



HAL
open science

Approche probabiliste de la durée de vie des structures sollicités en fatigue thermique

Zakoua Guédé

► **To cite this version:**

Zakoua Guédé. Approche probabiliste de la durée de vie des structures sollicités en fatigue thermique. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2005. Français. NNT : 2005CLF21571 . tel-00665715

HAL Id: tel-00665715

<https://theses.hal.science/tel-00665715>

Submitted on 2 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nd'ordre : D. U. 1571
E D S P I C : 318

Université BLAISE PASCAL - Clermont II

École Doctorale
Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

Thèse

présentée par

Zakoua GUÉDÉ
Ingénieur IFMA

pour obtenir le grade de

Docteur d'Université
(Spécialité : Génie Mécanique)

**Approche probabiliste de la durée de vie des
structures sollicitées en fatigue thermique**

Soutenue publiquement le 8 Juin 2005 devant le jury :

Madame	Sylvie POMMIER	Rapporteur
Messieurs	Stéphane ANDRIEUX	Rapporteur
	Maurice LEMAIRE	Directeur de thèse
	Jean-Louis ROBERT	Président du jury
	Bruno SUDRET	Co-directeur de thèse

Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI),
Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée.
Département Matériaux et Mécanique des Composants (MMC),
Électricité de France - Recherche & Développement.

*A ma grand mère Juliette,
elle qui a su donner à ses enfants
la force d'aller de l'avant.*

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite remercier Monsieur Maurice LEMAIRE, Professeur à l'IFMA et Directeur du LaMI, pour m'avoir fait l'honneur de diriger mes travaux de thèse. Je suis particulièrement sensible à la confiance qu'il m'a accordée durant ces travaux. Ses conseils et son appui m'ont été d'une aide précieuse. J'en profite, pour le remercier également, lui qui a été mon professeur en école d'ingénieur, pour ses enseignements et son soutien tout au long de ma formation. Qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Monsieur Bruno SUDRET, Ingénieur de recherche à EDF, qui m'a encadré au cours de cette thèse. Son enthousiasme a été pour moi un moteur et ses conseils avisés ont grandement contribué à faire avancer mes travaux. Je souhaite également lui exprimer ma profonde gratitude pour sa grande disponibilité et son soutien permanent dans ce travail. J'ai pour lui une grande estime et un profond respect.

Je suis profondément reconnaissant à Madame Sylvie POMMIER, Professeur à l'ENS Cachan, et à Monsieur Stéphane ANDRIEUX, conseiller scientifique à EDF, d'avoir accepté d'exercer la fonction de rapporteur de ma thèse. Leurs appréciations constituent pour moi un tremplin pour l'amélioration de mes travaux.

J'adresse un remerciement particulier à Monsieur Jean-Louis ROBERT, Professeur à l'université Blaise Pascal, pour m'avoir si bien éclairé sur le domaine de la fatigue des matériaux et pour être intervenu à maintes reprises dans la correction de mon manuscrit. Sa générosité, sa disponibilité et surtout sa grande rigueur scientifique ont certainement contribué à la qualité du travail réalisé. Je lui exprime également ma reconnaissance pour avoir accepté de présider le jury de ma thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère gratitude.

Je tiens également à remercier Monsieur Michel FOGLI, professeur au CUST de Clermont-Ferrand, pour m'avoir aidé à mieux maîtriser une notion aussi complexe que celle de processus aléatoire. Sa contribution a été d'un apport fructueux. Qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance.

J'exprime aussi toute ma sympathie à tous les membres de l'équipe du LaMI, qui ont particulièrement contribué aux bonnes conditions dans lesquelles j'ai effectué mes travaux. Je leur souhaite bien de bonnes choses.

Enfin, j'ai une pensée particulière pour ma mère Marie-Thérèse, qui m'a soutenu tout au long de ces années, et sans qui je n'aurais pas pu aller au bout de ce projet. Je n'ai pas

de mot pour te dire à quel point je te remercie. Merci également à mon père Patrice et à tous les membres de ma famille, en particuliers à mes petites soeurs (Nadine, Rachelle, Marie-Louise et Colombe) pour leur soutien malgré la distance.

Résumé

Le comportement en fatigue thermique est extrêmement marqué par de nombreuses incertitudes. Ces incertitudes proviennent du caractère aléatoire des variables d'entrée ou du manque de connaissance sur le phénomène physique. L'industrie nucléaire, dont certains composants sont soumis à des chargements thermiques, est particulièrement concernée par ce phénomène. Le code de dimensionnement des composants du nucléaire en fatigue thermique prend en compte les incertitudes en introduisant des marges de sécurité empiriques de sorte que le dimensionnement soit rendu conservatif. Toutefois, cette démarche ne permet pas de chiffrer le risque lié aux choix effectués. Il est donc intéressant d'introduire un cadre probabiliste global du dimensionnement en fatigue thermique. Ceci requiert :

- de caractériser les lois probabilistes des différentes variables aléatoires intervenant dans la modélisation du comportement en fatigue ;
- d'intégrer ces variables aléatoires dans la procédure de dimensionnement pour estimer la durée de vie aléatoire en fatigue de la structure considérée.

L'objet est de calculer la probabilité de durée de vie en fatigue thermique d'une structure et le poids des différentes variables aléatoires dans la fiabilité.

L'approche probabiliste du dimensionnement en fatigue thermique proposée est basée sur le principe du couplage mécano-fiabiliste. Deux types de couplage sont proposés :

- un couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel, où le chargement est représenté par un historique de température ;
- un couplage mécano-fiabiliste dans le domaine fréquentiel, où le chargement est représenté par sa densité spectrale de puissance.

Ces méthodes sont appliquées à l'exemple d'un élément de tuyauterie soumis à un gradient de température dû à la circulation d'un fluide. Les résultats montrent qu'il est possible de mener complètement une analyse de fiabilité en fatigue thermique. Ils mettent en évidence que la dispersion des données d'essais de fatigue et le coefficient d'échange thermique entre le fluide et la structure sont les variables les plus importantes dans la fiabilité.

Abstract

Material behavior under thermal fatigue is extremely affected by numerous uncertainties. These uncertainties are due to random nature of input variables and lack of knowledge on thermal fatigue. This phenomenon concerns in particular the nuclear industry, where the structural components are subjected to thermal loading. The current nuclear design code for thermal fatigue takes into account the uncertainties by applying empirical safety margins in order to make the design conservative. This approach does not allow for a quantification of the associated risk yet. It is therefore interesting to introduce a global probabilistic framework as an alternative to the current thermal fatigue design code. This requires :

- to define the probability density function of the random variables involved in thermal fatigue model,
- to incorporate these random variables in the design procedure to compute the random life time of the structure under consideration.

The objective is to compute the lifetime probability and the effects of each uncertainty on the reliability of the structure. The proposed probabilistic approach of thermal fatigue design is based on the theory and methods of structural reliability. Two kinds of approaches are defined :

- a reliability analysis in the time domain, where the loading is described by a thermal time history,
- a reliability analysis in the frequency domain, where the loading is described by its power spectral density function.

The above methods are applied on an example of pipe submitted to thermal loading due to water flow. The results show that it is possible to perform a complete reliability analysis to assess failure probability. They show also that scatter of fatigue data and the heat-transfer coefficient are the most important variables in thermal fatigue reliability.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	Problématique	1
1.3	Objectif et enjeux	2
1.4	Organisation du mémoire	3
2	Dimensionnement déterministe en fatigue	5
2.1	Introduction	5
2.1.1	Revue historique	5
2.1.2	Principes généraux	6
2.2	Démarche générale	6
2.3	Modèle d'action	7
2.4	Le modèle de résistance en fatigue	8
2.4.1	Approche basée sur la contrainte	8
2.4.2	Approche basée sur la déformation locale	10
2.4.3	Courbe moyenne de fatigue	11
2.4.4	Marge de sûreté	12
2.4.5	Effet de la contrainte moyenne	13
2.5	Méthodes d'analyse en fatigue sous sollicitation multiaxiale	14
2.5.1	Cycle de contrainte multiaxiale	15
2.5.2	Critère de fatigue multiaxial	18
2.5.3	Méthode d'analyse en fatigue multiaxiale dans le code RCCM	20
2.5.4	Critère de Dang Van	22
2.6	Méthode de comptage Rainflow	23
2.6.1	Principe	24
2.6.2	Algorithme utilisé	25
2.7	Loi d'endommagement de Miner	25
2.8	Application à un élément de tuyauterie	27
2.8.1	Présentation de l'exemple	27
2.8.2	Modèle d'action	27
2.8.3	Loi de comportement	28
2.8.4	Résistance en fatigue du matériau	28
2.8.5	Comptage des cycles par la méthode Rainflow	28
2.8.6	Calcul du dommage cumulé et durée de vie de la structure	29
2.9	Conclusion	29

3	Sources d'incertitudes	31
3.1	Introduction	31
3.2	Sources d'incertitudes	31
3.2.1	Variations du chargement	31
3.2.2	Variabilité des paramètres mécaniques de la structure	33
3.2.3	Résistance à la fatigue des éprouvettes testées	33
3.2.4	Incertainces sur le passage de l'éprouvette à la structure réelle	34
3.2.5	Estimation des paramètres	36
3.2.6	Erreurs de modélisation	36
3.3	Expression du dommage aléatoire	37
3.3.1	Approche continue	37
3.3.2	Approche discrète	38
3.4	Conclusion	38
4	Résistance aléatoire à la fatigue	41
4.1	Introduction	41
4.2	Principe de base du traitement statistique des données de fatigue	41
4.3	Hypothèses sur les données	43
4.3.1	Modélisation de l'espérance	43
4.3.2	Modélisation des écarts résiduels	44
4.4	Méthodes d'estimation des paramètres du modèle	45
4.4.1	Méthode classique des moindres carrés	45
4.4.2	Méthode des moindres carrés pondérés	45
4.4.3	Méthode du maximum de vraisemblance	45
4.5	Vérification des hypothèses	46
4.5.1	Test de normalité	46
4.5.2	Mesure de l'ajustement	47
4.6	Traitement statistique des données de fatigue	48
4.6.1	Description des données disponibles	48
4.6.2	Estimation des variations de l'écart-type de $\ln(N)$ en fonction de S_a	50
4.6.3	Résultats numériques	53
4.6.4	Influence du type de régression	60
4.6.5	Influence de la température	60
4.6.6	Conclusion	62
4.7	Fiabilité du modèle déterministe de résistance à la fatigue	62
4.7.1	Durée de vie déterministe	63
4.7.2	Durée de vie aléatoire	63
4.7.3	Evaluation de la fiabilité du dimensionnement déterministe	65
4.8	Conclusion	66
5	Méthodes d'analyse de fiabilité	69
5.1	Introduction	69
5.2	Principe	69
5.3	Méthode de fiabilité [Lem05]	70
5.3.1	Transformation isoprobabiliste	71
5.3.2	Recherche du point de conception	72

5.3.3	Méthode <i>FORM</i>	75
5.3.4	Méthode <i>SORM</i>	76
5.3.5	Tirages d'importance	79
5.4	Produits de l'analyse de fiabilité	81
5.4.1	Probabilité de défaillance et indice de fiabilité	81
5.4.2	Facteurs d'importance	82
5.5	Conclusion	83
6	Analyse de fiabilité en fatigue thermique	85
6.1	Introduction	85
6.2	Problématique	85
6.3	Couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel	86
6.4	Couplage mécano-fiabiliste dans le domaine fréquentiel	88
6.4.1	Détermination de la DSP du processus de contrainte équivalente	89
6.4.2	Méthode spectrale d'estimation de la distribution des amplitudes de cycles	90
6.4.3	Expression du dommage	95
6.5	Difficultés rencontrées	96
6.6	Conclusion	98
7	Application	99
7.1	Présentation du problème	99
7.2	Modélisation du chargement thermique	100
7.3	Caractérisation probabiliste de la résistance en fatigue	101
7.4	Description des variables aléatoires d'entrée	102
7.5	Modèle mécanique	102
7.5.1	Dans le domaine temporel	104
7.5.2	Dans le domaine fréquentiel - fonction de transfert	104
7.6	Définition des différents cas d'étude	106
7.7	Dommages moyens	106
7.8	Résultats de l'analyse de fiabilité	108
7.8.1	Cas d'étude n°1	110
7.8.2	Cas d'étude n°2	112
7.8.3	Cas d'étude n°3	114
7.8.4	Cas d'étude n°4	116
7.8.5	Cas d'étude n°5	118
7.8.6	Cas d'étude n°6	120
7.8.7	Cas d'étude n°7	122
7.8.8	Cas d'étude n°8	124
7.9	Discussions des résultats	126
7.9.1	Méthodes de fiabilité utilisées	126
7.9.2	Couplage temporel <i>vs.</i> couplage fréquentiel	126
7.9.3	Facteurs d'importance et élasticités	127
7.10	Conclusion	128
8	Conclusion	131

A	Notations	141
A.1	Vecteurs et matrices	141
A.2	Opérateurs	141
A.3	Abréviations	141
A.4	Variables et fonctions	142
B	Méthodes de régression	145
B.1	Méthode des moindres carrés pondérés	145
B.1.1	Estimation des paramètres	145
B.1.2	Matrice de covariance du vecteur des estimateurs	146
B.1.3	Région de confiance des paramètres	147
B.2	Méthode classique des moindres carrés	147
B.3	Méthode du maximum de vraisemblance	148
B.3.1	Estimation des paramètres	148
B.3.2	Matrice de covariance du vecteur des estimateurs	148
B.3.3	Région de confiance des paramètres	149
C	Notions d'analyse spectrale de processus aléatoires	151
C.1	Définitions	151
C.2	Propriétés statistiques des signaux aléatoires	151
C.3	Algorithme de simulation de trajectoires d'un processus à partir de sa DSP	153
C.3.1	Discrétisation des domaines temporel et fréquentiel	153
C.3.2	Formule de simulation numérique	154
C.4	Transformation linéaire de processus aléatoire	155
D	Loi de comportement	157

Table des figures

2.1	<i>Démarche générale du dimensionnement déterministe en fatigue thermique.</i>	7
2.2	<i>Distribution des contraintes suivant trois modes de sollicitations simples (a) la flexion ; (b) la traction ; (c) la torsion.</i>	9
2.3	<i>Image du critère de Tresca dans le plan $\sigma_3 = 0$.</i>	10
2.4	<i>Comparaison de la courbe contrainte réelle-déformation et de la courbe contrainte conventionnelle-déformation pour les matériaux ductiles.</i>	10
2.5	<i>Représentation schématique du modèle de Langer.</i>	12
2.6	<i>Allure de la courbe normalisée de fatigue.</i>	12
2.7	<i>Limite élastique S_y et résistance à la rupture S_u du matériau.</i>	14
2.8	<i>Diagramme de Goodman modifié pour un nombre de cycles à la rupture donné.</i>	14
2.9	<i>Ajustement de la courbe de fatigue pour la prise en compte de l'effet maximum de la contrainte moyenne.</i>	15
2.10	<i>Cycle de contrainte multiaxiale.</i>	16
2.11	<i>Types de contraintes multiaxiales (a) proportionnelles ; (b) non proportionnelles.</i>	16
2.12	<i>Cycle multiaxial dans le cas de contraintes non proportionnelles.</i>	17
2.13	<i>Illustration de la différence entre le nombre de cycles extraits de la contrainte équivalente et le nombre réel de cycles multiaxiaux.</i>	18
2.14	<i>Etat de contrainte constant tournant autour de la matière.</i>	21
2.15	<i>Composantes normale et tangentielle des contraintes sur le plan physique de normale \mathbf{n}.</i>	22
2.16	<i>Partie moyenne τ_{nm} et alternée $\tau_{na}(t)$ du vecteur contrainte tangentielle $\tau_{\mathbf{n}}(t)$ sur le plan physique de normale \mathbf{n}.</i>	23
2.17	<i>Etat moyen du tenseur déviateur S_{ijm} et tenseur déviateur alterné $S_{ija}(t)$.</i>	24
2.18	<i>Illustration des règles du comptage Rainflow.</i>	24
2.19	<i>Traduction, dans l'espace contrainte-déformation, de l'identification d'un cycle par le comptage Rainflow.</i>	25
2.20	<i>Fraction de durée de vie associée à une amplitude donnée d'un cycle de contrainte.</i>	26
2.21	<i>Blocs de cycles de contrainte de même amplitude.</i>	27
2.22	<i>Schématization d'un élément de tuyauterie.</i>	27
2.23	<i>Séquence des températures du fluide.</i>	29
3.1	<i>Schématization d'un processus aléatoire.</i>	32
4.1	<i>Schéma de la méthode de régression.</i>	42

4.2	<i>Données de fatigue à température ambiante : (a) données initiales ; (b) données regroupées en classes.</i>	49
4.3	<i>Données de fatigue à température dans l'intervalle [400 °C; 550 °C] : (a) données initiales ; (b) données regroupées en classes.</i>	49
4.4	<i>Données de fatigue à température dans l'intervalle [550 °C; 650 °C] : (a) données initiales ; (b) données regroupées en classes.</i>	50
4.5	<i>Variation de l'écart-type de $\ln(N)$ en fonction de S : (a) données à température ambiante ; (b) données à température dans l'intervalle [400 °C; 550 °C] ; (c) données à température dans l'intervalle [550 °C; 650 °C].</i>	51
4.6	<i>Relation entre écart-type et moyenne empiriques des observations : (a) données à température ambiante ; (b) données à température dans [400 °C; 550 °C] ; (c) données à température dans [550 °C; 650 °C].</i>	52
4.7	<i>Résultats de la régression sur les données à température ambiante.</i>	54
4.8	<i>Test de normalité des résidus de variance homogène (données à température ambiante) : (a) droite de Henry ; (b) fonction de répartition empirique.</i>	55
4.9	<i>Résultats de la régression sur les données à température dans l'intervalle [400 °C; 550 °C].</i>	56
4.10	<i>Test de normalité des résidus de variance homogène (données à température dans l'intervalle [400 °C; 550 °C]) : (a) droite de Henry ; (b) fonction de répartition empirique.</i>	57
4.11	<i>Résultats de la régression sur les données à température dans l'intervalle [550 °C; 650 °C].</i>	58
4.12	<i>Test de normalité des résidus de variance homogène (données à température dans l'intervalle [550 °C; 650 °C]) : (a) droite de Henry ; (b) fonction de répartition empirique.</i>	59
4.13	<i>Influence de la température lorsque la méthode classique des moindres carrés est appliquée.</i>	61
4.14	<i>Influence de la température lorsque la méthode des moindres carrés pondérés est appliquée.</i>	61
4.15	<i>Influence de la température lorsque la méthode du maximum de vraisemblance est appliquée.</i>	62
4.16	<i>Moyenne et coefficient de variation de la durée de vie de la structure soumise à un chargement cyclique d'amplitude constante - (Hypothèse H1).</i>	64
4.17	<i>Moyenne et coefficient de variation de la durée de vie de la structure soumise à un chargement cyclique d'amplitude constante - (Hypothèse H2).</i>	64
4.18	<i>Moyenne et coefficient de variation de la durée de vie de la structure soumise à un chargement cyclique d'amplitude constante - (Hypothèse H3).</i>	65
4.19	<i>Rapport en fonction de S de la moyenne de la durée de vie aléatoire sur la durée de vie déterministe.</i>	66
4.20	<i>Fiabilité du dimensionnement déterministe par rapport aux incertitudes sur les données de fatigue sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3).</i>	67
5.1	<i>Couplage mécano-fiabiliste.</i>	70
5.2	<i>Schématization de l'algorithme de couplage direct (voir [Lem05]).</i>	71
5.3	<i>Exemple de pas de descente entraînant le saut du minimum.</i>	74
5.4	<i>Illustration des itérations suivant la méthode de Newton.</i>	75

5.5	<i>Illustration dans l'espace standard de l'approximation FORM.</i>	76
5.6	<i>Illustration dans l'espace standard de l'approximation FORM.</i>	76
5.7	<i>Illustration de l'effet du paramètre d'échelle β.</i>	78
5.8	<i>Illustration de la simulation d'importance.</i>	80
5.9	<i>Exemple de domaines de défaillance différents ayant le même indice de fiabilité de Hasofer-Lind.</i>	81
5.10	<i>Cosinus directeurs du vecteur normal à la surface de défaillance au point de conception.</i>	83
6.1	<i>Modèle mécanique dans le domaine temporel.</i>	87
6.2	<i>Modèle mécanique dans le domaine fréquentiel.</i>	88
6.3	<i>Système linéaire à une entrée et une sortie.</i>	89
6.4	<i>Exemple de processus aléatoire à bande étroite.</i>	91
6.5	<i>Exemple de processus aléatoire à bande large.</i>	91
6.6	<i>Modèle de Rayleigh - distribution des amplitudes de contrainte normalisées pour un processus, (a) à bande étroite, (b) à bande large.</i>	92
6.7	<i>Modèle de Zhao et Baker - distribution des amplitudes de contrainte normalisées pour un processus, (a) à bande étroite, (b) à bande large.</i>	94
6.8	<i>Modèle de Dirlík - distribution des amplitudes de contrainte normalisées pour un processus, (a) à bande étroite, (b) à bande large.</i>	95
6.9	<i>Fonction Heaviside régularisée.</i>	96
6.10	<i>Nombre de cycles admissibles à amplitude constante, $N^{\text{struct}}(S)$, régularisé.</i>	97
7.1	<i>Chargement thermique θ_1 ($f_c = 20$ Hz).</i>	100
7.2	<i>Chargement thermique θ_2 ($f_c = 5$ Hz).</i>	100
7.3	<i>Schématization du modèle à une dimension du tuyau.</i>	103
7.4	<i>Fonction de transfert du modèle mécanique.</i>	106
7.5	<i>Comparaison entre l'histogramme des amplitudes de cycles Rainflow et leur distribution suivant la formule de Dirlík : (a) cas de charge θ_1; (b) cas de charge θ_2.</i>	108
7.6	<i>Cas n°1 : poids des variables dans la fiabilité - cas de charge θ_1 - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.</i>	110
7.7	<i>Cas n°1 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.</i>	111
7.8	<i>Cas n°2 : poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.</i>	112
7.9	<i>Cas n°2 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.</i>	113
7.10	<i>Cas n°3 : poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.</i>	114
7.11	<i>Cas n°3 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.</i>	115
7.12	<i>Cas n°4 : poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.</i>	116
7.13	<i>Cas n°4 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.</i>	117

7.14	Cas n°5 : poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.	118
7.15	Cas n°5 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.	119
7.16	Cas n°6 : poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.	120
7.17	Cas n°6 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.	121
7.18	Cas n°7 : poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.	122
7.19	Cas n°7 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.	123
7.20	Cas n°8 : poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.	124
7.21	Cas n°8 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.	125
C.1	Largeur de bande d'un processus aléatoire : (a) processus à bande étroite ; (b) processus à bande large.	152
D.1	Elément de tuyauterie.	157

Liste des tableaux

2.1	<i>Données géométriques et thermomécaniques du tuyau.</i>	28
3.1	<i>Considération des différents effets selon divers auteurs [Col98].</i>	35
3.2	<i>Variabilité de l'indice de Miner suivant le caractère large ou étroit de la bande du processus de chargement aléatoire [Mah99].</i>	36
4.1	<i>Données réparties en classes de température.</i>	48
4.2	<i>Résultats numériques du traitement statistique des données à température ambiante.</i>	53
4.3	<i>Résultats des tests de Kolmogorov appliqués aux données à température ambiante regroupées en classes.</i>	54
4.4	<i>Résultats numériques du traitement statistique des données à des températures dans l'intervalle [400°C;550°C].</i>	56
4.5	<i>Résultats des tests de Kolmogorov appliqués aux données, à des températures dans l'intervalle [400°C;550°C], regroupées en classes.</i>	57
4.6	<i>Résultats numériques du traitement statistique des données à des températures dans l'intervalle [550°C;650°C].</i>	58
4.7	<i>Résultats des tests de Kolmogorov appliqués aux données à des températures dans l'intervalle [550°C;650°C], regroupées en classes.</i>	59
4.8	<i>Résumé des résultats.</i>	60
5.1	<i>Expressions des facteurs d'importance pour des variables aléatoires indépendantes.</i>	82
7.1	<i>Propriétés des deux cas de charge considérés.</i>	100
7.2	<i>Valeurs des paramètres du modèle de résistance à la fatigue.</i>	101
7.3	<i>Description des variables aléatoires d'entrée à 130°C.</i>	102
7.4	<i>Cas d'étude considérés.</i>	107
7.5	<i>Domage total moyen pour les différents cas de charge.</i>	107
7.6	<i>Cas n°1 : indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_1 - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.</i>	110
7.7	<i>Cas n°2 : indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_1 - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.</i>	112
7.8	<i>Cas n°3 : indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_1 - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.</i>	114
7.9	<i>Cas n°4 : indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_1 - $k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.</i>	116

7.10	Cas n°5 : <i>indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_2</i> - $k = 1$ - <i>couplage dans le domaine temporel.</i>	118
7.11	Cas n°6 : <i>indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_2</i> - $k = 1$ - <i>couplage dans le domaine fréquentiel.</i>	120
7.12	Cas n°7 : <i>indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_2</i> - $k = 4$ - <i>couplage dans le domaine temporel.</i>	122
7.13	Cas n°8 : <i>indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_2</i> - $k = 4$ - <i>couplage dans le domaine fréquentiel.</i>	124
7.14	<i>Comparaison des indices de fiabilité suivant le couplage temporel ou fréquentiel - le numéro du cas d'étude est indiqué en exposant dans chaque cas.</i>	126
7.15	<i>Comparaison des poids dans la fiabilité des variables aléatoires - couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel.</i>	127
7.16	<i>Comparaison des poids dans la fiabilité des variables aléatoires - couplage mécano-fiabiliste dans le domaine fréquentiel.</i>	128

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Si la fatigue des structures soumises à des chargements mécaniques est marquée par de nombreuses incertitudes, la fatigue causée par des chargements d'origine thermique l'est encore plus. Les sollicitations thermiques, qui font intervenir par exemple des phénomènes thermohydrauliques, ont en effet des origines qui demeurent aujourd'hui encore mal connues [Sud04a]. Les méthodes d'évaluation des contraintes thermiques, passant par la phase intermédiaire d'analyse du transitoire thermique, ajoutent des incertitudes supplémentaires à la fatigue thermique [Mer95].

La fatigue thermique est définie par Spera [Spe76] comme la détérioration progressive et éventuellement la fissuration du matériau par l'alternance de réchauffement et de refroidissement au cours de laquelle la dilatation du matériau est partiellement ou complètement bloquée. Les centrales nucléaires, qui génèrent de l'électricité en transférant notamment de l'énergie calorifique, soumettent leurs composants à des fluctuations de chargement d'origine thermique. Certains composants comme les aubes de turbine et les tuyauteries, sont donc susceptibles de connaître un endommagement par fatigue thermique. Il est donc important de prendre en compte ce phénomène dès la conception.

Dans le but de mieux comprendre la fatigue thermique et d'améliorer le dimensionnement suivant ce mode de défaillance, de nombreuses recherches sont actuellement menées dans plusieurs laboratoires et également au département MMC de EDF. Nos travaux ont été effectués au Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI) de l'Université Blaise Pascal et de l'Institut Français de Mécanique Avancée en collaboration avec Electricité de France.

1.2 Problématique

La description du comportement en fatigue des structures est complexe notamment pour les raisons suivantes :

- La fatigue est décrite suivant deux phases principales distinctes, à savoir, l'amorçage d'une fissure et sa propagation. Mais la limite entre ces deux phases n'est pas clairement définie et dépend de la taille de la structure considérée et de la nature des chargements appliqués [Mer95]. De plus, les mécanismes associés à ces deux étapes

de la fatigue ne sont pas uniques, mais dépendent des cas rencontrés.

- Le comportement en fatigue est influencé de manière significative par de nombreux facteurs. Les zones d'irrégularité géométrique amplifient les niveaux de contrainte. La température altère les propriétés du matériaux. L'état de surface affecte la répartition des microfissures à la surface de la pièce. L'environnement, de par sa chimie, peu accélérer l'endommagement par fatigue des structures.
- L'évolution du chargement est souvent complexe. Elle peut être aléatoire et instationnaire.
- Les données d'essais de fatigue disponibles présentent une forte dispersion même pour des expériences bien contrôlées. Ceci montre que le phénomène de fatigue relève de facteurs aléatoires.
- Il manque encore beaucoup de données sur le comportement en fatigue des matériaux.

Ainsi, le comportement en fatigue des structures est affecté par de nombreuses sources d'incertitudes. De plus, dans le cas particulier de la fatigue thermique, des incertitudes supplémentaires sont introduites. Dans la démarche adoptée actuellement dans l'industrie nucléaire pour dimensionner les structures en fatigue thermique [ASM69], les incertitudes sont prises en compte individuellement en appliquant des marges de sécurité à chacun des paramètres intervenant dans la modélisation du comportement en fatigue. Le choix des valeurs de ces marges repose sur des considérations empiriques et sur le jugement d'experts. Il vise à couvrir les incertitudes sur les variables de sorte que le dimensionnement soit rendu conservatif. Par exemple, la grande dispersion sur les données d'essais de fatigue est traitée en appliquant à la courbe médiane de fatigue des facteurs qui couvrent 95% des éprouvettes rompues. Même si les marges de sécurité ont un contenu statistique, elles ne renseignent pas sur le risque de défaillance en fatigue lié aux choix effectués. Autrement dit, elles permettent de juger qualitativement de la sûreté du dimensionnement en se basant sur l'expérience et la connaissance des phénomènes mis en jeu, mais elles ne chiffrent pas la fiabilité du dimensionnement retenu. Pour ces raisons, il paraît intéressant d'introduire un cadre probabiliste global au dimensionnement des structures en fatigue thermique. Cela consiste à intégrer, dans la description du comportement en fatigue thermique des structures, les incertitudes sur les différentes variables en les représentant par des variables aléatoires. On peut espérer ainsi évaluer le risque lié au scénario de défaillance en fatigue.

1.3 Objectif et enjeux

L'objectif des travaux présentés dans ce mémoire est de développer une approche probabiliste du dimensionnement en fatigue thermique des structures intégrant toutes les incertitudes qui affectent le comportement de la structure considérée. Cette approche doit s'appuyer sur les modèles et les règles adoptés dans le code de dimensionnement des composants des centrales nucléaires en les étendant en contexte aléatoire.

La fatigue est aujourd'hui clairement considérée comme un phénomène soumis à des facteurs aléatoires. Par conséquent, aborder le dimensionnement en fatigue thermique par une approche probabiliste apparaît cohérent. De cette manière on est capable de quantifier les incertitudes sur les durées de vie des structures par le calcul par exemple de moyennes et d'écart-types, mais aussi de chiffrer le risque lié au dimensionnement retenu. On peut

ainsi mieux apprécier les marges de sécurité introduites dans la démarche actuelle de dimensionnement. De plus, en introduisant des incertitudes dans la description du comportement en fatigue thermique, il est possible d'en estimer les effets sur la fiabilité. Ceci peut permettre de déterminer les besoins en matière de meilleure connaissance des paramètres les plus influents. Enfin, l'approche probabiliste du dimensionnement permettra d'enrichir le code de dimensionnement en fatigue en lui apportant à terme un contenu probabiliste.

L'approche probabiliste proposée pour dimensionner des structures en fatigue thermique est basée sur le principe du couplage mécano-fiabiliste. Il consiste à coupler un modèle stochastique, contenant la description probabiliste des variables aléatoires du problème, et un modèle mécanique, représenté par la procédure d'évaluation d'une fonction de performance qui décrit l'état défaillant ou non de la structure étudiée. Cela requiert de caractériser les différentes variables aléatoires du problème et d'être capable d'évaluer la fonction de performance pour une réalisation de l'ensemble de ces variables. Il existe aujourd'hui une théorie complète sur le couplage mécano-fiabiliste [Lem04]. Mais cette théorie a été développée principalement pour des problèmes de mécanique aléatoire en statique. Il s'agit ici d'appliquer ces méthodes au problème de la fatigue thermique.

1.4 Organisation du mémoire

Dans le deuxième chapitre, les éléments de base du dimensionnement actuel des structures en fatigue thermique sont présentés. On insiste particulièrement sur la démarche utilisée dans l'industrie nucléaire. Cette démarche est illustrée sur l'exemple d'un élément de tuyauterie soumis à un gradient de température.

Dans le troisième chapitre, les différentes sources d'incertitude affectant le comportement en fatigue sont énumérées. On en explique les origines et on propose des modèles probabilistes pour les décrire. Le dommage par fatigue, qui devient aléatoire du fait de ces incertitudes, est ensuite exprimé suivant deux formulations équivalentes sous certaines hypothèses.

Le quatrième chapitre s'attache particulièrement aux incertitudes sur les données de fatigue dont dépend la caractérisation de la résistance en fatigue. On propose une méthode de caractérisation probabiliste de la résistance en fatigue à partir d'un traitement statistique des données d'essais de fatigue. Les résultats de cette caractérisation sont utilisés pour estimer la fiabilité de la courbe de résistance déterministe par rapport aux incertitudes sur les données de fatigue.

Le cinquième chapitre est consacré à un rappel des notions de base de l'analyse de fiabilité, notamment son principe, les méthodes auxquelles elle fait appel ainsi que les différents résultats qu'elle produit.

Le sixième chapitre montre comment les méthodes d'analyse de fiabilité sont utilisées pour dimensionner les structures en fatigue thermique. Deux approches duales sont proposées : une méthode dans le domaine temporel et une méthode dans le domaine fréquentiel. On explique, en outre, les difficultés rencontrées dans la mise en œuvre de ces méthodes.

Le septième chapitre est destiné à une application de la méthode proposée. On considère l'exemple d'un élément de tuyauterie soumis à un gradient de température pour lequel on mène une analyse de fiabilité complète.

4 INTRODUCTION

Enfin, le dernier chapitre est dédié aux conclusions et aux perspectives des travaux effectués.

Chapitre 2

Dimensionnement déterministe en fatigue

2.1 Introduction

2.1.1 Revue historique

Une brève revue historique de la fatigue donne un horizon général de ce concept et montre comment ont été développées les idées de base qui lui sont associées.

La prise de conscience de la fatigue commence réellement au milieu du dix-neuvième siècle avec l'avènement des chemins de fer dans le centre de l'Europe en pleine révolution industrielle. Plusieurs accidents dramatiques se sont produits sur les voies ferrées dans cette période et, dans de nombreux cas, ils étaient dus à des ruptures par fatigue d'axes, d'attelages et de rails [Sch96]. Même si le terme de fatigue est déjà employé bien avant, c'est Wöhler (1858) [Woh58] qui apporte les bases du dimensionnement en fatigue. Il réalise les premiers essais de fatigue sur des axes de chemins de fer et montre à partir d'un diagramme $S-N$ comment quantifier la résistance en fatigue. Les travaux de Wöhler ont été ensuite étendus à la prise en compte de l'influence de la contrainte moyenne par Gerber puis plus particulièrement par Goodman qui développe une théorie simple sur cette question.

En 1900, avec l'apparition des microscopes optiques, on peut examiner finement le processus d'apparition d'une fissure. Elle commence dès les premiers cycles de sollicitations par la formation de bandes de glissement superficielles qui se multiplient au fur et à mesure de la répétition du chargement, et produisent des bandes persistantes débouchant sur l'apparition de microfissures. En 1924, Gough [Gou24] montre les effets combinés de la flexion et de la torsion en fatigue (fatigue multiaxiale). En 1945, Miner [Min45] formule une loi linéaire de cumul du dommage en fatigue suggérée auparavant par Palmgreen et qui est communément appelée aujourd'hui règle de Palmgreen-Miner. L'étude, dans les années 60, des effets des déformations plastiques sur la fatigue donne de nouvelles orientations aux théories sur la fatigue. Il en résulte en particulier les méthodes basées sur la déformation découvertes par Manson et Coffin [TC59]. Depuis les années 60, ces méthodes sont devenues prépondérantes dans certains domaines industriels. Parallèlement, les bases de la mécanique de la rupture sont posées par Griffith [Gri20] (1920) qui introduit le facteur d'intensité de contrainte. Des développements ultérieurs sont apportés par Paris

[PE63], qui montre que la croissance de la longueur de fissure est bien décrite par le facteur d'intensité de contrainte. Dans les années qui ont suivi, d'autres progrès sont réalisés dans la connaissance du processus de fatigue, notamment en ce qui concerne l'effet de l'environnement. Toutefois, notons que les concepts de base associés au dimensionnement en fatigue ont tous été développés avant les années 70.

2.1.2 Principes généraux

Les définitions de la fatigue des pièces métalliques varient selon les auteurs. Citons Bathias [BB97] qui définit la *fatigue* ou l'*endommagement par fatigue* comme la modification progressive des propriétés du matériau consécutive à l'application de cycles de contrainte, cycles dont la répétition peut conduire à la rupture des pièces constituées de ce matériau. L'intensité des contraintes reste en général nettement inférieure à la limite élastique du matériau, mais c'est à la suite de l'application d'un nombre important de cycles qu'une fissure macroscopique peut être produite et provoquer la ruine d'une structure. Ainsi, le dimensionnement en fatigue des structures ne fait pas intervenir uniquement des charges extrêmes, mais les effets cumulés de l'ensemble du chargement tout au long de la vie de la structure [JJ93]. Le critère de ruine d'une structure n'est pas unique et est lié notamment aux deux grandes étapes du processus de fatigue, l'*amorçage* et la *propagation* [Bol98]. La défaillance en rapport avec l'étape d'*amorçage d'une fissure* se définit comme le temps nécessaire à l'apparition d'une fissure macroscopique. Associée à l'étape de *propagation*, la défaillance survient lorsque la fissure dépasse une longueur limite définie à l'avance [BM90].

Dans notre cas, la méthode de dimensionnement en fatigue est associée à l'étape d'*amorçage* d'une fissure macroscopique. Cette méthode est déterministe et consiste à relier l'historique du chargement à la résistance en fatigue du matériau pour estimer la durée de vie. Pour cela, un ensemble de modèles est défini en fonction du type de chargement considéré, de la modélisation de la résistance en fatigue du matériau et de l'environnement des structures étudiées. Aussi, suivant le type d'industrie, on rencontre une méthode de dimensionnement avec des modèles spécifiques. Dans cette étude, nous nous intéressons plus particulièrement au dimensionnement en fatigue thermique de composants mécaniques des îlots nucléaires. Deux codes sont en général utilisés : le code américain ASME en sa section III [ASM69] et le code français RCCM [Col00].

L'objectif de ce chapitre est de décrire la démarche générale de dimensionnement déterministe des structures soumises à la fatigue, en insistant particulièrement sur la pratique dans l'industrie nucléaire. Cette méthode est ensuite illustrée sur un exemple simple, celui d'un élément de tuyauterie soumis aux variations d'un chargement thermique.

2.2 Démarche générale

La méthode de dimensionnement en fatigue thermique des composants d'un îlot nucléaire comprend les éléments suivants (Figure 2.1) :

- la définition d'un modèle d'action sur une période représentative de l'historique du chargement ;

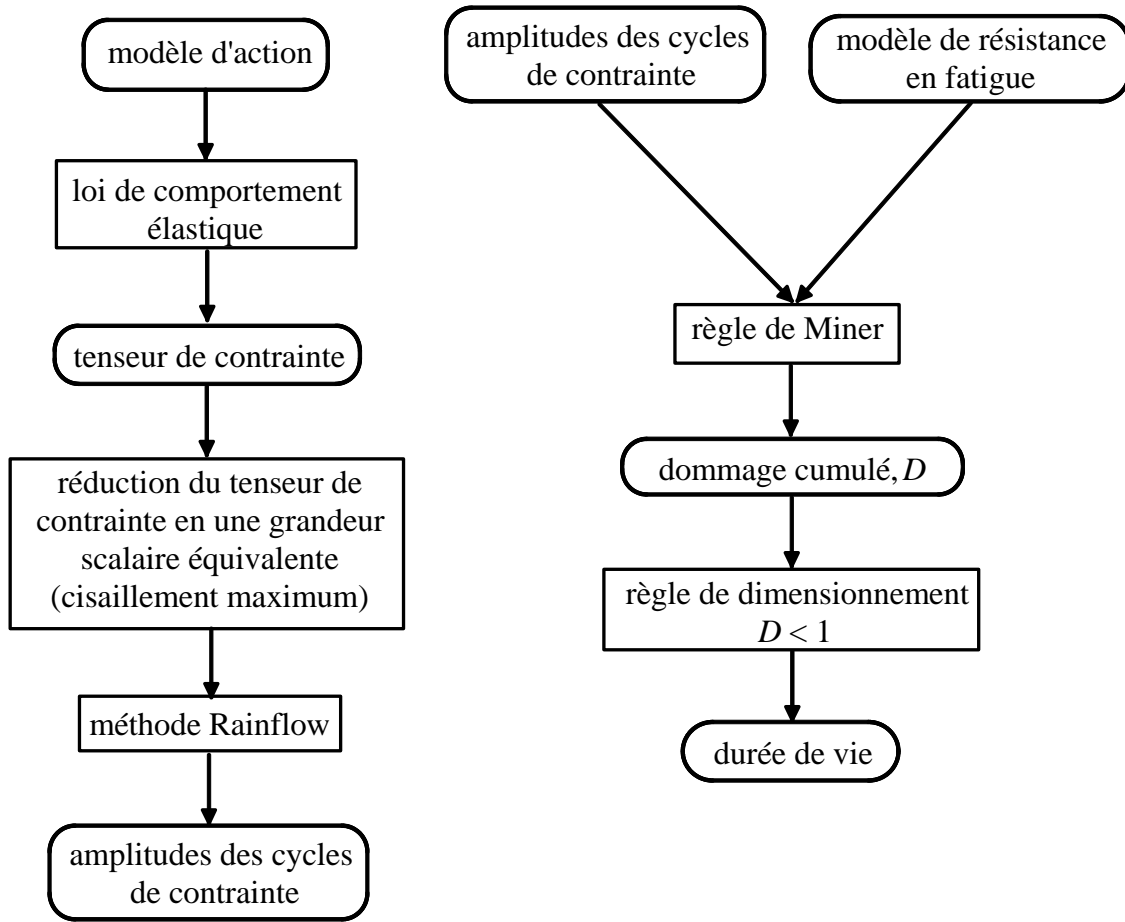


FIG. 2.1 – Démarche générale du dimensionnement déterministe en fatigue thermique.

- le calcul du champ de contrainte sous l’hypothèse d’un comportement élastique linéaire du matériau ;
- l’usage du critère de Tresca (basé sur la théorie du cisaillement maximum) pour réduire le tenseur de contrainte en une grandeur scalaire équivalente ;
- l’extraction des cycles de contrainte par la méthode de comptage Rainflow ;
- la donnée d’un modèle standard de résistance en fatigue du matériau ;
- l’utilisation de la règle de Miner pour estimer le dommage cumulé au cours du chargement.

Les codes de l’industrie nucléaire requièrent le fait que le dommage cumulé en fatigue, dénommé aussi facteur d’usage, n’excède pas l’unité.

2.3 Modèle d’action

L’évolution du chargement au cours du temps est, en général, difficile à prévoir. On a par conséquent recours à des modèles d’actions qui décrivent des scénarios de chargement choisis de manière à être représentatifs du chargement réel ou de chargements plus pénalisants, en terme de dommage en fatigue, que tous les chargements acceptables. Le

tenseur de contrainte résultant dans la structure est ensuite obtenu à l'aide d'une loi de comportement. La norme du nucléaire admet un comportement élastique linéaire du matériau. Les contraintes sont alors évaluées au point où la rupture a le plus de chance de se produire. C'est à partir de l'évolution en fonction du temps des contraintes en ce point que le dimensionnement en fatigue du composant ou de la structure est réalisé.

2.4 Le modèle de résistance en fatigue

Le modèle de résistance en fatigue est défini par une courbe de fatigue qui fournit la durée de vie admissible pour une sollicitation cyclique d'amplitude constante donnée. La mesure de l'amplitude de contrainte de la courbe de référence doit être compatible avec les contraintes calculées par le concepteur dans l'analyse de la structure. La courbe de fatigue est donnée par une *courbe moyenne* à laquelle on applique ensuite une *marge de sûreté* suffisante pour obtenir une mesure sûre de la durée de vie admissible dans les conditions de service de la structure étudiée. La courbe moyenne est la courbe qui ajuste au mieux les données d'essais de fatigue. Elle est, en général, obtenue par des méthodes de régression.

Fondamentalement, il existe deux approches pour modéliser la résistance en fatigue du matériau : l'approche basée sur la contrainte et l'approche basée sur la déformation locale [SFSF00]. Dans l'industrie nucléaire, le modèle de résistance en fatigue est codifié et utilise une approche basée sur la déformation. Les déformations sont ensuite traduites en contraintes en les multipliant par le module d'Young sous l'hypothèse d'un comportement élastique du matériau. Notons que les amplitudes de contrainte ainsi obtenues sont compatibles avec la loi de comportement élastique requise par le code RCCM.

2.4.1 Approche basée sur la contrainte

Cette approche utilise le fait qu'il existe une corrélation entre l'amplitude des cycles de contrainte et le nombre de cycles à la rupture. Elle s'appuie sur l'hypothèse d'un comportement élastique du matériau et ignore donc l'occurrence éventuelle de déformations plastiques. Le niveau de contrainte appliqué est par conséquent faible et produit un nombre de cycles important. Pour cette raison cette approche est plus adaptée au domaine des grands nombres de cycles.

Les essais de fatigue utilisés pour modéliser la résistance en fatigue du matériau sont contrôlés en effort (contrainte imposée). Dans ce cas, le comportement en fatigue des éprouvettes testées peut être sensible à plusieurs facteurs, à savoir, la fréquence des sollicitations, la taille de l'éprouvette, son état de surface et le mode de sollicitation. L'effet de la fréquence des sollicitations est en général négligé pour les métaux. En effet, il est observé qu'entre 1000 et 10000 cycles par minute aucune influence de la fréquence sur le nombre de cycles à la rupture n'est observée [ZT96]. En ce qui concerne l'effet de la taille et de l'état de surface de l'éprouvette, le problème est résolu en utilisant des éprouvettes dont les caractéristiques géométriques sont standardisées. En revanche, le mode de sollicitation a un effet non négligeable et les limites de fatigue varient d'un mode de sollicitation à l'autre. Toutefois, on peut les relier en appliquant des facteurs. Considérons par exemple trois modes de sollicitation simples : la flexion, la traction et la torsion (Figure 2.2). Les

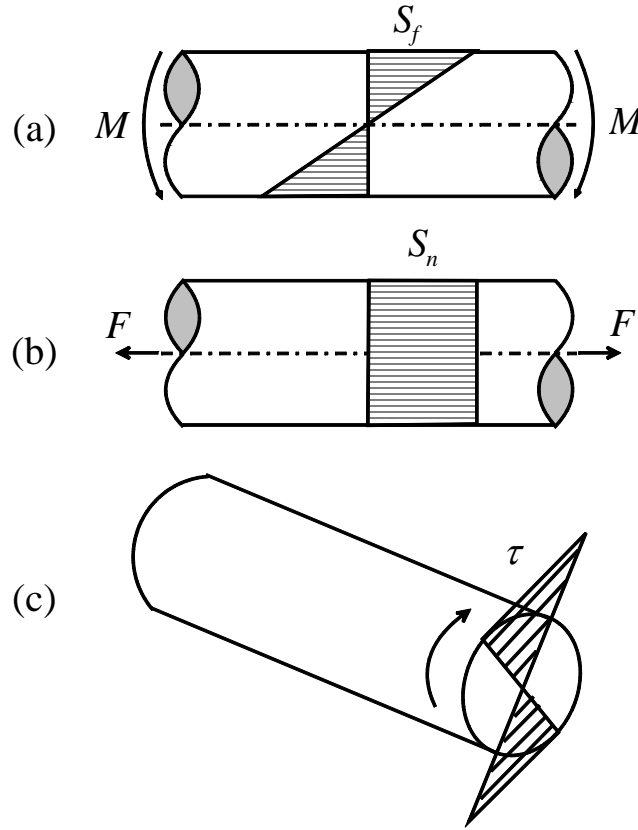


FIG. 2.2 – *Distribution des contraintes suivant trois modes de sollicitations simples (a) la flexion; (b) la traction; (c) la torsion.*

facteurs adoptés pour passer d'un mode de sollicitations à l'autre sont inspirés des relations qui existent entre les limites élastiques (sous charges statiques) associées à ces types de sollicitations. L'expérience montre que le facteur à appliquer à la limite de fatigue en flexion pour obtenir celle en traction varie de 0,8 à 1 pour tout type de métal [ZT96]. En ce qui concerne la relation entre les limites de fatigue de flexion S_f et de torsion τ , il existe deux approches suivant le critère de rupture statique considéré. Si on considère la contrainte équivalente de Von Mises S_{eq} , on a :

$$S_{eq} = \sqrt{0 + 3\tau^2} = \sqrt{3}\tau \quad (2.1)$$

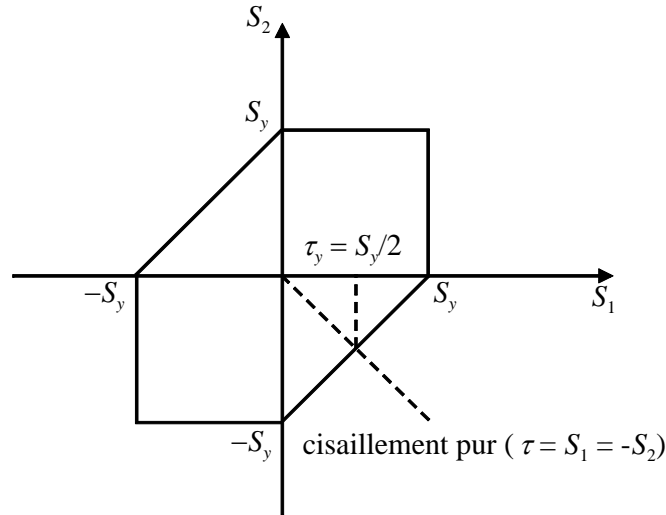
Si on suppose en outre que $S_{eq} = S_f$, on obtient :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}S_f \quad (2.2)$$

Le même raisonnement, utilisant cette fois le critère du cisaillement maximum de Tresca, fournit la relation suivante (Figure 2.3) :

$$\tau = \frac{1}{2}S_f \quad (2.3)$$

L'expérience montre que ces relations sont vérifiées pour la plupart des matériaux ductiles [BFGT99].

FIG. 2.3 – Image du critère de Tresca dans le plan $\sigma_3 = 0$.

2.4.2 Approche basée sur la déformation locale

Dans cette approche, les essais de fatigue sont contrôlés en déformation et le nombre de cycles à rupture est représenté en fonction de l'amplitude des cycles de déformation locale, estimée au point où la rupture a le plus de chance de se produire. Cette approche est adaptée au domaine des faibles nombres de cycles (fatigue oligocyclique) où des déformations plastiques apparaissent. En effet, dans ce cas, l'approche basée sur la contrainte n'est plus adaptée. Deux raisons sont invoquées pour justifier l'approche en déformation.

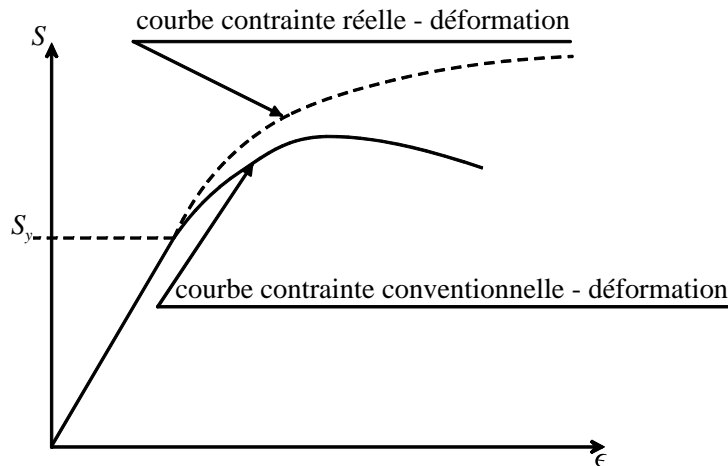


FIG. 2.4 – Comparaison de la courbe contrainte réelle-déformation et de la courbe contrainte conventionnelle-déformation pour les matériaux ductiles.

La première est l'écart entre la contrainte calculée par l'opérateur de l'essai et sa valeur réelle dans le domaine plastique (Figure 2.4). En effet, les essais de fatigue à contrainte imposée sont pilotés en effort. La contrainte n'est donc pas directement accessible à l'opé-

rateur et est obtenue par convention comme le rapport entre l'effort et l'aire de la section de l'éprouvette en supposant cette aire constante, ce qui n'est en général pas vérifié surtout dans le domaine plastique où les déformations sont grandes.

La deuxième raison découle de la modification des propriétés mécaniques du matériau lors de l'application de cycles de chargement qui induisent de la plasticité. Ceci complique considérablement l'évaluation de la contrainte. En effet, la réponse des métaux à un chargement cyclique s'accompagne d'une modification de leurs propriétés mécaniques du fait du durcissement ou de l'adoucissement du matériau. C'est le cas notamment si on considère un écrouissage cinématique du matériau. Aussi est-il plus commode de contrôler les essais de fatigue oligocyclique en déformation plutôt qu'en effort.

2.4.3 Courbe moyenne de fatigue

La courbe moyenne de fatigue est obtenue à partir d'essais de fatigue réalisés à déformation imposée sur des éprouvettes lisses sans entaille à température ambiante. La déformation est ensuite traduite en contrainte en la multipliant par le module d'Young. L'évaluation de la contrainte ainsi obtenue est donc fictive. Elle traduit en réalité une déformation.

Le modèle choisi pour représenter la forme de la courbe moyenne de résistance en fatigue est proposé par Langer [Lan62]. Le principe de ce modèle est d'utiliser des données de fatigue oligocyclique pour évaluer l'intégrité en fatigue de pièces mécaniques sous la condition d'être au-dessous de la température de fluage du matériau considéré. Il est basé sur certaines caractéristiques mécaniques du matériau et fournit une relation entre l'amplitude de déformation totale et le nombre de cycles à la rupture. Il s'appuie sur une propriété établie par Coffin ([Cof54], [TC59]) qui montre que pour la plupart des matériaux à des températures inférieures au domaine de fluage, la relation suivante est vérifiée :

$$\sqrt{N} \epsilon_p = c, \text{ avec } c = \frac{1}{2} \ln \frac{100}{100 - RA} \quad (2.4)$$

où N est le nombre de cycles à la rupture, ϵ_p est la déformation plastique et RA le pourcentage de réduction de surface dans un essai de traction dû à la propagation de micro-fissures, de défauts ou de micro-vides. En décomposant la déformation totale en la somme des déformations plastique et élastique, l'amplitude de contrainte S_a s'exprime par (Figure 2.5) :

$$S_a = \frac{1}{2} E \epsilon_t = \frac{1}{2} E \epsilon_p + \frac{1}{2} E \epsilon_e = \frac{E}{4\sqrt{N}} \ln \frac{100}{100 - RA} + \Delta S, \text{ où } \Delta S = \frac{1}{2} E \epsilon_e \quad (2.5)$$

Ayant noté que ΔS , l'amplitude de contrainte due à la déformation élastique, dépend aussi de N , l'expression (2.5) n'est pas satisfaisante pour représenter la courbe de fatigue. Il est alors suggéré de remplacer ΔS par la limite d'endurance S_D du matériau. Ainsi, le modèle fait tendre l'amplitude de contrainte S_a vers la limite d'endurance S_D lorsque N tend vers l'infini. De plus, avec cette substitution, le modèle reste conservatif [Lan62]. La courbe moyenne de fatigue proposée par Langer prend finalement la forme :

$$S_a = \frac{E}{4\sqrt{N}} \ln \frac{100}{100 - RA} + S_D \quad (2.6)$$

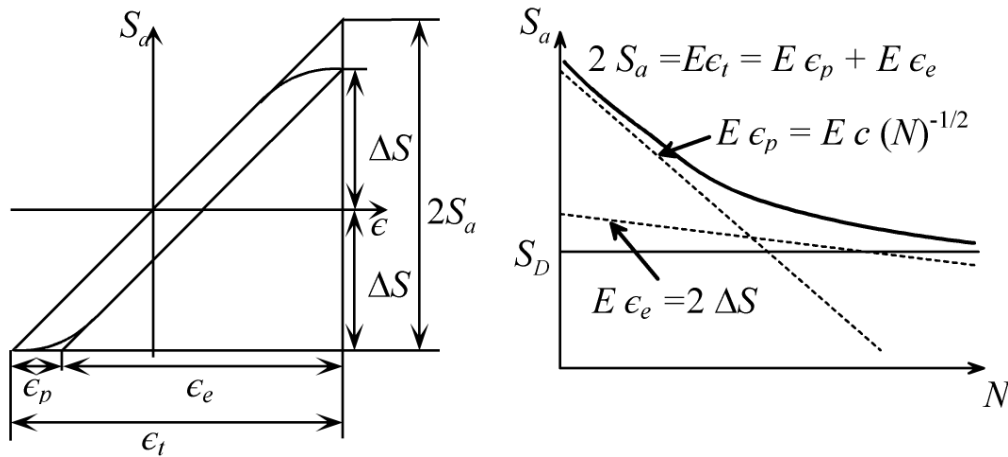


FIG. 2.5 – Représentation schématique du modèle de Langer.

2.4.4 Marge de sûreté

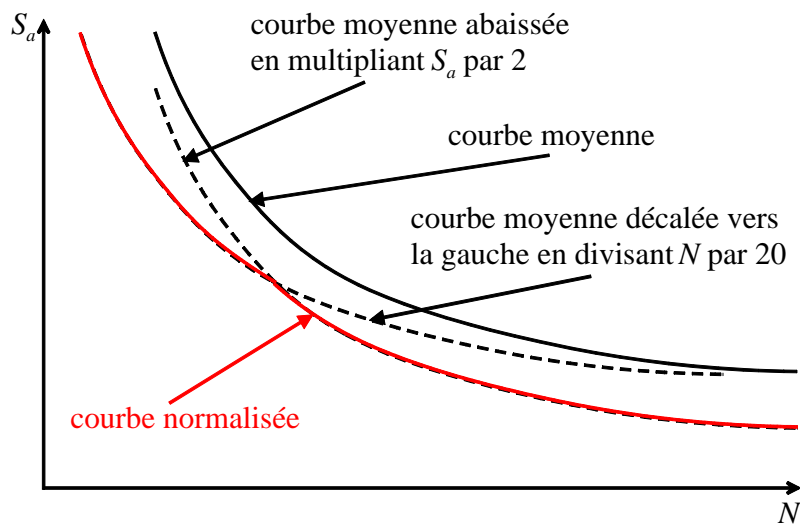


FIG. 2.6 – Allure de la courbe normalisée de fatigue.

La courbe moyenne ne peut pas être utilisée directement pour le dimensionnement en fatigue des structures, lesquelles sont soumises à des conditions plus sévères que les éprouvettes testées en laboratoire. Les éprouvettes se comportent donc mieux en fatigue que les structures réelles [Gra00]. Pour tenir compte de cette différence, des facteurs de réduction de la durée de vie sont appliqués à la courbe moyenne pour obtenir une courbe normalisée requise pour la conception en fatigue des structures réelles. Pour obtenir de façon pratique cette courbe (Figure 2.6), on part du modèle de Langer (Eq. (2.6)) et on prend le minimum [Col00] :

- de la courbe de Langer abaissée d'un facteur 2 sur le niveau de contrainte S_a ;
- de la courbe de Langer “décalée sur la gauche” en divisant par 20 le nombre de

cycles N .

Ces facteurs sont basés sur des expériences et sur le jugement d'expert. Ils sont censés couvrir les effets d'échelle, d'état de surface, de la dispersion des données de fatigue et d'environnement [Col98].

2.4.5 Effet de la contrainte moyenne

L'expérience montre que la présence d'une contrainte moyenne non nulle positive affecte la courbe de fatigue en réduisant la limite d'endurance du matériau. Lorsque l'approche basée sur la déformation locale est employée pour modéliser la résistance à la fatigue, l'effet de la contrainte moyenne apparaît uniquement dans le régime des grands nombres de cycles où le matériau reste dans le domaine élastique. Par contre, dans le domaine oligocyclique, la déformation plastique entraîne, dès les premiers cycles, la relaxation de cette contrainte. En conséquence, la courbe de fatigue doit être ajustée dans le domaine des grands nombres de cycles, où il n'y a pas possibilité de relaxation plastique, pour tenir compte de l'effet de la contrainte moyenne si celle-ci existe.

Parmi les diagrammes proposés pour évaluer cet effet, le code RCCM [Col00] recommande l'utilisation du diagramme de Goodman modifié [Col98]. Ce diagramme précise l'effet d'une contrainte moyenne. Il utilise en particulier la limite élastique du matériau S_y et sa résistance à la rupture S_u telle que définie Figure 2.7. La figure 2.8 présente schématiquement la façon dont l'effet de la contrainte moyenne sur l'amplitude de contrainte est traité par le diagramme de Goodman modifié. A contrainte moyenne nulle, l'amplitude requise est notée S_a . Lorsque la contrainte moyenne augmente, l'amplitude S'_a requise décroît le long du segment **ED** qui relie l'amplitude S_a sur l'axe vertical à la résistance à la rupture S_u sur l'axe horizontal. Notons que la zone située au-dessus du segment **ED** définit le domaine de rupture. Traçons à présent le segment **AB** à 45° qui intercepte l'axe vertical et l'axe horizontal à une valeur égale à la limite élastique S_y . Pour ne pas avoir de relaxation plastique, qui rend négligeable l'effet de la contrainte moyenne, le point d'abscisse "contrainte moyenne" et d'ordonnée "amplitude de contrainte" associée doit rester au moins dans le triangle **OAB**. Notons que les segments **ED** et **AB** se coupent au point **C**, dont la projection sur l'axe horizontal des contraintes moyenne est **C'**. Si on augmente la contrainte moyenne au delà du point **C'**, l'amplitude S'_a correspondante nous positionne dans le domaine plastique ce qui induit la relaxation de la contrainte moyenne. Ainsi, le point **C'** représente la plus grande valeur de la contrainte moyenne qui affecte la résistance en fatigue du matériau au seuil de l'endurance illimitée. Les contraintes moyennes appliquées à la structure au cours de sa vie et susceptibles d'avoir un effet sur la résistance en fatigue de la structure sont nécessairement en dessous du point **C'**. L'amplitude S'_a requise pour la contrainte moyenne **C'** est obtenue à partir de la construction graphique de la figure 2.8 :

$$S'_a = S_a \frac{S_u - S_y}{S_u - S_a} \quad \text{pour } S_a < S_y \quad (2.7)$$

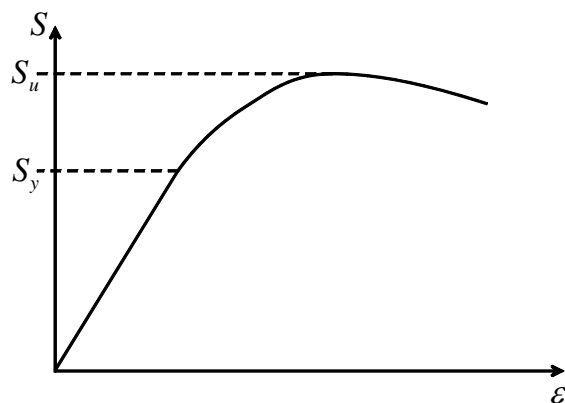
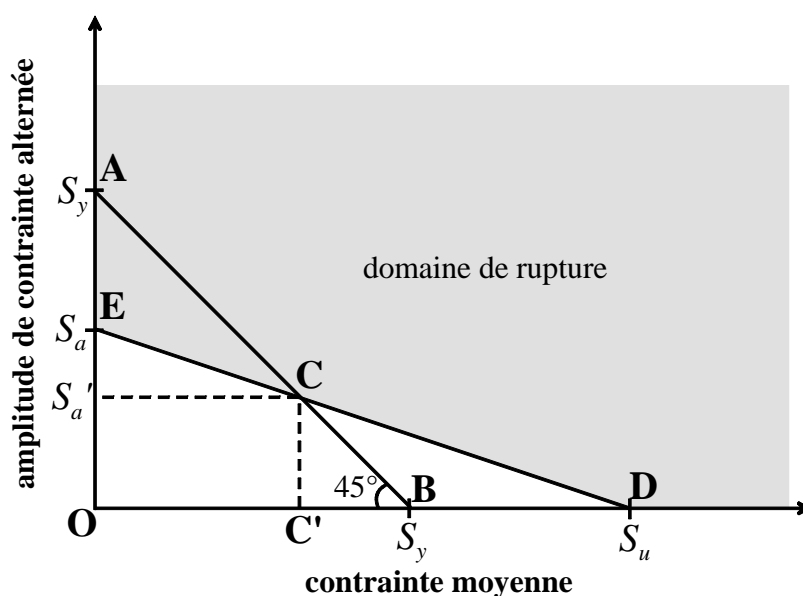
FIG. 2.7 – Limite élastique S_y et résistance à la rupture S_u du matériau.

FIG. 2.8 – Diagramme de Goodman modifié pour un nombre de cycles à la rupture donné.

Ainsi, du fait de la prise en compte de l'effet de la contrainte moyenne, la courbe normalisée de fatigue est modifiée dans l'intervalle des nombres de cycles N associés à des amplitudes de contrainte S_a inférieures à la limite élastique S_y du matériau, tandis qu'elle reste inchangée ailleurs (Figure 2.9). Ceci suppose que la relaxation de contrainte moyenne est totale lorsque $S_a \geq S_y$.

2.5 Méthodes d'analyse en fatigue sous sollicitation multiaxiale

Les chargements appliqués aux composants mécaniques au cours de leur vie sont en général complexes et produisent au sein de la structure un tenseur de contrainte multiaxial

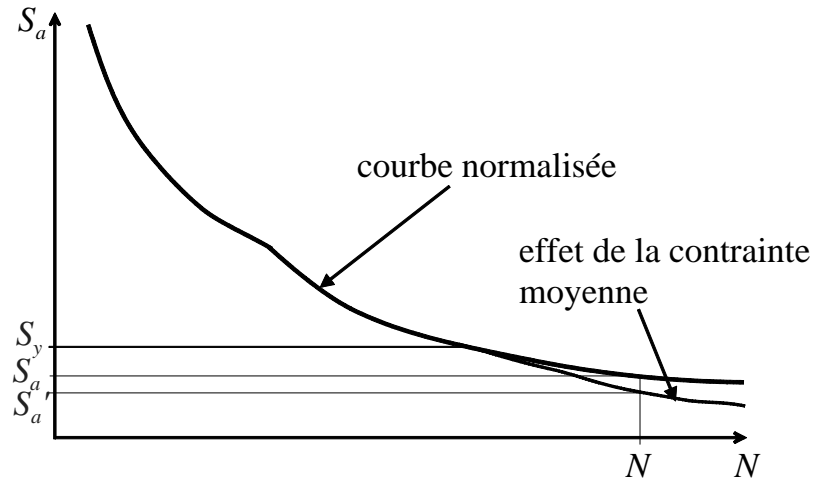


FIG. 2.9 – Ajustement de la courbe de fatigue pour la prise en compte de l'effet maximum de la contrainte moyenne.

et variable dans le temps. Ce type de sollicitation ne peut pas être directement relié à la courbe de résistance qui traduit la réponse du matériau en fatigue sous contrainte normale uniaxiale. Dans un tel contexte, des modèles spécifiquement dédiés au cas de sollicitations multiaxiales sont employés. Ces modèles, définis sous forme de critères, permettent d'estimer, à partir de données de fatigue uniaxiale ou sous sollicitation simple, le dommage de fatigue causé par un historique de sollicitation multiaxiale. Ils requièrent, par conséquent :

- la définition de cycles au sein de sollicitations multiaxiales ;
- la formulation d'une loi qui permette d'évaluer le dommage élémentaire causé par un cycle multiaxial de contrainte ;
- la définition d'une règle de cumul du dommage tout au long de la vie du matériau.

2.5.1 Cycle de contrainte multiaxiale

D'une manière générale, le cycle de contrainte multiaxiale est représenté graphiquement par un trajet fermé parcouru par l'extrémité du vecteur représentatif de l'état de contrainte pendant la durée du cycle (Figure 2.10). La difficulté à identifier des cycles dans l'historique du champ des contraintes multiaxiales dépend de l'évolution dans le temps de l'orientation des directions principales du tenseur des contraintes par rapport à un repère lié au composant ou à la structure. De ce point de vue, deux types de contrainte multiaxiale sont rencontrés (Figure 2.11) :

- les contraintes proportionnelles lorsque les composantes du tenseur des contraintes sont en phase ;
- les contraintes non proportionnelles lorsque les composantes du tenseur des contraintes ne sont plus en phase.

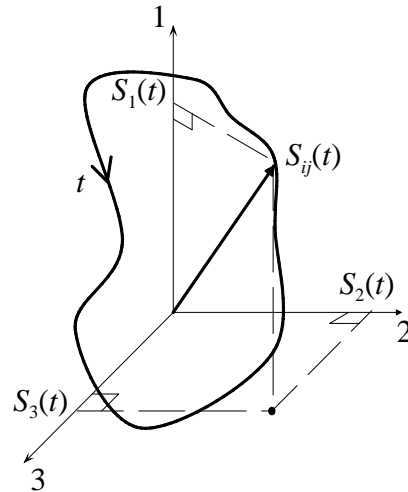


FIG. 2.10 – Cycle de contrainte multiaxiale.

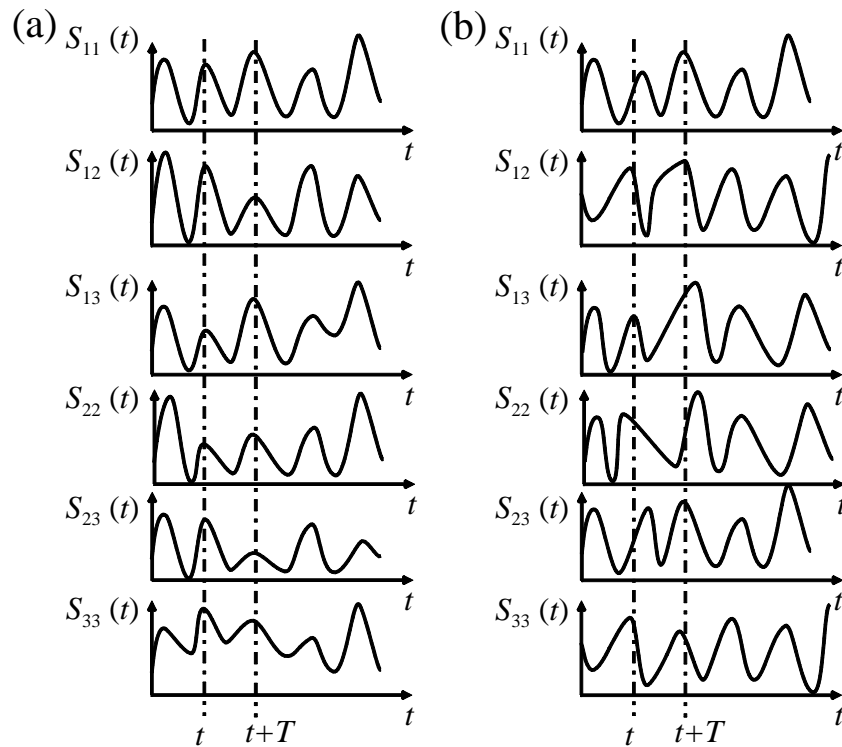


FIG. 2.11 – Types de contraintes multiaxiales (a) proportionnelles ; (b) non proportionnelles.

Lorsque les contraintes sont proportionnelles, les différentes composantes du tenseur des contraintes sont en phase. Ainsi, pour obtenir les cycles de contraintes multiaxiales dans ce cas, il suffit d'identifier les cycles sur l'une de ces composantes, les cycles des autres composantes se déduisant directement des précédentes par simple correspondance

temporelle. En revanche, quand les contraintes principales ne sont pas proportionnelles, l'identification de cycles de contrainte multiaxiale n'est plus aussi évidente. Dans ce cas, une variable de comptage $v_c(t)$ est définie. Cette variable est en général une combinaison linéaire des différentes composantes du tenseur de contrainte [Rob92] :

$$v_c(t) = \sum_i \sum_j a_{ij} S_{ij}(t) \quad (2.8)$$

Le comptage de cycles est réalisé sur la variable $v_c(t)$. Les cycles multiaxiaux de contrainte sont déduits des cycles de la variable de comptage de la manière suivante. Soit t_1 et t_2 deux instants définissant un cycle de $v_c(t)$, le cycle multiaxial correspondant est défini par le trajet de charge délimité par les instants t_1 et t_2 (Figure 2.12).

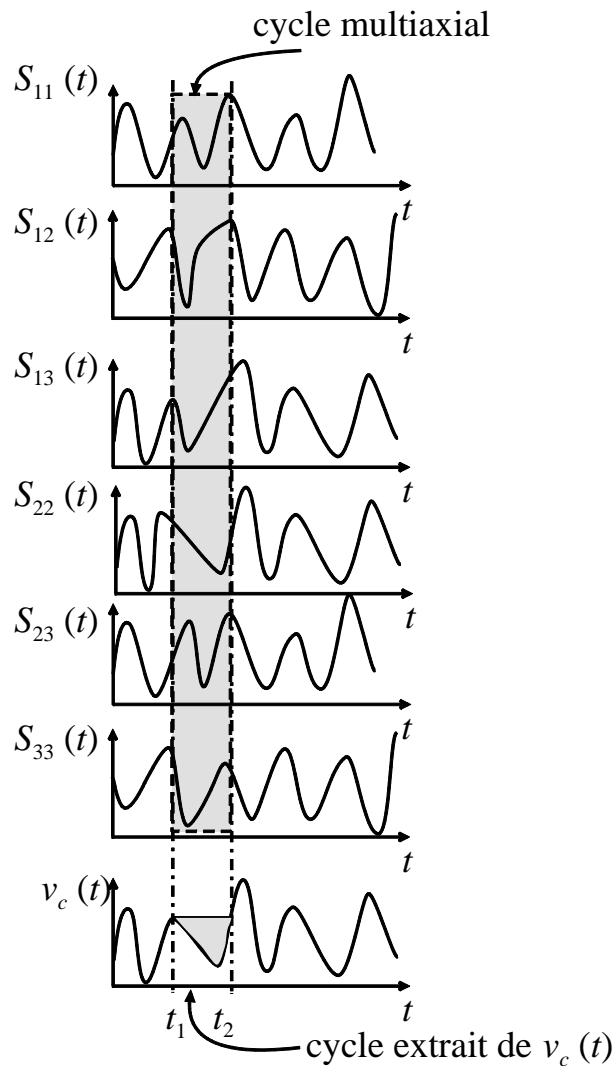


FIG. 2.12 – Cycle multiaxial dans le cas de contraintes non proportionnelles.

2.5.2 Critère de fatigue multiaxial

Pour évaluer le dommage de fatigue sous sollicitation multiaxiale, une première approche consiste à utiliser les critères de rupture statique destinés à prévoir la rupture de structures soumises à des sollicitations statiques multiaxiales (critère de Tresca ou de Von Mises). Ainsi, l'état tridimensionnel du champ des contraintes est réduit à une contrainte équivalente scalaire déduite suivant le principe du cisaillement maximum (critère de Tresca) ou du cisaillement octaédrique (critère de Von Mises) [YL96]. Les amplitudes des cycles extraits de cette contrainte équivalente scalaire peuvent ensuite être positionnées sur la courbe de résistance en fatigue pour estimer le dommage de fatigue causé par le chargement. Cette approche est encore employée aujourd'hui par commodité car elle présente l'avantage d'être simple. Cependant, elle est sujette à certaines limitations.

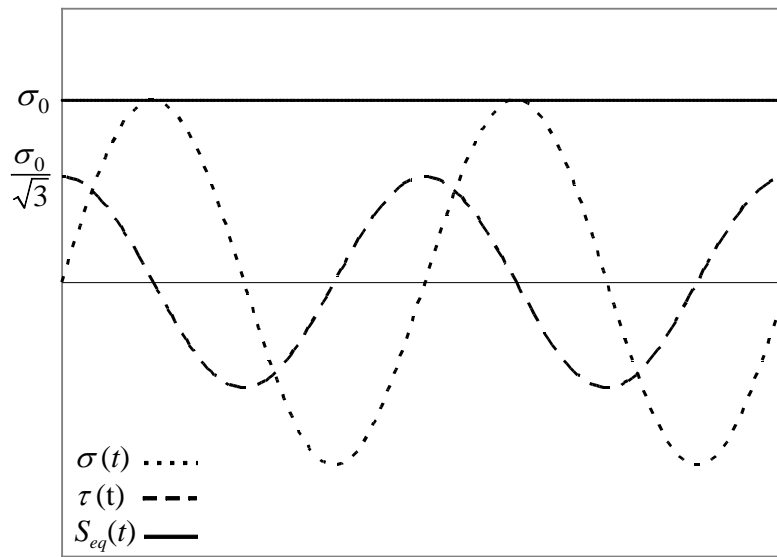


FIG. 2.13 – Illustration de la différence entre le nombre de cycles extraits de la contrainte équivalente et le nombre réel de cycles multiaxiaux.

Tout d'abord, le nombre des cycles extraits de la contrainte équivalente ne correspond pas forcément au nombre réel de cycles multiaxiaux. Pour l'illustrer, considérons l'exemple d'une sollicitation de traction torsion non proportionnelle à contrainte équivalente de Von Mises constante (Figure 2.13) :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right); \quad \tau(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right); \quad S_{eq}(t) = \sqrt{\sigma^2(t) + 3\tau^2(t)} = \sigma_0 \quad (2.9)$$

Par ailleurs, la méthode de la grandeur équivalente peut conduire à des estimations erronées du dommage. Considérons un état de contrainte équiatriaxial (tenseur hydrostatique où les trois contraintes principales sont identiques). La contrainte équivalente selon le critère de Tresca est toujours nulle puisque la différence de deux contraintes principales est nulle à tout instant. Cette approche conduirait à conclure qu'elle ne conduit à aucun

cycle de contrainte, donc ne provoque aucun endommagement par fatigue. Il est pourtant évident que ces cycles de contraintes sont endommageants.

De nombreuses autres études sont menées par ailleurs pour obtenir des critères de fatigue multiaxiaux plus réalistes. Ces critères sont développés à l'origine pour savoir si un cycle de contrainte multiaxial se trouve en deçà ou non de la limite d'endurance du matériau. Aujourd'hui, on les étend aisément au domaine de la fatigue à durée de vie limitée. Les critères existants peuvent être regroupés suivant trois approches différentes [Rob92] : l'approche empirique, l'approche plan critique et l'approche globale.

Approche empirique

Les critères basés sur l'*approche empirique* sont issus de résultats expérimentaux obtenus généralement pour un type de sollicitation multiaxiale bien déterminé. Ils modélisent, ainsi, de façon précise le domaine limite de fatigue associé à des sollicitations multiaxiales particulières pour le (ou les) matériau(x) testé(s). Cependant, ils sont restreints aux modes de sollicitations pour lesquels ils ont été élaborés [YL96].

Approche plan critique

Les critères basés sur l'*approche plan critique* admettent l'existence d'un plan physique où le dommage de fatigue sur l'ensemble de la vie de la structure est maximum et considèrent que ce seul plan critique gouverne le comportement en fatigue du matériau. Le critère permet donc de rechercher ce plan et de déterminer son endommagement propre. Cette démarche apparaît logique quand l'hypothèse de départ qui admet l'unicité du plan est vérifiée. Cependant, dans le cas des contraintes non proportionnelles, les sollicitations appliquées à la structure font qu'il existe parfois plusieurs plans critiques [ZSJ00]. Ceci montre que les critères de type plan critique ne sont pas toujours adaptés aux cycles de contraintes dont les directions principales varient dans le temps.

Approche globale

Les critères basés sur l'*approche globale* font intervenir des grandeurs telles que les invariants des tenseurs de contraintes ou de leur déviateur. Ces quantités représentent l'ensemble des contraintes sous un scalaire. Le premier invariant représente à un facteur près la moyenne arithmétique de la contrainte normale sur tous les plans possibles et le deuxième invariant est proportionnel à la moyenne quadratique des cisaillements qui agissent sur tous les plans. Ces grandeurs retracent donc la contribution de tous les plans au dommage et confèrent ainsi aux critères qu'ils mettent en oeuvre un caractère global.

Formalisme général d'un critère de fatigue multiaxial

Un critère de fatigue positionne un cycle multiaxial de contrainte $S_{ij}(t)$ par rapport à des limites d'endurance ou des limites de fatigue à N cycles admissibles suivant plusieurs modes de sollicitations simples (traction-compression alternée symétrique S_{-1} , flexion alternée symétrique S_{f-1} , traction répétée S_0 , flexion répétée S_{f_0} , torsion alternée symétrique τ_{-1} , etc.). Il est représenté par une fonction de fatigue Γ dans lequel interviennent

toutes les grandeurs citées. Par définition, cet indicateur prend la valeur 1 lorsque la limite d'endurance ou la limite de fatigue à N cycles est atteinte [Rob92] :

$$\Gamma(S_{ij}(t), S_{-1}, S_{f_{-1}}, S_0, S_{f_0}, \tau_{-1}, \dots) = 1 \quad (2.10)$$

Par ailleurs, si $\Gamma < 1$, le critère prévoit un éventuel amorçage d'une fissure au delà du nombre de cycles N associé à l'endurance ou à la limite de fatigue du matériau par rapport à laquelle a été comparé le cycle. Inversement, si $\Gamma > 1$, le critère prévoit l'amorçage d'une fissure avant N cycles. Notons que l'exploitation du critère requiert la connaissance de limites de fatigue suivant plusieurs modes de sollicitation. Ces limites de fatigue sont obtenues par des essais de fatigue suivant le mode de sollicitation correspondant. Cependant, on ne dispose en général que de données de fatigue en traction ou flexion. Dans ce cas, on est amené à déduire les limites de fatigue selon les autres modes de sollicitation en utilisant les relations usuelles entre ces grandeurs dans le cas des sollicitations statiques (section 2.4.1) et à passer des sollicitations alternées aux sollicitations répétées à l'aide des diagrammes évaluant l'effet de la contrainte moyenne (diagrammes de Haigh).

2.5.3 Méthode d'analyse en fatigue multiaxiale dans le code RCCM

Le code de dimensionnement en fatigue des matériels des îlots nucléaires utilise un critère de fatigue multiaxial basé sur la théorie du cisaillement maximum. Il distingue deux méthodes suivant le type de contrainte rencontré (proportionnelle ou non proportionnelle).

Cas des contraintes proportionnelles

Soient $S_1(t)$, $S_2(t)$ et $S_3(t)$ les contraintes principales du tenseur de contrainte au point où la rupture a le plus de chance de se produire. Cet état de contrainte est réduit à une grandeur équivalente qui est le cisaillement maximum $\tau(t)$ (critère de Tresca) :

$$\tau(t) = \max \{ \tau_{12}(t); \tau_{23}(t); \tau_{31}(t) \} \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned} \tau_{12}(t) &= \left| \frac{S_1(t) - S_2(t)}{2} \right|; \\ \tau_{23}(t) &= \left| \frac{S_2(t) - S_3(t)}{2} \right|; \\ \tau_{31}(t) &= \left| \frac{S_3(t) - S_1(t)}{2} \right|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les cycles sont ensuite extraits de la variable $\tau(t)$ par la méthode de comptage Rainflow. En se référant à la formule (2.3), les niveaux de contraintes S_a positionnés sur la courbe de fatigue sont obtenus en multipliant par 2 les amplitudes des cycles extraits de $\tau(t)$ pour les traduire en contrainte normale (section 2.4.1).

Cas des contraintes non proportionnelles

Lorsque les contraintes ne sont plus proportionnelles, l'expérience montre que la méthode précédente n'est plus conservative [BB97]. Dans ce cas, la méthode préconisée par le code RCCM reste grossière. Soit $S_{11}(t)$, $S_{12}(t)$, $S_{13}(t)$, $S_{22}(t)$, $S_{23}(t)$, $S_{33}(t)$ les composantes du tenseur des contraintes au point le plus sollicité de la structure. Sur chacune de ces composantes on identifie les instants t_k pour lesquels on a un pic. A chacun de ces instants, on détermine les contraintes principales $S_1(t_k)$, $S_2(t_k)$, $S_3(t_k)$, à partir des composantes $S_{ij}(t_k)$. Puis on évalue le cisaillement maximum $\tau(t_k)$ associé à ces contraintes principales :

$$\tau(t_k) = \max \left\{ \left| \frac{S_1(t_k) - S_2(t_k)}{2} \right| ; \left| \frac{S_2(t_k) - S_3(t_k)}{2} \right| ; \left| \frac{S_3(t_k) - S_1(t_k)}{2} \right| \right\} \quad (2.13)$$

Le dimensionnement en fatigue se fait sur un seul niveau de contrainte S_a qui est la plus grande valeur des $\tau(t_k)$, qu'il convient de multiplier par 2 pour la traduire en contrainte normale :

$$S_a = 2 \max_{t_k} \tau(t_k) \quad (2.14)$$

Cette amplitude de contrainte est positionnée directement sur la courbe de fatigue pour évaluer la durée de vie de la structure étudiée. Notons que dans ce cas, on n'a plus recours au comptage des cycles, on se contente d'identifier le cycle le plus endommageant et de supposer que ce cycle de contrainte s'applique à la structure tout au long de sa vie.

Le cas échéant, ces amplitudes de contrainte sont amplifiées par des facteurs pour prendre en compte la présence de soudure, de singularités géométriques ou de plastification locale de la structure.

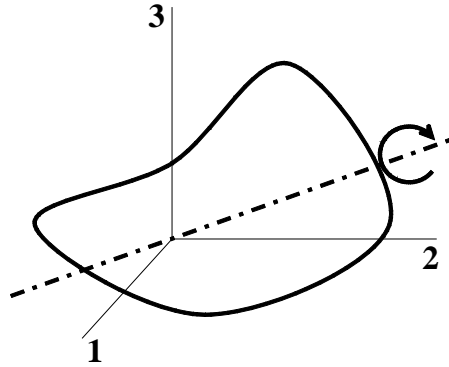


FIG. 2.14 – *Etat de contrainte constant tournant autour de la matière.*

La démarche adoptée par le RCCM [Col00] présente toutefois des limites. Considérons un état de contrainte dont les composantes principales sont constantes mais dont les directions évoluent (figure 2.14). Dans un tel cas, la méthode RCCM conduirait à conclure que la contrainte équivalente est constante, et par conséquent qu'elle ne génère pas de dommage par fatigue. Cependant, il est clair que ce type de sollicitation engendre de l'endommagement par fatigue.

2.5.4 Critère de Dang Van

Nous présentons ici le critère de Dang Van dont l'utilisation est très répandue dans l'industrie française, notamment automobile. Ce critère utilise l'approche plan critique. Selon son auteur, une réponse adaptée du cycle de contrainte à l'échelle du grain est une condition nécessaire pour que ne s'amorce pas une fissure. Le principe du critère est d'écrire que la contrainte microscopique dans un grain au cours d'un cycle doit satisfaire le critère de plasticité du grain à tout instant. Grâce à certaines hypothèses, on écrit le critère de plasticité à l'aide des grandeurs associées à la contrainte macroscopique qui sont la partie alternée $\tau_{na}(t)$ de la contrainte tangentielle $\tau_n(t)$ dans le plan physique de normale \mathbf{n} (Figures 2.15 et 2.16) et la pression hydrostatique $P_H(t)$. Dang Van donne une première version de son critère en 1973 [DV73] dans laquelle la fonction de fatigue Γ s'écrit :

$$\Gamma = \max_{\mathbf{n}} \left\{ \max_t \left[\frac{\tau_{na}(t) + aP_H(t)}{b} \right] \right\} \quad (2.15)$$

où

$$P_H(t) = \frac{S_1(t) + S_2(t) + S_3(t)}{3} \quad (2.16)$$

et les constantes a et b s'écrivent :

$$a = 3 \left(\frac{\tau_{-1}}{S_{-1}} - \frac{1}{2} \right); \quad b = \tau_{-1} \quad (2.17)$$

La condition de validité du critère est donnée par :

$$a > 0 \iff \frac{\tau_{-1}}{S_{-1}} > \frac{1}{2} \quad (2.18)$$

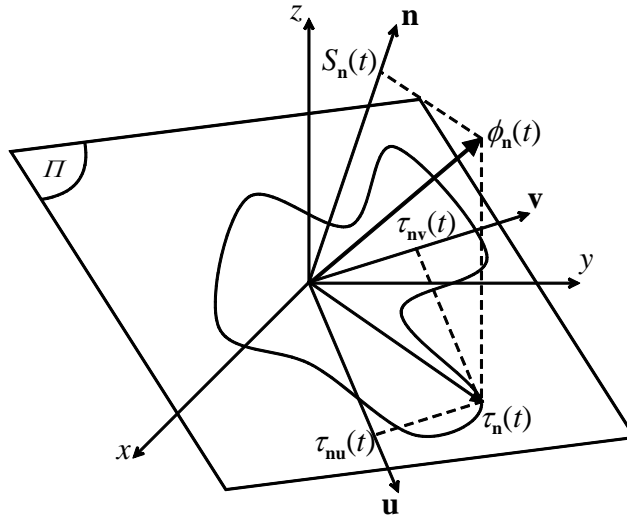


FIG. 2.15 – Composantes normale et tangentielle des contraintes sur le plan physique de normale \mathbf{n} .

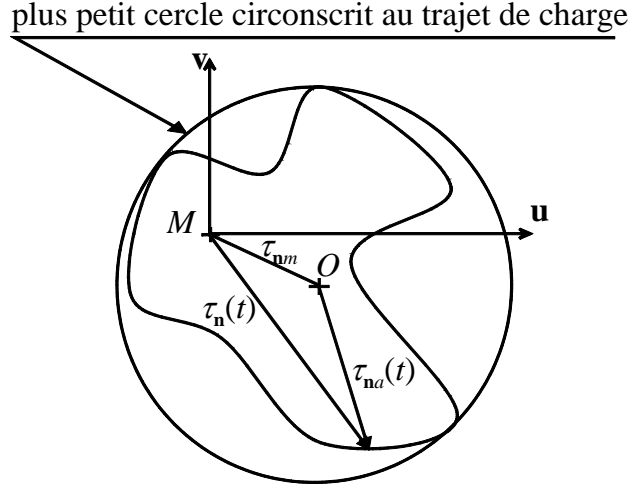


FIG. 2.16 – *Partie moyenne τ_{nm} et alternée $\tau_{na}(t)$ du vecteur contrainte tangentielle $\tau_{\mathbf{n}}(t)$ sur le plan physique de normale \mathbf{n} .*

Cette formulation conduit à une double maximisation sur le temps et sur l'ensemble des plans passant par le point considéré. L'implémentation numérique du critère sous cette forme s'est avérée fastidieuse, ce qui a conduit Dang Van à proposer une nouvelle version de son critère [DVG89] qui s'affranchit de la recherche du plan critique en calculant la scission maximale alternée à un instant donné :

$$\Gamma = \max_t \left[\frac{\tau_{pr}(t) + aP_H(t)}{b} \right] \quad (2.19)$$

où

$$\tau_{pr}(t) = \frac{1}{2} \max \{ |S_{1a}(t) - S_{2a}(t)| ; |S_{2a}(t) - S_{3a}(t)| ; |S_{3a}(t) - S_{1a}(t)| \} \quad (2.20)$$

où $S_{1a}(t)$, $S_{2a}(t)$ et $S_{3a}(t)$ sont les valeurs principales du déviateur alterné des contraintes $S_{ija}(t)$ à l'instant t (Figure 2.17).

2.6 Méthode de comptage Rainflow

Le modèle de résistance en fatigue sous la forme d'une courbe $S-N$ fournit la durée de vie sous une sollicitation d'amplitude constante. Cependant, dans la réalité, les structures sont rarement soumises à des sollicitations d'amplitude constante. Par conséquent, des méthodes de comptage sont employées pour réduire l'historique complexe des sollicitations en une série de cycles d'amplitude constante. Il existe plusieurs méthodes de comptage qui aboutissent à des résultats différents : des méthodes simples telles que le comptage des pics ou le comptage des étendues, et des méthodes plus complexes telles que la méthode Rainflow ou le comptage des paires d'étendues. Le lecteur pourra se reporter à la référence [Lal99] pour une description plus détaillée de l'ensemble des méthodes de comptage existantes. Parmi toutes ces méthodes, il est reconnu que la méthode Rainflow fournit les résultats les plus conservatifs [Ant97]. C'est cette méthode qui est recommandée dans les codes de dimensionnement en fatigue des composants du nucléaire.

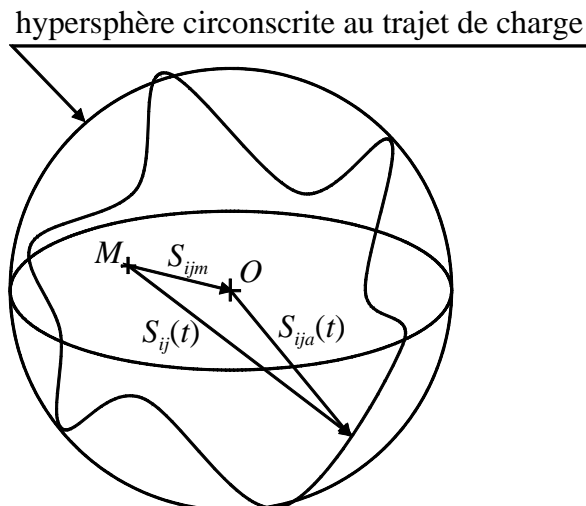


FIG. 2.17 – *Etat moyen du tenseur déviateur S_{ijm} et tenseur déviateur alterné $S_{ija}(t)$.*

2.6.1 Principe

Comme son nom l'indique, le comptage *Rain-flow* (ou la méthode de la goutte d'eau), s'appuie à l'origine sur le principe de l'écoulement de l'eau sur l'histoire des contraintes $S(t)$ représentée avec l'axe de temps vertical. On fait couler l'eau successivement à partir de chaque extremum et on soumet son écoulement aux règles suivantes (Figure 2.18) :

- (a) Si on part d'un minimum, l'écoulement de l'eau est stoppé lorsqu'on franchit un plan qui part d'un minimum plus petit que celui de départ.
- (b) Symétriquement, si on part d'un maximum, l'écoulement de l'eau est stoppé lorsqu'on franchit un plan qui part d'un maximum plus grand que celui de départ.
- (c) L'écoulement est stoppé lorsqu'il rencontre un trajet d'eau provenant d'un plan supérieur.

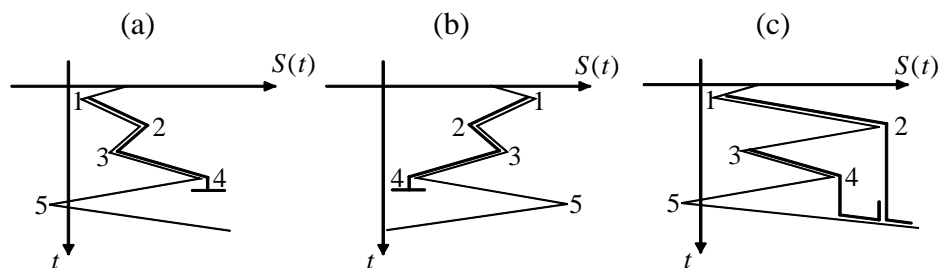


FIG. 2.18 – *Illustration des règles du comptage Rainflow.*

Notons que les règles (a) et (b) visent à déterminer le trajet le plus long qui correspond au cycle principal, tandis que la règle (c) permet d'éviter de compter deux fois le même trajet (pas de mélange).

Les trajets d'eau identifiés après application de ces règles sont associés à des demi-cycles $i - j$, où i et j sont respectivement les extremums d'origine et de fin du trajet. Le demi-cycle $i - j$ est ensuite associé au demi-cycle $j - i$ s'il existe pour former un cycle de contrainte.

Notons par ailleurs que la méthode de comptage Rainflow est basée sur le comportement cyclique du matériau. Si on suit l'évolution de la contrainte au cours du temps dans le plan contrainte-déformation, on remarque que la méthode Rainflow définit un cycle comme une boucle d'hystérésis fermée (Figure 2.19).

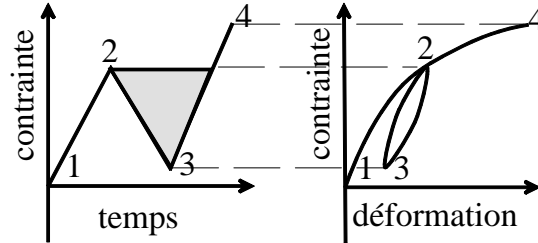


FIG. 2.19 – Traduction, dans l'espace contrainte-déformation, de l'identification d'un cycle par le comptage Rainflow.

2.6.2 Algorithme utilisé

Plusieurs algorithmes de comptage Rainflow ont été développés. Dans nos travaux, nous utilisons l'algorithme standard proposé par Amzallag *et al.* [AGRB94] qui optimise les méthodes utilisées dans plusieurs branches de l'industrie française [A0393]. Cet algorithme comprend trois étapes principales :

1. un traitement préliminaire de la séquence de contrainte qui consiste à extraire les extremums et à les répartir dans des classes ;
2. une première passe du comptage Rainflow sur la séquence des extremums obtenus, cette étape fournit une première série de cycles, les points restant formant le résidu ;
3. enfin, le traitement du résidu qui consiste à ajouter au résidu sa copie et à extraire à nouveau les cycles de la séquence ainsi obtenue.

Le résultat du comptage est constitué de l'ensemble des cycles extraits lors des deux dernières étapes de la méthode.

2.7 Loi d'endommagement de Miner

Presque toutes les données de fatigue destinées au dimensionnement sont basées sur des essais à amplitude constante. Toutefois, dès lors que l'histoire du chargement, traduite par la séquence d'amplitude variable, est plus complexe, les cycles extraits de ce chargement par la méthode Rainflow sont d'amplitudes inégales. Pour prédire la durée de vie dans ce cas, Miner propose une règle simple basée sur l'hypothèse de cumul linéaire du dommage

et adoptée dans la plupart des codes de dimensionnement en fatigue, en particulier dans le code de conception des composants d'îlots nucléaires.

Pour illustrer cette règle, notons N_1 et N_2 , respectivement, les nombres de cycles admissibles aux amplitudes S_{a_1} et S_{a_2} , donnés par la courbe S - N . Supposons qu'on applique les nombres de cycles n_1 et n_2 d'amplitudes S_{a_1} et S_{a_2} respectivement jusqu'à la rupture de la pièce, où $n_1 < N_1$ et $n_2 < N_2$. La fraction de durée de vie consommée par les n_1 cycles d'amplitude S_{a_1} vaut n_1/N_1 (Figure 2.20). La fraction restant à consommer par les n_2 cycles d'amplitude S_{a_2} pour atteindre la rupture vaut $n_2/N_2 = 1 - n_1/N_1$. On en déduit la relation :

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1 \quad (2.21)$$

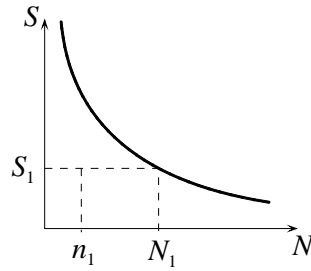


FIG. 2.20 – Fraction de durée de vie associée à une amplitude donnée d'un cycle de contrainte.

Plus généralement, Miner fait l'hypothèse que les cycles de contrainte peuvent être regroupés par bloc, chaque bloc ayant un nombre de cycles n_i de même amplitude S_{a_i} (Figure 2.21). Il suppose en outre que les contraintes lues sur la courbe S - N sont calculées de la même façon que les contraintes dans la structure étudiée. Ainsi, il ne tient pas compte explicitement de la contrainte moyenne. La fraction du dommage causé par un bloc de cycles de contrainte est donnée par :

$$d_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (2.22)$$

N_i est obtenu par la courbe S - N comme le nombre de cycles admissibles dont l'amplitude est constante et égale à S_{a_i} . La rupture de la pièce est atteinte lorsque le dommage total provoqué par la séquence de cycles de contrainte, obtenu en cumulant les fractions de dommage des différents blocs vaut l'unité :

$$D = \sum_i d_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (2.23)$$

Cette règle fait deux approximations importantes [FY98]. D'une part, le dommage élémentaire d'un cycle est pris en compte indépendamment de son ordre d'apparition dans l'histoire du chargement, alors que l'enchaînement des cycles de contraintes a une influence sur la fatigue. D'autre part, il considère que les cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance ne sont pas endommageants et leur associe un dommage élémentaire nul.

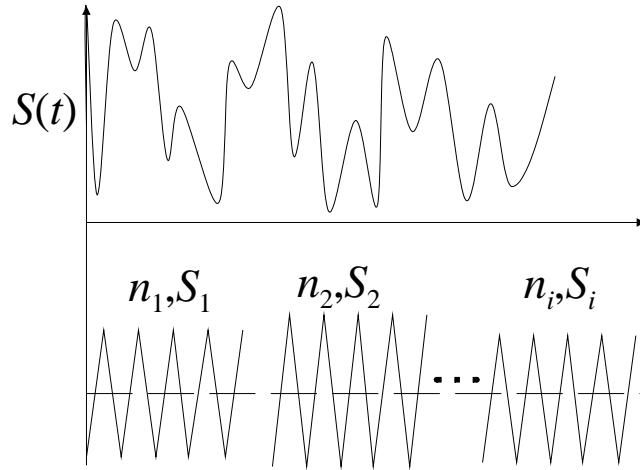


FIG. 2.21 – Blocs de cycles de contrainte de même amplitude.

2.8 Application à un élément de tuyauterie

2.8.1 Présentation de l'exemple

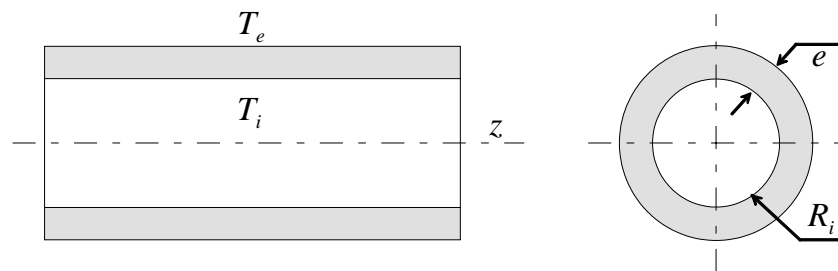


FIG. 2.22 – Schématisation d'un élément de tuyauterie.

L'exemple traité est représentatif de situations rencontrées dans les circuits de sécurité des chaudières nucléaires. On considère une portion de circuit représentée par un élément de tuyauterie (Fig. 2.22) à l'intérieur duquel circule un fluide dont la température varie en fonction du temps, la température externe étant supposée constante. On suppose que cette structure subit un chargement thermique homogène, la pression du fluide sur sa paroi interne étant supposée constante. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure sont indiquées dans le tableau 2.1.

2.8.2 Modèle d'action

L'évolution réelle de la température du fluide étant impossible à connaître précisément, certaines hypothèses sont faites. Cette température est supposée périodique de période égale à environ 4 secondes. Cette période correspond au temps mis par le fluide pour parcourir tout le circuit considéré. Nous admettons donc que la séquence de température du fluide calculée sur cette période est représentative des niveaux de température

notation	dénomination	valeur
R_i	rayon interne	136,55 mm
e	épaisseur	9,27 mm
E	module d'Young	1,8908 10^5 MPa
α	coefficient de dilatation thermique	1,695 10^{-5}
ν	coefficient de Poisson	0,3
ρC_p	capacité calorifique	4,024 10^6 J/kg
L	diffusivité thermique	16,345 W. m ⁻¹ . K ⁻¹
h	coefficient d'échange fluide/paroi	20000 W. m ⁻² . K ⁻¹
RA	réduction de surface	50%
S_D	limite d'endurance	300 MPa
S_y	limite élastique	188 MPa
S_u	résistance à la traction	496 MPa

TAB. 2.1 – Données géométriques et thermomécaniques du tuyau.

susceptibles d'être atteints par le fluide. La température externe est constante et égale à 20 °C, tandis que la température interne est représentée par une séquence de 139 valeurs de température sur une période de 4,14 secondes (Figure 2.23).

2.8.3 Loi de comportement

Pour évaluer le champ de contraintes généré dans l'épaisseur du tuyau par les variations de température du fluide, on suppose que le matériau a un comportement élastique linéaire. Les variations du champ de température dans la paroi sont obtenues par la résolution de l'équation de la chaleur sous l'hypothèse d'un flux radial de chaleur. Les contraintes générées par les variations du champ de température dans l'épaisseur sont ensuite évaluées à l'aide de la loi de Hooke. Ce calcul est réalisé numériquement à l'aide de l'outil *OSTAND* [?]. La résolution de l'équation de la chaleur est faite par différences finies.

2.8.4 Résistance en fatigue du matériau

Le modèle de résistance en fatigue est obtenue à l'aide des propriétés mécaniques du matériau (Tableau 2.1). En les reportant dans l'équation (2.6), la courbe moyenne de Langer s'écrit :

$$S_a = \frac{32765}{\sqrt{N}} + 300 \text{ MPa} \quad (2.24)$$

Comme le requiert la norme, on applique le plus défavorable des deux facteurs suivants, 2 sur S_a et 1/20 sur N . Le diagramme de Goodman modifié est ensuite employé pour ajuster cette courbe afin de tenir compte de l'effet de la contrainte moyenne.

2.8.5 Comptage des cycles par la méthode Rainflow

Les composantes principales du tenseur de contrainte sont proportionnelles (section 2.5.1). La composante radiale $S_{rr}(t)$ est nulle tandis que les composantes axiale $S_{zz}(t)$ et

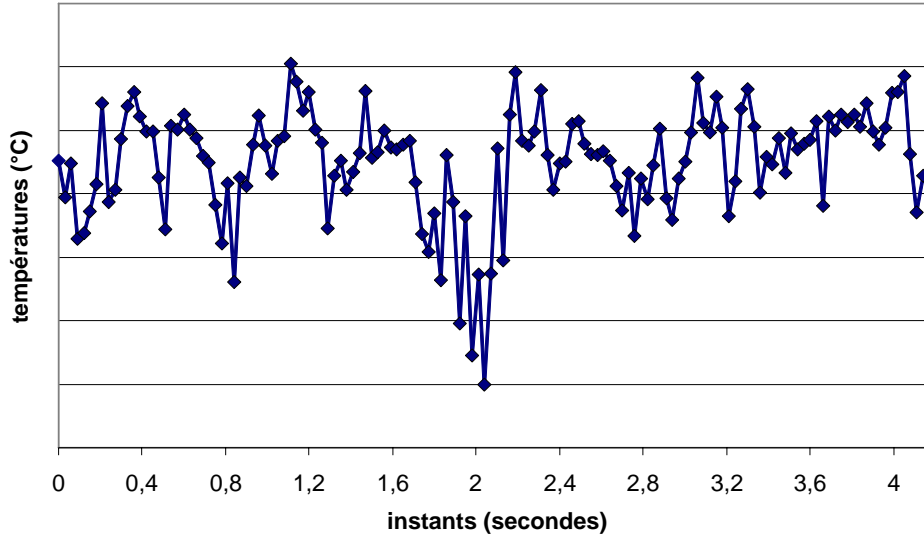


FIG. 2.23 – Séquence des températures du fluide.

tangentielle $S_{\theta\theta}(t)$ sont égales à tout instant. La contrainte équivalente de Tresca vaut donc :

$$\tau(t) = \frac{S_{zz}(t)}{2} = \frac{S_{\theta\theta}(t)}{2} \quad (2.25)$$

Il est donc judicieux d'effectuer le comptage des cycles soit sur $S_{\theta\theta}(t)$ ou sur $S_{zz}(t)$. On choisit ici la composante tangentielle $S_{\theta\theta}(t)$. L'étape d'extraction des extremums relatifs de ce signal permet d'identifier 64 pics ou vallées de contrainte. La procédure de comptage Rainflow permet d'extraire 32 cycles de contrainte de la séquence considérée.

2.8.6 Calcul du dommage cumulé et durée de vie de la structure

Sur l'ensemble des 31 cycles de contrainte extraits de la séquence, un seul cycle est endommageant. Ce cycle a une amplitude $S'_a = 146,96$ MPa. Cette amplitude étant inférieure à la limite élastique du matériau $S_y = 188$ MPa, elle devient après prise en compte de l'effet maximum de la contrainte moyenne $S_a = 184,96$ MPa et produit un dommage élémentaire $d = 4,56 \cdot 10^{-6}$. Le dommage total d'une séquence de chargement vaut donc $D_{\text{seq}} = d$ et la durée de vie de l'élément de tuyauterie vaut :

$$\text{durée de vie} = \frac{1}{D_{\text{seq}}} = 219000 \text{ séquences} \quad (2.26)$$

Notons que du fait des faibles niveaux de contrainte rencontrés, la structure est sollicitée dans le domaine des grands nombres de cycles.

2.9 Conclusion

La méthode de dimensionnement en fatigue utilisée dans la plupart des industries et en particulier dans les codes de dimensionnement des composants du nucléaire est déter-

ministe. Elle introduit des modèles et des paramètres pour décrire le processus de fatigue avec précision. Le grand nombre de modélisations du comportement en fatigue des pièces mécaniques révèle l'importance de la maîtrise de ce mode de défaillance pour les concepteurs. Mais cette abondance traduit aussi une mauvaise connaissance du phénomène de fatigue. Ainsi, les modèles et les paramètres introduits actuellement dans le dimensionnement en fatigue contiennent beaucoup d'incertitudes. La conception sûre de structures en contexte aléatoire relève du domaine de la fiabilité des structures. D'où la nécessité d'introduire un cadre d'analyse probabiliste pour dimensionner ces structures à la fatigue. Ceci requiert, d'une part, la caractérisation probabiliste des différentes incertitudes affectant le comportement en fatigue, d'autre part l'utilisation de méthodes de fiabilité pour estimer la probabilité de défaillance des structures en fatigue.

Chapitre 3

Sources d'incertitudes

3.1 Introduction

Le comportement en fatigue des structures est affecté par de nombreuses sources d'incertitudes. Svenson [Sve97] identifie différentes causes expliquant les incertitudes sur l'estimation du dommage de fatigue. Il les répartit comme suit :

- les variations du chargement ;
- la variabilité des paramètres mécaniques de la structure (propriétés du matériau, dimensions géométriques) ;
- la résistance en fatigue des éprouvettes testées en laboratoire ;
- la différence entre la résistance en fatigue des éprouvettes testées et celle du matériau de la structure réelle ;
- l'estimations des paramètres ;
- les erreurs de modélisation.

Tovo [Tov01] distingue parmi ces points deux catégories. Les quatre premiers points sont les variables aléatoires du problème de fatigue tandis que les deux derniers points sont dus au manque de connaissance du phénomène de fatigue (causé par un nombre limité de données), ou au mécanisme complexe de dommage en fatigue ou enfin à l'analyse même de la structure étudiée. Ainsi, la caractérisation des quatre premiers points relève de l'inférence de variables aléatoires, alors que les deux derniers points nous amènent à évaluer des marges d'incertitude sur le comportement en fatigue de la structure.

L'objectif de ce chapitre est de décrire ces sources d'incertitudes et d'expliquer comment elles sont modélisées en vue d'une analyse de fiabilité en fatigue d'une structure. La première section passe en revue les différents points cités. Dans la seconde, le dommage aléatoire de fatigue est exprimé suivant deux formulations qui se révèlent équivalentes sous certaines hypothèses.

3.2 Sources d'incertitudes

3.2.1 Variations du chargement

Les centrales nucléaires génèrent de l'électricité en transférant de l'énergie calorifique. Les composants du nucléaire sont donc soumis à des fluctuations de chargement thermique.

L'évolution dans le temps de ces chargements ne peut pas être prédite à l'avance. Elle présente de ce fait un caractère aléatoire.

Le chargement thermique est alors représenté par un processus aléatoire, noté $\theta(t, \omega)$, où t représente le temps et ω est associé au caractère aléatoire. Un processus aléatoire est une fonction de deux variables décrite de la manière suivante : lorsque $t = t_0$ est fixé, $\theta(t_0, \omega)$ est une variable aléatoire ; à $\omega = \omega_0$ fixé, $\theta(t, \omega_0)$ devient une fonction déterministe du temps aussi appelée réalisation ou trajectoire du processus (Figure 3.1). Il est caractérisé à l'ordre 2 par sa fonction d'autocorrélation $R_\theta(t_1, t_2)$, qui mesure la corrélation entre deux variables aléatoires extraites du processus $\theta(t, \omega)$ aux instant t_1 et t_2 et est définie par :

$$R_\theta(t_1, t_2) = E[\theta(t_1) \theta(t_2)] \quad (3.1)$$

où $E[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique.

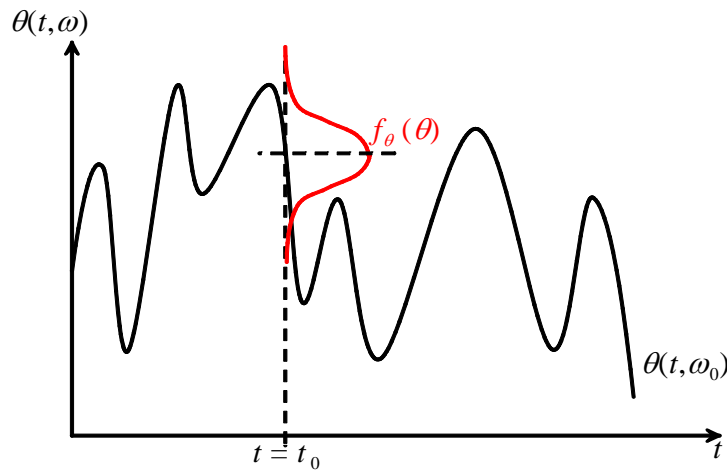


FIG. 3.1 – Schématisation d'un processus aléatoire.

On se limite dans ce mémoire à l'utilisation de processus gaussiens. Un processus est gaussien si tout vecteur aléatoire $(\theta(t_1, \omega), \dots, \theta(t_k, \omega))^T$ est un vecteur gaussien. En pratique, il suffit de définir la moyenne $\mu_\theta(t)$, l'écart-type $\sigma_\theta(t)$ et la fonction d'autocorrélation $R_\theta(t_1, t_2)$. Par soucis de simplicité, le processus de chargement thermique est supposé *stationnaire* et *ergodique*. La *stationnarité* du processus est liée aux moments statistiques du processus. Elle suppose en particulier que la moyenne et l'écart-type ne dépendent pas du temps et que la fonction d'autocorrélation $R_\theta(t_1, t_2)$ ne dépend plus que du laps de temps $t_2 - t_1$. La propriété d'*ergodicité* permet de remplacer des moyennes d'ensemble par des moyennes temporelles estimées à partir d'une réalisation unique du processus. Par ailleurs, sous l'hypothèse de stationnarité, le processus peut aussi être caractérisé dans le domaine fréquentiel par sa densité spectrale de puissance (DSP) $W_\theta(\lambda)$, où λ est la pulsation. La DSP d'un processus stationnaire est une décomposition fréquentielle de la moyenne quadratique du processus, c'est-à-dire qu'elle donne la moyenne quadratique de l'amplitude de chaque sinusoïde en fonction de la fréquence [Pri81]. Elle est définie comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du processus :

$$W_\theta(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_\theta(\tau) e^{-j\lambda\tau} d\tau \quad (3.2)$$

Notons toutefois que l'hypothèse de stationnarité n'est pas toujours vérifiée par les chargements thermiques rencontrés dans les chaudières nucléaires. En effet, dans la réalité, des zones d'instationnarité apparaissent sur ces chargements. C'est le cas par exemple des fluctuations thermiques consécutives à des transitoires de débit dans un conduit stratifié [Mor91].

3.2.2 Variabilité des paramètres mécaniques de la structure

Les paramètres mécaniques regroupent à la fois la géométrie de la structure et les propriétés mécaniques et thermiques du matériau. Les dimensions géométriques d'une structure ne sont jamais connues parfaitement. Leur variabilité est due aux erreurs et tolérances propres à tout processus de fabrication. Elles sont donc traitées comme des variables aléatoires. En général, les dimensions sont représentées par des variables gaussiennes. Cependant, dans nos travaux leurs distributions probabilistes sont toutes supposées *log-normales*. Ce choix est motivé par le souci d'avoir des variables strictement positives. Leurs moyennes sont fixées à leurs valeurs nominales respectives. On peut obtenir leurs écarts-types en résolvant l'équation telle que la probabilité que les dimensions restent dans les limites de tolérance soit inférieure à 95% [RH02]. Encore faut-il disposer des valeurs des limites de tolérance ou les admettre. Dans cette étude, on fixe le coefficient de variation des dimensions à 5%.

Les propriétés du matériau ont également une nature incertaine. Pour des raisons d'hétérogénéité, les propriétés du matériau varient d'un point à l'autre d'une même pièce. Mais cette variabilité dont la modélisation nécessite l'introduction de champs aléatoires est négligée dans ce travail. Ces grandeurs sont donc considérées comme étant aléatoires et décrites aussi par une loi *log-normale* pour les mêmes raisons que précédemment. Les différentes propriétés mécaniques considérées sont :

- le module d'Young E ;
- le coefficient de Poisson ν ;
- le coefficient de dilatation thermique α ;
- la conductivité thermique L ;
- la capacité calorifique ρC_p ;
- la limite élastique S_y ;
- la résistance à la rupture S_u .

Leurs moyennes sont aussi fixées à leurs valeurs nominales respectives. Faute d'informations spécifiques au problème posé, on leur attribue un coefficient de variation de 10% habituellement observé sur les propriétés des aciers [Fab00].

Enfin, les conditions aux limites à l'interface fluide/structure sont caractérisées par le coefficient d'échange thermique h . Ce coefficient est très mal connu en général. En particulier, il dépend de la température du fluide et de la vitesse d'écoulement. Pour cette raison, il est considéré aléatoire de distribution *log-normale*, de moyenne fixée à sa valeur nominale et de coefficient de variation particulièrement important de 30%.

3.2.3 Résistance à la fatigue des éprouvettes testées

La résistance à la fatigue des éprouvettes testées en laboratoire est définie par la durée de vie admissible à amplitude constante. Les incertitudes sur ces durées de vie sont

dues à la forte dispersion observée sur les données d'essais de fatigue. Cette dispersion est attribuée aux imperfections des conditions d'essais et à des facteurs incontrôlés tels que les caractéristiques du matériau, sa structure métallurgique, le type de chargement, l'environnement, etc. Aujourd'hui, cette dispersion est considérée comme un aspect intrinsèque du phénomène de fatigue. La résistance à la fatigue des matériaux est donc fondamentalement aléatoire. Le modèle probabiliste de résistance en fatigue décrit la loi conditionnelle des durées de vie pour une amplitude fixée du cycle de contrainte. Plusieurs auteurs [Bas60] ont montré qu'au moins en dehors du domaine d'endurance cette loi est *log-normale*. Dans notre étude, la distribution de la durée de vie admissible est supposée log-normale sur tout le domaine de définition des amplitudes. Les paramètres de cette loi sont obtenus par un traitement statistique des données d'essais de fatigue. Ce traitement statistique fait appel aux méthodes classiques de régression. La caractérisation probabiliste de la résistance à la fatigue des éprouvettes est complètement décrite au chapitre 4.

3.2.4 Incertitudes sur le passage de l'éprouvette à la structure réelle

Les essais de fatigue pour déterminer la résistance des matériaux à la fatigue sont réalisés dans des conditions idéales (fortement contrôlées) en laboratoire. En revanche, les structures réelles sont soumises à des environnements beaucoup plus incertains et parfois très sévères. La résistance en fatigue des structures contient encore plus d'incertitudes que celle des éprouvettes testées. Dans la littérature [KCS96], une augmentation de ces incertitudes est observée concernant les effets de détails géométriques, d'échelle, d'état de surface et d'environnement. Les détails géométriques (irrégularité, filetage, perçage, etc) provoquent des concentrations de contrainte qui augmentent sensiblement l'amplitude de contrainte en ces points. Les effets d'échelle sont dus à des considérations mécaniques, statistiques et technologiques [Col98]. En ce qui concerne les effets mécaniques, notons que la répartition des contraintes dans une section varie suivant l'épaisseur de la pièce en particulier lorsque la flexion est considérée. L'aspect statistique se traduit par le nombre plus élevé de microfissures sur une pièce de grande taille entraînant par conséquent un risque plus important de rupture en fatigue. Du point de vue technologique, il est plus difficile de fabriquer une pièce de grande taille. Les effets d'état de surface proviennent du fait qu'une défaillance de fatigue est initiée généralement à la surface. Aussi, plus la rugosité est importante, plus le risque d'amorçage d'une micro-fissure est élevé. L'effet de l'environnement des structures du nucléaire se traduit par exemple par les effets de la chimie de l'eau, de la température et du débit.

La prise en compte de ces effets est quantifiée dans le code RCCM par deux facteurs forfaitaires : un facteur de majoration des contraintes noté γ^S et un facteur de réduction des durées de vie noté γ^N . Ces facteurs valent 2 pour γ^S et 20 pour γ^N dans une analyse déterministe. La durée de vie de la structure réelle soumise à des cycles d'amplitude S_a est alors donnée par [Col00] :

$$N^{\text{struct}}(S_a, \gamma^N, \gamma^S) = \min\left(\frac{N(S_a)}{\gamma^N}, N(\gamma^S S_a)\right) \quad (3.3)$$

où $N(S_a)$ est la durée de vie des éprouvettes testées en laboratoire. Ces facteurs sont

censés couvrir les effets de taille, d'état de surface, d'environnement, mais également la dispersion des données de fatigue. Il existe dans la littérature différentes décompositions de ces facteurs suivant les différents effets considérés [Ros01]. Ainsi, on peut écrire :

$$\gamma^j = \gamma_{taille}^j \gamma_{état\ surface}^j \gamma_{environnement}^j \gamma_{dispersion}^j, \quad j = N, S \quad (3.4)$$

A travers cette décomposition (Eq. 3.4), on note une part des facteurs de marge associée au passage de l'éprouvette à la structure et une part due à la dispersion des données sur éprouvette. Ainsi, le facteur de passage éprouvette/structure peut être défini par :

$$\gamma_p^j = \gamma_{taille}^j \gamma_{état\ surface}^j \gamma_{environnement}^j, \quad j = N, S \quad (3.5)$$

Plusieurs auteurs ont quantifié les facteurs correspondants aux différents effets à partir d'expériences (tableau 3.1). Mais différentes valeurs sont attribuées à ces facteurs suivant les auteurs [Col98].

Référence	O'Donnel [O'D96]	Keisler et al [KCS96] ^(a)	PVRC WG [Hec96] ^(a)	Manjoine et Tome [MT83]	NUREG /CR6260 et Harvey [NUR97]
facteur de passage	γ^S γ^N	γ^S γ^N	γ^N	γ^S	γ^N
effet dispersion	1, 19 2, 11	1, 7 2, 5	2, 0 – 2, 5	1, 15	2, 0
effet état de surface	1, 19 2, 11	1, 3 3, 0	1, 0 – 1, 5	1, 15	2, 5
effet échelle et géométrie	1, 19 2, 11	1, 25 1, 4	1, 0 – 1, 2	1, 15	4, 0
effet environ- nement	1, 19 2, 11			1, 15	^(b)

TAB. 3.1 – *Considération des différents effets selon divers auteurs [Col98].*

Au tableau 3.1 il faut ajouter les précisions suivantes :

- (a) les facteurs proposés convertissent la courbe moyenne obtenue sur éprouvette en une courbe correspondant à une probabilité d'amorçage de 5% ;
- (b) ce facteur est déjà contenu dans le facteur d'échelle de 4, 0 ci-dessus.

Le tableau précédent montre que ces facteurs sont finalement mal connus. Par conséquent, ils sont représentés par des variables aléatoires dans l'analyse qui suit. Comme il est possible de donner des bornes de variation des facteurs γ_p^N , γ_p^S à partir de la littérature, on considère dans la suite que ces facteurs sont des variables aléatoires bornées de loi uniforme ou Bêta. Il va de soi qu'une investigation plus précise de résultats d'essais sur éprouvette et sur structure serait nécessaire pour affiner le choix des lois de ces paramètres.

3.2.5 Estimation des paramètres

Les incertitudes sur l'analyse de fatigue des structures peuvent aussi provenir des paramètres statistiques, intervenant d'une part dans l'inférence des lois des variables aléatoires, d'autre part dans la modélisation du comportement en fatigue. Ces incertitudes sont propres à l'usage de fonctions mathématiques pour ajuster un ensemble de données. Les estimateurs de ces paramètres sont des variables aléatoires [Sap90]. Ces paramètres doivent être correctement évalués et pour chacun d'eux la région de confiance associée doit être estimée.

3.2.6 Erreurs de modélisation

La complexité du mécanisme d'endommagement par fatigue nous amène à adopter des modèles mathématiques simples, basés sur de nombreuses hypothèses, pour décrire la fatigue. Par conséquent, ces modèles ne tiennent pas compte de tous les facteurs possibles agissant sur le comportement en fatigue des structures, et introduisent de ce fait des incertitudes sur la représentation du processus de fatigue.

type de chargement aléatoire	moyenne	coef. de variation
bande étroite	0,92/0,84	0,28/0,095
bande large	0,916	0,14

TAB. 3.2 – Variabilité de l'indice de Miner suivant le caractère large ou étroit de la bande du processus de chargement aléatoire [Mah99].

La règle de Miner, basée sur l'hypothèse d'un endommagement linéaire, n'est en général pas rigoureusement exacte. L'expérience montre que l'indice de Miner (pris en général égal à 1), que ne doit pas dépasser le dommage total cumulé au cours de la vie d'une structure, est biaisé. Des études menées dans le domaine de l'industrie *offshore* permettent d'estimer, pour des chargements aléatoires particuliers, la variabilité de l'indice de Miner (tableau 3.2). Ces incertitudes proviennent de plusieurs sources, notamment de la non prise en compte des interactions entre les différentes amplitudes de contrainte et des amplitudes inférieures à la limite d'endurance [Mah99]. Concernant le comptage Rainflow, même s'il est jugé conservatif en général, il reste une méthode parmi d'autres. De plus, il ne tient pas compte de l'arrangement des séquences de pics de contrainte. Quant à la fatigue sous contraintes multiaxiales, elle est encore mal maîtrisée du fait de l'abondance de critères établis dans ce domaine. Enfin, l'analyse du comportement mécanique des structures introduit un certain nombre d'hypothèses. Dans le code de dimensionnement des composants nucléaires, la loi de comportement du matériau est supposée élastique linéaire alors que l'apparition de fissures de fatigue est gouvernée par le cumul de déformation plastique cyclique au niveau de zones critiques.

Ainsi, toutes ces hypothèses introduites dans la modélisation du comportement en fatigue des structures peuvent conduire à des imprécisions. Toutefois, dans cette étude, nous n'introduisons pas d'aléa sur la modélisation du comportement en fatigue. Autrement dit, les modèles adoptés sont supposés exacts et non biaisés.

3.3 Expression du dommage aléatoire

On a identifié les différentes sources d'incertitudes qui affectent la prévision du comportement en fatigue des structures. Le dommage de fatigue résultant devient donc une variable aléatoire. Dans ce paragraphe, ce dommage aléatoire est estimé lorsque seuls le chargement et la résistance en fatigue sont aléatoires, les autres variables étant supposées pour l'instant déterministes. Le chargement thermique $\theta(t, \omega_S)$ est représenté par un processus gaussien stationnaire, où ω_S est l'aléa associé à la variabilité du chargement. La résistance à la fatigue, donnée par la durée de vie admissible sous sollicitation cyclique d'amplitude constante S , est également aléatoire et notée $N(S, \omega_m)$, où ω_m est l'aléa sur le matériau.

Supposons que le passage du chargement à la contrainte équivalente $S(t, \omega_S)$ d'où sont extraits les cycles de contrainte conserve la normalité et la stationnarité du processus. C'est le cas sous l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire du matériau [Pre94]. Ceci implique que le processus de contrainte $S(t, \omega_S)$ est également un processus gaussien stationnaire. Notons T_0 , la durée de service de la structure considérée. Pour évaluer le dommage aléatoire de fatigue, les cycles de contrainte doivent être extraits de la contrainte équivalente aléatoire par la méthode Rainflow. Cette opération n'est pas évidente puisque les variations de cette contrainte sont aléatoires. Dans ce cas, les amplitudes de cycles de contrainte sont aléatoires et caractérisées par leur distribution de probabilité.

Admettons que la méthode Rainflow appliquée à $S(t, \omega_S)$ sur la période T_0 fournit une séquence d'amplitudes de contrainte aléatoires $\{S_i(\omega_S)\}_{i=1}^{N_c}$, où N_c est a priori aléatoire et désigne le nombre total de cycles sur la période $[0, T_0]$. Sous l'hypothèse de stationnarité du processus et dans le cadre de la fatigue à grand nombre de cycles (T_0 grand), la variabilité de N_c est négligeable [Tov01, JJ93]. Dès lors, N_c est supposé constant dans la suite. Supposons enfin que les amplitudes de contrainte $S_i(\omega_S)$ sont indépendantes et équidistribuées, de densité de probabilité $f_S(S)$. Dans ce cas, deux approches sont considérées pour estimer le dommage aléatoire de fatigue :

- une approche continue ;
- une approche discrète.

3.3.1 Approche continue

Notons $n(S_a, \omega_S) dS_a$, le nombre de cycles d'amplitudes appartenant à $[S_a, S_a + dS_a]$, compté sur la durée $[0, T_0]$. Si la durée T_0 est suffisamment importante, alors N_c prend de grandes valeurs. D'après la loi des grands nombres, $n(T_0, \omega_S)$ est quasiment constante et s'obtient directement à partir de la fonction densité de probabilité $f_S(S_a)$ par :

$$n(S_a, \omega_S) dS = N_c f_S(S_a) dS_a \quad (3.6)$$

En vertu de la règle de Miner, le dommage élémentaire associé aux cycles d'amplitudes comprises entre S_a et $S_a + dS_a$ s'écrit :

$$d(N_c, S_a, \omega_S, \omega_m) = \frac{N_c f_S(S_a) dS_a}{N(S_a, \omega_m)} \quad (3.7)$$

où $N(S_a, \omega_m)$ est le nombre de cycles admissibles à amplitude constante égale à S_a . En faisant varier l'amplitude de contrainte, S_a , continûment sur son intervalle de définition,

le dommage total s'écrit :

$$D(N_c, \omega_m) = N_c \int_0^\infty \frac{f_S(S_a) dS_a}{N(S_a, \omega_m)} = N_c \mathbb{E}_S \left[\frac{1}{N(S_a, \omega_m)} \right] \quad (3.8)$$

où $\mathbb{E}_S [\cdot]$ est l'opérateur d'espérance statistique suivant ω_S . On note, dans cette formulation, que le dommage total aléatoire ne contient plus d'incertitude liée au chargement puisque ω_S disparaît du fait de l'application de la loi des grands nombres.

3.3.2 Approche discrète

Le dommage total s'écrit aussi d'après la règle de Miner :

$$D(N_c, \omega_S, \omega_m) = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{1}{N(S_i(\omega_S), \omega_m)} \quad (3.9)$$

Notons $Y_i(\omega_S, \omega_m)$ l'expression $1/N(S_i(\omega_S), \omega_m)$. Raisonnons conditionnellement en ω_m . Puisque les variables aléatoires $\{S_i(\omega_S)\}_{i=1}^{N_c}$ sont supposées indépendantes et équidistribuées suivant la loi $f_S(S)$, de même les variables $\{Y_i(\omega_S, \omega_m)\}_{i=1}^{N_c}$ sont indépendantes et équidistribuées suivant la distribution $f_S(S)$ [JJ93], lorsque ω_m est fixé. Par conséquent, les espérances et les variances respectives suivant ω_S des Y_i sont constantes. On note alors $\mu_Y(\omega_m)$ et $\sigma_Y^2(\omega_m)$ respectivement l'espérance et la variance suivant ω_S des Y_i conditionnellement en ω_m . Ayant supposé que N_c prend de grandes valeurs, on peut appliquer le théorème central limite et on obtient la relation suivante :

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_c} Y_i(\omega_S, \omega_m) - N_c \mu_Y(\omega_m)}{\sigma_Y(\omega_m) \sqrt{N_c}} \xrightarrow{\text{loi}} \xi(\omega_S) \equiv \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.10)$$

où $\mathcal{N}(0, 1)$ est la loi gaussienne centrée réduite. Ainsi le dommage total de fatigue devient :

$$D(N_c, \omega_S, \omega_m) \approx N_c \mu_Y(\omega_m) \left[1 + \frac{\sigma_Y(\omega_m)}{\mu_Y(\omega_m) \sqrt{N_c}} \xi(\omega_S) \right], \quad N_c \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

Quand N_c tend vers l'infini, le terme $\sigma_Y(\omega_m) \xi(\omega_S) / \mu_Y(\omega_m) \sqrt{N_c}$ tend vers zéro et le dommage tend vers $N_c \mu_Y(\omega_m)$. En reportant l'expression de $\mu_Y(\omega_m) = \mathbb{E}_S [1/N(S_a, \omega_m)]$, on retrouve l'expression approchée (section 3.3.1) du dommage dans la formulation continue. On en déduit que pour N_c très grand, les deux formulations sont équivalentes. Toutefois, dans la formulation discrète, apparaît explicitement l'écart dû à la loi des grands nombres.

3.4 Conclusion

La méthode de prévision de la durée de vie en fatigue des structures comporte beaucoup d'incertitudes. Ces incertitudes peuvent provenir des variations du chargement, de la variabilité des paramètres mécaniques de la structure, de la dispersion des données d'essais de fatigue et de la différence entre les comportements en fatigue, d'une part des éprouvettes testées en laboratoire, d'autre part de la structure réelle. Mais ces incertitudes

sont également causées par les estimations des paramètres du modèle et par les erreurs de modélisation. Dès lors, le dommage de fatigue devient une variable aléatoire. Cette variable est calculée suivant deux approches : une approche continue et une approche discrète. Celles-ci se révèlent équivalentes lorsque le processus de chargement est stationnaire et le nombre de cycles suffisamment grand.

Dans le code de dimensionnement en fatigue des composants nucléaires, les incertitudes liées au comportement en fatigue sont masquées par des facteurs de marge pour couvrir le manque de connaissance du phénomène de fatigue, sans trop connaître le contenu probabiliste des marges employées. Ayant listées et caractérisées les différentes sources d'incertitudes qui affectent le comportement en fatigue des structures, notre objectif est de les intégrer dans une analyse de fiabilité en fatigue afin d'estimer le risque associé aux marges d'incertitudes utilisées dans la procédure de dimensionnement déterministe.

Chapitre 4

Résistance aléatoire à la fatigue

4.1 Introduction

Les résultats d'essais sur des éprouvettes soumises à des sollicitations cycliques d'amplitude constante constituent la principale source d'information sur la résistance en fatigue des matériaux. Cependant, les données d'essais de fatigue présentent une forte dispersion qui dépend d'une part des imperfections des conditions d'essais et d'autre part de facteurs incontrôlés tels que les caractéristiques du matériau, sa structure métallurgique, le type de chargement, l'environnement, etc. Aujourd'hui, cette dispersion est considérée comme un aspect intrinsèque du phénomène de fatigue. Ceci montre que le modèle déterministe de résistance à la fatigue adopté dans le code de dimensionnement des composants nucléaires [Col00] n'est pas entièrement satisfaisant pour construire un modèle mathématique de fatigue. Il est nécessaire de décrire la résistance à la fatigue par un modèle probabiliste. Ceci passe par la caractérisation statistique des données d'essais de fatigue afin d'identifier certaines régularités dans l'ensemble des données mais aussi d'intégrer leur dispersion dans un calcul fiabiliste de fatigue en estimant la distribution probabiliste de la résistance en fatigue.

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place une méthode de traitement statistique de données expérimentales de fatigue afin de déterminer la loi de la durée de vie en fatigue pour une contrainte d'amplitude donnée. Cette méthode est appliquée à une base de données propre à EDF. Enfin, la fiabilité du modèle déterministe de résistance à la fatigue est évaluée par rapport aux incertitudes sur les données de fatigue.

4.2 Principe de base du traitement statistique des données de fatigue

Les données d'essais de fatigue forment un nuage de points dispersés. Le traitement statistique de ces données vise à estimer leur tendance moyenne et la loi probabiliste de l'écart résiduel. D'une manière générale pour caractériser statistiquement un nuage de points (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, K$, K étant le nombre de points, on utilise une *méthode de régression*. Les variables x_i , appelées variables contrôlées, peuvent être fixées au gré de l'expérimentateur. Les variables y_i sont observées. On suppose qu'elles sont aléatoires et contiennent toutes les incertitudes sur les données. On admet que la variable aléatoire Y

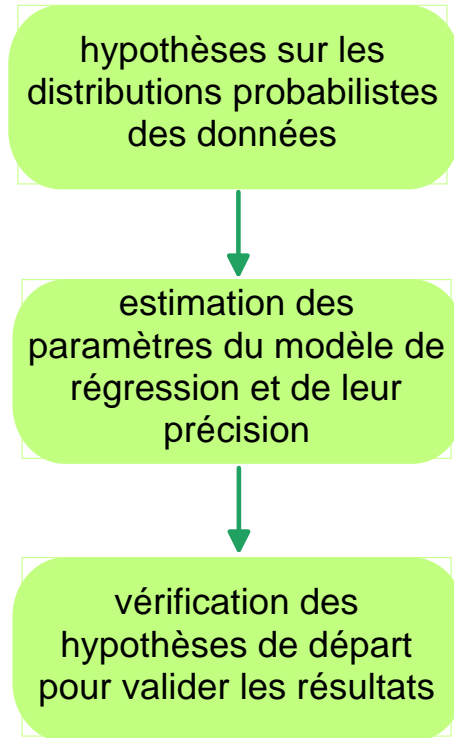


FIG. 4.1 – Schéma de la méthode de régression.

peut s'écrire sous la forme :

$$Y = E[Y | X] + \varepsilon(X) \quad (4.1)$$

où $E[Y | X]$ est l'espérance conditionnelle de la variable Y à X fixé et $\varepsilon(X)$ l'écart résiduel. La méthode de régression fournit un estimateur de $E[Y | X]$ sous la forme d'une fonction de la variable X dépendant de p paramètres (q_1, \dots, q_p) :

$$E[Y | X = x] = f(x ; q_1, \dots, q_p) \quad (4.2)$$

Cette méthode nous permet par ailleurs d'estimer la loi probabiliste des écarts résiduels $\varepsilon(X = x_i)$. La méthode de régression comporte trois étapes principales (FIG. 4.1) :

1. le choix de certaines hypothèses sur les données ;
2. l'estimation des paramètres (q_1, \dots, q_p) et de leurs précisions respectives ;
3. la vérification des hypothèses émises au départ pour valider les résultats.

Dans le cas des données d'essais de fatigue, la variable observée est le nombre N de cycles à la rupture de l'éprouvette, tandis que la variable contrôlée est l'amplitude S_a du cycle de contrainte appliqué. On cherche à estimer la distribution conditionnelle de N à S_a fixée. Plusieurs auteurs ont montré [Bas60] qu'au moins en dehors de la zone d'endurance du matériau, on peut considérer que la loi conditionnelle de N à S_a fixée est log-normale. Dans cette étude, la loi de N est donc supposée *log-normale* pour tout S_a fixée. Le nombre aléatoire de cycles peut alors s'écrire :

$$\ln N(S_a, \omega) = \eta(S_a) + \varepsilon(S_a, \omega) \quad (4.3)$$

où $\eta(S_a)$ est l'espérance conditionnelle de la variable $\ln N(S_a, \omega)$ à S_a fixée et $\varepsilon(S_a, \omega)$ une variable aléatoire gaussienne centrée.

4.3 Hypothèses sur les données

Tout d'abord, notons que les données d'expériences de fatigue contiennent à la fois des points correspondant à des ruptures d'éprouvettes et une portion de points associés à des essais n'ayant pas abouti à une rupture. Puisque l'observation porte exclusivement sur le nombre de cycles à la rupture, *on choisit de traiter uniquement les essais qui conduisent à une rupture de l'éprouvette*. Les points correspondant à des non-ruptures d'éprouvettes sont par conséquent exclus.

Les autres hypothèses portent sur le modèle statistique utilisé pour représenter le nuage de points. Ce modèle correspond à l'ensemble des lois de probabilité auquel est supposée appartenir la distribution des observations. En se référant à l'expression (4.1), ce modèle suggère deux choix :

1. le choix d'une classe de fonctions censée contenir la fonction $\eta(S_a)$;
2. le choix de la loi de probabilité de l'écart résiduel $\varepsilon(S_a, \omega)$.

4.3.1 Modélisation de l'espérance

Le modèle choisi pour représenter la forme de la courbe moyenne de résistance en fatigue est basé sur celui utilisé dans le code ASME. Le modèle du code ASME est issu des travaux de Langer [Lan62] et s'appuie sur une propriété établie par Coffin ([Cof54], [TC59]). Il s'écrit (section 2.4.3) :

$$S_a = \frac{E}{4\sqrt{N}} \ln \frac{100}{100 - RA} + S_D \quad (4.4)$$

où

E est le module d'élasticité ;

N est le nombre de cycles à rupture ;

RA est le pourcentage de réduction de surface lors d'un essai de traction avec une propagation de fissure ;

S_D est la limite d'endurance.

En s'inspirant de ce modèle, la courbe moyenne de fatigue est postulée sous la forme :

$$S_a = b N^a + S_D \quad (4.5)$$

a , b et S_D étant des paramètres. En inversant cette dernière formule, on obtient la fonction modélisant l'espérance de $\ln(N)$ à S_a fixée :

$$\eta(S_a) = A \ln(S_a - S_D) + B \quad (4.6)$$

qui dépend des paramètres A , B et S_D .

4.3.2 Modélisation des écarts résiduels

Le nombre de cycles étant supposé log-normal, les écarts résiduels, notés ε_i , sont *normalement distribués*. On les suppose en outre *indépendants* entre eux. De plus, il est admis que les écarts résiduels associés à des amplitudes différentes sont parfaitement corrélés. Cela revient à supposer qu'une éprouvette donnée a une durée de vie en fatigue globalement bonne ou mauvaise quelle que soit l'amplitude de contrainte à laquelle elle est testée (ce qui n'est pas vérifiable puisqu'un seul essai à rupture peut être réalisé). Ces hypothèses permettent de simplifier l'équation (4.3), qui devient :

$$\ln N(S_a, \omega) = \eta(S_a) + \sigma(S_a)\xi(\omega) \quad (4.7)$$

où $\xi(\omega)$ est une variable gaussienne centrée réduite et $\sigma(S_a)$ l'écart-type de l'écart résiduel. Le choix précédent permet de représenter la dispersion des données par une seule variable aléatoire $\xi(\omega)$. Trois approches différentes sont proposées pour modéliser $\sigma(S_a)$:

- **Hypothèse 1 (H1)** : l'écart-type des résidus est supposé constant, indépendant du niveau de contrainte S_a . Dans ce cas, les paramètres A , B et S_D et l'écart-type σ sont estimés par la méthode classique des moindres carrés.
- **Hypothèse 2 (H2)** : On suppose l'écart-type variable fonction du niveau de contrainte S_a :

$$\sigma = \sigma(S_a, q'_1, \dots, q'_{p'}) \quad (4.8)$$

où q'_i , $i = 1, \dots, p'$ sont des paramètres propres à l'écart-type. Ces paramètres sont estimés en appliquant une méthode de régression classique aux points correspondant aux écarts-types empiriques des résidus en fonction de l'amplitude de contrainte. Puis, connaissant l'écart-type empirique associé à chaque niveau de contrainte, les paramètres A , B et S_D du modèle de courbe moyenne sont obtenus par une méthode de régression pondérée.

- **Hypothèse 3 (H3)** : On suppose l'écart-type lié à la moyenne des durées de vie pour un niveau de contrainte donné :

$$\sigma = \sigma(\overline{\ln N}(S_a), q'_1, \dots, q'_{p'}) \quad (4.9)$$

où $\overline{\ln N}(S_a)$ est la moyenne du logarithme de la durée de vie en fonction du niveau de contrainte S_a et q'_i , $i = 1, \dots, p'$ des paramètres propres à l'écart-type. On construit alors le graphe des points correspondant aux écarts-types empiriques des résidus en fonction des moyennes empiriques des durées de vie respectives pour un niveau de contrainte donné. Ce graphique peut suggérer une forme à adopter pour la fonction $\sigma(\overline{\ln N}(S_a))$. On obtient ainsi une fonction qui dépend à la fois des paramètres de la courbe moyenne de fatigue et de paramètres propres à l'écart-type. Les paramètres de la courbe moyenne de fatigue et les paramètres propres à l'écart-type sont évalués simultanément par la méthode du maximum de vraisemblance.

4.4 Méthodes d'estimation des paramètres du modèle

4.4.1 Méthode classique des moindres carrés

Lorsque l'écart-type est supposé constant, la *méthode classique des moindres carrés* (**MCC**) est adoptée. Les variables aléatoires ε_i , $i = 1, 2, \dots, K$ sont indépendantes et d'écart-types égaux. Pour estimer les paramètres de la courbe moyenne de fatigue nous devons minimiser la somme des carrés des distances entre les observations et la courbe moyenne :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K [\ln N_i - \eta(S_i)]^2 \quad (4.10)$$

Ensuite, ayant estimé les paramètres du modèle, un estimateur de l'écart-type σ est donné par la formule suivante [HJM92] :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K-p} \sum_{i=1}^K [\ln N_i - \eta(S_i)]^2 \quad (4.11)$$

où p est le nombre de paramètres du modèle qui vaut ici 3.

4.4.2 Méthode des moindres carrés pondérés

Quand l'écart-type est variable mais connu a priori, la méthode des *moindres carrés pondérés* (**MCP**) présente de bonnes propriétés. Dans ce cas, nous devons minimiser la somme des carrés des distances entre les observations et la courbe moyenne, pondérés par l'inverse de la variance empirique σ_i^2 correspondante :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{[\ln N_i - \eta(S_i)]^2}{\sigma_i^2} \quad (4.12)$$

4.4.3 Méthode du maximum de vraisemblance

Par contre, un écart-type inconnu mais modélisé par une fonction dépendant de paramètres nous amène à utiliser une *méthode de maximum de vraisemblance* (**MV**). Nous devons maximiser la probabilité que les observations coïncident avec leurs valeurs données respectivement par la fonction de régression choisie. Cette probabilité est appelée la vraisemblance de l'observation. Les observations sont supposées indépendantes entre elles, gaussiennes et leurs écarts-types suivent la troisième forme, plus générale, retenue pour modéliser la dispersion des données (section 4.3.2). Cette forme de l'écart-type indique qu'il dépend à la fois des paramètres de la fonction de régression et de paramètres qui lui sont propres. Nous énonçons à présent un résultat général. Notons q_η le vecteur constitué par les paramètres de la fonction de régression et q_σ le vecteur constitué par les paramètres propres à l'écart-type. La vraisemblance de l'observation s'écrit :

$$V_K = \prod_{i=1}^K \frac{1}{\sigma(S_i, q_\eta, q_\sigma) \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(\ln N_i - \eta(S_i, q_\eta))^2}{\sigma^2(S_i, q_\eta, q_\sigma)} \right] \quad (4.13)$$

Maximiser V_K équivaut à minimiser :

$$L_K = -\frac{2}{K} \ln V_K \quad (4.14)$$

A une constante près, qui n'intervient pas dans le problème de minimisation, on obtient :

$$L_K = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[\ln(\sigma^2(S_i, q_\eta, q_\sigma)) + \frac{(\ln N_i - \eta(S_i, q_\eta))^2}{\sigma^2(S_i, q_\eta, q_\sigma)} \right] \quad (4.15)$$

Ce problème de minimisation de L_K est résolu par une méthode numérique d'optimisation développée sur le logiciel Mathcad [Mat01].

Notons par ailleurs que la méthode classique des moindres carrés et la méthode des moindres carrés pondérés ne tiennent pas compte de l'hypothèse de normalité des résidus, elles consistent seulement à minimiser la distance entre les observations et la courbe moyenne. En revanche, la méthode du maximum de vraisemblance utilise cette hypothèse, car elle consiste à rendre maximum la probabilité que les observations coïncident avec le modèle. Toutefois, un lien étroit existe entre les méthodes de moindres carrés et la méthode du maximum de vraisemblance. Les premières se ramènent aussi à des méthodes de maximum de vraisemblance lorsque les résidus sont supposés indépendants entre eux et normalement distribués [Cow98].

Pour ces trois méthodes, la précision des estimateurs est donnée par :

- la matrice de covariance du vecteur des estimateurs ;
- une région de confiance à 95% pour l'ensemble des paramètres.

Le détail des calculs menés pour les différentes méthodes de régression est présenté en annexe B.

4.5 Vérification des hypothèses

Les hypothèses à vérifier sont la normalité des écarts résiduels ε_i et l'adéquation des données au modèle de régression donné par la fonction $\eta(S)$.

4.5.1 Test de normalité

Pour valider la normalité des écarts résiduels ε_i , on utilise le test graphique de la droite de Henry et le test de Kolmogorov.

Le test graphique de la droite de Henry est réalisé de la manière suivante. Les valeurs F_i de la fonction de répartition empirique sont d'abord évaluées par :

$$F_i = \frac{\text{effectif de } \{\varepsilon < \varepsilon_i\}}{K} \quad (4.16)$$

où K est le nombre total d'éléments dans l'échantillon constitué par les ε_i . Notons que K doit être suffisamment grand pour que les F_i soient proches de leurs valeurs théoriques respectives. Aux valeurs F_i sont ensuite associées les valeurs correspondantes $\widehat{\varepsilon}_i$ de la gaussienne centrée réduite obtenue par : $\widehat{\varepsilon}_i = \Phi^{-1}(F_i)$, Φ étant la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite. Enfin, le graphe des points $(\widehat{\varepsilon}_i, \varepsilon_i)$ est construit. La

normalité de l'échantillon $\{\varepsilon_i\}$ est vérifiée lorsque ces points sont alignés puisque dans ce cas les termes ε_i doivent coïncider avec $\sigma \widehat{\varepsilon}_i + m$, où m et σ sont respectivement la moyenne et l'écart-type des ε_i . La droite ainsi obtenue est la droite de Henry.

Le test de Kolmogorov, plus rigoureux, est un test statistique. Un test statistique fournit un critère qui permet de trancher entre deux hypothèses H_0 et H_1 . En ce qui concerne le test de Kolmogorov, les deux hypothèses considérées sont :

$$\begin{aligned} H_0 &: \widehat{F}_K(\varepsilon) = F(\varepsilon) \\ H_1 &: \widehat{F}_K(\varepsilon) \neq F(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.17)$$

où $\widehat{F}_K(\varepsilon)$ est la fonction de répartition empirique de l'échantillon de taille K considéré ($F_i = \widehat{F}_K(\varepsilon_i)$) et $F(\varepsilon)$, la fonction de répartition théorique postulée pour cet échantillon. Dans notre cas, $F(\varepsilon)$ correspond à une loi gaussienne. Ce test s'appuie sur une variable de décision égale à $D_K = \max |F_i - F(\varepsilon_i)|$. Sous l'hypothèse H_0 , D_K est asymptotiquement distribuée comme suit [Sap90] :

$$\text{Pr ob}(\sqrt{K}D_K < x) \rightarrow P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^j \exp(-2 j^2 x^2) \quad (4.18)$$

La fonction $P(x)$ est bien définie et tabulée. Le risque d'erreur est fixé à l'avance et est défini par la probabilité de choisir H_1 alors que H_0 est vraie. Autrement dit, c'est la probabilité de prétendre à tort que l'échantillon étudié n'est pas issu d'une variable gaussienne. Ce risque est donné par :

$$\text{risque d'erreur} = \text{Pr ob}(R|H_0) \quad (4.19)$$

où R est la région critique correspondant à l'ensemble des valeurs de D_K qui conduisent à choisir H_1 au lieu de H_0 . Ayant fixé le risque d'erreur (il est pris en général égal à 0,05) et en utilisant les expressions (4.18) et (4.19), on évalue pour D_K un seuil D_K^c au dessus duquel la normalité de l'échantillon n'est plus valide. Les différentes valeurs de D_K^c sont tabulées en fonction de la taille de l'échantillon K pour $K < 80$ [Sap90]. Au delà, il est démontré que :

$$D_K^c = \frac{1,3581}{\sqrt{K}}, \quad K > 80 \quad (4.20)$$

Les tests de normalité sont appliqués à l'échantillon complet sous l'hypothèse **(H1)** où l'écart-type est supposé constant, tandis qu'ils sont appliqués séparément à chaque classe de points associée à un niveau de contrainte sous les hypothèses **(H2)** et **(H3)** où l'écart-type est supposé variable.

4.5.2 Mesure de l'ajustement

L'adéquation du modèle aux données est mesurée à l'aide du rapport de corrélation R^2 . Cette quantité permet de vérifier l'existence d'une relation fonctionnelle entre deux variables, dans notre cas elle fournit la proportion de variables $\ln N_i$ "expliquée" par les

variables S_i avec la fonction $\eta(S)$ [HJM92] :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^K (\eta(S_i) - \overline{\ln N})^2}{\sum_{i=1}^K (\ln N_i - \overline{\ln N})^2} \quad (4.21)$$

où $\overline{\ln N}$ est la moyenne empirique des variables $\ln N_i$:

$$\overline{\ln N} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \ln N_i \quad (4.22)$$

4.6 Traitement statistique des données de fatigue

4.6.1 Description des données disponibles

La base de données d'essais de fatigue utilisée contient 588 points. Ces données sont très hétérogènes. En effet, les éprouvettes utilisées ne sont pas toutes du même modèle ni du même type d'acier. Les essais ne provoquent pas tous la rupture des éprouvettes. Les températures des essais varient entre 20 °C et 650 °C. Les sollicitations sont périodiques d'amplitude constante et pour une grande part de moyenne nulle (sollicitation alternée). De plus, les fréquences des sollicitations ne sont pas toutes identiques. Par ailleurs, on sait que la majorité des essais est réalisée à déformation imposée, le reste étant à contrainte imposée, sans pouvoir faire aisément la distinction entre ces deux types de sollicitation.

Dès lors, une sélection préalable des données est effectuée pour des raisons d'homogénéité. Ainsi, notre étude se limite aux éprouvettes en aciers de type 304 et 316 dont les caractéristiques sont voisines. De plus, seuls les essais sous sollicitation de moyenne nulle (sollicitation alternée symétrique) qui ont entraîné une rupture, sont retenus. Enfin, les effets liés au type d'éprouvette utilisée, à la nature des sollicitations (contrainte ou déformation imposée) et à l'influence de la fréquence des sollicitations sont négligés. On obtient finalement 325 points. Ces données sont réparties suivant 3 classes de températures (Tableau 4.1 et Figures 4.2, 4.3 et 4.4). Le traitement statistique est effectué sur chacune des classes et permet d'évaluer l'influence de la température. Notons par ailleurs que nous disposons de très peu de points par niveau de contrainte.

classe de température	nb. de points	module d'Young moyen
température ambiante	99	183457 MPa
$T \in [400 \text{ °C}; 550 \text{ °C}]$	70	177252 MPa
$T \in [550 \text{ °C}; 650 \text{ °C}]$	156	161337 MPa

TAB. 4.1 – *Données réparties en classes de température.*

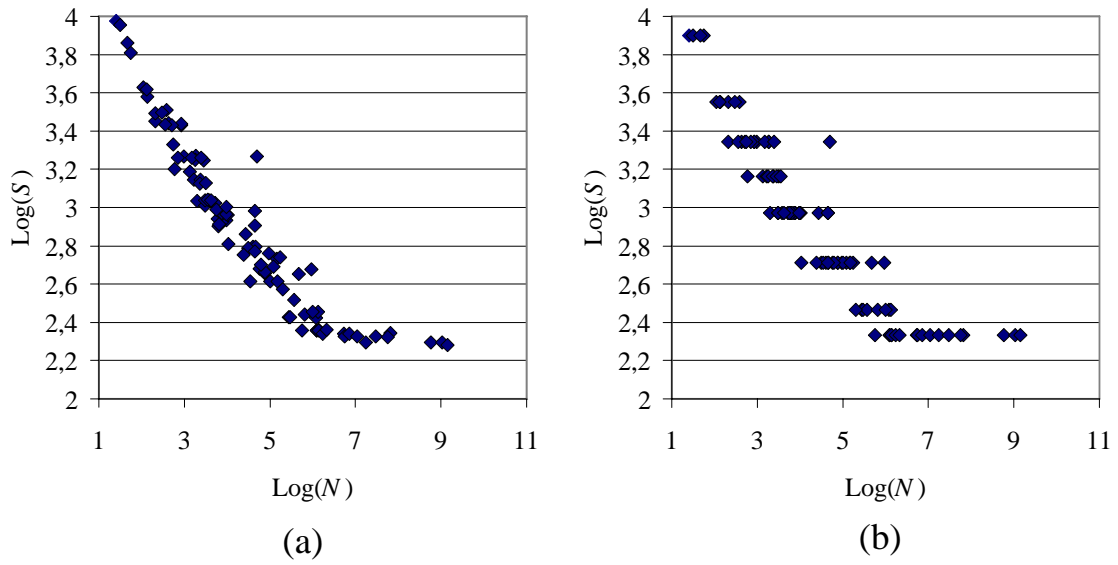


FIG. 4.2 – Données de fatigue à température ambiante : (a) données initiales ; (b) données regroupées en classes.

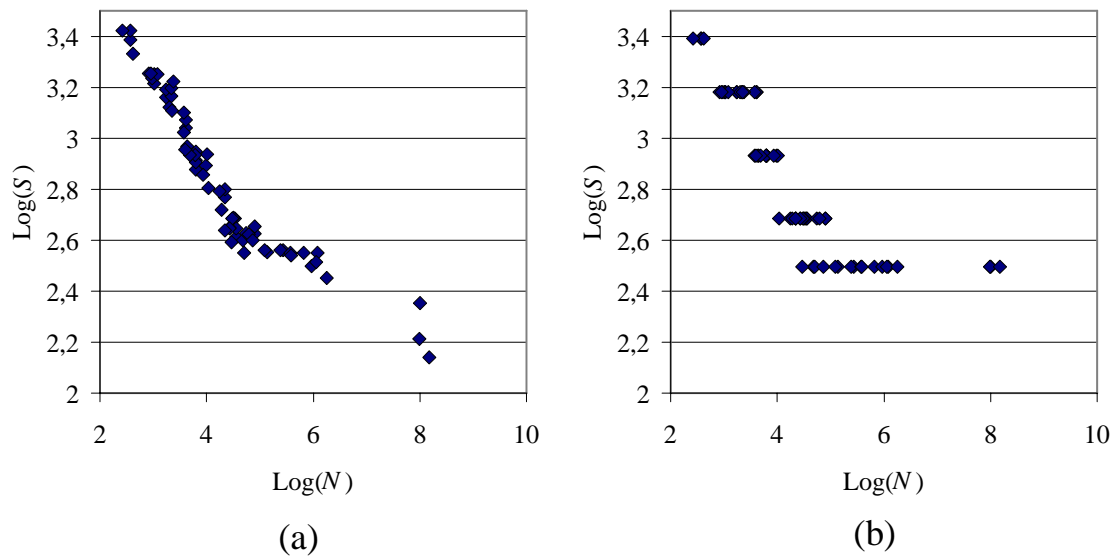


FIG. 4.3 – Données de fatigue à température dans l'intervalle $[400^\circ\text{C}; 550^\circ\text{C}]$: (a) données initiales ; (b) données regroupées en classes.

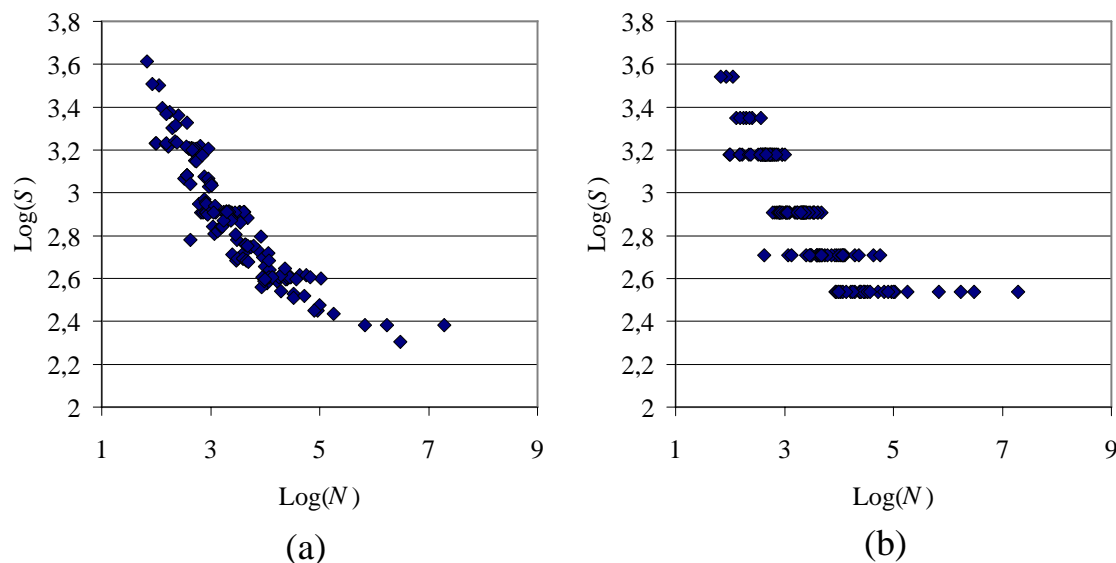


FIG. 4.4 – Données de fatigue à température dans l'intervalle [550 °C; 650 °C] : (a) données initiales ; (b) données regroupées en classes.

4.6.2 Estimation des variations de l'écart-type de $\ln(N)$ en fonction de S_a

Rappelons que trois formes particulières sont proposées pour représenter l'écart-type de $\ln N$ en fonction de S_a (section 4.3.2). Dans la première, l'écart-type est supposé constant et sa valeur est obtenue par la méthode classique des moindres carrés (section 4.4.1). Nous présentons donc la manière dont les variations de l'écart-type de $\ln N$ en fonction de S_a sont estimées sous les hypothèses **(H2)** et **(H3)**.

Hypothèse **(H2)**

On souhaite ajuster une courbe aux écarts-types empiriques en fonction du niveau de contrainte (Figure 4.5). Pour cela, encore faut-il avoir suffisamment de points par niveau de contrainte pour estimer précisément les écarts-types. Or, comme il est noté dans la description des données (section 4.6.1), on ne dispose que de très peu de points par palier. Les données empiriques sont alors regroupées par classes d'intervalle constant dans le domaine de variation des amplitudes de contrainte (figures 4.2, 4.3 et 4.4). Puis, pour chaque classe, le niveau de contrainte est fixé à sa moyenne sur la classe considérée, soit S_i , $i = 1, \dots, n_{classes}$, $n_{classes}$ étant le nombre de classes. Ceci permet d'obtenir suffisamment de points par niveau de contrainte et d'estimer des écarts-types empiriques. Cette manière de procéder introduit donc une approximation et nous sert uniquement à mettre en place la démarche de régression pondérée sur une variable d'écart-type variable. Cette approximation pourrait être levée si on disposait de suffisamment d'essais par niveau de contrainte. Aux écarts-types empiriques ainsi calculés on ajuste par la méthode de

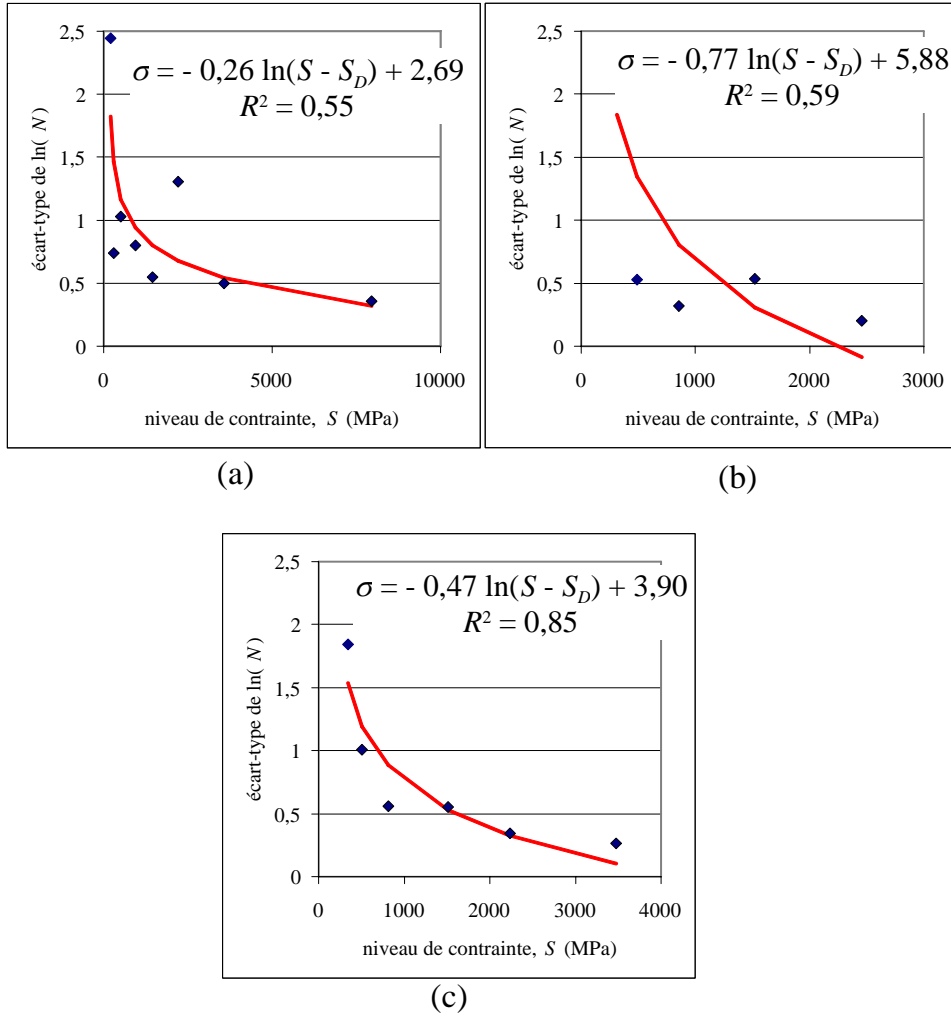


FIG. 4.5 – Variation de l'écart-type de $\ln(N)$ en fonction de S : (a) données à température ambiante ; (b) données à température dans l'intervalle $[400^\circ\text{C}; 550^\circ\text{C}]$; (c) données à température dans l'intervalle $[550^\circ\text{C}; 650^\circ\text{C}]$.

régression classique une courbe de la forme :

$$\sigma(S_a) = A' \ln(S_a - S_D) + B' \quad (4.23)$$

où A' et B' sont les paramètres recherchés et S_D est la limite d'endurance qu'on retrouve dans l'expression de la courbe moyenne. La forme (4.23) retenue permet de donner à l'écart-type une forme voisine de celle de la courbe moyenne et de lui garantir le même comportement asymptotique. La figure 4.5 montre qu'avec nos données, l'estimation des paramètres A' et B' est peu précise pour la classe de température ambiante et la classe de température dans l'intervalle $[400^\circ\text{C}; 550^\circ\text{C}]$. En effet, les mesures de l'ajustement (55% pour la première et 59% pour la seconde) sont faibles. En revanche la mesure de l'ajustement vaut 85% pour la classe de température $[550^\circ\text{C}; 650^\circ\text{C}]$. L'estimation des paramètres A' et B' est donc plus précise pour cette dernière classe de température. En ce qui concerne S_D , il est supposé connu a priori et obtenu par la méthode classique des

moindres carrés appliquée aux données de fatigue.

Hypothèse (H3)

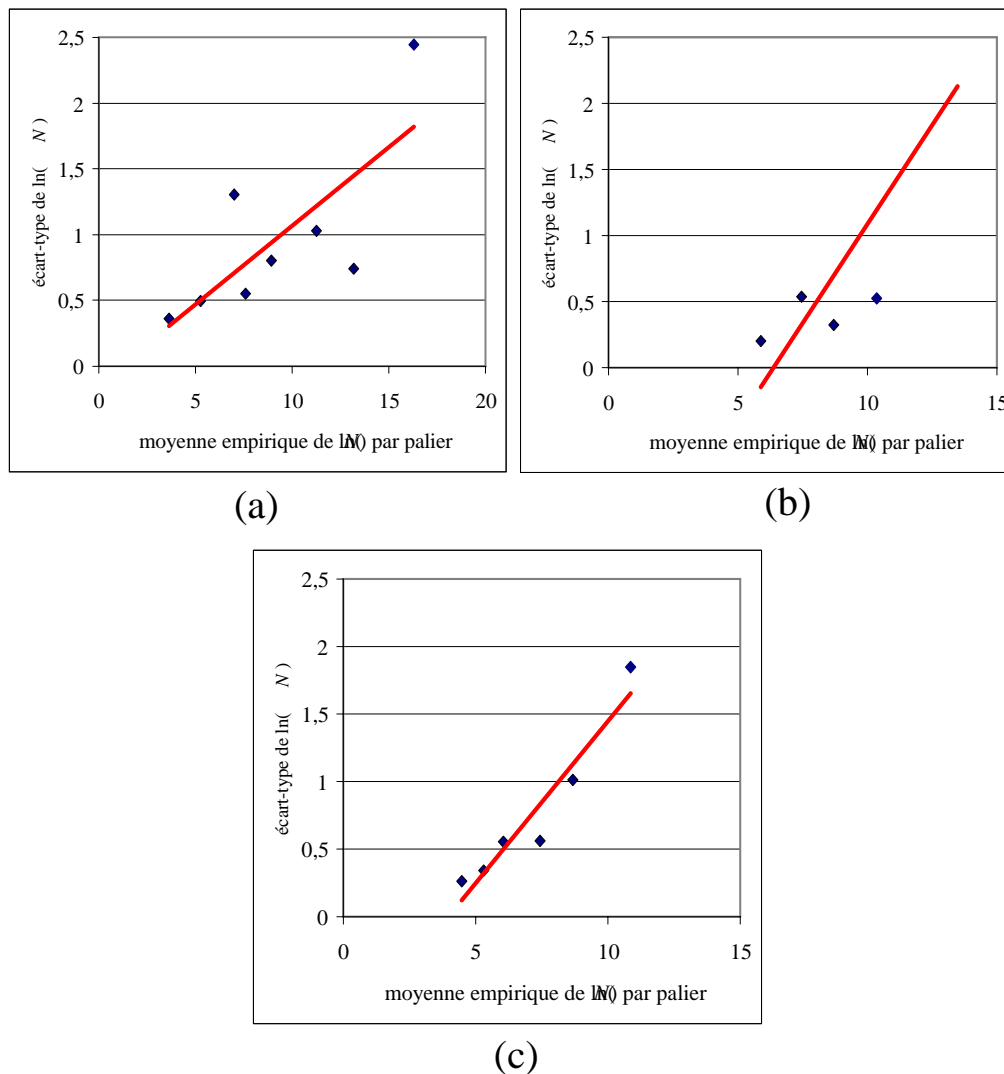


FIG. 4.6 – Relation entre écart-type et moyenne empiriques des observations : (a) données à température ambiante ; (b) données à température dans $[400^\circ\text{C}; 550^\circ\text{C}]$; (c) données à température dans $[550^\circ\text{C}; 650^\circ\text{C}]$.

Le troisième modèle de l'écart-type est plus général. Les variations de l'écart-type ne sont pas connues a priori, mais on suppose qu'il existe une relation entre l'écart-type et la moyenne des observations par niveau de contrainte. Afin de formuler cette relation, on représente sur un graphique les écarts-types empiriques en fonction des moyennes empiriques des observations pour chaque niveau de contrainte (Figure 4.6). En nous référant au graphique et pour simplifier le problème, nous admettons une relation linéaire entre

l'écart-type et la moyenne des observations de la forme :

$$\sigma(S_a) = \delta [A \ln(S_a - S_D) + B] \quad (4.24)$$

Un paramètre supplémentaire, δ , propre à l'écart-type est introduit. L'estimation de δ se fait en même temps que celle de la courbe moyenne de fatigue avec la méthode du maximum de vraisemblance (section 4.4.3). Du point de vue statistique, δ représente le coefficient de variation de $\ln N$. Cette formulation consiste donc à faire l'hypothèse d'un coefficient de variation constant.

4.6.3 Résultats numériques

Les données des trois classes de température sont traitées successivement par la méthode classique des moindres carrés (MCC), la méthode des moindres carrés pondérés (MCP) et la méthode du maximum de vraisemblance (MV).

Classe de température ambiante

Les estimations de la courbe moyenne de fatigue et de l'écart-type de la distribution du nombre de cycles par les différentes méthodes de régression sont indiquées dans le tableau 4.2.

méthodes	résultats numériques
MCC	$\eta(S_a) = -2, 17 \ln(S_a - 188, 39) + 23, 33$
	$\sigma(S_a) = 0, 94$
	$R^2 = 94\%$; $D_K = 0, 11$ pour $D_K^c = 0, 14$
MCP	$\eta(S_a) = -2, 29 \ln(S_a - 185, 60) + 24, 10$
	$\sigma(S_a) = -0, 26 \ln(S_a - 188, 39) + 2, 69$
	$R^2 = 95\%$
MV	$\eta(S_a) = -2, 28 \ln(S_a - 185, 80) + 24, 06$
	$\sigma(S_a) = 0, 09\eta(S_a)$
	$R^2 = 88\%$

TAB. 4.2 – Résultats numériques du traitement statistique des données à température ambiante.

Les courbes moyennes de fatigue obtenues par les différentes méthodes de régression sont très voisines (Figure 4.7). Le test de normalité est effectué sur les résidus. Lorsqu'ils sont supposés d'écart-types égaux, le test de la droite de Henry (Figure 4.8), de même que le test de Kolmogorov valident l'hypothèse de normalité des observations avec un niveau de confiance de 95% (tableau 4.2). Quand les résidus ont des écarts-types variables, le test de Kolmogorov est appliqué aux résidus issus de chaque niveau de contrainte, les données étant regroupées en classes. Ce test valide aussi la normalité des observations à chaque palier (Tableau 4.3). A chaque niveau, le critère de Kolmogorov est vérifié pour un niveau de confiance de 95%.

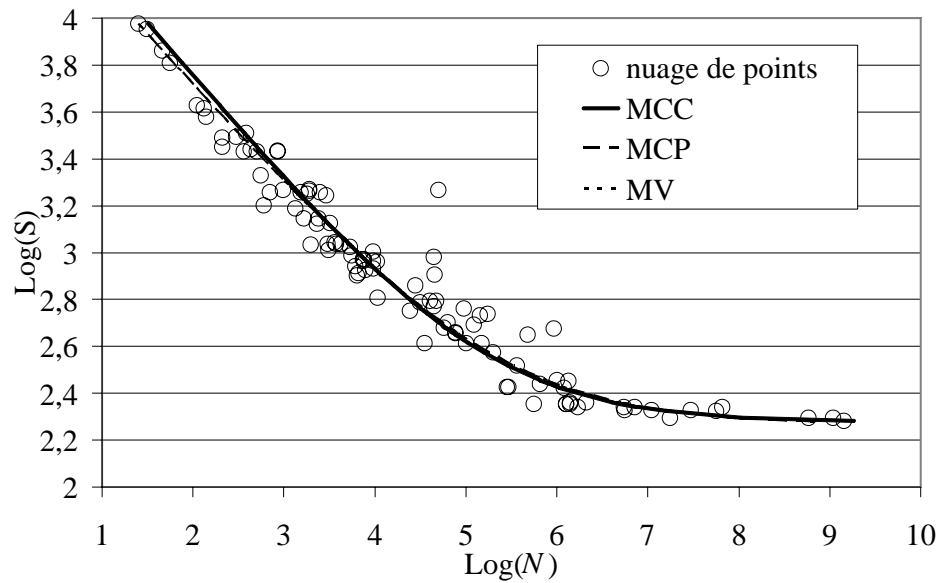


FIG. 4.7 – Résultats de la régression sur les données à température ambiante.

S_j (MPa)	nb. pts.	$\ln(N)$	σ_j	D_K	D_K^c
251,16	18	16,30	2,44	0,15	0,31
291,78	8	13,18	0,74	0,19	0,45
514,19	19	11,26	1,03	0,11	0,30
934,64	21	8,94	0,80	0,20	0,29
1457,31	9	7,58	0,55	0,14	0,43
2202,81	14	6,98	1,31	0,19	0,34
3577,01	6	5,25	0,50	0,24	0,51
7957,60	4	3,26	0,36	0,20	0,62

TAB. 4.3 – Résultats des tests de Kolmogorov appliqués aux données à température ambiante regroupées en classes.

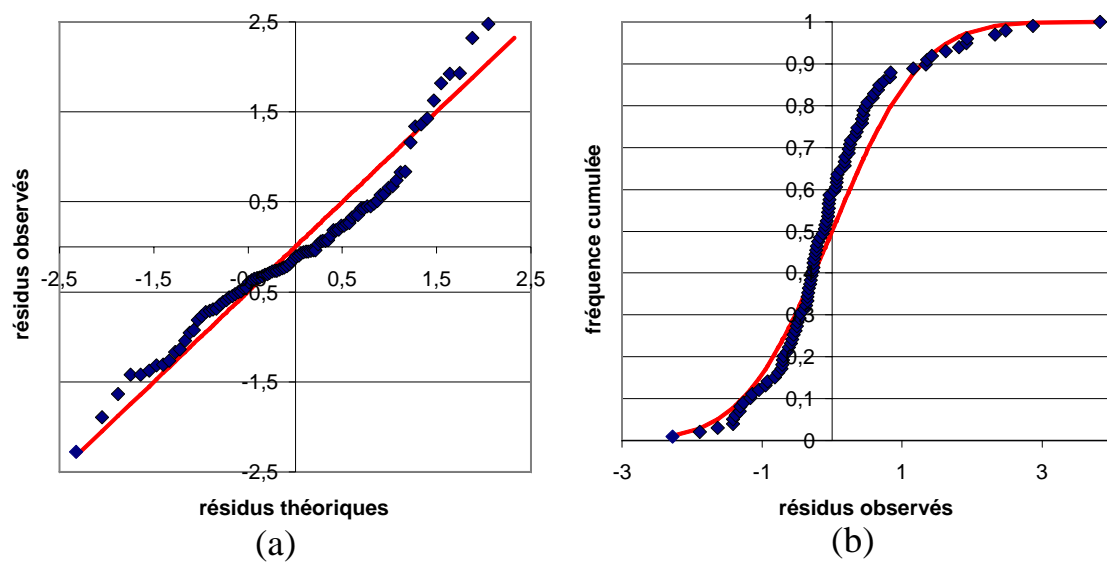


FIG. 4.8 – Test de normalité des résidus de variance homogène (données à température ambiante) : (a) droite de Henry; (b) fonction de répartition empirique.

Classe de température comprise entre 400 °C et 550 °C

méthodes	résultats numériques
MCC	$\eta(S_a) = -2,84 \ln(S_a - 121,61) + 27,69$
	$\sigma(S_a) = 0,84$
	$R^2 = 91\%$; $D_K = 0,11$ pour $D_K^c = 0,16$
MCP	$\eta(S_a) = -2,83 \ln(S_a - 121,04) + 27,65$
	$\sigma(S_a) = -0,77 \ln(S_a - 121,61) + 5,88$
	$R^2 = 92\%$
MV	$\eta(S_a) = -2,67 \ln(S_a - 127,66) + 26,52$
	$\sigma(S_a) = 0,07\eta(S_a)$
	$R^2 = 99\%$

TAB. 4.4 – Résultats numériques du traitement statistique des données à des températures dans l'intervalle [400°C;550°C].

Les courbes moyennes de fatigue obtenues par les différentes méthodes de régression (tableau 4.4) sont très voisines : les estimations respectives des paramètres sont proches et les courbes de régression se superposent quasiment (Figure 4.9). De même que pour la classe de température ambiante, la normalité des données est validée par le test de la droite de Henry (Figure 4.10) et le test de Kolmogorov lorsque l'écart-type est constant ou variable (tableaux 4.4 et 4.5).

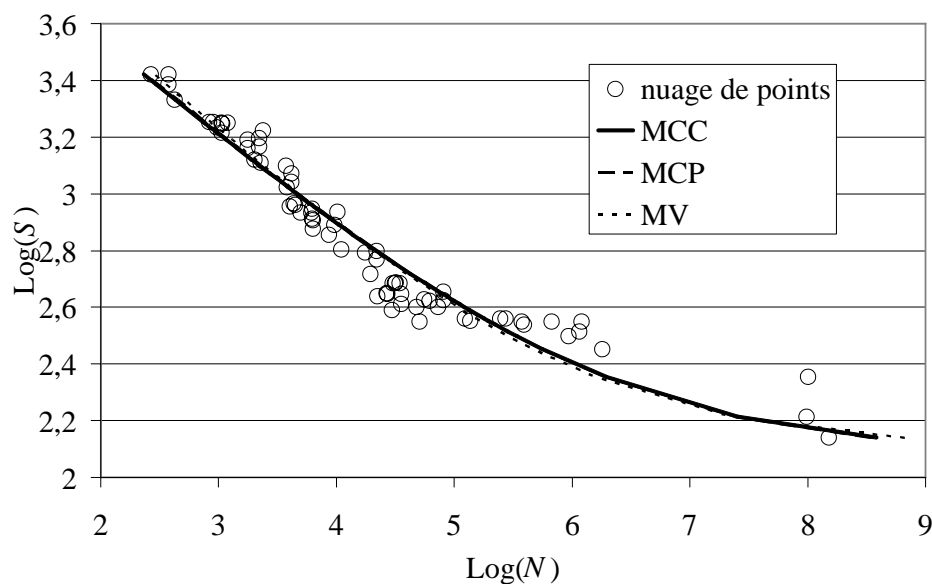


FIG. 4.9 – Résultats de la régression sur les données à température dans l'intervalle [400°C;550°C].

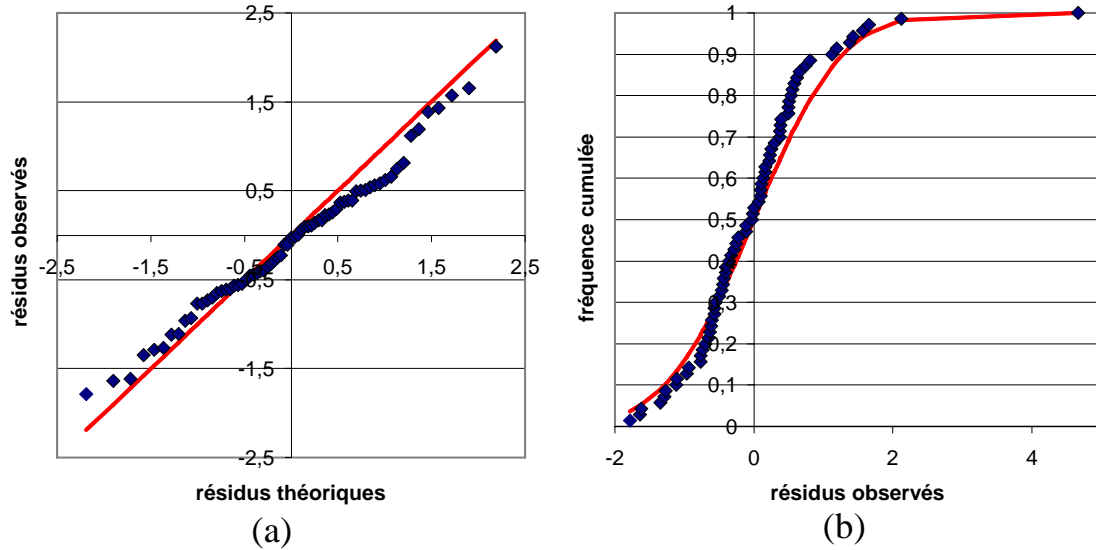


FIG. 4.10 – Test de normalité des résidus de variance homogène (données à température dans l'intervalle $[400^{\circ}\text{C}; 550^{\circ}\text{C}]$) : (a) droite de Henry; (b) fonction de répartition empirique.

S_j (MPa)	nb. pts.	$\ln(N)$	σ_j	D_K	D_K^c
313,66	18	13,47	2,62	0,20	0,30
485,39	18	10,35	0,53	0,18	0,30
653,02	13	8,69	0,32	0,19	0,36
1518,32	17	7,45	0,53	0,17	0,31
2456,67	4	5,87	0,20	0,19	0,62

TAB. 4.5 – Résultats des tests de Kolmogorov appliqués aux données, à des températures dans l'intervalle $[400^{\circ}\text{C}; 550^{\circ}\text{C}]$, regroupées en classes.

Classe de température comprise entre 550 °C et 650 °C

méthodes	résultats numériques
MCC	$\eta(S_a) = -2,09 \ln(S_a - 190,81) + 20,99$
	$\sigma(S_a) = 0,70$
	$R^2 = 89\%$; $D_K = 0,08$ pour $D_K^c = 0,10$
MCP	$\eta(S_a) = -1,77 \ln(S_a - 198,24) + 18,82$
	$\sigma(S_a) = -0,47 \ln(S_a - 190,81) + 3,90$
	$R^2 = 96\%$
MV	$\eta(S_a) = -1,95 \ln(S_a - 195,89) + 20,08$
	$\sigma(S_a) = 0,08\eta(S_a)$
	$R^2 = 99\%$

TAB. 4.6 – Résultats numériques du traitement statistique des données à des températures dans l'intervalle [550 °C ; 650 °C].

Les estimations de la courbe moyenne de fatigue et de l'écart-type de la distribution du nombre de cycles par les différentes méthodes de régression sont indiquées dans le tableau 4.6. Les courbes moyennes de fatigue obtenues par les différentes méthodes de régression sont très voisines (Figure 4.11). Les résultats des tests de la droite de Henry (figure 4.12) et de Kolmogorov (tableaux 4.6 et 4.7) valident la normalité des données.

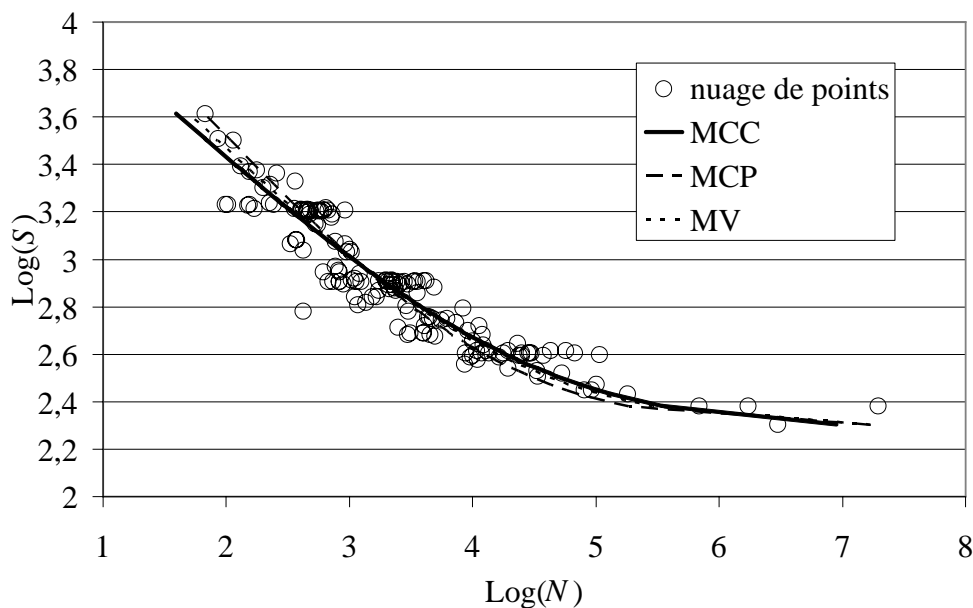


FIG. 4.11 – Résultats de la régression sur les données à température dans l'intervalle [550 °C ; 650 °C].

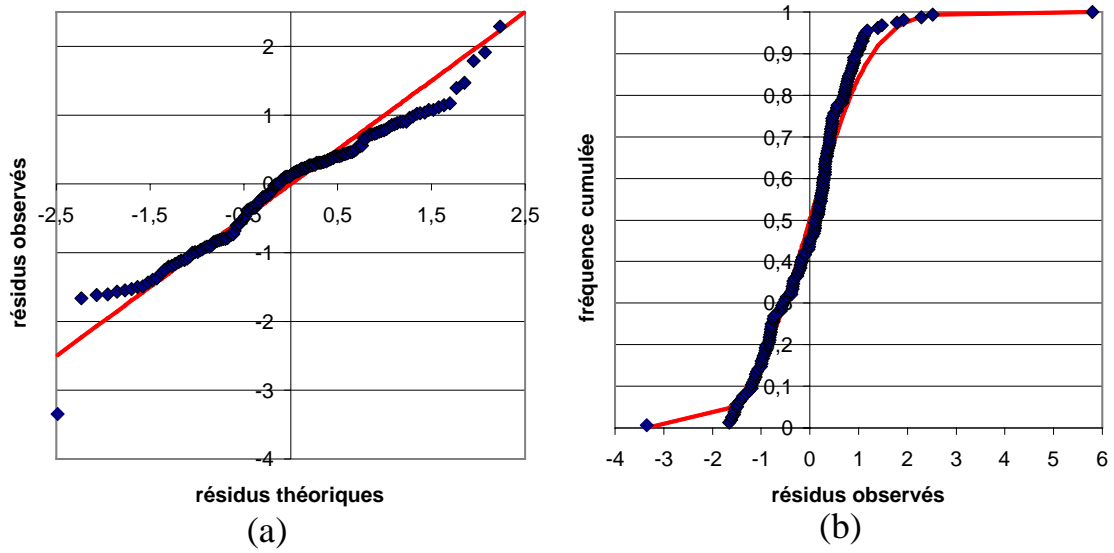


FIG. 4.12 – Test de normalité des résidus de variance homogène (données à température dans l'intervalle [550°C;650°C]) : (a) droite de Henry; (b) fonction de répartition empirique.

S_j (MPa)	nb. pts.	$\ln(N)$	σ_j	D_K	D_K^c
344,59	30	10,86	1,85	0,21	0,24
511,11	31	8,68	1,01	0,09	0,24
810,35	45	7,43	0,56	0,11	0,20
1509,84	40	6,04	0,55	0,15	0,21
2238,80	7	5,32	0,34	0,12	0,48
3478,40	3	4,46	0,26	0,18	0,70

TAB. 4.7 – Résultats des tests de Kolmogorov appliqués aux données à des températures dans l'intervalle [550°C;650°C], regroupées en classes.

4.6.4 Influence du type de régression

Le résumé des résultats est indiqué dans le tableau 4.8 où les abréviations T0, T1 et T2 se réfèrent respectivement aux données à température ambiante, à température dans l'intervalle [450 °C; 550 °C] et à température appartenant à [550 °C; 650 °C]. Les courbes moyennes de fatigue obtenues dans chaque classe de température par les différentes méthodes de régression sont comparées. Ces courbes sont comparées à l'aide d'indicateurs qui mesurent l'adéquation des modèles obtenus aux données. Comme indicateur, on utilise le coefficient R^2 , qui mesure l'ajustement (section 4.5.2), et la quantité L_n , qui est égale à l'opposé du logarithme de la vraisemblance du modèle. Par définition, plus L_n est faible mieux le modèle s'accorde aux données. Concernant cette dernière quantité, notons qu'il est en effet possible de calculer la vraisemblance pour chacune des méthodes utilisées puisque ces trois méthodes peuvent être considérées comme des méthodes du maximum de vraisemblance sous l'hypothèse de normalité des observations (section 4.4).

cas	nb. pts.	A	B	S_D	$\sigma(S_a)$	R^2	D_K	D_K^c	L_n
MCC (T0)		-2,17	23,33	188,39	0,94	0,94	0,11	0,14	2,70
MCP (T0)	99	-2,29	24,10	185,60	variable	0,95			2,58
MV (T0)		-2,28	24,06	185,80	variable	0,88			2,59
MCC (T1)		-2,84	27,69	121,61	0,84	0,91	0,11	0,16	2,52
MCP (T1)	70	-2,83	27,64	121,04	variable	0,92			2,41
MV (T1)		-2,67	26,53	127,66	variable	0,99			2,24
MCC (T2)		-2,09	20,99	190,81	0,70	0,89	0,08	0,10	2,31
MCP (T2)	156	-1,77	18,82	198,24	variable	0,96			2,06
MV (T2)		-1,95	20,08	195,89	variable	0,99			1,98

TAB. 4.8 – Résumé des résultats.

Dans les trois classes de températures considérées, les trois courbes moyennes de fatigue issues des trois méthodes de régression se superposent quasiment (Figures 4.7, 4.9 et 4.11). Les estimations des paramètres, de même que les valeurs des indicateurs R^2 et L_n , obtenues par les trois méthodes sont voisines pour chaque classe de température. Cependant, on voit que la méthode du maximum de vraisemblance fournit la meilleure régression dans tous les cas (à égalité avec MCP pour les essais à température ambiante).

4.6.5 Influence de la température

On compare graphiquement les courbes moyenne de fatigue obtenues dans les trois classes de températures (Figures 4.13, 4.14 et 4.15). Pour les trois types de régression, on observe que plus la température est importante, plus la courbe moyenne est basse. Par ailleurs, on peut observer qu'à partir de 10^6 cycles environ la courbe moyenne de fatigue à température entre 550 °C et 650 °C passe au dessus de la courbe moyenne de fatigue à température entre 400 °C et 550 °C. Avant de proposer une explication au décalage entre ces deux courbes, introduisons d'abord certaines notions sur la limite d'endurance. La limite d'endurance est définie *en théorie* comme la valeur limite de l'amplitude de contrainte en dessous de laquelle la durée de vie admissible est infinie [BB97]. En pratique, cette limite est inaccessible et on la remplace par une limite d'endurance *conventionnelle*

relative à un nombre de cycles maximum fixé. L'écart entre ces deux courbes peut donc s'expliquer par le fait que la limite d'endurance conventionnelle estimée dans la première est plus faible.

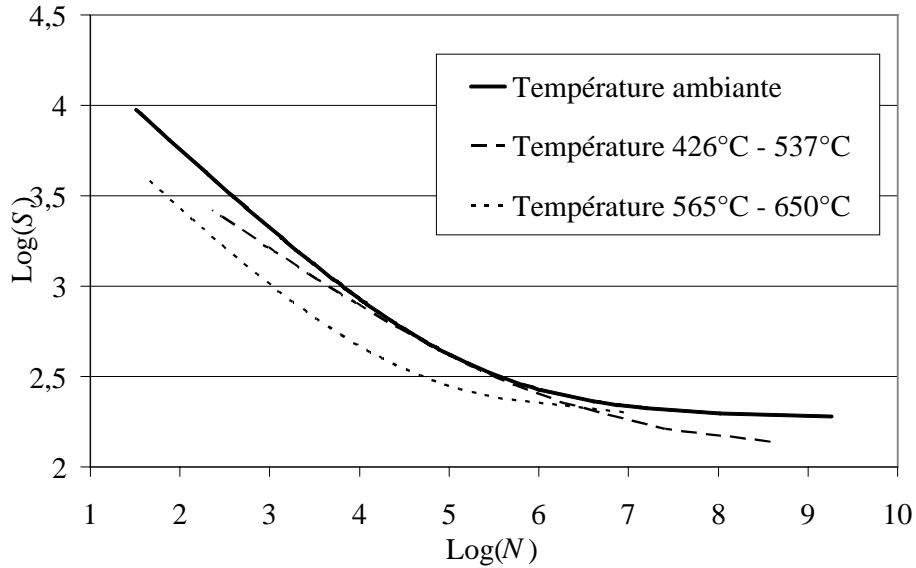


FIG. 4.13 – Influence de la température lorsque la méthode classique des moindres carrés est appliquée.

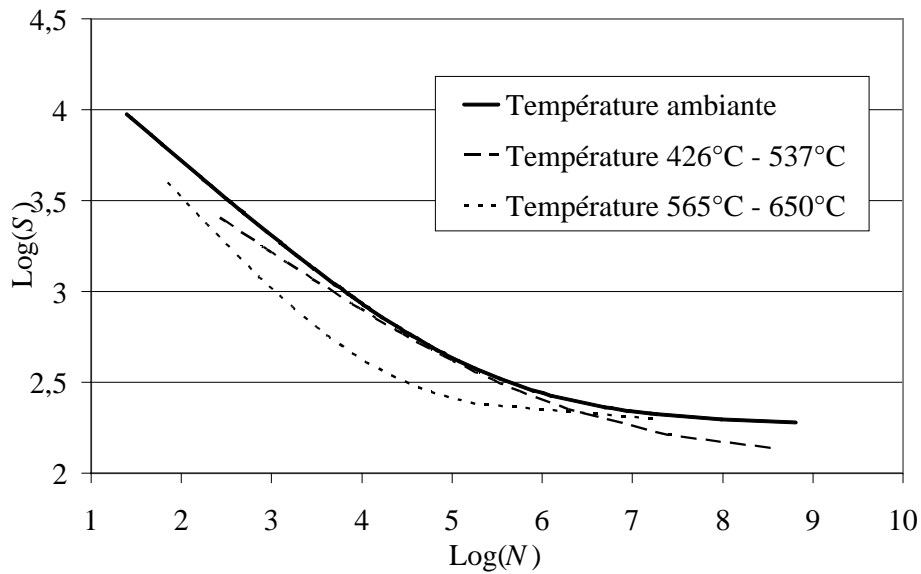


FIG. 4.14 – Influence de la température lorsque la méthode des moindres carrés pondérés est appliquée.

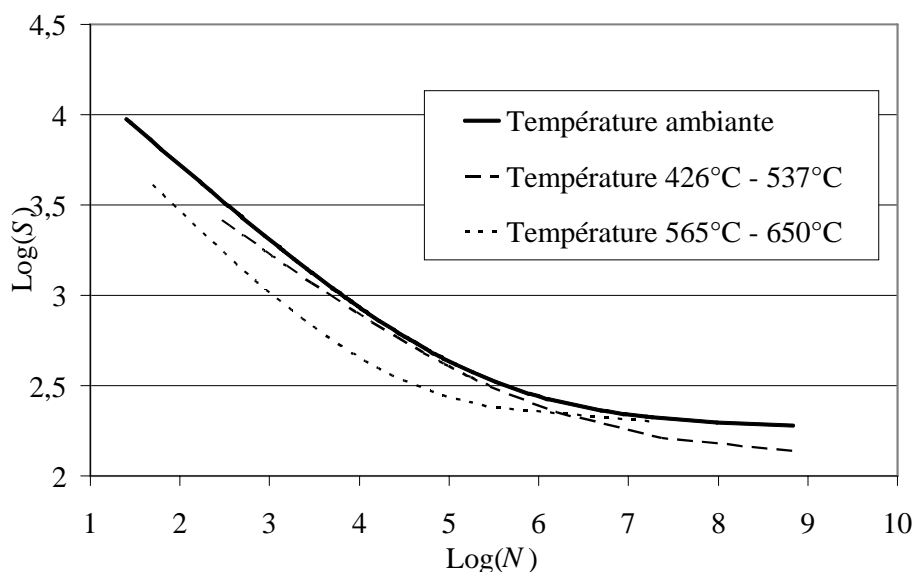


FIG. 4.15 – Influence de la température lorsque la méthode du maximum de vraisemblance est appliquée.

4.6.6 Conclusion

Les résultats obtenus par les trois méthodes de régression sont satisfaisants au vu de leur adéquation avec les données expérimentales. Toutefois, la troisième formulation (H3), qui suppose le coefficient de variation de $\ln N$ constant, apparaît plus précise puisque c'est elle qui fournit les meilleurs indicateurs de régression. De plus, cette formulation est facile à mettre en œuvre puisque les quatre paramètres A , B , S_D et δ sont déterminés d'un seul coup par maximisation de la vraisemblance. Quant à l'influence de la température, elle se traduit par le fait que les courbes moyennes sont d'autant plus basses que la température est élevée.

4.7 Fiabilité du modèle déterministe de résistance à la fatigue

Cette section reprend les travaux de Sudret *et al.* [SGH⁺03]. On considère une structure soumise à un chargement cyclique d'amplitude constante S_a et de contrainte moyenne nulle. On souhaite évaluer sa durée de vie aléatoire $N(S_a, \omega)$ à partir des résultats du traitement statistique des données d'essais de fatigue et la comparer à sa durée de vie déterministe $N_d(S_a)$ obtenue en appliquant le code de dimensionnement des composants du nucléaire. La comparaison des deux durées de vie se fait en calculant la probabilité P_f que $N(S_a, \omega)$ soit inférieure à $N_d(S_a)$.

4.7.1 Durée de vie déterministe

Soit $\eta(S_a) = \overline{\ln N(S_a)} = A \ln(S_a - S_D) + B$ la courbe moyenne de fatigue. Les valeurs des paramètres A , B et S_D sont issues du traitement statistique des données de fatigue à température ambiante (tableau 4.8). Suivant le code de dimensionnement des composants nucléaires, la durée de vie de la structure considérée est donnée par :

$$N_d(S_a) = \min \left[\frac{e^{\eta(S_a)}}{\gamma^N}; e^{\eta(\gamma^S S_a)} \right] = \begin{cases} \frac{1}{\gamma^N} e^{\eta(S_a)} & \text{si } S_a > S_{crit} \\ e^{\eta(\gamma^S S_a)} & \text{si } S_D/\gamma^S < S_a \leq S_{crit} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.25)$$

γ^S est un facteur de majoration des amplitudes de contrainte et γ^N un facteur de réduction du nombre de cycles, égaux respectivement à 2 et 20 (voir section 2.4.4). S_{crit} est la valeur de l'amplitude de contrainte où se croisent les courbes associées respectivement aux facteurs γ^S et γ^N . Cette valeur est solution de l'équation $e^{\eta(\gamma^S S_a)} = e^{\eta(S_a)}/\gamma^N$.

4.7.2 Durée de vie aléatoire

Avant de déterminer la durée de vie aléatoire $N(S_a, \omega)$ de la structure, notons que les facteurs γ^S et γ^N couvrent les effets d'état de surface, de taille et d'environnement mais aussi de la dispersion des données. Ces facteurs sont alors décomposés de la manière suivante :

$$\gamma^j = \gamma_p^j \cdot \gamma_d^j, \quad j = S, N \quad (4.26)$$

où γ_p^j contient la part due au passage éprouvette/structure et γ_d^j est associée à la dispersion des données. Par conséquent, pour estimer la durée de vie aléatoire de la structure étudiée, on s'inspire de la recommandation du code en appliquant à la résistance aléatoire de fatigue la part due au passage éprouvette-structure contenue respectivement dans les facteurs γ^S et γ^N . Ainsi, la durée de vie aléatoire de la structure s'écrit :

$$N(S_a, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_p^N} e^{\eta(S_a) + \sigma(S_a) \xi(\omega)} & \text{si } S_a > S_{crit} \\ e^{\eta(\gamma_p^S S_a) + \sigma(\gamma_p^S S_a) \xi(\omega)} & \text{si } S_D/\gamma_p^S < S_a \leq S_{crit} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.27)$$

Notons toutefois un paradoxe dans cette définition : pour les amplitudes de contrainte entre S_D/γ^S et S_D/γ_p^S la durée de vie déterministe est finie alors que la durée de vie obtenue par le raisonnement aléatoire est infinie. Ce paradoxe se lève si l'on suppose $\gamma^S = \gamma_p^S$, c'est-à-dire que le coefficient γ^S n'intègre pas de dispersion de durée de vie des éprouvettes mais seulement le passage éprouvette-structure. Dans la suite, on se place hors de ce domaine. La durée de vie aléatoire $N(S, \omega)$ de la structure étudiée apparaît comme une variable log-normale sur chaque domaine de définition. Il est donc possible d'évaluer sa moyenne de la manière suivante :

$$\mu_N(S_a) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_p^N} e^{\eta(S_a) + \frac{\sigma^2(S_a)}{2}} & \text{si } S_a > S_{crit} \\ e^{\eta(\gamma_p^S S_a) + \frac{\sigma^2(\gamma_p^S S_a)}{2}} & \text{si } S_D/\gamma_p^S < S_a \leq S_{crit} \end{cases} \quad (4.28)$$

Son coefficient de variation δ_N vaut :

$$\delta_N(S_a) = \begin{cases} \sqrt{e^{\sigma^2(S_a)} - 1} & \text{si } S_a > S_{crit} \\ \sqrt{e^{\sigma^2(\gamma_p^S S_a)} - 1} & \text{si } S_D/\gamma_p^S < S_a \leq S_{crit} \end{cases} \quad (4.29)$$

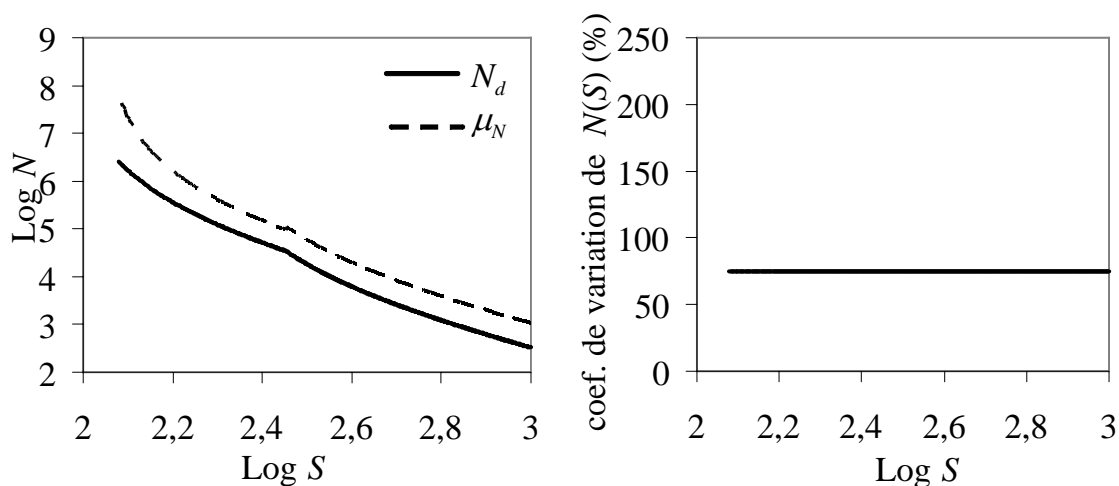


FIG. 4.16 – Moyenne et coefficient de variation de la durée de vie de la structure soumise à un chargement cyclique d'amplitude constante - (Hypothèse **H1**).

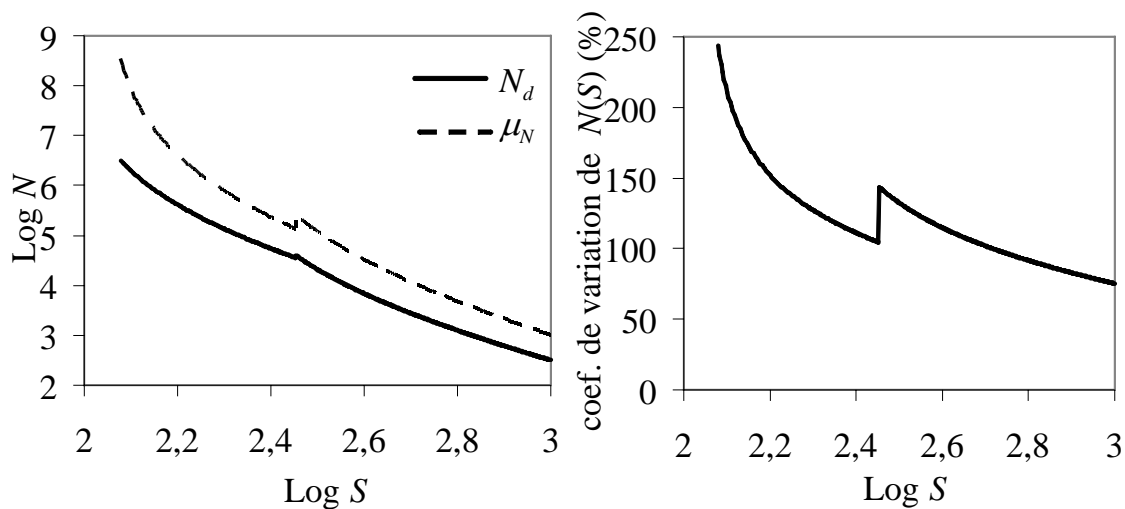


FIG. 4.17 – Moyenne et coefficient de variation de la durée de vie de la structure soumise à un chargement cyclique d'amplitude constante - (Hypothèse **H2**).

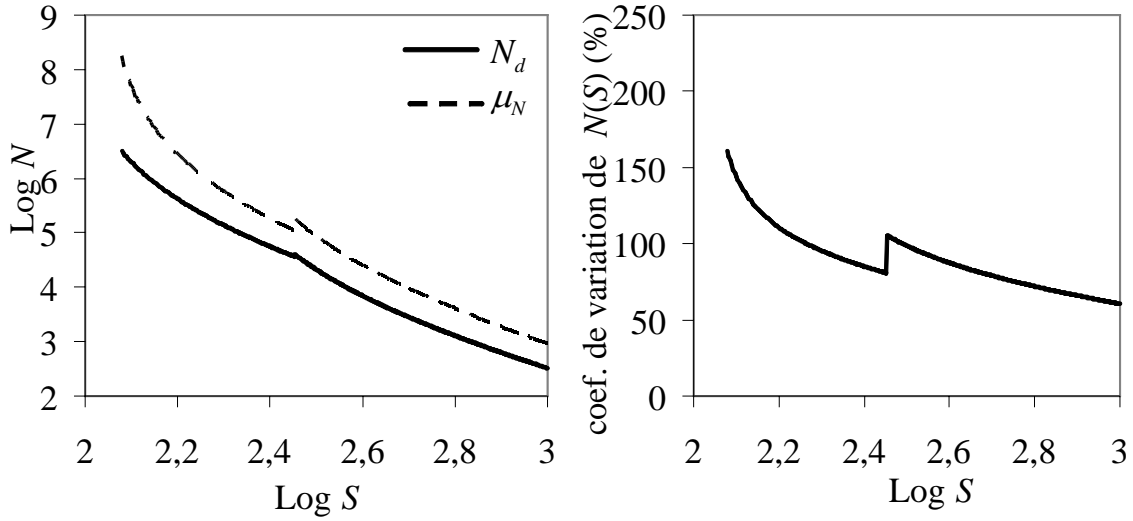


FIG. 4.18 – Moyenne et coefficient de variation de la durée de vie de la structure soumise à un chargement cyclique d’amplitude constante - (Hypothèse **H3**).

Les variations de $\mu_N(S_a)$ et $\delta_N(S_a)$, obtenues en prenant $\gamma_p^N = 9,39$ et $\gamma_p^S = 1,19$ (décomposition de O’Donnell [O’D96]) sont représentées sur les figures 4.16, 4.17 et 4.18 pour les différentes hypothèses H1, H2 et H3 associées au traitement statistique des données d’essais. La moyenne $\mu_N(S_a)$ reste largement supérieure à la durée de vie déterministe $N_d(S_a)$. Le rapport de ces deux grandeurs s’écrit :

$$\frac{\mu_N(S_a)}{N_d(S_a)} = \begin{cases} \frac{\gamma_p^N}{\gamma_p^S} e^{\frac{\sigma^2(S_a)}{2}} & \text{si } S_a > S_{crit} \\ e^{\lambda(\gamma_p^S S_a) - \lambda(\gamma^S S_a) + \sigma^2(\gamma_p^S S_a)} & \text{si } S_D/\gamma_p^S < S_a \leq S_{crit} \end{cases} \quad (4.30)$$

La figure 4.19 représente les variations de ce rapport. Il varie entre 3 et 100. De plus, il augmente sensiblement lorsque $\gamma_p^S S_a \rightarrow S_D$ et décroît quand $S_a \rightarrow \infty$, mais il reste supérieur à 1 pour les grandes valeurs de S_a admissibles. Ceci montre le conservatisme du modèle déterministe de résistance à la fatigue. Le coefficient de variation de $N(S_a, \omega)$ est très important. Il vaut 74% sous l’hypothèse H1, varie entre 0 et 250% sous H2 et entre 0 et 200% sous H3. Ces grandes valeurs du coefficient de variation de $N(S_a, \omega)$ montrent l’ampleur des incertitudes sur le comportement en fatigue, ce qui renforce la nécessité d’apporter un volet probabiliste au dimensionnement en fatigue des structures.

4.7.3 Evaluation de la fiabilité du dimensionnement déterministe

On souhaite à présent évaluer la fiabilité du dimensionnement déterministe par rapport aux incertitudes sur les données de fatigue. Pour cela on calcule la probabilité $P_f(S_a)$ que la durée de vie aléatoire $N(S_a, \xi)$ soit inférieure à la durée de vie déterministe $N_d(S_a)$ pour une amplitude de contrainte S_a donnée :

$$P_f(S_a) = \text{Prob}[N(S_a, \xi) \leq N_d(S_a)] \quad (4.31)$$

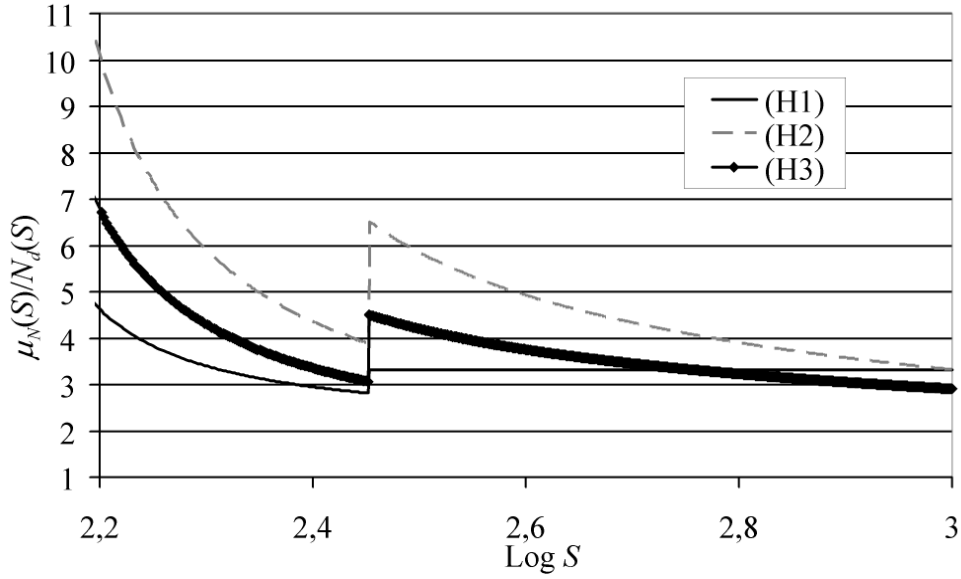


FIG. 4.19 – Rapport en fonction de S de la moyenne de la durée de vie aléatoire sur la durée de vie déterministe.

En utilisant les équations (4.25) et (4.27), on obtient :

$$P_f(S_a) = \begin{cases} \text{Prob} \left[\xi \leq \frac{1}{\sigma(S_a)} \ln \left(\frac{\gamma_p^N}{20} \right) \right] & \text{si } S_a > S_{crit} \\ \text{Prob} \left[\xi \leq \frac{\eta(2 S_a) - \eta(\gamma_p^S S_a)}{\sigma(\gamma_p^S S_a)} \right] & \text{si } S_D/\gamma_p^S < S_a \leq S_{crit} \end{cases} \quad (4.32)$$

La variable ξ étant gaussienne centrée réduite, on obtient finalement :

$$P_f(S) = \begin{cases} \Phi \left[\frac{1}{\sigma(S_a)} \ln \left(\frac{\gamma_p^N}{20} \right) \right] & \text{si } S_a > S_{crit} \\ \Phi \left[\frac{\eta(2 S_a) - \eta(\gamma_p^S S_a)}{\sigma(\gamma_p^S S_a)} \right] & \text{si } S_D/\gamma_p^S < S_a \leq S_{crit} \end{cases} \quad (4.33)$$

Les variations de P_f sont illustrées sur la figure 4.20. Sous toutes les hypothèses, P_f prend des valeurs très faibles dans le domaine d'endurance tandis que sa valeur devient critique autour de S_{crit} , où il vaut environ 25%.

4.8 Conclusion

Les données d'essais de fatigue sont représentées par trois modèles probabilistes dont on estime les différents paramètres respectifs par trois méthodes de régression : la méthode de *régression classique* lorsque l'écart-type des observations (le logarithme des nombres de cycles à la rupture) est constant, la méthode des *moindres carrés pondérés* quand l'écart-type est variable mais connu a priori et la méthode du *maximum de vraisemblance* si cet écart-type est inconnu mais de forme fixée. Les résultats de ce traitement statistique sont conformes aux données d'après les valeurs des indicateurs d'ajustement. Mais la formulation admettant un coefficient de variation de $\ln N$ constant (hypothèse H3) apparaît

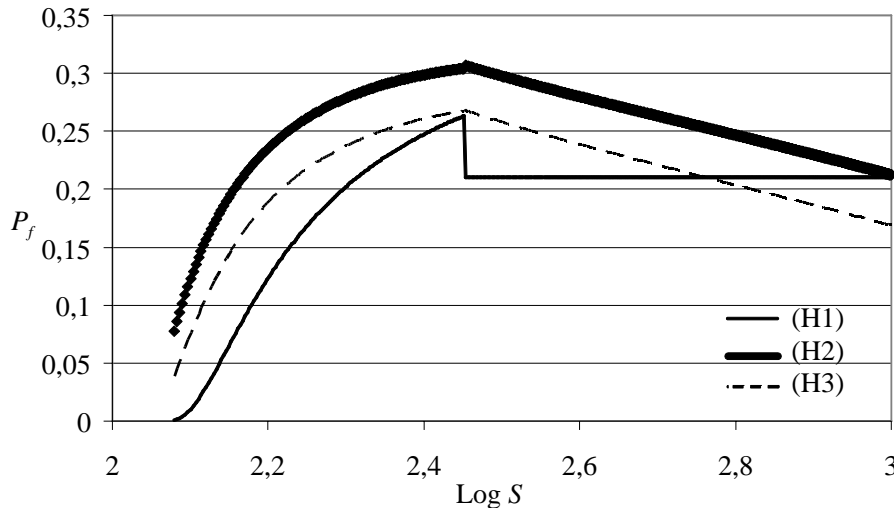


FIG. 4.20 – Fiabilité du dimensionnement déterministe par rapport aux incertitudes sur les données de fatigue sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3).

globalement plus précise. La méthode proposée pour traiter statistiquement les données présente un certain nombre d'avantages. Sa formulation est naturelle et sa mise en place est simple. Mais son intérêt majeur est qu'elle fournit des résultats exploitables dans un calcul fiabiliste en fatigue.

L'analyse de la fiabilité du dimensionnement déterministe dans un cas simplifié permettant de mener analytiquement les calculs apporte un éclairage intéressant sur la démarche codifiée. Il apparaît que le dimensionnement est plus conservatif dans les domaines extrêmes "faible nombre de cycles" et "très grand nombre de cycles" (ce conservatisme étant évalué indifféremment par le rapport $\mu_N(S_a)/N_d(S_a)$ ou par la probabilité $\text{Prob}[N(S_a) \leq N_d(S_a)]$). La zone pour laquelle le dimensionnement est le moins conservatif est située autour de la valeur S_{crit} : c'est la zone d'intersection des deux courbes de conception. La probabilité que la conception ne soit pas conservatrice peut atteindre 25% dans cette zone. Notons que les résultats sont similaires en tendance sous les trois hypothèses du traitement statistique.

La présente analyse n'a pas pris en compte les éprouvettes non rompues. Cette prise en compte apparaît nécessaire pour une meilleure estimation des durées de vie dans la zone d'endurance. La méthode du maximum de vraisemblance peut intégrer les données relatives aux essais n'ayant pas conduit à une rupture. Puisque, pour ce type de données, on est amené à stopper les essais avant la rupture, elles peuvent être considérées comme des données censurées. Et il s'avère que pour chaque cas de censure, on peut déterminer une fonction de vraisemblance [CO84] avec laquelle on peut estimer les paramètres du modèle retenu. Notons également que l'hypothèse de normalité du logarithme de la durée de vie a été mise en défaut pour certains matériaux dans la zone d'endurance (Bastenaire [Bas60]). Il conviendrait de tester au moins dans cette zone l'approche proposée par Bastenaire [Bas60] basée sur la fraction d'éprouvette rompues avant N cycles et son incidence sur les conclusions précédentes.

Chapitre 5

Méthodes d'analyse de fiabilité

5.1 Introduction

L'analyse de fiabilité est développée pour dimensionner des structures en contexte aléatoire. Elle repose sur la donnée du modèle probabiliste des variables intervenant dans la modélisation mécanique du problème étudié et sur la définition d'un ou de plusieurs scénarios de défaillance. Elle vise à évaluer le risque lié au choix d'un dimensionnement en calculant la probabilité de défaillance relative au scénario considéré. Dans ce chapitre, on présente les notions élémentaires de fiabilité des structures pour des problèmes indépendants du temps. Le problème de fiabilité est posé dans le premier paragraphe. Puis différentes méthodes de résolutions sont succinctement décrites. Enfin, les différents produits résultant de l'analyse de fiabilité sont introduits ainsi que leur intérêt en dimensionnement.

5.2 Principe

Soit $\mathbf{X}(\omega) = (x_1(\omega), \dots, x_n(\omega))^T$ le vecteur composé de l'ensemble des variables aléatoires intervenant dans la modélisation du comportement mécanique de la structure étudiée. Le principe de l'analyse de fiabilité consiste à coupler un *modèle stochastique* et un *modèle mécanique* (Figure 5.1). Le modèle stochastique contient la description probabiliste de $\mathbf{X}(\omega)$, à savoir la densité conjointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ du vecteur \mathbf{X} , d'une part, et la définition de la fonction de performance $G(\mathbf{x})$ associée au scénario de défaillance retenu, d'autre part. La fonction de performance permet de définir le domaine de défaillance D_f , le domaine de sûreté D_s et la surface d'état-limite Σ qui s'écrivent par convention :

$$D_f = \{\mathbf{x} ; G(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (5.1)$$

$$D_s = \{\mathbf{x} ; G(\mathbf{x}) > 0\} \quad (5.2)$$

$$\Sigma = \{\mathbf{x} ; G(\mathbf{x}) = 0\} \quad (5.3)$$

La probabilité de défaillance vaut par conséquent¹ :

$$P_f = \text{Prob}[G(\mathbf{x}) \leq 0] = \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.4)$$

¹ $d\mathbf{x}$ est écrit par abus de langage à la place de $dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

Le *modèle mécanique*, au sens large, est la chaîne analytique et/ou la procédure qui donne la valeur prise par la fonction de performance pour chaque réalisation des variables aléatoires d'entrée.

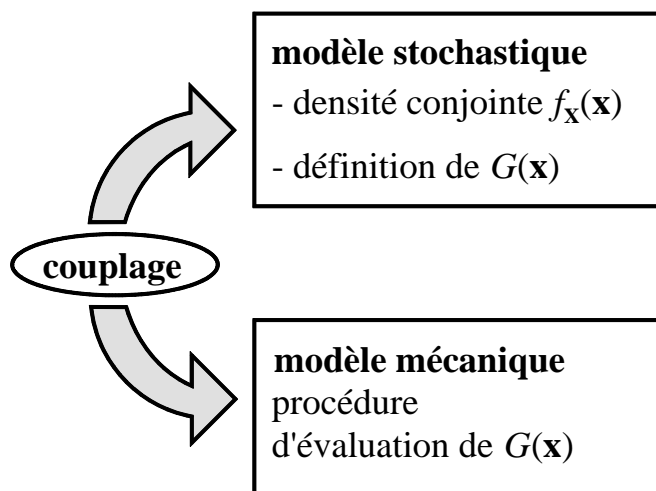


FIG. 5.1 – *Couplage mécano-fiabiliste.*

5.3 Méthode de fiabilité [Lem05]

Du fait de la complexité du domaine de défaillance D_f et de la fonction de densité conjointe $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ qui peut faire intervenir un nombre important de variables, il n'est pas aisé de calculer l'intégrale P_f . A part les méthodes numériques d'intégration, il existe aujourd'hui une théorie complète sur l'évaluation de cette intégrale de probabilité. Cette théorie comprend :

- Une transformation isoprobabiliste des variables de base dans un espace standard où les variables deviennent gaussiennes centrées réduites et indépendantes.
- La recherche dans l'espace standard du point de la surface d'état-limite Σ , où la densité de probabilité est maximale. Ce point est appelé point de défaillance le plus probable ou *point de conception*, noté P^* .
- L'estimation de la probabilité de défaillance, évaluée dans l'espace standard par des méthodes d'approximation *FORM* et *SORM* et par des méthodes de simulation, notamment la méthode de *tirages d'importance*, qui évalue P_f avec une bonne précision pour un nombre relativement faible de simulations.

Dans notre étude, nous utilisons un couplage direct entre le modèle stochastique et le modèle mécanique. Ainsi, le modèle stochastique pilote l'algorithme d'évaluation de la probabilité de défaillance. Une schématisation de la procédure du couplage est donnée sur la figure 5.2. La procédure de couplage direct est implémentée dans le logiciel *PHIMECA Soft* [PHI03] commercialisé par la société du même nom.

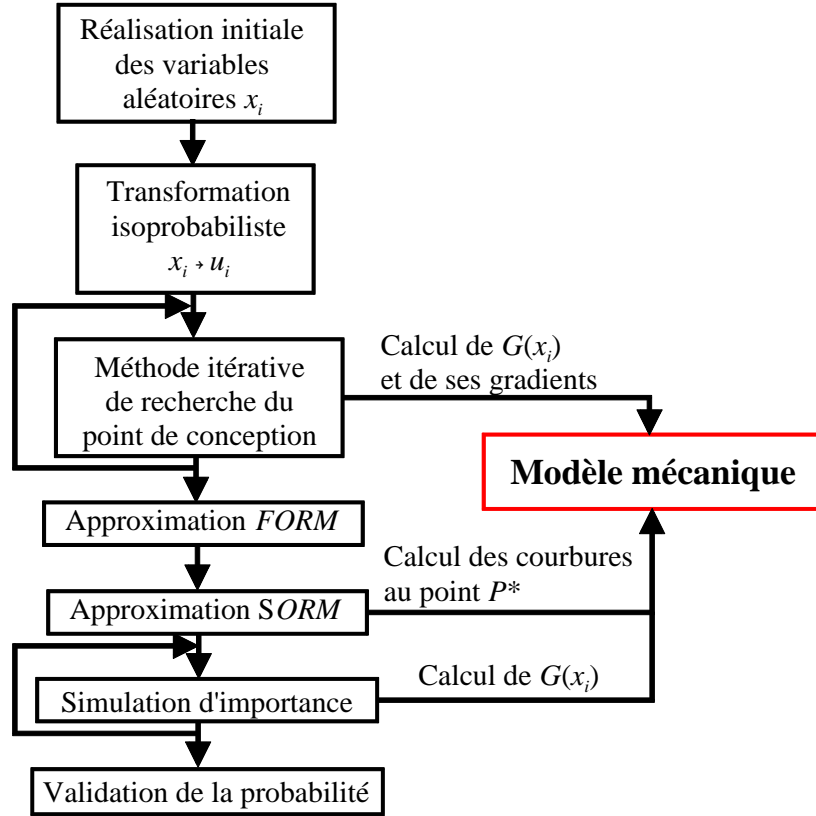


FIG. 5.2 – Schématisation de l'algorithme de couplage direct (voir [Lem05]).

5.3.1 Transformation isoprobabiliste

La transformation isoprobabiliste vise à simplifier la fonction densité conjointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ qui intervient dans l'intégrale de la probabilité de défaillance (Eq. 5.4). Cette opération, comme son nom l'indique, préserve la probabilité et associe les variables de base \mathbf{X} dans l'espace physique à des variables gaussiennes centrées réduites et indépendantes \mathbf{U} dans un espace dit standard. Notons que la fonction de performance $G(\mathbf{x})$ doit être elle aussi exprimée dans l'espace standard et devient $H(\mathbf{u})$. Ainsi, si on suppose qu'une telle transformation existe, la probabilité de défaillance devient :

$$P_f = \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{H(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (5.5)$$

où $\varphi_n(\mathbf{u})$ est la fonction densité multinormale centrée réduite de composantes indépendantes en dimension n et vaut :

$$\varphi_n(\mathbf{u}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2\right) \quad (5.6)$$

Il existe plusieurs lois, notamment les lois normales et log-normales, pour lesquelles la transformation est analytique. De plus, si les lois des variables X_i sont quelconques et indépendantes, la transformation reste simple. Pour l'obtenir, il suffit d'écrire l'égalité des

probabilités cumulées, respectivement, au point x_i de l'espace physique et au point u_i de l'espace standard associé à x_i :

$$x_i \xrightarrow{T_i} u_i \iff \Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i) \quad (5.7)$$

où Φ et F_{X_i} sont les fonctions de répartition respectivement de la loi gaussienne centrée réduite et de la variable X_i . On obtient donc :

$$x_i \xrightarrow{T_i} u_i = \Phi^{-1} [F_{X_i}(x_i)] \quad (5.8)$$

Lorsque les variables sont corrélées, on utilise en particulier les transformations de Rosenblatt ou de Nataf [DM96]. La transformation de Rosenblatt est plus contraignante et requiert la connaissance de la densité conjointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ des variables aléatoires de base. Par contre, la transformation de Nataf ne demande que la donnée des distributions marginales $F_{X_i}(x_i)$ des variables X_i et de leur matrice de corrélation ρ_{ij} . C'est donc la transformation de Nataf qui est utilisée dans la pratique, notamment par le logiciel PHIMECA *Soft*. [PHI03]. Les étapes principales de cette transformation se présentent de la manière suivante. Supposons d'une manière générale que les variables X_i soient corrélées de matrice de corrélation ρ_{ij} . On commence par construire un ensemble de variables Y_i gaussiennes centrées réduites en appliquant la formule suivante :

$$Y_i = \Phi^{-1} [F_{X_i}(X_i)] \quad (5.9)$$

Les variables X_i étant corrélées, les variables Y_i le sont aussi. Notons ρ'_{ij} la matrice de corrélation du vecteur aléatoire \mathbf{Y} . Les coefficients ρ'_{ij} sont obtenus approximativement. Pour cela, on introduit les variables $Z_i = (X_i - \mu_i)/\sigma_i$, où μ_i et σ_i sont respectivement la moyenne et l'écart-type de X_i . On écrit ensuite l'égalité suivante :

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}[X_i, X_j]}{\sigma_i \sigma_j} = \text{E}[Z_i Z_j] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_i z_j \varphi_2(y_i, y_j, \rho'_{ij}) dy_i dy_j \quad (5.10)$$

où φ_2 est la densité binormale centrée réduite. Les coefficients ρ'_{ij} apparaissent alors comme solution de l'équation (5.10). Cette équation doit être résolue numériquement et il existe dans la littérature [LDK86] des expressions empiriques approximatives du rapport ρ'_{ij}/ρ_{ij} . Une fois la matrice ρ'_{ij} connue, on peut appliquer à \mathbf{Y} une transformation orthonormale qui diagonalise ρ'_{ij} et obtenir ainsi un ensemble de variables gaussiennes centrées réduites et indépendantes. Rappelons, enfin que lorsque les variables physiques X_i ne sont pas corrélées la formule (5.8) suffit à effectuer la transformation.

5.3.2 Recherche du point de conception

Le point de conception, noté \mathbf{u}^* , encore appelé point de défaillance le plus probable est le point de la surface d'état-limite où la densité de probabilité de \mathbf{U} est maximale. La recherche de ce point est effectuée dans l'espace standard et consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\|\mathbf{u}^*\| = \min \|\mathbf{u}\| \text{ sous la contrainte } H(\mathbf{u}) \leq 0 \quad (5.11)$$

Dans la pratique, on minimise plutôt le carré de la norme de \mathbf{u} :

$$\|\mathbf{u}^*\|^2 = \min \|\mathbf{u}\|^2 = \min \left(\sum_i u_i^2 \right) \text{ sous la contrainte } H(\mathbf{u}) \leq 0 \quad (5.12)$$

ce qui est équivalent au problème initial. Ayant noté que la quantité à minimiser (la norme de \mathbf{u}) est positive ou nulle, la solution sans contrainte de ce problème est l'origine du repère (solution triviale, sauf s'il appartient au domaine de défaillance). Ceci montre que la solution au problème est sur la surface d'état-limite définie par $H(\mathbf{u}) = 0$. On peut donc réduire la contrainte d'optimisation à une contrainte d'égalité et le problème devient :

$$\|\mathbf{u}^*\|^2 = \min \|\mathbf{u}\|^2 \text{ sous la contrainte } H(\mathbf{u}) = 0 \quad (5.13)$$

Le Lagrangien associé à ce problème s'écrit :

$$La(\mathbf{u}, \lambda_a) = \sum_i u_i^2 + \lambda_a H(\mathbf{u}) \quad (5.14)$$

où λ_a est le multiplicateur de Lagrange. Le problème équivalent à résoudre est donc :

$$\text{Trouver } (\mathbf{u}^*, \lambda_a^*) \text{ qui minimise } La(\mathbf{u}, \lambda_a) \quad (5.15)$$

Les conditions d'optimalité associées à ce problème sont, sous réserve d'existence d'un minimum :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{u}} La(\mathbf{u}, \lambda_a) = \mathbf{0} \\ \frac{\partial La(\mathbf{u}, \lambda_a)}{\partial \lambda_a} = 0 \end{array} \right\} \quad (5.16)$$

où $\nabla_{\mathbf{u}}$ représente l'opérateur gradient. Etant donné que :

$$\nabla_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|^2 = \nabla_{\mathbf{u}} \left(\sum_i u_i^2 \right) = 2 \mathbf{u} \quad (5.17)$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \mathbf{u} + \lambda_a \nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \\ H(\mathbf{u}) = 0 \end{array} \right\} \quad (5.18)$$

Plusieurs algorithmes ont été développés pour résoudre ce problème d'optimisation. Le lecteur trouvera dans l'ouvrage de M. Lemaire [Lem05] une description des méthodes couramment utilisées. Dans notre étude, l'algorithme d'Abdo-Rackwitz [Lem05] se révèle satisfaisant. Cet algorithme a l'avantage d'éviter le calcul du Hessien du Lagrangien qui est approximé par :

$$\nabla_{\mathbf{u}}^2 La(\mathbf{u}, \lambda_a) \simeq \nabla_{\mathbf{u}}^2 \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \right) = 2 \mathbb{I} \quad (5.19)$$

où \mathbb{I} est la matrice identité. Il permet ainsi un gain important de temps de calcul. Selon ses auteurs, cet algorithme est efficace pour un nombre important de variables aléatoires (plus de 50 variables). La minimisation de ce Lagrangien est itérative suivant le système suivant :

$$\left[\begin{array}{cc} 2 \mathbb{I} & \nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}^{(k)}) \\ \nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}^{(k)})^T & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varpi}^{(k)} \\ \lambda_a \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{u}^{(k)} \\ -H(\mathbf{u}^{(k)}) \end{array} \right\} \quad (5.20)$$

où $\varpi^{(k)}$ est la direction de descente qui minimise la fonction objectif. Il est nécessaire de fournir une longueur de pas de descente, $v^{(k)}$, pour trouver le point d'itération $\mathbf{u}^{(k+1)}$ suivant qui s'écrit :

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + v^{(k)} \varpi^{(k)} \quad (5.21)$$

Le pas $v^{(k)}$ peut être constant pour toutes les itérations. Mais dans ce cas il arrive souvent qu'on saute le minimum comme illustré sur la figure 5.3. Il est plus judicieux de rechercher le pas optimal qui nous permette d'approcher ce minimum. Ceci introduit un problème d'optimisation supplémentaire qui consiste à minimiser une fonction objectif donnée par :

$$\Psi(\mathbf{u}^{(k)} + v^{(k)} \varpi^{(k)}) \quad (5.22)$$

Dans notre cas $\Psi(\mathbf{u}) = |H(\mathbf{u})|$. Ayant noté que le minimum de $\Psi(\mathbf{u}^{(k)} + v \varpi^{(k)})$ annule la dérivée par rapport à v de $\Psi(\mathbf{u}^{(k)} + v \varpi^{(k)})$ qu'on note $\phi(v)$,

$$\phi(v) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{u}^{(k)} + v \varpi^{(k)})}{\partial v} \quad (5.23)$$

on utilise ici la méthode de Newton pour résoudre ce problème d'optimisation supplémentaire, en calculant la racine de la fonction $\phi(v)$. L'équation d'itération est (Figure 5.4) :

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} - \frac{\phi(v^{(k)})}{\left| \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \right|_{v^{(k)}}} \quad (5.24)$$

Il faudra bien entendu vérifier que $\left| \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \right|_{v^{(k)}} > 0$ pour atteindre le minimum.

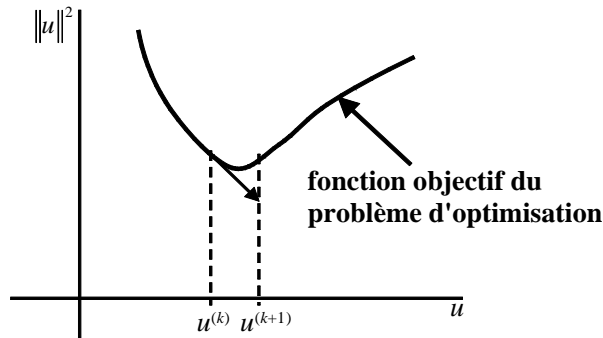


FIG. 5.3 – Exemple de pas de descente entraînant le saut du minimum.

La convergence de l'algorithme d'Abdo-Rackwitz se traduit par l'atteinte simultanée de deux tolérances. La première, notée ε_H , concerne la fonction de performance et le critère de convergence associé se traduit par :

$$|H(\mathbf{u}^{(k)}) / H(\mathbf{u}^{(0)})| < \varepsilon_H \quad (5.25)$$

La seconde, notée ε_β , porte sur l'indice de fiabilité et le critère de convergence correspondant s'écrit :

$$|\beta^{(k+1)} - \beta^{(k)}| < \varepsilon_\beta \quad (5.26)$$

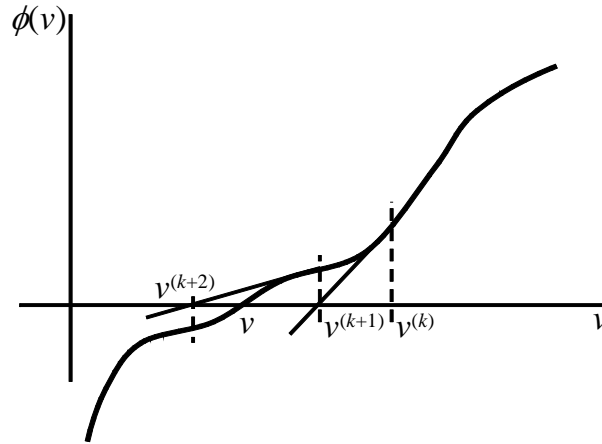


FIG. 5.4 – *Illustration des itérations suivant la méthode de Newton.*

La non convergence de l'algorithme est caractérisée par le dépassement d'un nombre admissible d'itérations.

On remarque, d'après ce qui précède, que la résolution du problème d'optimisation (5.11) requiert que la fonction de performance $H(\mathbf{u})$ soit différentiable voire deux fois différentiable pour la mise en œuvre de la plupart des algorithmes. La distance entre le point de conception \mathbf{u}^* et l'origine de l'espace standard est, par définition, l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind, noté β_{HL} [HL74].

Connaissant le point de conception \mathbf{u}^* , on peut maintenant appliquer les méthodes d'approximation *FORM/SORM* et la simulation d'importance afin d'évaluer la probabilité de défaillance.

5.3.3 Méthode *FORM*

Cette méthode approxime le domaine de défaillance par un demi-espace délimité par un hyperplan tangent à la surface d'état-limite au point de conception (Figure 5.5). Du fait de la symétrie de révolution de la distribution multinormale normée, la probabilité de défaillance est simplement approchée par :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (5.27)$$

Notons que cette méthode fournit un résultat exact lorsque l'état-limite est linéaire dans l'espace standard. Elle devient imprécise lorsque la fonction de performance est fortement non linéaire au voisinage du point de conception ou lorsqu'il existe des minimums secondaires significatifs.

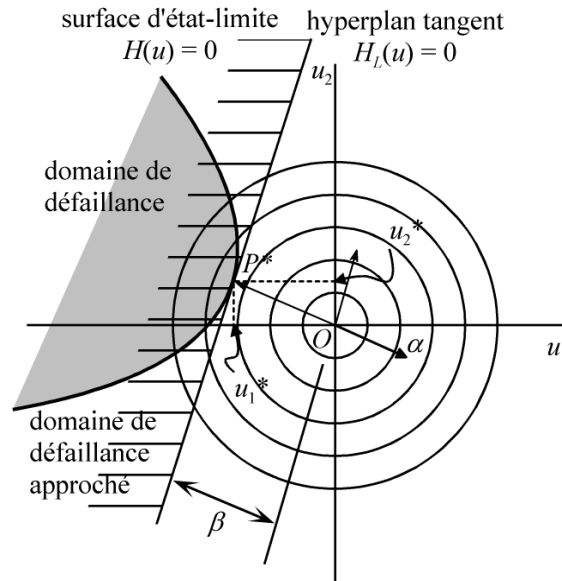


FIG. 5.5 – Illustration dans l'espace standard de l'approximation FORM.

5.3.4 Méthode *SORM*

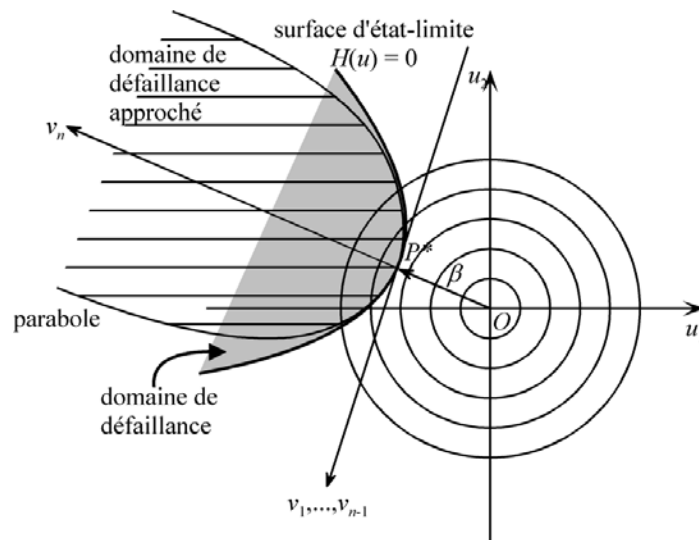


FIG. 5.6 – Illustration dans l'espace standard de l'approximation SORM.

La méthode *SORM* consiste à approcher la surface d'état-limite par une surface quadratique (Figure 5.6). Pour cela, on effectue un développement de Taylor de la fonction de performance à l'ordre deux au point de conception \mathbf{u}^* . La probabilité de défaillance est alors approchée par le contenu probabiliste de l'hyperquadrique ainsi obtenue. La probabilité de ce domaine quadratique est calculée par deux formules :

- la formule de Tvedt [Tve90], qui fournit le résultat exact du contenu probabiliste du domaine quadratique ;

- la formule de Breitung [BH89] qui part du constat que la probabilité de défaillance est en général très faible (indice de fiabilité grand) et évalue cette probabilité à l'aide d'une analyse asymptotique.

Formule de Tvedt

La formule de Tvedt est obtenue par le raisonnement suivant. On part du développement de Taylor à l'ordre deux de la fonction de performance au point de conception :

$$H_S(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\alpha}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T \mathbb{B} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (5.28)$$

où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \frac{\nabla_{\mathbf{u}^*} H}{\|\nabla_{\mathbf{u}^*} H\|} \\ \mathbb{B} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\nabla_{\mathbf{u}^*} H\|} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right|_{\mathbf{u}^*} \end{aligned}$$

On applique ensuite une rotation orthonormale \mathbb{R} (matrice de changement de base) au vecteur \mathbf{U} de telle sorte que la n -ième colonne du vecteur résultant \mathbf{Y} ($\mathbf{Y} = \mathbb{R} \mathbf{U}$) ait la direction de $\boldsymbol{\alpha}$. Le développement de Taylor (5.28) devient, dans la nouvelle base :

$$H_S(\mathbf{y}) = \beta - y_n + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ y_n - \beta \end{bmatrix}^T \mathbb{A} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ y_n - \beta \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} &= (y_1, \dots, y_{n-1}) \\ \mathbb{A} &= \mathbb{R} \mathbb{B} \mathbb{R}^T \end{aligned}$$

Notons que :

$$H_S(\mathbf{u}) \leq 0 \text{ est équivalente à } \beta - y_n + \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbb{A}' \tilde{\mathbf{y}} \leq 0 \quad (5.30)$$

où \mathbb{A}' est la sous-matrice de dimension $n - 1$ de \mathbb{A} formée par les $n - 1$ premières colonnes et les $n - 1$ premières lignes. Le domaine de défaillance est alors aisément décrit par la variable m donnée par :

$$m = y_n - \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbb{A}' \tilde{\mathbf{y}} \quad (5.31)$$

En appliquant à nouveau une rotation orthonormale qui diagonalise la matrice \mathbb{A}' , m s'écrit sous forme canonique :

$$m = -y'_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i y_i'^2 \quad (5.32)$$

On note que les κ_i correspondent aux courbures principales de la surface d'état-limite au point de conception. Sous cette forme, la variable m apparaît comme une fonction de variables gaussiennes centrées réduites et indépendantes, puisque les y_i sont obtenues à partir des u_i par simple rotation de la base. On peut donc déterminer la fonction caractéristique de m en fonction des fonctions caractéristiques des y_i (la fonction caractéristique

d'une variable est la transformation de Fourier de sa densité de probabilité). On obtient ensuite la densité de probabilité de m en inversant cette fonction caractéristique. On peut alors évaluer exactement la probabilité du domaine quadratique, qui s'écrit [Rac01] :

$$P_f = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin \left[\beta m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \tan^{-1} (\kappa_i m) \right] \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} m^2 \right]}{m \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 + \kappa_i^2 m^2) \right]^{1/4}} dm \quad (5.33)$$

Formule de Breitung

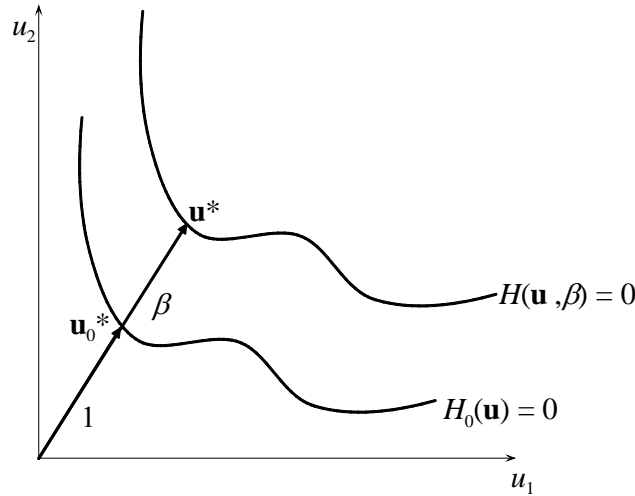


FIG. 5.7 – Illustration de l'effet du paramètre d'échelle β .

Cette formule est basée sur une analyse asymptotique. Supposons tout d'abord que le point de conception soit unique. Considérons la fonction de performance $H_0(\mathbf{u})$ obtenue à partir de la fonction de performance $H(\mathbf{u})$ du problème par une homothétie qui ramène la distance minimale de $H_0(\mathbf{u})$ à l'origine de l'espace à l'unité (Figure 5.7). L'indice de fiabilité associé à la fonction de performance $H_0(\mathbf{u})$ vaut un et on note \mathbf{u}_0^* le point de conception associé à H_0 . Considérons ensuite la famille de fonctions $\{H(\mathbf{u}, \beta)\}$ indexées par le paramètre β et définies par :

$$H(\mathbf{u}, \beta) = H_0(\beta^{-1}\mathbf{u}) \quad (5.34)$$

Par construction, les fonctions $H(\mathbf{u}, \beta)$ admettent respectivement un seul point de conception $\mathbf{u}^* = \beta \mathbf{u}_0^*$ et la distance minimale de ces fonctions à l'origine vaut β . Le contenu probabiliste du domaine de défaillance $D_f = \{\mathbf{u} | H(\mathbf{u}, \beta) \leq 0\}$ s'écrit :

$$P_f = \text{Prob}(D_f) = \int_{D_f} \varphi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = (2\pi)^{-n/2} \int_{H(\mathbf{u}, \beta) \leq 0} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2}\right) d\mathbf{u} \quad (5.35)$$

En faisant le changement de variable $y_i = \beta^{-1} u_i, i = 1, \dots, n$, on obtient :

$$P_f = (2\pi)^{-n/2} \beta^n \int_{H_0(\mathbf{y}) \leq 0} \exp\left(-\frac{\beta^2 \|\mathbf{y}\|^2}{2}\right) d\mathbf{y} \quad (5.36)$$

Sous cette forme on peut appliquer l'approximation asymptotique de l'intégrale de Laplace. Les détails de cette approximation ne sont pas exposés ici, mais le lecteur les trouvera dans l'article de Breitung [BH89]. On montre en particulier que lorsque β tend vers l'infini, P_f tend vers le contenu probabiliste du domaine de défaillance correspondant au développement de Taylor à l'ordre deux de la surface d'état-limite. P_f s'écrit alors simplement par :

$$P_f \simeq \Phi(-\beta) \left(\frac{1}{\det \mathbb{V}}\right)^{1/2} \quad (5.37)$$

où

$$\mathbb{V} = \mathbb{I} - \frac{\|\mathbf{u}^*\|}{\|\nabla_{\mathbf{u}^*} H\|} \mathbb{V}'$$

avec $\mathbb{V}' = \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right|_{\mathbf{u}^*}; i, j = 1, \dots, n-1$

En appliquant une rotation orthonormale adéquate et après quelques manipulations algébriques, on obtient finalement :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta \kappa_i)^{-1/2} \quad (5.38)$$

lorsque $1 \leq \beta \rightarrow \infty$ et $\beta \kappa_i < 1$ pour tout i . Cette expression apparaît comme le produit de l'approximation *FORM* par un facteur de correction fonction des courbures principales au point de défaillance le plus probable. Dans la formule (5.38), il est admis que l'origine de l'espace standard appartient au domaine de sûreté ($H(0) > 0$). Si cette condition n'est pas vérifiée, le raisonnement précédent doit être appliqué au problème complémentaire, qui consiste à estimer $\text{Prob}(H(\mathbf{u}) > 0)$.

La formule de Breitung (5.38) est plus limitée dans son application que la formule de Tvedt (5.33). En effet, la formule de Breitung présente une singularité lorsqu'une courbure principale $\kappa = -1/\beta$. De plus elle n'est valable que lorsque β tend vers l'infini. En pratique, β est considéré grand quand il est supérieur à 2. Notons, enfin, que ces deux approximations paraboliques de la probabilité de défaillance ne dépendent pas de la formulation de la fonction de performance pourvu que celle-ci conserve la nature du domaine de défaillance. Ceci vient du fait que ces deux formules ne dépendent que des propriétés géométriques de la surface d'état-limite, à savoir la position du point de conception et les courbures principales de la surface d'état-limite en ce point.

5.3.5 Tirages d'importance

La simulation d'importance est une méthode de simulation efficace pour estimer la probabilité de défaillance. En effet, la simulation de Monte-Carlo standard requiert un

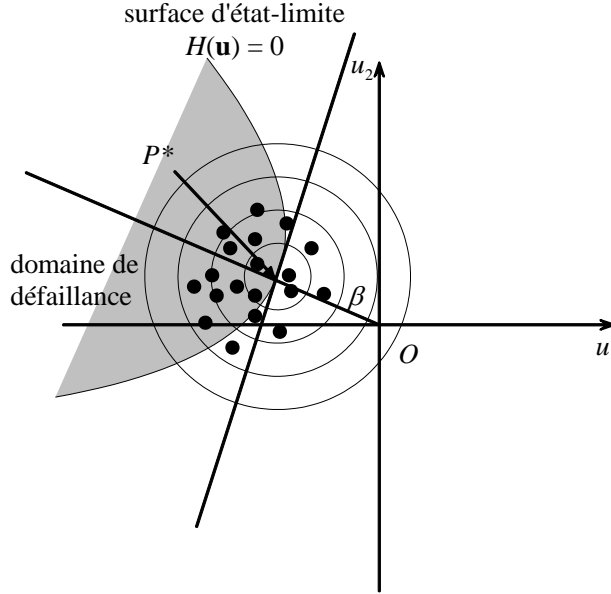


FIG. 5.8 – Illustration de la simulation d'importance.

nombre important de réalisations pour obtenir la probabilité de défaillance avec une bonne précision. Ceci vient du fait que pour de faibles probabilités de défaillance, les tirages qui entraînent la défaillance sont rares. Ainsi, un nombre important de réalisations est nécessaire pour obtenir suffisamment de tirages associés à la défaillance. Suite à ces considérations, la simulation d'importance a été introduite afin de générer des tirages qui conduisent plus fréquemment à la défaillance et permettent de gagner plus d'information sur le domaine de défaillance. Cette méthode consiste, ainsi, à effectuer les tirages autour du point de défaillance le plus probable (Figure 5.8). Elle fournit une estimation sans biais de la probabilité de défaillance P_f et a l'avantage de donner une estimation de la variance de l'estimation obtenue. On introduit la fonction $\psi(\mathbf{u})$, dite densité d'importance. Celle-ci doit être choisie judicieusement. On peut par exemple la prendre égale à la densité multinormale réduite centrée au point de conception \mathbf{u}^* .

$$\psi(\mathbf{u}) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2}{2}\right) \quad (5.39)$$

Dans ce cas particulier, pour simuler \mathbf{u} suivant la densité $\psi(\mathbf{u})$, on génère d'abord une variable multinormale centrée réduite \mathbf{u}_r et on effectue le changement de variable $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}^*$. P_f s'écrit alors sous la forme :

$$P_f = \int_{H(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{H(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) \frac{\psi(\mathbf{u})}{\psi(\mathbf{u})} d\mathbf{u} \quad (5.40)$$

Notant $\mathbf{1}_{\{H(\mathbf{u}) \leq 0\}}$ la fonction indicatrice du domaine de défaillance, l'expression (5.40) devient :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{H(\mathbf{u}) \leq 0\}} \frac{\varphi_n(\mathbf{u})}{\psi(\mathbf{u})} \psi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (5.41)$$

ce qu'on interprète comme l'espérance d'une certaine fonction de \mathbf{u} par rapport à la densité d'importance :

$$P_f = E_\psi \left[\mathbf{1}_{\{H(\mathbf{u}) \leq 0\}} \frac{\varphi_n(\mathbf{u})}{\psi(\mathbf{u})} \right] \quad (5.42)$$

On peut alors évaluer cette quantité par simulation de Monte-Carlo. En utilisant K réalisations du vecteur aléatoire $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$, on obtient :

$$P_f = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{1}_{\{H(\mathbf{u}^{(i)}) \leq 0\}} \frac{\varphi_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}^{(i)})}{\psi(\mathbf{u}^{(i)})} \quad (5.43)$$

Cette méthode peut être considérée comme exacte dans le sens où elle produit le résultat exact quand le nombre de simulations est infini.

5.4 Produits de l'analyse de fiabilité

5.4.1 Probabilité de défaillance et indice de fiabilité

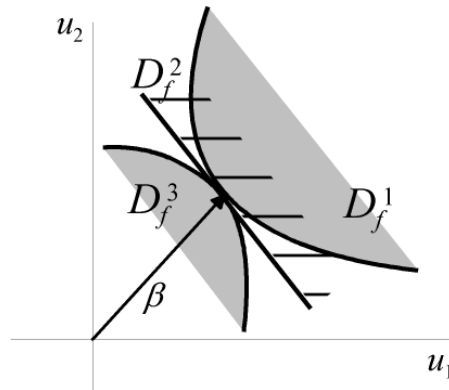


FIG. 5.9 – Exemple de domaines de défaillance différents ayant le même indice de fiabilité de Hasofer-Lind.

La probabilité de défaillance est définie par l'expression (5.5). Une première estimation de l'indice de fiabilité est donnée par Hasofer et Lind [Mel99], comme la distance dans l'espace standard de l'origine au point de conception \mathbf{u}^* . Toutefois, cette définition ne permet pas toujours de relier directement la valeur d'un indice de fiabilité au contenu probabiliste du domaine de défaillance associé. En particulier, on peut avoir plusieurs domaines de défaillance différents qui ont le même indice de fiabilité comme le montre la figure 5.9. Ainsi, à la définition de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind, on préfère celle plus formelle définie par Ditlevsen [Dit79] :

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) = -\Phi^{-1} \left(\int_{D_f} \varphi_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right) \quad (5.44)$$

On introduit en particulier l'indice généralisé β_{SORM} lorsque P_f est approximée par la méthode *SORM*.

5.4.2 Facteurs d'importance

Le terme "facteurs d'importance" regroupe les sensibilités de l'indice de fiabilité à certains paramètres, notamment :

- les variables aléatoires du problème ;
- les coordonnées du point de conception dans l'espace physique ;
- les paramètres des distributions des variables, notamment la moyenne et le coefficient de variation ;
- les paramètres de la fonction de performance.

Ces facteurs permettent d'identifier les sources d'incertitudes les plus importantes dans la fiabilité. D'une manière générale, la sensibilité s_r de l'indice de fiabilité par rapport au paramètre r est donnée par :

$$s_r = \left. \frac{\partial \beta}{\partial r} \right|_{P^*} \quad (5.45)$$

Dans le cas de l'approximation *FORM*, les expressions de ces sensibilités se réduisent à des formules simples [Lem05] (tableau 5.1). Notons que l'expression de la sensibilité aux coordonnées x_i^* donnée dans ce tableau n'est valable que lorsque les variables aléatoires X_i sont indépendantes. Lorsqu'elles sont corrélées cette expression devient :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \beta|_{\mathbf{x}^*} = \mathbb{S}_{\hat{\mathbf{X}}} \mathbb{J}^T \boldsymbol{\alpha} \quad (5.46)$$

où \mathbb{J} est le jacobien de la transformation isoprobabiliste et $\mathbb{S}_{\hat{\mathbf{X}}}$ la matrice diagonale des écarts-types de la variable $\hat{\mathbf{X}}$ définie par : $\hat{\mathbf{x}} = \mathbb{J}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \mathbf{x}^*$ [Lem05].

sensibilité de l'indice de fiabilité	expression
aux variables aléatoires u_i	$\left. \frac{\partial \beta}{\partial u_i} \right _{\mathbf{u}^*} = -\alpha_i$
aux coordonnées x_i^*	$\left. \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \right _{\mathbf{x}^*} = -\sum_j \alpha_j \frac{\partial T_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}$
aux paramètres p_i des distributions	$\left. \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \right _{\underline{\mathbf{x}}^*} = -\sum_j \alpha_j \frac{\partial T_j(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})}{\partial p_i}$
aux paramètres a_i de $H(\mathbf{u})$	$\left. \frac{\partial \beta}{\partial a_i} \right _{\mathbf{u}^*} = \frac{1}{\ \nabla H(\mathbf{u}, \mathbf{a})\ } \frac{\partial H(\mathbf{u}, \mathbf{a})}{\partial a_i}$

TAB. 5.1 – Expressions des facteurs d'importance pour des variables aléatoires indépendantes.

Les sensibilités aux variables aléatoires du problème sont données par les cosinus directeurs qui sont les composantes α_i de la normale à l'hyperplan tangent au point de défaillance le plus probable \mathbf{u}^* (Figure 5.10). En particulier, lorsque les variables X_i sont indépendantes, le signe des α_i renseigne sur la nature des variables correspondantes. Dans ce cas, lorsque α_i est positif, la variable u_i est de type "solicitation" puisqu'une augmentation de u_i entraîne une diminution de la fiabilité. En revanche, quand α_i est négatif, la variable u_i est de type "résistance" car une augmentation de cette variable implique une augmentation de la fiabilité. Notons toutefois que la nature sollicitante ou résistante de la variable n'est pas intrinsèque mais dépend de la fonction de performance choisie.

Les valeurs des sensibilités ne sont pas exploitables pour comparer entre eux les effets sur la fiabilité des variations des variables et des paramètres. On introduit alors les facteurs

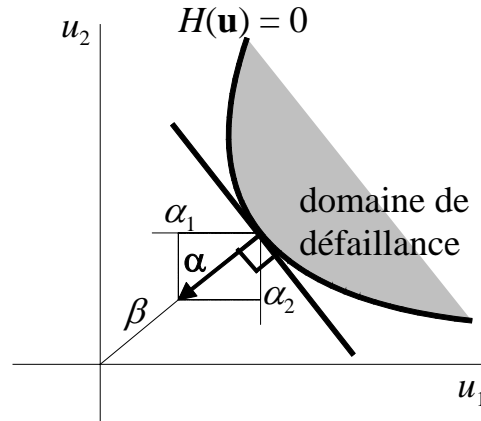


FIG. 5.10 – Cosinus directeurs du vecteur normal à la surface de défaillance au point de conception.

d'élasticité e_r qui permettent de mesurer l'importance relative de ces grandeurs dans la fiabilité. Ils sont obtenus en normalisant les sensibilités s_r de la manière suivante :

$$e_r = \frac{r}{\beta} s_r = \frac{r}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial r} \quad (5.47)$$

où r représente la variable ou le paramètre considéré. On a notamment :

$$\frac{\partial \beta}{\beta} = e_r \frac{\partial r}{r} \quad (5.48)$$

On voit à partir de l'expression précédente (5.48) que e_r indique de quel facteur l'indice β est amplifié lorsque le paramètre r varie. Les facteurs d'élasticité par rapport aux variables aléatoires U_i du problème valent α_i^2 et permettent de classer ces variables suivant leurs poids respectifs dans la fiabilité. Les variables dont les poids fiabilistes sont négligeables pourront être considérées comme déterministes. Les facteurs d'élasticité sur les paramètres des distributions constituent des indicateurs importants pour le dimensionnement, notamment ceux associés à la moyenne et au coefficient de variation. Ces facteurs permettent donc d'identifier pour chaque variable le paramètre de la distribution le plus influent sur la fiabilité. En particulier, l'élasticité à la moyenne indique l'impact sur la fiabilité d'incertitudes sur la moyenne de la variable considérée. Ainsi, elle instruit quant à la valeur à retenir pour cette variable en conception. De même, l'élasticité au coefficient de variation correspond au poids dans la fiabilité de l'incertitude sur la dispersion d'une variable. Notons que l'élasticité au coefficient de variation est toujours négative puisqu'une augmentation de la dispersion est toujours défavorable à la fiabilité. Si cette élasticité est importante, on peut envisager de réduire la dispersion de la variable en réalisant un contrôle qualité en fabrication quand cela est possible.

5.5 Conclusion

L'analyse de fiabilité permet d'évaluer les indices de fiabilité et les probabilités de défaillance associés à un scénario de défaillance. Il existe aujourd'hui une théorie complète

sur ce point. Celle-ci fournit des outils (méthode d'approximation *FORM/SORM* et tirages d'importance) permettant d'évaluer simplement la probabilité de défaillance. Mieux, l'analyse de fiabilité fournit les facteurs d'importance qui sont les poids des paramètres du problème dans la fiabilité. Ces dernières grandeurs sont un indicateur important pour le concepteur dans la mesure où elles permettent de voir le sens dans lequel varie la fiabilité suivant les variations des paramètres. En particulier, les élasticités aux différentes variables aléatoires donnent une classification de ces variables, ce qui permet d'identifier les variables aléatoires significatives pour la fiabilité et, le cas échéant, de supposer déterministes les variables de poids négligeable. Quant aux élasticités par rapport aux moyennes, elles renseignent sur les dimensionnements à retenir tandis que les élasticités par rapport aux coefficients de variation peuvent orienter si possible le contrôle qualité.

Chapitre 6

Analyse de fiabilité en fatigue thermique

6.1 Introduction

La méthode actuelle de dimensionnement en fatigue thermique des composants du nucléaire est déterministe (chapitre 2). Cependant, comme cela a été noté au chapitre 3, le phénomène de fatigue, qui est affecté par de nombreuses sources d'incertitudes, est fondamentalement aléatoire. Il est donc plus cohérent d'utiliser des méthodes probabilistes pour étudier la tenue des structures en fatigue thermique.

L'objectif de ce chapitre est de proposer un dimensionnement probabiliste en fatigue thermique basé sur les modèles utilisés dans le dimensionnement déterministe. La démarche adoptée consiste à intégrer dans la modélisation du comportement en fatigue les incertitudes sur les variables d'entrée, qui sont représentées par des variables aléatoires. Dans ce cas, la tenue en fatigue est caractérisée par la probabilité de défaillance de la structure considérée. Cette probabilité est évaluée suivant le principe du couplage mécano-fiabiliste décrit au chapitre 5. Deux approches du couplage mécano-fiabiliste sont considérées, à savoir un couplage dans le domaine temporel et un couplage dans le domaine fréquentiel.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première section, la problématique du dimensionnement en fatigue est posée. Les deux sections suivantes sont consacrées à la présentation du couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel respectivement. Enfin, dans la dernière section, les difficultés relatives à la mise en œuvre de ces méthodes sont exposées.

6.2 Problématique

La problématique du dimensionnement probabiliste en fatigue se formule de la manière suivante. On se fixe une durée de vie admissible en service et on cherche à évaluer la probabilité de défaillance en fatigue sur cette durée. Cette probabilité est estimée suivant le principe du couplage mécano-fiabiliste. Celui-ci requiert, notamment, la définition d'une fonction de performance $G(\mathbf{x})$, où \mathbf{x} représente une réalisation du vecteur des variables aléatoires du problème, et la donnée de la loi conjointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ du vecteur \mathbf{X} composé des

variables aléatoires du problème.

Soit $N(\mathbf{x})$ le nombre de cycles à la rupture. Si on fixe N_0 , le nombre de cycles en service visée pour la structure considérée, la défaillance se produit lorsque $N(\mathbf{x})$ est inférieur à N_0 . En vertu des conventions qui définissent le domaine de défaillance comme le domaine où la fonction de performance est négative ou nulle, la fonction de performance $G(\mathbf{x})$ associée au dimensionnement probabiliste en fatigue s'écrit :

$$G(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}) - N_0 \quad (6.1)$$

En divisant cette expression (6.1) par $N(\mathbf{x})$, elle peut être réécrite sous la forme :

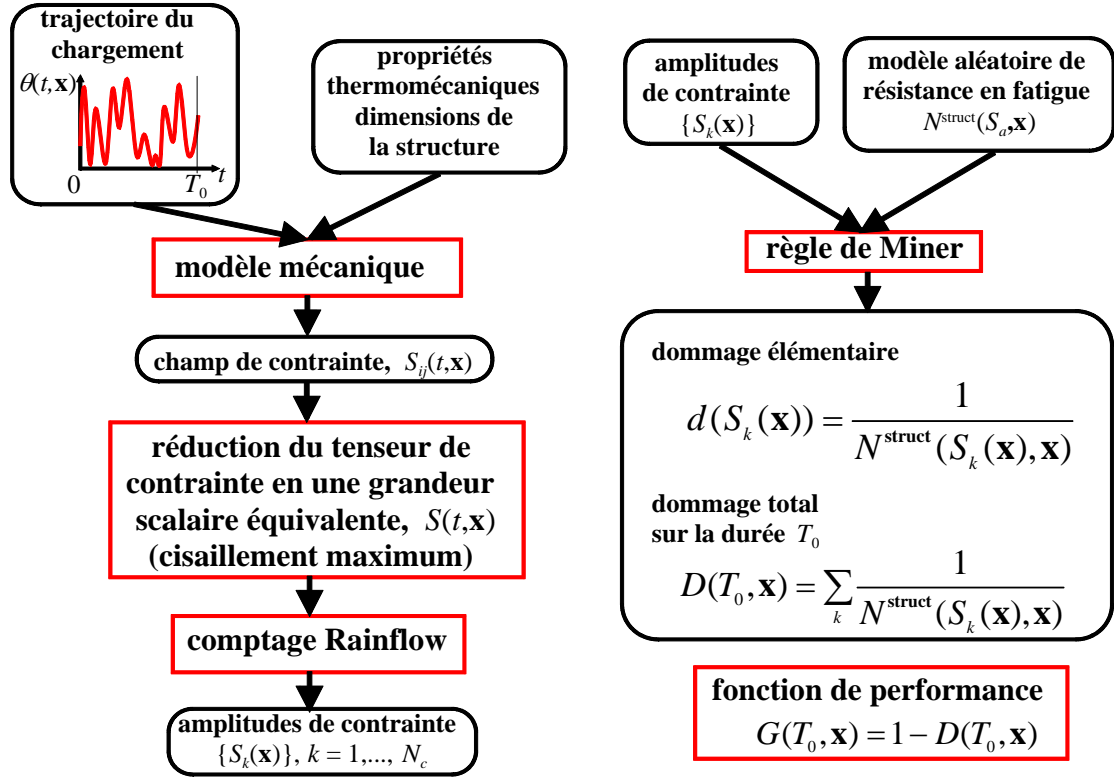
$$G(\mathbf{x}) = 1 - D(N_0, \mathbf{x}) \quad (6.2)$$

où $D(N_0, \mathbf{x}) = N_0/N(\mathbf{x})$ est le dommage total en fatigue généré par N_0 cycles selon la règle de Miner.

Dans notre étude, on admet que la modélisation du comportement en fatigue est exacte. On ne tient donc pas compte des incertitudes sur les modèles adoptés. Dès lors, les paramètres du modèle de résistance à la fatigue, en particulier la limite d'endurance, sont déterministes. De même, l'indice de la loi de Miner est supposé non biaisé, déterministe et égal à un. Enfin, la loi de comportement élastique utilisée pour générer le champ de contrainte dans la structure, ainsi que le critère multiaxial de fatigue et le comptage Rainflow sont supposés ne contenir aucune incertitude. Les seules variables aléatoires sont les variables d'entrée du problème. Le chargement est représenté par un processus aléatoire. La résistance à la fatigue du matériau, définie par le nombre de cycles admissibles sous sollicitation d'amplitude S_a constante, est décrite par une variable aléatoire dont les caractéristiques dépendent de S_a . Par ailleurs, les marges de sécurité appliquées à la résistance en fatigue du matériau pour tenir compte de l'environnement spécifique des structures du nucléaire, sont définies comme des variables aléatoires. Enfin, les dimensions géométriques et les propriétés thermomécaniques du matériau sont données par des variables aléatoires. En pratique, il suffit de connaître les lois marginales de toutes ces variables et leur matrice de corrélation pour appliquer la méthode de couplage mécano-fiabiliste.

6.3 Couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel

Dans cette approche, pour évaluer la fonction de performance, les calculs sont menés dans le domaine temporel. Le modèle mécanique associé à cette approche est schématisé sur la figure 6.1. On part d'une réalisation des variables aléatoires du problème. En particulier, une réalisation du processus de chargement est donnée par une trajectoire sur la durée de vie en service T_0 considérée. On commence par calculer le champ de contrainte $S_{ij}(\mathbf{x}, t)$ au point le plus sollicité de la structure. Le critère de Tresca est ensuite utilisé pour réduire le tenseur de contrainte à une contrainte scalaire équivalente $S(\mathbf{x}, t)$, sur laquelle on applique le comptage Rainflow pour déterminer les amplitudes de cycles $\{S_k(\mathbf{x}), k = 1, \dots, N_c\}$, où N_c est le nombre total de cycles Rainflow de la séquence considérée. Les amplitudes $S_k(\mathbf{x})$ sont ensuite reliées au modèle de résistance en fatigue pour obtenir les nombres $N^{\text{struct}}(S_k(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ de cycles admissibles à amplitude constante égale à

FIG. 6.1 – *Modèle mécanique dans le domaine temporel.*

$S_k(\mathbf{x})$. On en déduit les dommages élémentaires puis le dommage total de fatigue sur la durée T_0 , qui s'écrit :

$$D(T_0, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{N^{\text{struct}}(S_k(\mathbf{x}), \mathbf{x})} \quad (6.3)$$

Il s'agit, en fait, de l'approche discrète (section 3.3.2) d'estimation du dommage de fatigue.

Considérons à présent le cas particulier de la génération de réalisations du processus aléatoire de chargement. On peut ramener la simulation des trajectoires à la génération de variables aléatoires. En effet, lorsque le processus est supposé gaussien stationnaire (hypothèse faite dans cette étude) il existe des méthodes de simulation de trajectoires de processus qui dépendent d'un certain nombre de variables aléatoires. Les variables aléatoires dont dépend la discrétisation du processus peuvent alors être considérées comme des données d'entrée du problème. Dans cette étude, la méthode de simulation de trajectoires de processus est décrite en annexe C. Elle consiste d'abord à générer judicieusement une séquence de coefficients de Fourier C_k dont les amplitudes dépendent de la densité spectrale du processus tandis que leurs phases respectives sont des variables aléatoires de distribution uniforme, puis à appliquer une transformée de Fourier inverse à la séquence des coefficients C_k pour obtenir la trajectoire du chargement. On peut donc considérer les phases des coefficients C_k comme des données d'entrée. Toutefois, dans le cas particulier des processus stationnaires et lorsque le nombre de cycles est grand, il a été démontré [SGL03] que l'aléa sur le chargement a un effet négligeable sur la variabilité du dommage de fatigue. Par conséquent, on peut se contenter de considérer un chargement déterministe

représenté par une de ses trajectoires sur la durée de service T_0 (supposée suffisamment grande).

En conclusion, si on dispose des lois probabilistes de l'ensemble des variables aléatoires, on est capable de les coupler au modèle mécanique défini dans le domaine temporel (Figure 6.1). Cette approche paraît naturelle et consiste à évaluer la fonction de performance en utilisant directement la procédure proposée dans le code de dimensionnement déterministe.

6.4 Couplage mécano-fiabiliste dans le domaine fréquentiel

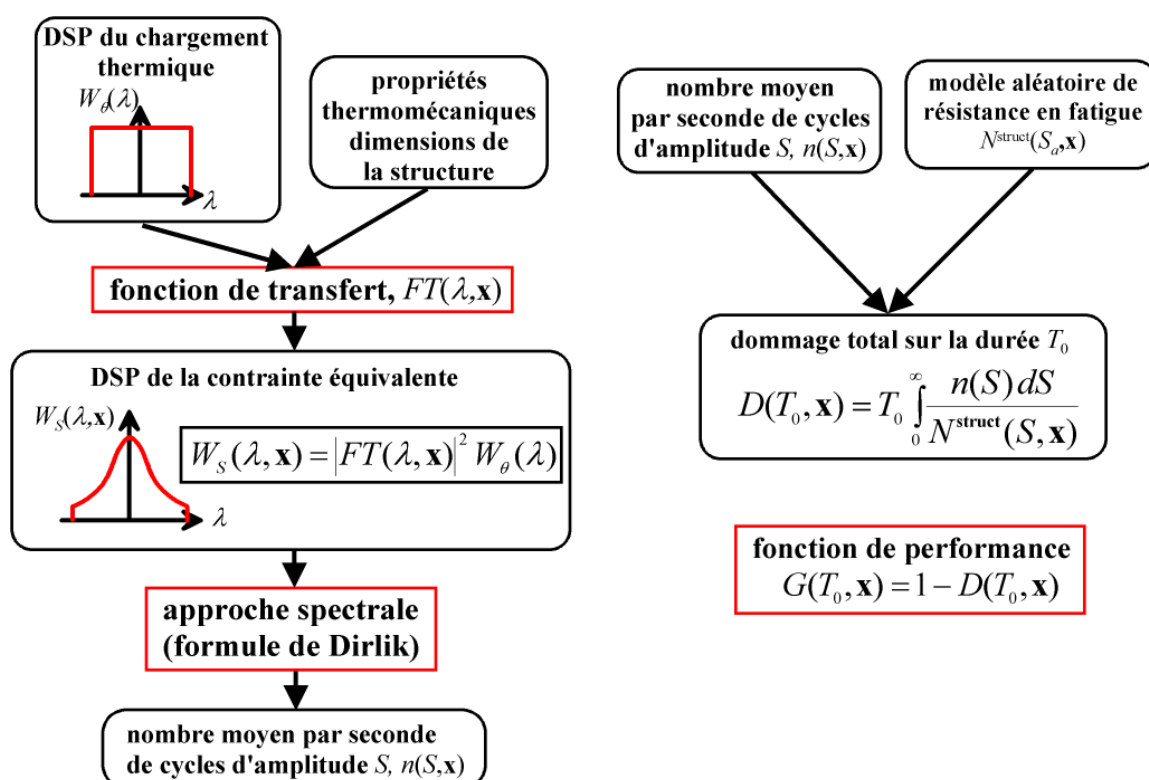


FIG. 6.2 – *Modèle mécanique dans le domaine fréquentiel.*

Dans cette approche, pour évaluer la fonction de performance, les calculs sont menés dans le domaine fréquentiel. Cette approche s'appuie sur les méthodes spectrales de dimensionnement en fatigue de structures soumises à des chargements aléatoires stationnaires. Ces méthodes sont développées dans le but d'estimer la durée de vie en fatigue d'une structure à partir de paramètres statistiques décrivant le processus aléatoire de contrainte résultant du chargement aléatoire. Les paramètres statistiques requis sont des caractéristiques spectrales du processus. Sous l'hypothèse de stationnarité, le chargement est décrit par sa densité spectrale de puissance (DSP), qui est une quantité déterministe. Le modèle mécanique associé à cette approche est schématisé sur la figure 6.2. On part

du chargement défini par sa DSP, notée $W_\theta(\lambda)$, λ étant la pulsation exprimée en radians par seconde. Puis on estime successivement :

- la DSP du processus de contrainte équivalente ;
- la distribution des amplitudes de cycles ;
- le dommage total de fatigue.

6.4.1 Détermination de la DSP du processus de contrainte équivalente

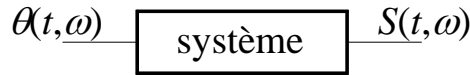


FIG. 6.3 – *Système linéaire à une entrée et une sortie.*

Les contraintes dans la structure sont calculées sous l'hypothèse d'un comportement élastique du matériau, requise dans le dimensionnement en fatigue des matériels d'îlots nucléaires. Sous cette hypothèse, le problème est alors modélisé comme un système physique linéaire avec en entrée la température $\theta(t, \omega)$ et en sortie le champ de contrainte $S(t, \omega)$ dans la structure (Figure 6.3). Lorsque l'entrée du système $\theta(t)$ est une fonction déterministe du temps, le système est caractérisé par sa réponse impulsionnelle, $z(t)$, et on a :

$$S(t) = z(t) \otimes \theta(t) = \int_0^\infty z(t) \theta(t - \tau) d\tau \quad (6.4)$$

où \otimes est l'opérateur produit de convolution. Lorsque l'entrée du système $\theta(t, \omega)$ est un processus aléatoire stationnaire, la sortie $S(t, \omega)$ est aussi un processus aléatoire stationnaire du fait de la linéarité du système. Si on considère $W_\theta(\lambda)$ et $W_S(\lambda)$ les densités spectrales de puissance respectives de $\theta(t, \omega)$ et $S(t, \omega)$, on démontre qu'elles sont reliées par la formule [Pri81] :

$$W_S(\lambda) = |FT(\lambda)|^2 W_\theta(\lambda) \quad (6.5)$$

où $FT(\lambda)$, appelée fonction de transfert du système, est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $z(t)$:

$$FT(\lambda) = \int_0^\infty z(t) e^{-j \lambda \tau} d\tau \quad (6.6)$$

Le détail de cette démonstration est présenté en annexe C.

Si l'état de contrainte est tridimensionnel, la fonction de transfert est une matrice. Dans ce cas, les critères multiaxiaux de fatigue sont traduits dans le domaine fréquentiel. Il existe dans la littérature des formulations spectrales de critères multiaxiaux de fatigue. En particulier, Pitoiset et Preumont [PP00] ont formulé dans le domaine fréquentiel deux types de critères, notamment des critères basés sur les invariants des contraintes (approche globale) et des critères de type plan critique. Cependant, à la connaissance de l'auteur, il

n'existe pas de formulation spectrale de la contrainte équivalente de Tresca utilisée dans le code RCCM.

Connaissant la DSP du processus de contrainte équivalente, il s'agit à présent d'extraire de ce processus les cycles de contrainte. Mais la contrainte étant aléatoire, les amplitudes des cycles deviennent elles aussi aléatoires. On cherche donc à estimer la densité de probabilité $f_S(S_a)$ de ces amplitudes.

6.4.2 Méthode spectrale d'estimation de la distribution des amplitudes de cycles

On présente ici les principales méthodes spectrales pour estimer la distribution des amplitudes des cycles Rainflow $f_S(S_a)$. Les caractéristiques de base d'un processus sont définies à partir de ses *moments spectraux*. Le moment spectral, m_i , d'ordre i est défini comme suit :

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^i |W_S(\lambda)| d\lambda \quad (6.7)$$

Les caractéristiques spectrales les plus importantes dans l'analyse de fatigue sont celles qui donnent des indications sur la largeur de bande du processus. On en identifie deux dans la littérature. Le premier est le *facteur d'irrégularité*, noté I . Il représente le rapport entre le nombre moyen par unité de temps de passages par zéro à pente positive et le nombre moyen par unité de temps de maximums et vaut :

$$I = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \quad (6.8)$$

Le facteur d'irrégularité I est compris entre 0 et 1. Le processus est dit à *bande étroite* lorsque I est proche de 1, il est dit à *bande large* quand I est proche de 0. L'autre paramètre de largeur de bande souvent utilisé est noté ϵ et vaut :

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} = 1 - I^2 \quad (6.9)$$

Sur les figures 6.4 et 6.5 sont représentés des exemples de processus de contrainte respectivement à bande étroite et large. Ces processus sont des pseudo bruits blanc de moyennes nulles et d'écart-types identiques égaux à 100 MPa. Le processus à bande étroite a une fréquence centrale de 20 Hz, une largeur de bande de 2 Hz et son facteur d'irrégularité vaut 0,99. Le processus à bande large est de fréquence centrale nulle, de largeur de bande valant 20 Hz et son facteur d'irrégularité est 0,74.

La première approche spectrale pour estimer la loi des amplitudes de contrainte est attribuée à Bendat [Ben64]. Il montre, dans le cas particulier des processus idéalement à bande étroite, que les pics du signal sont directement suivis par un minimum local de même amplitude et forment avec celui-ci un cycle de contrainte. Ayant noté que les pics d'un processus à bande étroite suivent une loi de Rayleigh, il en déduit que les amplitudes des cycles de contrainte suivent aussi une loi de Rayleigh. Et en utilisant les équations de Rice [Ric54], il en déduit que la distribution des amplitudes S_a de cycles de contrainte est donnée par l'expression :

$$f_S(S_a) = f^{Ray}(S_a) = \frac{S_a}{m_0} e^{-\frac{S_a^2}{m_0}} \quad (6.10)$$

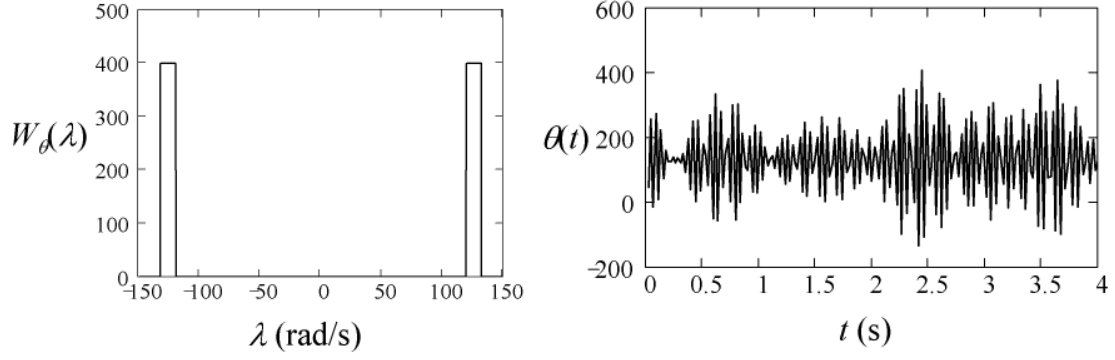


FIG. 6.4 – Exemple de processus aléatoire à bande étroite.

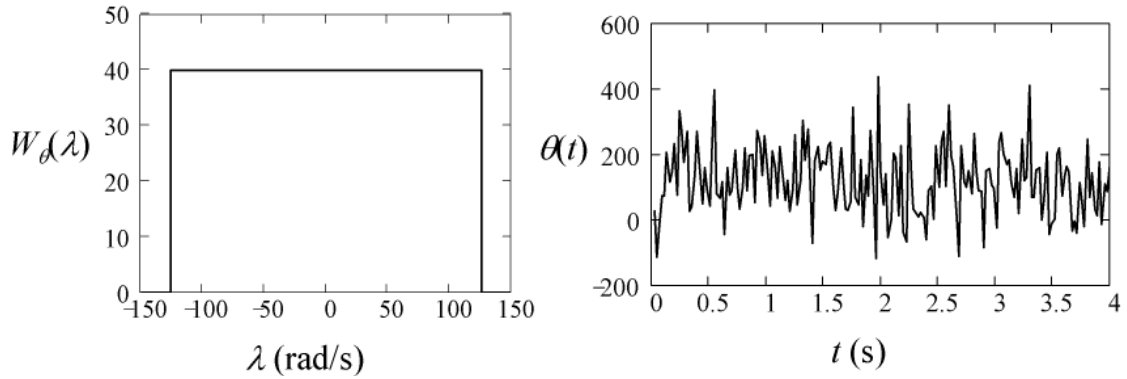


FIG. 6.5 – Exemple de processus aléatoire à bande large.

où m_0 est le moment spectral d'ordre zéro (variance) du processus. La figure 6.6 confronte les histogrammes des amplitudes de contrainte normalisées issues des deux exemples de processus (processus à bande étroite ou large) et les distributions données par le modèle de Rayleigh. Notons que les amplitudes sont obtenues en appliquant la méthode de comptage Rainflow à une trajectoire simulée à partir des DSP des processus avec 2^{17} pas de temps sur une durée de 1000 s. On vérifie que le modèle de Rayleigh s'ajuste à l'histogramme des amplitudes de cycles Rainflow pour le processus à bande étroite, mais est complètement décalé pour le processus à bande large.

Dans la réalité, les processus sont rarement à bande étroite. En associant un cycle à chaque pic de contrainte, la loi de Rayleigh proposée par Bendat devient exagérément conservatrice pour la plupart des processus rencontrés dans la réalité. Afin de déterminer des distributions plus réalistes d'amplitudes des cycles de contrainte Rainflow, d'autres modèles spectraux sont proposés. Ces modèles développés notamment pour l'industrie offshore améliorent le modèle de Rayleigh en le multipliant par un facteur de correction semi-empirique. On peut citer en exemple le modèle de Wirsching et Light [WL80] qui proposent le facteur de correction suivant :

$$f_S(S_a) = \lambda_{WL} f^{Ray}(S_a) \quad (6.11)$$

$$\lambda_{WL} = a(c) + [1 - a(c)] (1 - \epsilon)^{b(c)} \quad (6.12)$$

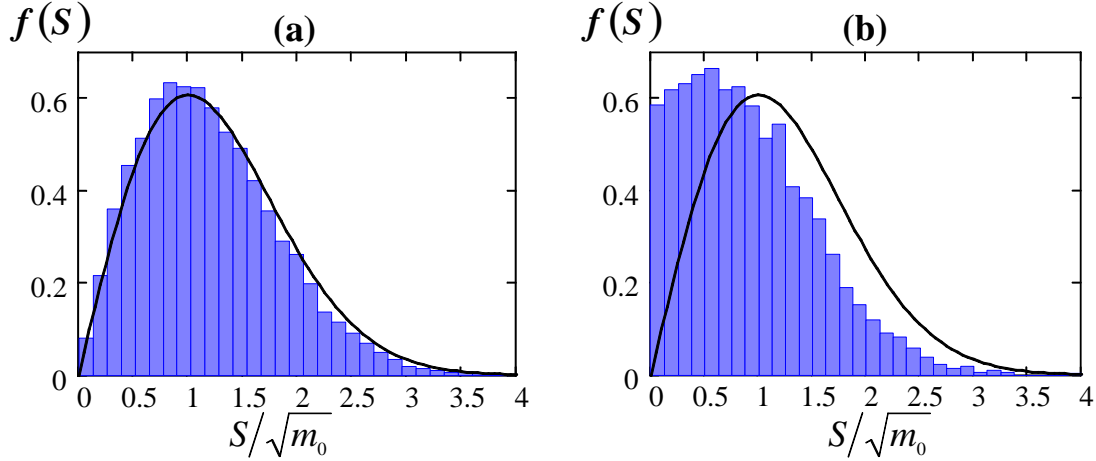


FIG. 6.6 – Modèle de Rayleigh - distribution des amplitudes de contrainte normalisées pour un processus, (a) à bande étroite, (b) à bande large.

où c est l'exposant de l'amplitude de contrainte dans l'expression de la courbe moyenne de fatigue définie suivant le modèle de Basquin :

$$\text{modèle de Basquin : } N(S_a) = K S_a^{-c} \quad (6.13)$$

et

$$a(c) = 0,926 - 0,033 c \quad (6.14)$$

$$b(c) = 1,587 c - 2,323 \quad (6.15)$$

ϵ est le paramètre de largeur de bande défini par l'expression (6.9). On note, en particulier, que ce modèle suppose que la courbe moyenne de fatigue est décrite par un modèle de Basquin, adopté en général dans l'offshore. Ceci rend ce modèle propre à cette industrie. Plus généralement, les modèles introduisant un facteur semi-empirique de correction du modèle de Rayleigh sont très spécifiques au type d'industrie pour lequel ils ont été développés [Hal99]. Une alternative pour définir un modèle plus général est proposée par Zhao et Baker [ZB92]. Les auteurs montrent que la densité de probabilité des amplitudes des cycles de contrainte Rainflow issus d'un processus de contrainte aléatoire stationnaire peut être approximée par une combinaison linéaire d'une loi de Weibull et d'une loi de Rayleigh. De plus, les coefficients de la combinaison linéaire ainsi que les paramètres de ces lois s'expriment en fonction du facteur d'irrégularité I (Eq. 6.8). La distribution $f_S(S_a)$ des amplitudes des cycles de contrainte Rainflow s'écrit alors sous la forme :

$$f_S(S_a) = a_1 f^{Weib}(S_a) + a_2 f^{Ray}(S_a) \quad (6.16)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes et :

$$f^{Weib}(S_a) = a b \left(\frac{S_a}{\sqrt{m_0}} \right)^{b-1} \exp \left[-a \left(\frac{S_a}{\sqrt{m_0}} \right)^b \right] \quad (6.17)$$

$$f^{Ray}(S_a) = \frac{S_a}{m_0} e^{-\frac{S_a^2}{2m_0}} \quad (6.18)$$

a et b sont les paramètres de la loi de Weibull. Notons que dans les deux distributions de Weibull et de Rayleigh, l'amplitude de contrainte S_a est normalisée en la divisant par son écart-type (qui est la racine carrée de sa variance m_0). Par ailleurs, puisque l'intégrale de la fonction densité de probabilité $f_S(S_a)$ de la variable S_a de zéro à l'infini vaut un :

$$\int_0^{\infty} f_S(S_a) dS_a = 1 \quad (6.19)$$

on a $a_1 + a_2 = 1$. On peut donc se contenter d'un seul coefficient de combinaison w et réécrire l'expression (6.16) sous la forme :

$$f_S(S_a) = w f^{Weib}(S_a) + (1 - w) f^{Ray}(S_a) \quad (6.20)$$

Pour déterminer les paramètres a et b de la loi de Weibull et le coefficient de combinaison w , les auteurs de cette approche utilisent les critères suivants :

1. la forme de $f_S(S_a)$ doit approcher l'histogramme des amplitudes des cycles de contraintes obtenus par la méthode Rainflow ;
2. les moments des amplitudes de contrainte distribuées suivant $f_S(S_a)$ doivent être très voisins des moments des amplitudes de contrainte simulées par la méthode Rainflow.

A partir d'études théoriques sur la distribution des pics dans un processus et à l'aide de simulations sur une grande variété de DSP, les expressions suivantes sont obtenues pour les paramètres a , b et w :

$$w = \frac{1 - I}{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) a^{-1/b}} \quad (6.21)$$

$$a = 8 - 7 I \quad (6.22)$$

$$b = \begin{cases} 1, 1 & \text{si } I < 0,9 \\ 1, 1 + 9 (I - 0,9) & \text{si } I \geq 0,9 \end{cases} \quad (6.23)$$

où Γ est la fonction gamma. Le modèle de Zhao et Baker [ZB92] se révèle précis pour un grand nombre de DSP, notamment les DSP de formes simples. Mieux, ce modèle a l'avantage d'être très simple puisqu'il ne dépend que du facteur d'irrégularité du processus. La comparaison du modèle de Zhao et Baker aux simulations Rainflow (Figure 6.7), montre que ce modèle est plus réaliste lorsque le processus est à bande large. Notons qu'il coïncide exactement avec le modèle de Rayleigh dans le cas de la bande étroite.

Mais le modèle le plus abouti pour estimer la distribution des amplitudes des cycles extraits par méthode Rainflow à partir des caractéristiques spectrales du processus de contrainte est celui donné par Dirlik [Dir85]. Il propose une formule empirique basée sur une étude approfondie des simulations Rainflow. Cette formule dépend uniquement de quatre moments spectraux du processus de contrainte, à savoir, m_0 , m_1 , m_2 et m_4 . Le nombre de cycles Rainflow d'étendue comprise entre ΔS et $\Delta S + d\Delta S$ est donné par :

$$n(\Delta S) = E[M_T] T_0 p(\Delta S) \quad (6.24)$$

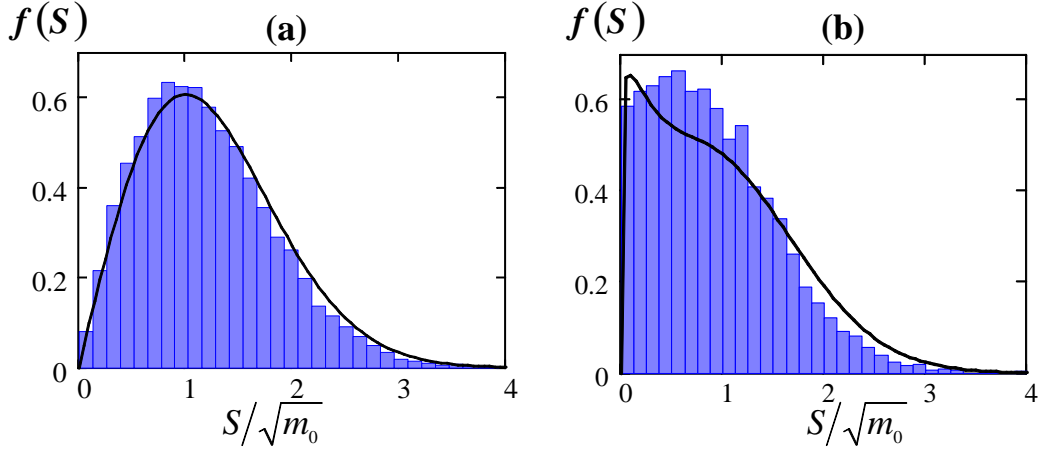


FIG. 6.7 – Modèle de Zhao et Baker - distribution des amplitudes de contrainte normalisées pour un processus, (a) à bande étroite, (b) à bande large.

où $E[M_T]$ est le nombre moyen de pics par unité de temps et vaut :

$$E[M_T] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (6.25)$$

et $p(\Delta S)$ est la probabilité d'extraire un cycle d'étendue ΔS . Cette probabilité est donnée par l'équation :

$$p(\Delta S) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left[\frac{D_1}{Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + D_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}} \right]$$

avec :

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2(x_m - \gamma^2)}{1 + \gamma^2}; & D_2 &= \frac{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}{1 - R}; & D_3 &= 1 - D_1 - D_2 \\ x_m &= \frac{m_1}{m_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}}; & \gamma &= \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}}; & R &= \frac{\gamma - x_m - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 + D_1^2} \\ Q &= \frac{1,25 (\gamma - D_3 - D_2 R)}{D_1}; & Z &= \frac{\Delta S}{2\sqrt{m_0}} \end{aligned} \quad (6.26)$$

La figure 6.8 met en évidence l'adéquation entre le modèle de Dirlik et les simulations des amplitudes des cycles Rainlow pour les deux exemples de processus considérés (Figures 6.4 et 6.5). De plus, après une comparaison approfondie des approches spectrales couramment utilisée, Bouyssy *et al.* [BNR93] concluent que la formule de Dirlik est la plus satisfaisante en terme de précision. Par conséquent, c'est cette formule qui est utilisée dans notre analyse. Indiquons, par ailleurs, que la formule de Dirlik est utilisée dans l'industrie et implémentée dans des logiciels de fatigue commercialisés par nCode International Ltd [Hal99].

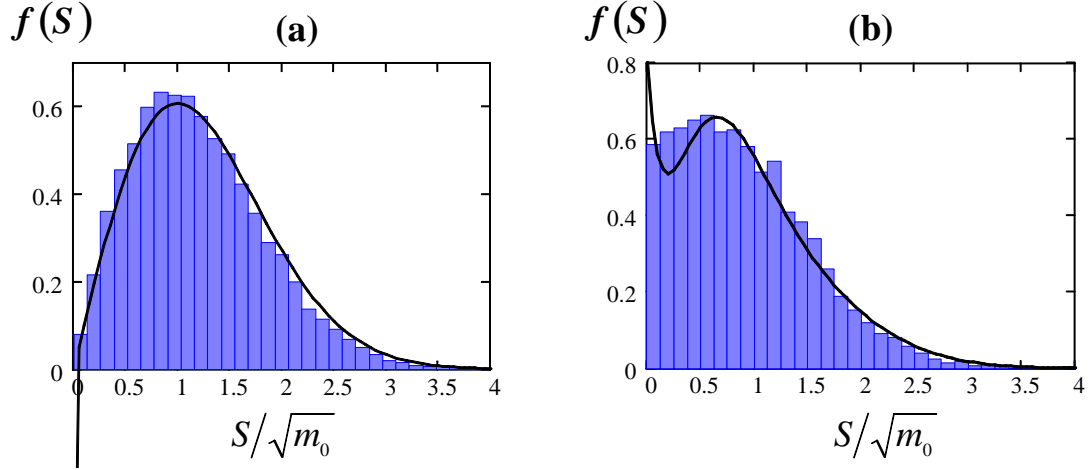


FIG. 6.8 – Modèle de Dirlik - distribution des amplitudes de contrainte normalisées pour un processus, (a) à bande étroite, (b) à bande large.

6.4.3 Expression du dommage

Ayant noté que la formule de Dirlik fournit la distribution $p(\Delta S)$ des cycles d'étendue ΔS , on montre aisément que la distribution des cycles d'amplitude $S_a = \Delta S/2$ vaut :

$$f_S(S_a) = \frac{1}{2}p(\Delta S) \quad (6.27)$$

ainsi, le nombre de cycles Rainflow d'amplitude comprise entre S et $S + dS$ sur la durée de service T_0 s'écrit :

$$n(S_a) dS_a = T_0 \cdot E[M_T] \cdot f_S(S_a) dS_a \quad (6.28)$$

En appliquant la règle de Miner, le dommage élémentaire $d D_T$ provoqué par les cycles d'amplitude dans l'intervalle $[S_a ; S_a + dS_a]$ vaut donc :

$$d D_T = \frac{n(S_a) dS_a}{N^{\text{struct}}(S_a)} = \frac{T_0 \cdot E[M_T] \cdot f_S(S_a) dS_a}{N^{\text{struct}}(S_a)} \quad (6.29)$$

où $N^{\text{struct}}(S_a)$ définit la résistance en fatigue du matériau de la structure étudiée et est donné par le nombre de cycles sous sollicitation cyclique d'amplitude constante égale à S_a . Le dommage total de fatigue sur la durée de service T_0 est obtenu en intégrant la relation (6.29) sur le domaine de variation de S_a :

$$D_T(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \frac{n(S_a) dS_a}{N^{\text{struct}}(S_a)} = T_0 \int_0^\infty \frac{E[M_T] \cdot f_S(S_a) dS_a}{N^{\text{struct}}(S_a)} \quad (6.30)$$

Notons que cette approche évalue le dommage sous sa formulation continue (section 3.3.1).

On est ainsi capable d'évaluer le dommage de fatigue et par conséquent la fonction de performance pour une réalisation de l'ensemble des variables aléatoires d'entrée du problème. On peut donc utiliser ce schéma basé sur une approche spectrale comme modèle mécanique dans notre analyse de fiabilité.

6.5 Difficultés rencontrées

1. La première difficulté est relative à la régularité de la fonction de performance. En effet, les algorithmes les plus couramment utilisés pour rechercher le point de conception sur la surface d'état-limite font appel au calcul de dérivées d'ordre un voire d'ordre deux de la fonction de performance. Ceci implique que la fonction de performance doit être au moins continûment dérivable sur son domaine de définition. Dans notre cas, le nombre de cycles à la rupture de la structure, $N^{\text{struct}}(S_a, \omega)$, sous sollicitation d'amplitude constante S_a , s'écrit :

$$N^{\text{struct}}(S_a, \omega) = \begin{cases} N_1(S_a, \omega) = \frac{1}{\gamma_p^S} e^{\eta(S_a) + \sigma(S_a) \xi(\omega)} & \text{si } S_a > S_{\text{crit}} \\ N_2(S_a, \omega) = e^{\eta(\gamma_p^S S_a) + \sigma(\gamma_p^S S_a) \xi(\omega)} & \text{si } S_D / \gamma_p^S < S_a \leq S_{\text{crit}} \end{cases} \quad (6.31)$$

Il a une dérivée discontinue au point S_{crit} qui délimite les domaines de faible et grand nombre de cycles. La fonction de performance n'est donc pas dérivable sur tout son domaine de définition. Pour lever cette insuffisance, on peut régulariser $N^{\text{struct}}(S_a, \omega)$ en utilisant une fonction de régularisation [Sud04b]. En particulier, on prend la fonction Heaviside régularisée en un certain point z_0 (Figure 6.9). Celle-ci s'exprime sous la forme :

$$Hr(z) = \frac{e^a (z - z_0)}{e^{-a} (z - z_0) + e^a (z - z_0)}, \quad a > 0 \quad (6.32)$$

où a est une constante strictement positive. Pour régulariser le nombre de cycles $N^{\text{struct}}(S_a, \omega)$ on peut alors la réécrire à l'aide de la fonction Heaviside régularisée sous la forme :

$$N^{\text{struct}}(S_a, \omega) = Hr(S_a - S_{\text{crit}}) \cdot N_2(S_a, \omega) + [1 - Hr(S_a - S_{\text{crit}})] \cdot N_1(S_a, \omega) \quad (6.33)$$

La fonction $N^{\text{struct}}(S_a, \omega)$ régularisée est illustrée sur la figure 6.10.

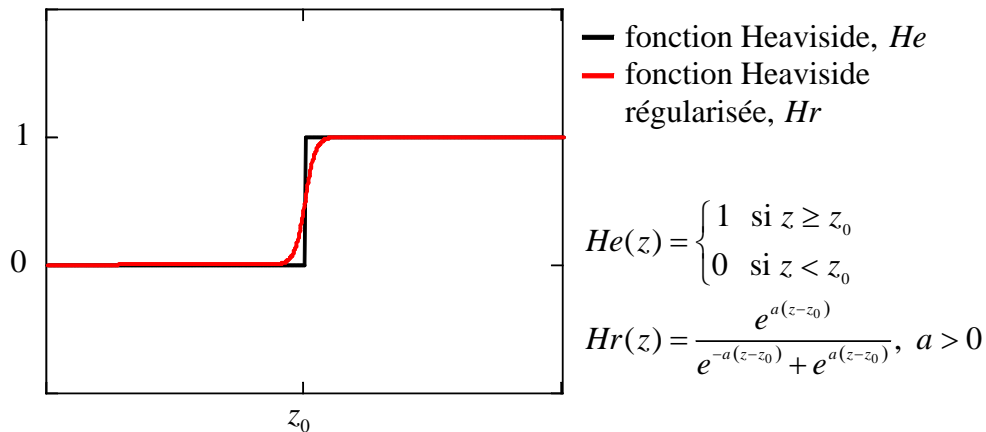


FIG. 6.9 – Fonction Heaviside régularisée.

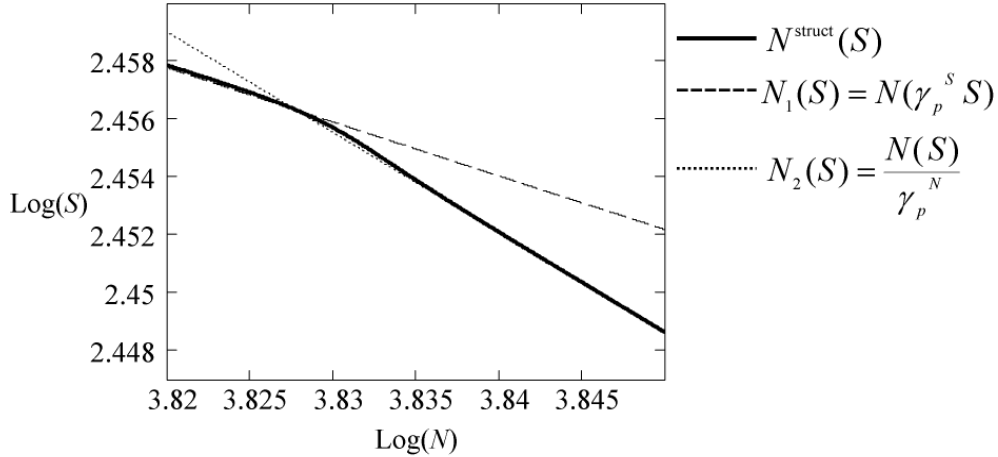


FIG. 6.10 – Nombre de cycles admissibles à amplitude constante, $N^{\text{struct}}(S)$, régularisé.

2. La deuxième difficulté provient de la formulation de la fonction de performance. Sous sa forme initiale, la fonction de performance varie fortement puisque les durées de vie sont importantes, notamment dans la zone d'endurance. Ceci engendre des écarts importants entre les valeurs de la fonction de performance pour des itérations successives et peut rendre instable la recherche du point de conception. Cette instabilité peut ralentir la convergence de l'algorithme et même entraîner sa divergence. Cette difficulté est levée en appliquant une transformation logarithmique à la fonction de performance qui devient :

$$G(T_0, \mathbf{x}) = -\ln [D(T, \mathbf{x})] \quad (6.34)$$

Cette transformation préserve la nature du domaine de défaillance et permet de stabiliser les variations de la fonction de performance. Elle permet en outre d'accélérer la convergence de l'algorithme d'optimisation.

3. Les valeurs des dommages élémentaires sont en général très faibles et les calculateurs les considèrent nulles lorsque les tolérances numériques ne sont pas suffisamment faibles. Cependant, le cumul de ces dommages élémentaires même très faibles peut être non négligeable du fait du grand nombre de cycles extraits. Cette situation peut donc conduire à des valeurs du dommage total erronées. Pour pallier ce problème on peut, soit veiller à spécifier si possible des tolérances numériques très faibles, soit multiplier les dommages élémentaires calculés par une puissance de 10 suffisamment grande puis à diviser le dommage total résultant par la même valeur.
4. Enfin, dans le cas particulier du couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel, on est amené à supposer le chargement périodique pour réduire le coût en temps de calcul puisque la durée de service considérée est en général très grande. La période doit être néanmoins judicieusement choisie de telle sorte que la simulation du chargement sur cette période soit représentative du chargement réel.

6.6 Conclusion

On montre dans ce chapitre comment les méthodes classiques de fiabilité sont employées pour dimensionner des structures en fatigue thermique. Mieux, ces méthodes permettent d'intégrer les incertitudes sur les variables d'entrée dans la description du comportement en fatigue. Ainsi, on est capable d'évaluer la probabilité de défaillance en durée de vie ainsi que les poids relatifs des variables dans la fiabilité. Le principe du couplage mécano-fiabiliste a l'avantage d'être simple et requiert essentiellement d'être capable d'évaluer la fonction de performance pour une réalisation de l'ensemble des variables aléatoires du problème. Deux approches duales du couplage mécano-fiabiliste sont considérées : une approche temporelle et une approche spectrale. L'approche temporelle tient compte de l'aléa sur le chargement en ajoutant aux données d'entrée les variables aléatoires dont dépend la méthode de simulation de trajectoires du chargement. Par contre, l'approche spectrale incorpore simplement l'aléa sur le chargement en le représentant par une DSP qui est une quantité déterministe. Cette dernière approche est de ce point de vue plus intéressante. Notons toutefois que les approches proposées s'appliquent uniquement aux chargements stationnaires et ceci est une hypothèse forte de notre approche.

Chapitre 7

Application

7.1 Présentation du problème

On souhaite, à présent, appliquer la méthode d'analyse de fiabilité en fatigue thermique développée au chapitre 6. On reprend l'exemple de l'élément de tuyauterie (Figure 2.22) traité au chapitre 2. Rappelons qu'il est soumis à un gradient de température et qu'il est libre de se dilater axialement. Ici, on se place en contexte aléatoire. Ainsi, le chargement thermique est aléatoire, représenté par un processus aléatoire gaussien stationnaire. Les propriétés du matériau (module d'Young, coefficient de dilatation thermique, coefficient de Poisson, coefficient d'échange, etc) sont représentées par des variables aléatoires. La résistance en fatigue du matériau, définie par le nombre de cycles à rupture sous sollicitation cyclique d'amplitude constante, est aléatoire. Enfin, les facteurs de réduction de la durée de vie, pour tenir compte de la différence entre la résistance en fatigue des éprouvettes testées et celle du matériau du tuyau dans son environnement réel, sont décrits par des variables aléatoires.

Notre objectif est d'effectuer une analyse complète de la fiabilité en fatigue de cette structure. Pour cela, une durée de service est fixée et la probabilité de défaillance en fatigue du tuyau est évaluée sur cette durée, ainsi que les facteurs d'importance, notamment les poids des variables aléatoires dans la fiabilité et les sensibilités de la fiabilité aux moyennes et aux coefficients de variation de ces variables. On souhaite en outre comparer les résultats fournis par les deux couplages mécano-fiabiliste, respectivement, dans les domaines temporel et spectral pour un type de chargement donné. On suppose dans cette application que la durée de service est grande. Le chargement étant stationnaire, sa variabilité a un effet négligeable sur la fiabilité. Ainsi, dans le cas du couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel, le chargement thermique $\theta(t)$ peut être supposé déterministe et représenté par une séquence de niveaux de température $\{\theta_i, i = 1, \dots, n\}$. Pour l'application du couplage mécano-fiabiliste dans le domaine spectral, le chargement thermique $\theta(t)$ est aléatoire, défini par sa densité spectrale de puissance $W_\theta(\lambda)$. Afin que les résultats issus de ces deux couplages soient comparables, la séquence $\{\theta_i, i = 1, \dots, n\}$ est obtenue en simulant une trajectoire du processus de densité spectrale $W_\theta(\lambda)$. La méthode de simulation de processus utilisée est décrite en annexe C.

7.2 Modélisation du chargement thermique

Dans cet exemple, deux modèles de chargements aléatoires, gaussiens et stationnaires, sont étudiés (tableau 7.1). Ils sont tous les deux représentés par des pseudo bruits blanc de fréquences centrales nulles, mais de fréquences de coupure différentes. Le premier $\theta_1(t, \omega)$ a une fréquence de coupure $f_{c_1} = 20$ Hz, tandis que le second $\theta_2(t, \omega)$ a une fréquence de coupure plus faible $f_{c_2} = 5$ Hz. Leur moyenne respective est de 130°C et leur écart-type vaut 20°C . Les deux modèles de chargement sont illustrés sur les figures 7.1 et 7.2.

cas de charge	moyenne, μ_θ	écart-type, σ_θ	fréquence de coupure, f_c
$\theta_1(t, \omega)$	130°C	20°C	20 Hz
$\theta_2(t, \omega)$	130°C	20°C	5 Hz

TAB. 7.1 – Propriétés des deux cas de charge considérés.

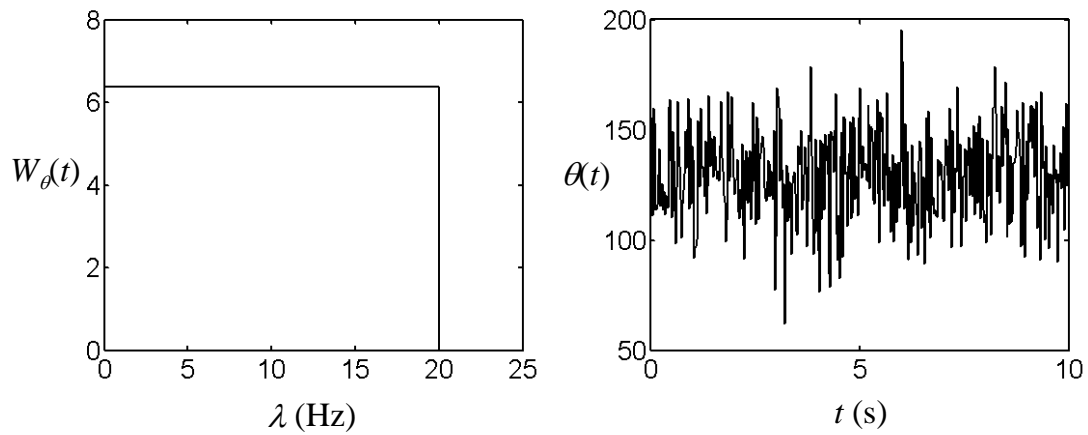


FIG. 7.1 – Chargement thermique θ_1 ($f_c = 20$ Hz).

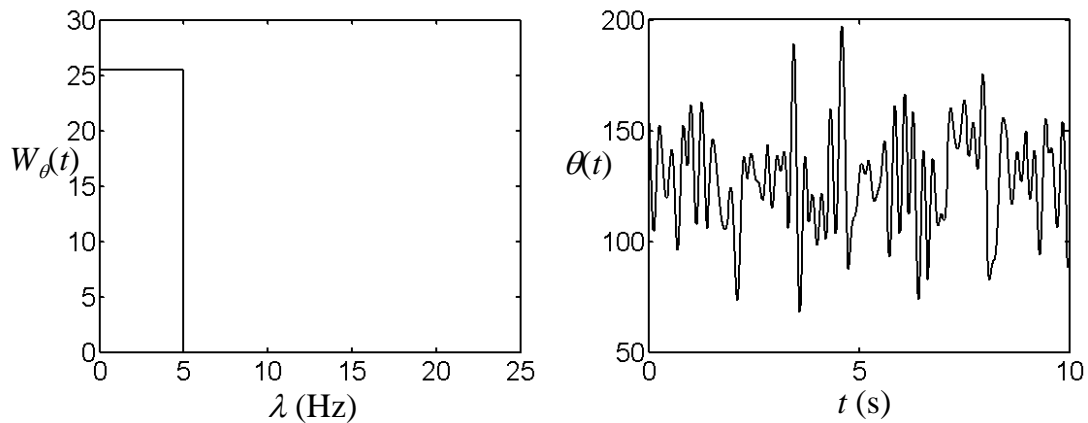


FIG. 7.2 – Chargement thermique θ_2 ($f_c = 5$ Hz).

Pour le couplage mécano-fiabiliste dans le domaine fréquentiel, les densités spectrales de puissance respectives des deux modèles de charge sont utilisées. Elles sont notées respectivement $W_{\theta_1}(\lambda)$ et $W_{\theta_2}(\lambda)$. Dans le cas du couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel, deux trajectoires simulées à partir des densités spectrales de puissance respectives des deux modèles de charge, sont employées. Pour réduire le coût en temps de calcul, ces trajectoires sont supposées périodiques de période égale à 360 s. Nous admettons donc que les trajectoires de température du fluide calculées sur cette période sont représentatives du chargement thermique réel. Les trajectoires des deux cas de charge sont alors simulées sur cette période par une séquence de température de $2^{14} = 16384$ pas de temps et on admet que la séquence obtenue se répète de manière périodique.

7.3 Caractérisation probabiliste de la résistance en fatigue

La résistance en fatigue du matériau donnée par le nombre de cycles admissibles sous sollicitation d'amplitude constante est aléatoire et représentée par une variable log-normale. Les caractéristiques de cette variable sont obtenues par un traitement statistique de données d'essais de fatigue [SGH⁺03]. La courbe médiane $\overline{\ln N}(S)$ suit un modèle dont la dispersion est proportionnelle à la moyenne (coefficient de variation constant - hypothèse H3). On a ainsi :

$$\ln N = \overline{\ln N} + \sigma(S) \xi ; \overline{\ln N} = A \ln(S - S_D) + B \text{ et } \sigma(S) = \delta \overline{\ln N} \quad (7.1)$$

où ξ est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite et S_D la limite d'endurance. S_D , A , B et δ résultent de l'ajustement des données (Chapitre 4). Les valeurs retenues sont rappelées dans le tableau 7.2.

A	B	S_D (MPa)	δ
-2,28	24,06	185,80	0,09

TAB. 7.2 – Valeurs des paramètres du modèle de résistance à la fatigue.

La résistance en fatigue $N^{\text{struct}}(S)$ de la structure réelle vaut :

$$N^{\text{struct}}(S) = \min \left[N(\gamma_p^S S) ; \frac{N(S)}{\gamma_p^N} \right] \quad (7.2)$$

où γ_p^S est le facteur de majoration des amplitudes de contrainte et γ_p^N le facteur de réduction du nombre de cycles. Dans cette analyse, ces facteurs sont supposés suivre des lois bornées de type Bêta de moyenne 1,68 et d'intervalle $[1, 2]$ pour γ_p^S et de moyenne 9,39 et d'intervalle $[7, 11]$ pour γ_p^N . Leurs coefficients de variation respectifs sont fixés à 10%. Notons que les moyennes de ces facteurs sont obtenues à partir de la décomposition proposée par O'Donnell [O'D96] pour la prise en compte des différents effets (tableau 3.1). Quant à leurs bornes respectives, elles sont judicieusement choisies de manière à donner à la densité de probabilité une forme "en cloche". Toutefois, les lois retenues pour ces facteurs ne reflètent pas la réalité, et sont données uniquement pour mener les calculs. Une analyse plus approfondie des données issues de la littérature est nécessaire pour mieux fixer ces lois.

7.4 Description des variables aléatoires d'entrée

Les caractéristiques des différentes variables aléatoires d'entrée sont indiquées dans le tableau 7.3. Notons que les valeurs moyennes des propriétés thermomécaniques sont fixées à leurs valeurs nominales respectives pour l'acier austénitique 304L à 130 °C (température moyenne du fluide).

variable	loi	paramètres
R_i	log-normale	$\mu = 0,12827 \text{ m}$; $cv = 5\%$
e	log-normale	$\mu = 9,27 \cdot 10^{-3} \text{ m}$; $cv = 5\%$
E	log-normale	$\mu = 1,8908 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $cv = 10\%$
α	log-normale	$\mu = 1,695 \cdot 10^{-5}$; $cv = 10\%$
ν	bêta	$\mu = 0,3$; $cv = 10\%$; intervalle $[0, 2; 0, 4]$
L	log-normale	$\mu = 16,345 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$; $cv = 10\%$
ρC_p	log-normale	$\mu = 4,024 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$; $cv = 10\%$
h	log-normale	$\mu = 20000 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$; $cv = 30\%$
S_y	log-normale	$\mu = 188 \text{ MPa}$; $cv = 10\%$
S_u	log-normale	$\mu = 496 \text{ MPa}$; $cv = 10\%$
γ_p^S	bêta	$\mu = 1,68$; $cv = 10\%$; intervalle $[1; 2]$
γ_p^N	bêta	$\mu = 9,39$; $cv = 10\%$; intervalle $[7; 11]$
ξ	normale	moyenne = 0 ; écart-type = 1

TAB. 7.3 – Description des variables aléatoires d'entrée à 130°C.

7.5 Modèle mécanique

On souhaite déterminer l'évolution temporelle du champ de contrainte dans la paroi du tuyau. Ce problème est résolu en deux étapes :

- la résolution du problème thermique pour évaluer le champ de température dans l'épaisseur du tuyau en fonction du temps ;
- la résolution du problème mécanique consistant à calculer le champ de contrainte généré par le champ de température solution du problème thermique.

On fait l'hypothèse d'une tuyauterie mince, uniformément sollicitée sur toute sa surface interne et libre de se dilater dans la direction axiale. Cette hypothèse permet de réduire le problème posé à un modèle monodimensionnel (Figure 7.3).

Le champ de température dans la paroi du tuyau est solution de l'équation de la chaleur en dimension 1 qui s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = C \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7.3)$$

où C , la diffusivité thermique, est définie par :

$$C = \frac{L}{\rho C_p} \quad (7.4)$$

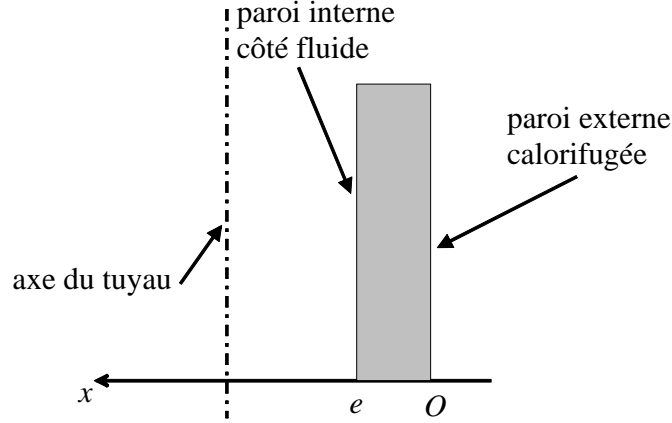


FIG. 7.3 – Schématisation du modèle à une dimension du tuyau.

Les conditions aux limites considérées pour le problème thermique sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ -L \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=e} = h [T(x=e) - T_{flu}] \end{cases} \quad (7.5)$$

où T_{flu} est la température du fluide. La première condition aux limites traduit le fait que la paroi externe est calorifugée, tandis que la deuxième équivaut à imposer la température du fluide et à admettre un échange thermique fluide/structure.

Une fois le champ de température dans un segment radial déterminé, on peut calculer le champ de contrainte résultant dans la structure. On admet que le matériau a une loi de comportement élastique :

$$S_{ij} = \lambda \operatorname{tr} (\epsilon_{ij}) \mathbb{I} + 2 \mu \epsilon_{ij} - (3 \lambda + 2 \mu) \alpha \Delta T \mathbb{I} \quad (7.6)$$

λ et μ , qu'on ne doit pas confondre dans ce paragraphe avec la pulsation et la moyenne, sont les coefficients de Lamé et s'écrivent en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (7.7)$$

ΔT est la variation de température par rapport à une température de référence. La température de référence, associée à un état de contrainte nul (absence de déformation) est supposée égale à la température moyenne du fluide, notée T_m . Pour obtenir le champ de contrainte, l'équation d'équilibre des contraintes est résolue :

$$\operatorname{div} (S_{ij}) = 0 \quad (7.8)$$

sous les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} S_{rr}(x=e) = 0 & \text{(pression interne nulle)} \\ S_{rr}(x=0) = 0 & \text{(bord extérieur libre)} \\ \int_{R_i}^{R_e} x S_{zz}(x) dx = 0 & \text{(pas de force imposée aux extrémités)} \end{cases} \quad (7.9)$$

Ayant supposé le tuyau mince (son épaisseur est négligeable par rapport à sa longueur), on peut appliquer les conditions de déformation plane. Ainsi, si $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ est le vecteur déplacement, on a :

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \epsilon_{zz} = \text{cste} \text{ et } \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0 \quad (7.10)$$

Le champ de contrainte dans la structure résulte d'un calcul numérique dans le domaine temporel tandis qu'il s'obtient à partir de la fonction de transfert du système dans le domaine fréquentiel.

7.5.1 Dans le domaine temporel

Le système d'équations de la chaleur (Eqs. (7.3) et (7.5)) de même que le système d'équations mécanique (Eqs. (D.7) et (7.9)) est résolu numériquement par différences finies à l'aide de l'outil *OSTAND* [BSPS03], qui est un programme en *FORTRAN 77* développé par la Division Recherche et Développement d'EDF.

7.5.2 Dans le domaine fréquentiel - fonction de transfert

Ici, le signal de température du fluide est exprimé sous forme harmonique et s'écrit en notation complexe :

$$T_{flu}(t) = T_m + \frac{\Delta T_{flu}}{2} e^{j\lambda t} \quad (7.11)$$

où T_m est la température moyenne du fluide et λ la pulsation. Aux paramètres T , t et x on associe respectivement les variables sans dimension suivantes :

$$\tilde{T} = \frac{T - T_m}{\Delta T_{flu}/2}; \quad \tilde{t} = \lambda t; \quad \tilde{x} = \frac{x}{e} \quad (7.12)$$

et en introduisant les nombres sans dimension de Biot et de Fourier, définis par :

$$B = \frac{h e}{L}; \quad F = \sqrt{\frac{e^2 \lambda}{2 C}} \quad (7.13)$$

le système d'équations à résoudre pour le problème thermique (Eqs. (7.3) et (7.5)) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} = 2 F^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0} = 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=e} = -B [\tilde{T}(\tilde{x} = 1) - e^{j\tilde{t}}] \end{array} \right. \quad (7.14)$$

On recherche le régime stationnaire, ce qui nous permet d'écrire la température sous la forme :

$$\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \theta(\tilde{x}) e^{j\tilde{t}} \quad (7.15)$$

Le système d'équations de la chaleur (Eqs. (7.3) et (7.5)) se réduit alors à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta''(\tilde{x}) = 2 j F^2 \theta(\tilde{x}) \\ \theta(\tilde{x} = 0) = 0 \\ \theta(\tilde{x} = 1) = -B [\theta(\tilde{x} = 1) - 1] \end{array} \right. \quad (7.16)$$

Ayant noté, dans la première équation du système précédent, que $2 j F^2 = [F(1 + j)]^2$, sa solution s'écrit sous la forme :

$$\theta(\tilde{x}) = a \cosh [F(1 + j)\tilde{x}] + b \sinh [F(1 + j)\tilde{x}] \quad (7.17)$$

où a et b sont des constantes à déterminer. En reportant la forme générale (7.17) dans les deux dernières équations du système (7.16), on obtient une solution analytique pour $\theta(\tilde{x})$, donnée par [MB03] :

$$\theta(\tilde{x}) = a \cosh [F(1 + j)\tilde{x}] \quad (7.18)$$

où :

$$a = \frac{B}{F(1 + j) \sinh [F(1 + j)] + B \cosh [F(1 + j)]} \quad (7.19)$$

Pour évaluer le champ de contrainte on utilise l'hypothèse d'une tuyauterie mince. Le tenseur de contrainte s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} S_{rr}(x, t) = 0 \\ S(x, t) = S_{\theta\theta}(x, t) = S_{zz}(x, t) = \frac{E \alpha}{1 - \nu} [T_{moy}(t) - T(x, t)] \end{cases} \quad (7.20)$$

où, $T_{moy}(t)$ est la température moyenne dans l'épaisseur du tuyau donnée par :

$$T_{moy}(t) = \frac{1}{e} \int_0^e T(x, t) dx \quad (7.21)$$

Le détail du calcul du tenseur de contrainte est présenté en Annexe D. La contrainte équivalente de Tresca vaut ici, indifféremment, la moitié de $S_{\theta\theta}(x, t)$ ou de $S_{zz}(x, t)$. La fonction de transfert $FT(\lambda)$ s'obtient simplement en faisant le rapport entre les contraintes et la température du fluide exprimée sous forme harmonique :

$$FT(\lambda) = \frac{E \alpha}{1 - \nu} \left[\frac{a}{2 F} (1 - j) \sinh [F(1 + j)] - a \cosh [F(1 + j)] \right] \quad (7.22)$$

Ayant admis un comportement élastique du matériau, la densité spectrale de puissance (DSP) $W_S(\lambda)$ du processus de contrainte équivalente s'obtient en fonction de la DSP du processus de température par la relation [Pri81] :

$$W_S(\lambda) = |FT(\lambda)|^2 W_\theta(\lambda) \quad (7.23)$$

Le module au carré $|FT(\lambda)|^2$ de la fonction de transfert est représenté sur la figure 7.4. On note que $FT(\lambda)$ est maximum autour de 0 Hz et décroît relativement vite lorsque la fréquence augmente. Ainsi, appliquée à un chargement thermique aléatoire décrit par un bruit blanc, cette fonction amplifie fortement la densité des cycles de chargement de faible fréquence, amplification qui décroît relativement vite vers zéro quand la fréquence des cycles de chargement augmente. Ceci signifie que lors de l'échange thermique entre le fluide et la structure, les cycles de chargement de très faible fréquence sont favorisés au détriment des cycles de fréquence plus grande. Notons enfin que le niveau d'amplification des densités de cycles dépend fortement de la valeur du coefficient d'échange h .

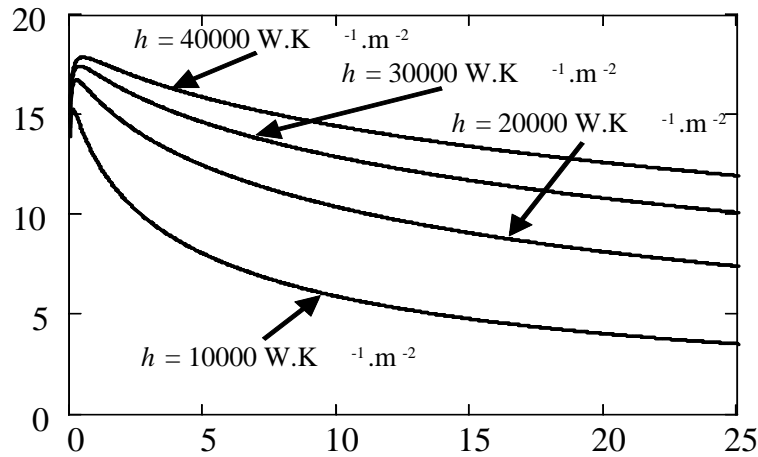


FIG. 7.4 – Fonction de transfert du modèle mécanique.

7.6 Définition des différents cas d'étude

On souhaite appliquer le modèle mécano-fiabiliste d'analyse en fatigue pour les deux types de chargement précédents $\theta^1(t, \omega)$ et $\theta^2(t, \omega)$. Pour chaque type de chargement, on désire réaliser une analyse dans le domaine des grands nombres de cycles (HCF) et dans le domaine des faibles nombres de cycles (LCF). Avec les valeurs de moyenne et d'écart-type données dans le tableau 7.1, on se situe dans le domaine des grands nombres de cycles puisque les sollicitations (amplitudes des cycles extraits) sont relativement faibles. Afin d'effectuer l'analyse dans le domaine des faibles nombres de cycles, les amplitudes de cycles extraits sont majorées d'un facteur k . Ce facteur peut correspondre physiquement à la prise en compte empirique de concentrations de contrainte dues à une soudure. On sollicite ainsi la structure essentiellement dans le domaine oligocyclique. Pour l'application numérique, on prend $k = 4$, valeur volontairement majorée pour accentuer les phénomènes recherchés. Notons, par ailleurs, que dans le domaine d'endurance (HCF) la fiabilité doit être évaluée sur une durée de service de $N_0 = 10000$ séquences de 360 secondes (de l'ordre de 10^7 cycles), alors que la fiabilité est calculée sur une durée de service de $N_0 = 10$ séquences de 360 secondes (de l'ordre de 10^4 cycles) dans le domaine oligocyclique (LCF). Enfin dans chacun des quatre cas, on effectue un calcul dans le domaine temporel (une seule trajectoire déterministe simulée à partir des propriétés du processus considéré) et dans le domaine fréquentiel (chargement aléatoire). On obtient ainsi 8 cas d'étude dont les caractéristiques sont listées dans le tableau 7.4.

7.7 Dommage moyen

Avant de mener complètement l'analyse de fiabilité, évaluons d'abord le dommage moyen engendré par les différents cas de charge sur leurs durées de service respectives. Toutes les variables aléatoires du problème sont fixées à leurs moyennes respectives (tableau 7.3). Les différentes valeurs du dommage moyen obtenues sont indiquées dans le

cas	chargement	amplification des cycles	domaine d'analyse
1	θ_1	$k = 1$	temporel
2	θ_1	$k = 1$	fréquentiel
3	θ_1	$k = 4$	temporel
4	θ_1	$k = 4$	fréquentiel
5	θ_2	$k = 1$	temporel
6	θ_2	$k = 1$	fréquentiel
7	θ_2	$k = 4$	temporel
8	θ_2	$k = 4$	fréquentiel

TAB. 7.4 – Cas d'étude considérés.

tableau 7.5 (dans ce tableau, la durée de service est exprimée en nombre de séquences).

cas de charge	N_0	approche temporelle	approche spectrale
θ_1 non majoré	10000	$3,65 \cdot 10^{-4}$	$2,36 \cdot 10^{-3}$
θ_1 majoré	10	$2,33 \cdot 10^{-2}$	$4,49 \cdot 10^{-2}$
θ_2 non majoré	10000	$4,64 \cdot 10^{-2}$	$4,84 \cdot 10^{-2}$
θ_2 majoré	10	$7,27 \cdot 10^{-2}$	$7,30 \cdot 10^{-2}$

TAB. 7.5 – Dommages total moyen pour les différents cas de charge.

On note que le dommage moyen calculé suivant l'approche spectrale est toujours supérieur au dommage moyen suivant l'approche temporelle. L'approche spectrale est donc plus conservative que l'approche temporelle. Cela se comprend puisque, dans l'approche spectrale, on intègre les contributions moyennes au dommage de toutes les amplitudes de cycles possibles tandis qu'on traite seulement un cas particulier avec l'approche temporelle.

L'écart le plus important entre ces deux approches est obtenu pour le cas de charge θ_1 où il y a un rapport d'environ 10 lorsque θ_1 n'est pas majoré (dans le domaine des grands nombres de cycles) et d'environ 2 quand θ_1 est majoré (domaine des faibles nombres de cycles). Ceci provient du fait que les expressions du dommage de fatigue respectivement dans les couplages temporel et fréquentiel ne sont plus équivalentes pour le cas de charge θ_1 . Rappelons ici que dans le couplage temporel, le dommage total est exprimé sous sa forme discrète (section 3.3.2), tandis qu'il s'écrit sous forme continue dans le couplage fréquentiel (section 3.3.1). L'équivalence de ces deux formulations repose en particulier sur l'hypothèse d'un grand nombre N_c de cycles endommageants. Or, on constate que le nombre de cycles endommageants extraits sur une séquence lorsque le couplage temporel est appliqué est en général très faible. Ce nombre varie dans cet exemple entre 2 et 4 pour environ 4000 cycles extraits. Pour cette raison, les valeurs du dommage total en fatigue résultant du couplage temporel sont largement en dessous de celles du dommage issu du couplage fréquentiel pour le cas de charge θ_1 . En revanche, pour θ_2 les deux approches fournissent des résultats très proches. Dans ce cas, le nombre de cycles endommageants extraits sur la séquence considérée dans le domaine temporel est beaucoup plus important (plus de 200 cycles endommageant pour plus de 4000 cycles extraits). L'équivalence entre les formulations discrète et continue du dommage de fatigue est donc validée. Il n'y a pas lieu de modéliser l'aléa sur le chargement dans ce cas, mais il suffit de choisir une

trajectoire représentative suffisamment longue.

À présent, comparons les fréquences des amplitudes de cycles Rainflow données par la formule de Dirlik à celles des amplitudes de cycles Rainflow obtenues par le calcul dans le domaine temporel. On dresse sur le graphe 7.5 l'histogramme des amplitudes Rainflow temporelle et l'estimation de leur distribution suivant la formule de Dirlik. On note, en particulier pour le cas de charge θ_1 , que dans le domaine des amplitudes supérieur à la limite d'endurance S_D , la formule de Dirlik majore la fréquence. Ceci peut encore expliquer l'écart relevé entre les moyennes des dommages.

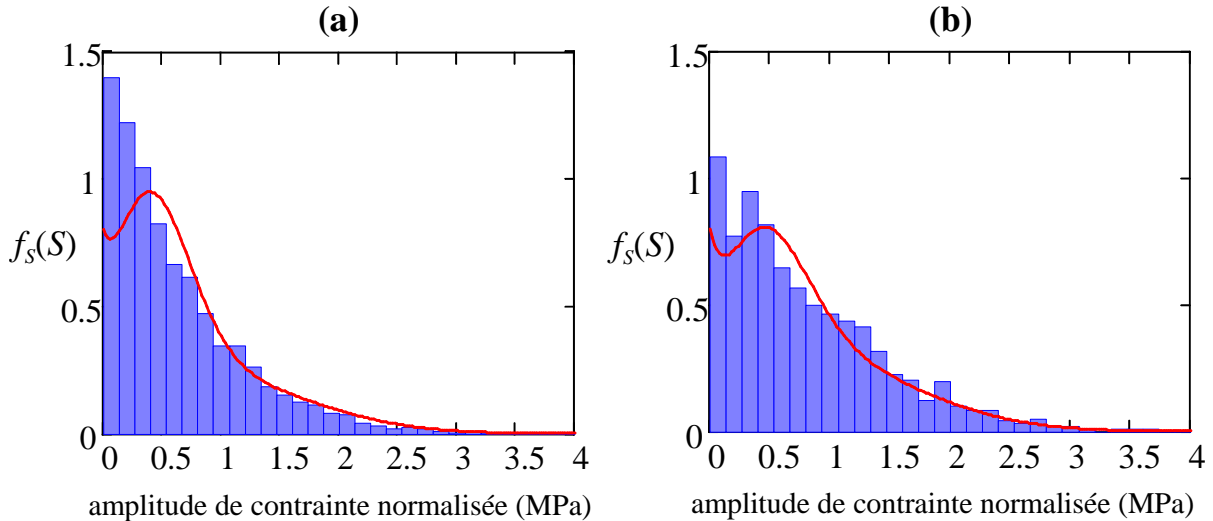


FIG. 7.5 – Comparaison entre l'histogramme des amplitudes de cycles Rainflow et leur distribution suivant la formule de Dirlik : (a) cas de charge θ_1 ; (b) cas de charge θ_2 .

7.8 Résultats de l'analyse de fiabilité

Dans cette section, les résultats de l'analyse complète de fiabilité menée sur les 8 cas d'études considérés sont présentés les uns à la suite des autres suivant l'ordre indiqué dans le tableau 7.4. Ces résultats comprennent dans chaque cas :

- un tableau contenant l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance estimés par les méthodes d'approximation *FORM* et *SORM* (formule de Breitung et Tvedt), et la simulation d'importance (qui est considérée comme référence pour exprimer l'écart relatifs des autres méthodes) ;
- la classification des variables les plus significatives suivant leurs poids respectifs dans la fiabilité, on prend soin d'exhiber à titre indicatif le poids total de ces variables dans la fiabilité ;
- un diagramme montrant les poids respectifs des variables prépondérantes ;
- un diagramme représentant les facteurs d'élasticité aux moyennes et coefficients de variation des variables importantes pour la fiabilité.

Notons que le point de départ de l'algorithme d'Abdo-Rackwitz, utilisé pour rechercher le point de conception, est fixé au point médian (toutes les variables sont fixées à leurs

médianes respectives). Par ailleurs, les simulations d'importance sont réalisées avec 1000 tirages obtenus avec l'algorithme de génération de variables aléatoires de Matsumoto et Nishimura [PHI03]. Ce nombre de tirages est suffisant pour avoir des estimations très précises de P_f , puisque le coefficient de variation des estimateurs de P_f est de l'ordre de 5% pour tous les cas d'études.

7.8.1 Cas d'étude n°1

On considère le modèle de charge θ_1 non majoré ($k = 1$). Le couplage mécano-fiabiliste est réalisé dans le domaine temporel sur une durée de service $N_{\text{seq}} = 10000$ séquences. L'indice de fiabilité β et la probabilité de défaillance P_f sont indiqués dans le tableau 7.6.

méthode	β	P_f	écart relatif sur β (%)
FORM	2,28	$1,14 \cdot 10^{-2}$	3,38%
SORM (Breitung)	2,35	$9,41 \cdot 10^{-3}$	0,4%
SORM (Tvedt)	2,36	$9,05 \cdot 10^{-3}$	0%
IS	2,36	$9,07 \cdot 10^{-3}$	0%

TAB. 7.6 – Cas n°1 : *indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_1 - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.*

Les variables de poids significatifs dans la fiabilité sont dans l'ordre :

1. le coefficient d'échange, h (31,02%) ;
2. l'aléa sur la résistance en fatigue, ξ (29,09%) ;
3. le facteur de passage sur les amplitudes de contrainte, γ_p^S (10,85%) ;
4. le module d'Young E et le coefficient de dilatation thermique α qui comptent tous les deux pour 9,74%.

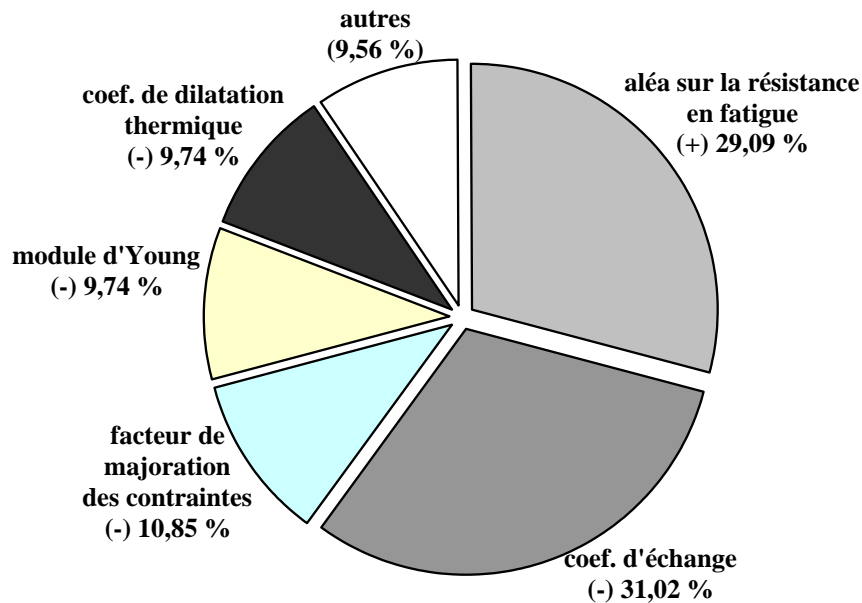


FIG. 7.6 – Cas n°1 : *poids des variables dans la fiabilité - cas de charge θ_1 - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.*

Le poids total de ces variables est de 90,44%. On peut donc ignorer les incertitudes sur les variables restant dont le poids total est négligeable et ces variables peuvent être considérées déterministes dans une analyse ultérieure. L'importance des variables les plus

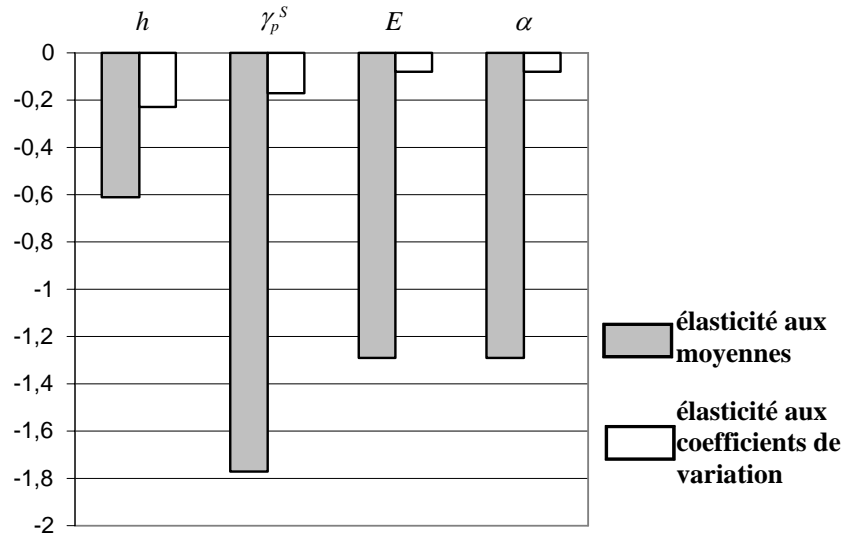


FIG. 7.7 – Cas n°1 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.

significatives est représentée sur le diagramme 7.6. On dresse, de plus, sur la figure 7.7, le graphe des élasticités de leurs moyennes et de leurs coefficients de variation respectifs.

7.8.2 Cas d'étude n°2

Le modèle de charge θ_1 non majoré ($k = 1$) est appliqué. Le couplage mécano-fiabiliste est réalisé dans le domaine fréquentiel sur une durée de service $N_{\text{seq}} = 10000$ séquences. On obtient l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance donnés dans le tableau 7.7.

méthode	β	P_f	écart relatif sur β (%)
FORM	1,88	$3 \cdot 10^{-2}$	5,53%
SORM (Breitung)	1,95	$2,55 \cdot 10^{-2}$	2,01%
SORM (Tvedt)	1,97	$2,45 \cdot 10^{-2}$	1%
IS	1,99	$2,31 \cdot 10^{-2}$	0%

TAB. 7.7 – Cas n°2 : *indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_1 - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.*

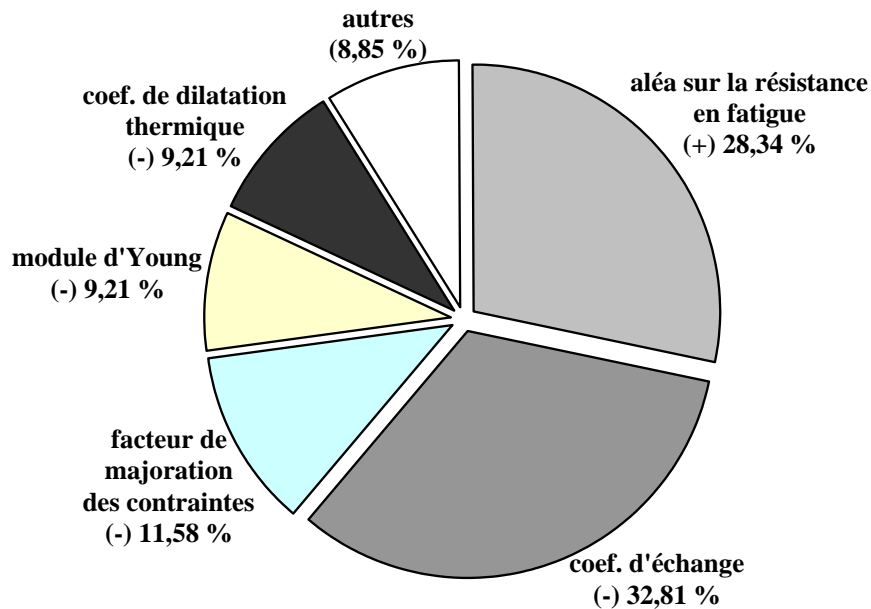


FIG. 7.8 – Cas n°2 : *poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.*

Les variables prépondérantes sont classées comme suit :

1. le coefficient d'échange, h (32,81%) ;
2. l'aléa sur la résistance en fatigue ξ (28,34%) ;
3. le facteur de passage sur les amplitudes de contrainte, γ_p^S (11,58%) ;
4. le module d'Young E et le coefficient de dilatation thermique α de même poids égal à 9,21%.

Le poids total de ces variables est de 91,15%. La figure 7.8 illustre les poids des variables significatives, tandis que la figure 7.9 indique les élasticités relatives aux moyennes et coefficients de variation de ces variables.

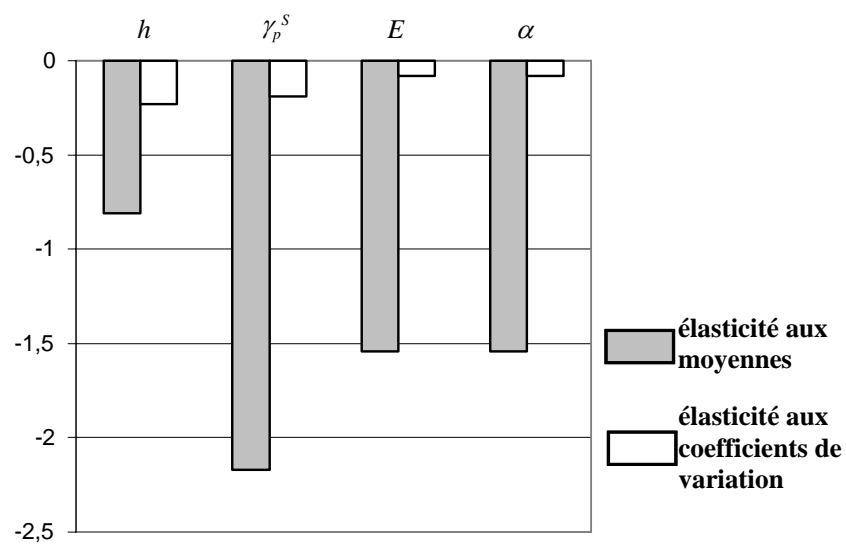


FIG. 7.9 – Cas n°2 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.

7.8.3 Cas d'étude n°3

Traitons à présent le cas de charge θ_1 majoré ($k = 4$) avec un couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel sur une durée de service $N_{\text{seq}} = 10$ séquences. Les indices de fiabilité et les probabilités de défaillance associées sont présentés dans le tableau 7.8.

méthode	β	P_f	écart relatif sur β (%)
FORM	2,48	$6,47 \cdot 10^{-3}$	0%
SORM (Breitung)	2,50	$6,44 \cdot 10^{-3}$	0,8%
SORM (Tvedt)	2,50	$6,18 \cdot 10^{-3}$	0,8%
IS	2,48	$6,65 \cdot 10^{-3}$	0%

TAB. 7.8 – Cas n°3 : *indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_1 - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.*

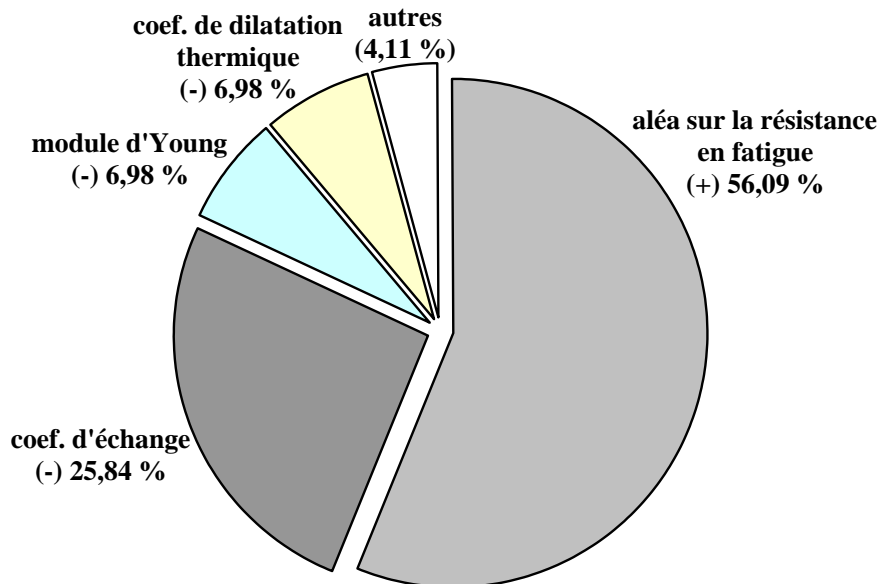


FIG. 7.10 – Cas n°3 : *poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.*

Suivant leur importance dans la fiabilité, les variables sont classées comme suit :

1. l'aléa sur la résistance à la fatigue ξ (56,09%) ;
2. le coefficient d'échange h (25,84%) ;
3. le module d'Young E et le coefficient de dilatation thermique α sont tous les deux à 6,97%.

Le poids total de ces variables vaut 95,89%. Les poids respectifs des variables sont indiqués sur la figure 7.10. Par ailleurs, la figure 7.11 montre les facteurs d'élasticité aux moyennes et coefficients de variation de ces variables.

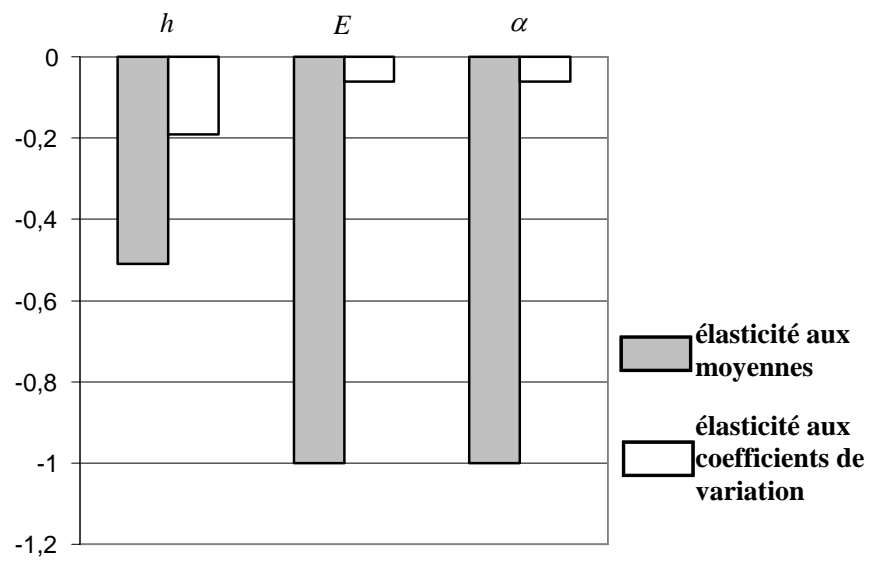


FIG. 7.11 – Cas n°3 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.

7.8.4 Cas d'étude n°4

Le modèle de charge θ_1 majoré ($k = 4$) est employé. Le couplage mécano-fiabiliste est effectué dans le domaine fréquentiel sur une durée de service $N_{\text{seq}} = 10$ séquences. Notons dans le tableau 7.9 l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance correspondante.

méthode	β	P_f	écart relatif sur β (%)
FORM	2,07	$1,93 \cdot 10^{-2}$	0%
SORM (Breitung)	2,07	$1,91 \cdot 10^{-2}$	0%
SORM (Tvedt)	2,08	$1,90 \cdot 10^{-2}$	0,5%
IS	2,07	$1,91 \cdot 10^{-2}$	0%

TAB. 7.9 – Cas n°4 : *indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge $\theta_1 - k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.*

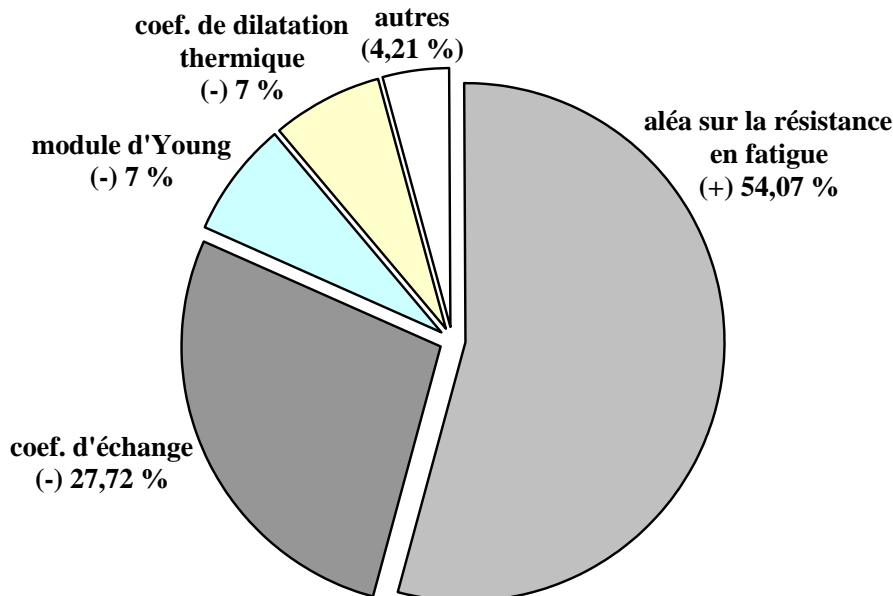


FIG. 7.12 – Cas n°4 : *poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_1(t) - k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.*

Les variables significatives pour la fiabilité sont dans l'ordre :

1. l'aléa sur la résistance en fatigue ξ (54,07%) ;
2. le coefficient d'échange h (27,72%) ;
3. le module d'Young E et le coefficient de dilatation thermique α tous deux d'importance égale à 7%.

La contribution totale de ces variables à l'incertitude sur l'indice de fiabilité est égale à 95,79%. Les poids de ces variables et les facteurs d'élasticité à leurs moyennes et leurs coefficients de variation respectifs se visualisent respectivement sur les figures 7.12 et 7.13.

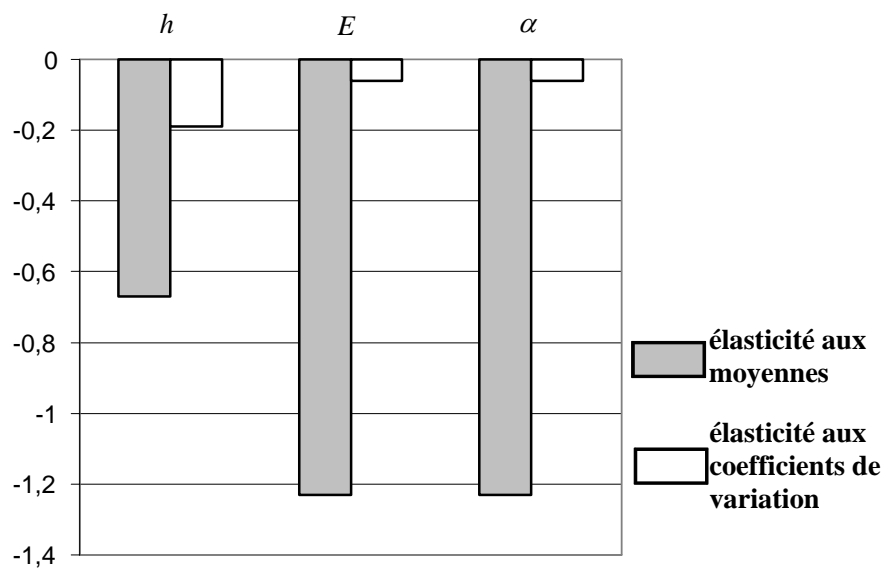


FIG. 7.13 – Cas n°4 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_1(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.

7.8.5 Cas d'étude n°5

Considérons à présent le modèle de charge θ_2 non majoré ($k = 1$). Le couplage mécano-fiabiliste est réalisé dans le domaine temporel sur une durée de service $N_{\text{seq}} = 10000$ séquences. Les résultats en terme d'indice de fiabilité et de probabilité de défaillance associés figurent dans le tableau 7.10.

méthode	β	P_f	écart relatif sur β (%)
FORM	1,36	$8,59 \cdot 10^{-2}$	4,9%
SORM (Breitung)	1,44	$7,52 \cdot 10^{-2}$	0,7%
SORM (Tvedt)	1,47	$7,11 \cdot 10^{-2}$	2,8%
IS	1,43	$7,65 \cdot 10^{-2}$	0%

TAB. 7.10 – Cas n°5 : *indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_2 - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.*

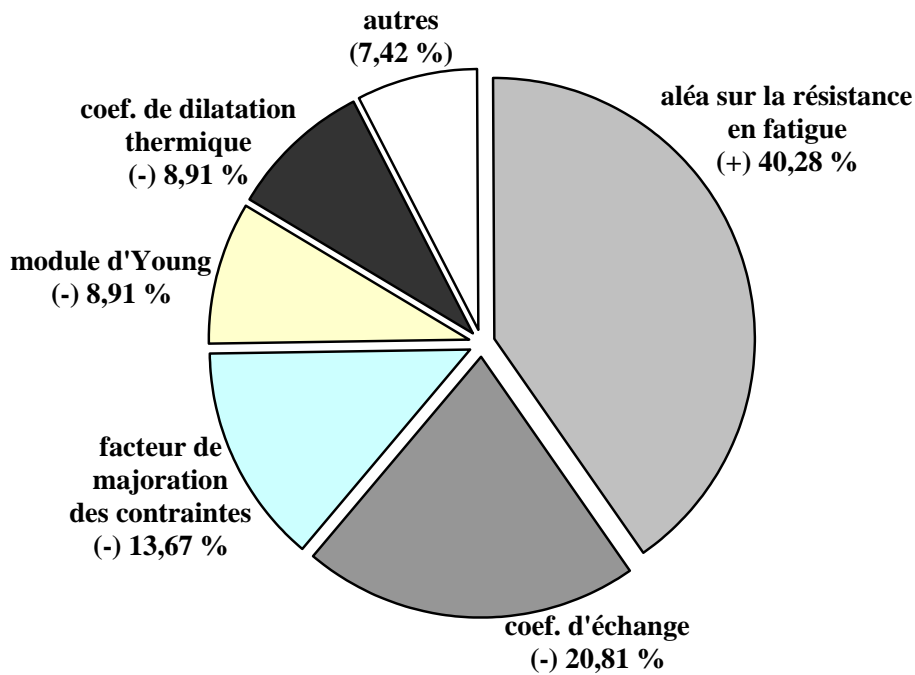


FIG. 7.14 – Cas n°5 : *poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.*

Les variables les plus importantes pour la fiabilité sont dans l'ordre :

1. l'aléa sur la résistance en fatigue (40,28%) ;
2. le coefficient d'échange h (20,81%) ;
3. le facteur de majoration des contraintes γ_p^S (13,67%) ;
4. le module d'Young E et le coefficient de dilatation thermique α , de poids identiques égaux à 8,91%.

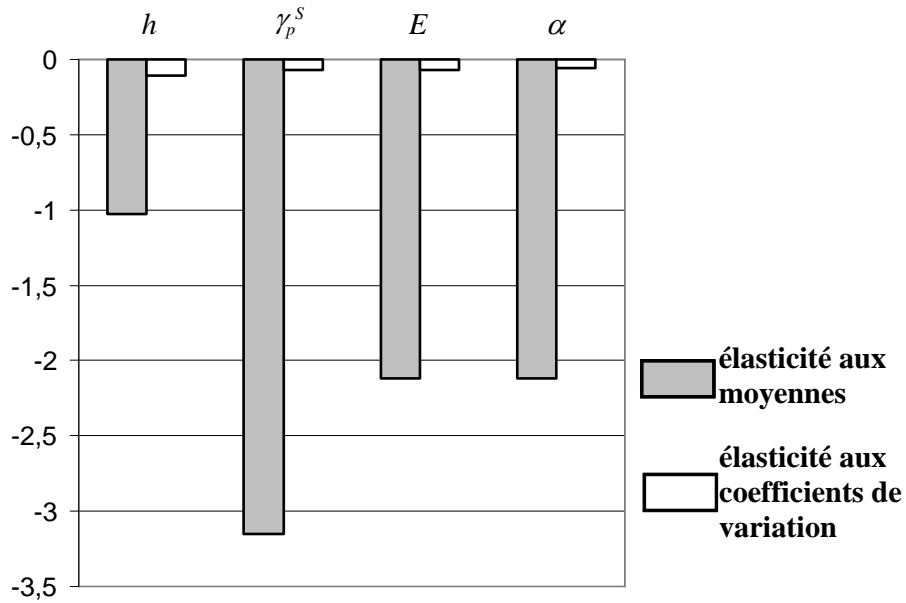


FIG. 7.15 – Cas n°5 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine temporel.

Les variables les plus significatives citées contribuent à hauteur de 92,58% aux incertitudes sur l'indice de fiabilité. Les figures 7.14 et 7.15 montrent respectivement les poids des variables et les facteurs d'élasticité aux paramètres moyenne et coefficient de variation des distributions des variables.

7.8.6 Cas d'étude n°6

Appliquons toujours le modèle de chargement θ_2 non majoré ($k = 1$). Le couplage mécano-fiabiliste est mis en œuvre dans le domaine fréquentiel sur une durée de service $N_{\text{seq}} = 10000$ séquences. Les valeurs de l'indice de fiabilité et de la probabilité de défaillance sont données dans le tableau 7.11.

méthode	β	P_f	écart relatif sur β (%)
FORM	1,35	$8,86 \cdot 10^{-2}$	4,3%
SORM (Breitung)	1,42	$7,81 \cdot 10^{-2}$	0,7%
SORM (Tvedt)	1,45	$7,41 \cdot 10^{-2}$	2,8%
IS	1,41	$7,87 \cdot 10^{-2}$	0%

TAB. 7.11 – Cas n°6 : *indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_2 - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.*

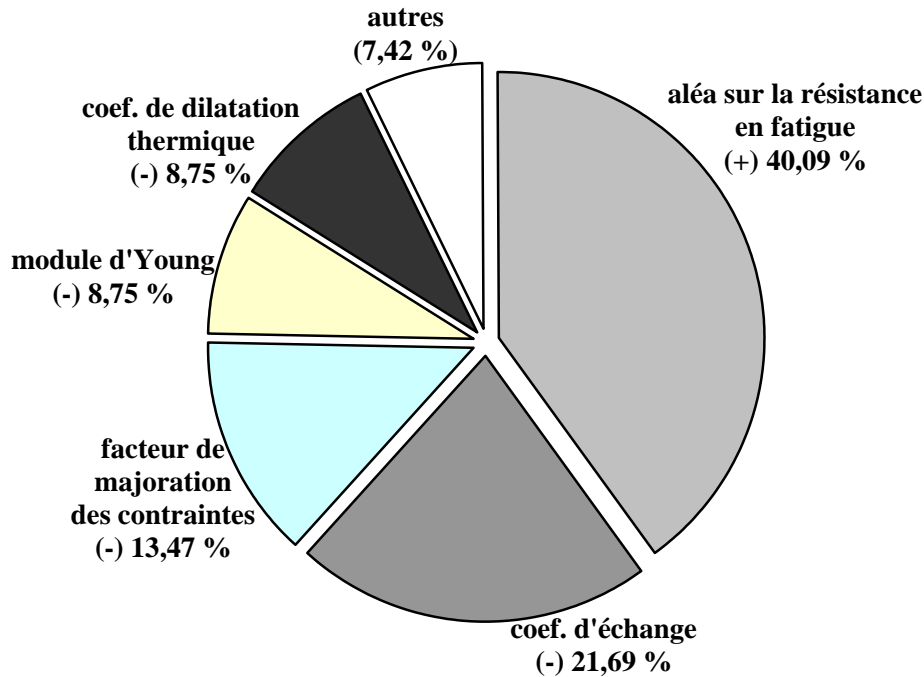


FIG. 7.16 – Cas n°6 : *poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.*

Les variables les plus influentes sont classées dans l'ordre suivant :

1. l'aléa sur la résistance en fatigue ξ (40,09%) ;
2. le coefficient d'échange h (21,69%) ;
3. le facteur de passage sur les contrainte γ_p^S (13,47%) ;
4. le module d'Young E (10,59%) et le coefficient de dilatation thermique α (8,75%).

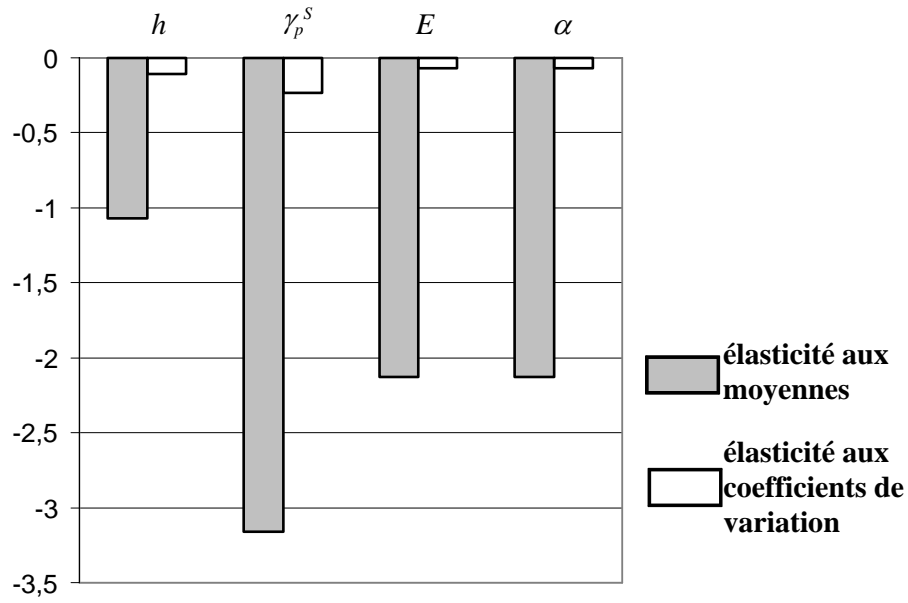


FIG. 7.17 – Cas n°6 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 1$ - couplage dans le domaine fréquentiel.

Ces poids sont représentés sur la figure 7.16. Le poids total des variables citées vaut 92,75%. Les facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation sont indiqués sur la figure 7.17.

7.8.7 Cas d'étude n°7

Traitons maintenant le modèle de chargement θ_2 majoré ($k = 4$). Le couplage mécano-fiabiliste est mené dans le domaine temporel sur une durée de service $N_{\text{seq}} = 10$ séquences. On obtient les résultats en terme d'indice de fiabilité et de probabilité de défaillance associés dans le tableau 7.12.

méthode	β	P_f	écart relatif sur β (%)
FORM	1,99	$2,31 \cdot 10^{-2}$	1,5%
SORM (Breitung)	2,01	$2,20 \cdot 10^{-2}$	0,5%
SORM (Tvedt)	2,02	$2,18 \cdot 10^{-2}$	0%
IS	2,02	$2,16 \cdot 10^{-2}$	0%

TAB. 7.12 – Cas n°7 : *indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_2 - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.*

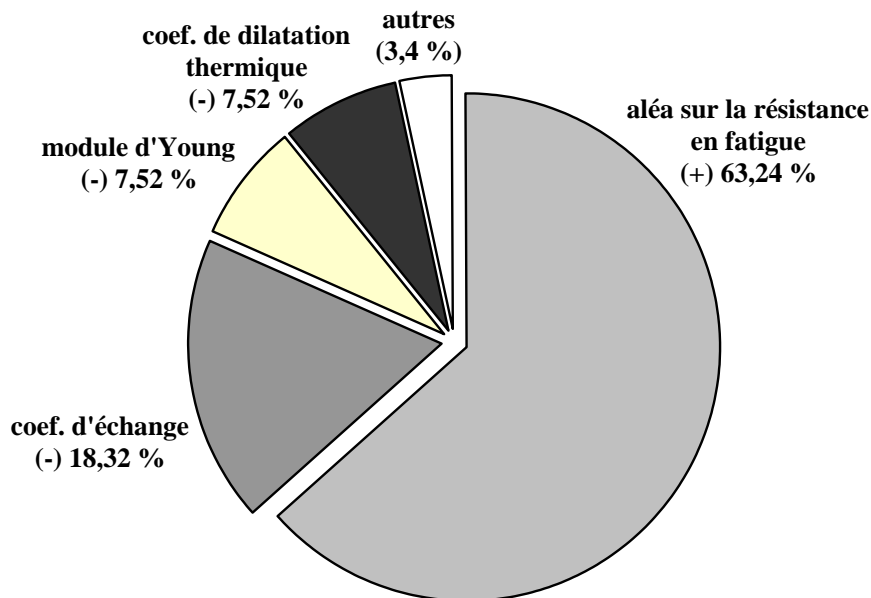


FIG. 7.18 – Cas n°7 : *poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.*

Les variables les plus importantes pour la fiabilité sont dans l'ordre :

1. l'aléa sur la résistance en fatigue ξ (63,24%) ;
2. le coefficient d'échange h (18,32%) ;
3. le module d'Young E et le coefficient de dilatation thermique α , de poids identiques égaux à 7,52%.

Les variables les plus significatives citées contribuent à hauteur de 96,6% aux incertitudes sur l'indice de fiabilité. Les figures 7.18 et 7.19 montrent respectivement les poids

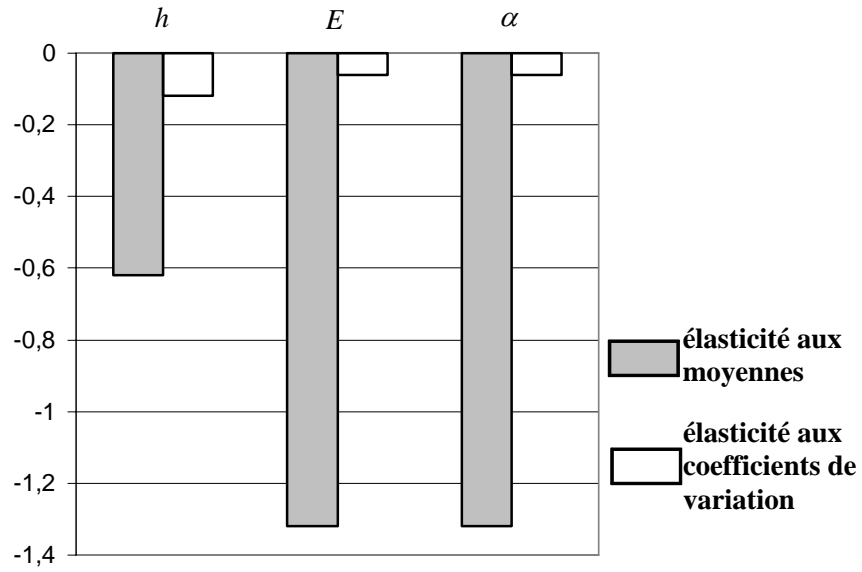


FIG. 7.19 – Cas n°7 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine temporel.

des variables et les facteurs d'élasticité aux paramètres moyenne et coefficient de variation des distributions des variables.

7.8.8 Cas d'étude n°8

Appliquons enfin le modèle de chargement θ^2 majoré ($k = 4$). Le couplage mécano-fiabiliste s'effectue dans le domaine fréquentiel pour une durée de service $N_{\text{seq}} = 10$ séquences. Les valeurs de l'indice de fiabilité et de la probabilité de défaillance sont indiquées dans le tableau 7.13.

méthode	β	P_f	écart relatif sur β (%)
FORM	1,99	$2,34 \cdot 10^{-2}$	1%
SORM (Breitung)	2,01	$2,22 \cdot 10^{-2}$	0%
SORM (Tvedt)	2,02	$2,19 \cdot 10^{-2}$	0,5%
IS	2,01	$2,24 \cdot 10^{-2}$	0%

TAB. 7.13 – Cas n°8 : *indice de fiabilité et probabilité de défaillance - cas de charge θ_2 - $k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.*

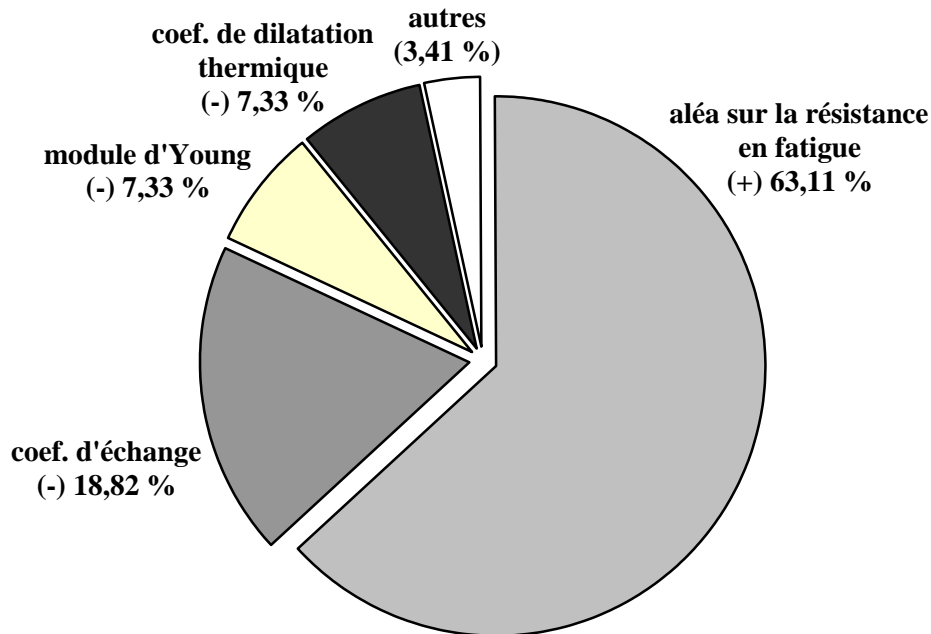


FIG. 7.20 – Cas n°8 : *poids des variables dans la fiabilité - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.*

Les variables les plus influentes sont classées dans l'ordre suivant :

1. l'aléa sur la résistance en fatigue ξ (63,11%) ;
2. le coefficient d'échange h (18,82%) ;
3. le module d'Young E , de même que le coefficient de dilatation thermique α , a un poids de 7,33%.

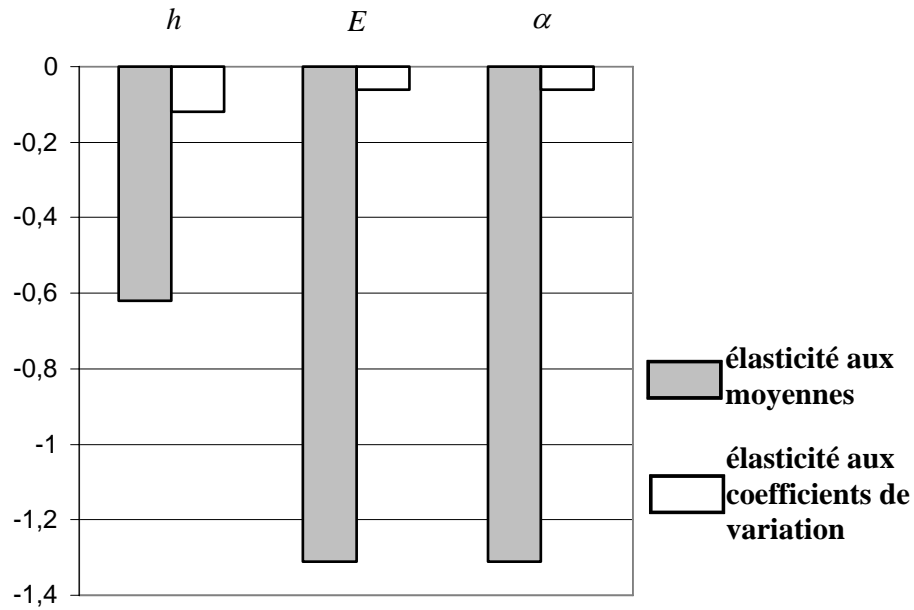


FIG. 7.21 – Cas n°8 : facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation - cas de charge $\theta_2(t)$ - $k = 4$ - couplage dans le domaine fréquentiel.

Ces poids sont représentés sur la figure 7.20. Le poids total des variables citées vaut 96,59%. Les facteurs d'élasticité aux moyennes et aux coefficients de variation sont indiqués sur la figure 7.21.

7.9 Discussions des résultats

7.9.1 Méthodes de fiabilité utilisées

Tout d'abord, dans cette application, on mène complètement une analyse de fiabilité en fatigue thermique. On note globalement que la mise en œuvre de cette analyse reste simple. Le couplage mécano-fiabiliste dans le domaine fréquentiel est très peu coûteux en temps de calcul puisque la loi de comportement s'écrit ici sous forme analytique (un appel à la fonction de performance dure moins d'une seconde). En revanche, la couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel est, relativement, plus coûteux en temps de calcul, puisque la loi de comportement fait intervenir dans ce cas une procédure en différences finies (un appel à la fonction de performance dure environ 5 min).

Dans chaque cas d'étude, les indices de fiabilité fournis par les différentes méthodes (*FORM*, *SORM* et tirages d'importance) sont très proches. Les écarts relatifs entre l'approximation *FORM* et la simulation d'importance varient entre 0% et 5,53%. La méthode *FORM* fournit donc une très bonne approximation de l'indice de fiabilité. Ceci permet de valider dans cet exemple les résultats issus de l'application de cette méthode.

7.9.2 Couplage temporel vs. couplage fréquentiel

couplage	$\theta_1(t)$		$\theta_2(t)$	
	HCF	LCF	HCF	LCF
temporel	2,28 ⁽¹⁾	2,48 ⁽³⁾	1,36 ⁽⁵⁾	1,99 ⁽⁷⁾
fréquentiel	1,88 ⁽²⁾	2,07 ⁽⁴⁾	1,35 ⁽⁶⁾	1,99 ⁽⁸⁾
écart relatif (%)	21,3%	19,8%	0,7%	0%

TAB. 7.14 – Comparaison des indices de fiabilité suivant le couplage temporel ou fréquentiel - le numéro du cas d'étude est indiqué en exposant dans chaque cas.

Comparons à présent pour chaque cas de charge les couplages dans les domaines temporel et fréquentiel. Les indices de fiabilité suivant la méthode *FORM* pour chaque cas de charge sont indiqués dans le tableau 7.14. Tout d'abord, les indices de fiabilité issus du couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel sont toujours supérieurs à ceux du couplage dans le domaine fréquentiel. L'approche spectrale est donc toujours plus conservative que l'approche temporelle en terme de fiabilité. Ceci vient du fait que l'approche spectrale, qui intègre l'aléa sur le chargement, contient plus d'incertitudes que l'approche temporelle puisque dans celle-ci le chargement est considéré déterministe. Par ailleurs, on note que l'écart relatif entre couplage temporel et fréquentiel est relativement important pour le chargement θ_1 . Il vaut 21,3% dans le régime des grands nombres de cycles (HCF) et 19,8% dans le régime oligocyclique (LCF). Par contre, pour le cas de charge θ_2 , l'écart relatif entre couplage temporel et fréquentiel est quasi nul : 0,7% dans le régime des grands nombres de cycles (HCF) et 0% dans le régime oligocyclique. On retrouve ici les écarts observés dans le calcul des dommages moyens. De la même manière, on les justifie par le fait que pour θ_1 les formulations continue et discrète du dommage ne sont plus équivalentes (le nombre de cycles endommageants est très faible), alors que pour θ_2 le nombre de cycles endommageants étant très grand, ces deux formulations sont équivalentes. Pour

que le couplage temporel soit plus proche du couplage spectral pour le cas de charge θ_1 , il faudrait étendre la période de la séquence de température afin d'augmenter de la même manière le nombre de cycles endommageants extraits sur cette durée.

7.9.3 Facteurs d'importance et élasticités

Considérons maintenant les poids des variables aléatoires dans chaque cas de charge. Les valeurs des poids des variables les plus importantes sont indiquées dans le tableau 7.15 pour le couplage temporel et dans le tableau 7.16 pour le couplage fréquentiel. Pour chaque variable, les poids obtenus par les couplages temporel et fréquentiel sont très voisins. Aussi, on se contente d'examiner les valeurs issues du couplage fréquentiel (tableau 7.16). On note que l'aléa sur la résistance en fatigue ξ et le coefficient d'échange h sont les variables prépondérantes dans la fiabilité. Leurs effets cumulés sur la fiabilité sont largement supérieurs à 50%. Leur poids total vaut environ 60% dans le domaine des grands nombres de cycles quel que soit le modèle de charge considéré. On a un poids total de 61,15% pour le chargement θ_1 non majoré et 61,78% pour θ_2 non majoré. La contribution de ces deux variables dans l'incertitude sur la fiabilité est plus importante dans le domaine oligocyclique et vaut environ 80% indépendamment du cas de charge (81,79% pour θ_1 majoré et 81,93% pour θ_2 majoré). Dans le domaine des grands nombres de cycles (HCF) les poids respectifs de ξ et h sont voisins, le poids de h étant légèrement supérieur à celui de ξ . En revanche, dans le domaine oligocyclique (LCF), la sensibilité de la fiabilité à la variable ξ augmente sensiblement tandis que celle de h diminue. Ce dernier résultat peut surprendre dans la mesure où la dispersion de la résistance en fatigue est plus faible dans le domaine oligocyclique. Mais ce résultat provient essentiellement du fait que dans ce domaine, le dommage de fatigue est très peu sensible aux variations du nombre de cycles, alors que le coefficient d'échange h agit directement sur le nombre de cycles de chargement thermique transféré à la structure (Figure 7.4).

variables	$\theta_1(t)$		$\theta_2(t)$	
	HCF ⁽¹⁾	LCF ⁽³⁾	HCF ⁽⁵⁾	LCF ⁽⁷⁾
H	31,02%	25,84%	20,81%	18,32%
ξ	29,09%	56,09%	40,28%	63,24%
γ_p^S	10,85%	négligeable	13,67%	négligeable
E	9,74%	6,97%	8,91%	7,52%
α	9,74%	6,97%	8,91%	7,52%

TAB. 7.15 – *Comparaison des poids dans la fiabilité des variables aléatoires - couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel.*

Le facteur de passage γ_p^S a un poids significatif dans la zone des grands nombres de cycles (HCF). Son poids est d'environ 12% quel que soit le cas de charge (11,58% pour θ_1 et 13,47% pour θ_2). En effet, le nombre de cycles à la rupture est très sensible aux variations de γ_p^S dans le domaine d'endurance puisque la limite d'endurance S_D/γ_p^S de la structure dépend de ce facteur. En revanche γ_p^S est de poids négligeable dans le domaine des faibles nombres de cycle où il n'est pas appliqué. Curieusement, la sensibilité de la fiabilité au facteur γ_p^N est négligeable même dans le domaine oligocyclique où il est essentiellement appliqué. Ceci s'explique par le fait que même en majorant les amplitudes des cycles de

variables	$\theta_1(t)$		$\theta_2(t)$	
	HCF ⁽²⁾	LCF ⁽⁴⁾	HCF ⁽⁶⁾	LCF ⁽⁸⁾
H	32, 81%	27, 72%	21, 69%	18, 82%
ξ	28, 34%	54, 07%	40, 09%	63, 11%
γ_p^S	11, 58%	négligeable	13, 47%	négligeable
E	9, 21%	7%	8, 75%	7, 33%
α	9, 21%	7%	8, 75%	7, 33%

TAB. 7.16 – *Comparaison des poids dans la fiabilité des variables aléatoires - couplage mécano-fiabiliste dans le domaine fréquentiel.*

contrainte, une part importante des amplitudes des cycles ainsi obtenues reste d'un niveau faible, donc dans le domaine d'endurance. Or c'est dans ce domaine que la variation de la durée de vie est la plus sensible.

En ce qui concerne les propriétés thermomécaniques du matériau, seul le module d'Young E et le coefficient de dilatation thermique α ont des poids significatifs. En effet, en faisant l'hypothèse d'une loi de comportement élastique du matériau, on confère un rôle important à ces deux paramètres. Par ailleurs, le module d'Young et le coefficient de dilatation thermique ont même poids dans la fiabilité. Ceci s'explique par le fait que ces deux variables ont des rôles symétriques dans l'expression du dommage, puisqu'elles interviennent sous la forme du facteur $E \alpha$. On pourrait ainsi regrouper ces deux variables sous une seule, à savoir le produit $E \alpha$. Cela permettrait de réduire de un le nombre de variables. Les autres propriétés thermiques du matériau, notamment la capacité calorifique ρC_p et la conductivité thermique L , sont d'importance négligeable. En fait c'est ce qui se passe à l'interface fluide/structure qui importe, raison pour laquelle le coefficient d'échange h compte, mais pas la conduction ($\rho C_p, L$). Enfin, la limite élastique du matériau S_y ainsi que sa résistance à la traction S_u , intervenant dans la prise en compte de l'effet de contrainte moyenne non nulle, n'ont aucun effet sur la variation de l'indice de fiabilité. Leurs poids sont tout simplement négligeables par rapport aux variables les plus importantes.

Considérons, enfin, les facteurs d'élasticité par rapport aux paramètres des distributions. On note que les élasticités aux moyennes sont largement supérieures aux élasticités par rapport aux dispersions correspondantes. Le rapport entre ces deux types d'élasticité dépasse 10 pour chaque variable. Les dimensions à retenir en conception pour chaque variable sont donc plus importantes dans la fiabilité que leur dispersion. La moyenne de poids plus important est celle du facteur γ_p^S dans le domaine des grands nombres de cycles. Celle-ci affecte directement la limite d'endurance de la structure qui s'écrit S_D/γ_p^S .

7.10 Conclusion

A travers cette analyse, on montre qu'il est possible de réaliser une analyse complète de fiabilité en fatigue. Pour cela, il est proposé dans ce mémoire de réaliser un couplage mécano-fiabiliste. On évalue la probabilité de défaillance, les importances relatives de chaque variable dans la fiabilité et les sensibilités de la fiabilité à la moyenne et à l'écart-type de ces variables. Les résultats du calcul montrent que globalement le coefficient

d'échange et l'aléa sur la résistance en fatigue sont les plus influants, avec un poids particulier de ξ dans le domaine oligocyclique. On note par ailleurs que les facteurs de passage restent de poids relativement faible dans la fiabilité, hormis γ_p^S qui est important dans le domaine des grands nombres de cycles. Par ailleurs, le module d'Young et le coefficient de dilatation thermique, du fait de l'hypothèse de comportement linéaire du matériau, se voient conférer un rôle significatif dans la fiabilité. Enfin, l'analyse des élasticités aux paramètres des distributions montre que les sensibilités à la moyenne sont largement supérieures aux sensibilités au coefficient de variation, ce qui implique qu'il faut veiller à prendre les bonnes dimensions pour ces variables en conception.

Chapitre 8

Conclusion

Ayant reconnu que la fatigue thermique est particulièrement marquée par de nombreuses incertitudes, il paraît cohérent d'utiliser des méthodes probabilistes pour dimensionner les structures pour se prémunir de ce type d'avarie. Les méthodes de dimensionnement courantes tiennent compte de ces incertitudes en appliquant des marges de sécurité empiriques aux différentes variables du problème. Cette démarche garantit qualitativement le conservatisme du dimensionnement, mais ne permet pas de chiffrer le risque lié aux choix que l'on a effectués. L'objectif des travaux présentés dans ce mémoire était d'introduire un cadre probabiliste global au dimensionnement qui incorpore toutes les incertitudes du problème. De cette manière il est possible d'évaluer la fiabilité en fatigue thermique et d'estimer les effets des incertitudes sur cette fiabilité. Cela demande :

- de caractériser les différentes variables aléatoires intervenant dans la modélisation du comportement en fatigue ;
- d'intégrer ces variables aléatoires dans le dimensionnement en fatigue thermique de la structure étudiée.

Concernant la caractérisation probabiliste des variables aléatoires, en se référant à la littérature [Sve97], les sources d'incertitudes sont identifiées, notamment les variations du chargement, la variabilité des propriétés thermomécaniques du matériau, la dispersion de la résistance à la fatigue du matériau, le passage de la résistance en fatigue de l'éprouvette à celle de la structure réelle, les estimateurs des paramètres et les erreurs de modélisation. Ces sources d'incertitudes sont ensuite regroupées selon Tovo [Tov01] en deux catégories. Les quatre premières relèvent des données aléatoires du problème de fatigue tandis que les deux dernières sont dues au manque de connaissance du phénomène de fatigue. Des indications sont données dans ce mémoire concernant le choix possible des lois pour représenter les différentes variables aléatoires. Une attention particulière est accordée à la caractérisation probabiliste de la résistance aléatoire en fatigue. A ce sujet, une méthode de traitement statistique des données d'essais de fatigue est proposée pour estimer la loi conditionnelle de la durée de vie à amplitude constante fixée. Cette méthode utilise les méthodes classiques de régression. Toutefois, la caractérisation probabiliste proposée pour décrire la résistance aléatoire en fatigue ne tient pas compte des essais n'ayant pas abouti à une rupture. Dès lors, elle décrit mal la zone d'endurance puisqu'elle attribue systématiquement aux amplitudes inférieures à la limite d'endurance une durée de vie infinie, ce qui n'est pas réaliste. Trois modèles sont ajustés aux données :

- un modèle à écart-type constant pour lequel la méthode classique des moindres

carrés est utilisée ;

- un modèle à écart-type variable estimé indépendamment à partir des écarts-types empiriques ; dans ce cas les paramètres de la courbe moyenne sont obtenus par une méthode de régression pondérée ;
- un modèle à coefficient de variation constant estimé en même temps que les paramètres de la courbe moyenne par la méthode du maximum de vraisemblance.

Parmi ceux-ci, le modèle décrivant la résistance en fatigue avec un coefficient de variation constant se révèle meilleur, parce qu'il s'ajuste au mieux aux données et rend compte des fortes variations de la dispersion notamment dans la zone d'endurance. A partir de ce modèle, on peut évaluer la fiabilité de la courbe de fatigue déterministe par rapport aux incertitudes sur les données d'essais de fatigue. Les résultats montrent que la courbe de fatigue déterministe est globalement conservative.

Du fait des incertitudes liées au phénomène de fatigue, le dommage de fatigue devient aléatoire. Il est estimé dans cette étude suivant deux formulations : une formulation discrète et une formulation continue, qui se révèlent équivalentes lorsque le chargement est supposé stationnaire et le nombre de cycles important.

Concernant le dimensionnement probabiliste en fatigue thermique, on utilise le principe du couplage mécano-fiabiliste qui est déjà disponible pour des problèmes de mécanique aléatoire en statique. Deux approches du couplage mécano-fiabiliste sont proposées, notamment un couplage mécano-fiabiliste dans le domaine temporel (le chargement est représenté par un signal aléatoire de température) et un couplage mécano-fiabiliste dans le domaine fréquentiel (le chargement est représenté par sa densité spectrale de puissance). Dans le premier couplage, la formulation discrète du dommage est utilisée tandis que dans le second, la formulation continue est employée. Le couplage mécano-fiabiliste dans le domaine fréquentiel a l'avantage d'intégrer simplement la variabilité du chargement. Mais il est soumis à de fortes hypothèses notamment la stationnarité du processus de chargement et le comportement élastique du matériau. En appliquant ces méthodes à l'exemple d'un élément de tuyauterie soumis à un gradient de température, on montre qu'il est possible de mener une analyse de fiabilité complète en fatigue thermique. On note que les approches temporelle et fréquentielle du couplage sont équivalentes si le nombre de cycles endommageant est suffisamment grand. Sinon, l'approche fréquentielle est plus conservative. L'étude de l'effet des incertitudes sur la fiabilité met en évidence le poids particulièrement significatif de la dispersion de la résistance à la fatigue et du coefficient d'échange fluide/structure.

Il est important de noter que, d'une manière générale, les résultats issus de l'application des méthodes probabilistes en dimensionnement dépendent fortement de la nature des modèles mécanique et stochastique employés. Cependant, notre objectif au cours de ces travaux n'était pas d'améliorer ces modèles, mais de mettre en place une démarche fonctionnelle de dimensionnement en fatigue thermique des structures. L'enrichissement des modèles adoptés constitue donc une perspective naturelle au travail présenté. En effet, le modèle mécanique, lié principalement à la modélisation du comportement en fatigue contient encore beaucoup d'incertitudes. En ayant en entrée du modèle des variables aléatoires, on prend plus de risque dans la représentation du comportement de la structure. Il est donc nécessaire de s'appuyer sur des modèles plus réalistes. Autrement dit, appliquer des méthodes probabilistes à des modèles erronés serait inutile. En ce qui concerne le modèle stochastique, il faut noter que la caractérisation probabiliste de la résistance

en fatigue adoptée n'est pas encore totalement satisfaisante, notamment parce qu'elle ne tient pas compte des éprouvettes non rompues. La méthode du maximum de vraisemblance intégrant des données censurées ou l'approche proposée par Bastenaire [Bas60] peuvent lever cette insuffisance. On note par ailleurs qu'une étude approfondie des données sur les facteurs de passage éprouvette/structure pourrait permettre de mieux inférer les lois de ces facteurs. Enfin, la suite logique des travaux présentés dans ce mémoire est le développement de codes de dimensionnement en fatigue thermique basés sur des considérations probabilistes. En effet, il est possible d'étendre les travaux présentés à l'estimation de coefficients partiels de sécurité associés aux différentes variables du problème, et qui permettent d'assurer un certain niveau de fiabilité [Lem05].

Développées au départ dans le domaine de l'*offshore* qui est soumis à un environnement particulièrement incertain, les méthodes probabilistes en dimensionnement ont connu de nombreux développements. Aujourd'hui, elles ont une audience grandissante auprès de nombreux secteurs industriels. Le lecteur pourra se référer au document de Faber [Fab00] qui donne des informations sur l'état d'avancement de l'approche probabiliste du dimensionnement des structures. Aussi, pour un phénomène comme la fatigue thermique des structures, spécialement marqué par de nombreuses incertitudes, il est légitime d'espérer que les méthodes probabilistes permettent de traiter le dimensionnement suivant ce mode de défaillance de manière plus rationnelle.

Bibliographie

- [A0393] AFNOR A03-406. *Produits métalliques - Fatigue sous sollicitation d'amplitude variable - Méthode rainflow de comptage des cycles*. AFNOR, 1993.
- [AGRB94] C. Amzallag, J. P. Gerey, J. L. Robert, and J. Bahuaud. Standardization of the rainflow counting method for fatigue analysis. *International Journal of Fatigue*, 16 :287–293, 1994.
- [Ant97] R. J. Anthes. Modified rainflow counting keeping the load sequence. *International Journal of Fatigue*, 19(7) :529–535, 1997.
- [ASM69] ASME. Criteria of the ASME boiler and pressure vessel code for design and analysis in sections III and VIII, division. Technical report, The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1969.
- [Bas60] F. Bastenaire. *Etude statistique et physique de la dispersion des résistances et des durées à la fatigue*. PhD thesis, Faculté des sciences de l'Université de Paris, 1960.
- [BB97] C. Bathias and J.P. Bâillon. *La fatigue des matériaux et des structures, deuxième édition revue et augmentée*. Hermès, 1997.
- [Ben64] J. S. Bendat. Probability function for random responses. *NASA report on contract NAS-5-4590*, 1964.
- [BFGT99] A. Brand, J-F. Flavenot, R. Grégoire, and C Tournier. *Données technologiques sur la fatigue*. Publication CETIM, Mécanique et matériaux, 1999.
- [BH89] K. Breitung and M. Hohenbichler. Asymptotic approximations for multivariate integrals with an application to multinormal probabilities. *Journal of Multivariate Analysis*, 30(1) :80–97, 1989.
- [BM90] E. Brendle and P. Morilhat. *Fatigue sous chargement aléatoire - Estimation du dommage mécanique - Etude bibliographique*. Electricité de France, 1990.
- [BNR93] V. Bouyssy, S. M. Naboishikov, and R. Rackwitz. Comparison of analytical counting methods for gaussian process. *Structural Safety*, 12 :35–57, 1993.
- [Bol98] V. Bolotin. *Mechanics of Fatigue*. CRC Mechanical Engineering Series, 1998.
- [BSPS03] S. Benhamadouche, M. Sakiz, C. Peniguel, and J.-M. Stephan. Presentation of a new methodology of chained computations using instationnary 3d approaches for the determination of thermal fatigue in a t-junction of a nuclear plant. In *Trans. 17th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology (SMIRT17)*, Prague, Czech Republic, 2003.
- [CO84] D. R. Cox and D. Oakes. *Analysis of Survival Data*. Chapman & Hall, London, 1984.

- [Cof54] L. F. Jr Coffin. A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Trans. ASME*, 76 :931, 1954.
- [Col98] Collectif. Re-evaluation of fatigue analysis criteria. Technical Report EE/S 98.317, Framatome, 1998.
- [Col00] Collectif. *Règles de Conception et de Construction des Matériels des Îlots Nucléaires*. AFCEN, Paris La Défense, juin 2000.
- [Cow98] G. Cowan. *Statistical Data Analysis*. Oxford science publications, 1998.
- [Dir85] T. Dirlik. *Application of Computers in Fatigue Analysis*. PhD thesis, University of Warwick, 1985.
- [Dit79] O. Ditlevsen. Generalized second moment reliability index. *Journal of Structural Mechanics*, pages 453–472, 1979.
- [DM96] O. Ditlevsen and H. Madsen. *Structural Reliability Analysis*. John Wiley, 1996.
- [DV73] K. Dang Van. Sur la résistance à la fatigue des métaux. *Sciences et techniques de l'Armement*, 3ème facicule(47) :641–722, 1973.
- [DVG89] K. Dang Van, B. Griveau, and O. Message. On a new multiaxial fatigue criterion : Theory and application. biaxial and multiaxial fatigue. *EGF3, London : Mechanical Engineering Publications*, pages 479–496, 1989.
- [Fab00] M. Faber. Probabilistic model code. Technical report, Joint Committee on Structural Safety, 2000.
- [FY98] A. Fatemi and L. Yang. Cumulative fatigue damage and life prediction theories : A survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue*, 20(1) :9–34, 1998.
- [Gou24] H. J. Gough. *The Fatigue of Metals*. Scott, Greenwood and Son, London, 1924.
- [Gra00] Grandemange, J. M. et Faïdy, C. Démarche générale de prévention du risque d'endommagement par fatigue des matériels mécaniques des chaudières nucléaires : de la conception au suivi en exploitation. In *Journée SFEN-ST2*, 2000.
- [Gri20] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Trans. R. Soc. (Lond.)*, A221 :163, 1920.
- [Hal99] A. Halfpenny. A frequency domain approach for fatigue life estimation from finite element analysis. In *International Conference on Damage Assessment of Structures*, 1999.
- [Hec96] J. L. Hechmer. Report on 2 and 20 design factors. In *PVRC WG - Evaluation Methods, ASME Code Section III Sub group on Fatigue Strength*, 1996.
- [HJM92] S. Huet, E. Jolivet, and A. Messéan. *La régression non-linéaire, méthodes et applications en biologie*. INRA éditions, 1992.
- [HL74] A. M. Hasofer and N. C. Lind. Exact and invariant second moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100 :11–121, 1974.
- [Jen69] R. I. Jennrich. Asymptotic properties of nonlinear least squares estimators. *Ann. Math. Statist.*, 40 :633–643, 1969.

- [JJ93] B. Jacob and L. Jiang. Probability fatigue reliability. In *Proc. 6th Int. Conf. Struct. Safety Rel. (ICOSSAR'93)*, 1993. Innsbruck, Austria.
- [KCS96] J. M. Keisler, O. K. Chopra, and W. J. Shack. Statistical models for estimating fatigue strain-life behavior of pressure boundary materials in light water reactor environments. *Nuclear Engineering and Design*, 167 :129–154, 1996.
- [Lal99] C. Lalanne. *Dommmage par fatigue*, volume 4 of *Vibrations et chocs mécaniques*. Hermès Science, 1999.
- [Lan62] B. F. Langer. Design of pressure vessels for low-cycle fatigue. *Journal of Basic Engineering (Transaction of the ASME)*, pages 389–402, 1962.
- [LDK86] P-L Liu and A. Der Kiureghian. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1(2) :105–112, 1986.
- [Lem04] M. Lemaire. *Fiabilité des Structures - Couplage Mécano-Fiabiliste Statique*. communication personnelle, 2004.
- [Lem05] M. Lemaire. *Fiabilité des Structures - Couplage Mécano-Fiabiliste Statique*. Hermes Science Publication, 2005. En collaboration avec A. Chateauneuf et J.C. Mitteau. ISBN 2-7462-1057-6.
- [Mah99] S. Maherault. *Calibration d'un code semi-probabiliste destiné au dimensionnement des navires à la fatigue*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1999.
- [Mat01] *Mathcad - Manuel de l'utilisateur et manuel de référence*, math soft edition, 2001.
- [MB03] S. Musi and F. Beaud. An analytical model for thermal fatigue crack initiation and propagation in mixing zones of piping systems. *PVP - Fatigue, Fracture and Damage Analysis*, 461 :111–118, 2003.
- [Mel99] R. E. Melchers. *Structural Reliability Analysis and Prediction*. Wiley, second edition, 1999.
- [Mer95] M. Merola. Normative issues in thermal fatigue design of nuclear components. *Nuclear Engineering and Design*, 158 :351–361, 1995.
- [Min45] M. A. Miner. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 12 :A–159, 1945.
- [Mor91] P. Morilhat. *Mécanique aléatoire. Estimation statistique du dommage mécanique engendré par des chargements non stationnaires*. Electricité de France, 1991.
- [MT83] M. J. Manjoine and R. E. Tome. Proposed design criteria for high cycle fatigue of austenitic stainless steel. In *ASME International Conference on Advances in Life Prediction Methods*, pages 51–57, 1983.
- [NUR97] *NUREG/CR 6260*, 1997.
- [O'D96] W. J. O'Donnell. Private communication to n. g. smith. Technical report, AEA Technology, 1996.
- [Pap65] A. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1965.

- [PE63] P. C. Paris and F. Erdogan. A critical analysis of crack propagation law. *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 85(4) :528, 1963.
- [PHI03] PHI-MECA Engineering S.A. *Manuel d'Utilisation*, 2003.
- [PP00] X. Pitoiset and A. Preumont. Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures. *International Journal of Fatigue*, 22 :541–550, 2000.
- [Pre94] A. Preumont. *Random Vibration and Spectral Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [Pri81] M. B. Priestley. *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, 1981.
- [Rac01] R. Rackwitz. Reliability analysis - a review and some perspectives. *Structural Safety*, 23 :365–395, 2001.
- [RH02] D. T. Rusk and P. C. Hoffmann. Component geometry and material property uncertainty model for probabilistic strain-life fatigue predictions. In *6th Joint FAA/DoD/NASA Aging Aircraft Conference*, September 2002.
- [Ric54] S. O. Rice. *Mathematical Analysis of Random Noise*. Dover, New York, 1954.
- [Rob92] J. L. Robert. *Contribution à l'étude de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires*. PhD thesis, Institut Nationale des Sciences Appliquées (INSA), 1992.
- [Ros01] S. Rosinski. Evaluation of fatigue data including reactor water environmental effects - materials reliability project (MRP-54). Technical Report 1003079, EPRI, December 2001.
- [Sap90] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. éditions Technip, 1990.
- [Sch96] W. Schütz. A history of fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, 54(2) :263–300, 1996.
- [SD91] M. Shinozuka and G. Deodatis. Simulation of stochastic process by spectral representation. *Applied Mechanics Review*, 44 :191–204, 1991.
- [SFSF00] R. I. Stephens, A. Fatemi, R. R. Stephens, and H. O. Fuchs. *Metal Fatigue in Engineering, 2nd Ed.* John Wiley and Sons, 2000.
- [SGH⁺03] B. Sudret, Z. Guédé, P. Hornet, J.-M. Stéphan, and M. Lemaire. Probabilistic assessment of fatigue life including statistical uncertainties in the s-n curve. In *Proc. 17th Int. Conf. On Struc. Mech. In Reactor Technology (SMIRT17)*, 2003. paper #M-232.
- [SGL03] B. Sudret, Z. Guédé, and M. Lemaire. Probabilistic framework for fatigue analysis. In *Proc. 11th Conf. On Reliability and Optimization of Structural Systems (IFIP WG 7.5)*, 2003.
- [Spe76] A. Spera. What is thermal fatigue. *American Society for Testing and Materials*, pages 3–9, 1976.
- [Sud04a] B. Sudret. Cadre d'analyse probabiliste global des tuyauteries en fatigue thermique. In *23èmes Journées de Printemps - Méthodes fiabilistes en fatigue pour conception et essais*, 2004.

- [Sud04b] B. Sudret. Régularisation de fonctions à seuil pour les études de fiabilité des structures soumises à la fatigue. *Communication personnelle*, 2004.
- [Sve97] T. Svensson. Prediction uncertainties at variable amplitude fatigue. *International Journal of Fatigue*, 19(1) :S295–S302, 1997.
- [TC59] J. F. Tavernelli and L. F. Jr. Coffin. A compilation and interpretation of cyclic strain fatigue test on metals. *Trans. ASME*, 51 :438, 1959.
- [Tov01] R. Tovo. On the fatigue reliability evaluation of structural components under service loading. *International Journal of Fatigue*, 23 :587–598, 2001.
- [Tve90] L. Tvedt. Distribution of quadratic forms in normal space-application to structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(6) :1183–1197, 1990.
- [WL80] P. H. Wirsching and M. C. Light. Fatigue under wide bande random process. *Journal of the Structural Division*, pages 1593–1607, 1980.
- [Woh58] A. Wohler. Über Die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl. *Z. Bauwesen*, page 641, 1858.
- [YL96] Bong-Ryul You and Soon-Bok Lee. A critical review on multiaxial fatigue assesments of metals. *International Journal of Fatigue*, 18(4) :235–244, 1996.
- [ZB92] W. Zhao and M. J. Baker. On the probability density function of rainflow stress range for stationnary gaussian process. *International Journal of Fatigue*, pages 121–135, 1992.
- [ZSJ00] H. Zenner, A. Simbürger, and L. Jiping. On the fatigue limit of ductile metals under complex multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 22 :137–145, 2000.
- [ZT96] E. Zahavi and V. Torbilo. *Fatigue Design - Life Expectancy of Machine Parts*. CRC Press, 1996.

Annexe A

Notations

A.1 Vecteurs et matrices

\mathbf{x}	vecteur
\mathbb{M} ou M_{ij}	matrice
\mathbb{M}^T	transposition

A.2 Opérateurs

$\bar{\cdot}$	moyenne
$\hat{\cdot}$	estimateurs
$\mathbb{E}[\cdot]$	espérance
$\mathbb{E}_x[\cdot]$	espérance avec indication de la variable
$\mathbb{E}[\cdot \cdot]$	espérance conditionnelle
∇H	gradient
$\nabla_{\mathbf{u}} H$	gradient avec indication de la variable
$\text{div}(\cdot)$	divergence
$\text{tr}(\cdot)$	trace d'une matrice
$\text{Prob}[\cdot]$	probabilité
$\text{cov}[X_i, X_j]$	covariance de X_i, X_j
$\ln(\cdot)$	logarithme népérien
$\text{Log}(\cdot)$	logarithme décimal

A.3 Abréviations

MCC	méthode des moindres carrés classique
MCP	méthode des moindres carrés pondérés
MV	méthode de maximum de vraisemblance
HCF	domaine de grand nombre de cycles
LCF	domaine de faible nombre de cycles

A.4 Variables et fonctions

E	module d'élasticité du matériau (MPa)
α	coefficient de dilatation thermique
ν	coefficient de Poisson
ρC_p	capacité calorifique (J/kg)
L	conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
C	diffusivité thermique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)
h	coefficient d'échange fluide/paroi ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$)
S_D	limite d'endurance du matériau (MPa)
RA	réduction relative de surface due à la propagation de fissure (%)
S_y	limite élastique en contrainte normale uniaxiale (MPa)
S_u	résistance à la traction (MPa)

ϵ_t	déformation totale
ϵ_e	déformation élastique
ϵ_p	déformation plastique
S_a	amplitude du cycle de contrainte (MPa)
S'	amplitude de cycle de contrainte de moyenne non nulle (MPa)
τ	cisaillement (MPa)
F	contrainte normale de flexion (MPa)
ΔS	amplitude de contrainte due à la déformation élastique (MPa)

N	nombre de cycles à la rupture
n	nombre de cycles appliqués
d	dommage élémentaire de fatigue
D	dommage cumulé de fatigue

t	instant (s)
$S(t)$	contrainte normale uniaxiale (MPa)
$S_{ij}(t)$	tenseur de contrainte multiaxial (MPa)
$S_i(t)$	contraintes principales (MPa)
h	vecteur normal à un plan physique
$\tau_{\mathbf{n}}(t)$	vecteur contrainte tangentielle sur plan physique de normale \mathbf{n}
$\tau_{\mathbf{nm}}$	partie moyenne du vecteur contrainte tangentielle (MPa)
$\tau_{\mathbf{na}}(t)$	partie alternée du vecteur contrainte tangentielle (MPa)
$P_H(t)$	pression hydrostatique (MPa)
$\tau_{pr}(t)$	scission maximale (MPa)
$S_{aij}(t)$	tenseur déviateur alterné
S_{ijm}	tenseur déviateur moyen
$S_{ai}(t)$	contraintes principales du tenseur déviateur alterné
Γ	fonction de fatigue indicatrice d'endommagement

$\omega, \omega_m, \omega_S$	variable d'aléa
λ	pulsation
$\theta(t, \omega)$	chargement thermique aléatoire
$R_\theta(t_1, t_2)$	fonction d'autocorrélation
$W_\theta(\lambda)$	densité spectrale de puissance
m_i	moment spectral d'ordre i
I	facteur d'irrégularité
$E[M_T]$	nombre moyen de pics
N_c	nombre total de cycles de contrainte
$f_S(S)$	densité de probabilité des amplitudes de cycles de contrainte
γ	facteur de passage éprouvette-structure

q	paramètres de régression
$\eta(S_a)$	courbe médiane de fatigue
$\varepsilon(S_a, \omega)$	écart résiduel aléatoire gaussien centré
ξ	variable gaussienne centrée réduite
$\sigma(S_a)$	écart-type de $\ln N$
δ	coefficient de variation de $\ln N$
$V_n ; L_n$	indicateur du maximum de vraisemblance
R^2	rapport de corrélation
D_K	écart maximum entre fréquence cumulée empirique et théorique
D_K^c	seuil du test de Kolmogorov
$N(S_a, \omega)$	durée de vie aléatoire à amplitude S_a fixée
$N_d(S_a)$	durée de vie déterministe à amplitude S_a fixée
$G(\mathbf{x})$	fonction de performance dans l'espace physique
$H(\mathbf{u})$	fonction de performance dans l'espace standard
D_f	domaine de défaillance
D_s	domaine de sûreté
Σ	surface d'état-limite
P_f	probabilité de défaillance
β	indice de fiabilité
P^*	point de conception
s_r	facteur de sensibilité de la fiabilité au paramètre r
e_r	facteur d'élasticité de la fiabilité au paramètre r

Annexe B

Méthodes de régression

B.1 Méthode des moindres carrés pondérés

La méthode classique des moindres carrés se déduit aisément de l'application de la méthode des moindres carrés pondérés par une simple modification. Présentons tout d'abord la méthode des moindres carrés pondérés.

B.1.1 Estimation des paramètres

On suppose que les variables aléatoires ε_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sont indépendantes et leurs écarts-types respectifs σ_i sont connus. La courbe moyenne de fatigue, noté $\eta(S)$ s'écrit sous la forme :

$$\eta(S) = A \ln(S - S_D) - B \quad (\text{B.1})$$

où A , B et S_D sont les paramètres inconnus. Pour estimer les paramètres de la courbe moyenne, nous devons minimiser la somme des carrés des distances entre les observations et la courbe moyenne, pondérés par l'inverse de la variance correspondante :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[\ln N_i - A \ln(S_i - S_D) - B]^2}{\sigma_i^2} \quad (\text{B.2})$$

Pour cela on annule les dérivées partielles par rapport aux 3 paramètres :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial A} &= -2 \sum_{i=1}^n \frac{[\ln N_i - A \ln(S_i - S_D) - B] \ln(S_i - S_D)}{\sigma_i^2} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial B} &= -2 \sum_{i=1}^n \frac{[\ln N_i - A \ln(S_i - S_D) - B]}{\sigma_i^2} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial S_D} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{[\ln N_i - A \ln(S_i - S_D) - B] A}{(S_i - S_D) \sigma_i^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Ce système est équivalent à :

$$\sum_{i=1}^n \frac{[\ln N_i - A \ln(S_i - S_D) - B] \ln(S_i - S_D)}{\sigma_i^2} = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{[\ln N_i - A \ln(S_i - S_D) - B]}{\sigma_i^2} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{[\ln N_i - A \ln(S_i - S_D) - B]}{(S_i - S_D) \sigma_i^2} = 0 \quad (\text{B.6})$$

On résout d'abord les deux premières équations du système en exprimant les paramètres A et B en fonction de S_D . Ainsi, en posant :

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}; \Delta_{XY} = \sum_{i=1}^n \frac{\ln N_i \ln(S_i - S_D)}{\sigma_i^2}; \Delta_X = \sum_{i=1}^n \frac{\ln(S_i - S_D)}{\sigma_i^2}; \\ \Delta_{XX} &= \sum_{i=1}^n \frac{\ln(S_i - S_D)^2}{\sigma_i^2}; \Delta_Y = \sum_{i=1}^n \frac{\ln N_i}{\sigma_i^2}; \delta = \Delta \cdot \Delta_{XX} - \Delta_X^2. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

on a :

$$A = \frac{\Delta \cdot \Delta_{XY} - \Delta_X \cdot \Delta_Y}{\delta}; \quad B = \frac{\Delta_{XX} \cdot \Delta_Y - \Delta_X \cdot \Delta_{XY}}{\delta} \quad (\text{B.8})$$

On reporte ensuite les expressions de A et B dans la troisième équation du système, et on obtient une équation à une seule inconnue, à savoir, S_D , qu'on résout numériquement par une méthode de dichotomie. Ayant déterminé un estimateur \widehat{S}_D de S_D , il suffit alors de reporter sa valeur dans les expressions (B.8) de A et B pour obtenir leurs estimateurs respectives, \widehat{A} et \widehat{B} .

B.1.2 Matrice de covariance du vecteur des estimateurs

Notons $\theta = (A, B, S_D)^T$ le vecteur des paramètres et $\widehat{\theta} = (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{S}_D)^T$ son estimateur.

Il est démontré que l'estimateur $\widehat{\theta}$ de θ est *consistant*, *asymptotiquement non biaisé* et *asymptotiquement gaussiens* [Jen69]. De plus, la matrice de covariance de $\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta)$ est donnée par [HJM92] :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial \eta(S_i, \theta)}{\partial \theta_k} \frac{\partial \eta(S_i, \theta)}{\partial \theta_l} \right)_{k,l}^{-1}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (\text{B.9})$$

On en déduit que la matrice de covariance de $(\widehat{\theta} - \theta)$, notée Σ est :

$$\Sigma = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial \eta(S_i, \theta)}{\partial \theta_k} \frac{\partial \eta(S_i, \theta)}{\partial \theta_l} \right)_{k,l}^{-1}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (\text{B.10})$$

La matrice Σ est ensuite évaluée en remplaçant les valeurs exactes des paramètres par leurs estimations respectives.

B.1.3 Région de confiance des paramètres

La matrice de covariance des estimateurs est insuffisante pour évaluer leurs précisions respectives. En effet, du fait de l'existence de corrélation entre les estimateurs, les variances respectives des estimateurs (*i.e.* les termes diagonaux de Σ) ne sont pas des indicateurs exhaustifs de la précision de ces estimateurs. Nous sommes alors amenés à construire des régions de confiance des paramètres, c'est-à-dire des régions dont les frontières sont aléatoires et dans lesquelles se situent les valeurs exactes des paramètres avec un certain niveau de probabilité.

On rappelle que $(\hat{\theta} - \theta)$ converge en loi vers une gaussienne centrée de matrice de covariance Σ . Admettons donc qu'on puisse approximer la loi de $(\hat{\theta} - \theta)$ par une gaussienne centrée de matrice de covariance Σ . Dans ce cas, la forme quadratique $Q = (\hat{\theta} - \theta)^T \Sigma^{-1} (\hat{\theta} - \theta)$ suit une loi de chi-2 dont le nombre de degrés de liberté est la dimension du vecteur $(\hat{\theta} - \theta)$ c'est à dire 3 [Sap90]. De plus, on sait que la quantité :

$$s^2(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{[\ln N_i - \hat{A} \ln(S_i - \hat{S}_D) - \hat{B}]^2}{\sigma_i^2} \quad (\text{B.11})$$

suit une loi de chi-2 à $n - 3$ degrés de liberté. Les variables Q et s^2 étant indépendantes, le quotient :

$$\frac{Q/3}{s^2/(n-3)} = \frac{n-3}{3} \frac{(\hat{\theta} - \theta)^T \Sigma^{-1} (\hat{\theta} - \theta)}{s^2(\hat{\theta})} \quad (\text{B.12})$$

suit une loi de Fisher-Snedecor à 3 et $n-3$ degrés de liberté, dont la fonction de répartition est notée $F_{3,n-3}$. On obtient ainsi une variable aléatoire, appelée variable pivot, dont la loi ne dépend pas des paramètres. Avec cette variable de loi connue et indépendante des paramètres, on est capable de calculer la probabilité pour cette variable d'appartenir à un intervalle quelconque. Ainsi, la région de confiance de niveau $1 - \alpha$ ($\alpha = 5\%$) est un ellipsoïde défini par :

$$\left\{ \theta \mid \frac{(\hat{\theta} - \theta)^T \Sigma^{-1} (\hat{\theta} - \theta)}{s^2(\hat{\theta})} \leq \frac{3}{n-3} F_{3,n-3}^{-1}(1 - \alpha) \right\} \quad (\text{B.13})$$

Notons, cependant, que ce résultat n'est pas exact mais asymptotique, puisque l'estimateur des paramètres n'est qu'asymptotiquement gaussien. On obtient donc une région de confiance approchée de niveau asymptotique $1 - \alpha$.

B.2 Méthode classique des moindres carrés

Dans le cas de la régression classique, où on suppose les écarts-types respectifs des $\ln N_i$ constants égaux à σ , la démarche est la même. Il suffit simplement de remplacer σ_i par 1 dans les expressions des équations et on obtient de la même manière les estimations des paramètres du modèle de régression, leur matrice de covariance et une région de confiance des paramètres. Ensuite, ayant estimé les paramètres du modèle, on déduit un estimateur de l'écart-type σ par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n [\ln N_i - A \ln(S_i - S_D) - B]^2 \quad (\text{B.14})$$

où p est le nombre de paramètres qui vaut ici 3. Cet estimateur est *consistant et sans biais*, de plus $(\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2)$ converge en loi vers une gaussienne centrée de variance [HJM92] :

$$\text{var} [(\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2)] = \frac{1}{n-3} \text{var} [\varepsilon^2] = \frac{1}{(n-3)(n-1)} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^2 - \sigma^2)^2 \quad (\text{B.15})$$

B.3 Méthode du maximum de vraisemblance

B.3.1 Estimation des paramètres

Pour estimer les paramètres de la courbe moyenne de fatigue par la méthode de maximum du vraisemblance, nous devons maximiser la probabilité que les observations coïncident avec leurs valeurs données respectivement par la fonction de régression choisie. Cette probabilité est appelée la vraisemblance de l'observation. Les observations sont supposées indépendantes entre elles, gaussiennes et leurs écarts-types suivent la troisième forme, plus générale, retenue pour modéliser la dispersion des données (section 4.3.2). Cette forme de l'écart-type indique qu'il dépend à la fois des paramètres de la fonction de régression et de paramètres qui lui sont propres.

Nous énonçons à présent un résultat général. Notons θ_η le vecteur constitué par les paramètres de la fonction de régression et θ_σ le vecteur constitué par les paramètres propres à l'écart-type. La vraisemblance de l'observation s'écrit :

$$V_n = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma) \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(\ln N_i - \eta(S_i, \theta_f))^2}{\sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)} \right] \quad (\text{B.16})$$

Maximiser V_n équivaut à minimiser :

$$L_n = -\frac{2}{n} \ln V_n$$

A une constante près, qui n'intervient pas dans le problème de minimisation, on obtient :

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln (\sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)) + \frac{(\ln N_i - \eta(S_i, \theta_f))^2}{\sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)} \right] \quad (\text{B.17})$$

Ce problème de minimisation de L_n est résolu par une méthode numérique d'optimisation développée sur le logiciel Mathcad [Mat01].

B.3.2 Matrice de covariance du vecteur des estimateurs

Notons $(\widehat{\theta}_\eta \ \widehat{\theta}_\sigma)^T$ le vecteur des paramètres estimés. Cet estimateur possède les propriétés de *consistance*, *normalité* et *efficacité asymptotique*. De plus, la matrice de covariance du vecteur des estimateurs des paramètres vaut [HJM92] :

$$\Sigma = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ B_n^T & C_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.18})$$

avec :

$$\begin{aligned}
[A_n]_{h,k} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)} \frac{\partial \eta(S_i, \theta_\eta)}{\partial \theta_{\eta,h}} \frac{\partial \eta(S_i, \theta_\eta)}{\partial \theta_{\eta,k}} \\
&\quad + \frac{1}{2\sigma(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)^2} \frac{\partial \sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)}{\partial \theta_{\eta,h}} \frac{\partial \sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)}{\partial \theta_{\eta,k}} \\
[B_n]_{k,l} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)} \frac{\partial \sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)}{\partial \theta_{\eta,k}} \frac{\partial \sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)}{\partial \theta_{\sigma,l}} \\
[C_n]_{l,m} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)} \frac{\partial \sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)}{\partial \theta_{\sigma,l}} \frac{\partial \sigma^2(S_i, \theta_\eta, \theta_\sigma)}{\partial \theta_{\sigma,m}} \\
h &= 1, \dots, p; \quad k = 1, \dots, p; \quad l = 1, \dots, q; \quad m = 1, \dots, q
\end{aligned} \tag{B.19}$$

ici, p et q sont les nombres respectifs des éléments de θ_η et θ_σ . La covariance des estimateurs est ensuite calculée en remplaçant les valeurs exactes des paramètres par leurs estimations respectives.

B.3.3 Région de confiance des paramètres

Quant à la région de confiance des paramètres, elle s'obtient suivant la démarche proposée pour la méthode des moindres carrés (section B.1.3). Par contre, il faut veiller à remplacer le nombre 3 dans l'équation (B.13) par $p + q$ le nombre de paramètres dans ce cas. La région de confiance s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \theta_\eta \\ \theta_\sigma \end{pmatrix} \mid \frac{\begin{pmatrix} \hat{\theta}_\eta - \theta_\eta \\ \hat{\theta}_\sigma - \theta_\sigma \end{pmatrix}^T \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_\eta - \theta_\eta \\ \hat{\theta}_\sigma - \theta_\sigma \end{pmatrix}}{s^2(\hat{\theta}_\eta, \hat{\theta}_\sigma)} \leq \frac{3}{n - p - q} F_{p+q, n-p-q}^{-1}(1 - \alpha) \right\} \tag{B.20}$$

De même, on a une région de confiance approchée de niveau asymptotique $1 - \alpha$ ($\alpha = 5\%$).

Annexe C

Notions d'analyse spectrale de processus aléatoires

Ce paragraphe a pour but de définir les principaux paramètres rencontrés dans le cadre de l'analyse de fatigue dans le domaine fréquentiel, et de présenter un exemple d'algorithme de simulation de trajectoire d'un processus stationnaire ergodique à partir de sa densité spectrale de puissance (DSP).

C.1 Définitions

Nous considérons ici des processus aléatoires *Gaussiens stationnaires ergodiques*. Un processus est dit *stationnaire au sens strict* si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps. Il est dit *stationnaire au sens large* ou *au deuxième ordre* si ses statistiques d'ordre 1 et 2 sont invariantes dans le temps. Notons que pour les processus Gaussien, la stationnarité au sens large est équivalente à la stationnarité au sens strict [Pre94]. La propriété d'*ergodicité* permet de remplacer des moyennes d'ensemble par des moyennes temporelles estimées à partir d'une réalisation unique du processus.

Introduisons à présent la densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus stationnaire. La DSP représente une densité normalisée. Elle donne la décomposition fréquentielle de la moyenne quadratique du processus. Elle est définie comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du processus [Pap65] :

$$W_S(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_S(\tau) e^{-j\lambda\tau} d\tau$$

où $R_S(\tau) = E[S(t) S(t - \tau)]$.

C.2 Propriétés statistiques des signaux aléatoires

Les propriétés de base d'un processus sont définies à partir de ses *moments spectraux*. Le moment spectral, m_i , d'ordre i est défini comme suit :

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^i W_S(\lambda) d\lambda$$

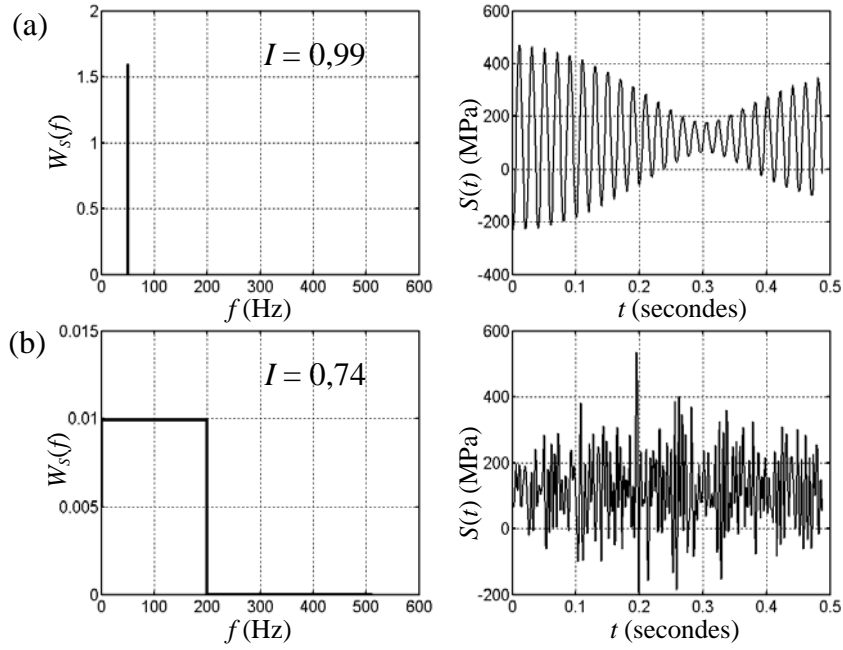


FIG. C.1 – Largeur de bande d'un processus aléatoire : (a) processus à bande étroite ; (b) processus à bande large.

Pour un processus centré, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 v_S &= m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} W_S(\lambda) d\lambda \\
 v_{\cdot S} &= m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda^2| W_S(\lambda) d\lambda \\
 v_{\cdot\cdot S} &= m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda^4| W_S(\lambda) d\lambda
 \end{aligned}$$

où $v_S = E[S(t)^2]$ est la variance du processus $S(t)$.

Rice [Ric54] a démontré pour un processus Gaussien de moyenne nulle $S(t)$, que le nombre moyen par unité de temps de franchissements à pente positive d'un seuil de niveau S_0 , peut être exprimé par :

$$\nu_{S_0}^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma_S^2}\right)$$

En particulier, le nombre moyen de passages par zéro s'écrit :

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$$

Par ailleurs, le nombre moyen de pics (maxima) par unité de temps, $E[n_{pics}]$, d'un processus Gaussien stationnaire peut être calculé à partir de ses moments spectraux selon la formule :

$$E[n_{pics}] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (\text{C.1})$$

Les paramètres importants dans l'analyse de fatigue sont ceux qui donnent des indications sur la largeur de bande du processus. On en identifie deux dans la littérature. Le premier est le *facteur d'irrégularité*, noté I , il représente le rapport entre le nombre moyen par unité de temps de passages par zéro à pente positive et le nombre moyen par unité de temps de maxima :

$$I = \frac{\nu_0^+}{\mathbb{E}[n_{pics}]} = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}}$$

Le facteur d'irrégularité, I , est compris entre 0 et 1. Le processus est dit à *bande étroite* lorsque I est proche de 1, il est dit à bande large quand I est proche de 0. La figure C.1 donne un exemple des formes respectives des processus à bandes large et étroite. L'autre paramètre de largeur de bande souvent utilisé est noté ϵ et vaut :

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} = 1 - I^2$$

C.3 Algorithme de simulation de trajectoires d'un processus à partir de sa DSP

On considère un processus Gaussien stationnaire centré réel $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$, de densité spectrale de puissance $W_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto W_X(\lambda)$, où λ désigne la pulsation. Il est admis qu'il existe une *pulsation de coupure* λ_c telle que :

$$W_X(\lambda) \ll 1 \quad \text{pour} \quad |\lambda| \leq \lambda_c$$

Cette pulsation de coupure est obtenue en appliquant le critère suivant :

$$\int_0^{\lambda_c} W_X(\lambda) d\lambda = (1 - \epsilon) \int_0^{\infty} W_X(\lambda) d\lambda \quad (\text{C.2})$$

présenté par Shinozuka et Deodatis [SD91], où $\epsilon \ll 1$. On restreint ainsi la densité spectrale W_X à un support compact $[-\lambda_c, \lambda_c]$ en remplaçant W_X par \widetilde{W}_X qui coïncide avec W_X sur l'intervalle $[-\lambda_c, \lambda_c]$ et vaut zéro en dehors de cet intervalle. L'algorithme de simulation présenté génère des trajectoires du processus $X(t)$ sur une durée T , à partir de la densité spectrale de puissance à support compact \widetilde{W}_X .

C.3.1 Discrétisation des domaines temporel et fréquentiel

Le pas Δt du domaine temporel vaut : $\Delta t = T/K$, où K est le nombre de points d'échantillonnage. Il est pris égal à une puissance entière de 2. Cette propriété de K est utile pour l'application ultérieure d'un algorithme de transformée de Fourier rapide. De même le pas $\Delta \lambda$ du domaine fréquentiel vaut : $\Delta \lambda = 2\lambda_c/K$. Dans la pratique, il est aisé de définir le pas du domaine temporel, puisqu'on connaît la durée T considérée et qu'on peut fixer K . En revanche, pour le domaine fréquentiel, le pas paraît difficile à évaluer à partir de son expression précédente, puisque la pulsation de coupure n'est pas connue a priori. En effet, il n'est pas aisé d'évaluer la pulsation de coupure à l'aide du critère défini par Shinozuka et Deodatis [SD91] (Eq. C.2). Toutefois, on évalue le pas $\Delta \lambda$ et la pulsation

de coupure λ_c avec le théorème de Shannon [Pre94] qui établit une relation entre les pas temporel et fréquentiel, à savoir :

$$\Delta t \Delta \lambda = \frac{2\pi}{K}$$

De là, on déduit que :

$$\lambda_c = \frac{\pi}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta \lambda = \frac{2\pi}{K \Delta t}$$

Les points d'échantillonnage pour les variables t et λ sont donc :

$$t_k = k\Delta t \quad \text{et} \quad \lambda_k = -\lambda_c + (k + 1/2) \Delta \lambda \quad \text{pour} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, K - 1\} \quad (\text{C.3})$$

C.3.2 Formule de simulation numérique

Pour simuler des trajectoires du processus $X(t)$, on génère une séquence de coefficients de Fourier C_k dont les amplitudes et les phases sont choisies de telle sorte que la transformée de Fourier inverse de la séquence des C_k produise la séquence temporelle $X(t_k)$ souhaitée. Or, on ne dispose que de la DSP du processus pour générer les coefficients C_k , ce qui semble inapproprié puisque la DSP ne contient aucune information sur la phase du signal de départ. Toutefois pour certains types de processus, on peut émettre certaines hypothèses sur le signal de départ pour générer un signal statistiquement équivalent à ce dernier. En particulier, si la trajectoire est issue d'un processus *Gaussien, stationnaire* et *ergodique*, il est prouvé que sa phase est aléatoire et comprise strictement dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Nous choisissons alors les phases ϕ_k des coefficients C_k , indépendantes et uniformément réparties sur $[0, 2\pi[$.

L'amplitude des coefficients de Fourier doit également rendre compte de la répartition fréquentielle de la puissance du signal, or pour un processus ergodique, nous avons l'égalité :

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} W_X(\lambda) d\lambda$$

Nous pouvons discrétiser cette relation avec l'incrément temporel Δt et l'incrément fréquentiel $\Delta \lambda$, ce qui donne :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} x^2(t_k) = \sum_{k=0}^{K-1} W_X(\lambda_k) \Delta \lambda \quad (\text{C.4})$$

En appliquant le théorème de Parseval qui stipule que le carré des coefficients de Fourier est égal à la décomposition fréquentielle de la variance du signal $x(t_k)$, on obtient la relation suivante :

$$v_X = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} x^2(t_k) = \sum_{k=0}^{K-1} |C_k|^2 \quad (\text{C.5})$$

En combinant les relations (C.4) et (C.5) nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{K-1} |C_k|^2 = \sum_{k=0}^{K-1} W_X(\lambda_k) \Delta \lambda$$

Par conséquent, les amplitudes des coefficients de Fourier sont choisies en appliquant la relation suivante :

$$|C_k| = \sqrt{W_X(\lambda_k)\Delta\lambda}, \quad \text{pour } k \in \{0, 1, 2, \dots, K-1\}$$

Les coefficients de Fourier sont alors donnés par :

$$C_k = \sqrt{W_X(\lambda_k)\Delta\lambda} e^{j\phi_k}, \quad \text{pour } k \in \{0, 1, 2, \dots, K-1\}$$

où les ϕ_k sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. Le caractère indépendant des phases garantit la distribution Gaussienne par le théorème central limite. La réalisation temporelle du processus Gaussien stationnaire et ergodique $X(t)$ est alors obtenue par application de la transformée de Fourier inverse à la séquence des coefficients de Fourier C_k . Dans ce cas particulier, on utilise une procédure de Transformée de Fourier Rapide, c'est ce qui justifie que le nombre de points d'échantillonnage K soit pris égal à une puissance entière de 2.

C.4 Transformation linéaire de processus aléatoire

Considérons un système avec en entrée un signal déterministe $X(t)$ et en sortie un signal déterministe $Y(t)$. Supposons, en outre, que ce système est linéaire et indépendant du temps. La propriété de linéarité implique qu'à un instant t quelconque la réponse $Y(t)$ du système est une combinaison linéaire des valeurs passées, présentes et futures de l'entrée $X(t)$. Ainsi, on peut écrire :

$$Y(t) = z(t) \otimes X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(u) X(t-u) du \quad (\text{C.6})$$

où \otimes est l'opérateur produit de convolution, et $z(u)$ est une fonction déterministe dépendant de caractéristiques propres à la structure étudiée, mais indépendante de la forme du signal d'entrée. La propriété d'invariance par rapport au temps signifie que $z(u)$ ne dépend pas de manière intrinsèque du temps de telle sorte que l'équation (C.6) soit vérifiée pour tout instant t . On admet ici que $z(u)$ est absolument intégrable c'est à dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z(u)| du < \infty \quad (\text{C.7})$$

Notons que, pour un système physique, le signal de sortie ne peut pas dépendre des valeurs futures du signal d'entrée. Dès lors on doit avoir :

$$z(u) = 0, \quad \text{si } u < 0 \quad (\text{C.8})$$

Ainsi, l'équation (C.6) devient pour les systèmes physique :

$$Y(t) = z(t) \otimes X(t) = \int_0^{\infty} z(u) X(t-u) du \quad (\text{C.9})$$

Considérons à présent que l'entrée du système est aléatoire, représentée par un processus aléatoire stationnaire de fonction d'autocovariance $R_X(\tau)$. On démontre aisément la relation suivante :

$$\text{cov}[Y(t), Y(t+\tau)] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} z(u) z(v) \text{cov}[X(t-u), X(t-v+\tau)] du dv \quad (\text{C.10})$$

Puisque $X(t, \omega)$ est un processus stationnaire on a :

$$R_X(\tau + u - v) = \text{cov} [X(t - u), X(t - v + \tau)] \quad (\text{C.11})$$

On en déduit que $\text{cov}[Y(t), Y(t + \tau)]$ ne dépend pas de t . Dès lors, $Y(t, \omega)$ est aussi stationnaire et on peut écrire :

$$R_Y(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty z(u) z(v) R_X(\tau + u - v) du dv \quad (\text{C.12})$$

Considérons, à présent, $W_Y(\lambda)$, la densité spectrale de puissance du signal aléatoire $Y(t, \omega)$. Par définition, $W_Y(\lambda)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance $R_Y(\tau)$ de Y s'il est de moyenne nulle (hypothèse faite ici) :

$$W_Y(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty R_Y(\tau) e^{-j\lambda\tau} d\tau \quad (\text{C.13})$$

En reportant l'expression (C.12) dans la formule (C.13) on obtient :

$$W_Y(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty z(u) z(v) R_X(\tau + u - v) e^{-j\lambda\tau} du dv d\tau \quad (\text{C.14})$$

Si on effectue le changement de variable suivant dans l'intégrale dépendant de τ (à u et v fixés) :

$$w = \tau + u - v \Rightarrow dw = d\tau \quad (\text{C.15})$$

La dernière équation (C.14) devient :

$$W_Y(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\infty z(u) e^{j\lambda u} du \right] \left[\int_0^\infty z(v) e^{-j\lambda v} dv \right] \left[\int_0^\infty R_X(w) e^{-j\lambda w} dw \right] \quad (\text{C.16})$$

Ayant noté que les deux premières intégrales sont conjuguées et ayant reconnu dans la troisième la densité spectrale de puissance du signal aléatoire $X(t, \omega)$, on obtient finalement :

$$W_Y(\lambda) = |FT(\lambda)|^2 W_X(\lambda) \quad (\text{C.17})$$

où

$$FT(\lambda) = \int_0^\infty z(u) e^{-j\lambda u} du \quad (\text{C.18})$$

est appelée fonction de transfert du système.

Annexe D

Loi de comportement

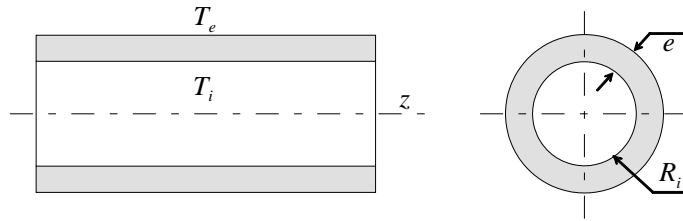


FIG. D.1 – *Elément de tuyauterie.*

On suppose connu le champ de température dans l'épaisseur du tuyau (Figure D.1). On applique les conditions de déformation plane sous l'hypothèse d'une tuyauterie mince. Notons $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$, le vecteur déplacement, on a alors :

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \epsilon_{zz} = cst \text{ et } \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0 \quad (\text{D.1})$$

Le tenseur de déformation est alors diagonal dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

De même, le tenseur de contrainte est diagonal dans le système de coordonnées cylindriques :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & S_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

On suppose que le matériau a une loi de comportement thermoélastique :

$$S_{ij} = \lambda \text{ tr} (\epsilon_{ij}) \mathbb{I} + 2 \mu \epsilon_{ij} - (3 \lambda + 2 \mu) \alpha \Delta T \mathbb{I} \quad (\text{D.4})$$

où λ et μ , sont les coefficients de Lamé et s'écrivent en fonction du module d'Young E et de coefficient de Poisson ν :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

ΔT est la variation de température par rapport à une température de référence et \mathbb{I} représente la matrice identité. L'équation (D.4) s'écrit dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} S_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \epsilon_{zz} \right) + 2 \mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - (3 \lambda + 2 \mu) \alpha \Delta T \\ S_{\theta\theta} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \epsilon_{zz} \right) + 2 \mu \frac{u_r}{r} - (3 \lambda + 2 \mu) \alpha \Delta T \\ S_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \epsilon_{zz} \right) + 2 \mu \epsilon_{zz} - (3 \lambda + 2 \mu) \alpha \Delta T \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

L'équation d'équilibre des contraintes à résoudre est donnée par :

$$\text{div}(S_{ij}) = 0 \quad (\text{D.7})$$

Cette équation devient en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{D.8})$$

A cette équation il faut ajouter les trois conditions aux limites suivantes :

$$S_{rr}(r = R_i) = 0 \iff \text{pression interne nulle} \quad (\text{D.9})$$

$$S_{rr}(r = R_e) = 0 \iff \text{bord extérieur libre} \quad (\text{D.10})$$

$$\int_{R_i}^{R_e} r S_{zz} dr = 0 \iff \text{pas de force imposée aux extrémités (extrémités libres)} \quad (\text{D.11})$$

En reportant, les équations (D.6) dans l'équation d'équilibre (D.8) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \epsilon_{zz} \right) + 2 \mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - (3 \lambda + 2 \mu) \alpha \Delta T \right] \\ + \frac{1}{r} \left[2 \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.12a})$$

En développant cette dernière équation, elle devient :

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{3 \lambda + 2 \mu}{\lambda + 2 \mu} \alpha \Delta T \quad (\text{D.13})$$

Ayant noté que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right] \\ \frac{3 \lambda + 2 \mu}{\lambda + 2 \mu} &= \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

L'équation d'équilibre des contraintes s'écrit finalement :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right] = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \Delta T \quad (\text{D.15})$$

Cette équation s'intègre aisément, ce qui nous donne l'expression de u_r :

$$u_r = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{1}{r} \int_{R_i}^r x (\Delta T + A_1) dx + \frac{A_2}{r} \quad (\text{D.16})$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration. Puisque, les conditions aux limites s'expriment en fonction des contraintes, celles-ci sont d'abord évaluées en reportant l'expression (D.16) dans (D.6) :

$$\begin{cases} S_{rr} = -\frac{E \alpha}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r x (\Delta T + A_1) dx + \frac{E \alpha A_1}{1-2\nu} \\ \quad - \frac{1}{r^2} \frac{E A_2}{1+\nu} + \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{zz} \\ S_{\theta\theta} = \frac{E \alpha}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r x (\Delta T + A_1) dx - \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} \\ \quad + \frac{\nu E \alpha A_1}{(1-\nu)(1-2\nu)} + \frac{1}{r^2} \frac{E A_2}{1+\nu} + \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{zz} \\ S_{zz} = \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} + \frac{\nu E \alpha A_1}{(1-\nu)(1-2\nu)} + \frac{E (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{zz} \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

Les constantes du système, à savoir A_1 , A_2 et ϵ_{zz} sont évaluées à l'aide des conditions aux limites. La première condition (D.9) (pression interne nulle) s'écrit :

$$\begin{aligned} S_{rr}(r = R_i) &= 0 \\ &= \frac{E \alpha A_1}{1-2\nu} - \frac{1}{R_i^2} \frac{E A_2}{1+\nu} + \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{zz} \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Pour la deuxième (D.10) (bord extérieur libre), on obtient :

$$\begin{aligned} S_{rr}(r = R_e) &= 0 \\ &= -\frac{E \alpha}{1-\nu} \frac{1}{R_e^2} \int_{R_i}^{R_e} x (\Delta T + A_1) dx + \frac{E \alpha A_1}{1-2\nu} - \frac{1}{R_e^2} \frac{E A_2}{1+\nu} \\ &\quad + \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{zz} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Enfin, la troisième condition (D.11) (extrémités libres) on a :

$$\begin{aligned} \int_{R_i}^{R_e} r \sigma_{zz} dr &= 0 \\ &= -\frac{E \alpha}{1-\nu} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \\ &\quad + \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} \left[\frac{\nu E \alpha A_1}{(1-\nu)(1-2\nu)} + \frac{E (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{zz} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Après développement des équations (D.18), (D.19) et (D.20) on obtient le système d'équation suivant :

$$\frac{E \alpha}{1-2\nu} A_1 - \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{R_i^2} A_2 + \frac{E (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{zz} = 0 \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{E \alpha}{1-2\nu} - \frac{E \alpha}{1-\nu} \frac{R_e^2 - R_i^2}{2 R_e^2} \right] A_1 - \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{R_e^2} A_2 \\ &+ \frac{E (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{zz} = \frac{E \alpha}{1-\nu} \frac{1}{R_e^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu E \alpha}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} A_1 \\ & + \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{zz} = \frac{E \alpha}{1-\nu} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \end{aligned} \quad (D.23)$$

En retranchant l'équation (D.21) à (D.22) on élimine l'inconnue ϵ_{zz} , puis en appliquant le facteur $2 R_e^2 / (R_e^2 - R_i^2)$ à l'équation résultante, on obtient :

$$\frac{E \alpha}{1-\nu} A_1 - \frac{2}{R_i^2} \frac{E}{1+\nu} A_2 = -\frac{2 E \alpha}{1-\nu} \frac{1}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \quad (D.24)$$

On applique ensuite aux équations (D.21) et (D.23) l'opération suivante :

$$\frac{R_e^2 - R_i^2}{2} (1-\nu) (D.21) - \nu (D.23) \quad (D.25)$$

et on obtient une autre équation avec uniquement les inconnues A_1 et A_2 :

$$\frac{E \alpha}{1-\nu} A_1 - E \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{R_i^2} A_2 = -\frac{2 \nu E \alpha}{1-\nu} \frac{1}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \quad (D.26)$$

Le système formé des deux équations (D.24) et (D.26) est ensuite résolu. On extrait en premier A_2 après soustraction des deux équations. On obtient ainsi :

$$A_2 = \frac{2 \alpha R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \quad (D.27)$$

En reportant l'expression de A_2 dans l'équation (D.24), on en déduit la constante A_1 qui s'écrit :

$$A_1 = \frac{1-3\nu}{1+\nu} \frac{2}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \quad (D.28)$$

On reporte enfin l'expression de A_1 dans l'équation (D.23) pour obtenir ϵ_{zz} :

$$\epsilon_{zz} = \frac{2 \alpha}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \quad (D.29)$$

On reporte à présent les expressions des constantes A_1 A_2 et ϵ_{zz} dans les formules (D.6) donnant les contraintes. Après des manipulations algébriques on obtient finalement :

$$S_{rr}(r) = \frac{E \alpha}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[- \int_{R_i}^r x \Delta T dx + \frac{r^2 - R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \right] \quad (D.30)$$

$$S_{\theta\theta}(r) = \frac{E \alpha}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[\int_{R_i}^r x \Delta T dx + \frac{r^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx - \Delta T \right] \quad (D.31)$$

$$S_{zz}(r) = \frac{E \alpha}{1-\nu} \left[\frac{2}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx - \Delta T \right] \quad (D.32)$$

Considérons à présent l'approximation plaque sous l'hypothèse d'une tuyauterie mince. Cette approximation se traduit par :

$$\begin{aligned} R_e - R_i &= e \\ R_e &\rightarrow \infty \\ R_i &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

où e est l'épaisseur du tuyau. On en déduit les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \frac{R_i^2}{r^2} &\xrightarrow{R_i \rightarrow \infty} 1 \\ \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r x \Delta T dx &\xrightarrow{R_i \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

En introduisant ces approximations dans les expressions des contraintes on obtient les expressions suivantes :

$$S_{rr}(r) = 0 \text{ et } S_{\theta\theta}(r) = S_{zz}(r) = \frac{E \alpha}{1 - \nu} [T(r, t) - T_{moy}(t)] \quad (\text{D.33})$$

où

$$T_{moy}(t) = \frac{2}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} x \Delta T dx \quad (\text{D.34})$$

