

Modèles et calculs garantis pour les systèmes (min,+)-linéaires

Euriell LE CORRONC

THÈSE DE DOCTORAT

LISA - Université d'Angers

Directeur de thèse : Laurent HARDOUIN

Co-encadrant : Bertrand COTTENCEAU

4 novembre 2011



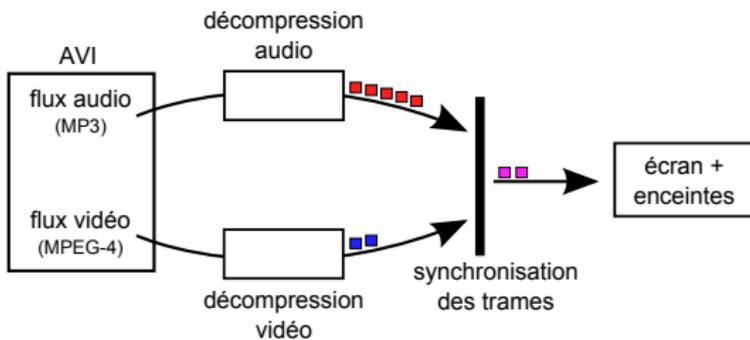
Introduction

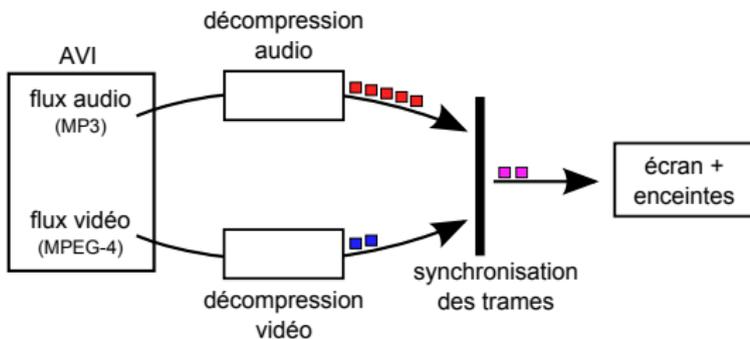
Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

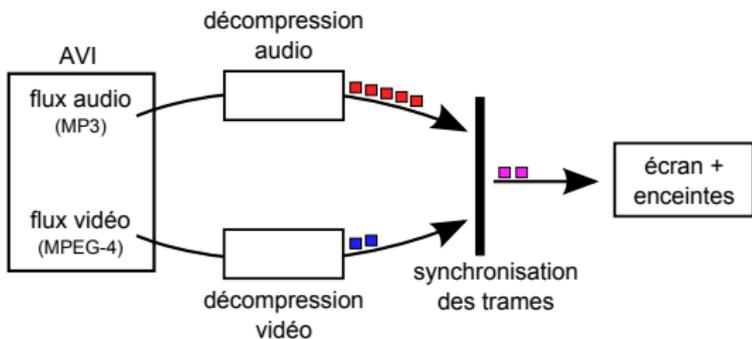
Conclusions et perspectives



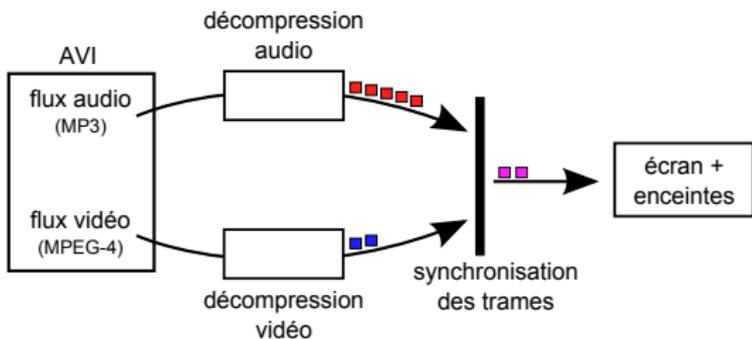


- Discrétisation des données :

Systèmes à Événements Discrets (SED)



- Discrétisation des données :
Systèmes à Événements Discrets (SED)
- Opérateurs min et + :
Phénomènes de synchronisation et de délai



- Discrétisation des données :

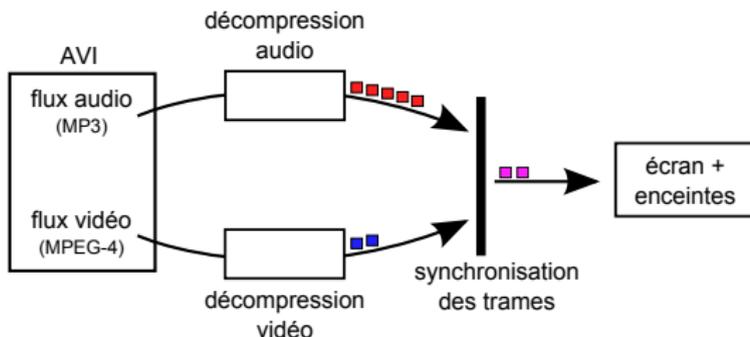
Systèmes à Événements Discrets (SED)

- Opérateurs min et + :

Phénomènes de synchronisation et de délai

- Modélisation linéaire :

Théorie des diodes et algèbre (min,+)



- Discrétisation des données :

Systèmes à Événements Discrets (SED)

- Opérateurs min et + :

Phénomènes de synchronisation et de délai

- Modélisation linéaire :

Théorie des diodes et algèbre (min,+)

Théorie des systèmes (min,+)-linéaires¹

1. [Baccelli et al, 1992] Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems. Wiley and sons

Domaines d'application

- Systèmes de production ²
- Réseaux de communication : Network Calculus ^{3,4}
- Réseaux de transport ⁵

-
2. [Cohen *et al*, 1993] Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems. IFC'93
 3. [Chang, 2000] Performance guarantees in communication networks. Springer
 4. [Le Boudec et Thiran, 2001] Network calculus : a theory of deterministic queuing systems for the internet. Springer
 5. [Heidergott *et al*, 2006] Max plus at work, modeling and analysis... Princeton University Press

Objectifs de la thèse

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Objectifs de la thèse

1ÈRE PARTIE :
Réalisation d'un outil de calculs efficace
pour les systèmes (min,+)-linéaires

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Objectifs de la thèse

1ÈRE PARTIE :
Réalisation d'un outil de calculs efficace
pour les systèmes (min,+)-linéaires

2NDE PARTIE :
Proposition de lois de commande
pour des systèmes (min,+)-linéaires incertains

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

- 1 Introduction
- 2 Algèbre (min,+) et modélisation
- 3 Conteneur de systèmes (min,+)-linéaires
- 4 Commande de systèmes (min,+)-linéaires incertains
- 5 Conclusions et perspectives

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

- 1 Introduction
- 2 Algèbre (min,+) et modélisation
 - Algèbre (min,+)
 - Modélisation de systèmes
 - Conclusion
- 3 Conteneur de systèmes (min,+)-linéaires
- 4 Commande de systèmes (min,+)-linéaires incertains
- 5 Conclusions et perspectives

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Algèbre (min,+)
Modélisation de systèmes
Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Dioïde (semi-anneau idempotent)

Ensemble \mathcal{D} muni de deux lois

- \oplus : associatif, commutatif, idempotent ($a \oplus a = a$)
élément neutre ε
- \otimes : associatif, distribue sur la somme
élément neutre e

Relation d'ordre canonique

$$a = a \oplus b \quad \Leftrightarrow \quad a \succcurlyeq b$$

Dioïde complet $\overline{\mathbb{R}}_{min}$: algèbre (min,+)

$$\overline{\mathbb{R}}_{min} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes)$$

avec $\oplus = \min$, $\otimes = +$

Relation d'ordre canonique dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

$$3 = 3 \oplus 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \succcurlyeq 5$$

alors que $3 \leq 5$ selon l'ordre usuel

Modélisation d'un système S

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives



Modélisation d'un système S

- Flux d'entrée u et de sortie y (= événements cumulés)

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

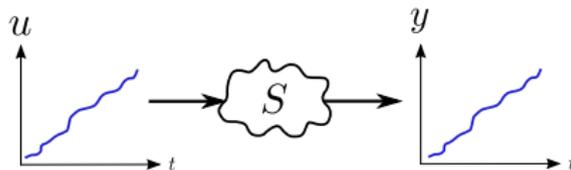
Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

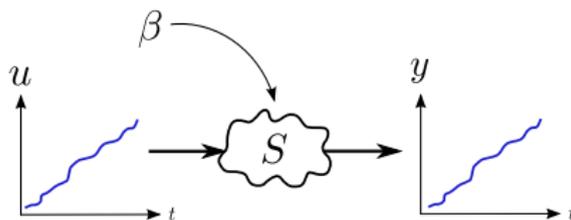
Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives



Modélisation d'un système S

- Flux d'entrée u et de sortie y (= événements cumulés)
- Modélisation β du service fourni (= courbe de service, fonction de transfert)



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

Modélisation de systèmes

Conclusion

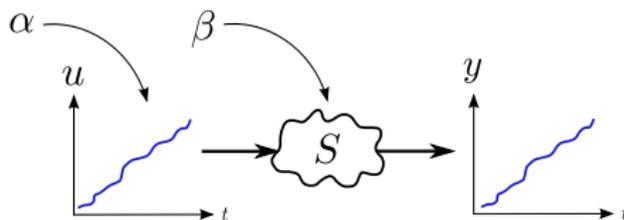
Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Modélisation d'un système S

- Flux d'entrée u et de sortie y (= événements cumulés)
- Modélisation β du service fourni (= courbe de service, fonction de transfert)
- Hypothèse α sur l'entrée u (= courbe d'arrivée)



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)
Modélisation de systèmes
Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Ensembles de définition de u , y , α et β

Fonctions

- Croissantes
- Définies de \mathbb{R} dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

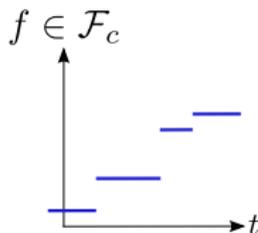
6. [Chang, 2000] Performance guarantees in communication networks. Springer

7. [Gaubert, 1992] Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. PhD Thesis

Ensembles de définition de u , y , α et β

Fonctions

- Croissantes
- Définies de \mathbb{R} dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$
- Positives⁶ : \mathcal{F}
- Constantes par morceaux⁷ : $\mathcal{F}_c \subset \mathcal{F}$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

6. [Chang, 2000] Performance guarantees in communication networks. Springer

7. [Gaubert, 1992] Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. PhD Thesis

Relation de transfert du système

Modèles et calculs garantis
pour les systèmes
(min,+)-linéaires

E. Le Corronc
Thèse de Doctorat

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Algèbre (min,+)

Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Relation de transfert du système

- Cas déterministe

$$y = \beta * u$$

β = réponse impulsionnelle de S

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

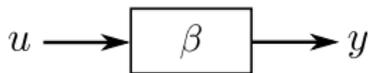
Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives



Relation de transfert du système

- Cas déterministe

$$y = \beta * u$$

β = réponse impulsionnelle de S

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

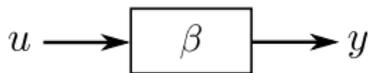
Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives



Opérateur $*$: Produit d'inf-convolution

$$(f * g)(t) \triangleq \bigoplus_{\tau \geq 0} \{f(\tau) \otimes g(t - \tau)\} = \min_{\tau \geq 0} \{f(\tau) + g(t - \tau)\}$$

Relation de transfert du système

- Cas déterministe

$$y = \beta * u$$

β = réponse impulsionnelle de S

- Cas variable

$$\underline{\beta} * u \preceq y \preceq \bar{\beta} * u$$

$\underline{\beta}$ = service maximum, $\bar{\beta}$ = service minimum

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

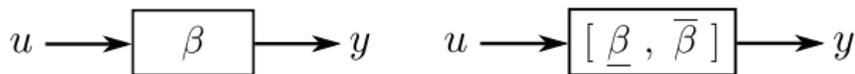
Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives



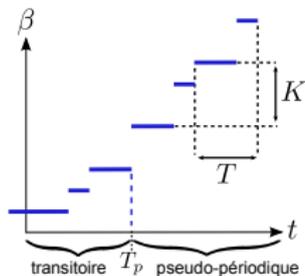
Opérateur $*$: Produit d'inf-convolution

$$(f * g)(t) \triangleq \bigoplus_{\tau \geq 0} \{f(\tau) \otimes g(t - \tau)\} = \min_{\tau \geq 0} \{f(\tau) + g(t - \tau)\}$$

Caractéristique de β - Cas déterministe⁸

- Ultimentement pseudo-périodique

$\exists T_p, K \in \overline{\mathbb{R}}_{min}, T \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \geq T_p, \beta(t+T) = K \otimes \beta(t)$



8. [Baccelli et al, 1992, Th 5.39] Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems. Wiley and sons

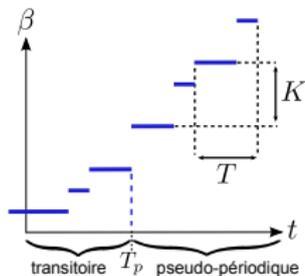
Caractéristique de β - Cas déterministe⁸

- Ultimentement pseudo-périodique

$\exists T_p, K \in \overline{\mathbb{R}}_{min}, T \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \geq T_p, \beta(t+T) = K \otimes \beta(t)$

- Pente asymptotique

$$\sigma(\beta) = K/T$$



8. [Baccelli et al, 1992, Th 5.39] Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems. Wiley and sons

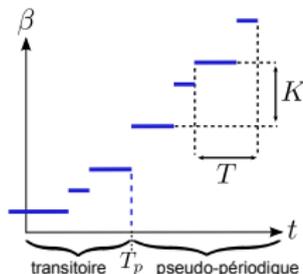
Caractéristique de β - Cas déterministe⁸

- Ultimentement pseudo-périodique

$\exists T_p, K \in \overline{\mathbb{R}}_{min}, T \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \geq T_p, \beta(t+T) = K \otimes \beta(t)$

- Pente asymptotique

$$\sigma(\beta) = K/T$$



Ensemble de définition

Fonctions croissantes, constantes par morceaux et ultimentement pseudo-périodiques

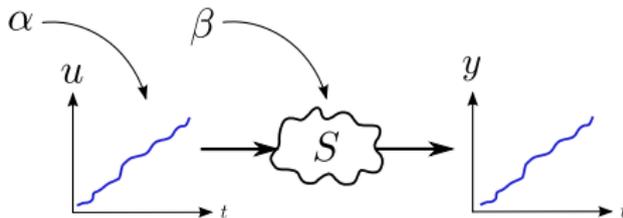
$$\mathcal{F}_{cp} \subset \mathcal{F}_c$$

8. [Baccelli et al, 1992, Th 5.39] Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems. Wiley and sons

Courbe d'arrivée α - Network Calculus

Hypothèse sur le flux d'entrée⁹

$$u \succcurlyeq \alpha * u \quad \Leftrightarrow \quad u = \alpha^* * u$$



Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Algèbre (min,+)

Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

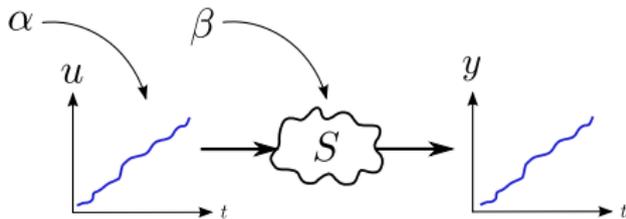
Conclusions et perspectives

9. [Chang *et al.*, 2002, Lem 3.2] A min,+ system theory for constrained traffic regulation and dynamic service guarantees. IEEE TON

Courbe d'arrivée α - Network Calculus

Hypothèse sur le flux d'entrée⁹

$$u \succcurlyeq \alpha * u \quad \Leftrightarrow \quad u = \alpha^* * u$$



Opérateur $*$: Étoile de Kleene - Clôture sous-additive

$$f^* \triangleq \bigoplus_{i=0}^{+\infty} f^i \quad \text{avec} \quad f^{i+1} = f * f^i \quad \text{et} \quad f^0 = e$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)
Modélisation de systèmes
Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

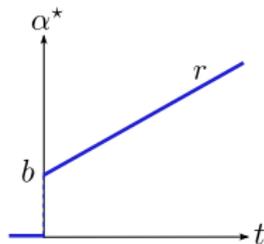
Conclusions et perspectives

9. [Chang et al, 2002, Lem 3.2] A min,+ system theory for constrained traffic regulation and dynamic service guarantees. IEEE TON

Courbe d'arrivée α - Network Calculus

Hypothèse sur le flux d'entrée⁹

$$u \succcurlyeq \alpha * u \quad \Leftrightarrow \quad u = \alpha^* * u$$



- Rafales de données limitées b
- Débit maximal imposé r

Opérateur $*$: Étoile de Kleene - Clôture sous-additive

$$f^* \triangleq \bigoplus_{i=0}^{+\infty} f^i \quad \text{avec} \quad f^{i+1} = f * f^i \quad \text{et} \quad f^0 = e$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

Modélisation de systèmes
Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

9. [Chang et al, 2002, Lem 3.2] A min,+ system theory for constrained traffic regulation and dynamic service guarantees. IEEE TON

Pour conclure

- Dioides de fonctions $(\mathcal{F}, \oplus, *)$, $(\mathcal{F}_c, \oplus, *)$, $(\mathcal{F}_{cp}, \oplus, *)$

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Algèbre (min,+)
Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Pour conclure

- Diïdes de fonctions $(\mathcal{F}, \oplus, *)$, $(\mathcal{F}_c, \oplus, *)$, $(\mathcal{F}_{cp}, \oplus, *)$
- Opérations élémentaires $\circ \in \{ \oplus, *, * \}$

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Algèbre (min,+)
Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

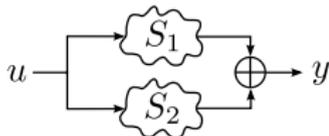
Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Pour conclure

- Dioides de fonctions $(\mathcal{F}, \oplus, *)$, $(\mathcal{F}_c, \oplus, *)$, $(\mathcal{F}_{cp}, \oplus, *)$
- Opérations élémentaires $\circ \in \{ \oplus, *, * \}$

Synchronisation :



$$y = (\beta_1 \oplus \beta_2) * u$$

$$(\underline{\beta}_1 \oplus \underline{\beta}_2) * u \preceq y \preceq (\overline{\beta}_1 \oplus \overline{\beta}_2) * u$$

Mise en série :



$$y = (\beta_1 * \beta_2) * u$$

$$(\underline{\beta}_1 * \underline{\beta}_2) * u \preceq y \preceq (\overline{\beta}_1 * \overline{\beta}_2) * u$$

Bouclage :



$$y = \beta^* * u$$

$$\underline{\beta}^* * u \preceq y \preceq \overline{\beta}^* * u$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Algèbre (min,+)

Modélisation de systèmes

Conclusion

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

- 1 Introduction
- 2 Algèbre $(\min,+)$ et modélisation
- 3 Conteneur de systèmes $(\min,+)$ -linéaires**
 - Problématique
 - Définition du conteneur
 - Opérations sur les conteneurs
 - Conclusion
- 4 Commande de systèmes $(\min,+)$ -linéaires incertains
- 5 Conclusions et perspectives

Introduction

Algèbre $(\min,+)$ et
modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique
Définition du conteneur
Opérations sur les
conteneurs
Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Pourquoi un outil de calculs efficace ?

- Opérations élémentaires \oplus , $*$ et $*$ coûteuses en temps de calcul et en occupation mémoire^{10,11}
- Développements mal maîtrisés des comportements transitoires

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

Opérations sur les
conteneurs

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

10. [Cottenceau *et al*, 2000] Data processing tool for calculation in dioid. WODES'00

11. [Bouillard *et al*, 2009] COINC Library : a toolbox for the network calculus. ValueTools'09

Pourquoi un outil de calculs efficace ?

- Opérations élémentaires \oplus , $*$ et $*$ coûteuses en temps de calcul et en occupation mémoire^{10,11}
- Développements mal maîtrisés des comportements transitoires

Objectif

Approximations des fonctions afin d'obtenir
des algorithmes de calculs plus efficaces

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

Opérations sur les
conteneurs

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

10. [Cottenceau *et al*, 2000] Data processing tool for calculation in dioid. WODES'00

11. [Bouillard *et al*, 2009] COINC Library : a toolbox for the network calculus. ValueTools'09

Solution proposée

Définition d'un **conteneur**

- Contient le résultat de manière garantie (approche ensembliste^{12,13})
- **Convexité** des bornes : calculs de complexité algorithmique linéaire et quasi-linéaire
- Contrôle du pessimisme engendré

12. [Jaulin *et al*, 2001] Applied interval analysis. Springer

13. [Hardouin *et al*, 2009] Interval systems over idempotent semiring. LAA

Transformée de Legendre-Fenchel^{14,15} \mathcal{L}

Application non-injective $\mathcal{L} : (\mathcal{F}, \oplus, *) \mapsto (\mathcal{F}_{acx}, \oplus, +)$

\mathcal{F}_{acx} : ensemble des fonctions convexes

Modèles et calculs garantis
pour les systèmes
(min,+)-linéaires

E. Le Corronc
Thèse de Doctorat

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

Opérations sur les
conteneurs

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

14. [Fidler et Recker, 2006] Conjugate network calculus : a dual approach applying the Legendre transform. Elsevier

15. [Baccelli *et al*, 1992, Th 3.38] Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems. Wiley and sons

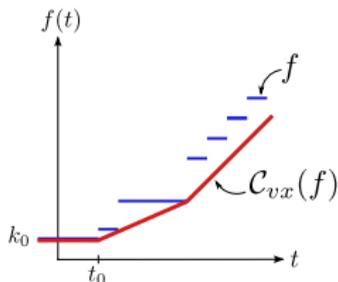
Transformée de Legendre-Fenchel^{14,15} \mathcal{L}

Application non-injective $\mathcal{L} : (\mathcal{F}, \oplus, *) \mapsto (\mathcal{F}_{acx}, \oplus, +)$

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \Leftrightarrow \mathcal{C}_{vx}(f) = \mathcal{C}_{vx}(g)$$

\mathcal{F}_{acx} : ensemble des fonctions convexes

$\mathcal{C}_{vx}(\cdot) \in \mathcal{F}_{acx}$: enveloppe convexe



Modèles et calculs garantis
pour les systèmes
(min,+)-linéaires

E. Le Corronc
Thèse de Doctorat

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

Opérations sur les
conteneurs

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

14. [Fidler et Recker, 2006] Conjugate network calculus : a dual approach applying the Legendre transform. Elsevier

15. [Baccelli et al, 1992, Th 3.38] Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems. Wiley and sons

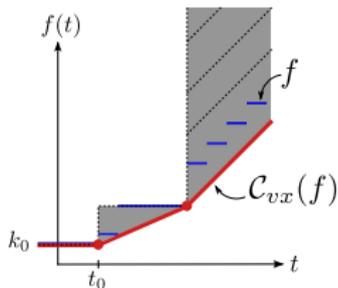
Transformée de Legendre-Fenchel^{14,15} \mathcal{L}

Application non-injective $\mathcal{L} : (\mathcal{F}, \oplus, *) \mapsto (\mathcal{F}_{acx}, \oplus, +)$

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \Leftrightarrow \mathcal{C}_{vx}(f) = \mathcal{C}_{vx}(g)$$

\mathcal{F}_{acx} : ensemble des fonctions convexes

$\mathcal{C}_{vx}(\cdot) \in \mathcal{F}_{acx}$: enveloppe convexe



$$\blacksquare [f]_{\mathcal{L}} = [\mathcal{C}_{vx}(f)]_{\mathcal{L}}$$

Classe d'équivalence modulo $\mathcal{L} : [\cdot]_{\mathcal{L}}$

$$\mathcal{C}_{vx}(f) = \mathcal{C}_{vx}(g) \Leftrightarrow [f]_{\mathcal{L}} = [g]_{\mathcal{L}}$$

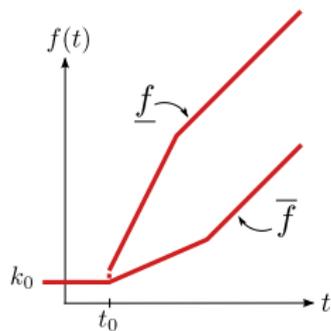
14. [Fidler et Recker, 2006] Conjugate network calculus : a dual approach applying the Legendre transform. Elsevier

15. [Baccelli et al, 1992, Th 3.38] Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems. Wiley and sons

Définition d'un conteneur $\mathbf{f} \in \mathbb{F}$

$$\mathbf{f} = [\underline{f}, \bar{f}]_{\mathcal{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{f} \in \mathcal{F}_{acv} \\ \bar{f} \in \mathcal{F}_{acx} \\ \sigma(\underline{f}) = \sigma(\bar{f}) \end{cases}$$

$\sigma(\underline{f})$ et $\sigma(\bar{f})$: pentes asymptotiques de \underline{f} et \bar{f}



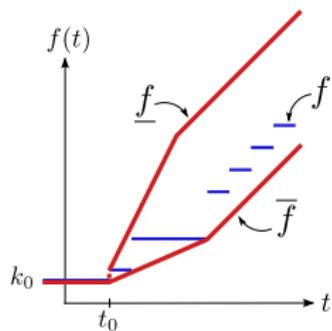
$$\begin{array}{l} \text{---} \underline{f} \in \mathcal{F}_{acv} \\ \text{---} \bar{f} \in \mathcal{F}_{acx} \end{array}$$

Définition d'un conteneur $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$

$$\mathbf{f} = [\underline{f}, \bar{f}]_{\mathcal{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{f} \in \mathcal{F}_{acv} \\ \bar{f} \in \mathcal{F}_{acx} \\ \sigma(\underline{f}) = \sigma(\bar{f}) \end{cases}$$

$\sigma(\underline{f})$ et $\sigma(\bar{f})$: pentes asymptotiques de \underline{f} et \bar{f}

$$f \in \mathbf{f} \Leftrightarrow \underline{f} \preceq f \preceq \bar{f}$$



$$\left[\underline{f}, \bar{f} \right]$$

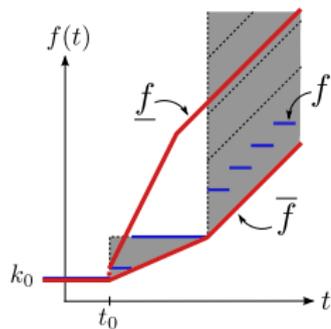
Définition d'un conteneur $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$

$$\mathbf{f} = [\underline{f}, \bar{f}]_{\mathcal{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{f} \in \mathcal{F}_{acv} \\ \bar{f} \in \mathcal{F}_{acx} \\ \sigma(\underline{f}) = \sigma(\bar{f}) \end{cases}$$

$\sigma(\underline{f})$ et $\sigma(\bar{f})$: pentes asymptotiques de \underline{f} et \bar{f}

$$f \in \mathbf{f} \Leftrightarrow \underline{f} \preceq f \preceq \bar{f} \quad \text{et} \quad [f]_{\mathcal{L}} = [\bar{f}]_{\mathcal{L}}$$

donc $\mathcal{C}_{vx}(f) = \mathcal{C}_{vx}(\bar{f}) = \bar{f}$



$[\underline{f}, \bar{f}]$

$[f]_{\mathcal{L}} = [\bar{f}]_{\mathcal{L}}$

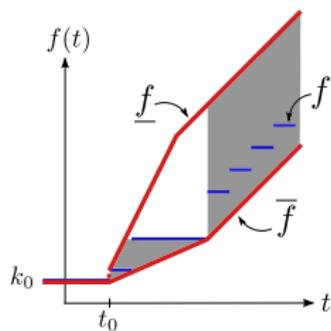
Définition d'un conteneur $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$

$$\mathbf{f} \begin{aligned} &= [\underline{f}, \bar{f}]_{\mathcal{L}} \\ &\triangleq [\underline{f}, \bar{f}] \cap [\bar{f}]_{\mathcal{L}} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{f} \in \mathcal{F}_{acv} \\ \bar{f} \in \mathcal{F}_{acx} \\ \sigma(\underline{f}) = \sigma(\bar{f}) \end{cases}$$

$\sigma(\underline{f})$ et $\sigma(\bar{f})$: pentes asymptotiques de \underline{f} et \bar{f}

$$f \in \mathbf{f} \Leftrightarrow \underline{f} \preceq f \preceq \bar{f} \quad \text{et} \quad [f]_{\mathcal{L}} = [\bar{f}]_{\mathcal{L}}$$

donc $\mathcal{C}_{vx}(f) = \mathcal{C}_{vx}(\bar{f}) = \bar{f}$



$$\blacksquare [\underline{f}, \bar{f}] \cap [\bar{f}]_{\mathcal{L}}$$

Opérations définies sur l'ensemble \mathbb{F} des conteneurs

Opérations

$$\circ \in \{ \oplus, *, \star \}$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

**Opérations sur les
conteneurs**

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Opérations définies sur l'ensemble \mathbf{F} des conteneurs

Opérations

$$[\circ] \in \{ [\oplus], [*], [\star] \}$$

définies telles que

$$\text{pour } \mathbf{f} = [\underline{f}, \bar{f}]_{\mathcal{L}} \in \mathbf{F}, \mathbf{g} = [\underline{g}, \bar{g}]_{\mathcal{L}} \in \mathbf{F}$$

$$\left\{ \mathbf{f}[\circ]\mathbf{g} \in \mathbf{F} \right.$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

**Opérations sur les
conteneurs**

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Opérations définies sur l'ensemble \mathbf{F} des conteneurs

Opérations : **fonctions d'inclusion**

$$[\circ] \in \{ [\oplus], [*], [\star] \}$$

définies telles que

$$\text{pour } \mathbf{f} = [\underline{f}, \bar{f}]_{\mathcal{L}} \in \mathbf{F}, \mathbf{g} = [\underline{g}, \bar{g}]_{\mathcal{L}} \in \mathbf{F} \\ \text{et } \forall f \in \mathbf{f}, \forall g \in \mathbf{g}$$

$$\begin{cases} \mathbf{f}[\circ]\mathbf{g} \in \mathbf{F} \\ f \circ g \in \mathbf{f}[\circ]\mathbf{g} \end{cases}$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

**Opérations sur les
conteneurs**

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Définition des fonctions d'inclusion

$$\mathbf{f}[*]\mathbf{g} \triangleq [\underline{f} * \underline{g} , \bar{f} * \bar{g}]_{\mathcal{L}}$$

$$\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g} \triangleq [\mathcal{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g}) , \mathcal{C}_{vx}(\bar{f} \oplus \bar{g})]_{\mathcal{L}}$$

$$\mathbf{f}[*] \triangleq [\underline{\mathbf{f}}[*] , \mathcal{C}_{vx}(\bar{f}^*)]_{\mathcal{L}}$$

$\mathcal{C}_{cv}(\cdot) \in \mathcal{F}_{acv}$: approximation concave

Afin de respecter les conditions

$$\begin{cases} \mathbf{f}[o]\mathbf{g} \in \mathbf{F} \\ f \circ g \in \mathbf{f}[o]\mathbf{g} \end{cases}$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

**Opérations sur les
conteneurs**

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Définition des fonctions d'inclusion

$$\mathbf{f}[*]\mathbf{g} \triangleq [\underline{f} * \underline{g}, \bar{f} * \bar{g}]_{\mathcal{L}}$$

$$\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g} \triangleq [\mathcal{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g}), \mathcal{C}_{vx}(\bar{f} \oplus \bar{g})]_{\mathcal{L}}$$

$$\mathbf{f}[*] \triangleq [\underline{\mathbf{f}}[*], \mathcal{C}_{vx}(\bar{f}^*)]_{\mathcal{L}}$$

$\mathcal{C}_{cv}(\cdot) \in \mathcal{F}_{acv}$: approximation concave

avec $\underline{\mathbf{f}}[*] \triangleq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{C}_{cv}(\Delta_{t_i}^{k_i^*})$

$$\oplus \mathcal{C}_{cv} \left(e \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * (\mathcal{C}_{cv}(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}^*}) \oplus \Gamma_{\underline{f}}) \right)$$

Afin de respecter les conditions

$$\begin{cases} \mathbf{f}[o]\mathbf{g} \in \mathbf{F} \\ f \circ g \in \mathbf{f}[o]\mathbf{g} \end{cases}$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

**Opérations sur les
conteneurs**

Conclusion

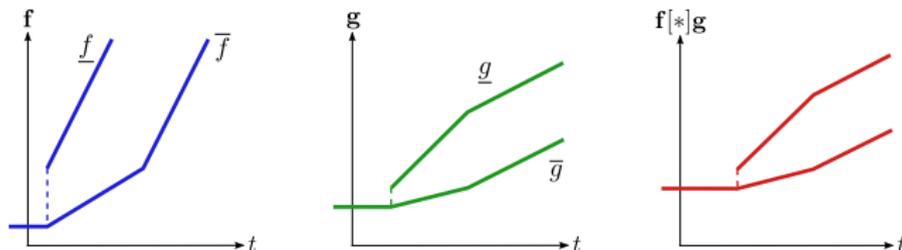
Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Algorithmes et complexités

$$\mathbf{f}[*]\mathbf{g} = [\underline{f} * \underline{g}, \overline{f} * \overline{g}]_{\mathcal{L}}$$

- Opération interne^{16,17} à l'ensemble des conteneurs \mathbf{F}
- Complexité linéaire en la taille des entrées $\mathcal{O}(n)$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

Opérations sur les
conteneurs

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

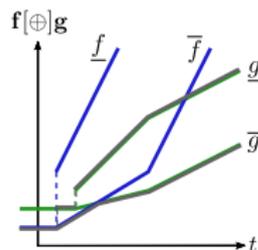
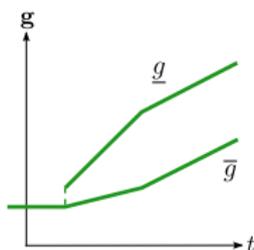
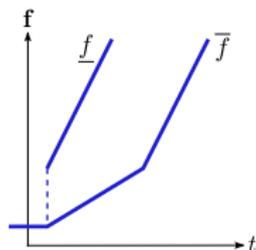
16. [Pandit *et al*, 2006, Th 3.2] A transform for network calculus and its application to multimedia networking. MMCN'06

17. [Le Boudec et Thiran, 2001, Th 3.1.6] Network calculus : a theory of deterministic queuing systems for the internet. Springer

Algorithmes et complexités

$$\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g} = [C_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g}), C_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g})]_{\mathcal{L}}$$

- Minimum des bornes \oplus puis approximations concave C_{cv} et convexe C_{vx}
- Complexité linéaire en la taille des entrées $\mathcal{O}(n)$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

Opérations sur les
conteneurs

Conclusion

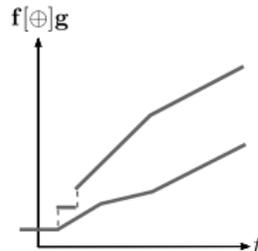
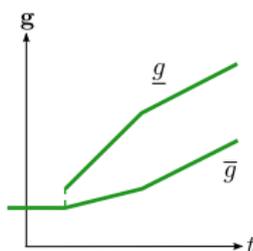
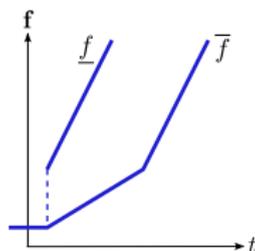
Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Algorithmes et complexités

$$\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g} = [\mathcal{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g}) , \mathcal{C}_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g})]_{\mathcal{L}}$$

- Minimum des bornes \oplus puis approximations concave \mathcal{C}_{cv} et convexe \mathcal{C}_{vx}
- Complexité linéaire en la taille des entrées $\mathcal{O}(n)$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

Opérations sur les
conteneurs

Conclusion

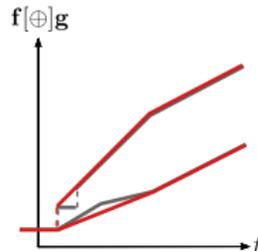
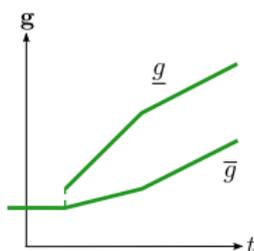
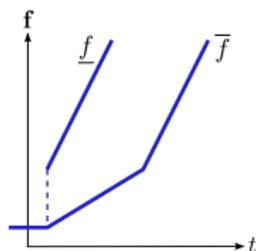
Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Algorithmes et complexités

$$\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g} = [\mathcal{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g}) , \mathcal{C}_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g})]_{\mathcal{L}}$$

- Minimum des bornes \oplus puis approximations concave \mathcal{C}_{cv} et convexe \mathcal{C}_{vx}
- Complexité linéaire en la taille des entrées $\mathcal{O}(n)$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

Opérations sur les
conteneurs

Conclusion

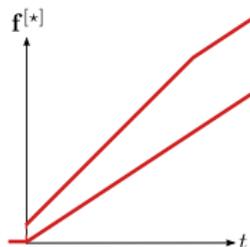
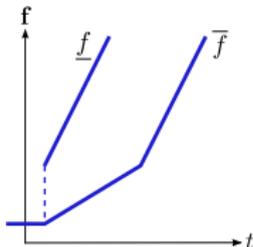
Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Algorithmes et complexités

$$\mathbf{f}^{[*]} = [\underline{\mathbf{f}}^{[*]}, \overline{\mathbf{f}}^{[*]}]_{\mathcal{L}}$$

- Pour la borne supérieure $\overline{\mathbf{f}}^{[*]}$: complexité linéaire en la taille des entrées $\mathcal{O}(n)$
- Pour la borne inférieure $\underline{\mathbf{f}}^{[*]}$: complexité quasi-linéaire en la taille des entrées $\mathcal{O}(n \log n)$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

**Opérations sur les
conteneurs**

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Pour conclure

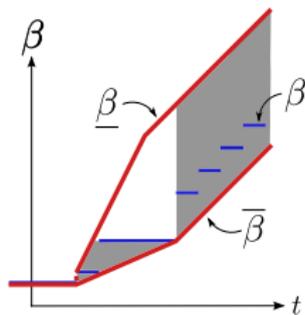
Système déterministe

$$\begin{cases} x = A * x \oplus B * u \\ y = C * x \end{cases} \Rightarrow \beta = C * A^* * B$$

Calcul du conteneur

$$\beta = [C[*]A^{[*]}[*]B]_{\mathcal{L}} \in \mathbf{F}$$

avec $[\bar{\beta}]_{\mathcal{L}} = [\beta]_{\mathcal{L}}$



Réalisation d'une librairie de calculs

ContainerMinMaxGD

- [Le Corronc *et al*, 2011] E. Le Corronc, B. Cottencaeu et L. Hardouin.
Container of (min,-)linear systems. En cours d'évaluation, JDEDS
- [Le Corronc *et al*, 2009c] E. Le Corronc, B. Cottencaeu et L. Hardouin.
Encadrement de systèmes (min,+)-linéaires. MSR'09
- [Le Corronc *et al*, 2009a] E. Le Corronc, B. Cottencaeu et L. Hardouin.
Approximation convexe de systèmes (max,+)-linéaires. JDMACS'09

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Problématique

Définition du conteneur

Opérations sur les
conteneurs

Conclusion

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

- 1 Introduction
- 2 Algèbre $(\min,+)$ et modélisation
- 3 Conteneur de systèmes $(\min,+)$ -linéaires
- 4 **Commande de systèmes $(\min,+)$ -linéaires incertains**
 - Problématique
 - 1 - Précompensateur neutre optimal
 - 2 - Window Flow Control
 - Théorie du 2nd ordre des systèmes $(\min,+)$ -linéaires
 - 3 - Courbe d'arrivée optimale
 - 4 - Réduction de l'incertitude
 - Conclusion
- 5 Conclusions et perspectives

Introduction

Algèbre $(\min,+)$ et
modélisation

Conteneur de systèmes

**Commande de systèmes
incertains**

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes $(\min,+)$ -linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

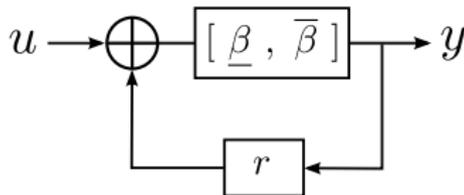
Conclusion

Conclusions et perspectives

A quoi correspond la commande de systèmes ?

Contrôle des flux grâce à des filtres

- En entrée : précompensateur p
- Par retour de sortie r



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
 - 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires
- 3 - Courbe d'arrivée optimale
 - 4 - Réduction de l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

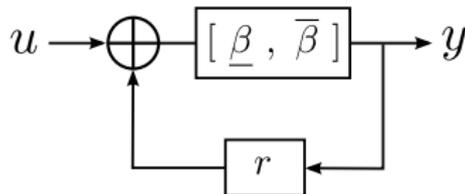
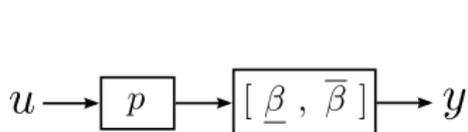
A quoi correspond la commande de systèmes ?

Contrôle des flux grâce à des filtres

- En entrée : précompensateur p
- Par retour de sortie r

Synthèse de ces filtres pour améliorer les performances

- Réduire les buffers / stocks
- Éviter les congestions



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
 - 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires
- 3 - Courbe d'arrivée optimale
 - 4 - Réduction de l'incertitude
- Conclusion

Conclusions et perspectives

A quoi correspond la commande de systèmes ?

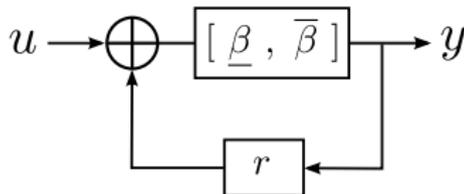
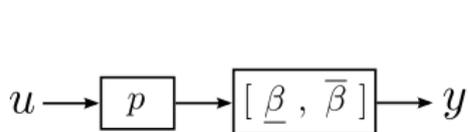
Contrôle des flux grâce à des filtres

- En entrée : précompensateur p
- Par retour de sortie r

Synthèse de ces filtres pour améliorer les performances

- Réduire les buffers / stocks
- Éviter les congestions

Critère du juste-à-temps (quantité juste au temps voulu)



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
 - 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires
- 3 - Courbe d'arrivée optimale
 - 4 - Réduction de l'incertitude
- Conclusion

Conclusions et perspectives

Contexte des systèmes incertains $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$

- Cas déterministe

$$\exists \beta \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \quad \text{tel que} \quad \forall u, y = \beta * u$$

- Cas variable

$$\underline{\beta} * u \preceq y \preceq \overline{\beta} * u$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Contexte des systèmes incertains $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$

- Cas déterministe

$$\exists \beta \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \quad \text{tel que} \quad \forall u, y = \beta * u$$

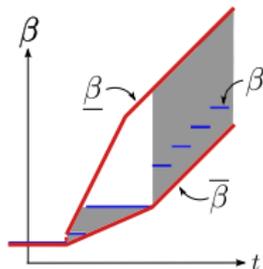
- Cas variable

$$\underline{\beta} * u \preceq y \preceq \overline{\beta} * u$$

Cas déterministe incertain

Lien avec les conteneurs de \mathbf{F}

- Calcul d'une approximation du système exact
- Obtention de bornes inférieure et supérieure



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée optimale

4 - Réduction de l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

1 - PRÉCOMPENSATEUR NEUTRE OPTIMAL

Modèles et calculs garantis
pour les systèmes
(min,+)-linéaires

E. Le Corronc
Thèse de Doctorat

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

**1 - Précompensateur neutre
optimal**

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

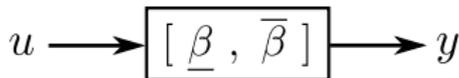
Conclusion

Conclusions et perspectives

Système déterministe incertain

β est déterministe mais uniquement connu dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$

$$\exists \beta \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}] \quad \text{tel que} \quad \forall u, y = \beta * u$$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

**1 - Précompensateur neutre
optimal**

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Système déterministe incertain

β est déterministe mais uniquement connu dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$

$$\exists \beta \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}] \quad \text{tel que} \quad \forall u, y = \beta * u$$



Objectif de commande

- Ajout en entrée d'un précompensateur p

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

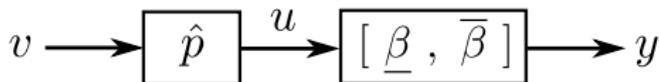
Conclusion

Conclusions et perspectives

Système déterministe incertain

β est déterministe mais uniquement connu dans $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$

$$\exists \beta \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \text{ tel que } \forall u, y = \beta * u$$



Objectif de commande

- Ajout en entrée d'un précompensateur p
- Calcul du précompensateur neutre optimal \hat{p} :
ralentit au plus les entrées
sans altérer le comportement entrée/sortie du système

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

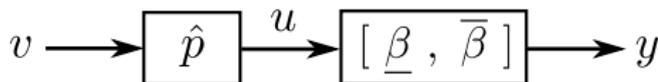
4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Proposition 1

$$\hat{p} = \bigoplus \{p \mid \forall \beta \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}], \beta * p = \beta\}$$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

**1 - Précompensateur neutre
optimal**

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

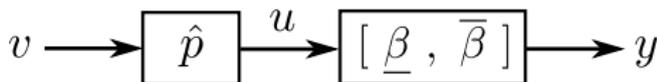
4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Proposition 1

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \bigoplus \{p \mid \forall \beta \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}], \beta * p = \beta\} \\ &= e \oplus \bar{\beta} \setminus \underline{\beta}\end{aligned}$$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

**1 - Précompensateur neutre
optimal**

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

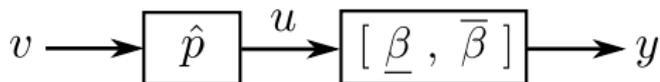
4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Proposition 1

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \bigoplus \{p \mid \forall \beta \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}], \beta * p = \beta\} \\ &= e \oplus \bar{\beta} \backslash \underline{\beta}\end{aligned}$$

Opérateur \backslash : Quotient à gauche - Déconvolution

$$(g \backslash f)(t) \triangleq \bigwedge_{\tau \geq 0} \{g(\tau - t) \backslash f(\tau)\} = \sup_{\tau \geq 0} \{f(\tau) - g(\tau - t)\}$$

Théorie de la résiduation : $g \backslash f = \bigoplus \{x \mid g * x \preceq f\}$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

**1 - Précompensateur neutre
optimal**

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires3 - Courbe d'arrivée
optimale4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

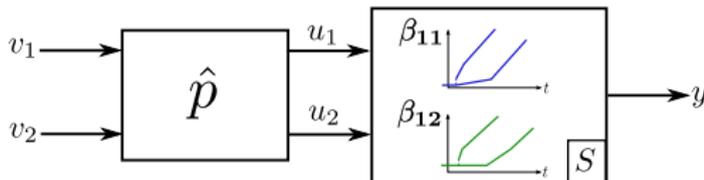
Conclusions et perspectives

Exemple d'application

- Système MIMO déterministe incertain

$$\beta = ([\underline{\beta}_{11}, \bar{\beta}_{11}] \quad [\underline{\beta}_{12}, \bar{\beta}_{12}])$$

- Plus grand précompensateur qui reste neutre pour tout β de l'intervalle $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires3 - Courbe d'arrivée
optimale4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

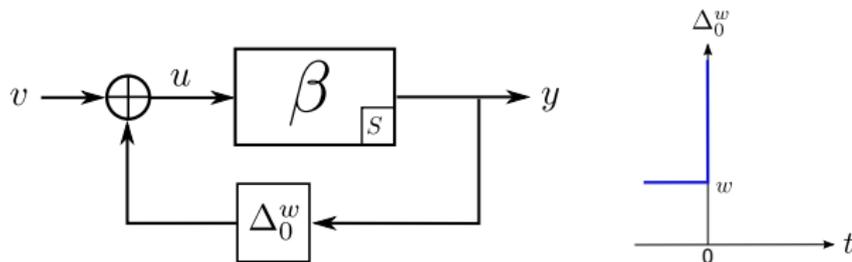
4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Principe du Window Flow Control¹⁸

- Transmission de données entre u et y avec accusé de réception
- Fenêtre de taille $w > 0$ en retour de sortie



Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Principe du Window Flow Control¹⁸

- Transmission de données entre u et y avec accusé de réception
- Fenêtre de taille $w > 0$ en retour de sortie

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

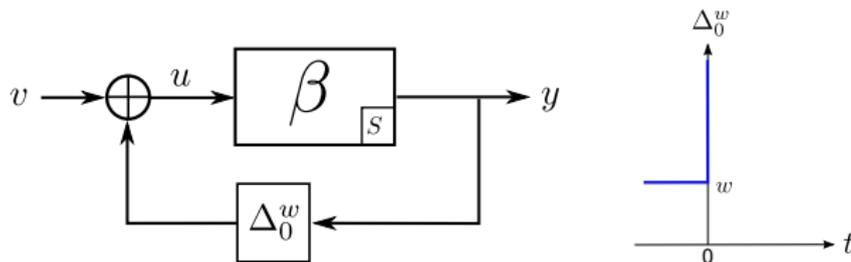
Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives



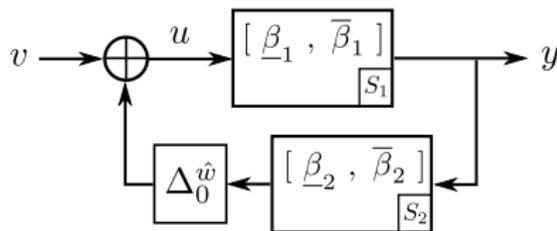
Réalisations du Window Flow Control

- Réseau : protocole TCP
- Système de production : méthode Kanban

18. [Agrawal et al, 1999] Performance bonds for flow control protocols. TON

Objectif de commande

- Transmission des données S_1 et des acquittements S_2



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

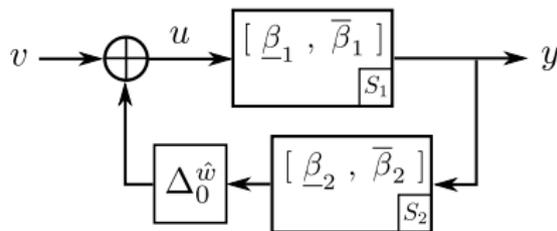
4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Objectif de commande

- Transmission des données S_1 et des acquittements S_2
- Systèmes variables mais bornés $[\underline{\beta}_1, \bar{\beta}_1]$ et $[\underline{\beta}_2, \bar{\beta}_2]$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

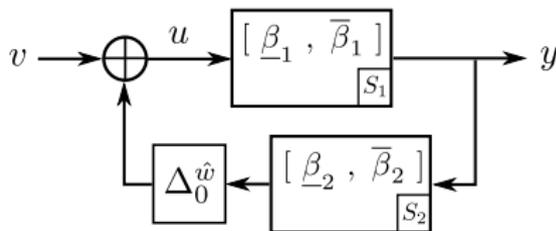
Conclusion

Conclusions et perspectives

Objectif de commande

- Transmission des données S_1 et des acquittements S_2
- Systèmes variables mais bornés $[\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1]$ et $[\underline{\beta}_2, \overline{\beta}_2]$
- Calcul de la taille de fenêtre optimale \hat{w} :

comportement en boucle fermée
= comportement en boucle ouverte



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

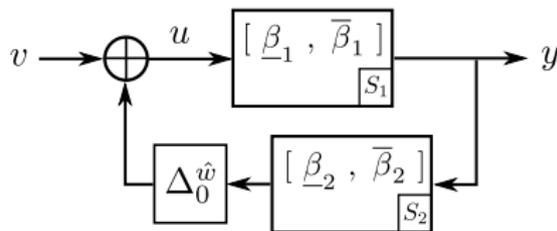
Conclusion

Conclusions et perspectives

Objectif de commande

- Transmission des données S_1 et des acquittements S_2
- Systèmes variables mais bornés $[\underline{\beta}_1, \bar{\beta}_1]$ et $[\underline{\beta}_2, \bar{\beta}_2]$
- Calcul de la taille de fenêtre optimale \hat{w} :

comportement en boucle fermée
= comportement en boucle ouverte



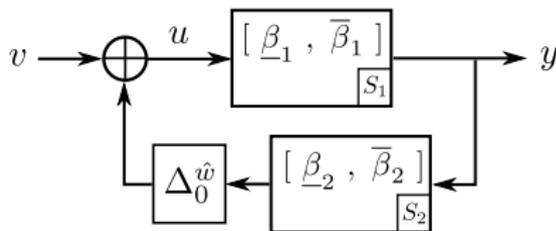
Proposition 2

$$\Delta_0^{\hat{w}} = \bigoplus \left\{ \Delta_0^w \mid \underline{\beta}_1 (\Delta_0^w \underline{\beta}_2 \underline{\beta}_1)^* \preceq \underline{\beta}_1 \text{ et } \bar{\beta}_1 (\Delta_0^w \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_1)^* \preceq \bar{\beta}_1 \right\}$$

Objectif de commande

- Transmission des données S_1 et des acquittements S_2
- Systèmes variables mais bornés $[\underline{\beta}_1, \bar{\beta}_1]$ et $[\underline{\beta}_2, \bar{\beta}_2]$
- Calcul de la taille de fenêtre optimale \hat{w} :

comportement en boucle fermée
= comportement en boucle ouverte



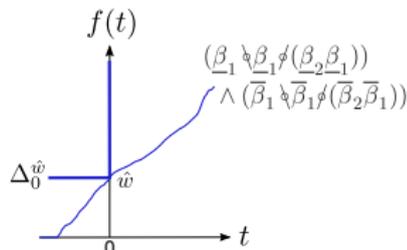
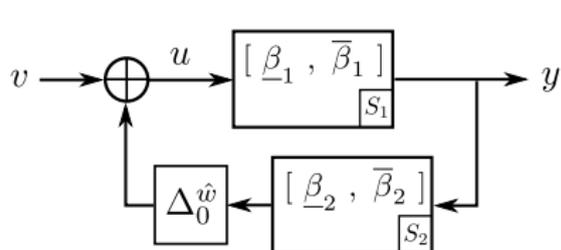
Proposition 2

$$\Delta \hat{w}_0 = \bigoplus \left\{ \Delta_0^w \mid \underline{\beta}_1 (\Delta_0^w \underline{\beta}_2 \underline{\beta}_1)^* \preceq \underline{\beta}_1 \text{ et } \bar{\beta}_1 (\Delta_0^w \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_1)^* \preceq \bar{\beta}_1 \right\}$$

Objectif de commande

- Transmission des données S_1 et des acquittements S_2
- Systèmes variables mais bornés $[\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1]$ et $[\underline{\beta}_2, \overline{\beta}_2]$
- Calcul de la taille de fenêtre optimale \hat{w} :

comportement en boucle fermée
= comportement en boucle ouverte



Proposition 2

$$\Delta_0^{\hat{w}} = \bigoplus \left\{ \Delta_0^w \mid \underline{\beta}_1 (\Delta_0^w \underline{\beta}_2 \underline{\beta}_1)^* \preceq \underline{\beta}_1 \text{ et } \overline{\beta}_1 (\Delta_0^w \overline{\beta}_2 \overline{\beta}_1)^* \preceq \overline{\beta}_1 \right\}$$

$$\hat{w} = \left((\underline{\beta}_1 \setminus \underline{\beta}_1 \setminus (\underline{\beta}_2 \underline{\beta}_1)) \wedge (\overline{\beta}_1 \setminus \overline{\beta}_1 \setminus (\overline{\beta}_2 \overline{\beta}_1)) \right) (0)$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Exemple d'application

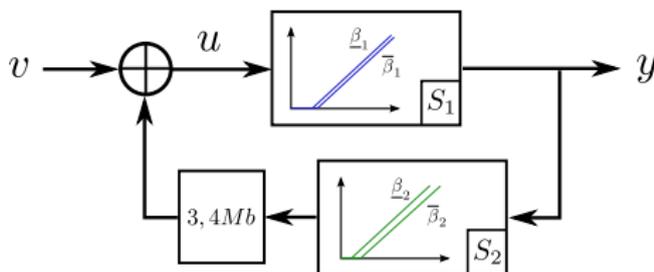
- Intervalles de service

$$[\underline{\beta}_1 = 16ms + 100Mb/s \cdot t , \bar{\beta}_1 = 20ms + 100Mb/s \cdot t]$$

$$[\underline{\beta}_2 = 5ms + 100Mb/s \cdot t , \bar{\beta}_2 = 14ms + 100Mb/s \cdot t]$$

- Fenêtre la plus petite afin de limiter la quantité de données en transit

$$\hat{w} = 3,4Mb$$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires3 - Courbe d'arrivée
optimale4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires¹⁹

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

**Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires**

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

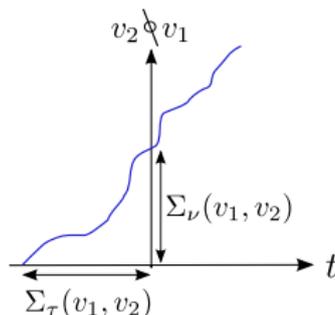
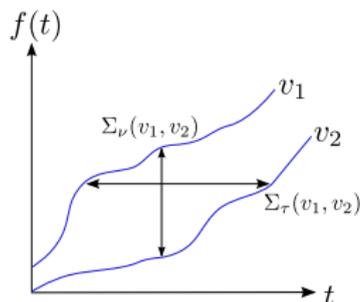
Conclusions et perspectives

19. [MaxPlus, 1991] Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. CDC'91

Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires ¹⁹

Corrélation $v_2 \bowtie v_1$: écarts maximums entre v_1 et v_2

- En temps : $\Sigma_\tau(v_1, v_2) \triangleq \inf_{\tau \geq 0} \{ \tau \mid (v_2 \bowtie v_1)(-\tau) \leq 0 \}$
- En événement : $\Sigma_\nu(v_1, v_2) \triangleq (v_2 \bowtie v_1)(0)$



3 - COURBE D'ARRIVÉE OPTIMALE

Modèles et calculs garantis
pour les systèmes
(min,+)-linéaires

E. Le Corronc
Thèse de Doctorat

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

**3 - Courbe d'arrivée
optimale**

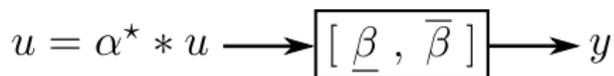
4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Systeme variable incertain

- β est variable mais borné dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$
- Courbe d'arrivée α^*



Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

**3 - Courbe d'arrivée
optimale**

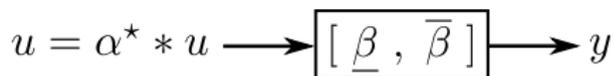
4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Système variable incertain

- β est variable mais borné dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$
- Courbe d'arrivée α^*



Indicateurs de performance du système^{20,21}

- Pire délai de bout-en-bout
- Backlog maximum

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

**3 - Courbe d'arrivée
optimale**

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

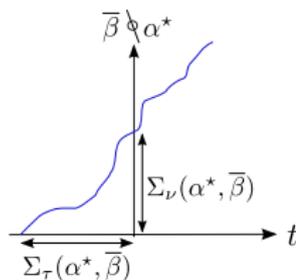
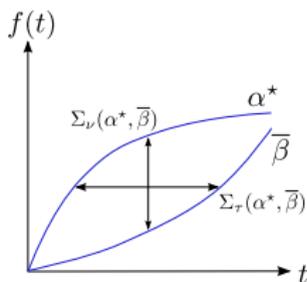
Conclusions et perspectives

20. [MaxPlus, 1991] Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. CDC'91

21. [Chang, 2000, Th 2.3.4] Performance guarantees in communication networks. Springer

Système variable incertain

- β est variable mais borné dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$
- Courbe d'arrivée α^*



Indicateurs de performance du système ^{20,21}

Corrélation $\bar{\beta} \setminus \alpha^*$

- Pire délai de bout-en-bout : $\Sigma_{\tau}(\alpha^*, \bar{\beta})$
- Backlog maximum : $\Sigma_{\nu}(\alpha^*, \bar{\beta})$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
 - 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée optimale

- 4 - Réduction de l'incertitude

Conclusion

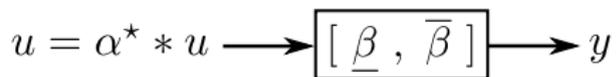
Conclusions et perspectives

20. [MaxPlus, 1991] Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. CDC'91

21. [Chang, 2000, Th 2.3.4] Performance guarantees in communication networks. Springer

Spécification de comportement

- Connaissant le service minimum $\bar{\beta}$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

**3 - Courbe d'arrivée
optimale**

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Spécification de comportement

- Connaissant le service minimum $\bar{\beta}$
- Calcul de la courbe d'arrivée optimale $\hat{\alpha}^*$:

limite au plus les entrées
temps traversée maximum d_{\max} entre u et y



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

**3 - Courbe d'arrivée
optimale**

4 - Réduction de
l'incertitude

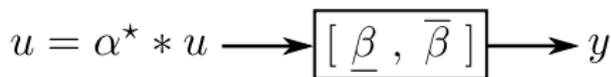
Conclusion

Conclusions et perspectives

Spécification de comportement

- Connaissant le service minimum $\bar{\beta}$
- Calcul de la courbe d'arrivée optimale $\hat{\alpha}^*$:

limite au plus les entrées
temps traversée maximum d_{\max} entre u et y



Proposition 3

$$\hat{\alpha}^* = \bigwedge \{ \alpha^* \mid \bar{\beta} \setminus \alpha^* \succcurlyeq \Delta_{-d_{\max}}^0 \}$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

**3 - Courbe d'arrivée
optimale**

4 - Réduction de
l'incertitude

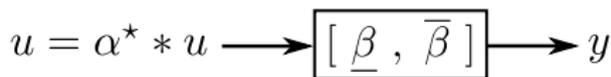
Conclusion

Conclusions et perspectives

Spécification de comportement

- Connaissant le service minimum $\bar{\beta}$
- Calcul de la courbe d'arrivée optimale $\hat{\alpha}^*$:

limite au plus les entrées
temps traversée maximum d_{\max} entre u et y



Proposition 3

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^* &= \bigwedge \{ \alpha^* \mid \bar{\beta} \setminus \alpha^* \succcurlyeq \Delta_{-d_{\max}}^0 \} \\ &= (\Delta_{-d_{\max}}^0 * \bar{\beta})^* \end{aligned}$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

**3 - Courbe d'arrivée
optimale**

4 - Réduction de
l'incertitude

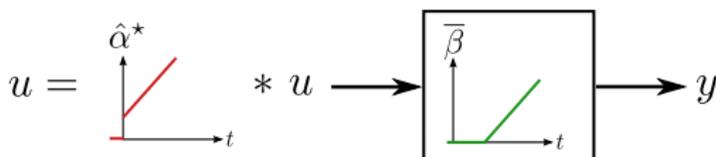
Conclusion

Conclusions et perspectives

Exemple d'application

- Service minimum $\bar{\beta} = 16ms + 100Mb/s \cdot t$
- Courbe d'arrivée la plus petite afin de respecter un temps de traversée maximum des paquets $d_{\max} = 90ms$

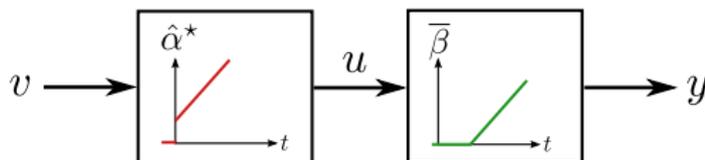
$$\hat{\alpha}^* = 7,4Mb + 100Mb/s \cdot t$$



Exemple d'application

- Service minimum $\bar{\beta} = 16ms + 100Mb/s \cdot t$
- Courbe d'arrivée la plus petite afin de respecter un temps de traversée maximum des paquets $d_{\max} = 90ms$

$$\hat{\alpha}^* = 7,4Mb + 100Mb/s \cdot t$$



Réalisation de cette courbe d'arrivée

Ajout d'un filtre p en entrée²²

$$\underline{\beta}_{-p} = \hat{\alpha}^* \quad \text{et donc} \quad u = \hat{\alpha}^* * v$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

**3 - Courbe d'arrivée
optimale**

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

22. [Fidler, 2010] Survey of deterministic and stochastic service curve models. IEEE CST

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

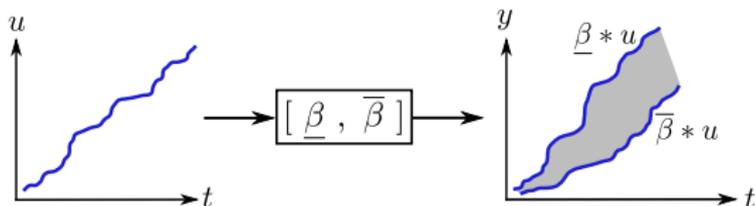
**4 - Réduction de
l'incertitude**

Conclusion

Conclusions et perspectives

Système variable incertain

- β est variable mais borné dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$
- y est également variable et borné dans $[\underline{\beta} * u, \bar{\beta} * u]$



Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

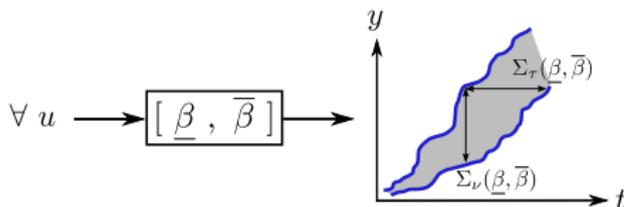
**4 - Réduction de
l'incertitude**

Conclusion

Conclusions et perspectives

Système variable incertain

- β est variable mais borné dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$
- y est également variable et borné dans $[\underline{\beta} * u, \bar{\beta} * u]$

Incertitude maximale en sortie du système²³

Pour toute entrée u , corrélation $\bar{\beta} \setminus \underline{\beta}$

- Incertitude maximale temporelle : $\Sigma_{\tau}(\underline{\beta}, \bar{\beta})$
- Incertitude maximale événementielle : $\Sigma_{\nu}(\underline{\beta}, \bar{\beta})$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
- 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires
- 3 - Courbe d'arrivée optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

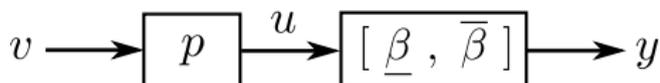
Conclusion

Conclusions et perspectives

23. [MaxPlus, 1991] Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. CDC'91

Objectif de commande

- Ajout en entrée d'un précompensateur p



Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

**4 - Réduction de
l'incertitude**

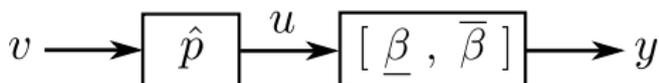
Conclusion

Conclusions et perspectives

Objectif de commande

- Ajout en entrée d'un précompensateur p
- Calcul du filtre optimal \hat{p} :

réduit les écarts en sortie
en temps τ_0 et en événement ν_0



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

**4 - Réduction de
l'incertitude**

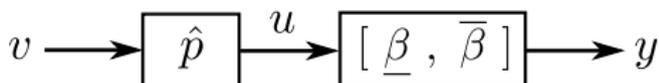
Conclusion

Conclusions et perspectives

Objectif de commande

- Ajout en entrée d'un précompensateur p
- Calcul du filtre optimal \hat{p} :

réduit les écarts en sortie
en temps τ_0 et en événement ν_0



Proposition 4

$$\hat{p} = \bigoplus \{p \mid \Sigma_{\tau}(\underline{\beta}p, \overline{\beta}p) \leq \tau_0 \text{ et } \Sigma_{\nu}(\underline{\beta}p, \overline{\beta}p) \leq \nu_0\}$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
- 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires
- 3 - Courbe d'arrivée optimale

4 - Réduction de l'incertitude

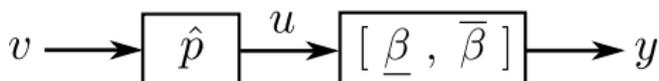
Conclusion

Conclusions et perspectives

Objectif de commande

- Ajout en entrée d'un précompensateur p
- Calcul du filtre optimal \hat{p} :

réduit les écarts en sortie
en temps τ_0 et en événement ν_0



Proposition 4

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \bigoplus \{p \mid \Sigma_{\tau}(\underline{\beta}p, \bar{\beta}p) \leq \tau_0 \text{ et } \Sigma_{\nu}(\underline{\beta}p, \bar{\beta}p) \leq \nu_0\} \\ &= \bigoplus \{p \mid (\bar{\beta}p) \setminus (\underline{\beta}p) \succcurlyeq \Delta_{-\tau_0}^0 \oplus \Delta_0^{\nu_0}, p \text{ causal}, p \preceq val\} \end{aligned}$$

\hat{p} est le plus grand point fixe de

$$f(p) \triangleq p \wedge \bar{\beta} \setminus (\Delta_0^{-\nu_0} \underline{\beta}p) \wedge \bar{\beta} \setminus (\Delta_{\tau_0}^0 \underline{\beta}p) \wedge \text{Pr}_{\text{caus}}(p) \wedge val$$

Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
- 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires
- 3 - Courbe d'arrivée optimale

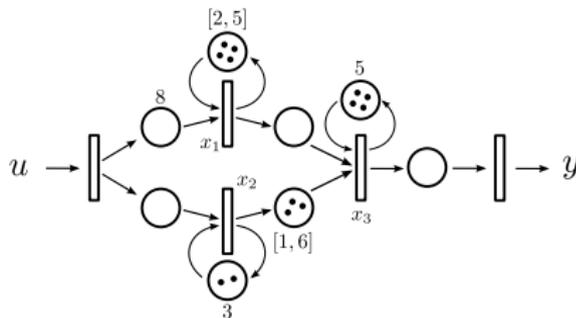
4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Exemple d'application

- Système SISO variable incertain, borné dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$



Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control

Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

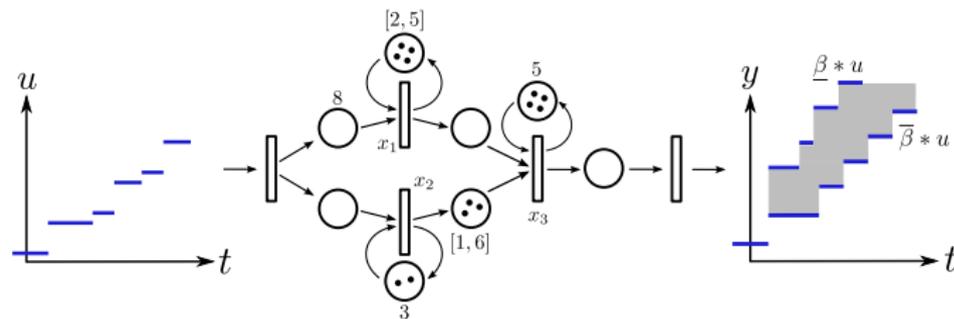
**4 - Réduction de
l'incertitude**

Conclusion

Conclusions et perspectives

Exemple d'application

- Système SISO variable incertain, borné dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
- 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires
- 3 - Courbe d'arrivée optimale

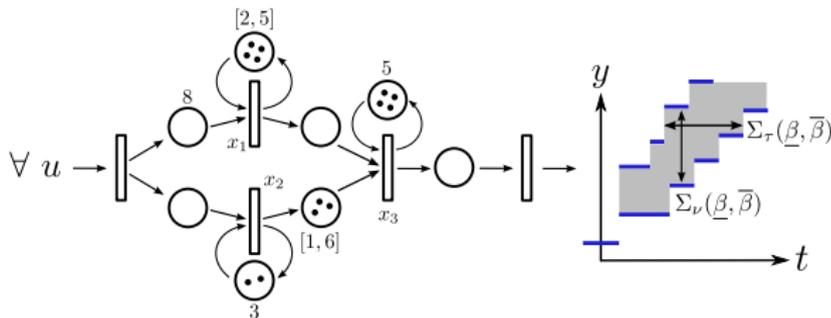
4 - Réduction de l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Exemple d'application

- Système SISO variable incertain, borné dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$



Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
- 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires
- 3 - Courbe d'arrivée optimale

4 - Réduction de l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

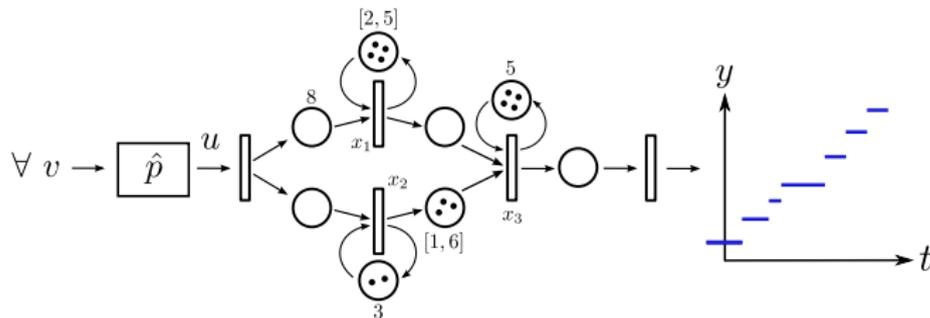
Incertainie maximale en sortie

Système non filtré : $\bar{\beta} \setminus \underline{\beta}$

$$\forall u, \quad \Sigma_\tau(\underline{\beta}, \bar{\beta}) = 4 \quad \text{et} \quad \Sigma_\nu(\underline{\beta}, \bar{\beta}) = 5$$

Exemple d'application

- Système SISO variable incertain, borné dans $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$
- Filtre qui réduit les écarts en sortie du système filtré



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

1 - Précompensateur neutre
optimal

2 - Window Flow Control
Théorie du 2nd ordre des
systèmes (min,+)-linéaires

3 - Courbe d'arrivée
optimale

4 - Réduction de
l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

Incertaine maximale en sortie

Système filtré : $(\bar{\beta}p) \searrow (\underline{\beta}p)$

$$\forall v, \quad \Sigma_{\tau}(\underline{\beta}p, \bar{\beta}p) = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_{\nu}(\underline{\beta}p, \bar{\beta}p) = 0$$

Pour conclure

Lois de commande proposées

- 1 - Précompensateur neutre optimal
- 2 - Problème du Window Flow Control
- 3 - Courbe d'arrivée optimale
- 4 - Réduction de l'incertitude

Systèmes bornés : déterministe ou variable

- [Le Corronc *et al*, 2011b] E. Le Corronc, B. Cottenceau et L. Hardouin. Contrôle de flux : problème du Window Flow Control. GPL'11
- [Le Corronc *et al*, 2010b] E. Le Corronc, B. Cottenceau et L. Hardouin. Flow control with (min,+) algebra. ISOLA'10
- [Le Corronc *et al*, 2010a] E. Le Corronc, B. Cottenceau et L. Hardouin. Control of uncertain (max,+)-linear systems in order to decrease uncertainty. WODES'10
- [Le Corronc *et al*, 2009b] E. Le Corronc, B. Cottenceau et L. Hardouin. Control of uncertain (min,+)-linear systems. POSTA'09

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Problématique

- 1 - Précompensateur neutre optimal
 - 2 - Window Flow Control
- Théorie du 2nd ordre des systèmes (min,+)-linéaires
- 3 - Courbe d'arrivée optimale
 - 4 - Réduction de l'incertitude

Conclusion

Conclusions et perspectives

- 1 Introduction
- 2 Algèbre $(\min,+)$ et modélisation
- 3 Conteneur de systèmes $(\min,+)$ -linéaires
- 4 Commande de systèmes $(\min,+)$ -linéaires incertains
- 5 Conclusions et perspectives

Introduction

Algèbre $(\min,+)$ et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Définition d'un conteneur et de ses opérations (fonctions d'inclusion)
- Bornes concave et convexe : algorithmes de complexité linéaire et quasi-linéaire
- Perte d'information car approximations
- Librairie de calculs : ContainerMinMaxGD

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Définition d'un conteneur et de ses opérations (fonctions d'inclusion)
- Bornes concave et convexe : algorithmes de complexité linéaire et quasi-linéaire
- Perte d'information car approximations
- Librairie de calculs : ContainerMinMaxGD

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Perspectives

- Évaluer le pessimisme engendré lors des calculs
- Définir la fonction d'inclusion de l'opérateur \bowtie telle que

$$\begin{cases} \mathbf{g}[\bowtie]\mathbf{f} \in \mathbf{F} \\ g \bowtie f \in \mathbf{g}[\bowtie]\mathbf{f} \end{cases}$$

Conclusions

- Lois de commande proposées
- Systèmes incertains : déterministe ou variable
- Structures de contrôle : précompensateur et retour de sortie

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Lois de commande proposées
- Systèmes incertains : déterministe ou variable
- Structures de contrôle : précompensateur et retour de sortie

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Perspectives

Compléter le problème de réduction de l'incertitude

- Conditions pour obtenir une réduction
- Extension au cas MIMO

Continuer les adaptations des lois de commande existantes

- Correcteur retour de sortie neutre pour tout β
déterministe compris $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$

Introduction

Algèbre (min,+) et
modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives

Merci pour votre attention...

Modèles et calculs garantis pour les systèmes (min,+)-linéaires

Euriell LE CORRONC

THÈSE DE DOCTORAT

LISA - Université d'Angers

Directeur de thèse : Laurent HARDOUIN

Co-encadrant : Bertrand COTTENCEAU

4 novembre 2011



Introduction

Algèbre (min,+)
et modélisation

Conteneur de systèmes

Commande de systèmes
incertains

Conclusions et perspectives