entre 7 mm et 9 mm. Ces trois courbes semblent ne pas être représentatives du comportement à 45 minutes et il est probable que les ruptures soient apparues à un autre endroit que celui de la vis, ce phénomène étant alors lié à une déficience de la protection thermique de la partie inférieure de l'assemblage pendant l'essai de charge thermique.
- A 60 minutes de charge thermique il y a une évolution forte de la résistance et certaines courbes présentent un radoucissement de type écrouissage.
- En comparant les résultats des essais pour l'assemblage de type 1 (simple parement) avec les essais de l'assemblage de type 2 (double parement), on peut voir une cohérence dans les résultats obtenus. Tout d'abord, pour le double parement, tant que la plaque du coté exposé n'est pas significativement endommagée, la force de résistance au cisaillement devrait être de l'ordre du double de celle de l'assemblage à simple parement, puisqu'il y a deux plaques CPC au lieu d'une. On constate bien cette tendance en comparant le comportement de l'assemblage à simple parement aux instants 15 minutes et $20 - 25$ minutes, avec le comportement de l'assemblage à double parement aux instants 30 minutes et 45 minutes, respectivement. Le décalage de temps, de l'ordre d'un facteur 2, est lié au transfert thermique associé à l'épaisseur d'une plaque à une double épaisseur. Toutefois, à 60 minutes, la plaque CPC du coté feu du double parement est très endommagée, et donc le niveau des forces devrait être comparable entre 30 minutes pour le simple parement et 60 minutes pour le double parement, ce qui est approximativement le cas. Enfin, on aurait pu s'atteindre à ce que la force pour le double parement à froid soit de l'ordre du double de la force pour le simple parement (toujours à froid), ce qui n'est pas le cas.

## 4.2 Identification des paramètres du modèle de l'assemblage par vissage à chaud

Comme nous l'avons expliqué précédemment, nous cherchons à construire un modèle de comportement dans les régimes qui ne sont pas de type radoucissement. On s'intéresse donc à des comportements pour lesquels les courbes de force en fonction du déplacement sont monotones croissantes. L'identification des paramètres du modèle présentée au chapitre 2 est donc faite pour des déplacements qui correspondent à cette hypothèse. Rappelons que le modèle moyen et le modèle probabiliste du comportement de l'assemblage par vissage est basé sur l'équation algébrique présenté au Chapitre 2 qui correspondent bien à l'hypothèse introduite. Les paramètres de ce modèle à la température ambiante ont été identifiés par deux méthodes de moindre-carrée et de maximum vraisemblance. Pour l'identification à chaud, sur la base des données expérimentales présentées dans ce chapitre, compte tenu de la forte évolution du comportement en fonction de la température, nous avons identifié les paramètres pour chacun des instants de la charge thermique pour lesquels nous avons fait des mesures. Pour chacun de ces instants, la méthode d'identification utilisée est celle présentée du chapitre 2. Les résultats de cette identification expérimentale sont récapitulés dans les tableaux 4.1 et 4.2 suivants.

| | $\underline{a}$ | $\underline{b}$ | $\alpha$ | $\delta_B$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 min | 33208 | 0.0108 | 0.0024 | 0.2658 |
| 15 min | 33101 | 0.0152 | 0.0018 | 0.273 |
| 20 min | 32684 | 0.0184 | 0.0017 | 0.2756 |
| 25 min | 31995 | 0.0212 | 0.0015 | 0.281 |
| 30 min | 31973 | 0.0215 | 0.0011 | 0.2982 |

Tab. 4.1 – Paramètres du modèle probabiliste (voir chapitre 2) du comportement à chaud de l'assemblage par vissage en parement simple (type 1) aux instants de charge thermique par le BCT.

| | $\underline{a}$ | $\underline{b}$ | $\alpha$ | $\delta_B$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 min | 35360 | 0.279 | 0.005 | 0.2655 |
| 30 min | 34400 | 0.156 | 0.0036 | 0.2716 |
| 45 min | 34282 | 0.0974 | 0.003 | 0.2762 |
| 60 min | 29553 | 0.014 | 0.00081 | 0.281 |

Tab. 4.2 – Paramètres du modèle probabiliste (voir chapitre 2) du comportement à chaud de l'assemblage par vissage en parement double (type 2) aux instants de charge thermique par le BCT.

Les figures 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14 représentent les régions de confiance associées au niveau de probabilité $P_c = 0.95$ du modèle probabiliste du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas du parement simple (type 1) aux instants de charge thermique par le BCT, correspondant aux mesures, construites avec les paramètres identifiés qui sont présentés dans le tableau 4.1.

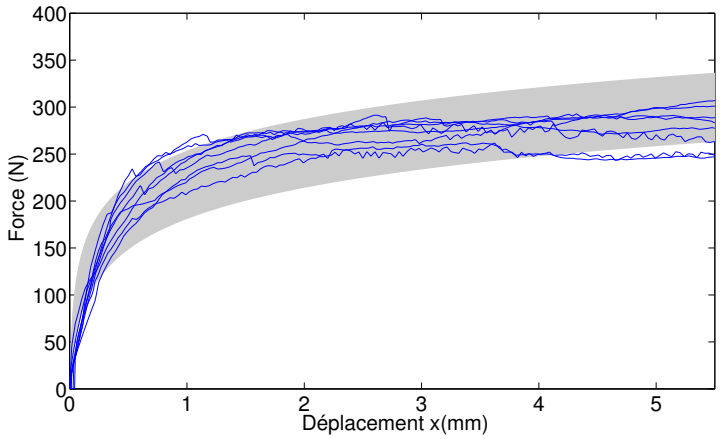



FIG. 4.11 – Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement simple (type 1) après 15 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

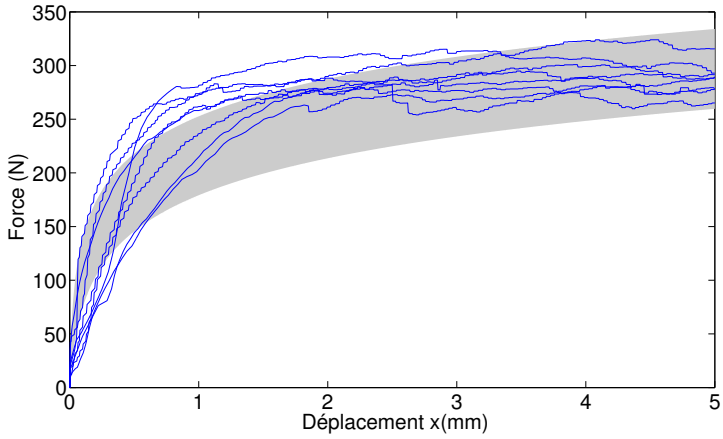



FIG. 4.12 – Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement simple (type 1) après 20 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

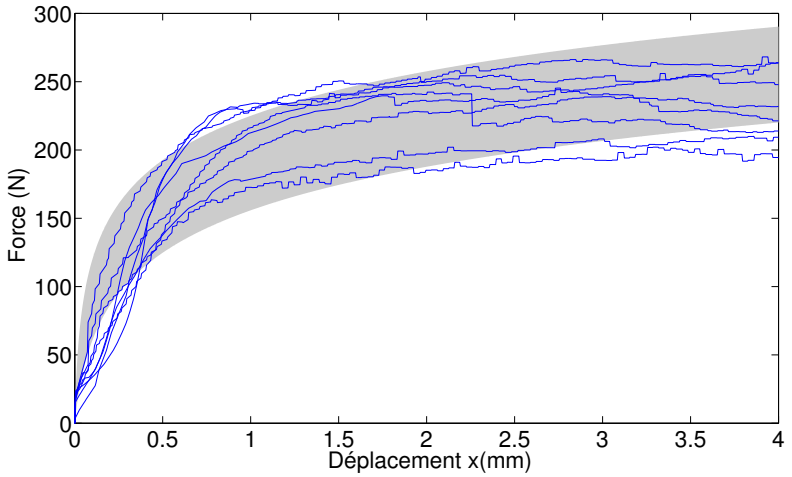



FIG. 4.13 – Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement simple (type 1) après 25 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

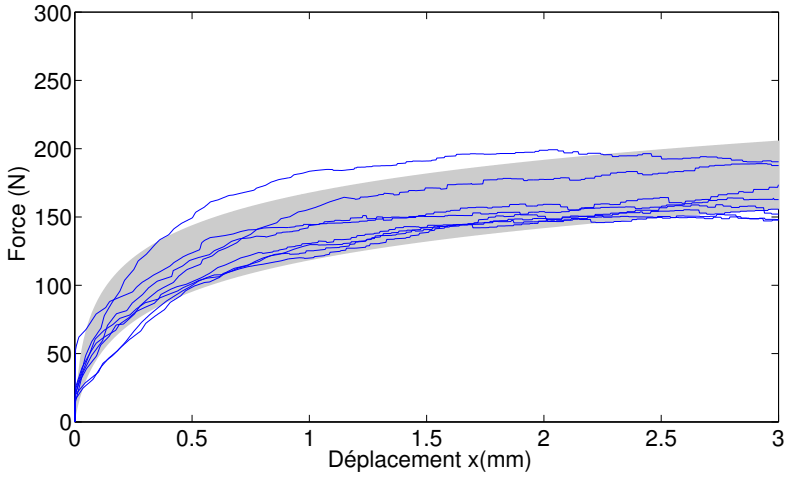



FIG. 4.14 – Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement simple (type 1) après 30 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

De même, les figures 4.15, 4.16, 4.17 et 4.18 représentent les régions de confiance associées au niveau de probabilité $P_c = 0.95$ du modèle probabiliste du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas du parement double (type 2) aux instants de charge thermique par le BCT, correspondant aux mesures, et construites avec les paramètres identifiés qui sont présentés dans les tableaux 4.2.

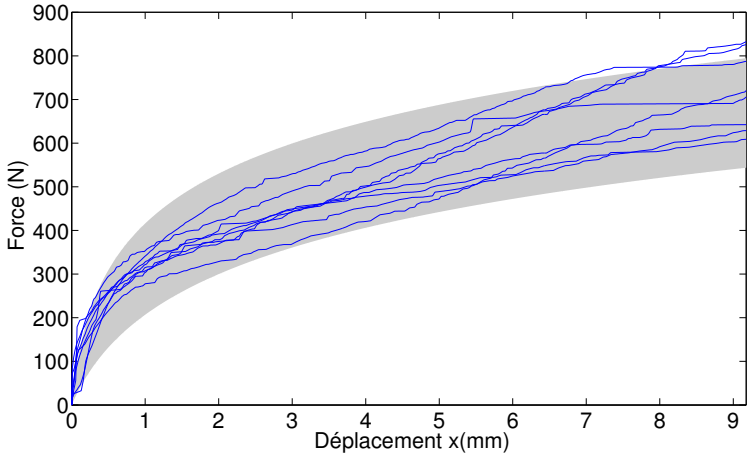



FIG. 4.15 – Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement double (type 2) à la température ambiante. Force en N en fonction du déplacement en mm.

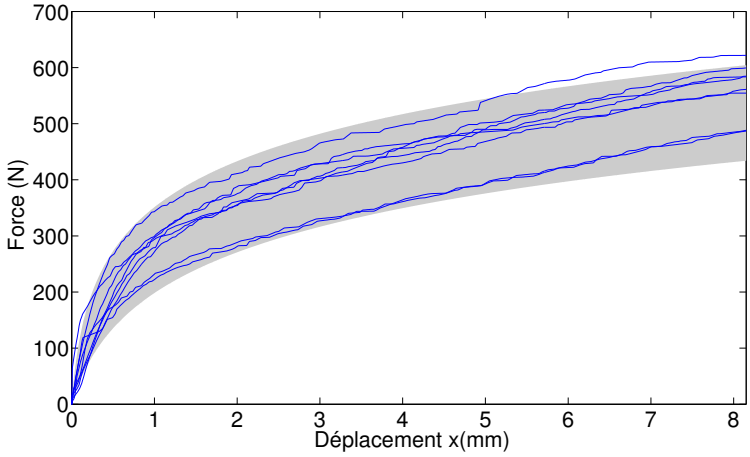



FIG. 4.16 – Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement double (type 2) après 30 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

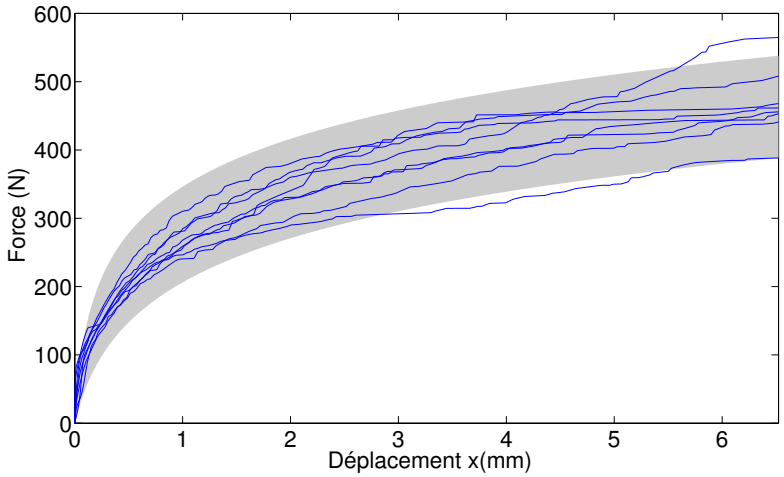



FIG. 4.17 – Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement double (type 2) après 45 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

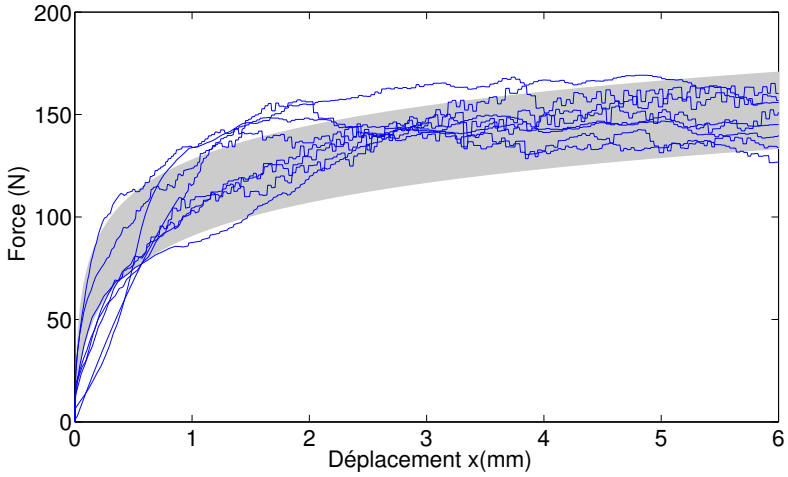



FIG. 4.18 – Région de confiance (zone grise) construite par le modèle probabiliste identifié du comportement de l'assemblage par vissage pour le cas de parement double (type 2) après 60 minutes de charge thermique par le BCT. Force en N en fonction du déplacement en mm.

Le modèle probabiliste proposé qui a été identifié expérimentalement donne des régions de confiance très raisonnables pour les assemblages de type 1 et de type 2. Ces prévisions pourraient certainement être améliorées si nous avions introduit un modèle algébrique ayant plus de paramètre, ou même si nous avions introduit des représentations stochastiques plus sophistiquées telles que des représentations par les chaos polynômiaux, par exemple. Toutefois, la spécification de ce travail était, dans le but d'implémenter cette loi de comportement dans un logiciel de calcul thermomécanique non linéaire des cloisons légères soumises aux charges thermiques des incendies, de rester suffisamment simple et surtout robuste pour éviter les difficultés numériques potentielles rencontrées dans ce type de calcul. Enfin, il est à noter que l'approche se veut volontairement globale au niveau du comportement macro de ce type d'assemblage dont le comportement thermomécanique non linéaire est extrêmement complexe, puisqu'il s'agit de traduire le comportement d'un vissage dans des feuilles de carton et dans une couche de plâtre, pour des températures allant de la température ambiante jusqu'aux hautes températures pour lesquels les lois d'endommagement, pour le carton et le plâtre, semblent très difficile à construire par la voie théorique. C'est pour cela que nous avons privilégié la construction d'un modèle semi-physique recalé sur l'expérimentation.

# Chapitre 5

# Construction du modèle semi-analytique de calcul de la flèche des cloisons légères sous charge de service à température ambiante

*Ce chapitre présente le modèle semi-analytique de calcul de la flèche d'une cloison légère soumise à la charge de service conventionnelle, à la température ambiante (charge répartie uniforme de* 20 *daN/m* $^2$*). Pour ce faire, nous somme partis de l'analyse menée dans [37]. Cette approche repose sur un modèle de comportement de la cloison qui intègre explicitement la participation des plaques CPC vissées sur l'ossature métallique et la loi de comportement de l'assemblage par vissage que nous avons identifiée expérimentalement (voir Chapitre 2).*

## 5.1 Méthode de construction du modèle moyen déterministe

### 5.1.1 Hypothèses utilisées pour la construction du modèle

La méthode de construction du modèle semi-analytique repose sur un modèle de type RDM pour les cloisons sollicitées en flexion sous l'effet d'une charge répartie uniformément sur la cloison.

On suppose que les déplacements sont bloqués aux extrémités latérales de la cloison (extrémité gauche et extrémité droite sur le schéma de la figure 5.1. On introduit une hypothèse de périodicité, la cloison correspondant à une translation périodique de la cellule définie sur le schéma de la figure 5.1. Dans ces conditions, l'analyse de la cloison se ramène à l'analyse de la cellule en introduisant des conditions de périodicité sur ses bords. Ces conditions aux limites appliquées sur les bords suivant l'axe $x_3$ de la cellule (voir figure 5.1) consistent à écrire que les déplacements suivant $x_1$ sont nuls.

La géométrie et le chargement de la cellule sont symétriques (on néglige le poids propre) par rapport au plan d'équation $x_3 = 0$, l'origine de repère étant à la distance $H$ (voir figure 5.1).

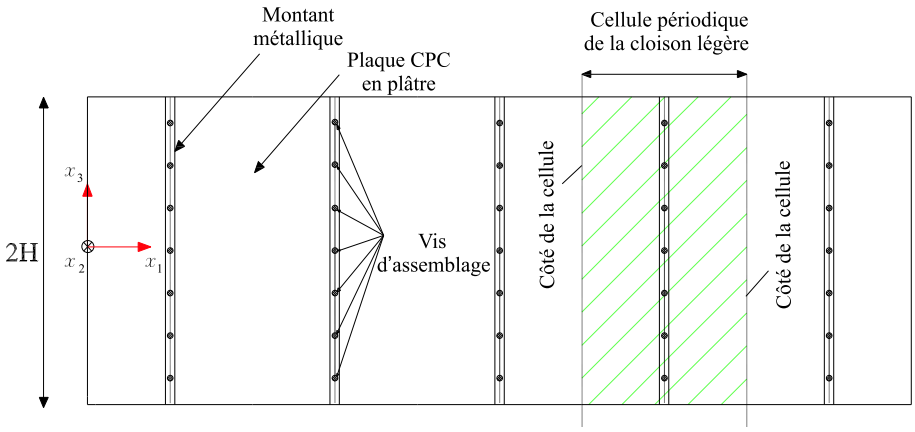



FIG. 5.1 – Schéma d'une cloison légère constituée par les montants métalliques de l'ossature et des plaques CPC vissées sur les montants.

Pour décrire le comportement de la cloison, nous introduisons les hypothèses cinématiques :

- Les montants sont modélisés par des poutres minces en flexion de type Euler-Bernoulli.
- Les deux plaques CPC de la cellule sont représentées par une cinématique mixte de type poutre de Euler-Bernoulli pour le comportement en flexion et de type plaque pour le comportement en membrane. L'hypothèse de comportement en poutre en flexion au tour de l'axe $x_1$ de chacune des deux plaques CPC, a été validée par des calculs par éléments finis qui ont montré que, sous le chargement uniforme, les déplacements suivants $x_2$ sur une ligne définie par $x_3$ égale à une constante sont indépendants de $x_1$. Cette propriété est liée à l'élancement de la plaque suivant l'axe $x_3$, qui se comporte alors comme une poutre. Par contre, les déplacements en $x_1$ et$x_3$ de la plaque sont significatifs, ce qui nécessite l'introduction un modèle de plaque en membrane ;
- Il n'y a pas de continuité des déplacements en $x_1$ et $x_3$ au droit de chaque vis entre le montant et la plaque CPC. En effet c'est la vis qui réalise l'assemblage de la plaque CPC avec le montant. Il est à noter que cette discontinuité est rendue possible par la rotation de chaque vis vis-à-vis de la normale à la plaque CPC (ou au montant) au droit de cette vis qui réalise la connexion. Dans la suite, nous appellerons "glissement" cette discontinuité des déplacements en $x_1$ et $x_3$ au droit d'une vis. La relation entre la force sur une vis et ce glissement est difficilement accessible par la voie théorique et/ou numérique, même en imaginant une modélisation multi-échelle et multi-physique du comportement thermomécanique non linéaire (il faut en effet se rappeler qu'il s'agit d'une vis dans une feuille mince de carton et d'une couche de plâtre). C'est pour cela que nous avons développé un modèle semi-physique à froid et à chaud dans les chapitres 2 et 4 à partir de données expérimentales.
- Nous faisons aussi l'hypothèse, cohérente avec les observations expérimentales, que les montants et les plaques CPC restent "plaqués" sur la ligne de vissage. Cette hypothèse associée à la cinématique de Euler-Bernoulli pour la flexion et au fait que les glissements restent faibles à l'état limite de service, implique l'égalité des courbures du montant et de la plaque CPC en tout point de la ligne de vissage.

### 5.1.2 Ecriture du modèle pour les cloison à parement simple

La cloison et la cellule sont rapportées à repère orthonormé $(O, x_1, x_2, x_3)$ (voir les figures 5.1 et 5.1). L'axe $x_1$ est l'axe transversale de la cloison (axe horizontale), $x_2$ est l'axe perpendiculaire au plan de la cloison et $x_3$ est l'axe longitudinale de la cloison (axe verticale). L'origine du repère est situé à mi-hauteur suivant l'axe verticale de la cloison (ou de la cellule). Les composantes des déplacements suivants $x_1$, $x_2$ et $x_3$ sont notés respectivement $u$, $v$ et $w$. La rotation autour de $x_1$ associée à la flexion est noté $\psi_1$. Soit $N$ l'effort normal dans chaque plaque CPC induit par

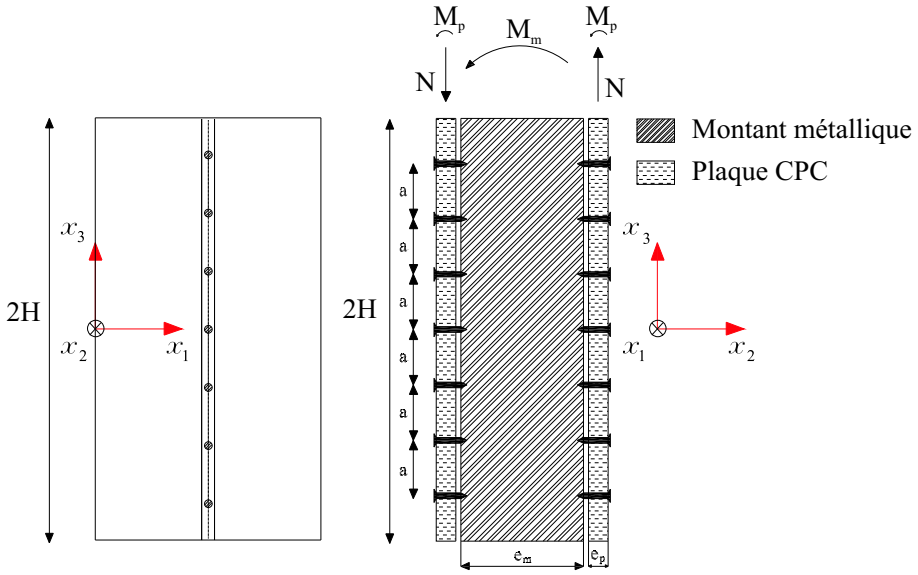



FIG. 5.2 – Notations pour l'écriture du modèle - vue de face et vue en coupe de la cellule.

la flexion de la cellule autour de l'axe $x_1$ (voir figure 5.2). Soit $M$ le moment total autour de $x_1$ engendré par les efforts extérieurs. Soient $M_m$ et $M_p$ respectivement les moments de flexion local autour de $x_1$ dans le montant et dans chacune des deux plaques CPC. L'épaisseur de chacune des deux plaques CPC est notée $e_p$ et l'épaisseur du montant est $e_m$. On note 2H la hauteur de la cloison (dimension suivant $x_3$).
L'écriture de l'équilibre statique des sections conduit à la relation suivante :

$$M = M_m + 2M_p + (e_m + e_p)\, N \quad . \tag{5.1}$$

On utilise les notations introduites sur la figure 5.3. Comme par hypothèse, le montant et les plaques CPC ont la même courbure, la loi de comportement de la cellule en flexion s'écrit :

$$\frac{d\psi_1}{dx_3} = \frac{d^2 v}{dx_3^2} = \frac{M_m}{E_m I_m} = \frac{M_p}{E_p I_p} = \frac{M - (e_m + e_p)\, N}{E_m I_m + 2E_p I_p} \quad . \tag{5.2}$$

Dans cette équation, $E$ et $I$ sont respectivement le module d'Young et l'inertie du montant ou d'une plaque CPC selon l'indice $m$ ou $p$ dont ils sont affectés. Dans la suite, on notera $R = E_m I_m + 2E_p I_p$, la rigidité principale de flexion.
L'effort $N$ dans une section d'abscisse $x_3$ de la cellule est équilibré par la somme des efforts passant par les vis situées entre cette section et l'extrémité libre de la cellule.

Les coordonnées suivant $x_3$, des vis sur la demi-hauteur de la cellule, sont notées $x_3^1, x_3^2, \ldots, x_3^n$. Soit $i$ l'indice de la vis tel que $x_3^{i-1} < x_3 \leq x_3^i$. On obtient ainsi la relation entre l'effort de membrane et les forces exercées par les vis :

$$N\left(x_3\right) = \sum_{j=i}^{n} f_j \quad . \tag{5.3}$$

Nous nous intéressons maintenant au glissement entre le montant et une plaque CPC, induit par l'effet du chargement. Ce glissement est le déplacement relatif $g$ dans la direction $x_3$ des deux points qui coïncidaient dans l'état non déformé (voir figure 5.3). Nous nous plaçons pour le raisonnement qui suit du côté de la plaque CPC tendue.

Compte tenu de la symétrie, à mi-hauteur de la cloison $x_3 = 0$, le déplacement suivant $x_3$ et la

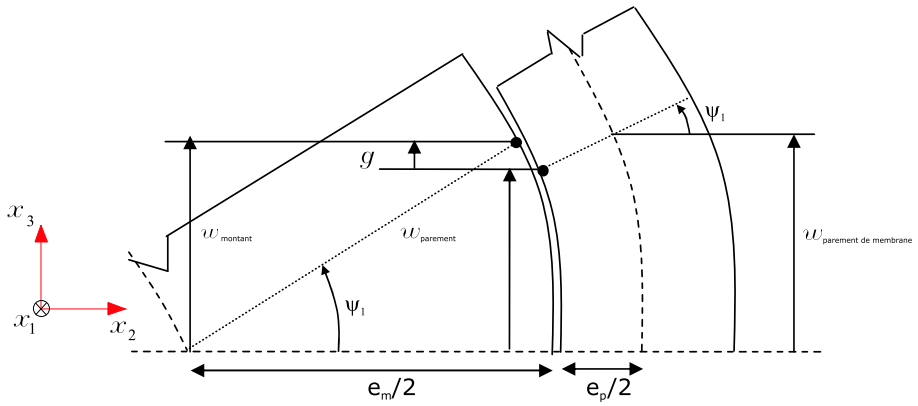



FIG. 5.3 – Déplacement relatif $g$ entre le montant et la plaque CPC suivant la direction $x_3$ (direction verticale sur la figure).

rotation autour de $x_1$ sont nuls en tout les points de la section $x_3 = 0$. Soient $w_m(x_3)$ et $w_p(x_3)$ les déplacements suivant $x_3$ du montant et de la plaque CPC de la section d'abscisse $x_3$, dont la rotation autour de $x_1$ est noté $\psi_1(x_3)$. Enfin on note $w_{p\,membrane}(x_3)$ le déplacement suivant $x_3$ de la plaque CPC de la section d'abscisse $x_3$ induit par les forces exercées par les vis. Nous avons donc :

$$w_m\left(x_3\right) = \frac{e_m}{2}\psi_1\left(x_3\right) \quad , \tag{5.4}$$

$$w_p\left(x_3\right) = -\frac{e_p}{2}\psi_1\left(x_3\right) + w_{p\,membrane}\left(x_3\right) \quad . \tag{5.5}$$

Nous obtenons ainsi le glissement :

$$g\left(x_3\right) = \frac{e_m + e_p}{2}\psi_1\left(x_3\right) - w_{p\,membrane}\left(x_3\right) \quad . \tag{5.6}$$

On suppose que la non-linéarité de la loi de comportement en cisaillement de chaque vis est suffisamment confinée autour de la vis pour ne pas affecter la linéarité du comportement global en membrane des plaques CPC. Dans ces conditions, par linéarité, le déplacement en $x_3$ de membrane de la section d'abscisse $x_3$ dans la plaque CPC s'écrit donc :

$$w_{p\,membrane}\left(x_3\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j}{E_p e_p} d(x_3^j, x_3) \quad , \tag{5.7}$$

avec $d(x_3^j, x_3)$ le déplacement suivant $x_3$ de membrane à l'abscisse $x_3$ dans une plaque d'épaisseur 1 et de module d'Young 1 soumis à une charge ponctuelle unitaire à l'abscisse $x_3^j$. Les développements conduisant à l'expression de $d(x_3^j, x_3)$ sont assez lourds et sont présentés en Annexe A. Par combinaison des équations (5.2), (5.6) et (5.7), on obtient :

$$g\left(x_3\right) = \frac{e_m + e_p}{2} \int_0^{x_3} \frac{M - \left(e_m + e_p\right) N}{R} dx_3 - \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j}{E_p e_p} d\left(x_3^j, x_3\right) \quad . \tag{5.8}$$

Aux droits des vis, la relation entre force et glissement est la loi de comportement en cisaillement de l'assemblage par vissage que nous avons identifiée dans le chapitre 2 a été obtenue par voie expérimentale sous la forme d'un module de raideur $k(g_j)$ dépendant du glissement $g_j$ au droit de la vis $j$. Nous avons donc :

$$f_j = k(g_j)\, g_j \tag{5.9}$$

De plus, sachant que la répartition des vis est régulière de pas " $a$ ", la cote de la i-ème vis est $x_3^i = ia$, (on rappelle qu'il y a une vis en $x_3 = 0$ dans le plan symétrie, cette vis n'intervient pas dans les équations d'équilibre compte tenu des hypothèses de symétrie du chargement et du système mécanique) et nous avons :

$$\int_0^{x_3^i} M(x_3) dx_3 = \frac{pH^3}{6} \left( 3\frac{ia}{H} - \left(\frac{ia}{H}\right)^3 \right) \quad , \tag{5.10}$$

où $p$ est la charge linéique correspondant à une pression de 20 daN/m$^2$ multipliée par l'entraxe entre montants (largeur de la cellule). Nous avons également,

$$\int_0^{x_3^i} N(x_3) dx_3 = a \sum_{j=1}^{n} \min\left(i, j\right) f_j \quad . \tag{5.11}$$

Par combinaison des équations (5.8), (5.9), (5.10) et (5.11), nous obtenons aux droits des n vis situées sur la demi-hauteur de cloison, pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \left( \frac{2R\delta_{ij}}{(e_m + e_p)k(g_j)} + \frac{2R\, d(ja, ia)}{E_p e_p (e_m + e_p)} + \min(i, j) a (e_m + e_p) \right) f_j = \frac{pH^3}{6} \left( 3\frac{ia}{H} - \left(\frac{ia}{H}\right)^3 \right), \tag{5.12}$$

où $\delta_{ij}$ est le symbole de Kronëcker. On obtient ainsi un système linéaire de n équations à n inconnues (les forces sur les n vis d'une demi-hauteur de cloison) que l'on résout numériquement. Connaissant les forces aux vissages, on peut calculer la flèche sous charge de la cloison. La flèche en $x_3 = 0$ est notée $v_0$ et elle est définie par $v_0 = |v(0)|$. Compte tenu de l'Eq. (5.2), on a

$$v_0 = | - \int_0^H \psi_1\left(x_3\right) dx_3| = \int_0^H \int_0^{x_3} \frac{M - (e_m + e_p \quad .) N}{R} dx_3 \tag{5.13}$$

Or nous avons

$$\int_0^H \int_0^{x_3} N dx_3 = a \sum_{i=1}^{n} i \left( H - \frac{ia}{2} \right) f_i \quad . \tag{5.14}$$

On obtient finalement l'expression de la flèche :

$$v_0 = \frac{5pH^4}{24R} - \frac{a}{R}\sum_{i=1}^{n} i\left(H - \frac{ia}{2}\right)(e_m + e_p)\, f_i \quad . \tag{5.15}$$

Le premier terme de cette expression est la flèche que l'on obtiendrait si le montant et les deux plaques CPC étaient simplement plaqués les uns aux autres sans que rien n'empêche leurs glissements relatifs. Le deuxième terme exprime la diminution de flèche engendrée par l'opposition partielle aux glissements qu'apportent les vissages. En introduisant la loi de comportement définie par l'Eq. (5.9), l'Eq. (5.12) est réécrit

$$\begin{aligned} &\forall i = \{\ 1, n\ \}\ , \\ &\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2R\delta_{ij}}{e_m + e_p} + \left(\frac{2R\, d(ja, ia)}{E_p e_p\,(e_m + e_p)} + \min(i,j)\, a(e_m + e_p)\right) k(g_j)\right) g_j = \frac{pH^3}{6}\left(3\frac{ia}{H} - \left(\frac{ia}{H}\right)^3\right). \end{aligned} \tag{5.16}$$

La démarche consiste donc maintenant à calculer le glissement $g_j$ pour chacune des $n$ vis située sur la demi-cellule $x_3 > 0$ en utilisant l'Eq. (5.16), puis en déduire l'expression de la force $f_j$ donnée par l'Eq. (5.9) et enfin, calculer la flèche par l'Eq. (5.15).
En tenant compte de la loi de comportement en cisaillement des vis d'assemblage, pour le modèle nominal (ou modèle moyen) présentée dans le chapitre 2, on a

$$\begin{cases} k(g_j) = \alpha \underline{a}\, \underline{b}^{\alpha-1} \quad \text{si} \quad g_j = 0 \quad , \\ k(g_j) = \underline{a}\{(g_j + \underline{b})^{\alpha} - \underline{b}^{\alpha}\}/g_j \quad \text{si} \quad g_j \neq 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

## 5.2 Méthode de la construction du modèle probabiliste

Comme il existe des variabilités importantes du comportement en cisaillement des vis d'assemblage du montant avec les plaques CPC, un modèle probabiliste a été introduit. Les paramètres $\underline{a}$, $\underline{b}$ ont été modélisés des variables aléatoires $A$ et $B$, dont les lois de probabilité ont été déterminées et identifiées dans le chapitre 2 à l'aide de mesure expérimentale. L'Eq. (5.17) est donc réécrite sous forme :

$$\begin{cases} K(g_j) = \alpha A\, B^{\alpha-1} \quad \text{si} \quad g_j = 0 \\ K(g_j) = A\{(g_j + B)^{\alpha} - B^{\alpha}\}/g_j \quad \text{si} \quad g_j \neq 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

Dans ces conditions, la flèche $v_0$ devient une variable aléatoire notée $V_0$. Concernant la méthode de résolution des équations stochastiques, nous utilisons la méthode de Monte Carlo, consistant à générer, pour chaque vis de l'assemblage de la cellule, des réalisations indépendantes des variables aléatoires $A$ et $B$ suivant leur loi de probabilité, puis à introduire chaque réalisation dans l'Eq. (5.18), puis à résoudre le problème comme le modèle moyen déterministe, ce qui permet de construire les réalisations indépendantes de la flèche, et enfin à utiliser les statistiques mathématiques pour estimer les grandeurs probabilistes qui décrivent la flèche aléatoire $V_0$ dont on a construit des réalisations indépendantes.

## 5.3 Application numérique et résultat de calcul

Dans ce paragraphe, on présente les résultats relatifs au modèle moyen déterministe et au modèle probabiliste. Chaque plaque CPC de la cellule correspond à une cloison en parement simple de type BA13, dont les caractéristiques sont les suivantes : épaisseur 12.5 mm, hauteur de la cellule 2.7 m, distance entre deux vis 0.3 m, largeur de la cellule 0.6 m. Le montant est en profil en acier en "C" de dimension $48 \times 50$ mm.

*Calcul avec le modèle déterministe*

La valeur de la flèche calculée par le modèle moyen est $v_0 = 5.6$ mm.

*Calcul avec le modèle probabiliste*

On contrôle la convergence de la méthode de Monte Carlo par rapport au nombre $n_s$ des réalisations $\theta_1, ..., \theta_{n_s}$ utilisées pour la simulation Monte Carlo en étudiant la fonction suivante :

$$n_s \mapsto conv\,(n_s) = \left\{ \frac{1}{n_s} \sum_{\ell=1}^{n_s} V_0(\theta_\ell)^2 \right\}^{1/2} \quad . \tag{5.19}$$

où les $V_0(\theta_\ell)$ sont les réalisations indépendantes calculées avec le modèle probabiliste de la

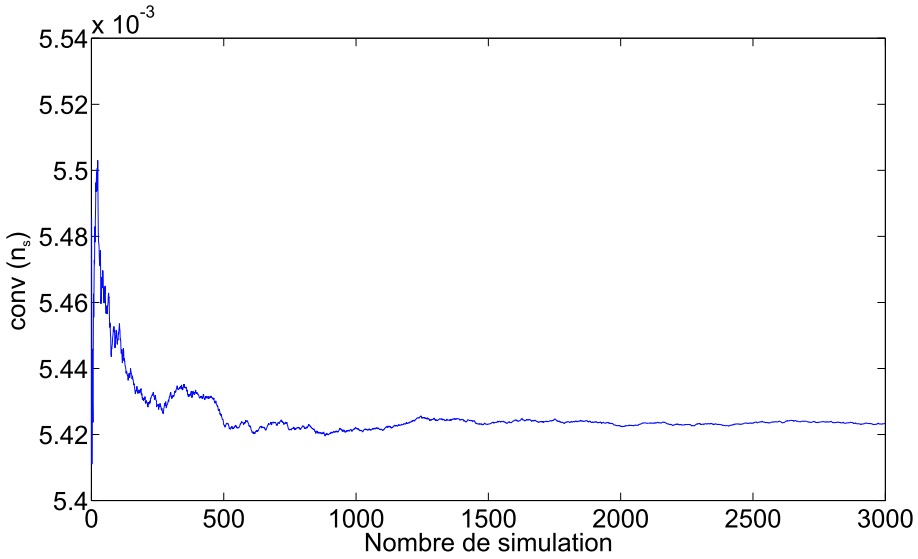



FIG. 5.4 – Convergence par rapport au nombre $n_s$ des simulations. Graphe de la fonction $n_s \mapsto conv\,(n_s)$.

flèche aléatoire $V_0$. La figure 5.4 montre le graphe de la fonction $n_s \mapsto conv(n_s)$. On voit que la convergence est atteinte à partir de $n_s = 2\,500$ et tous les résultats qui suivent ont été faits pour $n_s = 10\,000$. L'estimation de la fonction de densité de probabilité de la flèche aléatoire $V_0$ à demi-hauteur de la cellule est donnée à la figure 5.5. On peut voir la densité de probabilité n'est pas Gaussienne. L'estimation de la moyenne $\underline{V}_0$ et de l'écart type $\sigma_{V_0}$ de la flèche aléatoire $V_0$

sont $\underline{V}_0 = 5.4$ mm et $\sigma_{V_0} = 0.14$ mm. Pour les 10 000 réalisations, le minimum et le maximum de la force dans chacune des 4 vis est donné dans le tableau après Pour la température ambiante

| Numéro de la vis | Min de la force (N) | Max de la force (N) |
|---|---|---|
| 1 | 88 | 313 |
| 2 | 149 | 376 |
| 3 | 180 | 479 |
| 4 | 198 | 466 |

TAB. 5.1 – Minimum et maximum de la force en N dans chacune des 4 vis sur l'ensemble des 10 000 réalisations

et sous la charge de service, on peut voir que la flèche nominale $v_0$ (modèle moyen) est voisine de la moyenne statistique $\underline{V}_0$ de la flèche aléatoire $V_0$ et que la dispersion est relativement faible. Cependant, le tableau 5.1 montre qu'il y a des fluctuations statistiques significatives des forces dans les vis, mais qu'elles induisent des fluctuations statistiques relativement faibles pour le glissement (voir la figure 2.11). De plus, il y a un effet de moyennage statistique sur le nombre de vis qui a pour effet de réduire la fluctuation statistique de la flèche aléatoire $V_0$.

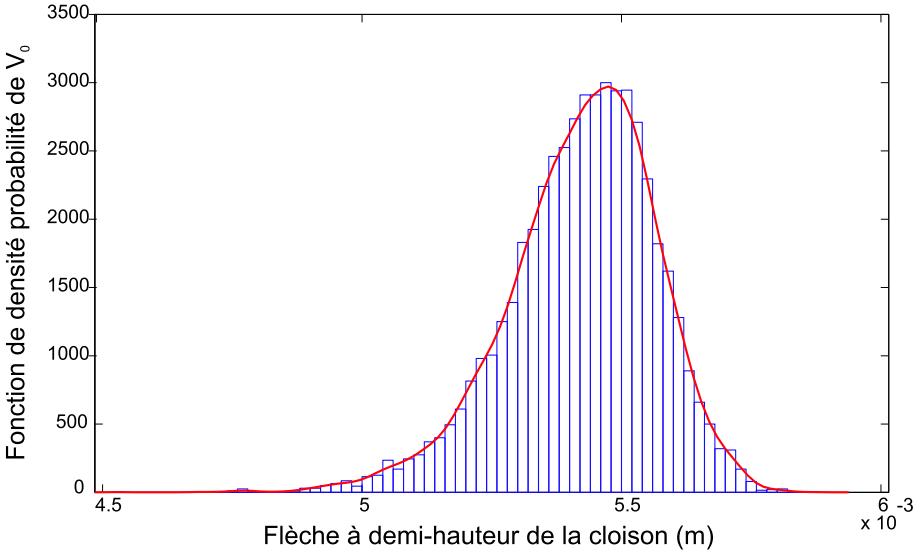



FIG. 5.5 – Graphe de la fonction de densité probabilité de la flèche aléatoire $V_0$ à mi-hauteur de la cloison.

# Chapitre 6

# Développement du modèle thermomécanique non linéaire déterministe et probabiliste, de la cloison légère.

*Ce chapitre est dédié au développement du modèle thermomécanique non linéaire de la cloison légère soumise à la charge thermique selon la courbe ISO 834 et sous l'effet d'une charge répartie uniforme. Afin de décrire le comportement de la cloison, nous faisons les choix cinématiques suivants :*
*- Les plaques CPC sont modélisées par une théorie de plaque épaisse et le modèle est rappelée ci-dessous.*
*- Les montants métalliques (profils "C") sont modélisés par des poutres minces de section ouverte de type Bernoulli.*
*- Les assemblages par vissage des plaques CPC sur les montants métalliques sont modélisés par un système de ressorts à comportement non linéaire dont les raideurs sont calculées en utilisant le modèle du comportement en cisaillement de l'assemblage présenté dans le Chapitre 2 (à froid) et le Chapitre 4 (à chaud).*
*- Le modèle mécanique utilisé pour représenter la force de cisaillement transmise par une vis entre une plaque CPC et le montant métallique est ponctuelle (la force est concentrée en un point). Un tel modèle provoquerait une déformation locale importante dans la plaque CPC et ne correspondrait pas à la réalité physique. En fait, cette force est localement distribuée au voisinage de la vis. Pour mieux présenter cette réalité et la diffusion de la force exercée par la vis dans la plaque CPC, nous avons introduit un sous-domaine (en forme de disque), centré au droit de la vis, de rayon $r = 1.5$ cm et supposé indéformable. Ainsi la force concentrée au droit de la vis se répartit sur la circonférence de ce sous-domaine assurant ainsi une diffusion de la force dans la plaque CPC.*

## 6.1 Modèle du comportement thermomécanique non linéaire de la plaque CPC

### 6.1.1 Modèle de la plaque CPC

Nous rappelons ci-dessous la formulation variationnelle en déplacement du problème aux limites pour la plaque CPC.
L'espace est rapportée à un repère orthonormé $Ox_1x_2x_3$. Le plan moyen de la plaque est dans le plan $Ox_1x_2$. L'axe $x_3$ est donc perpendiculaire au plan moyen de la plaque. Soit $\mathcal{D}$ le domaine occupé par le plan moyen de la plaque CPC (partie de $\mathbb{R}^2$ dont le point courant est $(x_1, x_2)$). La plaque est encastrée sur la partie $d_0$ de son bord $\partial\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des champs de déplacement admissibles défini par

$$\mathcal{C}_0 = \{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) \,\text{suffisamment régulier et tel que}\, \mathbf{u} = 0 \,\text{et}\, \boldsymbol{\psi} = 0 \,\text{sur}\, d_0\}, \tag{6.1}$$

ou $(x_1, x_2) \mapsto \mathbf{u}(x_1, x_2)$ est le champ de déplacement et $(x_1, x_2) \mapsto \boldsymbol{\psi}(x_1, x_2)$ le champ de rotation de la plaque CPC paramétrés dans le plan moyen. La forme faible du problème aux limites de la plaque CPC avec prise en compte de l'endommagement s'écrit alors en explicitant la dépendance du problème par rapport à la température. Il s'agit de trouver $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})$ dans $\mathcal{C}_0$ tel que, pour tout $(\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\psi})$ dans $\mathcal{C}_0$ on ait,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} < \begin{bmatrix} [\underline{H}(\theta)] & [\underline{B}(\theta)] & 0 \\ [\underline{B}(\theta)] & [\underline{C}(\theta)] & 0 \\ 0 & 0 & [\underline{F}(\theta)] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) \\ \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) \\ \mathbf{e}^c(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{h}}' \\ \underline{\mathbf{b}}' \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{e}^m(\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\psi}) \\ \boldsymbol{\kappa}(\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\psi}) \\ \mathbf{e}^c(\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\psi}) \end{pmatrix} > dx_1 dx_2 \\ = \int_{\mathcal{D}} < \begin{pmatrix} \mathbf{f}^s \\ \mathbf{m}^s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \kappa(\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\psi}) \end{pmatrix} > dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

où les vecteurs $\mathbf{f}^s = (f_1^s, f_2^s, f_3^s)$ et $\mathbf{m}^s = (m_1^s, m_2^s, m_3^s)$ représentent respectivement le vecteur des forces et des moments extérieurs appliqués, et où tous les autres grandeurs sont définies dans le paragraphe 1.4.2.

### 6.1.2 Discrétisation par la méthode des éléments finis du modèle de la plaque CPC

Le vecteur des déformations généralisées en un point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ du domaine $3D$ occupé par les matériaux de la plaque multicouche s'exprime en fonction des déplacements généralisés $\mathbf{q}(x_1, x_2) = (\mathbf{u}(x_1, x_2), \boldsymbol{\psi}(x_1, x_2))$, avec $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (u(x_1, x_2), v(x_1, x_2), w(x_1, x_2))$ et

$\boldsymbol{\psi}(x_1, x_2) = (\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2))$, s'écrit

$$\mathbf{e}^g(x_1, x_2, x_3) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + x_3 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial \psi_1}{x_1} \\ \frac{\partial \psi_2}{x_2} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \\ \psi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \end{array} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{array}{c} u(x_1, x_2) \\ v(x_1, x_2) \\ w(x_1, x_2) \\ \psi_1(x_1, x_2) \\ \psi_2(x_1, x_2) \end{array} \right\} = \mathcal{L}\{\mathbf{q}(x_1, x_2)\} \quad . \tag{6.3}$$

Le vecteur $\mathbf{q}$ est réécrit, $\mathbf{q} = (u, v, w, \psi_1, \psi_2)$.
Des éléments finis isoparamétriques à $m$ nœuds sont utilisés pour la discrétisation spatiale du domaine $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{D}^e \subset \mathcal{D}$ le domaine d'un élément fini fixé et soient $N_1^e, ..., N_m^e$, ses fonctions d'interpolation telles que

$$\begin{array}{l} u(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m N_i^e(x_1, x_2) u^i \quad , \\ v(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m N_i^e(x_1, x_2) v^i \quad , \\ w(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m N_i^e(x_1, x_2) w^i \quad , \\ \psi_k(x_1, x_2) \sum_{i=1}^m N_i^e(x_1, x_2) \psi_k^i \quad \text{avec} \quad k = 1, 2 \quad , \end{array} \tag{6.4}$$

où $u^i, v^i, w^i, \psi_1^i, \psi_2^i$, sont les valeurs des champs au nœud $i$ de l'élément fini de domaine $\mathcal{D}_e$. En remplaçant dans l'Eq. (6.3) les composantes du champ des déplacements généralisés par leurs interpolations nodales données par l'Eq. (6.4), on obtient les matrices d'interpolation des déformations généralisées $[\mathbf{B}_i^e(x_1, x_2, x_3)]$ permettant de calculer les déformations généralisées en chaque point $(x_1, x_2, x_3)$ avec $(x_1, x_2, 0)$ un point dans $\mathcal{D}_e$, en fonction des déplacements généralisés des nœuds de l'élément fini $\mathcal{D}_e$ :

$$\mathbf{e}_g^e(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^m [\mathcal{B}_i^e(x_1, x_2, x_3)] \mathbf{q}^i \quad \text{avec} \quad \mathbf{q}^i = (u^i, v^i, w^i, \psi_1^i, \psi_2^i) \tag{6.5}$$

et avec

$$[\mathcal{B}_i^e(x_1, x_2, x_3)] = \begin{bmatrix} N_{i,x_1}^e(x_1, x_2) & 0 & 0 & x_3 N_{i,x_1}^e(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & N_{i,x_2}^e(x_1, x_2) & 0 & 0 & x_3 N_{i,x_2}^e(x_1, x_2) \\ N_{i,x_2}^e(x_1, x_2) & N_{i,x_1}^e(x_1, x_2) & 0 & x_3 N_{i,x_2}^e(x_1, x_2) & x_3 N_{i,x_1}^e(x_1, x_2) \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,x_1}^e(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x_2}^e(x_1, x_2) \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,x_2}^e(x_1, x_2) & N_{i,x_1}^e(x_1, x_2) \\ 0 & 0 & N_{i,x_2}^e(x_1, x_2) & 0 & N_i^e(x_1, x_2) \\ 0 & 0 & N_i^e(x_1, x_2) & N_i^e(x_1, x_2) & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

avec $N^e_{i,x_k}(x_1,x_2) = \partial N^e_i(x_1,x_2)/\partial x_k$. L'Eq. (6.5) est réécrite globalement

$$\mathbf{e}^e_g(x_1,x_2,x_3) = [[\mathcal{B}^e_1(x_1,x_2,x_3)] \dots [\mathcal{B}^e_m(x_1,x_2,x_3)]] \begin{bmatrix} \mathbf{q}^1 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{q}^m \end{bmatrix} = [\mathcal{B}^e(x_1,x_2,x_3)]\mathbf{q} \quad . \tag{6.7}$$

En introduisant la discrétisation du champ de déplacement donné par l'Eq. (6.4), dans l'Eq. (6.2), et en tenant compte de la condition de Dirichlet sur le bord $d_0$, nous obtenons l'équation matricielle non linéaire suivante

$$[K(\mathbf{q},\theta)]\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad , \tag{6.8}$$

où $[K(\mathbf{q},\theta)]$ est la matrice de rigidité globale qui est une fonction non linéaire de $\mathbf{q}$ de part la présence du modèle d'endommagement, et qui dépend de la température $\theta$. Cette matrice résulte de l'assemblage des matrices élémentaires qui s'écrivent

$$[K^e(\mathbf{q},\theta)] = \int_{\mathcal{D}_e} [\mathcal{B}^e(x_1,x_2,0)]^T [A^g(x_1,x_2,\mathbf{q},\theta)][\mathcal{B}^e(x_1,x_2,0)] dx_1 dx_2 \quad , \tag{6.9}$$

où $[A^g(x_1,x_2,\mathbf{q},\theta)]$ est la matrice de la loi de comportement mécanique globale de la plaque CPC reliant les déformations aux efforts résultants définie par l'Eq. (1.16) et qui est fonction du champ de température $\theta$.

## 6.2 Modèle de l'assemblage par vissage montant-plaque CPC

Nous présentons dans ce paragraphe le développement du modèle numérique de l'assemblage par vissage d'une plaque CPC au montant métallique par la méthode des éléments finis, pour les deux cas de cloison en parement simple ou en parement double. On suppose que chaque vis ne tourne pas autour de son axe. La rotation autour de l'axe de la vis est donc nul. Le développement numérique consiste à modéliser l'assemblage par vissage par un système de ressorts en translation et en rotation dont les raideurs sont déterminées en utilisant le modèle de comportement en cisaillement de l'assemblage construit dans le chapitre 2 et identifié expérimentalement dans les chapitres 2 et 4 (à froid et à chaud). A cause de la dissymétrie de la géométrie d'une vis par rapport au plan perpendiculaire à son axe et passant par le point milieu par rapport à sa longueur, le centre de rotation de la vis se décale avec une excentricité par rapport au point milieu. Nous étudions ci-dessous 3 cas. Le cas d'une cloison en parement simple en tenant et en tenant pas compte de l'excentricité et le cas de la cloison en parement double.

### 6.2.1 Cas de la cloison en parement simple en ne tenant pas compte de l'excentricité de la rotation

Considérons une cloison légère constituée de plaques CPC assemblées par vissage au montant métallique (voir les figures 6.1 et 6.2).

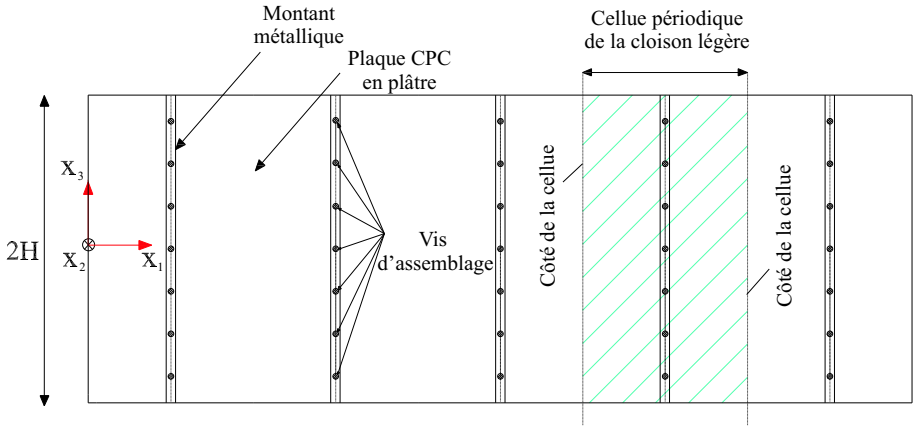



FIG. 6.1 – Cloison légère constituée de plaques CPC assemblées par vissage au montant métallique.

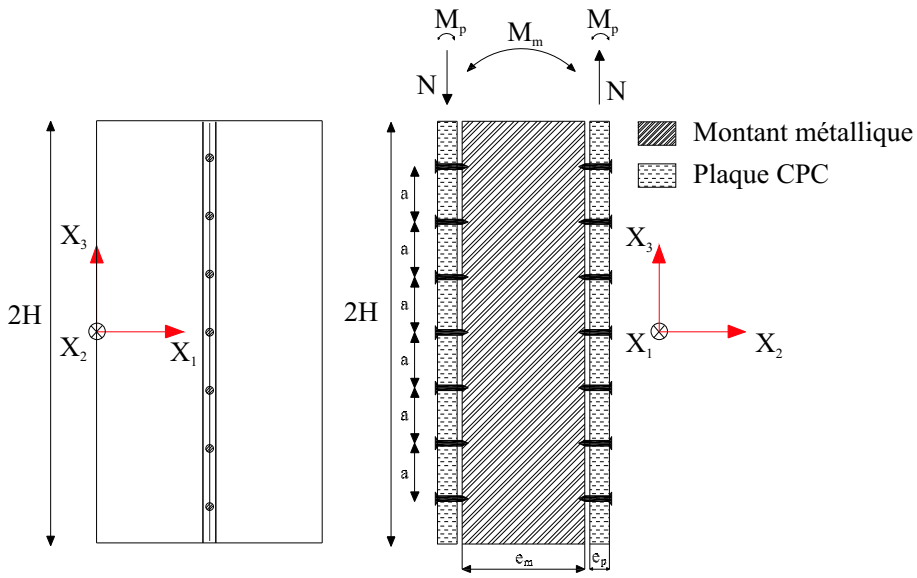



FIG. 6.2 – Section représentative d'une cellule de la cloison légère en parement simple.

Supposons que la dissymétrie géométrique induit par la géométrie de la vis d'assemblage soit annulée (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de rotation de la vis au tour d'un axe perpendiculaire à l'axe longitudinale de la vis et passant par son point au milieu). Considérons une vis de l'assemblage d'une plaque CPC avec le montant métallique. Le modèle mécanique de la vis est celui d'une barre indéformable (trait épais grisé (en vert pour la version couleur) sur la figure 6.3. On considère les nœuds 1 et 2 du maillage par élément fini situé sur l'axe neutre du montant et situé dans le plan moyen de la plaque CPC, respectivement. On considère maintenant les points 3 et 4 de nœuds intermédiaires situées sur l'interface entre le montant métallique et la plaque CPC, ainsi que le point 5 au milieu de la vis d'assemblage. A l'état initial non chargé, les points 3 et 4 coïncident, les points 2 et 5 coïncident et les points 1,2,3,4 et 5 sont allignés (voir la figure 6.3 à gauche). Dans la configuration déformée, la vis d'assemblage tourne au tour du point 5 avec

un vecteur rotation $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\, 0,\, \beta_3)$. Pour cette configuration, la section droite de la plaque CPC se déplace en translation suivant l'axe $x_3$ par rapport à sa position initiale, et tourne au tour de l'axe $x_1$. Le déplacement du nœud 2 peut donc être décomposé en une translation et une rotation. L'assemblage par vissage est modélisé par deux ressorts. Le premier est un ressort en translation, reliant les points 5 et 2, dont la raideur est notée $k_t$. Le second est un ressort en rotation reliant la section droite de la plaque CPC et la rotation de l'axe de la vis, dont la raideur est notée $c$ (voir la figure 6.3 à droite).

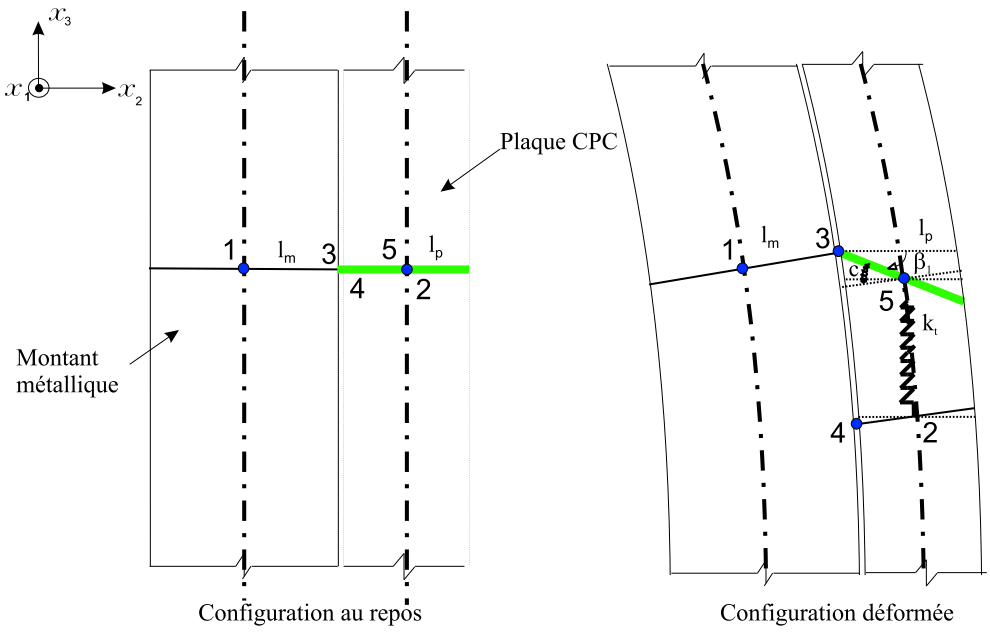



FIG. 6.3 – Modélisation de l'assemblage par vissage avec des ressorts. Figure de gauche : configuration initiale non chargée, figure de droite : configuration déformée liée au chargement.

Pour simplifier les développements, le ressort en rotation est transformé en un ressort en translation avec une rigidité équivalent $k_c = c/l_p^2$ où $l_p$ est la demi-épaisseur de la plaque CPC. Le système de ressorts en translation et en rotation, présenté à la figure 6.3 de droite, se transforme en un système de deux ressorts en translation en série, illustré à la figure 6.4 de gauche. Notons un système de deux ressorts en translation en série peut être modélisé par un unique ressort en translation (figure 6.4 à droite) dont la rigidité $K$ s'écrit

$$K = \frac{k_t\, k_c}{k_t \,+\, k_c} \quad . \tag{6.10}$$

En conclusion, l'assemblage par vissage d'une plaque CPC sur le montant métallique est modélisé par un ressort en translation qui relie les points 3 et 4 avec une raideur définie par l'Eq. (6.10). Soit $\mathbf{u}^i = (u^i, v^i, w^i)$ le vecteur de déplacement de translation du nœud $i$ suivant les 3 directions $x_1$, $x_2$ et $x_3$. Soit $\boldsymbol{\psi^i} = (\psi_1^i, \psi_3^i)$ le vecteur de déplacement en rotation du nœud $i$ au tour des axes $Ox_1$ et $Ox_3$ . Il est noté que la composante $\psi_2^i$ du vecteur de déplacement en rotation au tour de l'axe $Ox_2$ n'est pas prise en compte dans la théorie de plaque.

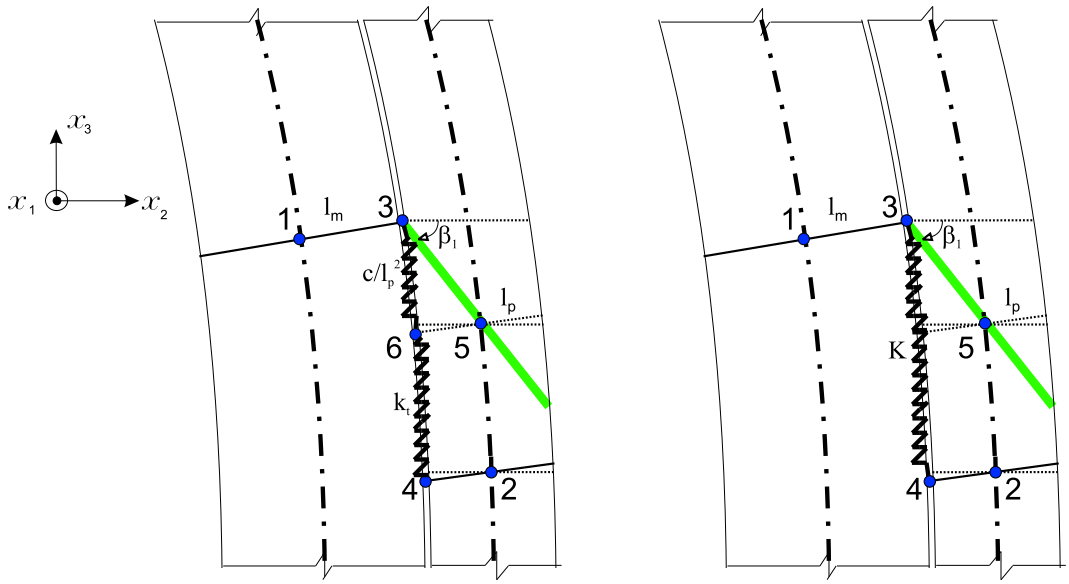



FIG. 6.4 – Illustration du système de ressorts. A gauche : Système de deux ressorts en translation en série. A droite : Un ressort en translation équivalent.

Les relations cinématiques entres les vecteurs de déplacement des nœuds s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{u}^3 = \mathbf{u}^1 + \boldsymbol{\psi}^1 \times \overrightarrow{13} & , \\ \mathbf{u}^4 = \mathbf{u}^2 + \boldsymbol{\psi}^2 \times \overrightarrow{24} & , \end{cases} \tag{6.11}$$

où $\overrightarrow{13}$ et $\overrightarrow{24}$ sont les vecteurs définis par les points 1 et 3 d'une part et 2 et 4 d'autre part.
De l'Eq. (6.11), nous déduisons les relations cinématiques pour les composantes du vecteur de déplacement,

$$\begin{cases} u^3 = u^1 - l_m \psi_3^1 \\ v^3 = v^1 \\ w^3 = w^1 + l_m \psi_1^1 \end{cases} \tag{6.12}$$

et

$$\begin{cases} u^4 = u^2 + l_p \psi_3^2 \\ v^4 = v^2 \\ w^4 = w^2 - l_p \psi_1^2 \end{cases} , \tag{6.13}$$

avec $l_m$ et $l_p$ la demi-épaisseur du montant métallique et de la plaque CPC. La norme $g$ du déplacement relatif (vecteur) dans le plan de la plaque CPC entre les nœuds 3 et 4 peut donc être réécrit comme suit,

$$g^2 = (u^4 - u^3)^2 + (w^4 - w^3)^2 = (u^2 + l_p\psi_3^2 - u^1 + l_m\psi_3^1)^2 + (w^2 - l_p\psi_1^2 - w^1 - l_m\psi_1^1)^2 \quad . \tag{6.14}$$

De plus, puisque les vis ne travaillent qu'en cisaillement pour le glissement dans le plan $Ox_1x_3$, on a

$$v^3 = v^4 \quad . \tag{6.15}$$

En introduisant l'Eq. (6.15) dans les Eqs. (6.12) et (6.13), on obtient

$$v^1 - v^2 = 0 \quad . \tag{6.16}$$

L'équilibre d'une vis s'obtient en minimisant sa puissance $I$ sous la contrainte définie par l'Eq. (6.16) et en utilisant les relations cinématiques définie par l'Eq. (6.11). La puissance s'écrit

$$I = \frac{1}{2}Kg^2 - g\,f(g) \quad . \tag{6.17}$$

La contrainte est prise en compte par la méthode de pénalisation. La fonctionnel $I$ est alors remplacée $I'$ tel que

$$I' = \frac{1}{2}Kg^2 - fg + \frac{P}{2}(v^1 - v^2)^2 \quad , \tag{6.18}$$

avec $P$ le coefficient de pénalisation qui est très grand. Soit $\mathbf{q}^e = (u^1, v^1, w^1, \psi_1^1, \psi_3^1, u^2, v^2, w^2, \psi_1^2, \psi_3^2)$ le vecteur de déplacement nodale de l'élément de liaison $\overrightarrow{12}$. La fonctionnel $I'$ peut s'écrire alors (voir les détails de calcul dans l'annexe B),

$$I' = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{e}T}[K^e]\mathbf{q}^{\mathbf{e}} - gf(g) \quad , \tag{6.19}$$

où $[K^e]$ est matrice de rigidité élémentaire de l'élément de liaison des vissages entre la plaque CPC et le montant métallique, qui s'écrit

$$[K^e] = K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -l_m & -1 & 0 & 0 & 0 & -l_p \\ & P & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & l_m & 0 & 0 & 0 & -1 & l_p & 0 \\ & & & l_m^2 & 0 & 0 & 0 & -l_m & l_m l_p & 0 \\ & & & & l_m^2 & l_m & 0 & 0 & 0 & l_m l_p \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & l_p \\ & & \text{sym} & & & & P & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & -l_p & 0 \\ & & & & & & & & l_p^2 & 0 \\ & & & & & & & & & l_p^2 \end{bmatrix} . \tag{6.20}$$

On notera que la matrice $K^e$ dépend de la constante $K$ définie par l'Eq. (6.10), de $l_p$ et $l_m$, et du coefficient de pénalisation $P$.

### 6.2.2 Cas de la cloison en parement simple en tenant compte de l'excentricité de la rotation

Dans cette partie, la dissymétrie géométrique des vis d'assemblage est prise en compte dans la construction du modèle de l'assemblage. La vis ne tourne plus au tour de son point milieu noté 2, mais au tour de son centre de rotation noté 5 correspondant à un point excentré de $e_x$ par rapport au point 2. Le déplacement de la vis est maintenant décrit par le déplacement suivant l'axe $x_3$ de son extrémité (le point 3) et la rotation autour de l'axe $x_1$ au point 5. La modélisation de l'assemblage par vissage est faite par des ressorts comme le cas précédent. La matrice de rigidité élémentaire de la liaison est construite en remplaçant, dans l'Eq. (6.20), la raideur du ressort

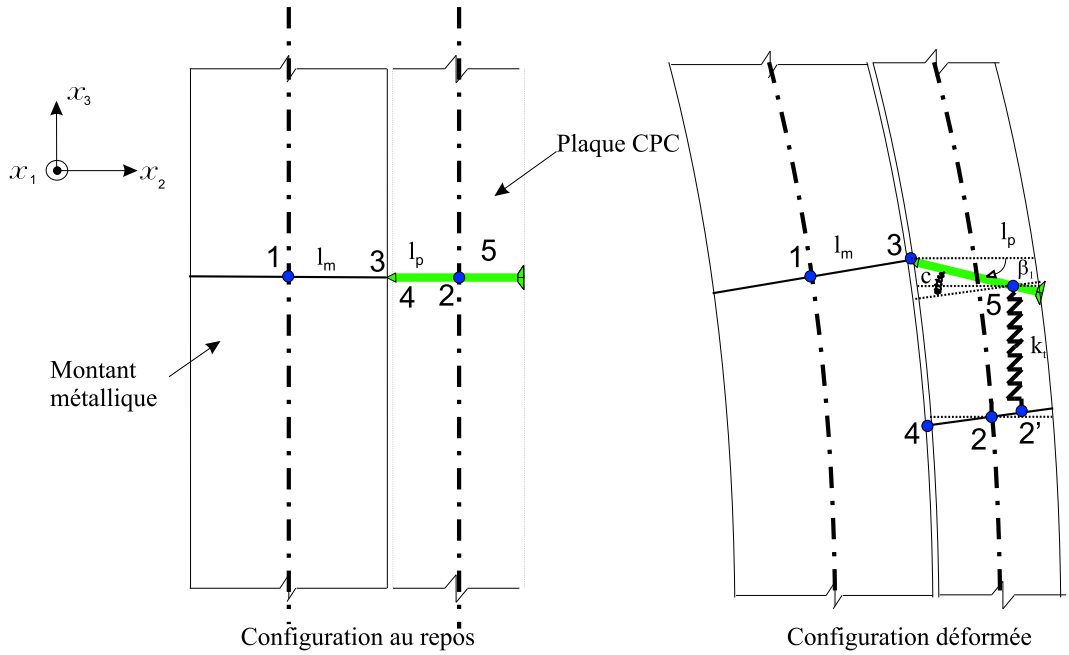



FIG. 6.5 – Modélisation de l'assemblage des vissages par un système des ressorts dans le cas parement simple avec prise en compte de l'excentricité de la rotation des vis.

en translation $K$ par la nouvelle raideur $K_{e_x}$ qui tient en compte de l'excentricité $e_x$, et qui est définie par

$$K_{e_x} = \frac{k_t\, k_c^{e_x}}{k_t \,+\, k_c^{e_x}} \quad , \tag{6.21}$$

avec

$$k_c^{e_x} = \frac{c}{(l_p + e_x)^2} \quad . \tag{6.22}$$

### 6.2.3 Cas de la cloison en parement double en tenant compte de l'excentricité de la rotation

Nous étudions dans cette partie la construction du modèle de l'assemblage par vissage dans le cas d'une cloison en parement double avec prise en compte de l'excentricité de la rotation. La figure 6.6 montre la cellule de la cloison légère en parement double.

Dans la configuration déformée, une vis de l'assemblage tourne avec un vecteur de rotation $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\, 0,\, \beta_3)$. Les sections droites des plaques de CPC se déplacent en translation suivant $x_3$ par rapport à leurs positions initiales, et tournent au tour de l'axe $x_1$. Dans le cas du parement double, la vis traverse deux plaques CPC. La partie de la vis qui traverse la plaque CPC en contact avec le montant a une symétrie et sa rotation est donc décrit par rapport au centre de cette partie de la vis. Par contre, la partie de la vis qui traverse l'autre plaque CPC et qui contient donc la tête de vis, ne tourne pas par rapport au point milieu mais par rapport au centre de rotation excentré de $e_x$ par rapport à ce point milieu. Comme dans le cas de la cloison en parement simple, l'assemblage par vissages est modélisé par un système des ressorts en translation et en rotation suivant le schéma montré à la figure 6.7. Les raideurs des ressorts en

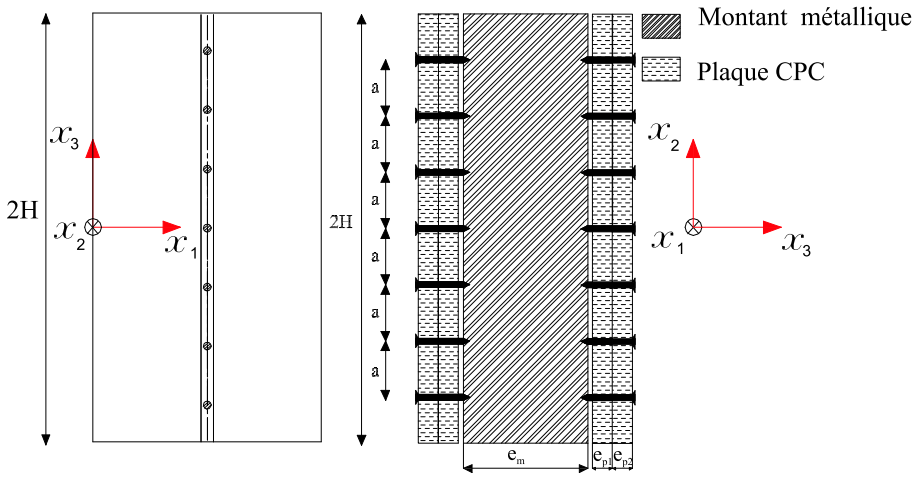



FIG. 6.6 – Cellule de la cloison légère en parement double.

translation et en rotation de la première plaque CPC et de la seconde sont notées $k_{t1}$, $c_1$ et $k_{t2}$, $c_2$, respectivement. Ce système de ressorts est transformé en un système plus simple composé de deux ressorts en translation équivalents (voir la figure 6.8). Les raideurs $K_1$ et $K_2$ de ces ressorts équivalents sont données par

$$K_1 = \frac{k_{t1}\, k_{c1}}{k_{t1} \,+\, k_{c1}} \quad , \quad \text{avec} \quad k_{c_1} = c_1/l_{p_1}^2 \tag{6.23}$$

et

$$K_2 = \frac{k_{t2}\, k_{c2}}{k_{t2} \,+\, k_{c2}} \quad , \quad \text{avec} \quad k_{c_2} = c_2/(l_{p_2} + e_x)^2 \tag{6.24}$$

Finalement, l'assemblage par vissage dans le cas d'une cloison en parement double est modélisé par un système de deux ressorts en translation, l'un relie le point 4 du montant au point 8 de la première plaque CPC, les points 4 et 8 étant situés à l'interface entre le montant et la première plaque CPC. L'autre relie le point 9 de la première plaque CPC avec le point 11 de la seconde. Les points 9 et 11 sont situés sur l'interface entre deux plaques CPC (voir la figure 6.7) .

Le développement du modèle consiste à construire la matrice de rigidité élémentaire de l'élément de liaison qui lie les déplacements de trois points 1, 2 et 3 qui seront trois nœuds du maillage par éléments finis. Le point 1 est sur la fibre neutre du montant. Le point 2 est sur la fibre neutre de la plaque CPC en contact avec le montant. Le point 3 est sur la fibre neutre de la seconde plaque CPC. Dans la configuration non déformée, les points 1, 2 et 3 sont allignés. Dans la configuration déformée, les relations cinématiques décrivant la position des différents points sont les suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{u}^4 = \mathbf{u}^1 + \boldsymbol{\psi}^1 \times \overrightarrow{14} \quad , \\ \mathbf{u}^8 = \mathbf{u}^2 + \boldsymbol{\psi}^2 \times \overrightarrow{28} \quad , \\ \mathbf{u}^9 = \mathbf{u}^4 + \boldsymbol{\beta} \times \overrightarrow{49} \quad , \\ \mathbf{u}^{11} = \mathbf{u}^3 + \boldsymbol{\psi}^3 \times \overrightarrow{3\,11} \quad , \end{cases} \tag{6.25}$$

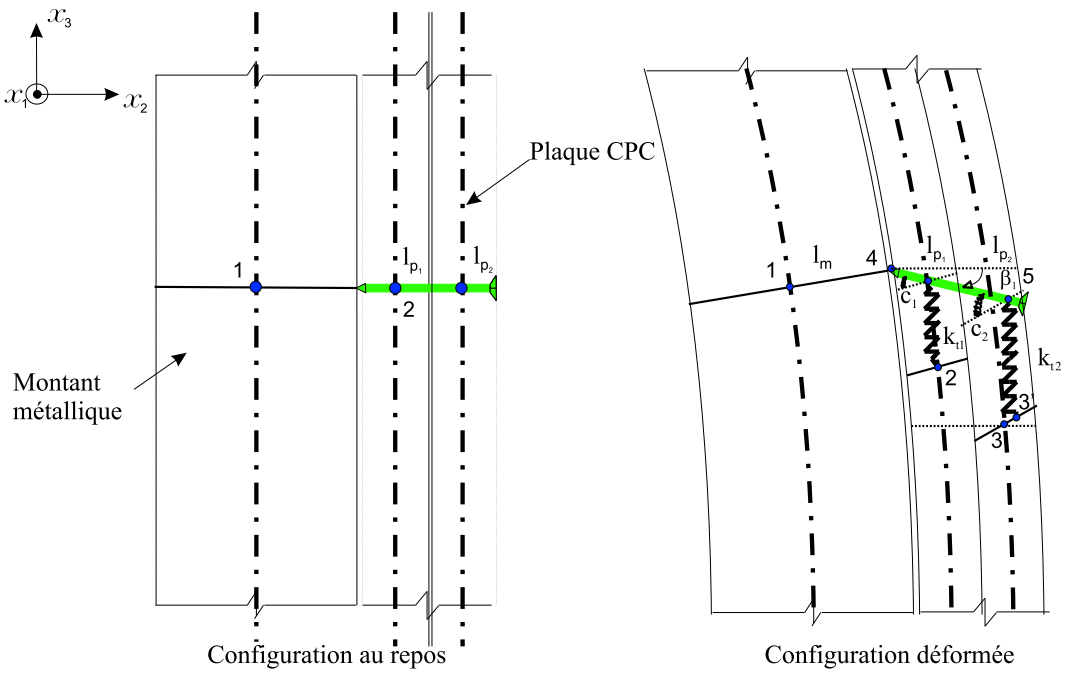



FIG. 6.7 – Modélisation de l'assemblage par un système de ressorts en translation et en rotation.

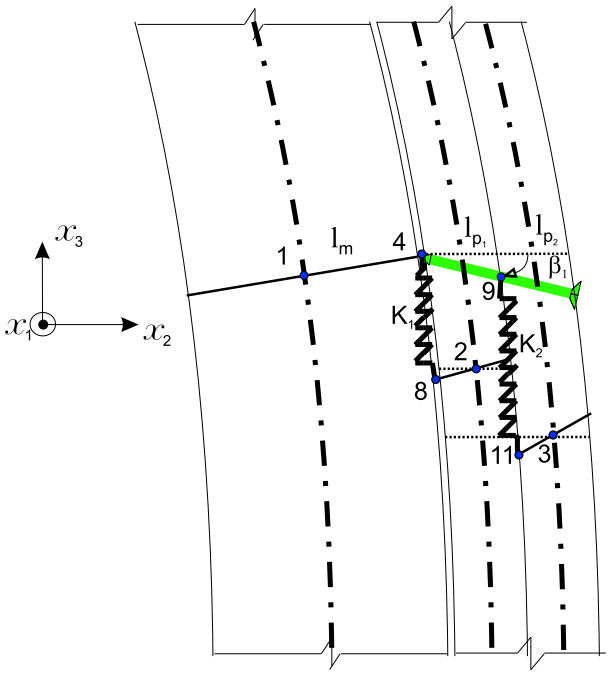



FIG. 6.8 – Modélisation de l'assemblage par un système de deux ressorts en translation.

On déduit de l'Eq. (6.25) les relations cinématiques pour les composantes du vecteur de déplacement,

$$\begin{cases} u^4 = u^1 - l_m \psi_3^1 \\ v^4 = v^1 \\ w^4 = w^1 + l_m \psi_1^1 \end{cases} \tag{6.26}$$

$$\begin{cases} u^8 = u^2 + l_{p_1} \psi_3^2 \\ v^8 = v^2 \\ w^8 = w^2 - l_{p_1} \psi_1^2 \end{cases} \tag{6.27}$$

$$\begin{cases} u^9 = u^4 - 2 l_{p_1} \beta_3 \\ v^9 = v^4 \\ w^9 = w^4 + 2 l_{p_1} \beta_1 \end{cases} \tag{6.28}$$

$$\begin{cases} u^{11} = u^3 + l_{p_2} \psi_3^3 \\ v^{11} = v^3 \\ w^{11} = w^3 - l_{p_2} \psi_1^3 \end{cases} \tag{6.29}$$

où $l_m$, $l_{p_1}$, $l_{p_2}$ sont les demi-épaisseurs du montant, de la première et de la seconde plaque CPC, respectivement. Les composantes du vecteur rotation $\boldsymbol{\beta}$ de la vis sont données par

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{w^6 - w^9}{l_{p_2} + e_x} = \dfrac{w^6 - w^4}{2 l_{p_1} + l_{p_2} + e_x} \\ \beta_3 = \dfrac{u^9 - u^6}{l_{p_2} + e_x} = \dfrac{u^4 - u^6}{2 l_{p_1} + l_{p_2} + e_x} \end{cases} \tag{6.30}$$

Les composantes suivant $x_2$ des vecteur des déplacements des nœuds 1, 2 et 3 vérifient

$$v^1 = v^2 = v^3 \quad . \tag{6.31}$$

Comme précédemment, l'équilibre d'une vis s'obtient en minimisant sa puissance $I$ sous la contrainte définie par l'Eq. (6.31) et en utilisant les relations cinématiques définie par l'Eq. (6.25). La puissance s'écrit

$$I = \frac{1}{2} K_1 g_1^2 - g_1 f_1(g_1) + \frac{1}{2} K_2 g_2^2 - g_2 f_2(g_2) \quad . \tag{6.32}$$

La contrainte est prise en compte par la méthode de pénalisation. La fonctionnel $I$ est alors remplacée $I'$ tel que

$$I' = \frac{1}{2} K_1 g_1^2 - g_1 f_1(g_1) + \frac{1}{2} K_2 g_2^2 - g_2 f_2(g_2) + \frac{P}{2}(u_2^1 - u_2^2)^2 + \frac{P}{2}(u_2^1 - u_2^3)^2 \quad , \tag{6.33}$$

avec $P$ le coefficient de pénalisation qui est très grand. Dans cette équation, $g_1$ et $g_2$ sont des déplacements relatifs dans le plan $Ox_1x_3$ des plaques CPC entre les points 4 et 8, et entre les points 9 et 11, respectivement. Soit $\mathbf{q}^e = (u^1, v^1, w^1, \psi_1^1, \psi_3^1, u^2, v^2, w^2, \psi_1^2, \psi_3^2, u^3, v^3, w^3, \psi_1^3, \psi_3^3)$ le vecteur de déplacement nodale de l'élément de liaison entre les points 1, 2 et 3. La fonctionnel $I'$ peut s'écrire alors (voir les détails de calcul dans l'annexe B),

$$I' = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{\mathbf{e}T} [K^e] \mathbf{q}^{\mathbf{e}} - g_1 f_1(g_1) - g_2 f_2(g_2) \quad , \tag{6.34}$$

avec $[K^e]$ matrice de rigidité élémentaire de l'élément de liaison par vissage entre le montant et les deux plaques CPC, et qui s'écrit

$$[K^e] = [K^e_{12}] + [K^e_{13}] \quad , \tag{6.35}$$

où $[K^e_{12}]$ et $[K^e_{13}]$ sont les matrices de rigidité définies par

$$[K^e_{12}] = K_1 \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -l_m & -1 & 0 & 0 & 0 & -l_{p_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & P & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & l_m & 0 & 0 & 0 & -1 & l_{p_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & l_m^2 & 0 & 0 & 0 & -l_m & l_m l_{p_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & l_m^2 & l_m & 0 & 0 & 0 & l_m l_{p_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & l_{p_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 1 & -l_{p_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & l_{p_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & l_{p_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \text{sym} & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix} \tag{6.36}$$

$$[K^e_{13}] = \lambda^2 K_2 \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -l_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -l'_{p_2} \\
 & P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & l_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & l'_{p_2} & 0 \\
 & & & l_m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_m & l_m l'_{p_2} & 0 \\
 & & & & l_m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_m & 0 & 0 & 0 & l_m l'_{p_2} \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \text{sym} & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & l'_{p_2} \\
 & & & & & & & & & & & P & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & -l'_{p_2} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & l'^2_{p_2} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & l'^2_{p_2}
\end{bmatrix} \tag{6.37}$$

où $\lambda$ et $l'_{p_2}$ sont définies par

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{(l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2})}{2 l_{p_1} k_{t_2} + (l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2})} \\ l'_{p_2} = 2 l_{p_1} + l_{p_2} \end{cases} \tag{6.38}$$

### 6.2.4 Estimation de la raideur des ressorts à l'aide des résultats expérimentaux

Ce paragraphe a pour objectif d'établir les relations permettant l'identification expérimentale les constante de raideur des différents ressorts introduits dans la modélisation. Les résultats expérimentaux sont ceux des essais présentés dans les chapitres 2 et 4 (à froid et à chaud).

*Cas d'une cloison en parement simple*

La figure 6.9 illustre le schéma de la configuration expérimentale pour l'assemblage par vissage dans le cas d'une cloison en parement simple (voir le chapitre 2). Rappelons que dans ces essais, la force appliquée $f$ et le déplacement relatif $g$ entre le montant et la plaque CPC sont mesurés. Les équations d'équilibre de la vis s'écrivent,

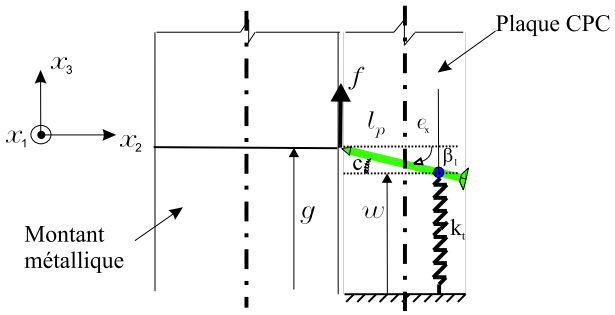



FIG. 6.9 – Schéma illustrant la configuration expérimentale pour l'assemblage par vissage dans le cas d'une cloison en parement simple.

$$\begin{cases} f = k_t w \\ f(l_p + e_x) = c\beta_1 \end{cases} \tag{6.39}$$

Le glissement relatif entre le montant et la plaque CPC s'écrit

$$g = w + \beta_1(l_p + e_x) \quad . \tag{6.40}$$

En tirant les expressions de $w$ et de $\beta$ de l'Eq. (6.39), et en les substituant dans l'Eq. (6.40), on obtient

$$g = f\left(\frac{1}{k_t} + \frac{(l_p + e_x)^2}{c}\right) \quad . \tag{6.41}$$

En utilisant les Eqs. (6.21) et (6.22), on obtient

$$g = f\left(\frac{1}{k_t} + \frac{1}{k_c^{e_x}}\right) = \frac{f}{K_{e_x}} \tag{6.42}$$

Finalement, la raideur $K_{e_x}(g)$ du ressort équivalent est donnée par l'équation suivante

$$K_{e_x}(g) = \frac{f}{g} \tag{6.43}$$

L'expression de $f = K_{e_x}(g)\, g$ a été établie aux chapitres 2 et 4 à partir des essais.

*Cas d'une cloison en parement double*

La figure 6.10 illustre le schéma de la configuration expérimentale pour l'assemblage par vissage dans le cas d'une cloison en parement double (voir le chapitre 4). Rappelons que dans ces essais, la force appliquée $f$ et le déplacement relatif $g$ entre le montant et la seconde plaque CPC sont mesurés. Le schéma des essais est présenté à la figure 6.10. De la même façon que dans

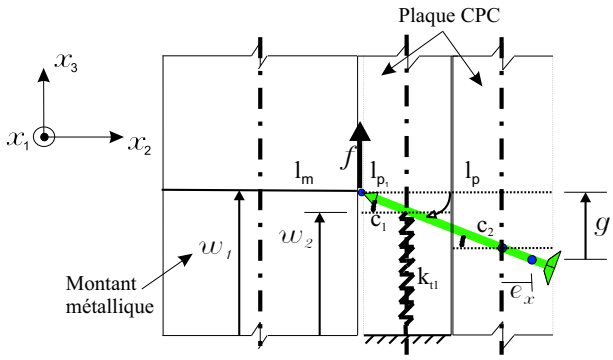



FIG. 6.10 – Schéma illustrant la configuration expérimentale pour l'assemblage par vissage dans le cas d'une cloison en parement double.

le cas de la cloison en parement simple, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\begin{cases} f = k_{t_1} w_2 \\ f l_{p1} = (C_1 + C_2)\beta_1 \quad \text{avec} \quad \beta_1 = (w_1 - w_2)/l_{p_1} \end{cases} . \tag{6.44}$$

Le glissement relatif entre le montant et la seconde plaque CPC s'écrivent

$$g = (w_1 - w_2)(2l_{p_1} + l_{p_2} + e_x)/l_{p_1} \tag{6.45}$$

En tirant $w_1 - w_2$ de la seconde Eq. (6.44) et en portant cette valeur dans l'Eq. (6.45), on obtient

$$f = \frac{C_1 + C_2}{l_{p_1}(2l_{p_1} + l_{p_2} + e_x)} g \quad . \tag{6.46}$$

En posant $K = f/g$, l'Eq. (6.46) donne :

$$C_1 + C_2 = K l_{p_1}(2l_{p_1} + l_{p_2} + e_x) \quad . \tag{6.47}$$

Pour déterminer les raideurs des ressorts $K_1$ et $K_2$ définies par les Eqs. (6.23) et (6.24), ainsi que le coefficient $\lambda$ défini par l'Eq. (6.38), nous avons introduit les rapports $k_{c_1}/k_{t_1}$, $k_{c_2}/k_{t_2}$ et $k_{t_1}/k_{t_2}$. Des calculs par la méthode des éléments finis ont été mené pour la plaque CPC située entre le montant et la seconde plaque CPC, et ont permis de trouver les valeurs suivantes pour ces rapports

$$\frac{k_{c_1}}{k_{t_1}} = 0.5 \quad \frac{k_{c_2}}{k_{t_2}} = 0.6 \quad \frac{k_{t_1}}{k_{t_2}} = \frac{\theta_1^m}{\theta_2^m} = r_a \quad , \tag{6.48}$$

où $\theta_1^m$ et $\theta_2^m$ sont les températures moyennes au centre de la plaque CPC 1 (celle en contact avec le montant) et de la plaque CPC 2 (celle en contact avec la plaque CPC 1). A la température ambiante, $r_a = 1$. Par définition et en utilisant les Eqs. (6.48), les raideurs $K_1$ et $K_2$ s'écrivent

$$\begin{cases} K_1 = \frac{k_{t_1} k_{c_1}}{k_{t_1}+k_{c_1}} = \frac{1}{3} k_{t_1} = \frac{2}{3} k_{c_1} \\ K_2 = \frac{k_{t_2} k_{c_2}}{k_{t_2}+k_{c_2}} = \frac{3}{8} k_{t_2} = \frac{5}{8} k_{c_2} \\ \frac{k_{c_1}}{k_{c_2}} = \frac{c_1}{c_2} \left( \frac{l_{p_1}}{l_{p_2}+e_x} \right)^2 = \frac{5}{6} r_a \end{cases} \tag{6.49}$$

A partir des Eqs. (6.47) et (6.49), nous pouvons déterminer la raideur des ressorts $K_1$ et $K_2$ par :

$$\begin{cases} K_1 = \frac{5}{9} r_a \frac{\mu}{(l_{p_2}+e_x)^2} K \\ K_2 = \frac{5}{8} \frac{\mu}{(l_{p_2}+e_x)^2} K \end{cases} \tag{6.50}$$

avec

$$\mu = \frac{l_{p_1}(2l_{p_1} + l_{p_2} + e_x)}{5/6 r_a (l_{p_1}/(l_{p_2} + e_x))^2 + 1} \tag{6.51}$$

## 6.3 Modèle du montant métallique

Ce paragraphe est dédié au développement du modèle du comportement thermomécanique du montant métallique. Un montant métallique est modélisé par une poutre mince de section ouverte de type Bernoulli, de longueur $l$, pour laquelle il n'y a donc pas de gauchissement de la section droite de la poutre. Un tel profil en "C" est représenté à la figure 6.11. Soient $G$ et $C$ sont

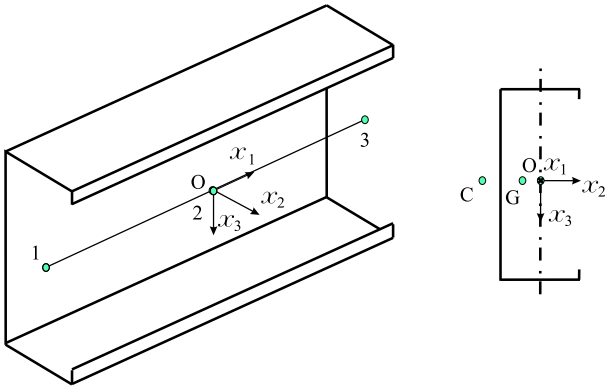



FIG. 6.11 – Schéma d'un élément de poutre en profil mince ouvert.

le centre de gravité et le centre de torsion de la section de la poutre. Soit $(Ox_1x_2x_3)$ le repère local de la poutre (voir la figure 6.11), translaté du repère principal d'inertie et ayant pour origine le centre de torsion. Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ les coordonnées cartésiennes dans ce repère local d'un point $\mathbf{x}$. Les coordonnées du point $C$ sont $\mathbf{x}^C = (x_1^C, x_2^C, x_3^C)$. Les déplacements dans le plan de la section (plan $Ox_2x_3$) seront donc exprimés dans ce repère. D'autre part, les déplacements axiaux (selon la direction $Ox_1$) sont exprimés dans le repère principal d'inertie lié au centre de gravité G, pour conserver le découplage entre les déplacements de flexion et de traction - compression. Dans ces conditions,les effets de torsion et de flexion sont découplés dans ce repère local. A cause des effets induits par la charge thermique, la position du centre de gravité varie en fonction

du temps, il n'y a pas de moyen direct de définir *a priori* ce repère. Nous considérerons donc que la position du centre de gravité concïde avec l'origine du repère local pour les calculs de la déformation axiale, c'est-à-dire que les coordonnées du point $G$ sont $\mathbf{x}^G = (x_1^G, x_2^G = 0, x_3^G = 0)$. Soit $u_O$ le déplacement de l'origine $O$ du repère locale selon la direction $Ox_1$, et soient $v_c$ et $w_c$ les déplacements du centre de torsion $C$ selon les directions $Ox_2$ et $Ox_3$. Soient $\psi_1$, $\psi_2$ et $\psi_3$ les rotations autour des axes $Ox_1$, $Ox_2$ et $Ox_3$. Le vecteur des déplacements en translation d'un point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est noté $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x}),\, v(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})$ et s'écrit dans le repère local,

$$\left\{\begin{array}{c} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{array}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c} u_O(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{membrane} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} x_3\psi_2(x_1) \\ 0 \\ w_c(x_1) \end{array}\right\}}_{flexion\ au\ tour\ de\ Ox_2} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} -x_2\psi_3(x_1) \\ v_c(x_1) \\ 0 \end{array}\right\}}_{flexion\ au\ tour\ de\ Ox_3} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -(x_3 - x_3^C)\psi_1(x_1) \\ (x_2 - x_2^C)\psi_1(x_1) \end{array}\right\}}_{torsion} \tag{6.52}$$

Dans cette expression, le champ de déplacement d'un point quelconque se décompose en 4 termes, un concernent le déplacement membranaire, deux termes de flexion au tour de deux axes $Ox_2$ et $Ox_3$, et un terme de torsion dont le gauchissement de la section droite est négligé sous l'hypothèse de Bernoulli. Le champ de déformation s'écrit donc,

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} u_{O,1}(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} x_3\psi_{2,1}(x_1) \\ 0 \\ \psi_2(x_1) + w_{c,1}(x_1) \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -x_2\psi_{3,1}(x_1) \\ -\psi_3(x_1) + v_{c,1}(x_1) \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -(x_3 - x_3^C)\psi_{1,1}(x_1) \\ (x_2 - x_2^C)\psi_{1,1}(x_1) \end{array}\right\} \tag{6.53}$$

et où $h_{,j} = \partial h/\partial x_j$. Soit $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ et soit $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13})$ avec $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ et $\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$. La loi de comportement thermoélastique isotrope de la poutre s'écrit :

$$\left[\begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{l} E(\theta)\,(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^{th}) \\ k_{x_2}G(\theta)\gamma_{12} \\ k_{x_3}G(\theta)\gamma_{13} \end{array}\right] \tag{6.54}$$

où $k_{x_2}$ et $k_{x_3}$ sont des coefficients de correction de cisaillement et où $G(\theta)$ le module de cisaillement qui est relié au module d'élasticité $E(\theta)$ et au coefficient de Poisson $\nu(\theta)$ par l'expression suivante,

$$G(\theta) = \frac{E(\theta)}{2(1 + \nu(\theta))} \quad . \tag{6.55}$$

Dans l'équation l'Eq. (6.54) $\varepsilon_{11}^{th}$ est la déformation thermique axiale qui s'écrit

$$\varepsilon_{11}^{th} = \alpha\,\Delta\theta \quad , \tag{6.56}$$

où $\alpha$ est le coefficient de dilatation thermique et où $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ avec $\theta_0$ la température initiale. Les coefficients $G(\theta)$, $\nu(\theta)$ et $E(\theta)$ dépendent de la température $\theta$.

**Puissance virtuelle des efforts intérieurs**

La puissance virtuelle des efforts intérieurs de la poutre s'écrit :

$$P_{int} = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \int_\Omega (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} \,+\, \sigma_{12}\delta\gamma_{12} + \sigma_{13}\delta\gamma_{13})\, dV \quad . \tag{6.57}$$

En introduisant l'Eq. (6.53) dans l'Eq. (6.57), on obtient donc :

$$\begin{aligned} P_{int} = \int_l \Big( & \delta u_{O,1} \int_S \sigma_{11} dS + \delta\psi_{2,1} \int_S x_3\sigma_{11} dS + \delta\psi_{3,1} \int_S -x_2\sigma_{11} dS + (-\delta\psi_3 + \delta v_{c,1}) \int_S \sigma_{12} dS \\ & +(\delta\psi_2 + \delta w_{c,1}) \int_S \sigma_{13} dS + \delta\psi_{1,1} \int_S (x_2 - x_2^C)\sigma_{13} - (x_3 - x_3^C)\sigma_{12} dS \Big)\, dx_1 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Nous introduisons les efforts généralisés effectifs dus aux contraintes mécaniques, définis par,

$$\begin{aligned} N^m &= \textstyle\int_S \sigma_{11} dS = \int_S E(\theta)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^{th}) = \underbrace{\int_S E(\theta)\varepsilon_{11} dS}_{N} - \underbrace{\int_S E(\theta)\varepsilon_{11}^{th} dS}_{N^{th}} \\ M_{x_2}^m &= \textstyle\int_S x_3\sigma_{11} dS = \int_S x_3 E(\theta)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^{th}) = \underbrace{\int_S x_3 E(\theta)\varepsilon_{11} dS}_{M_{x_2}} - \underbrace{\int_S x_3 E(\theta)\varepsilon_{11}^{th} dS}_{M_y^{th}} \\ M_{x_3}^m &= \textstyle\int_S -x_2\sigma_{11} dS = \int_S -x_2 E(\theta)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^{th}) = \underbrace{\int_S -x_2 E(\theta)\varepsilon_{11}^{th} dS}_{M_{x_3}} - \underbrace{\int_S -x_2 E(\theta)\varepsilon_{11} dS}_{M_{x_3}^{th}} \\ T_{x_2} &= \int_S \sigma_{12} dS \\ T_{x_3} &= \int_S \sigma_{13} dS \\ M_{x_1} &= \int_S (x_2 - x_2^C)\sigma_{13} - (x_3 - x_3^C)\sigma_{12} dS \quad . \end{aligned} \tag{6.59}$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs se réécrit donc,

$$\begin{aligned} P_{int} = \int_l \Big( & \delta u_{O,1}(N - N^{th}) + \delta\psi_{2,1}(M_{x_2} - M_{x_2}^{th}) + \delta\psi_{3,1}(M_{x_3} - M_{x_3}^{th}) \\ & +(-\delta\psi_3 + \delta v_{c,1})T_{x_2} + (\delta\psi_2 + \delta w_{c,1})T_{x_3} + \delta\psi_{1,1}M_{x_1} \Big)\, dx_1 \quad . \end{aligned} \tag{6.60}$$

Nous introduisons donc le vecteur des efforts généralisés globaux et le vecteur des efforts généralisés dus à la dilatation thermique,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^g &= (N, T_{x_2}, T_{x_3}, M_{x_1}, M_{x_2}, M_{x_3}) \quad , \\ \mathbf{s}^{th} &= (N^{th}, M_{x_2}^{th}, M_{x_3}^{th}) \quad . \end{aligned} \tag{6.61}$$

Le vecteur $\mathbf{e}^g$ des déformations généralisées associé au vecteur $\mathbf{s}^g$ des efforts globaux généralisé s'écrit,

$$\mathbf{e^g}(x_1) = \left\{ \begin{array}{c} u_{O,1} \\ v_{c,1} - \psi_3 \\ w_{c,1} + \psi_2 \\ \psi_{1,1} \\ \psi_{2,1} \\ \psi_{3,1} \end{array} \right\} = [\mathcal{L}] \left\{ \begin{array}{c} u_O(x_1) \\ v_c(x_1) \\ w_c(x_1) \\ \psi_1(x_1) \\ \psi_2(x_1) \\ \psi_3(x_1) \end{array} \right\} = [\mathcal{L}]\{\mathbf{q}(x_1)\} \quad , \tag{6.62}$$

avec $\mathbf{q}(x_1) = (u_O(x_1),\, v_c(x_1),\, w_c(x_1),\, \psi_1(x_1),\, \psi_2(x_1),\, \psi_3(x_1))$ et où l'opérateur différentiel matriciel $[\mathcal{L}]$ est défini par l'Eq. (6.62). En introduisant les expressions des efforts et des déformations généralisés dans l'Eq. (6.60), la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit

$$P_{int} = \int_l \mathbf{s}^g \cdot \delta\mathbf{e}^g dx_1 - \int_l \mathbf{s}^{th} \cdot [L]\delta\mathbf{e}^g dx_1 \quad , \tag{6.63}$$

où $[L]$ est la matrice de localisation définie par

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{6.64}$$

Pour la méthode des éléments finis, nous utilisons des éléments finis de poutre droite à $m = 3$ nœuds. Soit $l_e$ le domaine d'un tel élément fini. Soient $N_1^e, \ldots, N_m^e$ les fonctions d'interpolation telles que toute quantité géométrique ou mécanique s'écrit :

$$r(x_1) = \sum_{i=1}^{m} N_i^e(x_1) r^i \quad . \tag{6.65}$$

En remplaçant dans l'Eq. (6.62) les composantes du champ de déplacement par leurs interpolations nodales données par l'Eq. (6.65), nous obtenons les matrices d'interpolation des déformations généralisées $\mathcal{B}_i^e(x_1)$ permettant de calculer les déformations généralisées en fonction des déplacements nodaux de l'élément fini $l_e$ :

$$\mathbf{e}_e^g(x_1) = \sum_{i=1}^{m} [\mathcal{B}_i^e(x_1)]\mathbf{q}_e^i \tag{6.66}$$

avec $\mathbf{q}_e^i = (u_O(x_1^i),\, v_c(x_1^i),\, w_c(x_1^i),\, \psi_1(x_1^i),\, \psi_2(x_1^i),\, \psi_3(x_1^i))$, où $x_1^i$ est l'abscisse du nœud $i$ et où

$$[B_i^e(x_1)] = \begin{bmatrix} N_{i,1}(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,1}(x_1) & 0 & 0 & 0 & -N_i(x_1) \\ 0 & 0 & N_{i,1}(x_1) & 0 & N_i(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,1}(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,1}(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,1}(x_1) \end{bmatrix} , \tag{6.67}$$

où $N_{i,1}^e(x_1) = \partial N_i^e(x_1)/\partial x_1$. L'Eq. (6.66) est réécrite, :

$$\mathbf{e}_e^g(x_1) = [[\mathcal{B}_1^e(x_1)] \quad \ldots \quad [\mathcal{B}_m^e(x_1)]] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_e^1 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{q}_e^m \end{bmatrix} = [\mathcal{B}^e(x_1)]\mathbf{q}_e \quad . \tag{6.68}$$

Le loi de comportement qui relie les efforts généralisés globaux $\mathbf{s}^g$ aux déformations généralisées

$\mathbf{e}^g$ s'écrit $\mathbf{s}^g = [\mathcal{A}^g(\theta)]\mathbf{e}^g$ où la matrice $[\mathcal{A}^g(\theta)]$ est telle que :

$$\begin{Bmatrix} N \\ T_{x_2} \\ T_{x_3} \\ M_{x_1} \\ M_{x_2} \\ M_{x_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m & 0 & 0 & 0 & H_{mfx_2} & -H_{mfx_3} \\ 0 & H_{cx_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{cx_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_t & 0 & 0 \\ H_{mfx_2} & 0 & 0 & 0 & H_{fx_2} & 0 \\ -H_{mfx_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{fx_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{O,1} \\ v_{c,1} - \psi_3 \\ w_{c,1} + \psi_2 \\ \psi_{1,1} \\ \psi_{2,1} \\ \psi_{3,1} \end{Bmatrix} \tag{6.69}$$

avec

$$\begin{array}{ll} H_m = \displaystyle\int_S E(\theta)dS & \text{rigidité de membrane} \\ H_{mfx_2} = \displaystyle\int_S x_3 E(\theta)dS; \quad H_{mfx_3} = \int_S x_2 E(\theta)dS & \text{rigidités de couplage membrane/flexion} \\ H_{cx_2} = k_{x_2}\displaystyle\int_S G(\theta)dS; \quad H_{cx_3} = k_{x_3}\int_S G(\theta)dS & \text{rigidité de cisaillement transversal} \\ H_t = G(\theta)J & \text{rigidité de torsion} \\ H_{fx_2} = \displaystyle\int_S x_3^2 E(\theta)dS; \quad H_{fx_3} = \int_S x_2^2 E(\theta)dS & \text{rigidité de flexion} \end{array} \tag{6.70}$$

où $J$ l'inertie de torsion. En introduisant la discrétisation par éléments finis, la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'exprime donc sous la forme matricielle suivante

$$P_{int} = \delta\mathbf{q}([K(\theta)]\mathbf{q} - \mathbf{f}^{th}) \tag{6.71}$$

où $[K(\theta)]$ est la matrice de rigidité globale, $\mathbf{q}$ est le vecteur des déplacements nodaux globaux et $\mathbf{f}^{th}$ est le vecteur des forces nodales dû à la dilatation thermique. La matrice de rigidité globale résulte de l'assemblage des matrices élémentaires qui s'écrivent :

$$[K^e(\theta)] = \int_{l_e} [\mathcal{B}^e(x_1)]^T [\mathcal{A}^g(\theta)][\mathcal{B}^e(x_1)]dx_1 \quad . \tag{6.72}$$

Le vecteur des forces nodales $\mathbf{f}^{th}$ dû à la dilatation thermique résulte de l'assemblage des vecteurs de forces élémentaires qui s'écrivent :

$$\mathbf{f}_e^{th} = \int_{l_e} [\mathcal{B}^e(x_1)]^T [L]^T \mathbf{s}^{th} dx_1 \tag{6.73}$$

**Construction des matrices élémentaires**

Nous avons implémenté dans le logiciel éléments finis du CSTB, un élément de poutre droite quadratique à 3 nœuds suivant la formulation donnée précédemment. Cet élément a le domaine de référence montré à la figure 6.12. Les fonctions d'interpolations quadratiques sont données par

$$N_1(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2}, \quad N_2(\xi) = (1-\xi)^2, \quad N_3(\xi) = \frac{\xi(\xi+1)}{2} \quad . \tag{6.74}$$

Le calcul des sous matrice $[K_{ij}^e]$ de la matrice rigidité élémentaire $[K^e]$ s'effectue sur l'élément de référence défini par le domaine $l_e = \{-1 \leq \xi \leq 1\}$ (voir figure). L'interpolation des coordonnées

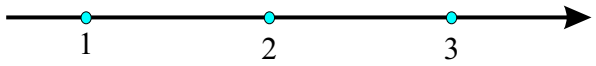



FIG. 6.12 – Elément quadratique à 3 nœuds dans le domaine de référence.

géométriques de l'élément dans le domaine de référence s'écrit

$$x_1(\xi) = \sum_{i=1}^{3} x_1^i N_i(\xi) \tag{6.75}$$

En coordonnées locales et dans le domaine de référence, la sous matrice $[K_{ij}^e]$ s'écrit :

$$[K_{ij}^e] = \int_{-1}^{1} [\mathcal{B}_i^e(\xi)]^T [\mathcal{A}^g(\theta)][\mathcal{B}_j^e(\xi)] |detJ^e| d\xi = \int_{-1}^{1} \mathcal{F}_{ij}(\xi, \theta)\, d\xi \quad , \tag{6.76}$$

où $J^e = \partial x_1 / \partial \xi$ est le Jacobien relatif à la transformation géométrique du domaine global dans le domaine de référence. La méthode de Gauss est utilisée pour l'évaluation de l'Eq. (6.76) en introduisant $n_G$ points de Gauss de poids $w_1, ..., w_{n_G}$. Le calcul de l'Eq. (6.76) revient alors à calculer

$$[K_{ij}^e] = \sum_{k=1}^{n_G} \mathcal{F}_{ij}(\xi_k \theta) w_k \quad . \tag{6.77}$$

# Chapitre 7

# Simulation d'une cloison légère en plaques CPC vissées sur une ossature métallique

*Nous présentons dans ce chapitre la simulation du comportement mécanique à froid et du comportement thermomécanique à chaud de la cellule d'une cloison légère en simple parement, la cellule est constituée d'un montant métallique sur lequel est vissée de chaque côté une plaque CPC. Le chargement mécanique est constitué d'un champ de pression uniforme appliqué sur la plaque CPC du coté non exposé à la charge thermique.*

## 7.1 Résumé des configurations simulées et des méthodes utilisées

Pour les simulations thermomécaniques sous les charges thermiques et mécaniques, on présente des résultats à des instants fixés de la charge thermique. Nous allons présenter les résultats obtenus

1. avec le modèle moyen **déterministe** à **température ambiante** (comportement mécanique) pour lequel on utilise les résultats du chapitre 2 concernant la loi de comportement moyen de l'assemblage par vissage de chaque plaque CPC sur le montant métallique et les modèles mécaniques de la plaque CPC et du montant métallique présentés au chapitre 6.
2. avec le modèle **probabiliste** à **température ambiante** (comportement mécanique avec variabilités) pour lequel on utilise les résultats du chapitre 2 concernant la loi de comportement probabiliste de l'assemblage par vissage de chaque plaque CPC sur le montant métallique et les modèle mécaniques de la plaque CPC et du montant métallique présentés au chapitre 6.
3. avec le modèle **probabiliste** sous **charge thermique** (comportement thermomécanique avec variabilités) pour lequel on utilise les résultats du chapitre 4 concernant la loi de comportement probabiliste de l'assemblage par vissage à chaud de chaque plaque CPC sur le montant métallique et les modèles thermomécaniques de la plaque CPC et du montant métallique présentés au chapitre 6.

Tous les résultats des calculs ont été obtenus à l'aide d'un logiciel du CSTB, permettant les calculs thermomécaniques non linéaires, dans lequel nous avons implémenté

1. les lois de comportement déterministe et probabiliste, en cisaillement des assemblages par vissage, à température ambiante et sous charge thermique.
2. les éléments finis des plaques CPC et des poutres droites dont les modèles ont été présentés au chapitre 6.
3. le solveur stochastique de Monte Carlo et les estimateurs statistiques pour résoudre les équations stochastiques liées à la modélisation probabiliste des assemblages par vissage des plaques CPC.

## 7.2 Description de la configuration géométrique et mécanique de la cellule faisant l'objet des différentes simulations

Nous avons effectué des simulations pour une cloison légère dont les données sont les suivantes. La cellule est un parement simple, est constituée de deux plaques CPC BA13 standard, chacune ayant une largeur de 0.6 m (l'entraxe entre des montants métalliques de la cloison légère est donc de 0.6 m), une hauteur de 2.7 m (hauteur de la cloison), et une épaisseur $e_p = 12.5$ mm. La distance entre deux vis suivant l'axe longitudinal du montant métallique est $a = 0.3$ m. Le montant métallique est un profil en "C" 48 mm $\times$ 50 mm en acier, d'épaisseur 6 mm.

## 7.3 Simulation du comportement mécanique avec le modèle moyen déterministe à température ambiante

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de la simulation du comportement mécanique de la cellule avec le modèle moyen déterministe à température ambiante. La cellule est soumise à une pression uniforme de 20 daN/m$^2$, et la température constante est celle de la température ambiante. Les caractéristiques mécaniques des composants de la cellule sont les suivants. Pour la plaque CPC, nous avons utilisé les valeurs effectives du module d'Young et du coefficient de Poisson de la plaque homogénéisée issues des mesures expérimentales, pour le module d'Young, nous l'avons estimé à partir de la figure 3.19 du chapitre 3 et pour le coefficient de Poisson, nous avons utilisé la valeur expérimentale donnée dans [61]. Le module d'Young vaut alors 2 GPa et le coefficient de Poisson vaut 0.16. Pour le montant métallique, le module d'Young de l'acier est 210 GPa et son coefficient de Poisson est 0.2. Pour l'assemblage par vissage, les paramètres du modèle de comportement en cisaillement à température ambiante sont données au paragraphe 2.5.1) du chapitre 2 et sont tels que $(a, b, \alpha) = (32\,108, 0.01905, 0.00294)$, ces coefficients ayant les dimensions telles que le déplacement $x$ soit en mm, et la force $y$ en N dans la loi de comportement définie par l'Eq. (2.10). La figure 7.1 représente le déplacement hors plan (flèche des plaques en flexion) de la cellule.

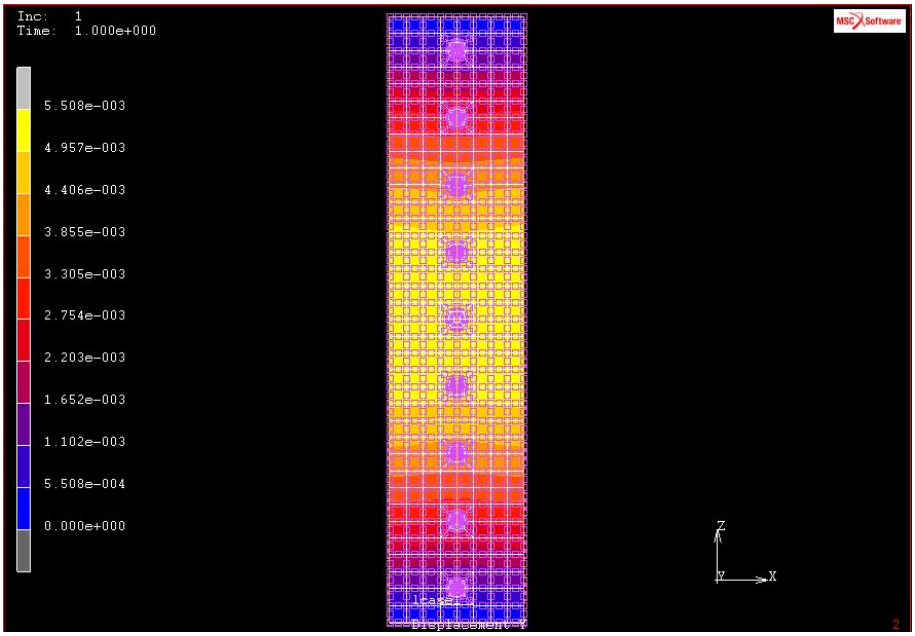



FIG. 7.1 – Déplacement hors plan de la cellule soumise à la pression uniforme obtenu par simulation avec le modèle moyen déterministe à température ambiante.

Nous constatons que la flèche maximale à mi-hauteur de la cloison calculée avec le modèle numérique du chapitre 6 est de 5.5 mm, valeur qui est proche de la valeur 5.6 mm de la flèche calculée par le modèle analytique moyen présenté dans le chapitre 5. Cela montre que le modèle analytique et le modèle numérique donne de même ordre de grandeur pour la valeur de la flèche.

## 7.4 Simulation du comportement mécanique avec le modèle probabiliste à température ambiante

La simulation du comportement mécanique de la cellule avec le modèle numérique probabiliste du chapitre 6, à température ambiante, est réalisée avec les mêmes données que celles du paragraphe 7.3 concernant les plaques CPC et le montant métallique. Pour l'assemblage par vissage, les données sont différentes et sont celles du paragraphe 2.5.2) du chapitre 2. Ces valeurs sont $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{\alpha}, \delta_A, \delta_B) = (33\,208, 0.0108, 0.0024, 0., 0.2658)$, les coefficients ($\underline{a}$ et $\underline{b}$ ayant les dimensions telles que le déplacement soit en mm, et la force en N, dans la loi de comportement. La figure 7.2 montre le graphe de la fonction $n_s \mapsto conv(n_s)$, qui permet de contrôler la convergence en moyenne d'ordre deux de la flèche aléatoire $V_0$, convergence qui est atteinte pour $n_s \geq 800$. Les calculs ont été effectués pour $n_s = 1000$. La fonction de densité de probabilité estimée par la méthode des noyaux (dans le cadre des statistiques non paramétrique), de la flèche aléatoire $V_0$ à mi-hauteur de la cellule, est montrée à la figure 7.3. Nous constatons que la prévision de $V_0$ donnée par le modèle moyen qui est 5.5 mm est proche de la valeur moyenne $\underline{V_0} = 5.76$ mm de la flèche aléatoire donnée par le modèle numérique probabiliste. L'estimation de l'écart type $\sigma_{V_0}$ de la flèche aléatoire $V_0$ est $\sigma_{V_0} = 0.068$ mm. La figure 7.3 montre que la loi de probabilité de la variable aléatoire $V_0$ n'est pas Gaussienne. En comparant les résultats fournis par le modèle

analytique probabiliste (voir le paragraphe 5.3) avec les résultats donnés par le modèle numérique probabiliste, on peut voir des différences significatives sur les quantités statistiques, à savoir, la moyenne 5.76 mm à comparer à 5.40 mm, et l'écart-type de 0.068 mm à comparer à 0.14 mm et enfin, la densité de probabilité (figure 7.3) à comparer à la figure 5.5. Les résultats du modèle numérique probabiliste étant convergés vis-à-vis du maillage éléments finis, et le modèle numérique probabiliste et le modèle analytique probabiliste étant convergés vis-à-vis du nombre de tirages pour la méthode de Monte-Carlo, ces différences s'expliquent par les différences de modélisations mécaniques en particulier celles utilisées pour représenter l'assemblage par vissage. Par exemple, pour le modèle numérique, le transfert des forces de la vis dans la plaque CPC a été modélisé en introduisant une zone indéformable autour de l'axe de la vis. Dans le modèle analytique, nous avons introduit des hypothèses simplificatrices (voir le paragraphe 5.1.1. En l'absence de résultats expérimentaux concernant la configuration modélisée, il n'est pas possible de dire quelle serait la prévision la plus proche de l'expérimentation (non disponible). Toute fois, les deux résultats, analytique probabiliste et numérique probabiliste, donnent des ordres de grandeur comparables. Les deux modélisations donnent une flèche moyenne voisine et une dispersion sur la flèche qui est très faible. Ce dernier point peut sans doute s'expliquer par le fait que, bien que la dispersion sur la loi de comportement (voir chapitre 2) soit relativement importante, le nombre de vis étant de 18, il y a un effet de moyennage spatial vis-à-vis de la réponse (flèche aléatoire), ce qui implique une dispersion faible sur cette dernière.

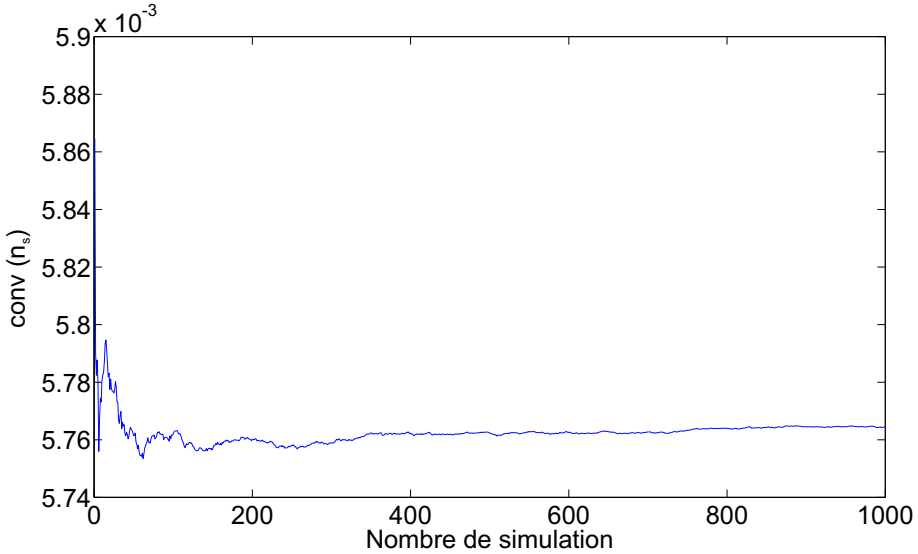



FIG. 7.2 – Convergence en moyenne d'ordre deux de la flèche aléatoire $V_0$ en fonction du nombre $n_s$ des simulations : graphe de la fonction $n_s \mapsto conv\,(n_s)$.

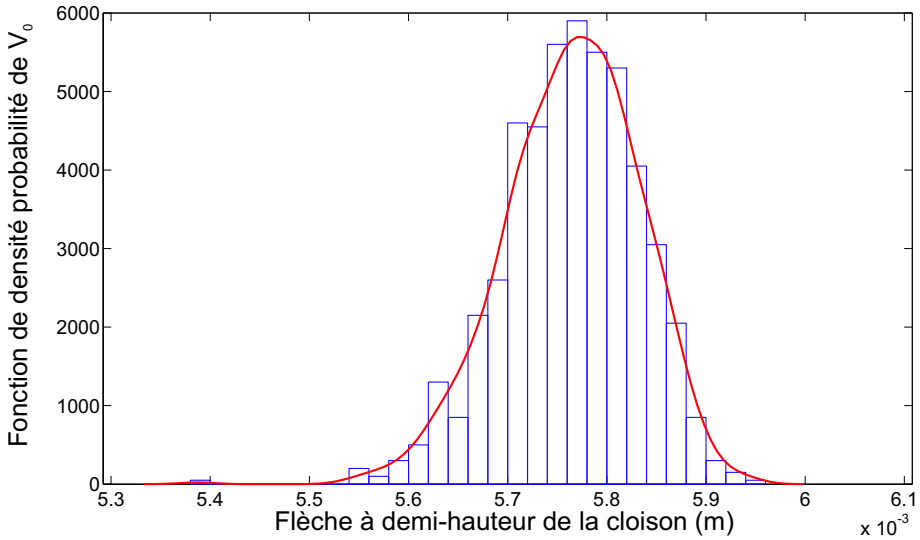



FIG. 7.3 – Graphe de la fonction de densité probabilité de la flèche aléatoire $V_0$ à mi-hauteur de la cellule.

## 7.5 Simulation du comportement thermomécanique avec le modèle probabiliste sous charge thermique

### 7.5.1 Simulation du transfert thermique pour la cellule

Nous avons effectué une simulation du transfert thermique de la cellule en utilisant le logiciel SAFIR disponible au CSTB. Pour une telle simulation du transfert thermique, il est nécessaire de connaître les paramètres thermophysiques des constituants de la cellule : les plaques CPC (carton-plâtre-carton), l'isolant thermique entre les deux plaques CPC et le montant métallique. Dans le modèle de transfert thermique, les feuilles de carton, qui jouent un rôle important sur le plan mécanique, ne sont pas pris en compte.

*Propriétés thermophysiques du plâtre*

Nous avons utilisé, pour cette simulation, le plâtre de type C-Gypsum, correspondant aux données de [53], qui sont données sur la figure 1.4 pour la masse volumique $\rho(\theta)$, sur la figure 1.5 pour la chaleur spécifique $\lambda(\theta)$ et sur la figure 1.6 pour la conductivité thermique $\lambda(\theta)$. Pour rappel, la diffusivité thermique $a(\theta)$ est donnée par

$$a(\theta) = \frac{\lambda(\theta)}{\rho(\theta)C(\theta)} \tag{7.1}$$

Les valeurs utilisées en fonction de la température, pour le modèle SAFIR de transfert thermique, sont montrées sur les figures 7.4, 7.5, 7.6 et 7.7. Pour les échanges radiatifs et convectifs, nous avons utilisé les valeurs suivantes pour les coefficients de convection $h = 5$ W/m/$^o$K et d'émissivité relative 0.8.

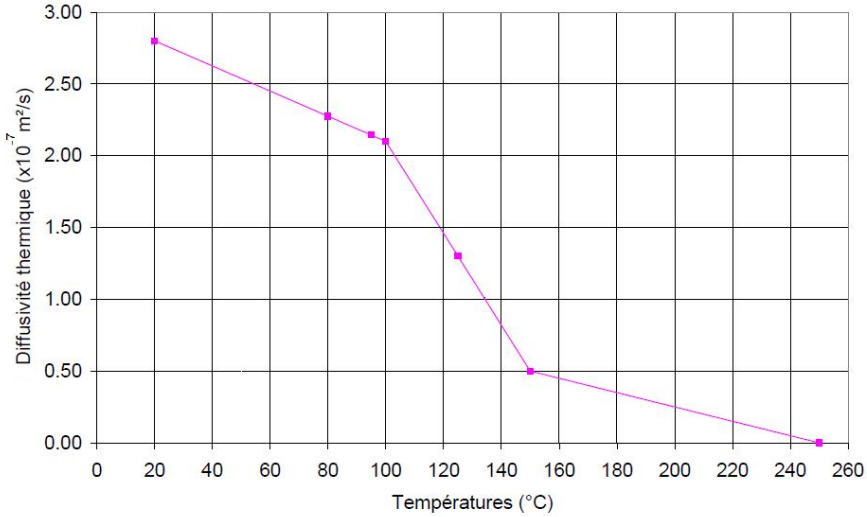



FIG. 7.4 – Diffusivité thermique du plâtre

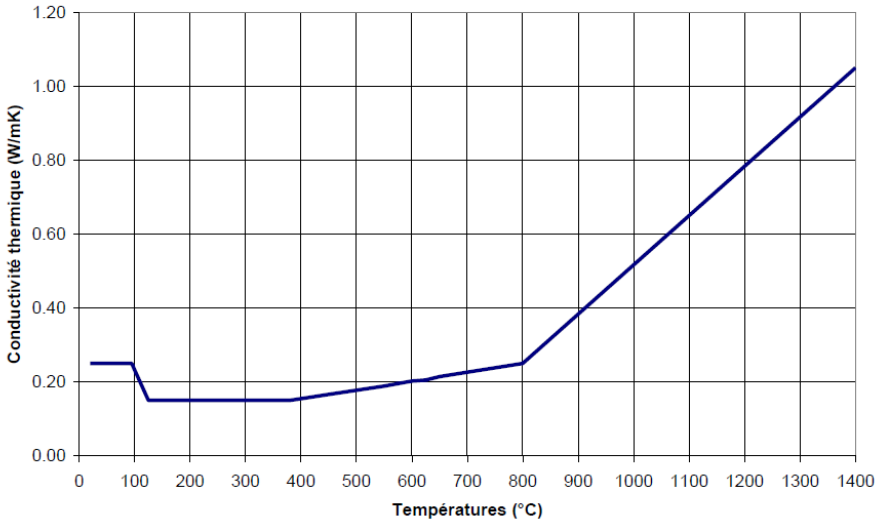



FIG. 7.5 – Conductivité thermique du plâtre

*Propriétés thermophysiques de l'isolant entre les deux plaques CPC*

L'espace entre les plaques CPC est comblé par de la laine de verre de densité 25 kg/m$^3$. Les propriétés thermophysiques utilisées proviennent des bases de données du CSTB. Ces valeurs sont données dans le tableau 7.1.

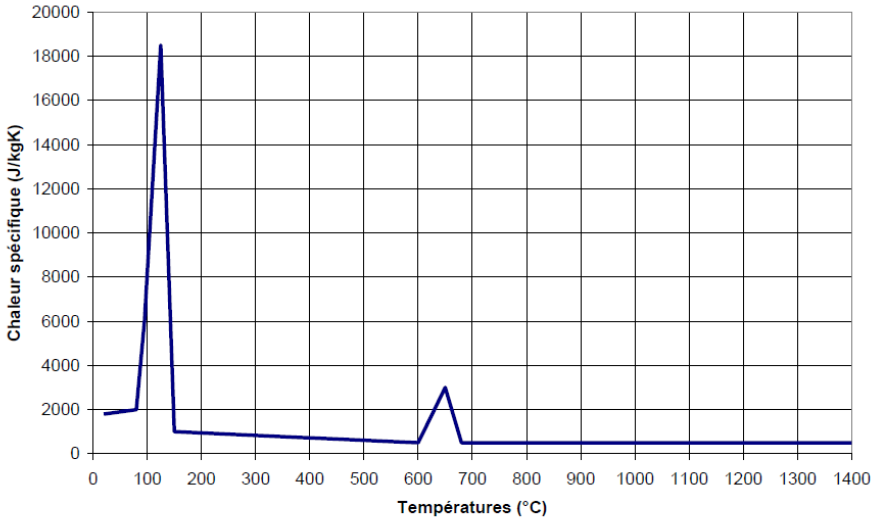



FIG. 7.6 – Chaleur spécifique du plâtre

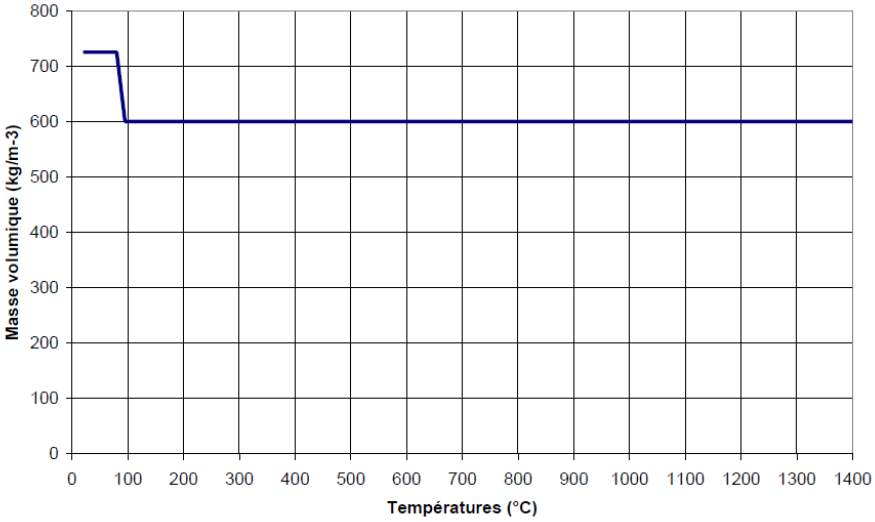



FIG. 7.7 – Masse volumique du plâtre

*Propriétés thermophysiques du montant métallique*

Les propriétés thermophysiques que nous avons utilisées pour le montant est acier sont celles données par l'Eurocode 3, partie 1-2. La masse volumique de l'acier est considérée indépendante de la température, sa valeur est $\rho = 7\,850$ kg/m$^3$. La chaleur spécifique et la conductivité thermique de l'acier sont données aux figures 7.8 et 7.9

| Température | Conductivité thermique | Chaleur spécifique | Masse volumique |
|---|---|---|---|
| (°C) | (W/m/°K) | (J/kg/°K) | (kg/m$^3$) |
| 20 | 0.039 | 1024 | 22 |
| 650 | 0.12 | 1024 | 22 |

TAB. 7.1 – Propriétés thermophysiques de la laine de verre

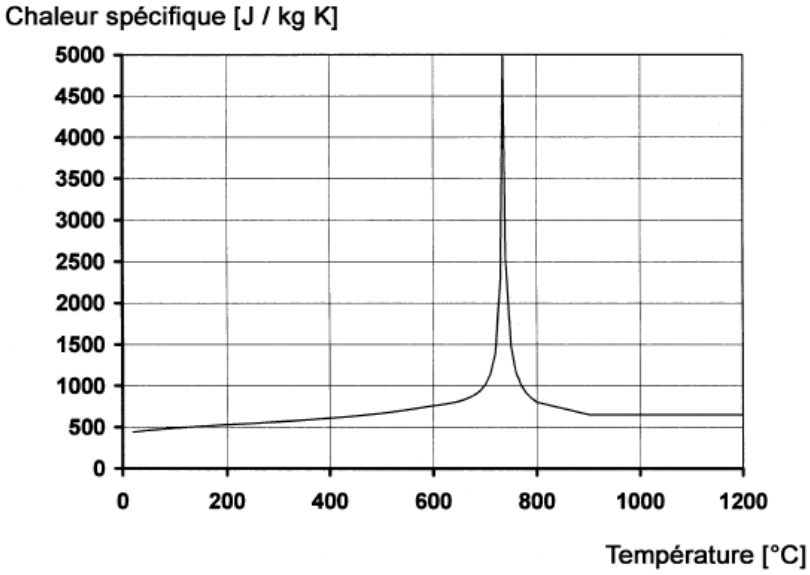



FIG. 7.8 – Chaleur spécifique de l'acier selon l'Eurocode 3

.

*Maillage pour le modèle numérique et résultats*

La figure 7.10 montre le maillage de la section de la cellule. La figure 7.11 montrent le champ de température dans la section de la cellule à 20 minutes de charge thermique. La partie haute de la figure correspond à la face exposée de la charge thermique. La température dans ce voisinage est de l'ordre de 760 °C alors que la température de la face non exposée (partie basse de la figure) reste à la température ambiante, qui est de 21 °C. Les deux tiers inférieurs environ, reste à la température ambiante à l'exception de la zone entourant le profil métallique dont la conduction thermique est importante. Nous constatons que, à cet instant charge thermique, le gradient thermique est très grand dans le tiers supérieur de la cellule.

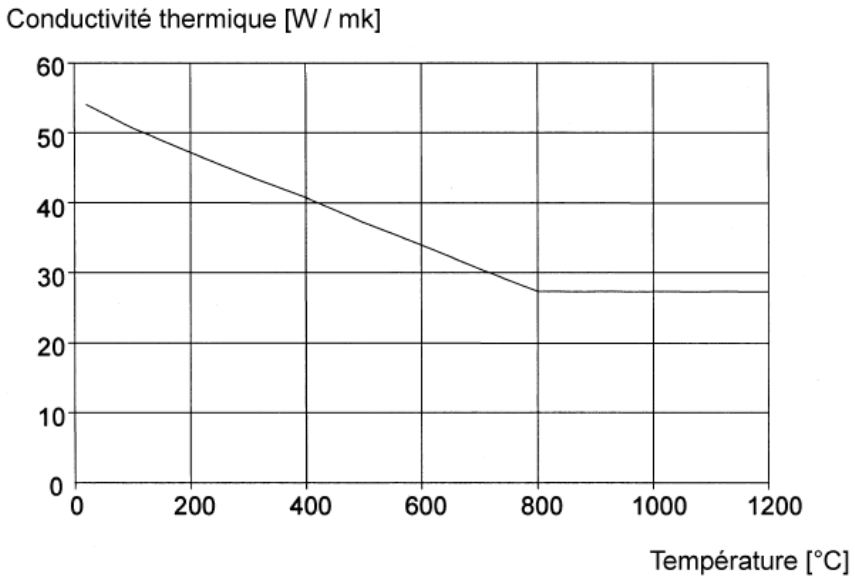



FIG. 7.9 – Conductivité thermique de l'acier selon l'Eurocode 3

.

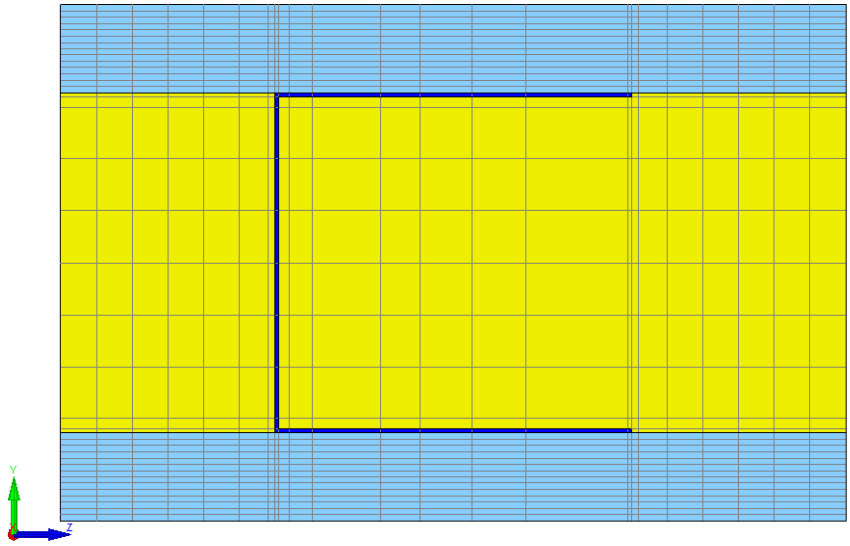


FIG. 7.10 – Maillage 2D de la section de la cellule pour le modèle de transfert thermique, le trait noir épais représente la section en C du profil du montant métallique, les zones haute et basse en gris foncés représentent la section des deux plaques CPC et la zone centrale en gris clair représente la laine de verre

.

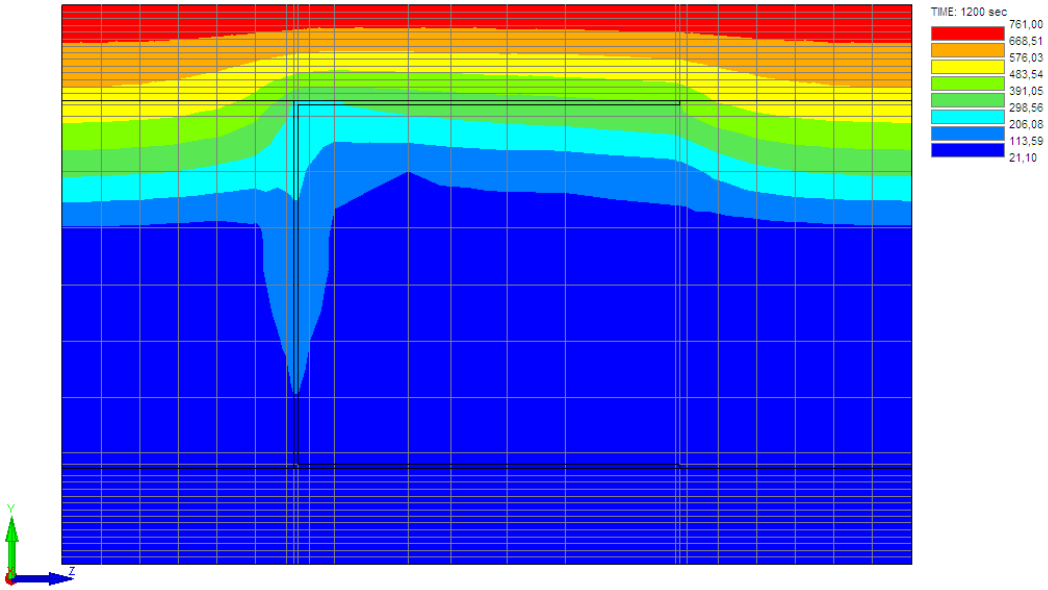



FIG. 7.11 – Champ de température à 20 minutes de charge thermique dans la section de la cellule. La partie haute correspond à la face exposée de la sollicitation thermique.

### 7.5.2 Simulation du comportement thermomécanique avec le modèle numérique probabiliste sous charge thermique

La simulation du comportement thermomécanique de la cellule avec le modèle numérique probabiliste a été faite à 20 minutes de la charge thermique et avec les données suivantes. Pour la plaque CPC, nous avons utilisé les valeurs effectives du module d'Young et du coefficient de Poisson de la plaque homogénéisée issues des mesures expérimentales à chaud, pour le module d'Young, nous l'avons estimé à partir de la figure 3.23 du chapitre 3 et pour le coefficient de Poisson, nous avons utilisé la valeur expérimentale donnée dans [61] pour la température ambiante, ne disposant pas de valeurs expérimentales à la température considérée. Le module d'Young vaut alors 120 MPa et le coefficient de Poisson est encore 0.16. Pour le montant métallique, le module d'Young et le coefficient de Poisson de l'acier à la température considérée ont été déterminés en utilisant l'Eurocode 3. Pour l'assemblage par vissage, pour la plaque CPC du coté exposé à la charge thermique, on suppose que la vis est à la température correspondant à 20 minutes de la charge thermique, ce qui est conforme le champ température calculé à 20 minutes. Les paramètres du modèle de comportement en cisaillement sont donc donnés au tableau 4.1 du paragraphe 4.2) du chapitre 4 sur la ligne correspondant à 20 minutes de charge thermique. On a donc que $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{\alpha}, \delta_A, \delta_B) = (32\,684, 0.0184, 0.0017, 0., 0.2756)$, ces coefficients ayant les dimensions telles que le déplacement $x$ soit en mm, et la force $y$ en N dans la loi de comportement définie par l'Eq. (2.10). Concernant la plaque CPC du coté non exposé, contenu du résultat du transfert thermique à 20 minutes, les vis de l'assemblage de cette plaque CPC avec le montant métallique sont à température ambiante. On prend donc les données présentées dans le paragraphe 7.4. La figure 7.12 montre le graphe de la fonction $n_s \mapsto conv(n_s)$, qui permet de contrôler la convergence

en moyenne d'ordre deux de la flèche aléatoire $V_0$, convergence qui est atteinte pour $n_s \geq 800$. Les calculs ont été effectués pour $n_s = 1000$. La fonction de densité de probabilité estimée par la méthode des noyaux, de la flèche aléatoire $V_0$ à mi-hauteur de la cellule, est montrée à la figure 7.13. Nous constatons que la prévision de la valeur moyenne de la flèche aléatoire donnée par le modèle numérique probabiliste est $\underline{V_0} = 61.9$ mm, ce qui correspond a plus de dix fois la flèche du modèle nominal à froid. L'estimation de l'écart type $\sigma_{V_0}$ de la flèche aléatoire $V_0$ est $\sigma_{V_0} = 0.2$ mm. On note donc l'écart-type est trois fois plus grand que pour la flèche aléatoire calculée à la température ambiante. La figure 7.13 montre que la loi de probabilité de la variable aléatoire $V_0$ n'est pas Gaussienne. Les commentaires introduits au paragraphe 7.4 concernant le niveau de fluctuations statistiques de la flèche à température ambiante restent valables pour ce cas à chaud.

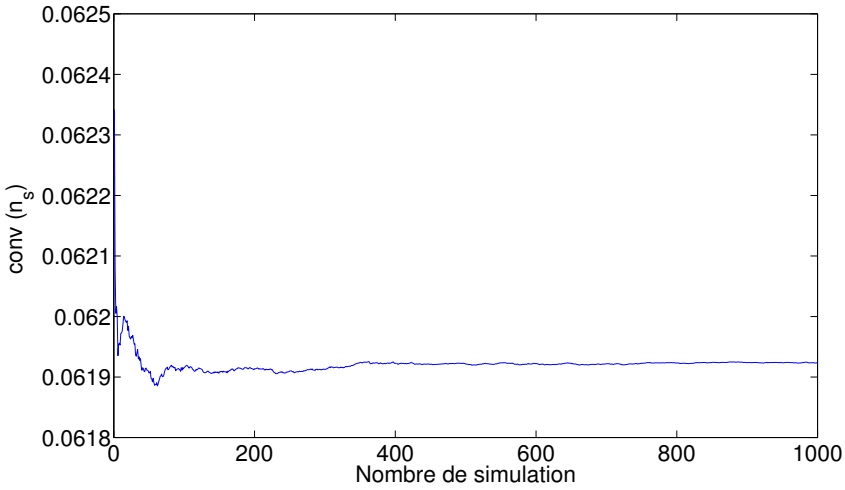



FIG. 7.12 – Sollicitation thermique à 20 minutes. Convergence en moyenne d'ordre deux de la flèche aléatoire $V_0$ en fonction du nombre $n_s$ des simulations : graphe de la fonction $n_s \mapsto conv\,(n_s)$.

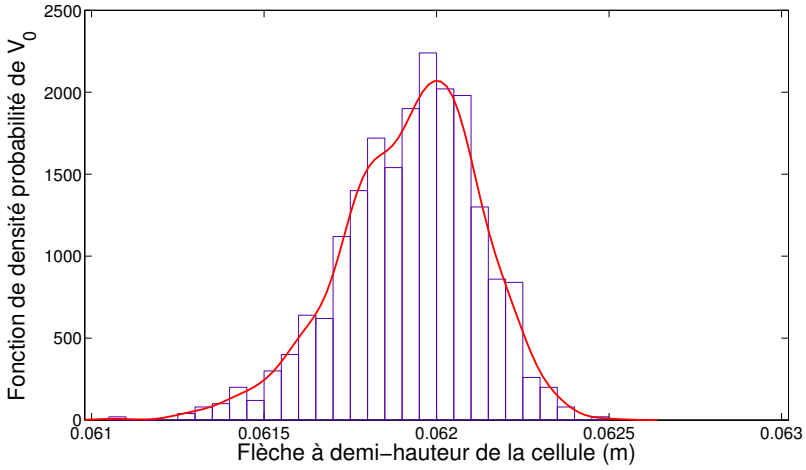



FIG. 7.13 – Sollicitation thermique à 20 minutes. Graphe de la fonction de densité probabilité de la flèche aléatoire $V_0$ à mi-hauteur de la cellule.

# Conclusions et perspectives

Le travail que nous avons réalisé se place en continuité de travaux antérieurs menés avec le CSTB visant au développement d'un modèle robuste de simulation numérique d'une cloison légère de grande hauteur soumise à des charges mécaniques et des charges thermiques qui correspondent aux charges d'incendie. Les enjeux sont importants puisqu'il s'agit de remplacer, à terme, les essais de certification par des simulations numériques.

Un élément fondamental qui intervient dans le comportement thermomécanique non linéaire d'une cloison légère, est le comportement non linéaire en cisaillement des assemblages par vissage des plaques CPC sur les montants métalliques de l'ossature. Dans ce travail nous avons apporté des résultats expérimentaux nouveaux, à froid et à chaud, obtenus au CSTB, et nous avons développé une modélisation déterministe et probabiliste de la loi de comportement que nous avons identifié à l'aide des mesures réalisées.

En plus de ces expérimentations, nous avons réalisé un ensemble d'essais expérimentaux au CSTB pour caractériser les propriétés thermiques, thermophysiques, mécaniques et thermomécaniques des constituants des plaques CPC. Tous ces résultats expérimentaux que nous avons obtenus seront utiles à terme, et nous avons utilisé certains d'entre eux dans ce travail, comme l'essai de traction à froid et à chaud des plaques CPC.

En suite, en partant d'un travail existant, nous avons développé un modèle analytique simplifié qui s'est révélé très efficace pour le calcul de la flèche d'une cloison légère à température ambiante. Nous avons aussi développé un modèle numérique avec le même objectif de calcul de la flèche d'une cloison légère, à froid mais aussi à chaud. Les deux modèles utilisent le modèle probabiliste de comportement non linéaire en cisaillement de l'assemblage par vissage des plaques CPC sur les montants métalliques. Nous avons développé des routines de calcul et implémenté ces dernières dans un logiciel de calcul du CSTB.

A l'aide de ce logiciel, nous avons testé l'ensemble des modèles déterministes et probabilistes, à froid et à chaud, pour une cloison légère. Les résultats obtenus pour la flèche de la cloison sont cohérents et sont de l'ordre de grandeur des valeurs observées. Toutefois nous n'avons pu procéder à une comparaison expérimentale directe de ces simulations, par manque de données expérimentales sur ce type de cloison. Les résultats obtenus par simulation numérique montrent que, bien que les variabilités expérimentales soient relativement importantes pour la loi de comportement en cisaillement des assemblages par vissage, les dispersions induites au niveau de la

valeur de la flèche de la cloison restent faibles. Ce résultat est vraisemblablement dû à la présente d'un nombre important de vis qui ont un comportement local.

Les perspectives de ce travail concernent :

- la finalisation d'un modèle complet de simulation numérique d'une cloison légère de grande hauteur, sous charges thermiques et mécaniques, intégrant, d'une part le comportement thermo-mécanique non linéaire des plaques CPC avec endommagement sous charge thermique et modèle probabiliste des incertitudes, développés précédemment, et d'autre part, le modèle probabiliste du comportement en cisaillement des assemblages par vissage que nous avons présenté dans ce travail.

- la validation expérimentale d'un tel modèle pour une cloison légère de grande hauteur en utilisant d'une part les données existantes et d'autre part, les données issues des essais expérimentaux que nous avons menés.

# Annexe A

# Calcul du champ de déplacement plan dans un parement simple soumis à un chargement ponctuel périodique

Cette annexe A est l'étude [37] que nous donnons pour faciliter la lecture du mémoire. On rappelle l'hypothèse générale d'une cloison horizontalement infinie dans son plan. Le problème résolu est celui d'une plaque mince (d'épaisseur unitaire) chargée périodiquement dans son plan, selon une période 2T correspondant à l'entraxe entre deux montants, par deux charges ponctuelles unitaires situées symétriquement à une distance $a$ de la mi-hauteur. La linéarité admise

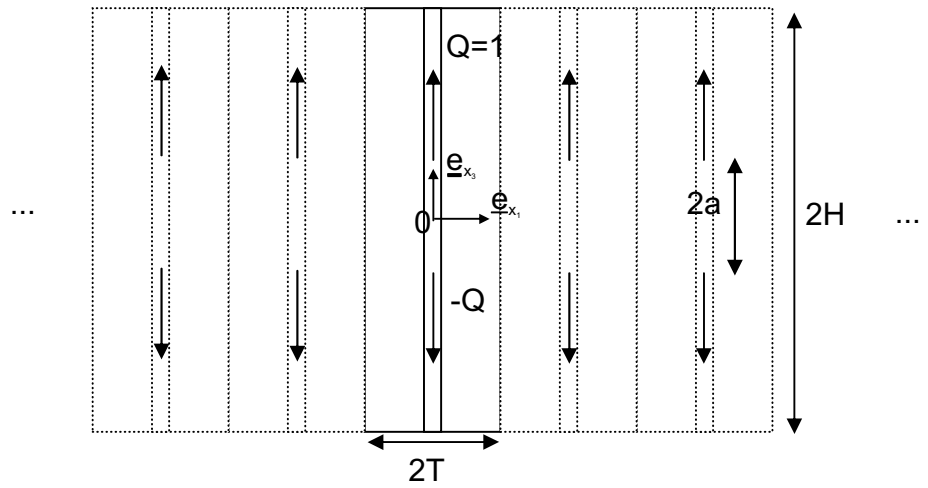



Fig. A.1 – Problème de la plaque mince chargée ponctuellement dans son plan.

du comportement de la plaque permettra, une fois ce problème résolu, de connaître par superposition le champ de déplacement dans un parement soumis à un ensemble de charges ponctuelles d'intensités quelconques. On se propose de résoudre ce problème par la méthode des séries de Fourier. La résolution est effectuée en deux temps : on commence par traiter un premier problème doublement périodique en $x_1$ et $x_3$ par prolongement périodique en $x_3$ du problème de base, on traite ensuite un second problème périodique en $x_1$ simplement dans lequel la cloison

n'est plus soumise aux chargements ponctuels du problème de base mais à un chargement sur ses bords libres haut et bas issu du champ de contrainte correspondant à la résolution du premier problème. Selon le schéma suivant où l'on présente les équations que doivent satisfaire les champs mécaniques sur la cellule de référence contenant l'origine et de dimensions $2T \times 2H$, le champ de contrainte pour le problème de base sera finalement obtenu en retranchant le champ du problème 2 au champ du problème 1. Afin de définir complètement les problèmes 1 et 2, il convient d'ajou-

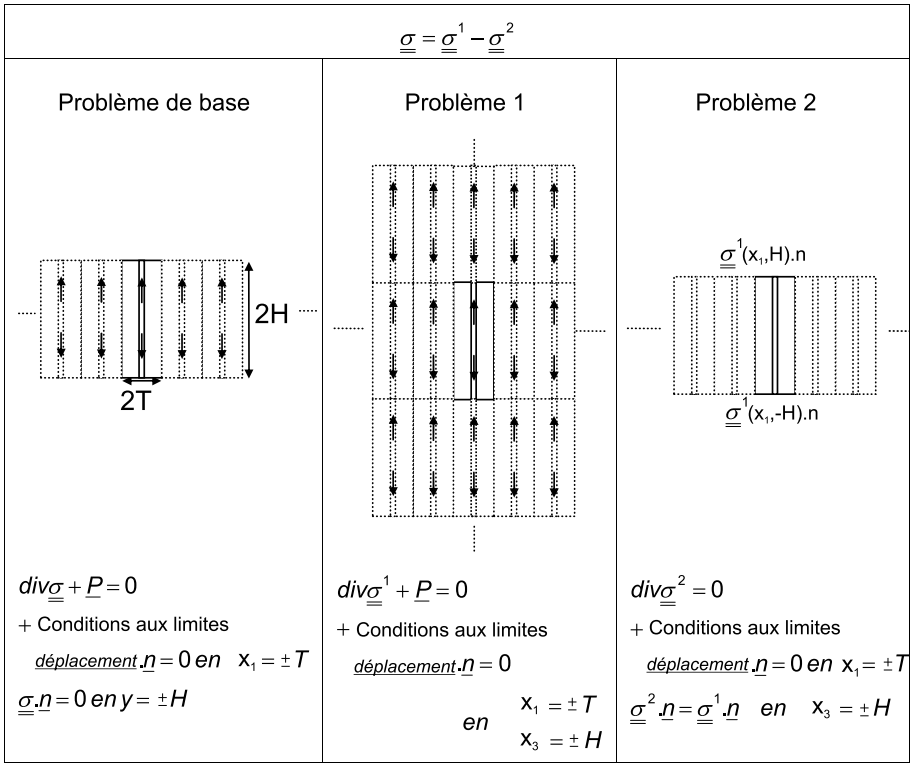



FIG. A.2 – Méthode de résolution du problème de base par décomposition en deux problème "plus simples".

ter aux équations présentées sur la figure $A.2$ l'équation de compatibilité cinématique que doit satisfaire le champ de déformation $2\varepsilon_{13,13} = \varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11}$ et la loi de comportement élastique linéaire et isotrope du parement $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}$ avec $E$ module et $\nu$ coefficient de Poisson du parement.

## A.1 Résolution du problème 1

La résolution du problème 1 commence par la définition du chargement P auquel est soumis le système sous la forme d'une série de Fourier. Si l'on regarde la ligne de chargement située à la cote $x_3 = a$ par exemple, les charges ponctuelles unitaires sont réparties selon un peigne de

Dirac de période 2T. Son expression et la série de Fourier associée sont de la forme :

$$\begin{aligned} &u(x_1) = \perp\perp\perp_{2T}(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - 2mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2T} e^{\frac{i\pi m x_1}{T}} = u_0 + \sum_{m\geq 1} u_m \cos\tfrac{\pi m x_1}{T} \\ &\text{avec } u_0 = \tfrac{1}{2T} \text{ et } u_m = \tfrac{1}{T} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Si l'on regarde maintenant la ligne de chargement située à la cote $x_1 = 0$, les charges ponctuelles unitaires sont réparties selon deux peignes de Dirac de périodes 2H décalés de 2a et de signes opposés :

$$\begin{aligned} v(x_3) = \perp\perp\perp_{2H}(x_3 - a) \ - \perp\perp\perp_{2H}(x_3 + a) \ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\delta(x_3 - a - 2nH) - \delta(x_3 + a - 2nH)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{H}\left(-i \sin\tfrac{\pi n a}{H}\right) e^{\frac{i\pi n x_3}{H}} \\ &= \sum_{n\geq 1} v_n \sin\tfrac{\pi n x_3}{H} \\ &\text{avec } v_n = \tfrac{2}{H}\sin\tfrac{\pi n a}{H} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Le chargement pour le problème 1 est finalement défini par le produit des peignes de Dirac précédents :

$$\underline{P}(x_1, x_3) = (\perp\perp\perp_{2T}(x_1))\,(\perp\perp\perp_{2H}(x_3 - a) \ - \perp\perp\perp_{2H}(x_3 + a)) \ \underline{e}_{x_3} \tag{A.3}$$

On exprime le chargement selon le produit des développements en séries de Fourier précédents :

$$\underline{P}(x_1, x_3) = \left(\sum_{n\geq 1} u_0 v_n \sin\frac{\pi n x_3}{H} + \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T} \sin\frac{\pi n x_3}{H}\right) \underline{e}_{x_3} \tag{A.4}$$

On définit alors le champ de contraintes planes $\underline{\underline{\sigma}}^1$ par son développement en série de Fourier. On tient compte pour cela des parités de ses composantes, à savoir composantes $\sigma^1_{11}$ et $\sigma^1_{33}$ paires en $x_1$ et $x_3$ et composante $\sigma^1_{13}$ impaire en $x_1$ et $x_3$. Dans ces conditions, le développement le plus général est de la forme :

$$\begin{cases} \sigma^1_{11}(x_1, x_3) = \alpha_{00} + \sum_{m\geq 1} \alpha_{m0} \cos\frac{\pi m x_1}{T} + \sum_{n\geq 1} \alpha_{0n} \cos\frac{\pi n x_3}{H} + \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \alpha_{mn} \cos\frac{\pi m x_1}{T} \cos\frac{\pi n x_3}{H} \\ \sigma^1_{33}(x_1, x_3) = \beta_{00} + \sum_{m\geq 1} \beta_{m0} \cos\frac{\pi m x_1}{T} + \sum_{n\geq 1} \beta_{0n} \cos\frac{\pi n x_3}{H} + \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \beta_{mn} \cos\frac{\pi m x_1}{T} \cos\frac{\pi n x_3}{H} \\ \sigma^1_{13}(x_1, x_3) = \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \gamma_{mn} \sin\frac{\pi m x_1}{T} \sin\frac{\pi n x_3}{H} \end{cases} \tag{A.5}$$

Résoudre le problème 1 consiste alors à définir les coefficients $\alpha_{mn}$, $\beta_{mn}$ et $\gamma_{mn}$ pour tout $m \geq 0$ et $n \geq 0$ qui permettent à $\underline{\underline{\sigma}}^1$ de satisfaire au système suivant présenté sous forme

indicielle avec le chargement défini dans l'équation $A.4$ :

$$\begin{cases} \text{équilibre statique} \begin{cases} \sigma^1_{11,1} + \sigma^1_{13,3} = 0 \\ \sigma^1_{13,1} + \sigma^1_{33,3} + P = 0 \end{cases} \\ \text{+compatibilité cinématique exprimée sur les contraintes par le biais de la loi de comportement} \\ 2\left(1+\nu\right)\sigma^1_{13,13} = \sigma^1_{11,33} + \sigma^1_{33,11} - \nu\left(\sigma^1_{11,11} + \sigma^1_{33,33}\right) \\ \text{+Conditions aux limites} \underline{\text{déplacement}}.\underline{n} = 0 \,\text{en} \begin{cases} x = \pm T \\ y = \pm H \end{cases} \\ \textit{soit} \int\limits_{-T}^{T} \left(\sigma^1_{11} - \nu\sigma^1_{33}\right) dx_1 = \int\limits_{-H}^{H} \left(\sigma^1_{33} - \nu\sigma^1_{11}\right) dx_3 = 0 \end{cases} \tag{A.6}$$

Tous calculs faits, on trouve les expressions suivantes des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}^1$ :

$$\begin{cases} \sigma^1_{11}\left(x_1, x_3\right) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\nu H}{\pi n} u_0 v_n \cos\frac{\pi n x_3}{H} + \sum\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{m\geq 1} \frac{HT^2 n\left(\nu T^2 n^2 - H^2 m^2\right)}{\pi\left(T^2 n^2 + H^2 m^2\right)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T}\cos\frac{\pi n x_3}{H} \\ \sigma^1_{33}\left(x_1, x_3\right) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{H}{\pi n} u_0 v_n \cos\frac{\pi n x_3}{H} + \sum\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{m\geq 1} \frac{HT^2 n\left(T^2 n^2 + (2+\nu) H^2 m^2\right)}{\pi\left(T^2 n^2 + H^2 m^2\right)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T}\cos\frac{\pi n x_3}{H} \\ \sigma^1_{13}\left(x_1, x_3\right) = \sum\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{m\geq 1} \frac{H^2 T m\left(\nu T^2 n^2 - H^2 m^2\right)}{\pi\left(T^2 n^2 + H^2 m^2\right)^2} u_m v_n \sin\frac{\pi m x_1}{T}\sin\frac{\pi n x_3}{H} \end{cases} \tag{A.7}$$

On reconnaît dans l'expression $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{H}{\pi n} u_0 v_n \cos\frac{\pi n x_3}{H}$ une forme proche des développements des fonctions $u(x_1)$ et $v(x_3)$ définissant le chargement. Ceci nous invite à exprimer cette somme par une combinaison de ces fonctions. Disposant des hypothèses nécessaires de continuité et de convergence, nous pouvons inverser la disposition des intégrales et des sommes et obtenir la relation :

$$u_0 \int\limits_0^{x_3} v\left(x_3\right) dx_3 = \int\limits_0^{x_3} \sum_{n\geq 1} u_0 v_n \sin\frac{\pi n x_3}{H} = -\sum_{n\geq 1} \frac{H}{\pi n} u_0 v_n \cos\frac{\pi n x_3}{H} + \sum_{n\geq 1} \frac{H}{\pi n} u_0 v_n \tag{A.8}$$

On introduit la fonction $w(a)$ homologue de $u(x_1)$ paire et $2H$ périodique :

$$w\left(a\right) = \perp\!\!\perp\!\!\perp_{2H}\left(a\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(a - 2nH\right) = \frac{1}{2H} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{H}\cos\frac{\pi n a}{H} \tag{A.9}$$

On a donc la relation :

$$\int\limits_0^a w\left(a\right) da = \frac{a}{2H} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n a}{H} = \frac{a}{2H} + T\sum_{n\geq 1} \frac{H}{\pi n} u_0 v_n \tag{A.10}$$

Notre problème n'ayant un sens que si a est strictement positif, on obtient finalement une expression de la somme qui nous intéresse sous la forme d'une fonction $f(x_3)$ :

$$\begin{aligned} f\left(x_3\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{H}{\pi n} u_0 v_n \cos\frac{\pi n x_3}{H} &= -u_0 \int\limits_0^{x_3} v\left(x_3\right) dx_3 + \frac{1}{T}\int\limits_0^a w\left(a\right) da - \frac{a}{2HT} \\ &= \left| \begin{array}{ll} \frac{H-a}{2HT} & \text{si } x_3 \in \left]-a, a\right[ \\ \frac{H-2a}{4HT} & \text{si } x_3 = \pm a \\ \frac{-a}{2HT} & \text{si } x_3 \in \left[-H, -a\right[ \cup \left]a, H\right] \end{array} \right. \end{aligned} \tag{A.11}$$

On obtient ainsi les expressions suivantes sous forme condensée des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}^1$ :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^1(x_1,x_3) = \nu f(x_3) + \sum\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{m\geq 1} \frac{HT^2n\left(\nu T^2n^2 - H^2m^2\right)}{\pi\left(T^2n^2+H^2m^2\right)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T}\cos\frac{\pi n x_3}{H} \\ \sigma_{33}^1(x_1,x_3) = f(y) + \sum\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{m\geq 1} \frac{HT^2n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{\pi\left(T^2n^2+H^2m^2\right)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T}\cos\frac{\pi n x_3}{H} \\ \sigma_{13}^1(x_1,x_3) = \sum\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{m\geq 1} \frac{H^2Tm\left(\nu T^2n^2 - H^2m^2\right)}{\pi\left(T^2n^2+H^2m^2\right)^2} u_m v_n \sin\frac{\pi m x_1}{T}\sin\frac{\pi n x_3}{H} \end{cases} \tag{A.12}$$

Il reste à ce stade à exprimer les composantes $\sigma_{33}^1$ et $\sigma_{13}^1$ aux cotes $x_3 = \pm H$ qui définiront les conditions aux limites du problème 2.

$$\begin{cases} \sigma_{33}^1(x_1,\pm H) = f(H) + \sum\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{m\geq 1} \frac{(-1)^n HT^2n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{\pi\left(T^2n^2+H^2m^2\right)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T} \\ \sigma_{13}^1(x_1,\pm H) = 0 \end{cases} \tag{A.13}$$

## A.2 Résolution du problème 2

Le problème 2 consiste à définir le champ de contraintes planes dans une plaque chargée sur son contour. Il s'agit d'exprimer les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}^2$, champ 2T périodique en $x_1$, qui permettent à celui-ci de satisfaire au système suivant présenté sous forme indicielle :

$$\begin{cases} \text{équilibre statique} \begin{cases} \sigma_{11,1}^2 + \sigma_{13,3}^2 = 0 \\ \sigma_{13,1}^2 + \sigma_{33,3}^2 = 0 \end{cases} \\ + \text{compatibilité cinématique exprimée sur les contraintes par le biais de la loi de comportement} \\ 2(1+\nu)\sigma_{13,13}^2 = \sigma_{11,33}^2 + \sigma_{33,11}^2 - \nu\left(\sigma_{11,11}^2 + \sigma_{33,33}^2\right) \\ + \text{conditions aux limites } \underline{\text{déplacement}}.\underline{n} = 0 \, en \, x_1 = \pm T \\ soit \int\limits_{-T}^{T} \left(\sigma_{11}^2 - \nu\sigma_{33}^2\right) dx_1 = 0 \\ + \text{conditions aux limites en } x_3 = \pm H \\ \sigma_{33}^2(x_1,\pm H) = f(H) + \sum\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{m\geq 1} \frac{(-1)^n HT^2n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{\pi\left(T^2n^2+H^2m^2\right)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T} \\ \sigma_{13}^2(x_1,\pm H) = 0 \end{cases} \tag{A.14}$$

On profite à nouveau de la linéarité du problème pour décomposer celui-ci en n problèmes plus simples dont nous superposerons les résultats pour obtenir le champ $\underline{\underline{\sigma}}^2$. Notre décomposition porte sur la condition aux limites $\sigma_{33}^2(x_1,\pm H)$ dont nous allons considérer successivement chaque harmonique de la variable $n$.

Pour la composante 0 correspondant à la condition aux limites $\sigma_{33}^{2,0}(x_1,\pm H) = f(H)$, le problème est trivial car engendre nécessairement un champ homogène dans le parement de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{2,0} = f(H)\left(\nu \underline{e}_{x_1} \otimes \underline{e}_{x_1} + \underline{e}_{x_3} \otimes \underline{e}_{x_3}\right) \tag{A.15}$$

Pour les $n$ composantes suivantes correspondant à la condition aux limites $\sigma_{33}^{2,n}(x_1,\pm H) = \sum\limits_{m\geq 1} \frac{(-1)^n HT^2n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{\pi\left(T^2n^2+H^2m^2\right)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T}$ , on tire profit de façon classique des équations

d'équilibre et de compatibilité du système $A.14$ pour simplifier le problème de la recherche d'un champ de tenseur par celui d'une fonction scalaire $\Phi(x_1, x_3)$ biharmonique (fonction d'Airy) dont les dérivées secondes sont liées aux composantes des contraintes selon :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{2,n} = \Phi^n{}_{,33} \\ \sigma_{33}^{2,n} = \Phi^n{}_{,11} \\ \sigma_{13}^{2,n} = -\Phi^n{}_{,13} \end{cases} \tag{A.16}$$

Le système $A.14$ est ainsi transformé en n systèmes auxquels doivent satisfaire les fonctions $\Phi^n(x_1, x_3)$, 2T périodiques en $x_1$, paires en $x_1$ et en $x_3$ :

$$\begin{cases} \Delta\Delta\Phi^n = 0 \ \ (\textit{double Laplacien}) \\ \int\limits_{-T}^{T} (\Phi^n{}_{,33} - \nu\Phi^n{}_{,11})\, dx_1 = 0 \\ \Phi^n{}_{,11}(x_1, \pm H) = \sum\limits_{m\geq 1} \frac{(-1)^n HT^2 n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{\pi(T^2n^2+H^2m^2)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T} \\ \Phi^n{}_{,13}(x_1, \pm H) = 0 \end{cases} \tag{A.17}$$

La forme du problème nous invite à définir la fonction d'Airy sous la forme de sa série de Fourier en $x_1$ :

$$\Phi^n(x_1, x_3) = a_0(x_3) + \sum_{m\geq 1} a_m(x_3) \cos\frac{\pi m x_1}{T} \tag{A.18}$$

Appliquer l'équation du double Laplacien du système $A.17$ à cette définition de $\Phi^n(x_1, x_3)$ entraîne les relations pour les fonctions $a_m(x_3)$ :

$$\begin{cases} a_0^{(4)}(x_3) = 0 \\ \forall m \geq 1, \ \ a_m^{(4)}(y) - \frac{2\pi^2 m^2}{T^2} a_m^{(2)}(x_3) + \frac{\pi^4 m^4}{T^4} a_m(x_3) = 0 \end{cases} \tag{A.19}$$

La résolution de cette équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants et la parité de $\Phi^n(x_1, x_3)$ entraînent :

$$\forall m \geq 1, \ \ a_m(x_3) = \varsigma_m \cosh\frac{\pi m x_3}{T} + \tau_m \frac{\pi m x_3}{T} \sinh\frac{\pi m x_3}{T} \tag{A.20}$$

Les conditions aux limites du système $A.17$ permettent alors de définir les coefficients $\varsigma_m$ et $\tau_m$ et de conclure à la nullité de la fonction $a_0(x_3)$. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \Phi^n(x_1, x_3) = \sum_{m\geq 1} & \frac{(-1)^{n+1} HT^4 n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{\pi^3 m^2 (T^2n^2+H^2m^2)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T} \\ \times & \frac{\left(\sinh\frac{\pi m H}{T} + \frac{\pi m H}{T}\cosh\frac{\pi m H}{T}\right)\cosh\frac{\pi m x_3}{T} - \sinh\frac{\pi m H}{T}\frac{\pi m x_3}{T}\sinh\frac{\pi m x_3}{T}}{\frac{\pi m H}{T} + \frac{1}{2}\sinh\frac{2\pi m H}{T}} \end{aligned} \tag{A.21}$$

On obtient finalement les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}^2$ par dérivation des $\Phi^n(x_1, x_3)$ selon le système $A.16$

et superposition des solutions individuelles selon $\underline{\underline{\sigma}}^2 = \underline{\underline{\sigma}}^{2,0} + \sum_{n\geq 1} \underline{\underline{\sigma}}^{2,n}$.

$$\left\{\begin{array}{l}
\sigma_{11}^2(x_1,x_3) = \nu f(H) + \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^n HT^2 n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{\pi(T^2n^2+H^2m^2)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T} \\
\qquad \times \frac{\left(\sinh\frac{\pi mH}{T} - \frac{\pi mH}{T}\cosh\frac{\pi mH}{T}\right)\cosh\frac{\pi m x_3}{T} + \sinh\frac{\pi mH}{T}\frac{\pi m x_3}{T}\sinh\frac{\pi m x_3}{T}}{\frac{\pi mH}{T}+\frac{1}{2}\sinh\frac{2\pi mH}{T}} \\
\sigma_{33}^2(x_1,x_3) = f(H) + \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^n HT^2 n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{\pi(T^2n^2+H^2m^2)^2} u_m v_n \cos\frac{\pi m x_1}{T} \\
\qquad \times \frac{\left(\sinh\frac{\pi mH}{T} + \frac{\pi mH}{T}\cosh\frac{\pi mH}{T}\right)\cosh\frac{\pi m x_3}{T} - \sinh\frac{\pi mH}{T}\frac{\pi m x_3}{T}\sinh\frac{\pi m x_3}{T}}{\frac{\pi mH}{T}+\frac{1}{2}\sinh\frac{2\pi mH}{T}} \\
\sigma_{13}^2(x_1,x_3) = \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^n HT^2 n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{\pi(T^2n^2+H^2m^2)^2} u_m v_n \sin\frac{\pi m x_1}{T} \\
\qquad \times \frac{\sinh\frac{\pi mH}{T}\frac{\pi m x_3}{T}\cosh\frac{\pi m x_3}{T} - \frac{\pi mH}{T}\cosh\frac{\pi mH}{T}\sinh\frac{\pi m x_3}{T}}{\frac{\pi mH}{T}+\frac{1}{2}\sinh\frac{2\pi mH}{T}}
\end{array}\right. \tag{A.22}$$

## A.3 Champ de déplacement dans le parement en cas de montants simples

En se rapportant au problème général qui nous intéresse ici, seul le déplacement vertical que l'on note $d$ nous est nécessaire. Les hypothèses faites plus haut conduisent immédiatement à son expression :

$$d(a,x_1,x_3) = \int_0^{x_3} \varepsilon_{33} dx_3 = \frac{1}{E}\int_0^{x_3} \left(\left(\sigma_{33}^1 - \nu\sigma_{11}^1\right) - \left(\sigma_{33}^2 - \nu\sigma_{11}^2\right)\right) dx_3 \tag{A.23}$$

Disposant des hypothèses nécessaires de continuité et de convergence, nous pouvons passer cette dernière intégrale dans les sommes de Fourier définissant les champs de contraintes et donner l'expression suivante du déplacement vertical dans une plaque d'épaisseur et de module unitaires soumise à deux charges ponctuelles unitaires situées symétriquement à une distance a de la mi-hauteur :

$$\left|\begin{array}{l}
\forall a \in [0,H[\ ,\ \forall (x_1,x_3) \in [-T,T]\ \times [0,H] - \{0,a\} \\
d(a,x_1,x_3) = \left(1-\nu^2\right) g(x_3) + \frac{(1+\nu)HT^2}{\pi}\sum_{m\geq 1} u_m \cos\frac{\pi m x_1}{T}\left(\sum_{n\geq 1} v_n p_{mn}\sin\frac{\pi n x_3}{H} + r_m(x_3)\sum_{n\geq 1} v_n q_{mn}\right) \\
\text{avec} \\
g(x_3) = \left|\begin{array}{ll} \frac{y}{2T} & \text{si } x_3 < a \\ \frac{a}{2T} & \text{si } x_3 \geq a \end{array}\right. \\
p_{mn} = \frac{H\left((1-\nu)T^2n^2+2H^2m^2\right)}{\pi(T^2n^2+H^2m^2)^2} \qquad q_{mn} = \frac{(-1)^n n\left(T^2n^2+(2+\nu)H^2m^2\right)}{(T^2n^2+H^2m^2)^2} \\
r_m(x_3) = \frac{\sinh\frac{\pi mH}{T}x_3\cosh\frac{\pi m x_3}{T} - \left(H\cosh\frac{\pi mH}{T} + \frac{2T}{\pi m(1+\nu)}\sinh\frac{\pi mH}{T}\right)\sinh\frac{\pi m x_3}{T}}{\frac{\pi mH}{T}+\frac{1}{2}\sinh\frac{2\pi mH}{T}}
\end{array}\right. \tag{A.24}$$

Le déplacement au point d'application d'une charge ponctuelle nécessite un traitement particulier. En effet, en toute théorie, le déplacement est infini en ce point et naturellement la série précédente n'est pas applicable. Il y a donc lieu dans ce cas de faire le lien entre le chargement ponctuel idéalisé et le chargement réel imposé par le biais des vis sur le parement. On considèrera

pour cela que le déplacement au point d'application d'une charge est la moyenne des déplacements sur l'aire centrée sur ce point et égale à la section d'une vis. On considère une aire carrée de côté $2b$. Le déplacement au point de chargement est alors de la forme :

$$d_{\left|\begin{smallmatrix} x_1=0 \\ x_3=a \end{smallmatrix}\right.} = \frac{1}{4b^2} \int_{a-b}^{a+b} \int_{-b}^{b} d\left(a, x_1, x_3\right) dx_1 dx_3 \tag{A.25}$$

De façon plus générale dans notre démarche, on ne s'intéresse qu'aux déplacements dans le parement aux lieux des vissages sur le montant et la formule précédente sera généralisée à $x_3$ quelconque :

$$d\left(a, x_3\right) = \frac{1}{4b^2} \int_{x_3-b}^{x_3+b} \int_{-b}^{b} d\left(a, x_1, x_3\right) dx_1 dx_3 \tag{A.26}$$

Exprimé à partir de la formule $A.24$, le déplacement au droit d'une vis centrée en $(0, x_3)$ prend finalement la forme :

$$\left|\begin{array}{l}
\forall a \in \left]0, H\right[ \quad , \quad \forall x_3 \in [b, H-b] \\
d\left(a, x_3\right) = \frac{1-\nu^2}{2T} k\left(x_3\right) + \frac{(1+\nu)HT^3}{b^2\pi^3} \sum\limits_{m\geq 1} \frac{u_m}{m} \sin \frac{\pi m b}{T} \left( \sum\limits_{n\geq 1} \frac{H v_n p_{mn}}{n} \sin \frac{\pi n y}{H} \sin \frac{\pi n b}{H} + s_m\left(y\right) \sum\limits_{n\geq 1} v_n q_{mn} \right) \\
\text{avec} \\
k\left(x_3\right) = \left|\begin{array}{l} x_3 \;\; si \;\; x_3 < a \\ a - \frac{b}{4} \;\; si \;\; x_3 = a \\ a \;\; si \;\; y > a \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad s_m\left(x_3\right) = \frac{T(s_1 - s_2)}{m\left(\frac{\pi m H}{T} + \frac{1}{2}\sinh \frac{2\pi m H}{T}\right)} \\
s_1 = \sinh \frac{\pi m H}{T} \left( y \cosh \frac{\pi m x_3}{T} \sinh \frac{\pi m b}{T} + b \sinh \frac{\pi m x_3}{T} \cosh \frac{\pi m b}{T} - \frac{T}{\pi m} \sinh \frac{\pi m x_3}{T} \sinh \frac{\pi m b}{T} \right) \\
s_2 = \left( H \cosh \frac{\pi m H}{T} + \frac{2T}{\pi m(1+\nu)} \sinh \frac{\pi m H}{T} \right) \sinh \frac{\pi m x_3}{T} \sinh \frac{\pi m b}{T}
\end{array}\right. \tag{A.27}$$

## A.4 Validation de la démarche par un calcul aux éléments finis

Afin de contrôler qu'aucune erreur ne s'est glissée dans le développement précédent, on réalise un calcul aux éléments finis d'une plaque de module et d'épaisseur unitaires, de coefficient de Poisson égal à 0.35, soumise à un chargement ponctuel unitaire dans la situation d'une cloison de hauteur 2,5m avec montants simples d'entraxe 0.6m. Pour des raisons de périodicité et de symétrie, seule une zone de largeur $T = 0.3$ m et de hauteur $H = 1.25$ m est simulée. La charge ponctuelle est appliquée à la cote $a = 0.125$ m et le diamètre d'une vis fait retenir $b = 2.2$ mm. On pratique alors le calcul des déplacements verticaux dans la plaque selon les profils présentés sur la figure précédente. On utilise pour cela la formule $A.24$ en un point courant et la formule $A.27$ au point d'application de la charge ($x_1 = 0, x_3 = a$). La figure suivante présente la confrontation des deux méthodes. La parfaite superposition des courbes obtenues valide notre approche. Considérant un comportement linéaire des parements, on peut appliquer alors le principe de superposition pour définir le champ de déplacement dans une plaque chargée par des charges ponctuelles périodiques d'intensités différentes.

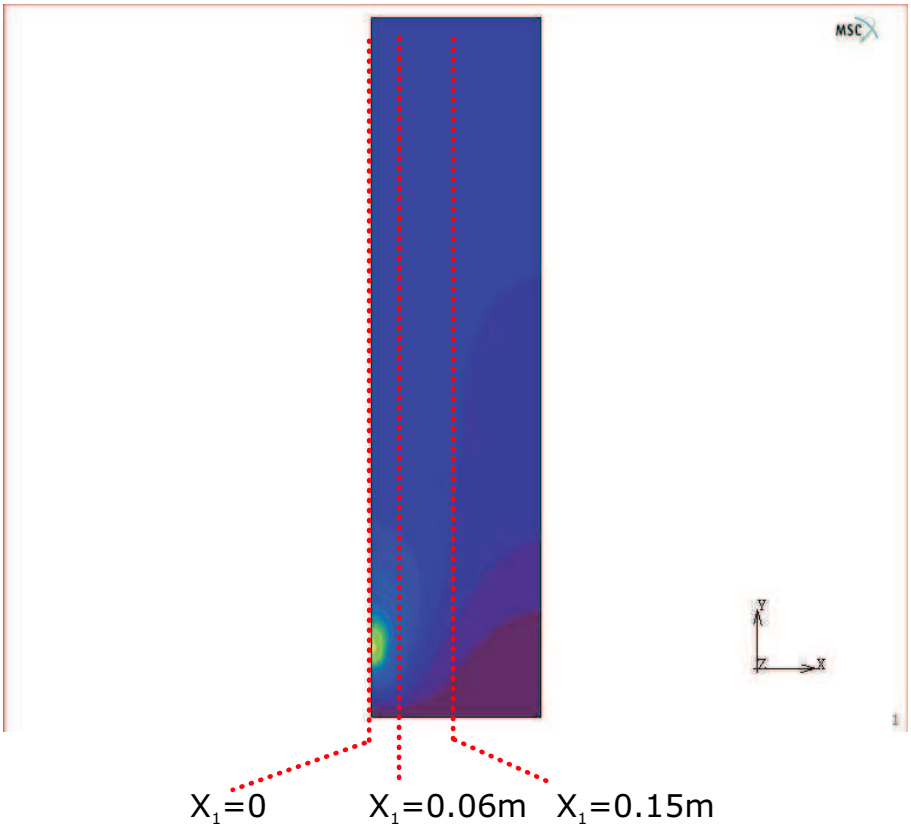



FIG. A.3 – Champ de déplacement vertical dans une plaque soumise à une charge ponctuelle -profil des confrontations simulation EF / approche analytique.

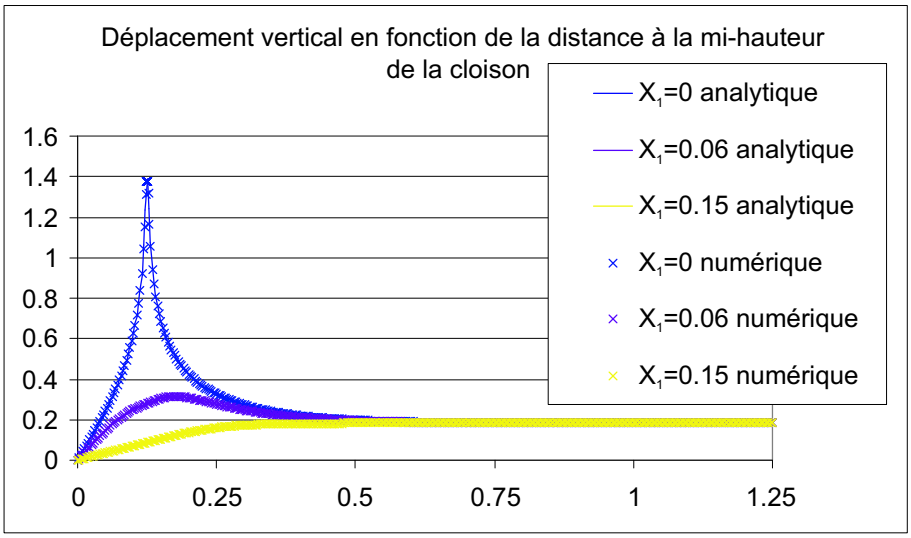



FIG. A.4 – Confrontation simulations EF / approche analytique.

# Annexe B

# Construction de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément d'assemblage

## B.1 Cas de plaque en parement simple

Ce paragraphe est relatif à la construction de la matrice de rigidité élémentaire présentée dans l'Eq. (6.19). Rappelons que cette matrice a été construite en développant la fonction énergétique décrite par l'Eq. (6.18). Cette fonction énergétique dépend du glissement relatif entre le montant et le parement, donné par l'Eq. (6.14), glissement qui peut être exprimé à l'aide des variables nodales de l'élément de liaison. En introduisant l'Eq. (6.14) dans l'Eq. (6.18), nous pouvons réécrire la fonction énergétique sous forme

$$I' = \frac{1}{2}K\{(u_1^2 + l_p\psi_3^2 - u_1^1 + l_m\psi_3^1)^2 + (u_3^2 - l_p\psi_1^2 - u_3^1 - l_m\psi_1^1)^2\} + \frac{P}{2}(u_2^1 - u_2^2)^2 - fg \quad . \tag{B.1}$$

En développant explicitement l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} I' = \frac{1}{2}K\,\{&(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 + l_p^2(\psi_3^2)^2 + l_m^2(\psi_3^1)^2 + (u_3^1)^2 + (u_3^2)^2 + l_m^2(\psi_1^1)^2 + l_p^2(\psi_1^2)^2 + 2l_pu_1^2\psi_3^2 + \\ &-2u_1^1u_1^2 + 2l_mu_1^2\psi_3^1 - 2l_pu_1^1\psi_3^2 + 2l_ml_p\psi_3^1\psi_3^2 - 2l_mu_1^1\psi_3^1 - 2l_pu_3^2\psi_1^2 - 2u_3^1u_3^2 - 2l_mu_3^2\psi_1^1 + \\ &+2l_pu_3^1\psi_1^2 + 2l_ml_p\psi_1^1\psi_1^2 + 2l_mu_3^1\psi_1^1\} + \frac{P}{2}(u_2^1 - u_2^2)^2 - fg \quad . \end{aligned} \tag{B.2}$$

A partir de l'Eq. ($B.2$) nous pouvons construire la matrice de rigidité élémentaire de l'élément d'assemblage donnée par l'Eq. (6.19).

## B.2 Cas de plaque en parement double

La matrice de rigidité élémentaire de l'assemblage dans le cas d'une plaque CPC en parement double a été construite de façon similaire au cas du parement simple. Elle est décomposée en deux matrices suivant l'Eq. (6.35). Dans ce cas, la fonction énergétique est donnée par l'Eq. (6.32) qui peut se réécrire sous forme

$$I' = I_1' + I_2' - f_1g_1 - f_2g_2 \quad , \tag{B.3}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1' &= \frac{1}{2}K_1 g_1^2 + \frac{1}{2}P(u_2^1 - u_2^2)^2 \\ I_2' &= \frac{1}{2}K_1 g_2^2 + \frac{1}{2}P(u_2^1 - u_2^3)^2 \end{aligned} \tag{B.4}$$

où $g_1$ et $g_2$ sont des déplacements relatifs dans le plan des parements entre les nœuds 4-8 et les nœuds 9-11 et qui s'écrivent

$$\begin{cases} g_1^2 = (u_1^4 - u_1^8)^2 + (u_3^4 - u_3^8)^2 \\ g_2^2 = (u_1^9 - u_1^{11})^2 + (u_3^9 - u_3^{11})^2 \end{cases} \tag{B.5}$$

*Calcul de $I_1'$*

A partir des relations cinématiques entre les nœuds, données par les Eqs. (6.16) et (6.17), nous déduisons la forme explicite de $I_1'$,

$$I_1' = \frac{1}{2}K_1\{(u_1^2 + l_p\psi_3^2 - u_1^1 + l_m\psi_3^1)^2 + (u_3^2 - l_p\psi_1^2 - u_3^1 - l_m\psi_1^1)^2\} + \frac{P}{2}(u_2^1 - u_2^2)^2. \tag{B.6}$$

En comparant cette équation avec l'Eq. $(B.1)$, nous constatons que $I_1'$ a la même forme que pour le parement simple. La matrice $[K_{12}]^e$ est donc donnée par l'Eq. (6.36).

*Calcul de $I_2'$*

Le calcul de $I_2'$ est un peu plus compliqué à cause des relations cinématiques implicites qui impliquent une dépendance entre les nœuds 9 et 11 et les variables nodales de l'élément de liaison 123. A partir de l'Eq. (6.30), nous déduisons

$$\begin{cases} u_1^6 = \dfrac{u_1^9(2l_{p_1} + l_{p_2} + e_x) - u_1^4(l_{p_2} + e_x)}{2l_{p_1}} \quad , \\ u_3^6 = \dfrac{u_3^9(2l_{p_1} + l_{p_2} + e_x) - u_3^4(l_{p_2} + e_x)}{2l_{p_1}} \quad . \end{cases} \tag{B.7}$$

Nous allons ajouter un nœud intermédiaire labellé nœud 10. Nous avons donc des relations cinématiques suivantes

$$\begin{cases} u_1^{10} = u_1^6 + (l_{p_2} + e_x)\psi_3^3 \\ u_2^{10} = u_2^6 \\ u_3^{10} = u_3^6 - (l_{p_2} + e_x)\psi_1^3 \end{cases} \tag{B.8}$$

La transformation du système d'un ressort en rotation et d'un ressort de translation, en un système de deux ressort en translation équivalent, nous donne deux relations complémentaires entre des nœuds 9, 10 et 11, qui s'écrivent

$$\begin{cases} (k_{t_2} + k_{c_2})u_1^{10} = k_{c_2}u_1^9 + k_{t_2}u_1^{11} \\ (k_{t_2} + k_{c_2})u_3^{10} = k_{c_2}u_3^9 + k_{t_2}u_3^{11} \end{cases} \tag{B.9}$$

En introduisant l'Eqs. $(B.7)$ et $(B.8)$ dans l'Eq. $(B.9)$, on obtient

$$\begin{cases} u_1^9 = \dfrac{2l_{p_1}u_1^{11} + (l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2})(u_1^4 - 2l_{p_1}\psi_3^3)}{(l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2}) + 2l_{p_1}} \\ u_3^9 = \dfrac{2l_{p_1}u_3^{11} + (l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2})(u_3^4 + 2l_{p_1}\psi_1^3)}{(l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2}) + 2l_{p_1}} \end{cases} \tag{B.10}$$

Nous déduisons donc le glissement relatif dans le plan entre le nœud 9 et le nœud 11, qui s'écrit

$$\begin{aligned} g_2^2 &= (u_1^9 - u_1^{11})^2 + (u_3^9 - u_3^{11})^2 \\ &= \frac{(l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2})}{2l_{p_1}k_{t_2} + (l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2})} \left\{(u_1^4 - 2l_{p_1}\psi_3^3 - u_1^{11})^2 + (u_3^4 + 2l_{p_1}\psi_1^3 - u_3^{11})^2\right\} \end{aligned} \tag{B.11}$$

En introduisant les Eqs. (6.26) et (6.29) dans l'Eq. ($B$.11), et en posant

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{(l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2})}{2l_{p_1}k_{t_2} + (l_{p_2} + e_x)(k_{t_2} + k_{c_2})} \\ l'_{p_2} = 2l_{p_1} + l_{p_2} \end{cases} \tag{B.12}$$

nous obtenons

$$I'_2 = \frac{1}{2}K_2\{(u_1^3 + l'_{p_2}\psi_3^3 - u_1^1 + l_m\psi_3^1)^2 + (u_3^3 - l'_{p_2}\psi_1^3 - u_3^1 - l_m\psi_1^1)^2\} + \frac{P}{2}(u_2^1 - u_2^3)^2. \tag{B.13}$$

La matrice $[K_{13}]^e$ est donc donnée par l'Eq. (6.37).

# Bibliographie


[1] *Travaux de bâtiment. Ouvrages en plaques de parement en plâtre-Plaques à faces cartonnées (NF 72-203-1). AFNOR, Mai 1993.*

[2] NIST 1980. Thermal properties taken from nist website. http ://fire.nist.gov/brflpubs. In *Original Reference : Report 7040. 384C Statens Provingaanstalt, Stockholm.*, 1980.

[3] L. Abdou, R. Ami Saada, Meftah F., and A. Mebarki. Experimental investigations of the joint-mortar behaviour. *Mechanics Research Communications*, 33(3) :370–384, 2006.

[4] L. Andersson and B. Jacksson. Analytical fire design with gypsum - a theorical and experimental study. In *Insitue of Fire Safety Design, Lund, Sweden.*, 1995.

[5] C. N. Ang and Y. C. Wang. The effect of water movement on specific heat of gypsum plasterboard in heat transfer analysis under natural fire exposure. *Construction and Building Materials*, 18(7) :505–515, September 2004.

[6] C. N. Ang and Y. C. Wang. Effect of moisture transfer on specific heat of gypsum plasterboard at high temperatures. *Construction and Building Materials*, 23(2) :675–686, February 2009.

[7] O. Axenenko and G. Thorpe. The modelling of dehydration and stress analysis of gypsum plasterboards exposed to fire. *Computational Materials Science*, 6(3) :281–294, October 1996.

[8] A. Belmiloudi and G. Le Meur. Mathematical and numerical analysis of dehydratation of gypsum plasterboards exposed to fire. *Applied Mathematics and Computation*, 163(3) :1023–1041, April 2005.

[9] F. Benboudjema, F. Meftah, and J. M. Torrenti. Interaction between drying, shrinkage, creep and cracking phenomena in concrete. *Engineering structures*, 27(2) :239–250, 2005.

[10] A. Benouis. *Comportement mécanique des ouvrages en plaque de plpatre sur ossature métallique.* PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Septembre 1995.

[11] N. Bénichou and M. A. Sultan. Thermal properties of components of lightweight wood-framed assemblies at elevated temperatures. In *Fire and Materials 7th International Conference*, pages 447–458, 2001.

[12] A. Buchanan. Structural design for fire safety. *John Wiley and Sons*, ISBN 0471889938, 2001.

[13] C. Chen, D. Duhamel, and C. Soize. Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics : Case of composite sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2) :64–81, June 2006.

[14] P. C. Chen and W. Soroka. Multi-degree dynamic response of a system with statistical properties. *Journal of Sound and Vibration*, 37(4) :547–556, 1974.

[15] L. Chevalier, S. Cloupet, and C. Soize. Probabilistic model for random uncertainties in steady state rolling contact. *Wear*, 258(10) :1543–1554, May 2005.

[16] W. K. Chow. Simulation of tunnel fires using a zone model. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 11(2) :221–236, April 1996.

[17] W. K. Chow and Y. Y. Chan. Computer simulation of the thermal fire resistance of building materials and structural elements. *Construction and Building Materials*, 10(2) :131–140, March 1996.

[18] L. Y. Cooper. *The Thermal Response of Gypsum-panel/steel-stud Wall Systems Exposed to Fire Environments : A Simulation for Use in Zone-type Fire Models.* US Dept. of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology, 1997.

[19] S. M. Cramer, O. M. Friday, R. H. White, and G. Sriprutkiat. Mechanical properties of gypsum board at elevated temperatures. *Proceeding of the Fire and Materials 2003, San Francisco, California, USA*, pages 27–28, 2003.

[20] A. Culla, W. D'Ambrogio, and A. Fregolent. Parametric approaches for uncertainty propagation in SEA. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(1) :193–204, January 2011.

[21] G. Deodatis and P. D. Spanos (Guest Editors). 5th international conference on computational stochastic mechanics. In *Special issue of the Probabilistic Engineering Mechanics*, volume 23, pages 103–346, 2008.

[22] C. Desceliers, Q. Grimal, G. Haiat, S. Naili, and C. Soize. Numerical simulation of the axial transmission technique for bone evaluation : a probabilistic approach. *Journal of Biomechanics*, 39(Supplement 1) :S463, 2006.

[23] G. I. Schueller (Editor). Computational methods in stochastic mechanics and reliability analysis. In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 194, pages 1251–1795, 2005.

[24] G. I. Schueller (Guest Editor). Uncertainties in structural mechanics and analysis-computational methods. In *Special issue of Computer and Structures*, volume 83, pages 1031–1150, 2005.

[25] C. Erchinger, A. Frangi, and M. Fontana. Fire design of steel-to-timber dowelled connections. *Engineering Structures*, 32(2) :580–589, February 2010.

[26] S. Ertugrul. Predictive modeling of human operators using parametric and neuro-fuzzy models by means of computer-based identification experiment. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(2) :259–268, March 2008.

[27] M. Feng and Y. C. Wang. An experimental study of loaded full-scale cold-formed thin-walled steel structural panels under fire conditions. *Fire Safety Journal*, 40(1) :43–63, February 2005.

[28] M. Feng, Y. C. Wang, and J. M. Davies. Thermal performance of cold-formed thin-walled steel panel systems in fire. *Fire Safety Journal*, 38(4) :365–394, June 2003.

[29] J. -M. Franssen. Failure temperature of a system comprising a restrained column submitted to fire. *Fire Safety Journal*, 34(2) :191–207, March 2000.

[30] J. M. Franssen, G. M. E. Cooke, and D. J. Latham. Numerical simulation of a full scale fire test on a loaded steel framework. *Journal of Constructional Steel Research*, 35(3) :377–408, 1995.

[31] J. J. Fuller, R. J. Leichti, and R. H. White. Temperature distribution in a nailed gypsum-stud joint exposed to fire. *Fire and materials*, 16(2) :95–99, 1992.

[32] J. T. Gerlich. Design of loadbearing light steel frame walls for fire resistance. In *Fire Engineering Research Report 95/3, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand*, 1995.

[33] T. Goncalves, T. Jong, P. Clancy, and W. Poynter. Mechanical properties of fire rated gypsum board. Technical report, Department of Civil and Building Engineering, Victoria University of Technology., 1996.

[34] G. Hadjisophocleous. Extract from report on furnace tests on walls for departement of national defence, canada. In *National Fire Laboratory, NRCC, National Research Council Canada.*, 1996.

[35] T. Z. Harmathy. *Properties of building materials.* National Research Council Canada, Institute for Research in Construction, 1988.

[36] E. J. Haug, K. K. Choi, and V. Komkov. Design sensitivity analysis of structural systems. 1986.

[37] J. -V. Heck. Evaluation par calcul de la flèche sous charge de service des cloisons promat. Technical report, Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, 2008.

[38] J. P. Hespanha, D. Liberzon, and A. S. Morse. Logic-based switching control of a nonholonomic system with parametric modeling uncertainty. *Systems & Control Letters*, 38(3) :167–177, October 1999.

[39] Z. -F. Huang and K. -H. Tan. Fire resistance of compartments within a high-rise steel frame : New sub-frame and isolated member models. *Journal of Constructional Steel Research*, 62(10) :974–986, October 2006.

[40] E. Hugi, K. G. Wakili, and L. Wullschleger. Measured and calculated temperature evolution on the room side of a butted steel door frame subjected to the standard fire of ISO 834. *Fire Safety Journal*, 44(5) :808–812, July 2009.

[41] A. Ibrahimbegovic, A. Boulkertous, L. Davenne, and M. Muhasilovic. On modeling of fire resistance tests on concrete and reinforced-concrete structures. *Computers and concrete*, 7(4) :285–301, 2010.

[42] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 108(2) :171–190, 1957.

[43] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106 :620–630, 1957.

[44] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 108(2) :171–190, 1957.

[45] A. Kareem. Aerodynamic response of structures with parametric uncertainties. *Structural Safety*, 5(3) :205–225, September 1988.

[46] J. Konig and L. Walleij. Timber frame assemblies exposed to standard and parametric fires. *Part 2 : A Design Model for Standard Fire Exposure.*

[47] A. C. J. Korte and H. J. H. Brouwers. Calculation of thermal conductivity of gypsum plasterboards at ambient and elevated temperature. *Fire and materials*, 34 :55–75, 2010.

[48] R. S. Langley. Unified approach to probabilistic and possibilistic analysis of uncertain systems. *Journal of engineering mechanics*, 126 :1163, 2000.

[49] J. R. Lawson. An evaluation of fire properties of generic gypsum board products. In *NBSIR 77-1265 National Bureau of Standards*, 1977.

[50] J. Y. R. Liew, L. K. Tang, T. Holmaas, and Y. S. Choo. Advanced analysis for the assessment of steel frames in fire. *Journal of Constructional Steel Research*, 47(1-2) :19–45, August 1998.

[51] D. G. Luenberg. Optimization by vector space methods, 1969.

[52] B. R. Mace, K. Worden, and G. Manson. Uncertainty in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3) :423–429, 2005.

[53] J. Mehaffey and P. Cuerrier. A model for predicting heat transfer through gypsum-board/wood-stud wall exposed to fire. *Fire and Materials*, 18 :297–305, 1994.

[54] T. D. Nguyen, F. Meftah, R. Chammas, and A. Mebarki. The behaviour of masonry walls subjected to fire : Modelling and parametrical studies in the case of hollow burnt-clay bricks. *Fire Safety Journal*, 44(4) :629–641, 2009.

[55] G. De Nicolao, R. Scattolini, and C. Siviero. Modelling the volumetric efficiency of ic engines : Parametric, non-parametric and neural techniques. *Control Engineering Practice*, 4(10) :1405–1415, October 1996.

[56] L. J. Y. Ostrovsky-Berman and Y. Myers. Efficient representation and computation of geometric uncertainty : The linear parametric model. *Precision Engineering*, 34(1) :2–6, January 2010.

[57] O. Pettersson and J. Witteveen. On the fire resistance of structural steel elements, derived from standard fire tests or by calculation. *Journal of Fire Safety*, 1979.

[58] K. H. Rasmussen and S. B. Jorgensen. Parametric uncertainty modeling for robust control : a link to identification. *Computers & Chemical Engineering*, 23(8) :987–1003, August 1999.

[59] J. V. Ryan. Study of gysum plasters exposed to fire. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 66C (4) :373–387, 1962.

[60] H. Sabeur and F. Meftah. Dehydration creep of concrete at high temperatures. *Materials and Structures*, 41(1) :17–30, 2008.

[61] S. Sakji. *Modélisation probabiliste et validation expérimentale du transfert thermique et du comportement thermomécanique avec endommagement d'une plaque multicouche carton-plâtre-carton soumise au feu.* PhD thesis, Université de Marne-La-Vallée, 2006.

[62] S. Sakji, C. Soize, and J. -V Heck. Probabilistic uncertainty modeling for thermomechanical analysis of plasterboard submitted to fire load. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 134(10) :1611–1618, 2008.

[63] S. Sakji, C. Soize, and J. -V Heck. Computational stochastic heat transfer with model uncertainties in a plasterboard submitted to fire load an experimental validation. *Fire and Materials*, 33(3) :109–127, 2009.

[64] G. I. Schueller. Computational methods in stochastic mechanics and reliability analysis. *Special Issue of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16) :1251–1795, 2005.

[65] G. I. Schueller. Uncertainties in structural mechanics and analysis - computational methods. *Special Issue of Computer and Structures*, 83(14) :1031–1150, 2005.

[66] G. I. Schueller and H. J. Pradlwarter. Uncertainty analysis of complex structural systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(6-7) :881–913, 2009.

[67] P. Seul-Hyun, L. M. Samuel, P. B. Dale, and M. Tensei. Determining thermal properties of gypsum board at elevated temperatures. *Fire and materials*, page DOI : 10.1002/fam.1017, 2009.

[68] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell Systel Technical Journal.*, 27 :379–423, 623–656, 1948.

[69] M. Shinozuka. Structural response variability. *Journal of engineering mechanics*, 113(6) :825–842, 1987.

[70] M. Shinozuka and C. J. Astill. Random eigenvalue problems in structural analysis. *AIAA Journal*, 10 :456–462, 1972.

[71] K. Shojaei, A. M. Shahri, and A. Tarakameh. Adaptive feedback linearizing control of nonholonomic wheeled mobile robots in presence of parametric and nonparametric uncertainties. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 27(1) :194–204, February 2011.

[72] C. I. Smith, B. R. Kirby, D. G. Lapwood, K. J. Cole, A. P. Cunningham, and R. R. Preston. The reinstatement of fire damaged steel framed structures. *Fire Safety Journal*, 4(1) :21–62, August 1981.

[73] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3) :277–294, 2000.

[74] C. Soize. Probabilités et modélisation des incertitudes, éléments de base et concepts fondamentaux, 2003.

[75] M. A. Sultan. A model for predicting heat transfer through noninsulated unloaded steel-stud gypsum board wall assemblies exposed to fire. *Fire Technology*, 32(3) :239–259, 1996.

[76] Y. Telue and M. Mahendran. Behaviour of cold-formed steel wall frames lined with plasterboard. *Journal of Constructional Steel Research*, 57(4) :435–452, April 2001.

[77] Y. Telue and M. Mahendran. Behaviour and design of cold-formed steel wall frames lined with plasterboard on both sides. *Engineering Structures*, 26(5) :567–579, April 2004.

[78] G. Thomas. Thermal properties of gypsum plasterboard at high temperatues. *Fire and Materials*, 26 :37–45, 2002.

[79] G. Villarini, F. Serinaldi, and W. F. Krajewski. Modeling radar-rainfall estimation uncertainties using parametric and non-parametric approaches. *Advances in Water Resources*, 31(12) :1674–1686, December 2008.

[80] D. Xiu and S. J. Sherwin. Parametric uncertainty analysis of pulse wave propagation in a model of a human arterial network. *Journal of Computational Physics*, 226(2) :1385–1407, October 2007.

[81] S. A. Young and P. Clancy. Structural modelling of light-timber framed walls in fire. *Fire Safety Journal*, 36(3) :241–268, April 2001.